



HAL
open science

Contributions à l'étude des groupes quantiques de permutations

Arthur Chassaniol

► **To cite this version:**

Arthur Chassaniol. Contributions à l'étude des groupes quantiques de permutations. Mathématiques générales [math.GM]. Université Blaise Pascal - Clermont-Ferrand II, 2016. Français. NNT : 2016CLF22709 . tel-01412055

HAL Id: tel-01412055

<https://theses.hal.science/tel-01412055>

Submitted on 7 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'Ordre : D.U. 2709

UNIVERSITÉ BLAISE PASCAL
U.F.R. Sciences et Technologies
**ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES
FONDAMENTALES**
N° 837

THÈSE

Présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'UNIVERSITÉ

Spécialité :
MATHÉMATIQUES FONDAMENTALES

Par **Arthur CHASSANIOL**

**Contributions à l'étude des groupes
quantiques de permutations**

Soutenue publiquement le 28 juin 2016, devant la commission d'examen composée de :

Président du jury :	François Dumas	Professeur	
Membres du jury :	Saad Baaj	Professeur	
	Teodor Banica	Professeur	
	Julien Bichon	Professeur	(Directeur)
	Pierre Fima	Maître de conférence (HDR)	
	Roland Vergnioux	Maître de conférence (HDR)	

Rapporteurs : Teodor Banica
Roland Vergnioux

Remerciements

Julien Bichon a été le directeur de thèse idéal pour moi, en plus de m'avoir fait découvrir le monde des groupes quantiques via ce sujet de thèse, je le remercie surtout d'avoir compris mon fonctionnement et de l'avoir accepté.

Je souhaite remercier Teodor Banica et Roland Vergnioux de m'avoir fait l'honneur de lire mon travail et d'avoir accepté de rapporter ma thèse. De plus, je remercie sincèrement Saad Baaj, François Dumas et Pierre Fima d'avoir accepté d'être présents à leurs cotés au sein de mon jury de thèse.

Ce manuscrit est l'aboutissement d'une formation aux mathématiques initiée dès mon plus jeune âge. Je ne donnerai pas une liste exhaustive de ces professeurs qui m'ont tous apporté à leur manière mais je tenais tout de même à remercier particulièrement M. Gleize et M. Dugour qui tour à tour, au collège puis au lycée, ont animé et nourri intensément ma passion pour les mathématiques ; et surtout M. Gugger, professeur en MPSI qui m'a totalement fasciné dans sa manière d'enseigner, c'est un véritable artiste de l'enseignement entièrement focalisé sur la réussite de ses élèves et sur la notion d'humilité.

Je souhaite aussi remercier l'ensemble des membres du laboratoire de mathématiques qui m'ont accueilli avec bienveillance bien que mon engagement au sein de l'association Doct'Auvergne ne m'ait pas permis de m'investir réellement dans la vie de ce laboratoire. Je souhaite aussi remercier les enseignants-chercheurs qui m'ont permis d'effectuer mes missions d'enseignements dans les meilleures conditions.

Dans mon parcours dans le monde de la recherche en mathématiques, outre Julien Bichon, deux mathématiciens ont joué un rôle très important : François Dumas, qui m'a reçu très tôt pour me parler de ce monde fascinant et qui m'a présenté au second, Simon riche, qui en plus de m'avoir encadré dans mon premier stage de recherche en L3 m'a aidé sans commune mesure dans ma recherche de thèse. Je les remercie tous les deux infiniment.

Je remercie aussi les doctorants du laboratoire, en particulier la bonne humeur en toute circonstance de Yacouba Samoura, mais aussi l'ensemble des doctorants des cinq écoles doctorales du bassin clermontois. Ce sont ces échanges interdisciplinaires qui m'ont beaucoup apporté pendant ces années de doctorat et m'ont conduit à devenir président de l'association Doct'Auvergne dont je suis très heureux du développement.

Je souhaite aussi remercier un ami avec qui j'ai passé un nombre d'heures incalculable à parler de mathématiques d'une manière unique ces 7 dernières années, des conversations surprenantes, profondes, drôles, pertinentes, extraordinaires, parfois surnaturelles mais tellement enrichissantes, merci Xavier !

Et pour finir si j'ai la chance d'en être adu là c'est que je suis entouré d'une famille incroyable, mes parents, mon frère, ma soeur, Isabelle, Camille et surtout mes grand-mères, je vous embrasse tous.

À mes grand-mères

Contributions à l'étude des groupes quantiques de permutations

Résumé

Dans cette thèse nous étudions le groupe quantique d'automorphismes des graphes finis, introduit par Banica et Bichon.

Dans un premier temps nous montrerons un théorème de structure du groupe quantique d'automorphismes du produit lexicographique de deux graphes finis réguliers, qui généralise un résultat classique de Sabidussi. Ce théorème donne une condition nécessaire et suffisante pour que ce groupe quantique s'exprime comme le produit en couronne libre des groupes quantiques d'automorphismes de ces deux graphes.

Dans un deuxième temps, nous expliciterons certaines améliorations de résultats de Banica, Bichon et Chenevier permettant d'obtenir des critères de non symétrie quantique sur les graphes, à l'aide des outils développés par les auteurs susmentionnés.

Enfin, pour poursuivre ces recherches, nous développerons une autre méthode utilisant la dualité de Tannaka-Krein et inspirée de l'étude des groupes quantiques compacts orthogonaux par Banica et Speicher. Celle-ci nous permettra, à l'aide d'une étude orbitale approfondie des graphes sommets-transitifs, d'énoncer une condition suffisante pour qu'un graphe ait des symétries quantiques ; condition qui a vocation à être aussi nécessaire mais ceci reste une conjecture à ce stade.

Mots clés

Groupes quantiques, groupes quantiques d'automorphismes, symétries quantiques, produit lexicographique, théorie des graphes, algèbre non commutative.

Contributions to the study of quantum permutation groups

Abstract

In this thesis we study the quantum automorphism group of finite graphs, introduced by Banica and Bichon.

First we will prove a theorem about the structure of the quantum automorphism group of the lexicographic product of two finite regular graphs. It is a quantum generalization of a classical result of Sabidussi. This theorem gives a necessary and sufficient condition for this quantum group to be described as the free wreath product of the quantum automorphism groups of these two graphs.

Then, we will give some improvement of Banica, Bichon and Chenevier results, to obtain a quantum non-symmetry criteria on graphs, using tools developed by the above authors.

Finally, to continue this research, we will describe another method using Tannaka-Krein duality and inspired by the study of orthogonal compact groups by Banica and Speicher. This will enable us, with a thorough orbital study of vertex-transitive graphs, to state a sufficient condition for a graph to have quantum symmetries; condition which is intended to be also necessary but this remains conjecture at this point.

Keywords

Quantum groups, quantum automorphism group, quantum symmetry, lexicographic product, graph theory, noncommutative algebra.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	vii
Introduction	1
1 Rappels	7
1.1 Groupes quantiques compacts	7
1.2 Représentations des groupes quantiques S_n^+	10
2 Groupes quantiques d'automorphismes d'un graphe	13
2.1 Définitions et premières propriétés	13
2.2 L'union de deux graphes finis	16
2.3 Deux produits commutatifs sur les graphes	17
3 Etude du produit lexicographique de deux graphes finis	21
3.1 Le cas classique	22
3.2 Le cas quantique	23
3.3 Démonstration du lemme clé	32
4 Les symétries quantiques des graphes circulants	41
4.1 Les graphes circulants	41
4.2 Le cas $n = 13$	46
4.3 Un résultat asymptotique de non symétrie quantique	49
4.3.1 Type d'un graphe circulant	49
4.3.2 Type et symétries quantiques lorsque n est premier	49
4.3.3 Les graphes de type 4	53
4.3.4 Les graphes de type 6	54
4.3.5 Le graphe $C_{13}(3, 4)$	57
4.4 Le cas $\text{Aut}(X) \simeq \mathcal{D}_n$	60

5	Orbites, espaces d'entrelacements et symétries quantiques	63
5.1	L'espace \mathcal{T}^X	63
5.2	L'espace $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X$	67
5.3	Dualité de Tannaka-Krein	72
5.3.1	Pour les groupes de permutations	72
5.3.2	Pour les groupes quantiques de permutations	74
5.3.3	Bilan	79
5.4	Graphes \mathcal{B} -cohérents, \mathcal{B} -clos et applications	80
5.4.1	Définitions et premiers résultats	80
5.4.2	Un critère pour être \mathcal{B} -clos	84
5.4.3	Applications aux p -graphes avec p premier	87
5.4.4	Applications dans le cas général	98
6	Bilan	107
6.1	Résumé des résultats	107
6.2	Les Conjectures	109
6.3	Perspectives, questions ouvertes	109
	Annexe : Programmes Mapple	111
	Bibliographie	117

Introduction

Dans un exposé au Congrès international des mathématiciens en 1986, Drinfel'd définit la catégorie des groupes quantiques comme la catégorie opposée à celle des algèbres de Hopf (non nécessairement commutatives). À la même époque, Woronowicz introduisit la notion de groupe quantique compact. Ensuite Wang donnera de nombreux exemples de groupes quantiques compacts, dits groupes quantiques compacts *libres*. Il répondit notamment à la question d'Alain Connes en 1995 qui posait le problème suivant : "Quel est le groupe quantique d'automorphismes d'un espace ?" (ici la notion d'espace est à prendre au sens de la géométrie non commutative [18]) dans le cas où l'espace est l'ensemble $\{1, \dots, n\}$. En effet la catégorie des groupes agissant sur $\{1, \dots, n\}$ a un objet universel : le groupe de permutations \mathbb{S}_n , et Wang découvrit en 1998 qu'en remplaçant "groupes" par "groupes quantiques compacts" la catégorie résultante a aussi un objet universel : le *groupe quantique de permutations* S_n^+ . Pour $n = 1, 2, 3$ on a en fait simplement, $S_n^+ = \mathbb{S}_n$ mais pour $n \geq 4$ non seulement S_n^+ n'est pas un groupe classique mais en plus il est infini.

Les motivations originales pour étudier cet objet mathématique (expliquées dans [3, 4, 5, 9]) viennent de certains aspects combinatoires des sous-facteurs, des probabilités libres et des liens qu'il y a entre ces groupes quantiques de permutations et les modèles "2-box", "spin-model" et "meander" en mécanique statistique (voir [16, 19, 21]).

Ce que l'on connaît le mieux de S_n^+ est sa théorie des représentations puisque peu de temps après la découverte de Wang, Banica montra que les groupes quantiques de permutations avaient les mêmes règles de fusion que $SO(3)$, dans [2]. Cela lui permit de résoudre un certain nombre de questions et en particulier de montrer que S_n^+ n'est pas moyennable pour $n \geq 5$. Le cas $n = 4$ est alors assez singulier puisqu'avec Bichon ils ont pu montrer que $S_4^+ \simeq SO_{-1}(3)$, où $SO_{-1}(3)$ est une q -déformation de $SO(3)$ pour $q = -1$ (voir [22]), résultat qu'ils ont utilisé pour classifier l'ensemble des sous-groupes de S_4^+ dans [8]. Le cas $n \geq 5$ est certainement beaucoup plus difficile à comprendre à cause du caractère non moyennable. Notons que S_n^+ est cependant K -moyennable, d'après un travail récent de Voigt ([33]).

Les travaux sur S_n^+ , et sur les groupes quantiques libres en général, se concentrent souvent sur les modèles matriciels ([9, 10]), les actions ergodiques ([15, 30]) et l'analyse harmonique ([31, 32]) mais l'étude des sous-groupes de S_n^+ reste un problème important. En plus du cas $n = 4$ ([8]) ce problème a été étudié dans [3, 4, 5, 6, 7, 13, 14] par Banica et Bichon. La notion importante qui permet d'obtenir une famille naturelle de sous-groupes de S_n^+ est celle de *groupe quantique d'automorphismes* d'un graphe fini. De la même manière que le groupe d'automorphismes d'un graphe X à n sommets, noté $\text{Aut}(X)$, est un sous-groupe de \mathbb{S}_n ; Banica et Bichon définissent la notion de groupe quantique d'automorphismes d'un tel graphe, noté \mathbb{G}_X , qui est par construction un sous-groupe quantique de S_n^+ . Ces groupes quantiques agissent naturellement sur $\{1, \dots, n\}$ et c'est notamment en exploitant les propriétés de cette action que Banica, Bichon et Chenevier vont donner de nombreux résultats sur ces groupes quantiques d'automorphismes dans [5, 6, 7, 14].

Les définitions de S_n^+ et \mathbb{G}_X sont abstraites et correspondent respectivement aux algèbres de Woronowicz notées $A_s(n)$ et $A(X)$.

Deux questions principales sont alors au centre de nos recherches.

1. Par définition on a toujours $\text{Aut}(X) \subset \mathbb{G}_X \subset S_n^+$ mais à quelle(s) condition(s) sur X cette première inclusion est-elle une égalité? Cela, de manière équivalente, revient à savoir quand est-ce que $A(X)$ est commutative.
2. Lorsque $\text{Aut}(X) \subsetneq \mathbb{G}_X \subsetneq S_n^+$ quelle est la structure et quelles sont les propriétés de \mathbb{G}_X ?

La deuxième question a surtout été abordée dans le cas des graphes qui s'écrivent sous forme de produit (direct, cartésien, lexicographique..) de deux graphes plus petits. L'objectif est alors de trouver des conditions qui permettent d'écrire $A(X * Y)$ en fonction de $A(X)$ et $A(Y)$ lorsque $*$ désigne un produit sur les graphes. Dans cette thèse nous nous intéresserons tout particulièrement au cas du produit lexicographique $X \circ Y$.

Une partie importante de nos recherches est ensuite consacrée à la première question. Dans un premier temps nous avons cherché à y répondre en utilisant les méthodes développées par Banica, Bichon et Chenevier mais plusieurs types de graphes leur résistaient fortement, en particulier le graphe de Petersen et les graphes circulants de type grand par rapport au nombre de sommets. Il fallait donc mettre en oeuvre un nouveau moyen d'étudier les symétries quantiques de ces graphes. C'est la lecture de l'article [11] qui nous a beaucoup inspiré. Dans celui-ci les auteurs utilisent la dualité de Tannaka-Krein pour étudier les groupes quantiques compacts orthogonaux, déformations de groupes de Lie orthogonaux, contenant S_n^+ . La dualité de Tannaka-Krein leur a permis d'établir une correspondance bijective entre ces groupes quantiques et des sous-espaces d'espaces d'entrelaceurs décrits à l'aide de partitions non croisées de $\{1, \dots, k\}$. Nous avons donc

utilisé cette même idée pour l'étude des symétries quantiques des graphes finis sommets-transitifs, ce qui revient cette fois à considérer des espaces qui contiennent ces espaces d'entrelaceurs décrits par les opérateurs associés à ces partitions non croisées. La description de ces espaces est alors intimement liée à l'étude des orbites des actions diagonales de $\text{Aut}(X) \subset \mathbb{S}_n$ sur $[1, n]^{\times k}$. Nous pensons même qu'il existe une manière très concrète de les décrire à l'aide d'opérateurs associés à des partitions de type "colorées".

Les contributions principales de cette thèse sont les résultats suivants.

- i. La généralisation d'un résultat classique de Sabidussi [29], à savoir une condition nécessaire et suffisante pour que le groupe quantique d'automorphismes d'un produit lexicographique de graphes finis réguliers soit isomorphe au produit en couronne libre des groupes quantiques d'automorphismes de ces graphes (théorème 3.2.6). Ce résultat a fait l'objet de l'article [17], publié dans le *Journal of Algebra*.
- ii. Diverses améliorations ou variations sur des résultats de non symétrie quantique de Banica, Bichon et Chenevier (théorème 4.1.7, théorème 4.3.10, propositions 5.4.29 et 5.4.30).
- iii. Des critères "orbitaux" de non symétrie quantique : théorèmes 5.4.23 et 5.4.38. L'intérêt de ces critères est qu'ils sont vérifiables facilement en utilisant des outils informatiques (pour peu que l'on sache bien décrire les groupes d'automorphismes usuels). Ils sont obtenus grâce à une étude approfondie des espaces d'entrelacements via la dualité de Tannaka-Krein. On peut également espérer que cette étude, qui soulève de nombreuses conjectures, sera utile pour de futures recherches.

Ce manuscrit s'articule en six parties.

- *Chapitre 1* : On commence par rappeler les définitions d'algèbres de Woronowicz et de groupes quantiques compacts, définitions à partir desquelles les notions de groupe quantique de permutations et d'algèbre quantique de permutations peuvent être décrites. Le n -ième groupe quantique de permutations, S_n^+ , est alors le plus grand groupe quantique qui agit sur n points, de manière analogue à \mathbb{S}_n qui est le plus grand groupe à agir fidèlement sur $\{1, \dots, n\}$. L'objet d'étude important, $A_s(n)$, est l'algèbre associée à S_n^+ selon la formule heuristique $A_s(n) = C(S_n^+)$. Les algèbres quantiques de permutations sont alors les algèbres de fonctions sur les sous-groupes quantiques de S_n^+ c'est à dire les quotients de $A_s(n)$.

On rappelle aussi des résultats sur les représentations de ces groupes quantiques de permutations.

- *Chapitre 2* : On introduit la notion de groupe quantique d'automorphismes d'un graphe fini, définie par Banica et Bichon, analogue du groupe d'automorphismes classique $\text{Aut}(X)$. L'algèbre correspondante, $A(X)$, sera au centre des recherches de cette thèse. On présente alors le problème qui sera l'un des fils rouges dans ce manuscrit. Le groupe quantique d'automorphismes d'un graphe est-il égal à son groupe d'automorphismes au sens usuel ? Autrement dit, $A(X)$ est-elle commutative ?

On examine ensuite comment les algèbres $A(X \cup Y)$, $A(X \times Y)$ et $A(X \square Y)$ peuvent être décrites en fonctions de $A(X)$ et $A(Y)$, où X et Y sont des graphes finis et " \times " et " \square " des produits sur les graphes que nous décrirons.

- *Chapitre 3* : Cette partie sera essentiellement consacrée à notre premier article traduit en français. Il s'agit d'étudier l'algèbre $A(X \circ Y)$ où $X \circ Y$ est le produit lexicographique de X et Y . Un analogue d'un théorème de Sabidussi dans le cas classique sera établi. Il donne des conditions nécessaires et suffisantes sur X et Y pour que $A(X \circ Y)$ soit isomorphe au produit en couronne libre de $A(X)$ et $A(Y)$, analogue du produit en couronne sur les groupes.
- *Chapitre 4* : Il sera ici question de l'étude de $A(X)$ dans le cas où X est un graphe circulant, c'est à dire lorsque $\text{Aut}(X)$ contient un n -cycle où n est le nombre de sommets de X . Cette étude permettra de prolonger les travaux de Banica, Bichon et Chenevier dans [6] et [7] en utilisant les outils qu'ils ont introduit. Nous appliquerons en particulier ces résultats pour traiter les symétries quantiques des p -graphes circulants de type 4 et 6 (à une exception près).
- *Chapitre 5* : Cette partie constitue le coeur de cette thèse, on y développe une nouvelle façon d'étudier l'algèbre $A(X)$ en utilisant la dualité de Tannaka-Krein. Celle-ci nous permet d'associer à $A(X)$ une collection d'espaces d'entrelacements, $C_{A(X)}$. L'objectif est alors de trouver une description la plus explicite de $C_{A(X)}$ qui permette de caractériser au mieux la commutativité de $A(X)$.

Pour cela nous commencerons par introduire deux espaces vectoriels, \mathcal{T}^X et $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X$, associés à un graphe fini X . Il s'agit d'espaces matriciels engendrés par les endomorphismes caractéristiques des orbites de $[1, n] \times [1, n]$ pour deux actions différentes utilisant $\text{Aut}(X)$ et d_X , la matrice d'adjacence de X .

Ensuite nous définirons les notions de graphes \mathcal{B} -cohérents, \mathcal{B} -clos et \mathcal{B} -complets pour décrire certaines propriétés de \mathcal{T}^X et $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X$.

Pour finir, dans le cas particulier des p -graphes circulants avec p premier puis dans le cas le plus général des graphes sommets-transitifs, nous donnerons des conditions suffisantes pour que $A(X)$ soit commutative et conjecturerons une condition nécessaire et suffisante.

- *Chapitre 6* : Dans cette dernière partie nous ferons un bilan des résultats de cette thèse et nous dresserons une liste non exhaustive de questions ouvertes pour poursuivre ces recherches.

Chapitre 1

Rappels

1.1 Groupes quantiques compacts

Pour commencer voici les rappels de base sur les groupes quantiques. Les livres [22, 27] sont de bonnes références sur le sujet. Toutes les algèbres dans cette thèse seront supposées unitaires, comme les morphismes d'algèbres. \otimes correspondra autant au produit tensoriel minimal des C^* -algèbres qu'au produit tensoriel algébrique, il n'y aura pas de confusion.

Définition 1.1.1. Une *algèbre de Woronowicz* est une C^* -algèbre A munie d'un $*$ -morphisme $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ qui satisfait une condition de coassociativité et une loi d'annulation :

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{id}) \circ \Delta &= (\text{id} \otimes \Delta) \circ \Delta \\ \overline{\Delta(A)(A \otimes 1)} &= A \otimes A = \overline{\Delta(A)(1 \otimes A)} \end{aligned}$$

Le morphisme Δ est appelé comultiplication de A .

La catégorie des algèbres de Woronowicz est définie de manière évidente. Une algèbre de Woronowicz commutative est isomorphe à $C(G)$, l'algèbre des fonctions continues sur un groupe compact G , unique à isomorphisme près. La catégorie des *groupes quantiques compacts* est définie comme la catégorie duale de celle des algèbres de Woronowicz. Ainsi à chaque algèbre de Woronowicz A correspond un unique groupe quantique compact G selon la formule heuristique suivante $A = C(G)$.

La définition originale de Woronowicz pour les groupes matriciels compacts [36] est la plus utile pour produire des exemples concrets, et nous avons le résultat fondamental suivant [37].

Théorème 1.1.2. *Soit A une C^* -algèbre munie d'un $*$ -morphisme $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$. Alors A est une algèbre de Woronowicz si et seulement si il existe une famille de matrices unitaires $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \in M_{d_\lambda}(A)$ qui satisfont les trois conditions suivantes :*

1. La sous $*$ -algèbre A_0 engendrée par les entrées u_{ij}^λ de la matrice $(u^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est dense dans A .
2. Pour $\lambda \in \Lambda$ et $i, j \in \{1, \dots, d_\lambda\}$, on a $\Delta(u_{ij}^\lambda) = \sum_{k=1}^{d_\lambda} u_{ik}^\lambda \otimes u_{kj}^\lambda$.
3. Pour $\lambda \in \Lambda$, la matrice transposée $(u^\lambda)^t$ est inversible.

En fait, la $*$ -algèbre A_0 dans le théorème est canoniquement définie et est une algèbre de Hopf compacte c'est à dire une $*$ -algèbre de Hopf dont tous les comodules de dimension finie sont équivalents aux unitaires (voir [22, 27]). La counité et l'antipode de A_0 , notés respectivement ϵ et S , font références à la counité et à l'antipode de A . La $*$ -algèbre de Hopf A_0 est appelée *l'algèbre des fonctions représentatives* sur le groupe quantique compact G , dual de A , avec la nouvelle formule heuristique $A_0 = \mathcal{O}(G)$.

Réciproquement, en partant d'une algèbre de Hopf compacte, en prenant la C^* -complétion universelle on obtient une algèbre de Woronowicz, voir [22, 27]. En fait il y a potentiellement plusieurs C^* -normes sur A_0 mais cette question ne nous concernera pas dans la suite.

Naturellement, un groupe quantique (compact) $H \subset G$ correspond à un morphisme surjectif d'algèbres de Woronowicz $C(G) \rightarrow C(H)$, ou à un morphisme surjectif de $*$ -algèbres de Hopf $\mathcal{O}(G) \rightarrow \mathcal{O}(H)$.

Pour plus d'exemples, en particulier les q -déformations des groupes de Lie compacts classiques, voir [22, 27]. Dans cette thèse, nous nous intéresserons à l'exemple fondamental suivant que nous devons à Wang [35]. Commençons par un peu de terminologie. Une matrice $u \in M_n(A)$ est dite orthogonale si $u = \bar{u}$ (où $\bar{u}_{i,j} = u_{i,j}^*$) et $uu^t = I_n = u^t u$. Une matrice u est dite magique unitaire si toutes ses entrées sont des projections, que sur chaque ligne et chaque colonne ces projections sont orthogonales et que la somme des éléments de chaque ligne et chaque colonne vaut 1. Une matrice magique unitaire est toujours orthogonale.

Définition 1.1.3. La C^* -algèbre $A_s(n)$ est définie comme la C^* -algèbre universelle engendrée par les variables $(u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, avec les relations qui font de $u = (u_{ij})$ une matrice magique unitaire.

La C^* -algèbre $A_s(n)$ admet une structure d'algèbre de Woronowicz donnée par

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj}, \quad \epsilon(u_{ij}) = \delta_{ij}, \quad S(u_{ij}) = u_{ji}$$

Le groupe quantique compact associé est noté S_n^+ , i.e.

$$A_s(n) = C(S_n^+), \quad \text{ou} \quad A_s(n)_0 = \mathcal{O}(S_n^+)$$

$A_s(n)_0$ étant l'algèbre engendrée par les $(u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Remarque 1.1.4. Pour $n = 2$ et 3 on obtient les algèbres de fonctions classiques sur \mathbb{S}_2 et \mathbb{S}_3 c'est à dire

$$\mathbb{S}_2 = S_2^+, \quad \mathbb{S}_3 = S_3^+$$

Pour $n \geq 4$ on montre facilement que ce n'est pas le cas et que $A_s(n)_0$ est de dimension infinie.

Définition 1.1.5. Une *algèbre quantique de permutations* est un quotient d'algèbre de Woronowicz de $A_s(n)$ pour un certain n (on parlera de n -algèbre quantique de permutations pour spécifier la valeur de n). De manière équivalente c'est une algèbre de Woronowicz engendrée par les coefficients d'une matrice magique unitaire.

Nous en venons à présent aux actions des groupes quantiques, étudiées dans [28]. Elles correspondent aux coactions d'algèbres de Woronowicz. On rappelle que si B est une C^* -algèbre, une *coaction* (à droite) de l'algèbre de Woronowicz A sur B est un $*$ -homomorphisme $\alpha : B \rightarrow B \otimes A$ qui satisfait la condition de coassociativité et

$$\overline{\alpha(B)(1 \otimes A)} = B \otimes A$$

On dispose alors d'une action naturelle du groupe quantique S_n^+ sur $\{1, \dots, n\}$, c'est à dire d'une coaction de $A_s(n)$ sur \mathbb{C}^n , via le morphisme α suivant :

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{C}^n &\rightarrow \mathbb{C}^n \otimes A_s(n) \\ e_i &\mapsto \sum_{j=1}^n e_j \otimes u_{ji} \end{aligned}$$

où e_1, \dots, e_n est la base canonique de \mathbb{C}^n .

Wang a étudié les actions des groupes quantiques compacts sur des C^* -algèbres de dimension finie dans [35], où la propriété universelle suivante de l'algèbre de Woronowicz $A_s(n)$ est démontrée.

Théorème 1.1.6. [[35], Theorem 3.1] *L'algèbre de Woronowicz $A_s(n)$ est l'algèbre de Woronowicz universelle qui coagit sur \mathbb{C}^n au sens suivant. Soit H une algèbre de Woronowicz qui coagit sur \mathbb{C}^n via $\beta : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \otimes H$. Alors il existe un unique morphisme d'algèbres de Woronowicz $f : A_s(n) \rightarrow H$ tel que $(\text{id}_{\mathbb{C}^n} \otimes f) \circ \alpha = \beta$, c'est à dire tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\beta} & \mathbb{C}^n \otimes H \\ & \searrow \alpha & \nearrow \text{id}_{\mathbb{C}^n} \otimes f \\ & & \mathbb{C}^n \otimes A_s(n) \end{array}$$

Cette propriété universelle de $A_s(n)$ signifie en d'autres termes que S_n^+ est le plus grand groupe quantique compact qui agit sur n points. Pour cette raison S_n^+ est appelé le *n -ième groupe quantique de permutations*.

De manière équivalente ce théorème de Wang nous dit que toute algèbre de Woronowicz qui coagit fidèlement sur \mathbb{C}^n est un quotient d'algèbre de Woronowicz de $A_s(n)$, et montre que les groupes quantiques qui agissent fidèlement sur n points correspondent donc aux algèbres quantiques de permutations.

En particulier on a un morphisme surjectif d'algèbres de Woronowicz $A_s(n) \rightarrow C(\mathbb{S}_n)$, d'où l'inclusion des groupes quantiques suivants : $\mathbb{S}_n \subset S_n^+$. Plus concrètement l'existence du morphisme surjectif $A_s(n) \rightarrow C(\mathbb{S}_n)$ vient du fait que $C(\mathbb{S}_n)$ est la C^* -algèbre commutative universelle engendrée par les entrées d'une matrice magique unitaire. Voir [35] pour plus de détails.

1.2 Représentations des groupes quantiques S_n^+

Dans cette partie nous énonçons des résultats sur les représentations de S_n^+ . Pour cela on rappelle que les représentations d'un groupe quantique compact G correspondent aux comodules sur l'algèbre de Hopf cosemisimple $\mathcal{O}(G)$. Les représentations irréductibles étant alors les $\mathcal{O}(G)$ -comodules simples. Ainsi l'étude des représentations de S_n^+ revient à l'étude des $\mathcal{O}(S_n^+)$ -comodules simples et des règles de fusions entre ces derniers, c'est à dire la décomposition en $\mathcal{O}(S_n^+)$ -comodules simples du produit tensoriel de deux $\mathcal{O}(S_n^+)$ -comodules simples. Pour plus de précisions voir [2].

Dans la suite on suppose $n \geq 4$ car pour $n = 2$ et 3 il s'agit de résultats simples sur les représentations irréductibles de \mathbb{S}_2 et \mathbb{S}_3 .

Dans le cas classique on dispose de la représentation naturelle de \mathbb{S}_n sur \mathbb{C}^n qui consiste à associer à une permutation la matrice de permutation correspondante. Celle-ci se décompose en deux représentations irréductibles : la représentation triviale sur $V_0 = \text{Vect}(\sum e_i)$ et une représentation irréductible de degré $n - 1$ sur $V = V_0^\perp = \{(e_1, \dots, e_n) \mid \sum e_i = 0\}$. On a alors un résultat équivalent pour S_n^+ à partir de la représentation (qui sera dite naturelle) de S_n^+ issue de l'action naturelle de S_n^+ sur $\{1, \dots, n\}$ qui montre que \mathbb{C}^n est un $\mathcal{O}(S_n^+)$ -comodule.

Proposition 1.2.1. *L'espace \mathbb{C}^n est un $\mathcal{O}(S_n^+)$ -comodule naturel via*

$$\alpha(e_i) = \sum_{j=1}^n e_j \otimes u_{ji}$$

qui se décompose en somme directe de deux $\mathcal{O}(S_n^+)$ -comodule simples, V_0 et V_1 où V_0 est le $\mathcal{O}(S_n^+)$ -comodule trivial.

On note p_0 et p_1 les deux représentations irréductibles de S_n^+ associées respectivement à V_0 et V_1 . Le théorème suivant, issu de [2], montre que toutes les représentations irréductibles de S_n^+ peuvent être construites à partir de p_0 et p_1 en énonçant les règles de fusion de ces représentations irréductibles de S_n^+ .

Théorème 1.2.2. *[[2], Theorem 4.1] Les représentations irréductibles de S_n^+ peuvent être indexées par l'ensemble des entiers : $\text{Rep}_{\text{irr}}(S_n^+) = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ et les p_n vérifient la relation suivante pour tout $k \geq 2$,*

$$p_{k-1} \otimes p_1 = p_{k-2} + p_{k-1} + p_k$$

soit pour tout $k, s \in \mathbb{N}$,

$$p_k \otimes p_s = p_{|k-s|} + p_{|k-s|+1} + \cdots + p_{k+s-1} + p_{k+s}$$

Application 1.2.3. On obtient par exemple que les représentations irréductibles du groupe quantique S_5^+ sont de dimensions 1, 4, 11, 29, 76...

Pour davantage de résultats sur les représentations des groupes quantiques on pourra voir [7], [12], [20] et [22],

Chapitre 2

Groupes quantiques d'automorphismes d'un graphe

2.1 Définitions et premières propriétés

Pour commencer voici les notations que nous utiliserons sur les graphes. On considère X , un graphe simple : c'est à dire fini, non orienté, sans boucles ni arêtes multiples. Lorsque X a n sommets ils seront numérotés $\{1, \dots, n\}$. On confondra souvent X et l'ensemble de ses sommets et on dira que X est d'ordre n . Le graphe complémentaire de X sera noté X^c . Si i et j sont deux sommets de X on utilisera la notation $i \sim_X j$ quand i et j sont reliés par une arête dans X et $i \not\sim_X j$ quand ils ne le sont pas (ou simplement $i \sim j$ quand il n'y a pas de confusion possible sur X).

Si i est un sommet de X , on note $\mathcal{V}_X(i)$ l'ensemble des voisins de i dans X et $\mathcal{W}_X(i) := (\mathcal{V}_X(i) \cup \{i\})^c = \mathcal{V}_{X^c}(i)$ (ou $\mathcal{V}(i)$ et $\mathcal{W}(i)$). Pour les cardinaux nous utiliserons aussi les notations suivantes : $\lambda(i) = |\mathcal{V}(i)|$, $\alpha(i) = |\mathcal{W}(i)|$. On dit que X est régulier si $\lambda(i)$ ne dépend pas de $i \in X$, dans ce cas les notations $\lambda(X)$ et $\alpha(X)$ ont du sens. L'entier $\lambda(X)$ est appelé la valence du graphe X .

Pour finir on note $\text{Aut}(X)$ le groupe d'automorphismes de X et d_X sa matrice d'adjacence dont la définition est la suivante.

Définition 2.1.1. La matrice d'adjacence $d_X = (d_{ij})$ associée au graphe X est un élément de $M_n(\{0, 1\})$ défini par $d_{ij} = 1$ si les sommets i et j sont reliés par une arête et 0 sinon.

Si σ est un élément de \mathbb{S}_n on note $P_\sigma \in M_n(\{0, 1\})$ la matrice de permutation associée, définie par

$$[P_\sigma]_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = \sigma(j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors la caractérisation suivante des éléments de $\text{Aut}(X)$.

Proposition 2.1.2. *Soit $\sigma \in S_n$, alors*

$$\sigma \in \text{Aut}(X) \iff d_X P_\sigma = P_\sigma d_X$$

Cette caractérisation dans le cas classique amène à la définition naturelle suivante du groupe quantique d'automorphismes d'un graphe fini, voir [3].

Définition 2.1.3. À un graphe fini X on associe l'algèbre quantique de permutations suivante :

$$A(X) = A_s(n) / \langle d_X u = u d_X \rangle$$

où n est le nombre de sommets de X .

Le groupe quantique associé à $A(X)$ est le groupe quantique d'automorphismes de X , noté \mathbb{G}_X . Par définition c'est un sous-groupe quantique de S_n^+ , ce qui justifie l'utilisation des graphes pour obtenir des groupes quantiques de permutations.

Ainsi nous avons ce diagramme commutatif composé d'algèbres de Woronowicz :

$$\begin{array}{ccc} A_s(n) = C(S_n^+) & \longrightarrow & A(X) = C(\mathbb{G}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ C(S_n) & \longrightarrow & C(\text{Aut}(X)) \end{array}$$

la noyau du morphisme de droite étant l'idéal engendré par les commutateurs de $A(X)$.

Exemple 2.1.4. Pour le graphe à n sommets sans arête, noté X_n , on a $A(X_n) = A_s(n)$, donc $\mathbb{G}_{X_n} = S_n^+$. De plus $A(X^c) = A(X)$, car $u d_X = d_X u$ et $u d_{X^c} = d_{X^c} u$ sont deux égalités équivalentes lorsque u est magique unitaire. Ainsi le graphe complet à n sommets, noté K_n , vérifie aussi $A(K_n) = A_s(n)$ et $\mathbb{G}_{K_n} = S_n^+$.

Si $X = C_n$ est le graphe cyclique d'ordre n , on peut montrer que si $n \neq 4$ alors $A(C_n)$ est commutative, donc $A(C_n) = C(\text{Aut}(C_n))$ et ainsi $\text{Aut}(C_n) = \mathbb{G}_{C_n} = \mathcal{D}_n$, où \mathcal{D}_n est le n -ième groupe diédral. Pour plus d'exemples voir [7].

Dans la proposition suivante ([14]) on s'intéresse aux différentes façons de définir $A(X)$ par des ensembles de relations.

