



**HAL**  
open science

# Modélisation de fatigue et de mécanique de la rupture d'une structure éolienne soumise au chargement dynamique et aléatoire du vent

Edson Haruo Miyaura

► **To cite this version:**

Edson Haruo Miyaura. Modélisation de fatigue et de mécanique de la rupture d'une structure éolienne soumise au chargement dynamique et aléatoire du vent. Génie civil. INSA de Rouen, 2016. Français. NNT : 2016ISAM0005 . tel-01405329

**HAL Id: tel-01405329**

**<https://theses.hal.science/tel-01405329v1>**

Submitted on 29 Nov 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Normandie Université

## THÈSE

**Pour obtenir le diplôme de doctorat**

### **Spécialité**

MÉCANIQUE DES SOLIDES, GÉNIE MÉCANIQUE, PRODUCTIQUE,  
TRANSPORT ET GÉNIE CIVIL & MATHÉMATIQUE

**Préparée à l'INSA Rouen Normandie**

**Modélisation de fatigue et de mécanique de la rupture  
d'une structure éolienne  
soumise au chargement dynamique et aléatoire du vent**

**Présentée et soutenue par  
Edson Haruo MIYAURA**

**Thèse soutenue publiquement le 4 octobre 2016  
devant le jury composé de**

Mme Elodie Tillier	Ingénieur Technip France - Docteur de l'Université de Paris Est-Marne la Vallée	Examineur
M. Dominique Aprato	Professeur, Univ. de Pau	Rapporteur
M. Younes Aoues	MCF, INSA Rouen Normandie	Co-encadrant
M. Christian Gout	Professeur, INSA Rouen Normandie	Codirecteur de thèse
M. Renato Pavanello	Professeur, Univ. Campinas, Brésil	Rapporteur
M. Eduardo Souza de Cursi	Professeur, INSA Rouen Normandie	Directeur de thèse

**Thèse dirigée par Eduardo Souza de Cursi (LOFIMS) et  
co-dirigée par Christian Gout (LMI)**

**INSA** | INSTITUT NATIONAL  
DES SCIENCES  
APPLIQUÉES  
ROUEN



Doctorats : la nomenclature générique (47 modalités)

code diplôme SISE	LIBELLE
4200001	MATHEMATIQUES
4200002	PHYSIQUE
4200003	CHIMIE
4200004	MATHEMATIQUES APPLIQUEES ET SCIENCES SOCIALES
4200005	SCIENCES DE L'UNIVERS
4200006	ASPECTS MOLÉCULAIRES ET CELLULAIRES DE LA BIOLOGIE
4200007	PHYSIOLOGIE ET BIOLOGIE DES ORGANISMES - POPULATIONS - INTERACTIONS
4200008	RECHERCHE CLINIQUE, INNOVATION TECHNOLOGIQUE, SANTÉ PUBLIQUE
4200009	SCIENCES AGRONOMIQUES, BIOTECHNOLOGIES AGRO-ALIMENTAIRES
4200010	MEDECINE
4200011	ODONTOLOGIE
4200012	PHARMACIE
4200013	STAPS
4200014	MÉCANIQUE DES FLUIDES, ÉNERGÉTIQUE, THERMIQUE, COMBUSTION, ACOUSTIQUE
4200015	MÉCANIQUE DES SOLIDES, GÉNIE MÉCANIQUE, PRODUCTIQUE, TRANSPORT ET GÉNIE CIVIL
4200016	GENIE CIVIL
4200017	GENIE DES PROCEDES
4200018	INFORMATIQUE
4200019	GENIE ELECTRIQUE
4200020	ELECTRONIQUE, MICROÉLECTRONIQUE, OPTIQUE ET LASERS, OPTOELECTRONIQUE MICROONDES
4200021	SCIENCES ET TECHNOLOGIE INDUSTRIELLES
4200022	SCIENCES DU LANGAGE - LINGUISTIQUE
4200023	LANGUES ET LITTERATURES ANCIENNES
4200024	LANGUES ET LITTERATURES FRANCAISES
4200025	LITTERATURE GENERALE ET COMPAREE
4200026	ARTS PLASTIQUES, MUSICOLOGIE
4200027	FRANCAIS, LANGUE ETRANGERE
4200028	LANGUES ET LITTERATURES ETRANGERES
4200029	LANGUES ETRANGERES APPLIQUEES
4200030	CULTURES ET LANGUES REGIONALES
4200031	PHILOSOPHIE, EPISTEMOLOGIE
4200032	HISTOIRE, HISTOIRE DE L'ART ET ARCHEOLOGIE
4200033	GEOGRAPHIE
4200034	AMENAGEMENT
4200035	ARCHEOLOGIE, ETHNOLOGIE, PREHISTOIRE
4200036	SCIENCES RELIGIEUSES
4200037	PSYCHOLOGIE
4200038	SOCIOLOGIE, DEMOGRAPHIE
4200039	SCIENCES DE L'EDUCATION
4200040	SCIENCES DE L'INFORMATION ET DE LA COMMUNICATION
4200041	SCIENCES JURIDIQUES
4200042	SCIENCES POLITIQUES
4200043	SCIENCES ECONOMIQUES
4200044	SCIENCES DE GESTION
4200045	ADMINISTRATION ECONOMIQUE ET SOCIALE (AES)
4200046	AUTOMATIQUE, SIGNAL, PRODUCTIQUE, ROBOTIQUE
4200047	SCIENCES DE LA VIE ET DE LA SANTE

***This work was in parts done in the framework of the M2NUM project - "M2NUM is co-financed by the European Union with the European regional development fund (ERDF, HN0002137) and by the Normandie Regional Council."***



# Résumé

L'objectif de cette thèse est de démontrer comment faire une analyse théorique de fatigue et de mécanique de la rupture d'une structure éolienne à l'axe horizontal. La chaîne des calculs nécessaires pour atteindre cet objectif s'avère être particulièrement longue pour deux raisons : d'abord, la vitesse du vent varie aléatoirement avec le temps ; deuxièmement, l'amplitude de vibration du mât est amplifiée en raison de ses fréquences naturelles de vibration.

Un chapitre entier est consacré à la modélisation de la vitesse du vent dans l'espace et dans le temps. Ce même chapitre démontre comment synthétiser un signal aléatoire à partir d'une fonction de densité spectrale de puissance (DSP).

La force axiale du rotor est le chargement le plus important sur une structure éolienne à l'axe horizontal. Cette force a un rapport non linéaire avec la vitesse du vent. Cela implique la nécessité de déterminer la DSP de la force axiale à partir de son signal, en se servant d'une technique d'estimation spectrale. La méthode Thomson Multitaper s'est avérée la plus satisfaisante pour cette application.

La DSP des déplacements du mât est déterminée en associant la réceptance du système structurel avec la DSP de la force qui représente tous les chargements.

Un signal de contrainte peut finalement être synthétisé à partir de sa DSP. La technique de comptage de cycles de chargement connue sous le nom de *rainflow* est abordée et appliquée.

Le fait que le signal de contraintes a une amplitude variable implique la nécessité d'employer une technique plus avancée de simulation de propagation de fissures. La technique choisie pour cette thèse est connue sous le nom de *strip-yield* (bande d'écoulement).

Mots-clés : Fatigue, Mécanique de la rupture, Éoliennes, Dynamique structurelle, Chargement à amplitude variable

# Abstract

The objective of this thesis is to demonstrate how to do theoretical analyses of fatigue and fracture mechanics in a structure for horizontal axis wind turbine. The chain of calculations required to reach this objective is particularly long for two reasons : firstly, the wind speed varies randomly with time ; secondly, the vibration amplitude of the mast is amplified due to its natural frequencies of vibration.

A whole chapter is dedicated to modeling the wind speed in space and time. The same chapter shows how to synthesize a random signal by employing a power spectral density function (PSD).

The axial force of the rotor is the most important loading on a structure for horizontal axis wind turbine. This force has a non linear relation with the wind speed. This implies the need to determine the PSD of the axial force from its signal, by employing a spectral estimation method. The Thomson Multitaper method revealed to be the most satisfactory for this application.

The PSD of displacement of the mast is determined by associating the receptance of the structural system and the PSD of the force representing all loadings.

Finally, a signal of stress can be synthesized from its PSD. The fatigue cycle counting method known as rainflow is discussed and employed.

The fact that the signal of stress has a variable amplitude implies the need of a more sophisticated method to simulate a crack propagation. The method chosen in this thesis is called strip-yield.

Keywords : Fatigue, Fracture Mechanics, Wind turbines, Structural dynamics, Variable amplitude loading.

Number of references : 264

# Remerciements

Mes remerciements aux professeurs Eduardo Souza de Cursi, Christian Gout et Younes Aoues pour la direction, co-direction et l'encadrement de cette thèse, respectivement.

Les professeurs Didier Lemosse et Leila Khaliq ont aussi démontré leur bonne volonté de m'aider à mener ce travail de recherche.

J'aimerais également remercier Brigitte Diarra, Danielle Blanchard et Elisabeth Lesage, secrétaires du LMI et du LOFIMS, à l'INSA de Rouen.

Je remercie le groupe de recherche responsable pour la référence Lavassas et al. (2003). Ils m'ont fourni plusieurs détails du plan de leur mât.

Merci à mes collègues doctorants. Nous avons fait quelques échanges techniques lors des formations proposées par l'École Doctorale SPMII. Je pense que certaines des idées présentes dans cette thèse sont l'aboutissement de ces échanges avec mes chers collègues. Parmi ces collègues se trouve Liu Chu, à qui je remercie pour sa ferme loyauté.

*« Je crois, je continue de croire, malgré tout,  
que dans le fond de leur cœur, les hommes sont réellement bons. »*  
*Anne Frank*

*« Il n'y a pas de déterminisme, l'homme est libre, l'homme est liberté. »*  
*Jean-Paul Sartre*



# Liste de Figures

2.1	Densité énergétique du vent, en fonction de la fréquence (der Hoven, 1957; Harper et al., 2008; Burton et al., 2011). . . . .	17
3.1	Vecteurs des forces associées à la pression et à la contrainte de cisaillement autour d'une aile (Anderson, 2001). . . . .	23
3.2	Coefficient de pression autour d'un cylindre en fonction de la coordonnée angulaire et du nombre de Reynolds (Cantwell & Coles (1983), Spitzer (1965), van Nunen (1974)). . . . .	24
3.3	Coefficient de traînée $c_d$ d'un cylindre, en fonction du nombre de Reynolds (Tritton, 1988). . . . .	25
3.4	Coefficient de puissance $C_P$ d'un rotor à l'axe horizontal qui génère de 1,0 MW de puissance maximale. Données fournies par le logiciel WAsP. . . . .	27
3.5	Exemple de courbe de puissance du rotor en fonction de la vitesse du vent. . . . .	27
3.6	Coefficient de puissance $C_P$ en fonction de la vitesse spécifique $\lambda_{rot}$ et du nombre de pales (Hau, 2006). . . . .	29
5.1	Comportement typique de la courbe de Wöhler d'un acier, en échelle bi-logarithmique (Haibach, 2006; Khan, 2012). . . . .	47
5.2	Organigramme de la méthode <i>rainflow</i> à 4 points, basé sur le travail de Amzallag et al. (1994). . . . .	52
5.3	Routine pour l'algorithme <i>rainflow</i> à 4 points destinée à éliminer les points de l'historique qui ne sont ni points de maximum ni points de minimum local. . . . .	53
5.4	Comparaison des diagrammes de vie constante pour l'acier S355, en considérant un nombre de cycles $N_f = 10^7$ ( $S_f = 213$ MPa). . . . .	56
6.1	Éprouvette avec une entaille de rayon $R_{en}$ soumise à une force de traction $f_y$ . . . . .	59
6.2	Diagramme de contraintes sur un point à une distance $r$ et angle $\theta$ par rapport à la pointe de la fissure (Irwin, 1958; Hertzberg, 1996; Miyaura, 2012). . . . .	61

6.3	(a) Tôle infinie dans les directions $x$ et $y$ , soumise à un chargement externe distant, avec une fissure centrale. (b) Tôle semi-infinie dans la direction $x$ et infinie dans la direction $y$ , soumise à un chargement externe distant, avec une fissure latérale (Miyaura, 2012). . . . .	64
6.4	(a) Tôle de largeur $2W$ soumise à un chargement externe distant $S$ , avec une fissure centrale de longueur $2a$ . (b) Tôle de largeur $W$ soumise à un chargement externe distant $S$ , avec une fissure latérale de longueur $a$ . . . . .	64
6.5	(a) Chargement non uniforme $\sigma_{yy}(x)$ distribué sur les surfaces de rupture d'une fissure latérale dans une tôle semi infinie. (b) Définition de la distance $v(x)$ , selon Jones (1998). . . . .	65
6.6	(a) Tôle de largeur $2W$ et hauteur infinie avec une force concentrée $P$ appliquée sur les surfaces de la fissure centrale. (b) Tôle de largeur $W$ et hauteur infinie avec une force $P$ appliquée sur les surfaces de la fissure latérale (Bao et al., 2010). . . . .	67
6.7	Tôle de dimensions infinies dans les directions $x$ et $y$ avec une force $P$ (par unité d'épaisseur) appliquée sur les surfaces de rupture. . . . .	68
6.8	Forme de la zone plastique, selon le critère d'écoulement plastique de von Mises (Broek, 1984; Gdoutos, 2005). . . . .	71
6.9	Estimation de la taille de la zone plastique à partir du profil de contrainte produit par un régime de déformation entièrement linéaire-élastique (Broek, 1984). . . . .	72
6.10	Définition des dimensions $\delta$ , $\lambda$ , $a_{\text{eff}}$ et $r_p$ , considérés dans le modèle d'Irwin. (Irwin, 1960b; Broek, 1984). . . . .	72
6.11	Formation de l'enveloppe de zones plastiques sous les surfaces de la fissure (Elber, 1971). . . . .	74
6.12	Zones de déformation plastique à proximité d'une fissure de fatigue et à proximité d'une coupe de scie idéale d'épaisseur zéro, dues à un chargement externe distant $S$ (Elber, 1971). . . . .	75
6.13	Chargement à amplitude constante en fonction du temps $t$ , avec une surcharge appliquée à l'instant $t_s$ . . . . .	77
6.14	Évolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles après une surcharge. Figure basée sur celle de Yamauchi et al. (2012). . . . .	77
6.15	Courbe représentant le taux de propagation d'une fissure en fonction de sa longueur après une surcharge (Anderson, 2005; Jiang et al., 2014). . . . .	78
6.16	Effet d'une surcharge sur la courbe de $S_{\text{op}}$ en fonction de la longueur $a$ de la fissure (Wang & Blom, 1991). . . . .	78
6.17	Modèle de Dugdale appliqué à une fissure latérale dans une tôle semi-infinie. La figure est similaire à celle qu'on trouve dans le travail de Dominguez (1994). . . . .	80

6.18	Définition des distances $V(x)$ , $L(x)$ et $\delta(x)$ , selon de Koning & Liefing (1988). La figure est basée aussi sur les travaux de Sumi & Inoue (2011) et Skorupa & Skorupa (2005). . . . .	85
6.19	(a) Profil de la contrainte $\sigma$ sous le chargement maximal $S_{\max}$ . (b) Profil de la contrainte $\sigma$ sous le chargement minimal $S_{\min}$ (Newman, 1981 ; Newman & Daniewicz, 2014). . . . .	88
6.20	Organigramme proposé par Wang & Blom (1991) pour implémenter la méthode bande d'écoulement. . . . .	89
6.21	Définition des chargements $S_{\min}^{\text{bef}}$ , $S_{\max}^{\text{glob}}$ et $S_{\min}^{\text{aft}}$ (Dominguez, 1994). . . . .	90
7.1	Courbes de vitesse du vent en fonction de la hauteur et de la longueur de Monin-Obukhov, pour $u(z = 10 \text{ m}) = 3, 6, 9$ et $12 \text{ m/s}$ et $0 \leq z \leq h$ . . . . .	93
7.2	Courbes de vitesse du vent en fonction de la hauteur et de la longueur de Monin-Obukhov, pour $u(z = 10 \text{ m}) = 3, 6, 9$ et $12 \text{ m/s}$ et $0 \leq z \leq 200 \text{ m}$ . . . . .	93
7.3	Courbes de la DSP de la vitesse du vent en fonction de la fréquence et de la vitesse moyenne du vent à la hauteur $z = 44$ mètres. . . . .	94
7.4	Ténacité à la rupture $K_c$ en fonction de l'épaisseur $t$ d'une tôle en acier A572 Grade 50. . . . .	97
7.5	Facteur de charge $C_T$ du rotor en fonction de la vitesse du vent $u_{\text{hub}}$ . La courbe correspond à une éolienne de 1,0 MW de puissance maximale. Elle peut être trouvée dans la base de données du logiciel WAsP. . . . .	99
7.6	Force axiale du rotor $f_{\text{rot}}$ en fonction de la vitesse du vent $u_{\text{hub}}$ (générateur de 1,0 MW de puissance maximale). . . . .	100
7.7	Contributions individuelles pour la contrainte $\sigma_{zz}$ , en fonction de la vitesse du vent à la hauteur $z = 44 \text{ m}$ . Ces contraintes correspondent à l'élément fini de coque sur la coordonnée $(z, \xi) = (0, 0)$ . . . . .	101
7.8	Contrainte totale $\sigma_{zz}^{\text{tot}}$ en fonction de la vitesse du vent à la hauteur $z = 10$ mètres. Cette courbe est associée à la composante statique des déplacements. . . . .	101
7.9	Force horizontale équivalente $f_{\text{hub}}$ , appliquée sur le sommet du mât, en fonction de la vitesse du vent à la hauteur $z = 44$ mètres. . . . .	103
7.10	Comparaison entre $\mathcal{U}$ estimé par la méthode Thomson Multitaper et $\mathcal{U}$ fourni par l'Équation (2.59). Les courbes correspondent à $u(z = 44 \text{ m}) = 15,3 \text{ m/s}$ . . . . .	105
7.11	Comparaison entre $\mathcal{F}_{\text{hub}}$ obtenu par la méthode Thomson multitaper et par l'Équation (7.10), en considérant $u(z = 44 \text{ m}) = 15,3 \text{ m/s}$ . . . . .	105
7.12	$\mathcal{F}_{\text{hub}}$ en fonction de la vitesse moyenne du vent à la hauteur $z = 44$ mètres, en considérant une fréquence fixe de 0,62 Hertz. . . . .	105
7.13	Premier et deuxième modes de vibration du mât, selon le modèle de poutre de Timoshenko. . . . .	108

7.14	Module de la réceptance directe correspondante au degré de liberté où la force axiale du rotor est appliquée, en considérant $\eta = 0,01$ . . . . .	108
7.15	Module de la réceptance directe correspondante au degré de liberté où la force axiale du rotor est appliquée. . . . .	109
7.16	Valeur de pointe du module de la réceptance directe (dans l'intervalle $0 < n < 1,0$ Hz) en fonction de $\eta$ . . . . .	109
7.17	DSP du déplacement horizontal du centre du rotor, avec $\eta = 0,02$ . . . . .	110
7.18	Variation de l'endommagement sur la coordonnée $(z, \xi) = (0, 0)$ , par heure de fonctionnement, en fonction de la vitesse du vent, avec $\eta = 0,02$ . . . . .	113
7.19	Résultats du comptage de cycles de chargement sur la coordonnée $(z, \xi) = (0, 0)$ , en considérant un historique de 200 heures, avec $\bar{u}_{10} = 18,0$ m/s. Le facteur de perte considéré est $\eta = 0,02$ . . . . .	114
7.20	Organigramme du modèle bande d'écoulement implémenté dans cette thèse (Partie I). . . . .	118
7.21	Organigramme du modèle bande d'écoulement implémenté dans cette thèse (Partie II). . . . .	119
7.22	Organigramme du modèle bande d'écoulement implémenté dans cette thèse (Partie III). . . . .	120
7.23	Organigramme du module pour appliquer le chargement minimum $S_{\min}$ . . . . .	121
7.24	Organigramme du module pour évaluer la contrainte d'ouverture $S_{op}$ . . . . .	122
7.25	Organigramme du module pour fusionner les éléments. . . . .	123
7.26	Contrainte d'ouverture $S_{op}$ en fonction de la longueur $a$ de la fissure, en considérant un chargement à amplitude constante qui varie entre $S_{\min} = 0$ et $S_{\max} = 100$ MPa. . . . .	124
7.27	Évolution de la contrainte d'ouverture $S_{op}$ en fonction de la longueur $a$ de la fissure, avec et sans surcharge. . . . .	125
7.28	Évolution de la contrainte d'ouverture $S_{op}$ en fonction de la longueur $a$ de la fissure, en considérant un chargement aléatoire. . . . .	126
7.29	Évolution de la contrainte d'ouverture $S_{op}$ en fonction de la longueur $a$ de la fissure, en considérant un chargement aléatoire. . . . .	126

# Liste de Tableaux

2.1	Les types de paysage et leurs longueurs de rugosité (Kishore, 2010; Wiki Éolienne, 2016). . . . .	4
2.2	Classement de la stabilité atmosphérique selon le nombre de Richardson (Woodward, 1998; Turner, 1994). . . . .	8
2.3	Classement de la stabilité atmosphérique selon la valeur de la longueur de Monin-Obukhov (Gryning et al., 2007). . . . .	11
2.4	Facteurs d'intensité de turbulence $\beta_u$ en fonction de la rugosité de terrain $z_0$ (Simiu & Scanlan, 1996). . . . .	12
2.5	Valeurs des coefficients $C_1$ et $C_2$ dans l'Équation 2.69. . . . .	20
4.1	Facteur de perte $\eta$ pour quelques matériaux (Beards, 1996). . . . .	40
4.2	Facteurs d'amortissement des structures en acier, en fonction du niveau de contrainte (Stevenson, 1980). . . . .	43
7.1	Épaisseurs des tôles externes (Lavassas et al., 2003). . . . .	95
7.2	Données géométriques des anneaux raidisseurs et des brides (Lavassas et al., 2003). Toutes les dimensions sont en millimètres. . . . .	95
7.3	Coefficients et exposants de Paris de l'acier S355, en fonction du rapport de charge (Jesus et al., 2012). . . . .	97
7.4	Coefficients $a_i$ , $b_i$ et $c_i$ de l'Équation 7.3, valables pour un nombre de Reynolds de 140 000, dans l'intervalle $0 \leq \xi \leq 180^\circ$ . . . . .	98
7.5	Coefficients de l'Équation (7.11), valables dans l'intervalle de fréquences $1/3600 \leq n \leq 1,6$ Hertz. . . . .	106
7.6	Fréquences naturelles de vibration du mât (Hertz). . . . .	107
7.7	Données des éléments finis de poutre (toutes les dimensions en mm). . . . .	111
A.1	Paramètres $m_i$ de l'Équation (A.10). . . . .	131

# Nomenclature

## Symboles Latins

$a$	Facteur d'induction axial
$a$	Longueur de la fissure [m]
$A_{\text{rot}}$	Aire du disque représentant le rotor : $A_{\text{rot}} = \pi R_{\text{rot}}^2$ [m <sup>2</sup> ]
$(C_{\text{cr}})_r$	Coefficient d'amortissement critique généralisé [N.s/m]
$(C_r)_{\text{eq}}$	Coefficient d'amortissement visqueux généralisé équivalent [N.s/m]
$\mathbf{C}$	Matrice d'amortissement généralisé [N.s/m]
$\mathbf{c}$	Matrice d'amortissement du système structurel [N.s/m]
$\mathcal{C}_p$	Capacité thermique de l'air en pression constante [J/(kg.K)]
$C_N$	Constante de Neuber [m]
$c_d$	Coefficient de traînée
$c_p$	Coefficient de pression
$c$	Coefficient d'amortissement visqueux [N.s/m]
$C_r$	Coefficient d'amortissement généralisé [N.s/m]
$C_P$	Coefficient de puissance du rotor
$C_R$	Coefficient pour l'évaluation de l'épaisseur de la couche limite atmosphérique sous conditions neutres
$C_T$	Facteur de charge
$\mathbf{d}$	Vecteur de déplacements [m]
$\mathcal{D}$	Densité spectrale de puissance du déplacement $d$ [m <sup>2</sup> .s]
$d$	Longueur de la fissure virtuelle [m]
$D$	Paramètre d'endommagement
$D_c$	Paramètre d'endommagement critique
$D$	Amplitude du déplacement $d$ [m]
$d_j$	Déplacement du degré de liberté $j$ [m]
$E[0]$	Espérance mathématique du taux de changement de signe d'un signal aléatoire par unité de temps

$E[\mathcal{P}]$	Espérance mathématique du nombre de pics d'un signal aléatoire par unité de temps
$E$	Module de Young [Pa]
$E_p$	Module de perte [Pa]
$E_s$	Module de stockage [Pa]
$\mathbf{f}$	Vecteur de forces [N]
$\mathcal{F}$	Densité spectrale de puissance de la force $f$ [ $\text{N}^2 \cdot \text{s}$ ]
$f(x_i, \mathbf{d})$	Fonction d'influence (méthode <i>strip yield</i> , Chapitre 6)
$F$	Amplitude d'une force harmonique [N]
$f$	Force [N]
$f_m$	Coordonnée adimensionnelle de Monin : $f_m = nz/\bar{u}$
$F_p$	Facteur de perte de Prandtl
$f_{\text{rot}}$	Force axiale sur le rotor [N]
$f_c$	Paramètre de Coriolis
$\mathbf{g}$	Accélération de la gravité [ $\text{m}/\text{s}^2$ ]
$G$	Module de cisaillement [Pa]
$g(x_i, x_j, \mathbf{d})$	Fonction d'influence (méthode <i>strip yield</i> , Chapitre 6)
$G_p$	Module de perte en cisaillement [Pa]
$G_s$	Module de stockage en cisaillement [Pa]
$h(x, a)$	Fonction de pondération [ $\text{m}^{-1/2}$ ]
$h$	Hauteur de la couche limite atmosphérique [m]
$h_c$	Hauteur de la couche convective (aussi appelé couche de mélange) [m]
$h_e$	Hauteur de la couche d'entraînement [m]
$\mathbf{I}$	Matrice identité
$i$	Unité imaginaire ( $i = \sqrt{-1}$ ).
$I$	Moment quadratique (moment d'inertie) [ $\text{m}^4$ ]
$I_u$	Intensité de turbulence dans la direction $x$
$\mathbf{K}$	Matrice de rigidité modale [N/m]
$\mathbf{k}$	Matrice de rigidité du système structurel [N/m]
$\mathbf{k}_p$	Matrice d'amortissement hystérétique [N/m]
$\mathbf{k}_s$	Matrice de rigidité associée au stockage énergétique [N/m]
$\mathcal{K}_\sigma$	Facteur de concentration de contrainte
$\mathcal{K}_f$	Facteur de concentration de contrainte sous fatigue
$\mathcal{K}_t$	Facteur de concentration de contrainte élastique
$\mathcal{K}_\varepsilon$	Facteur de concentration de déformation

$K_c$	Ténacité à la rupture en état de contrainte plane [ $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ ]
$K_{Ic}$	Ténacité à la rupture en état de déformation plane [ $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ ]
$K_I$	Facteur d'intensité de contrainte en mode I d'ouverture [ $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ ]
$K_n$	Facteur d'intensité de contrainte normalisé.
$k$	Rigidité [ $\text{N/m}$ ]
$K_r$	Rigidité modale [ $\text{N/m}$ ]
$K_z$	Paramètre de Kolmogorov
$L_i^j$	Échelle de longueur caractéristique de turbulence. L'indice $i$ correspond à la composante de vitesse du vent ( $i = u, v, w$ ). L'exposant $j$ correspond à la direction dans laquelle l'échelle est évalué ( $j = x, y, z$ ) [m]
$L$	Longueur de l'élément fini de poutre [m]
$L_i$	Longueur de l'élément $i$ dans le modèle bande d'écoulement [m]
$L_{MO}$	Longueur de Monin-Obukhov [m]
$L_i^{Ka}$	Échelles de longueur de turbulence pour la DSP de Kaimal, correspondantes aux composantes de vitesse $i = u, v, w$ [m]
$\mathbf{M}$	Matrice de masse modale [kg]
$\mathbf{m}$	Matrice de masse du système structurel [kg]
$M$	Nombre de fréquences discrètes
$m$	Masse [kg]
$M_r$	Masse modale [kg]
$N$	Fréquence de Brunt-Väisälä [Hertz]
$N$	Nombre de degrés de liberté d'un modèle d'éléments finis
$n$	Nombre de cycles comptés
$N_f$	Nombre de cycles jusqu'à la rupture (celui fourni par la courbe de Wöhler)
$n$	Fréquence en Hertz
$n_u$	Fréquence normalisée de la composante $u$ de vitesse du vent ( $n_u = nL_u^x/\bar{u}_{1hr}$ )
$n_{ech}$	Fréquence d'échantillonnage d'un signal [Hertz]
$\mathbf{p}$	Vecteur de forces généralisées [N]
$P_R$	Fonction de densité de probabilité d'occurrence d'un cycle compté par la méthode rainflow avec amplitude $S_f$ .
$p_d$	Pression dynamique [Pa]
$P_{rot}$	Puissance obtenue par le rotor [W]
$p_{st}$	Pression statique [Pa]
$p_r$	Force généralisée [N]



$p_{a,\text{ref}}$	Pression atmosphérique de référence (égale à $1,013 \cdot 10^5$ Pa au niveau de la mer)
$p_a$	Pression atmosphérique [Pa]
$p_{\text{st},\infty}$	Pression statique dans un point lointain de la surface [ $Pa$ ]
$\mathbf{q}$	Vecteur de coordonnées généralisées [m]
$\mathbf{q}$	Facteur de sensibilité à l'entaille
$q_r$	Coordonnée généralisée (ou coordonnée modale) [m]
$Q_H$	Flux vertical de chaleur porté par la turbulence [ $W/m^2$ ]
$q_v$	Humidité spécifique de l'air [kg/kg]
$\mathcal{R}_{ii}$	Fonction d'autocorrélation
$\mathcal{R}$	Rapport entre fréquence forcée et fréquence naturelle ( $\mathcal{R} = \omega/\omega_r$ ).
$R_{\text{en}}$	Rayon de l'entaille [m]
$Re$	Nombre de Reynolds
$Ri$	Nombre de Richardson
$Ro$	Nombre de Rossby
$r$	Distance à la pointe de la fissure [m]
$R_s$	Rapport de charge (ou rapport de contrainte) : $R_s = S_{\text{min}}/S_{\text{max}}$ .
$R_m$	Rayon du cylindre ou mât [m]
$R_{\text{rot}}$	Distance entre la pointe des pales et le centre du rotor [m]
$S$	Fonction de densité spectrale de puissance de la contrainte $\sigma$ [ $Pa^2s$ ]
$s_u, s_v, s_w$	Écart types des composantes de vitesse du vent dans les directions $x, y$ et $z$ , respectivement [m/s]
$S$	Chargement externe distant [Pa]
$S_a$	Composante alternée du chargement [Pa]
$S_m$	Composante moyenne du chargement [Pa]
$S_{nr}$	Contrainte nominale de rupture [Pa]
$S_u$	Résistance à la traction ou limite ultime ( <i>ultimate tensile strength</i> ) [Pa]
$S_v$	Véritable résistance à la rupture ( <i>true fracture strength</i> ) [Pa]
$S_e$	Limite d'endurance [Pa]
$S_f$	Résistance à la fatigue [Pa]
$S_{ys}$	Limite d'élasticité ( <i>yield stress</i> ) [Pa]
$t$	Épaisseur de la tôle [m]
$T$	Température [K]
$t$	Temps [s]
$T_v$	Température virtuelle [K]

$\mathcal{U}_u, \mathcal{U}_v, \mathcal{U}_w$	Fonctions de densité spectrale de puissance de la vitesse du vent, dans les directions longitudinale, latérale et verticale, respectivement [ $\text{m}^2/\text{s}$ ].
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	Valeurs moyennes des composantes longitudinale, latérale et verticale de la vitesse du vent [ $\text{m/s}$ ]
$u', v', w'$	Parcelles flottantes des composantes longitudinale, latérale et verticale de la vitesse du vent [ $\text{m/s}$ ]
$u, v, w$	Respectivement, composantes longitudinale ( $dx/dt$ ), latérale ( $dy/dt$ ) et verticale ( $dz/dt$ ) de la vitesse du vent [ $\text{m/s}$ ]
$u_{\text{hub}}$	Vitesse du vent à la hauteur du centre du rotor [ $\text{m/s}$ ]
$u_{\text{rot}}$	Composante axiale de vitesse de l'air qui traverse le plan du rotor [ $\text{m/s}$ ]
$u_{10}$	Vitesse du vent à la hauteur $z = 10$ mètres [ $\text{m/s}$ ]
$u_{44}$	Vitesse du vent à la hauteur $z = 44$ mètres [ $\text{m/s}$ ]
$u_{*0}$	Vitesse de frottement dans la couche de surface de l'atmosphère [ $\text{m/s}$ ]
$u_*$	Vitesse de frottement [ $\text{m/s}$ ]
$W$	Largeur d'une éprouvette avec une fissure latérale de longueur $a$ . Moitié de la largeur d'une éprouvette avec une fissure centrale de largeur $2a$ [ $\text{m}$ ]
$x, y, z$	Coordonnées spatiales. $x$ et $y$ sont associées au plan horizontal, $z$ à la direction verticale [ $\text{m}$ ]
$z_0$	Longueur de rugosité du terrain (ou rugosité aérodynamique) [ $\text{m}$ ]
$z_{\text{iso}}$	Hauteur au dessus de laquelle la turbulence peut être considérée isotropique

## Symboles Grecs

$\alpha_{jk}$	Entrée de la matrice de réceptance qui fait le lien entre le déplacement du degré de liberté $j$ et la force appliquée sur le degré de liberté $k$ [ $\text{m/N}$ ]
$\bar{\alpha}_{bb}$	Réceptance directe correspondante au degré de liberté où la force axiale du rotor est appliquée [ $\text{m/N}$ ]
$\boldsymbol{\alpha}$	Matrice de réceptance [ $\text{m/N}$ ]
$\alpha$	Facteur de restriction
$\beta_i$	Facteur d'intensité de turbulence (adimensionnel)
$\Gamma$	Angle de phase de la réceptance [ $\text{rad}$ ].
$\gamma_p$	Angle de phase de la contrainte par rapport à la déformation [ $\text{rad}$ ].
$\gamma$	Gradient de température potentielle au dessus de la couche limite atmosphérique $\gamma = (\partial\theta/\partial z)_{z>h}$ .
$\gamma$	Facteur d'irrégularité d'un signal aléatoire

$\delta_T$	Différence de température potentielle entre le haut de la couche convective et le haut de la couche d'entraînement
$\varepsilon$	Déformation
$(\zeta_r)_{eq}$	Rapport d'amortissement visqueux généralisé équivalent
$\zeta_r$	Rapport d'amortissement généralisé
$\eta$	Facteur de perte par amortissement hystérétique.
$\eta_c$	Facteur de perte en cisaillement par amortissement hystérétique
$\theta$	Température potentielle [K]
$\theta_v$	Température potentielle virtuelle [K]
$\theta$	Coordonnée angulaire par rapport au plan qui contient la fissure
$\theta$	Degré de liberté de rotation d'un élément fini de poutre [rad]
$\kappa$	Constante de von Kármán (adimensionnelle)
$\Lambda$	Matrice diagonale comportant les valeurs propres $\lambda_r$
$\lambda_{rot}$	Vitesse spécifique du rotor (adimensionnelle)
$\lambda_{site}$	Latitude du site
$\lambda_r$	Valeur propre associée au mode de vibration $r$
$\mu$	Viscosité dynamique du fluide [kg/(m.s)]
$\nu$	Coefficient de Poisson
$\xi$	Position angulaire d'un point sur le mât. $\xi = 0$ sur le point de stagnation (où le vent touche le mât circulaire en premier).
$\rho$	Largeur de la zone plastique selon la méthode bande d'écoulement [m]
$\rho$	Densité de l'air [kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_m$	Densité du matériau [kg/m <sup>3</sup> ]
$\sigma$	Contrainte [Pa]
$\sigma_0$	Contrainte d'écoulement [Pa]
$\sigma'_f$	Coefficient de résistance à la fatigue du matériau [Pa]
$\tau$	Contrainte de cisaillement [Pa]
$\tau_t$	Composante turbulente de la contrainte de cisaillement [Pa]
$\tau_v$	Composante visqueuse de la contrainte de cisaillement [Pa]
$\Phi$	Matrice modale
$\phi_r$	Vecteur propre associée au mode de vibration $r$
$\check{\phi}_r$	Vecteur modal normalisé en sorte que $M_r = 1$
$\phi_j$	Angle de phase aléatoire qui se distribue uniformément dans l'intervalle entre zéro et $2\pi$ radians
$\phi_c$	Facteur de correction de cisaillement

$\Psi$	Fonction de stabilité adimensionnelle
$\omega$	Fréquence angulaire [rad/s]
$\Omega_{\text{rot}}$	Vitesse angulaire du rotor [rad/s]
$\Omega_{\text{T}}$	Vitesse angulaire de rotation de la Terre ( $72,92 \cdot 10^{-6}$ rad/s)
$\omega_r$	r-ème fréquence naturelle de vibration [rad/s]

### Accents et exposants

$\dot{()}$	Dérivée d'une variable par rapport au temps ( $d( )/dt$ ).
$\ddot{()}$	Dérivée seconde d'une variable par rapport au temps ( $d^2( )/dt^2$ ).
$\bar{()}$	Nombre complexe
$\overline{()}$	Valeur moyenne
$( )'$	Écart par rapport à la moyenne

### Indices

$( )_{\text{Im}}$	Partie imaginaire d'un nombre complexe
$( )_{\text{Re}}$	Partie réel d'un nombre complexe
$( )_{\infty}$	Variable mesurée dans un point distant

### Sigles

DSP	Densité Spectrale de Puissance
ntel	Nombre total d'éléments dans l'itération actuelle de la méthode bande d'écoulement
ntma	Maximum nombre total d'éléments permis dans l'analyse
nzp	Nombre d'éléments dans la zone plastique

# Table des matières

Résumé	iv
Abstract	v
Liste de Figures	xi
Liste de Tableaux	xii
Nomenclature	xiii
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Modélisation de la vitesse du vent</b>	<b>3</b>
2.1 Décomposition de Reynolds . . . . .	3
2.2 Variation de la vitesse du vent avec la hauteur . . . . .	3
2.2.1 Épaisseur de la couche limite atmosphérique . . . . .	5
2.2.2 Nombre de Richardson . . . . .	8
2.2.3 Vitesse de frottement . . . . .	9
2.2.4 Longueur de Monin-Obukhov . . . . .	10
2.2.5 Le paramètre de stabilité $\Psi$ . . . . .	11
2.3 Intensité de turbulence et écart type . . . . .	12
2.4 Échelle de longueur intégrale de turbulence . . . . .	13
2.5 Densité Spectrale de Puissance (DSP) . . . . .	16
2.5.1 Densité spectrale de von Kármán . . . . .	17
2.5.2 Densité spectrale de von Kármán modifiée . . . . .	18
2.5.3 Densité spectrale de Kaimal . . . . .	19
2.5.4 Densité spectrale de Tieleman . . . . .	21
2.6 Simulation d'un signal aléatoire à partir d'une fonction DSP . . . . .	21
<b>3 Chargements sur une structure éolienne</b>	<b>23</b>
3.1 Coefficient de pression . . . . .	23
3.1.1 Coefficient de pression autour d'un cylindre . . . . .	24

3.2	Chargement du rotor . . . . .	26
3.2.1	Coefficient de Puissance et Limite de Betz . . . . .	26
3.2.2	Facteur de charge . . . . .	28
3.2.3	Vitesse spécifique . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Dynamique structurelle du mât</b>	<b>30</b>
4.1	Réceptance complexe d'un système vibratoire . . . . .	30
4.2	Fréquences naturelles et modes de vibration . . . . .	31
4.3	Superposition modale . . . . .	33
4.4	Normalisation d'un mode de vibration . . . . .	35
4.5	Amortissement proportionnel (Amortissement de Rayleigh) . . . . .	36
4.5.1	Matrice de réceptance complexe . . . . .	37
4.6	Amortissement hystérétique . . . . .	38
4.7	Réponse à un chargement aléatoire . . . . .	44
4.8	Effets de la moyenne du chargement . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Fatigue sous chargement à amplitude variable</b>	<b>46</b>
5.1	Description d'un cycle de chargement . . . . .	46
5.2	Courbes de Wöhler . . . . .	47
5.3	Méthode rainflow de comptage de cycles . . . . .	50
5.4	Diagrammes de vie constante (Effets de la contrainte moyenne) . . . . .	54
5.5	Accumulation d'endommagement . . . . .	56
5.6	Évaluation d'endommagement par la méthode de Dirlik . . . . .	57
<b>6</b>	<b>Mécanique de la rupture sous chargement à amplitude variable</b>	<b>59</b>
6.1	Facteur de concentration de contrainte . . . . .	59
6.2	État de contrainte à proximité d'une fissure . . . . .	61
6.3	Définition de facteur d'intensité de contrainte . . . . .	62
6.4	Facteur d'intensité de contrainte dû à un chargement externe distant . . . . .	63
6.5	Facteur d'intensité de contrainte dû à un chargement appliqué sur les surfaces de rupture . . . . .	65
6.5.1	Fonctions de pondération . . . . .	65
6.6	Ténacité à la rupture . . . . .	69
6.7	Lois de taux de propagation . . . . .	69
6.7.1	Loi de Paris . . . . .	69
6.7.2	Loi de Walker . . . . .	70
6.7.3	Équation de Forman . . . . .	70
6.8	Forme et taille de la zone plastique . . . . .	70
6.8.1	Le modèle d'Irwin . . . . .	72
6.9	Effet de fermeture de fissure . . . . .	74

6.10	Effets de surcharge . . . . .	76
6.11	Modèle bande d'écoulement ( <i>strip-yield</i> ) . . . . .	79
6.11.1	Le modèle de Dugdale . . . . .	79
6.11.2	Facteur de restriction plastique . . . . .	81
6.11.3	Fonction de déplacement de la surface de la fissure virtuelle . . . . .	84
6.11.4	Évaluation des fonctions d'influence $f(x_i, \mathbf{d})$ et $g(x_i, x_j, \mathbf{d})$ . . . . .	86
6.11.5	Aspects théoriques de l'implémentation de la méthode bande d'écoulement . . . . .	87
<b>7</b>	<b>Analyses et résultats</b>	<b>92</b>
7.1	Modélisation de la vitesse du vent . . . . .	92
7.1.1	Profil de vitesse du vent . . . . .	92
7.1.2	Génération d'un historique de vitesse du vent . . . . .	94
7.2	Description de la géométrie du mât . . . . .	94
7.3	Données du matériau du mât . . . . .	96
7.4	Modélisation des chargements . . . . .	97
7.4.1	Chargement distribué autour du mât . . . . .	98
7.4.2	Force axiale du rotor . . . . .	99
7.5	Composante statique de contrainte . . . . .	100
7.6	Estimation spectrale de la force sur le mât . . . . .	103
7.7	Analyse dynamique du mât . . . . .	107
7.7.1	Contrainte due à la composante dynamique de déplacement . . . . .	112
7.8	Analyse de fatigue . . . . .	112
7.9	Analyse de propagation de fissure par la méthode bande d'écoulement ( <i>strip-yield</i> ) . . . . .	115
7.9.1	Implémentation du programme . . . . .	115
7.9.2	Évaluation du coefficient de Paris effectif $C_{\text{eff}}$ . . . . .	124
7.9.3	Réponse à une seule surcharge . . . . .	125
7.9.4	Réponse à un chargement aléatoire . . . . .	125
<b>8</b>	<b>Conclusion</b>	<b>127</b>
	<b>Appendices</b>	<b>129</b>
<b>A</b>	<b>Éléments finis de poutre</b>	<b>129</b>
A.1	Élément fini de poutre d'Euler-Bernoulli . . . . .	129
A.2	Élément fini de poutre de Timoshenko . . . . .	130
	<b>REFERENCES</b>	<b>131</b>

# Chapitre 1

## Introduction

L'objectif de cette thèse est de fournir toute la chaîne des calculs nécessaires pour prédire l'évolution de l'endommagement par fatigue d'une structure éolienne le long de sa durée de vie.

L'éolienne analysée dans ce travail de recherche a une structure tubulaire en acier et un rotor à l'axe horizontal.

L'état d'endommagement par fatigue d'un matériau dépend de trois facteurs :

1. Ses propriétés mécaniques ;
2. L'intensité du chargement ;
3. Le nombre de cycles de chargement.

En général, les agences de météorologie sauvegardent l'historique de vitesses moyennes du vent calculées sur des périodes d'une heure. Étant donné le troisième facteur mentionné ci-dessus, il est nécessaire de synthétiser la vitesse du vent avec un taux d'échantillonnage plus adéquat à une analyse de fatigue. Cet aspect est abordé dans le Chapitre 2, qui introduit le concept de fonction de densité spectrale de puissance (DSP).

Par défaut, les stations de météorologie mesurent la vitesse du vent à la hauteur de 10 mètres au dessus du sol. Cependant, le centre du rotor se trouve à une hauteur beaucoup plus élevée. Selon Serrano-González & Lacal-Arántegui (2016) la hauteur moyenne des mâts éoliens installés en 2012 en Europe a été proche de 100 mètres. Afin de modéliser le chargement distribué autour du mât et la force horizontale exercée par le rotor sur le sommet du mât, il faut employer une courbe qui décrit l'évolution de la vitesse du vent avec la hauteur. Cette dépendance spatiale de la vitesse du vent est également abordée dans le Chapitre 2.

Le chargement provoqué par l'écoulement d'air autour de la structure tubulaire peut être modélisé en employant des courbes de coefficient de pression en fonction de la position angulaire par rapport au point de stagnation<sup>1</sup>. La force axiale du rotor peut être évaluée

---

1. Le point de stagnation est l'endroit où la vitesse du fluide vaut zéro. Dans le cas de l'écoulement externe transversale autour d'un tube, le point de stagnation est l'endroit où le fluide touche l'objet en premier.



à partir d'une courbe du facteur de charge. À partir des analyses menées dans cette thèse, on a constaté que le chargement dû à la force axiale du rotor est considérablement plus important que le chargement distribué autour de la structure tubulaire. Le Chapitre 3 est consacré à la modélisation des chargements.

La chaîne des calculs nécessaires pour faire l'analyse de fatigue d'une structure éolienne est particulièrement longue pour deux raisons :

1. Le chargement d'une structure éolienne varie aléatoirement dans le temps ;
2. Le déplacement de la structure est amplifié en raison de la résonance entre la vibration du mât et la variation du chargement.

L'amplification dynamique des vibrations peut être quantifiée au moyen de la réceptance du système structurel. Ce concept est abordé dans le Chapitre 4.

À partir de la réceptance et de la fonction DSP du chargement, il est possible d'obtenir la DSP du déplacement. En absence de déformation plastique, la contrainte a une relation linéaire avec le déplacement. Par conséquent, la DSP de la contrainte peut être évalué aisément une fois que la DSP du déplacement est connue.

La fonction DSP de la contrainte peut être employée pour synthétiser un signal de contrainte dans le domaine du temps. Un algorithme pour faire le comptage de cycles de chargement est abordé dans le Chapitre 5. La loi de Palmgren-Miner est employée pour modéliser l'accumulation de l'endommagement.

Le Chapitre 6 démontre comment faire une analyse de propagation de fissures lorsque le chargement a une amplitude variable. Il fournit les concepts nécessaires pour l'implémentation de la méthode bande d'écoulement (*strip-yield*).

Le Chapitre 7 aborde l'analyse d'un mât, afin de fournir un exemple numérique de tous les concepts exposés dans cette thèse.

# Chapitre 2

## Modélisation de la vitesse du vent

### 2.1 Décomposition de Reynolds

Selon Pope (2000) et Jacobson (2005), la décomposition de Reynolds est la représentation de chaque composante d'un champ vectoriel de vitesse d'écoulement comme la somme d'une parcelle moyenne ( $\bar{u}, \bar{v}$  et  $\bar{w}$ ) et d'une parcelle flottante ( $u', v'$  et  $w'$ ) associée à la turbulence :

$$u = \frac{dx}{dt} = \bar{u} + u' \quad (2.1a)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \bar{v} + v' \quad (2.1b)$$

$$w = \frac{dz}{dt} = \bar{w} + w' \quad (2.1c)$$

Dans le cas où ces équations sont utilisées pour modéliser la couche limite de l'atmosphère, le système de coordonnées est en général choisi de façon que  $x$  et  $y$  soient dans le plan horizontale et  $z$  dans la verticale. Les composantes de vitesse longitudinale, latérale et verticale sont représentées respectivement par  $u$ ,  $v$  et  $w$ . La composante de vitesse d'intérêt majeur dans l'analyse d'une éolienne est la longitudinale.

### 2.2 Variation de la vitesse du vent avec la hauteur

Le classique profil logarithmique de vitesse moyenne du vent dans la couche de surface de l'atmosphère est donné par (Panofsky, 1963 ; Panofsky & Dutton, 1984 ; Simiu & Scanlan, 1996) :

$$\bar{u}(z) = \frac{u_{*0}}{\kappa} \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) \quad (\text{pour } z \geq z_0) \quad (2.2)$$

Selon Panofsky (1963) les valeurs mesurées de la constante de von Kármán  $\kappa$  dans l'atmosphère varient entre 0,35 et 0,43. Yakhot & Orszag (1986) et Telford (1982) ont respectivement proposé les valeurs théoriques 0,372 et 0,37. La vitesse de frottement  $u_{*0}$  sera abordée dans la Section 2.2.3.

La longueur de rugosité  $z_0$  représente la hauteur à laquelle la vitesse du vent devient zéro dans l'Équation (2.2). Elle dépend de la taille et de la densité des éléments de paysage de l'endroit concerné, comme le montre le Tableau 2.1.

Tableau 2.1 – Les types de paysage et leurs longueurs de rugosité (Kishore, 2010 ; Wiki Éolienne, 2016).

Type de paysage	$z_0$ [m]
Surface d'eau	0,0002
Terrain complètement dégagé avec une surface lisse, p. ex. une piste d'atterrissage en béton ou de l'herbe fraîchement coupée	0,0024
Terrain agricole dégagé, sans clôtures ou haies vives, et avec très peu de constructions. Seulement des collines doucement arrondies.	0,03
Terrain agricole avec quelques constructions et des haies vives de 8 m de haut situées à environ 1250 m les unes des autres.	0,055
Terrain agricole avec quelques constructions et des haies vives de 8 m de haut situées à environ 500 m les unes des autres.	0,1
Terrain agricole avec beaucoup de constructions, arbrisseaux et plantes, ou des haies vives de 8 m de haut situées à environ 250 m les unes des autres.	0,2
Villages, petites villes, terrain agricole avec de nombreuses ou de hautes haies vives, des forêts et un terrain très accidenté.	0,4
Grandes villes avec de hauts immeubles.	0,8
Très grandes villes avec de hauts immeubles et de grattes ciel.	1,6

Si les conditions de stabilité atmosphérique ne sont pas neutres, on ajoute le paramètre de stabilité  $\Psi$ , qui est une fonction de  $z/L_{MO}$  (Panofsky, 1963 ; Simiu & Scanlan, 1996 ; Jacobson, 2005) :

$$\bar{u}(z) = \frac{u_{*0}}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) - \Psi \left( \frac{z}{L_{MO}} \right) \right] \quad (\text{pour } z \geq z_0) \quad (2.3)$$

La longueur de Monin-Obukhov  $L_{MO}$  et le paramètre de stabilité  $\Psi$  seront abordés dans les Sections 2.2.4 et 2.2.5.

Selon Cook (1997), le modèle logarithmique (Équations (2.2) et (2.3)) n'est pas adéquat pour les hauteurs  $z$  plus élevées qu'environ 200 mètres.

L'Équation (2.4) a été proposée par Deaves & Harris (1978) et peut être trouvée aussi dans les travaux de Cook (1997), ESDU (2001a) et Drew et al. (2013). Elle présente une bonne précision pour  $z$  inférieur à la hauteur  $h$  de la couche limite atmosphérique :

$$\bar{u}(z) = \frac{u_{*0}}{\kappa} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) + 5,75 \left( \frac{z}{h} \right) - 1,88 \left( \frac{z}{h} \right)^2 - 1,33 \left( \frac{z}{h} \right)^3 + 0,25 \left( \frac{z}{h} \right)^4 \right] \quad (2.4)$$

La loi de puissance, donnée par l'Équation (2.5), est une autre manière de représenter le profil de vitesse moyenne du vent (Panofsky & Dutton, 1984) :

$$\bar{u}(z) = \bar{u}(z_{\text{ref}}) \left( \frac{z}{z_{\text{ref}}} \right)^q \quad (2.5)$$

L'exposant  $q$  dépend surtout de la rugosité du terrain et peut être considéré constant pour un intervalle de hauteur donné. Panofsky & Dutton (1984) recommande qu'une valeur différente de  $q$  soit choisie pour chaque intervalle de hauteur  $z$ . Le même auteur affirme que cet exposant peut être modifié afin que les conditions de stabilité atmosphérique soient prises en compte. Il fournit l'Équation (2.6) pour estimer la valeur de  $q$  :

$$q = \frac{1}{\ln(z/z_0)} \quad (2.6)$$

Cette équation est obtenue en appliquant le logarithme naturel à l'Équation (2.5) et puis en dérivant par rapport à  $z$ . Ensuite on associe le résultat avec la dérivée de l'Équation (2.2) par rapport à  $z$ .

### 2.2.1 Épaisseur de la couche limite atmosphérique

La hauteur de la couche limite est un paramètre important pour modéliser non seulement le profil de vitesse moyenne du vent mais aussi la dispersion des polluants dans l'air. C'est pourquoi de nombreux travaux de recherche sont encore développés aujourd'hui autour de ce sujet.

Considérons que la condition où la température de l'atmosphère varie avec la hauteur  $z$  de telle sorte que  $d\theta/dz > 0$ . Si une parcelle d'air est déplacée de sa position d'origine, elle aura la tendance à osciller autour de cette position avec la fréquence de Brunt-Väisälä  $\mathcal{N}$  donné par (Panofsky & Dutton, 1984) :

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{g}{\theta} \left( \frac{d\theta}{dz} \right)} \quad (2.7)$$

où  $g$  est l'accélération de la gravité et  $\theta$  est la température potentielle.

Si  $d\theta/dz < 0$ , on a une condition d'instabilité, puisque le déplacement original sera amplifié.

D'après Zilitinkevich & Baklanov (2002), le flux turbulent de flottabilité près de la surface est défini par :  $B_S = -u_*^3/L_{MO}$ . Afin d'évaluer la hauteur de la couche limite, il est convenable de classer la stabilité atmosphérique selon les critères suivantes (Djolov, 2007) :

- Atmosphère véritablement neutre :  $B_S = 0$  et  $\mathcal{N} = 0$  ;
- Atmosphère conventionnellement neutre :  $B_S = 0$  et  $\mathcal{N} > 0$  ;
- Atmosphère stable nocturne :  $B_S < 0$  et  $\mathcal{N} = 0$  ;
- Atmosphère stable persistant :  $B_S < 0$  et  $\mathcal{N} > 0$ .

Rossby & Montgomery (1935) ont proposé l'expression (2.8) pour évaluer la hauteur  $h$  de la couche limite atmosphérique sous des conditions de stabilité quasi-neutre. Le critère de validité est proposé par Sugiyama & Nasstrom (1999).

$$h = C_R \frac{u_{*0}}{|f_c|} \quad (\text{valable si } \left| \frac{u_{*0}}{f_c L_{MO}} \right| < 4) \quad (2.8)$$

Dans la littérature, on trouve des valeurs pour  $C_R$  qui varient entre 0,15 et 0,5 (voir le tableau A4 du travail de Garratt (1992)). Zilitinkevich & Esau (2003) affirment que cette manque de consensus concernant la valeur de  $C_R$  provient du fait qu'une longueur de Monin-Obukhov élevée n'est pas une condition suffisante pour définir la neutralité atmosphérique (voir Tableau 2.3). Selon ces auteurs,  $C_R$  dépend aussi de la fréquence de Brunt-Väisälä, qui n'était pas prise en compte auparavant.

Pour la condition de véritable neutralité atmosphérique, Zilitinkevich & Esau (2003) fournissent  $C_R \approx 0,5$ . Les mêmes auteurs affirment que cette condition est rarement observée. Si l'atmosphère est neutre on a presque toujours  $\mathcal{N} > 0$ .

Le paramètre de Coriolis  $f_c$  est calculé selon l'Équation (2.9), où  $\Omega_T$  représente la vitesse angulaire de rotation de la Terre (en rad/s) et  $\lambda_{\text{site}}$  la latitude du lieu concerné.

$$f_c = 2 \Omega_T \sin(|\lambda_{\text{site}}|) \quad (2.9)$$

Selon Sugiyama & Nasstrom (1999) l'Équation (2.9) n'est pas adéquate si  $|\lambda_{\text{site}}|$  est inférieur à 20 degrés environ.

Zilitinkevich & Esau (2003) ont développé l'Équation (2.10) pour évaluer  $h$  dans des conditions conventionnellement neutres ( $B_S = 0$  et  $\mathcal{N} > 0$ ) :

$$h = 0,5 \frac{u_{*0}}{|f_c|} \left( 1 + 0,14 \frac{\mathcal{N}}{|f_c|} \right)^{-1/2} \quad (2.10)$$

Si les conditions sont stables, l'épaisseur de la couche limite est plus faible par rapport à la condition neutre. L'Équation (2.8) a été conçue pour évaluer  $h$  sous conditions de neutralité. Cependant, on aurait  $C_R = 0,016$  dans le cas où les conditions sont fortement

stables et  $C_R = 0,16$  dans une atmosphère légèrement stable (Garratt, 1992). L'Équation (2.11), obtenue par Deardorff (1972), est plus adéquate pour évaluer  $h$  sous conditions stables.

$$h = \left( \frac{1}{30 L_{MO}} + \frac{f_c}{0,35 u_{*0}} \right)^{-1} \quad (2.11)$$

Zilitinkevich et al. (2002) ont développé l'Équation (2.12) pour des conditions stables.

$$h = \frac{0,4 u_{*0}}{|f_c|} \left( 1 + \frac{0,16 u_{*0} + 0,04 L_{MO} \mathcal{N}}{0,55 |f_c| L_{MO}} \right)^{-1/2} \quad (2.12)$$

Si les conditions sont instables, l'épaisseur de la couche convective  $h_c$  varie le long de la journée. Batchvarova & Gryning (1991) ont élaboré l'Équation (2.13) qui décrit l'évolution de  $h_c$  avec le temps  $t$  :

$$\left[ \frac{h_c^2}{(1 + 2A)h_c - 2B\kappa L_{MO}} + \frac{C u_{*0}^2 T}{\gamma g [(1 + A)h_c - B\kappa L_{MO}]} \right] \frac{dh_c}{dt} = \frac{(\overline{w'\theta'})_s}{\gamma} \quad (2.13)$$

Les mêmes auteurs adoptent les valeurs 0,2 ; 2,5 et 8 pour les constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$ , respectivement.  $\gamma$  est le gradient de température potentielle  $\partial\theta/\partial z$  au dessus de la couche limite atmosphérique.

