



HAL
open science

Etude des vitesses de dérive fluides dans le plasma de bord des tokamaks : modélisation numérique et comparaison simulation/expérience

Robin Leybros

► **To cite this version:**

Robin Leybros. Etude des vitesses de dérive fluides dans le plasma de bord des tokamaks : modélisation numérique et comparaison simulation/expérience. Mécanique des fluides [physics.class-ph]. Ecole Centrale Marseille, 2015. Français. NNT : 2015ECDM0006 . tel-01406408

HAL Id: tel-01406408

<https://theses.hal.science/tel-01406408>

Submitted on 1 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Doctorale 353 : Sciences pour l'ingénieur : Mécanique, Physique, Micro et Nanoélectronique

Laboratoire de Mécanique, Modélisation & Procédés Propres - M2P2
Laboratoire de Physique des Plasmas - LPP

THÈSE DE DOCTORAT

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'ÉCOLE CENTRALE de MARSEILLE

Discipline : Mécanique et Physique des fluides

ÉTUDE DES VITESSES DE DÉRIVE FLUIDES DANS LE PLASMA DE BORD DES TOKAMAKS : Modélisation numérique et comparaison simulation/expérience

par

LEYBROS Robin

**Directeurs de thèse : BONTOUX Patrick, CIRAOLO Guido,
Pascale HENNEQUIN**

Soutenue publiquement le 11 décembre 2015 devant le jury composé de :

BONTOUX Patrick	Directeur de Recherche - CNRS	Directeur de thèse
CIRAOLO Guido	Maître de conférences - École Centrale Marseille	Codirecteur de thèse
GHENDRIH Philippe	Directeur de Recherche - CEA	Président
HENNEQUIN Pascale	Directrice de Recherche - CNRS	Codirectrice de thèse
INNOCENTE Paolo	Chargé de recherche CNR - Consorzio RFX	Examineur
LABIT Benoît	Chargé de recherche - EPFL	Examineur
MANFREDI Giovanni	Directeur de Recherche - CNRS	Rapporteur
STROTH Ulrich	Professeur - Technische Universität München	Rapporteur

Remerciements

Au cours de ces trois années de thèse, j'ai eu le privilège de naviguer entre trois laboratoires travaillant ensemble sur différents aspects complémentaires d'une même problématique. Cela a fait de cette thèse un défi très enrichissant, tant sur le plan humain que sur le plan scientifique. Je tenais donc à remercier dans ces quelques lignes les personnes que j'ai eu l'opportunité de rencontrer et qui m'ont accompagné et aidé dans l'élaboration de ce travail.

Je remercie tout d'abord les membres du jury, Paolo Innocente, Benoît Labit, Giovanni Manfredi, Ulrich Stroth et Philippe Ghendrih d'avoir accepté d'évaluer ce travail et de m'avoir permis de prendre le recul nécessaire à son élaboration. Je tiens à remercier tout particulièrement les rapporteurs du manuscrit, qui ont accepté de le relire et de contribuer à son amélioration.

Je souhaite remercier Patrick Bontoux d'avoir accepté de diriger cette thèse et de m'avoir accueilli au sein du M2P2.

J'adresse mes sincères remerciements à mes encadrants de thèse, Pascale Hennequin et Guido Ciraolo, pour m'avoir permis de réaliser ce travail ainsi que pour leurs conseils éclairés et leur soutien malgré toutes leurs responsabilités. Un grand merci à eux pour la création de ce sujet particulièrement complet alliant les aspects numériques et expérimentaux de la fusion nucléaire, qui m'a permis d'appréhender différentes visions de la recherche fondamentale. Merci encore à Philippe Ghendrih pour ses précieux conseils m'ayant permis de me préparer au mieux la fin de cette thèse, ainsi que de m'avoir, avec Guido Ciraolo, donné envie de travailler sur la fusion nucléaire durant mes trois années d'école d'ingénieur et mon année de master ! Je souhaiterais également remercier tous les collaborateurs ayant contribué à ce travail au sein des différents laboratoires ou que j'ai simplement eu la chance de rencontrer durant ces trois années. Je voudrais remercier chaleureusement Pierre Morel pour son importante implication dans le développement du diagnostic synthétique mais aussi pour ses conseils, son soutien et pour toutes les discussions (scientifiques mais pas que !) que nous avons eues. Je remercie Hugo Bufferand de m'avoir fait découvrir la modélisation numérique avec SOLEDGE2D et de m'avoir conseillé et accompagné dans le travail de développement du code. Un grand merci également pour sa disponibilité et son aide tout au long de ces trois années ! Je tiens aussi à remercier Patrick Tamain pour son aide précieuse et ses conseils avisés ainsi que Clothilde Colin pour les échanges, les idées et les nombreuses simulations TOKAM3X qu'elle m'a faites ! Merci enfin à Sébastien Hacquin pour avoir pris le temps de m'expliquer le principe de fonctionnement d'un diagnostic synthétique full-wave et pour la simulation appliquée à TOKAM3X qu'il m'a fourni.

Je remercie également les directeurs successifs du LPP, Laurence Rezeau et Pascal Chabert, de m'avoir accueilli dans leur laboratoire. Mes sincères remerciements aux administratrices des différents laboratoires, Virginie Blanc et Aurore Piazzoli du M2P2 et Cherifa Ighoud et

Catherine Jegu du LPP pour leur support logistique lors de l'organisation de mes nombreux déplacements entre le LPP et le M2P2. Je remercie aussi Michel Pognant pour sa bonne humeur et pour son aide au cours de ces trois années.

Je n'oublie pas tous ceux avec qui j'ai pu discuter, échanger et qui m'ont aidé sur différents plans : Özgür Gürçan, Romain Meyrand, Laure Vermare, Eric Serre, Nicolas Fedorzack, Yannick Marandet et Frederic Schwander. Enfin, je remercie les thésards des différents labos que j'ai eu la chance de rencontrer et avec qui j'ai pu discuter de la dure vie de doctorant : Clothilde, Romain, Alexandre, Vincent, Davide, Hugo, Julien, Gustavo et tous les autres.

Je conclurai en remerciant mes parents et ma sœur pour leur soutien quotidien (pendant vingt-six ans!), Céline qui me supporte et me soutient sans jamais lâcher depuis quatre ans maintenant et mes amis Gogo, Allan, Jerem, Toitoin, Bonnot, Dada, Joubi, Nono, Flogou pour les soirées jeux vidéo, les répétés dans le garage et les bons moments. Enfin, un dernier remerciement à Antho pour son oreille attentive et pour Francis!

à mes grands parents,
à Maurice Deraedt

Résumé

Le transport des particules et de la chaleur dans la zone de bord des tokamaks joue un rôle déterminant à la fois sur les performances du plasma confiné et sur l'extraction de la puissance et ainsi la durée de vie des composants face au plasma. C'est dans ce contexte que s'inscrit ce travail de thèse, qui porte sur le rôle joué par les écoulements transverses au champ magnétique dans l'équilibre entre dynamique parallèle et dynamique perpendiculaire qui régit la région périphérique d'un tokamak. Ces écoulements peuvent produire des asymétries poloidales du dépôt de chaleur et de particules sur les composants face au plasma, et plus généralement des asymétries des diverses quantités dans le plasma. Les vitesses de dérive radiale sont d'origine électrique (liées à la présence d'un champ électrique radial résultant de l'équilibre des charges) ou liées aux effets de la géométrie toroïdale induisant une inhomogénéité du champ magnétique (vitesse de gradient-courbure). Pour progresser dans la compréhension de ces phénomènes, la modélisation numérique du transport et de la turbulence en géométrie complexe est indispensable. En complément, des outils de diagnostic synthétique permettant de modéliser les processus de mesure dans les plasmas numériques sont développés pour permettre une comparaison réaliste entre modèles et expériences.

La modélisation des vitesses de dérive perpendiculaire a été introduite dans le code SOLEDGE2D décrivant le transport de la densité, quantité de mouvement et énergie d'un plasma de tokamak. Nous avons d'abord étudié l'impact d'un champ électrique prescrit sur les équilibres plasma, pour comprendre les mécanismes à l'origine des asymétries du plasma et étudier l'établissement d'écoulement parallèle et d'asymétrie du dépôt de chaleur sur les composants face au plasma. Nous avons ensuite implémenté un modèle auto-consistant de résolution du potentiel électrique dans les équations fluides de SOLEDGE2D afin de comprendre l'équilibre du champ électrique et d'étudier l'effet de la configuration magnétique du tokamak et de la vitesse de gradient-courbure sur ce dernier.

Dans la deuxième partie de cette thèse, un diagnostic synthétique permettant de modéliser les mesures expérimentales de rétro-diffusion Doppler a été développé et testé en vue d'être appliqué aux simulations du code fluide 3D turbulent, TOKAM3X. Ce diagnostic permet de mesurer la vitesse perpendiculaire du plasma à partir du mouvement des fluctuations de densité. Il a été utilisé ici pour comparer les asymétries de vitesse observées expérimentalement aux asymétries mesurées dans les simulations numériques.

Abstract

The transport of heat and particles in the edge of tokamaks plays a key role in both the performance of the confined plasma and the extraction of power and thus the lifetime of the plasma facing components. It's in this context that this thesis is inscribed, which focuses on the role played by the transverse magnetic field flows in the balance between parallel and perpendicular dynamic that governs the edge region of a tokamak. These flows can produce poloidal asymmetries of heat and particles deposit on plasma facing components and generally asymmetries of various amounts in plasma. The radial drift velocities are due to the presence of a radial electric field resulting from charge balance (electric drift velocity) or related to effects of the toroidal geometry inducing a magnetic field inhomogeneity (curvature drift velocity). To advance the understanding of these phenomena, numerical modeling of transport and turbulence in complex geometries is essential. In addition, synthetic diagnostic tools for modeling the measurement process in numerical plasmas are developed to enable a realistic comparison between models and experiments.

Modeling of perpendicular drift velocities was introduced into the SOLEDGE2D code describing the transport of the density, momentum and energy of a tokamak plasma. We first studied the impact of a prescribed electric field on plasma equilibrium to understand the mechanisms behind plasma asymmetries and study the establishment of parallel flows and asymmetry of the heat flux on plasma facing components. Then we implemented a self-consistent model solving the electric potential in SOLEDGE2D fluid equations to understand the equilibrium of the electric field and to study the effect of the magnetic configuration of the tokamak and the curvature drift velocity on it.

In the second part of this thesis, a synthetic diagnosis modeling the experimental measurements of Doppler backscattering was developed and tested in order to be applied to simulations of 3D turbulent fluid code TOKAM3X. This diagnosis measures the perpendicular velocity of the plasma from the movement of the density fluctuations. It was used to compare the perpendicular velocity asymmetries observed experimentally to asymmetries measured in numerical simulations.

Sommaire

Résumé	iii
Abstract	v
Introduction	5
I Concepts généraux	9
I. 1 La fusion thermonucléaire contrôlée	9
I. 1. 1 Réaction de fusion d'atomes légers	9
I. 1. 2 Confinement Magnétique : la géométrie tokamak	11
I. 1. 3 Transport dans les tokamaks	16
I. 2 Modélisation fluide des plasmas de tokamak	18
I. 2. 1 De l'Equation de Boltzmann aux équations fluides de Braginskii	18
I. 2. 2 Vitesse de dérive perpendiculaire	21
I. 2. 3 Physique des lignes de champ ouvertes - conditions limites	23
II Modélisation du transport perpendiculaire dans le plasma de bord : code SOLEDGE2D	31
II. 1 Equations fluides dans SOLEDGE2D	31
II. 1. 1 Vitesse et courant	31
II. 1. 2 Conservation de la masse	32
II. 1. 3 Conservation de la quantité de mouvement	32
II. 1. 4 Conservation de l'énergie totale	33
II. 2 Equation de vorticité : potentiel auto-consistant	34
II. 2. 1 Courant de polarisation	34
II. 2. 2 Conservation de la charge	36
II. 2. 3 Loi d'Ohm généralisée	36
II. 3 Géométrie du code	37
II. 3. 1 Construction du maillage structuré	37
II. 3. 2 Topologie magnétique	38
II. 3. 3 Décomposition multi-domaine	38
II. 4 Conditions limites	41
II. 4. 1 Conditions limites classiques	41
II. 4. 2 Méthode de pénalisation	43
II. 5 Exemple de simulations avec le code SOLEDGE2D	45
II. 5. 1 Comparaison aux mesures expérimentales sur le tokamak Tore Supra	45
II. 5. 2 Comparaison aux mesures expérimentales sur le tokamak ASDEX-Upgrade	48

III	Etude numérique 2D de l'effet des vitesses de dérive fluides avec le code SOLEDGE2D-DRIFT	51
III. 1	Validation du modèle de dérive fluide : Etudes de l'effet d'un champ électrique radial imposé	51
III. 1. 1	Effet de la vitesse de dérive électrique dans la SOL	51
III. 1. 2	Effet de la vitesse de dérive électrique dans le bord : écoulement de Pfirsch-Schlüter et rotation parallèle	56
III. 1. 3	Effet sur les flux de chaleurs impactant le limiteur : asymétrie du flux de chaleur dans la SOL	61
III. 2	Etudes de l'effet des vitesses de dérive auto-consistantes en géométrie limiteur	63
III. 2. 1	Effet des vitesses de dérive perpendiculaires : équilibre du champ électrique en géométrie limiteur	64
III. 2. 2	Effet des vitesses de dérive perpendiculaires : écoulement de Pfirsch-Schlüter et asymétries dans la SOL	68
III. 3	Comparaison simulation/expérience : Effet de la position du limiteur sur le champ électrique.	75
III. 3. 1	Contexte expérimental : effet sur l'amplitude de la vitesse perpendiculaire et sur son cisaillement.	75
III. 3. 2	Modélisation numérique : effet sur le champ électrique	76
III. 3. 3	Modélisation numérique : conséquences sur les écoulements	78
III. 4	Conclusion	81
IV	Mesures expérimentales de la vitesse perpendiculaire : rétro-diffusion Doppler	83
IV. 1	Principe de la rétro-diffusion Doppler	83
IV. 1. 1	Principe de la diffusion collective	83
IV. 1. 2	Propagation d'onde dans les plasmas	86
IV. 2	Expérience de rétro-diffusion Doppler	90
IV. 2. 1	Caractéristique du réflectomètre Doppler	90
IV. 2. 2	Détection hétérodyne du champ rétro-diffusé	92
IV. 2. 3	Définition de la localisation radiale et du nombre d'onde de mesure.	93
IV. 2. 4	Interprétation des signaux expérimentaux.	94
V	Diagnostic synthétique de rétro-diffusion Doppler : mesure de vitesse perpendiculaire dans le code fluide TOKAM-3X	97
V. 1	Simulations 3D fluides turbulentes : le code TOKAM-3X	97
V. 1. 1	Hypothèses du modèle de dérive fluide TOKAM-3X	97
V. 1. 2	Equation du modèle fluide de TOKAM-3X	98
V. 1. 3	Conditions limites et géométrie	99
V. 1. 4	Adimensionnement et paramètres de références	101
V. 2	Diagnostic synthétique de rétro-diffusion DOPPLER	102
V. 2. 1	Diagnostic synthétique simplifié : diffusion seule	102
V. 2. 2	Validation analytique du diagnostic synthétique 2D	105
V. 3	Application du diagnostic synthétique à des cartes de fluctuations turbulentes.	113
V. 3. 1	Principe d'utilisation du diagnostic synthétique sur le code TOKAM-3X	113
V. 3. 2	Mesure de la vitesse des fluctuations dans une simulation TOKAM-3X : vitesse poloidale et vitesse fluctuante moyenne.	118

V. 3. 3 Effet des caractéristiques du diagnostic sur les mesures turbulentes. . . .	120
V. 4 Comparaison simulations/expériences : Etude des asymétries poloidales de la vitesse perpendiculaire	122
V. 4. 1 Contexte expérimental : asymétrie des mesures de rétro-diffusion Doppler	122
V. 4. 2 Asymétrie poloidale des écoulements dans TOKAM-3X	127
V. 5 Conclusion	132
Liste des figures	140
Annexes	141
A Expressions des termes collisionnels des équations de Braginskii.	141
A. 1 Termes de Braginskii	141
A. 1. 1 Tenseur de pression	141
A. 1. 2 Terme de friction	143
A. 1. 3 Flux de chaleur	143
A. 2 “Diamagnetic-cancellation”	143
A. 2. 1 Équation de conservation de la masse	144
A. 2. 2 Équation de conservation de la quantité de mouvement parallèle	144
A. 2. 3 Équation de conservation de l’énergie totale	145
B Calcul des coefficients de métrique dans SOLEDGE-2D	147
B. 1 Base covariante et contravariante	147
B. 2 Coordonnées curvilinéaires 2D	147
B. 3 Gradient	148
B. 4 Divergence	149
B. 4. 1 Divergence d’un vecteur aligné au champ magnétique	149
B. 4. 2 Termes perpendiculaires diffusifs	149
B. 4. 3 Termes perpendiculaires convectifs	151
B. 5 Équation de conservation de la masse	152
B. 5. 1 Avec les coefficients de métrique	152
B. 5. 2 Adimensionnement	153
B. 6 Équation de conservation de la quantité de mouvement	154
B. 6. 1 Avec les coefficients de métrique	154
B. 6. 2 Adimensionnement	156
B. 7 Equation de conservation de la charge	157
B. 7. 1 Opérateur de vortacité et loi d’Ohm généralisée	157
B. 7. 2 Équation avec métrique	158
B. 7. 3 Adimensionnement	158
Bibliographie	166

Introduction

À l'heure où les ressources en énergie fossile s'amenuisent et où l'impact du développement de notre société sur l'environnement devient une préoccupation majeure, la recherche de nouvelles sources d'énergie renouvelables et non émettrices de gaz à effet de serre est devenue un enjeu primordial.

La recherche sur la fusion par confinement magnétique explore la possibilité de produire une énergie propre à partir des réactions de fusion du deutérium et du tritium dans un plasma chauffé à des températures extrêmement élevées ($10^7 - 10^8 K$) et confiné dans une enceinte torique grâce à un intense champ magnétique dans des machines appelées tokamaks. Il s'agit d'un projet à long terme mais la production d'énergie par ce procédé est un défi technique et scientifique de premier plan dont les efforts de recherche valent la peine d'être poursuivis.

La possible exploitation de ces réacteurs comme source d'énergie dépend principalement de la qualité du confinement du plasma et du contrôle des flux de particules et de chaleur impactant les parois de l'enceinte, ce dernier étant l'un des points les plus critiques du programme fusion. La charge thermique sur la paroi d'un tokamak doit être évaluée en considérant un ensemble de phénomènes physiques couplés les uns avec les autres de manière fortement non linéaire, allant des phénomènes de transport dans le plasma aux réactions atomiques et moléculaires associées à l'interaction entre le plasma et la paroi. Plus généralement, la dynamique de la Scrape-Off-Layer (SOL), la région du plasma "périphérique" en contact direct avec le mur, joue un rôle majeur sur l'extraction de puissance, sur le phénomène du recyclage du plasma au contact du mur et sur la dynamique des impuretés produites par la paroi soumise aux flux plasma. Un des acteurs majeurs de cette dynamique est le transport perpendiculaire aux lignes de champ magnétique qui détermine la distribution spatiale et temporelle du dépôt de puissance à la paroi mais aussi la redistribution des impuretés dans le plasma.

Dans ce contexte, l'arrivée du projet ITER à Cadarache rend encore plus pressant le besoin du développement d'outils numériques capables autant de prédire les scénarios plasma performants que de définir un domaine opérationnel convenable pour le réacteur afin d'éviter l'endommagement irréversible des composants face au plasma. Cette thèse s'inscrit dans un effort conjoint entre les laboratoires M2P2, LPP et PIIM faisant partie de la Fédération de Recherche sur la Fusion Magnétique (FR-FCM) et l'Institut de Recherche sur la Fusion par confinement Magnétique (IRFM). Elle vise l'amélioration de notre compréhension et de nos capacités prédictives des processus de transport dans le plasma de bord.

Cette thèse s'attaque particulièrement à l'étude des vitesses de dérives fluides dans le plasma de bord des tokamaks et à leur impact sur les équilibres plasma et le dépôt de puissance sur les composantes face au plasma. En raison de la courbure du champ magnétique imposé dans les tokamaks, de l'établissement de champs électriques liés au mouvement de particules de charges opposées et d'un gradient de pression entre le bord et le cœur du plasma, des vitesses faisant dériver les particules perpendiculairement au champ magnétique se développent. L'effet de ses vitesses a été longuement étudié théoriquement [1] [2] et expérimentalement [3]. Il a été montré que les vitesses de dérive ont un impact sur les asymétries poloidales du plasma [4] et sont notamment en partie responsables des asymétries du dépôt de chaleur et de particules entre

côté fort champ et faible champ du divertor [5] [6] [7]. De plus, ces vitesses semblent également entraîner de forts écoulements parallèles dans le bord du plasma [8] [9].

Le problème des dérives poloidales et de leur impact sur le plasma de bord et l'interaction plasma-paroi est ici abordé selon deux axes complémentaires. D'un côté, nous avons analysé leur impact sur le plasma de bord par la modélisation numérique afin d'extraire les mécanismes fondamentaux en jeu. De l'autre, nous nous sommes intéressés à l'interprétation des expériences et à leur comparaison avec les simulations numériques. Dans les deux cas, des outils spécifiques ont été développés, via l'amélioration des modèles numériques existants ou via le développement de diagnostics synthétiques.

Le volet modélisation de ce travail a été mené à l'aide du code SOLEDGE2D [10]. Il s'agit du code de transport 2D développé en collaboration entre IRFM, M2P2 et PIIM simulant l'équilibre du plasma de bord incluant la SOL et la partie périphérique du plasma confiné. La particularité unique du code est de pouvoir simuler l'interaction entre le plasma et la paroi tout au long de l'enceinte du tokamak grâce à l'extension de la grille de simulation jusqu'à la paroi par la méthode de pénalisation [11] [12] [13]. Ce code est couplé au code cinétique EIRENE [14] pour le transport de neutres [15] [13]. Notre travail a d'abord consisté à enrichir le modèle traité par le code en implémentant l'advection des différents champs par les vitesses de dérives électriques et diamagnétiques. Ceci nous a permis de montrer l'importance de l'impact d'un champ électrique prescri sur les asymétries poloidales de la SOL, les écoulements parallèles et les flux de chaleur (travail présenté à la 21ème conférence PSI (Plasma Surface Interaction) [16]). Nous avons dans un deuxième temps ajouté dans le code une équation et un solveur spécifique permettant de calculer de manière cohérente l'évolution du potentiel électrique dans le plasma. L'établissement d'un champ électrique radial cisailé autour de la séparatrice ainsi que son impact sur les asymétries poloidales de la SOL ont été retrouvés. Le lien entre le courant diamagnétique et le courant parallèle et leur influence sur le champ électrique radial ont été mis en avant. Une première comparaison à l'expérience a permis de retrouver qualitativement l'impact de la configuration magnétique sur l'amplitude du champ électrique et sur les écoulements qui en résultent.

La confrontation des modèles aux résultats expérimentaux reste la seule façon de valider ou de faire progresser les modèles. Nous nous sommes donc intéressés à l'analyse de mesures expérimentales sur la rotation poloidale du plasma, supposée être liée aux vitesses de dérive, à leur interprétation et leur comparaison avec des modèles numériques. Le principal diagnostic utilisé à cet effet est la réflectométrie Doppler. Lors d'une mesure de réflectométrie Doppler (ou rétrodiffusion Doppler [17] [18]), un faisceau micro-onde se propage dans un plasma turbulent jusqu'à une couche de coupure sur laquelle il sera réfléchi. La mesure du champ diffusé vers l'arrière ("rétro") par les fluctuations de densité au niveau de la couche de coupure permet de mesurer localement le niveau de turbulence du plasma et la vitesse de ses fluctuations. Ce diagnostic est par exemple employé afin de mesurer la vitesse perpendiculaire du plasma et d'étudier l'interaction entre ces écoulements et la turbulence. Cependant, l'interprétation des mesures obtenues avec ce diagnostic pour remonter aux grandeurs plasma repose sur des modèles complexes et la comparaison avec les modèles numériques est de ce fait malaisée. Pour faciliter la comparaison directe entre ces résultats, des outils de diagnostic synthétique permettant de reproduire la mesure expérimentale dans un plasma numérique ont été proposés. Des codes permettant de modéliser la propagation de l'onde, basés sur les équations de Maxwell couplées à la description du plasma ("full-wave" [19] [20] ou, dans une version simplifiée, Helmholtz [21]) ont été développés. Ils ont permis notamment de retrouver quantitativement les mesures expérimentales du transport dans des simulations gyrocinétiques [22]. Ces codes présentent l'avantage de pouvoir simuler de façon réaliste l'interaction onde/plasma tout au

long de la propagation du faisceau. Cependant les échelles temporelles d'évolution du faisceau (vitesse de la lumière) par rapport à l'évolution du plasma engendrent un coût numérique très important. Dans notre le cadre de notre travail, nous avons cherché à développer une méthode simplifiée de diagnostic synthétique reproduisant les signaux expérimentaux en ne considérant que la partie du champ rétro-diffusée près dans la zone de mesure. Nous l'avons alors appliqué aux simulations fluides turbulentes du code de turbulence 3D TOKAM-3X [23], dont les équations contiennent la physique des dérives telle que nous l'avons analysée dans SOLEDGE2D. Basé sur les équations de premier principe, il vise une modélisation auto-consistante du transport turbulent aux différentes échelles. Il permet notamment d'étudier l'impact de la turbulence sur les asymétries poloidales du plasma et il a déjà fait l'objet de comparaisons à l'expérience. C'est dans cette continuité que nous allons chercher à y appliquer un diagnostic synthétique. La comparaison a porté sur les profils de vitesse des fluctuations issus de la simulation aux profils expérimentaux. Nous nous sommes intéressés à la présence des asymétries poloidales de vitesse observées expérimentalement dans les simulations fluides de TOKAM-3X et à l'étude de leurs origines (travail présenté à l'école de physique des Houches "Turbulence, magnetic fields, and self-organization in laboratory and astrophysical plasmas"). L'utilisation du diagnostic synthétique a permis d'extraire les profils de la vitesse perpendiculaire du plasma et de lier son origine aux vitesses de dérive électrique et diamagnétique. L'asymétrie de vitesse ainsi observée dans TOKAM3X est liée à la dépendance de la vitesse perpendiculaire au champ magnétique.

Le premier chapitre de ce manuscrit est consacré à la présentation des concepts de base de la fusion nucléaire et du confinement magnétique. La description fluide du plasma dans le cadre des équations de Braginskii y est présentée avant d'introduire les vitesses de dérives qui sont à la base de notre étude. Nous présentons ensuite les particularités physiques des lignes de champ ouvertes dans la SOL.

Dans le chapitre II, nous abordons la dérivation des équations à la base du modèle du code SOLEDGE2D. Nous présentons les spécificités du code ainsi que son fonctionnement avant de présenter brièvement quelques applications à la comparaison simulation/expérience.

Nous présentons ensuite dans le chapitre III les premières études effectuées avec SOLEDGE2D-DRIFTS, c'est-à-dire en utilisant la version du code prenant en compte l'effet des vitesses de dérives fluides. Dans un premier temps, l'impact d'un champ électrique prescrit et de la vitesse de dérive poloidale résultante est étudié. Dans un second temps, nous étudions l'établissement de l'équilibre du potentiel électrique ainsi que l'effet des vitesses de dérives auto-consistantes sur les asymétries du plasma de bord.

Le chapitre IV aborde les mécanismes de base de la rétrodiffusion Doppler. Le diagnostic implanté dans le tokamak Tore Supra ainsi que son utilisation sont alors présentés.

Enfin, nous abordons dans le Chapitre V la comparaison des profils de vitesse du code turbulent TOKAM3X aux mesures de rétrodiffusion Doppler. Après avoir brièvement présenté le modèle du code, le diagnostic synthétique que nous avons développé est présenté et testé sur des perturbations analytiques. Nous terminons par une application de ce modèle à l'étude des asymétries poloidales de vitesse dans les simulations turbulentes de TOKAM3X.

Chapitre I

Concepts généraux

Nous commençons ici par expliquer les principes fondamentaux de la fusion thermonucléaire contrôlée. Après avoir défini les principes physiques et techniques du confinement magnétique et ses enjeux, nous présentons la théorie à la base de la modélisation fluide des plasmas de fusion. Un intérêt particulier sera porté à la physique spécifique des lignes de champ magnétique ouverte caractérisant une certaine zone du plasma de bord : la Scrape-Off-Layer (SOL).

I. 1 La fusion thermonucléaire contrôlée

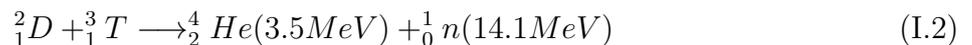
I. 1. 1 Réaction de fusion d'atomes légers

La réaction de fusion thermonucléaire est une réaction où deux noyaux légers vont s'assembler pour former un noyau plus lourd. La réorganisation du noyau ayant lieu pendant la réaction aboutit à un dégagement important d'énergie lié à un défaut de masse dans le bilan de la réaction. Ce défaut est donné par la relation d'Einstein :

$$\Delta E = \Delta mc^2 \tag{I.1}$$

Cette réaction dégage de l'énergie pour les noyaux légers dont le numéro atomique va de celui de l'hydrogène à celui du fer (noyau le plus stable) et en consomme pour les noyaux plus lourds (courbe d'Aston Fig.(I.1)).

Pour réaliser la fusion thermonucléaire sur Terre, plusieurs réactions sont disponibles. Ces réactions doivent permettre de satisfaire certains critères physiques (taux de réaction, énergie dégagée) aussi bien que pratiques (quantité de combustible disponible). La réaction qui a été retenue est la fusion de deux isotopes de l'hydrogène, le deutérium 2_1D et le Tritium 3_1T (Eq.(I.2)) correspondant à la réaction ayant la section efficace la plus élevée à la température la plus basse (Fig.(I.2)).



De façon schématique, lors d'une réaction de fusion nucléaire, deux forces entrent en compétition :

- la force électrostatique : force à longue portée faisant que les noyaux de charge électrique positive vont se repousser

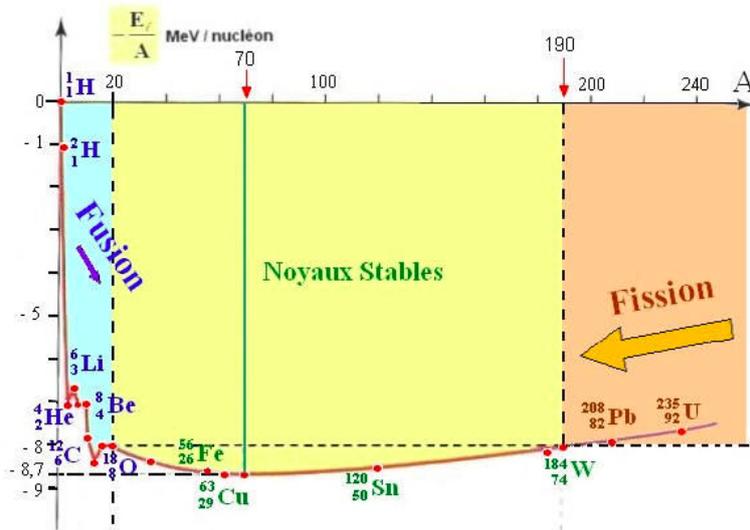


Figure I.1 – Courbe d’Aston : énergie de liaison par nucléon en fonction du numéro atomique (source : <http://guy.chaumeton.pagesperso-orange.fr/>)

- la force d’attraction forte : force nucléaire liant les protons et les neutrons pour former le noyau à l’origine du défaut de masse dans le bilan de la réaction de fusion.

Comme la force électrostatique agit à plus longue portée que la force d’attraction forte, il faut apporter de l’énergie au système afin de franchir la barrière de Coulomb et permettre aux noyaux de s’approcher suffisamment pour fusionner. Le milieu va devoir être chauffé à des températures extrêmement élevées ($T \sim 10^8 - 10^9 K$). À ces températures, le milieu change d’état pour devenir un gaz ionisé constitué de particules chargées positivement baignant dans un nuage d’électron : un plasma.

La réaction de fusion nécessite donc un apport d’énergie externe avant de pouvoir se déclencher. Dans le cadre d’une exploitation industrielle de la fusion comme source d’énergie, il faut ainsi avoir une énergie dégagée par les réactions de fusion supérieure aux pertes engendrées par la réaction elle-même et à la puissance injectée pour chauffer le plasma. Le développement de ce bilan d’énergie aboutit au critère de Lawson [24] :

$$nT\tau_E = f(Q) \stackrel{T \sim 10-20 keV}{>} 10^{21} m^{-3} . keV . s \quad (I.3)$$

où τ_E est le temps de confinement de l’énergie qui correspond au temps caractéristique de dissipation de l’énergie du plasma après l’arrêt du chauffage et Q est le facteur d’amplification noté $Q = \frac{P_{fusion}}{P_{chauffage}}$. Ainsi le critère de Lawson indique qu’il est nécessaire d’avoir une température T , une densité n et un temps de confinement de l’énergie suffisamment élevé afin que la réaction de fusion soit rentable sur le plan énergétique. On définit le “break event” comme $Q > 1$ et lorsque les réactions de fusion suffisent à maintenir le plasma, on parle d’ignition ($Q = \infty$) mais il n’est pas nécessaire d’atteindre cet objectif pour avoir une réaction rentable. Ainsi, l’objectif fixé pour les réacteurs de fusion de production d’énergie (Eq.(I.3)) équivaut à $Q > 40$. Deux approches ont été développées afin de concevoir des réacteurs de fusion en jouant sur les paramètres n et τ_E :

- La fusion par Confinement Inertiel (FCI) : une bille de combustible D-T est comprimée à l’aide de lasers haute intensité afin de faire fusionner les atomes de deutérium et de tritium \rightarrow haute densité n mais faible temps de confinement τ_E .

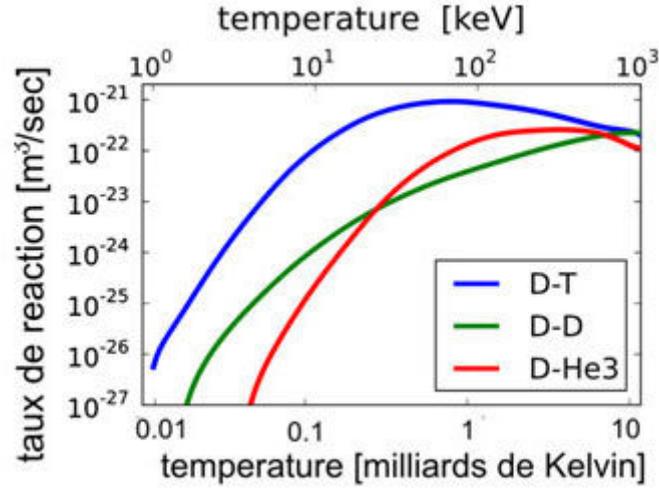


Figure I.2 – Taux de réaction de fusion en fonction de la température pour plusieurs isotopes de l'hydrogène. (source : <http://www.futura-sciences.com>)

- La fusion par Confinement Magnétique (FCM) : on chauffe un mélange gazeux (chauffage par induction, par micro-onde, etc...) de deutérium et de tritium afin de créer un plasma que l'on va confiner dans un fort champ magnétique → faible densité n mais temps de confinement τ_E plus grand.

Dans le cadre de cette thèse, c'est la deuxième approche qui nous intéressera et que nous allons présenter maintenant.

I. 1. 2 Confinement Magnétique : la géométrie tokamak

I. 1. 2. 1 Principe du confinement magnétique dans les tokamaks.

Comme expliqué précédemment, les températures élevées nécessaires pour vaincre la force de répulsion coulombienne font passer le gaz à l'intérieur des machines de fusion à l'état de plasma. Il s'agit donc d'un gaz ionisé constitué de particules chargées positivement et négativement. Le plasma étant très chaud et afin d'augmenter le nombre de réactions de fusion, il est nécessaire de le confiner dans un espace restreint.

Le plasma étant constitué de particules chargées, il est possible de le confiner à l'aide d'un intense champ magnétique. Commençons par écrire l'équation d'une particule chargée s en présence d'un champ magnétique (Eq.(I.4)).

$$m_s \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_L = q_s \vec{v} \times \vec{B} \quad (\text{I.4})$$

où \vec{F}_L est la force de Lorentz.

Dans le cas d'un champ magnétique rectiligne uniforme dans un repère cartésien (x, y, z) , $\vec{B} = (0, 0, B)$, l'équation du mouvement aboutit à un mouvement de giration (Fig.(I.3)) dans le plan transverse aux lignes de champ magnétique de fréquence $\omega_{cs} = q_s B / m_s$ appelée "fréquence cyclotronique" et de rayon $\rho_L = v_{th} / \omega_{cs}$ appelée "rayon de Larmor". La vitesse $v_{th} = \sqrt{k_B T_s / m_s}$ est la vitesse thermique dans le plan transverse aux lignes de champ magnétique et dépend de la température de l'espèce considérée T_s . On peut ainsi contrôler le mouvement des particules

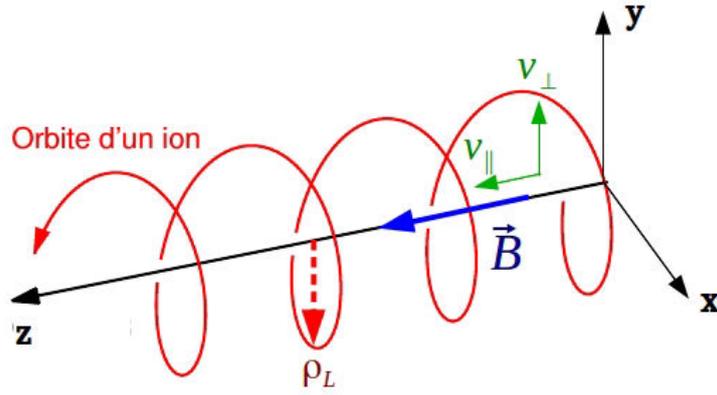


Figure I.3 – Mouvement d'un ion en présence d'un champ magnétique rectiligne uniforme.

dans le plan transverse v_{\perp} au champ magnétique. En refermant alors les lignes de champ magnétique sur elles-mêmes, on espère confiner les particules dans la dernière direction v_{\parallel} : c'est le principe du confinement magnétique utilisé dans les tokamaks.

Un tokamak est une chambre torique dans laquelle on génère un champ magnétique toroidal (\vec{B}_{φ} ou \vec{B}_T) afin de confiner les particules dans la direction orthogonale à ce champ magnétique. Une série de bobine entoure le plasma afin de générer ce champ magnétique (Fig.(I.4)). Cependant, la loi d'ampère $B_{\varphi} = \mu_0 I_T / 2\pi R$ (où I_T est le courant circulant dans les bobines et R le grand rayon du Tore) est à l'origine d'une inhomogénéité du champ magnétique ($\propto 1/R$). De plus, du fait de la géométrie torique du tokamak, les lignes de champ présentent une courbure et ces deux effets cumulés sont alors à l'origine d'une dérive verticale des particules [25] :

$$\vec{v}_d = \frac{m_s}{q_s R} (v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) \frac{\vec{u}_R \times \vec{B}_{\varphi}}{B^2} \quad (\text{I.5})$$

Cette dérive étant proportionnelle à la charge des particules, cela aboutira à une séparation de

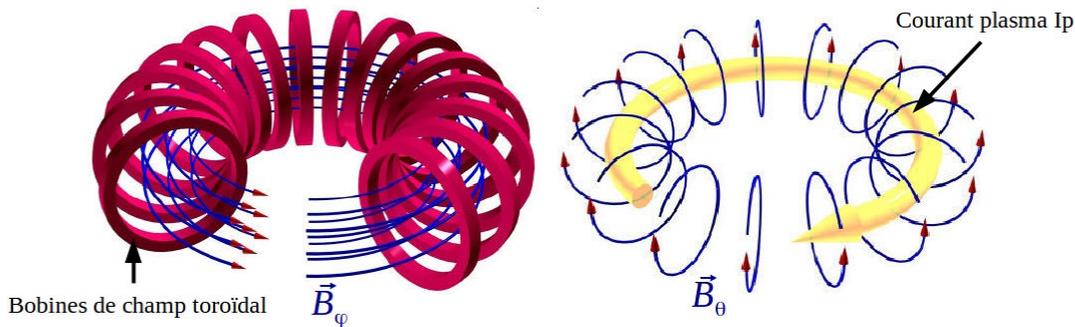


Figure I.4 – Génération des composantes du champ magnétique d'un tokamak.

charge entre les ions et les électrons et ainsi générera dans le plasma un champ électrique vertical. La présence de ce champ électrique engendre une vitesse de dérive $\vec{v}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}_{\varphi}}{B^2}$ (section (I. 2. 2)) orientée vers l'extérieur de l'enceinte torique et ainsi sera à l'origine d'un déconfinement du plasma. Afin de compenser cet effet, on génère à l'intérieur du plasma un courant électrique ce qui ajoute une composante poloidale (\vec{B}_{θ} ou \vec{B}_P) au champ magnétique afin de compenser l'effet de cette dérive des particules (Fig.(I.4)).

La somme de ces deux contributions du champ magnétique aboutit à des lignes de champ magnétique hélicoïdales enroulées autour de surfaces fermées assurant ainsi la qualité du confinement Fig.(I.5). Le système de coordonnées de notre tokamak peut ainsi être défini sous la

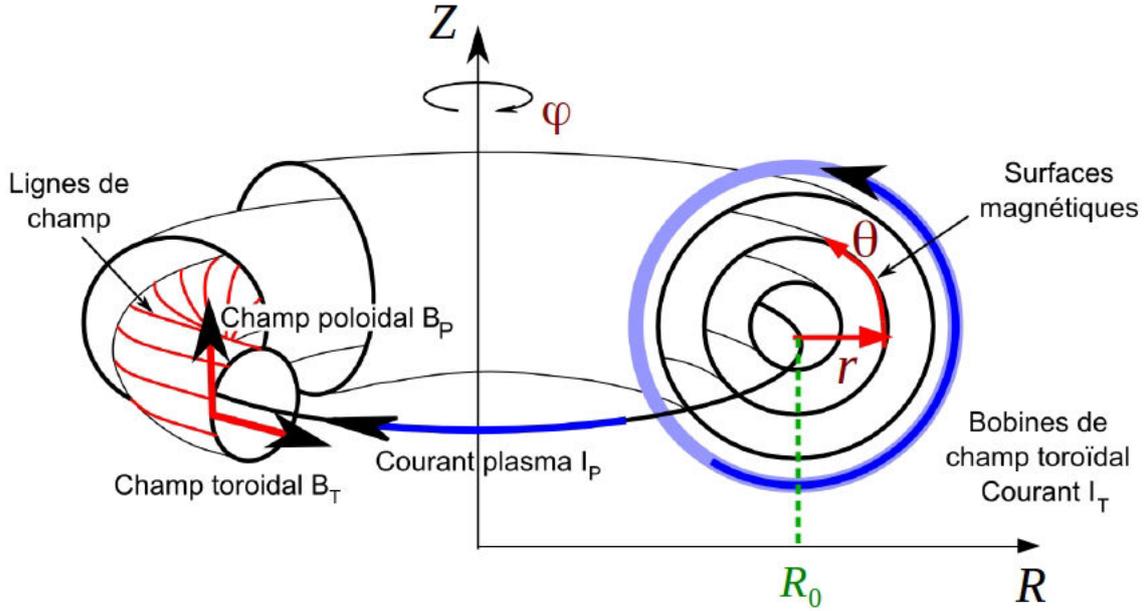


Figure I.5 – Configuration magnétique d'un tokamak dans le système de coordonnées toriques (R, Z, φ) ou (r, θ, φ) .

forme d'un système de coordonnées cylindriques (R, Z, φ) avec R le grand rayon, Z l'axe de symétrie et φ l'angle toroïdale. A partir des surfaces magnétiques, on peut passer au système de coordonnées (r, θ, φ) avec r le petit rayon et θ l'angle poloidal. Un paramètre caractéristique des machines de fusion est introduit : le rapport d'aspect $A = R_0/a$ où R_0 est le grand rayon de référence et a le petit rayon caractéristique de la dernière surface magnétique en contact avec la paroi du tokamak.

I. 1. 2. 2 Equilibre magnétique dans les tokamaks

L'équilibre magnétique d'un plasma de tokamak est cependant plus complexe. En effet, de nombreux phénomènes de "rétro-action" du plasma sur le champ électro-magnétique peuvent s'opérer. Ces phénomènes peuvent être étudiés dans le cadre de la Magnéto-Hydrodynamique (MHD) qui consiste à considérer le plasma comme un fluide conducteur caractérisé par sa densité ρ , sa vitesse \vec{v} , sa pression p et sa densité de charge \vec{j} .

La résolution des équations de la MHD idéale [26] aboutit à la définition de l'équilibre du plasma et du champ magnétique. Il s'agit de l'équilibre entre les forces de pression et les forces de Lorentz qui s'exprime par la condition :

$$\vec{j} \times \vec{B} = \vec{\nabla} p \quad (\text{I.6})$$

On a alors immédiatement la relation $\vec{B} \cdot \vec{\nabla} p = 0$ qui stipule que le gradient de pression est transverse aux surfaces magnétiques et qu'ainsi, ces surfaces sont des surfaces isobares. Cette relation peut se généraliser aux autres grandeurs du plasma telles que la densité ou la température. En considérant des surfaces magnétiques circulaires concentriques (Fig.(I.5)), le système de coordonnées torique (r, θ, φ) vient naturellement dans l'étude et la modélisation des plasmas de tokamak circulaire.

Cependant, la force de pression dans l'équilibre des forces en géométrie torique engendre un décalage des surfaces magnétiques vers l'extérieur du tore (décalage de Grad-Shafranov, [27]) et ainsi, les surfaces magnétiques ne sont plus concentriques et donc plus labélisables par le rayon

r . De plus, comme cela sera expliqué dans la section (I. 1. 2. 3), certaines machines de fusion utilisent des configurations magnétiques plus complexes où les surfaces magnétiques ne sont pas circulaires. On va alors chercher une variable générale permettant de labéliser les surfaces magnétiques quelle que soit la géométrie considérée. Ainsi, une variable naturelle constante sur les surfaces magnétiques est souvent utilisée comme variable radiale pour localiser les surfaces magnétiques. Il s'agit du flux magnétique poloidal ψ défini comme le champ magnétique traversant une surface dans le plan (r, φ) . Sachant que $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, le cas d'un tokamak axisymétrique (i.e $\partial/\partial\varphi = 0$ [25]) conduit à la relation :

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \psi = 0 \quad (\text{I.7})$$

ce qui permet alors de définir les composantes du champ magnétique dans le système cylindrique (R, Z) comme :

$$B_R = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \quad (\text{I.8})$$

$$B_Z = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \quad (\text{I.9})$$

Pour caractériser l'enroulement des lignes de champ magnétique, on peut définir un paramètre de stabilité appelé le "facteur de sécurité" et noté q se définissant comme le nombre de tours effectués par une ligne de champ magnétique dans la direction toroidale φ pour faire un tour dans la direction poloidale soit :

$$q = \frac{\langle \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \varphi \rangle}{\langle \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \theta \rangle} \quad (\text{I.10})$$

I. 1. 2. 3 Interaction plasma paroi : Géométrie limiteur/divertor

Le plasma aux conditions de fusion thermonucléaire est un gaz ionisé extrêmement chaud ce qui pose un problème majeur dans la façon de le confiner. Dans le cadre d'une exploitation prolongée d'un tokamak, il est impératif de maintenir le plasma chaud loin de la paroi. Pour cela, on place dans le champ magnétique du tokamak un obstacle qui va intercepter les lignes de champ magnétique. On n'empêchera pas le contact entre le plasma et le mur mais on pourra contrôler la zone de la paroi exposée au plasma.

La présence d'un obstacle plongé dans le champ magnétique du tokamak est à l'origine d'une séparation du milieu en deux zones distinctes :

- le plasma confiné de coeur caractérisé par des surfaces magnétiques fermées.
- la Scrape Off Layer (SOL) allant de la dernière surface magnétique fermée à la paroi du tokamak caractérisé par des surfaces magnétiques "ouvertes", c'est-à-dire impactant l'objet solide.

L'obstacle interceptant les lignes de champ va donc être soumis à d'importantes contraintes et devra respecter certains critères :

- résister à d'important flux de chaleurs ($10MW.m^{-2}$ étant la limite technologique actuelle) et de particules.
- évacuer efficacement la chaleur de la SOL.

La physique de l'interaction entre le plasma et l'objet est complexe et de nombreux phénomènes atomiques peuvent se produire. On présente les trois principaux soit :

- recombinaison des ions en particules neutres : lors du choc avec la paroi, les ions peuvent se neutraliser puis diffuser librement vers le plasma confiné et ainsi réalimenter le plasma en se ionisant lorsque la température le permet.
- si les particules du plasma ont suffisamment d'affinités avec les composants face au plasma, ces dernières peuvent se retrouver piégées dans le solide (rétention) ou réagir chimiquement afin de former d'autre composé (érosion chimique).
- érosion physique : si l'énergie des particules incidentes est suffisante, ces dernières peuvent "arracher" des particules de l'objet solide. Les particules ainsi produites (impuretés) peuvent alors aller polluer le plasma de coeur et le refroidir.

Il est donc important de bien choisir les composants faces au plasma dans l'optique d'une utilisation longue durée (limiter l'érosion) et d'une utilisation du tritium, élément radioactif (éviter la rétention).

Deux configurations ont été développées afin de maîtriser l'interaction plasma/paroi : la configuration limiteur et la configuration Divertor (Fig.(I.6)). La première géométrie a avoir

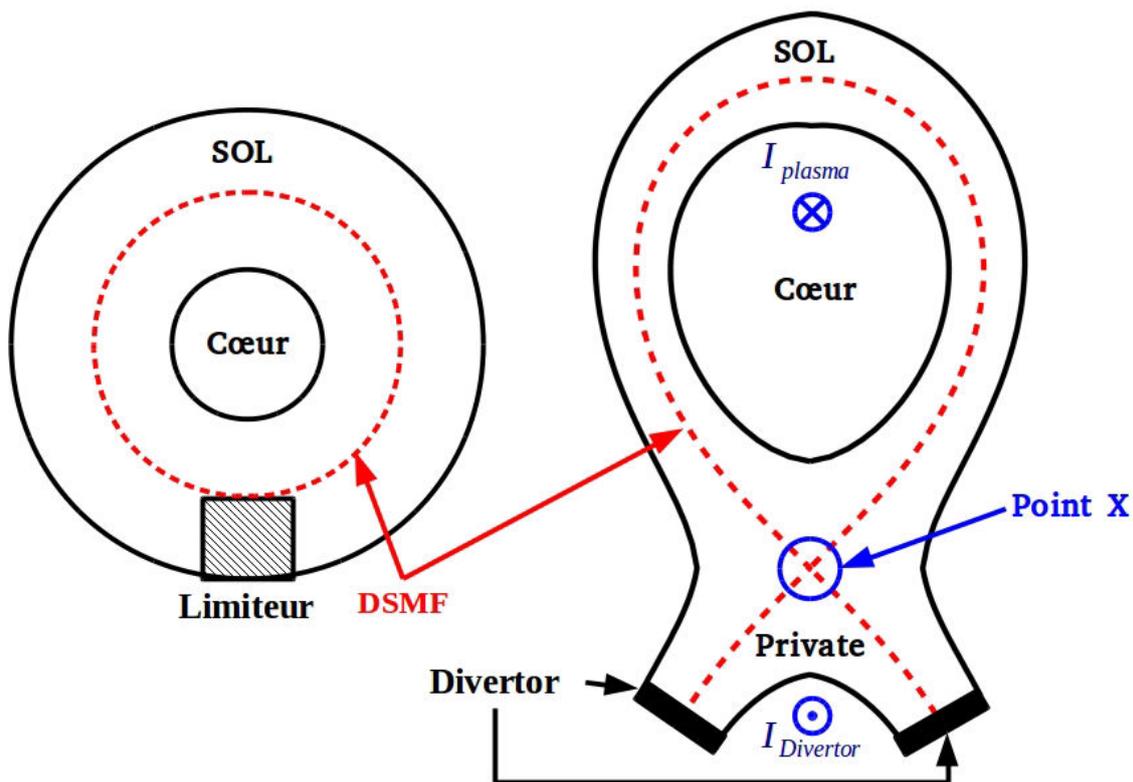


Figure I.6 – Coupe poloidale d'une configuration limiteur (gauche) et divertor (droite); la DSMF est la dernière surface magnétique fermée

été largement utilisée est la géométrie limiteur. Dans ce cas, la dernière surface magnétique fermée (DSMF) est circulaire et tangente au limiteur. Ainsi, le coeur du plasma chaud est relativement près de l'obstacle ce qui aura pour effet d'augmenter la quantité d'impuretés créées par érosion entrant dans le coeur du plasma. Dans le cas d'une géométrie divertor, on génère une configuration magnétique à point X (cf Fig.(I.6)) Ce point est caractérisé par un champ

magnétique poloidal nul. L'avantage de cette géométrie est que la zone d'interaction plasma-paroi est éloignée du coeur du plasma, limitant ainsi la pollution de ce dernier par les particules s'érodant des plaques du divertor.

I. 1. 3 Transport dans les tokamaks

On donne ici quelques grandeurs et mécanismes physiques caractéristiques du transport parallèle et perpendiculaire dans le plasma. Le rapport entre ces deux composantes est un facteur clé du régime de fonctionnement d'un tokamak.

I. 1. 3. 1 Transport parallèle

Dans le cas du mouvement parallèle aux lignes de champ, on peut définir une longueur caractéristique que l'on notera L_{\parallel} . Dans la zone des lignes de champ fermées, cette longueur représente la distance parcourue par une particule le long d'une ligne de champ pour effectuer un tour complet et on peut l'estimer comme :

$$L_{\parallel} = 2\pi R_0 q \quad (\text{I.11})$$

où q est le facteur de sécurité explicité précédemment. Cette expression varie en fonction du taux d'enroulement des lignes de champ (typiquement $q = 1$ dans le coeur et $q = 4$ dans le bord). En considérant une machine tel que Tore Supra ($R_0 = 2.4m$, $q = 4$), la longueur caractéristique des lignes de champ est $L_{\parallel} \sim 60m$.

Une particule se déplaçant le long d'une ligne de champ va nécessairement finir par entrer en collision avec une autre particule sur la même ligne de champ. Ces collisions de type Coulombienne aboutissent à un transfert d'énergie et à une modification de sa trajectoire (Transport perpendiculaire). On définit la longueur caractéristique du transport parallèle comme le "libre parcours moyen" correspondant à la distance parcourue par une particule entre deux collisions soit :

$$l_{lpm} = v_{th} \tau_c \quad (\text{I.12})$$

où τ_c représente le temps séparant deux collisions et v_{th} la vitesse thermique des particules. La fréquence caractéristique des collisions étant inversement proportionnelle à la température et proportionnelle à la densité ($\nu_c \propto nT^{-3/2}$), celle-ci varie typiquement de $1kHz$ au coeur du plasma pour $\sim qq10kHz$ au bord. On aura alors des longueurs de "libre parcours moyen" de l'ordre de plusieurs centaines de mètre au coeur contre quelques mètres dans la SOL. En comparant cette grandeur à la longueur des lignes de champ, on sépare le plasma en deux zones distinctes :

Plasma Chaud (coeur)	$L_{\parallel} \ll l_{lpm}$	Faiblement collisionnel
Plasma Froid (bord)	$l_{lpm} \ll L_{\parallel}$	Fortement collisionnel

Cela nous permettra d'employer une modélisation fluide pour décrire le plasma de bord des tokamaks.

I. 1. 3. 2 Transport perpendiculaire

Nous avons vu que outre le mouvement parallèle des particules, celles-ci sont également soumises à un mouvement dans la direction perpendiculaire aux lignes de champ magnétique. Nous allons nous intéresser maintenant à la nature et à la description de ce transport.

Transport classique et “Néoclassique”

Historiquement, le premier mécanisme envisagé pour expliquer l’origine du transport perpendiculaire était le processus de collision Coulombienne entre particules. En effet, deux particules circulant sur deux lignes de champ proches l’une de l’autre peuvent entrer en “collision” et interagir via des forces électrostatiques entraînant ainsi une dérive de ces dernières vers une autre ligne de champ. Dans un plasma cylindrique, ces processus peuvent être exprimés en terme de diffusion à la base de la théorie dite classique. Le coefficient de diffusion D_c correspondant à ces phénomènes peut s’exprimer de façon intuitive en fonction de la fréquence caractéristique des processus collisionnels ν_c et du rayon de Larmor caractéristique du mouvement des particules autour d’une ligne de champ ρ_L :

$$D_c = \nu_c \rho_L^2 \quad (\text{I.13})$$

Sachant que le rayon de Larmor varie inversement à la fréquence des collisions, le coefficient de diffusion classique reste relativement constant et est de l’ordre de $D_c \sim 10^{-3} m^2 \cdot s^{-1}$ pour des ions H^+ .

Cependant, plusieurs effets viennent enrichir cette théorie dite classique. Par exemple, le champ magnétique considéré ici n’est pas homogène. Une particule ne sera pas soumise au même champ tout au long de son parcours dans la direction parallèle. De plus, la géométrie torique des tokamaks vient ajouter des effets liés à la courbure des lignes de champ magnétique. Ainsi, l’efficacité des processus collisionnels dépendant de tous ces paramètres a permis d’établir la théorie dite “néoclassique” aboutissant à plusieurs régimes de diffusion perpendiculaire [28] (Fig.(I.7)) en fonction de la collisionnalité du plasma. Une différence de l’ordre de $D_{nc}/D_c \sim 10$

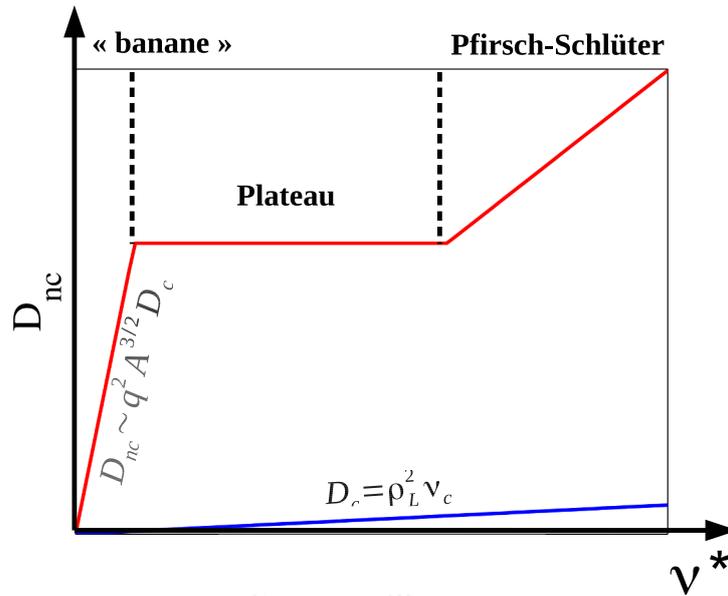


Figure I.7 – Coefficient de diffusion néoclassique pour les différents régimes (rouge) et coefficient classique (bleu) en fonction de la collisionnalité définie comme $\nu^* = \nu_c q R A^{3/2} / v_{th}$.

entre le coefficient classique et néoclassique est observée. L’une des principales conclusions tirées de l’approche néoclassique est qu’il suffit de réduire le rayon de Larmor et donc d’augmenter le champ magnétique pour améliorer le confinement.

Transport “anormal” : transport turbulent

Les mesures expérimentales montrent des coefficients de diffusion perpendiculaire de l’ordre de $D_{exp,\perp} \sim 1 m^2 \cdot s^{-1}$ supérieurs aux prédictions de l’approche néoclassique ($D_{exp,\perp} / D_{nc} \sim 10$)

[29].

Cette composante du transport non expliquée par la théorie néoclassique a été qualifiée de transport “anormal”. Les avancées expérimentales [30] aussi bien que le développement des modèles théoriques ont permis d’établir que le transport anormal est d’origine turbulente. En effet, un bon confinement du plasma implique d’avoir des températures et des densités très élevées dans le coeur ($T \sim 10keV$) pour des valeurs très basse dans la SOL ($T \sim 10eV$). Se développent alors d’importants gradients entre le coeur et le bord ce qui, par analogie à un système fluide, aboutit à un état hors équilibre et à l’établissement de la turbulence. Les plasmas sont donc intrinsèquement hors équilibre thermodynamique.

Dans le cas du plasma de bord, l’essentiel du flux radial est expliqué par l’amplitude des fluctuations de potentiel électrique $\tilde{\Phi}$ et de densité \tilde{n} observées [31]. On parle de turbulence électrostatique lorsque les fluctuations du champ magnétique n’y contribuent que de manière négligeable. Le flux radial associé à ces fluctuations est dû à une vitesse de dérive perpendiculaire générée par le champ électrique (cf (I. 2. 2)).

De façon intuitive, le transport perpendiculaire est souvent modélisé comme un terme diffusif caractérisé par un coefficient de diffusion “anormal” D_{turb} apte à reproduire les grandes tendances expérimentales. Cette approche, même si elle ne présente pas la cohérence d’une modélisation complète de la turbulence, permet une description simple et rapide du transport perpendiculaire dans le plasma de bord des tokamaks dans l’optique de développer des modèles simplifiés ne nécessitant qu’une description qualitative du transport.

I. 2 Modélisation fluide des plasmas de tokamak

Les mécanismes physiques complexes à l’oeuvre dans les plasmas de tokamak nécessitent le développement de modèles théoriques et numériques importants. Un des objectifs du développement de ces modèles est l’étude et la prévision des contraintes auxquelles sont soumis les composants face au plasma.

I. 2. 1 De l’Equation de Boltzmann aux équations fluides de Braginskii

Instinctivement, la première idée qui vient à l’esprit afin de modéliser un plasma et d’étudier le mouvement de chacune de ses particules constituantes (approche particulaire) dans un champ électro-magnétique (Equations de Maxwell). Dans la mesure où un plasma de tokamak a une densité de l’ordre de $10^{20}m^{-3}$, cette approche est inenvisageable même pour modéliser un volume restreint.

Il est alors nécessaire d’utiliser une modélisation statistique du plasma : c’est l’approche cinétique. Cela revient à considérer une fonction de distribution par espèce f_s dans un espace des phases à 6 dimensions (\vec{r}, \vec{v}) . La fonction de distribution représente alors la densité de probabilité pour un ensemble de particules d’être à une position \vec{r} , d’avoir une vitesse \vec{v} à un instant donnée t . L’équation d’évolution de cette fonction est alors l’équation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \vec{v}_s \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} f_s + \frac{\vec{F}_s}{m_s} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}_s} f_s = \frac{\partial f_{coll}}{\partial t} \quad (I.14)$$

\vec{F}_s représente la force électro-magnétique $\vec{F}_s = q_s (\vec{E} + \vec{v}_s \times \vec{B})$ faisant intervenir les champs \vec{E} et \vec{B} , respectivement électrique et magnétique et dont l’évolution est donnée par les équations de Maxwell. L’opérateur $\partial f_{coll}/\partial t$ traduit quant à lui l’effet des collisions entre particule.

Même si une telle approche réduit significativement le nombre de degrés de liberté, une simulation cinétique globale reste très gourmande en terme de temps de calcul. Une approche dite gyrocinétique s'appuyant sur le fait que le mouvement giratoire des particules est très rapide devant le temps caractéristique des mouvements dans les autres directions permet de moyenniser l'équation de Boltzmann pour ne considérer les vitesses perpendiculaires que comme une seule dimension et réduire ainsi le nombre de dimension du système à 5.

L'étape suivante dans les simplifications du modèle est l'approche fluide. On ne cherche plus à résoudre l'équation sur la fonction de distribution mais sur ses moments (Eq.(I.15)). On réduit encore le nombre de degrés de liberté du système en faisant une moyenne statistique sur l'espace des vitesses. Le calcul des moments fluides de la fonction de distribution est défini comme :

$$\mathcal{M}_s^k = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{v}_s^k f_s(\vec{v}_s) d\vec{v}_s \quad (\text{I.15})$$

Ces moments sont donc des tenseurs d'ordre k et l'intégration de l'équation de Boltzmann donnera l'évolution du moment d'ordre k en faisant apparaître le moment d'ordre $k+1$ (Eq.(I.16)).

$$\frac{\partial \mathcal{M}_s^k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathcal{M}_s^{k+1} - k \frac{\vec{F}_s}{m_s} \otimes \mathcal{M}_s^{k-1} = \mathcal{C}_k \quad (\text{I.16})$$

où \mathcal{C}_k représente l'opérateur de collision. Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons aux équations fluides de Braginskii. Elles dérivent des équations d'évolution des trois premiers moments ($k = 0, 1, 2$) avec une fermeture collisionnelle sur le moment d'ordre 3. Ce type de fermeture s'appuie sur l'hypothèse de forte collisionnalité du plasma qui implique que la fonction de distribution de chaque espèce soit une maxwellienne (les collisions la ramène en permanence à un équilibre thermodynamique local) :

$$f_s = n_s \left(\frac{m_s}{2\pi k_B T_s} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{v^2}{2v_{th}^2} \right) \quad (\text{I.17})$$

où v est la norme de la vitesse $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ et v_{th} la vitesse thermique. Le calcul des trois premiers moments conduit à :

$$\mathcal{M}_s^0 = \int f_s(\vec{v}_s) d\vec{v}_s = n_s \quad (\text{I.18})$$

$$\mathcal{M}_s^1 = \int \vec{v}_s f_s(\vec{v}_s) d\vec{v}_s = n_s \vec{u}_s \quad (\text{I.19})$$

$$\mathcal{M}_s^2 = \int \vec{v}_s \otimes \vec{v}_s f_s(\vec{v}_s) d\vec{v}_s \quad (\text{I.20})$$

Les deux premières équations donnent directement des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement (faisant intervenir la vitesse fluide \vec{u}_s) soit :

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_s \vec{u}_s) = \mathcal{C}_0 = 0 \quad (\text{I.21})$$

$$\frac{\partial n_s \vec{u}_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \mathcal{M}_s^2 - \frac{q_s n_s}{m_s} (\vec{E} + \vec{u}_s \times \vec{B}) = \mathcal{C}_1 = 0 \quad (\text{I.22})$$

Pour ces deux équations, l'opérateur de collision est nul. En effet, les collisions ne créent ni ne détruisent de particules ($\mathcal{C}_0 = 0$) et étant des interactions élastiques, elles conservent la quantité de mouvement. Dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement, le terme lié au

moment d'ordre 2 n'est pas trivial. En posant la vitesse comme la somme de la vitesse fluide et d'une perturbation $\vec{v}_s = \vec{u}_s + \vec{v}'$, on peut calculer le moment d'ordre 2 comme :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_s^2 &= \int (\vec{u}_s + \vec{v}') \otimes (\vec{u}_s + \vec{v}') f_s(\vec{v}_s) d\vec{v}' \\
 &= n_s \vec{u}_s \otimes \vec{u}_s + \cancel{\vec{u}_s \otimes \int \vec{v}' f_s(\vec{v}_s) d\vec{v}'} + \cancel{\int \vec{v}' f_s(\vec{v}_s) d\vec{v}' \otimes \vec{u}_s} \\
 &\quad + \int \vec{v}' \otimes \vec{v}' f_s(\vec{v}_s) d\vec{v}' \\
 &= n_s \vec{u}_s \otimes \vec{u}_s + \frac{\overline{\Pi}_s}{m_s}
 \end{aligned} \tag{I.23}$$

On fait alors apparaitre le tenseur de pression défini par sa partie sphérique dépendant de la pression plasma $p_s = k_B n_s T_s$ et sa partie déviatrice Ξ_s soit :

$$\overline{\Pi}_s = p_s \mathbb{I} + \Xi_s \implies p_s = \frac{Tr(\overline{\Pi}_s)}{3} \tag{I.24}$$

On va maintenant s'intéresser à la dernière équation de Braginskii : l'équation de conservation de l'énergie totale. Cette dernière se définit comme l'intégrale de l'énergie cinétique de l'ensemble des particules.

$$E_{t,s} = \int \frac{1}{2} m_s \vec{v}_s \cdot \vec{v}_s f_s d\vec{v}_s \tag{I.25}$$

Sachant que $\vec{v}_s \cdot \vec{v}_s = Tr(\vec{v}_s \otimes \vec{v}_s)$, on retrouve l'équation de l'énergie totale en prenant la trace de l'équation du moment fluide d'ordre 2 ce qui aboutit à :

$$\frac{\partial E_{t,s}}{\partial t} + \frac{1}{2} m_s Tr(\vec{\nabla} \mathcal{M}_s^3) - \frac{n_s q_s}{m_s} \vec{u}_s \cdot \vec{F}_s = \mathcal{C}_2 \tag{I.26}$$

où l'énergie totale s'exprime comme $E_t = \frac{1}{2} m_s Tr(\mathcal{M}_s^2) = \frac{1}{2} m_s n_s u_s^2 + \frac{3}{2} p_s$. L'énergie totale est donc la somme de l'énergie cinétique des particules $E_c = \frac{1}{2} m_s n_s u_s^2$ et de l'énergie interne $U = \frac{3}{2} p_s$. On voit de plus apparaitre la trace du moment d'ordre 3 dont le développement tensoriel précédent (Eq.(I.23)) fait intervenir le flux de chaleur \vec{q}_s soit :

$$Tr(\vec{\nabla} \mathcal{M}_s^3) = \vec{\nabla} \cdot (n_s u_s^2 \vec{u}_s) + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{3p_s}{m_s} \vec{u}_s \right) + 2 \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u}_s \cdot \frac{\overline{\Pi}_s}{m_s} \right) + \frac{2}{m_s} \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s \tag{I.27}$$

où $q_s = \frac{1}{2} m_s \int \|\vec{v}'\|^2 \vec{v}' f_s d\vec{v}'$. On aboutit aux trois équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie totale de chaque espèce :

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_s \vec{u}_s) = 0 \tag{I.28}$$

$$\frac{\partial n_s \vec{u}_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(n_s \vec{u}_s \otimes \vec{u}_s + \frac{\overline{\Pi}_s}{m_s} \right) - \frac{q_s n_s}{m_s} (\vec{E} + \vec{u}_s \times \vec{B}) = 0 \tag{I.29}$$

$$\frac{\partial E_{t,s}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (E_{t,s} \vec{u}_s) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}_s \cdot \overline{\Pi}_s) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_s - n_s q_s \vec{u}_s \cdot \vec{E} = \mathcal{C}_2 \tag{I.30}$$

Ce système n'étant pas complètement fermé, il faudra ajouter une équation de fermeture sur le flux de chaleur et exprimer complètement le tenseur de pression. Dans notre cas, le flux de chaleur est donné par la fermeture de Spitzer-Härm [32] et le tenseur de pression par Braginskii [33] dont les expressions sont présentées en Annexe A. Il faut enfin ajouter les équations de

Maxwell sur le potentiel électrique ϕ et le potentiel vecteur \vec{A} qui caractérisent les champs électrique et magnétique :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\cdot\Phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (\text{I.31})$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad (\text{I.32})$$

I. 2. 2 Vitesse de dérive perpendiculaire

Le mouvement d'une particule chargée plongée dans un champ magnétique rectiligne uniforme se décompose en deux parties : une partie parallèle au champ magnétique et une partie perpendiculaire (mouvement giratoire). Lorsque le champ magnétique n'est pas rectiligne uniforme et qu'un champ électrique vient s'ajouter à la force de Lorentz, la composante perpendiculaire du mouvement comprend le mouvement giratoire de la particule autour des lignes de champ magnétique mais également un mouvement de dérive. Ce traitement sera appliqué dans le cadre d'une approche fluide.

On commence par définir la vitesse d'une particule s comme $\vec{u}_s = u_{\parallel,s}\vec{b} + \vec{u}_{\perp,s}$. De la même façon, on définit la projection perpendiculaire de l'équation de conservation de la quantité de mouvement :

$$m_s \frac{\partial n_s \vec{u}_{\perp,s}}{\partial t} + m_s \vec{\nabla} \cdot (n_s \vec{u}_{\perp,s} \otimes \vec{u}_s) = -\vec{\nabla}_{\perp} p_s - \vec{\nabla}_{\perp} \cdot \Xi_s + q_s n_s (\vec{E} + \vec{u}_{\perp,s} \times \vec{B}) \quad (\text{I.33})$$

Sachant que le temps caractéristique des phénomènes étudiés est supposée très inférieure au temps caractéristique du mouvement cyclotronique, on définit le ratio ϵ_{ω} comme :

$$\epsilon_{\omega} = \frac{\omega}{\omega_{cs}} \ll 1 \quad (\text{I.34})$$

La vitesse perpendiculaire peut dès lors se décomposer en fonction de ce paramètre comme :

$$\vec{u}_{\perp,s} = \cancel{\vec{u}_{\perp,s}^{(0)}} + \epsilon_{\omega} \vec{u}_{\perp,s}^{(1)} + \epsilon_{\omega}^2 \vec{u}_{\perp,s}^{(2)} \dots \quad (\text{I.35})$$

On ne s'intéressera pas à la vitesse perpendiculaire d'ordre 0 qui correspond au mouvement cyclotronique.

I. 2. 2. 1 Vitesses de dérive d'ordre 1

Si on s'intéresse à l'équation sur la quantité de mouvement perpendiculaire d'ordre 1 ($n_s \vec{u}_{\perp,s}^{(1)}$), on peut estimer l'ordre de chaque terme et ne garder alors que les termes d'ordre 1 en ϵ_{ω} .

$$\left| \frac{m_s \partial_t (n_s \vec{u}_{\perp,s}^{(1)})}{q_s n_s (\vec{u}_{\perp,s}^{(1)} \times \vec{B})} \right| \approx \frac{\omega}{\omega_{cs}} = \epsilon_{\omega} \quad (\text{I.36})$$

$$\left| \frac{m_s \vec{\nabla} \cdot (n_s \vec{u}_{\perp,s}^{(1)} \otimes \vec{u}_s)}{q_s n_s (\vec{u}_{\perp,s}^{(1)} \times \vec{B})} \right| \approx \frac{\omega}{\omega_{cs}} = \epsilon_{\omega} \quad (\text{I.37})$$

$$(\text{I.38})$$

On néglige ici la composante non sphérique du tenseur de pression et on aboutit à l'équation :

$$0 = q_s n_s (\vec{E} + \vec{u}_{\perp,s}^{(1)} \times \vec{B}) - \vec{\nabla}_{\perp} p_s \quad (\text{I.39})$$

Le produit vectoriel de cette équation par \vec{B} aboutit à :

$$\vec{u}_{\perp,s}^{(1)} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}_{\perp} p_s}{n_s q_s B^2} \quad (\text{I.40})$$

On voit apparaître deux vitesses de dérive à l'ordre 1 : la vitesse de dérive électrique \vec{u}_E et la vitesse dérive diamagnétique \vec{u}_s^* .

$$\vec{u}_s^* = \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}_{\perp} p_s}{n_s q_s B^2} \quad (\text{I.41})$$

$$\vec{u}_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} \quad (\text{I.42})$$

$$(\text{I.43})$$

Essayons maintenant d'expliquer le sens physique de ces vitesses. Considérons d'abord un ion évoluant dans un champ magnétique \vec{B} et soumis à un champ électrique perpendiculaire \vec{E} . Sous l'effet du champ électrique, sa trajectoire cyclotronique va se déformer pour ne plus former un cercle. En effet, lors des demi girations où sa vitesse est globalement dans le même sens que le champ électrique, l'ion est accéléré et voit le rayon de sa trajectoire cyclotronique augmenter. A l'inverse, lors des demi girations dans l'autre sens, l'ion est freiné par le champ électrique ce qui diminue le rayon de courbure de sa trajectoire. Le bilan final de ce mouvement est la dérive électrique de l'ion (Fig.(I.8)). Dans le cas d'un électron, le sens de giration autour de la ligne de champ est opposé, mais il en est de même de l'action du champ électrique (la force de Lorentz dépend de la charge). La dérive s'effectue donc dans le même sens pour les électrons et les ions ce qui a pour conséquence dans un plasma électriquement neutre de ne générer aucun courant électrique. Cependant, les variations du potentiel électrique à l'origine de champs électriques se traduisent par un transport perpendiculaire aux lignes de champ le long des lignes isopotentiellles.