Proposition 2.1.5. *Soit X un graphe à n sommets et $u = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ une matrice magique unitaire. Les ensembles de relations suivants sont équivalents.*

1. $d_X u = u d_X$

2. Pour tout $i, j \in [1, n]$,

$$\sum_{k \in \mathcal{W}_X(i)} u_{kj} = \sum_{k \in \mathcal{W}_X(j)} u_{ik}$$

3. Pour tout $i, j, k, l \in [1, n]$,

$$(i \sim j \text{ et } k \not\sim l) \implies u_{ik}u_{jl} = 0 = u_{ki}u_{lj}$$

À partir de la coaction naturelle de $A_s(n)$ sur \mathbb{C}^n on obtient une coaction naturelle de $A(X)$ sur \mathbb{C}^n via

$$\alpha(e_j) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes u_{ij}$$

Proposition 2.1.6. *Les espaces propres de d_X sont stables par cette coaction.*

Démonstration. Par définition on a $\alpha(e_j) = \sum_{i=1}^n e_i \otimes \overline{u_{ij}}$ où $\overline{u_{ij}}$ est l'image de u_{ij} dans le quotient $A(X)$. La matrice d_X est symétrique donc diagonalisable et on a la décomposition en espaces propres suivante, $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^r E_{\lambda_i}(d_X)$. On note (x_1, \dots, x_n) une base adaptée. Puisque d_X et u commutent les $E_{\lambda_i}(d_X)$ sont stables par u et en notant $Q = (q_{ij})$ (et $Q^{-1} = (s_{ij})$) la matrice de passage des e_i aux x_i on a $QuQ^{-1} = u' = (u'_{ij})$ où u' est une matrice par bloc correspondant aux $E_{\lambda_i}(d_X)$.

$$\begin{aligned} \alpha(x_i) &= \sum_{k=1}^n s_{ki} \alpha(e_k) \\ &= \sum_{k=1}^n s_{ki} \sum_{j=1}^n e_j \otimes \overline{u_{jk}} \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n s_{ki} \left(\sum_{l=1}^n q_{lj} x_l \right) \otimes \overline{u_{jk}} \\ &= \sum_{l=1}^n x_l \otimes \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n q_{lj} \overline{u_{jk}} s_{ki} \right) \\ &= \sum_{l=1}^n x_l \otimes u'_{li} \end{aligned}$$

or les u'_{lk} sont nuls lorsque x_l et x_k ne sont pas dans le même sous-espace propre, ce qui permet de conclure. \square

Remarque 2.1.7. On retrouve ce résultat plus rapidement en voyant que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $(d_X - \lambda \text{id})u = u(d_X - \lambda \text{id})$, ce qui montre que $d_X - \lambda \text{id}$ est un morphisme de $\mathcal{O}(S_n^+)$ -comodules. Or le noyau d'un morphisme de comodules est un sous-comodule de l'espace de départ ce qui donne le résultat.

Un problème important dans l'étude des groupes quantiques de permutations des graphes finis est de savoir si ils sont différents ou non du groupe d'automorphismes classique.

Définition 2.1.8. On dit que X n'a pas de symétrie quantique lorsque $A(X) = C(\text{Aut}(X))$, ce qui revient à dire que $A(X)$ est commutative.

Une grande partie de cette thèse sera consacrée à l'étude des symétries quantiques des graphes finis.

2.2 L'union de deux graphes finis

Dans cette thèse nous étudierons essentiellement des graphes sommet-transitifs. Voici un des seuls résultats qui traite des groupes quantiques d'automorphismes de graphes qui ne sont pas sommet-transitifs.

Proposition 2.2.1. Soient X_1 et X_2 deux graphes réguliers de valences respectives λ_1 et λ_2 et de matrices d'adjacence d_{X_1} et d_{X_2} . Si λ_1 n'est pas valeur propre de d_{X_2} et que λ_2 n'est pas valeur propre de d_{X_1} alors

$$A(X_1 \cup X_2) = A(X_1) * A(X_2)$$

où $*$ est le produit libre des deux algèbres.

Démonstration. On note n_1 et n_2 le nombre de sommets respectivement de X_1 et X_2 . $A(X_1 \cup X_2)$ est engendrée par les coefficients de la matrice magique unitaire $U = (u_{ij})$ qui commute avec $d_{X_1 \cup X_2} = \begin{pmatrix} d_{X_1} & 0 \\ 0 & d_{X_2} \end{pmatrix}$. En notant $U = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$ on obtient donc

$$U_1 d_{X_1} = d_{X_1} U_1, \quad U_4 d_{X_2} = d_{X_2} U_4, \quad U_3 d_{X_1} = d_{X_2} U_3, \quad U_2 d_{X_2} = d_{X_1} U_2$$

Puis en notant $V := U_3$ on obtient

$$U_3 d_{X_1} = d_{X_2} U_3 \Leftrightarrow \forall i \in [1, n_2], \forall j \in [1, n_1], \sum_{k \sim_{X_2} i} V_{k,j} = \sum_{k \sim_{X_1} j} V_{i,k}$$

Pour j fixé dans $[1, n_1]$ on somme les égalités ci-dessus sur $i \in [1, n_2]$ et on note

$C_j(V) := \sum_{i=1}^{n_2} V_{i,j}$ pour obtenir ce qui suit :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{k \sim_{X_2} i} V_{k,j} &= \sum_{i=1}^{n_2} \sum_{k \sim_{X_1} j} V_{i,k} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n_2} \sum_{i \sim_{X_2} k} V_{k,j} = \sum_{k \sim_{X_1} j} \sum_{i=1}^{n_2} V_{i,k} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n_2} \lambda_2 V_{k,j} = \sum_{k \sim_{X_1} j} C_k(V) \\ &\Leftrightarrow \lambda_2 C_j(V) = \sum_{k \sim_{X_1} j} C_k(V) \\ &\Leftrightarrow \lambda_2 C = d_{X_1} C \end{aligned}$$

où $C = \begin{pmatrix} C_1(V) \\ C_2(V) \\ \vdots \\ C_{n_1}(V) \end{pmatrix}$. Donc C est un vecteur propre de d_{X_1} pour la valeur propre

λ_2 or par hypothèse cela implique que $C = 0$ c'est à dire $C_j(V) = 0$ pour tout $j \in [1, n_1]$. Or les coefficients des colonnes de V sont des projecteurs orthogonaux puisque U est magique unitaire. Cela implique que $V = U_3 = 0$. C'est exactement la même démonstration pour montrer que $U_2 = 0$ en utilisant cette fois le fait que λ_1 n'est pas valeur propre de d_{X_2} . Donc finalement on obtient $U = \begin{pmatrix} U_1 & 0 \\ 0 & U_4 \end{pmatrix}$ magique unitaire telle que

$$U_1 d_{X_1} = d_{X_1} U_1, \quad U_4 d_{X_2} = d_{X_2} U_4$$

ce qui donne le résultat souhaité. \square

Définition 2.2.2. Si \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 sont des groupes quantiques de permutations respectivement inclus dans $S_{n_1}^+$ et $S_{n_2}^+$ on note $\mathcal{G}_1 \hat{*} \mathcal{G}_2$ le sous-groupe quantique de $S_{n_1+n_2}^+$ associé à l'algèbre $C(\mathcal{G}_1) * C(\mathcal{G}_2)$ c'est à dire tel que

$$C(\mathcal{G}_1) * C(\mathcal{G}_2) = C(\mathcal{G}_1 \hat{*} \mathcal{G}_2)$$

Remarque 2.2.3. La proposition précédente permet en particulier de dire que, sous certaines hypothèses relativement faibles, une union de graphes finis non isomorphes a des symétries quantiques même si les graphes en question n'en ont pas.

2.3 Deux produits commutatifs sur les graphes

Plusieurs graphes peuvent s'écrire comme produit de graphes plus petits et l'on peut souvent exprimer le groupe des automorphismes du produit en fonction de

ceux des graphes plus petits. On souhaite donc traiter la question des symétries quantiques de ces produits.

Dans cette sous-partie nous rappelons l'étude faite par Banica et Bichon dans [7] pour deux produits commutatifs sur les graphes. Un troisième produit, cette fois non commutatif, sera étudié dans la partie suivante.

Définition 2.3.1. Soient X, Y deux graphes finis. Le produit direct $X \times Y$ a pour ensemble de sommets $X \times Y$ et

$$(i, \alpha) \sim (j, \beta) \iff i \sim j \text{ et } \alpha \sim \beta.$$

Définition 2.3.2. Soient X, Y deux graphes finis. Le produit cartésien $X \square Y$ a pour ensemble de sommets $X \times Y$ et

$$(i, \alpha) \sim (j, \beta) \iff (i = j \text{ et } \alpha \sim \beta) \text{ ou } (i \sim j \text{ et } \alpha = \beta).$$

Cela permet d'obtenir de nombreux graphes et en particulier on notera

$$\text{Pr}(X) = K_2 \square X$$

le prisme de base X .

On a des injections canoniques

$$\text{Aut}(X) \times \text{Aut}(Y) \subset \text{Aut}(X \times Y)$$

$$\text{Aut}(X) \times \text{Aut}(Y) \subset \text{Aut}(X \square Y)$$

et on souhaite avoir un résultat similaire sur les algèbres quantiques de permutations associées aux graphes.

Proposition 2.3.3. *[[7], Proposition 4.1] Il existe des morphismes surjectifs d'algèbres de Woronowicz*

$$A(X \times Y) \twoheadrightarrow A(X) \otimes A(Y)$$

$$A(X \square Y) \twoheadrightarrow A(X) \otimes A(Y)$$

Remarque 2.3.4. La démonstration utilise essentiellement que $d_{X \times Y} = d_X \otimes d_Y$ et $d_{X \square Y} = d_X \otimes 1 + 1 \otimes d_Y$ grâce à l'identification canonique $\mathbb{C}(X \times Y) = \mathbb{C}(X) \otimes \mathbb{C}(Y)$.

Théorème 2.3.5. *[[7], Theorem 4.1] Soient X et Y deux graphes connexes réguliers. Si les spectres de d_X , $\{\lambda_i\}$, et de d_Y , $\{\mu_k\}$, ne contiennent pas 0 et satisfont*

$$\left\{ \begin{array}{c} \lambda_i \\ \lambda_j \end{array} \right\} \cap \left\{ \begin{array}{c} \mu_k \\ \mu_l \end{array} \right\} = \{1\}$$

alors $A(X \times Y) \simeq A(X) \otimes A(Y)$.

Si ces spectres satisfont

$$\{\lambda_i - \lambda_j\} \cap \{\mu_k - \mu_l\} = \{0\}$$

alors $A(X \square Y) \simeq A(X) \otimes A(Y)$.

Corollaire 2.3.6. *[[7], Corollary 4.1] En regardant les spectres de K_n et C_n on obtient*

- a. $A(K_m \times K_n) \simeq A(K_m) \otimes A(K_n)$ pour $m \neq n$.
- b. $A(\text{Pr}(K_n)) = C(\mathbb{Z}_2) \otimes A_s(n) \simeq C(\mathbb{Z}_2 \times S_n^+)$.
- c. $A(\text{Pr}(C_n)) \simeq C(\mathbb{Z}_2) \otimes C(\mathcal{D}_n) \simeq C(\mathcal{D}_{2n})$ pour n impair.
- d. $A(\text{Pr}(C_4)) \simeq C(\mathbb{Z}_2) \otimes A_s(4) \simeq C(\mathbb{Z}_2 \times S_4^+)$.

Remarque 2.3.7. Pour le dernier on utilise que $\text{Pr}(C_4) = K_2 \times K_4$.

Ainsi pour $n \leq 11$ cela donne les groupes quantiques d'automorphismes des graphes $\text{Pr}(C_4)$, $\text{Pr}(C_5)$ et $\text{Pr}(K_5)$ qui sont respectivement $S_4^+ \times \mathbb{Z}_2$, \mathcal{D}_{10} et $S_5^+ \times \mathbb{Z}_2$.

Les théorèmes précédents ne permettent pas de traiter les cas $X = Y$. En revanche pour $X = K_3$, le graphe $K_3 \times K_3 = K_3 \square K_3$, appelé Tore, peut être traité à l'aide de calculs dans le même esprit que dans la démonstration du théorème 4.1.5 à venir.

Chapitre 3

Etude du produit lexicographique de deux graphes finis

Cette partie 3 est essentiellement la traduction en français de l'article [17], publié dans le Journal of Algebra. Dans ce dernier on étudie le groupe quantique d'automorphismes du produit lexicographique, $X \circ Y$, de deux graphes finis.

Le groupe d'automorphismes de ce produit a été étudié dans le cas classique par Sabidussi dans [29] où il donne des conditions nécessaires et suffisantes sur X et Y pour que l'on ait $\text{Aut}(X \circ Y) = \text{Aut}(X) \wr \text{Aut}(Y)$ où \wr est le produit en couronne sur les groupes.

Bichon a ensuite défini la notion de produit en couronne libre, $*_w$, qui s'applique aux algèbres quantiques de permutations et permet de généraliser le produit en couronne classique. Dans [14] puis [7] avec Banica ils obtiennent alors des conditions suffisantes pour avoir

$$A(X \circ Y) \simeq A(X) *_w A(Y)$$

Dans l'article [17] ont montré finalement que les hypothèses de Sabidussi sont aussi nécessaires et suffisantes dans le cas quantique pour avoir l'isomorphisme ci-dessus (cf théorème 3.2.6).

Cette description du groupe quantique d'automorphismes comme un produit en couronne libre pourra être utile pour étudier les représentations et les propriétés des opérateurs algébriques de ces groupes quantiques en utilisant les récents résultats généraux sur les groupes quantiques qui s'expriment comme des produits en couronne libre, récemment prouvés dans [24], [25] et [34].

3.1 Le cas classique

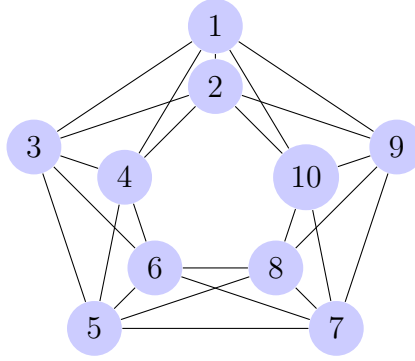
Définition 3.1.1. Soient X, Y deux graphes finis. Le produit lexicographique $X \circ Y$ a pour ensemble de sommets $X \times Y$ et

$$(i, \alpha) \sim (j, \beta) \iff (\alpha \sim \beta) \text{ ou } (i \sim j \text{ et } \alpha = \beta)$$

Ce produit consiste à greffer un exemplaire de X à chaque sommet de Y .

Exemple 3.1.2. On note X_n le graphe à n sommets sans arête. Pour tout graphe X , $X \circ X_n = nX$ est le graphe qui consiste en n copies déconnectées de X .

Exemple 3.1.3. Le graphe $K_2 \circ C_5$ est le suivant :



Pour décrire le groupe d'automorphismes du produit lexicographique de deux graphes finis on a besoin du produit en couronne sur les groupes dont voici la définition.

Définition 3.1.4. Soient G et H deux groupes finis et Ω un ensemble sur lequel H agit. On note K le produit direct

$$K := \prod_{\omega \in \Omega} G_{\omega}$$

des copies de $G_{\omega} := G$ indexé par Ω . Alors l'action de H sur Ω s'étend de manière naturelle en une action de H sur le groupe K par

$$h.(g_{\omega}) = (g_{h^{-1}.\omega}), \text{ pour } h \in H \text{ et } (g_{\omega}) \in \prod_{\omega \in \Omega} G_{\omega}$$

Alors le *produit en couronne* de G par H , noté $G \wr_{\Omega} H$, est le produit semi-direct de K par H . Le sous-groupe normal K de $G \wr_{\Omega} H$ est appelé la base de ce produit en couronne.

Notations 3.1.5. Si G est un groupe fini et H un sous-groupe du groupe de permutations \mathbb{S}_n , alors nous noterons simplement $G \wr H$ le produit en couronne $G \wr_{\Omega} H$ avec $\Omega = \{1, \dots, n\}$.

Pour le groupe d'automorphismes de $X \circ Y$, nous avons toujours l'inclusion suivante :

$$\begin{aligned} \text{Aut}(X) \wr \text{Aut}(Y) &\hookrightarrow \text{Aut}(X \circ Y) \\ (\sigma_1^X, \sigma_2^X, \dots, \sigma_n^X, \sigma^Y) &\mapsto (i, j) \mapsto (\sigma_j^X(i), \sigma^Y(j)) \end{aligned}$$

où $\sigma_k^X \in \text{Aut}(X)$ pour tout k et $\sigma^Y \in \text{Aut}(Y)$.

Pour énoncer le théorème de Sabidussi (de [29]), qui permet de caractériser les cas où le morphisme ci-dessus est un isomorphisme, on introduit deux nouveaux ensembles sur X^2 .

$$S_X := \{(x_0, x_1) \in X^2 \mid \mathcal{V}(x_0) = \mathcal{V}(x_1) \text{ et } x_0 \neq x_1\}$$

$$T_X := S_{X^c} = \{(x_0, x_1) \in X^2 \mid \mathcal{V}(x_0) \cup \{x_0\} = \mathcal{V}(x_1) \cup \{x_1\} \text{ et } x_0 \neq x_1\}$$

Théorème 3.1.6. [[29], p.694] Soient X, Y deux graphes finis, on a l'équivalence suivante :

$$\text{Aut}(X \circ Y) \simeq \text{Aut}(X) \wr \text{Aut}(Y) \Leftrightarrow ((S_Y \neq \emptyset \Rightarrow X \text{ connexe}) \text{ et } (T_Y \neq \emptyset \Rightarrow X^c \text{ connexe}))$$

3.2 Le cas quantique

Dans cette partie l'objectif est d'obtenir un résultat analogue au théorème 3.1.6 dans le cas quantique. Pour cela nous verrons d'abord des cas particuliers issus de [14] puis de [7] et enfin nous traiterons le cas général.

Ces résultats nécessitent d'introduire le produit en couronne libre sur les algèbres quantiques de permutations, analogue du produit en couronne sur les groupes.

Définition 3.2.1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et A une algèbre de Woronowicz. Le *produit en couronne libre* de A par l'algèbre quantique de permutations $A_s(n)$ est le quotient de la C^* -algèbre $A^{*n} * A_s(n)$ par l'idéal bilatère engendré par les éléments

$$\nu_k(a)u_{ki} - u_{ki}\nu_k(a), \quad 1 \leq i, k \leq n, \quad a \in A,$$

où $\nu_i : A \rightarrow A^{*n}$, $1 \leq i \leq n$ sont les $*$ -homomorphismes canoniques.

La C^* -algèbre correspondante est notée $A *_w A_s(n)$.

Théorème 3.2.2. *[[14], Theorem 2.3] Le produit en couronne libre $A *_w A_s(n)$ admet une structure d'algèbre de Woronowicz, avec pour $a \in A$ et $i, j \in \{1, \dots, n\}$,*

$$\Delta(u_{ij}) = \sum_{k=1}^n u_{ik} \otimes u_{kj}$$

$$\Delta(\nu_i(a)) = \sum_{k=1}^n (\nu_i \otimes \nu_k)(\Delta_A(a)) \cdot (u_{ik} \otimes 1)$$

On peut naturellement étendre cette notion au cas $A *_w H$, où H est une algèbre quantique de permutations. Si A et B sont deux algèbres quantiques de permutations respectivement engendrées par les matrices magiques unitaires u et v de taille p et n , alors $A *_w B$ est aussi une algèbre quantique de permutations (quotient de $A_s(np)$) dont la matrice magique unitaire qui l'engendre est donnée par

$$w = (w_{ia,jb}) = (u_{ij}^{(a)} v_{ab})$$

où les $u^{(a)} = (u_{ij}^{(a)})$ sont des copies de u et par définition du produit en couronne libre on ajoute les relations de commutativité suivantes :

$$u_{ij}^{(a)} v_{ab} = v_{ab} u_{ij}^{(a)}$$

En utilisant les propriétés des matrices magiques on remarque que $A *_w B$ est aussi engendrée par les $u_{ij}^{(a)}$ et les v_{ab} .

De plus la structure d'algèbre de Woronowicz est donnée par

$$\Delta(u_{ij}^{(a)}) = \sum_{(s,k) \in [1,p] \times [1,n]} u_{is}^{(a)} v_{ak} \otimes u_{sj}^{(k)}, \quad \epsilon(u_{ij}^{(a)}) = \delta_{ij}, \quad S(u_{ij}^{(a)}) = \sum_{b=1}^n u_{ji}^{(b)} v_{ba}$$

$$\Delta(v_{ab}) = \sum_{s=1}^n v_{as} \otimes v_{sb}, \quad \epsilon(v_{ab}) = \delta_{ab}, \quad S(v_{ab}) = v_{ba}$$

Et en utilisant les propriétés des matrices magiques unitaires on obtient

$$\Delta(w_{ia,jb}) = \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^p w_{ia,kl} \otimes w_{kl,jb}, \quad \epsilon(w_{ia,jb}) = \delta_{ij} \delta_{ab}, \quad S(w_{ia,jb}) = w_{jb,ia}$$

Pour finir cela nous permet de définir le produit en couronne libre sur les groupes quantiques.

Définition 3.2.3. Soient G et H deux groupes quantiques de permutations. Le produit en couronne libre de G et H , noté $G \wr_* H$ est défini par

$$C(G) *_w C(H) = C(G \wr_* H)$$

Si X et Y sont deux graphes finis avec respectivement p et n sommets, on note $u = (u_{ij})_{1 \leq i, j \leq p}$ et $v = (v_{ab})_{1 \leq a, b \leq n}$ les matrices magiques unitaires associées qui engendrent respectivement $A(X)$ et $A(Y)$. Le graphe $X \circ Y$ possède np sommets que l'on étiquette comme suit :

$$(i, a), \quad 1 \leq i \leq p, \quad 1 \leq a \leq n$$

et que l'on ordonne de la façon suivante :

$$(1, 1) < (2, 1) < \dots < (p, 1) < (1, 2) < \dots < (p, 2) < \dots < (1, n) < \dots < (p, n)$$

On note alors $Z = (Z_{ia,jb})_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ 1 \leq a, b \leq n}}$ la matrice magique unitaire qui engendre $A(X \circ Y)$ et satisfait

$$\Delta(Z_{ia,jb}) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ 1 \leq l \leq n}} Z_{ia,kl} \otimes Z_{kl,jb}, \quad \epsilon(Z_{ia,jb}) = \delta_{ij} \delta_{ab}, \quad S(Z_{ia,jb}) = Z_{jb,ia}$$

On a alors le résultat suivant issu de [7].

Proposition 3.2.4. *[[7], Proposition 6.1] On a un morphisme surjectif d'algèbres de Woronowicz*

$$A(X \circ Y) \longrightarrow A(X) *_w A(Y)$$

donné par $Z_{ia,jb} \mapsto u_{ij}^{(a)} v_{ab}$.

Si $Y = X_n$ est le graphe sans arête à n sommets et X un graphe connexe, on a (voir [5, 14]) l'isomorphisme

$$A(X \circ X_n) = A(nX) \simeq A(X) *_w A_s(n)$$

Ensuite dans [7] le résultat suivant est démontré.

Théorème 3.2.5. *[[7], Theorem 6.2] Soient X, Y deux graphes finis réguliers avec X connexe. Si les spectres $\{\lambda_i\}$ de d_X et $\{\mu_j\}$ de d_Y satisfont la condition*

$$\{\lambda_1 - \lambda_i \mid i \neq 1\} \cap \{-n\mu_j\} = \emptyset$$

où n et λ_1 sont l'ordre et la valence de X , alors $A(X \circ Y) \simeq A(X) *_w A(Y)$.

Et finalement voici la généralisation complète du théorème de Sabidussi dans le cas quantique.

Théorème 3.2.6. *Soient X et Y deux graphes finis réguliers.*

Si $[(S_Y \neq \emptyset) \Rightarrow (X \text{ connexe})]$ et $[(T_Y \neq \emptyset) \Rightarrow (X^c \text{ connexe})]$, alors on a

$$A(X \circ Y) \simeq A(X) *_w A(Y)$$

l'isomorphisme étant réalisé par la surjection canonique de la proposition 3.2.4.

Remarque 3.2.7. Ce résultat est en fait une équivalence car si $A(X \circ Y) \simeq A(X) *_w A(Y)$ alors cette isomorphisme induit un isomorphisme sur les abélianisées de ces algèbres, de telle sorte que $\text{Aut}(X \circ Y) \simeq \text{Aut}(X) \wr \text{Aut}(Y)$. Le résultat de Sabidussi nous indique alors que les conditions ci-dessus sont satisfaites.

Pour démontrer ce théorème nous utiliserons des idées similaires à celles du cas $Y = X_n$ et X connexe de [14], même si la structure générale est beaucoup plus complexe.

Les conditions $(S_Y \neq \emptyset) \Rightarrow (X \text{ connexe})$ et $(T_Y \neq \emptyset) \Rightarrow (X^c \text{ connexe})$ du théorème 5.3.16 seront appelées (HS) (Hypothèses de Sabidussi) dans la suite.

Si $L, J \in [1, n]$ et $k \in [1, p]$ on définit

$$P_L^J(k) := \sum_{s=1}^p Z_{sL,kJ}$$

Lemme 3.2.8 (Lemme clé). *On suppose que X et Y satisfont les conditions (HS). Soient $L, J \in [1, n]$, alors pour tout $k_1, k_2 \in [1, p]$ on a*

$$P_L^J(k_1) = P_L^J(k_2)$$

Ainsi $P_L^J(k)$ ne dépend pas de $k \in [1, p]$ et l'on notera $P_L^J := P_L^J(k)$, pour tout k .

Remarque 3.2.9. En fait ce lemme correspond, dans la démonstration de Banica et Bichon du théorème 3.2.5, à la démonstration que $1 \otimes C(Y)$ est stable par la coaction sur $C(X) \otimes C(Y)$. En effet

$$\alpha(e_k \otimes e_J) = \sum_{s=1}^p \sum_{L=1}^n e_s \otimes e_L \otimes Z_{sL,kJ}$$

donc

$$\alpha(1 \otimes e_J) = \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^p \sum_{L=1}^n e_s \otimes e_L \otimes Z_{sL,kJ} = \sum_{s=1}^p e_s \otimes \left(\sum_{L=1}^n e_L \otimes \left(\sum_{k=1}^p Z_{sL,kJ} \right) \right)$$

Ainsi $1 \otimes C(Y)$ est stable par la coaction α si et seulement si pour tout $L, J \in [1, n]$, $\sum_{k=1}^p Z_{sL,kJ}$ est indépendante de s . Il serait donc plus cohérent et plus parlant de définir $P_L^J(s) := \sum_{k=1}^p Z_{sL,kJ}$ mais la démonstration fonctionne quand même avec les $P_L^J(k)$ que nous avons défini plus haut.

La démonstration de ce lemme est le point essentiel qui différencie le cas $Y = X_n$ et X connexe de [14] du cas général sous les hypothèses (HS). Cette démonstration fera l'objet de la sous-partie suivante. Voici maintenant la démonstration du théorème 5.3.16 en admettant ce lemme.

Lemme 3.2.10. *Pour $L, L', J \in [1, n]$ on a les relations suivantes :*

$$P_L^J P_{L'}^J = \delta_{L,L'} P_L^J, \quad P_J^L P_J^{L'} = \delta_{L,L'} P_J^L, \quad \sum_{L=1}^n P_L^J = 1, \quad \sum_{L=1}^n P_J^L = 1$$

$$\Delta(P_L^J) = \sum_{S=1}^n P_L^S \otimes P_S^J, \quad \epsilon(P_L^J) = \delta_{L,J}, \quad S(P_L^J) = P_L^J$$

Démonstration. Soient $L, L', J \in [1, n]$ avec $L \neq L'$ et $k \in [1, p]$. On a :

$$P_L^J P_L^J = \sum_{s_1=1}^p \sum_{s_2=1}^p Z_{s_1 L, k J} Z_{s_2 L, k J} = \sum_{s=1}^p Z_{s L, k J} = P_L^J$$

$$P_L^J P_{L'}^J = \sum_{s_1=1}^p \sum_{s_2=1}^p Z_{s_1 L, k J} Z_{s_2 L', k J} = 0, \quad \text{car } L \neq L'$$

$$\sum_{L=1}^n P_L^J = \sum_{L=1}^n \sum_{s=1}^p Z_{s L, k J} = 1$$

$$\begin{aligned} \sum_{L=1}^n P_J^L &= \frac{1}{p} \sum_{L=1}^n \sum_{k=1}^p P_J^L(k) = \frac{1}{p} \sum_{L=1}^n \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^p Z_{s J, k L} = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p \left(\sum_{L=1}^n \sum_{k=1}^p Z_{s J, k L} \right) \\ &= \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p 1 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(P_L^J) &= \sum_{s=1}^p \Delta(Z_{s L, k J}) = \sum_{s=1}^p \sum_{T=1}^n \sum_{t=1}^p Z_{s L, t T} \otimes Z_{t T, k J} \\ &= \sum_{T=1}^n \sum_{t=1}^p P_L^T \otimes Z_{t T, k J} \\ &= \sum_{T=1}^n P_L^T \otimes P_T^J \end{aligned}$$

$$\epsilon(P_L^J) = \sum_{s=1}^p \epsilon(Z_{s L, k J}) = \begin{cases} 1 & \text{si } L = J \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
S(P_L^J) &= S\left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p P_L^J(k)\right) = S\left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \sum_{s=1}^p Z_{sL,kJ}\right) = \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p \sum_{k=1}^p S(Z_{sL,kJ}) \\
&= \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p \sum_{k=1}^p Z_{kJ,sL} \\
&= \frac{1}{p} \sum_{s=1}^p P_J^L(s) = P_J^L
\end{aligned}$$

Finalement, on a $P_J^L P_J^{L'} = S(P_L^J P_L^{J'}) = \delta_{L,L'} S(P_L^J) = \delta_{L,L'} P_J^L$, ce qui termine la preuve. \square

Proposition 3.2.11. *La matrice $P = (P_L^J)_{1 \leq L, J \leq n}$ est magique unitaire et commute avec d_Y .*

Démonstration. Le lemme 3.2.10 nous indique que P est magique unitaire. Soient $L, L', J, J' \in [1, n]$ tels que $L \sim_Y L'$ et $J \not\sim_Y J'$ alors $\forall s, s' \in [1, p]$, $(s, L) \sim_{X \circ Y} (s', L')$ et $(1, J) \not\sim_{X \circ Y} (1, J')$. Par la proposition 2.1.5 on obtient

$$P_L^J P_{L'}^{J'} = \sum_{s=1}^p \sum_{s'=1}^p Z_{sL,1J} Z_{s'L',1J'} = 0$$

et $P_{J'}^{L'} P_J^L = S(P_L^J P_{L'}^{J'}) = 0$, donc toujours avec la proposition 2.1.5 on obtient $P d_Y = d_Y P$. \square

On considère maintenant la matrice $x^{(a)} = (x_{ij}^{(a)})_{1 \leq i, j \leq p}$ avec

$$x_{ij}^{(a)} = \sum_{L=1}^n Z_{ia,jL}$$

Pour obtenir des propriétés sur $x^{(a)}$ on a besoin des lemmes suivants.

Lemme 3.2.12. *Soient $L, L', J \in [1, n]$, $i, i', j, j' \in [1, p]$, tels que $L \neq L'$, alors*

$$Z_{iL,jJ} Z_{i'L',j'J} = 0 = Z_{jJ,iL} Z_{j'J,i'L'}$$

Démonstration. En utilisant l'hypothèse on a

$$Z_{iL,jJ} P_L^J = Z_{iL,jJ} P_L^J(j) = \sum_{s=1}^p Z_{iL,jJ} Z_{sL,jJ} = Z_{iL,jJ} = P_L^J Z_{iL,jJ}$$

et

$$Z_{i'L',j'J} P_L^J = Z_{i'L',j'J} P_L^J(j') = \sum_{s=1}^p Z_{i'L',j'J} Z_{sL,j'J} = 0 = P_L^J Z_{i'L',j'J}$$

Ainsi

$$Z_{iL,jJ}Z_{i'L',j'J} = Z_{iL,jJ}P_L^J Z_{i'L',j'J} = 0$$

Finalement on obtient la seconde inégalité en appliquant l'antipode S à la première puisque $S(Z_{iL,jJ}) = Z_{jJ,iL}$. \square

Lemme 3.2.13. *Soient $a, b \in [1, n]$, pour $i, i', j \in [1, p]$, on a les relations suivantes :*

$$x_{ij}^{(a)} x_{ij'}^{(a)} = \delta_{j,j'} x_{ij}^{(a)}, \quad x_{ji}^{(a)} x_{j'i}^{(a)} = \delta_{j,j'} x_{ji}^{(a)}, \quad \sum_{k=1}^n x_{ik}^{(a)} = 1, \quad \sum_{k=1}^n x_{kj}^{(a)} = 1$$

$$\Delta(x_{ij}^{(a)}) = \sum_{(s,k) \in [1,p] \times [1,n]} x_{is}^{(a)} P_a^k \otimes x_{sj}^{(k)}, \quad \epsilon(x_{ij}^{(a)}) = \delta_{ij}, \quad S(x_{ij}^{(a)}) = \sum_{L=1}^n x_{ji}^{(L)} P_L^a$$

et

$$x_{ij}^{(a)} P_a^b = P_a^b x_{ij}^{(a)}$$

Démonstration. En utilisant que Z est magique unitaire et le lemme 3.2.12 on a

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(a)} x_{ij'}^{(a)} &= \sum_{L=1}^n \sum_{L'=1}^n Z_{ia,jL} Z_{ia,j'L'} = \delta_{j,j'} \sum_{L=1}^n Z_{ia,jL} = \delta_{j,j'} x_{ij}^{(a)} \\ x_{ji}^{(a)} x_{j'i}^{(a)} &= \sum_{L=1}^n \sum_{L'=1}^n Z_{ja,iL} Z_{j'a,iL'} = \sum_{L=1}^n Z_{ja,iL} Z_{j'a,iL} = \delta_{j,j'} x_{ji}^{(a)} \\ \sum_{k=1}^p x_{ik}^{(a)} &= \sum_{k=1}^p \sum_{L=1}^n Z_{ia,kL} = 1 \end{aligned}$$

et avec le lemme 3.2.10, on obtient

$$\sum_{k=1}^p x_{kj}^{(a)} = \sum_{k=1}^p \sum_{L=1}^n Z_{ka,jL} = \sum_{L=1}^n P_a^L(j) = \sum_{L=1}^n P_a^L = 1$$

De nouveau grâce au lemme 3.2.12, on a aussi

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(a)} P_a^b &= \sum_{L=1}^n \sum_{s=1}^p Z_{ia,jL} Z_{sa,jb} = \sum_{s=1}^p Z_{ia,jb} Z_{sa,jb} = Z_{ia,jb} \\ P_a^b x_{ij}^{(a)} &= \sum_{L=1}^n \sum_{s=1}^p Z_{sa,jb} Z_{ia,jL} = \sum_{s=1}^p Z_{sa,jb} Z_{ia,jb} = Z_{ia,jb} \end{aligned}$$

Ensuite on a

$$\begin{aligned} \Delta(x_{ij}^{(a)}) &= \sum_{L=1}^n \Delta(Z_{ia,jL}) = \sum_{L=1}^n \sum_{(s,k) \in [1,p] \times [1,n]} Z_{ia,sk} \otimes Z_{sk,jL} \\ &= \sum_{(s,k) \in [1,p] \times [1,n]} Z_{ia,sk} \otimes \sum_{L=1}^n Z_{sk,jL} \\ &= \sum_{(s,k) \in [1,p] \times [1,n]} x_{is}^{(a)} P_a^k \otimes x_{sj}^{(k)} \end{aligned}$$

$$\epsilon(x_{ij}^{(a)}) = \sum_{L=1}^n \epsilon(Z_{ia,jL}) = \delta_{ij}$$

$$S(x_{ij}^{(a)}) = \sum_{L=1}^n S(Z_{ia,jL}) = \sum_{L=1}^n Z_{jL,ia} = \sum_{L=1}^n x_{ji}^{(L)} P_L^a$$

Ceci termine la preuve. \square

Proposition 3.2.14. *Pour tout $a \in [1, n]$ la matrice $x^{(a)}$ est magique unitaire et commute avec d_X .*

Démonstration. Le lemme 3.2.13 nous indique que $x^{(a)}$ est magique unitaire. Soient $i, i', j, j' \in [1, p]$ tels que $i \sim_X i'$ et $j \not\sim_X j'$, en utilisant

$$(i, L) \sim_{X \circ Y} (i', L) \Leftrightarrow i \sim_X i', \quad \text{pour tout } L \in [1, n]$$

et le lemme 3.2.12, on obtient

$$\begin{aligned} x_{ij}^{(a)} x_{i'j'}^{(a)} &= \sum_{L=1}^n \sum_{L'=1}^n Z_{ia,jL} Z_{i'a,j'L'} = \sum_{L=1}^n Z_{ia,jL} Z_{i'a,j'L} = 0 \\ x_{ji}^{(a)} x_{j'i'}^{(a)} &= \sum_{L=1}^n \sum_{L'=1}^n Z_{ja,iL} Z_{j'a,i'L'} = \sum_{L=1}^n Z_{ja,iL} Z_{j'a,i'L} = 0 \end{aligned}$$

ainsi par la proposition 2.1.5 on a bien $x^{(a)} d_X = d_X x^{(a)}$. \square

Nous avons à présent tous les éléments nécessaires pour démontrer le théorème 5.3.16 en montrant que le morphisme d'algèbres de Woronowicz

$$\begin{aligned} \Phi : A(X \circ Y) &\rightarrow A(X) *_w A(Y) \\ Z_{ia,jb} &\mapsto w_{ia,jb} = u_{ij}^{(a)} v_{ab} \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Par les propositions 3.2.11 et 3.2.14, les matrices P et $x^{(a)}$ sont magiques unitaires et commutent respectivement avec d_Y et d_X . Par le lemme 3.2.13 on sait que pour tout $i, j \in [1, p]$, $a, b \in [1, n]$, les éléments $x_{ij}^{(a)}$ et P_a^b commutent. Cela nous permet d'obtenir le morphisme d'algèbres de Woronowicz suivant

$$\begin{aligned} \pi : A(X) *_w A(Y) &\rightarrow A(X \circ Y) \\ u_{ij}^{(a)} &\mapsto x_{ij}^{(a)} \\ v_{ab} &\mapsto P_a^b \end{aligned}$$

qui est l'inverse de Φ puisque

$$x_{ij}^{(a)} P_a^b = Z_{ia,jb}, \quad \sum_{b=1}^n u_{ij}^{(a)} v_{ab} = u_{ij}^{(a)} \quad \text{et} \quad \sum_{s=1}^p u_{s1}^{(a)} v_{ab} = v_{ab}$$

Ceci termine la preuve.