On a  $dh_c/dt$  fortement positif pendant les premières heures après le lever du soleil. À partir du moment où la couche stable nocturne n'est plus présente, la hauteur de la couche limite est donné par :

$$h = h_c + h_e \quad (2.14)$$

$h_e$  est l'épaisseur de la couche d'entraînement qui peut être évaluée selon l'Équation (2.15), donnée par Gryning & Batchvarova (1994) :

$$h_e = h_c \left( \frac{3,3}{\text{Ri}_E^{1/3}} + 0,2 \right) \quad (2.15)$$

Le nombre de Richardson d'entraînement  $\text{Ri}_E$  est donné par (Gryning, 2005) :

$$\text{Ri}_E = \frac{(g/T)h_c \delta_T}{(dh_c/dt)^2} \quad (2.16)$$

$\delta_T$  est la différence de température potentielle entre les hauteurs  $z = h_c$  et  $z = h_c + h_e$ . Cette différence peut être évaluée selon l'Équation (2.17) (Gryning & Batchvarova, 1990 ; Gryning, 2005) :

$$\delta_T = \frac{\gamma h_c (A h_c - B \kappa L_{MO})}{(1 + 2A) h_c - 2 B \kappa L_{MO}} \quad (2.17)$$

## 2.2.2 Nombre de Richardson

Le nombre de Richardson est un paramètre qui quantifie le niveau de stabilité atmosphérique. L'atmosphère est dite stable si l'air impose une résistance aux déplacements qu'elle subit dans la direction verticale. Autrement dit, si une parcelle d'air subit une perturbation qui la fait se déplacer verticalement (vers le haut ou vers le bas), puis elle désaccélère et retourne à sa position d'origine, l'atmosphère est stable. L'atmosphère est instable si la parcelle d'air a une tendance à s'éloigner de sa position d'origine, après avoir subi la perturbation. L'atmosphère est neutre si la parcelle d'air reste dans la nouvelle position établie par la perturbation, sans retourner ni s'éloigner encore plus de la position d'origine.

La stabilisation ou déstabilisation dépend surtout du bilan entre la force de gravitation et la force de flottabilité issue de la différence de densité entre la parcelle d'air déplacé de sa position d'origine et l'air qui l'entoure après le déplacement. Le gradient de température de l'air dans la direction verticale est un paramètre fondamental pour déterminer l'état de stabilité atmosphérique.

Le Tableau 2.2 montre le lien existant entre le nombre de Richardson et le classement de stabilité proposé par Pasquill (1961).

Tableau 2.2 – Classement de la stabilité atmosphérique selon le nombre de Richardson (Woodward, 1998 ; Turner, 1994).

Classement de stabilité Pasquill	Niveau de stabilité atmosphérique	Nombre de Richardson
A	Fortement instable	$Ri < -0,86$
B	Instable	$-0,86 \leq Ri < -0,37$
C	Légèrement instable	$-0,37 \leq Ri < -0,10$
D	Neutre	$-0,10 \leq Ri < 0,053$
E	Légèrement stable	$0,053 \leq Ri < 0,134$
F	Stable	$0,134 \leq Ri$
G	Fortement stable	

Le nombre de Richardson gradient est donné par (Stull, 1988) :

$$Ri_{gr} = \frac{\frac{g}{\bar{\theta}_v} \left( \frac{\partial \bar{\theta}_v}{\partial z} \right)}{\left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right)^2} \quad (2.18)$$

La substitution de  $\partial\bar{\theta}_v/\partial z$ ,  $\partial\bar{u}/\partial z$  et  $\partial\bar{v}/\partial z$  par  $\Delta\bar{\theta}_v/\Delta z$ ,  $\Delta\bar{u}/\Delta z$  et  $\Delta\bar{v}/\Delta z$ , respectivement, donne le nombre de Richardson global (l'indice b fait allusion au mot anglais « *bulk* ») :

$$\text{Ri}_b = \frac{g\Delta\bar{\theta}_v\Delta z}{\bar{\theta}_v[\Delta\bar{u}^2 + \Delta\bar{v}^2]} = \left[ \frac{2g}{\bar{\theta}_{v1} + \bar{\theta}_{v2}} \right] \frac{(\bar{\theta}_{v1} - \bar{\theta}_{v2})(z_1 - z_2)}{(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)^2 + (\bar{v}_1 - \bar{v}_2)^2} \quad (2.19)$$

L'expression à droite souligne le fait que les signes des différences finies doivent être respectés et que  $\bar{\theta}_v$  peut être considéré comme étant la moyenne  $(\bar{\theta}_{v1} + \bar{\theta}_{v2})/2$ .

Dans les Équations (2.18) et (2.19),  $\theta_v$  est la température potentielle virtuelle, donnée par (Jacobson, 2005) :

$$\theta_v = T_v \left( \frac{p_{a,\text{ref}}}{p_a} \right)^{0,286} = T(1 + 0,608 q_v) \left( \frac{p_{a,\text{ref}}}{p_a} \right)^{0,286} \quad (2.20)$$

La température  $T$  doit être en Kelvin.  $p_{a,\text{ref}}$  est la pression atmosphérique de référence ( $1,013 \cdot 10^5$  Pa au niveau de la mer).  $q_v$  est l'humidité spécifique de l'air (en kilogrammes de vapeur d'eau par kilogramme d'air humide).

### 2.2.3 Vitesse de frottement

Selon Oosthuizen & Naylor (1999), la contrainte de cisaillement totale est constituée de deux parties : l'une visqueuse et l'autre turbulente :

$$\tau_{xz} = \tau_{xz,v} + \tau_{xz,t} = \mu \left( \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial x} \right) - \overline{\rho u'w'} \quad (2.21a)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{yz,v} + \tau_{yz,t} = \mu \left( \frac{\partial\bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial y} \right) - \overline{\rho v'w'} \quad (2.21b)$$

Les parcelles turbulentes  $\tau_{xz,t}$  et  $\tau_{yz,t}$  sont aussi appelées contraintes de Reynolds. Elles représentent, respectivement, le flux verticale de quantité de mouvement dans la direction  $x$  et le flux verticale de quantité de mouvement dans la direction  $y$ . Le flux vertical total de quantité de mouvement horizontale est selon Stull (1988) :

$$|\tau_t| = \sqrt{\tau_{xz,t}^2 + \tau_{yz,t}^2} \quad (2.22)$$

La vitesse de frottement (aussi appelée vitesse de friction), est donnée par (Stull, 1988) :

$$u_* = \sqrt{\frac{|\tau|}{\rho}} \quad (2.23)$$

Pour la couche limite de l'atmosphère, la contrainte de cisaillement due aux effets de viscosité est négligeable puisqu'elle est beaucoup plus petite que la contrainte de cisaillement due à la turbulence. Dans ce cas,  $\tau = \tau_t$ .



La vitesse de frottement varie avec la hauteur  $z$  au dessus du sol. Cette dépendance est négligeable dans la couche de surface de l'atmosphère (qui correspond approximativement au 10% le plus bas de la couche limite atmosphérique).

L'Équation (2.24) donne la vitesse de frottement au dessus de la couche de surface, mais encore dans la couche limite (Gryning et al., 2007). La vitesse de frottement réduit avec la hauteur  $z$  et devient très faible en haut de la couche limite. Le symbole  $u_{*0}$  exprime la vitesse de frottement dans la couche de surface. L'exposant  $b$  dépend des conditions de stabilité atmosphérique.

$$u_*(z) = u_{*0} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^b \quad (2.24)$$

Louis (1979) a proposé l'Équation (2.25a) pour évaluer la vitesse de friction dans la couche de surface à partir du nombre de Richardson. Cette équation peut être trouvée aussi dans le travail de Jacobson (2005) :

$$u_{*0} = \frac{\kappa \bar{u}(z)}{\ln(z/z_0)} \sqrt{F_m} \quad (2.25a)$$

$$F_m = 1 - \frac{9,4 \text{ Ri}}{1 + \frac{69,6 \kappa^2 (|\text{Ri}| z/z_0)^{1/2}}{\ln^2(z/z_0)}} \quad (\text{Ri} \leq 0) \quad (2.25b)$$

$$F_m = \frac{1}{(1 + 4,7 \text{ Ri})^2} \quad (\text{Ri} > 0) \quad (2.25c)$$

## 2.2.4 Longueur de Monin-Obukhov

La longueur de Monin-Obukhov est définie comme suit (Monin & Obukhov, 1954; Monin, 1958; Bache & Johnstone, 1992) :

$$L_{\text{MO}} = - \frac{u_{*0}^3 \bar{\theta}_v}{\kappa g (\overline{w'\theta'_v})_s} = - \frac{u_{*0}^3 \rho C_p T}{\kappa g Q_H} \quad (2.26)$$

$Q_H$  est le flux vertical de chaleur porté par la turbulence ;  $C_p$  est la capacité thermique de l'air en pression constante et  $\rho$  la densité de l'air. La longueur de Monin-Obukhov peut être vue comme un moyen de quantifier le niveau de stabilité ou d'instabilité atmosphérique (Tableau 2.3). Sous des conditions convectives, elle est proportionnelle à la hauteur au dessus de laquelle les effets de flottabilité deviennent plus importants que le cisaillement mécanique pour la génération de la turbulence.

Tableau 2.3 – Classement de la stabilité atmosphérique selon la valeur de la longueur de Monin-Obukhov (Gryning et al., 2007).

Niveau de stabilité	Longueur de Monin-Obukhov (en mètres)
Très stable	$10 < L_{MO} < 50$
Stable	$50 < L_{MO} < 200$
Stable, quasi-neutre	$200 < L_{MO} < 500$
Neutre	$ L_{MO}  > 500$
Instable, quasi-neutre	$-500 < L_{MO} < -200$
Instable	$-200 < L_{MO} < -100$
Très Instable	$-100 < L_{MO} < -50$

L'une des manières d'évaluer la longueur de Monin-Obukhov est au moyen du nombre de Richardson gradient (Businger, 1966 ; Pandolfo, 1966 ; Panofsky & Dutton, 1984) :

$$L_{MO} = \begin{cases} \frac{z}{\text{Ri}} & (\text{Ri} \leq 0) \\ \frac{z(1 - 5\text{Ri})}{\text{Ri}} & (0 < \text{Ri} < 0,2) \end{cases} \quad (2.27)$$

D'après Panofsky & Dutton (1984), la mesure directe de la longueur de Monin-Obukhov exige l'emploi d'une sophistiquée instrumentation de réponse rapide. Pour cette raison, il est préférable d'évaluer  $L_{MO}$  à partir du nombre de Richardson, qui peut être mesuré plus facilement.

La longueur de Monin-Obukhov ne dépend pas de la hauteur  $z$  dans la couche de surface, ce qui n'est pas le cas pour le nombre de Richardson (Bache & Johnstone, 1992). Ce dernier varie avec  $z$  en telle sorte que  $L_{MO}$  reste constante dans l'Équation (2.27).

### 2.2.5 Le paramètre de stabilité $\Psi$

Dans l'Équation (2.3),  $\Psi$  est une fonction de la longueur adimensionnelle de Monin-Obukhov, c'est-à-dire, du rapport  $z/L_{MO}$ . Si l'atmosphère est stable, on a  $z/L_{MO} > 0$  et  $\Psi < 0$ . Les signes s'inversent pour des conditions instables. Plus  $z/L_{MO}$  est proche de zéro, plus les conditions de stabilité sont neutres.

Pour des conditions d'instabilité,  $\Psi(z/L_{MO})$  est calculé selon l'équation (Paulson, 1970 ; Panofsky & Dutton, 1984) :

$$\Psi = \ln \left[ \left( \frac{1+x^2}{2} \right) \left( \frac{1+x}{2} \right)^2 \right] - 2 \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \quad (2.28a)$$

$$x = \left(1 - \frac{16z}{L_{MO}}\right)^{1/4} \quad (2.28b)$$

Si l'atmosphère est stable,  $\Psi(z/L_{MO})$  est donné par (Panofsky & Dutton, 1984) :

$$\Psi = -\frac{5z}{L_{MO}} \quad (2.29)$$

## 2.3 Intensité de turbulence et écart type

L'intensité de turbulence est le rapport entre l'écart type provoqué par la turbulence et la moyenne de la vitesse du vent (Burton et al., 2011 ; IEC, 2005) :

$$I_u(z) = \frac{s_u(z)}{\bar{u}(z)} \quad (2.30)$$

L'écart type de la composante longitudinale de la vitesse du vent est donné par (Xu, 2013) :

$$s_u = \sqrt{\frac{1}{(b-a)} \int_a^b [u(t)]^2 dt} \quad (2.31)$$

Comme le mentionne Xu (2013), l'écart type de la vitesse du vent est égal à la moyenne quadratique de sa composante turbulente (puisque cette composante a une moyenne nulle).

L'écart type de la vitesse du vent a un lien avec la vitesse de frottement  $u_*$  selon l'expression (Solari & Piccardo, 2001) :

$$s_i = u_* \sqrt{\beta_i} \quad (i = u, v, w) \quad (2.32)$$

où  $\beta_i$  est un coefficient adimensionnel appelé facteur d'intensité de turbulence.

Le Tableau 2.4 donne quelques valeurs de  $\beta_u$  en fonction de la rugosité de terrain  $z_0$ .

Tableau 2.4 – Facteurs d'intensité de turbulence  $\beta_u$  en fonction de la rugosité de terrain  $z_0$  (Simiu & Scanlan, 1996).

$z_0$ (m)	0,005	0,07	0,30	1,00	2,50
$\beta_u$	6,5	6,0	5,25	4,85	4,00

L'Équation (2.33) peut être employée pour évaluer  $\beta_i$  sous des conditions de quasi-neutralité atmosphérique, avec  $z_0$  en mètres (Solari & Piccardo, 2001 ; Solari & Tubino, 2002) :

$$\beta_u = 6 - 1,1 \arctan[\ln(z_0) + 1,75] \quad (2.33a)$$

$$\beta_v = 0,55 \beta_u \quad \beta_w = 0,25 \beta_u \quad (2.33b)$$

L'Équation (2.33) montre que le niveau de turbulence est fortement dépendant de la rugosité du terrain. Plus le terrain est rugueux, plus turbulent est le vent.

ESDU (2001a) et ESDU (2002) proposent l'Équation (2.34) pour évaluer  $s_u$  à une hauteur  $z$  au dessus du sol. Dans cette expression, l'écart-type est évalué sur une période de 3600 secondes.

$$s_u(z) = \frac{7,5 u_{*0} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \left[0,538 + 0,09 \ln \left(\frac{z}{z_0}\right)\right]^p}{1 + 0,156 \ln \left(\frac{u_{*0}}{f_c z_0}\right)} \quad (2.34a)$$

$$p = \left(1 - \frac{z}{h}\right)^{16} \quad (2.34b)$$

L'Équation (2.34) montre qu'il y a moins de turbulence au fur et à mesure que  $z$  s'approche de la hauteur  $h$ . Par conséquent, si  $h$  est sous-estimé, le niveau de turbulence et le taux d'endommagement par fatigue d'une structure éolienne sont également sous-estimés.

Pour des conditions neutres de stabilité atmosphérique, les écarts types de la vitesse du vent à proximité du sol dans les directions  $y$  et  $z$  peuvent être calculés à partir de  $s_u$  selon les expressions qui suivent (ESDU, 2001a) :

$$s_v = s_u \left[1 - 0,22 \cos^4 \left(\frac{\pi z}{2h}\right)\right] \quad (2.35a)$$

$$s_w = s_u \left[1 - 0,45 \cos^4 \left(\frac{\pi z}{2h}\right)\right] \quad (2.35b)$$

Dans le cas où l'éolienne est construite sur la mer, l'intensité de turbulence peut être évaluée selon l'Équation (2.36) (API, 2000 ; ABS, 2011) :

$$I_u = 0,06 [1 + 0,043 \bar{u}_{10}] \left(\frac{z}{10}\right)^{-0,22} \quad (2.36)$$

où  $z$  est la hauteur au dessus du niveau de la mer et  $\bar{u}_{10}$  est la vitesse moyenne du vent en m/s évaluée sur la période de 3600 secondes à la hauteur  $z = 10$  mètres.

## 2.4 Échelle de longueur intégrale de turbulence

Selon ESDU (2001b) les échelles de longueur intégrales de turbulence sont une mesure de la taille moyenne d'un rafale de vent dans des directions appropriées. Elles quantifient le taux de variation des propriétés d'un rafale dans l'espace.

Il existe neuf échelles de longueur  $L_i^x$ ,  $L_i^y$ ,  $L_i^z$  définies par (ESDU, 1976) :

$$L_i^x = \int_0^\infty \mathcal{R}_{ii}(x' - x) d(x' - x) \quad (2.37a)$$

$$L_i^y = \int_0^\infty \mathcal{R}_{ii}(y' - y) d(y' - y) \quad (i = u, v, w) \quad (2.37b)$$

$$L_i^z = \int_0^\infty \mathcal{R}_{ii}(z' - z) d(z' - z) \quad (2.37c)$$

où  $\mathcal{R}_{ii}$  est la fonction d'autocorrélation :

$$\mathcal{R}_{ii} = \frac{C_{ii}(\tau)}{s_i^2} \quad (2.38)$$

$C_{ii}(\tau)$  est la fonction d'autocovariance et  $s_i$  est l'écart type de la composante de vitesse  $i = u, v$  ou  $w$ .

Les échelles de longueur  $L_u^x$ ,  $L_v^y$  et  $L_w^z$  sont dites longitudinales et les échelles de longueur  $L_u^y$ ,  $L_u^z$ ,  $L_v^x$ ,  $L_v^z$ ,  $L_w^x$  et  $L_w^y$  sont dites latérales. L'indice de chaque symbole indique la composante turbulente de vitesse considérée. Les exposants indiquent l'axe dans lequel on mesure la distance entre deux points.

Counihan (1975) affirme dans son travail que les échelles de longueur diminuent avec l'augmentation de la rugosité de terrain  $z_0$ . Il propose l'expression suivante pour l'échelle de longueur  $L_u^x$ , valable pour les hauteurs situées entre 10 et 240 m :

$$L_u^x = Bz^m \quad (2.39)$$

Xu (2013) fournit des courbes pour évaluer le coefficient  $B$  et l'exposant  $m$  en fonction de la rugosité du terrain  $z_0$ . Un ajustement polynomial permet d'écrire :

$$\log(m) = 0,01529 \log^3(z_0) - 0,03638 \log^2(z_0) + 0,136 \log(z_0) - 0,363 \quad (2.40a)$$

$$\log(B) = -0,4017 \log(z_0) + 1,352 \quad (2.40b)$$

L'Équation (2.40a) est valable dans l'intervalle  $0,0035 \leq z_0 \leq 9,46$ . L'Équation (2.40b) est valable dans l'intervalle  $0,001 \leq z_0 \leq 9,3$ .

Au dessus de la hauteur  $z_{\text{iso}}$  établie par l'Équation (2.41), la turbulence n'est plus restreinte par la surface du sol et elle devient isotropique (Burton et al., 2011 ; ESDU, 1975).

$$z_{\text{iso}} = 1000 z_0^{0,18} \quad (2.41)$$

L'Équation (2.41) associée aux données du Tableau 2.1 montre que les éoliennes sont toujours dans la région de turbulence anisotropique. La turbulence est isotropique aussi dans la gamme de hautes fréquences (ESDU, 2001b). D'après ESDU (2001a) une fréquence  $n$  se situe dans la gamme de hautes fréquences si la coordonnée adimensionnelle

de Monin est supérieur à 0,1. Cette coordonnée est représenté par  $f_m$  dans l'Équation (2.42).

$$f_m = \frac{nz}{\overline{u(z)}} \quad (2.42)$$

Selon Carruthers & Hunt (1986), si la turbulence est isotropique, l'Équation (2.43) est valable :

$$L_u^x = 2L_v^x = 2L_w^x \quad (2.43)$$

Encore sous l'hypothèse de turbulence isotropique, l'Équation (2.44) est valable (ESDU, 2001b) :

$$\frac{2L_v^x}{L_u^x} = \left( \frac{s_v}{s_u} \right)^3 = \frac{L_v^y}{2L_u^y} = \frac{L_v^z}{L_u^z} \quad (2.44a)$$

$$\frac{2L_w^x}{L_u^x} = \left( \frac{s_w}{s_u} \right)^3 = \frac{L_w^y}{L_u^y} = \frac{L_w^z}{2L_u^z} \quad (2.44b)$$

Les Équations (2.45a) et (2.45b), issues de mesures faites dans la couche limite de l'atmosphère, permettent d'évaluer  $L_u^y$  et  $L_u^z$  à partir de  $L_u^x$  (ESDU, 2001b) :

$$\frac{L_u^z}{L_u^x} = 0,5 - 0,34 \exp \left[ -35 \left( \frac{z}{h} \right)^{1,7} \right] \quad (2.45a)$$

$$\frac{L_u^y}{L_u^x} = 0,16 + 0,68 \frac{L_u^z}{L_u^x} \quad (2.45b)$$

Selon Burton et al. (2011) et ESDU (1975), au dessus de la hauteur  $z_{\text{iso}}$ , donnée par l'Équation (2.41), on a  $L_u^x = 280$  m, et  $L_u^y = L_u^z = L_v^x = L_v^z = 140$  m. Toutefois, même pour une longueur de rugosité  $z_0$  très petite, la région isotropique est bien au dessus de la hauteur d'une turbine d'éolienne. Les relations suivantes fournissent les échelles de longueur en mètres pour  $z < z_{\text{iso}}$  :

$$L_u^x = 280(z/z_{\text{iso}})^{0,35} \quad (2.46a)$$

$$L_u^y = 140(z/z_{\text{iso}})^{0,38} \quad (2.46b)$$

$$L_u^z = 140(z/z_{\text{iso}})^{0,45} \quad (2.46c)$$

$$L_v^x = 140(z/z_{\text{iso}})^{0,48} \quad (2.46d)$$

$$L_v^z = 140(z/z_{\text{iso}})^{0,55} \quad (2.46e)$$

Burton et al. (2011) et ESDU (1975) suggèrent  $L_w^x = L_w^y = 0,35z$  pour  $z < 400$  m. ISO (2009) fournit l'Équation (2.47) pour obtenir une valeur approximative de  $L_u^x$ .

$$L_u^x = 100 \left( \frac{z}{30} \right)^{0,5} \quad (2.47)$$

où  $z$  et  $L_u^x$  sont donnés en mètres.

Selon Solari & Piccardo (2001) et Solari & Tubino (2002), l'Équation (2.48) peut être employée pour évaluer  $L_i^x$  à une hauteur  $z \leq 200$  m. Toutes les unités sont en mètres.

$$L_i^x = 300 \lambda_i \left( \frac{z}{200} \right)^m \quad (2.48a)$$

$$m = 0,67 + 0,05 \ln(z_0) \quad (2.48b)$$

$$\lambda_u = 1 \quad \lambda_v = 0,25 \quad \lambda_w = 0,1 \quad (2.48c)$$

## 2.5 Densité Spectrale de Puissance (DSP)

Une fonction de densité spectrale de puissance a pour objectif de quantifier le niveau de variation qu'un signal subit lorsque l'on considère une fréquence donnée. L'intégration d'une DSP par rapport à la fréquence fournit la contribution de l'intervalle de fréquences considérée sur la variance du signal, comme le montre l'équation qui suit (Blackman & Tukey, 1958 ; Simiu & Scanlan, 1996 ; Cooper & McGillem, 1998) :

$$s^2 = \int_0^{+\infty} \mathcal{U}(n) dn \quad (\text{Si } \mathcal{U} \text{ est unilatéral}) \quad (2.49a)$$

$$s^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{U}_2(n) dn \quad (\text{Si } \mathcal{U}_2 \text{ est bilatéral}) \quad (2.49b)$$

Une fonction de densité spectrale de puissance peut être unilatérale ou bilatérale. Elle est unilatérale si l'on considère uniquement les fréquences positives. On a la définition d'une DSP bilatérale lorsque l'on considère  $-\infty$  et  $+\infty$  comme limites d'intégration dans l'Équation (2.49). Si la DSP bilatérale est connue, il est possible de trouver la DSP unilatérale en multipliant la valeur de  $\mathcal{U}_2(n)$  par 2 pour les fréquences positives et en considérant  $\mathcal{U}(n)=0$  pour les fréquences négatives (voir l'Équation (2.50), selon Cooper & McGillem (1998)). A chaque fois qu'une fonction DSP est présentée, l'auteur doit signaler si elle est unilatérale ou bilatérale.

$$\mathcal{U}(n) = \begin{cases} 2\mathcal{U}_2(n) & (\text{pour } n > 0) \\ 0 & (\text{pour } n < 0) \end{cases} \quad (2.50)$$

Plusieurs phénomènes atmosphériques affectent la vitesse du vent. Chacun de ces phénomènes a une durée moyenne et, par conséquent, une période associée à une fréquence  $n$  en Hertz. Le graphique de la Figure 2.1 donne la densité énergétique du vent en fonction

de la fréquence. En analysant ce graphique, il est possible de conclure que la vitesse du vent peut varier considérablement dans des périodes de 4 jours, 12 heures et 76 secondes.

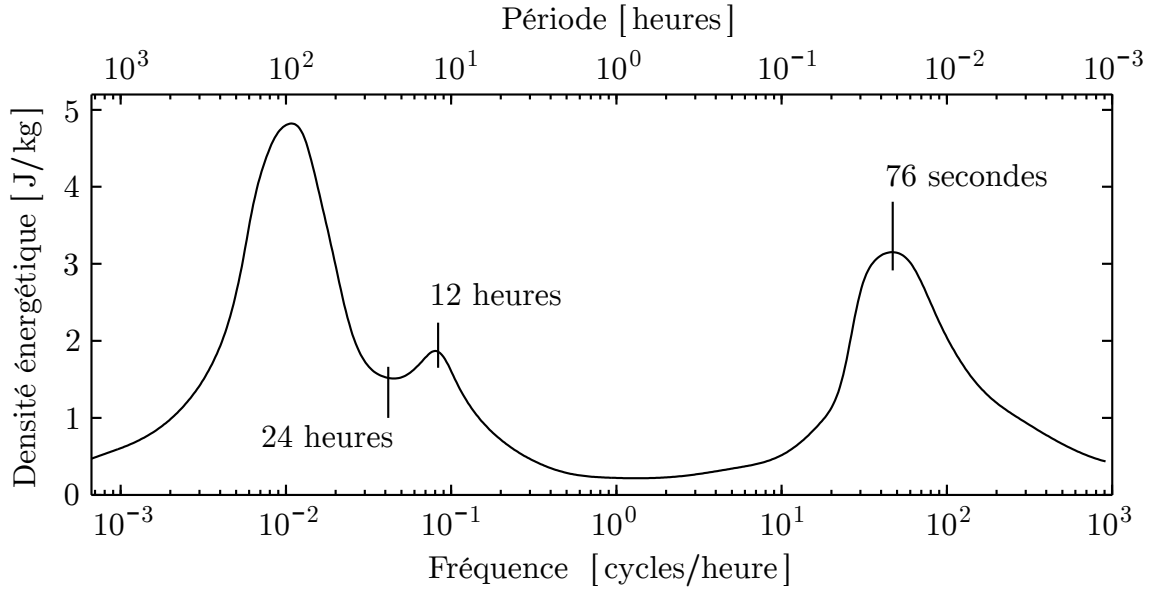


Figure 2.1 – Densité énergétique du vent, en fonction de la fréquence (der Hoven, 1957 ; Harper et al., 2008 ; Burton et al., 2011).

### 2.5.1 Densité spectrale de von Kármán

La densité spectrale de puissance unilatérale de von Kármán correspondante à la composante  $u$  de la vitesse du vent est donnée par (von Kármán, 1948 ; Harris, 1968 ; ESDU, 2001a) :

$$\frac{n\mathcal{U}_{uu}(n)}{s_u^2} = \frac{4n_u}{(1 + 70,8n_u^2)^{5/6}} \quad (2.51a)$$

$$n_u = \frac{nL_u^x}{\bar{u}_{1hr}(z)} \quad (n > 0) \quad (2.51b)$$

La DSP unilatérale de von Kármán correspondante aux composantes  $i = v, w$  est donnée par (ESDU, 2001a) :

$$\frac{n\mathcal{U}_{ii}}{s_i^2} = \frac{4n_i(1 + 755,2n_i^2)}{(1 + 283,2n_i^2)^{11/6}} \quad (2.52a)$$

$$n_i = \frac{nL_i^x}{\bar{u}_{1hr}(z)} \quad (n > 0) \quad (2.52b)$$

Puisque la DSP de von Kármán est basée sur l'hypothèse de turbulence isotropique, on a  $s_u = s_v = s_w$  et les relations données par l'Équation (2.43) doivent être employées dans l'Équation (2.52).



ESDU (2001a) affirme que la DSP de von Kármán n'est pas adéquate dans la gamme de hautes fréquences ( $f_m > 0,1$  dans l'Équation (2.42)). Afin de bien décrire cette région du spectre, le même document propose l'Équation (2.53) :

$$\frac{n\mathcal{U}_{uu}}{s_u^2} = A_{\text{hf}} \left( \frac{nL_u^x}{\bar{u}_{1\text{hr}}(z)} \right)^{-2/3} \quad (2.53)$$

L'Équation (2.54) fournit  $L_u^x$  valable pour les hauteurs jusqu'à 300 mètres et doit être strictement employée avec l'Équation (2.53), en raison de la manière qu'elle a été dérivée.

$$L_u^x = \frac{A_{\text{hf}}^{3/2} (s_u/u_*)^3 z}{2,5K_z^{3/2} (1 - z/h)^2 (1 + 5,75 z/h)} \quad (2.54)$$

Le paramètre  $A_{\text{hf}}$  est donné par :

$$A_{\text{hf}} = 0,115 \left[ \frac{L_u^x}{(L_u^x)_s} \right]^{2/3} \quad (2.55)$$

Le rapport  $L_u^x/(L_u^x)_s$  est donné par l'Équation (2.56), qui est valable pour les hauteurs jusqu'à 180 mètres environ.

$$\frac{L_u^x}{(L_u^x)_s} = 1 + 0,315 \left( 1 - \frac{z}{h} \right)^6 \quad (2.56)$$

$K_z$  est le paramètre de Kolmogorov, donné par :

$$K_z = 0,19 - (0,19 - K_0) \exp \left[ -24 \text{Ro}^{0,155} \left( \frac{z}{h} \right)^N \right] \quad (2.57a)$$

$$K_0 = \frac{0,39}{\text{Ro}^{0,11}} \quad N = 1,24 \text{Ro}^{0,008} \quad (2.57b)$$

Ro est le nombre de Rossby, donné par :

$$\text{Ro} = \frac{u_{*0}}{f_c z_0} \quad (2.58)$$

## 2.5.2 Densité spectrale de von Kármán modifiée

ESDU (2001a) affirme que la DSP de von Kármán (Équations (2.51) et (2.52)) représente bien la turbulence atmosphérique au dessus de 150 mètres et que la précision se détériore au dessous de ce seuil. Afin d'éliminer cet inconvénient, Harris (1990) et ESDU (2001a) ont développé la DSP unilatérale de von Kármán modifiée (Équations (2.59) et (2.60)). Contrairement à l'Équation (2.53), la DSP de von Kármán modifiée est valable pour toute la gamme de fréquences.

$$\frac{n\mathcal{U}_{uu}}{s_u^2} = B_1 \frac{2,987 n_u/a}{[1 + (2\pi n_u/a)^2]^{5/6}} + B_2 \frac{1,294 n_u/a}{[1 + (\pi n_u/a)^2]^{5/6}} F_1 \quad (2.59)$$

Pour les composantes  $i = v, w$  la DSP unilatérale de von Kármán modifiée est donnée par :

$$\frac{n\mathcal{U}_{ii}}{s_i^2} = B_1 \frac{2,987 [1 + (8/3) (4\pi n_i/a)^2] (n_i/a)}{[1 + (4\pi n_i/a)^2]^{11/6}} + B_2 \frac{1,294 n_i/a}{[1 + (2\pi n_i/a)^2]^{5/6}} F_2 \quad (2.60)$$

Le paramètre  $a$  dépend de  $A_{\text{hf}}$  et peut être évalué en résolvant numériquement l'Équation (2.61a). Une bonne approximation est donnée par l'Équation (2.61b).

$$A_{\text{hf}} = a^{2/3} (0,3858 - 0,3298 a) \quad (2.61a)$$

$$a = 0,535 + 2,76 (0,138 - A_{\text{hf}})^{0,68} \quad (2.61b)$$

Les paramètres  $F_1$  et  $F_2$  sont donnés ci-dessous :

$$F_1 = 1 + 0,455 \exp \left[ -0,76 \left( \frac{n_u}{a} \right)^{-0,8} \right] \quad (2.62a)$$

$$F_2 = 1 + 2,88 \exp \left[ -0,218 \left( \frac{n_i}{a} \right)^{-0,9} \right] \quad (2.62b)$$

Les paramètres  $B_1$  et  $B_2$  sont donnés par :

$$B_1 = 2,357 a - 0,761 \quad (2.63a)$$

$$B_2 = 1 - B_1 \quad (2.63b)$$

### 2.5.3 Densité spectrale de Kaimal

La fonction de densité spectrale de puissance de l'Équation (2.64) peut être trouvée dans la norme (IEC, 2005). Elle a été conçue par Kaimal et al. (1972).

$$\frac{n\mathcal{U}_i(n)}{s_i^2} = \frac{\frac{4 n L_i^{\text{Ka}}}{\bar{u}_{1\text{hr}}(z)}}{\left( 1 + \frac{6 n L_i^{\text{Ka}}}{\bar{u}_{1\text{hr}}(z)} \right)^{5/3}} \quad \begin{array}{l} (i = u, v, w \\ \text{et } n > 0) \end{array} \quad (2.64)$$

$L_u^{\text{Ka}}$ ,  $L_v^{\text{Ka}}$  et  $L_w^{\text{Ka}}$  sont les échelles de longueur pour la DSP de Kaimal, données par (Burton et al., 2011) :

$$L_u^{\text{Ka}} = 2,329 L_u^x \quad L_v^{\text{Ka}} = 3,2054 L_v^x \quad L_w^{\text{Ka}} = 3,2054 L_w^x \quad (2.65)$$

IEC (2005) suggère que ces échelles de longueur soient calculées selon :

$$L_u^{\text{Ka}} = 8,1 \Lambda_u \quad L_v^{\text{Ka}} = 2,7 \Lambda_u \quad L_w^{\text{Ka}} = 0,66 \Lambda_u \quad (2.66)$$

où le paramètre  $\Lambda_u$  est donné par :

$$\Lambda_u = \begin{cases} 0,7z & (z < 60 \text{ m}) \\ 42 \text{ m} & (z \geq 60 \text{ m}) \end{cases} \quad (2.67)$$

Sachant que  $L_u^x = 3,5\Lambda_u$ , l'Équation (2.67) peut également être employée pour évaluer la fonction de densité spectrale de von Kármán. Cependant, toutes les échelles de longueur issues de l'Équation (2.67) doivent être vues comme une approximation, puisque la rugosité de terrain n'est pas prise en compte.

Afin d'estimer les écarts types des composantes  $v$  et  $w$  de la DSP de Kaimal, IEC (2005) suggère  $s_v = 0,8 s_u$  et  $s_w = 0,5 s_u$ .

Solari & Piccardo (2001) et Solari & Tubino (2002) ont proposé une version modifiée de la DSP de Kaimal, donnée par :

$$\mathcal{U}_i(\omega) = \frac{\frac{d_i \beta_i u_*^2 L_i^x}{4\pi \bar{u}_{1\text{hr}}(z)}}{\left[1 + \frac{1,5 d_i |\omega| L_i^x}{2\pi \bar{u}_{1\text{hr}}(z)}\right]^{5/3}} \quad \begin{matrix} (i = u, v, w \\ \text{et } n > 0) \end{matrix} \quad (2.68)$$

où  $d_u = 6,868$  et  $d_v = d_w = 9,434$ . Le facteur d'intensité de turbulence  $\beta_i$  a déjà été abordé dans la Section 2.3.

L'Équation (2.69) est une autre version de la DSP de Kaimal proposée par Frost et al. (1978). Elle peut également être trouvée dans le travail de Masse & Pastorel (1992) :

$$\mathcal{U}_i(n) = \frac{C_1 z \bar{u}_{10} \left[ \ln\left(\frac{10}{z_0} + 1\right) \ln\left(\frac{z}{z_0} + 1\right) \right]^{-1}}{1 + C_2 \left[ \frac{z n \ln(10/z_0 + 1)}{\bar{u}_{10} \ln(z/z_0 + 1)} \right]^{5/3}} \quad \begin{matrix} (i = u, v, w \\ \text{et } n > 0) \end{matrix} \quad (2.69)$$

où  $\bar{u}_{10}$  est la vitesse moyenne du vent (en m/s) sur une période d'une heure à la hauteur  $z = 10$  mètres.  $C_1$  et  $C_2$  sont donnés par le Tableau 2.5.

Tableau 2.5 – Valeurs des coefficients  $C_1$  et  $C_2$  dans l'Équation 2.69.

	$i = u$	$i = v$	$i = w$
$C_1$	12,3	4,0	0,5
$C_2$	192	70	8,0

## 2.5.4 Densité spectrale de Tieleman

Tieleman (1995) a développé deux fonctions DSP unilatérales : l'une pour les terrains plats, lisses et uniformes (PLU) ; l'autre pour les terrains complexes, plein d'obstacles. Les Équations (2.70) correspondent au premier type de terrain (PLU) :

$$\frac{n\mathcal{U}_u(n)}{s_u^2} = \frac{20,53f_m}{1 + 475,1 f_m^{5/3}} \quad (2.70a)$$

$$\frac{n\mathcal{U}_v(n)}{s_v^2} = \frac{6,83f_m}{1 + 75,84 f_m^{5/3}} \quad (n > 0) \quad (2.70b)$$

$$\frac{n\mathcal{U}_w(n)}{s_w^2} = \frac{1,67f_m}{1 + 7,23 f_m^{5/3}} \quad (2.70c)$$

où  $f_m$  est le paramètre adimensionnel donné par l'Équation (2.42). Pour les terrains complexes, Tieleman (1995) suggère les équations qui suivent :

$$\frac{n\mathcal{U}_u(n)}{s_u^2} = \frac{40,42f_m}{(1 + 60,62 f_m)^{5/3}} \quad (2.71a)$$

$$\frac{n\mathcal{U}_v(n)}{s_v^2} = \frac{13,44f_m}{(1 + 20,16 f_m)^{5/3}} \quad (n > 0) \quad (2.71b)$$

$$\frac{n\mathcal{U}_w(n)}{s_w^2} = \frac{3,28f_m}{(1 + 4,92 f_m)^{5/3}} \quad (2.71c)$$

## 2.6 Simulation d'un signal aléatoire à partir d'une fonction DSP

Un signal de vitesse du vent peut être synthétisé en employant l'Équation (2.72), proposée originalement par Shinozuka (1971). Elle figure aussi dans le travail de Bierbooms (2009) :

$$u(t) = \bar{u} + \sum_{j=1}^{M-1} A_j \cos(2\pi n_j t + \phi_j) \quad (2.72a)$$

$$A_j = s_j \sqrt{2} \quad (2.72b)$$

$$s_j = \sqrt{\left[ \frac{\mathcal{U}(n_j) + \mathcal{U}(n_{j+1})}{2} \right] (n_{j+1} - n_j)} \quad (2.72c)$$

L'intervalle de fréquences entre  $n_1$  et  $n_M$  est discrétisé en  $M - 1$  sous-intervalles de largeurs  $(\Delta n)_j = n_{j+1} - n_j$ . Chaque fréquence  $n_j$  correspond à une valeur  $\mathcal{U}_j$  de la fonction de densité spectrale de puissance.  $\bar{u}$  est la valeur moyenne de la vitesse du vent et  $\phi_j$  est

un angle de phase aléatoire qui se distribue uniformément dans l'intervalle entre 0 et  $2\pi$  radians.

Un exemple peut clarifier l'emploi de l'Équation (2.72). Supposons que l'on dispose d'une liste de vitesses moyennes du vent. Chaque entrée de cette liste représente la vitesse moyenne du vent sur une période d'une heure. On souhaite synthétiser un historique de vitesses possédant des harmoniques jusqu'à la fréquence de 1/5 Hertz. Dans ce cas, il faut générer une fonction de Shinozuka (Équation (2.72)) pour chaque période d'une heure. Cela équivaut à dire que l'on doit générer un nouvel ensemble de variables aléatoires  $\phi_j$  pour chaque période d'une heure. Bien qu'en langage mathématique cet ensemble de variables aléatoires ne soit pas un vecteur, en langage de programmation il est convenable de l'exprimer comme s'il en était un :  $[\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_j \ \dots \ \phi_{M-1} \ \phi_M]$ . Chaque entrée de la liste originale de vitesses représente  $\bar{u}$  dans l'Équation (2.72). Dans cet exemple, la fréquence  $n_1$  est égale à 1/3600 Hertz et la fréquence  $n_M$  est égale à 1/5 Hertz.

Les méthodes classiques d'estimation spectrale permettent que le signal soit statistiquement décrit dans l'intervalle de fréquences inférieures à la moitié du taux d'échantillonnage (Wijnants et al., 2013). Cela étant, afin que le signal synthétisé avec l'Équation (2.72) contienne effectivement les données statistiques correspondantes aux fonctions harmoniques dans l'intervalle de fréquences entre  $n_1$  et  $n_M$ , le taux d'échantillonnage doit être égal ou supérieur à  $2n_M$ .

# Chapitre 3

## Chargements sur une structure éolienne

### 3.1 Coefficient de pression

La distribution de pression et la distribution de contrainte de cisaillement sont les seules données nécessaires pour évaluer les forces et les moments qui agissent sur la surface extérieure d'un corps aérodynamique immergé dans l'écoulement d'un fluide. La pression et la contrainte de cisaillement agissent respectivement dans la direction normale et tangent à la surface, comme le montre la Figure 3.1.

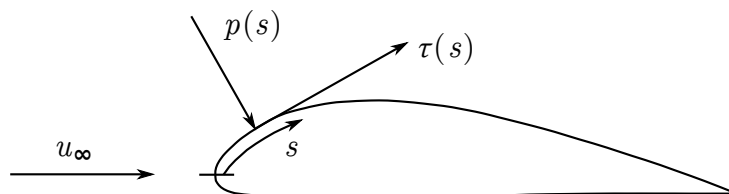


Figure 3.1 – Vecteurs des forces associées à la pression et à la contrainte de cisaillement autour d'une aile (Anderson, 2001).

Le coefficient de pression et le coefficient de friction sont les paramètres adimensionnels qui permettent d'évaluer respectivement la distribution de pression et la distribution de contrainte de cisaillement autour de la surface. Le coefficient de pression est défini par l'Équation (3.1) (Anderson, 2001) :

$$c_p(x, y, z) = \frac{p_{st}(x, y, z) - p_{st,\infty}}{\frac{\rho_\infty u_\infty^2}{2}} = \frac{p(x, y, z)}{p_{d,\infty}} \quad (3.1)$$

où  $p_{st}(x, y, z)$  est la pression statique totale qui agit localement sur le point de la surface et  $p_{st,\infty}$  est la pression statique sur un point lointain de la surface. La pression dynamique  $p_{d,\infty}$  est donnée par  $(1/2)\rho_\infty u_\infty^2$ . Si l'écoulement est incompressible, la valeur maximale du coefficient de pression est 1,0 et cela a lieu sur le point de stagnation, dont la définition

est donnée dans le Chapitre 1. Pour un écoulement compressible,  $c_p$  peut dépasser 1,0 sur le point de stagnation. La différence de pression statique  $p(x, y, z) = p_{st}(x, y, z) - p_{st,\infty}$  est celle qui représente le chargement du vent sur une structure.

Lorsque l'écoulement est incompressible, le coefficient de pression peut être évalué selon (Anderson, 2001) :

$$c_p(x, y, z) = 1 - \left[ \frac{u(x, y, z)}{u_\infty} \right]^2 \quad (3.2)$$

### 3.1.1 Coefficient de pression autour d'un cylindre

Le nombre de Reynolds de l'écoulement externe transversal d'un fluide autour d'un cylindre est donné par (Anderson, 2001) :

$$Re = \frac{\rho_\infty u_\infty 2R_m}{\mu_\infty} \quad (3.3)$$

où  $u_\infty$ ,  $\rho_\infty$  et  $\mu_\infty$  sont respectivement la vitesse, la densité et la viscosité dynamique du fluide dans une région distante du cylindre de rayon  $R_m$ .

Selon Fox & McDonald (2011), l'air a une viscosité dynamique de  $1,81 \cdot 10^{-5}$  N.s/m<sup>2</sup> lorsqu'il se trouve à une pression de 101,3 kPa et une température de 20 degrés Celsius. Dans ces mêmes conditions, la densité de l'air est de 1,21 kg/m<sup>3</sup>.

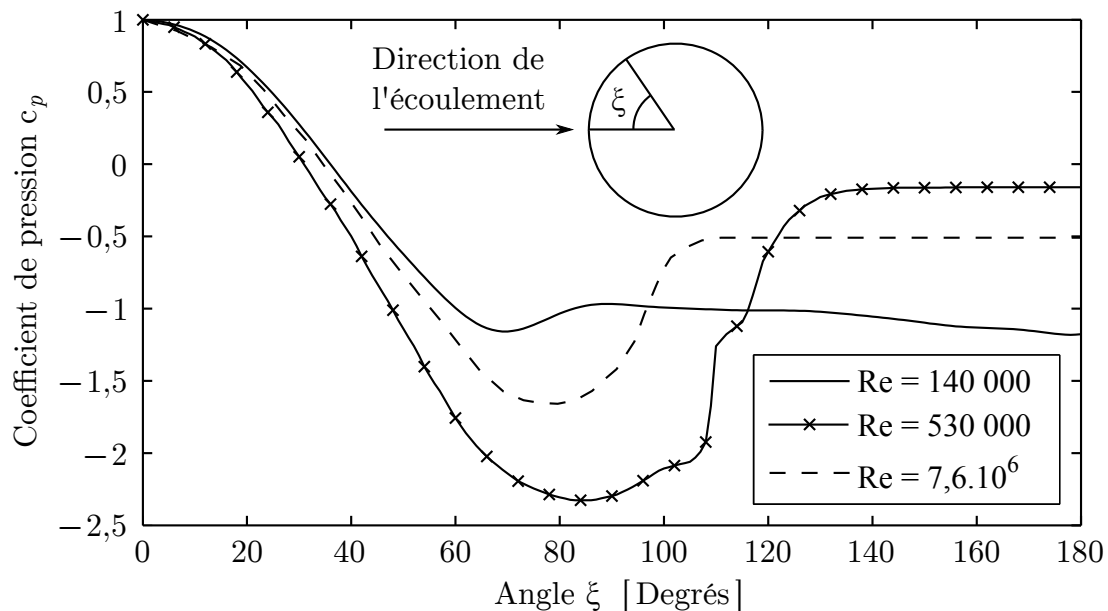


Figure 3.2 – Coefficient de pression autour d'un cylindre en fonction de la coordonnée angulaire et du nombre de Reynolds (Cantwell & Coles (1983), Spitzer (1965), van Nunen (1974)).

La Figure 3.2 montre la variation du coefficient de pression en fonction de la position angulaire par rapport au point de stagnation, pour trois valeurs représentatives de nombre

de Reynolds. Elle est similaire à celle qu'on trouve dans le travail de Roshko (1961). Les courbes correspondantes à  $Re = 140\,000$ ,  $Re = 530\,000$  et  $Re = 7,6 \cdot 10^6$  ont été déterminées respectivement par Cantwell & Coles (1983), Spitzer (1965) et van Nunen (1974). Pour la courbe dont le nombre de Reynolds est de  $140\,000$ , le coefficient de pression est zéro à l'angle  $\xi = 36^\circ$ .

La chute du coefficient de traînée lorsque le nombre de Reynolds se trouve entre  $2 \cdot 10^5$  et  $5 \cdot 10^6$  dans le graphique de la Figure 3.3 est consistant avec le comportement des graphiques de la Figure 3.2. Pour  $\xi > 120^\circ$  (dans la partie arrière du cylindre), on peut espérer que  $|c_p(Re = 530\,000)|$  sera inférieur à  $|c_p(Re = 140\,000)|$ , puisque la traînée s'affaiblit lorsque le nombre de Reynolds évolue de  $140\,000$  à  $530\,000$ . On peut espérer aussi que  $|c_p(Re = 7,6 \cdot 10^6)|$  sera supérieur à  $|c_p(Re = 530\,000)|$ , puisque la traînée tourne à augmenter lorsque le nombre de Reynolds évolue de  $530\,000$  à  $7,6 \cdot 10^6$ . Dans la région où  $\xi$  est proche de  $90^\circ$ , une partie considérable de la force aérodynamique ne produit pas de traînée en raison de sa direction.

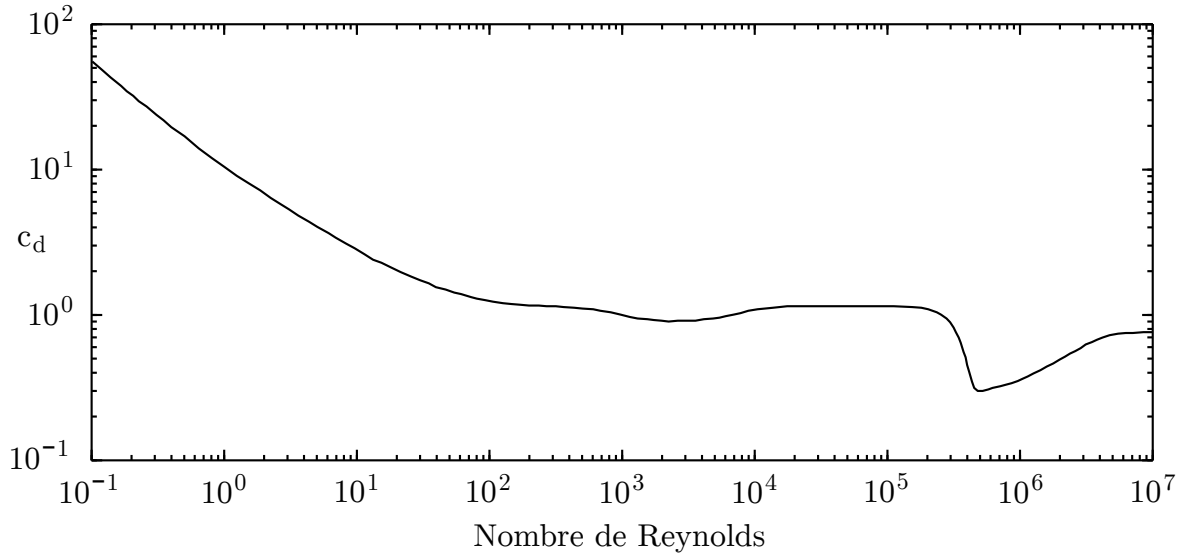


Figure 3.3 – Coefficient de traînée  $c_d$  d'un cylindre, en fonction du nombre de Reynolds (Tritton, 1988).

Dans le cas d'un cylindre vertical, si la vitesse du fluide varie avec la hauteur  $z$ , l'Équation (3.1) peut être réécrite de la façon suivante :

$$p(z, \xi) = c_p(\xi) \frac{\rho_\infty u_\infty^2(z)}{2} = c_p(\xi) p_{d,\infty}(z) \quad (3.4)$$

où la pression  $p$  est celle qui doit être considérée comme chargement structurel.



## 3.2 Chargement du rotor

### 3.2.1 Coefficient de Puissance et Limite de Betz

Le coefficient de puissance  $C_P$  d'un rotor éolien est une fonction de la vitesse du vent. Il est défini par (Burton et al., 2011) :

$$C_P(u_\infty) = \frac{P_{\text{rot}}}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^3 A_{\text{rot}}} \quad (3.5a)$$

$$A_{\text{rot}} = \pi R_{\text{rot}}^2 \quad (3.5b)$$

où  $P_{\text{rot}}$  est la puissance captée par le rotor.  $R_{\text{rot}}$  est la distance entre les pointes des pales et le centre du rotor (mesurée sur le plan perpendiculaire à la direction de  $u_\infty$ ).

Lanchester (1915) et Betz (1920) ont employé les concepts de conservation de masse, quantité de mouvement et d'énergie pour prouver que la valeur maximale théoriquement possible pour le coefficient de puissance est de  $16/27 \approx 0,5926$  pour un rotor type disque. La démonstration de comment obtenir cette valeur connue sous le terme de limite de Betz peut être trouvée dans le travail de Jain (2011).

D'après Manwell et al. (2002), la limite de Betz n'est jamais atteinte parce que la théorie de Lanchester-Betz ne prend pas en compte les facteurs suivants :

- la rotation de l'écoulement derrière le rotor ;
- le nombre fini de pales et les pertes associées à leurs pointes ;
- l'existence de la traînée.

Considérons un rotor du type disque (le mouvement de rotation des pales couvre la surface d'un disque imaginaire). Le facteur d'induction axial « a » quantifie la réduction de vitesse du vent grâce à ce rotor. Sa définition est donnée par (Burton et al., 2011) :

$$a = \frac{u_\infty - u_{\text{rot}}}{u_\infty} \quad (3.6)$$

où  $u_{\text{rot}}$  est la composante axial de vitesse de l'air qui traverse le plan du rotor.

Selon la théorie de Lanchester-Betz, la puissance  $P_{\text{rot}}$  obtenue par un rotor idéal est donnée par (Jain, 2011) :

$$P_{\text{rot}} = 2 \rho A_{\text{rot}} u_{\text{rot}}^2 (u_\infty - u_{\text{rot}}) \quad (3.7)$$

La puissance maximale est obtenue quand  $u_{\text{rot}} = (2/3)u_\infty$ . Ce résultat remplacé dans l'Équation (3.6) donne  $a = 1/3$ .

Pour un rotor idéal, le coefficient de puissance est donné en termes du facteur d'induction selon l'équation (Hansen, 2008 ; Burton et al., 2011) :

$$C_P = 4a(1 - a)^2 \quad (3.8)$$

La dérivé de  $C_P$  par rapport au facteur d'induction axial est :

$$\frac{dC_P}{da} = 4(1 - a)(1 - 3a) \quad (3.9)$$

À partir des Équations (3.8) et (3.9), il est possible de conclure que  $C_P^{\max} = 16/27$  quand  $a = 1/3$ , ce qui est compatible avec les résultats déjà mentionnés dans cette section.

La Figure 3.4 donne l'exemple d'une courbe de coefficient de puissance  $C_P$  en fonction de la vitesse du vent. Cette courbe correspond à un rotor à l'axe horizontal qui génère 1 Mégawatt de puissance maximale. Les données peuvent être trouvées dans le logiciel WAsP (Wind Atlas Analysis and Application Program).

En considérant l'aire du rotor  $A_{\text{rot}} = 2290 \text{ m}^2$  et le coefficient de puissance fourni par la Figure 3.4, l'Équation (3.5a) permet l'obtention de la courbe de puissance du rotor en fonction de la vitesse du vent montrée dans la Figure 3.5.

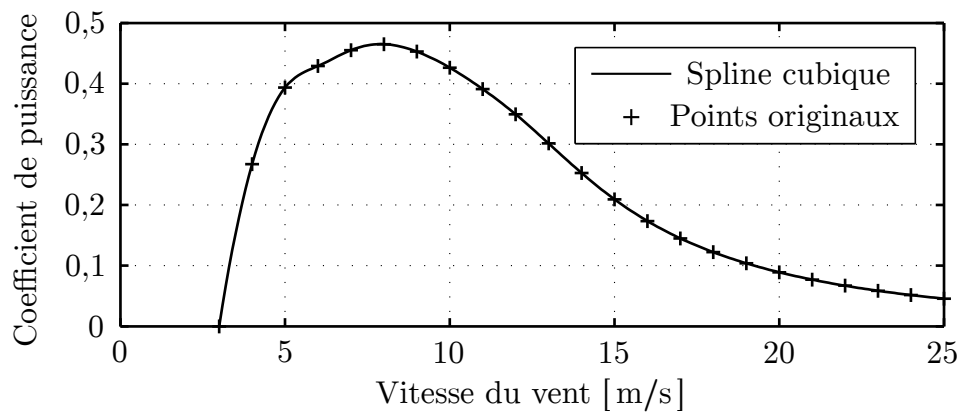


Figure 3.4 – Coefficient de puissance  $C_P$  d'un rotor à l'axe horizontal qui génère de 1,0 MW de puissance maximale. Données fournies par le logiciel WAsP.

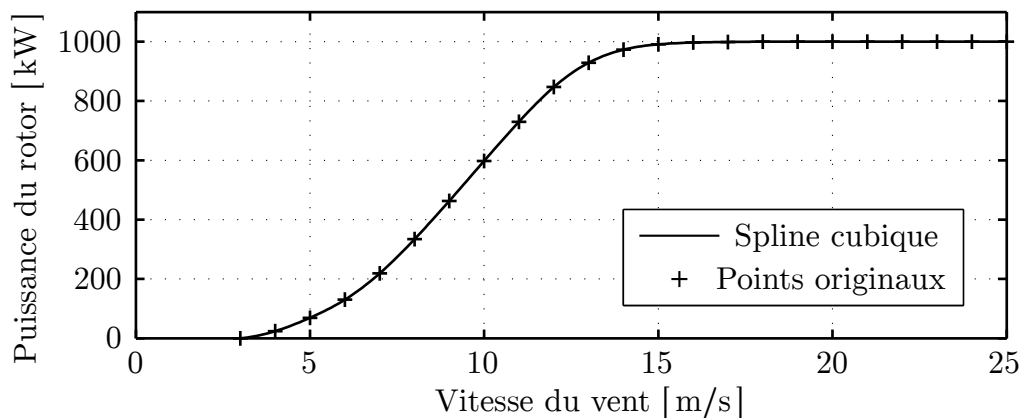


Figure 3.5 – Exemple de courbe de puissance du rotor en fonction de la vitesse du vent.

