



**HAL**  
open science

# Résolution de deux types d'équations opératoriels et interactions

Abdelouahab Mansour

► **To cite this version:**

Abdelouahab Mansour. Résolution de deux types d'équations opératoriels et interactions. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Université de Lyon, 2016. Français. NNT : 2016LYSE1151 . tel-01409645

**HAL Id: tel-01409645**

**<https://theses.hal.science/tel-01409645>**

Submitted on 6 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N° d'ordre NNT : 2016 LYSE 1151

**THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE LYON**  
opérée au sein de  
**l'Université Claude Bernard Lyon 1**

**École Doctorale ED 512**  
**InfoMath**

**Spécialité de doctorat : Mathématiques**  
**Discipline : Théorie des opérateurs**

Soutenue publiquement le 23 Septembre 2016, par :  
**Abdelouahab MANSOUR**

---

**Résolution de deux types d'équations  
opératorielles et interactions**

---

Devant le jury composé de :

M. Gilles Cassier, CR., CNRS, Université de Lyon 1	Directeur de thèse
M. Thierry Fack, Prof., Université de Lyon 1	Examineur
M. Hassan Hammouri, Prof., Université de Lyon 1	Examineur
M. Mostafa Mbekhta, Prof., Université de Lille 1	Président
M. Alfonso Montes Rodriguez, Prof., Université de Séville	Rapporteur
M. Mohamed Hichem Mortad, Prof., Université Oran 1	Rapporteur

## UNIVERSITE CLAUDE BERNARD - LYON 1

Président de l'université : M. le Professeur Frédéric FLEURY  
Président du Conseil Académique : M. le Professeur Hamda BEN HADID  
V-Président du Cons. d'Admin. : M. le Professeur Didier REVEL  
V-Prés. du Cons. For. et Vie Univ. : M. le Professeur Philippe CHEVALIER  
V-Président de la Commission Recherche : M. Fabrice VALLÉE  
Directeur Général des Services : M. Alain HELLEU

## COMPOSANTES SANTE

Fac. de Méd. Lyon Est : Directeur : M. le Professeur J. ETIENNE  
Inst. Sc. et Tech. de la Réadap. : Directeur : M. le Professeur Y. MATILLON  
Dépt. for. et C. de rech. Bio. Hum. : Directrice : Prof. A-M. SCHOTT

COMPOSANTES ET DEPARTEMENTS DE SCIENCES ET  
TECHNOLOGIE

Faculté des Sciences et Technologies : Directeur : M. F. DE MARCHI  
Département Biologie : Directeur : M. le Professeur J. ETIENNE  
Département Chimie Biochimie : Directeur : Mme. C. FELIX  
Département GEP : Directeur : M. le Professeur Hassan HAMMOURI  
Département Informatique : Directeur : M. le Professeur S. AKKOUCHE  
Département Mathématiques : Directeur : M. le Professeur G. TOMANOV  
Département Mécanique : Directeur : M. le Professeur H. BEN HADID  
Département Physique : Directeur : M. le Professeur J-C PLENET  
UFR Sc. et Tech. des Act. Ph. et Sport. : Directeur : M. Y. VANPOULLE  
Observ. des Sc. de l'Univers de Lyon : Directeur : M. B. GUIDERDONI  
Polytech Lyon : Directeur : M. le Professeur E. PERRIN  
Inst. Univ. de Tech. de Lyon 1 : Directeur : M. le Professeur C. VITON  
Ecole Sup. de Chimie Physique Electronique : Directeur : M. G. PIGNAULT  
Inst. de Sc. Financière et d'Assurances : Directeur : M. N. LEBOISNE

# Résumé de la thèse

Le sujet de cette thèse porte sur la résolution d'équations d'opérateurs dans l'algèbre  $B(H)$  des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Hilbert  $H$ . Nous étudions celles qui sont associées aux dérivations généralisées. Le sujet de cette thèse explore aussi des équations beaucoup plus générales comme celles du type  $AXB - XD = E$  ou  $AXB - CXD = E$  où  $A, B, C, D$  et  $E$  appartiennent à  $B(H)$ . Plus précisément il s'agit de donner une description des solutions de ces équations pour  $E$  appartenant à une famille précise (autoadjoint, normal, rang un, rang fini, compact,...) et pour des opérateurs  $A, B, C$  et  $D$  appartenant à des bonnes classes d'opérateurs, celles qui interviennent dans les applications, notamment en physique comme les opérateurs autoadjoints, les opérateurs normaux, sous normaux, couple de Fuglede Putnam ... En dehors du cas où les spectres de  $A$  et  $B$  sont disjoints, il n'existe pas de méthode générale pour construire de manière effective l'ensemble des solutions de l'équation de Sylvester  $AX - XB = C$  à partir des opérateurs  $A, B$  et  $C$ . Un des objectifs de mon travail de thèse est de fournir une méthode constructive dans le cas où  $A, B$  et  $C$  appartiennent à des bonnes classes d'opérateurs. Une étude spectrale des solutions est également

faite. A coté de cette étude qualitative, il y a aussi une étude quantitative. Il s'agit d'obtenir aussi des estimations précises de la norme d'opérateur (ou norme de Schatten) des solutions en fonction des normes des opérateurs correspondants aux données. Ceci nous a d'ailleurs conduit à des résultats concernant quelques inégalités intéressantes pour les dérivations généralisées, et enfin quelques résultats concernant les opérateurs dans un espace de Banach sont également donnés.

### Mots-clés

Équations d'opérateurs, opérateurs normaux, opérateurs sous normaux, propriété de Fuglede Putnam, opérateurs similaires, estimation de norme, dérivations généralisées, opérateurs de rang un, opérateurs de rang fini.

# Thesis summary

The subject of this thesis focuses on the resolution of operator equations in  $B(H)$  algebra of bounded linear operators on a Hilbert space. We study those equations associated with generalized derivations. In this thesis, we also explore more general equations such as the type  $AXB - XD = E$  or  $AXB - CXD = E$  where  $A, B, C, D$  and  $E$  belong to  $B(H)$ . Specifically it is a description of the solutions of these equations when  $E$  belongs to a precise family (Self-adjoint, normal, rank one, finite rank, compact) and the operators  $A, B, C$  and  $D$  belonging to the good classes of operators (Those involved in applications, especially in physics) as the self-adjoint operators, normal operators, subnormal operators, pair of Fuglede Putnam... Apart from the case where the spectra of  $A$  and  $B$  are disjoint, there is not any general method for constructing effectively all solutions of the Sylvester equation  $AX - XB = C$  from the given operators  $A, B$  and  $C$ . One objective of this thesis is to provide a constructive approach when  $A, B$  and  $C$  belong to classical classes of operators. A spectral study of the solutions is also done. Besides this qualitative study, there is also a quantitative study. We also try to obtain accurate estimates of the operator norm (or of the Schatten norm)

of the solutions in terms of operator norms corresponding to data. This also led us to obtain some results concerning some relevant inequalities for generalized derivations. Finally some examples and properties of operators on a Banach space are also given.

### Keywords

Operator equations, normal operator, subnormal operators, Fuglede Putnam property, similar operators, norm estimate, generalized derivations, rank one operators, finite rank operators.

# Remerciements

Cette thèse n'aurait pas vu le jour sans le soutien d'un nombre de personnes pour pouvoir les remercier toutes ici. Mais avant tout elle est le résultat et le fruit d'un travail initié à l'invitation de mon professeur Gilles Cassier à qui j'exprime mes profonds remerciements, c'est lui qui m'a choisi ce sujet extrêmement intéressant, pour son aide soutenue dans toutes mes démarches depuis mon arrivée en France, pour sa disponibilité, pour sa patience et ses nombreuses suggestions pour trouver des résultats, pour le soutien scientifique et moral qu' il m' a apporté pour pouvoir réaliser ce travail. Ses remarques et critiques m'ont été très précieuses pour améliorer la qualité de mon travail. Je le remercie aussi pour ses indications au sein du groupe de travail "Analyse Complexe et Théorie des Opérateurs". Je tiens à ajouter que ce groupe de travail m'a permis d'acquérir une culture scientifique au delà de mon sujet de recherche et m'a fourni l'occasion d'améliorer ma façon d'exposer, de discuter et de répondre aux questions.

Je souhaite également remercier mes rapporteurs les professeurs Alphonso Montes Rodriguez et Mohamed Hichem Mortad qui me font l'honneur d'être membres de mon jury de thèse. Ma gratitude s'adresse également aux pro-

fesseurs Mostafa Mbekhta qui a accepté de présider mon jury de soutenance et Thierry Fack et Hassan Hammouri qui ont accepté de faire partie de ce jury.

Je tiens aussi à remercier mes collègues de l' ICJ qui ont participé à notre groupe de travail, je cite entre autres : Jérôme Verliat, Haykel Gaaya et Hassan Alkanjo pour les discussions drôles et sympathiques pendant les déjeuners dans le restaurant du personnel " DOMUS" et les pauses café.

Mes remerciements vont tout aussi sincèrement aux chercheurs et aux enseignants qu' ils m'ont permis de rencontrer, en particulier Dan Timotin et Petru Mironescu.

Je n'oublierai jamais les aides permanentes reçues du personnel administratif : Mme Gaffier, Aurélie Reymond, René El Melhem et Mr. Laurent Azema pour leur gentillesse et leurs disponibilité.

# Table des matières

<b>Introduction.</b>	<b>11</b>
<b>1 Notions Préliminaires</b>	<b>14</b>
1.1 Notations et définitions . . . . .	14
1.2 L'adjoint d'un opérateur . . . . .	14
1.3 Quelques classes d'opérateurs considérées dans $B(H)$ . . . . .	15
1.4 Spectres, résolvantes et images numériques . . . . .	16
1.5 Autres définitions et caractérisations des opérateurs sur un espace de Banach . . . . .	18
1.6 Propriétés et techniques opératorielles . . . . .	19
1.6.1 Les commutateurs . . . . .	19
1.6.2 Résultat de A. Wintner . . . . .	20
1.6.3 Similarité . . . . .	21
1.6.4 Dérivations . . . . .	22
1.7 Propriété de Fuglede-Putnam . . . . .	23
1.8 Théorème de M. Rosenblum . . . . .	26
1.9 Propriétés des opérateurs de rang un . . . . .	31

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	10
<b>2 L'équation <math>AX - XB = C</math> dans <math>B(H)</math></b>	<b>34</b>
2.1 Résultats et définitions utiles . . . . .	35
2.2 Solvabilité de l'équation $AX - XB = C$ . . . . .	37
2.3 Applications et remarques . . . . .	48
2.3.1 Équation $AX - XB = C$ , $C$ de rang un. . . . .	49
2.3.2 Solution de l'équation $AX - XB = C$ sur le sous espace $Ker(B - \lambda I)$ . . . . .	56
<b>3 L'équation <math>AXB - CXD = E</math> dans <math>B(H)</math></b>	<b>58</b>
3.1 L'équation $AXB - XD = E$ . . . . .	58
3.2 Sur l'équation $AXB - CXD = CE$ . . . . .	62
<b>4 Inégalités de dérivations</b>	<b>68</b>
4.1 Notations . . . . .	68
4.2 Quelques résultats . . . . .	69
<b>5 Commutateur Approximant Généralisé</b>	<b>80</b>
5.1 Introduction . . . . .	80
5.2 Préliminaires . . . . .	81
5.3 Quelques résultats . . . . .	82
<b>Conclusion</b>	<b>90</b>

# Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le domaine de la théorie des opérateurs ; l'étude de solvabilité de quelques types d'équations d'opérateurs classiques agissants sur des espaces bien définis, l'estimation de norme de quelques opérateurs, et quelques applications.

On désigne par  $H$  un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et  $B(H)$  l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur  $H$ . Soient  $A$  et  $B$  deux éléments fixés dans  $B(H)$ . L'opérateur  $\delta_{A,B}$  défini par

$$\delta_{A,B}X = AX - XB, \quad \text{pour tout } X \in B(H)$$

a d'abord été systématiquement étudié par M.Rosenblum [36]. Le corollaire de M.Rosenblum [36] (également découvert par M. G. Krein) affirme que le spectre de  $\delta_{A,B}$  est contenu dans  $\sigma(A) - \sigma(B)$ , où

$$\sigma(A) - \sigma(B) = \{\lambda_1 - \lambda_2 : \lambda_1 \in \sigma(A), \lambda_2 \in \sigma(B)\}.$$

En particulier la condition  $0 \notin \sigma(A) - \sigma(B)$  qui est équivalente à dire  $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ , implique que pour chaque  $Y \in B(H)$  il existe une solution unique  $X \in B(H)$  telle que  $AX - XB = Y$ . Ceci ne répond pas complètement au problème de solvabilité de l'équation  $AX - XB = Y$ . Par

exemple si  $A$  est l'adjoint du shift unilatéral et  $B = 0$ , l'équation admet une solution pour chaque  $Y$  alors que  $\sigma(B) \subset \sigma(A)$ .

L'étude de ces équations d'opérateurs a engendré des nombreux travaux depuis une vingtaine d'années, et plusieurs questions importantes concernant ces équations restent encore sans réponses.

Parmi les travaux dans ce domaine, on peut citer les travaux de Wielandt [50] et A. Wintner [52] qui sont issues de la physique. En effet, signalons que les applications linéaires non bornées  $P$  et  $Q$  représentant le moment et la position respectivement, satisfont la relation de commutation

$$PQ - QP = \left(\frac{-i\hbar}{2\pi}\right)I,$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck et  $I$  l'opérateur identité (Principe de Heisenberg). Dans [39] W. E. Roth a montré que pour les deux matrices finies  $A$  et  $B$ , l'équation

$$AX - XB = C$$

est résoluble si et seulement si les matrices

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

sont similaires.

On a la même caractérisation pour l'équation  $AX - YB = C$ . Une preuve très intéressante a été donnée par Flanders et Wimmer [21]. Dans [37] Rosenblum a montré que ce résultat reste vrai en dimension infinie quand  $A$  et  $B$  sont des opérateurs bornés auto-adjoints dans  $B(H)$ . Dans le deuxième

chapitre de cette thèse on a généralisé ces résultats dans le cas où  $A$  est normal et la paire  $(B, A)$  satisfait la propriété de Fuglède-Putnam  $(FP)_{B(H)}$  (Pour la définition de cette propriété voir définition 20 page 23). Dans [35], avec S. Mecheri, nous avons étudié d'autres familles d'équations telles que

$$AXB - X = C \quad \text{et} \quad AXB - XD = E.$$

Dans le troisième chapitre de cette thèse, on a pu généraliser ce travail pour résoudre l'équation plus générale  $AXB - CXD = E$ . Le quatrième chapitre est consacré à quelques estimations de normes. Il s'agit de quelques inégalités de dérivations pour des opérateurs sous normaux. Dans le dernier chapitre on a donné quelques résultats et propriétés des opérateurs sur un espace de Banach et nous avons généralisé un résultat intéressant de B. P. Duggal. On fournit dans le premier chapitre quelques notions préliminaires et des résultats basiques utilisés dans ce travail.

Les applications directes et indirectes de ces équations se trouvent essentiellement dans la physique nucléaire, la dynamique et dans plusieurs spécialités d'ingénierie, mais beaucoup plus encore dans la mécanique quantique et la théorie de contrôle.

Dans notre analyse, on a utilisé la théorie des opérateurs, qui est une extension naturelle de la théorie des matrices. Pour cette raison on s'est servi de nombreuses techniques matricielles qui sont toujours utiles dans les différents domaines des sciences et de la technologie.

# Chapitre 1

## Notions Préliminaires

### 1.1 Notations et définitions

Dans toute la suite, on désignera par  $H$  un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie ou de dimension finie, muni d'un produit scalaire dénoté par  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ou parfois  $\langle \cdot | \cdot \rangle$

- $B(H)$  désigne l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur  $H$ .
- Pour  $T \in B(H)$  :  $R(T)$  (resp.  $\ker(T)$ ) désigne l'image (resp. le noyau) de  $T$ .

### 1.2 L'adjoint d'un opérateur

**Définition 1.** *Pour tout opérateur  $T \in B(H)$ ,  $T^*$  désigne l'opérateur adjoint de l'opérateur  $T$ , défini par*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \text{ pour tout } x, y \in H.$$

Rappelons dans la proposition suivante quelques propriétés élémentaires :

**Proposition 2.** (Takayuki [44] p.35)

*Si  $T$  et  $S$  sont deux opérateurs linéaires bornés définis sur un espace de*

Hilbert  $H$ , alors leurs adjoints  $T^*$  et  $S^*$  sont aussi deux opérateurs linéaires bornés sur  $H$  et les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i)  $\|T^*\| = \|T\|$ .

(ii)  $(T + S)^* = T^* + S^*$ .

(iii)  $(\alpha T)^* = \bar{\alpha}T^*$ , pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

(iv)  $(T^*)^* = T$ .

(v)  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ , si  $T$  est inversible.

(vi)  $(ST)^* = T^*S^*$ .

### 1.3 Quelques classes d'opérateurs considérées dans $B(H)$

Un opérateur  $T \in B(H)$  est dit :

- **Compact**, si l'image de la boule unité fermé par  $T$ ,  $T(B_H)$  est relativement compacte.
- **De rang fini  $n$** , si  $R(T)$  l'image de  $T$  est de dimension  $n$ .
- **Positif**, si  $(Tx, x) \geq 0$  pour tout  $x \in H$ ; on notera  $T \geq 0$ , (Ordre de Löwner).
- **Auto-adjoint**, si  $T = T^*$ .
- **Isométrie**, si  $T^*T = I_H$ .
- **Unitaire**, si  $T^*T = TT^* = I$ .
- **Dominant**, si  $R(T - \lambda) \subseteq R((T - \lambda)^*)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ .
- **Normal**, si  $T^*T - TT^* = 0$ .
- **Sous-normal**, s'il admet une extension normale.

- **Quasinormal**, s'il commute avec  $T^*T$ .
- **Hyponormal**, si  $T^*T - TT^* \geq 0$ .
- **$p$ -hyponormal**, si  $(T^*T)^p \geq (TT^*)^p$ , pour tout nombre positif  $p$ .
- **Semi-normal**, si  $T$  ou  $T^*$  est hyponormal.
- **$k$ -quasihyponormal**, si  $T^{*k} (T^*T - TT^*) T^k \geq 0, \forall k \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 3.** On a la série des inclusions des classes d'opérateurs suivantes

$$[\text{Positifs}] \subset [\text{autoadjoints}] \subset [\text{normaux}] \subset [\text{quasinormaux}] \subset [\text{hyponormaux}] \subset [m\text{-hyponormaux}]$$

**Proposition 4.** Soit  $T$  un opérateur dans  $B(H)$ ,  $T$  est auto-adjoint si et seulement si le produit scalaire  $\langle Tf, f \rangle$  est un nombre réel pour tout  $f \in H$ .