On rappelle que si $A(X) = C(\mathbb{G}_X)$ et $A(Y) = C(\mathbb{G}_Y)$ alors $\mathbb{G}_X \lambda_* \mathbb{G}_Y$ est un sous-groupe quantique de S_{np}^+ tel que

$$A(X) *_w A(Y) = C(\mathbb{G}_X \lambda_* \mathbb{G}_Y)$$

Voici alors deux exemples d'applications du théorème 5.3.16 :

Exemple 3.2.15. Comme pour tout $n \geq 5$ les graphes C_n et C_n^c sont connexes, alors pour tout graphe régulier Y on a

$$A(C_n \circ Y) \simeq C(\mathcal{D}_n) *_w A(Y) := C(\mathcal{D}_n \lambda_* \mathbb{G}_Y)$$

Exemple 3.2.16. Considérons l'ensemble de graphes suivants

$$\{K_n \circ C_{3k} \mid n \geq 2, k \geq 2\},$$

où K_n est le graphe complet d'ordre n et C_{3k} le graphe cyclique d'ordre $3k$. Les spectres qui nous intéressent sont les suivants

$$Sp(K_n) = \{-1, n-1\}, \quad Sp(C_{3k}) = \left\{ 2 \cos \left(\frac{2s\pi}{3k} \right) \mid s = 1, \dots, 3k \right\} \supset \{-1\}$$

Ainsi les graphes $K_n \circ C_{3k}$ ne satisfont pas les hypothèses du théorème 3.2.5 mais satisfont celles du théorème 5.3.16 puisque K_n est connexe et $T_{C_n} = \emptyset$ quand $n \geq 4$. On obtient donc

$$A(K_n \circ C_{3k}) \simeq A(K_n) *_w A(C_{3k}) = A_s(n) *_w C(\mathcal{D}_{3k}) := C(S_n^+ \lambda_* \mathcal{D}_{3k})$$

3.3 Démonstration du lemme clé

Pour commencer on rappelle que si X est un graphe régulier d'ordre n , $\lambda(X)$ est le nombre de voisins de chaque sommet de X et $\alpha(X) = \lambda(X^c) = n - 1 - \lambda(X)$. L'énoncé que l'on va démontrer est le suivant

Lemme 3.3.1. *Soient X et Y deux graphes réguliers tels que*

$$(S_Y \neq \emptyset \Rightarrow X \text{ connexe}) \text{ et } (T_Y \neq \emptyset \Rightarrow X^c \text{ connexe})$$

Alors pour tout $L, J \in [1, n]$, on a

$$\forall k_1, k_2 \in [1, p], \quad P_L^J(k_1) = P_L^J(k_2)$$

où $P_L^J(k) = \sum_{s=1}^p Z_{sL, kJ}$. Ainsi $P_L^J(k)$ ne dépend pas de k .

Remarque 3.3.2. Dans le cas $Y = X_n$ et X connexe de [14] la preuve est courte. Dans [7] avec les hypothèses spectrales sur X et Y , le point clé est la proposition 2.1.6 qui indique que les espaces propres de d_X sont stables par la coaction naturelle de $A(X)$.

Quitte à changer la numérotation des sommets de Y il suffit de prouver le cas $J = 1$. On note donc $P_L^1(k) := P_L(k)$. On commence par une série de quatre lemmes pour comprendre le produit $P_L(k_1)P_J(k_2)$ pour différentes valeurs de L, J, k_1 et k_2 . La nature d'un couple de sommets (i, j) d'un graphe désignera le fait que i et j soient ou non reliés par une arête.

Lemme 3.3.3. *Soient $L, J \in [1, n]$, $L \neq J$ et $k_1, k_2 \in [1, p]$, $k_1 \neq k_2$ tels que $(L, J)_Y$ et $(k_1, k_2)_X$ n'aient pas la même nature. Alors on a*

$$P_L(k_1)P_J(k_2) = 0$$

Démonstration. $(L, J)_Y$ et $(k_1, k_2)_X$ n'ont pas la même nature donc par définition de $X \circ Y$, pour tout $u, t \in [1, p]$, (tL, uJ) et (k_1, k_2) n'ont pas la même nature non plus. En utilisant la proposition 2.1.5, on obtient

$$P_L(k_1)P_J(k_2) = \sum_{t=1}^p \sum_{u=1}^p Z_{tL, k_1} Z_{uJ, k_2} = 0$$

ce qui termine la preuve. □

Lemme 3.3.4. *Soient $L, J \in [1, n]$, $L \neq J$ et $k_1, k_2 \in [1, p]$, $k_1 \neq k_2$.*

i. Pour tout $Q \in \mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)$, on a

$$\sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)} P_L(k_1) P_Q(s) P_J(k_2) = p P_L(k_1) P_J(k_2)$$

ii. Si $Q \in \{L, J\}$ on a

$$\sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)} P_L(k_1) P_Q(s) P_J(k_2) = \begin{cases} \delta_{Q,L} \alpha(X) P_L(k_1) P_J(k_2) & \text{si } J \in \mathcal{V}_Y(L) \\ \delta_{Q,J} \lambda(X) P_L(k_1) P_J(k_2) & \text{si } J \in \mathcal{W}_Y(L) \end{cases}$$

Démonstration. Par la proposition 2.1.5, pour tout $i, j \in [1, p]$ et $I, J \in [1, n]$ on a

$$\sum_{(s,S) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(i,I)} Z_{sS,jJ} = \sum_{(s,S) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(j,J)} Z_{iI,sS}$$

Ainsi pour tout $(i, Q) \in [1, p] \times [1, n]$ on a

$$\sum_{(s,S) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(i,Q)} Z_{sS,k_21} = \sum_{(s,1) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(k_2,1)} Z_{iQ,s1} + \sum_{\substack{(s,S) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(k_2,1) \\ S \neq 1}} Z_{iQ,sS}$$

$$\text{et } \sum_{(s,S) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(i,Q)} Z_{sS,k_11} = \sum_{(s,1) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(k_1,1)} Z_{iQ,s1} + \sum_{\substack{(s,S) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(k_1,1) \\ S \neq 1}} Z_{iQ,sS}$$

On a aussi, par définition de $X \circ Y$,

$$\{(s, S) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(k_2, 1), S \neq 1\} = \{(s, S) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(k_1, 1), S \neq 1\}$$

ce qui donne

$$\sum_{(s,S) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(i,Q)} (Z_{sS,k_21} - Z_{sS,k_11}) = \sum_{(s,1) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(k_2,1)} Z_{iQ,s1} - \sum_{(s,1) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(k_1,1)} Z_{iQ,s1} \quad (*)$$

En sommant sur $i \in [1, p]$, les termes de l'égalité précédente, pour $j \in \{1, 2\}$, on obtient

$$\sum_{i=1}^p \left(\sum_{(s,1) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(k_j,1)} Z_{iQ,s1} \right) = \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_j)} \left(\sum_{i=1}^p Z_{iQ,s1} \right) = \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_j)} P_Q(s)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^p \left(\sum_{(s,S) \in \mathcal{W}_{X \circ Y}(i,Q)} Z_{sS,k_j 1} \right) &= \sum_{i=1}^p \left(\sum_{s \in \mathcal{W}_X(i)} Z_{sQ,k_j 1} \right) + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{S \in \mathcal{W}_Y(Q)} \sum_{s=1}^p Z_{sS,k_j 1} \right) \\
&= \sum_{s=1}^p \left(\sum_{i \in \mathcal{W}_X(s)} Z_{sQ,k_j 1} \right) + \sum_{i=1}^p \left(\sum_{S \in \mathcal{W}_Y(Q)} P_S(k_j) \right) \\
&= \sum_{s=1}^p \alpha(X) Z_{sQ,k_j 1} + p \left(\sum_{S \in \mathcal{W}_Y(Q)} P_S(k_j) \right) \\
&= \alpha(X) P_Q(k_j) + p \left(\sum_{S \in \mathcal{W}_Y(Q)} P_S(k_j) \right)
\end{aligned}$$

Ainsi la somme sur $i \in [1, p]$ de l'égalité (*) nous donne

$$p \left(\sum_{S \in \mathcal{W}_Y(Q)} (P_S(k_2) - P_S(k_1)) \right) + \alpha(X) (P_Q(k_2) - P_Q(k_1)) = \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_2)} P_Q(s) - \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1)} P_Q(s)$$

Comme pour tout S, S', k , $P_S(k)P_{S'}(k) = \delta_{S,S'}P_S(k)$, en multipliant par $P_L(k_1)$ à gauche et $P_J(k_2)$ à droite dans l'égalité ci-dessus, on a

$$a_{L,J}(Q)P_L(k_1)P_J(k_2) + \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1)} P_L(k_1)P_Q(s)P_J(k_2) = \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_2)} P_L(k_1)P_Q(s)P_J(k_2) \quad (**)$$

avec $a_{L,J}(Q) = (\delta_{J \in \mathcal{W}_Y(Q)} - \delta_{L \in \mathcal{W}_Y(Q)})p + (\delta_{Q,J} - \delta_{Q,L})\alpha(X)$.

On traite alors 5 cas séparément.

- Si $Q \in \mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)$, alors $a_{L,J}(Q) = -p$ et (**) donnent

$$\begin{aligned}
pP_L(k_1)P_J(k_2) &= \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1)} P_L(k_1)P_Q(s)P_J(k_2) - \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_2)} P_L(k_1)P_Q(s)P_J(k_2) \\
\text{lemme 3.3.3} \rightarrow &= \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}_X(k_1) \\ s \in \mathcal{V}_X(k_2)}} P_L(k_1)P_Q(s)P_J(k_2) - \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}_X(k_2) \\ s \in \mathcal{V}_X(k_2)}} P_L(k_1)P_Q(s)P_J(k_2) \\
&= \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}_X(k_1) \\ s \in \mathcal{V}_X(k_2)}} P_L(k_1)P_Q(s)P_J(k_2)
\end{aligned}$$

ce qui nous donne (i).

- Si $Q = L$ et $J \in \mathcal{V}_Y(L)$ alors $a_{L,J}(Q) = a_{L,J}(L) = -\alpha(X)$ et par (**) on a

$$\begin{aligned} \alpha(X)P_L(k_1)P_J(k_2) &= \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1)} P_L(k_1)P_L(s)P_J(k_2) - \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_2)} P_L(k_1)P_L(s)P_J(k_2) \\ &= \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)} P_L(k_1)P_L(s)P_J(k_2) \quad (\text{par le lemme 3.3.3}) \end{aligned}$$

- Si $Q = L$ et $J \in \mathcal{W}_Y(L)$ alors pour tout $s \in \mathcal{V}_X(k_2)$, $P_Q(s)P_J(k_2) = 0$ par le lemme 3.3.3. Ainsi on obtient

$$\sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)} P_L(k_1)P_L(s)P_J(k_2) = 0$$

- Si $Q = J$ et $J \in \mathcal{W}_Y(L)$, alors $a_{L,J}(Q) = a_{L,J}(J) = \alpha(X) - p = -\lambda(X) - 1$ et avec (**) on obtient

$$\begin{aligned} (\lambda(X) + 1)P_L(k_1)P_J(k_2) &= \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1)} P_L(k_1)P_J(s)P_J(k_2) - \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_2)} P_L(k_1)P_J(s)P_J(k_2) \\ &= \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1)} P_L(k_1)P_J(s)P_J(k_2) - \sum_{\substack{s \in \mathcal{W}_X(k_2) \\ s \in \mathcal{W}_X(k_1)}} P_L(k_1)P_J(s)P_J(k_2) \\ &= \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1) \cap (\mathcal{V}_X(k_2) \cup \{k_2\})} P_L(k_1)P_J(s)P_J(k_2) \\ &= P_L(k_1)P_J(k_2) + \sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)} P_L(k_1)P_J(s)P_J(k_2) \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)} P_L(k_1)P_J(s)P_J(k_2) = \lambda(X)P_L(k_1)P_J(k_2)$$

- Finalement si $Q = J$ et $J \in \mathcal{V}_Y(L)$ alors pour tout $s \in \mathcal{W}_X(k_1)$, $P_L(k_1)P_J(s) = 0$ par le lemme 3.3.3. Ainsi on a

$$\sum_{s \in \mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)} P_L(k_1)P_J(s)P_J(k_2) = 0$$

Ces 4 derniers cas prouvent le point (ii) et terminent la preuve. \square

Lemme 3.3.5. Soient $L, J \in [1, n]$, $L \neq J$ et $k_1, k_2 \in [1, p]$, $k_1 \neq k_2$. On pose $A = \mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)$. On suppose que $\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J) \neq \emptyset$.

Si $J \in \mathcal{V}_Y(L)$, on a

$$\left(|A| - \alpha(X) - p|\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)|\right) P_L(k_1) P_J(k_2) = 0$$

Si $J \in \mathcal{W}_Y(L)$, on a

$$\left(|A| - \lambda(X) - p|\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)|\right) P_L(k_1) P_J(k_2) = 0$$

Démonstration. Si $(L, J)_Y$ et $(k_1, k_2)_X$ n'ont pas la même nature par le lemme 3.3.3 on a $P_L(k_1) P_J(k_2) = 0$. On suppose maintenant qu'ils ont la même nature. Puisque $\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J) \neq \emptyset$, si $A = \emptyset$, par (i) du lemme 3.3.4, on obtient encore $P_L(k_1) P_J(k_2) = 0$. On suppose dans la suite que $A \neq \emptyset$.

Pour tout $s \in A$, on a

$$\begin{aligned} P_L(k_1) P_J(k_2) &= P_L(k_1) \left(\sum_{Q=1}^n P_Q(s) \right) P_J(k_2) \\ &= P_L(k_1) \left(\sum_{Q \in (\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)) \cup \{L\} \cup \{J\}} P_Q(s) \right) P_J(k_2) \quad (\text{par le lemme 3.3.3}) \end{aligned}$$

et en sommant sur $s \in A$ on obtient

$$|A| P_L(k_1) P_J(k_2) = \sum_{Q \in (\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)) \cup \{L\} \cup \{J\}} \left(\sum_{s \in A} P_L(k_1) P_Q(s) P_J(k_2) \right)$$

Finalement avec le lemme 3.3.4 on a

$$|A| P_L(k_1) P_J(k_2) = \begin{cases} \alpha(X) P_L(k_1) P_J(k_2) + p|\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)| P_L(k_1) P_J(k_2) & \text{si } J \in \mathcal{V}_Y(L) \\ \lambda(X) P_L(k_1) P_J(k_2) + p|\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)| P_L(k_1) P_J(k_2) & \text{si } J \in \mathcal{W}_Y(L) \end{cases}$$

ce qui donne le résultat. \square

Lemme 3.3.6. Soient $L, J \in [1, n]$, $L \neq J$ et $k_1, k_2 \in [1, p]$, $k_1 \neq k_2$. Alors

$$|\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)| \neq 0 \implies P_L(k_1) P_J(k_2) = 0$$

En particulier,

$$\left((k_2 \in \mathcal{V}_X(k_1) \text{ et } T_Y = \emptyset) \text{ ou } (k_2 \in \mathcal{W}_X(k_1) \text{ et } S_Y = \emptyset) \right) \implies P_L(k_1) P_J(k_2) = 0$$

Démonstration. Si $(L, J)_Y$ et $(k_1, k_2)_X$ n'ont pas la même nature, c'est une conséquence du lemme 3.3.3. On suppose maintenant qu'ils ont la même nature et on commence par le cas où $k_2 \in \mathcal{V}_X(k_1)$ (et $J \in \mathcal{V}_Y(L)$).

Par hypothèse $|\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)| \geq 1$ ainsi $\alpha(X) + p|\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)| \geq p + \alpha(X)$ et par définition $|\mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)| \leq p$ donc on obtient

$$\alpha(X) + p|\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)| - |\mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)| \geq \alpha(X)$$

Si $\alpha(X) > 0$, le lemme 3.3.5 donne le résultat, sinon $\alpha(X) = 0$ (ce qui signifie que $X = K_p$) alors $\mathcal{W}_X(k_1) = \emptyset$ et en utilisant (i) du lemme 3.3.4, on peut conclure car $\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J) \neq \emptyset$.

On traite ensuite le cas $k_2 \in \mathcal{W}_X(k_1)$ (et $J \in \mathcal{W}_Y(L)$). De la même façon que précédemment on montre que

$$\lambda(X) + p|\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)| - |\mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)| \geq \lambda(X)$$

Si $\lambda(X) > 0$ on conclut à l'aide du lemme 3.3.5, sinon on a $X = X_p$ et $\mathcal{V}_X(k_2) = \emptyset$ donc (i) du lemme 3.3.4 donne le résultat.

Pour le dernier résultat on a juste besoin de montrer que quand $(L, J)_Y$ et $(k_1, k_2)_X$ ont la même nature on a

$$\left((k_2 \in \mathcal{V}_X(k_1) \text{ et } T_Y = \emptyset) \text{ ou } (k_2 \in \mathcal{W}_X(k_1) \text{ et } S_Y = \emptyset) \right) \implies |\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)| \neq 0$$

Supposons que $|\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)| = 0$, alors $\mathcal{V}_Y(J) \subset (\mathcal{W}_Y(L))^c = \mathcal{V}_Y(L) \cup \{L\}$. Si $T_Y = \emptyset$ et $k_2 \in \mathcal{V}_X(k_1)$ alors $J \in \mathcal{V}_Y(L)$ et on obtient $\mathcal{V}_Y(J) \cup \{J\} = \mathcal{V}_Y(L) \cup \{L\}$ par inclusion et inégalité des cardinaux, contradiction. De la même manière si $S_Y = \emptyset$ et $k_2 \in \mathcal{W}_X(k_1)$, alors $L \notin \mathcal{V}_Y(J)$ et par suite $\mathcal{V}_Y(J) = \mathcal{V}_Y(L)$, contradiction. \square

Voici maintenant la preuve du lemme 3.3.1.

Démonstration. Les hypothèses sur X et Y peuvent être divisées en 4 cas.

- (1) X est connexe et $T_Y = \emptyset$.
- (2) X^c est connexe et $S_Y = \emptyset$.
- (3) $T_Y = \emptyset$ et $S_Y = \emptyset$.
- (4) X et X^c sont connexes, $S_Y \neq \emptyset$ et $T_Y \neq \emptyset$.

Cas (1) : Soit $k_2 \in \mathcal{V}_X(k_1)$, en utilisant le lemme 3.3.6 on a

$$P_L(k_1) = P_L(k_1) \left(\sum_{J=1}^n P_J(k_2) \right) = P_L(k_1) P_L(k_2)$$

et

$$P_L(k_2) = \left(\sum_{J=1}^n P_J(k_1) \right) P_L(k_2) = P_L(k_1)P_L(k_2)$$

ainsi $P_L(k_1) = P_L(k_2)$ quand k_1 et k_2 sont connectés dans X . Comme X est connexe, on obtient que $P_L(k_1) = P_L(k_2)$ pour tout $k_1, k_2 \in [1, p]$.

Cas (2) : On vérifie que $(X \circ Y)^c = X^c \circ Y^c$ et $T_Y = S_{Y^c}$. Alors, en utilisant le cas (1), on obtient le résultat puisque $A(X^c) = A(X)$.

Cas (3) : Soient $k_1, k_2 \in [1, p]$ avec $k_1 \neq k_2$. Par le lemme 3.3.6, pour tout $L, J \in [1, n]$ tels que $L \neq J$, on a $P_L(k_1)P_J(k_2) = 0$. Puis de manière similaire au cas (1) on obtient $P_L(k_1) = P_L(k_2)$.

Cas (4) : Pour commencer on suppose que $k_2 \in \mathcal{V}_X(k_1)$. Si $J \in \mathcal{W}_Y(L)$, alors par le lemme 3.3.3, on a $P_L(k_1)P_J(k_2) = 0$. Si $J \in \mathcal{V}_Y(L)$, par le lemme 3.3.5, on obtient

$$\left(|\mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)| - \alpha(X) - p|\mathcal{W}_Y(L) \cap \mathcal{V}_Y(J)| \right) P_L(k_1)P_J(k_2) = 0$$

Puis avec le lemme 3.3.6 on a $P_L(k_1)P_J(k_2) = 0$ ou

$$|\mathcal{W}_X(k_1) \cap \mathcal{V}_X(k_2)| = \alpha(X) \quad (= |\mathcal{W}_X(k_1)|)$$

Cette dernière égalité implique que $\mathcal{W}_X(k_1) \subset \mathcal{V}_X(k_2)$. Si pour tout $J \neq L$ on a $P_L(k_1)P_J(k_2) = 0$, le même calcul qu'au cas (1) nous donne $P_L(k_1) = P_L(k_2)$. Finalement on obtient l'implication suivante.

$$(*) \quad k_2 \in \mathcal{V}_X(k_1) \implies \left((P_L(k_1) = P_L(k_2)) \text{ ou } (P_L(k_1) \neq P_L(k_2) \text{ et } \mathcal{W}_X(k_1) \subset \mathcal{V}_X(k_2)) \right)$$

En passant au graphe complémentaire on a aussi

$$(**) \quad k_2 \in \mathcal{W}_X(k_1) \implies \left((P_L(k_1) = P_L(k_2)) \text{ ou } (P_L(k_1) \neq P_L(k_2) \text{ et } \mathcal{V}_X(k_1) \subset \mathcal{W}_X(k_2)) \right)$$

On pose alors :

$$S_1 = \{k_2 \in \mathcal{V}_X(k_1) \mid P_L(k_1) = P_L(k_2)\}$$

$$S_2 = \{k_2 \in \mathcal{V}_X(k_1) \mid P_L(k_1) \neq P_L(k_2) \text{ et } \mathcal{W}_X(k_1) \subset \mathcal{V}_X(k_2)\}$$

On a $\mathcal{V}_X(k_1) = S_1 \cup S_2 \neq \emptyset$ où l'union est disjointe, par (*).

Supposons que $S_2 \neq \emptyset$. Si tous les éléments de S_2 sont connectés avec tous les éléments de S_1 , alors S_2 ($\neq X$ puisque $k_1 \notin S_2$) est un graphe isolé dans X^c , contradiction car X^c est connexe. Sinon il existe $s_1 \in S_1$ et $s_2 \in S_2$ tels que (s_1, s_2) ne soit pas une arête de X , ce qui signifie que $s_2 \in \mathcal{W}_X(s_1)$. Par (**) on obtient deux cas :

- i. $P_L(s_2) = P_L(s_1) = P_L(k_1)$, ce qui est impossible car $s_2 \in S_2$
- ii. $\mathcal{V}_X(s_2) \subset \mathcal{W}_X(s_1)$, ce qui est impossible car $k_1 \in \mathcal{V}_X(s_2)$ et $k_1 \notin \mathcal{W}_X(s_1)$

Bilan : $S_2 = \emptyset$. En notant maintenant

$$S'_1 = \{k_2 \in \mathcal{W}_X(k_1) \mid P_L(k_1) = P_L(k_2)\}$$

$$S'_2 = \{k_2 \in \mathcal{W}_X(k_1) \mid P_L(k_1) \neq P_L(k_2) \text{ et } \mathcal{V}_X(k_2) \subset \mathcal{W}_X(k_1)\},$$

on démontre de la même manière que précédemment (en utilisant que X est connexe) que $S'_2 = \emptyset$ ce qui permet d'obtenir

$$\forall k_1, k_2 \in [1, p], \quad P_L(k_1) = P_L(k_2)$$

comme on le souhaitait. □

Chapitre 4

Les symétries quantiques des graphes circulants

L'objectif de cette thèse est d'étudier les symétries quantiques des graphes finis. Des résultats dans le cas général seront donnés dans la partie 5.4.4 mais une classe de graphes finis sommet-transitifs nous intéresse particulièrement : il s'agit des graphes circulants, pour lesquels nous développerons de nombreux résultats. Dans toute la suite de cette thèse les sommets d'un graphe fini d'ordre n seront numérotés de 0 à $n - 1$.

4.1 Les graphes circulants

Dans cette première sous-partie nous donnons les définitions et notations nécessaires à notre étude ainsi qu'un premier résultat important issu de [7] pour traiter les symétries quantiques des graphes circulants.

Définition 4.1.1. Un graphe circulant est un graphe sommet-transitif à n sommets dont le groupe d'automorphismes contient un cycle de longueur n . Dans la suite on parlera aussi de n -graphes circulants pour désigner les graphes circulants à n sommets

Si on note (i_1, i_2, \dots, i_n) un cycle de longueur n d'un graphe circulant alors les couples (i_k, i_{k+1}) pour tout $k \in [1, n]$ (avec $i_{n+1} := i_1$) ont tous la même nature. Ainsi, quitte à passer au complémentaire, on pourra se contenter dans la suite d'étudier les symétries quantiques des graphes circulants pour lesquels ces couples sont des arêtes du graphe. Ces graphes circulants sont alors exactement ceux qui sont décrits dans la définition suivante.

Définition 4.1.2. On note $C_n(k_1, \dots, k_r)$, avec $1 < k_1 < \dots < k_r \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, $k_i \in \mathbb{N}$, le graphe circulant constitué d'un cycle à n sommets qui sont reliés lorsqu'ils sont

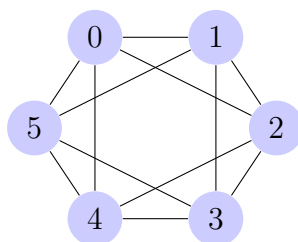
à distance k_i sur le cycle. Autrement dit pour des sommets $i, j \in [0, n - 1]$ on a

$$i \sim j \iff i - j \in \{\pm 1, \pm k_1, \dots, \pm k_r\}$$

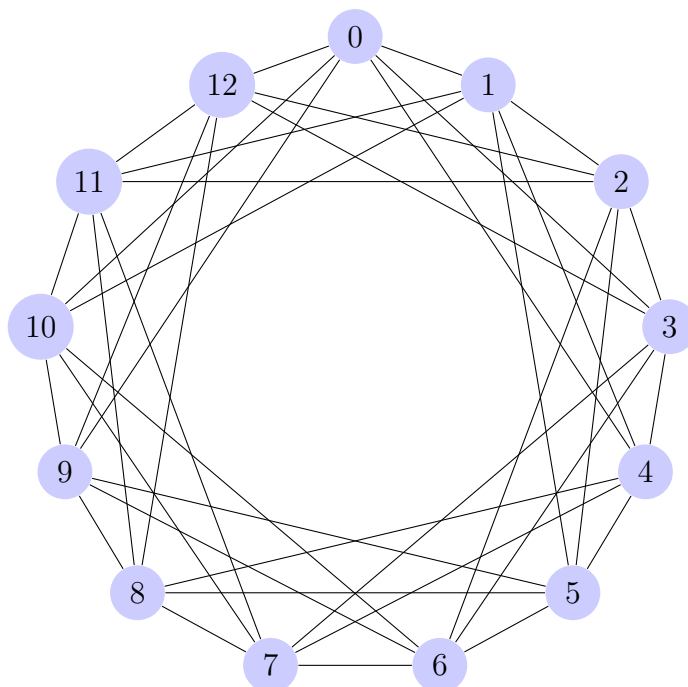
avec $i - j$ qui est à considérer modulo n . On note $C_{2n}^+ = C_{2n}(n)$ le $2n$ -cycle avec diagonales.

Exemple 4.1.3. On donne deux exemples pour illustrer cette définition.

i. $X = C_6(2) = (3K_2)^c$:



ii. $X = C_{13}(3, 4)$:



La proposition 2.1.6 nous amène à étudier dans un premier temps la décomposition spectrale des matrices d'adjacence de ces graphes circulants. La proposition suivante se trouve dans [7] et nous avons simplement apporté une petite correction avec le coefficient $\alpha(i)$.

Proposition 4.1.4. *[[7], Proposition 3.1] On considère ici le graphe $X = C_n(k_1, \dots, k_r)$ et on note d_X sa matrice d'adjacence. On a alors :*

$$d_X(\xi^s) = 2f(s)\xi^s,$$

où $\xi = (1, \omega, \dots, \omega^{n-1})$, avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et

$$f(s) = \sum_{i=0}^r \alpha(i) \cos\left(\frac{2k_i s \pi}{n}\right)$$

où $k_0 = 1$ et $\alpha(i) = \frac{1}{2}$ si $k_i = \frac{n}{2}$ et 1 sinon.

Cette proposition va permettre de traiter le cas de nombreux graphes circulants à l'aide du théorème suivant. Celui-ci est donné dans sa formulation de [7] mais était déjà présent dans [3] et [4].

Théorème 4.1.5. *[[7], Theorem 3.1] Si $n \neq 4$ et que la fonction $f : \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective, alors le graphe circulant $C_n(k_1, \dots, k_r)$ n'a pas de symétrie quantique.*

Démonstration. La fonction f vérifie $f(u) = f(n - u)$ pour $u \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ donc avec l'injectivité et la proposition 4.1.4 on obtient que les espaces propres de d_X sont les suivants :

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathbb{C}1 \\ V_1 &= \mathbb{C}\xi \oplus \mathbb{C}\xi^{n-1} \\ V_2 &= \mathbb{C}\xi^2 \oplus \mathbb{C}\xi^{n-2} \\ &\dots \dots \\ V_m &= \mathbb{C}\xi^m \oplus \mathbb{C}\xi^{n-m}, \end{aligned}$$

avec $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, la dernière somme étant directe si n est impair. On commence par utiliser la stabilité des espaces propres de d_X pour la coaction de $A(X)$. Si $n = 2$, $\alpha(\xi) = \xi \otimes a$ et $A(X)$ est engendrée par a donc commutative. On suppose maintenant $n \geq 3$ et par stabilité de V_1 on a

$$\alpha(\xi) = \xi \otimes a + \xi^{n-1} \otimes b$$

Puis

$$\alpha(\xi^2) = \alpha(\xi)\alpha(\xi) = \xi^2 \otimes a^2 + \xi^{n-2} \otimes b^2 + 1 \otimes (ab + ba)$$

donc par stabilité de V_2 on a

$$\alpha(\xi^2) = \xi^2 \otimes a^2 + \xi^{n-2} \otimes b^2$$

avec les relations $ab = -ba$. Ensuite

$$\alpha(\xi^3) = \alpha(\xi)\alpha(\xi^2) = \xi^3 \otimes a^3 + \xi^{n-3} \otimes b^3 + \xi^{n-1} \otimes ab^2 + \xi \otimes ba^2$$

or $n \neq 4$ donc par stabilité de V_3 on a

$$\alpha(\xi^3) = \xi^3 \otimes a^3 + \xi^{n-3} \otimes b^3$$

et $ab^2 = ba^2 = 0$.

Avec ces relations, par récurrence sur s , on obtient

$$\alpha(\xi^s) = \xi^s \otimes a^s + \xi^{n-s} \otimes b^s$$

puis en utilisant l'adjoint on a $\alpha(\xi^*) = \alpha(\xi^{n-1}) = (\alpha(\xi))^*$ d'où $b^* = b^{n-1}$ et $a^* = a^{n-1}$ ainsi

$$(ab)(ab)^* = ab^n a^* = 0 = ba^n b^* = (ba)(ba)^*$$

donc $ba = ab (= 0)$. Ainsi $A(X)$ qui est engendrée par a et b est commutative. \square

Corollaire 4.1.6. *[[7], Corollary 3.1] Les graphes suivants n'ont pas de symétrie quantique*

$$C_n \ (n \neq 4), \ C_8^+, \ C_{10}^+, \ C_9(3), \ C_{11}(2), \ C_{11}(3).$$

En revanche pour le graphe $C_{10}(2)$ la fonction f n'est pas injective mais on peut quand même montrer qu'il n'a pas de symétrie quantique en utilisant l'amélioration suivante du théorème 4.1.5.

Théorème 4.1.7. *Soit $X = C_n(k_1, \dots, k_r)$ un graphe circulant avec $n \neq 4$. On considère toujours l'application*

$$f : \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} \rightarrow \mathbb{R}$$

de la proposition 4.1.4. Si il existe $x \in \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ tel que

- $x \in (\mathbb{Z}_n)^*$,
- $f(y) = f(x) \Rightarrow y = x$,

alors X n'a pas de symétrie quantique.

Démonstration. $V_0 = \mathbb{C}1$ puis on pose

$$\zeta := \xi^x \text{ et } V_s = \mathbb{C}\zeta^s \oplus \mathbb{C}\zeta^{-s}$$

Puisque $x \in (\mathbb{Z}_n)^*$, $(\zeta^0, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1})$ est une base de vecteurs propres de d_X .

La seconde hypothèse sur x implique que V_1 est stable par la coaction naturelle de $A(X)$:

$$\alpha(\zeta) = \zeta \otimes a + \zeta^{-1} \otimes b$$

Or α est un morphisme d'algèbres donc on a

$$\alpha(\zeta^2) = \alpha(\zeta).\alpha(\zeta) = \zeta^2 \otimes a^2 + \zeta^{-2} \otimes b^2 + 1 \otimes (ab + ba)$$

Ainsi par stabilité de l'espace propre contenant V_2 (et qui ne contient pas V_0) on obtient

$$\alpha(\zeta^2) = \zeta^2 \otimes a^2 + \zeta^{-2} \otimes b^2 \quad \text{et} \quad ab = -ba$$

Puis,

$$\alpha(\zeta^3) = \alpha(\zeta)\alpha(\zeta^2) = \zeta^3 \otimes a^3 + \zeta^{-3} \otimes b^3 + \zeta^{-1} \otimes ab^2 + \zeta \otimes ba^2,$$

Soit V l'espace propre de d_X contenant V_3 . En utilisant la stabilité de V par α on obtient $\alpha(V_3) \subset V \otimes A(X)$. Or $n \neq 4$ donc $V_3 \neq V_1$ et par hypothèse sur x on a $V_1 \cap V = \{0\}$. Ainsi en utilisant l'expression ci-dessus de $\alpha(\zeta^3)$ on obtient

$$\alpha(\zeta^3) = \zeta^3 \otimes a^3 + \zeta^{-3} \otimes b^3, \quad \text{et} \quad ab^2 = ba^2 = 0.$$

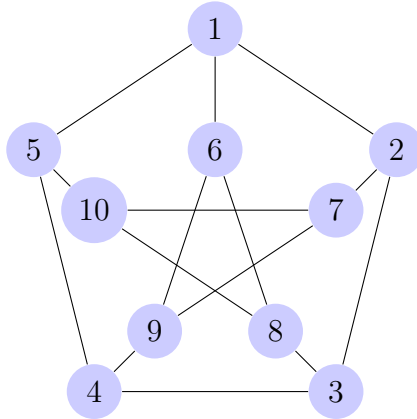
Puis, par récurrence, pour tout s on a $\alpha(\zeta^s) = \zeta^s \otimes a^s + \zeta^{-s} \otimes b^s$ et on peut conclure que $ab = ba = 0$ comme dans le théorème 4.1.5. \square

Les valeurs de f pour le graphe $C_{10}(2)$ sont les suivantes :

$$f(1) = -f(3) \simeq 1.1, \quad f(2) = f(4) = -0.5, \quad f(5) = 0$$

ainsi le théorème 4.1.7 avec $x = 1$ nous permet de dire que ce graphe n'a pas de symétrie quantique.

En utilisant ces méthodes ainsi que les produits sur les graphes, Banica et Bichon (dans [7]) ont traité l'ensemble des graphes sommet-transitifs pour $n \leq 11$, à l'exception du graphe de Petersen suivant :



$n =$	Graphe X	$\text{Aut}(X)$	\mathbb{G}_X
2	K_2	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2
3	K_3	\mathbb{S}_3	\mathbb{S}_3
4	$2K_2$	$\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \wr_* \mathbb{Z}_2$
4	K_4	\mathbb{S}_4	S_4^+
5	C_5	\mathcal{D}_5	\mathcal{D}_5
5	K_5	\mathbb{S}_5	S_5^+
6	C_6	\mathcal{D}_6	\mathcal{D}_6
6	$2K_3$	$\mathbb{S}_3 \wr \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{S}_3 \wr_* \mathbb{Z}_2$
6	$3K_2$	$\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{S}_3$	$\mathbb{Z}_2 \wr_* \mathbb{S}_3$
6	K_6	\mathbb{S}_6	S_6^+
7	C_7	\mathcal{D}_7	\mathcal{D}_7
7	K_7	\mathbb{S}_7	S_7^+
8	C_8, C_8^+	\mathcal{D}_8	\mathcal{D}_8
8	$\text{Pr}(C_4)$	$\mathbb{S}_4 \times \mathbb{Z}_2$	$S_4^+ \times \mathbb{Z}_2$
8	$2K_4$	$\mathbb{S}_4 \wr \mathbb{Z}_2$	$S_4^+ \wr_* \mathbb{Z}_2$
8	$2C_4$	$(\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2) \wr \mathbb{Z}_2$	$(\mathbb{Z}_2 \wr_* \mathbb{Z}_2) \wr_* \mathbb{Z}_2$
8	$4K_2$	$\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{S}_4$	$\mathbb{Z}_2 \wr_* S_4^+$
8	K_8	\mathbb{S}_8	S_8^+
9	$C_9, C_9(3)$	\mathcal{D}_9	\mathcal{D}_9
9	$\text{Tore} = K_3 \times K_3 = K_3 \square K_3$	$\mathbb{S}_3 \wr \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{S}_3 \wr \mathbb{Z}_2$
9	$3K_3$	$\mathbb{S}_3 \wr \mathbb{S}_3$	$\mathbb{S}_3 \wr_* \mathbb{S}_3$
9	K_9	\mathbb{S}_9	S_9^+
10	$C_{10}, C_{10}(2), C_{10}^+, \text{Pr}(C_5)$	\mathcal{D}_{10}	\mathcal{D}_{10}
10	Petersen	\mathbb{S}_5	?
10	$\text{Pr}(K_5)$	$\mathbb{S}_5 \times \mathbb{Z}_2$	$S_5^+ \times \mathbb{Z}_2$
10	$C_{10}(4)$	$\mathbb{Z}_2 \wr \mathcal{D}_5$	$\mathbb{Z}_2 \wr_* \mathcal{D}_5$
10	$2C_5$	$\mathcal{D}_5 \wr \mathbb{Z}_2$	$\mathcal{D}_5 \wr_* \mathbb{Z}_2$
10	$2K_5$	$\mathbb{S}_5 \wr \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{S}_5 \wr_* \mathbb{Z}_2$
10	$5K_2$	$\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{S}_5$	$\mathbb{Z}_2 \wr_* \mathbb{S}_5$
10	K_{10}	\mathbb{S}_{10}	S_{10}^+
11	$C_{11}, C_{11}(2), C_{11}(3)$	\mathcal{D}_{11}	\mathcal{D}_{11}
11	K_{11}	\mathbb{S}_{11}	S_{11}^+

4.2 Le cas $n = 13$

Pour traiter tous les graphes sommet-transitifs à 13 sommets on a d'abord besoin du résultat élémentaire suivant : Si n est premier alors tous les graphes sommet-transitifs d'ordre n sont circulants. En effet si X est un graphe sommet-

transitif à n sommets alors l'orbite de $[0, n - 1]$ sous l'action de $\text{Aut}(X)$ est de cardinal n donc n divise $\text{Aut}(X)$. Lorsque n est premier cela implique que $\text{Aut}(X)$ contient un élément d'ordre n de \mathbb{S}_n c'est à dire un cycle de longueur n .