### 3.2.2 Facteur de charge

Le facteur de charge  $C_T$  (*thrust coefficient*, en anglais) est une fonction de la vitesse du vent. Sa définition est donnée par (Hansen, 2008 ; Burton et al., 2011) :

$$C_T(u_\infty) = \frac{f_{\text{rot}}}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2 A_{\text{rot}}} \quad (3.10)$$

Pour un rotor idéal (dont les pertes énergétiques sont négligeables), le facteur de charge est exprimé en termes du facteur d'induction axial « a » selon (Hansen, 2008 ; Burton et al., 2011) :

$$C_T = 4a(1 - a) \quad (3.11)$$

Les Équations (3.12a) et (3.12b) permettent d'obtenir une valeur de  $C_T$  plus proche des résultats expérimentaux, puisqu'elles prennent en compte les pertes énergétiques (Buhl, 2005) :

$$C_T = 4a(1 - a)F_P \quad (\text{pour } 0 \leq a \leq 0,4) \quad (3.12a)$$

$$C_T = \frac{8}{9} + \left(4F_P - \frac{40}{9}\right)a + \left(\frac{50}{9} - 4F_P\right)a^2 \quad (\text{pour } 0,4 \leq a \leq 1,0) \quad (3.12b)$$

Les courbes produites par ces deux expressions se touchent quand  $a = 0,4$ .

$F_P$  est le facteur de perte de Prandtl, qui corrige l'hypothèse d'un nombre infini de pales. Si la géométrie des pales du rotor est connue, la théorie d'élément de pale, conçue par Glauert (1935) peut être employée pour évaluer le facteur de Prandtl, aussi bien que le facteur d'induction (voir Hansen (2008)). Dans cette théorie, l'Équation (3.10) serait écrite en termes des éléments différentielles  $df_{\text{rot}}$  et  $dA_{\text{rot}} = 2\pi r dr$  ;  $F_P$  et « a » seraient fonctions de la distance  $r$  qui sépare la coordonnée concernée et le centre du rotor.

### 3.2.3 Vitesse spécifique

La vitesse spécifique  $\lambda_{\text{rot}}$  d'un rotor est le rapport entre la vitesse tangentielle des pointes des pales du rotor et la vitesse du vent (Hau, 2006). Elle est donnée par :

$$\lambda_{\text{rot}} = \frac{\Omega_{\text{rot}} R_{\text{rot}}}{u_\infty} \quad (3.13)$$

où  $\Omega_{\text{rot}}$  est la vitesse angulaire de rotation du rotor et le rayon  $R_{\text{rot}}$  est le même de l'Équation (3.5b). La vitesse spécifique est un paramètre très important pour le projet du rotor d'une éolienne puisqu'elle affecte fortement l'efficacité énergétique.

Le graphique de la Figure 3.6 illustre le comportement typique du coefficient de puissance en fonction de la vitesse spécifique et du nombre de pales. La réduction du

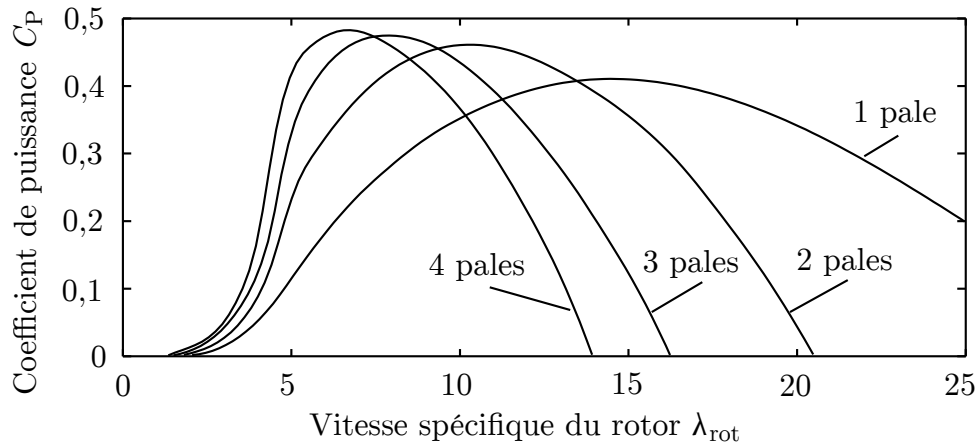


Figure 3.6 – Coefficient de puissance  $C_P$  en fonction de la vitesse spécifique  $\lambda_{rot}$  et du nombre de pales (Hau, 2006).

nombre de pales augmente la vitesse de rotation optimale et réduit l'efficacité maximale du rotor. Un rotor avec un grand nombre de pales n'est pas souhaitable pour la génération d'électricité parce que cette application exige une vitesse de rotation plus importante.

Harrison et al. (2000) affirme que la vitesse spécifique optimale se trouve typiquement entre 6 et 8 pour un rotor d'éolienne à l'axe horizontal avec trois pales.

En ce qui concerne la vitesse de rotation du rotor, les turbines éoliennes sont classées en deux types (Hansen, 2005) :

1. Turbine à vitesse fixe : la vitesse angulaire du rotor  $\Omega_{rot}$  ne change pas beaucoup en fonction de la vitesse du vent  $u_\infty$  ; elle reste dans un intervalle de valeurs très étroit. La vitesse spécifique  $\lambda_{rot}$  varie fortement en fonction de la vitesse du vent. Pendant une considérable partie du temps, la vitesse du vent n'est pas celle qui fait turbine rendre sa meilleur performance.
2. Turbine à vitesse variable : la vitesse angulaire de rotation  $\Omega_{rot}$  varie en telle sorte que la vitesse spécifique ait toujours sa valeur optimale, indépendamment de la vitesse du vent.

# Chapitre 4

## Dynamique structurelle du mât

### 4.1 Réceptance complexe d'un système vibratoire

Le déplacement  $d$  d'un système masse-ressort-amortisseur à un degré de liberté soumis à une force  $f(t)$  est gouverné par l'équation qui suit :

$$m \ddot{d} + c \dot{d} + k d = f(t) \quad (4.1)$$

Soit  $d_{\text{Re}}$  la réponse de ce système à une force  $f_{\text{Re}}(t) = F \cos(\omega t)$  et  $d_{\text{Im}}$  la réponse à une force  $f_{\text{Im}}(t) = F \sin(\omega t)$ . On peut écrire (Craig & Kurdila, 2006) :

$$m \ddot{d}_{\text{Re}} + c \dot{d}_{\text{Re}} + k d_{\text{Re}} = f_{\text{Re}}(t) = F \cos(\omega t) \quad (4.2a)$$

$$m \ddot{d}_{\text{Im}} + c \dot{d}_{\text{Im}} + k d_{\text{Im}} = f_{\text{Im}}(t) = F \sin(\omega t) \quad (4.2b)$$

Si l'Équation (4.2b) est multipliée par  $i = \sqrt{-1}$  et ensuite additionnée à l'Équation (4.2a), la formule d'Euler permet d'écrire (Ewins, 2000 ; Craig & Kurdila, 2006 ; Inman, 2007) :

$$m \ddot{\bar{d}} + c \dot{\bar{d}} + k \bar{d} = \bar{f}(t) = F \exp(i \omega t) = F \cos(\omega t) + i F \sin(\omega t) \quad (4.3)$$

où le déplacement complexe est exprimé par  $\bar{d} = d_{\text{Re}} + i d_{\text{Im}}$ . L'accent ( $\bar{\quad}$ ) permettra de distinguer un nombre complexe dans ce chapitre.

Une possible solution pour l'Équation (4.3) est  $\bar{d}(t) = \bar{D} \exp(i \omega t)$ . Son remplacement dans l'équation de mouvement donne :

$$(k - \omega^2 m + i \omega c) \bar{D} \exp(i \omega t) = F \exp(i \omega t) \quad (4.4)$$

Le rapport entre le déplacement complexe  $\bar{d}$  et la force complexe  $\bar{f}$  est connu sous le terme de réceptance complexe. Dans le cas d'un système à un degré de liberté avec amortissement visqueux, elle est donnée par :

$$\bar{\alpha}(\omega) = \frac{\bar{d}(\omega, t)}{\bar{f}(\omega, t)} = \frac{\bar{D}}{F} = \frac{1}{(k - \omega^2 m) + i(\omega c)} = \frac{1/k}{(1 - \mathcal{R}^2) + i\left(\frac{\omega c}{k}\right)} \quad (4.5)$$

où  $\mathcal{R} = \omega/\omega_n$  (rapport entre la fréquence forcée et la fréquence naturelle de vibration).

La solution de l'équation de mouvement complexe est :

$$\bar{d}(\omega, t) = \bar{\alpha}(\omega)\bar{f}(\omega, t) \quad (4.6a)$$

$$\bar{d}(\omega, t) = |\bar{\alpha}(\omega)| \exp(i\Gamma) F \exp(i\omega t) \quad (4.6b)$$

$$\bar{d}(\omega, t) = |\bar{\alpha}(\omega)| F \cos(\omega t + \Gamma) + i |\bar{\alpha}(\omega)| F \sin(\omega t + \Gamma) \quad (4.6c)$$

Le module  $|\bar{\alpha}(\omega)|$  et l'angle de phase  $\Gamma$  peuvent être évalués selon (Ewins, 2000; Inman, 2007) :

$$|\bar{\alpha}(\omega)| = \frac{1}{[(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2]^{1/2}} \quad (4.7a)$$

$$\Gamma = -\arctan_2\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^2}\right) \quad (4.7b)$$

Dans le cas d'un système à vibration forcée,  $\Gamma$  est négatif parce que la réponse  $d$  est toujours en retard par rapport à la force  $f$ .

D'après Craig & Kurdila (2006), le choix entre la partie réel ou imaginaire de  $\bar{d}$  dépend du type de fonction harmonique employée pour décrire la force agissant sur la masse. Dans le cas où  $f(t) = F \cos(\omega t)$ , il faut considérer la réponse  $d$  égale à la partie réel de  $\bar{d}$ . Si  $f(t) = F \sin(\omega t)$ , il faut considérer  $d$  égal à la partie imaginaire de  $\bar{d}$ .

La réceptance exprimée par l'Équation (4.5) sera utile en avant pour déduire les entrées de la matrice de réceptance complexe d'un système à plusieurs degrés de liberté avec amortissement proportionnel.

## 4.2 Fréquences naturelles et modes de vibration

Les fréquences naturelles et les modes de vibration d'une structure peuvent être évalués par la méthode des éléments finis à partir des matrices de masse  $\mathbf{m}$  et de rigidité  $\mathbf{k}$ . Cette méthode est bien décrite par Craig (1981).

L'équation de mouvement d'un système sans amortissement à  $N$  degrés de liberté est donnée par :

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{k} \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (4.8)$$

Une possible solution pour l'Équation (4.8) est :

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\phi} \cos(\omega t + \Gamma) \quad (4.9)$$

Dans l'Équation (4.9), on a mis un signe positif devant  $\Gamma$  afin de maintenir la compatibilité avec l'Équation (4.7b).

En remplaçant l'Équation (4.9) dans l'Équation (4.8), on obtient :

$$(\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{m})\boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

Afin de rendre l'Équation (4.10) plus familière, c'est-à-dire, plus similaire à celles trouvées dans les références abordant l'algèbre linéaire (voir par exemple Anton & Rorres (2013)) il est convenable de la récrire comme suit :

$$(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k})\boldsymbol{\phi} = \omega^2 \boldsymbol{\phi} \quad (4.11)$$

Pour obtenir des solutions non-triviales, il faut que :

$$\det(\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k} - \omega^2 \mathbf{I}) = 0 \quad (4.12)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité. Le déterminant dans l'Équation (4.12) équivaut à un polynôme de degré  $N$  sur la variable  $\lambda = \omega^2$ . Les racines  $\lambda_r = \omega_r^2$  de ce polynôme sont les valeurs propres de la matrice  $\mathbf{m}^{-1}\mathbf{k}$ .

Le remplacement des valeurs propres  $\lambda_r = \omega_r^2$  dans l'Équation (4.11) permet l'obtention des vecteurs propres  $\boldsymbol{\phi}_r$ . Rappelons qu'un vecteur propre représente une solution paramétrisé. C'est-à-dire, un multiple d'un vecteur propre est aussi une solution (Petyt, 2010). Par conséquent, on le normalise de façon convenable (par exemple, en forçant l'entrée la plus grande égale à 1). La Section 4.4 fournira une technique plus adéquate de normalisation.

La  $r$ -ème fréquence naturelle de vibration est donnée par  $\omega_r = \sqrt{\lambda_r}$  (en radians par seconde si le système international est adopté). Cette fréquence naturelle est associée au mode de vibration traduit par le vecteur propre  $\boldsymbol{\phi}_r$ . Il est convenable d'ordonner les fréquences naturelles par ordre croissante (Craig & Kurdila, 2006) :

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_r \leq \dots \leq \omega_N \quad (4.13)$$

La matrice modale rassemble les vecteurs modaux dans ses colonnes par ordre croissante de fréquence naturelle :

$$\boldsymbol{\Phi} = [ \boldsymbol{\phi}_1 \quad \boldsymbol{\phi}_2 \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_r \quad \dots \quad \boldsymbol{\phi}_N ] \quad (4.14)$$

Les Annexes A.1 et A.2 fournissent les matrices  $\mathbf{m}$  et  $\mathbf{k}$  des éléments finis de poutre d'Euler-Bernoulli et de Timoshenko.

### 4.3 Superposition modale

L'équation de mouvement d'un système à plusieurs degrés de liberté avec amortissement visqueux soumis à un chargement  $\mathbf{f}(t)$  est :

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{k} \mathbf{d} = \mathbf{f}(t) \quad (4.15)$$

Le principe de superposition modale affirme que la solution  $\mathbf{d}(t)$  est donnée par une combinaison linéaire des modes de vibration (Craig & Kurdila, 2006) :

$$\mathbf{d}(t) = \sum_{r=1}^N \boldsymbol{\phi}_r q_r(t) = \boldsymbol{\Phi} \mathbf{q}(t) \quad (4.16a)$$

$$d_j(t) = \sum_{r=1}^N \phi_{jr} q_r(t) \quad (4.16b)$$

Le vecteur  $\mathbf{q}$  comporte les coordonnées généralisées  $q_r$ , aussi connues sous le terme de coordonnées principales. Elles sont gouvernées par l'Équation (4.17) :

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{f}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (4.17)$$

où  $\mathbf{p}(t)$  est le vecteur de forces généralisées. La matrice de masse modale  $\mathbf{M}$ , la matrice d'amortissement généralisé  $\mathbf{C}$  et la matrice de rigidité modale  $\mathbf{K}$  sont données par (Craig & Kurdila, 2006) :

$$\mathbf{M} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{m} \boldsymbol{\Phi} = \text{diag}(M_r) \quad (4.18a)$$

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{c} \boldsymbol{\Phi} \quad (4.18b)$$

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\Phi}^T \mathbf{k} \boldsymbol{\Phi} = \text{diag}(K_r) = \text{diag}(\omega_r^2 M_r) \quad (4.18c)$$

Comme le montre Craig (1981), pour prouver que  $K_r = \omega_r^2 M_r$ , il suffit de multiplier l'Équation (4.10) par  $\boldsymbol{\phi}_r^T$  afin d'obtenir  $(\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_r) = \omega_r^2 (\boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r)$ .

Les vecteurs modaux sont orthogonaux par rapport aux matrices de masse et de rigidité. C'est-à-dire, pour deux fréquences naturelles différentes  $\omega_r$  et  $\omega_s$ , les Équations (4.19a) et (4.19b) sont valables (Craig & Kurdila, 2006) :

$$\boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{m} \boldsymbol{\phi}_r = 0 \quad (\text{Si } \omega_r \neq \omega_s) \quad (4.19a)$$

$$\boldsymbol{\phi}_s^T \mathbf{k} \boldsymbol{\phi}_r = 0 \quad (\text{Si } \omega_r \neq \omega_s) \quad (4.19b)$$

Cela implique que les matrices de masse modale  $\mathbf{M}$  et de rigidité modale  $\mathbf{K}$  définies par les Équations (4.18a) et (4.18c) sont diagonales.



Dans le cas particulier où  $\mathbf{C}$  est diagonale, les équations différentielles définies par l'Équation (4.17) sont désaccouplées (c'est-à-dire,  $q_r$  ne dépend pas de  $q_s$  si  $r \neq s$ ) et peuvent être exprimées de la façon qui suit :

$$M_r \ddot{q}_r + C_r \dot{q}_r + K_r q_r = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{f}(t) = p_r(t) \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (4.20)$$

Le rapport d'amortissement généralisé  $\zeta_r$  permet de quantifier l'amortissement correspondant au mode de vibration  $r$ . Ce rapport qui peut varier entre zéro et 1,0 est donné par (Craig, 1981) :

$$\zeta_r = \frac{C_r}{(C_{cr})_r} \quad (4.21)$$

où  $C_r$  est le coefficient d'amortissement généralisé. Le coefficient d'amortissement critique généralisé  $(C_{cr})_r$  est donné par :

$$(C_{cr})_r = 2 M_r \omega_r = \frac{2K_r}{\omega_r} = 2\sqrt{K_r M_r} \quad (4.22)$$

La fréquence naturelle de vibration  $\omega_r$  peut être exprimée en termes de la masse modal  $M_r$  et de la rigidité modale  $K_r$  selon :

$$\omega_r = \sqrt{\frac{K_r}{M_r}} \quad (4.23)$$

En tenant compte les Équations (4.21), (4.22) et (4.23), l'Équation (4.20) peut être écrite en termes du facteur d'amortissement modaux  $\zeta_r$ , de la masse modale  $M_r$  et de la fréquence naturelle de vibration  $\omega_r$  (Craig & Kurdila, 2006) :

$$M_r \ddot{q}_r + 2 \zeta_r \omega_r M_r \dot{q}_r + \omega_r^2 M_r q_r = \boldsymbol{\phi}_r^T \mathbf{f}(t) = p_r(t) \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (4.24)$$

Selon Adhikari (2000) et Adhikari & Phani (2004) si au moins une des conditions présentées dans l'Équation (4.25) est satisfaite, la matrice d'amortissement généralisé  $\mathbf{C}$  est diagonale et les modes de vibration du système amorti sont identiques aux modes de vibrations du même système non amorti.

$$\mathbf{k} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{c} = \mathbf{c} \mathbf{m}^{-1} \mathbf{k} \quad (4.25a)$$

$$\mathbf{m} \mathbf{k}^{-1} \mathbf{c} = \mathbf{c} \mathbf{k}^{-1} \mathbf{m} \quad (4.25b)$$

$$\mathbf{m} \mathbf{c}^{-1} \mathbf{k} = \mathbf{k} \mathbf{c}^{-1} \mathbf{m} \quad (4.25c)$$

La première des trois conditions a été prouvée par Caughey & O'Kelly (1965). Elle est la plus connue et peut être trouvée aussi dans le travail de Inman (2006).

## 4.4 Normalisation d'un mode de vibration

Soit  $\check{\phi}_r$  le vecteur modal normalisé et  $\phi_r$  le vecteur modal non normalisé. Il est convenable de normaliser chaque vecteur modal en telle sorte que l'Équation (4.26) soit satisfaite (Petyt, 2010 ; Craig, 1981 ; Craig & Kurdila, 2006) :

$$\check{\phi}_r^T \mathbf{m} \check{\phi}_r = \check{M}_r \quad (4.26)$$

où  $\check{M}_r$  est une grandeur scalaire (ayant unité de masse) choisie convenablement pour normaliser le vecteur modal  $\phi_r$ . En forçant la valeur  $M_r = 1$  pour  $r = 1, 2, \dots, N$  (ce qui est souvent le cas), les vecteurs modaux  $\phi_r$  deviennent un ensemble de vecteurs orthonormaux (Craig & Kurdila, 2006). Dans ce cas, les Équations (4.27a) et (4.27b) sont valables :

$$\check{\Phi}^T \mathbf{m} \check{\Phi} = \mathbf{I} \quad (\text{Si } M_r = 1 \text{ pour tout } r) \quad (4.27a)$$

$$\check{\Phi}^T \mathbf{k} \check{\Phi} = \mathbf{\Lambda} \quad (\text{Si } M_r = 1 \text{ pour tout } r) \quad (4.27b)$$

où  $\mathbf{\Lambda}$  est une matrice diagonale qui comporte les carrés des fréquences naturelles :

$$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\omega_r^2) = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_N^2 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

On souhaite trouver le coefficient scalaire  $\check{c}$  défini par :

$$\check{\phi}_r = \check{c} \phi_r \quad (4.29a)$$

$$\check{\phi}_r^T = \check{c} \phi_r^T \quad (4.29b)$$

Le remplacement des Équations (4.29a) et (4.29b) dans l'Équation (4.26) implique (Ewins, 2000) :

$$\check{\phi}_r = \phi_r \left[ \frac{\check{M}_r}{\phi_r^T \mathbf{m} \phi_r} \right]^{1/2} = \phi_r \left[ \frac{\check{M}_r}{M_r} \right]^{1/2} \quad (4.30)$$

## 4.5 Amortissement proportionnel (Amortissement de Rayleigh)

Afin de considérer les effets d'amortissement en préservant le désaccouplement des équations de mouvement des coordonnées généralisées  $q_r$  (Équation (4.17)), il faut modéliser la matrice  $\mathbf{c}$  en telle sorte que la matrice d'amortissement généralisé  $\mathbf{C}$  soit diagonale. Un possible moyen d'obtenir cela est en définissant la matrice  $\mathbf{c}$  comme une combinaison linéaire des matrices de masse  $\mathbf{m}$  et de rigidité  $\mathbf{k}$  (Rayleigh, 1945 ; Adhikari, 2006 ; Craig & Kurdila, 2006 ; Petyt, 2010) :

$$\mathbf{c} = a_0 \mathbf{m} + a_1 \mathbf{k} \quad (4.31)$$

La forme d'amortissement décrite par l'Équation (4.31) est connue sous le terme d'amortissement proportionnel ou d'amortissement de Rayleigh. Selon Petyt (2010), le terme  $a_0 \mathbf{m}$  peut représenter l'amortissement par friction et le terme  $a_1 \mathbf{k}$  peut représenter l'amortissement interne du matériau de la structure. Ce dernier type d'amortissement (aussi appelé amortissement structurel ou amortissement hystérétique) peut être modélisé d'une façon plus adéquate comme on verra en avant dans le texte (Section 4.6).

La multiplication de l'Équation (4.31) par le vecteur modal  $\phi_r$  et par son transposé nous permet d'écrire :

$$(\phi_r^T \mathbf{c} \phi_r) = a_0 (\phi_r^T \mathbf{m} \phi_r) + a_1 (\phi_r^T \mathbf{k} \phi_r) \quad (4.32a)$$

$$\mathbf{C} = a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{K} \quad (4.32b)$$

$$\text{diag}(C_r) = a_0 \text{diag}(M_r) + a_1 \text{diag}(K_r) \quad (4.32c)$$

L'association des Équations (4.32c), (4.21), (4.22) et (4.23) permet d'écrire :

$$C_r = a_0 M_r + a_1 \omega_r^2 M_r = 2 \zeta_r \omega_r M_r \quad (4.33)$$

En résolvant l'Équation (4.33) pour le facteur d'amortissement modal  $\zeta_r$  on obtient (Craig & Kurdila, 2006) :

$$\zeta_r = \frac{1}{2} \left( \frac{a_0}{\omega_r} + a_1 \omega_r \right) \quad (4.34)$$

La détermination expérimentale de  $\zeta_r$  pour deux modes de vibration permet l'obtention de  $a_0$  et  $a_1$  à partir de l'Équation (4.34).

### 4.5.1 Matrice de réceptance complexe

Le système d'équations de mouvement complexe pour plusieurs degrés de liberté peut être exprimé comme suit :

$$\mathbf{m} \ddot{\bar{\mathbf{d}}} + \mathbf{c} \dot{\bar{\mathbf{d}}} + \mathbf{k} \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{f}} \quad (4.35a)$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{F} \cos(\omega t) + i \mathbf{F} \sin(\omega t) \quad (4.35b)$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{F} \exp(i \omega t) \quad (4.35c)$$

Selon Petyt (2010), le vecteur de déplacements complexes  $\bar{\mathbf{u}}$  peut être évalué en multipliant la matrice de réceptances complexes  $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$  avec le vecteur de forces complexes  $\bar{\mathbf{f}}$  :

$$\bar{\mathbf{d}}(\omega, t) = \bar{\boldsymbol{\alpha}}(\omega) \bar{\mathbf{f}}(\omega, t) \quad (4.36)$$

Les entrées du vecteur  $\bar{\mathbf{d}}$  peuvent être exprimées des manières qui suivent :

$$\bar{d}_j(\omega, t) = \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_{jk}(\omega) \bar{f}_k(\omega, t) = \sum_{k=1}^N \bar{d}_{jk}(\omega, t) \quad (4.37a)$$

$$\bar{d}_j(\omega, t) = \sum_{k=1}^N |\bar{\alpha}_{jk}(\omega)| \exp(i \Gamma_{jk}) F_k \exp(i \omega t) \quad (4.37b)$$

$$\bar{d}_j(\omega, t) = \sum_{k=1}^N D_{jk} \exp[i(\omega t + \Gamma_{jk})] \quad (4.37c)$$

où les angles de phase  $\Gamma_{jk}$  peuvent être évalués selon :

$$\Gamma_{jk} = \arctan_2 \left( \frac{\text{Imag}(\bar{\alpha}_{jk})}{\text{Réel}(\bar{\alpha}_{jk})} \right) \quad (4.38)$$

La solution de la forme complexe de l'Équation (4.20) peut être exprimée par :

$$\bar{q}_r(t) = \bar{\beta}_r(\omega) \bar{p}_r(\omega, t) = \bar{\beta}_r(\omega) \boldsymbol{\phi}_r^T \bar{\mathbf{f}}(\omega, t) = \bar{\beta}_r(\omega) \sum_{k=1}^N \phi_{kr} \bar{f}_k \quad (4.39)$$

En employant l'Équation (4.5) pour évaluer la réceptance  $\bar{\beta}_r(\omega)$ , on peut récrire l'Équation (4.39) comme suit :

$$\bar{q}_r(t) = \sum_{k=1}^N \frac{\phi_{kr}}{(K_r - \omega^2 M_r) + i(\omega C_r)} \bar{f}_k(\omega, t) \quad (4.40)$$

L'association des Équations (4.16b) et (4.40) résulte :

$$\bar{d}_j(t) = \sum_{k=1}^N \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{(K_r - \omega^2 M_r) + i(\omega C_r)} \bar{f}_k(\omega, t) \quad (4.41)$$

En comparant l'Équation (4.41) avec l'Équation (4.37a), il est possible de conclure que les entrées de la matrice de réceptance complexe d'un système doté d'amortissement proportionnel sont données par (Ewins, 2000) :

$$\bar{\alpha}_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{(K_r - \omega^2 M_r) + i(\omega C_r)} = \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_{jr} \phi_{kr})/K_r}{(1 - \mathcal{R}^2) + i\left(\frac{\omega C_r}{K_r}\right)} \quad (4.42)$$

En multipliant par  $\omega_r^2$  le numérateur et le dénominateur de l'expression à droite de l'Équation (4.42), on obtient (Humar, 2001 ; Inman, 2006 ; Petyt, 2010) :

$$\bar{\alpha}_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\check{\phi}_{jr} \check{\phi}_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(2 \zeta_r \omega_r \omega)} = \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_{jr} \phi_{kr})/M_r}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(2 \zeta_r \omega_r \omega)} \quad (4.43)$$

L'équivalence présentée dans l'Équation (4.43) est une conséquence de l'Équation (4.30), lorsque les vecteurs modaux  $\check{\phi}_r$  sont normalisés en telle sorte que  $\check{M}_r = 1$ .

Selon Petyt (2010), la matrice de réceptance complexe peut être exprimée de la manière qui suit :

$$\bar{\alpha}(\omega) = \check{\Phi}[\mathbf{\Lambda} - \omega^2 \mathbf{I} + i \omega \mathbf{C}]^{-1} \check{\Phi}^T \quad (4.44)$$

Une entrée  $\bar{\alpha}_{jk}$  de la matrice de réceptance est appelée réceptance directe si  $j = k$ . Les entrées qui ne se situent pas dans la diagonale de la matrice sont appelées réceptances croisées (Bishop & Johnson, 1960). En anglais, les termes « *point receptance* » et « *transfer receptance* » sont souvent employés pour exprimer les réceptances directe et croisée, respectivement (Friswell et al., 2010).

## 4.6 Amortissement hystérétique

Selon Ewins (2000) et Beards (1995) les forces internes du matériau correspondantes à l'amortissement hystérétique ne dépendent pas de la fréquence de vibration de la structure. Pour cette raison, l'amortissement visqueux n'est pas la meilleure manière de représenter les pertes d'énergie par hystérèse (rappelons que la force d'amortissement visqueux est donnée par  $f_v = c \dot{d}$ , c'est-à-dire, elle est proportionnelle à la vitesse).

La description mathématique de l'amortissement hystérétique dépend surtout du facteur de perte  $\eta$  du matériau. Ce facteur est associé au fait que la contrainte  $\sigma$  dans un matériau soumis à un chargement harmonique n'est pas en phase avec la déformation  $\varepsilon$ , comme le montre les Équations (4.45a) et (4.45b) (Beards, 1995) :

$$\varepsilon = \varepsilon_a \sin(\omega t) \quad (4.45a)$$

$$\sigma = \sigma_a \sin(\omega t + \gamma_p) \quad (4.45b)$$

L'Équation (4.45b) peut être réécrite comme suit :

$$\sigma = \sigma_a \cos(\gamma_p) \sin(\omega t) + \sigma_a \sin(\gamma_p) \cos(\omega t) \quad (4.46a)$$

$$\sigma = \sigma_a \cos(\gamma_p) \sin(\omega t) + \sigma_a \sin(\gamma_p) \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.46b)$$

Sous forme complexe, l'expression pour la contrainte  $\sigma$  devient :

$$\sigma = \sigma_a \cos(\gamma_p) \sin(\omega t) + i [\sigma_a \sin(\gamma_p) \sin(\omega t)] \quad (4.47)$$

La division de l'Équation (4.47) par  $\varepsilon = \varepsilon_a \sin(\omega t)$  fournit la définition du module d'élasticité complexe (aussi appelé module dynamique)  $\bar{E}$  (Beards, 1995) :

$$\bar{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} \cos(\gamma_p) + i \left[ \frac{\sigma_a}{\varepsilon_a} \sin(\gamma_p) \right] \quad (4.48a)$$

$$\bar{E} = E \cos(\gamma_p) + i [E \sin(\gamma_p)] = E_s + i E_p \quad (4.48b)$$

$$\bar{E} = E_s(1 + i \eta) \quad (4.48c)$$

où le facteur de perte  $\eta$  est défini par :

$$\eta = \frac{E_p}{E_s} = \tan(\gamma_p) \quad (4.49)$$

Le module de stockage  $E_s$  mesure la capacité du matériau à retenir de l'énergie de déformation quand soumis à un chargement dynamique. Le module de perte  $E_p$  quantifie la capacité du matériau à convertir l'énergie cinétique et de déformation élastique en chaleur (Salmén & Hagen, 2002).

À partir de l'Équation (4.48b) on peut déduire une autre relation entre le module de Young  $E$ , le module de stockage  $E_s$  et le module de perte  $E_p$  (Sperling, 2006) :

$$E = |\bar{E}| = \sqrt{E_s^2 + E_p^2} \quad (4.50)$$

Pour un facteur de perte petit, le module de stockage est approximativement égal au module de Young classique, obtenu par un essai quasi-statique de traction. Pour cette raison, on peut trouver dans la littérature l'Équation (4.48c) avec  $E$  à la place de  $E_s$ .

Le Tableau 4.1 (trouvé dans le travail de Beards (1996)) fournit le facteur de perte pour quelques matériaux.

Tableau 4.1 – Facteur de perte  $\eta$  pour quelques matériaux (Beards, 1996).

Matériau	Facteur de perte $\eta$
Aluminium pure	0,00002 - 0,002
Alliage d'aluminium (Duralium)	0,0004 - 0,001
Acier	0,001 - 0,008
Plomb	0,008 - 0,014
Fonte	0,003 - 0,03
Alliage cuivre-manganèse	0,05 - 0,1
Caoutchouc naturel	0,1 - 0,3
Caoutchouc dur	1,0
Vitre	0,0006 - 0,002
Béton	0,01 - 0,06

Selon Labonnote et al. (2013), le module de cisaillement complexe (ou module de cisaillement dynamique) est donné par :

$$\bar{G} = G_s + i G_p \quad (4.51a)$$

$$\bar{G} = G_s(1 + i \eta_c) \quad (4.51b)$$

où  $\eta_c$  est le facteur de perte associé au module de cisaillement  $G$ .

Considérons un matériau sous chargement harmonique. Dans ce cas, si le coefficient de Poisson  $\nu$  reste un nombre réel, le facteur de perte en cisaillement est égal au facteur de perte en déformation axiale, c'est-à-dire,  $\eta_c = \eta$  (Boiko et al., 2010). Un coefficient de Poisson ayant une partie imaginaire non nulle implique un déphasage entre la déformation axiale et la déformation transversale. Selon Cai et al. (2002), en général, on considère  $\eta_c = \eta$  pour un matériau donné.

L'équation de mouvement d'un système à un degré de liberté avec amortissement hystérétique est donnée par (Beards, 1996 ; Humar, 2001 ; Chopra, 2007 ; Kelly, 2012) :

$$m \ddot{\bar{d}} + \left( \frac{\eta k_s}{\omega} \right) \dot{\bar{d}} + k_s \bar{d} = \bar{f} = F \exp(i\omega t) \quad (4.52)$$

Selon Beards (1996), une possible solution de l'Équation (4.52) est  $\bar{d} = \bar{D} \exp(i\omega t)$ . Le remplacement de sa dérivée  $\dot{\bar{d}} = i\omega \bar{d}$  donne :

$$m \ddot{\bar{d}} + k_s(1 + i\eta) \bar{d} = \bar{f} = F \exp(i\omega t) \quad (4.53)$$

où le paramètre  $\bar{k} = k_s(1 + i\eta)$  est appelé rigidité complexe.

Le remplacement de  $\bar{d} = \bar{D} \exp(i\omega t)$  dans l'Équation (4.53) donne :

$$(k_s - \omega^2 m + i\eta k_s) \bar{D} \exp(i\omega t) = F \exp(i\omega t) \quad (4.54)$$

La réceptance complexe d'un système à un degré de liberté avec amortissement hystérétique est (Ewins, 2000) :

$$\bar{\alpha}(\omega) = \frac{\bar{d}(\omega, t)}{\bar{f}(\omega, t)} = \frac{\bar{D}}{F} = \frac{1}{(k_s - \omega^2 m) + i(\eta k_s)} \quad (4.55a)$$

$$\bar{\alpha}(\omega) = \frac{1/k_s}{(1 - \mathcal{R}^2) + i\eta} = \frac{1/m}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(\eta \omega_r^2)} \quad (4.55b)$$

Lorsque  $\bar{\alpha}(\omega)$  est représenté en forme polaire, son module et son angle de phase sont (Norton & Karczub, 2003 ; Inman, 2007 ; Craig & Kurdila, 2006) :

$$|\bar{\alpha}(\omega)| = \frac{1/k_s}{[(1 - \mathcal{R}^2)^2 + \eta^2]^{1/2}} \quad (4.56a)$$

$$\Gamma = -\arctan_2\left(\frac{\eta}{1 - \mathcal{R}^2}\right) \quad (4.56b)$$

La matrice de rigidité complexe d'un élément fini peut être évaluée en remplaçant le module de Young classique  $E$  par le module d'élasticité complexe  $\bar{E}$  et le module de cisaillement classique  $G$  par le module de cisaillement complexe  $\bar{G}$ . La matrice obtenue peut être exprimée par  $\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k}_s + i\mathbf{k}_p$ .

Dans le cas d'un élément fini dont la matrice de rigidité emploie le module de Young mais pas le module de cisaillement (par exemple, comme l'élément fini de poutre d'Euler-Bernoulli), le système d'équations de mouvement avec amortissement hystérétique peut être exprimé de la façon qui suit (Lesieutre, 2001) :

$$\mathbf{m} \ddot{\bar{\mathbf{d}}} + (1 + i\eta)\mathbf{k}_s \bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{F} \exp(i\omega t) \quad (4.57)$$

Dans une analyse d'éléments finis, si chaque entrée de la matrice de rigidité complexe globale  $\bar{\mathbf{k}}$  peut être exprimée en termes du même facteur de perte  $\eta$ , c'est-à-dire, si la matrice de rigidité complexe globale peut être exprimée sous la forme  $\bar{\mathbf{k}} = (1 + i\eta)\mathbf{k}_s$ , comme dans l'Équation (4.57), on a un cas particulier appelé amortissement hystérétique proportionnel, puisque la matrice d'amortissement hystérétique  $\mathbf{k}_p$  est proportionnelle à la matrice de rigidité  $\mathbf{k}_s$  par un facteur scalaire  $\eta$ . Selon Gatti & Ferrari (1999), le remplacement de  $\bar{\mathbf{d}} = \boldsymbol{\phi} \exp(i\omega t)$  dans l'Équation (4.57) donne :

$$[(1 + i\eta)\mathbf{k}_s - \bar{\omega}^2 \mathbf{m}] \boldsymbol{\phi} = 0 \quad (4.58)$$

En réarrangeant l'Équation (4.58) on a :



$$\mathbf{m}^{-1} \mathbf{k}_s \boldsymbol{\phi} = \frac{\bar{\omega}^2}{(1 + i\eta)} \boldsymbol{\phi} \quad (4.59)$$

Selon plusieurs auteurs (Gatti & Ferrari, 1999 ; Ewins, 2000 ; Nelson, 2000 ; Lesieutre, 2001), l'Équation (4.59) résulte un ensemble de vecteurs propres réels et un ensemble de valeurs propres  $\bar{\lambda}_r = \bar{\omega}_r^2$  complexes. Bien que les valeurs propres complexes ne soient pas nécessaires pour l'évaluation de la matrice de réceptance, elles peuvent être obtenues selon :

$$\bar{\lambda}_r = \bar{\omega}_r^2 = \omega_r^2(1 + i\eta) \quad (4.60)$$

Les fréquences naturelles  $\omega_r$  et les vecteurs propres  $\boldsymbol{\phi}_r$  peuvent être évalués par la méthode classique abordée dans la Section 4.2, avec  $\mathbf{k}_s$  à la place de  $\mathbf{k}$ . Cependant, une faible valeur de  $\eta$  implique que  $\mathbf{k}_s$  est approximativement identique à la matrice  $\mathbf{k}$  évaluée avec le module de Young classique. Dans ce cas, on peut adopter l'hypothèse que les fréquences naturelles et les modes de vibration ne sont pas affectés par l'amortissement hystérétique. L'élément fini de poutre de Timoshenko peut être employé plus aisément sous cette hypothèse, puisqu'il considère le module de Young et le module de cisaillement non seulement dans la matrice de rigidité, mais aussi dans la matrice de masse (comme le montre l'Appendice A.2).

Dans le cas d'un système à plusieurs degrés de liberté qui dissipe l'énergie par amortissement hystérétique proportionnel, chaque entrée de la matrice de réceptance complexe peut être évaluée selon (Ewins, 2000) :

$$\bar{\alpha}_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{(K_r - \omega^2 M_r) + i(\eta K_r)} = \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_{jr} \phi_{kr})/K_r}{(1 - \mathcal{R}^2) + i\eta} \quad (4.61)$$

ce qui équivaut à écrire (Gatti & Ferrari, 1999 ; Ewins, 2000 ; Petyt, 2010) :

$$\bar{\alpha}_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\check{\phi}_{jr} \check{\phi}_{kr}}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(\eta \omega_r^2)} = \sum_{r=1}^N \frac{(\phi_{jr} \phi_{kr})/M_r}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(\eta \omega_r^2)} \quad (4.62)$$

Lorsque l'on compare les Équations (4.61) et (4.62) avec les Équations (4.42) et (4.43), il est possible de définir un coefficient d'amortissement visqueux généralisé équivalent  $(C_r)_{\text{eq}}$  et un rapport d'amortissement visqueux généralisé équivalent  $(\zeta_r)_{\text{eq}}$  à partir de la rigidité modale  $K_r$ , du facteur de perte  $\eta$  et de la fréquence naturelle de vibration  $\omega_r$  (Genta, 1995 ; Kelly, 2012) :

$$(C_r)_{\text{eq}} = \frac{\eta K_r}{\omega_r} \quad (4.63a)$$

$$(\zeta_r)_{\text{eq}} = \frac{\eta}{2} \quad (4.63b)$$

L'Équation (4.63b) est obtenue en considérant  $\omega = \omega_r$  (justement la fréquence à laquelle l'amortissement produit un effet plus important). Les Équations (4.63a) et (4.63b) permettent une modélisation approximée de systèmes avec amortissement hystérétique en employant les expressions créées a priori pour les systèmes avec amortissement visqueux. L'avantage d'employer les expressions appropriées pour modéliser l'amortissement hystérétique devient observable lorsque  $\mathcal{R} = (\omega/\omega_r) \neq 1$ .

Connaître le facteur de perte  $\eta$  associé au matériau qui constitue une petite éprouvette en laboratoire ne suffit pas pour modéliser l'amortissement d'une structure réelle. Une grande structure dissipe l'énergie mécanique non seulement par amortissement hystérétique, mais aussi par friction entre ses composants et par l'interaction avec le fluide que l'entoure (Berger et al., 2003 ; Ihlenburg, 2008).

Selon Stevenson (1980), l'amortissement présenté par une structure réel dépend aussi des niveaux de contraintes et déformations : plus la structure est déformée, plus grand est l'amortissement. Le Tableau 4.2 fournit les facteurs d'amortissement correspondants à une structure en acier, en fonction du niveau de contrainte. L'Équation (4.63b) a été employée pour évaluer les valeurs de  $\eta$ .

Lobitz (1984) suggère  $\zeta_{eq} = 0,01$  pour modéliser la réponse dynamique d'un mât éolien à l'axe horizontal. Cette valeur est la même suggéré par la norme IEC (2005), comme le mentionne Gwon (2011).

Tableau 4.2 – Facteurs d'amortissement des structures en acier, en fonction du niveau de contrainte (Stevenson, 1980).

Niveau de contrainte	Type et condition de la structure	$\zeta_{eq}$	$\eta$
$S < 0,25 S_{ys}$	En acier, sans fissures	0,005 - 0,01	0,01 - 0,02
$S < 0,5 S_{ys}$	En acier soudé, légèrement fissuré	0,02	0,04
$S \approx S_{ys}$	En acier soudé	0,05	0,10
$S > S_{ys}$	En acier soudé	0,07 - 0,10	0,14 - 0,20

## 4.7 Réponse à un chargement aléatoire

Soit  $u$  une variable dépendante de  $x$ ,  $y$  et plusieurs autres paramètres. L'équation classique de propagation de variance est donnée par (Ku, 1966) :

$$s_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 s_y^2 + \dots \quad (4.64)$$

Soient  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}$  les fonctions de densité spectrale de puissance de  $u$ ,  $x$  et  $y$  respectivement. À partir de la définition d'une fonction DSP (Équation (2.49a)) représentée de façon discrétisée, on peut écrire :

$$s_u^2 = \int_0^{+\infty} \mathcal{U}(n) dn \approx \sum_{j=1}^M (s_u^2)_j = \sum_{j=1}^M \mathcal{U}(n_j)(\Delta n)_j \quad (4.65a)$$

$$s_x^2 = \int_0^{+\infty} \mathcal{X}(n) dn \approx \sum_{j=1}^M (s_x^2)_j = \sum_{j=1}^M \mathcal{X}(n_j)(\Delta n)_j \quad (4.65b)$$

$$s_y^2 = \int_0^{+\infty} \mathcal{Y}(n) dn \approx \sum_{j=1}^M (s_y^2)_j = \sum_{j=1}^M \mathcal{Y}(n_j)(\Delta n)_j \quad (4.65c)$$

L'Équation (4.64) peut être réécrite de la manière suivante :

$$(s_u^2)_j = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 (s_x^2)_j + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 (s_y^2)_j \quad (4.66)$$

Le remplacement des Équations (4.65a), (4.65b) et (4.65c) dans l'Équation (4.66) résulte :

$$\mathcal{U}(n) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \mathcal{X}(n) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \mathcal{Y}(n) \quad (4.67)$$

Considérons un élément fini à  $N$  degrés de liberté dont le vecteur de déplacements est  $\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_N]^T$ . Soit  $\mathcal{S}$  la fonction DSP de la contrainte  $\sigma$  sur un point dans cet élément et  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_N$  les fonctions DSP des déplacements. En suivant l'exemple de l'Équation (4.67), on peut écrire :

$$\mathcal{S}(n) = \left(\frac{\partial \sigma}{\partial d_1}\right)^2 \mathcal{D}_1(n) + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial d_2}\right)^2 \mathcal{D}_2(n) + \dots + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial d_N}\right)^2 \mathcal{D}_N(n) \quad (4.68)$$

Soit un déplacement  $d$  proportionnel à une force  $f$  par un facteur  $\alpha$  comme dans l'Équation (4.6a). Considérons  $\mathcal{D}$  la fonction DSP du déplacement  $d$  et  $\mathcal{F}$  la fonction DSP de la force  $f$ . La relation entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{F}$  est donnée par (Li & Chen, 2009; Petyt, 2010; Paez, 2012) :

$$\mathcal{D}(\omega) = |\bar{\alpha}(\omega)|^2 \mathcal{F}(\omega) \quad (4.69)$$

En considérant l'Équation (4.37a), on obtient les fonctions DSP des déplacements pour un système à  $N$  degrés de liberté :

$$\mathcal{D}_j(\omega) = \sum_{k=1}^N |\bar{\alpha}_{jk}(\omega)|^2 \mathcal{F}_k(\omega) = \sum_{k=1}^N \mathcal{D}_{jk}(\omega) \quad (4.70)$$

## 4.8 Effets de la moyenne du chargement

Les expressions qui décrivent les réceptances d'une structure sont déduites en considérant un chargement harmonique avec une moyenne nulle.

Afin d'évaluer les déplacements de la structure lorsque la moyenne du chargement est différente de zéro, il faut exprimer le vecteur de forces en termes de deux composantes :

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_{\text{st}} + \mathbf{f}_{\text{dyn}}(t) \quad (4.71)$$

où :

- $\mathbf{f}_{\text{st}}$  représente la composante moyenne (ou composante statique) du chargement ;
- $\mathbf{f}_{\text{dyn}}$  représente la composante alternée (ou dynamique) du chargement.

À condition que le système structurel soit en régime de déformation linéaire élastique, le vecteur de déplacements peut être évalué en considérant la composante statique et la composante dynamique de la force séparément, comme le montre l'équation suivante (Lin et al., 1986 ; Balachandran & Magrab, 2009) :

$$\mathbf{d}(t) = \mathbf{d}_{\text{st}} + \mathbf{d}_{\text{dyn}}(t) \quad (4.72)$$

où la composante statique est évaluée à partir de la matrice de rigidité de la structure :

$$\mathbf{d}_{\text{st}} = \mathbf{k}^{-1} \mathbf{f}_{\text{st}} \quad (4.73)$$

La composante dynamique du vecteur de déplacements est évaluée par l'Équation (4.36), à partir de la matrice de réceptances. Si la composante alternée du chargement est aléatoire, l'Équation (4.70) doit être appliquée.

Il est possible aussi d'exprimer la contrainte en termes d'une composante statique et d'une composante dynamique :

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = \boldsymbol{\sigma}_{\text{st}} + \boldsymbol{\sigma}_{\text{dyn}}(t) \quad (4.74)$$

# Chapitre 5

## Fatigue sous chargement à amplitude variable

### 5.1 Description d'un cycle de chargement

Bien que le but de ce chapitre soit d'aborder l'analyse de fatigue à amplitude variable, certains concepts sont mieux expliqués en ayant un chargement à amplitude constante comme exemple. Considérons un chargement uniaxial décrit par l'équation :

$$S(t) = S_a \sin(\omega t) + S_m \quad (5.1)$$

La composante alternée  $S_a$  et la composante moyenne  $S_m$  d'un cycle de chargement peuvent être exprimées en termes de la contrainte maximale  $S_{\max}$  et de la contrainte minimale  $S_{\min}$  :

$$S_a = = \frac{\Delta S}{2} = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{2} \quad (5.2a)$$

$$S_m = \frac{S_{\max} + S_{\min}}{2} \quad (5.2b)$$

où  $\Delta S$  est l'étendue du cycle de chargement.

Le rapport de charge  $R_s$  est défini par :

$$R_s = \frac{S_{\min}}{S_{\max}} \quad (5.3)$$

Dans un signal de chargement, chaque point correspondant à  $S_{\min}$  ou  $S_{\max}$  est un point d'inversion dont la dérivée  $dS/dt$  est nulle. Lorsque le chargement a une amplitude variable et aléatoire, chaque cycle de chargement possède une combinaison particulière de  $S_{\min}$  et  $S_{\max}$  qui sont employés pour évaluer l'endommagement par fatigue.

Considérons une éprouvette soumise à un chargement cyclique uniaxial (comme celui de l'Équation (5.1)) avec  $S_{\min} < 0$  et  $S_{\max} > 0$ . Dans ce cas, l'endommagement

par fatigue ne se produit pas aux instants où l'éprouvette est chargée en compression (Lemaitre, 1996). La fatigue se produit uniquement aux instants où  $dS/dt > 0$  et  $S > 0$ . Dans une analyse théorique de fatigue uniaxiale, il faut couper la partie négative du signal de contrainte. Par conséquent, si  $S_{\min} < 0$ , on doit considérer  $\Delta S = S_{\max}$  et  $R_s = 0$ .

## 5.2 Courbes de Wöhler

Le procès de fatigue d'un matériau peut être classé en deux parties : initiation de la fissure et propagation de la fissure. Cela étant, on peut écrire (Jappes et al., 2006 ; Collins et al., 2010) :

$$N_f = N_{in} + N_{pr} \quad (5.4)$$

où  $N_f$  est le nombre total de cycles de chargement jusqu'à la rupture complète de la pièce (l'indice « f » vient du mot anglais *failure*) ;  $N_{in}$  est le nombre de cycles nécessaires pour initier une fissure de fatigue ;  $N_{pr}$  est le nombre de cycles requis pour propager la fissure jusqu'à la rupture complète de la pièce.

La contrainte  $S_f$  (connue sous le terme de résistance à la fatigue) est la valeur de la composante alternée  $S_a$  dans les Équations (5.1) et (5.2a) correspondante au nombre de cycles  $N_f$  nécessaires pour provoquer la rupture de la pièce par fatigue.

Selon Lee et al. (2005), les premières recherches sur la fatigue des matériaux ont été menées par August Wöhler entre 1852 et 1870. En hommage à cet ingénieur allemand, les courbes de  $S_f$  en fonction de  $N_f$  sont connues dans les pays francophones sous le terme de courbes de Wöhler. Dans les pays anglophones, ces courbes sont appelées *S-N curves*.

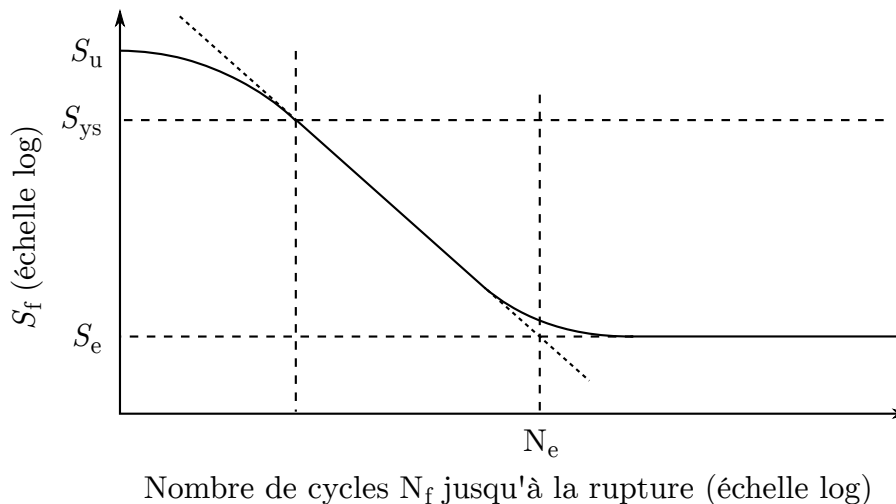


Figure 5.1 – Comportement typique de la courbe de Wöhler d'un acier, en échelle bi-logarithmique (Haibach, 2006 ; Khan, 2012).

Le typique comportement de la courbe de Wöhler d'un acier est représenté par le graphique la Figure 5.1. Il faut observer que ce graphique est en échelle bi-logarithmique. Si la contrainte alternée est inférieure à  $S_e$ , on peut considérer que la fatigue ne se produit pas (en réalité, le taux d'endommagement par fatigue est brusquement ralenti quand  $S_f$  devient inférieur à  $S_e$ ). Ce palier défini par  $S_e$  est connu sous le terme de limite d'endurance.

Selon Budynas & Nisbett (2008) la limite d'endurance d'un acier peut être estimée de la manière suivante :

$$S_e = \begin{cases} 0,5 S_u & (\text{Pour } S_u \leq 1400 \text{ MPa}) \\ 700 \text{ MPa} & (\text{Pour } S_u > 1400 \text{ MPa}) \end{cases} \quad (5.5)$$

Tous les matériaux ne présentent pas une limite d'endurance. Les courbes de Wöhler des alliages d'aluminium ne présentent aucune sorte de palier. Dans ce cas, c'est une pratique usuelle de définir  $S_e$  comme la contrainte  $S_f$  correspondante à un nombre de cycles  $N_f$  particulier qui pourrait être, par exemple, de  $10^6$  ou  $10^7$ . Même en définissant  $S_e$  de cette manière, le matériau pourrait se rompre par fatigue après l'application de  $10^{10}$  cycles de chargement (Bathias & Paris, 2005; Lemaitre et al., 2009). La fatigue à très haut cycle est connue sous le terme de fatigue gigacyclique (*gigacycle fatigue*, en anglais).

En général, les tests de fatigue sont menés jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette, plutôt que jusqu'à l'apparition d'une fissure macroscopique (Boyer, 1985). Cela équivaut à dire qu'en général, les courbes de Wöhler ont  $N_f$  plutôt que  $N_{in}$  dans l'axe des abscisses.

Selon Polák (2003) et Grandt (2004), la majeure partie de la courbe de Wöhler peut être représentée par la loi de Basquin (1910) :

$$S_f = \sigma'_f (2N_f)^b \quad (5.6)$$

où :

- $\sigma'_f$  est le coefficient de résistance à la fatigue du matériau (*fatigue strength coefficient*);
- $b$  est l'exposant de résistance à la fatigue du matériau (*fatigue strength exponent*).
- $2N_f$  est le nombre d'inversions du chargement pour mener le matériau à la rupture par fatigue (à chaque inversion du chargement, on a  $dS/dt = 0$ ).

La loi de Basquin peut être exprimée de la manière qui suit (Łagoda, 2008) :

$$\log(N_f) = A - B \log(S_f) \quad (5.7)$$

où les paramètres d'ajustement  $A$  et  $B$  peuvent être exprimés en termes de  $\sigma'_f$  et  $b$  :

$$A = - \frac{\log(\sigma'_f 2^b)}{b} \quad (5.8a)$$

$$B = - 1/b \quad (5.8b)$$

On voit que la loi de Basquin a été conçue pour représenter la partie linéaire de la courbe de Wöhler en échelle bi-logarithmique. D'autres modèles ont été proposés pour décrire les concavités observées dans la courbe de la Figure 5.1. La loi de Stromeyer (1914) peut représenter la concavité de la zone où  $S_f$  est proche de  $S_e$  :

$$\log(N_f) = A - B \log(S_f - S_e) \quad (5.9)$$

Dans le cas où il n'y a pas assez de données expérimentales pour établir l'asymptote horizontale de la courbe de la Figure 5.1,  $S_e$  peut être vu comme un paramètre d'ajustement dans l'Équation (5.9), à l'instar des coefficients  $A$  et  $B$ . Lorsque la limite d'endurance  $S_e$  est évaluée de cette manière, on peut dire qu'elle est le résultat d'une extrapolation des données expérimentales.

Les lois de Palmgren (1924), Weibull (1949) et Stüssi (1955) représentent la concavité de la courbe non seulement lorsque  $S_f$  est proche de  $S_e$ , mais aussi lorsque  $S_f$  est proche de  $S_u$  :

$$\text{Palmgren (1924) :} \quad \log(N_f + C) = A - B \log(S_f - S_e) \quad (5.10)$$

$$\text{Weibull (1949) :} \quad \log(N_f + C) = A - B \log \left[ \frac{(S_f - S_e)}{(S_u - S_e)} \right] \quad (5.11)$$

$$\text{Stüssi (1955) :} \quad \log(N_f) = A - B \log \left[ \frac{(S_f - S_e)}{(S_u - S_f)} \right] \quad (5.12)$$

Les équations de numérotation (5.7) à (5.12) peuvent être trouvées dans le travail de Castillo & Fernández-Canteli (2009).

Dans les Équations (5.11) et (5.12),  $S_u$  est la résistance à la traction du matériau (la force maximale appliquée lors d'un essai de traction divisée par l'aire transversale nominale de l'éprouvette).



### 5.3 Méthode rainflow de comptage de cycles

Il existe plusieurs méthodes de comptage de cycles de fatigue, parmi lesquelles on peut citer (Lalanne, 2009 ; Karaoui, 2001) :

- comptage de pics (*peak count method*) ;
- comptage de pics avec étendue restreinte (*range-restricted peak count*) ;
- comptage de pics avec niveau restreint (*level-restricted peak count method*) ;
- comptages de pics entre passages par la valeur moyenne (*mean-crossing peak count method*) ;
- comptage d'étendues (*range method*) ;
- comptage d'étendues par paire (*range-pair count method*) ;
- méthode de franchissement de seuils (*level crossing count method*) ;
- méthode PVP (*peak valley pair*) ;
- comptage de cycles hystérétiques (*hysteresis loop counting*, proposé par Okamura & Sakai (1979)) ;
- méthode rainflow.

La méthode rainflow de comptage de cycles de fatigue a été conçue par Matsuishi & Endo (1968). D'après Kondo (2003), la méthode rainflow, étant celle qui décrit le mieux le mécanisme physique de fatigue, représente l'état de l'art des techniques de comptage de cycles.

Downing & Socie (1982) ont conçu un algorithme pour la méthode rainflow qui emploie trois points ( $S_i, S_{i+1}, S_{i+2}$ ) pour former deux étendues de contrainte ( $\Delta S_1, \Delta S_2$ ) qui sont comparées à chaque itération. Son algorithme ne compte que de cycles complets, tandis que certains algorithmes, comme celui proposé par ASTM (2011) admettent le comptage de moitiés de cycles. Selon McInnes & Meehan (2008) la méthode rainflow à trois points n'est pas adéquate pour compter le nombre de cycles en temps réel vu qu'elle exige la connaissance du signal complet afin de le réarranger avant le comptage. Le réarrangement est fait en telle sorte que l'historique de contrainte commence avec le point de maximum ou le point de minimum global (Bannantine et al., 1989).

