



**HAL**  
open science

## Simulation numérique du transport sédimentaire : aspects déterministes et stochastiques

Philippe Ung

► **To cite this version:**

Philippe Ung. Simulation numérique du transport sédimentaire : aspects déterministes et stochastiques. Analyse numérique [math.NA]. Université d'Orléans, 2016. Français. NNT : 2016ORLE2019 . tel-01412545

**HAL Id: tel-01412545**

**<https://theses.hal.science/tel-01412545>**

Submitted on 8 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES, INFORMATIQUE, PHYSIQUE  
THÉORIQUE ET INGÉNIERIE DES SYSTÈMES**

LABORATOIRE MAPMO

**THÈSE** présentée par :

**Philippe UNG**

soutenue le : **30 mars 2016**

pour obtenir le grade de : **Docteur de l'université d'Orléans**

Discipline/ Spécialité : **Mathématiques Appliquées**

**Simulation numérique du transport  
sédimentaire**

**Aspects déterministes et stochastiques**

**THÈSE dirigée par :**

**M. Stéphane CORDIER**

Professeur, Université d'Orléans

**Sous l'encadrement de :**

**M. Emmanuel AUDUSSE**

**M. Sébastien BOYAVAL**

**MME. Nicole GOUTAL**

**MME. Magali JODEAU**

Maître de Conférences, Université Paris XIII

Chercheur, Ecole des Ponts ParisTech

Chercheur Senior, EDF R&D

Ingénieur Chercheur Expert, EDF R&D

**RAPPORTEURS :**

**M. Robert EYMARD**

**M. Enrique D. FERNANDEZ-NIETO**

Professeur, Université Paris-Est

Professeur, Université de Séville

**JURY :**

**M. Emmanuel AUDUSSE**

**M. Stéphane CORDIER**

**M. Robert EYMARD**

**M. Enrique D. FERNANDEZ-NIETO**

**MME. Edwige GODLEWSKI**

**M. François JAMES**

**MME. Magali JODEAU**

**M. Didier LUCOR**

**M. Daniel PIERRE**

Maître de Conférences, Université Paris XIII

Professeur, Université d'Orléans

Professeur, Université Paris-Est

Professeur, Université de Séville

Professeur, Université Paris VI

Professeur, Université d'Orléans – Président

Ingénieur Chercheur Expert, EDF R&D

Directeur de Recherche, CNRS

Directeur R&D, Antea group (Invité)



Philippe UNG :

Laboratoire de Mathématiques - Analyse, Probabilités, Modélisation - Orléans (MAPMO),  
UMR CNRS 7349, Université d'Orléans, F-45067, Orléans, France.

Laboratoire Jacques-Louis Lions (LJLL), UMR CNRS 7598, Sorbonne Universités, UPMC  
Université Paris VI, F-75005, Paris, France.

Equipe-Projet Analyse Numérique, Géophysique et Ecologie (ANGE), INRIA Paris - Roc-  
quencourt, F-78153, Le Chesnay, France.

Adresses électroniques:

[philippe.ung@math.cnrs.fr](mailto:philippe.ung@math.cnrs.fr),

[philippe.ung@etu.univ-orleans.fr](mailto:philippe.ung@etu.univ-orleans.fr),

[philippe.ung@inria.fr](mailto:philippe.ung@inria.fr).



# Remerciements

---

Alors que le voyage touche à sa fin et que j'aperçois au loin le sommet de la montagne, un bref regard en arrière me rappelle que la route a été parsemée de nombreuses rencontres, belles et marquantes, qui m'ont permis de grandir, de m'enrichir et d'en arriver là où je me trouve. Des souvenirs ressurgissent et il me vient l'envie de marquer un temps d'arrêt dans mon ascension, de souffler un coup, reprendre mon souffle puis de prendre le temps de me remémorer les moments passés avec ces gens radieux. A vous, compagnons de voyage, pour exprimer toute ma reconnaissance, ma gratitude et mon admiration, je vous dédie ces quelques lignes.

Naturellement, je tiens à adresser mes premiers remerciements à Stéphane Cordier, mon directeur de thèse. Mais bien plus que ce rôle, il a été une réelle source d'inspiration de par sa rigueur, sa patience, sa motivation et la liste serait encore longue. Il a toujours été rassurant et de bon conseil durant ces trois années. Malgré la distance (qui a augmenté avec les années – une corrélation espace/temps intéressante !) et son emploi du temps plus que chargé, il s'est toujours montré investi dans cette thèse et disponible. Pour toutes ces raisons, je tiens à lui exprimer toute ma reconnaissance.

Il me tient particulièrement à cœur de poursuivre mes remerciements en exprimant toute ma gratitude à Emmanuel Audusse, mon mentor (le terme le fera probablement doucement sourire mais j'ose l'écrire). Si j'en suis arrivé à rédiger ces lignes clôturant mon travail de ces trois dernières années, je le dois principalement à son encadrement admirable. Sa patience que j'ai dû mettre à rude épreuve n'a jamais fléchi. Sa sympathie m'a tout de suite mis en confiance. Il a toujours fait preuve d'une rigueur scientifique et d'un esprit critique qu'il s'est efforcé de me transmettre. Nous avons exploré ensemble de nombreux aspects du travail de recherche avec son lot de hauts et de bas mais sa motivation qu'il a su me communiquer était toujours présente. Pour tout ce qu'il a fait et ce qu'il m'a appris, merci infiniment !

De la même manière, je remercie conjointement mes co-encadrantes de thèse au niveau industriel, Nicole Goutal et Magali Jodeau, qui ont proposé ce sujet de thèse des plus intéressants (qui aurait cru que la géophysique m'aurait autant passionné ?). Je les remercie chaleureusement pour leur disponibilité et leur expertise. Au-delà de l'impact inestimable qu'elles ont eu sur mon travail, je leur suis reconnaissant pour tous les conseils qu'elles m'ont donnés et leur confiance indéfectible. Dernier encadrant à s'être joint à la thèse mais non des moindres, je remercie Sébastien Boyaval pour sa rigueur et sa culture scientifique, source intarissable d'idées et de pistes d'exploration aussi intéressantes que pertinentes. Il m'a permis de m'ouvrir et de m'investir dans un domaine des mathématiques qui m'était jusqu'alors assez inconnu, et de me poser les bonnes questions en toute circonstance.

Je tiens à remercier infiniment Messieurs Robert Eymard et Enrique Fernandez-Nieto, pour m'avoir fait l'honneur d'être rapporteurs de ma thèse, du temps qu'ils ont consacré à la relecture de mon manuscrit et pour les retours positifs qu'ils ont pu me faire. Je ne saurais trouver les mots pour leur exprimer toute ma gratitude. Un seul mot me vient à l'esprit : Merci !

J'adresse mes remerciements les plus sincères à Madame Edwige Godlewski, Monsieur François James et Monsieur Didier Lucor pour leur présence inestimable en tant que membres examinateurs de mon jury. Les discussions que j'ai pu avoir avec eux ont toujours été riches en enseignement et je serai toujours reconnaissant pour leur disponibilité.

Je remercie Monsieur Daniel Pierre d'avoir accepté l'invitation pour prendre part à mon jury de soutenance. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour son accueil lors de mon passage à GeoHyd et de la confiance qu'il a eu en mon travail.

Un grand merci à Christophe Chalons pour l'orientation qu'il a pu donner à mon travail. C'est toujours un plaisir de discuter avec lui et j'espère pouvoir encore, dans un avenir proche, avoir l'occasion de le faire.

Je remercie l'ensemble de l'équipe ANGE pour leur accueil et pour m'avoir ouvert les portes d'une équipe dynamique, sympathique et pourvue d'un fort esprit de cohésion. En particulier, merci à Jacques Sainte-Marie pour son enthousiasme et les (trop rares) discussions que l'on a partagées. Je n'oublie pas Marie-Odile (merci pour toutes les explications en début de thèse), Yohan (un paragraphe entier pourrait lui être dédié tant son soutien a été important), Martin (qui m'a vu grandir), Bernard (et toutes ses anecdotes sur les "success stories" corses), Nicolas, Anne, Cindy, Julien, David et Maryse ainsi que la dynamique et fière équipe des thésards garante de l'ambiance conviviale, Nora, Dena, Ethem, Hieu, Fabien et Léa que je remercie collégialement! Mes remerciements seraient incomplets si je ne mentionnais pas les anciens membres, je pense notamment à Anne-Céline, Raouf et Vivien qui m'ont chacun aidé d'une manière ou d'une autre à mettre le pied à l'étrier, mais également à Antoine et Hugo pour les moments de franche camaraderie.

Il apparaît comme une évidence d'adresser mes remerciements les plus solennels à l'ensemble des membres, d'hier comme d'aujourd'hui, du LJLL pour m'avoir offert la possibilité d'évoluer dans un laboratoire aussi prestigieux mais également leur convivialité et leur bonne humeur globale. En particulier, Nina, Ibrahim, Camille, Frédérique, Jonathan, Sidi, Bruno, Fabrice, Philippe, Khashayar, Stephan, Christian, Malika... mais également l'excellentissime groupe des doctorants et docteurs que j'ai eu la chance de côtoyer ces trois années, Benjamin, Wafaâ, Van Quang, Thibault, Pierre J., Pierre L., Sarah, Sarra, Mamadou, Aurora, Antonin, Nicolas, Geneviève, Lucile, Cécile, Ryadh, Mehdi, Ange, Léo,... ainsi que les joyeux lurons du deuxième étage, Casimir aka le Président (private joke), Guillaume et ses anecdotes improbables, Ludovick, Giacomo, Ivan (un quasi-membre), Jean-Paul, Juliette, Malik, Florian,...

Comment faire autrement que de remercier tous mes joyeux camarades du fameux bureau 15-25-302? Pour l'excellente ambiance qui y a régné jour après jour, trois années durant, et les agréables journées passées en leur compagnie, les moments de joie comme de doute, je ferai dans la sobriété en leur exprimant ma plus grande reconnaissance. De manière chronologique, je pense notamment à Abdellah pour nos longues discussions sur tout et rien, Oana et sa bonne humeur, Pierre-Henri car « oui le sucré est bien meilleur que le salé », Pierre son calme olympien et sa sympathie, Jiamin avec qui j'ai partagé l'alpha et l'oméga du périple de la thèse (la fin approche, courage!), Long et son humour piquant, Carlo fidèle camarade et amateur de café ad vitam aeternam (oui, tu peux prendre mes capsules de café!), Chaoyu et sa touchante innocence, Shuyang et sa bienveillance (mais également ses moments d'absence, sources de franches rigolades!) et Olivier et son dynamisme caractéristique. J'adresse également mes remerciements aux membres « à mi-temps » ou temporaires du bureau, j'ai nommé Guillaume, José et Christelle avec qui les moments partagés ont été rares mais toujours agréables. Enfin, un dernier remerciement à Khaled, ancien occupant du bureau, que j'ai ironiquement appris à connaître et à apprécier durant les conférences que l'on a eu en commun.

Je me dois de remercier toute l'équipe du MAPMO pour leur accueil toujours chaleureux alors que ma présence n'était qu'occasionnelle, ils m'ont toujours fait me sentir comme un membre à part du laboratoire. Je tiens à remercier Carine, Christian, Cécile, Laurent, Romain A., Romain T., Mathilde... Pour terminer, j'adresse des remerciements particuliers à Marie-France, « secrétaire de

choc », qui s'est toujours révélée efficace, rigoureuse, disponible, attentive, prévoyante... mais également d'une gentillesse remarquable, amicale et souriante, et plus que tout patiente avec moi, procrastinateur de première lorsqu'il s'agit de démarches administratives. Elle m'a toujours aidé à ce niveau et a toujours été un intermédiaire plus que fiable à Orléans. Pour tout ce qu'elle a fait pour moi, je tiens à lui exprimer toute ma gratitude et ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements s'adressent à toute l'équipe du LHSV et du LNHE d'EDF Chatou. Merci à Minh un « co-bureau » aussi sympathique que cultivé, Germain pour son amabilité et toutes ses explications sur les sédiments, Pablo et ses bons plans concerts, Riadh, Damien, Antoine, Yann, Jeff et tous les joyeux thésards et postdocs du laboratoire.

Mes pensées amicales vont à toutes les personnes croisées à GeoHyd pour leur accueil et leur aide, notamment Hervé, Loïc et Morad. Merci également à Sylvain et Romain pour m'avoir fait une place au sein de leur équipe chez Antea group et leur côté bon vivant.

Je profite d'un encart pour remercier toutes les personnes et camarades du CEMRACS 2013 avec qui les moments partagés ensemble font échos dans ma mémoire comme un doux souvenir. A Yueyuan, Olivier Z., Lionel, Pierre-Yves, Ahmed, Chris, Matthew, David, Mathieu, Olivier D., Nathalie, Morgan, Achref, Viviana, Laura, Laurent V., Laurent M., Pierre et bien d'autres, je leur dit merci. Et le meilleur pour la fin, un grand merci collégial aux organisateurs, Nicolas Champagnat, Tony Lelièvre et Anthony Nouy pour la réussite de ces six semaines.

Dans le même ton, je remercie toute l'équipe orléanaise organisatrice de la huitième SEME que j'ai déjà citée auparavant, ainsi que la formidable équipe-projet avec qui j'ai eu l'occasion de travailler : Papa, Vy Thuy Lynh, Thomas, Vinh Duc et Xuan Lan.

Sur cette lancée, je tiens également à remercier toutes les personnes aussi intéressantes, sympathiques et ouvertes d'esprit les unes que les autres avec qui j'ai pu discuter, je pense en particulier à Ioan Ionescu et Sergio Chibbaro, mais également celles que j'ai eu la chance de rencontrer au gré des conférences et congrès : Christophe Berthon, Anaïs Crestetto, Pierre-Yves Lagrée, Carlos Parés, Sebastian Noelle,... et les doctorants que j'ai appris à apprécier en une semaine : Xavier, Florian, Harry, Victor, Laurent, Christelle, José, Pascal, Markus, Charlie,...

Il est inconcevable de ne pas remercier et exprimer toute ma gratitude à tout ceux qui animent et font vivre la MACS aussi bien professeurs, personnels administratifs qu'étudiants. Une mention spéciale à Olivier Lafitte pour le dynamisme, la motivation et la passion dont il fait preuve pour diriger cette formation. Un grand merci à toute la promotion 2012 (à jamais la meilleure !) pour l'esprit d'unité et les nombreux moments de joie et de rire partagés, aux amis Sandra, Sabrina, Suzanne, Ernest, Arnaud, Bada, Jules, Alexandre et Mehdi, mais également les camarades des promotions antérieures et postérieures Dimitri, Oana, Jonathan, Meryem, Hermann, Hafiz. . .

Enfin, aux amis chers pour leur soutien inconditionnel, merci à Sixtine pour tous les moments inoubliables passés à Montréal, et bien évidemment, nul besoin de faire dans l'excentricité pour témoigner tous mes sentiments les plus sincères à Laure et Julien (depuis le temps !), les gars, à la prochaine !

Pour terminer, à ma famille, ma mère, mon père, ma sœur et mon frère, je ne saurais que vous dire merci pour tout, vous exprimer ma reconnaissance pour votre soutien à tout égard, même durant les moments difficiles (même si vous ne comprenez pas totalement ce que je fais !), milles fois merci de toujours répondre présent, de toujours me pousser à aller au bout de mes projets et de m'aider à franchir les obstacles ! Merci d'être les gens formidables que je n'ai cessé d'admirer !

À tout ceux que j'ai pu oublier de citer mais qui ont pu m'inspirer, m'influencer, que j'ai pu croiser au détour d'un couloir, d'un chemin, avec qui j'ai pu partager des moments de vie ensemble, éphémères ou quotidiens, un énorme merci !





*À ma famille,*



# Sommaire

---

<b>Introduction générale</b>	<b>1</b>
1 Description du modèle. . . . .	4
1.1 Les équations de Saint-Venant. . . . .	4
1.1.1 Présentation générale. . . . .	4
1.1.2 Terme de frottements. . . . .	5
1.1.3 Propriétés du modèle de Saint-Venant. . . . .	6
1.2 L'équation d'Exner. . . . .	9
1.2.1 Formules de transport solide. . . . .	10
1.3 Le système couplé de Saint-Venant–Exner. . . . .	12
1.3.1 Hyperbolicité du modèle. . . . .	13
1.3.2 Limites du modèle. . . . .	14
1.4 Schéma de type volumes finis. . . . .	15
2 Simulation numérique du système de Saint-Venant–Exner. . . . .	17
2.1 Etat de l'art. . . . .	18
2.2 Solveur de Riemann approché. . . . .	19
2.3 Choix de la stratégie de résolution. . . . .	22
3 Incertitudes dans les modèles de Saint-Venant–Exner et Saint-Venant. . . . .	23
3.1 Quantités d'intérêt. . . . .	24
3.2 Propagation d'incertitudes. . . . .	25
3.3 Position du problème. . . . .	27
3.4 Approche numérique. . . . .	28
3.4.1 Système stochastique de Saint-Venant–Exner. . . . .	28
3.4.2 Propagation d'incertitudes dans le système de Saint-Venant. . . . .	29

4	Application industrielle. . . . .	30
4.1	Optimisation de temps de calcul. . . . .	30
4.1.1	Outils numériques. . . . .	30
4.1.2	Modèle de référence. . . . .	31
4.1.3	Parallélisme. . . . .	31
4.2	Recherche bibliographique sur la rupture de digue. . . . .	32
<b>1</b>	<b>A simple well-balanced and positive numerical scheme for the shallow-water system</b>	<b>35</b>
1.1	Introduction. . . . .	36
1.2	Numerical scheme. . . . .	37
1.2.1	Expression of the solution in the intermediate states. . . . .	39
1.2.2	Positivity. . . . .	41
1.2.3	Well-balanced property. . . . .	42
1.2.4	About entropy. . . . .	42
1.3	Numerical results. . . . .	43
1.3.1	Propagation of perturbations. . . . .	44
1.3.2	Steady flow over a bump. . . . .	44
1.3.2.1	Fluvial regime. . . . .	44
1.3.2.2	Transcritical flow over a bump without shock. . . . .	47
1.3.2.3	Transcritical flow over a bump with shock. . . . .	47
1.3.3	Thacker test case for wet-dry transitions. . . . .	49
1.3.4	Wet-dry fronts in a nonflat basin. . . . .	51
1.3.5	Non-unique solution to the Riemann problem. . . . .	52
1.4	Conclusion. . . . .	54
<b>2</b>	<b>A simple three-wave Approximate Riemann Solver for the Saint-Venant–Exner equations</b>	<b>57</b>
2.1	Introduction. . . . .	59
2.2	Numerical scheme. . . . .	63
2.2.1	Generalities on Approximate Riemann Solvers. . . . .	63
2.2.2	Relations defining the intermediate states. . . . .	65
2.2.3	Expression of the intermediate states for the solid part. . . . .	66
2.2.4	Expression of the intermediate states for the hydraulic part. . . . .	67

---

2.2.5	Expression of the numerical fluxes. . . . .	67
2.2.6	Approximation of the wave velocities – $\lambda_L$ and $\lambda_R$ . . . . .	68
2.2.7	Positivity of the intermediate water heights. . . . .	69
2.2.8	Well-balanced property of the scheme. . . . .	70
2.2.9	Discretization of the friction term. . . . .	70
2.3	Numerical results. . . . .	70
2.3.1	Dune evolution in a fluvial flow. . . . .	71
2.3.2	Dune (anti-dune) evolution in a torrential flow. . . . .	72
2.3.3	Dune evolution in a transcritical flow without shock. . . . .	73
2.3.4	Dam break over a wet bottom topography. . . . .	74
2.3.5	Dam break over a dry bottom topography. . . . .	77
2.4	Numerical strategy : Splitting or not splitting ? . . . . .	77
2.4.1	Dune evolution in fluvial regime. . . . .	81
2.4.2	Dune (anti-dune) evolution in torrential regime. . . . .	81
2.4.3	Dune evolution in transcritical regime without shock. . . . .	83
2.4.4	Dam break over a wet bottom topography. . . . .	83
2.4.5	Dam break over a dry bottom topography. . . . .	83
2.5	Application to experimental test cases. . . . .	84
2.5.1	Sediment bed-load transport flux. . . . .	85
2.5.1.1	Grass formula. . . . .	85
2.5.1.2	Meyer-Peter & Müller formula. . . . .	85
2.5.1.3	Engelund & Hansen formula. . . . .	86
2.5.1.4	Recking formula. . . . .	86
2.5.1.5	Treatment of the boundary conditions. . . . .	87
2.5.2	Numerical results. . . . .	88
2.5.2.1	Newton test case. . . . .	89
2.5.2.2	Soni test case. . . . .	93
2.5.2.3	Dam break test case. . . . .	96
2.6	Conclusion. . . . .	98
<b>3</b>	<b>Numerical simulation of the dynamics of sedimentary river beds with a stochastic Exner equation</b>	<b>101</b>
3.1	Introduction. . . . .	102

3.2	Exner model. . . . .	105
3.2.1	The standard Exner model. . . . .	105
3.2.2	A new stochastic Exner model. . . . .	106
3.3	A numerical discussion of the stochastic model. . . . .	108
3.3.1	Finite-Volume discretization of Saint-Venant–Exner model. . . . .	108
3.3.2	Monte-Carlo simulations and numerical results. . . . .	111
3.3.2.1	Stationary uniform flow solution to the deterministic model. . . . .	111
3.3.2.2	Description of the stochastic solid flux. . . . .	112
3.3.2.3	Monte Carlo simulations. . . . .	112
3.3.2.4	Stochastic Saint-Venant system. . . . .	116
3.4	Uncertainties study of the Saint-Venant model. . . . .	122
3.4.1	Characterization of the perturbation. . . . .	123
3.4.2	Simulations with periodic boundary conditions. . . . .	127
3.5	Conclusion. . . . .	140
<b>4</b>	<b>Application industrielle: étude d’un modèle d’inondation 2D</b>	<b>143</b>
4.1	Introduction. . . . .	144
4.2	Optimisation du temps de calcul sous TELEMAC-2D. . . . .	144
4.2.1	Installation sur grappe de calcul du logiciel TELEMAC-2D. . . . .	144
4.2.1.1	Présentation générale de TELEMAC-2D. . . . .	144
4.2.1.2	Profil du cluster. . . . .	146
4.2.2	Description du modèle. . . . .	148
4.2.2.1	Données du modèle. . . . .	148
4.2.2.2	Secteur d’étude. . . . .	148
4.2.2.3	Modèle hydraulique. . . . .	149
4.2.3	Comparaison des temps de calcul. . . . .	150
4.2.3.0.1	Cas 1 : Simulation sur 4 h. . . . .	150
4.2.3.0.2	Cas 2 : Simulation sur 50 h. . . . .	153
4.2.4	Conclusion et perspectives partielles. . . . .	154
4.3	Recherche bibliographique sur les ruptures de digues. . . . .	155
4.3.1	Quelques idées clés sur le processus de formation de brèches. . . . .	155
4.3.1.1	Facteurs aggravants. . . . .	156
4.3.1.2	Paramètres de description. . . . .	157

4.3.1.3	Etapas du processus de formation d'une brèche de digue. . .	157
4.3.2	Pistes de modélisation. . . . .	158
4.3.2.1	Modèles empiriques. . . . .	158
4.3.2.2	Modèles semi-empiriques. . . . .	159
4.3.2.3	Modèles physiques. . . . .	159
4.3.2.4	Modèles d'érosion. . . . .	160
4.3.2.5	Modèle d'inondation. . . . .	162
4.3.3	Modélisation numérique. . . . .	162
4.3.3.1	Approches de modélisation. . . . .	162
4.3.3.2	Modélisation des zones urbaines. . . . .	163
4.3.3.3	breach sur TELEMAC. . . . .	163
4.3.3.4	Implémentation d'une loi d'érosion sur TELEMAC. . . . .	164
4.3.4	Méthode pour le traitement de données. . . . .	165
4.3.4.1	Corrélation. . . . .	166
4.3.4.2	Test sur l'indice de corrélation de Pearson. . . . .	166
4.3.4.3	Droite de régression. . . . .	167
4.3.5	Application numérique. . . . .	167
4.3.5.1	Jeu de données. . . . .	167
4.3.5.2	Application de l'approche par calcul de corrélation. . . . .	168
4.3.5.3	Courbes de régression linéaire. . . . .	168
4.3.6	Conclusion partielle. . . . .	172
<b>Conclusion et perspectives</b>		<b>175</b>
1	Conclusion. . . . .	175
2	Perspectives. . . . .	176
<b>Some classical probabilistic calculations</b>		<b>179</b>
1	Expectation and variance (Parameters of the normal law (3.3.12) in Section 3.3.2.4). . . . .	179
2	Covariance and correlation (Formulae (3.4.7) and (3.4.8) in Section 3.4.1). . .	180
<b>Paramètres de TELEMAC-2D</b>		<b>183</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>209</b>





# Introduction générale

---

La compréhension de l'hydraulique représente un enjeu scientifique, industriel et humain important. En effet, il est à noter que plus de 50% de la population globale vit en zone côtière (S. K. Haslett, 2009) susceptible d'être touchée par des phénomènes d'érosion ou encore par l'ensablement des ports. Comprendre l'impact du transport de sédiments en milieu naturel est fondamental en ce qu'il constitue un processus physique responsable de la modification des fonds des rivières ; ces derniers tendent vers un état d'équilibre fortement influencé par les phases hydraulique et solide. Un cours d'eau s'adapte ainsi aux contraintes naturelles (changement climatique lié aux ères glaciaires par ex.) et anthropiques (extraction de granulas, prélèvement d'eau...). Les actions anthropiques sur les cours d'eau peuvent ainsi déstabiliser le système. On peut citer l'exemple de l'effondrement du pont Wilson à Tours, sur la Loire en 1978, conséquence des curages excessifs de sable dans le lit de la rivière. Du point de vue industriel, il s'agit entre autres, pour un producteur électrique, d'être capable de simuler l'évolution du lit de la rivière à proximité de ses aménagements afin d'assurer la performance et la sûreté des ouvrages dans le respect des contraintes environnementales. L'industriel doit être capable de prévoir les effets de ses aménagements sur le milieu mais aussi d'anticiper les effets des actions des autres acteurs, ou de l'évolution naturelle du système. Cela concerne les prises d'eau en rivière ou en milieu côtier des centrales de production nucléaire ou thermique. Dans le cas des barrages pour l'hydroélectricité, ces ouvrages en travers des cours d'eau interrompent une part ou la totalité du transit des sédiments. Ainsi, l'envasement des retenues peut être préjudiciable vis-à-vis de la sûreté (colmatage des vannes) et/ou de la production (perte de volume utile). Par ailleurs, cette interruption peut générer un dépôt de sédiment à l'entrée de la retenue, avec pour conséquence un exhaussement du lit remontant vers l'amont et éventuellement une aggravation des débordements en cas de crues. En outre, à l'aval du barrage, le déficit d'apport solide a de multiples conséquences morphologiques (creusement du lit, modification de la pente avec des risques de déstabilisation des ouvrages de génie civil) mais aussi écologiques (appauvrissement de la diversité d'habitat pour la faune aquatique).

Compte tenu de l'importance de bien appréhender ces problèmes, des outils industriels ont été développés pour simuler numériquement l'évolution des fonds liée au transport de sédiment. Cependant certaines situations telles que les vidanges ou les ruptures de barrage ont révélé les limites de ces outils (instabilités numériques, difficultés à représenter les processus) d'où la nécessité de mettre en place de nouvelles méthodes capables

de gérer entre autres, ces cas de figure.

Deux processus caractérisent le transport de sédiments ; celui-ci s'opère soit par suspension, soit par charriage. Le premier mode de transport cité concerne principalement les particules fines et/ou les vitesses d'écoulement très importantes. Lorsque le débit est suffisamment élevé, les grains sont transportés dans la colonne d'eau et interagissent peu avec le fond. *A contrario*, le deuxième mode de transport est propre aux sédiments grossiers. Ces derniers sont mis en mouvement par roulement, glissement ou saltation et restent en contact étroit avec le fond. La saltation correspond à un transport au cours duquel les grains se déplacent par saut sur des courtes distances. On distingue usuellement les sédiments cohésifs et non-cohésifs. Dans le premier cas qui concerne les sédiments les plus fins (inférieurs à  $40 \mu m$ ), les interactions interparticulaires ne sont pas négligeables et doivent être prises en compte.

Le travail effectué durant cette thèse s'articule autour de la question du transport de sédiments non cohésifs par charriage. En général, ce phénomène est modélisé par un couplage d'un modèle fluide et d'un modèle morphodynamique. L'un des couplages les plus répandus et sur lequel se concentre ce travail de thèse, porte sur les équations de Saint-Venant et d'Exner. De nombreux travaux sur les équations de Saint-Venant ont été menés ces vingt dernières années depuis les travaux précurseurs de Bermudez & Vazquez en 1994 [14] et Greenberg & al. en 1997 [87] et ont connu des progrès notables—que l'on précisera par la suite. Quant aux outils industriels, on pourra citer entre autres, le code TELEMAC-MASCARET [125] développé par EDF, permettant la résolution des équations de Saint-Venant en une (MASCARET) ou deux dimensions d'espace (TELEMAC2D). A l'heure actuelle, la majorité des codes industriels adopte une approche par "couplage externe" avec un code pour la résolution de l'équation morphodynamique ; concernant EDF, le couplage s'opère avec SYSIPHE ou COURLIS voir *e.g.* [94, 176]. En d'autres termes, la résolution de la partie fluide se fait indépendamment de la résolution de la partie solide durant les étapes transitoires et les deux codes ne communiquent ensemble qu'à des pas de temps particuliers. Ce traitement permet notamment de conserver les propriétés liées au code fluide et s'avère adapté pour les cas quasi-stationnaires. Néanmoins, lorsque l'interaction entre le fluide et le solide est importante, nécessitant un couplage fort entre les parties hydraulique et morphodynamique, la méthode devient inadaptée. Ce problème a connu un fort intérêt ces dernières années donnant lieu à plusieurs travaux parmi lesquels on pourra citer [12, 29, 41].

Le premier axe de cette thèse aborde cette question. On proposera une alternative au couplage externe des codes passant par un traitement numérique du système de Saint-Venant-Exner complet ; le modèle couplé est résolu dans son ensemble par une seule méthode. D'autres méthodes permettant de répondre à cette problématique ont été mises au point mais présentent souvent des limitations telles qu'une forte diffusion dans les cas d'écoulement torrentiel [9] ou une complexité algorithmique et un temps d'exécution assez important [141, 60]. Au vu de ces nouvelles recherches, il nous a semblé incontournable de revenir sur la question du choix de l'approche à adopter et de la manière de traiter le couplage des équations. Compte tenu des limitations relatives aux méthodes de couplage externe et de la complexité des méthodes de "couplage interne", la stratégie de résolution sera contrainte par la nécessité d'être robuste et précise tout en adoptant une approche

d'implémentation simple.

Le processus d'érosion et de transport de sédiments constitue un phénomène complexe résultant d'interactions entre de nombreux paramètres dépendant des propriétés physiques de l'écoulement, du cours d'eau et de son lit. Un des enjeux de la modélisation repose sur le calage de ces paramètres permettant de corréliser les débits liquide et solide avec les données expérimentales dans les modèles utilisés. Ce paramétrage constitue une source d'incertitudes importantes trouvant son origine tant au niveau des mesures réalisées (des fluctuations très importantes peuvent être observées pour le débit solide) que de la variabilité spatiale et temporelle intrinsèque des paramètres. Étant donné le caractère stochastique du transport de sédiments, l'approche déterministe des modèles de transport solide requiert un nombre conséquent de paramètres afin d'une part, de décrire rigoureusement la réalité et d'autre part, de réduire l'incertitude des prédictions du modèle.

En ce sens, le deuxième objectif de cette thèse vise à comprendre l'influence des incertitudes dans le système de Saint-Venant–Exner. Pour cela, il sera question de construire un modèle stochastique caractérisant un processus physique naturellement fluctuant (typiquement le débit solide dans le système de Saint-Venant–Exner). Cette étude soulèvera une question importante quant à la nécessité de comprendre au préalable la sensibilité probabiliste du système de Saint-Venant par rapport à la variable de couplage du système de Saint-Venant–Exner à savoir la cote du fond du cours d'eau ; l'équilibre en temps long est en effet assuré par le forçage par cette variable. Les résultats obtenus ouvrent de nombreuses perspectives sur lesquelles nous reviendrons en fin de manuscrit.

On abordera en dernier lieu la question de l'application numérique à des cas réels à l'aide d'un modèle sous TELEMAC-2D. En effet, tout schéma a pour objectif de reproduire le plus fidèlement possible les situations réelles. Ce critère de précision est indissociable du critère de temps de calcul, ce dernier devant être le plus faible possible. À partir d'un épisode de crue de la Loire, on va chercher à optimiser le temps d'exécution de la simulation correspondante, en utilisant la version parallèle du code TELEMAC-2D et en jouant sur les paramètres du modèle disponibles. En parallèle, on cherchera à comprendre le processus de rupture de digue pouvant engendrer des inondations, en effectuant une recherche bibliographique sur le sujet.

Ce manuscrit est structuré de la façon suivante,

- le **chapitre 1** est consacré à l'écriture d'un solveur de Riemann approché positif et équilibré pour le système de Saint-Venant,
- l'approche présentée en **chapitre 1** sera étendue aux équations de Saint-Venant–Exner pour la modélisation du transport de sédiments dans le **chapitre 2**,
- le **chapitre 3** traite des incertitudes dans les modèles de Saint-Venant–Exner et de Saint-Venant ; une attention particulière sera portée à ce dernier,
- enfin, le **chapitre 4** présente une application à des cas réels à l'aide d'un logiciel répandu dans la communauté hydraulicienne, le code TELAMAC ; sera notamment traitée la question de l'optimisation du temps calcul.

## 1 DESCRIPTION DU MODÈLE.

Comme évoqué précédemment, on modélise généralement le transport de sédiments par un couplage d'équations moyennées : dans le cadre de cette thèse, on s'intéresse au système d'équations de Saint-Venant–Exner. On commence par présenter d'une part les équations de Saint-Venant et d'autre part le modèle d'Exner pour le transport de sédiments par charriage. Dans un troisième temps, on présente le système couplé de Saint-Venant–Exner. Enfin, on finit par une description de la méthode numérique que l'on adopte pour la résolution de ce système : la méthode des volumes finis.

### 1.1 Les équations de Saint-Venant.

#### 1.1.1 Présentation générale.

Le système de Saint-Venant a été initialement introduit dans sa version unidimensionnelle par l'ingénieur des Ponts et Chaussées, Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant en 1871 dans un *Compte Rendu de l'Académie des Sciences* [45]. Il s'agit d'un système *hyperbolique* (cf. 1.1.3) modélisant généralement, les écoulements à surface libre dits en "eaux peu profondes" —*shallow-water*— ; en d'autres termes, il s'agit d'une approximation d'ondes longues traduisant le fait que la dimension verticale caractéristique de l'écoulement doit être faible devant la dimension horizontale caractéristique. On précise que, pour une même configuration géométrique, l'écoulement peut ainsi être considéré *shallow-water* ou non suivant les processus auxquels on s'intéresse. Généralement écrit sous forme conservative, le système de Saint-Venant décrit un écoulement dans un canal rectiligne à fond plat à l'aide de la hauteur d'eau  $h(t, x) \geq 0$  et de la vitesse moyennée sur la lame d'eau  $u(t, x) \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, & (1.1a) \\ \partial_t hu + \partial_x \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = 0, & (1.1b) \end{cases}$$

où  $g$  représente la gravité. On introduit la variable conservative  $q(t, x) := h(t, x)u(t, x)$  correspondant au débit ou à la quantité de mouvement. Utilisé pour des études sur les écoulements géophysiques, plusieurs termes sources peuvent compléter le modèle pour prendre en compte les variations de topographie, des termes de frottement, de diffusion et/ou de dissipation. Ce faisant, on obtient le système de Saint-Venant suivant,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, & (1.2a) \\ \partial_t hu + \partial_x \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -gh\partial_x b - \frac{\tau}{\rho_w}, & (1.2b) \end{cases}$$

où  $b$  désigne la cote topographique,  $\rho_w$  la masse volumique de l'eau et  $\tau \in \mathbb{R}$  correspond à la contrainte de frottement au fond.

Lorsque les effets latéraux ne sont plus négligeables, il devient nécessaire de considérer la formulation bidimensionnelle du système de Saint-Venant [190, 57]; cette dernière in-

troduit des termes sources liés entre autres à la topographie et aux frottements. Le modèle 2D est très utilisé pour les études hydrauliques en décrivant un écoulement, une nouvelle fois, à travers la donnée de la hauteur d'eau  $h(t, x, y) \geq 0$  et de la vitesse moyennée  $\mathbf{u}(t, x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{cases} \partial_t h + \operatorname{div}(h\mathbf{u}) = 0, & (1.3a) \\ \partial_t(h\mathbf{u}) + \operatorname{div}(h\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla \left( \frac{gh^2}{2} \right) = -gh\nabla b - \frac{1}{\rho_w} \boldsymbol{\tau}, & (1.3b) \end{cases}$$

où  $g$  correspond toujours à la gravité,  $b(x, y)$  désigne la cote du fond de la rivière ou du canal,  $\rho_w$  est la masse volumique de l'eau et  $\boldsymbol{\tau} := (\tau_x, \tau_y) \in \mathbb{R}^2$  représente la contrainte de frottement au fond. En pratique, le terme de frottement est défini par des lois de frottement empiriques telles que les lois de Manning [92, 166] et Strickler [181, 92] ou encore de Chézy [92, 166] et de Darcy-Weisbach [181, 33, 166].

L'approximation de Saint-Venant dérive des équations de Navier-Stokes sous certaines hypothèses simplificatrices [92] et permet de traiter l'écoulement d'un fluide naturellement tridimensionnel par un modèle à deux dimensions. En dépit de cet intérêt certain, il est important de rappeler les limites de cette approximation liées entre autres à la prise en compte d'une vitesse moyennée entraînant d'une part, une perte d'informations (par exemple, incapacité à simuler le déferlement d'une vague) et d'autre part, un questionnement sur la validité de la solution dans le cas d'un écoulement fortement hétérogène. Au-delà de ces limitations, il est clair qu'en pratique le modèle de Saint-Venant (unidimensionnel dans notre cas) est pertinent pour résoudre de nombreux problèmes hydrauliques (cf. les codes industriels [121, 122, 124, 125]).

### 1.1.2 Terme de frottements.

Le terme de frottement peut être défini par les formules de Chézy ou de Manning-Strickler. Dans la littérature, il est possible de rencontrer une expression du terme de frottement faisant intervenir la *perte de charge* notée  $J$ ,

$$\frac{\tau}{\rho_w} = ghJ. \quad (1.4)$$

La perte de charge linéique correspond à la dissipation d'énergie du fluide lors de son écoulement. Cette dernière résulte de l'action conjointe de la résistance à l'écoulement relative à la viscosité du fluide, et du frottement entre le fluide et la paroi du canal.

**Chézy (1775).** La formule de Chézy s'applique aux écoulements turbulents rugueux et permet d'exprimer la perte de charge  $J$  d'un écoulement gravitaire en fonction de la vitesse d'écoulement. Elle est connue sous la forme,

$$J = \frac{|u|u}{C^2 h}, \quad (1.5)$$

où  $C$  est le coefficient de Chézy pouvant être défini par différentes formules empiriques. En particulier, ce dernier dépend de la rugosité du canal et du rayon hydraulique. Une formule très répandue a été énoncée par Manning.

**Manning (1891).** La formule de Manning [127] peut être vue comme une amélioration de la formule de Chézy. En raison de sa simplicité d'écriture, il s'agit d'une des formules les plus répandues. Elle est définie à partir d'un coefficient de Chézy dépendant du coefficient de rugosité des parois du canal aussi appelé coefficient de Manning-Strickler ou simplement de Strickler  $K_s$ , et du rayon hydraulique  $R_h \sim h$ ,

$$C = K_s h^{1/6}. \quad (1.6)$$

En tenant compte de ce coefficient, la formule (1.5) donne la formule de Manning,

$$J = \frac{|u|u}{K_s^2 h^{4/3}}. \quad (1.7)$$

### 1.1.3 Propriétés du modèle de Saint-Venant.

Les propriétés que l'on présente par la suite seront données pour le cas unidimensionnel mais elles pourront aisément être étendues en deux dimensions d'espace. Le système de Saint-Venant est un système de lois de conservation à savoir que l'équation (1.2a) assure la conservation de la masse (aussi connue comme équation de continuité) et (1.2b) est une équation de conservation de la quantité de mouvement. Afin d'introduire les propriétés du système de Saint-Venant, on travaillera essentiellement avec la forme non homogène du système de Saint-Venant suivante pour laquelle le terme source est défini à partir de la pente du fond,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, & (1.8a) \\ \partial_t hu + \partial_x \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -gh\partial_x b, & (1.8b) \end{cases}$$

où la hauteur d'eau  $h(t, x)$  et le débit  $h(t, x)u(t, x)$  correspondent aux variables conservatives,  $g$  désigne toujours la gravité et  $b(x)$  indique la cote du fond. Le terme  $h(t, x)u(t, x)$  ainsi que le terme  $\left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right)$  correspondent respectivement au flux associé à la hauteur d'eau et au débit. Cette formulation permet de caractériser un écoulement au dessus d'un fond donné initialement.

**Remarque 1.1.** On a négligé ici le terme de frottement mais il sera pris en compte lorsqu'un fond mobile sera considéré.

**Hyperbolicité.** On introduit la formulation vectorielle du système de Saint-Venant (1.8),

$$\partial_t W + \partial_x \hat{F}(W) = \hat{S}(W), \quad (1.9)$$

où

$$W = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}, \quad \hat{F}(W) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix}, \quad \hat{S}(W) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\partial_x b \end{pmatrix},$$

avec  $W$  le vecteur des variables conservatives,  $\hat{F}(W)$  et  $\hat{S}(W)$  respectivement le flux et le terme source. En dérivant le terme de flux, il est possible de réécrire (1.9) sous forme *quasi-linéaire*,

$$\partial_t W + \hat{F}'(W)\partial_x W = \hat{S}(W), \quad (1.10)$$

faisant ainsi apparaître la matrice jacobienne du flux  $\hat{F}'(W)$  définie comme suit,

$$\hat{F}'(W) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

En zone mouillée ( $h > 0$ ), la matrice  $\hat{F}'(W)$  est diagonalisable et ses valeurs propres associées sont données par,

$$\lambda_{\pm} = u \pm c, \quad (1.12)$$

où  $c := \sqrt{gh}$  désigne la vitesse à laquelle se propage l'information dans l'écoulement (par exemple, la vitesse du sommet d'une vague) aussi appelée vitesse des ondes de gravité. Ces valeurs propres sont également connues comme étant les vitesses d'onde ou vitesses caractéristiques du système de Saint-Venant. Sous l'hypothèse d'une hauteur d'eau  $h$  non nulle, il apparaît que les vitesses d'onde sont clairement distinctes, établissant de fait, la stricte hyperbolicité du système (1.10). La perte d'hyperbolicité relative aux hauteurs d'eau nulles est un problème important dans la mesure où la plupart des écoulements en milieu naturel font apparaître des zones sèches.

**Nombre de Froude.** Le nombre de Froude introduit par William Froude en 1874 [65] établit le rapport des forces d'inertie sur les forces de pesanteur—Ferdinand Reech avait néanmoins établi ce critère de similitude pour les ondes à surface libre en 1852 (mentionné auparavant en 1844) [149, 181] donnant ainsi lieu au nombre de Reech analogue au nombre de Froude—. En dynamique des gaz, on peut faire une analogie avec le nombre de Mach. Ce nombre adimensionnel défini pour des hauteurs d'eau non nulles s'écrit,

$$F_r = \frac{u}{\sqrt{gh}}, \quad (1.13)$$

où  $h$  désigne la hauteur d'eau,  $u$  la vitesse moyennée et  $g$  la gravité. La comparaison avec la valeur 1 permet de caractériser les écoulements,

- $F_r < 1$ , l'écoulement est dit fluvial, l'information se propage à la fois de l'amont vers l'aval et de l'aval vers l'amont ; typiquement, l'écoulement se produit à faible vitesse pour une hauteur d'eau élevée,



- $F_r = 1$ , l'écoulement est critique, et lorsque le nombre de Froude passe d'une valeur supérieure à une valeur inférieure à un et inversement, il est dit transcritique,
- $F_r > 1$ , l'écoulement est torrentiel, l'information se propage de l'amont vers l'aval ; l'écoulement a une vitesse importante et une hauteur faible.

Par ailleurs, on parle de *ressaut hydraulique* lorsqu'une variation brutale de la hauteur d'eau entraîne un passage du régime torrentiel au régime fluvial.

**Stabilité.** La notion de stabilité est indissociable de l'existence d'une entropie. En ce sens, le système (1.8) admet une fonction d'entropie convexe correspondant à une énergie physique donnée par,

$$E(h, u, b) = \frac{hu^2}{2} + \frac{gh^2}{2} + ghb, \quad (1.14)$$

pour laquelle on associe le flux d'entropie suivant,

$$G(h, u, b) = \left( E(h, u, b) + \frac{gh^2}{2} \right) u. \quad (1.15)$$

Il est bien connu que l'énergie exprimée par (1.14) satisfait une inégalité d'entropie [160, 44],

$$\partial_t(E(h, u, b)) + \partial_x(G(h, u, b)) \leq 0. \quad (1.16)$$

Il apparaît que pour des solutions suffisamment régulières, l'inégalité (1.16) se réduit à une égalité ; la relation demeure une inégalité pour le cas des solutions faibles. Par ailleurs, on peut faire une analogie avec les équations d'Euler isentropiques en identifiant  $h$  à  $\rho$  et en exprimant la pression  $p(\rho) := g\rho^2/2$  [20].

Un autre critère de stabilité est l'existence de domaine invariant. En l'occurrence pour le système de Saint-Venant, la positivité de la hauteur d'eau définit un domaine invariant. Par ailleurs, la décroissance de l'énergie peut aussi être vue comme la préservation d'un domaine invariant.

**Equilibre.** Les états d'équilibre aussi appelés solutions stationnaires ont depuis près d'une vingtaine d'années été source de nombreux travaux parmi lesquels on pourra citer [14, 82, 86, 116, 13, 81, 157, 102, 146, 109, 73, 31, 19, 6, 15, 36] parmi de nombreux autres. Pour le système (1.8), définir ces états revient à considérer,

$$\partial_t h = \partial_t u = \partial_t(hu) = 0,$$

et implique la résolution de l'équation différentielle ordinaire suivante,

$$\begin{cases} \partial_x(hu) = 0, & (1.17a) \\ \partial_x \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -gh\partial_x b, & (1.17b) \end{cases}$$

établissant un équilibre entre les flux et les termes sources. En particulier, les états d'équilibre peuvent être complexes à cause de la présence d'un terme source. Il est généralement d'usage de réécrire l'équation (1.17b) de façon à faire apparaître la charge hydraulique  $u^2/2 + g(h + b)$ ,

$$\partial_x hu = 0, \quad \partial_x \left( \frac{u^2}{2} + g(h + b) \right) = 0, \quad (1.18)$$

et qui correspond au théorème de Bernoulli. Les solutions stationnaires correspondantes sont constituées d'états constants séparés par des chocs stationnaires entropiques. Lorsque des discontinuités apparaissent, on caractérise ces dernières par les relations de *Rankine-Hugoniot* [160].

Un état d'équilibre important à la fois dans la littérature et dans les codes industriels correspond à l'équilibre dit du lac au repos. Cet équilibre aussi appelé *équilibre hydrostatique* s'écrit,

$$\begin{cases} u = 0, & (1.19a) \\ h + b = cste. & (1.19b) \end{cases}$$

Il est bien connu que la préservation des états d'équilibre est un problème majeur. De nombreux auteurs ont développé des schémas numériques préservant l'équilibre du lac au repos [116, 146, 109, 6, 103, 70, 110, 150, 18, 23, 17] mais également les états stationnaires sur fond non plat [135, 158, 159, 186] pour lesquels certains sont capables d'assurer la positivité des hauteurs d'eau [6, 18, 23, 17]. L'importance des états équilibres peut se comprendre en ce qu'ils conditionnent le choix des méthodes numériques en rapport avec les équilibres que l'on souhaite capturer.

## 1.2 L'équation d'Exner.

Le transport de sédiments se caractérise principalement par deux processus, le transport en suspension et le transport par charriage —*bed-load transport*. L'équation d'Exner [58] est écrite pour décrire le processus de transport par charriage, et donc d'érosion et d'engrèvement du lit. Elle caractérise la conservation de la masse de sédiments.

Le taux d'échange de la masse solide totale sur une cellule  $\mathcal{C}_i := [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  de  $x_{i-1/2}$  à  $x_{i+1/2}$  est égale à la différence des flux solides entrant et sortant de la cellule. La masse totale sur une cellule  $\mathcal{C}_i$  est définie par,

$$\int_{\mathcal{C}_i} \int_0^{b(t,x)} dz dx = \int_{\mathcal{C}_i} b(t,x) dx,$$

et donc par dérivation en temps, on obtient le taux d'échange de masse totale sur  $\mathcal{C}_i$  qui s'écrit,

$$\partial_t \left( \int_{\mathcal{C}_i} b(t,x) dx \right). \quad (1.20)$$

En outre, on introduit les expressions des débits ou flux solides entrant en  $x_{i-1/2}$  et sortant en  $x_{i+1/2}$  respectivement données par  $\xi q_s(h, u)_{x_{i-1/2}}$  et  $\xi q_s(h, u)_{x_{i+1/2}}$  avec  $\xi := 1/(1 - \Phi)$  et

$\Phi$  représentant la porosité du lit [43]. Ces dernières permettent d'écrire la forme intégrale de l'équation d'évolution du fond,

$$\partial_t \left( \int_{C_i} b(t, x) dx \right) + \xi [q_s(h, u)]_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} = 0, \quad (1.21)$$

avec  $[f(x)]_a^b := f(b) - f(a)$ . On intègre l'équation (1.21) en temps sur un intervalle arbitraire  $[t^n, t^{n+1}]$ , et en considérant que  $h(t, x)$  et  $u(t, x)$  sont dérivables, on obtient l'équation,

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{C_i} \partial_t b(t, x) + \xi \partial_x q_s(h, u) dx dt = 0. \quad (1.22)$$

Ainsi, puisque les variables d'espace et de temps sont indépendantes et après simplification, il en résulte l'équation d'Exner [58],

$$\partial_t b + \xi \partial_x q_s = 0. \quad (1.23)$$

Cette équation est également connue sous une forme faisant apparaître le taux d'érosion du lit  $E$  (correspondant au nombre de particules entraînées par l'écoulement par unité de surface et unité de temps) et le taux de dépôt  $D$ ,

$$\partial_t b = D - E = -\xi \partial_x q_s. \quad (1.24)$$

L'essentiel de l'équation d'Exner repose sur la définition du flux de sédiments  $q_s$ . Dans la partie suivante, on se propose de lister quelques formules utilisées dans la littérature.

### 1.2.1 Formules de transport solide.

Les formules de transport solide sont principalement basées sur des approches déterministes [128, 56, 24, 147] cependant certains auteurs ont proposé des formules à partir de méthodes probabilistes [105, 51, 111]. Une description des formules utilisées par les ingénieurs peut être trouvée dans l'ouvrage [170].

Il existe deux familles de formulation pour le flux de sédiments : les formules avec ou sans seuil de mise en mouvement. La première catégorie implique l'introduction d'une valeur seuil correspondant à une vitesse de frottement (ou une contrainte de cisaillement) critique ; au-delà de cette valeur, les particules ne sont plus dans un état d'équilibre car les forces auxquelles elles sont soumises ne s'annulent plus ou génèrent des moments non nuls. La seconde catégorie ne considère aucun seuil et implique que l'écoulement modifie toujours le fond.

Il existe de nombreuses formules de transport de sédiments que l'on pourra trouver dans [170] et [179], telles que les formules d'Einstein [52], Fernández-Luque & Van Beek [59], Van Rijn [178], Nielsen [134],... On se propose de présenter trois formules de transport solide que l'on va utiliser dans les applications numériques présentées dans les chapitres 2 et 3.

**Grass (1981).** La formule de Grass [84] appartient à la catégorie des formules sans seuil. Elle s'avère être une des plus basiques mais bien adaptée à la modélisation pour des matériaux granulaires non cohésifs (absence de force de liaison entre les grains). Elle s'exprime sous la forme,

$$q_s(h, u) = A_g u |u|^{m_g - 1}, \quad (1.25)$$

où  $A_g$  et  $m_g$  sont des constantes empiriquement déterminées. Typiquement,  $m_g$  est un entier naturel pris entre 1 et 4; la plupart des applications considèrent la valeur 3. La constante de calibration  $A_g$  est liée à la granulométrie et la viscosité dynamique. Sa valeur varie entre 0 et 1, et caractérise l'interaction entre l'écoulement et les particules; l'interaction est faible pour une valeur proche de 0, et forte pour une valeur proche de 1. La constante  $A_g$  étant généralement issue d'une calibration, elle est principalement déterminée de manière empirique [131].

**Meyer-Peter & Müller (1948).** La formule de Meyer-Peter & Müller [128] admet un seuil critique pour la contrainte de cisaillement (aussi appelée paramètre de Shields) et est une des formules les plus utilisées par les ingénieurs pour les études hydrauliques impliquant un fond mobile. Historiquement, cette formule est une extension de la formule de Meyer-Peter (Zurich, 1934) établie à partir d'expériences en canal avec un fond composé de grains de taille variable [136]; les particules initialement de taille uniforme allant de 3 à 28 mm ont été remplacées par un mélange de grains de taille variable supérieure à 10 mm et de densité variable.

Pour établir la formule de Meyer-Peter & Müller, les expériences ont été menées pour un nombre de variables plus étendu, en particulier, la pente du canal. Certaines expériences ont été réalisées pour des pentes de 20% et des particules grossières de 30 mm. Les travaux de Meyer-Peter et Müller ont principalement porté sur le transport de sédiments par charriage, impliquant uniquement un mouvement des grains par roulement ou sauts le long du lit, et par la même, excluant le transport par suspension; le diamètre des grains se situe entre 0.4 et 30 mm. L'expression du flux solide dépend de la contrainte de cisaillement  $\tau^*$  adimensionnelle donnée par,

$$\tau^* = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho_w)gd}, \quad (1.26)$$

avec  $\tau$  le terme de frottement,  $\rho_s, \rho_w$  désignent respectivement les masses volumiques du solide et du liquide (ici, l'eau),  $g$  la gravité, et  $d$  le diamètre du sédiment. Le terme de frottement peut être défini par la formule de Manning [127] ou de Chézy (1775); on le détaillera par la suite. Dans ce cas, la formule de Meyer-Peter & Müller s'écrit,

$$q_s = 8 \sqrt{g \left( \frac{\rho_s}{\rho_w} - 1 \right) d^3 (\tau_{eff}^* - \tau_c^*)_+^{3/2}}, \quad (1.27)$$

où  $\tau_{eff}^*$  correspond à la contrainte de cisaillement effective dépendant du coefficient de Strickler  $K_s$  et de la rugosité des grains  $K_p$ ,

$$\tau_{eff}^* = \left( \frac{K_s}{K_p} \right)^{3/2} \tau^*, \quad (1.28)$$

et  $\tau_c^*$  est la contrainte de cisaillement critique généralement égale à 0.047. L'opérateur  $(\cdot)_+$  correspond à la fonction  $\max(\cdot, 0)$ .

Par ailleurs, en imposant une valeur de contrainte de cisaillement critique nulle, on peut relier la formule de Meyer-Peter & Müller à celle de Grass en prenant  $m_g = 3$  et,

$$A_g = \frac{8\sqrt{g}}{(\rho_s/\rho_w - 1)K_s^3 R_h^{1/2}}, \quad (1.29)$$

où  $R_h$  est le rayon hydraulique correspondant au rapport de la section mouillée  $\mathcal{S}$  sur le périmètre mouillé  $\mathcal{P}$ ,

$$R_h = \frac{\mathcal{S}}{\mathcal{P}}. \quad (1.30)$$

**Engelund & Hansen (1967).** La formule d'Engelund & Hansen [56] fait partie comme celle de Grass des formules à ne pas considérer de seuil de mise en mouvement [84]. En d'autres termes, un écoulement générera une modification du lit ; le débit solide  $q_s$  est non nul à partir du moment où  $u$  est non nul. En pratique, ce flux de sédiment s'applique à partir d'une certaine valeur de contrainte de cisaillement  $\tau^*$  valant en général 0.25. Contrairement aux formules précédentes qui sont adaptées au transport par charriage, il s'agit d'une formule traduisant le transport total en volume de grains à saturation c'est-à-dire qu'elle prend en compte le transport de sédiments par charriage et par suspension. Par ailleurs, elle s'avère être adéquate lorsque le processus de transport en suspension n'est plus négligeable, et donc lorsque la granulométrie est relativement homogène pour des particules de faible diamètre ; ce flux est bien adapté pour des diamètres de grain compris entre 0.15 et 5 mm. On exprime la formule d'Engelund & Hansen comme suit,

$$q_s = 0.05 \sqrt{\frac{(\rho_s/\rho_w - 1)d^3}{g}} R_h^{1/3} K_s^2 (\tau^*)^{5/2}. \quad (1.31)$$

Par ailleurs, les auteurs de [28] proposent une définition unifiée pour le flux de transport solide. Pour des interactions faibles entre le fluide et le solide, il apparaît que de nombreux modèles déterministes tels que ceux de Meyer-Peter & Müller ou Van Rijn [178] peuvent être réduits à une formulation de type Grass telle qu'on l'a présentée en (1.29) pour le cas de Meyer-Peter & Müller.

### 1.3 Le système couplé de Saint-Venant–Exner.

En milieu naturel, les interactions entre un écoulement et le fond ont tendance à modifier la morphologie du lit. Sachant que le fond influence également l'écoulement, il existe donc une *interdépendance* entre les parties fluide et solide. Le système de Saint-Venant–

Exner en une dimension d'espace se présente sous la forme,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, & (1.32a) \\ \partial_t hu + \partial_x \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -gh\partial_x b - \frac{\tau}{\rho_w}, & (1.32b) \\ (1 - \Phi)\partial_t b + \partial_x q_s = 0, & (1.32c) \end{cases}$$

où, pour rappel,  $h(t, x)$ ,  $u(t, x)$  désignent respectivement la hauteur d'eau et la vitesse moyenne de l'écoulement,  $g$  correspond à l'accélération gravitationnelle,  $\tau/\rho_w$  représente le terme de frottement,  $\rho_w$  caractérise la masse volumique de l'eau,  $\Phi$  est la porosité,  $b(t, x)$  indique la cote du fond, et  $q_s(h, u, b)$  est le débit solide ou flux de sédiments. La fermeture du système est assurée par la donnée de la loi de transport solide  $q_s$  et de la loi de frottement; dans le cadre de la thèse, on travaillera essentiellement avec les formules de Grass et Meyer-Peter & Müller. Une construction de ce modèle est détaillée dans [43, 165].

Par la suite, on se placera dans le cadre de l'hypothèse des grandes largeurs pour un canal rectangulaire. Cette hypothèse implique que la largeur du canal est prédominante sur la hauteur d'eau. Sous ces hypothèses, pour un canal de largeur  $l$ , on introduit le rayon hydraulique  $R_h$  tel que,

$$R_h = \frac{S}{\mathcal{P}} = \frac{lh}{l + 2h} \approx h, \quad (1.33)$$

avec  $S$  et  $\mathcal{P}$  désignant toujours la section mouillée et le périmètre mouillé respectivement.

### 1.3.1 Hyperbolicité du modèle.

Dans cette section, on va traiter le système (1.32) en négligeant le terme de frottement et en prenant une porosité  $\Phi$  nulle. La formulation vectorielle du système (1.32) pour  $\tilde{W} \in \mathbb{R}^3$  se présente sous la forme,

$$\partial_t \tilde{W} + \partial_x F(\tilde{W}) = S(\tilde{W}) \iff \partial_t \tilde{W} + A(\tilde{W})\partial_x \tilde{W} = S(\tilde{W}). \quad (1.34)$$

En introduisant le débit  $q := hu$  et la matrice jacobienne du problème  $A(\tilde{W}) = F'(\tilde{W})$ , on définit pour le vecteur des variables primitives  $\tilde{W} := (h, q, b)^T$ , le flux  $F(\tilde{W})$ , sa matrice jacobienne  $A(\tilde{W})$  et le vecteur des termes sources  $S(\tilde{W})$  comme suit,

$$F(\tilde{W}) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \\ q_s \end{pmatrix}, \quad A(\tilde{W}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - u^2 & 2u & gh \\ \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} & 0 \end{pmatrix}, \quad S(\tilde{W}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh\partial_x b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

avec  $\tilde{\alpha} = \frac{\partial q_s}{\partial h}$  et  $\tilde{\beta} = \frac{\partial q_s}{\partial q}$ . Le polynôme caractéristique  $p_A$  de la jacobienne  $A(\tilde{W})$  est donné par,

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - 2u\lambda^2 - (gh(1 + \tilde{\beta}) - u^2)\lambda - gh\tilde{\alpha} = 0. \quad (1.36)$$

Les solutions de ce polynôme de degré 3 correspondent aux vitesses d'onde du modèle. Il apparaît clairement que ces dernières dépendent de  $\tilde{\alpha}$  et  $\tilde{\beta}$  or ces deux quantités ne sont

pas toujours bien définies. En effet, elles dépendent de la formule de transport solide qui, suivant la définition retenue, peut être une fonction non dérivable en certains points. Il est bien connu que pour la formule de Grass, le système est toujours hyperbolique [28, 41] c'est-à-dire que les vitesses d'onde sont réelles et distinctes. La propriété d'hyperbolicité du système de Saint-Venant–Exner est discutée dans [41] et une condition suffisante pour l'hyperbolicité est proposée pour des formules de transport solide classiques. Cette question reste ouverte pour le cas général. Cependant, en pratique, la plupart des applications montrent que la perte d'hyperbolicité n'est pas atteinte [28].

### 1.3.2 Limites du modèle.

Pour tenir compte du processus de sédimentation, le modèle de Saint-Venant–Exner demeure un des modèles les plus utilisés par les ingénieurs ; la majorité des outils logiciels est basée sur ce modèle. Bien qu'il constitue un modèle reconnu et bien adapté à la plupart des études geomorphologiques, certaines limites propres au système soulèvent des problèmes majeurs.

Parmi celles-ci, on s'intéresse en premier lieu aux limitations liées au débit solide. Globalement, les formules de transport de sédiments sont obtenues de manière empirique. Néanmoins la base théorique repose entre autres sur une hypothèse à partir de laquelle dérive un grand nombre de formules. Celle-ci consiste à admettre que le fond est quasi horizontal. Compte tenu de cette hypothèse initiale, il apparaît que de nombreux problèmes ne peuvent être traités par les formules de flux classiques [107]. De plus, lorsque des sédiments sont mis en mouvement et sont amenés à modifier la morphologie du fond, ce déplacement ne concerne généralement qu'une couche de sédiments d'une certaine épaisseur. Cette même couche peut donc présenter une épaisseur variable en fonction des conditions d'écoulement or les flux classiques tels qu'ils sont actuellement définis sont indépendants de l'épaisseur de cette couche. Certains auteurs se sont penchés sur la question [189] et ont proposé des alternatives pour la prise en compte de l'épaisseur [61].

Un autre aspect limitatif lié au débit solide se trouve dans le fait que celui-ci correspond à la relation de fermeture du système et non à une inconnue du problème compliquant le traitement des conditions limites. En effet, il est montré dans [41] que le système de Saint-Venant–Exner admet trois valeurs propres ou vitesses d'onde telles que leur produit est négatif ; cela signifie que sur le plan espace-temps  $(x, t)$ , deux caractéristiques ont une pente positive alors que la troisième présente une pente négative par rapport à la direction et au sens de l'écoulement. Les conditions limites à imposer portent sur la hauteur d'eau  $h$ , la vitesse moyenne  $u$  ou le débit  $q$  et la cote du fond  $b$ . En fonction du sens d'écoulement, il faut nécessairement imposer deux conditions à l'amont (resp. à l'aval) et une à l'aval (resp. à l'amont). Ce procédé pose le problème du choix du débit solide à imposer, dans la mesure où ce dernier n'est pas lié aux conditions limites fixées pour les trois variables primitives. Des auteurs se sont intéressés au problème des conditions limites en proposant des alternatives passant par une approche bicouche du problème [27, 171].

D'autre part, un inconvénient bien connu du système de Saint-Venant–Exner est l'absence d'énergie dissipative associée bien qu'il soit possible de démontrer l'existence d'une telle énergie pour des formules de transport solide suffisamment simples [189].