En utilisant cela on trouve qu'il existe, à complémentaire près, 8 graphes sommet-transitifs à 13 sommets :

$$K_{13}, C_{13}, C_{13}(3), C_{13}(2), C_{13}(2, 5), C_{13}(2, 6), C_{13}(5) \text{ et } C_{13}(3, 4)$$

Les graphes C_{13} et K_{13} ont déjà été étudiés.

Proposition 4.2.1. *Les graphes $C_{13}(3), C_{13}(2), C_{13}(2, 5)$ et $C_{13}(2, 6)$ n'ont pas de symétrie quantique.*

Démonstration. Les valeurs prises par la fonction f du théorème 4.1.5 sur $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ sont les suivantes (à 0,01 près) :

$$C_{13}(3) : 1.01, -0.40, -0.23, 0.53, -0.18, -1.72$$

$$C_{13}(2) : 1.45, 0.21, -0.85, -1.10, -0.63, -0.09$$

$$C_{13}(2, 5) : 0.71, 0.33, -0.28, -2.07, 0.26, -0.44$$

$$C_{13}(2, 6) : 0.48, 1.10, -1.60, -0.54, -0.98, 0.04$$

Ainsi pour tous ces graphes f est injective et le théorème 4.1.5 nous permet de conclure. \square

On s'intéresse à présent au graphe $C_{13}(5)$.

Proposition 4.2.2. *Le graphe $C_{13}(5)$ n'a pas de symétrie quantique.*

Démonstration. Dans ce cas les hypothèses du théorème 4.1.7 ne s'appliquent pas et les espaces propres de la matrice d'adjacence sont les suivants :

$$V_0 = \mathbb{C}1$$

$$V_1 = \mathbb{C}\xi \oplus \mathbb{C}\xi^{12} \oplus \mathbb{C}\xi^5 \oplus \mathbb{C}^8$$

$$V_2 = \mathbb{C}\xi^2 \oplus \mathbb{C}\xi^{11} \oplus \mathbb{C}\xi^3 \oplus \mathbb{C}^{10}$$

$$V_3 = \mathbb{C}\xi^4 \oplus \mathbb{C}\xi^9 \oplus \mathbb{C}\xi^6 \oplus \mathbb{C}^7$$

où $\xi = (1, \omega, \dots, \omega^{12})$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{13}}$.

On utilise ensuite la proposition 2.1.6 qui nous indique qu'il existe $a, b, c, d \in A(C_{13}(5))$ tels que

$$\alpha(\xi) = \xi \otimes a + \xi^{12} \otimes b + \xi^5 \otimes c + \xi^8 \otimes d.$$

Ensuite en utilisant la stabilité de V_2 on obtient

$$\begin{aligned} \alpha(\xi^2) &= \xi^2 \otimes a^2 + (\xi^{12})^2 \otimes b^2 + (\xi^5)^2 \otimes c^2 + (\xi^8)^2 \otimes d^2 \\ \alpha(\xi^3) &= \xi^3 \otimes (a^3 + cb^2) + (\xi^{12})^3 \otimes (b^3 + da^2) + (\xi^5)^3 \otimes (c^3 + bd^2) + (\xi^8)^3 \otimes (d^3 + ac^2) \end{aligned}$$

et les relations suivantes

$$\begin{aligned} ac &= -ca, \quad ad = -da, \quad bc = -cb, \quad bd = -db \\ ab + ba + cd + dc &= 0 \\ ad^2 = d^2a = db^2 = b^2d = ca^2 = a^2c = bc^2 = c^2b &= 0 \\ ba^2 = a^2b = ab^2 = b^2a = cd^2 = d^2c = dc^2 = c^2d &= 0. \end{aligned}$$

À l'aide de ces relations et de la stabilité des V_3 on obtient ensuite

$$\begin{aligned} \alpha(\xi^6) &= \alpha(\xi^3)^2 = \xi^6 \otimes a^6 + (\xi^{12})^6 \otimes b^6 + (\xi^5)^6 \otimes c^6 + (\xi^8)^6 \otimes d^6 \\ \alpha(\xi^7) &= \alpha(\xi)\alpha(\xi^7) = \xi^7 \otimes a^7 + (\xi^{12})^7 \otimes b^7 + (\xi^5)^7 \otimes c^7 + (\xi^8)^7 \otimes d^7 \end{aligned}$$

et les nouvelles relations

$$ac^6 = bd^6 = cb^6 = da^6 = 0,$$

qui permettent d'avoir

$$\alpha(\xi^{12}) = \xi^{12} \otimes a^{12} + (\xi^{12})^{12} \otimes b^{12} + (\xi^5)^{12} \otimes c^{12} + (\xi^8)^{12} \otimes d^{12}.$$

On utilise à présent l'adjoint et les relations précédentes.

$$(\alpha(\xi^*) = \alpha(\xi^{12}) = \alpha(\xi)^*) \implies (a^* = a^{12}, b^* = b^{12}, c^* = c^{12}, d^* = d^{12}).$$

Ainsi $(ab)(ab)^* = abb^{12}a^{12} = 0 = baa^{12}b^{12} = (ba)(ba)^*$ donc $ab = ba (= 0)$. De la même manière on montre que $xy = yx (= 0)$ pour tout $x, y \in \{a, b, c, d\}$ avec $x \neq y$. Or a, b, c, d engendrent $A(C_{13}(5))$ qui est donc commutative et $C_{13}(5)$ n'a pas de symétrie quantique. \square

Le cas du graphe $C_{13}(3, 4)$ est beaucoup plus complexe et sera abordé dans la partie 4.3.5.

Bilan :

$n =$	Graphe X	$\text{Aut}(X)$	\mathbb{G}_X
13	K_{13}	\mathbb{S}_{13}	S_{13}^+
13	C_{13}	\mathcal{D}_{13}	\mathcal{D}_{13}
13	$C_{13}(2)$	\mathcal{D}_{13}	\mathcal{D}_{13}
13	$C_{13}(2, 5)$	\mathcal{D}_{13}	\mathcal{D}_{13}
13	$C_{13}(2, 6)$	\mathcal{D}_{13}	\mathcal{D}_{13}
13	$C_{13}(3)$	\mathcal{D}_{13}	\mathcal{D}_{13}
13	$C_{13}(5)$	$G_1 := \mathbb{Z}_{13} \rtimes \mathbb{Z}_4$	G_1
13	$C_{13}(3, 4)$	$\mathbb{Z}_{13} \rtimes \mathbb{Z}_6$?

4.3 Un résultat asymptotique de non symétrie quantique

Dans cette partie on commencera par définir certaines notions (issues de [6]) qui vont nous permettre de mieux étudier les graphes circulants. Ensuite nous donnerons un critère de non symétrie quantique asymptotique pour les p -graphes circulants avec p premier.

4.3.1 Type d'un graphe circulant

Puisqu'on s'intéresse aux graphes circulants à n sommets, par commodité d'écriture on supposera que les sommets du graphe sont les éléments de \mathbb{Z}_n . Ainsi pour tout graphe circulant si $i, j \in \mathbb{Z}_n$, $i \sim j \Rightarrow i + k \sim j + k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}_n$. On note \mathbb{Z}_n^* le groupe des inversibles de l'anneau \mathbb{Z}_n .

Définition 4.3.1. Soit X un graphe circulant à n sommets.

- On définit l'ensemble $S \subset \mathbb{Z}_n$ donné par : $i \sim j \iff j - i \in S$.
- Le groupe $E \subset \mathbb{Z}_n^*$ est l'ensemble des éléments $a \in \mathbb{Z}_n^*$ tels que $aS = S$.
- Le type de X , noté k , est le cardinal de E .

Voici quelques premières remarques/propriétés concernant ces ensembles.

- i. Avec les notations de la définition 4.1.2 l'ensemble S correspond à l'ensemble $\{\pm 1, \pm k_1, \dots, \pm k_r\}$.
- ii. Les graphes C_n sont de type 2 car dans ce cas, $S = E = \{\pm 1\}$.
- iii. Dans le cas général k est toujours pair car -1 , d'ordre 2, est toujours dans E .

Remarque 4.3.2. Par définition E est un sous groupe de \mathbb{Z}_n^* donc lorsque $n = p$ est premier le cardinal de E divise $p - 1$, ainsi il existe $\lambda \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$p = \lambda k + 1$$

4.3.2 Type et symétries quantiques lorsque n est premier

Dans [6] les auteurs s'intéressent aux graphes circulants ayant un nombre premier p de sommets. Pour cela ils utilisent le concept de sous-groupe 2-maximal pour obtenir le théorème 4.3.9. On suppose désormais dans cette sous-partie que X est un graphe sommet-transitif à p sommets où p est premier. C'est alors un p -graphe circulant donc, pour l'étude des symétries quantiques qui suit, on supposera aussi que X est un graphe circulant au sens de la définition 4.1.2.

On commence par un lemme qui lie, par l'intermédiaire de la fonction f de la proposition 4.1.4, l'ensemble E et la décomposition spectrale de d_X .

Lemme 4.3.3. *[[6], Lemma 4.1] Les espaces propres de d_X sont $V_0 = \mathbb{C}1$ et les*

$$V_x = \bigoplus_{a \in E} \mathbb{C}\xi^{xa}$$

avec $x \in \mathbb{Z}_p^*$. De plus

$$V_x = V_y \iff xE = yE$$

Remarque 4.3.4. L'espace propre V_x correspond à la valeur propre $2f(x)$ de la proposition 4.1.4 lorsque X est circulant au sens de la définition 4.1.2.

Définition 4.3.5. Soit $(R, +, \cdot)$ un anneau tel que $2 \in R^*$ où R^* est le groupe des inversibles de R . Un sous-groupe $G \subset R^*$ est dit 2-maximal si $-1 \in G$ et si l'équation $a - b = 2(c - d)$ dans G implique $a = \pm b$.

Proposition 4.3.6. *[[6], Proposition 4.3] Si dans l'anneau R on a $3 \neq 0$ et si $G \subset R^*$ est un sous-groupe 2-maximal, alors*

- $2, 3 \notin G$.
- $a + b = 2c$ avec $a, b, c \in G$ implique $a = b = c$.
- $a + 2b = 3c$ avec $a, b, c \in G$ implique $a = b = c$.

Le théorème suivant montre l'utilisation des groupes 2-maximaux pour l'étude des symétries quantiques.

Théorème 4.3.7. *[[6], Theorem 4.4] Si $E \subset \mathbb{Z}_p$ est 2-maximal (avec $p \geq 5$) alors X n'a pas de symétrie quantique.*

Pour la suite on considère le groupe $G = \{1, \omega, \dots, \omega^{k-1}\}$ des racines k -ième de l'unité avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{k}}$. On peut montrer que pour tout k pair alors G est 2-maximal dans \mathbb{C} (cf lemme 5.1 dans [6]). Cela permet de montrer le lemme suivant dans lequel $\varphi(k)$ est l'indicateur d'Euler de k

Lemme 4.3.8. *[[6], Lemma 5.2] Si $p > 6^{\varphi(k)}$ alors tout sous-groupe $E \subset \mathbb{Z}_p^*$ d'ordre k pair est 2-maximal.*

Démonstration. On pose $A = \mathbb{Z}[\omega]$. L'anneau A est l'anneau des entiers du corps de nombre $\mathbb{Q}(\omega)$ donc c'est un anneau de Dedekind. On utilise des résultats sur les anneaux de Dedekind qui permettent d'affirmer que puisque $k \mid p - 1$ l'idéal pA de A se décompose en produits de $\varphi(k)$ idéaux premiers $P_1, P_2, \dots, P_{\varphi(k)}$ vérifiant tous $A/P_i \simeq \mathbb{Z}_p$. Ainsi en choisissant l'un des P_i on obtient un morphisme d'anneaux surjectif

$$\Phi : A \rightarrow \mathbb{Z}_p \simeq A/P_i.$$

On va montrer que $\Phi(G) = E$. Par propriété universelle des anneaux de polynômes Φ se prolonge en un morphisme d'anneaux de $A[X]$ dans $\mathbb{Z}_p[X]$ et en regardant

l'image de $X^k - 1 = \prod_{i=0}^{k-1} (X - \omega^i)$ on trouve que $X^k - 1 = \prod_{i=0}^{k-1} (X - \Phi(\omega^i)) \in \mathbb{Z}_p[X]$ or p ne divise pas k car k divise $p - 1$ donc $X^k - 1$ est scindé à racines simples sur \mathbb{Z}_p donc $|\Phi(G)| = k$. De plus G est un groupe donc $\Phi(G) \subset \mathbb{Z}_p^*$ en est un aussi et \mathbb{Z}_p^* est un groupe cyclique donc contient un unique sous-groupe d'ordre k ce qui nous donne $\Phi(G) = E$.

On considère maintenant $\Sigma := \{a + 2b \mid a, b \in G\}$. Supposons pour le moment que la restriction de Φ à Σ est injective et considérons l'équation $a' - b' = 2(c' - d')$ dans E . L'application $\Phi : G \rightarrow E$ est bijective donc il existe des éléments $a, b, c, d \in G$ uniques tels que

$$a' = \Phi(a), \quad b' = \Phi(b), \quad c' = \Phi(c), \quad d' = \Phi(d)$$

et puisque Φ est un morphisme d'anneaux on a $\Phi(a+2d) = \Phi(b+2c)$. Par injectivité de Φ sur Σ on obtient $a + 2d = b + 2c$ et par 2-maximalité de G cela implique $a = \pm b$ donc

$$a' = \Phi(a) = \Phi(\pm b) = \pm\Phi(b) = \pm b'$$

et E est bien 2-maximal.

Montrons pour finir que le morphisme Φ est bien injectif sur Σ . On suppose que $\Phi(x) = \Phi(y)$ avec $x, y \in \Sigma$. Cela implique que $x - y \in \ker(\Phi) = P_i$. Par décomposition des idéaux dans les anneaux de Dedekind il existe un idéal Q dans A tel que $(x - y) = P_i Q$.

Si I est un idéal non nul de A on pose $N(I) := |A/I|$ puis $N(0) = 0$. N vérifie la propriété $N(IJ) = N(I)N(J)$. De plus si $z \in A$, on sait que l'on a

$$N(z) = N(zA) = \left| \prod_{s \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})} s(z) \right|.$$

On a donc $N(x - y) = N(P_i Q) = N(P_i)N(Q) = pN(Q)$. Ainsi

$$p \mid N(x - y) = \left| \prod_{s \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})} s(x - y) \right| \leq \left(\max_{s \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})} |s(x - y)| \right)^{\varphi(k)}$$

car $|\text{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})| = \varphi(k)$. Or x et y sont dans Σ donc il existe $a, b, c, d \in G$ tels que $x - y = a + 2b - c - 2d$. Les éléments de $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})$ permutent les éléments de G donc $s(a), s(b), s(c)$ et $s(d)$ sont dans G donc de module 1. Ainsi pour $s \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})$ on obtient

$$|s(x - y)| = |s(a) + 2s(b) - s(c) - 2s(d)| \leq 6$$

ce qui implique $p \mid N(x - y) \leq 6^{\varphi(k)}$, c'est absurde par hypothèse sauf si $N(x - y) = 0$ c'est à dire $x = y$, d'où le résultat. \square

Ce lemme a pour conséquence directe le théorème suivant.

Théorème 4.3.9. *[[6], Theorem 5.3] Un p -graphe circulant de type k avec p premier vérifiant $p > 6^{\varphi(k)}$ n'a pas de symétrie quantique.*

On peut donc étudier les graphes circulants de type petit car ce théorème nous permet de restreindre l'étude à un nombre relativement faible de graphes, ceux qui ont moins de $6^{\varphi(k)}$ sommets.

Avant d'utiliser ce résultat pour l'étude des graphes de type 4 et 6, en voici une petite amélioration.

Théorème 4.3.10. *Si $p > \left|5 + e^{\frac{2i\pi}{k}}\right|^{\varphi(k)}$, alors les p -graphes circulants de type k n'ont pas de symétrie quantique.*

Démonstration. Il s'agit ici d'améliorer la majoration $N(x - y) \leq 6^{\varphi(k)}$ du lemme 4.3.8. On reprend la fin de la démonstration :

$$N(x - y) = \left| \prod_{s \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})} s(x - y) \right|$$

et par hypothèse sur x, y on a $x - y = a + 2b - c - 2d$ avec $a, b, c, d \in \{1, \xi, \dots, \xi^{k-1}\}$, $\xi = e^{\frac{2i\pi}{k}}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} N(x - y) &= \left| \prod_{i \in \mathbb{Z}_k^*} (a^i - c^i + 2b^i - 2d^i) \right| \\ &= \prod_{i \in \mathbb{Z}_k^*} |S_i(a, b, c, d)| \end{aligned}$$

où les S_i sont des sommes de 6 racines k -ièmes de l'unité (car k pair donc $x \in G \Rightarrow -x \in G$).

Supposons qu'il existe i tel que $|S_i(a, b, c, d)| = 6$, cela signifie que

$$a^i = -c^i = b^i = -d^i$$

On note j l'inverse de i dans \mathbb{Z}_k i.e $ij \equiv 1[k]$.

$$a^i = -c^i \Rightarrow a = (-1)^j c$$

or k est pair donc j est impair et ainsi $a = -c = b = -d$ c'est à dire $x - y = 6a$ et dans ce cas $N(x - y) = N(6a) = 6^{\varphi(k)} N(a) = 6^{\varphi(k)}$ et dans la démonstration on a $p | N(x - y)$ et $p \neq 2$ premier donc on obtient $p = 3$, absurde car par hypothèse $p > 4$.

Ainsi on a $|S_i(a, b, c, d)| < 6$ pour tout i , donc

$$|S_i(a, b, c, d)| \leq \left| 5 + e^{\frac{2i\pi}{k}} \right|$$

et finalement on obtient

$$p \leq \left| 5 + e^{\frac{2i\pi}{k}} \right|^{\varphi(k)} \quad \text{ou} \quad N(x - y) = 0$$

En utilisant l'hypothèse sur p on a donc $N(x - y) = 0$ c'est à dire $x = y$ donc on obtient l'injectivité souhaitée. \square

Le tableau suivant montre dans quelle mesure le théorème 4.3.10 améliore le théorème 4.3.9 en fonction des valeurs de k . B_1 est l'arrondi à l'entier près par excès de $\left| 5 + e^{\frac{2i\pi}{k}} \right|$.

k	$6^{\varphi(k)}$	B_1
4	36	26
6	36	31
8	1296	1094
10	1296	1163
12	1296	1202
14	46656	42911
16	1679616	1542000
18	46656	44351
20	1679616	1590122

Dans les deux sous-parties suivantes on va utiliser ce résultat pour étudier l'ensemble des graphes circulants, avec un nombre premier de sommets, de type 4 et 6. On rappelle que dans ce cas le type k de X doit diviser $p - 1$, et que pour $p \leq 11$ les graphes ont déjà été traité dans [7].

4.3.3 Les graphes de type 4

D'après le tableau précédent il faut étudier les cas $p \leq 26$ congrus à 1 mod 4.

- p=13

Le seul graphe de type 4, à complémentaire près, est $C_{13}(5)$ qui a déjà été traité à la proposition 4.2.2

- p=17

Il y a, à complémentaire près, 6 graphes de type 4 qui sont :

$C_{17}(4), C_{17}(3, 4, 5), C_{17}(2, 3, 4, 5, 8), C_{17}(2, 4, 6, 7, 8), C_{17}(4, 6, 7)$ et $C_{17}(3, 4, 5, 6, 7)$.

Dans tous les cas on a $E = \{\pm 1, \pm 4\}$ qui est 2-maximal donc ces graphes n'ont pas de symétrie quantique d'après le théorème 4.3.7.

4.3.4 Les graphes de type 6

Il reste à étudier les cas $p \leq 31$ congrus à 1 mod 6.

- p=13

À complémentaire près il n'y a que le graphe $C_{13}(3, 4)$ (cf partie 4.3.5).

- p=19

Il s'agit, à complémentaire près, des graphes $C_{19}(7, 8)$, $C_{19}(2, 3, 5, 7, 8)$ et $C_{19}(4, 6, 7, 8, 9)$. Pour ces trois graphes $E = \{\pm 1, \pm 7, \pm 8\}$.

Proposition 4.3.11. *Les graphes $C_{19}(7, 8)$, $C_{19}(2, 3, 5, 7, 8)$ et $C_{19}(4, 6, 7, 8, 9)$ n'ont pas de symétrie quantique.*

Démonstration. Puisque $E = \{\pm 1, \pm 7, \pm 8\}$ les espaces propres de la matrice d'adjacence sont

$$V_0 = \mathbb{C}1$$

$$V_1 = \mathbb{C}\xi \oplus \mathbb{C}\xi^7 \oplus \mathbb{C}\xi^8 \oplus \mathbb{C}\xi^{-1} \oplus \mathbb{C}\xi^{-7} \oplus \mathbb{C}\xi^{-8}$$

$$V_2 = \mathbb{C}\xi^2 \oplus \mathbb{C}\xi^3 \oplus \mathbb{C}\xi^5 \oplus \mathbb{C}\xi^{-2} \oplus \mathbb{C}\xi^{-3} \oplus \mathbb{C}\xi^{-5}$$

$$V_4 = \mathbb{C}\xi^4 \oplus \mathbb{C}\xi^6 \oplus \mathbb{C}\xi^9 \oplus \mathbb{C}\xi^{-4} \oplus \mathbb{C}\xi^{-6} \oplus \mathbb{C}\xi^{-9}$$

avec $\xi = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{18})$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{19}}$.

$$\alpha(\xi) = \xi \otimes a + \xi^7 \otimes b + \xi^8 \otimes c + \xi^{-1} \otimes d + \xi^{-7} \otimes e + \xi^{-8} \otimes f$$

avec la stabilité de V_2 on obtient

$$\alpha(\xi^2) = \xi^2 \otimes a^2 + \xi^{-5} \otimes b^2 + \xi^{-3} \otimes c^2 + \xi^{-2} \otimes d^2 + \xi^5 \otimes e^2 + \xi^3 \otimes f^2$$

et les relations

$$\forall x, y \in \{a, b, c, d, e, f\} \text{ tels que } x \neq y \text{ et } \{x, y\} \notin \{\{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\}\},$$

$$xy = -yx$$

avec la stabilité de $V_3 = V_2$ on obtient aussi

$$\begin{aligned} \alpha(\xi^3) &= \xi^3 \otimes (a^3 + cb^2) + \xi^2 \otimes (b^3 + df^2) + \xi^5 \otimes (c^3 + bd^2) \\ &\quad + \xi^{-3} \otimes (d^3 + fe^2) + \xi^{-2} \otimes (e^3 + ac^2) + \xi^{-5} \otimes (f^3 + ea^2) \end{aligned}$$

avec les relations

$$da^2 = a^2d = ad^2 = d^2a = 0 = eb^2 = b^2e = e^2b = be^2$$

$$fc^2 = c^2f = cf^2 = f^2c = 0$$

puis

$$\alpha(\xi^4) = \alpha(\xi^2)\alpha(\xi^2) = \xi^4 \otimes a^4 + \xi^9 \otimes b^4 + \xi^{-6} \otimes c^4 + \xi^{-4} \otimes d^4 + \xi^{-9} \otimes e^4 + \xi^6 \otimes f^4$$

avec de nouvelles relations et les précédentes on obtient $\forall x, y \in \{a, b, c, d, e, f\}$,

$$x \neq y \Rightarrow x^2 y^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha(\xi^5) &= \xi^5 \otimes (a^5 + df^4) + \xi^{-3} \otimes (b^5 + ea^4) + \xi^2 \otimes (c^5 + fe^4) \\ &\quad + \xi^{-5} \otimes (d^5 + ac^4) + \xi^3 \otimes (e^5 + bd^4) + \xi^{-2} \otimes (f^5 + cb^4) \end{aligned}$$

et les relations

$$af^4 = ba^4 = ce^4 = dc^4 = ed^4 = fb^4 = 0$$

$$ab^4 = bf^4 = cd^4 = de^4 = ec^4 = fa^4 = 0$$

$$\alpha(\xi^6) = \alpha(\xi^2)^3 = \xi^6 \otimes a^6 + \xi^4 \otimes b^6 + \xi^{-9} \otimes c^6 + \xi^{-6} \otimes d^6 + \xi^{-4} \otimes e^6 + \xi^9 \otimes f^6$$

$$\begin{aligned} \alpha(\xi^7) &= \xi^7 \otimes (a^7 + fe^6) + \xi^{-8} \otimes (b^7 + ac^6) + \xi^{-1} \otimes (c^7 + ea^6) + \xi^{-7} \otimes (d^7 + cb^6) \\ &\quad + \xi^8 \otimes (e^7 + df^6) + \xi \otimes (f^7 + bd^6) \end{aligned}$$

$$\alpha(\xi^8) = \xi^8 \otimes a^8 + \xi^{-1} \otimes b^8 + \xi^7 \otimes c^8 + \xi^{-8} \otimes d^8 + \xi \otimes e^8 + \xi^{-7} \otimes f^8$$

$$\alpha(\xi^9) = \xi^9 \otimes a^9 + \xi^6 \otimes b^9 + \xi^{-4} \otimes c^9 + \xi^{-9} \otimes d^9 + \xi^{-6} \otimes e^9 + \xi^4 \otimes f^9$$

avec les relations

$$ac^8 = bd^8 = cb^8 = df^8 = ea^8 = fe^8 = 0$$

ce qui permet avec les relations trouvées précédemment d'avoir

$$\forall x, y \in \{a, b, c, d, e, f\}, x \neq y \Rightarrow xy^8 = 0$$

ainsi par récurrence on obtient

$$\alpha(\xi^{-1}) = \alpha(\xi^{18}) = \xi^{-1} \otimes a^{18} + \xi^{-7} \otimes b^{18} + \xi^{-8} \otimes c^{18} + \xi \otimes d^{18} + \xi^7 \otimes e^{18} + \xi^8 \otimes f^{18}$$

donc $\forall x \in \{a, b, c, d, e, f\}$, $x^* = x^{18}$ et par suite $(xy)(xy)^* = xy y^* x^* = xy^{19} x^* = 0$ et $xy = 0$, et cela pour tout $x, y \in \{a, b, c, d, e, f\}$ avec $x \neq y$ donc les graphes considérés n'ont pas de symétrie quantique. \square

- p=31

Il s'agit, toujours à complémentaire près, des graphes $C_{31}(5, 6, U)$, où U est une union quelconque des triplets $(2, 10, 12)$, $(4, 7, 11)$, $(3, 13, 15)$ et $(8, 9, 14)$, à l'exception de l'union des 4 triplets. Dans tous les cas $E = \{\pm 1, \pm 5, \pm 6\}$.

Proposition 4.3.12. *Ces graphes n'ont pas de symétrie quantique.*

Démonstration. Puisque $E = \{\pm 1, \pm 5, \pm 6\}$ les espaces propres de la matrice d'adjacence sont

$$V_0 = \mathbb{C}1$$

$$V_1 = \mathbb{C}\xi \oplus \mathbb{C}\xi^5 \oplus \mathbb{C}\xi^6 \oplus \mathbb{C}\xi^{-1} \oplus \mathbb{C}\xi^{-5} \oplus \mathbb{C}\xi^{-6}$$

$$V_2 = \mathbb{C}\xi^2 \oplus \mathbb{C}\xi^{10} \oplus \mathbb{C}\xi^{12} \oplus \mathbb{C}\xi^{-2} \oplus \mathbb{C}\xi^{-10} \oplus \mathbb{C}\xi^{-12}$$

$$V_3 = \mathbb{C}\xi^3 \oplus \mathbb{C}\xi^{13} \oplus \mathbb{C}\xi^{15} \oplus \mathbb{C}\xi^{-3} \oplus \mathbb{C}\xi^{-13} \oplus \mathbb{C}\xi^{-15}$$

$$V_4 = \mathbb{C}\xi^4 \oplus \mathbb{C}\xi^7 \oplus \mathbb{C}\xi^{11} \oplus \mathbb{C}\xi^{-4} \oplus \mathbb{C}\xi^{-7} \oplus \mathbb{C}\xi^{-11}$$

$$V_8 = \mathbb{C}\xi^8 \oplus \mathbb{C}\xi^9 \oplus \mathbb{C}\xi^{14} \oplus \mathbb{C}\xi^{-8} \oplus \mathbb{C}\xi^{-9} \oplus \mathbb{C}\xi^{-14}$$

avec $\xi = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{30})$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{31}}$.

$$\alpha(\xi) = \xi \otimes a + \xi^5 \otimes b + \xi^6 \otimes c + \xi^{-1} \otimes d + \xi^{-5} \otimes e + \xi^{-6} \otimes f$$

avec la stabilité de V_2 on obtient

$$\alpha(\xi^2) = \xi^2 \otimes a^2 + \xi^{10} \otimes b^2 + \xi^{12} \otimes c^2 + \xi^{-2} \otimes d^2 + \xi^{-10} \otimes e^2 + \xi^{-12} \otimes f^2$$

et les relations

$$\forall x, y \in \{a, b, c, d, e, f\} \text{ tels que } x \neq y \text{ et } \{x, y\} \notin \{\{a, d\}, \{b, e\}, \{c, f\}\},$$

$$xy = -yx$$

avec la stabilité de V_3 on obtient aussi

$$\begin{aligned} \alpha(\xi^3) &= \xi^3 \otimes (a^3 + bd^2) + \xi^{15} \otimes (b^3 + fe^2) + \xi^{-13} \otimes (c^3 + df^2) \\ &\quad + \xi^{-3} \otimes (d^3 + ea^2) + \xi^{-15} \otimes (e^3 + cb^2) + \xi^{13} \otimes (f^3 + ac^2) \end{aligned}$$

avec les relations

$$da^2 = a^2d = ad^2 = d^2a = 0 = eb^2 = b^2e = e^2b = be^2$$

$$fc^2 = c^2f = cf^2 = f^2c = 0$$

$$ae^2 = bc^2 = ca^2 = db^2 = ef^2 = fd^2 = 0$$

puis

$$\alpha(\xi^4) = \alpha(\xi^2)\alpha(\xi^2) = \xi^4 \otimes a^4 + \xi^{-11} \otimes b^4 + \xi^{-7} \otimes c^4 + \xi^{-4} \otimes d^4 + \xi^{11} \otimes e^4 + \xi^7 \otimes f^4$$

avec de nouvelles relations et les précédentes on obtient $\forall x, y \in \{a, b, c, d, e, f\}$,

$$x \neq y \Rightarrow x^2 y^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \alpha(\xi^5) &= \xi^5 \otimes (a^5 + fe^4) + \xi^{-6} \otimes (b^5 + ac^4) + \xi^{-1} \otimes (c^5 + ea^4) \\ &\quad + \xi^{-5} \otimes (d^5 + cb^4) + \xi^6 \otimes (e^5 + df^4) + \xi \otimes (f^5 + bd^4) \end{aligned}$$

et les relations

$$af^4 = ba^4 = ce^4 = dc^4 = ed^4 = fb^4 = 0$$

$$ab^4 = bf^4 = cd^4 = de^4 = ec^4 = fa^4 = 0$$

$$\alpha(\xi^6) = \xi^6 \otimes a^6 + \xi^{-1} \otimes b^6 + \xi^5 \otimes c^6 + \xi^{-6} \otimes d^6 + \xi \otimes e^6 + \xi^{-5} \otimes f^6$$

$$\alpha(\xi^7) = \xi^7 \otimes a^7 + \xi^4 \otimes b^7 + \xi^{11} \otimes c^7 + \xi^{-7} \otimes d^7 + \xi^{-4} \otimes e^7 + \xi^{-11} \otimes f^7$$

avec les relations

$$ac^6 = bd^6 = cb^6 = df^6 = ea^6 = fe^6 = 0$$

ce qui permet avec les relations trouvées précédemment d'avoir

$$\forall x, y \in \{a, b, c, d, e, f\}, x \neq y \Rightarrow xy^6 = 0$$

On conclut de la même manière que dans la proposition précédente que les graphes considérés n'ont pas de symétrie quantique. \square

4.3.5 Le graphe $C_{13}(3, 4)$

Ce graphe est le plus petit graphe de type 6. La difficulté à l'étudier avec les moyens vus jusqu'ici est précisément lié au fait que son type est grand par rapport au nombre de ses sommets. Les espaces propres de sa matrice d'adjacence sont les suivants :

$$V_0 = \mathbb{C}1$$

$$V_1 = \mathbb{C}\xi \oplus \mathbb{C}\xi^3 \oplus \mathbb{C}\xi^4 \oplus \mathbb{C}\xi^{-1} \oplus \mathbb{C}\xi^{-3} \oplus \mathbb{C}\xi^{-4}$$

$$V_2 = \mathbb{C}\xi^2 \oplus \mathbb{C}\xi^5 \oplus \mathbb{C}\xi^6 \oplus \mathbb{C}\xi^{-2} \oplus \mathbb{C}\xi^{-5} \oplus \mathbb{C}\xi^{-6}$$

En essayant la méthode habituelle pour les graphes circulants avec la stabilité des V_i par la coaction on obtient : ($\xi = (1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{12})$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{13}}$)

$$\alpha(\xi) = \xi \otimes a + \xi^3 \otimes b + \xi^4 \otimes c + \xi^{-1} \otimes d + \xi^{-3} \otimes e + \xi^{-4} \otimes f$$

$$\begin{aligned} \alpha(\xi^2) = & \xi^2 \otimes (a^2 + bd + db) + \xi^6 \otimes (b^2 + ef + fe) + \xi^{-5} \otimes (c^2 + df + fd) \\ & + \xi^{-2} \otimes (d^2 + ae + ea) + \xi^{-6} \otimes (e^2 + bc + cb) + \xi^5 \otimes (f^2 + ac + ca) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\xi^3) = & \xi^3 \otimes (a^3 + fe^2 + e^2f + fbc + fcb + abd + adb + eb^2 + efe) + \\ & \xi^{-4} \otimes (b^3 + ac^2 + c^2a + adf + afd + bef + bfe + cf^2 + cac) + \\ & \xi^{-1} \otimes (c^3 + ea^2 + a^2e + cdf + cfd + ebd + edb + ad^2 + aea) + \\ & \xi^{-3} \otimes (d^3 + cb^2 + b^2c + cef + cfe + dea + dae + be^2 + bcb) + \\ & \xi^4 \otimes (e^3 + df^2 + f^2d + ebc + ecb + dac + dca + fc^2 + fdf) + \\ & \xi \otimes (f^3 + bd^2 + d^2b + fac + fca + bea + bae + da^2 + dbd) \end{aligned}$$

avec les relations

$$ab = -ba, \quad bf = -fb, \quad af = -fa, \quad ed = -de, \quad cd = -dc, \quad ec = -ce$$

$$ad + da + eb + be + cf + fc = 0$$

et de nombreuses relations très compliquées... Il y a trop peu d'espaces propres pour avoir des relations utilisables. Cette méthode ne semble pas permettre de montrer la commutativité de $A(C_{13}(3, 4))$. On peut ensuite s'intéresser à la matrice magique unitaire dont les coefficients engendrent $A(C_{13}(3, 4))$ pour essayer de trouver un quotient non commutatif évident. Pour trouver une forme naturelle pour U voici d'abord la description de $\text{Aut}(C_{13}(3, 4))$.

Proposition 4.3.13. *Pour $X = C_{13}(3, 4)$ on a*

$$\text{Aut}(X) = \{f_{a,b} \mid a \in E, b \in \mathbb{Z}_{13}\}$$

où $f_{a,b}(x) = ax + b$ et $E = \{\pm 1, \pm 3, \pm 4\}$. En particulier

$$\text{Aut}(X) \simeq \mathbb{Z}_{13} \rtimes \mathbb{Z}_6$$

La permutation $f_{4,0}$ est la suivante : $(1, 4, 3, -1, -4, -3)(2, -5, 6, -2, 5, -6)$ ce qui peut donner envie d'écrire la matrice d'adjacence de $C_{13}(3, 4)$ en considérant les sommets du graphe dans l'ordre donné par cette permutation. Ainsi on obtient :

$$d_{C_{13}(3,4)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme pour le graphe de Petersen lorsqu'on essaie de trouver des quotients non commutatifs "élémentaires" c'est à dire avec U de la forme

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & q & 0 & 1-q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-q & 0 & q & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en faisant varier la position des projecteurs p et q , dans tous les cas on obtient un quotient commutatif de $A(X)$ donc on ne peut pas conclure.

La question des symétries quantiques de $C_{13}(3, 4)$ reste ouverte après cette thèse mais certains éléments de la partie 5 indiquent plutôt que ce graphe semble posséder des symétries quantiques.

4.4 Le cas $\text{Aut}(X) \simeq \mathcal{D}_n$

Dans [7] les auteurs posent la question des graphes X à n sommets vérifiant $\text{Aut}(X) \simeq \mathcal{D}_n$ car pour $n \leq 11$ et pour les graphes C_n , $n \neq 4$, à chaque fois que $\text{Aut}(X) \simeq \mathcal{D}_n$ alors X n'a pas de symétrie quantique. On commence par montrer que de tels graphes sont forcément circulants.

Lemme 4.4.1. *Soit X un graphe sommet-transitif à n sommets tel que $\text{Aut}(X) \simeq \mathcal{D}_n$. Alors X est un graphe circulant.*

Démonstration. Par hypothèse il existe $\sigma, \tau \in \text{Aut}(X)$ tels que

$$\text{Aut}(X) = \langle \sigma, \tau \mid \sigma^n = \text{id}, \tau^2 = \text{id}, \tau\sigma\tau = \sigma^{-1} \rangle$$

Pour $i \in [1, n]$ on note $\mathcal{O}_\sigma(i)$ l'orbite de i sous l'action de σ .

