



HAL
open science

Stratégie de raffinement automatique de maillage et méthodes multi-grilles locales pour le contact : application à l'interaction mécanique Pastille-Gaine

Hao Liu

► **To cite this version:**

Hao Liu. Stratégie de raffinement automatique de maillage et méthodes multi-grilles locales pour le contact : application à l'interaction mécanique Pastille-Gaine. Mécanique des solides [physics.class-ph]. Aix Marseille Université, 2016. Français. NNT: . tel-01404140

HAL Id: tel-01404140

<https://theses.hal.science/tel-01404140>

Submitted on 12 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ
ÉCOLE DOCTORALE n° 353
SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR : MÉCANIQUE, PHYSIQUE,
MICRO ET NANOÉLECTRONIQUE

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Mécanique des solides

d'AIX-MARSEILLE UNIVERSITÉ

Présentée et soutenue publiquement le 28 septembre 2016 par

Hao LIU

Stratégie de raffinement automatique de maillage et méthodes multi-grilles locales pour le contact : application à l'interaction mécanique Pastille-Gaine

Thèse dirigée par Frédéric LEBON

Encadrée par Isabelle RAMIERE

JURY

Mikaël BARBOTEU	Professeur à l'Université de Perpignan	Rapporteur
Serge DUMONT	Professeur à l'Université de Nîmes	Rapporteur
David DUREISSEIX	Professeur à l'INSA Lyon	Président du jury
Frédéric LEBON	Professeur à l'Université d'Aix-Marseille	Directeur de thèse
Bruno MICHEL	Ingénieur-Chercheur au CEA Cadarache	Examineur
Isabelle RAMIERE	Ingénieur-Chercheur au CEA Cadarache	Encadrante

Remerciements

Trois ans de travail de thèse sont très enrichissants. Après toutes les périodes de doute et d'inspiration, vient ce moment de reconnaissance.

Je voudrais tout d'abord remercier mon encadrante Isabelle Ramière et mon directeur de thèse Frédéric Lebon pour leur accompagnement et leur soutien tout au long de cette thèse. Ils m'ont guidé et permis de découvrir la magie de la mécanique numérique. Leur esprit scientifique m'a beaucoup appris. C'est un honneur pour moi d'avoir travaillé avec eux durant ces trois dernières années.

Je remercie Mikaël Barboreu et Serge Dumont d'avoir accepté de relire et de rapporter mon travail. Leurs remarques et commentaires m'ont permis d'améliorer ce mémoire. Merci à David Dureissex de m'avoir fait l'honneur d'accepter d'être président du jury. Merci également à Bruno Michel pour les discussions plus mécaniques ainsi que pour son aide et son intérêt sur mon travail.

Je tiens à remercier ma hiérarchie : Renaud Masson, Bruno Collard, Carole Valot, Mireille Bauer pour la confiance qu'ils ont mise en moi.

Je remercie mes sympathiques collègues du LSC pour m'avoir accueilli dans cet excellent laboratoire.

Je n'oublierai jamais les super secrétaires Laure Imbert et Régine Bousquet qui se sont toujours occupées de moi.

Merci à Jérôme Sercombe, Vincent Marelle, Thomas Helfer et Etienne Castelier pour leur aide.

Je voudrais remercier également mes collègues LMA de m'avoir bien accueilli.

Merci à mes amis Marcelle, Jules, Coralie, Maverick, Karl, Sarah, Lei, David, Bachir, ... pour les bons moments partagés. J'ai beaucoup aimé chaque minute que j'ai passé avec eux.

Enfin, un grand merci à ma famille pour leur amour inconditionnel et leur soutien fondamental.

Stratégie de raffinement automatique de maillage et méthodes multi-grilles locales pour le contact : application à l'interaction mécanique Pastille-Gaine

Résumé : Ce travail de thèse s'inscrit dans le cadre de l'étude de l'Interaction mécanique Pastille-Gaine (IPG) se produisant dans les crayons combustibles des réacteurs à eau pressurisée. Ce mémoire porte sur le développement de méthodes de raffinement de maillage permettant de simuler plus précisément le phénomène d'IPG tout en conservant des temps de calcul et un espace mémoire acceptables pour des études industrielles. Une stratégie de raffinement automatique basée sur la combinaison de la méthode multi-grilles Local Defect Correction (LDC) et l'estimateur d'erreur *a posteriori* de type Zienkiewicz et Zhu est proposée. Cette stratégie s'appuie sur l'erreur fournie par l'estimateur pour détecter les zones à raffiner constituant alors les sous-grilles locales de la méthode LDC. Plusieurs critères d'arrêt sont étudiés afin de permettre de stopper le raffinement quand la solution est suffisamment précise ou lorsque le raffinement n'apporte plus d'amélioration à la solution globale.

Les résultats numériques obtenus sur des cas tests 2D élastiques avec discontinuité de chargement permettent d'apprécier l'efficacité de la stratégie proposée.

Le raffinement automatique de maillage dans le cas de problèmes de contact unilatéral est ensuite abordé. La stratégie proposée dans ce travail s'étend aisément au raffinement multi-corps à condition d'appliquer l'estimateur d'erreur sur chacun des corps séparément. Un post-traitement est cependant souvent nécessaire pour garantir la conformité des zones de raffinement vis-à-vis des frontières de contact. Une variété de tests numériques de contact (avec ou sans frottement, avec ou sans jeu initial) entre solides élastiques confirme l'efficacité et la généralité de la stratégie proposée.

Mots clés : Raffinement adaptatif de maillage, Méthodes multi-grilles locales, Estimateur d'erreur *a posteriori*, Interaction mécanique Pastille-Gaine, Contact unilatéral, Loi de frottement de Coulomb

Automatic mesh refinement and local multigrid methods for contact problems : application to the Pellet-Cladding mechanical Interaction

Abstract : This Ph.D. work takes place within the framework of studies on Pellet-Cladding mechanical Interaction (PCI) which occurs in the fuel rods of pressurized water reactor. This manuscript focuses on automatic mesh refinement to simulate more accurately this phenomena while maintaining acceptable computational time and memory space for industrial calculations. An automatic mesh refinement strategy based on the combination of the Local Defect Correction multigrid method (LDC) with the Zienkiewicz and Zhu *a posteriori* error estimator is proposed. The estimated error is used to detect the zones to be refined, where the local subgrids of the LDC method are generated. Several stopping criteria are studied to end the refinement process when the solution is accurate enough or when the refinement does not improve the global solution accuracy anymore.

Numerical results for elastic 2D test cases with pressure discontinuity shows the efficiency of the proposed strategy.

The automatic mesh refinement in case of unilateral contact problems is then considered. The strategy previously introduced can be easily adapted to the multibody refinement by estimating solution error on each body separately. Post-processing is often necessary to ensure the conformity of the refined areas regarding the contact boundaries. A variety of numerical experiments with elastic contact (with or without friction, with or without an initial gap) confirms the efficiency and adaptability of the proposed strategy.

Keywords : Automatic mesh refinement, Local multigrid method, *a posteriori* error estimator, Pellet-Cladding mechanical Interaction, Unilateral contact, Coulomb's friction law

Table des matières

Introduction	9
1 Contexte industriel	11
1.1 Réacteur à Eau Pressurisée (REP)	13
1.2 Crayon combustible	14
1.2.1 Pastille de combustible	15
1.2.2 Gaine	15
1.3 Comportement du crayon combustible	16
1.3.1 Dilatation thermique	16
1.3.2 Densification et gonflement du combustible	18
1.3.3 Fluage de la gaine	18
1.4 Interaction mécanique pastille-gaine	18
1.5 Objectif du travail	20
2 Raffinement de maillage en mécanique des solides	23
2.1 Préliminaires	25
2.1.1 Problème élastostatique linéaire	25
2.1.2 Formulation variationnelle	26
2.1.3 Approximation par la méthode des éléments finis	28
2.1.4 Erreur de discrétisation	29
2.2 Raffinement de maillage	31
2.2.1 Méthodes adaptatives	31
2.2.2 Méthodes multi-grilles locales	35
2.3 Estimateurs d'erreur a posteriori	38
2.3.1 Généralités	38
2.3.2 Critères de comparaison des estimateurs	40
2.3.3 Estimateur basé sur le résidu d'équilibre	40
2.3.4 Estimateur basé sur la loi de comportement	45
2.3.5 Estimateur basé sur le lissage des contraintes	47
3 Stratégie de raffinement automatique de maillage	51
3.1 Méthode "Local defect correction"	53
3.1.1 Formulation de la méthode LDC	54

3.1.2	Application la méthode LDC dans le cadre de la méthode des éléments finis	57
3.2	Combinaison de la méthode LDC et de l'estimateur ZZ	60
3.3	Présentation des cas tests 2D issus de la simulation de l'IPG	63
3.3.1	Mise en diablo : cas 2D(r,z)	63
3.3.2	Fissuration de la pastille : cas 2D(r,θ)	64
3.4	Résultats numériques	64
3.4.1	Choix numériques	64
3.4.2	Erreur relative en norme énergie	65
3.4.3	Erreur absolue en norme infinie	77
4	Application de la stratégie de raffinement automatique au problème de contact	83
4.1	Problème de contact	85
4.1.1	Problème de contact unilatéral	86
4.1.2	Problème de contact avec frottement	88
4.2	Quelques méthodes pour résoudre le problème de contact avec ou sans frottement	91
4.2.1	Méthode de pénalisation	91
4.2.2	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	92
4.2.3	Méthode du Lagrangien augmenté	92
4.2.4	Méthode de point fixe	93
4.2.5	Algorithmes de résolutions	93
4.3	Stratégie de raffinement automatique du maillage adaptée au problème de contact	94
4.4	Résultats numériques	97
4.4.1	Présentation du cas test	97
4.4.2	Illustration de la détection des zones à raffiner	97
4.4.3	Résultats numérique pour un cas test sans jeu ni frottement	98
4.4.4	Résultats numériques pour un cas test avec jeu sans frottement	105
4.4.5	Résultats numériques pour un cas test avec jeu avec frottement	106
4.4.6	Contact avec frontière courbe	110
	Conclusion et Perspectives	117
	Bibliographie	119

Introduction

De la recherche à l'industrie, la simulation numérique par la méthode des éléments finis est devenue un outil essentiel permettant de modéliser des phénomènes physiques divers. Cette méthode associée au développement de méthodes numériques performantes de résolution permet de simuler et de comprendre des phénomènes et le comportement d'objets de plus en plus complexes. La précision de la solution par éléments finis est directement liée à la taille des éléments du maillage. La conséquence est que les modèles numériques présentent potentiellement un très grand nombre de degrés de liberté.

En vue d'atteindre des tailles de maille localement fines sans avoir à raffiner uniformément le maillage pour des raisons évidentes de temps de calcul et d'espace mémoire, différentes méthodes de raffinement de maillage ont été développées, en particulier les méthodes de raffinement adaptatif et les méthodes multi-grilles locales. Les méthodes de raffinement adaptatif ont pour but de modifier le maillage initial dans des zones d'intérêt telles que singularité ou concentration de contraintes afin d'obtenir un maillage optimal en terme de taille ou degré d'élément. Les méthodes multi-grilles locales consistent quant à elles à ajouter des sous-niveaux avec un pas de maillage de plus en plus fin dans ces zones d'intérêt et de relier les solutions de chaque niveau par un processus itératif. Afin de permettre de détecter automatiquement les zones d'intérêt, les méthodes de raffinement de maillage sont souvent couplées avec un estimateur d'erreur *a posteriori*.

En mécanique des solides, le phénomène de contact entre solides déformables est un problème largement répandu et étudié. La résolution précise des tels problèmes par la méthode des éléments finis requiert des mailles suffisamment fines autour des zones de contact et est donc souvent assez coûteuse. À titre d'exemple, dans le cadre de l'étude de l'Interaction mécanique Pastille combustible-Gaine (IPG) dans les Réacteurs à Eau Pressurisée (REP), la représentation précise des phénomènes mis en jeu nécessite des mailles fines de l'ordre du micron autour de la zone de contact pastille-gaine pour une structure de l'ordre du centimètre. Au-delà de la formulation du problème de contact et de sa résolution mathématique, beaucoup de travaux de recherche et développement s'intéressent désormais à l'optimisation locale du maillage de calcul.

Cette thèse porte sur le développement de stratégies de raffinement de maillage permettant de simuler plus précisément le phénomène d'IPG avec des temps de calcul et un espace mémoire acceptables. En effet, la gaine est la première barrière de confinement des produits de fission. Son intégrité et son étanchéité doivent être garanties, notamment vis-à-vis du phénomène de rupture. Le phénomène d'IPG doit donc être bien compris et simulé dans la

démarche de sûreté de l'élément combustible des REP.

Cette thèse a été réalisée dans le cadre du projet SICOM (Simulation COMbustible) dédié au développement de la plate-forme logicielle PLEIADES pour la simulation du comportement des éléments combustibles sous irradiation. Ces travaux sont cofinancés par le CEA (Commissariat à l'Énergie Atomique et aux Énergies Alternatives), EDF (Électricité de France) et AREVA.

Plan de ce mémoire

Ce mémoire de thèse se compose de quatre chapitres.

Le chapitre 1 détaille le contexte industriel. Nous y présentons les différents phénomènes mécaniques se produisant à l'intérieur du combustible d'un réacteur à eau pressurisée.

Dans le chapitre 2, les différentes techniques de raffinement de maillage pour un problème élastostatique linéaire et les méthodes d'estimation d'erreur *a posteriori* permettant de détecter automatiquement les zones à raffiner sont présentées.

Nous proposons dans le chapitre 3 une stratégie de raffinement automatique de maillage basée sur le couplage de la méthode Local Defect Correction et l'estimateur d'erreur *a posteriori* de Zienkiewicz et Zhu. Cette stratégie est vérifiée sur des cas test 2D élastiques représentatifs de l'IPG.

Enfin, dans le chapitre 4, nous étendons la stratégie proposée à des problèmes de contact avec ou sans frottement. Nous vérifions notamment qu'un raffinement multi-corps s'effectue bien autour des zones de contact.

Notre objectif est de proposer une stratégie de raffinement local automatique unique et générique permettant de raffiner différents types de problèmes comportant des singularités locales, notamment des problèmes de contact, ce qui serait novateur vis-à-vis de la littérature existante.

Chapitre 1

Contexte industriel

Dans ce chapitre, nous présentons le contexte industriel de la thèse. Il concerne les phénomènes mécaniques se produisant à l'intérieur du combustible d'un réacteur à eau pressurisée et qui conduisent, sous l'effet de la température et de l'irradiation, à l'interaction mécanique entre la pastille et la gaine de combustible.

Sommaire

1.1 Réacteur à Eau Pressurisée (REP)	13
1.2 Crayon combustible	14
1.2.1 Pastille de combustible	15
1.2.2 Gaine	15
1.3 Comportement du crayon combustible	16
1.3.1 Dilatation thermique	16
1.3.2 Densification et gonflement du combustible	18
1.3.3 Fluage de la gaine	18
1.4 Interaction mécanique pastille-gaine	18
1.5 Objectif du travail	20

Les réacteurs à eau légère et en particulier les réacteurs à eau pressurisée (REP) dominent le marché électronucléaire international depuis plusieurs décennies. En effet sur les 430 réacteurs en opération à travers le monde, 2/3 sont des REP, et sur les 70 réacteurs en constructions, 3/4 sont également des REP.

Avec ses 58 réacteurs nucléaires répartis dans 19 centrales nucléaires produisant près de 80% de l'électricité nationale, la France est un pays fortement axé autour de l'énergie nucléaire. Tous les réacteurs nucléaires en service en France sont des REP de puissance 900 MWe à 1450 MWe (MégaWatt électrique, unité de puissance électrique). Nous rappelons ici brièvement le fonctionnement de ce type de réacteur.

1.1 Réacteur à Eau Pressurisée (REP)

Un réacteur nucléaire à eau pressurisée (type REP) est composé de 3 circuits (voir figure 1.1) :

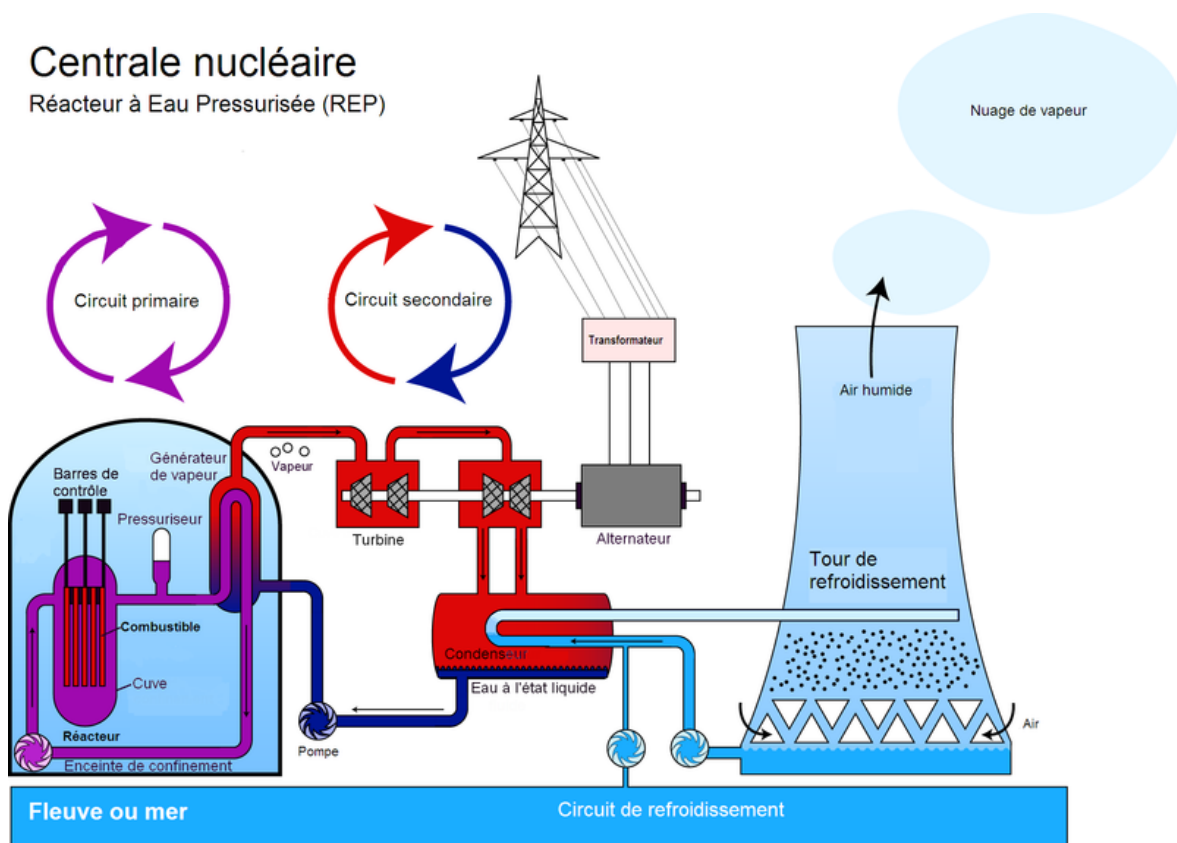


FIGURE 1.1 – Centrale nucléaire à eau pressurisée

- Le circuit primaire

Dans le coeur du réacteur, la fission nucléaire produit de la chaleur. De l'eau, jouant le rôle de modérateur et de caloporteur, circule dans le circuit primaire à la pression de

15,5 MPa. Cette eau, à la température d'environ 290 °C à l'entrée du coeur, est chauffée au contact des crayons combustibles à environ 324 °C en sortie du coeur.

- Le circuit secondaire

Dans le générateur de vapeur, l'eau du circuit secondaire est chauffée par le circuit primaire au contact des tubes et se transforme en vapeur. Cette vapeur fait tourner une turbine couplée à un alternateur qui produit de l'électricité.

- Le circuit de refroidissement

L'eau de ce troisième circuit refroidit le circuit secondaire à travers un échangeur et condenseur.

Vue la radioactivité des produits de fission nucléaire, les exigences de sûreté sont fortes pour éviter l'éventuelle dispersion d'éléments radioactifs à l'extérieur de la centrale. Il existe ainsi 3 barrières de confinement :

- Première barrière : un gainage métallique qui enferme le combustible
- Seconde barrière : une enveloppe métallique autour du circuit primaire (tube de Générateur de vapeur, cuve de réacteur, ...)
- Troisième barrière : une enceinte de confinement en béton de forte épaisseur

1.2 Crayon combustible

Le crayon combustible est un élément de base du réacteur REP. C'est l'endroit où la chaleur est produite. Un crayon combustible de REP est constitué essentiellement d'une gaine contenant environ 300 pastilles de combustible maintenues par un ressort (voir figure 1.2). Le crayon, pressurisé à l'hélium entre 2 MPa et 2,5 MPa à la fabrication, est fermé par deux bouchons soudés à ses extrémités. L'hélium est choisi car il a la meilleure conductivité thermique parmi les gaz nobles. Le jeu radial initial entre les pastilles et la gaine est d'environ 85 μm en vue de faciliter l'introduction des pastilles dans la gaine. Nous détaillons dans la suite les principales caractéristiques des pastilles de combustible et de la gaine ainsi que leurs conditions de fonctionnement. Pour plus de détails, le lecteur peut se reporter à [Bailly *et al.* 1997] et [Guerin *et al.* 2013].

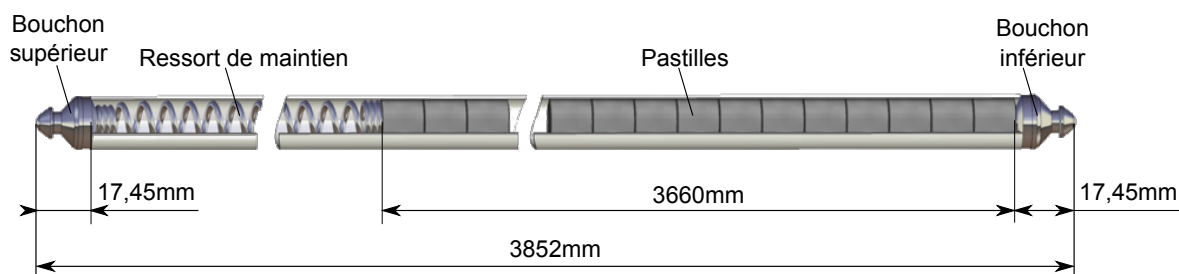


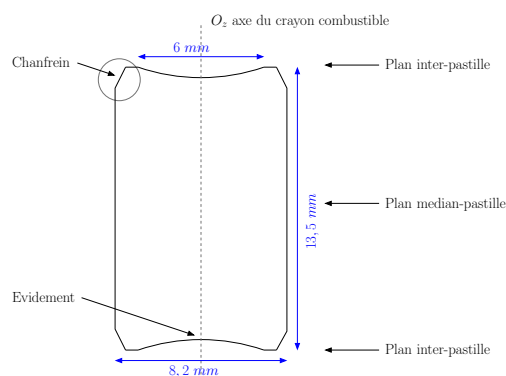
FIGURE 1.2 – Dimension d'un crayon combustible pour un REP de puissance de 900 MWe

1.2.1 Pastille de combustible

Le combustible des REP se présente sous forme de pastilles cylindriques mesurant 8,2 mm de diamètre pour 13,5 mm de hauteur (voir figure 1.3). Le matériau est du dioxyde d'uranium (UO_2) ou de l'oxyde mixte d'uranium et de plutonium (MOX). La pastille est une céramique fragile avec une contrainte de rupture comprise entre 100 MPa et 150 MPa. Après fabrication, la pastille a une porosité comprise entre 5 et 6%.



(a) Pastilles de combustible



(b) Dimensions caractéristiques des pastilles de combustible

FIGURE 1.3 – Pastilles de combustible utilisées dans les REP

La pastille de combustible présente un évidement hémisphérique et un chanfrein à chacune de ses extrémités. L'évidement a pour but de compenser l'excès de dilatation du centre de la pastille et le chanfrein facilite son introduction dans la gaine.

1.2.2 Gaine

La gaine est un tube de diamètre extérieur valant 9,5 mm et d'épaisseur 0.57 mm. Il s'agit de la première barrière de confinement des produits de fission.

Les matériaux utilisés pour la gaine des REP actuellement en fonctionnement en France et à l'international sont des alliages à base de zirconium (Zircaloy-4, M5[®], ZIRLO[™], Optimized ZIRLO[™]). Leurs propriétés répondent à certains besoins :

- une très faible absorption des neutrons thermiques (utiles à la réaction en chaîne),
- une bonne conductivité thermique en vue d'évacuer vers l'eau la chaleur produite dans le crayon,
- une bonne résistance mécanique,
- une bonne résistance à la corrosion vis-à-vis de l'eau à haute température et du combustible.

1.3 Comportement du crayon combustible

Le comportement du crayon combustible dans un réacteur nucléaire est principalement piloté par la haute température et l'irradiation. La connaissance des phénomènes mécaniques concernant la pastille et la gaine ainsi que leurs interactions est très importante pour s'assurer du bon fonctionnement du crayon et de l'assemblage combustible.

Le schéma 1.4 décrit les principaux phénomènes se produisant dans un crayon REP du début de sa vie jusqu'au 3^e cycle¹ de fonctionnement en réacteur. Dans cette section, nous allons uniquement présenter les phénomènes relatifs à l'interaction mécanique pastille-gaine.

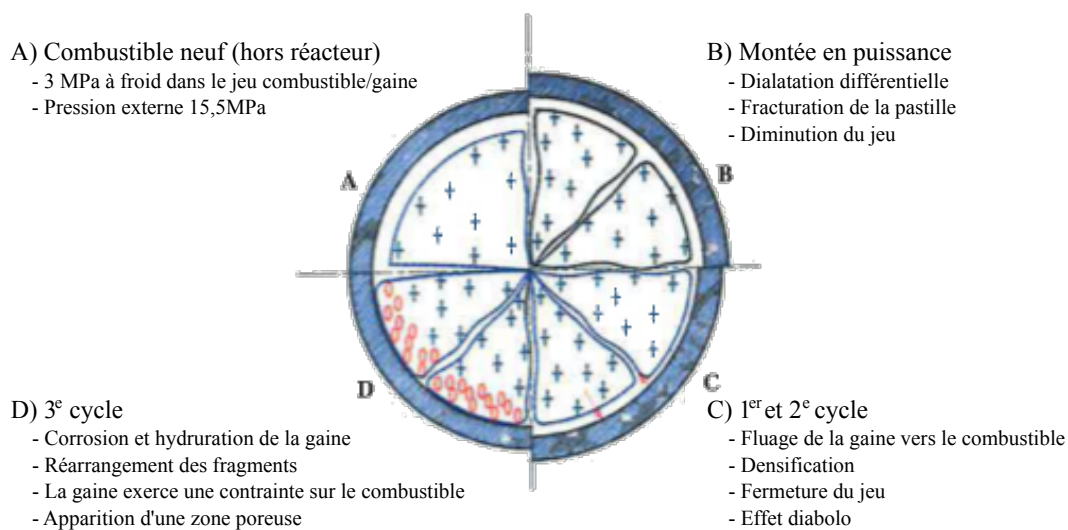


FIGURE 1.4 – Comportement générale d'un crayon REP [Bailly *et al.* 1997]

1.3.1 Dilatation thermique

Dans les REP, la température dans le coeur d'une pastille peut atteindre plus de 1000 °C en fonctionnement normal. Le premier phénomène présenté ici est la dilatation thermique de la pastille et de la gaine. Du fait que les coefficients de dilatation et les températures de la pastille et de la gaine sont différentes, leurs dilatations sont également différentes. Bien que le coefficient de dilatation de la gaine soit plus important que celui de la pastille, la température dans la pastille est beaucoup plus élevée que celle dans la gaine (voir figure 1.5). La dilatation de la pastille est finalement plus importante que celle de la gaine. Par conséquent, le jeu radial initial d'environ 85 μm diminue jusqu'à environ 60 μm en raison des dilatations thermiques différentielles de la pastille et de la gaine.

1. un cycle correspond au temps entre deux arrêts du réacteur pour rechargement du coeur et maintenance, soit environ 12 à 18 mois suivant les modes de gestion. Un cycle comprend donc une montée de puissance (démarrage du réacteur), un maintien de puissance plus ou moins constant (fonctionnement du réacteur) et un retour à froid (arrêt du réacteur)

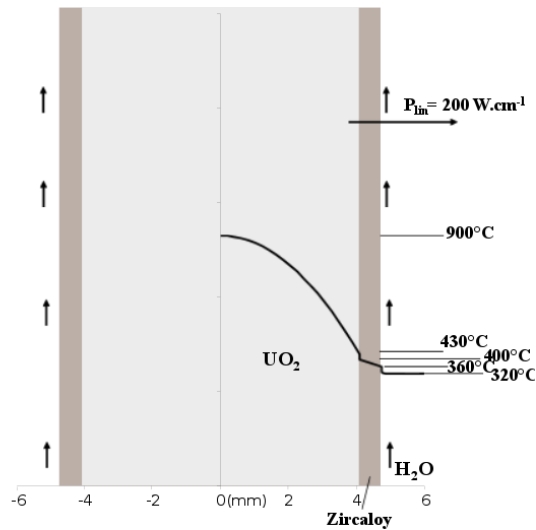


FIGURE 1.5 – Exemple du profil radial de la température dans le crayon combustible [Guerin *et al.* 2013]

La conductivité thermique de la pastille étant faible et la puissance importante, un fort gradient radial de température est présent dans celle-ci. La figure 1.5 présente un exemple du profil radial de température dans le crayon combustible. La différence de dilatation thermique à l'intérieur de la pastille sous l'effet du fort gradient de température radial provoque de fortes contraintes dans la pastille. Dès la fin de la première montée en puissance, les pastilles sont systématiquement fissurées (voir figure 1.6). L'orientation des fissures est majoritairement radiale.

Sous l'effet des contraintes thermiques, les déformations dans le plan inter-pastilles sont plus importantes que celles dans le plan médian-pastille. La pastille se déforme sous la forme de diabolo (voir figure 1.7).



FIGURE 1.6 – Macrographie d'une pastille REP fissurée par le gradient thermique

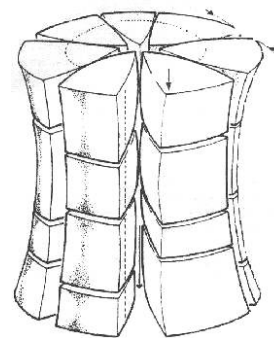


FIGURE 1.7 – Mise en diabolo de la pastille

1.3.2 Densification et gonflement du combustible

En début de vie, l'irradiation conduit au phénomène de densification. La baisse de la porosité diminue le volume de la pastille et retarde légèrement l'instant du premier contact pastille-gaine.

Au cours de l'irradiation, la production de produits de fission au sein du combustible provoque une déformation macroscopique, appelée gonflement de la pastille. Ce gonflement dépend donc de la quantité et de l'état physico-chimique des produits de fission.

1.3.3 Fluage de la gaine

Le fluage est le phénomène physique qui provoque progressivement une déformation irréversible sous charge constante inférieure à la limite d'élasticité du matériau. Il existe deux types de fluage pour la gaine : le fluage d'irradiation et le fluage thermique [Bailly *et al.* 1997]. Le fluage d'irradiation décrit la déformation sous l'effet du flux neutronique. Le flux neutronique participe à la mobilité des défauts et accroît la vitesse de fluage. La vitesse du fluage thermique dépend de la température.

En fonctionnement normal, à faible contrainte (inférieure à 100 MPa), le fluage d'irradiation contribue à près de 80% de la déformation totale par fluage. À forte contrainte, il représente environ 20% de la déformation totale par fluage.

La pression interne dans le crayon est initialement de 2,5 MPa et augmente jusqu'à environ 6 MPa en début d'irradiation. Au cours de la vie, dû au relâchement des gaz de fission, cette pression continue d'augmenter mais ne dépasse pas celle du fluide caloporteur. La gaine subit donc une contrainte circonférentielle de compression. Sous l'effet de l'irradiation, le diamètre de la gaine a donc tendance à diminuer.

1.4 Interaction mécanique pastille-gaine

Au cours du premier cycle, le jeu initial entre la pastille et la gaine diminue du fait des phénomènes précédemment cités : gonflement et mise en diabolos de pastille, et fluage de la gaine. Au début du deuxième cycle d'irradiation, le jeu commence à se fermer sur certaines zones du crayon et un contact entre la pastille et la gaine se présente au niveau des plans inter-pastilles. Ce phénomène est appelé l'Interaction Pastille-Gaine (IPG). De plus, la fissuration de la pastille introduit un contact discontinu entre la pastille et la gaine. Ces deux phénomènes induisent une concentration locale importante de contraintes au niveau du contact pastille-gaine, au droit des fissures.

La fermeture du jeu entre la pastille et la gaine modifie les contraintes auxquelles la gaine est soumise. Avant la fermeture du jeu, la contrainte principale dans la gaine est une contrainte de compression due au fluide caloporteur. Lorsque la fermeture du jeu a eu lieu, la valeur absolue de la contrainte de compression décroît jusqu'à devenir nulle et devient ensuite une contrainte de traction à cause des contraintes exercées par la pastille. Après plusieurs cycles d'irradiation, la gaine présente une forme de bambou due à l'influence de la mise en diabolos des pastilles (voir figure 1.8). Au niveau du plan inter-pastilles, un déplacement

plus important est observé. La figure 1.9 présente un exemple du profil axial du diamètre du crayon après 2 cycles annuels et montre que ce déplacement reste modéré et est inférieur $20\ \mu\text{m}$ en fonctionnement normal.

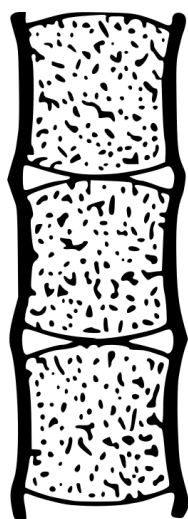


FIGURE 1.8 – Représentation schématique de la déformation en bambou de la gaine

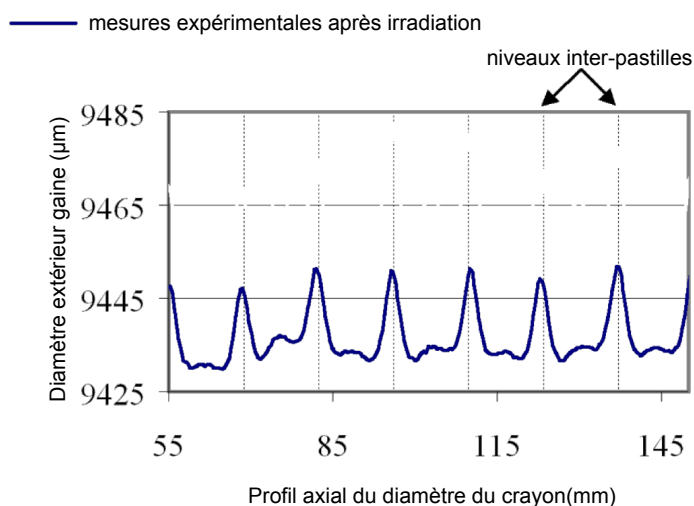


FIGURE 1.9 – Profil axial du diamètre du crayon après 2 cycles annuels [Guerin *et al.* 2013]

Dans les REP, le phénomène d'IPG ne provoque pas la rupture de la gaine en fonctionnement normal. Cependant, comme la gaine est la première barrière de confinement du combustible, son intégrité et son étanchéité doivent être garanties non seulement en régime normal mais également en régime incidentel de niveau 2 (probabilité de 10^{-2} par réacteur et par an) selon l'échelle INES (de l'anglais International Nuclear Event Scale).

De nombreuses études sur ce phénomène ont été réalisées en vue de qualifier les limites technologiques à rupture de la gaine et contraintes exercées sur le rayon interne de la gaine. En particulier, un grand nombre d'essais de rampe [Garlick 1973, Alberman *et al.* 1997, Mougel *et al.* 2004], simulant une situation incidentelle de niveau 2, a été effectué dans des Réacteurs d'Essai des Matériaux (MTR acronyme Anglais pour Material Testing Reactor) afin de déterminer la limite à rupture. Les essais expérimentaux sont cependant généralement complexes et coûteux.

Un type d'étude complémentaire repose sur la modélisation des mécanismes conduisant à l'IPG [Jernkvist 1995, Michel *et al.* 2008b, Michel *et al.* 2008a, Marchal *et al.* 2009, Sercombe *et al.* 2012, Michel *et al.* 2013]. Les objectifs de la modélisation sont également de déterminer les limites à rupture du crayon ainsi que de prédire le comportement du crayon en situation incidentelle.

En vue de simuler le comportement des éléments combustibles sous irradiation, la plateforme PLEIADES (Plateforme Logicielle pour les Elements Irradiés dans les Assemblages en

Démonstration, en Expérimentation ou en Service) a été développée par le CEA et ses partenaires depuis 2003. Dans cette plate-forme, plusieurs applications sont développées pour s'adapter aux différentes filières de réacteur étudiées. L'ensemble de ces applications partage des composants communs, des lois et des modèles de comportement. Au sein de cette plate-forme, l'application ALCYONE est destinée à la filière REP. Dans le but d'obtenir des contraintes et des déformations locales maximales, les études de l'IPG utilisent principalement le modèle 3D d'ALCYONE [Michel *et al.* 2008b, Michel *et al.* 2008a, Sercombe *et al.* 2012, Michel *et al.* 2013, Sercombe *et al.* 2013]. En supposant que le combustible se fissure de façon régulière (voir [Nonon *et al.* 2004]) et en raison de symétries, seul un fragment correspondant à 1/32 d'une pastille et de la gaine qui l'entoure est modélisé (voir figure 1.10).

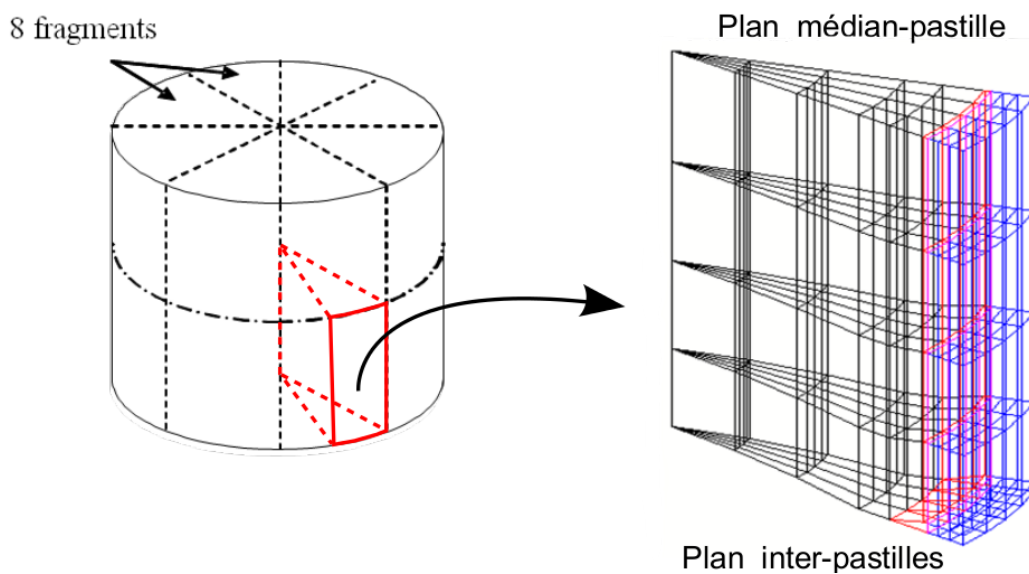


FIGURE 1.10 – Modélisation d'1/32 d'une pastille et de la gaine

Les études expérimentales [Mougel *et al.* 2004] et numériques [Michel *et al.* 2008a, Sercombe *et al.* 2013] ont confirmé que les contraintes et les déformations de la gaine sont maximales au niveau du plan inter-pastilles en face des fractures radiales de la pastille (voir figure 1.11). Ce point est appelé point triple.

1.5 Objectif du travail

Afin de pouvoir obtenir de manière précise les contraintes au niveau du point triple, la taille de maille de calcul doit être localement de l'ordre du micron pour une structure d'ordre du centimètre [Sercombe *et al.* 2013]. Cependant, les temps de calcul et ressources mémoire associés à des maillages raffinés localement, sans être trop dégénérés, deviennent vite prohibitifs pour les codes de R&D et à fortiori pour les codes industriels.

Une alternative, basée sur des méthodes multi-grilles locales permettant d'atteindre cette taille de maille avec des temps de calculs et espaces mémoires acceptables, a été étudiée par Barbié *et al.* [Barbié 2013, Barbié *et al.* 2014, Barbié *et al.* 2015]. Les auteurs ont étudié la

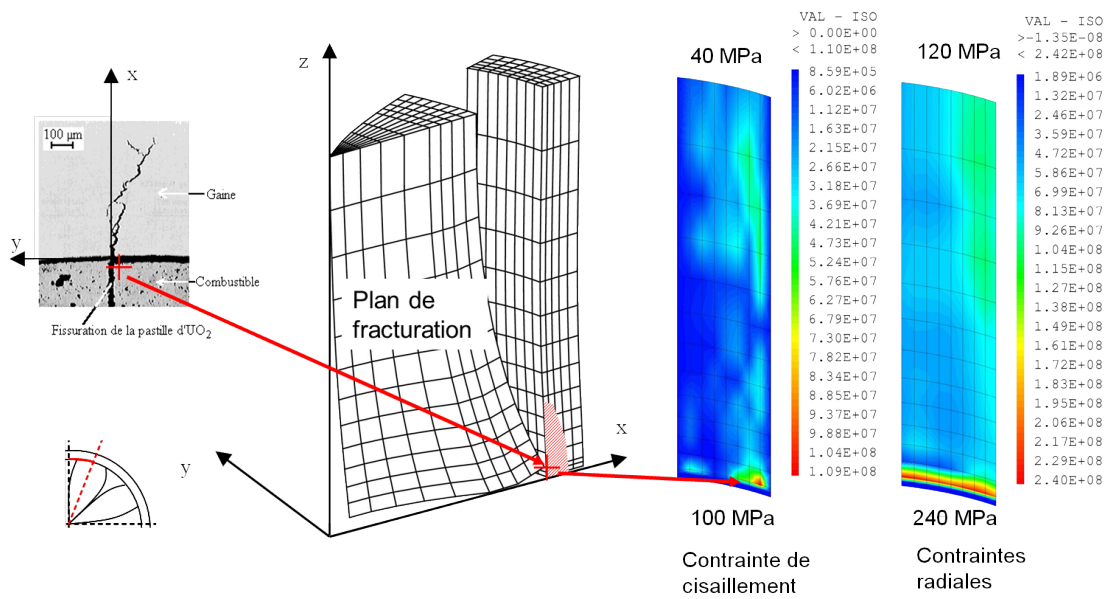


FIGURE 1.11 – Concentration de contraintes au point triple [Sercombe *et al.* 2013]

performance d'une méthode multi-grilles locale de type Local Defect Correction (LDC) pour des problèmes linéaires et des problèmes non-linéaires avec loi de fluage de Norton. Via l'estimateur d'erreur *a posteriori* de Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz & Zhu 1987] (ZZ), les auteurs ont choisi de raffiner les éléments du maillage dont l'indicateur d'erreur était supérieur à $\alpha\%$ de l'erreur maximale où α désigne un paramètre. Cette stratégie de raffinement est efficace et simple à mettre en oeuvre, mais elle ne permet pas d'arrêter la génération de sous-niveaux. De plus, le paramètre α dépend du problème et est donc difficile à connaître a priori.