Par ailleurs, le modèle de Saint-Venant–Exner est bien adapté pour les écoulements à faible concentration de sédiments. Dans ce cas, il est admis que les modifications de la morphologie du fond sont principalement dues aux variations spatiales du flux de sédiments en négligeant les particules présentes dans la phase fluide ; les équations de conservation ne considèrent pas de phase solide. Lorsque la concentration de sédiments devient non négligeable, une approche considérant un écoulement mixte (fluide et sédiments) est nécessaire [153, 154, 184, 152]. Dans cette optique, les équations de conservation doivent être écrites pour un mélange eau-sédiment sous des hypothèses d’écoulement “quasi-diphasique” ; celles-ci ont donné lieu à des méthodes numériques notamment détaillées dans [153, 154, 152].

Enfin, pour un écoulement sur fond mobile, les échelles de temps associées à l’évolution du lit et à l’écoulement sont en général d’ordre différent. La plupart des écoulements fluviaux considérés admettent une échelle de temps plus importante pour l’évolution du lit que celle associée à l’écoulement ; le modèle de Saint-Venant-Exner est bien adapté à ce cas de figure (un traitement “découplé” est alors pertinent au vu de la séparation des échelles [85]). Dans le cas où les deux échelles sont comparables (par exemple, pour le cas d’une rupture de barrage sur fond mobile), l’écoulement est dit *rapide* et un traitement particulier du système de Saint-Venant–Exner est nécessaire (par exemple, traitement “couplé”) ; cette question relative à la variation entre les échelles de temps a été traitée dans [162, 185].

La question du traitement du couplage dans le système de Saint-Venant–Exner reste ouverte et sera discutée dans le **chapitre 2**.

#### 1.4 Schéma de type volumes finis.

Pour introduire la méthode des volumes finis, on se basera sur l’application au cas du système de Saint-Venant pour simplifier la description. Bien que la méthode est présentée en une dimension d’espace, les méthodes proposées dans ce manuscrit s’étendent aisément en deux dimensions d’espace puisque la méthode des volumes finis permet de raisonner localement en 1D dans la direction perpendiculaire aux interfaces. Les équations de Saint-Venant sont fondamentalement liées aux équations de Navier-Stokes ; le modèle de Saint-Venant dérive du système de Navier-Stokes et partage des similitudes quant au domaine d’application. Cette relation pourrait légitimement justifier l’utilisation de la méthode des éléments finis couramment utilisée pour la résolution du système de Navier-Stokes cependant elle s’avère mal adaptée au caractère hyperbolique et conservatif propre au système de Saint-Venant ainsi qu’à l’apparition de discontinuités et la préservation de la positivité de la hauteur d’eau.

Compte tenu des propriétés à satisfaire, la méthode des volumes finis semble plus adaptée. On peut remarquer que le système de Saint-Venant partage des propriétés analogues au système d’Euler pour lequel la méthode des volumes finis est communément utilisée. L’idée de la méthode repose sur l’intégration du système (1.8) sur un volume de contrôle obtenu à partir d’une discrétisation de l’espace et du temps ; le système est alors intégré sur une cellule du domaine spatial discret et un pas de temps. A la différence de la méthode des différences finies, la solution n’est pas approchée en un point d’espace mais



à partir d'une valeur moyenne sur chaque cellule ; cette approche introduit une solution constante par morceaux et donc discontinue. De fait, il s'agit d'une méthode dite conservative à savoir que les flux pour les bilans de masse et de quantité de mouvement sont correctement décrits. En effet, on introduit également des termes de bords décrivant les flux moyens échangés à l'interface entre deux cellules ; le flux sortant d'une cellule équivaut au flux entrant dans la cellule voisine. Tout l'enjeu de la méthode des volumes finis se trouve dans l'approximation de ce flux moyen.

En une dimension d'espace et pour un maillage régulier (ce choix est dicté par souci de simplicité mais on pourra considérer un maillage irrégulier), l'espace est constitué de segment  $\mathcal{C}_i := [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  centré autour du point  $x_i := i\Delta x$  où  $\Delta x$  est le pas d'espace ou la taille de la cellule et l'indice en  $1/2$  correspond aux valeurs prises aux interfaces des cellules. De plus, la suite des instants  $(t^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par la relation  $t^{n+1} = t^n + \Delta t^n$  où  $\Delta t^n$  désigne le pas de temps entre les instants  $t^n$  et  $t^{n+1}$  avec  $t^0$  donné. La solution  $W(t^n, x)$  du système (1.9) est approchée par la solution moyenne discrète  $W_i^n$ ,

$$W_i^n \approx \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathcal{C}_i} W(t^n, x) dx. \quad (1.37)$$

De plus, le flux numérique défini aux interfaces entre deux cellules  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_{i+1}$  est donné par,

$$\hat{F}_{i+1/2}^n \approx \frac{1}{\Delta t^n} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \hat{F}(W(t, x_{i+1/2})) dt. \quad (1.38)$$

Avec cette notation, le schéma aux volumes finis s'écrit sous forme explicite,

$$W_i^{n+1} - W_i^n + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\hat{F}_{i+1/2}^n - \hat{F}_{i-1/2}^n) = \Delta t^n \hat{S}_i^n, \quad (1.39)$$

avec  $\hat{S}_i^n$  la valeur moyenne du terme source sur la cellule  $\mathcal{C}_i$  au temps  $t^n$ . La formulation explicite constitue une limitation de l'approche en ce qu'elle nécessite la définition d'une condition CFL assurant la stabilité du schéma.

Dans le cadre de cette thèse, on s'intéressera principalement aux schémas numériques à trois points. Dans cette optique, l'approximation du flux numérique  $\hat{F}_{i+1/2}^n$  est obtenue à partir de la donnée de  $W_i^n$  et  $W_{i+1}^n$ ,

$$\hat{F}_{i+1/2}^n = \mathcal{F}(W_i^n, W_{i+1}^n). \quad (1.40)$$

Le flux numérique ainsi défini doit nécessairement vérifier les propriétés de consistance et de stabilité. De plus, un critère essentiel pour les schémas numériques concerne la préservation des états d'équilibre ; dans ce cas, les schémas sont dits *équilibrés*—ou encore dits *well-balanced*. Dans le cas non homogène, la présence de termes sources rend difficile l'écriture de flux numérique pouvant satisfaire la propriété d'équilibre ; comme précédemment évoqué, ce dernier point a fait l'objet de nombreux travaux (voir **Equilibre** dans 1.1.3). On s'intéresse par la suite aux propriétés de consistance et de stabilité.

**Consistance.**

On dit que le schéma (1.39)–(1.40) est consistant avec le système continu (1.9) si le flux numérique (1.40) vérifie la relation de consistance,

$$\mathcal{F}(W, W) = \hat{F}(W), \quad \forall W \in \mathbb{R}^2. \quad (1.41)$$

**Stabilité.**

Il est important que le flux numérique puisse préserver les propriétés de stabilité du système continu. Comme évoqué lors de l'introduction des équations de Saint-Venant, la propriété d'entropie permet d'établir un critère de stabilité. On définira une version discrète en se référant au système de Saint-Venant pour lequel on avait introduit l'inégalité d'entropie (1.16).

**Définition 1.2.** (Bouchut, 2004 [20]) On dit que le schéma (1.39)–(1.40) satisfait une inégalité d'entropie discrète associée à l'entropie convexe  $\tilde{E}$  pour (1.9), s'il existe une fonction de flux d'entropie  $\tilde{G}(\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i+1}, b_i, b_{i+1})$  consistante avec le flux d'entropie exact  $G$  (dans le sens où  $\tilde{G}(W, W, b, b) = \tilde{G}(W, b)$ ), telle que sous une certaine condition CFL, les valeurs discrètes obtenues par (1.39)–(1.40) satisfont,

$$\tilde{E}(W_i^{n+1}, b_i) - \tilde{E}(W_i^n, b_i) + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (\tilde{G}_{i+1/2} - \tilde{G}_{i-1/2}) \leq 0, \quad (1.42)$$

avec  $\tilde{G}_{i+1/2} = \tilde{G}(W_i, W_{i+1}, b_i, b_{i+1})$ .

Entre autres, un critère important basée sur l'existence d'un domaine invariant consiste à assurer la positivité de la hauteur d'eau,

$$\forall i \in \mathbb{Z}, \quad h_i^n \geq 0 \implies h_i^{n+1} \geq 0. \quad (1.43)$$

La stabilité du schéma de type volumes finis explicite en temps nécessite l'introduction d'une condition CFL —Courant-Friedrichs-Lewy [42]. Celle-ci permet d'évaluer à chaque instant  $t^n$  un pas de temps  $\Delta t^n$  vérifiant,

$$\Delta t^n \leq \frac{\Delta x}{\max_{i \in \mathbb{Z}} |\lambda_{i+1/2}|}, \quad (1.44)$$

où  $\lambda_{i+1/2}$  est une approximation des vitesses d'onde du système continu. Il apparaît que cette condition peut être contraignante ; le pas de temps est variable et dans le cas où sa valeur devient petite, le temps calcul peut devenir important.

De nombreux schémas numériques ont été proposés et on pourra consulter les ouvrages [80, 174, 117, 20] pour plus de détails.

## 2 SIMULATION NUMÉRIQUE DU SYSTÈME DE SAINT-VENANT–EXNER.

A la section 1.3.2, on a souligné l'importance d'un traitement du couplage pour les équations de Saint-Venant–Exner adapté au type d'écoulement, en particulier en raison des échelles de temps qui peuvent différer entre l'écoulement et l'évolution du fond. Dans

le cadre de la thèse, on s'intéresse de prime abord à l'écriture d'une méthode numérique pour la résolution du système de Saint-Venant–Exner qui satisfait les propriétés d'équilibre et de positivité, tout en étant adaptée à tout régime d'écoulement (la question de l'existence d'une inégalité d'entropie discrète se pose alors, ce qui n'est pas le cas pour le système de Saint-Venant–Exner qui ne possède pas en général une énergie associée). De plus, on s'assurera que le schéma est capable de dégénérer vers un schéma pour Saint-Venant lorsque le flux de sédiments sera nul. D'un point de vue pratique, le schéma aura pour finalité d'être testé sur des cas d'intérêt. Ainsi, il est nécessaire qu'il s'exécute en un temps raisonnable et soit simple à implémenter.

Dans cette perspective, on présente les travaux que l'on a menés et qui ont abouti à un schéma répondant à ces contraintes et satisfaisant les propriétés précédentes. Ces travaux sont décrits dans les **chapitres 1 et 2**.

## 2.1 Etat de l'art.

En ingénierie hydraulique et spécifiquement dans l'étude du transport solide, il est communément admis qu'un des enjeux cruciaux de la construction d'un schéma numérique pour la résolution du système de Saint-Venant–Exner se trouve dans la capacité du schéma à être stable pour les cas d'intérêt. Actuellement, deux approches existent pour aborder la question de la résolution :

- (i) l'une décrivant une approche découplée des équations consiste à résoudre séparément la partie hydraulique (système de Saint-Venant) et la partie solide (équation d'Exner) ; les inconnues hydrodynamiques et morphodynamique sont échangées à des pas de temps particuliers,
- (ii) la seconde repose sur un traitement du système complet et nécessite en général une analyse des valeurs propres de la matrice jacobienne associée au système.

D'une part, le traitement découplé est justifié entre autres par les échelles de temps différentes caractérisant l'écoulement et le transport solide. Celui-ci a été discuté par *Cunge et al.* dans [43] et suppose qu'une modification du lit a une influence négligeable sur l'écoulement de l'eau permettant ainsi le découplage des équations. A notre connaissance, tous les codes industriels résolvent le problème de transport de sédiments par cette stratégie [121, 122, 124, 125]. En effet, cette méthode offre l'avantage de préserver toutes les propriétés pour la partie fluide. Cependant, comme évoqué précédemment, lorsqu'on approche des conditions critiques c'est-à-dire au moment où les échelles de temps sont comparables, ce traitement par découplage devient inadapté et rencontre des problèmes de stabilité [41]. La littérature s'accorde à dire que ce problème est corrigé par une approche couplée [46, 98, 185, 41, 54] ; cette affirmation sera discutée dans le **chapitre 2**.

Plusieurs stratégies ont été mises en place pour traiter le système complet de Saint-Venant–Exner. Parmi celles-ci, on peut trouver des méthodes basées sur une approximation des valeurs propres de la matrice jacobienne du modèle [126]. D'autres approches introduites par *Hudson & Sweby* dans [98, 97] développent un système d'équations à partir d'une approximation de la matrice jacobienne associée au modèle ; pour ce faire, *Hudson*

& Sweby procèdent par la méthode de Roe. Ce type d’approche a été étudié par de nombreux auteurs [12, 29, 168]. Notons par exemple que les auteurs de [12] proposent une extension du schéma de Roe, et dans [168], un solveur de Riemann est obtenu à partir d’une approximation des valeurs propres de la matrice jacobienne. D’un point de vue numérique, il est important de préciser qu’un inconvénient se présente lorsque l’on traite le système par une approche couplée car généralement, on ne dispose pas de formulation conservative et qu’il est alors nécessaire de travailler avec des formulations non conservatives [99, 28, 164, 154, 26, 131]. En outre, des méthodes numériques ont été développées afin d’éviter d’avoir à passer par une matrice jacobienne exacte ou celle de Roe. Notamment, la méthode de relaxation introduite dans [104] et reprise par *Delis et al.* [50, 108] se base sur une linéarisation du problème. Entre autres, le modèle de relaxation proposé dans [5] bien que préservant les propriétés de stabilité et généralisable pour la plupart des formules de transport solide, présente néanmoins l’inconvénient d’être plus diffusif que la plupart des méthodes couplées pour ce type problème et de ne pas dégénérer vers un solveur de Saint-Venant lorsque l’on impose l’absence de transport de sédiments ; un écoulement entraînera toujours une modification du fond.

Du point de vue de l’ingénierie, il s’avère que le traitement par maillage décalé se présente comme une alternative. En effet, les travaux décrits dans [88] montrent que la méthode est assez robuste et simple à mettre en œuvre pour des codes industriels découplés.

Le critère de simplicité d’implémentation sera déterminant dans la méthode numérique que l’on cherche à développer. Au-delà de cette contrainte pratique, le schéma numérique que l’on propose satisfait les propriétés théoriques relatives au système de Saint-Venant–Exner à savoir la positivité et la préservation des états d’équilibre. D’un point de vue numérique, il répondra aux critères de précision (que l’on mettra en évidence dans le **chapitre 2** à travers des cas test académiques classiques mais également expérimentaux), de stabilité en étant adapté à tous les régimes d’écoulement, et de dégénérescence vers un schéma pour les équations de Saint-Venant. La stabilité est essentielle puisque aucune méthode découplée n’est adaptée à tous les régimes d’écoulement.

## 2.2 Solveur de Riemann approché.

L’approche que l’on présente repose sur la résolution de problèmes de Riemann ; on définit un problème de Riemann comme un problème de Cauchy pour lequel la solution à l’état initial présente une discontinuité séparant deux états constants. Pour une discrétisation de l’espace donnée, partant d’une solution constante par morceaux à un temps  $t^n$ , l’idée de base de la méthode de type Godunov proposée repose sur la résolution d’un problème de Riemann aux interfaces entre chaque cellule. Ce faisant, la solution approchée au temps  $t^{n+1}$  est obtenue à partir d’une moyenne pondérée de la juxtaposition de toutes les solutions obtenues sur chaque cellule.

On introduit pour le système sous forme vectorielle (1.34)-(1.35), un problème de Riemann à trois ondes  $\lambda_L$ ,  $\lambda_0$  et  $\lambda_R$  en imposant une onde nulle ( $\lambda_0 = 0$ ), une onde négative

( $\lambda_L \leq 0$ ) et une onde positive ( $\lambda_R \geq 0$ ) avec les conditions initiales,

$$\tilde{W}(0, x) = \begin{cases} \tilde{W}_L, & x < 0, \\ \tilde{W}_R, & x > 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\tilde{W}_L$  et  $\tilde{W}_R$  définissent deux états constants. Le solveur de Riemann ainsi défini introduit deux états intermédiaires  $W_L^*$  et  $W_R^*$ . Etant consistant au sens intégral avec le système (1.34), le solveur définit des états intermédiaires (six inconnues du problème) vérifiant la relation de consistance,

$$F(\tilde{W}_R) - F(\tilde{W}_L) - \tilde{S}(\tilde{W}_L, \tilde{W}_R) = \lambda_L(\tilde{W}_L^* - \tilde{W}_L) + \lambda_R(\tilde{W}_R - \tilde{W}_R^*), \quad (2.3)$$

où  $\tilde{S}(\tilde{W}_L, \tilde{W}_R)$  est une approximation du terme source  $S(\tilde{W})$  et satisfait pour un pas d'espace  $\Delta x > 0$ ,

$$\lim_{\substack{\tilde{W}_L, \tilde{W}_R \rightarrow \tilde{w} \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta x} \tilde{S}(\tilde{W}_L, \tilde{W}_R) = S(\tilde{W}). \quad (2.4)$$

Finalement, le schéma que l'on obtient pourra simplement s'écrire sous la forme classique suivante,

$$\tilde{W}_{i+1}^n = \tilde{W}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (F_{i+1/2}^- - F_{i-1/2}^+), \quad (2.5)$$

avec  $F^-(\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i+1})$  et  $F^+(\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i+1})$  les flux numériques gauche et droit.

Afin de compléter le système (2.3) qui fournit trois équations pour six inconnues, on impose deux équations de continuité sur la cote de la surface libre et le débit. Enfin, la sixième relation est donnée par un problème de minimisation pour la variable de topographie sous la contrainte donnée par la relation de consistance satisfaite par cette même variable,

$$\begin{aligned} \min \mathcal{G}(b_L^*, b_R^*) &= (||b_L - b_L^*||^2 + ||b_R - b_R^*||^2) \\ u.c. \mathcal{H}(b_L^*, b_R^*) &= \lambda_L (b_L^* - b_L) + \lambda_R (b_R - b_R^*) - (q_s(h_R, u_R) - q_s(h_L, u_L)) = 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ce problème de minimisation constitue un des deux points clés de la méthode. Résoudre ce problème permet de déterminer les deux cotes topographiques aux états intermédiaires  $b_L^*$  et  $b_R^*$ . Ces deux états sont alors utilisés pour obtenir les états intermédiaires des inconnues hydrauliques ; cette dépendance des états hydrauliques aux états solides tient du terme source faisant apparaître un terme de pente pour la conservation de la quantité de mouvement.

Par ailleurs, il est possible de définir la fonctionnelle à minimiser  $\mathcal{G}$  d'une manière différente, constituant ainsi une possibilité d'enrichir facilement le schéma en lui ajoutant des propriétés physiques (par exemple au travers d'une énergie à minimiser).

Enfin, l'autre point clé se situe dans l'approximation des vitesses d'onde. En effet, le calcul des valeurs propres associées à la matrice jacobienne du système de Saint-Venant-Exner passe par la recherche des racines d'un polynôme de degré 3. Dans la philosophie de solveur simple que l'on adopte, il n'est pas nécessaire de déterminer exactement les vitesses d'onde. En revanche, il est essentiel que les vitesses d'onde retenues encadrent

les vitesses d’onde exactes. Pour ce faire, on a recours à la méthode de Nickalls [133] qui permet d’encadrer avec précision les racines de tout polynôme de degré  $n \in \mathbb{N}$  à racines réelles.

Bien qu’on ne le fasse pas apparaître dans (1.34), on rappelle qu’il est nécessaire de considérer le terme de frottement. Celui-ci sera traité numériquement par une approche implicite [140] reprise dans le **chapitre 2**.

Enfin, en appliquant quelques corrections, on assure au schéma de satisfaire des propriétés importantes telles que la positivité et l’équilibre.

**Positivité.** Il apparaît que le signe de la hauteur d’eau dépend du signe de la différence de topographie en deux points d’espace. Une correction en fonction du signe de cette différence est introduite pour ne considérer que les valeurs positives des hauteurs d’eau ; cette dernière a été initialement présentée dans [8]. L’idée consiste à prendre le valeur maximale entre la hauteur d’eau et zéro. Aux états intermédiaires, on définit deux hauteurs d’eau intermédiaires. Ainsi, en appliquant ce traitement à une des hauteurs d’eau, on doit s’assurer que la positivité est également vérifiée pour la seconde.

**Equilibre.** La propriété d’équilibre est satisfaite pour une discrétisation du terme source adaptée. Cette dernière est une extension d’une discrétisation centrée de ce terme.

**Dégénérescence.** Cette propriété revient à considérer un transport solide nul dans le système de Saint-Venant–Exner,

$$q_s = 0.$$

Le système (1.34) se réduit alors au système de Saint-Venant. Concernant le schéma numérique, il s’avère que ce dernier dégénère bien vers un solveur de Riemann approché pour le modèle de Saint-Venant. Plus particulièrement, ce solveur de Riemann adopte la même approche que celle développée pour Saint-Venant–Exner et que l’on a décrit précédemment. De façon similaire, il vérifie les propriétés de positivité et d’équilibre et se révèle satisfaire numériquement la propriété de décroissance d’entropie. Tous les traitements pour obtenir les deux premières propriétés sont identiques à ceux décrits aux paragraphes précédents. Le solveur de Riemann approché pour Saint-Venant–Exner est une extension du même type de solveur appliqué au système de Saint-Venant. Le lien entre les deux solveurs est naturel dans la mesure où le système de Saint-Venant–Exner peut être vu comme un cas particulier du modèle de Saint-Venant à fond mobile. La différence réside dans le fait que dans le cas Saint-Venant, la cote du fond topographique est une donnée du problème alors qu’elle est une inconnue dans le cas Saint-Venant–Exner d’où la nécessité d’une relation de consistance associée à l’équation d’Exner et de l’introduction d’un problème de minimisation pour assurer la fermeture du système (deux relations qui ne sont pas présentes dans le cas Saint-Venant).

Compte tenu des liens mis en lumière, on applique,

- au **chapitre 1**, l’approche au cas simple des équations de Saint-Venant,

- avant de l'étendre directement au cas de Saint-Venant–Exner dans le **chapitre 2**.

### 2.3 Choix de la stratégie de résolution.

Le solveur de Riemann approché que l'on a introduit soulève une question primordiale sur le choix de l'approche à adopter pour la résolution du système de Saint-Venant–Exner. Comme on l'a évoqué précédemment, la littérature récente recommande l'utilisation d'approche couplée pour la résolution du système pour s'assurer que la méthode numérique soit suffisamment stable. Les travaux précurseurs de *Hudson & Sweby* [98] et repris dans [41] comparent les deux approches et en arrivent à la conclusion précédente compte tenu des échelles de temps caractéristiques de l'écoulement et de l'évolution du fond comparables ou non. Cependant, l'approche que l'on propose ici adopte une posture "intermédiaire" basée sur un couplage minimal entre les modèles hydrodynamique et morphodynamique. En effet, le problème de minimisation (2.6) permet de déterminer dans un premier temps, les inconnues topographiques puis de les utiliser comme données du problème pour la partie hydraulique. Néanmoins, il serait trompeur de penser qu'il s'agit d'une résolution totalement découplée du modèle car le couplage est assurée par l'approximation des vitesses d'onde de propagation associées au modèle complet.

Cette approche interroge sur la question du couplage minimal à imposer pour l'obtention d'une méthode efficace et stable. Dans le **chapitre 2**, on propose alors d'aborder la question en comparant deux stratégies de traitement découplé mettant en jeu la proposition précédente de solveur de Riemann approché pour le système de Saint-Venant (**chapitre 1**, [8]) et une discrétisation centrée de l'équation d'Exner. D'une part, on considère le cas classique d'un traitement découplé pour lequel les vitesses d'onde sont données par celles associées aux équations de Saint-Venant. D'autre part, on découple de la même façon mais en définissant les vitesses d'onde par l'approximation des vitesses associées au modèle complet (à savoir, les vitesses obtenues par la formule de Nickalls évoquée précédemment et utilisées dans le solveur de Riemann approché développé dans cette thèse). Par cette comparaison, on souligne l'importance du choix des vitesses d'ondes qui nécessitent une prise en compte de la différence d'échelles de temps caractérisant l'écoulement et l'évolution du lit. En ce sens, imposer les vitesses hydrauliques pour le solveur revient à considérer que les interactions fluide-solide sont faibles alors que dans le cas d'un écoulement torrentiel, cette assertion n'est plus valable et les vitesses d'onde doivent être adaptées aux nouvelles conditions d'écoulement et à l'influence forte du solide sur le fluide (et réciproquement).

On montre, à travers quelques cas test classiques impliquant un écoulement torrentiel tels que la migration d'une antidune ou la rupture de barrage sur fond mobile, que le découplage comprenant une définition des vitesses d'onde tenant compte du couplage entre les parties hydrodynamique et morphodynamique est une alternative robuste lorsque le découplage classique avec les vitesses d'ondes du modèle de Saint-Venant s'avère instable.

D'un point de vue d'ingénierie, cette méthode est un compromis intéressant entre les approches découplées—principalement leur simplicité d'implémentation—et la stabilité reconnue des méthodes couplées. Pour se rapprocher de cas réels, on confrontera alors le

solveur à des cas test expérimentaux caractérisant les processus d'érosion et de déposition ainsi qu'une rupture de barrage afin de mettre en évidence la précision de la méthode pour un calage raisonnable des paramètres.

### 3 INCERTITUDES DANS LES MODÈLES DE SAINT-VENANT–EXNER ET SAINT-VENANT.

La deuxième partie de ce manuscrit s'intéresse aux incertitudes dans les systèmes de Saint-Venant–Exner et de Saint-Venant.

De manière générale, la simulation numérique de modèles complexes génère naturellement des erreurs. Il est alors important de pouvoir comprendre et quantifier ces erreurs afin de donner du sens à l'interprétation et l'analyse des résultats par rapport au comportement réel de la solution. Les erreurs dont il est question peuvent être de trois natures différentes [115],

**Modélisation.** La modélisation passe généralement par des simplifications afin de faciliter sa résolution. Ces hypothèses simplificatrices ont en général pour but de rapprocher le système étudié d'un modèle idéal. Pour cette raison, il est évident que le modèle ne pourra pas reproduire exactement le comportement réel observé cependant l'intérêt tient du fait que le modèle simplifié est souvent suffisamment précis pour permettre une analyse rigoureuse.

**Numérique.** La résolution du modèle mathématique retenu passe nécessairement par une approche numérique. La solution exacte est approchée par les méthodes numériques dont la précision dépend de la discrétisation adoptée ainsi que de l'algorithme même de la méthode. Il est connu qu'un raffinement de maillage permet de réduire l'erreur numérique commise cependant cette dernière ne peut être nulle compte tenu de la nature finie de la discrétisation.

**Données.** Le modèle mathématique doit être complété par un jeu de données et de paramètres couvrant le domaine de validité de celui-ci ; les données portent sur la géométrie du système ou encore les conditions initiales et limites, alors que les paramètres physiques ou constantes gouvernent les lois constitutives du système. Entre autres, dû aux limites des moyens de mesure ou d'identification des constantes, les données ne permettent qu'une représentation partielle du système réel et ajoute une erreur supplémentaire sur les prédictions.

Notons que les données incertaines d'entrée peuvent être de deux types différents,

**Stochastique.** La variabilité de la donnée est naturelle et résulte de phénomènes aléatoires.

**Epistémique.** La variabilité de la donnée est issue d'un manque de connaissance qui ne permet pas de définir la valeur de celle-ci.



Dans cette thèse, les incertitudes qui nous intéressent sont liées aux erreurs sur les données. En particulier, il s'agira de caractériser l'influence d'une donnée incertaine en entrée  $X$  sur la réponse en sortie  $Y$ . En d'autres termes, en désignant le modèle par  $\mathcal{M}$  (également vu comme une boîte noire), on peut, de manière abstraite, écrire la relation liant les données en entrée  $X$  aux valeurs de sortie  $Y$ ,

$$Y = \mathcal{M}(X). \quad (3.1)$$

### 3.1 Quantités d'intérêt.

On introduit les quantités d'intérêt que l'on va chercher à estimer par la suite. Pour plus de détails, on orientera le lecteur vers les ouvrages [115, 187].

On définit un espace de probabilité  $\mathcal{D} := (\Theta, \Sigma, P)$  où  $\Theta$  est l'ensemble des événements aléatoires,  $\Sigma$  désigne la  $\sigma$ -algèbre associée et  $P$  la mesure de probabilité. Soit  $L^2(\Theta, P)$  l'espace des variables aléatoires du second ordre définies sur  $\mathcal{D}$  muni du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et la norme associée  $\| \cdot \|_{\Theta}$ ,

$$U, V \in L^2(\Theta, P), \quad \langle U, V \rangle = \int_{\Theta} U(\theta)V(\theta)dP(\theta) = E[UV], \quad (3.2)$$

$$U \in L^2(\Theta, P) \longrightarrow \langle U, U \rangle = \|U\|_{\Theta}^2, \quad (3.3)$$

où  $E[\cdot]$  est un opérateur d'espérance. De plus, on introduit l'opérateur de variance  $Var[\cdot]$  et l'écart type  $\sigma(\cdot)$  défini comme suit,

$$U \in L^2(\Theta, P), \quad Var[U] = E[(U - E[U])^2] = \int_{\Theta} (U(\theta) - E[U(\theta)])^2 dP(\theta), \quad (3.4)$$

$$\sigma(U) = \sqrt{Var(U)}, \quad (3.5)$$

ainsi que la covariance  $Cov(\cdot, \cdot)$  et le coefficient de corrélation  $Cor(\cdot, \cdot)$ ,

$$U, V \in L^2(\Theta, P), \quad Cov(U, V) = E[(U - E[U])(V - E[V])], \quad (3.6)$$

$$Cor(U, V) = \frac{Cov(U, V)}{\sigma(U)\sigma(V)}. \quad (3.7)$$

Le coefficient de corrélation vérifie,

$$|Cor(U, V)| \leq 1.$$

Soit  $U$  une variable aléatoire réelle de loi de probabilité donnée. La loi de probabilité de  $U$  est caractérisée par la fonction de densité de probabilité  $f_d$  définie sur  $\mathbb{R}$  à valeurs positives ou nulles et intégrable, telle que sur un intervalle  $[a, b] \in \mathbb{R}$ ,

$$P(U \in [a, b]) = \int_a^b f_d(u)du, \quad (3.8)$$

Dans le cadre de l'étude proposée, il s'agira de chercher à caractériser les quantités de sortie  $Y$  en fonction de la donnée d'entrée correspondant à une variable aléatoire réelle  $X(\theta)$ . En réalité, la donnée d'entrée  $X$  est paramétrée par un ensemble fini  $\xi$  de variables aléatoires indépendantes  $(\xi_i(\theta))_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \leq N < \infty}}$  définies sur  $\mathcal{D}$ , avec  $N$  donné,

$$\xi(\theta) = (\xi_i(\theta))_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \leq N < \infty}}.$$

Par abus dans la notation, elle sera notée  $X(\theta) := X(\xi(\theta))$ . Cette approche caractérise les méthode dites paramétriques. Dans ce cas, les quantités de sortie sont également des variables aléatoires et seront notées  $Y(\theta) := Y(X(\theta))$ . En règle générale, la loi de probabilité de  $\xi$  et par extension de  $X$  est connue. Par la suite, on cherche à estimer une des quantités précédentes à savoir l'espérance, la variance et la corrélation de la variable de sortie  $Y$ .

### 3.2 Propagation d'incertitudes.

On présente quelques méthodes pour estimer les quantités d'intérêt. On précise que la plupart des méthodes que l'on présente est détaillée dans les ouvrages [115, 187].

**Méthodes de quadrature.** Evaluer une espérance ou une variance revient à calculer une intégrale (3.2) ou (3.4). Partant de ce simple constat, des méthodes de quadrature permettent le calcul de ces quantités. Il existe de nombreuses formules proposées que l'on pourra retrouver dans [115]. Pour appliquer ces méthodes, il est nécessaire d'avoir une fonction à intégrer suffisamment régulière ainsi qu'un nombre de variables d'entrée assez faible. Il est important de noter que les formules de quadrature peuvent s'appliquer sur grille pleine (formule de *Gauss*) ou sur grille creuse (initialement introduite par *Smolyak* [167]).

**Méthode de cumul quadratique.** En considérant des constantes réelles  $(c_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et des variables aléatoires  $(V_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , une des propriétés de l'opérateur d'espérance et de variance établit, pour  $N \in \mathbb{N}$  donné, les relations suivantes,

$$E \left[ \sum_{i=1}^N c_i V_i \right] = \sum_{i=1}^N c_i E[V_i], \quad (3.9)$$

$$Var \left[ \sum_{i=1}^N c_i V_i \right] = \sum_{i=1}^N c_i^2 Var[V_i] + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq N} c_i c_j Cov(V_i, V_j). \quad (3.10)$$

Il apparaît clairement que ces formules permettent d'obtenir l'espérance et la variance des variables de sortie lorsque le modèle  $\mathcal{M}$  est linéaire. L'idée de la méthode consiste donc à linéariser localement le modèle  $\mathcal{M}$  à l'aide de développements de Taylor. La méthode nécessite alors la donnée des espérances des variables d'entrée ainsi que leur matrice de covariance. Un développement de Taylor de  $\mathcal{M}$  à l'ordre 1 suffit pour estimer les espérance et variance des variables aléatoires de sortie. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne convient pas aux modèles fortement non linéaires.

**Méthode de Monte-Carlo.** Il s'agit d'une des méthodes les plus utilisées en propagation d'incertitudes. Elle consiste à estimer les quantités d'intérêt sur la base d'un échantillon aléatoire de  $Y = \mathcal{M}(X)$ . On tire un  $n$ -échantillon de réalisations indépendantes  $(X^{(k)})_{k=1\dots n}$ . On note  $Y^{(k)} = \mathcal{M}(X^{(k)})$  la variable de sortie correspondant à la réalisation  $k$ . L'estimateur de l'espérance de la quantité d'intérêt  $Y$  est donné par,

$$\hat{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y^{(k)}, \quad (3.11)$$

La loi des grands nombres permet d'assurer la convergence (p.s.) de l'estimateur  $\hat{I}_n$  de Monte-Carlo vers la quantité recherchée. On introduit par ailleurs l'estimateur de la variance de  $Y$ ,

$$\hat{J}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y^{(k)} - \hat{I}_n)^2. \quad (3.12)$$

La vitesse de convergence est de l'ordre de  $1/\sqrt{n}$ . Malgré l'inconvénient dû à cette relative lenteur de convergence, cette méthode offre l'avantage d'être indépendante de la forme de la fonction  $\mathcal{M}$ , d'avoir une vitesse de convergence indépendante de la dimension de  $X$ , d'une estimation non biaisée, d'une précision qui ne dépend que de  $n$  et d'obtenir des intervalles de confiance.

Des techniques ont été développées afin d'améliorer la vitesse de convergence de la méthode, basées sur de la réduction de variance ou d'utilisation de suites à discrétion faible pour l'échantillonnage (méthode de quasi-Monte-Carlo) [115].

**Méthodes spectrales stochastiques.** Le principe de la méthode est d'exprimer la solution  $Y = \mathcal{M}(X)$  à l'aide d'un développement en série obtenu grâce à une projection sur une base spectrale  $(\Phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ,

$$Y = \sum_i c_i \Phi_i(X), \quad (3.13)$$

où  $c_i$  sont des coefficients déterministes calculés à l'aide de projections. On citera entre autres une méthode assez répandue consistant à projeter la solution sur la base des polynômes de chaos [79, 115, 187]. Cette décomposition est adaptée à la représentation des entrées ou d'une combinaison linéaire des entrées. Le point crucial se situe au niveau de l'estimation des coefficients  $c_i$  par des méthodes intrusives ou non. Cette méthode s'avère pratique car elle facilite l'analyse de sensibilité de la solution aux paramètres d'entrée incertains et permet l'obtention des moments et de la densité de probabilité caractéristiques de la solution. A l'inverse, le fait qu'elle ne permet aucun contrôle sur l'erreur de troncature représente le principal inconvénient de la méthode.

Les simulations numériques que l'on a mises en œuvre dans le **chapitre 3** ont été menées avec la méthode de Monte-Carlo.

### 3.3 Position du problème.

En dépit du fort intérêt que suscite le modèle d'Exner dû notamment à ses capacités prédictives pertinentes, le principe du modèle repose sur des heuristiques simplifiées pouvant être source d'erreurs. En particulier, des formules principalement empiriques (pour le transport solide) assurent la fermeture du système. Certains auteurs [111] suggèrent de définir le flux de transport solide par le biais d'une équation de conservation des moments additionnelle introduisant une corrélation en espace à travers une longueur de dépôt caractéristique ; ce procédé est appliqué au sédiments éoliens [39].

Certains phénomènes observables en rivière ne sont pas retranscrits par le modèle tels que les morphologies transitoires du lit qui sont visibles expérimentalement à grandes échelles géophysiques à savoir les formations de rides, les dunes, . . . Cette question a été investie par de nombreux auteurs aussi bien du point de vue du transport de sédiments en suspension que sous l'angle du transport par charriage [89]. L'idée selon laquelle certaines formes persistantes observées à la surface des lits de rivières résultent d'interactions à petites échelles pouvant être modélisées par des fluctuations stochastiques, a été traitée dans [101, 2, 63]. Cette idée est renforcée à la fois par les simulations numériques introduisant un bruit dans le modèle d'Exner et parvenant à reproduire les caractéristiques statistiques des formes du lit [188, 101], et les mesures expérimentales du flux de sédiment qui révèlent une distribution non gaussienne et motivent l'introduction d'un caractère stochastique dans le flux de transport solide [74]. En outre, certaines théories semi-empiriques utilisées pour définir le flux solide reposent sur un modèle probabiliste de mouvement de particules (par saut, roulement ou saltation) à la surface du lit de la rivière [51, 137, 64, 183, 193] et définissent un cadre pour introduire un caractère stochastique dans la formule de transport solide.

Enfin, le modèle prend difficilement en compte la "polydispersité" des sédiments. Ce problème est difficile à appréhender et nécessite une amélioration du cadre monodisperse basique. Cette question est importante pour les expérimentateurs et est habituellement traitée par l'introduction de fonctions de distribution probabilistes des différents sédiments considérés dans la rivière [106, 144].

Des travaux portant sur l'analyse des incertitudes dans un système hydraulique ont déjà été menés dans [156].

Dans le travail décrit dans le **chapitre 3**, on propose un modèle stochastique possible d'Exner pour lequel le flux de sédiments est directement défini comme une variable aléatoire. On étudiera numériquement ce nouveau modèle à travers un case test de référence. On discutera notamment les problèmes mathématiques et numériques rencontrés. Ces derniers mettront en évidence la nécessité de maîtriser le système de Saint-Venant qui peut être vu comme une version simplifiée du modèle de Saint-Venant–Exner. L'intérêt sera de voir l'impact de la variabilité du fond sur l'écoulement et de constater l'influence d'un forçage sur la cote du fond sur les variables hydrauliques.

### 3.4 Approche numérique.

#### 3.4.1 Système stochastique de Saint-Venant–Exner.

Le modèle d'Exner stochastique que l'on introduit considère un flux de sédiments stochastique basé sur la formule de Meyer-Peter & Müller tel que,

$$q_s^* = A (|\tau^*| - \tau_c^*)_+^{3/2}, \quad (3.14)$$

avec  $A$  une variable aléatoire distribuée suivant une loi exponentielle en espace et en temps, de moyenne  $\bar{A}$ ,

$$\mathbb{P}(A(t, x) \leq \bar{A}) = \int_0^{\bar{A}} 8e^{-8A} dA = 1 - e^{-8\bar{A}}.$$

Le schéma numérique adopté est une approche découplée avec maillages décalés, bien adapté au cas test étudié. Contrairement à [88], les variables hydrauliques ( $h$  et  $u$ ) sont colocalisées alors que la variable topographique  $b$  est définie aux interfaces des cellules où sont évaluées les quantités fluides. La partie fluide du modèle obtenu par les équations de Saint-Venant est résolues par un schéma de type volumes finis classique avec le flux numérique de Rusanov. Quant à la partie solide, la résolution est assurée par une formule de type différences finies. On impose des conditions limites périodiques donc le domaine spatial se résume à un tore  $\mathcal{T}^1$ .

Le cas test de référence correspond à un écoulement torrentiel au-dessus d'un fond mobile avec pente.

On introduit la forme discrète du flux solide défini par une formule stochastique de Meyer-Peter & Müller,

$$(q_s)_i^n = d \sqrt{\frac{g(\rho_s - \rho_w)d}{\rho_w}} A_i^n (|\tau_i^n| - \tau_c^*)^{3/2} sg((\tau_i^n)_i).$$

Les coefficients  $A_i^n$  définis au point  $x_i$  et au temps  $t^n$  sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid) suivant une loi exponentielle de moyenne  $\bar{A}$  correspondant à la valeur usuelle déterministe. A chaque pas de temps et chaque point d'espace, on génère les variables aléatoires  $A_i^n(\omega)$  et pour chaque réalisation de Monte-Carlo  $\omega$ , on résout le système de Saint-Venant–Exner avec le paramétrage induit par  $A_i^n(\omega)$  en  $x_i$  et au temps  $t^n$  jusqu'à atteindre un temps final suffisamment long  $T$  fixé.

A l'issu des simulations numériques de Monte-Carlo, on évalue l'espérance empirique et la variance empirique des variables aléatoires  $h$ ,  $u$  et  $b$ . Le résultat principal vient de la décroissance en temps de l'espérance de  $u$ . Celle-ci laisse penser à une décroissance d'énergie du système. En bruitant de la manière proposée, on augmente la rugosité du fond ; les oscillations créées sur le fond ajoute de la rugosité. Ce faisant, l'écoulement s'en trouve ralenti. Une correction de ce problème de décroissance d'énergie se fait à travers le coefficient de Strickler qui caractérise la rugosité du fond. Ce traitement semble assez naturel car l'idée est de compenser directement la rugosité ajoutée par la perturbation à

travers le terme qui caractérise la rugosité-même du fond.

En appliquant cette correction, on arrive à vérifier numériquement que l'espérance empirique de la vitesse  $\widehat{E}(u)$  reste constante en temps.

Par la suite, on cherchera à mettre en évidence le fait qu'un fond bruité augmente la rugosité du lit et ralentit l'écoulement. L'étude que l'on a menée sur le modèle stochastique de Saint-Venant–Exner qui induit naturellement un processus physique (flux de sédiments) fluctuant nécessite de comprendre la sensibilité en probabilité du système de Saint-Venant à la variable de couplage  $b$ . Pour explorer cette piste, on va se concentrer sur le système de Saint-Venant en bruitant le fond.

### 3.4.2 Propagation d'incertitudes dans le système de Saint-Venant.

L'étude du cas restreint aux équations de Saint-Venant avec un fond bruité reprend le même cas test de référence introduit précédemment. On ne résout plus que la partie hydraulique, la topographie étant une donnée du problème. On se place donc dans un tore et on considère un fond avec pente et bruité.

Dans un premier temps, le fond est bruité de la façon suivante,

$$\begin{cases} b_{i+1/2}^n = b_{i+1/2}^0 + \tilde{b}_{i+1/2}, & (3.15) \\ \tilde{b}_{i+1/2} = \alpha \sqrt{\Delta x} \sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^\beta} \left( c_k \cos \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) + s_k \sin \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) \right), & (3.16) \end{cases}$$

où  $c_k$  et  $s_k$  sont des variables aléatoires suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $\alpha$  est une constante gouvernant l'amplitude du bruit ajouté et  $\beta$  une constante caractérisant sa régularité. La méthode de Monte-Carlo consiste à générer un échantillon de fonds et pour chaque réalisation, résoudre le système de Saint-Venant avec la donnée du fond bruité. Contrairement au bruit considéré dans le cas de Saint-Venant–Exner, on ne bruit le fond qu'à l'état initial et non à chaque pas de temps. Ici, le système peut donc atteindre un état de "quasi-équilibre" (s'il existe), ce qui n'était pas évident à anticiper dans le cas proposé pour un transport solide puisque le bruit était injecté à chaque pas de temps; dans ce cas, une convergence en loi était possible *a priori*. Numériquement, pour un temps suffisamment long, on montre que les espérances et les variances de  $h$  et  $u$  atteignent un état stationnaire. On constate également que la décroissance de la moyenne empirique de la vitesse est observable dans ce cas; on ajoute de la rugosité compte tenu des fluctuations injectées dans la topographie. Par contre, en opérant la même correction appliquée à la rugosité portée par le coefficient de Strickler et introduite dans le cas de Saint-Venant–Exner, cette décroissance disparaît et la moyenne empirique de la vitesse est constante en temps. Ce premier résultat met en lumière l'influence de la variabilité du fond sur les variabilités des grandeurs hydrauliques.

Cette étude est généralisée au cas d'écoulements en régime fluvial et torrentiel, toujours en considérant des conditions limites périodiques. De plus, on impose un bruit qui ne dépend plus du terme de pas d'espace  $\sqrt{\Delta x}$ , et l'amplitude du bruit n'est plus dépendant du maillage. On s'intéresse notamment aux corrélations en espace des deux variables

aléatoires  $h$  et  $q$  (dans les travaux présentés au **chapitre 3**, on travaille avec le débit). D'une part, on cherche à caractériser l'influence des paramètres d'amplitude  $\alpha$  et de régularité  $\beta$  du bruit injecté sur les espérances et les variances des quantités d'intérêt, puis on met en évidence une convergence en maillage de ces quantités et on étudie leur sensibilité à la taille du maillage. Ce faisant, on justifie l'utilisation d'un maillage relativement grossier permettant d'étudier les grandeurs d'intérêt de manière suffisamment précise pour un temps d'exécution raisonnable. D'autre part, on se concentre sur les corrélations spatiales du point au milieu du domaine avec tous les autres points. Il ressort que les corrélations pour la hauteur d'eau en régime fluvial sont comparables à celles de la topographie contrairement aux mêmes corrélations en régime torrentiel qui sont différentes. De plus, on parvient à retrouver numériquement pour les deux régimes d'écoulement, la symétrie en espace des courbes de corrélation résultant des conditions limites périodiques.

## 4 APPLICATION INDUSTRIELLE.

Dans cette partie, on s'intéresse aux applications à des cas réels et les outils dont on dispose pour mener les simulations numériques correspondantes. Ce travail a été effectué dans le cadre d'une mission de doctorant-conseil au sein de la société d'études GeoHyd membre d'Antea Group. Les simulations mises en œuvre ont pour but d'aider à la réalisation d'étude de dangers sur les digues de la Loire. En particulier, des modèles hydrauliques ont été construits sous TELEMAC-2D et calés à partir d'épisodes passés de crue de la Loire. L'étude porte sur deux axes :

- l'optimisation des temps de calcul sous TELEMAC,
- la recherche bibliographique sur les ruptures de digues en vue de la représentation sous TELEMAC de l'aléa de rupture et des conséquences induites.

### 4.1 Optimisation de temps de calcul.

Pour un maillage donné, on cherche à identifier l'ensemble des éléments permettant d'optimiser les temps de calcul du modèle tout en s'assurant de la stabilité des calculs effectués. Cette réflexion sera menée sur un ordinateur de bureau conventionnel correspondant typiquement aux postes individuels chez Antea Group. Dans cette optique, le travail est mené sur des épisodes de crue de la Loire.

Par ailleurs, on s'intéressera aux modalités concrètes de lancement de modélisation sous une grappe de calculs multicœurs (le cluster de GeoHyd) et on s'attachera à comparer les temps de calcul avec ceux des ordinateurs conventionnels.

#### 4.1.1 Outils numériques.

Comme évoqué, le modèle est implémenté sous TELEMAC-2D [125]; notons que d'autres codes permettent également la résolution de ce type de problème hydraulique tels que

DELFT3D [121], HEC-RAS [122] ou MIKE [124].

Le code TELEMAC-2D est un module open-source de la suite logicielle TELEMAC-MASCARET, largement utilisé dans le domaine des études hydrauliques fluviales et maritimes. Il permet de simuler des écoulements à surface libre bidimensionnels. Pour cela, il résout les équations de Saint-Venant (pouvant inclure une équation de transport d'un traceur dilué) en deux dimensions d'espace à l'aide de la méthode des éléments finis ou des volumes finis ; l'espace est discrétisé selon un maillage non structuré d'éléments triangulaires pouvant être adaptatif. Le fichier de paramètres est généré avec le module intégré de pré/post-traitement FUDAA-PREPRO.

Le maillage est quant à lui obtenu à l'aide du logiciel de pré/post-traitement BLUE KENUE [120]. Il s'agit d'un outil permettant la préparation, l'analyse et la visualisation de données hydrauliques. En plus de TELEMAC, le code est compatible avec les formats de fichiers de sortie propres à ADCIRC [119] et HYDROSIM [123].

#### 4.1.2 Modèle de référence.

Le modèle de référence décrit un épisode de crue de la Loire. Les paramètres sont calés sur un épisode de crue ayant eu lieu en 2003. Formellement, on modélise un linéaire de lit mineur de la Loire. Les données nécessaires à la mise en œuvre du modèle viennent d'anciennes études menées par différents instituts publics. En ce sens, le modèle doit prendre en compte les singularités hydrauliques liées aux piles de pont et les barrages, les digues et îlots, ainsi que les différences de rugosité suivant la densité d'urbanisation des zones inondables. Ce dernier critère va également être déterminant pour la taille des mailles sur chaque zone.

La résolution se fait à l'aide de la méthode des éléments finis qui à la période où la mission s'est déroulée, était la seule méthode présentant une version parallèle (TELEMAC ver. 6.2) d'où le choix effectué.

#### 4.1.3 Parallélisme.

Une machine est dite *parallèle* lorsqu'elle est constituée de plusieurs processeurs mis en communication et capable d'effectuer des opérations indépendantes simultanément. Il existe principalement quatre type de parallélisme,

**SISD - Single Instruction Single Data**, Une machine SISD ou machine de Von Neumann exécute une seule instruction et ne traite qu'une seule donnée à un temps donné.

**SIMD - Single Instruction Multiple Data**. Une machine SIMD exécute une seule instruction et traite plusieurs données (*parallélisme de données*).

**MISD - Multiple Instruction Single Data**. Une machine MISD exécute plusieurs instructions simultanément sur une même donnée.



**MIMD - Multiple Instruction Multiple Data.** Tous les processeurs peuvent exécuter une instruction différente sur des données différentes. On parle de machine SPMD (Single Program Multiple Data) lorsqu'un même programme est exécuté sur tous les processeurs. Les architectures de machines sont réparties en deux catégories : mémoire partagée et mémoire distribuée. La première architecture se compose d'ensemble de processeurs fonctionnant de façon asynchrone c'est-à-dire ayant chacun une horloge indépendante, mais effectuant les opérations de lecture et d'écriture sur une même mémoire d'où sa dénomination. La seconde architecture repose sur un mécanisme de communication entre les processeurs différents. Ces derniers travaillent de manière asynchrone et les informations transitent par passage de messages à travers un réseau internet par exemple ; l'ensemble des ordinateurs est vu comme une machine distribuée.

L'installation de TELEMAT dans sa version parallèle s'est faite sur un ordinateur-type d'Antea Group et la grappe de calcul de GeoHyd. Le détail technique de cette grappe est donné en **chapitre 4**. Précisons que cette première étape d'installation a abouti à la rédaction d'un *manuel d'installation sur grappe et sur poste individuel* utilisé en interne chez Antea Group, et n'est pas détaillé dans ce manuscrit.

A l'issue de l'installation, des simulations du modèle de référence ont été exécutées à plusieurs reprises avec un nombre croissant de processeurs afin d'établir un "pseudo-benchmark" de la grappe. Les résultats permettent de vérifier le bon comportement de la solution dans tous les cas de figure c'est-à-dire que la solution issue de la version parallèle ne se trouve que peu altérée par rapport à celle obtenue en séquentiel. De plus, ils permettent également de vérifier le gain en temps de calcul de la version parallèle par rapport à la version séquentielle de TELEMAT notamment par le biais de la courbe de speed-up, ce qui constituait l'objectif premier.

En parallèle à cette étude, on dresse une liste des paramètres utilisés dans TELEMAT pouvant jouer sur le temps d'exécution en **annexe 2**.

## 4.2 Recherche bibliographique sur la rupture de digue.

Les formations de brèches se font suivant deux processus : l'érosion externe par surverse et l'érosion interne par effet de renard. Le premier processus a lieu au moment où la hauteur d'eau dépasse la crête de la digue. L'écoulement entraîne alors les matériaux dans le talus aval du remblai. Le second processus résulte des hétérogénéités (différence de pression) dans le corps de la digue qui génère des écoulements internes. Dans cette partie, on établit une recherche bibliographique orientée autour des deux points suivants :

- La détermination de l'*hydrogramme de rupture* induit par une brèche pour les différents mécanismes possibles à savoir une brèche induite soit par une surverse ou soit par un phénomène d'érosion interne. Les paramètres clés de la brèche devront pouvoir être décrits : temps de déclenchement, largeur en base et largeur en crête, cinétique associée en fonction du mécanisme initiateur et de la durée de l'hydrogramme,... On s'intéressera aux démarches analogues implémentées sur d'autres

logiciels tout en apportant un regard critique aux modes de représentation déjà existant, en précisant les incertitudes associées.

- La détermination du *pouvoir de destruction* induit par une brèche. L'expérience montre en effet que les modèles représentent mal les phénomènes observés lors des brèches historiques sur les digues de la Loire (apparition de fosses d'érosion à l'aval immédiat, bâti rasé, etc.). Les phénomènes ne peuvent pas s'expliquer uniquement en les traitant sous l'angle fluide. On étudiera les possibilités de couplage externe *a minima* entre les aspects fluide et érosion pour représenter les conséquences d'une brèche (zones détruites, zones soumises à de fortes contraintes mais ne menaçant pas le bâti, zones soumises à des sollicitations qui se rapprochent d'un aléa naturel, ..).

Le premier point fera l'objet d'une étude bibliographique décrivant les processus de création d'une brèche et les étapes menant à une rupture de la digue. On s'intéressera aux modèles et les codes existants qui permettent de simuler ce phénomène d'érosion.

Concernant le second point et compte tenu du manque d'informations (absence de modèle, de paramètres et de processus physiques...), on propose une approche classique par régression linéaire à partir des données de brèches historiques disponibles. Cette approche concerne les données sur la géométrie de la brèche et sur celle de la fosse d'érosion, et aborde la façon de les mettre en relation.



## CHAPITRE 1

# A simple well-balanced and positive numerical scheme for the shallow-water system

---

**Version française.** *Ce chapitre est consacré à l'approximation numérique des équations de Saint–Venant. Dans ce contexte, trois questions importantes se posent quant aux propriétés d'équilibre, de positivité et d'entropie, ainsi que celle liée à la gestion des zones sèches. On propose une méthode de type Godunov basée sur la construction d'un solveur de Riemann approché à trois ondes satisfaisant les deux premières propriétés et une forme faible de la propriété d'entropie. En ce qui concerne cette dernière, le solveur satisfait une inégalité d'entropie non conservative discrète. D'un point de vue numérique, on explore la validité d'une inégalité d'entropie conservative.*

Ce chapitre fait l'objet d'un article en collaboration avec Emmanuel Audusse et Christophe Chalons, publié dans *Communications in Mathematical Sciences*, Vol. 13 (2015), no. 5, pp. 1317-1332.

**English version.** *This chapter considers the numerical approximation of the shallow-water equations. In this context, one faces three important issues related to the well-balanced, positivity and entropy-preserving properties, as well as the ability to consider vacuum states. We propose a Godunov-type method based on the design of a three-wave Approximate Riemann Solver (ARS) which satisfies the first two properties and a weak form of the last one together. Regarding the entropy, the solver satisfies a discrete non-conservative entropy inequality. From a numerical point of view, we also investigate the validity of a conservative entropy inequality.*

This chapter is the subject of an article in collaboration with Emmanuel Audusse and Christophe Chalons, published in *Communications in Mathematical Sciences*, Vol. 13 (2015), no. 5, pp. 1317-1332.

---

**Contents**

<b>1.1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>36</b>
<b>1.2</b>	<b>Numerical scheme.</b>	<b>37</b>
1.2.1	Expression of the solution in the intermediate states.	39
1.2.2	Positivity.	41
1.2.3	Well-balanced property.	42
1.2.4	About entropy.	42
<b>1.3</b>	<b>Numerical results.</b>	<b>43</b>
1.3.1	Propagation of perturbations.	44
1.3.2	Steady flow over a bump.	44
1.3.3	Thacker test case for wet-dry transitions.	49
1.3.4	Wet-dry fronts in a nonflat basin.	51
1.3.5	Non-unique solution to the Riemann problem.	52
<b>1.4</b>	<b>Conclusion.</b>	<b>54</b>

---

**1.1 INTRODUCTION.**

In this chapter, we look for a numerical scheme for the shallow-water equations given by:

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x (hu) = 0, & (1.1.1) \\ \partial_t (hu) + \partial_x \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -gh\partial_x b(x), & (1.1.2) \end{cases}$$

where  $b(x)$  is a smooth topography,  $g$  refers to the gravitational acceleration, and the water height  $h(t, x)$  and the velocity  $u(t, x)$  depend on time  $t$  and space  $x$ . We denote  $h_0$  and  $u_0$  the initial values respectively for the water height and the velocity. In addition, the associated entropy inequality we will call *non-conservative entropy inequality*, is written as:

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{U}(w) + \partial_x \mathcal{F}(w) \leq -ghu\partial_x b, & (1.1.3) \\ \mathcal{U}(w) = \frac{hu^2}{2} + \frac{gh^2}{2}, \quad \mathcal{F}(w) = \left( \frac{u^2}{2} + gh \right) hu, & (1.1.4) \end{cases}$$

where  $w = (h, hu)^T$ . We also recall the expression of the *conservative entropy inequality* [20],

$$\partial_t \tilde{\mathcal{U}}(w, b) + \partial_x \tilde{\mathcal{F}}(w, b) \leq 0, \quad (1.1.5)$$

with the *conservative entropy*  $\tilde{\mathcal{U}}$  and the associated flux  $\tilde{\mathcal{F}}$  defined by,

$$\tilde{\mathcal{U}}(w, b) = \mathcal{U}(w) + ghb \quad \text{and} \quad \tilde{\mathcal{F}}(w, b) = \mathcal{F}(w) + ghub. \quad (1.1.6)$$

The scheme should preserve the steady states of the lake at rest defined by,

$$\begin{cases} h_L + b_L = h_R + b_R, \\ u_L = u_R = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.1.7a) \\ (1.1.7b) \end{matrix}$$

and the positivity of water heights for two initial states  $(h, hu, b)_L$  and  $(h, hu, b)_R$  separated by a discontinuity, and satisfy a discrete entropy inequality. Furthermore, it should be able to handle vacuum, in particular, the steady state of the wet-dry transition,

$$\begin{cases} h_L + b_L \leq b_R, & h_R = 0, \\ u_L = u_R = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.1.8a) \\ (1.1.8b) \end{matrix}$$

or the case of a dry-wet transition,

$$\begin{cases} h_R + b_R \leq b_L, & h_L = 0, \\ u_L = u_R = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.1.9a) \\ (1.1.9b) \end{matrix}$$

There is a huge amount of work about this topic but most of the schemes fail to satisfy these three properties at once. Up to our knowledge, four methods ([146], [20], [37], [15]) are proved to fulfill the three requirements but they are costly in terms of computing runtime and/or based on quite complex algorithms. In this work, we propose a numerical scheme adapted to vacuum that endows the positivity and well-balanced properties and that is very cheap and simple to implement. We also study the non-conservative entropy (1.1.3)–(1.1.4) associated to the scheme and numerically exhibit the decreasing of the discrete conservative entropy (1.1.5)–(1.1.6) in a very sharp test case which involves resonance phenomenon. Other numerical experiments are proposed to compare the new method with some positive and well-balanced (but non-entropic) schemes ([71], [72], [6], [16]).

## 1.2 NUMERICAL SCHEME.

In the following, we describe a Godunov-type finite volume scheme for (1.1.1)–(1.1.2)–(1.1.3)–(1.1.4). Let us first introduce some notations. We consider a sequence of points  $x_{i+1/2}$  such that,

$$x_{i-1/2} < x_{i+1/2}, \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

and we define the cells  $C_i$  and space steps  $\Delta x_i = \Delta x$ , such that,

$$C_i = ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[ , \quad \Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}.$$

In addition, we set  $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2}) / 2$ .

We also introduce a time step  $\Delta t > 0$  that allows to define a sequence of intermediate times  $t^n$  by,

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t.$$

We denote  $\forall X \in \{h_0, u_0, b\}$ ,

$$\begin{cases} X_L = \frac{1}{\Delta x} \int_{-\Delta x}^0 X(x) dx, & X_R = \frac{1}{\Delta x} \int_0^{\Delta x} X(x) dx, \end{cases} \quad (1.2.1a)$$

$$\begin{cases} X_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{C_i} X(x) dx. \end{cases} \quad (1.2.1b)$$

Starting from a given piecewise constant approximate solution at time  $t^n$ , we construct the solution at time  $t^{n+1}$  in two steps:

- we build an approximate solution of the Riemann problem at each interface  $x_{i+1/2}$ ,
- we obtain the new solution by calculating the average value of the juxtaposition of these solutions in each cell  $C_i$  at time  $t^{n+1}$ .

As an approximate Riemann solution associated with initial data,

$$w(0, x) = \begin{cases} w_L, & x < 0, \\ w_R, & x > 0, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

$$(1.2.3)$$

with  $w_L = (h_L, h_L u_L)^T$  and  $w_R = (h_R, h_R u_R)^T$ , we consider a simple approximate Riemann solver composed by three waves propagating with velocities  $\lambda_L$ ,  $\lambda_0 = 0$  and  $\lambda_R$  as shown on the following figure,

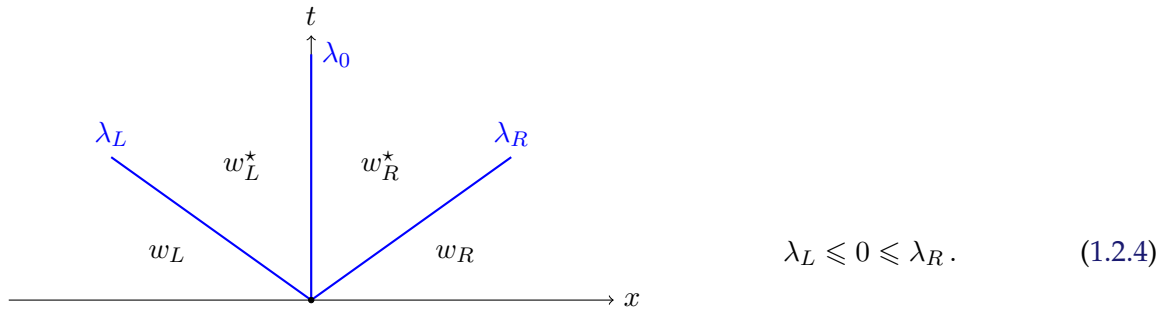


Figure 1.1: Local Riemann problem.

We define the CFL condition which ensures that two Riemann problems do not interact,

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{2 \max(|\lambda_L|, \lambda_R)},$$

where the function  $\max$  is defined in the set of considered Riemann problems. From [90], [71], [72], it is known that such an approximate Riemann solver is consistent in the integral sense with (1.1.1)–(1.1.2) provided that the intermediate states satisfy the following consistency relations:

$$f(w_R) - f(w_L) - s(w_L, w_R, b_L, b_R) = \lambda_L(w_L^* - w_L) + \lambda_R(w_R - w_R^*), \quad (1.2.5)$$

with  $f(w) = (f^h(w), f^q(w))^T = (hu, hu^2 + gh^2/2)^T$  and  $s(w_L, w_R, b_L, b_R)$  is an approximation of the source term in (1.1.1)–(1.1.2), consistent with  $(0, -gh \Delta b)^T$  since it satisfies:

$$\lim_{\substack{w_L, w_R \rightarrow w \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta x} s(w_L, w_R, b_L, b_R) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \partial_x b \end{pmatrix}, \quad (1.2.6)$$

where we recall that  $b_L$  and  $b_R$  depend on  $\Delta x$  through (1.2.1). Then, it is also well-known that the associated Godunov-type scheme is equivalent to the following update formulas:

$$\begin{cases} w_i^{n+1} = w_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (F_{i+1/2}^L - F_{i-1/2}^R), \end{cases} \quad (1.2.7)$$

$$\begin{cases} w_i^0 = \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{C_i} h_0(x) dx, \int_{C_i} (h_0 u_0)(x) dx \right)^T, \end{cases} \quad (1.2.8)$$

with  $F^L(w_i, w_{i+1}, b_i, b_{i+1})$  and  $F^R(w_i, w_{i+1}, b_i, b_{i+1})$  the left and right numerical fluxes (see [20]) which will be precised later on.