**Corollaire 5.** Si un opérateur  $T$  dans  $B(H)$  est positif, alors il est forcément auto-adjoint.

**Théorème 6.** Soit  $H$  un espace de Hilbert complexe, si  $T$  est un opérateur sur  $H$ , alors on a

(i)  $T$  est normal si et seulement si  $\|Tx\| = \|T^*x\|$ , pour tout  $x \in H$ .

(ii)  $T$  est unitaire si et seulement si  $\|Tx\| = \|T^*x\| = \|x\|$ , pour tout  $x \in H$ .

## 1.4 Spectres, résolvantes et images numériques

Pour  $T \in B(H)$ , on introduit les notions suivantes :

- Le *spectre* de  $T$  est l'ensemble

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}.$$

- L'*ensemble résolvant* de  $T$  est le complémentaire dans  $\mathbb{C}$  du spectre de  $T$ , on le note  $\varrho(T)$  et est donnée par

$$\varrho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ est inversible}\}.$$

- L'*application résolvante* de  $T$  est l'application qui à tout  $\lambda \in \varrho(T)$  associe  $(\lambda I - T)^{-1}$ , et pour  $\lambda \in \varrho(T)$  on pose

$$R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}.$$

- Le *rayon spectral* de  $T$  est le scalaire

$$r(T) = \sup \{|\lambda|; \lambda \in \sigma(T)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

- Le *spectre ponctuel* de  $T$  est l'ensemble

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \text{ n'est pas injectif}\}.$$

- Le *spectre approché (ou d'approximation)* de  $T$  est l'ensemble

$$\sigma_a(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n) \subset H : \|x_n\| = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} (T - \lambda I)x_n = 0\}$$

**Définition 7.** Pour  $T \in B(H)$ , dans le cas  $H$  est un espace de Hilbert, l'image numérique de l'opérateur  $T$  est définie par

$$W(T) = \{\langle Tx, x \rangle; x \in H, \|x\| = 1\}$$

## 1.5 Autres définitions et caractérisations des opérateurs sur un espace de Banach

**Définition 8.** Pour  $T \in B(E)$ , dans le cas où  $E$  est un espace de Banach, l'image numérique de l'opérateur  $T$  est définie par

$$V(B(E), T) = \{f(T) : f \in B(E)^*, \|f\| = f(I) = 1\}$$

où  $f$  est une fonctionnelle linéaire continue.

**Définition 9.** Pour  $T \in B(E)$ , dans le cas  $E$  est un espace de Banach, on dit que  $T$  est un opérateur hermitien si et seulement si l'image numérique  $V(B(E), T) \subseteq \mathbb{R}$ .

**Lemme 10.** (Bonsall et J. Duncan [9] )

Si  $E$  est un espace de Banach et  $h \in B(E)$ , les assertions suivantes sont équivalentes

- (i)  $h$  est hermitien.
- (ii)  $\|exp(ith)\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$ .
- (iii)

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \{\|1 + ith\| - 1\} = 0$$

Il est pratique de réduire la condition (ii) sous la forme donnée par le lemme suivant.

**Lemme 11.** Si  $E$  est une algèbre de Banach et  $h \in E$ , les assertions suivantes sont équivalentes

(i)  $\|exp(ith)\| = 1, \forall t \in \mathbb{R}$ .

(ii)  $\|exp(ith)\| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$ .

**Preuve.** (ii)  $\implies$  (i) :

Supposons que  $\|exp(ith)\| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$ , alors  $\|exp(-ith)\| \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$ .

On a d'une part  $1 = \|exp(ith)exp(-ith)\|$ , et d'autre part

$$\begin{aligned} \|exp(ith)exp(-ith)\| &\leq \|exp(ith)\| \|exp(-ith)\| \\ &\leq \|exp(ith)\| \leq 1, \end{aligned}$$

d'où  $\|exp(ith)\| = 1$ .

**Définition 12.** Pour  $T \in B(E)$ , dans le cas  $E$  est un espace de Banach, on dit que  $T$  est un opérateur normal si  $T = T_1 + iT_2$  avec  $T_1$  et  $T_2$  deux hermitiens qui commutent.

## 1.6 Propriétés et techniques opératoires

### 1.6.1 Les commutateurs

Soit  $E$  un espace vectoriel normé complexe de dimension infinie.

**Définition 13.**

(1) Un élément  $X$  de  $B(E)$  est appelé commutateur s'il existe  $A$  et  $B$  de  $B(E)$ , tels que  $X = AB - BA = [A, B]$ .

(2) Le commutant de  $A \in B(E)$  est l'ensemble défini par

$$\{A\}' = \{B \in B(E); AB = BA\}.$$

(3) Le bicommutant de  $A \in B(E)$  est l'ensemble défini par

$$\{A\}'' = \{C \in B(E); CB = BC, \forall B \in \{A\}'\}.$$

**Propriétés :**

- (1)  $\{A\}'' = \{\{A\}'\}'$ .
- (2)  $\{A\}'$  est une sous-algèbre fermée de  $B(E)$ .
- (3)  $\{A\}''$  est une sous-algèbre commutative de  $B(E)$ .
- (4) Tout polynôme de  $A$  appartient à  $\{A\}''$ .

### 1.6.2 Résultat de A. Wintner

**Lemme 14.** (A. Wintner [52] )

*L'opérateur identité n'est pas un commutateur dans l'algèbre  $B(H)$ ; i.e.*

*Pour un opérateur  $A \in B(H)$ , il n'existe aucun opérateur  $X \in B(H)$  qui satisfait  $AX - XA = I$ , où  $I$  est l'opérateur identité.*

**Remarque 15.** Ce lemme peut être reformuler comme suit :  $I \notin R(\delta_A)$  pour tout opérateur  $A \in B(H)$ .

**Preuve.** Supposons l'existence d'un opérateur  $X \in B(H)$  qui satisfait l'équation  $AX - XA = I$ , il est facile de montrer par récurrence que

$$AX^{n+1} - X^{n+1}A = (n+1)X^n, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

A partir de cette égalité, on obtient

$$(n+1)\|X^n\| \leq \|AX^{n+1}\| + \|X^{n+1}A\| \leq 2\|A\|\|X\|\|X^n\|.$$

On montre par récurrence que  $\|X^n\| \neq 0$  pour tout  $n$ ; en effet si  $n = 0$  on a  $X^0 = I \neq 0$ , si  $\|X^n\| \neq 0$ , alors  $\|X^{n+1}\| \neq 0$  grâce à (1.1), donc on obtient

$$n + 1 \leq 2\|A\|\|X\|,$$

ce qui nous donne le résultat.

**Remarque.** Mohamed Hichem Mortad nous a signalé qu'on peut donner une preuve spectrale (Kadison-Ringros : fundamenrals of the Theory of Operators Algerbas : Vol 1).

### 1.6.3 Similarité

**Définition 16.** Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs dans  $B(H)$ , on dit que  $A$  et  $B$  sont similaires si et seulement s'il existe un opérateur inversible  $Q$  tel que  $B = QAQ^{-1}$

**Lemme 17.** Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs dans  $B(H)$ ,  $R_\lambda(A)$  et  $R_\lambda(B)$  leurs applications résolvantes respectivement, alors  $R_\lambda(A)$  et  $R_\lambda(B)$  sont similaires si et seulement si  $A$  et  $B$  les sont.

**Preuve.** Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs similaires dans  $B(H)$ , alors il existe un opérateur inversible  $Q$  tel que  $B = QAQ^{-1}$ . On a

$$\begin{aligned} R_\lambda(B) &= R_\lambda(QAQ^{-1}) \\ &= (QAQ^{-1} - \lambda I)^{-1} = [(QA - \lambda Q)Q^{-1}]^{-1} \\ &= Q(QA - \lambda Q)^{-1} = Q[Q(A - \lambda I)]^{-1} \end{aligned}$$

$$= Q(A - \lambda I)^{-1}Q^{-1} = QR_\lambda(A)Q^{-1}$$

d'où la similarité de  $R_\lambda(A)$  et  $R_\lambda(B)$ .

Pour la réciproque on passe aux inverses dans l'égalité précédente.

#### 1.6.4 Dérivations

**Définition 18.** Soit  $\mathcal{A}$  une algèbre sur un corps commutatif  $K$ . Une dérivation  $\delta$  sur  $\mathcal{A}$  est une application linéaire continue de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  qui satisfait la propriété suivante

$$\delta(XY) = \delta(X)Y + X\delta(Y).$$

pour tous  $X, Y \in \mathcal{A}$ .

**Remarque 19.**

1. Soit  $A \in \mathcal{A}$ , l'application de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  qui associe à tout élément  $X$  de  $\mathcal{A}$  son image

$$\delta_A(X) = AX - XA.$$

est une dérivation sur  $\mathcal{A}$  et est appelée dérivation intérieure induite par  $A$ .

2. L'application de  $\mathcal{A}$  dans  $\mathcal{A}$  qui associe à tout élément  $X$  de  $\mathcal{A}$  son image

$$\delta_{A,B}(X) = AX - XB.$$

où  $B$  est aussi un élément de  $\mathcal{A}$ , cette application est appelée dérivation généralisée induite par  $A$  et  $B$ .

## 1.7 Propriété de Fuglede-Putnam

**Définition 20.** Soient  $A, B \in B(H)$ , on dit que la paire  $(A, B)$  satisfait  $(FP)_{B(H)}$  (propriété de Fuglede-Putnam), si  $AC = CB$  où  $C \in B(H)$  implique  $A^*C = CB^*$ .

**Lemme 21.** Si  $S$  est un opérateur auto-adjoint dans  $B(H)$ , alors les deux opérateurs  $e^{iS}$  et  $e^{-iS}$  sont des opérateurs unitaires.

**Preuve.** Soit  $S$  un opérateur auto-adjoint dans  $B(H)$ , il est alors clair que

$$(e^{iS})^* = e^{-iS^*} = e^{-iS}.$$

Par suite on a

$$(e^{iS})^* e^{iS} = e^{-iS} e^{iS} = I \quad \text{et} \quad e^{iS} (e^{iS})^* = e^{iS} e^{-iS} = I.$$

De même, on obtient  $(e^{-iS})^* e^{-iS} = I$  et  $e^{-iS} (e^{-iS})^* = I$ , donc  $e^{iS}$  et  $e^{-iS}$  sont des opérateurs unitaires.

**Théorème 22** (Version Putnam 1951).

Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs normaux dans  $B(H)$ , si  $AX = XB$  pour  $X \in B(H)$ , alors  $A^*X = XB^*$ .

**Preuve.** Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs normaux dans  $B(H)$ , tels que  $AX = XB$  pour  $X \in B(H)$ , on peut démontrer par récurrence que  $A^n X = X B^n$  pour tout entier naturel  $n$ . D'où

$$e^{i\bar{\lambda}A} X = X e^{i\bar{\lambda}B},$$

pour tout nombre complexe  $\lambda$ , et par conséquent

$$X = e^{i\bar{\lambda}A} X e^{-i\bar{\lambda}B}.$$

On définit la fonction  $f$  par

$$f(\lambda) = e^{i\lambda A^*} X e^{-i\lambda B^*},$$

en combinant cette fonction par la forme de  $X$  donnée par

$$X = e^{i\bar{\lambda}A} X e^{-i\bar{\lambda}B},$$

on obtient

$$f(\lambda) = e^{i\lambda A^*} e^{i\bar{\lambda}A} X e^{-i\bar{\lambda}B} e^{-i\lambda B^*},$$

donc par la normalité de  $A$  et  $B$  on peut écrire

$$f(\lambda) = e^{i(\lambda A^* + \bar{\lambda}A)} X e^{-i(\bar{\lambda}B + \lambda B^*)}.$$

Comme  $\lambda A^* + \bar{\lambda}A$  et  $\bar{\lambda}B + \lambda B^*$  sont auto-adjoints, donc d'après le lemme précédent  $e^{i(\lambda A^* + \bar{\lambda}A)}$  et  $e^{-i(\bar{\lambda}B + \lambda B^*)}$  sont unitaires.

La fonction  $f$  est analytique et bornée. Le théorème de Liouville nous assure alors que  $f$  est constante.

On peut donc prendre  $f(\lambda) = f(0) = X$ , donc  $e^{i\lambda A^*} X e^{-i\lambda B^*} = X$ , d'où  $e^{i\lambda A^*} X = X e^{i\lambda B^*}$ , et par conséquent  $A^* X = X B^*$ .

**Remarque 23.** La preuve ci dessus a été donnée par Rosenblum pour l'espace de Hilbert mais on peut remarquer que cette méthode fonctionne encore pour un espace de Banach grâce au lemme (10) et au fait qu'un opérateur normal commute avec son adjoint.

**Remarque 24.** B. Fuglede avait démontré en 1950, que si un opérateur  $X$  commute avec un opérateur normal  $A$  dans  $B(H)$ , alors il commute aussi avec son adjoint.

C. R. Putnam en 1951, avait pu donner une première généralisation de ce résultat qui est le théorème précédent, mais on remarque ici que les deux résultats sont équivalents.

Le sens “Putnam”  $\implies$  “Fuglede” est évident, il suffit de prendre  $B = A$ .

Berberian dans son article (Note on a theorem of Fuglede and Putnam, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), 175-182) a démontré l’autre sens (“Fuglede”  $\implies$  “Putnam”).

Supposons qu’on a  $AX = XA \implies A^*X = XA^*$ , pour  $A$  normal, et soit  $B$  un opérateur normal dans  $B(H)$  tel que  $AX = XB$  pour tout  $X \in B(H)$ .

Si on pose

$$P = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que  $P$  est normal.

Si on calcule  $PQ - QP$  on trouve

$$\begin{aligned} PQ - QP &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & AX \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & XB \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AX - XB \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

car  $AX - XB = 0$ , donc  $PQ = QP$ .

Calculons maintenant  $P^*Q - QP^*$ ,

$$P^*Q - QP^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & B^* \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & A^*X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & XB^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A^*X - XB^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mais  $P$  est normal, alors d'après Fuglede  $P^*Q - QP^* = 0$ , donc

$$A^*X - XB^* = 0,$$

d'où  $A^*X = XB^*$ .

## 1.8 Théorème de M. Rosenblum

**Lemme 25.** [20] *Soit  $\mathcal{B}$  une algèbre de Banach complexe commutative unifière. Si  $A \in \mathcal{B}$ , le spectre de  $A$  relativement à  $\mathcal{B}$  est donné par*

$$\sigma_{\mathcal{B}}(A) = \{\phi(A); \phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{homomorphisme continu}\}.$$

**Lemme 26.** *Soit  $\mathcal{B}$  une algèbre de Banach complexe unifière,  $A \in \mathcal{B}$ . Si  $\mathcal{A}$  est une sous algèbre commutative maximale de  $\mathcal{B}$  qui contient  $A$ , et si on dénote par  $\sigma_{\mathcal{B}}(A)$  et  $\sigma_{\mathcal{A}}(A)$  les spectres de  $A$  relativement à  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{A}$  respectivement, alors*

$$\sigma_{\mathcal{B}}(A) = \sigma_{\mathcal{A}}(A).$$

**Preuve.** Soit  $\mathcal{B}$  une algèbre de Banach complexe unifière, et  $A \in \mathcal{B}$ , et soit  $\mathcal{A}$  une sous algèbre commutative maximale de  $\mathcal{B}$  qui contient  $A$ .

Il est clair que pour un nombre complexe  $\lambda$ , si  $A - \lambda I$  est inversible dans  $\mathcal{A}$ , il est aussi inversible dans  $\mathcal{B}$ , d'où on peut conclure le premier sens d'inclusion ( $\sigma_{\mathcal{B}}(A) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(A)$ ).

Pour démontrer l'autre sens, on suppose que  $(A - \lambda I)$  est inversible dans  $\mathcal{B}$

ie. il existe un  $Y \in \mathcal{B}$  tel que

$$(A - \lambda I)Y = Y(A - \lambda I) = I,$$

Pour tout  $Z \in \mathcal{A}$ , on a

$$(A - \lambda I)Z = Z(A - \lambda I),$$

car  $ZA = AZ$ , donc on peut écrire

$$Y(A - \lambda I)ZY = YZ(A - \lambda I)Y$$

mais d'après notre hypothèse

$$(A - \lambda I)Y = Y(A - \lambda I) = I,$$

donc  $ZY = YZ$  ( $Y$  commute avec tous les éléments de  $\mathcal{A}$ ).

Et comme  $\mathcal{A}$  est maximale, alors  $Y \in \mathcal{A}$ , donc  $\sigma_{\mathcal{A}}(A) = \sigma_{\mathcal{B}}(A)$ . Les deux inclusions nous donnent l'égalité désirée.

**Théorème 27** (Théorème de l'application spectrale).

*Soit  $\mathcal{B}$  une algèbre de Banach complexe unifère, si  $A \in \mathcal{B}$  et  $p$  est un polynôme, alors*

$$\sigma(p(A)) = \{p(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}$$

*où  $\sigma(p(A))$  et  $\sigma(A)$  désignent les spectres de  $p(A)$  et  $A$  respectivement.*

**Preuve.** Soit  $\mathcal{B}$  une algèbre de Banach complexe avec identité  $I$ , et  $A \in \mathcal{B}$ , et soit  $\mathcal{A}$  une sous algèbre commutative maximale de  $\mathcal{B}$  qui contient  $A$ , alors les deux lemmes précédents nous impliquent

$$\sigma(p(A)) = \sigma_{\mathcal{A}}(p(A)) = \{\phi(p(A)); \phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{homomorphisme continu}\} =$$

$$= \{p(\phi(A)); \phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{homomorphisme continu}\} = \{p(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}.$$

**Lemme 28.** *Si  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs qui commutent dans un espace de Banach  $\mathcal{B}$ , alors on a*

$$\sigma(p(A, B)) \subset p(\sigma(A), \sigma(B)) = \{p(\alpha, \beta); \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\}$$

**Preuve.** Soit  $\mathcal{B}$  une algèbre de Banach complexe avec identité  $I$ , et soit  $\mathcal{A}$  une sous algèbre commutative maximale de  $\mathcal{B}$  qui contient  $A$  et  $B$ , toujours avec les deux lemmes 25 et 26, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma(p(A, B)) &= \{\phi(p(A, B)); \phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{homomorphisme continu}\} = \\ &= \{p(\phi(A), \phi(B)); \phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}, \text{homomorphisme continu}\} = \\ &\subseteq \{p(\sigma(A), \sigma(B))\}. \end{aligned}$$

**Théorème 29.** (Théorème de M. Rosenblum [36]).

*Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs dans  $B(H)$  et  $B(K)$  respectivement, où  $H$  et  $K$  sont deux espaces de Hilbert complexes. Si l'opérateur  $T$  est défini sur  $B(K, H)$  par*

$$T(X) = AX - XB \quad \text{pour tout } X \in B(K, H),$$

*alors*

$$\sigma(T) \subset \sigma(A) - \sigma(B) \quad (= \{\alpha - \beta; \alpha \in \sigma(A), \beta \in \sigma(B)\}).$$

**Preuve.** Soient  $B(H)$  et  $B(K)$  deux espaces des opérateurs linéaires bornés sur deux espaces de Hilbert complexes  $H$  et  $K$  respectivement, tels

que  $A \in B(H)$  et  $B \in B(K)$ , on définit les opérateurs  $L_A$  et  $R_B$  sur  $B(K, H)$  par  $L_A(X) = AX$  et  $R_B(X) = XB$ .