Le but de ce travail est tout d'abord de développer une stratégie de raffinement automatique, toujours basée sur la combinaison de la méthode LDC et de l'estimateur ZZ, mais permettant de générer de manière optimale et générique les sous-grilles locales nécessaires au calcul précis et ce, indépendamment de la connaissance du problème traité.

Le deuxième objectif de la thèse est de s'intéresser au raffinement multi-grilles local multi-corps (pastille-gaine ici) et d'y étendre la stratégie de raffinement automatique. En particulier, le raffinement doit pouvoir traiter des situations de contact entre les corps.

Chapitre 2

Raffinement de maillage en mécanique des solides

Dans ce chapitre, nous commençons par exposer le problème modèle élastostatique linéaire sur lequel un rappel de la méthode des éléments finis est formulé. Ensuite, nous présentons les différentes techniques de raffinement de maillage pour ce type de problème ainsi que les méthodes d'estimation d'erreur *a posteriori* permettant de détecter automatiquement les zones à raffiner.

Sommaire

2.1	Préliminaires	25
2.1.1	Problème élastostatique linéaire	25
2.1.2	Formulation variationnelle	26
2.1.3	Approximation par la méthode des éléments finis	28
2.1.4	Erreur de discrétisation	29
2.2	Raffinement de maillage	31
2.2.1	Méthodes adaptatives	31
2.2.2	Méthodes multi-grilles locales	35
2.3	Estimateurs d'erreur a posteriori	38
2.3.1	Généralités	38
2.3.2	Critères de comparaison des estimateurs	40
2.3.3	Estimateur basé sur le résidu d'équilibre	40
2.3.4	Estimateur basé sur la loi de comportement	45
2.3.5	Estimateur basé sur le lissage des contraintes	47

2.1 Préliminaires

Dans cette section, nous faisons un bref rappel du problème d'élasticité linéaire statique et de la méthode des éléments finis utilisée pour le résoudre.

2.1.1 Problème élastostatique linéaire

On considère un solide occupant le domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $m = 2$ ou 3 avec une frontière suffisamment régulière $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$.

On suppose que le matériau est élastique linéaire. Sous l'hypothèse des petites perturbations et en statique, l'équation d'équilibre est une relation entre le tenseur des contraintes d'ordre 2, σ , et la densité volumique de force f :

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.1.1)$$

La relation entre le tenseur des contraintes σ et le tenseur des déformations linéarisé d'ordre 2, ε , est exprimée par la loi de comportement du matériau (ou équation constitutive) :

$$\sigma = C\varepsilon \quad (2.1.2)$$

avec C le tenseur d'élasticité d'ordre 4 qui admet les symétries suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij} \quad (2.1.3)$$

et en notation d'Einstein :

$$(C\varepsilon)_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.1.4)$$

Le tenseur des déformations ε est relié au déplacement u par :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} u + \operatorname{grad}^T u) \quad (2.1.5)$$

Ce problème admet une solution unique sous les conditions aux limites suivantes :

- Conditions aux limites de Dirichlet : $u = u_0$ sur Γ_D avec u_0 déplacement imposé sur le bord Γ_D , avec $\Gamma_D \neq \emptyset$.
- Conditions aux limites de Neumann : $\sigma n = F_N$ sur Γ_N avec $(\sigma n)_i = \sigma_{ij}n_j$, n vecteur unitaire normal dirigé vers l'extérieur de Ω et F_N la force exercée sur Γ_N .

Le problème élastostatique linéaire complet peut donc s'exprimer sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \sigma = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma = C\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} u + \operatorname{grad}^T u) & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n = F_N & \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (2.1.6)$$

Champs de déplacement cinématiquement admissibles et de contraintes statiquement admissibles :

Nous rappelons ici les définitions des champs admissibles [Bonnet & Frangi 2007] :

- un champ continu et régulier de déplacement est cinématiquement admissible (CA) s'il satisfait les conditions aux limites de Dirichlet sur le bord Γ_D :

$$u_{CA} = \{v; v \text{ continu et régulier sur } \Omega \text{ et } v = u_0 \text{ sur } \Gamma_D\} \quad (2.1.7)$$

- un champ régulier de contraintes est statiquement admissible (SA) s'il satisfait l'équation d'équilibre (2.1.1) et les conditions aux limites de Neumann sur le bord Γ_N :

$$\sigma_{SA} = \{\tau; -\operatorname{div} \tau = f \text{ dans } \Omega, \tau n = F_N \text{ sur } \Gamma_N\} \quad (2.1.8)$$

Remarque : la solution du problème (2.1.6) est un champ de déplacement cinématiquement admissible et un champ régulier de contrainte statiquement admissible associé.

2.1.2 Formulation variationnelle

Par souci de simplification, on choisira par la suite des conditions aux limites de Dirichlet homogène : $u_0 = 0$. L'extension des calculs et des démonstrations au cas non homogène ne pose pas de problème (cf. remarque page 27) et conduirait à alourdir la présentation.

On note $H^1(\Omega)$ l'espace de Sobolev défini par :

$$H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega); \partial_i v \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, m\}$$

où L^2 est l'ensemble des fonctions de carré intégrable :

$$L^2(\Omega) = \{v \text{ mesurable}, \left(\int_{\Omega} v \cdot v d\omega \right)^{1/2} < \infty\}$$

avec m la dimension de l'espace.

Soit V^0 l'espace vectoriel des champs de déplacements admissibles :

$$V^0 = \{v \in (H^1(\Omega))^m; v(x) = 0, x \in \Gamma_D\}.$$

Soit une fonction test $v \in V^0$. En multipliant l'équation d'équilibre (2.1.1) par v et en l'intégrant sur le domaine Ω , on obtient :

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma \cdot v d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega$$

En supposant v, σ suffisamment régulières et en intégrant par parties, on a :

$$\int_{\Omega} \sigma : \operatorname{grad} v d\Omega - \int_{\Gamma} (\sigma n) \cdot v d\Gamma = \int_{\Omega} f \cdot v d\Omega$$

avec

$$\sigma : \operatorname{grad} v = \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

En utilisant $v \in V^0$ sur Γ_D , on a :

$$\int_{\Omega} \sigma : \text{grad } v \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} (\sigma n) \cdot v \, d\Gamma = \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega$$

Les propriétés de symétrie du tenseur des contraintes ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) nous donnent :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sigma : \text{grad } v \, d\Omega &= \int_{\Omega} \sigma : \frac{1}{2} (\text{grad } v + \text{grad}^T v) \\ &= \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v) \, d\Omega = \int_{\Omega} (C\varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \, d\Omega \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

On obtient finalement la formulation variationnelle du problème (2.1.6) en utilisant la condition aux limites sur Γ_N du problème (2.1.6) :

$$\int_{\Omega} (C\varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} F_N \cdot v \, d\Gamma \quad (2.1.10)$$

Pour simplifier l'expression et être plus général, on utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} (C\varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \, d\Omega \\ l(v) &:= \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} F_N \cdot v \, d\Gamma \end{aligned}$$

avec a un opérateur bilinéaire symétrique, l un opérateur linéaire.

La formulation variationnelle (2.1.10) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V^0 \text{ tel que} \\ a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V^0 \end{cases} \quad (2.1.11)$$

Le problème (2.1.6) est équivalent au problème (2.1.11).

Pour rappel, soit :

- V^0 un espace de Hilbert muni de son produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de norme associée notée $\| \cdot \|$,
- $a : V^0 \times V^0 \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire continue et coercive (ou V-elliptique) sur $V^0 \times V^0$, c'est-à-dire,
 - $\exists M > 0, \forall (u, v) \in V^0 \times V^0, |a(u, v)| \leq M \|u\| \|v\|$
 - $\exists \alpha > 0, \forall u \in V^0, a(u, u) \geq \alpha \|u\|^2$
- l une forme linéaire continue c'est-à-dire $\exists L > 0, \forall v \in V^0, |l(v)| \leq L \|v\|$

Alors, selon le théorème de Lax-Milgram [Lax & Milgram 1954], il existe une unique solution $u \in V^0$ au problème (2.1.11).

Remarque : on peut utiliser par exemple la technique de relèvement pour traiter le problème avec condition aux limites de Dirichlet non homogène ($u_0 \neq 0$). Si u_0 est suffisamment régulier, d'après le théorème de trace, on peut trouver un relèvement r_u de cette condition aux limites tel que $\gamma_0 r_u = u_0$ où γ_0 est l'opérateur de trace. On cherche maintenant u sous la forme $u = \tilde{u} + r_u$ où \tilde{u} est la solution de l'équation (2.1.12) avec des conditions aux limites de Dirichlet homogène.

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} C\varepsilon(\tilde{u}) = f + \operatorname{div} C\varepsilon(r_u) & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon(\tilde{u}) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \tilde{u} + \operatorname{grad}^T \tilde{u}) & \text{dans } \Omega \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n = F_N & \text{sur } \Gamma_N \end{array} \right. \quad (2.1.12)$$

2.1.3 Approximation par la méthode des éléments finis

Soit $V_h^0 \subset V^0$ un sous-espace de dimension finie, tel que $V_h^0 \rightarrow V^0$ lorsque $h \rightarrow 0$. On cherche ici une approximation $u_h \in V_h^0$ de la solution $u \in V^0$. Le problème approché s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h^0 \text{ tel que} \\ a(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h^0 \end{array} \right. \quad (2.1.13)$$

À titre illustratif, nous allons présenter la méthode des éléments finis de Lagrange en 2D pour des éléments triangulaires. Pour d'autres types d'éléments, le lecteur pourra se reporter à [Raviart & Thomas 1998]. Soit Ω un ouvert polygonal de \mathbb{R}^2 , on se donne une triangulation \mathcal{T}_h de Ω , c'est-à-dire un ensemble de triangles $(K_i)_{i=1, \dots, n_k}$ tel que $K_i \subset \bar{\Omega}$, $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{n_k} \bar{K}_i$ et l'intersection de deux triangles K_i et K_j avec $i \neq j$ est soit vide, soit un point, soit une arête entière. Les triangles $(K_i)_{i=1, \dots, n_k}$ sont appelés les mailles ou les éléments du maillage. Pour un triangle K_i , son diamètre est $\operatorname{diam}(K_i) = \max_{(x,y) \in K_i} \|x - y\|$. Il est appelé aussi taille de la maille K_i . La taille du maillage est définie comme $h = \max_{\Omega} \operatorname{diam}(K_i)$.

On définit \mathbf{P}_k l'ensemble des polynômes en 2D de degré inférieur ou égal à $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathbf{P}_k = \left\{ p(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j, 0 \leq i + j \leq k, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \quad (2.1.14)$$

On introduit alors l'espace de dimension finie V_h

$$V_h = \{v_h \in C(\bar{\Omega}); v_h|_K \in \mathbf{P}_k, \forall K \in \mathcal{T}_h\} \quad (2.1.15)$$

La dimension de V_h est égale au nombre de noeuds de discrétisation du maillage. Ces noeuds de discrétisation dépendent de k , degré des polynômes \mathbf{P}_k choisis. Ils sont localisés sur les sommets des triangles et éventuellement en d'autres points particuliers de ces triangles.

On définit alors V_h^0 :

$$V_h^0 = \{v_h \in V_h, v_h = 0 \text{ sur } \Gamma_D\} \quad (2.1.16)$$

où la dimension de V_h^0 est égale à la différence entre la dimension de V_h et le nombre de noeuds sur la frontière Γ_D .

Ces deux espaces sont des sous-espaces de Sobolev de $H^1(\Omega)$. Les fonctions de forme N_i de V_h^0 sont des fonctions "chapeau" qui prennent la valeur 1 en un noeud S_i du maillage et qui sont nulles en S_j avec $i \neq j$.

$$N_i(S_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n_h^0 \quad (2.1.17)$$

où $n_h^0 = n_h - n_h^D$ avec n_h le nombre de noeuds du maillage et n_h^D les noeuds sur les bords Γ_D .

La base $N = \{N_1, \dots, N_{n_h^0}\}$ associée aux noeuds du maillage est appelée base nodale. On décompose u_h sur cette base :

$$u_h = \sum_{i=1}^{n_h^0} N_i u_i \quad (2.1.18)$$

En prenant $v_h = N_i, \forall i \in \{1, \dots, n_h^0\}$, le problème (2.1.13) s'écrit :

$$a\left(\sum_{j=1}^{n_h^0} N_j u_j, N_i\right) = \sum_{j=1}^{n_h^0} u_j a(N_j, N_i) = l(N_i) \quad \forall i = 1, \dots, n_h. \quad (2.1.19)$$

On peut alors écrire (2.1.19) sous la forme du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } U = (u_1, u_2, \dots, u_{n_h^0})^T \in \mathbb{R}^{n_h^0} \text{ tel que} \\ KU = F \end{cases} \quad (2.1.20)$$

avec $K_{ij} = a(N_j, N_i)$ et $F_i = l(N_i)$.

Après résolution du système linéaire (2.1.20), la solution (u_h, σ_h) est calculée par :

$$\begin{cases} u_h = N^T U \\ \sigma_h = C\varepsilon(u_h) \end{cases} \quad (2.1.21)$$

Remarque : dans le cas d'éléments de type quadrangle, l'espace d'approximation se base sur $\mathbf{Q}_k = \{q(x, y) = \sum_{i, j \geq 0} a_{ij} x^i y^j, i \leq k, j \leq k, a_{ij} \in \mathbb{R}\}$.

Propriétés de la solution approchée par la méthode des éléments finis :

Pour la méthode des éléments finis de Lagrange que nous avons introduite ici, il s'agit de chercher le déplacement dans un espace de dimension finie V_h^0 . La solution (u_h, σ_h) obtenue par la méthode des éléments finis est une approximation de la solution exacte (u, σ) .

Le champ u_h est dans H^1 . Il satisfait les conditions (2.1.7). Le champ de déplacement u_h est donc cinématiquement admissible.

Le champ $\sigma_h = C\left(\frac{1}{2}(\text{grad}u_h + \text{grad}^T u_h)\right)$ est dans L^2 . Rien ne garantit que le vecteur $\sigma_h n$ soit continu le long des frontières des éléments. Le champ de contraintes σ_h n'est donc en général pas statiquement admissible. Il vérifie seulement l'équation d'équilibre (2.1.8) au sens faible (intégration).

Le couple (u_h, σ_h) vérifie par contre la relation de comportement.

2.1.4 Erreur de discrétisation

La méthode des éléments finis est une des méthodes d'approximation les plus utilisées dans le domaine de la mécanique des solides. Des outils ont été développés afin de permettre d'estimer ses erreurs d'approximation et de les contrôler.

Notion d'erreur :

Quand on choisit d'utiliser une méthode numérique pour résoudre des problèmes physiques, il existe différentes origines à l'erreur. Comme cela est montré dans [Ladevèze & Pelle 2005], les principales sources d'erreur sont :

- Erreur de modèle : erreur de modélisation mathématique des problèmes physiques.
- Erreur de discrétisation : erreur entre la solution approchée et la solution exacte du modèle.
- Erreur de résolution : erreur entre la solution approchée (définie par (2.1.20), par exemple) et celle obtenue numériquement par une méthode de résolution.

Dans ce mémoire, on ne s'intéresse qu'à l'erreur de discrétisation et l'erreur de résolution.

Erreur de discrétisation :

On définit l'erreur de discrétisation en terme de déplacement comme

$$e_h^u := u - u_h \quad (2.1.22)$$

On définit l'erreur de discrétisation en terme de contraintes :

$$e_h^\sigma := \sigma - \sigma_h \quad (2.1.23)$$

Normes pour mesurer l'erreur de discrétisation :

Nous introduisons différentes normes pouvant être utilisées pour mesurer les erreurs (2.1.22) ou (2.1.23) :

$$\begin{aligned} \text{Norme } L^2 : \quad \|v\|_{L^2} &:= \left(\int_{\Omega} v \cdot v d\omega \right)^{1/2} \\ \text{Norme } H^1 : \quad \|v\|_{H^1} &:= \left(\int_{\Omega} (v \cdot v + \nabla v : \nabla v) d\omega \right)^{1/2} \\ \text{Semi-norme } H^1 : \quad |v|_{H^1} &:= \left(\int_{\Omega} \nabla v : \nabla v d\omega \right)^{1/2} \end{aligned}$$

En mécanique des solides, nous utilisons souvent la "norme énergie" d'un champ de déplacement qui est en fait une semi-norme équivalente à une norme lorsque le problème possède des conditions aux limites de Dirichlet :

$$\text{Norme énergie :} \quad \|v\|_E := \left(\int_{\Omega} \sigma(v) : \varepsilon(v) d\omega \right)^{1/2}$$

Estimateur de l'erreur de discrétisation :

Il existe deux types d'estimateur d'erreur :

- Estimateur d'erreur *a priori*

L'estimateur d'erreur *a priori* fournit des informations utiles concernant le caractère asymptotique de la solution approchée à partir de la géométrie du domaine, du maillage utilisé, des fonctions d'interpolation de l'espace d'éléments finis, de la solution exacte, etc. On pourra se reporter ici à l'ouvrage de Ciarlet [Ciarlet 1978].

Pour la méthode des éléments finis de Lagrange, l'estimateur *a priori* donne :

Si $u \in H^s(\Omega)$, $s > 1$, il existe $C > 0$ tel que

$$\forall h, \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^l |u|_{H^{l+1}(\Omega)} \quad (2.1.24)$$

$$\text{ou en norme } L^2, \quad \forall h, \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{l+1} |u|_{H^{l+1}(\Omega)} \quad (2.1.25)$$

avec $l = \min(s - 1, k)$, k l'ordre d'interpolation de Lagrange utilisé. L'entier l est appelé ordre de convergence de la méthode. Ainsi, on en déduit que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} = 0 \quad (2.1.26)$$

— Estimateur d'erreur *a posteriori*

L'estimateur d'erreur *a posteriori* ne dépend pas de la solution exacte. Il dépend des données du problème, de la solution approchée obtenue, etc. Fournissant des informations sur la qualité de la solution approchée, il est très utilisé dans les techniques de raffinement automatique de maillage. Ce type d'estimateur d'erreur englobe donc l'erreur de discrétisation et l'erreur de résolution. Cependant, si le solveur utilisé est suffisamment précis, l'erreur de résolution est en générale négligeable devant l'erreur de discrétisation. Nous détaillons les différentes familles d'estimateurs d'erreur *a posteriori* dans la section 2.3.

2.2 Raffinement de maillage

Dans le cadre de simulations industrielles, il est fréquent d'avoir des besoins en précision différents selon les endroits du domaine de calcul. Dans notre cas d'étude, à savoir la modélisation de l'interaction pastille-gaine, nous avons besoin d'une solution très précise autour des zones de contact. La singularité de la solution dans ces zones oblige le maillage à être suffisamment fin. L'utilisation d'un maillage uniforme très fin sur tout domaine est très coûteuse en terme de temps de calcul et d'espace mémoire. Le raffinement local de maillage fournit un outil pour réaliser des simulations numériques de ce type de problème.

Dans cette section, nous présentons les principales méthodes de raffinement de maillage s'appliquant à la méthode des éléments finis. Nous pouvons séparer les méthodes de raffinement en deux familles : les méthodes adaptatives qui ont pour but de modifier le maillage initial afin d'obtenir un maillage global optimal (taille d'élément, degré d'élément), et les méthodes multi-grilles locales qui combinent (via un processus itératif) les solutions locales obtenues sur plusieurs niveaux de maillages générés à partir du maillage initial.

2.2.1 Méthodes adaptatives

Les méthodes adaptatives reposent sur la modification locale du maillage initial. Nous présentons les quatre types de méthodes adaptatives se différenciant par la manière dont le maillage est modifié :

- Les méthodes h-adaptatives consistent à raffiner localement des éléments initiaux du maillage grossier en éléments de taille de maille plus petite pour un degré de fonction d'interpolation fixé (voir figure 2.1).

Un élément sera divisé en plusieurs éléments plus petits si l'erreur locale est trop importante. Le rapport de raffinement peut varier selon les éléments. En utilisant un raffinement par calcul de tailles d'éléments, le maillage obtenu est en général optimal immédiatement si l'indicateur d'erreur choisi est fiable. Différentes méthodes de calcul de tailles optimales d'éléments ont été proposées [Zienkiewicz & Zhu 1987, Ladevèze *et al.* 1991, Oñate & Bugeda 1993, Li *et al.* 1995]. Une comparaison des performances de ces méthodes, étudiée par [Ehlers *et al.* 2002], montre que la méthode de [Ladevèze *et al.* 1991] conduit au maillage le plus optimal.

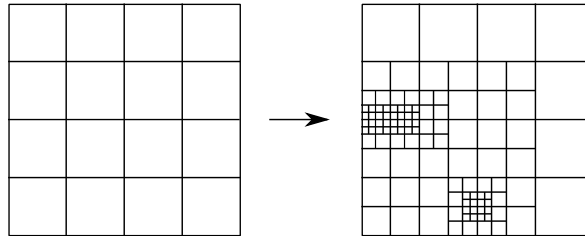


FIGURE 2.1 – Exemple de h-raffinement d'un maillage de quadrangles

Une autre stratégie consiste à raffiner récursivement les mailles avec un rapport de raffinement constant (voir la figure 2.2).

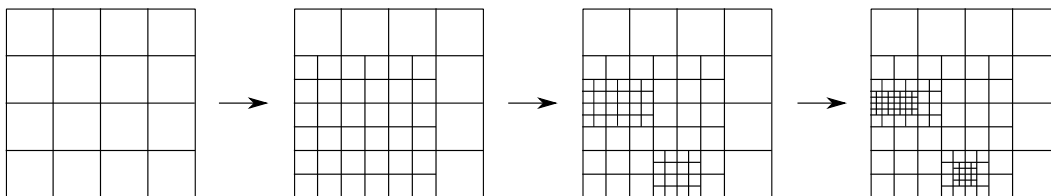


FIGURE 2.2 – Exemple de raffinement h-adaptatif récursif

Les méthodes h-adaptatives permettent d'améliorer la solution quand le problème présente des singularités [Babuska & Szabo 1982]. Ces méthodes sont les méthodes de raffinement les plus utilisées (par exemple, [Demkowicz *et al.* 1985, Strouboulis & Haque 1992, Belytschko & Tabbara 1993, Fish & Markolefas 1994, Babuška *et al.* 1994, Rachowicz 1997, Han & Wriggers 2000, Cai & Li 2010, Bao *et al.* 2012]).

Quelle que soit la stratégie choisie, les méthodes h-adaptatives conduisent généralement à des maillages non-conformes, surtout pour des quadrangles. Il faut alors soit définir des relations supplémentaires sur les noeuds non-conformes afin de permettre de résoudre le problème défini sur ce maillage par la méthode des éléments finis, soit trouver des procédures permettant de rendre le maillage conforme. La première solution nécessite de disposer d'un solveur éléments finis adapté. Plusieurs procédures ont ainsi été développées afin de disposer d'un maillage raffiné conforme :

- Dans le cas d'éléments quadrangulaires, Strouboulis et Haque [Strouboulis & Haque 1992] ont proposé de définir une zone de transition sous forme d'un mélange entre des éléments triangulaires et quadrangulaires (voir figure 2.3). Mais il faut alors que le solveur éléments finis puisse traiter des maillages avec différents types d'éléments.

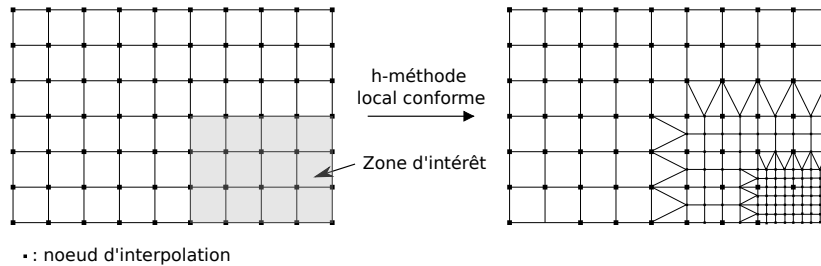


FIGURE 2.3 – h-raffinement conforme avec différents types d'éléments

- Pour les éléments triangles, plusieurs algorithmes ont été proposés afin de rendre les maillages conformes. Par exemple, l'algorithme basé sur la bissection du bord le plus long proposé par Rivara [Rivara 1984], l'algorithme récursif *Newest Vertex Bisection* proposé par Mitchell [Mitchell 1991] (voir exemple de figure 2.4a), l'algorithme de raffinement d'un triangle en triangles similaires proposé par Bank [Bank *et al.* 1983] (voir exemple de figure 2.4b), ...

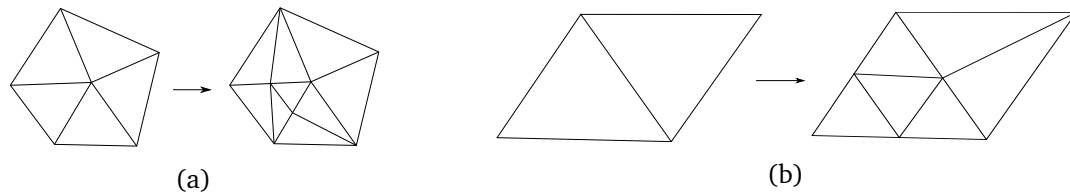


FIGURE 2.4 – h-raffinement conforme d'un maillage triangulaire

- Les méthodes p-adaptatives cherchent à augmenter localement le degré des fonctions d'interpolation tandis que la géométrie du maillage reste inchangée (voir figure 2.5).

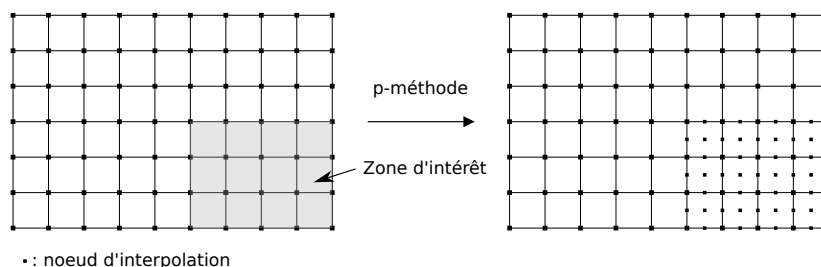


FIGURE 2.5 – Méthode p-raffinement

La vitesse de convergence des méthodes p-adaptatives est souvent plus élevée que celle des méthodes h-raffinement et peut être exponentielle [Babuska *et al.* 1981,

[Babuska & Szabo 1982]. Ce type de méthodes est également intéressant en terme de temps de génération de maillage. Elles sont aussi beaucoup étudiées dans la littérature (par exemple, [Babuška & Suri 1987a, Düster & Rank 2001, Barros *et al.* 2004, Kubatko *et al.* 2009]). La plupart des implémentations de ce type de méthodes utilisent des fonctions de forme hiérarchiques cf. la figure 2.6 (voir [Zienkiewicz *et al.* 1983] pour plus détails) permettant simplement d'obtenir le degré d'approximation désiré en ajoutant de nouvelles fonctions de formes aux fonctions de formes existantes. Les fonctions de forme obtenues sont de plus généralement conformes.

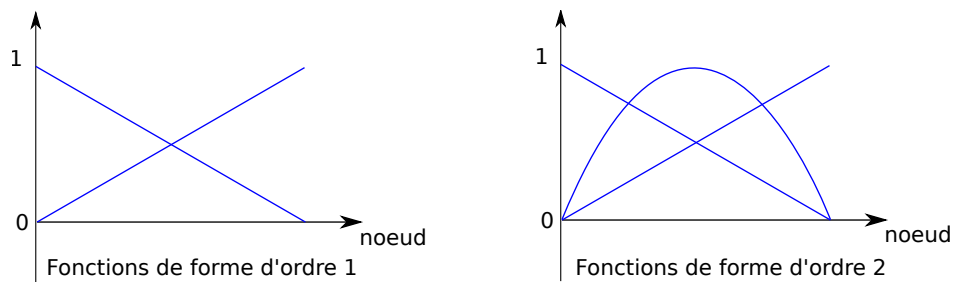


FIGURE 2.6 – Exemple des fonctions de forme hiérarchiques en 1D

Cependant, les méthodes p-adaptatives ne permettent pas d'améliorer l'approximation de la géométrie du problème car elles s'appuient toujours sur le maillage initial du domaine. Elles ne permettent pas forcément de mieux approximer des singularités de solution. Elles sont par ailleurs peu utilisées dans le domaine industriel car il faut disposer d'un solveur sachant gérer des éléments d'ordres différents et les codes industriels utilisent rarement des éléments dont l'ordre est supérieur à 2 (par exemple, [Ladevèze & Pelle 2005, CAST3M 2016]).

- Les méthodes r-adaptatives consistent à déplacer des noeuds du maillage vers les zones d'intérêt (voir figure 2.7).

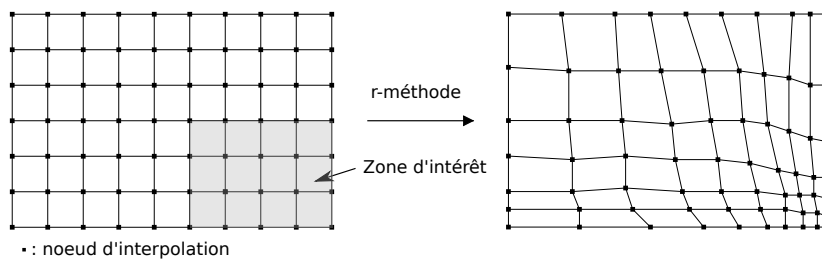


FIGURE 2.7 – Méthodes r-raffinement

Les méthodes r-adaptatives sont intéressantes pour des problèmes transitoires où les éléments peuvent suivre des phénomènes en évolution. Ce type de méthodes est aussi beaucoup étudié (par exemple [Ghosh & Manna 1993, Cao *et al.* 2001, Beckett *et al.* 2001, Huang & Russell 2010]). Différents algorithmes en déplacement ont été développés, le lecteur pourra notamment se référer à [Huang & Russell 2010]. Les méthodes r-adaptatives gardent la conformité du maillage et sont simples à mettre en oeuvre. Ce-

pendant, l'amélioration de la solution est conditionnée par le nombre initial de noeuds du maillage.

- Les méthodes s-adaptatives, proposées par [Fish 1992], superposent des maillages plus fins sur le maillage grossier dans les zones d'intérêt afin de former un maillage composite (voir la figure 2.8). Sur les bords "fictifs" des maillages fins $\partial\Omega^L \setminus \partial\Omega$, des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sont imposées. Si les maillages fins ont des bords en communs avec les bords de Dirichlet du maillage grossier $\partial\Omega^L \cap \Gamma_D \neq \emptyset$, des conditions aux limites de Dirichlet homogènes y sont également imposées. Les degrés de liberté des maillages fins qui sont communs au maillage grossier et aux maillages fins sont supprimés. Après la résolution d'un système composite, la solution est la somme des solutions de tous les niveaux. Ces méthodes ont été appliquées à des problèmes linéaires et nonlinéaires (par exemple, [Fish & Markolefas 1993, Fish & Guttal 1996, Yue & Robbins 2005, Yue & Robbins 2007]). Cependant, elles augmentent rapidement la dimension de la matrice du systèmes linéaire à inverser.

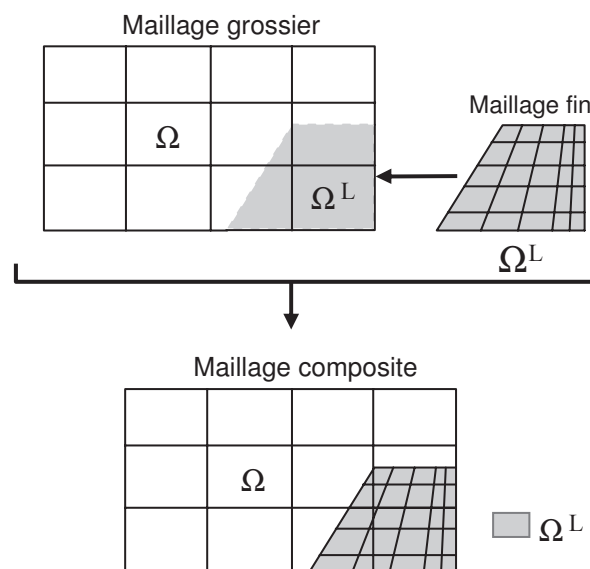


FIGURE 2.8 – Exemple simple de superposition des maillages [Yue & Robbins 2005]

La combinaison de différentes méthodes de raffinement permet de cumuler leurs avantages. Des méthodes hp-adaptatives (par exemple, [Guo & Babuška 1986, Babuška & Suri 1987b, Demkowicz *et al.* 1989, Rachowicz *et al.* 1989, Oden & Demkowicz 1991, Rachowicz & Zdunek 2005, Düster *et al.* 2007, Solin *et al.* 2010, Lebrun-Grandié *et al.* 2011]) et des méthodes hr-adaptatives (par exemple, [Sun & Zamani 1992, Edwards *et al.* 1993, Askes & Rodriguez-Ferran 2001]) ont notamment été développées.

2.2.2 Méthodes multi-grilles locales

Les méthodes multi-grilles standards (voir [Fedorenko 1961, Brandt 1977, Hackbusch 1985]) permettent d'accélérer la convergence de la résolution d'un système contenant beaucoup de

degrés de liberté. Elles se basent sur le fait que les méthodes itératives éliminent rapidement les hautes fréquences de l'erreur et que les parts de basses fréquences de l'erreur peuvent être bien calculées sur des maillages grossiers. A partir d'un maillage initial fin, plusieurs niveaux de grilles grossières sont définis sur tout le domaine (voir la figure 2.9). Des opérateurs de prolongement et de restriction relient les différentes grilles jusqu'à la convergence de la solution sur le maillage initial fin. L'algorithme multi-grilles est une généralisation de l'algorithme bi-grilles. L'algorithme bi-grilles consiste à effectuer itérativement jusqu'à convergence de la solution fine quelques itérations de lissage sur le système à résoudre sur le maillage fin, puis à restreindre sur le maillage grossier les résidus fins obtenus et utiliser cette restriction comme correction du second membre du problème grossier. La solution exacte du problème grossier est quant à elle ensuite prolongée sur le maillage fin pour corriger la solution fine. L'opérateur de prolongement doit être la transposée de l'opérateur de restriction pour assurer la convergence des méthodes multi-grilles.

Il est à noter que ce type de méthodes a été très étudié dans la littérature (par exemple, [Lubrecht *et al.* 1987, Lebon 1995, Boersma & Wriggers 1997, Wriggers & Boersma 1998, Lebon *et al.* 2007]) et a été notamment utilisé pour la résolution de problèmes de contact avec ou sans frottement, qui feront l'objet du Chapitre 4.

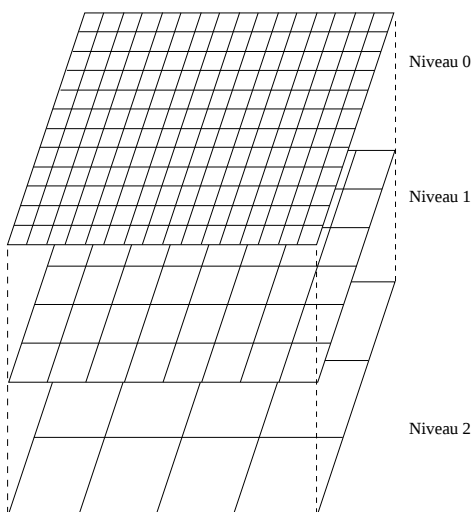


FIGURE 2.9 – Exemple de 3 niveaux de grilles du processus multi-grilles

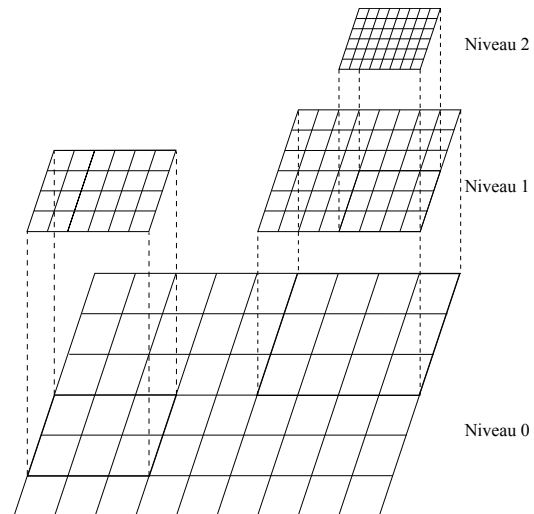


FIGURE 2.10 – Exemple de 3 niveaux de grilles du processus multi-grilles local

Toutes les méthodes multi-grilles locales sont issues des travaux réputés de Brandt [Brandt 1977] dans le cadre du développement des méthodes MLAT (Multi-Level Adaptive Techniques). Les méthodes multi-grilles locales elles aussi consistent à résoudre un problème sur plusieurs niveaux de grilles (voir la figure 2.10). Cependant, seul le maillage le plus grossier recouvre le domaine initial de calcul. A partir de ce maillage grossier défini sur l'ensemble du domaine, ces méthodes consistent à ajouter récursivement des niveaux locaux avec pas de mailles de plus en plus fins dans des sous-domaines où la solution n'est pas suffisamment précise. Un processus multi-grille (voir la figure 2.11 comme exemple) relie les différents niveaux

de grilles jusqu'à convergence de la solution grossière. L'opérateur de prolongement consiste à définir (souvent par interpolation) des conditions aux limites de Dirichlet sur les bords fictifs des maillages fins à partir des solutions grossières. L'opérateur de restriction permet quant à lui de corriger les solutions sur les maillages grossiers à partir de résidus obtenus via les solutions fines. Les opérateurs de restriction varient selon la méthode multi-grilles locales choisie.

Les méthodes multi-grilles locales sont des méthodes très génériques. Le maillage, le solveur, le modèle et le rapport de raffinement peuvent changer entre les niveaux.

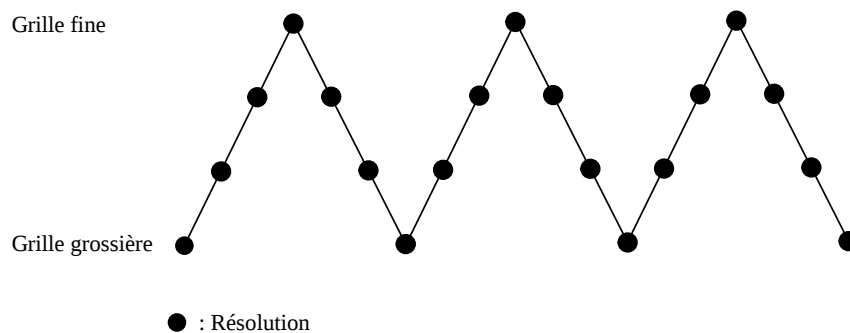


FIGURE 2.11 – Exemple de processus multi-grilles local pour 4 niveaux de grille : \wedge -cycles

Dans la littérature, il existe plusieurs méthodes de raffinement multi-grilles local. Nous présentons ici celles souvent utilisées avec la méthode des éléments finis.

- La méthode LDC (Local Defect Correction) a été proposée par Hackbusch [Hackbusch 1984]. L'opérateur de restriction de cette méthode consiste à restreindre la solution fine sur le maillage grossier afin de calculer un résidu grossier associé sur la zone de recouvrement. Le problème grossier est alors résolu en ajoutant au second membre le résidu obtenu sur les zones de recouvrement. Ferket et al. [Ferket 1996, Ferket & Reusken 1996b, Ferket & Reusken 1996a] ont complété l'analyse mathématique de Hackbusch dans le cadre d'une discrétisation par différences finies. La combinaison de la méthode LDC avec la méthode des volumes finis a été étudiée par Anthonissen [Anthonissen *et al.* 1998]. L'analyse de la méthode LDC combinée avec la méthode des éléments finis a été effectuée par Wappler [Wappler 1999]. Cette méthode, beaucoup étudiée en mécanique des fluides (par exemple, [Belliard & Grandotto 2003, Anthonissen *et al.* 2005, Minero *et al.* 2006, Kramer *et al.* 2009]) a été récemment appliquée avec succès à la mécanique des solides [Barbié *et al.* 2014, Barbié *et al.* 2015].
- Les méthodes "Full MultiGrid" (FMG) locales [Cavin *et al.* 2005, Watremetz *et al.* 2007, Biotteau 2010] cherchent à générer et relier les sous-niveaux locaux par un processus de type FMG [Brandt 1994] (voir figure 2.12). Le processus FMG consiste à accélérer la vitesse de convergence de la méthode multi-grilles en faisant démarrer l'algorithme du maillage le plus grossier et en effectuant une résolution bi-grilles. Les niveaux fins sont ajoutés successivement après convergence des cycles multi-grilles précédents. Ainsi dans le processus FMG local, les sous-niveaux les plus fins ne sont ajoutés que si la

solution corrigée n'est pas suffisamment précise. L'opérateur de restriction est identique à celui de la méthode LDC. L'opérateur de prolongement consiste en plus à définir une estimation initiale de la solution fine à partir de l'interpolation de la solution grossière. La méthode FMG locale ressemble donc beaucoup à la méthode LDC. La seule différence réside dans le fait que les sous-niveaux FMG locaux ne sont ajoutés qu'après convergence des solutions sur les niveaux précédents.