### 1.2.1 Expression of the solution in the intermediate states.

We propose to define the two intermediate states by imposing the consistency relations in the integral sense resulting from the equations (1.1.1)–(1.1.2):

$$\begin{cases} h_R u_R - h_L u_L = \lambda_L (h_L^* - h_L) + \lambda_R (h_R - h_R^*), \\ \left( h_R u_R^2 + \frac{gh_R^2}{2} \right) - \left( h_L u_L^2 + \frac{gh_L^2}{2} \right) + g \Delta x \{h \partial_x b\} \\ \quad = \lambda_L (h_L^* u_L^* - h_L u_L) + \lambda_R (h_R u_R - h_R^* u_R^*), \end{cases} \quad (1.2.9)$$

$$\quad \quad \quad = \lambda_L (h_L^* u_L^* - h_L u_L) + \lambda_R (h_R u_R - h_R^* u_R^*), \quad (1.2.10)$$

where  $\{h \partial_x b\}$  stands for a consistent approximation of the source term  $h \partial_x b$  in the sense of (1.2.6). In order to close this system, two relations are missing and we suggest to impose,

$$\begin{cases} h_L^* + b_L = h_R^* + b_R, \end{cases} \quad (1.2.11)$$

$$\begin{cases} h_L^* u_L^* = h_R^* u_R^*. \end{cases} \quad (1.2.12)$$

These two relations are consistent with the steady states (1.1.7) of the system (1.1.1)–(1.1.2).

By solving the equations (1.2.9) and (1.2.11), we define the water heights in the intermediate states,

$$h_L^* = h_{HLL} + \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta b, \quad (1.2.13)$$

$$h_R^* = h_{HLL} + \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta b, \quad (1.2.14)$$

where  $\Delta b = b_R - b_L$  and,

$$h_{HLL} = \frac{\lambda_R h_R - \lambda_L h_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{1}{\lambda_R - \lambda_L} (h_R u_R - h_L u_L), \quad (1.2.15)$$



is the intermediate water height associated to the HLL solver ([90], [20]).

Then, from the equations (1.2.10) and (1.2.12), we deduce the intermediate discharge  $q^*$ ,

$$q^* := h_L^* u_L^* = h_R^* u_R^*,$$

$$q^* = q_{HLL} - \frac{g}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta x \{h \partial_x b\}, \quad (1.2.16)$$

with,

$$q_{HLL} = \frac{\lambda_R h_R u_R - \lambda_L h_L u_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{\left(h_R u_R^2 + \frac{g h_R^2}{2}\right) - \left(h_L u_L^2 + \frac{g h_L^2}{2}\right)}{\lambda_R - \lambda_L},$$

the intermediate discharge involved in the HLL scheme ([90], [20]).

From (1.2.13), (1.2.14) and (1.2.16), we are able to define the two numerical fluxes  $F^L$  and  $F^R$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{i+1/2}^L(w_i, w_{i+1}, b_i, b_{i+1}) = F_{HLL}(w_i, w_{i+1}) + \left( \begin{array}{l} \frac{\lambda_L \lambda_R (b_{i+1} - b_i)}{\lambda_R - \lambda_L} \\ - \frac{\lambda_L g \Delta x \{h \partial_x b\}}{\lambda_R - \lambda_L} \end{array} \right)_{i+1/2} \\ F_{i+1/2}^R(w_i, w_{i+1}, b_i, b_{i+1}) = F_{HLL}(w_i, w_{i+1}) + \left( \begin{array}{l} \frac{\lambda_L \lambda_R (b_{i+1} - b_i)}{\lambda_R - \lambda_L} \\ - \frac{\lambda_R g \Delta x \{h \partial_x b\}}{\lambda_R - \lambda_L} \end{array} \right)_{i+1/2} \end{array} \right. \quad (1.2.17a)$$

$$\left. \right\} \quad (1.2.17b)$$

where  $F_{HLL}$  is the HLL flux ([90], [20]),

$$F_{HLL}(w_L, w_R) = \begin{cases} f(w_L), & \text{if } 0 < \lambda_L, \\ \frac{\lambda_R f(w_L) - \lambda_L f(w_R)}{\lambda_R - \lambda_L} + \frac{\lambda_L \lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} (w_R - w_L), & \text{if } \lambda_L < 0 < \lambda_R, \\ f(w_R), & \text{if } \lambda_R < 0, \end{cases}$$

and  $\{h \partial_x b\}$  stands for a discretization of the source term which will be precised later on, see [71], [72], [32], [15]. One notices that the first components of the fluxes  $F_L$  and  $F_R$  are equal which means that the scheme is conservative for the water height. The difference between their second components results to the value  $\Delta x \times s$ , previously defined as a consistent approximation of the source term.

Observe that at this stage the definitions of  $\{h \partial_x b\}$ ,  $\lambda_L$  and  $\lambda_R$  have to be given, while  $w_L^*$  and  $w_R^*$  are the unknowns of the equations. The first one will be related to the well-balanced property and the last two will be treated in the next subsection.

### 1.2.2 Positivity.

In regard to the expression of the intermediate water heights (1.2.13) and (1.2.14), it is not easy to ensure the positivity of these quantities. That is why, we suggest to modify these intermediate values depending on the sign of  $\Delta b$ . In the case  $\Delta b \geq 0$ , we clearly have,

$$h_R^* \leq h_{HLL} \leq h_L^*.$$

In order to ensure the positivity of  $h_R^*$ , we introduce the following modification,

$$\tilde{h}_R^* = \max(h_R^*, 0), \quad (1.2.18)$$

$$\tilde{h}_L^* = h_L^* - \frac{\lambda_R}{\lambda_L} (h_R^* - \tilde{h}_R^*), \quad (1.2.19)$$

which satisfies the consistency relation (1.2.9).

One can check the positivity of the intermediate water heights. Indeed, in the case where  $\tilde{h}_R^* = 0$ , one obtains,

$$\tilde{h}_L^* = h_L^* - \frac{\lambda_R}{\lambda_L} h_R^* = h_{HLL} \left(1 - \frac{\lambda_R}{\lambda_L}\right) \geq 0,$$

under the same positiveness conditions on  $\lambda_L$  and  $\lambda_R$  of the HLL scheme (see [90], [20]). In practice, the following expression for the intermediate velocities work [20],

$$\lambda_L = \min_{w=w_L, w_R} (u - \sqrt{gh}, 0), \quad (1.2.20)$$

$$\lambda_R = \max_{w=w_L, w_R} (u + \sqrt{gh}, 0). \quad (1.2.21)$$

In the following, we will exclusively work with the quantities  $\lambda_R \tilde{h}_R^*$  and  $\lambda_L \tilde{h}_L^*$ ,

$$\lambda_R \tilde{h}_R^* = \lambda_R \max(h_R^*, 0), \quad (1.2.22)$$

$$\lambda_L \tilde{h}_L^* = \lambda_L h_L^* - \lambda_R (h_R^* - \tilde{h}_R^*), \quad (1.2.23)$$

which will allow us to handle wave velocities equal to zero; in the case  $\lambda_L = 0$ , there is no need to define a threshold value.

The case  $\Delta b < 0$  can be treated by applying the same method and we obtain,

$$\lambda_L \tilde{h}_L^* = \lambda_L \max(h_L^*, 0), \quad (1.2.24)$$

$$\lambda_R \tilde{h}_R^* = \lambda_R h_R^* - \lambda_L (h_L^* - \tilde{h}_L^*). \quad (1.2.25)$$

In spite of these modifications of the intermediate water heights, it is important to precise that the expression of the discharge  $q^*$  is still unchanged.

By modifying the expression of the intermediate water heights, it seems obvious to modify the numerical fluxes (1.2.17) in respect to the new expression of the intermediate state (1.2.18) and (1.2.19).

From now on and as motivated just above,  $\lambda_L$  and  $\lambda_R$  refer to the values that ensure the stability properties of the classical HLL scheme (positivity of the water heights but also validity of an entropy inequality as we will need later on).

**Remark 1.2.1.** *The intermediate velocities  $u_L^*$  and  $u_R^*$  are never used in practice, in the sense that they are always multiplied by  $h$  in the code. In order to treat vacuum states, calculating the values of  $u_L$  and  $u_R$  requires to impose a threshold on the water height. Namely, been given  $\varepsilon \ll 1$  (in practice, we have taken  $\varepsilon = 10^{-12}$ ), we set  $u_L = 0$  and  $h_L = 0$  (resp.  $u_R = 0$  and  $h_R = 0$ ) whenever  $h_L < \varepsilon$  (resp.  $h_R < \varepsilon$ ).*

### 1.2.3 Well-balanced property.

We introduce the following natural discretization of the source term,

$$\{h\partial_x b\} = \frac{h_L + h_R}{2\Delta x} \Delta b, \quad (1.2.26)$$

which preserves the steady states of the lake at rest (1.1.7).

Indeed, we easily observe that with this definition, one gets,

$$h_L^* = h_L, \quad h_R^* = h_R, \quad q^* = 0.$$

By modifying this discrete source term as follows,

$$\{h\partial_x b\} = \begin{cases} \frac{h_L + h_R}{2\Delta x} \min(h_L, \Delta b), & \text{if } \Delta b \geq 0, \\ \frac{h_L + h_R}{2\Delta x} \max(-h_R, \Delta b), & \text{if } \Delta b < 0, \end{cases} \quad (1.2.27a)$$

$$(1.2.27b)$$

we can also preserve the lake at rest in the case of a wet-dry transition (1.1.8) or the case of a dry-wet transition (1.1.9).

The proof relies again on obvious calculations.

### 1.2.4 About entropy.

The entropy-preserving property is an open issue for the proposed scheme since we are not able to prove at present that it satisfies a discrete version of the conservative entropy inequality. Nevertheless, we numerically show that this property is satisfied for a specific test case involving resonance phenomenon (1.3.5). Actually, the proposed scheme satisfies a discrete version of the non-conservative entropy inequality (1.1.3)–(1.1.4) provided that the following conditions on the intermediate states is fulfilled for any  $w_L, w_R, b_L, b_R$  (see [71]),

$$\mathcal{F}(w_R) - \mathcal{F}(w_L) - \sigma(w_L, w_R, b_L, b_R) \leq 0$$

$$\lambda_L(\mathcal{U}(w_L^*) - \mathcal{U}(w_L)) + \lambda_R(\mathcal{U}(w_R) - \mathcal{U}(w_R^*)). \quad (1.2.28)$$

In the aim to be consistent with the shallow-water system, it is necessary to ensure that  $\sigma$  is consistent with the term  $-ghu\partial_x b$  and so we have to satisfy,

$$\lim_{\substack{w_L, w_R \rightarrow w \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta x} \sigma(w_L, w_R, b_L, b_R) = -ghu\partial_x b.$$

We refer again to [90], [71], [72] for more details. In our case, we can express  $\sigma$  such as,

$$\sigma(w_L, w_R, b_L, b_R) = -g \frac{h_L + h_R}{2} \frac{q_{HLL}}{h_{HLL}} \bar{\Delta}b + (\Delta x)^2 \varepsilon(\Delta x), \quad (1.2.29)$$

where  $(\Delta x)^2 \varepsilon(\Delta x)$  refers to function with the property,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta x) = 0, \quad (1.2.30)$$

and,

$$\bar{\Delta}b = \begin{cases} \min(h_L, \Delta b), & \text{if } \Delta b \geq 0, \\ \max(-h_R, \Delta b), & \text{if } \Delta b < 0. \end{cases}$$

The corresponding discrete inequality with the formula (1.2.29) is clearly consistent with (1.1.3), at least if  $h_L > 0$  and  $h_R > 0$  since  $\bar{\Delta}b = \Delta b$  under these assumptions when  $\Delta x \rightarrow 0$ .

In the following we propose to examine the behaviour of the solver concerning the non-conservative and conservative entropies, especially for the test case considering non-unique solution to the Riemann problem proposed in [4].

**Remark 1.2.2.** When  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $h_L^* \rightarrow h_{HLL}$ ,  $h_R^* \rightarrow h_{HLL}$  so that (1.2.18)–(1.2.19) are never used in this asymptotic regime.

**Remark 1.2.3.** Unlike [15], the proof of the positivity and non-conservative entropy properties are obtained for  $\lambda_L$  and  $\lambda_R$  defined exactly as in the HLL scheme, and are not defined asymptotically large according to specific behaviours like  $-\lambda_L/\lambda_R \gg 1$  or  $-\lambda_R/\lambda_L \gg 1$ .

### 1.3 NUMERICAL RESULTS.

We are interested in the behaviour of our scheme for different test cases: a propagation of perturbations around equilibrium state [116], [30], a flow over a bump in two regimes (fluvial and transcritical without and with shock), the Thacker test case for the wet-dry transition, wet-dry fronts in a nonflat basin [73], [30] and a test for the non-uniqueness of the solution [4].

In what follows, we first show the numerical results provided by the new scheme we propose. For some of them, we also compare the L1-errors with the ones given by a classical HLL scheme coupled with a centered discretization of the source term, the hydrostatic

reconstruction [6], the hydrostatic upwind scheme [16], and the scheme proposed by Gallice [71], [72].

### 1.3.1 Propagation of perturbations.

This test case has been proposed by LeVeque in [116] and reused by Castro et al. in [30]. We perturbed a steady state solution by a pulse that splits into two opposite waves over a continuous bed. The aim is to test the behaviour of the scheme when it is submitted to a rapidly varying flow around the state of the lake at rest. The domain is reduced to the interval  $[0, 2]$ . We work with outflow boundary conditions and the bottom topography is defined by,

$$b(x) = \begin{cases} 2 + 0.25(\cos(10\pi(x - 0.5)) + 1), & \text{if } 1.4 < x < 1.6, \\ 2, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.3.1a)$$

The initial data are  $q(0, x) = 0$ , and,

$$h(0, x) = \begin{cases} 3 - b(x) + \Delta h, & \text{if } 1.1 < x < 1.2, \\ 3 - b(x), & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (1.3.2a)$$

$$(1.3.2b)$$

where  $\Delta h = 0.001$  is the height of the perturbation. The CFL parameter is set to 0.9. The final time is fixed at  $t = 0.2$  and  $\Delta x = 1/40$ . A reference solution is obtained with the hydrostatic reconstruction applied to the HLL flux with a mesh of 20000 cells.

On Figure 1.4, we isolate the results obtained with a centered scheme that returns a unreasonable solution. The other schemes are well-balanced for the steady state of the lake at rest and the results they return do not present large numerical error as seen before on Figure 1.4. The results in Figure 1.2 and 1.3 show that the scheme introduced in this chapter – called *simple solver* on the figures – is the most accurate.

### 1.3.2 Steady flow over a bump.

The aim of these test cases is to bring out the behaviour of the scheme for steady states it has basically not the function to preserve. The steady states are governed by the following equations,

$$hu = K_1 \quad \text{and} \quad \frac{u^2}{2} + g(h + b) = K_2. \quad (1.3.3)$$

where  $K_1$  and  $K_2$  are two constants. In the following, we deal with the equations (1.3.3) in the fluvial and transcritical regimes without shock, and the transcritical flow with shock is treated using data from [30].

#### 1.3.2.1 Fluvial regime.

In this test case, we set  $K_1 = 1$  and  $K_2 = 25$ .

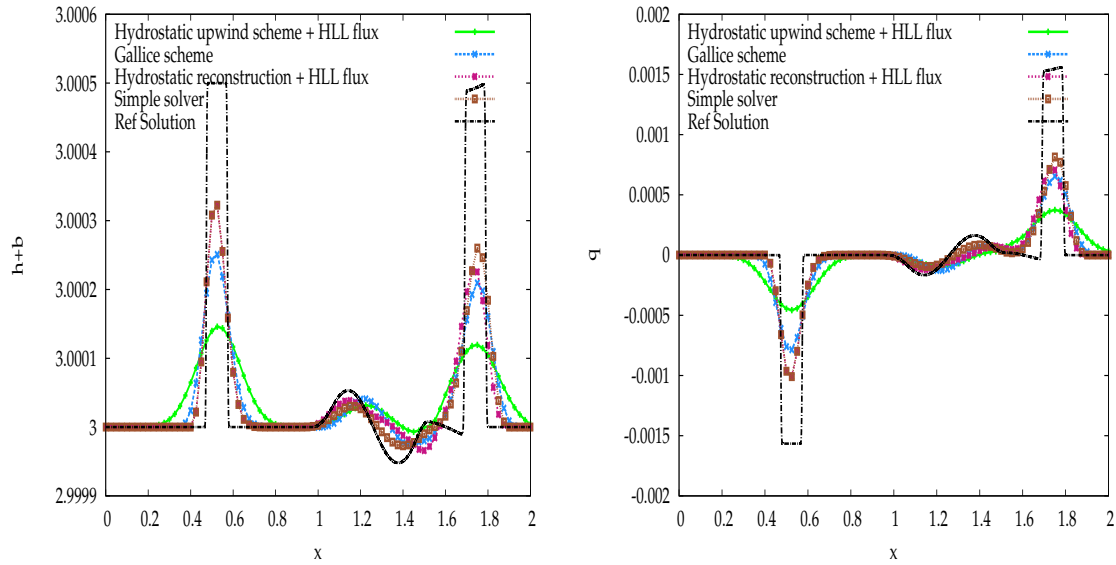


Figure 1.2: Propagation of perturbations: Comparison of free surfaces  $h + b$  (left) and discharges  $q$  (right) for different schemes.

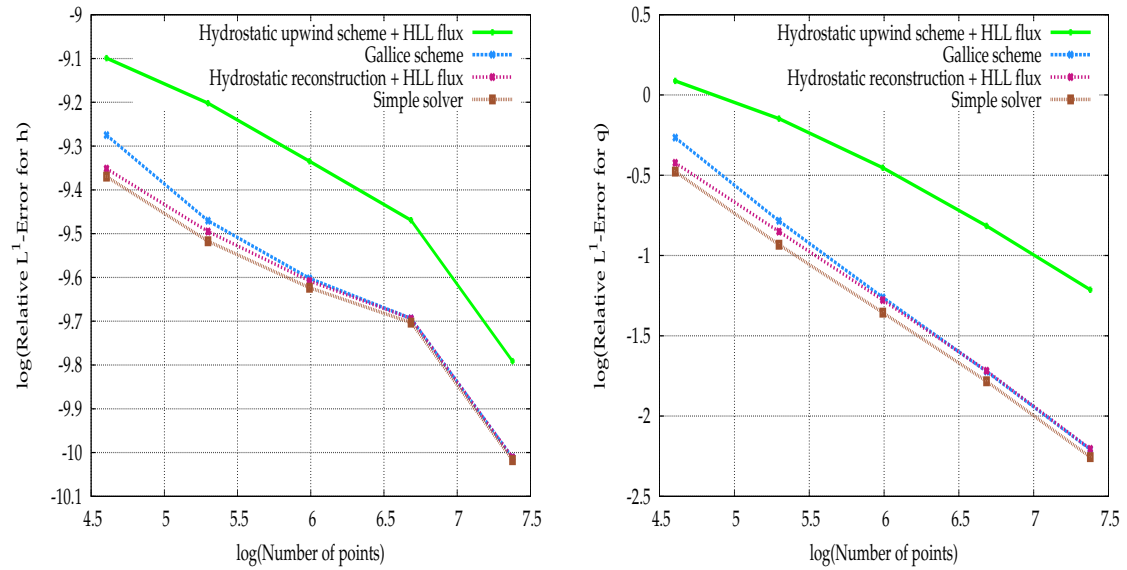


Figure 1.3: Propagation of perturbations: Comparison of orders of error for the water height  $h$  (left) and the discharge  $q$  (right) for different schemes.

The domain is  $[-2; 2]$  and the bottom topography is defined by,

$$b(x) = \begin{cases} \frac{\cos(10\pi(x+1)) + 1}{4}, & \text{if } -0.1 < x \leq 0.1, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases} \quad (1.3.4a)$$

$$(1.3.4b)$$

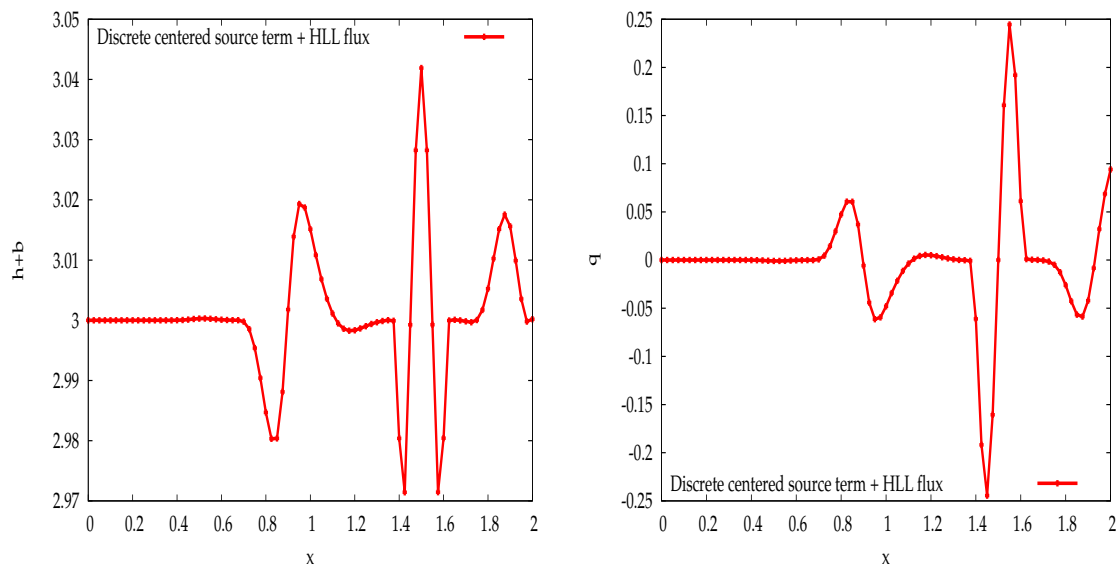


Figure 1.4: Propagation of perturbations: free surface  $h + b$  (left) and discharge  $q$  (right) resulting from the centered scheme.

The CFL parameter is equal to 0.5.

The error curves (Fig. 1.6) show that the proposed scheme gives a better approximation of the exact solution than other existing schemes with a gain of several orders.

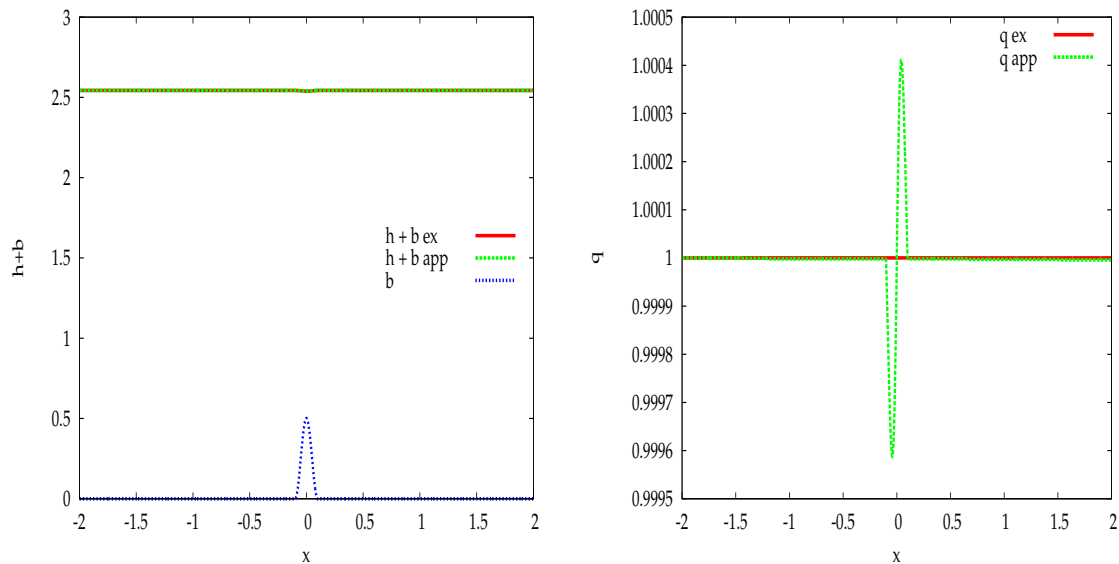


Figure 1.5: Fluvial flow: Comparison of free surfaces  $h + b$  (left) and discharges  $q$  (right) resulting from the simple scheme (with suffix app) and the exact solution (with suffix ex) for a bottom topography  $b$ .

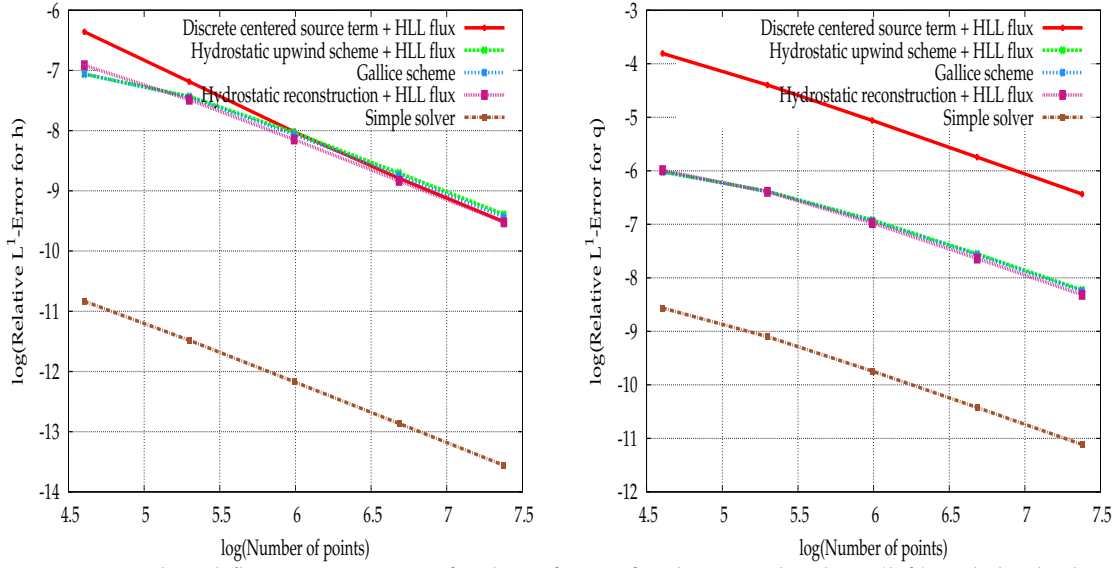


Figure 1.6: Fluvial flow: Comparison of orders of error for the water height  $h$  (left) and the discharge  $q$  (right) for different schemes.

### 1.3.2.2 Transcritical flow over a bump without shock.

This test case sets  $K_1 = 3$  and  $K_2 = \frac{3}{2}(K_1 g)^{2/3} + \frac{1}{2}g$  into the steady state equations (1.3.3) and the bottom topography is defined by (1.3.4). The CFL parameter is set to 0.5.

The observations for the fluvial case also work for the transcritical one but the gain associated to the simple scheme is not as important as the previous one (Fig. 1.8). The reason is probably because we impose opposite signs to the wave velocities and by this way, we add diffusion to the torrential part. Nevertheless, this scheme gives the best approximation.

### 1.3.2.3 Transcritical flow over a bump with shock.

This test has been proposed by Castro et al. [30]. The domain is the interval  $[0, 25]$ . The bottom topography is given by,

$$b(x) = \begin{cases} 3 - 0.05(x - 10)^2, & \text{if } 8 < x < 12, \\ 2.8, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.3.5a)$$

$$(1.3.5b)$$

The initial state is defined by  $h(0, x) = 3.13 - b(x)$ ,  $q(0, x) = 0.18$  and the boundary conditions are  $q(t, 0) = 0.18$  and  $h(t, 25) = 0.33$ . The final time is set to  $t = 200$ . We work with a CFL parameter equal to 0.9. This test case is focused on the way the scheme handles a stationary shock.

The simple scheme manages to capture the shock as shown in Figure 1.9. The errors on Figure 1.10 reveal that this scheme is again the most accurate compared to other ones.



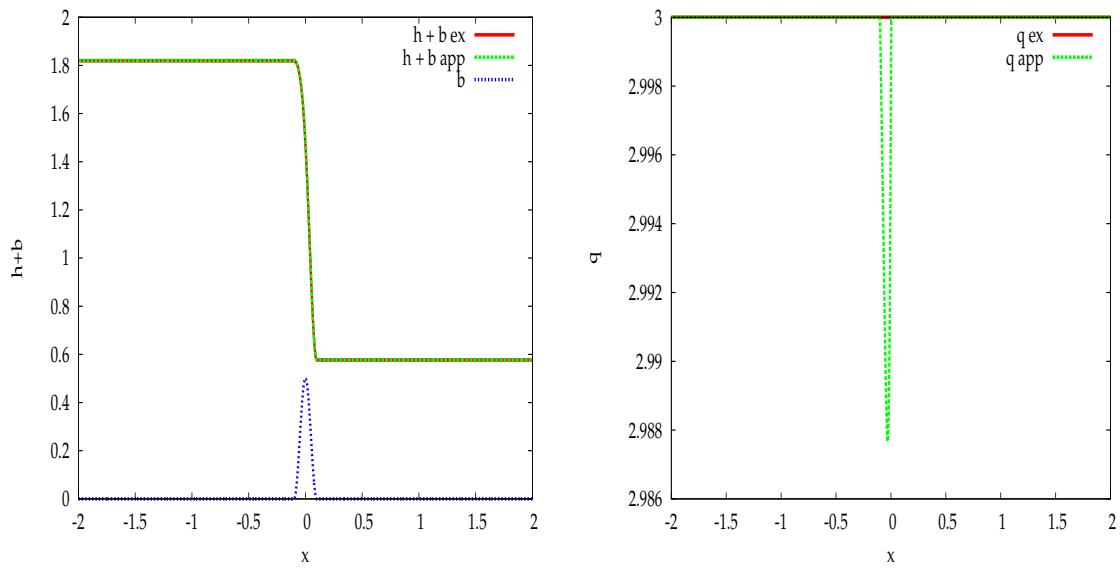


Figure 1.7: Transcritical flow without shock: Comparison of free surfaces  $h + b$  (left) and discharges  $q$  (right) resulting from the simple scheme (with suffix app) and the exact solution (with suffix ex) for a bottom topography  $b$ .

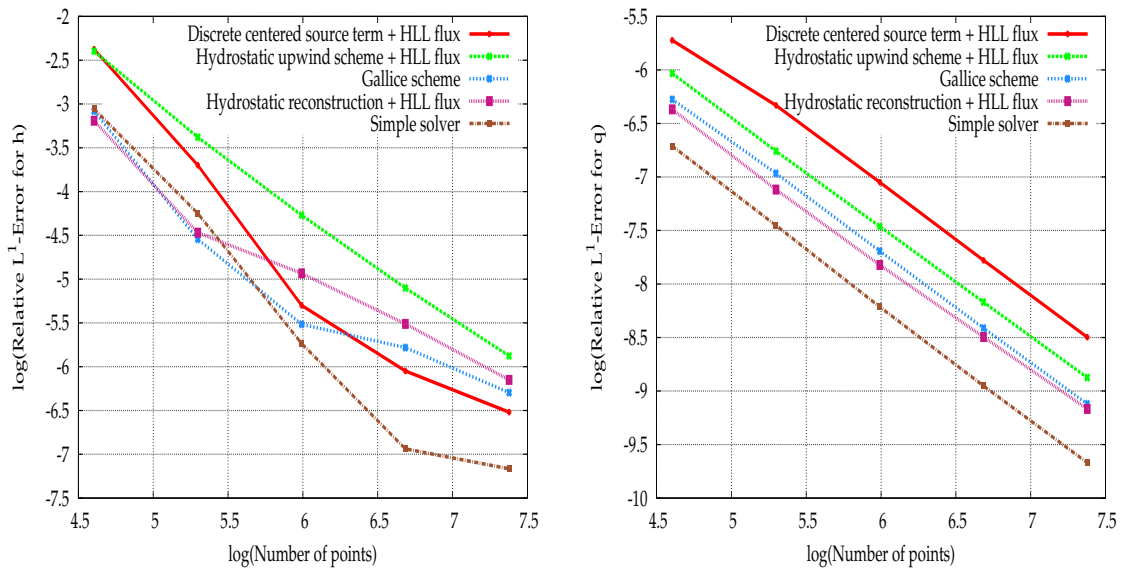


Figure 1.8: Transcritical flow without shock: Comparison of orders of error for the water height  $h$  (left) and the discharge  $q$  (right) for different schemes.

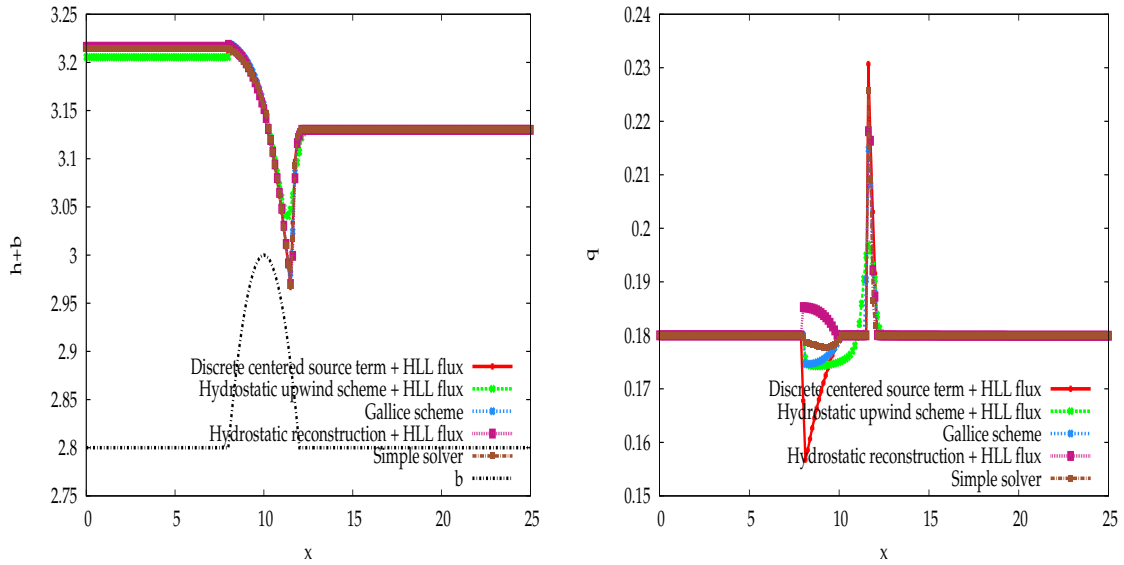


Figure 1.9: Transcritical flow with shock: Comparison of free surfaces  $h + b$  (left) and discharges  $q$  (right) for different schemes.

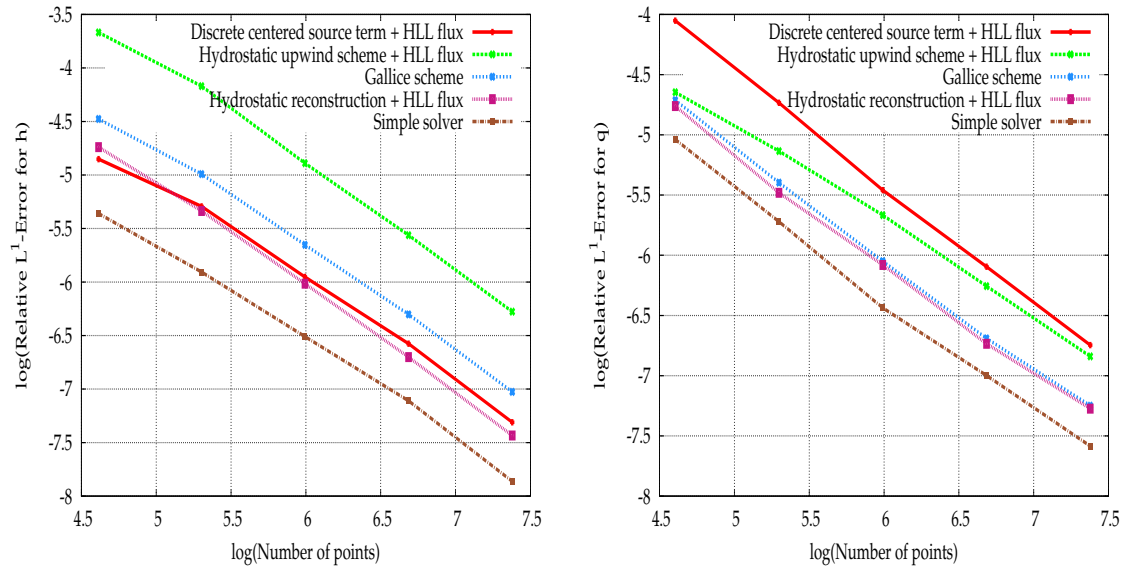


Figure 1.10: Transcritical flow with shock: Comparison of orders of error for the water height  $h$  (left) and the discharge  $q$  (right) for different schemes.

### 1.3.3 Thacker test case for wet-dry transitions.

The bottom topography is defined by,  $b(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}$  for  $-2 \leq x \leq 2$ . The explicit periodic solution presents a plane free surface and oscillates between the points,

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} \cos(\sqrt{g}t) - 1 \quad \text{and} \quad x_2(t) = -\frac{1}{2} \cos(\sqrt{g}t) + 1.$$

Here, the pulsation is  $\omega = \sqrt{g}$ .

The initial conditions are given by  $u(0, x) = 0$  and,

$$h(0, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left( \left( x + \frac{1}{2} \right)^2 - 1 \right), & \text{if } x_1(0) < x < x_2(0), \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

The water height and the velocity are expressed as follows,

$$h(t, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \left( \left( x + \frac{1}{2} \cos(\sqrt{g}t) \right)^2 - 1 \right), & \text{if } x_1(t) < x < x_2(t), \\ 0, & \text{else,} \end{cases}$$

$$u(t, x) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{g}}{2} \sin(\sqrt{g}t), & \text{if } x_1(t) < x < x_2(t), \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

We take a value of 0.5 for the CFL parameter.

This test case shows the capacity of the scheme to handle wet-dry transition. We recall that every considered scheme preserves the non negativity of the water height. We can wisely precise that in this test case, the discharges are very low which can explain the big values of the relative errors one can observe for coarse mesh (Fig. 1.12). In this case, only the hydrostatic reconstruction returns a non accurate solution.

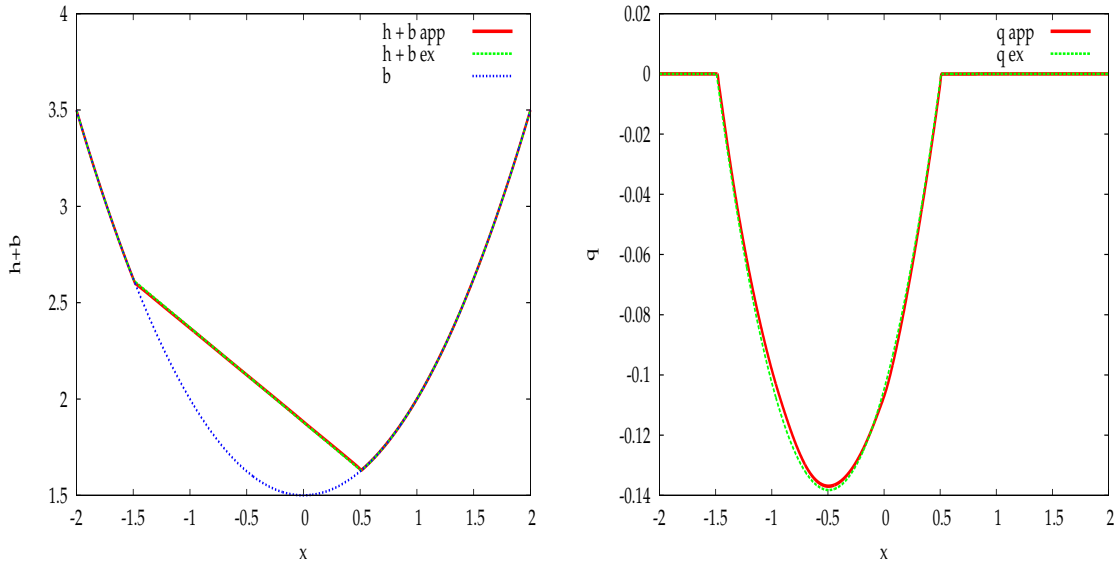


Figure 1.11: Thacker test case: Comparison of free surfaces  $h + b$  (left) and discharges  $q$  (right) resulting from the simple scheme (with suffix app) and the exact solution (with suffix ex) for a bottom topography  $b$  at time  $T = 16$ .

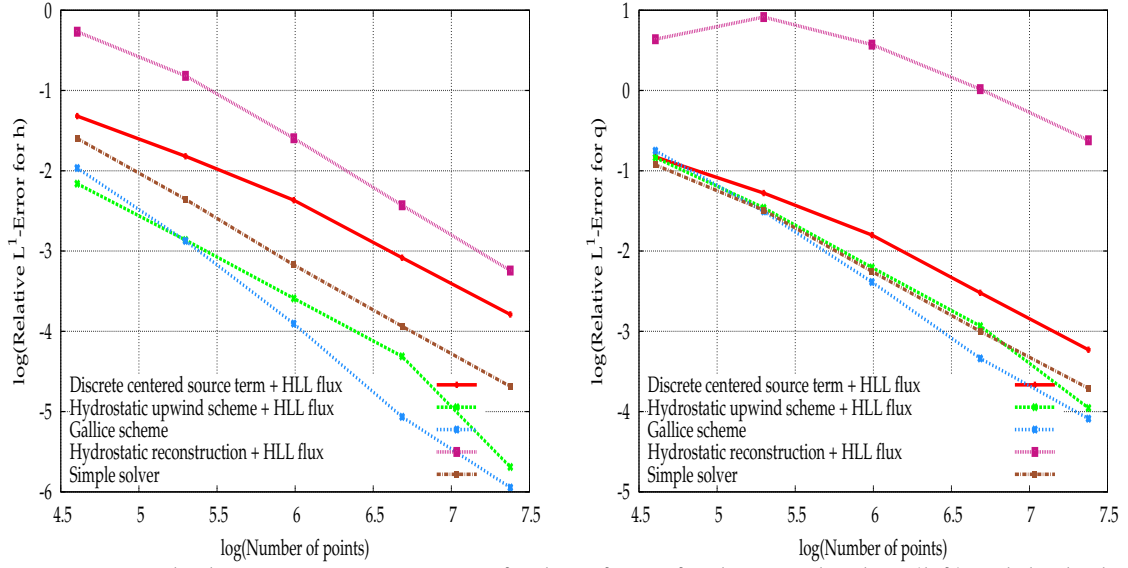


Figure 1.12: Thacker test case: Comparison of orders of error for the water height  $h$  (left) and the discharge  $q$  (right) for different schemes at time  $T = 16$ .

### 1.3.4 Wet-dry fronts in a nonflat basin.

We present another test case for the treatment of the wet-dry transition but in this case, we have a non smooth bottom topography. This problem proposed by Gallouët et al. [73] and also resumed by Castro et al. [30] consists on creating a dry bed in the middle of two rarefaction waves propagating in opposite directions. We work in the space interval  $[0, 25]$  and the bottom topography is represented by the function,

$$b(x) = \begin{cases} 7, & \text{if } 25/3 < x < 25/2, \\ 6, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (1.3.6a)$$

$$(1.3.6b)$$

The initial conditions are,

$$q(0, x) = \begin{cases} -300, & \text{if } 50/3 \leq x, \\ 300, & \text{if } 50/3 > x, \end{cases} \quad (1.3.7a)$$

$$(1.3.7b)$$

and  $h(0, x) = 16 - b(x)$ . The CFL parameter is set to 0.9. A reference solution is computed using the Gallice scheme with a mesh of 20480 points. In this particular case, the difference between the results does not clearly appear (Figure 1.14). It is important to notice that this test case does not present hypothesis satisfying the theoretical properties of our scheme in the sense that it deals with a non smooth topography. In spite of this criterion, the scheme returns a reasonable solution.

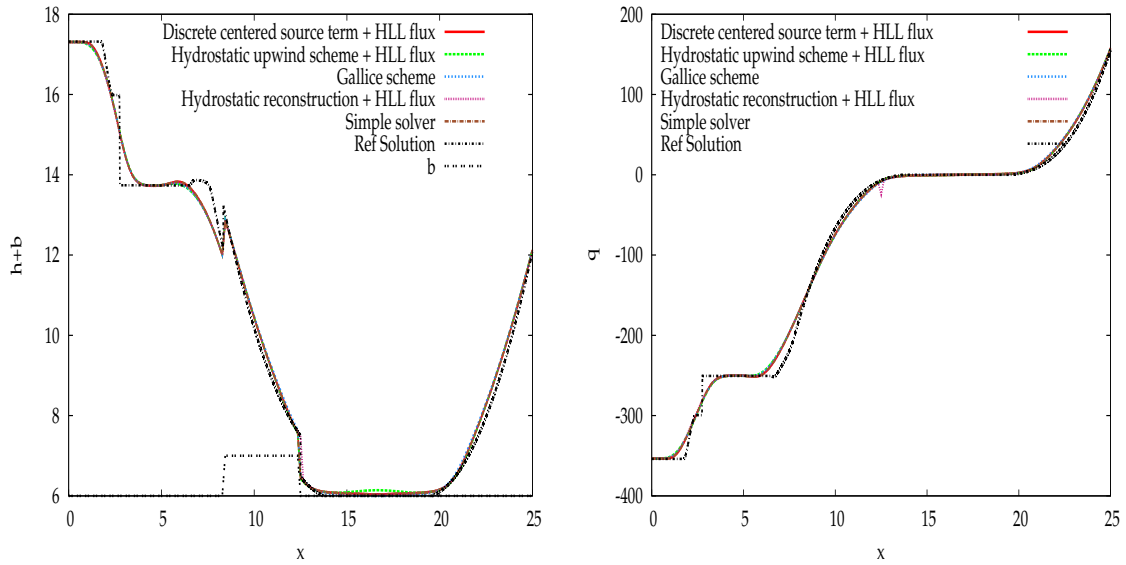


Figure 1.13: Wet-dry fronts in a nonflat basin: Comparison of free surfaces  $h + b$  (left) and discharges  $q$  (right) for different schemes.

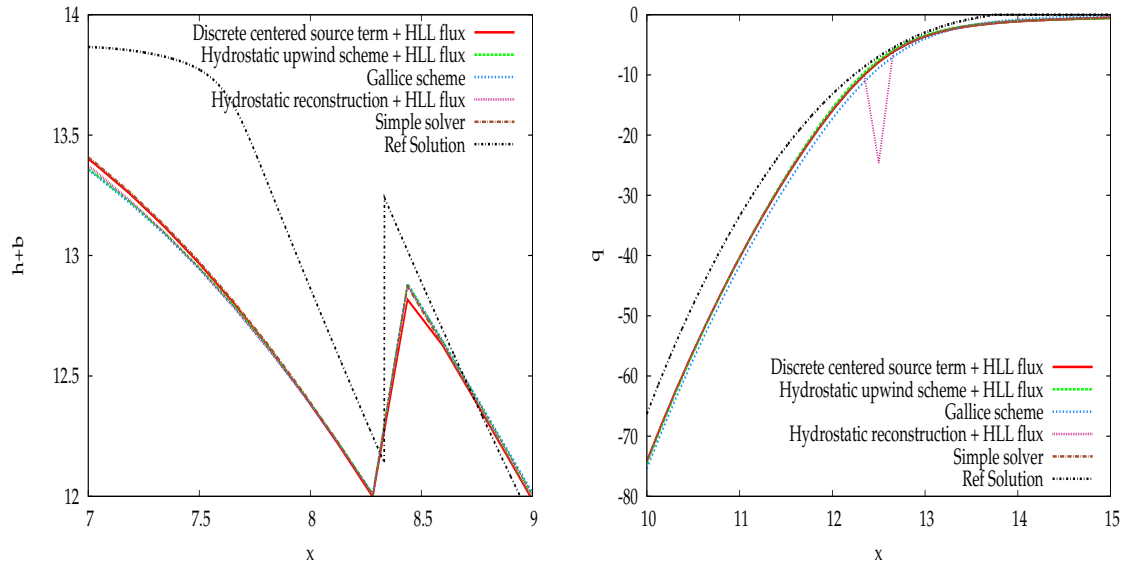


Figure 1.14: Wet-dry fronts in a nonflat basin: Comparison of free surfaces  $h + b$  (left) and discharges  $q$  (right) for different schemes.

### 1.3.5 Non-unique solution to the Riemann problem.

This numerical test case is presented in [4]. We use the same data presented in the previously mentioned paper which are,

$$(b, h, u) = \begin{cases} (1.5, 1.3, -2), & \text{if } x \leq 0.5, \\ (1.1, 0.1, -2), & \text{if } x > 0.5, \end{cases} \quad (1.3.8a)$$

$$(1.3.8b)$$

with  $x \in [0, 1]$ . We set the gravitational acceleration  $g$  to 2. The test problem has non-unique solution. The CFL parameter is set to 0.9.

The numerical solutions are separated into two groups which correspond to the two different solutions of the problem. Every considered scheme relatively return the same solution which is one of the previous two solutions whereas the simple scheme returns the second one. This last solution is quite similar to the one obtained with the relaxation solver [20], [30] and the kinetic scheme proposed in [146] that we have especially introduced for this test case and called SVK in the Fig. 1.15 and 1.16, which are both entropic. Nevertheless, these last three solutions are different from the exact one, graphically presented in [4]. As mentioned in this previous article, the reason of this difference is the lack of complete theory for non-conservative system.

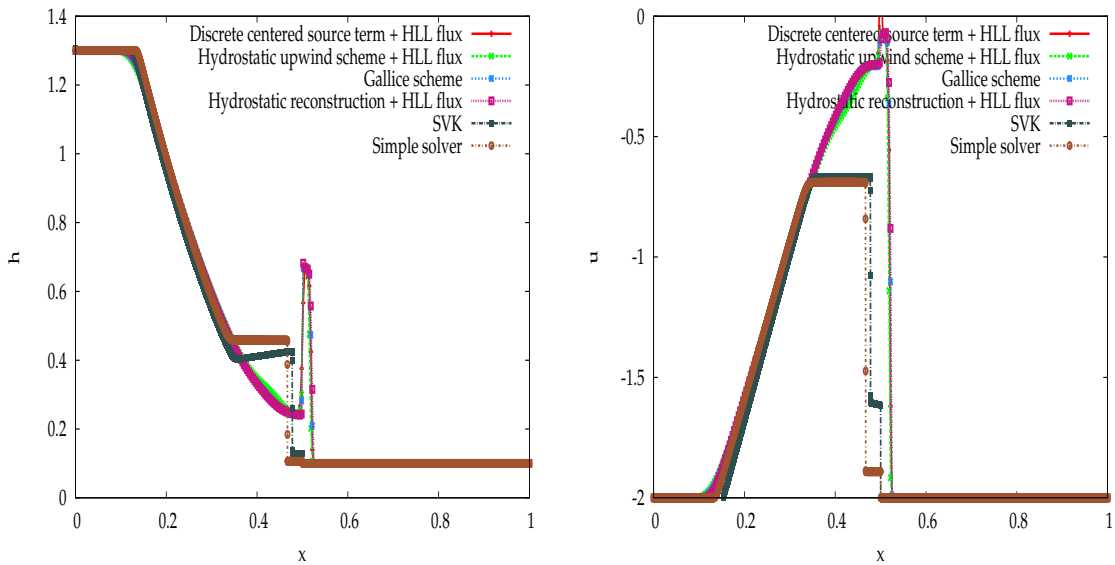


Figure 1.15: Non-unique solution test case: Comparison of water heights  $h$  (left) and velocities  $u$  (right) for different schemes.

We present the value of the two entropies (1.1.4) and (1.1.6) integrated over the domain as a function of time for different schemes on Fig. 1.16. The idea is to numerically bring out the behaviour of the entropy. It appears that the conservative entropy as well as the non-conservative one, calculated for the proposed scheme always decreases and so satisfies at least numerically the entropic criterion. On the contrary, this observation cannot be applied for the other ones in which a period of increasing entropy takes place. In a quantitative point of view, one notes that the values of the non-conservative entropy is lower than those of the conservative one. In fact, by recalling the two entropy inequalities (1.1.3) and (1.1.5), we can show that the derivative value for the conservative entropy has to be lower than zero whereas the same quantity for the non-conservative entropy has a negative upper bound causing that the non-conservative entropy decreases faster than the conservative one.

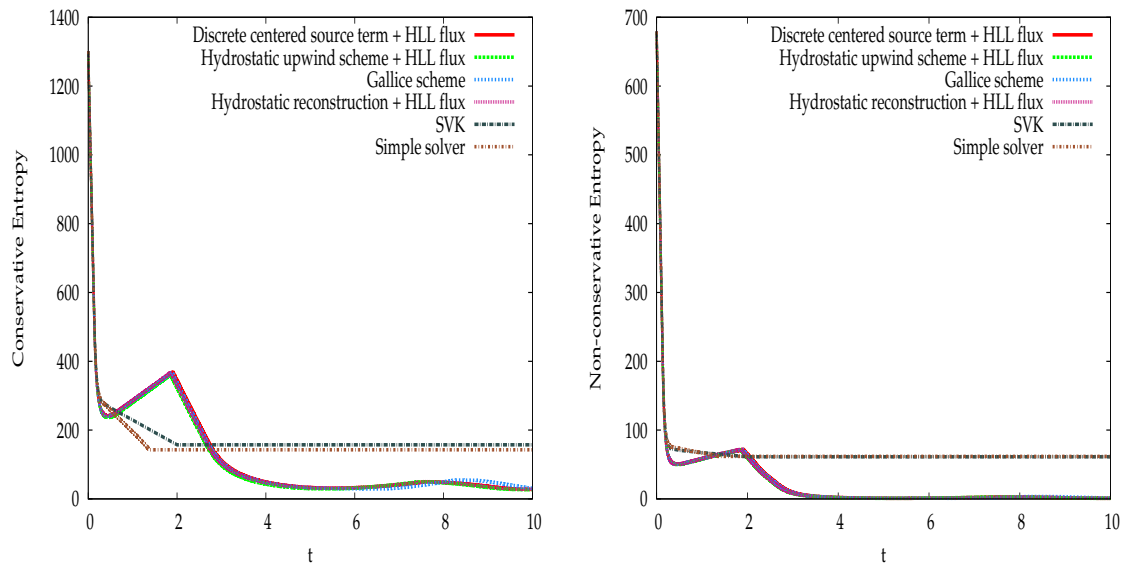


Figure 1.16: Non-unique solution test case: Comparison of the conservative (left) and non-conservative (right) entropy for different schemes.

#### 1.4 CONCLUSION.

In this chapter, we have proposed a simple to implement, positive and well-balanced scheme for the shallow water equations. The scheme proved to be very accurate on the several typical test cases: propagation of perturbation, stationary and non-stationary shock, wet-dry transition on a smooth and non smooth bottom topography. Furthermore, we have shown that it converges towards the right entropy solution in a resonant test case. The very motivation of this work comes from the numerical approximation of the solutions of the Saint-Venant–Exner equations for the problem of sediment bedload transport, to which we would like to adapt the proposed scheme therein. This is the matter of the work presented in the following chapter.







## CHAPITRE 2

# A simple three-wave Approximate Riemann Solver for the Saint-Venant–Exner equations

---

**Version française.** *Les équations de Saint-Venant–Exner sont largement utilisées dans la littérature et les codes industriels pour modéliser le transport de sédiment en rivière. Dans les codes industriels, la résolution de ce système est principalement abordée par des méthodes découplées qui permettent un couplage faible entre les modèles hydraulique et morphodynamique mais rencontrent des problèmes de stabilité. Dans les travaux récents, de nombreux auteurs ont proposé des méthodes alternatives de type volumes finis basées sur un couplage fort pour résoudre ce problème. Ce travail est dans la continuité du chapitre 1 en ce qu’il présente une extension directe et peu intrusive de l’approche précédente au système de Saint-Venant–Exner. En ce sens, il cherche à remplir deux objectifs : premièrement, on propose un schéma numérique pour approcher la solution du modèle couplé avec une méthode de type Godunov basée sur un Solveur de Riemann approché et deuxièmement, on étend la réflexion sur le couplage minimal assurant la stabilité du processus numérique global lorsque les schémas de type volumes finis sont colocalisés.*

Ce chapitre fait l’objet de deux prépublications en collaboration avec Emmanuel Audusse et Christophe Chalons pour la description et les propriétés du schéma illustrées par des cas test académiques d’une part, et Nicole Goutal et Magali Jodeau pour les comparaisons expérimentales et la prise en compte des conditions limites d’autre part.

**English version.** *The Saint-Venant–Exner equations are widely used in the literature and industrial codes to model the bedload sediment transport. In industrial codes, the resolution of this system of equations is mostly approached by a splitting method which allows a weak coupling between the hydraulic and morphodynamic models but may suffer from stability issues. In recent works, many authors proposed alternative finite volume methods based on a strong coupling to cure this problem. This work is in the continuity of the chapter 1 in the measure that it presents a direct and relatively non-intrusive extension of the previous approach to the Saint-Venant–Exner system. In that sense, it pursues two objectives : first we propose a numerical scheme to approximate the solution of the coupled model with a Godunov-type method based on a three-wave Approximate Riemann Solver (ARS) and, second, we extend the purpose to exhibit what is the minimal coupling that ensures the stability of the global numerical process when dealing with collocated finite volume schemes.*

This chapter is the subject of two preprints in collaboration with Emmanuel Audusse and Christophe Chalons for the description and the properties of the scheme through academic test cases on the one hand, and Nicole Goutal and Magali Jodeau through experimental comparisons and the consideration of the boundary conditions on the other hand.

## Contents

<b>2.1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>59</b>
<b>2.2</b>	<b>Numerical scheme.</b>	<b>63</b>
2.2.1	Generalities on Approximate Riemann Solvers.	63
2.2.2	Relations defining the intermediate states.	65
2.2.3	Expression of the intermediate states for the solid part.	66
2.2.4	Expression of the intermediate states for the hydraulic part.	67
2.2.5	Expression of the numerical fluxes.	67
2.2.6	Approximation of the wave velocities – $\lambda_L$ and $\lambda_R$ .	68
2.2.7	Positivity of the intermediate water heights.	69
2.2.8	Well-balanced property of the scheme.	70
2.2.9	Discretization of the friction term.	70
<b>2.3</b>	<b>Numerical results.</b>	<b>70</b>
2.3.1	Dune evolution in a fluvial flow.	71
2.3.2	Dune (anti-dune) evolution in a torrential flow.	72
2.3.3	Dune evolution in a transcritical flow without shock.	73
2.3.4	Dam break over a wet bottom topography.	74
2.3.5	Dam break over a dry bottom topography.	77
<b>2.4</b>	<b>Numerical strategy : Splitting or not splitting ?</b>	<b>77</b>
2.4.1	Dune evolution in fluvial regime.	81
2.4.2	Dune (anti-dune) evolution in torrential regime.	81
2.4.3	Dune evolution in transcritical regime without shock.	83
2.4.4	Dam break over a wet bottom topography.	83

2.4.5	Dam break over a dry bottom topography. . . . .	83
<b>2.5</b>	<b>Application to experimental test cases. . . . .</b>	<b>84</b>
2.5.1	Sediment bed-load transport flux. . . . .	85
2.5.2	Numerical results. . . . .	88
<b>2.6</b>	<b>Conclusion. . . . .</b>	<b>98</b>

## 2.1 INTRODUCTION.

The Saint-Venant–Exner system is widely used to model bedload sediment transport phenomenon that occurs in large time and space scales in river hydraulics or coastal studies. It takes the form of a system of three equations where the first two ones are nothing but the shallow water equations with topography and friction source terms whereas the last equation is a simple conservation law that refers to the evolution in time of the topography due to the action of the fluid. Eventually the full system writes,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, & (2.1.1a) \\ \partial_t hu + \partial_x \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -gh(\partial_x b + T_f), & (2.1.1b) \\ (1 - \Phi) \partial_t b + \partial_x q_s = 0, & (2.1.1c) \end{cases}$$

where the unknowns are the water height  $h(t, x)$ , the flow velocity  $u(t, x)$  and the bottom topography  $b(t, x)$ . The parameters are the gravitational acceleration  $g$  and the porosity of the sediment layer  $\Phi$  that will be set to zero hereafter. We also introduce the fluid discharge  $q(t, x) := h(t, x)u(t, x)$ . The friction term  $T_f$  and the sediment flux  $q_s$  are fundamental ingredients of the model since they ensure the coupling between the fluid and the solid parts. They are defined by semi-empirical formulae discussed hereafter.

The friction term  $T_f$  is usually defined by semi-empirical formulae. One of the most popular is the Manning–Strickler formula,

$$T_f = \frac{|q|q}{K_s^2 h^2 R_h^{4/3}}, \quad (2.1.2)$$

with  $K_s$  the Strickler coefficient and  $R_h$  the hydraulic radius such that,

$$R_h = \frac{A}{P},$$

where  $A$  is the cross sectional area of the flow and  $P$  corresponds to the wetted perimeter. Since we consider a rectangular channel, this radius is rewritten,

$$R_h = \frac{lh}{l + 2h},$$

where  $l$  is the width of the channel; this geometry of flume and the fact that the water height is negligible compared to the channel width implies that  $R_h \sim h$ . As previously mentioned, this term models amongst other things the action of the solid part on the fluid

which is not related to the gravity; this last one is taken into account by the term of topography. Thus, this term includes the action of the rugosity at the microscopic scale which do not explicitly appear in the term of topography. It is therefore a fundamental ingredient of the coupled model. Lets precise that this term can be define by different formulae. In particular in [78], the friction term derives from a law of the wall at the level of the Navier Stokes model. Note that it will still be neglected in some of the numerical tests to compare the results of the presented scheme with those of the existing literature.

The sediment flux formula  $q_s$  is also computed by semi-empirical formulae and is in general a function of the fluid quantities  $(h, u)$  only. The number of formulae proposed in the literature is huge and the range of applications of any of them is far from being universal, depending on the nature of the fluid flow and the characteristics of the solid bed. One can exhibit two main categories depending on whether a threshold value is used or not for the sediment transport to start. We will use in the numerical applications the Grass [84] formula,

$$q_s(t, x) = A_g |u|^{m-1} u, \quad (2.1.3)$$

and the Meyer-Peter-Müller formula,

$$q_s(t, x) = A_m (\tau^* - \tau_c^*)^{3/2}, \quad (2.1.4)$$

where  $\tau^*$  refers to a non-dimensional friction term that is weighted by the buoyancy of the sediment particles,

$$\tau^* = \frac{\rho_w h T_f}{(\rho_s - \rho_w) d},$$

that is known as the Shields parameter, where  $\rho_w, \rho_s$  are the density of the water and solid phase respectively and  $d$  the mean granular diameter. Works have been done for generalizing the sediment transport formula and extending its domain of application by taking into account the suspended load or the geological phenomena [178, 143, 138, 3, 40, 76]. In this present work, we only consider the bedload transport modelled by the Exner equation and sediment flux formula which are used in most of the industrial codes. These last ones currently use numerical methods which are not stable for some test case. Hereafter, the goal consists on proposing a method that can be directly implemented in these codes.

As for the classical shallow water model (with fixed topography), some important stability properties have to be satisfied by a numerical method to approximate correctly the solutions of system (2.1.1). In particular, the numerical scheme has to ensure the positivity of the water height and the well-balanced property especially characterized here by the preservation of the lake at rest defined by,

$$\begin{cases} \partial_x(h + b) = 0, & (2.1.5a) \\ u = 0. & (2.1.5b) \end{cases}$$

It is important to precise that the lake at rest is the unique steady state admitted by the Saint-Venant–Exner system, at least for solid discharge defined by formulae without threshold such as the Grass one (2.1.3). Note that, unlike the shallow water model, the Saint-Venant–Exner equations do not admit any associated energy inequality that could

be used to ensure another stability criterion. However, it is possible to obtain a dissipative energy inequality for simple solid discharge formulae [189]. A last important property is to be able to identify the behavior of the numerical scheme when the sediment transport vanishes since we would like to recover a relevant scheme for the classical shallow water model.

In general, the flux formula  $q_s$  makes the morphodynamic equation on  $b$  strongly coupled with the hydraulic part of the Saint-Venant–Exner model. As a consequence, the model turns out to be strongly non linear and the eigenvalues and eigenvectors of the corresponding flux Jacobian matrix have no closed algebraic form (or are hard to evaluate) which makes particularly challenging the design of simple (and coupled) numerical approximation.

Most of the industrial codes [121, 122, 124, 125] are based on this model to perform numerical simulations for sediment transport problems. The core of these software suites is the resolution of hydraulic problems. To take into account the sedimentary aspect, they call sediment modules that are able to solve the Exner equation. The two codes can then run with different numerical parameters such as the time step, the space step or the numerical scheme. They only communicate by exchanging particular data at some given time steps. Such a splitting method works well in particular cases but fails when considering fast flow and introduce numerical instabilities [98, 41, 5]. The guiding idea of this present work is to overcome this issue by bringing new informations compared to the existing works.