On démontre que  $\sigma(L_A) \subseteq \sigma(A)$  et  $\sigma(R_B) \subseteq \sigma(B)$ . En effet, si on suppose que  $\lambda \notin \sigma(A)$ , alors  $A - \lambda I$  est inversible et on a donc

$$(A - \lambda I)(A - \lambda I)^{-1}X = (A - \lambda I)^{-1}(A - \lambda I)X,$$

pour tout  $X \in B(K, H)$ . Ce qui montre que  $L_A - \lambda I$  est inversible et

$$(L_A - \lambda I)^{-1}X = (A - \lambda I)^{-1}X,$$

pour tout  $X \in B(K, H)$ , donc  $\lambda \notin \sigma(L_A)$ , d'où l'inclusion  $\sigma(L_A) \subseteq \sigma(A)$ .

De même façon on démontre l'autre inclusion  $\sigma(R_B) \subseteq \sigma(B)$ . Si maintenant l'opérateur  $T$  est défini sur  $B(K, H)$  par

$$T(X) = AX - XB$$

pour tout  $X \in B(K, H)$ , alors on a

$$T(X) = L_A(X) - R_B(X)$$

pour tout  $X \in B(K, H)$ , donc  $T = L_A - R_B$ .

On a aussi

$$\forall X \in B(K, H), L_A R_B X = L_A X B = A X B.$$

Et d'autre part

$$R_B L_A X = R_B A X = A X B,$$

d'où la commutation de  $L_A$  et  $R_B$ , donc en appliquant le lemme précédent

on obtient

$$\sigma(T) \subset \sigma(L_A) - \sigma(R_B),$$

mais comme  $\sigma(L_A) \subseteq \sigma(A)$  et  $\sigma(R_B) \subseteq \sigma(B)$ , alors

$$\sigma(T) \subset \sigma(A) - \sigma(B)$$

**Théorème 30.** *Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs dans  $B(H)$  et  $B(K)$  respectivement tels que  $H$  et  $K$  sont deux espaces de Hilbert complexes séparables de dimensions infinies, si les spectres des opérateurs  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors l'équation*

$$AX - XB = Y$$

*admet une solution unique  $X$  pour tout opérateur  $Y$  défini de  $K$  dans  $H$ .*

**Preuve.** Si  $T$  est un opérateur linéaire qui associe à tout  $X$  son image  $T(X) = AX - XB$  ( $T$  est la dérivation généralisée  $\delta_{A,B}$ ), le théorème devient :

Si les spectres des opérateurs  $A$  et  $B$  sont disjoints, alors l'équation  $T(X) = Y$  admet une solution unique  $X$  pour tout opérateur  $Y$  (ie. l'opérateur  $T$  est inversible).

Soient les opérateurs  $L_A$  et  $R_B$  définis par

$$L_A X = AX \quad \text{et} \quad R_B X = XB$$

alors  $\forall X \in B(K, H) : T(X) = L_A X - R_B X$ , d'où  $T = L_A - R_B$ .

D'après le théorème de Rosenblum on a

$$\sigma(T) \subset \sigma(A) - \sigma(B).$$

Alors si  $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ , on a  $0 \notin \sigma(A) - \sigma(B)$  et par conséquent  $0 \notin \sigma(T)$ , par suite  $T$  est inversible et notre équation admet une solution unique  $X$  pour tout opérateur  $Y$ .

## 1.9 Propriétés des opérateurs de rang un

On considère l'algèbre des opérateurs linéaires bornés  $B(H)$ , où  $H$  est un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie.

**Définition 31.** *Un opérateur  $T$  dans  $B(H)$  est dit de rang fini  $n$  si l'image de  $T$  est de dimension finie égale à  $n$ .*

**Lemme 32.** *Un opérateur  $T$  dans  $B(H)$  de rang un s'écrit sous la forme d'un produit tensoriel non unique  $T = a \otimes b$  pour  $a$  et  $b$  vecteurs non nuls dans  $H$ , et inversement tout opérateur  $T$  de la forme d'un produit tensoriel  $T = a \otimes b$  est de rang un.*

**Preuve.** Soit  $T$  un opérateur dans  $B(H)$  de rang un, on a par définition  $\dim R(T) = 1$ , ce qui implique que pour tout  $y$  dans  $R(T)$ , il existe un vecteur  $u$  dans  $H$  tel que  $y = \lambda u$  où  $\lambda$  est un nombre complexe. Donc

$$\forall x \in H; \exists \lambda_x \in \mathbb{C} : Tx = \lambda_x u$$

L'application qui à tout  $x$  de  $H$  associe  $\lambda_x$  dans  $\mathbb{C}$  est une forme linéaire continue sur  $H$ .

D'après le théorème de décomposition de Riesz on a

$$\exists v \in H : \lambda_x = \langle x, v \rangle; x \in H;$$

on a donc

$$Tx = \lambda_x u = \langle x, v \rangle u = (u \otimes v)x, x \in H;$$

D'où  $T = u \otimes v$ .

La réciproque est évidente.

Dans le théorème suivant, on donne quelques propriétés élémentaires et utiles concernant les opérateurs de rang un.

**Théorème 33.** *Soient  $x, y, u$  et  $v$  des vecteurs de  $H$ , et  $T \in B(H)$ , alors*

- 1)  $T \circ (x \otimes y) = (Tx) \otimes y$ .
- 2)  $(x \otimes y) \circ T = x \otimes T^*y$ .
- 3)  $(x \otimes y)^* = y \otimes x$ .
- 4)  $\ker(x \otimes y) = (\mathbb{C}y)^\perp$ .
- 5)  $R(x \otimes y) = (\mathbb{C}x)$ .
- 6)  $(x \otimes y) \circ (u \otimes v) = \langle u, y \rangle (x \otimes v)$ .
- 7) Soient  $u$  et  $v$  des vecteurs non nuls, alors  $(x \otimes y) = (u \otimes v)$  si et seulement s'il existe

$$(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^{*2} : x = \alpha u, y = \beta v \text{ et } \alpha \bar{\beta} = 1.$$

**Preuve.** On démontre seulement l'implication dans le sens direct de l'assertion (7) car la réciproque et les six premières assertions sont triviales.

La condition  $(x \otimes y) = (u \otimes v)$  implique  $\mathbb{C}x = \mathbb{C}u$  d'après (5), donc  $\exists \alpha \in \mathbb{C} : x = \alpha u$ .

Et d'après (3) on a  $(x \otimes y) = (u \otimes v) \implies (y \otimes x) = (v \otimes u)$ , donc  $\exists \beta \in \mathbb{C} :$

$y = \beta v$ , donc

$$\alpha\bar{\beta}u \otimes v = (\alpha u) \otimes (\beta v) = (x \otimes y) = (u \otimes v)$$

Comme  $u \otimes v \neq 0$  on a bien  $\alpha\bar{\beta} = 1$ .

## Chapitre 2

# L'équation $AX - XB = C$ dans l'algèbre $B(H)$

La recherche d'une solution de l'équation de Sylvester  $AX - XB = Y$ , des approximations par les commutateurs  $AX - XA$  ou par les commutateurs généralisés  $AX - XB$ , a attiré beaucoup d'attention, parce qu'elle intervient dans la recherche des solutions de plusieurs problèmes de la physique et particulièrement dans la théorie de la mécanique quantique.

Le principe de Heisenberg par exemple peut être formulé mathématiquement de la manière suivante : il existe une paire  $(A, X)$  de transformations linéaires non bornés et un scalaire non nul  $\alpha$  pour lequel  $AX - XA = \alpha I$ . Cette dernière équation n'admet pas de solutions dans  $B(H)$  [Voir par exemple (49)]. Ceci amène à la question suivante : à quelle distance de l'identité se trouve  $AX - XA$ ? Même question pour  $AX - XB$ ?

Pour quels  $Y$  dans  $B(H)$ , existe-t-il une solution de l'équation  $AX - XB = Y$ , quelle est sa forme? Peut-on estimer la norme de  $X$  en fonction de la norme de  $Y$  et sous quelles conditions?

Dans ce chapitre on étudie la solvabilité d'une famille d'équations d'opérateurs dans l'algèbre  $B(H)$  des opérateurs linéaires bornés sur l'espace de Hilbert complexe séparable et de dimension infinie  $H$ . On considère l'équation

$$AX - XB = C,$$

où  $A, B$  et  $C$  sont dans  $B(H)$ .

## 2.1 Résultats et définitions utiles

Rappelons que si  $M$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H$  et  $T \in B(H)$ , alors  $T$  s'écrit suivant la décomposition  $H = M \oplus M^\perp$  comme suit

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

où  $A \in B(M)$ ,  $B \in B(M^\perp, M)$ ,  $C \in B(M, M^\perp)$  et  $D \in B(M^\perp)$ .

Rappelons que  $B(E, F)$  désigne l'espace des opérateurs bornés de  $E$  dans  $F$ .

Concernant les matrices d'opérateurs, nous rappelons les propriétés basiques suivantes :

**Proposition 34.** *Soit  $\mathcal{A}$  un opérateur linéaire borné défini sur  $H \oplus H$  par*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \text{ alors son adjoint } \mathcal{A}^* \text{ est donné par } \mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} Q^* & S^* \\ R^* & T^* \end{pmatrix}$$

**Lemme 35.** ([40], lemme 1)

*Si la matrice d'opérateurs  $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$  définie sur  $H \oplus H$  est inversible, alors l'opérateur  $S^*S + Q^*Q$  est inversible sur  $H$ .*

**Preuve.** Soit  $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$  une matrice inversible sur  $H \oplus H$ .

Or  $S^*S + Q^*Q$  est un opérateur positif (somme de deux opérateurs positifs),

on a donc

$$\sigma(S^*S + Q^*Q) = \sigma_a(S^*S + Q^*Q),$$

où  $\sigma$  et  $\sigma_a$  représentent respectivement le spectre et le spectre approché.

Si on suppose  $S^*S + Q^*Q$  est non inversible, alors il existe une suite  $(x_n)_n \subset$

$H$  telle que

$$\|x_n\| = 1, \forall n \geq 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \|(S^*S + Q^*Q)x_n\| = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0) \right\|^2 = \\ & = \left\langle \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0), \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0) \right\rangle \\ & = \left\langle \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0), (x_n \oplus 0) \right\rangle \\ & = \left\langle \begin{pmatrix} Q^* & S^* \\ R^* & T^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0), (x_n \oplus 0) \right\rangle \\ & = \left\langle \begin{pmatrix} Q^*Q + S^*S & Q^*R + S^*T \\ R^*Q + T^*S & R^*R + T^*T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0), (x_n \oplus 0) \right\rangle \\ & = \left\langle \begin{pmatrix} (Q^*Q + S^*S)x_n \\ (R^*Q + T^*S)x_n \end{pmatrix}, (x_n \oplus 0) \right\rangle \\ & = \langle (Q^*Q + S^*S)x_n, x_n \rangle \end{aligned}$$

Mais comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle (S^*S + Q^*Q)x_n, x_n \rangle = 0,$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} (x_n \oplus 0) \right\|^2 = 0.$$

Ce qui contredit nos hypothèses et la preuve est achevée.

## 2.2 Solvabilité de l'équation $AX - XB = C$

Dans le théorème suivant on donne la forme de la solution dans le cas opératoire de l'équation de Sylvester après la démonstration de la convergence de la série  $\sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} Y B^n$ .

**Théorème 36.** (Bhatia [6]). *Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs dans  $B(H)$ , tels que*

$$\sigma(B) \subset \{z, |z| < \rho\} \quad \text{et} \quad \sigma(A) \subset \{z, |z| \geq \rho\}$$

*où  $\rho$  est un nombre réel strictement positif. Alors pour tout opérateur  $Y$  dans  $B(H)$  une solution de l'équation  $AX - XB = Y$  est donnée par*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} Y B^n.$$

**Preuve.** On démontre que la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} Y B^n \quad \text{est convergente,}$$

puis on vérifie que la solution  $X$  donnée par l'expression

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} Y B^n$$

est une solution de notre équation  $AX - XB = Y$ .

Soit le nombre réel strictement positif  $\rho$  qui vérifie

$\sigma(B) \subset \{z, |z| < \rho\}$  et  $\sigma(A) \subset \{z, |z| \geq \rho\}$ , alors

$$\sigma(A^{-1}) \subset \{z, |z| \leq \rho^{-1}\}.$$

Donc, d'après la formule du rayon spectral  $\exists N > 0 : \forall n \geq N$  tel que

$$\|B^n\| \leq \rho_1^n \quad \text{et} \quad \|A^{-n}\| \leq \rho^{-n} \quad \text{avec} \quad \rho_1 < \rho.$$

Alors, pour  $n \geq N$ , on a

$$\begin{aligned} \|A^{-n-1}YB^n\| &\leq \|A^{-n}\| \|A^{-1}Y\| \|B^n\| \leq \\ &\leq \rho^{-n} \|A^{-1}Y\| \rho_1^n = \|A^{-1}Y\| (\rho_1 \rho^{-1})^n. \end{aligned}$$

D'où la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1}YB^n.$$

Vérifions maintenant que

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1}YB^n$$

est une solution de notre équation, on a

$$\begin{aligned} AX - XB &= A \left( \sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1}YB^n \right) - \left( \sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1}YB^n \right) B \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} A^{-n}YB^n - \sum_{n=0}^{\infty} A^{-n-1}YB^{n+1} \\ &= Y + \sum_{n=1}^{\infty} A^{-n}YB^n - \sum_{n=1}^{\infty} A^{-n}YB^n = Y. \end{aligned}$$

Une autre forme de la solution de l'équation  $AX - XB = Y$  est obtenue par la considération suivante :

**Théorème 37.** (Bhatia[6]) *Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs dans  $B(H)$ , leurs spectres  $\sigma(A)$  contenu dans le demi-plan ouvert droit, et  $\sigma(B)$  contenu dans le demi-plan ouvert gauche, alors une solution de l'équation  $AX - XB = Y$  est donnée par*

$$X = \int_0^{\infty} e^{-tA} Y e^{tB} dt$$

**Preuve.** L'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-tA} Y e^{tB} dt$$

est convergente [Voir Heinz (24)].

Vérifions que  $X$  est une solution de l'équation

$$AX - XB = Y.$$

On a

$$\begin{aligned} AX - XB &= A \int_0^{\infty} e^{-tA} Y e^{tB} dt - \left( \int_0^{\infty} e^{-tA} Y e^{tB} dt \right) B \\ &= \int_0^{\infty} (A e^{-tA} Y e^{tB} - e^{-tA} Y e^{tB} B) dt \\ &= \int_0^{\infty} (-e^{-tA} Y e^{tB})' dt \\ &= [-e^{-tA} Y e^{tB}]_0^{\infty} = Y, \end{aligned}$$

donc  $X$  est bien une solution de l'équation  $AX - XB = Y$ .

**Théorème 38.** (Bhatia[6]) *Soient  $A$  et  $B$  deux opérateurs dans  $B(H)$ , leurs spectres  $\sigma(A)$  et  $\sigma(B)$  sont disjoints. Si  $\Gamma$  est un contour fermé dans le plan complexe d'indice un autour de  $\sigma(A)$  et zéro autour de  $\sigma(B)$ , on peut exprimer la solution de l'équation  $AX - XB = Y$  par*

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_{\zeta}(A) Y R_{\zeta}(B) d\zeta$$

**Preuve.** Pour tout nombre complexe  $\zeta$  on peut écrire

$$X(\zeta I - B) - (\zeta I - A)X = Y.$$

Si  $(\zeta I - A)$  et  $(\zeta I - B)$  sont inversibles, on compose par  $(\zeta I - A)^{-1}$  à gauche et par  $(\zeta I - B)^{-1}$  à droite, on obtient

$$R_\zeta(A)X - XR_\zeta(B) = R_\zeta(A)YR_\zeta(B).$$

En intégrant les deux cotés de cette dernière égalité sur le contour  $\Gamma$  et prenant en considération le fait que

$$\int_\Gamma R_\zeta(A)d\zeta = 2\pi i \quad \text{et} \quad \int_\Gamma R_\zeta(B)d\zeta = 0$$

on obtient

$$X = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R_\zeta(A)YR_\zeta(B)d\zeta.$$

Si les opérateurs  $A$  et  $B$  sont normaux, auto-adjoints ou unitaires, on peut avoir des formes spéciales des solutions de notre équation  $AX - XB = Y$  dans chaque cas.

Si  $A$  et  $B$  sont tous les deux auto-adjoints, alors  $iA$  et  $iB$  sont anti-auto-adjoints, donc leurs spectres se trouvent sur la droite imaginaire. Si on veut imiter cette solution, on doit essayer avec l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-itA}Y e^{itB} dt,$$

mais cette intégrale n'est pas convergente en général, c'est pour cette raison on essaye d'insérer un facteur de convergence ( une fonction  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ). Si

on pose

$$X = \int_0^{\infty} e^{-itA} Y e^{itB} f(t) dt,$$

c'est un opérateur bien défini pour tout  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , car on sait que  $e^{-itA}$  et  $e^{itB}$  sont unitaires. Comment choisir  $f$  pour que  $X$  soit une solution ?