La dérive diamagnétique est quant à elle de nature différente. Cette vitesse, purement

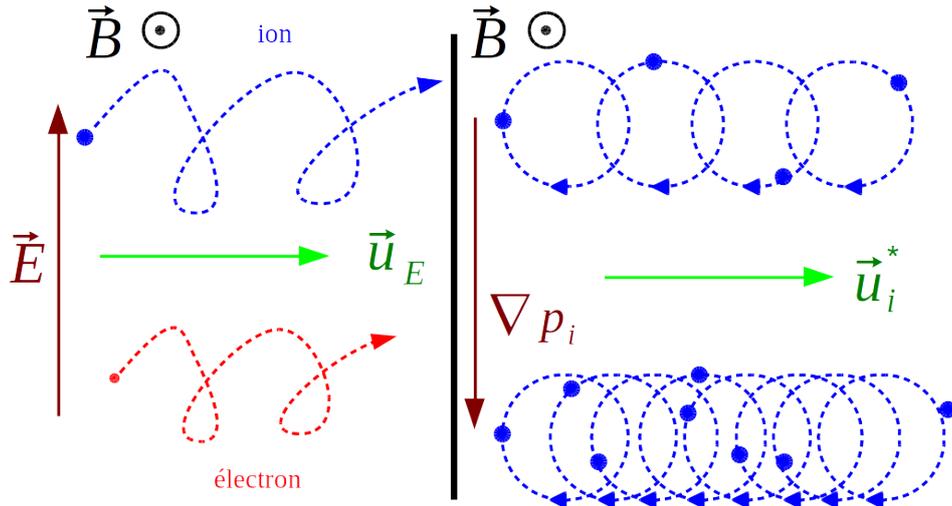


Figure I.8 – Schéma de principe pour l'interprétation de l'effet des vitesses de dérive dans le plan perpendiculaire au champ magnétique.

fluide, est associée au comportement collectif des particules et non à une dérive particulaire. Elle représente le mouvement apparent d'un ensemble de particules en giration cyclotronique

présentant un gradient de pression (Fig.(I.8)). De ce fait, la dérive diamagnétique ne transporte que très peu de matière comme le montre un développement rapide de la divergence du flux de particule diamagnétique :

$$\vec{\nabla} \cdot (n_s \vec{u}_{\perp,s}^*) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{eB^2} \right) \cdot \vec{B} \times \vec{\nabla} p_s \quad (\text{I.44})$$

On voit nettement que l'effet de la dérive diamagnétique n'est alors qu'un effet lié à la dérive particulière de courbure des lignes de champ. La dépendance de la dérive diamagnétique à la charge des particules conduit à l'apparition de courants électriques de dérive. L'influence de ce courant diamagnétique sur le plasma et sur l'équilibre du champ électrique radial est fondamentale. Ce développement sera plus détaillé au chapitre II dans le cadre de la dérivation de l'équation d'évolution du potentiel électrique.

I. 2. 2. 2 Vitesses de dérive d'ordre 2

On va maintenant s'intéresser à la vitesse de dérive d'ordre 2 : la dérive de polarisation. On exprime à nouveau à la projection de l'équation Eq.(I.29) en ne gardant que les termes d'ordres 2 en ϵ_ω . Cela conduit à :

$$m_s \frac{\partial n_s \vec{u}_{\perp,s}^{(1)}}{\partial t} + m_s \vec{\nabla} \cdot (n_s \vec{u}_{\perp,s}^{(1)} \otimes \vec{u}_s) = -\vec{\nabla}_\perp \cdot \Xi_s^{(1)} + q_s n_s \vec{u}_{\perp,s}^{(2)} \times \vec{B} \quad (\text{I.45})$$

Comme précédemment, le calcul du produit vectoriel de cette équation par le champ magnétique \vec{B} fait apparaître la vitesse d'ordre 2 que l'on nommera vitesse de polarisation :

$$\vec{u}_p = \vec{u}_{\perp,s}^{(2)} = \frac{m_s}{n_s q_s B^2} \vec{B} \times \left[\frac{\partial n_s \vec{u}_{\perp,s}^{(1)}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_s \vec{u}_{\perp,s}^{(1)} \otimes \vec{u}_s) \right] + \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}_\perp \cdot \Xi_s^{(1)}}{n_s q_s B^2} \quad (\text{I.46})$$

L'interprétation physique de la dérive de polarisation est moins directe que pour les dérives du premier ordre. Cependant, on voit aisément que cette dernière est liée à l'inertie des particules évoluant dans un régime instationnaire (présence des dérivées temporelles et dépendance en m_s). Ainsi, cette dérive pourra être négligée pour les électrons. Enfin, la dépendance de cette vitesse à la charge de l'espèce considérée fait que, à l'instar de la dérive diamagnétique, la dérive de polarisation générera des courants électriques dans le plasma.

I. 2. 3 Physique des lignes de champ ouvertes - conditions limites

Nous allons maintenant nous intéresser au cas particulier de la Scrape Off Layer (SOL) qui est un point fondamental de la physique du plasma de bord des tokamaks. En effet, dans cette zone, un objet matériel (Limiteur ou plaque du divertor) intercepte les lignes de champ magnétique. Ainsi, les particules chargées se déplaçant le long des lignes de champ magnétique vont finir par interagir avec une paroi solide à l'origine de recombinaison des ions et des électrons en particule neutre. L'objet se comportera comme un puits de matière engendrant des écoulements dans le plasma. On considérera dans un premier temps le cas de ligne de champ magnétique impactant l'objet en incidence normale.

I. 2. 3. 1 Description théorique de la SOL

Tout d'abord, si l'on considère des ions et des électrons à température égale, on aboutit à une relation soulignant une plus grande mobilité des électrons plus légers que les ions

($v_{T,e}/v_{T,i} = \sqrt{m_i/m_e} \gg 1$). L'objet subira donc un flux de particules électroniques plus important que le flux de particules ioniques. Il y a alors une rupture de la quasi-neutralité du plasma à proximité du mur. L'augmentation du flux électronique sur cette paroi a pour effet de charger cette dernière négativement engendrant un champ électrique sur une fine épaisseur de plasma près du mur. Ce champ électrique a pour effet d'accélérer les ions et de ralentir des électrons jusqu'à atteindre un équilibre permettant d'avoir des flux ionique et électronique égaux [1].

Pour bien comprendre ce phénomène, intéressons nous à l'équation de Poisson sur le potentiel électrique normalisé à la température électronique $\Phi \equiv e\phi/T_e$ (T_e en eV) le long d'une ligne de champ (coordonnée z) :

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 T_e} \frac{n_e - n_i}{n_0} \quad (\text{I.47})$$

où n_i (respectivement n_e) est la densité ionique (respectivement électronique) et n_0 est une densité de référence. On voit ici apparaître la longueur de Debye $\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 T_e}{e^2 n_0}}$. On distingue alors deux zones (Fig.(I.9)) : une zone où la quasi-neutralité est respectée que l'on nomme la "pré-gaine" et une zone où la séparation de charge s'établit que l'on appellera la "gaine" (dont la longueur caractéristique est donnée par λ_D). Typiquement, la longueur d'une ligne de champ connectant deux côtés d'un limiteur (ou les deux plaques d'un divertor) est de l'ordre de $L_{\parallel} \sim 60m$ et la longueur de Debye est elle de l'ordre de $\lambda_D \sim 10^{-5}m$ (pour un plasma de SOL de densité $n_0 = 10^{19}m^{-3}$ et une température $T_e = 50eV$).

Afin de modéliser ces phénomènes, intéressons nous de nouveau aux équations fluides

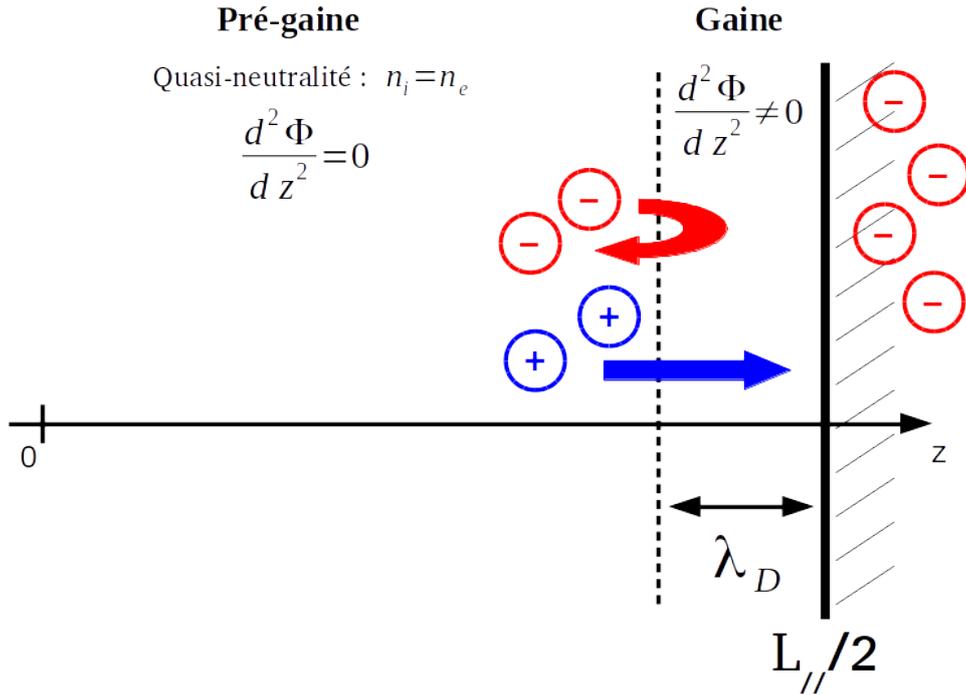


Figure I.9 – Définition de la gaine et de la pré-gaine. La paroi se charge négativement et un champ électrique s'établit sur la longueur caractéristique λ_D accélérant les ions et ralentissant les électrons.

précédentes (conservation de la masse Eq.(I.28) et de la quantité de mouvement Eq.(I.29)) en 1D le long d'une ligne de champ pour chaque espèce s :

$$\partial_t n_s + \partial_z(n_s u_s) = S_s \quad (\text{I.48})$$

$$m_s [\partial_t(n_s u_s) + \partial_z(n_s u_s u_s)] = -\partial_z p_s + n_s q_s E \quad (\text{I.49})$$

Le terme S_s est un terme source représentant le transport perpendiculaire aux lignes de champ (convectif ou diffusif). On néglige ici tout terme de viscosité et on écrit le champ électrique comme $E = -\partial_z\phi$. On se place dans l'hypothèse d'un plasma isotherme et on réécrit le gradient de pression comme $\partial_z p_s = T_s \partial_s n$.

Tout d'abord, du fait de leur masse négligeable, l'équation de conservation de la quantité de mouvement des électrons peut s'écrire comme :

$$T_e \partial_z n_e = n_e e \partial_z \Phi \quad (\text{I.50})$$

Cette équation simple aboutit à ce que l'on appelle la distribution de Boltzmann pour la densité électronique :

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e(\phi - \phi_0)}{T_e}\right) \quad (\text{I.51})$$

En combinant cette équation avec les équations 1D précédentes (Eq.(I.48)-(I.49)), on obtient un système d'équation portant sur la densité ionique n_i , l'écart à la quasi-neutralité $\eta = n_i - n_e$, le courant $j = e(n_i u_i - n_e u_e)$, le potentiel ϕ et la vitesse ionique u_i :

$$\partial_t n_i + \partial_z(n_i u_i) = S_i \quad (\text{I.52})$$

$$m_i [\partial_t(n_i u_i) + \partial_z(n_i u_i^2)] = -\partial_z(n_i T_i + n_e T_e) - \eta e \partial_z \phi \quad (\text{I.53})$$

$$\partial_t \eta + \frac{1}{e} \partial_z j = 0 \quad (\text{I.54})$$

$$\eta = n_i - n_0 \exp\left(\frac{e(\phi - \phi_0)}{T_e}\right) \quad (\text{I.55})$$

$$\partial_z^2 \phi = -\frac{e}{\epsilon_0} \eta \quad (\text{I.56})$$

On notera ici que l'on se place dans le cas d'un plasma d'hydrogène $Z = 1$ et que le transport perpendiculaire est le même pour les ions et les électrons soit $S_i = S_e$. On considère un état d'équilibre stationnaire et on normalise des équations par : $n = n_i/n_0$, $M = u_i/c_s$ où la vitesse du son est définie comme $c_s = \sqrt{(T_i + T_e)/m_i}$ et enfin, $\Phi = e\phi/T_e$ ce qui donne le système :

$$\partial_z(\Gamma) = \frac{S}{n_0 c_s} \quad (\text{I.57})$$

$$\partial_z(\Pi) = -\eta T_e \partial_z \Phi \quad (\text{I.58})$$

$$\partial_z j = 0 \quad (\text{I.59})$$

$$\eta = n - \exp\left(\frac{e(\phi - \phi_0)}{T_e}\right) \quad (\text{I.60})$$

$$\partial_z^2 \Phi = -\frac{1}{\lambda_D^2} \eta \quad (\text{I.61})$$

On enlève l'indice i afin d'alléger les notations et on ajoute les grandeurs Γ et Π caractérisant le flux de particule $\Gamma = nM$ et la pression totale $\Pi = nT_i + (n - \eta)T_e + (T_i + T_e)nM^2$.

I. 2. 3. 2 Etude de la pré-gaine

Nous commençons par l'étude de la pré-gaine. L'hypothèse de quasi-neutralité $\eta \sim 0$ s'applique alors et le système d'équation le long d'une ligne de champ se réduit à :

$$\partial_z(\Gamma) = \frac{S}{n_0 c_s} \Rightarrow \Gamma = \Gamma_0 + \int_0^z \frac{S}{n_0 c_s} dz \quad (\text{I.62})$$

$$\partial_z(\Pi) = 0 \Rightarrow \Pi = n(T_i + T_e)(1 + M^2) = cste \quad (\text{I.63})$$

Ainsi, l'écoulement le long de la ligne de champ est caractérisé par Γ (dépendant de S) et Π . L'équation Eq.(I.63) se réduit à un polynôme d'ordre 2 :

$$n^2 - \frac{\Pi}{T_i + T_e} n + \Gamma^2 = 0 \quad (\text{I.64})$$

Le discriminant de ce polynôme $\Delta = \left(\frac{\Pi}{T_i + T_e}\right)^2 - 4\Gamma^2$ est toujours positif et s'annule en $M^2 = 1$. On a alors deux solutions de ce polynôme pour la densité et deux solutions pour le nombre de Mach M soit :

$$2n_{\pm} = \frac{\Pi}{T_i + T_e} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\Gamma^2(T_i + T_e)^2}{\Pi^2}} \right] \quad (\text{I.65})$$

$$M_{\pm} = \frac{2\Gamma(T_i + T_e)}{\Pi} \left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\Gamma^2(T_i + T_e)^2}{\Pi^2}} \right]^{-1} \quad (\text{I.66})$$

On constate l'existence de deux branches distinctes : une branche subsonique (n_-, M_-) et

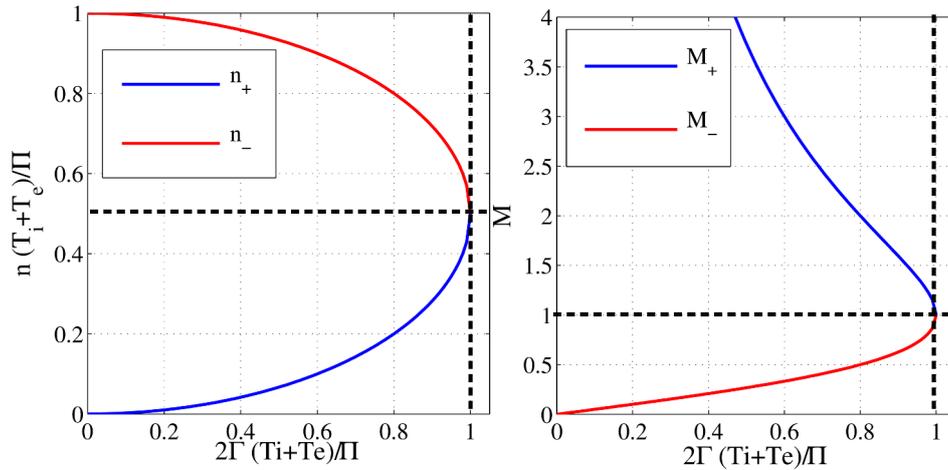


Figure I.10 – Solution du polynôme Eq.(I.64) pour la densité n_{\pm} et le nombre de Mach M_{\pm} en fonction de $\frac{2\Gamma(T_i + T_e)}{\Pi}$.

une branche supersonique (n_+, M_+). Une transition entre ces deux branches est caractérisée par une divergence des gradients dans le plasma et est par conséquent physiquement interdite. Comme on a pu le voir précédemment, la présence de l'obstacle interceptant les lignes de champ magnétique est à l'origine d'un puits de matière. Par conséquent, le long d'une ligne de champ magnétique, on aura d'un côté un écoulement dans le sens du champ magnétique ($M > 0$) et dans le sens contraire ($M < 0$) de l'autre. Par simple relation de continuité, cela implique la présence d'un point où $M = 0$, appelé "point de stagnation" et on en déduit que le système évolue nécessairement sur la branche subsonique. On a alors comme condition dans la pré-gaine :

$$\boxed{|M| < 1} \quad (\text{I.67})$$

I. 2. 3. 3 Etude de la gaine

Intéressons nous à présent au cas de la gaine. On définit une position de référence à l'entrée de la gaine (notée eg) que l'on considère comme la localisation du début de l'écart à la quasi-neutralité $n_{i,se} \sim n_{e,se} = n_{eg}$. La séparation de charge est alors principalement liée aux électrons et à leur distribution de Boltzmann que l'on note maintenant :

$$n_e = n_{eg} \exp\left(\frac{e(\phi - \phi_{eg})}{T_e}\right) \quad (\text{I.68})$$

On se place dans l'hypothèse des ions froids $T_i \ll T_e$. Les échelles de longueur qui nous intéressent sont de l'ordre de λ_D ce qui nous permet de négliger la contribution de la source S (en effet cette source liée au transport perpendiculaire est principalement localisée au point de stagnation loin du mur). Le système d'équations dans la gaine devient :

$$\partial_z(\Gamma) = 0 \quad (\text{I.69})$$

$$\partial_z(\Pi) = -\eta T_e \partial_z \Phi \quad (\text{I.70})$$

$$\partial_z j = 0 \quad (\text{I.71})$$

$$\eta = n - \exp\left(\frac{e(\phi - \phi_0)}{T_e}\right) \quad (\text{I.72})$$

$$\partial_z^2 \Phi = -\frac{1}{\lambda_D^2} \eta \quad (\text{I.73})$$

Dans un premier temps, l'équation de Poisson nous donne l'évolution du potentiel électrique normalisé dans la gaine soit :

$$d_z^2 \Phi = \frac{1}{\lambda_D^2} n_{eg} \left(\exp\left(\frac{e(\phi - \phi_{eg})}{T_e}\right) - \frac{n}{n_{eg}} \right) \quad (\text{I.74})$$

La conservation de l'énergie des ions entre l'entrée de la gaine et n'importe quel point dans la gaine nous donne alors :

$$\frac{1}{2} m u^2 + e\phi = \frac{1}{2} m u_{eg}^2 + e\phi_{eg} \quad (\text{I.75})$$

En appliquant la conservation de la masse Eq.(I.69) ($nu = n_{eg} u_{eg}$), on aboutit à l'expression de la densité ionique dans la gaine et de la vitesse ionique en fonction des paramètres à l'entrée de la gaine et du potentiel électrique soit :

$$u = \sqrt{u_{eg}^2 + \frac{2e}{m}(\phi_{eg} - \phi)} \quad (\text{I.76})$$

$$n = \frac{n_{eg}}{\sqrt{1 + \frac{2e}{m u_{eg}^2}(\phi_{eg} - \phi)}} \quad (\text{I.77})$$

L'équation de Poisson devient :

$$d_z^2 \Phi = \frac{n_{eg}}{\lambda_D^2} \left(\exp\left(\frac{e(\phi - \phi_{eg})}{T_e}\right) - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2e}{m u_{eg}^2}(\phi_{eg} - \phi)}} \right) \quad (\text{I.78})$$

Ce qui aboutit après linéarisation à :

$$d_z^2 \Phi = \frac{n_{eg} e}{T_e \lambda_D^2} (\phi - \phi_{eg}) \left(1 - \frac{T_e}{m u_{eg}^2} \right) \quad (\text{I.79})$$

Sachant que le mur se charge négativement, le potentiel dans la gaine chute et par conséquent $\phi - \phi_{eg} < 0$. Dans le cadre de l'hypothèse des ions froids, la vitesse du son est définie comme $c_s = \sqrt{(T_i + T_e)/m} \sim \sqrt{T_e/m}$. L'équation de Poisson présente alors des solutions non-oscillantes à condition d'avoir :

$$u_{eg}^2 > c_s^2 \quad (\text{I.80})$$

On obtient ainsi le critère de Bohm :

$$\boxed{|M| > 1} \quad (\text{I.81})$$

Une généralisation à un plasma chaud est possible ($T_i \sim T_e$) à la différence donc que la vitesse du son s'écrit :

$$c_s = \sqrt{\frac{T_e + \gamma T_i}{m_i}} \quad (\text{I.82})$$

où γ est l'indice polytropique valant 1 dans le cas d'un plasma isotherme et 5/3 pour un plasma adiabatique et une pression isotrope.

I. 2. 3. 4 Condition au niveau du mur : condition limite de Bohm

Comme nous l'avons expliqué, les conditions sur la vitesse des particules dans la pré-gaine et dans la gaine imposent par continuité une vitesse à l'entrée de la gaine égale à la vitesse du son : c'est la condition de Bohm.

$$\boxed{|M| = 1} \quad (\text{I.83})$$

Il est alors possible, à partir de cette condition, de calculer la chute du potentiel entre l'entrée de la gaine et la paroi solide. Le flux de particule électronique peut se déduire de la fonction de distribution maxwellienne (Théorie Fluide) et de son moment d'ordre 1 :

$$\Gamma_{mur}^e = \frac{n_{e,mur}}{(2\pi v_{T,e}^2)^{1/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{T,e}^2}\right) v dv \quad (\text{I.84})$$

Sachant que le flux ionique impactant le mur est égal au flux à l'entrée de la gaine, on a alors :

$$\Gamma_{mur}^i = n_{eg} c_s \quad (\text{I.85})$$

On considère toujours notre système dans un état stationnaire ce qui implique que le flux ionique et le flux électronique impactant la paroi soient égaux. On en déduit à partir des équations Eq.(I.68), (I.84) et (I.85), la relation :

$$n_{eg} c_s = \frac{n_{eg} \exp\left(\frac{e(\phi_{mur} - \phi_{eg})}{T_e}\right)}{(2\pi v_{T,e}^2)^{1/2}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{T,e}^2}\right) v dv \quad (\text{I.86})$$

On introduit maintenant la notion de potentiel flottant Λ comme la chute de potentiel entre le mur et l'entrée de la gaine apparaissant spontanément :

$$\Lambda = \frac{e(\phi_{eg} - \phi_{mur})}{T_e} \quad (\text{I.87})$$

La relation précédente conduit alors à :

$$\Lambda = -\frac{1}{2} \ln \left[2\pi \frac{m_e}{m_i} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \right] \quad (\text{I.88})$$

Sachant que la gaine est de taille négligeable devant le reste du domaine, ces conditions sur le potentiel électrique $\phi = T_e \Lambda / e$ (en choisissant cette valeur comme référence du potentiel) et sur la vitesse le long des lignes de champ $M_{\parallel} = 1$ peuvent être appliquées aux modélisations fluides présentées dans le reste de ce travail. Cependant, la condition sur le potentiel tend à contraindre fortement le système. Cela ne pose pas de problème dans le cadre de simulation de transport (ce qui sera le cas de SOLEDGE2D) mais en pose dans le cadre d'une étude dynamique du plasma notamment pour l'étude de la turbulence (TOKAM3X). Ainsi il sera plus réaliste d'imposer une condition sur le courant électrique circulant dans la gaine soit :

$$j = e(n_i u_i - n_e u_e)_{eg} \implies j = \pm n c_s \left(1 - \exp\left(\Lambda - \frac{e\phi}{T_e}\right) \right) \quad (\text{I.89})$$

Le potentiel pourra alors fluctuer et les courants circulant dans la gaine le maintiendront autour du potentiel flottant.

Pour finir, maintenant que l'on connaît le flux de particule impactant le mur, on peut en déduire les flux de chaleurs correspondant. Le plasma de la gaine étant faiblement collisionnel, on en déduit que le flux de chaleur impactant le mur est d'origine convective et on peut alors le définir comme :

$$q_e = \gamma_e k_B T_e \Gamma_e \Leftrightarrow q_i = \gamma_i k_B T_i \Gamma_i \quad (\text{I.90})$$

où γ_e, γ_i sont des coefficients de transmissions de la gaine. Une approche cinétique est nécessaire pour les évaluer et la littérature en présente de nombreuses expressions. C'est celle issu de [1] qui nous intéresse et qui aboutit à des valeurs typiques (que nous utiliserons dans SOLEDGE2D) soit :

$$\gamma_e = 4,5 \Leftrightarrow \gamma_i = 2,5 \quad (\text{I.91})$$

I. 2. 3. 5 Généralisation et condition limite de Bohm-Chodura

Pour finir, nous présentons une généralisation de ces résultats au cas de lignes de champ en incidence oblique avec la paroi [34] et en prenant en compte les vitesses de dérives perpendiculaires [35] [36] [37] [2]. On représente alors en figure Fig.(I.11) une ligne de champ impactant une paroi avec un angle d'incidence α . On voit alors que si un écoulement perpendiculaire aux

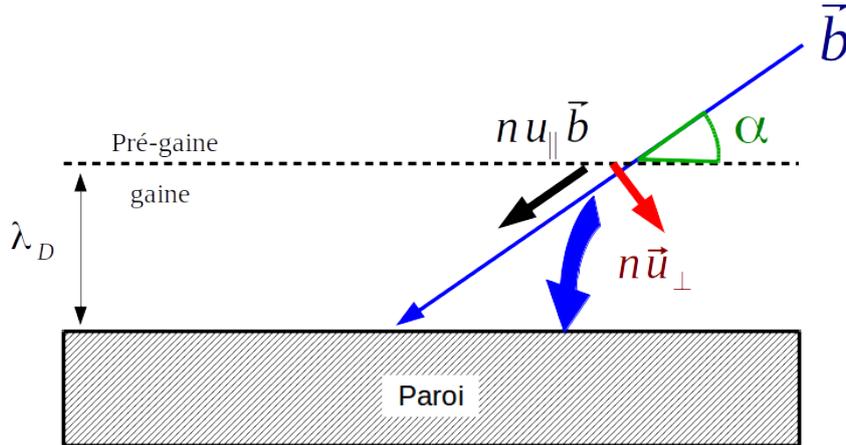


Figure I.11 – Flux de particule impactant la paroi dans le cas d'une ligne de champ ayant un angle d'incidence α .

lignes de champ existe, le flux de particule impactant la paroi sera une somme des deux projections dans le plan normal à la paroi des flux parallèles et perpendiculaire. On définit alors une vitesse perpendiculaire au mur (noté p, mur) comme :

$$u_{p,mur} = u_{\parallel} \sin(\alpha) + u_{\perp} \cos(\alpha) \quad (\text{I.92})$$

La vitesse à l'entrée de la gaine a ainsi une contribution parallèle et une contribution perpendiculaire aux lignes de champ ce qui aboutit à :

$$u_{se} = c_s \sin(\alpha) = u_{\parallel} \sin(\alpha) + u_{\perp} \cos(\alpha) \quad (\text{I.93})$$

Sachant que l'on s'intéresse à l'effet des vitesses de dérives perpendiculaire (on considère $u_{\perp} = u_{ExB}$), on obtient ainsi la condition de Bohm-Chodura sur le nombre de Mach parallèle dans la gaine :

$$\left| M_{\parallel} + \frac{u_{ExB}}{c_s \tan(\alpha)} \right| \geq 1 \quad (\text{I.94})$$

Chapitre II

Modélisation du transport perpendiculaire dans le plasma de bord : code SOLEDGE2D

Le code SOLEDGE2D est un outil modulable de simulation du plasma de bord des tokamaks. Il s'agit d'un code fluide multi-espèces où le transport anormal d'origine turbulente est modélisé à l'aide de coefficients de diffusion. Dans ce chapitre, nous présentons le modèle physique du code SOLEDGE2D ainsi que les différentes approximations sur lesquelles il s'appuie. Nous nous intéressons tout particulièrement à l'implémentation d'un modèle auto-consistant de résolution du potentiel électrique et du transport de particule et de chaleur par les vitesses de dérives perpendiculaire.

II. 1 Equations fluides dans SOLEDGE2D

II. 1. 1 Vitesse et courant

Nous commençons par définir les vitesses des différentes particules ainsi que les courants circulant dans le plasma. On définit la vitesse fluide des ions comme :

$$\vec{u} = u_{\parallel} \vec{b} + \vec{u}_E + \vec{u}_* + \vec{u}_p \quad (\text{II.1})$$

et la vitesse des électrons :

$$\vec{v} = v_{\parallel} \vec{b} + \vec{u}_E + \vec{v}_* \quad (\text{II.2})$$

Les vitesses \vec{u}_E et \vec{u}_* , \vec{v}_* sont les vitesses de dérive perpendiculaire (E pour dérive électrique et $*$ pour dérive diamagnétique). La vitesse de dérive électrique ne dépendant pas de la charge des particules, elle est la même pour les ions et les électrons et ne génère par conséquent aucun courant. La vitesse de polarisation \vec{u}_p dépendant de la masse des particules, la vitesse perpendiculaire d'ordre deux pour les électrons peut être négligée ($m_e \ll m_i$). On rappelle l'hypothèse d'électro-neutralité $n_i = Z n_e = n$ et par définition $q_i = Ze$ et $q_e = -e$. On définit la densité de courant dans le plasma par :

$$\vec{j} = n_i q_i \vec{u} + n_e q_e \vec{v} = ne (\vec{u} - \vec{v}) \quad (\text{II.3})$$

En utilisant les expressions des différentes vitesses, on obtient le courant plasma comme la somme de trois termes :

$$\begin{aligned}\vec{j} &= ne \left(u_{\parallel} - v_{\parallel} \right) \vec{b} + ne \left(\vec{u}_* - \vec{v}_* \right) + ne \vec{u}_p \\ &= j_{\parallel} \vec{b} + \vec{j}_* + \vec{j}_p\end{aligned}\quad (\text{II.4})$$

II. 1. 2 Conservation de la masse

Considérons les équations fluides précédentes (section I. 2) et rappelons la forme générale de la conservation de la masse pour les ions et les électrons :

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_e \vec{v}) &= 0 \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_i \vec{u}) &= 0\end{aligned}\quad (\text{II.5})$$

La densité électronique étant donnée par l'électro-neutralité, on ne considère ici que l'équation sur la densité ionique. En exprimant la composante anormale du transport perpendiculaire via un terme de diffusion (Théorie Quasi-linéaire) et en injectant l'équation Eq.(II.1) dans Eq.(II.5), on obtient l'équation :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (nu_{\parallel} \vec{b}) + \vec{\nabla} \cdot (n(\vec{u}_E + \vec{u}_* + \vec{u}_p)) = \vec{\nabla}_{\perp} \cdot (D_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} n)\quad (\text{II.6})$$

Le calcul du terme diamagnétique fait apparaitre uniquement un terme de courbure ce qui nous permet de remplacer la vitesse diamagnétique dans l'équation Eq.(II.6) par la vitesse de gradient-courbure $\vec{u}_{\nabla B, \alpha} = \frac{2k_B T_{\alpha}}{q_{\alpha} B^3} \vec{B} \times \vec{\nabla} B$. Un calcul détaillé en Annexe (A) conduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}_*) = \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}_{\nabla B, i})\quad (\text{II.7})$$

Ainsi l'équation sur la densité ionique devient :

$$\boxed{\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (nu_{\parallel} \vec{b}) + \vec{\nabla} \cdot (n(\vec{u}_E + \vec{u}_{\nabla B, i} + \vec{u}_p)) = \vec{\nabla}_{\perp} \cdot (D_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} n)}\quad (\text{II.8})$$

II. 1. 3 Conservation de la quantité de mouvement

Considérons les équations du moment électronique et ionique :

$$\begin{aligned}m_e \frac{\partial \vec{\Gamma}_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (m_e n_e \vec{v} \otimes \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\overline{\overline{\Pi}}_e) &= -\vec{\nabla} p_e + n_e q_e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \\ m_i \frac{\partial \vec{\Gamma}_i}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (m_i n_i \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\overline{\overline{\Pi}}_i) &= -\vec{\nabla} p_i + n_i q_i (\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B})\end{aligned}\quad (\text{II.9})$$

où $\overline{\overline{\Pi}}$ est le tenseur de Braginskii calculé en Annexe A dont la partie sphérique a été extraite ($\vec{\nabla} p$). On commence par projeter l'équation du moment électronique dans la direction parallèle. En négligeant l'inertie des électrons ($m_e \ll m_i$) ainsi que le tenseur de contrainte, la première équation du système Eq.(II.9) aboutit à une loi d'Ohm généralisée :

$$\boxed{E_{\parallel} = \frac{1}{ne} \left(-\nabla_{\parallel} p_e + R_{\parallel} \right)}\quad (\text{II.10})$$

Le terme de friction R_{\parallel} est calculé en Annexe **A**. On calcule désormais la projection dans la direction parallèle de l'équation ionique Eq.(II.9) :

$$m_i \frac{\partial \Gamma_{\parallel}}{\partial t} + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \cdot (m_i n \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \cdot (\bar{\Pi}_i) = -\nabla_{\parallel} p_i + ne E_{\parallel} - R_{\parallel} \quad (\text{II.11})$$

Le transport anormal est exprimé via un terme de diffusion et on ne garde du tenseur des contraintes que le terme de “diamagnetic cancellation” servant à compenser l'advection par la dérive diamagnétique ([38], Annexe (**A**)) ce qui conduit à :

$$\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \cdot (m_i n \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \cdot (\bar{\Pi}_i) = \vec{\nabla} \cdot (m_i n u_{\parallel}^2 \vec{b}) + \vec{\nabla} \cdot (m_i n u_{\parallel} (\vec{u}_E + \vec{u}_{\nabla B, i})) - \vec{\nabla}_{\perp} \cdot (m_i \mathcal{D} \vec{\nabla}_{\perp} \Gamma_{\parallel}) \quad (\text{II.12})$$

On injecte l'équation des électrons Eq.(II.10) ainsi que l'expression Eq.(II.12) dans Eq.(II.11) ce qui nous permet d'obtenir l'équation de conservation du moment ionique :

$$\boxed{m_i \frac{\partial \Gamma_{\parallel}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (m_i n u_{\parallel}^2 \vec{b}) + \vec{\nabla} \cdot (m_i n u_{\parallel} (\vec{u}_E + \vec{u}_{\nabla B, i})) + \nabla_{\parallel} p_i = \vec{\nabla}_{\perp} \cdot (m_i n \nu_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} u_{\parallel} + m_i u_{\parallel} D_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} n) + ne E_{\parallel} + R_{\parallel, i}} \quad (\text{II.13})$$

II. 1. 4 Conservation de l'énergie totale

Nous nous intéressons maintenant à l'équation de conservation de l'énergie totale de chaque espèce :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{t,e}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((E_{t,e} + p_e) \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\Pi}_e \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_e &= -ne \vec{v} \cdot \vec{E} + C^{2e} \\ \frac{\partial E_{t,i}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((E_{t,i} + p_i) \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\Pi}_i \cdot \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{q}_i &= ne \vec{u} \cdot \vec{E} + C^{2i} \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

où C^2 sont les termes de collisions et \vec{q} sont les flux de chaleur. Les énergies totales sont définies par $E_{t,e} = \frac{3}{2} k_B n T_e$ et $E_{t,i} = \frac{3}{2} k_B n T_i + \frac{1}{2} m_i n u_{\parallel}^2$. Commençons par développer l'équation pour les électrons Eq.(II.14). On rappelle l'expression de la vitesse électronique Eq.(II.2) qui aboutit à $\vec{v} = \left(u_{\parallel} - \frac{j_{\parallel}}{ne} \right) \vec{b} + \vec{u}_E + \vec{v}_{*}$. On sépare les composantes parallèles et perpendiculaires des différents termes de Eq.(II.14). On introduit la partie perpendiculaire des flux de chaleur de Braginskii nécessaire pour la “diamagnetic-cancellation” (Annexe **A**). Elle permet de compenser l'advection de l'énergie interne. L'advection de l'énergie cinétique est quant à elle compensée par le tenseur de pression. La partie perpendiculaire n'entrant pas dans le cadre de la “diamagnetic-cancellation” sera traitée dans les termes diffusifs et la partie parallèle viendra de la fermeture de Spitzer-Härm.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \frac{3}{2} k_B n T_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{5}{2} k_B n T_e \left(u_{\parallel} - \frac{j_{\parallel}}{ne} \right) \vec{b} \right) + \vec{\nabla} \cdot (q_{\parallel, e} \vec{b}) &= -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{5}{2} k_B n T_e (\vec{u}_E + \vec{u}_{\nabla B, e}) \right) \\ - \vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi}_{\perp} - ne \left(u_{\parallel} - \frac{j_{\parallel}}{ne} \right) E_{\parallel} - ne \vec{u}_{\nabla p_e} \cdot \vec{E}_{\perp} + C^{2e} & \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

On exprime le flux de chaleur perpendiculaire comme la somme d'un terme conductif et d'un terme convectif soit :

$$\vec{\Phi}_{\perp}(E_{t,e}) = -\mathcal{D} \vec{\nabla}_{\perp} \left(\frac{3}{2} k_B n T_e \right) = -\frac{3}{2} k_B T_e D_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} n - \frac{3}{2} k_B n \chi_{\perp, e} \vec{\nabla}_{\perp} T_e \quad (\text{II.16})$$

Le flux de chaleur parallèle est obtenu par la fermeture de Spitzer-Härm ([32],[39]) soit :

$$q_{\parallel,e} = -\kappa_e^0 T_e^{5/2} \nabla_{\parallel} T_e \quad (\text{II.17})$$

Le terme collisionnel est quant à lui issu du calcul du coefficient de transfert de chaleur de Braginskii [33] :

$$C^{2e} = -C^{2i} = \alpha \frac{n^2}{T_e^{3/2}} (T_i - T_e) \quad (\text{II.18})$$

où $\alpha = \frac{\sqrt{m_e}}{m_i} 4\sqrt{2\pi} e^4 Z^2 \ln(\Lambda)$. Enfin, on considère toujours que la seule contribution du tenseur des contraintes compense l'advection par la dérive diamagnétique et ainsi, l'équation sur la température électronique Eq.(II.15) devient :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \frac{3}{2} k_B n T_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{5}{2} k_B n T_e \left(u_{\parallel} - \frac{j_{\parallel}}{ne} \right) \vec{b} \right) + \vec{\nabla} \cdot (q_{\parallel,e} \vec{b}) &= -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{5}{2} k_B n T_e (\vec{u}_E + \vec{u}_{\nabla B,e}) \right) \\ + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{3}{2} k_B T_e D_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} n + \frac{3}{2} k_B n \chi_{e,\perp} \vec{\nabla}_{\perp} T_e \right) - ne \left(u_{\parallel} - \frac{j_{\parallel}}{ne} \right) E_{\parallel} & \\ - ne \vec{u}_{\nabla p_e} \cdot \vec{E}_{\perp} + \alpha \frac{n^2}{T_e^{3/2}} (T_i - T_e) & \end{aligned}} \quad (\text{II.19})$$

De la même façon on peut déduire de Eq.(II.14) l'équation sur l'énergie totale ionique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_{t,i}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left((E_{t,i} + p_i) u_{\parallel} \vec{b} \right) + \vec{\nabla} \cdot (q_{\parallel,i} \vec{b}) &= -\vec{\nabla} \cdot \left((E_{t,i} + p_i) (\vec{u}_E + \vec{u}_{\nabla B,i}) \right) \\ - \vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi}_{\perp}(E_{t,i}) + ne u_{\parallel} E_{\parallel} + ne \vec{u}_{\nabla p_i} \cdot \vec{E}_{\perp} - \alpha \frac{n^2}{T_e^{3/2}} (T_i - T_e) & \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

On calcule le flux de chaleur ionique perpendiculaire de façon analogue à Eq.(II.16) :

$$\begin{aligned} \vec{\Phi}_{\perp}(E_{t,i}) &= -\mathcal{D} \vec{\nabla}_{\perp} \left(\frac{3}{2} k_B n T_i + \frac{1}{2} m_i n u_{\parallel}^2 \right) = -\frac{3}{2} k_B T_i D_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} n \\ &- \frac{3}{2} k_B n \chi_{\perp,i} \vec{\nabla}_{\perp} T_i - \frac{1}{2} m_i u_{\parallel}^2 D_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} n - m_i u_{\parallel} \nu_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} (n u_{\parallel}) \end{aligned} \quad (\text{II.21})$$

En injectant cette expression dans Eq.(II.20), l'équation de conservation de l'énergie des ions devient :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial E_{t,i}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \left((E_{t,i} + p_i) u_{\parallel} \vec{b} \right) + \vec{\nabla} \cdot (q_{\parallel,i} \vec{b}) &= -\vec{\nabla} \cdot \left((E_{t,i} + p_i) (\vec{u}_E + \vec{u}_{\nabla B,i}) \right) \\ + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{3}{2} k_B T_i D_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} n + \frac{3}{2} k_B n \chi_{\perp,i} \vec{\nabla}_{\perp} T_i + \frac{1}{2} m_i u_{\parallel}^2 D_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} n + m_i u_{\parallel} \nu_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} (n u_{\parallel}) \right) & \\ + ne u_{\parallel} E_{\parallel} + ne \vec{u}_{\nabla p_i} \cdot \vec{E}_{\perp} - \alpha \frac{n^2}{T_e^{3/2}} (T_i - T_e) & \end{aligned}} \quad (\text{II.22})$$

II. 2 Equation de vorticité : potentiel auto-consistant

II. 2. 1 Courant de polarisation

Reconsid rions l'équation du moment fluide des ions :

$$m_i \frac{\partial n \vec{u}}{\partial t} + m_i \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}_i - ne \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right) = \vec{R} \quad (\text{II.23})$$

On obtient l'équation sur de la quantité de mouvement perpendiculaire en soustrayant à cette équation sa projection parallèle soit :

$$m_i \frac{\partial n \vec{u}_\perp}{\partial t} + m_i \left(\vec{\nabla} \cdot (n \vec{u} \otimes \vec{u}) - \left[\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u} \otimes \vec{u}) \right] \vec{b} \right) + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\Pi}}_{\perp,i} - ne \left(\vec{E}_\perp + \vec{u} \times \vec{B} \right) = 0 \quad (\text{II.24})$$

On considère ici uniquement la composante parallèle du terme de friction. On explicite maintenant la divergence :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u} \otimes \vec{u}) - \left[\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u} \otimes \vec{u}) \right] \vec{b} &= \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}) \vec{u} + n (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}) u_\parallel \vec{b} - n (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) u_\parallel \vec{b} \\ &= \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}) \vec{u}_\perp + n (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}_\perp \\ &= \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u} \otimes \vec{u}_\perp) \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

La vitesse perpendiculaire est définie comme $\vec{u}_\perp = \epsilon \vec{u}_\perp^{(1)} + \epsilon^2 \vec{u}_\perp^{(2)}$ (cf section (I. 2. 2)). On ne garde de l'équation du moment perpendiculaire que les termes d'ordre 2 soit :

$$m_i \frac{\partial n \vec{u}_\perp^{(1)}}{\partial t} + m_i \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u} \otimes \vec{u}_\perp^{(1)}) + \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\Pi}}_{\perp,i}^{(1)} - ne \vec{u}_\perp^{(2)} \times \vec{B} = 0 \quad (\text{II.26})$$

On calcule le produit vectoriel de cette équation par \vec{B} et on obtient :

$$\vec{j}_p = ne \vec{u}_p = \frac{m_i \vec{B}}{B^2} \times \left[\frac{\partial n \vec{u}_\perp^{(1)}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u} \otimes \vec{u}_\perp^{(1)}) + \vec{\nabla} \cdot \frac{\overline{\overline{\Pi}}_{\perp,i}^{(1)}}{m_i} \right] \quad (\text{II.27})$$

On rappelle la définition des vitesses perpendiculaires d'ordre 1 $\vec{u}_\perp^{(1)} = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} + \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}_\perp p_i}{nqB^2}$. Le champ magnétique ne variant pas dans le temps, le calcul du premier terme est trivial et donne :

$$\frac{m_i \vec{B}}{B^2} \times \frac{\partial n \vec{u}_\perp^{(1)}}{\partial t} = -m_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{n \vec{\nabla}_\perp \phi}{B^2} + \frac{\vec{\nabla}_\perp p_i}{eB^2} \right) \quad (\text{II.28})$$

En négligeant le terme de courbure, on peut entrer le produit vectoriel dans l'opérateur de divergence et ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{m_i \vec{B}}{B^2} \times \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u} \otimes \vec{u}_\perp^{(1)}) &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{m_i \vec{B}}{B^2} \times n \vec{u} \otimes \vec{u}_\perp^{(1)} \right) \\ &= -m_i \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{u} \otimes \left(\frac{n \vec{\nabla}_\perp \phi}{B^2} + \frac{\vec{\nabla}_\perp p_i}{eB^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{II.29})$$

La définition du courant de polarisation est :

$$\boxed{\vec{j}_p = -\frac{\partial \vec{w}_p}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{w}_p)} \quad (\text{II.30})$$

avec $\vec{w}_p = m_i \left(\frac{n \vec{\nabla}_\perp \phi}{B^2} + \frac{\vec{\nabla}_\perp p_i}{eB^2} \right)$.

II. 2. 2 Conservation de la charge

Nous allons désormais expliciter l'équation de l'évolution du potentiel électrique du plasma. Nous partons de l'équation de conservation de la charge qui est :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot (j_{\parallel} \vec{b} + ne\vec{u}_p + ne(\vec{u}_{\nabla B, i} - \vec{u}_{\nabla B, e})) = 0 \quad (\text{II.31})$$

Le terme qu'il faut expliciter est la divergence du courant de polarisation Eq.(II.30). La divergence et la dérivée temporelle étant commutatives, on peut faire apparaître la dérivée temporelle de l'opérateur de vortacité :

$$W = \vec{\nabla} \cdot \vec{w}_p = \vec{\nabla} \cdot \left(m_i \left(\frac{n\vec{\nabla}_{\perp}\phi}{B^2} + \frac{\vec{\nabla}_{\perp}p_i}{eB^2} \right) \right) \quad (\text{II.32})$$

Le calcul de la divergence du second terme de l'équation Eq.(II.30) se simplifie en négligeant l'advection de la vitesse par le vecteur \vec{w}_p . On a :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot (\vec{u} \otimes \vec{w}_p)) &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}(\vec{\nabla} \cdot \vec{w}_p)) \\ &= \vec{\nabla} \cdot (W\vec{u}) \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

On obtient la divergence du courant de polarisation soit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_p = -\frac{\partial W}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (W\vec{u}) \quad (\text{II.34})$$

En supposant que le terme du tenseur de contrainte (qui a été volontairement omis afin de simplifier les notations) ne sert qu'à compenser l'advection par la dérive diamagnétique et en ajoutant le terme de transport anormal via un terme de diffusion, on obtient l'équation de la vortacité :

$$\left[\frac{\partial W}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (W(u_{\parallel}\vec{b} + \vec{u}_E + \vec{u}_{\nabla B, i})) = \vec{\nabla} \cdot (j_{\parallel}\vec{b}) + \vec{\nabla} \cdot (ne(\vec{u}_{\nabla B, i} - \vec{u}_{\nabla B, e})) + \vec{\nabla}_{\perp} \cdot (\zeta_{\perp}\vec{\nabla}_{\perp}W) \right] \quad (\text{II.35})$$

II. 2. 3 Loi d'Ohm généralisée

Notons différemment l'équation du moment électronique obtenue en Eq.(II.10) :

$$0 = -\nabla_{\parallel}p_e + en\nabla_{\parallel}\phi + R_{e,\parallel} \quad (\text{II.36})$$

Dans le cadre des équations fluides de Braginskii [33], la contribution parallèle du terme de friction vaut (Annexe A) :

$$R_{e,\parallel} = en\eta_{\parallel}j_{\parallel} - 0.71n\nabla_{\parallel}k_B T_e \quad (\text{II.37})$$

La forme finale de la loi d'ohm généralisée permettant de calculer le courant parallèle est alors :

$$j_{\parallel} = \frac{1}{en\eta_{\parallel}}(\nabla_{\parallel}p_e + 0.71n\nabla_{\parallel}k_B T_e - en\nabla_{\parallel}\phi) \quad (\text{II.38})$$

avec la résistivité parallèle comme paramètre défini par $\eta_{\parallel} = T_e^{-3/2}\eta_{\parallel 0}$.

II. 3 Géométrie du code

II. 3. 1 Construction du maillage structuré

Le schéma numérique du code fluide SOLEDGE2D s'appuie sur un schéma en volumes finis appliqué aux équations de conservation précédente ((II.8),(II.13),(II.19),(II.22) et (II.35)) en deux dimensions. Elles sont résolues sur une grille alignée aux surfaces magnétiques. Ainsi, un tokamak peut être décrit par un jeu de coordonnées (ψ, θ, φ) où ψ correspond au flux magnétique poloidal (faisant ainsi office de variable "radiale"), θ est un angle poloidal généralisé et φ l'angle toroidal. S'agissant d'un code en deux dimensions, on considère le domaine comme axisymétrique et ainsi, on pose $\partial_\varphi = 0$. On définit la grille cartésienne structurée (ψ, θ) et on

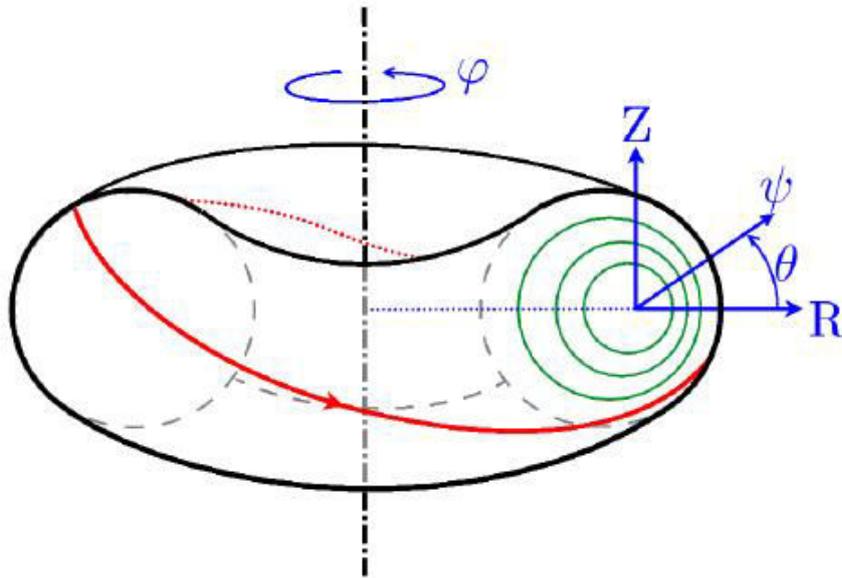


Figure II.1 – Géométrie toroidale et définition des coordonnées (ψ, θ, φ) [10] représentant respectivement la position des surfaces de flux, l'angle poloidal et l'angle toroidal

exprime les gradients comme :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial \psi} \vec{e}^\psi + \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}^\theta + \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{e}^\varphi \quad (\text{II.39})$$

où les vecteurs $(\vec{e}^\psi, \vec{e}^\theta, \vec{e}^\varphi)$ correspondent à la base covariante associée aux coordonnées (ψ, θ, φ) (Annexe (B)) :

$$\vec{e}^\psi = \frac{\partial \psi}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{\partial \psi}{\partial Z} \vec{e}_Z \quad ; \quad \vec{e}^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial R} \vec{e}_R + \frac{\partial \theta}{\partial Z} \vec{e}_Z \quad (\text{II.40})$$

où (R, Z) correspond aux coordonnées cartésiennes dans le plan poloidal et les termes tels que $\frac{\partial R}{\partial \psi}$ sont des coefficients de métriques calculés en Annexe B. On peut définir une grille cartésienne (i, j) pour $i \in [1, N_\psi]$ et $j \in [1, N_\theta]$ et calculer le domaine $(R(\psi, \theta), Z(\psi, \theta))$ ainsi que les champs magnétiques d'équilibre correspondants. Par exemple si l'on souhaite des surfaces de flux circulaires concentriques, on choisit les courbes paramétriques :

$$\begin{cases} R = R_0 + (r_{min} + \Delta r \psi^*) \sin(2\pi \theta^*) \\ Z = -(r_{min} + \Delta r \psi^*) \cos(2\pi \theta^*) \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

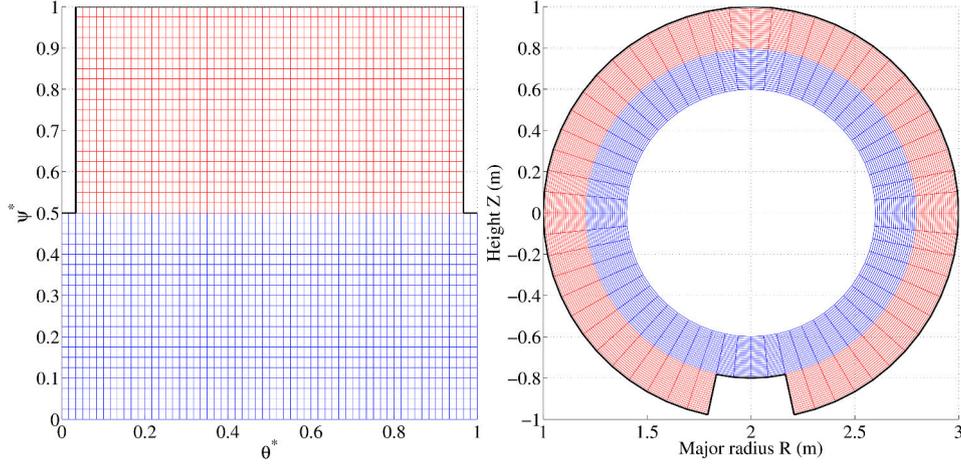


Figure II.2 – Maillage cartésien (ψ^*, θ^*) normalisé et reconstruction du maillage circulaire (R, Z)

L'indice * signifie ici normalisé. Chaque maille est définie par son centre et chacune de ses arêtes sur lesquelles nous appliquons le schéma en volumes finis.

II. 3. 2 Topologie magnétique

Une fois le maillage cartésien défini, on peut reconstruire n'importe quel type de surface de flux magnétique (circulaire ou avec une forme plus complexe comme une géométrie divertor). On a ainsi un ensemble de mailles rectangulaires quelle que soit la géométrie souhaitée et on calcule l'équilibre magnétique désiré à partir des surfaces de flux magnétique poloidal. On décompose donc le champ magnétique entre ses deux composantes poloidales et toroidales soit :

$$\vec{B} = B_p \vec{e}_p + B_{tor} \vec{e}_\varphi \quad (\text{II.42})$$

Le champ magnétique poloidal peut être défini par :

$$\vec{B}_p = \vec{\nabla} \psi \times \vec{\nabla} \varphi = -\frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial Z} \vec{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial R} \vec{e}_Z \quad (\text{II.43})$$

\vec{e}_R et \vec{e}_Z sont les vecteurs cartésiens dans le plan (R, Z) . Le champ magnétique toroidal est quant à lui défini par :

$$\vec{B}_{tor} = F \vec{\nabla} \varphi = \frac{B_0 R_0}{R} \vec{e}_\varphi \quad (\text{II.44})$$

On calcule l'équilibre magnétique en fonction des surfaces de flux souhaitées et des coordonnées (R, Z) et on obtient chacune des composantes du champ magnétique.

II. 3. 3 Décomposition multi-domaine

Une fois le maillage et l'équilibre magnétique définis, on effectue un découpage du domaine en différentes zones (Fig.(II.4)). Chacune des zones voisines est définie à l'aide d'une matrice de connexion. Il y a donc une phase dans la résolution des équations servant à connecter les zones entre elles.

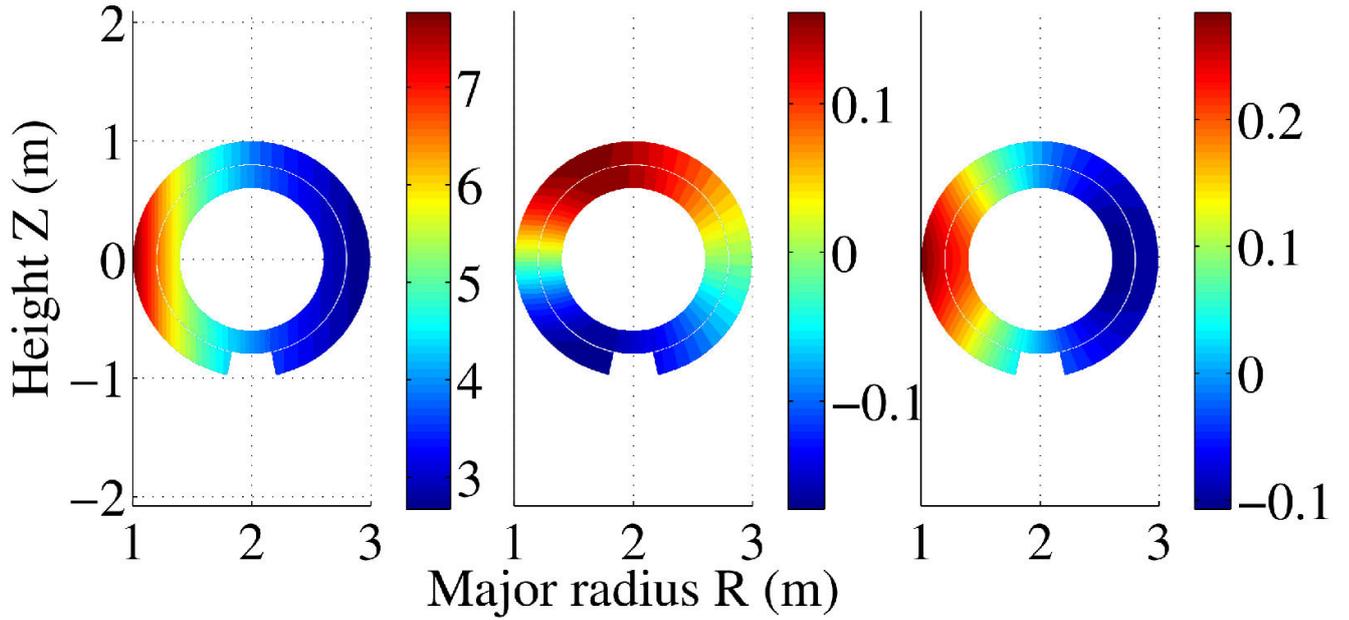


Figure II.3 – Composantes du champ magnétique en géométrie circulaire : direction toroidale (gauche), direction R (centre) et Z (droite).

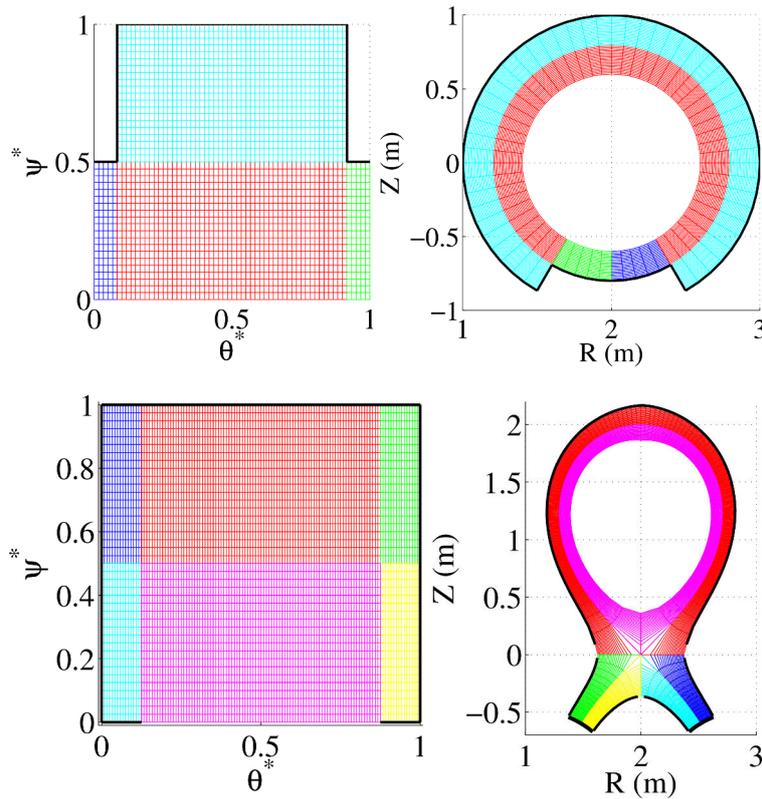


Figure II.4 – Découpage en zone d'un maillage circulaire en 4 zones (haut) ou d'une géométrie divertor en 6 zones (bas)

Chaque zone est définie par des matrices contenant les différentes variables (coefficient de métrique, variable plasma, etc...) et entourée par des cellules fantômes contenant l'information en provenance des zones voisines ou des conditions limites (Fig.(II.5)).

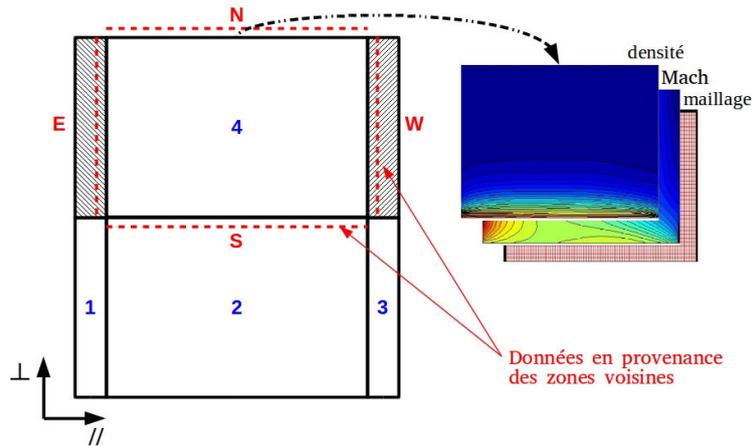


Figure II.5 – Exemple de connexion entre zone : la zone 4 est connectée au sud avec la zone 3 et entourée par des conditions limites parallèles à l'est et à l'ouest et par une condition perpendiculaire au nord.

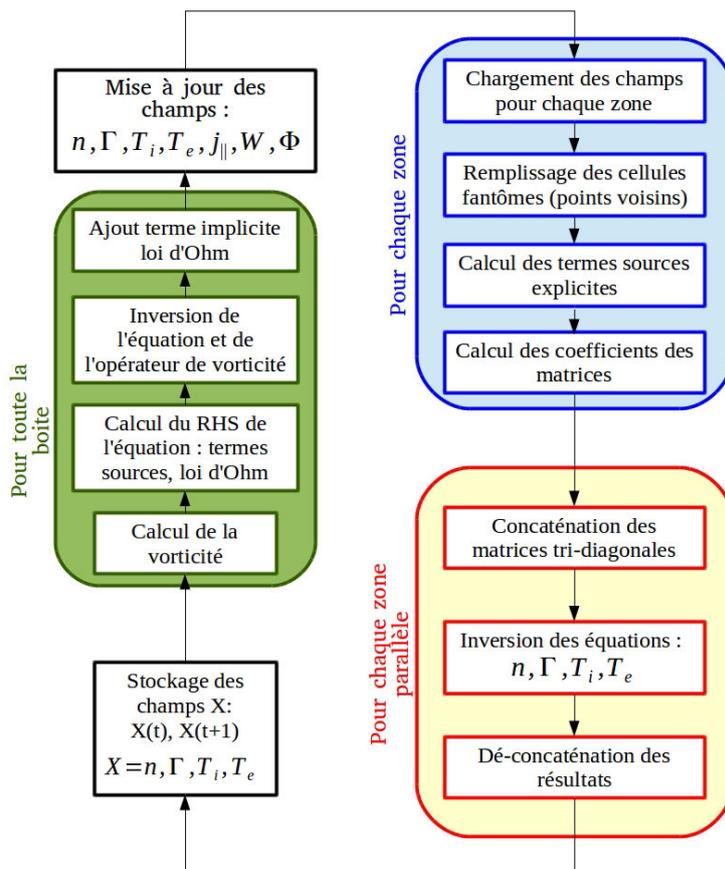


Figure II.6 – Schéma d'explication du fonctionnement de SOLEDGE2D :  tapes majeures de remplissage des matrices, inversion des systèmes et résolution des grandeurs du plasma.

Pour chaque zone, on calcule des coefficients des matrices du système tridiagonal ainsi que les termes sources explicites (terme de dérive, terme diffusif, etc...) pour les différentes

équations du plasma. L'étape suivante consiste à concaténer les matrices dans la direction parallèle et à inverser le système pour chaque "méga-zone" parallèle (par exemple la zone 4 ou le groupe de zone 1,2 et 3 dans Fig.(II.5)). On résout dans l'ordre l'équation sur la densité, le flux parallèle puis les équations sur l'énergie électronique et ionique. Une fois ces équations inversées, on calcule l'opérateur de vorticité ainsi que partie explicite de la loi d'Ohm généralisé ($\nabla_{\parallel} p_e$). On remplit la matrice de l'opérateur de vorticité pour la résolution de l'équation sur le potentiel. L'inversion est effectuée   chaque pas de temps. S'agissant d'une matrice creuse   neuf diagonales non nulles, on utilise la bibliothèque PASTIX[ ] développée   l'INRIA Bordeaux pour l'inversion du système. Le terme implicite $-en^{k+1}\nabla_{\parallel}\Phi^{k+1}$ est finalement ajouté dans le courant parallèle.

II. 4 Conditions limites

Le code SOLEDGE2D propose deux méthodes pour définir les conditions limites. Les deux s'appuient sur la théorie des lignes de champ ouvertes et les conditions de Bohm-Chodura. La première méthode propose des conditions limites classiques de type Dirichlet, Neumann ou mixte. La deuxième est une méthode de frontière immergée appell e pénalisation. Elle consiste   étendre la grille de calcul   l'intérieur des parois et   résoudre les équations en tout point du domaine.

II. 4. 1 Conditions limites classiques

Dans ce paragraphe, nous présentons rapidement les conditions limites classiques pouvant être utilisées dans le code. On peut distinguer trois types de conditions limites (Fig.(II.7)) : condition de coeur, condition de mur perpendiculaire et condition de mur parallèle (Bohm-Chodura).

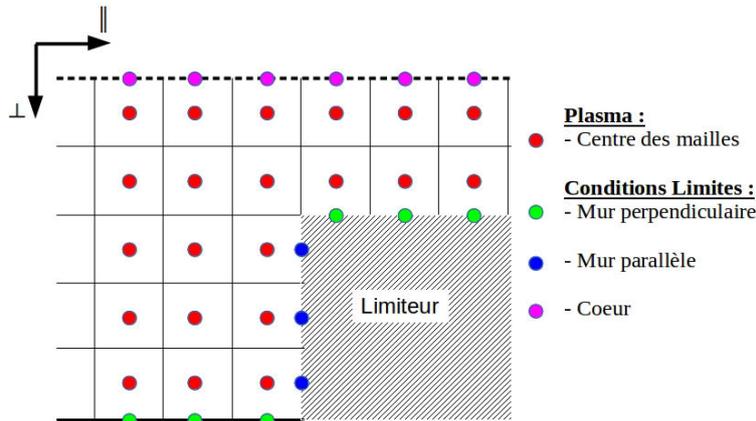


Figure II.7 – Définition des points fantômes aux frontières du domaine : application des conditions limites.

II. 4. 1. 1 Condition limite de coeur

Pour la condition   la frontière interne de la boîte (Coeur), on peut décider de fixer les valeurs de densité et de température ou on peut choisir de fixer des flux de particules et d'énergie en provenance du coeur. Pour la vitesse, on fixe un gradient radial nul pour permettre la rotation du plasma. Ainsi on a :

	densité	flux parallèle	T_i	T_e
Valeurs	$n_0 (m^{-3})$	$\nabla_{\perp}\Gamma_{\parallel} = 0$	$T_0 (eV)$	$T_0 (eV)$
Flux	$\Gamma_{\perp} (m^{-2}.s^{-1})$	$\nabla_{\perp}\Gamma_{\parallel} = 0$	$Q_{\perp} (MW)$	$Q_{\perp} (MW)$

Pour le potentiel électrique, on souhaite avoir l'ambipolarité au coeur du plasma soit des vitesses perpendiculaires d'ordre 1 nulles. L'équation définissant cette condition est :

$$\vec{u}_{\perp} = 0 \implies \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2} = -\frac{\vec{B} \times \vec{\nabla}_{\perp} p_i}{neB^2} \quad (\text{II.45})$$

Ainsi on définit la condition sur le potentiel électrique et sur la vorticit   soit :

$$W = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\perp} \Phi = \frac{\nabla_{\perp} p_i}{ne} \quad (\text{II.46})$$

II. 4. 1. 2 Condition limite de mur perpendiculaire :

Concernant le mur perpendiculaire, on choisit de ne pas avoir de plasma dans les cellules fant  mes et on fixe    0 toutes les variables. Pour la vorticit   et le potentiel, on choisit de les laisser   voluer et on fixe des conditions de continuit   :

densit��	flux parall��le	T_i	T_e	W	Φ
$n = 0$	$\Gamma_{\parallel} = 0$	$T_i = 0$	$T_e = 0$	$\nabla_{\perp} W = 0$	$\nabla_{\perp} \Phi = 0$

De plus, le sch  ma   tant un sch  ma    volumes finis, on peut fixer lors du calcul des termes sources sur les mailles pr  s des parois, des flux    0 afin de n'avoir des flux sortant du plasma uniquement dans la direction parall  le :

$$\iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{F} dV_{maille} = \oint_{maille} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \sum (\vec{F}_{\parallel} \cdot d\vec{S}_{\parallel} + \vec{F}_{\perp} \cdot d\vec{S}_{\perp}) \quad (\text{II.47})$$

II. 4. 1. 3 Condition limite de mur parall  le :

Dans la direction parall  le, on choisit d'appliquer une condition de d  riv  e parall  le seconde nulle sur la densit   et les conditions de Bohm-Chodura pour les flux de chaleurs et la vitesse. Pour cela on consid  re que l'on r  sout le plasma dans la pr  -gaine et on impose les conditions    l'entr  e de la gaine comme condition limite. De plus, on souhaite permettre l'  tablissement d'une transition supersonique pouvant appara  tre pr  s du limiteur ou des plaques du divertor [40].

La condition de Bohm-Chodura    l'entr  e de la gaine se traduit donc par :

$$\vec{u}_{\perp, w} = c_s \vec{e}_{\perp, w} \quad (\text{II.48})$$

o   \perp, w d  finit la direction perpendiculaire au mur. Ainsi en posant α l'angle d'incidence entre les lignes de champ et le mur, l'  quation Eq.(II.48) aboutit    :

$$u_{\parallel} \sin \alpha + u_{\perp} \cos \alpha = c_s \sin \alpha \quad (\text{II.49})$$

Sachant que seule la vitesse de d  rive   lectrique advecte le plasma (Diamagnetic cancellation), on ne consid  rera dans un premier temps que la vitesse de d  rive   lectrique dans la condition sur le nombre de Mach parall  le soit :

$$M_{\parallel} = 1 - \frac{u_{E \times B}}{c_s \tan \alpha} \quad (\text{II.50})$$

Dans le code, cette condition est impl  ment  e comme suit :

- si $|M_{\parallel}| < 1 - M_{E \times B}$ $|M_{\parallel}| = 1 - M_{E \times B}$.
- sinon, on veut permettre la transition supersonique et ainsi pour laisser libre la valeur du Mach, on fixe $\nabla_{\parallel}^2 \Gamma_{\parallel} = 0$.

Pour le potentiel, on s'intéresse ici à la modélisation de l'équilibre plasma et les échelles considérées sont bien supérieures à la longueur de Debye. On ne modélise pas entièrement la gaine et on peut fixer le potentiel à la valeur du potentiel flottant $\Lambda = -\frac{1}{2} \log \left(2\pi \frac{m_e}{m_i} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \right)$ au mur (section (I. 2. 3. 3)).

Enfin sur les flux de chaleurs, on définit le flux total advecté impactant la paroi :

$$q_{tot} = \gamma_a k_B T_a \Gamma_{tot} \quad (\text{II.51})$$

où γ_a est le coefficient de transfert de chaleurs dans la gaine. On a près du mur l'égalité suivante :

$$\frac{5}{2} k_B T n \left(u_{\parallel} + \frac{u_{E \times B}}{\tan \alpha} \right) - \kappa_a^0 T_a^{5/2} \nabla_{\parallel} T_a = \gamma_a k_B T_a n \left(u_{\parallel} + \frac{u_{E \times B}}{\tan \alpha} \right) \quad (\text{II.52})$$

Les conditions limites parallèles sont données dans le tableau suivant :

densité	flux parallèle	T_i	T_e	W	Φ
$\nabla_{\parallel}^2 n = 0$	$ u_{\parallel} \geq c_s - \frac{u_{E \times B}}{\tan \alpha}$	$\nabla_{\parallel} T_i = 0$	$\nabla_{\parallel} T_e = \frac{-2k_B n \left(u_{\parallel} + \frac{u_{E \times B}}{\tan \alpha} \right)}{\kappa_e^0 T_e^{3/2}}$	$\nabla_{\parallel} W = 0$	$\Phi = \Lambda k_B T_e / e$

II. 4. 2 Méthode de pénalisation

Dans le code SOLEDGE2D, il est possible de remplacer la méthode utilisant les cellules fantômes pour définir des conditions limites par une méthode de frontière immergée appelée méthode de "pénalisation" [11] [12]. Contrairement à la méthode précédente, celle-ci permet d'éviter d'avoir à adapter le maillage à la géométrie du mur (Fig.(II.4)) et permet de plus de simuler des plasmas en géométrie réaliste. Le principe de cette méthode est d'étendre le domaine de simulation à l'intérieur du mur. Ainsi, les équations fluides sont résolues en tout point du domaine et une fonction masque (Fig.(II.8)) est définie afin de distinguer les points dans le plasma et les points dans le mur. Il faut ajouter un terme dans les équations fluides afin d'avoir les conditions limites souhaitées à l'interface plasma/mur.

Tout d'abord, on définit la fonction masque χ caractérisant les points dans le plasma ($\chi = 0$) et les points dans le mur ($\chi = 1$). Afin de définir des conditions de type Neumann (condition limite sur les flux de chaleur par exemple), on définit séparément le centre de l'obstacle et ses côtés. On découpe la fonction masque globale $\chi_2 = \chi$ en une fonction masque au centre de l'obstacle χ_4 et une de chaque côté de l'objet suivant si l'on considère le début d'une ligne de champ χ_3 ou la fin χ_1 (Fig. (II.9)).

On va maintenant ajouter dans les équations fluides de SOLEDGE2D les termes de pénalisation. On commence par ajouter le terme dans l'équation de conservation de la masse (Eq. (II.53)).

$$\partial_t n + \vec{\nabla} \cdot (n u_{\parallel} \vec{b}) + \frac{\chi_4}{\eta} (n - n_{\chi}) = \vec{\nabla} \cdot (D_{\perp} \vec{\nabla} n) - \vec{\nabla} \cdot (n \vec{u}_{drift}) \quad (\text{II.53})$$

Si $\chi_4 = 0$ (plasma), ce terme est supprimé et si $\chi_4 = 1$ (mur), ce terme source devient dominant. Afin de satisfaire cette condition, on divise le terme de pénalisation par η (appelé paramètre

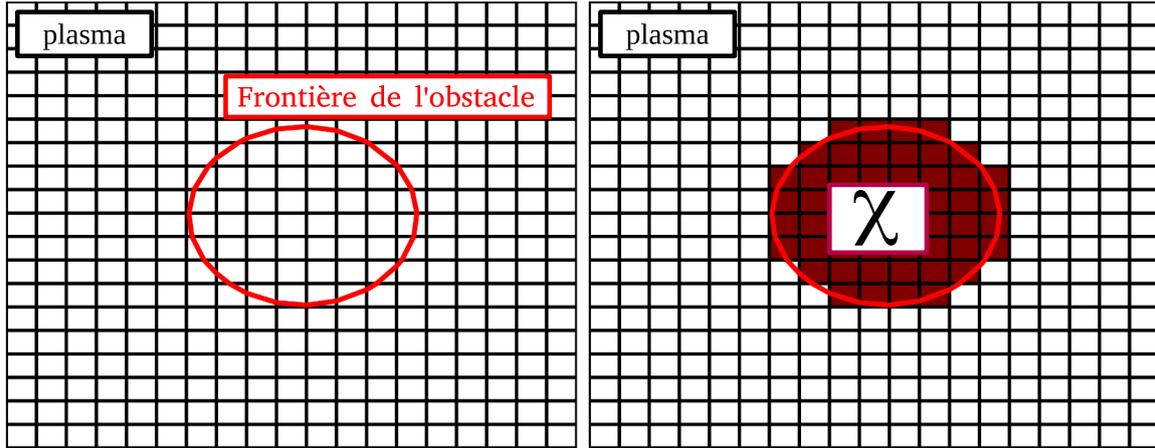


Figure II.8 – Exemple de définition du masque : la frontière de l'objet est définie sur le maillage (gauche) et sert à définir la fonction masque χ (droite).