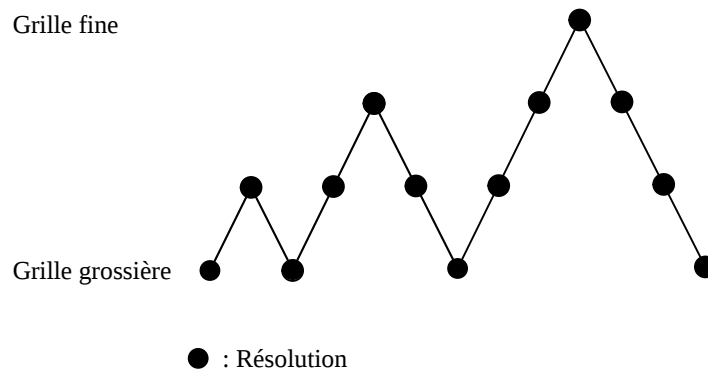


FIGURE 2.12 – Représentation du cycle FMG pour 4 niveaux de grilles

- La méthode FAC (Fast Adaptive Composite), proposée par McCormick [McCormick 1984, McCormick & Thomas 1986], introduit un problème composite intermédiaire entre deux niveaux de grille. Le résidu calculé sur le maillage composite est utilisé pour corriger à la fois le problème grossier et le problème fin. Cette méthode est souvent utilisée avec une discrétisation par différences finies. L'analyse de convergence de cette méthode a été étudiée dans [McCormick 1984, McCormick & Thomas 1986]. Les résultats numériques (par exemple, [Hart *et al.* 1986, Thomas *et al.* 1986, Cai *et al.* 1995, Ritter *et al.* 2010]) montrent l'efficacité de cette méthode qui est par ailleurs facilement parallélisable.

Il est à noter que la méthode FAC a été aussi appliquée à des problèmes de contact (voir [Grego 1995]).

2.3 Estimateurs d'erreur a posteriori

2.3.1 Généralités

Les estimateurs d'erreur *a posteriori* sont des outils indispensables aux techniques de raffinement automatique de maillage. Ils fournissent des informations sur la qualité de la solution approchée qui permettent de détecter les zones d'intérêt dans le processus de raffinement automatique.

Dans cette section, nous présentons les trois principales familles d'estimateurs d'erreur *a posteriori* :

- Les estimateurs d'erreur basés sur la vérification de la loi de comportement, introduits par Ladevèze [Ladevèze 1975].

- Les estimateurs d'erreur basés sur le résidu de l'équation d'équilibre, introduits par Babuška et Rheinboldt [Babuška & Rheinboldt 1978b].
- Les estimateurs d'erreur basés sur le lissage des contraintes, introduits par Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz & Zhu 1987].

Tous les estimateurs précédents reposent sur le fait que comme indiqué dans le paragraphe 2.1.3 en page 29, la solution approchée par la méthode des éléments finis n'est pas statiquement admissible.

Ladevèze [Ladevèze 1975] a proposé un estimateur basé sur l'erreur en relation de comportement. Il cherche alors à construire une solution statiquement admissible à partir de la solution cinématiquement admissible obtenue par la méthode des éléments finis. Cependant, il n'y a pas de raison que cette nouvelle solution vérifie la loi de comportement. L'erreur *a posteriori* est alors définie comme l'erreur sur la relation de comportement de cette solution statiquement et cinématiquement admissible. Des résultats d'utilisation de cette méthode en 2D élastique pour les éléments finis P_1 ont été publiés dans [Ladevèze & Leguillon 1983, Ladevèze *et al.* 1986]. Dans [Ladevèze *et al.* 1991], Ladevèze a étendu cette méthode à d'autres types d'éléments finis pour des problèmes élastiques en 2D. Le point de départ du développement de la seconde famille d'estimateurs d'erreur, les estimateurs d'erreur basés sur le résidu de l'équation d'équilibre, est que la solution éléments finis ne vérifie pas localement l'équation d'équilibre (2.1.1). En se basant sur le calcul du résidu de l'équation d'équilibre du problème mécanique linéaire 1D, Babuška et Rheinboldt [Babuška & Rheinboldt 1978b] ont développé des techniques d'estimation d'erreur *a posteriori* qui permet d'approximer l'erreur sur chaque élément fini K en norme énergie.

Plus récemment, Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz & Zhu 1987] ont développé une technique simple afin d'estimer l'erreur de discrétisation. Cette technique est basée sur le fait que les contraintes obtenues par la méthodes des éléments finis sont discontinues entre les éléments lorsque on utilise des éléments finis de Lagrange car u_h est dans l'espace H^1 tandis que σ_h est dans L^2 . Les auteurs ont proposé de lisser les contraintes des éléments finis pour obtenir des contraintes plus régulières et d'estimer l'erreur à partir de la différence entre ces contraintes lissées et les contraintes obtenues par la méthode des éléments finis. Ainsworth *et al.* [Ainsworth *et al.* 1989] ont montré que la solution lissée converge vers la solution exacte si la solution exacte est suffisamment régulière. Plus tard, la méthode SPR (*Superconvergent Patch Recovery*) a été proposée par Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz & Zhu 1992a, Zienkiewicz & Zhu 1992b]. Cette méthode consiste à construire sur des patches d'éléments le champ de contraintes lissées à partir de points dits "superconvergers".

La définition mathématique de ces estimateurs va être donnée dans les sections 2.3.3 à 2.3.5. Cependant, pour plus de détails, le lecteur peut aussi se reporter à [Ladevèze & Pelle 2005, Ainsworth & Oden 1997, Gratsch & Bathe 2005, Verfürth 1999, Ramm *et al.* 2003]. La relation entre les différents estimateurs a été étudiée par Zhu [Zhu 1997]. Parmi les différentes familles d'estimateur, les estimateurs basés sur le lissage des contraintes sont les plus utilisés.

2.3.2 Critères de comparaison des estimateurs

Afin de comparer les performances des différentes familles d'estimateurs *a posteriori*, des critères de comparaison doivent être définis. On en introduit plusieurs dans ce qui suit.

— **Indice d'efficacité :**

Soit η_K la norme d'un estimateur d'erreur local sur un élément K , on peut calculer la norme globale η de l'estimateur d'erreur avec

$$\eta = \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right\}^{1/2}$$

L'indice d'efficacité est le rapport entre la norme globale η de l'estimateur d'erreur et la norme de l'erreur de discrétisation $\|e_h\|$:

$$\gamma = \frac{\eta}{\|e_h\|}$$

où l'erreur de discrétisation globale e_h est définie comme la différence entre la solution analytique et la solution numérique (voir (2.1.22) ou (2.1.23)), $\|\cdot\|$ désigne une norme (choix arbitraire). En général, on ne connaît pas la solution analytique. On utilise donc une solution approchée sur un maillage très fin pour calculer l'erreur de discrétisation. Un bon estimateur doit avoir un indice d'efficacité proche de 1, même pour un maillage assez grossier, afin d'être utilisable.

— **Fiabilité :**

On dit qu'un estimateur est fiable si l'erreur estimée associée tend vers zéro quand la taille du maillage tend vers zéro. Idéalement, l'erreur estimée et l'erreur de discrétisation doivent tendre vers zéro simultanément. De plus, l'erreur estimée doit garantir des bornes supérieure et inférieure de l'erreur de discrétisation.

— **Simplicité d'implantation et coût d'utilisation**

Un bon estimateur doit être simple à implémenter et rapide à utiliser afin de ne pas polluer le temps de calcul global de la méthode de résolution.

2.3.3 Estimateur basé sur le résidu d'équilibre

Il existe deux types d'estimateurs dans la famille des estimateurs basés sur le résidu d'équilibre : des estimateurs dits explicites et des estimateurs dits implicites. Les estimateurs d'erreur basés directement sur la solution obtenue par la méthode des éléments finis sont appelés estimateurs explicites. Au contraire, les estimateurs d'erreur implicites ont besoin de résoudre des problèmes locaux auxiliaires. En conséquence, les estimateurs explicites nécessitent un coût de calcul moindre mais sont souvent moins précis que les estimateurs implicites.

2.3.3.1 Estimateurs d'erreur explicites

L'estimateur d'erreur explicite est calculé directement à partir des résidus élémentaires de l'équation d'équilibre et des sauts des contraintes aux interfaces des éléments.

Ces techniques d'estimation ont été proposées initialement par Babuška et Rheinboldt [Babuška & Rheinboldt 1978a, Babuška & Rheinboldt 1981].

Par définition (cf. éq. (2.1.22)), e_h^u satisfait :

$$a(e_h^u, v) = a(u, v) - a(u_h, v) \quad \forall v \in V^0 \quad (2.3.1)$$

D'après (2.1.11), on a :

$$a(e_h^u, v) = l(v) - a(u_h, v) \quad \forall v \in V^0 \quad (2.3.2)$$

On décompose l'équation (2.3.2) sur chaque élément :

$$\begin{aligned} a(e_h^u, v) &= l(v) - a(u_h, v) \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left\{ \int_K f \cdot v \, d\Omega + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} F_N \cdot v \, d\Gamma - \int_K C\varepsilon(u_h) : \varepsilon(v) \, d\Omega \right\} \quad \forall v \in V^0 \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

avec ∂K la frontière de l'élément K .

On note :

$$\partial \mathcal{T}_h = \cup_{K \in \mathcal{T}_h} \partial K.$$

En intégrant le dernier terme de l'équation (2.3.3) par parties, on obtient :

$$a(e_h^u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K R \cdot v \, d\Omega + \sum_{\partial K \in \partial \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} J \cdot v \, d\Gamma \quad \forall v \in V^0 \quad (2.3.4)$$

où R est le résidu élémentaire :

$$R = f + \operatorname{div} \sigma_h \quad \text{dans } K \quad (2.3.5)$$

et J le saut des contraintes à travers ∂K :

$$J = \begin{cases} -(\sigma_h n + \sigma_h' n') & \text{si } \partial K \notin \Gamma \\ F_N - \sigma_h n & \text{si } \partial K \in \Gamma_N \\ 0 & \text{si } \partial K \in \Gamma_D \end{cases} \quad (2.3.6)$$

où à l'intérieur du maillage, la frontière ∂K sépare les éléments K et K' (voir figure 2.13).

La condition d'orthogonalité de Galerkin donne :

$$a(e_h^u, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h^0 \subset V^0 \quad (2.3.7)$$

On a ainsi

$$a(e_h^u, v) = a(e_h^u, v) - a(e_h^u, v_h) = a(e_h^u, v - v_h) \quad \forall v_h \in V_h^0, \forall v \in V^0 \quad (2.3.8)$$

En introduisant l'interpolation de Clément [Clément 1975] :

$$\text{Soit } \chi_h \text{ un opérateur d'interpolation linéaire de } V^0 \rightarrow V_h^0 : v \mapsto \chi_h v \quad (2.3.9)$$

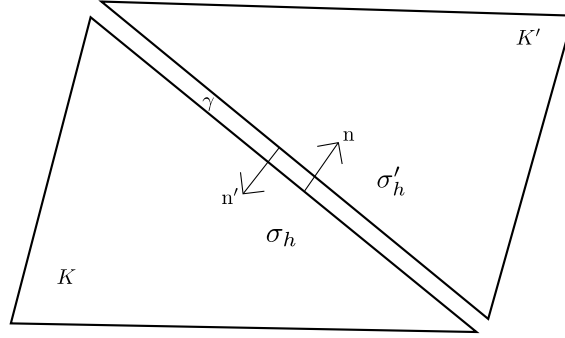


FIGURE 2.13 – Interface entre deux éléments

on a :

$$a(e_h^u, v) = a(e_h^u, v - \chi_h v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K R(v - \chi_h v) d\Omega + \sum_{\partial K \in \partial \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} J(v - \chi_h v) d\Gamma \quad \forall v \in V^0 \quad (2.3.10)$$

On applique ensuite l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$a(e_h^u, v) \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|R\|_{L^2(K)} \|v - \chi_h v\|_{L^2(K)} + \sum_{\partial K \in \partial \mathcal{T}_h} \|J\|_{L^2(\partial K)} \|v - \chi_h v\|_{L^2(\partial K)} \quad (2.3.11)$$

Selon les résultats du théorème d'interpolation de Clément [Clément 1975], nous avons :

$$\|v - \chi_h v\|_{L^2(K)} \leq c_{01} h_K \|v\|_{H^1(\tilde{K})} \quad (2.3.12)$$

$$\|v - \chi_h v\|_{L^2(\partial K)} \leq c_{02} \sqrt{h_K} \|v\|_{H^1(\tilde{K})} \quad (2.3.13)$$

avec h_K le diamètre de l'élément K , c_{01}, c_{02} des constantes qui dépendent de la forme des éléments, \tilde{K} est l'ensemble des éléments qui ont une arête commune avec K .

Par l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned} a(e_h^u, v) &\leq c_{11} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|R\|_{L^2(K)} h_K \|v\|_{H^1(\tilde{K})} + c_{22} \sum_{\partial K \in \partial \mathcal{T}_h} \|J\|_{L^2(\partial K)} \sqrt{h_K} \|v\|_{H^1(\tilde{K})} \\ &\leq c_{33} \max\{c_{11}, c_{22}\} \|v\|_{H^1(\Omega)} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{\partial K \in \partial \mathcal{T}_h} h_K \|J\|_{L^2(\partial K)}^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

avec $c_{11} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} c_{01}$ et $c_{22} = \max_{K \in \mathcal{T}_h} c_{02}$.

En remplaçant v par e_h et grâce à la définition de la norme énergie, on a :

$$\|e_h^u\|_E^2 = a(e_h^u, e_h^u) \leq c_{33} \max\{c_{11}, c_{22}\} \|e_h^u\|_{H^1(\Omega)} \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{\partial K \in \partial \mathcal{T}_h} h_K \|J\|_{L^2(\partial K)}^2 \right\}^{1/2} \quad (2.3.15)$$

L'équivalence de norme ($c_0 \|v\|_{H^1(\Omega)} \leq \|v\|_E(\Omega) \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}$ avec constante $c_0 > 0$) donne :

$$\|e_h^u\|_E^2 \leq c \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{\partial K \in \partial \mathcal{T}_h} h_K \|J\|_{L^2(\partial K)}^2 \right\} \quad (2.3.16)$$

avec $c = \left(\frac{1}{c_0} c_{33} \max\{c_{11}, c_{22}\}\right)^2$.

On a obtenu un estimateur d'erreur globale basé sur le résidu de l'équation d'équilibre :

$$\eta^2 = c \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|R\|_{L^2(K)}^2 + \sum_{\partial K \in \partial \mathcal{T}_h} h_K \|J\|_{L^2(\partial K)}^2 \right\} \quad (2.3.17)$$

L'indicateur d'erreur locale pour chaque élément η_K peut être calculé par :

$$\eta_K^2 = \left\{ ch_K^2 \|R\|_{L^2(K)}^2 + ch_K \|J\|_{L^2(\partial K)}^2 \right\} \quad (2.3.18)$$

et

$$\eta^2 = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \quad (2.3.19)$$

Ce type d'estimateur est mathématiquement rigoureux. L'estimateur garantit la borne supérieure de l'erreur. Ces estimateurs sont relativement simples à mettre en oeuvre.

Par contre, l'indice d'efficacité est relié à la constante c qui est difficile à calculer. Les estimateurs sont donc généralement pessimistes car c est souvent dictée par des critères de sécurité [Gratsch & Bathe 2005]. Ceci explique que cet estimateur sous la forme (2.3.18) est peu utilisé dans la littérature.

Le cas 2D a été étudié dans les travaux de Babuška et Miller [Babuška & Miller 1987] et Kelly et al. [Kelly et al. 1983]. Kelly et al. [Kelly et al. 1983] ont donné une forme explicite de la constante c pour les problèmes en 1D et en 2D. Pour les éléments \mathbf{P}_k en 2D, l'estimateur s'écrit :

$$\eta_K^2 = \left\{ \frac{h_K^2}{24k\rho} \|R\|_{L^2(K)}^2 + \frac{h_K}{24k\rho} \|J\|_{L^2(\partial K)}^2 \right\} \quad (2.3.20)$$

où k est le degré d'interpolation de l'élément fini et ρ est une constante dépendant du matériau. Pour le cas des contraintes planes, Kelly et al. [Kelly et al. 1983] ont montré que $m = \frac{E}{1-\nu}$ avec E le module d'Young, ν le coefficient de Poisson. Cette formule est souvent utilisée [Zienkiewicz et al. 2005]. Elle est implantée dans *Code_Aster* [Delmas 2011]. Cependant, on ne dispose pas d'évaluation de la constante pour le cas 3D qui nous intéresse pour la modélisation 3D de l'IPG.

Verfürth [Verfürth 1996] a développé une technique pour obtenir les bornes de l'erreur. L'estimateur en norme infinie a été analysé par Nochetto [Nochetto 1995]. Dari et al. [Dari et al. 1999] ont étendu ce type d'estimateur en norme infinie au cas 3D.

2.3.3.2 Estimateurs d'erreur implicites

Du fait des difficultés de calcul de la constante c pour les estimateurs explicites, des estimateurs d'erreur implicites ont été développés. Par la résolution d'un problème auxiliaire, les estimateurs implicites permettent d'obtenir des informations plus précises que les estimateurs explicites. Il existe deux types de méthodes : la méthode du résidu élémentaire et la méthode du résidu par patch.

Méthode du résidu élémentaire :

La méthode du résidu élémentaire proposé par Bank and Weiser [Bank & Weiser 1985] consiste à chercher l'erreur locale $e_K = e_h^u|_K = (u - u_h)|_K$ sur l'élément K qui satisfait le problème variationnel suivant :

$$\begin{aligned} a(e_K, v)|_K &= \int_K R \cdot v \, d\Omega + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} (F_{N|K} - \sigma_{h|K} n) \cdot v \, d\Gamma \\ &+ \int_{\partial K \setminus \Gamma} (\sigma_{|K} n - \sigma_{h|K} n) \cdot v \, d\Gamma \quad \forall v \in V_K \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

avec l'espace de fonctions test V_K qui est défini par :

$$V_K = \{v \in H^1(K) : v = 0 \text{ sur } \partial K \cap \Gamma_D\} \quad (2.3.22)$$

Les deux premiers termes sont entièrement calculables à partir de la solution éléments finis. Par contre, le troisième terme est inconnu car on ne connaît pas la solution exacte $\sigma_{|K}$. Celle-ci est approchée par :

$$\sigma_{|K} n \approx \frac{1}{2}(\sigma_{h|K} + \sigma_{h|K'}) n \quad (2.3.23)$$

où $\sigma_{h|K'}$ est la contrainte dans l'élément K' adjacent à l'élément K .

Le problème local approché devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \zeta_K \in V_K \text{ tel que} \\ a(\zeta_K, v)|_K = \int_K (f_{h|K} + \text{div} \sigma_{h|K}) \cdot v \, d\Omega + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} (F_{n|K} - \sigma_{h|K} n) \cdot v \, d\Gamma \\ \quad + \int_{\partial K \setminus \Gamma} \frac{1}{2}(\sigma_{h|K'} n - \sigma_{h|K} n) \cdot v \, d\Gamma \quad \forall v \in V_K \end{array} \right. \quad (2.3.24)$$

Après la résolution de (2.3.24) sur chaque élément K , l'erreur peut être estimée par :

$$\|e_h^u\|_E^2 \approx \sum_{K \in \Omega_h} \eta_K^2 \quad \text{avec} \quad \eta_K^2 = \|\zeta_K\|_E^2 \quad (2.3.25)$$

Malheureusement, l'existence et l'unicité du problème (2.3.24) ne sont pas garanties à cause des conditions aux limites de Neumann du problème local (quand $\partial K \cap \Gamma_D = \emptyset$). Certaines méthodes sont proposées dans [Ainsworth & Oden 2011, Babuška & Strouboulis 2001] pour pallier ce problème. Nous ne les détaillons pas ici.

Méthode du résidu par patch :

L'idée de la méthode de Babuška [Babuška & Rheinboldt 1978b, Babuška & Rheinboldt 1978a] est de décomposer l'équation (2.3.2) en plusieurs problèmes locaux sur un patch d'éléments avec des conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Les autres étapes sont identiques à celles de la méthode du résidu élémentaire. Plus récemment, d'autres méthodes ont été proposés [Carstensen & Funken 1999, Prudhomme *et al.* 2004] qui sont plus flexibles par rapport aux conditions aux limites. Prudhomme *et al.* [Prudhomme *et al.* 2004] proposent d'utiliser la partition de l'unité de la fonction de forme. Nous ne détaillons pas ici ce type de méthode.

En utilisant les méthodes des estimateurs implicites, on s'affranchit de l'étape de détermination de la valeur de la constante c . Par contre, il est obligatoire de résoudre des problèmes locaux. Ces méthodes sont beaucoup plus coûteuses que des méthodes explicites mais elles donnent des résultats plus précis. Ce type d'estimateur a été appliqué pour résoudre le problème de Stokes par Bank et al. [Bank & Welfert 1991], Oden et al. [Oden et al. 1994]. Rachowicz et Zdunek [Rachowicz & Zdunek 2005] ont appliqué ce type d'estimateur avec la méthode hp -adaptative sur les équations de Maxwell en 3D.

2.3.4 Estimateur basé sur la loi de comportement

Sachant que la solution obtenue par éléments finis est cinématiquement admissible mais qu'elle n'est pas statiquement admissible (régularité du champ des contraintes), les estimateurs basés sur la loi de comportement consistent à construire une solution (u_{CA}, σ_{SA}) qui est à la fois cinématiquement admissible (CA) et statiquement admissible (SA) et mais qui ne respecte pas forcément la loi de comportement. Comme la solution en déplacement obtenue avec la méthode des éléments finis est CA, on choisit $u_{CA} = u_h$.

La difficulté de ce type d'estimateur est donc de construire le champ de contraintes statiquement admissible. De nombreuses techniques ont été développées. Les trois principales techniques sont la technique d'équilibre par élément (EET) [Ladevèze & Leguillon 1983, Ladevèze et al. 1991, Ladevèze et al. 1986, Ladevèze & Pelle 2005], la technique d'équilibrage par patch d'éléments SPET (ou méthode flux-free) [Pares et al. 2006, Machiels et al. 2000, Carstensen & Funken 1999, Gallimard 2009] et la technique d'équilibrage par éléments et patch d'éléments (ou méthode hybride) [Ladevèze et al. 2010]. La comparaison des différentes techniques a été publiée par Pled et al. [Pled et al. 2011]. Les auteurs ont montré que la méthode SPET fournit l'estimateur le plus précis même si les trois techniques garantissent les bornes supérieures de l'erreur en norme énergie.

La méthode standard [Ladevèze & Leguillon 1983], aussi appelée la technique d'équilibrage par élément EET, est basée sur la condition de prolongement :

$$\int_K (\sigma_{SA} - \sigma_h) \text{grad} N_i \, d\Omega = 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall i \in I \quad (2.3.26)$$

où $I = \{1, \dots, n_h^0\}$ est l'ensemble des noeuds du maillage et N_i la fonction de forme associée au noeud i . Cette condition de prolongement permet de prolonger σ_h en σ_{SA} .

Il y a deux étapes successives pour construire le champ statiquement admissible :

- construction du second membre élémentaire \bar{F}_K à partir de la solution éléments finis pour chaque élément K .
- calcul des champs de contraintes admissibles par résolution des problèmes d'équilibre locaux avec \bar{F}_K donnée.

Ce processus est maintenant décrit :

Construction du second membre élémentaire :

Les contraintes statiquement admissibles sont supposées respecter la condition :

$$\sigma_{SA|K} n_K = \alpha \bar{F}_K \quad \text{sur } \partial K, \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (2.3.27)$$

avec α un entier relatif défini sur chaque face de l'élément et valant $+1$ ou -1 et \bar{F}_K le second membre recherché.

Les fonctions $\alpha \bar{F}_K$ et $\sigma_{SA|K}$ satisfont l'équation d'équilibre au sens faible :

$$\int_K \sigma_{SA} \text{grad} N_i \, d\Omega = \int_{\partial K} \alpha \bar{F}_K \cdot N_i \, d\Gamma + \int_K f \cdot N_i \, d\Omega \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall i \in I \quad (2.3.28)$$

En utilisant la condition de prolongement (2.3.26), on a :

$$\int_K \sigma_h \text{grad} N_i \, d\Omega = \int_{\partial K} \alpha \bar{F}_K \cdot N_i \, d\Gamma + \int_K f \cdot N_i \, d\Omega \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall i \in I \quad (2.3.29)$$

On obtient :

$$\int_{\partial K} \alpha \bar{F}_K \cdot N_i \, d\Gamma = \int_K \sigma_h \text{grad} N_i \, d\Omega - \int_K f \cdot N_i \, d\Omega \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \forall i \in I \quad (2.3.30)$$

On a donc la valeur de $\int_{\partial K} \alpha \bar{F}_K \cdot N_i \, d\Gamma$ pour les frontières ∂K connectées au noeud i .

Résolution des problèmes élémentaires :

On cherche à résoudre les problèmes élémentaires :

$$\begin{cases} -\text{div} \sigma_{SA} = f|_K & \text{dans } K \\ \sigma_{SA} n = \alpha \bar{F}_K & \text{sur } \partial K \end{cases} \quad (2.3.31)$$

On peut résoudre ce problème en utilisant la méthode des éléments finis en contraintes. Les conditions aux limites sont alors des conditions de Dirichlet. On discrétise chaque élément de la triangulation en sous éléments finis.

La solution (u_{CA}, σ_{SA}) est à la fois cinématiquement admissible et statiquement admissible, mais elle n'a aucune raison de vérifier la loi de comportement.

On peut alors estimer l'erreur en relation de comportement par :

$$e_{RdC} = \sigma_{SA} - C\varepsilon(u_{CA}) \quad (2.3.32)$$

Les estimateurs basés sur le concept d'erreur en relation de comportement sont précis avec des bornes garanties de l'erreur globale [Ladevèze & Pelle 2005]. Ces estimateurs ont par exemple été appliqués à des modèles industriels : un modèle 2D de structure fissurée [Pares *et al.* 2006, Ladevèze *et al.* 2010], un modèle 3D de plaque trouée en traction et un modèle 3D de tête de réacteur [Pled *et al.* 2011] ... Par contre la construction de la solution statiquement admissible est coûteuse.

Une méthode similaire mais basée sur le calcul direct des champs cinématiquement et statiquement admissibles a aussi été étudiée par plusieurs auteurs [Coorevits *et al.* 2000, Bellenger & Coorevits 2005, Kuss & Lebon 2011] pour les problèmes élastiques.

2.3.5 Estimateur basé sur le lissage des contraintes

Les contraintes calculées par la méthode des éléments finis de Lagrange présentent des discontinuités sur les interfaces entre les éléments d'où le problème de régularité. Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz & Zhu 1987] ont proposé d'interpoler les contraintes avec les mêmes fonctions de forme que le déplacement afin d'obtenir des contraintes continues sur tout le domaine. On a alors :

$$\sigma^* = N \cdot \bar{\sigma}^* \quad (2.3.33)$$

avec $\bar{\sigma}^*$: contraintes aux noeuds et N : fonctions de forme du déplacement.

La clef de ce type d'estimateur est de construire les contraintes aux noeuds $\bar{\sigma}^*$. Zienkiewicz et Zhu ont proposé deux méthodes : la méthode de projection [Zienkiewicz & Zhu 1987] et la méthode 'Superconvergent Patch Recovery' [Zienkiewicz & Zhu 1992a, Zienkiewicz & Zhu 1992b].

Méthode de projection :

La méthode de projection proposée dans [Zienkiewicz & Zhu 1987] consiste à construire $\bar{\sigma}^*$ au sens des moindres carrés à partir de σ_h .

$\bar{\sigma}^*$ doit minimiser

$$J(\bar{\sigma}^*) = \int_{\Omega} (N \cdot \bar{\sigma}^* - \sigma_h)^2 d\Omega \quad (2.3.34)$$

La minimisation donne :

$$\int_{\Omega} N^T \cdot (N \cdot \bar{\sigma}^* - \sigma_h) d\Omega = 0 \quad (2.3.35)$$

D'où :

$$\bar{\sigma}^* = A^{-1} \cdot \int_{\Omega} N^T \cdot \sigma_h d\Omega \quad (2.3.36)$$

avec $A = \int_{\Omega} N^T \cdot N d\Omega$

Cet estimateur d'erreur est simple à mettre en oeuvre et moins coûteux que les autres estimateurs. Ainsworth et al. [Ainsworth *et al.* 1989] ont montré que cette méthode est très efficace. Même quand il existe des singularités, ce type d'estimateur fonctionne bien. Il a été implémenté dans plusieurs codes industriels comme Abaqus [Dassault_Systèmes 2016], Cast3M [CAST3M 2016] et Code_Aster [Code_Aster 2016].

Méthode Superconvergent Patch Recovery (SPR) :

Plus tard, Zienkiewicz et Zhu [Zienkiewicz & Zhu 1992a, Zienkiewicz & Zhu 1992b] ont amélioré leur technique de calcul des contraintes aux noeuds en utilisant des points dit "superconvergentes" (points où la solution éléments finis possède des propriétés de superconvergence) et la notion de patch.

L'approche de projection a été améliorée par l'utilisation des propriétés de superconvergence de la solution éléments finis en certains points et par la récupération d'une solution améliorée dans un patch local.

Un patch est centré sur un noeud du maillage et contient un ensemble de points superconvergents (voir figure 2.14). Sur chaque patch ω , la méthode SPR consiste à écrire les contraintes au noeud comme une expansion polynomiale :

$$\bar{\sigma}^* = P \cdot a \quad (2.3.37)$$

avec P la base de l'expansion polynomiale, $a = (a_1, a_2, \dots, a_{P+1})$ le vecteur contenant les $(P+1)$ coefficients du polynôme dans le patch ω .

On a, par exemple, $P = [1, x, y]$ pour l'expansion linéaire en 2D et $P = [1, x, y, x^2, xy, y^2]$ pour l'expansion quadratique en 2D.

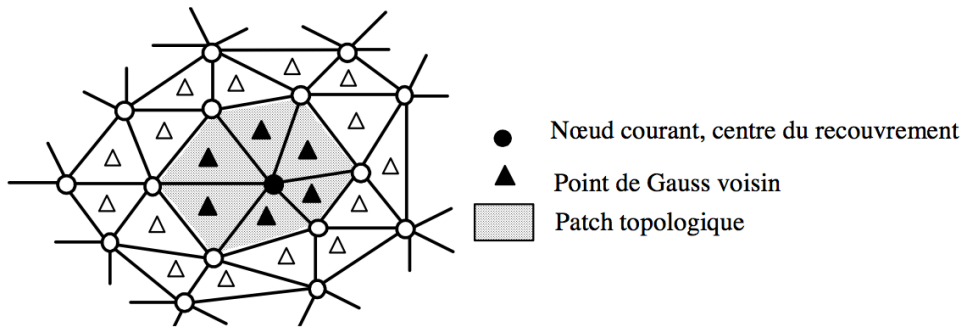


FIGURE 2.14 – Patch de la méthode SPR [Delmas 2008]

On cherche à minimiser sur chaque patch (au sens des moindres carrés) :

$$\begin{aligned} J(a) &= \sum_{i=1}^{n_{SPR}} (\sigma_h(x_i, y_i) - \bar{\sigma}^*(x_i, y_i))^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n_{SPR}} (\sigma_h(x_i, y_i) - P(x_i, y_i) \cdot a)^2 \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

où (x_i, y_i) sont des coordonnées des points superconvergents, et n_{SPR} le nombre de points superconvergents.

La minimisation de (2.3.38) implique que a satisfasse (équation normale) :

$$\sum_{i=1}^{n_{SPR}} P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) a = \sum_{i=1}^{n_{SPR}} P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i) \quad (2.3.39)$$

On a :

$$a = A^{-1} b \quad (2.3.40)$$

où

$$A = \sum_{i=1}^{n_{SPR}} P^T(x_i, y_i) P(x_i, y_i) \text{ et } b = \sum_{i=1}^{n_{SPR}} P^T(x_i, y_i) \sigma_h(x_i, y_i)$$

Connaissant a , on peut exprimer les contraintes au noeud $\bar{\sigma}^* = P \cdot a$ en utilisant les coordonnées du noeud au centre de patch. En utilisant les fonctions de forme du déplacement, on peut construire un champ de contraintes lissées.

Ce type d'estimateur est simple à mettre en œuvre. Il est largement étudié et appliqué à la méthode des éléments finis. Bouillard et al. [Bouillard *et al.* 1996] ont utilisé ce type d'estimateur dans le domaine acoustique. Wriggers et Scherf [Wriggers & Scherf 1998] l'ont appliqué au problème de contact sans frottement. L'étude dans le cadre de la simulation de forgeage a été réalisée par Boussetta et al. [Boussetta *et al.* 2006].

Bilan du chapitre

A partir du problème modèle élastostatique linéaire, nous avons présenté les deux principales familles de méthodes de raffinement local et les trois principales familles d'estimateurs d'erreur *a posteriori*.

Dans notre contexte d'étude, nous souhaitons utiliser une méthode de raffinement de maillage permettant de considérer le solveur comme une "boîte noire". Les méthodes de raffinement de type multi-grilles locales sont ainsi choisies. Les travaux précédents [Barbié 2013, Barbié *et al.* 2014, Barbié *et al.* 2015] ont montré les performances de la méthode LDC. Nous continuerons d'utiliser cette méthode dans ce mémoire. Afin de détecter automatiquement les zones du maillage à raffiner, nous décidons de combiner la méthode LDC avec un estimateur d'erreur *a posteriori*. Nous choisissons d'utiliser l'estimateur d'erreur *a posteriori* de Zienkiewicz et Zhu (ZZ) [Zienkiewicz & Zhu 1987] en raison de sa simplicité de mise en oeuvre, de sa rapidité et de son efficacité démontrée dans la littérature.

Chapitre 3

Stratégie de raffinement automatique de maillage

Après avoir présenté différentes méthodes de raffinement local et différents estimateurs d'erreur *a posteriori* dans le Chapitre 2, nous allons proposer ici une stratégie de raffinement automatique de maillage basée sur la méthode multi-grilles "Local Defect Correction" et l'estimateur *a posteriori* de Zienkiewicz et Zhu. Nous vérifierons l'efficacité de notre stratégie sur des cas test étudiant la réponse élastique de la gaine soumise à des chargements simulant le contact avec la pastille.

Sommaire

3.1	Méthode "Local defect correction"	53
3.1.1	Formulation de la méthode LDC	54
3.1.2	Application la méthode LDC dans le cadre de la méthode des éléments finis	57
3.2	Combinaison de la méthode LDC et de l'estimateur ZZ	60
3.3	Présentation des cas tests 2D issus de la simulation de l'IPG	63
3.3.1	Mise en diabolos : cas 2D(r, z)	63
3.3.2	Fissuration de la pastille : cas 2D(r, θ)	64
3.4	Résultats numériques	64
3.4.1	Choix numériques	64
3.4.2	Erreur relative en norme énergie	65
3.4.3	Erreur absolue en norme infinie	77

3.1 Méthode “Local defect correction”

Les problèmes industriels peuvent conduire à des solutions possédant des singularités localisées. La taille de maille dans ces zones nécessite d’être suffisamment petite pour que la solution atteigne une précision exigée.

Malgré l’intérêt des maillages uniformes (conduisant à des systèmes linéaires pour lesquels des solveurs rapides et efficaces existent), la taille de maille requise par ces zones de singularité locale rend généralement l’utilisation de tels maillages trop coûteuse.

On utilise alors souvent des maillages non uniformes raffinés localement (voir la section 2.2.1) : dans une ou plusieurs zones, le maillage a un plus grand raffinement afin que la solution ait une précision équivalente partout. Cependant, la convergence de ces méthodes est souvent difficile car le système devient mal conditionné.

Une alternative réside dans les méthodes multi-grilles locales qui permettent de conserver les avantages des maillages uniformes tout en raffinant localement le maillage dans les zones de singularité.

Nous nous intéressons ici à l’apport de ce type de méthode pour simuler précisément l’interaction mécanique pastille-gaine.

Nous nous focaliserons sur la méthode Local Defect Correction (LDC) proposée par Hackbusch [Hackbusch 1984] car elle se prête bien à une discrétisation par la méthode des éléments finis et a déjà été utilisée avec succès sur des problèmes mécaniques avec singularités locales dans des travaux précédents [Barbié 2013, Barbié *et al.* 2014, Barbié *et al.* 2015]. Nous en présentons ici les principales caractéristiques.

A partir d’un maillage grossier défini sur l’ensemble du domaine, la méthode LDC consiste à ajouter récursivement des maillages locaux fins dans des zones où la solution n’est pas suffisamment précise (voir figure 3.1). Ces maillages fins peuvent en particulier être uniformes.

La résolution du problème est basée sur un processus itératif qui peut être représenté par des \wedge -cycles (voir figure 3.2) : en utilisant des opérateurs de prolongement et de restriction, la solution du maillage grossier est améliorée par les solutions obtenues sur les maillages fins locaux. Le processus multi-grilles est obtenu par une généralisation du processus bi-grilles (deux niveaux de grille) qui peut être résumé ainsi :

- résolution sur le maillage grossier
- définition des conditions aux limites sur le maillage fin à partir de la solution grossière par un opérateur de prolongement
- résolution sur le maillage fin
- transport des informations du maillage fin vers le maillage grossier par un opérateur de restriction
- correction de la solution grossière par ajout du résidu calculé à partir de la solution fine restreinte sur la zone de raffinement.

Ce processus itératif est réalisé jusqu’à la convergence de la solution grossière.

Dans la section suivante, nous détaillons l’algorithme multi-grilles LDC et dérivons son

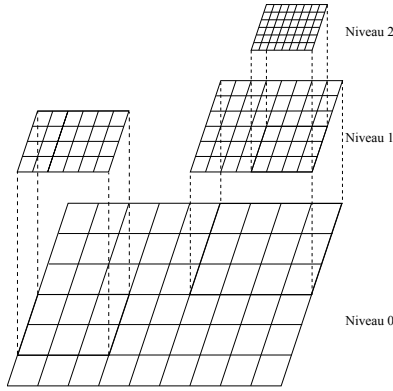


FIGURE 3.1 – Exemple de maillages locaux fins hiérarchiques

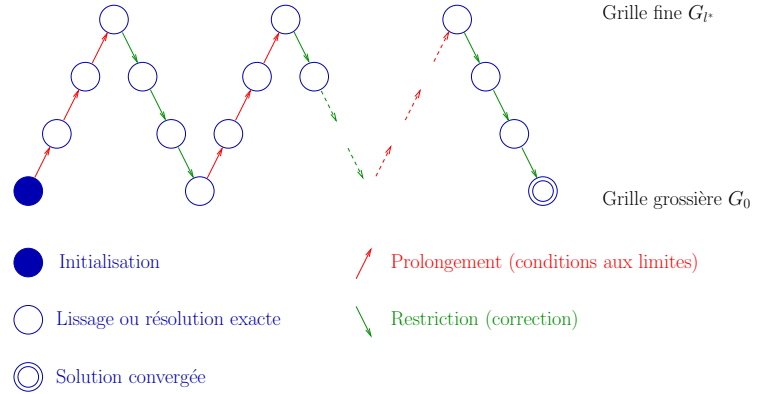


FIGURE 3.2 – Représentation du processus multi-grille local pour 4 niveaux de grilles [Barbié 2013]

application à la méthode des éléments finis. Nous nous inspirons des travaux de Hackbusch [Hackbusch 1984], de K.Khadra et al. [Khadra et al. 1996] et de L. Barbié [Barbié 2013].

3.1.1 Formulation de la méthode LDC

Afin de formuler la méthode LDC, nous considérons un problème défini sur le domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \mathcal{L}u = f & \text{dans } \Omega \\ \text{C.L. naturelles} & \text{sur } \Gamma \end{cases} \quad (3.1.1)$$

avec \mathcal{L} un opérateur différentiel en espace et f le second membre. Les "C.L. naturelles" sont des conditions aux limites choisies pour avoir existence et unicité de la solution.

Nous définissons alors des domaines imbriqués Ω_l , $0 \leq l \leq l^*$, $\Omega_l \subset \Omega_{l-1}$ avec $\Omega_0 = \Omega$. Sur chaque domaine local Ω_l , on cherche à résoudre le problème :

$$(\mathcal{P}_{|\Omega_l}) \begin{cases} \mathcal{L}_{|\Omega_l} u = f_{|\Omega_l} & \text{dans } \Omega_l \\ \text{C.L. données par l'algorithme LDC} & \text{sur } \Gamma_l \end{cases} \quad (3.1.2)$$

On discrétise chaque domaine Ω_l sur grille G_l de taille de maille h_l avec $h_l < h_{l-1}$ et de frontière $\Gamma_l = \Gamma_{D,l} \cup \Gamma_{N,l}$. La solution approchée u_l sur G_l est la solution du problème noté (\mathcal{P}_l) :

$$(\mathcal{P}_l) : \mathcal{L}_l u_l = f_l + g_l \quad \text{dans } G_l \quad (3.1.3)$$

où \mathcal{L}_l est la discrétisation de l'opérateur différentiel $\mathcal{L}_{|\Omega_l}$, f_l est la discrétisation du second membre $f_{|\Omega_l}$, g_l est la discrétisation des conditions aux limites.

La méthode LDC consiste à résoudre plusieurs fois ce problème (\mathcal{P}_l) avec des seconds membres corrigés. Ainsi au $k^{\text{ième}}$ cycle, (\mathcal{P}_l) s'écrit :

$$(\mathcal{P}_l^k) : \mathcal{L}_l u_l^k = f_l^k + g_l^k \quad \text{dans } G_l \quad (3.1.4)$$

Notons que par soucis de clarté, les illustrations sont présentées sur des maillages hiérarchiques avec un rapport de raffinement égal à 2. Cependant, la méthode LDC est très générique, et les sous-grilles locales ne sont pas forcément hiérarchiques (voir [Nefedov & Mattheij 2002]).

3.1.1.1 Initialisation

Nous notons f_l^0 la discrétisation sur G_l du second membre $f_{|\Omega_l}$ du problème continu. La solution grossière initiale u_0^0 est obtenue en résolvant le problème (P_0^0) défini sur tout le domaine avec une grille G_0 .