**Théorème 39.** [6] *Si l'espace  $H$  est de dimension finie,  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs auto-adjoints dans  $B(H)$  tels que leurs spectres  $\sigma(A)$  et  $\sigma(B)$  sont disjoints. Si  $f$  est une fonction dans  $L^1(\mathbb{R})$  telle que  $\hat{f}(s) = \frac{1}{s}$  ( $\hat{f}$  est la transformée de Fourier de  $f$ ) pour  $s \in \sigma(A) - \sigma(B)$ , alors la solution de l'équation  $AX - XB = Y$  peut être écrite sous la forme*

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itA} Y e^{itB} f(t) dt,$$

**Preuve.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux valeurs propres de  $A$  et  $B$  avec vecteurs propres associés  $u$  et  $v$  respectivement. En utilisant le fait que  $e^{itA}$  est unitaire et son adjoint est  $e^{-itA}$  et  $A$  est auto-adjoint, on obtient

$$\langle u, A e^{-itA} Y e^{itB} v \rangle = \langle e^{itA} A u, Y e^{itB} v \rangle = e^{-it(\beta-\alpha)} \alpha \langle u, Y v \rangle$$

Avec une considération similaire on obtient

$$\langle u, e^{-itA} Y e^{itB} B v \rangle = e^{-it(\beta-\alpha)} \beta \langle u, Y v \rangle$$

Si

$$X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itA} Y e^{itB} f(t) dt,$$

alors

$$\langle u, (AX - XB)v \rangle = (\alpha - \beta) \langle u, Y v \rangle \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(\alpha-\beta)} f(t) dt,$$

$$= (\alpha - \beta) \langle u, Yv \rangle \hat{f}(\alpha - \beta) = \langle u, Yv \rangle$$

d'où  $AX - XB = Y$

On a supposé - dans les théorèmes que l'on a vu auparavant - que les spectres des opérateurs sont disjoints de telle façon qu'on peut les isoler par une droite ou un plan, dans la suite on ne va pas exiger cette condition.

**Théorème 40.** *Si l'espace  $H$  est un espace de Hilbert de dimension infinie,  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs dans  $B(H)$  tel que  $A$  est inversible, on suppose qu'il existe une suite  $(a_n)$  de réels strictement positifs, si pour tout  $x$  de  $H$  les séries de termes généraux  $a_n \|A^{*(-n)}x\|^2$  et  $a_n^{-1} \|B^n x\|^2$  sont convergentes, alors pour tout  $Y$  dans  $B(H)$  la série  $\sum_0^\infty A^{-(n+1)} Y B^n$  est ultra faiblement convergente dans  $B(H)$  et sa limite  $X$  est une solution de l'équation de Sylvester  $AX - XB = Y$ .*

**Preuve.** La preuve est analogue à la preuve de la proposition 1.4 dans [[10] Cassier, J.O.T 2005].

Soient  $x, y \in H$ ,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \sum_{m_1}^{m_2} A^{-n-1} Y B^n y, x \right\rangle \right| &\leq \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n \langle A^{(-n-1)} A^{*(-n-1)} x, x \rangle} \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n^{-1} \langle B^{*n} Y^* Y B^n y, y \rangle} \\ &\leq \|Y\| \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n \langle A^{(-n-1)} A^{*(-n-1)} x, x \rangle} \sqrt{\sum_{m_1}^{m_2} a_n^{-1} \langle B^{*n} B^n y, y \rangle} \end{aligned}$$

On voit donc que la série  $\sum_{k=0}^{+\infty} \langle A^{-(k+1)} Y B^k x | y \rangle$  est de Cauchy, donc convergente, ce qui permet de définir  $X$  en posant

$$\langle Xx | y \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle A^{-(k+1)} Y B^k x | y \rangle.$$

De plus, avec le théorème de Banach Steinhauss et les hypothèses, on voit que

$$\text{Sup} \left\| \sum_{k=0}^n A^{-(k+1)} Y B^k \right\| < +\infty.$$

Ceci entraîne la convergence de  $\sum_{k=0}^n A^{-(k+1)} Y B^k$  pour la topologie “\* faible” de  $B(H)$ , c'est à dire la topologie ultra faible.

On vérifie ensuite que  $X$  est bien une solution de l'équation de Sylvester  $AX - XB = Y$ .

Sous les mêmes hypothèses du théorème précédent on obtient ce résultat

**Corollaire 41.** *Si l'opérateur  $Y$  est de rang un (ie.  $Y = u \otimes v$ ) la solution de l'équation de Sylvester sera*

$$X = \sum_{n=0}^{\infty} (A)^{-n-1} u \otimes (B^n)^* v$$

**Remarque.** On obtient le théorème de Bhatia [6] comme corollaire. En effet si

$$\sigma(B) \subset \{z, |z| < \rho\} \quad \text{et} \quad \sigma(A) \subset \{z, |z| \geq \rho\}$$

avec  $\rho > 0$ . Alors les séries  $\sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} A^{-k} A^{*(-k)}$  et  $\sum_{k=0}^{\infty} a^{-2k} B^{*(k)} B^k$  sont même convergentes pour la norme de  $B(H)$ , pour  $r(B) < a < \rho$ . D'où la convergence pour les hypothèses du théorème 40 avec  $a_n = a^{2n}$

**Théorème 42.** *Si l'espace  $H$  est un espace de Hilbert de dimension infinie,  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs dans  $B(H)$ , on suppose qu'il existe une fonction mesurable strictement positive sur  $\mathbb{R}_+$  telle que les intégrales  $\int_0^\infty \|e^{-tA}x\|^2 f(t)dt$  et  $\int_0^\infty \|e^{tB}x\|^2 (f(t))^{-1}dt$  sont convergentes pour tout  $x$  de  $H$ , alors pour tout  $Y$  de  $B(H)$ , l'opérateur  $X = \int_0^\infty e^{-tA}Y e^{tB}dt$  est bien défini et est solution de l'équation de Sylvester  $AX - XB = Y$*

**Preuve.** D'après ([10] Cassier, J.O.T 2005) l'intégrale d'opérateur  $X = \int_0^\infty e^{-tA}Y e^{tB}dt$  est bien définie au sens de Bochner et on a

$$\begin{aligned} \|X\| &\leq \sqrt{\left\| \int_0^\infty f(t)e^{-tA}e^{-tA^*} dt \right\|} \sqrt{\left\| \int_0^\infty (f(t))^{-1}e^{tB^*}Y^*Y e^{tB} dt \right\|} \\ &\leq \|Y\| \sqrt{\left\| \int_0^\infty f(t)e^{-tA}e^{-tA^*} dt \right\|} \sqrt{\left\| \int_0^\infty (f(t))^{-1}e^{tB^*}e^{tB} dt \right\|} \end{aligned}$$

Comme les intégrales  $\int_0^\infty f(t)\|e^{-tA}x\|^2 dt$  et  $\int_0^\infty (f(t))^{-1}\|e^{tB}x\|^2 dt$  sont convergentes pour tout  $x$  de  $H$ , alors l'opérateur  $\int_0^\infty e^{-tA}Y e^{tB}dt$  est bien défini pour tout  $x$  de  $H$ , on vérifie que  $X$  donnée par cet opérateur est une solution de l'équation  $AX - XB = Y$ .

**Remarque.** Ces deux derniers théorèmes, nous donnent aussi une estimation a priori de la solution de l'équation  $AX - XB = Y$  en fonction de  $Y$ .

**Théorème 43.** [35] *Si  $A$  est un opérateur normal dans  $B(H)$ ,  $B$  et  $C$  sont deux opérateurs dans  $B(H)$ . Si la paire  $(B, A)$  satisfait à la propriété*

$(FP)_{B(H)}$ , alors l'équation

$$AX - XB = C$$

admet une solution  $X$  dans  $B(H)$  si et seulement si

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

sont deux opérateurs similaires sur  $H \oplus H$ .

**Preuve.** Si l'équation  $AX - XB = C$  admet une solution  $X$ , alors

$$\begin{pmatrix} I & -X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AX - XB \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Par conséquent  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$  sont similaires.

Supposons maintenant que les opérateurs  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$  sont similaires, alors il existe un opérateur inversible  $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$  dans  $B(H \oplus H)$

tel que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{pmatrix} AQ & AR \\ BS & BT \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QA & QC + RB \\ SA & SC + TB \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous donne après identification terme par terme

$$QA = AQ, AR - RB = QC,$$

$$BS = SA \text{ et } BT - TB = SC.$$

En appliquant la propriété de Fuglede-Putnam  $(FP)_{B(H)}$  sur les égalités

$QA = AQ$  et  $BS = SA$ , on obtient  $B^*S = SA^*$  et  $AQ^* = Q^*A$ . D'une

part  $A$  commute avec  $Q$  et  $Q^*$  donc avec  $Q^*Q$ . Et d'autre part, en passant à l'adjoint dans  $B^*S = SA^*$  on obtient  $S^*B = AS^*$ . Revenons à l'égalité  $BS = SA$ , composons à gauche les deux cotés par  $S^*$ , il vient  $S^*BS = S^*SA$ , mais comme  $S^*B = AS^*$ , on obtient  $AS^*S = S^*SA$ , d'où  $A$  commute aussi avec  $S^*S$ , donc avec la somme  $S^*S + Q^*Q$ . L'inverse  $(S^*S + Q^*Q)^{-1}$  commute aussi avec  $A$ . De plus, on obtient

$$\begin{aligned} (S^*S + Q^*Q)C &= S^*SC + Q^*QC \\ &= S^*(BT - TB) + Q^*(AR - RB) \\ &= Q^*(AR - RB) + S^*(BT - TB) \\ &= Q^*AR - Q^*RB + S^*BT - S^*TB. \end{aligned}$$

Comme  $Q^*A = AQ^*$  et  $S^*B = AS^*$ , il vient

$$\begin{aligned} (S^*S + Q^*Q)C &= AQ^*R - Q^*RB + AS^*T - S^*TB, \\ &= A(Q^*R + S^*T) - (Q^*R + S^*T)B. \end{aligned}$$

D'après lemme 35, l'opérateur  $S^*S + Q^*Q$  est inversible, son inverse commute avec  $A$ . Par conséquent

$$C = A(S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T) - (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T)B,$$

d'où la solution

$$X = (S^*S + Q^*Q)^{-1}(Q^*R + S^*T).$$

**Théorème 44.** Soit  $\Gamma_j$  l'ensemble des couples d'opérateurs  $(A, B)$  satisfaisant la propriété  $(FP)_{B(H)}$ , alors les assertions suivantes sont vérifiées :

(i)  $(R, S) \in \Gamma_j$  si  $R$  et  $S$  sont conjugués à  $A$  et  $B$  via deux opérateurs unitaires.

(ii)  $(B^*, A^*) \in \Gamma_j$ .

(iii)  $(A^{-1}, B^{-1}) \in \Gamma_j$  si  $A$  et  $B$  sont inversibles.

(iv)  $(\lambda A, \lambda B) \in \Gamma_j$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$

(v)  $(\lambda I + A, \lambda I + B) \in \Gamma_j$  pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$

**Preuve.**

i) Supposons que  $R$  et  $S$  sont conjugués à  $A$  et  $B$  via deux opérateurs unitaires, respectivement. Alors ils existent deux opérateurs unitaires  $U$  et  $V$  tels que  $R = UAU^*$  et  $S = VB^*V^*$ . Si  $RX = XS$ , pour  $X \in B(H)$ , alors

$$AU^*XV = U^*XVB.$$

Or  $(A, B) \in \Gamma_j$ , il résulte que  $U^*XV \in B(H)$ . Par conséquent

$$A^*U^*XV = U^*XVB^*.$$

De ce résultat nous déduisons

$$UA^*U^*X = XVB^*V^*.$$

D'où  $R^*X = XS^*$ , qui nous donne  $(R, S) \in \Gamma_j$ .

(ii) Si  $B^*X = XA^*$  pour tout  $X \in B(H)$ , alors  $AX^* = X^*B$ , alors  $A^*X^* = X^*B^*$ , d'où  $XA = BX$ .

(iii) Si  $A^{-1}X = XB^{-1}$  pour  $X \in B(H)$ , alors

$$A(A^{-1}X)B = A(XB^{-1})B,$$

d'où  $AX = XB$ , ainsi  $A^*X = XB^*$ . Par conséquent

$$(A^*)^{-1}A^*X(B^*)^{-1} = (A^*)^{-1}XB^*(B^*)^{-1},$$

d'où  $(A^*)^{-1}X = X(B^*)^{-1}$ .

(iv) et (v) sont évidentes.

**Corollaire 45.** *Soit  $A$  et  $B$  deux opérateurs dans  $B(H)$ . Si la paire  $(B, A)$  satisfait la propriété  $(FP)_{B(H)}$ , alors l'équation  $AX - XB = C$  admet une solution  $X$  dans  $B(H)$  si et seulement si  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$  sont deux opérateurs similaires sur  $H \oplus H$  dans l'un des cas suivants :*

- (i)  $A$  dominant.
- (ii)  $A$   $p$ -hyponormal.
- (iii)  $A$   $k$ -quasihyponormal.

**Remarque.** Les résultats obtenus dans ce corollaire dus au fait que le théorème de Fuglede-Putnam est valable aussi pour ces classes d'opérateurs.

## 2.3 Applications et remarques

Le théorème et le corollaire précédents nous permettent de résoudre des larges familles d'équations, en utilisant :

1. Ou bien les propriétés (classes) des opérateurs qui engendrent notre équation.
2. Ou bien les adjoints ou les inverses des opérateurs ou des combinaisons pour définir et résoudre d'autres équations.

Comme on peut aussi, considérer les opérateurs  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans des cas

particuliers intéressants ( Par exemple : opérateurs de rang fini ou de rang un ), ce qui nous mène à trouver les solutions convenables pour plusieurs problèmes dans la pratique.

Dans cette dernière paragraphe, on va donner quelques résultats comme applications fines et exemples dans des cas particuliers de la solution de l'équation de Sylvester  $AX - XB = C$ .

### 2.3.1 Équation $AX - XB = C$ , $C$ de rang un.

Les résultats de cette partie de ce chapitre sont issus d'une collaboration avec le Professeur Gilles Cassier et seront inclus et développés dans (cf.[12]).

**Théorème 46.** *Soient*

$$A = \bigoplus_{\alpha \in \sigma_p(A)} \alpha P_\alpha \text{ et } B = \bigoplus_{\beta \in \sigma_p(B)} \beta Q_\beta$$

les décompositions spectrales de deux opérateurs normaux diagonaux  $A$  et  $B$  qui agissent sur un espace de Hilbert  $H$ , et  $(a, b)$  un couple de vecteurs de  $H$ . Alors les opérateurs  $T_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$  et  $T_2 = \begin{pmatrix} A & a \otimes b \\ 0 & B \end{pmatrix}$  sont similaires si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- (i)  $P_\lambda a = 0$  ou  $Q_\lambda b = 0$  si  $\lambda \in \sigma(A) \cap \sigma(B)$ .
- (ii) Si on note  $\Delta_1 = \{\alpha \in \sigma_p(A) : P_\alpha(a) \neq 0\}$  et  $\Delta_2 = \{\beta \in \sigma_p(B) : Q_\beta(b) \neq 0\}$  ( $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$  d'après (i)), alors la matrice

$$M = \left[ \frac{\|P_\alpha a\| \|Q_\beta b\|}{\alpha - \beta} \right]_{(\alpha, \beta) \in \Delta_1 \times \Delta_2} \in B(l^2(\Delta_2), l^2(\Delta_1)).$$

De plus, les opérateurs  $T_1$  et  $T_2$  sont similaires, avec un opérateur de passage de la forme

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$$

pour lequel l'opérateur  $Q^*R + S^*T$  est de Hilbert-Schmidt, si et seulement si la condition (i) et la condition suivante (iii) sont vérifiées.

(iii)

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in \Delta_1 \times \Delta_2} \frac{\|P_\alpha a\|^2 \|Q_\beta b\|^2}{|\alpha - \beta|^2} < +\infty$$

**Preuve.**

Considérons l'indexation suivante :  $\sigma_p(A) \cap \sigma_p(B) = \{\lambda_k; k \in \Lambda_0\}$ ,

$\sigma_p(A) \setminus \sigma_p(B) = \{\alpha_k; k \in \Lambda_1\}$  et  $\sigma_p(B) \setminus \sigma_p(A) = \{\beta_k; k \in \Lambda_2\}$  où  $\Lambda_0, \Lambda_1$  et

$\Lambda_2$  sont trois parties deux à deux disjointes de  $\mathbb{N}^*$ .

Supposons que  $T_1$  et  $T_2$  sont similaires, d'après le théorème 43 l'équation  $AX - XB = a \otimes b$  admet une solution dans  $B(H)$ . On introduit alors

les opérateurs unitaires  $U_\theta = (\bigoplus_{k \in \Lambda_0} e^{ik\theta} P_{\lambda_k}) \oplus (\bigoplus_{k \in \Lambda_1} e^{ik\theta} P_{\alpha_k})$  et  $V_\theta = (\bigoplus_{\ell \in \Lambda_0} e^{i\ell\theta} Q_{\lambda_\ell}) \oplus (\bigoplus_{\ell \in \Lambda_2} e^{i\ell\theta} Q_{\beta_\ell})$ , pour chaque  $\theta \in [0, 2\pi]$ .

On considère alors l'opérateur  $\tilde{X}$  défini par l'intégrale (au sens de Bochner) suivante

$$\tilde{X} = \int_0^{2\pi} U_\theta^* X V_\theta dm(\theta).$$

Il est clair que  $\tilde{X}$  est un opérateur borné sur  $H$  et que  $\|\tilde{X}\| \leq \|X\|$ . Par ailleurs on voit que

1) Si  $(k, \ell) \in \Lambda_0^2$

$$P_{\lambda_k} \tilde{X} Q_{\lambda_\ell} = \int_0^{2\pi} e^{i(\ell-k)\theta} P_{\lambda_k} X Q_{\lambda_\ell} dm(\theta)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell, \\ P_{\lambda_k} X Q_{\lambda_k} & \text{si } k = \ell. \end{cases}$$

2) Si  $(k, \ell) \in \Lambda_0 \times \Lambda_2$

$$P_{\lambda_k} \tilde{X} Q_{\beta \ell} = \int_0^{2\pi} e^{i(\ell-k)\theta} P_{\lambda_k} X Q_{\beta \ell} dm(\theta) = 0,$$

car  $\Lambda_0 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ . De même on montre que  $P_{\alpha_k} \tilde{X} Q_{\lambda \ell} = 0$  si  $(k, \ell) \in \Lambda_1 \times \Lambda_0$

et  $P_{\alpha_k} \tilde{X} Q_{\beta \ell} = 0$  si  $(k, \ell) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$ . De plus, on a

1) Si  $(k, \ell) \in \Lambda_0^2$

$$P_{\lambda_k} A \tilde{X} Q_{\lambda \ell} = \int_0^{2\pi} \lambda_k e^{i(\ell-k)\theta} P_{\lambda_k} X Q_{\lambda \ell} dm(\theta)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell, \\ \lambda_k P_{\lambda_k} X Q_{\lambda_k} & \text{si } k = \ell. \end{cases}$$

$$P_{\lambda_k} \tilde{X} B Q_{\lambda \ell} = \int_0^{2\pi} \lambda_\ell e^{i(\ell-k)\theta} P_{\lambda_k} X Q_{\lambda \ell} dm(\theta)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq \ell, \\ \lambda_k P_{\lambda_k} X Q_{\lambda_k} & \text{si } k = \ell. \end{cases}$$

On a donc toujours  $P_{\lambda_k} A \tilde{X} Q_{\lambda \ell} = P_{\lambda_k} \tilde{X} B Q_{\lambda \ell}$  pour  $(k, \ell) \in \Lambda_0^2$ .