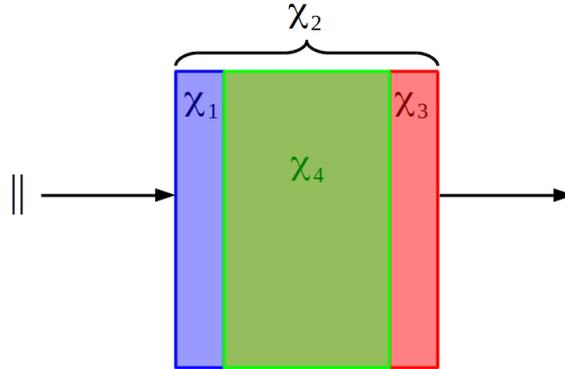


Figure II.9 – Définition du masque de la pénalisation : décomposition du masque globale χ_2

de pénalisation) dont la valeur est choisie suffisamment faible pour avoir, lorsque l'on tend vers un état d'équilibre, la densité souhaitée à l'intérieur de l'obstacle $n_\chi \sim 0$ (Eq. (II.54)).

$$\partial_t n + \frac{\chi_4}{\eta} (n - n_\chi) = 0 \xrightarrow{\partial_t=0} n \rightarrow n_\chi \quad (\text{II.54})$$

Concernant la valeur de la densité sur les parois de l'obstacle, c'est la valeur du nombre de Mach (condition de Bohm-Chodura) qui définira les flux de particules entrant dans le mur et règlera la densité à l'interface mur/plasma.

La condition de Bohm-Chodura consiste à vérifier la valeur du nombre de Mach poloidale $M_\theta = M_\parallel + M_{E \times B}^\theta$ dans le plasma et à la fixer si elle est inférieure à 1 ou à la laisser évoluer sinon (section (II. 4. 1. 3)). Dans le cas de la pénalisation, on ne peut pas juste fixer la valeur du nombre de Mach que l'on souhaite avoir. On va donc faire appel à une boucle d'asservissement permettant de faire tendre le nombre de Mach vers la valeur souhaitée à l'interface plasma/paroi (Fig.(II.10)). On donne en entrée de la boucle d'asservissement, la valeur du nombre de Mach parallèle souhaitée ($M_{obj} = \pm 1 - M_{ExB}$). Cette valeur est alors comparée au Mach dans le plasma et l'erreur résultante $\varepsilon = M_{obj} - M_\parallel$ est calculée. L'erreur passe dans un correcteur proportionnel de gain G d'une part et dans un correcteur intégral de gain G/τ d'autre part. Cette boucle va faire tendre le nombre de Mach à l'interface plasma/paroi vers la valeur objectif du nombre de Mach. Si le Mach dans le plasma est inférieur au Mach pénalisé, le nombre de Mach dans le mur reçoit le nombre de Mach pénalisé. Sinon, le nombre de Mach dans le mur reçoit le nombre de Mach dans le plasma. On ajoute dans l'équation de conservation du

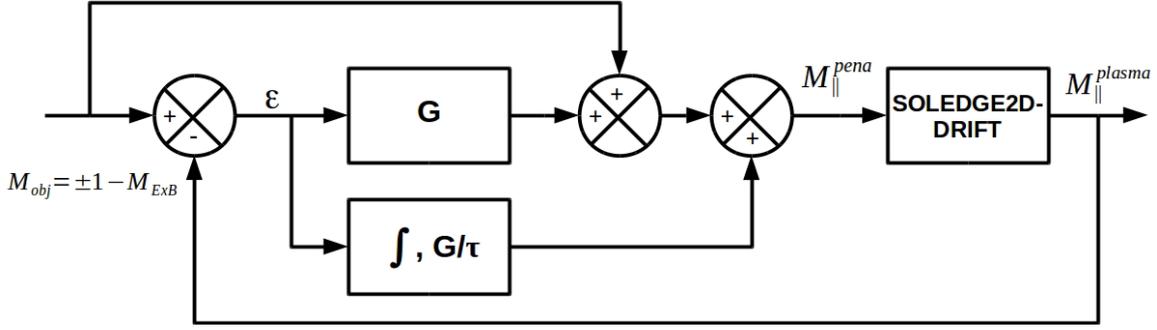


Figure II.10 – Boucle d’asservissement de la pénalisation sur le nombre de Mach : correcteur proportionnel intégral

moment les termes de pénalisation correspondant.

$$\partial_t \Gamma_{\parallel} + LHS + \frac{\chi_4}{\eta} \Gamma_{\parallel} + \frac{\chi_1}{\eta} (\Gamma_{\parallel} - nc_s M_{\parallel}^{pena,1}) - \frac{\chi_3}{\eta} (\Gamma_{\parallel} - nc_s M_{\parallel}^{pena,3}) = RHS \quad (II.55)$$

où RHS et LHS correspondent aux autres termes du membre de droite et de gauche. Ainsi, comme précédemment, si $\chi_4 = 1$, le terme dominant donne $\Gamma_{\parallel} = 0$ et si χ_1 ou $\chi_3 = 1$, le terme dominant donne $\Gamma_{\parallel} = nc_s M_{\parallel}^{pena}$.

La pénalisation s’applique aux équations de conservation de l’énergie de la même façon que pour le nombre de Mach. On note N_{BC}^1 et N_{BC}^3 les conditions limites de Neumann (section (II. 4. 1. 3)) de chaque côté du limiteur. Les termes dans les équations de conservation de l’énergie sont :

$$\partial_t E_{t,\alpha} + LHS + \frac{\chi_4}{\eta} (T - T_{\chi}) + \frac{\chi_1}{\eta} (\nabla_{\parallel}^1 T - N_{BC}^1) - \frac{\chi_3}{\eta} (\nabla_{\parallel}^3 T - N_{BC}^3) = RHS \quad (II.56)$$

où comme pour la densité, on choisit $T_{\chi} \sim 0$. Pour finir, on garde une condition limite classique sur l’équation de vorticité et donc sur le potentiel électrique.

II. 5 Exemple de simulations avec le code SOLEDGE2D

Dans cette section, nous présentons deux cas de confrontation entre la simulation numérique et la mesure expérimentale. Les deux cas présentés ici ont été réalisé au fil du développement du code. Par conséquent, les résultats suivant ne tiennent pas compte des vitesses de dérive fluides.

II. 5. 1 Comparaison aux mesures expérimentales sur le tokamak Tore Supra

Le cas expérimental du Mistral Base Case [41] est employé par les numériciens comme une référence pour la confrontation entre simulation numérique et expérience. Il s’agit d’une série de choc menée sur le tokamak Tore Supra au cours de laquelle le point de contact entre le plasma et le mur a été déplacé poloidalement entre un appui sur le limiteur (BOT), un appui sur le limiteur d’antenne côté faible champ (LFS), un appui sur le haut du limiteur LFS (TOP) et un appui sur le limiteur interne (côté fort champ HFS) (Fig.II.11).

Des mesures de sonde ont été acquises en haut de la Machine pour ces quatre configurations et ont permis de mettre en évidence le caractère ballonné du transport perpendiculaire. Le

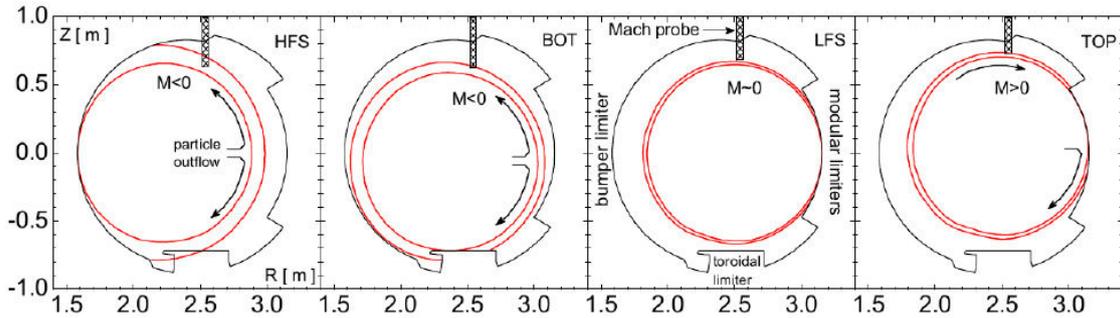


Figure II.11 – Configuration des chocs du Mistral Base Case [41] : les lignes rouges représentent la séparatrice et la largeur de la SOL. La sonde est placée en haut.

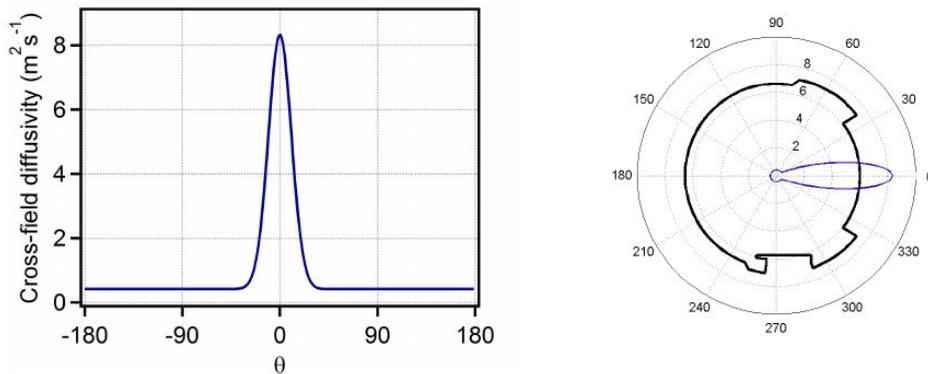


Figure II.12 – Ballonnement imposé de la diffusion : gaussienne de largeur $\Delta\theta = 30^\circ$, rapport d'amplitude $D_{max}/D_{min} = 20$ et coefficient de diffusion moyen $\langle D \rangle = 1\text{m}^2.\text{s}^{-1}$ [10].

code SOLEDGE2D dans sa première version [10] a été confronté à ce cas expérimental [12] en utilisant la méthode de pénalisation afin de reproduire fidèlement la configuration magnétique et géométrique de ces chocs. Le ballonnement de la diffusion a été ajouté artificiellement par une gaussienne dont la largeur correspond aux analyses expérimentales mais dont l'amplitude est surévaluée (Fig.(II.12)) et aucun modèle de traitement des neutres n'est activé.

Les figures Fig.(II.13) représentent les cartes 2D du nombre de Mach parallèle M_{\parallel} dans les configurations BOT, LFS, TOP et HFS. La position de la sonde où les mesures ont été effectuées est représentée sur chaque figure en haut (trait rose). On voit nettement le changement de dynamique parallèle et d'épaisseur de la SOL mis en évidence dans cette expérience lorsque le point de contact est déplacé. Les profils 1D au niveau de la sonde ont été comparés aux mesures expérimentales (Fig.(II.14)) et présentent un bon accord qualitatif avec la mesure. La dynamique du nombre de Mach parallèle (changement de signe) est retrouvée ainsi que la longueur de décroissance de la densité. Cependant, même si les profils de Mach sont en accord avec les mesures de sonde près de la séparatrice, ce n'est plus le cas lorsqu'on s'enfonce dans la SOL. Cette différence peut être liée à :

- la nature du transport dans SOLEDGE2D qui n'est pas réaliste
- l'absence de source de particules neutres liée à l'interaction plasma/paroi
- l'absence des vitesses de dérives dans le modèle employé

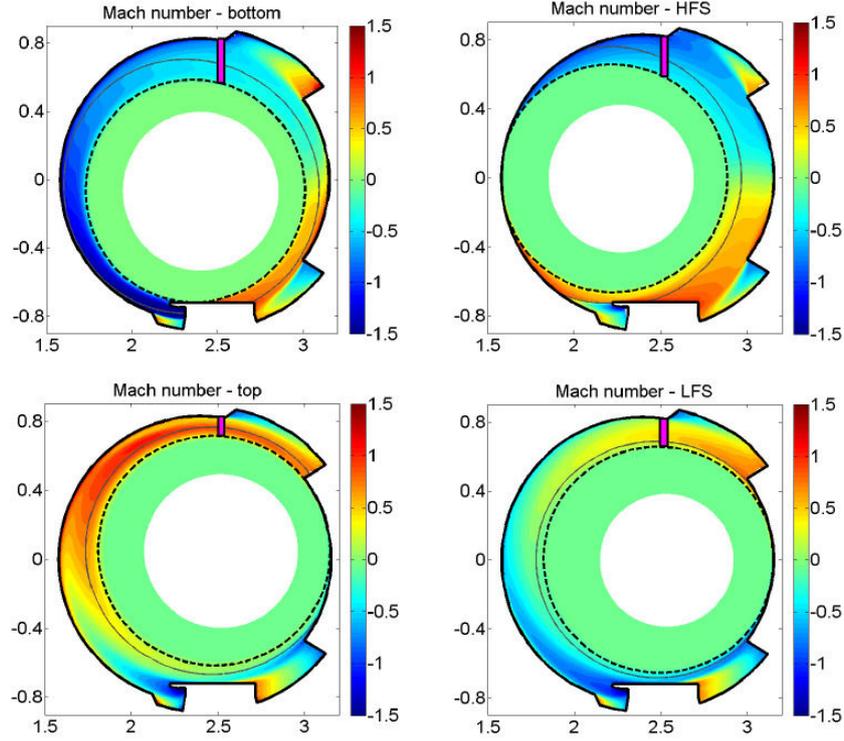


Figure II.13 – Nombre de Mach parallèle M_{\parallel} des 4 simulations : la ligne noire représente l'épaisseur de la SOL, les tirets la séparatrice et la sonde est en rose en haut [12].

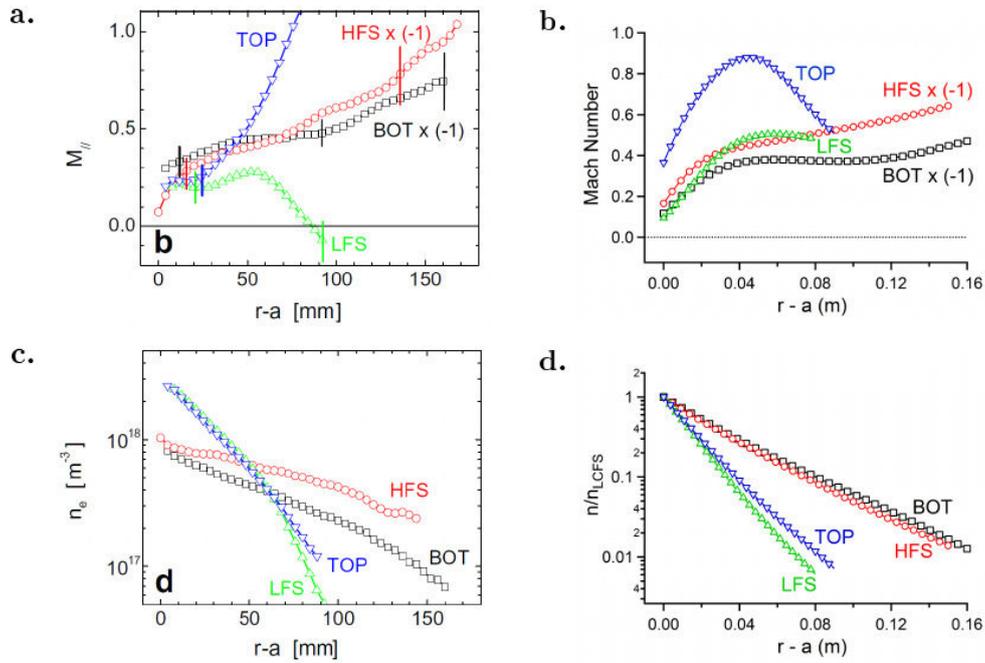


Figure II.14 – Nombre de Mach parallèle au niveau de la sonde : numérique (a) et expérimental (b) ; Profil de densité : numérique (c) et expérimental (d). [10]

C'est dans ces perspectives qu'un effort sur le couplage avec le code Monte-Carlo EIRENE a été fourni et que l'on a cherché à enrichir le modèle en y ajoutant une équation de résolution du potentiel électrique.

II. 5. 2 Comparaison aux mesures expérimentales sur le tokamak ASDEX-Upgrade

Une autre comparaison simulation/expérience a récemment été réalisée sur des expériences du tokamak ASDEX-Upgrade. Une comparaison a déjà été effectuée avec le code SOLPS [42] comprenant les vitesses de dérives ou non.

Une comparaison similaire a été effectuée avec SOLEDGE2D-EIRENE [43]. Les coefficients de diffusion ont été tirés du papier [42] afin de coller au mieux à la réalité expérimentale (Fig.(II.15)).

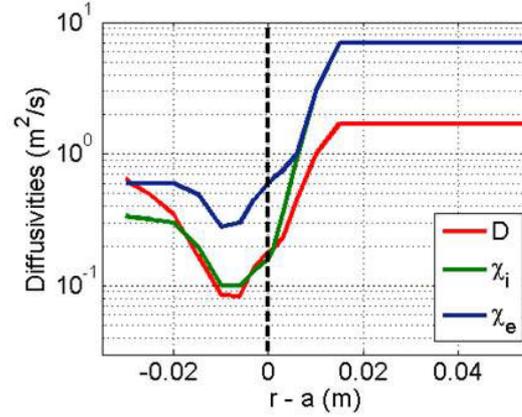


Figure II.15 – Profils des coefficients de diffusion des particules D , de la chaleur ionique χ_i et de la chaleur électronique χ_e provenant de [42].

L'équilibre de flux magnétique de l'expérience a servi à générer le maillage pénalisé afin de prendre en compte la géométrie réaliste d'ASDEX-Upgrade. On donne à titre d'exemple les cartes de densité électronique et de densité de l'impureté carbone C^{6+} (Fig.(II.16)) liée à l'interaction plasma/paroi. Les sources de particules liées au transport et à l'ionisation du carbone proviennent du couplage avec le code EIRENE.

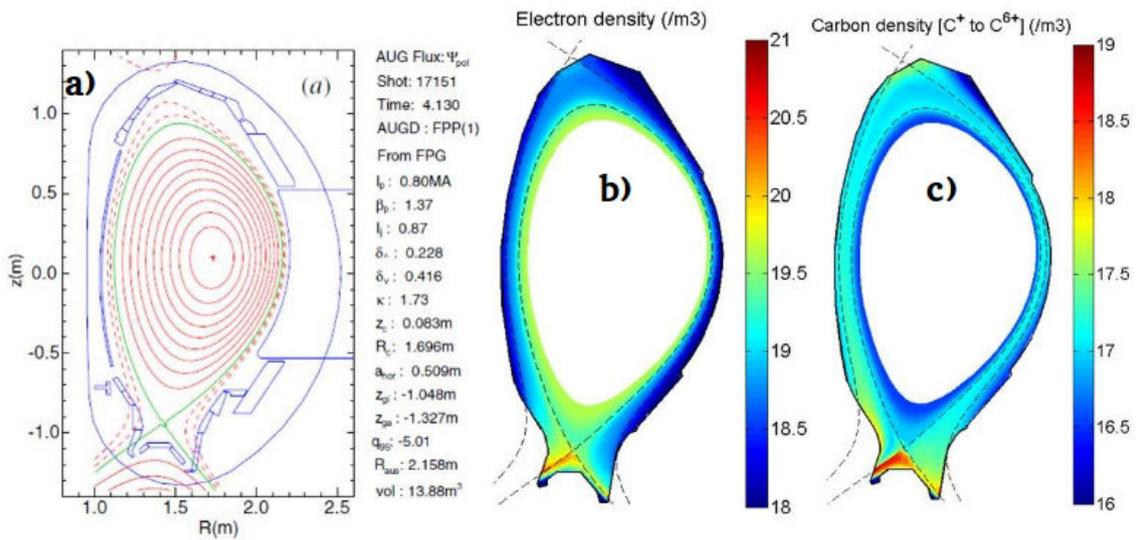


Figure II.16 – **a)** Carte de flux magnétique poloidal de ASDEX-Upgrade ; **b)** Carte de densité électronique n_e ; **c)** Carte de densité de l'impureté carbone C^{6+} .

Des mesures de sonde de Langmuir ont été effectuées au cours de cette expérience au niveau des plaques du Divertor d'ASDEX-Upgrade. Elles ont permis de mesurer la densité électronique ainsi que la température électronique. Les figures Fig.(II.17) montrent la comparaison entre ces mesures et les profils de SOLEDGE2D-EIRENE et présentent un très bon accord entre la simulation et l'expérience. On note de légères différences pouvant être liées notamment à l'absence de vitesses de dérive dans le modèle.

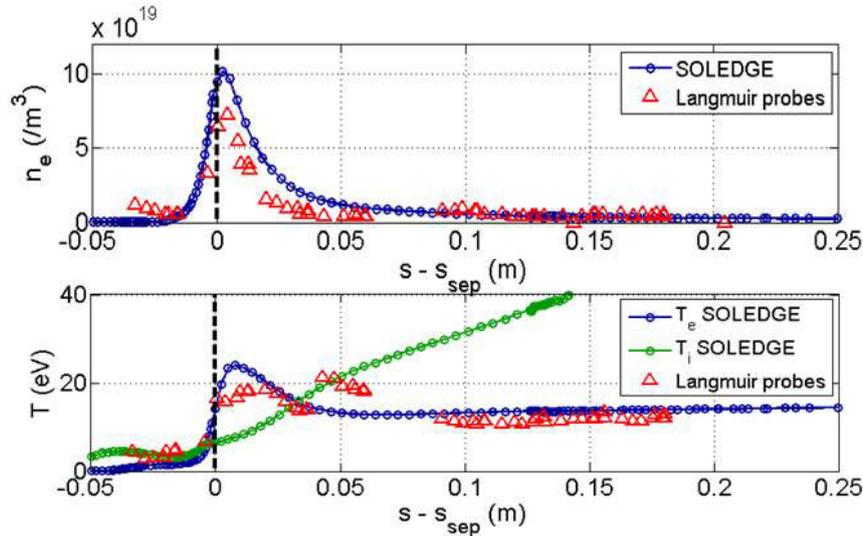


Figure II.17 – Haut : Profil de densité électronique n_e en m^{-3} ; Bas : Profil de température $T_{e,i}$ en eV.

La figure Fig.(II.18) présente quant à elle une comparaison entre les mesures infrarouges (IR) des flux de chaleur sur les plaques du divertor et le profil numérique. Encore une fois, un bon accord entre la simulation et la mesure est observé avec une légère différence d'amplitude pouvant également être liée aux vitesses de dérives.

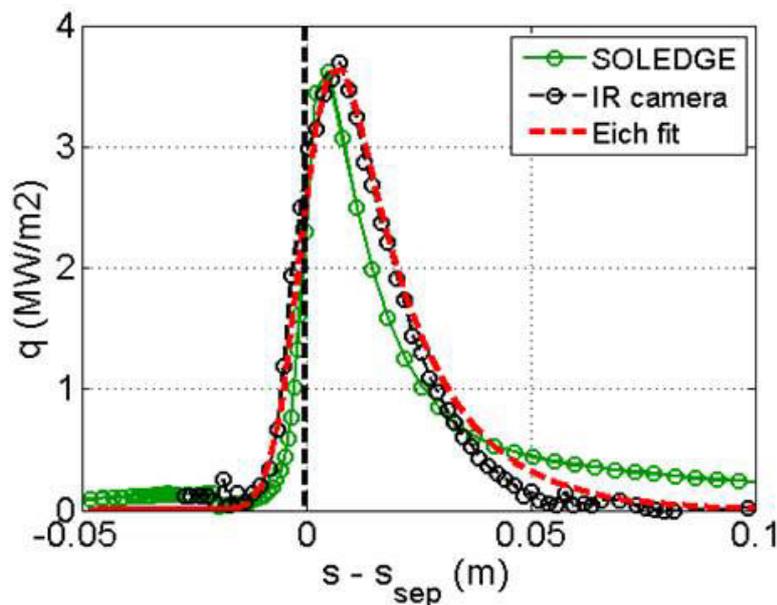


Figure II.18 – Profil du flux de chaleur impactant le divertor d'ASDEX-Upgrade mesuré par caméra infrarouge (IR) et profil de SOLEDGE2D-EIRENE.

Cela souligne l'importance dans le cadre du développement de l'outil numérique SOLEDGE2D-EIRENE d'implémenter de façon auto-consistante le potentiel électrique. Le code SOLEDGE2D-EIRENE est déjà employé afin de prédire les flux de chaleur impactant les divertors des tokamaks et notamment le divertor de WEST [15]. L'ajout des vitesses de dérive permettrait de valider le code sur différentes expériences (limiteur et divertor) et de prendre en compte leurs effets dans les prédictions lorsque ces dernières sont importantes.

Chapitre III

Etude numérique 2D de l'effet des vitesses de dérive fluides avec le code SOLEDGE2D-DRIFT

Une partie de ce travail de thèse consiste à comprendre l'effet des vitesses de dérive fluides sur l'équilibre des plasmas de tokamak et plus particulièrement de leur effet sur les asymétries poloidales expérimentalement observées. Après avoir présenté les résultats obtenus à partir d'un champ électrique idéal prescrit, nous nous intéressons à la modélisation auto-consistante du champ électrique, à l'établissement de son équilibre et à l'effet des vitesses de dérive fluides résultantes dans différents cas. Une première comparaison entre des simulations fluides et un résultat expérimental est également présentée.

III. 1 Validation du modèle de dérive fluide : Etudes de l'effet d'un champ électrique radial imposé

Nous commençons ici par présenter les résultats obtenus à l'ajout des termes de dérive électrique poloidale dans les différentes équations du modèle SOLEDGE-2D en imposant un profil de champ électrique radial [44]. Ce travail a fait l'objet d'une publication et d'un poster à la conférence Plasma Surface Interaction 2014 [16].

III. 1. 1 Effet de la vitesse de dérive électrique dans la SOL

III. 1. 1. 1 Equilibre parallèle 1D

Dans cette section, nous présentons une analyse simplifiée des équations de dérive fluide du modèle SOLEDGE2D-DRIFT afin d'en extraire des solutions analytiques et de prévoir les comportements du code en présence d'un champ électrique fixé. Cette analyse s'inspire de l'analyse 1D développé dans [45] et permet de mettre en avant l'asymétrie de la SOL provoquée par un écoulement poloidal de dérive. Considérons le système d'équation isotherme de SOLEDGE2D pour un champ électrique radial prescrit soit :

$$\begin{aligned} B\mathcal{G}\frac{\partial(nu_{\parallel}/B)}{\partial\theta} &= S_n - \frac{1}{J}\frac{\partial(Jnu_E^{\theta})}{\partial\theta} \\ \mathcal{G}\left(B\frac{\partial(nu_{\parallel}^2/B)}{\partial\theta} + c_s^2\frac{\partial n}{\partial\theta}\right) &= -\frac{\partial(nu_{\parallel}u_E^{\theta})}{\partial\theta} \end{aligned} \tag{III.1}$$

On considère ici une viscosité perpendiculaire ν_{\perp} nulle et un terme source dans la SOL lié à la diffusion perpendiculaire des particules $S_n = \vec{\nabla}_{\perp} \cdot (D_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} n)$. Le jacobien J et le terme \mathcal{G} qui est un terme de métrique sont calculés en Annexe **B**. On considère une géométrie slab soit $B = cste$, $\mathcal{G} = cste$ et $J = cste$. On définit ici le nombre de Mach parallèle $M_{\parallel} = \frac{u_{\parallel}}{c_s}$ et le nombre de Mach de dérive $M_E = \frac{u_E^{\theta}}{\mathcal{G}c_s}$. Le système d'équation Eq.(III.1) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(nM_{\parallel})}{\partial\theta} &= \frac{S_n}{c_s\mathcal{G}} - \frac{\partial(nM_E)}{\partial\theta} \\ \frac{\partial(n(M_{\parallel}^2 + 1))}{\partial\theta} &= -\frac{\partial(nM_{\parallel}M_E)}{\partial\theta} \end{aligned} \quad (III.2)$$

On définit la coordonnée parallèle le long d'une ligne de champ dans la SOL comme $s = \frac{1}{2\pi\langle S_n \rangle} \int_0^{\theta} S_n d\theta$. On intègre la deuxième équation du système Eq.(III.2) à partir du point de stagnation (défini par $M_{\theta}(s = s_0) = M_{\parallel} + M_E = 0$ et $n(s_0) = n_0$) ce qui conduit à :

$$\boxed{n = \frac{n_0}{M_{\parallel}^2 + M_{\parallel}M_E^{\theta} + 1}} \quad (III.3)$$

La condition de Bohm-Chodura Eq.(II.50) à l'entrée de la gaine est donnée par :

$$\begin{aligned} M_{\theta}(s = 0) = -1 &= M_{\parallel} + M_E^{\theta}; n(0) = n_- \\ M_{\theta}(s = 1) = 1 &= M_{\parallel} + M_E^{\theta}; n(1) = n_+ \end{aligned} \quad (III.4)$$

Ces expressions sont intégrées dans Eq.(III.3) ce qui conduit à :

$$n_0 = n_+(2 - M_E^{\theta}) = n_-(2 + M_E^{\theta}) \quad (III.5)$$

On intègre maintenant la première équation du système Eq.(III.2) entre 0 et 2π .

$$n_+ + n_- = \frac{2\pi\langle S_n \rangle}{c_s\mathcal{G}} \quad (III.6)$$

Ce qui donne, en injectant Eq.(III.5), la relation :

$$n_0 = \frac{4 - M_E^{\theta 2}}{4} \frac{2\pi\langle S_n \rangle}{c_s\mathcal{G}} \quad (III.7)$$

En intégrant maintenant la première équation du système Eq.(III.2) entre 0 et le point de stagnation s_0 , on obtient :

$$n_- = \frac{n_0}{2 + M_E^{\theta}} = \frac{2\pi\langle S_n \rangle}{c_s\mathcal{G}} s_0 \implies s_0 = \frac{2 - M_E^{\theta}}{4} \quad (III.8)$$

On observe une dépendance de la position du point de stagnation au Mach de dérive poloidale. De plus, la valeur de la densité à l'entrée de la gaine de chaque côté du limiteur dépend elle aussi de ce nombre de Mach de dérive. Cela aura pour effet d'asymétriser le plasma le long des lignes de champ ouvertes. Finalement, on intègre la première équation de Eq.(III.2) entre le point de stagnation et θ et on obtient :

$$n(M_{\parallel} + M_E^{\theta}) = \frac{2\pi\langle S_n \rangle}{c_s\mathcal{G}} (s - s_0) \quad (III.9)$$

ce qui donne une équation du second ordre sur M_{\parallel} :

$$\boxed{\frac{M_{\parallel} + M_E^{\theta}}{M_{\parallel}^2 + M_{\parallel}M_E^{\theta} + 1} = \frac{4}{4 - M_E^{\theta 2}} \left(s - \frac{2 - M_E^{\theta}}{4} \right)} \quad (\text{III.10})$$

On trace les profils le long des lignes de champ pour un nombre de Mach de dérive fixé q'on compare à la solution pour un nombre de Mach de dérive nul. Comme l'on pouvait s'y attendre,

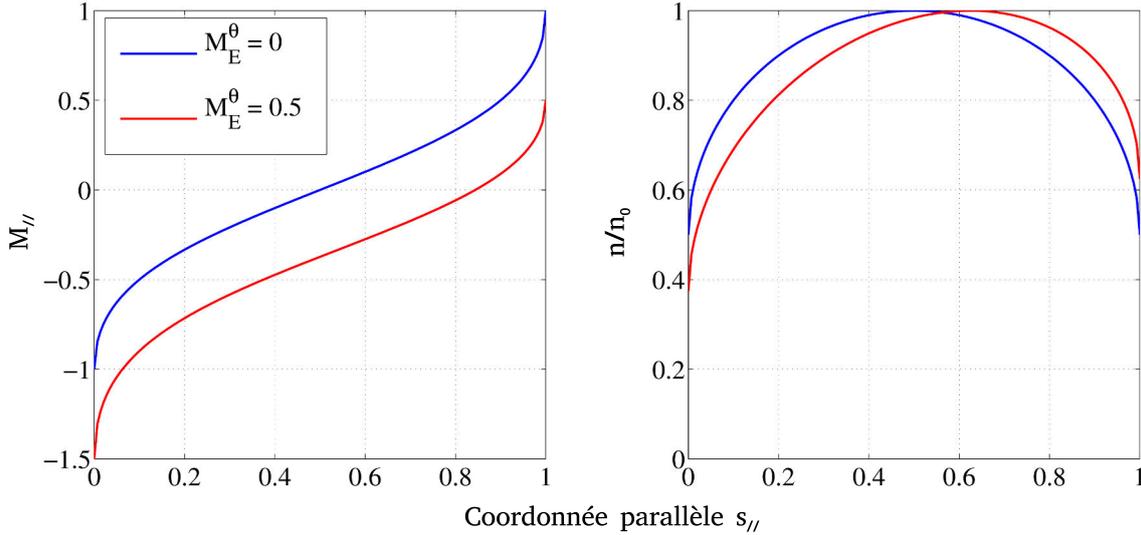


Figure III.1 – Profil de nombre de Mach parallèle le long d'une ligne de champ dans la SOL (gauche) et profil de densité normalisée à la valeur au point de stagnation le long d'une ligne de champ (droite).

la condition de Bohm-Chodura a pour effet d'asymétriser le plasma de chaque côté du limiteur (Fig. (III.1)). De plus on voit très nettement le déplacement du point de stagnation et du maximum de densité sur le profil. L'advection du plasma par la vitesse de dérive poloidale responsable des asymétries est donc bien visible sur ces profils. Un autre effet qui est à prendre en compte est la possible apparition d'écoulements supersoniques liés à l'effet de la vitesse de dérive. En effet, la condition de Bohm-Chodura s'appliquant aux écoulements perpendiculaires au mur, un écoulement de dérive poloidale peut avoir un effet important sur la dynamique parallèle de la SOL. C'est à partir de ces solutions analytiques que nous ferons une première validation de nos simulations obtenues pour un champ électrique radial imposé.

III. 1. 1. 2 Validation numérique : simulation en géométrie SLAB isotherme

Dans cette section, nous réalisons une simulation dans les mêmes conditions plasmas que celles utilisées pour obtenir les solutions analytiques précédentes soit :

- viscosité nulle, $D_{\perp} = 1m^2.s^{-1}$.
- simulation isotherme $T_i = T_e = T_0$ en géométrie SLAB (tous les coefficients de métrique ainsi que le champ magnétique sont constants).
- limiteur infiniment fin (cf figure Fig.(III.2)).

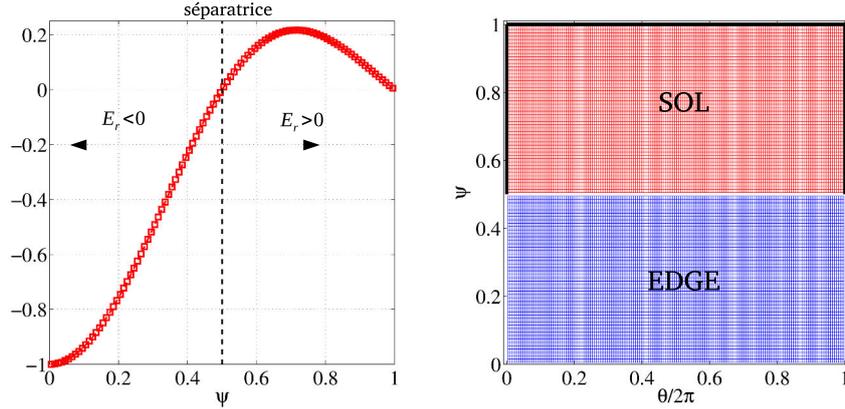


Figure III.2 – Profil radial de champ électrique radial en sinus cardinal (gauche) et maillage cartésien utilisé (les traits noirs représentent la paroi ainsi que les côtés du limiteur).

On choisit de prescrire un profil de champ électrique radial en sinus cardinal Fig.(III.2) ($E_r = -E_0 \frac{\sin(2\pi\psi)}{2\pi\psi}$ avec $\psi = \frac{r-r_{min}}{\Delta r}$) afin de reproduire un écoulement poloidal cisailé autour de la séparatrice et d'avoir une différence d'amplitude entre le plasma confiné et la SOL similaire à l'expérience [46]. Le champ magnétique étant constant, la vitesse de dérive résultante est homogène dans la direction poloidale.

Nous présentons maintenant les cartes 2D résultantes des simulations avec vitesses de dérive poloidales et sans (Fig. (III.3)). Comme l'on pouvait s'y attendre, la présence d'un champ électrique radial tend à asymétriser le plasma dans la SOL. Cela se traduit par un déplacement du point de stagnation ainsi que de la position du maximum de densité. On constate de plus l'apparition d'écoulement supersonique près du limiteur. La position du point de stagnation suit le profil en sinus cardinal du champ électrique prescrit dans la SOL.

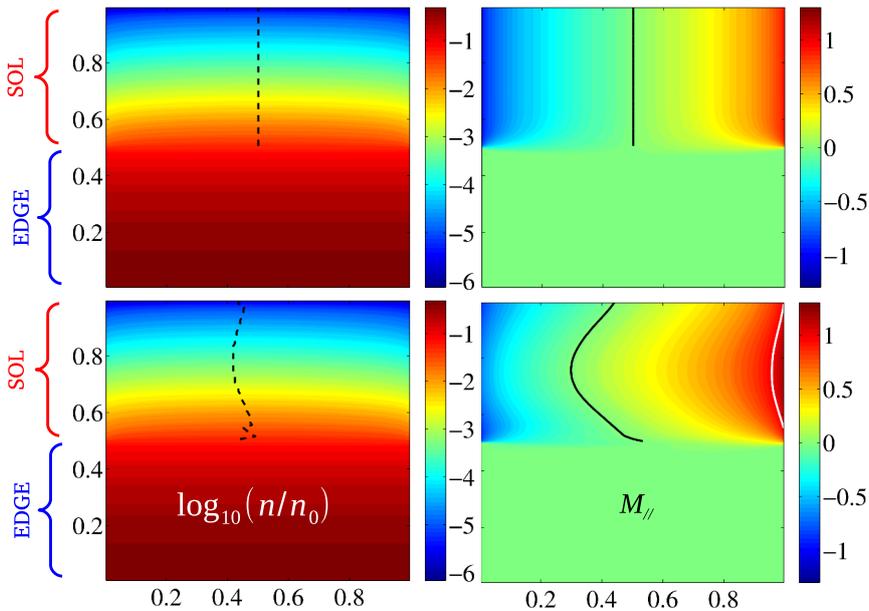


Figure III.3 – Cartes 2D de densité en logarithme (gauche) et de nombres de Mach parallèle (droite) ; En haut la vitesse de dérive est désactivée et en bas elle est activée. La courbe pointillée noire correspond au maximum de densité le long d'une ligne de champ, la courbe pleine noire correspond à $M_{\parallel} = 0$ et la courbe pleine blanche à $|M_{\parallel}| = 1$

Nous allons maintenant comparer la solution analytique obtenue en section (III. 1. 1. 1) avec les profils parallèles en sorties de simulations. La figure Fig.(III.4) donne les profils de densité et de nombre de Mach parallèle le long d'une ligne de champ au milieu de la SOL (correspondant au maximum de champ électrique radial). On constate un excellent accord entre la solution analytique et la solution numérique. La position du point de stagnation est identique dans les deux cas ainsi que les valeurs limites de densité et de nombre de Mach à l'entrée de la gaine.

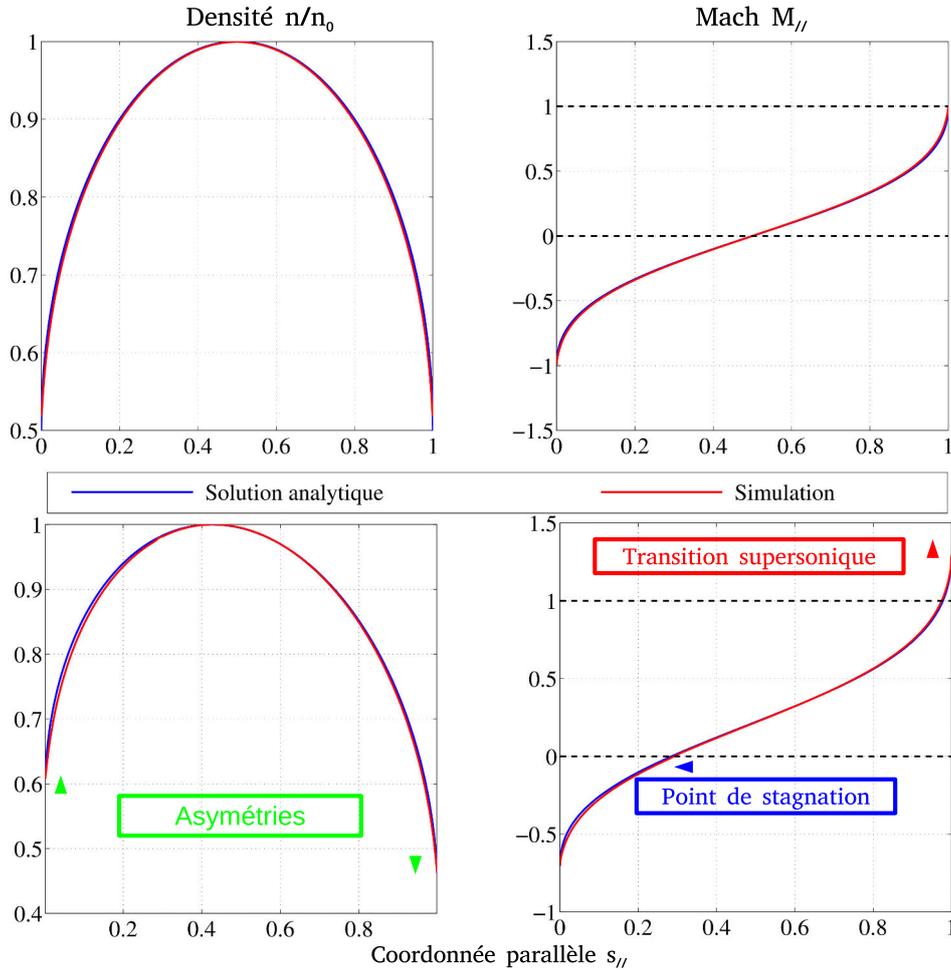


Figure III.4 – Profils parallèles de densité (gauche) et de nombre de Mach (droite) le long d'une ligne de champ dans la SOL ($\psi = 0.75$). La vitesse de dérive poloidale est activée en bas et désactivée en haut et on compare sur chaque figure le profil analytique au profil numérique.

La valeur du nombre de Mach de dérive est ici $M_E = -0.2951$ et on voit nettement le déplacement du plasma dans le sens de la vitesse de dérive poloidale ainsi que l'asymétrisation des valeurs de la densité de chaque côté du limiteur.

Nous avons cependant constaté que l'ajout d'un écoulement poloidal n'a aucun effet dans la zone des lignes de champ fermées (EDGE). Cela vient simplement du fait qu'en considérant une viscosité nulle, on découple totalement la SOL et le bord du plasma et ainsi, l'équation sur le moment parallèle moyennée le long des lignes de champ dans le bord aboutit à :

$$\frac{\partial \langle \Gamma_{\parallel} \rangle}{\partial t} = 0 \implies \langle \Gamma_{\parallel} \rangle = \Gamma(t = 0) = 0 \quad (\text{III.11})$$

III. 1. 2 Effet de la vitesse de dérive électrique dans le bord : écoulement de Pfirsch-Schlüter et rotation parallèle

III. 1. 2. 1 Ecoulement de Pfirsch-Schlüter [1]

Comme cela a été expliqué en section (I. 2. 2), la vitesse de dérive électrique ne génère pas de courant électrique. Inversement, la vitesse de gradient courbure, en raison de sa dépendance à la charge des particules, est de signe opposé pour les ions et les électrons et est ainsi à l'origine de courant dans le plasma de bord. Ces courants liés à la partie à divergence non-nulle de la vitesse diamagnétique (correspondant à la vitesse de gradient-courbure) sont responsables de l'établissement de courants parallèles appelés courants de Pfirsch-Schlüter et sont à l'origine d'un flux de particule ionique parallèle appelé écoulement de Pfirsch-Schlüter. Malgré le fait qu'elle ne génère pas de courant, la vitesse de dérive électrique contribue aux écoulements de Pfirsch-Schlüter puisqu'elle est à l'origine d'écoulements poloidaux ioniques dans le plasma. C'est aussi sa partie à divergence non-nulle qui contribuera aux écoulements de Pfirsch-Schlüter (P-S).

Commençons par redéfinir la vitesse perpendiculaire à l'ordre 1 du plasma :

$$\vec{u}_\perp = \left(\vec{E} - \frac{\vec{\nabla}p}{ne} \right) \times \frac{\vec{B}}{B^2} \quad (\text{III.12})$$

On cherche ainsi à évaluer la partie à divergence non-nulle de la composante poloidale de la vitesse de dérive électrique responsable de l'établissement des écoulements de Pfirsch-Schlüter. En considérant la partie poloidale de l'opérateur de divergence en géométrie torique, on cherche d'abord à extraire la partie à divergence nulle. Sachant qu'une section de tube de flux magnétique est inversement proportionnelle au champ magnétique ($A_\parallel \propto 1/B$) et que le champ magnétique est lui même défini par $B \propto 1/R$, on arrive à :

$$\frac{\partial A_\parallel n u_\perp}{\partial \theta} = \frac{\partial R n u_\perp}{\partial \theta} = 0 \quad (\text{III.13})$$

Pour que cette équation soit vérifiée, il faut avoir $n u_\perp \propto B$. Or, l'équation Eq.(III.12) montre bien une dépendance en $1/B$ de la vitesse perpendiculaire du plasma. On peut définir la partie à divergence nulle ("d - n") du flux perpendiculaire comme :

$$n u_\perp^{d-n} = n u_\perp \left(\frac{B}{B_0} \right)^2 \quad (\text{III.14})$$

En définissant dans le cas de surface magnétique concentrique le champ magnétique $B = B_0 R_0 / R$ et le grand rayon du tore $R = R_0 + r \cos(\theta)$, on en déduit la partie à divergence non-nulle ("d - n - n") du flux perpendiculaire comme :

$$n u_\perp^{d-n-n} = n \left(u_\perp - u_\perp^{d-n} \right) \quad (\text{III.15})$$

soit :

$$u_\perp^{d-n-n} = u_\perp^{d-n} \left(\left(\frac{B_0}{B} \right)^2 - 1 \right) = u_\perp^{d-n} \left(\left(\frac{R}{R_0} \right)^2 - 1 \right) \quad (\text{III.16})$$

Cette expression conduit à :

$$u_\perp^{d-n-n} = \left(\frac{2r}{R_0} \cos(\theta) + \frac{r^2}{R_0^2} \cos^2(\theta) \right) u_\perp^{d-n} \quad (\text{III.17})$$

On cherche ici à évaluer les écoulements de Pfirsch-Schlüter en considérant qu'il s'agit d'une réponse du plasma à un écoulement de dérive poloidale. En assumant qu'il n'y a aucune source liée à la présence de neutre ou à de la diffusion perpendiculaire, la seule composante parallèle des écoulements apparaissant sera celle servant à contrebalancer l'effet des vitesses de dérive et en projetant les vitesses précédentes dans la direction poloidale, on aboutit à l'équation :

$$\begin{aligned}
 nu_{\perp}^{d-n-n} \frac{B_{tor}}{B} &= -nu_{\parallel} \frac{B_{\theta}}{B} \\
 u_{\parallel} &= -u_{\perp}^{d-n-n} \frac{B_{tor}}{B_{\theta}} \\
 &= - \left(\frac{2r}{R_0} \cos(\theta) + \frac{r^2}{R_0^2} \cos(\theta)^2 \right) \frac{B_{tor}}{B_{\theta}} u_{\perp}^{d-n} \\
 &= \left(\frac{2r}{R_0} \cos(\theta) + \frac{r^2}{R_0^2} \cos(\theta)^2 \right) \frac{B_{tor}}{B_{\theta}} \left(E_r - \frac{\nabla_r p}{ne} \right) \frac{B_{tor}}{B_0^2}
 \end{aligned} \tag{III.18}$$

On a accès à la vitesse de Pfirsch-Schlüter définie comme la vitesse apparaissant pour compenser l'effet de la contribution des vitesses de dérive perpendiculaire dans la direction parallèle soit :

$$v_{P-S} = \frac{B_{tor}}{B_{\theta}} \left(\frac{2r}{R_0} \cos(\theta) + \frac{r^2}{R_0^2} \cos(\theta)^2 \right) \left(E_r - \frac{\nabla_r p}{ne} \right) \frac{B_{tor}}{B_0^2} \tag{III.19}$$

On rappelle ici que l'on se place dans l'hypothèse de faible variation de densité et de potentiel le long des lignes de champ (valable dans les lignes de champ fermées). On constate que l'amplitude des écoulements de Pfirsch-Schlüter sera plus importante côté fort champ que faible champ (dépendance en B). La dépendance en cosinus montre que ces écoulements seront de signe opposé entre les côtés fort champ et faible champ et qu'ils s'annuleront en haut et en bas de la machine. Les écoulements résultants seront dirigés vers le haut ou le bas de la machine suivant le signe du champ électrique et du gradient de pression par analogie au courant de Pfirsch-Schlüter résultant de la séparation de charge haut/bas dans le plasma de bord.

III. 1. 2. 2 Etude numérique : simulation en présence d'un champ électrique prescrit d'un plasma isotherme dans un champ magnétique inhomogène

Dans cette section, nous présentons des simulations isothermes obtenues avec un équilibre magnétique réaliste en présence ou non d'un champ électrique radial. On se place dans une géométrie circulaire avec un limiteur infiniment fin situé en bas de la machine et toujours avec un champ électrique radial ayant un profil en sinus cardinal (Fig.(III.5)).

Les paramètres de la simulation sont les suivants :

- Coefficient de diffusion $D^{\psi} = \nu^{\psi} = 1m^2.s^{-1}$
- isotherme, $T_i = T_e = T_0 = 200eV$, flux de particule en provenance du coeur $\Gamma_{\perp} = 10^{20}m^{-2}.s^{-1}$
- Equilibre magnétique circulaire concentrique : $B_{tor} = \frac{B_{tor,0}R_0}{R}$, $B_{pol} = \frac{B_{tor,0}a^2}{q_{ref}rR}$, $R = R_0 + r\cos(\theta + \theta_{lim})$

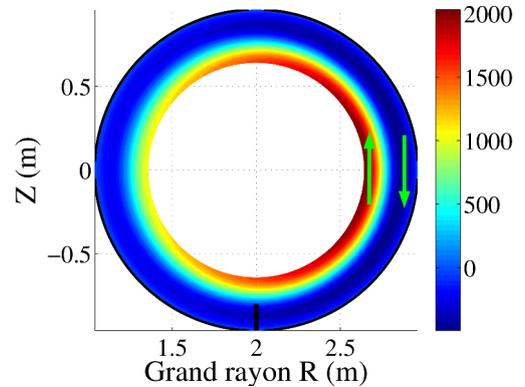


Figure III.5 – Carte 2D de la vitesse de dérive poloidale $\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$ en $m.s^{-1}$; les flèches vertes correspondent au sens de rotation de la vitesse poloidale.

- Géométrie : grand rayon $R_0 = 2m$, petit rayon $a = 0.8m$, position du limiteur $\theta_{lim} = -\pi/2$
- Champ électrique de référence : $E_0 = 8kV.m^{-1}$

La dépendance de la vitesse de dérive poloidale à l'inverse du champ magnétique est bien visible (Fig.(III.5)) et c'est cette dépendance qui est à l'origine de la contribution de la dérive électrique aux écoulements de Pfirsch-Schlüter (partie à divergence non-nulle, section (III. 1. 2. 1)). Nous sommes ici dans un cas sans vitesse de gradient-courbure. Par conséquent, seule la contribution de la dérive électrique dans la vitesse de Pfirsch-Schlüter est étudiée ici.

La figure Fig.(III.6) présente les cartes 2D de la quantité de mouvement parallèle en présence ou non d'un écoulement de dérive poloidale. On constate que pour cette simulation, l'effet dans la SOL (mouvement du point de stagnation, asymétrie poloidale,...) semble minimisé (flèches noires, Fig.(III.6)). Cela vient du fait que l'on considère ici un écoulement de dérive faible dans la SOL ($v_{ExB}^\theta \sim 500m.s^{-1}$). Cependant ce qui nous intéresse étant l'effet dans le plasma de bord, on ne sera pas obligé d'augmenter l'amplitude du champ électrique dans cette section. On constate dans un premier temps que l'ajout d'un écoulement poloidal dans la simulation est à l'origine d'importantes modifications du moment parallèle dans le bord. En effet, on constate la mise en place d'un flux de particules parallèle tournant dans le sens horaire (flèches rouge en figure Fig.(III.6)), sens opposé à la vitesse de dérive électrique dans le bord (Fig.(III.5)). De plus on constate que l'amplitude de cette rotation est plus importante côté faible champ ce qui laisse présager une dépendance de cette rotation en $1/B$. Pour l'instant rien de nous

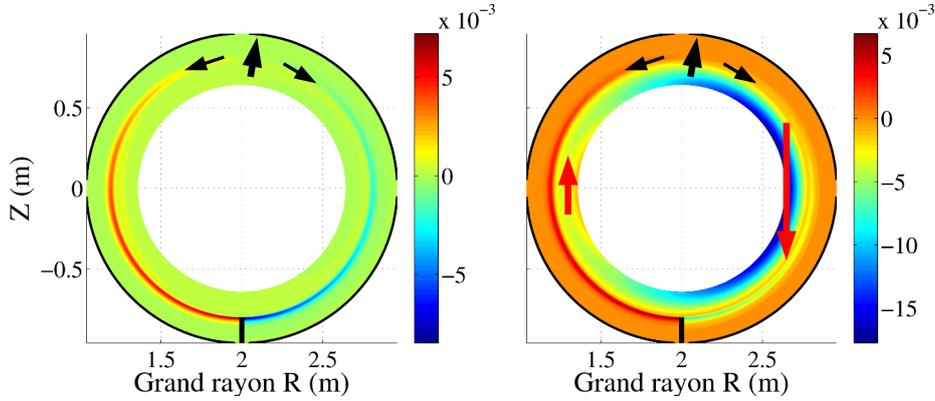


Figure III.6 – Flux parallèle de particule $\Gamma_{||}$ sans vitesse de dérive (gauche) et avec (droite). Les flèches noires représentent les flux de particules dans la SOL; les flèches rouge les flux de particules dans le bord. Les traits noirs représentent toujours les parois du tokamak ainsi que le limiteur (situé en bas).

ramène à la définition des écoulements de Pfirsch-Schlüter et à leur dépendance en $\cos(\theta)$. Afin de mieux comprendre les effets de l'ajout de la vitesse de dérive sur l'équilibre du plasma, nous rappelons les équations avec métrique de l'équilibre isotherme en présence d'un écoulement de dérive poloidale dans SOLEDGE2D-DRIFT :

$$\begin{aligned}
 B\mathcal{G}\frac{\partial(nu_{||}/B)}{\partial\theta} &= \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(JD^\psi h^\psi\frac{\partial n}{\partial\psi}\right) - \frac{1}{J}\frac{\partial(Jnu_E^\theta)}{\partial\theta} \\
 \mathcal{G}\left(B\frac{\partial(nu_{||}^2/B)}{\partial\theta} + c_s^2\frac{\partial n}{\partial\theta}\right) &= \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(J\nu^\psi h^\psi\frac{\partial\Gamma_{||}}{\partial\psi}\right) - \frac{1}{J}\frac{\partial(Jnu_{||}u_E^\theta)}{\partial\theta}
 \end{aligned} \tag{III.20}$$

Nous commençons par intégrer la première équation du système Eq.(III.20) entre la position du limiteur ($\theta = 0$) et θ . On se place ici dans le cas de surface magnétique circulaire concentrique et ainsi, le jacobien pour ce système de coordonnées toriques est $J = rR\Delta r$. Le terme de métrique \mathcal{G} est quant à lui un terme de projection de la coordonnée parallèle sur la coordonnée θ et son calcul (donné en Annexe (B)) donne $\mathcal{G} = rB_{pol}/B$. En raison des définitions de l'équilibre magnétique considéré ici, ce terme est indépendant de θ . On rappelle la norme du champ magnétique $B = \sqrt{B_{pol}^2 + B_{tor}^2} = B_0(\psi)R_0/R(\psi, \theta)$ et en injectant ces expressions dans la première équation du système Eq.(III.20), on aboutit à :

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\Gamma_{\parallel,0}(\psi)R_0}{R} + \frac{1}{RG} \int_0^{\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(rRD^{\psi}h^{\psi} \frac{\partial n}{\partial \psi} \right) d\theta - \frac{(nu_E^{\theta}R - n_0u_{E,0}^{\theta}R_0)}{RG} \quad (\text{III.21})$$

Afin de comprendre dans quelle mesure la vitesse de dérive peut être source d'une rotation parallèle [9], nous recalculons les différents termes composant la solution présentée en équation Eq.(III.21) (Fig.(III.7)). On identifie ainsi les trois composantes :

- la composante à l'origine de la rotation parallèle n'est autre que le premier terme : sa dépendance en $1/R$ en fait un terme lié à la compressibilité des lignes de champ magnétique ce qui explique son amplitude plus importante côté fort champ.
- la composante à l'origine des écoulements de Pfirsch-Schlüter est bien directement liée au terme de dérive : on retrouve la dépendance au champ magnétique ainsi que celle en $\cos(\theta)$.
- enfin la dernière composante est celle liée à la présence du limiteur et par conséquent ne sera pas étudiée ici vu que l'on s'intéresse à l'effet de la vitesse de dérive dans les lignes de champ fermées.

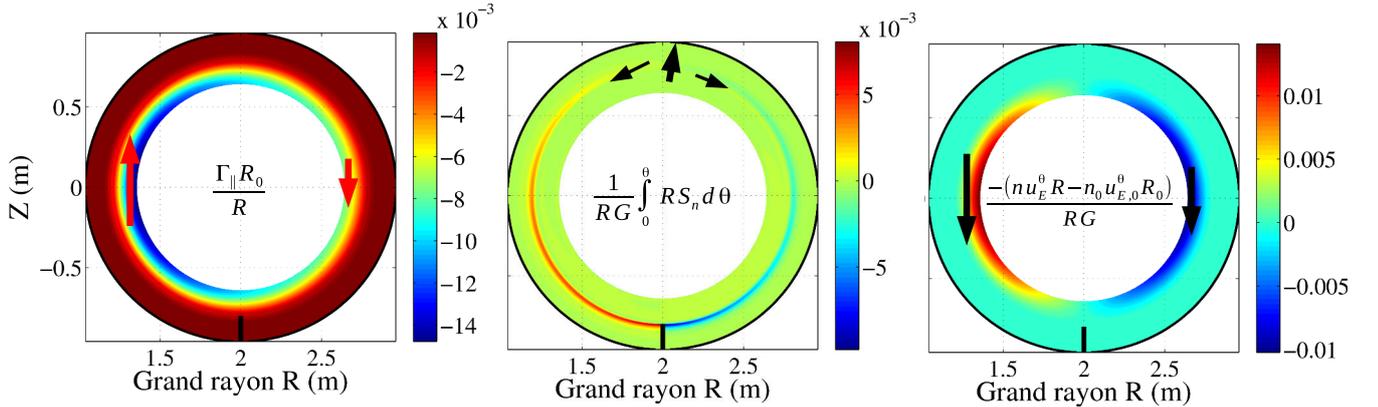


Figure III.7 – Composante du flux parallèle de particule Γ_{\parallel} avec vitesse de dérive ; les flèches représentent la direction des flux de particules.

On a donc pu identifier chaque contribution du flux parallèle de particule à l'équilibre. Cependant, il reste encore à expliquer la dépendance du terme de rotation parallèle à la présence de dérive poloidale. On va donc maintenant moyenné la deuxième équation du système Eq.(III.20) ce qui aboutit à l'équilibre radial suivant :

$$\frac{\mathcal{G}c_s^2}{\nu^{\psi}h^{\psi}} \left\langle R \frac{\partial n}{\partial \theta} \right\rangle_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \psi} \left\langle rR \frac{\partial \Gamma_{\parallel}}{\partial \psi} \right\rangle_{\theta} = \langle \Delta_r \Gamma_{\parallel} \rangle_{\theta} \quad (\text{III.22})$$

L'équation Eq.(III.22) montre une dépendance du profil radial du moment parallèle à la variation poloidale de la densité et au coefficient de viscosité. On trace le long d'une surface magnétique dans le bord ($r = 0.72m$) le profil du gradient poloidal de densité (Fig.(III.8.(a))) dans les cas avec et sans vitesse de dérive poloidale ainsi que les profils radiaux du moment parallèle en différentes positions poloidales (Fig.(III.8.(b))). Ainsi comme l'on pouvait s'y at-

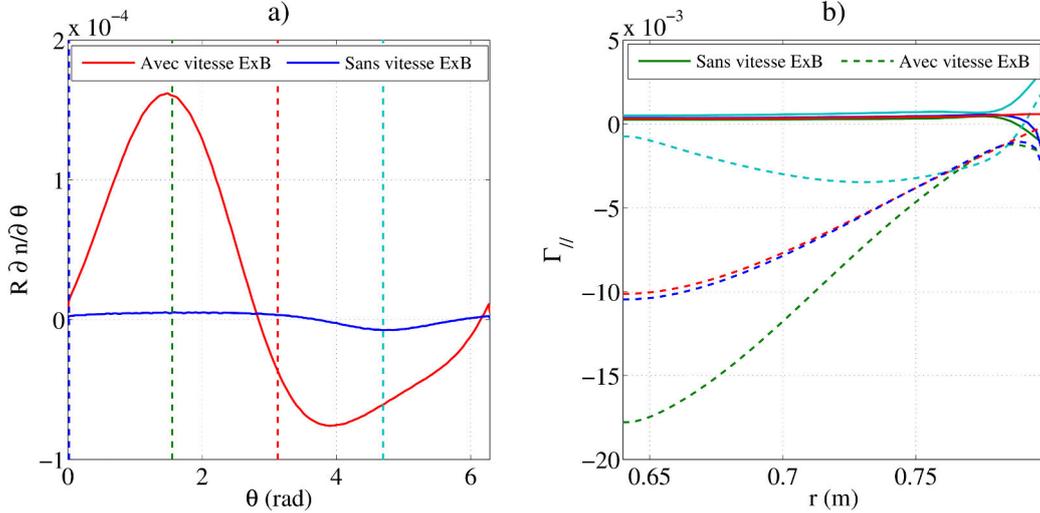


Figure III.8 – **a)** : Profil poloidal du gradient poloidal de densité avec et sans vitesse de dérive, les traits pointillés représentent les positions poloidales des tracés de la figure **b)**; **b)** : Profils radiaux du moment parallèle en plusieurs positions poloidales avec (trait pointillé) et sans (trait plein) vitesse de dérive.

tendre, les écoulements de Pfirsch-Schlüter dans le bord ont pour effet d'asymétriser le plasma en déplaçant les ions vers le bas de la machine. En modifiant le profil d'équilibre de la densité, cela engendre des écoulements parallèles tendant à s'opposer à cet effet. En modifiant ainsi l'équilibre radial du moment parallèle, une rotation parallèle du plasma de bord se met en place.

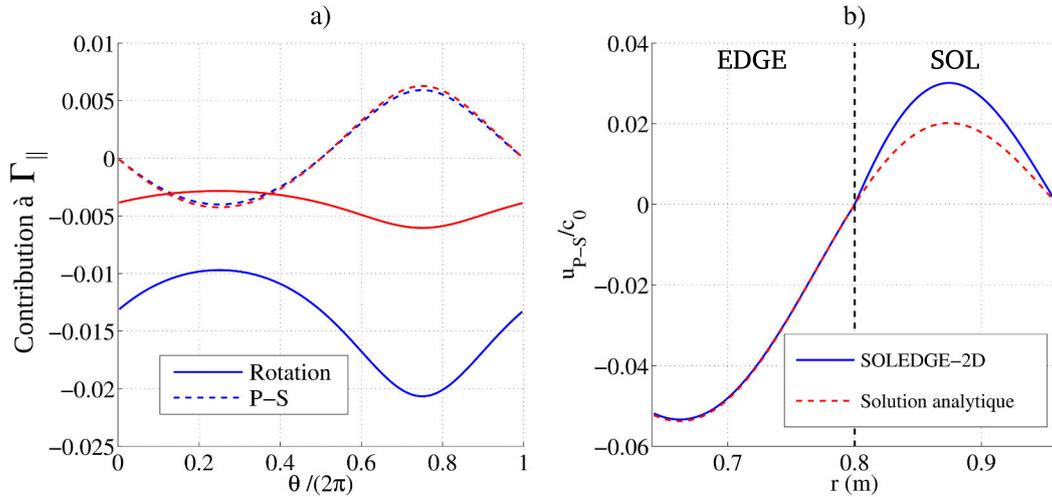


Figure III.9 – **a)** : Profils poloidaux des contributions de Pfirsch-Schlüter (P-S) et de la rotation parallèle à la quantité de mouvement parallèle $\Gamma_{||}$ pour une viscosité de $\nu^\psi = 0.02m^2.s^{-1}$ (bleu) et de $\nu^\psi = 2m^2.s^{-1}$ (rouge); **b)** : Profils radiaux de la vitesse de Pfirsch-Schlüter en $\theta = 0$ (LFS) analytique (rouge) et numérique (bleu).

La figure Fig.(III.9.(a)) montre qu'une augmentation du coefficient de viscosité tend à augmenter le couplage entre les écoulements de la SOL et le bord. Cela a pour effet de réduire la rotation parallèle engendrée par le gradient de densité. Inversement, une diminution du coefficient de viscosité (plus réaliste car très faible expérimentalement) tendra à augmenter la rotation parallèle en diminuant le couplage entre la SOL et le bord et en augmentant le couplage entre les asymétries poloidales de densité résultantes des écoulements de Pfirsch-Schlüter et le profil radial de moment parallèle (dépendance en $1/\nu^\psi$). On note de plus que le coefficient de viscosité n'a pas d'effet sur l'amplitude des écoulements de Pfirsch-Schlüter. La figure Fig.(III.9.(b)) montre une comparaison entre le profil de la vitesse de Pfirsch-Schlüter normalisée à la vitesse de référence ($c_0 = \sqrt{k_B T_0 / m_i}$) calculée via Eq.(III.21) et l'expression analytique obtenu précédemment (Eq.(III.19)). On constate un très bon accord dans le bord du plasma (EDGE) et une divergence des solutions dans la SOL. Cela vient du fait que plusieurs hypothèses faites lors du calcul de la solution analytique (densité constante le long des lignes de champ par exemple) ne s'applique pas dans cette zone en raison de la présence du limiteur.

III. 1. 3 Effet sur les flux de chaleurs impactant le limiteur : asymétrie du flux de chaleur dans la SOL

Plusieurs expériences [47] et simulations [5] ont montré l'existence d'un lien potentiel entre les asymétries sur les plaques des divertors des machines de fusion et l'amplitude de la vitesse de dérive poloidale et donc du champ électrique. En s'appuyant sur les résultats numériques présentés dans [48], on effectue plusieurs simulations en modifiant l'amplitude du champ électrique maximum dans la SOL (noté dans cette section E_0). On se place ici dans le cas d'une géométrie circulaire avec limiteur infiniment fin en bas de la machine et nous allons chercher à mesurer l'effet du champ électrique radial imposé sur le flux de chaleur parallèle total (Eq.(III.23)) impactant les côtés du limiteur de notre simulation :

$$\begin{aligned} q_{\parallel, tot} &= q_{\parallel, e} + q_{\parallel, i} \\ &= \frac{5}{2} k_B T_e \Gamma_{\parallel} - \kappa_{\parallel, e}^0 T_e^{5/2} \nabla_{\parallel} T_e + \frac{5}{2} k_B T_i \Gamma_{\parallel} + \frac{1}{2} m_i u_{\parallel}^2 \Gamma_{\parallel} \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

où $\kappa_{\parallel, e}^0 = \kappa_{\parallel, e}^0 T_e^{5/2}$ est la conductivité thermique parallèle des électrons.

Même si l'étude des flux de chaleur dans [48] a été réalisée en géométrie divertor, on s'attend tout de même à retrouver ces asymétries de flux de chaleur en géométrie limiteur. On change ici les paramètres de nos simulations précédentes :

- Coefficient de diffusion $D^\psi = \nu^\psi = \chi_i = \chi_e = 1 m^2 . s^{-1}$
- non-isotherme, température au coeur $T_0 = 200 eV$, flux de particule en provenance du coeur $\Gamma_{\perp} = 10^{20} m^{-2} . s^{-1}$
- Equilibre magnétique circulaire concentrique et géométrie circulaire avec grand rayon $R_0 = 2m$, petit rayon $a = 0.8m$ et position du limiteur $\theta_{lim} = -\pi/2$.
- Champ électrique en sinus cardinal avec plusieurs amplitudes dans la SOL allant de $E_0 = -15 kV . m^{-1}$ à $15 kV . m^{-1}$.

Nous commençons par étudier les profils de densité et de nombre de Mach dans la SOL (Fig.(III.10)). Les effets du champ électrique imposé précédemment étudiés sont tous retrouvés. On retrouve bien la dépendance entre la position du point de stagnation, la valeur maximale

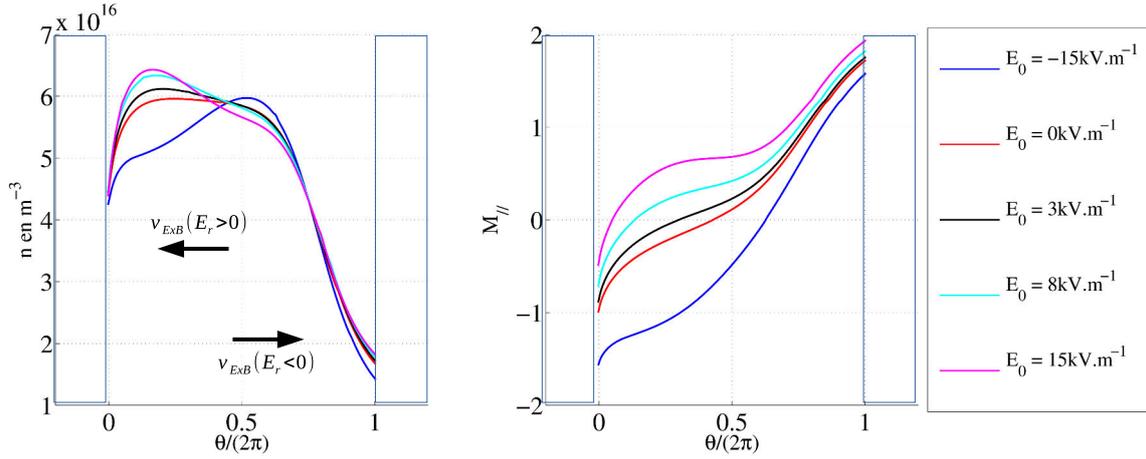


Figure III.10 – Profils poloidaux de densité (droite) et de nombre de Mach parallèle (gauche) au milieu de la SOL (maximum de E_r) pour différentes valeurs max de champ électrique radial. Le point de stagnation ($M_{\parallel} = 0$) et le maximum de densité se déplace dans le sens de la vitesse de dérive imposée.

et les valeurs sur les plaques de la densité et la valeur du nombre de Mach de dérive électrique. L'advection du plasma permet l'apparition d'une transition supersonique en $\theta = 0$ lorsque le nombre de Mach de dérive est positif et la mise en place d'un écoulement subsonique lorsqu'il est négatif. De l'autre côté, la transition supersonique est liée à l'inhomogénéité du champ magnétique ([40]) et la présence d'un écoulement poloidal imposé peut s'opposer ou amplifier cette transition. Ainsi, puisque le champ électrique radial change l'amplitude des écoulements vers le mur et les valeurs de la densité, on peut s'attendre à un effet d'asymétrie aussi sur les flux de chaleurs.

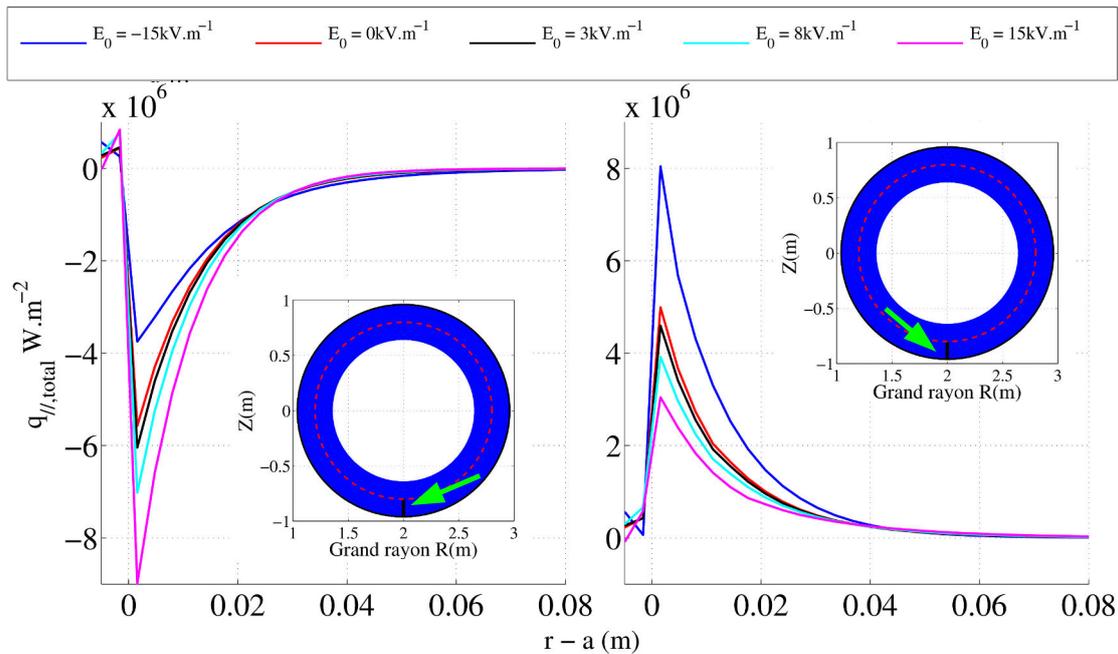


Figure III.11 – Profil de flux de chaleur total sur les côtés du limiteur côté faible champ (LFS, droite) et fort champ (HFS, gauche). On voit bien une dépendance entre l'amplitude du champ électrique radial et l'amplitude du flux de chaleur.

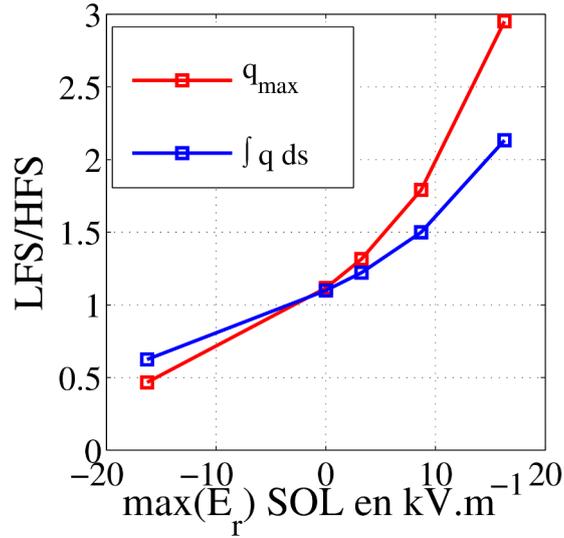


Figure III.12 – *Asymétrie du maximum du flux de chaleur et du dépôt de chaleur ($P = \int q ds_{lim}$) en fonction du champ électrique radial maximum dans la SOL.*

Le tracé des flux de chaleur le long des côtés du limiteur (Fig.(III.11)) montre bien une dépendance entre l'amplitude du champ électrique radial et la valeur maximale du flux de chaleur impactant le mur. On constate une symétrie des flux lorsque le champ électrique est nul (aucun écoulement poloidal de dérive). Si on active le champ électrique radial, on voit bien une augmentation du flux de chaleur d'un côté et une diminution de l'autre. En changeant le signe du champ électrique, on inverse l'asymétrie du dépôt de chaleur sur les côtés du limiteur. Ce résultat est consistant avec l'étude menée sur l'asymétrie des flux de chaleur sur les plaques d'un divertor [48]. En modifiant les écoulements dans la SOL via la condition limite de Bohm-Chodura sur les écoulements perpendiculaires au mur, la vitesse de dérive électrique a pour effet d'asymétriser le plasma dans la SOL. Ainsi, elle va modifier la quantité d'énergie convectée le long des lignes de champ ainsi que la quantité diffusée (en modifiant le gradient parallèle de densité et de chaleur) et être ainsi à l'origine de cette asymétrie sur le flux et le dépôt de chaleur impactant le limiteur Fig.(III.12).

III. 2 Etudes de l'effet des vitesses de dérive auto-consistantes en géométrie limiteur

Plusieurs expériences visant à comprendre les contributions à l'origine des écoulements dans le bord des plasmas de Tokamak ont été effectuées ces dernières années ([49] [50] [51] [3]). Elles ont permis d'identifier plusieurs effets des vitesses de dérive tel que l'établissement des écoulements de Pfirsch-Schlüter (mentionné précédemment). De nombreux codes de transport présentent déjà un modèle de résolution auto-consistante du potentiel électrique [52] [53] [54]. Ils ont notamment été utilisés afin de confronter les résultats numériques tels que l'effet des dérives sur les asymétries [5] [55] ou encore sur les écoulements parallèles [56] [9] aux résultats expérimentaux déjà cités.