3.1.1.2 Étape de prolongement

Pour résoudre le problème $\mathcal{P}_l^k, k \geq 1, 1 \leq l \leq l^*$ sur la grille G_l , on doit définir des conditions aux limites sur la frontière Γ_l (cf. figure 3.3) :

- S’il existe une frontière commune entre Γ_l et Γ , on utilise les conditions aux limites naturelles du problème (\mathcal{P}) .
- Sur la partie de frontière $\Gamma_l \setminus \Gamma \neq \emptyset$, on applique des conditions aux limites de type Dirichlet (la choix de conditions de type Dirichlet va assurer l’existence et l’unicité de la solution raffinée). Les valeurs de ces conditions aux limites sont obtenues via un opérateur de prolongement P_{l-1}^l appliqué à la solution du niveau immédiatement plus grossier u_{l-1}^k .

$$u_{l|\Gamma_l \setminus \Gamma}^k = (P_{l-1}^l u_{l-1}^k)_{|\Gamma_l \setminus \Gamma} \quad (3.1.5)$$

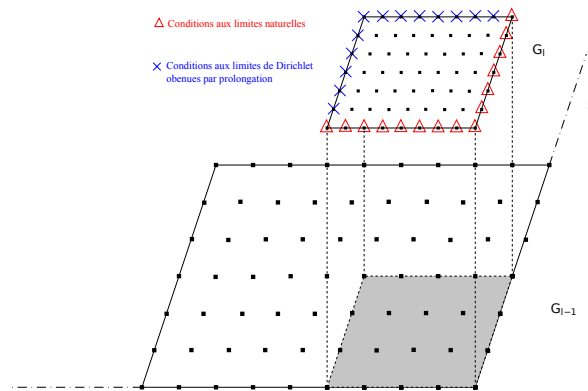


FIGURE 3.3 – Prolongement des conditions aux limites

Une fois que les conditions aux limites sur la grille G_l sont définies, la solution u_l^k est calculée en résolvant le problème (\mathcal{P}_l^k) .

3.1.1.3 Étape de restriction

La solution $u_l^k, k \geq 1, l^* > l \geq 0$ est corrigée via un résidu calculé à partir de la solution du niveau immédiatement plus fin u_{l+1}^k . Les conditions aux limites définies durant l'étape de prolongement précédente sont conservées afin de résoudre le nouveau problème (\mathcal{P}_l^k) .

Deux ensembles de noeuds de G_l doivent être définis (voir figure 3.4 et [Hackbusch 1984]). On introduit A_l l'ensemble des noeuds de G_l strictement inclus dans G_{l+1} , et \mathring{A}_l l'ensemble des noeuds A_l ne faisant intervenir que des noeuds de $A_l \cup (\Gamma_l \cap \Gamma)$ dans le schéma de discrétisation.

Tout d'abord, on restreint la solution u_{l+1}^k sur l'ensemble des noeuds de A_l :

$$\tilde{u}_l^k(x) = R_{l+1}^l u_{l+1}^k(x) \quad \forall x \in A_l \quad (3.1.6)$$

où R_{l+1}^l est un opérateur de restriction de G_{l+1} vers G_l .

Le résidu sur la grille G_l est alors calculé sur les noeuds de \mathring{A}_l :

$$r_l^k(u) = \mathcal{L}_l \tilde{u}_l^k(x) - f_l^0 \quad \forall x \in \mathring{A}_l \quad (3.1.7)$$

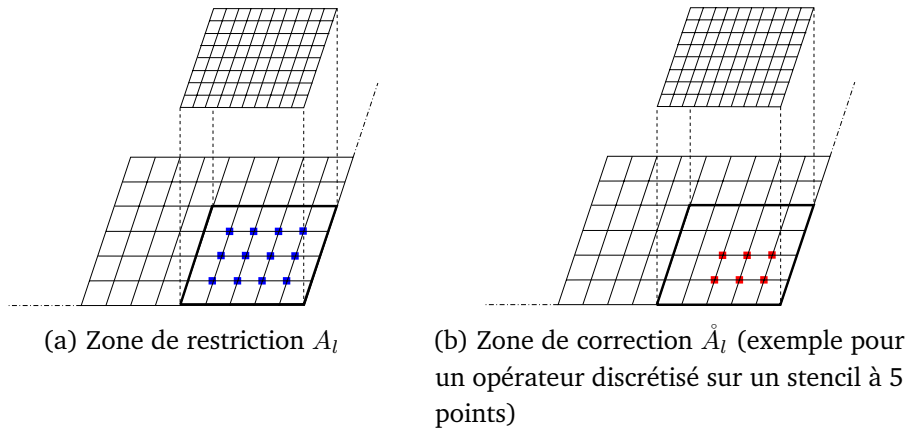


FIGURE 3.4 – Zone de restriction et zone de correction

On corrige le second membre :

$$f_l^k = f_l^0 + \chi_{\mathring{A}_l} r_l^k(u) \quad (3.1.8)$$

où $\chi_{\mathring{A}_l}$ est la fonction caractéristique de \mathring{A}_l :

$$\chi_{\mathring{A}_l} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathring{A}_l \\ 0 & \text{si } x \notin \mathring{A}_l \end{cases} \quad (3.1.9)$$

On obtient u_l^k en résolvant le problème (\mathcal{P}_l^k) avec le second membre corrigé.

Vu que la correction n'est effectuée que sur la zone \mathring{A}_l , Hackbusch [Hackbusch 1984] a montré que la zone de raffinement doit être suffisamment large pour que la méthode LDC soit efficace.

Remarque : L'équation (3.1.8) suppose que la résolution du problème fin soit suffisamment précise. Dans ce cas, la restriction du résidu du problème fin $\hat{r}_l^k = \hat{R}_{l+1}^l(\mathcal{L}_{l+1}(u_{l+1}^k) - f_{l+1}^k - g_{l+1}^k)$ (où \hat{R}_{l+1}^l est un opérateur de restriction basé sur la conservation des forces) est négligeable devant r_l^k :

$$\|\hat{r}_l^k\| \ll \|r_l^k\| \quad (3.1.10)$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme (choix arbitraire).

3.1.1.4 Choix des opérateurs

Le choix des opérateurs de prolongation et de restriction est un point important de l'efficacité de la méthode LDC. Ils doivent avoir un ordre cohérent avec l'ordre du schéma de discrétisation afin de conserver l'ordre optimal attendu de convergence. En pratique, on choisit souvent des interpolateurs d'ordre désiré.

3.1.1.5 Algorithme LDC multi-niveaux

Les étapes 3.1.1.1 à 3.1.1.4 conduisent à l'algorithme LDC multi-niveaux décrit dans l'algorithme 1 en page 58.

3.1.2 Application la méthode LDC dans le cadre de la méthode des éléments finis

Nous appliquons ici la méthode LDC (section 3.1.1.5) à une discrétisation par éléments finis dans le cas particulier de l'élasticité linéaire.

Le problème (\mathcal{P}_l^k) s'écrit alors sous forme matricielle :

$$\begin{cases} [K_l][U_l^k] = [F_l^k] + [G_l]_{\Gamma_l \cap \Gamma_N} \\ [H_l][U_l^k] = [U_{l,D}^k]_{\Gamma_l \setminus \Gamma} + [U_{l,D}]_{\Gamma_l \cap \Gamma_D} \end{cases} \quad (3.1.11)$$

où $[K_l]$ est la matrice de rigidité calculée sur la grille G_l , $[F_l^k]$ est la matrice des forces externes volumiques, $[G_l]_{\Gamma_l \cap \Gamma_N}$ est la matrice des forces externes surfaciques (conditions de Neumann), notée $[G_l]$ dans la suite, $[H_l]$ est la matrice de discrétisation des conditions aux limites de Dirichlet, $[U_{l,D}^k]_{\Gamma_l \setminus \Gamma}$ est la matrice des valeurs de Dirichlet interpolées sur la frontière fictive $\Gamma_l \setminus \Gamma$, notée $[U_{l,D}^k]$ dans la suite, et $[U_{l,D}]_{\Gamma_l \cap \Gamma_D}$ est la matrice des valeurs de Dirichlet provenant des conditions aux limites naturelles, notée $[U_{l,D}]$ dans la suite.

L'algorithme 2 en page 59 décrit la méthode LDC dans ce cas.

Remarque : Sur le niveau le plus grossier, $k=0$, seuls les efforts volumiques F_0^k vont varier au cours des itérations (invariance des conditions aux limites).

Algorithme 1 : Algorithme LDC multi-niveaux

Initialisation : calcul de u_0^0 solution du problème initial (\mathcal{P}_0^0);

/*Itération : calcul de u_l^{k*} */;

pour $k=1$ à k^* **faire**

$$u_0^k = u_0^{k-1};$$

/*Étape de prolongement*/;

pour $l = 1$ à l^* **faire**

si $k=1$ **alors**

 Définition des conditions aux limites naturelles sur $\Gamma_l \cap \Gamma$ à partir de celles définies sur Γ ;

 Définition du second membre f_l^0 sur G_l à partir de f

fin

 Détermination des conditions aux limites de Dirichlet sur $\Gamma_l \setminus \Gamma$

$$u_{\Gamma_l \setminus \Gamma}^k = (P_{l-1}^l u_{l-1}^k)|_{\Gamma_l \setminus \Gamma}$$

 Calcul de u_l^k en résolvant du problème (\mathcal{P}_l^k) avec $f_l^k = f_l^{k-1}$;

fin

/*Étape de restriction*/;

pour $l = l^* - 1$ à 0 **faire**

 Restriction de la solution fine u_{l+1}^k sur A_l

$$\tilde{u}_l^k(x) = R_{l+1}^l u_{l+1}^k(x) \quad \forall x \in A_l$$

 Calcul du résidu local grossier sur \hat{A}_l

$$r_l^k(u) = \mathcal{L}_l \tilde{u}_l^k(x) - f_l^0 \quad \forall x \in \hat{A}_l$$

 Correction du second membre

$$f_l^k = f_l^0 + \chi_{\hat{A}_l} r_l^k(u)$$

 Calcul de u_l^k en résolvant du problème (\mathcal{P}_l^k)

fin

fin

Algorithme 2 : Algorithme LDC appliquée à la méthode des éléments finis

Initialisation : calcul de la solution $[U_0^0]$;

$$\begin{cases} [K_0][U_0^0] = [F_0^0] + [G_0] \\ [H_0][U_0^0] = [U_{0,D}] \quad \text{sur } \Gamma_{D,0} \end{cases}$$

/*Itération : calcul de $[U_l^k]$ */;

pour $k=1$ à k^* **faire**

$$[U_0^k] = [U_0^{k-1}];$$

/*Étape de prolongement*/;

pour $l = 1$ à l^* **faire**

si $k=1$ **alors**

 Définition des conditions aux limites de Dirichlet $[U_{l,D}]$ et de Neumann $[G_l]$ sur

$\Gamma_l \cap \Gamma$ à partir de celles définies sur Γ ;

 Définition du seconde membre $[F_l^0]$ par discrétisation f sur G_l ;

fin

 Détermination des conditions aux limites sur $\Gamma_l \setminus \Gamma$;

$$[U_{l,D}^k] = [P_{l-1}^l][U_{l-1}^k] \quad \text{sur } \Gamma_l \setminus \Gamma$$

 Calcul de $[U_l^k]$;

$$\begin{cases} [K_l][U_l^k] = [F_l^{k-1}] + [G_l] \\ [H_l][U_l^k] = [U_{l,D}^k] + [U_{l,D}] \quad \text{sur } \Gamma_{D,l} \end{cases}$$

fin

/*Restriction : Correction sur les grilles grossières*/;

pour $l = l^* - 1$ à 0 **faire**

 Restriction de la solution fine $[U_{l+1}^k]$ sur A_l

$$[\tilde{U}_l^k] = [R_{l+1}^l][U_{l+1}^k] \quad \text{sur } A_l$$

 Calcul du résidu local sur \hat{A}_l

$$[D_l^k] = [K_l][\tilde{U}_l^k] - [F_l^0] \quad \text{sur } \hat{A}_l$$

 Correction du second membre

$$[F_l^k] = [F_l^0] + \chi_{\hat{A}_l} [D_l^k]$$

 Calcul de $[U_l^k]$ en résolvant :

$$\begin{cases} [K_l][U_l^k] = [F_l^k] + [G_l] \\ [H_l][U_l^k] = [U_{l,D}^k] + [U_{l,D}] \quad \text{sur } \Gamma_{D,l} \end{cases}$$

fin

fin

3.2 Combinaison de la méthode LDC et de l'estimateur ZZ

Afin de détecter automatiquement les zones du maillage à raffiner, nous décidons de combiner la méthode LDC avec un estimateur d'erreur *a posteriori*. Comme présenté dans la section 2.3, nous choisissons d'utiliser l'estimateur d'erreur *a posteriori* de Zienkiewicz et Zhu (ZZ) [Zienkiewicz & Zhu 1987] en raison de sa simplicité de mise en oeuvre, de sa rapidité et de son efficacité démontrée dans la littérature. L'idée ici est de générer automatiquement des sous-niveaux indépendamment de la connaissance de l'utilisateur et du problème traité.

La méthode LDC étant très générique, elle se combine facilement avec un estimateur d'erreur *a posteriori*. La combinaison de la méthode LDC et de l'estimateur ZZ est réalisée de façon séquentielle. Comme dans les travaux de Barbié et al. [Barbié 2013, Barbié et al. 2014], nous appliquons uniquement l'estimateur d'erreur durant la première étape de prolongement afin de générer les différents niveaux de grilles fines. Pendant la première étape de prolongement, après chaque résolution, l'estimateur ZZ est appliqué sur ce niveau afin de détecter la zone à raffiner qui va générer une nouvelle grille. Les grilles ainsi générées seront conservées pendant tout le processus LDC. Ce processus génère donc automatiquement les grilles imbriquées $G_l, 1 \leq l \leq l^*$.

Dans la stratégie proposée par Barbié et al. [Barbié et al. 2014], pour chaque grille G_l , les auteurs ont choisi de raffiner les éléments dont l'indicateur donné par l'estimateur ZZ en norme énergie relative était supérieur à α fois la valeur maximale de cet indicateur avec α une constante donnée entre 0 et 1.

Cette stratégie est simple à implémenter et s'applique à n'importe quel estimateur d'erreur et n'importe quelle norme. Les résultats numériques dans [Barbié et al. 2014] ont montré l'efficacité de cette méthode.

Cependant, les zones détectées sont dépendantes du choix du coefficient α . Ce coefficient est difficile à trouver a priori et dépendant du problème. Par définition, il y a toujours des éléments qui vérifient la condition de raffinement. Un critère d'arrêt doit donc être ajouté afin de stopper la génération de sous-niveaux dans la méthode LDC. Barbié et al. [Barbié et al. 2014] ont proposé que ce critère d'arrêt s'appuie sur un nombre minimal d'éléments dans la zone à raffiner.

En vue d'améliorer la façon d'automatiser la détection des zones à raffiner et ainsi la procédure de raffinement, nous proposons ici de raffiner tous les éléments possédant une erreur estimée en contraintes supérieure d'un seuil fixé par l'utilisateur. C'est-à-dire que nous raffinons les éléments K de la grille G_l pour lesquels l'erreur estimée locale e_K vérifie :

$$\|e_K\| > \beta \quad (3.2.1)$$

où $\|\cdot\|$ désigne une norme choisie par l'utilisateur et β le seuil d'erreur demandé par l'utilisateur.

Remarque : Dans le cas où l'on veut conserver des maillages réglés, il faudra ajouter des éléments supplémentaires afin d'obtenir des maillages locaux réglés. Par ailleurs, cette structuration de maillage rend l'estimateur ZZ plus fiable (cf. coin rentrant). Afin de garantir que tous les noeuds détectés soient dans l'ensemble A_l^0 (voir section 3.1.1.3), nous élargissons la zone à raffiner d'une rangée d'éléments.

L'algorithme 3 en page 62 décrit le couplage de la méthode LDC avec l'estimateur d'erreur *a posteriori* de Zienkiewicz et Zhu.

Critère de convergence du processus itératif :

Le processus itératif (\wedge -cycle) est considéré comme convergé si l'erreur relative entre les deux solutions grossières successives en norme L^2 est plus petite que δ :

$$\frac{\|u_0^k - u_0^{k-1}\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_0^k\|_{L^2(\Omega)}} \leq \delta \quad (3.2.2)$$

La méthode LDC converge souvent très vite. Typiquement, pour $\delta = 10^{-5}$, moins de quatre itérations sont nécessaires pour que la solution converge.

Critère supplémentaire d'arrêt de génération des sous-niveaux

La condition (3.2.1) sert également de condition d'arrêt. Quand les indicateurs d'erreur de tous les éléments sont inférieurs au seuil β , le processus de génération de sous-niveaux s'arrête. Cependant, quand le problème présente des singularités, ce critère est difficile voire impossible à atteindre et le raffinement continu indéfiniment. Nous proposons ici des critères supplémentaires d'arrêt pour la génération des grilles locales.

Dans un premier temps, nous utiliserons le critère présenté dans les travaux de Barbié et al. [Barbié *et al.* 2014]. Il consiste à définir un nombre d'éléments minimal conduisant à générer un sous-niveau supplémentaire. Cependant, ce nombre d'éléments est arbitrairement choisi alors qu'il semble devoir dépendre du problème traité.

Nous proposons de comparer ce critère à un critère géométrique. Le critère géométrique s'appuie sur la mesure de la zone détectée par l'équation (3.2.1) et est lié aux limites de la méthode LDC : quand la taille du maillage le plus fin est trop petite, la solution grossière n'est plus impactée par la solution la plus fine. Nous proposons deux types de critère géométrique. Le premier critère consiste à arrêter le raffinement lorsque la mesure de la zone détectée est inférieure à la mesure d'un élément de maillage grossier de départ ($S_l < S_e$ voir figure 3.5). S'il existe des parties connexes détectées, chacune est traitée de manière indépendante vis-à-vis du critère d'arrêt. Le second critère est basé sur le ratio de surface de la zone à raffiner vis-à-vis du domaine initial. Si ce ratio est inférieur à ϵ ($S_l < \epsilon S_0$ voir figure 3.5), la génération des sous-niveaux s'arrête.

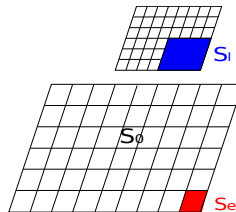


FIGURE 3.5 – Critère d'arrêt géométrique · S_0 mesure de surface de maillage grossier de départ · S_l mesure de surface de la zone détectée · S_e mesure d'un élément du maillage grossier de départ

Algorithme 3 : Algorithme LDC appliquée à la méthode des éléments finis couplée avec l'estimateur d'erreur

Initialisation : Calcul de la solution $[U_0^0]$;

$$\begin{cases} [K_0][U_0^0] = [F_0^0] + [G_0] \\ [H_0][U_0^0] = [U_{0,D}] \quad \text{sur } \Gamma_{D,0} \end{cases}$$

/*Itération : calcul de $[U_l^k]$ */;

pour $k=1$ à k^* **faire**

$$[U_0^k] = [U_0^{k-1}];$$

/*Étape de prolongement*/;

pour $l = 1$ à l^* **faire**

si $k=1$ **alors**

/*Génération des sous-niveaux et définition des conditions aux limites sur $\Gamma_l \cap \Gamma^*$ */;

Application de l'estimateur d'erreur sur la solution $[U_{l-1}^1]$ afin de détecter la zone à raffiner;

Raffinement de la zone détectée : obtention de la grille G_l ;

Définition des conditions aux limites de Dirichlet $[U_{l,D}]$ et de Neumann $[G_l]$ sur $\Gamma_l \cap \Gamma$ à partir de celles définies sur Γ ;

Définition du seconde membre $[F_l^0]$ par discrétisation f sur G_l ;

fin

Détermination des conditions aux limites sur $\Gamma_l \setminus \Gamma$

$$[U_{l,D}^k] = [P_{l-1}^l][U_{l-1}^k] \quad \text{sur } \Gamma_l \setminus \Gamma$$

Calcul de $[U_l^k]$

$$\begin{cases} [K_l][U_l^k] = [F_l^{k-1}] + [G_l] \\ [H_l][U_l^k] = [U_{l,D}^k] + [U_{l,D}] \quad \text{sur } \Gamma_{D,l} \end{cases}$$

fin

/*Étape de restriction*/;

pour $l = l^* - 1$ à 0 **faire**

Restriction de la solution fine $[U_{l+1}^k]$ sur A_l

$$[\tilde{U}_l^k] = [R_{l+1}^l][U_{l+1}^k] \quad \text{sur } A_l$$

Calcul du résidu local sur \hat{A}_l

$$[D_l^k] = [K_l][\tilde{U}_l^k] - [F_l^0] \quad \text{sur } \hat{A}_l$$

Correction du second membre

$$[F_l^k] = [F_l^0] + \chi_{\hat{A}_l}[D_l^k]$$

Calcul de $[U_l^k]$ en résolvant :

$$\begin{cases} [K_l][U_l^k] = [F_l^k] + [G_l] \\ [H_l][U_l^k] = [U_{l,D}^k] + [U_{l,D}] \quad \text{sur } \Gamma_{D,l} \end{cases}$$

fin

fin

3.3 Présentation des cas tests 2D issus de la simulation de l'IPG

Nous avons proposé une stratégie de raffinement automatique de maillage combinant la méthode LDC et l'estimateur ZZ avec plusieurs critères d'arrêt dans section 3.2. Nous présentons dans cette section des cas tests 2D simplifiés issus de la simulations de l'IPG pour évaluer les performances de cette stratégie.

Les cas tests utilisés ici sont inspirés de Marelle et Thouvenin [Marelle & Thouvenin 2011]. Nous n'étudions que la réponse de la gaine ayant un comportement élastique avec un module d'Young $E = 100$ GPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,3$. Le contact entre la pastille et la gaine est représenté par une pression discontinue sur le rayon interne de la gaine. Nous présentons ici deux cas tests (2D axisymétrie et 2D déformation plane) afin d'étudier séparément les deux phénomènes caractéristiques de l'Interaction mécanique Pastille-Gaine (IPG) : la déformation en diabololo et la fissuration de la pastille (voir la section 1.4).

3.3.1 Mise en diabololo : cas 2D(r,z)

Le cas test 2D axisymétrique, appelé par la suite cas test 2D(r,z), représente l'effet du phénomène de mise en diabololo de la pastille sur la gaine (voir section 1.3.1 et section 1.4). Le contact avec la pastille est modélisé par un pic de pression sur $600 \mu\text{m}$ au dessus du plan inter-pastille. Pour des raisons de symétrie, seule une demi-hauteur de pastille est modélisée (voir figure 3.6). Sur la figure 3.6b, l'ensemble des conditions aux limites permettant de résoudre le problème est donné.

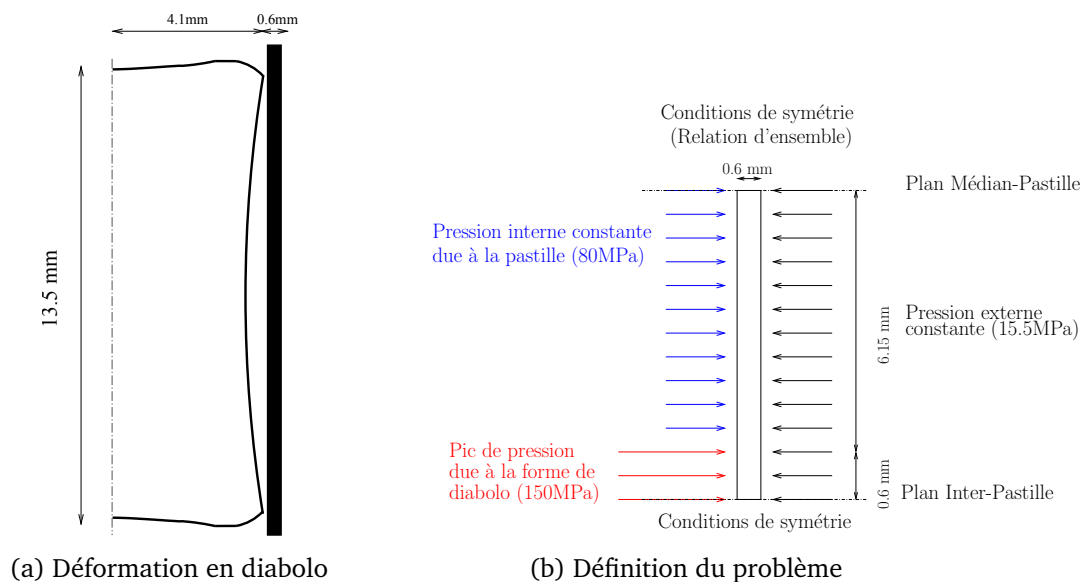


FIGURE 3.6 – Cas test 2D(r,z)

Ce cas test a une géométrie très simple : des maillages réguliers structurés uniformes peuvent parfaitement représenter le domaine d'étude.

Comme il n'existe pas de solution analytique pour ce cas test, nous utilisons une solution

obtenue avec un maillage très fin (maillage uniforme avec un pas de maille d'environ $2 \mu\text{m}$ et 1053801 nœuds en total) comme solution de référence.

3.3.2 Fissuration de la pastille : cas $2D(r,\theta)$

Le second cas test, appelé cas test $2D(r,\theta)$ par la suite, respecte l'hypothèse des déformations planes. Ce cas test est destiné à simuler l'effet de la fissuration de la pastille sur la gaine. La pastille est supposée se fissurer de façon régulière (voir [Nonon *et al.* 2004] et figure 3.7a). Pour des raisons de symétrie, on modélise seulement 1/16 de la gaine (voir figure 3.7b). L'ouverture de la fissure est de $8 \mu\text{m}$. La fissure de la pastille est représentée par une discontinuité de pression sur la gaine. La définition du problème traité est donnée sur la figure (3.7b).

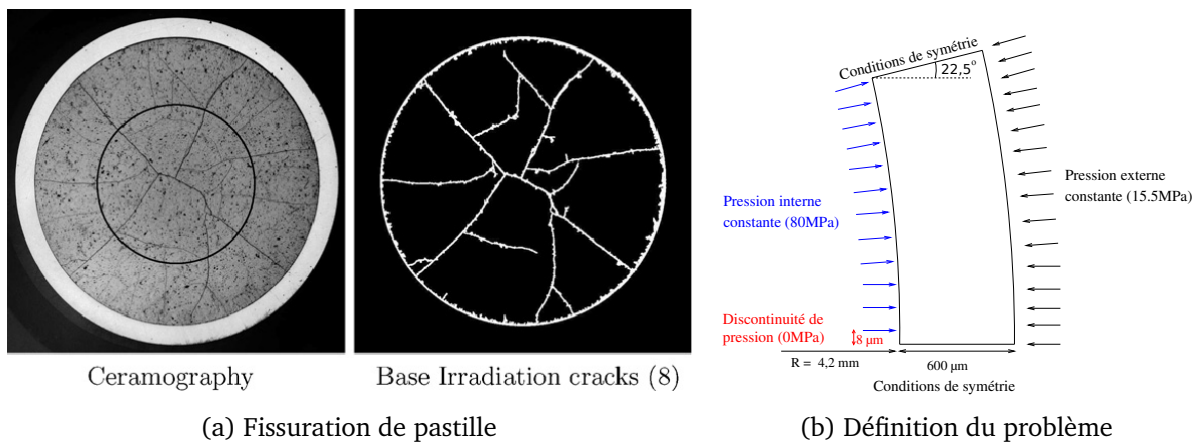


FIGURE 3.7 – Cas test $2D(r,\theta)$

Pour ce cas test, une solution analytique a été proposée par Roberts [Roberts 1978]. Cependant, cette solution est exprimée sous la forme d'une série Fourier et le nombre de termes requis afin d'obtenir une solution assez précise devient très vite prohibitif. Comme pour le cas test $2D(r,z)$, on utilise une solution obtenue avec un maillage très fin (maillage quasi-uniforme avec un pas de maille d'environ $1 \mu\text{m}$ et 260365 nœuds en total) comme solution de référence.

3.4 Résultats numériques

Nous présentons dans cette section les résultats numériques de notre stratégie de raffinement (voir la section 3.2) avec les différents critères d'arrêt de génération des sous-niveaux pour différentes normes : erreur relative en norme énergie, erreur absolue en norme infinie.

3.4.1 Choix numériques

Seules des opérations de pré et post traitement sont effectuées pour appliquer l'algorithme LDC combiné avec l'estimateur ZZ. Le solveur éléments finis peut être vu comme une boîte noire donc la stratégie proposée ici est applicable à n'importe quel solveur éléments finis. Le

logiciel Cast3M [CAST3M 2016] a été utilisé ici. Nous choisissons d'utiliser des éléments \mathbf{Q}_1 de Lagrange standard car le logiciel Cast3M ne traite pas correctement le problème de contact avec des éléments supérieurs à 1 même pour les éléments \mathbf{P}_k .

Les éléments finis \mathbf{Q}_1 permettent théoriquement d'atteindre une convergence d'ordre 2 en norme L^2 (cf. section 2.1.4). Cependant, l'approximation à l'ordre 1 de la discontinuité de pression par le maillage conduit notre schéma de discrétisation à être du premier ordre [Ramière 2008, Barbié *et al.* 2014]. Des opérateurs de prolongement et de restriction d'ordre 1 sont suffisants. Nous choisissons d'utiliser comme opérateur de prolongement l'interpolateur bilinéaire et comme opérateur de restriction une restriction canonique (car on utilise des maillage hiérarchiques).

À chaque étape, nous résolvons les problèmes par un solveur direct. À la première prolongation, la factorisation de la matrice de rigidité est conservée pour les résolutions des \wedge -cycles suivants. Pour les problèmes linéaires, seuls les temps de résolutions de la première étape de prolongement sont donc coûteux.

Les calculs sont effectués sur un ordinateur avec 8 processeurs de Intel Core i7-4790 et un espace de mémoire de 8 Gigabytes.

3.4.2 Erreur relative en norme énergie

3.4.2.1 Généralités

Nous commençons par étudier les résultats obtenus lorsque l'erreur choisie dans le critère (3.2.1) est l'erreur relative et la norme est la norme énergie.

L'erreur relative en norme énergie pour l'élément K donnée par l'estimateur ZZ peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\|e_K\|_E = \left(\frac{\int_K (\sigma^* - \sigma_h) : (\varepsilon^* - \varepsilon_h) dK}{\int_K \sigma^* : \varepsilon^* dK} \right)^{1/2} \quad (3.4.1)$$

où σ_h représente les contraintes calculées par la méthode des éléments finis, σ^* les contraintes lissées, C le tenseur d'élasticité et $\varepsilon = C^{-1}\sigma$, $\varepsilon^* = C^{-1}\sigma^*$.

On peut démontrer que lorsque la génération des sous-niveaux s'arrête grâce au critère $\|e_K\|_E \leq \beta$ avec β seuil d'erreur alors l'erreur $\|e_\Omega\|_E$ est également inférieure au seuil, avec $\|e_\Omega\|_E$ l'erreur sur le maillage composite (réunion des sous-niveaux) .

$$\begin{aligned} \|e_K\|_E &= \left(\frac{\int_K (\sigma^* - \sigma_h) : (\varepsilon^* - \varepsilon_h) dK}{\int_K \sigma^* : \varepsilon^* dK} \right)^{1/2} \leq \beta \\ \iff \frac{\int_K (\sigma^* - \sigma_h) : (\varepsilon^* - \varepsilon_h) dK}{\int_K \sigma^* : \varepsilon^* dK} &\leq \beta^2 \\ \iff \int_K (\sigma^* - \sigma_h) : (\varepsilon^* - \varepsilon_h) dK &\leq \beta^2 \left(\int_K \sigma^* : \varepsilon^* dK \right) \end{aligned}$$

En sommant sur le maillage composite, on a :

$$\implies \sum_{l=1}^{l^*+1} \sum_{K \subset \Omega_{l-1} \setminus \Omega_l} \int_K (\sigma^* - \sigma_h) : (\varepsilon^* - \varepsilon_h) dK \leq \beta^2 \sum_{l=1}^{l^*+1} \sum_{K \subset \Omega_{l-1} \setminus \Omega_l} \left(\int_K \sigma^* : \varepsilon^* dK \right)$$

avec $\Omega_{l^*+1} = \emptyset$.

On a donc :

$$\|e_\Omega\|_E = \left(\frac{\sum_{l=1}^{l^*+1} \sum_{K \subset \Omega_{l-1} \setminus \Omega_l} \int_K (\sigma^* - \sigma_h) : (\varepsilon^* - \varepsilon_h) dK}{\sum_{l=1}^{l^*+1} \sum_{K \subset \Omega_{l-1} \setminus \Omega_l} \int_K \sigma^* : \varepsilon^* dK} \right)^{1/2} \leq \beta \quad (3.4.2)$$

Ainsi, les erreurs composites entre la solution de la méthode LDC et la solution de référence à la fin du calcul (après convergence des \wedge -cycles) nous permettrons de vérifier si l'estimateur ZZ est un bon estimateur (i.e. s'il estime bien $\|e_K\|_E$).

3.4.2.2 Résultats pour le cas test 2D(r,z)

Nous appliquons la stratégie de couplage LDC-ZZ présentée dans la section 3.2 au cas test 2D(r,z).

On utilise un rapport de raffinement égal à 2. Les sous-grilles générées à partir d'un maillage initial de pas $164 \mu\text{m}$, pour un seuil d'erreur β fixé à 1% et un critère d'arrêt de 10 éléments minimaux sont présentées sur la figure 3.8. A partir du calcul sur le maillage initial, on estime les erreurs relatives sur chaque élément avec l'estimateur ZZ. Nous choisissons alors les éléments possédant une erreur supérieure au seuil de 1% (éléments en vert) pour générer un sous-niveau. Nous ajoutons ainsi récursivement des sous-niveaux jusqu'à atteindre le critère d'arrêt. Ces premiers résultats semblent très satisfaisants puisque les sous-grilles se localisent automatiquement autour de la zone de discontinuité de pression. On peut en effet penser que c'est dans cette zone qu'il est nécessaire d'avoir un maillage assez fin pour avoir une solution précise.

Critère d'arrêt en nombre d'élément

Le couplage LDC-ZZ a été testé pour différents pas de maillages de départ ($328 \mu\text{m}$, $164 \mu\text{m}$, $82 \mu\text{m}$, $41 \mu\text{m}$) et différents seuils d'erreur β (5%, 2%, 1%). Les résultats sont présentés dans le tableau 3.1 pour le critère d'arrêt en nombre d'éléments ($N_{MIN} = 10$). Le résultat pour chaque cas test est présenté en quatre lignes : la première ligne indique le nombre de sous-niveaux générés automatiquement, la deuxième ligne contient le nombre de nœuds de chaque niveau, la troisième ligne présente l'erreur relative entre la solution composite à convergence et la solution de référence et la quatrième ligne monte le temps total de calcul.

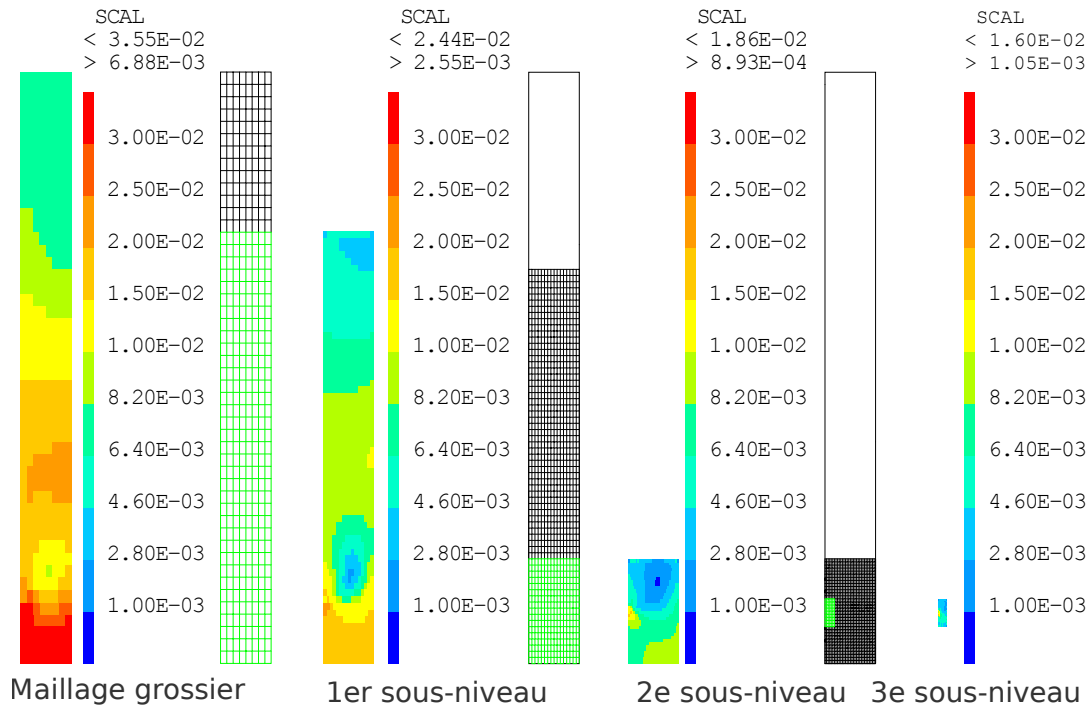


FIGURE 3.8 – Génération des sous-niveaux · Cas test 2D(r,z) · Maillage initial de pas $164 \mu\text{m}$ et seuil d'erreur relative en norme énergie des contraintes β est fixé à 1% · Critère d'arrêt : 10 éléments. Pour chaque niveau de maillage, les erreurs élémentaires estimées sont présentées à gauche et les mailles en vert présentées à droite sont les éléments à raffiner.

Nous remarquons que pour certains seuils, les maillages sont complètement raffinés. Dans ce cas, les maillages totalement raffinés deviennent alors le nouveau maillage de départ.

La première conclusion qui peut être tirée du tableau 3.1 est que la génération des sous-niveaux s'arrête automatiquement pour le nombre minimal d'éléments choisi. Quelque soit le maillage de départ, les zones raffinées sont les mêmes (taille et nombre d'éléments) pour un seuil fixé. Il montre aussi l'efficacité de la méthode LDC. En effet, quelque soit le maillage de départ, on obtient le même niveau d'erreur pour un pas de sous-niveau le plus fin équivalent. Les erreurs diminuent rapidement en ajoutant des sous-niveaux locaux avec un nombre limité de degrés de liberté. Il semble donc plus intéressant en terme de nombre de nœuds de commencer avec un maillage grossier et d'ajouter des sous-niveaux locaux que de commencer avec un maillage très fin. La seconde conclusion que l'on peut tirer est que la stratégie proposée fonctionne bien : à la fin des calculs, les erreurs relatives obtenues sont inférieures aux seuils demandés. De plus, chaque sous-niveau généré (excepté pour le maillage hi/8) est généralement nécessaire pour que l'erreur reste inférieure au seuil demandé. Ce cas test présente une géométrie simple avec petit nombre de degrés de liberté sur laquelle des maillages réglés uniformes peuvent être appliqués. Les temps d'exécution restent très faibles même quand on rajoute des sous-niveaux. Les temps de calculs pour les trois premiers maillages initiaux sont comparables. Par contre, les temps pour le maillage de départ de hi/8 sont plus élevés. La tendance qui se dégage en terme de temps de calcul est qu'il y a donc un compromis à trouver

Maillage de départ		Seuil d'erreur β		
		5%	2%	1%
hi	nombre de sous-niveaux :	1	2	4
	nombre de noeuds par niveau :	125/99	125/315/697	125/441/1105/2343/247
	erreur relative :	4,84%	2,11%	0,653%
	temps de calcul :	0.1 s	0.3 s	1.2 s
hi/2	nombre de sous-niveaux :	0	1	3
	nombre de noeuds par niveau :	441	441/697	441/1105/2343/247
	erreur relative :	4,20%	2,01%	0,653%
	temps de calcul :	0.03 s	0.3 s	1.2 s
hi/4	nombre de sous-niveaux :	0	0	2
	nombre de noeuds par niveau :	1649	1649	1649/2343/247
	erreur relative :	1,92%	1,92%	0,550%
	temps de calcul :	0.2 s	0.2 s	1.3 s
hi/8	nombre de sous-niveaux :	0	0	1
	nombre de noeuds par niveau :	6369	6369	6369/247
	erreur relative :	0,757%	0,757%	0,443%
	temps de calcul :	1.7 s	1.7 s	3.0 s

Tableau 3.1 – Cas test 2D(r,z) pour différents pas de maillages de départ et différents seuils fixés avec la formule (3.4.1) · hi=328 μm · Critère d'arrêt : 10 éléments

entre le maillage de départ et le nombre de sous-niveaux.

Pour le cas test avec le pas de maillage de départ le plus fin (hi/8) et pour le seuil de 1%, le nombre de sous-niveaux générés est supérieur au nombre minimal de niveaux requis pour respecter ce seuil. Il y a deux raisons possibles à cela :

- Soit les erreurs données par ZZ surestiment l'erreur de référence.
- Soit la condition $\|e_K\| \leq \beta$ est une condition suffisante mais pas nécessaire.

Pour vérifier la première hypothèse, nous avons comparé les erreurs estimées par l'estimateur de ZZ et les erreurs obtenues sur le même maillage entre la solution éléments finis et la solution de référence. La figure 3.9 montre que les erreurs sont en réalité sous-estimées par l'estimateur d'erreur ZZ.

Il semblerait donc que la condition $\|e_K\|_E \leq \beta$ soit suffisante mais non nécessaire pour que $\|e_\Omega\|_E \leq \beta$. Pour assurer que l'erreur globale soit inférieure au seuil, on n'a pas donc besoin que l'erreur de chaque élément soit inférieure au seuil. En effet, l'erreur relative globale est une sorte de moyenne des erreurs relatives locales.

Une autre version de l'estimateur ZZ en norme énergie est introduite par [Zienkiewicz & Zhu 1987] afin d'assurer que le dénominateur de la formule (3.4.1) soit non nul :

$$\|e_K\|_E = \left(\frac{\int_K (\sigma^* - \sigma_h) : (\varepsilon^* - \varepsilon_h) dK}{\int_K \sigma_h : \varepsilon_h dK + \int_K (\sigma^* - \sigma_h) : (\varepsilon^* - \varepsilon_h) dK} \right)^{1/2} \quad (3.4.3)$$

Cette formule d'erreur (3.4.3) est la formule utilisée dans les codes industriels comme

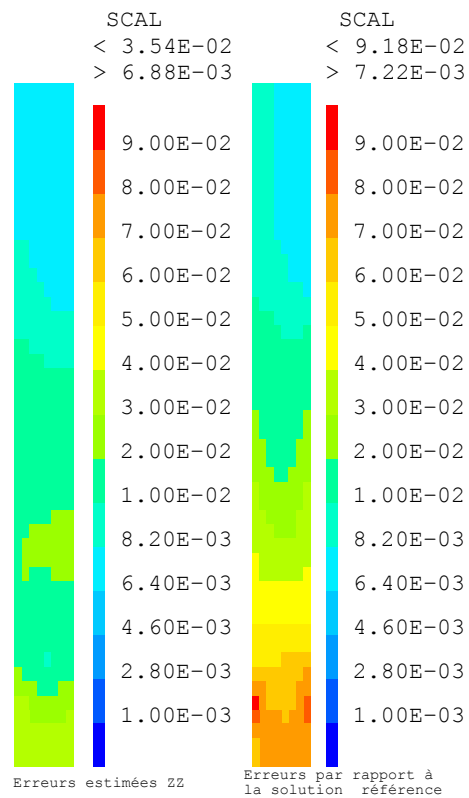


FIGURE 3.9 – Comparaison entre les erreurs estimées et les erreurs calculées par rapport à la solution de référence · Cas test 2D(r,z) · Pas de maillage $164 \mu\text{m}$.