L'algorithme rainflow proposé par Amzallag et al. (1994) n'exige pas le réarrangement de l'historique de contrainte avant le comptage. Il emploie quatre points ( $S_i, S_{i+1}, S_{i+2}, S_{i+3}$ ) pour former trois étendues de contraintes ( $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3$ ) dont les modules sont comparés à chaque itération. Le même algorithme peut être trouvé dans la norme AFNOR (1993). Les étendues sont données par :

$$\Delta S_1 = S_{i+1} - S_i \quad (5.13a)$$

$$\Delta S_2 = S_{i+2} - S_{i+1} \quad (5.13b)$$

$$\Delta S_3 = S_{i+3} - S_{i+2} \quad (5.13c)$$

Le critère de comptage peut être énoncé de la façon suivante : si  $|\Delta S_2| \leq |\Delta S_1|$  et  $|\Delta S_2| \leq |\Delta S_3|$ , alors  $|\Delta S_2|$  représente un cycle complet de chargement de fatigue.

La Figure 5.2 montre l'organigramme d'un programme écrit pour Matlab qui fait le comptage de cycles selon la méthode proposée par Amzallag et al. (1994). À chaque itération, si le critère de comptage est satisfait, les points correspondants à l'étendue  $\Delta S_2$  doivent être supprimés de l'historique de contraintes stocké dans le vecteur H.

Le programme lit l'historique de contraintes jusqu'à son bout, en cherchant les cycles de chargement. Si un cycle a été compté lors de la dernière lecture, la variable CC devient vrai. Dans ce cas, une nouvelle lecture est exécutée afin de trouver plus de cycles (qui éventuellement n'ont pas été comptés lors des lectures précédentes). Si le programme finit une lecture sans avoir compté un cycle, alors les entrées restantes du vecteur H représentent le résidu de l'historique.

La variable « nehi » représente le nombre d'entrées restantes dans l'historique de contraintes H.

Afin de compter les cycles existants dans le résidu, le programme établit un nouveau vecteur H formé par résidu suivi d'un autre résidu identique. Dans un code pour Matlab, la commande qui correspond à l'établissement de ce nouveau vecteur est  $H = [ H \ H ]$ . Une fois que cette commande est exécutée, la variable RT devient vrai, pour savoir que le résidu a déjà été traité une fois.

Si l'on est en train de compter les cycles d'un long historique de chargement aléatoire, le comptage des cycles dans le résidu peut ne pas être significatif. Le traitement du résidu devient important seulement si l'historique de contraintes H représente, en réalité, une tranche d'un historique long et répétitif.

Afin d'appliquer la méthode rainflow, le signal doit être traité de façon que seule les points de maximum et minimum locaux soient considérés, comme le souligne Singh & Ranganath (2007). Autrement dit, quand on a un historique de contraintes avec des valeurs discrets, il faut le modifier en respectant les deux règles suivantes :

1. Si une valeur de contrainte figure deux fois de suite dans l'historique, l'une des deux doit être supprimée ;
2. Si les dérivées de deux parties consécutives de l'historique discret ont le même signe (tous les deux positives ou tous les deux négatives), le point d'intersection entre ces deux parties doit être supprimé.

Afin de considérer seulement les points de maximum et minimum locaux, le programme représenté par l'organigramme de la Figure 5.2 contient la routine représentée par l'organigramme de la Figure 5.3.

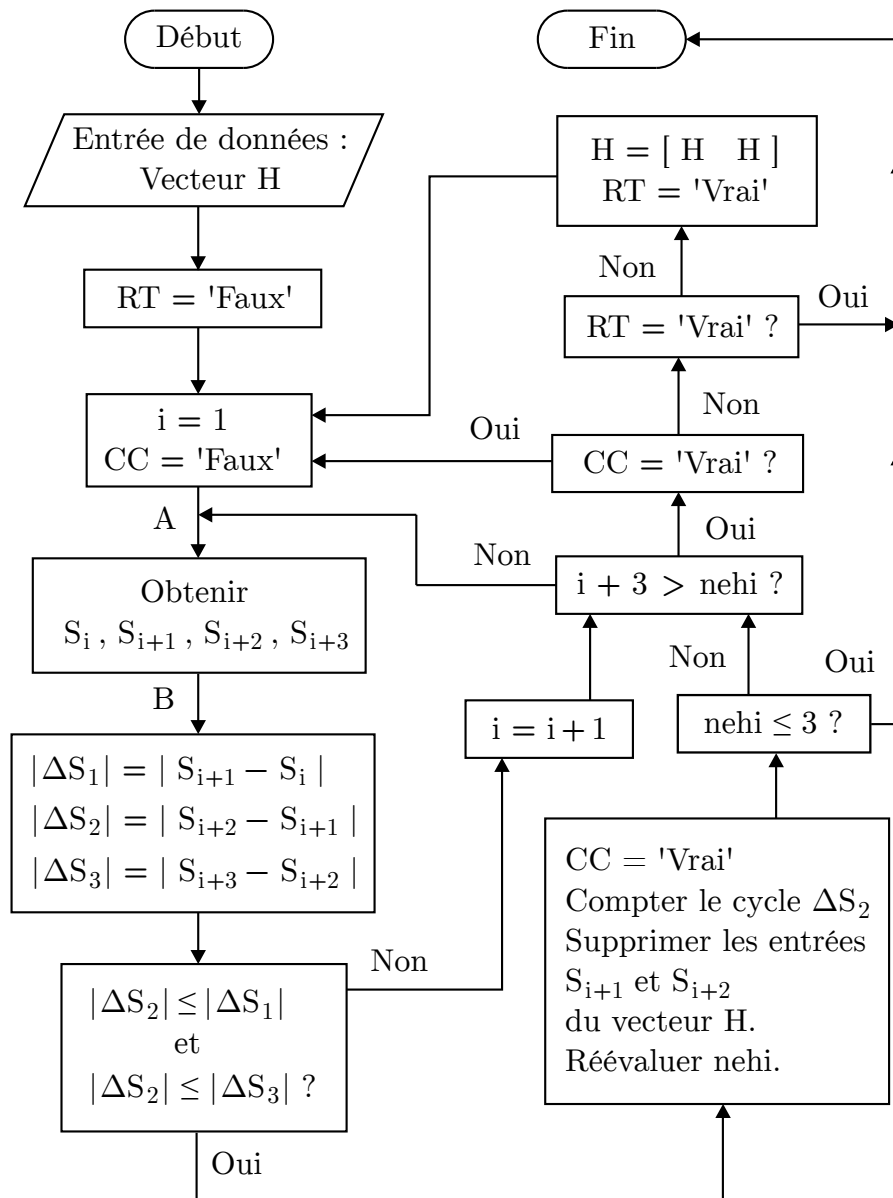


Figure 5.2 – Organigramme de la méthode *rainflow* à 4 points, basé sur le travail de Amzallag et al. (1994).

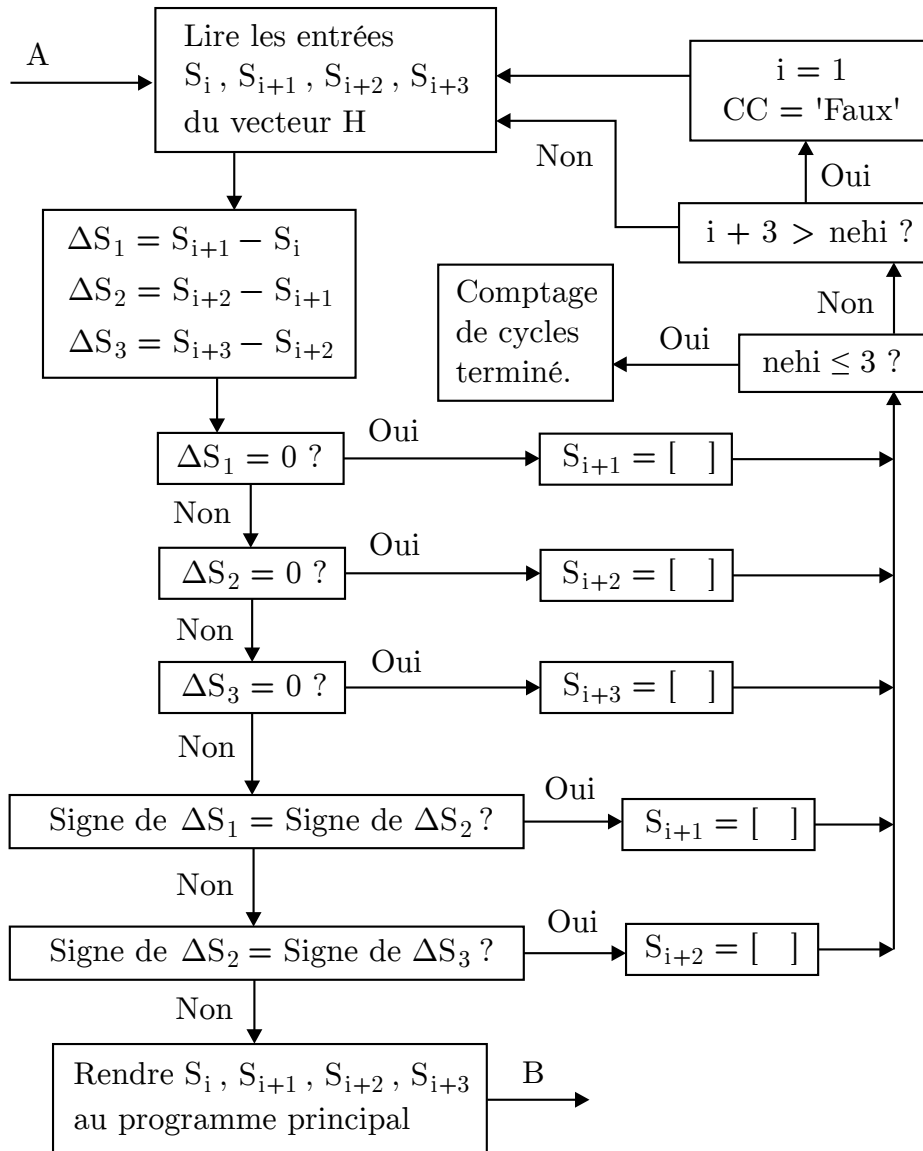


Figure 5.3 – Routine pour l’algorithme *rainflow* à 4 points destinée à éliminer les points de l’historique qui ne sont ni points de maximum ni points de minimum local.

## 5.4 Diagrammes de vie constante (Effets de la contrainte moyenne)

Comme le montrent Sendekyj (2001), Norton (2006), Budynas & Nisbett (2008) et Ince & Glinka (2011), plusieurs diagrammes de vie constante ont été proposés le long du XX<sup>e</sup> siècle. Ces diagrammes permettent que la courbe de Wöhler soit employée en prenant compte l'effet de la contrainte moyenne du chargement.

Le diagramme de Goodman (1930) est décrit par l'équation :

$$\frac{S_a}{S_f} + \frac{S_m}{S_u} = 1 \quad (5.14)$$

où  $S_f$  est la résistance à la fatigue fournie par la courbe de Wöhler.

L'équation de Gerber (1874) est :

$$\frac{S_a}{S_f} + \left(\frac{S_m}{S_u}\right)^2 = 1 \quad (5.15)$$

L'équation de Soderberg (1930) est basée sur la limite d'élasticité du matériau  $S_{ys}$  :

$$\frac{S_a}{S_f} + \frac{S_m}{S_{ys}} = 1 \quad (5.16)$$

Le diagramme ASME-elliptique est obtenu par (Budynas & Nisbett, 2008) :

$$\left(\frac{S_a}{S_f}\right)^2 + \left(\frac{S_m}{S_{ys}}\right)^2 = 1 \quad (5.17)$$

L'équation de Morrow (1968) est basée sur  $S_v$ , la véritable résistance à la rupture du matériau :

$$\frac{S_a}{S_f} + \frac{S_m}{S_v} = 1 \quad (5.18)$$

$S_v$  prend en compte l'étranglement (la réduction d'aire transversale) de l'éprouvette soumise à l'essai de traction. Elle est la valeur de la force de traction au moment de la rupture divisée par l'aire transversale dans la zone d'étranglement. Étant donné que  $S_v > S_u$ , le diagramme de Morrow prévoit une durée de vie plus longue que le diagramme de Goodman.

Le diagramme de Walker (1970) est décrit par :

$$S_f = S_{\max}^{1-m} S_a^m \quad (5.19a)$$

$$S_f = S_{\max} \left(\frac{1 - R_s}{2}\right)^m \quad (5.19b)$$

$$S_f = S_a \left( \frac{2}{1 - R_s} \right)^{1-m} \quad (5.19c)$$

où  $m$  est un paramètre d'ajustement de données expérimentales qui dépend du matériau. Ce paramètre, connu sous le terme d'exposant de Walker, figure aussi dans l'Équation (6.30), qui décrit le taux de propagation d'une fissure de fatigue. L'Équation (5.19) peut être trouvée dans le travail de Dowling (2004), qui aborde un moyen d'évaluer  $m$  à partir des essais de fatigue.

Le diagramme de vie constante conçu par Heywood (1962) est obtenu par (Pook, 2007; Broz, 2006) :

$$\frac{S_a}{S_u} = \left( 1 - \frac{S_m}{S_u} \right) \left[ \frac{S_f}{S_u} + \mathcal{G} \left( 1 - \frac{S_f}{S_u} \right) \right] \quad (5.20a)$$

$$\mathcal{G} = \left( \frac{S_m}{3S_u} \right) \left( 2 + \frac{S_m}{S_u} \right) \quad (\text{pour l'acier}) \quad (5.20b)$$

$$\mathcal{G} = \left( \frac{S_m}{S_u} \right) \left[ 1 + \left( \frac{S_u \log(N_f)}{2200} \right)^4 \right]^{-1} \quad (\text{pour l'alliage d'aluminium}) \quad (5.20c)$$

Dans l'Équation (5.20c) les contraintes sont en MPa et  $N_f$  est le nombre de cycles qui correspond à  $S_f$  dans la courbe de Wöhler. La courbe de Heywood est similaire à la courbe de Goodman lorsque  $S_f$  est beaucoup supérieur au limite d'endurance  $S_e$ . Elle devient similaire à la courbe de Gerber lorsque  $S_f$  est proche de  $S_e$ . Selon Pook (2007), en générale, la plupart des résultats expérimentaux se trouvent entre les courbes de Goodman et Gerber.

La Figure 5.4 compare les diagrammes de Goodman, Soderberg, Gerber et ASME-elliptique pour l'acier S355. Selon Jesus et al. (2012) cet acier a une limite d'élasticité  $S_{ys}$  de 355 MPa et une résistance à traction  $S_u$  de 470 MPa. La résistance à la fatigue  $S_f$  considérée est de 213 MPa à 10 millions de cycles, donnée par  $S_f = 952,2(2N_f)^{-0,089}$ . On voit que le diagramme de Soderberg mène à un projet plus conservateur, puisqu'il produit la plus petite zone où la durée de vie est supérieure à  $10^7$  cycles.

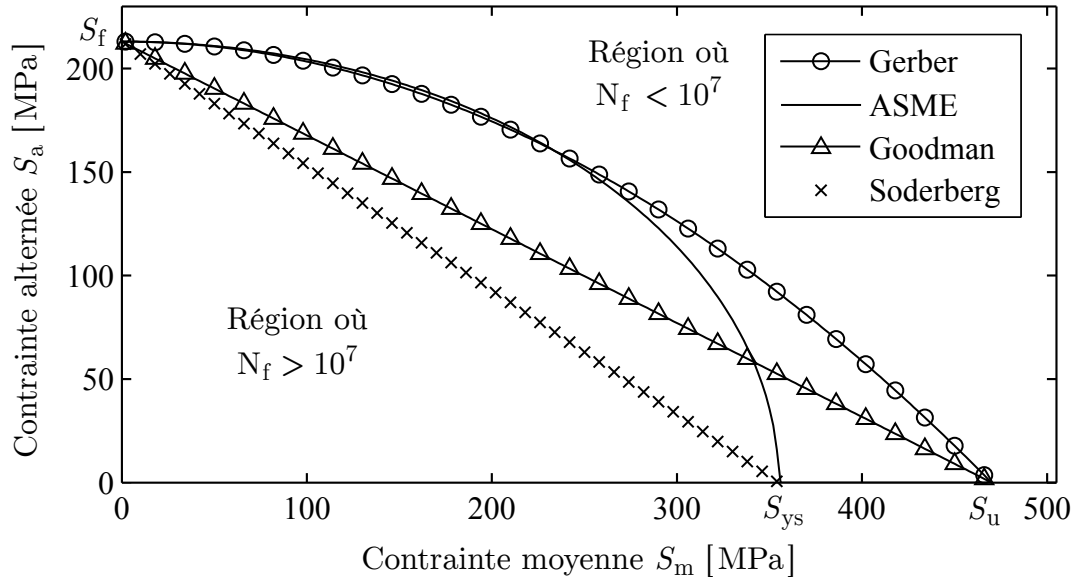


Figure 5.4 – Comparaison des diagrammes de vie constante pour l’acier S355, en considérant un nombre de cycles  $N_f = 10^7$  ( $S_f = 213$  MPa).

## 5.5 Accumulation d’endommagement

La loi de Palmgren-Miner permet de quantifier l’endommagement par fatigue lorsque le chargement a une amplitude variable. Elle est donnée par (Palmgren, 1924 ; Miner, 1945 ; Lee et al., 2005) :

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_{f,i}} = \sum_{i=1}^k D_i \quad (5.21)$$

où

- $D$  est le paramètre d’endommagement total, situé entre zéro et 1,0.
- $D_i$  est l’endommagement associé au groupe de chargement dont le niveau de contrainte est égal à  $S_{f,i}$ .
- $k$  est le nombre de groupes de chargement qui ont été appliqués sur la pièce.
- $n_i$  est le nombre de cycles comptés dont le niveau de contrainte est égal à  $S_{f,i}$ .
- $N_{f,i}$  est le nombre de cycles nécessaires pour rompre la pièce si elle était chargée uniquement à un niveau de contrainte  $S_{f,i}$ . Ce nombre de cycles est fourni par la courbe de Wöhler.

La loi de Palmgren-Miner est basée sur l’hypothèse que l’accumulation d’endommagement est linéaire. Considérons deux cycles identiques de chargement appliqués à de différents moments dans un long historique de contraintes à amplitude variable. D’après la loi de Palmgren-Miner, ces deux cycles identiques produiront la même quantité d’endommagement, indépendamment des cycles qui les précèdent et de l’état d’endommagement de la pièce. Cette loi assume qu’il est possible de classer les cycles de

chargement selon les valeurs de  $S_f$ . Le nombre de groupes (ou blocs) de chargement est exprimé par la lettre « k » dans l'Équation (5.21).

Si les essais pour obtenir la courbe de Wöhler ont été menés jusqu'à la rupture complète de l'éprouvette, on peut prévoir une rupture complète de la pièce analysée au moment où le paramètre d'endommagement D atteint la valeur 1,0.

La fissure devient visible lorsque D atteint une valeur critique  $D_c$  qui sera proche de zéro si le matériau est purement fragile et proche de 1,0 si le matériau est purement ductile. Pour la plupart des matériaux,  $0,2 \leq D_c \leq 0,5$  (Lemaitre, 1996 ; Lemaitre & Desmorat, 2005).

Le paramètre d'endommagement critique uniaxial peut être évalué selon (Lemaitre, 1996) :

$$D_{1c} = 1 - \frac{S_{nr}}{S_u} \quad (5.22)$$

Dans un essai de traction,  $S_{nr}$  est la contrainte nominale de rupture (force appliquée sur l'éprouvette au moment de sa rupture divisée par l'aire nominale de section transversale).

## 5.6 Évaluation d'endommagement par la méthode de Dirlik

Dans l'Équation (5.23), proposée par Dirlik (1985),  $P_R(S_f)$  est une fonction de densité de probabilité qui prévoit les résultats du comptage de cycles par la méthode rainflow, à partir de la DSP du signal de contrainte.

$$P_R(S_f) = \frac{\frac{d_1}{Q} \exp\left(-\frac{Z}{Q}\right) + \frac{d_2 Z}{R^2} \exp\left(-\frac{Z^2}{2R^2}\right) + d_3 Z \exp\left(-\frac{Z^2}{2}\right)}{2\sqrt{m_0}} \quad (5.23)$$

avec

$$d_1 = \frac{2(x_m - \gamma^2)}{1 + \gamma^2} \quad d_2 = \frac{1 - \gamma - d_1 + d_1^2}{1 - R} \quad d_3 = 1 - d_1 - d_2 \quad (5.24a)$$

$$Q = \frac{1,25(\gamma - d_3 - d_2 R)}{d_1} \quad R = \frac{\gamma - x_m - d_1^2}{1 - \gamma - d_1 + d_1^2} \quad (5.24b)$$

$$Z = \frac{S_f}{2\sqrt{m_0}} \quad \gamma = \frac{m_2}{\sqrt{m_0 m_4}} \quad x_m = \frac{m_1}{m_0} \sqrt{\frac{m_2}{m_4}} \quad (5.24c)$$

Les Équations (5.23) et (5.24) peuvent également être trouvées dans les travaux de Bishop et al. (1998), Haiba et al. (2002) et Rahman et al. (2009). Dans ces équations,



$x_m$  est la fréquence moyenne et  $\gamma$  est le facteur d'irrégularité, qui peut aussi être évalué selon :

$$\gamma = \frac{E[0]}{E[\mathcal{P}]} \quad (5.25)$$

$E[0]$  est le taux de changement de signe du signal de contrainte par seconde et  $E[\mathcal{P}]$  est le nombre de pics du signal par seconde. Ils sont évalués au moyen des Équations (5.26a) et (5.26b), respectivement (Rice, 1954 ; Bishop et al., 1998) :

$$E[0] = \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (5.26a)$$

$$E[\mathcal{P}] = \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \quad (5.26b)$$

Le moment spectral d'ordre  $k$  peut être évalué selon (Braccesi et al., 2005 ; Naser & Toledano, 2011) :

$$m_k = \int_0^\infty n^k \mathcal{S}(n) \, dn \quad (5.27)$$

où  $n$  est la fréquence en Hertz et  $\mathcal{S}(n)$  est la fonction de densité spectrale de puissance du signal de contrainte.

L'endommagement  $D$  peut être évalué par (Dirlik, 1985 ; Bishop et al., 1998 ; Rahman et al., 2009) :

$$D = \frac{E[\mathcal{P}]\Delta t}{10^A} \int_{S_1}^{S_2} S_f^B P_R(S_f) \, dS_f \quad (5.28)$$

où  $\Delta t$  est la période de temps correspondante à l'endommagement  $D$ . Les exposants  $A$  et  $B$  sont donnés par la loi de Basquin, représentée par l'Équation (5.7). Les limites d'intégration  $S_1$  et  $S_2$  correspondent à l'intervalle où la courbe de Wöhler est valable.

# Chapitre 6

## Mécanique de la rupture sous chargement à amplitude variable

### 6.1 Facteur de concentration de contrainte

La Figure 6.1 montre une éprouvette de largeur  $W$  et épaisseur  $t$ , avec une entaille de rayon  $R_{en}$ . Elle est soumise à deux forces externes distantes et opposées de magnitude  $f_y$ , distribuées uniformément sur les surfaces supérieure et inférieure. Le profil de contrainte  $\sigma_{yy}$  le long de l'axe  $x$  démontre qu'il y a une concentration de contraintes à proximité de l'entaille.

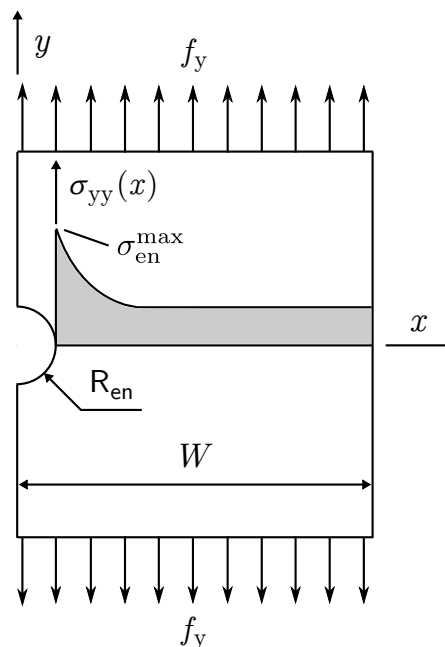


Figure 6.1 – Éprouvette avec une entaille de rayon  $R_{en}$  soumise à une force de traction  $f_y$ .

La contrainte et la déformation maximales sur une entaille peuvent être évaluées à partir du facteur de concentration de contrainte  $\mathcal{K}_\sigma$  et du facteur de concentration de déformation  $\mathcal{K}_\varepsilon$  :

$$\mathcal{K}_\sigma = \frac{\sigma_{\text{en}}^{\text{max}}}{\sigma_{\text{nom}}} \quad (6.1a)$$

$$\mathcal{K}_\varepsilon = \frac{\varepsilon_{\text{en}}^{\text{max}}}{\varepsilon_{\text{nom}}} \quad (6.1b)$$

La contrainte nominale  $\sigma_{\text{nom}}$  est définie par :

$$\sigma_{\text{nom}} = \frac{f_y}{A_{y0}} = \frac{f_y}{t(W - R_{\text{en}})} \quad (6.2)$$

où  $A_{y0}$  est l'aire de section transversale de l'éprouvette sur le plan  $y = 0$  (le plan de l'entaille). Si l'entaille est petit par rapport aux dimensions de la pièce, on peut définir  $\sigma_{\text{nom}}$  comme la contrainte évaluée en absence de l'entaille :

$$\sigma_{\text{nom}} \approx \frac{f_y}{tW} \quad (\text{Si } R_{\text{en}} \ll W) \quad (6.3)$$

Selon Zeng & Fatemi (2001), en régime de déformation élastique-linéaire, le facteur de concentration de contrainte et le facteur de concentration de déformation ont la même valeur  $\mathcal{K}_t$ , qui dépend exclusivement de la géométrie de l'entaille concerné dans la pièce. Si le matériau est déformé plastiquement,  $\mathcal{K}_\sigma \neq \mathcal{K}_\varepsilon$ .

D'après Neuber (1961), même si le matériau est déformé plastiquement, la moyenne géométrique entre le facteur de concentration de contrainte et le facteur de concentration de déformation fournit le facteur de concentration de contrainte élastique  $\mathcal{K}_t$  :

$$\mathcal{K}_t = \sqrt{\mathcal{K}_\varepsilon \mathcal{K}_\sigma} \quad (6.4)$$

L'Équation (6.4) est appelée règle de Neuber.

Au fur et à mesure que le matériau se déforme plastiquement,  $\mathcal{K}_\varepsilon$  augmente et  $\mathcal{K}_\sigma$  diminue, mais le produit entre ces deux facteurs reste constante (Topper et al., 1967).

La relation entre le facteur de concentration de contrainte élastique  $\mathcal{K}_t$  et le facteur de concentration de contrainte sous fatigue  $\mathcal{K}_f$  est établie par le facteur de sensibilité à l'entaille  $\mathbf{q}$ , donné par (Peterson, 1974 ; Norton, 2006 ; Budynas & Nisbett, 2008) :

$$\mathcal{K}_f = 1 + \mathbf{q}(\mathcal{K}_t - 1) \quad (6.5)$$

Le facteur de sensibilité à l'entaille  $\mathbf{q}$  dépend non seulement de la géométrie mais aussi du matériau de la pièce et peut varier entre 0 et 1,0. Il peut être évalué par l'Équation (6.6), proposée par Kuhn & Hardrath (1952) :

$$q = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{C_N}{R_{en}}}} \quad (6.6)$$

Les propriétés de résistance mécanique d'un matériau métallique ne sont pas les mêmes pour tous les grains cristallographiques. En plus, telles propriétés varient avec la direction dans chaque grain. Puisque les éprouvettes métalliques ont une taille beaucoup plus importante que la taille d'un grain, les propriétés mécaniques sont quasiment les mêmes pour tous les échantillons d'un matériau. La constante de Neuber  $C_N$  est la taille la plus petite du matériau capable de représenter ses propriétés mécaniques sans aucune sorte de distorsion (Kuhn & Hardrath, 1952).

En général, une fissure de fatigue se forme où il y a une concentration de contraintes. Toutefois, elle peut surgir n'importe où dans une structure soumise à un chargement oscillant. La mécanique de la rupture étudie la propagation de ces fissures aiguës résultantes de la fatigue structurelle.

## 6.2 État de contrainte à proximité d'une fissure

Selon Williams (1957) et Tong (2002) l'état de contrainte à proximité de la pointe d'une fissure peut être décrit par la série infinie montrée dans l'Équation (6.7) :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{A_1}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + A_2 f_{ij}^2(\theta) + A_3 r^{1/2} f_{ij}^3(\theta) + \dots \quad (6.7)$$

où  $r$  et  $\theta$  sont les coordonnées polaires montrées dans la Figure 6.2. L'origine du système de coordonnées est la pointe de la fissure.

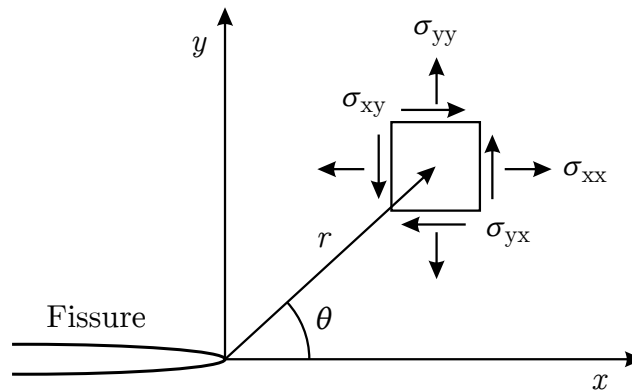


Figure 6.2 – Diagramme de contraintes sur un point à une distance  $r$  et angle  $\theta$  par rapport à la pointe de la fissure (Irwin, 1958 ; Hertzberg, 1996 ; Miyaura, 2012).

Dans l'Équation (6.7),  $A_1$  est le facteur d'intensité de contrainte, qui sera représenté par le symbole  $K$ . Le coefficient  $A_2$  est une contrainte uniforme et non-singulière nommée contrainte  $T$  (ou  $T$ -stress en anglais). Les deux premiers termes de l'Équation (6.7)

suffisent pour décrire le mécanisme de propagation des fissures. Autrement dit, les termes d'ordre supérieur à 2 sont négligeables.

### 6.3 Définition de facteur d'intensité de contrainte

Si la contrainte  $T$  est négligeable, le facteur d'intensité de contrainte  $K$  suffit pour décrire le champ de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure. Si la fissure est ouverte en mode I seulement, le champ de contrainte pourra être décrit par les Équations (6.8) (Anderson, 2005) :

$$\sigma_{xx}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (6.8a)$$

$$\sigma_{yy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (6.8b)$$

$$\sigma_{xy}(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (6.8c)$$

Les coordonnées  $r$  et  $\theta$  sont montrées dans la Figure 6.2. La composante  $\sigma_{zz}$  est égale à zéro pour l'état de contrainte plane. La même composante est égale à  $\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  pour l'état de déformation plane. Les composantes  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  valent zéro.

D'après Fett (2008), « le facteur d'intensité de contrainte est une mesure d'un terme de contrainte singulière ayant lieu dans les proximités de la pointe d'une fissure ». Comme le montre l'Équation (6.8), le facteur d'intensité de contraintes est associé à une singularité du champ de contraintes lorsque le rayon  $r$  tend à zéro. Le facteur d'intensité de contrainte  $K$  est donné en  $\text{Pa}\sqrt{\text{m}}$ , tandis que le facteur de *concentration* de contraintes  $\mathcal{K}_t$ , défini dans la Section 6.1, est une grandeur sans dimension.

Afin de déterminer la forme de la zone plastique (Section 6.8), on a intérêt à trouver des expressions pour les composantes principales de contrainte  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$ . La première et la deuxième peuvent être trouvées à partir du cercle de Mohr. Elles sont données par l'Équation (6.9) (Broek, 1984 ; Gere & Goodno, 2009) :

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (6.9a)$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (6.9b)$$

Selon Broek (1984), la composante principale  $\sigma_3$  est toujours perpendiculaire au plan. Elle est donnée par :

$$\sigma_3 \equiv \sigma_{zz} = \begin{cases} 0 & \text{(Contrainte plane)} \\ \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) & \text{(Déformation plane)} \end{cases} \quad (6.10)$$

En combinant les équations (6.8), (6.9) et (6.10) on obtient (Broek, 1984) :

$$\sigma_1(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ 1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (6.11a)$$

$$\sigma_2(r, \theta) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \left[ 1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (6.11b)$$

$$\sigma_3(r, \theta) = \begin{cases} 0 & \text{(Contrainte plane)} \\ \frac{2\nu K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \text{(Déformation plane)} \end{cases} \quad (6.11c)$$

L'Équation (6.11) sera utile dans la Section 6.8 pour déterminer la forme de la zone plastique et dans la Section 6.11.2 pour l'estimation du facteur de restriction plastique.

## 6.4 Facteur d'intensité de contrainte dû à un chargement externe distant

L'évaluation du facteur d'intensité de contrainte dépend non seulement de l'intensité du chargement et de la longueur de la fissure, mais aussi de la forme de la pièce concernée. Pour une tôle de largeur et hauteur infinies (Figure 6.3a), il existe une solution exacte pour le facteur d'intensité de contrainte dû au chargement externe distant. Cette solution est donnée par l'Équation (6.12) :

$$K_I = S\sqrt{\pi a} \quad (6.12)$$

Considérons le cas d'une tôle semi-infinie dans la direction  $x$  et infinie dans la direction  $y$ , avec une fissure latérale (Figure 6.3b). Le facteur d'intensité de contrainte dû à un chargement externe distant est donné par l'Équation (6.13), selon Petroski & Achenbach (1978) :

$$K_I = 1,1215 S\sqrt{\pi a} \quad (6.13)$$

Si la tôle présente une largeur limitée  $W$  et la fissure se propage le long de cette dimension, le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  dû à un chargement externe distant sera évalué par une équation ayant la forme :

$$K_I = F(a/W)S\sqrt{\pi a} \quad (6.14)$$

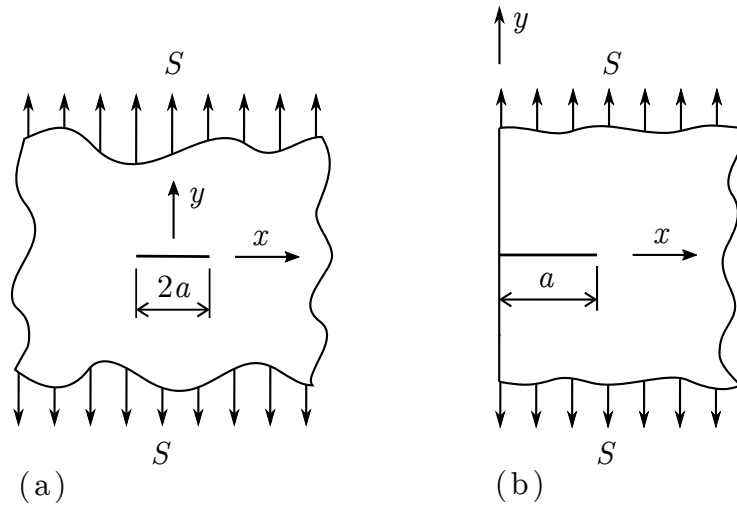


Figure 6.3 – (a) Tôle infinie dans les directions  $x$  et  $y$ , soumise à un chargement externe distant, avec une fissure centrale. (b) Tôle semi-infinie dans la direction  $x$  et infinie dans la direction  $y$ , soumise à un chargement externe distant, avec une fissure latérale (Miyaura, 2012).

où  $F$  est une fonction qui dépend du rapport  $a/W$ .

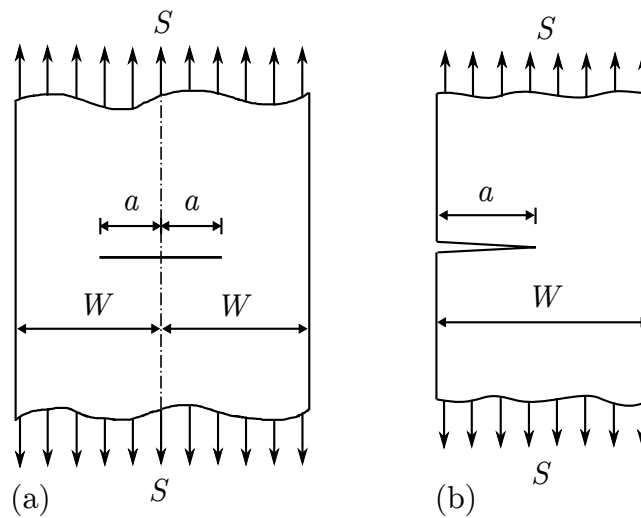


Figure 6.4 – (a) Tôle de largeur  $2W$  soumise à un chargement externe distant  $S$ , avec une fissure centrale de longueur  $2a$ . (b) Tôle de largeur  $W$  soumise à un chargement externe distant  $S$ , avec une fissure latérale de longueur  $a$ .

Tada et al. (1985) proposent l'Équation (6.15) pour évaluer la fonction  $F(a/W)$  correspondante à une fissure centrale dans une tôle de largeur  $2W$  et hauteur infinie (Figure 6.4a) :

$$F(a/W) = \left[ 1 - 0,025 \left( \frac{a}{W} \right)^2 + 0,06 \left( \frac{a}{W} \right)^4 \right] \sqrt{\sec \left( \frac{\pi a}{2W} \right)} \quad (6.15)$$

Selon les mêmes auteurs, l'Équation (6.16) peut être employée pour évaluer la fonction  $F(a/W)$  correspondante à une fissure latérale dans une tôle de largeur  $W$  et hauteur infinie (Figure 6.4b) :

$$F(a/W) = \sqrt{\frac{2W}{\pi a} \tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \frac{0,752 + 2,02\left(\frac{a}{W}\right) + 0,37\left[1 - \sin\left(\frac{\pi a}{2W}\right)\right]^3}{\cos\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \quad (6.16)$$

## 6.5 Facteur d'intensité de contrainte dû à un chargement sur les surfaces de rupture

Selon Petroski & Achenbach (1978), le facteur d'intensité de contrainte  $K_I$  correspondant au chargement  $\sigma_{yy}(x)$  appliqué sur les surfaces de rupture d'une tôle comme celle montrée dans la Figure 6.5 peut être évalué selon l'intégrale de l'Équation (6.17) :

$$K_I = \int_0^a \sigma_{yy}(x) h(x, a) dx \quad (6.17)$$

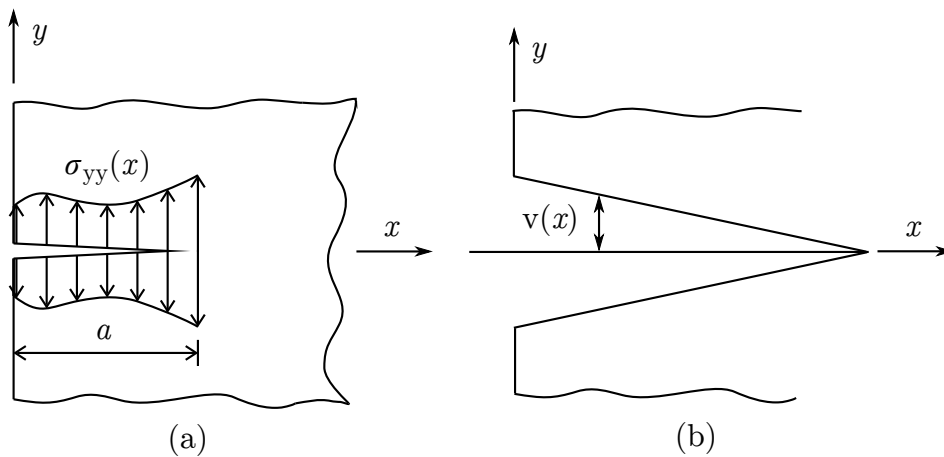


Figure 6.5 – (a) Chargement non uniforme  $\sigma_{yy}(x)$  distribué sur les surfaces de rupture d'une fissure latérale dans une tôle semi infinie. (b) Définition de la distance  $v(x)$ , selon Jones (1998).

### 6.5.1 Fonctions de pondération

La fonction de pondération  $h(x, a)$  a une faible valeur quand  $x$  est proche de zéro et augmente au fur et à mesure que  $x$  s'approche de  $a$ . Autrement dit, le facteur d'intensité de contrainte est plus sensible au chargement appliqué à proximité de la pointe de la fissure. Les chargements appliqués au delà de la pointe de la fissure ( $x > a$ ) n'ont aucune influence sur le facteur d'intensité de contrainte.



Sachant que  $\sigma_{yy}(x) = df_y(x)/(dx dz)$ , l'Équation (6.17) peut être réécrite comme :

$$K_I = \sum_i P_i(x_i) h(x_i, a) \quad (6.18)$$

où  $P_i$  est la valeur de chacune des deux forces opposées appliquées sur chaque surface de rupture à une distance  $x_i$  de l'origine, par unité d'épaisseur de la tôle.

La fonction de pondération  $h$  peut être déterminée selon l'Équation (6.19) (Bueckner, 1970 ; Jones, 1998) :

$$h(x, a) = \frac{E'}{K_I^{\text{ref}}(a)} \frac{\partial v^{\text{ref}}(x, a)}{\partial a} \quad (6.19)$$

où  $v(x, a)$  représente le déplacement en  $y$  de chaque surface de rupture par rapport à la position où elle se trouverait si la fissure était complètement fermée. Autrement dit, la distance entre les deux surfaces de rupture est le double de  $v(x, a)$ . Cette notion est illustrée dans la Figure 6.5b. La fonction  $v^{\text{ref}}(x, a)$  est un déplacement de référence associée au facteur d'intensité de contrainte de référence  $K_I^{\text{ref}}(a)$ . Afin de mieux aborder la méthode bande d'écoulement (*strip-yield*) en avant, il est convenable de définir une fonction d'influence  $f(x, a)$  comme suit :

$$v(x, a) = S f(x, a) \quad (6.20)$$

où  $S$  est le chargement externe distant qui ouvre la fissure en mode I.

Pour une fissure centrale de longueur  $2a$  dans une tôle de dimensions infinies dans les directions  $x$  et  $y$ , la fonction d'influence  $f(x, a)$  est (Rice, 1972 ; Wang, 1991) :

$$f(x, a) = \frac{2}{E'} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (6.21)$$

Pour que l'Équation (6.21) soit valide, le système de coordonnées doit être placé sur le centre de la fissure comme dans la Figure 6.3a.

Dans les Équations (6.19) et (6.21),  $E'$  est le module d'élasticité effectif, qui dépend si la tôle se trouve en état de déformation plane ou en état de contrainte plane. Il est évalué de la manière qui suit (Johnson, 2000) :

$$E' = \begin{cases} E & \text{(Contrainte plane)} \\ \frac{E}{1 - \nu^2} & \text{(Déformation plane)} \end{cases} \quad (6.22)$$

On peut constater facilement que la fonction  $h(x, a)$  n'est pas adimensionnelle. Dans le système international, sa dimension est  $m^{-1/2}$ . La fonction employée pour la décrire dépend non seulement de  $x$  et de  $a$ , mais aussi de la géométrie de l'éprouvette ou de la pièce concernée. Basé sur les travaux de plusieurs auteurs, Bao et al. (2010) fournissent

une bonne (mais non exhaustive) révision des équations pour évaluer les fonctions de pondération  $h(x, a)$  correspondantes à plusieurs géométries d'éprouvette.

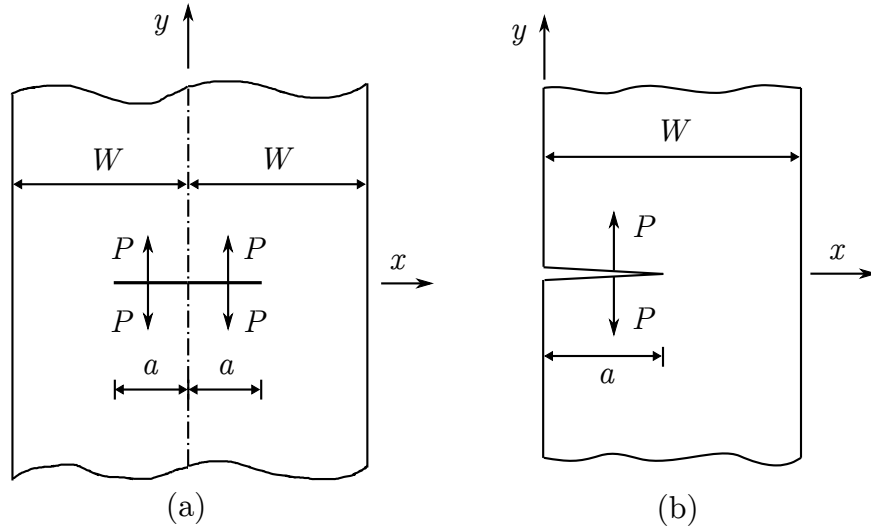


Figure 6.6 – (a) Tôle de largeur  $2W$  et hauteur infinie avec une force concentrée  $P$  appliquée sur les surfaces de la fissure centrale. (b) Tôle de largeur  $W$  et hauteur infinie avec une force  $P$  appliquée sur les surfaces de la fissure latérale (Bao et al., 2010).

Pour le cas d'une fissure centrale dans une tôle de largeur  $2W$  et hauteur infinie (Figure 6.6a), soumise à un chargement symétrique  $P$  appliqué sur les surfaces de rupture, Tada et al. (1985) ont proposé la fonction  $h(x, a)$  de l'Équation (6.23) :

$$h(x, a) = \frac{2}{\sqrt{2W}} \left\{ 1 + 0,297 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi a}{2W}\right) \right] \right\} \sqrt{\tan\left(\frac{\pi a}{2W}\right)} \left\{ 1 - \left[ \frac{\cos\left(\frac{\pi a}{2W}\right)}{\cos\left(\frac{\pi x}{2W}\right)} \right]^2 \right\}^{-1/2} \quad (6.23)$$

Si l'Équation (6.23) est employée dans l'Équation (6.17), l'intégration doit être faite entre  $x = 0$  et  $x = a$ . Cela équivaut à dire que si l'on emploie l'Équation (6.23) dans l'Équation (6.18), on fera la somme en considérant  $P_i(x_i)$  uniquement pour  $0 < x_i < a$ . Le facteur d'intensité de contrainte sera le même pour les deux pointes de la fissure.

Pour le cas montré dans la Figure 6.6b, c'est-à-dire, pour une fissure latérale sur une tôle de largeur  $W$  et hauteur infinie, Bueckner (1970) a proposé l'Équation (6.24) pour l'évaluation de  $h$  :

$$h(x, a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(a-x)}} \left[ 1 + m_1 \left(\frac{a-x}{a}\right) + m_2 \left(\frac{a-x}{a}\right)^2 \right] \quad (6.24a)$$

avec :

$$m_1 = 0,6147 + 17,1844\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 8,7822\left(\frac{a}{W}\right)^6 \quad (6.24b)$$

$$m_2 = 0,2502 + 3,2889\left(\frac{a}{W}\right)^2 + 70,0444\left(\frac{a}{W}\right)^6 \quad (6.24c)$$

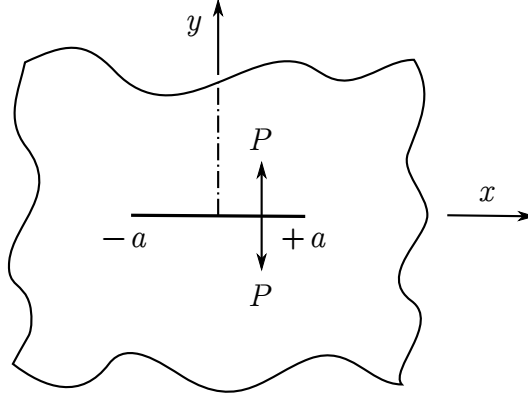


Figure 6.7 – Tôle de dimensions infinies dans les directions  $x$  et  $y$  avec une force  $P$  (par unité d'épaisseur) appliquée sur les surfaces de rupture.

Pour le cas d'une fissure centrale de largeur  $2a$  dans une tôle de dimensions infinies dans les directions  $x$  et  $y$  (montrée dans la Figure 6.7), il est possible de trouver une solution exacte pour la fonction de pondération  $h(x, a)$ . La solution exprimée par les Équations (6.25a) et (6.25b) ont été déduites par Sih et al. (1962) :

$$h_g(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \quad (\text{Pointe gauche}) \quad (6.25a)$$

$$h_d(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \quad (\text{Pointe droite}) \quad (6.25b)$$

Afin d'employer les Équations (6.25a) et (6.25b) pour évaluer les facteurs d'intensité de contrainte dus un chargement distribué sur les surfaces de rupture, on devra faire une intégration entre  $x = -a$  et  $x = +a$  dans l'Équation (6.17). Si le chargement est concentré, on considère  $-a < x_i < +a$  dans l'Équation (6.18).

Pour le cas d'une fissure latérale dans une tôle de dimension semi-infinie dans la direction  $x$  et infinie dans la direction  $y$ , comme celui de la Figure 6.5a, Sih (1973) a proposé l'Équation (6.26) pour l'évaluation de  $h(x, a)$  :

$$h(x, a) = \frac{1}{\sqrt{\pi a [1 - (x/a)^2]}} \left[ 1,3 - 0,3 \left(\frac{x}{a}\right)^{5/4} \right] \quad (6.26)$$

## 6.6 Ténacité à la rupture

Le facteur d'intensité de contrainte critique associé à une fissure sur une tôle plane dépend si celle-ci se trouve en état de déformation plane ou de contrainte plane. Par conséquent, l'épaisseur de la tôle joue un rôle important pour déterminer ce facteur d'intensité de contrainte critique (aussi appelé ténacité à la rupture).

En général, la ténacité à la rupture en état de contrainte plane est exprimée par le symbole  $K_c$ . En état de déformation plane, elle est exprimée par le symbole  $K_{Ic}$ .

La relation entre  $K_c$  et  $K_{Ic}$  peut être établie par (Irwin, 1960a ; Gdoutos, 2005) :

$$K_c = K_{Ic} \sqrt{1 + \frac{1,4}{t^2} \left( \frac{K_{Ic}}{S_{ys}} \right)^4} \quad (6.27)$$

Selon la norme E399 (2009), un essai pour évaluer  $K_{Ic}$  est valable seulement si la condition de l'Équation (6.28) est satisfaite :

$$t > 2,5 \left( \frac{K_{Ic}}{S_{ys}} \right)^2 \quad (6.28)$$

## 6.7 Lois de taux de propagation

### 6.7.1 Loi de Paris

La loi de Paris et al. (1961) représente la manière la plus simple et la plus souvent employée pour évaluer le taux de propagation d'une fissure de fatigue. Elle est donnée par :

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^n = C (K_{\max} - K_{\min})^n \quad (6.29)$$

où  $C$  et  $n$  sont des paramètres qui dépendent du matériau. L'exposant  $n$  est adimensionnel et le coefficient  $C$  a comme unité  $\text{Pa}^{-n} \text{m}^{1-n/2}$ , si le système international est adopté (Harter, 2003). Dans l'Équation (6.29), on considère  $K_{\min} = 0$  si  $S_{\min} < 0$ .

La loi de Paris génère une courbe d'apparence linéaire dans un graphique en échelle bi-logarithmique.

Le rapport de charge (donné par  $R_s = S_{\min}/S_{\max} = K_{\min}/K_{\max}$ ) a également un effet sur le taux de propagation. La loi de Paris ne prend pas explicitement en compte le rapport de charge  $R_s$ . Comme le mentionne Taheri et al. (2003), si l'on veut employer la loi de Paris pour un rapport de charge donné, il faut obtenir le paramètre  $C$  qui correspond à cette valeur de rapport de charge.

### 6.7.2 Loi de Walker

La loi de Walker (1970), donnée par l'Équation (6.30), prend explicitement en compte le rapport de charge  $R_s$  :

$$\frac{da}{dN} = C_0 \left[ \frac{\Delta K}{(1 - R_s)^{1-m}} \right]^n \quad (6.30)$$

où  $C_0$  est le même coefficient de la loi de Paris, pour le rapport de charge  $R_s = 0$ . Le paramètre  $m$  a déjà été introduit dans la Section 5.4. Il figure aussi dans l'Équation (5.19).

### 6.7.3 Équation de Forman

A l'instar de la loi de Paris, la loi de Walker génère une courbe d'apparence linéaire dans un graphique log-log. Cette courbe linéaire sous-estime le taux de propagation lorsque  $\Delta K$  est proche de la ténacité à la rupture du matériau. Afin d'éliminer cette faille, Forman et al. (1967) ont proposé l'Équation (6.31).

$$\frac{da}{dN} = \frac{C(\Delta K)^n}{(1 - R_s)K_c - \Delta K} = \frac{C(\Delta K)^n}{(1 - R_s)(K_c - K_{\max})} \quad (6.31)$$

Cette équation peut être trouvée aussi dans le travail de Stephens et al. (2000).

Il existe une limite de  $\Delta K$  au dessous de laquelle la fissure ne se propage pas. Cette limite est représentée par le symbole  $\Delta K_{th}$ , où l'indice « th » fait allusion au mot anglais *threshold*. Lorsque  $\Delta K$  est proche de  $\Delta K_{th}$ , les lois de Paris, Walker et Forman surestiment le taux de propagation de la fissure. L'équation connu sous le nom de NASGRO (Forman et al., 2002), est capable de décrire le taux de propagation en toute circonstance : lorsque  $\Delta K$  est proche du *threshold*, lorsqu'il est moyen et lorsqu'il est proche de la ténacité à la rupture du matériau. Ces trois conditions représentent, respectivement, les régions I, II et III de la courbe du taux de propagation  $da/dN$ .

## 6.8 Forme et taille de la zone plastique

Selon Broek (1984) et Gdoutos (2005), il est possible de déduire la forme de la zone plastique en associant  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  et  $\sigma_3$  fournis par l'Équation (6.11) au critère d'écoulement de von Mises, donné par :

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 S_{ys}^2 \quad (6.32)$$

Comme résultat de cette association, on obtient l'Équation (6.33) dont la représentation graphique est dans la Figure (6.8).

$$r_y(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{K_I}{S_{ys}} \right)^2 \left[ 1 + \cos \theta + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right] \quad (\text{Contrainte plane}) \quad (6.33a)$$

$$r_y(\theta) = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{K_I}{S_{ys}} \right)^2 \left[ (1 - 2\nu)^2 (1 + \cos \theta) + \frac{3}{2} \sin^2 \theta \right] \quad (\text{Déformation plane}) \quad (6.33b)$$

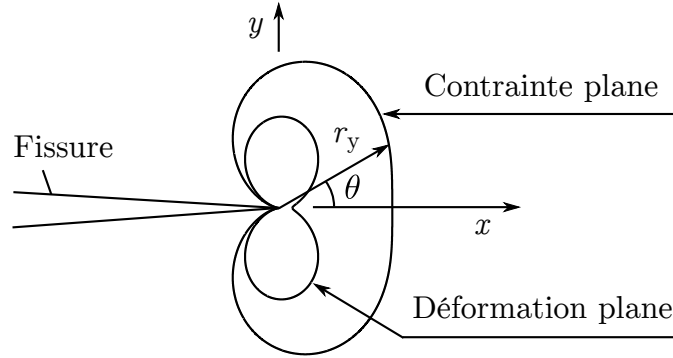


Figure 6.8 – Forme de la zone plastique, selon le critère d'écoulement plastique de von Mises (Broek, 1984 ; Gdoutos, 2005).

Pour l'angle  $\theta = 0$  et coefficient de Poisson  $\nu = 1/3$ , l'Équation (6.33) donne (Gdoutos, 2005) :

$$r_y(0) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{S_{ys}} \right)^2 \quad (\text{Contrainte plane}) \quad (6.34a)$$

$$r_y(0) = \frac{1}{18\pi} \left( \frac{K_I}{S_{ys}} \right)^2 \quad (\text{Déformation plane}) \quad (6.34b)$$

Selon Broek (1984), il est possible d'obtenir l'Équation (6.34b) à partir de l'Équation (6.34a), en considérant un facteur de restriction plastique  $\alpha = 3$  :

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\alpha S_{ys}} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{3 S_{ys}} \right)^2 = \frac{1}{18\pi} \left( \frac{K_I}{S_{ys}} \right)^2 \quad (\text{Déformation plane}) \quad (6.35)$$

Selon le même auteur, Irwin (1960b) considère  $\alpha = 1,68$ , ce qui donne le résultat souvent mentionné dans la littérature :

$$r_y = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{\alpha S_{ys}} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{K_I}{1,68 S_{ys}} \right)^2 \approx \frac{1}{6\pi} \left( \frac{K_I}{S_{ys}} \right)^2 \quad (\text{Déformation plane}) \quad (6.36)$$

L'Équation (6.34a) peut également être obtenue à partir de l'Équation (6.8b), en considérant  $\theta = 0$ ,  $\sigma_{yy} = S_{ys}$  et  $r = r_y$ . En procédant de cette manière, on est en train de considérer un profil de contrainte originale d'un régime de déformation linéaire-élastique comme celui de la Figure 6.9. Toutefois, à proximité de la pointe de la fissure, le régime de déformation est en réalité élasto-plastique. La zone grise dans le graphique de la Figure 6.9 ne devrait pas exister, puisqu'il est physiquement impossible que le niveau de contrainte dépasse la limite d'élasticité<sup>1</sup>  $S_{ys}$ . Afin de maintenir l'équilibre de forces internes dans le

1. Si le matériau a déjà été déformé plastiquement auparavant, on doit considérer la contrainte d'écoulement  $\sigma_0$  plutôt que la limite d'élasticité  $S_{ys}$ , en raison de l'écrouissage.



La même figure montre le profil de contrainte linéaire-élastique dont l'origine est placée sur la pointe de la fissure effective. Afin de maintenir l'équilibre de forces internes, il faut obtenir  $\delta$  de façon que l'aire B soit égale à l'aire A. Considérons une fissure comme celle de la Figure 6.3a. À partir des Équations (6.12) et (6.34a), on peut écrire :

$$S_{ys} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi\lambda}} = S\sqrt{\frac{a+\delta}{2\lambda}} \quad (6.37)$$

En isolant  $\lambda$  on obtient :

$$\lambda = \frac{S^2(a+\delta)}{2S_{ys}^2} \approx r_y \quad (6.38)$$

La distance  $\lambda$  vaut approximativement  $r_y$  puisque  $\delta$  est beaucoup plus petit que la longueur de la fissure  $a$ . Sachant que l'aire B est égale à  $\delta S_{ys}$ , la condition A = B résulte :

$$\delta S_{ys} = \int_0^\lambda S\sqrt{\frac{a+\delta}{2r}} dr - S_{ys}\lambda \quad (6.39)$$

L'expression dans l'intégrale résulte de l'association des Équations (6.8b) et (6.12).