On s'inspire ici du modèle d'équation de vorticité (section II. 2) implémenté dans le code TOKAM3X [23] afin d'enrichir le modèle physique du code SOLEDGE-2D en vue de comparaison simulation/expérience en géométrie réaliste [12]. Dans un premier temps, nous nous int res-

sons à l'équilibre du potentiel électrique dans un plasma circulaire avec limiteur large. Nous nous plaçons dans les mêmes paramètres géométriques que le tokamak Tore Supra et avec des coefficients de diffusion homogènes mais proche des mesures expérimentales :

- champ magnétique au centre $B_0 = 3.8T$, petit rayon $a = 0.72m$ et grand rayon $R_0 = 2.4m$. On considère une boîte large de $\Delta r = 36cm$.
- coefficients de diffusion : $D_{\perp} = 0.6m^2.s^{-1}$, $\nu_{\perp} = 0.2m^2.s^{-1}$, $\chi_e = \chi_i = 2m^2.s^{-1}$ et $D_W = 0.1m^2.s^{-1}$.
- densité et température de référence à l'interface avec le coeur : $n_0 = 10^{19}m^{-3}$, $T_0 = 200eV$.

Le champ magnétique toroidal est orienté dans la direction sortante au plan de la figure Fig.(III.13) et le champ magnétique poloidal tourne dans le sens horaire. On note sur la figure Fig.(III.13) les deux composantes du champ magnétique. Dans le cas de surfaces de flux circulaires, on obtient des champs magnétiques ayant la forme :

$$\begin{aligned} B_{tor} &= \frac{B_0 R_0}{R} \\ B_{pol} &= \sqrt{B_R^2 + B_Z^2} = \frac{\psi_0}{\Delta r R} \end{aligned} \quad (III.24)$$

où ψ_0 est le flux magnétique poloidal de référence. Dans cet exemple, on place le limiteur en

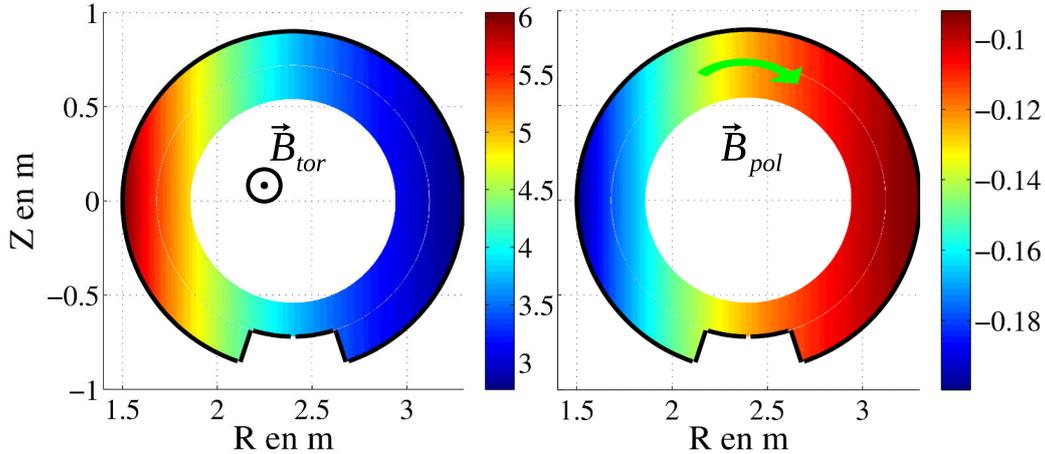


Figure III.13 – Gauche : champ magnétique toroidal (T); Droite : champ magnétique poloidal (T)

bas de la machine et sa position pourra être changée suivant l'étude menée.

III. 2. 1 Effet des vitesses de dérive perpendiculaires : équilibre du champ électrique en géométrie limiteur

L'équilibre du potentiel électrique dans SOLEDGE2D-DRIFT apparaît via l'équation de conservation de la charge donnée dans notre cas par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_p + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}^* + \vec{\nabla} \cdot (j_{\parallel} \vec{b}) = 0 \quad (III.25)$$

Dans ces simulations, on a dans un premier temps négligé le terme de friction et le courant parallèle vaut :

$$j_{\parallel} = \frac{1}{ne\eta_{\parallel}} (\nabla_{\parallel} p_e - ne\nabla_{\parallel} \Phi) \quad (III.26)$$

La divergence du courant diamagnétique est quant à elle liée à la différence entre les vitesses de gradient-courbure des ions (vers le bas) et des électrons (vers le haut) et crée par conséquent un courant orienté vers le bas de la machine.

$$\vec{j}_{\nabla B} = ne \left(\vec{u}_{\nabla B}^i - \vec{u}_{\nabla B}^e \right) \quad (\text{III.27})$$

avec $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}^* = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\nabla B}$.

Enfin, le courant de polarisation à l'équilibre s'exprime lui en fonction de la vorticité $W = \vec{\nabla} \cdot \left(m_i \left(\frac{n \vec{\nabla}_{\perp} \phi}{B^2} + \frac{\vec{\nabla}_{\perp} p_i}{e B^2} \right) \right)$ comme :

$$\vec{j}_p = - \frac{\partial}{\partial t} \left(m_i \left(\frac{n \vec{\nabla}_{\perp} \phi}{B^2} + \frac{\vec{\nabla}_{\perp} p_i}{e B^2} \right) \right) - W \left(u_{\parallel} \vec{b} + \vec{u}_{E \times B} + \vec{u}_{\nabla B}^i \right) + \zeta_{\perp} \vec{\nabla}_{\perp} W \quad (\text{III.28})$$

On commence par réaliser trois simulations en activant successivement les diff erentes d erives. Dans un premier temps, on r esout l' equation de vorticité sans courant diamagn etique et sans r etro-action du potentiel sur le plasma. Dans un second temps, on active le courant diamagn etique dans la conservation du courant ainsi que la r etro-action de la d erive  electrique sur le plasma. Enfin on active le terme de gradient-courbure dans toutes les  equations. Ainsi, on prend en compte dans l' equilibre du plasma le d eplacement vertical opposée pour les ions et les  electrons dans toutes les  equations. Afin de comprendre l' equilibre de cette  equation, on commence par int egrer les diff erentes divergences de l' equation de conservation de la charge ainsi que leur somme le long des surfaces magn etiques. On peut ainsi identifier les termes dominant l' equilibre et v erifier la conservation de la charge $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$. La figure Fig.(III.14) nous permet tout d'abord

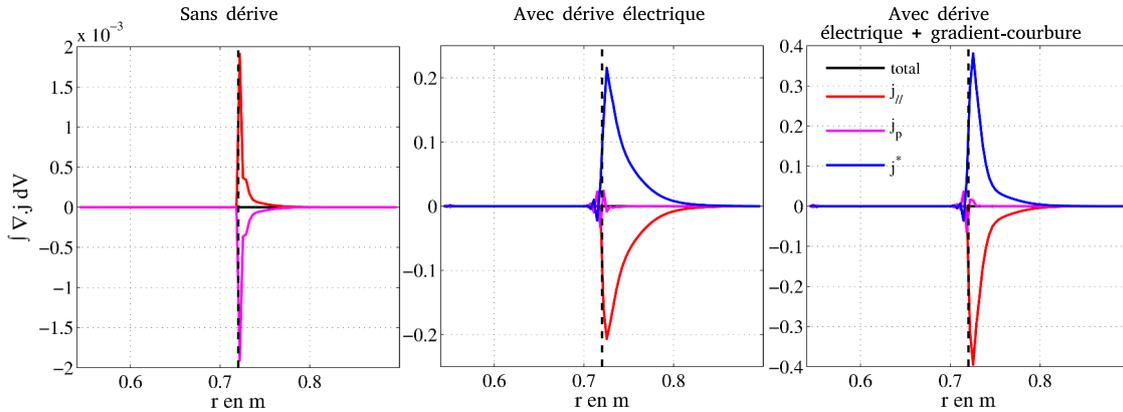


Figure III.14 – Int egr e le long des surfaces magn etiques des trois termes principaux de l' equation de vorticité : $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_p$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}^*$ et $\vec{\nabla} \cdot (j_{\parallel} \vec{b})$ dans les trois simulations. Les tirets noirs correspondent   la s eparatrice.

de constater que la somme des trois contributions se compense bien et que la conservation de la charge est respect ee. Nous pouvons donc continuer notre analyse en nous int eressant   l'effet du courant diamagn etique sur le courant parall ele. Cet effet est principalement visible dans la SOL. Sans aucune d erive, le courant de polarisation (et donc l' evolution de la vorticité) et le courant parall ele se compense. C'est donc le terme de courant parall ele qui g ere l' equilibre du potentiel. Si on ajoute le terme diamagn etique uniquement dans l' equation de vorticité, il tend   augmenter l'effet du courant parall ele et ce sont ces deux contributions qui se compensent. L'ajout de la d erive de gradient-courbure dans toutes les  equations augmente encore cet effet puisqu'il prend en compte le d eplacement vertical des charges dans toutes les  equations. L' equilibre du potentiel sera g ere par l' equilibre s' etablissant entre le courant parall ele et le courant

diamagnétique.

Concernant les lignes de champ fermées, les mécanismes à l'origine de l'équilibre sont moins évidents. Sachant que le terme de courant parallèle semble être à l'origine de cet équilibre, on va s'intéresser aux cartes 2D de courant parallèle (Fig.III.15). On voit apparaître les courants de

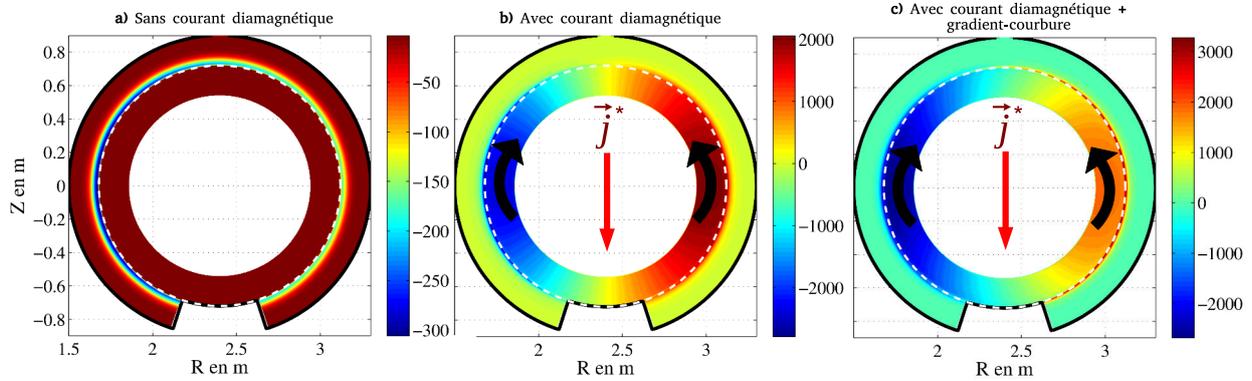


Figure III.15 – Comparaison des cartes de courant parallèle j_{\parallel} en $A.m^{-2}$ sans courant diamagnétique (a), avec courant diamagnétique (b) et avec dérive de gradient-courbure et courant diamagnétique (c). Les flèches rouges donnent le sens du courant diamagnétique et les flèches noires correspondent aux courants parallèles de Pfirsch-Schlüter.

Pfirsch-Schlüter ([1]) dirigés vers le haut de la machine et résultant de la séparation de charge créant un courant vers le bas de la machine. La forme des courants de Pfirsch-Schlüter est en accord avec les prédictions théoriques et on en déduit que c'est l'établissement de ces courants qui est à l'origine de l'équilibre du potentiel dans les lignes de champ fermées.

On va donc présenter maintenant les cartes de potentiel électrique d'équilibre obtenues (Fig.(III.16)). On constate dans un premier temps un équilibre plat dans les lignes de champ fermées sur le potentiel lorsque les dérives et le courant diamagnétique sont désactivés. Le courant parallèle (Fig.(III.15)) étant nul dans cette zone en l'absence de courant diamagnétique, on confirme bien l'importance de la séparation de charge dans l'établissement du cisaillement de champ électrique. Une chute du potentiel dans la SOL est visible dans les trois cas et on retrouve ainsi l'effet du courant parallèle dans la Scrape-Off-Layer. On peut voir directement un maximum de potentiel électrique près de la séparatrice dans les cas avec dérives. De plus, l'ajout de la dérive de gradient-courbure dans toutes les équations provoque une chute significative du potentiel dans le coeur du plasma. Cela peut être lié à la condition limite au coeur sur les courants. En effet, on laisse les courants libres pour des raisons numériques et la validité de cette condition est à l'étude. On voit donc se mettre en place un cisaillement du champ électrique radial ($\vec{E}_r = -\partial\Phi/\partial r$) près de la séparatrice ce qui est cohérent avec les mesures expérimentales. De plus, on a bien un potentiel électrique constant sur les surfaces magnétiques fermées.

On trace maintenant pour chaque simulation un profil radial (dans le plan équatorial) et un profil poloidal le long d'une surface magnétique en figure Fig.(III.17). On voit bien un profil plat du potentiel dans les lignes de champ fermées lorsque aucune dérive n'est activée. Lorsque l'on ajoute le courant diamagnétique, le cisaillement de champ électrique s'établit avec un maximum près de la séparatrice (dessus ou un peu après). C'est donc ce terme de séparation de charge (ions vers le bas et électron vers le haut) qui contrôle le potentiel dans les lignes de champ fermées via l'apparition des courants de Pfirsch-Schlüter. Dans la SOL, le profil radial montre une décroissance exponentielle. Celle-ci est liée au courant parallèle et à la condition limite au mur qui lie l'évolution du potentiel à la température et à la densité. En effet, si l'on regarde les

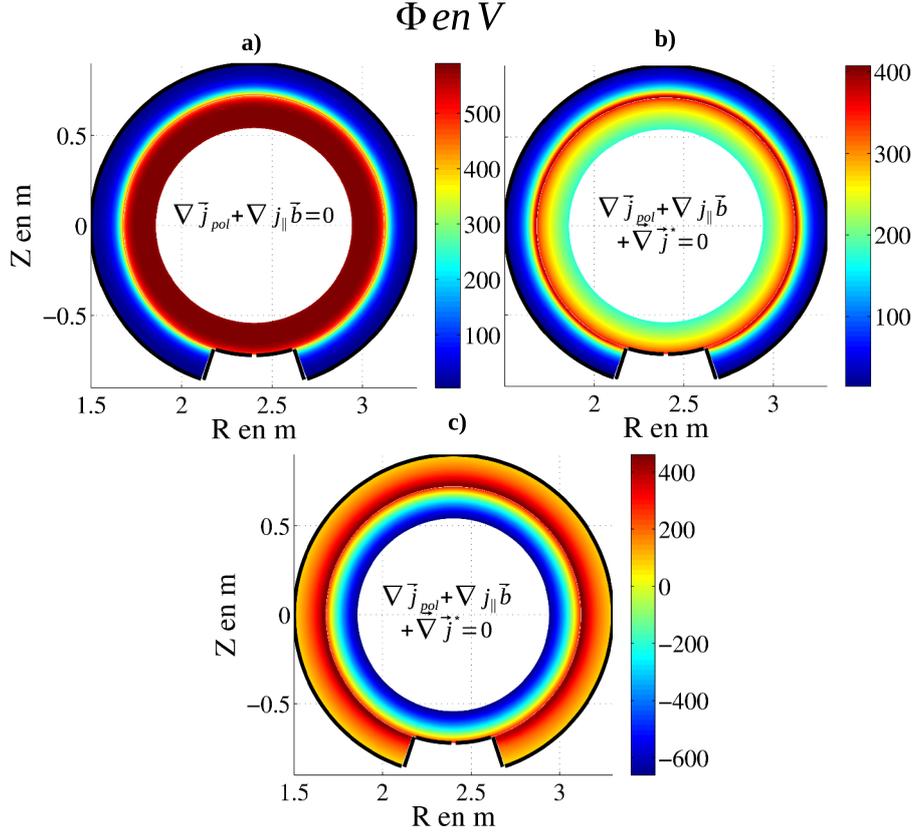


Figure III.16 – Comparaison des cartes de potentiel électrique sans vitesse de dérive (a), avec dérive électrique (b) et avec dérive de gradient-courbure (c) en Volt (V).

profils poloidaux, la forme du profil poloidal dans tous les cas est en accord avec la forme du profil de densité (comme cela sera vu au paragraphe suivant). On note la chute de potentiel au niveau du mur (donnée par la théorie, section (I. 2. 3)) liée quant à elle à la condition limite faisant tendre le potentiel électrique vers le potentiel flottant $\Lambda = -\frac{1}{2} \log \left(2\pi \frac{m_e}{m_i} \left(1 + \frac{T_i}{T_e} \right) \right)$. Cette décroissance sera à l'origine d'un champ électrique poloidal négatif côté LFS ($E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}$) et positif côté HFS.

On s'intéresse désormais à l'influence du champ électrique radial sur les asymétries du plasma de bord via la vitesse de dérive poloidale. Regardons les profils radiaux du champ électrique pour essayer de comprendre l'équilibre sur le champ électrique radial (Fig(III.18)). On retrouve dans les trois simulations le comportement attendu dans la SOL et le lien entre le gradient de température électronique et le champ électrique radial. Concernant l'équilibre dans les surfaces magnétiques fermées, la condition d'ambipolarité au coeur (Eq.(III.29)) lie le champ électrique radial au gradient de pression ionique au coeur.

$$u_\perp(r = r_{min}) = 0 \implies \vec{E}_\perp = \frac{\vec{\nabla}_\perp p_i}{ne} \quad (\text{III.29})$$

Sachant que le gradient de pression est toujours négatif (décroissance de la pression entre le coeur et la SOL), on comprend le signe du champ électrique radial dans les lignes de champ fermées. On comprend aisément que l'amplitude du champ électrique sera fortement liée aux températures considérées. Si l'on s'intéresse aux profils du champ électrique radial comparés aux prévisions théoriques (Fig.(III.18)), on voit l'accord entre le gradient de pression au coeur et le gradient de température électronique dans la SOL. Les profils montrent un comportement

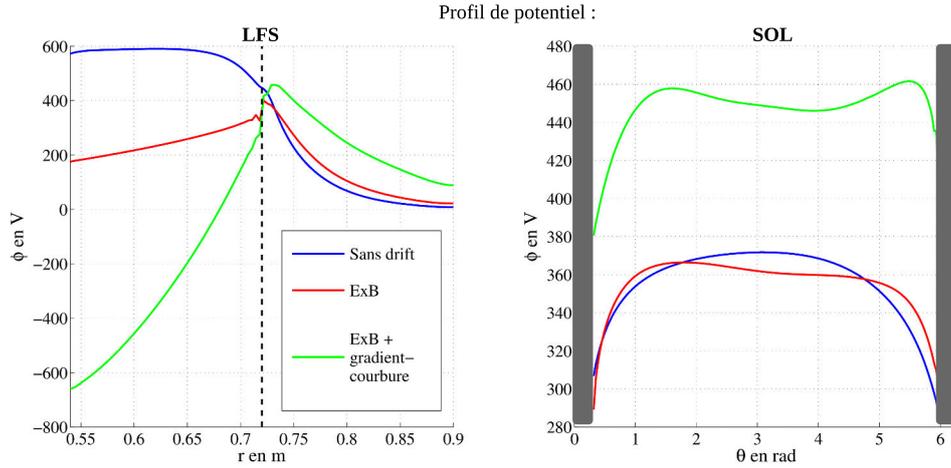


Figure III.17 – Comparaison des profils de potentiel électrique sans vitesse de dérive (bleu), avec dérive électrique (rouge) et avec dérive de gradient-courbure (vert) en Volt (V) radiaux dans le plan équatorial (LFS) et poloidaux dans la SOL.

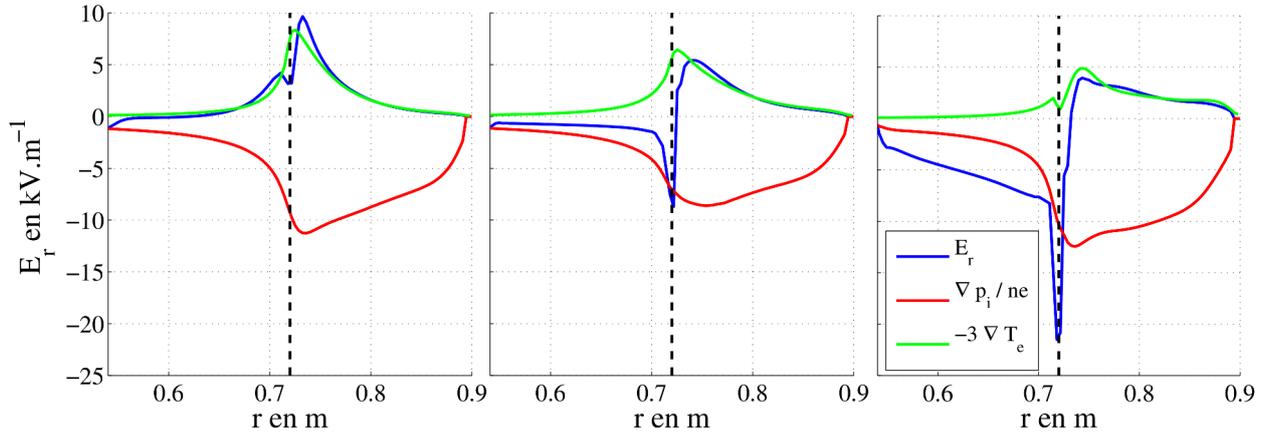


Figure III.18 – Comparaison des profils de champ électrique radial aux prévisions théoriques.

s'éloignant rapidement de la condition limite au coeur dans les trois simulations ce qui permet de conclure que le signe du champ électrique radial est lié à la fois à la condition limite de coeur qui initialise le profil radial de potentiel puis aux courants parallèles de Pfirsch-Schlüter qui établissent le profil.

III. 2. 2 Effet des vitesses de dérive perpendiculaires : écoulement de Pfirsch-Schlüter et asymétries dans la SOL

Nous nous intéressons maintenant à l'effet des vitesses de dérive sur les autres grandeurs du plasma et plus particulièrement sur les écoulements de Pfirsch-Schlüter (effet sur le flux de particules parallèle ionique à ne pas confondre avec les courants de Pfirsch-Schlüter) ainsi que sur les asymétries dans la SOL.

On commence par rappeler le sens des vitesses de dérive dépendant notamment du signe du champ électrique ainsi que du champ magnétique. Le champ magnétique toroidal est orienté dans la direction sortante au plan et le champ magnétique poloidal tourne dans le sens horaire. On note sur la figure Fig.(III.19) les directions des composantes du champ magnétique ainsi que

la direction des vitesses de dérive correspondant aux profils de potentiel électrique précédents.

$$\vec{u}_{E \times B} = \begin{cases} u_{E \times B}^\theta = -\frac{E_r B_{tor}}{B^2} = \frac{B_{tor}}{B^2} \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ u_{E \times B}^r = \frac{E_\theta B_{tor}}{B^2} = -\frac{B_{tor}}{r B^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (\text{III.30})$$

Dans cette configuration magnétique, la vitesse de dérive de gradient-courbure est dirigée vers

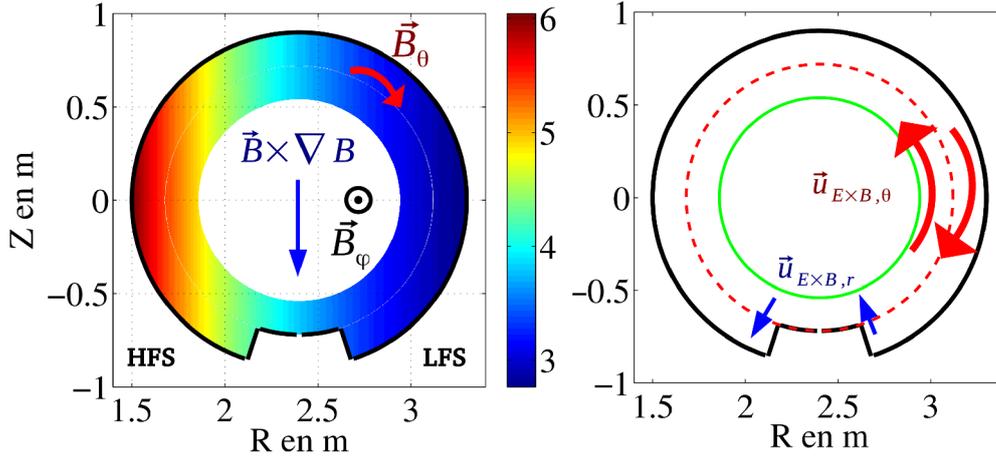


Figure III.19 – *Gauche : Norme du champ magnétique (T) et direction de ses composantes ; Droite : Direction des vitesses de dérive. La ligne pointillée rouge représente la séparatrice.*

le bas de la machine. La vitesse de dérive électrique poloidale présente quant à elle le caractère cisailé observé expérimentalement au niveau de la séparatrice [46]. Enfin, la partie radiale de la dérive électrique est dirigée de la SOL vers le bord près du limiteur côté faible champ (LFS) et inversement côté fort champ (HFS). Cela vient du fait que près du limiteur, le potentiel s'effondre pour atteindre le potentiel flottant et ainsi, suivant le côté du limiteur où l'on se place, le gradient poloidal de potentiel change de signe.

Dans un premier temps, nous effectuons trois simulations présentant les mêmes paramètres mais en activant les différentes vitesses de dérives progressivement. La figure Fig.(III.20) présente le nombre de Mach parallèle M_{\parallel} pour ces trois simulations. La première chose que l'on note en activant la vitesse de dérive électrique est l'apparition d'importantes asymétries poloidales des écoulements dans la SOL. On observe un déplacement du contour $M_{\parallel} = 0$ côté faible champ magnétique (LFS) ce qui correspond à un déplacement du point de stagnation dans le sens de la vitesse de dérive électrique (voir section (III. 1. 1. 2)). De plus, la forme du contour dans le bord montre la présence d'un écoulement changeant de direction entre le côté fort et le côté faible champ (semblable aux écoulements de Pfirsch-Schlüter précédemment mentionnés section (III. 1. 2. 1)). Lorsque l'on ajoute la dérive de gradient courbure, on constate dans un premier temps une légère amplification de l'asymétrie de la SOL lié au fait que cette dernière a pour effet de faire descendre les ions vers le limiteur. De plus, les écoulements dans le bord s'amplifient significativement en raison de la présence cette fois-ci du terme en gradient de pression dans l'expression des écoulements de Pfirsch-Schlüter. Cependant, le champ électrique et le gradient de pression étant de même signe dans le bord, ces deux contributions doivent s'opposer. De plus, on constate une disparition de la transition supersonique côté fort champ de la SOL initialement présente en raison de l'inhomogénéité du champ magnétique [40].

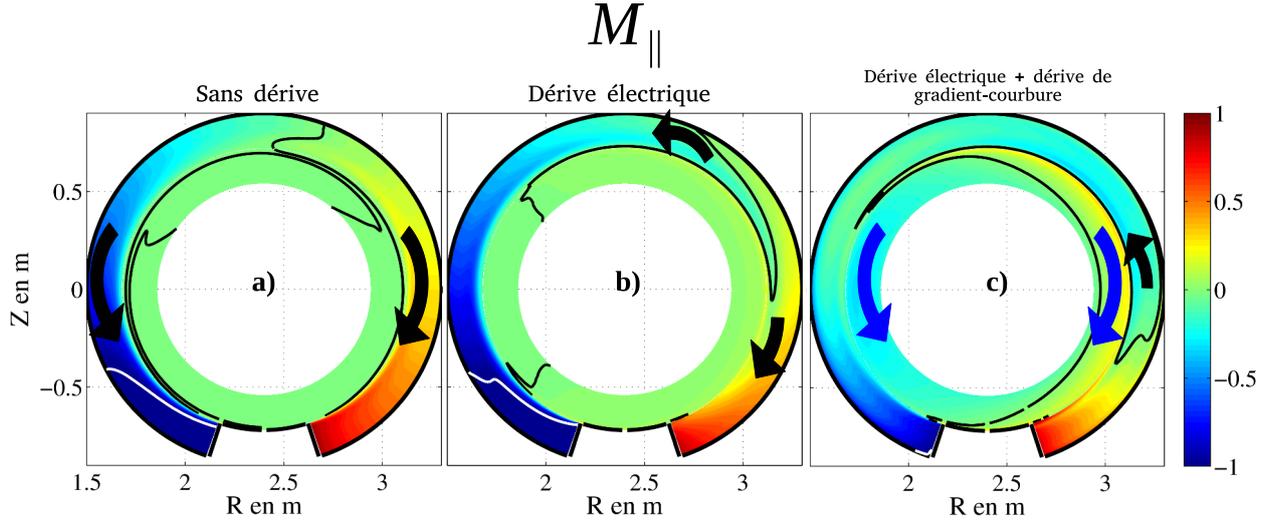


Figure III.20 – Carte 2D du Mach parallèle M_{\parallel} sans vitesses de dérive (gauche), avec dérive électrique (centre) et avec dérive électrique et dérive de gradient-courbure (droite); le contour noir correspond à $M_{\parallel} = 0$ et le contour blanc à $|M_{\parallel}| = 1$. La flèche noire représente le sens des écoulements parallèles dans la SOL et les flèches bleues celui des écoulements dans le bord.

III. 2. 2. 1 Asymétries de la SOL et transition supersonique au voisinage du limiteur

Nous commençons donc par nous intéresser aux profils poloidaux dans la SOL. La densité normalisée et le nombre de Mach parallèle dans la SOL sont donnés en figure Fig.(III.21). On choisit de se placer près de la séparatrice où la vitesse de dérive électrique est maximale ($r - a = 3.62cm$).

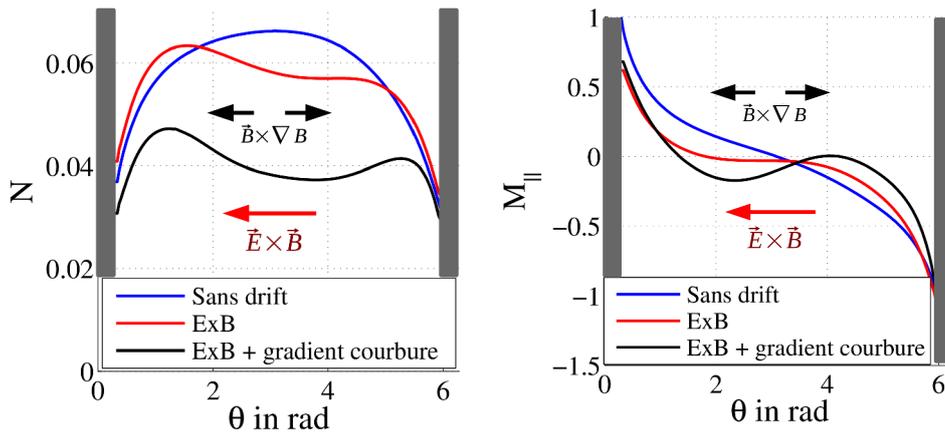


Figure III.21 – Profils poloidaux de la densité (gauche) et du M_{\parallel} (droite) en $r - a = 3.62cm$. $\theta = 0$ correspond au bas de la machine.

L'asymétrie de la densité en raison de la présence d'un fort écoulement poloidale lié à la dérive électrique ainsi que le déplacement du point de stagnation sont bien retrouvés lorsque la dérive électrique est activée. De plus on constate une chute importante du nombre de Mach au niveau du limiteur côté faible champ cohérent avec la condition de Bohm-Chodura. Comme cela a été mentionné, la dérive de gradient-courbure a pour effet de faire descendre les ions vers

le limiteur. Cela se traduit par la présence d'un nouveau maximum local de densité près du limiteur côté fort champ en plus de celui côté faible champ lié à la vitesse de dérive électrique. En ramenant les ions vers le limiteur, la vitesse de gradient-courbure augmente la quantité d'ions impactant le limiteur de façon symétrique et augmente la vitesse à laquelle se vide la SOL se traduisant par une baisse importante de la densité lorsque les deux dérives sont activées. L'advection par la vitesse de dérive électrique négative (vers le côté LFS) dans la SOL asymétrise le profil. Ces profils sont consistants avec les résultats obtenus avec le code fluide TOKAM3D [57].

Si l'on s'intéresse cette fois à des profils poloidaux plus loin dans la SOL, on va pouvoir chercher à comprendre le mécanisme à l'origine de la disparition de la transition supersonique. Comme cela a été expliqué dans [40], une transition supersonique peut apparaître dans les simulations fluides lorsque le terme source de l'équation de conservation de la masse change de signe au voisinage du limiteur. Cependant, ce phénomène n'est pas observable expérimentalement. L'une des raisons évoquée est l'absence de source d'ionisation liée à la diffusion de particules neutres en provenance du limiteur là où des réactions de recombinaisons ont lieu. On considère

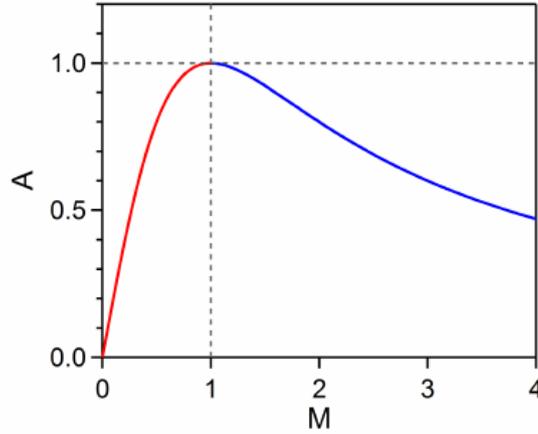


Figure III.22 – Profil du paramètre $\mathcal{A} = \frac{2m_i\Gamma_{\parallel}c_s}{\Pi}$ en fonction du nombre de Mach M [10].

le paramètre $\mathcal{A} = \frac{2m_i\Gamma_{\parallel}c_s}{\Pi}$ comme indicateur de la transition supersonique. La figure Fig.(III.22) montre l'évolution de la dérivée de ce paramètre en fonction du Mach M avec le flux parallèle $\Gamma_{\parallel} = nc_sM$ et la pression totale $\Pi = nc_s^2(1 + M^2)$. La vitesse du son dans le plasma est donnée par $c_s = \sqrt{k_B(T_i + T_e)/m_i}$. On voit sur ce profil qu'un changement de signe de la dérivée de \mathcal{A} correspond à une transition supersonique. Si on calcule la dérivée de ce paramètre par rapport à une coordonnée parallèle arbitraire s on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} = \frac{d\mathcal{A}}{dM} \frac{\partial M}{\partial s} \quad (\text{III.31})$$

Ainsi si le signe de la dérivée du nombre de Mach ne change pas (ce qui est valable dans le cadre de l'étude d'une transition supersonique), seul le signe de la dérivée de \mathcal{A} va nous intéresser. Dans nos simulations, la température est suffisamment élevée pour que le transport de chaleur parallèle aboutisse à une température constante le long des lignes de champ. On se place assez loin de la séparatrice pour ne pas avoir de cisaillement de vitesse et considérer une pression totale constante le long d'une ligne de champ. Ainsi on peut écrire :

$$\frac{1}{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} = \frac{1}{\Gamma_{\parallel}} \frac{\partial \Gamma_{\parallel}}{\partial s} + \frac{1}{c_s} \frac{\partial c_s}{\partial s} - \frac{1}{\Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial s} \quad (\text{III.32})$$

Si on considère une écriture simplifiée de l'équation de conservation de la masse Eq.(II.8), on aboutit à :

$$B \frac{\partial \Gamma_{\parallel} / B}{\partial s} = S_n + S_{Drift} \implies \frac{\partial \Gamma_{\parallel}}{\partial s} = \Gamma_{\parallel} \frac{\partial \log(B)}{\partial s} + S_n + S_{Drift} \quad (\text{III.33})$$

Dès lors, sachant qu'on ne considère aucune source dans l'équation de conservation de la masse autre que le terme de diffusion (pas de recombinaison), les équation (III.32) et (III.33) conduisent à :

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} = \frac{2m_i c_s}{\Pi} \left(\Gamma_{\parallel} \frac{\partial \log(B)}{\partial s} + \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla}_{\perp} n) + S_{Drift} \right) = \frac{2m_i c_s}{\Pi} S_n \quad (\text{III.34})$$

On trace cette fois les profils poloidaux de nombre de Mach et de la source de particule en $r - a = 8.82\text{cm}$ et on vérifie si l'apparition ou la disparition d'une transition supersonique peut être ou non liée à la présence d'écoulements de dérives dans le plasma de la SOL (Fig.(III.23)). Dans les cas sans dérives et avec dérive électrique activée, on constate bien une concordance

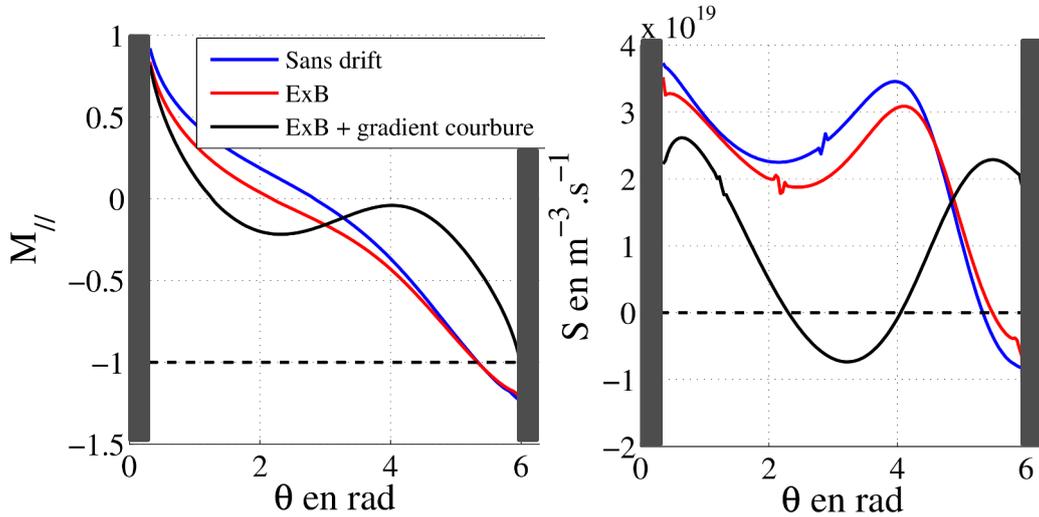


Figure III.23 – Profils poloidaux du nombre de Mach M_{\parallel} et de la source de particule S_n dans la SOL en $r - a = 8.82\text{cm}$

entre l'écoulement supersonique et le changement de signe de la source totale. Lorsque la vitesse de dérive est activée, on note bien une augmentation de la source de chaque côté du limiteur et une source négative en haut de la machine correspondant ainsi à l'effet de la dérive de gradient-courbure verticale. La source devient positive côté fort champ ce qui explique la disparition de la transition supersonique. De plus, la présence de deux changements de signe de la source de part et d'autre du haut de la machine correspondant bien au maximum et au minimum du profil de nombre de Mach parallèle souligne l'impact des écoulements de Pfirsch-Schlüter dirigés vers le haut de la machine dans la SOL.

III. 2. 2. 2 Écoulements de Pfirsch-Schlüter

Nous nous intéressons dans cette section aux écoulements de Pfirsch-Schlüter apparaissant dans la direction parallèle en réponse à la présence d'écoulement de dérives poloidales. Nous rappelons d'abord la forme de ces écoulements (section (III. 1. 2. 1)) dans l'approximation

d'une machine à grand rapport d'aspect ($A = R_0/a > 3$) :

$$v_{P-S} = \frac{2rB_{tor}}{R_0B_\theta} \cos(\theta) \left(E_r - \frac{\nabla_r p}{ne} \right) \frac{B_{tor}}{B_0^2} \quad (\text{III.35})$$

Comme expliqué précédemment, ces écoulements dépendent directement du signe et de l'amplitude du gradient de pression et du champ électrique radial. La densité et la température étant décroissante du centre vers le bord du plasma, le gradient de pression sera toujours négatif (orienté de la SOL vers le bord). Le champ électrique présente quant à lui un caractère cisailé autour de la séparatrice et est négatif dans le bord puis positif dans la SOL. Ainsi, la vitesse de Pfirsch-Schlüter sera plus importante dans la SOL que dans le bord. Dans la section (III. 1. 2. 2), il n'y avait aucune dérive verticale de gradient-courbure et ainsi on ne s'intéressait qu'à la contribution du champ électrique radial.

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'effet de la vitesse de gradient-courbure sur le

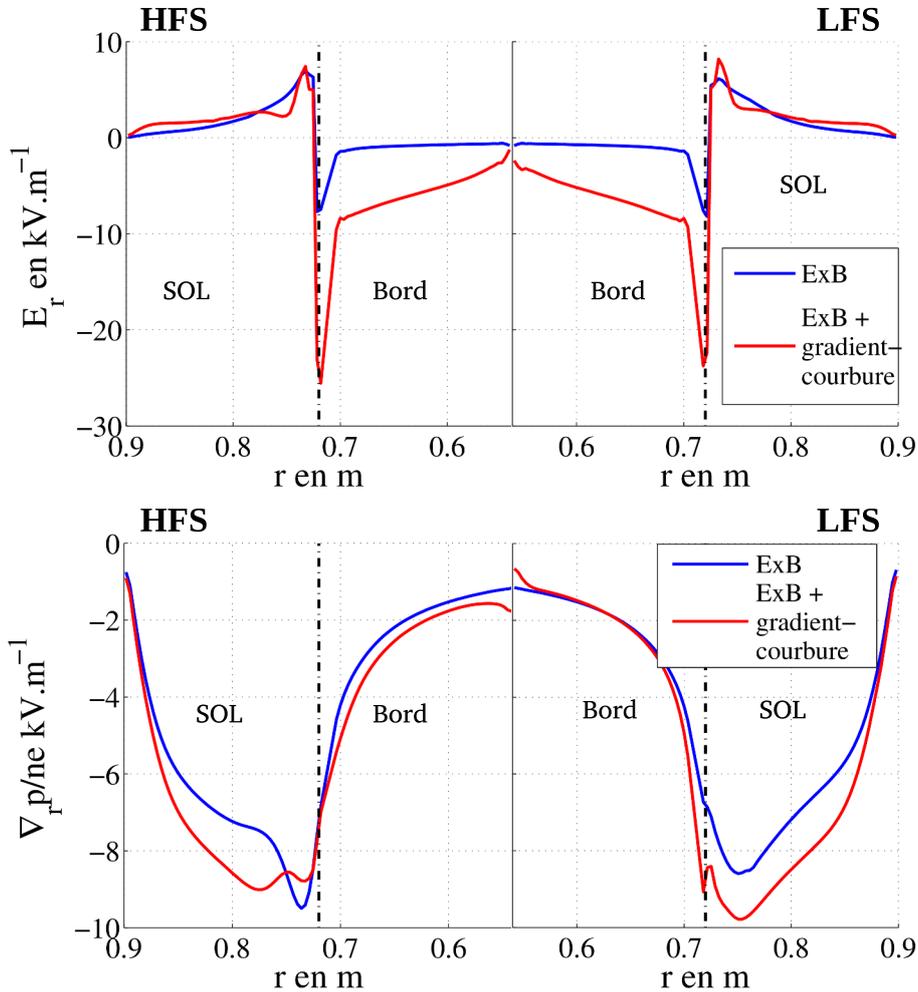


Figure III.24 – Profils radiaux du champ électrique radial (haut) et du gradient de pression dans le plan équatorial $Z = 0$ côté HFS (gauche) et LFS (droite) pour les deux simulations avec vitesse de dérive. Les tirets-pointillés noirs correspondent à la séparatrice.

champ électrique radial. On regarde donc les profils radiaux du champ électrique dans le plan équatorial ($Z = 0$) côté fort champ magnétique (HFS) et faible champ magnétique (LFS) (Fig.(III.24)) pour les deux simulations présentant des vitesses de dérive. En présence d'écoulements de dérives, la séparation de charge apparaissant via le courant diamagnétique dans

l'équation Eq.(II.35) et dans les différentes équations de conservation va amplifier le champ électrique radial. Cet effet étant plus important dans le bord là où la température et la densité sont les plus élevées, l'augmentation importante du champ électrique sera visible principalement dans cette zone. On a ainsi une contribution du champ électrique radial aux écoulements de Pfirsch-Schlüter plus importante. Cependant, dans ce cas, le gradient de pression étant de même signe, on s'attend à avoir une diminution de leur amplitude dans cette zone. Si l'on regarde les profils radiaux du gradient de pression divisé par la densité (Fig.(III.24)), on constate que dans la SOL, ces deux termes sont de signes contraires et d'amplitude similaire. Même constat dans le bord du plasma mais cette fois avec un signe identique. On s'attendra donc à avoir un effet des écoulements de Pfirsch-Schlüter plus faible dans le bord que dans la SOL.

Intéressons nous maintenant à l'amplitude des vitesses de Pfirsch-Schlüter en nombre de Mach comparée au nombre de Mach parallèle M_{\parallel} dans le plan équatorial côté HFS et LFS. En

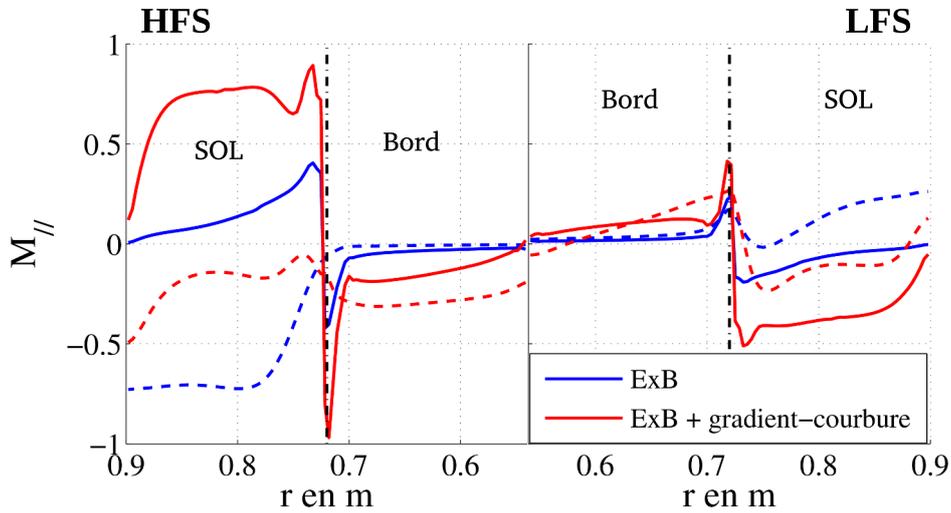


Figure III.25 – Nombre de Mach parallèle des écoulements de Pfirsch-Schlüter Eq.(III.35) (traits plein) et profil de M_{\parallel} (tirets) dans le plan équatorial ($Z = 0$) côté HFS (gauche) et LFS (droite).

comparant les profils du Mach parallèle avec ceux du Mach de Pfirsch-Schlüter calculés à partir de l'équation Eq.(III.35), on remarque que la forme du profil côté fort champ et faible champ tend, dans la SOL, à prendre la forme du profil des Pfirsch-Schlüter. De plus, on remarque une diminution du nombre de Mach de chaque côté par rapport au cas où seule la dérive électrique est présente. On confirme ainsi la mise en place d'écoulements de Pfirsch-Schlüter dans la SOL tendant à s'opposer aux écoulements liés au limiteur. L'équilibre qui s'établit entre ces écoulements entraîne une accumulation du plasma et la disparition de la transition supersonique ainsi que la forme du profil du nombre de Mach parallèle dans la SOL (Fig.(III.21) et Fig.(III.23)). Dans les lignes de champ fermées, on constate un nombre de Mach parallèle important directement lié aux écoulements de Pfirsch-Schlüter important eux aussi en raison d'un champ électrique plus fort que dans l'expérience. L'amplitude de ce champ électrique est lié aux températures élevées ($T_0 = 200eV$) que nous avons imposées au coeur.

III. 3 Comparaison simulation/expérience : Effet de la position du limiteur sur le champ électrique.

III. 3. 1 Contexte expérimental : effet sur l'amplitude de la vitesse perpendiculaire et sur son cisaillement.

L'influence de la position du point de contact entre le plasma et le mur sur les écoulements du plasma a été longuement étudié sur le tokamak Tore Supra. Le cas du Mistral Base Case [41], déjà mentionné précédemment, a permis de mettre en avant le ballonnement du transport radial dans le plan équatorial et son effet sur les écoulements dans la SOL. Ce cas est aussi à

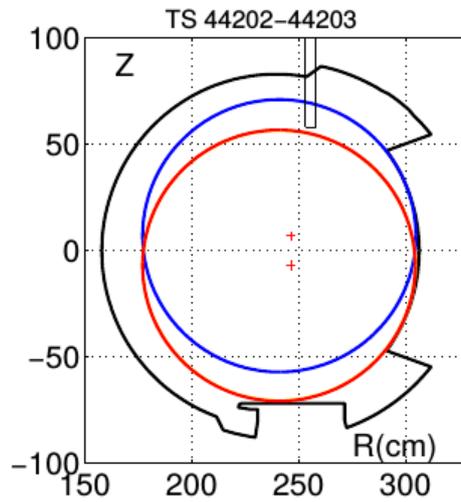


Figure III.26 – Configurations des deux chocs n°44202 et n°44203 : on appellera BOT la configuration où le point de contact est en bas et TOP quand il est en haut. [46]

la base des comparaisons entre simulation fluide et expérience [58],[12].

L'expérience [46] qui nous intéressera ici est un couple de choc où la position du point de contact plasma/paroi a été changée entre le limiteur bas de Tore Supra (configuration BOT) et le haut de la protection d'antenne côté faible champ (configuration TOP). On donne la configuration de ces deux chocs en figure Fig.(III.26).

Des mesures de rétro-diffusion Doppler (Chapitre IV) dans le plan équatorial ont permis de mesurer les profils radiaux de la vitesse perpendiculaire des fluctuations dans les deux configurations Fig.(III.27). On rappelle qu'expérimentalement, on suppose la vitesse perpendiculaire proportionnelle à la vitesse de dérive électrique (et donc au champ électrique) et à la vitesse de phase des fluctuations :

$$v_{\perp} \equiv -\frac{E_r}{B} + \tilde{v} \quad (\text{III.36})$$

On constate une modification de l'amplitude et de la position de la zone de cisaillement (changement de signe de v_{\perp}) lorsque l'on change de configuration. Cet effet peut être lié à un effet sur le champ électrique lui-même où sur la structure des fluctuations. Cependant, en considérant (comme dans l'expérience) une vitesse de phase des fluctuations négligeable, on peut plutôt s'attendre à un effet de la configuration sur le champ électrique radial.

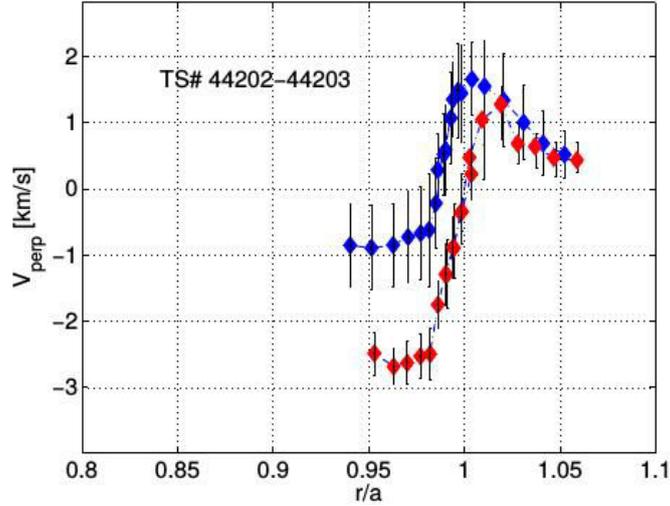


Figure III.27 – Mesure de rétro-diffusion Doppler des deux chocs n°44202 et n°44203 : les points rouges correspondent à la configuration BOT et les points bleus à la configuration TOP. [46]

III. 3. 2 Modélisation numérique : effet sur le champ électrique

Nous allons essayer de retrouver l'effet de la configuration magnétique sur le champ électrique radial dans le code fluide SOLEDGE2D. Nous nous plaçons dans les mêmes paramètres géométriques et plasma que précédemment :

- champ magnétique au centre $B_0 = 3.8T$, petit rayon $a = 0.72m$ et grand rayon $R_0 = 2.4m$. On considère une boîte large de $\Delta r = 36cm$.
- coefficients de diffusion : $D_{\perp} = 0.6m^2.s^{-1}$, $\nu_{\perp} = 0.2m^2.s^{-1}$, $\chi_e = \chi_i = 2m^2.s^{-1}$ et $D_W = 0.1m^2.s^{-1}$.
- densité et température de référence à l'interface bord/coeur : $n_0 = 10^{19}m^{-3}$, $T_0 = 200eV$.

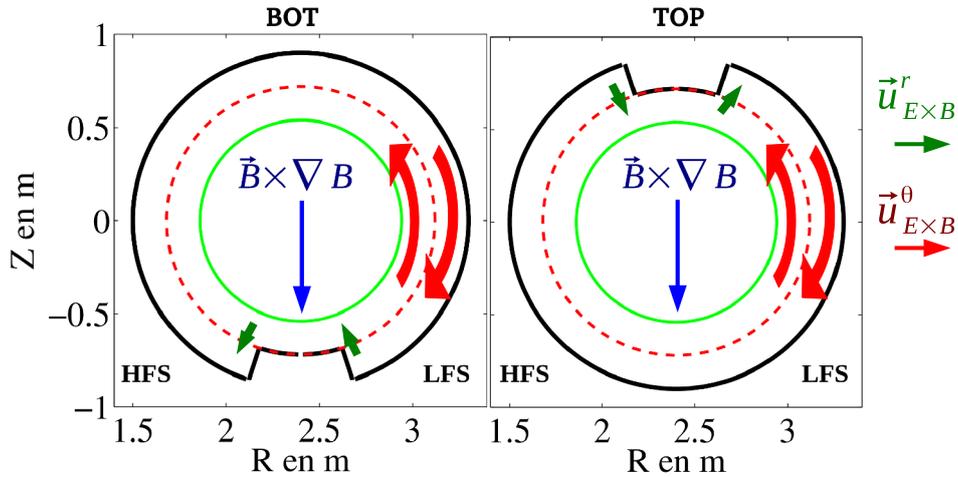


Figure III.28 – Configurations des deux simulations : on appelle BOT la configuration où la dérive verticale ramène les ions vers le limiteur et TOP la configuration inverse.

Nous considérons deux géométries circulaires : l'une avec un limiteur en haut (TOP) et l'autre avec un limiteur en bas (BOT) (Fig.(III.28)).

On réalise ces deux simulations jusqu'à atteindre un état stationnaire. Le courant diamagnétique et le courant parallèle dominant l'établissement du champ électrique radial, nous commençons par présenter les cartes 2D de ce champ électrique en figure Fig.(III.29). On voit

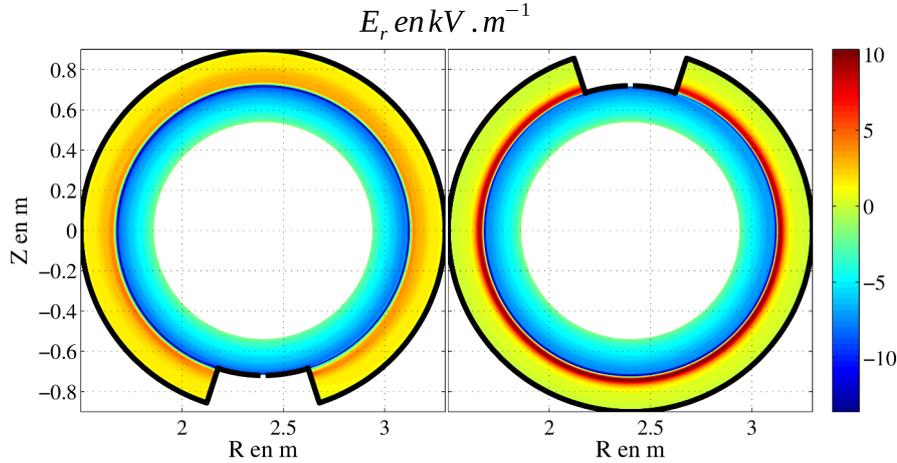


Figure III.29 – Champ électrique radial d'équilibre E_r pour deux simulations avec limiteur en haut et en bas. La colorbar est celle du cas limiteur en haut pour les deux simulations mais on rappelle que le champ électrique atteint des valeurs de 20kV.m^{-1} dans le cas limiteur en bas.

tout de suite un champ électrique identique dans les lignes de champ fermées dans les deux simulations. Le gradient de potentiel est lié au gradient de pression au coeur ainsi qu'aux courants de Pfirsch-Schlüter. Le gradient de pression n'est pas modifié près de la condition limite. De plus, dans les lignes de champ fermées, le courant diamagnétique n'a pas non plus de raison de changer (la pression est symétrique) et ainsi les courants de Pfirsch-Schlüter non plus. Une modification du champ électrique est néanmoins observée dans la SOL et près de la séparatrice là où l'effet de la dérive électrique est inversé.

La figure Fig.(III.30) représente les profils 1D du champ électrique radial dans le plan

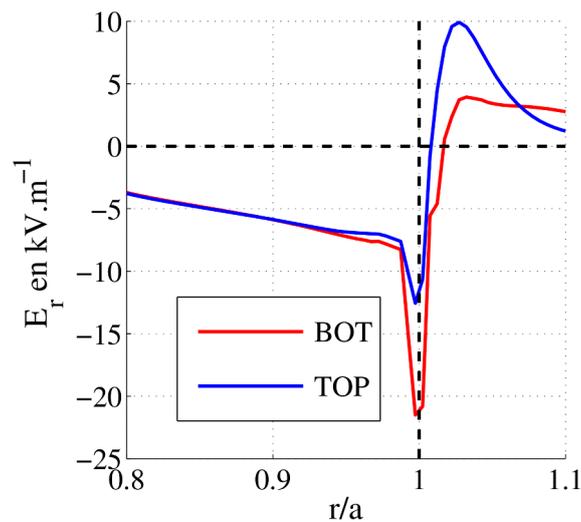


Figure III.30 – Profil radial du champ électrique radial dans le plan équatorial pour les deux configurations BOT et TOP.

équatorial. Bien que l'on soit dans une géométrie idéale et que nous ayons un transport perpendiculaire par diffusion homogène, on retrouve un changement d'amplitude et un déplacement

de la zone de cisaillement cohérent avec les mesures expérimentales. On peut supposer que ce résultat est bien un effet de champ électrique et que la nature du transport ou la géométrie ne jouent pas sur ce phénomène. Si on regarde de plus près, on peut voir une augmentation du champ électrique dans la SOL et une diminution à la séparatrice. Sachant que le courant parallèle est responsable de l'équilibre dans la SOL, nous nous intéressons à nouveau aux moyennes le long des surfaces magnétiques des trois termes de l'équation de conservation de la charge. La

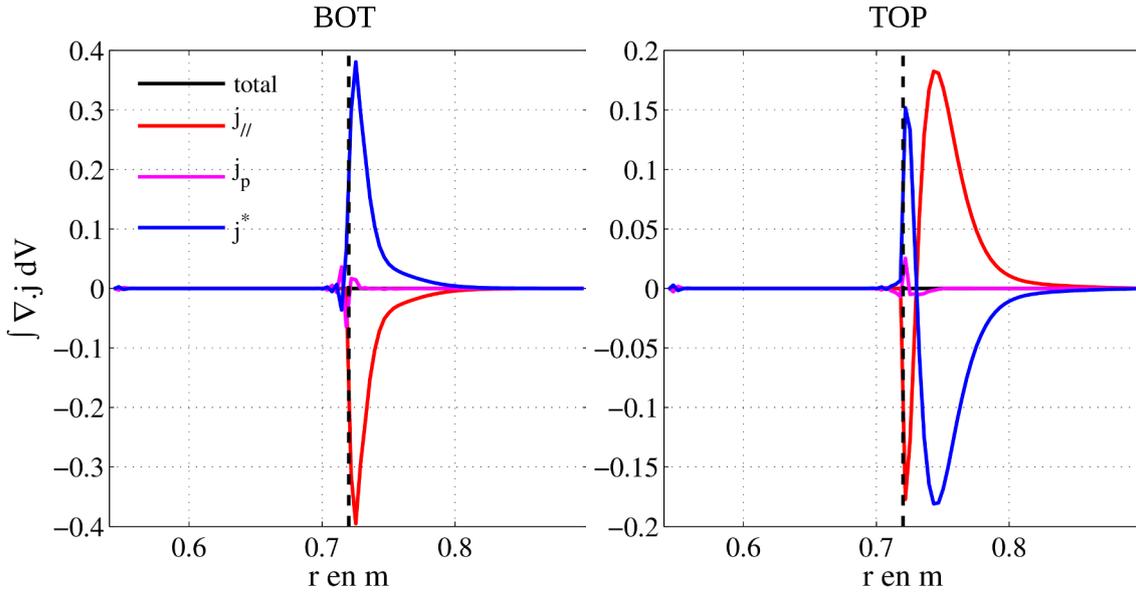


Figure III.31 – Profil radial du champ électrique radial dans le plan équatorial pour les deux configurations BOT et TOP.

figure Fig.(III.31) montre toujours un équilibre dans la SOL entre le courant diamagnétique et le courant parallèle. Cependant, on constate un changement de signe ainsi qu'un changement d'amplitude des deux termes. Ce changement de signe près de la séparatrice s'explique par le fait qu'on inverse l'effet des dérives en changeant la position du limiteur. Dans le cas BOT, la dérive poloidale éloigne les particules du côté HFS du limiteur vers le côté LFS et la dérive radiale fait sortir les particules de la SOL vers les lignes de champ fermées du côté LFS du limiteur et est dans le sens inverse côté HFS (comme expliqué précédemment, Fig.(III.13)). Cette dynamique est inversée dans le cas TOP (Fig.(III.28)). La dérive verticale de gradient courbure quant à elle ramène les ions vers le limiteur dans le cas du limiteur en bas (BOT) et les fait rentrer dans la SOL en bas de la machine dans le cas TOP. L'influence des dérives modifie la densité dans la SOL ce qui a pour effet de modifier le courant diamagnétique près du limiteur (effet sur le gradient de pression). Cela engendre une modification du courant parallèle et donc de l'établissement de l'équilibre du potentiel.

III. 3. 3 Modélisation numérique : conséquences sur les écoulements

Nous commençons par regarder les cartes 2D du nombre de Mach parallèle $M_{||}$. On compare en figure Fig.(III.32) les deux configurations mentionnées plus haut.

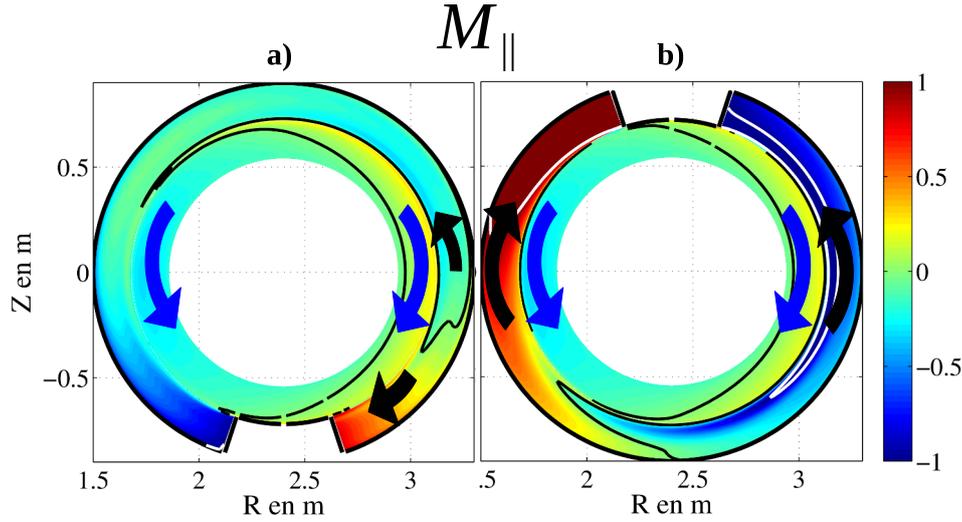


Figure III.32 – Cartes 2D du nombre de Mach parallèle M_{\parallel} . La vitesse de dérive verticale est dans le même sens pour les deux configurations ainsi que les écoulements de Pfirsch-Schlüter dans la SOL (flèches bleues).

Comme on pouvait s'y attendre, on constate l'absence de changement des écoulements de Pfirsch-Schlüter apparaissant dans le plasma confiné. Le contour $M_{\parallel} = 0$ est identique dans cette zone dans les deux configurations. La principale modification apparaît dans la SOL et près de la séparatrice. Tout d'abord le cas TOP montre la présence d'une transition supersonique côté fort champ. Cette transition est liée aux inhomogénéités du champ magnétique précédemment mentionnées (section (III. 2. 2)). Cependant, lorsque le limiteur est situé en haut de la machine, on constate aussi la présence d'une transition supersonique côté faible champ (LFS) près de la séparatrice. Ainsi, l'effet des dérives et les asymétries poloidales qu'elles déclenchent semblent liées à la position du limiteur.

Comme précédemment nous commençons par analyser les profils parallèles de la densité et

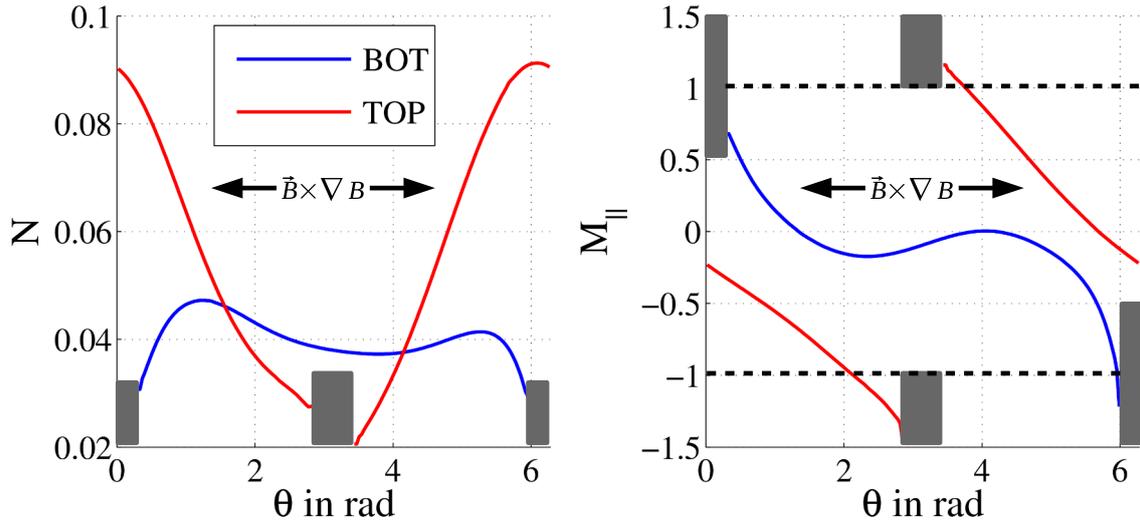


Figure III.33 – Profils poloidaux de la densité (gauche) et du M_{\parallel} (droite) en $r - a = 3.62\text{cm}$. $\theta = 0$ correspond au bas de la machine.

du nombre de Mach dans la SOL. On compare en figure Fig.(III.33) les profils en $r - a = 3.62\text{cm}$ pour les deux configurations. On constate dans un premier temps une augmentation significative

de la densité dans le cas TOP. La vitesse de dérive verticale étant dans ce cas dirigée à l'opposé du limiteur, elle fait entrer les ions dans la SOL par le bas de la machine. On note de plus une linéarisation du profil du nombre de Mach. On observe également que l'asymétrie liée à la dérive électrique se traduisant dans le cas BOT par un déplacement du plasma et du point de stagnation côté LFS disparaît au profit de la dérive verticale lorsque le limiteur est en haut (TOP). Dans le cas BOT, les écoulements du limiteur et les écoulements de Pfirsch-Schlüter s'opposent aboutissant à une accumulation de matière symétrique advectée ensuite par la dérive électrique. Dans le cas TOP, les écoulements de Pfirsch-Schlüter sont dirigés vers le haut et donc vers le limiteur, ces derniers vont s'ajouter aux écoulements parallèles dirigés vers le limiteur et symétriser la SOL.

On note la présence d'une double transition supersonique observée sur les cartes 2D du nombre de Mach. En s'appuyant sur le modèle simplifié présenté précédemment, nous allons chercher à expliquer cette transition. Celle-ci n'est présente que dans le cas avec limiteur en haut (TOP). De plus, elle apparaît près de la séparatrice où la contribution du terme source de l'équation du moment parallèle ne peut plus être négligée (cisaillement parallèle). Ainsi, l'équation permettant de prévoir l'apparition de la transition supersonique devient :

$$\frac{1}{\mathcal{A}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} = \frac{1}{\Gamma_{\parallel}} \frac{\partial \Gamma_{\parallel}}{\partial s} + \frac{1}{c_s} \frac{\partial c_s}{\partial s} - \frac{1}{\Pi} \frac{\partial \Pi}{\partial s} \quad (\text{III.37})$$

L'équation de conservation du moment parallèle Eq.(II.13) aboutit à une équation sur $\Pi = nc_s^2(1 + M^2)$:

$$\begin{aligned} B \frac{\partial \Gamma_{\parallel}^2 / nB}{\partial s} + \frac{\partial k_B n (T_i + T_e) / m_i}{\partial s} &= \vec{\nabla} \cdot (n\nu_{\perp} \vec{\nabla} u_{\parallel} + u_{\parallel} D_{\perp} \vec{\nabla} n) + S_{Drift}^{\Gamma} \\ \implies \frac{\partial \Pi}{\partial s} &= \frac{\Gamma_{\parallel}^2}{n} \frac{\partial \log(B)}{\partial s} + S_{\Gamma} + S_{Drift}^{\Gamma} \end{aligned} \quad (\text{III.38})$$

On s'intéresse au signe de :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} &= \frac{2m_i c_s}{\Pi} \left(\Gamma_{\parallel} \frac{\partial \log(B)}{\partial s} + \vec{\nabla} \cdot (D \vec{\nabla}_{\perp} n) + S_{Drift} \right) \\ &\quad - \frac{2m_i \Gamma_{\parallel} c_s}{\Pi^2} \left(\frac{\Gamma_{\parallel}^2}{n} \frac{\partial \log(B)}{\partial s} + \vec{\nabla} \cdot (n\nu_{\perp} \vec{\nabla} u_{\parallel} + u_{\parallel} D_{\perp} \vec{\nabla} n) + S_{Drift}^{\Gamma} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.39})$$

On compare les deux contributions de l'équation Eq.(III.39) pour les deux configurations (Fig.(III.34)). On constate bien une concordance entre le signe de la dérivée du paramètre \mathcal{A} et l'apparition des deux transitions supersoniques. Ainsi, les vitesses de dérive, par le biais des écoulements de Pfirsch-Schlüter cisailés entre la SOL et le bord, peuvent engendrer par transfert de moment parallèle, une transition supersonique côté faible champ magnétique lorsque le point de contact entre le plasma et le mur est situé en haut.

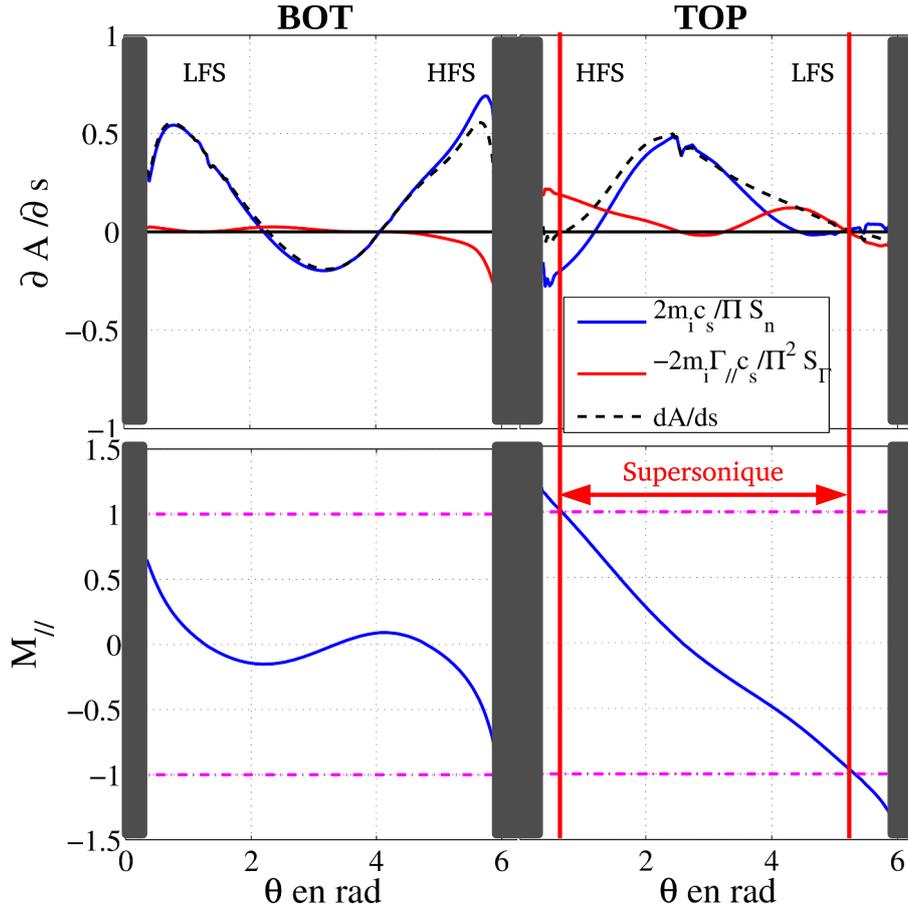


Figure III.34 – Haut : profils poloidaux des contributions de la dérivée du paramètre \mathcal{A} en $r - a = 3.62\text{cm}$; Bas : profils du nombre de Mach parallèle correspondant

III. 4 Conclusion

L'ajout des vitesses de dérive dans le code SOLEDGE-2D a été réalisé et les effets sur le plasma de bord et son équilibre ont été étudiés.

Afin d'étudier l'effet des vitesses de dérive dans le plasma de bord, nous nous sommes d'abord intéressés aux réactions du code en présence d'un champ électrique radial imposé. Cela a permis de retrouver les asymétries poloidales [45] liées à la vitesse de dérive poloidale électrique dans la SOL. Les asymétries des flux de chaleur observées expérimentalement [47] et numériquement sur les plaques des divertors [48] ont été retrouvées en géométrie limiteur infiniment fin. Nous avons également pu identifier plusieurs contributions liées à la dépendance de la vitesse de dérive électrique poloidale au champ magnétique. Les écoulements de Pfirsch-Schlüter apparaissant en réponse à un écoulement poloidal asymétrique de dérive ont été observés. Enfin un terme de rotation parallèle dont l'apparition est liée à la faible viscosité du plasma et à la compression des lignes de champ magnétique a été observé.

Une fois compris l'effet de la dérive électrique poloidale, nous nous sommes attelés à l'implémentation d'une équation de vorticité dans le code fluide de transport SOLEDGE-2D afin d'obtenir un potentiel électrique auto-consistant. Nous avons dans un premier temps tenté de comprendre l'équilibre du potentiel électrique dans ces simulations. Nous avons pu retrouver l'établissement des courants de Pfirsch-Schlüter [52] en présence d'une séparation de charge liée   la dérive verticale des particules. Nous avons également vu que ces courants contrôlent l' qui-

libre du potentiel [59] dans les lignes de champ fermées et ouvertes. Le cisaillement de champ électrique a été retrouvé ainsi que l'effet du point de contact entre le plasma et le mur sur son amplitude et la position de sa zone de cisaillement [46]. Cependant, d'importantes différences de l'amplitude du champ électrique par rapport aux mesures expérimentales ont été notées. Dans nos simulations, cela est lié aux températures de référence considérées ($T_0 = 200eV$) bien plus importantes que dans les expériences. Enfin, on a pu observer des discontinuités sur le profil du potentiel à la séparatrice. Le changement de physique entre lignes fermées et ouvertes peut être à l'origine de ces discontinuités. Néanmoins, la sensibilité de l'équilibre de la vorticité (jouant donc sur la dérivée seconde du potentiel) aux conditions limites de coeur mais aussi en tête du limiteur peuvent laisser penser   un problème numérique. L'analyse de ce phénomène est en cours d'investigation.