On considère maintenant la relation d'équivalence suivante sur $[1, n]$:

$$i \sim j \iff |\mathcal{O}_\sigma(i)| = |\mathcal{O}_\sigma(j)|$$

On a alors $\sigma(i) \sim i$ (immédiat) et $\tau(i) \sim i$ car

$$|\mathcal{O}_\sigma(\tau(i))| = |\tau(\mathcal{O}_{\tau\sigma\tau}(i))| = |\mathcal{O}_{\tau\sigma\tau}(i)| = |\mathcal{O}_{\sigma^{-1}}(i)| = |\mathcal{O}_\sigma(i)|$$

Ainsi pour tout $\Sigma \in \text{Aut}(X)$ on a $\Sigma(i) \sim i$. Ensuite, par hypothèse, $\text{Aut}(X)$ agit transitivement sur $[1, n]$ donc la relation " \sim " définit une unique classe d'équivalence ce qui signifie que σ se décompose en cycles de même longueur k . Or σ est d'ordre n donc $k = n$ et σ est un n -cycle, d'où le résultat. \square

Ensuite on a une proposition qui permet, en particulier, de montrer que ces graphes sont de type 2.

Proposition 4.4.2. *Soit X un graphe circulant à n sommets. Si X est de type k alors $|\text{Aut}(X)| \geq nk$, en particulier si X est de type strictement supérieur à 2 alors $\text{Aut}(X)$ contient strictement \mathcal{D}_n .*

Démonstration. Pour tout $a \in E$ et $b \in \mathbb{Z}_n$ on définit l'application

$$\begin{aligned} f_{a,b} : \mathbb{Z}_n &\rightarrow \mathbb{Z}_n \\ x &\mapsto ax + b \end{aligned}$$

On va montrer que $f_{a,b} \in \text{Aut}(X)$ et que l'application

$$\begin{aligned} \Phi : E \times \mathbb{Z}_n &\rightarrow \text{Aut}(X) \\ (a, b) &\mapsto f_{a,b} \end{aligned}$$

est injective.

Pour commencer on remarque que $f_{a,b} \circ f_{a^{-1}, -a^{-1}b} = \text{id}$ donc ces applications permutent bien l'ensemble des éléments de \mathbb{Z}_n .

- Soit $y \in \mathbb{Z}_n$, on rappelle que $\mathcal{V}(y)$ désigne le voisinage de y dans X .

$$\begin{aligned}
 f_{a,b}(\mathcal{V}(y)) &= f_{a,b}(\{y + s, s \in S\}) \\
 &= \{f_{a,b}(y + s), s \in S\} \\
 &= \{ay + as + b, s \in S\} \\
 &= \{ay + b + s, s \in S\} \quad \text{car par définition de } E, aS=S \\
 &= \{f_{a,b}(y) + s, s \in S\} \\
 &= \mathcal{V}(f_{a,b}(y))
 \end{aligned}$$

ainsi on a bien $f_{a,b} \in \text{Aut}(X)$.

- De plus si (a, b) et (a', b') dans $E \times \mathbb{Z}_n$ vérifient $f_{a,b} = f_{a',b'}$ alors pour tout $x \in \mathbb{Z}_n$ on obtient

$$ax + b = a'x + b'$$

En prenant $x = 0$ on trouve $b = b'$ puis avec $x = 1$ on trouve $a = a'$ donc Φ est bien injective. □

Remarque 4.4.3. En fait, lorsque n est premier, Φ est un isomorphisme. La structure de groupe sur $E \times \mathbb{Z}_n$ est donnée par la composition des $f_{a,b}$:

$$f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa', ab'+b}$$

Ceci a déjà été vu dans le cas particulier du graphe $C_{13}(3, 4)$.

Comme le suggère l'étude des graphes pour $n \leq 11$ on regarde si les graphes vérifiant $\text{Aut}(X) = \mathcal{D}_n$ ont ou non des symétries quantiques. Si n est premier ils n'en ont pas car d'après le théorème 4.3.9 les graphes de type 2 avec n premier n'ont pas de symétrie quantique.

On considère maintenant que n est non premier. Une première idée consiste à vouloir appliquer le théorème 4.1.7. On pense que les hypothèses sont effectivement vérifiées pour les graphes de type 2 avec n impair mais on ne l'a pas démontré. Si c'est le cas cela montre que tous les graphes circulants d'ordre impair de type 2 n'ont pas de symétrie quantique donc a fortiori ceux dont le groupe d'automorphismes est \mathcal{D}_n .

Le cas n pair est de toute évidence plus difficile car certains graphes de type 2 ne vérifient pas les hypothèses de la proposition 4.1.7 et ont des symétries quantiques. Cependant cela ne contredit, a priori, pas la conjecture

$$\text{Aut}(X) = \mathcal{D}_n \Rightarrow X \text{ n'a pas de symétrie quantique}$$

car ces graphes de type 2 n'ont pas pour groupe d'automorphismes \mathcal{D}_n .

Voici une étude rapide de tous les graphes de type 2 avec $n \leq 14$ pair qui ne vérifient pas les hypothèses de la proposition 4.1.7.

- $n = 6$:

$$\underline{C_6(2)} : f(1) = f(3) = 0 \text{ et } C_6(2) = (3K_2)^c \text{ donc } \text{Aut}(C_6(2)) \neq \mathcal{D}_6.$$

$$\underline{C_6(3)} : f(1) = f(2) = 0 \text{ et } C_6(3) = (2K_3)^c \text{ donc } \text{Aut}(C_6(3)) \neq \mathcal{D}_6.$$

- $n = 10$:

$$\underline{C_{10}(4,5)} : f(1) = f(3) = f(5) = -1 \text{ et } C_{10}(4,5) = K_2 \circ C_5 \text{ donc } \text{Aut}(C_{10}(4,5)) = \mathbb{Z}_2 \wr \mathcal{D}_5 \neq \mathcal{D}_{10}.$$

$$\underline{C_{10}(4)} : f(1) = f(3) = f(5) = 0 \text{ et } C_{10}(4) = (C_{10}(4,5))^c.$$

- $n = 14$:

$$\underline{C_{14}(6)} : f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = 0 \text{ et } C_{14}(6) = X_2 \circ C_7 \text{ donc } \text{Aut}(C_{14}(6)) = \mathbb{Z}_2 \wr \mathcal{D}_7 \neq \mathcal{D}_{14}.$$

$$\underline{C_{14}(6,7)} : f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = -1 \text{ et } C_{14}(6,7) = K_2 \circ C_7 \text{ donc } \text{Aut}(C_{14}(6,7)) = \mathbb{Z}_2 \wr \mathcal{D}_7 \neq \mathcal{D}_{14}.$$

$$\underline{C_{14}(2,5,6)} : f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = 0 \text{ et } C_{14}(2,5,6) = (C_{14}(6,7))^c.$$

$$\underline{C_{14}(3,4,6)} : f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = 0 \text{ et } C_{14}(3,4,6) = (C_{14}(6,7))^c.$$

$$\underline{C_{14}(2,5,6,7)} : f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = -1 \text{ et } C_{14}(2,5,6,7) = (C_{14}(6))^c.$$

$$\underline{C_{14}(3,4,6,7)} : f(1) = f(3) = f(5) = f(7) = -1 \text{ et } C_{14}(3,4,6,7) = (C_{14}(6))^c.$$

On peut cependant traiter tous les graphes vérifiant $\text{Aut}(X) = \mathcal{D}_n$ pour $n = 12$. La liste des graphes qui vérifient cette propriété, à complémentaire près, est la suivante

$$C_{12}, C_{12}(2), C_{12}(3), C_{12}(4), C_{12}(6), C_{12}(2,6), C_{12}(3,6), C_{12}(4,6)$$

On peut alors vérifier que dans les 8 cas ces graphes vérifient les hypothèses du théorème 4.1.7 et donc n'ont pas de symétrie quantique.

Chapitre 5

Orbites, espaces d'entrelacements et symétries quantiques

Jusqu'ici les méthodes utilisées pour étudier les symétries quantiques des graphes utilisaient essentiellement les propriétés de stabilité de certains espaces par la coaction naturelle de $A(X)$. Dans cette partie on présente une autre manière de les étudier en utilisant la dualité de Tannaka-Krein. Cette dualité indique qu'il y a une bijection entre les sous groupes quantiques de S_n^+ et certains espaces de matrices, les espaces d'entrelacements. Pour pouvoir exploiter efficacement cette dualité qui sera présentée dans la sous-partie 5.3 on commence par introduire deux espaces associés aux graphes finis.

5.1 L'espace \mathcal{T}^X

Dans cette sous-partie G désigne un sous-groupe transitif de S_n et pour avoir des notations cohérentes on considèrera que S_n est l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$.

Définition 5.1.1. Pour tout $i \in [0, n-1]$, on note G_i l'ensemble des éléments de G qui fixent i . Puis les orbites de $[0, n-1]$ sous l'action de G_0 avec $\mathcal{O}_0^0 = \{0\}$. Ensuite pour $i \in [1, n-1]$ on choisit $\sigma_i \in G$ tel que $\sigma_i(0) = i$ et on définit

$$\mathcal{O}_i^s := \sigma_i(\mathcal{O}_0^s)$$

Proposition 5.1.2. *On obtient les propriétés suivantes sur les \mathcal{O}_i^s .*

- i. Les \mathcal{O}_i^s pour $0 \leq s \leq r$ sont les orbites de $[0, n-1]$ sous l'action de G_i*
- ii. La définition de \mathcal{O}_i^s ne dépend pas du choix de $\sigma_i \in G$ vérifiant $\sigma_i(0) = i$.*
- iii. $\forall \sigma \in G, \forall i, j \in [0, n-1], \forall s_1, s_2 \in [0, r]$ on a*

$$\sigma(\mathcal{O}_i^{s_1}) = \mathcal{O}_{\sigma(i)}^{s_1} \quad \text{et} \quad \sigma(\mathcal{O}_i^{s_1} \cap \mathcal{O}_j^{s_2}) = \mathcal{O}_{\sigma(i)}^{s_1} \cap \mathcal{O}_{\sigma(j)}^{s_2}$$

Démonstration. (i) : Soit $j_0 \in \mathcal{O}_i^s = \sigma_i(\mathcal{O}_0^s)$, $j_0 = \sigma_i(i_0)$ avec $i_0 \in \mathcal{O}_0^s$.

$$\begin{aligned}
j \in \mathcal{O}_i^s = \sigma_i(\mathcal{O}_0^s) &\Leftrightarrow \exists j' \in \mathcal{O}_0^s, j = \sigma_i(j') \\
&\Leftrightarrow \exists \sigma' \in G_0, j = \sigma_i \sigma'(i_0) \\
&\Leftrightarrow \exists \sigma' \in G_0, j = \sigma_i \sigma' \sigma_i^{-1}(j_0) \\
&\Leftrightarrow \exists \sigma' \in \sigma_i G_0 \sigma_i^{-1}, j = \sigma'(j_0) \\
&\Leftrightarrow \exists \sigma' \in G_{\sigma_i(1)}, j = \sigma'(j_0) \\
&\Leftrightarrow \exists \sigma' \in G_i, j = \sigma'(j_0) \\
&\Leftrightarrow j \text{ est dans l'orbite de } j_0 \text{ sous l'action de } G_i
\end{aligned}$$

ce qui montre que les \mathcal{O}_i^s de l'énoncé sont bien les orbites annoncées.

(ii) : Soit $\sigma \in G$ tel que $\sigma(0) = i$ alors

$$k \in \sigma(\mathcal{O}_0^s) \Leftrightarrow \exists k_0 \in \mathcal{O}_0^s, k = \sigma(k_0) \Leftrightarrow \exists k_0 \in \mathcal{O}_0^s, k = \sigma_i(\sigma_i^{-1}\sigma(k_0))$$

or $\sigma_i^{-1}\sigma(0) = 0$ donc $\sigma_i^{-1}\sigma \in G_0$. Ainsi par définition de \mathcal{O}_0^s on obtient $\sigma_i^{-1}\sigma(k_0) \in \mathcal{O}_0^s$ et donc

$$k \in \sigma(\mathcal{O}_0^s) \implies k \in \sigma_i(\mathcal{O}_0^s)$$

c'est à dire

$$\sigma(\mathcal{O}_0^s) \subset \sigma_i(\mathcal{O}_0^s)$$

puis par le cardinal on conclut que $\sigma(\mathcal{O}_0^s) = \sigma_i(\mathcal{O}_0^s)$ et donc la définition de \mathcal{O}_i^s ne dépend pas du choix de σ_i .

(iii) : La première égalité vient du calcul suivant :

$$\sigma(\mathcal{O}_i^{s_1}) = \sigma \sigma_i(\mathcal{O}_0^{s_1}) = \mathcal{O}_{\sigma \sigma_i(0)}^{s_1} = \mathcal{O}_{\sigma(i)}^{s_1}$$

et la deuxième égalité en découle :

$$\sigma(\mathcal{O}_i^{s_1} \cap \mathcal{O}_j^{s_2}) = \sigma(\mathcal{O}_i^{s_1}) \cap \sigma(\mathcal{O}_j^{s_2}) = \mathcal{O}_{\sigma(i)}^{s_1} \cap \mathcal{O}_{\sigma(j)}^{s_2}$$

□

Définition 5.1.3. Pour $s \in [0, r]$ on définit l'élément $T_s \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ par

$$T_s(e_j) = \sum_{i \in \mathcal{O}_j^s} e_i$$

et on note

$$\mathcal{T}^G := \text{Vect}(T_s \mid 0 \leq s \leq r)$$

Par construction la famille (T_0, \dots, T_r) est libre donc c'est une base de \mathcal{T}^G .

Remarque 5.1.4. La définition des T_s n'est pas canonique car il y a un choix qui est fait dans l'ordre de numérotation des orbites. En revanche la définition de \mathcal{T}^G est bien canonique.

On présente maintenant une autre façon équivalente de construire les endomorphismes T_s qui aura son utilité.

Proposition 5.1.5. *Pour tout $s \in [0, r]$, on note \mathcal{O}^s l'orbite de l'action diagonale de G sur $[0, n-1] \times [0, n-1]$ contenant $\mathcal{O}_0^s \times \{0\}$. Alors $(\mathcal{O}^0, \dots, \mathcal{O}^r)$ sont les orbites de cette action diagonale et pour tout $s \in [0, r]$ on a*

$$[T_s]_{i,j} = \delta_{(i,j) \in \mathcal{O}^s}$$

Démonstration. On commence par montrer que toutes les orbites de cette action sont de la forme \mathcal{O}^s . En effet si $(i, j) \in [0, n-1] \times [0, n-1]$ alors il existe $s \in [0, r]$ tel que $i \in \mathcal{O}_j^s$. Soit $\sigma \in G$ tel que $\sigma(0) = j$. On obtient $i \in \sigma(\mathcal{O}_0^s)$ donc

$$(i, j) \in \sigma(\mathcal{O}_0^s \times \{0\})$$

c'est à dire $(i, j) \in \mathcal{O}^s$. Ce qui permet d'obtenir aussi

$$(i, j) \in \mathcal{O}^s \iff i \in \mathcal{O}_j^s$$

Or par définition on a

$$[T_s]_{i,j} = \delta_{i \in \mathcal{O}_j^s}$$

donc on obtient le résultat. □

Lemme 5.1.6. *Si $\sigma \in G \subset \mathbb{S}_n$ alors,*

$$P_\sigma T_s = T_s P_\sigma$$

Démonstration. On rappelle que par définition $P_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$.

Soit $s \in [0, r]$ et $j \in [0, n-1]$:

$$P_\sigma T_s(e_j) = \sum_{i \in \mathcal{O}_j^s} e_{\sigma(i)} = \sum_{k \in \sigma(\mathcal{O}_j^s)} e_k = \sum_{k \in \mathcal{O}_{\sigma(j)}^s} e_k = T_s(e_{\sigma(j)}) = T_s P_\sigma(e_j)$$

donc on a bien $P_\sigma T_s = T_s P_\sigma$. □

Lemme 5.1.7. *Pour $f \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. $\forall \sigma \in G, P_\sigma f = f P_\sigma$
2. $\forall \sigma \in G, \forall i, j \in [0, n-1], a_{i,j} = a_{\sigma(i), \sigma(j)}$ où les $a_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice associée à f dans la base canonique (e_0, \dots, e_{n-1}) .
3. $f \in \mathcal{T}^G$

Démonstration. (1) \Leftrightarrow (2) :

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in G, P_\sigma f = f P_\sigma &\Leftrightarrow \forall \sigma \in G, \forall i, j \in [0, n-1], [P_\sigma f]_{i,j} = [f P_\sigma]_{i,j} \\ &\Leftrightarrow \forall \sigma \in G, \forall i, j \in [0, n-1], a_{\sigma^{-1}(i),j} = a_{i,\sigma(j)} \\ &\Leftrightarrow \forall \sigma \in G, \forall i, j \in [0, n-1], a_{i,j} = a_{\sigma(i),\sigma(j)} \end{aligned}$$

(3) \Rightarrow (1) : Conséquence immédiate du lemme 5.1.6

(2) \Rightarrow (3) : Soient $s \in [0, r]$ et $j_1 \neq j_2 \in \mathcal{O}_0^s$. Il existe donc $\sigma \in G_0$ tel que $\sigma(j_1) = j_2$. Ensuite par hypothèse on a

$$a_{j_1,0} = a_{\sigma(j_1),\sigma(0)} = a_{j_2,0} := a_{s,0}$$

et donc

$$f(e_0) = \sum_{s=0}^r a_{s,0} T_s(e_0)$$

On se donne maintenant $i \in [1, n-1]$. Par transitivité de G il existe $\sigma \in G$ tel que $\sigma(0) = i$.

$$\begin{aligned} f P_\sigma(e_0) &= f(e_i) \\ P_\sigma f(e_0) &= \sum_{s=0}^r a_{s,0} P_\sigma T_s(e_0) = \sum_{s=0}^r a_{s,0} T_s(e_i) \end{aligned}$$

d'après le lemme 5.1.6. C'est à dire

$$f(e_i) = \sum_{s=0}^r a_{s,0} T_s(e_i)$$

donc

$$f = \sum_{s=0}^r a_{s,0} T_s \in \mathcal{T}^G$$

□

Remarque 5.1.8. Pour l'équivalence de (2) et (3) on peut aussi simplement remarquer que (2) signifie que l'application $(i, j) \mapsto a_{i,j}$ est constante sur les orbites \mathcal{O}^s , c'est à dire que $f \in \mathcal{T}^G$ en utilisant la proposition 5.1.5.

Dans la suite X sera toujours un graphe fini sommet-transitif c'est à dire que $\text{Aut}(X)$ agit transitivement sur les sommets de X . On notera $[0, n-1]$ l'ensemble des sommets de X et d_X sa matrice d'adjacence associée dans la base canonique (e_0, \dots, e_{n-1}) de \mathbb{C}^n . Ainsi, $G = \text{Aut}(X)$ vérifie les hypothèses nécessaires pour pouvoir définir toutes les notions précédentes de cette partie. Pour ce qui est des notations on prendra

$$\text{Aut}_i(X) = G_i \quad \text{et} \quad \mathcal{T}^X := \mathcal{T}^{\text{Aut}(X)}$$

Remarque 5.1.9. Le lemme 5.1.7 montre en particulier que \mathcal{T}^X est stable par composition et que $d_X \in \mathcal{T}^X$ donc on a les équivalences suivantes pour $\sigma \in \mathbb{S}_n$:

$$P_\sigma d_X = d_X P_\sigma \Leftrightarrow \sigma \in \text{Aut}(X) \Leftrightarrow \forall s \in [0, r], P_\sigma T_s = T_s P_\sigma$$

De plus la définition de \mathcal{T}^X ne dépend que de $\text{Aut}(X)$ donc

$$\mathcal{T}^X = \mathcal{T}^{X^c}$$

car $\text{Aut}(X) = \text{Aut}(X^c)$.

5.2 L'espace \mathcal{T}_B^X

Dans cette section X désigne toujours un graphe sommet-transitif à n sommets et on reprend les notations de la section précédente.

On pose $h := \dim(\mathbb{C}[d_X]) - 1$ de sorte que $\text{Id}, d_X, d_X^2, \dots, d_X^h$ soit une base de $\mathbb{C}[d_X]$. Pour $i, j \in [0, n-1]$ on note

$$L^j(i) := \left((d_X^0)_{i,j}, (d_X)_{i,j}, \dots, (d_X^h)_{i,j} \right)$$

la suite des coefficients d'indice (i, j) dans les matrices $\text{Id}, d_X, d_X^2, \dots, d_X^h$.

Lemme 5.2.1. Soient $i, j \in [0, n-1]$, alors $\forall \sigma \in \text{Aut}(X)$,

$$L^j(i) = L^{\sigma(j)}(\sigma(i))$$

Démonstration. Puisque les d_X^k commutent avec tous les P_σ pour $\sigma \in \text{Aut}(X)$ c'est une conséquence immédiate du lemme 5.1.7. \square

On note $B_0^0, B_0^1, \dots, B_0^q$ les classes d'équivalences pour la relation d'équivalence \mathcal{R}^0 suivante sur $[0, n-1]$:

$$i \mathcal{R}^0 j \iff L^0(i) = L^0(j)$$

Puis comme pour les \mathcal{O}_i^s on définit

$$B_i^s := \sigma_i(B_0^s)$$

où $\sigma_i \in \text{Aut}(X)$ vérifie $\sigma_i(0) = i$.

Proposition 5.2.2. On obtient les propriétés suivantes sur les B_i^s .

i. Les B_i^s pour $0 \leq s \leq q$ sont les classes d'équivalences pour la relation \mathcal{R}^i suivante :

$$j_1 \mathcal{R}^i j_2 \iff L^i(j_1) = L^i(j_2)$$

- ii. La définition de B_i^s ne dépend pas du choix de $\sigma_i \in \text{Aut}(X)$ vérifiant $\sigma_i(0) = i$.
 iii. $\forall \sigma \in \text{Aut}(X), \forall i, j \in [0, n-1], \forall s_1, s_2 \in [0, q]$ on a :

$$\sigma(B_i^{s_1}) = B_{\sigma(i)}^{s_1} \quad \text{et} \quad \sigma(B_i^{s_1} \cap B_j^{s_2}) = B_{\sigma(i)}^{s_1} \cap B_{\sigma(j)}^{s_2}$$

Démonstration. (i) : Soit $j_0 \in \sigma_i(B_0^s)$, $j_0 = \sigma_i(i_0)$ avec $i_0 \in B_0^s$.

$$\begin{aligned} L^i(j_0) = L^i(j_1) &\Leftrightarrow L^0(i_0) = L^0(\sigma_i^{-1}(j_1)) \quad \text{par le lemme 5.2.1} \\ &\Leftrightarrow \sigma_i^{-1}(j_1) \in B_0^s \\ &\Leftrightarrow j_1 \in \sigma_i(B_0^s) \end{aligned}$$

ce qui montre que les B_i^s sont bien les classes d'équivalences voulues.

(ii) : Soit $\sigma \in \text{Aut}(X)$ tel que $\sigma(0) = i$ et $i_0 \in B_0^s$ alors

$$\begin{aligned} j \in \sigma(B_0^s) &\Leftrightarrow L^0(\sigma^{-1}(j)) = L^0(i_0) \\ &\Leftrightarrow L^i(\sigma_i \sigma^{-1}(j)) = L^i(\sigma_i(i_0)) \quad \text{par le lemme 5.2.1} \\ &\Leftrightarrow L^i(j) = L^i(\sigma_i(i_0)) \quad \text{car } \sigma \sigma_i^{-1}(i) = i \\ &\Leftrightarrow L^0(\sigma_i^{-1}(j)) = L^0(i_0) \\ &\Leftrightarrow j \in \sigma_i(B_0^s) \end{aligned}$$

donc la définition des B_i^s est bien indépendante du choix de σ_i .

(iii) : Pour la première égalité on a le calcul suivant :

$$\sigma(B_i^s) = \sigma \sigma_i(B_0^s) = B_{\sigma \sigma_i(0)}^s = B_{\sigma(i)}^s$$

et la deuxième égalité en découle

$$\sigma(B_i^{s_1} \cap B_j^{s_2}) = \sigma(B_i^{s_1}) \cap \sigma(B_j^{s_2}) = B_{\sigma(i)}^{s_1} \cap B_{\sigma(j)}^{s_2}$$

□

Définition 5.2.3. Pour $s \in [0, q]$ on définit l'élément $T_s^{\mathcal{B}} \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ par

$$T_s^{\mathcal{B}}(e_j) = \sum_{i \in B_j^s} e_i$$

et on note

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X := \text{Vect}(T_s^{\mathcal{B}} \mid 0 \leq s \leq q)$$

Par construction la famille $(T_0^{\mathcal{B}}, \dots, T_q^{\mathcal{B}})$ est libre donc c'est une base de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X$.

Lemme 5.2.4. $(\mathcal{O}_0^0, \dots, \mathcal{O}_0^q)$ est une sous-partition de $(B_0^0, B_0^1, \dots, B_0^q)$, c'est à dire que pour tout $i \in [0, q]$ il existe un ensemble E_i tel que

$$B_0^i = \bigcup_{s \in E_i} \mathcal{O}_0^s$$

Démonstration. Soient $i_1, i_2 \in [0, n-1]$. Comme les éléments de $\mathbb{C}[d_X]$ commutent avec les P_σ pour tout $\sigma \in \text{Aut}(X)$ alors par le lemme 5.1.7 on obtient

$$(\exists \sigma \in \text{Aut}_0(X), \sigma(i_1) = i_2) \Rightarrow (\forall k \in [0, h], (d_X^k)_{i_1,0} = (d_X^k)_{i_2,0}) \Leftrightarrow L^0(i_1) = L^0(i_2)$$

Ce qui, en terme d'orbites, signifie exactement que pour tout $s \in [0, r]$ il existe $i \in [0, q]$ tel que $\mathcal{O}_0^s \subset B_0^i$. Le résultat souhaité suit. \square

Remarque 5.2.5. Avec les propositions 5.1.2 et 5.2.2 on obtient aussi que pour tout $j \in [0, n-1]$,

$$B_j^i = \bigcup_{s \in E_i} \mathcal{O}_j^s$$

et ainsi

$$T_i^B = \sum_{s \in E_i} T_s$$

De plus on a

$$\sum_{i=0}^q T_i^B = \sum_{s=0}^r T_s = J$$

où $J(e_i) = \sum_{k=0}^{n-1} e_k$.

Proposition 5.2.6. *On a les inclusions suivantes :*

$$d_X \in \mathbb{C}[d_X] \subset \mathcal{T}_B^X \subset \mathcal{T}^X$$

Démonstration. L'inclusion de droite est une conséquence directe de la remarque 5.2.5. Soit $s \in [0, q]$, on note B^s le sous-ensemble de $[0, n-1] \times [0, n-1]$ des couples (i, j) tels que

$$[T_s^B]_{i,j} = \delta_{(i,j) \in B^s}$$

Par définition de T_s^B on a

$$B^s = \bigcup_{j=0}^{n-1} B_j^s \times \{j\}$$

et les B^s forment une partition de $[0, n-1] \times [0, n-1]$.

On montre ensuite que l'application

$$\begin{aligned} \gamma_s : B^s &\rightarrow \mathbb{C}^{h+1} \\ (i, j) &\mapsto L^j(i) := \left((d_X^0)_{i,j}, (d_X)_{i,j}, \dots, (d_X^h)_{i,j} \right) \end{aligned}$$

est constante. En effet pour tout $(i_1, j_1), (i_2, j_2) \in B^s$ par définition de B^s il existe $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Aut}(X)$ tels que $\sigma_1(0) = j_1, \sigma_2(0) = j_2$ et

$$i_1 \in B_{j_1}^s = \sigma_1(B_0^s), \quad i_2 \in B_{j_2}^s = \sigma_2(B_0^s)$$

On note alors $i'_1, i'_2 \in B_0^s$ les entiers tels que $i_1 = \sigma_1(i'_1)$ et $i_2 = \sigma_2(i'_2)$, et $\sigma \in \text{Aut}_0(X)$ tel que $\sigma(i'_1) = i'_2$. Ainsi pour tout $k \in [0, h]$,

$$\begin{aligned} (d_X^k)_{i_1, j_1} &= (d_X^k)_{\sigma_1(i'_1), \sigma_1(0)} = (d_X^k)_{i'_1, 0} = (d_X^k)_{\sigma(i'_1), \sigma(0)} \\ &= (d_X^k)_{i'_2, 0} \\ &= (d_X^k)_{\sigma_2(i'_2), \sigma_2(0)} \\ &= (d_X^k)_{i_2, j_2} \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\gamma_s(i_1, j_1) = \gamma_s(i_2, j_2)$ donc γ_s est bien constante. On note $(l_0^s, l_1^s, \dots, l_q^s)$ cette constante.

Ainsi pour tout $k \in [0, h]$ et $(i, j) \in B^{s'}$, on obtient

$$(d_X^k)_{i, j} = l_k^{s'} = \sum_{s=0}^q l_k^s \delta_{(i, j) \in B^s} = \sum_{s=0}^q l_k^s (T_s^{\mathcal{B}})_{i, j}$$

donc

$$d_X^k = \sum_{s=0}^q l_k^s T_s^{\mathcal{B}}$$

ce qui montre que $\mathbb{C}[d_X] \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X$ et termine la preuve. \square

Voici à présent un lemme qui est une conséquence directe mais essentielle de la définition des endomorphismes $T_s^{\mathcal{B}}$.

Lemme 5.2.7. *Pour $k \in [0, h]$ on note α_s^k les coefficients de $(d_X)^k$ dans la base $(T_0^{\mathcal{B}}, \dots, T_q^{\mathcal{B}})$, c'est à dire :*

$$(d_X)^k = \sum_{s=0}^q \alpha_s^k T_s^{\mathcal{B}}$$

Alors pour tout $s \neq s'$ il existe $k \in [0, h]$ tel que

$$\alpha_s^k \neq \alpha_{s'}^k$$

Démonstration. Soit $i \in [0, n-1]$ et $s \in [0, q]$ tel que $i \in B_0^s$. Par définition pour tout $k \in [0, h]$ on a

$$[(d_X)^k]_{i, 0} = \sum_{s'=0}^q \alpha_{s'}^k [T_{s'}^{\mathcal{B}}]_{i, 0} = \sum_{s'=0}^q \alpha_{s'}^k \delta_{i \in B_0^{s'}} = \alpha_s^k$$

Ainsi pour $s \neq s'$ si pour tout $k \in [0, h]$ on avait $\alpha_s^k = \alpha_{s'}^k$, alors pour tout $i \in B_0^s$, $i' \in B_0^{s'}$ et $k \in [0, h]$ on aurait

$$[(d_X)^k]_{i, 0} = [(d_X)^k]_{i', 0}$$

ce qui signifie exactement que $L^0(i) = L^0(i')$ donc $s = s'$ par définition des B_i^s , absurde, d'où le résultat. \square

On termine cette partie par deux lemmes qui nous donnent des propriétés de \mathcal{T}_B^X utiles pour la suite.

Lemme 5.2.8. *Pour tout $s \in [0, q]$ on a*

$$\forall i, j \in [0, n-1], \quad i \in B_j^s \Leftrightarrow j \in B_i^s$$

et ainsi les endomorphismes T_s^B sont autoadjoints.

Démonstration. Soient $i, j \in [0, n-1]$, $i_0 \in B_j^s$ et $\sigma \in \text{Aut}(X)$ tels que $\sigma(j) = i$.

$$\begin{aligned} i \in B_j^s \Leftrightarrow L^j(i) = L^j(i_0) &\Leftrightarrow \forall k \in [0, h], (d_X^k)_{i,j} = (d_X^k)_{i_0,j} \\ &\Leftrightarrow \forall k \in [0, h], (d_X^k)_{j,i} = (d_X^k)_{\sigma(i_0),i} \quad \text{car } d_X^k \text{ est symétrique} \\ &\Leftrightarrow L^i(j) = L^i(\sigma(i_0)) \\ &\Leftrightarrow j \in B_i^s \end{aligned}$$

car $\sigma(i_0) \in \sigma(B_j^s) = B_{\sigma(j)}^s = B_i^s$. Ce qui montre bien en particulier que T_s^B est autoadjoint puisque

$$[T_s^B]_{i,j} = \delta_{i \in B_j^s}$$

□

Lemme 5.2.9. *Si X est un graphe fini, sommet-transitif, alors*

$$\mathcal{T}_B^X = \mathcal{T}_B^{X^c}$$

Démonstration. La relation d'équivalence qui permet de définir $\mathcal{T}_B^X, \mathcal{R}^0$, sera notée \mathcal{R}_X^0 dans ce qui suit. On a l'égalité suivante :

$$d_{X^c} = J - \text{id} - d_X$$

et comme $Jd_X = d_X J = \alpha(X)\text{id}$ ($\alpha(X)$ est la valence de X) on a

$$\forall k \geq 0, \quad (d_{X^c})^k \in \text{Vect}(\text{id}, d_X, (d_X)^2, \dots, (d_X)^h, J)$$

ce qui nous permet de dire que d_{X^c} et toutes ses puissances sont dans \mathcal{T}_B^X car J et les puissances de d_X le sont. Cela implique la propriété suivante :

$$i\mathcal{R}_X^0 j \implies i\mathcal{R}_{X^c}^0 j$$

Puis comme $(X^c)^c = X$ on obtient l'équivalence

$$i\mathcal{R}_{X^c}^0 j \iff i\mathcal{R}_X^0 j$$

c'est à dire $\mathcal{T}_B^X = \mathcal{T}_B^{X^c}$.

□

5.3 Dualité de Tannaka-Krein

5.3.1 Pour les groupes de permutations

On utilise les notations suivantes de [11]. Soit G un sous-groupe de \mathbb{S}_n (on identifie les éléments de G avec les matrices de permutations de taille n associées). On peut associer à G les espaces d'entrelacements suivants.

$$C_G(k, l) = \{T \in \text{Hom}((\mathbb{C}^n)^{\otimes k}, (\mathbb{C}^n)^{\otimes l}) := C(k, l) \mid \forall g \in G, Tg^{\otimes k} = g^{\otimes l}T\}$$

avec $(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Remarque 5.3.1. Par dualité de Frobenius on a

$$C_G(k, l) \simeq C_G(0, k + l)$$

On note alors C_G la collection des $C_G(k, l)$ et on définit les éléments U, M, C comme suit :

$$U \in C_G(0, 1) : U(1) = \sum_{k=0}^{n-1} e_k$$

$$M \in C_G(2, 1) : M(e_i \otimes e_j) = \delta_{i,j} e_i$$

$$S \in C_G(2, 2) : S(e_i \otimes e_j) = e_j \otimes e_i$$

et leur adjoint :

$$U^* \in C_G(1, 0) : U^*(e_i) = 1$$

$$M^* \in C_G(1, 2) : M^*(e_i) = e_i \otimes e_i$$

$$S^* \in C_G(2, 2) : S^* = S$$

On a alors la proposition suivante de [11] sur la structure de C_G .

Proposition 5.3.2. *[[11], Proposition 1.2] C_G est une catégorie tensorielle avec duaux, au sens où elle satisfait les propriétés suivantes.*

1. $(T, T' \in C_G) \Rightarrow T + T' \in C_G$
2. $(T, T' \in C_G) \Rightarrow T \otimes T' \in C_G$
3. Si $T, T' \in C_G$ sont composables, alors $T \circ T' \in C_G$
4. $(T \in C_G) \Rightarrow T^* \in C_G$
5. $I_d \in C_G(1, 1)$

On utilise alors une version du théorème de dualité de Tannaka-Krein sur les algèbres de Woronowicz que l'on trouve dans [38]. L'utilisation qui en est faite ici est analogue au théorème 1.4 de [11] pour l'étude des groupes compacts qui contiennent \mathbb{S}_n .

Théorème 5.3.3. *La construction $G \rightarrow C_G$ induit une bijection entre les sous-groupes $G \subset \mathbb{S}_n$ et les catégories tensorielles avec duaux, \mathcal{C} , qui vérifient*

$$C_{\mathbb{S}_n} \subset \mathcal{C} \subset C_{\{1\}}$$

où $C_{\{1\}}(k, l) = C(k, l)$.

Il est donc important de commencer par bien comprendre $C_{\mathbb{S}_n}$. Or C_G est engendrée en tant que catégorie tensorielle symétrique par les endomorphismes qui caractérisent les relations vérifiées par les coefficients des éléments de G (regardés comme des matrices). La matrice $u = (u_{ij})_{0 \leq i, j \leq n-1}$ est alors un élément de \mathbb{S}_n si :

- i. $\sum_{k=0}^{n-1} u_{ik} = \sum_{k=0}^{n-1} u_{kj} = 1$
- ii. $u_{ij_1} u_{ij_2} = \delta_{j_1, j_2} u_{ij_1}$ et $u_{i_1 j} u_{i_2 j} = \delta_{i_1, i_2} u_{i_1 j}$
- iii. Les u_{ij} commutent entre eux

Or on peut vérifier que

$$(i) \Leftrightarrow U, U^* \in C_G(0, 1)$$

$$(ii) \Leftrightarrow M, M^* \in C_G(2, 1)$$

$$(iii) \Leftrightarrow S \in C_G(2, 2)$$

donc finalement on obtient,

$$C_{\mathbb{S}_n} = \langle U, M, S \rangle_{+, \circ, \otimes, *}$$

Il y a aussi une façon plus explicite de décrire $C_{\mathbb{S}_n}$ en utilisant l'ensemble $P(k, l)$ des partitions de $k + l$ éléments, voir [11]

Remarque 5.3.4. (3) + (4) + (ii) \Rightarrow (5) car $I_d = M \circ M^*$.

Proposition 5.3.5. *On a*

$$C_G(1, 1) = \mathcal{T}^G$$

Démonstration. Conséquence directe du lemme 5.1.7. □

Pour le cas où $G = \text{Aut}(X)$ on utilise la description suivante.