Cast3M, Code_Aster, Catia, Abaqus etc. Nous testons les mêmes seuils et les mêmes maillages de départ avec cette formule d'erreur (3.4.3). Les résultats sont présentés dans le tableau 3.2.

Maillage de départ		Seuil d'erreur β		
		5%	2%	1%
hi	nombre de sous-niveaux :	1	2	4
	nombre de noeuds par niveau :	125/99	125/315/697	125/441/1105/2343/247
	erreur relative :	4,84%	2,11%	0,653%
	temps de calcul :	0.1 s	0.3 s	1.2 s
hi/2	nombre de sous-niveaux :	0	1	3
	nombre de noeuds par niveau :	441	441/697	441/1105/2343/247
	erreur relative :	4,20%	2.01%	0,653%
	temps de calcul :	0.03 s	0.3 s	1.2 s
hi/4	nombre de sous-niveaux :	0	0	2
	nombre de noeuds par niveau :	1649	1649	1649/2343/247
	erreur relative :	1,92%	1,92%	0,550%
	temps de calcul :	0.2 s	0.2 s	1.3 s
hi/8	nombre de sous-niveaux :	0	0	1
	nombre de noeuds par niveau :	6369	6369	6369/247
	erreur relative :	0,757%	0,757%	0,443%
	temps de calcul :	1.7s s	1.7 s	3.0 s

Tableau 3.2 – Cas test 2D(r,z) pour différents pas de maillages de départ et seuils fixés avec la formule (3.4.3) · hi=328 μm · Critère d'arrêt : 10 éléments

On remarque que les résultats sont similaires à ceux obtenus avec la formule (3.4.1). Les deux formules sont donc équivalentes pour nos cas test. Dans la suite, la formule (3.4.3) sera utilisée pour rester compatible avec codes industriels.

Les tableaux 3.1 et 3.2 montrent que l'application au cas test 2D(r,z) de la stratégie de raffinement LDC-ZZ est prometteuse. Cependant, nous avons utilisé le critère d'arrêt basé sur un nombre d'éléments arbitraire qu'il est difficile de déterminer a priori. La génération des sous-niveaux peut ne pas s'arrêter pour un autre nombre d'éléments choisi et ce nombre d'éléments varie en fonction du cas test.

Critères d'arrêt géométriques

Nous allons tester maintenant les critères d'arrêt géométriques proposés dans la section 3.2.

Nous commençons par le critère d'arrêt basé sur la mesure de la zone détectée qui doit être inférieure à la mesure d'un élément de maillage grossier de départ. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.3.

Les résultats montrent que ce critère fonctionne correctement. L'arrêt de la génération des sous-niveaux semble plus optimal, notamment pour les maillages initiaux les plus grossiers. Le principal inconvénient de cette stratégie est qu'elle dépend de la taille de maille initiale.

Maillage de départ		Seuil d'erreur β		
		5%	2%	1%
hi	nombre de sous-niveaux :	1	2	3
	nombre de noeuds par niveau :	125/99	125/315/697	125/441/1105/1155
	erreur relative :	4,84%	2,11%	0,969%
	temps de calcul :	0.1 s	0.3 s	0.7 s
hi/2	nombre de sous-niveaux :	0	1	2
	nombre de noeuds par niveau :	441	441/697	441/1105/2343
	erreur relative :	4,20%	2.01%	0,899%
	temps de calcul :	0.03 s	0.2 s	0.8s
hi/4	nombre de sous-niveaux :	0	1	2
	nombre de noeuds par niveau :	1649	1649/117	1649/2343/247
	erreur relative :	1,92%	1,01%	0,550%
	temps de calcul :	0.2 s	0.3 s	1.3 s
hi/8	nombre de sous-niveaux :	0	0	2
	nombre de noeuds par niveau :	6369	6369	6369/247/165
	erreur relative :	0,757%	0,757%	0,440%
	temps de calcul :	1.7 s	1.7 s	3.2 s

Tableau 3.3 – Cas test 2D(x,z) pour différents pas de maillages de départ et seuils fixés avec la formule (3.4.3) · $h_i = 328 \mu\text{m}$ · Critère d'arrêt : mesure inférieure à un élément du maillage de départ

Quand la taille de maille initiale est petite, cette stratégie conduit à générer des sous-niveaux non nécessaires (cf. pas de maillage de départ hi/8).

Nous allons tester le critère d'arrêt basé sur le ratio de surface de la zone à raffiner du domaine de départ. Ici, nous choisissons 0,5% de la mesure du domaine de départ comme critère d'arrêt. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.4. Ces résultats sont satisfaisants. En effet, ce critère permet d'arrêter la génération des sous-niveaux indépendamment de la taille de maille initiale. Le nombre de sous-niveaux ajoutés est suffisant pour assurer que les erreurs relatives obtenues sont inférieures aux seuils demandés. Cependant, il conduit à générer un sous-niveau de plus que nécessaire pour les calculs avec le seuil $\beta = 1\%$

Génération de sous-niveaux avec un algorithme de type FMG local

Nous avons essayé d'utiliser l'algorithme FMG local (voir section 2.2.2 et figure 3.10) afin de générer un sous-niveau supplémentaire uniquement lorsque l'erreur composite globale estimée après convergence était supérieure au seuil demandé.

Les résultats pour différents pas de maillages de départ et différents seuils sont présentés dans le tableau 3.5. Le résultat pour chaque cas test est présenté en cinq lignes : la première ligne indique le nombre de sous-niveaux générés automatiquement, la deuxième ligne contient le nombre de noeuds de chaque niveau, la troisième ligne donne l'erreur relative estimée sur la solution composite à convergence, la quatrième ligne présente l'erreur relative entre la

Maillage de départ		Seuil d'erreur β		
		5%	2%	1%
hi	nombre de sous-niveaux :	1	3	4
	nombre de noeuds par niveau :	125/99	125/315/697/117	125/441/1105/2343/247
	erreur relative :	4,84%	1,34%	0,653%
	temps de calcul :	0.1 s	0.3 s	1.2 s
hi/2	nombre de sous-niveaux :	0	2	3
	nombre de noeuds par niveau :	441	441/697/117	441/1105/2343/247
	erreur relative :	4,20%	1,17%	0,653%
	temps de calcul :	0.04 s	0.3 s	1.2 s
hi/4	nombre de sous-niveaux :	0	1	2
	nombre de noeuds par niveau :	1649	1649/117	1649/2343/247
	erreur relative :	1,92%	1,02%	0,550%
	temps de calcul :	0.1 s	0.2 s	1.3 s
hi/8	nombre de sous-niveaux :	0	0	1
	nombre de noeuds par niveau :	6369	6369	6369/247
	erreur relative :	0,757%	0,757%	0,443%
	temps de calcul :	1.7 s	1.7 s	3.0 s

Tableau 3.4 – Cas test 2D(r,z) pour différents pas de maillages de départ et seuils fixés avec la formule (3.4.3) · $h_i = 328 \mu\text{m}$ · Critère d'arrêt : mesure inférieure à 0,5% de la mesure du domaine initial

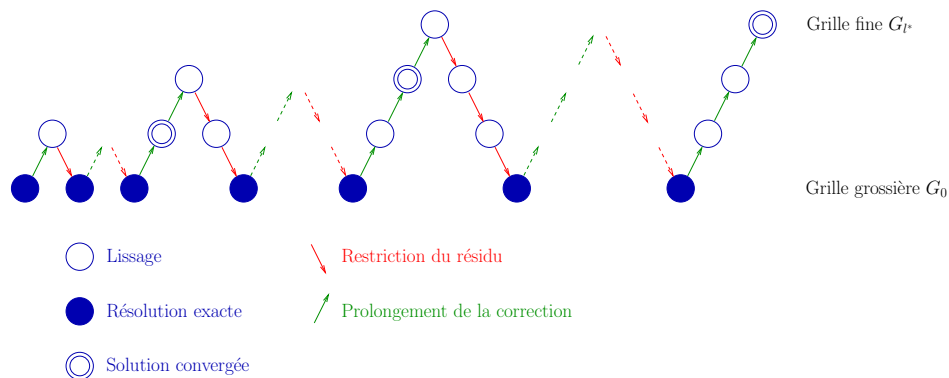


FIGURE 3.10 – Représentation du cycle FMG pour 4 niveaux de grilles

solution composite à convergence et la solution de référence et la cinquième ligne montre le temps de calcul. Comme les erreurs sont sous-estimées par l'estimateur ZZ (voir figure 3.12), cette stratégie conduit à ne pas suffisamment raffiner. Les erreurs par rapport à la solution de référence dépassent le seuil à la fin du calcul. L'algorithme FMG combiné à l'estimateur ZZ ne permet pas d'obtenir une stratégie de raffinement plus optimale que les \wedge -cycles standards de la méthode LDC.

Par ailleurs, du fait que les sous-niveaux de la méthode LDC sont générés à la première

Maillage de départ		Seuil d'erreur β		
		5%	2%	1%
hi	nombre de sous-niveaux :	0	1	2
	nombre de noeuds par niveau :	125	125/315	125/441/1105
	erreur relative estimée :	3,83%	1,99%	0,986%
	erreur relative :	8,52%	4,25%	1,95%
	temps de calcul :	0.01 s	0.2 s	0.4 s
hi/2	nombre de sous-niveaux :	0	0	1
	nombre de noeuds par niveau :	441	441	441/1105
	erreur relative estimée :	1,89%	1,89%	0,986%
	erreur relative :	4,20%	4,20%	1,95%
	temps de calcul :	0.03 s	0.03 s	0.2 s
hi/4	nombre de sous-niveaux :	0	0	0
	nombre de noeuds par niveau :	1649	1649	1649
	erreur relative estimée :	0,924%	0,924%	0,924%
	erreur relative :	1,92%	1,92%	1,92%
	temps de calcul :	0.2 s	0.2 s	0.2 s
hi/8	nombre de sous-niveaux :	0	0	0
	nombre de noeuds par niveau :	6369	6369	6369
	erreur relative estimée :	0,455%	0,455%	0,445%
	erreur relative :	0,757%	0,757%	0,757%
	temps de calcul :	1.7 s	1.7 s	1.7 s

Tableau 3.5 – Cas test 2D(r,z) pour différents pas de maillages de départ et seuils fixés avec l'algorithme FMG local · $h_i = 328 \mu\text{m}$ · Critère d'arrêt : erreur composite estimée inférieure au seuil

étape de prolongement et donc à partir de solutions non convergées, nous nous demandons si une procédure de détection du deuxième niveau après convergence sur le premier sous-niveau (convergence du \wedge -cycle bi-grille) peut améliorer la stratégie proposée.

En comparant les erreurs estimées sur le premier sous-niveau après convergence du cycle bi-grille (cf. figure 3.11a) et celles estimées sur la solution non convergée à la première étape de prolongement (cf. figure 3.11b), nous pouvons conclure que les zones détectées restent toujours les mêmes. Le processus FMG ne permet donc pas vraiment d'améliorer la stratégie LDC-ZZ proposée.

Conclusion

Nous avons appliqué plusieurs stratégies de génération de sous-niveaux au cas test 2D(r,z). La stratégie de raffinement LDC-ZZ et les critères d'arrêt proposés permettent tous de générer des sous-niveaux et de stopper la génération de façon automatique. À la fin des calculs, les erreurs par rapport à la solution de référence sont généralement inférieures aux seuils. La stratégie basée sur l'algorithme FMG local ne permet pas d'améliorer les solutions obtenues

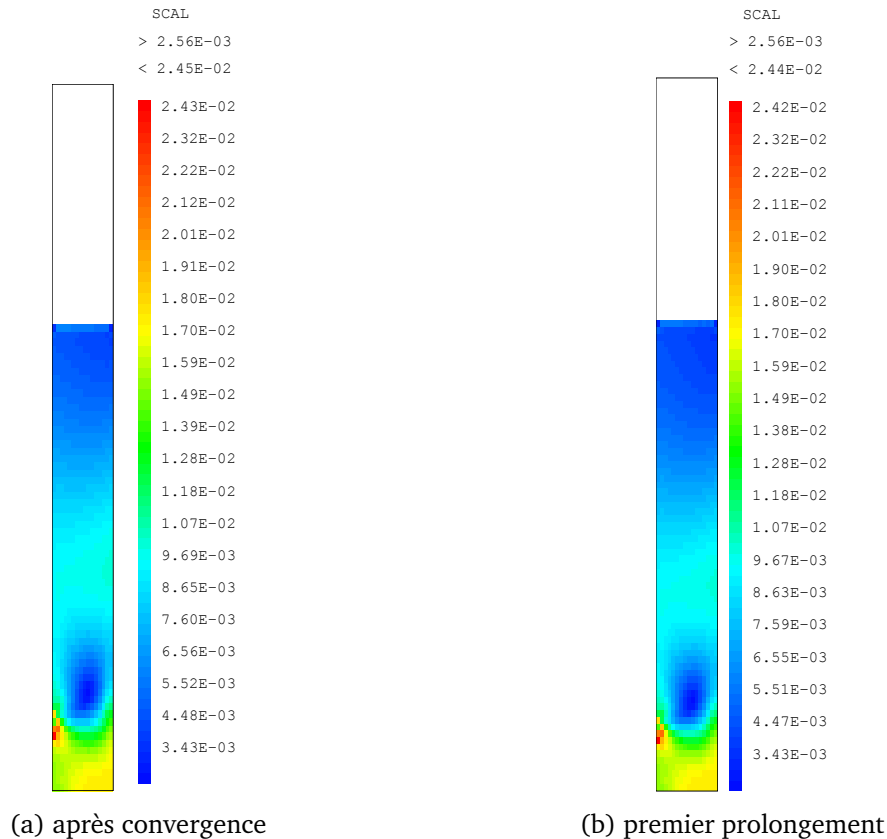


FIGURE 3.11 – Erreurs estimées du premier sous-niveau après convergence à gauche et du premier prolongement à droite · Cas test 2D(r,z) · Maillage initial de pas $164 \mu\text{m}$ · Seuil de contraintes fixé à 1%.

car l'erreur est trop sous-estimée par l'estimateur ZZ.

Parmi les différents critères d'arrêt, les résultats obtenus avec le critère d'arrêt en nombre d'élément sont satisfaisants. Les erreurs par rapport à la solution de référence sont en général inférieures aux seuils. Cependant, le nombre d'éléments minimal est difficile à définir et varie en fonction du problème. Les résultats avec le critère d'arrêt lié à la mesure d'un élément de maillage grossier de départ sont optimaux pour les maillages de départ de h_i et $h_i/2$ avec le seuil $\beta = 1\%$. Cependant, pour les maillages de départ de $h_i/4$ et $h_i/8$, des sous-niveaux inutiles sont générés. Les résultats pour le critère d'arrêt basé sur le ratio de surface de la zone à raffiner vis-à-vis du domaine de départ montrent que les erreurs obtenues sont inférieures aux seuils. Il semble tous les sous-niveaux pour les seuils des 5% et 2% sont nécessaires. Cependant, quelques sous-niveaux inutiles pour le seuil de 1% sont ajoutés pour les maillages les plus grossiers.

3.4.2.3 Résultats du cas test 2D(r,θ)

Pour aider à faire un choix entre les critères d'arrêt indépendant du problème, nous testons les différents critères d'arrêt de génération des sous-niveaux sur le cas test 2D(r,θ). Les résul-

tats sont présentés dans le tableau 3.6 pour le critère en nombre d'élément (ici, le nombre optimal semble être 7), dans le tableau 3.7 pour le critère géométrique de la mesure d'un élément du maillage de départ et dans le tableau 3.8 pour le critère géométrique de du ratio de la mesure du domaine initial.

Maillage de départ		Seuil d'erreur β		
		5%	2%	1%
hi	nombre de sous-niveaux :	0	0	2
	nombre de noeuds par niveau :	231	231	231/861/121
	erreur relative :	7,05%	7,05%	1,27%
	temps de calcul :	0.01 s	0.01 s	0.3 s
hi/2	nombre de sous-niveaux :	0	0	1
	nombre de noeuds par niveau :	861	861	861/121
	erreur relative :	3,19%	3,19%	1,27%
	temps de calcul :	0.08 s	0.08 s	0.1 s
hi/4	nombre de sous-niveaux :	0	0	0
	nombre de noeuds par niveau :	3321	3321	3321
	erreur relative :	1,22%	1,22%	1,22%
	temps de calcul :	0.5 s	0.5 s	0.5 s

Tableau 3.6 – Cas test 2D(r,θ) pour différents pas de maillages de départ et seuils fixés avec la formule (3.4.3) · hi=109 μm · Critère d'arrêt : 7 éléments

Maillage de départ		Seuil d'erreur β		
		5%	2%	1%
hi	nombre de sous-niveaux :	0	1	2
	nombre de noeuds par niveau :	231	231/81	231/861/121
	erreur relative :	7,05%	3,26 %	1,27%
	temps de calcul :	0.03 s	0.1 s	0.3 s
hi/2	nombre de sous-niveaux :	0	1	2
	nombre de noeuds par niveau :	861	861/81	861/121/121
	erreur relative :	3,19 %	1,27%	0,462%
	temps de calcul :	0.07 s	0.2 s	0.3 s
hi/4	nombre de sous-niveaux :	0	1	2
	nombre de noeuds par niveau :	3321	3321/81	3321/121/121
	erreur relative :	1,22%	0,294%	0,289%
	temps de calcul :	0.8 s	1.0 s	1.2 s

Tableau 3.7 – Cas test 2D(r,θ) pour différents pas de maillages de départ et seuils fixés avec la formule (3.4.3) · hi=109 μm · Critère d'arrêt : mesure inférieure à un élément de maillage de départ

Maillage de départ		Seuil d'erreur β		
		5%	2%	1%
hi	nombre de sous-niveaux :	0	2	3
	nombre de noeuds par niveau :	231	231/99/81	231/861/121/121
	erreur relative :	7,05%	1,48 %	0,464%
	temps de calcul :	0.02 s	0.02 s	0.4 s
hi/2	nombre de sous-niveaux :	0	1	2
	nombre de noeuds par niveau :	861	861/81	861/121/121
	erreur relative :	3,19 %	1,27%	0,462%
	temps de calcul :	0.07 s	0.08 s	0.5 s
hi/4	nombre de sous-niveaux :	0	0	1
	nombre de noeuds par niveau :	3321	3321	3321/121
	erreur relative :	1,22%	1,22%	0,296%
	temps de calcul :	0.6 s	0.6 s	1.0 s

Tableau 3.8 – Cas test 2D(r,θ) pour différents pas de maillages de départ et seuils fixés avec la formule (3.4.3) · $h_i = 109 \mu\text{m}$ · Critère d'arrêt : mesure inférieure 0,5% de la mesure du domaine initial

Les résultats montrent que la génération des sous-niveaux s'arrête bien automatiquement dans tous les cas. La combinaison LDC-ZZ fonctionne bien ici aussi puisqu'à la fin des calculs, les erreurs obtenues sont généralement inférieures aux seuils fixés. Le nombre d'éléments minimal pour arrêter la génération de sous-niveaux a été difficile à définir pour le critère d'arrêt en nombre d'élément. En effet, le cas test 2D(r,θ) est plus sensible au nombre d'éléments minimal que le cas test 2D(r,z). Pour le maillage de départ de h_i , il a 3 éléments possédant une erreur supérieure à 2%. Afin qu'un sous-niveaux soit ajouté, le nombre minimal d'élément doit être inférieur à 3. Cependant, pour le seuil à 1%, la génération de sous-niveaux ne s'arrête pas si le nombre minimal d'élément est inférieur à 7. Le deuxième critère améliore la stratégie pour les maillages de départ avec h_i et $h_i/2$ mais on voit bien ici que ça conduit à raffiner inutilement pour $h_i/4$. Ce critère d'arrêt n'est pas non plus optimal. Les résultats 3.8 montrent que le critère géométrique basé sur le rapport de mesure par rapport au domaine initial est le meilleur pour ce cas test. Chaque sous-niveaux généré semble être nécessaire pour que l'erreur de la solution LDC par rapport à la solution de référence reste inférieure au seuil.

Les résultats obtenus pour le maillage le plus grossier (avec le pas de maillage $h_i = 109 \mu\text{m}$) ne sont pas aussi bons qu'attendu pour les deux premiers seuils (5% et 2%), surtout pour les deux premiers critères d'arrêt. En vue d'en trouver la raison, l'erreur relative estimée par l'estimateur de Zienkiewicz et Zhu et l'erreur relative par rapport à la solution de référence sont comparées dans la figure 3.12. La figure 3.12 montre que l'erreur la plus importante par rapport à la solution de référence est située autour du coin en bas à droite du maillage. Ceci est dû à la mauvaise approximation des conditions aux limites du fait du maillage trop grossier. Ce type d'erreur ne peut pas être détecté par l'estimateur ZZ qui est basé sur le lissage de la solution. Si la solution est lisse mais fautive, l'estimateur ZZ ne peut pas la détecter. Dans

cette zone, l'estimateur ZZ sous-estime énormément l'erreur.

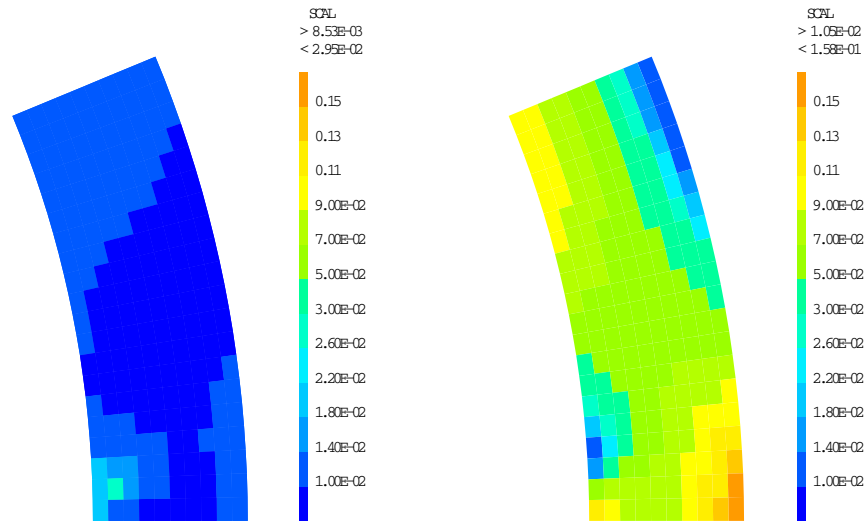


FIGURE 3.12 – Erreur estimée par l'estimateur ZZ (à gauche) et erreur entre la solution EF et la solution de référence (à droite) (pas de maillage $h_i = 109 \mu\text{m}$)

3.4.2.4 Bilan

Nous avons appliqué la stratégie de raffinement et les critères d'arrêt proposés pour les deux cas tests $2D(r,z)$ et $2D(r, \theta)$. Nous avons comparé la stratégie proposée de couplage LDC-ZZ et la stratégie basée sur l'algorithme FMG local. En raison de la sous-estimation de l'estimateur ZZ, la stratégie de couplage FMG local-ZZ fonctionne moins bien que la stratégie de couplage LDC-ZZ. Les résultats de la stratégie de couplage LDC-ZZ sont satisfaisants : les sous-niveaux sont ajoutés automatiquement dans les zones d'intérêt, les erreurs de solutions diminuent rapidement par ajout de sous-niveaux, les erreurs sont de même niveau pour des maillages les plus fins équivalents. Parmi les trois critères d'arrêt permettant stopper automatiquement la génération de sous-niveaux, le critère d'arrêt basé sur le ratio de surface de la zone à raffiner vis-à-vis du domaine de départ semble être le plus optimal. Dans la suite, nous allons tester cette stratégie pour un critère de détection basé sur l'erreur absolue en norme infinie.

3.4.3 Erreur absolue en norme infinie

3.4.3.1 Généralités

Dans le cadre de la modélisation de l'IPG, l'erreur absolue en norme infinie sur les contraintes est souvent beaucoup plus intéressante d'un point de vue pratique pour les mécaniciens. L'erreur absolue en norme infinie estimée par ZZ peut être exprimée sous la forme suivante :

$$\|e_{K,abs}\|_{\infty} = \|\sigma^* - \sigma_h\|_{\infty} \quad (3.4.4)$$

Cependant, cette norme est rarement utilisée pour les estimateurs d'erreur *a posteriori* dans la littérature car elle repose directement sur la "fiabilité" quantitative de l'estimateur.

3.4.3.2 Résultats pour le cas test 2D(r,z)

Dans un premier temps, nous comparons les erreurs absolues estimées par l'estimateur de ZZ et les erreurs absolues par rapport à la solution de référence pour le cas test 2D(r,z) sur les contraintes équivalentes de von Mises et sur différentes composantes du champ de contraintes dans la figure 3.13. Cette figure montre que les erreurs sur la contrainte équivalente de von Mises et les erreurs sur les contraintes les contraintes cisaillement sont celles qui sont les mieux estimées par l'estimateur ZZ. De plus, la contrainte équivalente de von Mises prend en compte toutes les des composantes des contraintes. C'est donc plus intéressant d'estimer l'erreur absolue en norme infinie de la contrainte équivalente de von Mises.

Nous allons donc nous baser sur les erreurs absolues sur les contraintes équivalentes de von Mises pour détecter les éléments à raffiner. A la fin du calcul, afin de valider la stratégie proposée nous évaluerons les erreurs absolues entre la solution de LDC et la solution de référence sur le maillage composite privé du dernier niveau. En effet, du fait de la singularité de contrainte, le dernier niveau contient toujours une zone sur laquelle l'erreur maximale est supérieure au seuil. Les résultats sont présentés dans le tableau 3.9.

Maillage de départ		Seuil d'erreur β		
		10MPa	5MPa	2MPa
hi	nombre de sous-niveaux :	4	5	6
	nombre de noeuds par niveau :	125/297/697/891/285	125/441/1071/2541/2925/621	125/441/1649/4653/11895/12513/38293
	erreur absolue :	8,34MPa	5,00MPa	2,25MPa
hi/2	nombre de sous-niveaux :	3	4	5
	nombre de noeuds par niveau :	441/697/891/285	441/1071/2541/2925/621	441/1649/4653/11895/12513/38239
	erreur absolue :	8,32MPa	5,00MPa	2,25MPa
hi/4	nombre de sous-niveaux :	2	3	4
	nombre de noeuds par niveau :	1649/891/315	1649/2541/2925/621	1649/4653/11895/12513/38239
	erreur absolue :	8,28MPa	4,99MPa	2,25MPa
hi/8	nombre de sous-niveaux :	1	2	3
	nombre de noeuds par niveau :	6369/315	6369/2925/621	6369/11895/12513/38239
	erreur absolue :	8,29MPa	4,99MPa	2,25MPa

Tableau 3.9 – Cas test 2D(r,z) pour différents pas de maillages de départ et seuils fixés · Erreur absolue sur la contrainte équivalente de von Mises en norme infinie · $h_i = 328 \mu\text{m}$ · Critère d'arrêt : mesure inférieure à 0,5% de la mesure du domaine initial

Les résultats obtenus en utilisant l'erreur absolue sur la contrainte équivalente de von Mises en norme infinie sont très satisfaisants pour le cas test 2D(r,z). La stratégie LDC-ZZ marche très bien dans ce cas. Elle permet d'arrêter automatiquement de génération de sous-niveaux. Les sous-niveaux sont ajoutés dans les même zones et avec le même nombre d'éléments pour un seuil fixé. Pour la taille de maille la plus fine équivalente, les erreurs absolues sont similaires. A la fin des calculs, les erreurs absolues en norme infinie entre la solution éléments finis et la solution de référence sont généralement très proches des erreurs demandées.

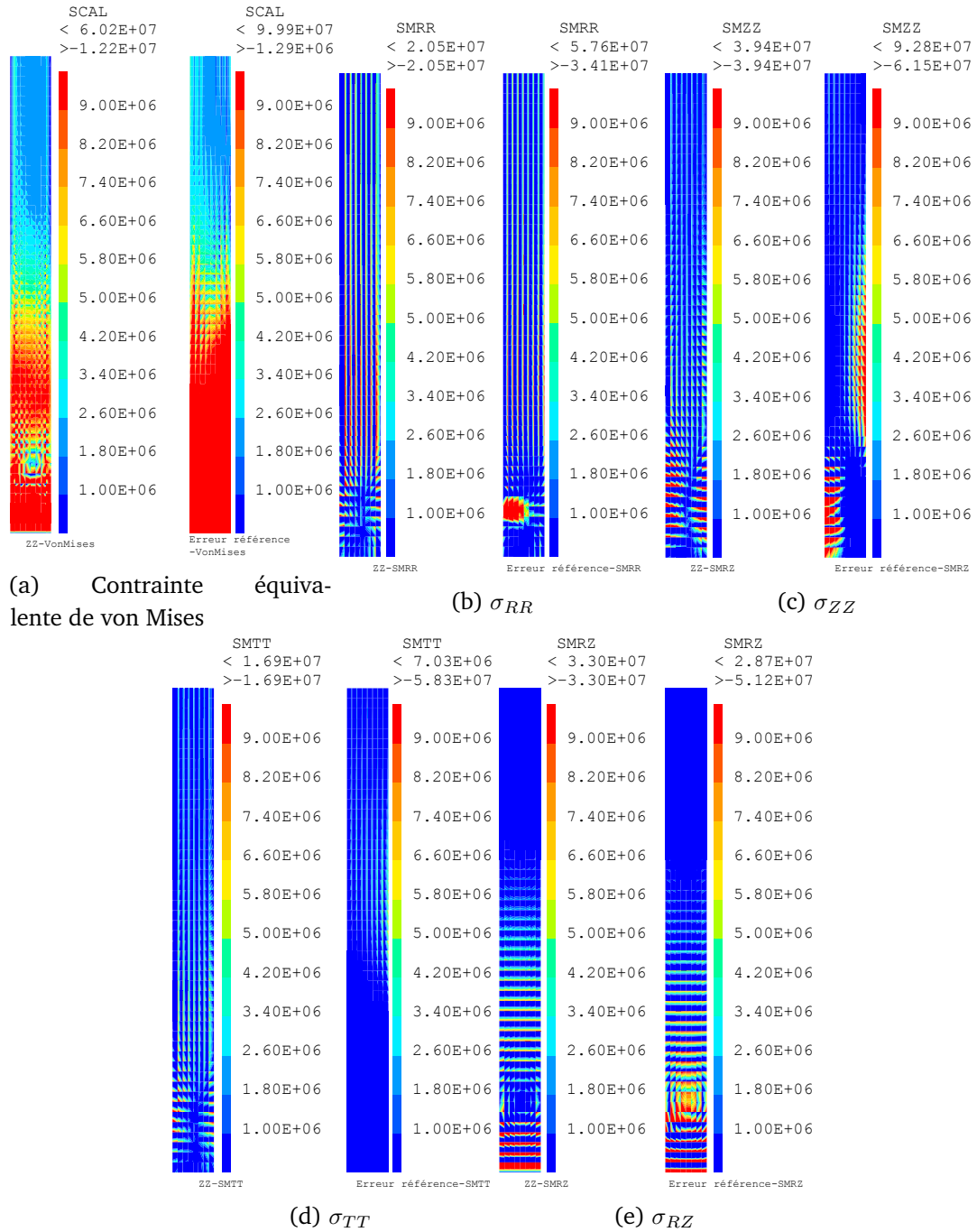


FIGURE 3.13 – Comparaison des erreurs absolues estimées par l’estimateur ZZ et des erreurs absolues entre la solution des éléments finis et la solution de référence · Cas test 2D(r,z) $h_i = 164 \mu\text{m}$

3.4.3.3 Résultats pour le cas test 2D(r,θ)

Afin de conforter les conclusions précédentes, nous appliquons la stratégie de couplage LDC-ZZ basée sur les erreurs absolues en norme infinie sur les contraintes équivalentes de von Mises pour le cas test 2D(r,θ) avec différents pas de maillages de départ et différents seuils

(10 MPa, 5 MPa, 2 MPa). Les résultats sont présentés dans le tableau 3.10.

Maillage de départ		Seuil d'erreur β		
		10MPa	5MPa	2MPa
hi	nombre de sous-niveaux :	3	3	3
	nombre de noeuds par niveau :	231/99/99/99	231/861/143/169	231/861/3321/289
	erreur absolue :	4,45MPa	3,35MPa	2,06MPa
hi/2	nombre de sous-niveaux :	2	2	2
	nombre de noeuds par niveau :	861/99/99	861/143/169	861/3321/289
	erreur absolue :	2,97MPa	2,80MPa	2,06MPa
hi/4	nombre de sous-niveaux :	1	1	1
	nombre de noeuds par niveau :	3321/99	3321/143	3321/289
	erreur absolue :	3,04MPa	2,62MPa	2,06MPa

Tableau 3.10 – Cas test 2D(r,θ) pour différents pas de maillages de départ et seuils fixés · Erreur absolue sur la contrainte équivalente de von Mises en norme infinie · $h_i=109 \mu\text{m}$ · Critère d'arrêt : mesure inférieure à 0,5% de la mesure du domaine initial

Les résultats montrent que la stratégie de couplage LDC-ZZ utilisant l'erreur absolue sur la contrainte équivalente de von Mises en norme infinie fonctionne également bien pour le cas test 2D(r,θ). La génération des sous-niveaux s'arrête automatiquement et de manière cohérente. Les sous-niveaux sont ajoutés dans les mêmes zones et ont les mêmes nombres d'éléments pour des calculs avec le même seuil et différents pas de maillages de départ. Les erreurs en norme absolue diminuent rapidement par ajout des sous-niveaux. Les erreurs par rapport à la solution de référence après la convergence de la méthode LDC sont proches pour des tailles de maille fines équivalentes. Cependant, il semble que cette stratégie génère plus de sous-niveaux que nécessaire pour les cas tests avec seuils fixés à 10 MPa. Nous allons regarder en détail l'évolution de l'erreur en fonction de nombre de sous-niveaux. Pour ce faire, nous reprenons les cas test avec le seuil fixé à 10 MPa et différents pas de maillages de départ. Pour chaque cas test, nous fixons le nombre de sous-niveaux dans la phase de génération des sous-niveaux. Les erreurs calculées entre les solutions convergées et la solution de référence sont présentées dans le tableau 3.11 ci-après. On voit que l'ajout d'un sous-niveau fait descendre d'un facteur supérieur à 2 l'erreur absolue. Ce tableau montre que les sous-niveaux générés par la stratégie de raffinement automatique sont en fait nécessaires pour que l'erreur absolue reste inférieure au seuil.

	1 Sous-niveau	2 Sous-niveaux	3 Sous-niveaux
hi	25,73MPa	10,63MPa	4,45MPa
hi/2	10,44MPa	2,97MPa	
hi/4	3,04MPa		

Tableau 3.11 – Erreur des sous-niveaux pour différents pas de maillages de départ et seuil fixé à 10MPa · $h_i=109 \mu\text{m}$

Nous pouvons donc conclure que la stratégie de couplage LDC-ZZ avec critère d'arrêt

automatique fonctionne globalement très bien pour le cas test 2D(r,θ) en utilisant l'erreur absolue sur la contrainte équivalente de von Mises en norme infinie.

Bilan du chapitre

Dans le cadre de la mise en place d'une méthode multi-grilles permettant de simuler l'Interaction mécanique Pastille-Gaine (IPG) de façon précise, nous avons étudié dans ce chapitre les performances d'une stratégie basée sur le couplage de la méthode multi-grilles LDC et de l'estimateur d'erreur *a posteriori* ZZ.

Afin de générer les sous-niveaux automatiquement et indépendamment du problème traité, nous avons proposé une stratégie de couplage LDC-ZZ basée directement sur l'erreur estimée par l'estimateur ZZ. Divers critères d'arrêt supplémentaires ont également été proposés afin d'arrêter la génération des sous-niveaux quand le problème présente des singularités de contraintes. Les résultats numériques des cas tests 2D élastiques nous ont permis d'apprécier les avantages et les limitations de chacun des critères d'arrêt. De manière générale, le couplage LDC-ZZ fonctionne très bien puisque les sous-niveaux sont ajoutés automatiquement autour des zones de singularités. La stratégie proposée conduit généralement à des erreurs (en norme énergie ou infinie) inférieures au seuil demandé mais un des critères d'arrêt est plus optimal en terme de sous-niveaux et d'indépendance au problème traité. Il s'agit du critère d'arrêt basé sur le ratio de surface de la zone à raffiner sur le domaine initial le plus optimal pour des cas tests 2D élastiques.

Cette stratégie de couplage LDC-ZZ et ce critère d'arrêt ont été appliqués et ont fonctionné correctement sur différents cas test 2D élastiques avec différentes normes d'erreur. Cette stratégie de raffinement semble donc très générique.

Chapitre 4

Application de la stratégie de raffinement automatique au problème de contact

L'objectif du chapitre est de tester la stratégie de raffinement automatique de maillage introduite au chapitre 3 sur un problème de contact. L'enjeu ici est de vérifier que la stratégie proposée permet un raffinement multi-corps avec contact efficace.

Sommaire

4.1	Problème de contact	85
4.1.1	Problème de contact unilatéral	86
4.1.2	Problème de contact avec frottement	88
4.2	Quelques méthodes pour résoudre le problème de contact avec ou sans frottement	91
4.2.1	Méthode de pénalisation	91
4.2.2	Méthode des multiplicateurs de Lagrange	92
4.2.3	Méthode du Lagrangien augmenté	92
4.2.4	Méthode de point fixe	93
4.2.5	Algorithmes de résolutions	93
4.3	Stratégie de raffinement automatique du maillage adaptée au problème de contact	94
4.4	Résultats numériques	97
4.4.1	Présentation du cas test	97
4.4.2	Illustration de la détection des zones à raffiner	97
4.4.3	Résultats numérique pour un cas test sans jeu ni frottement	98
4.4.4	Résultats numériques pour un cas test avec jeu sans frottement	105
4.4.5	Résultats numériques pour un cas test avec jeu avec frottement	106
4.4.6	Contact avec frontière courbe	110

4.1 Problème de contact

Nous considérons un problème statique de contact entre deux solides déformables notés Ω_1 et Ω_2 , $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ (voir figure 4.1). Les matériaux de ces deux solides sont supposés être élastiques linéaires.

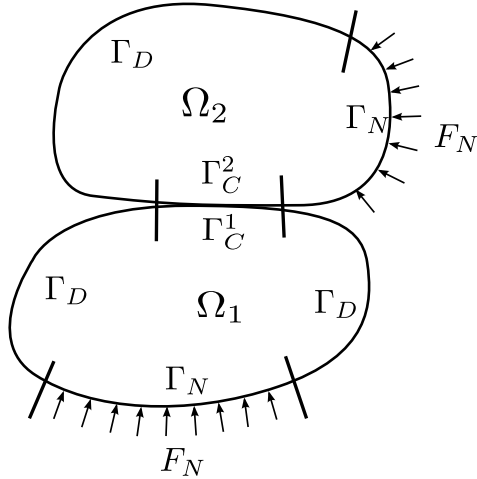


FIGURE 4.1 – Problème modèle de contact entre deux solides déformables

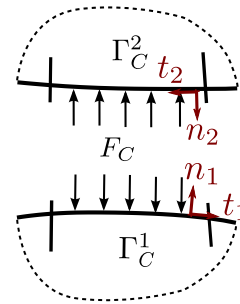


FIGURE 4.2 – Zone de contact

Les frontières suffisamment régulières de ces deux solides, notées respectivement $\partial\Omega_1$ et $\partial\Omega_2$, sont divisées en trois parties $\Gamma_D, \Gamma_N, \Gamma_C$ et $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_C$, $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$:

- la partie Γ_D est la zone où les déplacements sont imposés (conditions aux limites de Dirichlet).
- la partie Γ_N est la zone où les forces sont appliquées (conditions aux limites de Neumann).
- la partie Γ_C est la zone où les deux solides sont supposés être en contact. Les deux parties Γ_C^1 et Γ_C^2 sont les zones de contact respectivement de Ω_1 et Ω_2 . On a $\Gamma_C = \Gamma_C^1 \cup \Gamma_C^2$. A priori, la partie Γ_C est inconnue.

La projection de la force surfacique sur les bords de contact Γ_C sur la direction normale et la direction tangentielle donne :

$$\begin{aligned} F_C^N &= F_C \cdot n \\ F_C^T &= F_C - F_C^N n \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

avec n le vecteur normal unitaire dirigé vers l'extérieur du domaine.

Remarque : F_C^N est un scalaire et F_C^T est un vecteur.

Nous nous intéressons ici aux problèmes de contact unilatéral avec et sans frottement. Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à [Duvaut & Lions 1976, Wriggers 2006].

4.1.1 Problème de contact unilatéral

4.1.1.1 Formulation du problème

Nous supposons qu'il n'y a ni pénétration ni adhésion entre les deux solides dans la zone de contact. Le contact unilatéral sans frottement se traduit par une composante tangentielle nulle des forces de contact. Les forces de contact sont donc normales.

Sur la zone de contact, la condition de non-pénétration revient à imposer que le déplacement relatif u_N entre Γ_C^1 et Γ_C^2 est inférieur au jeu initial d :

$$u_N = u_1 \cdot n_1 + u_2 \cdot n_2 \leq d \quad (4.1.2)$$

avec u_1, u_2 les déplacements respectivement sur Γ_C^1, Γ_C^2 et n_1, n_2 sont les vecteurs unitaires normaux dirigés vers l'extérieur de Γ_C^1, Γ_C^2 (voir figure 4.2). On a ainsi $n_1 = -n_2$ sous l'hypothèse des petites perturbations.