Pour finir nous nous sommes intéressés   l'effet de ce champ électrique auto-consistant sur les asymétries des écoulements dans le plasma de bord. Encore une fois, l'établissement des écoulements de Pfirsch-Schlüter a été identifié et l'asym trisation des profils dans la Scrape-Off-Layer a été retrouvée [52]. La présence de la vitesse de dérive verticale a de plus montré un effet sur la transition supersonique apparaissant dans les simulations numériques. Cette transition est un effet numérique [40] et nous avons vu que lorsque les vitesses de dérive sont présentes, elles peuvent, en modifiant la distribution des sources dans l'équation de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, déclencher ou s'opposer   des transitions supersoniques. Deux mécanismes de déclenchement de ces transitions ont été observés : les écoulements de Pfirsch-Schlüter s'opposant aux écoulements vers le limiteur ou créant un cisaillement de vitesse parallèle entre le plasma confiné et la SOL   l'origine d'un transfert de quantité de mouvement. Une comparaison simulation/expérience préliminaire a permis de retrouver l'influence de la position du limiteur sur le profil de champ électrique radial. Une modification de la dynamique des dérives dans la SOL entraine un changement de la distribution des sources de charges liées aux courants diamagnétiques et aux courants parallèles de Pfirsch-Schlüter dans la direction radiale. Le changement de signe et d'amplitude observé semble être   l'origine du changement d'amplitude du champ électrique radial.

Cependant, ce nouveau modèle SOLEDGE2D est encore en phase de développement. L'implémentation des vitesses de dérive peut poser des problèmes numériques liés notamment aux conditions limites (tant sur le courant en tête de limiteur que sur la condition de Bohm-Chodura dans la direction parallèle). Des traitements particuliers des vitesses de dérive sont   l'étude. Le code a déjà été testé dans des géométries complexes (point X) et semble fonctionner. Cependant, des discontinuités liées   des circulations de courant importantes dans la séparatrice n'ont pas encore été expliquées et par conséquent, même si les premiers résultats des asymétries sur les plaques du divertor sont encourageants, les analyses de ces simulations ont encore besoin d'être approfondies. La condition de Bohm-Chodura a été implémentée avec pénalisation et fonctionne pour des maillages simples. L'utilisation sur des maillages plus complexes est en cours de développement.

Chapitre IV

Mesures expérimentales de la vitesse perpendiculaire : rétro-diffusion Doppler

Le diagnostic de rétro-diffusion Doppler ou réflectométrie Doppler est un diagnostic s'appuyant sur les méthodes de diffusion collective et de réflectométrie. C'est une technique qui combine la localisation radiale de la réflectométrie et la sélectivité en nombre d'onde de la diffusion. Il permet de mesurer l'intensité de la turbulence et la vitesse perpendiculaire du plasma à partir de la vitesse des fluctuations de densité de ce dernier.

IV. 1 Principe de la rétro-diffusion Doppler

Nous commençons ici par rappeler les principes de bases à l'origine des diagnostics de réflectométrie et de diffusion collective dans les plasmas de tokamaks.

IV. 1. 1 Principe de la diffusion collective

IV. 1. 1. 1 Principe d'une expérience de diffusion

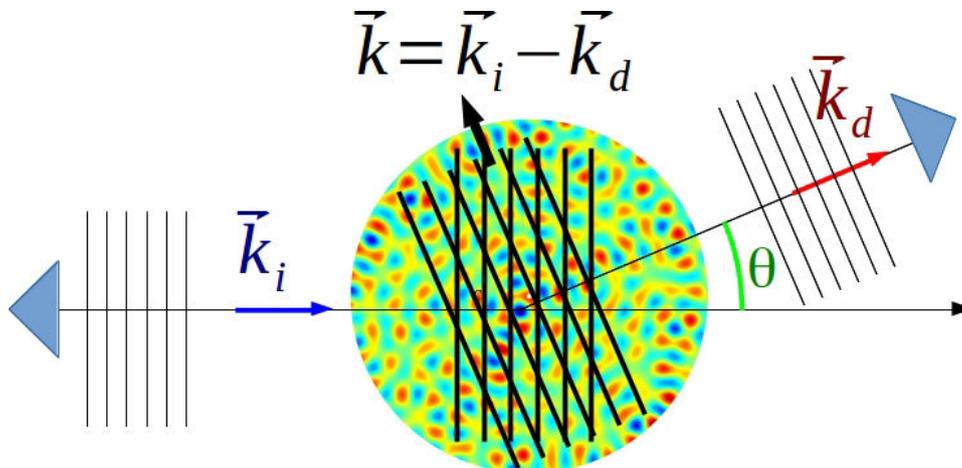


Figure IV.1 – Schéma de principe d'une expérience de diffusion.

On émet une onde monochromatique de nombre d'onde $k_i = \frac{2\pi}{\lambda_i}$ qui va éclairer un milieu transparent de volume V contenant les diffuseurs (des fluctuations de densité). On mesure sur un détecteur placé loin du volume de diffusion le champ électrique diffusé dans la direction \vec{n} formant un angle θ avec le vecteur d'onde incident \vec{k}_i (cf Fig.(IV.1)). L'onde incidente et l'onde diffusée forment sur le volume V un réseau d'interférence virtuel déterminé par le vecteur d'onde d'analyse $\vec{k} = \vec{k}_i - \vec{k}_d$. La position du détecteur (définie par l'angle θ) va permettre de sélectionner une fluctuation dans le volume éclairé par le faisceau sonde via le nombre d'onde diffusé $\vec{k}_d = k_i \vec{n}$. La fluctuation ainsi sélectionnée aura un nombre d'onde égal au nombre d'onde d'analyse caractérisant le réseau d'interférence dont la norme est donnée par la condition de Bragg :

$$k = |\vec{k}_i - \vec{k}_d| = 2k_i \sin(\theta/2) \quad (\text{IV.1})$$

IV. 1. 1. 2 Rayonnement par des particules chargées accélérées

Considérons désormais que le milieu éclairé est un plasma composé de particules chargées. Ces particules vont être accélérées par le champ de l'onde et ainsi émettre un rayonnement. On considère une particule de charge q ayant une trajectoire $r_0(t')$. Le point d'observation est à la position r et l'observation se fait à l'instant t (fixé pour le moment). Cette particule a un vecteur unitaire $\vec{n}(t')$ et on note la distance entre la particule et le point d'observation par $R(t') = |\vec{r} - \vec{r}_0(t')|$. On définit la densité de charge par (Fig.(IV.2)) :

$$\rho(r', t') = q \delta(\vec{r}' - \vec{r}_0(t')) \quad (\text{IV.2})$$

En appliquant la condition de jauge de Lorentz et en considérant le temps retardé $t^* =$

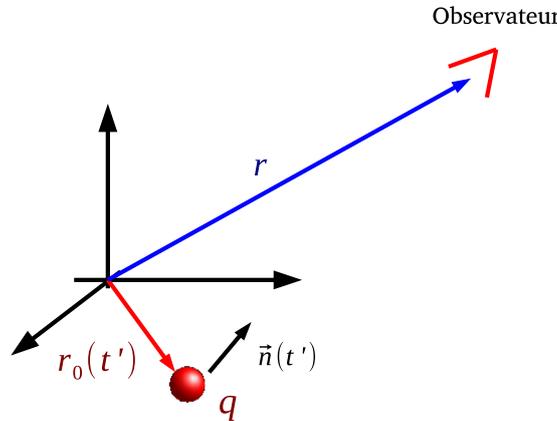


Figure IV.2 – Position de l'observateur par rapport à une particule accélérée par un champ électrique.

$t - R(t')/c$ comme l'instant où l'observateur mesure le potentiel après propagation du champ rayonné, on définit le potentiel retardé :

$$V(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dr' dt' \frac{\rho(r', t') \delta(t' - t^*)}{R(t')} \quad (\text{IV.3})$$

L'intégrale en r' est triviale (seule la contribution $r' = r_0(t')$ entre en ligne de compte) et en posant $g(t') = t' - t^*$ on obtient :

$$V(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta(g(t'))}{R(t')} \quad (\text{IV.4})$$

Seule la contribution de l'instant $t_0 = t - R(t_0)/c$ (où $g(t')$ s'annule) contribue à l'intégrale. On considère la fonction g croissante et ainsi le calcul de cette intégrale donne :

$$V(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d_{t'} g(t_0) R(t_0)} \quad (\text{IV.5})$$

où on calcule la dérivée $d_{t'} g(t') = 1 + \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t'} = 1 + \frac{\vec{R}}{cR} \cdot \frac{d\vec{R}}{dt'} = 1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{v}}{c}$ et où $v = \frac{dr_0(t')}{dt'}$ est la vitesse de la particule. Le potentiel scalaire vaut alors :

$$V(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}/c) R(t_0)} \quad (\text{IV.6})$$

et analogiquement pour $\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dr' dt' \frac{\rho(r', t') \vec{v}(r', t') \delta(t' - t^*)}{R(t')}$:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}}{(1 - \vec{n} \cdot \vec{v}/c) R(t_0)} \quad (\text{IV.7})$$

On fait l'approximation des champs lointains et on néglige les termes en $1/R^2$. On calcule le champ électrique rayonné $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} V$ dans la direction \vec{n} par une particule de charge q à la position \vec{r}' , à l'instant t et pour des particules non relativistes ($\frac{v}{c} \ll 1$) :

$$\vec{E}_{ray}(\vec{r}', t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{n} \times \vec{n} \times \partial_t^2 \vec{r}'}{R} \Big|_{t=t^*} \quad (\text{IV.8})$$

On rappelle la définition du temps retardé $t^* = t - \frac{|\vec{r}' - \vec{r}(t)|}{c}$ et on calcule l'accélération subie par la particule $\partial_t^2 \vec{r}' = \frac{q}{m} \vec{E}_{i,0} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}' - \omega_i t^*}$ éclairée par le champ incident du diagnostic. L'approximation des champs lointains nous donne finalement :

$$\begin{aligned} |\vec{r}' - \vec{r}(t)| &\sim R - \vec{r}' \cdot \vec{n} \\ \vec{k}_i \cdot \vec{r}' - \omega_i t^* &= \vec{k}_i \cdot \vec{r}' - \omega_i t + \frac{\omega_i}{c} |\vec{r}' - \vec{r}(t)| \\ &= \vec{k}_i \cdot \vec{r}' - \omega_i t + \frac{\omega_i}{c} R - \frac{\omega_i}{c} \vec{r}' \cdot \vec{n} \\ &= k_i R - \omega_i t + (\vec{k}_i - \frac{\omega_i}{c} \vec{n}) \cdot \vec{r}' \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

$$\vec{E}_d(\vec{r}, t) = \frac{q^2}{4\pi m \epsilon_0 c^2} e^{-i\omega_i t} \frac{e^{i\vec{k}_i R}}{R} \{ \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{E}_{i,0} \} e^{i(\vec{k}_i - \frac{\omega_i}{c} \vec{n}) \cdot \vec{r}} \quad (\text{IV.10})$$

Le champ diffusé par un ensemble de particules devient la somme des contributions de chacune des particules :

$$\vec{E}_d(\vec{r}, t) = \frac{q^2}{4\pi m \epsilon_0 c^2} e^{-i\omega_i t} \frac{e^{i\vec{k}_i R}}{R} \sum_j \{ \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{E}_{j,0} \} e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}_j} \quad (\text{IV.11})$$

où \vec{k} est le vecteur d'onde d'analyse ((IV. 1. 1. 1)). Dans le cas d'un milieu continu et en posant la densité de charge $\rho(\vec{r}, t) = q n_e(\vec{r}, t)$ dans les calculs précédents :

$$\vec{E}_d(\vec{r}, t) = \frac{q^2}{4\pi m \epsilon_0 c^2} e^{-i\omega_i t} \frac{e^{i\vec{k}_i R}}{R} \int_V \{ \vec{n} \times \vec{n} \times \vec{E}_0(\vec{r}') \} n_e(\vec{r}', t) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}'} dV \propto \int_{V_{\text{éclairé}}} n_e(\vec{r}, t) e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} dV \equiv \tilde{n}_e(\vec{k}, t) \quad (\text{IV.12})$$

Le champ électrique diffusé par le plasma nous donne accès à l'intensité de la turbulence. De plus, le mouvement des diffuseurs induit un décalage en fréquence du signal mesuré par effet

Doppler. Si on suppose que le plasma possède une vitesse d'ensemble \vec{V} , on peut écrire la position de chaque particule à l'instant t comme $\vec{r}_j(t) = \vec{r}_j(t=0) + \vec{V}t$. Ce qui donne pour le champ électrique diffusé :

$$\vec{E}_d(\vec{r}, t) \propto e^{-i\omega t} \sum_j e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_j(t)} = e^{-i(\omega_i - \vec{k} \cdot \vec{V})t} \sum_j e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_j(0)} \quad (\text{IV.13})$$

On voit apparaître le décalage Doppler dans l'expression du champ diffusé soit :

$$\Delta\omega = \vec{k} \cdot \vec{V} \quad (\text{IV.14})$$

L'étape suivante dans un diagnostic de diffusion est la problématique de la détection du champ électrique diffusé par les fluctuations du plasma.

IV. 1. 2 Propagation d'onde dans les plasmas

IV. 1. 2. 1 Equation d'onde

Les développements présentés dans cette section sont issus de [60]. On va maintenant s'intéresser à la propagation du faisceau sonde dans le plasma que l'on souhaite étudier. Considérons une onde se propageant dans un plasma. Les équations de Maxwell régissant la propagation de l'onde sans sources extérieures sont :

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{free} \quad ; \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{IV.15})$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}_{free} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{IV.16})$$

où \vec{E} est le champ électrique, \vec{H} est l'intensité magnétique, \vec{D} est le déplacement magnétique et enfin \vec{B} est l'inductance magnétique. On définit les relations constitutives du plasma pour le déplacement électrique \vec{D} et l'inductance magnétique par :

$$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \end{cases} \quad (\text{IV.17})$$

où \vec{P} et \vec{M} sont respectivement les vecteurs de polarisation et de magnétisation avec $\partial_t \vec{P} = \mu_0 \vec{j}_{pol}$ et $\nabla \times \vec{M} = \mu_0 \vec{j}_{mag}$. On peut poser le courant total engendré par la perturbation du plasma par l'onde comme $\vec{j} = \vec{j}_{free} + \vec{j}_{pol} + \vec{j}_{mag}$. En prenant le rotationnel de l'équation Eq.(IV.16) et en injectant Eq.(IV.17) dans le résultat, on obtient l'équation d'onde :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \quad (\text{IV.18})$$

On suppose un plasma non dispersif anisotrope et ainsi on définit le courant $\vec{j} = \bar{\sigma} \cdot \vec{E}$ avec $\bar{\sigma}$ le tenseur de conductivité et ainsi, l'équation d'onde devient :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \bar{\sigma} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad (\text{IV.19})$$

ce qui donne dans l'espace de Fourier :

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \left(\bar{I} + i \frac{\bar{\sigma}}{\epsilon_0 \omega} \right) \vec{E} = 0 \quad (\text{IV.20})$$

où le tenseur diélectrique est définie par $\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \left(\bar{I} + i \frac{\bar{\sigma}}{\epsilon_0 \omega} \right)$.

IV. 1. 2. 2 Tenseur diélectrique

On définit l'évolution du plasma durant la propagation de l'onde par les équations fluides de conservation de la masse et du moment dans le cas d'un plasma froid :

$$\begin{cases} \frac{\partial n_s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (n_s \vec{v}_s) & = & 0 \\ n_s m_s \left[\frac{\partial \vec{v}_s}{\partial t} + (\vec{v}_s \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_s \right] & = & n_s q_s (\vec{E} + \vec{v}_s \times \vec{B}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi}_s \\ \vec{\Phi}_s = \vec{p}_s + m_s n_s \vec{v}_s \vec{v}_s & & \end{cases} \quad (\text{IV.21})$$

On peut définir la densité de courant totale dans le plasma comme :

$$\vec{j} = \sum_s \vec{j}_s = \sum_s n_s q_s \vec{v}_s = \vec{\sigma} \cdot \vec{E} \quad (\text{IV.22})$$

On fait plusieurs hypothèses :

- le plasma est immobile durant la propagation de l'onde et est perturbé par le passage de celle-ci : $\vec{v}_s = \delta \vec{v}_s$
- on suppose qu'il n'y a pas de champ électrique dans le plasma : $\vec{E} = \delta \vec{E}$
- le champ magnétique total est une superposition du champ de confinement et du champ de l'onde incidente : $\vec{B} = \vec{B}_0 + \delta \vec{B}$

Dans le cas de la rétro-diffusion Doppler, la fréquence de l'onde incidente est très supérieure à la fréquence cyclotronique des particules ($\omega \gg \omega_{cs}$). De plus on se place dans le cas d'un plasma faiblement magnétisé ($k_{\perp} v_{th,s} / \omega_{cs} \gg 1$) et d'une onde non affectée par le mouvement thermique des particules ($v_{\varphi} \gg v_{th,s}$). On justifie donc l'hypothèse d'un plasma froid et on pose $\vec{\Phi}_s = 0$. Le mouvement des particules induit par le passage de l'onde est décrit par :

$$\frac{d\vec{v}_s}{dt} = \frac{q_s}{m_s} (\vec{E} + \vec{v}_s \times \vec{B}_0) \quad (\text{IV.23})$$

On considère le régime de réponse harmonique linéaire du plasma à une perturbation engendrée par une onde de fréquence ω et l'équation Eq.(IV.23) dans les trois directions spatiales conduit à :

$$\begin{cases} -i\omega v_x & = & \frac{q_s}{m_s} (E_x + v_y B_0) \\ -i\omega v_y & = & \frac{q_s}{m_s} (E_y - v_x B_0) \\ -i\omega v_z & = & \frac{q_s}{m_s} E_z \end{cases} \quad (\text{IV.24})$$

où on définit le champ magnétique de confinement par $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. La fréquence cyclotronique des particules est $\Omega_{cs} = \frac{q_s B_0}{m_s}$ et en passant du système de coordonnées (e_x, e_y, e_z) au système tournant $(e_+ = (e_x + ie_y)/\sqrt{2}, e_- = (e_x - ie_y)/\sqrt{2}, e_z)$, on obtient :

$$\begin{cases} -i\omega v_{\pm} (\omega \mp \Omega_{cs}) & = & \frac{q_s}{m_s} E_{\pm} \\ -i\omega v_z & = & \frac{q_s}{m_s} E_z \end{cases} \quad (\text{IV.25})$$

En injectant ces solutions dans l'équation Eq.(IV.22) on obtient le tenseur $\vec{\sigma}$ dans la base (e_+, e_-, e_z) :

$$\vec{\sigma} = i\epsilon_0 \sum_s \omega_{ps}^2 \begin{pmatrix} 1/((\omega - \Omega_{cs}) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(\omega + \Omega_{cs}) & 0 \\ 0 & 0 & 1/\omega \end{pmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

ce qui injectée dans les différentes bases conduit à :

$$\bar{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{pmatrix} \overset{(e_+, e_-, e_z)}{R} & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{(e_x, e_y, e_z)}{S} & -iD & 0 \\ iD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

avec

$$\begin{aligned} R &= 1 - \sum_s \omega_{ps}^2 / (\omega(\omega - \Omega_{cs})) & ; & \quad S = 1/2(R + L) \\ L &= 1 - \sum_s \omega_{ps}^2 / (\omega(\omega + \Omega_{cs})) & ; & \quad D = 1/2(R - L) \\ P &= 1 - \sum_s \omega_{ps}^2 / \omega^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

IV. 1. 2. 3 Relation de dispersion : polarisation mode O/mode X

Reprenons l'équation d'onde dans l'espace de Fourier en définissant l'indice de réfraction $\vec{n} = \frac{\vec{k}c}{\omega}$ et le tenseur $\bar{K} = \bar{\epsilon}/\epsilon_0$:

$$\vec{n} \times \vec{n} \times \vec{E} + \bar{K} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{IV.29})$$

On suppose toujours un plasma homogène confiné dans la direction e_z et on peut supposer une propagation de l'onde dans le plan (e_x, e_z) :

$$\begin{cases} n_x = n \sin(\theta) \\ n_y = 0 \\ n_z = n \cos(\theta) \end{cases} \quad (\text{IV.30})$$

L'équation d'onde Eq.(IV.20) devient :

$$M\vec{E} = \begin{pmatrix} S - n^2 \cos^2(\theta) & -iD & n^2 \cos(\theta) \sin(\theta) \\ iD & S - n^2 & 0 \\ n^2 \cos(\theta) \sin(\theta) & 0 & P - n^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{IV.31})$$

La relation de dispersion correspond à $\det(M) = 0$. En rétro-diffusion Doppler, l'onde se propage perpendiculairement aux lignes de champ ($\theta = \pi/2$). Pour une onde polarisée en mode O (Ordinaire), le champ électrique est parallèle au champ magnétique de confinement et pour une onde polarisée en mode X (eXtraordinaire), celui-ci est perpendiculaire au champ magnétique de confinement. On obtient ainsi deux indices optiques pour la relation de dispersion $k^2 = n_{O/X}^2 \frac{\omega^2}{c^2}$:

En mode O

En considérant une onde se propageant perpendiculairement ($\theta = \pi/2$) et un champ électrique parallèle aux lignes de champ ($\vec{B} = B\vec{e}_z$) l'équation Eq.(IV.31) devient :

$$\begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & P - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{pmatrix} = 0 \implies (P - n^2)E_z = 0 \implies n_O^2 = 1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{\omega^2} \quad (\text{IV.32})$$

On peut aisément définir la fréquence de coupure pour laquelle l'onde devient évanescence comme $\omega = \omega_p = \sqrt{\omega_{pi}^2 + \omega_{pe}^2}$.

En mode X

En considérant une onde se propageant toujours perpendiculairement aux lignes de champ mais avec un champ électrique perpendiculaire au champ magnétique, l'équation Eq.(IV.31) devient :

$$\begin{pmatrix} S & -iD & 0 \\ iD & S - n^2 & 0 \\ 0 & 0 & P - n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{cases} SE_x - iDE_y = 0 \\ iDE_x + (S - n^2)E_y = 0 \end{cases} \implies n_X^2 = \frac{RL}{S} \quad (IV.33)$$

Dans ce cas, le champ magnétique influence la propagation de l'onde et ainsi la définition de la fréquence de coupure n'est plus triviale. On a deux fréquences de coupure données par $\omega_p^2 = \omega^2 - \omega_c\omega$ et $\omega_p^2 = \omega^2 + \omega_c\omega$. En négligeant les solutions non physiques de ces polynômes, on obtient la fréquence de coupure haute (H) et la fréquence de coupure basse (L) :

$$\begin{aligned} \omega_H &= \frac{\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2} \\ \omega_L &= \frac{-\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 + 4\omega_p^2}}{2} \end{aligned} \quad (IV.34)$$

On note également l'existence d'une asymptote en $k \rightarrow \infty$ appelée pulsation hybride haute $\omega_{SH} = \sqrt{\omega_c^2 + \omega_p^2}$.

Les deux relations de dispersion sont présentées en figure Fig.(IV.3) en notant les zones dites "évanescences" ainsi que les différentes pulsations de coupure. Dans les deux cas, on note l'existence d'une asymptote pour $\omega \rightarrow \infty$ définie par $k = \omega/c$.

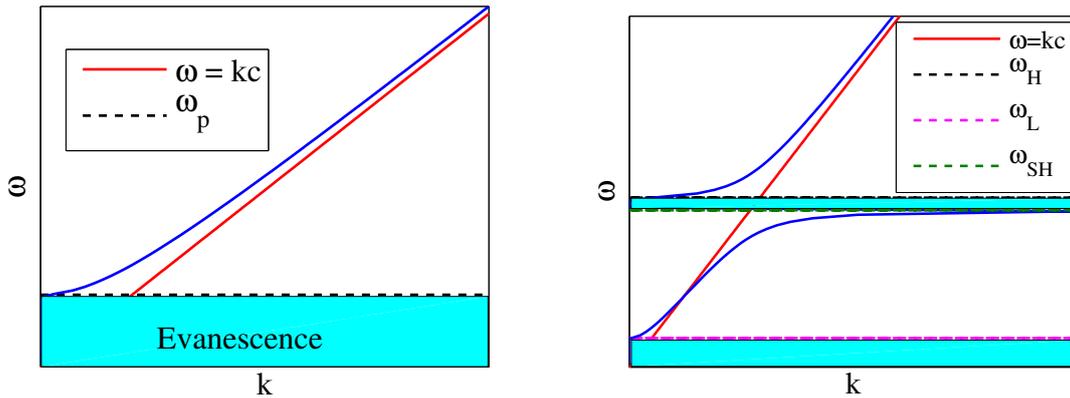


Figure IV.3 – Relation de dispersion mode 0/mode X

On note ainsi une importante différence entre les fréquences de coupures des deux modes. En effet, en mode O, la fréquence de coupure étant égale à la fréquence du plasma, cela ne permet de sonder le plasma que jusqu'au maximum de densité (près du coeur). La dépendance de la fréquence haute du mode X à la fréquence cyclotronique et donc au champ magnétique ($\propto 1/R$) permet de sonder plus loin dans le plasma mais nécessite toutefois des fréquences bien supérieures au mode O (cf Fig.(IV.4)).

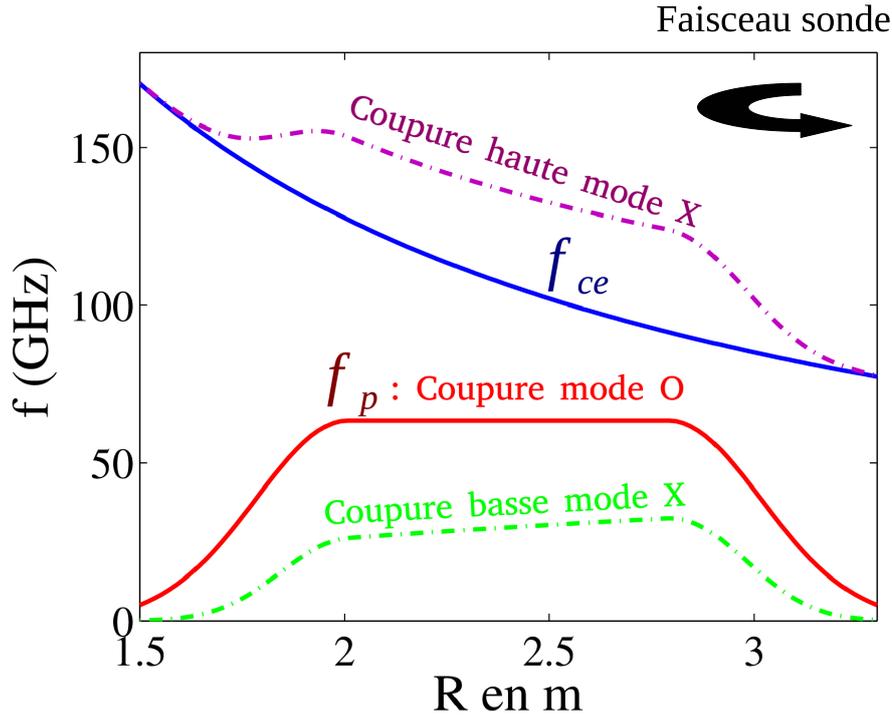


Figure IV.4 – Profils des fréquences de coupure en mode O/X en fonction du grand rayon du plasma et pour un diagnostic situé côté faible champ magnétique. Les dimensions considérées ici sont celles de Tore Supra.

IV. 2 Expérience de rétro-diffusion Doppler

IV. 2. 1 Caractéristique du réflectomètre Doppler

La réflectométrie Doppler, également appelée rétro-diffusion Doppler, est une technique micro-onde de détection des fluctuations de densité en mouvement dans le plasma. Dans le cas de la réflectométrie classique, le faisceau micro-onde est envoyé en incidence normale par rapport à la couche de coupure et sonde le plasma jusqu'à sa couche de coupure où le faisceau est réfléchi (indice optique nul $n = 0$, cf section (IV. 1. 2)). En plaçant l'antenne réceptrice très proche de celle d'émission, on s'assure que le signal détecté est majoritairement le signal réfléchi. Dans le cas de la réflectométrie Doppler, le faisceau micro-onde est émis avec une incidence oblique par rapport à la normale de la couche de coupure. L'onde réfléchie n'est alors pas détectée par l'antenne de réception située au même endroit que l'antenne d'émission et seul le signal rétro-diffusé par les fluctuations de densité à proximité de la couche de coupure sera collecté. Les processus de rétro-diffusion respectent la loi de Bragg (Eq.IV.1) liant la fluctuation observée au nombre d'onde du faisceau incident $k = -2k_i$. Cette propriété permet une sélectivité en nombre d'onde des fluctuations de densité détectées. Ce nombre d'onde peut varier en changeant légèrement l'angle d'incidence de l'onde émise par l'antenne et la position radiale de la couche de coupure est modifiée en variant la fréquence de l'onde sonde (cf section (IV. 1. 2)). Le signal mesuré est donc proportionnel à l'intensité des fluctuations de densité au nombre d'onde sélectionné et le spectre en fréquence de ce signal est décalé par effet Doppler ce qui donne accès à la vitesse des fluctuations de densité dans la zone proche de la couche de coupure. Les fluctuations sont supposées être alignées aux lignes de champ magnétique ($k_{\parallel} = 0$). Afin de sélectionner des fluctuations perpendiculaire aux lignes de champ magnétique et de maximiser l'amplitude du signal rétro-diffusé, le faisceau a également une incidence toroidale

fixe lui permettant d'avoir un axe de visé perpendiculaire aux lignes de champ magnétique (Fig.(IV.5)).

Plusieurs machines telles que ASDEX [61], FT-2 [62] et DIII-D [63] sont équipées de ce

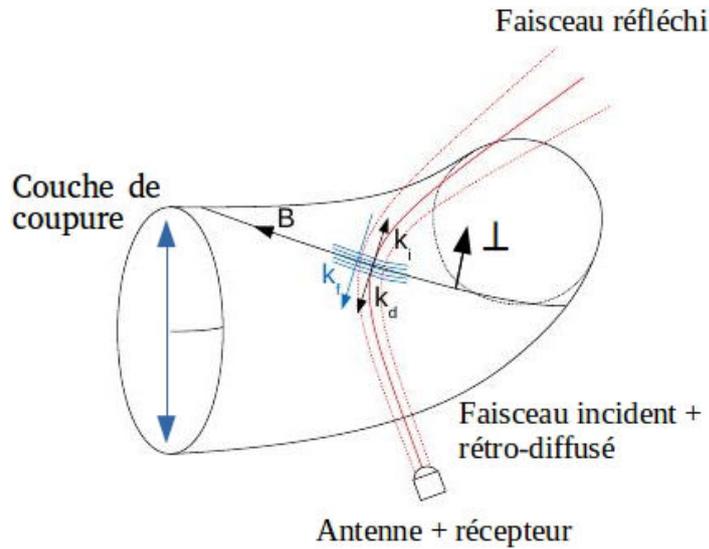


Figure IV.5 – Propagation du faisceau Doppler avec réflexion à la couche de coupure perpendiculaire aux lignes de champ magnétique.

système. Sur le tokamak Tore Supra, deux systèmes de réflectométrie Doppler sont installés. Le premier, nommé DIFDOP [17], est situé du côté faible champ du tokamak et permet une visée dans le plan équatorial. Il est composé d'un canal utilisant la bande de fréquence V (50 – 75GHz) en polarisation ordinaire (notée mode O) et d'un autre travaillant avec la bande W (75 – 110GHz) en polarisation extraordinaire (notée mode X). Un second système, installé en 2010 et nommé DREVE, est installé en haut de la machine avec une visée verticale et sonde le plasma avec la bande V en mode O. Les signaux des trois canaux peuvent être acquis simultanément. Le schéma électronique de génération du faisceau est identique pour les deux lignes de visé et est donné en figure Fig.(IV.6). La source micro-onde est un synthétiseur

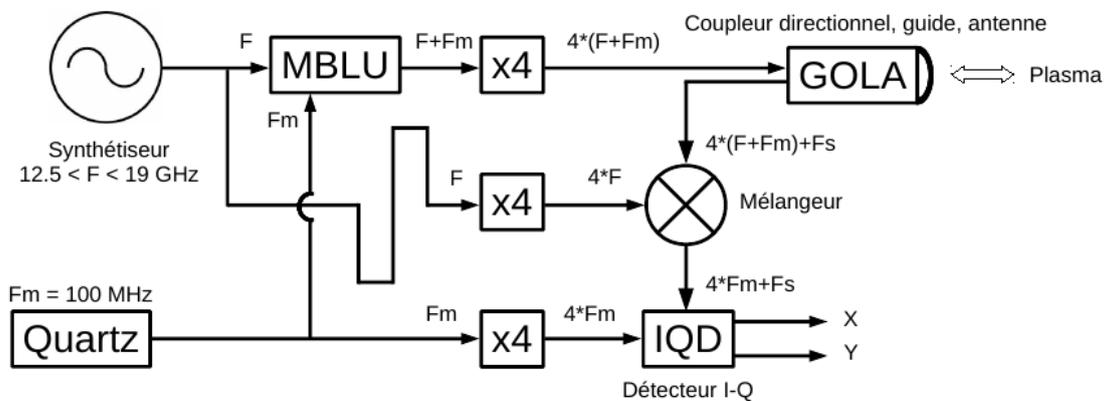


Figure IV.6 – Schéma électronique simplifié des lignes DIFDOP et DREVE en mode O. Pour le mode X, les facteurs d'amplification par $\times 4$ deviennent $\times 6$. [17]

qui produit des signaux très stables dont la fréquence est comprise entre $F = 12.5$ et $F =$

19GHz, programmée par l'utilisateur. Le signal issu de la source est séparé en deux parties dont l'une constitue une référence et l'autre est destinée à sonder le plasma. Des multiplieurs de facteur 4 (respectivement 6) sont utilisés pour atteindre la gamme de fréquence adaptée pour la propagation du faisceau dans le plasma en polarisation O (respectivement X) (cf section (IV. 1. 2)). Enfin, un coupleur directionnel est utilisé pour coupler le signal au cornet émetteur dans l'antenne. La polarisation de l'onde est sélectionnée par l'orientation du guide à l'entrée du cornet. Il est noté que dans le système DIFDOP, placé dans le plan équatorial, les signaux en polarisations O et X sont couplés dans la même antenne au moyen d'une grille polarisante. Enfin, le faisceau micro-onde, émis vers le plasma par l'ensemble GOLA (gaussian optics lens antenna), est un faisceau gaussien dont la particularité est de conserver son caractère au cours de sa propagation. On définira donc une enveloppe gaussienne de ce faisceau autour de la zone de mesure dans la suite de ce travail.

IV. 2. 2 Détection hétérodyne du champ rétro-diffusé

Le signal issue de la diffusion par les fluctuations et mesuré par le diagnostic est de très faible puissance par rapport au faisceau incident :

$$|\vec{E}_{diff}| \ll |\vec{E}_{i0}| \quad (IV.35)$$

Afin d'améliorer la détection des fluctuations, on utilise un système de détection hétérodyne, consistant à mélanger dans le détecteur quadratique (soit sensible au carré du champ électrique) le champ diffusé avec un oscillateur local, servant de référence, et décalé en fréquence :

$$\vec{E}_{OL} = E_{OLE} e^{-2i\pi(F+F_m)t} \quad (IV.36)$$

Ce décalage en fréquence du signal du synthétiseur est réalisé par un modulateur à bande latérale unique (MBLU), qui produit le signal de fréquence $F + F_m$, avec $F_m = 100MHz$ étant la fréquence d'oscillation du quartz qui alimente le MBLU. Après rétro-diffusion dans le plasma, la puissance mesurée dans le détecteur s'écrit :

$$|\vec{E}_{diff} + \vec{E}_{OL}|^2 = |\vec{E}_{OL}|^2 + |\vec{E}_{diff}|^2 + 2|\vec{E}_{diff} \dot{\vec{E}}_{OL}^*| \quad (IV.37)$$

Le terme $|\vec{E}_{diff}|^2$ est négligeable devant les autres termes et le terme $|\vec{E}_{OL}|^2$ est connu. Ainsi le terme détecté est le terme de battement $2\vec{E}_{diff} \dot{\vec{E}}_{OL}^* = \int E_i E_{OLE} e^{-2i\pi F_m t} n(\vec{r}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 r$. Sa détection permet de gagner considérablement en sensibilité de la mesure tout en accédant directement au champ diffusé proportionnel à la transformée de Fourier des fluctuations de densité. De plus, le décalage en fréquence F_m a une valeur bien supérieure aux fréquences typiques du signal diffusé ($\sim 100kHz$) et permet de conserver une information complète sur le contenu fréquentiel du signal diffusé, en particulier sur son sens relativement au signal de référence. Le fait d'utiliser un F_m grand devant le décalage Doppler typique augmente également la qualité des signaux par rapport à l'observation directe du contenu Doppler dans la mesure où le bruit électronique du mélangeur diminue aux hautes fréquences. Le signal recueilli après démodulation est multiplié dans le détecteur I-Q par les deux signaux de référence $\cos(2\pi F_m t)$ et $\sin(2\pi F_m t)$ et forme directement le signal complexe :

$$i_k(t) \propto \int_V n(\vec{r}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^3 \vec{r} \quad (IV.38)$$

où V est le volume défini par la superposition du faisceau sonde et de l'oscillateur local.

IV. 2. 3 Définition de la localisation radiale et du nombre d'onde de mesure.

Lors d'une mesure de rétro-diffusion Doppler, l'expérimentateur n'a pas directement accès à la position radiale de la mesure ni au nombre d'onde de la fluctuation détectée. Il utilise un code de tracé de rayon [64] permettant de modéliser la propagation du faisceau sonde dans le plasma et de calculer la position radiale ainsi que le nombre d'onde du faisceau à la couche de coupure.

Lors de sa propagation, le champ électrique de l'onde incidente s'amplifie à l'approche de

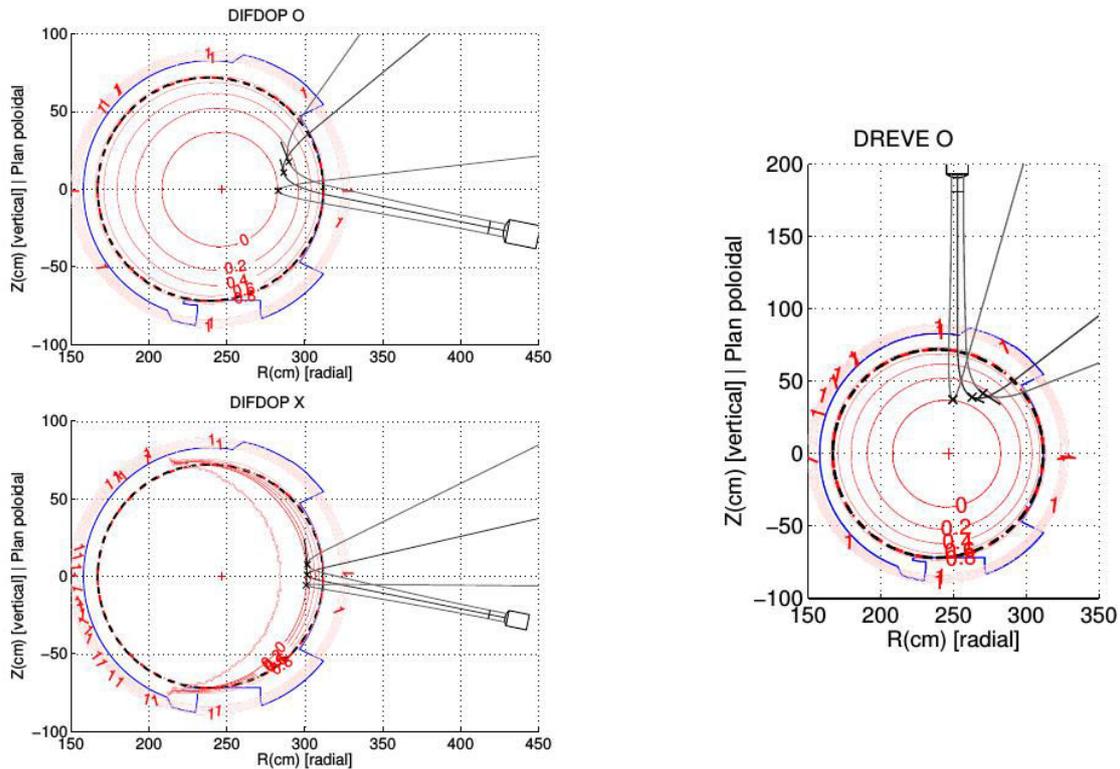


Figure IV.7 – Exemple de résultat du tracé de rayon [64] pour la ligne DIFDOP en mode O et X et pour la ligne DREVE en mode O. Les contours rouges donnent la valeur de l'indice optique.

la couche de coupure (section IV. 1. 2). La dépendance du champ électrique diffusé au champ électrique de l'onde incidente (section (IV. 1. 1. 2)) est donc à l'origine d'une amplification des phénomènes de rétro-diffusion à l'approche de la couche de coupure. On peut dès lors obtenir une bonne évaluation de la localisation de la mesure en déterminant la position du point de rebroussement de l'onde sonde dans un plasma non perturbé à l'aide d'un code de tracé de rayon. Le code utilisé est une version améliorée d'un code de tracé de rayon qui permet de traiter la propagation d'un faisceau Gaussien dans la cadre de l'approximation WKB (valide tant que la longueur d'onde reste très inférieure aux longueurs de variation d'indice). Il prend en compte les indices optiques en mode O et en mode X et introduit une équation supplémentaire sur la phase complexe du faisceau, l'équation de l'eikonale [64]. Le faisceau gaussien, dont l'extension perpendiculaire est caractérisée par sa largeur (son waist w) est simulé par un ensemble de rayons qui se propagent de façon interdépendante dans un plasma à trois dimensions. Ce plasma est caractérisé par les profils de densité mesurés pendant le choc et par l'équilibre

magnétique correspondant.

Les figures Fig.IV.7 montrent des exemples de tracé du rayon central et de deux rayons périphériques du faisceau pour le système DIFDOP en mode O et X et pour le système DREVE. La position radiale du point de rebroussement du faisceau et le nombre d'onde des fluctuations détectées sont définis par la propagation du rayon central. Une propriété de la réfraction est que le point de rebroussement n'atteint jamais la surface de coupure ($n_{O/X} = 0$) lorsque l'incidence du faisceau n'est pas normale. De plus, la divergence du faisceau et la courbure des surfaces magnétiques font que l'angle d'incidence des rayons varie au sein même du faisceau. La distribution en position de rebroussement des différents rayons donne une première évaluation de l'extension radiale de la mesure, et permet de définir une résolution radiale minimale notée $\delta\rho_{DBS}$. Il en est de même pour les résolutions poloidales et toroidales. Dans le volume de mesure défini par la largeur du faisceau de l'onde sonde, les processus de rétro-diffusion ont lieu sur différents nombres d'onde en raison des angles d'incidence légèrement différents des rayons constituant le faisceau sonde. Un rayon quasi perpendiculaire à la surface iso-indice sélectionnera les fluctuations de faible k alors qu'un rayon plus tangent sélectionnera les plus grands k . L'extension du faisceau au cours de sa propagation permet ainsi de déterminer une résolution en nombre d'onde notée δk_{DBS} .

Pour plusieurs angles d'incidences et pour plusieurs fréquences de faisceau, le tracé de rayon donne accès aux localisations radiales, poloidales et toroidales des mesures ainsi qu'au nombre d'onde mesuré et à la résolution du diagnostic.

IV. 2. 4 Interprétation des signaux expérimentaux.

La dernière étape d'extraction de la vitesse perpendiculaire du plasma est l'analyse des signaux électriques récupérés. Comme nous l'avons expliqué, le système de détection permet d'obtenir un signal complexe composé donc d'une partie réelle, imaginaire et de son module. La figure Fig.(IV.8) montre à titre d'exemple des signaux temporels mesurés pendant un choc de Tore Supra. Le signal collecté est un signal aléatoire composé de bouffées d'amplitude et

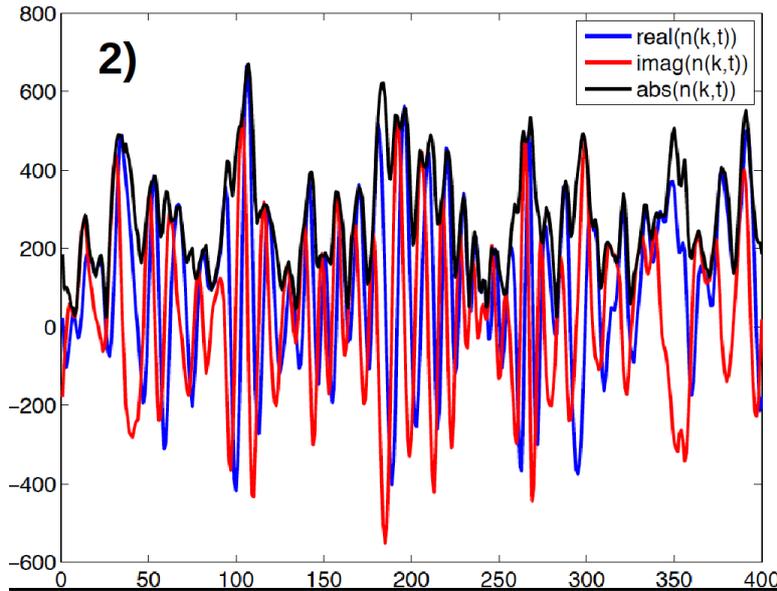


Figure IV.8 – Variation temporelle de la partie réelle, imaginaire et du module du signal électrique mesuré par le système de détection du réflectomètre Doppler.

temps caractéristiques ayant une distribution assez large. Ces bouffées pendant lesquelles la

quadrature de phase entre le signal réel et imaginaire est bien caractérisée correspondent à la détection d'une structure de nombre d'onde k_{\perp} passant dans le faisceau du diagnostic. La vitesse de la structure détermine la période de l'oscillation dans la bouffée différente d'une bouffée à l'autre. Ainsi, une analyse fréquentielle de ce signal permet d'extraire l'information qui nous intéresse : le niveau de turbulence et la vitesse des fluctuations dans le plasma.

Deux méthodes permettent d'extraire la vitesse moyenne (en temps) de ce signal complexe. La première est d'utiliser la dérivée de la phase du signal complexe en fonction du temps. On exprime le signal complexe sous sa forme :

$$i_k(t) = Re(t) + iIm(t) = A(t)e^{i\Phi(t)} \quad (IV.39)$$

Sachant que par définition $\tan(\Phi(t)) = \frac{Im(t)}{Re(t)}$, on calcule la vitesse des fluctuations comme :

$$v_{\perp} = \frac{1}{k_{\perp}} \frac{d\Phi}{dt}(t) = \frac{1}{k_{\perp}} \frac{\frac{dIm}{dt} Re - \frac{dRe}{dt} Im}{A^2} \quad (IV.40)$$

On a accès à l'évolution temporelle de la vitesse. Cependant, l'évaluation de la vitesse par cette méthode pose un problème majeur : en raison de sa dépendance à l'inverse de l'amplitude, une décroissance brutale de l'amplitude du signal aboutit à une divergence de la solution. Ainsi cette méthode n'est pas idéale pour estimer la vitesse moyenne.

L'autre méthode est une méthode de Fourier. On calcule la transformée de Fourier temporelle du signal afin d'en extraire une densité spectrale de puissance (PSD). Cette méthode a une haute résolution mais présente un bruit pouvant être préjudiciable à l'analyse. Une autre méthode de Fourier appelé méthode WELCH (fonction `pwelch` en MATLAB) sera préférée. Il s'agit d'effectuer un découpage du signal en segment ayant un certain recouvrement. On applique sur chaque segment un fenêtrage temporel de période T . L'effet de la fenêtre est de donner plus d'importance aux valeurs au centre des segments qu'au bord. Nous choisissons d'utiliser une fenêtre de Hamming :

$$h(t) = \begin{cases} 0.54 + 0.46 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) \\ 0 \end{cases} \quad (IV.41)$$

La densité spectrale de puissance de chaque segment est calculée et la moyenne sur l'ensemble des segments permet d'obtenir le spectre en fréquence du signal complexe. On présente en figure Fig.(IV.9) des spectres typiques obtenus dans les plasmas de Tore Supra. Ces spectres en fréquence sont généralement la superposition de la composante Doppler (pic à la fréquence f_0) qui nous intéresse et de diverses autres composantes, principalement centrées autour de la fréquence nulle. On voit notamment que le pic Doppler présente la largeur la plus importante. Selon la configuration du diagnostic, on interprète ces composantes centrales comme la résultante de plusieurs phénomènes :

- une réflexion directe de l'onde sonde sur la couche de coupure principalement à faible incidence du faisceau sonde.
- une diffusion vers l'avant (associée aux structures de grande échelle) suivie ou précédée d'une réflexion sur des éléments de la machine ou sur la couche de coupure
- une diffusion vers l'arrière tout le long de la propagation du faisceau et associée aux structures de petite échelle (grand k_r)

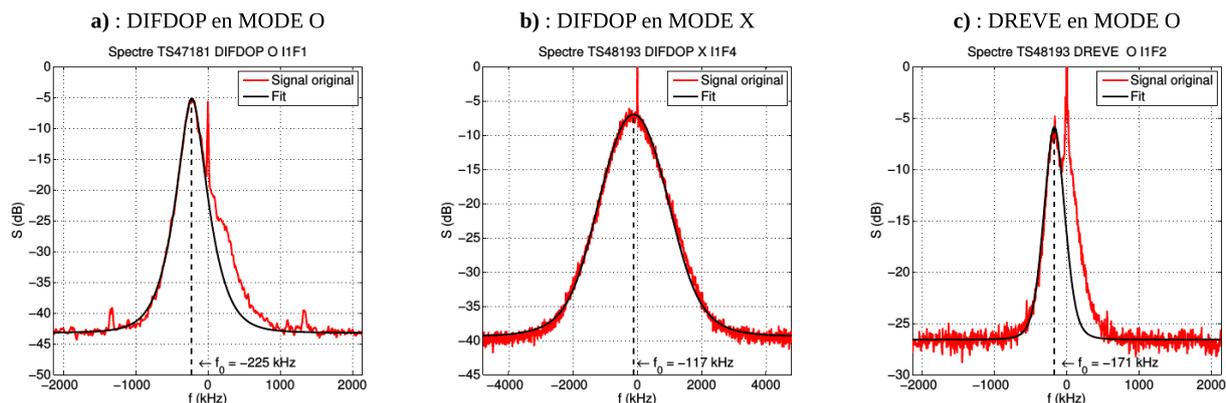


Figure IV.9 – Exemple de spectres expérimentaux obtenus sur les deux lignes de visé de Tore Supra : a) et b) : DIFDOP ; c) DREVE. [65]

Le contenu dont la fréquence est proche de zéro est difficile à exploiter et gêne l'analyse de la composante Doppler. Ne seront alors exploiter que des données dont les spectres ont une composante Doppler prépondérante. Une phase de “nettoyage” des spectres est opérée (fit des spectres Fig.(IV.9)) afin d'isoler la composante Doppler. Cette procédure ne sera pas appliquée dans le cadre du développement du diagnostic synthétique qui ne modélise pas les effets liés à la propagation du faisceau.

Chapitre V

Diagnostic synthétique de rétro-diffusion Doppler : mesure de vitesse perpendiculaire dans le code fluide TOKAM-3X

Dans le cadre de la comparaison simulation/expérience, nous avons développé un outil de diagnostic synthétique permettant de reproduire une mesure expérimentale de rétro-diffusion Doppler dans un plasma numérique. Après avoir présenté le code TOKAM-3X sur lequel nous effectuons notre étude, nous présentons la validation de ce modèle de diagnostic synthétique idéal sur des perturbations analytiques. Nous terminons par l'analyse d'un résultat expérimental que nous tenterons de retrouver dans les simulations fluides turbulentes du code TOKAM-3X.

V. 1 Simulations 3D fluides turbulentes : le code TOKAM-3X

TOKAM-3X est un code fluide en trois dimensions de simulation de la turbulence plasma dans le bord et dans la Scrape-Off-Layer (SOL) d'un tokamak. Son modèle dépend de peu de paramètres et permet de simuler de manière auto-consistante le transport turbulent aux différentes échelles. Il a été développé afin d'étudier notamment les propriétés 3D du transport turbulent et leurs effets sur les asymétries poloidales du plasma de bord des tokamaks. Un important travail de validation de ce code a été effectué dans le cadre de la thèse de C. Colin [66] et c'est dans cette continuité que sera utilisé notre diagnostic synthétique sur des simulations turbulentes de TOKAM-3X. Une étude des asymétries du transport de la turbulence ([23]), une comparaison au Mistral Base Case ([58]) et une étude de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz comparée au code ESPOIR ([67],[68]) ont notamment été menées.

Dans cette section, nous présenterons rapidement les équations fluides du code TOKAM-3X ainsi que les différentes hypothèses caractérisant son modèle.

V. 1. 1 Hypothèses du modèle de dérive fluide TOKAM-3X

Dans le code TOKAM-3X, le plasma de bord est décrit par un modèle à deux fluides s'appuyant sur les équations simplifiées de Braginskii [33] pour un fluide ionique (masse m_i) et un fluide électronique (masse $m_e \ll m_i$).

La fréquence typique des phénomènes étudiés (fluctuations turbulentes) ω est considérée

comme très inférieure à la fréquence cyclotronique.

$$\frac{\omega}{\omega_{ci}} = \epsilon_\omega \ll 1 \quad (\text{V.1})$$

Une séparation d'échelle entre le rayon de Larmor caractéristique ($\rho_L \sim 1mm$) et la taille caractéristique des structures turbulentes ($l_\perp \sim 0.1 - 10cm$) est appliquée :

$$\frac{\rho_L}{l_\perp} = \epsilon_\omega \ll 1 \quad (\text{V.2})$$

Ces deux hypothèses permettent d'effectuer le développement des vitesses de dérive et d'explicitier le transport convectif perpendiculaire et de séparer la vitesse en deux composantes (section (I. 2. 2)) :

$$\vec{u}_\alpha = u_{\parallel,\alpha} \vec{b} + \vec{u}_{\perp,\alpha} \quad (\text{V.3})$$

où $\alpha = i, e$.

Sachant que la taille caractéristique des structures turbulentes est bien plus grande que la longueur de Debye ($l_\perp \gg \lambda_D$), cela nous permet de faire deux hypothèses majeures :

- quasi-neutralité $n \approx Zn_i$.
- la gaine n'a pas besoin d'être explicitement décrite et les conditions limites de Bohm suffisent à la modéliser.

En rappelant que $m_e \ll m_i$, les termes d'inertie des électrons dans les équations fluides pourront être négligés.

Enfin, la dernière hypothèse et l'une des plus importantes est que l'on considère la pression magnétique comme très supérieure à la pression cinétique ($\beta = 2\mu_0 p / B^2 \ll 1$). Ainsi, l'effet des fluctuations magnétiques peut être négligé et seules les fluctuations du potentiel électrique sont prises en compte (hypothèse électrostatique). On considère un potentiel vecteur constant ($\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = 0$) et on définit le champ électrique comme le gradient du potentiel électrostatique :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi \quad (\text{V.4})$$

V. 1. 2 Equation du modèle fluide de TOKAM-3X

Les équations du code TOKAM-3X dérivent des équations fluides de Braginskii simplifiées en utilisant les hypothèses précédentes. La version actuelle du code modélise l'évolution d'un plasma isotherme :

$$T_i = T_e = T_0 \quad (\text{V.5})$$

où T_0 est une température de référence identique pour les électrons et les ions.

Le jeu d'équations fluides du code TOKAM-3X est semblable à celui de SOLEDGE2D (Chapitre II) à la différence que l'on ne moyenne pas les termes non-linéaires des crochets de Poisson ce qui permet l'établissement d'un régime turbulent. On rappelle la définition des vitesses et des courants dans le cadre de l'hypothèse bi-fluide :

$$\vec{u}_\perp^i = \vec{u}_E + \vec{u}_\star^i + \vec{u}_p^i \quad (\text{V.6})$$

$$\vec{u}_\perp^e = \vec{u}_E + \vec{u}_\star^e \quad (\text{V.7})$$

L'hypothèse de Dimagnetic Cancellation (Annexe **A**) est appliquée (comme dans le cas de SOLEDGE2D) et permet de remplacer la dérive diamagnétique par la vitesse de dérive de gradient courbure :

$$\vec{u}_{\nabla B}^i = \frac{2k_B T_i}{eB^3} \vec{B} \times \vec{\nabla} B \quad (\text{V.8})$$

$$\vec{u}_{\nabla B}^e = -\frac{2k_B T_e}{eB^3} \vec{B} \times \vec{\nabla} B \quad (\text{V.9})$$

L'expression des vitesses électronique et ionique ainsi que l'hypothèse de quasi-neutralité pour un plasma d'hydrogène ($Z = 1$, $n_i = n_e = n$) aboutit à :

$$\vec{j} = j_{\parallel} \vec{b} + ne(\vec{u}_{\star}^i - \vec{u}_{\star}^e) + ne\vec{u}_p^i \quad (\text{V.10})$$

où j_{\parallel} est le courant le long des lignes de champ défini par :

$$j_{\parallel} = e(\Gamma_{\parallel}^i - \Gamma_{\parallel}^e) \quad (\text{V.11})$$

En utilisant l'hypothèse de quasi-neutralité et l'expression des vitesses de dérive, on aboutit à l'équation de conservation de la densité électronique :

$$\partial_t n + \vec{\nabla} \cdot (nu_{\parallel}^e \vec{b}) + \vec{\nabla} \cdot (n(\vec{u}_E + \vec{u}_{\nabla B}^e)) = \vec{\nabla} \cdot (D_n \vec{\nabla}_{\perp} n) + S_{ne} \quad (\text{V.12})$$

La projection dans la direction parallèle des équations de conservation des quantités de mouvement électronique et ionique, l'application des hypothèses précédentes et le calcul des termes du tenseur de Braginskii (Annexe **A**) conduit à :

$$m_i \left[\partial_t \Gamma_{\parallel}^i + \vec{\nabla} \cdot (\Gamma_{\parallel}^i u_{\parallel}^i \vec{b}) + \vec{\nabla} \cdot (\Gamma_{\parallel}^i (\vec{u}_E + \vec{u}_{\nabla B}^i)) \right] = -\nabla_{\parallel} (p_i + p_e) + \vec{\nabla} \cdot (D_{\Gamma} \vec{\nabla}_{\perp} \Gamma_{\parallel}^i) + S_{\Gamma_i} \quad (\text{V.13})$$

Enfin, la conservation de la charge ($\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$) permet de dériver l'équation sur le potentiel via l'opérateur de vorticité et l'équation de conservation de la quantité de mouvement parallèle électronique de dériver la loi d'Ohm généralisée :

$$enj_{\parallel} \eta_{\parallel} - 0.71n \nabla_{\parallel} T_e = -ne \nabla_{\parallel} \phi + \nabla_{\parallel} p_e \quad (\text{V.14})$$

$$\partial_t W + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{W \Gamma_{\parallel}^i}{n} \vec{b} \right) + \vec{\nabla} \cdot (W(\vec{u}_E + \vec{u}_{\nabla B}^i)) = \vec{\nabla} \cdot (j_{\parallel} \vec{b}) + \vec{\nabla} \cdot (n(\vec{u}_{\nabla B}^i - \vec{u}_{\nabla B}^e)) + \vec{\nabla} \cdot (D_W \vec{\nabla}_{\perp} W) \quad (\text{V.15})$$

Dans les 3 équations d'évolution temporelle, des termes de transport diffusif prenant la forme de laplaciens perpendiculaires sont ajoutés artificiellement. Ceux-ci décrivent tout les processus de transport non décrits par le modèle, comme par exemple le transport collisionnel. En pratique, la contribution de ce transport diffusif est faible devant la turbulence, mais il permet de bloquer les cascades d'énergie aux petites échelles.

V. 1. 3 Conditions limites et géométrie

Le code TOKAM-3X est capable de traiter plusieurs types de géométrie et donc d'équilibre magnétique (Circulaire ou Divertor). Il s'appuie sur l'hypothèse d'un champ magnétique axisymétrique et les maillages considérées sont alignés aux surfaces magnétiques (comme dans le cas de SOLEDGE2D, section (II. 3)). La définition du champ magnétique s'appuie sur la définition d'une carte d'équilibre du flux magnétique poloidal ψ dont les surfaces de flux sont caractérisées par :

$$\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \psi = 0 \quad (\text{V.16})$$

Les champs magnétiques poloidal et toroidal sont calculés directement par le code via :

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{B}_{tor} + \vec{B}_{pol} \\ &= B_0 R_0 / R \vec{e}_\varphi + \vec{\nabla} \psi \times \vec{\nabla} \varphi\end{aligned}\tag{V.17}$$

Dans notre cas, nous nous intéresserons à des simulations circulaires avec limiteur infiniment fin. À titre d'exemple, les figures Fig.(V.1) montrent des snapshots de résultats de simulations turbulentes 3D en géométrie divertor (équilibre magnétique du tokamak JET) et limiteur (équilibre magnétique analytique, limiteur infiniment fin).

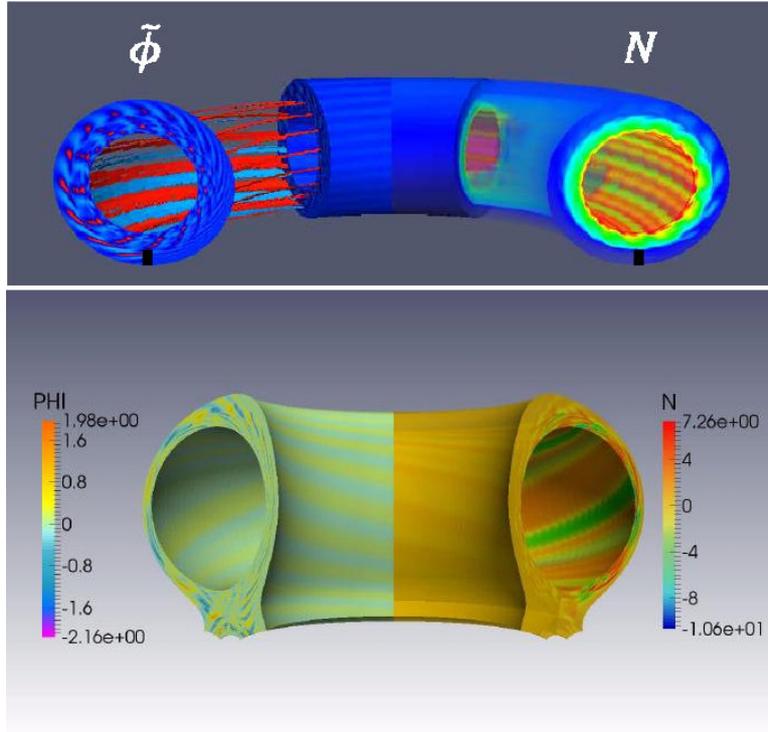


Figure V.1 – Exemples de snapshots des fluctuations de potentiel (gauche) et de densité (droite) de TOKAM-3X réalisés avec PARAVIEW; **Haut** : géométrie limiteur infiniment fin; **Bas** : équilibre magnétique de JET

Nous présentons directement un tableau récapitulatif des conditions limites appliquées dans les directions orthogonales (p) au domaine de calcul dans le modèle numérique du code TOKAM-3X :

	densité	vorticité	moment	potentiel	courant
Coeur	$\partial_p n = 0$	$\partial_p W = 0$	$\partial_p \Gamma_{ } = 0$	$\partial_p \phi = 0$	\emptyset
Mur \perp	$\partial_p n = 0$	$\partial_p W = 0$	$\partial_p \Gamma_{ } = 0$	$\partial_p \phi = 0$	\emptyset
Mur (Bohm)	$\nabla_p^2 n = 0$	$\nabla_p^2 W = 0$	$ \Gamma_{ } \geq nc_s $	\emptyset	$j_{ } = e\Gamma_{ } (1 - \exp(\Lambda - \phi/T_e))$

Pour des raisons de coût numérique, les simulations sont réalisées en quart de tore avec une condition de périodicité dans la direction toroidale. C'est-à-dire que l'on considère une longueur toroidale de $L_\varphi = \pi/2$. Cela a pour effet de rendre résonantes les surfaces magnétiques dont le facteur de sécurité est un multiple de 1/4 (ce qui se manifeste sur les profils par des oscillations radiales correspondant à ces surfaces).

V. 1. 4 Adimensionnement et paramètres de références

Une fois le champ magnétique, le maillage et le domaine de la simulation définis, nous allons chercher à simplifier le modèle en adimensionnant les équations. Nous commençons par rappeler les grandeurs caractéristiques du mouvement des particules dans un champ magnétique :

$$\rho_i = \frac{m_i v_0}{e B_0} \quad (\text{V.18})$$

$$\omega_{ci} = \frac{e B_0}{m_i} \quad (\text{V.19})$$

où la vitesse de référence est la vitesse thermique $v_0 = \sqrt{T_0/m_i} = \rho_i \omega_c$. On fait ici apparaître le champ magnétique de référence B_0 et la température de référence T_0 . On commence par normaliser nos variables spatiales et temporelles grâce à ces grandeurs physiques :

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \omega_{ci} \frac{\partial}{\partial t} \quad (\text{V.20})$$

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{1}{\rho_i} \vec{\nabla} \quad (\text{V.21})$$

Le potentiel ϕ est classiquement défini par rapport à la température de référence T_0 .

$$\Phi \equiv \frac{e\phi}{T_0} \quad (\text{V.22})$$

Les vitesses parallèles sont normalisées par la vitesse thermique $v_0 = \sqrt{T_0/m_i} = \rho_i \omega_c$ et la densité par une valeur de référence n_0 .

$$N \equiv \frac{n_e}{n_0} = \frac{n_i}{n_0} \quad (\text{V.23})$$

On peut normaliser les grandeurs restantes avec tous ces paramètres :

$$J_{\parallel} \equiv \frac{j_{\parallel}}{e n_0 v_0} \quad (\text{V.24})$$

$$G_{\parallel}^{e,i} \equiv \frac{\Gamma_{\parallel}^{e,i}}{n_0 v_0} \quad (\text{V.25})$$

$$P \equiv \frac{p}{n_0 T_0} \quad (\text{V.26})$$

Enfin, la résistivité parallèle et les coefficients de diffusions sont normalisés comme :

$$\eta_{\parallel} \equiv \frac{\eta_{\parallel} e^2 n_0}{m_i \omega_c} \quad (\text{V.27})$$

$$D \equiv \frac{D}{\rho_i^2 \omega_c} \quad (\text{V.28})$$

On exprimera alors toutes les mesures synthétiques de vitesse, de fréquence et de nombre d'onde en fonction de ρ_i et ω_{ci} .

Nous finissons par introduire les paramètres géométriques caractéristiques de la taille du domaine simulé. En notant le petit rayon de référence a (rayon de la séparatrice) et le grand rayon du tore R_0 , on peut définir les paramètres sans dimension suivant :

$$\rho^* = \rho_i / a \quad (\text{V.29})$$

$$A = R_0 / a \quad (\text{V.30})$$

ρ^* et A sont respectivement le rayon de Larmor normalisé et le rapport d'aspect. Dès lors les simulations de TOKAM-3X pour un certain A et un certain ρ^* sont valables pour toutes les machines expérimentales de même paramètre.

V. 2 Diagnostic synthétique de rétro-diffusion DOPPLER

On a pu voir précédemment que l'essentiel de l'information du signal qui nous intéresse est contenu dans la transformée de Fourier des fluctuations de densité ou de potentiel. Cependant, le fait que seul un volume réduit de plasma et une certaine fluctuation de densité ne diffuse la lumière lors d'une expérience de rétro-diffusion Doppler peut influencer la mesure ainsi que l'interprétation de cette dernière. L'objectif ici est de développer un moyen simple de comparer les résultats numériques de différents code de modélisation avec les mesures expérimentales du diagnostic de rétro-diffusion Doppler.

V. 2. 1 Diagnostic synthétique simplifié : diffusion seule

Le terme de battement détecté par le diagnostic (section (IV. 2. 1)) est directement proportionnel à la transformée de Fourier de la densité.

$$E_d(\vec{k}) \propto \int \vec{E}_i(\vec{\rho}) \cdot \vec{E}_{OL}^*(\vec{\rho}) n(\vec{\rho}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} dV \quad (\text{V.31})$$

La superposition des deux champs forme un volume restreint sur lequel la mesure est effectuée. Cette intégrale peut être évaluée à partir des cartes de densité d'une simulation en géométrie toroidale (r, θ, φ) . Une fonction masque peut être définie pour simuler la fonction d'éclairement du diagnostic $(\vec{E}_i(\vec{\rho}) \vec{E}_{OL}^*(\vec{\rho}))$. Cette fonction permet de prendre en compte le faisceau du diagnostic et son extension près de la couche de coupure en modélisant le volume défini par la superposition du faisceau sonde et de l'oscillateur local. On peut évaluer le signal synthétique comme :

$$i_k(t) = \int_r \int_\theta \int_\varphi n(\vec{\rho}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}} M(r, \theta, \varphi) r R dr d\theta d\varphi \quad (\text{V.32})$$

où $\vec{\rho}$ est le vecteur position en coordonnée torique. Le signal synthétique se calcule donc comme le produit de convolution de la transformée de Fourier des fluctuations de densité par la transformée de Fourier de la fonction masque (fonction d'appareil) du diagnostic.

$$i_k(t) = TF(n(r, \theta, \varphi, t) M(r, \theta, \varphi))(\vec{k}, t) = (TF(n) * TF(M))(\vec{k}, t) \quad (\text{V.33})$$

Cette méthode produit une séquence temporelle que l'on peut analyser avec les différents outils dont disposent les expérimentateurs. L'analyse du spectre fréquentiel ainsi obtenu nous permet d'évaluer le décalage Doppler $\Delta\omega_{Dopp} = \vec{k} \cdot \vec{v}$ (section IV. 1. 1. 2) contenant les trois composantes de la vitesse exprimée dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ et dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\perp, \vec{e}_\parallel)$ soit :

$$\begin{aligned} \Delta\omega_{Dopp} &= k_r v_r + k_\theta v_\theta + k_\varphi v_\varphi \\ &= k_r v_r + k_\perp v_\perp + k_\parallel v_\parallel \end{aligned} \quad (\text{V.34})$$

où $\vec{e}_\perp = B_\varphi/B\vec{e}_\theta - B_\theta/B\vec{e}_\varphi$ et $\vec{e}_\parallel = B_\theta/B\vec{e}_\theta + B_\varphi/B\vec{e}_\varphi$. Expérimentalement, les fluctuations sont détectées près de la couche de coupure donc on peut supposer $k_r \sim 0$. De plus, les fluctuations sont supposées être allongées le long des lignes de champ magnétique soit $k_\parallel = 0$. Afin de s'assurer de cette hypothèse, le faisceau Doppler est incliné toroidalement lui conférant une incidence perpendiculaire aux lignes de champ (section (IV. 2. 1)) :

$$\Delta\omega_{Dopp} = k_\perp v_\perp \quad (\text{V.35})$$

Cependant, la vitesse parallèle peut être deux ordres de grandeurs supérieure à la vitesse perpendiculaire ($v_{\perp}/v_{\parallel} \sim 10^{-2}$). Dès lors, même un k_{\parallel} petit pourra influencer le décalage Doppler. Nous chercherons dans quelle mesure notre diagnostic peut être influencé par cet effet. Le vecteur vitesse s'exprime dans la base (r, \perp, \parallel) :

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v_{\parallel}\vec{e}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} + v_r\vec{e}_r \\ &= v_{\parallel}\vec{e}_{\parallel} + \left(-\frac{E_r}{B} + \tilde{v}\right)\vec{e}_{\perp} + v_r\vec{e}_r\end{aligned}\tag{V.36}$$

où \tilde{v} est la partie fluctuante de la vitesse. On définit aussi les vecteurs d'onde dans les différentes bases :

$$\begin{cases} k_{\perp} = b_{\varphi}k_{\theta} - b_{\theta}k_{\varphi} \\ k_{\parallel} = b_{\theta}k_{\theta} + b_{\varphi}k_{\varphi} \end{cases} \implies \begin{cases} k_{\theta} = b_{\varphi}k_{\perp} + b_{\theta}k_{\parallel} \\ k_{\varphi} = -b_{\theta}k_{\perp} + b_{\varphi}k_{\parallel} \end{cases}\tag{V.37}$$

V. 2. 1. 1 Diagnostic synthétique à deux dimensions :

On va s'intéresser dans un premier temps à la mesure synthétique de la vitesse en deux dimensions. Pour cela, on choisira une coupe poloidale des cartes de densité de TOKAM3X. Cela permet de faciliter l'étude en ne sélectionnant qu'une coupe des matrices 3D obtenues en sortie de simulation. Le diagnostic expérimental incliné de façon à avoir un faisceau en incidence perpendiculaire aux lignes de champ permet de mesurer une vitesse perpendiculaire. Dans notre étude, on comparera la vitesse mesurée des fluctuations de densité aux vitesses poloidales du plasma.

On définit la fonction masque $M(r, \theta)$ et on calcule le signal synthétique à partir de la transformée de Fourier 2D d'une coupe poloidale de la densité. On aura accès uniquement aux nombres d'ondes radiaux k_r et poloidaux k_{θ} . À l'instar de l'expérience, on sélectionne le mode $k_r = 0$ afin de représenter la localisation radiale de la mesure près de la couche de coupure :

$$\begin{aligned}i(k_r, k_{\theta}, t) &= \int_r \int_{\theta} n(r, \theta) M(r, \theta) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} r dr d\theta \\ &\stackrel{k_r=0}{=} \int_r \int_{\theta} n(r, \theta) M(r, \theta) e^{im\theta} r dr d\theta\end{aligned}\tag{V.38}$$

où m est le mode poloidale défini par $m = k_{\theta}r$.

Les diagnostics synthétiques s'appuyant sur la résolution de l'équation de Helmholtz [21] ont montré que la fonction d'éclairement possède une enveloppe quasi-gaussienne autour de la couche de coupure. On peut choisir un masque gaussien centré à la couche de coupure souhaitée ou alors créer une fonction plus complexe pour représenter la réflexion près de la couche de coupure (Fig. (V.2)).

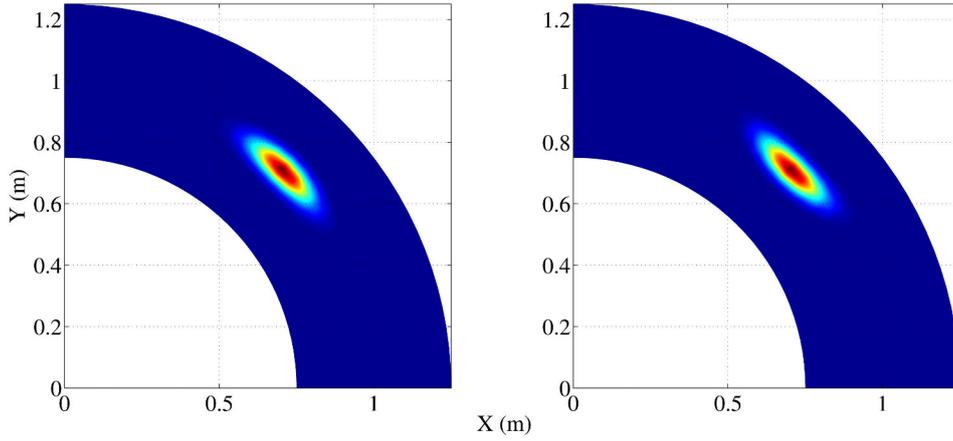


Figure V.2 – Exemple de masque définissant le volume diffusant : masque gaussien (gauche) et Gaussienne tangente à une surface circulaire (droite).