Proposition 5.3.6. *Si X est un graphe fini sommet-transitif, alors*

$$C_{\text{Aut}(X)} = \langle U, M, S, d_X \rangle_{+, \circ, \otimes, *}$$

$$C_{\text{Aut}(X)}(1, 1) = \mathcal{T}^X$$

Démonstration. Les éléments de $\text{Aut}(X)$ sont ceux de \mathbb{S}_n qui commutent avec d_X , or par définition

$$(d_X \in C_{\text{Aut}(X)}(1, 1)) \Leftrightarrow (\forall \sigma \in \text{Aut}(X), P_\sigma d_X = d_X P_\sigma)$$

ce qui donne la première égalité. La deuxième est une application directe de la proposition 5.3.5. □

5.3.2 Pour les groupes quantiques de permutations

On peut maintenant faire la même chose pour les algèbres quantiques de permutations, c'est à dire pour les quotients \mathcal{A} de

$$A_s(n) = \langle u_{ij}, 1 \leq i, j \leq n \mid u \text{ magique unitaire} \rangle$$

en définissant les espaces d'entrelacements

$$C_{\mathcal{A}}(k, l) = \{T \in C(k, l) \mid Tu^{\otimes k} = u^{\otimes l}T\}$$

où $u^{\otimes k}$ est la $n^k \times n^k$ -matrice $(u_{i_1 j_1} \cdots u_{i_k j_k})_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_k}$.

Remarque 5.3.7. Par dualité de Frobenius on a toujours

$$C_{\mathcal{A}}(k, l) \simeq C_{\mathcal{A}}(0, k + l)$$

La collection des $C_{\mathcal{A}}(k, l)$ pour $(k, l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, notée $C_{\mathcal{A}}$, est de nouveau une catégorie tensorielle avec duaux au sens de la proposition 5.3.2. Avec ces notations la dualité de Tannaka-Krein s'exprime sous la forme suivante.

Théorème 5.3.8. *La construction $\mathcal{A} \rightarrow C_{\mathcal{A}}$, induit une bijection entre les n -algèbres quantiques de permutations et les catégories tensorielles avec duaux, \mathcal{C} , qui vérifient*

$$C_{A_s(n)} \subset \mathcal{C} \subset C_{\{1\}}$$

Les relations sur u qui définissent $A_s(n)$ permettent d'obtenir de façon similaire au cas classique que

$$C_{A_s(n)} = \langle U, M \rangle_{+, \circ, \otimes, *}$$

Dans [11] on pourra trouver une description plus précise de $C_{A_s(n)}(k, l)$ qui utilise les partitions non-croisées de $[0, n - 1]$. Cette méthode est utilisée pour étudier les analogues quantiques des groupes de Lie orthogonaux contenant \mathbb{S}_n . Cette étude a notamment permis de faire des connections importantes avec les probabilités libres, voir [23].

En utilisant cette description plus explicite de $C_{A_s(n)}(k, l)$ on a en particulier immédiatement

$$C_{A_s(n)}(0, 1) = \text{Vect}(e), \quad \text{où } e = \sum_{i=0}^{n-1} e_i$$

$$C_{A_s(n)}(1, 1) = \text{Vect}(\text{Id}, J)$$

Lemme 5.3.9. Soient \mathcal{A} une n -algèbre quantique de permutations et $G^0 \subset \mathbb{S}_n$ le groupe de permutations tel que

$$\text{com}(\mathcal{A}) = C(G^0)$$

où $\text{com}(\mathcal{A})$ est l'algèbre abélianisée de \mathcal{A} . Alors

$$C_{\mathcal{A}} \subset C_{G^0}$$

donc en particulier

$$C_{\mathcal{A}}(1, 1) \subset \mathcal{T}^{G^0}$$

Démonstration. Ce lemme est une conséquence directe des définitions. Le passage à l'algèbre abélianisée correspond à l'ajout de S dans les générateurs de $C_{\mathcal{A}}$. \square

Pour $A(X)$ on a $\text{com}(A(X)) = C(\text{Aut}(X))$ donc $G^0 = \text{Aut}(X)$ et ce lemme nous indique que

$$C_{A(X)}(1, 1) \subset \mathcal{T}^X$$

On obtient alors la généralisation naturelle de la proposition 5.3.6 pour l'algèbre $A(X)$ dans le cas quantique.

Proposition 5.3.10.

$$C_{A(X)} = \langle U, M, d_X \rangle_{+, \circ, \otimes, *}$$

Démonstration. La matrice qui permet de définir $A(X)$ est caractérisée par les relations suivantes :

- i. $\sum_{k=0}^{n-1} u_{ik} = \sum_{k=0}^{n-1} u_{kj} = 1$
- ii. $u_{ij_1} u_{ij_2} = \delta_{j_1, j_2} u_{ij_1}$ et $u_{i_1 j} u_{i_2 j} = \delta_{i_1, i_2} u_{i_1 j}$
- iii. $u d_X = d_X u$

Or on a

$$(i) \Leftrightarrow U \in C_{A(X)}(0, 1)$$

$$(ii) \Leftrightarrow M \in C_{A(X)}(2, 1)$$

$$(iii) \Leftrightarrow d_X \in C_{A(X)}(1, 1)$$

ce qui nous donne le résultat. \square

Corollaire 5.3.11. X n'a pas de symétrie quantique si et seulement si $S \in C_{A(X)}$.

Démonstration. On sait que X n'a pas de symétrie quantique si et seulement si $C_{A(X)} = C_{\text{Aut}(X)}$ or $C_{A(X)} = \langle U, M, d_X \rangle_{+, \circ, \otimes, *}$ et $C_{\text{Aut}(X)} = \langle U, M, S, d_X \rangle_{+, \circ, \otimes, *}$ d'où le résultat. On peut aussi voir que la présence de S dans $C_{A(X)}$ code la commutativité des $u_{i,j}$ (qui engendrent $A(X)$) or par définition X n'a pas de symétrie quantique si et seulement si $A(X)$ est commutative. \square

On souhaite à présent, comme dans le cas classique, mieux comprendre l'espace $C_{A(X)}(1, 1)$ en utilisant les espaces \mathcal{T}_B^X et \mathcal{T}^X .

Pour cela on définit le produit de Hadamard suivant sur $\text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$.

Définition 5.3.12. Soient $f, g \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, on note $f \times g \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ le produit de Hadamard de f et g défini par

$$f \times g = M \circ (f \otimes g) \circ M^*$$

Proposition 5.3.13. *Le produit ci-dessus vérifie les propriétés suivantes.*

1. Si $f, g \in C_{A(X)}(1, 1)$ alors $f \times g \in C_{A(X)}(1, 1)$.
2. Soient $f, g \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ que l'on écrit sous forme matricielle $f = (a_{ij})$ et $g = (b_{ij})$. On a alors $f \times g = (a_{ij}b_{ij})$.
3. Si $f, g \in \mathcal{T}_B^X$ s'écrivent sous la forme

$$f = \sum_{i=0}^q \alpha_i^f T_i^B, \quad g = \sum_{i=0}^q \alpha_i^g T_i^B$$

alors on a

$$f \times g = \sum_{i=0}^q \alpha_i^f \alpha_i^g T_i^B \in \mathcal{T}_B^X$$

c'est à dire $\alpha_i^{f \times g} = \alpha_i^f \alpha_i^g$.

4. Si $f, g \in \mathcal{T}^X$ s'écrivent sous la forme

$$f = \sum_{i=0}^r a_i^f T_i, \quad g = \sum_{i=0}^r a_i^g T_i$$

alors on a

$$f \times g = \sum_{i=0}^r a_i^f a_i^g T_i \in \mathcal{T}^X$$

c'est à dire $a_i^{f \times g} = a_i^f a_i^g$.

Démonstration. (1) : Cela est immédiat puisque $M, M^* \in C_{A(X)}(1, 1)$ et $C_{A(X)}$ est stable par composition et produit tensoriel.

(2) :

$$\begin{aligned}
f \times g(e_j) &= M(f(e_j) \otimes g(e_j)) = M\left(\sum_{i_1=0}^{n-1} a_{i_1,j} e_{i_1} \otimes \sum_{i_2=0}^{n-1} b_{i_2,j} e_{i_2}\right) \\
&= M\left(\sum_{i_1, i_2=0}^{n-1} a_{i_1,j} b_{i_2,j} (e_{i_1} \otimes e_{i_2})\right) \\
&= \sum_{i_1, i_2=0}^{n-1} a_{i_1,j} b_{i_2,j} M(e_{i_1} \otimes e_{i_2}) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} a_{ij} b_{ij} e_i
\end{aligned}$$

ce qui nous donne le résultat.

(3) : Lorsque $f, g \in \mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X$ le calcul est le suivant :

$$\begin{aligned}
f \times g(e_j) &= M\left(\sum_{i_1=0}^q \alpha_{i_1}^f T_{i_1}^{\mathcal{B}}(e_j) \otimes \sum_{i_2=0}^q \alpha_{i_2}^g T_{i_2}^{\mathcal{B}}(e_j)\right) \\
&= \sum_{i_1, i_2=0}^q \alpha_{i_1}^f \alpha_{i_2}^g (M(T_{i_1}^{\mathcal{B}}(e_j) \otimes T_{i_2}^{\mathcal{B}}(e_j))) \\
&= \sum_{i=0}^q \alpha_i^f \alpha_i^g T_i^{\mathcal{B}}(e_j) \quad \text{car } B_{i_1}^j \cap B_{i_2}^j = \delta_{i_1, i_2} B_{i_1}^j
\end{aligned}$$

Ainsi $f \times g = \sum_{i=0}^q \alpha_i^f \alpha_i^g T_i^{\mathcal{B}}$.

(4) : La preuve est la même que pour la propriété (3) puisque

$$\mathcal{O}_{i_1}^j \cap \mathcal{O}_{i_2}^j = \delta_{i_1, i_2} \mathcal{O}_{i_1}^j$$

□

Proposition 5.3.14. *Soit X un graphe fini sommet-transitif, alors*

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X \subset C_{A(X)}(1, 1) \subset \mathcal{T}^X$$

Démonstration. On a déjà vu l'inclusion de droite à l'aide du lemme 5.3.9. Pour l'inclusion de gauche on commence par supposer que X est connexe. On rappelle alors que

$$C_{A(X)} = \langle U, M, d_X \rangle_{+, \circ, \otimes, * } = \langle U, M, \mathbb{C}[d_X] \rangle_{+, \circ, \otimes, * }$$

Dans la suite pour tout $f \in \mathcal{T}_B^X$ on notera α_i^f les coefficients de f dans la base $(T_0^B, T_1^B, \dots, T_q^B)$. Pour $k \in [0, h]$, on utilisera la notation simplifiée suivante :

$$(d_X)^k = \sum_{i=0}^q \alpha_i^k T_i^B$$

Soit $i_0 \in [0, q]$. On va montrer que $T_{i_0}^B \in C_{A(X)}$.

On commence par remarquer que $((d_X)^k)_{i,j}$ correspond au nombre de chemins de longueur k dans X qui vont du sommet i au sommet j . Ainsi, par connexité de X , pour tout couple (i, j) il existe $k \in [0, h]$ tel que $((d_X)^k)_{i,j} \neq 0$. Cela signifie donc aussi qu'il existe $f \in \mathbb{C}[d_X] \subset \mathcal{T}_B^X$ tel que $\alpha_{i_0}^f \neq 0$. En effet il suffit de prendre $f = (d_X)^k$ tel que $((d_X)^k)_{i_0,0} \neq 0$, où $i \in B_0^{i_0}$.

On pose ensuite

$$m_f = \#\{i \in [0, q] \mid i \neq i_0, \alpha_i^f \neq 0\} \in [0, q-1]$$

Pour la suite il est important de remarquer grâce à la proposition 5.3.13 que

$$\forall g, h \in \mathcal{T}_B^X, \quad \alpha_{i_0}^g = 0 \Rightarrow \alpha_{i_0}^{g \times h} = 0 \quad (*)$$

donc en particulier $m_{g \times h} \leq m_g$ et $m_{g+g \times h} \leq m_g$

1er cas : $m_f = 0$. Cela signifie que $f = \alpha_{i_0}^f T_{i_0}^B$ ainsi

$$T_{i_0}^B = \frac{f}{\alpha_{i_0}^f} \in \mathbb{C}[d_X] \subset C_{A(X)}$$

2ème cas : $m_f \geq 1$. Il existe $i_1 \neq i_0$ tel que $\alpha_{i_1}^f \neq 0$. On va construire à partir de f un élément $F \in C_{A(X)} \cap \mathcal{T}_B^X$ vérifiant $\alpha_{i_0}^F \neq 0$ et $m_F < m_f$ en utilisant uniquement le fait que $f \in C_{A(X)} \cap \mathcal{T}_B^X$ et $\alpha_{i_0}^f \neq 0$. Ainsi par récurrence descendante on obtiendra l'existence du premier cas.

- Etape 1 : Si $\alpha_{i_1}^f \neq \alpha_{i_0}^f$ on pose $f_1 := f$. Sinon, on considère un élément $g \in \mathbb{C}[d_X]$ tel que $\alpha_{i_1}^g \neq \alpha_{i_0}^g$ (l'existence est assurée par le lemme 5.2.7). Puis on pose :

$$f_1 := \begin{cases} f \times g & \text{si } \alpha_{i_0}^g \neq 0 \\ f + f \times g & \text{si } \alpha_{i_0}^g = 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas avec la proposition 5.3.13 on obtient

$$f_1 \in C_{A(X)} \cap \mathcal{T}_B^X, \quad \alpha_{i_0}^{f_1} \neq 0, \quad \alpha_{i_1}^{f_1} \neq \alpha_{i_0}^{f_1}, \quad \text{et } m_{f_1} \leq m_f$$

Si $\alpha_{i_1}^{f_1} = 0$ alors $m_{f_1} < m_f$ et en posant $F := f_1$ on a le résultat souhaité. Sinon on passe à l'étape suivante.

- Etape 2 : On pose :

$$F := f_1 - \frac{1}{\alpha_{i_1}^{f_1}}(f_1 \times f_1) \in C_{A(X)} \cap \mathcal{T}_B^X$$

Et comme pour tout $i \in [0, q]$ on a

$$\alpha_i^F = \alpha_i^{f_1} - \frac{(\alpha_i^{f_1})^2}{\alpha_{i_1}^{f_1}}$$

on obtient

$$\alpha_{i_0}^F \neq 0, \quad \alpha_{i_1}^F = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [0, q], \quad \alpha_i^{f_1} = 0 \Rightarrow \alpha_i^F = 0$$

donc

$$m_F < m_{f_1} \leq m_f$$

ce qui montre le résultat pour X connexe. Lorsque X n'est pas connexe alors X^c l'est et on obtient bien le même résultat car

$$\text{Aut}(X) = \text{Aut}(X^c), \quad A(X) = A(X^c) \quad \text{et} \quad \mathcal{T}_B^X = \mathcal{T}_B^{X^c}$$

d'après le lemme 5.2.9 . □

Remarque 5.3.15. Une autre manière de comprendre ce résultat est de voir \mathcal{T}_B^X comme l'algèbre des fonctions sur $X \times X$, constantes sur les classes d'équivalences pour la relation R suivante :

$$(i, j)R(i', j') \iff \forall k \in [0, h], [(d_X)^k]_{(i,j)} = [(d_X)^k]_{(i',j')}$$

L'algèbre (pour le produit de Hadamard) engendrée par les $(d_X)^k$, vues comme des fonctions sur $X \times X$ qui se factorisent à travers $X \times X/R$, en sépare les points ainsi par Stone-Weierstrass les éléments de $\mathbb{C}[d_X]$ engendrent l'espace \mathcal{T}_B^X . Or $\mathbb{C}[d_X] \subset C_{A(X)}(1, 1)$ et ce dernier espace est stable par le produit de Hadamard donc $\mathcal{T}_B^X \subset C_{A(X)}(1, 1)$.

5.3.3 Bilan

Voici le théorème qui fait le bilan du lien entre $\text{Aut}(X)$, $A(X)$, \mathcal{T}^X et \mathcal{T}_B^X .

Théorème 5.3.16. *Soit X un graphe sommet-transitif, alors*

$$C_{\text{Aut}(X)} = \langle U, M, S, d_X \rangle_{+, \circ, \otimes, * } = \langle U, M, S, \mathcal{T}^X \rangle_{+, \circ, \otimes, * } := \langle U, M, S, T_1, \dots, T_r \rangle_{+, \circ, \otimes, * }$$

$$C_{A(X)} = \langle U, M, d_X \rangle_{+, \circ, \otimes, * } = \langle U, M, \mathcal{T}_B^X \rangle_{+, \circ, \otimes, * } := \langle U, M, T_1^B, \dots, T_q^B \rangle_{+, \circ, \otimes, * }$$

Démonstration. Avec la proposition 5.3.6 on obtient

$$\langle U, M, S, \mathcal{T}^X \rangle_{+,o,\otimes,*} \subset C_{\text{Aut}(X)} = \langle U, M, S, d_X \rangle_{+,o,\otimes,*}$$

or $d_X \in \mathcal{T}^X$ donc on obtient l'inclusion inverse et l'égalité.

Pour la seconde on fait de même à l'aide des propositions 5.3.10 et 5.3.14.

$$\langle U, M, \mathcal{T}_B^X \rangle_{+,o,\otimes,*} \subset C_{A(X)} = \langle U, M, d_X \rangle_{+,o,\otimes,*}$$

et comme $d_X \in \mathcal{T}_B^X$, par la proposition 5.2.6, cela permet de conclure. \square

5.4 Graphes \mathcal{B} -cohérents, \mathcal{B} -clos et applications

5.4.1 Définitions et premiers résultats

Définition 5.4.1. On dit qu'un graphe fini X est \mathcal{B} -cohérent si il est sommet-transitif et vérifie

$$\mathcal{T}^X = \mathcal{T}_B^X$$

c'est à dire $r = q$ car $\mathcal{T}_B^X \subset \mathcal{T}^X$.

D'après le lemme 5.2.4 cela signifie que les orbites B_i^s et \mathcal{O}_i^s sont les mêmes. Et en utilisant les définitions de celles-ci comme dans la démonstration du lemme 5.2.4 on peut remarquer qu'un graphe sommet-transitif X est \mathcal{B} -cohérent si et seulement si $\forall i, j_1, j_2 \in [0, n-1]$,

$$(\exists \sigma \in \text{Aut}_i(X), \sigma(j_1) = j_2) \iff (\forall k \in [0, h], (d_X^k)_{i,j_1} = (d_X^k)_{i,j_2})$$

Exemple 5.4.2. Tous les graphes sommet-transitifs pour $n \leq 11$ sont \mathcal{B} -cohérents, y compris le graphe de Petersen.

Remarque 5.4.3. Comme $\mathcal{T}^X = \mathcal{T}^{X^c}$ et $\mathcal{T}_B^X = \mathcal{T}_B^{X^c}$ on a

$$(X \text{ est } \mathcal{B}\text{-cohérent}) \iff (X^c \text{ est } \mathcal{B}\text{-cohérent})$$

D'après le théorème 5.3.16 le groupe quantique d'automorphismes d'un graphe \mathcal{B} -cohérent a la particularité de vérifier l'égalité suivante :

$$C_{A(X)} = \langle U, M, \mathcal{T}^X \rangle_{+,o,\otimes,*} := \langle U, M, T_1, \dots, T_r \rangle_{+,o,\otimes,*}$$

Les espaces \mathcal{T}^X et \mathcal{T}_B^X ont chacun une propriété qui est propre à sa définition et que l'autre ne semble pas avoir dans le cas général :

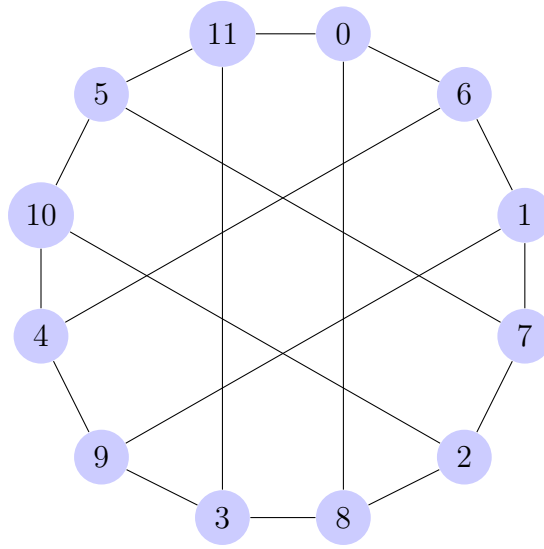
- \mathcal{T}^X est stable par composition,
- La base (T_0^B, \dots, T_q^B) de \mathcal{T}_B^X est composée d'endomorphismes autoadjoints.

Or on peut montrer facilement en utilisant la construction de la proposition 5.1.5 que

$$\text{Les } T_s \text{ sont autoadjoints} \iff \{\forall i, j \exists \sigma \in \text{Aut}(X) \mid \sigma(i) = j, \sigma(j) = i\}$$

Ainsi pour trouver des graphes qui ne sont pas \mathcal{B} -cohérents il faut chercher des graphes sommet-transitifs dont le groupe d'automorphismes n'agit pas transitivement sur tous les ensembles $\{(i, j), (j, i)\}$. Les graphes circulants ne sont donc pas de bons clients et semblent tous être \mathcal{B} -cohérents (cf partie suivante).

En revanche voici le plus petit graphe sommet-transitif non \mathcal{B} -cohérent pour lequel les générateurs de \mathcal{T}^X ne sont pas tous symétriques, on note X_{12} ce graphe :



Pour ce graphe le groupe d'automorphismes $\text{Aut}(X_{12})$ a 48 éléments et peut-être décrit comme suit :

$$\text{Aut}(X_{12}) = \{\alpha_1^{n_1} \alpha_2^{n_2} \alpha_3^{n_3} \tau^{n_4} \sigma^{n_5} \mid n_1, n_2, n_3, n_4 \in \{0, 1\}, n_5 \in \{0, 1, 2\}\}$$

avec

$$\alpha_1 = (0, 3)(6, 9) \quad \alpha_2 = (1, 4)(7, 10) \quad \alpha_3 = (2, 5)(8, 11)$$

$$\tau = (0, 6)(3, 9)(1, 11)(5, 7)(2, 10)(4, 8) \quad \sigma = (1, 2, 3, 4, 5, 6)(7, 8, 9, 10, 11, 12)$$

En particulier on a

$$\text{Aut}_0(X) = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \mid \alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i, (\alpha_i)^2 = \text{id} \rangle \simeq (\mathbb{Z}_2)^3$$

Ensuite en calculant les puissances de $d_{X_{12}}$ on obtient

$$L^0(1) = L^0(2) = L^0(4) = L^0(5) = [0, 0, 1, 0, 12, 0]$$

$$\begin{aligned}
L^0(8) = L^0(11) &= [0, 1, 0, 6, 0, 45], & L^0(10) = L^0(7) &= [0, 0, 0, 3, 0, 36] \\
L^0(0) &= [0, 0, 3, 0, 17, 0], & L^0(3) &= [0, 0, 2, 0, 16, 0] \\
L^0(6) &= [0, 1, 0, 5, 0, 41], & L^0(9) &= [0, 0, 0, 4, 0, 40]
\end{aligned}$$

Ainsi on obtient les orbites suivantes et les liens avec celles de l'action de $\text{Aut}_0(X)$:

$$\begin{aligned}
B_0^0 &= \mathcal{O}_0^0 = \{0\} \\
B_0^1 &= \mathcal{O}_0^1 = \{3\} \\
B_0^2 &= \mathcal{O}_0^2 = \{6\} \\
B_0^3 &= \mathcal{O}_0^3 = \{9\} \\
B_0^4 &= \mathcal{O}_0^4 = \{7, 10\} \\
B_0^5 &= \mathcal{O}_0^5 = \{8, 11\} \\
B_0^6 &= \{1, 2, 4, 5\} = \mathcal{O}_0^6 \cup \mathcal{O}_0^7 \quad (= \{1, 4\} \cup \{2, 5\})
\end{aligned}$$

La matrice $d_{X_{12}}$ a 6 valeurs propres distinctes donc on obtient le bilan suivant :

$$\dim(\mathbb{C}[d_X]) = 6, \quad \dim(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X) = 7, \quad \dim(\mathcal{T}^X) = 8$$

La différence entre $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X$ et \mathcal{T}^X vient de $T_6^{\mathcal{B}} = T_6 + T_7$ avec $T_6^* = T_7$.

L'intérêt de ce contre-exemple est le suivant : la \mathcal{B} -cohérence est une propriété dont la véritable utilité était d'obtenir avec le théorème 5.3.16 que

$$C_{A(X)} = \langle U, M, \mathcal{T}^X \rangle_{+, \circ, \otimes, *}$$

ce qui est équivalent à $C_{A(X)}(1, 1) = \mathcal{T}^X$.

Or avec le graphe ci-dessus on constate que la \mathcal{B} -cohérence n'est pas nécessaire pour avoir ce résultat comme le montre la proposition suivante.

Proposition 5.4.4.

$$C_{A(X_{12})} = \langle U, M, \mathcal{T}^{X_{12}} \rangle_{+, \circ, \otimes, *}$$

Démonstration. On sait déjà que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{X_{12}} \subset C_{A(X_{12})}$, et on remarque que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{X_{12}}$ n'est pas stable par composition mais que l'algèbre engendrée par $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{X_{12}}$ est égal à $\mathcal{T}^{X_{12}}$. En effet :

$$\begin{aligned}
T_2^{\mathcal{B}} T_5^{\mathcal{B}} &= T_7 \\
T_6^{\mathcal{B}} - T_2^{\mathcal{B}} T_5^{\mathcal{B}} &= T_6
\end{aligned}$$

donc $\mathbb{C}[\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^{X_{12}}] = \mathcal{T}^{X_{12}}$ ce qui permet d'obtenir le résultat voulu. \square

Ceci nous amène à définir la notion plus faible suivante.

Définition 5.4.5. On dit qu'un graphe X sommet-transitif est \mathcal{B} -clos si

$$C_{A(X)}(1, 1) = \mathcal{T}^X$$

ou de manière équivalente si $\mathcal{T}^X \subset C_{A(X)}$.

Remarque 5.4.6. Dans le cas particulier de X_{12} ceci est assuré par le fait que l'algèbre engendrée par \mathcal{T}_B^X est égale à \mathcal{T}^X .

Remarque 5.4.7. On a bien sûr, \mathcal{B} -cohérent \implies \mathcal{B} -clos.

Les symétries quantiques des graphes \mathcal{B} -clos sont alors plus faciles à étudier puisqu'ils vérifient la propriété suivante :

$$C_{A(X)} = \langle U, M, \mathcal{T}^X \rangle_{+, \circ, \otimes, *}$$

qui signifie que $A(X)$ est uniquement déterminée par son groupe d'automorphismes, $\text{Aut}(X)$, au sens du théorème suivant.

Théorème 5.4.8. Soient X et Y deux graphes \mathcal{B} -clos ayant le même nombre n de sommets, alors les propositions suivantes sont équivalentes.

1. $\mathcal{T}^X = \mathcal{T}^Y$
2. $\text{Aut}(X) = \text{Aut}(Y)$
3. $A(X) = A(Y)$

Démonstration.

(1) \implies (3) :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^X = \mathcal{T}^Y &\implies \langle U, M, \mathcal{T}^X \rangle_{+, \circ, \otimes, *} = \langle U, M, \mathcal{T}^Y \rangle_{+, \circ, \otimes, *} \\ &\Leftrightarrow C_{A(X)} = C_{A(Y)} \\ &\Leftrightarrow A(X) = A(Y) \end{aligned}$$

(3) \implies (2) : C'est immédiat par abélianisation.

(2) \implies (1) : C'est immédiat car \mathcal{T}^X est canoniquement déterminé par $\text{Aut}(X)$. \square

5.4.2 Un critère pour être \mathcal{B} -clos

Ce qui permet à un graphe non \mathcal{B} -cohérent d'être \mathcal{B} -clos, comme X_{12} , vient du fait que $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X$ n'est pas stable par composition. On va maintenant regarder comment la stabilité de $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X$ peut être exploitée pour montrer qu'un graphe est \mathcal{B} -clos.

Lemme-Définition 5.4.9. *Soit $s \in [0, r]$. Alors pour tout $s_1, s_2 \in [0, q]$ la quantité $|B_i^{s_1} \cap B_0^{s_2}|$ est indépendante de $i \in \mathcal{O}_0^s$. On note $\alpha_s^{s_1, s_2}$ sa valeur.*

Démonstration. Soient $i, j \in \mathcal{O}_0^s$. Par définition il existe $\sigma \in \text{Aut}(X)$ tel que $\sigma(i) = j$ et $\sigma(0) = 0$. Puis avec (iii) de la proposition 5.2.2 on a

$$\sigma(B_i^{s_1} \cap B_0^{s_2}) = B_j^{s_1} \cap B_0^{s_2}$$

d'où le résultat. □

Lemme 5.4.10. *Soient $s_1, s_2 \in [0, q]$ alors*

$$T_{s_1}^{\mathcal{B}} \circ T_{s_2}^{\mathcal{B}} = \sum_{s=0}^r \alpha_s^{s_1, s_2} T_s$$

Démonstration.

$$T_{s_1}^{\mathcal{B}} \circ T_{s_2}^{\mathcal{B}}(e_0) = T_{s_1}^{\mathcal{B}} \left(\sum_{k' \in B_0^{s_2}} e_{k'} \right) = \sum_{k' \in B_0^{s_2}} \sum_{k \in B_{k'}^{s_1}} e_k$$

or en utilisant le lemme 5.2.8 on a

$$(k' \in B_0^{s_2} \text{ et } k \in B_{k'}^{s_1}) \Leftrightarrow (k' \in B_0^{s_2} \text{ et } k' \in B_k^{s_1}) \Leftrightarrow (k' \in B_k^{s_1} \cap B_0^{s_2})$$

donc on obtient

$$T_{s_1}^{\mathcal{B}} \circ T_{s_2}^{\mathcal{B}}(e_0) = \sum_{k=0}^{n-1} |B_k^{s_1} \cap B_0^{s_2}| e_k = \sum_{s=0}^r \alpha_s^{s_1, s_2} \left(\sum_{k \in \mathcal{O}_0^s} e_k \right) = \sum_{s=0}^r \alpha_s^{s_1, s_2} T_s(e_0)$$

et comme $T_{s_1}^{\mathcal{B}} \circ T_{s_2}^{\mathcal{B}}$ et $\sum_{s=0}^r \alpha_s^{s_1, s_2} T_s$ sont des éléments de $C_{\text{Aut}(X)}$ et que X est sommet-transitif alors on a aussi l'égalité $T_{s_1}^{\mathcal{B}} \circ T_{s_2}^{\mathcal{B}}(e_j) = \sum_{s=0}^r \alpha_s^{s_1, s_2} T_s(e_j)$ pour tout j donc finalement on a bien le résultat souhaité. □

Proposition 5.4.11. *Soit X un graphe sommet-transitif vérifiant*

$$\forall t_1, t_2 \in [0, r], (\forall s_1, s_2 \in [0, q], \alpha_{t_1}^{s_1, s_2} = \alpha_{t_2}^{s_1, s_2}) \implies t_1 = t_2$$

Alors X est \mathcal{B} -clos.

Démonstration. Soit $s \in [0, q]$. On rappelle les notations de la partie 5.2 :

$$B_0^s = \bigcup_{t \in E_s} \mathcal{O}_0^t$$

c'est à dire $T_s^{\mathcal{B}} = \sum_{t \in E_s} T_t$. On va montrer que pour tout $t \in E_s$ on a $T_t \in C_{A(X)}$. Cela permettra d'obtenir le résultat car $[0, r] = \bigcup_{s=0}^q E_s$.

Si $E_s = \{t\}$ alors $T_t = T_s^{\mathcal{B}} \in C_{A(X)}$.

On suppose maintenant que $E_s = \{t_1, \dots, t_m\}$ avec $m \geq 2$. On se place alors dans $V := \text{Vect}(T_{t_k}, 1 \leq k \leq m) \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X$ où tous les éléments $f \in V$ s'écrivent de manière unique

$$f = \sum_{k=1}^m \alpha_{t_k}^f T_{t_k}$$

On rappelle qu'on doit montrer que pour tout $k \in [1, m]$ $T_{t_k} \in C_{A(X)}$. On fixe alors $k_0 \in [1, m]$.

Pour tout $f \in V$ on pose

$$m_f = \#\{k \in [1, m] \mid k \neq k_0, \alpha_{t_k}^f \neq 0\} \in [0, m-1]$$

Pour la suite il est important de remarquer grâce à la proposition 5.3.13 que

$$\forall g, h \in V, \alpha_{t_k}^g = 0 \Rightarrow \alpha_{t_k}^{g \times h} = 0 \quad (*)$$

donc en particulier $m_{g \times h} \leq m_g$ et $m_{g+g \times h} \leq m_g$

En posant $f_0 = T_s^{\mathcal{B}} = \sum_{k=1}^m T_{t_k}$ on dispose d'un élément dans $V \cap C_{A(X)}$ tel que $\alpha_{t_{k_0}}^{f_0} \neq 0$ (et $m_{f_0} = m-1$). On va maintenant construire un élément $F \in V \cap C_{A(X)}$ qui vérifie $\alpha_{t_{k_0}}^F \neq 0$ et $m_F < m_{f_0}$. En appliquant ce procédé par récurrence on finit par obtenir $F \in V \cap C_{A(X)}$ tel que $\alpha_{t_{k_0}}^F \neq 0$ et $m_F = 0$. Ce qui signifie que $F = \alpha_{t_{k_0}}^F T_{t_{k_0}}$ et donc $T_{t_{k_0}} = \frac{1}{\alpha_{t_{k_0}}^F} F \in A(X)$ qui nous permet de conclure.

Voici maintenant le procédé mentionné ci-dessus.

On dispose de $f \in V \cap C_{A(X)}$ tel que $\alpha_{t_{k_0}}^f \neq 0$ et $m_f \in [1, m-1]$. Il existe donc $k_1 \neq k_0$ tel que $\alpha_{t_{k_1}}^f \neq 0$.

- Etape 1 : Si $\alpha_{t_{k_1}}^f \neq \alpha_{t_{k_0}}^f$ on pose $f_1 := f$. Sinon, par contraposition de l'hypothèse de la proposition comme $t_{k_1} \neq t_{k_2}$ il existe $s_1, s_2 \in [0, q]$ tels que

$$\alpha_{t_{k_1}}^{s_1, s_2} \neq \alpha_{t_{k_2}}^{s_1, s_2}$$

ainsi en posant $g = (T_{s_1}^{\mathcal{B}} \circ T_{s_2}^{\mathcal{B}}) \times T_s^{\mathcal{B}}$ et en utilisant le (4) de la proposition 5.3.13 et le lemme 5.4.10 on obtient :

$$g = \left(\sum_{k=0}^r \alpha_k^{s_1, s_2} T_k \right) \times \left(\sum_{t \in E_s} T_t \right) = \sum_{t \in E_s} \alpha_t^{s_1, s_2} T_t = \sum_{k=1}^m \alpha_{t_k}^{s_1, s_2} T_{t_k} \in V \cap C_{A(X)}$$

avec $\alpha_{t_{k_1}}^g \neq \alpha_{t_{k_0}}^g$. On pose alors

$$f_1 := \begin{cases} f \times g & \text{si } \alpha_{t_{k_0}}^g \neq 0 \\ f + f \times g & \text{si } \alpha_{t_{k_0}}^g = 0 \end{cases}$$

Dans tous les cas avec la proposition 5.3.13 on obtient

$$f_1 \in V \cap C_{A(X)}, \quad \alpha_{t_{k_0}}^{f_1} \neq 0, \quad \alpha_{t_{k_1}}^{f_1} \neq \alpha_{t_{k_0}}^{f_1}, \quad \text{et } m_{f_1} \leq m_f$$

Si $\alpha_{t_{k_1}}^{f_1} = 0$ alors $m_{f_1} < m_f$ et en posant $F := f_1$ on a le résultat souhaité. Sinon on passe à l'étape suivante.

- Etape 2 : On pose :

$$F := f_1 - \frac{1}{\alpha_{t_{k_1}}^{f_1}}(f_1 \times f_1) \in V \cap C_{A(X)}$$

Et comme pour tout $k \in [1, m]$ on a

$$\alpha_{t_k}^F = \alpha_{t_k}^{f_1} - \frac{(\alpha_{t_k}^{f_1})^2}{\alpha_{t_{k_1}}^{f_1}}$$

on obtient

$$\alpha_{t_{k_0}}^F \neq 0, \quad \alpha_{t_{k_1}}^F = 0 \quad \text{et } \forall k \in [1, m], \quad \alpha_{t_k}^{f_1} = 0 \Rightarrow \alpha_{t_k}^F = 0$$

donc

$$m_F < m_{f_1} \leq m_f$$

ce qui nous permet de conclure. □

On peut affiner l'hypothèse en demandant la propriété pour tout t_1, t_2 tels que $\mathcal{O}_0^{t_1}$ et $\mathcal{O}_0^{t_2}$ soient dans un même B_0^s .

Remarque 5.4.12. On peut interpréter ce dernier résultat dans la continuité de la remarque 5.3.15. On note ρ l'action diagonale de $\text{Aut}(X)$ sur $X \times X$. L'espace \mathcal{T}^X peut alors être interprété comme l'algèbre des fonctions sur $X \times X$, constantes sur les orbites de ρ (qui sont les \mathcal{O}^s de la proposition 5.1.5). La proposition 5.4.11 indique que si la sous algèbre involutive, relativement à la structure de Hadamard, engendrée par les compositions de deux éléments de \mathcal{T}_B^X sépare les points dans sa factorisation à travers $X \times X/\rho$, alors elle est égale à \mathcal{T}^X et ainsi X est \mathcal{B} -clos. C'est donc une conséquence immédiate du théorème de Stone-Weierstrass.

On a pas trouvé de graphes sommet-transitifs qui ne soient pas \mathcal{B} -clos, on pense même que tous les graphes sommet-transitifs sont \mathcal{B} -clos et qu'on peut le démontrer grâce à la proposition 5.4.11.

Conjecture 5.4.13. *Tous les graphes finis sommet-transitifs sont \mathcal{B} -clos.*

5.4.3 Applications aux p -graphes avec p premier

Dans cette partie p désignera un entier premier et on étudie les symétries quantiques des p -graphes. On parlera des p -graphes circulants ce qui permet de traiter tous les p -graphes car comme on l'a déjà rappelé au début de la partie 4.2 lorsque p est premier tous les p -graphes sont circulants.