2) Si  $(k, \ell) \in \Lambda_0 \times \Lambda_2$

$$P_{\lambda_k} A \tilde{X} Q_{\beta \ell} = \int_0^{2\pi} \lambda_k e^{i(\ell-k)\theta} P_{\lambda_k} X Q_{\beta \ell} dm(\theta) = 0,$$

car  $\Lambda_0 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ , et

$$P_{\lambda_k} \tilde{X} B Q_{\beta_\ell} = \int_0^{2\pi} \beta_\ell e^{i(\ell-k)\theta} P_{\lambda_k} X Q_{\beta_\ell} dm(\theta) = 0,$$

De même on montre que si  $(k, \ell) \in \Lambda_1 \times \Lambda_0$  on a

$$P_{\alpha_k} A \tilde{X} Q_{\lambda_\ell} = 0 = P_{\alpha_k} \tilde{X} B Q_{\lambda_\ell}$$

et si  $(k, \ell) \in \Lambda_1 \times \Lambda_2$  on a

$$P_{\alpha_k} A \tilde{X} Q_{\beta_\ell} = 0 = P_{\alpha_k} \tilde{X} B Q_{\beta_\ell}.$$

Il en résulte que  $A \tilde{X} = \tilde{X} B$ . On en déduit que  $Y = X - \tilde{X}$  est encore une solution bornée de l'équation et que  $P_\alpha Y Q_\beta = 0$  si  $\alpha = \beta$ .

Si  $(\alpha, \beta) \in \sigma_p(A) \times \sigma_p(B)$ , on voit que

$$P_\alpha a \otimes Q_\beta b = P_\alpha A Y Q_\beta - P_\alpha Y B Q_\beta$$

$$= (\alpha - \beta) P_\alpha Y Q_\beta.$$

$$\text{D'où } P_\alpha a \otimes Q_\beta b = 0 \text{ si } \alpha = \beta \quad \text{c.a.d}$$

$$P_\lambda a = 0 \text{ ou } Q_\lambda b = 0 \text{ si } \lambda \in \sigma_p(A) \cap \sigma_p(B)$$

et

$$P_\alpha Y Q_\beta = \frac{1}{\alpha - \beta} P_\alpha a \otimes Q_\beta b \text{ si } \alpha \neq \beta.$$

Par ailleurs, pour tout couple  $(x, y)$  de vecteurs de  $H$ , on a

$$\begin{aligned} \langle Yy, x \rangle &= \sum_{\alpha \in \sigma_p(A)} \sum_{\beta \in \sigma_p(B)} \langle P_\alpha Y Q_\beta y, x \rangle \\ &= \sum_{\alpha \in \sigma_p(A)} \sum_{\beta \in \sigma_p(B) \text{ et } \beta \neq \alpha} \frac{\langle P_\alpha a \otimes Q_\beta b(y), x \rangle}{\alpha - \beta} \\ &= \sum_{\alpha \in \Delta_1} \sum_{\beta \in \Delta_2} \frac{\|P_\alpha a\| \|Q_\beta b\|}{\alpha - \beta} \langle u_\alpha, x \rangle \langle y, v_\beta \rangle, \end{aligned}$$

où on a posé  $u_\alpha = P_\alpha a / \|P_\alpha a\|$  lorsque  $\alpha \in \Delta_1$  et  $v_\beta = Q_\beta b / \|Q_\beta b\|$  si  $\beta \in \Delta_2$ . Les familles  $(u_\alpha)_{\alpha \in \Delta_1}$  et  $(v_\beta)_{\beta \in \Delta_2}$  sont deux familles orthonormées de  $H$ . Soient  $(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta_1} \in l^2(\Delta_1)$  et  $(y_\beta)_{\beta \in \Delta_2} \in l^2(\Delta_2)$ , il s'ensuit que les vecteurs  $x = \sum_{\alpha \in \Delta_1} x_\alpha u_\alpha$  et  $y = \sum_{\beta \in \Delta_2} y_\beta v_\beta$  sont bien définis. Le calcul précédent nous conduit aisément à

$$|\langle M(y_\beta)_{\beta \in \Delta_2}, (x_\alpha)_{\alpha \in \Delta_1} \rangle| = |\langle Yy, x \rangle| \leq \|Y\| \|(x_\alpha)_{\alpha \in \Delta_1}\| \|(y_\beta)_{\beta \in \Delta_2}\|.$$

Il s'ensuit que  $M$  est bien bornée et que la condition (ii) est satisfaite.

Réciproquement, supposons que les conditions (i) et (ii) sont vérifiées, et considérons  $Y_a = [Y_{\alpha, \beta}]_{(\alpha, \beta) \in \sigma_p(A) \times \sigma_p(B)}$  la matrice par blocs de  $Y$  respectant les décompositions  $\bigoplus_{\beta \in \sigma_p(B)} Q_\beta(H)$  et  $\bigoplus_{\alpha \in \sigma_p(A)} P_\alpha(H)$

$$([Y_{\alpha, \beta}] \in B(\bigoplus_{\beta \in \sigma_p(B)} Q_\beta(H), \bigoplus_{\alpha \in \sigma_p(A)} P_\alpha(H)) = B(H))$$

où  $Y_{\alpha, \beta} = 0$  si  $\beta = \alpha \in \sigma_p(A) \cap \sigma_p(B)$ .

$$P_\alpha Y Q_\beta = Y_{\alpha, \beta} = \frac{1}{\alpha - \beta} P_\alpha(a) \otimes Q_\beta(b).$$

Montrons que  $Y$  est borné.

Supposons que  $x$  (resp.  $y$ ) est un vecteur de  $H$ , pour lequel seul un nombre

fini des vecteurs  $P_\beta x$  (resp.  $Q_\alpha y$ ) sont non nuls.

Il vient

$$\begin{aligned}
 \langle Yy, x \rangle &= \sum_{\alpha \in \sigma_p(A)} \sum_{\beta \in \sigma_p(B) \text{ et } \beta \neq \alpha} \langle P_\alpha Y Q_\beta y, x \rangle \\
 &= \sum_{\alpha \in \Delta_1} \sum_{\beta \in \Delta_2} \frac{1}{\alpha - \beta} \langle P_\alpha(a) \otimes Q_\beta(b)(y), x \rangle \\
 &= \sum_{\alpha \in \Delta_1} \sum_{\beta \in \Delta_2} \frac{1}{\alpha - \beta} \langle y, Q_\beta(b) \rangle \langle P_\alpha(a), x \rangle \\
 &= \sum_{\alpha \in \Delta_1} \sum_{\beta \in \Delta_2} \frac{\|P_\alpha a\| \|Q_\beta b\|}{\alpha - \beta} \langle y, v_\beta \rangle \langle u_\alpha, x \rangle.
 \end{aligned}$$

D'où

$$|\langle Yy, x \rangle| \leq \|M\| \|(\langle x, u_\alpha \rangle)_{\alpha \in \Delta_1}\| \|(\langle y, v_\beta \rangle)_{\beta \in \Delta_2}\| = \|M\| \|x\| \|y\|.$$

Comme l'ensemble des vecteurs considérés est dense dans  $H$ , on voit que  $Y$  est bien borné. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}
 P_\alpha A Y Q_\beta - P_\alpha Y B Q_\beta &= (\alpha - \beta) P_\alpha Y Q_\beta. \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = \beta, \\ P_\alpha(a) \otimes Q_\beta(b) & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il découle alors de la condition (i) que l'on a bien  $AY - YB = a \otimes b$ . Le théorème (43) nous assure alors  $T_1$  et  $T_2$  sont similaires.

Supposons que les opérateurs  $T_1$  et  $T_2$  sont similaires, avec un opérateur de passage

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$$

pour lequel l'opérateur  $Q^*R + S^*T$  est de Hilbert-Schmidt. Avec la preuve du théorème 43, on voit qu'il existe alors une solution  $X$  de l'équation  $AX - XB = a \otimes b$  qui est un opérateur de Hilbert-Schmidt. On vérifie facilement que l'opérateur  $\tilde{X}$ , introduit au début de la preuve, est encore de Hilbert-Schmidt et on se ramène donc à une solution de Hilbert-Schmidt  $Y = X - \tilde{X}$  telle que  $P_\alpha Y Q_\beta = 0$  si  $\alpha = \beta$ . Comme précédemment, la condition (i) sera vérifiée. Or le calcul de la norme de Hilbert-Schmidt  $\|Y\|_2$  nous donne

$$\begin{aligned} \|Y\|_2^2 &= \sum_{\alpha \in \Delta_1} \sum_{\beta \in \Delta_2} \|P_\alpha Y Q_\beta\|_2^2 \\ &= \sum_{\alpha \in \Delta_1} \sum_{\beta \in \Delta_2} \left| \frac{1}{\alpha - \beta} \right|^2 \|P_\alpha(a) \otimes Q_\beta(b)\|_2^2 \\ &= \sum_{\alpha \in \Delta_1} \sum_{\beta \in \Delta_2} \left| \frac{1}{\alpha - \beta} \right|^2 \|P_\alpha(a)\|^2 \|Q_\beta(b)\|^2. \end{aligned}$$

La condition (iii) est donc satisfaite.

Réciproquement, si les conditions (i) et (iii) sont vérifiées on définit l'opérateur  $Y$  comme dans la première partie de la preuve et on a  $AY - YB = a \otimes b$ . Avec (iii), le même calcul que celui fait ci-dessus montre que  $Y$  est un opérateur de Hilbert-Schmidt. On vérifie ensuite que  $T_1$  et  $T_2$  sont similaires avec l'opérateur de passage

$$\begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

et que  $Q^*R + S^*T = IY - 0I = Y$  est bien de Hilbert-Schmidt.

**Remarque.**

Lorsque  $\sigma_p(A) \cap \sigma_p(B) = \emptyset$ , on voit que les conditions (i) et (iii) sont automatiquement vérifiées, ce qui redonne l'existence de la similarité et par le théorème 43 une solution de l'équation  $AY - YB = a \otimes b$  pour tout couple  $(a, b)$  de vecteurs dans  $H$ .

On retrouve ainsi l'existence d'une solution qui était donnée par le théorème de Rosenblum.

En dimension finie, on en déduit par exemple le corollaire suivant.

**Corollaire 47.** *Soit  $A$  une matrice diagonalisable,  $(P_\alpha)_{\alpha \in \sigma(A)}$  la famille de ses projecteurs spectraux et  $(a, b)$  un couple de vecteurs dans  $\mathbb{C}^n$ . Alors l'équation  $AX - XA = a \otimes b$  admet une solution si et seulement si  $P_\alpha a = 0$  ou  $P_\alpha^* b = 0$  pour tout  $\alpha \in \sigma(A)$ .*

**Preuve.** Par similarité on se ramène au cas où  $A$  est normale. On applique alors le théorème 43 et le théorème précédent en remarquant que la condition (ii) est toujours satisfaite dans ce cas.

### 2.3.2 Solution de l'équation $AX - XB = C$ sur le sous espace $\text{Ker}(B - \lambda I)$

Si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des opérateurs dans  $B(H)$ , tels que  $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$  et si  $\lambda$  est un scalaire complexe alors l'équation

$$AX - XB = C$$

peut se mettre sous la forme

$$(A - \lambda I)X - X(B - \lambda I) = C. \quad (2.1)$$

Soit maintenant  $x \in \text{Ker}(B - \lambda I)$ , alors  $(A - \lambda I)Xx = Cx$ , alors pour  $\lambda \in \sigma_p(B)$  on aura  $(\lambda \in \rho(A) \text{ car } \sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset)$

$$Xx = (A - \lambda I)^{-1}Cx,$$

et par conséquent la solution de l'équation  $AX - XB = C$  sur  $\text{Ker}(B - \lambda I)$  coïncide avec  $(A - \lambda I)^{-1}C$  c.a.d que l'on a

$$X|_{\text{Ker}(B - \lambda I)} = (A - \lambda I)^{-1}C|_{\text{Ker}(B - \lambda I)}.$$

## Chapitre 3

### L'équation $AXB - CXD = E$ dans $B(H)$

Dans ce chapitre on donne une condition nécessaire et suffisante pour la solvabilité de chacune des équations  $AXB - XD = E$  et  $AXB - CXD = E$ , qui couvrent aussi le cas de l'équation de Stein  $AXB - X = E$ , où  $A, B, C, D$  et  $E$  sont des opérateurs dans  $B(H)$ , sous différentes conditions.

Les résultats de cette partie de ce chapitre sont issus d'une collaboration avec le Professeur Gilles Cassier (cf.[12]).

Dans laquelle on est arrivé à des résultats complets concernant la solvabilité de certaines de ces équations.

#### 3.1 L'équation $AXB - XD = E$

On remarque tout d'abord que si l'opérateur  $B$  est inversible avec une condition sur l'opérateur  $DB^{-1}$  l'équation  $AXB - XD = E$  peut se mettre sous la forme de l'équation de Sylvester.

**Définition 48.** *Deux opérateurs  $T$  et  $S$  de  $B(H)$  sont dits équivalents, si et*

seulement s'il existe deux opérateurs inversibles  $U$  et  $V$  tels que  $S = UTV$ .

**Définition 49.** Deux couples d'opérateurs  $(T_1, T_2)$  et  $(S_1, S_2)$  appartenant à  $B(H) \times B(H)$  sont dits équivalents, s'il existe deux opérateurs inversibles  $U$  et  $V$  tels que

$$S_i = U^{-1}T_iV, \text{ pour } i = 1, 2.$$

**Théorème 50.** Soient  $(A, B, D)$  des opérateurs normaux dans  $B(H)$ , ( $D$  peut être seulement quasinormal) tels que  $BD = DB$ . L'équation

$$AXB - XD = E \tag{3.1}$$

admet une solution  $X$  dans  $B(H)$  si et seulement si les deux couples

$$\left[ \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right] \text{ et } \left[ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right]$$

sont équivalents dans  $B(H \oplus H)$ .

**Preuve.** Supposons que  $X$  soit une solution de l'équation  $AXB - XD = E$ . Posons

$$U = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs  $U$  et  $V$  sont bien inversibles et on a d'une part

$$U \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & E + XD \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Et d'autre part

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AXB \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Et

$$U \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & X \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Et d'autre part

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe deux opérateurs inversibles

$$U = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}$$

tels que

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}.$$

Alors, il vient :  $QA = AQ'$  ,  $QE + RD = AR'$  ,  $SA = DS'$  ,

$SE + TD = DT'$  ,  $Q = Q'$  ,  $RB = R'$  ,  $S = BS'$  et  $TB = BT'$ . Comme  $QA =$

$AQ'$  et  $Q = Q'$ , le théorème de Fuglede-Putnam nous donne  $QA^* = A^*Q$ .

D'où

$$\begin{aligned} Q^*QE &= Q^*AR' - Q^*RD \\ &= Q^*ARB - Q^*RD \\ &= A(Q^*R)B - (Q^*R)D \end{aligned}$$

Et

$$S^*SE = S^*DT' - S^*TD.$$

Mais on a

$$BSA = BDS' = DBS' = DS.$$

Le théorème de Fuglede-Putnam généralisé [Voir Weiss 49] nous donne

$$B^*SA^* = D^*S.$$

En passant à l'adjoint, on obtient

$$AS^*B = S^*D.$$

D'où

$$\begin{aligned} S^*SE &= AS^*BT' - S^*TD \\ &= A(S^*T)B - (S^*T)D. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} (Q^*Q + S^*S)E &= Q^*QE + S^*SE = \\ &= A(Q^*R)B - (Q^*R)D + A(S^*T)B - (S^*T)D \\ &= A(Q^*R + S^*T)B - (Q^*R + S^*T)D. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$Q^*QA = Q^*AQ = AQ^*Q$$

et

$$S^*SA = S^*DS' = AS^*BS' = AS^*S$$

D'où

$$(Q^*Q + S^*S)A = A(Q^*Q + S^*S).$$

Comme  $U = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix}$  est inversible, l'opérateur  $Q^*Q + S^*S$  l'est aussi et on a donc

$$(Q^*Q + S^*S)^{-1}A = A(Q^*Q + S^*S)^{-1}$$

Par suite

$$\begin{aligned} E &= (Q^*Q + S^*S)^{-1}A(Q^*R + S^*T)B - (Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T)D. \\ &= A(Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T)B - (Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T)D. \\ &= AXB - XD. \end{aligned}$$

Avec

$$X = (Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T).$$

### 3.2 Sur l'équation $AXB - CXD = CE$

**Théorème 51.** *Soient  $A, B, C$  et  $D$  des opérateurs normaux dans  $B(H)$  tels que  $BD = DB$ ,  $CA = AC$  et  $C$  injectif avec  $ImA \subseteq ImC$ . Alors l'équation*

$$AXB - CXD = CE \tag{3.2}$$

*admet une solution  $X$  dans  $B(H)$  si et seulement si les deux couples*

$$\left[ \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right] \text{ et } \left[ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \right]$$

*sont équivalents dans  $B(H \oplus H)$ .*

**Preuve.** Supposons que  $X$  soit une solution de l'équation (3.2). Posons

$$U = \begin{pmatrix} I & CX \\ 0 & I \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Les opérateurs  $U$  et  $V$  sont bien inversibles, d'une part on a

$$U \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & CX \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & E + CXD \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Et d'autre part

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AXB \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

De plus, on a

$$U \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & CX \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & CXB \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Et par ailleurs

$$\begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & XB \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & CXB \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe deux opérateurs inversibles

$$U = \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}$$

tels que

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & E \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}$$

Et

$$\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q' & R' \\ S' & T' \end{pmatrix}.$$

Alors, il vient

$$QA = AQ' \quad , \quad QE + RD = AR'$$

$$SA = DS' \quad \text{et} \quad SE + TD = DT'$$

et

$$\begin{aligned} QC = CQ' & \quad , & RB = CR' \\ SC = BS' & \quad \text{et} & TB = BT'. \end{aligned}$$

Comme  $QE + RD = AR'$ , il vient

$$Q^*QE = Q^*AR' - Q^*RD.$$

On a  $QA = AQ'$ , d'où

$$\begin{aligned} CQA &= CAQ' = \\ &= ACQ' = AQC. \end{aligned}$$

Le théorème de Fuglede-Putnam généralisé nous donne  $C^*QA^* = A^*QC^*$ .