La condition de non-adhésion impose que les efforts normaux ne peuvent correspondre qu'à de la compression, c'est-à-dire la force normale de contact est toujours non-positive :

$$F_C^N \leq 0 \quad (4.1.3)$$

Il faut noter qu'il n'existe alors que deux statuts entre les deux solides : soit contact ($u_N = d, F_C^N \leq 0$), soit décollement ($u_N \leq d, F_C^N = 0$). Nous obtenons alors la condition de complémentarité :

$$(u_N - d)F_C^N = 0 \quad (4.1.4)$$

La loi de contact unilatéral (4.1.2), (4.1.3) et (4.1.4) peut être présentée par la figure 4.3. Sous l'hypothèse des petites perturbations, le problème élastostatique avec ces conditions conduit au problème de Signorini (voir [Duvaut & Lions 1976, Raous *et al.* 1988, Lebon & Raous 1992]) qui peut s'exprimer sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \sigma = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma = C\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} u + \operatorname{grad}^T u) & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n = F_N & \text{sur } \Gamma_N \\ u_N \leq d, F_C^N \leq 0, (u_N - d)F_C^N = 0 & \text{sur } \Gamma_C \\ \sigma n = F_C^N n + F_C^T, F_C^T = 0 & \text{sur } \Gamma_C \end{array} \right. \quad (4.1.5)$$

4.1.1.2 Formulation variationnelle

Nous définissons l'espace des champs cinématiquement admissibles :

$$V = \{v \in (H^1(\Omega))^m \mid v = u_0 \text{ sur } \Gamma_D\} \quad (4.1.6)$$

avec m dimension de l'espace.

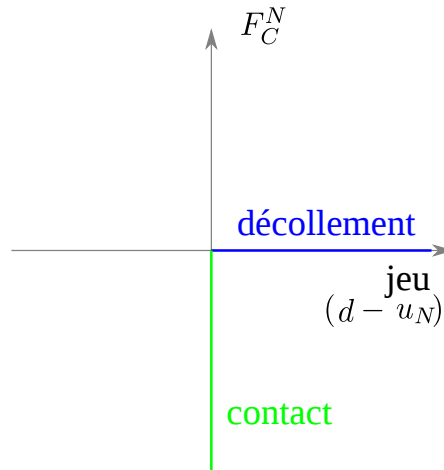


FIGURE 4.3 – Loi de contact

Soit V_C le sous-ensemble de V contenant des champs vérifiant les conditions de non-pénétration (4.1.2) :

$$V_C = \{v \in V \mid v_N = v_N^1 \cdot n_1 + v_N^2 \cdot n_2 \leq d \text{ sur } \Gamma_C\} \quad (4.1.7)$$

V_C est un convexe fermé.

La formulation variationnelle en déplacements s'écrit :

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(v - u) \, d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot (v - u) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\sigma n) \cdot (v - u), \quad \forall v \in V_C \quad (4.1.8)$$

En décomposant les éléments liés à la frontière, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (C\varepsilon(u)) : \varepsilon(v - u) \, d\Omega &= \int_{\Omega} f \cdot (v - u) \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} F_N \cdot (v - u) \, d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_D} (\sigma n) \cdot (v - u_0) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} (\sigma n) \cdot (v - u) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Le terme $\int_{\Gamma_D} (\sigma n) \cdot (v - u_0) \, d\Gamma$ et les forces tangentielles sur les bords Γ_C sont nuls. On a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (C\varepsilon(u)) : \varepsilon(v - u) \, d\Omega &= \int_{\Omega} f \cdot (v - u) \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} F_N \cdot (v - u) \, d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_C} F_C^N n \cdot (v - u) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Pour simplifier l'expression et être plus général, on utilise les notations suivantes :

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} (C\varepsilon(u)) : \varepsilon(v) \, d\Omega \\ l(v) &:= \int_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} F_N \cdot v \, d\Gamma \end{aligned}$$

avec a un opérateur bilinéaire symétrique, l un opérateur linéaire. On a :

$$\begin{aligned} a(u, v - u) - l(v - u) &= \int_{\Gamma_C} F_C^N n \cdot (v - u) \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_C} F_C^N (v_N - u_N) \, d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_C} (F_C^N (v_N - d) - F_C^N (u_N - d)) \, d\Gamma \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Les conditions du problème de Signorini (4.1.4), (4.1.3) et dans l'espace V_C nous donnent :

$$F_C^N (v_N - d) - F_C^N (u_N - d) \geq 0 \quad (4.1.12)$$

On obtient donc une inéquation variationnelle :

$$a(u, v - u) - l(v - u) \geq 0 \quad (4.1.13)$$

Du fait de l'inéquation (4.1.13), le problème de contact est non-linéaire (il entre dans le cadre de l'analyse non régulière).

La formulation variationnelle du problème de Signorini (4.1.5) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_C \text{ tel que} \\ a(u, v - u) \geq l(v - u) \quad \forall v \in V_C \end{cases} \quad (4.1.14)$$

Remarque : on peut démontrer que le problème (4.1.5) est équivalent au problème (4.1.14).

Duvaut et Lions [Duvaut & Lions 1976] ont montré que la solution du problème (4.1.14) peut être obtenue par une minimisation de l'énergie potentielle :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_C \text{ tel que} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V_C \end{cases} \quad (4.1.15)$$

avec

$$J(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - l(v)$$

Les problèmes (4.1.15) et (4.1.14) sont équivalents. L'existence et d'unicité du problème de Signorini a été démontrée par Fichera [Fichera 1973].

4.1.2 Problème de contact avec frottement

4.1.2.1 Formulation du problème

Nous cherchons une formulation d'un problème de contact avec frottement. Nous utilisons la loi classique de Coulomb [Duvaut & Lions 1976] qui peut se représenter par les figures 4.4 et 4.5. Il n'existe que deux statuts de frottement :

- statut d'adhérence : si la force tangentielle $|F_C^T|$ est inférieure à $\mu|F_C^N|$, alors la vitesse tangentielle est nulle, $\dot{u}_T = 0$.

- statut de glissement : si la force tangentielle $|F_C^T|$ est égale à $\mu|F_C^N|$, alors la vitesse tangentielle est non nulle. Elle est colinéaire et de direction opposée à la force de contact : $\dot{u}_T = -\lambda F_C^T$.

La loi de Coulomb peut alors s'exprimer sous la forme quasi-statique :

$$\begin{cases} |F_C^T| \leq \mu|F_C^N| \text{ et} \\ \left\{ \begin{array}{l} |F_C^T| < \mu|F_C^N| \Rightarrow \dot{u}_T = 0 \text{ (adhérence)} \\ |F_C^T| = \mu|F_C^N| \Rightarrow \exists \lambda > 0, \dot{u}_T = -\lambda F_C^T \text{ (glissement)} \end{array} \right. \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_C \quad (4.1.16)$$

où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue si elle est appliquée à un scalaire et la norme euclidienne si elle est appliquée à un vecteur, μ est le coefficient de frottement, F_C^T la force tangentielle dans la zone de contact Γ_C , \dot{u}_T la vitesse tangentielle dans la zone de contact Γ_C .

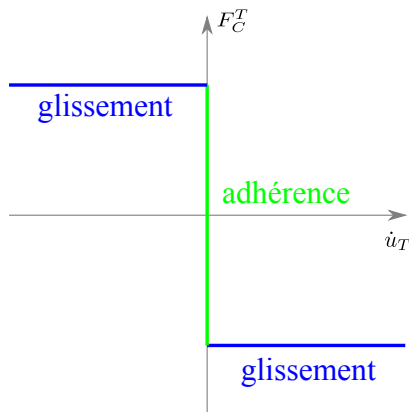


FIGURE 4.4 – Loi de Coulomb

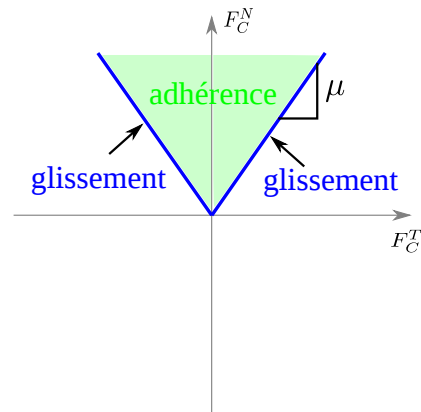


FIGURE 4.5 – Cône de Coulomb en 2D

Dans [Raous *et al.* 1988, Cocu *et al.* 1996, Raous 1999] est introduite une formulation "statique" (en déplacement) de la loi de frottement de Coulomb obtenue à partir d'une discrétisation temporelle de la loi en vitesse. À chaque pas de temps, on a alors à résoudre un problème statique de type (4.1.17). Dans ce mémoire, nous ne considérons que la formulation statique. Le formulation statique est aussi une approche valide pour les problèmes sous un chargement monotone.

$$\begin{cases} |F_C^T| \leq \mu|F_C^N| \text{ et} \\ \left\{ \begin{array}{l} |F_C^T| < \mu|F_C^N| \Rightarrow u_T = 0 \text{ (adhérence)} \\ |F_C^T| = \mu|F_C^N| \Rightarrow \exists \lambda > 0, u_T = -\lambda F_C^T \text{ (glissement)} \end{array} \right. \end{cases} \quad \text{sur } \Gamma_C \quad (4.1.17)$$

où u_T est le déplacement tangentiel dans la zone de contact Γ_C .

Le problème de Signorini avec frottement de Coulomb peut alors s'exprimer sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div} \sigma = f & \text{dans } \Omega \\ \sigma = C\varepsilon & \text{dans } \Omega \\ \varepsilon = \frac{1}{2}(\operatorname{grad} u + \operatorname{grad}^T u) & \text{dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \sigma n = F_N & \text{sur } \Gamma_N \\ \sigma n = F_C^N n + F_C^T & \text{sur } \Gamma_C \\ u_N \leq d, F_C^N \leq 0, (u_N - d)F_C^N = 0 & \text{sur } \Gamma_C \\ |F_C^T| \leq \mu |F_C^N| \text{ et } \begin{cases} |F_C^T| < \mu |F_C^N| \Rightarrow u_T = 0 \\ |F_C^T| = \mu |F_C^N| \Rightarrow \exists \lambda > 0, u_T = -\lambda F_C^T \end{cases} & \text{sur } \Gamma_C \end{array} \right. \quad (4.1.18)$$

4.1.2.2 Formulation variationnelle

Nous cherchons la formulation variationnelle du problème de contact avec frottement (4.1.18). Nous utilisons les mêmes définitions que pour le problème de contact unilatéral introduites dans la section 4.1.1.2. La différence entre les deux cas réside dans le fait que la force tangentielle de contact n'est pas nulle pour le problème de contact avec frottement. On a ainsi :

$$a(u, v - u) - l(v - u) = \int_{\Gamma_C} F_C^N (v_N - u_N) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} F_C^T \cdot (v_T - u_T) d\Gamma \quad \forall v \in V_C \quad (4.1.19)$$

Nous introduisons un terme non différentiable :

$$j(u, v) = \int_{\Gamma_C} \mu |F_C^N| |v_T| d\Gamma \quad (4.1.20)$$

En utilisant l'inéquation (4.1.12), on a :

$$\begin{aligned} a(u, v - u) - l(v - u) + j(u, v) - j(u, u) &\geq \int_{\Gamma_C} F_C^T \cdot (v_T - u_T) d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_C} \mu |F_C^N| |v_T| d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \mu |F_C^N| |u_T| d\Gamma \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Selon les conditions (4.1.17),

- si $|F_C^T| < \mu |F_C^N|$, alors $u_T = 0$, on a :

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma_C} F_C^T \cdot (v_T - u_T) d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \mu |F_C^N| |v_T| d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \mu |F_C^N| |u_T| d\Gamma \\ &= \int_{\Gamma_C} F_C^T \cdot v_T d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \mu |F_C^N| |v_T| d\Gamma \\ &\geq \int_{\Gamma_C} (\mu |F_C^N| - |F_C^T|) |v_T| d\Gamma \geq 0 \end{aligned} \quad (4.1.22)$$

- si $|F_C^T| = \mu|F_C^N|$, alors $u_T = -\lambda F_C^T$, on a :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma_C} F_C^T \cdot (v_T - u_T) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \mu|F_C^N| |v_T| \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \mu|F_C^N| |u_T| \, d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_C} F_C^T \cdot (v_T + \lambda F_C^T) \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \mu|F_C^N| |v_T| \, d\Gamma - \int_{\Gamma_C} \mu|F_C^N| |\lambda F_C^T| \, d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_C} F_C^T \cdot v_T \, d\Gamma + \int_{\Gamma_C} \mu|F_C^N| |v_T| \, d\Gamma \\
&\geq \int_{\Gamma_C} (\mu|F_C^N| - |F_C^T|) |v_T| \, d\Gamma = 0
\end{aligned} \tag{4.1.23}$$

On obtient alors :

$$a(u, v - u) - l(v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq 0 \tag{4.1.24}$$

La formulation variationnelle du problème de Signorini avec frottement de Coulomb (4.1.18) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_C \text{ tel que} \\ a(u, v - u) + j(u, v) - j(u, u) \geq l(v - u) \quad \forall v \in V_C \end{cases} \tag{4.1.25}$$

Remarque : on peut montrer que le problème (4.1.18) est équivalent au problème (4.1.25).

Cocu [Cocu 1984] a démontré que le problème de Signorini avec frottement de Coulomb (4.1.18) admet au moins une solution si le coefficient de frottement μ est "petit". L'unicité de la solution est encore un problème ouvert.

4.2 Quelques méthodes pour résoudre le problème de contact avec ou sans frottement

De très nombreuses méthodes ont été développées pour résoudre le problème de contact. Nous présentons brièvement quatre méthodes classiques de formulation du problème de contact i.e. la méthode de pénalisation, la méthode des multiplicateurs de Lagrange, la méthode du Lagrangien augmenté et la méthode de point fixe. Ensuite, quelques algorithmes adaptés aux différentes méthodes sont également présentés. Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à [Raous *et al.* 1988, Raous 1999, Wriggers 2006].

4.2.1 Méthode de pénalisation

La méthode de pénalisation consiste à approcher le problème en introduisant un paramètre suffisamment grand permettant de définir un problème de minimisation [Glowinski *et al.* 1976, Kikuchi & Song 1981, Chabrand *et al.* 1998].

La méthode de pénalisation remplace les lois de contact et de frottement par des lois plus régulières qui peuvent être présentées dans les figures 4.6 et 4.7.

La solution de ce problème tend vers la solution exacte quand le paramètre de pénalisation est suffisamment grand. Cette méthode est très simple à mettre en oeuvre. Cependant, cette

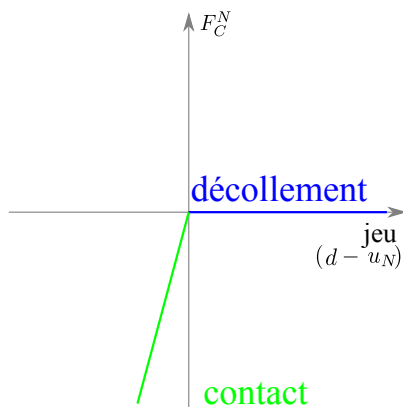


FIGURE 4.6 – Représentation la loi de contact de façon plus régulière

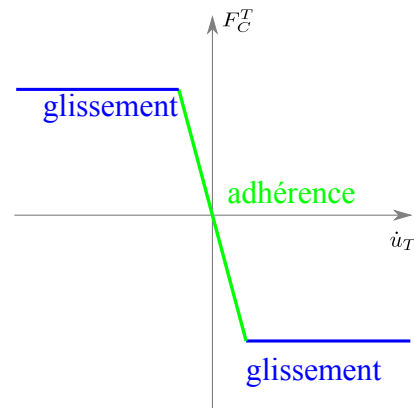


FIGURE 4.7 – Représentation la loi de Coulomb de façon plus régulière

méthode ne vérifie pas exactement les conditions de contact. De plus, le paramètre de pénalisation est difficile à définir : il doit être suffisamment grand pour que le problème approché soit proche du problème réel mais s'il est trop grand, le système à résoudre devient très vite mal conditionné.

Cette méthode est largement utilisée par les codes industriels, cf. Abaqus [Abaqus 2016] Code_Aster [Code_Aster 2016].

4.2.2 Méthode des multiplicateurs de Lagrange

La méthode des multiplicateurs de Lagrange introduit les multiplicateurs de Lagrange pour représenter les forces de contacts [Kikuchi & Oden 1988, Chabrand *et al.* 1998]. Le problème de contact unilatéral sans frottement devient un problème de minimisation sans contraintes et le problème de contact unilatéral avec frottement devient un problème de pseudo-minimisation. Le problème de pseudo-minimisation peut être associé à la méthode du Lagrangien augmenté [Alart & Curnier 1991].

Les conditions de contact sont obtenues dans ce cas de façon exacte, contrairement à la méthode de pénalisation. Cependant, cette méthode augmente le nombre de degrés de liberté du problème par l'introduction de nouvelles inconnues.

L'algorithme d'Uzawa peut être utilisé pour résoudre le problème de minimisation mais il est très coûteux.

4.2.3 Méthode du Lagrangien augmenté

La méthode du Lagrangien augmenté peut être vue comme une combinaison de la méthode des multiplicateurs de Lagrange et de la méthode de pénalisation [Alart & Curnier 1991, Simo & Laursen 1992, Heegaard & Curnier 1993, Wriggers & Zavarise 1993, Chabrand *et al.* 1998]. La vitesse de convergence voire la convergence de cette méthode dépend du paramètre d'augmentation. Ce type de méthode est assez facile à intégrer dans les codes de calcul industriels, cf. Code_Aster [Code_Aster 2016].

4.2.4 Méthode de point fixe

Le problème (4.1.25) est dit implicite car le terme $j(u, v)$ contient F_C^N qui dépend de la solution u . En vue de résoudre ce problème implicite, la méthode du point fixe sur la limite de glissement μF_C^N a été introduite pour transformer une inéquation quasi-variationnelle (4.1.25) en une inéquation variationnelle plus classique [Panagiotopoulos 1985, Raous *et al.* 1988]. Avec la fonction de la limite de glissement g définie par le problème (4.2.1), nous résoudrons un problème de frottement de Tresca (4.2.2) à chaque itération de point fixe.

$$\begin{cases} \text{Trouver } g \text{ point fixe de l'application } g \mapsto \mu |F_C^N| \\ \text{avec } u \text{ la solution du problème 4.2.2 dépendant de } g \end{cases} \quad (4.2.1)$$

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_C \text{ tel que} \\ a(u, v - u) + j(v) - j(u) \geq l(v - u) \quad \forall v \in V_C \end{cases} \quad (4.2.2)$$

avec

$$j(v) = \int_{\Gamma_C} g |v_T| d\Gamma$$

Duvaut et Lions [Duvaut & Lions 1976] ont montré que le problème de contact statique avec la loi de frottement de Tresca (4.2.2) peut être aussi considéré comme un problème de minimisation :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V_C \text{ tel que} \\ J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V_C \end{cases} \quad (4.2.3)$$

avec

$$J(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - l(v) + j(v)$$

Le problème (4.2.2) a une solution unique [Duvaut & Lions 1976]. Ainsi, par la méthode de point fixe, le problème de Signorini avec la loi de frottement de Coulomb est résolu via des résolutions intermédiaires d'une suite de problèmes avec la loi de frottement de Tresca.

Nous présentons quelques algorithmes adaptés aux différentes méthodes de formulation pour résoudre le problème de contact.

4.2.5 Algorithmes de résolutions

4.2.5.1 Méthodes de projection

Les méthodes de projection consistent à projeter les conditions unilatérales sur chaque noeud dans la zone de contact. À chaque itération de résolution, les méthodes vérifient les conditions de contact : si le jeu devient négatif, une condition de contact est imposée. L'itération continue jusqu'à la convergence.

La plus classique de ces méthodes est la méthode de Gauss-Seidel avec ou sans paramètre de relaxation [Raous *et al.* 1988]. La méthode de point fixe peut être couplée à ce type de méthodes.

4.2.5.2 Méthodes des statuts

Les méthodes des statuts (en anglais “active set method”) consistent à donner a priori les statuts de chaque noeud dans la zone de contact. Les méthodes des statuts sont souvent utilisées en étant couplées avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Les conditions de contact seront mises à jour par un algorithme itératif. Après chaque résolution, les forces de contact et le jeu sont analysés : si les forces de contact sont des tractions, les conditions de contact sont supprimées et si le jeu est inférieur à 0, des conditions de contact sont ajoutées par la suite (voir l’algorithme 4). Une comparaison de deux méthodes des statuts avec la méthode du Lagrangien augmenté a été étudiée par [Abide *et al.* 2016].

Ces méthodes sont simples à mettre en oeuvre. La convergence des méthodes des statuts est démontrée si une seule condition de contact est mise à jour par itération. Une d’entre elles est implémentée dans Cast3M [CAST3M 2016] et sera utilisée par la suite car ces méthodes semblent être bien adaptées à un couplage avec la méthode multi-grilles locale LDC, comme on le verra par la suite.

4.2.5.3 Méthodes de programmation mathématique

Ce type de méthode se base sur la forme complémentaire du problème de contact avec frottement [Lemke 1980, Klarbring 1986, Klarbring & Björkman 1988, Lebon & Raous 1992, Chabrand *et al.* 1998]. Les méthodes de programmation mathématique sont efficaces et précises. Elles ont été utilisées pour résoudre des problèmes de contact en 3D. Cependant, ce type de méthode ne converge pas toujours si la taille du système est très grande.

4.3 Stratégie de raffinement automatique du maillage adaptée au problème de contact

Dans cette section, nous appliquons la stratégie de raffinement présentée dans le chapitre 3 au problème de contact.

L’étude de Wriggers et Scherf [Wriggers & Scherf 1998] a montré que l’estimateur ZZ fonctionne correctement pour le problème de contact. Comme proposé par Nambiar et Lawrence [Nambiar & Lawrence 1992] pour des problèmes multi-matériaux, nous estimons séparément les erreurs sur la gaine et sur la pastille.

Comme présenté dans la section 3.2, nous générons les sous-niveaux à la première étape de prolongation. A partir de la solution du calcul, nous estimons les erreurs séparément dans la gaine et la pastille en utilisant l’estimateur ZZ. On choisit les éléments possédant une erreur supérieure à l’erreur fixée par l’utilisateur pour générer un sous-niveau. Dans Cast3M, les éléments de contact sont “noeud-facette” et nous utilisons un traitement symétrique du contact. Nous choisissons d’élargir de façon automatisée les zones à raffiner pour que les deux solides aient les mêmes zones de contact et pour appliquer la méthode LDC à des maillages réglés.

Algorithme 4 : Algorithme de la méthode des statuts

```
Initialisation : activer contact sur les noeuds dans  $\Gamma_C$ 
/*Itération*/
répéter
  Résoudre le problème avec les conditions d'égalité (en déplacement);
  Vérifier les statuts des noeuds :
  si  $F_C^N > 0$  alors
    | Supprimer la condition de contact sur ce noeud;
  fin
  si  $u_N > d$  alors
    | Ajouter la condition de contact sur ce noeud;
  fin
  Mettre à jour les conditions d'égalité (en déplacement);
jusqu'à convergence
```

En utilisant la méthode des statuts, nous pouvons facilement adapter la stratégie de raffinement automatique de maillage proposée au problème de contact. Nous décrivons dans l'algorithme 5 en page 96 l'utilisation de la stratégie de raffinement automatique de maillage pour traiter un problème de contact.

Nous proposons ici de continuer à utiliser l'algorithme LDC standard, i.e. en ne restreignant que les déplacements, contrairement aux méthodes multi-grilles standards (voir [Lebon 1995]). En effet, on choisit ici de résoudre complètement le problème de contact sur toutes les grilles.

Algorithme 5 : Algorithme LDC appliqué au problème de contact couplé avec l'estimateur d'erreur

Initialisation $[U_0^0]$: résoudre le problème initial par l'algorithme 4;

Itération : calcul de $[U_l^k]$;

pour $k=1$ à k^* **faire**

$[U_0^k] = [U_0^{k-1}]$;

/*Étape de prolongement*/;

pour $l = 1$ à l^* **faire**

si $k=1$ **alors**

/* Génération des sous-niveaux et définition des conditions aux limites sur $\Gamma_l \cap \Gamma^*$;

Application de l'estimateur d'erreur sur la solution $[U_{l-1}^1]$ afin de détecter la zone à raffiner ;

Raffinement de la zone détectée : obtention de la grille G_l ;

Définition des conditions aux limites de Dirichlet $[U_{l,D}]$ et de Neumann $[G_l]$ sur $\Gamma_l \cap \Gamma$ à partir de celles définies sur Γ ;

Définition du seconde membre $[F_l^0]$ par discrétisation f sur G_l ;

fin

Détermination des conditions aux limites sur $\Gamma_l \setminus \Gamma$:

$$[U_{l,D}^k] = [P_{l-1}^l][U_{l-1}^k] \quad \text{sur } \Gamma_l \setminus \Gamma$$

Détermination des zones de contact ;

Calcul de $[U_l^k]$ **par l'algorithme 4;**

fin

/*Étape de restriction*/;

pour $l = l^* - 1$ à 0 **faire**

Restriction de la solution fine $[U_{l+1}^k]$ sur A_l :

$$[\tilde{U}_l^k] = [R_{l+1}^l][U_{l+1}^k] \quad \text{sur } A_l$$

Calcul du résidu local sur \mathring{A}_l :

$$[D_l^k] = [K_l][\tilde{U}_l^k] - [F_l^0] \quad \text{sur } \mathring{A}_l$$

Correction du second membre :

$$[F_l^k] = [F_l^0] + \chi_{\mathring{A}_l}[D_l^k]$$

Définition des zones de contact ;

Calcul de $[U_l^k]$ **par l'algorithme 4;**

fin

fin

4.4 Résultats numériques

4.4.1 Présentation du cas test

Nous modélisons un contact entre la pastille et la gaine dans une configuration 2D axi-symétrique. Les matériaux étudiés sont élastiques : le matériau de la pastille a un module d'Young de 190 GPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,3$, le matériau de la gaine a un module d'Young de 78 GPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,34$. Afin d'obtenir une inhomogénéité du contact, une pression discontinue est appliquée sur l'extérieur de la gaine (voir figure 4.8). Nous avons $P_0 = P_1 = 0$ et $P_2 = 200$ MPa. L'ensemble des conditions aux limites est présenté dans la figure 4.8.

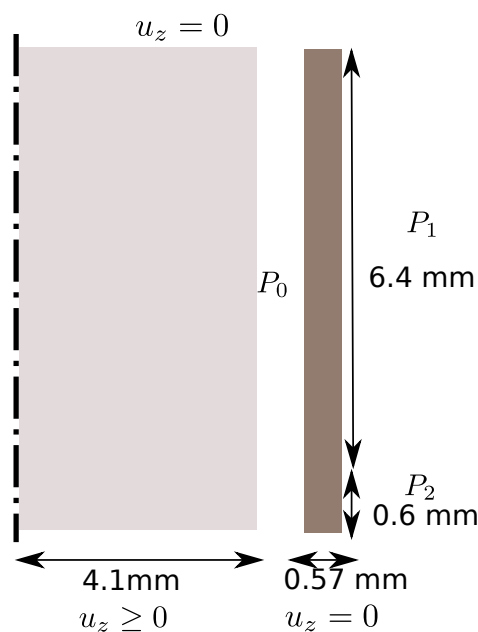


FIGURE 4.8 – Schéma du problème

4.4.2 Illustration de la détection des zones à raffiner

Dans la section 4.3, nous avons modifié la stratégie proposée de raffinement automatique du maillage pour l'adapter au problème de contact. Nous présentons des illustrations de la détection des zones à raffinement avec notre cas test.

A partir de la solution initiale avec un maillage de départ de pas de $328 \mu\text{m}$ présenté dans la figure 4.9, nous estimons séparément dans les deux corps les erreurs relatives en norme énergie. Les erreurs estimées sont présentées dans la figure 4.10. Pour un seuil d'erreur β fixé à 5%, les zones détectées à raffiner et les zones choisies à raffiner sont présentées dans la figure 4.11.

Le rapport de raffinement, les éléments utilisés et les opérateurs de prolongement et de restriction sont identiques que ceux dans la section 3.4.1.

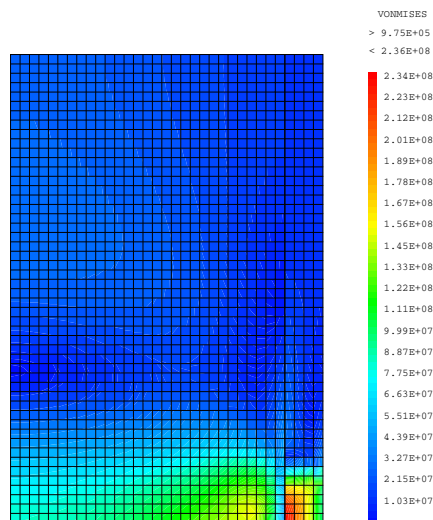


FIGURE 4.9 – Exemple des contraintes sur le maillage grossier

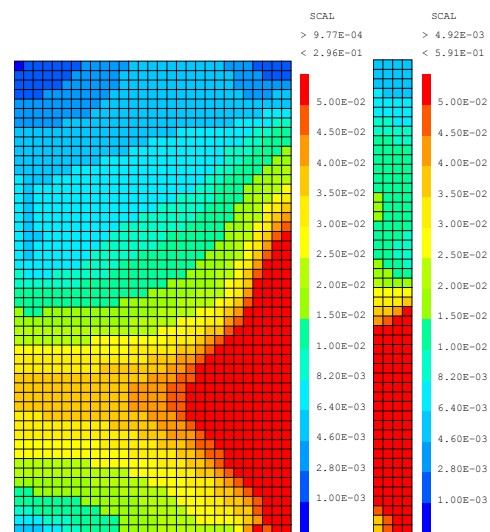


FIGURE 4.10 – Estimation séparée des erreurs dans la gaine et la pastille

Nous utilisons une solution obtenue avec maillage très fin comme solution de référence (taille de maille environ $3,1 \mu\text{m}$, nombre de noeuds 1653223).

4.4.3 Résultats numérique pour un cas test sans jeu ni frottement

Nous commençons par un cas test avec un jeu initial nul entre la pastille et la gaine. Nous sommes donc dans une situation de contact affleurant.

La figure 4.12 (respectivement la figure 4.13) présente la superposition de tous les niveaux de maillage pour un pas de maillage de départ de $328 \mu\text{m}$ (respectivement $164 \mu\text{m}$) et un seuil β fixé à 5%. Les figures nous montrent que la stratégie de raffinement proposée génère bien des sous-niveaux dans les mêmes zones pour différents pas de maillage de départ. Pour un pas de maillage local identique, la zone raffinée obtenue est identique. Il semble donc intéressant d'utiliser cette stratégie de raffinement avec un maillage de départ assez grossier. En visualisant la figure 4.15 qui présente les forces de contact et la figure 4.14 qui présente la déformation pour un maillage de départ de $328 \mu\text{m}$, nous pouvons conclure que les sous-niveaux sont ajoutés dans la zone intermédiaire entre les zones d'adhésion et de décollement. Dans cette zone, les erreurs sont en général importantes. Ces premiers résultats nous confirment le bon fonctionnement de l'estimateur ZZ pour des problèmes de contact.

Nous appliquons ensuite la stratégie de raffinement à différents pas de maillages de départ ($328 \mu\text{m}$, $164 \mu\text{m}$, $82 \mu\text{m}$, $41 \mu\text{m}$) et différents seuils d'erreur β (5%, 2%, 1%). Les résultats sont présentés dans le tableau 4.1 en cinq lignes : la première ligne indique le nombre de sous-niveaux générés automatiquement, la deuxième ligne présente l'erreur relative entre la solution composite à convergence et la solution de référence, la troisième ligne contient le nombre de noeuds de chaque niveau, la quatrième ligne présente le nombre total de noeuds et la cinquième ligne montre le temps total de calcul.

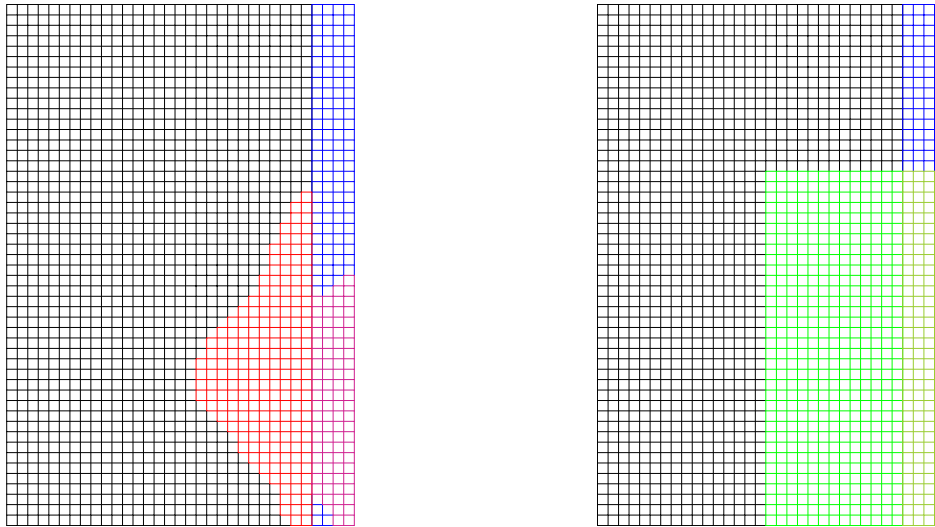


FIGURE 4.11 – Choix les zones à raffiner

Taille de maille initiale		Seuil d'erreur		
		5%	2%	1%
hi	nombre de sous-niveaux :	3	4	5
	erreur relative :	4,08%	1,23 %	0,99%
	nombre de noeuds par niveau :	1785/2484/5060/8090	1785/5644/12788/23030/52854	1785/6188/21038/49306/87300/202876
	nombre total de noeuds :	18237	96101	368493
	temps de calcul :	54s	718s	4982s
hi/2	nombre de sous-niveaux :	2	3	4
	erreur relative :	2,60 %	1,06%	0,78%
	nombre de noeuds par niveau :	6800/4972/8908	6800/13066/22172/52026	6800/21306/50232/86580/200732/
	nombre total de noeuds :	20680	94064	365650
	temps de calcul :	56s	412s	3688s
hi/4	nombre de sous-niveaux :	1	2	3
	erreur relative :	2,15%	1,35%	0,85%
	nombre de noeuds par niveau :	26532/8772	26532/22654/51750	26532/50778/86220/199660
	nombre total de noeuds :	35304	100936	363190
	temps de calcul :	106s	258s	1943s
hi/8	nombre de sous-niveaux :	0	1	2
	erreur relative :	2,23%	1,30%	0,85%
	nombre de noeuds par niveau :	104410	104410/51750	104410/86220/199124
	nombre total de noeuds :	104410	156160	613873
	temps de calcul :	300s	781s	4057s

Tableau 4.1 – Cas test de contact 2D(r,z) pour différents pas de maillages de départ et différents seuils fixés · $h_i=328 \mu\text{m}$ · Sans jeu initial · Critère d'arrêt : mesure inférieure à 0,5 % de la mesure du domaine initial.

Les résultats du tableau 4.1 montrent que la stratégie de raffinement automatique couplant la méthode LDC et l'estimateur ZZ fonctionne très bien dans ce cas et que l'algorithme LDC est très robuste car il marche directement sur des problèmes de contact. L'erreur composite diminue rapidement par ajout d'un sous-niveau. De plus, on obtient le même niveau d'erreur pour un pas de sous-niveau le plus fin équivalent. La stratégie de raffinement permet de plus de raffiner toujours les mêmes zones quelque soit le maillage de départ (même nombre d'éléments dans les sous-niveaux de pas de maillage équivalent). La génération des sous-niveaux s'arrête automatiquement. Le critère d'arrêt géométrique avec 0,5% de la mesure du

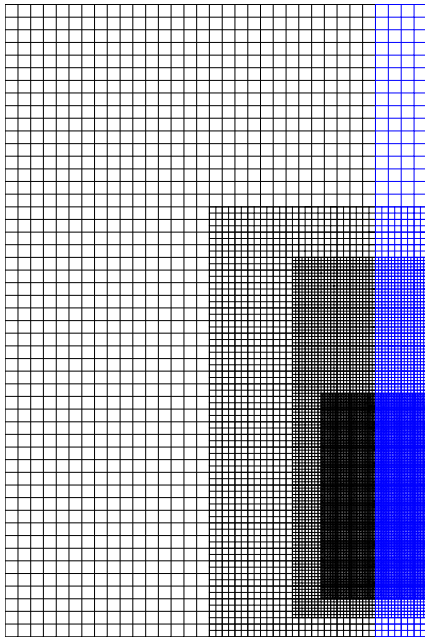


FIGURE 4.12 – Superposition des niveaux de maillage pour un maillage initial de pas $328 \mu\text{m}$ et un seuil fixé à 5%. Sans jeu initial.

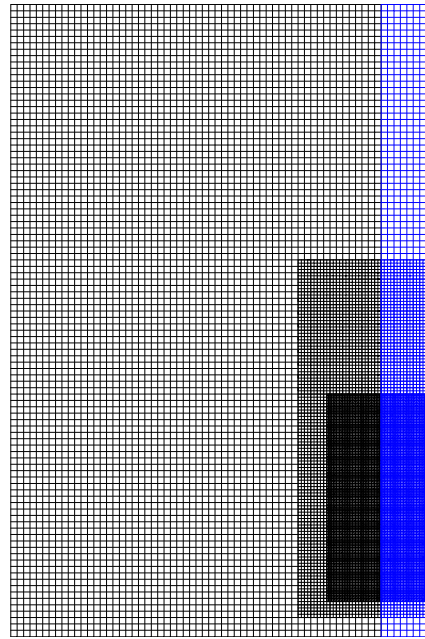


FIGURE 4.13 – Superposition des niveaux de maillage pour un maillage initial de pas $164 \mu\text{m}$ et un seuil fixé à 5%. Sans jeu initial.

domaine initial semble être assez générique. A la fin des calculs, les erreurs entre les solutions composites et la solution de référence respectent les seuils demandés.

Les résultats montrent l'efficacité de la méthode LDC. Pour un seuil fixé à 5%, l'ajout de sous-niveaux permet de diminuer le temps de calcul tout en ayant le même niveau de précision qu'en utilisant d'un maillage très fin uniforme. Pour les seuils fixés à 2% et 1%, il semble qu'il y ait à faire un compromis entre le nombre de sous-niveaux et temps de calcul. Les résultats les plus optimaux en temps de calcul sont obtenus pour un maillage de départ avec un pas de $h_i/4$. Afin de comprendre cette tendance, nous avons superposé les sous-niveaux générés pour le maillage de départ de h_i et le seuil fixé à 1% sur la figure 4.16. Nous voyons que pour atteindre ce niveau de précision, nous avons besoin de raffiner presque tout le domaine. Le maillage de départ de h_i est donc trop grossier pour atteindre rapidement le niveau de précision demandé. A partir du troisième sous-niveau dont la taille de maille correspond au maillage de départ de $h_i/4$, les sous-niveaux commencent à être ajoutés localement, et c'est là que la méthode LDC devient efficace.

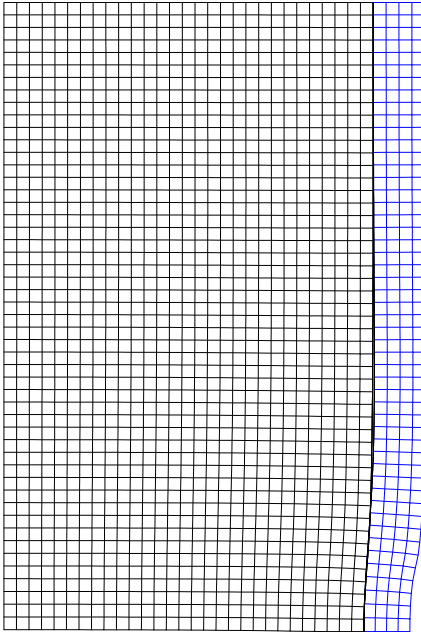


FIGURE 4.14 – Déformation pour un maillage initial de pas $328 \mu\text{m}$ (facteur d'amplification = 50) · Sans jeu initial.

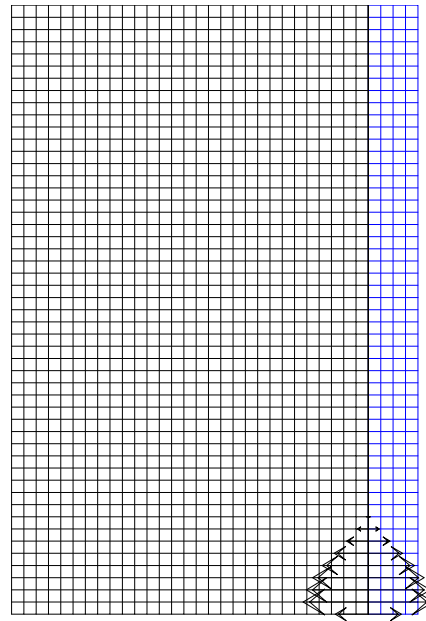


FIGURE 4.15 – Forces de contact pour un maillage initial de pas $328 \mu\text{m}$ · Sans jeu initial.

Optimisation des temps de calcul

Nous proposons de regarder la répartition des temps de calcul en trois parties pour les calculs avec les seuils $\beta = 1\%$ et 2% :

- Temps de résolution initiale du maillage grossier
- Temps de génération des sous-niveaux qui correspond au temps de la première étape de prolongement
- Temps des \wedge -cycles depuis la première restriction jusqu'à la convergence du calcul

Les répartitions des temps de calcul sont présentées sur les figures 4.17 et 4.18.

Les figures 4.17 et 4.18 montrent que les \wedge -cycles pour les problèmes de contact semblent être assez coûteux. En effet, la non-linéarité de contact doit être résolue itérativement à chaque appel du solveur. Comme le nombre de \wedge -cycles est proportionnel au nombre de sous-niveaux, le temps de calcul des \wedge -cycles sera proportionnel au nombre de sous-niveaux, on a donc intérêt à limiter le nombre de sous-niveaux. A contrario, le temps de calcul sur le maillage initial augmente avec la diminution du pas du maillage. Il y a donc un optimum « nombre de sous niveaux/pas du maillage initial » à trouver. Ici l'optimum semble obtenu pour un maillage initial de pas hi dans le cas d'une erreur voulue de 5% et de pas hi/4 pour une erreur voulue de 2% ou 1%.