On reprend aussi les notations de la partie 4 sur les graphes circulants.

D'après [1] ou [26] on a la description suivante du groupe d'automorphismes des p -graphes circulants.

Théorème 5.4.14. *[[26], Theorem 4.1] Soit X un p -graphe circulant.*

Si $X = K_p$ ou X_p alors $\text{Aut}(X) = \mathbb{S}_p$, sinon on dira que X est non trivial et dans ce cas

$$\text{Aut}(X) = \{f_{a,b} \mid a \in E, b \in \mathbb{Z}_p\}$$

où $f_{a,b}(x) = ax + b$. En particulier

$$\text{Aut}(X) \simeq \mathbb{Z}_p \rtimes E$$

Corollaire 5.4.15. *Si X est un p -graphe circulant non trivial alors on a les isomorphismes suivants pour tout $i \in [0, p-1]$:*

$$\begin{aligned} \Phi_i : E &\rightarrow \text{Aut}_i(X) \\ e &\mapsto (\sigma_e : i + k \mapsto i + ke) \end{aligned}$$

Corollaire 5.4.16. *Les orbites de $[1, p-1]$ sous l'action de $\text{Aut}_0(X)$ sont les yE pour $y \in [1, p-1]$.*

Dans la suite on choisit des représentants $y_1 < y_2 < \dots < y_r$ de ces orbites avec l'étiquetage,

$$\mathcal{O}_0^s = y_s E$$

pour tout $s \in [1, r]$, avec par convention $y_1 = 1$. On obtient donc aussi

$$\mathcal{O}_i^s = i + y_s E$$

Proposition 5.4.17. *Tous les p -graphes circulants vérifient*

$$\mathbb{C}[d_X] = \mathcal{T}_B^X = \mathcal{T}^X$$

donc ils sont \mathcal{B} -clos et \mathcal{B} -cohérents.

Démonstration. La dimension de \mathcal{T}^X est le nombre d'orbites de $[0, p-1]$ sous l'action de $\text{Aut}_0(X)$. D'après le corollaire précédent elles sont toutes de cardinal k sauf $\mathcal{O}_0^0 = \{0\}$ donc il y en a $\frac{p-1}{k} + 1$.

La dimension de $\mathbb{C}[d_X]$ est le nombre de valeurs propres distinctes de d_X or par 4.3.3 les espaces propres non triviaux de d_X (c'est à dire différents de $\mathbb{C}1$) sont de dimension k . Ainsi il y en a $1 + \frac{p-1}{k}$ donc finalement

$$\dim(\mathbb{C}[d_X]) = \dim(\mathcal{T}^X)$$

or $\mathbb{C}[d_X] \subset \mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X \subset \mathcal{T}^X$ donc ils sont tous égaux. \square

On rappelle que l'ensemble S de la partie 4 caractérise un graphe circulant car

$$i \sim j \iff i - j \in S$$

Proposition 5.4.18. *Soient X_1 et X_2 deux p -graphes circulants, alors*

$$E_1 = E_2 \implies A(X_1) = A(X_2)$$

Démonstration. La proposition 5.4.17 nous indique que X_1 et X_2 sont \mathcal{B} -cohérents et le corollaire 5.4.15 que $\mathcal{T}^{X_1} = \mathcal{T}^{X_2}$ car $E_1 = E_2$. Le théorème 5.4.8 nous permet alors de conclure. En utilisant le lemme 4.3.3, ce résultat peut aussi se voir par le fait que E détermine les espaces propres de d_X (alors que S détermine les valeurs propres) donc aussi les relations définissant $A(X)$. \square

Cette proposition est importante car elle indique que l'étude des symétries quantiques des p -graphes circulants ne dépend que de E . Ainsi on peut se restreindre au cas $S = E$ dans la suite de notre étude car les graphes circulants au sens de la définition 4.1.2 vérifient $E \subset S$ (car $1 \in S$ dans ce cas). Pour p et k fixés il existe donc au maximum un graphe à étudier car si il en existe un, E est l'unique sous-groupe d'ordre k de $(\mathbb{Z}_p^*, \times) \simeq (\mathbb{Z}_{p-1}, +)$.

Exemple 5.4.19. On a déjà vu qu'il existe, à complémentaire près, 15 graphes de type 6 pour $p = 31$ qui sont de la forme $C_{31}(5, 6, U)$, où U est une union quelconque des triplets $(2, 10, 12)$, $(4, 7, 11)$, $(3, 13, 15)$ et $(8, 9, 14)$ (à l'exception de l'union des 4 triplets). Dans les 15 cas, $E = \{\pm 1, \pm 5, \pm 6\}$ donc il suffisait d'étudier $C_{31}(5, 6)$.

On donne maintenant un nouveau moyen de montrer que X n'a pas de symétrie quantique en exploitant la dualité via le corollaire 5.3.11 c'est à dire la caractérisation par l'appartenance de S à $C_{A(X)}(2, 2)$. On rappelle que le nombre d'orbites non triviales de $[0, p-1]$ sous l'action de $\text{Aut}_0(X)$ est λ avec

$$p = 1 + \lambda k$$

et que $\mathcal{O}_i^s = i + y_s E$ (avec $y_1 = 1$).

Proposition 5.4.20. *Soit X un p -graphe circulant tel que*

$$\forall s \in [1, \lambda], \quad \exists t_s^1, t_s^2 \in [1, \lambda] \text{ tels que } |\mathcal{O}_0^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{y_s}^{t_s^2}| = 1$$

Alors X n'a pas de symétrie quantique.

Pour démontrer ce résultat on a besoin d'un lemme préparatoire qui est propre aux p -graphes circulants.

Lemme 5.4.21. *Soient $i, j, k \in [0, p-1]$ et $s, s_i, s_j \in [1, \lambda]$ tels que*

$$j \in \mathcal{O}_i^s \text{ et } \mathcal{O}_i^{s_i} \cap \mathcal{O}_j^{s_j} = \{k\},$$

alors

$$\mathcal{O}_i^s \cap \mathcal{O}_k^{s_j} = \{j\} \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_j^s \cap \mathcal{O}_k^{s_i} = \{i\}$$

Démonstration. On sait par symétrie des éléments de \mathcal{T}^X que $j \in \mathcal{O}_i^s \Leftrightarrow i \in \mathcal{O}_j^s$ donc par symétrie par rapport à i et j des égalités demandées et de l'énoncé il suffit de montrer $\mathcal{O}_i^s \cap \mathcal{O}_k^{s_j} = \{j\}$.

$k \in \mathcal{O}_j^{s_j} \Rightarrow j \in \mathcal{O}_k^{s_j}$ ainsi on a bien $j \in \mathcal{O}_i^s \cap \mathcal{O}_k^{s_j}$.

On montre maintenant que $\mathcal{O}_i^s \cap \mathcal{O}_k^{s_j}$ n'a pas d'autres éléments.

Soient $j, j' \in \mathcal{O}_i^s \cap \mathcal{O}_k^{s_j}$. Ainsi on a

$$k \in \mathcal{O}_i^{s_i} \cap \mathcal{O}_j^{s_j} \cap \mathcal{O}_{j'}^{s_j}$$

De plus comme $j, j' \in \mathcal{O}_i^s$ il existe $e, e' \in E$ tels que

$$j = i + y_s e \text{ et } j' = i + y_s e'$$

On note $\sigma := \Phi_i(e'^{-1}e)$ où Φ_i est l'isomorphisme du corollaire 5.4.15. On a alors $\sigma(i) = i$ et $\sigma(j') = i + y_s e' e'^{-1}e = j$ ainsi en utilisant le (iii) de la proposition 5.1.2 on a

$$\{\sigma(k)\} \subset \sigma(\mathcal{O}_i^{s_i} \cap \mathcal{O}_{j'}^{s_j} \cap \mathcal{O}_j^{s_j}) \subset \sigma(\mathcal{O}_i^{s_i} \cap \mathcal{O}_{j'}^{s_j}) = \mathcal{O}_{\sigma(i)}^{s_i} \cap \mathcal{O}_{\sigma(j')}^{s_j} = \mathcal{O}_i^{s_i} \cap \mathcal{O}_j^{s_j} = \{k\}$$

C'est à dire $k = \sigma(k)$. Or $k \in \mathcal{O}_i^{s_i}$ donc il existe $e'' \in E$ tel que $k = i + y_{s_i} e''$ et on obtient

$$i + y_{s_i} e'' e'^{-1}e = \sigma(k) = k = i + y_{s_i} e''$$

et comme $s_i \neq 0$ cela implique que $e = e'$ donc $j = j'$ ce qui permet de conclure. \square

Voici maintenant la démonstration de la proposition 5.4.20.

Démonstration. On pose $t_0^1 = t_0^2 = 0$. On définit alors les éléments suivants de $C_{A(X)}$ pour tout $s \in [0, \lambda]$.

$$h_s := (M \otimes M) \circ (\text{id} \otimes T_{t_s^2} \otimes T_{t_s^1} \otimes \text{id}) \in C_{A(X)}(4, 2)$$

$$f_s := h_s \circ (\text{id} \otimes (M^* \circ M) \otimes \text{id}) \circ (T_s \otimes T_{t_s^1} \otimes T_{t_s^2} \otimes T_s) \circ (M^* \otimes M^*) \in C_{A(X)}(2, 2)$$

$$g_s := (\text{id} \otimes M) \circ (\text{id} \otimes T_s \otimes \text{id}) \circ (M^* \otimes \text{id}) \in C_{A(X)}(2, 2)$$

$$F := \sum_{s=0}^{\lambda} f_s \circ g_s \in C_{A(X)}(2, 2)$$

On remarque tout d'abord que $f_0 = \text{id}_{(\mathbb{C}^p)^{\otimes 2}}$.

Ensuite pour $s \in [1, \lambda]$, on note k_s l'élément de $[0, p-1]$ tel que

$$\mathcal{O}_0^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{y_s}^{t_s^2} = \{k_s\}$$

On considère maintenant deux éléments i et j tels que $j \in \mathcal{O}_i^s$. Soit $\sigma \in \text{Aut}(X)$ tel que $\sigma(0) = i$. On sait que $j_s \in \mathcal{O}_0^s$ donc $\sigma(j_s) \in \mathcal{O}_i^s$. Ainsi il existe $\sigma' \in \text{Aut}_i(X)$ tel que $\sigma'(\sigma(y_s)) = j$. Alors en utilisant le (iii) de la proposition 5.1.2 on a

$$\{\sigma'\sigma(k_s)\} = \sigma'\sigma(\mathcal{O}_0^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{y_s}^{t_s^2}) = \mathcal{O}_{\sigma'\sigma(0)}^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{\sigma'\sigma(y_s)}^{t_s^2} = \mathcal{O}_i^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_j^{t_s^2} \quad (1.1)$$

Puis en appliquant le lemme 5.4.21 on obtient aussi

$$\{i\} = \mathcal{O}_{\sigma'\sigma(k_s)}^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_j^s \quad (1.2)$$

$$\{j\} = \mathcal{O}_i^s \cap \mathcal{O}_{\sigma'\sigma(k_s)}^{t_s^2} \quad (1.3)$$

Ce qui nous permet de faire le calcul suivant pour tout $i, j \in [0, p-1]$ tels que $j \in \mathcal{O}_i^s$:

$$f_s(e_i \otimes e_j) = h_s \circ (\text{id} \otimes (M^* \circ M) \otimes \text{id}) (T_s(e_i) \otimes T_{t_s^1}(e_i) \otimes T_{t_s^2}(e_j) \otimes T_s(e_j))$$

$$= h_s \left(T_s(e_i) \otimes \sum_{k \in \mathcal{O}_i^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_j^{t_s^2}} (e_k \otimes e_k) \otimes T_s(e_j) \right)$$

$$= h_s (T_s(e_i) \otimes e_{\sigma'\sigma(k_s)} \otimes e_{\sigma'\sigma(k_s)} \otimes T_s(e_j)) \quad \text{par (1.1)}$$

$$= (M \otimes M) (T_s(e_i) \otimes T_{t_s^2}(e_{\sigma'\sigma(k_s)}) \otimes T_{t_s^1}(e_{\sigma'\sigma(k_s)}) \otimes T_s(e_j))$$

$$= \left(\sum_{a \in \mathcal{O}_i^s \cap \mathcal{O}_{\sigma'\sigma(k_s)}^{t_s^2}} e_a \right) \otimes \left(\sum_{b \in \mathcal{O}_{\sigma'\sigma(k_s)}^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_j^s} e_b \right)$$

$$= e_j \otimes e_i \quad \text{par (1.2) et (1.3)}$$

De plus pour tout $i, j \in [0, p-1]$ on a

$$g_s(e_i \otimes e_j) = (\text{id} \otimes M)(e_i \otimes T_s(e_i) \otimes e_j) = \delta_{j \in \mathcal{O}_i^s}(e_i \otimes e_j)$$

On termine la démonstration en démontrant alors que $S = F \in C_{A(X)}$.
 $\forall i, j \in [0, p-1]$, on note s_j l'unique entier tel que $j \in \mathcal{O}_i^{s_j}$ et on obtient

$$\begin{aligned} F(e_i \otimes e_j) &= \sum_{s=0}^{\lambda} f_s \circ g_s(e_i \otimes e_j) \\ &= \sum_{s=0}^{\lambda} \delta_{j \in \mathcal{O}_i^s} f_s(e_i \otimes e_j) \\ &= f_{s_j}(e_i \otimes e_j) \\ &= e_j \otimes e_i \end{aligned}$$

□

En outre l'hypothèse de la proposition 5.4.20 peut être affaiblie grâce au lemme suivant.

Lemme 5.4.22. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

- Il existe $s_1, s_2 \in [1, \lambda]$ tels que $|\mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_1^{s_2}| = 1$
- Pour tout $s \in [1, \lambda]$, $\exists t_s^1, t_s^2 \in [1, \lambda]$ tels que, $|\mathcal{O}_0^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{y_s}^{t_s^2}| = 1$

Démonstration. Soit $s \in [1, \lambda]$ on utilise la série d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_1^{s_2} &\Leftrightarrow \exists e, e' \in E \text{ tels que } x = y_{s_1}e = y_{s_2}e' + 1 \\ &\Leftrightarrow \exists e, e' \in E \text{ tels que } y_s x = y_s y_{s_1}e = y_s y_{s_2}e' + y_s \\ &\Leftrightarrow y_s x \in \mathcal{O}_0^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{y_s}^{t_s^2} \end{aligned}$$

où t_s^1 et t_s^2 sont tels que $y_s y_{s_1} \in \mathcal{O}_0^{t_s^1}$ et $y_s y_{s_2} \in \mathcal{O}_{y_s}^{t_s^2}$. Ainsi la multiplication par y_s réalise une bijection entre $\mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_1^{s_2}$ et $\mathcal{O}_0^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{y_s}^{t_s^2}$ ce qui donne le résultat. □

Théorème 5.4.23. *Soit X un p -graphe circulant tel que*

$$\exists s_1, s_2 \in [1, \lambda] \text{ tels que } |\mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_1^{s_2}| = 1$$

Alors X n'a pas de symétrie quantique.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition 5.4.20 et du lemme 5.4.22. □

Remarque 5.4.24. En utilisant la description explicite des \mathcal{O}_i^s avec l'ensemble E , la condition sur X du théorème 5.4.23 est équivalente à

$$\exists x, x' \in [1, p-1] \text{ tels que } |(xE) \cap (x'E+1)| = 1$$

Notations 5.4.25. On note $\Gamma_X = (\beta_{s_1 s_2})$ la matrice dont les coefficients sont définis par

$$\beta_{s_1, s_2} = |\mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_1^{s_2}| = |(y_{s_1} E) \cap (y_{s_2} E + 1)|$$

On constate tout d'abord que la matrice Γ_X est symétrique car il existe $\sigma \in \text{Aut}(X)$ tel que $\sigma(0) = 1$ et $\sigma(1) = 0$. Ensuite l'hypothèse sur X du théorème 5.4.23 est équivalente à dire que l'un des coefficients de Γ_X vaut 1.

Application 5.4.26. Les graphes de type 8 : D'après le théorème 4.3.10 il suffit d'étudier les cas $p \leq |5 + e^{\frac{2i\pi}{8}}|^{\varphi(8)} = (26 + 5\sqrt{2})^2 < 1094$. Cela fait 41 graphes de type 8 à étudier (en ne comptant que ceux qui vérifient $S = E$). On va se contenter de détailler ici le traitement des 5 d'entre eux qui ont moins de 100 sommets avec le théorème 5.4.23.

- $X = C_{97}(22, 33, 47)$ ($\lambda = 12$) :

$$\mathcal{O}_0^1 = E = \{1, 22, 33, 47, 50, 64, 75, 96\}, \quad \mathcal{O}_1^2 = 2E+1 = \{3, 4, 32, 45, 54, 67, 95, 96\}$$

$$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2 = \{96\}$$

donc le théorème 5.4.23 s'applique.

- $X = C_{89}(12, 34, 37)$ ($\lambda = 11$) :

$$\mathcal{O}_0^1 = E = \{1, 12, 34, 37, 52, 55, 77, 88\}, \quad \mathcal{O}_1^2 = 2E+1 = \{3, 16, 22, 25, 66, 69, 75, 88\}$$

$$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2 = \{88\}$$

donc le théorème 5.4.23 s'applique.

- $X = C_{73}(10, 22, 27)$ ($\lambda = 9$) :

$$\mathcal{O}_0^1 = E = \{1, 10, 22, 27, 46, 51, 63, 72\}, \quad \mathcal{O}_1^2 = 2E+1 = \{3, 20, 21, 30, 45, 54, 55, 72\}$$

$$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2 = \{72\}$$

donc le théorème 5.4.23 s'applique.

- $X = C_{41}(3, 9, 14)$ ($\lambda = 5$) :

$$\mathcal{O}_0^2 = 2E = \{2, 6, 13, 18, 23, 28, 35, 39\}, \quad \mathcal{O}_1^5 = 8E+1 = \{9, 11, 12, 18, 25, 31, 32, 34\}$$

$$\mathcal{O}_0^2 \cap \mathcal{O}_1^5 = \{18\}$$

donc le théorème 5.4.23 s'applique.

- $X = C_{17}(2, 4, 8)$ ($\lambda = 2$) : Dans ce cas on a

$$\mathcal{O}_0^1 = E = \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}, \quad \mathcal{O}_0^2 = 3E = \{3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14\}$$

$$\mathcal{O}_1^1 = E+1 = \{0, 2, 3, 5, 9, 10, 14, 16\}, \quad \mathcal{O}_1^2 = 3E+1 = \{4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 15\}$$

donc

$$\Gamma_X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

ainsi le théorème 5.4.23 ne s'applique pas et comme pour le graphe $C_{13}(3, 4)$ de type 6 on pense que $C_{17}(2, 4, 8)$ possède des symétries quantiques.

L'ensemble des graphes de type 8 avec $p \neq 17$ a été traité grâce à un programme informatique (voir en annexe) qui permet d'obtenir la liste des graphes de type k (avec $E = S$) qui ne vérifient pas les hypothèses du théorème 5.4.23. Pour $k = 8$ il n'y a que $C_{17}(2, 4, 8)$.

Les graphes de type 10 : D'après le théorème 4.3.10 il suffit d'étudier les cas $p \leq |5 + e^{\frac{2i\pi}{10}}|^{\varphi(10)} \leq 1163$. Cela fait donc 46 graphes de type 10 à étudier. On se contente de nouveau de détailler l'étude des 5 d'entre eux qui ont moins de 100 sommets.

- $X = C_{71}(5, 14, 17, 25)$ ($\lambda = 7$) :

$$\mathcal{O}_0^1 = E = \{1, 5, 14, 17, 25, 46, 54, 57, 66, 70\}$$

$$\mathcal{O}_1^2 = 2E + 1 = \{3, 11, 22, 29, 35, 38, 44, 51, 62, 70\}$$

$$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2 = \{70\}$$

donc le théorème 5.4.23 s'applique.

- $X = C_{61}(3, 9, 20, 27, 34, 41, 52, 58, 60)$ ($\lambda = 6$) :

$$\mathcal{O}_0^2 = 2E = \{2, 6, 7, 18, 21, 40, 43, 54, 55, 59\}$$

$$\mathcal{O}_1^4 = 4E + 1 = \{5, 13, 15, 20, 26, 37, 43, 48, 50, 58\}$$

$$\mathcal{O}_0^2 \cap \mathcal{O}_1^4 = \{43\}$$

donc le théorème 5.4.23 s'applique.

- $X = C_{41}(4, 10, 16, 18)$ ($\lambda = 4$) : On trouve

$$\Gamma_X = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

- $X = C_{31}(2, 4, 8, 15)$ ($\lambda = 3$) : On trouve

$$\Gamma_X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

- $X = K_{11}$: déjà traité.

Ainsi pour $C_{41}(4, 10, 16, 18)$ et $C_{31}(2, 4, 8, 15)$ le théorème 5.4.23 ne s'applique pas et nous pensons qu'ils ont des symétries quantiques.

De nouveau informatiquement on peut vérifier que l'ensemble des graphes de type 10 avec $p \geq 61$ vérifient les hypothèses du théorème 5.4.23.

Comme on le voit avec cette étude pour les graphes de type 8 et 10, il semble que la borne du théorème 4.3.10 soit vraiment très large. Pour tenter de l'améliorer voici une nouvelle proposition.

Proposition 5.4.27.

$$p > \frac{k^2}{2} + 1 \implies \forall s_1 \in [1, \lambda], \exists s_2 \in [1, \lambda] \text{ tel que } |\mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_1^{s_2}| \in \{0, 1\}$$

Démonstration. On suppose que pour tout $s_2 \in [1, \lambda]$ on a $|\mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_1^{s_2}| \geq 2$.

$$\sum_{s_2=1}^{\lambda} |\mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_1^{s_2}| \leq \left(\sum_{s_2=0}^{\lambda} |\mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_1^{s_2}| \right) = |\mathcal{O}_0^{s_1}| = k$$

car les $\mathcal{O}_1^{s_2}$ pour $s_2 \in [0, \lambda]$ forme une partition de $[0, p-1]$.

Avec notre hypothèse cela implique

$$k \geq 2\lambda \Leftrightarrow k \geq 2 \left(\frac{p-1}{k} \right) \Leftrightarrow \frac{k^2}{2} \geq p-1 \Leftrightarrow \frac{k^2}{2} + 1 \geq p$$

absurde, d'où le résultat. □

Quand on regarde de nombreux exemples il semble quand même que sous l'hypothèse $p > \frac{k^2}{2} + 1$ il existe toujours $s_1, s_2 \in [1, \lambda]$ tels que $|\mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_1^{s_2}| = 1$. Si c'est bien vrai dans le cas général, cela permettrait de montrer la conjecture suivante.

Conjecture 5.4.28.

$$p > \frac{k^2}{2} + 1 \implies (X \text{ n'a pas de symétrie quantique})$$

Démontrer cette conjecture revient en fait à mieux comprendre l'isomorphisme

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$$

En effet par cette isomorphisme les orbites sous l'action de $\text{Aut}_0(X)$ sont les sous ensembles suivants de $\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$ (on rappelle que $p-1 = \lambda k$) :

$$\mathcal{O}_0^1 = \{\lambda d, \mid d = 0, \dots, k-1\}$$

$$\mathcal{O}_0^2 = \{\lambda d + 1, \mid d = 0, \dots, k-1\}$$

$$\mathcal{O}_0^3 = \{\lambda d + 2, \mid d = 0, \dots, k-1\}$$

...

$$\mathcal{O}_0^\lambda = \{\lambda d + \lambda - 1, \mid d = 0, \dots, k-1\}$$

Ainsi la description des orbites par cette isomorphisme semble bien plus agréable pour notre étude. La difficulté est alors de comprendre comment se comportent les \mathcal{O}_1^s par cette isomorphisme, or dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

$$\mathcal{O}_1^s = \{x + 1 \mid x \in \mathcal{O}_0^s\}$$

donc cela revient à mieux comprendre comment l'addition dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \times)$ est transportée par l'isomorphisme dans $(\mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}, +)$.

Regardons maintenant une autre propriété qui semble remarquable avec l'étude des graphes de type 8 et 10. Celle-ci suggère que pour un type donné, à partir d'un certain p on a

$$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2 = E \cap (y_2 E + 1) = \{p-1\}$$

Si c'est effectivement le cas cette propriété semble plus simple à montrer que l'existence de s_1 et s_2 tels que $|\mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_1^{s_2}| = 1$, et cela permettrait, a priori, d'améliorer la borne du théorème 4.3.10, même si celle-ci serait moins bonne qu'un potentiel $\frac{k^2}{2} + 1$.

Pour aller plus loin notons x le plus petit entier qui n'appartient pas à E , on peut alors prendre $y_2 = x$ donc

$$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2 = E \cap (xE + 1)$$

Ainsi compter le nombre d'éléments dans $\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2$ revient à résoudre l'équation

$$xe + 1 = e'$$

avec $e, e' \in E$.

En particulier si $x = 2$ on obtient

$$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2 = \{-1\} \Leftrightarrow (2e + 1 = e' \Rightarrow e = e' (= -1))$$

On remarque notamment que dans ce cas pour avoir $\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2 = \{-1\}$ il faut nécessairement que $3 \notin E$ sinon $e = 1$ et $e' = 3$ conviennent.

Et si $x = 3$:

$$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2 = \{-2\} \Leftrightarrow (3e + 1 = e' \Rightarrow e = -1 \text{ et } e' = -2)$$

On peut à ce stade noter le lien avec la notion de sous-groupe 2-maximal utilisée dans la partie 4.3.2. En effet puisque si E est 2-maximal alors cela implique non seulement que $x = 2$ mais aussi que $2e + 1 = e' \Rightarrow e = e'$ donc $\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2 = \{-1\}$. Ce lien nous pousse à utiliser une méthode similaire à celle de la partie 4.3.2 pour obtenir de nouvelles bornes dans certains cas particuliers. On obtient alors les deux résultats suivants.

Proposition 5.4.29. *Si $2 \notin E$ alors*

$$p > 4^{\varphi(k)} \implies X \text{ n'a pas de symétrie quantique}$$

Démonstration. Puisque $2 \notin E$ on est dans le cas $x = 2$ c'est à dire $\mathcal{O}_0^2 = 2E$. On vient de voir qu'il suffit de montrer que

$$(2e + 1 - e' = 0) \Rightarrow (e = e' (= -1))$$

On reprend les mêmes notations que pour le lemme 4.3.8. On va montrer cette fois que l'application Φ est injective sur $\Sigma := \{2g + 1 - g', g, g' \in G\}$. Ce qui permettra de conclure puisque le groupe G est 2-maximal donc vérifie bien $2g + 1 - g' = 0 \Rightarrow g = g' (= -1)$. Si $\Phi(2g + 1 - g') = 0$ alors

$$p \mid N(2g+1-g') = \left| \prod_{s \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})} s(2g + 1 - g') \right| \leq \left(\max_{s \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\omega)/\mathbb{Q})} |s(2g + 1 - g')| \right)^{\varphi(k)}$$

or pour tout $g \in G$ on a $s(g) \in G$ donc

$$|s(2g + 1 - g')| = |2s(g) + 1 - s(g')| \leq 4$$

Ainsi on obtient

$$p \mid N(2g + 1 - g') \leq 4^{\varphi(k)}$$

Par hypothèse ce n'est possible que si $N(2g + 1 - g') = 0$, c'est à dire $2g + 1 - g' = 0$.

Ce qui termine la preuve. \square

Proposition 5.4.30. *Si $2 \in E$ et $3 \notin E$ alors*

$$p > 5^{\varphi(k)} \implies X \text{ n'a pas de symétrie quantique}$$

Démonstration. Cette fois les hypothèses nous indiquent que $x = 3$ c'est à dire $\mathcal{O}_0^2 = 3E$. La démonstration est la même que pour la proposition précédente puisque G 2-maximal implique que

$$(3g + 1 = g') \Rightarrow (g = -1 \text{ et } g' = -2)$$

On montre cette fois que l'application Φ est injective sur $\Sigma := \{3g + 1 - g', g, g' \in G\}$. En utilisant cette fois

$$|s(3g + 1 - g')| = |3s(g) + 1 - s(g')| \leq 5$$

On obtient

$$p \mid N(3g + 1 - g') \leq 5^{\varphi(k)}$$

qui permet de conclure. □

Pour finir dans cette partie voici un tableau qui donne, en fonction de la valeur du type k , les valeurs limites suivantes.

- $N1$: Plus grand p tel que le théorème 5.4.23 ne s'applique pas.
- $N2$: Plus petit p à partir duquel le théorème 5.4.23 s'applique.
- $N3$: Plus petit p à partir duquel on a toujours $\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2 = \{p - 1\}$.

k	$\varphi(k)$	$N1$	$N2$	$N3$	$\frac{k^2}{2} + 1$
6	2	13	19	19	19
8	4	17	41	73	33
10	4	41	61	71	51
12	4	61	73	97	73
14	6	71	113	197	99
16	8	17	97	353	129
18	6	109	127	379	163
20	8	101	181	≥ 1601	201

On remarque tout d'abord que la borne potentielle $\frac{k^2}{2} + 1$ ne peut pas être optimale et ensuite que le comportement $\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^2 = \{p - 1\}$ n'est pas très régulier et peut apparaître à partir de très grandes valeurs de p avec un comportement exponentiel.

Le point important à signaler est quand même qu'il semble y avoir une borne inférieure à $\frac{k^2}{2} + 1$ à partir de laquelle les graphes de type k vérifient l'hypothèse du théorème 5.4.23 et donc n'ont pas de symétrie quantique.

5.4.4 Applications dans le cas général

Pour commencer, parlons du cas général des graphes circulants avec n non premier. Nous pensons alors qu'on a la conjecture suivante.

Conjecture 5.4.31. *Tous les graphes circulants sont \mathcal{B} -cohérents.*

Remarque 5.4.32. On pourrait se contenter de conjecturer que les graphes circulants sont \mathcal{B} -clos mais la démonstration ne semble pas plus facile que dans le cas général à l'aide de la proposition 5.4.11.

Remarque 5.4.33. Pour montrer cette conjecture on ne peut pas, comme dans le cas où n est premier, essayer de montrer que $\mathbb{C}[d_X] = \mathcal{T}^X$ car ce n'est pas toujours le cas même quand il y a \mathcal{B} -cohérence comme le montrent les exemples suivants.

- $X = C_{10}(2)$ vérifie

$$\dim(\mathbb{C}[d_X]) = 5, \quad \dim(\mathcal{T}^X) = \dim(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X) = 6, \quad \text{Aut}(X) = D_{10}$$

- $X = C_{12}(2)$ vérifie

$$\dim(\mathbb{C}[d_X]) = 5, \quad \dim(\mathcal{T}^X) = \dim(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X) = 7, \quad \text{Aut}(X) = D_{12}$$

- $X = C_{16}(7)$ vérifie

$$\dim(\mathbb{C}[d_X]) = 5, \quad \dim(\mathcal{T}^X) = \dim(\mathcal{T}_{\mathcal{B}}^X) = 6, \quad k = 4$$

Si cette conjecture est vérifiée on obtiendrait le corollaire suivant : Si X un graphe sommet-transitif à n sommets avec $n \neq 4$ alors

$$\text{Aut}(X) \simeq \mathcal{D}_n \Rightarrow X \text{ n'a pas de symétrie quantique}$$

En effet si $\text{Aut}(X) \simeq \mathcal{D}_n = \text{Aut}(C_n)$ alors X est un graphe circulant par le lemme 4.4.1. Ainsi, par la conjecture 5.4.31, X et C_n sont \mathcal{B} -cohérents. La proposition 5.4.8 nous dit alors que $A(X) = A(C_n)$, donc $A(X)$ est commutative pour $n \neq 4$ par le corollaire 4.1.6.

On souhaite maintenant s'inspirer de la proposition 5.4.20 pour obtenir un critère général de non symétrie quantique. Cette condition suffisante est en fait simplement celle qui permet la construction de $S \in C_{A(X)}(2, 2)$ comme dans la démonstration de cette proposition 5.4.20. La différence entre les p -graphes circulants et le cas général vient simplement du lemme 5.4.21 qui est propre au cas des p -graphes. On obtient alors deux versions généralisées dans le cas des graphes \mathcal{B} -cohérents et \mathcal{B} -clos.

Proposition 5.4.34. *Soit X un graphe \mathcal{B} -cohérent, tel que $\forall s \in [1, r], \exists j_s \in \mathcal{O}_0^s, k_s \in [0, n-1]$ et $t_s^1, t_s^2 \in [0, r]$ tels que*

$$\mathcal{O}_0^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{j_s}^{t_s^2} = \{k_s\}$$

$$\mathcal{O}_{j_s}^s \cap \mathcal{O}_{k_s}^{t_s^1} = \{0\}$$

$$\mathcal{O}_0^s \cap \mathcal{O}_{k_s}^{t_s^2} = \{j_s\}$$

alors X n'a pas de symétrie quantique.

Remarque 5.4.35. On peut remplacer l'hypothèse " X est \mathcal{B} -cohérent" par " X est \mathcal{B} -clos et les endomorphismes T_s sont autoadjoints".

Démonstration. On a juste besoin de démontrer le lemme 5.4.21 dans le cas $s_i = t_s^1$ et $s_j = t_s^2$ puis la démonstration est exactement la même que celle de la proposition 5.4.20.

Les hypothèses de notre proposition correspondent au cas $i = 0$ du lemme 5.4.21. Soit $i, j, k \in [0, n-1]$ avec $i \neq 0$ et $s \in [1, r]$ tels que

$$j \in \mathcal{O}_i^s \text{ et } \mathcal{O}_i^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_j^{t_s^2} = \{k\}$$

Soit $\sigma \in \text{Aut}(X)$ tel que $\sigma(0) = i$. On a $j_s \in \mathcal{O}_0^s$ donc $\sigma(j_s) \in \mathcal{O}_i^s$ et par définition il existe $\sigma' \in \text{Aut}_i(X)$ tel que $\sigma'(\sigma(j_s)) = j$. Donc d'après le (iii) de la proposition 5.1.2 on a

$$\{\sigma'\sigma(k_s)\} = \sigma'\sigma(\mathcal{O}_0^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{j_s}^{t_s^2}) = \mathcal{O}_i^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_j^{t_s^2} = \{k\}$$

donc $k = \sigma'\sigma(k_s)$. Ainsi

$$\mathcal{O}_i^s \cap \mathcal{O}_k^{t_s^2} = \sigma'\sigma(\mathcal{O}_0^s \cap \mathcal{O}_{j_s}^{t_s^2}) = \{\sigma'\sigma(j_s)\} = \{j\}$$

et

$$\mathcal{O}_j^s \cap \mathcal{O}_k^{t_s^1} = \sigma'\sigma(\mathcal{O}_{j_s}^s \cap \mathcal{O}_{k_s}^{t_s^1}) = \{\sigma'\sigma(0)\} = \{i\}$$

ce qui termine la preuve. \square

Définition 5.4.36. Un graphe X sera dit \mathcal{B} -complet si il vérifie les deux propriétés suivantes.

1. X est \mathcal{B} -clos
2. $\forall s \in [1, r], \exists j_s \in \mathcal{O}_0^s, k_s \in [0, n-1]$ et $t_s^1, t_s^2, t_s^3, t_s^4, t_s^5 \in [0, r]$ tels que

$$\mathcal{O}_0^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{j_s}^{t_s^2} = \{k_s\}$$

$$\mathcal{O}_0^s \cap \mathcal{O}_{k_s}^{t_s^4} = \{j_s\}$$

$$\mathcal{O}_{k_s}^{t_s^5} \cap \mathcal{O}_{j_s}^{t_s^3} = \{0\}$$

Remarque 5.4.37. Dans le point (2), le " $\exists j_s \in \mathcal{O}_0^s$ " peut être remplacé par " $\forall j_s \in \mathcal{O}_0^s$ " de manière équivalente puisque si c'est vrai pour un j_s alors en appliquant les éléments de $\text{Aut}_0(X)$ aux 3 égalités souhaitées on obtient la même propriété pour tous les éléments de l'orbite de j_s sous l'action de $\text{Aut}_0(X)$, c'est à dire \mathcal{O}_0^s .

Théorème 5.4.38. *Si X est \mathcal{B} -complet alors il n'a pas de symétrie quantique.*

Démonstration. Dans ce cas on reprend la démonstration de la proposition 5.4.20 en l'adaptant aux endroits nécessaires. On pose $t_0^1 = t_0^2 = t_0^3 = t_0^4 = t_0^5 = 0$. On définit alors les éléments suivants de $C_{A(X)}$ pour tout $s \in [0, r]$.

$$h_s := (M \otimes M) \circ (\text{id} \otimes T_{t_s^4} \otimes T_{t_s^5} \otimes \text{id}) \in C_{A(X)}(4, 2)$$

$$f_s := h_s \circ (\text{id} \otimes (M^* \circ M) \otimes \text{id}) \circ (T_s \otimes T_{t_s^1} \otimes T_{t_s^2} \otimes T_{t_s^3}) \circ (M^* \otimes M^*) \in C_{A(X)}(2, 2)$$

$$g_s := (\text{id} \otimes M) \circ (\text{id} \otimes T_s \otimes \text{id}) \circ (M^* \otimes \text{id}) \in C_{A(X)}(2, 2)$$

$$F := \sum_{s=0}^r f_s \circ g_s \in C_{A(X)}(2, 2)$$

On remarque de nouveau que $f_0 = \text{id}_{(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2}}$.