En passant à l'adjoint, il vient  $AQ^*C = CQ^*A$ . Donc

$$\begin{aligned} CQ^*QE &= CQ^*AR' - CQ^*RD \\ &= AQ^*CR' - CQ^*RD \\ &= A(Q^*R)B - C(Q^*R)D \end{aligned}$$

Et

$$CS^*SE = CS^*DT' - CS^*TD.$$

Mais on a

$$BSA = BDS' = DBS' = DSC.$$

Le théorème de Fuglede-Putnam généralisé nous donne

$$B^*SA^* = D^*SC^*.$$

En passant à l'adjoint, on obtient  $AS^*B = CS^*D$ . D'où

$$\begin{aligned} CS^*SE &= AS^*BT' - CS^*TD \\ &= A(S^*T)B - C(S^*T)D. \end{aligned}$$

Et on obtient donc

$$\begin{aligned} C(Q^*Q + S^*S)E &= CQ^*QE + CS^*SE = \\ &= A(Q^*R)B - C(Q^*R)D + A(S^*T)B - C(S^*T)D \\ &= A(Q^*R + S^*T)B - C(Q^*R + S^*T)D. \end{aligned}$$

D'où

$$C(Q^*Q + S^*S)E = A(Q^*R + S^*T)B - C(Q^*R + S^*T)D. \quad (3.3)$$

Par ailleurs, on a

$$CQ^*QA = CQ^*AQ' = AQ^*CQ' = AQ^*QC$$

et

$$CS^*SA = CS^*DS' = AS^*BS' = AS^*SC.$$

D'où

$$C(Q^*Q + S^*S)A = A(Q^*Q + S^*S)C.$$

Comme  $ImA \subseteq ImC$ , d'après le critère de Douglas ( Voir 17 )  $A$  peut s'écrire sous la forme  $A = C\tilde{A}$  et l'équation (3.2) devient alors

$$C\tilde{A}XB - CXD = CE.$$

Comme l'opérateur  $C$  est injectif, alors il vient

$$\tilde{A}XB - XD = E$$

qui n'est autre que l'équation (3.1) résolue par le théorème 50.

Comme

$$A(Q^*Q + S^*S)C = C(Q^*Q + S^*S)A,$$

alors

$$C\tilde{A}(Q^*Q + S^*S)C = C(Q^*Q + S^*S)C\tilde{A}.$$

Mais l'opérateur  $C$  est injectif, alors il vient

$$\tilde{A}(Q^*Q + S^*S)C = (Q^*Q + S^*S)C\tilde{A}. \quad (3.4)$$

On a d'une part  $A = C\tilde{A}$ , donc  $C^2\tilde{A} = CA = AC = C\tilde{A}C$ .

Mais comme  $C$  est injectif, il vient

$$\tilde{A}C = C\tilde{A}.$$

Avec (3.4), il s'ensuit que

$$\tilde{A}(Q^*Q + S^*S)C = (Q^*Q + S^*S)\tilde{A}C.$$

Comme  $C$  est un opérateur normal et injectif, son image est dense, et par suite

$$\tilde{A}(Q^*Q + S^*S) = (Q^*Q + S^*S)\tilde{A},$$

ce qui nous donne

$$\tilde{A}(Q^*Q + S^*S)^{-1} = (Q^*Q + S^*S)^{-1}\tilde{A}.$$

Donc, en remplaçant  $A$  par  $C\tilde{A}$  dans l'équation (3.3), il vient

$$C(Q^*Q + S^*S)E = C\tilde{A}(Q^*R + S^*T)B - C(Q^*R + S^*T)D.$$

L'opérateur  $C$  étant injectif, on obtient

$$(Q^*Q + S^*S)E = \tilde{A}(Q^*R + S^*T)B - (Q^*R + S^*T)D.$$

D'où

$$\begin{aligned} E &= (Q^*Q + S^*S)^{-1}\tilde{A}(Q^*R + S^*T)B - (Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T)D \\ &= \tilde{A}(Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T)B - (Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T)D. \end{aligned}$$

En composant par  $C$  à gauche, il vient

$$CE = C\tilde{A}(Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T)B - C(Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T)D.$$

Et par conséquent

$$CE = A(Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T)B - C(Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T)D.$$

D'où on a

$$CE = AXB - CXD.$$

Avec

$$X = (Q^*Q + S^*S)^{-1}(Q^*R + S^*T).$$

# Chapitre 4

## Inégalités de dérivations pour des opérateurs sous normaux

Pour  $A$ ,  $B$  et  $Y$  opérateurs dans  $B(H)$ , l'importance de l'équation de Sylvester  $AX - XB = Y$  et ses applications dans la théorie de contrôle est bien connue. Dans ce chapitre on démontre quelques inégalités de dérivations pour des opérateurs sous normaux, signalons que Kittaneh dans [27] a développé plusieurs inégalités avec des opérateurs normaux et la norme usuelle. Les résultats obtenus dans ce chapitre sont issus d'une collaboration avec le Professeur Gilles Cassier (cf.[13]).

### 4.1 Notations

1. Si l'opérateur  $A$  est hermitien, on pose  $s_+(A) = \sup\{\lambda, \lambda \in \sigma(A)\}$  et  $s_-(A) = \inf\{\lambda, \lambda \in \sigma(A)\}$ , alors  $[s_-(A), s_+(A)]$  est le plus petit intervalle contenant  $\sigma(A)$ .

2. Si  $T \in B(H)$ , on note par  $r_T$  le rayon du plus petit cercle contenant  $\sigma(T)$ .

## 4.2 Quelques résultats

**Lemme 52.** *Si  $V_\alpha$  est défini par*

$$V_\alpha = (I - TT^*)^{-\frac{1}{2}}(\alpha I - T)(I - \alpha T^*)^{-1}(I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$$

*tel que  $|\alpha|=1$  et  $T$  est strictement contractant alors  $V_\alpha$  est unitaire.*

**Preuve.** Soit

$$V_\alpha = (I - TT^*)^{-\frac{1}{2}}(\alpha I - T)(I - \alpha T^*)^{-1}(I - T^*T)^{\frac{1}{2}} \text{ où } |\alpha|=1,$$

alors on a

$$V_\alpha^* = (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}(I - \bar{\alpha}T)^{-1}(\bar{\alpha}I - T^*)(I - TT^*)^{-\frac{1}{2}}$$

et il vient

$$\begin{aligned} (V_\alpha^*)^{-1} &= (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}(\bar{\alpha}I - T^*)^{-1}(I - \bar{\alpha}T)(I - T^*T)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}(I - \alpha T^*)^{-1}(\alpha I - T)(I - T^*T)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}[(I - \alpha T^*)^{-1}(\alpha I - (I - \alpha T^*)T - \alpha T^*T)](I - T^*T)^{-\frac{1}{2}} \\ &= (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}[-T + \alpha(I - \alpha T^*)^{-1}(I - T^*T)](I - T^*T)^{-\frac{1}{2}} \\ &= [-T(I - T^*T)^{\frac{1}{2}} + \alpha(I - TT^*)^{\frac{1}{2}}(I - \alpha T^*)^{-1}(I - T^*T)](I - T^*T)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -T + \alpha(I - TT^*)^{\frac{1}{2}}(I - \alpha T^*)^{-1}(I - T^*T)^{\frac{1}{2}} \\ &= (I - TT^*)^{-\frac{1}{2}}[-(I - TT^*)^{\frac{1}{2}}T + \alpha(I - TT^*)(I - \alpha T^*)^{-1}(I - T^*T)^{\frac{1}{2}}] \\ &= (I - TT^*)^{-\frac{1}{2}}[-T + \alpha(I - TT^*)(I - \alpha T^*)^{-1}](I - T^*T)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (I - TT^*)^{-\frac{1}{2}} [-T(I - \alpha T^*)(I - \alpha T^*)^{-1} + \alpha(I - TT^*)(I - \alpha T^*)^{-1}] (I - T^*T)^{\frac{1}{2}} \\
&= (I - TT^*)^{-\frac{1}{2}} (\alpha - T)(I - \alpha T^*)^{-1} (I - T^*T)^{\frac{1}{2}} \\
&= V_\alpha,
\end{aligned}$$

donc  $V_\alpha$  est unitaire .

**Théorème 53.** *Si  $S$  est un opérateur sous-normal dans  $B(H)$ , et  $N$  son extension normale minimale sur  $\mathcal{H} = H \oplus E$ , i.e.  $N = \begin{pmatrix} S & R \\ 0 & T \end{pmatrix}$ ,  $T$  est dit complémentaire orthogonal minimal. Si  $\llbracket . \rrbracket$  est une norme unitairement invariante, alors on a*

$$\llbracket (SX - XS) \oplus (TY - YT) \rrbracket \leq 2r_S \llbracket X \oplus Y \rrbracket$$

pour tous  $X \in \mathcal{I}_H$  et  $Y \in \mathcal{I}_E$  (Idéaux bilatères sur  $B(H)$  et  $B(E)$  associés à  $\llbracket . \rrbracket$ ).

**Preuve.** Soit  $S \in B(H)$  un opérateur sous-normal,  $N$  son extension normale minimale ;  $N = \begin{pmatrix} S & R \\ 0 & T \end{pmatrix}$  et soit  $Z = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ , alors

$$\begin{aligned}
NZ - ZN &= \begin{pmatrix} S & R \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S & R \\ 0 & T \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SX & RY \\ 0 & TY \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} XS & XR \\ 0 & YT \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} SX - XS & RY - XR \\ 0 & TY - YT \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Posons  $U_\theta = \begin{pmatrix} I_H & 0 \\ 0 & e^{i\theta} I_E \end{pmatrix}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $U_\theta$  est unitaire.

On vérifie que

$$U_\theta^* (NZ - ZN) U_\theta = \begin{pmatrix} SX - XS & e^{i\theta} (RY - XR) \\ 0 & TY - YT \end{pmatrix}.$$

Ce qui nous donne

$$\begin{pmatrix} SX - XS & 0 \\ 0 & TY - YT \end{pmatrix} = \int_0^{2\pi} U_\theta^*(NZ - ZN)U_\theta dm(\theta).$$

Si  $A$  est une contraction hermitienne, on a

$$A = \frac{1}{2}(A + i\sqrt{I - A^2}) + \frac{1}{2}(A - i\sqrt{I - A^2}).$$

Si on pose  $W_1 = A + i\sqrt{I - A^2}$  et  $W_2 = A - i\sqrt{I - A^2}$

Les opérateurs  $W_1$  et  $W_2$  sont unitaires. Alors

$$\llbracket AX \rrbracket \leq \frac{1}{2}(\llbracket W_1 X \rrbracket + \llbracket W_2 X \rrbracket) = \llbracket X \rrbracket$$

Si  $A$  est hermitien quelconque, on a donc  $\llbracket AX \rrbracket \leq \|A\| \llbracket X \rrbracket$ .

Si  $A$  est quelconque  $A = A_1 + iA_2$  avec  $A_1$  et  $A_2$  hermitiens, on voit que

$$\begin{aligned} \llbracket AX \rrbracket &\leq \llbracket A_1 X \rrbracket + \llbracket A_2 X \rrbracket \\ &\leq \|A_1\| \llbracket X \rrbracket + \|A_2\| \llbracket X \rrbracket \leq 2\|A\| \llbracket X \rrbracket \end{aligned}$$

D'où

$$|\llbracket AX \rrbracket - \llbracket BX \rrbracket| \leq \llbracket (A - B)X \rrbracket \leq 2\|A - B\| \llbracket X \rrbracket$$

D'où la continuité de l'application qui à tout opérateur  $A$  lui associe  $\llbracket AX \rrbracket$ .

De même à gauche, on obtient donc la continuité de l'application qui à tout couple d'opérateurs  $(A, B)$  lui associe  $\llbracket AXB \rrbracket$ .

$$\llbracket \begin{pmatrix} SX - XS & 0 \\ 0 & TY - YT \end{pmatrix} \rrbracket = \llbracket \int_0^{2\pi} U_\theta^*(NZ - ZN)U_\theta dm(\theta) \rrbracket$$

L'application de l'inégalité de Jensen et la continuité pour la norme de  $B(H)$  nous donne

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} SX - XS & 0 \\ 0 & TY - YT \end{pmatrix} \right\| &\leq \int_0^{2\pi} \left\| U_\theta^* (NZ - ZN) U_\theta \right\| dm(\theta) \\ &= \int_0^{2\pi} \left\| (NZ - ZN) \right\| dm(\theta) = \left\| (NZ - ZN) \right\| \end{aligned}$$

On a donc, pour tout nombre complexe  $\lambda$

$$\left\| (SX - XS) \oplus (TY - YT) \right\| \leq \left\| (NZ - ZN) \right\|$$

mais

$$\left\| (NZ - ZN) \right\| = \left\| (N - \lambda I)Z - Z(N - \lambda I) \right\|$$

donc

$$\begin{aligned} \left\| (SX - XS) \oplus (TY - YT) \right\| &\leq \left\| (N - \lambda I)Z \right\| + \left\| Z(N - \lambda I) \right\| \\ &\leq 2\|N - \lambda I\| \|Z\|. \end{aligned}$$

Car on a en fait

$$\left\| AXB \right\| \leq \|A\| \|B\| \|X\|,$$

pour tout  $A$  et  $B$  dans  $B(H)$ . En effet, si  $\|T\| < 1$

$$V_\alpha = (I - TT^*)^{-\frac{1}{2}} (\alpha I - T) (I - \alpha T^*)^{-1} (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$$

est unitaire si  $|\alpha| = 1$  ( d'après le lemme 52).

Or l'application qui à tout  $\alpha$  lui associe  $V_\alpha$  est analytique, alors

$$\int_0^{2\pi} V_{e^{i\theta}} dm(\theta) = V_0 = -(I - TT^*)^{-\frac{1}{2}} T (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$$

$$= -T(I - T^*T)^{-\frac{1}{2}}(I - TT^*)^{\frac{1}{2}} = -T.$$

Donc

$$\|TX\| = \left\| \int_0^{2\pi} V_{e^{i\theta}} X dm(\theta) \right\| \leq \int_0^{2\pi} \|V_{e^{i\theta}} X\| dm(\theta) = \|X\|.$$

Si  $T$  est quelconque et  $0 < r < 1$ , ce qui précède nous donne  $\left\| \frac{r}{\|T\|} TX \right\| \leq \|X\|$  qui est équivalent à  $r\|TX\| \leq \|X\|$ , et si  $r$  tend vers 1 on aura  $\|TX\| \leq \|X\|$ . Même chose à gauche, on obtient donc

$$\|AXB\| \leq \|A\| \|B\| \|X\|.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|(SX - XS) \oplus (TY - YT)\| &\leq 2 \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \|\lambda I - N\| \|Z\| \\ &= 2 \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} r(\lambda I - N) \|Z\|. \end{aligned}$$

Soit

$$r_N = \inf_{\lambda \in \mathbb{C}} \sup_{z \in \sigma(N)} |\lambda - z|$$

le rayon spectral du plus petit disque contenant  $\sigma(N)$ .

Mais comme  $N$  est une extension minimale de  $S$ , alors d'après le théorème de Halmos  $\sigma(S) \supseteq \sigma(N)$ , d'où  $\sigma(S - \lambda I_H) \supseteq \sigma(N - \lambda I_{\mathcal{H}})$ .

D'où  $\|N - \lambda I_{\mathcal{H}}\| \leq \|S - \lambda I_H\|$  i.e.  $r(S - \lambda I_H) = r(N - \lambda I_{\mathcal{H}})$ , et ce pour tout nombre complexe  $\lambda$ . D'où  $r_S = r_N$ , ce qui nous donne

$$\|(SX - XS) \oplus (TY - YT)\| \leq 2r_S \|X \oplus Y\|$$

**Corollaire 54.** *Si  $S$  est un opérateur sous-normal dans  $B(H)$  et  $T$  son complémentaire orthogonal minimal, alors on a*

$$\begin{aligned} & \|(SX - XS) \oplus (TY - YT)\| \leq \\ & \leq \sqrt{(s_+(ReS) - s_-(ReS))^2 + (s_+(ImS) - s_-(ImS))^2} \|X \oplus Y\| \end{aligned}$$

pour toute norme  $\|\cdot\|$  unitairement invariante.

**Preuve.** Posons  $a_1 = s_-(ReS)$ ,  $a_2 = s_+(ReS)$ ,  $b_1 = s_-(ImS)$  et  $b_2 = s_+(ImS)$ . Alors on a évidemment  $\sigma(S) \subseteq [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$ , et donc  $r_S$  est inférieur ou égale à la longueur de la demi-diagonale de ce rectangle.

**Corollaire 55.** Si  $S$  est un opérateur sous-normal dans  $B(H)$ , et  $X \in \mathcal{I}$ ; idéal bilatère associé à la norme unitairement invariante  $\|\cdot\|$ , alors on a

$$\begin{aligned} & \|(SX - XS)\| \leq 2r_S \|X\| \\ & \leq \sqrt{(s_+(ReS) - s_-(ReS))^2 + (s_+(ImS) - s_-(ImS))^2} \|X\| \end{aligned}$$

**Preuve.** Dans le théorème précédente, on prend  $Y = 0$  on obtient

$$\|(SX - XS) \oplus 0\| \leq 2r_S \|X \oplus 0\|$$

En particulier

$$\|(SX - XS) \oplus 0\|_{(p)} \leq 2r_S \|X \oplus 0\|_{(p)}$$

pour les normes de Ky Fan

$\|T\|_{(p)} = \text{Sup}\{Tr(|T|P)\}$ ; où  $P$  est une projection orthogonale de rang  $\leq p$

qui est aussi égale à la somme des valeurs caractéristiques de  $T$

$$\|T\|_{(p)} = s_1(T) + s_2(T) + \dots + s_p(T).$$

Soient  $Q$  une projection orthogonale sur  $\mathcal{H} = H \oplus E$ , de rang inférieur ou égale à  $p$ ,  $P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  
 $L = \begin{pmatrix} SX - XS & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $|L| = \begin{pmatrix} |SX - XS| & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  alors on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(|L|Q) &= \text{Tr}(P|L|PQ) = \text{Tr}(P|L|PPQP) = \\ &= \text{Tr}(|SX - XS|Q_1) \end{aligned}$$

avec  $\text{rang}(Q_1) \leq p$  et  $0 \leq Q_1 \leq I$ , d'où  $Q_1 \leq \tilde{Q}_1$  où  $\tilde{Q}_1$  est une projection orthogonale de rang inférieur ou égale à  $p$ .