Rappelant que  $\delta$  est négligeable si comparé à la longueur  $a$  et que  $\lambda \approx r_y$ , l'Équation (6.39) devient :

$$(\delta + r_y)S_{ys} = S\sqrt{2ar_y} \quad (6.40)$$

qui peut être réécrite comme :

$$(\delta + r_y)^2 = \frac{2S^2a}{S_{ys}^2} r_y \quad (6.41)$$

En remplaçant  $K_I$  par  $S\sqrt{\pi a}$  dans l'Équation (6.34a), on obtient  $2r_y = (S^2a)/(S_{ys}^2)$ . Ce résultat associé à l'Équation (6.41) donne  $\delta = r_y$ .

En considérant aussi que  $\lambda \approx r_y$  (Équation (6.38)), on peut conclure que :

$$r_p = \lambda + \delta = 2r_y \quad (6.42)$$

La taille de la zone plastique peut être évaluée selon les équations (Irwin, 1960b; Gdoutos, 2005) :

$$r_{p0} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{S_{ys}} \right)^2 \quad (\text{État de contrainte plane}) \quad (6.43a)$$

$$r_{p0} = \frac{1}{\pi} \left( \frac{K_I}{\alpha S_{ys}} \right)^2 \quad (\text{État de déformation plane}) \quad (6.43b)$$

où  $r_{p0} = r_p(\theta = 0)$  et  $\alpha$  est le facteur de restriction qui sera abordé dans la Section 6.11.2. Selon Irwin (1968) ce facteur vaut  $\sqrt{3}$ .



Dans une pièce ou une éprouvette très épaisse, la taille de la zone plastique varie le long de l'épaisseur. Près de la surface, la zone plastique aura une taille proche de celle donnée par l'Équation (6.43a). À l'intérieur de l'éprouvette, la taille de la zone plastique est donnée par l'Équation (6.43b).

## 6.9 Effet de fermeture de fissure

Cette section explique l'effet de fermeture de fissure, découvert par Elber (1971). Il est important de comprendre cet effet pour implémenter la méthode bande d'écoulement (*strip-yield*) de simulation de propagation de fissures, qui sera décrit dans la Section 6.11.

Considérons une fissure qui se propage à cause d'un chargement externe cyclique qui varie entre les deux valeurs fixes  $S_{\min}$  et  $S_{\max}$ . Dans ces conditions de chargement, le facteur d'intensité de contrainte augmente au fur et à mesure que la fissure se propage, puisqu'il est proportionnel à la racine carrée de la longueur de la fissure (voir, par exemple, l'Équation (6.12)). Rappelons-nous que la taille de la zone plastiquement déformée (Section 6.8) est proportionnelle au carré du facteur d'intensité de contrainte. Donc, on peut conclure que si le chargement a une amplitude constante entre  $S_{\min}$  et  $S_{\max}$ , on aura la formation d'un enveloppe de zones plastiques comme celui montré dans la Figure 6.11.

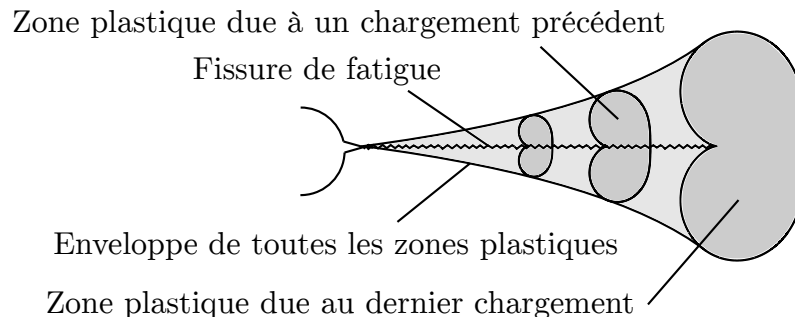


Figure 6.11 – Formation de l'enveloppe de zones plastiques sous les surfaces de la fissure (Elber, 1971).

À gauche de la Figure 6.12 on a la représentation d'une fissure de fatigue (chargée entre  $S_{\min}$  et  $S_{\max}$ ) et de son enveloppe de zones plastiques. À droite de la même figure, on a une coupe faite par une scie hypothétiquement idéale, c'est-à-dire, une scie d'épaisseur zéro, capable de couper sans provoquer de la déformation plastique. La pièce sciée est ensuite soumise à un chargement  $S_{\max}$ , de telle façon qu'on a la formation d'une zone plastique identique à celle obtenue en faisant propager une fissure de fatigue. Les longueurs de la fissure de fatigue et de la coupe de scie sont les mêmes. La seule différence entre les deux cas est la présence de l'enveloppe de zones plastiques sur les surfaces de rupture de la fissure de fatigue.

On peut observer que, pour un même chargement  $S$ , la distance entre les surfaces de rupture est plus petite dans le cas de la fissure de fatigue. Cette différence entre les

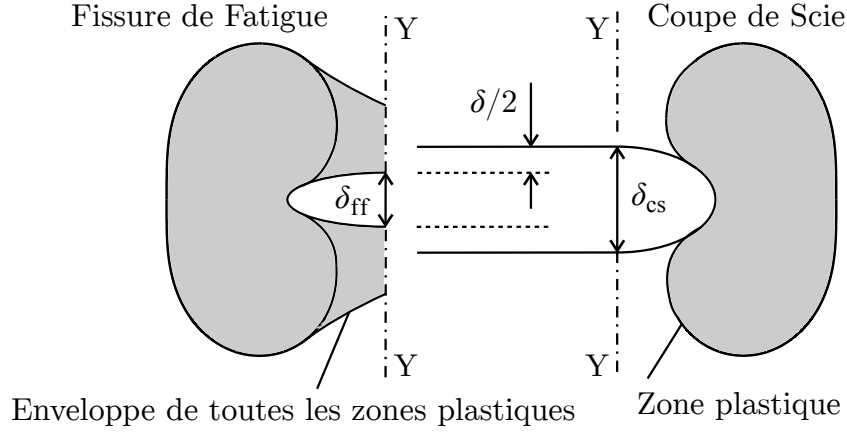


Figure 6.12 – Zones de déformation plastique à proximité d'une fissure de fatigue et à proximité d'une coupe de scie idéale d'épaisseur zéro, dues à un chargement externe distant  $S$  (Elber, 1971).

deux cas se traduit par l'expression  $\delta = \delta_{cs} - \delta_{ff}$ , dont les variables sont représentées dans la Figure 6.12. On peut conclure que dans le cas de la fissure de fatigue, les surfaces de rupture se toucheront avant que le chargement externe  $S$  soit complètement retiré.

Selon Elber (1971), une fissure de fatigue peut se propager uniquement si les surfaces de rupture sont complètement séparées. C'est pourquoi une fissure de fatigue qui se propage à partir de la coupe de scie représentée à droite de la Figure 6.12 aura un taux de propagation supérieur à celui de la fissure de fatigue représentée à gauche de la même figure.

Elber (1971) a proposé une importante modification sur la loi de Paris. Cette modification est montrée dans l'Équation (6.44) :

$$\frac{da}{dN} = C_{\text{eff}} \Delta K_{\text{eff}}^n \quad (6.44a)$$

$$\Delta K_{\text{eff}} = \begin{cases} K_{\text{max}} - K_{\text{op}} & (\text{pour } K_{\text{min}} < K_{\text{op}}) \\ K_{\text{max}} - K_{\text{min}} & (\text{pour } K_{\text{op}} < K_{\text{min}}) \end{cases} \quad (6.44b)$$

où  $K_{\text{op}}$  est le facteur d'intensité de contrainte correspondant à  $S_{\text{op}}$ , qui est le chargement minimal pour séparer complètement les surfaces de rupture.

Il est convenable d'écrire l'Équation (6.44a) en termes de  $U$  (Elber, 1971) :

$$\frac{da}{dN} = C_{\text{eff}} (U \Delta K)^n \quad (6.45a)$$

$$U = \frac{S_{\text{max}} - S_{\text{op}}}{S_{\text{max}} - S_{\text{min}}} = \frac{\Delta S_{\text{eff}}}{\Delta S} = \frac{K_{\text{max}} - K_{\text{op}}}{K_{\text{max}} - K_{\text{min}}} = \frac{\Delta K_{\text{eff}}}{\Delta K} \quad (6.45b)$$

L'association des Équations (6.29), (6.44a) et (6.45a) permet d'écrire :

$$C_{\text{eff}} = C \left[ \frac{\Delta K}{\Delta K_{\text{eff}}} \right]^n = \frac{C}{U^n} \quad (6.46)$$

Dans l'Équation (6.46), les paramètres  $C$  et  $U$  varient en fonction du rapport de charge  $R_s$ . Par contre, le coefficient  $C_{\text{eff}}$  reste constant pour un matériau donné (il est indépendant de  $R_s$ , comme le mentionne Song et al. (2012)).

Pour des conditions de chargement à amplitude constante,  $S_{\text{op}}$  peut être évalué au moyen de l'Équation (6.47) (Newman, 1984 ; Forman et al., 2002) :

$$\frac{S_{\text{op}}}{S_{\text{max}}} = \frac{K_{\text{op}}}{K_{\text{max}}} = \begin{cases} A_0 + A_1 R_s + A_2 R_s^2 + A_3 R_s^3 & (R_s \geq 0) \\ A_0 + A_1 R_s & (-1 \leq R_s < 0) \end{cases} \quad (6.47)$$

Pour  $S_{\text{op}} \geq S_{\text{min}}$ , les coefficients  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$  peuvent être évalués par l'Équation (6.48). Ils dépendent du rapport  $S_{\text{max}}/\sigma_0$  et du facteur de restriction  $\alpha$ , qui sera abordé dans la Section 6.11.2.

$$A_0 = (0,825 - 0,34\alpha + 0,05\alpha^2) \left[ \cos \left( \frac{\pi}{2} \frac{S_{\text{max}}}{\sigma_0} \right) \right]^{1/\alpha} \quad (6.48a)$$

$$A_1 = (0,415 - 0,071\alpha) \frac{S_{\text{max}}}{\sigma_0} \quad (6.48b)$$

$$A_2 = 1 - A_0 - A_1 - A_3 \quad (6.48c)$$

$$A_3 = 2A_0 + A_1 - 1 \quad (6.48d)$$

$\sigma_0$  est la contrainte d'écoulement du matériau, celle qui prend en compte l'effet de l'érouissage. Si le chargement a une amplitude variable, l'évaluation de  $S_{\text{op}}$  devient beaucoup plus complexe. L'un des objectifs de ce chapitre est d'aborder ce cas particulier.

## 6.10 Effets de surcharge

La Figure 6.13 montre le graphique d'un chargement à amplitude constante perturbé par une surcharge appliquée à l'instant  $t_s$ . Supposons que ce chargement est appliqué sur une tôle fissurée. Dans ce cas, les lois de Paris et de Walker, telles comme elles sont présentées dans les équations (6.29) et (6.30) seront capables de prédire le taux de propagation de la fissure seulement avant l'instant  $t_s$  et longtemps après. La surcharge modifie l'état de déformation plastique de la pièce de telle manière qu'une analyse plus complexe est requise pour prédire correctement le taux de propagation de la fissure.

La ligne pointillé du graphique de la Figure 6.14 montre l'évolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles de chargement pour le cas où le chargement a une amplitude constante qui varie entre  $S_{\text{min}}$  et  $S_{\text{max}}$ . La ligne continue représente le cas où le même chargement est perturbé par une seule surcharge. L'information la plus importante

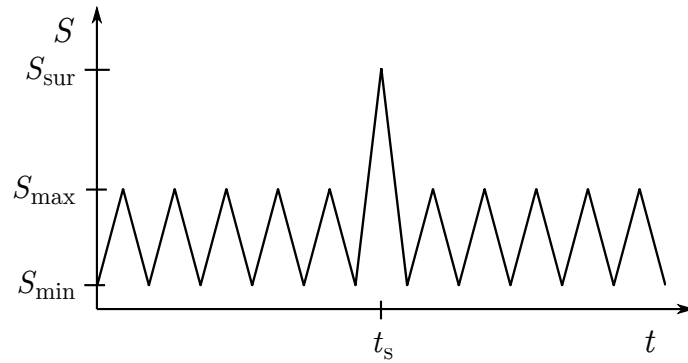


Figure 6.13 – Chargement à amplitude constante en fonction du temps  $t$ , avec une surcharge appliquée à l’instant  $t_s$ .

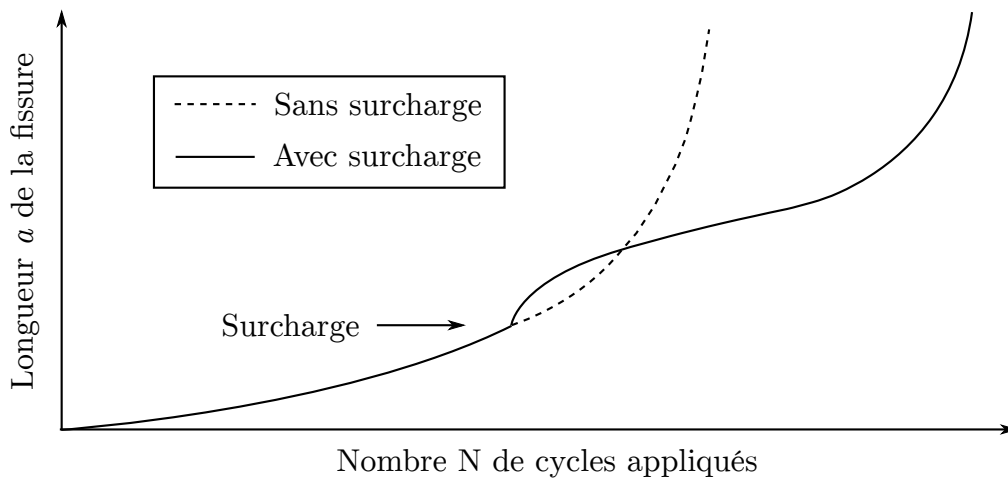


Figure 6.14 – Évolution de la longueur de la fissure en fonction du nombre de cycles après une surcharge. Figure basée sur celle de Yamauchi et al. (2012).

que l’on peut extraire de la Figure 6.14 est que la durée de vie de la pièce augmente grâce à l’application de la surcharge<sup>2</sup>. Autrement dit, l’évolution de la propagation de la fissure subit une sorte de *retardement*.

Plusieurs chercheurs ont constaté que le taux de propagation augmente immédiatement après l’application de la surcharge (Anderson, 2005 ; Yamauchi et al., 2012 ; Jiang et al., 2014). Ce phénomène, connu sous le terme d’*accélération initiale*, est illustré dans la Figure 6.14 et aussi dans la Figure 6.15. Celle-ci montre le taux de propagation de la fissure en fonction de sa longueur pour les deux cas : avec et sans surcharge. Cette même figure laisse clair que le taux de propagation minimal ne se produit pas tout de suite à l’application de la surcharge. La fissure doit avancer un peu pour que le taux de propagation minimal soit observé. Ce phénomène est connu sous le terme de *retardement reporté* (Larsen & Annis, 1980).

2. À condition que la surcharge ne soit pas suffisante pour mener  $K_I$  à un niveau qui dépasse la ténacité à la rupture du matériau.

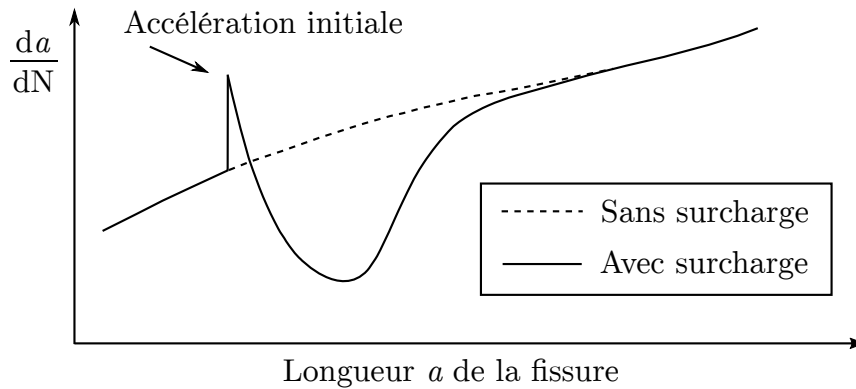


Figure 6.15 – Courbe représentant le taux de propagation d’une fissure en fonction de sa longueur après une surcharge (Anderson, 2005 ; Jiang et al., 2014).

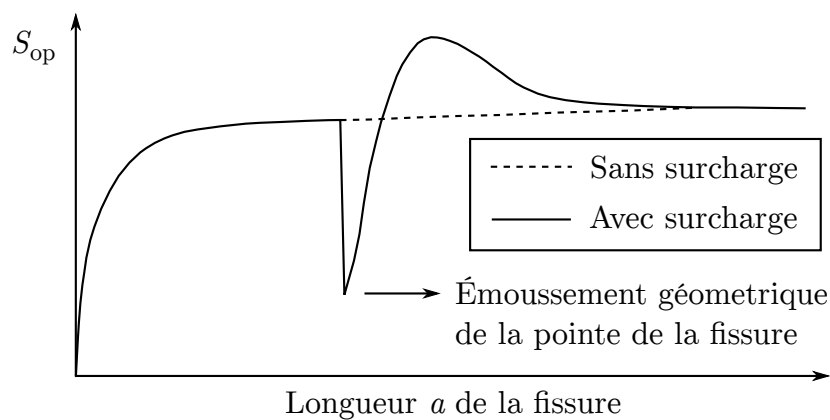


Figure 6.16 – Effet d’une surcharge sur la courbe de  $S_{op}$  en fonction de la longueur  $a$  de la fissure (Wang & Blom, 1991).

De nombreuses méthodes pour prendre en compte les effets d’une surcharge sur la propagation d’une fissure sont décrites dans la littérature. Elles peuvent être classées en trois catégories : modèle de zone d’écoulement plastique, modèle de fermeture de fissure et modèle bande d’écoulement (*strip-yield*). Le modèle de zone d’écoulement est le plus ancien. Sont classés dans cette catégorie les modèles de Wheeler et de Willenborg. Parmi les modèles de fermeture de fissure on peut citer : ONERA, CORPUS et PREFFAS. Ces trois derniers ont besoin de données expérimentales pour évaluer la contrainte d’ouverture de fissure  $S_{op}$ . Le modèle bande d’écoulement peut être vu comme une sous-catégorie du modèle de fermeture de fissure. La différence c’est que pour le modèle bande d’écoulement,  $S_{op}$  est évaluée théoriquement et non pas par des moyens empiriques (Schijve, 2004).

Les modèles de zone d’écoulement plastique (Wheeler et Willenborg) sont basés sur l’hypothèse que le retardement de la propagation de la fissure se produit en raison des contraintes résiduelles compressives dans la zone plastique provoquées par la surcharge. Cette hypothèse n’explique ni le phénomène de retardement reporté ni l’accélération initiale de la propagation juste après la surcharge.

Aujourd'hui, on sait que les contraintes résiduelles dans la zone plastique existent effectivement, mais elles jouent un rôle secondaire sur le taux de propagation. Le retardement de la propagation de la fissure se produit en raison d'une augmentation ponctuelle du niveau de déformation plastique dans le sillage plastique (dont la définition est illustrée dans la Figure 6.18). Cela implique une augmentation de  $S_{op}$  comme le montre la Figure 6.16.

A chaque fois que la pièce subit une surcharge, une zone plastique particulièrement grande est produite devant la pointe de la fissure. Cette grande zone plastique rend plus difficile le contact entre les surfaces de rupture près de la pointe de la fissure. Matsuoka & Tanaka (1978) appellent ce phénomène *émoussement géométrique*. Cet émoussement de la pointe de la fissure est associé à la distance  $2\delta(a)$  montrée dans la Figure 6.18, à la soudaine chute de  $S_{op}$  dans la Figure 6.16 et à l'accélération initiale montrée dans la Figure 6.15.

Au fur et à mesure que la pointe de la fissure pénètre dans la grande zone plastique provoquée par la surcharge, la valeur de  $S_{op}$  augmente comme le montre la Figure 6.16. Cela se produit parce que petit à petit la grande région de déformation plastique laissée par la surcharge abandonne la zone plastique et devient partie du sillage plastique.

## 6.11 Modèle bande d'écoulement (*strip-yield*)

### 6.11.1 Le modèle de Dugdale

Le modèle de Dugdale (1960) et Barenblatt (1962) est un autre approche pour évaluer la taille de la zone plastique. Il n'a pas été abordé dans la Section 6.8 parce qu'il est convenable de souligner son fort lien avec la méthode bande d'écoulement de simulation de propagation de fissures.

Dans leurs travaux, Dugdale (1960) et Barenblatt (1962) abordent le cas d'une fissure de longueur  $2a$  dans une tôle infinie dans les directions  $x$  et  $y$ . Cependant, cette sous-section commencera par un autre cas afin de rendre l'explication plus claire.

On reprend le cas de la Figure 6.3b, qui montre une tôle semi-infinie avec une fissure latérale de longueur  $a$  soumise à un chargement externe distant  $S$ . Selon la théorie proposée par Dugdale (1960) et Barenblatt (1962), le système présenté dans la Figure 6.3b aura le même comportement du système présenté dans la Figure 6.17 où l'on a une fissure de longueur  $d = a + \rho$  et un chargement  $\alpha\sigma_0$  appliqué sur les surfaces de rupture entre  $x = a$  et  $x = a + \rho$ . Le chargement  $\alpha\sigma_0$  produit un facteur d'intensité de contrainte  $K_\sigma$  de signe négatif. Tel modèle exige que le facteur d'intensité de contrainte total soit zéro lorsque l'on considère la fissure virtuelle de longueur  $d$  (Wang & Blom, 1991) :

$$K_{total}(d) = K_\sigma(d) + K_{ext}(d) \equiv 0 \quad (6.49)$$

L'Équation (6.49) peut être résolue numériquement pour évaluer la longueur de la zone plastique<sup>3</sup>  $\rho$ . Le facteur d'intensité de contraintes dû au chargement externe  $K_{\text{ext}}$  peut être évalué selon la théorie présentée dans la Section 6.4. Le facteur d'intensité de contraintes dû au chargement appliqué sur les surfaces de rupture  $K_{\sigma}$  peut être évalué selon ce qui est présenté dans la Section 6.5.

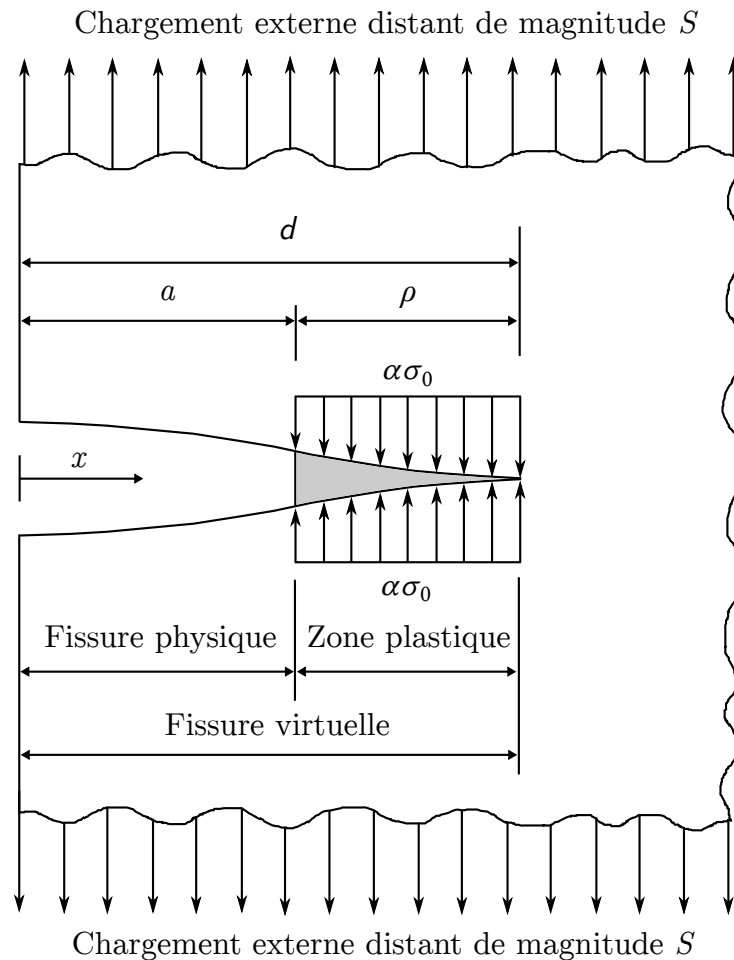


Figure 6.17 – Modèle de Dugdale appliqué à une fissure latérale dans une tôle semi-infinie. La figure est similaire à celle qu'on trouve dans le travail de Dominguez (1994).

Considérons encore le cas présenté dans la Figure 6.17. Afin d'appliquer l'Équation (6.49), on emploie l'Équation (6.13) pour évaluer  $K_{\text{ext}}$  et les équations (6.26) et (6.17) pour évaluer  $K_{\sigma}$ . L'Équation (6.49) devient :

3. Comme le dit Khan et al. (2007), le modèle de Dugdale assume que la zone plastique aura la forme d'une bande étroite devant la pointe de la fissure physique. Cette bande est représentée par la zone grise dans la Figure 6.17, entre  $x = a$  et  $x = a + \rho$ . Le sillage plastique n'est pas représenté dans cette figure, comme si la tôle fissurée était chargée sous traction par la première fois.

$$1,1215 S \sqrt{\pi(a + \rho)} - \alpha \sigma_0 \int_a^{a + \rho} \frac{\left[ 1,3 - 0,3 \left( \frac{x}{a + \rho} \right)^{5/4} \right]}{\left\{ \pi(a + \rho) \left[ 1 - \left( \frac{x}{a + \rho} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}} dx = 0 \quad (6.50)$$

Considérons maintenant une fissure centrale dans une tôle de dimensions infinies dans les directions  $x$  et  $y$ , comme celle des Figures 6.3a et 6.7. On souhaite appliquer l'Équation (6.49). Dans ce cas, on emploie l'Équation 6.12 pour évaluer le facteur d'intensité de contrainte dû au chargement externe  $S$  et l'une des fonctions de pondération présentées dans l'Équation 6.25, associée à l'intégral de l'Équation (6.17) pour évaluer  $K_\sigma$  :

$$S \sqrt{\pi(a + \rho)} - \alpha \sigma_0 \left[ \int_{-a - \rho}^{-a} \frac{1}{\sqrt{\pi(a + \rho)}} \sqrt{\frac{a + \rho - x}{a + \rho + x}} dx + \int_a^{a + \rho} \frac{1}{\sqrt{\pi(a + \rho)}} \sqrt{\frac{a + \rho - x}{a + \rho + x}} dx \right] = 0 \quad (\text{Pointe gauche}) \quad (6.51)$$

Dans le présent cas, l'intégration doit être faite a priori entre  $x = -a - \rho$  et  $x = a + \rho$ . Puisqu'il n'y a pas de chargement entre  $x = -a$  et  $x = +a$ , on peut exclure cet intervalle de l'intégration. L'Équation (6.51) fournira la longueur de la zone plastique  $\rho$  correspondante à la pointe gauche de la fissure. Par symétrie, on obtient aussi  $\rho$  correspondant à la pointe droite. Toutefois, le même développement peut être fait en considérant la pointe droite de la fissure :

$$S \sqrt{\pi(a + \rho)} - \alpha \sigma_0 \left[ \int_{-a - \rho}^{-a} \frac{1}{\sqrt{\pi(a + \rho)}} \sqrt{\frac{a + \rho + x}{a + \rho - x}} dx + \int_a^{a + \rho} \frac{1}{\sqrt{\pi(a + \rho)}} \sqrt{\frac{a + \rho + x}{a + \rho - x}} dx \right] = 0 \quad (\text{Pointe droite}) \quad (6.52)$$

### 6.11.2 Facteur de restriction plastique

L'application de la méthode bande d'écoulement exige l'emploi de la contrainte d'écoulement  $\sigma_0$  dont la valeur variera en raison de l'écrouissage du matériau. Elle peut être approximée comme la moyenne entre la limite d'élasticité  $S_{ys}$  et la limite ultime à la traction  $S_u$  (Dominguez, 1994 ; Yamada et al., 2011) :

$$\sigma_0 = \frac{S_{ys} + S_u}{2} \quad (6.53)$$

Afin de prendre en compte l'influence de l'épaisseur de la tôle sur l'état tridimensionnel de contraintes et déformations aux alentours de la pointe de la fissure, la limite d'écoulement  $\sigma_0$  doit être haussée par le facteur de restriction  $\alpha$  (en anglais,



*constraint factor*). Ce facteur dépend non seulement de l'épaisseur, mais aussi de la géométrie et du matériau de la pièce (Dexter et al., 1989; Ribeiro et al., 2011). Selon Wang (1993), le facteur de restriction est utilisé pour prendre en compte l'effet de la contrainte dans la direction de l'épaisseur (direction  $z$ , hors du plan) sur la contrainte d'écoulement observée dans la direction  $y$ .

Soit  $\sigma_{\max}$  la contrainte maximale observée dans une direction d'intérêt pratique (généralement la direction  $y$ ) dans la zone plastique. Le facteur de restriction est le rapport entre  $\sigma_{\max}$  et la contrainte d'écoulement  $\sigma_0$  :

$$\alpha = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0} \quad (6.54)$$

La valeur  $\sigma_{\max} = \alpha\sigma_0$  peut être vue comme une contrainte d'écoulement effective. Broek (1984) fournit le moyen décrit ensuite pour estimer le facteur de restriction plastique à partir du critère d'écoulement de von Mises. Le remplacement de  $n = \sigma_2/\sigma_1$  et  $m = \sigma_3/\sigma_1$  dans l'Équation (6.32) résulte :

$$[(1-n)^2 + (n-m)^2 + (1-m)^2] \sigma_1^2 = 2\sigma_0^2 \quad (6.55)$$

Un réarrangement de l'Équation (6.55) donne :

$$\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = (1-n-m+n^2+m^2-nm)^{-1/2} \quad (6.56)$$

À partir de l'Équation (6.11), on peut écrire :

$$n = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{1 - \sin(\theta/2)}{1 + \sin(\theta/2)} \quad (6.57a)$$

$$m = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{2\nu}{1 + \sin(\theta/2)} \quad (6.57b)$$

Pour le plan correspondant à l'angle  $\theta = 0$ , on obtient  $n = 1$  et  $m = 2\nu$ . En considérant  $\nu = 1/3$ , on obtient  $\alpha = 3$ . Pour l'état de contrainte plane, on a  $n = 1$  et  $m = 0$ , ce qui résulte  $\alpha = 1$ .

D'après Wang & Blom (1991), le matériau écoule quand le niveau de contrainte atteint  $\alpha\sigma_0$  sous traction ou  $\sigma_0$  sous compression (c'est-à-dire, le facteur de restriction est considéré seulement en traction).

Selon Bos (2007) et Forman et al. (2002), le facteur de restriction varie typiquement entre 1,0 pour l'état de contrainte plane et 3,0 pour l'état de déformation plane. Comme le rappelle Zhang et al. (1992), l'état de contrainte plane produit une zone plastique plus grande que l'état de déformation plane. Donc, on peut espérer que la pointe de la fissure se déformera plastiquement plus facilement en état de contrainte plane, ce qui est compatible avec l'intervalle des valeurs proposées pour  $\alpha$ .

Selon Bos (2007) et Sander & Richard (2006), les modèles bande d'écoulement proposés par Newman et Koning se distinguent surtout par la façon dont le facteur de restriction est évalué. Pour Newman (1981), le facteur de restriction reste constant le long de la zone plastique. Pour de Koning et al. (1997), tel facteur tend à décroître quadratiquement avec la distance à la pointe de la fissure le long de la zone plastique.

Newman et al. (1993) ont proposé l'Équation (6.58) pour évaluer le facteur de restriction global  $\alpha_g$  à partir d'analyses d'éléments finis.

$$\alpha_g = \frac{1}{A_T} \sum_{j=1}^J A_j \left( \frac{\sigma_{yy}}{\sigma_0} \right)_j \quad (6.58)$$

où  $A_j$  est l'aire projetée du ligament non rompu d'un élément fini écoulé  $j$ ,  $(\sigma_{yy}/\sigma_0)_j$  est la contrainte normalisée pour l'élément  $j$  et  $A_T$  est la somme de toutes les aires  $A_j$  des éléments écoulés.

D'après Wang & Blom (1991), le facteur de restriction  $\alpha$  peut être évalué avec l'Équation (6.59) :

$$\alpha = \begin{cases} 1 & \text{pour } \rho \geq \frac{t}{2} \\ \sqrt{\frac{t}{2\rho}} & \text{pour } \frac{t}{18} < \rho < \frac{t}{2} \\ 3 \text{ (ou 1,73 selon Irwin)} & \text{pour } \rho \leq \frac{t}{18} \end{cases} \quad (6.59)$$

où  $t$  est l'épaisseur de la tôle. En état de déformation plane, la valeur  $\alpha = 1,73$  (plus précisément  $\sqrt{3}$ ) est le facteur de restriction d'Irwin (1968) qui semble être plus proche de plusieurs observations expérimentales selon Wang & Blom (1991). Il est très peu probable que le facteur de restriction dépassera la valeur  $\alpha = 3$ , qui est considérée comme une limite supérieure selon les résultats d'analyses d'éléments finis menées par Newman (1996).

Meyer (2014) observe que le taux de propagation de la fissure sera plus important à proportion que le facteur de restriction augmente, puisqu'une grande valeur de  $\alpha$  implique une plus faible déformation plastique sous traction et une plus faible valeur de  $S_{op}$ . Autrement dit, une analyse théorique fournira des résultats d'autant plus conservateurs que la valeur de  $\alpha$  sera grande.

Guo et al. (1999) ont proposé l'Équation (6.60) pour évaluer le facteur de restriction :

$$\alpha = \frac{1 + 0,6378 \left[ \sqrt{\frac{r_{p0}}{t}} + 2 \left( \frac{r_{p0}}{t} \right)^2 \right]}{1 - 2\nu + 0,5402 \left[ \sqrt{\frac{r_{p0}}{t}} + 2 \left( \frac{r_{p0}}{t} \right)^2 \right]} \quad (6.60)$$

L'Équation (6.60) peut être trouvée aussi dans les travaux de Machniewicz (2012a) et Machniewicz (2012b).

Newman et al. (1995) ont proposé l'Équation (6.61) pour évaluer  $\alpha$ . Elle est valable pour  $(a/t)$  et  $(W/t) > 4$ .

$$\alpha = 1,15 + \beta \exp(-\gamma K_n^{1,5}) \quad (6.61)$$

où  $\beta$  et  $\gamma$  dépendent de la géométrie de l'éprouvette :

- $\beta = 1,25$  et  $\gamma = 0,85$  pour l'éprouvette M(T) ;
- $\beta = 1,4$  et  $\gamma = 0,95$  pour l'éprouvette DE(T) ;
- $\beta = 1,55$  et  $\gamma = 1,05$  pour l'éprouvette SE(B).

$K_n$  est le facteur d'intensité de contrainte normalisé donné par :

$$K_n = \frac{K}{\sigma_0 \sqrt{t}} \quad (6.62)$$

Comme le disent Skorupa & Skorupa (2005) et Machniewicz (2009), le facteur de restriction a pris une utilité et un sens plus large en ce qui concerne l'application de la méthode bande d'écoulement. Ce facteur est devenu un moyen de calibrer (ou d'ajuster, selon Singh et al. (2011)) le modèle théorique de propagation de fissures avec les résultats expérimentaux.

Selon Carlson et al. (1991) et Yuen & Taheri (2006) l'historique de contraintes a également un effet sur la magnitude du facteur de restriction. Autrement dit, les essais expérimentaux sous amplitude constante seraient nécessaires mais pas suffisants pour l'évaluation du facteur de restriction (Yamada et al., 2011).

### 6.11.3 Fonction de déplacement de la surface de la fissure virtuelle

La Figure 6.18 a été conçue pour illustrer les paramètres géométriques nécessaires à l'implémentation de la méthode bande d'écoulement. Ces paramètres sont décrits ci-dessous :

- $a$  : la longueur de la fissure physique ;
- $d$  : la longueur de la fissure virtuelle ;
- $\rho$  : la longueur de la zone plastique, évaluée selon le modèle de Dugdale (voir Section 6.11.1) ;
- $V(x)$  : fonction de déplacement de la surface de la fissure virtuelle (représente la forme de la fissure virtuelle) ;
- $L(x)$  : quantifie l'allongement du matériau dû à la déformation plastique ;
- $\delta(x)$  : représente la distance entre chaque surface de rupture à l'axe  $x$  (coordonnée  $y = 0$ ).

L'implémentation de la méthode bande d'écoulement exige que les fonctions  $L(x)$ ,  $V(x)$  et  $\delta(x)$  soient entièrement décrites de façon discrétisée. Dans la Figure 6.18 on voit

un élément de longueur  $L_i$  et largeur  $2w_i$  sur la coordonnée  $x = x_i$ . Entre les coordonnées  $x = x_i - w_i$  et  $x = x_i + w_i$  on a un chargement de traction  $\sigma_i$ . Dans la même figure, la zone grise claire est appelée sillage plastique. La zone grise foncée représente la zone plastique (la méthode bande d'écoulement abandonne l'hypothèse que la zone plastique aura la forme décrite par l'Équation (6.33)).

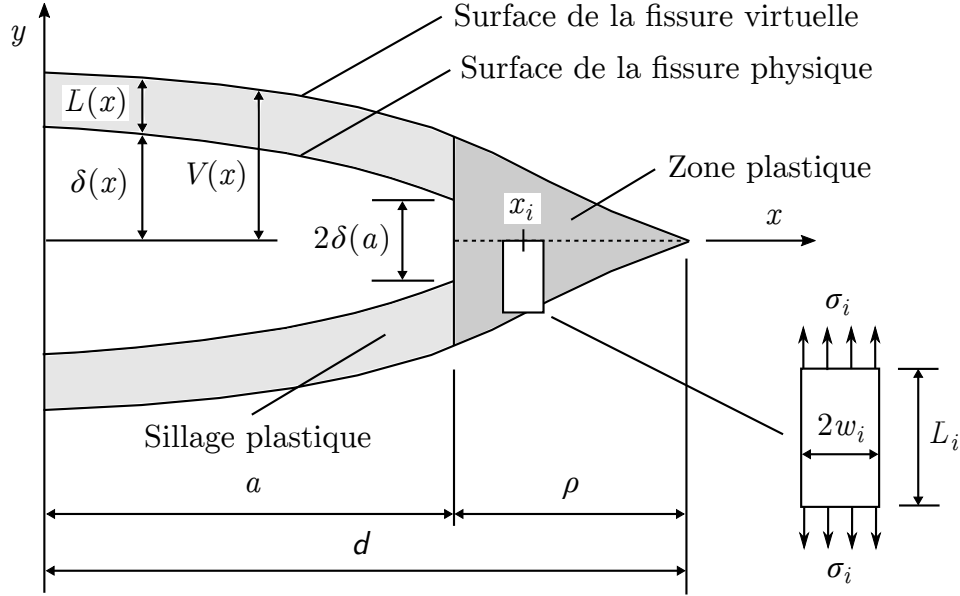


Figure 6.18 – Définition des distances  $V(x)$ ,  $L(x)$  et  $\delta(x)$ , selon de Koning & Liefting (1988). La figure est basée aussi sur les travaux de Sumi & Inoue (2011) et Skorupa & Skorupa (2005).

Le déplacement  $V(x)$  peut être évalué selon l'Équation (6.63) (Newman, 1981 ; Wang & Blom, 1991).

$$\begin{aligned}
 V(x_i, d) &= v(x_i, d) - \sum_{j=1}^{ntel} \sigma_j g(x_i, x_j, d) \\
 &= Sf(x_i, d) - \sum_{j=1}^{ntel} \sigma_j g(x_i, x_j, d)
 \end{aligned}
 \tag{6.63}$$

Le déplacement  $v$ , le chargement  $S$  et la fonction d'influence  $f(x_i, d)$  sont les mêmes déjà mentionnés dans la Section 6.5.1. Pour une fissure centrale de longueur effective  $2d$  dans une tôle de largeur et hauteur infinies (comme celle de la Figure 6.3a), la fonction  $f(x_i, d)$  est donnée par l'Équation (6.21), en remplaçant  $a$  par  $d$ . La variable  $\sigma_j$  est la contrainte de contact pour l'élément  $j$  qui se trouve sur la surface de rupture. Pour l'élément qui se trouve dans la zone plastique,  $\sigma_j$  est la contrainte totale agissant sur l'élément, c'est-à-dire, celle qui prend en compte l'effet du chargement externe distant et aussi l'effet de la contrainte résiduelle. Pour tout élément  $j$  la contrainte  $\sigma_j$  dépend de la magnitude du chargement externe distant  $S$ .

L'Équation (6.63) reste valide si l'on remplace la longueur effective de la fissure  $d$  par la longueur réel  $a$ . Dans ce cas, on serait en train de considérer juste les contraintes de contact entre les surfaces de rupture, mais pas les contraintes dans la zone plastique.

La fonction de déplacement  $v(x, a)$  (qui figure aussi dans l'Équation (6.19)) ne prend pas en compte la possibilité de contact entre les surfaces de rupture. Pour cette raison,  $V(x, a)$  donné par l'Équation (6.63) devient égal à  $v(x, a)$  si  $\sigma_j = 0$  pour tout élément  $j$  (situation où la zone plastique est inexistante et les surfaces de rupture sont complètement séparées).

On doit souligner que la distance  $\delta(x)$  montrée dans la Figure 6.18 n'est pas forcément égale à  $v(x, a)$ . Le modèle bande d'écoulement prévoit un émoussement géométrique<sup>4</sup> de la pointe de la fissure dû aux longueurs des éléments dans la zone plastique. Considérons la limite de  $\delta(x)$  quand  $x$  tend à la longueur  $a$  par la gauche. Le résultat de cette limite peut être différent de zéro (si le chargement externe  $S$  et les longueurs des éléments dans la zone plastique sont suffisamment grands). En notation mathématique on a :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \delta(x) \geq 0 \quad (\text{Modèle bande d'écoulement}) \quad (6.64)$$

Dans un modèle plus conventionnel, on se servirait (par exemple) des équations (6.20) et (6.21) pour conclure que  $v(x = a, a) = 0$  :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} v(x, a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{2S}{E'} \sqrt{a^2 - x^2} \equiv 0 \quad (\text{Modèle classique}) \quad (6.65)$$

Par ailleurs, si la zone plastique et le sillage plastique sont inexistants, on a  $\rho = 0$ ,  $a = d$  et  $\delta(x) = v(x)$ .

Il est convenable de remarquer que l'Équation (6.63) peut être réécrite en notation matricielle :

$$\mathbf{g} \boldsymbol{\sigma} = S \mathbf{f} - \mathbf{V} \quad (6.66)$$

Cette notation met en évidence le fait qu'il s'agit d'un système d'équations linéaires qui peut être résolu pour le vecteur de contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ .

#### 6.11.4 Évaluation des fonctions d'influence $f(x_i, d)$ et $g(x_i, x_j, d)$

La fonction d'influence  $g(x_i, x_j, d)$  quantifie l'effet que la contrainte sur l'élément  $j$  aura sur le déplacement de l'élément  $i$ . Selon de Koning & Liefting (1988), dans le cas d'une fissure de longueur effective  $2d$  qui se trouve dans une tôle occupant un plan infini

---

4. L'émoussement géométrique de la pointe de la fissure explique l'accélération initiale de la propagation juste après l'application de la surcharge. Ce phénomène est illustré dans la Figure 6.18.

(comme celle de la Figure 6.3a), la fonction  $g(x_i, x_j, \mathbf{d})$  peut être évaluée en appliquant l'Équation (6.67) :

$$g(x_i, x_j, \mathbf{d}) = \int_{x_j - w_j}^{x_j + w_j} \frac{2}{\pi E} \log \left| \frac{\sqrt{\mathbf{d}^2 - x^2} + \sqrt{\mathbf{d}^2 - x_i^2}}{\sqrt{\mathbf{d}^2 - x^2} - \sqrt{\mathbf{d}^2 - x_i^2}} \right| dx \quad (6.67)$$

Si  $K_S(\mathbf{d})$  est le facteur d'intensité de contraintes dû au chargement externe distant  $S$  (évalué comme dans Section 6.4), on peut réarranger l'Équation (6.19) de la manière qui suit (Bostrom, 1989 ; Wang & Blom, 1991) :

$$v(x, \mathbf{d}) = \frac{1}{E'} \int_x^{\mathbf{d}} K_S(\mathbf{d}^*) h(x, \mathbf{d}^*) d\mathbf{d}^* \quad (6.68)$$

La fonction d'influence  $f(x, \mathbf{d})$  pourra être évaluée au moyen de l'Équation (6.20).

Le facteur d'intensité de contrainte dû à un chargement uniforme  $\sigma_j$  appliqué sur la surface de rupture entre  $x = x_j - w_j$  et  $x = x_j + w_j$  peut être évalué par l'Équation (6.17) en modifiant les limites d'intégration :

$$K_\sigma(x_j, \mathbf{d}) = \int_{x_j - w_j}^{x_j + w_j} \sigma_j h(x, \mathbf{d}) dx \quad (6.69)$$

On peut réarranger l'Équation (6.19) pour évaluer la fonction  $V_\sigma(x_i, x_j, \mathbf{d})$ , qui décrit le déplacement de la surface de rupture dû au chargement  $\sigma_j$  (Wang & Blom, 1991) :

$$\begin{aligned} V_\sigma(x_i, x_j, \mathbf{d}) &= \frac{1}{E'} \int_{x_i}^{\mathbf{d}} K_\sigma(x_j, \mathbf{d}^*) h(x_i, \mathbf{d}^*) d\mathbf{d}^* \\ &= \frac{1}{E'} \int_{x_i}^{\mathbf{d}} \left[ \int_{x_j - w_j}^{x_j + w_j} \sigma_j h(x, \mathbf{d}^*) dx \right] h(x_i, \mathbf{d}^*) d\mathbf{d}^* \end{aligned} \quad (6.70)$$

La fonction d'influence  $g(x_i, x_j, \mathbf{d})$  peut être évaluée selon :

$$g(x_i, x_j, \mathbf{d}) = \frac{V_\sigma(x_i, x_j, \mathbf{d})}{\sigma_j} \quad (6.71)$$

### 6.11.5 Aspects théoriques de l'implémentation de la méthode bande d'écoulement

Dans les travaux de cette thèse, on a adopté un système de numérotation d'éléments similaire à celle de Newman & Daniewicz (2014). Ce système de numérotation est illustré dans la Figure 6.19a. La variable « ntel » représente le nombre total d'éléments présents dans la simulation. La variable « nzp » représente le nombre d'éléments dans la zone plastique. On peut classer les éléments selon leur numérotation de la façon qui suit :

- $1 \leq i \leq \text{nzp}$  : l'élément se trouve dans la zone plastique ;

- $nzp+1 \leq i \leq ntel$  : l'élément se trouve dans le sillage plastique.

Dans la même figure, on voit que les éléments les plus proches de la pointe de la fissure physique ont numérotation  $i = 1$  et  $i = ntel$ .

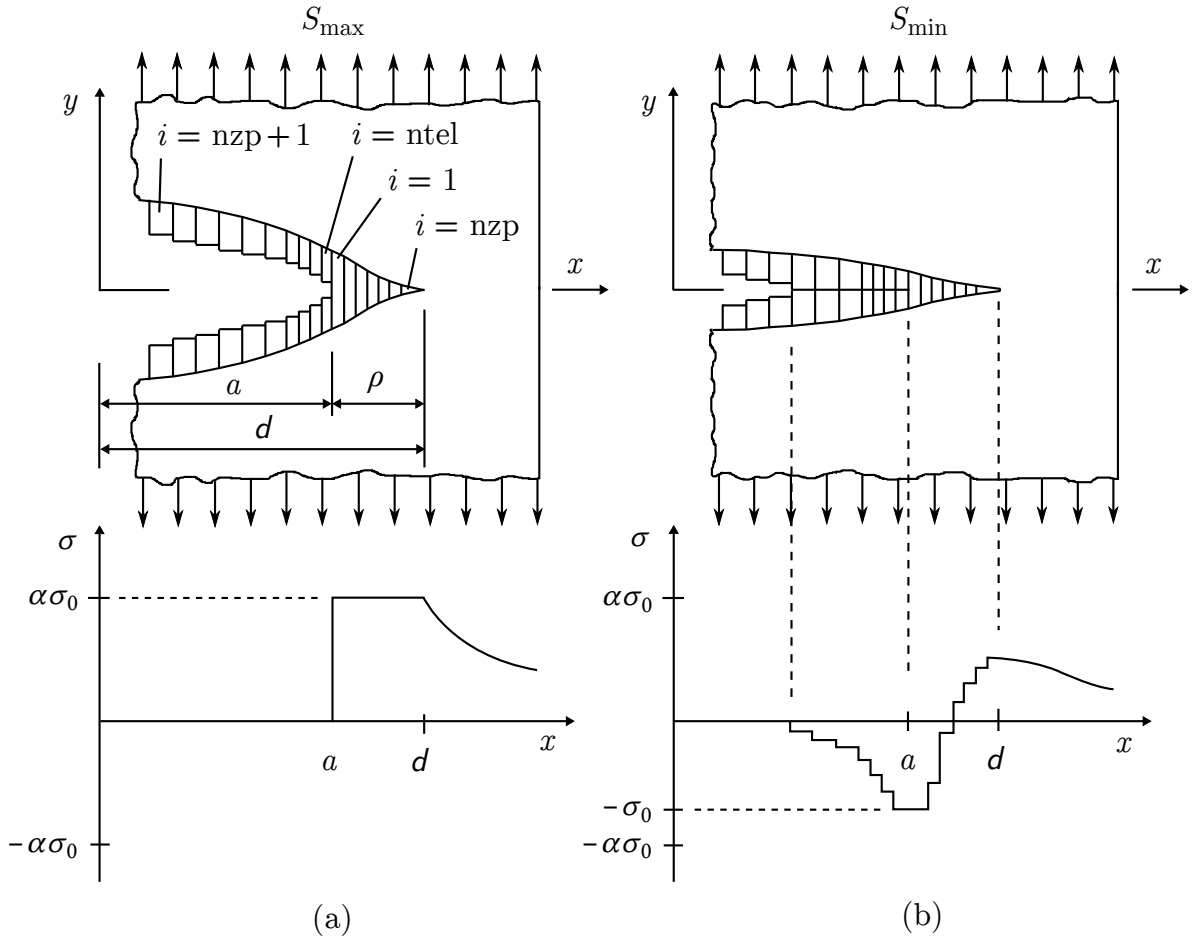


Figure 6.19 – (a) Profil de la contrainte  $\sigma$  sous le chargement maximal  $S_{max}$ . (b) Profil de la contrainte  $\sigma$  sous le chargement minimal  $S_{min}$  (Newman, 1981 ; Newman & Daniewicz, 2014).

La Figure 6.20 montre l'organigramme de la méthode bande d'écoulement proposé par Wang & Blom (1991).

La raison pour laquelle il y a deux boucles est le premier aspect qu'il faut comprendre lorsque l'on regarde l'organigramme de la Figure 6.20. Chaque exécution de la boucle A est associée à un seul cycle de chargement  $S_{min}$  et  $S_{max}$  responsable pour un incrément  $\Delta a$  sur la longueur de la fissure. Chaque exécution de la boucle B est associée à un bloc de l'historique de chargement. Ce bloc est responsable pour un incrément  $\Delta a_{lim}$  sur la longueur de la fissure. Le travail numérique serait trop lourd si l'on rompait un élément pour chaque cycle de chargement. Alors, chaque bloc de chargement est associé à un nombre entier d'éléments qui fera partie du sillage plastique. Ce nombre entier d'éléments dépend de la façon dont le programme est implémenté. Wang & Blom (1991) ne le disent pas explicitement, mais on peut conclure qu'ils considèrent  $\Delta a_{lim}$  égal à la

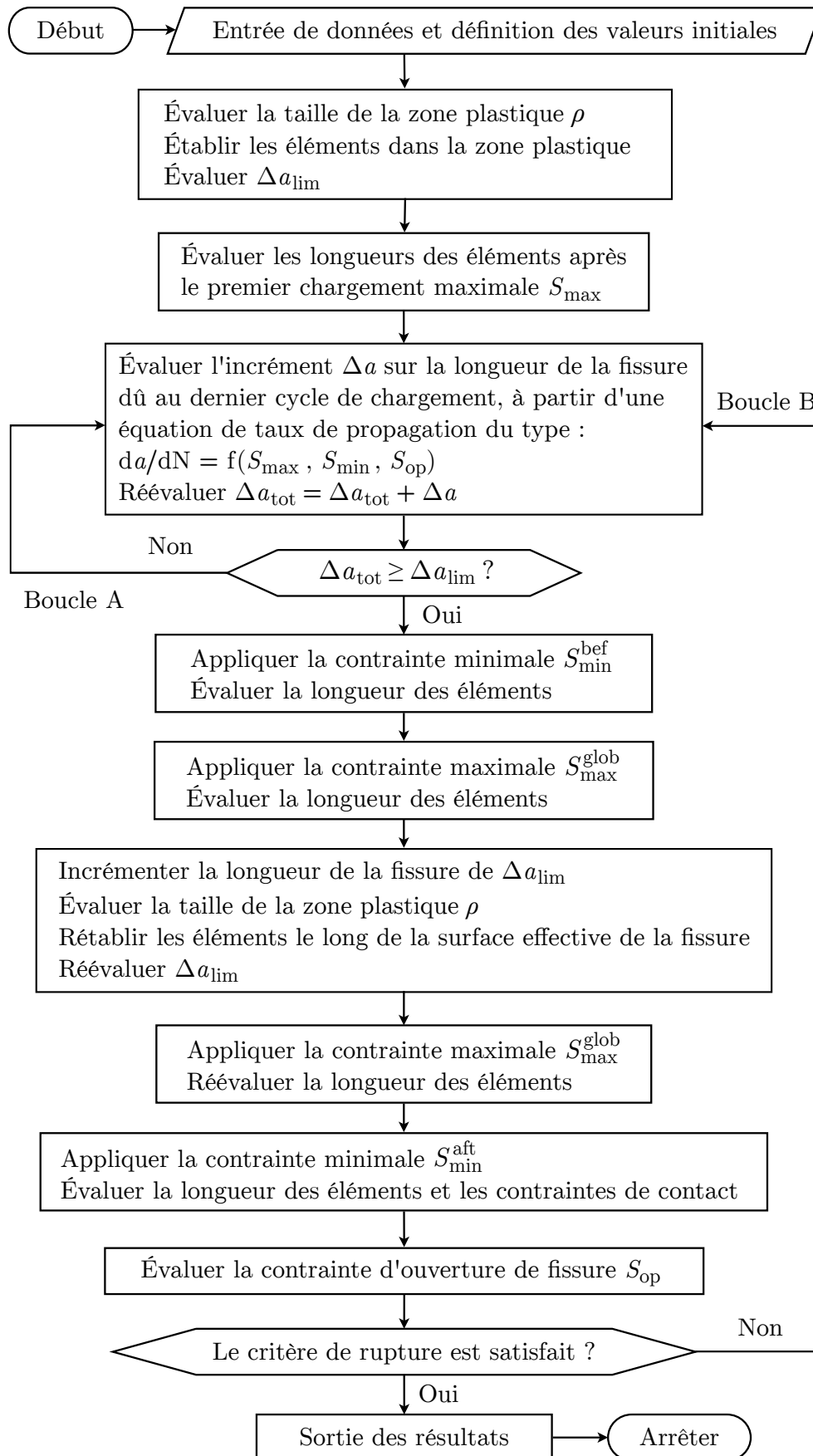


Figure 6.20 – Organigramme proposé par Wang & Blom (1991) pour implémenter la méthode bande d'écoulement.



somme des largeurs des trois premiers éléments dans la zone plastique. Daniewicz et al. (1994) considèrent  $\Delta a_{\text{lim}} = 2w_1$ , c'est-à-dire, chaque bloc de chargement ne rompra que le premier élément de la zone plastique.

À chaque fois que le programme entre dans la boucle B, la contrainte d'ouverture de fissure  $S_{\text{op}}$  est actualisée. Malgré la complexité des opérations dans la boucle B, on peut dire que son seul objectif est l'actualisation de  $S_{\text{op}}$ . Pour que cela soit possible, il faut examiner le bloc de chargement actuel afin d'obtenir les paramètres qui suivent :

- $S_{\text{max}}^{\text{glob}}$  : il s'agit du point de maximum global lorsque l'on considère uniquement le bloc actuel de chargement ;
- $S_{\text{min}}^{\text{bef}}$  : le point de minimum global lorsque l'on considère uniquement la partie du bloc actuel de chargement qui précède  $S_{\text{max}}^{\text{glob}}$  ;
- $S_{\text{min}}^{\text{aft}}$  : le point de minimum global lorsque l'on considère uniquement la partie du bloc actuel de chargement qui vient après  $S_{\text{max}}^{\text{glob}}$ .

La Figure 6.21 montre un bloc d'un historique de chargement où l'on peut observer les points qui correspondent à  $S_{\text{max}}^{\text{glob}}$ ,  $S_{\text{min}}^{\text{bef}}$  et  $S_{\text{min}}^{\text{aft}}$ . Ces points suffiront pour actualiser l'état de déformation plastique dans la zone plastique et dans le sillage plastique. La même figure montre que la contrainte d'ouverture de fissure  $S_{\text{op}}$  est réévaluée à chaque fois que  $\Delta a_{\text{tot}}$  atteint  $\Delta a_{\text{lim}}$ .

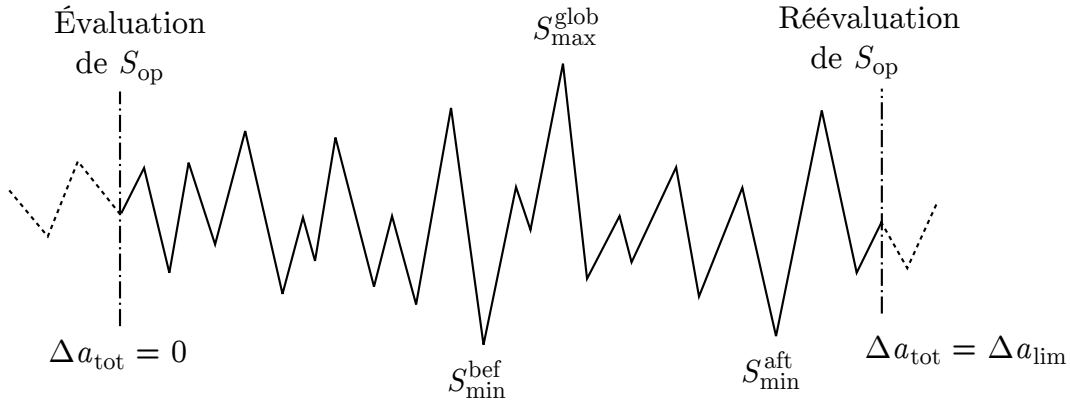


Figure 6.21 – Définition des chargements  $S_{\text{min}}^{\text{bef}}$ ,  $S_{\text{max}}^{\text{glob}}$  et  $S_{\text{min}}^{\text{aft}}$  (Dominguez, 1994).