En vue de diminuer le temps de calcul des \wedge -cycles, nous proposons d'utiliser une technique permettant d'initialiser la zone de contact actif : au lieu d'initialiser les contacts actifs sur toute la zone possible de contact, on active les statuts de contact uniquement sur la zone de

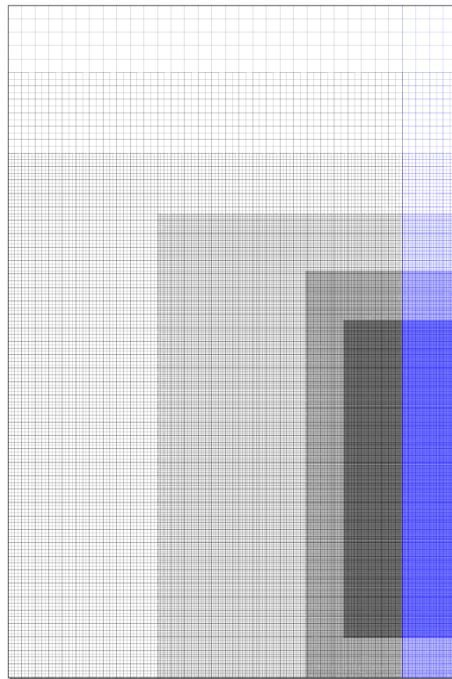


FIGURE 4.16 – Superposition des niveaux de maillage pour un maillage initial de pas $328 \mu\text{m}$ et un seuil fixé à 1% · Sans jeu initial.

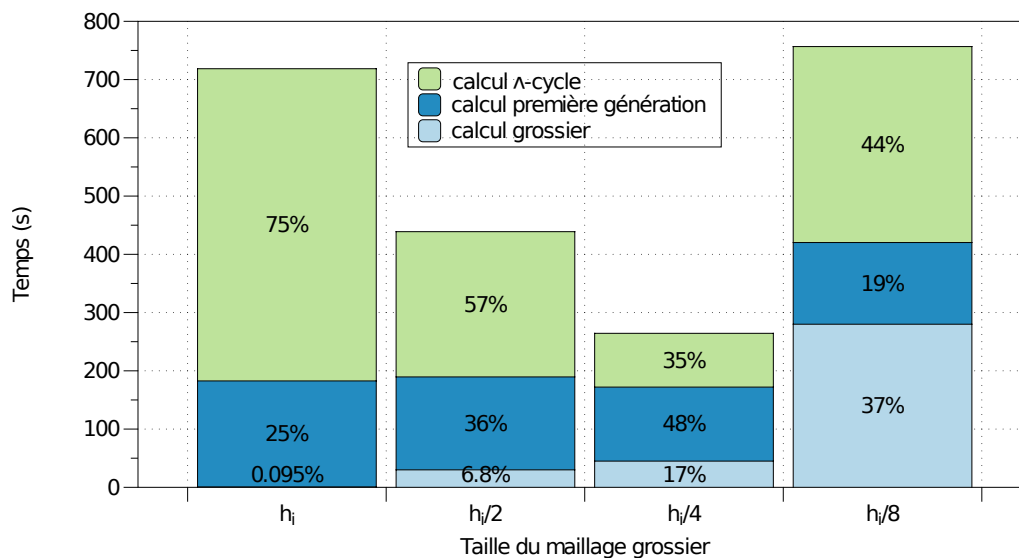
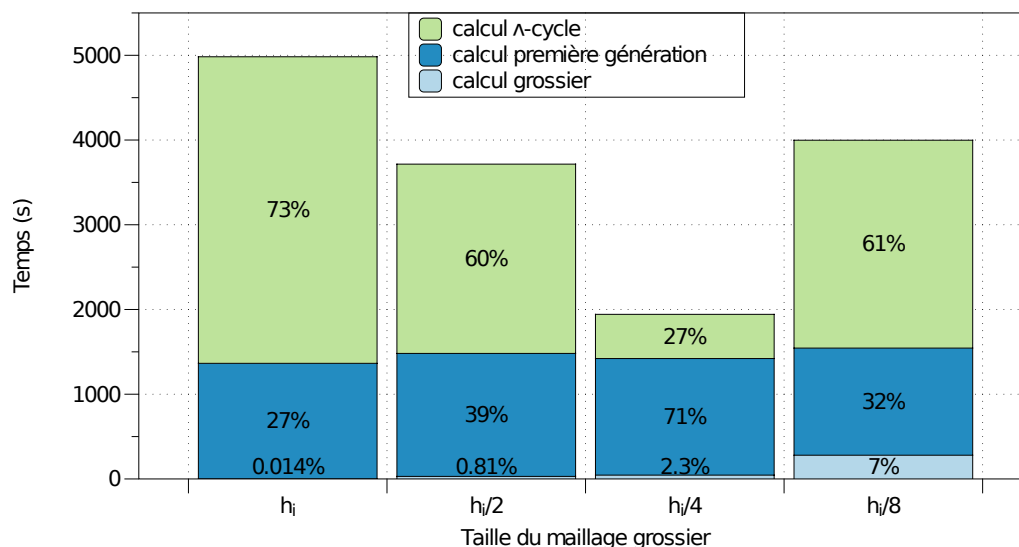


FIGURE 4.17 – Répartition des temps de calcul pour $\beta = 2\%$

contact obtenue après résolution du problème immédiatement plus grossier dans la première étape de prolongement. Pendant les λ -cycles, l'initialisation des statuts de contact sera définie à partir de la solution précédente de même niveau pour éviter une extrapolation de la zone de contact et optimiser la convergence de la méthode des statuts à convergence de l'algorithme LDC. Dans la suite, cette technique sera appelée "maillage de contact actif" (MCA). Nous

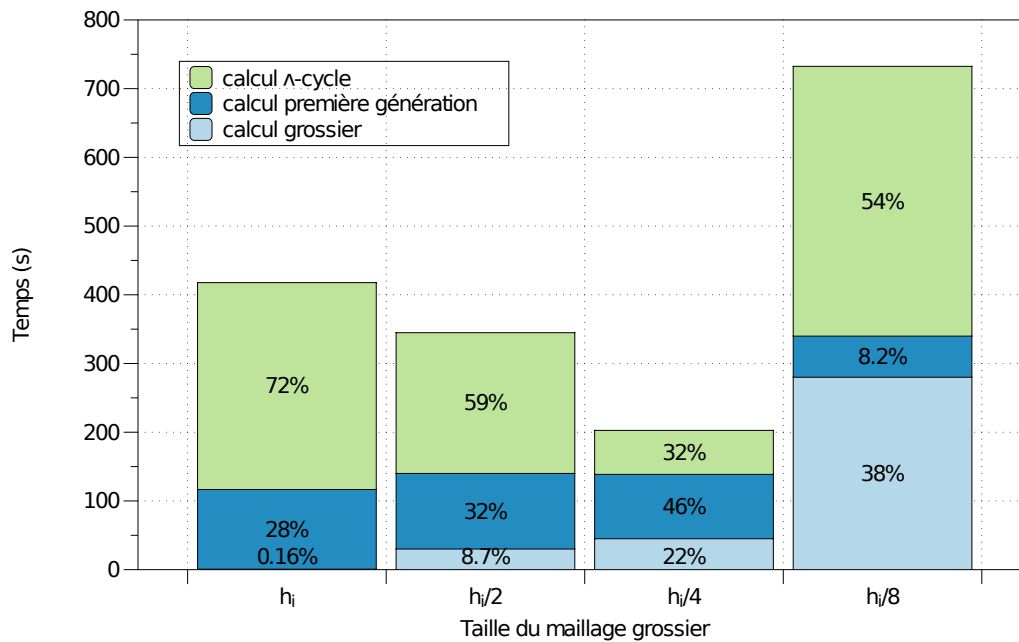
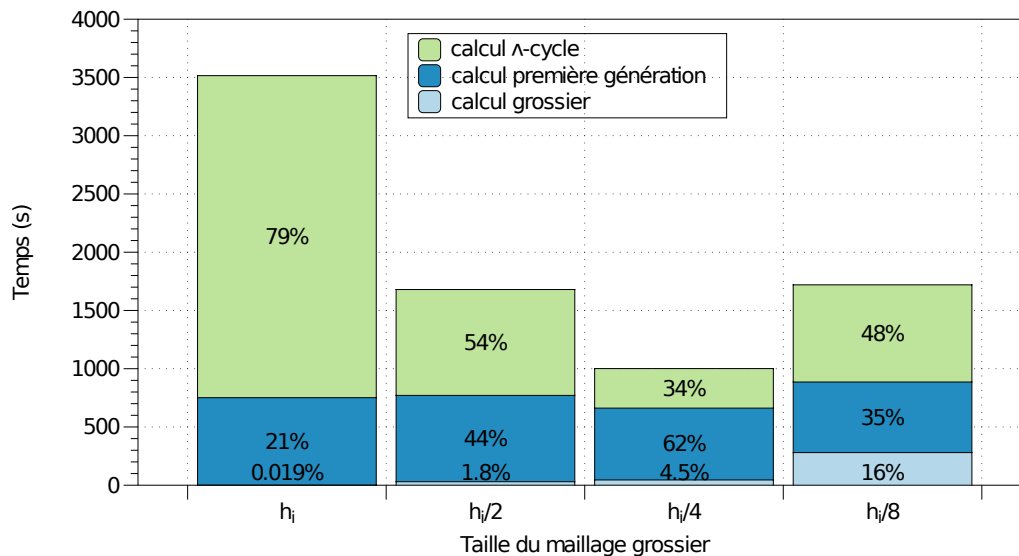
FIGURE 4.18 – Répartition des temps de calcul pour $\beta = 1\%$

testons cette technique sur différents pas de maillages de départ ($h_i=328 \mu\text{m}$, $h_i/2=164 \mu\text{m}$, $h_i/4=82 \mu\text{m}$, $h_i/8=41 \mu\text{m}$) et différents seuils d'erreur β (5%, 2%, 1%). Les résultats sont présentés dans le tableau 4.2.

Taille de maille initiale		Seuil d'erreur		
		5%	2%	1%
h_i	nombre de sous-niveaux :	3	4	5
	erreur relative :	4,08%	1,23 %	0,99%
	nombre de noeuds par niveau :	1785/2484/5060/8090	1785/5644/12788/23030/52854	1785/6188/21038/49306/87300/202876
	nombre total de noeuds :	18237	96101	368493
	temps de calcul :	44s	417s	2764s
$h_i/2$	nombre de sous-niveaux :	2	3	4
	erreur relative :	2,60 %	1,06%	0,78%
	nombre de noeuds par niveau :	6800/4972/8908	6800/13066/22172/52026	6800/21306/50232/86580/200732/
	nombre total de noeuds :	20680	94064	365650
	temps de calcul :	51s	320s	1627s
$h_i/4$	nombre de sous-niveaux :	1	2	3
	erreur relative :	2,15%	1,35%	0,85%
	nombre de noeuds par niveau :	26532/8772	26532/22654/51750	26532/50778/86220/199660
	nombre total de noeuds :	35304	100936	363190
	temps de calcul :	113s	207s	986s
$h_i/8$	nombre de sous-niveaux :	0	1	2
	erreur relative :	2,23%	1,30%	0,85%
	nombre de noeuds par niveau :	104410	104410/51750	104410/86220/199124
	noeud total :	104410	156160	389754
	temps de calcul :	300s	780s	1694s

Tableau 4.2 – Cas test de contact 2D(r,z) sans frottement pour différents pas de maillages de départ et différents seuils fixés · $h_i=328 \mu\text{m}$ · Sans jeu initial · Initialisation des statuts de contact par la technique MCA · Critère d'arrêt : mesure inférieure à 0,5% de la mesure du domaine initial.

Les résultats présentés dans le tableau 4.2 sont similaires aux résultats présentés dans le tableau 4.1 quant au nombre de sous-niveaux, à l'erreur et au nombre de noeuds. La solu-

FIGURE 4.19 – Répartition des temps de calcul pour $\beta = 2\%$ pour la technique MCAFIGURE 4.20 – Répartition des temps de calcul pour $\beta = 1\%$ pour la technique MCA

tion du problème est donc bien inchangée. Cette technique par ailleurs a beaucoup diminué (jusqu'à un facteur 2) le temps de calcul pour les seuils fixés à 2% et 1%. Comme attendu, il est intéressant d'utiliser la technique MCA quand il y a plusieurs sous-niveaux afin de transmettre des informations de contact entre les Λ -cycles. Nous allons conserver cette technique d'initialisation des statuts de contact dans la suite.

Les répartitions des temps de calcul avec la technique MCA sont présentées sur les figures 4.19 et 4.20. La tendance n'a pas trop été modifiée : il y a toujours un minimum à

trouver entre le maillage de départ et la localisation des sous-niveaux.

4.4.4 Résultats numériques pour un cas test avec jeu sans frottement

Lors de l'irradiation du réacteur, il y a un jeu initial entre la pastille et la gaine d'environ $85 \mu\text{m}$. Ce jeu se ferme à la fin du premier cycle de vie en réaction (voir section 1.4). Nous souhaitons tester la stratégie de raffinement à un cas test avec un jeu initial. Ce jeu est choisi petit afin de représenter l'instant de contact. Ici on prend un jeu initial de $2 \mu\text{m}$.

La figure 4.21 présente la superposition des niveaux de maillage pour un maillage initial de pas $h_i=328 \mu\text{m}$ et un seuil fixé β à 5% pour le cas test avec jeu initial égal à $2 \mu\text{m}$. Les sous-niveaux se localisent bien autour de la zone de changement de statut de contact. La stratégie proposée peut donc générer des sous-niveaux dans la zone où l'erreur est importante pour un cas test avec jeu. La figure 4.22 montre les forces de contact pour ce cas test. Les forces présentent bien seulement des composantes normales.

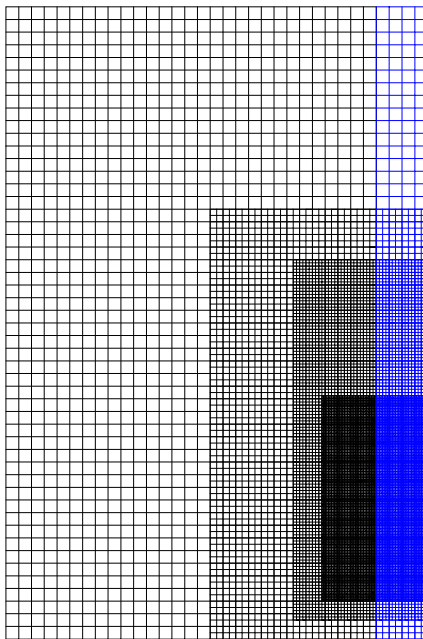


FIGURE 4.21 – Superposition des niveaux de maillage pour un maillage initial de pas $328 \mu\text{m}$ et un seuil fixé à 5% · Jeu initial égal à $2 \mu\text{m}$.

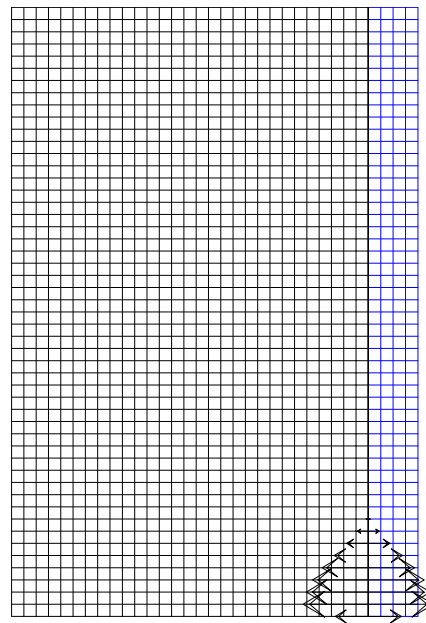


FIGURE 4.22 – Forces de contact pour un maillage initial de pas $328 \mu\text{m}$ pour le cas test · Jeu initial égal à $2 \mu\text{m}$.

Des résultats plus détaillés pour différents pas de maillages de départ ($328 \mu\text{m}$, $164 \mu\text{m}$, $82 \mu\text{m}$, $41 \mu\text{m}$) et différents seuils d'erreur β (5%, 2%, 1%) sont présentés dans le tableau 4.3.

Les résultats présentés dans le tableau 4.3 montrent que la stratégie de raffinement fonctionne très bien pour un cas test de contact avec jeu initial. La stratégie permet d'ajouter des sous-niveaux dans la zone où les erreurs sont les plus importantes et d'arrêter de générer les sous-niveaux quand les solutions sont suffisamment précises en regard des seuils fixés. À la fin des calculs, les erreurs entre les solutions composites et la solution de référence respectent

Taille de maille initiale		Seuil d'erreur		
		5%	2%	1%
hi	nombre de sous-niveaux :	3	4	5
	erreur relative :	3,14%	1,77%	1,07%
	nombre de noeuds par niveau :	1785/2484/5500/13662	1785/5508/13152/22842/55614	1785/6800/21306/49500/86580/199124
	nombre total de noeuds :	23431	98901	365095
	temps de calcul :	21s	315s	1754s
hi/2	nombre de sous-niveaux :	2	3	4
	erreur relative :	2,03 %	1,01%	0,6%
	nombre de noeuds par niveau :	6800/5500/14076	6800/13700/22842/55338	6800/21038/50948/85500/198990
	nombre total de noeuds :	26376	98680	363276
	temps de calcul :	32s	209s	1669s
hi/4	nombre de sous-niveaux :	1	2	3
	erreur relative :	1,97%	1,36%	0,83%
	nombre de noeuds par niveau :	26532/13662	26532/22654/55062	26532/52032/85500/196444
	nombre total de noeuds :	40194	104248	360508
	temps de calcul :	82s	190s	912s
hi/8	nombre de sous-niveaux :	0	1	2
	erreur relative :	2,12%	1,47%	0,45%
	nombre de noeuds par niveau :	104410	104410/54264	104410/85140/196444
	nombre total de noeuds :	104410	158674	385994
	temps de calcul :	300s	754s	2350s

Tableau 4.3 – Cas test contact 2D(r,z) sans frottement pour différents pas de maillages de départ et différents seuils fixés · hi=328 μm · Jeu initial = 2 μm · Initialisation des statuts de contact par la technique MCA · Critère d'arrêt : mesure inférieure à 0,5% de la mesure du domaine initial.

bien les seuils demandés. Ici encore, les zones de raffinement obtenues sont les mêmes pour un pas de maillage local identique. Il existe encore un optimum entre maillage de départ et localisation des sous-niveaux (et donc nombre de \wedge -cycles). Ici aussi, le maillage de départ hi/4 semble optimal pour les seuils fixés à 2% et 1%.

4.4.5 Résultats numériques pour un cas test avec jeu avec frottement

Nous voulons à présent tester notre stratégie de raffinement automatique de maillage pour un problème de contact avec frottement de Coulomb. Le coefficient de frottement est égal à 0,2 ($\mu = 0.2$).

Les sous-niveaux générés pour un maillage initial de pas 328 μm et un seuil fixé à 5% sont superposés dans la figure 4.23. La stratégie génère toujours bien les sous-niveaux autour de la zone de changement de statuts de contact.

La figure 4.24 représente les forces de contact avec frottement. Contrairement aux cas tests sans frottement, les forces de contact ont des composantes normales et des composantes tangentielles. Un glissement peut être observé dans la zone de contact.

Le tableau 4.4 présente des résultats de calcul pour différents pas de maillages de départ (328 μm , 164 μm , 82 μm , 41 μm) et différents seuils d'erreur β (5%, 2%, 1%).

Les résultats montrent que la stratégie de raffinement nous permet d'obtenir de bonnes performances également sur les problèmes de contact avec frottement. La stratégie génère automatiquement des sous-niveaux dans les zones d'intérêt et s'arrête automatiquement de générer des sous-niveaux lorsque la précision demandée est atteinte. Ainsi, nous atteignons le même niveau d'erreur pour des tailles de maille de niveaux les plus fins égales. Au niveau du

temps de calcul, il y a là encore un optimum qui dépend du pas du maillage initial et du seuil d'erreur. Par exemple, il semble que le maillage de départ avec un pas de $h_i/2$ soit optimal pour les seuils 5% et 2% alors qu'un pas de $h_i/4$ est optimal pour un seuil de 1%.

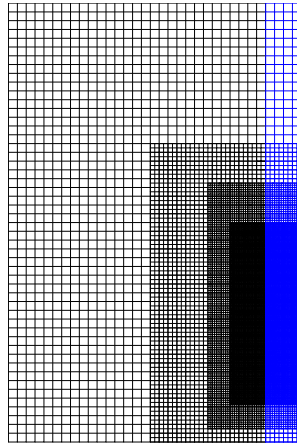


FIGURE 4.23 – Superposition des niveaux de maillage pour un maillage initial de pas $328 \mu\text{m}$ et un seuil fixé à 5% · Jeu initial égal à $2 \mu\text{m}$ · Coefficient de frottement égal à 0,2.

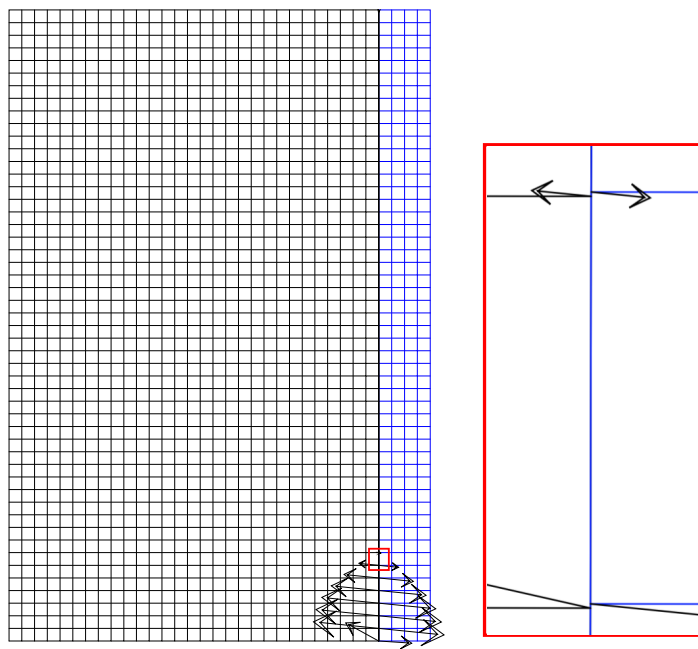


FIGURE 4.24 – Forces de contact avec frottement pour un maillage initial de pas $328 \mu\text{m}$ · Jeu initial égal à $2 \mu\text{m}$ · Coefficient de frottement égal à 0,2. Figure de droite zoom de la zone en rouge

Taille de maille initiale		Seuil d'erreur		
		5%	2%	1%
hi	nombre de sous-niveaux :	3	4	5
	erreur relative :	6,04%	1,27%	0,84%
	nombre de noeuds par niveau :	1785/2484/4972/11022	1785/5508/12604/21988/51000	1785/6800/21038/48048/83952/194142
	nombre total de noeuds :	20263	92885	355765
	temps de calcul :	90s	765s	6477s
hi/2	nombre de sous-niveaux :	2	3	4
	erreur relative :	2,79 %	1,06%	0,51%
	nombre de noeuds par niveau :	6800/5500/14076	6800/12878/21804/49714	6800/21038/48958/83838/194040
	nombre total de noeuds :	22706	91196	354674
	temps de calcul :	81s	506s	4297s
hi/4	nombre de sous-niveaux :	1	2	3
	erreur relative :	2,37%	1,31%	0,89%
	nombre de noeuds par niveau :	26532/13662	26532/21804/49446	26532/49496/82544/192456
	nombre total de noeuds :	37554	97782	351028
	temps de calcul :	170s	596s	4152s
hi/8	nombre de sous-niveaux :	0	1	2
	erreur relative :	2,15%	1,41%	0,42%
	nombre de noeuds par niveau :	104410	104410/49446	104410/82544/190474
	nombre total de noeuds :	104410	153856	377428
	temps de calcul :	591s	1422s	5788s

Tableau 4.4 – Cas test contact 2D(r,z) avec frottement pour différents pas de maillages de départ et différents seuils fixés · hi=328 μm · Jeu initial = 2 μm · Coefficient de frottement égal à 0,2 · Initialisation des statuts de contact par la technique MCA · Critère d'arrêt : mesure inférieure à 0,5% de la mesure du domaine initial.

Calculs avec différents coefficients de frottement

Pour finir, nous allons tester la stratégie proposée pour différents coefficients de frottement. Nous reprenons le cas test précédent avec des coefficients de frottement $\mu = 0,6$ ou $1,0$. Les forces de contact dans ces deux cas, pour un maillage initial de pas 328 μm , sont présentées dans les figures 4.25 et 4.26. La direction des forces montre que les forces tangentielles sont plus petites que μF_c^N . Il n'y a pas de glissement entre les deux objets.

Nous présentons les calculs pour différents pas de maillages de départ (328 μm , 164 μm , 82 μm , 41 μm) et différents coefficients de frottement μ (0,2; 0,6; 1,0) dans le tableau 4.5. Le seuil β est fixé à 5%.

Les résultats présentés dans le tableau 4.5 montrent que la stratégie proposée de raffinement fonctionne bien pour différents coefficients de frottement. La stratégie semble être très générique. Les solutions ont les mêmes nombres de sous-niveaux et les mêmes niveaux d'erreur pour des calculs de même pas de maillage de départ. Les erreurs sont inférieures aux seuils demandés sauf pour le pas de maillage de 328 μm . Il semble que la stratégie de raffinement détecte presque les mêmes zones pour les coefficients de frottement testés. Cependant, il semble que le temps de calcul augmente quand le coefficient de frottement augmente. Ceci semble dû à la convergence de la méthode des statuts (voir la ligne correspondant à un pas de maillage de départ de hi/8 pour lequel l'algorithme LDC n'a pas été appliqué). Comme pour tous les cas tests précédents, il existe aussi un compromis entre la taille de maillage de départ et le nombre de sous-niveaux.

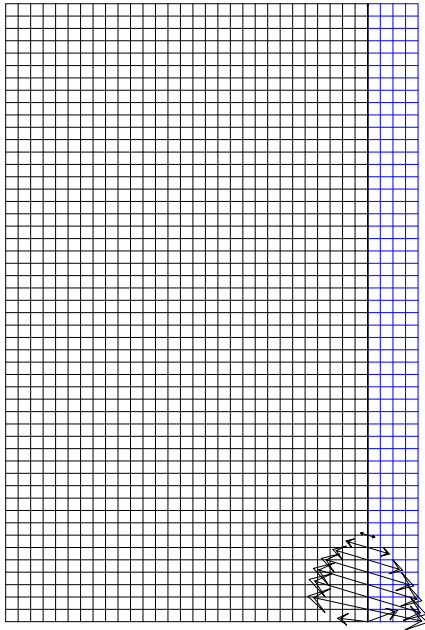


FIGURE 4.25 – Forces de contact avec frottement pour un maillage initial de pas $328 \mu\text{m}$ · Jeu initial égal à $2\mu\text{m}$ · Coefficient de frottement égal à 0,6.

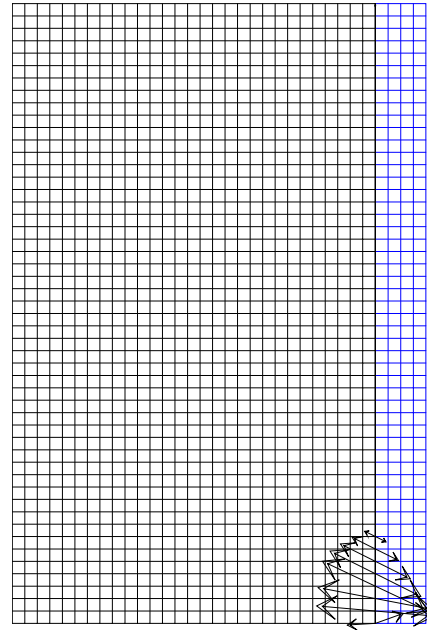


FIGURE 4.26 – Forces de contact avec frottement pour un maillage initial de pas $328 \mu\text{m}$ · Jeu initial égal à $2\mu\text{m}$ · Coefficient de frottement égal à 1,0.

Taille de maille initiale		Coefficient de frottement		
		0,2	0,6	1,0
hi	nombre de sous-niveaux :	3	3	3
	erreur relative :	6,04%	6,93%	6,95%
	nombre de noeuds par niveau :	1785/2484/4972/11022	1785/2278/4746/11072	1785/2208/4522/10266
	nombre total de noeuds :	20263	19881	18781
	temps de calcul :	90s	68s	108s
hi/2	nombre de sous-niveaux :	2	2	2
	erreur relative :	2,79 %	3,37%	3,29%
	nombre de noeuds par niveau :	6800/5500/14076	6800/4662/11072	6800/4522/10266
	nombre total de noeuds :	22706	22534	21588
	temps de calcul :	81s	90s	97s
hi/4	nombre de sous-niveaux :	1	1	1
	erreur relative :	2,37%	2,98%	3,08%
	nombre de noeuds par niveau :	26532/13662	26532/10944	26532/10266
	nombre total de noeuds :	37554	37476	36798
	temps de calcul :	170s	210s	234s
hi/8	nombre de sous-niveaux :	0	0	0
	erreur relative :	2,15%	2,22%	2,27%
	nombre de noeuds par niveau :	104410	104410	104410
	nombre total de noeuds :	104410	104410	104410
	temps de calcul :	591s	800s	981s

Tableau 4.5 – Cas test contact 2D(r,z) avec frottement pour différents pas de maillages de départ et différents coefficients de frottement · Seuil d'erreur $\beta = 5\%$ · $hi=328 \mu\text{m}$ · Jeu initial = $2\mu\text{m}$ · Initialisation des statuts de contact par la technique MCA · Critère d'arrêt : mesure inférieure à 0,5% de la mesure du domaine initial.

4.4.6 Contact avec frontière courbe

Dans cette section, nous nous intéressons à un cas de contact avec frontière courbe. Nous choisissons un cas test en 2D vérifiant les hypothèses des déformations planes. Ce cas test utilise les géométries de la pastille et de la gaine dans le plan (r, θ) , cf. figure 4.28. Il s'agit donc d'une portion du disque en face d'une portion d'anneau.

Le contact pastille-gaine est provoqué par une dilatation thermique. Afin d'éviter le calcul thermique, nous imposons un champ de température dans les corps. Les déformations associées à ce champ de température sont calculées par $\epsilon = \alpha_T \Delta T$ avec α_T le coefficient de dilatation thermique. Le champ de forces nodales résultant de l'intégration du champ de contraintes est alors appliqué comme terme source dans le calcul mécanique.

Le coefficient de dilatation thermique de la pastille est $\alpha_T = 1.0 \times 10^{-5}$ et $\alpha_T = 6.0 \times 10^{-6}$ pour la gaine. Le champ de température est radial dans la pastille et constant dans la gaine, voir figure 4.27. Il s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \Delta T &= 7.0 \times 10^7 \times (R^2 - (x^2 + y^2)) + 561. - 293. && \text{dans la pastille} \\ \Delta T &= 561. - 293. && \text{dans la gaine} \end{aligned}$$

Le jeu initial entre la pastille et la gaine est $2 \mu\text{m}$. La figure 4.28 présente l'ensemble des conditions aux limites.

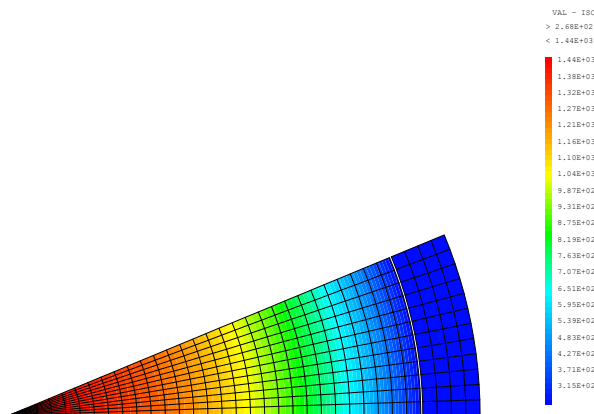


FIGURE 4.27 – Champ de température imposé 2D déformation plane

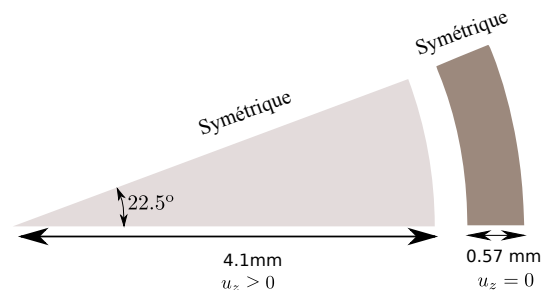


FIGURE 4.28 – Schéma du problème 2D déformation plane

4.4.6.1 Raffinement LDC avec maillage hiérarchique

Dans cette section, nous choisissons d'utiliser l'algorithme LDC avec raffinement hiérarchique, voir section 3.1. Le raffinement hiérarchique utilisé consiste à ajouter des noeuds au milieu des segments du niveau immédiatement plus grossier et à construire les mailles fines en s'appuyant sur ces noeuds, voir figure 4.29. On voit ainsi que les noeuds frontières ajoutés sur le sous-niveau sont situés sur la corde du cercle et non directement sur l'arc de cercle.

Après application de l'algorithme LDC, nous vérifions les forces de contact sur chaque niveau. La force de contact du maillage grossier est présentée dans la figure 4.30.

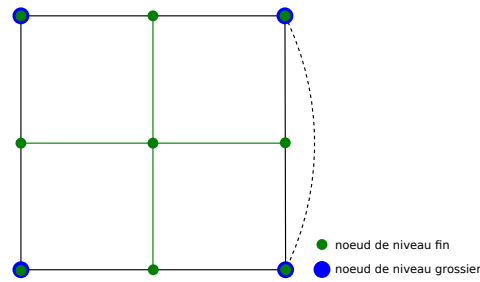


FIGURE 4.29 – Raffinement des mailles rectangulaires de façon hiérarchique

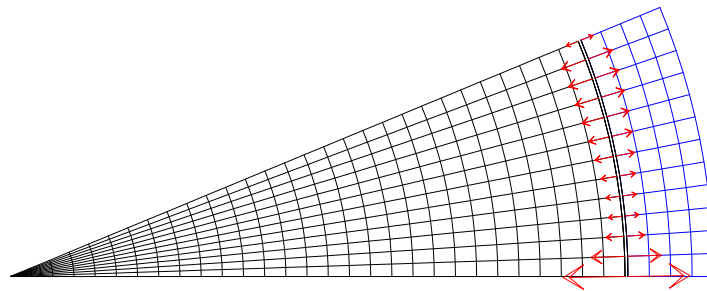


FIGURE 4.30 – Forces de contact sur le maillage grossier.

On constate cependant que la force de contact du deuxième sous-niveau est très différente de celle du maillage grossier, cf. figure 4.31 et présente des discontinuités de contact, voire du décollement sur les noeuds fins rajoutés sur la corde.

A titre de comparaison, nous proposons de calculer le champ de force de contact obtenu

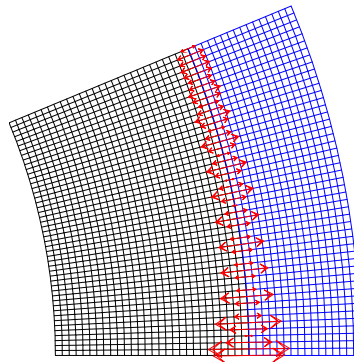


FIGURE 4.31 – Forces de contact sur le deuxième sous-niveau. Raffinement hiérarchique.

sur un maillage initial construit de façon hiérarchique à partir du maillage grossier 4.30 et donc équivalent localement au maillage de deuxième sous-niveau obtenu avec LDC et sans utiliser de procédure de raffinement automatique. Les forces de contact sont présentées sur la figure 4.32.

En comparant la figure 4.32 à la figure 4.31, on peut constater le bon fonctionnement de la méthode LDC. En effet, les champs de force obtenus localement par la méthode LDC sont équivalents à ceux obtenus sans LDC sur un maillage global construit de manière équivalente.

En analysant le champ de force sur le maillage déformé, cf. figure 4.33, on constate que les

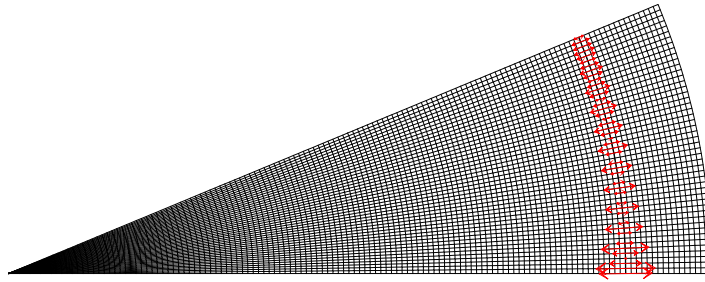


FIGURE 4.32 – Forces de contact sur un maillage construit de façon hiérarchique à partir du maillage grossier 4.30.

conditions aux limites sur l'axe de fissuration de la pastille ($y = 0$) induisent un déplacement de celle-ci selon l'axe θ . Le contact se produit alors entre un noeud et le segment opposé sur la gaine. Le raffinement hiérarchique avec noeuds sur la corde induit des forces normales selon la même direction pour un segment donné. Ainsi les nouveaux noeuds générés sur la corde du cercle ne peuvent plus rentrer en contact avec la gaine (les deux frontières de contact ne s'imbriquent plus).

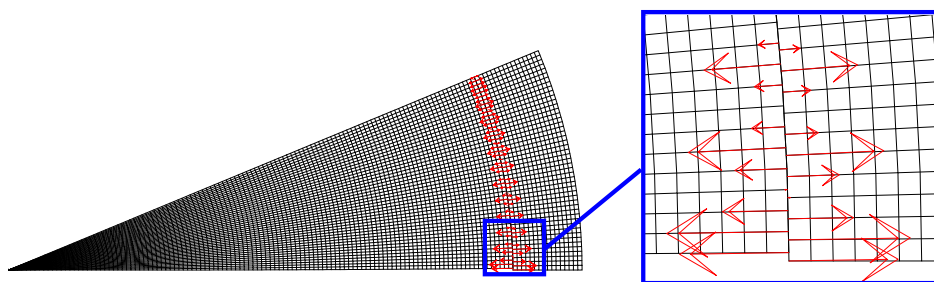


FIGURE 4.33 – Forces de contact sur un maillage déformé 4.32

La figure 4.34 représente de manière illustrative ce phénomène. Le noeud "a" sur l'arc de cercle de la pastille va entrer en contact avec le segment "1" et le noeud "b" avec le segment "2". La géométrie du maillage des 2 corps peut alors empêcher le noeud "c" de rentrer en contact avec la gaine.

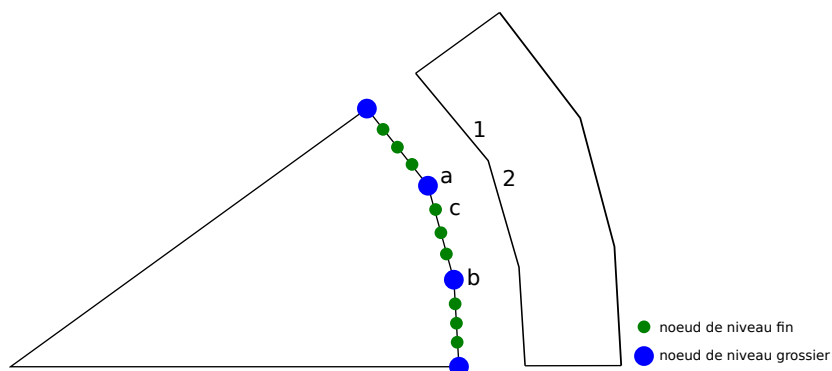


FIGURE 4.34 – Schéma illustrant le contact dans le cas d'un raffinement hiérarchique

4.4.6.2 Raffinement avec maillage quasi-hiérarchique

Afin de pallier le défaut du raffinement hiérarchique sur un maillage courbe de contact, nous proposons de déplacer les noeuds ajoutés de façon hiérarchique dans la zone de contact courbe de la corde vers l'arc de cercle, voir figure 4.35. Les maillages ainsi générés sont donc “quasi-hiérarchiques”. La frontière de contact est donc mieux représentée à chaque niveau de raffinement.

Nous nous limitons à utiliser ce raffinement modifié uniquement dans les zones de contact, car avec la stratégie de détection de zone d'intérêt proposée, la solution va être recalculée complètement dans ces zones. Sur les frontières extérieures (avec CL de Dirichlet ou Neumann) ce type de raffinement poserait la question de l'extrapolation des déplacements et au vu des résultats du chapitre 3 3, sur ces frontières le raffinement hiérarchique n'engendre pas des erreurs du premier ordre.

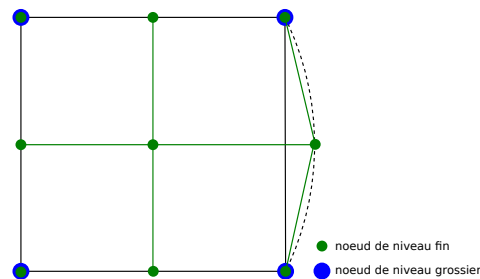


FIGURE 4.35 – Raffinement sur l'arc de cycle de façon quasi-hiérarchique

Les forces de contact obtenues en utilisant le raffinement quasi-hiérarchique sur les zones en contact sont données sur la figure 4.36.

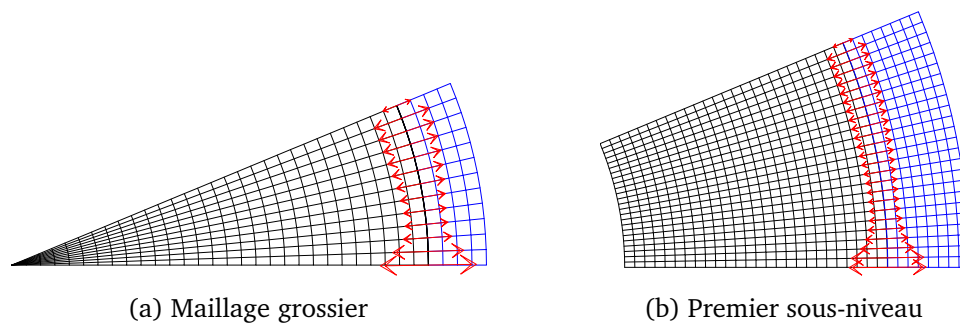


FIGURE 4.36 – Forces de contact après algorithme LDC et raffinement quasi-hiérarchique sur les frontières de contact.

Les résultats montrent que le déplacement des noeuds ajoutés dans la zone de contact vers l'arc de cercle améliore la solution. Les forces de contact semblent cohérentes sur les sous-niveaux.

Nous avons effectué des calculs avec différents pas de maillages de départ et différents seuils. La stratégie quasi-hiérarchique proposée permet d'obtenir des erreurs après cycles LDC qui sont inférieures aux seuils comme le montre le tableau 4.6.