Another approach was popularized in the early 2000s and consists in solving the Saint-Venant equations and updating the bed topography at the same time steps in order to treat the full system. It will be called *non-splitting method* thereafter. Following the pioneering works of Hudson and Sweby [98], which proposes a suitable coupled method, has been the source of a lot of studies. Let us cite the principal ones. Extending the approach developed in [98, 97] where the authors deal with the classical Roe method [151], a lot of works are based on the computation of an approximate Jacobian matrix related to the system (2.1.1). Among them, some authors choose to extend classical solvers to systems with source terms, see for example [12] where the authors developed a finite volume non homogeneous Riemann solver (called SRNHS) that is an extension of the VF-Roe scheme, or also [168] where an approximation of the eigenvalues associated to the Jacobian matrix permits to introduce a Riemann solver for (2.1.1) based on the HLLC solver. Some other works extend the definition of the Jacobian matrix to the whole system by considering the source term as a non conservative product. This can be done with help of the definition of a family of paths in the plane phase, see [28, 26]. It is also possible to directly derive algebraic conditions to obtain a non-conservative well-balanced Roe solver, see [154, 131]. Some numerical methods have been proposed that avoid the computation of exact Jacobian or Roe matrix. In particular, Delis and coauthors proposed in a serie of papers [50, 108] a scheme that is based on the use of a relaxation model for the Saint-Venant–Exner system (2.1.1), which extended the idea introduced in [104]. The relaxation approach has also been studied in [5]. This approach appears quite attractive since it relies on linearized problems that preserve stability properties of the original model and can be

used for general sediment flux formulae since the linearized Riemann problem is solved for an homogeneous system that does not involve neither the friction term nor the sediment flux formula, both being treated in a separate step. However its resolution may not be so trivial in practice and the related scheme appears to be more diffusive than other choices. Furthermore, a simple way to compute a robust method consists in considering staggered meshes for the different variables of the system. In particular, the authors in [88] evaluate the water height and the bed elevation in the same grid whereas the velocity is evaluated in a different mesh. Note that most of these works have been extended to two-dimensional versions of system (2.1.1), see [99, 12, 29, 25, 131, 9], including comparisons with industrial software in realistic geometries [108].

The issue concerning the choice between splitting and non-splitting methods is of main interest and was discussed a lot in the last decade. In their early work [98], Hudson and Sweby already justified the introduction of the non-split method by opposing some variants of these two strategies to approximate the system (2.1.1) (called steady and unsteady approaches). The first assumption leads to a decoupled system in which the hydraulic part is solved first (until an equilibrium is reached) and then the bed topography is updated with help of the previous hydraulic variables. The second idea consists in evaluating simultaneously the water flow and the river bed at the same time step by defining a Roe-type solver based on an approximate Jacobian matrix of the whole system. It appears that the steady approach only works well in situation involving weak interaction between the hydraulic and morphodynamic parts. In general, the unsteady approach does not present this limitation and well behaves for all situations. In [97], the authors extended their analysis to the issue of the choice between splitting and non-splitting approaches, including the case where second order accurate Lax-Wendroff scheme is used to improve the accuracy of the solution (with the help of flux-limiters to avoid spurious oscillations introduced by the higher order scheme they considered). They suggest that for weak values of Froude number, it is preferable to use the splitting approach whereas the non-splitting one is more adapted to high values of Froude number. Cordier et al. bring a further contribution to the discussion in [41] and permit to establish a condition for the hyperbolicity of the model which can be lost at least theoretically for some choice of the sediment flux  $q_s$ . It appears that for some cases, the numerical instabilities initially observed for splitting methods can be avoided by a strong limitation on the time step but still not vanish in general. In that context, the authors also suggest to solve the full system with a coupled numerical scheme rather than approximating the solution by a splitting method.

In this work we try to address both aspects. First we propose and analyze a positive and well-balanced three-wave approximate Riemann solver (denoted ARS in the following) that is able to approximate the system (2.1.1) and to degenerate to the well-balanced and positive solver introduced in [8] when the sediment flux vanishes (classical Saint-Venant equations). The ARS scheme is introduced as a non-splitting method but does not need the computation of a Jacobian matrix of the full system and then can be used for general sediment flux formula. The ARS scheme is then proved to be at the frontier between the splitting and non-splitting strategies previously introduced as it borrows its philosophy both from the splitting approach for the decoupled calculations of the hydraulic and morphodynamic parts and the non-splitting one for the evaluation of the wave velocities

related to the system (2.1.1). It allows us to discuss what is the minimal quantity of coupling that should be added in industrial codes (in an as less as possible intrusive manner) to stabilize the splitting approach. Numerical tests are presented to exhibit the ability of the ARS scheme to deal with different situations and to enforce our conclusions on the splitting approach. In the last part of the chapter, we present the numerical results for classical test cases led in the laboratory and compare them to the corresponding measures obtained by the experimenters.

## 2.2 NUMERICAL SCHEME.

### 2.2.1 Generalities on Approximate Riemann Solvers.

We introduce a Godunov-type finite volume scheme for (2.1.1) when the friction term is neglected; its treatment will be described in section 2.2.9,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x hu = 0, & (2.2.1a) \\ \partial_t hu + \partial_x \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) = -gh\partial_x b, & (2.2.1b) \\ \partial_t b + \partial_x q_s = 0. & (2.2.1c) \end{cases}$$

The developed approach has been introduced for the Saint-Venant equations in [8] and the presented work takes its general form but it introduces a modelling of the evolution of the bathymetry. A main interest of this method is its simple extension to the Saint-Venant-Exner system.

We first introduce some notations that echo those used in [8]. We consider a sequence of points  $x_{i+1/2}$  such that,

$$x_{i-1/2} < x_{i+1/2}, \quad \forall i \in \mathbb{Z},$$

and we designate the cells by  $C_i$  and space steps by  $\Delta x_i = \Delta x$ , such that,

$$C_i = ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[ , \quad \Delta x = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}.$$

The center of each cell is represented by  $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2}) / 2$ .

In addition, the time step  $\Delta t > 0$  allows to introduce a sequence of intermediate times  $t^n$  given by,

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t.$$

Hereafter,  $X_i^n$  will denote the approximate cell average of  $X$  on the cell  $C_i \times [t_i, t_{i+1})$  for all  $X = h, hu, b$ . At each time  $t^n$  and interface  $x_{i+1/2}$ , one thus faces a Riemann problem between two constant states associated with the cells  $C_i$  and  $C_{i+1}$ .

Lets start from a given piecewise constant approximate solution at time  $t^n$ . Godunov-type methods propose two steps to advance the solution at time  $t^{n+1}$ :

- first, one builds an approximate solution of the Riemann problem at each interface  $x_{i+1/2}$ ,



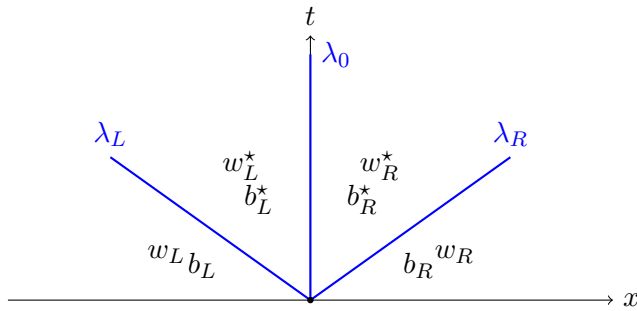
- second, one obtains the new solution by evaluating the average value of the juxtaposition of these solutions in each cell  $C_i$  at time  $t^{n+1}$ .

As an approximate Riemann solution associated with initial data,

$$(w(0, x), b(0, x))^T = \begin{cases} (w_L, b_L)^T, & x < 0, \\ (w_R, b_R)^T, & x > 0, \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$$(2.2.3)$$

with two given states  $w_L = (h_L, h_L u_L)$  and  $w_R = (h_R, h_R u_R)$ , we will consider here a simple approximate Riemann solver composed by three waves propagating with velocities  $\lambda_L < 0$ ,  $\lambda_0 = 0$  and  $\lambda_R > 0$  as shown on the fig. 2.1,



$$\lambda_L \leq 0 \leq \lambda_R.$$

Figure 2.1: Local Riemann problem.

The key point will be the definition of the intermediate states designated by  $\star$ , but contrarily to the Saint-Venant system, we also have to define  $b_L^*, b_R^*$  since the bathymetry is movable, and the states  $w_L^*, w_R^*$  are defined in the same way as that described in [8]. It is known that such an approximate Riemann solver is consistent in the integral sense with (2.1.1) [71, 72, 90] provided that the intermediate states satisfy the following consistency relations:

$$f(w_R) - f(w_L) - s(w_L, w_R, b_L, b_R) = \lambda_L((w_L^*, b_L^*)^T - (w_L, b_L)^T) + \lambda_R((w_R, b_R)^T - (w_R^*, b_R^*)^T), \quad (2.2.4)$$

with,

$$f(w) = (f^h(w), f^q(w), f^b(w))^T = (hu, hu^2 + gh^2/2, q_s(w))^T, \quad (2.2.5)$$

and  $s(w_L, w_R, b_L, b_R)$  is an approximation of the source term in (2.1.1), consistent with  $(0, -gh \Delta b, 0)^T$  since it satisfies:

$$\lim_{\substack{w_L, w_R \rightarrow w \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta x} s(w_L, w_R, b_L, b_R) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \partial_x b \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2.6)$$

Then, it is also well-known that the associated Godunov-type scheme is equivalent to the following update formulas, for  $h^0, u^0, b^0$  respectively the water height, the velocity and

the bottom topography at the initial state:

$$\begin{cases} (w_i^{n+1}, b_i^{n+1})^T = (w_i^n, b_i^n)^T - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (F_{i+1/2}^- - F_{i-1/2}^+), & (2.2.7) \\ (w_i^0, b_i^0)^T = \frac{1}{\Delta x} \left( \int_{C_i} h^0(x) dx, \int_{C_i} (h^0 u^0)(x) dx, \int_{C_i} b^0(x) dx \right)^T, & (2.2.8) \end{cases}$$

with  $F^-(w_i, w_{i+1}, b_i, b_{i+1})$  and  $F^+(w_i, w_{i+1}, b_i, b_{i+1})$  the left and right numerical fluxes (see [20]) which will be precised later on, under the well-known CFL condition which ensures that two Riemann problems do not interact,

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{2 \max(|\lambda_L|, \lambda_R)},$$

where the function max is taken over the set of all considered Riemann problems set at each interface  $x_{i+1/2}$ .

### 2.2.2 Relations defining the intermediate states.

One has to define six intermediate states namely the unknowns  $w_L^*$ ,  $b_L^*$ ,  $w_R^*$ ,  $b_R^*$ . We start from the consistency relations (2.2.4) which write,

$$\begin{cases} h_R u_R - h_L u_L = \lambda_L (h_L^* - h_L) + \lambda_R (h_R - h_R^*), & (2.2.9) \\ \left( h_R u_R^2 + \frac{g h_R^2}{2} \right) - \left( h_L u_L^2 + \frac{g h_L^2}{2} \right) + g \Delta x \{h \partial_x b\} \\ \quad = \lambda_L (h_L^* u_L^* - h_L u_L) + \lambda_R (h_R u_R - h_R^* u_R^*), & (2.2.10) \\ q_s(w_R) - q_s(w_L) = \lambda_L (b_L^* - b_L) + \lambda_R (b_R - b_R^*), & (2.2.11) \end{cases}$$

where  $\{h \partial_x b\}$  corresponds to a consistent approximation of the source term  $h \partial_x b$ . One can recognize the equations (2.2.9)-(2.2.10) already introduced in [8]. The equation (2.2.11) will be useful to establish the last relation which is presented later on in (2.2.14). Then, we add two continuity relations across the stationary wave which ensure the well-balanced property when no erosion is taken into account, see [8],

$$\begin{cases} h_L^* + b_L^* = h_R^* + b_R^*, & (2.2.12) \\ h_L^* u_L^* = h_R^* u_R^*. & (2.2.13) \end{cases}$$

Finally, as the sixth relation, we consider a minimization problem for the quantities  $b_L^*$  and  $b_R^*$  in the form,

$$\begin{aligned} \min \mathcal{F}(b_L^*, b_R^*) &= (|b_L - b_L^*|^2 + |b_R - b_R^*|^2) & (2.2.14) \\ \text{u.c. } \mathcal{H}(b_L^*, b_R^*) &= \lambda_L (b_L^* - b_L) + \lambda_R (b_R - b_R^*) - (q_s(w_R) - q_s(w_L)) = 0. \end{aligned}$$

In other words, this last relation ensures that the evolution of the bed minimizes a particular moving energy under the consistency constraint (2.2.11). This modelling of the bottom displacement thanks to an energy minimization problem was also investigated in [21] in a

different framework. Eventually, the system of non linear relations (2.2.9)-(2.2.10), (2.2.12)-(2.2.13) and (2.2.14) allows us to find the six intermediates states explicitly, see the next subsections. Note that the system can be splitted into two parts since the minimization problem (2.2.14) can be solved separately and thus defines the values of  $b_L^*$  and  $b_R^*$  that can be used as data in system (2.2.9)-(2.2.10), (2.2.12)-(2.2.13) which is exactly the same as that introduced in [8]. The solution is different from that in [8] because in the present case, the bed elevation which appears in (2.2.12) is an unknown since it corresponds to an intermediate state to determine. We will discuss this property in Section 2.4.

### 2.2.3 Expression of the intermediate states for the solid part.

We begin by solving this minimization problem by classically using the Lagrange multipliers. The partial derivatives are given by,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial b_L^*} &= -2(b_L - b_L^*), & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b_L^*} &= \lambda_L, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial b_R^*} &= -2(b_R - b_R^*), & \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial b_R^*} &= -\lambda_R, \end{aligned}$$

$\tilde{\alpha}_1$  is the Lagrange multiplier associated with the single constraint, which gives the following set of equalities,

$$\begin{cases} -2(b_L - b_L^*) + \tilde{\alpha}_1 \lambda_L = 0, \\ -2(b_R - b_R^*) - \tilde{\alpha}_1 \lambda_R = 0, \end{cases} \iff \begin{cases} \tilde{\alpha}_1 = \frac{2(b_L - b_L^*)}{\lambda_L}, \\ \tilde{\alpha}_1 = -\frac{2(b_R - b_R^*)}{\lambda_R}. \end{cases}$$

Then, one obtains the following equation,

$$(b_L - b_L^*)\lambda_R = (b_R^* - b_R)\lambda_L, \quad (2.2.15)$$

which is completed by the constraint  $\mathcal{H} = 0$ ,

$$\Delta q_s = \lambda_L(b_L^* - b_L) + \lambda_R(b_R - b_R^*),$$

or equivalently,

$$b_L - b_L^* = \frac{\lambda_R}{\lambda_L}(b_R - b_R^*) - \frac{1}{\lambda_L}\Delta q_s. \quad (2.2.16)$$

Solving (2.2.15)–(2.2.16) finally defines the values of the bottom topography of the intermediate states as follows,

$$b_L^* = b_L + \frac{\lambda_L}{\lambda_L^2 + \lambda_R^2}\Delta q_s, \quad (2.2.17)$$

$$b_R^* = b_R - \frac{\lambda_R}{\lambda_L^2 + \lambda_R^2}\Delta q_s. \quad (2.2.18)$$

### 2.2.4 Expression of the intermediate states for the hydraulic part.

It is now possible to evaluate the remaining unknowns related to the hydraulic part, see [8]. Solving the four equations (2.2.9)–(2.2.12)–(2.2.10)–(2.2.13), we obtain the values of the water heights,

$$h_L^* = h_{HLL} + \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta b^*, \quad (2.2.19)$$

$$h_R^* = h_{HLL} + \frac{\lambda_L}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta b^*, \quad (2.2.20)$$

where  $h_{HLL}$  is the intermediate water height of the well-known HLL Riemann solver [90],

$$h_{HLL} = \frac{\lambda_R h_R - \lambda_L h_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{1}{\lambda_R - \lambda_L} (h_R u_R - h_L u_L), \quad (2.2.21)$$

and the value of the discharge,

$$q^* := h_L^* u_L^* = h_R^* u_R^*,$$

$$q^* = q_{HLL} - \frac{g}{\lambda_R - \lambda_L} \Delta x \{h \partial_x b\}, \quad (2.2.22)$$

where again,  $q_{HLL}$  corresponds to the intermediate discharge of the HLL Riemann solver [90], namely,

$$q_{HLL} = \frac{\lambda_R h_R u_R - \lambda_L h_L u_L}{\lambda_R - \lambda_L} - \frac{\left( h_R u_R^2 + \frac{g h_R^2}{2} \right) - \left( h_L u_L^2 + \frac{g h_L^2}{2} \right)}{\lambda_R - \lambda_L}.$$

### 2.2.5 Expression of the numerical fluxes.

Easy calculations using (2.2.5)–(2.2.17)–(2.2.18)–(2.2.19)–(2.2.20)–(2.2.22) give,

$$\begin{cases} F^-(w_L, w_R, b_L, b_R) = f(w_L) + \lambda_L \left( (w_L^*, b_L^*)^T - (w_L, b_L)^T \right), & (2.2.23a) \\ F^+(w_L, w_R, b_L, b_R) = f(w_R) + \lambda_R \left( (w_R^*, b_R^*)^T - (w_R, b_R)^T \right). & (2.2.23b) \end{cases}$$

Since the equations for the update of the water height and the bed elevation are conservative, their corresponding numerical flux  $F^{h-}$ ,  $F^{h+}$  and  $F^{b-}$ ,  $F^{b+}$  satisfy,

$$\begin{cases} F^{h-}(w_L, w_R, b_L, b_R) = F^{h+}(w_L, w_R, b_L, b_R), & (2.2.24a) \\ F^{b-}(w_L, w_R, b_L, b_R) = F^{b+}(w_L, w_R, b_L, b_R), & (2.2.24b) \end{cases}$$

which correspond to the equations (2.2.9) and (2.2.11). At this stage, the scheme is almost entirely defined since only the choice of the extreme wave velocities  $\lambda_L$  and  $\lambda_R$  remains to be specified at each interface  $x_{i+1/2}$ . Note that when the Grass formula (2.1.3) is chosen to define the solid flux  $q_s$ , it is well-known [28] that the model is hyperbolic and finding the characteristic speeds of the model consists in calculating the roots of a third degree polynomial equation. However, for numerical purposes, it is sufficient to propose upper bounds of the roots. The computation of these upper bounds is now given. Note that it can be easily extended to the case of more complex sediment flux formulae with a threshold value like (2.1.4).

### 2.2.6 Approximation of the wave velocities – $\lambda_L$ and $\lambda_R$ .

Let us recall that for stability reasons,  $\lambda_L$  and  $\lambda_R$  must be upper bounds of the eigenvalues of the Jacobian matrix  $A$  of the model; in [168], the authors have proposed some values for the eigenvalues of  $A$ , at least approximate ones, for their Riemann solver. Easy calculations give,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ gh - u^2 & 2u & gh \\ \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.2.25)$$

with  $\tilde{\alpha} = \frac{\partial q_s}{\partial h}$ ,  $\tilde{\beta} = \frac{\partial q_s}{\partial q}$  and  $q = hu$ .

The exact values of the characteristic speeds are given by the roots of the characteristic polynomial of  $A$ , namely,

$$p_A(\lambda) = \lambda^3 - 2u\lambda^2 - (gh(1 + \tilde{\beta}) - u^2)\lambda - gh\tilde{\alpha} = 0. \quad (2.2.26)$$

Recall that we are only interested in upper bounds of the exact characteristic speeds, *i.e.* of the solutions of (2.2.26). Several strategies have been proposed in the literature but most of them are valid under strong assumptions on the polynomial coefficients. Upper bounds proposed by Nickalls [133] turn out to be accurate and can be applied to any polynomial with real roots. It consists in differentiating the polynomial until we obtain a quadratic polynomial, here,

$$3\lambda^2 - 4u\lambda - (gh(1 + \tilde{\beta}) - u^2) = 0. \quad (2.2.27)$$

The solutions  $\lambda_{\pm}$  of the corresponding equation can be then divided into two parts  $x_0$  and  $\Omega$ ,

$$\lambda_{\pm} = x_0 \pm \Omega, \quad (2.2.28)$$

such as  $x_0 = \frac{2u}{3}$  and  $\Omega = \frac{1}{3}\sqrt{u^2 + 3gh(1 + \tilde{\beta})}$ . In this form, we can exhibit the abscissa of the inflexion point which is equal to  $x_0$ , and  $\Omega$  can be interpreted as the distance in the horizontal direction between the two local extrema of the polynomial (2.2.26) and the inflexion point. The Nickalls' theorem states that all the roots of (2.2.26) lie in the range

bounded by  $x_0 \pm 2\Omega$ . That is why, we define the wave velocities by,

$$\lambda_L = x_0 - 2\Omega, \quad (2.2.29)$$

$$\lambda_R = x_0 + 2\Omega. \quad (2.2.30)$$

To ensure the condition  $\lambda_L \geq 0 \geq \lambda_R$ , we impose,

$$\begin{cases} \lambda_L = \min_{w=w_L, w_R} (x_0 - 2\Omega, 0), \\ \lambda_R = \max_{w=w_L, w_R} (x_0 + 2\Omega, 0). \end{cases} \quad (2.2.31a)$$

$$(2.2.31b)$$

Contrary to the Saint-Venant case in [8], this condition is not a restriction of the method. Indeed, in [41], *Cordier et al.* establish that the lowest wave velocity associated to the Saint-Venant–Exner system is always negative and the highest one is positive. Thus, imposing the sign of the wave velocities  $\lambda_L$  and  $\lambda_R$  is not a limitation.

### 2.2.7 Positivity of the intermediate water heights.

As far as (2.2.19) and (2.2.20) are considered (or used), the positivity of the intermediate water heights is not ensured. We thus propose a similar treatment to the one used in the case of the shallow-water equations [8].

Notice that the signs of  $h_L^*$  and  $h_R^*$  depend on the sign of  $\Delta b^*$ . With this in mind, we propose to replace the values of the water heights  $h_L^*$  and  $h_R^*$  by  $\tilde{h}_L^*$  and  $\tilde{h}_R^*$  such that,

1. if  $\Delta b^* \geq 0$ ,

$$\lambda_R \tilde{h}_R^* = \lambda_R \max(h_R^*, 0), \quad (2.2.32)$$

$$\lambda_L \tilde{h}_L^* = \lambda_L h_L^* - \lambda_R (h_R^* - \tilde{h}_R^*), \quad (2.2.33)$$

2. if  $\Delta b^* < 0$ ,

$$\lambda_L \tilde{h}_L^* = \lambda_L \max(h_L^*, 0), \quad (2.2.34)$$

$$\lambda_R \tilde{h}_R^* = \lambda_R h_R^* - \lambda_L (h_L^* - \tilde{h}_L^*). \quad (2.2.35)$$

We can easily check that these modifications preserve the positivity of the water heights. Indeed, for the first case, it is clear that  $\tilde{h}_R^*$  is positive. The value of  $h_R^*$  could be  $h_R^*$  or 0. In the first situation,  $\tilde{h}_L^* = h_L^*$  which is positive, and in the second one,

$$\lambda_L \tilde{h}_L^* = \lambda_L h_L^* - \lambda_R h_R^* \iff h_R^* = h_L^* - \frac{\lambda_R}{\lambda_L} h_R^* > 0.$$

We apply the same calculations to prove the positivity of the water height in the case  $\Delta b^* < 0$ .

### 2.2.8 Well-balanced property of the scheme.

To ensure this property, we work with the following discretization of the source term already used in [8],

$$\{h\partial_x b\} = \begin{cases} \frac{h_L + h_R}{2\Delta x} \min(h_L, \Delta b), & \text{if } \Delta b \geq 0, \\ \frac{h_L + h_R}{2\Delta x} \max(-h_R, \Delta b), & \text{if } \Delta b < 0. \end{cases} \quad (2.2.36a)$$

$$(2.2.36b)$$

With this formulation, we can preserve the classical lake at rest.

### 2.2.9 Discretization of the friction term.

This term is numerically treated in an implicit way for stability purposes; the following treatment has been presented in [140]. We suppose that  $q_i^{n+1}$  is the solution of (2.2.1) at time  $t^{n+1}$ . Then, the solution of (2.1.1)  $\tilde{q}_i^{n+1}$  at time  $t^{n+1}$  is obtained by solving the equation,

$$\tilde{q}_i^{n+1} = q_i^{n+1} - g \Delta t \frac{|\tilde{q}_i^{n+1}| \tilde{q}_i^{n+1}}{K_s^2 h_i^{n+1} (R_{h,i}^{n+1})^{4/3}}. \quad (2.2.37)$$

We suppose that  $\tilde{q}_i^{n+1}$  has the same sign as  $q_i^{n+1}$  and finally define,

$$\tilde{q}_i^{n+1} = \begin{cases} \frac{-1 + \sqrt{1 + 4a q_i^{n+1}}}{2a}, & \text{if } q_i^{n+1} > 0, \\ \frac{1 - \sqrt{1 - 4a q_i^{n+1}}}{2a}, & \text{if } q_i^{n+1} \leq 0, \end{cases} \quad (2.2.38)$$

$$(2.2.39)$$

$$\text{with } a = \frac{g \Delta t}{K_s^2 h_i^{n+1} (R_{h,i}^{n+1})^{4/3}}.$$

## 2.3 NUMERICAL RESULTS.

In order to validate the proposed scheme, called *SimSol* (for ‘‘Simple Solver’’) hereafter, we perform a series of classical test cases from the literature and we extend them to cover additional flow regimes. Thus we study the simulation of dune evolution in fluvial [98, 97, 50, 28, 12, 9], transcritical [41] and torrential [9] flow regimes, and the dam break problem over a moveable bed [131, 5] with or without dry state. Up to our knowledge, we propose the first complete study of these cases namely the flow over a bump and the dam break. For all test cases, we compare our results with those obtained for a scheme based on the computation of an approximate Jacobian matrix and so called Intermediate Field Capturing Riemann solver [141, 60] and an other one based on a relaxation approach [5]. They are respectively referred as to *IFCP* and *Relaxation* thereafter. To complete the study, we determine the error curves for some test cases by considering a

reference solution calculated with help of the IFCP scheme in a mesh with 4000 cells. In addition we consider the widely used Grass formula (2.1.3) since it is widely used in the literature. For the last test case we also compare the results with the ones obtained with the two sediment flux formulae (2.1.3) and (2.1.4).

### 2.3.1 Dune evolution in a fluvial flow.

This classical test case is a sediment transport problem which considers a bump under a fluvial flow. It is well known that the splitting strategy works for this test case [41]. The length of the channel is  $L = 1000 m$  and the initial data are parametrized by,

$$\begin{cases} b(0, x) = \begin{cases} 0.1 + \sin^2\left(\frac{(x-300)\pi}{200}\right), & \text{if } 300 \leq x \leq 500 m, \\ 0.1, & \text{elsewhere,} \end{cases} \\ h(0, x) = 10 - b(0, x), \\ u(0, x) = \frac{q_0}{h(0, x)}, \end{cases}$$

with  $q(t, 0) = q_0 = 10 m^2/s$  the inflow discharge. Fig. 2.2 shows the topography at time  $T = 700 s$  with a mesh of 2000 elements. It clearly appears that the proposed scheme is less diffusive compared to the other ones; the relaxation method introduces the highest diffusive effect since no shock front appears and the top of the bump is two times lower than the other values. In addition, the scheme succeeds in computing the shock front. One can also notice that the results returned by this scheme with the wave velocities obtained by the Nickalls' bounds and those approximated by the IFCP solver are quite similar even if the solution associated to the last one is a bit more diffusive. On fig. 2.3, it appears that the presented scheme is the most accurate. In comparison, the accuracy of the relaxation scheme is slightly influenced by the refinement of the mesh since the corresponding curve does not decrease really fast.

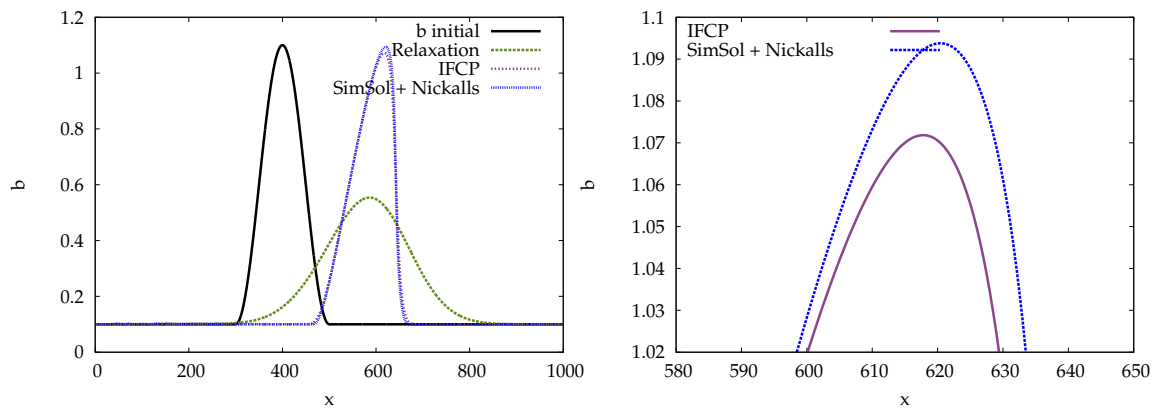


Figure 2.2: Fluvial flow: Comparison of dune evolution for different numerical schemes.



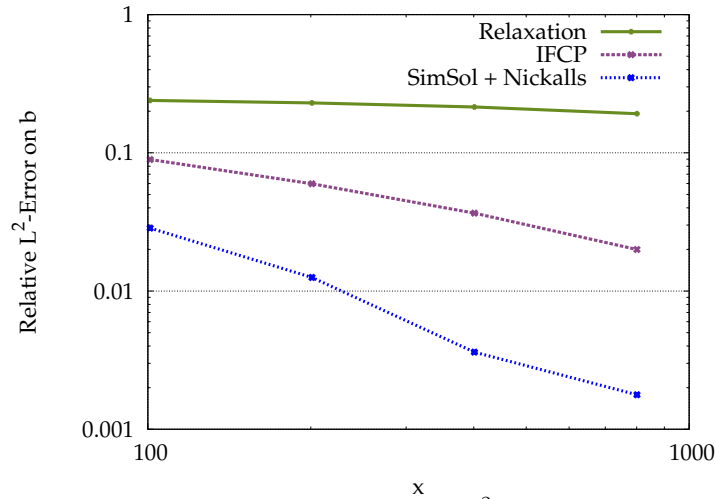


Figure 2.3: Fluvial flow: Relative  $L^2$ -error on  $b$ .

### 2.3.2 Dune (anti-dune) evolution in a torrential flow.

This test case is a modified version of the one presented in [9]. A torrential flow over a moveable bed with an initial bump permits to deal with the anti-dune phenomenon. The channel is  $L = 24\text{ m}$  long and the initial bottom topography is,

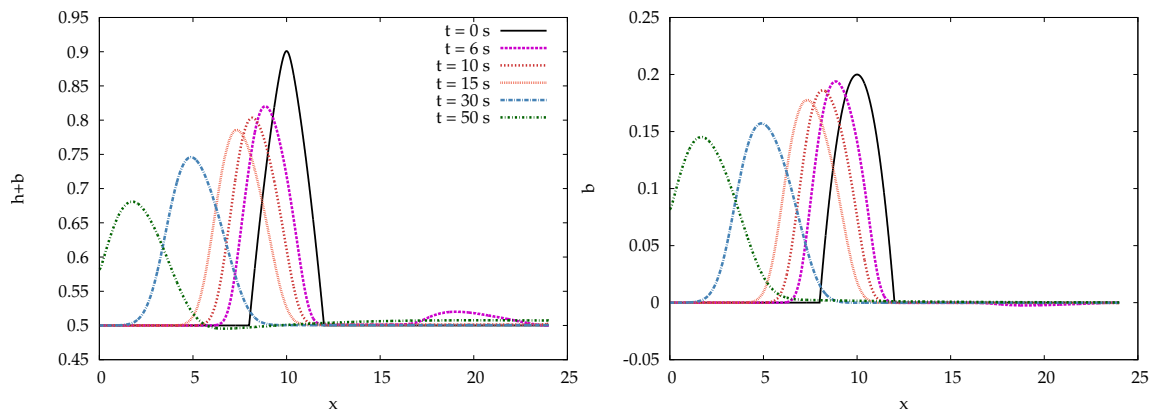
$$b(0, x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10)^2, & \text{if } 8 \leq x \leq 12\text{ m}, \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

We impose a uniform discharge  $q(0, x) = q_0 = 2\text{ m}^2/\text{s}$  and evaluate the corresponding water height in the stationary state for the Saint-Venant equations thanks to the Bernoulli's law,

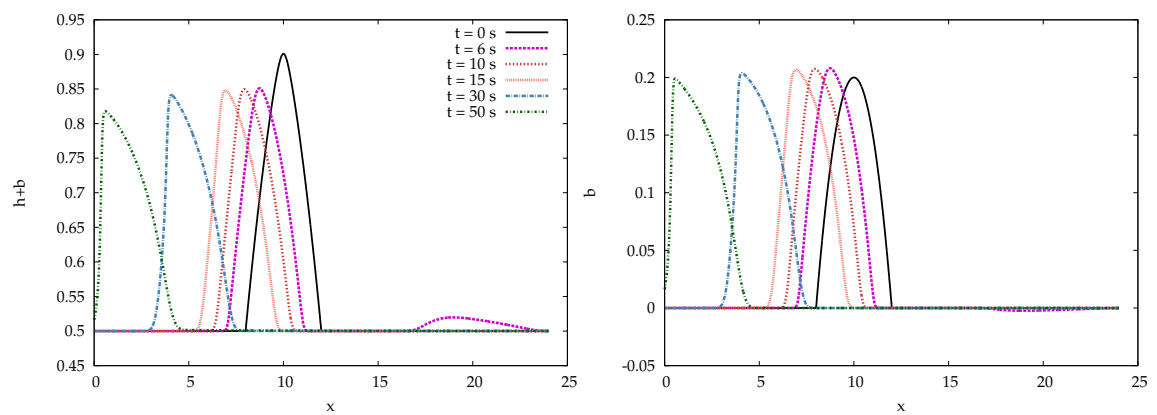
$$\begin{cases} q(t, x) = q_0, \\ \frac{q_0^2}{2gh^2} + h + b = H_0 = \frac{q_0^2}{2gh_0^2} + h_0 + b(0, 0), \end{cases}$$

with  $h(t, 0) = h_0 = 0.5\text{ m}$ . The Grass formula (2.5.3) defines the solid flux with parameters  $A_g = 0.001$  and  $m = 3$ . We run the test case with a 2400-element mesh and consider the solution at time  $T = \{6\text{ s}, 10\text{ s}, 15\text{ s}, 30\text{ s}, 50\text{ s}\}$ . In this particular test case, the erosion operates after the top of the bump; at this point the velocity is greater than before the top of the dune causing the upstream migration of the anti-dune. The deposition of sediments occurs at the upstream of the bump. Furthermore, the scheme computes well the shock front of the dune and is less diffusive than the relaxation method as shown on fig. 2.4. In addition, it is noticed that the solutions obtained by the proposed scheme and the IFCP based method share a similar behaviour.

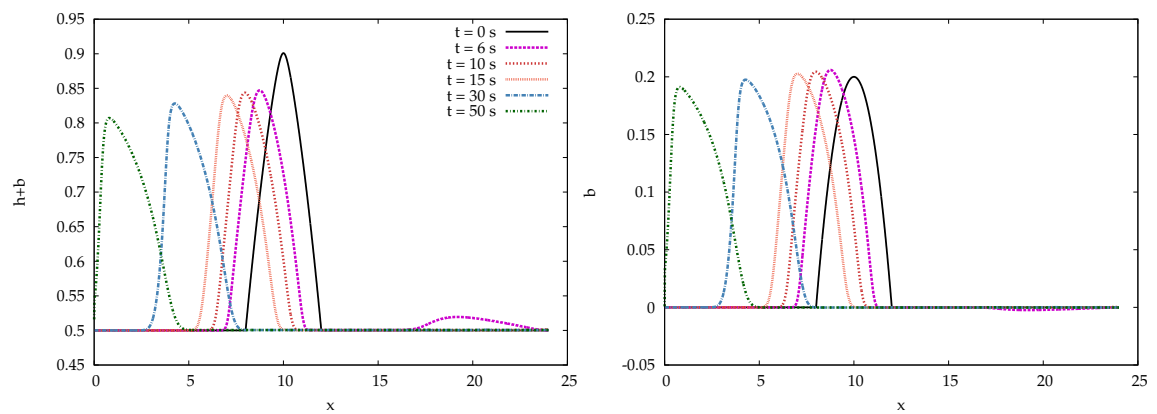
In this test case, the approximation error committed by the presented scheme is quite similar to those of the other schemes as it is shown in fig. 2.5.



(a) Relaxation



(b) IFCP



(c) SimSol+Nickalls

Figure 2.4: Anti-dune: Comparison of anti-dune evolution for different schemes at different times.

### 2.3.3 Dune evolution in a transcritical flow without shock.

This test case describes a transcritical flow without shock over a bump [41]. Since this test case considers a negative eigenvalue, it is well known that a splitting strategy using an

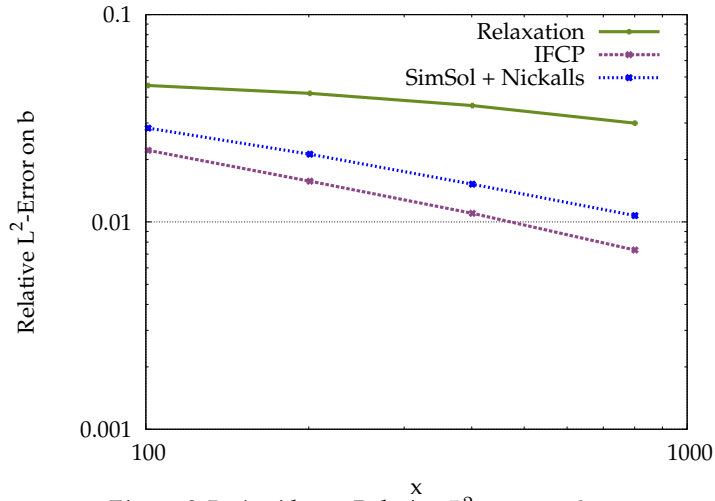


Figure 2.5: Antidune: Relative  $L^2$ -error on  $b$ .

upwind discretization may fail [41]. The length of the channel is  $L = 10\text{ m}$  and the initial data are defined by,

$$\begin{cases} b(0, x) = 0.1 + 0.1 e^{-(x-5)^2}, \\ h(0, x) = 0.4 - b(0, x), \\ q(0, x) = 0.6, \end{cases}$$

In fact, we begin by solving the shallow water system by imposing  $A_g = 0$  in order to obtain a steady state solution; in our case, we have imposed an intermediate time equal to 20 s. Starting from this last solution, we solve the Saint-Venant–Exner equations by defining the sediment flux  $q_s$  using the Grass formula with  $A_g = 0.0005$  and  $m = 3$ . This numerical test gives the results with a 1000-element mesh at time  $T = 15$  on fig. 2.6. We observe an erosion of the dune which mainly operates at the downstream of its top; the lost materials are evacuated at the downstream of the flow. One notes that the relaxation model returns a quite diffusive solution compared to the ones obtained with the proposed solver and the IFCP scheme which both converge to the same solution.

The fig. 2.7 shows that the error for the three different methods is quite similar even if the IFCP appears the most accurate. In regard to the running time and the accuracy, the presented scheme offers a reasonable balance between these two criteria.

### 2.3.4 Dam break over a wet bottom topography.

For this test case, we consider a dam break over a flat wet bottom. We define the Exner law with the Grass formula with parameters  $A_g = 0.005$  and  $m = 3$ . The channel is  $10\text{ m}$  long and we impose the following initial conditions,

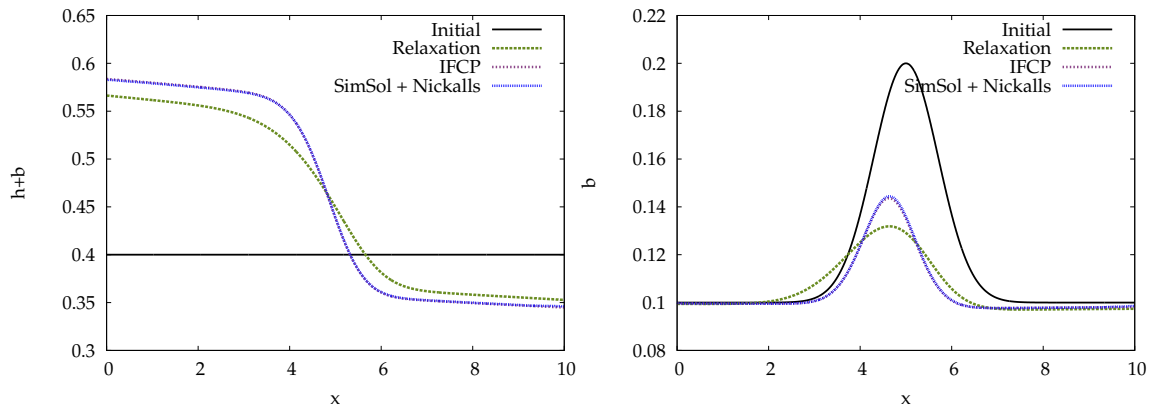


Figure 2.6: *Trancritical flow without shock: Comparison of dune evolution for different numerical schemes.*

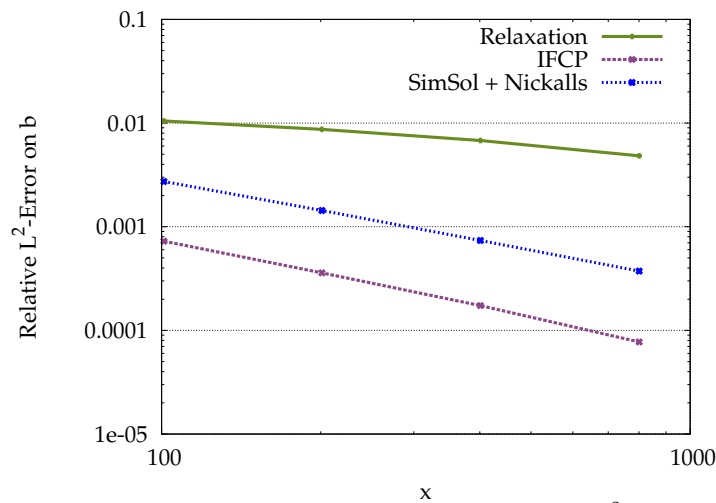


Figure 2.7: *Trancritical flow without shock: Relative  $L^2$ -error.*

$$\begin{cases} h(0, x) = \begin{cases} 2 m, & \text{if } x \leq 5 m, \\ 0.125 m, & \text{if } x > 5 m, \end{cases} \\ u(0, x) = 0 m/s, \\ b(0, x) = 0 m. \end{cases}$$

The results on fig. 2.8 are obtained with a 1000-element mesh at time  $T = 1 s$ . This test case has been presented in [5] and has revealed that instabilities appear when we solve the system (2.1.1) using a splitting approach; the spurious oscillations result from the fact that the flow reaches a torrential regime in this test case. Indeed, using the eigenvalues associated to the Saint-Venant system implies that we lose information related to the negative wave velocity which is associated to the Saint-Venant–Exner system since the first mentioned eigenvalues are positive in torrential regime. Here, we do not observe instabilities and the results are similar for the three schemes. The error curves presented on fig. 2.9 show that the IFCP scheme is the most accurate. Concerning the presented scheme, it satisfies the mesh convergence property and its accuracy is reasonable since it is close to the most accurate scheme.

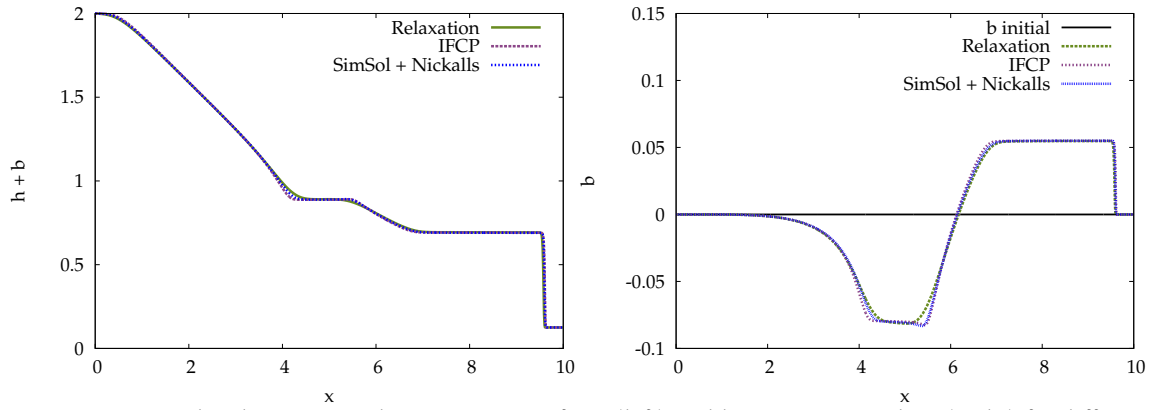


Figure 2.8: Dam break over a wet bottom: Free surfaces (left) and bottom topographies (right) for different schemes.

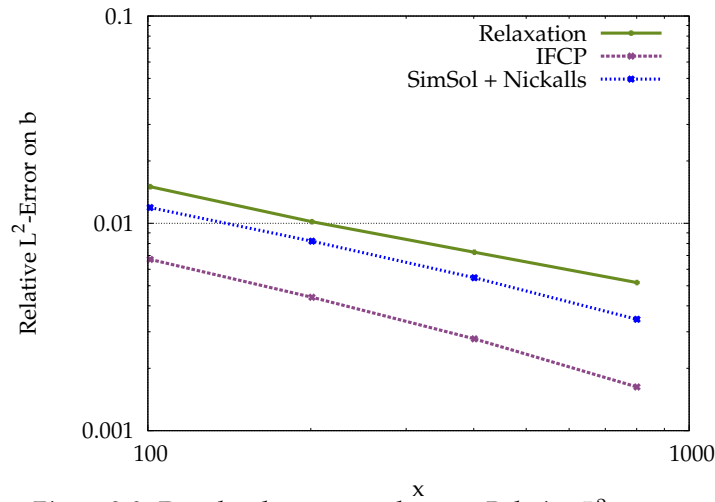


Figure 2.9: Dam break over a wet bottom: Relative  $L^2$ -error.

Another interest is the comparison of the results with two different sediment fluxes: the Grass (2.5.3) and the Meyer-Peter & Müller (2.1.4) formulae. This comparison needs to adapt the Grass' constant to the Meyer-Peter & Müller formula (see [28] for details),

$$A_g = \frac{A_m}{(Rd)^{3/2} K_s^3 \sqrt{h}}, \quad R = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w} \quad (2.3.1)$$

where we assume  $R_h = h$  (rectangular channel with large width). In fig. 2.10, it appears that the results are quite similar. We notice that the erosion is a little more pronounced with the Grass formula than the Meyer-Peter & Müller one. It can be explained since the latter considers a threshold value for the Shields parameter under which no sediment is transported. On the contrary, Grass assumes that the bed load transport always occurs.

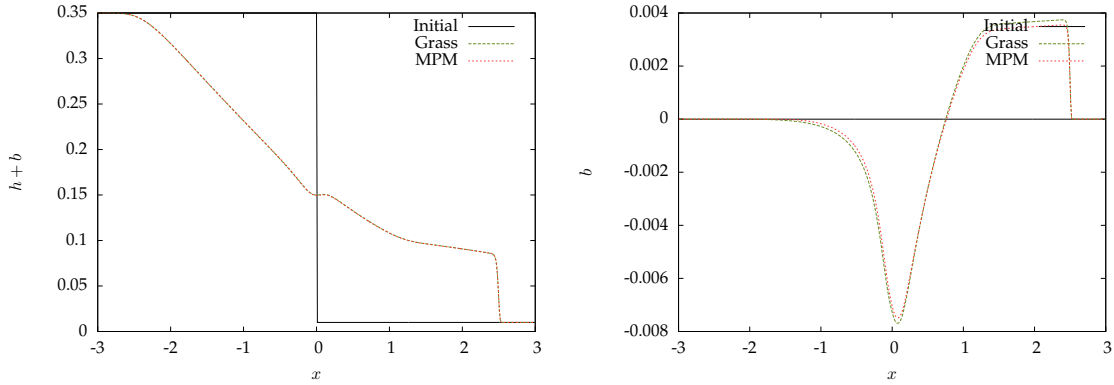


Figure 2.10: Dam break over a wet bottom: Comparison between the Grass and the Meyer-Peter & Müller formulae for free surfaces (left) and bottom topographies (right).

### 2.3.5 Dam break over a dry bottom topography.

The test case is the same as the previous one excepted that the initial water height exhibits dry zone,

$$h(0, x) = \begin{cases} 2 \text{ m}, & \text{if } x \leq 5 \text{ m}, \\ 0 \text{ m}, & \text{if } x > 5 \text{ m}. \end{cases}$$

The results in fig. 2.11 are obtained with a 1000-element mesh at time  $T = 1 \text{ s}$ . For this test case, we consider the friction term in the model (2.1.1) to obtain a stable solution (friction term was not included in the previous test cases for the sake of comparisons with results of the literature).

**Remark 2.3.1.** Since the relaxation solver and the IFCP one are not adapted to handle vacuum at least in the way we computed them, these schemes are run with a thin layer of water such that,

$$h(0, x) = \begin{cases} 2 \text{ m}, & \text{if } x \leq 5 \text{ m}, \\ 10^{-3} \text{ m}, & \text{if } x > 5 \text{ m}. \end{cases}$$

It is worth underlying that the new ARS scheme works with a classical CFL condition if we impose a low bound for the CFL condition (here, we have set 0.1) in the case where we exactly impose a dry zone  $h = 0$  for  $x > 5 \text{ m}$ . Under this condition, we observe that the solution is smooth and does not present instabilities (see fig. 2.11). In addition, one can notice that the solutions of the proposed scheme and the IFCP solver behave in a similar way whereas the relaxation is a bit more diffusive solution. Within the interval  $[4, 6]$ , one observes that erosion strongly occurs at the boundaries of the cavity, which cannot be seen with the relaxation solver.

## 2.4 NUMERICAL STRATEGY : SPLITTING OR NOT SPLITTING ?

The proposed Godunov-type scheme is at the interface between the splitting and non-splitting methods since we pointed out that,

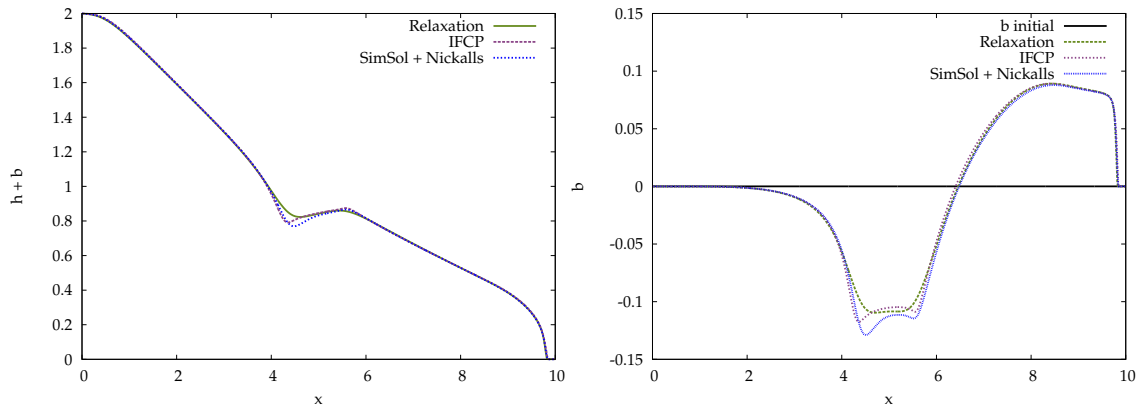


Figure 2.11: Dam break over a dry bottom: Free surfaces (left) and bottom topographies (right) for different schemes.

- it is based on a three-wave approximate Riemann solver for the coupled model and the computation of the wave velocities is performed by approximating the eigenvalues of the Jacobian matrix of the whole system (2.1.1),
- the computation of the intermediate states is performed in a splitting way by evaluating first the solid quantities through the solution of a constraint energy minimization problem and then the fluid quantities by using the scheme proposed in [8].

Hence it seems legitimate to propose a new contribution to the discussion about the best coupling strategy "splitting or not splitting?" that was initiated in [98] and pursued in particular in [41], including all the works listed in the introduction and devoted to the derivation of numerical schemes adopting the non-splitting strategy. In all these works, it is emphasized that the splitting strategy is well-adapted for weak and slow interaction between fluid and solid parts but is intrinsically doomed to fail for a large range of test cases. In particular, in [41], the authors exhibit that, unlike the case of the Saint-Venant system, there always exists a negative and a positive eigenvalue for the Saint-Venant–Exner system (2.1.1). They conclude that the splitting approach is not able to deal with torrential flows since in this situation, all the eigenvalues of the Saint-Venant systems have the same sign and then the fluid solver relies on a simple upwind strategy. To our opinion, the situation is not so simple since in the splitting strategy, some numerical information is also transported through the discretization of the Exner equation and then one has to consider both fluid and solid discretization strategies. In the following, we investigate two numerical strategies where we introduce a slight coupling in a classical splitting approach in order to obtain a stable solver; the strategies will concern the fluid solver on the one hand, and the solid one on the other hand, without modifying the other solver in each case (respectively, the solid and the fluid ones).

We first investigate the case where we modify the solid solver. This strategy is the less intrusive, since it keeps unchanged the fluid solver—we already pointed out that it is in general the key idea of industrial software—and to use some outputs to modify the

discretization of the Exner equation. More precisely, we propose to adapt the numerical strategy for the Exner equation to the nature of the flow through the computation of the Froude number that characterizes the flow regime. In torrential flow situations, since no information is transported downstream by the flow, one can think of applying a downstream strategy to the discretization of the Exner equation in order to ensure that information is transported in both direction, as it has to be since the coupled system has both positive and negative eigenvalues. In fluvial flow cases, the direction of discretization of the Exner equation follows the direction of the velocity of the material. As an illustration, we present in fig. 2.12 the numerical results that are obtained for the three dune evolution test cases of Section 2.3 when considering a splitting strategy based on,

- the ARS scheme [8] for the Saint-Venant system
- an upwind or a downwind strategy for the Exner equation

It appears that in these simple test cases and depending on the proposed discretization of the Exner equation on  $b$ , there always exists a stable splitting strategy. Note that one and only one (among the proposed two) strategy is stable and that none of them is stable for the three test cases at the same time. In other words, the coupling between the fluid and the solid parts must take into account the nature of the flow regime. Note that such a coupling might not be easy to extend to (possibly two dimensional) complex flows with flow regimes that may vary in space. The strategy that consists in applying a centered discretization of the Exner equation is shown to be unstable for some test cases hereafter. Although this strategy cannot be generalized for all cases of interest, it shows that in some cases where the splitting method is known to fail in the literature, a simple modification of this method permits to obtain stable splitting solvers.

Let us now investigate another way to introduce a slight coupling in the splitting strategy by introducing the coupling in the fluid solver and no more in the Exner equation. This second strategy is a direct extension of the proposed scheme in Section 2.2 and hence works only if an Godunov-type scheme is considered for the fluid part. It reveals to be relevant since it works well for each presented test cases. However, a disadvantage is located in the fact that it intervenes in the fluid solver. Let us consider an ARS scheme for the Saint-Venant system—here we will choose the one introduced in [8]—and we simply suggest to modify the computation of the wave velocities that will be no more computed by using an approximation of the eigenvalues of the Jacobian matrix of the Saint-Venant system, but of the eigenvalues of the Jacobian matrix of the full Saint-Venant–Exner system (2.1.1). As an illustration, we compare in the following the results that are obtained for the previous five test cases and with three different numerical strategies,

- (i) Use the Godunov-type scheme proposed in [8] with wave velocities  $\lambda_L$  and  $\lambda_R$  based on an approximation of the eigenvalues of the Jacobian matrix of the Saint-Venant system coupled with a centered discretization of the Exner equation. In this case, we use the following values for the computation of the wave velocities,

$$\lambda_L = \min(u_L - \sqrt{gh_L}, u_R - \sqrt{gh_R}, 0), \quad \lambda_R = \max(u_L + \sqrt{gh_L}, u_R + \sqrt{gh_R}, 0)$$



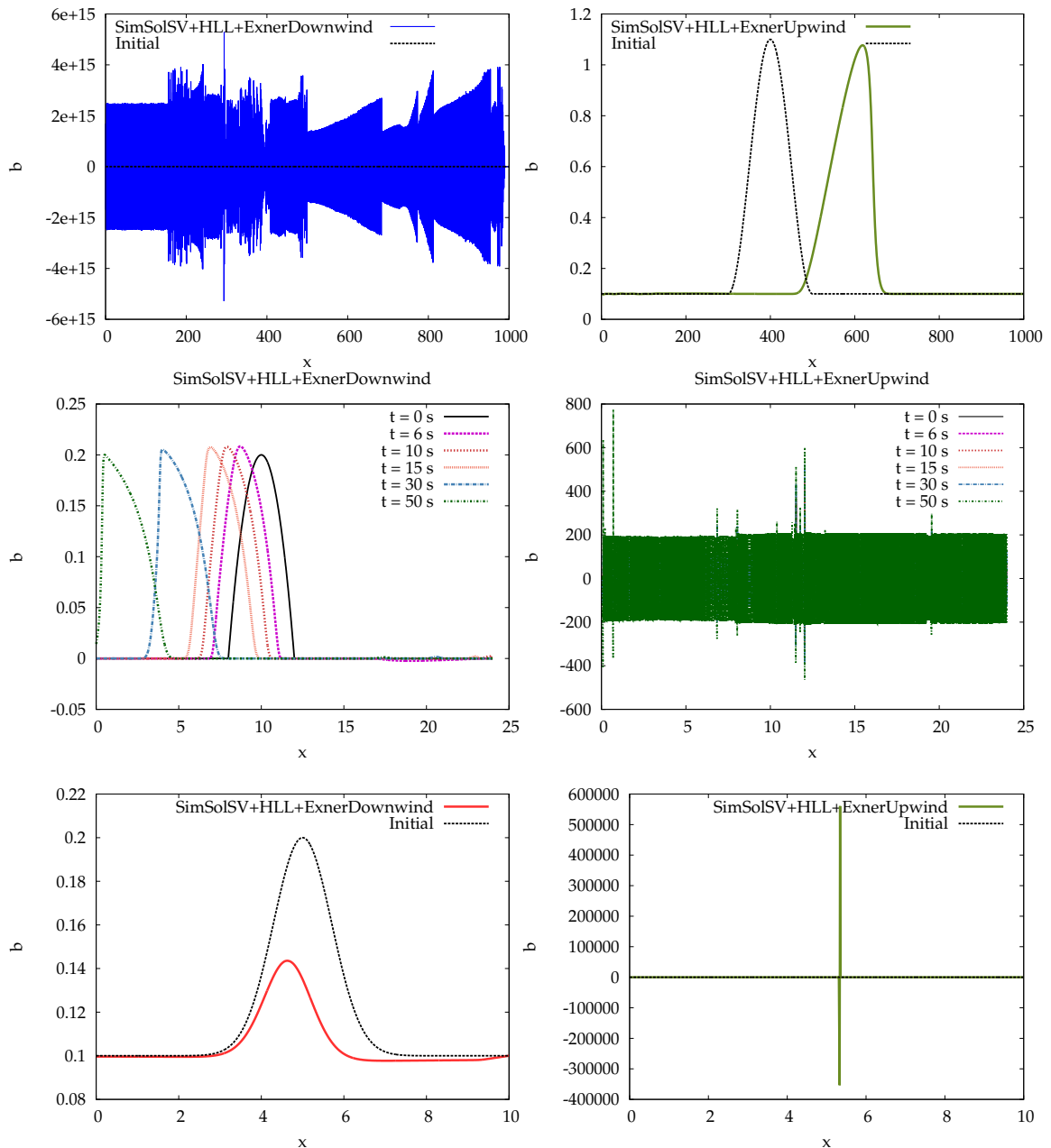


Figure 2.12: Dune evolution in fluvial (top line), torrential (middle line) and transcritical (bottom line) flow - Comparison of splitting strategy with downwind (left column) or upwind (right column) discretization for Exner equation

- (ii) Use the Godunov-type scheme proposed in [8] with wave velocities  $\lambda_L$  and  $\lambda_R$  based on an approximation of the eigenvalues of the Jacobian matrix of the full Saint-Venant–Exner system (2.1.1) coupled with a centered discretization of the Exner equation. In this case, we compute the wave velocities by using the Nickalls formulae introduced in Section 2.2.6,

- (iii) Use the Godunov-type scheme for the full Saint-Venant–Exner system introduced in Section 2.2.

We designed this comparison to emphasize the difference between the first two approaches (i) and (ii) and thus compare the impact of a slight coupling introduced in the fluid solver. We also compare the results obtained with the new scheme introduced in Section 2.2 in order to assess two very different discretizations of the solid part. Indeed the fluid strategy is mostly the same in approaches (ii) and (iii) since they both rely on a three-wave ARS and the key point is the way to deal with the Exner equation. In the second approach (ii), the Exner equation is discretized using a classical centered finite difference formula whereas in the third approach (iii), the Exner equation is taken into account through the constraint energy minimization process (2.2.3).

### 2.4.1 Dune evolution in fluvial regime.

Data are given in section 2.3.1 and every scheme gives a correct solution as shown on fig. 2.13. Schemes (i) and (ii) are slightly less diffusive. In this flow regime, the coupling between the hydraulic part and morphodynamic part is actually weak and the flow velocity is lower than the extreme characteristic speeds, which explains the efficiency of the splitting method.

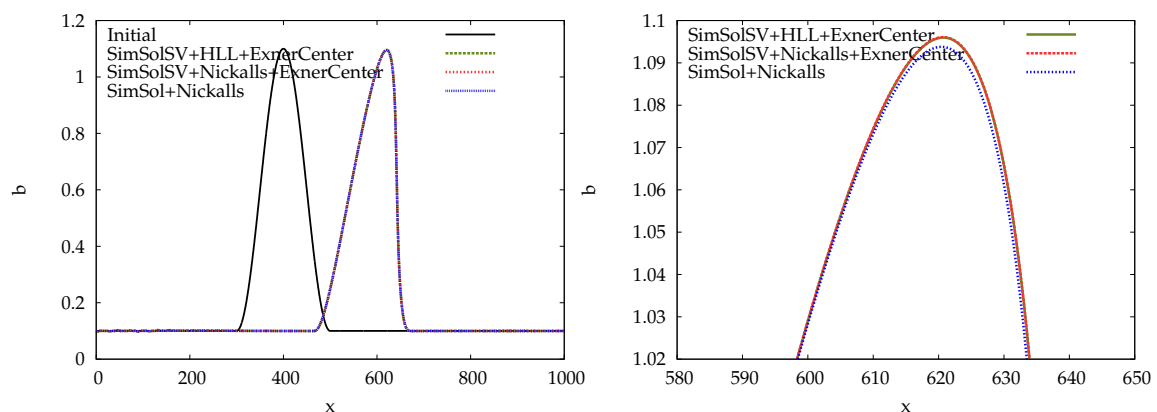
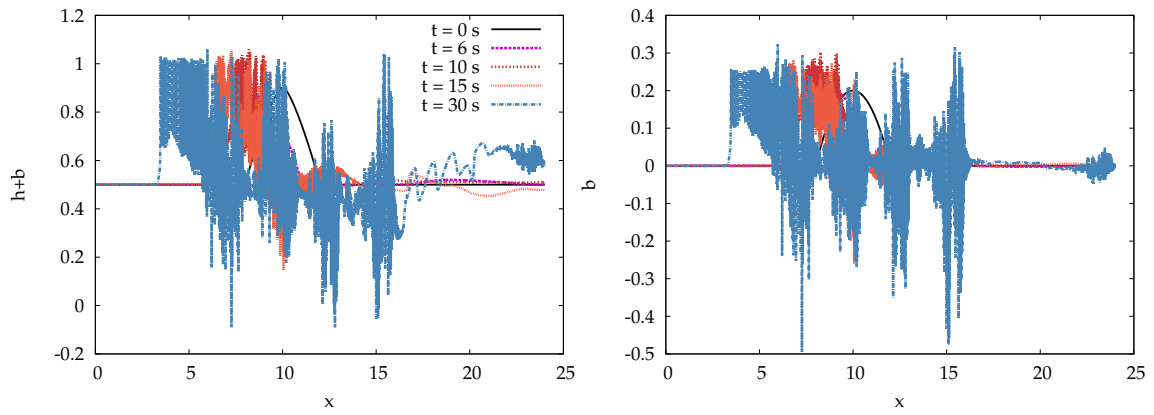


Figure 2.13: Fluvial flow: Comparison of dune evolution for different numerical schemes.