Donc on aura

$$\begin{aligned} \text{Tr}(|SX - XS|Q_1) &= \\ &= \text{Tr}(\sqrt{|SX - XS|}Q_1\sqrt{|SX - XS|}) \\ &\leq \text{Tr}(\sqrt{|SX - XS|}\tilde{Q}_1\sqrt{|SX - XS|}) \\ &= \text{Tr}(|SX - XS|\tilde{Q}_1) \leq \|SX - XS\|_{(p)}. \end{aligned}$$

L'autre sens de l'inégalité  $\|SX - XS\|_{(p)} \leq \|L\|$  est clair, alors

$$\|SX - XS\|_{(p)} = \|L\|_{(p)} \leq 2r_S \left\| \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_{(p)} = 2r_S \|X\|_{(p)}.$$

On a donc

$$\|SX - XS\|_{(p)} \leq 2r_S \|X\|_{(p)}.$$

Pour toutes les normes de Ky Fan, le principe de dominance implique

$$\llbracket SX - XS \rrbracket \leq 2r_S \llbracket X \rrbracket.$$

pour toute norme unitairement invariante.

**Théorème 56.** *Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux opérateurs sous-normaux purs dans  $B(H)$ ,  $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$  leurs complémentaires orthogonaux minimaux respectivement, alors on a*

$$\|(S_1X - XS_2) \oplus (\tilde{S}_1Y - Y\tilde{S}_2)\| \leq \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \|X \oplus Y\|$$

$$\text{avec } \gamma_1 = s_+(ReS_1) \vee s_+(ReS_2) - s_-(ReS_1) \wedge s_-(ReS_2)$$

$$\text{et } \gamma_2 = s_+(ImS_1) \vee s_+(ImS_2) - s_-(ImS_1) \wedge s_-(ImS_2)$$

**Preuve.**

Soient  $N_1$  et  $N_2$  les extensions normales minimales de  $S_1$  et  $S_2$  respectivement

$$\text{telles que } N_1 = \begin{pmatrix} S_1 & R_1 \\ 0 & \tilde{S}_1 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} S_2 & R_2 \\ 0 & \tilde{S}_2 \end{pmatrix}.$$

Comme  $S_1$  et  $S_2$  sont deux opérateurs sous-normaux purs dans  $B(H)$ ,

on peut considérer que  $E = H$  et  $\mathcal{H} = H \oplus H$ . On a donc

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_2 \end{pmatrix} \text{ est une extension normale minimale de } S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix}.$$

D'où  $\tilde{S} = \begin{pmatrix} \tilde{S}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{S}_2 \end{pmatrix}$  est un complémentaire orthogonal minimal de  $S$

(unique à un conjugué unitaire près).

Soient  $X, Y \in \mathcal{I}$ , posons  $\tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , alors

$$\begin{aligned} S\tilde{X} - \tilde{X}S &= \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & S_1X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & XS_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & S_1X - XS_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De la même manière on obtient

$$\tilde{S}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{S}_1Y - Y\tilde{S}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après le théorème (53), on a

$$\begin{aligned} & \llbracket \begin{pmatrix} 0 & S_1X - XS_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & \tilde{S}_1Y - Y\tilde{S}_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rrbracket \leq \\ & \leq 2r_S \llbracket \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rrbracket \\ & \leq \gamma \llbracket \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rrbracket \end{aligned}$$

$$\text{avec } \gamma = \sqrt{(s_+(ReS) - s_-(ReS))^2 + (s_+(ImS) - s_-(ImS))^2}.$$

Or

$$\begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc on aura

$$\llbracket \begin{pmatrix} 0 & X \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rrbracket = \llbracket \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rrbracket.$$

On peut donc écrire l'inégalité précédente sous la forme

$$\begin{aligned} & \llbracket \begin{pmatrix} S_1X - XS_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \tilde{S}_1Y - Y\tilde{S}_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rrbracket \leq \\ & \leq \gamma \llbracket \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rrbracket. \end{aligned}$$

Même raisonnement que précédemment avec le théorème de domination de

Ky Fan on obtient

$$\llbracket (S_1X - XS_2) \oplus (\tilde{S}_1Y - Y\tilde{S}_2) \rrbracket \leq \gamma \llbracket X \oplus Y \rrbracket.$$

On termine en remarquant que

$$s_+(ReS) = s_+(ReS_1) \vee s_+(ReS_2), \text{ maximum}$$

et

$$s_-(ReS) = s_-(ReS_1) \wedge s_-(ReS_2), \text{ minimum.}$$

Même chose avec  $ImS$ , d'où le résultat désiré.

**Corollaire 57.** *Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux opérateurs sous-normaux purs dans  $B(H)$ , alors on a*

$$\|(S_1X - XS_2)\| \leq \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2} \|X\|$$

avec  $\gamma_1 = s_+(ReS_1) \vee s_+(ReS_2) - s_-(ReS_1) \wedge s_-(ReS_2)$

et  $\gamma_2 = s_+(ImS_1) \vee s_+(ImS_2) - s_-(ImS_1) \wedge s_-(ImS_2)$

**Preuve.** On utilise la même méthode que dans le corollaire précédent.

**Théorème 58.** *Si  $S_1$  et  $S_2$  sont deux opérateurs sous-normaux purs dans  $B(H)$ , et  $\tilde{S}_1, \tilde{S}_2$  leurs complémentaires orthogonaux minimaux respectivement, alors on a*

$$\max(\|S_1S_2 - S_2S_1\|, \|\tilde{S}_1\tilde{S}_2 - \tilde{S}_2\tilde{S}_1\|) \leq \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2} \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}$$

avec  $\beta_1 = s_+(ReS_1) - s_-(ReS_1)$ ,  $\beta_2 = s_+(ImS_1) - s_-(ImS_1)$

et  $\zeta_1 = s_+(ReS_2) - s_-(ReS_2)$ ,  $\zeta_2 = s_+(ImS_2) - s_-(ImS_2)$

**Preuve.** On peut construire sur  $\mathcal{H} = H \oplus H$  les extensions normales minimales  $N_{S_1}$  et  $N_{S_2}$  de  $S_1$  et  $S_2$  respectivement, de sorte que

$$N_{S_1} = \begin{pmatrix} S_1 & R_1 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix} \text{ et } N_{S_2} = \begin{pmatrix} S_2 & R_2 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}. \text{ Alors}$$

$$N_{S_1}N_{S_2} - N_{S_2}N_{S_1} = \begin{pmatrix} S_1S_2 - S_2S_1 & S_1R_2 + R_1T_2 - S_2R_1 + R_2T_1 \\ 0 & T_1T_2 - T_2T_1 \end{pmatrix}.$$

Avec le même raisonnement que dans la preuve du théorème 53, on obtient

$$\begin{aligned} \|N_{S_1}N_{S_2} - N_{S_2}N_{S_1}\| &\geq \left\| \begin{pmatrix} S_1S_2 - S_2S_1 & 0 \\ 0 & T_1T_2 - T_2T_1 \end{pmatrix} \right\| = \\ &= \max(\|S_1S_2 - S_2S_1\|, \|T_1T_2 - T_2T_1\|) \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\max(\|S_1S_2 - S_2S_1\|, \|T_1T_2 - T_2T_1\|) \leq \|N_{S_1}N_{S_2} - N_{S_2}N_{S_1}\|$$

Mais, on a pour tout couple  $(\lambda, \mu)$  de nombres complexes

$$\begin{aligned} \|N_{S_1}N_{S_2} - N_{S_2}N_{S_1}\| &= \|(N_{S_1} - \lambda I)(N_{S_2} - \mu I) - (N_{S_2} - \mu I)(N_{S_1} - \lambda I)\| \\ &\leq 2\|(N_{S_1} - \lambda I)\| \|(N_{S_2} - \mu I)\| \\ &\leq 2 \inf\|(N_{S_1} - \lambda I)\| \cdot \inf\|(N_{S_2} - \mu I)\| \\ &= 2r_{N_1}r_{N_2} = 2r_{S_1}r_{S_2} \\ &\leq \frac{1}{2}\sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}. \end{aligned}$$

# Chapitre 5

## Commutateur Approximant Généralisé

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre on démontre un résultat d'orthogonalité et on généralise un résultat important de B.P.Duggal [18,Théorème 2.1]. Si  $B(\mathcal{X})$  est l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur un espace de Banach complexe  $\mathcal{X}$  et  $\mathcal{J}(\mathcal{X}) = \{X \in B(\mathcal{X}) : X = X_1 + iX_2, \text{ où } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont hermetiens}\}$ . L'orthogonalité au sens de Birkhoff entre les sous espaces est définie comme suit :

**Définition.** Soient  $\mathcal{Y}$  et  $\mathcal{Z}$  deux sous espace de l'espace de Banach  $\mathcal{X}$  ; on dit que  $\mathcal{Y}$  est orthogonal à  $\mathcal{Z}$  si  $\|y + z\| \geq \|y\|$  pour tout  $y \in \mathcal{Y}$  et  $z \in \mathcal{Z}$ .

Dans ce chapitre on démontre les deux résultats d'orthogonalité au sens de Birkhoff :

$$\|A + B\| \leq \|A + B - [X^*, X]\|$$

$$\text{pour tout } X \in \mathcal{J}(\mathcal{X}) \cap \delta_{A,B}^{-1}(0).$$

et

$$\|AB\| \leq \|AB - [|X|, |X^*]|\|,$$

pour tout  $X \in \Delta_{A,B}^{-1}(0) \cap \Delta_{B,A}^{-1}(0)$ .

## 5.2 Préliminaires

Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach complexe séparable de dimension infinie, et  $B(\mathcal{X})$  dénote l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur  $\mathcal{X}$ . En général on définit une dérivation généralisée sur  $B(\mathcal{X})$  par  $\delta_{A,B}X = AX - XB$ , le cas particulier  $\delta_AX = \delta_{A,A}X = AX - XA$  est la dérivation interne induite par  $A \in B(\mathcal{X})$ , on définit aussi l'opérateur élémentaire  $\Delta_{A,B}X = AXB - X$  pour tous  $A, B$  et  $X$  dans  $B(\mathcal{X})$ .

Évidemment si  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs dans  $B(\mathcal{X})$  tels que  $A = A_1 + iA_2$ ,  $B = B_1 + iB_2$ , alors  $\delta_{A,B} = \delta_{A_1,B_1} + i\delta_{A_2,B_2}$ .

On considère  $\mathcal{J}(\mathcal{X})$  l'ensemble des opérateurs linéaires bornés  $X$  qui admettent des représentations complexes sous la forme  $X = X_1 + iX_2$ , où  $X_1$  et  $X_2$  sont hermitiens, on rappelle que  $h \in B(\mathcal{X})$  est hermitien si l'image numérique

$$V(B(\mathcal{X}), h) = \{f(h) : f \in B(\mathcal{X})^*, f(I) = 1 = \|f\|\}$$

est un sous ensemble de l'ensemble des nombres réels [Bonsall 9, page 8].

On définit aussi l'involution continue linéaire sur  $\mathcal{J}(\mathcal{X})$  l'application qui associe à tout  $X$  l'élément  $X^*$  donné par

$$X^* = X_1 - iX_2, \forall X \in \mathcal{J}(\mathcal{X}) \text{ où } X = X_1 + iX_2.$$

Notre résultat important dans ce chapitre est deux inégalités qui nous donnent la notion d'orthogonalité au sens de Birkhoff.

**Théorème 59.** ([53], Corollaire 8) *Soit  $\{T_n\}$  une suite d'opérateurs normaux qui commutent sur un espace de Banach complexe  $\mathcal{X}$ . Alors*

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} N(T_k)\right) \perp \overline{\sum_{k=1}^{\infty} R(T_k)}.$$

*Si l'espace  $\mathcal{X}$  est réflexif, on obtient*

$$\mathcal{X} = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} N(T_k)\right) \oplus^{\perp} \overline{\sum_{k=1}^{\infty} R(T_k)},$$

*où  $N(T_k)$  et  $R(T_k)$  sont respectivement le noyau et l'image de  $T_k$ .*

**Théorème 60.** (B.P.Duggal [18], Th 2.1) *Si  $\mathcal{J}(\mathcal{X})$  est une algèbre et  $\delta_A^{-1}(0) \subseteq \delta_{A^*}^{-1}(0)$  pour quelques éléments  $A \in \mathcal{J}(\mathcal{X})$ , donc  $\|A\| \leq \|A - [X^*, X]\|$  pour tout  $X \in \mathcal{J}(\mathcal{X}) \cap \delta_A^{-1}(0)$ .*

**Théorème 61.** (B.P.Duggal [18], Th 2.6) *Supposons que  $\Delta_A^{-1}(0) \subseteq \Delta_{A^*}^{-1}(0)$ .*

*Si  $A \in B(H)$  (resp.  $A \in \mathcal{C}_p$ ,  $p$ -classes de Schatten), alors*

$$\|A\| \leq \|A - [|X|, |X^*]|\| \quad \text{pour tout } X \in B(H) \cap \Delta_A^{-1}(0)$$

*resp.*

$$\|A\|_p \leq \|A - [|X|, |X^*]|\|_p \quad \text{pour tout } X \in \mathcal{C}_p \cap \Delta_A^{-1}(0).$$

### 5.3 Quelques résultats

Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach complexe,  $B(\mathcal{X})$  dénote l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur  $\mathcal{X}$  et  $\{A\}', \{B\}'$  les commutant de  $A$  et  $B$  respectivement pour  $A, B \in B(\mathcal{X})$ .

**Lemme 62.** *Si  $A$  et  $B$  sont dans l'espace des opérateurs hermitiens  $\mathcal{H}(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{J}(\mathcal{X})$  sur un espace de Banach  $\mathcal{X}$ , alors la dérivation généralisée  $\delta_{A,B}$  est aussi un opérateur hermitien.*

**Preuve.** Si  $A$  et  $B$  sont hermitiens, alors  $\|exp(itA)\| \leq 1$  et  $\|exp(itB)\| \leq 1$ . On veut démontrer que l'on a aussi  $\|exp(it\delta_{A,B})\| \leq 1$  pour  $t \in \mathbb{R}$  (lemme 11, page 18). On a

$$(exp(it\delta_{A,B}))(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n} \delta_{A,B}^n(X)$$

On peut démontrer par récurrence que

$$\delta_{A,B}^n X = \sum_{k+l=n} (-1)^l C_n^k A^k X B^l,$$

d'où

$$\begin{aligned} exp(it\delta_{A,B})(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} \sum_{k+l=n} (-1)^l C_n^k A^k X B^l \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (it)^n \sum_{k+l=n} \frac{(-1)^l}{k!l!} A^k X B^l \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{k!l!} (it)^{k+l} A^k X B^l \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} A^k X \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-it)^l}{l!} B^l \\ &= exp(itA) X exp(-itB) \end{aligned}$$

d'où

$$\|exp(it\delta_{A,B})\| \leq \|exp(itA)\| \|exp(-itB)\| \leq 1$$

**Lemme 63.** *Si  $A$  et  $B$  sont dans l'espace des opérateurs normaux  $\mathcal{N}(\mathcal{X})$  sur un espace de Banach  $\mathcal{X}$ , alors la dérivation généralisée  $\delta_{A,B}$  est aussi un opérateur normal.*

**Preuve.** Si  $A$  et  $B$  sont dans l'espace des opérateurs normaux  $\mathcal{N}(\mathcal{X})$ , alors  $A = A_1 + iA_2$ , tels que  $A_1$  et  $A_2$  sont hermitiens et commutent et  $B = B_1 + iB_2$  avec  $B_1$  et  $B_2$  sont hermitiens et commutent aussi. On a pour tout  $X \in B(\mathcal{X})$

$$\begin{aligned} \delta_{A,B}(X) &= AX - XB \\ &= (A_1 + iA_2)X - X(B_1 + iB_2) \\ &= (A_1X - XB_1) + i(A_2X - XB_2) \\ &= \delta_{A_1,B_1}(X) + i\delta_{A_2,B_2}(X). \end{aligned}$$

Donc  $\delta_{A,B} = \delta_{A_1,B_1} + i\delta_{A_2,B_2}$ , on sait que  $\delta_{A_1,B_1}$  et  $\delta_{A_2,B_2}$  sont hermitiens d'après le lemme précédent car les  $A_i$  et les  $B_i$  pour  $i = 1, 2$  sont hermitiens, donc il reste à vérifier la commutation.

$$\begin{aligned} \delta_{A_1,B_1}\delta_{A_2,B_2}(X) &= \delta_{A_1,B_1}(A_2X - XB_2) \\ &= A_1A_2X - A_1XB_2 - A_2XB_1 + XB_2B_1 \\ &= (A_2A_1X - A_2XB_1) - (A_1XB_2 - XB_1B_2) \\ &= A_2\delta_{A_1,B_1}(X) - \delta_{A_1,B_1}(X)B_2 \\ &= \delta_{A_2,B_2}\delta_{A_1,B_1}(X), \end{aligned}$$

d'où la commutation de  $\delta_{A_1,B_1}$  et  $\delta_{A_2,B_2}$ , donc  $\delta_{A,B}$  est bien dans  $\mathcal{N}(B(\mathcal{X}))$ .

**Lemme 64.** Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach, pour lequel  $\mathcal{J}(\mathcal{X})$  est une algèbre.

Alors, pour tout couple  $(A, B) \in (\mathcal{J}(\mathcal{X}))^2$  on a  $(AB)^* = B^*A^*$ .

**Preuve.** Comme  $A$  et  $B$  appartiennent à  $\mathcal{J}(\mathcal{X})$ ; on peut les écrire sous la forme  $A = A_1 + iA_2$  et  $B = B_1 + iB_2$  avec  $A_1, A_2, B_1$  et  $B_2$  hermitiens.