Sachant qu'on applique ce diagnostic synthétique sur une carte 2D et que l'on a accès aux modes poloidaux, le déphasage Doppler que l'on obtiendra sera :

$$\Delta\omega_{Dopp} = k_{\theta}v_{\theta} \quad (\text{V.39})$$

V. 2. 1. 2 Diagnostic synthétique à trois dimensions :

Si on considère maintenant les cartes 3D de la densité de TOKAM3X, on calcule le signal synthétique à partir d'une transformée de Fourier 3D. La sélection du mode $k_r = 0$ permet d'obtenir le signal synthétique $i(k_{\theta}, k_{\varphi}, t)$. On obtient pour un k_{\perp} fixé et en prenant la condition $k_{\parallel} = 0$ un unique couple $(k_{\theta}, k_{\varphi})$ et ainsi un signal synthétique $i_{k_{\perp}}(t)$. Le système Eq.(V.37) devient alors :

$$\begin{cases} k_{\perp} = k_{\theta}b_{\varphi} - k_{\varphi}b_{\theta} \\ k_{\parallel} = k_{\theta}b_{\theta} + k_{\varphi}b_{\varphi} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} k_{\theta} = k_{\perp}b_{\varphi} \\ k_{\varphi} = -k_{\perp}b_{\theta} \end{cases} \quad (\text{V.40})$$

On compare le décalage Doppler attendu dans la simulation avec le décalage Doppler mesuré par le diagnostic soit

$$\Delta\omega_{Dopp} = k_{\perp}v_{\perp} \sim -k_{\perp}E_r/B + \Delta\tilde{\omega} \quad (\text{V.41})$$

Dans cette version du diagnostic, on peut choisir de calculer un masque gaussien aligné ou non aux lignes de champ magnétique. En prenant le système de coordonnées toriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_{\theta}, \vec{e}_{\varphi})$ et le système $(\vec{e}_r, \vec{e}_{\perp}, \vec{e}_{\parallel})$, on peut calculer le volume de plasma éclairé par :

$$\begin{aligned} M(r, \theta, \varphi) &= e^{-\frac{(r-r_c)^2}{2\sigma_r^2}} e^{-\frac{(\theta-\theta_c)^2}{2\sigma_{\theta}^2}} e^{-\frac{(\varphi-\varphi_c)^2}{2\sigma_{\varphi}^2}} \\ M(r, \theta, \varphi) &= e^{-\frac{(r-r_c)^2}{2\sigma_r^2}} e^{-\frac{(l_{\perp}-l_{\perp,c})^2}{2\sigma_{\perp}^2}} e^{-\frac{(l_{\parallel}-l_{\parallel,c})^2}{2\sigma_{\parallel}^2}} \end{aligned} \quad (\text{V.42})$$

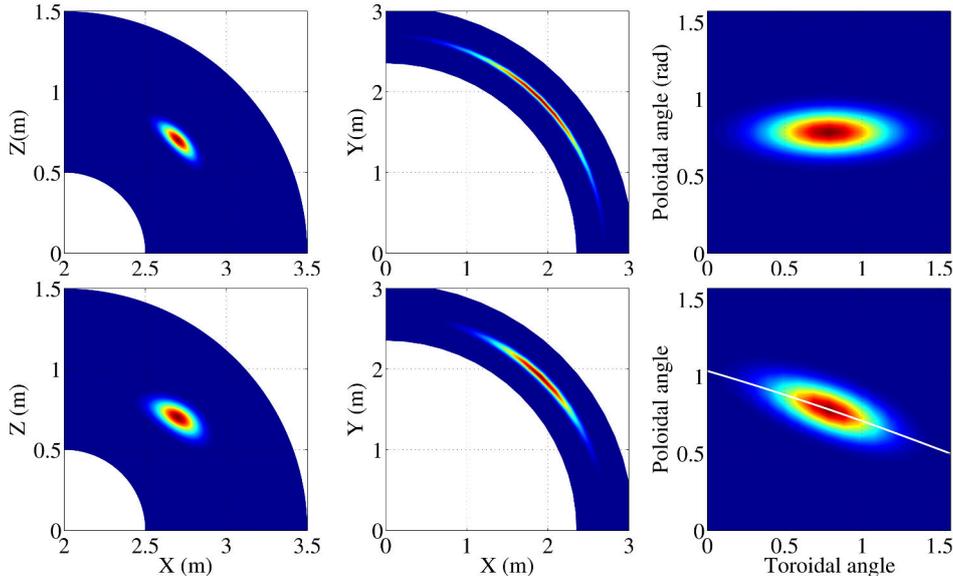


Figure V.3 – Exemple de masque définissant le volume diffusant : masque gaussien non aligné (en haut) et masque aligné (en bas).

V. 2. 2 Validation analytique du diagnostic synthétique 2D

V. 2. 2. 1 Validation sur une perturbation de caractéristiques connues.

Dans cette section, le diagnostic synthétique est appliqué à une perturbation analytique dont on choisit les caractéristiques et qu'on compare aux caractéristiques mesurées. Nous commençons par définir une perturbation sinusoidale en mouvement avec un certain profil de vitesse. On peut choisir une somme de modes poloidaux ou un unique mode avec un profil de vitesse. On définit la perturbation comme :

$$\delta(r, \theta, t) = \frac{1}{N_m} \sum_{m_0} \cos \left(m_0 \left(\theta - \frac{v_{\theta} t}{r} \right) \right) \quad (\text{V.43})$$

On choisit un profil radial de vitesse comme par exemple (Fig.(V.4)) :

$$v_{\theta} = v_0 \frac{r}{r_0} \quad (\text{V.44})$$

$$v_{\theta} = v_0 \sin \left(\frac{2\pi(r - r_{min})}{r_{max} - r_{min}} \right) \frac{r}{r_0} \quad (\text{V.45})$$

$$v_{\theta} = \begin{cases} v_0 \frac{r}{r_0} & \leftarrow r < r_0 \\ -v_0 \frac{r}{r_0} & \leftarrow r > r_0 \end{cases} \quad (\text{V.46})$$

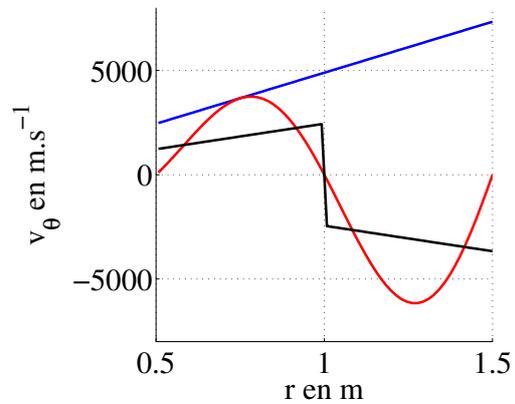


Figure V.4 – Profils de vitesse utilisés pour les tests : linéaire (bleu), sinusoidal (rouge) ou linéaire avec fort cisaillement (noir)

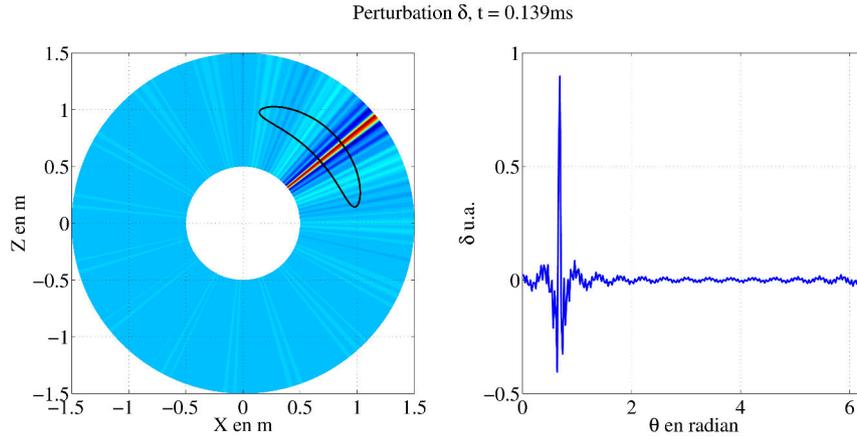


Figure V.5 – Perturbation considérée à un instant $t = 0.179\text{ms}$; Gauche : carte 2D de la perturbation $\delta(r, \theta)$. Le contour noir correspond au contour de la fonction masque. Droite : Profil de δ à un certain rayon.

On considère une perturbation 2D composée d’une somme de modes poloidaux compris dans l’intervalle $m_0 = [16 : 96]$. Cette perturbation est mise en mouvement avec un profil de vitesse linéaire Eq.V.44 (rotation solide). Cette somme de mode conduit à une perturbation localisée poloidalement se déplaçant dans la direction θ . On applique un masque gaussien de largeur ($\sigma_r = 0.05m$, $\sigma_\theta = \pi/12$) que l’on fait glisser à chaque position radiale afin de reconstruire le profil de vitesse.

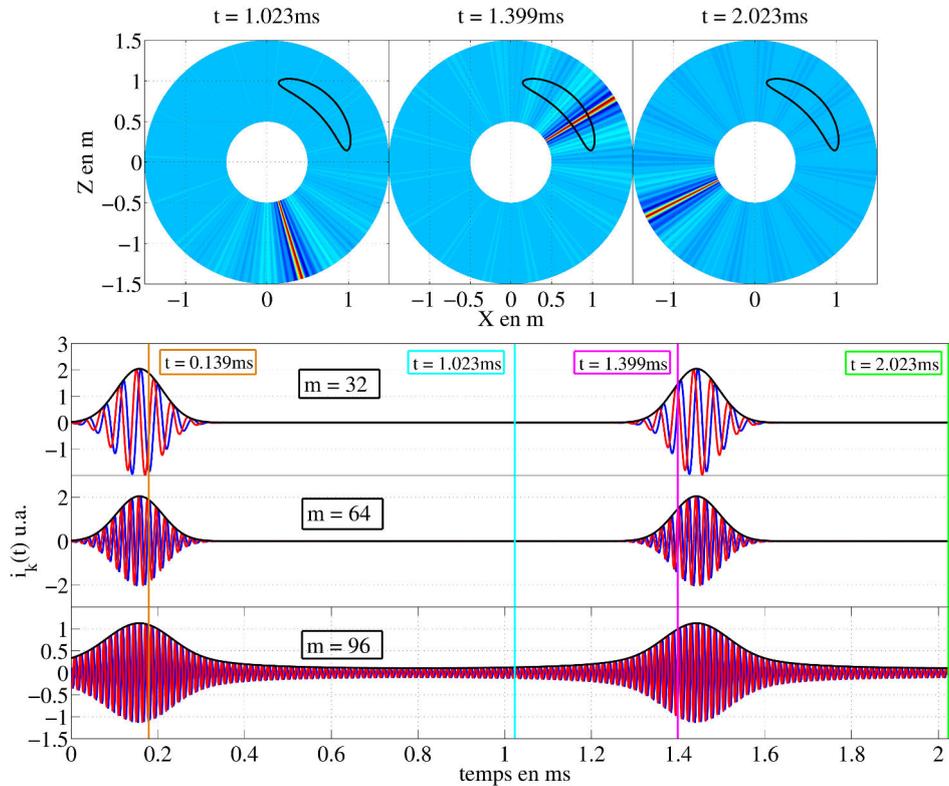


Figure V.6 – Carte 2D de la perturbation à trois instants donnés(haut) ; Evolution temporelle de la partie réelle (bleu), imaginaire (rouge) et du module du signal complexe pour les modes $m = 32, 64$ et 96 .

De façon équivalente à l'expérience, on peut obtenir une information pour différent k_θ qui vont correspondre aux différents modes poloidaux introduits dans cette perturbation analytique. Avec ce diagnostic, nous mesurons simultanément les signaux synthétiques pour chaque mode contenu dans la perturbation. À l'instar du diagnostic expérimental, le passage d'une perturbation devant le faisceau se traduit par une quadrature de phase entre la partie réelle et la partie imaginaire du signal (Fig.(V.6)). La fréquence d'oscillation des parties réelles et imaginaires dépend du mode observé et donc du nombre d'onde k_θ . On peut ainsi déjà voir apparaître l'information recherchée directement dans le signal brut. L'étape suivante consiste à faire l'analyse fréquentielle du signal synthétique et d'en extraire le décalage Doppler du spectre et ainsi en déduire la vitesse du mode observé.

On extrait des trois signaux précédent la densité spectrale de puissance grâce à la méthode pwelch (section IV. 2. 1) et on trace pour différents modes (Fig (V.7)) le spectre en échelle logarithmique. On mesure le décalage Doppler par rapport à la fréquence nulle de chaque nombre d'onde poloidal :

$$\omega_{Dopp} = \frac{\int \omega S(\omega, k_\theta) d\omega}{\int S(\omega, k_\theta) d\omega} \quad (V.47)$$

Cette méthode est cependant valable uniquement dans le cas de spectre Doppler dont la composante dominante est bien la composante Doppler. Expérimentalement, les spectres sont analysés et un fit leur est appliqué afin de séparer la composante Doppler du reste et de mesurer le décalage. Dans notre cas l'absence de phénomènes secondaires liés à la propagation du faisceau fait que nos spectres présentent bien une composante Doppler dominante.

Une fois le décalage Doppler mesuré pour un certain nombre d'onde $k_\theta = m/r_c$ à un certain rayon r_c , on en déduit la vitesse via la relation :

$$f_{Dopp} = \frac{k_\theta v_\theta}{2\pi} \quad (V.48)$$

L'équation Eq.(V.48) montre bien l'évolution de la fréquence en fonction du nombre d'onde que nous avons observé sur le tracé des spectres Fig.(V.7). En calculant simultanément les signaux synthétiques pour tous les nombres d'onde, on pourra étudier l'impact de la taille des fluctuations sur la mesure de la vitesse.

V. 2. 2. 2 Comparaison des différentes méthodes d'analyses temps/fréquence : estimation de l'incertitude de la mesure

Les expérimentateurs disposent de plusieurs outils d'analyse fréquentielle extraire l'information souhaitée des signaux obtenus par rétrodiffusion Doppler. On cite les méthodes suivantes :

- transformée de Fourier avec PWELCH : transformée de Fourier fenêtrée moyennée sur l'ensemble des fenêtres

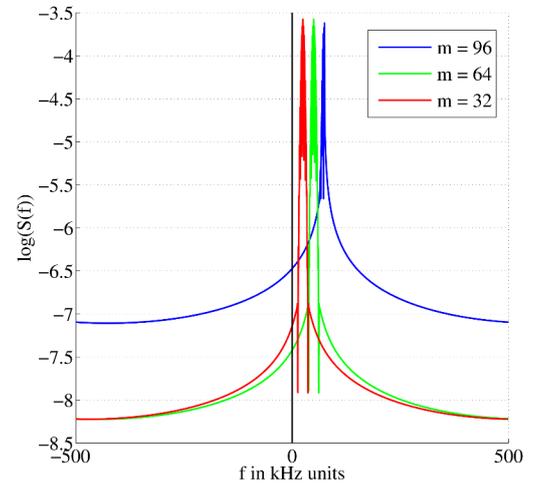


Figure V.7 – Spectres fréquentiels des modes $m = 32, 64$ et 96 : on mesure le décalage Doppler proportionnel au mode considéré.

- tracé du pseudo-spectre à l'aide de la fonction PMUSIC : **M**ultiple **S**ignal **C**lassification, décomposition du signal en somme de sinusoïde et extraction de ou des fréquences dominantes (paramètre n_f).

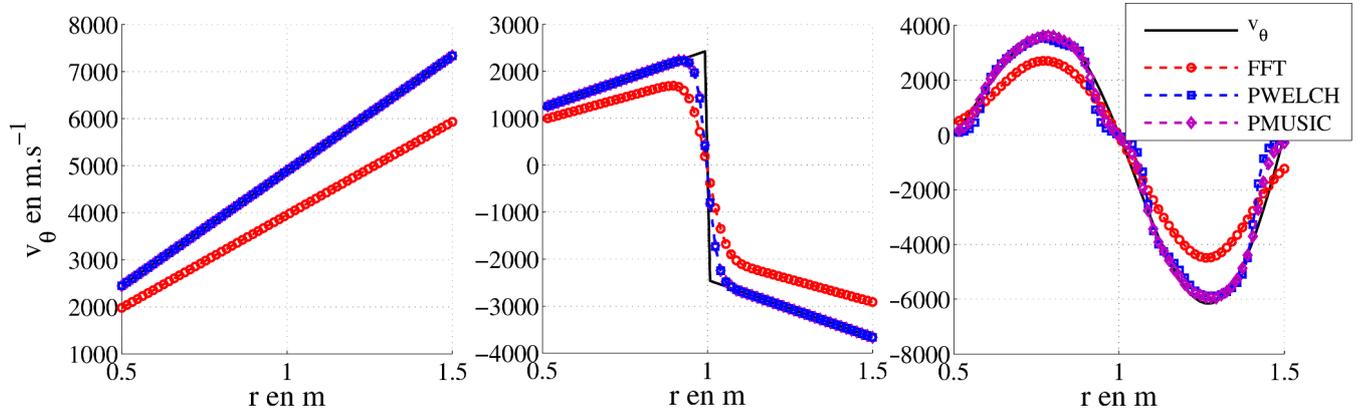


Figure V.8 – Comparaison des profils de vitesse injectés aux profils de vitesse du mode $m_0 = 64$ mesurés avec les trois méthodes d'analyse fréquentielle.

La méthode PWELCH (section (IV. 2. 4)) est généralement utilisée dans l'analyse des signaux turbulents expérimentaux de réflectromètre Doppler et permet d'extraire la densité spectrale de puissance et de mesurer le niveau et la vitesse perpendiculaire des fluctuations. La méthode PMUSIC a récemment été employée dans des mesures d'évolution temporelle de la vitesse perpendiculaire et ainsi dans la détection et l'étude des GAM (Geodesic Acoustic Modes) [69]. Cependant, on ne présentera que brièvement son utilisation ici car on s'intéressera aux spectres turbulents afin d'étudier la vitesse d'équilibre plutôt que sa dynamique temporelle.

Dans cette section, nous allons comparer les différentes méthodes d'analyses appliquées à des perturbations analytiques afin d'étudier le fonctionnement et de choisir la méthode la plus adaptée à notre diagnostic synthétique. On commence par reprendre la perturbation précédente avec différents profils de vitesse poloidale et par mesurer la vitesse pour un mode choisi arbitrairement ($m_0 = 64$) à toutes les positions radiales. Le décalage Doppler est obtenu à partir de l'intégrale des spectres (Eq.(V.47)) extraits grâce aux méthodes PWELCH et FFT. Pour la méthode PMUSIC, le nombre de fréquences étant préalablement choisi ($n_f = 1$), le pic Doppler est directement extrait en détectant le maximum du pseudo-spectre. Les profils de vitesse mesurés avec chaque méthode par dessus le profil prescrit sont donnés en figure Fig.(V.8). En raison du nombre de points en temps qui a été prescrit, la méthode FFT ne permet pas une bonne estimation de la vitesse. Sachant que le coût numérique d'une simulation turbulente ne nous permet pas d'avoir une trop importante quantité de points en temps, la méthode de Fourier plus sophistiquée PWELCH sera préférée. La comparaison des méthodes PMUSIC et PWELCH montre de bien meilleurs résultats dans l'estimation du profil radial de vitesse. Les deux méthodes donnent d'ailleurs des profils sensiblement identiques. Dans un second temps, les cas du profil fortement cisailé et du profil sinusoidal font apparaitre un effet de moyenne radiale le long du profil. Cela est lié au choix de l'étalement radial de la fonction masque du diagnostic et son influence sur le biais de la mesure sera discuté dans la suite.

Afin de comprendre cet effet, arrêtons nous d'abord sur le cas d'une discontinuité brutale du profil de vitesse. On commence par tracer au point d'avant et au point d'après la zone de cisaillement (Fig.(V.9) les spectres et pseudo-spectres extraits du signal synthétique. La présence de plusieurs fréquences d'oscillation dans le signal synthétique est liée à la présence de plusieurs vitesses sous le masque du diagnostic. Cela conduit à la présence de plusieurs pics

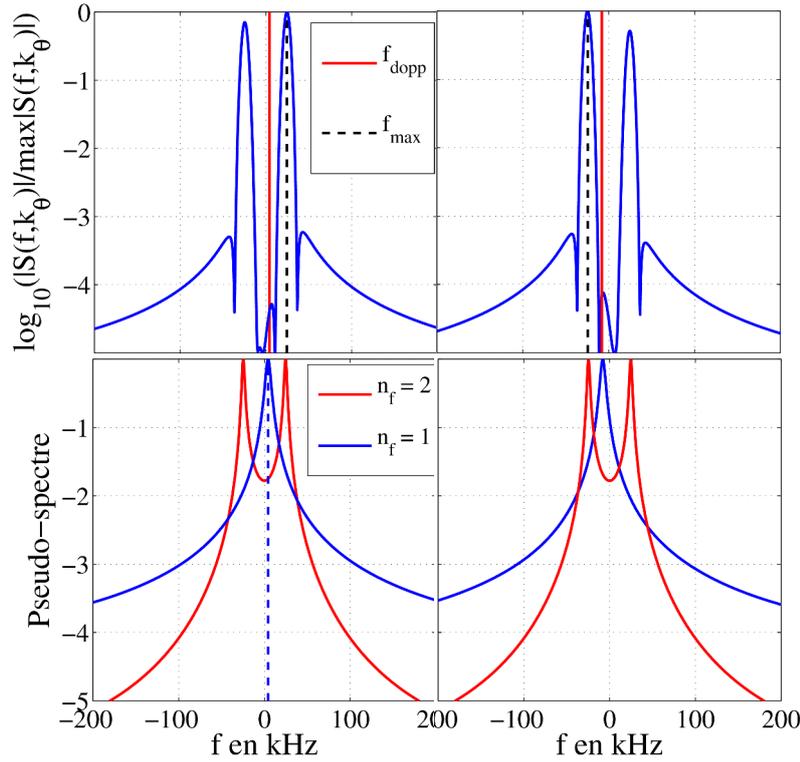


Figure V.9 – Comparaison des spectres PWELCH et des pseudo-spectres PMUSIC de part et d'autre de la discontinuité ; Gauche : au point d'avant ; Droite : au point d'après. PWELCH : on compare la position du pic Doppler calculé et la position du maximum du spectre. PMUSIC : on compare les pseudo-spectre avec comme paramètre d'entrée de la fonction PMUSIC une ou deux fréquences dominantes $n_f = 1, 2$

Doppler dans les spectres et pseudo-spectres lorsque ces vitesses changent de signe. Dans le cas de PWELCH, la détection du pic Doppler en intégrant l'aire sous le spectre va se traduire par un effet de moyenne des deux pics pondérée par leur amplitude. Lorsque les expérimentateurs sont confrontés à ce cas de figure, le processus de fit des spectres est appliqué aux deux composantes Doppler et les deux valeurs de vitesses sont extraites. Dans notre cas, une détection directe des maximums du spectre sera appliquée afin de mesurer la vitesse de chaque coté de la discontinuité. Dans le cas de PMUSIC, il est nécessaire de demander plusieurs fréquences dominantes afin de détecter un changement de signe de la vitesse. On choisira dans la suite la méthode PWELCH puisqu'elle permet de détecter directement la présence de plusieurs pics sur le spectre. Un changement de signe continu de la vitesse sera néanmoins difficile à détecter puisque les deux pics ne seront pas discernables l'un de l'autre.

Expérimentalement, on peut estimer l'incertitude du diagnostic grâce à un code de tracé de rayon (section (IV. 2. 3)). Il donne accès à l'extension radiale δr_c du faisceau et à l'incertitude sur le nombre d'onde de mesure δk_\perp près de la couche de coupure. L'incertitude sur la fréquence Doppler $\delta \omega_D$ dépend quant à elle de l'ajustement des spectres (fit).

$$\delta v_\perp = \delta \left(\frac{\omega_{Dopp}}{k_\perp} \right) = \frac{\delta \omega_D}{k_\perp} + \frac{\delta k_\perp \omega_{Dopp}}{k_\perp^2} \quad (\text{V.49})$$

Dans le cas du diagnostic synthétique, l'incertitude radiale est donnée par la variance de notre gaussienne $\delta r_c = \sigma_r$. Le calcul de l'incertitude sur le nombre d'onde poloidale $k_\theta = m/r_c$ conduit

à :

$$\delta k_\theta = \delta \left(\frac{m}{r_c} \right) = \frac{\delta m}{r_c} + \frac{\delta r_c m}{r_c^2} \quad (\text{V.50})$$

L'écart sur les nombres d'ondes entiers δm dépend de la variance de la gaussienne en θ . La transformée de Fourier d'une gaussienne possède une largeur dans l'espace de Fourier inversement proportionnelle ou égale à sa largeur angulaire soit $\sigma_m = 1/\sigma_\theta$. On peut ainsi estimer l'incertitude sur la mesure de la vitesse du diagnostic synthétique 2D :

$$\begin{aligned} \delta v_\theta &= \delta \left(\frac{\omega_{Dopp}}{k_\theta} \right) = \left(\frac{\delta m}{r_c} + \frac{\delta r_c m}{r_c^2} \right) \frac{\omega_{Dopp}}{k_\theta^2} \\ &= \left(\frac{\delta m}{r_c} + \frac{\delta r_c m}{r_c^2} \right) \frac{\omega_{Dopp} r_c^2}{m^2} \end{aligned} \quad (\text{V.51})$$

Dans le cadre de l'application de ce diagnostic aux simulations turbulentes, nous n'effectuons pas d'étape de fit des spectres et par conséquent, on ne peut estimer d'incertitude sur la fréquence Doppler. Nous avons tout de même accès à une dépendance paramétrique de l'incertitude de la mesure en fonction des caractéristiques du diagnostic via la taille de la fonction masque appliquée.

V. 2. 2. 3 Effet de la taille du masque sur le biais de la mesure

Nous avons constaté sur la Fig.(V.8) que la largeur du volume de plasma éclairé par le diagnostic synthétique peut influencer le profil de vitesse mesuré. Sachant que notre signal synthétique est calculé via une transformée de Fourier, il sera nécessaire de définir un volume suffisamment grand pour que celle-ci soit correctement définie et permettre une estimation de la fréquence Doppler.

Nous commençons par définir une perturbation constituée d'une somme de modes poloidaux entiers allant de 1 à 128 et un profil de vitesse poloidale sinusoidal afin d'étudier l'effet de l'extension radiale du diagnostic sur le biais de la mesure..

$$\delta(r, \theta, t) = \sum_m \cos \left(m \left(\theta - \frac{v_\theta t}{r} \right) \right) \quad (\text{V.52})$$

On se place à $k_r = 0$ pour l'ensemble des mesures. Nous choisissons un masque gaussien avec plusieurs tailles de masque allant de $\sigma_r = 0.02m$ à $\sigma_r = 0.2m$ pour une largeur poloidale arbitraire $\sigma_\theta = 15^\circ$. Nous commençons par tracer le signal synthétique obtenu en $r = 0.75m$ (correspondant au premier maximum du profil de vitesse) pour le mode $m = 64$ pour chaque largeur de masque (Fig.(V.10)).

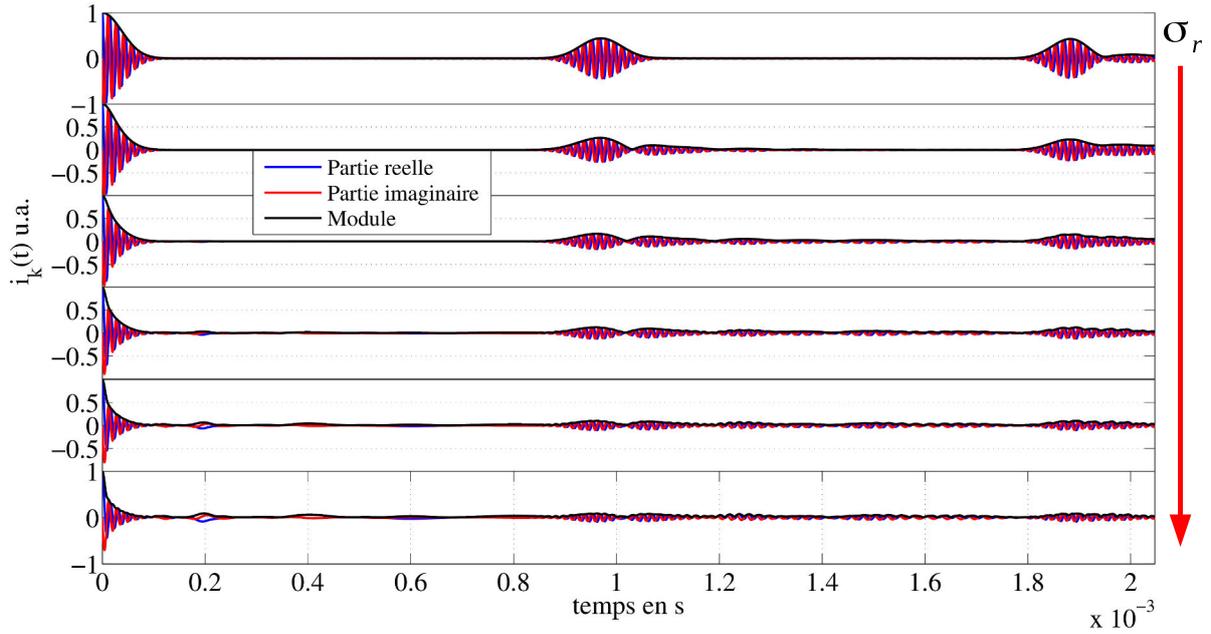


Figure V.10 – Signal synthétique mesuré en $r = 0.75m$; les σ_r sont croissants de haut en bas et on peut voir l'apparition de structure dans le signal relative à l'augmentation de la taille du masque.

On constate sur la figure Fig.(V.10) l'apparition de nouvelles structures dans le signal synthétique avec l'augmentation de la taille du volume diffusant liée à l'introduction de plusieurs vitesses dans le signal. L'analyse fréquentielle des signaux et la position du pic Doppler ainsi extraite donne une vitesse moyennée en rayon. Afin d'estimer l'amplitude de cette erreur induite par le diagnostic, nous traçons sur la figure Fig.(V.11) l'écart absolu entre la vitesse mesurée et le profil injecté en deux positions radiales $r = 0.75m$ et $r = 1.25m$, $\frac{|v_{synth} - v_\theta|}{|v_\theta|}$ en pourcentage ainsi que l'écart relatif $v_{synth} - v_\theta$.

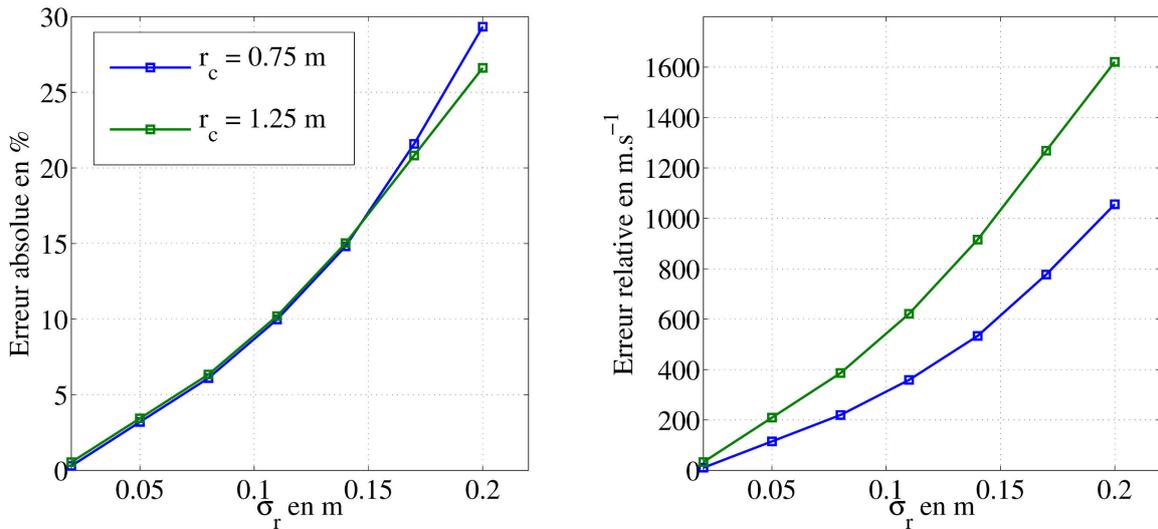


Figure V.11 – Tracé de l'écart sur la mesure en % (gauche) et en $m.s^{-1}$ (droite) en fonction de la largeur du masque σ_r .

Pour les valeurs de σ_r les plus grandes, la mesure est moyennée sur pratiquement tout le domaine radial entraînant une augmentation du biais de la mesure. Expérimentalement, l'exten-

sion radiale du faisceau dépend du gradient d'indice optique dans la zone de mesure. Cependant, même si lors de mesures Doppler en mode O l'étalement radial peut être significatif (plus important qu'en mode X), il reste dans une gamme de paramètres où la mesure est faiblement biaisée ($\sim 5\%$). Lors de l'utilisation du diagnostic synthétique sur des données turbulentes, cela nous permettra de nous placer dans des conditions similaires à l'expérience.

Nous allons maintenant effectuer la même étude sur l'effet de la largeur poloidale du masque. Dans ce cadre, nous choisissons d'appliquer un profil de vitesse linéaire (afin de n'estimer que l'effet de la largeur poloidale). On définit encore une fois une perturbation comme une somme de modes entiers poloidaux de 1 à 128. On ajoute cette fois un profil sinusoidal de vitesse de phase \tilde{v} en fonction des modes poloidaux et dont l'amplitude A est définie en pourcentage de l'amplitude du profil de vitesse poloidale. Ce profil n'est pas réaliste mais peut se retrouver visuellement sur les profils de vitesse et de fréquence Doppler en fonction k_θ .

$$\delta(r, \theta, t) = \sum_m \cos \left(m \left(\theta - \frac{(v_\theta + \tilde{v}(r, m)) t}{r} \right) \right) \quad (\text{V.53})$$

$$\tilde{v} = A v_0 \cos \left(\frac{\pi m}{16} \right) \frac{r}{r_0}$$

On se place toujours à $k_r = 0$ et on fixe une largeur radiale arbitraire $\sigma_r = 0.05m$. On choisit des largeurs poloidales allant de $\sigma_\theta = 1^\circ$ à 50° .

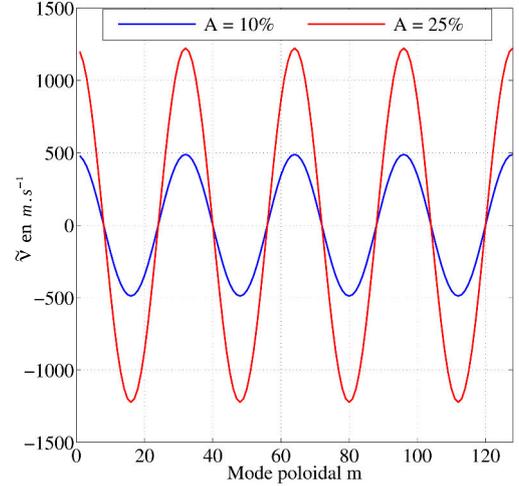


Figure V.12 – Profil de vitesse de phase en fonction du mode m en $r = 1m$ avec $A = 10\%$ (bleu) et $A = 25\%$ (rouge).

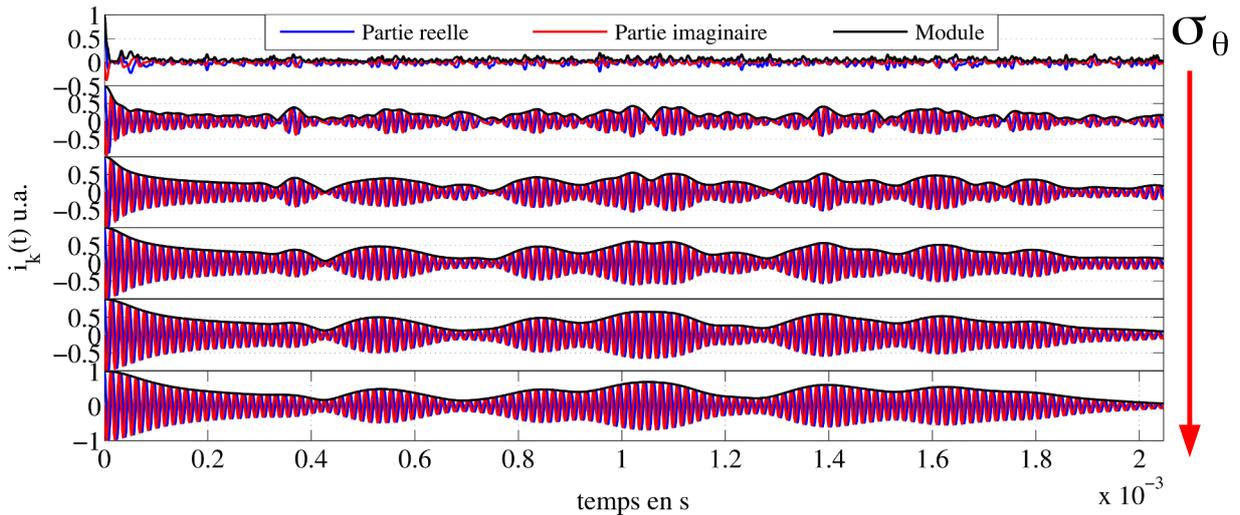


Figure V.13 – Signal synthétique mesuré pour une amplitude de vitesse de phase de 10% de la vitesse poloidale ; les σ_θ sont croissants de haut en bas et on peut voir l'apparition de structure dans le signal relative à l'augmentation de la taille du masque.

Comme on peut le souligner sur la figure Fig.(V.13), pour un masque ayant une largeur poloidale extrêmement faible ($\sim 1^\circ$), le contenu fréquentiel du signal est inexploitable. La transformée de Fourier n'est pas définie sur un volume infiniment fin et ne permet donc pas

d'extraire une vitesse dans ce cas. Pour les σ_θ plus grand, on constate que seule l'enveloppe du signal change. La taille poloidale du masque joue alors sur la durée d'éclairement des fluctuations et donc sur leur détection. Les structures de trop grande taille par rapport à la fonction d'éclairement ne seront pas détectées. Cela aura également un impact sur l'étude du niveau de turbulence (qui ne sera pas menée dans le cadre de cette thèse) et mérite d'être approfondie. De plus, notre masque étant une gaussienne, sa transformée de Fourier l'est également mais avec une largeur dans l'espace des nombres d'onde inversement proportionnelle à la largeur poloidale ($\sigma_m \propto 1/\sigma_\theta$). Ainsi plus le masque est large, moins le contenu du signal pour un mode est pollué par les modes voisins. On devra exclure de notre étude les modes dont la mesure est polluée par les modes mal définis tels que $m = 0$ dont la vitesse est nulle ou encore $m = N_\theta/2$ dont la taille est de l'ordre de celle de la grille de calcul.

Comme dans le précédent test, nous allons estimer le biais de la mesure en pourcentage et

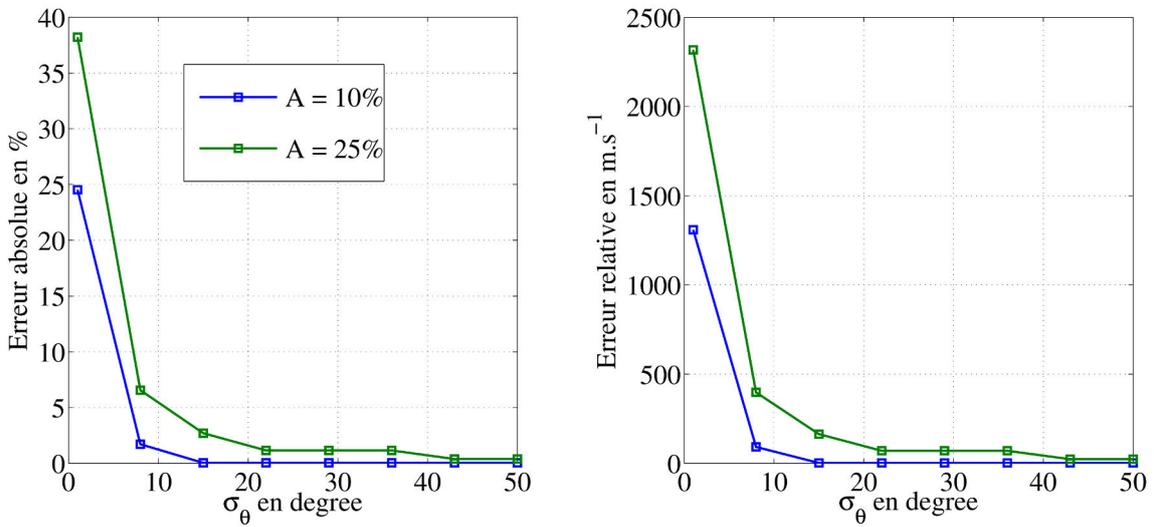


Figure V.14 – Tracé de l'écart sur la mesure en % (gauche) et en $m.s^{-1}$ (droite) en fonction de la largeur du masque σ_θ .

en $m.s^{-1}$ (Fig.(V.14)) pour le mode $m = 64$ correspondant à un maximum de vitesse de phase. On constate que pour une largeur poloidale de masque très faible, l'incertitude augmente brutalement et ce en raison de la mauvaise définition de la transformée de Fourier et donc de la fréquence Doppler. Dans les autres cas, l'écart décroît rapidement car on réduit l'influence des modes voisins au mode étudié sur la mesure. Cependant, pour évaluer un volume de plasma éclairé par le diagnostic cohérent avec les mesures expérimentales, il est nécessaire d'avoir une largeur poloidale restreinte. On choisira des valeurs typiques de l'ordre de $\sim 8^\circ$ pour lesquelles la comparaison à l'expérience et le biais sont satisfaisants ($< 10\%$).

V. 3 Application du diagnostic synthétique à des cartes de fluctuations turbulentes.

V. 3. 1 Principe d'utilisation du diagnostic synthétique sur le code TOKAM-3X

Dans cette section, quelques exemples d'utilisation du diagnostic synthétique de rétro-diffusion Doppler sur les données turbulentes du code TOKAM-3X sont présentés. Nous consi-

dérons un équilibre magnétique circulaire axisymétrique avec un limiteur infiniment fin situé en bas de la machine (Fig.(V.15)). De plus, comme expliqué section Sec(V. 1), nous considérons un plasma isotherme avec les paramètres de normalisation suivants :

- Paramètre géométrique : $A = R_0/a = 3.3$, $\rho^* = \rho_i/a = 1/256$.
- Paramètre magnétique : $B_0 = 1T$.
- Paramètre plasma : plasma d'hydrogène, $T_0 = 50eV$.

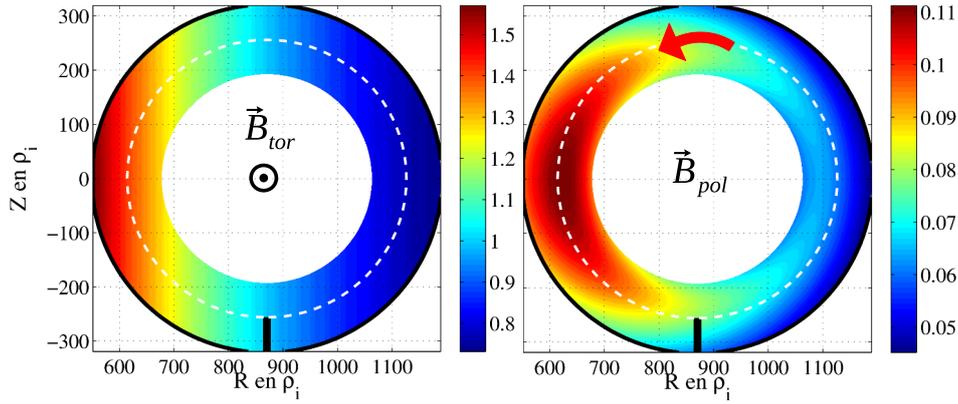


Figure V.15 – *Champ magnétique toroidal (gauche) et poloidal (droite) dans les simulations fluides turbulentes de TOKAM-3X.*

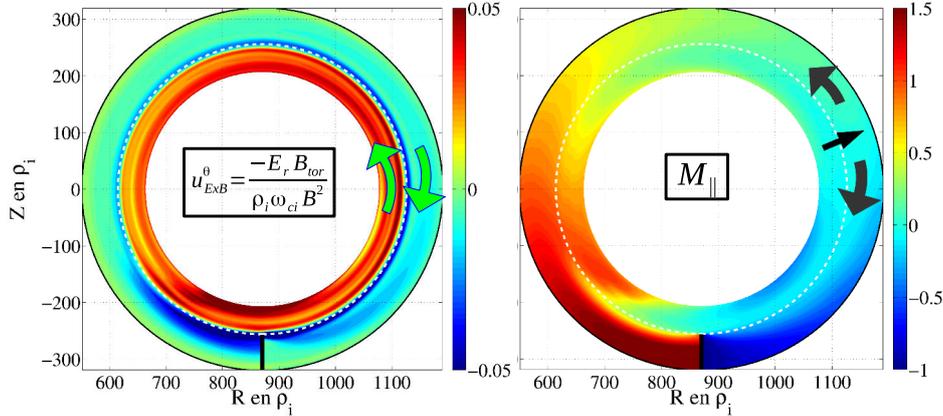


Figure V.16 – *Composante poloidale moyennée en temps de la vitesse de dérive électrique normalisée (gauche) et nombre de Mach parallèle (droite). Les flèches représentent le sens des écoulements dans le plan poloidal.*

Le diagnostic que nous appliquons à ces données est dans sa version à deux dimensions. Par conséquent, on choisit une coupe poloidale à une position toroidale fixée ($\varphi = 0$).

À partir du mouvement des fluctuations de densité dans un plan poloidal donné se construit un profil de vitesse poloidale moyenne du plasma qu'on comparera avec la vitesse calculée en sortie de simulation. Commençons par regarder les cartes des vitesses que l'on cherche à mesurer (Fig.(V.16)). Les flèches noires incurvées représentent la direction des écoulements parallèles dans la SOL. La flèche noire droite indique le point d'entrée (point de stagnation, $M_{\parallel} = 0$), à travers la séparatrice, des particules dans la SOL. Les flèches vertes représentent le sens

de la dérive poloidale de chaque côté de la séparatrice. On retrouve dans cette simulation le cisaillement observé expérimentalement de la vitesse de dérive électrique ainsi que la position du point de stagnation côté faible champ caractérisant un transport perpendiculaire ballonné côté faible champ magnétique.

La première étape consiste à appliquer un masque représentant le volume de plasma d'où

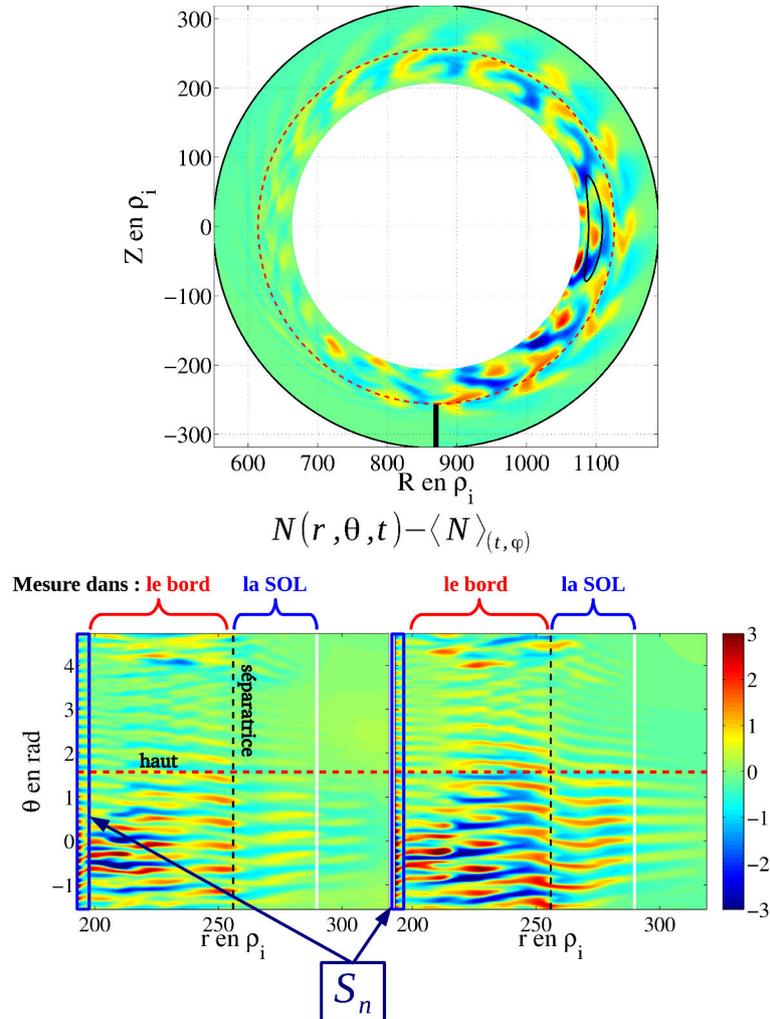


Figure V.17 – Carte 2D des fluctuations de densité à différents instants auxquelles on applique un masque 2D en géométrie circulaire (haut). Fluctuations en géométrie slab (r, θ) : on réduit la zone de mesure au-delà de la zone d'injection S_n et là où le niveau de fluctuation est suffisant.

provient la lumière rétro-diffusée. On choisit d'appliquer un masque gaussien aligné sur une surface magnétique. On présente en figure Fig.(V.17) une carte des fluctuations de densité à un instant donné où la taille et la forme du masque sont représentées ($r = 230\rho_i$, $\theta_c = 0$, $\sigma_r = 4\rho_i$ et $\sigma_\theta = 8^\circ$). On présente aussi deux cartes à deux instants distincts en géométrie slab. Les zones encadrées en bleu correspondent aux zones d'injection de matière en provenance du coeur (zone tampon). On voit nettement sur ces trois cartes une diminution du niveau de fluctuation une fois la séparatrice franchie (tiret noir). Cependant, les fluctuations restent à un niveau satisfaisant pour notre diagnostic jusqu'à $r = 281\rho_i$ (trait blanc). On voit le caractère ballonné du transport turbulent côté faible champ magnétique. Dans cette zone, le niveau de fluctuation est plus important et le déplacement radial des fluctuations est bien visible. On note également une différence de structure des fluctuations entre le haut (tirets rouges) et le plan

équatorial ($\theta = 0^\circ$) Ainsi, nos mesures seront restreintes au domaine situé côté faible champ et sans trop avancer dans la SOL soit :

$$r \in [200\rho_i; 281\rho_i] \quad (\text{V.54})$$

$$\theta \in [-\pi/2; \pi/2] \quad (\text{V.55})$$

$$(\text{V.56})$$

Une fois le masque appliqué, nous calculons le signal synthétique (Eq.(V.38)) tel que :

$$i_m(t) = \int_r \int_\theta n(r, \theta, t) M(r, \theta) e^{im\theta} r dr d\theta \quad (\text{V.57})$$

où le nombre d'onde poloidal est défini par $k_\theta = m/r$. Le signal synthétique pour un $k_\theta\rho_i$ donné est tracé en fonction du temps en figure Fig.(V.18). Le signal synthétique présente des similarités fortes avec le signal expérimental. C'est un signal aléatoire composé de bouffées d'amplitude

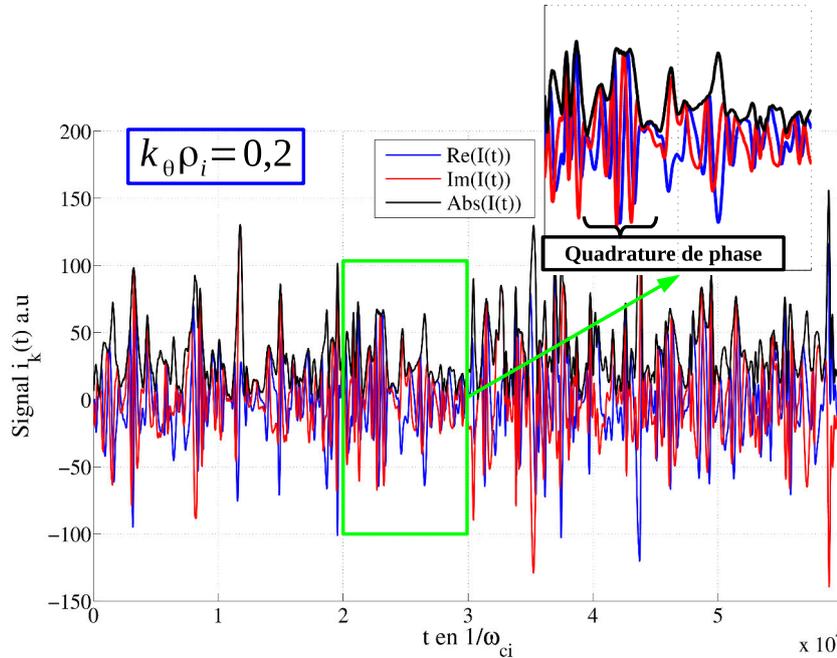


Figure V.18 – Signal synthétique obtenu avec un masque gaussien centré en $r = 230\rho_i$ et $\theta = 0$ pour un nombre d'onde $k_\theta\rho_i = 0.2$.

et temps caractéristiques ayant une distribution assez large typique du signal expérimental. En faisant un zoom sur une petite zone du signal, on distingue des bouffées pendant lesquelles la quadrature de phase entre le signal réel et imaginaire est bien caractérisée. Cela correspond à la détection d'une structure de nombre d'onde $k_\theta\rho_i$ passant dans le volume. La vitesse de la structure détermine la période de l'oscillation dans la bouffée différente d'une bouffée à l'autre. C'est le nombre de ces événements qui va permettre d'avoir une bonne mesure de la vitesse de cette fluctuation dans la zone de mesure. Comme expliqué précédemment, dans la simulation, nous avons accès à tous les $k_\theta\rho_i$ simultanément. Ainsi, on peut effectuer l'analyse de Fourier sur l'ensemble des signaux Fig.(V.18) et tracer les spectres fréquentiels obtenus avec PWELCH de chacun d'entre eux. On note que le décalage Doppler varie bien avec le nombre d'onde de mesure (Fig.(V.19)).

En effectuant cette analyse sur l'ensemble des signaux synthétiques dont nous disposons, nous pouvons tracer les profils locaux de la vitesse et du déphasage Doppler en fonction du

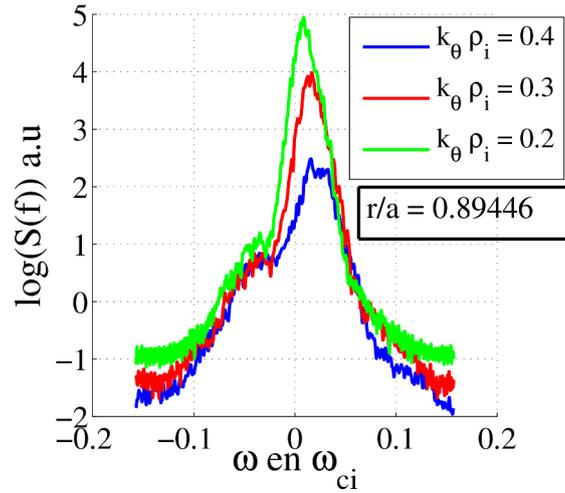


Figure V.19 – Spectre $\log_{10}(|S(\omega, k_\theta)|)$ obtenu pour trois nombres d'ondes ; on note l'augmentation du décalage Doppler avec le nombre d'onde.

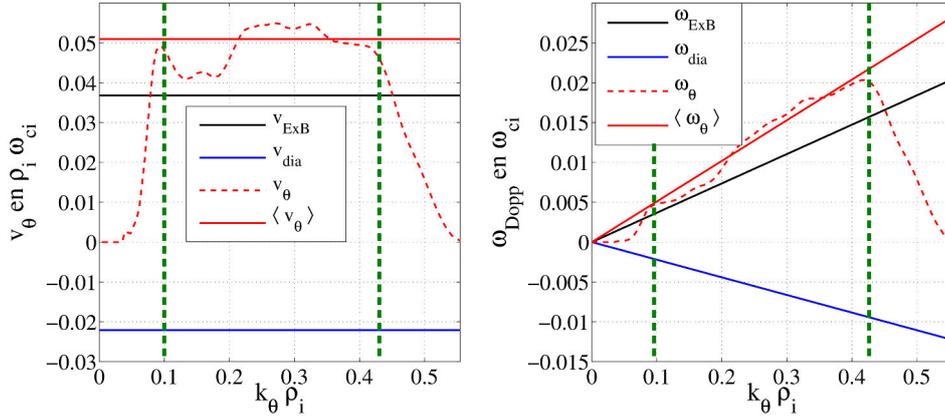


Figure V.20 – Profil de la vitesse poloidale $v_\theta(k_\theta)$ et du décalage Doppler $\omega_{Dopp}(k_\theta)$ mesuré en $(r, \theta) = (230\rho_i, 0)$; Les tirets verts délimitent la zone dans laquelle la régression linéaire $\langle \cdot \rangle$ est effectuée.

nombre d'onde (Fig.(V.20)). On compare dans cet exemple les différentes vitesses de dérive (diamagnétique ionique et électrique) à la vitesse mesurée ainsi qu'à sa régression linéaire Eq.(V.58).

$$\langle v_\theta \rangle = \frac{\overline{\omega_{Dopp} k_\theta} - \overline{\omega_{Dopp}} \cdot \overline{k_\theta}}{k_\theta^2 - \overline{k_\theta} \cdot \overline{k_\theta}} \quad (\text{V.58})$$

On voit bien une dépendance quasi linéaire de la fréquence Doppler au nombre d'onde. La variation de la vitesse en fonction du nombre d'onde nous permet d'avoir une estimation de la vitesse de phase. En revenant à la définition du décalage Doppler dans l'hypothèse de mesures localisées près de la couche de coupure $k_r = 0$ et de fluctuations en forme de tube alignées aux lignes de champ ($k_\parallel = 0$), on obtient :

$$v_{\perp, plasma} = -E_r/B \quad (\text{V.59})$$

$$v_{\perp, Doppler} = \frac{\Delta\omega B_\varphi}{k_\theta B} \sim v_{\perp, plasma} + \tilde{v}_\perp \quad (\text{V.60})$$

Cependant, k_\parallel n'est pas strictement égal à 0 (ce qui peut être le cas expérimentalement et numériquement), la vitesse parallèle peut être détectée et la comparaison des vitesses mesurées

aux vitesses en sortie de simulation n'est plus la même :

$$v_{\theta,plasma} = -E_r B_\varphi / B^2 + u_{\parallel} B_\theta / B \quad (\text{V.61})$$

$$v_{\theta,Doppler} = \frac{\Delta\omega}{k_\theta} \sim v_{\theta,plasma} + \tilde{v}_\theta \quad (\text{V.62})$$

V. 3. 2 Mesure de la vitesse des fluctuations dans une simulation TOKAM-3X : vitesse poloidale et vitesse fluctuante moyenne.

Nous allons maintenant appliquer ce diagnostic afin d'extraire d'une simulation turbulente (cf sous-section précédente) la vitesse de phase de ses fluctuations de densité. On choisit ici d'appliquer un masque Gaussien de largeur ($\sigma_r = 3\rho_i, \sigma_{\theta,0} = 8^\circ$). On effectuera un glissement de ce masque (Fig.(V.21)) dans le plan équatorial côté faible champ magnétique (LFS, $\theta = 0$) tout en respectant le domaine de validité de nos mesures présentées dans la sous-section précédente soit $r/a \in [0.78, 1.1]$. Dans cet exemple on choisit de faire 6 mesures tout en fixant

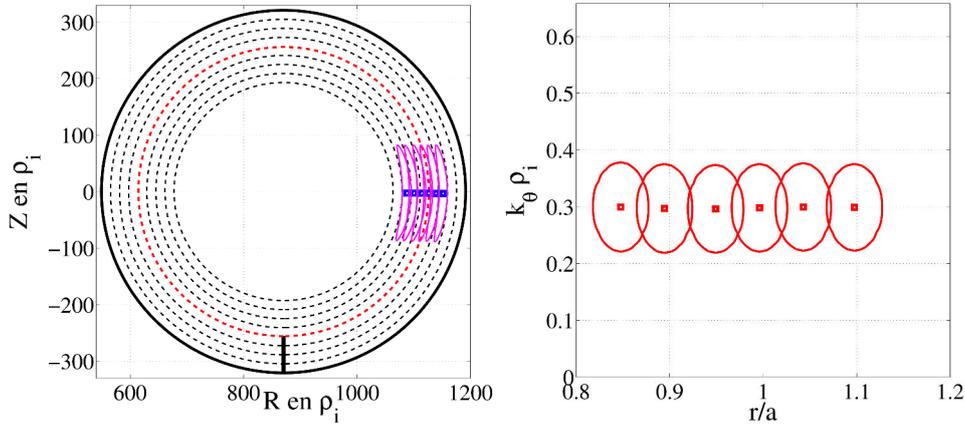


Figure V.21 – Masque gaussien glissant dans le plan équatorial (tracé par dessus des surfaces magnétiques) à gauche ; position et nombre d'onde des mesures avec résolution spatiale en r et en k_θ à droite.

une largeur poloidale dépendante du rayon et ce afin d'avoir un masque de volume identique à chaque rayon ($\sigma_\theta = a\sigma_{\theta,0}/r$). Cela permet aussi (cf Fig.(V.21)) d'avoir une résolution spatiale identique à chaque point de mesure.

La figure Fig.(V.22) montre à titre d'exemple la vitesse mesurée pour une fluctuation de nombre d'onde $k_\theta \rho_i = 0.3$ à partir des spectres fréquentiels correspondant aux différentes localisations. L'étude des spectres montre l'évolution de la position du pic Doppler, se décalant progressivement vers la fréquence nulle. Cependant, on constate que les spectres issus de la simulation peuvent présenter des pics secondaires (ailettes). On restreint l'intervalle du spectre au pic Doppler principal pour calculer la moyenne pondérée de la fréquence Doppler. Les mesures obtenues avec le diagnostic synthétique montrent des vitesses poloidales de l'ordre de la vitesse de dérive poloidale du plasma. La projection poloidale de la vitesse parallèle étant très faible ici, on ne peut pas en déduire directement que celle-ci n'est pas détectée.

Expérimentalement, la vitesse mesurée est de l'ordre de la vitesse perpendiculaire de dérive électrique. Elle est définie comme :

$$v_\perp \sim -\frac{E_r}{B} + \tilde{v} \quad (\text{V.63})$$

où la vitesse de phase des fluctuations est de l'ordre de la vitesse diamagnétique $\tilde{v} \sim v^*$ et est donc négligeable. Nous comparons l'écart entre le profil de vitesse mesuré et le profil calculé

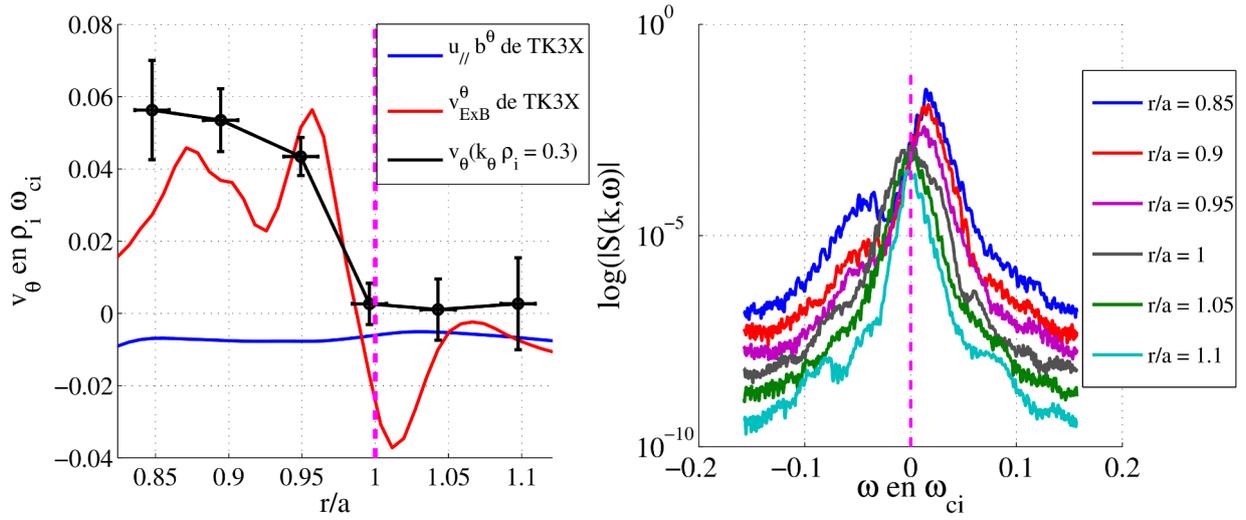


Figure V.22 – Profil radial de vitesse mesurée par le diagnostic comparé aux vitesses poloidales de TOKAM-3X. Les tirets magenta représentent la séparatrice $r = a$; Spectre PWELCH correspondant. Les tirets magenta représentent la fréquence nulle.

par le code TOKAM3X avec la vitesse diamagnétique. Sachant que l'on a accès à la vitesse de chaque fluctuation de nombre d'onde $k_\theta \rho_i$ et après avoir constaté une variation quasi linéaire de la fréquence Doppler avec le nombre d'onde (cf Fig.(V.20)), on calcule la régression linéaire (toujours noté $\langle \cdot \rangle$) de la fréquence Doppler afin d'en extraire une vitesse de phase turbulente moyenne pour tous les modes. On trace donc en figure Fig.(V.23) les vitesses diamagnétiques électronique et ionique comparées à la différence entre la vitesse mesurée après régression linéaire et la vitesse poloidale de TOKAM-3X :

$$\langle \tilde{v} \rangle = \langle v_{\theta, \text{Doppler}} \rangle - (-E_r B_\varphi / B^2 + u_{\parallel} B_\theta / B) \iff v_{i,e}^* = \frac{T_0}{n q_{i,e} B} \frac{\partial n}{\partial r} \quad (\text{V.64})$$

On constate que la différence entre les profils de vitesses mesurées et la vitesse poloidale est

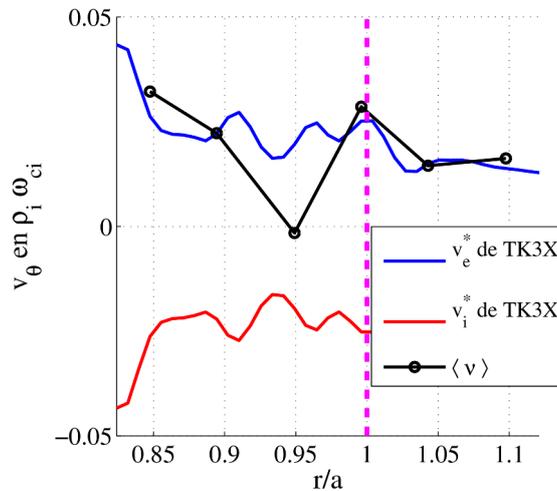


Figure V.23 – Profil radial de vitesse diamagnétique électronique de Tokam-3X comparée à la vitesse moyenne des fluctuations.

du même ordre de grandeur que la vitesse diamagnétique électronique. On remarque que cette

vitesse, censée être négligeable, est en fait du même ordre de grandeur que la vitesse de dérive électrique. On peut donc s'attendre à mesurer une vitesse de phase des fluctuations importantes et cette dernière sera à prendre en compte dans le cadre des études sur les asymétries poloidales.

Cependant, ce qu'on retient ici est bien que la mesure synthétique obtenue semble contenir toutes les vitesses de dérive fluides du plasma. On note que l'on mesure une vitesse ayant le même ordre de grandeur et le même comportement que les vitesses en sortie de simulation. Les études suivantes permettront d'évaluer quelle contribution de la vitesse du plasma est la plus importante dans nos mesures.

V. 3. 3 Effet des caractéristiques du diagnostic sur les mesures turbulentes.

Il a été montré sur des perturbations analytiques que les caractéristiques même du diagnostic peuvent influencer les mesures. Le fait d'avoir une mesure localisée radialement près d'une couche de coupure ($k_r = 0$) tout en considérant un étalement radial gaussien revient à intégrer nos fluctuations de densité sous cette gaussienne. Cependant, nous considérons ici un étalement radial faible nous permettant ainsi de nous affranchir de cette erreur sur la mesure. Cette hypothèse est valable dans le cadre des mesures expérimentales de rétro-diffusion Doppler dont l'étude via un tracé de rayon a montré une extension radiale relativement faible.

Cependant, il en est autrement dans le cas de l'étalement poloidal. En effet, les faisceaux Doppler présentent une extension poloidale près des points de mesures importantes. Dans le cadre des hypothèses de ce travail où l'on considère que l'essentiel du signal expérimental nous vient du champ rétro-diffusé par un certain volume de plasma, cette donnée peut avoir un effet important au-delà de l'effet sur la sélectivité en nombre d'onde (pris en compte dans l'estimation de l'erreur sur la mesure expérimentale δv_θ , Eq.(V.49)).

Nous allons donc nous intéresser à l'effet de la largeur poloidale de la fonction d'éclairement sur les profils de vitesses des fluctuations et sur les spectres Doppler obtenus. Nous considérerons ici une fonction d'éclairement gaussienne (ce qui est en accord avec les simulations Full-Wave [22] et les simulations Helmholtz [21]). L'expression du signal synthétique est donnée par :

$$i(k_\theta, t) = \int_r \int_\theta M(r, \theta) n(r, \theta, t) e^{ir k_\theta \theta} r dr d\theta = (TF(M) * TF(n))(t, k_\theta) \quad (V.65)$$

Par définition, la transformée de Fourier du produit de deux fonctions est égale au produit de convolution des transformées de Fourier. Le produit de convolution se traduira ici par une moyenne glissante sur les k_θ . Cette moyenne sera faite sous une gaussienne de largeur $\sigma_m = 1/\sigma_\theta$ faisant dépendre la vitesse d'un mode de la vitesse des modes les plus proches. Cela aura un impact dans notre étude dans la mesure où l'on cherchera à estimer la vitesse de phase des fluctuations. On effectue alors des mesures à un rayon donné de la vitesse de tous les modes en changeant la largeur poloidale (Fig.V.24) et on compare les résultats.

La figure Fig.(V.25) donne le profil de la vitesse poloidale mesurée $v_\theta = \Delta\omega_{Dopp}/k_\theta$ en $r/a = 0.95$ en fonction du nombre d'onde. On constate sur cette figure une chute de la vitesse mesurée

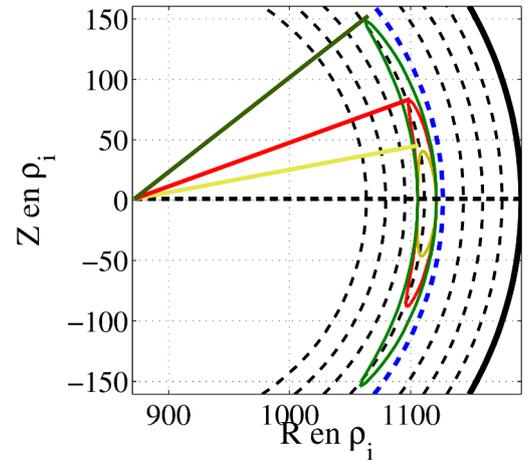


Figure V.24 – Masque gaussien appliqué en $r/a = 0.95$ pour $\sigma_\theta = 4^\circ, 8^\circ$ et 15° .

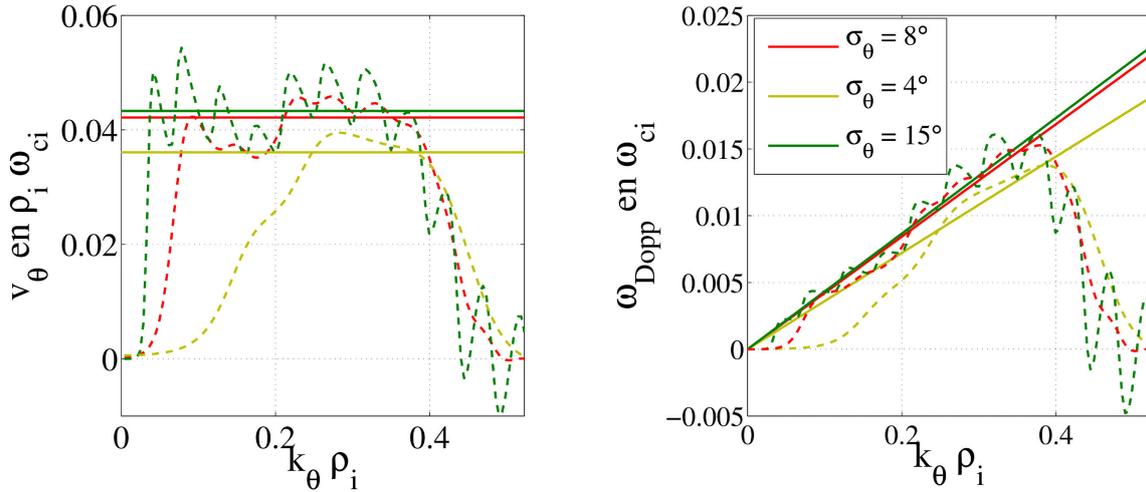


Figure V.25 – *Vitesse poloidale mesurée en fonction du nombre d’onde de mesure. Les pointillées représentent la mesure de chaque mode et les trait pleins, la régression linéaire.*

pour les plus petits (grandes structures) et les plus grands (petites structures) nombres d’onde poloidaux. Par conséquent, on s’attend à ce que la taille du masque influe sur leur détection. La vitesse du mode $k_\theta = 0$ est par définition une vitesse nulle. Pour les fluctuations présentant un faible nombre d’onde, si les structures sont de taille similaire à la fonction d’éclairage du diagnostic, ce dernier ne pourra pas mesurer leur vitesse. C’est pour cette raison qu’une diminution de la taille du masque entraîne une mesure incertaine pour les k_θ de plus en plus petit. Pour les fluctuations de très grand k_θ , la chute de la vitesse semble indépendante (en tendance) de la taille du masque. On en déduit que c’est un effet intrinsèque à la simulation. Ces fluctuations étant mal résolues lorsque du même ordre de grandeur que les mailles de la grille de calcul, le terme diffusif ajouté au modèle permet de dissiper ces petites structures les rendant ainsi indétectable par le diagnostic. Le dernier point soulevé par la figure Fig.(V.25) est l’augmentation des oscillations des profils lorsque l’on augmente la taille poloidale du masque. Cela est lié à l’effet de moyenne glissante introduit lors du calcul du signal synthétique par le produit de convolution des transformées de Fourier de la densité et du masque du diagnostic. On note toutefois un comportement similaire sur les profils (tant que σ_θ suffisamment grand) avec en plus, une regression linéaire du même ordre de grandeur.

Notre méthode de diagnostic est efficace pour détecter la composante moyenne de la vitesse des fluctuations et pour effectuer une étude qualitative de la variation en k_θ de la vitesse dans des simulations turbulentes.

V. 4 Comparaison simulations/expériences : Etude des asymétries poloidales de la vitesse perpendiculaire

Dans cette section, nous utiliserons notre méthode de diagnostic synthétique afin de comparer les simulations turbulentes du code TOKAM-3X avec quelques résultats expérimentaux obtenues par mesure de rétro-diffusion Doppler. On s'intéressera notamment à l'étude des asymétries poloidales de vitesses perpendiculaires observées expérimentalement.

V. 4. 1 Contexte expérimental : asymétrie des mesures de rétro-diffusion Doppler

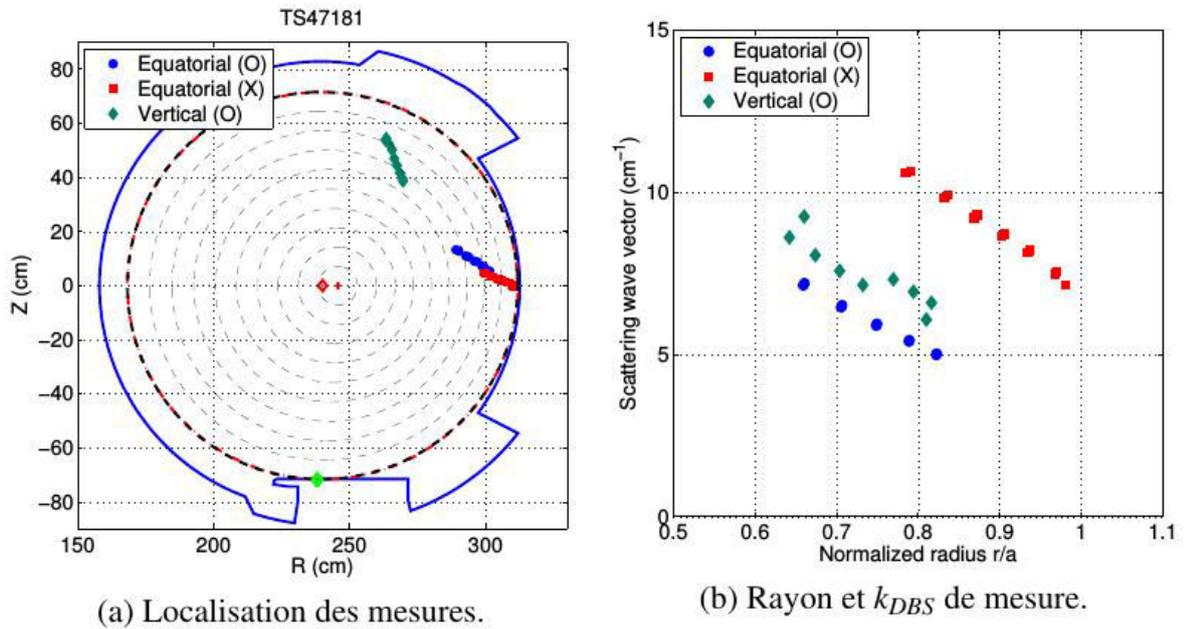
L'étude des asymétries poloidales expérimentales a été menée lors de la thèse d'A. Storelli [65] pour plusieurs décharges du tokamak Tore Supa. Trois séries de mesures opérées pendant trois décharges ont été étudiés dans ce cadre. Ces trois décharges ont été choisi en prenant en compte les différents paramètres plasma ainsi que la qualité des mesures de Doppler. Les caractéristiques de ces trois décharges sont données à titre indicatif Tab.(V.1) : Une déclenche

Chocs	Déclenches	B_0 (T)	I_p (MA)	q ($\rho = 1$)	ICRH	n_l (m^{-2})	T_e en $\rho = 0.85$ (keV)	Point de contact
47181	3 et 4	3.41	1.20	3.47	0	5.5	0.2	TPL
47496	4 et 5	3.87	0.75	6.49	4.3	6.1	0.25	TPL
48193A	1 et 2	3.88	1.20	3.94	3.9	6.5	0.5	TPL + MBL

Table V.1 – *Caractéristique des chocs étudiés dans le cadre de l'étude des asymétries poloidales.*

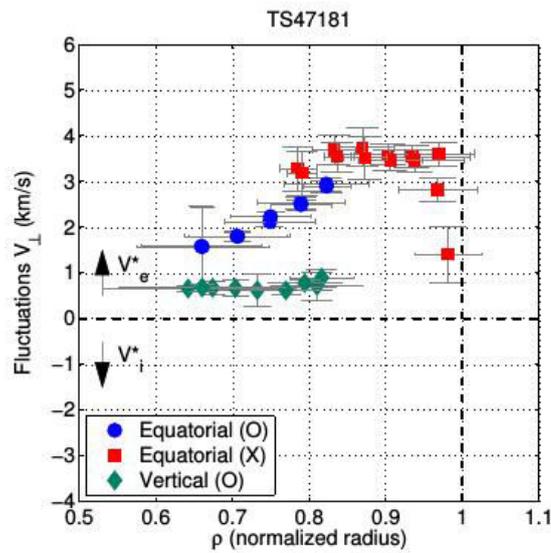
correspond à une série de mesure à angle d'incidence constant et à fréquence du faisceau sonde variable.