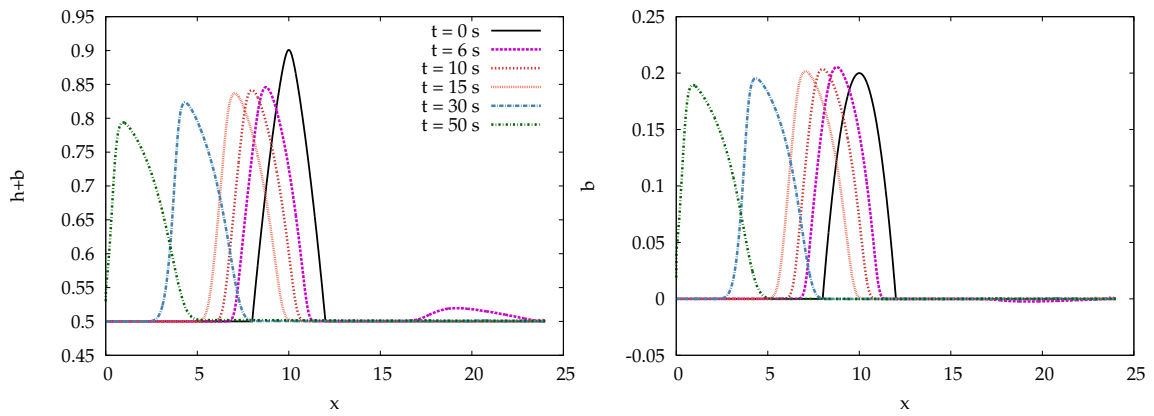
### 2.4.2 Dune (anti-dune) evolution in torrential regime.

Data are given in section 2.3.2 and lead to a torrential regime. As already pointed out in the literature, in such a flow regime where the flow velocity is higher than the wave velocities, the splitting approach is not efficient. On fig. 2.14, we observe that the solution is strongly unstable. Nonetheless, the second splitting approach (ii) is stable and gives a solution which is comparable with the one obtained with the new scheme (iii) and to the ones presented on fig. 2.4 which strongly supports the idea that the splitting method can be efficient, provided that the wave velocities are correctly estimated. Note

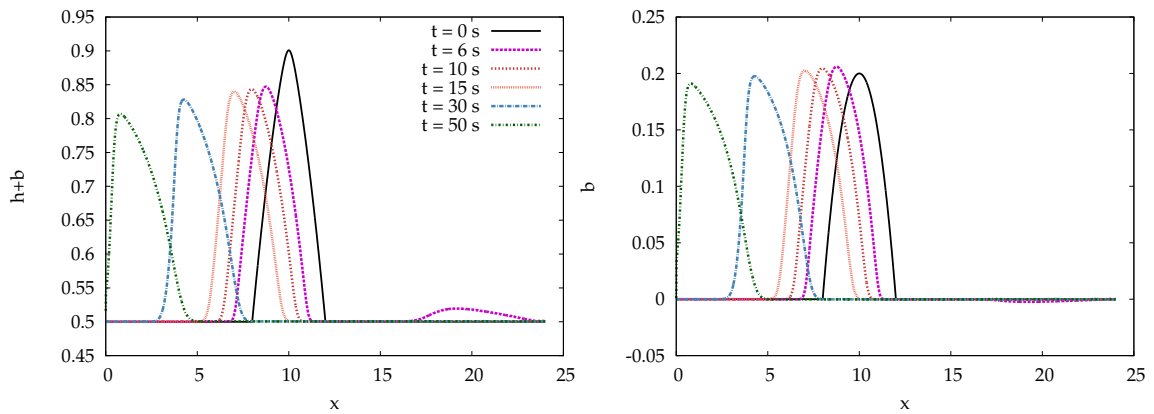
that modifying the wave velocities does not add a lot of numerical diffusion since the shock front is preserved.



(a) *SimSolSV+HLL+Exner Center*



(b) *SimSolSV+Nickalls+Exner Center*



(c) *SimSol+Nickalls*

Figure 2.14: Torrential flow: Comparison of dune evolution for different numerical schemes.

### 2.4.3 Dune evolution in transcritical regime without shock.

Data are given in section 2.3.3. The transcritical regime is pretty interesting since it involves both fluvial and torrential regimes. More precisely, the flow regime changes from fluvial to torrential at the top of the bump since a torrential regime is involved, scheme (i) fails and it is clearly observed on fig. 2.15 that the unstable zones coincide exactly with the torrential region. Regarding scheme (ii), the results are stable and match those of the new scheme (iii).

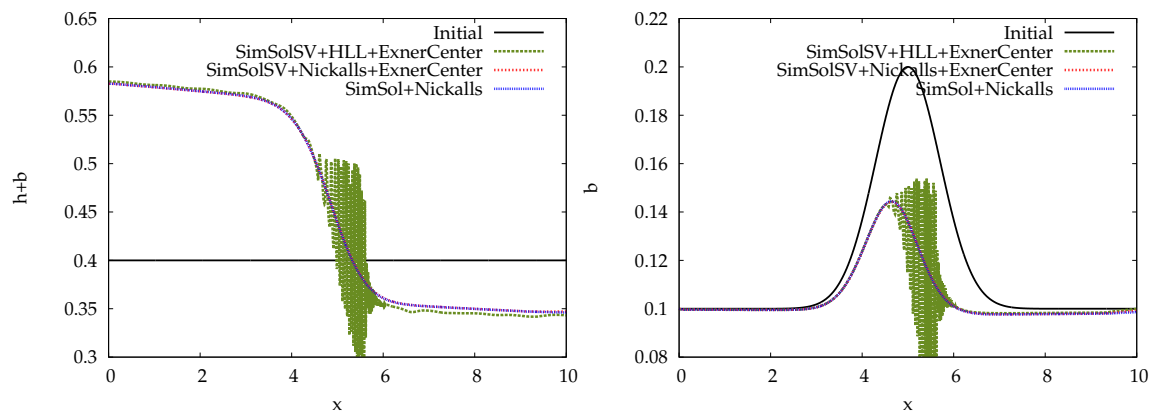


Figure 2.15: Transcritical flow without shock: Comparison of dune evolution for different numerical schemes.

### 2.4.4 Dam break over a wet bottom topography.

Data are given in section 2.3.4. Scheme (i) fails and produces very pronounced oscillations to the degree that showing the corresponding results would significantly affect the proposed scale on fig. 2.16. Schemes (ii) and (iii) give similar results in which the shock and the fluvial-torrential transition are properly computed. Again, a proper evaluation of the wave velocities  $\lambda_L$  and  $\lambda_R$  at each interface makes the splitting approach efficient.

### 2.4.5 Dam break over a dry bottom topography.

Data are given in section 2.3.5. As already pointed out, scheme (i) is not efficient for this test case. Again, instabilities appear when the torrential regime is reached, see fig. 2.17. On the other hand, schemes (ii) and (iii) give similar results which proves again that replacing the wave velocities  $\lambda_L$  and  $\lambda_R$  associated with the Saint-Venant system with those obtained using the Nickalls' upper bounds removes the spurious oscillations of scheme (i) and makes the splitting approach stable and efficient.

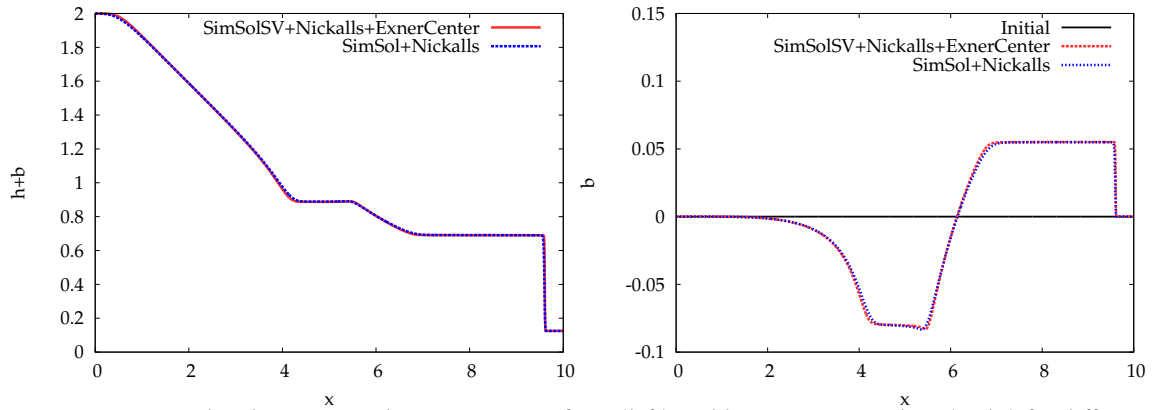


Figure 2.16: Dam break over a wet bottom: Free surfaces (left) and bottom topographies (right) for different schemes.

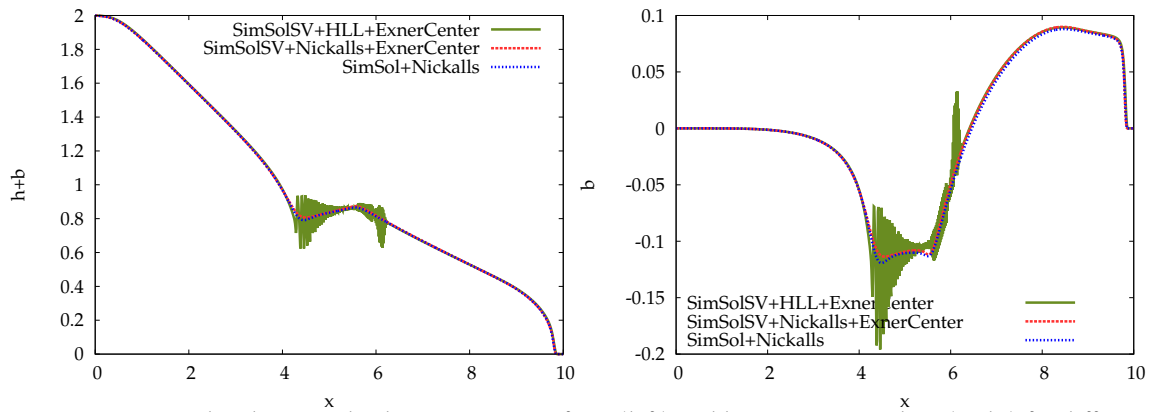


Figure 2.17: Dam break over a dry bottom: Free surfaces (left) and bottom topographies (right) for different schemes.

## 2.5 APPLICATION TO EXPERIMENTAL TEST CASES.

In this section, we propose to confront the presented ARS to classical test cases with measures obtained in the laboratory. The considered experiments correspond to an erosion (Newton test case) and a deposition (Soni test case) phenomena as well as a dam break over a movable bed. Lets introduce another expression of the friction term,

$$ghT_f = \frac{\tau}{\rho_w} = gh \frac{|u|u}{K_s^2 R_h^{4/3}}, \quad (2.5.1)$$

where  $\tau$  is the shear stress and  $\rho_w$  represents the water density. Since the flume used in each test case is rectangular, it is convenient to suppose that  $R_h$  is equivalent to  $h$ ,

$$R_h \sim h.$$

First of all, we present the different sediment bed-load transport flux which are compared in this study such as the Grass, the Meyer-Peter & Müller, the Engelund & Hansen and the Recking formulae. Then, we deal with the issue of the treatment of the boundaries conditions that is adapted to the sediment flux. Finally, the numerical results for the different solid transport formulae are discussed.

### 2.5.1 Sediment bed-load transport flux.

The key point of the Exner equation relies on the definition of the sediment flux  $q_s$  which designates the solid discharge per unit width. A lot of formulae has been proposed in the literature and most of them are semi-empirical and derived from a fit of experimental data. In the present framework, we focus our interest on three formulae which have been proposed by Meyer-Peter & Müller [128], Engelund & Hansen [56] and Recking [147]. These three laws for bed-load transport depend on the Shields parameter  $\tau^*$  [161] which is a dimensionless shear stress such that,

$$\tau^* = \frac{\tau}{(\rho_s - \rho_w) g d} = \frac{|u| u}{R d K_s^2 R_h^{1/3}}, \quad (2.5.2)$$

with  $d$  representing the diameter of the grains and  $R$  defining the submerged specific gravity of the sediment which depends on the fluid and solid densities and given by the following formula,

$$R = \frac{\rho_s - \rho_w}{\rho_w},$$

where  $\rho_s$  stands for the solid densities.

#### 2.5.1.1 Grass formula.

The Grass formula [84] is one of the most useful definition of the sediment flux. It has the advantages to be simple as it only depends on the flow velocity, and to always ensure the property of hyperbolicity of the Saint-Venant–Exner system of equations (2.2.1). Its expression is as follows,

$$q_s = A_g u |u|^{m-1}, \quad (2.5.3)$$

where  $A_g$  and  $m > 1$  are constant. In most cases and in our particular framework, the parameter  $m$  is equal to 3. We will see below how to determine the parameter  $A_g$  in respect to the Meyer-Peter & Müller formula. In spite of these properties, this formula is never used by the sedimentologists in practice. That is why, it is legitimate to work with the most popular ones that are recalled below.

#### 2.5.1.2 Meyer-Peter & Müller formula.

In the literature, the Meyer-Peter & Müller formula [128] is one of the most used bed-load transport flux. It considers a uniform grain size (in the range  $0.4 \text{ mm} < d < 29 \text{ mm}$ )

and involves a threshold value of the Shields number denoted  $\tau_c^*$ . This means that below this critical value, no sediment is transported. Otherwise, this function needs to define an efficient shear stress parameter  $\tau_{eff}^*$ ,

$$\tau_{eff}^* = \left( \frac{K_s}{K_p} \right)^{3/2} \tau^*, \quad (2.5.4)$$

where  $K_p$  characterizes the roughness of the grains. Finally, its expression takes the following form,

$$q_s = 8 \sqrt{Rg} d^3 (\tau_{eff}^* - \tau_c^*)_+^{3/2}, \quad (2.5.5)$$

with  $\tau_c^* = 0.047$  and  $(\cdot)_+ = \max(\cdot, 0)$ .

In [28], an expression of the constant parameter  $A_g$  of the Grass formula is especially expressed in accordance with the Meyer-Peter & Müller one. Actually, it is simple to degenerate the Meyer-Peter & Müller formula to the Grass one by setting  $\tau_c^*$  to zero. In this way, it is convenient to express  $A_g$  such that,

$$A_g = \frac{8 \sqrt{g}}{R K_s^3 R_h^{1/2}}, \quad (2.5.6)$$

and by (2.5.3) and in respect with (2.5.5), it is obvious to impose  $m = 3$ .

### 2.5.1.3 Engelund & Hansen formula.

The Engelund & Hansen formula [56] does not involve a threshold shear stress value and permits to quantify the total sediment transport rate which includes sediments transported by bed-load as well as suspension. This function concerns grain whose the diameter is valued between  $0.15 \text{ mm}$  and  $1.6 \text{ mm}$ . This formula is expressed such that,

$$q_s = 0.05 \sqrt{\frac{Rd^3}{g}} R_h^{1/3} K_s^2 (\tau^*)^{5/2}. \quad (2.5.7)$$

### 2.5.1.4 Recking formula.

This formula [147] relies on the idea that in a gravel bed, the sediment transport is mostly influenced by the grains with a large diameter. It implies to redefine the diameter used in the expression of the sediment flux such that, instead of working with the diameter  $d_{50}$ , it is more convenient to take the diameter  $d_{84} = 2.1 d_{50}$ . This sediment flux has been validated for sediments with a size bounded by  $0.4 \text{ mm}$  and  $20 \text{ mm}$ . Then, the flux is formulated such that,

$$q_s = \sqrt{Rg} d_{84}^3 \Phi, \quad (2.5.8)$$

where  $\Phi$  is defined by,

$$\Phi = \frac{14 (\tau_{84}^*)^{5/2}}{1 + \left(\frac{\tau_m}{\tau_{84}^*}\right)^4}. \quad (2.5.9)$$

Here, the definition of  $\tau_{84}^*$  consists on replacing the value of the diameter of the grain  $d = d_{50}$  by  $d = d_{84}$  in (2.5.2). Since we consider a bed mainly composed by sand, it is practical to impose  $\tau_m = 0.045$ .

### 2.5.1.5 Treatment of the boundary conditions.

We will treat the boundary conditions in a decoupled way. We consider ghost cells at the boundary of the domain and evaluate the hydraulic quantities with help of the Riemann invariants of the Saint-Venant system (see [20]),

$$u \pm 2 \sqrt{gh}. \quad (2.5.10)$$

We associate respectively the indices *in* and *out* to the input and output ghost cells. It is necessary to distinguish the cases where the flow is fluvial (sub-critical) and torrential (super-critical),

- *sub-critical case* :  
the hydraulic discharge is imposed at the inflow boundary and the water height is given at the outflow one; the quantities  $h_{in}$  and  $q_{out}$  are obtained from the Riemann invariants (2.5.10),
- *super-critical case* :  
the hydraulic quantities are imposed at the inflow boundary, and  $h_{out}$  and  $q_{out}$  are evaluated from (2.5.10).

In practice, concerning the sedimentary phase, the solid flux  $q_s$  is imposed at the inflow boundary and set to the value of the neighbour cell at the outflow boundary. The corresponding values of  $b_{in}$  and  $b_{out}$  are deduced from  $q_{s,in}$  and  $q_{s,out}$  and depend on the sediment formula used. We then define  $b_{in}$  and  $b_{out}$  such that,

$$\begin{cases} b_{in} = b_0 + \Delta x \hat{b}(w_{in}, q_{s,in}), & (2.5.11) \\ b_{out} = b_{N_x-1} - \Delta x \hat{b}(w_{out}, q_{s,out}). & (2.5.12) \end{cases}$$

where  $b_0$  and  $b_{N_x-1}$  are respectively the values of the bottom topography at the first and last cells of the discrete domain. The function  $\hat{b}$  is dependent of the sediment flux  $q_s$  and its expression is given as follows,

- Meyer-Peter & Müller formula,

$$\hat{b}(w, q_s) = \left(\frac{K_p h}{q}\right)^6 \left(R d \left(\frac{q_s^{2/3}}{8^{2/3} (Rg)^{1/3} d} + \tau_c^*\right)\right)^4, \quad (2.5.13)$$



- Engelund & Hansen formula,

$$\hat{b}(w, q_s) = (gh)^{1/3} \left(\frac{R}{q}\right)^{4/3} \left(\frac{dq_s}{0.05}\right)^{2/3}. \quad (2.5.14)$$

Concerning the Recking formula, it is not possible to obtain an explicit expression of  $b_{in}$  and  $b_{out}$ . These quantities are obtained from the numerical resolution (for instance, the Newton's method) of a polynomial equation. This last equation is expressed by,

$$\left(1 + \left(\frac{\tau_m Rd}{hI}\right)^4\right) q_s - 14\sqrt{Rgd_{84}^3} \left(\frac{hI}{Rd}\right)^{5/2} = 0, \quad (2.5.15)$$

where,

$$- I = \frac{b_{in} - b_0}{\Delta x} \text{ and } q_s = q_{s,in} \text{ at the inflow boundary,}$$

$$- I = \frac{b_{N_x-1} - b_{out}}{\Delta x} \text{ and } q_s = q_{s,out} \text{ at the outflow boundary.}$$

## 2.5.2 Numerical results.

We present three laboratory experiments which consist on an erosion, a deposition, and a dam break over a sand bed in an experimental flume. We propose to compare the measures obtained in the laboratory with the numerical solution returned by the proposed scheme for the three sediment flux previously mentioned.

In order to determine the accuracy of the numerical solution, we calculate the Brier Skill Score (called *BSS*) [22, 182]. Basically, the Brier Score measures the mean-square error of probability forecasts. Since it is complicated to make sense of this score, it is generally converted to a skill score, meaning that the score is normalized by a reference forecast's one. The *BSS* is expressed by,

$$BSS = 1 - \frac{\sum_{i=0}^{N_x-1} (b(t, x_i)_{mes} - b(t, x_i))^2}{\sum_{i=0}^{N_x-1} (b(t, x_i)_{mes} - b(0, x_i))^2}, \quad (2.5.16)$$

where  $b(t, x_i)_{mes}$  and  $b(t, x_i)$  respectively correspond to the experimental measure and the numerical solution at time  $t$  and point  $x_i$ . The approximate solution is considered to be excellent if the *BSS* is in the interval  $[0.8, 1]$ , or good if it is included in  $[0.6, 0.8]$  (see [177]).

We also introduce the Relative Mean Absolute Error (called *RMAE*) expressed in per-

centage and formulated such that,

$$RMSE = \frac{\sum_{i=0}^{N_x-1} |b(t, x_i)_{mes} - b(t, x_i)|}{\sum_{i=0}^{N_x-1} b(t, x_i)_{mes} - b(0, x_i)}. \quad (2.5.17)$$

### 2.5.2.1 Newton test case.

This test case has been proposed by Newton (see [132]). The experiment investigates the erosion phenomenon which occurs when considering water flow over a mobile bed in a rectangular flume. The channel dimensions are kept constant as well as the value of the flow discharge. The solid discharge is calculated from the hydraulic quantities (water height and discharge) at the equilibrium state. At the initial state, the solid discharge at the input of the flume is set to the value zero. The different geometric and physical parameters are summarized in the table 2.1. The initial conditions are given in table 2.2. We recall that at the initial state, the water discharge is imposed and the water height is obtained by solving the equation of the equilibrium between the slope and friction terms. At the output, the free surface is maintained constant at its initial value.

In order to accurately fit the experimental results, we calibrate the solid Strickler coefficient  $K_s^S$  for each sediment flux. The hydraulic Strickler coefficient is set such that the initial water height is obtained. The different values of the Strickler coefficient are given in table 2.3.

The results are obtained for the three sediment flux on the figure 2.18 at time  $T = 1h$ ,  $4h$  and  $24h$ . As one can observe on figure 2.18, the results for the Meyer-Peter & Müller formula are the most accurate and fit well the experimental measures comparatively with those obtained by the Engelund & Hansen and Recking formulae. Concerning the curves for the Meyer-Peter & Müller formula, the numerical results at times  $T = 1h$  and  $T = 4h$  are similar to the laboratory measures whereas one can notice that at  $T = 24h$ , the erosion at the outflow boundary is higher for the numerical output than for the experimental one. On the contrary, the result corresponding to the Recking formula at time  $T = 24h$  shows that the erosion occurs at the inflow and are close to the experimental measures at the outflow. The observations for the results with Meyer-Peter & Müller formula at  $T = 1h$  and  $T = 4h$  can be applied for those of the Recking formula even if the deposition is higher by comparison with the experimental measures. Finally, it appears that the Engelund & Hansen formula returns the less accurate result. In spite of the previous qualitative observations, the Brier Skill Score (called *BSS* in tab. 2.4) indicates that the numerical results are relevant since the index for each formula is higher than 0.8.

We also present the results which concern the Grass formula. As one can see, they are not relevant. In spite of the fact that the physical parameters used for this formula are the same of those of the Meyer-Peter & Müller expression, the erosion is more important;

one can understand it by the fact that the Grass formula does not imply a threshold value for the Shields parameter which reduces the value of the sediment flux—it is especially the case for the Meyer-Peter & Müller formula—. In this particular test case, the sediment flux can be reduced by half with the current parameters.

Channel width	$l =$	0.3048	$m$
Channel length	$L =$	9.14	$m$
Channel slope	$I =$	0.00416	$(-)$
Gravitational acceleration	$g =$	9.8	$m.s^{-2}$
Water density	$\rho_w =$	$10^3$	$kg.m^{-3}$
Sediment density	$\rho_s =$	$2.65 \times 10^3$	$kg.m^{-3}$
Grain diameter	$d =$	$0.68 \times 10^{-3}$	$m$

Table 2.1: Parameters for the Newton test case.

Water discharge	$q =$	$0.00566/l \approx 0.01857$	$m^2.s^{-1}$
Water height	$h \approx$	0.041	$m$
Injected concentration	$C_s =$	0	$kg.m^{-3}$
Injected sediment discharge	$q_{s,in} =$	0	$m^2.s^{-1}$

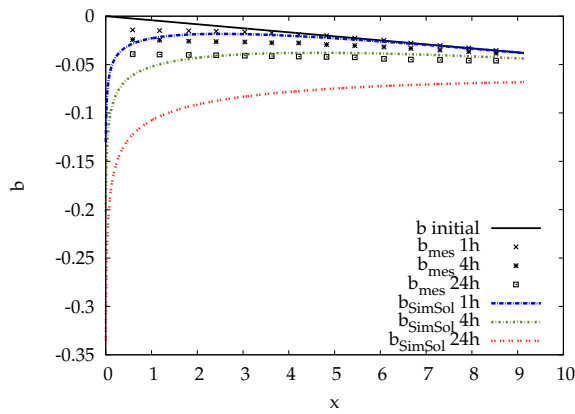
Table 2.2: Initial data for the Newton test case.

Formula	Hydraulic Strickler coefficient $K_s^H (m^{1/3}.s^{-1})$	Solid Strickler coefficient $K_s^S (m^{1/3}.s^{-1})$	Grain roughness $K_p (m^{1/3}.s^{-1})$
Meyer-Peter & Müller	59	63	75
Engelund & Hansen	59	53	—
Recking	59	54	—

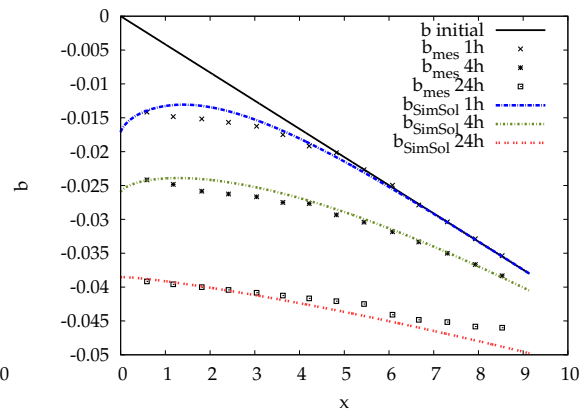
Table 2.3: Calibration parameters for the Newton test case.

Formula	Time step	BSS	RMAE	Simulated Eroded Solid Mass	Measured Eroded Solid Mass	Error on mass
Grass	1 h	0.170	-93.5 %	53.4 kg	10.2 kg	+423.5 %
	4 h	-0.468	-112.4 %	182.1 kg	41.4 kg	+339.9 %
	24 h	-2.005	-168.6 %	470 kg	90.6 kg	+418.8 %
Meyer-Peter & Müller	1 h	0.967	-21.9 %	21.6 kg	10.2 kg	+111.8 %
	4 h	0.995	-6.5 %	75.8 kg	41.4 kg	+83.1 %
	24 h	0.997	-4.5 %	174 kg	90.6 kg	+92.1 %
Engelund & Hansen	1 h	0.766	-54.2 %	15.4 kg	10.2 kg	+51 %
	4 h	0.896	-34.8 %	60.6 kg	41.4 kg	+46.4 %
	24 h	0.920	-20.2 %	210.5 kg	90.6 kg	+132.3 %
Recking 2011	1 h	0.884	-38.9 %	17.8 kg	10.2 kg	+74.5 %
	4 h	0.960	-20.8 %	66.4 kg	41.4 kg	+60.4 %
	24 h	0.989	-9.1 %	185.6 kg	90.6 kg	+104.9 %

Table 2.4: Newton test case: Performing index



(a) Grass



(b) Meyer-Peter &amp; Müller

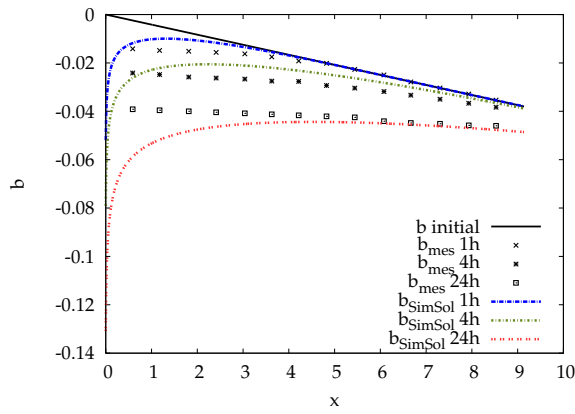
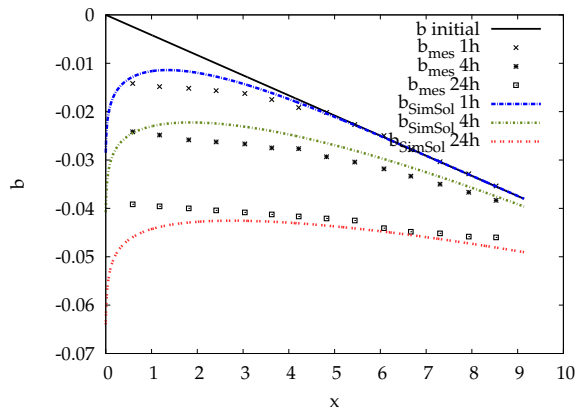
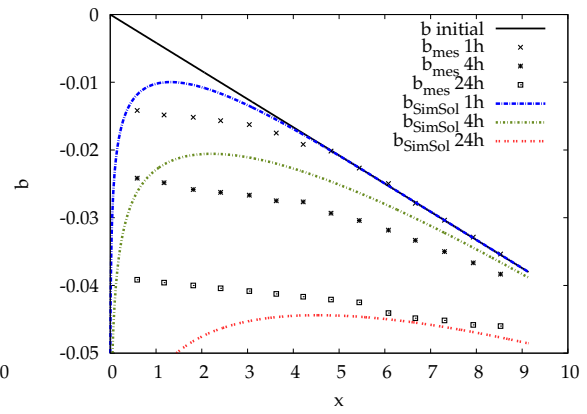
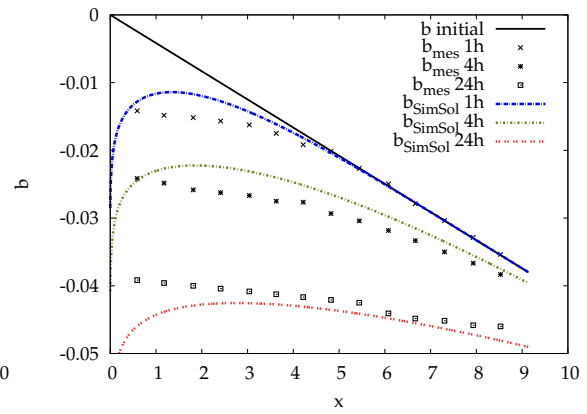
(c) Engelund-Hansen: default scale (left),  $b \in [-0.05, 0]$  (right)(d) Recking 2011: default scale (left),  $b \in [-0.05, 0]$  (right)

Figure 2.18: Newton test case: Evolution of the bed topography.



### 2.5.2.2 Soni test case.

This test case has been proposed by Soni in [169]. It investigates the aggradation which occurs when the sediment discharge at the input of the flume is higher than in all the domain. It means that the concentration of injected sediments is higher than the capacity of transport of the flow. The experiment is quite similar to the erosion one. We consider a flume filled with a sand bed and we impose a constant slope (see tab. 2.5). The hydraulic discharge is constant during the experiment.

At the initial state, the equilibrium describes a flow with a water height and a hydraulic discharge given in tab. 2.5. The sediment discharge is evaluated from these hydraulic quantities and the different Strickler coefficients in tab. 2.7 are calibrated so that the numerical results fit with the experimental ones; the hydraulic Strickler coefficient  $K_s^H$  permits to obtain the water height at the initial steady state and the calibration of the sediment one  $K_s^S$  depends on the considered formula defining the sediment flux.

The output corresponding to the deviation of the bottom topography from its initial value obtained for the three previous sediment flux formulas are shown on figure 2.19. Contrarily to the results obtained for the Newton test case, one observes that they are quite similar for each sediment flux used. The behaviour of the solution is similar for all solid flux as one notices that the numerical solution reproduces well the experimental measures at time steps  $T = 30 \text{ min}$  and  $T = 60 \text{ min}$ . However, these results differ from the experiment when considering the solution at time  $T = 90 \text{ min}$ . At the inflow and outflow boundaries, the solutions for both computation and experiment are close and the difference only occurs at the middle of the considered domain. In fact, it clearly appears that the deposition in the numerical point of view does not sufficiently go far from the inflow; the grains are not transported as far as they are supposed to. However the BSS in table 2.8 shows that the results are relevant since each index is higher than 0.9. One notices that the Engelund & Hansen formula is globally the most accurate under the BSS criterion even if the error committed in regard to the deposited solid mass appears to be less suitable to the experimental values than that evaluated for the Meyer-Peter & Müller formula.

Concerning the Grass formula, the results are not as accurate as others but they are relevant. In comparison with those of the Meyer-Peter & Müller formula, the deposited solid mass is lower however the BSS shows that this approximation is still conceivable.

Channel width	$l = 0.2$	$m$
Channel length	$L = 30$	$m$
Channel slope	$I = 0.00427$	$(-)$
Gravitational acceleration	$g = 9.8$	$m.s^{-2}$
Water density	$\rho_w = 10^3$	$kg.m^{-3}$
Sediment density	$\rho_s = 2.65 \times 10^3$	$kg.m^{-3}$
Grain diameter	$d = 0.32 \times 10^{-3}$	$m$

Table 2.5: Parameters for the Soni test case.

Water discharge	$q = 0.0071/l \approx 0.0355$	$m^2.s^{-1}$
Water height	$h \approx 0.072$	$m$
Injected concentration	$C_s = 4.88$	$kg.m^{-3}$
Injected sediment discharge	$q_{s,in} = (C_s \times q)/\rho_s = 6.54 \times 10^{-5}$	$m^2.s^{-1}$

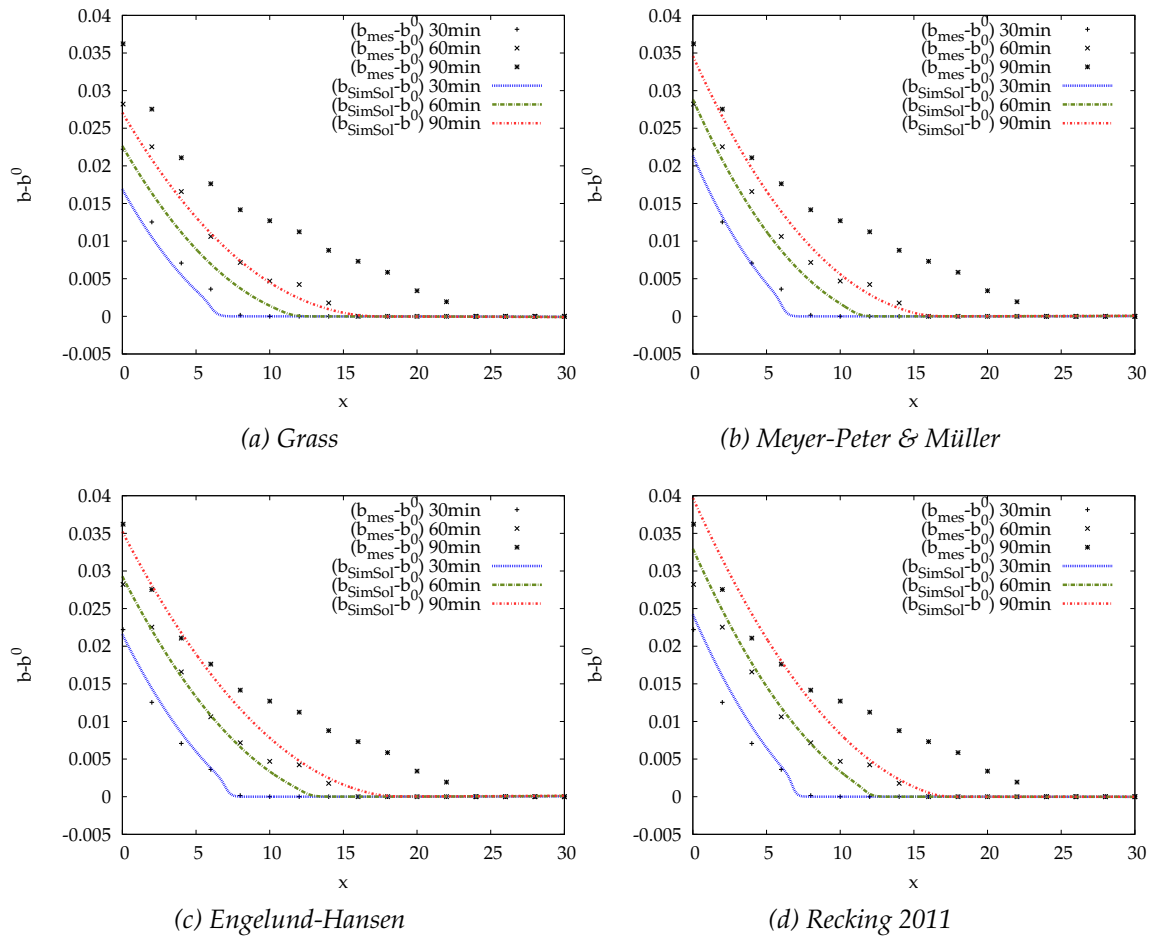
Table 2.6: Initial data for the Soni test case.

Formula	Hydraulic	Solid	Grain
	Strickler coefficient $K_s^H (m^{1/3}.s^{-1})$	Strickler coefficient $K_s^S (m^{1/3}.s^{-1})$	roughness $K_p (m^{1/3}.s^{-1})$
Meyer-Peter & Müller	43.6	43.6	62
Engelund & Hansen	43.6	43.6	–
Recking	43.6	50	–

Table 2.7: Calibration parameters for the Soni test case.

Formula	Time step	BSS	RMAE	Simulated Deposited Solid Mass	Measured Deposited Solid Mass	Error on mass
Grass	30 min	0.94	25.9 %	26.5 kg	21.9 kg	+21 %
	60 min	0.91	35.4 %	53.2 kg	52.3 kg	+1.7 %
	90 min	0.84	46.8 %	80 kg	95.9 kg	+16.6 %
Meyer- Peter & Müller	30 min	0.99	9.3 %	33.7 kg	21.9 kg	+53.9 %
	60 min	0.97	19.0 %	67.7 kg	52.3 kg	+29.4 %
	90 min	0.91	32.5 %	101.7 kg	95.9 kg	+6 %
Engelund & Hansen	30 min	0.99	10.1 %	39.1 kg	21.9 kg	+78.5 %
	60 min	0.99	9.8 %	78.6 kg	52.3 kg	+50.3 %
	90 min	0.94	24.8 %	118 kg	95.9 kg	+23 %
Recking 2011	30 min	0.97	17.8 %	42.8 kg	21.9 kg	+95.4 %
	60 min	0.97	17.0 %	85.9 kg	52.3 kg	+64.2 %
	90 min	0.93	28.4 %	129 kg	95.9 kg	+34.5 %

Table 2.8: Soni test case: Performing index



(c) Engelund-Hansen (d) Recking 2011  
 Figure 2.19: Soni test case: Evolution of the bed topography deviation.



### 2.5.2.3 Dam break test case.

This experiment has been realized in the laboratory by Spinewine & Zech [172]. The goal is to characterize the evolution of the river bed under the effect of a dam break. The flow takes place in a rectangular flume. The geometric data are summarized in table 2.9. The river bed is flat and at the initial state, the retained water mass is released; the dam is located at the abscissa  $x = 0$  (see table 2.10 for initial data). Concerning the boundary conditions, we impose free boundaries.

The results for each formula are quite similar; this observation is applied to the free surface as well as the river bed. However, compared to the experimental measures, their behaviours are quite comparable except at the downstream of the water flow. Indeed, we notice that the numerical schemes consider that the solid matter are transported to the output of the flume and a bump is formed and evacuated. In the contrary, the laboratory measures show that the solid mass seems to be “instantly” transported; there is no visible transported bump. If we compare the river bed obtained by the numerical scheme, each bump are comparable even if the Recking formula returns a higher bump and the Engelund & Hansen flux deals with a lower one, compared to the others which return close results. In any case, the pit which is created in each numerical result has the same depth as the experimental measure but this closeness between the numerical result and the laboratory measures does not concern the free surface since the numerical solution does not present the same height of plateau as the experiment.

At last, one notices that, in this test case, the Grass formula returns a solution which is similar to that of the Meyer-Peter & Müller formula; this observation goes in the same direction as that brought to light at the end of the subsection 2.3.4 and shown on the figure 2.10.

Channel width	$l =$	0.25	$m$
Channel length	$L =$	6	$m$
Channel slope	$I =$	0	(–)
Gravitational acceleration	$g =$	9.8	$m.s^{-2}$
Water density	$\rho_w =$	$10^3$	$kg.m^{-3}$
Sediment density	$\rho_s =$	$1.58 \times 10^3$	$kg.m^{-3}$
Grain diameter	$d =$	$3.9 \times 10^{-3}$	$m$

Table 2.9: Parameters for the dam break test case.

Water discharge	$q =$	0	$m^2.s^{-1}$
Water height	$h =$	0.35	$m$ (before the abscissa of the dam)
	$h =$	0.1	$m$ (after the abscissa of the dam)

Table 2.10: Initial data for the dam break test case.

Formula	Hydraulic	Solid	Grain
	Strickler coefficient $K_s^H (m^{1/3}.s^{-1})$	Strickler coefficient $K_s^S (m^{1/3}.s^{-1})$	roughness $K_p (m^{1/3}.s^{-1})$
Meyer-Peter & Müller	60	20	20
Engelund & Hansen	60	20	—
Recking	60	27	—

Table 2.11: Calibration parameters for the dam break test case.

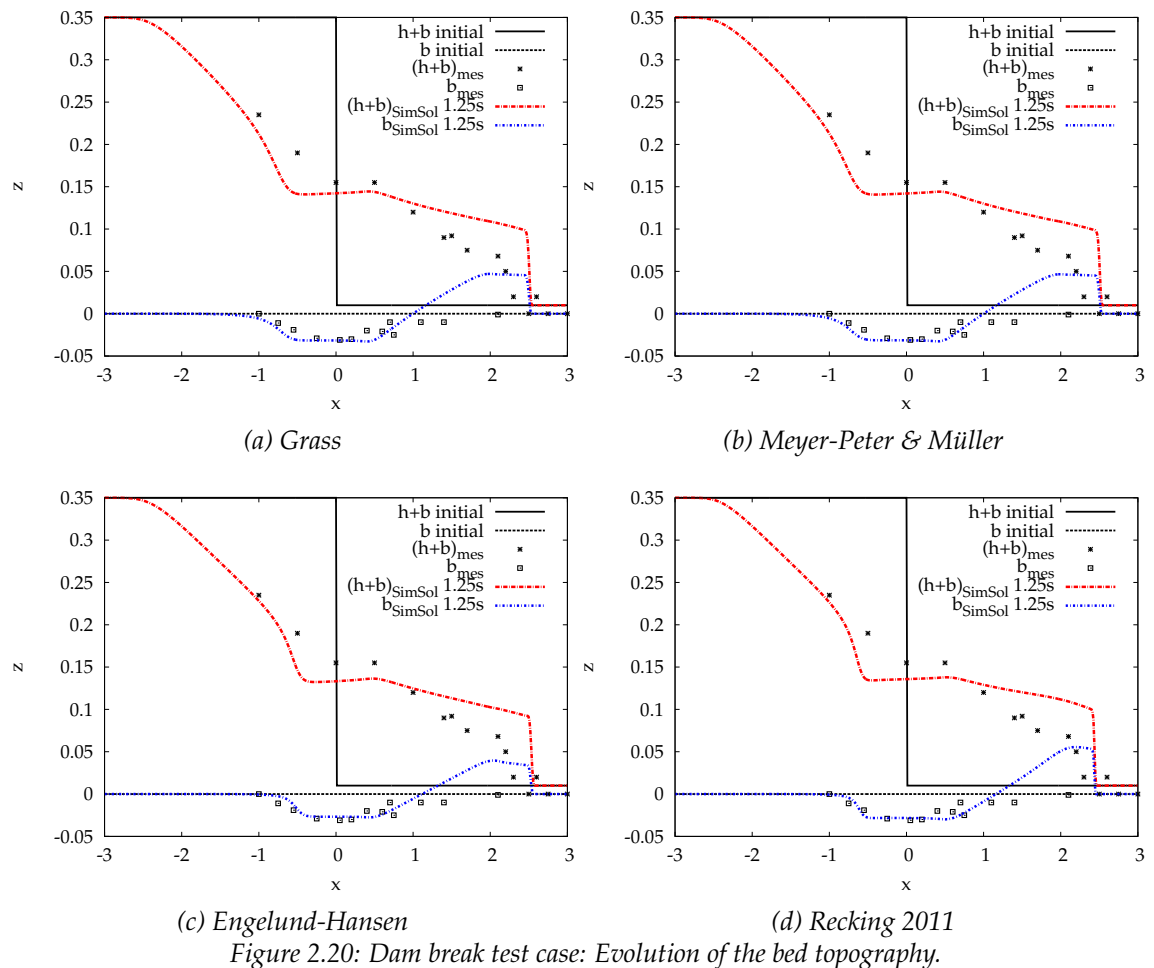


Figure 2.20: Dam break test case: Evolution of the bed topography.

		<i>Fluvial dune</i>	<i>Torrent. dune</i>	<i>Transcr. dune</i>	<i>Dambreak (wet/wet)</i>	<i>Dambreak (dry/wet)</i>
S	SimSolSV+HLL+ExnerCenter	Green	Red	Red	Red	Red
	SimSolSV+HLL+ExnerUpwind	Green	Red	Red	Grey	Grey
	SimSolSV+HLL+ExnerDownwind	Red	Green	Green	Grey	Grey
	SimSolSV+Nickalls+ExnerCenter	Green	Green	Green	Green	Green
N-S	SimSol+Nickalls	Green	Green	Green	Green	Green
	Relaxation	Green	Green	Green	Green	Green
	IFCP	Green	Green	Green	Green	Green

Table 2.12: Stability of each numerical scheme (S: Splitting method, N-S: Non-splitting method) in function of the test cases; green for a stable behaviour and red for an unstable one.

## 2.6 CONCLUSION.

We have introduced a Godunov-type method based on a new Approximate Riemann Solver for the Saint-Venant–Exner system. The scheme avoids using an approximate Jacobian matrix of the system, has been proved to be positive and well-balanced and has been successfully tested on two families of discriminant numerical test cases.

Moreover this scheme shares common aspects with both splitting and non-splitting approaches that were previously studied in the literature. It helps to go further in the discussion about splitting and non-splitting approaches; the stability issue is summarized in table 2.12 for each numerical approach and presented test case. In particular we exhibit that a slight modification of the splitting approach, that only consists in changing the wave velocities in the fluid solver, leads to stable simulations for all the test cases we performed. Another modification, that is even simpler since it only modifies the way the Exner equation is dealt with, is shown to ensure stability but not for all test cases.

Besides the proposed ARS is revealed to be readily adaptable to different sediment formulae. In return, it is essential to evaluate a suitable Strickler coefficient to fit with the laboratory measures. The accuracy of the scheme varies in function of the considered solid flux; the Meyer-Peter & Müller formula appears to be the most efficient to approximate the experimental measures. However the approximation obtained with the different formulae is globally satisfying and that is why the presented ARS constitutes a simple alternative to implement.





## CHAPITRE 3

# Numerical simulation of the dynamics of sedimentary river beds with a stochastic Exner equation

---

**Version française.** *A l'échelle d'un bras de rivière, la dynamique du lit de la rivière est généralement modélisée par l'équation d'Exner (conservation de la masse solide) avec un flux solide empirique pour le transport de sédiments, flux défini par une formule algébrique et déterministe dépendant i) des caractéristiques physiques des sédiments (taille et masse) et ii) de la description hydraulique moyenne de l'écoulement local. Ce modèle s'est avéré utile, notamment à travers des simulations numériques, pour des applications en ingénierie hydraulique (par exemple, estimation de la masse de sédiments mobilisée lors d'une vidange de barrage). Néanmoins, le modèle est également grossier. Et son utilisation pour des échelles de temps et d'espace variées reste une question d'un intérêt considérable pour les sédimentologues. En particulier, les expériences physiques allant de l'échelle du grain à celle du laboratoire révèlent d'importantes fluctuations du flux solide sous des conditions hydrodynamiques données.*

*Ce travail est une étude préliminaire du couplage d'une équation d'Exner stochastique avec un modèle hydrodynamique pour les grandes échelles. (Des modèles stochastiques prenant en compte un flux solide probabiliste sont actuellement étudiés, mais le plus souvent seulement du point de vue de la physique théorique à l'échelle du grain.) On introduit un nouveau modèle d'Exner stochastique possible puis on le discute à l'aide de simulations numériques à travers un cas test approprié.*

Une partie de ce chapitre fait l'objet d'un article en collaboration avec Emmanuel Audusse, Sébastien Boyaval, Nicole Goutal et Magali Jodeau, publié dans *ESAIM: Proceedings and Surveys*, Vol. 48 (2015), pp. 321-340.

**English version.** *At the scale of a river reach, the dynamics of the river bed is typically modelled by Exner equation (conservation of the solid mass) with an empirical solid flux of transported sediments, which is a simple deterministic algebraic formula function of i) the sediment physical characteristics (size and mass) and of ii) the averaged hydrodynamical description of the ambient water flow. This model has proved useful, in particular through numerical simulations, for hydraulic engineering purposes (like estimating the mass of sediments that is drained through an open dam). Though, the model is also coarse. And its applicability at various space and time scales remains a question of considerable interest for sedimentologists. In particular, physical experiments from the grain scale to the laboratory scale reveal important fluctuations of the solid flux in given hydrodynamical conditions.*

*This work is a preliminary study of the coupling of a stochastic Exner equation with a hydrodynamical model for large scales. (Stochastic models with a probabilistic solid flux are currently being investigated, but most often only from the viewpoint of theoretical physics at the grain scale.) We introduce a new stochastic Exner model and discuss it using numerical simulations in an appropriate test case.*

A part of this chapter is the subject of an article in collaboration with Emmanuel Audusse, Sébastien Boyaval, Nicole Goutal and Magali Jodeau, published in *Esaim: Proceedings and Surveys*, Vol. 48 (2015), pp. 321-340.

## Contents

---

<b>3.1 Introduction.</b>	<b>102</b>
<b>3.2 Exner model.</b>	<b>105</b>
3.2.1 The standard Exner model.	105
3.2.2 A new stochastic Exner model.	106
<b>3.3 A numerical discussion of the stochastic model.</b>	<b>108</b>
3.3.1 Finite-Volume discretization of Saint-Venant–Exner model.	108
3.3.2 Monte-Carlo simulations and numerical results.	111
<b>3.4 Uncertainties study of the Saint-Venant model.</b>	<b>122</b>
3.4.1 Characterization of the perturbation.	123
3.4.2 Simulations with periodic boundary conditions.	127
<b>3.5 Conclusion.</b>	<b>140</b>

---

### 3.1 INTRODUCTION.

Sediments are particles that can be transported by rivers over large distances. Their transport, deposition or erosion, controls the form of rivers. Depending on the water discharge, the geology, the slope of the area and the supply of sediment, rivers exhibit braid, meander or straight patterns. The study of sediment dynamics is particularly useful to prevent the filling of hydroelectric reservoirs, but also to preserve water intakes in rivers. Furthermore, sediments are a major component defining the habitat of fishes.

Two different kinds of transport processes are usually distinguished for non-cohesive sediments [83] : (i) fine particles (typically smaller than 2 mm) are mainly transported by suspension, contacts with the bed are then rare and particles can be found on the whole vertical of water depth [62, 55, 91, 114, 156]; (ii) larger particles are transported by bedload near the bed, by rolling or small jumps. This present work is focused on bedload transport.

A usual model to describe bedload is to write (i) a sediment mass conservation equation, the well-known Exner equation [58], and (ii) an empirical formula for the flux of sediments, experimentally validated in *bedload conditions* (moving sediments remain close to the bed).

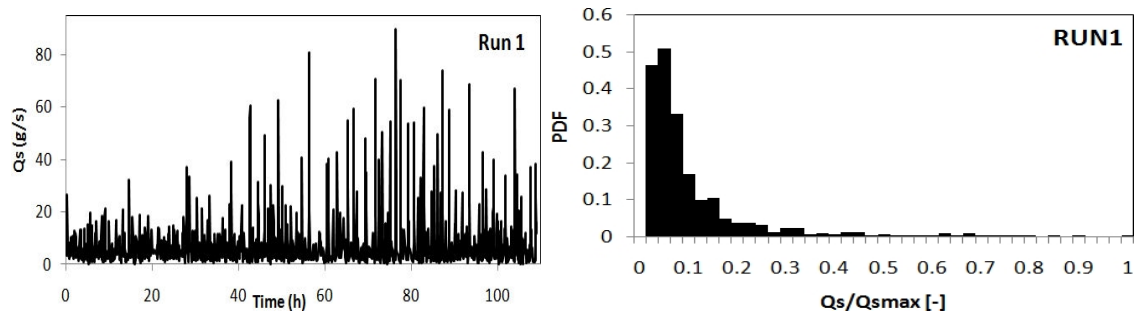
Most numerical codes modelling the transport of sediments for engineering studies (that is at scales involving a river reach and many days) make use of these equations (for example Telemac-Sisyphé [93], or many other codes[139]...). They have correctly predicted useful information such as an approximation of the total mass of sediments transported during a flood. Among other examples, [53] shows that with a one dimensional sediment transport model, they achieve reasonably good results in reproducing the bed changes due to a large flood event on the Ha!Ha! River (Canada). In [180], the authors compare calculations of solid discharge of the Danube River with measurements from a bed-load sampler and show good agreement with the observations. Nevertheless this model remains definitely coarse.

Empirical formulae for the flux of sediments are simply written as algebraic functions of the locally-averaged hydrodynamical conditions *above* the river bed, since what happens under the river is obviously inaccessible in most practical situations. There are many different established formulae for different flow conditions and sediment sizes, which can still be only determined experimentally at a high cost. Furthermore, the model has proved unable so far to account for wave-like transient phenomena which have been actually observed in rivers at any scale: ripples, dunes...

In any case, because of both its advantages and limitations, Exner model is still attracting the attention of many modellers interested by the dynamics of a river bed. In fact, the very notion of solid mass flux (or discharge) in bedload conditions is still discussed, for it strongly depends on the time and space scales at which transport is modelled. Its stochastic features in particular are discussed. On the one hand, a probabilistic framework at the grain scale has indeed been used for a long time, but also more recently, to propose semi-empirical *deterministic* bedload formulae at large scales [51, 193] after direct averaging of the stochastic solid discharge. On the other hand, the solid discharge also exhibits stochastic features at larger scales in laboratory experimental measures [74, 148], see for instance figure 3.1, although the probability distributions reconstructed from the measurements may depend on the sampling [74, 11]. Moreover, the idea has also recently emerged that some persistent forms observed at the surface of river beds may result from the non-linear interactions of small-scale features that should be modelled through the stochastic fluctuations, see e.g. [188, 106, 2, 63]. Finally, it appears natural to ask whether the solid discharge should still be considered stochastic in the models used for engineering studies, and then on which ground.

In this work, we suggest one possible stochastic Exner model where the solid mass flux is directly defined as a random variable with a probability distribution in keeping with





(a) Time variation of solid discharge.

(b) Distribution of solid discharge from figure 3.1a.

Figure 3.1: Flume experiment of bedload transport on high slopes, data kindly provided by A. Recking. Experiment was performed as described in [148].

the experimental measurements available in the literature [74, 148]. Then, we numerically investigate this new model in a standard benchmark test case for sediment transport, and we discuss some mathematical problems that naturally arise during the construction of such probabilistic models. Our goal is to evaluate the potential of new probabilistic models as improvements of the existing codes using Exner model at the scale of a river reach. We do not discuss the physics at the grain scale that could naturally define a stochastic solid discharge, but we demonstrate the need for an adequate mathematical framework before new probabilistic models can be coupled to hydrodynamic models at large scales. Much more experimental data (i.e. two-point correlations in space at least) seem necessary in order to correctly achieve that latter goal.

In fact, the study on the stochastic Exner system will bring the need of an understanding of the impact of fluctuating values for the bed on the hydraulic behaviour. Especially, it makes sense to investigate in detail the Saint-Venant system with a perturbation injected on the bottom topography since the Saint-Venant–Exner system admits the bed elevation as an unknown for which the sediment flux characterizing its evolution is naturally fluctuating. The topic of uncertainties in hydraulic systems has generated huge amount of works [96, 129, 100, 192, 191, 118, 156]. In particular, *Hunter et al.* [100] show that topographic data, bed friction and inflow hydrograph are affected by non negligible uncertainties, and *Horritt* [96] studies the effects of topographic uncertainties on the Saint-Venant model with help of a second order perturbation. Numerous methods have been developed to treat the uncertainty quantification [115, 187] but we will investigate the problem by using a Monte-Carlo approach which presents the advantage to be non-intrusive and simple to implement but converges slowly. In the proposed model, the uncertainty is carried by the topographic data considered as a stochastic variable since the uncertainty concerning these data is related to random phenomena.

## 3.2 EXNER MODEL.

### 3.2.1 The standard Exner model.

Let us denote by  $x \in \mathbb{R}$  the abscissa along a one-dimensional (1D) rectilinear infinite river. Exner equation is a local mass balance of sediments under a river bed that is modelled as a graph  $x \rightarrow b(t, x)$  for all times  $t \geq 0$ ,

$$\phi_s \partial_t b = -\partial_x q_s, \quad (3.2.1)$$

on assuming that the volume fraction  $\phi_s$  of the solid phase remains constant under the river bed. The model is closed after precisising the 1D flux of sediments  $q_s$  (in  $[m]^2 \cdot [s]^{-1}$ ) flowing through a section close to the river bed (bedload transport). Closure is a very complicated problem in general. River beds are polydisperse (fluid-saturated) granular suspensions with a very complicated rheology. However, one can create flow conditions in laboratory flume experiments such that  $q_s$  can be measured.

In experimental settings where sediments are heavy and only move by saltation, rolling and sliding motions close to the river bed [59, 142], one retrieves a non-dimensional solid mass flux  $q_s^*$  after comparing the data with,

$$q_s = \sqrt{\frac{g(\rho_s - \rho)d^3}{\rho}} q_s^* (\tau^*; \tau_c^*) \frac{\tau^*}{|\tau^*|},$$

where  $g$  is the gravity constant,  $\rho_s, \rho$  are respectively the mass densities of the solid and fluid phases,  $d$  is a typical grain diameter for sediments. For instance, Meyer-Peter and Müller [128] (MPM) have proposed,

$$q_s^* = 8 (|\tau^*| - \tau_c^*)_+^{\frac{3}{2}}, \quad (3.2.2)$$

for gravel, that is a function of the dimensionless shear stress term also called the *Shields parameter* [161],

$$\tau^* = \tau / (g(\rho_s - \rho)d),$$

where  $\tau$  is the shear stress exerted by the flow on particles at the surface of the river bed (in  $[kg][m]^{-1}[s]^{-2} \equiv Pa$ ), and  $\tau_c^*$  is a critical value for the initiation of motion (tabulated for various grain types). Shields [161] indeed noted that sediment transport occurs when the bottom shear stress just exceeds the threshold of incipient motion  $\tau_c$ .

In uniform flow conditions, the shear stress  $\tau$  can be directly computed as a *local* function of the river bed materials characteristics and of the hydrodynamic conditions above the river bed, namely the water depth  $h$  and a “(bed-)shear” velocity  $u^*$ . In particular, following the Darcy-Weisbach law that says that the specific energy loss in uniform flow conditions is proportional to some mean velocity  $|u|^2$ , we use the Manning formula,

$$\tau = \rho g R_h \frac{q|q|}{h^2 K_s^2 R_h^{4/3}}, \quad (3.2.3)$$

where, in the particular case of a rectangular channel with width  $l$ , the hydraulic radius  $R_h$  reads,

$$R_h = \frac{lh}{l + 2h}.$$

For numerical simulations, the dynamics of the whole river (sediments plus water) is finally computed from a model coupling (3.2.1) to the hydrodynamics of the free-surface water flow over the given bed  $b$ . Typically, for application to large space scales where Exner equation is complemented with MPM relation (3.2.2), it is often assumed that a coarse hydrodynamical model like the Saint-Venant nonlinear shallow-water equations,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q = 0, & (3.2.4a) \\ \partial_t q + \partial_x (q^2/h + gh^2/2) = -gh\partial_x b - \frac{\tau}{\rho}, & (3.2.4b) \end{cases}$$

modelling a hydrostatic free-surface shallow flow of water with depth  $h(t, x)$  and discharge  $q(t, x)$  above a river bed with small-amplitude variations in the longitudinal direction. Note that the friction term in (3.2.4) was defined in (3.2.3) and the mean velocity  $u$  is defined as the ratio  $q/h$  so the system (3.2.1)-(3.2.4) with relations (3.2.2)-(3.2.3) is closed.

### 3.2.2 A new stochastic Exner model.

Let us now propose a new stochastic Exner model. We shall directly introduce some “noise” in the model used at large scale. That is, some variables of the standard Exner model are now made random with a prescribed probability distribution in keeping with experimental measures in stationary conditions. Notice that this requires in particular that the solid discharge at the grain-scale (experimentally measurable) has not only a well-defined probability distribution on each finite space-time intervals of a given scale, but also that the joint probability distribution of various non-overlapping intervals is also well-defined. We are aware that such a scale is not yet fully identified, see e.g. [11], but current investigations show promising results [74], although joint probabilities for instance are not yet accessible. Anyway, assuming a separation of scales is natural when building a mathematical model (here, between microscopic processes at the grain scale and macroscopic transport at Exner scale), and we rely, as in most models, on the assumption of “locally uniform hydrodynamic flow conditions”.

To start with, we use one common definition of the solid mass flux  $q_s$ , see e.g. [64]:

$$q_s = d\tilde{n}V,$$

where  $d$  is the particle diameter,  $\tilde{n}$  is the number of saltating particles per space unit and  $V$  their longitudinal velocity. Then, with Bagnold scaling [10],

$$V = \sqrt{\frac{g(\rho_s - \rho)d}{\rho}} a(\sqrt{\tau^*} - \sqrt{\tau_c^*}),$$

and the local equilibrium condition  $\tilde{n} \propto (\tau^* - \tau_c^*)$ , one retrieves the usual Meyer-Peter

and Müller formula (3.2.2) once the empirical “activity” number  $a$  is fitted to 8 from the empirical average of experimental measurements with gravel in bedload conditions. Now, experimentally measured time-sequences have also brought out that the activity number  $a$  can be in fact considered exponentially-distributed pointwise-in-space, see e.g. [111]. Assuming an ergodic underlying process, we thus suggest to use,

$$q_s^* = A (|\tau^*| - \tau_c^*)_+^{\frac{3}{2}}, \quad (3.2.5)$$

with a random field  $A$  exponentially-distributed pointwise in space and time with mean 8,

$$\mathbb{P}(A(t, x) \leq \bar{A}) = \int_0^{\bar{A}} 8e^{-8A} dA = 1 - e^{-8\bar{A}}.$$

Note that this has also the meaning of an exponentially distributed travel distance  $\lambda$  for individual particles after rewriting  $nV = E\lambda$  with a (deterministic) pick-up rate  $E$ . Furthermore, since we would like our new model to be an enriched version of the standard Exner model and to yield back the standard Meyer-Peter and Müller formula for gravel in the “mean-field” approximation  $A(t, x) \approx \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(A)$ , it was natural indeed to choose  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(A) = 8$ . Though, the model is not fully defined yet. In particular, it is not clear how to define the dependence of the stochastic field  $A(t, x)$  on  $t$  and  $x$ .

In this project, we next explore numerically (i.e. at a discrete level) the implications of the “simple” choice where all the random variables  $A(t, x)$  at different  $t$  and  $x$  are chosen independent one-another, when Exner model is coupled to a hydrodynamical model for large scales (as it is usual in practice), and we explain why, in that frame, such a simple choice turns out to be a problem from the physical viewpoint.

Note that several recent works have already embraced the prospect of building a stochastic model of Exner-type. For instance, in [106], a white noise in time and space has been added to a slightly modified closure of (3.2.1) given historically by Exner himself [58], when  $q_s$  is an algebraic function of  $b$  and also of the slope  $\partial_x b$  (then (3.2.1) becomes a closed equation). The model potentially describes complex bed evolutions, but the postulated solid discharge happens not to be verified in most flow conditions.

Using a microscopic model at the grain scale, and focusing on *small* variations around a planar bed at rest, [3] computes the distribution of  $-\partial_x q_s$  in uniform flow conditions (i.e. insensitive to a Lagrangian vs. Eulerian description) as a balance between deposition and erosion processes (see also [144] for details about this reformulation). The deposition and erosion processes are chosen as simple algebraic functions of the *total* number  $\tilde{N}$  of particles in a control volume, with time variations proportional to those of the local bed elevation. In other words, Exner equation is reinterpreted as the master equation of a birth-death process followed by  $\tilde{N}$ , using the deposition and erosion processes as birth and death rates. In a formal large- $\tilde{N}$  limit [2], the pointwise probability distribution of the solid flux is Gaussian and not in keeping with experimental observations [111]. Note also that in this model, the coupling with the surrounding (uniform) hydrodynamics is through the deposition and erosion processes, which require a given particles velocity. The extension to non-uniform flow conditions (and thereby the coupling with hydrodynamics at large scales) is not straightforward.