Il vient

$$\begin{aligned} AB &= (A_1 + iA_2)(B_1 + iB_2) \\ &= A_1B_1 - A_2B_2 + i(A_2B_1 + A_1B_2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} B^*A^* &= (B_1 - iB_2)(A_1 - iA_2) \\ &= B_1A_1 - B_2A_2 - i(B_2A_1 + B_1A_2). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} AB + B^*A^* &= (A_1B_1 + B_1A_1) - (A_2B_2 + B_2A_2) + \\ &\quad + i(A_2B_1 - B_1A_2) + i(A_1B_2 - B_2A_1) \end{aligned}$$

Comme les termes  $(A_1B_1 + B_1A_1)$  et  $(A_2B_2 + B_2A_2)$  sont dans  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$  l'ensemble des hermitiens sur  $\mathcal{X}$  parce que  $J(\mathcal{X})$  est une algèbre (d'après F. Bonsall et Duncan " Numerical range of operators on normed spaces and of elements of normed algebras" théorème 3 page 59) et les termes  $i(A_2B_1 - B_1A_2)$  et  $i(A_1B_2 - B_2A_1)$  sont aussi dans  $\mathcal{H}(\mathcal{X})$  (d'après le premier résultat du F. Bonsall et J. Duncan, même référence, lemme 4 page 47). On voit donc que  $AB + B^*A^* \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$  comme somme de quatre hermitiens.

En remplaçant  $B$  par  $iB$ , on voit que  $i(AB - B^*A^*) \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$ .

Il suffit alors d'écrire

$$AB = \frac{1}{2}(AB + B^*A^*) + i\frac{i}{2}(B^*A^* - AB).$$

avec  $\frac{1}{2}(AB+B^*A^*) \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$  et  $\frac{i}{2}(B^*A^*-AB) \in \mathcal{H}(\mathcal{X})$  pour calculer  $(AB)^*$ .

Il vient

$$(AB)^* = \frac{1}{2}(AB+B^*A^*) - i\frac{i}{2}(B^*A^*-AB) = B^*A^*.$$

**Théorème 65.** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach tel que  $\mathcal{J}(\mathcal{X})$  est une algèbre.*

*Supposons que  $\delta_{A,B}^{-1}(0) \subseteq \delta_{A^*,B^*}^{-1}(0)$  pour un couple d'opérateurs  $(A, B)$*

*dans  $\mathcal{J}(\mathcal{X})$  et que  $X = (X_1 + iX_2) \in \mathcal{J}(\mathcal{X}) \cap \delta_{A,B}^{-1}(0)$  avec  $X_1, X_2 \in$*

*$\delta_{(B-A),(A-B)}^{-1}(0)$ , alors on a*

$$\|A+B\| \leq \|A+B - [X^*, X]\|.$$

**Preuve.** Soit  $X \in \mathcal{J}(\mathcal{X}) \cap \delta_{A,B}^{-1}(0)$ , alors  $\delta_{A,B}(X) = 0$ , d'où d'après les hypothèses on aura  $\delta_{A^*,B^*}(X) = 0$ , et si on prend l'adjoint de deux cotés de cette dernière égalité et en utilisant le lemme précédent on obtient  $\delta_{B,A}(X^*) = 0$ .

D'une part on a

$$\begin{aligned} \delta_{A+B}(X) - \delta_{B,A}(X) &= (A+B)X - X(A+B) \\ &= AX + BX - XA - XB - BX + XA = AX - XB = 0 \end{aligned}$$

D'où

$$\delta_{A+B}(X) - \delta_{B,A}(X) = 0. \quad (5.1)$$

D'autre part on a

$$X^*B - AX^* + BX^* - X^*A + AX^* - X^*B = 0,$$

car  $BX^* - X^*A = 0$ , d'où  $(B - A)X^* - X^*(A - B) + (AX^* - X^*B) = 0$ , i.e  $\delta_{(B-A),(A-B)}(X^*) + \delta_{A,B}(X^*) = 0$ . Comme  $X_1, X_2 \in \delta_{(B-A),(A-B)}^{-1}(0)$ , alors  $X^* \in \delta_{(B-A),(A-B)}^{-1}(0)$  et il vient donc  $\delta_{A,B}(X^*) = 0$ . i.e.  $X^* \in \delta_{(A,B)}^{-1}(0)$ . Alors d'après les hypothèses  $X^* \in \delta_{(A^*,B^*)}^{-1}(0)$ , i.e  $A^*X^* - X^*B^* = 0$ .

Si on prend l'adjoint dans cette dernière égalité et en utilisant le lemme précédent autre fois on obtient  $XA - BX = 0$  et donc  $\delta_{B,A}(X) = 0$ . En revenant à (5.1) on obtient  $\delta_{A+B}(X) = 0$ ; on a également  $\delta_{A+B}(X^*) = 0$  d'où  $X$  est bien dans  $\delta_{A+B}^{-1}(0)$ .

$$\text{i.e. } \delta_{X_1}(A + B) = \delta_{X_2}(A + B) = 0.$$

D'après ([53] corollaire 8)

$$\|A + B\| \leq \min \{ \|A + B - \delta_{X_1}(Y)\|, \|A + B - \delta_{X_2}(Y)\| \}$$

pour tout  $Y \in J(\mathcal{X})$ . En choisissant  $Y = 2iX_2$  dans  $\delta_{X_1}(Y)$  il vient  $\delta_{X_1}(Y) = [X^*, X]$ , et par suite

$$\|A + B\| \leq \|A + B - [X^*, X]\|.$$

En faisant  $A = B = \frac{1}{2}I$  où  $I$  est l'identité, on obtient le corollaire suivant

**Corollaire 66.** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace de Banach, si  $\mathcal{J}(\mathcal{X})$  est une algèbre, alors on a*

$$\|[X^*, X] - I\| \geq 1 \text{ pour tout } X \in \mathcal{J}(\mathcal{X}).$$

**Remarque 67.** Avec Le théorème 65, on récolte le théorème 2.1 de [Duggal 18] comme cas particulier.

**Théorème 68.** Soient  $A$  et  $B$  dans l'algèbre  $B(\mathcal{H})$ , si  $\Delta_{AB}^{-1}(0) \subseteq \Delta_{(AB)^*}^{-1}(0)$

alors pour tout  $X \in \Delta_{A,B}^{-1}(0) \cap \Delta_{B,A}^{-1}(0) \cap B(\mathcal{H})$  on a

$$\|AB\| \leq \|AB - [|X|, |X^*]|\|,$$

**Preuve.** On démontre que  $\Delta_{A,B}^{-1}(0) \cap \Delta_{B,A}^{-1}(0)$  est inclu dans  $\Delta_{AB}^{-1}(0)$ .

Soit  $X \in \Delta_{A,B}^{-1}(0) \cap \Delta_{B,A}^{-1}(0)$ , alors  $AXB - X = 0$  et  $BXA - X = 0$ .

En composant cette dernière égalité par  $A$  à gauche, puis par  $B$  à droite on obtient  $ABXAB - AXB = 0$ , mais  $AXB = X$ , d'où  $ABXAB - X = 0$ , et par conséquent  $X \in \Delta_{AB}^{-1}(0)$ .

Donc si un élément  $X \in \Delta_{A,B}^{-1}(0) \cap \Delta_{B,A}^{-1}(0)$ , alors il est forcément dans  $\Delta_{AB}^{-1}(0)$ , en utilisant les hypothèses on obtient  $X \in \Delta_{(AB)^*}^{-1}(0)$ .

En appliquant ([18] Duggal, Th 2.6) on obtient

$$\|AB\| \leq \|AB - [|X|, |X^*]|\|.$$

Si  $\mathcal{X}$  est un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie,  $GL(\mathcal{X})$  dénote l'ensemble des éléments inversibles dans  $B(\mathcal{X})$ , on obtient le résultat suivant

**Théorème 69.** Soient  $A, B \in B(\mathcal{X})$ , donc les assertions suivantes sont équivalentes

(i) L'équation  $AX - XB = I$ , où  $I$  est l'élément identité dans  $B(\mathcal{X})$ , admet une solution (i.e.  $I \in R(\delta_{A,B})$ ).

(ii) Il existe un opérateur inversible  $W$  dans  $R(\delta_{A,B})$  qui commute avec  $A$

ou  $B$ .

(iii)  $R(\delta_{A,B}) \supset GL(\mathcal{X}) \cap [\{A\}' \cup \{B\}']$ .

**Preuve.** (iii)  $\implies$  (ii) est évidente car

$$GL(\mathcal{X}) \cap [\{A\}' \cup \{B\}'] \neq \emptyset$$

à cause du fait

$$I \in GL(\mathcal{X}) \cap [\{A\}' \cup \{B\}'] .$$

(ii)  $\implies$  (i)

Soit  $W \in GL(\mathcal{X}) \cap [\{A\}' \cup \{B\}']$  et  $X \in B(\mathcal{X})$  tel que  $AX - XB = W$ .

Supposons que  $W \in \{A\}'$  et soit  $Y = W^{-1}X$ , donc

$$\begin{aligned} AY - YB &= AW^{-1}X - W^{-1}XB = \\ &= W^{-1}(AX - XB) = W^{-1}W = I. \end{aligned}$$

(i)  $\implies$  (iii) Soit  $X \in B(\mathcal{X})$  tel que  $AX - XB = I$  et soit

$$W \in GL(\mathcal{X}) \cap [\{A\}' \cup \{B\}'] ,$$

supposons que  $W \in \{B\}'$  et soit  $Y = XW$ , donc il vient

$$AY - YB = AXW - XWB = (AX - XB)W = W,$$

d'où  $W \in R(\delta_{A,B})$ .

# Conclusion

Le domaine de l'analyse fonctionnelle représente une partie très intéressante des mathématiques fondamentales, mais aussi des mathématiques appliquées telles que la théorie des approximations et la résolution des équations opératoriels, qui sont des techniques indispensables pour les chercheurs dans plusieurs domaines des sciences et techniques.

Dans ce travail on a étudié :

1. l'équation d'opérateurs  $AX - XB = C$  où  $A$  et  $B$  sont des opérateurs bornés agissant sur l'espace de Hilbert, en généralisant les travaux de E.Roth [39] et M.Rosenblum [37].
2. Les équations d'opérateurs  $AXB - XD = E$  et  $AXB - CXD = E$  où  $A, B, C, D$  et  $E$  sont des opérateurs bornés sur l'espace de Hilbert. A notre connaissance ces équations n'ont pas été résolues dans la littérature.
3. La relation entre les solutions de ces équations et les données, ce qui nous sert à étudier la stabilité des solutions, et sous quelles conditions on peut assurer l'existence et l'unicité de ces solutions.
4. Des nouvelles inégalités de dérivations pour des opérateurs sous normaux sont également démontrées pour les normes unitairement invariantes (voir

Chapitre 4).

5. La généralisation de quelques résultats qui sont relatifs à l'orthogonalité au sens de Birkhoff dans les espaces de Banach (voir Chapitre 5).

# Bibliographie

- [1] [1] J. H. Anderson, On Normal Derivation, Proc. Amer. Math. Soc. 38 (1973), 135-140.
- [2] J. H. Anderson, *Derivation ranges and the identity*, Bull. Amer. Math. Soc. 79(1973), 705-708.
- [3] J. H. Anderson, C. Foias, *Properties which share with normal derivation and related operators*, Pacific J. Math. 61(1976), 313-325.
- [4] W. Arendt, F. Rabiger, A. Sourour : *Spectral Properties of the operator equation  $AX - XB = Y$* , Quart. J. Math. Oxford, 45 :2(1994), 133-149.
- [5] A. Bachir and A. Sagres, *A generalized Fuglede-Putnam theorem and orthogonality*. Aust. J. Math. Anal. Appl. 1 (2004), n°1, art. 12, 5 pp. (electronic).
- [6] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, springer-Verlag, newyork, (1997), graduate texts in mathematics.
- [7] R. Bhatia, P. Rosenthal , *How and why to solve the operator equation  $AX - XB = Y$* , Bull. london. Math. Soc. 29 (1997), 1-21.
- [8] G. Birkhoff, *Orthogonality in linear metric spaces*, Duke Math. J. 1(1935), 169-172.

- [9] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical range 1*, Lond. Math. Soc. Lecture Notes Series, 2(1971).
- [10] G. Cassier, *Generalized Toeplitz operators, restriction to invariant subspaces and similarity problems*, Journal of Operator theory, 53 :01 (2005), p. 49-89.
- [11] G. Cassier, H. Mahzouli and H. Zerouali, *Generalized Toeplitz operators and cyclic vectors*, Operator Theory : Advances and Applications, 153 (2004), p. 103-122.
- [12] G. Cassier and A. Mansour, *On the generalized Sylvester equation*. (En préparation).
- [13] G. Cassier and A. Mansour, *Some inequalities for derivations induced by subnormal operators*. (En préparation).
- [14] H. J. Chouan, *On the generalized quasi-hyponormal operator*, J. Math. Wuhan 5 (1985), 23-32.
- [15] K. E. Chu, *Explicit solution of the matrix equation  $AXB - CXD = E$* , Linear algebra and its application, 93 :93-105 (1987).
- [16] J. B. Conway, *A Course in Operator Theory*, American Mathematical Society, Providence R.I (1999), Graduate Studies in Mathematics, Volume(21) .
- [17] R. G. Douglas, *On majorization, factorization and range inclusion of operators on Hilbert spaces*, proc. Amer. Math.Soc., 17 (1966), 413-415.

- [18] B. P. Duggal, *On selfcommutator approximants*, KYUNGPOOK Math. J. 49(2009), 1-6.
- [19] B. P. DUGGAL, *Putnam-Fuglede theorem and the range-kernel orthogonality of derivations*, I. JMMS 27 :9 (2001), 573-582.
- [20] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators*, part I, II et III, Interscience, Newyork, 1964.
- [21] H. Flanders and H. K. Wimmer, *On the matrix equation  $AX - XB = C$  and  $AX - YB = C$* , SIAM. J. Appl. Math. 32 (1977), 707-710.
- [22] B. Fuglede, *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. Nat. Acad. Sci.USA, 36(1950), 35-40.
- [23] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jerse, (1967).
- [24] E. Heinz, *Beitrage zur Störungstheorie der Spektralzerlegung*, Math. Ann. 123 (1951) 415 - 438.
- [25] V. Hernandez and M. Gasso, *The solution of the matrix equation  $AXB - CXD = E$  and  $(YA - DZ, YC - BZ) = (E, F)$* ; Linear algebra and its application 121 :333-344 (1989).
- [26] F. Kittaneh, *Inequalities for commutators of positive operators*; Journal of Functional Analysis 250(1) :132-143, (2007).
- [27] F. Kittaneh, *Norm Inequalities for commutators of normal operators*; Int. Series of Numerical Mathematics Vol 157(2008), 147 – 154.

- [28] G. Lumer and M. Rosenblum, *linear operator equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 10(1959), 32-41
- [29] P. J. Maher, *commutator approximants*, Proc. Amer. Math. Soc. 115 (1992), 995-1000.
- [30] P. J. Maher, *Self-Commutator approximants*, Proc. Amer. Math. Soc. 134 N 1, (2005), 157-165.
- [31] A. Mansour, *Solvability of  $AXB - CXD = E$  in the operator algebra  $B(H)$* , Lobachevskii journal of mathematics, vol.31, N°3 (2010), 257-261.
- [32] A. Mansour, S. Bouzenada, *On norm estimate of commutator between subnormal operators*, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 4, 2010, n 13, 601 - 606 .
- [33] S. Mecheri, *Finite operators*, Demonstratio Mathematica, 37 (2002), 357-366.
- [34] S. Mecheri, *Relation between best approximant and orthogonality in  $C_1$ -classes*, J. of Inequ. in Pure and Appl. Math. Vol.7, Issue 2, Article 57 (2006).
- [35] S. Mecheri, A. Mansour, *On the operator equation  $AXB - XD = E$* , Lobachevskii journal of mathematics, vol.30, N°3 (2009), 224-228.
- [36] M. Rosenblum, *On the operator equation  $AX - XB = Q$* , Duke. Math. J. 23 (1956), 263-269.

- [37] M. Rosenblum, *On the operator equation  $AX - XB = Q$  with self-adjoint  $A$  and  $B$* , Proc. Amer. Math. Soc. 20(1969), 115-120.
- [38] H. Robin, L. W. Young, *On the bounded closure of the range of an operator*, Proc. Amer. Math. Soc, 125 (1997), n°8, 2313-2318.
- [39] W. E. Roth, *The equations  $AX - YB = Q$  and  $AX - XB = Q$  in matrices*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 302-316.
- [40] A. Schweinsberg, *The operator equation  $AX - XB = C$  with normal  $A$  and  $B$* , Pac. J. Math. 102(1982), 447.
- [41] A. M. Sinclair, *Eigenvalues in the boundary of the numerical range*, Pac. J. Math. 35(1970), 231-234.
- [42] J. G. Stampfli, *The norm of a derivation*, Pacific. J. Math. 24 (1970), 209-214.
- [43] J. G. Stampfli And B.L.Wadhwa, *An asymmetric Putnam-Fuglede theorem for dominant operators*, Indiana Univ. Math. J. 25 (1976), 359-365.
- [44] F. Takayuki, *Invitation to linear operators*, Taylor and Francis. London, (2001).
- [45] F. Takayuki, *A note on the arithmetic-geometric mean inequality for every unitarily invariant matrix norm*; Linear algebra and its application 208/209 :223-228 (1994).
- [46] A. Turnsek, *Generalized Anderson's inequality*, J. Math. Anal. Appl. 263 (2001), 121-134.

- [47] Vu.Q.P, *The operator equation  $AX - XB = C$  with unbounded operators  $A$  and  $B$  and related abstract Cauchy problems*, Math. Z. 208(1991), 567-588.
- [48] R. Walter, *Analyse réelle et complexe, cours et exos*, Dunod, Paris (1998).
- [49] G. Weiss, *The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert-Schmidt class. II*, J. Operator theory 5 (1981), 3-16.
- [50] H. Wielandt, *Über die Unbeschränktheit der Operatoren der Quantenmechanik*, (German) Math. Ann. 121 (1949), 21.
- [51] J. P. Williams, *Finite operators*, Pr. Am.Math.Soc. 26 (1970), 129-135.
- [52] A. Wintner, *The unboundedness of quantum mechanical matrices*, Phys. Rev. 71 (1947), 738-739.
- [53] C. Yuan and Sen Shaw, *An abstract ergodic theorem and some inequalities for operators on Banach spaces*, Pr. Am. Math. Soc. 125(1997), 111-119.