Le choc 47181 est un choc ohmique, dans une configuration à fort courant plasma (fort champ magnétique poloidale) et donc à faible facteur de sécurité. Lors de cette décharge, le plasma est déplacé lentement sur le limiteur à pompage toroïdal (TPL), en faisant varier son grand rayon à une vitesse négligeable devant la durée des mesures DBS. Le choc 47496 est un choc à chauffage ICRH, à faible courant plasma et à grand facteur de sécurité. Dans cette décharge, le plasma est en appui sur le TPL. Le choc 48193 est un autre choc à chauffage ICRH, à fort courant plasma et à faible facteur de sécurité. Les données exploitées sont acquises juste avant une perte de couplage ICRH (réduisant la puissance de chauffage ionique de 3.9 MW à 2.0 MW), mais ne sont pas affectées par cet événement. Pendant la mesure, le plasma est dans un appui mixte entre le TPL et un des limiteurs poloïdaux d'antenne côté bas champ (MBL).



(a) Localisation des mesures.

(b) Rayon et k_{DBS} de mesure.



(c) Comparaison de V_{\perp} entre les zones de mesure.

Figure V.26 – Synthèse des mesures de vitesses perpendiculaires par rétro-diffusion Doppler pour le choc n°47181. [65]

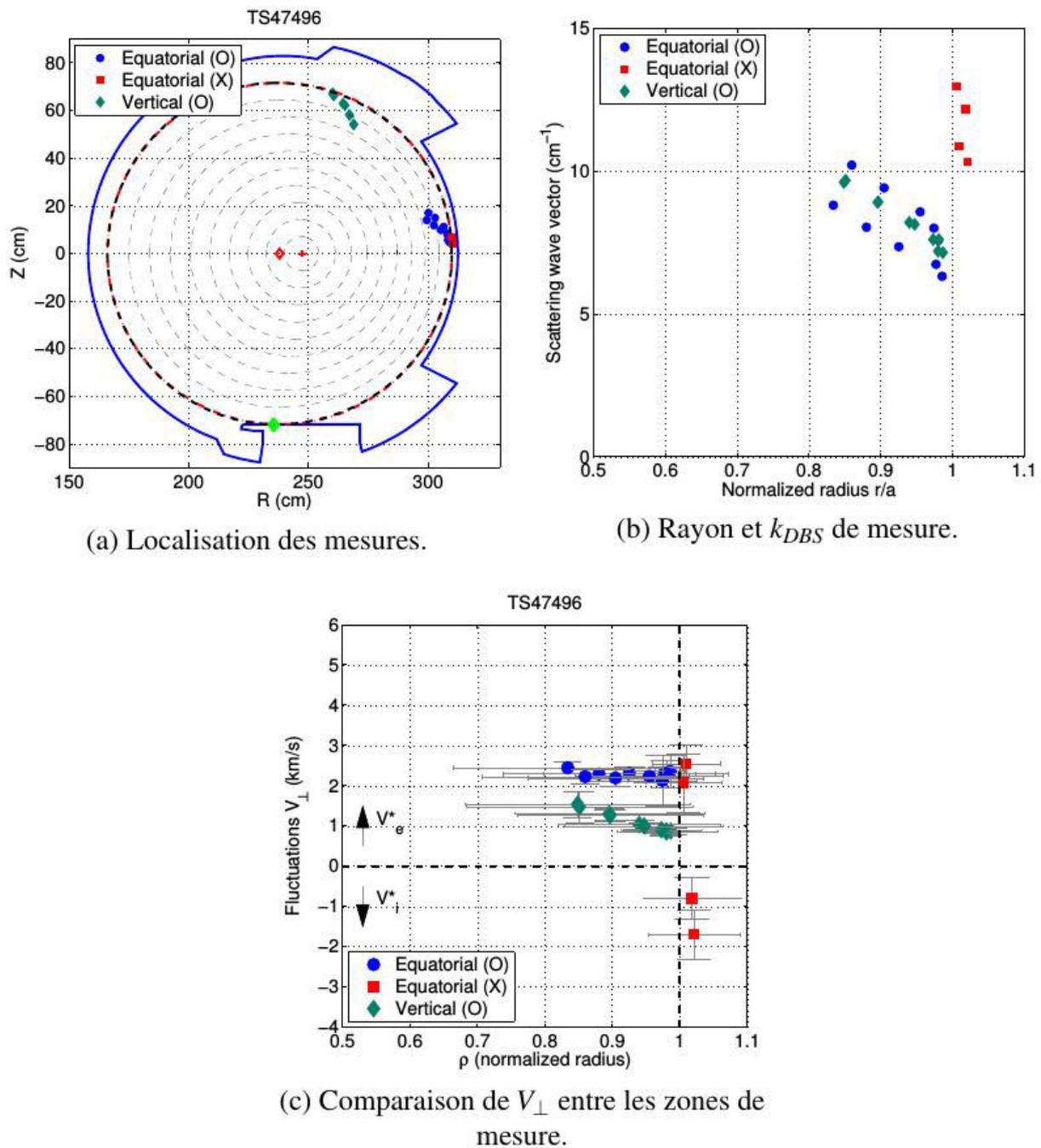


Figure V.27 – Synthèse des mesures de vitesses perpendiculaires par rétro-diffusion Doppler pour le choc n°47496. [65]

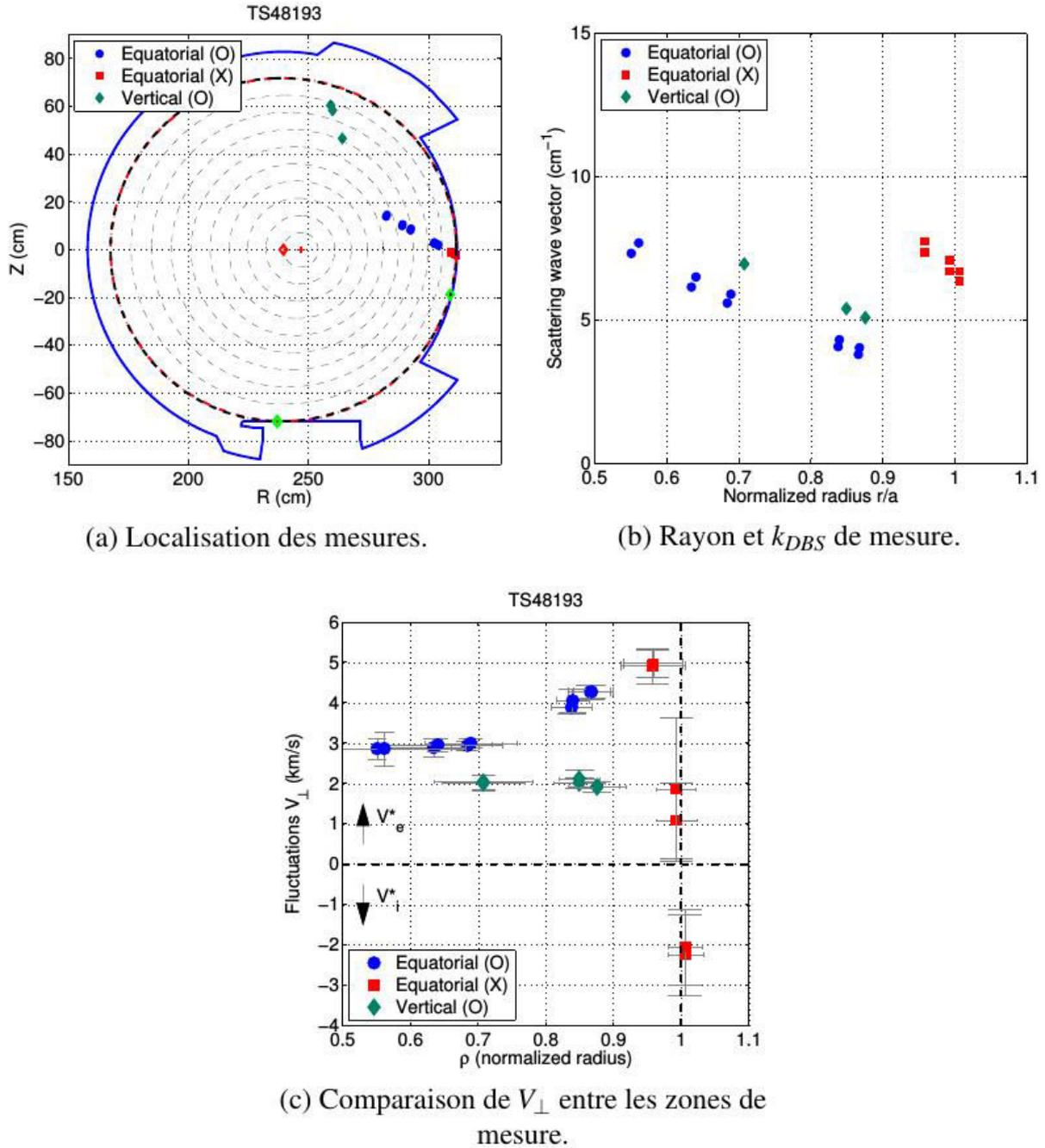


Figure V.28 – Synthèse des mesures de vitesses perpendiculaires par rétro-diffusion Doppler pour le choc n°48193. [65]

On donne en figure Fig.(V.26), Fig.(V.27) et Fig.(V.28) la configuration magnétique et la localisation des points de mesures (a), les nombres d'onde k_{DBS} de mesure (b) (DBS pour "Doppler Back-Scattering") et les profils de vitesses perpendiculaires mesurées (c). Les barres d'erreurs sont celles explicitées en Eq.(V.49)). Ces profils de vitesses sont obtenus avec les deux lignes de réflectométrie Doppler de Tore Supra (DREVE et DIFDOP, section (IV. 2. 1)). Des vitesses positives et négatives sont respectivement représentées par v_e^* et v_i^* (direction diamagnétique électronique et ionique).

Une asymétrie importante des mesures entre le plan équatorial et le haut de la machine est visible. Cette asymétrie en s'approchant de la séparatrice ($r/a = 1$) peut atteindre des

valeurs de l'ordre de 2km/s . Cependant, la définition de la vitesse perpendiculaire du plasma fait apparaître deux premières contributions possible pour ces asymétries :

$$v_{\perp} = -\frac{E_r}{B} \quad (\text{V.66})$$

En effet, les surfaces magnétiques ne sont pas circulaires concentriques. On constate un décalage

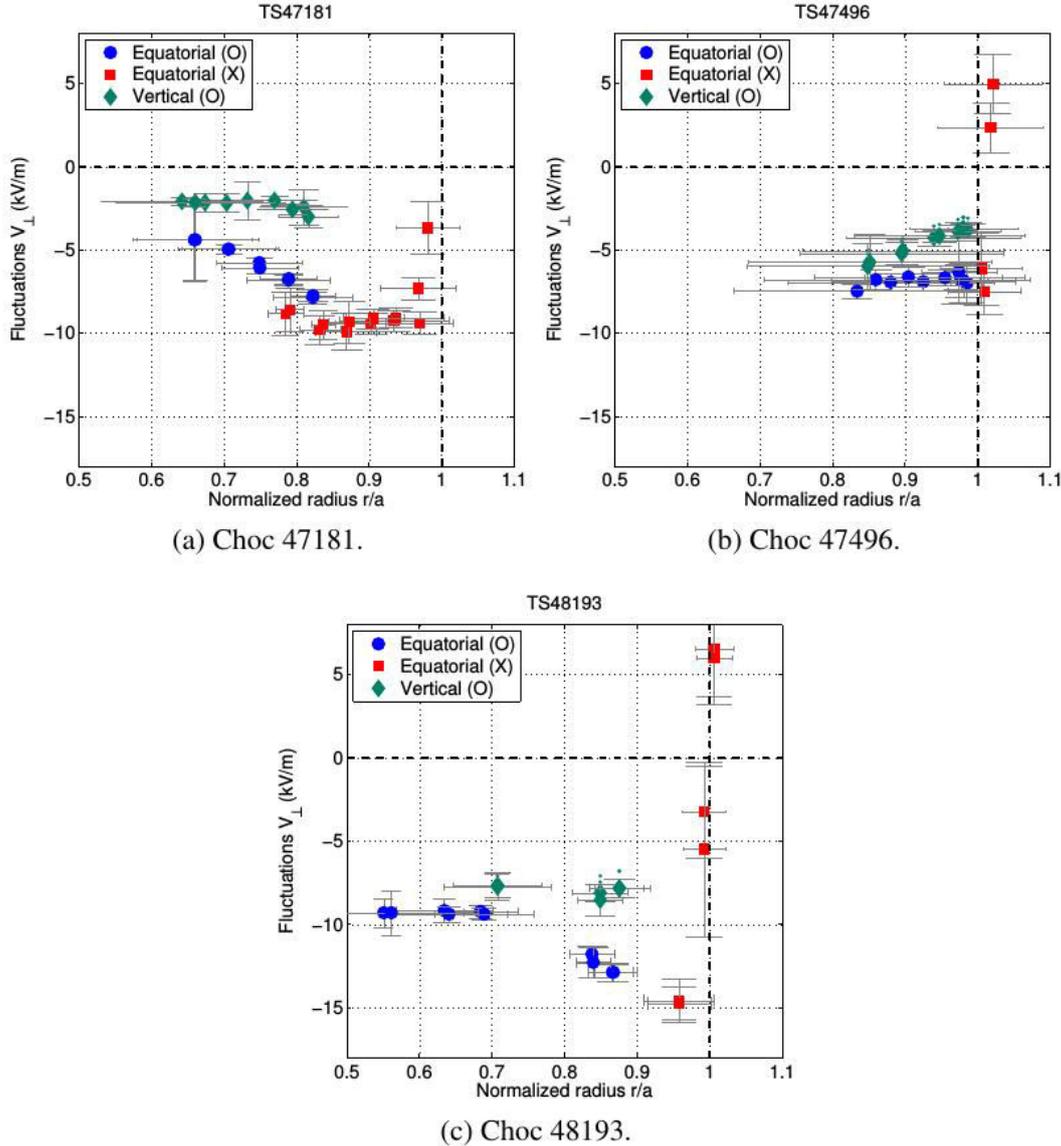


Figure V.29 – Mesures de vitesses perpendiculaires corrigées en prenant en compte le décalage de Shafranov et le champ magnétique. [65]

du centre de chaque surface circulaire : c'est le décalage de Shafranov. Les surfaces étant plus resserrées dans le plan équatorial que dans le haut de la machine, cette donnée peut avoir un effet sur le champ électrique radial et doit être prise en compte lorsque l'on compare des points de mesures localisés radialement sur les surface magnétiques en plusieurs positions poloidales. De plus, la définition même du champ magnétique $B = B_0 R_0 / R$ et la dépendance de la vitesse de dérive électrique en $1/B$ ajoute aussi une source d'asymétrie possible des vitesses. Les profils ont alors été corrigés et on donne en figure Fig. (V.29) les profils de vitesse obtenus exprimés

en unité de champ électrique radial et la nouvelle barre d'erreur est donnée par :

$$\delta E_r = \delta \left(\frac{v_{\perp} R_0 B_0}{R} \right) = B_0 R_0 \left(\frac{\delta v_{\perp}}{R} + v_{\perp} a \cos(\theta) \frac{\delta \rho_{DBS}}{R^2} \right) \quad (\text{V.67})$$

Ainsi on constate que bien que l'asymétrie soit atténuée, elle reste supérieure aux barres d'erreur du diagnostic. Plusieurs mécanismes peuvent être à l'origine de ces asymétries :

- asymétrie du potentiel électrostatique.
- asymétrie du comportement des fluctuations.

Ce sont donc ces deux sources d'asymétries que nous allons chercher à étudier.

V. 4. 2 Asymétrie poloidale des écoulements dans TOKAM-3X

Nous commençons par présenter la simulations TOKAM-3X sur laquelle nous allons tenter de retrouver l'asymétrie poloidale observée expérimentalement. Comme précédemment, il s'agit d'une simulation en géométrie limiteur infiniment fin situé en bas de la machine. La configuration magnétique et les paramètres sont les mêmes qu'en section (V. 3. 1). Le rapport d'aspect est bien du même ordre de grandeur que le tokamak Tore Supra soit $A \sim 3.3$. Le profil de facteur de sécurité de la simulation et celui des trois expériences mentionnées plus haut sont donnés en figure Fig.(V.30). On constate directement que le profil de sécurité dans

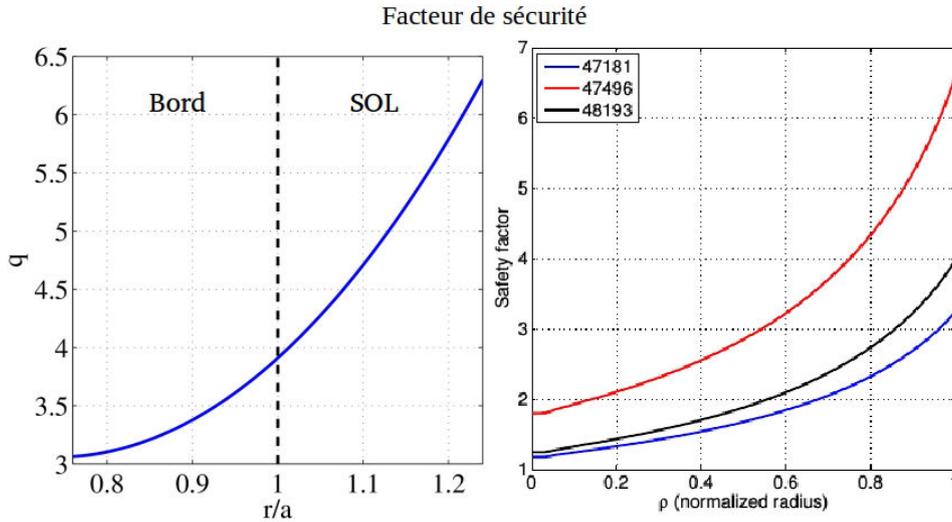


Figure V.30 – Profil du facteur de sécurité dans TOKAM-3X (gauche) et dans les trois chocs étudiés dans le cadre de l'étude des asymétries poloidales.

notre simulation est le plus en accord avec le choc n°48193.

On va dans un premier temps étudier les asymétries de la simulation sur les différentes sorties du code et voir si les observations expérimentales concordent avec une simulation fluide turbulente. On donne en figure Fig.(V.31) les profils radiaux de densité N , de vitesse parallèle u_{\parallel} et de potentiel électrique Φ normalisé. On commence par constater une forte asymétrie et un changement de signe de la vitesse parallèle entre le haut et le plan équatorial. Ce changement de rotation a été intensivement étudié numériquement [58] et expérimentalement [41] (Mistral Base Case). Il a été montré que le transport radial turbulent est ballonné dans le plan équatorial. Ainsi, la matière entre dans la SOL à cet endroit ce qui a pour effet de changer la dynamique

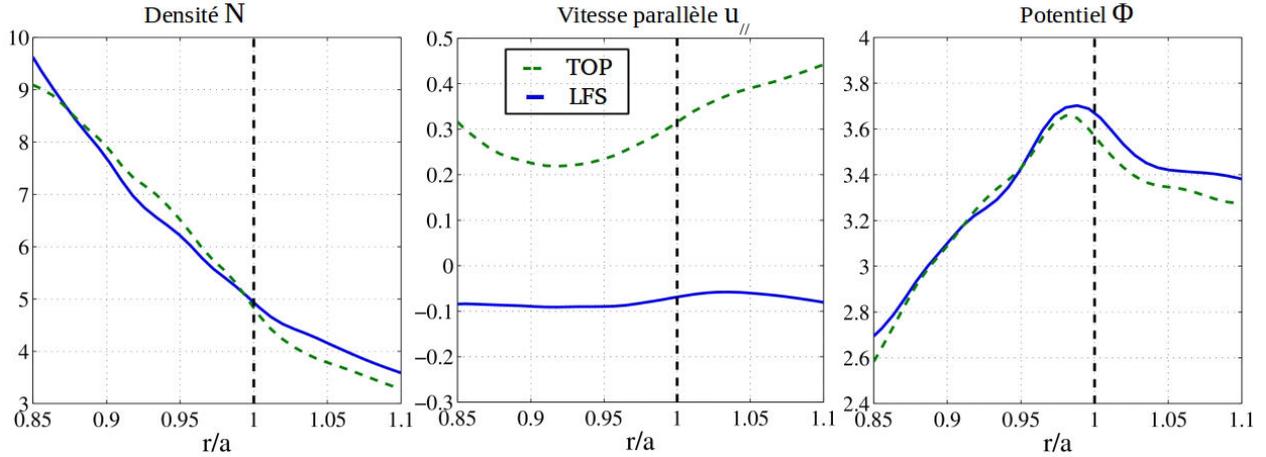


Figure V.31 – Comparaison des profils de densité N , potentiel Φ et vitesse parallèle $u_{||}$ en haut (tiret vert) et dans le plan équatorial (trait plein bleu) en sortie de TOKAM-3X.

parallèle du plasma. Ces simulations ont été comparées aux résultats expérimentaux du Mistral Base Case et ont montré un très bon accord qualitatif. Dans le cadre de notre diagnostic synthétique, la vitesse radiale des fluctuations n'est pas observée (hypothèse $k_r = 0$). Cependant, la définition de la vitesse poloidale du plasma comme $v_\theta = \vec{v} \cdot \vec{e}_\theta$ prend en compte le composante parallèle de la vitesse. Par conséquent, on gardera à l'esprit la présence d'une forte asymétrie de cette vitesse liée au transport turbulent ballonné dans le cadre de cette étude. Concernant la densité et le potentiel, l'asymétrie dans la zone qui nous intéresse est relativement faible. Cependant, les profils laissent penser que l'asymétrie sur leur gradient respectif peut avoir un impact.

On s'intéresse donc maintenant aux asymétries des différentes composantes poloidales de la vitesse. La figure Fig.(V.32) représente les profils radiaux dans le haut (TOP) et le plan équatorial (LFS) de la simulation, des vitesses de dérive diamagnétique électronique et électrique et de la vitesse parallèle projetée dans le plan poloidal. On constate ainsi une forte asymétrie de

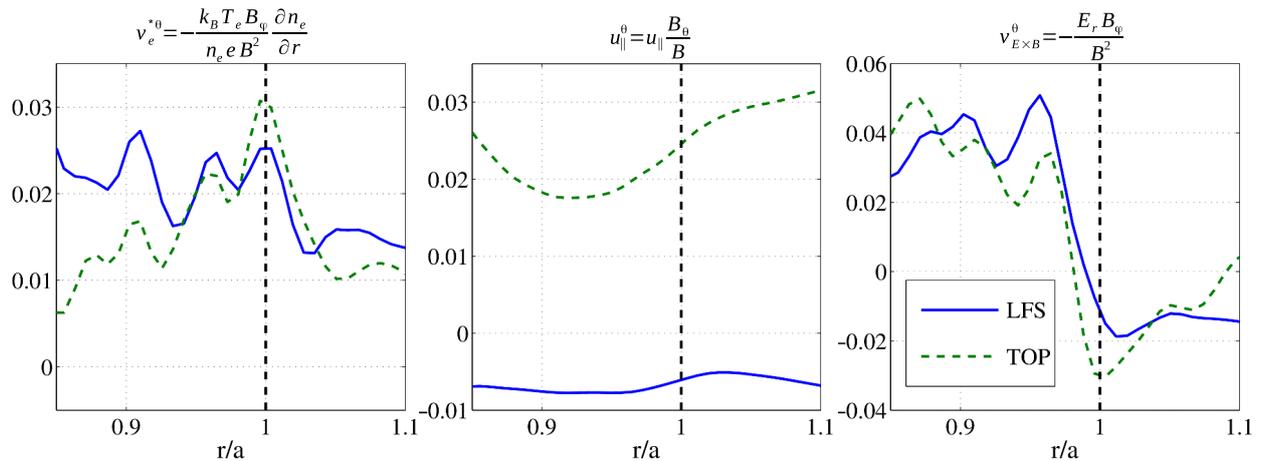


Figure V.32 – Comparaison des profils de vitesse de dérive diamagnétique électronique v_e^{*0} , électrique $v_{E \times B}^\theta$ et vitesse parallèle projetée $u_{||}^{B_0}$ en haut (tiret vert) et dans le plan équatorial (trait plein bleu) en sortie de TOKAM-3X.

la vitesse diamagnétique entre le haut et le plan équatorial. On a de plus une vitesse de dérive électrique poloidale plus forte dans le plan équatorial que dans le haut. Ces observations sont

concordantes avec les observations expérimentales. On peut voir enfin que la projection poloidale de la vitesse parallèle est du même ordre de grandeur que les vitesses de dérive poloidale.

Les vitesses de dérive dépendant du champ magnétique, on va s'intéresser directement aux asymétries des gradients radiaux de densité et de champ électrique. On trace pour cela la différence en pourcentage entre le champ électrique radial E_r (respectivement $\nabla_r n/n$) dans le plan équatorial (LFS) et en haut de la machine (TOP). On constate ainsi que l'asymétrie du

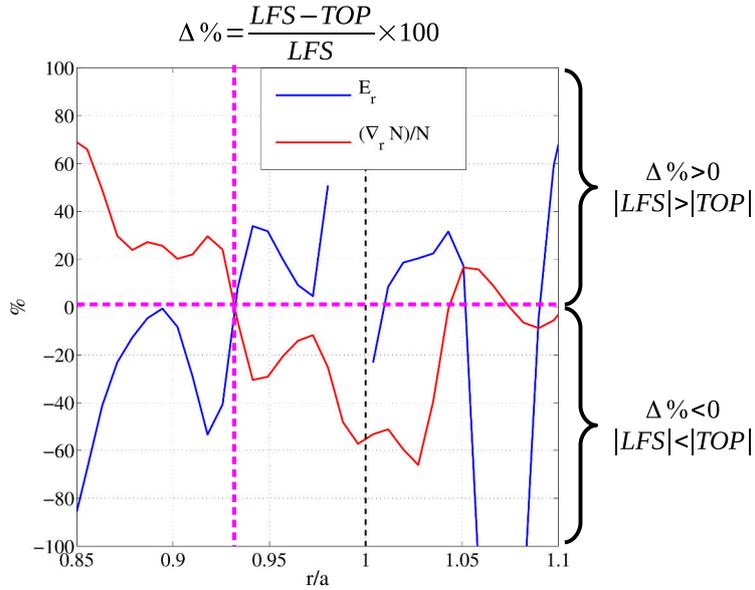


Figure V.33 – Asymétrie en % du champ électrique radial $E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ et du gradient logarithmique de la densité $\frac{1}{N}\frac{\partial N}{\partial r}$ entre le plan équatorial et le haut de la machine : $\Delta\% = 100 \times \frac{LFS - TOP}{LFS}$

champ électrique radial est dans le sens opposé aux mesures expérimentales (pour $r/a < 0.93$). L'asymétrie est ensuite dans le bon sens jusqu'à la séparatrice. On constate par contre que le gradient de densité présente une asymétrie inverse à celle du champ électrique. Sachant que la vitesse diamagnétique électronique est du même ordre de grandeur que la dérive électrique dans nos simulations, elle pourra avoir un impact sur la mesure du diagnostic synthétique via la vitesse de phase des fluctuations. De plus, la vitesse parallèle projetée étant plus importante dans le haut que dans le plan équatorial, cette dernière sera également à prendre en compte dans le cadre de notre étude.

V. 4. 2. 1 Asymétrie poloidale des mesures du diagnostic synthétique

On applique maintenant le diagnostic synthétique à cette simulation. On choisit une fonction d'éclairement dont la taille est en accord avec des mesures typiques de rétro-diffusion Doppler en mode X ($\Delta\rho_{DBS} = 0.02$). On effectue nos mesures aux mêmes localisations radiales que les mesures du choc n° 48193 et pour plusieurs modes poloidaux (Fig.(V.34)). Contrairement à l'expérience, toutes les mesures aux deux localisations poloidales sont réalisées sans décalage poloidale d'une position radiale à l'autre. De plus, le fait que nous soyons dans l'hypothèse d'une mesure 2D fait que l'on détecte une vitesse poloidale des fluctuations d'un certain $k_\theta\rho_i$ soit :

$$v_\theta = \frac{\Delta\omega_{Dopp}}{k_\theta} \quad (\text{V.68})$$

On commence donc par comparer dans le plan équatorial et dans le haut de la machine, les

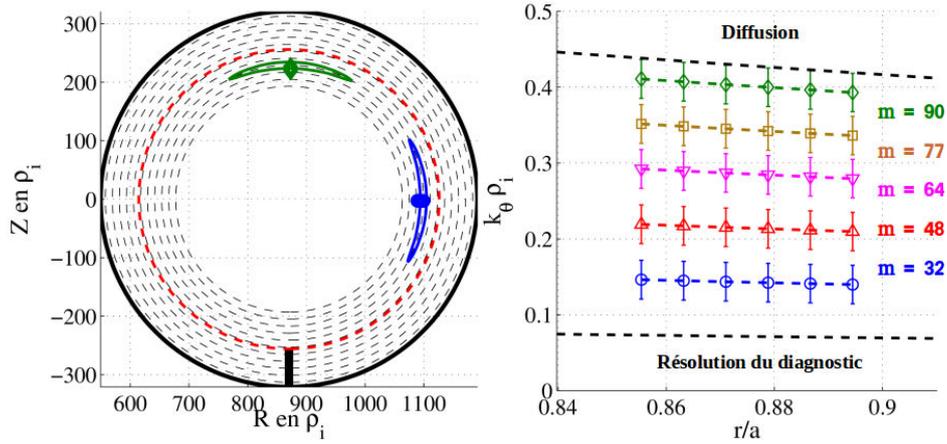


Figure V.34 – Localisation des mesures sur les surfaces magnétiques de TOKAM-3X (Gauche) - Sélectivité en nombre d'onde poloidal $m = k_\theta r$ (droite).

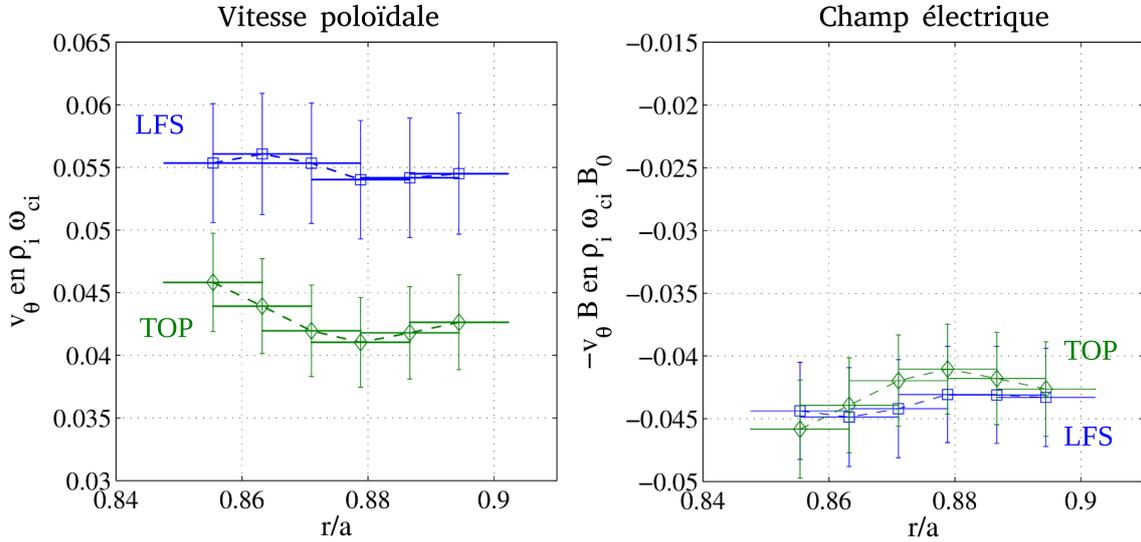


Figure V.35 – Gauche : profil de vitesse poloidale mesurée dans le haut (TOP) et dans le plan équatorial (LFS); Droite : profil de vitesse multipliée par le champ magnétique B mesurée dans le haut (TOP) et dans le plan équatorial (LFS)

profils de vitesse poloidale extraits des données de TOKAM-3X. On choisit pour le moment un seul mode $m = 64$. Si l'on considère que l'essentiel de notre mesure vient des vitesses de dérive, leur dépendance en $1/B$ ajoute une source d'asymétrie. Comme dans les cas expérimentaux, on s'affranchit de cette donnée en multipliant nos profils par le champ magnétique pour obtenir une vitesse en unité de champ électrique. On obtient la figure Fig.(V.35) sur laquelle on note une asymétrie entre le haut et le bas de la machine sur la vitesse poloidale observée. L'asymétrie dans le même sens que les résultats expérimentaux sur la vitesse perpendiculaire. Si on applique la correction par le champ magnétique, l'asymétrie est réduite comme dans l'expérience mais dans notre cas disparaît complètement. Cependant, comme cela a été précisé plus tôt, la vitesse de dérive diamagnétique et la vitesse parallèle peuvent avoir un effet.

Dans un premier temps, l'amplitude de l'asymétrie de vitesse mesurée n'est pas concordante avec l'asymétrie de la vitesse parallèle projetée poloidalement. En effet, cette dernière présente un changement de signe et son amplitude est bien plus importante en haut que dans le plan équatorial. Elle est de plus du même ordre de grandeur que les autres vitesses poloidales pré-

sentant elles aussi une asymétrie mais moins importante. Ainsi, si cette vitesse était mesurée, on observerait une asymétrie totalement inversée avec une vitesse plus importante en haut. De plus, le fait que la multiplication par le champ magnétique annule l'asymétrie initiale montre bien que l'asymétrie dépend du champ magnétique à l'instar des vitesses de dérive fluide.

On compare les profils de la vitesse poloidale mesurée avec les profils des vitesses de dérive. On note toujours une différence entre la mesure et la simulation. On constate effectivement une

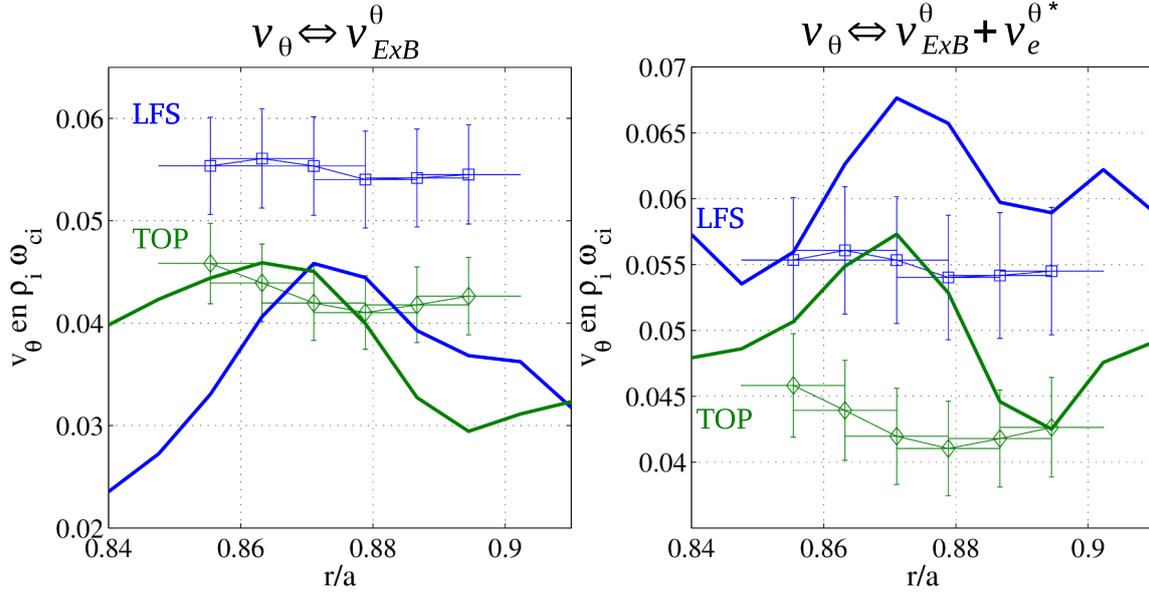


Figure V.36 – Profil de vitesse mesurée comparé à la vitesse de dérive électrique (gauche) et à la vitesse de dérive poloidale totale (droite).

asymétrie LFS/TOP du même ordre de grandeur et dans la même direction entre la mesure et la simulation lorsque l'on somme les deux contributions des vitesses de dérive. On peut donc en déduire que le diagnostic synthétique détecte effectivement la vitesse fluide de dérive électrique du plasma et la vitesse diamagnétique étant importante, elle est aussi détectée.

$$v_\theta \equiv v_{E \times B}^\theta + v_e^{\theta*} = - \left(E_r + \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial r} \right) \frac{B_\varphi}{B^2} \quad (\text{V.69})$$

Cependant, il est supposé expérimentalement que la vitesse détectée est composée de la vitesse de dérive électrique et de la vitesse de phase des fluctuations. La différence entre le diagnostic synthétique et la vitesse de dérive de la simulation peut être lié à une vitesse dépendant du mode poloidal étudié. On ajoutera qu'il est intéressant de retrouver la contribution de la vitesse diamagnétique sachant que cette dernière n'est introduite dans le modèle que via la vitesse de gradient courbure.

On va s'intéresser maintenant à l'asymétrie de vitesse pour différents modes. Comme nous l'avons expliqué précédemment, nous mesurons simultanément des signaux synthétiques pour toutes les fluctuations de mode m . Par conséquent, on peut extraire directement une vitesse de phase dépendant de $k_\theta = m/r$. On constate dans un premier temps une asymétrie globale faible après correction par le champ magnétique. Cela confirme donc le fait précédemment mentionné que nous mesurons ici une vitesse de dérive et donc dépendante du champ magnétique. De plus, on voit une forte dépendance de l'asymétrie au mode que l'on mesure. En effet, on note des oscillations de la vitesse en fonction du nombre d'onde pouvant être en opposition de phase entre le haut et le plan équatorial. Cela nous permet de dire que l'asymétrie observée est

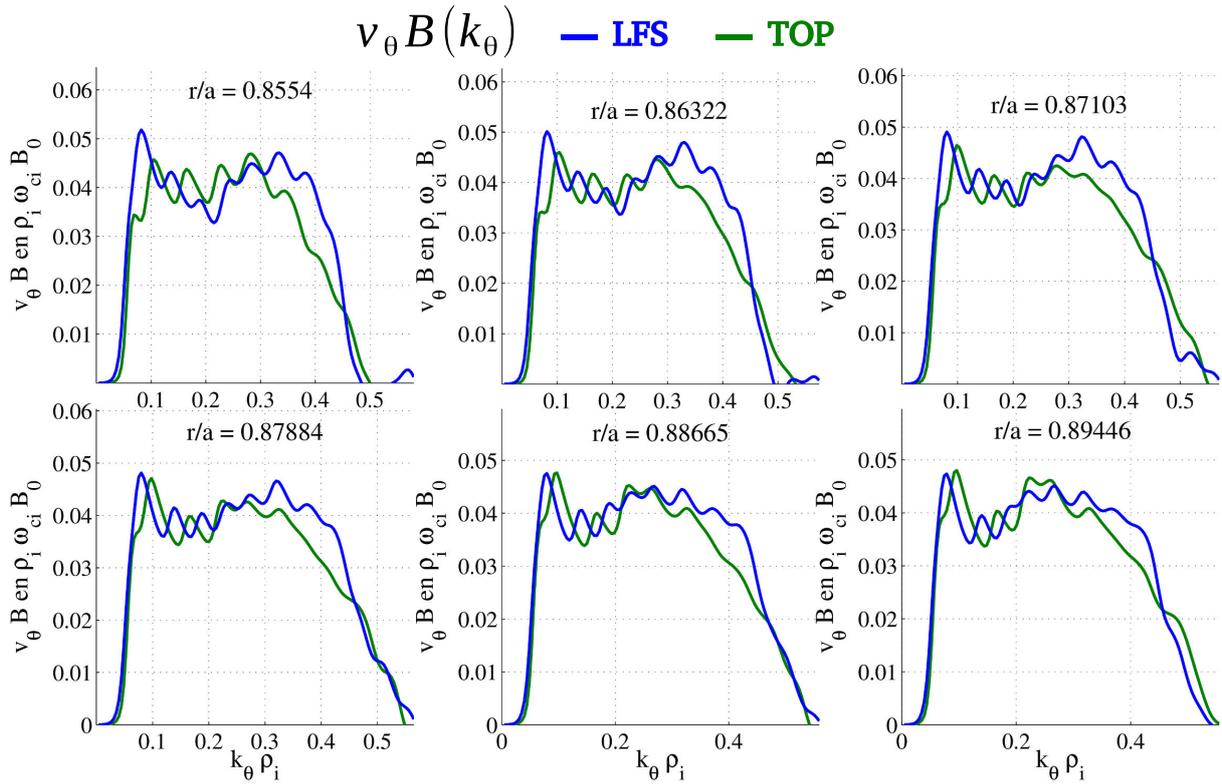


Figure V.37 – Spectres de vitesse v_θ corrigée par le champ magnétique B en fonction des nombres d’ondes k_θ pour les 6 mesures radiales entre $r/a = 0.85$ et $r/a = 0.9$ mesuré en haut (ligne verte) et dans le plan équatorial (ligne bleu).

en partie liée à la taille de la fluctuation suivie par le diagnostic. Or, les fluctuations dans TOKAM-3X présentent une élongation radiale importante dans le plan équatorial en raison du transport radial turbulent plus important que dans le haut. De plus, en raison du cisaillement magnétique, les structures dans le haut de la machine sont légèrement inclinées. Cela a pour effet de modifier leur vitesse ainsi que leur forme. Une étude plus poussée à partir de modèles théoriques sera nécessaire pour étudier dans quelle mesure ces phénomènes peuvent expliquer les observations numériques. Enfin, on peut voir aux six positions radiales mentionnées que la chute de vitesse liée à l’hyperdiffusion n’est pas la même entre le haut et le plan équatorial. On en déduit donc qu’un effet du transport radial et du niveau de turbulence sur les asymétries poloidales de vitesses est tout à fait envisageable.

V. 5 Conclusion

Nous avons ici présenté une méthode simplifiée de diagnostic de rétro-diffusion Doppler afin de mesurer la vitesse des fluctuations de densités dans un code de turbulence fluide 3D : TOKAM-3X. Ce code a déjà été testé et validé par de bons accords qualitatifs avec des phénomènes expérimentaux. La rétro-diffusion est quant à elle un diagnostic expérimental employé dans de nombreuses machines de fusion par confinement magnétique qui a permis la mesure et l’étude des vitesses perpendiculaires dans la zone de bord du plasma. Cependant, des résultats expérimentaux tels que les asymétries poloidales de la vitesse perpendiculaire n’ont pas été entièrement expliqués.

Nous avons donc appliqué ce diagnostic à une simulation circulaire d’un plasma turbu-

lent isotherme avec un limiteur en bas de la machine. On s'est alors intéressé aux possibles asymétries dans une zone correspondant aux mesures expérimentales. Toutes les expériences mentionnées ont montrés une asymétrie LFS/TOP de l'ordre de 50%. On a donc dans un premier temps chercher à vérifier quelles asymétries étaient déjà présentes dans la simulation. On a vu que les asymétries les plus importantes était celles des vitesses de dérive et de la vitesse parallèle. Cependant, la mesure synthétique a montré une asymétrie de l'ordre de 20%. De plus, une correction par le champ magnétique a mis en avant le fait que cette dernière n'était liée qu'à l'asymétrie de ce champ. On a pu en déduire que le diagnostic synthétique permet effectivement de mesurer des vitesses de dérive sans prendre en compte la vitesse parallèle. En comparant nos mesures synthétiques aux différentes composantes des vitesses de dérive, on a mis en évidence le fait qu'une mesure de la vitesse moyenne du plasma sur un certain volume donne accès à la vitesse de dérive électrique ainsi qu'à la vitesse de dérive diamagnétique. Celle-ci est à prendre en compte dans l'étude de l'asymétrie et les différences LFS/TOP du gradient de densité et du champ électrique étant de signe opposé dans la zone de mesure, cela explique la disparition de l'asymétrie après correction par le champ magnétique. Il est encore une fois intéressant de constater que l'effet de la vitesse de gradient-courbure sur le plasma permet de retrouver la vitesse de dérive diamagnétique lors d'une mesure par un diagnostic synthétique de rétro-diffusion Doppler.

Pour finir, après avoir identifié les vitesses effectivement mesurées et expliqué l'absence d'asymétrie dans notre simulation, on a décidé de s'intéresser à l'étude de la vitesse de phase des fluctuations dépendante du mode mesuré. Notre diagnostic donnant accès à une mesure de tous les modes simultanément, il est possible d'obtenir un spectre de vitesse en fonction du nombre d'onde. La même correction par le champ magnétique que précédemment a été appliquée à ces spectres et a confirmé la dépendance de la vitesse des fluctuations à l'inverse du champ magnétique. Néanmoins, même si l'asymétrie semble faible, on a constaté une variation différente des profils entre le haut et le plan équatorial. On en a déduit que l'asymétrie observée est liée à la forme des structures turbulentes. La perte de qualité des mesures pour les structures les plus petites (k_θ grand) lié à l'hyperdiffusion semblant apparaître pour des structures plus grosses montre une corrélation possible entre l'orientation et la forme des structures et la mesure de leur vitesse.

Une comparaison à d'autres méthodes d'extraction de la vitesse (cross-correlation, full wave) et une confrontation à des modèles théoriques sont à étudier dans la suite pour vérifier les analyses de la vitesse de phase. L'absence d'évolution de la température dans le code qui ne présente pas d'asymétrie forte permet d'ouvrir sur un effet de la température comme source d'asymétrie de la vitesse perpendiculaire. L'étude des asymétries poloidales expérimentales restent une question ouverte et le diagnostic proposé ici est une méthode efficace d'étude dans des simulations turbulentes. Une comparaison à des codes full wave sera l'étape suivante dans la validation de cette méthode. De plus, une comparaison à la version 3D du diagnostic synthétique présenté ici devra être faite même si l'on a validé l'absence d'effet de la vitesse parallèle sur les mesures 2D.

Table des figures

I.1	Courbe d'Aston : énergie de liaison par nucléon en fonction du numéro atomique (source : http://guy.chaumeton.pagesperso-orange.fr/)	10
I.2	Taux de réaction de fusion en fonction de la température pour plusieurs isotopes de l'hydrogène. (source : http://www.futura-sciences.com)	11
I.3	Mouvement d'un ion en présence d'un champ magnétique rectiligne uniforme.	12
I.4	Génération des composantes du champ magnétique d'un tokamak.	12
I.5	Configuration magnétique d'un tokamak dans le système de coordonnées toriques (R, Z, φ) ou (r, θ, φ)	13
I.6	Coupe poloidale d'une configuration limiteur (gauche) et divertor (droite); la DSMF est la dernière surface magnétique fermée	15
I.7	Coefficient de diffusion néoclassique pour les différents régimes (rouge) et coefficient classique (bleu) en fonction de la collisionnalité définie comme $\nu^* = \nu_c q R A^{3/2} / v_{th}$	17
I.8	Schéma de principe pour l'interprétation de l'effet des vitesses de dérive dans le plan perpendiculaire au champ magnétique.	22
I.9	Définition de la gaine et de la pré-gaine. La paroi se charge négativement et un champ électrique s'établit sur la longueur caractéristique λ_D accélérant les ions et ralentissant les électrons.	24
I.10	Solution du polynôme Eq.(I.64) pour la densité n_{\pm} et le nombre de Mach M_{\pm} en fonction de $\frac{2\Gamma(T_i+T_e)}{\Pi}$	26
I.11	Flux de particule impactant la paroi dans le cas d'une ligne de champ ayant un angle d'incidence α	29
II.1	Géométrie toroidale et définition des coordonnées (ψ, θ, φ) [10] représentant respectivement la position des surfaces de flux, l'angle poloidal et l'angle toroidal	37
II.2	Maillage cartésien (ψ^*, θ^*) normalisé et reconstruction du maillage circulaire (R, Z)	38
II.3	Composantes du champ magnétique en géométrie circulaire : direction toroidale (gauche), direction R (centre) et Z (droite).	39
II.4	Découpage en zone d'un maillage circulaire en 4 zones (haut) ou d'une géométrie divertor en 6 zones (bas)	39
II.5	Exemple de connexion entre zone : la zone 4 est connectée au sud avec la zone 3 et entourée par des conditions limites parallèles à l'est et à l'ouest et par une condition perpendiculaire au nord.	40
II.6	Schéma d'explication du fonctionnement de SOLEDGE2D : étapes majeures de remplissage des matrices, inversion des systèmes et résolution des grandeurs du plasma.	40
II.7	Définition des points fantômes aux frontières du domaine : application des conditions limites.	41

II.8	Exemple de définition du masque : la frontière de l'objet est définie sur le maillage (gauche) et sert à définir la fonction masque χ (droite).	44
II.9	Définition du masque de la pénalisation : décomposition du masque globale χ_2	44
II.10	Boucle d'asservissement de la pénalisation sur le nombre de Mach : correcteur proportionnel intégral	45
II.11	Configuration des chocs du Mistral Base Case [41] : les lignes rouges représentent la séparatrice et la largeur de la SOL. La sonde est placée en haut.	46
II.12	Ballonnement imposé de la diffusion : gaussienne de largeur $\Delta\theta = 30^\circ$, rapport d'amplitude $D_{max}/D_{min} = 20$ et coefficient de diffusion moyen $\langle D \rangle = 1m^2.s^{-1}$ [10].	46
II.13	Nombre de Mach parallèle $M_{ }$ des 4 simulations : la ligne noire représente l'épaisseur de la SOL, les tirets la séparatrice et la sonde est en rose en haut [12].	47
II.14	Nombre de Mach parallèle au niveau de la sonde : numérique (a) et expérimental (b) ; Profil de densité : numérique (c) et expérimental (d). [10]	47
II.15	Profils des coefficients de diffusion des particules D , de la chaleur ionique χ_i et de la chaleur électronique χ_e provenant de [42].	48
II.16	a) Carte de flux magnétique poloidal de ASDEX-Upgrade ; b) Carte de densité électronique n_e ; c) Carte de densité de l'impureté carbone C^{6+}	48
II.17	Haut : Profil de densité électronique n_e en m^{-3} ; Bas : Profil de température $T_{e,i}$ en eV	49
II.18	Profil du flux de chaleur impactant le divertor d'ASDEX-Upgrade mesuré par caméra infrarouge (IR) et profil de SOLEDGE2D-EIRENE.	49
III.1	Profil de nombre de Mach parallèle le long d'une ligne de champ dans la SOL (gauche) et profil de densité normalisée à la valeur au point de stagnation le long d'une ligne de champ (droite).	53
III.2	Profil radial de champ électrique radial en sinus cardinal (gauche) et maillage cartésien utilisé (les traits noirs représentent la paroi ainsi que les côtés du limiteur.	54
III.3	Cartes 2D de densité en logarithme (gauche) et de nombres de Mach parallèle (droite) ; En haut la vitesse de dérive est désactivée et en bas elle est activée. La courbe pointillée noire correspond au maximum de densité le long d'une ligne de champ, la courbe pleine noire correspond à $M_{ } = 0$ et la courbe pleine blanche à $ M_{ } = 1$	54
III.4	Profils parallèles de densité (gauche) et de nombre de Mach (droite) le long d'une ligne de champ dans la SOL ($\psi = 0.75$). La vitesse de dérive poloidale est activée en bas et désactivée en haut et on compare sur chaque figure le profil analytique au profil numérique.	55
III.5	Carte 2D de la vitesse de dérive poloidale $\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$ en $m.s^{-1}$; les flèches vertes correspondent au sens de rotation de la vitesse poloidale.	57
III.6	Flux parallèle de particule $\Gamma_{ }$ sans vitesse de dérive (gauche) et avec (droite). Les flèches noires représentent les flux de particules dans la SOL ; les flèches rouge les flux de particules dans le bord. Les traits noirs représentent toujours les parois du tokamak ainsi que le limiteur (situé en bas).	58
III.7	Composante du flux parallèle de particule $\Gamma_{ }$ avec vitesse de dérive ; les flèches représentent la direction des flux de particules.	59

III.8 a) : Profil poloidal du gradient poloidal de densité avec et sans vitesse de dérive, les traits pointillés représentent les positions poloidales des tracés de la figure b) ; b) : Profils radiaux du moment parallèle en plusieurs positions poloidales avec (trait pointillé) et sans (trait plein) vitesse de dérive.	60
III.9 a) : Profils poloidaux des contributions de Pfirsch-Schlüter (P-S) et de la rotation parallèle à la quantité de mouvement parallèle Γ_{\parallel} pour une viscosité de $\nu^{\psi} = 0.02m^2.s^{-1}$ (bleu) et de $\nu^{\psi} = 2m^2.s^{-1}$ (rouge); b) : Profils radiaux de la vitesse de Pfirsch-Schlüter en $\theta = 0$ (LFS) analytique (rouge) et numérique (bleu).	60
III.10 Profils poloidaux de densité (droite) et de nombre de Mach parallèle (gauche) au milieu de la SOL (maximum de E_r) pour différentes valeurs max de champ électrique radial. Le point de stagnation ($M_{\parallel} = 0$) et le maximum de densité se déplace dans le sens de la vitesse de dérive imposée.	62
III.11 Profil de flux de chaleur total sur les côtés du limiteur côté faible champ (LFS, droite) et fort champ (HFS, gauche). On voit bien une dépendance entre l'amplitude du champ électrique radial et l'amplitude du flux de chaleur.	62
III.12 Asymétrie du maximum du flux de chaleur et du dépôt de chaleur ($P = \int q ds_{lim}$) en fonction du champ électrique radial maximum dans la SOL.	63
III.13 Gauche : champ magnétique toroidal (T); Droite : champ magnétique poloidal (T)	64
III.14 Intégrale le long des surfaces magnétiques des trois termes principaux de l'équation de vorticité : $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_p$, $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}^*$ et $\vec{\nabla} \cdot (j_{\parallel} \vec{b})$ dans les trois simulations. Les tirets noirs correspondent à la séparatrice.	65
III.15 Comparaison des cartes de courant parallèle j_{\parallel} en $A.m^{-2}$ sans courant diamagnétique (a), avec courant diamagnétique (b) et avec dérive de gradient-courbure et courant diamagnétique (c). Les flèches rouges donnent le sens du courant diamagnétique et les flèches noires correspondent aux courants parallèles de Pfirsch-Schlüter.	66
III.16 Comparaison des cartes de potentiel électrique sans vitesse de dérive (a), avec dérive électrique (b) et avec dérive de gradient-courbure (c) en Volt (V).	67
III.17 Comparaison des profils de potentiel électrique sans vitesse de dérive (bleu), avec dérive électrique (rouge) et avec dérive de gradient-courbure (vert) en Volt (V) radiaux dans le plan équatorial (LFS) et poloidaux dans la SOL.	68
III.18 Comparaison des profils de champ électrique radial aux prévisions théoriques.	68
III.19 Gauche : Norme du champ magnétique (T) et direction de ses composantes; Droite : Direction des vitesses de dérive. La ligne pointillée rouge représente la séparatrice.	69
III.20 Carte 2D du Mach parallèle M_{\parallel} sans vitesses de dérive (gauche), avec dérive électrique (centre) et avec dérive électrique et dérive de gradient-courbure (droite); le contour noir correspond à $M_{\parallel} = 0$ et le contour blanc à $ M_{\parallel} = 1$. La flèche noire représente le sens des écoulements parallèles dans la SOL et les flèches bleues celui des écoulements dans le bord.	70
III.21 Profils poloidaux de la densité (gauche) et du M_{\parallel} (droite) en $r - a = 3.62cm$. $\theta = 0$ correspond au bas de la machine.	70
III.22 Profil du paramètre $\mathcal{A} = \frac{2m_i \Gamma_{\parallel} c_s}{\Pi}$ en fonction du nombre de Mach M [10].	71
III.23 Profils poloidaux du nombre de Mach M_{\parallel} et de la source de particule \mathcal{S}_n dans la SOL en $r - a = 8.82cm$	72

III.24	Profils radiaux du champ électrique radial (haut) et du gradient de pression dans le plan équatorial $Z = 0$ côté HFS (gauche) et LFS (droite) pour les deux simulations avec vitesse de dérive. Les tirets-pointillés noirs correspondent à la séparatrice.	73
III.25	Nombre de Mach parallèle des écoulements de Pfirsch-Schlüter Eq.(III.35) (traits plein) et profil de M_{\parallel} (tirets) dans le plan équatorial ($Z = 0$) côté HFS (gauche) et LFS (droite).	74
III.26	Configurations des deux chocs n°44202 et n°44203 : on appellera BOT la configuration où le point de contact est en bas et TOP quand il est en haut. [46] . . .	75
III.27	Mesure de rétro-diffusion Doppler des deux chocs n°44202 et n°44203 : les points rouges correspondent à la configuration BOT et les points bleus à la configuration TOP. [46]	76
III.28	Configurations des deux simulations : on appelle BOT la configuration où la dérive verticale ramène les ions vers le limiteur et TOP la configuration inverse.	76
III.29	Champ électrique radial d'équilibre E_r pour deux simulations avec limiteur en haut et en bas. La colorbar est celle du cas limiteur en haut pour les deux simulations mais on rappelle que le champ électrique atteint des valeurs de $20kV.m^{-1}$ dans le cas limiteur en bas.	77
III.30	Profil radial du champ électrique radial dans le plan équatorial pour les deux configurations BOT et TOP.	77
III.31	Profil radial du champ électrique radial dans le plan équatorial pour les deux configurations BOT et TOP.	78
III.32	Cartes 2D du nombre de Mach parallèle M_{\parallel} . La vitesse de dérive verticale est dans le même sens pour les deux configurations ainsi que les écoulements de Pfirsch-Schlüter dans la SOL (flèches bleues).	79
III.33	Profils poloidaux de la densité (gauche) et du M_{\parallel} (droite) en $r - a = 3.62cm$. $\theta = 0$ correspond au bas de la machine.	79
III.34	Haut : profils poloidaux des contributions de la dérivée du paramètre \mathcal{A} en $r - a = 3.62cm$; Bas : profils du nombre de Mach parallèle correspondant	81
IV.1	Schéma de principe d'une expérience de diffusion.	83
IV.2	Position de l'observateur par rapport à une particule accélérée par un champ électrique.	84
IV.3	Relation de dispersion mode 0/mode X	89
IV.4	Profils des fréquences de coupure en mode O/X en fonction du grand rayon du plasma et pour un diagnostic situé côté faible champ magnétique. Les dimensions considérées ici sont celles de Tore Supra.	90
IV.5	Propagation du faisceau Doppler avec réflexion à la couche de coupure perpendiculaire aux lignes de champ magnétique.	91
IV.6	Schéma électronique simplifié des lignes DIFDOP et DREVE en mode O. Pour le mode X, les facteurs d'amplification par $\times 4$ deviennent $\times 6$. [17]	91
IV.7	Exemple de résultat du tracé de rayon [64] pour la ligne DIFDOP en mode O et X et pour la ligne DREVE en mode O. Les contours rouges donnent la valeur de l'indice optique.	93
IV.8	Variation temporelle de la partie réelle, imaginaire et du module du signal électrique mesuré par le système de détection du réflectomètre Doppler.	94
IV.9	Exemple de spectres expérimentaux obtenus sur les deux lignes de visé de Tore Supra : a) et b) : DIFDOP ; c) DREVE. [65]	96

V.1	Exemples de snapshots des fluctuations de potentiel (gauche) et de densité (droite) de TOKAM-3X réalisés avec PARAVIEW ; Haut : géométrie limiteur infiniment fin ; Bas : équilibre magnétique de JET	100
V.2	Exemple de masque définissant le volume diffusant : masque gaussien (gauche) et Gaussienne tangente à une surface circulaire (droite).	104
V.3	Exemple de masque définissant le volume diffusant : masque gaussien non aligné (en haut) et masque aligné (en bas).	105
V.4	Profils de vitesse utilisés pour les tests : linéaire (bleu), sinusoidal (rouge) ou linéaire avec fort cisaillement (noir)	105
V.5	Perturbation considérée à un instant $t = 0.179ms$; Gauche : carte 2D de la perturbation $\delta(r, \theta)$. Le contour noir correspond au contour de la fonction masque. Droite : Profil de δ à un certain rayon.	106
V.6	Carte 2D de la perturbation à trois instants donnés(haut) ; Evolution temporelle de la partie réelle (bleu), imaginaire (rouge) et du module du signal complexe pour les modes $m = 32, 64$ et 96	106
V.7	Spectres fréquentiels des modes $m = 32, 64$ et 96 : on mesure le décalage Doppler proportionnel au mode considéré.	107
V.8	Comparaison des profils de vitesse injectés aux profils de vitesse du mode $m_0 = 64$ mesurés avec les trois méthodes d'analyse fréquentielle.	108
V.9	Comparaison des spectres PWELCH et des pseudo-spectres PMUSIC de part et d'autre de la discontinuité ; Gauche : au point d'avant ; Droite : au point d'après. PWELCH : on compare la position du pic Doppler calculé et la position du maximum du spectre. PMUSIC : on compare les pseudo-spectre avec comme paramètre d'entrée de la fonction PMUSIC une ou deux fréquences dominantes $n_f = 1, 2$	109
V.10	Signal synthétique mesuré en $r = 0.75m$; les σ_r sont croissants de haut en bas et on peut voir l'apparition de structure dans le signal relative à l'augmentation de la taille du masque.	111
V.11	Tracé de l'écart sur la mesure en % (gauche) et en $m.s^{-1}$ (droite) en fonction de la largeur du masque σ_r	111
V.12	Profil de vitesse de phase en fonction du mode m en $r = 1m$ avec $A = 10\%$ (bleu) et $A = 25\%$ (rouge).	112
V.13	Signal synthétique mesuré pour une amplitude de vitesse de phase de 10% de la vitesse poloidale ; les σ_θ sont croissants de haut en bas et on peut voir l'apparition de structure dans le signal relative à l'augmentation de la taille du masque.	112
V.14	Tracé de l'écart sur la mesure en % (gauche) et en $m.s^{-1}$ (droite) en fonction de la largeur du masque σ_θ	113
V.15	Champ magnétique toroidal (gauche) et poloidal (droite) dans les simulations fluides turbulentes de TOKAM-3X.	114
V.16	Composante poloidale moyennée en temps de la vitesse de dérive électrique normalisée (gauche) et nombre de Mach parallèle (droite). Les flèches représentent le sens des écoulements dans le plan poloidal.	114
V.17	Carte 2D des fluctuations de densité à différents instants auxquelles on applique un masque 2D en géométrie circulaire (haut). Fluctuations en géométrie slab (r, θ) : on réduit la zone de mesure au-delà de la zone d'injection S_n et là où le niveau de fluctuation est suffisant.	115
V.18	Signal synthétique obtenu avec un masque gaussien centré en $r = 230\rho_i$ et $\theta = 0$ pour un nombre d'onde $k_\theta\rho_i = 0.2$	116

V.19 Spectre $\log_{10}(S(\omega, k_\theta))$ obtenu pour trois nombres d'ondes; on note l'augmentation du décalage Doppler avec le nombre d'onde.	117
V.20 Profil de la vitesse poloidale $v_\theta(k_\theta)$ et du décalage Doppler $\omega_{Dopp}(k_\theta)$ mesuré en $(r, \theta) = (230\rho_i, 0)$; Les tirets verts délimitent la zone dans laquelle la régression linéaire $\langle \cdot \rangle$ est effectuée.	117
V.21 Masque gaussien glissant dans le plan équatorial (tracé par dessus des surfaces magnétiques) à gauche; position et nombre d'onde des mesures avec résolution spatiale en r et en k_θ à droite.	118
V.22 Profil radial de vitesse mesurée par le diagnostic comparé aux vitesses poloidales de TOKAM-3X. Les tirets magenta représentent la séparatrice $r = a$; Spectre PWELCH correspondant. Les tirets magenta représentent la fréquence nulle. . .	119
V.23 Profil radial de vitesse diamagnétique électronique de Tokam-3X comparée à la vitesse moyenne des fluctuations.	119
V.24 Masque gaussien appliqué en $r/a = 0.95$ pour $\sigma_\theta = 4^\circ, 8^\circ$ et 15°	120
V.25 Vitesse poloidale mesurée en fonction du nombre d'onde de mesure. Les pointillées représentent la mesure de chaque mode et les trait pleins, la régression linéaire.	121
V.26 Synthèse des mesures de vitesses perpendiculaires par rétro-diffusion Doppler pour le choc n°47181. [65]	123
V.27 Synthèse des mesures de vitesses perpendiculaires par rétro-diffusion Doppler pour le choc n°47496. [65]	124
V.28 Synthèse des mesures de vitesses perpendiculaires par rétro-diffusion Doppler pour le choc n°48193. [65]	125
V.29 Mesures de vitesses perpendiculaires corrigées en prenant en compte le décalage de Shafranov et le champ magnétique. [65]	126
V.30 Profil du facteur de sécurité dans TOKAM-3X (gauche) et dans les trois chocs étudiés dans le cadre de l'étude des asymétries poloidales.	127
V.31 Comparaison des profils de densité N , potentiel Φ et vitesse parallèle u_\parallel en haut (tiret vert) et dans le plan équatorial (trait plein bleu) en sortie de TOKAM-3X.	128
V.32 Comparaison des profils de vitesse de dérive diamagnétique électronique $v_e^{\theta*}$, électrique $v_{E \times B}^\theta$ et vitesse parallèle projetée $u_\parallel \frac{B_\theta}{B}$ en haut (tiret vert) et dans le plan équatorial (trait plein bleu) en sortie de TOKAM-3X.	128
V.33 Asymétrie en % du champ électrique radial $E_r = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ et du gradient logarithmique de la densité $\frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial r}$ entre le plan équatorial et le haut de la machine : $\Delta\% = 100 \times \frac{LFS-TOP}{LFS}$	129
V.34 Localisation des mesures sur les surfaces magnétiques de TOKAM-3X (Gauche) - Sélectivité en nombre d'onde poloidal $m = k_\theta r$ (droite).	130
V.35 Gauche : profil de vitesse poloidale mesurée dans le haut (TOP) et dans le plan équatorial (LFS); Droite : profil de vitesse multipliée par le champ magnétique B mesurée dans le haut (TOP) et dans le plan équatorial (LFS)	130
V.36 Profil de vitesse mesurée comparé à la vitesse de dérive électrique (gauche) et à la vitesse de dérive poloidale totale (droite).	131
V.37 Spectres de vitesse v_θ corrigée par le champ magnétique B en fonction des nombres d'ondes k_θ pour les 6 mesures radiales entre $r/a = 0.85$ et $r/a = 0.9$ mesuré en haut (ligne verte) et dans le plan équatorial (ligne bleu).	132
B.1 Définition des vecteurs covariants et contravariants.	148

Annexe A

Expressions des termes collisionnels des équations de Braginskii.

Dans cette annexe, les termes collisionnels ainsi que le tenseur de pression apparaissant dans les équations fluides de Braginskii sont détaillés. Nous présentons d'abord le calcul du tenseur de pression puis les termes de friction. Ce développement permet de faire apparaître les termes compensant les termes d'advection par la dérive diamagnétique (*diamagnetic cancellation* [38]) et de la remplacer par la dérive de gradient-courbure aussi bien dans le code de transport SOLEDGE2D que dans le code turbulent TOKAM3X.

A. 1 Termes de Braginskii

A. 1. 1 Tenseur de pression

Dans un champ magnétique intense ($\omega_c/\nu_c \gg 1$), le tenseur de pression de Braginskii peut s'écrire sous la forme [33] :

$$\bar{\bar{\Pi}} = [\bar{\bar{\Pi}}_1 \quad \bar{\bar{\Pi}}_2 \quad \bar{\bar{\Pi}}_3] \quad (\text{A.1})$$

où chaque composante s'écrit :

$$\bar{\bar{\Pi}}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\eta_0}{2} (W_{xx} + W_{yy}) - \frac{\eta_1}{2} (W_{xx} - W_{yy}) - \eta_3 W_{xy} \\ -\eta_1 W_{xy} + \frac{\eta_3}{2} (W_{xx} - W_{yy}) \\ -\eta_2 W_{xz} - \eta_4 W_{yz} \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{\bar{\Pi}}_2 = \begin{pmatrix} -\eta_1 W_{xy} + \frac{\eta_3}{2} (W_{xx} - W_{yy}) \\ -\frac{\eta_0}{2} (W_{xx} + W_{yy}) + \frac{\eta_1}{2} (W_{xx} - W_{yy}) + \eta_3 W_{xy} \\ -\eta_2 W_{yz} + \eta_4 W_{xz} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

$$\bar{\bar{\Pi}}_3 = \begin{pmatrix} -\eta_2 W_{xz} - \eta_4 W_{yz} \\ -\eta_2 W_{yz} + \eta_4 W_{xz} \\ -\eta_0 W_{zz} \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

(x, y, z) est une base orthogonal local et la direction z direction est la direction parallèle au champ magnétique. \bar{W} est le tenseur de taux de déformation et $\eta_{0/1/2/3/4}$ sont les coefficients de

viscosité. \vec{W} se définit comme :

$$\begin{aligned} W_{xx} + W_{yy} &= \frac{2}{3} (\partial_x V_x + \partial_y V_y - 2\partial_z V_z) \\ W_{xx} - W_{yy} &= 2 (\partial_x V_x - \partial_y V_y) \\ W_{zz} &= \frac{2}{3} (2\partial_z V_z - \partial_x V_x - \partial_y V_y) \\ W_{xy} &= \partial_x V_y + \partial_y V_x \\ W_{yz} &= \partial_y V_z + \partial_z V_y \\ W_{zx} &= \partial_z V_x + \partial_x V_z \end{aligned}$$

où \vec{V} est la vitesse fluide de l'espèce considérée. L'expression des coefficients de viscosité est :

$$\begin{aligned} \eta_0^i &= 0,96 \cdot p_i \tau_{ii} \\ \eta_1^i &= 0,3 \cdot \frac{p_i}{\omega_{ci}^2 \tau_{ii}} \\ \eta_2^i &= 4\eta_1^i \\ \eta_3^i &= 0,5 \cdot \frac{p_i}{\omega_{ci}} \\ \eta_4^i &= 2\eta_3^i \end{aligned}$$

pour un fluide ionique, τ_{ii} est le temps caractéristique d'une collision ion/ion. Les coefficients de viscosités électronique $\eta_{3/4}$ sont semblables en valeur absolue.

Cette expression est trop complexe pour être introduite dans les équations que l'on considère mais peut néanmoins être simplifiée via des considérations d'ordering soit :

- ordering en $\omega_c \tau_c \gg 1$ qui conduit à $\eta_0 \gg \eta_{3/4} \gg \eta_{1/2}$
- ordering sur les longueurs de gradient : $\partial_{x/y} \gg \partial_z$
- ordering sur les vitesses : $V_z \gg V_{x,y}$ ($V_\perp \ll V_\parallel$)

À partir de ces hypothèses, on en déduit les formes simplifiées des trois contributions du tenseur de pression :

$$\vec{\Pi}_1 \approx \begin{pmatrix} -\frac{\eta_0}{3} (\partial_x V_x + \partial_y V_y - 2\partial_z V_z) \\ \eta_3 (\partial_x V_x - \partial_y V_y) \\ -\eta_4 \partial_y V_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\vec{\Pi}_2 \approx \begin{pmatrix} \eta_3 (\partial_x V_x - \partial_y V_y) \\ -\frac{\eta_0}{3} (\partial_x V_x + \partial_y V_y - 2\partial_z V_z) \\ \eta_4 \partial_x V_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\vec{\Pi}_3 \approx \begin{pmatrix} -\eta_4 \partial_y V_z \\ \eta_4 \partial_x V_z \\ -\frac{2}{3} \eta_0 (2\partial_z V_z - \partial_x V_x - \partial_y V_y) \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

Dans le cadre des équations de Braginskii, nous explicitons le terme $\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi}$ pour l'équation de conservation du moment parallèle :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} \approx \begin{pmatrix} \partial_x \left[-\frac{\eta_0}{3} (\partial_x V_x + \partial_y V_y - 2\partial_z V_z) \right] + \partial_y [\eta_3 (\partial_x V_x - \partial_y V_y)] + \partial_z [-\eta_4 \partial_y V_z] \\ \partial_x [\eta_3 (\partial_x V_x - \partial_y V_y)] + \partial_y \left[-\frac{\eta_0}{3} (\partial_x V_x + \partial_y V_y - 2\partial_z V_z) \right] + \partial_z [\eta_4 \partial_x V_z] \\ \partial_x [-\eta_4 \partial_y V_z] + \partial_y [\eta_4 \partial_x V_z] + \partial_z \left[-\frac{2}{3} \eta_0 (2\partial_z V_z - \partial_x V_x - \partial_y V_y) \right] \end{pmatrix}$$

Encore une fois, les hypothèses précédentes permettent de simplifier cette expression comme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} \approx \begin{pmatrix} \partial_x \left[-\frac{\eta_0}{3} (\partial_x V_x + \partial_y V_y - 2\partial_z V_z) \right] + \partial_z [-\eta_4 \partial_y V_z] \\ \partial_y \left[-\frac{\eta_0}{3} (\partial_x V_x + \partial_y V_y - 2\partial_z V_z) \right] + \partial_z [\eta_4 \partial_x V_z] \\ \partial_x [-\eta_4 \partial_y V_z] + \partial_y [\eta_4 \partial_x V_z] + \partial_z \left[-\frac{2}{3} \eta_0 (2\partial_z V_z - \partial_x V_x - \partial_y V_y) \right] \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

A. 1. 2 Terme de friction

Le terme de friction \vec{R} apparaît dans l'équation de conservation du moment et traduit un échange associé aux collisions électrons/ions. Dans nos équations, il a volontairement été compris dans le tenseur de Braginskii. R est la somme de deux termes :

$$\vec{R} = \vec{R}_j + \vec{R}_T \quad (\text{A.9})$$

où

$$\vec{R}_j = en_e \left(\frac{j_{\parallel} \vec{b}}{\sigma_{\parallel}} + \frac{\vec{j}_{\perp}}{\sigma_{\perp}} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$\vec{R}_T = -0,71 n_e \nabla_{\parallel} T_e - \frac{3}{2} \frac{n_e}{\omega_{ce} \tau_{ce}} (\vec{b} \wedge \vec{\nabla} T_e) \quad (\text{A.11})$$

σ_{\parallel} et σ_{\perp} sont respectivement la conductivité parallèle et perpendiculaire du plasma :

$$\sigma_{\perp} = \sigma_1 T_e^{3/2} \quad \sigma_{\parallel} = 1,96 \cdot \sigma_1 T_e^{3/2} = 1/\eta_{\parallel} \quad (\text{A.12})$$

σ_1 est une ‘‘constante’’ ayant une très faible dépendance aux conditions locales du plasma. η_{\parallel} est donc la résistivité du plasma introduite comme paramètre dans les équations de SOLEDGE2D-DRIFT. On a typiquement $\sigma_{\parallel} \sim \sigma_{\perp} \sim 10^6 - 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ pour un plasma à 100eV.

A. 1. 3 Flux de chaleur

Les flux de chaleur de Braginskii sont donnés par :

$$\vec{q}_e = q_{\parallel}^e \vec{b} - \chi_{\perp}^e \vec{\nabla}_{\perp} T_e - \frac{5}{2} \frac{p_e}{eB} (\vec{b} \times \vec{\nabla} T_e) \quad (\text{A.13})$$

$$\vec{q}_i = q_{\parallel}^i \vec{b} - \chi_{\perp}^i \vec{\nabla}_{\perp} T_i + \frac{5}{2} \frac{p_i}{ZeB} (\vec{b} \times \vec{\nabla} T_i) \quad (\text{A.14})$$

$$(\text{A.15})$$

La partie perpendiculaire est contenue dans le flux convectif et conductif estimé au chapitre II. La partie parallèle est donnée par la fermeture de Spitzer-Härm.