In the series of papers [66, 67, 68, 155, 69], a kinetic approach is used in order to derive Exner equation, from the evolution equation of the probability density of particles possessing some “activity”  $\gamma$  at position  $x$  and time  $t$ , the time-derivative of that density supposedly being directly proportional to the time-derivative of the bed elevation. This yields a reinterpretation of Exner equation as a nonlinear advection-diffusion equation for the bed elevation, and consequently includes the possibility of a diffusive behaviour that is sometimes observed in experiments (depending on the flows and on the sampling-time of measures). However, this kinetic approach remains rather formal, and does not allow for a precise computation of the advective and diffusive coefficients from an explicit stochastic process satisfied by the particles activity. The coefficients are evaluated empirically. In fact, the same exponential distribution observed in [111] for the longitudinal particles velocity is invoked.

Note that the ability of the approaches above at describing a full erosion/deposition scenario better than the standard Exner model, especially when coupled with a hydrodynamic model that lets the (locally uniform) flow conditions evolve, has not been tested yet. This is exactly what we have in mind here, with our model. Of course, this would be difficult with the model of [106], especially because, whatever the solid discharge is used in Exner equation, adding a source term violates the principle of solid mass conservation. And a computation of the local solid discharge with [3, 2] first requires to extend the model to non-uniform flow conditions. Last, with a small diffusive term, the kinetic approach of [66, 67, 68, 155, 69] cannot improve on standard Exner model: it is not a new equation and it still requires empirical fitting. Contrarily to the latter interpretation of Exner equation starting with a kinetic framework and ending with a fully deterministic closure at the hydrodynamic scale, our model lets the coupled hydrodynamic depend stochastically (through the coupling) on the random particles activity. This is potentially richer, and may allow some “variability in the bedform geometry [to result] from some randomness in sediment flux” [2]. Of course, this is also potentially dangerous, and the first relevant question to ask is: does such a fully coupled model contain at least the uniform flow conditions used for the matching with experimental measures? That question still needs to be precised and shall next be investigated numerically. The notion of uniform flow conditions in particular may have to be understood only “in the mean”, while the mean behaviour is in fact quite complicated because of the nonlinearities.

### 3.3 A NUMERICAL DISCUSSION OF THE STOCHASTIC MODEL.

#### 3.3.1 Finite-Volume discretization of Saint-Venant–Exner model.

Recall Saint-Venant–Exner model with periodic boundary conditions on the unit cell  $S = \{x \in [0, 1)\}$  of  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x q = 0, & (3.3.1a) \\ \partial_t q + \partial_x \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + gh\partial_x b = -\frac{\tau}{\rho}, & (3.3.1b) \\ \partial_t b + \partial_x q_s = 0, & (3.3.1c) \end{cases}$$

where  $g$  represents the gravitational acceleration,  $h(t, x)$  is the water height,  $q(t, x)$  the discharge and  $b(t, x)$  the topography. The solid transport flux  $q_s(t, x)$  is defined by the stochastic Meyer-Peter-Müller formula (3.2.5) and the friction term is given by relation (3.2.3).

We now describe how we numerically solve the Saint-Venant–Exner system (3.3.1). Let us first mention some of the recent works [28, 5, 77] devoted to the derivation of finite volume methods to handle system (3.3.1) at once. Here we do not adopt this strategy and apply a splitting method on a staggered grid in a finite volume - finite difference spirit. Indeed it is easier to preserve a discrete steady state on a constant slope in this way and it also allows us to clearly separate the influence of the stochastic term on the bottom topography on the one hand and on the fluid quantities on the other hand. However, we precise that this study could be conducted with help of a non splitting method involving collocated scheme well-balanced for non perturbed equilibria.

Let us first introduce some notations. We define two meshes of the domain. We first define a number of semi-cells equal to  $2N_x$  denoted  $C_{i,i+1/2}$  and define the cells  $C_i = C_{i-1/2,i} \cup C_{i,i+1/2}$  and  $C_{i+1/2} = C_{i,i+1/2} \cup C_{i+1/2,i+1}$  for the two meshes,  $i = 0, \dots, N_x - 1$ . For simplicity we consider uniform meshes and denote the space step  $\Delta x$ . We define the time step  $\Delta t^n$  later on. The fluid quantities will be defined on cells  $C_i$  and the bottom topography on cells  $C_{i+1/2}$ . We note that the staggered strategy has been currently investigated in particular in [88]. Nonetheless, the method is different from the presented approach since the variables are not located in the same mesh; the water height and the topography are defined on the same grid and the velocity is evaluated in another one.

Then starting from initial quantities defined as the mean values of the initial data on meshes  $C_i$  or  $C_{i+1/2}$ ,

$$h_i^0 = \int_{C_i} h^0(x) dx, \quad u_i^0 = \int_{C_i} u^0(x) dx, \quad b_{i+1/2}^0 = \int_{C_{i+1/2}} b^0(x) dx,$$

we compute at each time step the numerical solution in two steps,

- (i) first, we compute approximate values for the fluid quantities  $\tilde{W} = (h, q)^T$  by classical finite volume formulae on cells  $C_i$ ,

$$\tilde{W}_i^{n+1} = \tilde{W}_i^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \left( F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n \right) + \frac{\Delta t^n}{\Delta x} \tilde{S}(\tilde{W}_i^n, b_{i-1/2}^n, b_{i+1/2}^n), \quad (3.3.2)$$

where  $F_{i+1/2}$  is the numerical flux defined by the Rusanov formula in this present case,

$$F_{i+1/2} = F(\tilde{W}_i, \tilde{W}_{i+1}) = \frac{F(\tilde{W}_i) + F(\tilde{W}_{i+1})}{2} - c \frac{\tilde{W}_{i+1} - \tilde{W}_i}{2}, \quad (3.3.3)$$

with  $F(\tilde{W}) = \left( q, \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right)^T$ ,  $c = \max \left( |u_i| + \sqrt{gh_i}, |u_{i+1}| + \sqrt{gh_{i+1}} \right)$  and the discrete source term  $\tilde{S}(\tilde{W}_i^n, b_{i-1/2}^n, b_{i+1/2}^n)$  is written as,

$$\tilde{S}(\tilde{W}_i^n, b_{i-1/2}^n, b_{i+1/2}^n) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh_i^n (b_{i+1/2}^n - b_{i-1/2}^n) \end{pmatrix}, \quad (3.3.4)$$

(ii) second, we compute approximate values for the bottom topography by finite difference formulae,

$$b_{i+1/2}^{n+1} = b_{i+1/2}^n - \frac{\Delta t^n}{\Delta x} (q_s(h_{i+1}^n, u_{i+1}^n) - q_s(h_i^n, u_i^n)) . \quad (3.3.5)$$

Since we work on the torus  $\mathcal{T}^1$ , we have to deal with periodic boundary conditions. For the fluid mesh, we add two ghost cells  $C_{-1}$  and  $C_{N_x}$  where we define the periodic boundary conditions as follows,

$$\begin{cases} h_{-1} = h_{N_x-1}, & q_{-1} = q_{N_x-1}, \\ h_{N_x} = h_0, & q_{N_x} = q_0. \end{cases}$$

For the bottom topography, we similarly define two ghost cells,

$$\begin{cases} b_{-1/2} = b_{N_x-1/2}, \\ b_{N_x+1/2} = b_{+1/2}. \end{cases}$$

Note however that  $b_{N_x+1/2}$  is never actually used in the numerical scheme above because of the discretization choices (explicit fluxes and centered source terms).

We then have to define the time step. In this present framework, it satisfies the CFL condition for the Saint-Venant system,

$$\Delta t^n \leq \frac{\Delta x}{\max_{i=1, \dots, N_x} (|u_i^n| + \sqrt{gh_i^n})} . \quad (3.3.6)$$

In [41], the authors show that the wave velocities of the Saint-Venant–Exner system and the Saint-Venant one are different. However numerical schemes on staggered meshes considering a CFL condition defined for the fluid part (3.3.6) work well even if this issue is still open [88]. Thereafter we deal with a weak coupling between the hydraulic and the solid part. Under this assumption, it is possible that the hydraulic wave velocities are quite close to those of the Saint-Venant–Exner system.

Let us recall that our goal is to perform Monte-Carlo simulations and then to run many realizations. Moreover we also would like to consider different space steps  $\Delta x \in \{0.5, 0.25, 0.125, 0.0625, 0.03125\}$ . To make the comparison between the results easier, we then choose a quite restrictive time step that will satisfy the CFL condition in any case. The uniform choice  $\Delta t = 10^{-2}s$  is made for all computations in the present study. A uniform definition of the time step is motivated by the need to evaluate the probabilistic quantities (for example, empirical mean and variance) at the same instants. However, in the numerical simulations, we ensure that the imposed value of the time step satisfies the CFL condition (3.3.6). Moreover, this choice could be sufficiently low to satisfy the CFL condition associated to the Saint-Venant–Exner equations.

### 3.3.2 Monte-Carlo simulations and numerical results.

Let us first mention that all our simulations for the semi-empirical stochastic model are close to a deterministic case that is well understood: stationary uniform flow. Moreover we concentrate on torrential regime where the experiment of Recking [148] exhibits important fluctuations in solid discharge  $q_s$ . Then we first describe the uniform deterministic solution, we second describe the stochastic perturbation of the solid flux and third we comment the results of the Monte-Carlo simulations.

#### 3.3.2.1 Stationary uniform flow solution to the deterministic model.

A particular stationary uniform flow solution to the deterministic model is computed as follows:

- we impose the discharge  $q$  and the Froude number  $F$ ,

$$F = \frac{|q|}{h\sqrt{gh}} \iff h = \left( \frac{q^2}{g F^2} \right)^{1/3}, \quad (3.3.7)$$

which determines the water height  $h$ ,

- we impose  $K_s$ , then, the equilibrium between the slope and the friction term reads,

$$gh\partial_x b = -\frac{\tau}{\rho} \iff \partial_x b = -\frac{q|q|}{h^2 K_s^2 R_h^{4/3}}, \quad (3.3.8)$$

which determines the slope  $-\partial_x b = \frac{g h F^2}{R_h^{4/3} K_s^2}$  as a function of  $h$  and  $F$ .

In the present study, we have used the values presented in the table 3.1.

Parameters	Values
Domain $\mathcal{D}$	$[0, 75]$ $m$
$l$	1 $m$
$g$	9.8 $m.s^{-2}$
$q$	1 $m.s^{-1}$
$F$	1.5 (-)
$h$	$\approx 0.36$ $m$
$u$	$\approx 2.80$ $m.s^{-1}$
$R_h$	$\approx 0.21$ $m$
$-\partial_x b$	$\approx 7$ %
$K_s$	30 $m^{1/3}.s^{-1}$

Table 3.1: Initial conditions in torrential regime.



### 3.3.2.2 Description of the stochastic solid flux.

In the previous subsection we described the uniform flow. We now have to describe the characteristic of the solid flux  $q_s$  in the Exner equation. We use the stochastic Meyer-Peter-Müller formula (3.2.5) and then the definition of the discrete solid flux is,

$$(q_s)_i^n = d \sqrt{\frac{g(\rho_s - \rho)d}{\rho}} A_i^n (|(\tau^*)_i^n| - \tau_c^*)^{\frac{3}{2}} sg((\tau^*)_i^n),$$

with the parameters listed in the Table 3.2.

Parameters	Values
$\rho_{water}$	$10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
$\rho_{sediment}$	$2.65 \times 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$
$R$	$\frac{\rho_{sediment} - \rho_{water}}{\rho_{water}} = 1.65$ (—)
$\tau_c^*$	0.047 (—)
$d$	$10^{-3} \text{ m}$
$K_s$	30 $\text{m}^{1/3}.\text{s}^{-1}$
$A$	8 (—)
$\tau^*$	$\approx 8.93$ (—)

Table 3.2: Physical parameters of the sediment flux in torrential regime.

The coefficients  $A_i^n$  are, for  $i = 0, \dots, N_x - 1$  and  $n = 0, \dots, N_t$ , independent identically distributed random variables with exponential distribution, as suggested by the experimental data. Moreover, the exponential probability law is chosen with uniform parameter  $\lambda = 1/8 = 0.125$ , so all coefficients  $A_i^n$  have a mean of  $1/\lambda = 8$ , their usual deterministic value. Note that the variance then reads  $1/\lambda^2 = 64$ .

### 3.3.2.3 Monte Carlo simulations.

For the Monte-Carlo simulations, we use 1000 realizations of the stochastic Saint - Venant – Exner system (SVE), which is enough to numerically approximate the first moment of the stochastic quantities by the Central Limit theorem considering the estimated magnitude of the variances (see below). This assertion is made more precise by computing the confidence interval using the empirical variance. The length of this interval turns to be smaller than  $10^{-3}$  for all the quantities of interest on the considered meshes, see Table 3.3 (we are aware that the number of realizations is not sufficient to obtain a very precise evaluation of the second moment of the distributions, but it allows us to correctly approximate the order of magnitude of this quantity with the computed empirical variance). Note also that we choose a final time  $T = N_t \Delta t$  large enough such that the empirical variance of all the quantities of interest seems close to long-time stationary values as indicated in figure 3.2.

In all the results, we are not interested in the bottom topography itself but in the devi-

	Empirical variance	Size of the confidence interval
$\tilde{b}$	$\in [2 \times 10^{-5}, 2 \times 10^{-4}]$	$\in [1.4 \times 10^{-4}, 4.5 \times 10^{-4}]$
$u$	$\in [5 \times 10^{-4}, 4 \times 10^{-3}]$	$\in [7.1 \times 10^{-4}, 2 \times 10^{-3}]$

Table 3.3: SVE. Characterization of the confidence interval.

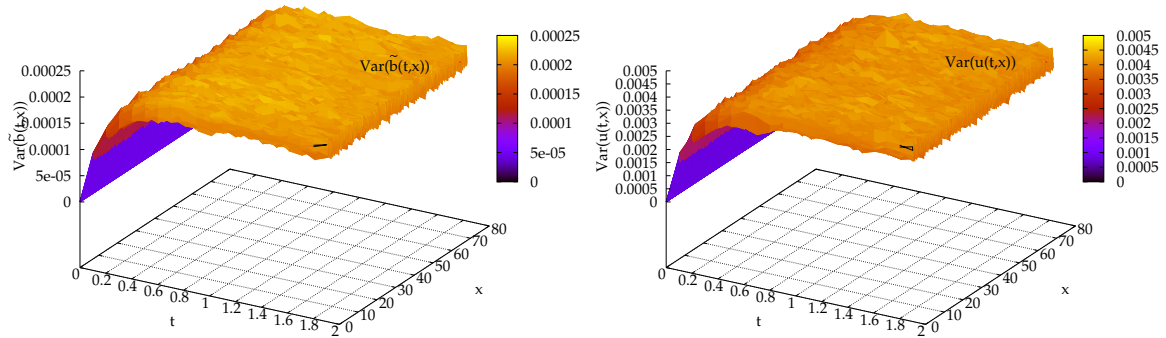


Figure 3.2: SVE. Variance of the bottom topography (left) and of the velocity (right) as a function of time and space for the finest mesh.

ation of the bottom topography from its initial value (which is also the stationary one for the deterministic case), denoted  $\tilde{b}$  on the figures.

We present in figure 3.3 the empirical mean of the topography as a function of the abscissa  $x$  at the fixed time  $T$  for two different meshes ( $N_x = 150$  and  $N_x = 2400$ ), and in figure 3.4 the empirical variance of the same quantity for a series of meshes where the number of points varies between the two limits mentioned above. The empirical variance allows us to evaluate the confidence interval and then to check that the oscillations in the empirical mean are not significant. It follows that we can consider the empirical mean is constant in space. Since the empirical mean appears to be centered around zero we can conclude that the mean value of the disturbed bottom remains equal to the original topography. This is satisfying: when considering our stochastic Saint-Venant–Exner system, we had in mind to require that the expectation of the physical variables coincide with their deterministic values in equilibrium conditions (such as the stationary uniform flow conditions here).

Moreover, we also observe that the long-time limit of the empirical variance of the stochastic bottom topography seems to converge to a uniform value when we refine the mesh, which also indicates the possibility of a physically-interesting long-time behaviour: the long-time solutions of our stochastic Saint-Venant–Exner system may actually model the uncertainty in the location of the river bed at the grain-scale, *i.e.* ripples.

However, let us now turn to the fluid quantities. First, we note that the expectation of the water height and of the bottom topography remain solutions to conservative equations. So the uniform stationary values that  $\mathbb{E}(\int_{\mathcal{D}} h dx)$  and  $\mathbb{E}(\int_{\mathcal{D}} b dx)$  can be expected to reach at large times in the present periodic setting are necessarily the same as their initial

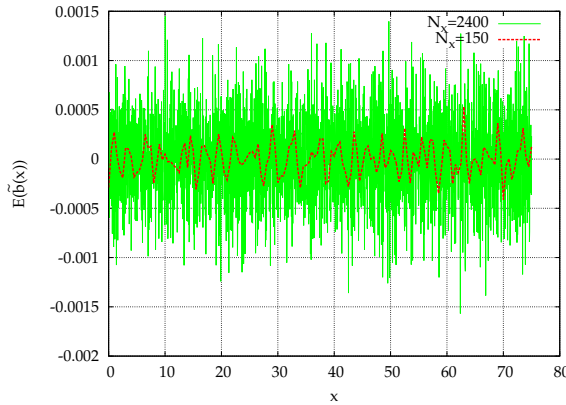


Figure 3.3: SVE. Empirical mean of the topography deviation for two meshes.

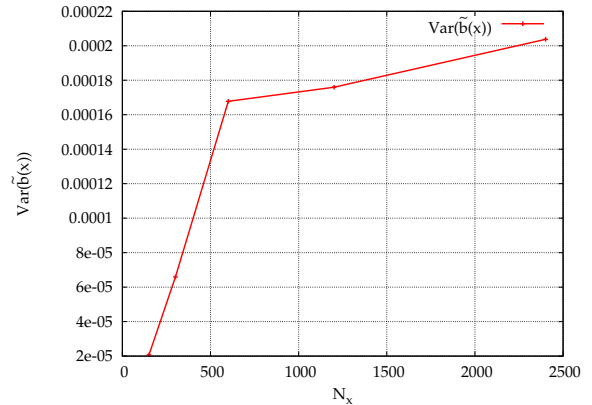


Figure 3.4: SVE. Empirical variance of the topography deviation for different meshes.

deterministic values. But as concerns the discharge, it holds (recall (3.3.1b)),

$$\partial_t \mathbb{E}(q) + \partial_x \mathbb{E} \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) = -\mathbb{E} \left( gh \partial_x b + \frac{\tau}{\rho} \right),$$

and its total “mass” over the domain is thus not conserved a priori (even in the mean) insofar as the source,

$$\int_S \mathbb{E} \left( gh \partial_x b + \frac{\tau}{\rho} \right), \quad (3.3.9)$$

is not zero at all times. (One can see two effects here: i) each trajectory of the stochastic systems departs from equilibrium and has *a priori* a non-zero spatial average of the source, so nor in the mean for the expectation (3.3.9), or ii) nonlinearities imply, for instance,  $\mathbb{E}(h \partial_x b) \neq \mathbb{E}(h) \mathbb{E}(\partial_x b)$  even though  $\mathbb{E}(h)$  and  $\mathbb{E}(\partial_x b)$  have uniformly the initial values of  $h$  and  $\partial_x b$  corresponding to a pointwise-in-space equilibrium with zero source.) Consequently, functions of the velocity or of the discharge, like the energy  $q^2/h + gh(h+b)$  for instance, are a priori not conserved either along time by the dynamics of our model, for the same reasons.

In figures 3.5 and 3.6, we show for the velocity the same curves as for the bottom topography in figures 3.3 and 3.4. Here also, when computing the confidence interval from the empirical variance, it appears that the empirical mean is constant in space. We present in figure 3.7 the empirical mean as a function of time for the 150 elements mesh and in figure 3.8 the value of the empirical mean at final time for the whole serie of meshes. It clearly appears that the empirical mean decreases over time; this decrease goes faster when the mesh is refined since the perturbation on the bottom topography grows with the mesh size. In the considered time interval, it does not seem to converge to a particular value but it is not possible to anticipate its long-time behaviour. By the way, independently of this long-time behaviour, it means that the supposed steady state would be different from the non perturbed one. This is a main issue which will be treated thereafter.

In the rest of the chapter, we try to improve our new model. To this aim, we come back in the next section to a simpler problem where we consider the classical Saint-Venant system with a fixed (i.e. time-independent) topography. The bottom topography however remains stochastic in the sense that we consider (time-independent) random perturbations of the constant-slope deterministic uniform reference flow.

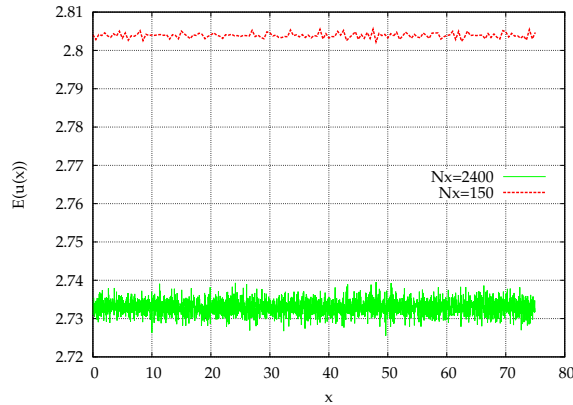


Figure 3.5: SVE. Empirical mean of the velocity for two meshes.

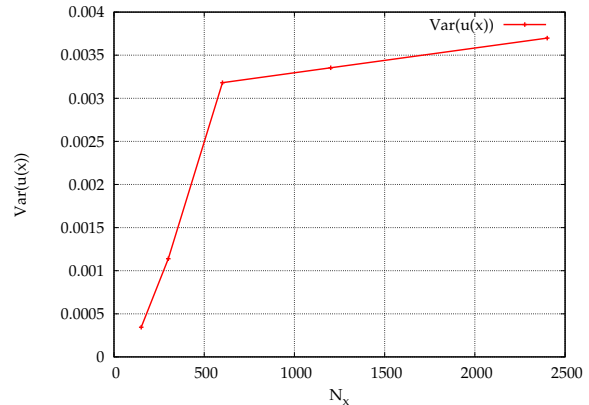


Figure 3.6: SVE. Empirical variance of the velocity for different meshes.

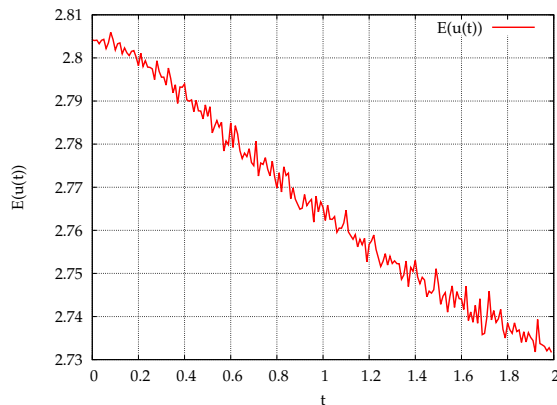


Figure 3.7: SVE. Empirical mean of the velocity as a function of time for the finest mesh.

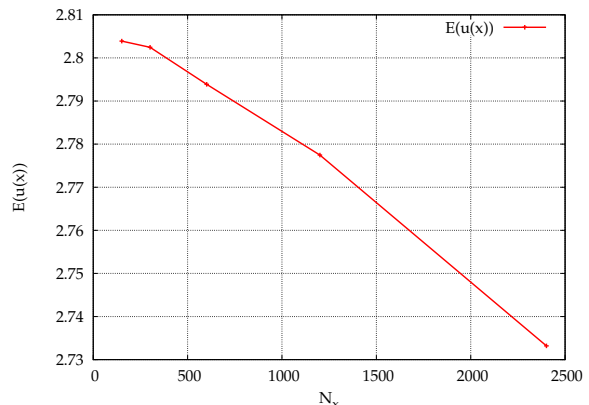


Figure 3.8: SVE. Empirical mean of the velocity for different meshes.

Before turning to the Saint-Venant system, let us present in figure 3.9 the probability density functions for the bottom topography and the velocity on the finest mesh. The PDFs are represented at a given point  $x$  (previous figures show that the density function, or at least its two first moments, is not sensitive to space) and for some times  $t^n$ . We are aware of the lack of convergence for these PDFs due to the relatively small number of realizations we performed but it seems to us interesting to mention three facts: first, both PDFs appear to be centered around their mean value even if the original noise introduced in the solid flux  $q_s$  does not follow a centered density function. Second, the PDF for the velocity is another way to exhibit that its empirical mean decreases when time increases, see figures

3.7 and 3.9, but it also appears that the PDF just shifts to the left without large deformation. Finally, since the variances increase in time (see figures 3.2), the different PDF spread more widely in space with time.

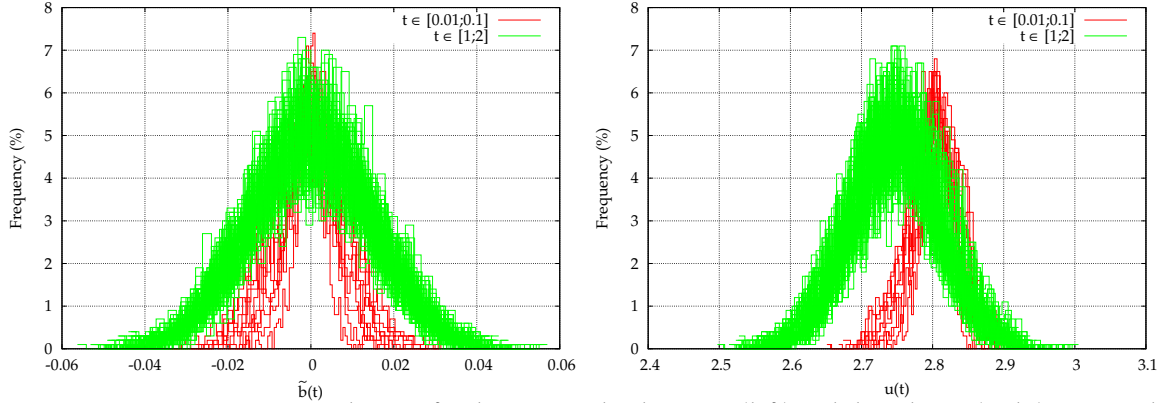


Figure 3.9: SVE. Superimposed PDFs for the topography deviation (left) and the velocity (right) computed on the finest mesh at times  $[0.01; 0.1]$  and  $[1; 2]$ .

### 3.3.2.4 Stochastic Saint-Venant system.

Currently, we have exhibited a phenomenon of energy dissipation, characterized by the decrease of the velocity, when adding noise to the sediment flux of the Saint-Venant–Exner model. To better understand this phenomenon, we propose in the following to treat a simpler case of stochastic Saint-Venant system (SV). In fact, the sediment flux is directly responsible of topographical modifications; in that sense, a fluctuating flux will influence the local bed elevation. We know that this last one which is also the coupling variable of the Saint-Venant–Exner system, permits to define the long-time steady state of the Saint-Venant system. For this reason, the understanding of the long-time behaviour of the stochastic Saint-Venant–Exner model needs knowledges on the sensitivity of the Saint-Venant system on the bottom topography; in particular, to identify the difficulties and the way they could be overcome, and to conduct first analysis. The presented study is inspired by works done for Burgers equation [7, 75] and by the theoretical works done in [47, 48, 49]. Starting from (3.2.4), we propose to consider a stochastic bottom topography  $b$  defined by,

$$\begin{cases} b_{i+1/2}^n = b_{i+1/2}^0 + \tilde{b}_{i+1/2}, & (3.3.10) \\ \tilde{b}_{i+1/2} = \alpha \sqrt{\Delta x} \sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^\beta} \left( c_k \cos \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) + s_k \sin \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) \right), & (3.3.11) \end{cases}$$

where  $b_{i+1/2}^0$  corresponds to the non-perturbed initial bottom topography,  $c_k$  and  $s_k$  are independent random variables following a normal law  $\mathcal{N}(0, 1)$ ,  $N_m$  corresponds to the number of modes that we will fix to  $N_m = N_x/2$ ,  $\alpha$  is an imposed amplitude, and the constant parameter  $\beta$  influences the smoothness of the noise. The process consists on

disturbing the bottom topography  $b$  at the initial state ( $t = 0$ ) for each realization. The random variable  $\tilde{b}_{i+1/2}$  corresponding to the added perturbation clearly follows a normal law (see Appendix 1 for details),

$$\tilde{b}_{i+1/2} \sim \mathcal{N} \left( 0, \alpha^2 \Delta x \sum_{k=1}^{N_x/2} \frac{1}{k^{2\beta}} \right). \quad (3.3.12)$$

We consider again a torrential flow over a constant sloped bottom topography and the initial parameters are given in Table 3.1. One recalls that we impose periodic limit conditions at the boundaries of the domain. The first simulations are done with arbitrarily imposed parameters of amplitude  $\alpha$  equal to  $10^{-1}$  and  $\beta$  equal to 1. Thereafter, we propose an analysis of the outputs of the system in function of the values of these parameters.

The framework of the test case is the same as the Saint-Venant–Exner case; we work with a 150 points mesh and also simulate 1000 realizations. Given the fact that the bottom topography does not evolve in time, we exhibit the range of values of the injected noise for two realizations in figure 3.10. The values oscillate in an interval of length of the order of  $10^{-1}$  which is in accordance with the imposed value of the amplitude of the noise.



Figure 3.10: SV. Added noise as a function of space with  $\alpha = 10^{-1}$  and  $N_x = 150$  for two different realizations.

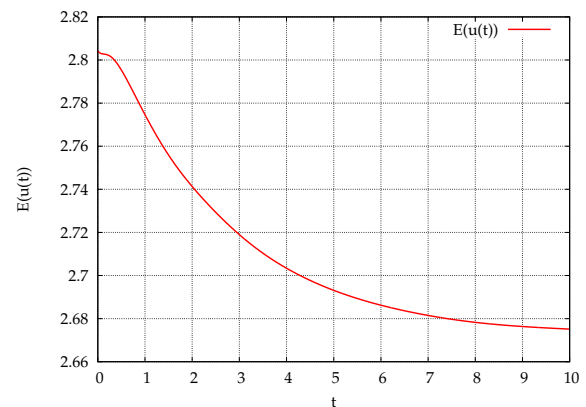


Figure 3.11: SV. Empirical mean of the velocity as a function of time.

Concerning the hydraulic part, we present the respective variances of the water height  $h$  and the velocity  $u$  in figure 3.12. The final values are not the same as in the previous case due to the difference between the range of values taken by the injected noise in the present case and in the Saint-Venant–Exner case. In spite of this observation, the behavior of these curves is similar to the previous ones observed for the Saint-Venant–Exner system. The important fact is that the empirical mean of the velocity decreases as a function of time to a “new uniform” value (we are aware that it is necessary to extend the time interval to clearly bring out this uniform value but we exhibit that the slope of the tangent to the curve of this empirical mean decreases in time), see figure 3.11, which was not observed in the previous analysis of the Saint-Venant–Exner due to the small size of the time interval. This result is in accordance with the result obtained for the stochastic Saint-Venant–Exner

model. For information purposes only, the PDF of the water height and the velocity are presented in figure 3.13 on which we can also note the shift previously mentioned for the PDFs of the velocity. Note that in this new configuration, the PDFs of the fluid quantities are skewed even if the PDF of the bottom topography is symmetric.

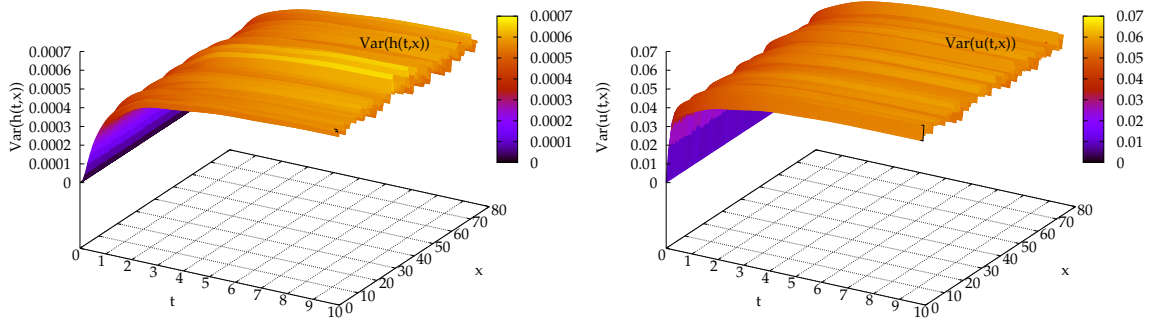


Figure 3.12: SV. Variance of the water height (left) and the velocity (right) as a function of space and time for  $N_x = 150$ .

Now, since the decrease of the discharge (and thereby the energy loss) is due to the imbalance between the slope and the friction terms (3.3.9), we suggest to choose, in the stochastic Saint-Venant models, a Strickler coefficient  $K_s$  different from the one in the deterministic case. But we propose to proceed *in the same spirit* as in the deterministic case: the Strickler coefficient  $K_s$  should in fact be *calibrated* so as to enforce the equilibrium (3.3.8).

In the following, we compute the new coefficient *at each time step* as a *deterministic function* of moments of  $h$  and  $q$ . To establish an expression, at the discrete level, we require an equality between the expectation of the sum in space of  $q_i^n$  and  $q_i^{n+1}$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^{N_x-1} q_i^{n+1} \right] = \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^{N_x-1} q_i^n \right], \quad (3.3.13)$$

thus imposing that no quantity of motion is dissipated by the model. In that way, it is possible to express the Strickler coefficient as a time dependent deterministic coefficient  $(K_s)^n$ , which can be used explicitly for every realization  $\omega$  and each time step  $t^n$  in the momentum conservation equation of (3.3.2). Precisely, we obtain the formula,

$$(K_s)^n = \left( \frac{\mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^{N_x-1} \frac{q_i^{\omega,n} |q_i^{\omega,n}|}{h_i^{\omega,n} (R_{h,i}^{\omega,n})^{4/3}} \right]}{(-\partial_x b^0) \times \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^{N_x-1} h_i^{\omega,n} \right] + \frac{1}{\Delta x} \mathbb{E} \left[ \sum_{i=0}^{N_x-1} h_i^{\omega,n} (\tilde{b}_{i+1/2}^{\omega,n} - \tilde{b}_{i-1/2}^{\omega,n}) \right]} \right)^{1/2}, \quad (3.3.14)$$

where we recall that the expectation of the stochastic bottom slope  $-\partial_x b^0$  coincides with the slope (constant and uniform) of the deterministic equilibrium.

The new stochastic system (3.3.2) is now nonlinear in the sense of McKean (the coefficients are functions of the stochastic process), and much more difficult to handle numerically (all realizations in a Monte-Carlo simulation need communicating one-another). Furthermore, it is not clear whether requiring equilibrium through the mean-field approximation above will actually be enough for the long-time expectations in the stochastic Saint-Venant–Exner system to coincide with their deterministic counterparts at equilibrium. We postpone these questions to future works and limit here to the simplified stochastic Saint-Venant system.

For this system, and starting from the deterministic equilibrium where  $K_s = 30$ , one actually maintains an equilibrium “in the empirical mean” with the formula (3.3.14) after initially perturbing the bottom topography. We present in figure 3.15 the evolution in time of the empirical mean of  $u$  for Monte-Carlo simulations. It remains close to the equilibrium. We also exhibit in figure 3.14 that  $K_s$  converges fast in time to a new *constant* value. This value is *higher* than the deterministic equilibrium value of  $K_s$  equal to 30 (around 31.4). Note that the Strickler coefficient  $K_s$  converges faster in time than the empirical mean of the velocity shown in figure 3.15.

This higher value is consistent with the fact that the introduction of a friction coefficient in the Saint-Venant system is often presented as a way to take into account (among other phenomena) a roughness of the topography introduced in the model, with a view to maintaining uniform flow conditions. On the contrary, when some additional roughness is directly included through (stochastic) perturbations of the bottom topography, the parameterized friction effect can decrease, and  $K_s$  increase.

The fact that the new Strickler coefficient can adapt fast to perturbations of the bottom topography in order to maintain an equilibrium is also very promising for the construction of a consistent stochastic Saint-Venant–Exner model that maintains *in the mean* the same stationary uniform flows as in the deterministic case. In particular, we have also computed the case where the Strickler coefficient is fixed (time-independent) but with value 31.43, from the long-time limit of the previous time-dependent case. Then, the new equilibrium state close to the deterministic equilibrium is still maintained in the mean for large times, as shown in figure 3.16. In addition, as expected, the discrete source term is distributed around the value zero, see figure 3.17. (Discretely, the friction term obtained with the new Strickler coefficient compensates well the part of the source term related to the slope of the bottom topography in the mean.)

Last, let us again present the variance and the PDFs for the water height and the velocity when replacing the constant value of  $K_s$  previously used (in every test case,  $K_s = 30 \text{ m}^{1/3} \cdot \text{s}^{-1}$ ) by a time dependent one as expressed earlier (3.3.14). These results are respectively shown in figures 3.18 and 3.19. Compared to the results in figure 3.12, those in figure 3.18 show that the variance for the water depth and the velocity has overall the same behaviour than the former ones. Moreover, the modified Strickler coefficient has corrected perforce the shift previously observed both for the Saint-Venant–Exner model and for the Saint-Venant system: not only  $\mathbb{E}(h)$  and  $\mathbb{E}(q)$  assume uniform values equal to the initial equilibrium conditions for large times, but also the velocity  $u = q/h$ , as shown in figure 3.15 (in spite of the nonlinearity). (The empirical mean of the velocity at given  $x$  yields an approximation of the expectation in an interval with magnitude of order between  $10^{-3}$



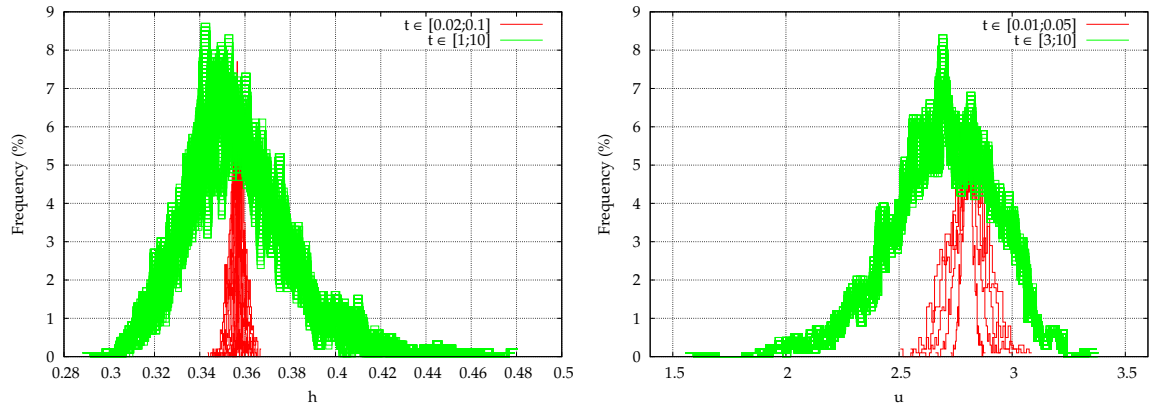


Figure 3.13: SV. Superimposed PDFs for the water height at times  $[0.02; 0.1]$  and  $[1; 10]$  (left), and the velocity at times  $[0.01; 0.05]$  and  $[3; 10]$  (right) with  $N_x = 150$ .

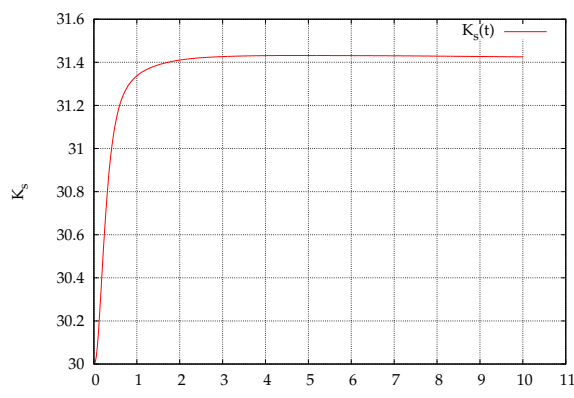


Figure 3.14: SV. Values of  $K_s$  as a function of time.

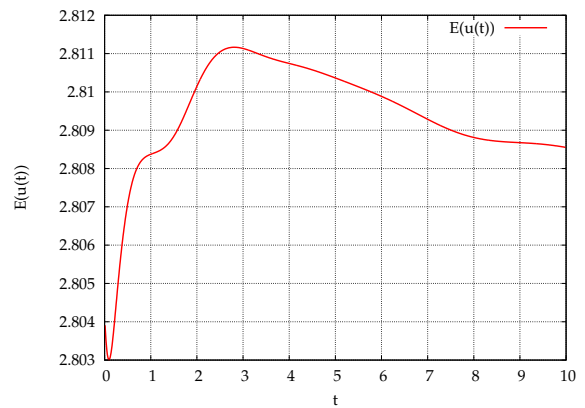


Figure 3.15: SV. Empirical mean of the velocity as a function of time.

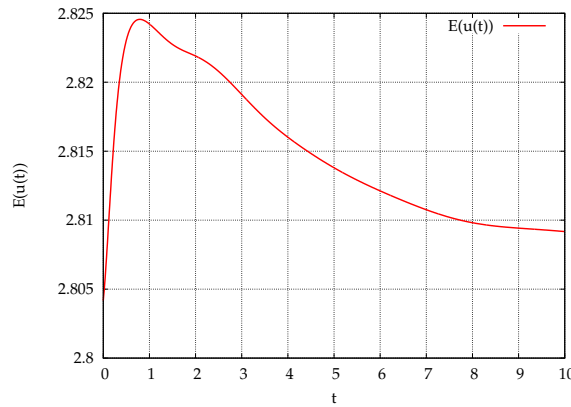


Figure 3.16: SV. Empirical mean of the velocity as a function of time with  $K_s = 31.43$ .

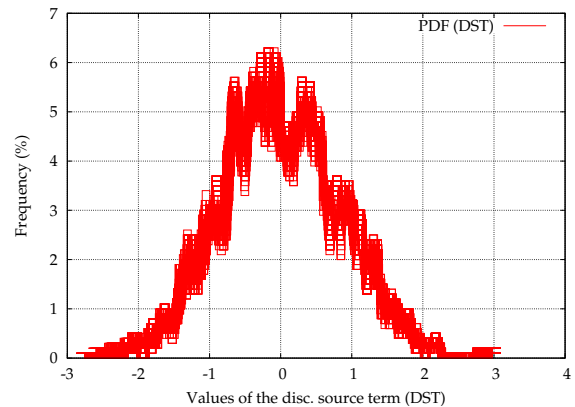


Figure 3.17: SV. PDF of the discrete source term with  $K_s = 31.43$ .

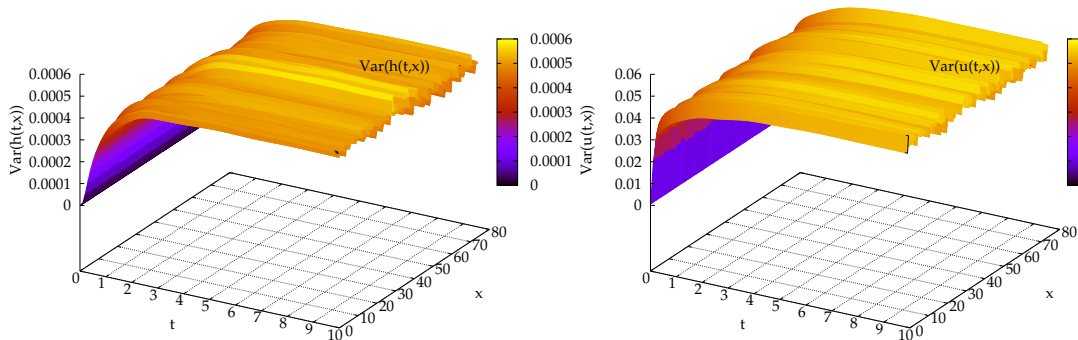


Figure 3.18: SV. Variance of the water height (left) and the velocity (right) as a function of space and time for  $N_x = 150$ .

	Saint-Venant		Saint-Venant–Exner
	with constant $K_s$	with modified $K_s$	stochastic $Q_s$
$E(\tilde{b})$	0	0	0
$Var(\tilde{b})$	$4.10489 \times 10^{-3}$	$4.10489 \times 10^{-3}$	$4.3123 \times 10^{-5}$
$E(u)$	2.6	2.8	2.80
$Var(u)$	$5.61674 \times 10^{-2}$	$5.36315 \times 10^{-2}$	$7.17021 \times 10^{-4}$
$E(h)$	0.35	0.35	0.356
$Var(h)$	$5.70804 \times 10^{-4}$	$4.98172 \times 10^{-4}$	$6.78487 \times 10^{-6}$

Table 3.4: SV. Comparison of the results obtained for the three test cases with  $N_x = 150$ : Saint-Venant + perturbed  $b$  and constant  $K_s$ , Saint-Venant + perturbed  $b$  and modified  $K_s$  at each time step, and stochastic Saint-Venant–Exner.

and  $10^{-2}$  at any time.) Moreover, in the PDFs for the velocity shown at given  $x$  and various times in figure 3.19, it appears that the most probable values is the same at any time. In addition, the PDFs of the hydraulic quantities are again strongly skewed.

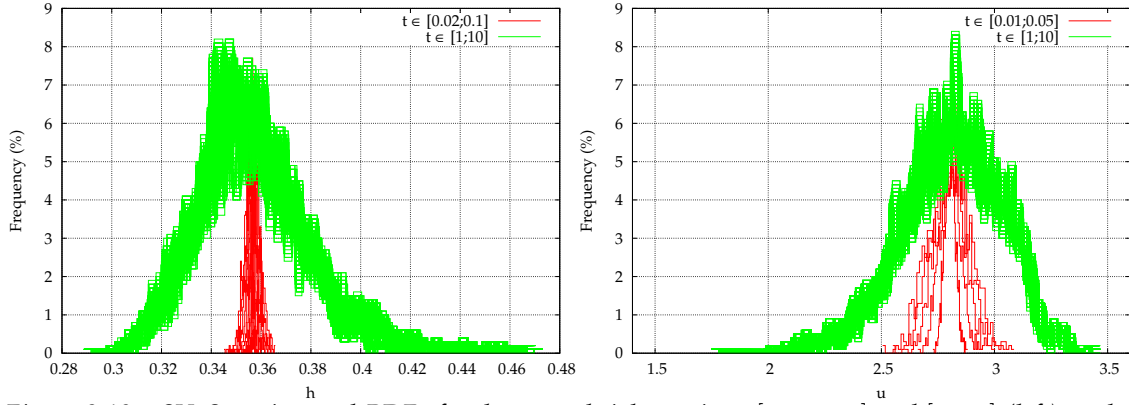


Figure 3.19: SV. Superimposed PDFs for the water height at times [0.02; 0.1] and [1; 10] (left), and the velocity at times [0.01; 0.05] and [3; 10] (right) with  $N_x = 150$ .

### 3.4 UNCERTAINTIES STUDY OF THE SAINT-VENANT MODEL.

Considering the expression of the perturbation added in the topography defined in (3.3.10), it appears that two parameters denoted by  $\alpha$  and  $\beta$  control the “nature of the noise”. We propose to focus the study on uncertainties specific to these parameters. That is why we will consider an expression of  $\tilde{b}_{i+1/2}$  which is a little different from (3.3.10) such that,

$$\tilde{b}_{i+1/2} = \alpha \sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^\beta} \left( c_k \cos \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) + s_k \sin \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) \right). \quad (3.4.1)$$

The purpose is to introduce a perturbation which will not depend on the mesh size in terms of amplitude and smoothness. This formula permits to “separate” these two parameters in the sense that they do not depend on  $\Delta x$ . In the following simulations, we impose a number of modes  $N_m$  equal to 75. By similar calculations leading to (1.1) and (1.2), the introduced random variable clearly follows a normal law such as,

$$\tilde{b}_{i+1/2} \sim \mathcal{N} \left( 0, \alpha^2 \sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^{2\beta}} \right). \quad (3.4.2)$$

As imposed, we can numerically exhibit that it is not dependent on the mesh size as shown in figure 3.20; the dependency of the perturbation on the flow regime is related to the definition of its amplitude  $\alpha$  which will be specified later on. Thereafter, we propose to complete the study presented in the previous section. In that sense, we still consider the correction of the Strickler coefficient  $K_s$  (3.14). In this context, we are no longer limited to a case of a torrential flow in a torus but the sub-critical regime is also treated. To complete the study we propose to deal with the correlation in space of the deviations of the water height and the discharge from their values at steady state with a smooth bottom topography. These last quantities are respectively denoted  $\tilde{h}$  and  $\tilde{q}$  in the rest of the chapter. First, we characterize the topography deviation especially by expressing the correlation in space at a particular point namely the center of the domain. Second, we resume the previous

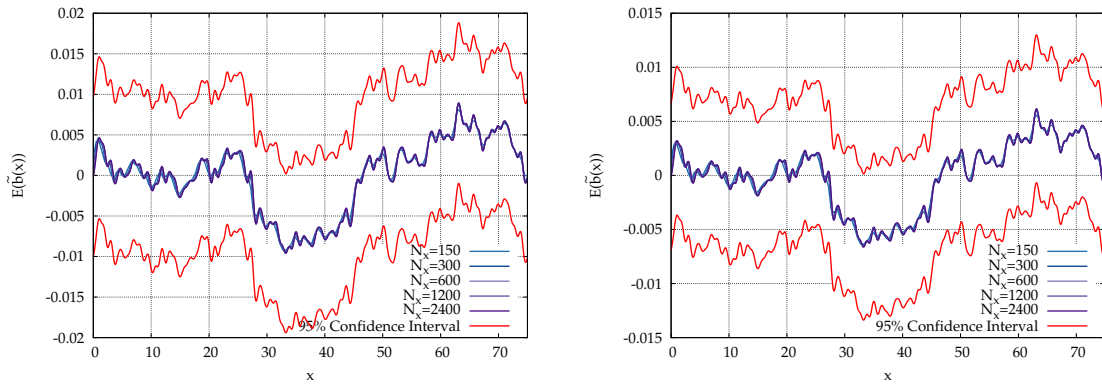


Figure 3.20: Empirical mean of the topography deviation as a function of space for different meshes in the fluvial (left) and the torrential (right) cases.

process by simulating a flow over a sloped topography perturbed by the noise (3.4.1) with periodic boundary conditions in sub-critical and super-critical regimes and we evaluate the different quantities of interest.

### 3.4.1 Characterization of the perturbation.

We begin by ensuring that the simulated topography deviation  $\tilde{b}_{i+1/2}$  follows the normal law (3.4.2) at each point  $x_{i+1/2}$  of the domain. The empirical mean presented in figure 3.21 with the corresponding 95% confidence interval defined by,

$$CI_{95\%} \left( E(\tilde{b}_{i+1/2}) \right) = \left[ E(\tilde{b}_{i+1/2}) - 1.96 \sqrt{\frac{\text{Var}(\tilde{b}_{i+1/2})}{N_r}}, E(\tilde{b}_{i+1/2}) + 1.96 \sqrt{\frac{\text{Var}(\tilde{b}_{i+1/2})}{N_r}} \right], \quad (3.4.3)$$

permits to conclude that this mean value is equal to 0. In this figure, the deviation has a different amplitude in fluvial and torrential regime. We will define the amplitude  $\alpha$  as a function of the water height later on. This assertion results from the fact that the water height is clearly different in the two regimes for a given Froude number and discharge; it is smaller in the torrential regime than in the fluvial one. Now, it remains to show that the analytical variance expressed in (3.4.2) corresponds to the variance of the simulated perturbation. The figure 3.22 permits to approach this issue since we have drawn the variance of the spatial mean of the perturbation in function of the amplitude  $\alpha$  and the smoothness  $\beta$  for the analytical calculation and the numerical simulation. In the first case, the smoothness is fixed to 1 and in the second one, the amplitude is maintained to the value 0.1. It clearly appears in both figures that the simulated perturbation  $\tilde{b}$  has the correct variance since the curves for the numerical and the analytical outputs coincide. Nonetheless, we note that a slight deviation is present at the boundaries of the interval (0.2 for the amplitude, 0.5 for the smoothness) and relies on high values of the variance. It may be reduced by an increase of the number of realizations. Furthermore, one notes that the quadratic dependency of the variance of  $\tilde{b}$  on the amplitude  $\alpha$  is well represented since the curve is reduced to a line with a slope equal to 2 in the corresponding log-log plot.

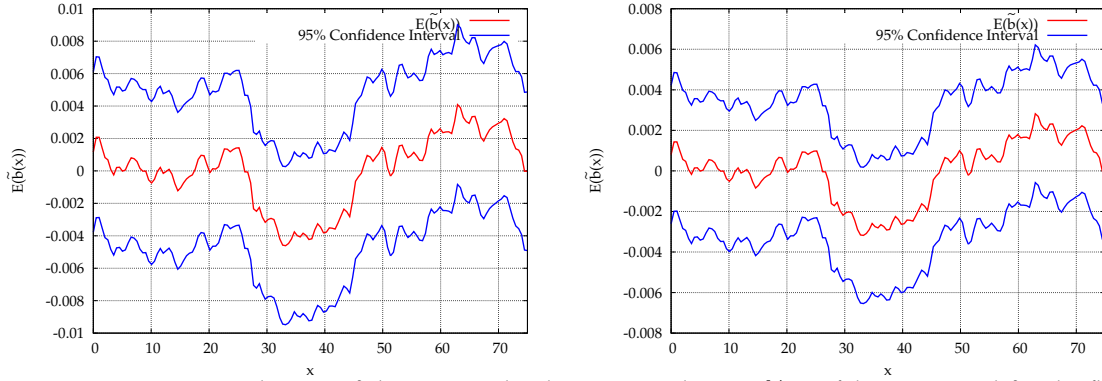


Figure 3.21: Empirical mean of the topography deviation with its 95% confidence interval for the fluvial (left) and the torrential (right) regimes.

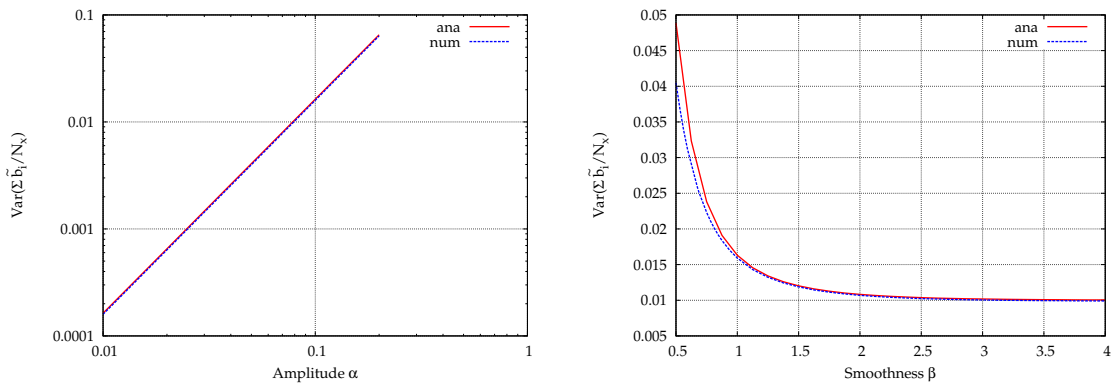


Figure 3.22: Comparison between the numerical and the analytical values of the variance of  $\sum_{i=0}^{N_x-1} \tilde{b}_i / N_x$  as a function of the amplitude  $\alpha$  (left) and the smoothness  $\beta$  (right).

The issue of the choice of the parameter  $\alpha$  can be addressed with help of the uncertainties measured *in situ* for the amplitude of the topography deviation. Actually, the uncertainties on the amplitude is revealed to be dependent on the water height and is evaluated at  $\pm(5 \text{ cm} + 0.1 h)$ . This last value will be retained as an upper bound for the amplitude  $\alpha$  in meter,

$$\alpha \leq 0.05 + 0.1 h^0. \quad (3.4.4)$$

Concerning the range of the values of  $\beta$ , we impose a lower bound by taking into account the expression of the variance of  $\beta$ . By (3.4.2), it appears that the variance is expressed with help of a Riemann series of the form,

$$S_R = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^n}, \quad \text{with } n \in \mathbb{R}.$$

It is well known that this series converges when  $k$  tends to infinity if  $n > 1$ . In the case where  $n$  is equal to 1, we retrieve the harmonic series which is divergent. For the present study, it seems reasonable to consider values of  $\beta$  higher to 0.5 to only consider the case where the serie converges. Defining the Riemann zeta function  $\zeta$  such that,

$$\zeta(p) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}, \quad \text{where } p \in \mathbb{C} \quad \text{and} \quad \text{Re}(p) > 1, \quad (3.4.5)$$

Euler established that for any positive even integer  $p = 2n$  with  $n \geq 1$ ,

$$\zeta(2n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = |B_{2n}| \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} \pi^{2n}, \quad (3.4.6)$$

where  $B_{2n}$  corresponds to a Bernoulli number. It is well known that this function converges to 1 when  $n$  tends to infinity. In that sense, one can expect that the variance of  $\tilde{b}_{i+1/2}$  tends to  $\alpha^2$ . This property is satisfied by the numerical results in figure 3.22. We indeed notice that the curve corresponding to the variance in function of the smoothness  $\beta$  converges to the value of  $\alpha^2 = 0.01$  with  $N_m = 75$  when  $\beta$  increases.

By classical calculations (see Appendix 2 for details), the covariance of  $\tilde{b}$  takes the following form,

$$\text{Cov}(\tilde{b}(x), \tilde{b}(x + \Delta)) = \alpha^2 \sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^{2\beta}} \cos\left(2k\pi \frac{\Delta}{L}\right), \quad (3.4.7)$$

where  $L$  denotes the length of the spatial domain and  $\Delta$  is the distance between two points in the spatial domain, and the correlation of  $\tilde{b}$  is expressed by,

$$\text{Cor}(\tilde{b}(x), \tilde{b}(x + \Delta)) = \frac{\sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^{2\beta}} \cos\left(2k\pi \frac{\Delta}{L}\right)}{\sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^{2\beta}}}. \quad (3.4.8)$$

$\beta$	0.5	0.625	0.75	0.875	1	1.125	1.25	1.375	1.5	1.625	
$\beta$	1.75	1.875	2	2.125	2.25	2.375	2.5	2.625	2.75	2.875	3

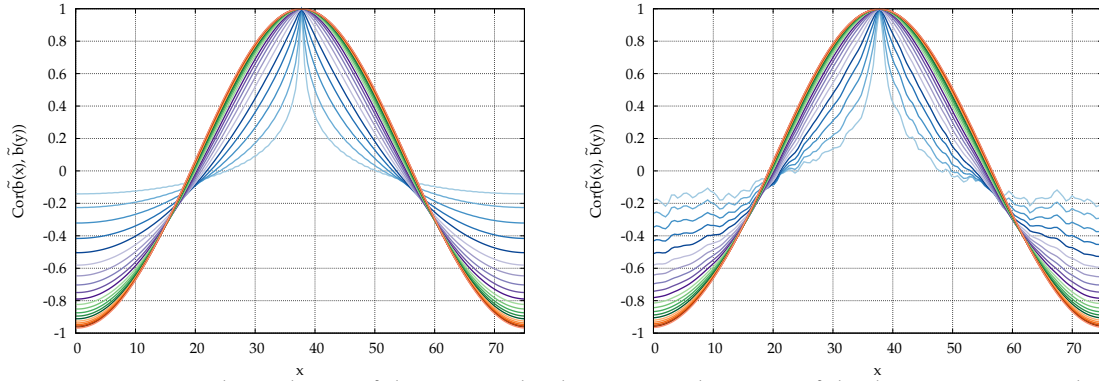
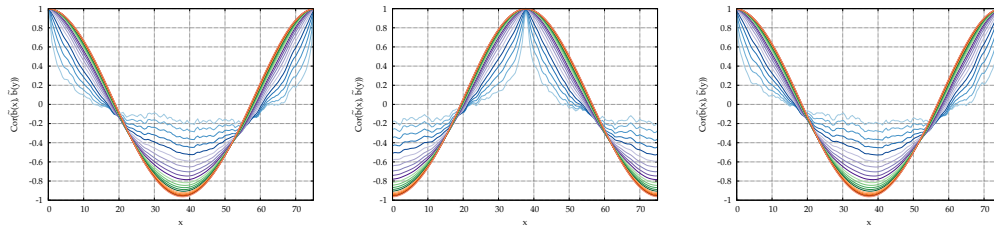
Table 3.5: Color scale for the parameter  $\beta$ .Figure 3.23: Spatial correlation of the topography deviation at the center of the domain  $x = 37.5$  obtained from the analytical formula (left) and the Monte-Carlo simulations (right).

Figure 3.24: Comparison of the spatial correlation of the topography deviation at the input, the center and the output of the domain obtained from the Monte-Carlo simulations.

A coarse test case permits to show that the perturbation is correctly simulated and satisfies (3.4.8). To this end and as the correlation is proved to be not dependent on the amplitude  $\alpha$ , we propose to evaluate the spatial correlation for few values of smoothness parameter  $\beta$ . On the following figures treating the spatial correlation for different values of the parameter  $\beta$ , we summarize the color scale for these values on table 3.5. Since the correlation (3.4.8) only depends on the distance between two points  $\Delta$ , it is reasonable to consider the correlation between the value of  $\tilde{b}$  at a fixed point and at the other ones. In figure 3.23, we check that for the reference point located at the center of the domain, the correlation calculated with help of  $10^3$  Monte-Carlo simulations and that resulting from the formula (3.4.8) are comparable for each value of  $\beta$ . Otherwise, the spatial correlations for  $\tilde{b}$  presented in figure 3.23 corresponds to those of the test cases treated in the following sections. One observes that the correlation is symmetric meaning that the reference point is as correlated to those at the input of the domain as those at the output. This observation permits to underline that the correlation does not depend on the reference point (see fig. 3.24). In addition it appears that the more  $\beta$  increases the greater the correlation with the points in the neighbourhood. By increasing the value of  $\beta$ , we delete the *high frequency*

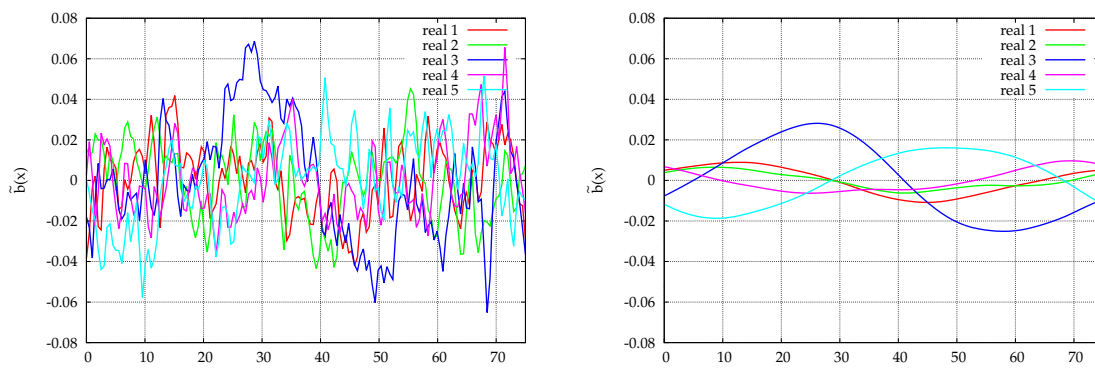


Figure 3.25: Comparison between topography deviations for a low value  $\beta = 0.5$  (left) and a high value  $\beta = 3$  (right) for a fixed  $\alpha = 0.1$ .

Parameters	Fluvial	Torrential
$F$ (-)	0.5	1.5
$q$ ( $m \cdot s^{-1}$ )	1	1
$h^0$ (m)	$\approx 0.74$	$\approx 0.36$
$R_h$ (m)	$\approx 0.3$	$\approx 0.21$
$-\partial_x b$ (%)	$\approx 1$	$\approx 7$

Table 3.6: Initial conditions torrential and fluvial regimes.

perturbations and so the topography deviation in function of the spatial coordinates tends to a sinusoidal shape as revealed in figure 3.25 where few realizations of the topography deviation are shown for a low and a high value of  $\beta$ . In other words, for high values of  $\beta$ , each frequency is deleted except the basic sine and cosine, explaining the shape of the curve of the limit correlations. These basic oscillations always influence this shape even for low values of  $\beta$ , justifying that the correlation with distant point is never null but slightly negative.

### 3.4.2 Simulations with periodic boundary conditions.

Knowing that the topography deviation is correctly generated by each Monte-Carlo realization, the previous process which consists on dealing with periodic boundary conditions is considered with the topography deviation independent of the mesh size (3.4.1). In this simulation,  $10^3$  Monte-Carlo realizations are run. This test case is overall parametrized by the same geometrical and physical data given on tables 3.1 and 3.2. Nevertheless, it is important to precise the hydraulic parameters in the introduced sub-critical regime. The table 3.6 communicates the different quantities corresponding to the steady state without a perturbed bottom topography.