Afin d'évaluer les longueurs  $L_i$  des éléments dans la zone plastique due à l'application de  $S_{\text{max}}^{\text{glob}}$ , on se sert de l'Équation (6.63). Il n'y a pas de contact entre les surfaces de rupture lorsque l'on applique  $S_{\text{max}}$ . Cela implique que  $\sigma_j = 0$  pour  $n_{\text{zp}}+1 \leq j \leq n_{\text{tel}}$ , c'est-à-dire, les contraintes de contact sont inexistantes. Comme le montre la Figure 6.19a, lorsque l'on applique  $S_{\text{max}}$ , la contrainte  $\sigma_j$  sur les éléments dans la zone plastique est égale à  $+\alpha\sigma_0$  (ici, il faut considérer que  $\sigma_j$  est positif, au contraire de ce que la Figure 6.17 peut suggérer<sup>5</sup>). On sait aussi que dans la zone plastique  $V(x) = L(x)$ , puisque  $\delta(x) \equiv 0$ .

5. La Figure 6.17 illustre le modèle à considérer pour évaluer la taille de la zone plastique selon Dugdale. La méthode bande d'écoulement prévoit que la contrainte  $\sigma_j$  des éléments dans la zone plastique est forcément positive si le chargement externe de traction  $S$  est suffisamment grand pour surmonter les contraintes résiduelles.

Autrement dit,  $V_i = L_i$  et  $\delta_i \equiv 0$  pour  $1 \leq i \leq \text{nzp}$ . L'Équation (6.63) devient (Newman, 1981 ; Wang & Blom, 1991) :

$$L_i = S_{\max} f(x_i, \mathbf{d}) - \sum_{j=1}^{\text{nzp}} \alpha \sigma_0 g(x_i, x_j, \mathbf{d}) \quad (\text{pour } 1 \leq i \leq \text{nzp}) \quad (6.72)$$

Selon Newman (1981), lorsque le chargement de la pièce est réduit à  $S_{\min}$ , certains éléments dans la zone plastique et aussi dans le sillage plastique peuvent écouler en compression. Cela est montré graphiquement dans la Figure 6.19b où certains éléments écoulent sous le niveau de contrainte  $\sigma_i = -\sigma_0$ .

Le module correspondant à la réévaluation des longueurs des éléments dues à l'application de  $S_{\min}$  et le module pour la réévaluation de  $S_{\text{op}}$  seront abordés dans le Chapitre 7 puisque ce qui a été effectivement implémenté dans les travaux de cette thèse a quelque chose de différent par rapport à ce qui suggèrent les autres auteurs.

Il est souhaitable que nombre total d'éléments présents dans la simulation ne soit pas trop élevé, afin de réduire le temps de calcul. Si l'on suppose que chaque entrée dans la matrice  $\mathbf{g}$  exige l'évaluation numérique de l'intégral de l'Équation (6.67), on peut conclure que le temps de calcul dépend fortement du nombre total d'éléments.

Selon Newman (1981), il est possible de fusionner deux éléments adjacents pour former un seul élément. La longueur du nouveau élément sera donnée par :

$$L_{\text{new}} = \frac{L_i w_i + L_{i+1} w_{i+1}}{w_i + w_{i+1}} \quad (6.73)$$

Il faut établir un critère de choix des éléments à combiner. Le critère utilisé par le programme implémenté dans les travaux de cette thèse sera abordé dans le Chapitre 7.

# Chapitre 7

## Analyses et résultats

### 7.1 Modélisation de la vitesse du vent

L'un des objectifs de cette section est de montrer comment la vitesse du vent a été modélisée dans les analyses présentées dans le Chapitre 7, en sorte qu'elles puissent être reproduites ultérieurement.

Très souvent, le Chapitre 2 fournit plus d'une équation pour évaluer la même variable. Alors, cette section spécifie quelles équations et quelles hypothèses ont été adoptées pour modéliser la vitesse du vent.

Au contraire de ce que les Figures 7.1 et 7.2 peuvent suggérer, la longueur de Monin-Obukhov a été considérée constante et égale à 250 mètres. Ces figures ont pour objectif de montrer le comportement du profil de vitesse du vent en fonction de la condition de stabilité atmosphérique.

#### 7.1.1 Profil de vitesse du vent

La Figure 7.1 montre les profils de vitesse du vent obtenus par l'Équation (2.4), en considérant  $u(z = 10 \text{ m}) = 3, 6, 9$  et  $12 \text{ m/s}$ . La hauteur de la couche limite atmosphérique  $h$  a été évaluée par l'Équation (2.11), proposée par Deardorff (1972). Pour chaque courbe, le système de deux équations est résolu numériquement pour  $h$  et  $u_{*0}$ . Afin de vérifier l'effet de la longueur de Monin-Obukhov, la figure montre les courbes correspondantes à  $L_{MO} = 50$  mètres (atmosphère très stable) et  $L_{MO} = 450$  mètres (atmosphère stable, quasi-neutre, selon le Tableau 2.3). Comme prévu, la hauteur de la couche limite est plus petite pour des conditions très stables. Pour une même vitesse du vent à la hauteur  $z = 10 \text{ m}$ , le modèle prévoit que la vitesse du vent à la hauteur du rotor augmentera avec la réduction de  $L_{MO}$ .

Les courbes de la Figure 7.1 correspondent à une rugosité de terrain  $z_0 = 0,03$  mètres (terrain agricole dégagé, selon le Tableau 2.1). La constante de von Kármán considérée

est  $\kappa = 0,372$ . Afin d'évaluer le paramètre de Coriolis  $f_c$  (Équation (2.9)), la latitude de la ville de Rouen est considérée : 49,44 degrés.

La Figure 7.2 montre exactement les mêmes courbes de la figure précédente, cette fois pour  $z \leq 200$  m au lieu de  $z \leq h$ . On peut conclure que les conditions de stabilité atmosphérique n'affectent pas beaucoup le profil de vitesse du vent pour  $z \leq 50$  m.

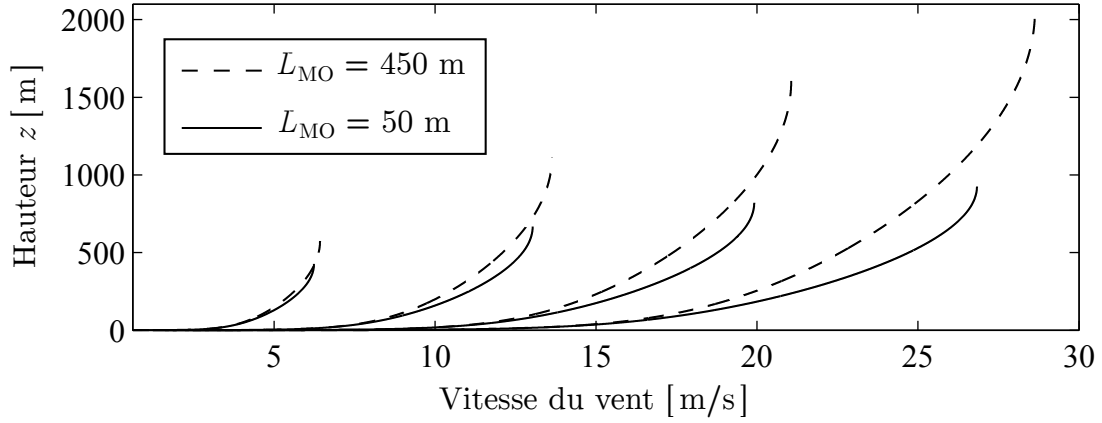


Figure 7.1 – Courbes de vitesse du vent en fonction de la hauteur et de la longueur de Monin-Obukhov, pour  $u(z = 10 \text{ m}) = 3, 6, 9$  et  $12 \text{ m/s}$  et  $0 \leq z \leq h$ .

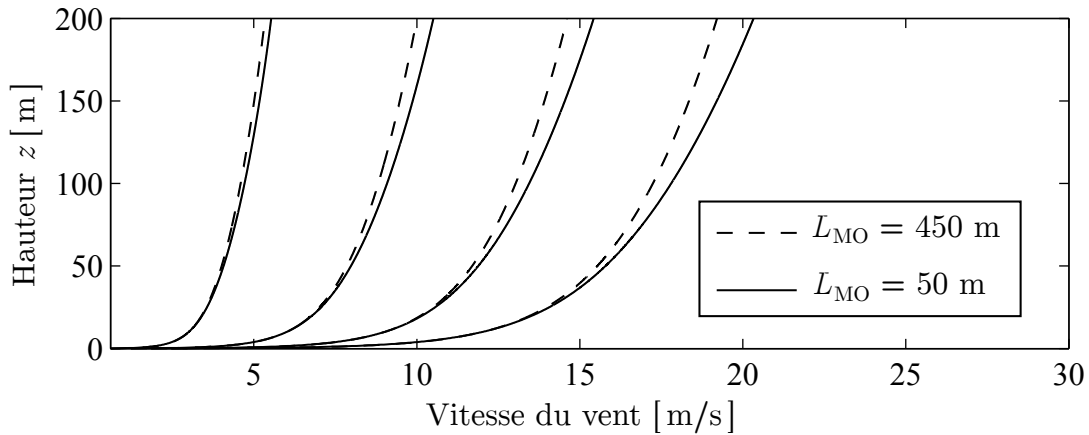


Figure 7.2 – Courbes de vitesse du vent en fonction de la hauteur et de la longueur de Monin-Obukhov, pour  $u(z = 10 \text{ m}) = 3, 6, 9$  et  $12 \text{ m/s}$  et  $0 \leq z \leq 200 \text{ m}$ .

En considérant le profil fourni par l'Équation (2.4) et une longueur de Monin-Obukhov constante dans l'Équation (2.11), la relation entre  $u(z = 10 \text{ m})$  et  $u(z = 44 \text{ m})$  est pratiquement linéaire. Pour  $L_{MO} = 250$  mètres, on peut écrire :

$$u_{44} = 1,26 u_{10} + 0,1338 \quad (7.1)$$

où  $u_{10}$  et  $u_{44}$  sont les vitesses du vent aux hauteurs  $z = 10$  et  $44$  mètres. Les deux vitesses sont en mètres par seconde.

### 7.1.2 Génération d'un historique de vitesse du vent

La fonction DSP de la vitesse du vent employée dans les analyses de ce chapitre est celle donnée par l'Équation (2.59). L'écart type et l'échelle de longueur sont donnés par les Équations (2.34) et (2.48), respectivement.

Dans l'Équation (2.72), la DSP est considérée entre les fréquences  $n_1 = 1/3600$  Hertz et  $n_M = 1,6$  Hertz. Cet intervalle de fréquences est discrétisé en 10 000 sous intervalles. Autrement dit, on a adopté  $M = 10\,001$ . Le taux d'échantillonnage du signal est de 3,2 Hertz (le double de  $n_M$ ).

La commande « rand » de Matlab a été employée pour générer les variables aléatoires  $\phi_j$  requises dans l'Équation (2.72).

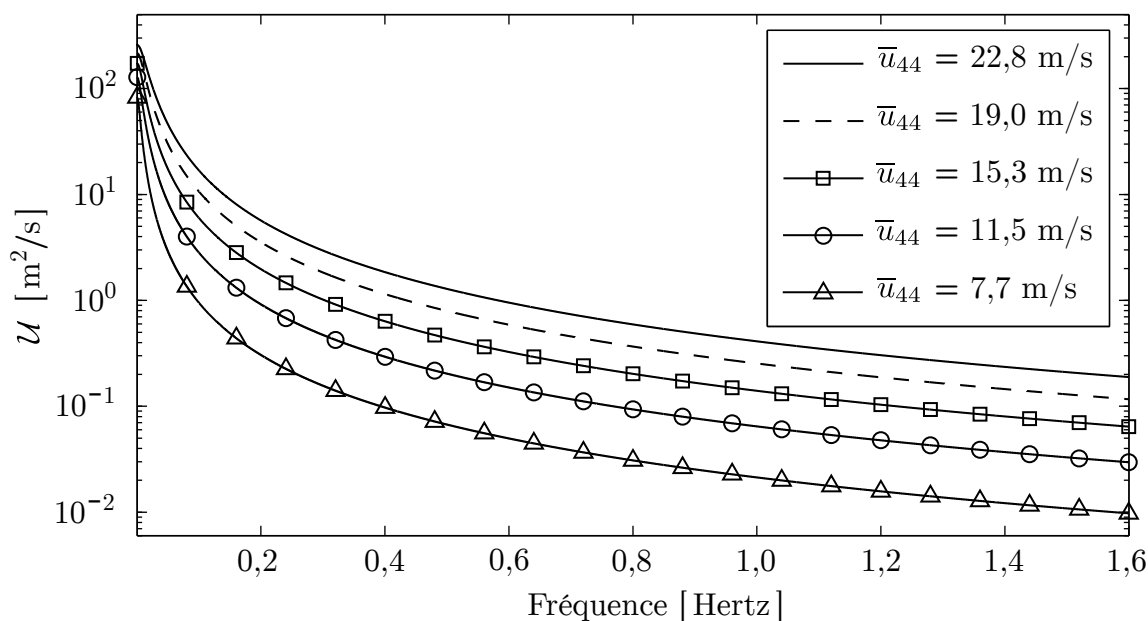


Figure 7.3 – Courbes de la DSP de la vitesse du vent en fonction de la fréquence et de la vitesse moyenne du vent à la hauteur  $z = 44$  mètres.

La Figure 7.3 montre les courbes de  $\mathcal{U}(z = 44 \text{ m})$  en fonction de la fréquence et de la vitesse moyenne du vent à la hauteur  $z = 44$  mètres. On voit que la DSP augmente avec la vitesse moyenne du vent.

## 7.2 Description de la géométrie du mât

Afin de fournir des exemples numériques des techniques d'analyse abordées dans les chapitres précédents, la structure éolienne décrite par Lavassas et al. (2003) fut modélisée dans les travaux de cette thèse.

Tableau 7.1 – Épaisseurs des tôles externes (Lavassas et al., 2003).

Épaisseur [mm]	Distance du sol [mm]
10	37380 - 44075
11	35005 - 37380
12	26010 - 35005
13	16885 - 26010
14	14560 - 16885
15	9910 - 14560
16	5260 - 9910
17	2935 - 5260
18	0 - 2935

Tableau 7.2 – Données géométriques des anneaux raidisseurs et des brides (Lavassas et al., 2003). Toutes les dimensions sont en millimètres.

Pièce	Distance du sol	Rayon interne	Rayon externe	Épaisseur
Bride supérieure	44075	930	1050	70
R14	42250	943,5	1063,5	18
R13	39225	984,5	1104,5	18
R12	36200	1025,5	1145,5	18
R11	33175	1066,5	1186,5	18
R10	30150	1107	1227	18
R9	27125	1148	1268	18
R8	24100	1189	1309	18
R7	21700	1221,5	1341,5	18
Bride du milieu	19300	1215,5	1385,5	2×90
R6	18050	1268	1388	18
R5	15025	1309	1429	18
R4	12000	1350	1470	18
R3	8975	1390,5	1510,5	18
R2	5950	1431,5	1551,5	18
R1	2650	1476	1596	18
Bride inférieure	0	1460	1820	70

Le mât a une forme tubulaire, avec un rayon  $R_m$  qui varie linéairement entre 1,65 mètre en bas et 1,05 mètre en haut, à 44,075 mètres du sol. Les épaisseurs des tôles externes sont données par le Tableau 7.1.

Le Tableau 7.2 fournit les données géométriques des anneaux raidisseurs et des brides qui se trouvent à l'intérieur du mât, soudés aux tôles externes.

### 7.3 Données du matériau du mât

Le mât analysé dans ce chapitre est fait en acier S355. Selon Jesus et al. (2012) cet acier a une limite d'élasticité  $S_{ys}$  de 355 MPa et une résistance à traction  $S_u$  qui peut varier entre 470 et 630 MPa. Son coefficient de résistance à la fatigue  $\sigma'_f$  est de  $952,20 \cdot 10^6$  Pa et son exposant de résistance à la fatigue  $b$  est égale à  $-0,0890$  (voir Équation (5.6)). L'application de l'Équation (5.8) donne  $A = 100,584$  et  $B = 11,236$  (contraintes en Pascals).

Le module de Young de cet acier est de 208 GPa (Stišević et al., 2011) et sa densité est de  $7850 \text{ kg/m}^3$  (Hayward et al., 2011).

Selon Gere & Goodno (2009) la relation entre le module de cisaillement et le module de Young est donnée par :

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (7.2)$$

En considérant un coefficient de Poisson  $\nu = 0,3$ , on obtient  $G = 80 \cdot 10^9$  Pa.

Les données du Tableau 7.3 permettent l'application de la loi de Paris (Équation (6.29)), en considérant l'acier S355. Ces données ont été évaluées par Jesus et al. (2012), à partir des essais de propagation de fissures.

D'après Purkiss (1996), l'acier européen S355 équivaut à l'acier américain ASTM A572 Grade 50. Selon Stephens et al. (1982), la ténacité à la rupture  $K_{Ic}$  associée à une fissure dans une tôle de 8,3 mm d'épaisseur en acier A572 Grade 50 est de  $123 \cdot 10^6 \text{ Pa}\sqrt{\text{m}}$  à une température de  $-45^\circ\text{C}$  et de  $128 \cdot 10^6 \text{ Pa}\sqrt{\text{m}}$  à  $+25^\circ\text{C}$ . L'application de l'Équation (6.27) donne  $K_{Ic} = 46,5 \cdot 10^6 \text{ Pa}\sqrt{\text{m}}$  pour  $T = -45^\circ\text{C}$  et  $K_{Ic} = 47,2 \cdot 10^6 \text{ Pa}\sqrt{\text{m}}$  pour  $T = +25^\circ\text{C}$ . Ces résultats permettent de tracer les courbes montrées dans la Figure 7.4.

L'application de l'Équation (6.28) permet de conclure que la tôle se trouvera en parfait état de déformation plane si  $t > 44$  mm.

Tableau 7.3 – Coefficients et exposants de Paris de l’acier S355, en fonction du rapport de charge (Jesus et al., 2012).

$R_s$	$C$ [ $\text{Pa}^{-n}\text{m}^{1-n/2}$ ]	$n$
0,0	$2,4170 \cdot 10^{-34}$	3,5622
0,25	$4,8399 \cdot 10^{-35}$	3,7159
0,50	$2,5686 \cdot 10^{-36}$	3,8907
0,75	$1,4069 \cdot 10^{-31}$	3,2328

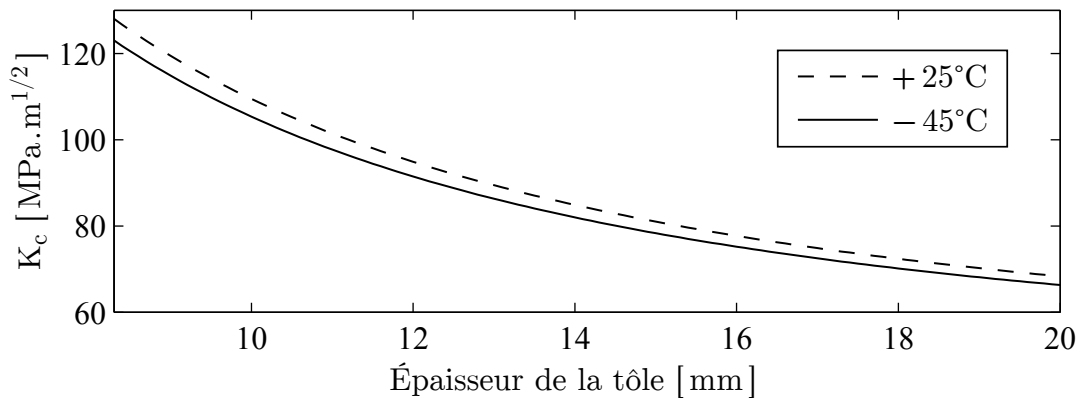


Figure 7.4 – Ténacité à la rupture  $K_c$  en fonction de l’épaisseur  $t$  d’une tôle en acier A572 Grade 50.

## 7.4 Modélisation des chargements

Cette section décrit les chargements que le mât modélisé dans cette thèse doit supporter. Ces chargements sont :

1. le poids total de tous les composants mis son sommet (65 tonnes) ;
2. son propre poids ;
3. la pression du vent, distribuée autour de sa circonférence ;
4. la force axiale du rotor, concentrée sur le sommet du mât, dans la direction horizontale.

Deux modèles différents du mât décrit dans la Section 7.2 ont été créés pour les travaux de cette thèse : un modèle d’éléments finis de coque en trois dimensions sur Ansys et un modèle d’éléments finis de poutre en deux dimensions sur Matlab.

Le modèle de poutre a été employé seulement pour l’évaluation de la réceptance directe associée à la force axiale du rotor.

Le modèle de coque peut fournir des résultats plus précis des contraintes associées au poids et à la pression distribuée. La meilleure manière d’évaluer les contraintes dues au



poids est en indiquant au logiciel la valeur et la direction de l'accélération de la gravité. Puisqu'il faut évaluer les fréquences naturelles et les modes de vibration, la densité de la bride supérieure est modifiée en sorte que le poids de 65 tonnes puisse être considéré.

Les chargements aérodynamiques sont décrits ci-dessous.

### 7.4.1 Chargement distribué autour du mât

Une courbe du coefficient de pression autour d'un cylindre en fonction de la position angulaire par rapport au point de stagnation est généralement bien représentée par une série de sinus comme celle de l'Équation (7.3) (Greiner, 1998) :

$$c_p(\xi) = \sum_{i=1}^m a_i \sin(b_i \xi + c_i) \quad (7.3)$$

Les coefficients  $a_i$  et  $b_i$  ne dépendent pas de l'unité choisie pour l'angle  $\xi$ . Le Tableau 7.4 donne les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  pour la courbe correspondante à un nombre de Reynolds de 140 000 dans la Figure 3.2. L'ajustement a été fait à l'aide du logiciel Matlab.

Tableau 7.4 – Coefficients  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  de l'Équation 7.3, valables pour un nombre de Reynolds de 140 000, dans l'intervalle  $0 \leq \xi \leq 180^\circ$ .

	$a_i$	$b_i$	$c_i$ [degrés]
$i = 1$	1,2540	0,8666	150,9744
$i = 2$	0,2417	3,4390	69,7863
$i = 3$	0,0857	5,8140	-70,3019
$i = 4$	0,2460	2,4980	75,2294
$i = 5$	0,0342	9,1510	16,5528
$i = 6$	0,0088	11,8200	-172,7468
$i = 7$	0,0056	15,7300	-99,2363
$i = 8$	0,0078	12,8700	108,6328

Lorsque l'on utilise un logiciel d'éléments finis pour modéliser un mât cylindrique, il peut être convenable d'ajuster une équation polynomiale à la courbe de la pression dynamique  $p_{d,\infty}(z)$ . En réalité, cette pression est décrite par le carré du logarithme népérien de la hauteur  $z$  (voir les Équations (2.4) et (3.4)). Pour donner un exemple, lorsque  $u(z = 10 \text{ m}) = 20 \text{ m/s}$ , la pression dynamique  $p_{d,\infty}(z)$  pourrait être représentée approximativement par :

$$p_{d,\infty}(z) = 71,883 \cdot 10^{-9} z^7 - 12,497 \cdot 10^{-6} z^6 + 883,704 \cdot 10^{-6} z^5 - 32,712 \cdot 10^{-3} z^4 + 681,9 \cdot 10^{-3} z^3 - 8,128 z^2 + 59,48 z + 31 \text{ [Pa]} \quad (\text{Pour } z \leq 44 \text{ m}) \quad (7.4)$$

Trente polynômes comme celui de l'Équation (7.4) ont été trouvés pour réaliser les travaux de cette thèse. Chaque expression correspond à une valeur de vitesse du vent à dix mètres du sol. On a  $p_{d,\infty}(z)$  pour  $u(z = 10 \text{ m}) = 1, 2, 3, \dots, 30 \text{ m/s}$ .

En associant les Équations (7.3), (7.4) et (3.4), on obtient une expression mieux maîtrisée par les logiciels d'éléments finis pour décrire le chargement distribué  $p(z, \xi)$  autour du mât en forme de tube.

## 7.4.2 Force axiale du rotor

Le graphique de la Figure 7.5 montre le facteur de charge  $C_T$  d'un rotor en fonction de la vitesse du vent. Ce rotor correspond à une turbine capable de générer 1 Mégawatt de puissance maximale. La courbe peut être trouvée dans la base de données du logiciel connu sous le nom de WAsP (Wind Atlas Analysis and Application Program).

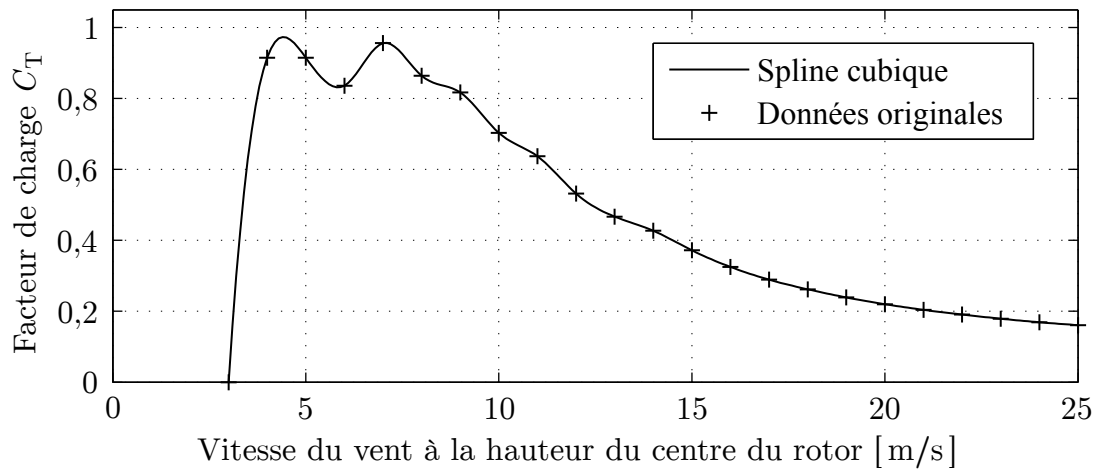


Figure 7.5 – Facteur de charge  $C_T$  du rotor en fonction de la vitesse du vent  $u_{\text{hub}}$ . La courbe correspond à une éolienne de 1,0 MW de puissance maximale. Elle peut être trouvée dans la base de données du logiciel WAsP.

En considérant l'aire du rotor  $A_{\text{rot}} = 2290 \text{ m}^2$  et le facteur de charge fourni par la Figure 7.5, l'Équation (3.10) permet l'obtention de la courbe de force axiale du rotor en fonction de la vitesse du vent montrée dans la Figure 7.6.

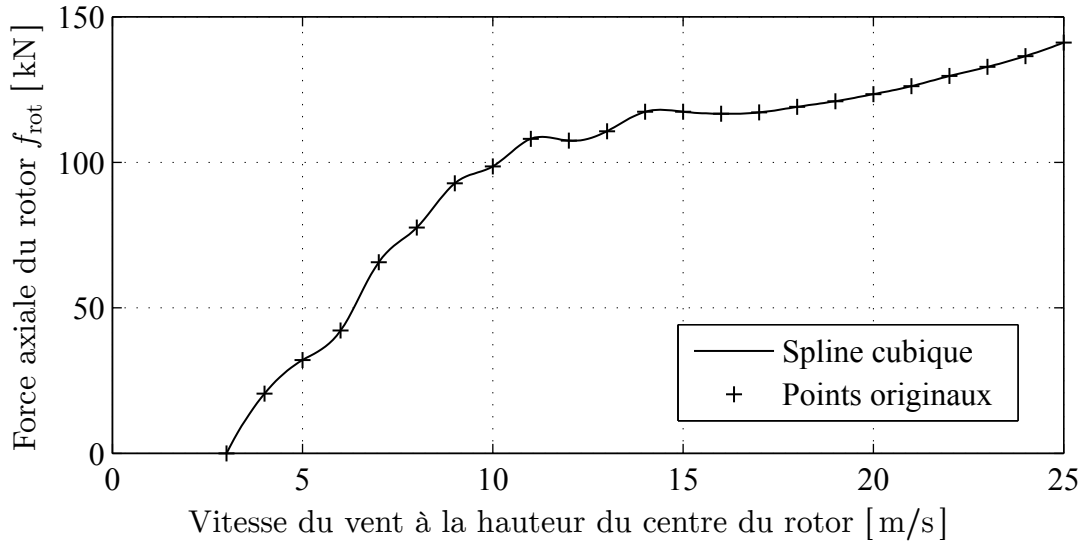


Figure 7.6 – Force axiale du rotor  $f_{rot}$  en fonction de la vitesse du vent  $u_{hub}$  (générateur de 1,0 MW de puissance maximale).

## 7.5 Composante statique de contrainte

Cette section aborde l'évaluation de la composante statique de contrainte évoquée dans l'Équation (4.74).

La Figure 7.7 montre l'évolution de la contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la coordonnée  $(z, \xi) = (0, 0)$  avec la vitesse du vent à la hauteur  $z = 44$  mètres. Les trois types de chargement ont été considérés séparément. Les courbes ont été obtenues à partir du modèle d'éléments finis de coque sur Ansys.

En observant la Figure 7.7, on peut conclure que le chargement le plus important pour l'analyse structurale d'un mât éolien est celui dû à la force axiale du rotor, associé à l'Équation (3.10). Le rotor ne tourne pas si  $u_{hub}$  est inférieur à 3,0 m/s (*cut-in speed*). Il est freiné à chaque fois que  $u_{hub}$  dévient supérieur à 25,0 m/s (*cut-out speed*).

La Figure 7.8 montre la somme des trois composantes de contraintes présentées dans la Figure 7.7. L'Équation (7.1) a été employée pour tracer cette courbe en fonction de la vitesse du vent à la hauteur  $z = 10$  mètres.

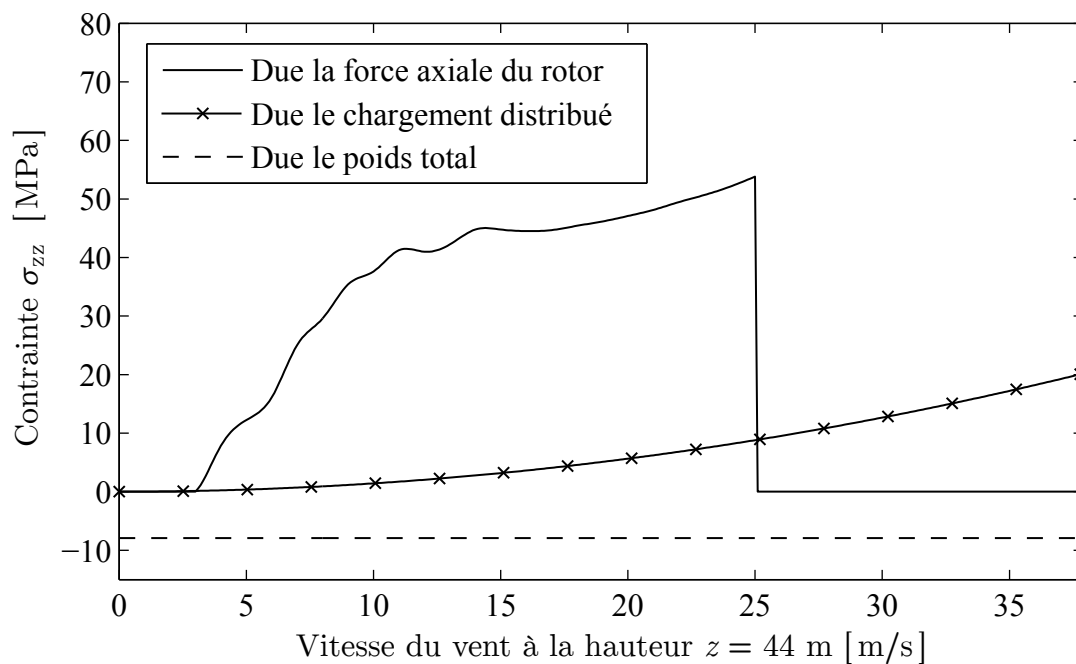


Figure 7.7 – Contributions individuelles pour la contrainte  $\sigma_{zz}$ , en fonction de la vitesse du vent à la hauteur  $z = 44$  m. Ces contraintes correspondent à l'élément fini de coque sur la coordonnée  $(z, \xi) = (0, 0)$ .

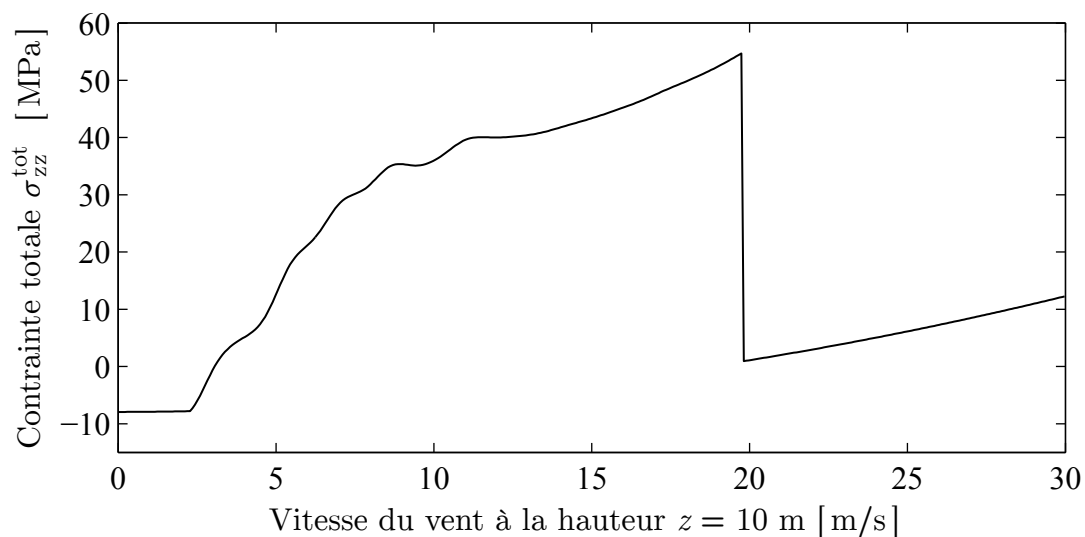


Figure 7.8 – Contrainte totale  $\sigma_{zz}^{tot}$  en fonction de la vitesse du vent à la hauteur  $z = 10$  mètres. Cette courbe est associée à la composante statique des déplacements.

Il est convenable de représenter le chargement distribué autour du mât comme une seule force appliquée horizontalement à la hauteur du centre du rotor. Si l'on appelle cette force  $f_{\text{mat}}$ , on peut écrire :

$$f_{\text{hub}} = f_{\text{rot}} + f_{\text{mat}} \quad (7.5)$$

où  $f_{\text{hub}}$  est la force horizontale totale perçue par le sommet du mât et  $f_{\text{rot}}$  est la force axiale du rotor.

Selon le modèle d'éléments finis sur Ansys, une force de 150 kN appliquée horizontalement sur sommet du mât génère une contrainte  $\sigma_{zz}$  de 57,2 MPa sur la coordonnée  $(z, \xi) = (0, 0)$ . Cela étant, on peut écrire :

$$f_{\text{mat}} = 2,6218 \cdot 10^{-3} \sigma_{zz} \quad (7.6)$$

où  $f_{\text{mat}}$  est en Newtons et  $\sigma_{zz}$  en Pascals.

Considérons la courbe correspondante au chargement distribué montrée dans la Figure 7.7. L'ajustement d'un polynôme du second degré à cette courbe résulte :

$$\sigma_{zz}^{\text{mat}} = 1,399 \cdot 10^4 u_{\text{hub}}^2 + 2347 u_{\text{hub}} \quad (7.7)$$

Le remplacement de l'Équation (7.7) dans l'Équation (7.6) donne :

$$f_{\text{mat}} = 36,679 u_{\text{hub}}^2 + 6,1534 u_{\text{hub}} \quad (7.8)$$

L'application de l'Équation (7.5) avec  $f_{\text{mat}}$  fourni par l'Équation (7.8) et  $f_{\text{rot}}$  fourni par la Figure 7.6 permet l'obtention de  $f_{\text{hub}}$ , dont le graphique est montré dans la Figure 7.9.

L'ajustement d'un polynôme du troisième degré à la courbe de  $f_{\text{hub}}$  (Figure 7.9) donne :

$$f_{\text{hub}} \approx 34,96 u_{\text{hub}}^3 - 1814 u_{\text{hub}}^2 + 3,378 \cdot 10^4 u_{\text{hub}} - 9,12 \cdot 10^4 \quad (7.9)$$

Ce polynôme est valable pour  $3,3 \leq u_{\text{hub}} \leq 25,0$  m/s.

L'Équation (4.67) associée à l'Équation (7.9) permet d'écrire :

$$\mathcal{F}_{\text{hub}}(n) = \left( \frac{\partial f_{\text{hub}}}{\partial u_{\text{hub}}} \right)^2 \mathcal{U}_{\text{hub}}(n) \approx (104,88 u_{\text{hub}}^2 - 3628 u_{\text{hub}} + 3,378 \cdot 10^4)^2 \mathcal{U}_{\text{hub}}(n) \quad (7.10)$$

L'Équation (7.10) représente une approximation de la fonction DSP de  $f_{\text{hub}}$ . Une manière plus sophistiquée de l'évaluer sera discutée dans la Section 7.6.

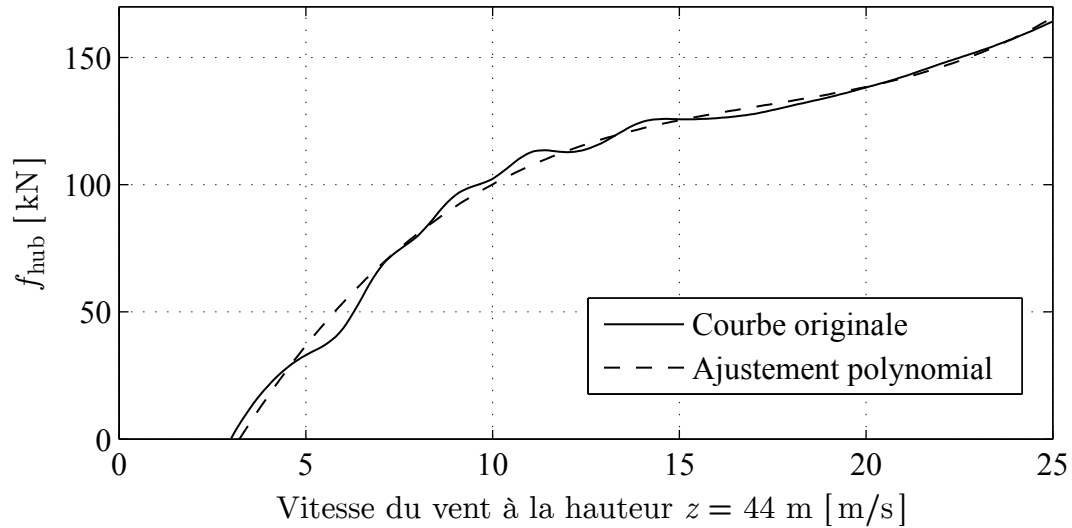


Figure 7.9 – Force horizontale équivalente  $f_{hub}$ , appliquée sur le sommet du mât, en fonction de la vitesse du vent à la hauteur  $z = 44$  mètres.

## 7.6 Estimation spectrale de la force sur le mât

Après la génération du signal de vitesse du vent et l'application de l'Équation (7.5), il faut obtenir  $\mathcal{F}_{hub}$ , la DSP de la force  $f_{hub}$ . Cela a été fait à l'aide d'un programme écrit pour le logiciel Matlab. Ce programme utilise la commande « pmtm », qui applique la méthode Thomson multitaper d'estimation spectrale. Cette commande a la forme suivante :

```
[ Fhub, n_vector ] = pmtm(signal_fhub, NW, nfft, nech, 'onesided')
```

« Fhub » est le vecteur qui représente la DSP de la force  $f_{hub}$  et « n\_vector » est un vecteur contenant les fréquences en Hertz, associées à « Fhub ».

« NW » est le produit de largeur de bande temporelle (*time-bandwidth product*). Selon Lessard (2006), une faible valeur de « NW » indique que le signal est simple. Une valeur de « NW » importante indique que le signal a une structure complexe et un grand contenu d'information. Sa valeur par défaut sur Matlab est de 4. Dans cette thèse, on a adopté  $NW = 10$ .

On souhaite que  $\mathcal{F}_{hub}$  soit valable dans l'intervalle de fréquences entre 1/3600 et 1,6 Hertz. Dans ce cas, il faut synthétiser un signal de vitesse du vent en considérant sa DSP strictement dans ce même intervalle de fréquences entre 1/3600 et 1,6 Hertz.

« nech » est la fréquence d'échantillonnage du signal. La méthode Thomson multitaper permet l'estimation spectrale jusqu'à la fréquence  $n_{ech}/2$ . Pour cette raison, il faut que le signal synthétisé de vitesse du vent ait une fréquence d'échantillonnage  $n_{ech} = 3,2$  Hertz (même si ce signal ne contient pas l'information de la DSP correspondante à l'intervalle de fréquences entre 1,6 et 3,2 Hertz).

« nfft » est le nombre de points dans la transformation de Fourier discrète. Le nombre de points dans le signal doit être supérieur à « nfft ». En choisissant  $nfft = 10^6$  et  $n_{ech} = 3,2$  Hertz, il est convenable que le signal ait une durée de 87 heures au minimum.

La DSP de la vitesse du vent dépend de sa vitesse moyenne (Équation (2.51b)). 181 valeurs possibles de vitesse moyenne du vent à la hauteur  $z = 10$  mètres ont été considérées :  $\bar{u}(z = 10) = 2,0 ; 2,1 ; \dots ; 19,9 ; 20,0$  m/s. Ce vecteur de vitesses a été corrigé pour prendre en compte la vitesse du vent à la hauteur du centre du rotor.

Après chacune des 181 exécutions de la commande « pmtm », le programme exécute la commande « smooth » :

$$\boxed{Fhub\_new = smooth(Fhub, span)}$$

« span » est le nombre de points employés pour évaluer chaque entrée dans le vecteur « Fhub\_new ». On a adopté  $span = 200$ . La taille du vecteur ne change pas avec l'application de la commande « smooth ».

Afin de garder les résultats de l'estimation spectrale, une courbe Gaussienne de huit termes a été ajustée au logarithme de « Fhub\_new ». La fonction correspondante à cette courbe est :

$$\log(\mathcal{F}_{hub}) = \sum_{i=1}^{i=8} a_i \exp \left[ - \left( \frac{n - b_i}{c_i} \right)^2 \right] \quad (7.11)$$

Cette ajustement a été fait 181 fois et les coefficients ont été sauvegardés. Le Tableau 7.5 montre les coefficients de l'Équation (7.11), pour les vitesses du vent  $\bar{u}(z = 10) = 6,0 ; 9,0 ; 12,6 ; 15,0$  et  $18,0$  m/s.

Afin de vérifier l'efficacité de la technique d'estimation spectrale utilisée dans cette section, elle a été employée pour évaluer la DSP de la vitesse du vent, lorsque celle-ci est de  $15,3$  m/s à 44 mètres de hauteur. La Figure 7.10 compare la courbe estimée avec la courbe originale de  $\mathcal{U}$ , fournie par l'Équation (2.59). L'efficacité de la technique de génération de la vitesse du vent abordée dans la Section 2.6 est également constatée par la même figure.

La Figure 7.11 compare une courbe de  $\mathcal{F}_{hub}$  obtenue par la méthode abordée dans cette section avec celle fournie par l'Équation (7.10). La vitesse du vent considérée est de  $12$  m/s à hauteur  $z = 10$  mètres, ce qui correspond à une vitesse de  $15,3$  m/s à la hauteur  $z = 44$  mètres. On peut conclure que l'Équation (7.10) présente une précision raisonnable. Les graphiques de la Figure 7.10 suggèrent que la méthode Thomson Multitaper est capable de fournir une estimation spectrale parfaite (à condition que le signal analysé ait une bonne qualité). Par conséquent, la méthode Thomson Multitaper reste préférable à l'Équation (7.10).

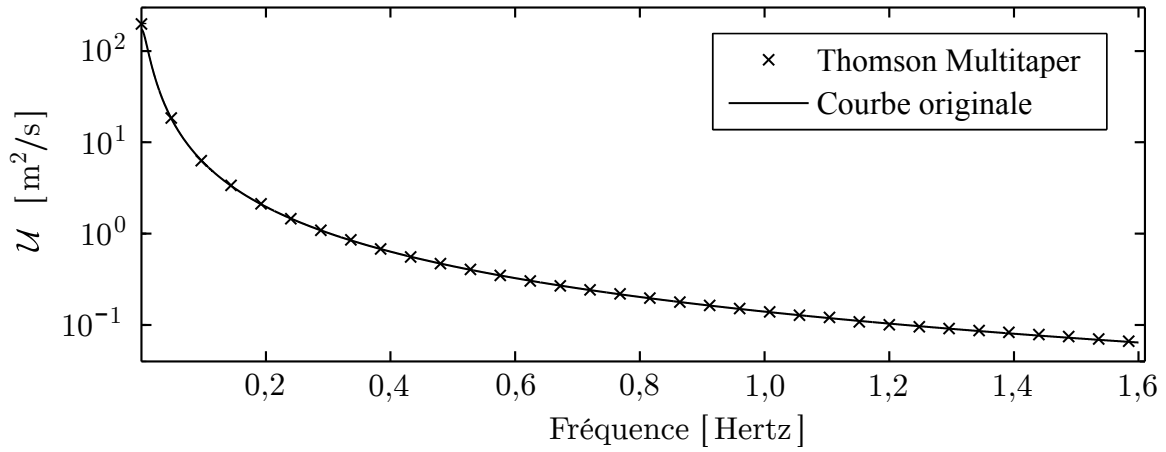


Figure 7.10 – Comparaison entre  $\mathcal{U}$  estimé par la méthode Thomson Multitaper et  $\mathcal{U}$  fourni par l'Équation (2.59). Les courbes correspondent à  $u(z = 44 \text{ m}) = 15,3 \text{ m/s}$ .

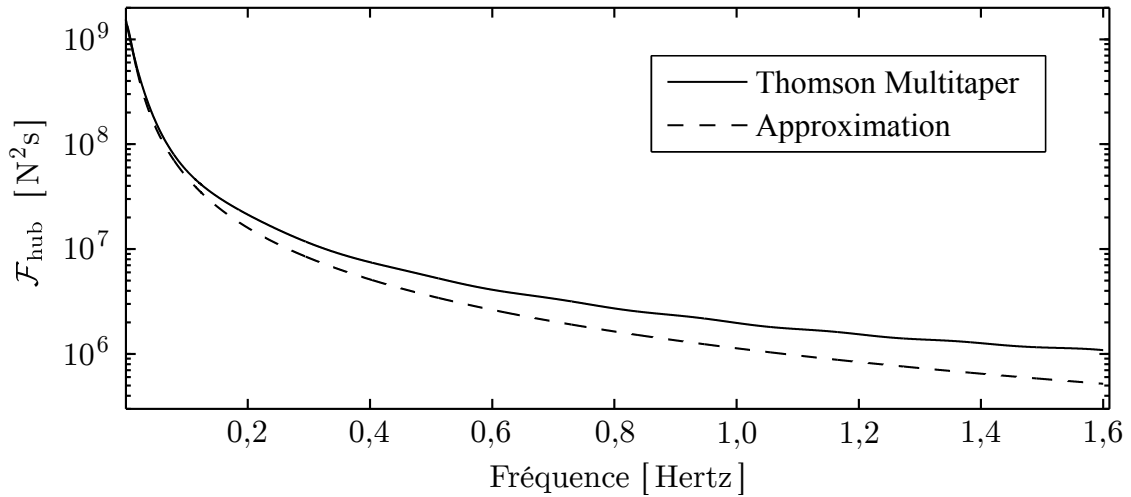


Figure 7.11 – Comparaison entre  $\mathcal{F}_{\text{hub}}$  obtenu par la méthode Thomson multitaper et par l'Équation (7.10), en considérant  $u(z = 44 \text{ m}) = 15,3 \text{ m/s}$ .

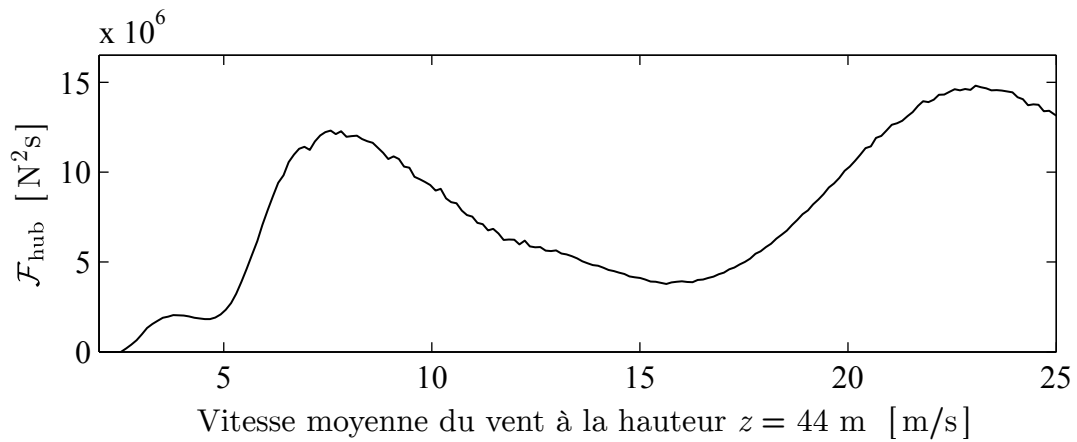


Figure 7.12 –  $\mathcal{F}_{\text{hub}}$  en fonction de la vitesse moyenne du vent à la hauteur  $z = 44$  mètres, en considérant une fréquence fixe de 0,62 Hertz.



Tableau 7.5 – Coefficients de l'Équation (7.11), valables dans l'intervalle de fréquences  $1/3600 \leq n \leq 1,6$  Hertz.

$\bar{u}(z = 44)$	7,7	11,5	16,0	19,0	22,8
$\bar{u}(z = 10)$	6,0	9,0	12,6	15,0	18,0
$a_1$	$1,753 \cdot 10^{12}$	$1,37 \cdot 10^{12}$	$4,53 \cdot 10^{12}$	$42,689 \cdot 10^9$	$9,375 \cdot 10^6$
$b_1$	-2,375258	-2,198502	-7,667688	-2,729824	-2,143207
$c_1$	0,451782	0,418144	1,464787	0,555556	0,540831
$a_2$	8,795924	9,547719	2,237312	8,049787	8,11057
$b_2$	-0,348434	-0,591663	0,10027	-0,150641	-0,142503
$c_2$	1,245955	1,534095	0,211661	0,959834	1,202508
$a_3$	0,147851	0,049762	1,222122	0,567914	0,22686
$b_3$	0,459777	0,376283	0,312952	0,553762	0,544339
$c_3$	0,176206	0,170274	0,219015	0,247191	0,169271
$a_4$	0,471016	0,983039	5,13309	0,797766	0,263716
$b_4$	0,694184	0,688741	0,555131	0,829754	0,720027
$c_4$	0,211891	0,335125	0,48345	0,23085	0,142907
$a_5$	0,404123	0,759499	0,682194	0,432712	0,259715
$b_5$	0,923336	1,025716	1,029166	1,045037	0,894612
$c_5$	0,171735	0,263358	0,239105	0,173482	0,163532
$a_6$	0,250485	0,086301	0,11127	0,198509	0,027276
$b_6$	1,102841	1,180524	1,165091	1,18328	1,082416
$c_6$	0,133813	0,155208	0,147685	0,131043	0,083709
$a_7$	0,167016	0,339885	5,937649	0,175934	0,509702
$b_7$	1,271213	1,335989	1,591078	1,319535	1,106927
$c_7$	0,144799	0,215467	0,784494	0,138418	0,327494
$a_8$	5,741267	5,286994	0,231752	5,954801	5,750484
$b_8$	1,71468	1,828769	1,307752	1,628927	1,814802
$c_8$	1,010901	0,849938	0,167282	0,920856	0,985284

Lorsque  $\bar{u}_{\text{hub}}$  (la vitesse moyenne du vent à la hauteur du centre du rotor) est proche de la vitesse de *cut-out* du rotor (25,0 m/s), l'Équation (7.10) surestime la DSP de  $f_{\text{hub}}$ , puisqu'elle ne prend pas en compte le freinage du rotor. Cela représente l'une des avantages de la méthode d'estimation spectrale de  $f_{\text{hub}}$  utilisée dans cette section.

La Figure 7.12 montre la variation de  $\mathcal{F}_{\text{hub}}$  en fonction de la vitesse moyenne du vent à la hauteur  $z = 44$  mètres, en considérant une fréquence fixe de 0,62 Hertz. Ce graphique considère  $\mathcal{F}_{\text{hub}}$  estimé par la méthode Thomson Multitaper.

## 7.7 Analyse dynamique du mât

Les fréquences naturelles et les modes de vibration du mât ont été évalués de deux manières différentes :

1. Au moyen d'un programme écrit pour Matlab qui emploie l'élément fini de poutre d'Euler-Bernoulli ou de Timoshenko (l'utilisateur peut choisir) ;
2. Au moyen d'un modèle d'éléments finis de coque en trois dimensions sur Ansys.

Le modèle de poutre emploie 41 éléments finis dont les dimensions sont montrées dans le Tableau 7.7.

Le poids total de tous les composants mis sur sommet du mât est de 65 000 kg. Cette valeur est ajoutée à une entrée qui se trouve dans la diagonale de la matrice de masse de la structure. Cette entrée correspond au degré de liberté de translation du second nœud du 41ème élément fini.

Le Tableau 7.6 présente les fréquences naturelles évaluées à partir du modèle d'éléments finis de poutre et du modèle d'éléments finis de coque. Le tableau inclut aussi le résultat de Lavassas et al. (2003).

Tableau 7.6 – Fréquences naturelles de vibration du mât (Hertz).

$r$	1	2
Modèle de coque	0,6199	6,3533
Poutre de Timoshenko	0,6173	6,3522
Poutre d'Euler-Bernoulli	0,6211	6,5792
Lavassas et al. (2003)	0,60	-

La Figure 7.13 montre le premier et deuxième modes de vibration du mât selon le modèle de poutre de Timoshenko.

Soit  $b$  le numéro du degré de liberté où la force du rotor est appliquée. En considérant l'Équation (4.62), la réceptance directe  $\bar{\alpha}_{bb}$  peut être exprimée de la manière suivante :

$$\bar{\alpha}_{bb}(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{\check{\phi}_{br}^2}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(\eta\omega_r^2)} = \sum_{r=1}^N \frac{\phi_{br}^2/M_r}{(\omega_r^2 - \omega^2) + i(\eta\omega_r^2)} \quad (7.12)$$

Dans le cas du mât analysé dans ce chapitre, on constate que les deux premiers termes de la somme suffisent pour décrire la réceptance  $\bar{\alpha}_{bb}$  au moins jusqu'à la fréquence de 8,0 Hz.

Dans le modèle de poutre de Timoshenko, on a  $\check{\phi}_{b1} = -3,74579 \cdot 10^{-3}$  et  $\check{\phi}_{b2} = -820,2497 \cdot 10^{-6}$ . L'emploi de ces valeurs dans l'Équation (7.12), avec  $\eta = 0,01$ , permet l'obtention du graphique de la Figure 7.14. On peut vérifier que  $|\bar{\alpha}_{bb}| = 933,156 \cdot 10^{-9}$

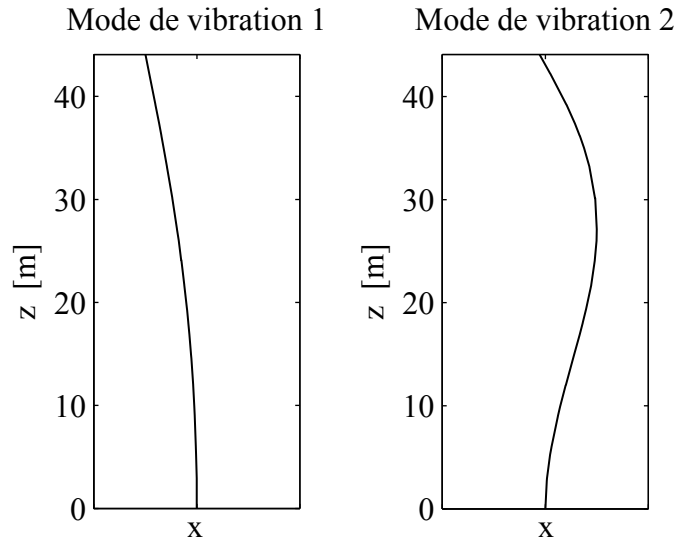


Figure 7.13 – Premier et deuxième modes de vibration du mât, selon le modèle de poutre de Timoshenko.

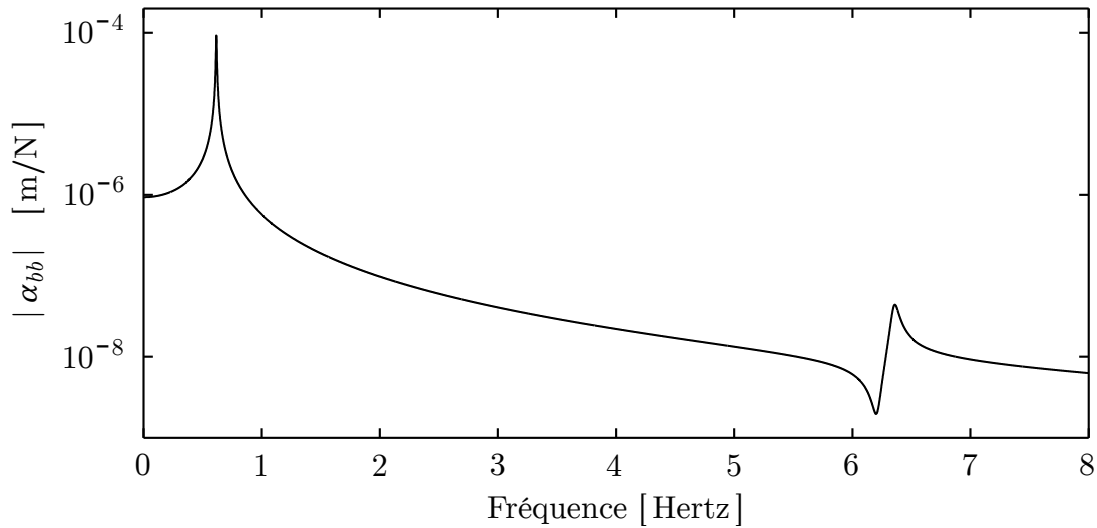


Figure 7.14 – Module de la réceptance directe correspondant au degré de liberté où la force axiale du rotor est appliquée, en considérant  $\eta = 0,01$ .

m/N pour la fréquence  $n = 0$  (réponse statique). On observe que  $|\bar{\alpha}_{bb}| > 933,156 \cdot 10^{-9}$  m/N jusqu'à la fréquence de 0,87 Hz, en raison de la résonance liée au premier mode de vibration.