A. 2 ‘‘Diamagnetic-cancellation’’

Dans cette section nous détaillons les calculs de la ‘‘diamagnetic-cancellation’’ ayant permis de remplacer dans les équations de Braginskii la vitesse de dérive fluide diamagnétique par la vitesse de dérive particulière de gradient-courbure.

$$\vec{u}_s^* = \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} p_s}{n_s q_s B^2} \leftarrow \vec{u}_{\nabla B, s} = \frac{2k_B T_s \vec{B} \times \vec{\nabla} B}{q_s B^3} \quad (\text{A.16})$$

A. 2. 1 Équation de conservation de la masse

Dans le cas de la première équation de Braginskii, le calcul se fait naturellement. Nous commençons par développer la divergence du flux ionique de dérive diamagnétique :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \left(n \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} p_i}{neB^2} \right) &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{eB^2} \right) \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} p_i) \\
 &+ \frac{1}{eB^2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} p_i) \\
 &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{eB^2} \right) \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} p_i) \\
 &+ \frac{1}{eB^2} (\vec{\nabla} \times \vec{B} \cdot \vec{\nabla} p_i - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} p_i)
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

Le deuxième terme à se simplifier est mathématiquement nul. Le premier terme s'annule en rappelant l'équation de Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et en négligeant le courant total dans le plasma de bord ($\vec{j} \sim \vec{0}$). Nous développons maintenant la divergence du flux ionique de gradient-courbure de la même façon :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \left(n \frac{2k_B T_i \vec{B} \times \vec{\nabla} B}{eB^3} \right) &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{2p_i}{eB^3} \right) \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \\
 &+ \frac{2p_i}{eB^3} \vec{\nabla} \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \\
 &= p_i \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{2}{eB^3} \right) \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) + \frac{2}{eB^3} \vec{\nabla} p_i \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \\
 &+ \frac{2p_i}{eB^3} ((\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} B - \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} B) \\
 &= -\vec{\nabla} p_i \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} \frac{1}{eB^2}) \\
 &= -\vec{\nabla} \cdot \frac{1}{eB^2} \cdot (\vec{\nabla} p_i \times \vec{B})
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \left(n \frac{2k_B T_i \vec{B} \times \vec{\nabla} B}{eB^3} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(n \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} p_i}{neB^2} \right)} \tag{A.19}$$

A. 2. 2 Équation de conservation de la quantité de mouvement parallèle

Dans le cas de la deuxième équation de Braginskii, il est nécessaire d'ajouter un terme afin de compenser l'advection de la quantité de mouvement. Nous commençons par réécrire la contribution des termes non-diagonaux ($\eta_A = p_i/\omega_{ci}$) de la divergence du tenseur de pression. On considère toujours la direction z comme parallèle au champ magnétique et la projection de la divergence du tenseur de Braginskii aboutit à :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\Pi}}_{\parallel}^* &= \partial_x \left[-\frac{m_i p_i}{eB} \partial_y V_z \right] + \partial_y \left[\frac{m_i p_i}{eB} \partial_x V_z \right] \\
 &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{m_i p_i}{eB} \vec{e}_z \times \vec{\nabla} V_z \right) \\
 &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{m_i p_i}{eB^2} \vec{B} \times \vec{\nabla} u_{\parallel} \right)
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

Nous commençons donc par calculer la divergence du flux de quantité de mouvement diamagnétique sommée avec la contribution précédente du tenseur de pression :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \left(m_i n u_{\parallel} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} p_i}{neB^2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \bar{\Pi}_{\parallel}^* &= \vec{\nabla} \left(\frac{m_i u_{\parallel}}{eB^2} \right) \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} p_i) + \vec{\nabla} \left(\frac{m_i p_i}{eB^2} \right) \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} u_{\parallel}) \\
 &= u_{\parallel} \vec{\nabla} \left(\frac{m_i}{eB^2} \right) \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} p_i) + \frac{m_i}{eB^2} \vec{\nabla} u_{\parallel} \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} p_i) \\
 &\quad + p_i \vec{\nabla} \left(\frac{m_i}{eB^2} \right) \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} u_{\parallel}) + \frac{m_i}{eB^2} \vec{\nabla} p_i \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} u_{\parallel})
 \end{aligned} \tag{A.21}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \left(m_i n u_{\parallel} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} p_i}{neB^2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \bar{\Pi}_{\parallel}^* = \vec{\nabla} (p_i u_{\parallel}) \cdot \left(\vec{\nabla} \left(\frac{m_i}{eB^2} \right) \times \vec{B} \right)$$

Puis nous calculons la divergence du flux de quantité de mouvement de gradient-courbure :

$$\begin{aligned}
 \vec{\nabla} \cdot \left(m_i n u_{\parallel} \frac{2k_B T_i \vec{B} \times \vec{\nabla} B}{eB^3} \right) &= \vec{\nabla} \left(\frac{2m_i p_i u_{\parallel}}{eB^3} \right) \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \\
 &= p_i u_{\parallel} \vec{\nabla} \left(\frac{2m_i}{eB^3} \right) \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) + \frac{2m_i}{eB^3} \vec{\nabla} (p_i u_{\parallel}) \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} B) \\
 &= -\vec{\nabla} (p_i u_{\parallel}) \cdot (\vec{B} \times \vec{\nabla} \left(\frac{m_i}{eB^2} \right))
 \end{aligned} \tag{A.22}$$

ce qui conduit à :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \left(m_i n u_{\parallel} \frac{2k_B T_i \vec{B} \times \vec{\nabla} B}{eB^3} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(m_i n u_{\parallel} \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} p_i}{neB^2} \right) + \vec{\nabla} \cdot \bar{\Pi}_{\parallel}^*} \tag{A.23}$$

A. 2. 3 Équation de conservation de l'énergie totale

Dans le cas des dernières équations de Braginskii, il est également nécessaire d'ajouter un terme afin de compenser l'advection de l'énergie par la dérive diamagnétique. Ce terme est contenu dans le flux de chaleur de Braginskii et conduit pour les électrons à :

$$\boxed{-\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{5}{2} k_B n T_e \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} p_e}{neB^2} \right) - \frac{5}{2} \frac{p_e}{eB} (\vec{b} \times \vec{\nabla} k_B T_e) = -\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{5}{2} k_B n T_e \frac{2k_B T_e}{eB^3} \vec{B} \times \vec{\nabla} B \right)} \tag{A.24}$$

Les étapes du calcul sont identiques aux calculs précédents. De la même façon que pour le calcul dans l'équation du moment parallèle, on a pour l'énergie cinétique dans l'équation des de l'énergie des ions :

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} m_i n u_{\parallel}^2 \frac{\vec{B} \times \vec{\nabla} p_i}{neB^2} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\bar{\Pi} \cdot u_{\parallel} \vec{b})^* = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{2} m_i n u_{\parallel}^2 \frac{2k_B T_i}{eB^3} \vec{B} \times \vec{\nabla} B \right)} \tag{A.25}$$

Annexe B

Calcul des coefficients de métrique dans SOLEDGE-2D

B. 1 Base covariante et contravariante

Pour n'importe quel jeu de coordonnées 3D (u^1, u^2, u^3) il est possible de définir une base covariante $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. En notant \vec{R} le vecteur position dans l'espace 3D, la base covariante est définie par [70] :

$$\vec{e}_1 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^1} \quad , \quad \vec{e}_2 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^2} \quad , \quad \vec{e}_3 = \frac{\partial \vec{R}}{\partial u^3} \quad (\text{B.1})$$

Cette base n'est pas nécessairement orthogonale et on définit alors $g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j$ et $h_i = g_{ii}$. Tout vecteur \vec{X} peut être exprimé dans la base covariante via l'équation Eq. (B.2) :

$$\vec{X} = X^1 \vec{e}_1 + X^2 \vec{e}_2 + X^3 \vec{e}_3 \quad (\text{B.2})$$

On peut également définir la base contravariante $(\vec{e}^1, \vec{e}^2, \vec{e}^3)$ telle que $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$. On en déduit la relation définissant la base contravariante :

$$\vec{e}^1 = \vec{\nabla} u^1 \quad , \quad \vec{e}^2 = \vec{\nabla} u^2 \quad , \quad \vec{e}^3 = \vec{\nabla} u^3 \quad (\text{B.3})$$

Le produit scalaire donne ici $g^{ij} = \vec{e}^i \cdot \vec{e}^j$ et $h^i = g^{ii}$. Comme précédemment, tout vecteur \vec{X} s'exprime dans cette base comme :

$$\vec{X} = X_1 \vec{e}^1 + X_2 \vec{e}^2 + X_3 \vec{e}^3 \quad (\text{B.4})$$

En utilisant $\vec{e}_i \cdot \vec{e}^j = \delta_{ij}$, on en déduit que $X_i = \vec{X} \cdot \vec{e}_i$ et $X^i = \vec{X} \cdot \vec{e}^i$.

B. 2 Coordonnées curvilinéaires 2D

Nous considérons le système de coordonnées cylindriques (R, Z, φ) associé à la base covariante $(\vec{e}_R, \vec{e}_Z, \vec{e}_\varphi)$ et à la base contravariante $(\vec{e}^R, \vec{e}^Z, \vec{e}^\varphi)$. Cette base est liée à la base orthonormale $(\hat{e}_R, \hat{e}_Z, \hat{e}_\varphi)$ par la relation $(\vec{e}^R, \vec{e}^Z, \vec{e}^\varphi) = (\vec{\nabla} R, \vec{\nabla} Z, \vec{\nabla} \varphi) = (\hat{e}_R, \hat{e}_Z, \hat{e}_\varphi / R)$. Chaque point de la grille est donné par ses coordonnées (R, Z, φ) et pour chaque point, le champ magnétique est tel que :

$$\vec{B} = B^R \hat{e}_R + B^Z \hat{e}_Z + B^\varphi \hat{e}_\varphi$$

On considère maintenant le système de coordonnées curvilinéaires (ψ, θ, φ) et on suppose que les surfaces iso- ψ sont orthogonales au champ magnétique soit $B \cdot \vec{\nabla}\psi = 0$. On a

$$\begin{aligned}\vec{B} &= B^\psi \vec{e}_\psi + B^\theta \vec{e}_\theta + B^\varphi \vec{e}_\varphi \\ &= B_\psi \vec{\nabla}\psi + B_\theta \vec{\nabla}\theta + B_\varphi \vec{\nabla}\varphi\end{aligned}$$

Sachant que $\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\psi = 0$, cela conduit à $B^\psi = 0$.

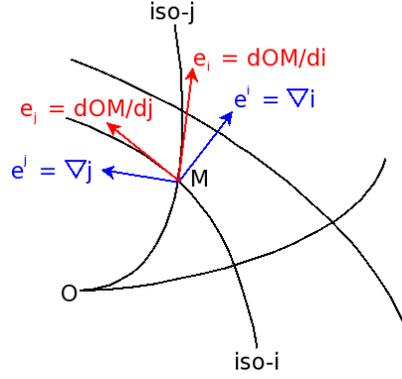


Figure B.1 – Définition des vecteurs covariants et contravariants.

B. 3 Gradient

On définit le gradient comme :

$$\vec{\nabla}X = \left(\frac{\partial X}{\partial u^i} \right) \vec{e}^i$$

où l'on considère $u^1 = \psi$, $u^2 = \theta$ et $u^3 = \varphi$. On définit les composantes parallèle et perpendiculaire au champ magnétique comme :

$$\forall \vec{A}, \quad \vec{A} = \vec{A}_\perp + \vec{b}A_\parallel$$

avec $\vec{b}^2 = 1$ et $\vec{b} \cdot \vec{A}_\perp = 0$. Ainsi, $A_\parallel = \vec{b} \cdot \vec{A}$ ce qui, appliqué à $\vec{\nabla}$, nous donne :

$$\vec{\nabla}X = \vec{\nabla}_\perp X + \vec{b}\nabla_\parallel X$$

avec

$$\begin{aligned}\nabla_\parallel X &= \vec{b} \cdot \vec{\nabla}X \\ &= \frac{1}{B} B^i (\vec{\nabla}X)_i \\ &= \frac{1}{B} B^i \frac{\partial X}{\partial u^i} \\ &= \frac{1}{B} \vec{B} \cdot \vec{\nabla}u^i \frac{\partial X}{\partial u^i}\end{aligned}$$

On fait l'hypothèse d'axisymétries ce qui donne $\partial_\varphi = 0$. En rappelant que $\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\psi = 0$, le seul terme restant dans l'expression du gradient parallèle est :

$$\nabla_\parallel X = \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\theta}{B} \frac{\partial X}{\partial \theta}$$

En exprimant $\vec{\nabla}\theta$ dans le système de coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\theta &= \frac{\partial\theta}{\partial R}\vec{\nabla}R + \frac{\partial\theta}{\partial Z}\vec{\nabla}Z \\ &= \frac{\partial\theta}{\partial R}\hat{e}_R + \frac{\partial\theta}{\partial Z}\hat{e}_Z\end{aligned}$$

on obtient :

$$\nabla_{\parallel}X = \frac{1}{B} \left(\frac{\partial\theta}{\partial R}B_R + \frac{\partial\theta}{\partial Z}B_Z \right) \frac{\partial X}{\partial\theta}$$

B. 4 Divergence

B. 4. 1 Divergence d'un vecteur aligné au champ magnétique

Commençons par séparer la partie parallèle de la partie perpendiculaire :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot (\vec{A}_{\perp} + \frac{\vec{B}}{B}A_{\parallel}) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\perp} + \frac{A_{\parallel}}{B}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{A_{\parallel}}{B} \right) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\perp} + B\nabla_{\parallel} \left(\frac{A_{\parallel}}{B} \right)\end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot (A_{\parallel}\vec{b}) = B\nabla_{\parallel} \left(\frac{A_{\parallel}}{B} \right)$$

B. 4. 2 Termes perpendiculaires diffusifs

Dans les équations de SOLEDGE2D, \vec{A}_{\perp} contient un flux diffusif perpendiculaire qui peut être exprimé comme :

$$\vec{A}_{\perp} = -D\vec{\nabla}_{\perp}X = -D(\vec{\nabla}X - \vec{b}\nabla_{\parallel}X)$$

On doit donc exprimer $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_{\perp} = -\vec{\nabla} \cdot (D(\vec{\nabla}X - \vec{b}\nabla_{\parallel}X))$. Commençons par rappeler comment exprimer la base covariante en fonction de la base contravariante :

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{e}^j \times \vec{e}^k}{\vec{e}^i \cdot (\vec{e}^j \times \vec{e}^k)} = \frac{\vec{\nabla}u^j \times \vec{\nabla}u^i}{\mathcal{J}}$$

où

$$\mathcal{J} = \vec{e}^i \cdot (\vec{e}^j \times \vec{e}^k) = [\vec{e}_i \cdot (\vec{e}_j \times \vec{e}_k)]^{-1} = J^{-1}$$

soit,

$$\frac{\vec{e}_i}{\mathcal{J}} = \vec{\nabla}u^j \times \vec{\nabla}u^k = \vec{\nabla} \times (u^j \vec{\nabla}u^k)$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathcal{J}} &= \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\theta \times \vec{\nabla}\varphi = \begin{vmatrix} \partial_R\psi & \partial_R\theta & 0 \\ \partial_z\psi & \partial_z\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{vmatrix} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial\psi}{\partial R} \frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial R} \right) \\ \frac{1}{\mathcal{J}} &= \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\theta \times \vec{\nabla}\varphi = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial\psi}{\partial R} \frac{\partial\theta}{\partial z} - \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{\partial\theta}{\partial R} \right)\end{aligned}$$

On peut écrire la divergence de \vec{A} comme

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \vec{\nabla} \cdot (A^i \vec{e}_i) \\ &= \vec{\nabla} \cdot \left(JA^i \frac{\vec{e}_i}{J} \right) \\ &= JA^i \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \times (u^j \vec{\nabla} u^k)) + \frac{\vec{e}_i}{J} \cdot \vec{\nabla} (JA^i) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= J^{-1} \vec{e}_i \cdot \vec{\nabla} (JA^i)\end{aligned}$$

Sachant que $\vec{\nabla} = \vec{e}^i \partial_{u^i}$, on a

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{J} \frac{\partial JA^i}{\partial u^i}$$

Si $\vec{A} = -D\vec{\nabla}_\perp X$, il faut exprimer $(\vec{\nabla}_\perp X)^i$. Sachant que $(\vec{\nabla} X)_i = \partial_{u^i} X$, on a :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_\perp X &= \vec{\nabla} X - \vec{b} \nabla_\parallel X \\ &= \frac{\partial X}{\partial u^i} \vec{e}^i - b^i \vec{e}_i \nabla_\parallel X\end{aligned}$$

ainsi,

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla}_\perp X)^i &= \vec{e}^i \cdot \vec{\nabla}_\perp X \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial u^j} \right) \vec{e}^j \cdot \vec{e}^i - b^i \nabla_\parallel X\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\vec{e}^j \cdot \vec{e}^i &= \vec{\nabla} u^i \cdot \vec{\nabla} u^j \\ b^i &= \vec{b} \cdot \vec{\nabla} u^i\end{aligned}$$

On applique alors les propriétés du système curvilinéaire considéré ($\partial_\varphi = 0$ and $b^\psi = 0$). La divergence devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial JA^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial JA^\psi}{\partial \psi} \right)$$

et le gradient perpendiculaire,

$$\begin{cases} (\vec{\nabla}_\perp X)^\theta &= \frac{\partial X}{\partial \theta} \vec{\nabla} \theta^2 + \frac{\partial X}{\partial \psi} \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla} \psi - \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla} \theta}{B} \nabla_\parallel X \\ (\vec{\nabla}_\perp X)^\psi &= \frac{\partial X}{\partial \psi} \vec{\nabla} \psi^2 + \frac{\partial X}{\partial \theta} \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla} \psi \end{cases}$$

où on définit

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \theta^2 &= \left(\frac{\partial \theta}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 \\ \vec{\nabla} \psi^2 &= \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \\ \vec{\nabla} \theta \cdot \vec{\nabla} \psi &= \frac{\partial \theta}{\partial R} \frac{\partial \psi}{\partial R} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \end{cases}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{J} &= \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \theta \times \vec{\nabla} \varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial R \psi}{\partial z} & \frac{\partial R \theta}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial z \psi}{\partial z} & \frac{\partial z \theta}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 1/R \end{vmatrix} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) \\ \frac{1}{J} &= \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{\nabla} \theta \times \vec{\nabla} \varphi = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial \psi}{\partial R} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial R} \right)\end{aligned}$$

On peut reformuler le gradient perpendiculaire sachant que nous cherchons une projection dans les surfaces de flux magnétique (suivant \vec{e}_θ) et une projection perpendiculaire à ces surfaces (suivant $\vec{\nabla}\psi = \vec{e}^\psi$). Cela conduit à :

$$\vec{\nabla}_\perp X = (\vec{\nabla}_\perp X)^\theta \vec{e}_\theta + (\vec{\nabla}_\perp X)^\psi \vec{e}_\psi$$

avec

$$\begin{aligned} \vec{e}_\psi &= a\vec{e}^\psi + b\vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\psi \cdot \vec{e}^\psi &= 1 = a\vec{e}^\psi \cdot \vec{e}^\psi \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\vec{\nabla}\psi^2} \\ \vec{e}_\psi \cdot \vec{e}^\theta &= 0 = a\vec{e}^\psi \cdot \vec{e}^\theta + b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{\vec{\nabla}\psi \cdot \vec{\nabla}\theta}{\vec{\nabla}\psi^2} \end{aligned}$$

soit

$$\vec{\nabla}_\perp X = \left((\vec{\nabla}_\perp X)^\theta - (\vec{\nabla}_\perp X)^\psi \frac{\vec{e}^\psi \cdot \vec{e}^\theta}{\vec{e}^\psi \cdot \vec{e}^\psi} \right) \vec{e}_\theta + \frac{(\vec{\nabla}_\perp X)^\psi}{\vec{e}^\psi \cdot \vec{e}^\psi} \vec{e}^\psi$$

Dans le cadre du transport diffusif, on définit un coefficient de diffusion dans les surfaces magnétiques (D_θ) et un perpendiculaire (D^ψ) aux surfaces et ainsi, le flux diffusif Φ est donné par

$$\Phi = -D_\theta \left((\vec{\nabla}_\perp X)^\theta - (\vec{\nabla}_\perp X)^\psi \frac{\vec{e}^\psi \cdot \vec{e}^\theta}{\vec{e}^\psi \cdot \vec{e}^\psi} \right) \vec{e}_\theta - D^\psi \frac{(\vec{\nabla}_\perp X)^\psi}{\vec{e}^\psi \cdot \vec{e}^\psi} \vec{e}^\psi$$

On calcule ses coordonnées dans la base covariante :

$$\begin{aligned} (\Phi)^\theta &= \Phi \cdot \vec{e}^\theta = -D_\theta (\vec{\nabla}_\perp X)^\theta - (D^\psi - D_\theta) (\vec{\nabla}_\perp X)^\psi \frac{\vec{e}^\psi \cdot \vec{e}^\theta}{\vec{e}^\psi \cdot \vec{e}^\psi} \\ &= -D^\psi (\vec{\nabla}\theta \cdot \vec{\nabla}\psi) \partial_\psi X - \left(D_\theta (\vec{\nabla}\theta^2 - \mathcal{G}^2) + (D^\psi - D_\theta) \frac{(\vec{\nabla}\theta \cdot \vec{\nabla}\psi)^2}{\vec{\nabla}\psi^2} \right) \partial_\theta X \\ (\Phi)^\psi &= \Phi \cdot \vec{e}^\psi = -D^\psi (\vec{\nabla}_\perp X)^\psi \\ &= -D^\psi \left(\vec{\nabla}\psi^2 \partial_\psi X + (\vec{\nabla}\theta \cdot \vec{\nabla}\psi) \partial_\theta X \right) \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{G} = \frac{\vec{B} \cdot \vec{\nabla}\theta}{B} = \left(B_R \frac{\partial\theta}{\partial R} + B_z \frac{\partial\theta}{\partial z} \right)$$

B. 4. 3 Termes perpendiculaires convectifs

Dans SOLEDGE2D-DRIFT, une partie convective du transport via les vitesses de dérive est ajoutée. Ces vitesses perpendiculaires au champ magnétique dépendent du produit vectoriel d'un gradient (du champ magnétique, de la pression ou du potentiel) et du champ magnétique. On définit une vitesse de dérive sous la forme :

$$\vec{u}_Y = D(\vec{B} \times \vec{\nabla}Y) \tag{B.5}$$

où \vec{B} est le champ magnétique, Y une grandeur plasma responsable d'une dérive et D un scalaire dépendant des grandeurs plasma. Dans le cadre de l'hypothèse d'axisymétrie ($\partial_\varphi = 0$),

ce calcul donne :

$$\begin{vmatrix} B_\psi \vec{e}^\psi \\ B_\theta \vec{e}^\theta \\ B_\varphi \vec{e}^\varphi \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial \psi} \vec{e}^\psi \\ \frac{\partial Y}{\partial \theta} \vec{e}^\theta \\ 0 \end{vmatrix} = \left(B_\psi \frac{\partial Y}{\partial \theta} - B_\theta \frac{\partial Y}{\partial \psi} \right) (\vec{e}^\psi \times \vec{e}^\theta) - B_\varphi \frac{\partial Y}{\partial \theta} (\vec{e}^\theta \times \vec{e}^\varphi) + B_\varphi \frac{\partial Y}{\partial \psi} (\vec{e}^\varphi \times \vec{e}^\psi) \quad (\text{B.6})$$

En rappelant que le jacobien est défini par $\vec{e}_i = \vec{e}^j \times \vec{e}^k$ pour une base directe (i, j, k) (dans notre cas (ψ, θ, φ)), on obtient :

$$\vec{B} \times \vec{A} = -\frac{B_\varphi}{J} \frac{\partial Y}{\partial \theta} \vec{e}_\psi + \frac{B_\varphi}{J} \frac{\partial Y}{\partial \psi} \vec{e}_\theta + \frac{(B_\psi \frac{\partial Y}{\partial \theta} - B_\theta \frac{\partial Y}{\partial \psi})}{J} \vec{e}_\varphi \quad (\text{B.7})$$

Dans le cas de la vitesse de dérive électrique ($\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ et $D = 1/B^2$), on a par exemple :

$$\vec{u}_E = \frac{B_\varphi E_\theta}{JB^2} \vec{e}_\psi - \frac{B_\varphi E_\psi}{JB^2} \vec{e}_\theta + \frac{B_\theta E_\psi - B_\psi E_\theta}{JB^2} \vec{e}_\varphi \quad (\text{B.8})$$

En rappelant que $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_i = 1$ et $\vec{e}^i \cdot \vec{e}_j = 0$, la divergence des termes de dérive $\vec{A} = X \vec{u}_Y$ devient :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{J} \left[-\frac{\partial}{\partial \psi} \left(X B_\varphi \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(X B_\varphi \frac{\partial Y}{\partial \psi} \right) \right] \quad (\text{B.9})$$

B. 5 Équation de conservation de la masse

B. 5. 1 Avec les coefficients de métrique

Récrivons l'équation de conservation de la masse en prenant en compte les coefficients de métrique.

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Gamma} = 0 \quad (\text{B.10})$$

D'après les développements précédents, cette équation devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + B \nabla_{\parallel} \left(\frac{\Gamma_{\parallel}}{B} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\Gamma}_{\perp} &= 0 \\ \frac{\partial n}{\partial t} + B \nabla_{\parallel} \left(\frac{\Gamma_{\parallel}}{B} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \Gamma_{\perp}^{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial J \Gamma_{\perp}^{\psi}}{\partial \psi} \right) &= 0 \\ \frac{\partial n}{\partial t} + B \mathcal{G} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Gamma_{\parallel}}{B} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \Gamma_{\perp,d}^{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial J \Gamma_{\perp,d}^{\psi}}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \Gamma_{\perp,c}^{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial J \Gamma_{\perp,c}^{\psi}}{\partial \psi} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Le terme de flux perpendiculaire contient donc une partie diffusive liée au transport anormal et une partie convective liée aux vitesses de dérives. La partie diffusive est donc :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp,d}^{\theta} &= -D^{\psi} g^{\theta\psi} \partial_{\psi} n - \left(D_{\theta} (h^{\theta} - \mathcal{G}^2) + (D^{\psi} - D_{\theta}) \frac{g^{\theta\psi^2}}{h^{\psi}} \right) \partial_{\theta} n \\ \Gamma_{\perp,d}^{\psi} &= -D^{\psi} \left(h^{\psi} \partial_{\psi} n + g^{\theta\psi} \partial_{\theta} n \right) \end{aligned}$$

En rappelant que $B_\varphi = \vec{B} \cdot \vec{e}_\varphi = RB_{tor}$, la partie convective est donnée par :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\perp,c}^\theta &= \frac{nRB_{tor}}{JB^2} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + \frac{2p_i RB_{tor}}{JeB^3} \frac{\partial B}{\partial \psi} \\ \Gamma_{\perp,c}^\psi &= -\frac{nRB_{tor}}{JB^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{2p_i RB_{tor}}{JeB^3} \frac{\partial B}{\partial \theta}\end{aligned}$$

B. 5. 2 Adimensionnement

On réécrit maintenant les équations à partir des grandeurs sans dimension suivantes : $n^* = n/n_0$, $\phi^* = \phi e/k_B T_0$, $\Gamma^* = \Gamma_{\parallel}/(n_0 c_0)$ ($c_0 = \sqrt{k_B T_0/m_i}$), $\theta^* = \theta/2\pi$, $\psi^* = (\psi - \psi_{min})/\Delta\psi_0$, $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}R_0$, $\vec{\nabla}\theta^* = \frac{a\vec{\nabla}\theta}{2\pi}$ et $\vec{\nabla}\psi^* = \frac{a\vec{\nabla}\psi}{\Delta\psi_0}$

$$\frac{n_0}{\tau_0} \frac{\partial n^*}{\partial t^*} + B\mathcal{G}^* \frac{n_0 c_0}{2\pi R_0} \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left(\frac{\Gamma^*}{B} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J\Gamma_{\perp}^\theta/2\pi}{\partial \theta^*} + \frac{\partial J\Gamma_{\perp}^\psi/\Delta\psi_0}{\partial \psi^*} \right) = 0$$

On définit le temps caractéristique $\tau_0 = 2\pi R_0/c_0$ d'où,

$$\frac{\partial n^*}{\partial t^*} + B\mathcal{G}^* \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left(\frac{\Gamma^*}{B} \right) + \frac{2\pi R_0}{n_0 c_0} \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J\Gamma_{\perp}^\theta/2\pi}{\partial \theta^*} + \frac{\partial J\Gamma_{\perp}^\psi/\Delta\psi_0}{\partial \psi^*} \right) = 0$$

où la partie diffusive du flux perpendiculaire devient :

$$\begin{aligned}\frac{2\pi R_0}{n_0 c_0} \frac{\Gamma_{\perp,d}^\theta}{2\pi} &= \frac{2\pi R_0}{n_0 c_0 2\pi} \left\{ -D^\psi \frac{2\pi \Delta\psi_0}{a^2} g^{\theta\psi^*} \frac{n_0}{\Delta\psi_0} \partial_{\psi^*}^* n^* \right. \\ &\quad \left. - \left(D_\theta \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 (h^{\theta^*} - \left(\frac{a}{2\pi R_0} \right)^2 \mathcal{G}^{*2}) + (D^\psi - D_\theta) \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 \frac{(g^{\theta\psi^*})^2}{h^{\psi^*}} \right) \frac{n_0}{2\pi} \partial_{\theta^*}^* n^* \right\} \\ &= -\frac{2\pi R_0}{a} \frac{D^\psi}{c_0 a} g^{\theta\psi^*} \partial_{\psi^*}^* n^* \\ &\quad - \left(\frac{2\pi R_0}{a} \frac{D_\theta}{c_0 a} (h^{\theta^*} - \left(\frac{a}{2\pi R_0} \right)^2 \mathcal{G}^{*2}) + \frac{2\pi R_0}{a} \left(\frac{D^\psi}{c_0 a} - \frac{D_\theta}{c_0 a} \right) \frac{(g^{\theta\psi^*})^2}{h^{\psi^*}} \right) \partial_{\theta^*}^* n^*\end{aligned}$$

$$\boxed{\Gamma_{\perp,d}^{\theta^*} = -\frac{A}{\text{Pe}^\psi} g^{\theta\psi^*} \partial_{\psi^*}^* n^* - \left(\frac{A}{\text{Pe}^\theta} (h^{\theta^*} - \frac{1}{A^2} \mathcal{G}^{*2}) + \left(\frac{A}{\text{Pe}^\psi} - \frac{A}{\text{Pe}^\theta} \right) \frac{(g^{\theta\psi^*})^2}{h^{\psi^*}} \right) \partial_{\theta^*}^* n^*}$$

et

$$\frac{2\pi R_0}{n_0 c_0} \frac{\Gamma_{\perp,d}^\psi}{\Delta\psi_0} = \frac{2\pi R_0}{n_0 c_0 \Delta\psi_0} \left\{ -D^\psi \left(\left(\frac{\Delta\psi_0}{a} \right)^2 h^{\psi^*} \frac{n_0}{\Delta\psi_0} \partial_{\psi^*}^* n^* + \frac{2\pi \Delta\psi_0}{a^2} g^{\theta\psi^*} \frac{n_0}{2\pi} \partial_{\theta^*}^* n^* \right) \right\}$$

$$\boxed{\Gamma_{\perp,d}^{\psi^*} = -\frac{A}{\text{Pe}^\psi} (h^{\psi^*} \partial_{\psi^*}^* n^* + g^{\theta\psi^*} \partial_{\theta^*}^* n^*)}$$

avec

$$A = \frac{2\pi R_0}{a}, \quad \text{Pe}^\psi = \frac{ac_0}{D^\psi}, \quad \text{Pe}^\theta = \frac{ac_0}{D_\theta} \quad (\text{B.11})$$

On ajoute aux adimensionnements précédents : $J^* = \frac{2\pi \Delta\psi_0}{R_0 a^2} J$, $B^* = B/B_0$ et $R^* = R/R_0$. De la même façon, le flux convectif devient :

$$\begin{aligned}\frac{2\pi R_0}{n_0 c_0} \frac{\Gamma_{\perp,c}^\theta}{2\pi} &= \frac{2\pi R_0}{n_0 c_0 2\pi} \left\{ \frac{n_0 k_B T_0}{\Delta\psi_0 e} \frac{n^* RB_{tor}}{JB^2} \frac{\partial \phi^*}{\partial \psi^*} + \frac{n_0 k_B T_0}{\Delta\psi_0 e} \frac{2p_i^* RB_{tor}}{JB^3} \frac{\partial B}{\partial \psi^*} \right\} \\ &= \frac{k_B T_0 R_0}{\Delta\psi_0 e c_0} \left\{ \frac{2\pi \Delta\psi_0 R_0}{R_0 a^2 B_0} \frac{n^* R^* B_{tor}^*}{J^* B^{2*}} \frac{\partial \phi^*}{\partial \psi^*} + \frac{2\pi \Delta\psi_0 R_0}{R_0 a^2 B_0} \frac{2p_i^* R^* B_{tor}^*}{J^* B^{3*}} \frac{\partial B^*}{\partial \psi^*} \right\}\end{aligned}$$

En rappelant la définition du rayon de Larmor ionique de référence $\rho_i = m_i c_0 / e B_0$ et de la vitesse de référence $c_0^2 = k_B T_0 / m_i$, on aboutit à :

$$\Gamma_{\perp,c}^{\theta*} = A \rho^* \left\{ \frac{n^* R^* B_{tor}^*}{J^* B^{2*}} \frac{\partial \phi^*}{\partial \psi^*} + \frac{2 p_i^* R^* B_{tor}^*}{J^* B^{3*}} \frac{\partial B^*}{\partial \psi^*} \right\}$$

et

$$\Gamma_{\perp,c}^{\psi*} = -A \rho^* \left\{ \frac{n^* R^* B_{tor}^*}{J^* B^{2*}} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} + \frac{2 p_i^* R^* B_{tor}^*}{J^* B^{3*}} \frac{\partial B^*}{\partial \theta^*} \right\}$$

avec

$$A = \frac{2\pi R_0}{a}, \quad \rho^* = \frac{\rho_i}{a} \quad (\text{B.12})$$

Finalement, l'équation de conservation de la masse devient :

$$\frac{\partial n^*}{\partial t^*} + B \mathcal{G}^* \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left(\frac{\Gamma^*}{B} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \Gamma_{\perp,d}^{\theta*}}{\partial \theta^*} + \frac{\partial J \Gamma_{\perp,d}^{\psi*}}{\partial \psi^*} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \Gamma_{\perp,c}^{\theta*}}{\partial \theta^*} + \frac{\partial J \Gamma_{\perp,c}^{\psi*}}{\partial \psi^*} \right) = 0 \quad (\text{B.13})$$

B. 6 Équation de conservation de la quantité de mouvement

B. 6. 1 Avec les coefficients de métrique

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est la suivante :

$$m_i \frac{\partial \Gamma_{\parallel}}{\partial t} + m_i \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\Gamma_{\parallel}^2}{n} \vec{b} \otimes \vec{b} \right) + m_i \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \cdot (\Gamma_{\parallel} (\vec{b} \otimes \vec{u}_{\perp}) + \vec{u}_{\perp} \otimes \vec{b}) + \nabla_{\parallel} p = S_{\perp} \quad (\text{B.14})$$

On a besoin d'évaluer $\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \cdot (X \vec{b} \otimes \vec{b})$ et $\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \cdot (X (\vec{b} \otimes \vec{u}_{\perp}) + \vec{u}_{\perp} \otimes \vec{b})$ (où \vec{u}_{\perp} correspond aux vitesses de dérives). On a :

$$\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \cdot (X \vec{b} \otimes \vec{b}) &= \vec{b} \cdot [X \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \otimes \vec{b}) + (\vec{\nabla} \cdot (X \vec{b})) \vec{b}] \\ &= \vec{\nabla} \cdot (X \vec{b}) + X \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{b} \end{aligned}$$

En utilisant la définition du gradient on obtient :

$$\vec{\nabla} \otimes \vec{A} = \vec{A}_{,i} \otimes \vec{e}^i \quad \text{with} \quad \vec{A}_{,i} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial u^i} = \frac{\partial A_j}{\partial u^i} \vec{e}^j + A_j \frac{\partial \vec{e}^j}{\partial u^i}$$

Sachant que $b^\psi = 0$ et $\partial_\phi = 0$, l'expression $\vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{b}$ se réduit à :

$$\begin{aligned}
 \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{b} &= b^k \vec{e}_k \cdot \left(\frac{\partial b_j}{\partial u^i} \vec{e}^i \otimes \vec{e}^j \right) \cdot b^l \vec{e}_l + b^k \vec{e}_k \cdot \left(b_j \frac{\partial \vec{e}^j}{\partial u^i} \otimes \vec{e}^i \right) \cdot b^l \vec{e}_l \\
 &= b^i b^j \frac{\partial b_j}{\partial u^i} + b^k b^i b_j \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}^j}{\partial u^i} \\
 &= \frac{\partial b^i}{\partial u^i} - b_j \frac{\partial b^i b^j}{\partial u^i} + b_j \frac{\partial b^i b^j}{\partial u^i} - b_j \vec{e}^j \cdot \frac{\partial b^k b^i \vec{e}_k}{\partial u^i} \\
 &= \frac{\partial b^i}{\partial u^i} - \frac{\partial b^i}{\partial u^i} + b^i b_j \vec{e}^j \cdot \frac{\partial b^k \vec{e}_k}{\partial u^i} \\
 &= b^i \vec{b} \cdot \frac{\partial \vec{b}}{\partial u^i} \\
 \vec{b} \cdot (\vec{\nabla} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{b} &= 0
 \end{aligned}$$

Concernant le terme de dérive, il y a deux termes à évaluer. On se place localement dans une base orthonormée et en utilisant les identités tensorielles :

$$\begin{aligned}
 \vec{b} \cdot \nabla \cdot (X\vec{b} \otimes \vec{u}_\perp) &= \vec{b} \cdot (\nabla \cdot (X\vec{u}_\perp)\vec{b} + \vec{\nabla} \otimes \vec{b} \cdot X\vec{u}_\perp) \\
 &= \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \otimes \vec{b} \cdot X\vec{u}_\perp + \vec{\nabla} \cdot (X\vec{u}_\perp)
 \end{aligned} \tag{B.15}$$

Pour le second terme, le calcul est plus complexe. Avec la même approche, nous obtenons le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
 \vec{b} \cdot \nabla \cdot (X\vec{u}_\perp \otimes \vec{b}) &= \vec{b} \cdot (\nabla \cdot \vec{b}(X\vec{u}_\perp) + \vec{\nabla} \otimes (X\vec{u}_\perp) \cdot \vec{b}) \\
 &= \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \otimes (X\vec{u}_\perp) \cdot \vec{b}
 \end{aligned} \tag{B.16}$$

On passe alors en écriture indicielle dans les bases co- et contravariante. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 \vec{u}_\perp \cdot (\vec{\nabla} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{b} &= v_\perp^k \vec{e}_k \cdot \left(\frac{\partial b_j}{\partial u^i} \vec{e}^j \otimes \vec{e}^i \right) b^l \vec{e}_l + v_\perp^k \vec{e}_k \cdot \left(b_j \frac{\partial \vec{e}^j}{\partial u^i} \otimes \vec{e}^i \right) b^l \vec{e}_l \\
 &= v_\perp^j b^i \frac{\partial b_j}{\partial u^i} + v_\perp^k b_j b^i \vec{e}_k \cdot \frac{\partial \vec{e}^j}{\partial u^i} \\
 &= v_\perp^j b^i \frac{\partial b_j}{\partial u^i} + v_\perp^k b^i \vec{e}_k \cdot \left(\frac{\partial b_j \vec{e}^j}{\partial u^i} - \vec{e}^j \frac{\partial b_j}{\partial u^i} \right) \\
 &= b^i \vec{u}_\perp \cdot \frac{\partial \vec{b}}{\partial u^i}
 \end{aligned}$$

Or, sachant que $b^\psi = 0$ et $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$, on obtient le terme :

$$X\vec{u}_\perp \cdot (\vec{\nabla} \otimes \vec{b}) \cdot \vec{b} = X b^\theta \vec{u}_\perp \cdot \frac{\partial \vec{b}}{\partial \theta} \tag{B.17}$$

et

$$\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \otimes (X\vec{u}_\perp) \cdot \vec{b} = b^\theta \vec{b} \cdot \frac{\partial (X\vec{u}_\perp)}{\partial \theta} \tag{B.18}$$

La somme de ces deux termes est nulle (car $\vec{u}_\perp \cdot \vec{b} = 0$) donc le terme de dérive vaut :

$$\vec{b} \cdot \vec{\nabla} \cdot (X(\vec{b} \otimes \vec{u}_\perp) + \vec{u}_\perp \otimes \vec{b}) = \vec{\nabla} \cdot (X\vec{u}_\perp) \tag{B.19}$$

L'équation de conservation de la quantité de mouvement est alors :

$$\begin{aligned}
 m_i \frac{\partial \Gamma_{\parallel}}{\partial t} + m_i B \nabla_{\parallel} \left(\frac{1}{B} \frac{\Gamma_{\parallel}^2}{n} \right) + \nabla_{\parallel} p + \vec{\nabla} \cdot \vec{\phi}_{\perp} &= 0 \\
 m_i \frac{\partial \Gamma_{\parallel}}{\partial t} + m_i B \nabla_{\parallel} \left(\frac{1}{B} \frac{\Gamma_{\parallel}^2}{n} \right) + \nabla_{\parallel} (n(T_e + T_i)) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \phi_{\perp,d}^{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial J \phi_{\perp,d}^{\psi}}{\partial \psi} \right) \\
 + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \phi_{\perp,c}^{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial J \phi_{\perp,c}^{\psi}}{\partial \psi} \right) &= 0 \\
 m_i \frac{\partial \Gamma_{\parallel}}{\partial t} + \left(B_R \frac{\partial \theta}{\partial R} + B_z \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \left\{ m_i \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{B} \frac{\Gamma_{\parallel}^2}{n} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \theta} (n(T_e + T_i)) \right\} \\
 + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \phi_{\perp,d}^{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial J \phi_{\perp,d}^{\psi}}{\partial \psi} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \phi_{\perp,c}^{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial J \phi_{\perp,c}^{\psi}}{\partial \psi} \right) &= 0
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 \phi_{\perp,d}^{\theta}/m_i &= -n\nu^{\psi} g^{\theta\psi} \partial_{\psi} u_{\parallel} - n \left(\nu_{\theta} (h^{\theta} - \mathcal{G}^2) + (\nu^{\psi} - \nu_{\theta}) \frac{(g^{\theta\psi})^2}{h^{\psi}} \right) \partial_{\theta} u_{\parallel} \\
 &- u_{\parallel} D^{\psi} g^{\theta\psi} \partial_{\psi} n - u_{\parallel} \left(D_{\theta} (h^{\theta} - \mathcal{G}^2) + (D^{\psi} - D_{\theta}) \frac{g^{\theta\psi^2}}{h^{\psi}} \right) \partial_{\theta} n \\
 \phi_{\perp,d}^{\psi}/m_i &= -n\nu^{\psi} (h^{\psi} \partial_{\psi} u_{\parallel} + g^{\theta\psi} \partial_{\theta} u_{\parallel}) - u_{\parallel} D^{\psi} (h^{\psi} \partial_{\psi} n + g^{\theta\psi} \partial_{\theta} n)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \phi_{\perp,c}^{\theta}/m_i &= -\frac{nu_{\parallel} R B_{tor}}{J B^2} \frac{\partial \phi}{\partial \psi} - \frac{2p_i u_{\parallel} R B_{tor}}{J e B^3} \frac{\partial B}{\partial \psi} \\
 \phi_{\perp,c}^{\psi}/m_i &= \frac{nu_{\parallel} R B_{tor}}{J B^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \frac{2p_i u_{\parallel} R B_{tor}}{J e B^3} \frac{\partial B}{\partial \theta}
 \end{aligned}$$

B. 6. 2 Adimensionnement

On réécrit l'équation avec les grandeurs sans dimension $n^* = n/n_0$, $\Gamma^* = \Gamma_{\parallel}/(n_0 c_0)$, $\theta^* = \theta/2\pi$, $\psi^* = (\psi - \psi_{min})/\Delta\psi_0$, $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}R_0$, $\vec{\nabla}\theta^* = \frac{a\vec{\nabla}\theta}{2\pi}$, $\vec{\nabla}\psi^* = \frac{a\vec{\nabla}\psi}{\Delta\psi_0}$

$$\frac{m_i n_0 c_0}{\tau_0} \frac{\partial \Gamma^*}{\partial t^*} + B \mathcal{G}^* \frac{m_i n_0 c_0^2}{2\pi R_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left(\frac{1}{B} \frac{\Gamma^{*2}}{n^*} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \theta^*} (n^* (T_e^* + T_i^*)) \right\} + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \phi_{\perp}^{\theta}/2\pi}{\partial \theta^*} + \frac{\partial J \phi_{\perp}^{\psi}/\Delta\psi_0}{\partial \psi^*} \right) = 0$$

avec $c_0 = \sqrt{k_B T_0/m_i}$ et $\phi_{\perp} = \phi_{\perp,d} + \phi_{\perp,c}$

$$\frac{\partial \Gamma^*}{\partial t^*} + B \mathcal{G}^* \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left(\frac{1}{B} \frac{\Gamma^{*2}}{n^*} \right) + \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \theta^*} (n^* (T_e^* + T_i^*)) \right\} + \frac{2\pi R_0}{m_i n_0 c_0^2} \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \phi_{\perp}^{\theta}/2\pi}{\partial \theta^*} + \frac{\partial J \phi_{\perp}^{\psi}/\Delta\psi_0}{\partial \psi^*} \right) = 0$$

où la partie diffusive du flux perpendiculaire devient :

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 \phi_{\perp,d}^{\theta^*} &= -n^* \frac{A}{\text{Re}^{\psi}} g^{\theta\psi^*} \partial_{\psi^*} \frac{\Gamma^*}{n^*} - n^* \left(\frac{A}{\text{Re}_{\theta}} (h^{\theta^*} - \frac{1}{A^2} \mathcal{G}^{*2}) + \left(\frac{A}{\text{Re}^{\psi}} - \frac{A}{\text{Re}_{\theta}} \right) \frac{(g^{\theta\psi^*})^2}{h^{\psi^*}} \right) \partial_{\theta^*} \frac{\Gamma^*}{n^*} \\
 &- \frac{\Gamma^*}{n^*} \frac{A}{\text{Pe}^{\psi}} g^{\theta\psi^*} \partial_{\psi^*} n^* - \frac{\Gamma^*}{n^*} \left(\frac{A}{\text{Pe}_{\theta}} (h^{\theta^*} - \frac{1}{A^2} \mathcal{G}^{*2}) + \left(\frac{A}{\text{Pe}^{\psi}} - \frac{A}{\text{Pe}_{\theta}} \right) \frac{(g^{\theta\psi^*})^2}{h^{\psi^*}} \right) \partial_{\theta^*} n^*
 \end{aligned}
 }$$

et

$$\boxed{\begin{aligned} \phi_{\perp,d}^{\psi \star} &= -n^{\star} \frac{A}{\text{Re}^{\psi}} \left(h^{\psi \star} \partial_{\psi}^{\star} \Gamma^{\star} + g^{\theta \psi \star} \partial_{\theta}^{\star} \Gamma^{\star} \right) \\ &\quad - \frac{\Gamma^{\star} A}{n^{\star} \text{Pe}^{\psi}} \left(h^{\psi \star} \partial_{\psi}^{\star} n^{\star} + g^{\theta \psi \star} \partial_{\theta}^{\star} n^{\star} \right) \end{aligned}}$$

avec

$$\text{Re}^{\psi} = \frac{ac_0}{\nu^{\psi}} \quad , \quad \text{Re}_{\theta} = \frac{ac_0}{\nu_{\theta}} \quad (\text{B.20})$$

La partie convective quant à elle se calcule comme précédemment :

$$\boxed{\phi_{\perp,c}^{\theta \star} = A\rho^{\star} \left\{ \frac{\Gamma^{\star} R^{\star} B_{tor}^{\star}}{J^{\star} B^{2\star}} \frac{\partial \phi^{\star}}{\partial \psi^{\star}} + \frac{2T_i^{\star} \Gamma^{\star} R^{\star} B_{tor}^{\star}}{J^{\star} B^{3\star}} \frac{\partial B^{\star}}{\partial \psi^{\star}} \right\}}$$

et

$$\boxed{\phi_{\perp,c}^{\psi \star} = -A\rho^{\star} \left\{ \frac{\Gamma^{\star} R^{\star} B_{tor}^{\star}}{J^{\star} B^{2\star}} \frac{\partial \phi^{\star}}{\partial \theta^{\star}} + \frac{2T_i^{\star} \Gamma^{\star} R^{\star} B_{tor}^{\star}}{J^{\star} B^{3\star}} \frac{\partial B^{\star}}{\partial \theta^{\star}} \right\}}$$

avec

$$A = \frac{2\pi R_0}{a} \quad , \quad \rho^{\star} = \frac{\rho_i}{a} \quad (\text{B.21})$$

Finalement l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^{\star}}{\partial t^{\star}} + B\mathcal{G}^{\star} \frac{\partial}{\partial \theta^{\star}} \left(\frac{1}{B} \frac{\Gamma^{2\star}}{n^{\star}} \right) + \mathcal{G}^{\star} \frac{\partial}{\partial \theta^{\star}} (n^{\star} (T_e^{\star} + T_i^{\star})) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \phi_{\perp,d}^{\theta \star}}{\partial \theta^{\star}} + \frac{\partial J \phi_{\perp,d}^{\psi \star}}{\partial \psi^{\star}} \right) \\ + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \phi_{\perp,c}^{\theta \star}}{\partial \theta^{\star}} + \frac{\partial J \phi_{\perp,c}^{\psi \star}}{\partial \psi^{\star}} \right) = 0 \end{aligned}} \quad (\text{B.22})$$

B. 7 Equation de conservation de la charge

B. 7. 1 Opérateur de vortacité et loi d'Ohm généralisée

Nous nous intéressons maintenant à l'incorporation de la métrique dans l'opérateur de vortacité et dans la loi d'ohm généralisée. Tout d'abord on a :

$$j_{\parallel} = \frac{1}{en\eta_{\parallel}} \left(\nabla_{\parallel} p_e + 0.71n \nabla_{\parallel} k_B T_e - en \nabla_{\parallel} \phi \right)$$

qui devient :

$$j_{\parallel} = \frac{\mathcal{G}}{en\eta_{\parallel 0} T_e^{-3/2}} \left(\partial_{\theta} p_e + 0.71n \partial_{\theta} (k_B T_e) - en \partial_{\theta} \phi \right)$$

On utilise les grandeurs sans dimension $n^{\star} = n/n_0$, $T_{i,e}^{\star} = T_{i,e}/T_0$, $\theta^{\star} = \theta/2\pi$, $\psi^{\star} = (\psi - \psi_{min})/\Delta\psi_0$, $\mathcal{G}^{\star} = \mathcal{G}R_0$, $\vec{\nabla}\theta^{\star} = \frac{a\vec{\nabla}\theta}{2\pi}$, $\vec{\nabla}\psi^{\star} = \frac{a\vec{\nabla}\psi}{\Delta\psi_0}$, on a :

$$j_{\parallel} = \frac{(k_B T_0)^{5/2}}{R_0 e \eta_{\parallel 0}} \frac{\mathcal{G}^{\star}}{n^{\star} T_e^{-3/2\star}} \left(\partial_{\theta}^{\star} p_e^{\star} + 0.71n^{\star} \partial_{\theta}^{\star} T_e^{\star} - n^{\star} \partial_{\theta}^{\star} \phi^{\star} \right)$$

L'opérateur de vortacité est défini comme :

$$W = \vec{\nabla} \cdot \left(m_i \left(\frac{n \vec{\nabla}_{\perp} \phi}{B^2} + \frac{\vec{\nabla}_{\perp} p_i}{e B^2} \right) \right)$$

Ce qui, en accord avec les développements précédents, aboutit à :

$$W_\phi = \frac{m_i}{J} \left(\frac{\partial}{\partial \psi} \left(J \frac{n(\vec{\nabla}_\perp \phi)^\psi}{B^2} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(J \frac{n(\vec{\nabla}_\perp \phi)^\theta}{B^2} \right) \right)$$

On ne développe ici que la partie liée au potentiel ϕ pour alléger les calculs (le calcul de la partie liée à la pression étant identique). En utilisant la définition du gradient perpendiculaire, on arrive à :

$$W_\phi = \frac{m_i}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \psi} \left(J \frac{n}{B^2} (h^\psi \frac{\partial \phi}{\partial \psi} + g^{\theta\psi} \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(J \frac{n}{B^2} ((h^\theta - \mathcal{G}^2) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} + g^{\theta\psi} \frac{\partial \phi}{\partial \psi}) \right) \right]$$

On utilise les mêmes grandeurs sans dimension ce qui donne :

$$W_\phi = \frac{k_B T_0 m_i n_0}{e a^2} \frac{1}{J} \left[\frac{\partial}{\partial \psi^*} \left(J \frac{n^*}{B^2} (h^{\psi^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial \psi^*} + g^{\theta\psi^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*}) \right) + \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left(J \frac{n^*}{B^2} ((h^{\theta^*} - \frac{\mathcal{G}^{2*}}{A^2}) \frac{\partial \phi^*}{\partial \theta^*} + g^{\theta\psi^*} \frac{\partial \phi^*}{\partial \psi^*}) \right) \right]$$

Ce qui nous permet de définir pour la suite $W^* = W/W_0$ avec :

$$W_0 = \frac{k_B T_0 m_i n_0}{B_0^2 e a^2}$$

B. 7. 2 Équation avec métrique

On rappelle l'équation de vorticité :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + B \nabla_\parallel \cdot \left(\frac{W u_\parallel}{B} \right) = B \nabla_\parallel \cdot \left(\frac{j_\parallel}{B} \right) + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\nabla B} - \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{\Phi}_W$$

où $\vec{j}_{\nabla B} = ne(\vec{u}_{\nabla B,i} - \vec{u}_{\nabla B,e})$ est le terme de courant de gradient-courbure (avec toujours $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_{\nabla B} = \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_*$).

On a :

$$\frac{\partial W}{\partial t} + B \mathcal{G} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{W u_\parallel}{B} \right) = B \mathcal{G} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{j_\parallel}{B} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J j_{\nabla B}^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial J j_{\nabla B}^\psi}{\partial \psi} \right) - \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \Phi_W^\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial J \Phi_W^\psi}{\partial \psi} \right)$$

B. 7. 3 Adimensionnement

On récrit maintenant les équations   partir des grandeurs sans dimension suivantes : $n^* = n/n_0$, $W^* = W/W_0$, $\phi^* = \phi e/k_B T_0$, $u^* = u_\parallel/c_0$ ($c_0 = \sqrt{k_B T_0/m_i}$), $\theta^* = \theta/2\pi$, $\psi^* = (\psi - \psi_{min})/\Delta\psi_0$, $\mathcal{G}^* = \mathcal{G}R_0$, $\vec{\nabla}^* \theta^* = \frac{a \vec{\nabla} \theta}{2\pi}$ et $\vec{\nabla}^* \psi^* = \frac{a \vec{\nabla} \psi}{\Delta\psi_0}$

$$\frac{c_0 W_0}{2\pi R_0} \frac{\partial W^*}{\partial t^*} + B \mathcal{G}^* \frac{W_0 c_0}{2\pi R_0} \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left(\frac{W^* u^*}{B} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \Phi_W^\theta / 2\pi}{\partial \theta^*} + \frac{\partial J \Phi_W^\psi / \Delta\psi_0}{\partial \psi^*} \right) = \frac{B \mathcal{G}^*}{2\pi R_0} \frac{\partial}{\partial \theta^*} \left(\frac{j_\parallel}{B} \right) + \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J j_{\nabla B}^\theta / 2\pi}{\partial \theta^*} + \frac{\partial J j_{\nabla B}^\psi / \Delta\psi_0}{\partial \psi^*} \right)$$

où la partie diffusive du flux perpendiculaire devient :

$$\Phi_{W,d}^{\theta \star} = -\frac{A\zeta^\psi}{ac_0} g^{\theta\psi\star} \partial_\psi^\star W^\star - \left(\frac{A\zeta_\theta}{ac_0} (h^{\theta\star} - \frac{1}{A^2} \mathcal{G}^{\star 2}) + \left(\frac{A\zeta^\psi}{ac_0} - \frac{A\zeta_\theta}{ac_0} \right) \frac{(g^{\theta\psi\star})^2}{h^{\psi\star}} \right) \partial_\theta^\star W^\star$$

et

$$\Phi_{W,d}^{\psi \star} = -\frac{A\zeta^\psi}{ac_0} \left(h^{\psi\star} \partial_\psi^\star W^\star + g^{\theta\psi\star} \partial_\theta^\star W^\star \right)$$

Comme précédemment, la partie convective devient :

$$\Phi_{W,c}^{\theta \star} = A\rho^\star \left\{ \frac{W^\star R^\star B_{tor}^\star}{J^\star B^{2\star}} \frac{\partial \phi^\star}{\partial \psi^\star} + \frac{2T_i^\star W^\star R^\star B_{tor}^\star}{J^\star B^{3\star}} \frac{\partial B^\star}{\partial \psi^\star} \right\}$$

et

$$\Phi_{W,c}^{\psi \star} = -A\rho^\star \left\{ \frac{W^\star R^\star B_{tor}^\star}{J^\star B^{2\star}} \frac{\partial \phi^\star}{\partial \theta^\star} + \frac{2T_i^\star W^\star R^\star B_{tor}^\star}{J^\star B^{3\star}} \frac{\partial B^\star}{\partial \theta^\star} \right\}$$

On cherche maintenant à adimensionner le dernier terme de divergence du courant de gradient-courbure (que l'on appellera courant diamagnétique). On a alors, sachant que $J^\star = \frac{2\pi \Delta\psi_0}{R_0 a^2} J$, $B^\star = B/B_0$ et $R^\star = R/R_0$, :

$$\begin{aligned} \frac{2\pi R_0}{W_0 c_0} \frac{j_{\nabla B}^\theta}{2\pi} &= \frac{R_0}{W_0 c_0} \frac{2(p_i + p_e) R B_{tor}}{J B^3} \frac{\partial B}{\partial \psi} \\ &= \frac{R_0 k_B T_0 n_0}{W_0 c_0 \Delta\psi_0} \frac{2(p_i^\star + p_e^\star) R B_{tor}}{J B^3} \frac{\partial B}{\partial \psi^\star} \\ &= \frac{R_0 k_B T_0 n_0 e a^2 B_0^2}{k_B T_0 n_0 m_i c_0 \Delta\psi_0} \frac{2\pi \Delta\psi_0 R_0}{B_0 R_0 a^2} \frac{2(p_i^\star + p_e^\star) R^\star B_{tor}^\star}{J^\star B^{3\star}} \frac{\partial B^\star}{\partial \psi^\star} \end{aligned}$$

ce qui se simplifie en :

$$j_{\nabla B}^{\theta \star} = \frac{A}{\rho^\star} \frac{2(p_i^\star + p_e^\star) R^\star B_{tor}^\star}{J^\star B^{3\star}} \frac{\partial B^\star}{\partial \psi^\star}$$

et

$$j_{\nabla B}^{\psi \star} = -\frac{A}{\rho^\star} \frac{2(p_i^\star + p_e^\star) R^\star B_{tor}^\star}{J^\star B^{3\star}} \frac{\partial B^\star}{\partial \theta^\star}$$

L'équation de conservation de la charge est finalement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^\star}{\partial t^\star} + B \mathcal{G}^\star \frac{\partial}{\partial \theta^\star} \left(\frac{W^\star u^\star - j_{\parallel}^\star}{B} \right) &+ \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J \Phi_W^{\theta \star}}{\partial \theta^\star} + \frac{\partial J \Phi_W^{\psi \star}}{\partial \psi^\star} \right) = \\ &+ \frac{1}{J} \left(\frac{\partial J j_{\nabla B}^{\theta \star}}{\partial \theta^\star} + \frac{\partial J j_{\nabla B}^{\psi \star}}{\partial \psi^\star} \right) \end{aligned}$$

où $j_{\parallel}^\star = j_{\parallel}/W_0 c_0$ et $\Phi_{W^\star} = \Phi_{W,d}^\star + \Phi_{W,c}^\star$.

Concernant les équations sur l'énergie totale des ions et des électrons, les développements sont identiques à ceux présentés dans cette annexe.

Bibliographie

- [1] Peter C Stangeby. *The Plasma Boundary of Magnetic*. 2000.
- [2] A V Chankin and P C Stangeby. The effect of diamagnetic drift on the boundary conditions in tokamak scrape-off layers and the distribution of plasma fluxes near the target. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 36(9) :1485–1499, sep 1994.
- [3] N Smick, B LaBombard, and IH Hutchinson. Transport and drift-driven plasma flow components in the Alcator C-Mod boundary plasma. *Nuclear Fusion*, 2013.
- [4] T D Rognlien, D D Ryutov, N Mattor, and G D Porter. Two-dimensional electric fields and drifts near the magnetic separatrix in divertor tokamaks. *Physics of Plasmas*, 6(5) :1851, 1999.
- [5] V. Rozhansky, P. Molchanov, I. Veselova, S. Voskoboynikov, A. Kirk, and D. Coster. Contribution of ExB drifts and parallel currents to divertor asymmetries. *Journal of Nuclear Materials*, 438 :S297–S302, jul 2013.
- [6] A V Chankin, G Corrigan, M Groth, and P C Stangeby. Influence of the ExB drift in high recycling divertors on target asymmetries. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 57 :95002, 2015.
- [7] L. Aho-Mantila, M. Wischmeier, K. Krieger, V. Rohde, H. W. Müller, D. P. Coster, M. Groth, A. Kirschner, R. Neu, S. Potzel, B. Sieglin, E. Wolfrum, and ASDEX Upgrade Team. Effect of E x B driven transport on the deposition of carbon in the outer divertor of ASDEX Upgrade. *Journal of Nuclear Materials*, 415(1, Supplement) :S231–S234, 2011.
- [8] A.V Chankin, D.P Coster, N Asakura, G Corrigan, S.K Erents, W Fundamenski, H.W Müller, R.a Pitts, P.C Stangeby, and M Wischmeier. A possible role of radial electric field in driving parallel ion flow in scrape-off layer of divertor tokamaks. *Nuclear Fusion*, 47(8) :762–772, 2007.
- [9] V. Rozhansky, P. Molchanov, S. Voskoboynikov, G. Counsell, a. Kirk, D. Coster, and R. Schneider. Modeling of the parametric dependence of the edge toroidal rotation for MAST and ASDEX Upgrade. *Journal of Nuclear Materials*, 363-365(13009) :664–668, 2007.
- [10] Hugo Bufferand. *Development of a fluid code for tokamak edge plasma simulation - Investigation on non-local transport*. PhD thesis, 2012.
- [11] L. Isoardi, G. Chiavassa, G. Ciraolo, P. Haldenwang, E. Serre, Ph. Ghendrih, Y. Sarazin, F. Schwander, and P. Tamain. Penalization modeling of a limiter in the Tokamak edge plasma. *Journal of Computational Physics*, 229(6) :2220–2235, mar 2010.

- [12] A. Paredes, H. Bufferand, G. Ciraolo, F. Schwander, E. Serre, P. Ghendrih, and P. Tamain. A penalization technique to model plasma facing components in a tokamak with temperature variations. *Journal of Computational Physics*, 274 :283–298, oct 2014.
- [13] H. Bufferand, B. Bensiali, J. Bucalossi, G. Ciraolo, P. Genesio, Ph. Ghendrih, Y. Marandet, a. Paredes, F. Schwander, E. Serre, and P. Tamain. Near wall plasma simulation using penalization technique with the transport code SolEdge2D-Eirene. *Journal of Nuclear Materials*, 438 :S445–S448, 2013.
- [14] D. Reiter, M. Baelmans, and P. Börner. The EIRENE and B2-EIRENE Codes. *Fusion Science and Technology*, 47(2) :172–186, 2005.
- [15] H Bufferand, G Ciraolo, Y Marandet, J Bucalossi, Ph. Ghendrih, J Gunn, N Mellet, P Tamain, R Leybros, N Fedorczak, F Schwander, and E Serre. Numerical modelling for divertor design of the WEST device with a focus on plasma–wall interactions. *Nuclear Fusion*, 55(5) :53025, 2015.
- [16] R. Leybros, H. Bufferand, G. Ciraolo, N. Fedorczak, Ph. Ghendrih, P. Hennequin, Y. Marandet, E. Serre, F. Schwander, and P. Tamain. Investigation of drift velocity effects on the EDGE and SOL transport. *Journal of Nuclear Materials*, 463 :489–492, aug 2015.
- [17] P. Hennequin, C. Honoré, a. Truc, a. Quéméneur, N. Lemoine, J. M. Chareau, and R. Sabot. Doppler backscattering system for measuring fluctuations and their perpendicular velocity on Tore Supra. *Review of Scientific Instruments*, 75(10 II) :3881–3883, 2004.
- [18] P Hennequin, C Honoré, A Truc, A Quéméneur, C Fenzi-Bonizec, C Bourdelle, X Garbet, G.T Hoang, and the Tore Supra Team. Fluctuation spectra and velocity profile from Doppler backscattering on Tore Supra. *Nuclear Fusion*, 46(9) :S771–S779, sep 2006.
- [19] Filipe da Silva, Stéphane Heuraux, Evgeniy Z. Gusakov, and Alexei Popov. A Numerical Study of Forward- and Backscattering Signatures on Doppler-Reflectometry Signals. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 38(9) :2144–2149, sep 2010.
- [20] C. Lechte. Investigation of the Scattering Efficiency in Doppler Reflectometry by Two-Dimensional Full-Wave Simulations. *IEEE Transactions on Plasma Science*, 37(6) :1099–1103, jun 2009.
- [21] V. V. Bulanin and M. V. Yafanov. Spatial and spectral resolution of the plasma Doppler reflectometry. *Plasma Physics Reports*, 32(1) :47–55, jan 2006.
- [22] E Z Gusakov, G Leclert, I Boucher, S Heuraux, S Hacquin, M Colin, V V Bulanin, A V Petrov, B O Yakovlev, F Clairet, and X L Zou. Small-angle scattering and spatial resolution of fluctuation reflectometry : comparison of 2D analytical theory with numerical calculations. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 44(8) :310, aug 2002.
- [23] P. Tamain, H. Bufferand, G. Ciraolo, C. Colin, Ph. Ghendrih, F. Schwander, and E. Serre. 3D Properties of Edge Turbulent Transport in Full-Torus Simulations and their Impact on Poloidal Asymmetries. *Contributions to Plasma Physics*, 54(4-6) :555–559, jun 2014.
- [24] J D Lawson. Some criteria for a power producing thermonuclear reactor. *Proceedings of the Physical Society. Section B*, 70(1) :6–10, jan 1957.
- [25] J. Wesson. *Tokamaks 3rd edition*. Oxford University Press, 2004.

- [26] J. P. Freidberg. Ideal magnetohydrodynamic theory of magnetic fusion systems. *Reviews of Modern Physics*, 54(3) :801–902, jul 1982.
- [27] V.D. Shafranov. Plasma Equilibrium in a Magnetic Field. *Reviews of Plasma Physics*, 2 :103, 1966.
- [28] F. L. Hinton and R. D. Hazeltine. Theory of plasma transport in toroidal confinement systems. *Reviews of Modern Physics*, 48(2) :239–308, apr 1976.
- [29] F Wagner and U Stroth. Transport in toroidal devices-the experimentalist’s view. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 35(10) :1321–1371, oct 1993.
- [30] Paulett C. Liewer. Measurements of microturbulence in tokamaks and comparisons with theories of turbulence and anomalous transport. *Nuclear Fusion*, 25(5) :543–621, may 1985.
- [31] A.J. Wootton. Edge turbulence. *Journal of Nuclear Materials*, 176-177 :77–88, dec 1990.
- [32] Lyman Spitzer and Richard Härm. Transport Phenomena in a Completely Ionized Gas. *Physical Review*, 89(5) :977–981, mar 1953.
- [33] S.I. Braginskii. Transport Processes in a Plasma. *Reviews of Plasma Physics*, 1 :205, 1965.
- [34] R. Chodura. Plasma-wall transition in an oblique magnetic field. *Physics of Fluids*, 25(9) :1628, 1982.
- [35] Ronald H. Cohen and Dmitri D. Ryutov. Plasma sheath in a tilted magnetic field : Closing of the diamagnetic currents ; effect on plasma convection. *Physics of Plasmas*, 2(6) :2011, 1995.
- [36] Ronald H. Cohen and Dmitri Ryutov. Drifts, boundary conditions and convection on open field lines. *Physics of Plasmas*, 6(5) :1995, 1999.
- [37] R. H. Cohen and D. D. Ryutov. Sheath physics and boundary conditions for edge plasmas. *Contributions to Plasma Physics*, 44 :111–125, 2004.
- [38] AJ Brizard. Energy-conserving finite- β electromagnetic drift-fluid equations. *Physics of plasmas*, pages 1–24, 2005.
- [39] Robert S. Cohen, Lyman Spitzer, and Paul McR. Routly. The Electrical Conductivity of an Ionized Gas. *Physical Review*, 80(2) :230–238, oct 1950.
- [40] Ph Ghendrih, K Bodi, H Bufferand, G Chiavassa, G Ciraolo, N Fedorczak, L Isoardi, a Paredes, Y Sarazin, E Serre, F Schwander, and P Tamain. Transition to supersonic flows in the edge plasma. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 53(5) :054019, may 2011.
- [41] J.P. Gunn, C. Boucher, M. Dionne, I. Āuran, V. Fuchs, T. Loarer, I. Nanobashvili, R. Pánek, J.-Y. Pascal, F. Saint-Laurent, J. Stöckel, T. Van Rompuy, R. Zagórski, J. Adámek, J. Bucalossi, R. Dejarnac, P. Devynck, P. Hertout, M. Hron, G. Lebrun, P. Moreau, F. Rimini, a. Sarkissian, and G. Van Oost. Evidence for a poloidally localized enhancement of radial transport in the scrape-off layer of the Tore Supra tokamak. *Journal of Nuclear Materials*, 363-365 :484–490, jun 2007.

- [42] A.V. Chankin, D.P Coster, R. Dux, Ch. Fuchs, G. Haas, A. Herrmann, L.D. Horton, A. Kallenbach, M. Kaufmann, Ch. Konz, K. Lackner, C. Maggi, M.W. Müller, J. Neuhauser, R. Pugno, M. Reich, and W. Schneider. SOLPS modelling of ASDEX upgrade H-mode plasma. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 48 :839–868, 2006.
- [43] H. Bufferand, J. Bucalossi, G. Ciraolo, Y. Marandet, C. Bourdelle, J. Denis, N. Fedorczak, D. Galassi, Ph. Ghendrih, R. Leybros, B. Pégourié, E. Serre, P. Tamain, and E. Tsitrone. Preparing WEST tungsten divertor operation. In *42nd EPS Conference*, 2015.
- [44] R. Zag´ H. Gerhauser, G. Mank and C. Boucher Orski, T. Loarer, J. Gunn. Numerical modelling of limiter biasing experiments on TEXTOR-94. *Czechoslovak Journal of Physics*, 51(10) :1033–1046, 2001.
- [45] J P Gunn. Measurement and simulation of edge plasma flow in the Tore Supra tokamak. *Czechoslovak Journal of Physics*, 54(S3) :C135–C142, mar 2004.
- [46] P Hennequin and L Vermare. The effect of SOL flows on edge and core radial electric field and rotation in Tore Supra. *37th EPS Conference . . .*, pages 6–9, 2010.
- [47] G.F Matthews, P Andrew, T Eich, W Fundamenski, A Herrmann, A Loarte, V Riccardo, and JET EFDA Contributors. Steady-state and transient power handling in JET. *Nuclear Fusion*, 43(9) :999–1005, sep 2003.
- [48] T. Kurki-Suonio, T.P. Kiviniemi, S.K. Sipilä, J.A. Heikkinen, W. Fundamenski, G.F. Matthews, and V. Riccardo. Monte Carlo simulations of the heat load asymmetries on JET divertor plates. *Nuclear Fusion*, 42(6) :310, jun 2002.
- [49] N. Asakura, S. Sakurai, M. Shimada, Y. Koide, N. Hosogane, and K. Itami. Measurement of Natural Plasma Flow along the Field Lines in the Scrape-Off Layer on the JT-60U Divertor Tokamak. *Physical Review Letters*, 84(14) :3093–3096, 2000.
- [50] Nobuyuki Asakura. Understanding the SOL flow in L-mode plasma on divertor tokamaks, and its influence on the plasma transport. *Journal of Nuclear Materials*, 363-365 :41–51, jun 2007.
- [51] B. LaBombard, J. E. Rice, A. E. Hubbard, J. W. Hughes, M. Greenwald, R. S. Granetz, J. H. Irby, Y. Lin, B. Lipschultz, E. S. Marmor, K. Marr, D. Mossessian, R. Parker, W. Rowan, N. Smick, J. A. Snipes, J. L. Terry, S. M. Wolfe, S. J. Wukitch, and the Alcator C-Mod Team. Transport-driven scrape-off layer flows and the x-point dependence of the L-H power threshold in Alcator C-Mod. *Physics of Plasmas*, 12(5) :056111, 2005.
- [52] W. M. Stacey. An investigation of some effects of drifts and magnetic field direction in the scrape-off layer and divertor of tokamak plasmas. *Physics of Plasmas*, 16(4) :042502, 2009.
- [53] V.A Rozhansky, S.P Voskoboynikov, E.G Kaveeva, D.P Coster, and R Schneider. Simulation of tokamak edge plasma including self-consistent electric fields. *Nuclear Fusion*, 41(4) :387–401, apr 2001.
- [54] R. Zagorski, H. Gerhauser, M. Lehnen, T. Loarer. Investigations of Radial Electric Field and Global Circulation Layer in Limiter Tokamaks. *Contrib. Plasma Phys*, 42(2-4) :247–252, 2002.

- [55] T.D. Rognlien, G.D. Porter, and D.D. Ryutov. Influence of and ∇B drift terms in 2-D edge/SOL transport simulations. *Journal of Nuclear Materials*, 266-269 :654–659, mar 1999.
- [56] S K Erents, A V Chankin, G F Matthews, and P C Stangeby. Parallel flow in the JET scrape-off layer. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 42(8) :905–915, aug 2000.
- [57] Patrick Tamain. *Etude des Flux de Matière dans le Plasma de Bord des Tokamaks : Alimentation, Transport et Turbulence*. PhD thesis, 2007.
- [58] C. Colin, P. Tamain, F. Schwander, E. Serre, H. Bufferand, G. Ciraolo, N. Fedorczak, and Ph. Ghendrih. Impact of the plasma-wall contact position on edge turbulent transport and poloidal asymmetries in 3D global turbulence simulations. *Journal of Nuclear Materials*, 463 :654–658, aug 2015.
- [59] A.Y. Aydemir. Pfirsch–Schlüter current-driven edge electric fields and their effect on the L–H transition power threshold. *Nucl. Fusion*, 52, 2012.
- [60] R Dumont. *Cours du master Fusion : Waves in Plasmas*. 2007.
- [61] G D Conway, J Schirmer, S Klenge, W Suttrop, E Holzhauser, and the ASDEX Upgrade Team. Plasma rotation profile measurements using Doppler reflectometry. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 46(6) :951–970, jun 2004.
- [62] E Z Gusakov, A D Gurchenko, A B Altukhov, V V Bulanin, L A Esipov, M Yu Kantor, D V Kouprienko, S I Lashkul, A V Petrov, and A Yu Stepanov. Investigation of small-scale tokamak plasma turbulence by correlative UHR backscattering diagnostics. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 48(12B) :B443–B451, dec 2006.
- [63] J. C. Hillesheim, W. A. Peebles, T. L. Rhodes, L. Schmitz, A. E. White, and T. A. Carter. New plasma measurements with a multichannel millimeter-wave fluctuation diagnostic system in the DIII-D tokamak (invited). *Review of Scientific Instruments*, 81(10) :10D907, 2010.
- [64] C Honoré, P Hennequin, A Truc, and A Quéméneur. Quasi-optical Gaussian beam tracing to evaluate Doppler backscattering conditions. *Nuclear Fusion*, 46(9) :S809–S815, sep 2006.
- [65] A. Storelli. *Étude du transport turbulent dans les plasmas du tokamak Tore Supra : observation des écoulements perpendiculaires stationnaires et du mode acoustique géodésique*. PhD thesis, 2015.
- [66] C. Colin. *Turbulent transport modelling in the edge plasma of tokamaks : Verification, Validation, Synthetic Diagnostics*. PhD thesis, 2015.
- [67] E. Serre, B. Bigot, C. Colin, A. Paredes, F. Schwander, H. Bufferand, G. Ciraolo, Ph. Ghendrih, P. Tamain, M. Bilanceri, H. Guillard, and B. Nkonga. Poster : Parallel Kelvin-Helmholtz turbulence as a test case for plasma edge fluid modelling. *Conférence ETFC15*, 2013.
- [68] H Guillard, M Bilanceri, C Colin, P Ghendrih, G Giorgiani, B Nkonga, F Schwander, E Serre, and P Tamain. Parallel Kelvin-Helmholtz instability in edge plasma. *Journal of Physics : Conference Series*, 561 :012009, 2014.

- [69] L. Vermare, P. Hennequin, Ö.D. Gürcan, and the Tore Supra Team. Detection of geodesic acoustic mode oscillations, using multiple signal classification analysis of Doppler backscattering signal on Tore Supra. *Nuclear Fusion*, 52(6) :063008, jun 2012.
- [70] J. Leon Shohet William D. D'haeseleer , William N.G. Hitchon , James D. Callen. *Flux Coordinates and Magnetic Field Structure*. 1991.