We begin by ensuring that the numerical solution converges in mean over time for different values of the smoothness parameter  $\beta$  (in the following figures, we use again the color scale for different  $\beta$  given in table 3.5) and a fixed value of amplitude  $\alpha = 50\%$  ( $0.05 + 0.1 h^0$ ) (in fluvial regime  $\alpha = 0.062 m$  and in torrential regime,  $\alpha = 0.043 m$ ); the mesh con-



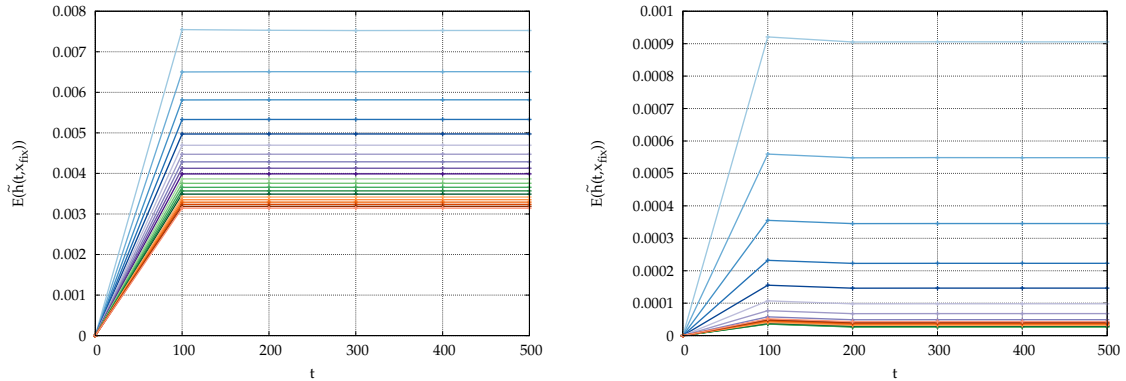


Figure 3.26: Periodic boundary conditions. Empirical mean of the water height at a fixed point ( $x_{fix} = 37.5$ ) as a function of time in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for different values of  $\beta$  for  $N_x = 150$  at fixed times  $t \in \{0, 100, 200, 300, 400, 500\}$ .

siders 150 elements. The figure 3.26 presents the empirical mean of the water height evaluated at the point located in the middle of the domain  $x = 37.5$  as a function of time; we precise that the results are displayed at different time steps  $t = \{0, 100, 200, 300, 400, 500\}$  explaining the “angular” shape of the curves. Thereafter, the quantities of interest are calculated at time  $t = 500$  s which is widely sufficient to deal with the “stationary” solution as shown by the figure 3.26.

We introduce a notation for the spatial mean such that, for all quantity  $A$  which depends on the space and  $A_i := A(x_i)$  with  $x_i$  a point of the spatial domain,

$$[A]_M := \sum_{i=1}^{N_x} \frac{A_i}{N_x}. \quad (3.4.9)$$

In view of the expression of the topographical perturbation (3.4.1), we can readily understand that a low value of  $\beta$  combined with a high value of  $\alpha$  will generate a noise which is strongly fluctuating and presenting high amplitudes. This behaviour is illustrated in figure 3.27 since the variance of  $\tilde{b}$  averaged over space quickly increases when the amplitude  $\alpha$  grows and the smoothness  $\beta$  decreases. On the other hand, since the roughness increases under the effect of the topographical perturbation, this phenomenon is compensated by an increase of the value of the Strickler coefficient as shown in figure 3.28 in order to delete the dissipation of the energy previously brought to light and to maintain in mean the initial flow characteristics (due to the correction based on (3.3.13)), Except for the case of a high value of  $\alpha$  and a low one for  $\beta$ , the Strickler coefficient stands overall close to its initial value. One could note that in the previous “maps”, the number of tested values for the amplitude is lower in fluvial regime than in torrential one. This limitation results from the fact that a low  $\beta$  combined with a high  $\alpha$  lead to strong perturbations in fluvial regime for which the roughness has to be compensated by a high value of the Strickler coefficient which is not reasonable; consequently, we have arbitrarily imposed an upper bound to the value of the amplitude equal to  $60\%(0.05 + 0.1 h^0)$  in sub-critical regime when the smoothness parameter  $\beta$  is low.

Finally, as the bed influences the fluid part, its variability also affects the variability of

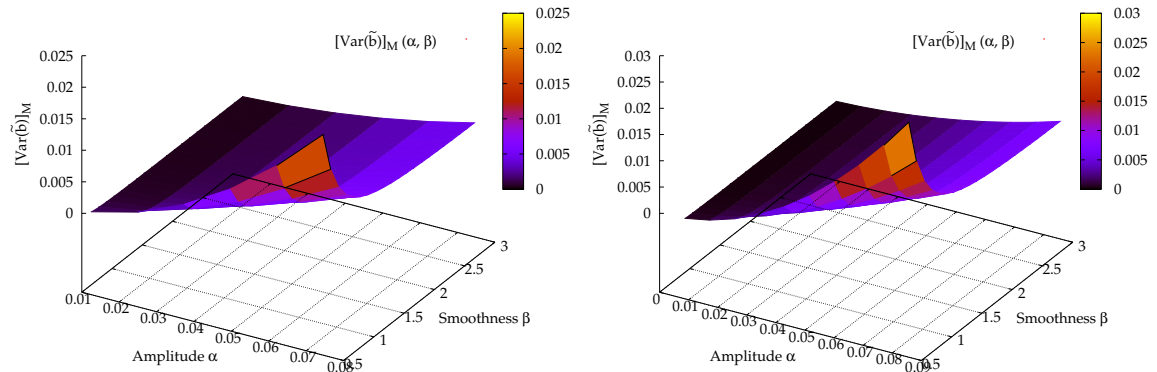


Figure 3.27: Periodic boundary conditions. Empirical variance of the bed topography averaged over space as a function of the parameters of amplitude  $\alpha$  and smoothness  $\beta$  in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for  $N_x = 150$ .

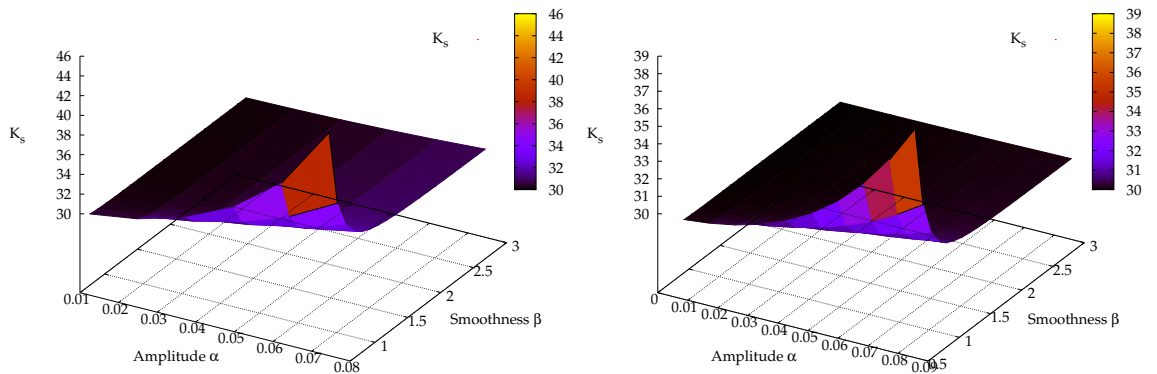


Figure 3.28: Periodic boundary conditions. Surface of the values of the Strickler coefficient in function of the amplitude  $\alpha$  and the smoothness  $\beta$  in fluvial (left; with  $\alpha \in [0.012, 0.075]$  and  $\beta \in [0.625, 3]$ ) and in torrential (right; with  $\alpha \in [0.009, 0.086]$  and  $\beta \in [0.5, 3]$ ) regimes for  $N_x = 150$ .

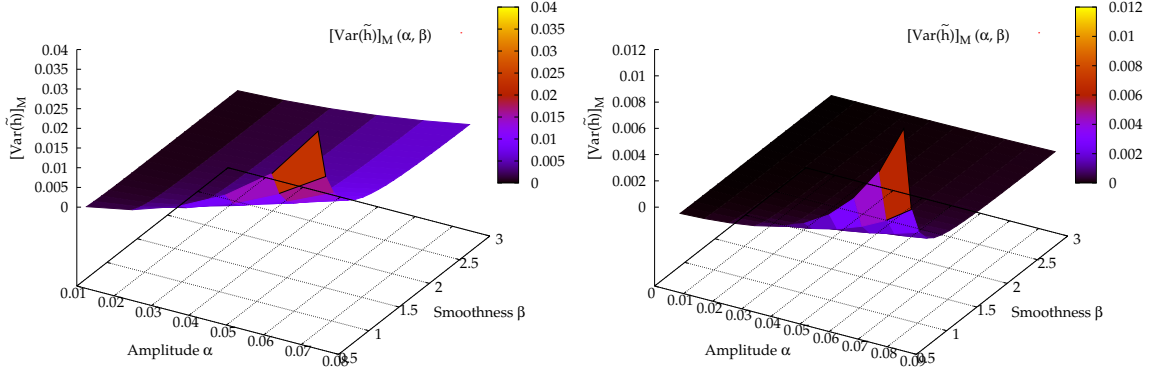


Figure 3.29: Periodic boundary conditions. Empirical variance of the water height averaged over space as a function of the parameters of amplitude  $\alpha$  and smoothness  $\beta$  in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for  $N_x = 150$ .

the hydraulic quantities. Indeed, we can illustrate this assumption with help of the figure 3.29 where the behaviour of the variances of the water height averaged over space is quite similar to that of the variance associated the solid part; this similarity appears clearer in the fluvial regime since the values are quite close. This last observation is reinforced by the figures 3.30 corresponding to the variances of the water height and topographical deviations averaged over space in function of the amplitude (respectively, the smoothness) for a fixed value of smoothness  $\beta = 1$  (respectively, the amplitude  $\alpha$  equal to  $0.062\text{ m}$  in fluvial regime or  $0.043\text{ m}$  in torrential regime). The variances of the water height in fluvial regime almost coincide with those of the topography. This similarity can be understood with help of the solution of the stationary system associated to the Saint-Venant equations. Indeed we know that in the case where the solution of the Saint-Venant system converges, the “converged” solution is that of the stationary system. Lets begin by expressing the stationary system,

$$\begin{cases} \frac{dq}{dx} = 0, & (3.4.10a) \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{q^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \right) + gh \frac{db}{dx} = -\frac{\tau}{\rho}. & (3.4.10b) \end{cases}$$

It is convenient to rewrite the equation of energy (3.4.10b) in the form,

$$F^2 \frac{dh}{dx} - \frac{d(h+b)}{dx} = \frac{q^2}{h^2 K_s^2 R_h^{4/3}}, \quad (3.4.11)$$

where the Froude number  $F$  is defined by  $F := q/\sqrt{gh^3}$ . In the sub-critical case, the term  $d(h+b)/dx$  is dominant over the term  $dh/dx$ ; the variations of the bottom topography strongly affect the variations of the water height. On the other side,  $d(h+b)/dx$  is negligible compared to  $dh/dx$  when the flow is torrential. The water height weakly depends on the topography, which explains that their variances are different; more precisely, the water height is quite independent of the perturbation leading to the fact that as high as the noise can be, the variance of the water height will be low. It is important to outline that

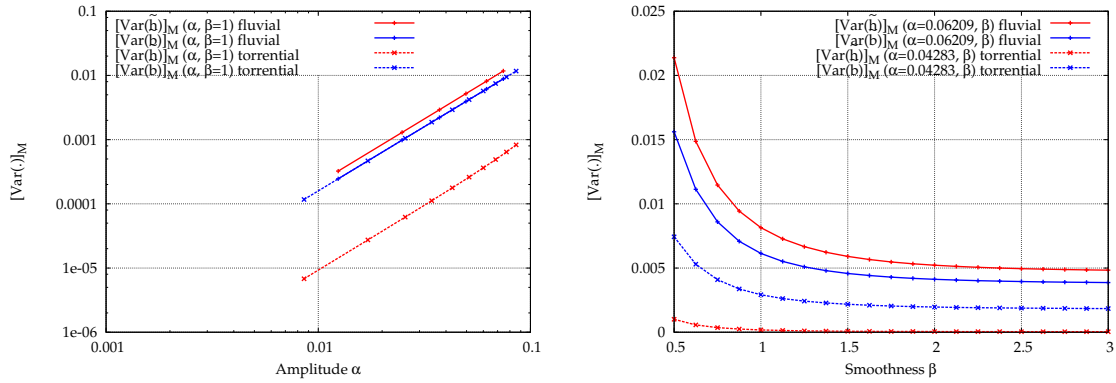


Figure 3.30: Periodic boundary conditions. Empirical variance of the water height averaged over space as a function of the parameters of amplitude  $\alpha$  for a fixed  $\beta = 1$  (left) and the smoothness  $\beta$  for a fixed  $\alpha$  (right) ( $\alpha = 0.062$  m in fluvial regime,  $\alpha = 0.043$  m in torrential regime) in the two regimes for  $N_x = 150$ .

this analysis is relevant for the limit values of the Froude number 0 and  $+\infty$ . It permits to understand the behaviour of the variances when the Froude number is finite and different from the limit values but does not give a quantitative estimation of the results, which leads to the need for numerical simulations.

Note that as it has been imposed, the variance associated to the topography is not dependent on the amplitude; it explains that even if the amplitude of the perturbation depends on the flow regime, the average variances as a function of the amplitude in fluvial and torrential cases coincide. Furthermore, the quadratic dependency which characterized the dependency of the variances of the topographical deviation on the amplitude also concerns the variances of the water height. In addition, for high values of  $\beta$ , the high frequencies of the noise are deleted leading to smooth topographical perturbations which are similar. Since the bottom topography is perturbed in a similar way for high values of  $\beta$ , it is reasonable to obtain a convergent variance averaged over space when the value of  $\beta$  increases. Consequently, the average variance in space related to the water height also converges when  $\beta$  grows.

We have brought out the influence of the parameters  $\alpha$  and  $\beta$  on the variability of the different quantities of interest especially when  $\beta$  tends to its minimal value and  $\alpha$  increases to its maximal value. From now on, we will study the outputs obtained for a particular choice of parameters  $(\alpha, \beta)$ . For this purpose, in the following numerical results, the topographical perturbation is parametrized by a smoothness characterized by  $\beta = 1$  and an amplitude defined by  $\alpha = 0.05 + 0.1 h^0$  ( $\alpha = 0.086$  m in torrential regime and  $\alpha = 0.124$  m in fluvial regime). Considering the conditions we have imposed (notably the conservation of the total discharge), the numerical simulations have to satisfy the following relations,

$$[E(q_i^\omega(t))]_M = q_0, \quad E(q_i^\omega(t_\infty)) = q_0^\omega, \quad \text{and} \quad \text{Var}(q_i^\omega(t_\infty)) \neq 0, \quad (3.4.12)$$

where  $q_i^\omega$  represents the discharge at point  $x_i$  obtained for a Monte-Carlo realization  $\omega$ ,  $q_0^\omega$  is the stationary discharge of the realization  $\omega$ ,  $q_0$  designates the initial value of the discharge obtained for a non perturbed bed, and  $(t_\infty)$  stands for a sufficiently large time instant to reach a “stationary” state in mean. We propose to compare the numerical results

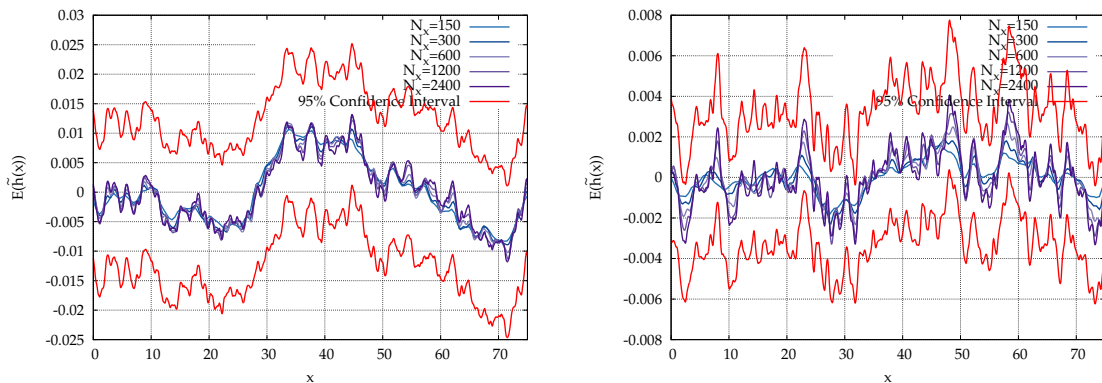


Figure 3.31: Periodic boundary conditions. Empirical mean of the water height deviation as a function of space at time  $t = 500$  s in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for different mesh sizes.

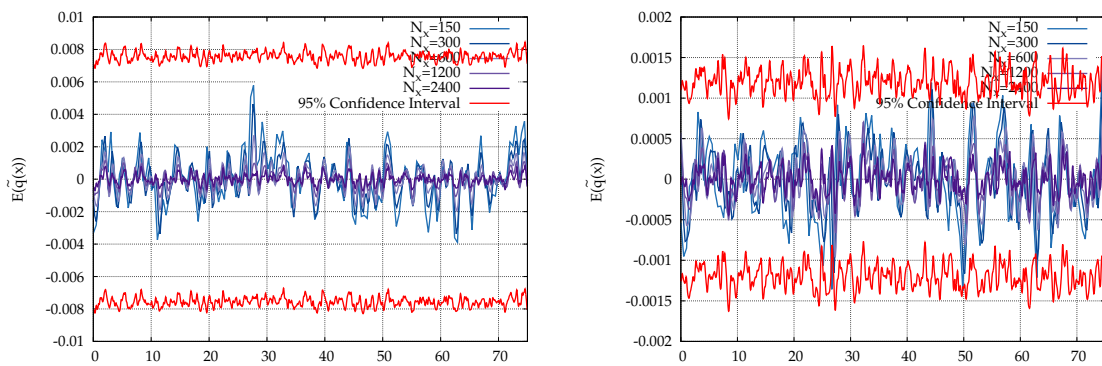


Figure 3.32: Periodic boundary conditions. Empirical mean of the discharge deviation as a function of space at time  $t = 500$  s in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for different mesh sizes.

obtained for five mesh sizes,

$$N_x \in \{150, 300, 600, 1200, 2400\}.$$

In doing so, we exhibit the long-time convergence of the empirical mean of the hydraulic quantities deviations in function of the mesh size as shown in figures 3.31 and 3.32. In view of these results, the empirical means are equal to 0; these quantities satisfy the imposed relations (3.4.12).

We propose to focus our attention on the variances in figures 3.33 and 3.34. We are aware that it is necessary to propose more refined meshes in order to clearly exhibit the convergence of the variances in function of the mesh size and to complete this study in mesh refinement. In addition, the number of Monte-Carlo realizations (here, equal to  $10^3$ ) could be increases in order to obtain a more accurate estimation of the variance, however the current simulations already permit to observe the qualitative behaviours. Nevertheless we can observe a tendency to converge for the variances corresponding to the fluvial regime in figure 3.33 and more clearly in figures 3.35 and 3.36. The only damper is again the fact that we have not visibly reached the “converged” solution with the considered

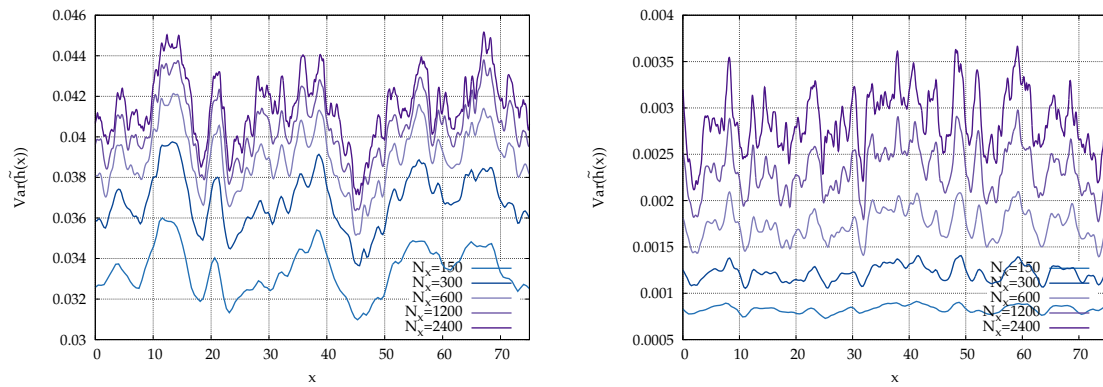


Figure 3.33: Periodic boundary conditions. Empirical variance of the water height deviation as a function of space at time  $t = 500$  s in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for different mesh sizes.

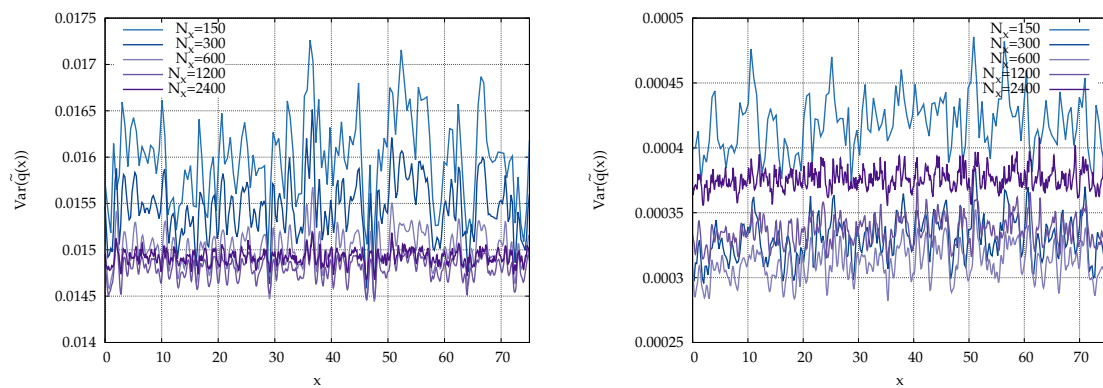


Figure 3.34: Periodic boundary conditions. Empirical variance of the discharge deviation as a function of space at time  $t = 500$  s in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for different mesh sizes.

finest mesh as especially shown in figure 3.36 in the torrential regime. The positive side in this flow regime concerns the average variance for the water height in figure 3.35 which displays a curve that tends to a converged state.

Both variance associated to the water height in the sub-critical and super-critical cases shows an increase of its value evaluated at each point. The main observation concerns the amplitudes of the oscillations of these variances. In fact, in fluvial regime, it is interesting to note that these amplitudes do not clearly depend on the mesh size and are quite preserved for each mesh whereas, in torrential regime, they are amplified when we refine the mesh. In other words, a coarse mesh is able to transcribe the main local oscillations in fluvial regime whereas we need to sufficiently refine the mesh in torrential regime to capture all the fluctuations. In a sense, it is relevant to consider a coarse mesh in the sub-critical case but it is more questionable in the super-critical case.

In view of this last issue, we look for quantifying the error between the solutions obtained for the finest and the coarsest meshes; this error is evaluated for the variances since the empirical means are not sufficiently distinct between the different mesh sizes. By using the results summarized in tables 3.7 and 3.8, it is possible to characterize the error between the solutions obtained for the finest and the coarsest meshes. In particular for

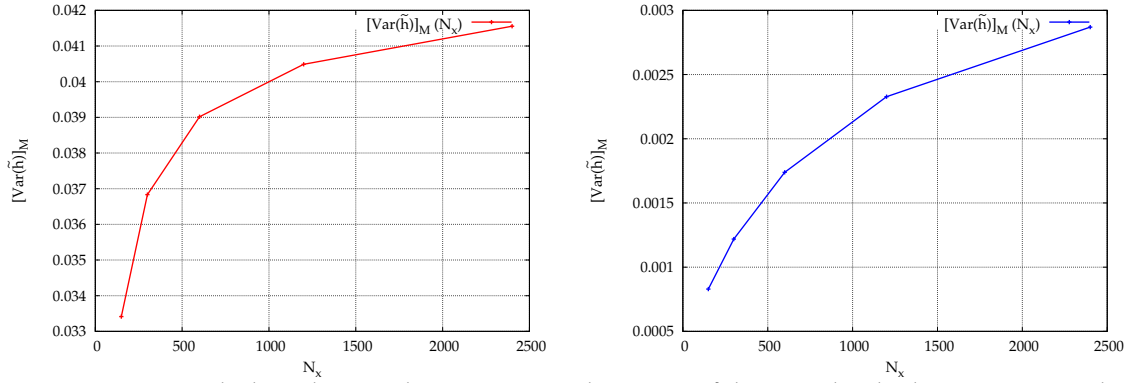


Figure 3.35: Periodic boundary conditions. Empirical variance of the water height deviation averaged over space as a function of the mesh size at time  $t = 500$  s in fluvial (left) and in torrential (right) regimes.

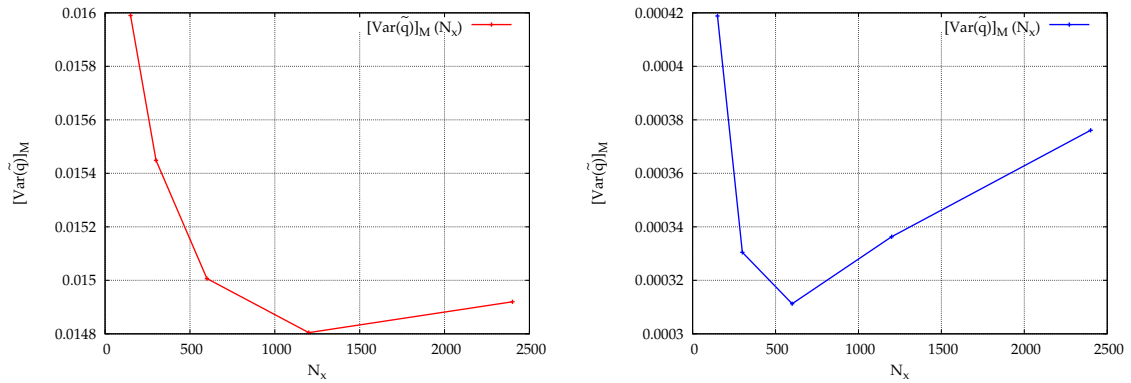


Figure 3.36: Periodic boundary conditions. Empirical variance of the discharge deviation averaged over space as a function of the mesh size at time  $t = 500$  s in fluvial (left) and in torrential (right) regimes.

	Fluvial	Torrential
$[E(\tilde{b})]_M$	0	0
$[Var(\tilde{b})]_M$	$2.49 \times 10^{-2}$	$1.19 \times 10^{-2}$
$[IC_{95\%}(E(\tilde{b}))]_M$	$\pm 9.79 \times 10^{-3}$	$\pm 6.75 \times 10^{-3}$
$[E(\tilde{h})]_M$	0	0
$[Var(\tilde{h})]_M$	$4.16 \times 10^{-2}$	$2.87 \times 10^{-3}$
$[IC_{95\%}(E(\tilde{h}))]_M$	$\pm 1.26 \times 10^{-2}$	$\pm 3.32 \times 10^{-3}$
$[E(\tilde{q})]_M$	0	0
$[Var(\tilde{q})]_M$	$1.49 \times 10^{-2}$	$3.76 \times 10^{-4}$
$[IC_{95\%}(E(\tilde{q}))]_M$	$\pm 7.57 \times 10^{-3}$	$\pm 1.2 \times 10^{-3}$

Table 3.7: Periodic boundary conditions. Spatial mean of the variances, the empirical means and their 95% confidence interval for the quantities of interest  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{h}$  and  $\tilde{q}$  obtained with the finest mesh  $N_x = 2400$ .

	Fluvial	Torrential
$[Var(\tilde{b})]_M$	$2.455 \times 10^{-2}$	$1.168 \times 10^{-2}$
$[Var(\tilde{h})]_M$	$3.341 \times 10^{-2}$	$8.292 \times 10^{-4}$
$[Var(\tilde{q})]_M$	$1.599 \times 10^{-2}$	$4.188 \times 10^{-4}$

Table 3.8: Periodic boundary conditions. Spatial mean of the variances for the quantities of interest  $\tilde{b}$ ,  $\tilde{h}$  and  $\tilde{q}$  obtained with the coarsest mesh  $N_x = 150$ .

the discharge, considering that the value obtained for the finest mesh corresponds to the converged solution, the error that we commit is around 7% in fluvial regime and 11% in torrential regime when we deal with the least refined mesh. These results need to be considered carefully since the error for the water height is not as low as for the discharge; it is valued around 20% in fluvial regime and 70% in torrential regime. However, the computational limitations reduce our choice of mesh size since the realizations can be quickly costly in running time when we refine the mesh. That is why we will work with a 150-element mesh even if we are aware that the error on water height is quite high; the low error on discharge makes this choice relatively suitable.

We propose now to exhibit the convergence of the correlation in function of the mesh size. The figure 3.37 presents the results of these simulations. It is quite reasonable to note that each correlation curve converges to a particular shape in function of the mesh size. The torrential regime displays a water height at the reference point  $x = 37.5$  which is quickly uncorrelated to the points outside of its neighbourhood for all mesh size. In addition, the correlation of the discharge in both regimes shows that it tends to be entirely correlated to the discharge of every point of the domain when the number of points increases. In view of the correction we have imposed in (3.3.13), the discharge should converge to a long-time constant in space solution and so should be entirely correlated. It explains the correlation for the finest meshes. In particular, we can also notice that the correlation seems to increase such that at a point  $x$  different from the reference point,



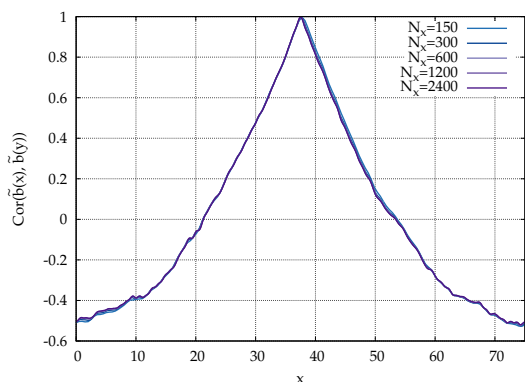
$$\begin{aligned} & Corr_{2N_x}(\tilde{q}(37.5), \tilde{q}(x)) - Corr_{N_x}(\tilde{q}(37.5), \tilde{q}(x)) \\ &= 2(Corr_{4N_x}(\tilde{q}(37.5), \tilde{q}(x)) - Corr_{2N_x}(\tilde{q}(37.5), \tilde{q}(x))), \end{aligned}$$

where the notation  $Corr_K$  stands for the correlation obtained from a  $K$ -element mesh. It is less clear in the torrential regime when the mesh is coarse but the previous observation tends to be satisfied when the mesh is refined. In addition, let's note that in fluvial regime, the gap between the curves for two successive mesh sizes quickly decreases when the mesh is refined whereas in the torrential case, this gap does not decrease as quickly. This result is consistent with the previous variances in figure 3.36 since the variances averaged over space for the different mesh sizes evolve in an interval of values which is higher in fluvial case than in the torrential one; the gap of variances decreases and is more important between two successive mesh sizes in fluvial regime than in torrential one. In the fluvial case, this behaviour of the variances leads to a higher difference on the correlation between the mesh sizes which also decreases with the mesh refinement. On the other hand, the "quasi-random" gap of variances in the torrential case directly affects the gaps between the correlation for different meshes which behaves in a similar "quasi-random" way when the mesh is refined.

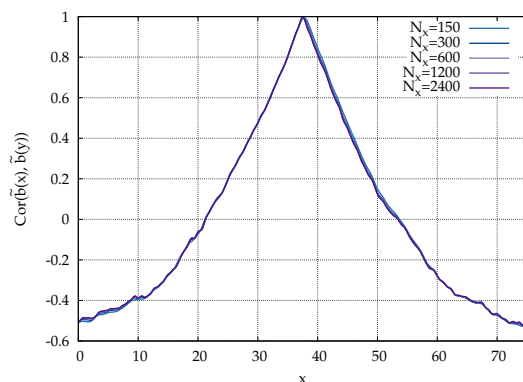
We can visibly note that the correlations for the water height weakly depend on the mesh size. Since we know that the discharge has to be entirely correlated in space and so its numerical correlation curve does not present a great interest, using a coarse mesh is sufficient to study the correlations on the water height.

From now on, the study of spatial correlations for the point at the center of the domain is performed for different values of  $\beta$  given in table 3.5 with a 150-element mesh and a reference amplitude equal to  $\alpha = 50\%$  ( $0.05 + 0.1 h^0$ ) ( $\alpha = 0.062 m$  in fluvial regime and  $\alpha = 0.043 m$  in torrential regime). In figure 3.38, we show again the correlation associated to the topography previously presented in figure 3.23 only for facilitating readability and the comparison with the correlations of the water height deviation.

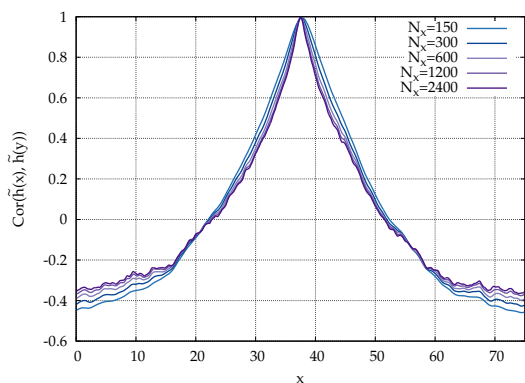
First, let us precise that the symmetry observed in every flow regime for the water height is due to the periodic treatment of the boundary conditions. In order to bring out this symmetry, we propose a qualitative study consisting in the evaluation of the distance between the reference point where the correlation is calculated (here, the center of the domain) and the point where the correlation is lower than a fixed threshold value  $C_{thres} \in [0, 1]$ . With a language abuse, we will designate this distance by "correlation length" denoted  $L_c$  in the rest of the chapter;  $L_{c,\tilde{h}}$  and  $L_{c,\tilde{q}}$  respectively stand for the correlation length obtained from the correlation associated to the water height and the discharge. We propose to introduce some notations to define the correlation length. The abscissa of the reference point and the threshold point are respectively denoted  $x_{ref}$  and  $x_{thres}$ . Since the reference point is the center of the domain, we distinguish "an upstream and a downstream correlation lengths". That is why we suggest to use the notation  $L_c^u$  and  $L_c^d$  respectively to characterize the two last-mentioned correlation lengths and,  $x_{thres}^u$  and  $x_{thres}^d$  to represent the abscissa



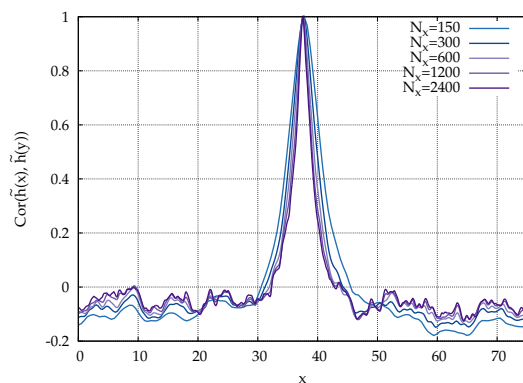
(a)  $Cor(\tilde{b}(x), \tilde{b}(37.5))$  in fluvial regime.



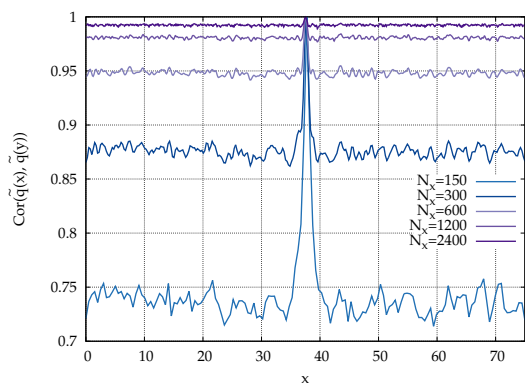
(b)  $Cor(\tilde{b}(x), \tilde{b}(37.5))$  in torrential regime.



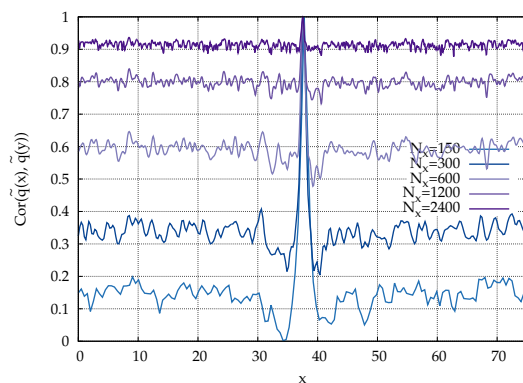
(c)  $Cor(\tilde{h}(x), \tilde{h}(37.5))$  in fluvial regime.



(d)  $Cor(\tilde{h}(x), \tilde{h}(37.5))$  in torrential regime.



(e)  $Cor(\tilde{q}(x), \tilde{q}(37.5))$  in fluvial regime.



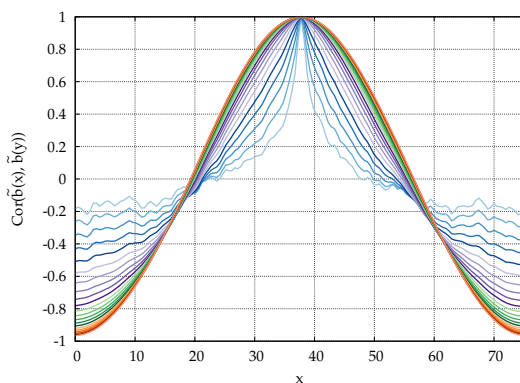
(f)  $Cor(\tilde{q}(x), \tilde{q}(37.5))$  in torrential regime.

Figure 3.37: Periodic boundary conditions. Spatial correlation of the bottom topography (top line), the water height (middle line) and the discharge (bottom line) deviations at the center of the domain  $x = 37.5$  for the fluvial (left column) and the torrential (right column) regimes for different mesh sizes.

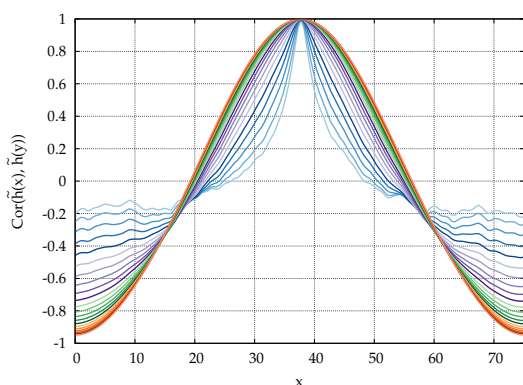
which permit to respectively calculate  $L_c^u$  and  $L_c^d$  such that for  $\tilde{h}$  (resp.  $\tilde{q}$ ),

$$\begin{cases} Cor(\tilde{h}(x), \tilde{h}(x_{ref})) \geq C_{thres}, & \text{if } x \in [x_{thres}^u, x_{thres}^d], & (3.4.13) \\ L_{c,\tilde{h}}^u = |x_{ref} - x_{thres}^u|, & & (3.4.14) \\ L_{c,\tilde{h}}^d = |x_{ref} - x_{thres}^d|. & & (3.4.15) \end{cases}$$

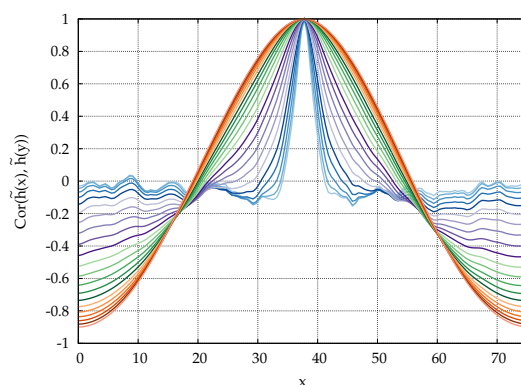
In the following simulations, the threshold value of the correlation is set to 0.2. The different correlation lengths in the two flow regimes are compared in figure 3.39. As previously mentioned, the spatial symmetry of the correlation curves is confirmed by the fact that the upstream and downstream correlation lengths almost coincide in the fluvial case as well as in the torrential case. In addition, the fluvial correlation lengths associated to the water height are closer to that of the topographical deviation than the torrential one; these last ones have furthermore a lower value than the fluvial correlation lengths. The similarity of the correlations in fluvial regime reinforces the fact that the variabilities for the water height relatively behave as those of the bottom topography which was previously brought to light by the same order of the variances corresponding to each quantity given in table 3.8. Finally, the closeness between the correlations of the bottom topography and the water height becomes all the more important for high values of  $\beta$  since we retrieve the sinusoidal curve for the two quantities in both regimes.



(a)  $Cor(\tilde{b}(x), \tilde{b}(37.5))$ .



(b)  $Cor(\tilde{h}(x), \tilde{h}(37.5))$  in fluvial regime.



(c)  $Cor(\tilde{h}(x), \tilde{h}(37.5))$  in torrential regime.

Figure 3.38: Periodic boundary conditions. Spatial correlation of topographical (top line) and the water height (bottom line) deviations at the center of the domain  $x = 37.5$  for the fluvial (left) and the torrential (right) regimes for different values of  $\beta$ .

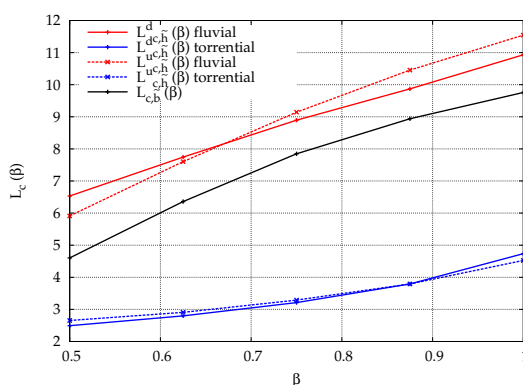


Figure 3.39: Periodic boundary conditions. Correlation lengths for the water height deviation  $L_{c,\tilde{h}}$  as a function of  $\beta \in [0.5, 1]$  upstream (dashed line) and downstream (plain line) in the fluvial (red line) and the torrential (blue line) regimes.

### 3.5 CONCLUSION.

We have proposed a stochastic version of Saint-Venant–Exner model in order to account for the fluctuations of the solid flux observed experimentally in stationary river beds. We have observed numerically that, in the mean, a naive introduction of noise in the standard Saint-Venant–Exner model generates additional dissipative effects compared with the deterministic case, which is a bad news if one wants the expectation of the stochastic model to coincide with the deterministic one, at least in equilibrium conditions (i.e. stationary uniform flows). Then, the focus was placed on the question of the convergence of this dissipation in fonction of the size of the mesh. We have observed that the more refined the mesh is, the more dissipation there is. The next question is thus how to better model the noise introduced in Saint-Venant–Exner model so as to compensate for the dissipation introduced. In particular, the scaling of the injected noise with respect to time and space was very naive. One alternative model could be based on better correlating the space-time increments of some random variables in the system. This is a difficult mathematical task, all the more when it is *a priori* without physical data. As an alternative, we have thus proposed a numerical method to correct, at discrete level, the undesired added dissipation.

We have suggested to define the Strickler coefficient in a stochastic model so as to maintain exactly *in the mean* equilibrium conditions that are known *a priori*. In the case of our finite-volume numerical scheme, the new Strickler coefficient can be computed explicitly, as a function of the whole stochastic process. Though, this modification makes the proposed stochastic Saint-Venant–Exner model quite nonlinear, and more difficult to simulate. In this work, we have thus only checked yet, numerically, that once the bottom topography is perturbed initially (but not evolving in time yet, i.e. a simplified stochastic model), the new Strickler coefficient actually makes sense, and compensates fast enough the mean diffusion due to the stochastic perturbations of the bottom topography.

Since we faced the same issues with the Saint-Venant system as with the Saint-Venant–Exner one, we have naturally focused our attention to the study of the Saint-Venant system with a perturbed topography. The advantages of the injected perturbation rely on the fact that its empirical mean, variance and spatial correlation can be totally determined. At the beginning of this study, we have numerically exhibited the convergence of the solution to a “stationary” state. We have noted that the spatial correlation obtained from this solution echoes the correlation of the perturbation; more precisely, the water height and the topography are more correlated in fluvial regime than in torrential one. Nevertheless, it remains to better understand the relationship between these quantities.

In perspective, since we know that there is a notable link between the correlation of the perturbations and that of the outputs, a sensitivity analysis on the parameters of amplitude  $\alpha$  and smoothness  $\beta$  could be an interesting issue to study. A particular attention can be paid to the way the correlation length is defined and it seems unavoidable to improve the method used until now. Thus, it would be possible to write a relationship for this length between its value for the water height and the topography in order to be able to choose a precise couple of parameters  $(\alpha, \beta)$  which can return, in an experimental point of view, the measured water height.

On the one hand, since our primary focus concerns the Saint-Venant–Exner system, it remains to carry out a complete study with help of the proposed approach on this model. On the second hand, it can be interesting to approach a more realistic situation by imposing physical boundary conditions; this work is currently in progress.

Concerning the initial system of Saint-Venant–Exner, it remains to see i) whether it is still possible to maintain the deterministic equilibrium in the mean when the bottom topography is perturbed in time in a stochastic Saint-Venant–Exner model, ii) whether the new model is robust as concerns convergence to a continuous time-space model, and iii) the kind of physical information that can actually be supported by the stochastic variable  $A$  (characteristic size of ripples...) compared with other ones, e.g.  $\tau^*$ .



## CHAPITRE 4

# Application industrielle: étude d'un modèle d'inondation 2D

---

**Version française.** *Ce chapitre décrit les travaux réalisés dans le cadre d'une mission de doctorant-conseil au sein de la société d'étude Géo-Hyd membre d'Antea Group. Celle-ci consiste dans un premier temps à l'optimisation du temps de calcul sous TELEMAC-2D, et dans un second temps à une étude bibliographique des ruptures de digues.*

**English version.** *This chapter describes the works realized during a mission of consulting for the study office Géo-Hyd, member of Antea Group. On the one hand, it consists on an optimization of the running time of the code TELEMAC-2D, and on the second hand, establishing a bibliographic study on the topic of the dike break.*

### Contents

---

<b>4.1</b>	<b>Introduction.</b>	<b>144</b>
<b>4.2</b>	<b>Optimisation du temps de calcul sous TELEMAC-2D.</b>	<b>144</b>
4.2.1	Installation sur grappe de calcul du logiciel TELEMAC-2D.	144
4.2.2	Description du modèle.	148
4.2.3	Comparaison des temps de calcul.	150
4.2.4	Conclusion et perspectives partielles.	154
<b>4.3</b>	<b>Recherche bibliographique sur les ruptures de digues.</b>	<b>155</b>
4.3.1	Quelques idées clés sur le processus de formation de brèches.	155
4.3.2	Pistes de modélisation.	158
4.3.3	Modélisation numérique.	162
4.3.4	Méthode pour le traitement de données.	165
4.3.5	Application numérique.	167
4.3.6	Conclusion partielle.	172

---



## 4.1 INTRODUCTION.

La mission s'inscrit dans l'accord cadre entre Antea Group et la DREAL Centre pour la réalisation des études de dangers et des revues de sûreté sur les digues de la Loire, celui-ci portant sur deux marchés :

- le premier concerne l'étude de quatre digues à Roanne (42),
- le second s'intéresse aux digues de Vichy et de Moulins (03).

Ces études portent sur 4.45 km de digues de classe B (d'une hauteur supérieure ou égale à 1 m et un nombre d'habitants dans la zone protégée supérieur ou égal à 1000) et C (d'une hauteur supérieure ou égale à 1 m et un nombre d'habitants dans la zone protégée supérieur ou égal à 10).

Pour ces marchés, des modèles hydrauliques sous TELEMAC-2D ont été développés ; ces derniers ainsi que le jeu de données de mesures (topographie, conditions limites...) sont mis à disposition.

Dans le contexte de cette intervention en entreprise, le travail s'est scindé en deux parties,

- *primo*, on s'intéresse à l'optimisation des temps de calcul sous TELEMAC : pour un maillage donné, il s'agit d'identifier l'ensemble des éléments permettant d'optimiser les temps de calcul du modèle tout en prenant garde à la stabilité des calculs effectués. Pour ce faire, l'étude est menée sur des épisodes de crue de la Loire.
- *secundo*, on propose une étude bibliographique sur les ruptures de digues pour leur modélisation sous TELEMAC-2D, ou du moins pour la compréhension de ces processus, notamment pour la détermination de l'hydrogramme de rupture induit par une brèche.

## 4.2 OPTIMISATION DU TEMPS DE CALCUL SOUS TELEMAC-2D.

### 4.2.1 Installation sur grappe de calcul du logiciel TELEMAC-2D.

#### 4.2.1.1 Présentation générale de TELEMAC-2D.

TELEMAC-2D [125] est un logiciel libre initialement développé par le Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement (LNHE) de la Direction des Recherches et Développements d'Electricité De France (EDF), et actuellement maintenu par le Consortium Open Telemac-Mascaret. Il s'agit d'un des modules intégrés à la suite logicielle TELEMAC-MASCARET qui comprend également les modules suivants,

- en hydrodynamique,

- ARTEMIS**, code spectral de propagation de la houle en zone côtière et portuaire,
- MASCARET**, code pour la modélisation hydraulique à une dimension d'espace à surface libre, basé sur les équations de Saint-Venant,
- TELEMAC-3D**, code de modélisation hydraulique tridimensionnelle reposant sur les équations de Navier-Stokes et incluant le transport de traceurs actif ou passif,
- TOMAWAC**, code pour la propagation de houle en zone côtière,
- pour le transport et la dispersion,
- SYSPHE**, code de modélisation du transport de sédiment bidimensionnelle,
- SEDI-3D**, code de modélisation du transport de sédiment par suspension tridimensionnelle,
- DREDGESIM**, code pour la simulation des opérations de dragage,
  - pour le pre- et le post-traitement,

**RUBENS**, post-processeur graphique,

**MATISSE**, module de génération de maillage de calcul,

**STBTEL**, logiciel d'interface entre TELEMAC et des modules de maillage tiers,

**POSTEL-3D**, logiciel pour l'obtention d'une coupe bidimensionnelle à partir d'un résultat tridimensionnel.

Utilisé pour les applications en hydraulique à surface libre (domaines maritime et fluvial), TELEMAC-2D permet de résoudre les équations de Saint-Venant à deux dimensions d'espace horizontal. Le code implémente les méthodes des éléments finis et des volumes finis. La solution obtenue est représentée par la valeur de la hauteur d'eau et de la vitesse moyenne sur la verticale en chaque point du maillage considéré. Il permet également de prendre en compte certains phénomènes physiques : frottement sur le fond, force de Coriolis, phénomènes météorologiques, turbulence, écoulements torrentiels et fluviaux, zones sèches dans le domaine de calcul, couplage avec le transport sédimentaire...

Le logiciel est utilisé dans de nombreux domaines notamment en,

- *maritime* : dimensionnement d'ouvrages portuaires, étude de l'effet de la construction de digues submersibles ou de dragages, impact du rejet d'un émissaire côtier,
- *fluvial* : étude de l'impact de la construction d'ouvrages (ponts, seuils, épis), ruptures de barrages, étude d'inondation, transport de traceurs conservatifs ou non.

Le code TELEMAC-2D peut être exécuté aussi bien en séquentiel qu'en parallèle. Ce dernier point fera l'objet du travail présenté par la suite ; le but étant d'installer et d'exécuter

la version parallèle de TELEMAC-2D sur la grappe de calcul de Geo-Hyd. La version parallèle de TELEMAC-2D fait appel à la bibliothèque MPI (Message Passing Interface) [95]; l'interface entre TELEMAC-2D et la bibliothèque MPI se fait par l'intermédiaire de la bibliothèque parallèle commune à tous les modules du système TELEMAC ; on orientera le lecteur vers [112] pour plus de détails.

Le code inclut certaines fonctionnalités adressées aux développeurs. Ces fonctionnalités revêtent la forme de "sous-programmes" dits *utilisateurs* écrits en FORTRAN. Ces derniers sont mis à disposition de l'utilisateur/développeur et peuvent être modifiés lorsque des fonctions viennent à manquer et l'implémentation par l'utilisateur est nécessaire. Pour cela, il suffit de,

- récupérer la version standard du sous-programme utilisateur présente dans la distribution,
- modifier ce sous-programme,
- concaténer l'ensemble des sous-programmes en un fichier fortran qui sera compilé au lancement de TELEMAC-2D.

#### 4.2.1.2 Profil du cluster.

Les composants matériels de la grappe dont dispose Géo-Hyd sont les suivants :

- 1 nœud maître,
- 8 nœuds de calcul,
- 1 nœud GPU,
- 1 serveur de stockage en configuration NAS – *Network Attached Storage*.

A cela on ajoute les différents commutateurs réseau du cluster – 2 *switch* à 24 ports – pour le calcul, le parallélisme ou encore l'administration –*IPMI Intelligent Platform Management Interface*–. Le descriptif technique détaillé est résumé dans le tableau 4.1.

La grappe de calcul dispose des bibliothèques mathématiques suivantes,

**FFTW** Transformées de Fourier discrètes,

**BLAS (ATLAS)** *Basic Linear Algebra Subprograms*,

**LAPACK** *Linear Algebra PACKage*,

**BLACS** *Basic Linear Algebra Communication Subprograms*,

**SCALAPACK** *SCALable Linear Algebra PACKage*.

De plus, les bibliothèques parallèles installées sont,

Nœud	Composants	Architecture
<b>Nœud maître</b>	Bi-processeurs Intel Xeon Westmere 4C E5620 2.4G 12M 5.86GT/s QPI 24 Go DDR3-1333 ECC Registered Interface video intégrée : 2 disques durs SAS 450 Go	Quadri-cœur
<b>Nœud de calcul</b>	Bi-processeurs Intel Xeon Westmere 4C E5620 2.4G 12M 5.86GT/s QPI 24 Go DDR3-1333 ECC Registered Interface video intégrée : 2 disques durs SAS 450 Go	Quadri-cœur
<b>Nœud GPU</b>	Bi-processeurs Intel Xeon Westmere 4C E5620 2.4G 12M 5.86GT/s QPI 24 Go DDR3-1333 ECC Registered 1 carte graphique dédiée pour visualisation : 2 GPUs - GF GTX590 3Go GDDR5 2 disques durs SAS 450 Go	Quadri-cœur
<b>NAS</b>	Processeur Intel Xeon Westmere 4C E5620 2.4G 12M 5.86GT/s QPI 12 Go DDR3-1333 ECC Registered 1 carte graphique dédiée pour visualisation : 2 GPUs - GF GTX590 3Go GDDR5 Interface video intégrée : 2 disques durs SAS 150 Go & 12 disques durs SATA2 2 To	Quadri-cœur

TABLE 4.1: Composants du cluster.

**MPICH** *Portable Implementation of Message Passing Interface,*

**LAM/MPI** *open-source implementation of the Message Passing Interface specification,*

**MPICH2** *High Performance and widely portable implementation of the Message Passing Interface Standard (MPI-1 et MPI-2),*

**OPENMPI** *A High Performance Message Passing Library (MPI-1 et MPI-2).*

## 4.2.2 Description du modèle.

Dans le but de dresser un comparatif du gain en temps de calcul obtenu avec la version parallèle de TELEMAC-2D, on se propose d'utiliser pour cette étude un modèle de crue de la Loire relativement simplifié. On ne décrira ici que brièvement les paramètres physique et géométrique du modèle ; on pourra se référer à [1] pour plus de détails.

### 4.2.2.1 Données du modèle.

Les données cartographiques utilisées pour la réalisation du modèle hydraulique sont issues de bases de données parcellaire et topographique de l'Institut national de l'information géographique et forestière (anciennement Institut Géographique National, IGN). La topographie est obtenue à partir d'un modèle numérique de terrain LIDAR (LIght Detection And Ranging) réalisé entre 2009 et 2010, de levés bathymétriques des pieds de digues domaniales de la Loire réalisés par le Centre d'Etude Techniques et de l'Equipe-ment (CETE) datant de 1995 et 1997, et de profils en travers du lit mineur obtenus en 1991 et 1996. Les données des ouvrages hydrauliques comprennent une description du fonctionnement d'un barrage, des plans de viaduc, de ponts et de la prise d'eau entre la Loire et le canal de Roanne à Digoin. Enfin, le modèle prend également en compte des données de laisses de crues de 1846, 1866, 1907 et de 2003.

### 4.2.2.2 Secteur d'étude.

Le domaine du modèle décrit un linéaire de lit mineur de la Loire de l'ordre de 12.5 km de cours d'eau. Le secteur d'étude comprend,

- les affluents du Renaison au niveau de Roanne et du Rhins en aval du Coteau,
- un bassin versant convergeant vers la Loire à Villerest,
- un îlot séparant une section de la Loire en deux bras,
- les digues de Roanne en rive gauche dite de Renaison amont et aval et en rive droite dites de Varenne (amont et aval) et de Pincourt, qui s'étendent sur environ 3 km,

- des singularités hydrauliques telles que trois ponts enjambant le fleuve (voie ferrée, pont du Coteau, pont de la RN7) un barrage de navigation en aval du pont du Coteau et une micro-centrale électrique intégrée au barrage.

#### 4.2.2.3 Modèle hydraulique.

Comme précisé précédemment, le modèle est réalisé à l'aide du logiciel TELEMAC-2D. Le fichier de paramètres est édité avec le module FUDAA-PREPRO et le maillage est généré en utilisant le logiciel de pré/post-traitement BLUE KENUE [120].

L'emprise du modèle a été étendue en aval du système d'endiguement du secteur d'étude afin de limiter l'influence de la condition limite à l'aval et de tenir compte de remous hydrauliques pouvant causer des inondations à l'arrière des digues. Le réseau hydrographique du secteur d'étude comprend les biefs de la Loire (largeur du lit mineur entre 50 et 250 m), du Renaison (largeur du lit mineur d'environ 10 m), du Rhins (largeur du lit mineur d'environ 15 m) et du canal de Roanne à Digoin (largeur du lit mineur d'environ 20 m). Suivant le bief considéré, les tailles de mailles évoluent entre 5 (Renaison et Rhins) et 10 m (Loire et Digoin).

Au niveau du lit mineur, les données bathymétriques de la Loire sur l'ensemble du linéaire d'étude ne sont pas disponibles ; celles-ci ne sont localisées qu'au niveau des pieds de digues. Néanmoins, l'altimétrie de la surface de l'eau est connue. On procède par une interpolation linéaire réalisée avec BLUEKENUE pour compléter les côtes altimétriques manquantes en s'assurant que les méandres et les îlots sont bien pris en compte. Dans le cas où l'altimétrie n'est pas disponible, on retient la cote de la surface de la ligne d'eau issue du LIDAR.

De plus, on impose une contrainte supplémentaire au modèle consistant à prendre en compte les ouvrages en lit mineur tels que les piles de ponts, les culées de l'ouvrage... Ces ouvrages sont représentés directement sur la topographie du modèle en les excluant du maillage notamment.

Concernant le maillage en lit majeur, la résolution des points est de l'ordre de 15 cm pour une précision altimétrique de l'ordre d'une dizaine de centimètres.

Les contraintes sur le secteur urbanisé portent sur la représentation à l'échelle de la rue dans les secteurs fortement urbanisés (centre de Roanne), à l'échelle du quartier dans les zones d'urbanisation moyenne et à une échelle moindre dans les zones rurales. Ces secteurs sont pris en compte suivant la densité d'urbanisation. Par ailleurs, les écoulements ne se font quasiment qu'au niveau des voiries pour les zones fortement urbanisées, alors que dans les zones moins urbanisées, ceux-ci sont également contraints par les bâtiments. Ces derniers ont été retenus dans le maillage et modifie le coefficient de rugosité déjà dépendant du type de surface traversée (voirie, zones agricoles,...). Pour les secteurs peu urbanisés, les mailles sont d'environ 25 m de coté ; en zones non urbanisées, on considère des mailles grossières (environ 50 m de coté).

Concernant les aménagements linéaires en remblai tels que les digues, les voiries ou les voies ferrées, ils constituent de potentiels obstacles qui vont conditionner l'écoulement. Ils seront alors modélisés à l'aide de 4 lignes structurantes sur lesquelles s'appuiera le maillage.

Nombre de processeurs	Architecture	Temps d'exe			Temps d'exe en S
		H	MIN	S	
1	1 nœud, 1 proc	3	32	38	12758
2	1 nœud, 2 procs	2	12	59	7979
8	1 nœud, 8 procs	0	22	20	1340
16	2 nœuds, 8 procs	0	14	57	897
24	3 nœuds, 8 procs	0	12	36	756
32	4 nœuds, 8 procs	0	11	50	710
48	6 nœuds, 8 procs	0	13	9	789
56	7 nœuds, 8 procs	0	13	41	821
64	8 nœuds, 8 procs	0	12	49	769

TABLE 4.2: Comparaison des temps d'exécution suivant le nombre de processeurs utilisés.

Pour résumer, le maillage représente une emprise surfacique de  $17 \text{ km}^2$  et compte environ 65000 nœuds pour 121500 mailles (Fig. 4.1). Il est important de préciser que le temps de calcul peut également être optimisé par le choix du maillage le plus approprié.

La résolution numérique a été effectuée par la méthode des éléments finis. On ne détaillera pas les paramètres de calage du modèle dans la mesure où cette étape a été menée en amont du travail effectué. Néanmoins, on précise que le calage a été effectué à partir d'un épisode de crue datant du 3 décembre 2003. À l'aval du barrage de Villerest, l'écoulement peut atteindre un débit maximal de  $1600 \text{ m}^3/\text{s}$  et de  $1900 \text{ m}^3/\text{s}$  en amont. Enfin, les coefficients de Strickler caractérisant la rugosité sont,

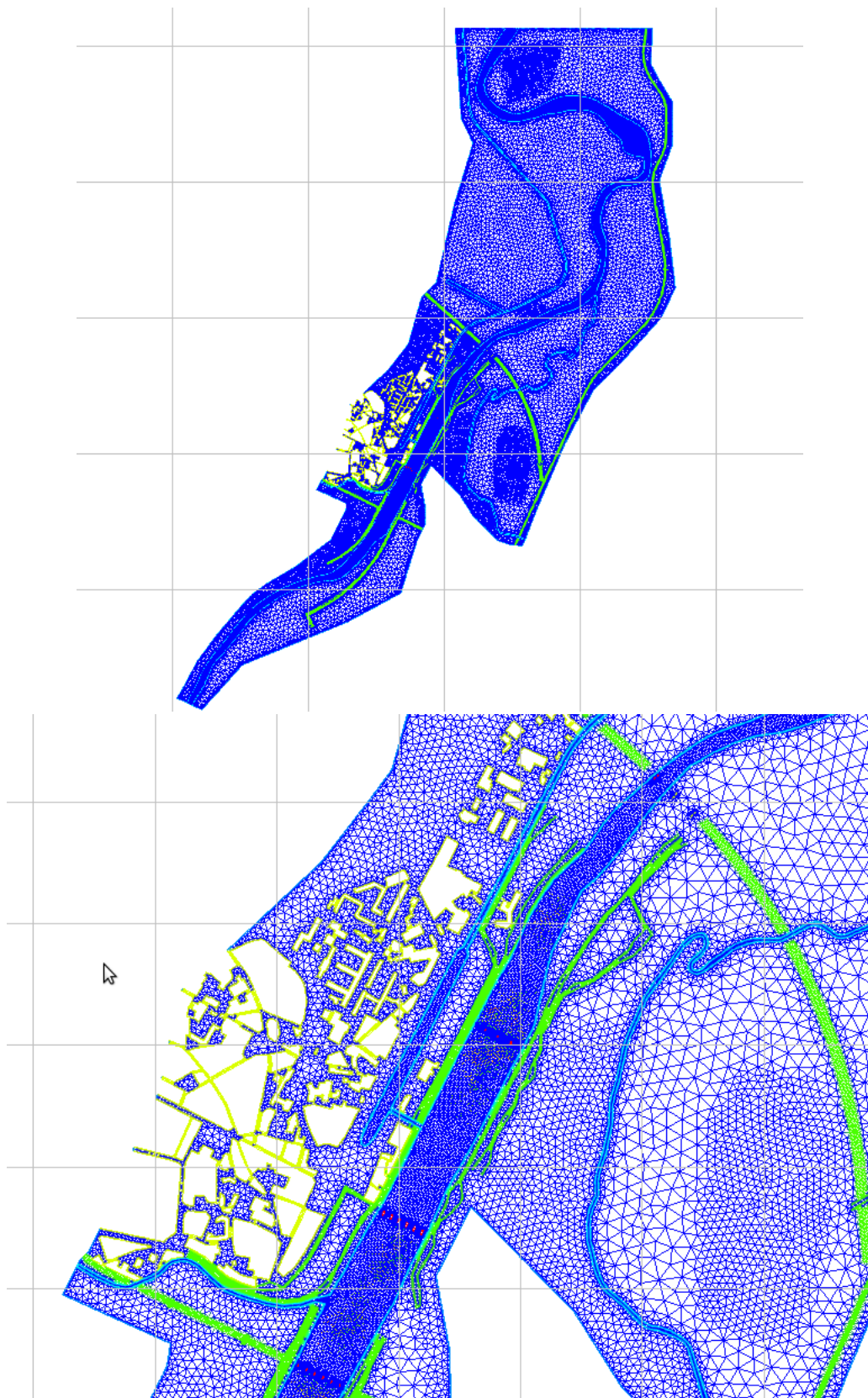
- en lit mineur, de  $35 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$ ,
- en lit majeur, de  $50 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$  en zone urbaine dense, de  $5 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$  en zone urbaine moyenne, et  $15 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$  en zone rurale.