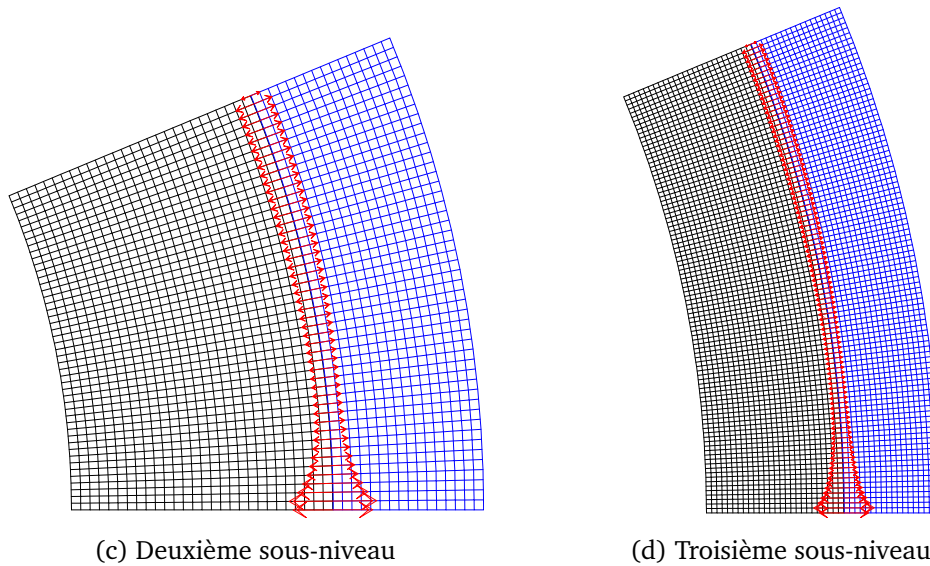


FIGURE 4.36 – Forces de contact après algorithme LDC et raffinement quasi-hiérarchique sur les frontières de contact (suite)

En conclusion, le raffinement de maillage en cas de frontière de contact non-linéaire par morceau n'est pas trivial. Le raffinement hiérarchique ne permet pas de trouver les forces de contact souhaitées.

Une alternative quasi-hiérarchique a été proposée ici qui permet de converger vers la solution de référence. La stratégie LDC-ZZ de raffinement automatique de maillage fonctionne encore très bien même si elle semble conduire à trop raffiner dans ce cas. Le couplage de LDC avec un autre estimateur plus fiable permettrait certainement de pallier ce sur-raffinement.

Bilan

Dans ce chapitre, nous avons présenté le problème de contact de Signorini avec et sans frottement ainsi que les méthodes classiques pour le résoudre. En utilisant la méthode des statuts, nous avons adapté la stratégie de raffinement automatique de maillage couplant la méthode LDC et l'estimateur ZZ au problème de contact. Les résultats présentés pour des problèmes de contact unilatéral avec ou sans jeu initial et un problème de frottement avec jeu initial montrent que la méthode LDC et la stratégie de raffinement sont très génériques et très efficaces. Nous disposons à présent d'un outil permettant de raffiner de façon optimale un maillage initial d'un problème de contact en respectant un seuil d'erreur relative donnée par l'utilisateur.

Taille de maille initiale		Seuil d'erreur		
		5%	2%	1%
hi	nombre de sous-niveaux :	0	1	3
	erreur relative :	1,22%	0,80%	0.47%
	nombre de noeuds par niveau :	455	455/650	455/900/2254/4462
hi/2	nombre de sous-niveaux :	0	0	2
	erreur relative :	0,62 %	0,62%	0,38%
	nombre de noeuds par niveau :	1632	1632	1632/2162/4278
hi/4	nombre de sous-niveaux :	0	0	1
	erreur relative :	0,31%	0,31%	0.26%
	nombre de noeuds par niveau :	6298	6298	6298/4278
hi/8	nombre de sous-niveaux :	0	0	0
	erreur relative :	0,17%	0,17%	0,17%
	nombre de noeuds par niveau :	24380	24380	24380

Tableau 4.6 – Cas test contact 2D(r, θ) pour différents pas de maillages de départ et différents seuils fixés · Jeu initial = $2\mu\text{m}$ · Raffinement avec maillage quasi-hiérarchique · Critère d'arrêt : mesure inférieure à 0,5% de la mesure du domaine initial.

Conclusion et Perspectives

Dans l'objectif de proposer une méthode de raffinement de maillage permettant de simuler précisément le phénomène d'Interaction mécanique Pastille-Gaine (IPG), nous avons développé une stratégie de raffinement local automatique basée sur la combinaison de la méthode multi-grilles locale "Local Defect Correction" (LDC) et de l'estimateur d'erreur *a posteriori* de Zienkiewicz et Zhu (ZZ). L'intérêt des méthodes multi-grilles locales est de permettre d'atteindre des tailles locales de maille très fines tout en conservant des maillages structurés uniformes avec peu de degrés de liberté. Nous avons choisi d'utiliser la méthode LDC car elle s'applique facilement dans le cadre d'une résolution par éléments finis et parce qu'elle n'est pas intrusive vis-à-vis des codes de calcul existants. Afin de détecter les zones d'intérêt à raffiner finement, l'estimateur ZZ a été choisi en raison de sa simplicité de mise en œuvre, de sa rapidité et de son efficacité démontrée dans la littérature.

Nous avons également proposé plusieurs critères d'arrêt afin de permettre l'arrêt de la génération de sous-niveaux lorsque le problème présente des singularités (de contraintes par exemple). Plusieurs cas test bi-dimensionnels (axisymétriques, déformations planes) s'intéressant à la réponse élastique de la gaine sont étudiés. Le contact entre la gaine et la pastille est alors représenté par des chargements discontinus sur la paroi interne de la gaine. Les résultats numériques basés sur l'erreur relative en norme énergie et l'erreur absolue en norme infinie sur la contrainte équivalente de von Mises montrent que la stratégie LDC-ZZ fonctionne très bien. Les sous-niveaux sont ajoutés automatiquement autour des zones de discontinuité du chargement. Les erreurs entre la solution LDC composite (rassemblant tous les sous-niveaux) et la solution de référence sont généralement inférieures aux seuils demandés. Parmi les différents critères d'arrêt, le critère d'arrêt basé sur un ratio de mesure de surface entre la zone à raffiner et le domaine initial semble être générique et efficace.

Ensuite, nous avons adapté la stratégie de raffinement automatique de maillage couplant la méthode LDC et l'estimateur ZZ à la problématique de contact avec ou sans frottement. En utilisant la méthode des statuts pour résoudre le problème de contact, la stratégie de raffinement proposée considérant le solveur comme une "boîte noire" s'adapte facilement au problème de contact multi-corps. L'efficacité de la méthode LDC et de la stratégie de raffinement proposée est montrée sur des résultats numériques de résolution d'un problème de contact unilatéral avec ou sans jeu initial et sur un problème de frottement avec jeu initial.

La stratégie de raffinement automatique de maillage couplant la méthode LDC, l'estimateur ZZ et le critère d'arrêt de génération des sous-niveaux semble donc très générique et ouvre la voie à de nouvelles applications.

Une perspective à court terme de ce travail est de compléter l'étude sur le problème de contact. Les résultats numériques montrent qu'il y a un compromis à trouver entre maillage de départ et localisation des sous-niveaux pour que le temps de calcul soit optimal. Un critère pourrait être proposé afin d'éviter de faire des sous-niveaux dans l'algorithme LDC lorsque la zone de raffinement est trop large. Ces sous-niveaux seraient alors remplacés par un maillage initial directement plus raffiné. Ensuite, il faudrait étendre la stratégie proposée à des problèmes comportant des matériaux non linéaires et des problèmes d'évolutions temporelles. Les zones de raffinement évoluant alors dans le temps, il faudra s'intéresser au problème de transmission d'informations d'un pas de temps sur l'autre entre sous-grilles et au raffinement local spatio-temporel.

L'objectif *in fine* étant de disposer d'un solveur multi-grilles local pour les études concernant l'interaction mécanique pastille-gaine, la perspective à plus long terme est d'intégrer cette stratégie de raffinement automatique dans la plate-forme logicielle PLEIADES afin de pouvoir tester l'efficacité et les performances de l'approche proposée sur des configurations industrielles.

Bibliographie

- [Abaqus 2016] Abaqus. *Abaqus Analysis User's Manual*, 2016.
- [Abide *et al.* 2016] S. Abide, M. Barboteu et D. Danan. *Analysis of two active set type methods to solve unilateral contact problems*. *Applied Mathematics and Computation*, vol. 284, pages 286–307, 2016.
- [Ainsworth & Oden 1997] M. Ainsworth et J.T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 142, pages 1–88, 1997.
- [Ainsworth & Oden 2011] M. Ainsworth et J.T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. John Wiley & Sons, 2011.
- [Ainsworth *et al.* 1989] M. Ainsworth, J.Z. Zhu, A.W. Craig et O.C. Zienkiewicz. *Analysis of the Zienkiewicz–Zhu a-posteriori error estimator in the finite element method*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 28, no. 9, pages 2161–2174, 1989.
- [Alart & Curnier 1991] P. Alart et A. Curnier. *A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution methods*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 92, no. 3, pages 353–375, 1991.
- [Alberman *et al.* 1997] A. Alberman, M. Roche, P. Couffin, S. Bendotti, D.J. Moulin et J.L. Boutfroy. *Technique for power ramp tests in the ISABELLE 1 loop of the OSIRIS reactor*. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 168, pages 293–303, 1997.
- [Anthonissen *et al.* 1998] M.J.H. Anthonissen, B. van 't Hof et A.A. Reusken. *A Finite Volume Scheme for Solving Elliptic Boundary Value Problems on Composite Grids*. *Computing*, vol. 61, pages 285–305, 1998.
- [Anthonissen *et al.* 2005] M.J.H. Anthonissen, B.A.V. Bennet et M.D. Smooke. *An adaptive multilevel local defect correction technique with application to combustion*. *Combustion Theory and Modelling*, vol. 9, pages 273–299, 2005.
- [Askes & Rodriguez-Ferran 2001] H. Askes et A. Rodriguez-Ferran. *A combined rh-adaptive scheme based on domain subdivision. Formulation and linear examples*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 51, no. 3, pages 253–273, 2001.
- [Babuška & Miller 1987] I. Babuška et A. Miller. *A feedback finite element method with a posteriori error estimation : Part I. The finite element method and some basic properties of the a posteriori error estimator*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 61, no. 1, pages 1–40, 1987.

- [Babuška & Rheinboldt 1978a] I. Babuška et W. Rheinboldt. *Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 15, no. 4, pages 736–754, 1978.
- [Babuška & Rheinboldt 1978b] I. Babuška et W.C. Rheinboldt. *A-posteriori error estimates for the finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 12, pages 1597–1615, 1978.
- [Babuška & Rheinboldt 1981] I. Babuška et W. Rheinboldt. *A Posteriori Error Analysis of Finite Element Solutions for One-Dimensional Problems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 18, no. 3, pages 565–589, 1981.
- [Babuška & Strouboulis 2001] I. Babuška et T. Strouboulis. *The finite element method and its reliability*. Oxford University Press, 2001.
- [Babuška & Suri 1987a] I. Babuška et M. Suri. *The optimal convergence rate of the p -version of the finite-element method*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 24, no. 4, pages 750–776, 1987.
- [Babuška & Suri 1987b] Ivo Babuška et Manil Suri. *The h - p version of the finite element method with quasiuniform meshes*. RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique, vol. 21, no. 2, pages 199–238, 1987.
- [Babuska & Szabo 1982] I. Babuska et B. Szabo. *On the rates of convergence of the finite element method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 18, no. 3, pages 323–341, 1982.
- [Babuska et al. 1981] I. Babuska, B.A. Szabo et I.N. Katz. *The p -version of the finite element method*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 18, no. 3, pages 515–545, 1981.
- [Babuška et al. 1994] I. Babuška, T. Strouboulis, A. Marthur et C.S. Upadhyay. *Pollution-error in the h -version of the finite-element method and the local quality of a-posteriori error estimators*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 17, pages 273–321, 1994.
- [Bailly et al. 1997] H. Bailly, D. Ménessier et C. Prunier. *Le combustible nucléaire des réacteurs à eau sous pression et des réacteurs à neutrons rapides*. Commissariat à l'Énergie Atomique, 1997.
- [Bank & Weiser 1985] R.E. Bank et A. Weiser. *Some a posteriori error estimators for elliptic partial differential equations*. Mathematics of Computation, vol. 44, no. 170, pages 283–301, 1985.
- [Bank & Welfert 1991] R.E. Bank et B.D. Welfert. *A Posteriori Error Estimates for the Stokes Problem*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 28, no. 3, pages 591–623, 1991.
- [Bank et al. 1983] R.E. Bank, A.H. Sherman et A. Weiser. *Some refinement algorithms and data structures for regular local mesh refinement*. Scientific Computing, Applications of Mathematics and Computing to the Physical Sciences, vol. 1, pages 3–17, 1983.
- [Bao et al. 2012] G. Bao, G. Hu et D. Liu. *An h -adaptive finite element solver for the calculations of the electronic structures*. Journal of Computational Physics, vol. 231, no. 14, pages 4967–4979, 2012.
- [Barbié et al. 2014] L. Barbié, I. Ramière et F. Lebon. *Strategies around the local defect correction multi-level refinement method for three-dimensional linear elastic problems*. Computers and Structures, vol. 130, pages 73–90, 2014.

- [Barbié *et al.* 2015] L. Barbié, I. Ramière et F. Lebon. *An automatic multilevel refinement technique based on nested local meshes for nonlinear mechanics*. Computers & Structures, vol. 147, pages 14–25, 2015.
- [Barbié 2013] L. Barbié. *Raffinement de maillage multi-grille local en vue de la simulation 3D du combustible nucléaire des Réacteurs à Eau sous Pression*. Thèse, Aix-Marseille Université, Octobre 2013.
- [Barros *et al.* 2004] F.B. Barros, S.P.B. Proenca et C.S. de Barcellos. *Generalized finite element method in structural nonlinear analysis - a p -adaptive strategy*. Computational Mechanics, vol. 33, no. 2, pages 95–107, 2004.
- [Beckett *et al.* 2001] G. Beckett, J.A. Mackenzie et M.L. Robertson. *A moving mesh finite element method for the solution of two-dimensional Stefan problems*. Journal of Computational Physics, vol. 168, no. 2, pages 500–518, 2001.
- [Bellenger & Coorevits 2005] E. Bellenger et P. Coorevits. *Adaptive mesh refinement for the control of cost and quality in finite element analysis*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 41, no. 15, pages 1413–1440, 2005.
- [Belliard & Grandotto 2003] M. Belliard et M. Grandotto. *Local zoom computation of two-phase flows in steam generators using a local defect correction method*. Numerical Heat Transfer - Part A Applications, vol. 43, no. 2, pages 111–135, 2003.
- [Belytschko & Tabbara 1993] T. Belytschko et M. Tabbara. *H-adaptive finite-element methods for dynamic problems, with emphasis on localization*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 36, no. 24, pages 4245–4265, 1993.
- [Biotteau 2010] E. Biotteau. *Stratégie multigrille et raffinement automatique à précision contrôlée pour la dynamique transitoire non-linéaire*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2010.
- [Boersma & Wriggers 1997] A. Boersma et P. Wriggers. *An algebraic multigrid solver for finite element computations in solid mechanics*. Engineering Computations, vol. 14, no. 2, pages 202–215, 1997.
- [Bonnet & Frangi 2007] de Marc Bonnet et Attilio Frangi. *Analyse des solides déformables par la méthode des éléments finis*. European Journal of Computational Mechanics/Revue Européenne de Mécanique Numérique, vol. 16, no. 5, pages 667–668, 2007.
- [Bouillard *et al.* 1996] P. Bouillard, J.F. Allard et G. Warzee. *Superconvergent patch recovery technique for the finite element method in acoustics*. Communications in Numerical Methods in Engineering, vol. 12, no. 9, pages 581–594, 1996.
- [Boussetta *et al.* 2006] R. Boussetta, T. Coupez et L. Fourment. *Adaptive remeshing based on a posteriori error estimation for forging simulation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195, no. 48-49, pages 6626–6645, 2006.
- [Brandt 1977] A. Brandt. *Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems*. Mathematics of Computation, vol. 31, pages 333–390, 1977.
- [Brandt 1994] A. Brandt. *Rigorous quantitative-analysis of Multigrid .1. Constant-coefficients 2-Level cycle with L_2 -norm*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 31, no. 6, pages 1695–1730, 1994.

- [Cai & Li 2010] Z. Cai et R. Li. *An h-adaptive mesh method for Boltzmann-BGK/hydrodynamics coupling*. *Journal of Computational Physics*, vol. 229, pages 1661–1680, 2010.
- [Cai et al. 1995] Z. Cai, F. Le Gland et H. Zhang. *An adaptive local grid refinement method for nonlinear filtering*. Rapport technique, INRIA, 1995.
- [Cao et al. 2001] W. Cao, W. Huang et R.D. Russell. *Comparison of two-dimensional r-adaptive finite element methods using various error indicators*. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 56, pages 127–143, 2001.
- [Carstensen & Funken 1999] C. Carstensen et S. Funken. *Fully Reliable Localized Error Control in the FEM*. *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 21, no. 4, pages 1465–1484, 1999.
- [CAST3M 2016] CAST3M. www.cast3m.cea.fr, 2016.
- [Cavin et al. 2005] P. Cavin, A. Gravouil, A.A. Lubrecht et A. Combescure. *Efficient FEM calculation with predefined precision through automatic grid refinement*. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 41, pages 1043–1055, 2005.
- [Chabrand et al. 1998] P. Chabrand, F. Dubois et M. Raous. *Various numerical methods for solving unilateral contact problems with friction*. *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 28, no. 4, pages 97–108, 1998.
- [Ciarlet 1978] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems, volume 4 of Studies in Mathematics and its Applications*. North-Holland Publishing Company, J. Lions, G. Papanicolaou and R.T. Rockafellar édition, 1978.
- [Clément 1975] Ph. Clément. *Approximation by finite element functions using local regularization*. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique*, vol. 9, no. R2, pages 77–84, 1975.
- [Cocu et al. 1996] M. Cocu, E. Pratt et M. Raous. *Formulation and approximation of quasistatic frictional contact*. *International Journal of Engineering Science*, vol. 34, no. 7, pages 783–798, 1996.
- [Cocu 1984] M. Cocu. *Existence of solutions of Signorini problems with friction*. *International Journal of Engineering Science*, vol. 22, no. 5, pages 567–575, 1984.
- [Code_Aster 2016] Code_Aster. www.code-aster.org, 2016.
- [Coorevits et al. 2000] P. Coorevits, P. Hild et J.P. Pelle. *A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and non-matching meshes*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 186, no. 1, pages 65–83, 2000.
- [Dari et al. 1999] E. Dari, R.G. Durán et C. Padra. *Maximum norm error estimators for three-dimensional elliptic problems*. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 37, no. 2, pages 683–700, 1999.
- [Dassault_Systèmes 2016] Dassault_Systèmes. *12.3.2 Error indicators*, 2016.
- [Delmas 2008] J. Delmas. *Stratégies de contrôle d’erreur en calcul de structures industrielles*. PhD thesis, Université de Picardie Jules Verne, 2008.
- [Delmas 2011] J. Delmas. *Estimateurs d’erreur en résidu*, 2011. Manuel de référence Code_Aster.

- [Demkowicz *et al.* 1985] L. Demkowicz, P. Devloo et J.T. Oden. *On a h-type mesh-refinement strategy based on minimization of interpolation errors*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 53, no. 1, pages 67–89, 1985.
- [Demkowicz *et al.* 1989] L. Demkowicz, J.T. Oden, W. Rachowicz et O. Hardy. *Toward a universal h-p adaptive finite-element strategy - 1. Constrained approximation and data structure*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 77, no. 1-2, pages 79–112, 1989.
- [Düster & Rank 2001] A. Düster et E. Rank. *The p-version of the finite element method compared to an adaptive h-version for the deformation theory of plasticity*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190, pages 1925–1935, 2001.
- [Düster *et al.* 2007] A. Düster, A. Niggel et E. Rank. *Applying the hp-d version of the FEM to locally enhance dimensionally reduced models*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 196, pages 3524–3533, 2007.
- [Duvaut & Lions 1976] G. Duvaut et J.L. Lions. *Inequalities in mechanics and physics*, volume 219. Springer-Verlag, 1976.
- [Edwards *et al.* 1993] M.G. Edwards, J.T. Oden et L. Demkowicz. *An hr-adaptive approximate Riemann solver for the Euler equations in 2 dimensions*. SIAM Journal on Scientific Computing, vol. 14, no. 1, pages 185–217, 1993.
- [Ehlers *et al.* 2002] W. Ehlers, M. Ammann et S. Diebels. *h-Adaptive FE methods applied to single-and multiphase problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 54, no. 2, pages 219–239, 2002.
- [Fedorenko 1961] R.P. Fedorenko. *A relaxation method for solving elliptic difference equations*. USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics, pages 1092–1096, 1961.
- [Ferket & Reusken 1996a] P.J.J. Ferket et A. Reusken. *A Finite Difference Discretization Method for Elliptic Problems Composite Grids*. Computing, vol. 56, no. 4, pages 343–370, 1996.
- [Ferket & Reusken 1996b] P.J.J. Ferket et A.A. Reusken. *Further analysis of the local defect correction method*. Computing, vol. 56, no. 2, pages 117–139, 1996.
- [Ferket 1996] P.J.J. Ferket. *The finite difference based fast adaptive composite grid method*. Numerical Linear Algebra with Applications, vol. 3, no. 5, pages 391–411, 1996.
- [Fichera 1973] Gaetano Fichera. *Boundary value problems of elasticity with unilateral constraints*. In *Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity*, pages 391–424. Springer, 1973.
- [Fish & Guttal 1996] J. Fish et R. Guttal. *The s-version of finite element method for laminated composites*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 39, no. 21, pages 3641–3662, 1996.
- [Fish & Markolefas 1993] J. Fish et S. Markolefas. *Adaptive s-method for linear elastostatics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 104, pages 363–396, 1993.

- [Fish & Markolefas 1994] J. Fish et S. Markolefas. *Adaptive global-local refinement strategy based on the interior error-estimates of the h-method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 37, no. 5, pages 827–838, 1994.
- [Fish 1992] J. Fish. *The s-version of the finite-element method*. Computers and Structures, vol. 43, no. 3, pages 539–547, 1992.
- [Gallimard 2009] L. Gallimard. *A constitutive relation error estimator based on traction-free recovery of the equilibrated stress*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 78, no. 4, pages 460–482, 2009.
- [Garlick 1973] A. Garlick. *Fracture of Zircaloy cladding under simulated power ramp conditions*. Journal of Nuclear Materials, vol. 49, pages 209–224, 1973.
- [Ghosh & Manna 1993] S. Ghosh et S.K. Manna. *r-adapted arbitrary Lagrangian-Eulerian finite-element method in metal-forming simulation*. Journal of Materials Engineering and Performance, vol. 2, no. 2, pages 271–282, 1993.
- [Glowinski et al. 1976] R. Glowinski, J.-L. Lions et R. Tremolieres. *Analyse numerique des inequations variationnelles*. Dunod, 1976.
- [Gratsch & Bathe 2005] T. Gratsch et K.J. Bathe. *Review - A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis*. Computers and Structures, vol. 83, pages 235–265, 2005.
- [Grego 1995] Laurence Grego. *Méthodes multiniveaux pour des problèmes de contact unilatéral avec frottement*. PhD thesis, Université Aix-Marseille 1, 1995.
- [Guerin et al. 2013] Y. Guerin, D. Parrat et J. Noirot. *Nuclear Fuels for Light Water Reactors and Fast Reactors*. International School In Nuclear Engineering, Novembre 2013.
- [Guo & Babuška 1986] B Guo et I Babuška. *The hp version of the finite element method*. Computational Mechanics, vol. 1, no. 1, pages 21–41, 1986.
- [Hackbusch 1984] W. Hackbusch. *Local Defect Correction Method and Domain Decomposition Techniques*. Computing Suppl. Springer-Verlag, vol. 5, pages 89–113, 1984.
- [Hackbusch 1985] W. Hackbusch. *Multi-Grid Methods and Applications*. Numéro 4 de Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, 1985.
- [Han & Wriggers 2000] C.S. Han et P. Wriggers. *An h-adaptive method for elasto-plastic shell problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 189, pages 651–671, 2000.
- [Hart et al. 1986] L. Hart, S. McCormick, A. O’gallagher et J. Thomas. *The fast adaptive composite-grid method (FAC) : algorithms for advanced computers*. Applied Mathematics and Computation, vol. 19, no. 1, pages 103–125, 1986.
- [Heegaard & Curnier 1993] J.H. Heegaard et A. Curnier. *An augmented Lagrangian method for discrete large-slip contact problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 36, no. 4, pages 569–593, 1993.
- [Huang & Russell 2010] W. Huang et R.D. Russell. *Adaptive moving mesh methods*, volume 174. Springer Science & Business Media, 2010.
- [Jernkvist 1995] L. O. Jernkvist. *A model for predicting pellet-cladding interaction-induced fuel rod failure*. Nuclear Engineering and Design, vol. 156, pages 393–399, 1995.

- [Kelly *et al.* 1983] D.W. Kelly, J.P. De S.R. Gago, O.C. Zienkiewicz et I. Babuška. *A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method : Part I—error analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 19, no. 11, pages 1593–1619, 1983.
- [Khadra *et al.* 1996] K. Khadra, Ph. Angot, J.P. Caltagirone et P. Morel. *Concept de zoom adaptatif en architecture multigrille locale ; étude comparative des méthodes L.D.C., F.A.C. et F.I.C.* RAIRO - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, vol. 30, no. 1, pages 39–82, 1996.
- [Kikuchi & Oden 1988] N. Kikuchi et J.T. Oden. *Contact problems in elasticity : a study of variational inequalities and finite element methods*, volume 8. SIAM, 1988.
- [Kikuchi & Song 1981] N. Kikuchi et Y. J. Song. *Penalty/finite-element approximations of a class of unilateral problems in linear elasticity*. Quarterly of Applied Mathematics, pages 1–22, 1981.
- [Klarbring & Björkman 1988] A. Klarbring et G. Björkman. *A mathematical programming approach to contact problems with friction and varying contact surface*. Computers & Structures, vol. 30, no. 5, pages 1185–1198, 1988.
- [Klarbring 1986] A. Klarbring. *A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 58, no. 2, pages 175–200, 1986.
- [Kramer *et al.* 2009] W. Kramer, H.J.H. Clercx, R.M.M. Mattheij et R. Minero. *A finite volume local defect correction method for solving the transport equation*. Computers and Fluids, vol. 38, no. 3, pages 533–543, 2009.
- [Kubatko *et al.* 2009] E.J. Kubatko, S. Bunya, C. Dawson et J.J. Westerink. *Dynamic p-adaptive Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for the shallow water equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 198, no. 21-26, pages 1766–1774, 2009.
- [Kuss & Lebon 2011] F. Kuss et F. Lebon. *Error estimation and mesh adaptation for Signorini-Coulomb problems using E-FEM*. Computers and Structures, vol. 89, no. 11-12, pages 1148–1154, 2011.
- [Ladevèze & Leguillon 1983] P. Ladevèze et D. Leguillon. *Error estimate procedure in the finite-element method and applications*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 20, pages 485–509, 1983.
- [Ladevèze & Pelle 2005] P. Ladevèze et J.P. Pelle. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics*. Springer, 2005.
- [Ladevèze *et al.* 1986] P. Ladevèze, G. Coffignal et J.P. Pelle. *Accuracy of elastoplastic and dynamic analysis*. In I. Babuska, O.C. Zienkiewicz, J.P. Gago et Oliveira E.R., éditeurs, *Accuracy estimates and adaptive refinements in Finite Element computations*, chapitre 11, pages 181–203. Wiley, New York, 1986.
- [Ladevèze *et al.* 1991] P. Ladevèze, J.P. Pelle et Ph. Rougeot. *Error estimation and mesh optimization for classical finite elements*. Engineering Computations, vol. 8, no. 1, pages 69–80, 1991.

- [Ladevèze 1975] P. Ladevèze. *Comparaison de modèles de milieux continus*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1975.
- [Ladevèze et al. 2010] P. Ladevèze, L. Chamoin et É. Florentin. *A new non-intrusive technique for the construction of admissible stress fields in model verification*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 199, no. 9–12, pages 766 – 777, 2010.
- [Lax & Milgram 1954] P.D. Lax et A.N. Milgram. *IX. Parabolic equations*. *Contributions to the Theory of Partial Differential Equations*, no. 33, page 167, 1954.
- [Lebon & Raous 1992] F. Lebon et M. Raous. *Multibody contact problem including friction in structure assembly*. *Computers & Structures*, vol. 43, no. 5, pages 925 – 934, 1992.
- [Lebon et al. 2007] F. Lebon, M. Raous et I. Rosu. *Multigrid Methods for Unilateral Contact Problems with Friction*. In P. Wriggers et U. Nackenhorst, éditeurs, *IUTAM Symposium on Computational Contact Mechanics*, pages 1–16. Springer, 2007. 5-8 November, Hannover, Germany.
- [Lebon 1995] F. Lebon. *Two-grid method for regularized frictional elastostatics problems*. *Engineering Computations*, vol. 12, pages 657–664, 1995.
- [Lebrun-Grandié et al. 2011] D. Lebrun-Grandié, J. Ragusa et B. Turcksin. *Adaptive multimesh hp-FEM for a coupled neutronics and nonlinear heat conduction problem*. In *International Conference on Mathematics and Computational Methods Applied to Nuclear Science and Engineering*. American Nuclear Society, 2011. 8-12 May, Rio de Janeiro, Brazil.
- [Lemke 1980] C.E. Lemke. *A survey of complementarity theory*. In *Variational Inequalities and Complementarity Problems*, pages 213–235. John Wiley, 1980.
- [Li et al. 1995] L. Li, P. Bettess, J.W. Bull, T. Bond et I. Applegarth. *Theoretical formulations for adaptive finite element computations*. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, vol. 11, no. 10, pages 857–868, 1995.
- [Lubrecht et al. 1987] A.A. Lubrecht, W.E. Ten Napel et R. Bosma. *Multigrid, an alternative method of solution for two-dimensional elastohydrodynamically lubricated point contact calculations*. *Journal of Tribology*, vol. 109, no. 3, pages 437–443, 1987.
- [Machiels et al. 2000] L. Machiels, Y. Maday et A.T. Patera. *A “flux-free” nodal Neumann sub-problem approach to output bounds for partial differential equations*. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences - Series I - Mathematics*, vol. 330, no. 3, pages 249 – 254, 2000.
- [Marchal et al. 2009] N. Marchal, C. Campos et C. Garnier. *Finite element simulation of Pellet-Cladding Interaction (PCI) in nuclear fuel rods*. *Computational Materials Science*, vol. 45, pages 821–826, 2009.
- [Marelle & Thouvenin 2011] V. Marelle et G. Thouvenin. *Alcyone V1.2.3. : Notice d’utilisation*. Rapport technique NT 11-012, CEA/DEN/CAD/DEC/SESC/LSC, 2011.
- [McCormick & Thomas 1986] S.F. McCormick et J. Thomas. *The fast adaptive composite grid (FAC) method for elliptic-equations*. *Mathematics of Computation*, vol. 46, no. 174, pages 439–456, 1986.
- [McCormick 1984] S.F. McCormick. *Fast Adaptive Composite Grid (F.A.C.) Methods : theory for the variational case*. *Computing Suppl.* Springer-Verlag, vol. 5, pages 115–121, 1984.

- [Michel *et al.* 2008a] B. Michel, J. Sercombe et G. Thouvenin. *A new phenomenological criterion for pellet-cladding interaction rupture*. Nuclear Engineering and Design, vol. 238, pages 1612–1628, 2008.
- [Michel *et al.* 2008b] B. Michel, J. Sercombe, G. Thouvenin et R. Chatelet. *3D fuel cracking modelling in pellet cladding mechanical interaction*. Engineering Fracture Mechanics, vol. 75, pages 3581–3598, 2008.
- [Michel *et al.* 2013] B. Michel, C. Nonon, J. Sercombe, F. Michel et V. Marelle. *Simulation of pellet-cladding interaction with the PLEIADES fuel performance software environment*. Nuclear Technology, vol. 182, 2013.
- [Minero *et al.* 2006] R. Minero, M.J.H. Anthonissen et R.M.M. Mattheij. *A local defect correction technique for time-dependent problems*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 22, pages 128–144, 2006.
- [Mitchell 1991] W.F. Mitchell. *Adaptive refinement for arbitrary finite-element spaces with hierarchical bases*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 36, no. 1, pages 65–78, 1991.
- [Mougel *et al.* 2004] C. Mougel, B. Verhaeghe, C. Verdeau, S. Lansart, S. Béguin et B. Julien. *Power ramping in the OSIRIS reactor : data base analysis for standard UO₂ fuel with Zy-4 cladding*. In International Seminar on Pellet-Clad Interaction on Water Reactor Fuels, March 2004. 9-11 March, Aix-en-Provence, France.
- [Nambiar & Lawrence 1992] R.V. Nambiar et K.L. Lawrence. *The Zienkiewicz–Zhu error estimator for multiple material problems*. Communications in Applied Numerical Methods, vol. 8, no. 4, pages 273–277, 1992.
- [Nefedov & Mattheij 2002] V. Nefedov et R.M.M. Mattheij. *Local Defect Correction with Different Grid Types*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 18, no. 4, pages 545–468, 2002.
- [Nochetto 1995] R.H. Nochetto. *Pointwise a posteriori error estimates for elliptic problems on highly graded meshes*. Mathematics of Computation, vol. 64, no. 209, pages 1–22, 1995.
- [Nonon *et al.* 2004] C. Nonon, S. Lansart, C. Struzik, D. Plancq, S. Martin, G.M. Decroix, O. Rambouille, S. Béguin et B. Julien. *Differential PCI behaviour of PWR fuel rods under transient conditions*. In International Topical Meeting on LWR Fuel Performance. American Nuclear Society, 2004. 19-22 September, Orlando, Florida.
- [Oden & Demkowicz 1991] J.T. Oden et L. Demkowicz. *H-p adaptive finite-element methods in computational fluid-dynamics*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 89, no. 1-3, pages 11–40, 1991.
- [Oden *et al.* 1994] J.T. Oden, W. Wu et M. Ainsworth. *An a posteriori error estimate for finite element approximations of the Navier-Stokes equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 111, no. 1–2, pages 185 – 202, 1994.
- [Oñate & Bugada 1993] E. Oñate et G. Bugada. *A study of mesh optimality criteria in adaptive finite element analysis*. Engineering computations, vol. 10, no. 4, pages 307–321, 1993.
- [Panagiotopoulos 1985] P.D. Panagiotopoulos. *Inequality problems in mechanics and applications : Convex and nonconvex energy functions*. Birkhäuser, Basel, 1985.

- [Pares et al. 2006] N. Pares, P. Díez et A. Huerta. *Subdomain-based flux-free a posteriori error estimators*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 195, pages 297–323, 2006.
- [Pled et al. 2011] F. Pled, L. Chamoin et P. Ladevèze. *On the techniques for constructing admissible stress fields in model verification : Performances on engineering examples*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 88, no. 5, pages 409–441, 2011.
- [Prudhomme et al. 2004] S. Prudhomme, F. Nobile, L. Chamoin et J.T. Oden. *Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, vol. 20, no. 2, pages 165–192, 2004.
- [Rachowicz & Zdunek 2005] W. Rachowicz et A. Zdunek. *An hp-adaptive finite element method for scattering problems in computational electromagnetics*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 62, no. 9, pages 1226–1249, 2005.
- [Rachowicz et al. 1989] W. Rachowicz, J.T. Oden et L. Demkowicz. *Toward a universal h-p adaptive finite-element strategy - 3. Design of h-p meshes*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 77, no. 1-2, pages 181–212, 1989.
- [Rachowicz 1997] W. Rachowicz. *An anisotropic h-adaptive finite element method for compressible Navier-Stokes equations*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 146, pages 231–252, 1997.
- [Ramière 2008] I. Ramière. *Convergence analysis of the Q_1 -finite element method for elliptic problems with non-boundary-fitted meshes*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 75, no. 9, pages 1007–1052, 2008.
- [Ramm et al. 2003] E. Ramm, E. Rank, R. Rannacher, K. Schweizerhof, E. Stein, W. Wendland, G. Wittum, P. Wriggers et W. Wunderlich. *Error-controlled adaptive finite elements in solid mechanics*. John Wiley & Sons, 2003.
- [Raous et al. 1988] M. Raous, P. Chabrand et F. Lebon. *Numerical methods for frictional contact problems and applications*. Journal of Theoretical and Applied Mechanics, vol. 7, pages 111–128, 1988.
- [Raous 1999] M. Raous. *Quasistatic Signorini problem with Coulomb friction and coupling to adhesion*. In *New Developments in Contact Problems*, pages 101–178. Springer, 1999.
- [Raviart & Thomas 1998] P-A. Raviart et J-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. P.G. Ciarlet and J.L. Lions, Dunod édition, 1998.
- [Ritter et al. 2010] D. Ritter, M. Sturmer et U. Rude. *A fast-adaptive composite grid algorithm for solving the free-space Poisson problem on the cell broadband engine*. Numerical Linear Algebra with Applications, vol. 17, no. 2-3, pages 291–305, 2010.
- [Rivara 1984] M. Rivara. *Mesh refinement processes based on the generalized bisection of simplices*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 21, no. 3, pages 604–613, 1984.
- [Roberts 1978] G. Roberts. *The concentration of stress in cladding produced by the expansion of cracked fuel pellets*. Nuclear Engineering and Design, vol. 47, pages 257–266, 1978.

- [Sercombe *et al.* 2012] J. Sercombe, I. Aubrun et C. Nonon. *Power ramped cladding stresses and strains in 3D simulations with burnup-dependent pellet-clad friction*. Nuclear Engineering and Design, vol. 242, pages 164–181, 2012.
- [Sercombe *et al.* 2013] J. Sercombe, J. Julien, F. Michel, B. Michel et E. Fédérici. *3D modelling of strain concentration due to PCI within the fuel code ALCYONE*. In Proceedings of Top Fuel 2013. American Nuclear Society, September 15-19 2013. Charlotte, NC.
- [Simo & Laursen 1992] J.C. Simo et T.A. Laursen. *An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction*. Computers & Structures, vol. 42, no. 1, pages 97–116, 1992.
- [Solin *et al.* 2010] P. Solin, J. Ceverny, L. Dubcova et D. Andrs. *Monolithic Discretization of Linear Thermoelasticity Problems via Adaptive Multimesh hp-FEM*. Journal of Computational and Applied Mathematics, vol. 234, pages 2350–2357, 2010.
- [Strouboulis & Haque 1992] T. Strouboulis et K.A. Haque. *Recent experiences with error estimation and adaptivity - 2. Error estimation for h-adaptive approximations on grids of triangles and quadrilaterals*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 100, no. 3, pages 359–430, 1992.
- [Sun & Zamani 1992] W. Sun et N.G. Zamani. *An adaptive h-r boundary element algorithm for the Laplace equation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, no. 3, pages 537–552, 1992.
- [Thomas *et al.* 1986] J.W. Thomas, R. Schweitzer, M. Heroux, S. McCormick et A.M. Thomas. *Application of the fast adaptive composite grid method to computational fluid dynamics*. In Tenth International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, pages 606–611. Springer, 1986.
- [Verfürth 1996] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*, volume 1. Wiley-Teubner Chichester, 1996.
- [Verfürth 1999] R. Verfürth. *A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 176, no. 1, pages 419–440, 1999.
- [Wappler 1999] J. U. Wappler. *Die lokale Defektkorrekturmethode zur adaptiven Diskretisierung elliptischer Differentialgleichungen mit finiten Elementen*. PhD thesis, Christian-Albrechts-Universität, Kiel, 1999. in German.
- [Watremetz *et al.* 2007] B. Watremetz, M.C. Baietto-Dubourg et A.A. Lubrecht. *2D thermo-mechanical contact simulations in a functionally graded material : A multigrid-based approach*. Tribology International, vol. 40, pages 754–762, 2007.
- [Wriggers & Boersma 1998] P. Wriggers et A. Boersma. *A parallel algebraic multigrid solver for problems in solid mechanics discretized by finite elements*. Computers & Structures, vol. 69, no. 1, pages 129–137, 1998.
- [Wriggers & Scherf 1998] P. Wriggers et O. Scherf. *Different a posteriori error estimators and indicators for contact problems*. Mathematical and Computer Modelling, vol. 28, no. 4-8, pages 437–447, 1998.

- [Wriggers & Zavarise 1993] P. Wriggers et G. Zavarise. *Application of augmented Lagrangian techniques for non-linear constitutive laws in contact interfaces*. Communications in Numerical Methods in Engineering, vol. 9, no. 10, pages 815–824, 1993.
- [Wriggers 2006] P. Wriggers. *Computational contact mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2006.
- [Yue & Robbins 2005] Z. Yue et D.H. Robbins. *Adaptive superposition of finite element meshes in elastodynamic problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 63, no. 11, pages 1604–1635, 2005.
- [Yue & Robbins 2007] Z. Yue et D.H. Robbins. *Adaptive superposition of finite element meshes in non-linear transient solid mechanics problems*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 72, pages 1063–1094, 2007.
- [Zhu 1997] J. Zhu. *A posteriori error estimation—the relationship between different procedures*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 150, no. 1, pages 411–422, 1997.
- [Zienkiewicz & Zhu 1987] O.C. Zienkiewicz et J.Z. Zhu. *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24, pages 337–357, 1987.
- [Zienkiewicz & Zhu 1992a] O.C. Zienkiewicz et J.Z. Zhu. *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimation. Part I : The recovery technique*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pages 1331–1364, 1992.
- [Zienkiewicz & Zhu 1992b] O.C. Zienkiewicz et J.Z. Zhu. *The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimation. Part II : Error estimates and adaptivity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 33, pages 1365–1382, 1992.
- [Zienkiewicz et al. 1983] O.C. Zienkiewicz, J.D.S. Gago et D.W. Kelly. *The hierarchical concept in finite element analysis*. Computers & Structures, vol. 16, no. 1-4, pages 53–65, 1983.
- [Zienkiewicz et al. 2005] O.C. Zienkiewicz, J. Zhu et R.L. Taylor. *The finite element method : its basis and fundamentals*. Butterworth-Heinemann, 2005.