Pour les fréquences  $n$  supérieures à 0,87 Hz, la valeur de  $|\bar{\alpha}_{bb}|$  commence à diminuer, bien qu'elle présente des variations en raison des autres modes de vibration. Cette diminution de  $|\bar{\alpha}_{bb}|$  en fonction de l'augmentation de la fréquence se vérifie aussi dans l'équation suivante (Bishop & Johnson, 1960 ; Kiefer, 2004) :

$$|\alpha_{11}| = \left| \frac{\sin(\lambda L) \cosh(\lambda L) - \cos(\lambda L) \sinh(\lambda L)}{\lambda^3 EI [\cos(\lambda L) \cosh(\lambda L) - 1]} \right| \quad (7.13a)$$

$$\lambda^4 = \omega^2 \left( \frac{\rho_m A}{EI} \right) \quad (7.13b)$$

L'Équation (7.13a) fournit la réceptance directe d'une force transversale appliquée à l'extrémité d'une poutre encastree-libre. Cette force obéit à la fonction  $f_1 = F_1 \sin(\omega t)$ . On voit que le module de la réceptance  $\alpha_{11}$  est inversement proportionnelle à  $\omega^{3/2}$ .

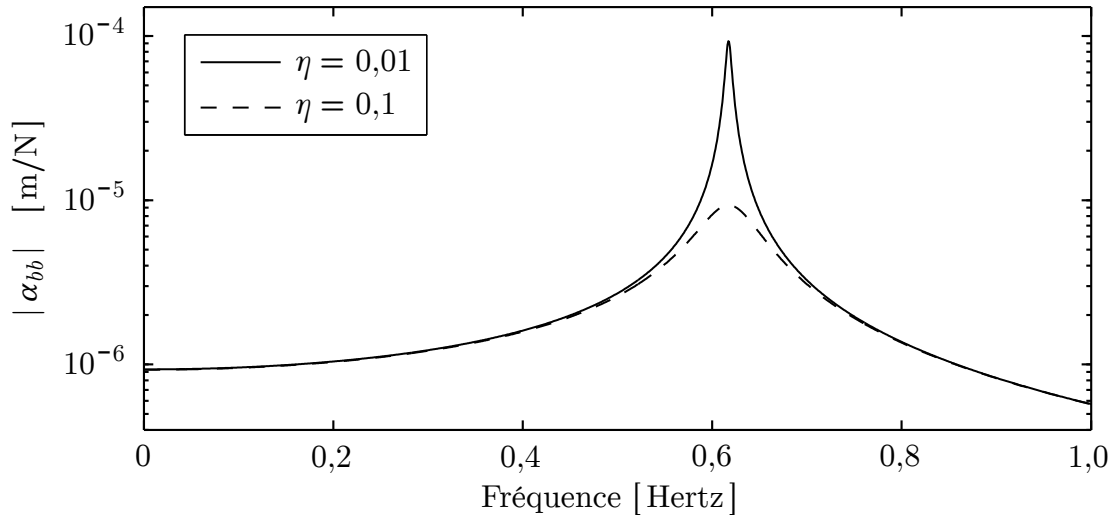


Figure 7.15 – Module de la réceptance directe correspondant au degré de liberté où la force axiale du rotor est appliquée.

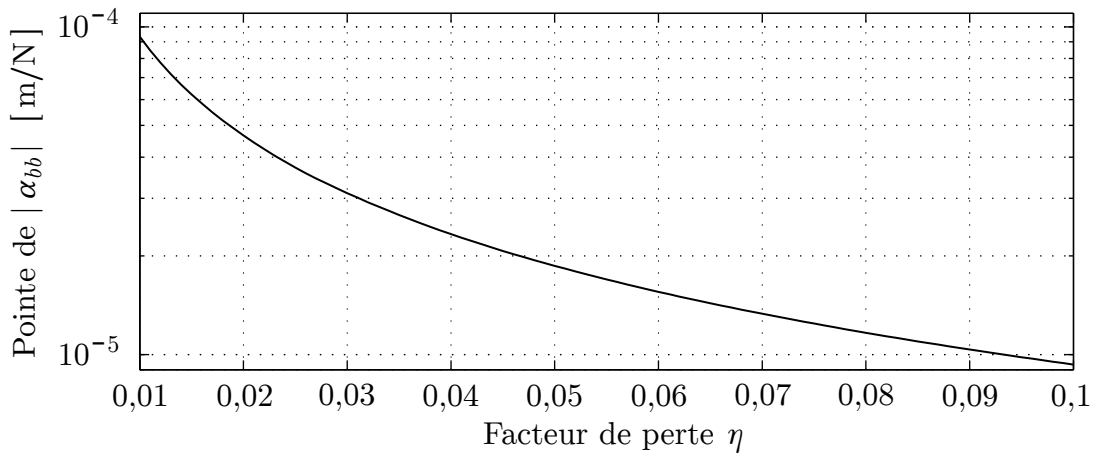


Figure 7.16 – Valeur de pointe du module de la réceptance directe (dans l'intervalle  $0 < n < 1,0$  Hz) en fonction de  $\eta$ .

La Figure 7.15 montre le module de la réceptance  $\bar{\alpha}_{bb}$  dans l'intervalle de fréquences d'excitation qui produit une amplitude de déplacement plus important. Dans cette figure, deux facteurs de perte sont considérés :  $\eta = 0,01$  et  $\eta = 0,1$ .

La Figure 7.16 montre la valeur de pointe du graphique de la Figure 7.15, en fonction du facteur de perte  $\eta$ . Ces deux paramètres n'ont pas une relation linéaire. L'effet de

l'amortissement est plus sensible à une variation de la valeur de  $\eta$  lorsque cette valeur est petite.

L'Équation (4.70) permet d'écrire que la DSP du déplacement horizontal du centre du rotor est donnée par :

$$\mathcal{D}_{\text{hub}}(\omega) = |\bar{\alpha}_{bb}(\omega)|^2 \mathcal{F}_{\text{hub}}(\omega) \quad (7.14)$$

où  $\mathcal{F}_{\text{hub}}$  peut être évalué par l'Équation (7.11).

Le graphique de la Figure 7.17 montre  $\mathcal{D}_{\text{hub}}$  en fonction de la fréquence et de la vitesse moyenne du vent à la hauteur  $z = 44$  mètres. La valeur de  $\eta$  est de 0,02. Comme déjà suggéré par la Figure 7.12, le déplacement dynamique est plus petit lorsque  $\bar{u}_{44} = 16,0$  m/s.

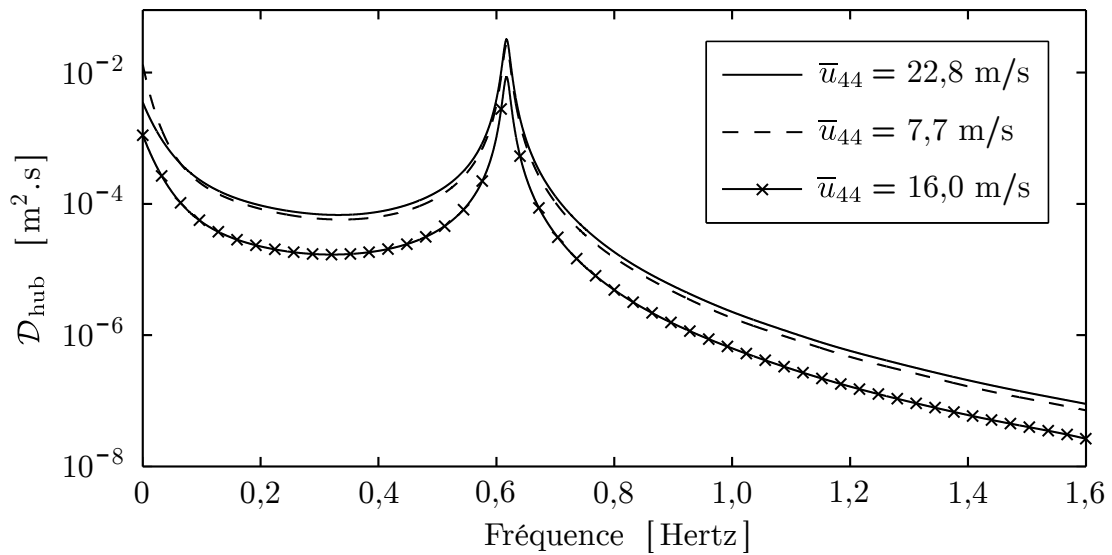


Figure 7.17 – DSP du déplacement horizontal du centre du rotor, avec  $\eta = 0,02$ .

Tableau 7.7 – Données des éléments finis de poutre (toutes les dimensions en mm).

Numéro de l'élément	Hauteur $z$ du 2ème nœud	Longueur $L$ de l'élément	Rayon interne	Rayon externe	Composant structurel
1	70	70	1460	1820	Bride inférieur
2	2641	2571	1613,5	1631,5	Tôle externe
3	2659	18	1476	1614	R1
4	2935	276	1593,9	1611,9	Tôle externe
5	5260	2325	1577,2	1594,2	Tôle externe
6	5941	681	1557,8	1573,8	Tôle externe
7	5959	18	1431,5	1567,5	R2
8	8966	3007	1532,4	1548,4	Tôle externe
9	8984	18	1390,5	1526,5	R3
10	9910	926	1505,4	1521,4	Tôle externe
11	11991	2081	1485,9	1500,9	Tôle externe
12	12009	18	1350	1485	R4
13	14560	2551	1454,2	1469,2	Tôle externe
14	15016	456	1434,7	1448,7	Tôle externe
15	15034	18	1309	1443	R5
16	16885	1851	1418,7	1432,7	Tôle externe
17	18041	1156	1399,3	1412,3	Tôle externe
18	18059	18	1268	1401	R6
19	19210	1151	1383,3	1396,3	Tôle externe
20	19390	180	1215,5	1398,5	Bride du milieu
21	21691	2301	1357,4	1370,4	Tôle externe
22	21709	18	1221,5	1354,5	R7
23	24091	2382	1325,3	1338,3	Tôle externe
24	24109	18	1189	1322	R8
25	26010	1901	1295,9	1308,9	Tôle externe
26	27116	1106	1276,4	1288,4	Tôle externe
27	27134	18	1148	1280	R9
28	30141	3007	1248,2	1260,2	Tôle externe
29	30159	18	1107	1239	R10
30	33166	3007	1207,0	1219,0	Tôle externe
31	33184	18	1066,5	1198,5	R11
32	35005	1821	1173,9	1185,9	Tôle externe
33	36191	1186	1154,4	1165,4	Tôle externe
34	36209	18	1025,5	1156,5	R12
35	37380	1171	1138,1	1149,1	Tôle externe
36	39216	1836	1118,6	1128,6	Tôle externe
37	39234	18	984,5	1114,5	R13
38	42241	3007	1085,4	1095,4	Tôle externe
39	42259	18	943,5	1073,5	R14
40	44005	1746	1052,8	1062,8	Tôle externe
41	44075	70	930	1060	Bride supérieur

### 7.7.1 Contrainte due à la composante dynamique de déplacement

Selon la Figure 7.6, lorsque la vitesse du vent à la hauteur du centre du rotor est de 25 m/s, la force horizontale que le rotor exerce sur le mât est de 141,2 kN. Comme déjà mentionné, la Figure 7.14 permet d'affirmer que  $|\bar{\alpha}_{bb}| = 933,156 \cdot 10^{-9}$  m/N pour la fréquence  $n = 0$ . Cette valeur multipliée par 141,2 kN donne un déplacement  $d_{\text{hub}}$  égal à 131,8 millimètres.

Considérons la courbe correspondante à la force axiale du rotor dans la Figure 7.7. Lorsque  $u_{\text{hub}} = 25$  m/s, cette courbe donne  $\sigma_{zz} = 53,84$  MPa.

Soit  $\mathcal{S}$  la fonction DSP de la contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la coordonnée  $(z, \xi) = (0, 0)$ . À partir de l'Équation (4.67), on peut déduire que la relation entre  $\mathcal{D}_{\text{hub}}$  et  $\mathcal{S}$  est donnée par :

$$\mathcal{S} = \left( \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial d_{\text{hub}}} \right)^2 \mathcal{D}_{\text{hub}} = \left( \frac{53,84 \cdot 10^6}{131,762 \cdot 10^{-3}} \right)^2 \mathcal{D}_{\text{hub}} = 166,97 \cdot 10^{15} \mathcal{D}_{\text{hub}} \quad (7.15)$$

où  $\mathcal{D}_{\text{hub}}$  est donné par l'Équation (7.14).

L'Équation (2.72) peut être employée pour synthétiser un signal de contraintes, en remplaçant  $u$  par  $\sigma$  et  $\mathcal{U}$  par  $\mathcal{S}$  :

$$\sigma(t) = \sigma_{\text{st}} + \sum_{j=1}^{M-1} \sqrt{[\mathcal{S}(n_j) + \mathcal{S}(n_{j+1})] (n_{j+1} - n_j)} \cos(2\pi n_j t + \phi_j) \quad (7.16)$$

Les termes harmoniques de l'Équation (7.16) correspondent à  $\sigma_{\text{dyn}}$  dans l'Équation (4.74). La contrainte correspondante à la composante statique de déplacement est fournie par la Figure 7.8 en fonction de la vitesse moyenne du vent sur une heure.

## 7.8 Analyse de fatigue

L'analyse de fatigue d'une structure éolienne peut être faite en suivant les étapes qui suivent :

1. Synthétiser (ou obtenir par d'autres moyens) un historique de vitesse du vent en fonction du temps. La génération du signal peut être faite en employant l'Équation (2.72).
2. Obtenir un historique du signal de la force du rotor en fonction du temps en employant l'Équation (3.10).
3. Obtenir  $\mathcal{F}$  (la fonction de densité spectrale de puissance de la force du rotor).
4. Appliquer l'Équation (4.70) pour obtenir la fonction de densité spectrale de puissance du déplacement horizontal du centre du rotor.
5. Employer l'Équation (4.68) pour évaluer la DSP de la contrainte.

6. Synthétiser un signal de contrainte et faire le comptage de cycles ou employer la méthode de Dirlik pour évaluer le paramètre d'endommagement  $D$ .

Dans cette thèse, le programme pour faire le comptage de cycles a été conçu pour le logiciel Matlab. Sur ce logiciel, la commande « findpeaks » permet l'obtention des points de maximum locaux dans un signal. La réflexion du signal par rapport à l'axe des abscisses, suivie de l'application de la commande « findpeaks », permet l'obtention des points de minimum locaux.

La séquence de commandes ci-dessous permet de traiter un signal, de façon qu'il ne contienne que les points de maximum et de minimum locaux.

```
[ maximum_values, index_maximum ] = findpeaks(stress_history);
[ minimum_values, index_minimum ] = findpeaks(-stress_history);
minimum_values = -minimum_values;
new_stress_history(index_maximum) = maximum_values;
new_stress_history(index_minimum) = minimum_values;
new_stress_history(new_stress_history==0) = [ ];
```

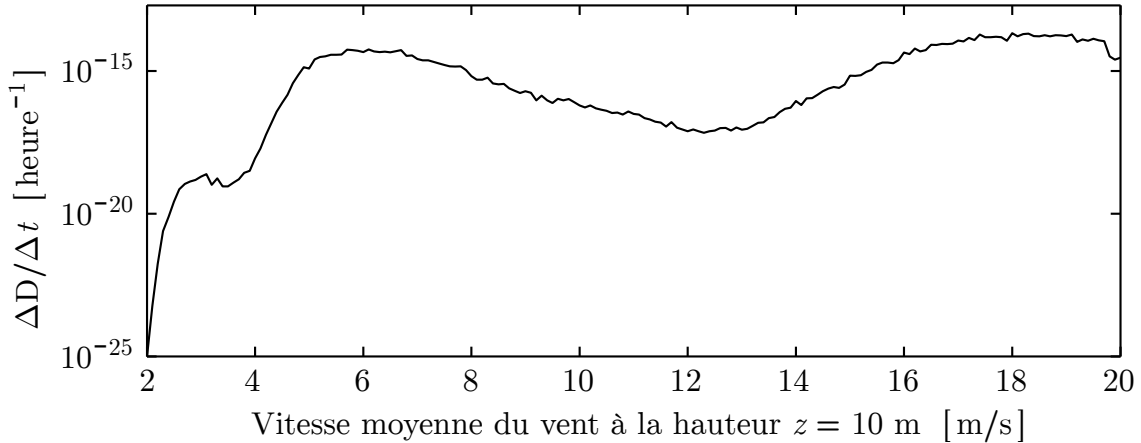


Figure 7.18 – Variation de l'endommagement sur la coordonnée  $(z, \xi) = (0, 0)$ , par heure de fonctionnement, en fonction de la vitesse du vent, avec  $\eta = 0,02$ .

Un historique de contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la coordonnée  $(z, \xi) = (0, 0)$ , avec une durée de 30 heures, a été synthétisé pour chaque valeur de vitesse du vent entre 2,0 et 20,0 m/s, à intervalles de 0,1 m/s. Ces vitesses correspondent à la hauteur  $z = 10$  mètres. Ensuite, le comptage de cycles a été réalisé. L'équation de Goodman (Équation (5.14)) a été employée pour considérer l'effet de la contrainte moyenne. A chaque fois qu'un cycle était compté, la loi de Miner (Équation (5.21)) était immédiatement appliquée, en considérant  $N_{f,i}$  évalué par la loi de Basquin (Équation (5.6)), avec les paramètres  $\sigma'_f$  et  $b$  fournis dans la Section 7.3.



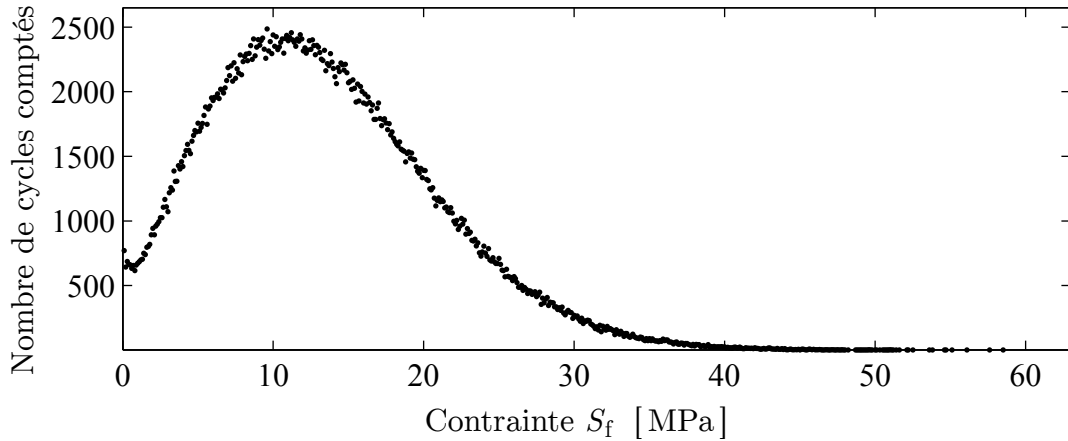


Figure 7.19 – Résultats du comptage de cycles de chargement sur la coordonnée  $(z, \xi) = (0, 0)$ , en considérant un historique de 200 heures, avec  $\bar{u}_{10} = 18,0$  m/s. Le facteur de perte considéré est  $\eta = 0,02$ .

La Figure 7.18 fournit la variation du paramètre d'endommagement correspondante à une heure de fonctionnement de l'éolienne. Cet endommagement est évalué sur la coordonnée  $(z, \xi) = (0, 0)$ . Le facteur de perte considéré est  $\eta = 0,02$ . L'axe des abscisses donne la vitesse moyenne du vent évaluée sur une heure à la hauteur  $z = 10$  mètres.

Considérons encore un signal de contrainte  $\sigma_{zz}$  sur la coordonnée  $(z, \xi) = (0, 0)$ . Ce signal a une durée de 200 heures. La vitesse moyenne du vent évaluée sur chaque période d'une heure à la hauteur  $z = 10$  mètres reste toujours égale à 18,0 m/s. La Figure 7.19 montre graphiquement le résultat du comptage de cycles de ce signal de contrainte. L'axe des abscisses fournit la contrainte  $S_f$  en MPa. Chaque point représente le résultat du comptage de cycles dans un intervalle de contrainte de 0,1 MPa. Autrement dit, ce graphique peut être vu comme un histogramme dont la largeur des barres vaut 0,1 MPa.

Un historique de contraintes équivalent à celui correspondant aux résultats de la Figure 7.19 (cette fois, avec une durée de 1000 heures) a présenté une valeur maximale de 108,6 MPa (bien au dessous de la limite d'élasticité du matériau).

En considérant l'Équation (5.5), il est possible d'affirmer que la limite d'endurance  $S_e$  de l'acier S355 vaut approximativement 235 MPa. Ulewicz et al. (2014) ont observé que deux de leurs éprouvettes en acier S355 ne se sont pas rompues après 10 millions cycles de chargement à une amplitude de chargement de 290 MPa. La Figure 7.19 montre que l'amplitude de chargement la plus grande a été de 58,5 MPa. Lorsque l'on compare cette valeur avec la limite d'endurance du matériau, il est possible de prédire que ce mât ne subira pas un endommagement considérable par fatigue. Le graphique de la Figure 7.18 mène à cette même conclusion. En termes d'ingénierie mécanique, ce mât a été conçu pour avoir une durée de vie infinie sous fatigue.

## 7.9 Analyse de propagation de fissure par la méthode bande d'écoulement (*strip-yield*)

### 7.9.1 Implémentation du programme

L'organigramme de la Figure 6.20 ne souligne pas le fait qu'il faut garder les données de déformation plastique tout au long de la zone plastique, même après chaque exécution de la boucle B. Autrement dit, bien que les coordonnées  $x_i$  et les largeurs  $w_i$  des éléments dans la zone plastique changent à chaque itération, les longueurs  $L_i$  doivent préserver les effets des chargements précédents. La littérature ne donne pas de détail sur comment cela doit être implémenté. Pour cette raison, l'organigramme représenté dans les Figures 7.20, 7.21 et 7.22 illustre en détail le fonctionnement du programme qui a été effectivement implémenté dans les travaux de cette thèse.

Le programme cherche à avoir toujours 30 éléments dans la zone plastique (c'est-à-dire,  $nzp = 30$ ). Les largeurs  $w_i$  de ces éléments sont données par  $w_i = \rho / (2nzp)$ . On doit rappeler ici que  $w_i$  représente la moitié de la largeur totale d'un élément (Figure 6.18).

Dans la Figure 7.21, on voit qu'à chaque fois que la boucle B est exécutée, le premier élément dans la zone plastique devient le dernier élément dans le sillage plastique. Autrement dit, l'élément  $i = 1$  devient l'élément  $i = ntel$ . Dans le même bloc du programme, on constate que l'élément  $i = 2$  devient l'élément  $i = 1$ . La même logique se poursuit pour tous les éléments dans la zone plastique. Le nombre d'éléments dans cette zone est temporairement  $nzp = 29$ . L'entrée de numéro 30 des vecteurs  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{x}$  peut être remplie avec n'importe quelle valeur pour l'instant. Afin de maintenir  $nzp = 30$ , le maillage dans la zone plastique est rétabli à chaque itération.

Le programme emploie une variable  $d_{\max}$  qui représente la valeur maximale que la longueur  $d$  a déjà atteint durant toute l'exécution de la simulation. C'est-à-dire, le programme distingue la région qui n'a jamais subi une déformation plastique ( $x > d_{\max}$ ) de la région qui a déjà été déformée plastiquement ( $x < d_{\max}$ ).

À chaque exécution de la boucle B, le programme évalue la taille  $\rho$  de la zone plastique due au chargement  $S_{\max}$  de l'itération actuelle. Ensuite, il compare  $d = a + \rho$  avec  $d_{\max}$  :

- Si  $d > d_{\max}$ , les longueurs des éléments dans la zone plastique sont réévaluées à l'aide de l'Équation (6.72).
- Si  $d < d_{\max}$ , la zone plastique est encore sous l'effet d'une surcharge appliquée dans une itération précédente. Dans ce cas, les longueurs des nouveaux éléments dans la zone plastique sont évaluées à partir des longueurs des éléments de l'itération précédente. Il est convenable de rappeler que les longueurs  $L_i$  sont une représentation discretisée de la fonction continue  $L(x)$ . On a 29 éléments dans la zone plastique, alors qu'on voudrait en avoir 30. Cela implique une modification

des coordonnées et des largeurs des éléments. Une interpolation est faite pour obtenir la longueur  $L_i$  de chaque nouveau élément dans la zone plastique.

Comme le montre le graphique de la Figure 6.19b, les éléments peuvent écouler en compression lorsque l'on applique le chargement minimum  $S_{\min}$ . L'élément  $j$  écoule en compression si  $\sigma_j < -\sigma_0$ . La Figure 7.23 montre l'organigramme correspondant au module pour réévaluer les longueurs des éléments après l'application de  $S_{\min}$ . Tel organigramme suit approximativement ce que suggère Daniewicz et al. (1994). Selon cet auteur, initialement on peut considérer que tous les éléments dans le sillage plastique sont en contact<sup>1</sup> lorsque l'on applique le chargement  $S_{\min}$ . Cette hypothèse permet l'application de l'Équation 6.63, avec  $S_{\min}$  à la place de  $S$ , en considérant  $V_i = L_i$  pour tout élément  $i$ . Puisque l'on a besoin d'évaluer le vecteur de contraintes  $\sigma$ , la notation employée dans l'Équation 6.66 sera plus convenable. La différence entre ce que suggère Daniewicz et al. (1994) et ce qui a été implémenté dans cette thèse est liée aux démarches après l'obtention du vecteur  $\sigma$ . Dans cette thèse, on suggère trouver la plus petite valeur dans le vecteur  $\sigma$ . Ensuite, on vérifie si l'élément correspondant à cette valeur a écoulé en compression. Si oui, on décrémente la longueur de cet élément de  $\Delta L = 1,0$  nanomètre. On répète ces démarches jusqu'au moment où l'on conclue qu'aucun élément n'a écoulé en compression. Afin de réduire le temps de calcul, il faut remarquer que le module correspondant à l'organigramme de la Figure 7.23 sera accédé uniquement pour l'application de  $S_{\min}^{\text{bef}}$  et  $S_{\min}^{\text{aft}}$  (non pas pour chaque  $S_{\min}$ ).

La Figure 7.24 montre l'organigramme correspondant au module qui évalue la contrainte d'ouverture de fissure  $S_{\text{op}}$ . Ce module considère que la contrainte de contact est nulle sur toute la longueur de la surface de rupture, c'est-à-dire, il considère  $\sigma_i = 0$  pour  $n_{\text{zp}} + 1 \leq i \leq n_{\text{tel}}$ . Il assume que la distance  $\delta$  entre les surfaces de rupture peut être positive ou négative<sup>2</sup>. Si cette distance est négative pour un ou plusieurs éléments, on peut conclure que les surfaces de ruptures sont en contact. Les véritables valeurs des contraintes de contact sur les surfaces de rupture ne sont pas nécessaires pour la simulation de la propagation de la fissure lorsque l'on se sert de l'algorithme décrit par l'organigramme de la Figure 7.24.

Le programme se sert de la technique du balayage pour obtenir la valeur correcte de  $S_{\text{op}}$ . Il évalue le vecteur  $\delta$  pour plusieurs valeurs de  $S_{\text{op}}$ , en commençant par  $S_{\text{op}} = 0$ , avec des incréments  $\Delta S$ . Le moment où il vérifie qu'un élément du vecteur  $\delta$  a changé de signe, une estimative de  $S_{\text{op}}$  est obtenue. Ensuite, il réduit l'incrément  $\Delta S$  par un facteur de 10 et refait le balayage à partir du dernier résultat obtenu, afin de raffiner le résultat final.

---

1. C'est-à-dire, on considère initialement que la fissure physique est complètement fermée, de façon que les surfaces de rupture se touchent complètement.

2. La distance entre les surfaces de rupture est donnée par  $\delta(x) = V(x) - L(x)$ , comme le montre la Figure 6.18.

Bien que ce module travaille sur l'hypothèse de contrainte de contact nulle le long des surfaces de rupture, il évalue les contraintes sur les éléments dans la zone plastique. Pour cela, l'Équation (6.66) est employée, sachant que  $V_i = L_i$  pour les éléments dans la zone plastique.

Comme déjà mentionné à la fin du Chapitre 6, le programme doit fusionner systématiquement deux éléments adjacents afin de limiter le nombre total d'éléments dans la simulation. La Figure 7.25 montre l'organigramme correspondant au module qui fusionne les éléments. Ce ne serait pas convenable de choisir deux éléments proches de la pointe de la fissure, puisqu'on a besoin d'une résolution plus importante dans cette région pour évaluer plus précisément la valeur de  $S_{op}$ . Le programme implémenté dans cette thèse évalue un vecteur  $\mathbf{w}_{sum}$  où chaque entrée est donnée par  $(w_{sum})_i = w_i + w_{i+1}$ . Ici, l'indice  $i$  se trouve dans l'intervalle  $(nzp + 1) \leq i \leq (ntel - 2nzp)$ . Ensuite, le programme cherche la plus petite valeur non nulle<sup>3</sup> dans le vecteur  $\mathbf{w}_{sum}$  et sauvegarde l'indice  $i = \varphi$  correspondant à cette valeur. Les éléments les plus convenables à fusionner sont ceux ayant indice  $\varphi$  et  $\varphi + 1$ . A chaque itération du programme principal, ce procès de fusion se donnera le nombre de fois nécessaires pour limiter le nombre total d'éléments à un seuil établi préalablement par l'utilisateur du programme. Ce seuil est appelé « ntma » dans les Figures 7.22 et 7.25.

---

3. On suppose que le programme remplira de zéros les entrées du vecteur  $\mathbf{w}_{sum}$  possédant indice entre 1 et  $nzp$ .

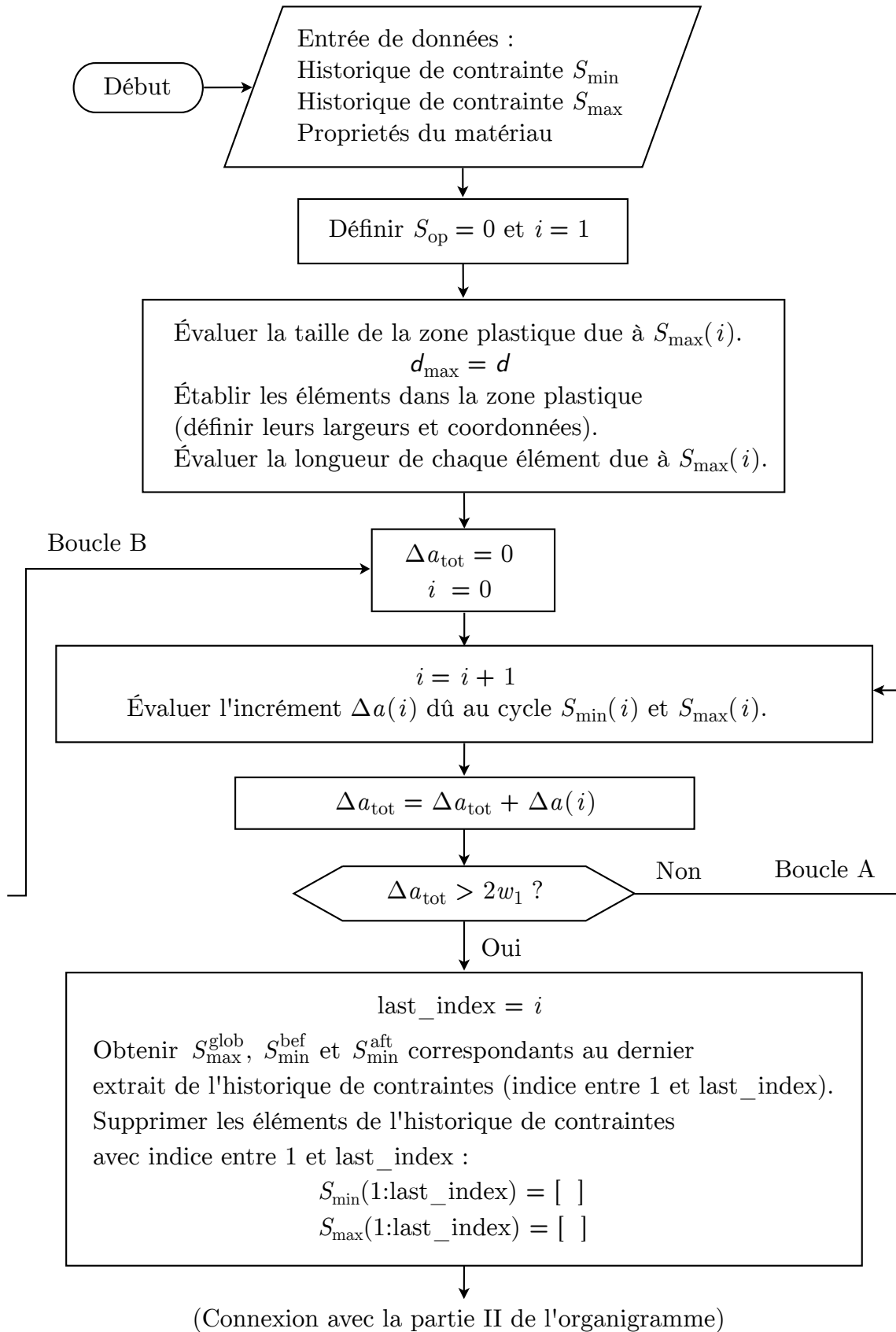


Figure 7.20 – Organigramme du modèle bande d'écoulement implémenté dans cette thèse (Partie I).

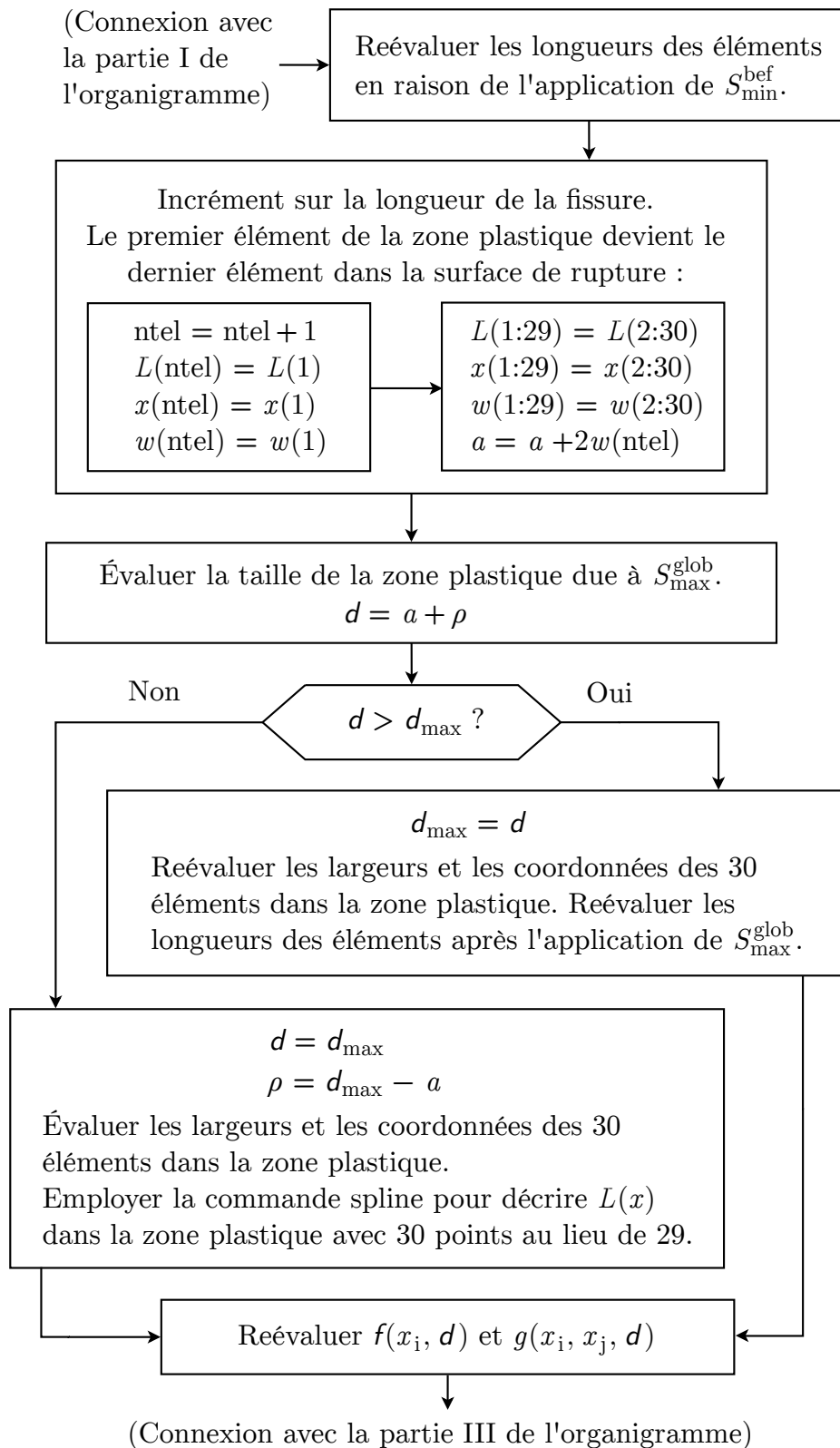


Figure 7.21 – Organigramme du modèle bande d'écoulement implémenté dans cette thèse (Partie II).

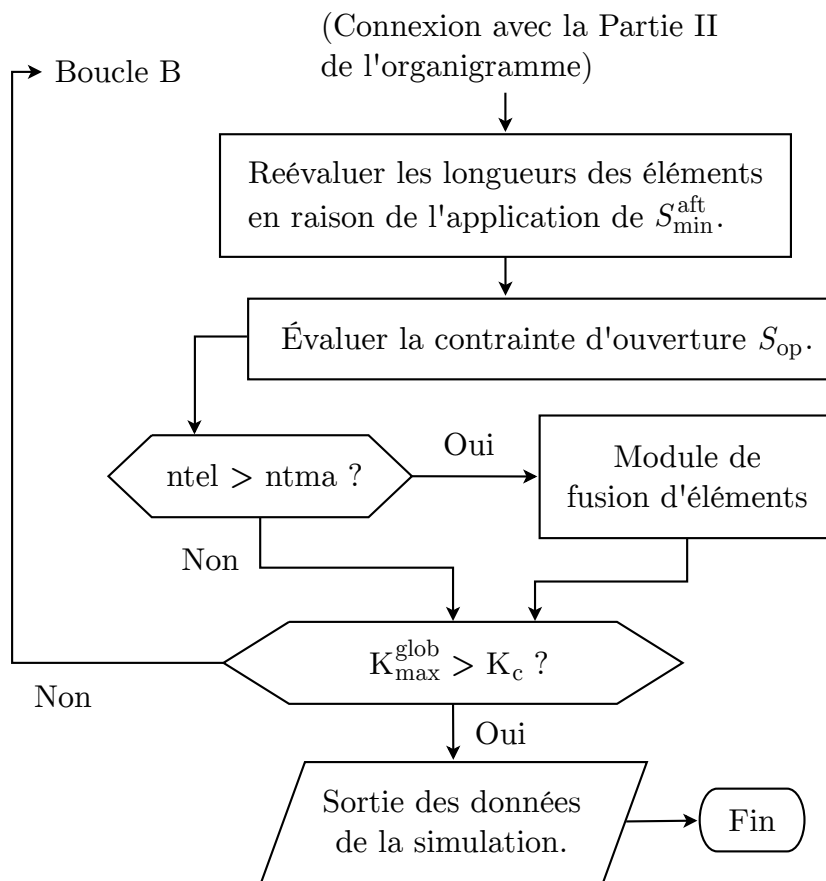


Figure 7.22 – Organigramme du modèle bande d'écoulement implémenté dans cette thèse (Partie III).

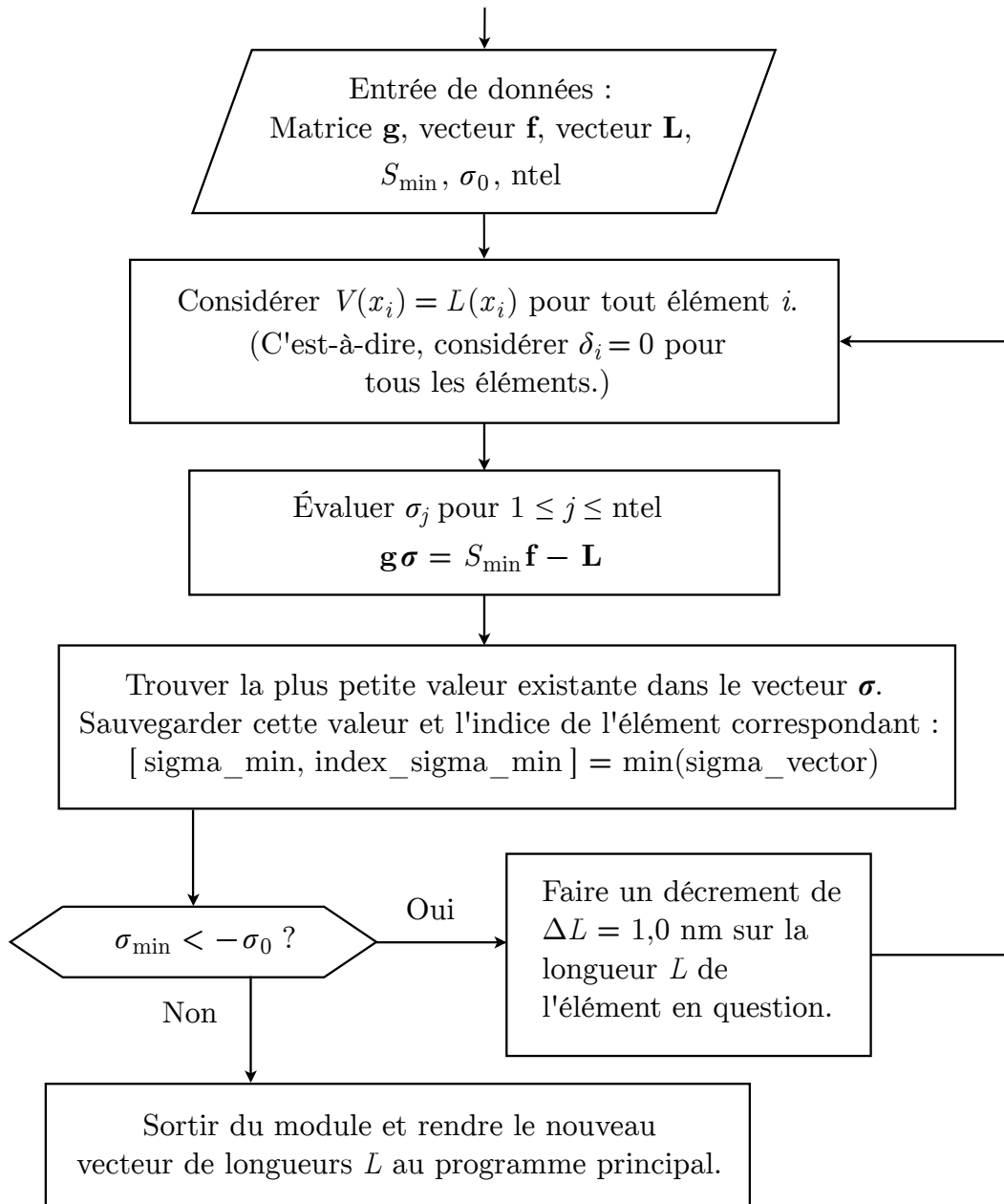


Figure 7.23 – Organigramme du module pour appliquer le chargement minimum  $S_{\min}$ .



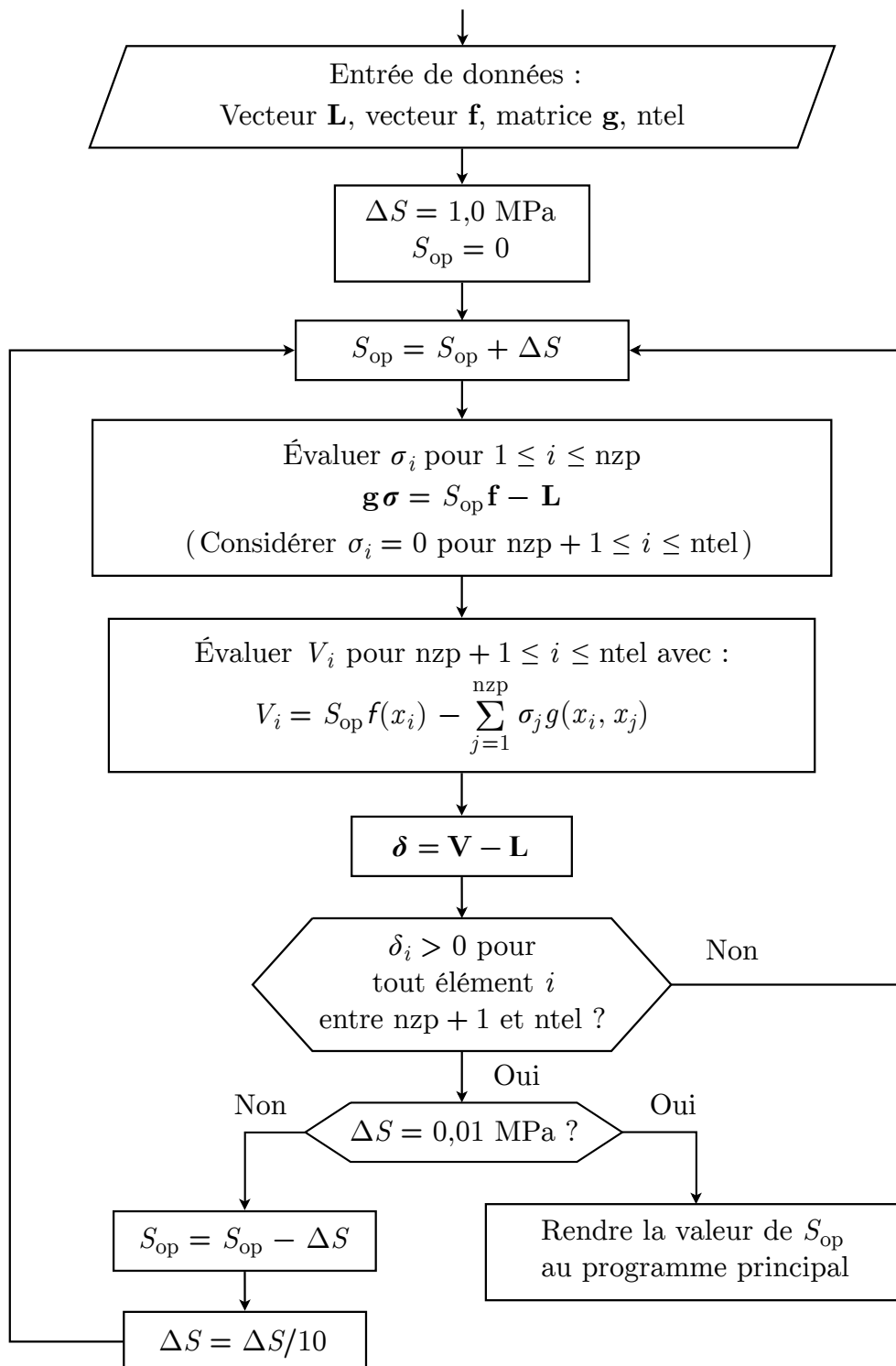


Figure 7.24 – Organigramme du module pour évaluer la contrainte d'ouverture  $S_{op}$

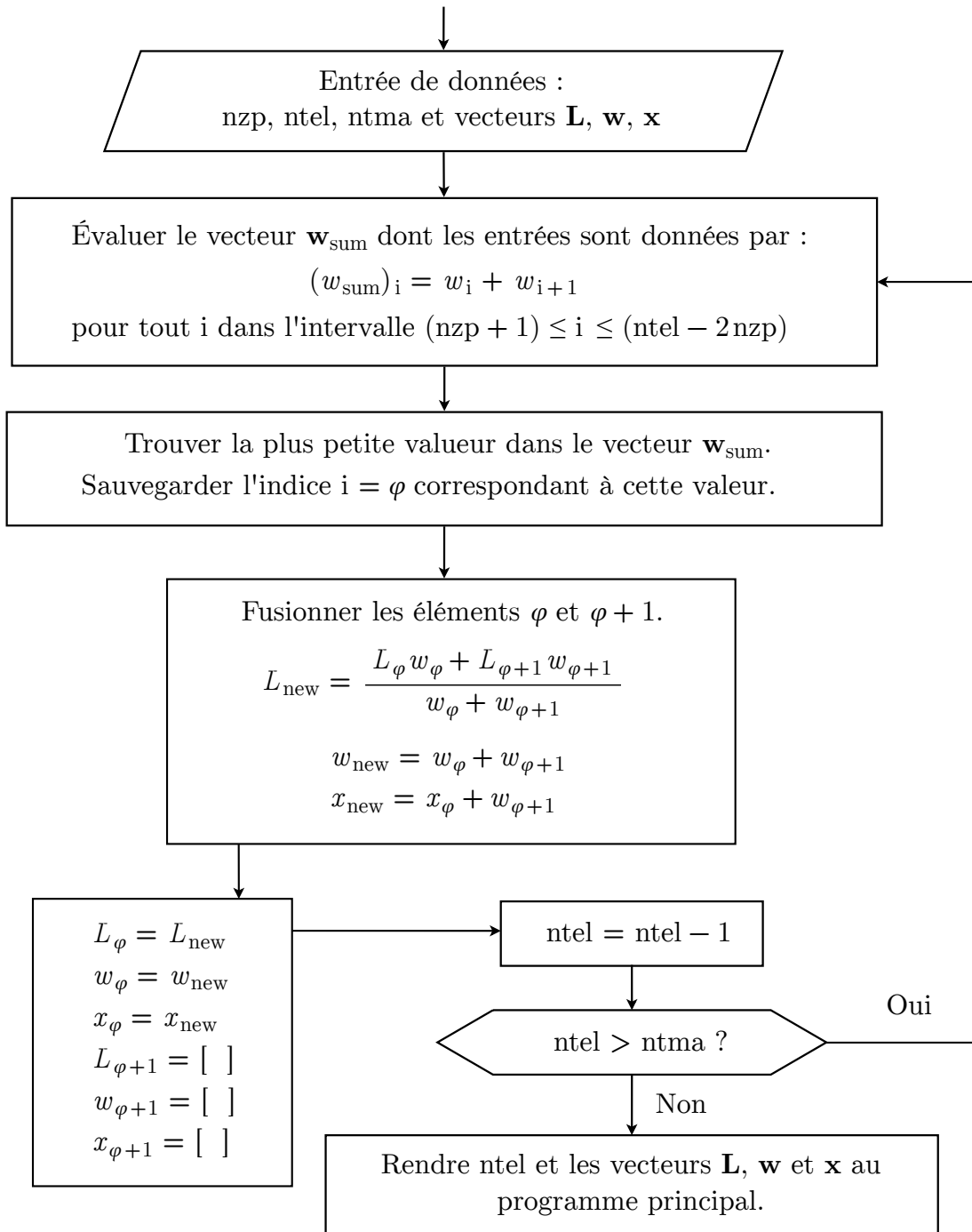


Figure 7.25 – Organigramme du module pour fusionner les éléments.

## 7.9.2 Évaluation du coefficient de Paris effectif $C_{\text{eff}}$

Considérons une fissure qui se propage à travers une tôle de 18 mm d'épaisseur en acier S355. Selon le graphique de la Figure 7.4, la ténacité à la rupture de ce matériau à une température de  $-45\text{ °C}$  est de  $70,1\text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  (rappelons que l'acier S355 est similaire à l'acier A572 Grade 50).

Les coefficients de Paris donnés par le Tableau 7.3 doivent être corrigés par l'Équation (6.46) si l'on souhaite employer la loi de Paris modifiée (Équation (6.44a)) pour modéliser le taux de propagation de la fissure.

Afin d'évaluer  $C_{\text{eff}}$ , la méthode bande d'écoulement est employée, en considérant un chargement à amplitude constante, avec  $S_{\text{max}} = 100\text{ MPa}$  et  $S_{\text{min}} = 0$ . La longueur initiale de la fissure est de 0,05 m. Provisoirement, on peut considérer  $C = 2,4170 \cdot 10^{-34}$  [ $\text{Pa}^{-n}\text{m}^{1-n/2}$ ] et  $n = 3,5622$ .

D'après les calculs exécutés par le programme, la contrainte  $S_{\text{op}}$  évoluera de la manière montrée par le graphique de la Figure 7.26.

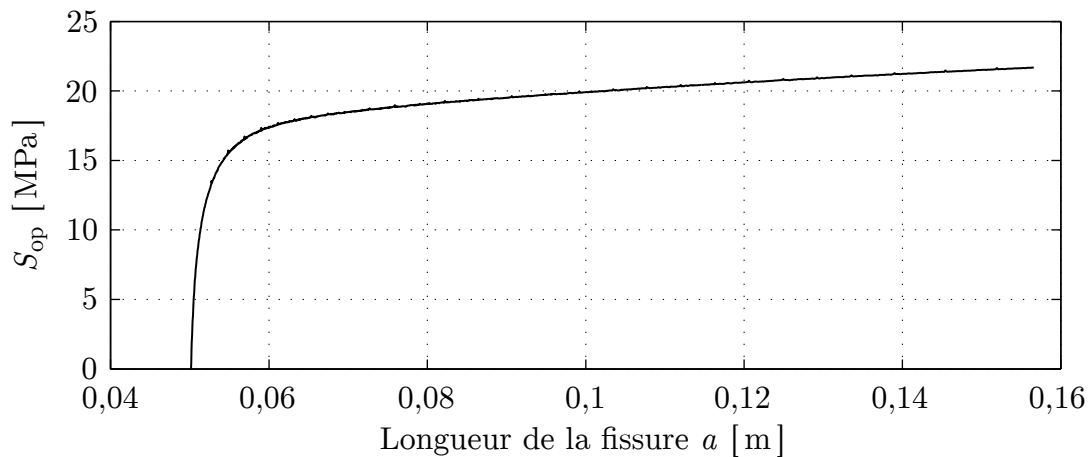


Figure 7.26 – Contrainte d'ouverture  $S_{\text{op}}$  en fonction de la longueur  $a$  de la fissure, en considérant un chargement à amplitude constante qui varie entre  $S_{\text{min}} = 0$  et  $S_{\text{max}} = 100\text{ MPa}$ .

La valeur de  $K_{\text{max}}$  atteint la ténacité à la rupture quand  $a = 0,157\text{ m}$ . À cet instant,  $S_{\text{op}} = 21,7\text{ MPa}$ . L'application de l'Équation (6.46) résulte :

$$C_{\text{eff}} = C \left[ \frac{\Delta K}{\Delta K_{\text{eff}}} \right]^n = 2,4170 \cdot 10^{-34} \left[ \frac{100}{100 - 21,7} \right]^{3,5622} = 5,7772 \cdot 10^{-34} \quad (7.17)$$

Cette valeur de  $C_{\text{eff}}$  est en  $\text{Pa}^{-n}\text{m}^{1-n/2}$ . Elle sera adoptée pour mener les analyses abordées dans le restant de ce chapitre.

### 7.9.3 Réponse à une seule surcharge

Une simulation a été exécutée en considérant les conditions suivantes :

- Matériau : acier S355
- Épaisseur de la tôle : 18 mm
- Chargement varie cycliquement entre zéro et 100 MPa
- Longueur initiale de la fissure : 20 mm
- Surcharge de 150 MPa appliquée quand la longueur de la fissure atteint 24 mm
- Longueur finale de la fissure : 28 mm

La Figure 7.27 montre l'évolution de  $S_{op}$  en fonction de la longueur de la fissure. On peut observer l'effet de l'émoussement géométrique de la pointe de la fissure, mentionné dans la Section 6.10.

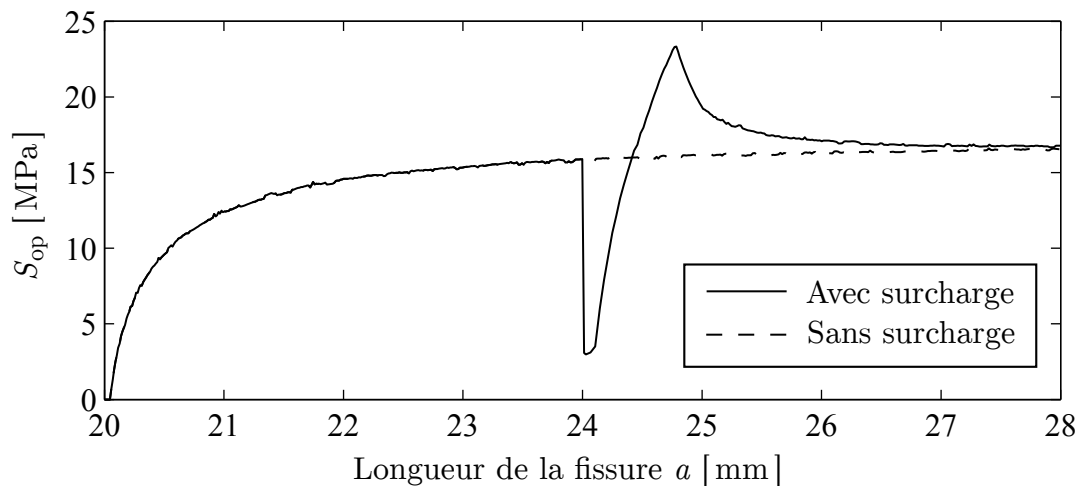


Figure 7.27 – Évolution de la contrainte d'ouverture  $S_{op}$  en fonction de la longueur  $a$  de la fissure, avec et sans surcharge.

Avec surcharge, la fissure a atteint la longueur de 28 mm après 80231 cycles de chargement. Sans surcharge, il a fallu 79155 cycles pour la propager jusqu'à la longueur de 28 mm.