Ensuite pour $s \in [1, r]$, on a

$$\mathcal{O}_0^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{j_s}^{t_s^2} = \{k_s\}$$

On considère maintenant deux éléments i et j tels que $j \in \mathcal{O}_i^s$. Soit $\sigma \in \text{Aut}(X)$ tel que $\sigma(0) = i$. On sait que $j_s \in \mathcal{O}_0^s$ donc $\sigma(j_s) \in \mathcal{O}_i^s$. Ainsi il existe $\sigma' \in \text{Aut}_i(X)$ tel que $\sigma'(\sigma(j_s)) = j$. Alors en utilisant le (iii) de la proposition 5.1.2 on a

$$\{\sigma'\sigma(k_s)\} = \sigma'\sigma(\mathcal{O}_0^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{j_s}^{t_s^2}) = \mathcal{O}_{\sigma'\sigma(0)}^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{\sigma'\sigma(j_s)}^{t_s^2} = \mathcal{O}_i^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_j^{t_s^2} \quad (1.1)$$

Puis on obtient aussi

$$\{i\} = \sigma'\sigma(0) = \sigma'\sigma(\mathcal{O}_{k_s}^{t_s^5} \cap \mathcal{O}_{j_s}^{t_s^3}) = \mathcal{O}_{\sigma'\sigma(k_s)}^{t_s^5} \cap \mathcal{O}_j^{t_s^3} \quad (1.2)$$

$$\{j\} = \sigma'\sigma(j_s) = \sigma'\sigma(\mathcal{O}_0^s \cap \mathcal{O}_{k_s}^{t_s^4}) = \mathcal{O}_i^s \cap \mathcal{O}_{\sigma'\sigma(k_s)}^{t_s^4} \quad (1.2)$$

Ce qui nous permet de faire le calcul suivant pour tout $i, j \in [0, p-1]$ tels que

$j \in \mathcal{O}_i^s$:

$$\begin{aligned}
f_s(e_i \otimes e_j) &= h_s \circ (\text{id} \otimes (M^* \circ M) \otimes \text{id}) \left(T_s(e_i) \otimes T_{t_s^1}(e_i) \otimes T_{t_s^2}(e_j) \otimes T_{t_s^3}(e_j) \right) \\
&= h_s \left(T_s(e_i) \otimes \sum_{k \in \mathcal{O}_i^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_j^{t_s^2}} (e_k \otimes e_k) \otimes T_{t_s^3}(e_j) \right) \\
&= h_s \left(T_s(e_i) \otimes e_{\sigma' \sigma(k_s)} \otimes e_{\sigma' \sigma(k_s)} \otimes T_{t_s^3}(e_j) \right) \quad \text{par (1.1)} \\
&= (M \otimes M) \left(T_s(e_i) \otimes T_{t_s^4}(e_{\sigma' \sigma(k_s)}) \otimes T_{t_s^5}(e_{\sigma' \sigma(k_s)}) \otimes T_{t_s^3}(e_j) \right) \\
&= \left(\sum_{a \in \mathcal{O}_i^s \cap \mathcal{O}_{\sigma' \sigma(k_s)}^{t_s^4}} e_a \right) \otimes \left(\sum_{b \in \mathcal{O}_{\sigma' \sigma(k_s)}^{t_s^5} \cap \mathcal{O}_j^{t_s^3}} e_b \right) \\
&= e_j \otimes e_i \quad \text{par (1.2) et (1.3)}
\end{aligned}$$

Puis la fin de la démonstration est exactement la même que pour la proposition 5.4.20, on montre que $S = F \in C_{A(X)}$. \square

Nous pensons, en fait que cette proposition est une équivalence au sens suivant.

Conjecture 5.4.39. *Soit X un graphe \mathcal{B} -clos, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

- X est \mathcal{B} -complet
- X n'a pas de symétrie quantique

La proposition 3.2.4 montre en particulier que si X et Y ont au moins 2 sommets chacun alors le graphe $X \circ Y$ a des symétries quantiques. On a alors la proposition suivante qui est cohérente avec la conjecture ci-dessus.

Proposition 5.4.40. *Soient X et Y des graphes ayant chacun au moins deux sommets alors $X \circ Y$ n'est pas \mathcal{B} -complet.*

Démonstration. On note n (resp p) le nombre de sommets de X (resp Y) puis $(\mathcal{O}_i^{0,X}, \dots, \mathcal{O}_i^{r,X})$ (resp $(\mathcal{O}_i^{0,Y}, \dots, \mathcal{O}_i^{r',Y})$) les orbites de l'action de $\text{Aut}_i(X)$ (resp $\text{Aut}_i(Y)$) sur $[0, n-1]$ (resp $[0, p-1]$).

On note $(x_{I,J})$, $0 \leq I \leq n-1$ et $0 \leq J \leq p-1$, les sommets de $X \circ Y$. On obtient alors les orbites suivantes pour le graphe $X \circ Y$:

$$\forall s \in [0, r], \mathcal{O}_{x_{I,J}}^s = \{x_{i,J} \mid i \in \mathcal{O}_I^{s,X}\}$$

$$\forall s \in [1, r'], \mathcal{O}_{x_{I,J}}^{r+s} = \{x_{i,j} \mid i \in [0, n-1], j \in \mathcal{O}_j^{s,Y}\}$$

On montre maintenant que X n'est pas \mathcal{B} -complet : Pour $0 := x_{0,0}$, $s = r + 1$ et $J_s := x_{0,1} \in \mathcal{O}_{x_{0,0}}^{r+1}$ les intersections des orbites de $\text{Aut}_{x_{0,0}}(X \circ Y)$ et $\text{Aut}_{x_{0,1}}(X \circ Y)$ qui ne contiennent qu'un seul élément sont de l'un des 2 types suivants :

- i. $\mathcal{O}_{x_{0,0}}^s \cap \mathcal{O}_{x_{0,1}}^{r+s'} = \{x_{I,0}\}$, lorsque $\mathcal{O}_0^{s,X} = \{I\}$ et $0 \in \mathcal{O}_1^{s',Y}$
- ii. $\mathcal{O}_{x_{0,0}}^{r+s'} \cap \mathcal{O}_{x_{0,1}}^s = \{x_{I,1}\}$, lorsque $\mathcal{O}_0^{s,X} = \{I\}$ et $1 \in \mathcal{O}_0^{s',Y}$

Dans le premier cas si $s_1, s_2 \in [0, r + r']$ alors l'ensemble $\mathcal{O}_{x_{0,0}}^{s_1} \cap \mathcal{O}_{x_{I,0}}^{s_2}$ est soit de cardinal strictement supérieur à 1 soit inclus dans $\{x_{i,0} \mid 0 \leq i \leq n - 1\}$ donc on ne peut pas avoir

$$\mathcal{O}_{x_{0,0}}^{s_1} \cap \mathcal{O}_{x_{I,0}}^{s_2} = \{x_{0,1}\}$$

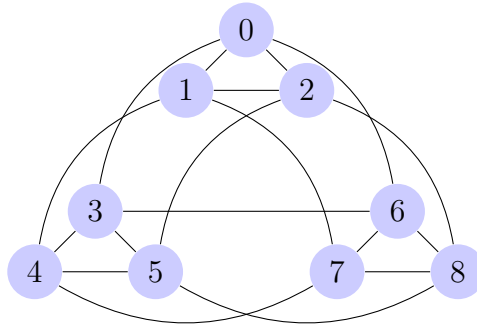
De même dans le second cas pour $s_1, s_2 \in [0, r + r']$ alors l'ensemble $\mathcal{O}_{x_{0,1}}^{s_1} \cap \mathcal{O}_{x_{I,1}}^{s_2}$ est soit de cardinal strictement supérieur à 1 soit inclus dans $\{x_{i,1} \mid 0 \leq i \leq n - 1\}$ donc on ne peut pas avoir

$$\mathcal{O}_{x_{0,1}}^{s_1} \cap \mathcal{O}_{x_{I,1}}^{s_2} = \{x_{0,0}\}$$

Ce qui permet de conclure que $X \circ Y$ n'est pas \mathcal{B} -complet. □

On veut finir de montrer que cette conjecture 5.4.39 est bien cohérente pour tous les cas où $n \leq 11$. Le fait que $\text{Pr}(C_4)$ et $\text{Pr}(K_5)$ ne soient pas \mathcal{B} -complets se montre de manière similaire à la proposition 5.4.40.

On montre maintenant que le *Tore*, $K_3 \times K_3$ est bien \mathcal{B} -complet.



Voici un tableau qui décrit les orbites pour ce graphe.

i	\mathcal{O}_i^1	\mathcal{O}_i^2
0	$\{1, 2, 3, 6\}$	$\{4, 5, 7, 8\}$
1	$\{0, 2, 4, 7\}$	$\{3, 5, 6, 8\}$
2	$\{0, 1, 5, 8\}$	$\{3, 4, 6, 7\}$
3	$\{4, 5, 0, 6\}$	$\{1, 2, 7, 8\}$
4	$\{3, 5, 1, 7\}$	$\{0, 2, 6, 8\}$
5	$\{3, 4, 2, 8\}$	$\{0, 1, 6, 7\}$
6	$\{7, 8, 0, 3\}$	$\{1, 2, 4, 5\}$
7	$\{6, 8, 1, 4\}$	$\{0, 2, 3, 5\}$
8	$\{6, 7, 2, 5\}$	$\{0, 1, 3, 4\}$

Pour $s = 1$ on prend $y_1 = 1$ et on a

$$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^1 = \{2\}$$

$$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_2^1 = \{1\}$$

$$\mathcal{O}_2^1 \cap \mathcal{O}_1^1 = \{0\}$$

Pour $s = 2$ on prend $y_2 = 4$ et on a

$$\mathcal{O}_0^2 \cap \mathcal{O}_4^2 = \{8\}$$

$$\mathcal{O}_0^2 \cap \mathcal{O}_8^2 = \{4\}$$

$$\mathcal{O}_8^2 \cap \mathcal{O}_4^2 = \{0\}$$

ce qui montre que $K_3 \times K_3$ est bien \mathcal{B} -complet.

Bien sûr il reste le cas du graphe de Petersen pour lequel on ne sait pas encore si il a des symétries quantiques. Ce graphe est \mathcal{B} -cohérent mais pas \mathcal{B} -complet. En effet voici ses orbites.

i	\mathcal{O}_i^1	\mathcal{O}_i^2
0	$\{1, 4, 5\}$	$\{2, 3, 6, 7, 8, 9\}$
1	$\{0, 2, 6\}$	$\{3, 4, 5, 7, 8, 9\}$
2	$\{1, 3, 7\}$	$\{0, 4, 5, 6, 8, 9\}$
3	$\{2, 4, 8\}$	$\{0, 1, 5, 6, 7, 9\}$
4	$\{0, 3, 9\}$	$\{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$
5	$\{0, 7, 8\}$	$\{1, 2, 3, 4, 6, 9\}$
6	$\{1, 8, 9\}$	$\{0, 2, 3, 4, 5, 7\}$
7	$\{2, 5, 9\}$	$\{0, 1, 3, 4, 6, 8\}$
8	$\{3, 5, 6\}$	$\{0, 1, 2, 4, 7, 9\}$
9	$\{4, 6, 7\}$	$\{0, 1, 2, 3, 5, 8\}$

Et on constate que pour $s = 1$ et $j \in \mathcal{O}_0^1 = \{1, 4, 5\}$, l'ensemble $\mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_j^{s_2}$ a un unique élément seulement dans les cas suivants

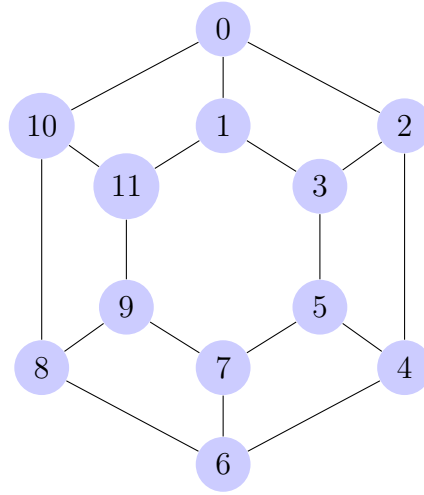
$$\mathcal{O}_0^0 \cap \mathcal{O}_j^1 = \{0\}$$

$$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_j^0 = \{j\}$$

ce qui permet de conclure puisqu'il est impossible d'avoir $\mathcal{O}_0^{s_1} \cap \mathcal{O}_0^{s_2} = \{j\}$ ou $\mathcal{O}_j^{s_1} \cap \mathcal{O}_j^{s_2} = \{0\}$.

Pour finir voici une application du théorème 5.4.38 dans un cas non traité avec les méthodes vu précédemment. Il s'agit de

$$X = \text{Pr}(C_6) = K_2 \square C_6$$



Ce graphe ne vérifie pas les hypothèses du théorème 2.3.5 et voici son étude via les orbites. Tout d'abord $\text{Pr}(C_6)$ est \mathcal{B} -cohérent donc \mathcal{B} -clos. Ensuite les orbites sont les suivantes.

i	\mathcal{O}_i^1	\mathcal{O}_i^2	\mathcal{O}_i^3	\mathcal{O}_i^4	\mathcal{O}_i^5	\mathcal{O}_i^6	\mathcal{O}_i^7
0	{1}	{2, 10}	{3, 11}	{5, 9}	{4, 8}	{6}	{7}
1	{0}	{3, 11}	{2, 10}	{4, 8}	{5, 9}	{7}	{6}
2	{3}	{0, 4}	{1, 5}	{7, 11}	{6, 10}	{8}	{9}
3	{2}	{1, 5}	{0, 4}	{6, 10}	{7, 11}	{9}	{8}
4	{5}	{2, 6}	{3, 7}	{1, 9}	{0, 8}	{10}	{11}
5	{4}	{3, 7}	{2, 6}	{0, 8}	{1, 9}	{11}	{10}
6	{7}	{4, 8}	{5, 9}	{3, 11}	{2, 10}	{0}	{1}
7	{6}	{5, 9}	{4, 8}	{2, 10}	{3, 11}	{1}	{0}
8	{9}	{6, 10}	{7, 11}	{1, 5}	{0, 4}	{2}	{3}
9	{8}	{7, 11}	{6, 10}	{0, 4}	{1, 5}	{3}	{2}
10	{11}	{0, 8}	{1, 9}	{3, 7}	{2, 6}	{4}	{5}
11	{10}	{1, 9}	{0, 8}	{2, 6}	{3, 7}	{5}	{4}

Voici alors le tableau qui montre pour chaque valeur de $s \in [1, 7]$ l'existence des t_s^i tels que les hypothèses pour être \mathcal{B} -complet soient vérifiées.

s	j_s	$\mathcal{O}_0^{t_s^1} \cap \mathcal{O}_{j_s}^{t_s^2} = \{k_s\}$	$\mathcal{O}_0^s \cap \mathcal{O}_{k_s}^{t_s^4} = \{j_s\}$	$\mathcal{O}_{k_s}^{t_s^5} \cap \mathcal{O}_{j_s}^{t_s^3} = \{0\}$
1	{1}	$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^0 = \{1\}$	$\mathcal{O}_0^1 \cap \mathcal{O}_1^0 = \{1\}$	$\mathcal{O}_1^1 \cap \mathcal{O}_1^1 = \{0\}$
2	{2}	$\mathcal{O}_0^2 \cap \mathcal{O}_2^5 = \{10\}$	$\mathcal{O}_0^2 \cap \mathcal{O}_{10}^5 = \{2\}$	$\mathcal{O}_2^2 \cap \mathcal{O}_{10}^2 = \{0\}$
3	{3}	$\mathcal{O}_0^3 \cap \mathcal{O}_3^5 = \{11\}$	$\mathcal{O}_0^3 \cap \mathcal{O}_{11}^5 = \{3\}$	$\mathcal{O}_3^3 \cap \mathcal{O}_{11}^3 = \{0\}$
4	{5}	$\mathcal{O}_0^4 \cap \mathcal{O}_5^5 = \{9\}$	$\mathcal{O}_0^4 \cap \mathcal{O}_9^5 = \{5\}$	$\mathcal{O}_5^4 \cap \mathcal{O}_9^4 = \{0\}$
5	{4}	$\mathcal{O}_0^5 \cap \mathcal{O}_4^5 = \{8\}$	$\mathcal{O}_0^5 \cap \mathcal{O}_8^5 = \{4\}$	$\mathcal{O}_4^5 \cap \mathcal{O}_8^5 = \{0\}$
6	{6}	$\mathcal{O}_0^6 \cap \mathcal{O}_6^0 = \{6\}$	$\mathcal{O}_0^6 \cap \mathcal{O}_6^0 = \{6\}$	$\mathcal{O}_6^6 \cap \mathcal{O}_6^6 = \{0\}$
7	{7}	$\mathcal{O}_0^7 \cap \mathcal{O}_7^0 = \{7\}$	$\mathcal{O}_0^7 \cap \mathcal{O}_7^0 = \{7\}$	$\mathcal{O}_7^7 \cap \mathcal{O}_7^7 = \{0\}$

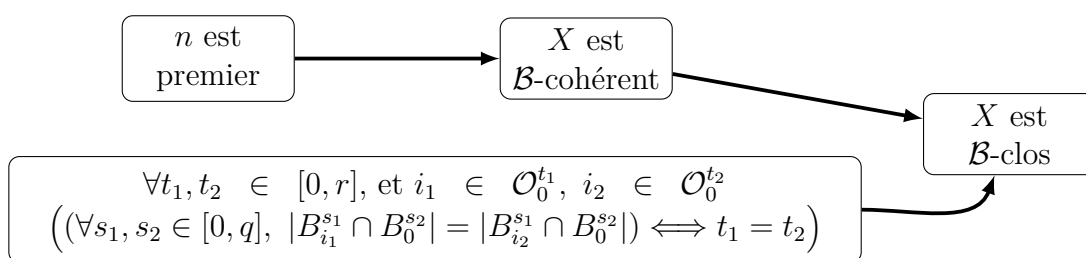
ce qui montre que $\text{Pr}(C_6)$ est bien \mathcal{B} -complet, et donc qu'il n'a pas de symétrie quantique par la théorème 5.4.38.

Chapitre 6

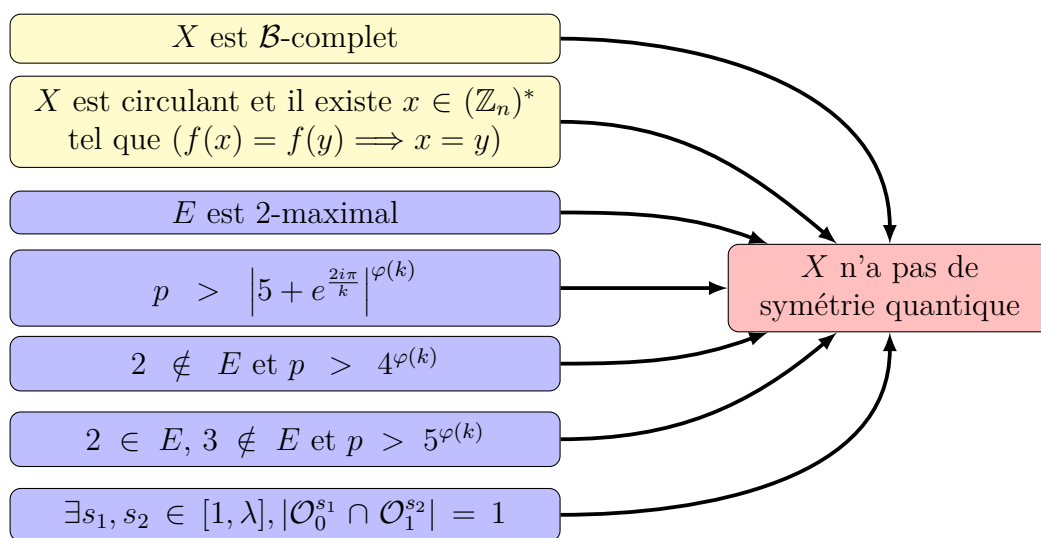
Bilan

6.1 Résumé des résultats

Toute l'étude qui est faite dans la partie 5 via la dualité de Tannaka-Krein est véritablement utilisable lorsque X est \mathcal{B} -clos. En effet dans ce cas $C_{A(X)} = \langle U, M, \mathcal{T}^X \rangle_{+, \circ, \otimes, *}$ donc $A(X)$ est caractérisée par \mathcal{T}^X et donc par $\text{Aut}(X)$. On rappelle alors les critères suivants.

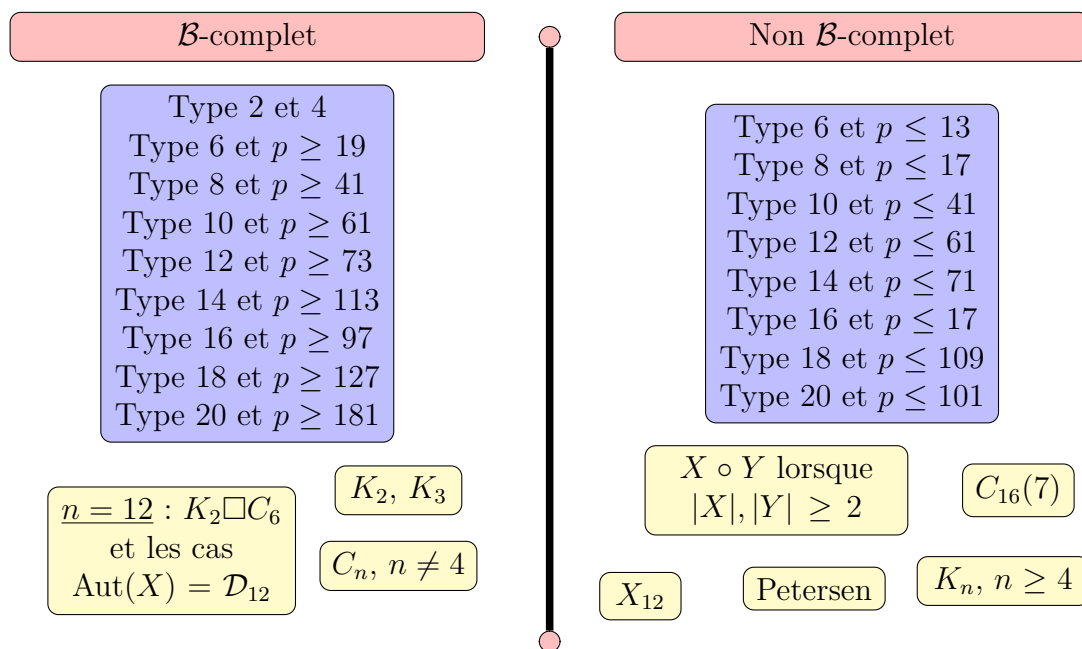


Ensuite voici un schéma qui récapitule les conditions suffisantes pour qu'un graphe sommet-transitif n'ait pas de symétrie quantique. Les conditions en violettes concernent les p -graphes avec p premier.



Pour montrer qu'un graphe X sommet-transitif a des symétries quantiques nous avons essentiellement la proposition 3.2.4 qui montrent que c'est le cas pour $X \circ Y$ et la proposition 2.3.3 qui montre que c'est le cas pour $X \times Y$ et $X \square Y$ lorsque c'est le cas de X ou Y .

Voici maintenant un tableau qui récapitule si les graphes qui ont été étudiés sont \mathcal{B} -complets ou non. Comme précédemment les bulles bleu concernent les p -graphes avec p premier.



En dehors du graphe de Petersen la conjecture 5.4.39 est vérifiée lorsque $n \leq 11$ c'est à dire

$$X \text{ est } \mathcal{B}\text{-complet} \iff X \text{ n'a pas de symétrie quantique}$$

Pour finir dans cette partie bilan nous rappelons le théorème suivant qui donne la structure de $A(X \circ Y)$ en généralisant le résultat classique de Sabidussi.

Théorème 1. *Soient X et Y deux graphes finis réguliers.*

$$[(S_Y \neq \emptyset) \Rightarrow (X \text{ connexe}) \text{ et } (T_Y \neq \emptyset) \Rightarrow (X^c \text{ connexe})] \Leftrightarrow A(X \circ Y) \simeq A(X) *_w A(Y)$$

6.2 Les Conjectures

Ici on se contente de rappeler les 4 conjectures qui ont été faites dans cette thèse et qui ont bien été vérifiées dans l'ensemble des cas étudiés.

Conjecture 1. *Tous les graphes circulants sont \mathcal{B} -cohérents.*

Conjecture 2. *Tous les graphes sommets-transitifs sont \mathcal{B} -clos.*

Conjecture 3. *Si X est un p -graphe alors*

$$p > \frac{k^2}{2} \Rightarrow X \text{ n'a pas de symétrie quantique}$$

Conjecture 4. *Soit X un graphe \mathcal{B} -clos, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

- X est \mathcal{B} -complet
- X n'a pas de symétrie quantique

6.3 Perspectives, questions ouvertes

Pour finir voici une liste de recherches à poursuivre pour améliorer l'étude des groupes quantiques de permutations et en particulier des groupes quantiques d'automorphismes des graphes finis.

- Etude du graphe de Petersen (P) : Pour cela on peut essayer de décrire les espaces $C_{A(P)}(0, k)$ en explicitant une base à l'image de ce qui est fait dans [11] pour les analogues quantiques des groupes de Lie orthogonaux. Il semble que les éléments de cette base pourraient être indexés par des partitions colorées dont les couleurs seraient liées aux orbites de l'action diagonale de $\text{Aut}(X)$ sur $X^{\times k}$. Une telle description permettrait ensuite

plus facilement de savoir si l'endomorphisme S appartient à $C_{A(P)}(2, 2) \simeq C_{A(P)}(0, 4)$ et ensuite de faire le lien avec la non \mathcal{B} -completude de P . Ce graphe est certainement un bon "cas d'étude" pour la compréhension du cas général.

- Même chose que pour le graphe de Petersen pour le graphe $C_{13}(3, 4)$ qui pourrait nous permettre de mieux comprendre les p -graphes qui ne sont pas \mathcal{B} -complets.
- Mieux comprendre les intersections des $y_s E$ et $y_s E + x$ dans le cas des p -graphes circulants via une meilleure compréhension de l'isomorphisme

$$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \simeq \mathbb{Z}/(p-1)\mathbb{Z}$$

- La difficulté pour savoir si un graphe est \mathcal{B} -complet ou \mathcal{B} -clos vient de la difficulté à décrire $\text{Aut}(X)$; en particulier pour les graphes circulants dont le nombre de sommets n'est pas premier.
- Le but ultime serait d'obtenir un critère de non symétrie quantique qui soit "lisible" sur d_X . En effet même en parvenant à démontrer la conjecture 5.4.39, ce critère est difficilement vérifiable à partir de d_X sans avoir à calculer $\text{Aut}(X)$ dont la complexité est importante dans le cas général.
- Les 4 conjectures citées dans la sous-partie précédente.
- Tous les exemples connus où $A(X)$ est non commutative se résument essentiellement à $A(2K_2) = C(\mathbb{Z}_2) * C(\mathbb{Z}_2) = C(\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}_2)$ et vérifient que $A(X)$ est de dimension infinie, est-ce toujours le cas ?
- Pour sortir de l'étude des groupes quantiques d'automorphismes et revenir au cas plus général des groupes quantiques de permutations on peut essayer de généraliser des résultats classiques en utilisant la généralisation de la k -transitivité. Par exemple le théorème de Burnside qui énonce qu'un p -groupe de permutations est 2-transitif ou résoluble, ou encore le fait que les seuls groupes de permutations k -transitifs pour $k \geq 6$ sont A_n et S_n .
- Pour finir on rappelle une question ouverte importante : S_n est-il maximal dans S_n^+ ? C'est le cas pour $n = 4$ d'après [8].

Annexe : Programmes Mapple

Nous présentons ici les programmes informatiques mentionnés dans la partie 5.4.3.

- *Ordre*(p, m) donne l'ordre de $m \neq 0$ dans $((\mathbb{Z}_p)^*, \times)$ ainsi que la liste des puissances successives de m dans $(\mathbb{Z}_p)^*$, c'est à dire le sous-groupe de $((\mathbb{Z}_p)^*, \times)$ engendré par m :

```
Ordre :=proc(p,m)
local a,i,L;
a :=m;
i :=1;
L :=[m];

while a<> 1 do
a :=a*m mod p;
L :=[op(L),a];
i :=i+1;
od;

[i,L];
end :
```

→ *Ordre*(13, 4) renvoie [6, [4, 3, 12, 9, 10, 1]].

- Lorsque k divise $p - 1$, *OrdreMin*(p, k) donne le plus petit élément d'ordre k dans $((\mathbb{Z}_p)^*, \times)$ avec la liste des éléments du sous-groupe de $(\mathbb{Z}_p)^*$ d'ordre k :

```
OrdreMin :=proc(p,k)
local i,a;
a :=1;
i :=2;
```

```

while a <> k do
a :=Ordre(p,i)[1];
i :=i+1;
od;

[i-1,Ordre(p,i-1)[2]];
end :

```

→ *OrdreMin*(13, 6) renvoie [4, [4, 3, 12, 9, 10, 1]].

- *Orbite*₀(p, k) donne la liste des orbites $\mathcal{O}_0^1, \dots, \mathcal{O}_0^r$ de l'unique p -graphe de type k :

```

Orbite0 :=proc(p,k)
local L,L1,S,i,j,a,d,h, $\lambda$ ;

L1 :=OrdreMin(p,k)[2];
L :=[L1];
h :=2;
 $\lambda$  :=(p-1)/k;

while nops(L)<>  $\lambda$  do

S :=[];
for i from 1 to k do
a :=h*(L1[i]) mod p;
S :=[op(S),a];
od;
d :=0;
for j from 1 to nops(L) do
if evalb('in'(S[1],op(L[j]))) then d :=d+1; fi;
od;

if d=0 then
L :=[op(L),S];
fi;
h :=h+1;

od;

L;
end :

```

→ $Orbite_0(13, 6)$ renvoie $[[4, 3, 12, 9, 10, 1], [8, 6, 11, 5, 7, 2]]$.

- $Orbite_{0,1}(p, k)$ donne les deux listes d'orbites suivantes :

$$(\mathcal{O}_0^1, \dots, \mathcal{O}_0^r) \text{ et } (\mathcal{O}_1^1, \dots, \mathcal{O}_1^r)$$

de l'unique p -graphe de type k :

```

Orbite_{0,1} :=proc(p,k)
local L,L1,λ,i,j ;

L :=Orbite_0(p,k) ;
λ :=(p-1)/k ;
L1 :=L ;

for i from 1 to λ do
for j from 1 to k do
L1[i][j] :=(L1[i][j]+1) mod p ;
od ;
od ;

[L,L1] ;
end :

```

→ $Orbite_{0,1}(13, 6)$ renvoie

$$[[[4, 3, 12, 9, 10, 1], [8, 6, 11, 5, 7, 2]], [[5, 4, 0, 10, 11, 2], [9, 7, 12, 6, 8, 3]]]$$

- $HypoVerif(p, k)$ indique si oui ou non l'unique p -graphe de type k vérifie les hypothèses du théorème 5.4.23. Lorsque c'est le cas il renvoie aussi les valeurs de s_1 et s_2 qui permettent que ces hypothèses soient vérifiées :

```

HypoVerif :=proc(p,k)
local L,λ,S,i,j,a,d,b ;

λ :=(p-1)/k ;
L :=Orbite_{0,1}(p,k) ;
S :=[] ;
b :=false ;
d :=0 ;
a :=0 ;

```

```

while d <> 1 and a < λ2 do
  j := a mod λ + 1;
  i := (a-j+1)/λ+1;
  d := nops('intersect'( op(L[1][i]), op( L[2][j] ) ) );
  a := a+1
od;

if d=1 then b := true fi;

i := (a-j)/λ+1;
j := (a-1) mod λ + 1;

if b then S := [b,i,j] else S := [b] fi;

S;
end :

```

→ *HypoVerif*(17, 8) renvoie [*false*] et *HypoVerif*(41, 8) renvoie [*true*, 2, 5].

- *Typek*(n, k) donne la liste des entiers $p < n$ premiers tels qu'il existe un p -graphe de type k , c'est à dire tels que k divise $p - 1$:

```

Typek := proc(n,k)
  local L,a,i,m;

  m := floor((n-1)/k);
  L := [];

  for i from 1 to m do
    a := k*i+1;
    if isprime(a) then L := [op(L),a]; fi;
  od;

  L;
end :

```

→ *Typek*(32, 6) renvoie [7, 13, 19, 31].

- *HypoVerifTypek*(n, p) donne la liste des entiers $p < n$ pour lesquels l'unique p -graphe de type k ne vérifie pas les hypothèses du théorème 5.4.23 :

```
HypoVerifTypek :=proc(n,k)
local L,L1,i,b,s;

L :=Typek(n,k);
L1 :=[];
s :=nops(L);

for i from 1 to s do
b :=HypoVerif(L[i],k)[1];
if not b then L1 :=[op(L1),L[i]] fi;
od;

L1;
end :
```

→ *HypoVerifTypek*(1094, 8) renvoie [17] et *HypoVerifTypek*(1163, 10) renvoie [11, 31, 41].

Bibliographie

- [1] B. Alspach, *Point-symmetric graphs and digraphs of prime order and transitive permutation groups of prime degree*, J. Combinatorial Theory Ser. B **15** (1973), 12-17.
- [2] T. Banica, *Symmetries of a generic coaction*, Math. Ann. **314** (1999), no. 4, 763-780.
- [3] T. Banica, *Quantum automorphism groups of homogeneous graphs*, J. Funct. Anal. **224** (2005), no. 2, 243-280.
- [4] T. Banica, *Quantum automorphism groups of small metric spaces*, Pacific J. Math. **219** (2005), no. 1, 27-51.
- [5] T. Banica et J. Bichon, *Free product formulae for quantum permutation groups*, J. Inst. Math. Jussieu **6** (2007), no. 3, 381-414.
- [6] T. Banica, J. Bichon et G. Chenevier, *Graphs having no quantum symmetry*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **57** (2007), no. 3, 955-971.
- [7] T. Banica et J. Bichon, *Quantum automorphism groups of vertex-transitive graphs of order ≤ 11* , J. Algebraic Combin. **26** (2007), no. 1, 83-105.
- [8] T. Banica et J. Bichon, *Quantum groups acting on 4 points*, J. Reine Angew. Math. **626** (2009), 74-114.
- [9] T. Banica et B. Collins, *Integration over compact quantum groups*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), no. 2, 277-302.
- [10] T. Banica et S. Moroianu, *On the structure of quantum permutation groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), no. 1, 21-29.
- [11] T. Banica et R. Speicher, *Liberation of orthogonal Lie groups*, Adv. Math. **222** (2009), no. 4, 1461-1501.
- [12] J. Bichon, *Quelques nouvelles déformations du groupe symétrique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **330** (2000), no. 9, 761-764.
- [13] J. Bichon, *Quantum automorphism groups of finite graphs*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 3, 665-673.
- [14] J. Bichon, *Free wreath product by the quantum permutation group*, Alg. Rep. Theory **7** (2004), no. 4, 343-362.

- [15] J. Bichon et A. De Rijdt, S. Vaes *Ergodic coactions with large multiplicity and monoidal equivalence of quantum groups*, Comm. Math. Phys. **262** (2006), no. 3, 703-728.
- [16] D. Bisch et V.F.R. Jones, *Singly generated planar algebras of small dimension*, Duke Math. J. **101** (2000), no. 1, 41-75.
- [17] A. Chassaniol, *Quantum automorphism group of the lexicographic product of finite regular graphs*, J. Algebra (2016).
- [18] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994. xiv+661 pp. ISBN 0-12-185860-X.
- [19] P. Di Francesco, *Meander determinants*, Comm. Math. Phys. **191** (1998), no. 3, 543-583.
- [20] A. Freslon et M. Weber, *On the representation theory of partition (easy) quantum groups*, J. Reine Angew. Math, to appear.
- [21] V.F.R. Jones et V.S. Sunder, *Introduction to subfactors*, LMS Lecture Note Series, **234**. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. xii+162 pp. ISBN 0-521-58420-5.
- [22] A. Klimyk et K. Schmüdgen, *Quantum groups and their representations*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1997. xx+552 pp. ISBN : 3-540-63452-5.
- [23] C. Köstler et R. Speicher, *A noncommutative de Finetti theorem : invariance under quantum permutations is equivalent to freeness with amalgamation*, Comm. Math. Phys. **291** (2009), no. 2, 473-490.
- [24] F. Lemeux, *The fusion rules of some free wreath product quantum groups and applications*, J. Funct. Anal. **267** (2014), no. 7, 2507-2550.
- [25] F. Lemeux et P. Tarrago, *Free wreath product quantum groups : the monoidal category, approximation properties and free probability*, Preprint arXiv :1411.4124.
- [26] J. Morris, *Automorphism Groups of Circulant Graphs- a survey*, Graph theory in Paris, 311-325, Trends Math., Birkhäuser, Basel, 2007.
- [27] S. Neshveyev et L. Tuset, *Compact quantum groups and their representation categories*, Cours Spécialisés, 20. Société Mathématiques de France, Paris, 2013. vi+169 pp. ISBN : 978-2-85629-777-3.
- [28] P. Podleś, *Symmetries of quantum spaces. Subgroups and quotient spaces of quantum $SU(2)$ and $SO(3)$ groups*, Comm. Math. Phys. **170** (1995), no.1, 1-20.
- [29] G. Sabidussi, *The composition of graphs*, Duke Math. J **26** (1959), 693-696.

-
- [30] S. Vaes, *Strictly outer actions of groups and quantum groups*, J. Reine Angew. Math. **578** (2005) 147-184.
- [31] S. Vaes et R. Vergnioux, *The boundary of universal discrete quantum groups, exactness and factoriality*, Duke Math. J. **140** (2007), no. 1, 35-84.
- [32] R. Vergnioux, *The property of rapid decay for discrete quantum groups*, J. Operator Theory **57** (2007), no. 2, 303-324.
- [33] C. Voigt, *On the structure of quantum permutation groups*, J. Reine Angew. Math, to appear.
- [34] J. Wahl, *A note on reduced and von Neumann algebraic free wreath products*, Preprint arXiv :1411.4861.
- [35] S. Wang, *Quantum symmetry groups of finite spaces*, Comm. Math. Phys. **195** (1998), no. 1, 195-211.
- [36] S.L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), no. 4, 613-665.
- [37] S.L. Woronowicz, *Compact quantum groups. Symétries quantiques*, (Les Houches, 1995), 845-884, North Holland, Amsterdam, 1998.
- [38] S.L. Woronowicz, *Tannaka-Krein duality for compact matrix pseudogroups. Twisted $SU(N)$ groups*, Invent. Math. **93** (1988), no. 1, 35-76.