### 7.9.4 Réponse à un chargement aléatoire

Une autre simulation de propagation de fissure a été exécutée en considérant le chargement aléatoire ayant une durée 200 heures, décrit dans la Section 7.8. Puisque l'effort numérique pour faire le comptage de cycles est assez grand, ce même chargement est employé 22 fois, pour simuler un historique 22 fois plus long.

Les données du matériau et la longueur initiale de la fissure sont les mêmes considérées dans la Section 7.9.3.

L'évolution de  $S_{op}$  avec la longueur de la fissure prend un caractère aléatoire, comme le montre les Figures 7.28 et 7.29.

Plus précisément, 21,66 historiques de 200 heures ont été employés pour propager la fissure jusqu'à la rupture complète du matériau (moment où  $K_I$  devient supérieur à  $K_c$ ).

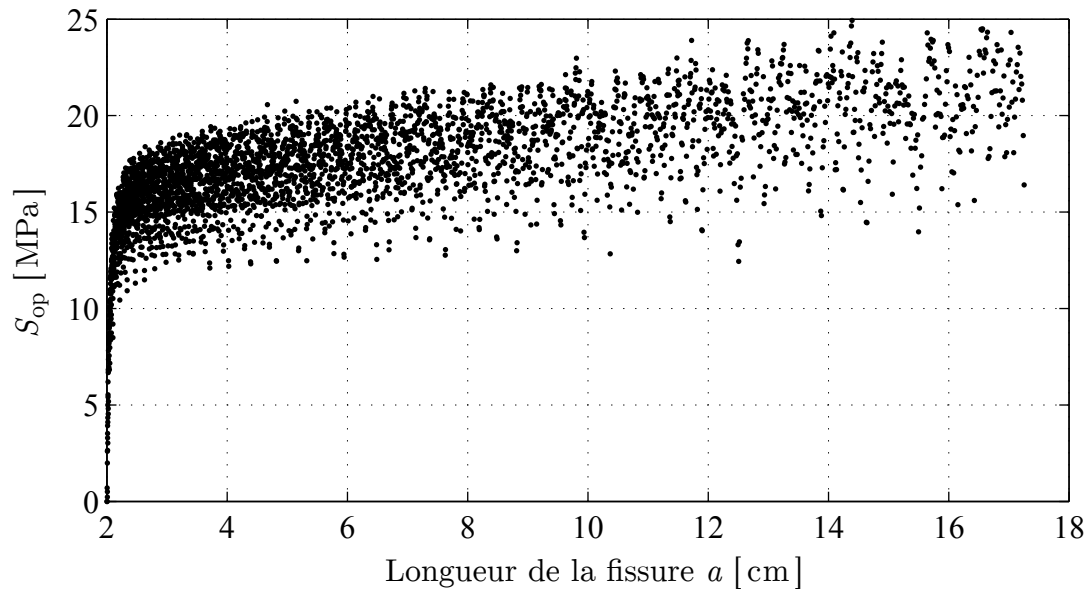


Figure 7.28 – Évolution de la contrainte d'ouverture  $S_{op}$  en fonction de la longueur  $a$  de la fissure, en considérant un chargement aléatoire.

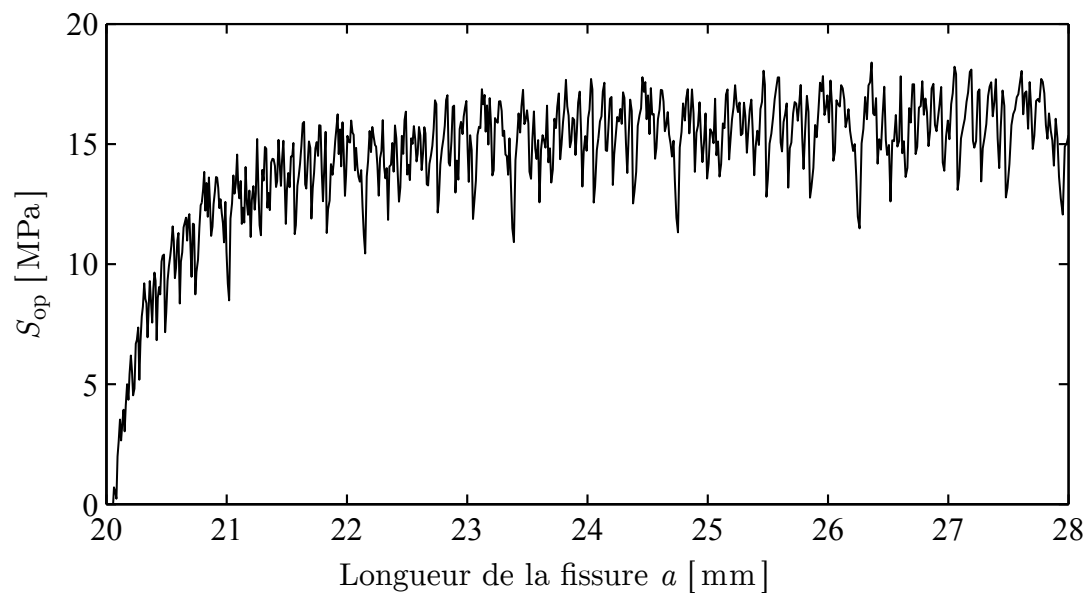


Figure 7.29 – Évolution de la contrainte d'ouverture  $S_{op}$  en fonction de la longueur  $a$  de la fissure, en considérant un chargement aléatoire.

# Chapitre 8

## Conclusion

Comme le suggère la Figure 7.2, l'importance de la condition de stabilité atmosphérique sur l'analyse structurelle du mât augmente avec la hauteur de celui-ci. La stabilité atmosphérique a un effet non seulement sur le profil de vitesse du vent, mais aussi sur son écart-type<sup>1</sup>. Puisque la DSP de la vitesse du vent dépend de son écart-type, on peut affirmer que l'amplitude du déplacement dynamique du mât dépend des conditions de stabilité atmosphérique.

Dans la littérature, il n'est pas rare de trouver une erreur dans une équation destinée à synthétiser un signal aléatoire. Le seul moyen d'avoir la certitude que le signal a été correctement synthétisé est en faisant une estimation spectrale. Dans les travaux de cette thèse, plusieurs méthodes d'estimation spectrale ont été testées (bien que tous les résultats n'aient pas été mis dans le manuscrit). La méthode connue sous le nom de Thomson Multitaper s'est avérée la plus adéquate pour déterminer la DSP de la force qui représente tous les chargements sur le mât.

Le chargement distribué du vent autour de la structure circulaire du mât n'est pas négligeable et doit être pris en compte. Cependant, on a constaté que le chargement correspondant à la force axiale du rotor est beaucoup plus important, comme le montre la Figure 7.7.

À propos de l'analyse dynamique de la structure, le Tableau 7.6 démontre qu'un modèle d'éléments finis de poutre de Timoshenko est capable de fournir les deux premières fréquences naturelles de vibration avec une précision aussi bonne que celle fournie par un modèle de coque (beaucoup plus complexe) modélisé sur Ansys. Comme la fin de la Section 4.6 peut suggérer, il y a peu de références traitant du facteur d'amortissement  $\zeta$  d'un mât d'éolienne à l'axe horizontal. Un nouveau travail de recherche spécifique pour déterminer ce paramètre serait de grande utilité pour l'industrie éolienne.

Pour des raisons de sécurité et aussi pour maximiser la durée de vie d'une structure éolienne, il faut que la contrainte maximale soit très au dessous de la limite d'endurance  $S_e$

---

1. Voir Équation (2.34). Rappelons-nous que la stabilité atmosphérique a un effet sur la hauteur de la couche limite atmosphérique.

du matériau. À moins que l'on dispose de données de fatigue à très haut cycle (*gigacycle fatigue*) il est techniquement impossible de quantifier l'endommagement par fatigue avec une grande précision. Le graphique de la Figure 7.18 a pu être déterminé en extrapolant la courbe fournie par la loi de Basquin, même pour des niveaux de contraintes très faibles.

Soulignons une dernière fois que parmi toutes les méthodes de comptage de cycles, celle connue sous le nom de *rainflow* est considérée aujourd'hui comme la plus adéquate pour faire une analyse de fatigue d'un composant soumis à un chargement à amplitude variable. Cette méthode n'est pas nouvelle, mais la manière dont elle est présentée dans cette thèse est en quelque sorte originale. Les organigrammes présentés par les autres auteurs sont plus généraux et moins détaillés. Ils préfèrent décrire les détails en forme de texte. Dans cette thèse, on a pu condenser tous ces détails dans un organigramme occupant seulement deux pages (Figures 5.2 et 5.3).

La résistance à la fatigue d'un matériau peut varier considérablement dans un groupe de plusieurs éprouvettes. Contrairement à ce que la Figure (5.1) peut suggérer, la courbe de Wöhler est une courbe moyenne qui représente un nuage de points. Puisque le chargement et la résistance du matériau sont aléatoires, la détermination de l'endommagement en termes de probabilité peut avoir un niveau de complexité suffisant pour un nouveau travail de recherche.

La méthode bande d'écoulement (*strip-yield*) permet de simuler la propagation d'une fissure de fatigue lorsque le chargement présente une amplitude variable. Elle est capable de modéliser l'émoussement géométrique de la pointe de la fissure juste après l'application d'une surcharge et le retardement de la propagation de la fissure dû à l'augmentation de  $S_{op}$ . En outre, cette méthode est capable de modéliser la réduction de  $S_{op}$  due à l'application d'une sous-charge.

Le programme implémenté dépense une considérable fraction du temps d'exécution dans le module représenté par l'organigramme de la Figure 7.23. Par contre, cet algorithme fournit des résultats de bonne qualité.

Une autre difficulté concerne l'évaluation de la matrice  $\mathbf{g}(x_i, x_j, \mathbf{d})$ . Chaque entrée de cette matrice exige le calcul numérique de l'intégrale dans l'Équation 6.67. En limitant le nombre d'éléments dans l'analyse à 130, cette intégrale devra être évaluée 16900 fois à chaque itération du programme.

Afin d'améliorer la précision des résultats de la simulation de propagation de fissure, il faudrait connaître la valeur de  $\Delta K_{th}$  pour l'acier S355. La définition de ce paramètre est donnée dans la Section 6.7.3.

La présence de fissures dans la structure rend celle-ci moins rigide. On peut attendre que les fréquences naturelles de vibration deviendront plus petites au fur et à mesure que la structure vieillit. Cet effet pourra être modélisé dans un travail futur.

# Annexe A

## Éléments finis de poutre

### A.1 Élément fini de poutre d'Euler-Bernoulli

Soit  $\ddot{\mathbf{d}}$  un vecteur d'accélération défini par  $\ddot{\mathbf{d}} = [ \ddot{v}_1 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{v}_2 \quad \ddot{\theta}_2 ]^T$ . L'indice des entrées représente le numéro du nœud de l'élément;  $v$  représente un degré de liberté de translation et  $\theta$  un degré de liberté de rotation. La matrice de masse de l'élément fini de poutre d'Euler-Bernoulli associée au vecteur  $\ddot{\mathbf{d}}$  est donnée par (Craig, 1981; Logan, 2007) :

$$\mathbf{m}_e = \left( \frac{\rho_m A L}{420} \right) \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ & & 156 & -22L \\ \text{Sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

Dans cette équation,  $A$  est l'aire de section transversale;  $L$  est la longueur de l'élément et  $\rho_m$  est la densité du matériau qui constitue la poutre.

Pour un vecteur de déplacements  $\mathbf{d} = [ v_1 \quad \theta_1 \quad v_2 \quad \theta_2 ]^T$ , la matrice de rigidité de l'élément fini de poutre d'Euler-Bernoulli est :

$$\mathbf{k}_e = \left( \frac{EI}{L^3} \right) \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

où  $I$  est le moment quadratique (ou moment d'inertie), associé à la forme et taille de la section transversale de l'élément. Il est donné en  $\text{m}^4$ .

D'après Girard & Roy (2008), il est possible de définir une matrice de rigidité complexe associée à un élément fini. Dans le cas de l'élément fini de poutre d'Euler-Bernoulli, cette matrice est obtenue en remplaçant le module de Young classique  $E$  par le module d'élasticité complexe  $\bar{E} = E_s(1 + i\eta)$  :



$$\bar{\mathbf{k}}_e = (\mathbf{k}_e)_s + i(\mathbf{k}_e)_p = \left( \frac{E_s(1+i\eta)I}{L^3} \right) \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ & & 12 & -6L \\ \text{Sym} & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

L'assemblage des matrices complexes des éléments permettra l'obtention de la matrice de rigidité globale complexe, nécessaire à la modélisation de l'amortissement hystérétique de la structure.

Le moment fléchissant d'un élément fini de poutre est donné par (Logan, 2007) :

$$M(x) = EI \left[ \left( -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \right) v_1 + \left( -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \theta_1 + \left( \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \right) v_2 + \left( -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2} \right) \theta_2 \right] \quad (\text{A.4})$$

La contrainte axiale  $\sigma_{xx}$  due au moment fléchissant peut être évaluée par (Gere & Goodno, 2009) :

$$\sigma_{xx} = -\frac{My}{I} \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Élément fini de poutre de Timoshenko

En considérant un vecteur de déplacements  $\mathbf{d} = [v_1 \ \theta_1 \ v_2 \ \theta_2]^T$ , la matrice de rigidité de l'élément fini de poutre de Timoshenko est donnée par (Przemieniecki, 1968; Thomas et al., 1973; Logan, 2007) :

$$\mathbf{k}_e = \frac{EI}{L^3(1+\phi_c)} \begin{bmatrix} 12 & & & & & \text{Sym} \\ 6L & L^2(4+\phi_c) & & & & \\ -12 & -6L & 12 & & & \\ 6L & L^2(2-\phi_c) & -6L & L^2(4+\phi_c) & & \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Le facteur de correction de cisaillement  $\phi_c$  est défini par :

$$\phi_c = \frac{12EI}{G\mathcal{K}AL^2} \quad (\text{A.7})$$

Selon Han & Benaroya (2002), le coefficient de cisaillement  $\mathcal{K}$  correspondant à une section transversale en forme de disque creux est :

$$\mathcal{K} = \frac{6(1+\nu)(1+h^2)^2}{(7+6\nu)(1+h^2)^2 + (20+12\nu)h^2} \quad (\text{A.8a})$$

$$h = \frac{R_{\text{int}}}{R_{\text{ext}}} \quad (\text{A.8b})$$

où  $R_{\text{int}}$  et  $R_{\text{ext}}$  sont les rayons interne et externe du disque. Pour un tube circulaire à paroi mince, Han & Benaroya (2002) fournissent :

$$\mathcal{K} = \frac{2(1 + \nu)}{4 + 3\nu} \quad (\text{A.9})$$

Pour un vecteur d'accélération  $\ddot{\mathbf{d}} = [\ddot{v}_1 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{v}_2 \quad \ddot{\theta}_2]^T$ , la matrice de masse de l'élément fini de poutre de Timoshenko peut être évaluée par :

$$\mathbf{m}_e = \frac{\rho_m AL}{(1 + \Phi_c)^2} \begin{bmatrix} m_1 & & & \text{Sym} \\ m_2 & m_5 & & \\ m_3 & -m_4 & m_1 & \\ m_4 & m_6 & -m_2 & m_5 \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

$$+ \frac{\rho_m AL}{(1 + \Phi_c)^2} \left(\frac{r}{L}\right)^2 \begin{bmatrix} m_7 & & & \text{Sym} \\ m_8 & m_9 & & \\ -m_7 & -m_8 & m_7 & \\ m_8 & m_{10} & -m_8 & m_9 \end{bmatrix}$$

où le rayon de giration est donné par  $r = \sqrt{I/A}$ . Les paramètres  $m_1, m_2, \dots, m_{10}$  sont donnés par le Tableau A.1.

Tableau A.1 – Paramètres  $m_i$  de l'Équation (A.10).

$m_1 = \frac{13}{35} + \frac{7\Phi_c}{10} + \frac{\Phi_c^2}{3}$	$m_6 = -\left(\frac{1}{140} + \frac{\Phi_c}{60} + \frac{\Phi_c^2}{120}\right) L^2$
$m_2 = \left(\frac{11}{210} + \frac{11\Phi_c}{120} + \frac{\Phi_c^2}{24}\right) L$	$m_7 = \frac{6}{5}$
$m_3 = \frac{9}{70} + \frac{3\Phi_c}{10} + \frac{\Phi_c^2}{6}$	$m_8 = \left(\frac{1}{10} - \frac{\Phi_c}{2}\right) L$
$m_4 = -\left(\frac{13}{420} + \frac{3\Phi_c}{40} + \frac{\Phi_c^2}{24}\right) L$	$m_9 = \left(\frac{2}{15} + \frac{\Phi_c}{6} + \frac{\Phi_c^2}{3}\right) L^2$
$m_5 = \left(\frac{1}{105} + \frac{\Phi_c}{60} + \frac{\Phi_c^2}{120}\right) L^2$	$m_{10} = \left(-\frac{1}{30} - \frac{\Phi_c}{6} + \frac{\Phi_c^2}{6}\right) L^2$

# Références

- ABS (2011). *Design Standards for Offshore Wind Farms*. Technical report, American Bureau of Shipping.
- Adhikari, S. (2000). *Damping Models for Structural Vibration*. PhD thesis, Cambridge University.
- Adhikari, S. (2006). Damping modelling using generalized proportional damping. *Journal of Sound and Vibration*.
- Adhikari, S. & Phani, A. S. (2004). Rayleigh's classical damping revisited. (pp. 1–23).
- AFNOR (1993). *Produits métalliques - Fatigue sous sollicitations d'amplitude variable - Méthode rainflow de comptage de cycles*. AFNOR A03-406. Association Française de Normalisation.
- Amzallag, C., Gerey, J. P., Robert, J. L., & Bahuaud, J. (1994). Standardization of the rainflow counting method for fatigue analysis. *International Journal of Fatigue*, 16, 287–293.
- Anderson, J. D. (2001). *Fundamentals of Aerodynamics*. McGraw-Hill, 3rd edition.
- Anderson, T. L. (2005). *Fracture mechanics : fundamentals and applications*. Taylor & Francis, 3rd edition.
- Anton, H. & Rorres, C. (2013). *Elementary linear algebra : applications version*. Wiley, 11th edition.
- API (2000). *Recommended Practice for Planning, Designing and Constructing Fixed Offshore Platforms - Working Stress Design*. RP 2A-WSD. American Petroleum Institute.
- ASTM (2011). *Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis*. ASTM E1049-85 (Reapproved 2011). American Society for Testing and Materials.
- Bache, D. H. & Johnstone, D. R. (1992). *Microclimate and Spray Dispersion*. Ellis Horwood.

- Balachandran, B. & Magrab, E. B. (2009). *Vibrations*. Cengage Learning, 2nd edition.
- Bannantine, J. A., Comer, J. J., & Handrock, J. L. (1989). *Fundamentals of metal fatigue analysis*. Prentice Hall.
- Bao, R., Zhang, X., & Yahaya, N. A. (2010). Evaluating stress intensity factors due to weld residual stresses by the weight function and finite element methods. *Engineering Fracture Mechanics*, 77, 2550–2566.
- Barenblatt, G. I. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. In H. L. Dryden & T. von Karman (Eds.), *Advances in Applied Mechanics*, volume 7. Academic Press.
- Basquin, O. H. (1910). The exponential law of endurance tests. *Proc. ASTM*, 10, 625–630.
- Batchvarova, E. & Gryning, S.-E. (1991). Applied model for the growth of the daytime mixed layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 56, 261–274.
- Bathias, C. & Paris, P. C. (2005). *Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice*. Marcel Dekker.
- Beards, C. F. (1995). *Engineering vibration analysis with application to control systems*. Edward Arnold.
- Beards, C. F. (1996). *Structural vibration : analysis and damping*. Butterworth-Heinemann.
- Berger, E. H., Royster, L. H., Royster, J. D., Driscoll, D. P., & Layne, M., Eds. (2003). *The noise manual*. American Industrial Hygiene Association, 5th edition.
- Betz, A. (1920). Das maximum der theoretisch möglichen ausnutzung des windes durch windmotoren (the maximum of the theoretically possible exploitation of the wind by wind motors). *Zeitschrift für das gesamte Turbinewesen*, 17, 307–309.
- Bierbooms, W. A. A. M. (2009). *Constrained stochastic simulation of wind gusts for wind turbine design*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft.
- Bishop, N., Caserio, A., & Mesa, C. (1998). Vibration fatigue analysis in the finite element environment. *Americas User Conference*.
- Bishop, R. E. D. & Johnson, D. C. (1960). *The Mechanics of Vibration*. Cambridge University Press.
- Blackman, R. B. & Tukey, J. W. (1958). The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering - Part I. *Bell Labs Technical Journal*, 37, 185–282.

- Boiko, A. V., Kulik, V. M., Seoudi, B. M., Chun, H. H., & Lee, I. (2010). Measurement method of complex viscoelastic material properties. *International Journal of Solids and Structures*, 47, 374–382.
- Bos, M. J. (2007). *Development of an improved model for predicting fatigue crack growth in aluminium alloy helicopter airframe components*. Technical report, NLR-TP-2007-406. National Aerospace Laboratory NLR.
- Bostrom, L. A. (1989). The dugdale model used for short radial cracks emanating from a circular hole in an infinite sheet. *Engineering Fracture Mechanics*, 34(4), 823–829.
- Boyer, H. E., Ed. (1985). *Atlas of Fatigue Curves*. ASM International.
- Braccesi, C., Cianetti, F., Lori, G., & Pioli, D. (2005). Fatigue behavior analysis of mechanical components subjected to random bimodal stress process : frequency domain approach. *International Journal of Fatigue*, 27, 335–345.
- Broek, D. (1984). *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers.
- Broz, P. (2006). Some effects on fatigue strength. *Acta Polytechnica*, 46, 23–29.
- Budynas, R. & Nisbett, K. (2008). *Shigley's mechanical engineering design*. McGraw-Hill, 8th edition.
- Bueckner, H. F. (1970). A novel principle for the computation of stress intensity factors. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 50, 529–545.
- Buhl, M. L. (2005). *A new empirical relationship between thrust coefficient and induction factor for the turbulent windmill state*. Technical Report NREL/TP-500-36834. National Renewable Energy Laboratory.
- Burton, T., Jenkins, N., Sharpe, D., & Bossanyi, E. (2011). *Wind Energy Handbook*. John Wiley and Sons, 2nd edition.
- Businger, J. A. (1966). Transfer of momentum and heat in the planetary boundary layer. In J. O. Fletcher (Ed.), *Proceedings of the Symposium on the Artic Heat Budget and Atmospheric Circulation*, RM-5233-NSF (pp. 305–332). Santa Monica, California : Rand Corporation.
- Cai, C., Zheng, H., Khan, M. S., & Hung, K. C. (2002). Modeling of Material Damping Properties in ANSYS. In *Proceedings of the 10th International ANSYS Conference and Exposition*.

- Cantwell, B. & Coles, D. (1983). An experimental study of entrainment and transport in the turbulent near wake of a circular. *Journal of Fluid Mechanics*, 136, 321–374.
- Carlson, R. L., Kardomateas, G. A., & Bates, P. R. (1991). The effects of overloads in fatigue crack growth. *International Journal of Fatigue*, 13(6), 453–460.
- Carruthers, D. J. & Hunt, J. C. R. (1986). Velocity fluctuations near an interface between a turbulent region and a stably stratified layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 165, 475–501.
- Castillo, E. & Fernández-Canteli, A. (2009). *A unified statistical methodology for modeling fatigue damage*. Springer.
- Caughey, T. K. & O’Kelly, M. E. J. (1965). Classical normal modes in damped linear dynamic systems. *Journal of Applied Mechanics*, (32), 583–588.
- Chopra, A. K. (2007). *Dynamics of Structures : Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Pearson Prentice Hall, 3rd edition.
- Collins, J. A., Busby, H., & Staab, G. (2010). *Mechanical Design of Machine Elements and Machines : A Failure Prevention Perspective*. John Wiley & Sons, 2nd edition.
- Cook, N. J. (1997). The Deaves and Harris ABL model applied to heterogeneous terrain. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 66, 197–214.
- Cooper, G. R. & McGillem, C. D. (1998). *Probabilistic methods of signal and system analysis*. Oxford University Press, 3rd edition.
- Counihan, J. (1975). Adiabatic atmospheric boundary layers : a review and analysis of data from the period from 1880-1972. *Atmospheric Environment*, 9, 871–905.
- Craig, R. R. (1981). *Structural dynamics : an introduction to computer methods*. John Wiley & Sons.
- Craig, R. R. & Kurdila, A. J. (2006). *Fundamentals of structural dynamics*. John Wiley & Sons, 2nd edition.
- Daniewicz, S. R., Collins, J. A., & Houser, D. R. (1994). An elastic-plastic analytical model for predicting fatigue crack growth in arbitrary edge-cracked two-dimensional geometries with residual stresses. *Fatigue*, 16, 123–133.
- de Koning, A. U. & Liefing, G. (1988). Analysis of crack opening behavior by application of a discretized strip yield model. In J. C. Newman & W. Elber (Eds.), *Mechanics of crack closure* (pp. 437–458). STP 982. American Society for Testing and Materials.

- de Koning, A. U., ten H. J. Hoeve, & Henriksen, T. K. (1997). *The description of crack growth on the basis of the strip yield model for the computation of crack opening loads, the crack tip stretch and strain rates*. Technical report, NLR Technical Publication TP 97511 L.
- Deardorff, J. W. (1972). Parameterization of the planetary boundary layer for use in general circulation models. *Monthly Weather Review*, 100(2), 93–106.
- Deaves, D. M. & Harris, R. I. (1978). *A mathematical model of the structure of strong winds*. Report 76. London : Construction Industry Research and Information Association (CIRIA).
- der Hoven, I. V. (1957). Power spectrum of horizontal wind speed in the frequency range from 0.0007 to 900 cycles per hour. *Journal of Meteorology*, 14, 160–164.
- Dexter, R. J., Hudak, S. J., & Davidson, D. L. (1989). Modelling and measurement of crack closure and crack growth following overloads and underloads. *Engineering Fracture Mechanics*, 33(6), 855–870.
- Dirlik, T. (1985). *Application of Computers in Fatigue Analysis*. PhD thesis, University of Warwick.
- Djolov, G. D. (2007). Some modern features of boundary-layer meteorology : a birthday tribute for sergej zilitinkevich. In A. Baklanov & B. Grisogono (Eds.), *Atmospheric Boundary Layers : nature, theory, and application to environmental modelling and security*. Springer.
- Dominguez, J. (1994). Fatigue crack growth under variable amplitude loading. In A. Carpinteri (Ed.), *Handbook of fatigue crack propagation in metallic structures* (pp. 955–977). Elsevier.
- Dowling, N. (2004). *Mean Stress Effects in Stress-Life and Strain-Life Fatigue*. SAE Technical Paper 2004-01-2227.
- Downing, S. D. & Socie, D. F. (1982). Simple rainflow counting algorithms. *International Journal of Fatigue*, 4, 31–40.
- Drew, D. R., Barlow, J. F., & Lane, S. E. (2013). Observations of wind speed profiles over Greater London, UK, using a Doppler lidar. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 121, 98–105.
- Dugdale, D. S. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 8(2), 100–104.

- E399 (2009). *Standard Test Method for Linear-Elastic Plane-Strain Fracture Toughness  $K_{Ic}$  of Metallic Materials*. American Society for Testing and Materials.
- Elber, W. (1971). The significance of fatigue crack closure. In *Damage Tolerance in Aircraft Structures* (pp. 230–242). ASTM STP 486. American Society fo Testing and Materials.
- ESDU (1975). *Characteristics of atmospheric turbulence near the ground. Part III : Variations in space and time for strong winds (neutral atmosphere)*. ESDU 75001. Engineering Sciences Data Unit.
- ESDU (1976). *Characteristics of Atmospheric Turbulence Near the Ground. Part I : Definitions and General Information*. ESDU 74030. Engineering Sciences Data Unit.
- ESDU (2001a). *Characteristics of atmospheric turbulence near the ground. Part II : single point data for strong winds (neutral atmosphere)*. ESDU 85020. Engineering Sciences Data Unit.
- ESDU (2001b). *Characteristics of atmospheric turbulence near the ground. Part III : variations in space and time for strong winds (neutral atmosphere)*. ESDU 86010. Engineering Sciences Data Unit.
- ESDU (2002). *Strong winds in the atmospheric boundary layer. Part 2 : discrete gust speeds*. ESDU 83045. Engineering Sciences Data Unit.
- Ewins, D. J. (2000). *Modal testing : theory, practice and application*. Research Studies Press LTD., 2nd edition.
- Fett, T. (2008). *Stress intensity factors, T-stresses and Weight Functions*. Universitätsverlag Karlsruhe.
- Forman, R. G., Kearney, V. E., & Engle, R. M. (1967). Numerical analysis of crack propagation in cyclic-loaded structures. *Trans. ASME, J. Basic Eng.*, 89(3), 459.
- Forman, R. G., Shivakumar, V., Mettu, S. R., Beek, J. M., Williams, L. C., & Yeh, F. (2002). *NASGRO : Fracture Mechanics and Fatigue Crack Growth Analysis Software*. NASA Johnson Space Center, European Space Agency e Federal Aviation Administration, 4th edition.
- Fox, R. W. & McDonald, A. T. (2011). *Introduction to Fluid Mechanics*. John Wiley and Sons, 8th edition.
- Friswell, M. I., Penny, J. E. T., Garvey, S. D., & Lees, A. W. (2010). *Dynamics of Rotating Machines*. Cambridge University Press.



- Frost, W., Long, B. H., & Turner, R. E. (1978). *Engineering Handbook on the Atmospheric Environmental Guidelines for Use in Wind Turbine Development*. NASA Technical Paper 1359. National Aeronautics and Space Administration.
- Garratt, J. R. (1992). *The atmospheric boundary layer*. Cambridge University Press.
- Gatti, P. L. & Ferrari, V. (1999). *Applied structural and mechanical vibrations : theory, methods and measuring instrumentation*. Taylor & Francis Group, 1st edition.
- Gdoutos, E. E. (2005). *Fracture mechanics : an introduction*. Springer, 2nd edition.
- Genta, G. (1995). *Vibration of Structures and Machines*. Springer-Verlag, 2nd edition.
- Gerber, W. (1874). Bestimmung der zulossigenen eisen construcionen. *Z. Bayer Arch. Ing Ver.*, 6, 101–110.
- Gere, J. M. & Goodno, B. J. (2009). *Mechanics of Materials*. Cengage Learning, 7th edition.
- Girard, A. & Roy, N. (2008). *Structural Dynamics in Industry*. Wiley, 1st edition.
- Glauert, H. (1935). Airplane propellers. In W. F. Durand (Ed.), *Aerodynamic Theory*, volume 4 (pp. 169–360). Division L., Julius Springer, Berlin.
- Goodman, J. (1930). *Mechanics Applied to Engineering*, volume 1. Longmans Green and Co., 9th edition.
- Grandt, A. F., Jr. (2004). *Fundamentals of structural integrity : damage tolerant design and nondestructive evaluation*. John Wiley & Sons.
- Greiner, R. (1998). Cylindrical shells : wind loading. In C. J. Brown & J. Nielsen (Eds.), *Silos : fundamentals of theory, behaviour and design*. Taylor & Francis Routledge.
- Gryning, S.-E. (2005). *The height of the atmospheric boundary layer during unstable conditions*. Riso -R-1536. Roskilde : Riso National Laboratory.
- Gryning, S.-E. & Batchvarova, E. (1990). Analytical model for the growth of the coastal internal boundary layer during onshore flow. *Quarterly Journal of Royal Meteorological Society*, 116, 187–203.
- Gryning, S.-E. & Batchvarova, E. (1994). Parametrization of the depth of the entrainment zone above the daytime mixed layer. *Quarterly Journal of Royal Meteorological Society*, 120, 47–58.
- Gryning, S.-E., Batchvarova, E., Brummer, B., Jorgensen, H., & Larsen, S. (2007). On the extension of the wind profile over homogeneous terrain beyond the surface boundary layer. *Boundary-Layer Meteorology*, 124, 251–268.

- Guo, W., Wang, C. H., & Rose, L. R. F. (1999). The influence of cross-sectional thickness on fatigue crack growth. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 22(5), 437–444.
- Gwon, T. G. (2011). Structural Analyses of Wind Turbine Tower for 3kW Horizontal-Axis Wind Turbine. Master's thesis, Faculty of California Polytechnic State University.
- Haiba, M., Barton, D. C., Brooks, P. C., & Levesley, M. C. (2002). Review of life assessment techniques applied to dynamically loaded automotive components. *Computers & Structures*, 80, 481–494.
- Haibach, E. (2006). *Betriebsfestigkeit Verfahren und Daten zur Bauteilberechnung*. Springer.
- Han, S. M. & Benaroya, H. (2002). *Nonlinear and stochastic dynamics of compliant offshore structures*. Springer.
- Hansen, A. D. (2005). Generators and power electronics for wind turbines. In T. Ackermann (Ed.), *Wind power in power systems*. John Wiley & Sons.
- Hansen, M. O. L. (2008). *Aerodynamics of wind turbines*. Earthscan, 2nd edition.
- Harper, B. A., Kepert, J. D., & Ginger, J. D. (2008). *Guidelines for converting between various wind averaging periods in tropical cyclone conditions*. Technical report, World Meteorological Organization.
- Harris, R. I. (1968). *On the spectrum and auto-correlation function of gustiness in high winds*. Report 5273. Electrical Research Association.
- Harris, R. I. (1990). Some further thoughts on the spectrum of gustiness in strong winds. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 33, 461–477.
- Harrison, R., Hau, E., & Snel, H. (2000). *Large wind turbines design and economics*. John Wiley & Sons.
- Harter, J. A. (2003). *AFGROW users guide and technical manual*.
- Hau, E. (2006). *Wind turbines : fundamentals, technologies, application, economics*. Springer, 2nd edition.
- Hayward, A., Weare, F., & Oakhill, A. (2011). *Steel Detailers' Manual*. Wiley-Blackwell, 3rd edition.
- Hertzberg, R. W. (1996). *Deformation and fracture mechanics of engineering materials*. John Wiley & Sons.

- Heywood, R. B. (1962). *Designing against Fatigue*. Chapman and Hall.
- Humar, J. L. (2001). *Dynamics of Structures*. Balkema, 2nd edition.
- IEC (2005). *Wind turbines - part 1 : design requirements*. IEC 61400-1. International Electrotechnical Commission.
- Ihlenburg, F. (2008). Sound in vibrating cabins : physical effects, mathematical formulation, computational simulation with FEM. In G. Sandberg & R. Ohayon (Eds.), *Computational Aspects of Structural Acoustics and Vibration*. Springer.
- Ince, A. & Glinka, G. (2011). A modification of morrow and smith-watson-topper mean stress correction models. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, 34, 854–867.
- Inman, D. J. (2006). *Vibration with Control*. John Wiley & Sons.
- Inman, D. J. (2007). *Engineering vibration*. Pearson Prentice Hall, 3rd edition.
- Irwin, G. R. (1958). Fracture. In *Handbuch der Physik*, volume 6 (pp. 551–590). Springer.
- Irwin, G. R. (1960a). Fracture mode transition for a crack traversing a plate. *Journal of Basic Engineering*, 82(2), 417–423.
- Irwin, G. R. (1960b). *Plastic zone near a crack and fracture toughness*. Technical report, Proceedings of Seventh Sagamore Ordinance Material Research Conference. Report No. MeTE 661-611/F, Syracuse University Research Inst.
- Irwin, G. R. (1968). Linear fracture mechanics, fracture transiction, and fracture control. *Engineering Fracture Mechanics*.
- ISO (2009). *Wind actions on structures*. ISO 4354 :2009. Genève, Suisse. International Organization for Standardization.
- Jacobson, M. Z. (2005). *Fundamentals of Atmospheric Modeling*. Cambridge University Press, 2nd edition.
- Jain, P. (2011). *Wind Energy Engineering*. McGraw-Hill.
- Jappes, J. T. W., Alavudeen, A., & Venkateshwaran, N. (2006). *A Textbook of Engineering Materials and Metallurgy*. Laxmi Publications.
- Jesus, A. M. P., Matos, R., Fontoura, B. F. C., Rebelo, C., Silva, L. S., & Veljkovic, M. (2012). A comparison of the fatigue behavior between S355 and S690 steel grades. *Journal of Constructional Steel Research*, 79, 140–150.

- Jiang, S., Zhang, W., Li, X., & Sun, F. (2014). An analytical model for fatigue crack propagation prediction with overload effect. *Mathematical Problems in Engineering*.
- Johnson, D. (2000). *Advanced structural mechanics : an introduction to continuum mechanics and structural mechanics*. Thomas Telford.
- Jones, I. S. (1998). A wide range weight function for a single edge cracked geometry with clamped ends. *International Journal of Fracture*, 89, 1–18.
- Kaimal, J. C., Wyngaard, J. C., Izumi, Y., & Coté, O. R. (1972). Spectral characteristics of surface-layer turbulence. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 98, 563–589.
- Karaouni, H. (2001). *Nouveaux outils pour la conception fiable des structures*. PhD thesis, École Polytechnique.
- Kelly, S. G. (2012). *Mechanical vibrations : Theory and Applications*. Cengage Learning.
- Khan, S. S. (2012). *Low cycle lifetime assessment of Al2024 alloys*. PhD thesis, Helmholtz Zentrum Geesthacht, Institute of Materials Research.
- Khan, S. U., Alderliesten, R. C., Schijve, J., & Benedictus, R. (2007). On the fatigue crack growth prediction under variable amplitude loading. *Computational and experimental analysis of damaged materials*.
- Kiefer, A. J. (2004). Integrating electromechanical actuator hardware with receptance coupling substructure analysis for chatter prediction on high speed machining centers. Master's thesis, Graduate Faculty of North Carolina State University.
- Kishore, V. V. N., Ed. (2010). *Renewable energy engineering and technology : principles and practice*. The Energy and Resources Institute.
- Kondo, Y. (2003). Fatigue under variable amplitude loading. In I. Milne, R. O. Ritchie, & B. Karahaloo (Eds.), *Comprehensive Structural Integrity*, volume 4 (pp. 253–279). Elsevier Pergamon.
- Ku, H. H. (1966). Notes on the use of propagation of error formulas. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 70C(4).
- Kuhn, P. & Hardrath, H. F. (1952). *An engineering method for estimating notch-size effect in fatigue tests on steel*. Technical Note 2805. National Advisory Committee for Aeronautics.
- Labonnote, N., Rønnquist, A., & Malo, K. A. (2013). Modified hysteretic damping model applied to timoshenko timber beams. *Computers and Structures*, 121, 22–31.

- Lagoda, T. (2008). *Lifetime estimation of welded joints*. Springer.
- Lalanne, C. (2009). Fatigue damage. In *Mechanical vibration and shock analysis*, volume 4. Wiley, 2nd edition.
- Lanchester, F. W. (1915). A contribution to the theory of propulsion and the screw propeller. In *Trans. Institution of Naval Architects*. Vol. LVII.
- Larsen, J. M. & Annis, C. G. (1980). Observation of crack retardation resulting from load sequencing characteristic of military gas turbine operation. In D. F. Bryan & J. M. Potter (Eds.), *Effect of load spectrum variables on fatigue crack initiation and propagation* (pp. 91–107). ASTM STP 714. American Society for Testing and Materials.
- Lavassas, I., Nikolaidis, G., Zervas, P., Efthimiou, E., Doudoumis, I. N., & Baniotopoulos, C. C. (2003). Analysis and design of the prototype of a steel 1-MW wind turbine tower. *Engineering Structures*, 25, 1097–1106.
- Lee, Y.-L., Pan, J., Hathaway, R. B., & Barkey, M. E. (2005). *Fatigue Testing and Analysis : Theory and Practice*. Elsevier.
- Lemaitre, J. (1996). *A Course on Damage Mechanics*. Springer, 2nd edition.
- Lemaitre, J., Chaboche, J.-L., Benallal, A., & Desmorat, R. (2009). *Mécanique des Matériaux Solides*. Dunod.
- Lemaitre, J. & Desmorat, R. (2005). *Engineering Damage Mechanics : ductile, creep, fatigue and brittle failures*. Springer.
- Lesieutre, G. A. (2001). Damping in FE models. In D. Ewins & S. S. Rao (Eds.), *Encyclopedia of Vibration*. Academic Press.
- Lessard, C. S. (2006). *Signal processing of random physiological signals*. Morgan & Claypool Publishers, 1st edition.
- Li, J. & Chen, J. (2009). *Stochastic Dynamics of Structures*. John Wiley & Sons.
- Lin, Y. K., Kozin, F., Wen, Y. K., Casciati, F., Schueller, G. I., Kiureghian, A. D., Ditlevsen, O., & Vanmarcke, E. H. (1986). Methods of stochastic structural dynamics. *Structural Safety*, 3, 167–194.
- Lobitz, D. W. (1984). A NASTRAN-based computer program for structural analysis of horizontal axis wind turbines. *Proceedings of the horizontal axis wind turbine technology workshop*.
- Logan, D. L. (2007). *A first course in the finite element method*. Thomson, 4th edition.

- Louis, J.-F. (1979). A parametric model of vertical eddy fluxes in the atmosphere. *Boundary Layer Meteorology*, 17, 187–202.
- Machniewicz, T. (2009). Calibration of the strip yield model for fatigue crack growth predictions in structural steel. *Mechanics*, 28(2), 46–49.
- Machniewicz, T. (2012a). Fatigue crack growth prediction models for metallic materials. Part II : strip yield model - choices and decisions. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 36(361-373).
- Machniewicz, T. (2012b). Yield stress modification in the strip yield model. *Mechanics and control*, 31(4).
- Manwell, J. F., McGowan, J. G., & Rogers, A. L. (2002). *Wind energy explained : theory, design and application*. John Wiley & Sons.
- Masse, B. & Pastorel, H. (1992). *Stress calculation for the Sandia 34-Meter Wind Turbine Using the Local Circulation Method and Turbulent Wind*. SAND-91-7012. Albuquerque, NM : Sandia National Laboratories.
- Matsuishi, M. & Endo, T. (1968). Fatigue of metals subjected to varying stress. *Japan Society of Mechanical Engineers*.
- Matsuoka, S. & Tanaka, K. (1978). Delayed retardation phenomena of fatigue crack growth in various steels and alloys. *Journal of Materials Science*.
- McInnes, C. H. & Meehan, P. A. (2008). Equivalence of four-point and three-point rainflow cycle counting algorithms. *International Journal of Fatigue*, 30, 547–559.
- Meyer, K. A. (2014). Crack propagation analysis on the RM12 engine using real data. Master's thesis, Chalmers University of Technology.
- Miner, M. A. (1945). Cumulative damage in fatigue. *Journal of Applied Mechanics*, 12(3), A159–A164.
- Miyaura, E. H. (2012). Efeito das tensões residuais sobre a propagação de trincas em juntas soldadas por FSW. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Monin, A. S. (1958). The structure of atmospheric turbulence. *Theory of Probability & Its Applications*, 3(3), 266–296.
- Monin, A. S. & Obukhov, A. M. (1954). Basic regularity in turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere. *USSR Academy of Sciences, Geophysical Institute*, 24, 163–187.
- Morrow, J. (1968). Fatigue properties of metals. In *Fatigue Design Handbook*. SAE.

- Naser, J. M. & Toledano, F. S. (2011). Analysis of vibration-induced fatigue cracking in steel bridges. Master's thesis, Chalmers University of Technology.
- Nelson, F. C. (2000). The incorporation of hysteretic damping in structural analysis and design. In A. Guran (Ed.), *Impact and Friction of Solids, Structures and Intelligent Machines*. World Scientific Publishing.
- Neuber, H. (1961). Theory of stress concentration for shear strained prismatical bodies with arbitrary non linear stress strain law. *Journal of Applied Mechanics*, (pp. 544–550).
- Newman, J. C., Jr. (1981). A crack-closure model for predicting fatigue crack growth under aircraft loading. In J. B. Chang & C. M. Hudson (Eds.), *Methods and models for predicting fatigue crack growth under random loading* (pp. 53–84). STP 748. American Society for Testing and Materials.
- Newman, J. C., Jr. (1984). A crack opening stress equation for fatigue crack growth. *International Journal of Fracture*, 24(3), R131–R135.
- Newman, J. C., Jr. (1996). Application of a closure model to predict crack growth in three engine disc materials. *International Journal of Fracture*, 80, 193–218.
- Newman, J. C., Jr., Bigelow, C. A., & Shivakumar, K. N. (1993). Three dimensional elastic-plastic finite-element analyses of constraint variations in cracked bodies. *Engineering Fracture Mechanics*, 46(1), 1–13.
- Newman, J. C., Jr., Crews, J. H., & Bigelow, C. A. (1995). Variations of a global constraint factor in cracked bodies under tension and bending loads. In *Constraint effects in Fracture Theory and Applications : Second Volume*. STP 1244. American Society for Testing and Materials.
- Newman, J. C., Jr. & Daniewicz, S. R. (2014). Predicting crack growth in specimens with overloads and cold-worked holes with residual stresses. *Engineering Fracture Mechanics*, 127, 252–266.
- Norton, M. P. & Karczub, D. G. (2003). *Fundamentals of Noise and Vibration Analysis for Engineers*. Cambridge University Press, 2nd edition.
- Norton, R. L. (2006). *Machine Design : An Integrated Approach*. Pearson Prentice Hall, 3rd edition.
- Okamura, H. & Sakai, S. (1979). Cumulative fatigue damage under random loads. *Fatigue of Engineering Materials and Structures*, 1, 409–419.
- Oosthuizen, P. H. & Naylor, D. (1999). *An Introduction to Convective Heat Transfer Analysis*. McGraw-Hill.

- Paez, T. L. (2012). Random vibration - a brief history. *Sound & Vibration*, (pp. 52–60).
- Palmgren, A. (1924). Die Lebensdauer von Kugellagern (The Service Life of Ball Bearing). *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 68(14), 339–341.
- Pandolfo, J. P. (1966). Wind and temperature profiles for constant-flux boundary layers in lapse conditions with a variable eddy conductivity to eddy viscosity ratio. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 23, 495–502.
- Panofsky, H. A. (1963). Determination of stress from wind and temperature measurements. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 89, 85–94.
- Panofsky, H. A. & Dutton, J. A. (1984). *Atmospheric Turbulence : Models and Methods for Engineering Applications*. John Wiley & Sons.
- Paris, P. C., Gomez, M. P., & Anderson, W. E. (1961). A rational analytic theory of fatigue. *The Trend in Engineering*, 13, 9–14.
- Pasquill, F. (1961). The estimation of the dispersion of windborne material. *The Meteorological Magazine*, 90, 33–49.
- Paulson, C. A. (1970). The mathematical representation of wind speed and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer. *Journal of Applied Meteorology*, 9, 857–861.
- Peterson, R. E. (1974). *Stress-concentration factors*. John Wiley & Sons.
- Petroski, H. J. & Achenbach, J. D. (1978). Computation of the weight function from a stress intensity factor. *Engineering Fracture Mechanics*, 10, 257–266.
- Petyt, M. (2010). *Introduction to finite element vibration analysis*. Cambridge University Press, 2nd edition.
- Polák, J. (2003). Cyclic deformation, crack initiation, and low-cycle fatigue. In I. Milne, R. O. Ritchie, & B. Karihaloo (Eds.), *Comprehensive structural integrity*, volume 4. Elsevier.
- Pook, L. (2007). Metal fatigue. In G. M. L. Gladwell (Ed.), *Solid Mechanics and its Applications*, volume 145. Springer.
- Pope, S. B. (2000). *Turbulent Flows*. Cambridge University Press.
- Przemieniecki, J. S. (1968). *Theory of matrix structural analysis*. McGraw-Hill.
- Purkiss, J. A. (1996). *Fire Safety Engineering Design of Structures*. Butterworth-Heinemann.



- Rahman, M. M., Ariffin, A. K., Jamaludin, N., & Haron, C. H. C. (2009). Finite element based vibration fatigue analysis for a new free piston engine component. *The Arabian Journal for Science and Engineering*, 34, 231–246.
- Rayleigh, L. (1945). *The Theory of Sound*. New York : Dover.
- Ribeiro, A. S., Jesus, A. P., Costa, J. M., Borrego, L. P., & Maeiro, J. C. (2011). Variable amplitude fatigue crack growth modelling. *Mecanica Experimental*, 19, 33–44.
- Rice, J. R. (1972). Some remarks on elastic crack-tip stress fields. *International Journal of Solids and Structures*, 8, 751–758.
- Rice, S. O. (1954). Mathematical analysis of random noise. In N. Wax (Ed.), *Selected papers on noise and stochastic processes*. Dover publications.
- Roshko, A. (1961). Experiments on the flow past a circular cylinder at very high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 10, 345–356.
- Rossby, C. G. & Montgomery, R. B. (1935). The layer of frictional influence in wind and ocean currents. *Papers in physical oceanography and meteorology*, 3(3), 101.
- Salmén, L. & Hagen, R. (2002). Viscoelastic properties. In R. E. Mark, C. C. Habeger, J. Borch, & M. B. Lyne (Eds.), *Handbook of Physical Testing of Paper*. Marcel Dekker.
- Sander, M. & Richard, H. A. (2006). Fatigue crack growth under variable amplitude loading. Part II : analytical and numerical investigations. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 29, 303–319.
- Schijve, J. (2004). *Fatigue of structures and materials*. Kluwer Academic Publishers.
- Sendeckyj, G. P. (2001). Constant life diagrams - a historical review. *International Journal of Fatigue*, 23, 347–353.
- Serrano-González, J. & Lacal-Aránegui, R. (2016). Technological evolution of onshore wind turbines - a market-based analysis. *Wind Energy*.
- Shinozuka, M. (1971). Simulation of multivariate and multidimensional random processes. *Journal of the Acoustical Society of America*, 49, 357.
- Sih, G. (1973). *Handbook of stress intensity factors*. Bethlehem (Pennsylvania) : Institute of Fracture and Solid Mechanis, Lehigh University.
- Sih, G. C., Paris, P. C., & Erdogan, F. (1962). Crack-tip, stress-intensity factors for plane extension and plate bending problems. *Journal of Applied Mechanics*, (pp. 306–312).

- Simiu, E. & Scanlan, R. H. (1996). *Wind effects on structures : fundamentals and applications to design*. John Wiley & Sons, 3rd edition.
- Singh, K. D., Xu, Y., & Sinclair, I. (2011). Strip yield modelling of fatigue crack under variable amplitude loading. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 25(12), 3025–3036.
- Singh, K. L. & Ranganath, V. R. (2007). Cycle counting rainflow algorithm for fatigue analysis. *15th National Conference on Aerospace Structures, Coimbatore, Tamil Nadu, India.*, (pp. 301–306).
- Skorupa, M. & Skorupa, A. (2005). Experimental results and predictions on fatigue crack growth in structural steel. *International Journal of Fatigue*, 27, 1016–1028.
- Soderberg, C. R. (1930). ASME Transactions 52, APM-52-2, pp. 13-28.
- Solari, G. & Piccardo, G. (2001). Probabilistic 3-d turbulence modeling for gust buffeting of structures. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16, 73–86.
- Solari, G. & Tubino, F. (2002). A turbulence model based on principal components. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 17, 327–335.
- Song, X., ping Li, H., peng Shao, J., zhen Zhang, J., hui Wang, Y., & dong Yu, X. (2012). Validity of three engineering models for fatigue crack growth rate affected by compressive loading in LY12M aluminium alloy. *Transactions of Nonferrous Metals Society of China*, (pp. 27–32).
- Sperling, L. H. (2006). *Introduction to physical polymer*. John Wiley & Sons, 4th edition.
- Spitzer, R. E. (1965). Measurements of unsteady pressures and wake fluctuations for flow over a cylinder at supercritical reynolds number. Master's thesis, California Institute of Technology.
- Stashević, M., Maksimović, S., Gerić, K., Burzić, Z., & Maksimović, M. (2011). Fatigue crack growth prediction from low cycle fatigue properties. *Strojarstvo*, 3, 171–178.
- Stephens, R. I., Fatemi, A., Stephens, R. R., & Fuchs, H. O. (2000). *Metal Fatigue in Engineering*. John Wiley & Sons, 2nd edition.
- Stephens, R. I., Lee, S. G., & Lee, H. W. (1982). Constant and variable amplitude fatigue behavior and fracture of A572 steel at 25 °C (77 °F) and -45 °C (-50 °F). *International Journal of Fracture*, 19, 83–98.
- Stevenson, J. D. (1980). Structural damping values as a function of dynamic response stress and deformation levels. *Nuclear Engineering and Design*, 60, 211–237.

- Stromeyer, C. E. (1914). The determination of fatigue limits under alternating stress conditions. *Proceedings of the Royal Society of London*, 90(620), 411–425.
- Stull, R. B. (1988). *An introduction to boundary layer meteorology*. Kluwer Academic Publishers.
- Stüssi, F. (1955). Die Theorie der Dauerfestigkeit und die Versuche von August Wöhler (The theory of fatigue strength and the tests of August Wöhler). *Mitt. TKVSB*, (13), 47.
- Sugiyama, G. & Nasstrom, J. S. (1999). *Methods for determining the height of the atmospheric boundary layer*. UCRL-ID-133200. Lawrence Livermore National Laboratory.
- Sumi, Y. & Inoue, T. (2011). Multi-scale modeling of fatigue crack propagation applied to random sequence of clustered loading. *Marine Structures*, 24, 117–131.
- Tada, H., Paris, P. C., & Irwin, G. R. (1985). *The stress analysis of cracks handbook*. Louis (Missouri) : Paris Publications Incorporated, 2nd edition.
- Taheri, F., Trask, D., & Pegg, N. (2003). Experimental and analytical investigation of fatigue characteristics of 350WT steel under constant and variable amplitude loadings. *Marine Structures*, 16, 69–91.
- Telford, J. W. (1982). A theoretical value for von karman constant. *Pure and Applied Geophysics*, 120, 648–661.
- Thomas, D. L., Wilson, J. M., & Wilson, R. R. (1973). Timoshenko beam finite elements. *Journal of Sound and Vibration*, 31(3), 315–330.
- Tieleman, H. W. (1995). Universality of velocity spectra. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 56, 55–69.
- Tong, J. (2002). T-stress and its implications for crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, (69), 1325–1337.
- Topper, T. H., Wetzell, R. M., & Morrow, J. (1967). *Neuber's rule applied to fatigue of notched specimens*. NAEC-ASL 1114. U. S. Naval Air Engineering Center.
- Tritton, D. J. (1988). *Physical Fluid Dynamics*. Oxford Science Publications, 2nd edition.
- Turner, B. (1994). *Workbook of atmospheric dispersion estimates*. Lewis Publishers, 2nd edition.

- Ulewicz, R., Szataniak, P., & Novy, F. (2014). Fatigue properties of wear resistant martensitic steel. *Proceedings of the 23rd International Conference on Metallurgy and Materials (Metal 2014)*.
- van Nunen, J. W. G. (1974). Pressure and forces on a circular cylinder in a crossflow at high reynolds numbers. In E. Naudascher (Ed.), *Flow Induced Structural Vibrations*. Springer, Berlin.
- von Kármán, T. (1948). Progress in the statistical theory of turbulence. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 34, 530–539.
- Walker, K. (1970). The Effect of Stress Ratio During Crack Propagation and Fatigue for 2024-T3 and 7075-T6 Aluminium. In *Effects of Environment and Complex Load History on Fatigue Life* (pp. 1–14). STP 462. American Society for Testing and Materials.
- Wang, G. S. (1991). Crack surface displacements for mode I one-dimensional cracks in general two-dimensional geometry. *Engineering Fracture Mechanics*, 40(3), 535–548.
- Wang, G. S. (1993). The plasticity aspect of fatigue crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 46(6), 909–930.
- Wang, G. S. & Blom, A. F. (1991). A strip model for fatigue crack growth prediction under general load conditions. *Engineering Fracture Mechanics*, 40(3), 507–533.
- Weibull, W. (1949). A statistical representation of fatigue failure in solids. *Transactions of the Royal Institute of Technology*.
- Wijnants, M. L., Cox, R. F. A., Hasselman, F., Bosman, A. M. T., & Orden, G. V. (2013). Does sample rate introduce an artifact in spectral analysis of continuous processes? In J. G. Holden, M. A. Riley, J. Gao, & K. Torre (Eds.), *Fractal analyses : statistical and methodological innovations and best practices*. Frontiers.
- Wiki Éolienne (2016). <http://eolienne.f4jr.org/rugosite> (site internet consulté le 12 juin 2016).
- Williams, M. L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. *Journal of Applied Mechanics*, (24), 111–114.
- Woodward, J. L. (1998). *Estimating the flammable mass of a vapor cloud*. Wiley.
- Xu, Y.-L. (2013). *Wind effects on cable-supported bridges*. Wiley.
- Yakhot, V. & Orszag, S. A. (1986). Renormalization group analysis of turbulence. *Journal of Scientific Computing*, 1(1), 3–51.

- Yamada, Y., Ziegler, B., & Jr., J. C. N. (2011). Application of a strip-yield model to predict crack growth under variable-amplitude and spectrum loading - part 1 : Compact specimens. *Engineering Fracture Mechanics*, 78, 2597–2608.
- Yamauchi, A., Miyahara, H., Makabe, C., & Miyazaki, T. (2012). Acceleration of fatigue crack growth after overload in carbon steel. *International Journal of Modern Physics*, 6, 239–244.
- Yuen, B. K. C. & Taheri, F. (2006). Proposed modifications to the wheeler retardation model for multiple overloading fatigue life prediction. *International Journal of Fatigue*, 28, 1803–1819.
- Zeng, Z. & Fatemi, A. (2001). Elasto-plastic stress and strain behaviour at notch roots under monotonic and cyclic loadings. *Journal of Strain Analysis*, 36, 287–300.
- Zhang, X., Chan, A. S. L., & Davies, G. A. O. (1992). Numerical simulation of fatigue crack growth under complex loading sequences. *Engineering fracture mechanics*, 42(2), 305–321.
- Zilitinkevich, S., Baklanov, A., Rost, J., Smedman, A.-S., Lykosov, V., & Calanca, P. (2002). Diagnostic and prognostic equations for the depth of the stably stratified ekman boundary layer. *Quarterly Journal of Royal Meteorological Society*, 128, 25–46.
- Zilitinkevich, S. S. & Baklanov, A. (2002). Calculation of the height of the stable boundary layer in practical applications. *Boundary-Layer Meteorology*, 105, 389–409.
- Zilitinkevich, S. S. & Esau, I. N. (2003). The effect of baroclinicity on the equilibrium depth of neutral and stable planetary boundary layers. *Quarterly Journal of Royal Meteorological Society*, 129, 3339–3356.