### 4.2.3 Comparaison des temps de calcul.

Comme évoqué précédemment, une partie du travail a été consacrée à l'installation du code TELEMAC-2D à la fois sur le cluster de Géo-Hyd mais également sur les machines individuelles d'Antea Group. Ce travail a donné lieu à la rédaction d'un guide d'installation que l'on ne détaillera pas ici. De plus, l'utilisation de certains paramètres existant dans TELEMAC permet d'optimiser le temps de calcul. Dans cette optique, certains paramètres importants sont décrits dans l'annexe 2. Étant donné les modèles dont on dispose, il est intéressant de comparer les différents temps de calcul que l'on obtient avec les versions séquentielle et parallèle de TELEMAC.

**4.2.3.0.1 Cas 1 : Simulation sur 4 h.** Pour une simulation d'un événement ayant lieu sur 4 h, on obtient les résultats comparatifs résumés dans le tableau 4.2.

En premier lieu et concernant le modèle retenu, on peut remarquer que la version séquentielle offre un temps d'exécution très proche du temps simulé. Au vu des résultats sur les

FIGURE 4.1: *Maillage.*



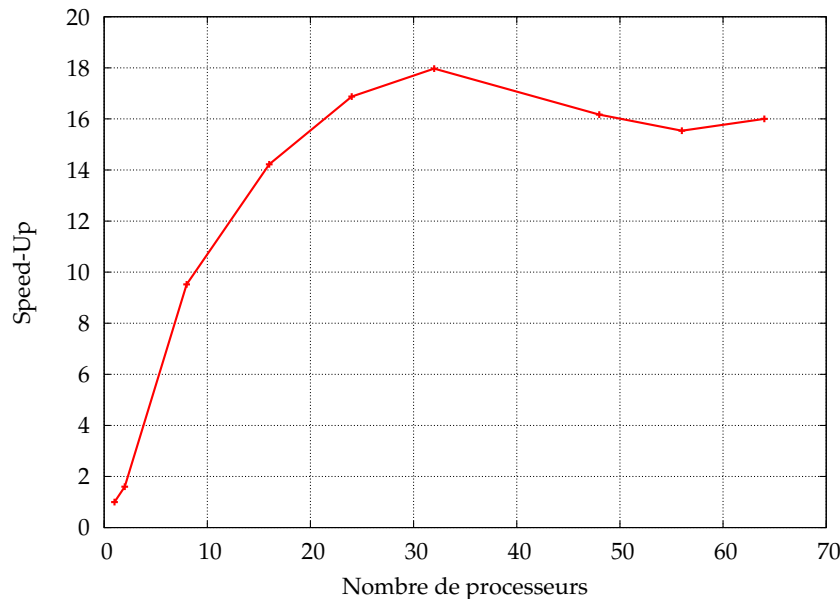


FIGURE 4.2: Courbe de speed-up pour la grappe de calcul.

temps d'exécution résumés dans le tableau 4.2, il apparaît clairement que le temps optimal (c'est-à-dire le temps minimal d'exécution) est atteint pour une exécution à 32 processeurs. Cependant, il est raisonnable d'utiliser au plus 24 processeurs afin de préserver des unités de calcul pour d'autres processus. En effet, le gain en temps est largement négligeable pour le nombre de processeurs mis en jeu ; d'après le tableau 4.2, au-delà de 24 processeurs alloués, lorsqu'on ajoute 8 processeurs supplémentaires, on n'observe qu'un gain en temps d'une minute. De plus, il est possible de généraliser cette observation en soulignant qu'à partir d'un nombre de processeurs supérieur à 24, le temps d'exécution atteint une valeur limite.

Pour mettre en évidence le gain en termes de temps d'exécution entre les versions séquentielle et parallèle, il est intéressant d'étudier le speed-up (ou accélération) présenté sur la figure 4.2 qui correspond au rapport du temps d'exécution séquentielle sur le temps d'exécution parallèle. On constate que la courbe du speed-up atteint un plateau alors que dans l'idéal, il aurait été souhaitable que la pente soit linéaire en fonction du nombre de processeurs. En réalité, ce résultat bien que contre-intuitif de prime abord, est bien connu. Il apparaît que la communication entre processeurs devient rapidement chronophage à mesure que le nombre de processeurs augmente. En d'autres termes, plus le maillage est réparti sur un nombre important de processeurs et plus le temps de communication est important et il est alors possible de définir un nombre optimal de mailles par processeur. En l'occurrence dans le cas étudié, il apparaît que la limite d'accélération est atteinte pour un usage de 16 à 24 processeurs et qu'elle se situe aux alentours de 16. La figure 4.3 correspond aux résultats à l'instant final obtenu pour la hauteur d'eau pour les exécutions séquentielle et parallèle. On remarque que les résultats sont similaires ; les zones concernées par les inondations sont identiques pour les deux méthodes de résolution.

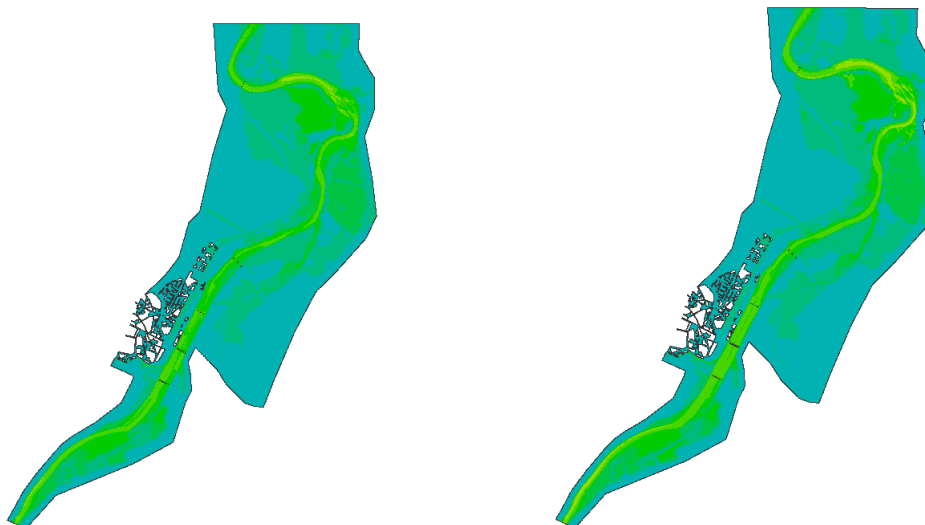


FIGURE 4.3: Résultats pour la hauteur d'eau obtenus au temps final  $t = 4 h$  pour une exécution séquentielle (à gauche) et parallèle à 8 processeurs (à droite).

Nbre de procs	Architecture	Temps d'exé			Temps d'exé en S	Speed-up
		H	MIN	S		
1	1 nœud, 1 proc	22	20	31	80431	1
24	3 nœuds, 8 procs	2	4	12	7452	10.8
32	4 nœuds, 8 procs	1	52	5	6725	12
48	6 nœuds, 8 procs	2	9	52	7792	10.3

TABLE 4.3: Comparaison des temps d'exécution suivant le nombre de processeurs utilisés.

**4.2.3.0.2 Cas 2 : Simulation sur 50 h.** On se propose maintenant de simuler un épisode d'inondation de 50 h. La figure 4.4 présente les résultats de simulation pour les exécutions séquentielle et parallèle. De manière similaire au cas précédent, les résultats pour les deux stratégies d'exécution sont similaires. En ce sens, il est avantageux d'utiliser la version parallèle de TELEMAC-2D. Contrairement à la simulation précédente sur 4 h, le tableau 4.3 récapitulatif des temps d'exécution montre que le rapport du temps d'exécution en séquentielle sur le temps simulé est d'environ 0.5. En outre, on remarque que le speed-up est moins important que dans le cas précédent ; la valeur limite semble être environ de 10. Néanmoins, à 24 processeurs utilisés, on atteint également cette valeur limite. Ce constat s'inscrit dans le cadre de la limite de scalabilité précédemment évoquée et est en accord avec les observations relevées dans la simulation sur 4 h.

En termes de temps de calcul, les différences sont importantes comme on peut le constater sur le tableau 4.3. Encore une fois, l'optimum est obtenu en utilisant 32 processeurs cependant, pour le gain que l'on observe par rapport au résultat pour 24 processeurs, il est davantage raisonnable de lancer ses calculs avec un maximum de 24 processeurs.

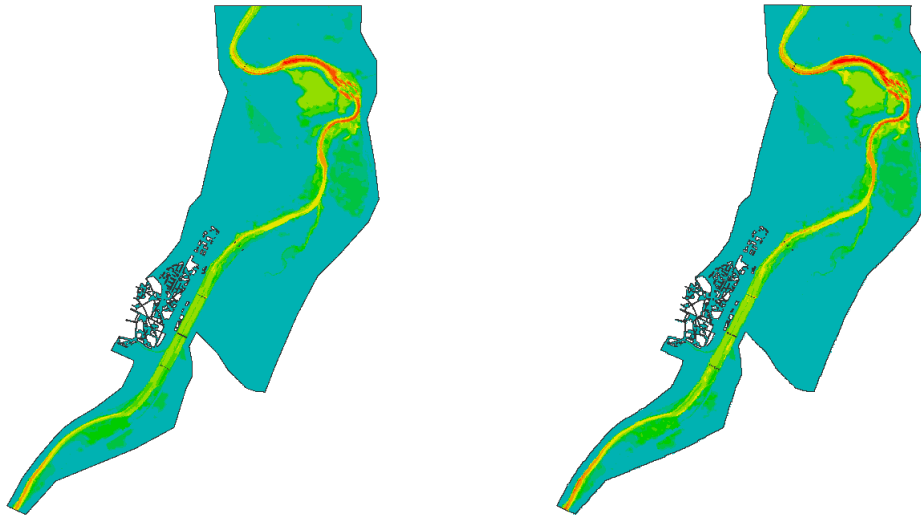


FIGURE 4.4: Résultats pour la hauteur d'eau obtenus au temps final  $t = 50$  h pour une exécution séquentielle (à gauche) et parallèle à 32 processeurs (à droite).

#### 4.2.4 Conclusion et perspectives partielles.

A la lumière de ce qui vient d'être présenté, il apparaît clairement que l'utilisation de la version parallèle de TELEMAC représente un réel avantage par rapport à sa version séquentielle en termes de temps d'exécution du code. De plus, on ne perd pas en qualité sur la solution obtenue (calcul de courbe d'erreur possible).

Afin d'améliorer encore ce temps d'exécution, il semble que retravailler le maillage (utiliser un maillage réglé pour le canal) peut s'avérer utile pour pouvoir appliquer efficacement la méthode des volumes finis et tester sur la version parallèle de celle-ci.

### 4.3 RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE SUR LES RUPTURES DE DIGUES.

Dans cette section, on fait brièvement l'état de l'art de la modélisation des brèches de digues. La suite s'apparentera davantage à une synthèse d'un certain nombre de travaux dans ce domaine et ne constituera pas une étude exhaustive du sujet. Dans un premier temps, on s'appuiera sur la description des processus d'apparition et d'évolution d'une brèche dans une digue pour, dans un deuxième temps, aborder l'approche physique qui en est faite et enfin, traiter des questions de modélisation et des outils numériques (notamment le module `breach` sur TELEMAC [125]) pour la simulation de ces phénomènes.

#### 4.3.1 Quelques idées clés sur le processus de formation de brèches.

Dans un contexte de modélisation, une rupture de digue désigne une situation où les phénomènes d'érosion ou un défaut structurel entraîne un écoulement d'eau incontrôlé au-dessus ou à travers une digue [130]. Ceci traduit l'apparition d'une brèche. Le processus de rupture englobe tout événement entre le moment où une brèche est créée (érosion...) à la rupture totale de la digue.

On dénombre principalement deux processus de formation des brèches [173] :

1. **Erosion externe par surverse** qui entre en jeu lorsque le niveau d'eau dépasse la crête de la digue et aboutit à l'arrachement de matériaux dans le talus aval du remblai,
2. **Erosion interne par effet de renard** qui résulte des hétérogénéités de perméabilité dans le corps de l'ouvrage (différences de pression élevées entre les zones aval et amont) générant des écoulements internes importants.

On rappelle que le processus de rupture de digue se déroule suivant trois étapes :

1. **Initiation de la brèche** due à l'érosion du sommet de la digue par surverse ou aux écoulements internes aboutissant à la fragilisation des structures internes de la digue, dont la durée se compte en heure, jours, ou mois.
2. **Formation de la brèche** lorsque l'érosion initiée à l'étape précédente influe sur le contrôle hydraulique,
3. **Elargissement de la brèche** lorsque le phénomène d'érosion gagne rapidement la base de la digue et le débit de l'écoulement à travers la digue croît rapidement.

**Hydrogramme d'inondation.** L'hydrogramme dépend de deux facteurs,

- l'érodabilité du sol,
- les relations entre la durée des étapes pour la charge hydraulique.

Deux éléments importants sont à noter concernant la forme de l'hydrogramme :

- Faible pic de débit, le niveau d'eau amont diminue au même rythme que l'érosion du sol agit sur la crête de la digue, l'hydrogramme de l'écoulement est relativement lent,
- Fort pic de débit qui coïncide avec l'élargissement rapide de la brèche.

En contrôlant l'érodabilité du sol, il est possible d'agir sur la vitesse et l'hydrogramme de l'écoulement en le diminuant, réduisant ainsi le risque de dommage et les pertes humaines.

L'impact de l'inondation sur l'écoulement à travers la digue et la formation de cette dernière fait partie intégrante de l'analyse [38].

L'instant où la brèche se forme par rapport à l'instant où le débit atteint son pic est significatif.

Les facteurs jouant sur la localisation de la brèche sont notamment :

- les variations de hauteur de la crête,
- des différences qualitatives portant sur la protection de la digue,
- les structures sur ou à travers la digue.

Concernant les digues côtières, des facteurs additionnels jouant sur la localisation s'ajoutent aux précédents :

- la concentration locale des actions des ondes dues aux ondes de réfraction,
- une bathymétrie raide à l'avant de la digue augmente la force des ondes de rupture.

Pour définir ces paramètres liés à la longueur de la brèche ou à sa localisation, il est inévitable de passer par une étude des brèches historiques.

#### 4.3.1.1 Facteurs aggravants.

Certains facteurs peuvent accroître le risque d'apparition et la taille des brèches. La structure de la digue et la charge hydraulique en représentent deux importants.

Dans le premier cas, la formation de brèche est un processus complexe et peut facilement être influencée par des paramètres de conception (herbe, enrochement, tapis plastique ou géotextile...) qui peuvent ralentir ou accélérer le processus d'érosion. De plus, les prédictions sur l'évolution d'une brèche sont limitées aux structures assez simples (digue homogène recouverte d'herbes).

Quant à la charge hydraulique, celle-ci exerce significativement une influence sur la manière par laquelle la brèche se forme. Différentes combinaisons de charge peuvent plus

ou moins encourager certains modes de rupture qui aboutiront, à terme, à la formation d'une brèche et à sa croissance.

Enfin, un dernier facteur de formation de brèches évident est le matériau constituant la digue. Les différents matériaux couramment utilisés pour ce genre d'ouvrage sont de types non cohésif (facilement érodable, exemple : le sable), cohésif (moins érodable qu'un matériau non cohésif, exemple : l'argile) et rocheux (sa capacité à s'éroder varie en fonction de la taille des éléments considérés allant de particules fines aux rochers).

#### 4.3.1.2 Paramètres de description.

Afin de décrire le processus de formation d'une brèche, les paramètres importants sont [173],

- l'instant de la crue où la brèche débute,
- la profondeur et la vitesse d'ouverture initiale de la brèche,
- la forme de la brèche.

La littérature s'accorde à considérer des brèches de forme trapézoïdale. Néanmoins, la forme de la brèche n'a pas une influence majeure sur les incertitudes obtenues pour la propagation. En termes de mesure, les études ne permettent pas de conclure. En effet, une étude sur les ruptures historiques [163] met en relief le fait que la largeur de la brèche est globalement de l'ordre de trois fois la hauteur d'eau en amont de la brèche. Cette relation contredit l'idée du Cemagref affirmant que le rapport largeur sur hauteur est souvent supérieur à 3.

Il est à noter que dans le cas d'une rupture de digue, la ligne d'eau amont correspond à celle du lit mineur et l'écoulement initial est quasiment transversal à la direction de l'écoulement à travers la digue. Ceci induit des différences de sollicitation de cette dernière dont les paramètres, l'ampleur et l'influence sont encore à étudier, et soulève des questions quant à l'orientation de la digue par rapport au cours d'eau. A l'ouverture d'une brèche, la dynamique de l'écoulement amont influe sur la direction et la vitesse de l'écoulement en sortie de celle-ci.

En ce qui concerne la ligne d'eau en aval de la brèche pour le cas des digues, elle peut atteindre la côte de la ligne d'eau du lit mineur avant la fin de la crue du cours d'eau.

A ce jour, il paraît difficile de prévoir le processus de rupture de digues soit par surverse, soit par effet de renard ; il a été constaté dans [175], la dominance sur un même site de l'un puis l'autre des deux mécanismes prépondérants à quelques années d'intervalles.

#### 4.3.1.3 Etapes du processus de formation d'une brèche de digue.

On distingue deux types de rupture ; l'une étant *instantanée*, l'autre *progressive*. Du point de vue des digues, les ruptures ont tendance à être progressives.

Les étapes conduisant à la manifestation progressive d'une brèche sont les suivantes [130] :

1. A l'instant initial, rien ne se passe.
2. A un certain instant, la brèche est initiée.
3. S'écoule alors une période durant laquelle l'écoulement à travers la digue se fait à faible vitesse ; on se situe encore dans une phase de progression de l'initiation de la brèche. La durée de cette étape peut s'évaluer en termes d'heures, jours ou mois.
4. S'ensuit une phase de transition où l'on passe du stade d'initiation à la formation d'une brèche qui s'opère en quelques heures.
5. L'avant-dernière étape correspond à la formation de la brèche ; l'érosion est rapide.
6. On atteint alors un pic de débit qui va progressivement se réduire.

### 4.3.2 Pistes de modélisation.

Les modèles de brèche s'inscrivent typiquement dans une des trois catégories suivantes :

- Modèles *empiriques* (non-physiques),
- Modèles *semi-empiriques* ou *semi-physiques* (analytiques et paramétriques),
- Modèles *physiques*.

Ce qui est important de noter est le fait que le modèle 2D offre plus d'avantages que le 1D. Dans le cas d'une digue, les pentes locales sont moins importantes que pour les barrages. La position en vallée de ces digues est moins propice à la propagation selon une ou peu de directions privilégiées, ce qui rend l'utilisation d'une modélisation 2D incontournable [173].

#### 4.3.2.1 Modèles empiriques.

Ces modèles sont basés sur des données concernant des brèches historiques. Les paramètres de la brèche sont obtenus à partir d'équations de prédiction dérivées des données valides.

L'avantage de cette approche est clairement sa simplicité compte tenu qu'elle ne fait appel à aucun modèle numérique. En contrepartie, elle génère beaucoup d'incertitudes au niveau des prédictions. Une autre limite de ces prédictions repose sur le fait que seules

des valeurs discrètes sont retournées. Ceci pose problème notamment pour le pic de débit [130]. Il a été montré qu'en utilisant des équations pour le pic de débit, les conditions pour le pire cas d'inondation ne correspondaient pas forcément à ce pic.

Des équations pour ce pic de débit ont été données par *MacDonald & Landridge-Monopolis* (1984), et plus récemment par *Froehlich* (1995, 2004, 2008). Des articles de *Tony Wahl* (2004, puis 2007) évaluent les performances de ces modèles empiriques.

#### 4.3.2.2 Modèles semi-empiriques.

Les nombreuses incertitudes générées par les modèles empiriques ainsi que la complexité des modèles physiques ont poussé à l'élaboration de modèles basés sur des processus physiques mais prenant en compte des hypothèses simplificatrices pour modéliser les ruptures de digues (*Singh & Scarlatos*, 1989 et *Walder & O'Connor*, 1997).

Le but de ces méthodes est d'améliorer la capacité de prédiction en considérant quelques processus physiques entrant en jeu durant une rupture sans en complexifier l'implémentation. Généralement, les hypothèses considérées dans ce type de modèle sont :

1. une équation pour le cas du barrage convient pour la représentation d'un écoulement au-dessus de la digue,
2. des conditions d'écoulement critique s'appliquent sur la crête de la digue,
3. l'évolution de la brèche est un processus dépendant du temps.

Un modèle respectant ces hypothèses peut être mis en place afin d'estimer l'hydrogramme à la sortie d'une brèche. En dépit de la simplicité de ces modèles, ils nécessitent que l'utilisateur précise le taux d'érosion pour l'évolution de la brèche ou les dimensions finales de celle-ci et la durée du processus de rupture. Le modèle simule alors une évolution jusqu'à atteindre les paramètres précisés pour la brèche et produire un hydrogramme. Cependant, ces paramètres sont difficiles à évaluer et diffèrent significativement d'un cas à l'autre. Bien que ces méthodes semblent retourner des prédictions plus précises que les modèles empiriques, elles sont fortement liées aux données de l'utilisateur et par conséquent, aux incertitudes incluses dans celles-ci.

#### 4.3.2.3 Modèles physiques.

Ces modèles reposent sur les processus observés durant une rupture tels que les régimes d'écoulement, l'érosion et les processus d'instabilité. On peut retrouver un résumé des méthodes proposées qui diffèrent les unes des autres dans leur complexité, les hypothèses qu'elles impliquent ou les méthodes employées, dans [130]. Ici on ne dressera que les avantages et inconvénients de cette approche.

Les avantages de cette approche sont,



- les processus d'évolution de la brèche sont modélisés en tenant compte des contraintes physiques, généralement les aspects hydrauliques, le transport de sédiments, la mécanique des sols et le comportement des structures,
- une réelle estimation de l'hydrogramme de sortie et de l'évolution de la brèche est obtenue sans prédéfinir ou contraindre le processus d'évolution,
- les incertitudes sont inclus dans le modèle.

A contrario, les inconvénients sont,

- l'implémentation devient rapidement complexe ; la durée d'exécution peut croître assez rapidement en fonction de la complexité du modèle,
- pour le moment, l'implémentation des modèles 1D/pseudo-2D prenant en compte l'hydraulique, le transport de sédiments, la mécanique des sols et la stabilité des structures est possible ; les modèles 2D/pseudo-3D tenant compte de ces processus sont en cours de développement mais ne sont pas pratiques en termes de temps de calcul ou en gain de performance.

#### 4.3.2.4 Modèles d'érosion.

La prise en compte d'un phénomène d'érosion dans les modèles de rupture de digues peut se faire suivant deux modèles. Jusqu'en 2005, la majorité de ces modèles reposait sur des équations d'équilibre pour le transport de sédiments. L'inconvénient de cette approche se situe dans le fait que ces modèles ont été développés pour une prédiction de la morphologie sur du long terme et non sur du court terme qui pour ce dernier, constitue les conditions dynamiques typiques d'une érosion de digue. Ces modèles d'équilibre entre les flux de sédiments entrant et sortant trouvent leur sens pour les écoulements au-dessus d'un lit de sédiments plutôt que pour un écoulement à travers une digue, au cours duquel l'érosion s'opère le long des brèches et où une masse de sédiments est injectée dans le flux.

Le taux d'érosion d'une digue au niveau d'une brèche est fortement dépendant de l'état du sol (degré de cohésion. . .). Ce critère n'est pas pris en compte dans les équations de transport de sédiments car le sol est décrit comme un flux le long de la rivière. D'où l'avantage d'utiliser des équations d'érosion qui traduisent plus précisément les processus physiques qui entrent en jeu.

Le modèle d'érosion assez répandu de *Chen et Anderson* (1986) s'écrit :

$$E = K_d \alpha (\tau - \tau_c)^\beta, \quad (4.3.1)$$

où,

$$\left\{ \begin{array}{ll} E & \text{le taux d'érosion,} \\ K_d & \text{le coefficient d'érodabilité,} \\ \tau & \text{la contrainte de cisaillement,} \\ \tau_c & \text{la contrainte critique du matériau,} \\ \alpha, \beta & \text{des coefficients empiriques dépendants des propriétés du sol.} \end{array} \right.$$

Comme suggéré dans [35], la topographie est mise à jour suivant la relation :

$$\Delta b = E \Delta t, \quad (4.3.2)$$

avec,

$$\begin{cases} \Delta b & \text{la variation de topographie,} \\ \Delta t & \text{le pas de temps.} \end{cases}$$

Dans le tableau 4.4, on propose une description qualitative du type d'érosion qui se produit en fonction des ordres de grandeur pour les différents paramètres  $K_d$  repris de [38]. D'autres analyses qualitatives sont présentées sur [38] que l'on ne détaillera pas ici.

Description (érosion)	$K_d$ ( $\text{cm}^3/\text{N} \cdot \text{s}$ )
Extrêmement rapide	100 – 1000
Très rapide	10
Modérément rapide	1
Modérément lent	0.1
Très lent	0.01
Extrêmement lent	0.001

TABLE 4.4: Description qualitative des valeurs de  $K_d$  (Hanson et al., 2010).

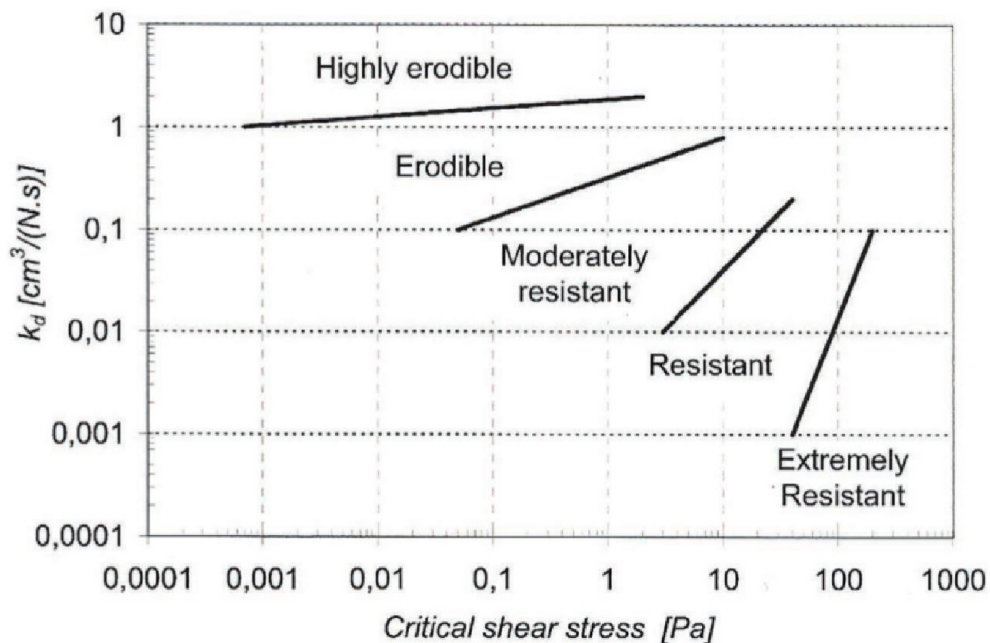


FIGURE 4.5: Erodabilité du sol (Hanson et Simon, 2001).

#### 4.3.2.5 Modèle d'inondation.

Certains paramètres ne peuvent être mesurés et donc quelques hypothèses sont nécessaires :

- la localisation de la brèche,
- l'instant où la brèche s'initie,
- la valeur maximale de la profondeur de la brèche,
- la valeur maximale de la largeur de la brèche.

La plupart des valeurs prises est issue d'études existantes. Le nombre d'hypothèses peut être important et influencer les résultats tels que la hauteur d'eau ou la vitesse dans la zone inondée. C'est pourquoi, un modèle précis pour l'évolution de la brèche n'est pas nécessaire.

#### 4.3.3 Modélisation numérique.

L'un des enjeux de la modélisation numérique du processus de rupture de digue reste encore la prise en compte de l'élargissement de la brèche. A ce jour, le module `breach` de TELEMAC considère une rupture de digue par abaissement du fond et ne permet pas de modéliser cet élargissement. Quant au logiciel MIKE, celui-ci propose une méthode permettant de modéliser cet élargissement cependant celle-ci est basée sur une relation de proportionnalité entre la hauteur d'abaissement du fond et la longueur de la brèche dont le coefficient est donné par l'utilisateur. En ce sens, cette approximation demeure relativement arbitraire.

##### 4.3.3.1 Approches de modélisation.

Pour modéliser l'écoulement suite à une rupture de digue, trois options se distinguent :

1. Coupler le modèle de brèche avec le modèle hydraulique pour modéliser simultanément l'évolution de la brèche et la propagation d'onde dans la plaine inondable,
2. Estimer un hydrogramme réaliste au niveau de la brèche et l'utiliser comme valeur d'entrée pour la plaine inondable,
3. Proposer une brèche instantanée et propager une onde sur la plaine inondable.

La première méthode est la plus rigoureuse d'un point de vue scientifique mais les incertitudes sur les paramètres des sédiments et du sol sont grandes. De plus, les phénomènes physiques de formation de brèches et leur évolution ne sont pas entièrement compris.

La deuxième est plus pratique mais elle ne traite que partiellement le système hydraulique intégré au modèle. Cette méthode ne prend pas en compte les interactions entre la rivière, la digue et la plaine inondable. Or ces interactions influencent le débit et la hauteur d'eau au niveau de la brèche, ainsi que les vitesses dans la zone inondable, qui ne sont pas prises en compte si l'hydrogramme est injecté à la brèche.

La troisième est plus simple à implémenter car la brèche est instantanée. Seul bémol, la plupart des brèches de digue sont progressives. Néanmoins, il n'est pas évident que cette hypothèse ait un réel impact sur la plaine inondable. C'est pourquoi, cette hypothèse est favorable en termes de sécurité, car toutes les données sont surestimées.

#### 4.3.3.2 Modélisation des zones urbaines.

Les structures urbaines qu'il s'agisse des rues ou des bâtiments influencent fortement la propagation de l'écoulement en zone urbaine. Trois approches sont possibles :

- **élévation du sol** : le sol est élevé à hauteur du bâtiment de façon à ce que l'écoulement ne se fasse pas à travers,
- **augmentation du frottement** : chaque bâtiment n'est pas représenté par un maillage singulier mais l'ensemble de la zone urbaine est associé à un coefficient de friction très élevé,
- **vide** : les bâtiments sont associés à des zones non maillées.

D'autres méthodes moins utilisées mais tout aussi possibles adoptent les stratégies suivantes :

- **porosité** : certains modèles incluent la porosité dans leur système de Saint-Venant (qui peut varier d'une cellule à l'autre) et les bâtiments ne sont pas représentés individuellement,
- **topographie par sous-maille** : au lieu d'avoir une valeur moyenne d'élévation du sol, chaque élément se voit assigner une gamme de niveau du sol,
- **multi-couche** : ici, les zones correspondant aux bâtiments sont finement représentées par de simples polygones contenus dans plusieurs couches.

#### 4.3.3.3 breach sur TELEMAC.

Dans cette partie, on s'intéresse au module `breach` récemment proposé dans le code TELEMAC depuis la version 6.2. Ainsi, la brèche est modélisée suivant une polyligne, et on définit la façon dont la brèche est prise en compte dans le modèle. Pour cela, on dispose de trois options :

1. la brèche débute à un instant donné,

2. elle commence au moment où la hauteur d'eau moyenne atteint une valeur donnée,
3. la rupture s'initie au moment où le niveau d'eau à un point donné dépasse une certaine valeur.

Compte tenu de cette description, le modèle est semi-empirique.

L'appel au module se fait à travers le mot-clé BRECHE (BREACH) et les paramètres concernant la brèche sont donnés dans le fichier FICHIER DE DONNEES DES BRECHES (BREACHES DATA FILE). Les paramètres à préciser sont [34] :

- le nombre de brèches,
- la largeur d'emprise (définit le polygone autour de chaque polyligne décrivant les brèches),
- l'instant de la brèche,
- la durée de création de la brèche (égale à 0 pour une brèche instantanée, sinon il s'agit d'une brèche progressive),
- la côte de la crête (*a priori* la côte maximale de la digue pour l'interpolation linéaire des fonds en cas de brèche progressive),
- la côte d'arase (côte finale de la brèche après ouverture totale),
- la côte de surverse (valable pour l'option 2, généralement égale ou inférieure à la côte de la crête),
- la description du point de contrôle en cas d'option 3 (coordonnées  $(x, y)$  du point et la côte  $z$  de contrôle),
- la description de la polyligne décrivant la brèche (nombre de points décrivant la polyligne et les coordonnées  $(x, y)$  de chaque point).

La longueur de la polyligne correspondra à la largeur de la brèche.

Au vu de l'arbre de dépendance du module disponible sur [125], il semblerait qu'il soit possible de coupler le module avec une loi d'érosion en faisant appel au code SISYPHE.

#### 4.3.3.4 Implémentation d'une loi d'érosion sur TELEMAC.

Dans cette partie, on se propose d'énoncer les grandes lignes de la méthode décrite dans [113] qui tente une approche pour la prise en compte de l'élargissement de la brèche.

La méthode se base sur une implémentation de la loi d'érosion de Parthéniades [145] :

$$\varepsilon = k_d \times (\tau - \tau_c), \quad (4.3.3)$$

où,

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \quad \text{la vitesse d'érosion,} \\ k_d \quad \text{le coefficient d'érodabilité,} \\ \tau \quad \text{la contrainte de cisaillement,} \\ \tau_c \quad \text{la contrainte critique du matériau.} \end{array} \right.$$

La contrainte de cisaillement  $\tau$  est donnée par la formule suivante,

$$\tau = \rho ghI, \quad (4.3.4)$$

où  $I$  est la pente de la ligne d'eau obtenue par l'intermédiaire de la formule de Manning-Strickler :

$$V = K_s R_h^{2/3} I^{1/2}, \quad (4.3.5)$$

avec,

$$\left\{ \begin{array}{l} V \quad \text{la norme de la vitesse de l'écoulement,} \\ K_s \quad \text{le coefficient de Manning-Strickler,} \\ R_h \quad \text{le rayon hydraulique (ici, égal à la hauteur d'eau } h \text{).} \end{array} \right.$$

Dans la pratique, il peut y avoir une érosion tant que  $h > 0$ . Pour obtenir un temps de calcul raisonnable, il est conseillé de limiter le domaine érodable sur un secteur plus petit que le domaine total. Pour le moment, la phase d'élargissement n'est pas prise en compte par le modèle.

Pour cela, on va considérer une érosion continue des matériaux des parois de la brèche suivant la loi de Parthéniades. L'idée est la suivante :

- dès lors qu'un nœud de la brèche est mouillé, on applique (4.3.3),
- pour les triangles non totalement mouillés (deux des trois nœuds étant mouillés), l'érosion du nœud sec est estimée et cherche à représenter au moins en partie, l'élargissement de la brèche.

On ne reviendra pas sur le détail de l'implémentation qui se trouve sur [113].

Il est important de préciser que cette méthode ne permet pas de prédire la largeur de la brèche finale mais limite le nombre de paramètres à estimer. Au vu des résultats présentés sur [113], la phase d'élargissement n'apparaît pas de façon probante. Néanmoins, elle constitue un début de réflexion en ce sens que cette méthode ne prend pas en compte les effets d'écoulements internes à la digue qui sont sensibles à la taille du maillage.

#### 4.3.4 Méthode pour le traitement de données.

A partir de données historiques de brèches, on essaie de lier les différents paramètres entre eux. Compte tenu du manque d'information disponible, on applique simplement une approche par calcul de corrélation et régression linéaire.

#### 4.3.4.1 Corrélation.

On considère que l'on dispose de deux échantillons  $X$  et  $Y$  de taille  $n$  (on pourra par exemple prendre les largeurs de brèches historiques et les largeurs de la fosse d'érosion par exemple). La corrélation vise à caractériser l'existence ou l'absence d'une relation entre deux échantillons de valeurs prises sur un même groupe de sujets. Le degré de corrélation se mesure sur une échelle allant de 0 à 1 ; 0 étant l'absence de corrélation et 1 une corrélation parfaite. On précise néanmoins que l'existence d'une corrélation n'a pas pour but de justifier une relation de causalité.

On note  $X_i$  et  $Y_i$  respectivement les  $i$ -èmes éléments des échantillons  $X$  et  $Y$ , et  $\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  leur moyenne respective. La variance de la variable aléatoire  $X$  s'écrit,

$$var(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, \quad (4.3.6)$$

et la covariance des variables aléatoires  $X$  et  $Y$  est donnée par,

$$cov(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}). \quad (4.3.7)$$

Finalement, l'indice de corrélation est donné par le quotient de la covariance de  $X$  et  $Y$  par le produit des écarts types de  $X$  et  $Y$  soit,

$$r_{XY} = \frac{cov(X, Y)}{\sqrt{var(X)}\sqrt{var(Y)}} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}. \quad (4.3.8)$$

Connaissant la valeur de cet indice, il reste à donner un sens à la valeur obtenue et de savoir si la corrélation est significative ou non.

#### 4.3.4.2 Test sur l'indice de corrélation de Pearson.

Pour tester si un coefficient est significatif, on pose l'hypothèse nulle que le coefficient est zéro. Il est possible de prouver que ce coefficient se distribue normalement autour de zéro si la variance est stable pour un  $X_i$  donné. La variabilité du coefficient autour de zéro est inconnue. Néanmoins, la quantité  $(1 - r^2)$  est un bon estimateur de la variance du coefficient.

**Postulats.** On suppose que les valeurs  $X_i$  se distribuent normalement et que la variance reste constante lorsque  $X_i$  croît.

**Hypothèses et seuil.** Les hypothèses sont :

$$\begin{aligned} H_0 : r_{XY} &= 0, \\ H_1 : r_{XY} &\neq 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'un test bidirectionnel dont le seuil  $\alpha$  est réparti en deux. Ce seuil est libre ; en général 5%.

**Test.** Le test est de la forme,

$$\text{rejet de } H_0 \text{ si } \frac{|r_{XY}|}{\sqrt{1 - r_{XY}^2}/\sqrt{n - 2}} > s(\alpha/2),$$

où  $\frac{|r_{XY}|}{\sqrt{1 - r_{XY}^2}/\sqrt{n - 2}} > s(\alpha/2)$  se distribue avec  $n - 2$  degrés de liberté.

Ici,  $n$  est la taille des échantillons  $X$  et  $Y$ . La soustraction par 2 vient du fait que le calcul de  $r_{XY}$  nécessite le calcul de 2 moyennes.

#### 4.3.4.3 Droite de régression.

Lorsque la corrélation est significative, il est intéressant de quantifier cette relation. On peut alors calculer la droite de régression linéaire :

$$Y_i = b_{XY} X_i + a, \quad (4.3.9)$$

où,

$$b_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\text{var}(X)} = r_{XY} \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)},$$

et  $\sigma$  n'est rien d'autre que l'écart-type :

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{var}(X)}.$$

L'ordonnée à l'origine s'obtient par la relation,

$$a = \bar{Y} - b_{XY} \bar{X} = \bar{Y} - r_{XY} \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \bar{X}.$$

### 4.3.5 Application numérique.

#### 4.3.5.1 Jeu de données.

On dispose de quelques données concernant des ruptures de digues historiques que l'on résume sur le tableau 4.5. Les données recueillies proviennent de deux sources différentes : le fond Guillon et les archives départementales. Dans la mesure où les mesures



concernant les dimensions de la fosse viennent des archives départementales, on ne travaillera par la suite qu'avec ces données. Le nombre de données dont on dispose est assez limité, c'est pourquoi on insiste sur le fait que cette étude par calcul de corrélation nécessiterait plus de données pour établir une estimation précise.

#### 4.3.5.2 Application de l'approche par calcul de corrélation.

On reprend les données du tableau 4.5. On note  $L_b$  la longueur de la brèche,  $L_f$  la longueur de la fosse, et  $l_f$  sa largeur. On se propose d'évaluer la corrélation entre ces différentes variables. Pour ce faire, on détermine les différentes quantités pour ce calcul telles que les variances de ces variables aléatoires qui sont données par le tableau 4.6 ou les covariances par le tableau 4.7.

L'indice de corrélation pour chaque couple de variables est résumé sur le tableau 4.8. De prime abord, on constate que la corrélation entre la longueur de la brèche et la largeur de la fosse est la plus élevée alors que la corrélation entre la longueur de la brèche et la longueur de la fosse est la moins importante. On va maintenant chercher à montrer que ces corrélations sont significatives.

En reprenant les étapes précédemment présentées en section 4.3.4.2 pour le test de Pearson, on propose le test d'hypothèse consistant à poser l'hypothèse nulle :

$$\begin{cases} H_0 : r = 0, \\ H_1 : r \neq 0, \end{cases}$$

avec  $n - 2 = 17$  degrés de liberté. Ici, la statistique de test  $t$  est  $t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$  avec  $n = 19$ . Les valeurs critiques pour un seuil  $\alpha = 0.05$  sont  $t_\alpha = \pm 2,11$ . Pour les différentes variables considérées, on trouve comme statistique les valeurs données dans le tableau 4.9. On remarque que chacune de ces valeurs est supérieure à la valeur critique 2.11. Par conséquent, l'hypothèse  $H_0$  est rejetée. On peut alors conclure que les corrélations entre les variables considérées sont significatives. Il existe donc une corrélation linéaire significative pour chaque couple de variables considérées.

#### 4.3.5.3 Courbes de régression linéaire.

A l'aide du calcul des corrélations, on présente les courbes de régression linéaire obtenues pour les données du tableau 4.5. Les courbes de régression présentées sur les figures 4.6, 4.7 et 4.8 sont respectivement paramétrées par les couples "pente et abscisse à l'origine" suivants (0.31, 129.93), (0.33, 48.83) et (0.54, 12.79).

N <sup>o</sup>	Années	Nom de la brèche	Longueur de la brèche (m)		Fosse d'érosion	
			Fond Guillon	Archives dép <sup>ales</sup>	Longueur (m)	Largeur (m)
1	~ 1755	Les Moulins		70	140	100
2	1755	Lieudit La Motte		110	270	70
3	1755	Melleray		300	200	70
4	1789 – 1790	Sandillon		320	300	75
5	1846	La Fontaine St-Vrain		190	290	120
6	1846	Sigloy	100	140	180	70
			110	150		
7	1846	Sandillon	260	420	200	90
8	1846	De Louresse	120	230	360	220
9	1846	Les Caillardières	120	105	65	75
10	1846	Aval du Champ de Mars	100	300	240	200
11	1846	Amont La Cabredée	100	60	90	50
12	1846	Croix de Micy	85	120	210	45
13	1856	1 <sup>re</sup> brèche de Sigloy	125	120	180	70
14	1856	Jargeau	610	780	300	300
15	1856	De St-Pryvé	50	60	55	50
16	1866	Les Caillardières		100	65	75
17	1866	Jargeau		300	65	300
18	1866	De l'Isle		250	170	220
19	1866	Amont La Cabredée		35	90	45

TABLE 4.5: Données sur les brèches historiques de la levée d'Orléans (source Etude de dangers de la levée d'Orléans - digues de classe A - Annexe 18).

Variable	Variance
$L_b$	29258.03324
$L_f$	8252.631579
$l_f$	6818.975069

TABLE 4.6: Tableau des variances des variables  $L_b$ ,  $L_f$  et  $l_f$ .

Variation	Covariance
$(L_b, L_f)$	8998.684211
$(L_f, l_f)$	4459.210526
$(L_b, l_f)$	9587.119114

TABLE 4.7: Tableau des covariances entre les variables  $L_b$ ,  $L_f$  et  $l_f$ .

Variation	Indice de corrélation $r$
$(L_b, L_f)$	0.579108872
$(L_f, l_f)$	0.594432022
$(L_b, l_f)$	0.678744006

TABLE 4.8: Tableau des indices de corrélation entre les variables  $L_b$ ,  $L_f$  et  $l_f$ .

Variation	$t$
$(L_b, L_f)$	2.928827249
$(L_f, l_f)$	3.047837613
$(L_b, l_f)$	3.810768888

TABLE 4.9: Tableau des statistiques de test.

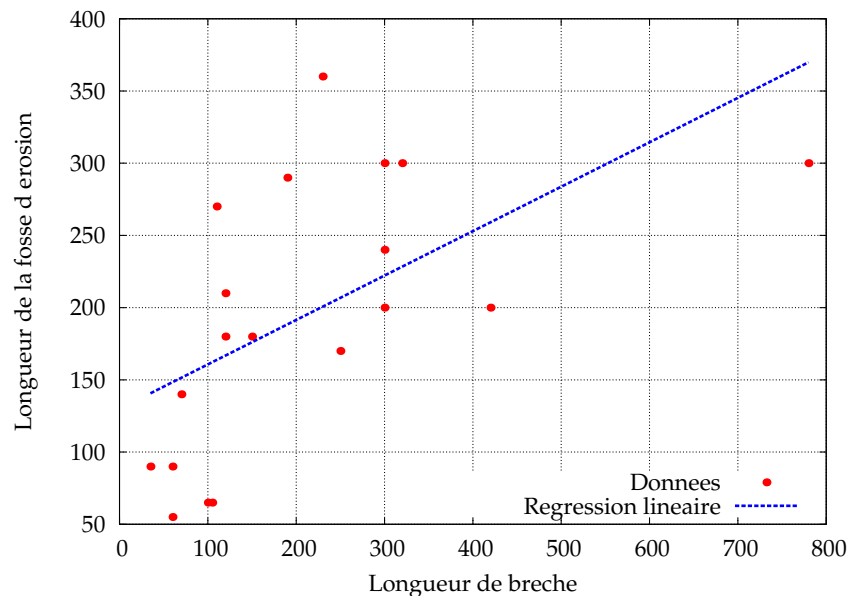


FIGURE 4.6: Longueur de fosse en fonction de la longueur de brèche.

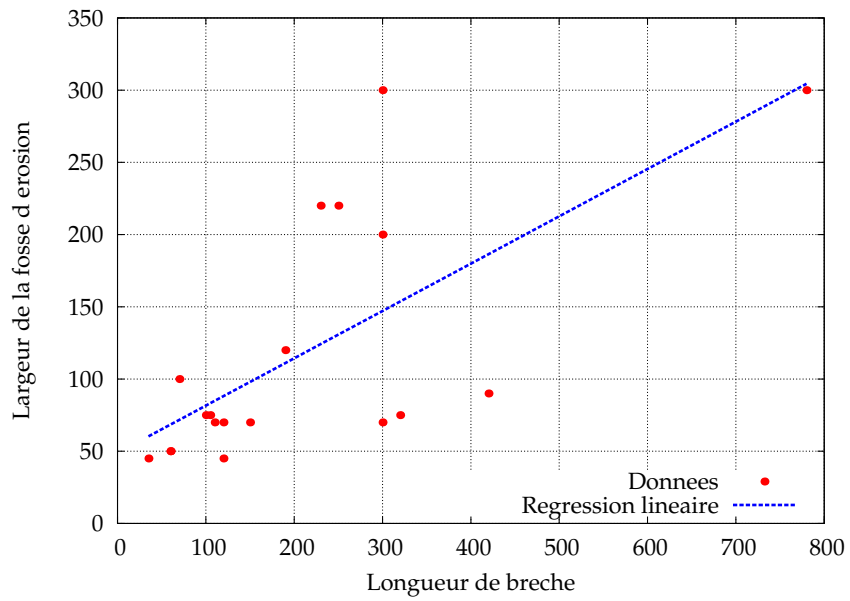


FIGURE 4.7: Largeur de fosse en fonction de la longueur de brèche.

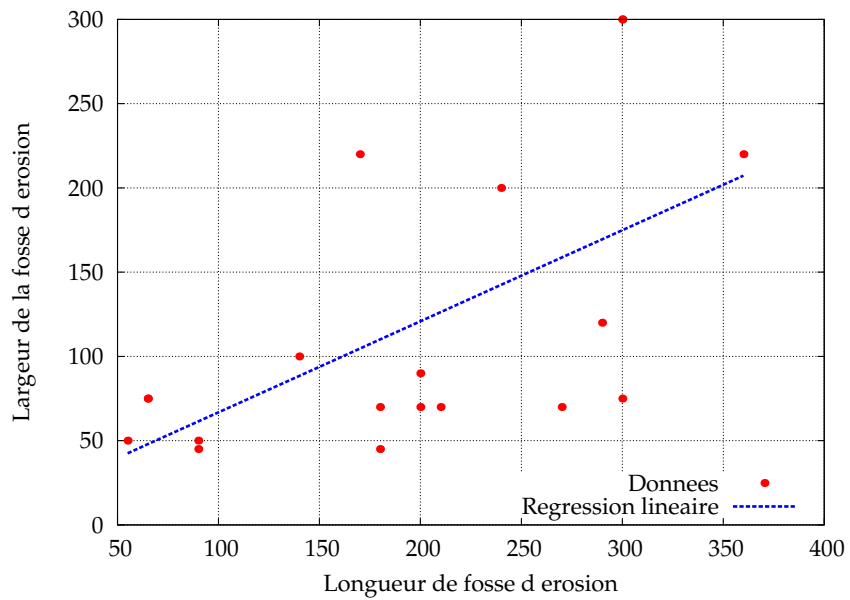


FIGURE 4.8: Largeur de fosse en fonction de la longueur de fosse.

#### 4.3.6 Conclusion partielle.

L'étude des ruptures de digues offrent un panel d'approches assez restreint. A la lumière de ce qui a été évoqué, les modèles utilisés sont pour la plupart générateurs de grandes incertitudes. Pour le moment, les résultats semblent satisfaisants dès lors qu'on considère des *cas d'écoles*. Les outils de prédiction de rupture de digues restent encore à être améliorés notamment dans la compréhension de l'érosion de la surface de protection des digues, l'action des ondes sur certains matériaux, l'influence de la fissuration sur le processus de création de brèches...

Un autre aspect important se focalise sur l'évolution-même de la brèche. Ce processus nécessite de développer la compréhension de l'érodabilité du sol, de pouvoir étendre les modèles de brèches à des structures plus complexes, de se concentrer sur un type spécifique de rupture de brèches liée aux côtes ou au fleuve, et enfin de prendre en compte les effets du changement climatique.

Les codes dont on dispose présentent les cas classiques d'implémentation. Dans l'immediat, il semble judicieux de se tourner vers une méthode générique pour considérer l'élargissement d'une brèche à l'image de l'implémentation faite sous MIKE.

La méthode de régression linéaire présentée offre l'avantage de traiter directement avec les données dont on dispose sans avoir à nécessairement comprendre la physique derrière ces phénomènes qui offrent peu de références mais quelques cas d'études.

Néanmoins, une des limitations majeures de l'approche se situe au niveau des données utilisées. En effet, la plupart des données dont on dispose ne précise pas les raisons de la rupture ; on se retrouve donc, la plupart du temps, à traiter des données qui ne sont en principe pas issues du même phénomène érosif.

Une autre limitation concerne la topographie et plus précisément, la nature de la topographie qui peut jouer un rôle majeur dans la manière dont la digue va s'éroder.

Ce qu'il sera possible d'envisager est d'enrichir la méthode avec des données historiques dont on connaît la méthodologie d'obtention.

L'autre aspect intéressant serait de creuser du côté de l'analyse de sensibilité et voir quel paramètre a la plus grande influence sur la valeur de sortie.





# Conclusion et perspectives

---

## 1 CONCLUSION.

Dans cette thèse, nous avons exploré trois axes propres à la simulation numérique de problèmes liés au transport de sédiments dans le cadre de Saint-Venant–Exner à savoir la construction d’un schéma numérique à l’aide de formules empiriques pour la résolution d’un modèle mathématique, l’étude des incertitudes liées au modèle sous un angle numérique, et enfin l’optimisation du temps de calcul d’un code industriel utilisé pour la simulation de cas réels.

En premier lieu, nous avons proposé une méthode numérique pour résoudre le système de Saint-Venant–Exner qui modélise le transport de sédiments et l’interaction entre l’écoulement et le fond solide. L’approche que nous avons développée est basée sur la définition d’un solveur de Riemann approché à trois ondes. En préliminaire à l’application au cas du transport sédimentaire, le schéma a été écrit pour le système classique de Saint-Venant pour les écoulements en eaux peu profondes à fond fixe. Dans ce cadre précis, il apparaît que le schéma satisfait bien les propriétés de positivité de la hauteur d’eau ainsi que la conservation des états d’équilibre. A partir de ce schéma pour le modèle hydraulique, la démarche a été étendue aux équations de Saint-Venant–Exner. Celle-ci ne considère plus la cote topographique comme un paramètre mais comme une inconnue du problème ; le fond devient alors mobile. Ce faisant, le traitement pour résoudre le problème repose sur une approche “semi-découplée” pour laquelle le couplage entre les parties hydraulique et solide est localisé au niveau de la définition des vitesses d’onde du modèle. Une étude numérique complète à travers des cas test académiques a permis de mettre en évidence le fait que le schéma satisfait bien les propriétés de positivité et d’équilibre. Par ailleurs, la philosophie de la méthode soulève la question du traitement du couplage dans le système de Saint-Venant–Exner. De fait, nous avons constaté qu’une approximation adéquate des vitesses d’onde pouvait permettre de corriger le problème de stabilité rencontré jusqu’à présent par les approches de résolution découplées ; du moins, il s’avère être nécessaire d’appliquer des décentrement différents suivant le régime d’écoulement pour les schémas numériques utilisés pour résoudre l’équation d’Exner. En effet, l’analyse du système de Saint-Venant–Exner montre qu’il existe toujours deux vitesses d’onde positives pour une négative (et inversement, suivant le sens de l’écoulement considéré), or en se limitant aux vitesses d’onde hydrauliques, l’information portée par l’onde négative n’est plus prise en compte. Dans l’optique de proposer une alternative simple basée sur une approche dé-



couplée, on montre qu'en utilisant une bonne approximation des vitesses d'onde associées au système de Saint-Venant–Exner, on est capable de résoudre le problème d'instabilité, au moins pour les cas d'étude présentés qui couvrent un éventail assez caractéristique de situations d'intérêt (écoulements fluvial, torrentiel, transcritique et rupture de barrage).

En deuxième lieu, nous nous sommes intéressés aux incertitudes relatives aux modèles de Saint-Venant–Exner à travers une proposition d'une formulation stochastique pour le flux de sédiment ; cette étude a été réalisée à l'aide de la méthode de Monte-Carlo. Dans un premier temps, nous avons traité un cas simple en imposant des conditions limites périodiques. Ce dernier nous a permis de mettre en lumière le fait que la variabilité du flux solide génère des fluctuations sur la morphologie du fond. Ce faisant, nous générons des micro-rugosités qui dissipent l'énergie. Nous avons alors proposé une correction de la rugosité du fond caractérisée par le coefficient de Strickler afin de limiter cette dissipation en maintenant l'équilibre en moyenne. Ce phénomène a révélé la nécessité de revenir au système de Saint-Venant et comprendre la sensibilité de la solution à la variabilité de la topographie. Le fond est ainsi bruité directement et une solution "stationnaire" est identifiée. Dans cette configuration, nous avons mis en évidence une convergence en maillage des espérances et des variances des grandeurs hydrauliques afin de notamment justifier le choix du maillage pour les études suivantes ; ce choix est également contraint par le temps d'exécution qui peut croître assez rapidement avec la taille du maillage dans le cas des réalisations de Monte-Carlo. Pour un maillage donné, les corrélations spatiales obtenues en régime fluvial pour la hauteur d'eau sont assez similaires à celles associées à la perturbation ; en régime torrentiel, le constat est moins évident dans la mesure où pour le maillage retenu, la solution ne semble pas correspondre à la solution convergée.

Enfin, nous avons cherché à améliorer le temps calcul d'une simulation d'un épisode de crue de la Loire. Le modèle a été implémenté à l'aide du logiciel TELEMAC-2D. Cette étude s'est déroulée en deux étapes : une première consistant à l'installation de la version parallèle du logiciel sur une grappe de calcul, et la deuxième, en une comparaison du gain en temps obtenu en faisant varier le nombre de processeurs mis en jeu. Les temps obtenus avec la version parallèle s'avèrent être raisonnables avec un nombre de processeurs suffisant. Nous avons également proposé une étude des paramètres du modèle pour une amélioration des temps calcul. En parallèle, une étude bibliographique sur les ruptures de digues dans le but d'enrichir le modèle a été menée ; l'objectif est de déterminer un hydrogramme d'entrée et l'impact de ce dernier sur la géométrie de la brèche et la fosse d'érosion qui se forme.

## 2 PERSPECTIVES.

Les différents aspects de la thèse ont soulevé des questions qui restent encore ouvertes ou pour lesquelles il semble intéressant de prolonger la réflexion.

D'une part, le solveur de Riemann approché pour les équations de Saint-Venant a révélé qu'une entropie décroissante pouvait être numériquement mise en évidence dans les différents cas étudiés ce qui laisse ouverte la question de l'entropie pour le solveur. Concernant le système de Saint-Venant–Exner, la mise à jour de la topographie passe par la minimisation d'une fonctionnelle. La définition de cette fonctionnelle n'est pas abso-

lue et plusieurs formules peuvent être envisagées. En cela, nous pouvons réfléchir à une énergie éventuelle à minimiser et à associer à la solution. Par ailleurs, l'extension naturelle du solveur en deux dimensions et son intégration au code industriel TELEMAC-2D sont en cours de développement. Un autre aspect en cours d'approfondissement concerne l'application de l'approche au cas d'un système multi-couches afin de récupérer des informations concernant le profil vertical des couches fluide et solide et de se dispenser de la formulation empirique du flux solide.

Dans le cadre de l'étude des incertitudes des modèles de Saint-Venant–Exner et plus simplement de Saint-Venant, la proposition de correction du coefficient de Strickler pour assurer la non-dissipation de l'énergie évoquée précédemment montre qu'il serait naturel de proposer une correction basée sur une conservation directe de l'énergie du système ; les premiers tests ont été mis en œuvre mais nécessitent d'être approfondis. Afin de se rapprocher des situations réelles, on pourra porter une attention particulière sur la prise en compte de conditions limites physiques. Dans ce cas, on se retrouvera confronté à la question du traitement du passage du régime fluvial au régime torrentiel ; dans le cas de Saint-Venant, il serait intéressant d'établir un lien entre le bruit topographique injecté et la réponse hydraulique et comprendre le moment où l'on passe d'un régime à l'autre. Par ailleurs, dans la mesure où un état stationnaire est atteint, il apparaît qu'une étude sur la courbe de remous peut se présenter comme une alternative peu coûteuse pour la compréhension de la sensibilité des sorties hydrauliques aux perturbations topographiques. Ces travaux sont actuellement en cours de développement.

D'un point de vue méthodologique, il reste notamment à aborder la question de la sensibilité de la sortie par rapport au schéma numérique retenu ainsi qu'aux autres paramètres du système. En particulier, comme la variabilité du fond est assez difficile à mesurer, il paraît judicieux d'étudier la variabilité des quantités hydrauliques par rapport au coefficient de rugosité du modèle. En outre, la méthodologie repose sur des réalisations de Monte-Carlo. Il peut alors être pertinent de mettre en œuvre des méthodes pouvant améliorer la convergence. Par ailleurs, le but de cette étude demeure être l'analyse de sensibilité des grandeurs de sortie aux paramètres d'entrée qu'il reste à approfondir (par des méthodes spectrales, polynômes de chaos, calcul des indices de Sobol, . . .).

Enfin, l'objectif principal étant l'étude des incertitudes dans un modèle de transport solide, il reste à étendre la méthodologie proposée pour le cas des équations de Saint-Venant au modèle de Saint-Venant–Exner.

Cette dernière suggestion peut également être appliquée à l'étude de cas réel pour laquelle nous pourrions tester la sensibilité des hydrogrammes de sortie aux largeurs de brèches dans les digues mais également tester la sensibilité des modèles sédimentaires sur des cas réels aux valeurs des paramètres d'entrée souvent difficiles à mesurer *in situ* (diamètres sédimentaires ou plus généralement courbe granulométrique, condition limite amont sédimentaire, choix de la formule de transport solide, frottement de peau, . . .). Sous l'angle de l'optimisation du temps calcul, comparer les résultats actuels avec ceux obtenus avec la méthode des volumes finis peut être intéressant. Cette dernière méthode pourrait néanmoins nécessiter une adaptation du maillage pour une résolution optimale en temps (maillage réglé de l'écoulement).



# Some classical probabilistic calculations

---

## 1 EXPECTATION AND VARIANCE (PARAMETERS OF THE NORMAL LAW (3.3.12) IN SECTION 3.3.2.4).

We begin by calculating the expectation of  $\tilde{b}_{i+1/2}$ ,

$$E[\tilde{b}_{i+1/2}] = E \left[ \alpha \sqrt{\Delta x} \sum_{k=1}^{N_x/2} \frac{1}{k^\beta} \left( c_k \cos \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) + s_k \sin \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) \right) \right].$$

Since the random variables  $c_k$  and  $s_k$  are independent, we can rewrite the previous expression such that,

$$E[\tilde{b}_{i+1/2}] = \alpha \sqrt{\Delta x} \sum_{k=1}^{N_x/2} \frac{1}{k^\beta} \left( E[c_k] \cos \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) + E[s_k] \sin \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) \right).$$

Knowing that  $E[c_k] = E[s_k] = 0$ , we readily obtain,

$$E[\tilde{b}_{i+1/2}] = 0. \tag{1.1}$$

We establish the expression of the variance of  $\tilde{b}_{i+1/2}$ ,

$$\begin{aligned} Var[\tilde{b}_{i+1/2}] &= Var \left[ \alpha \sqrt{\Delta x} \sum_{k=1}^{N_x/2} \frac{1}{k^\beta} \left( c_k \cos \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) + s_k \sin \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) \right) \right], \\ &= \alpha^2 \Delta x Var \left[ \sum_{k=1}^{N_x/2} \frac{1}{k^\beta} \left( c_k \cos \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) + s_k \sin \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

The independence of the random variables  $c_k$  and  $s_k$  permits to write,

$$Var[\tilde{b}_{i+1/2}] = \alpha^2 \Delta x \left( Var \left[ \sum_{k=1}^{N_x/2} \frac{c_k}{k^\beta} \cos \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) \right] \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \text{Var} \left[ \sum_{k=1}^{N_x/2} \frac{s_k}{k^{2\beta}} \sin \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) \right] \Bigg), \\
= & \alpha^2 \Delta x \left( \sum_{k=1}^{N_x/2} \frac{1}{k^{2\beta}} \cos^2 \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) \underbrace{\text{Var}[c_k]}_{=1} \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{N_x/2} \frac{1}{k^{2\beta}} \sin^2 \left( 2k\pi \frac{i+1/2}{N_x} \right) \underbrace{\text{Var}[s_k]}_{=1} \right).
\end{aligned}$$

Finally, this variance is given by,

$$\text{Var}[\tilde{b}_{i+1/2}] = \alpha^2 \Delta x \sum_{k=1}^{N_x/2} \frac{1}{k^{2\beta}}. \quad (1.2)$$

## 2 COVARIANCE AND CORRELATION (FORMULAE (3.4.7) AND (3.4.8) IN SECTION 3.4.1).

Since the expression of  $\tilde{b}$  is explicitly known (see (3.4.1)), it is possible to calculate the correlation between two values of  $\tilde{b}$  at two different space points. First, we introduce some notation,

$$x_{i+1/2} = \left( i + \frac{1}{2} \right) \frac{L}{N_x}, \quad (2.1)$$

where  $L$  denotes the length of the spatial domain. Considering this notation, we rewrite the perturbation (3.4.1) such that,

$$\tilde{b}_{i+1/2} = \alpha \sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^\beta} \left( c_k \cos \left( 2k\pi \frac{x_{i+1/2}}{L} \right) + s_k \sin \left( 2k\pi \frac{x_{i+1/2}}{L} \right) \right). \quad (2.2)$$

The expression of the correlation for two space point  $x$  and  $y$  is given by,

$$\text{Cor}(\tilde{b}(x), \tilde{b}(y)) = \frac{\text{Cov}(\tilde{b}(x), \tilde{b}(y))}{\sigma(\tilde{b}(x)) \sigma(\tilde{b}(y))}, \quad (2.3)$$

where  $\sigma(\tilde{b}(x))$  stands for the standard deviation of the random variable  $\tilde{b}$  at point  $x$ . The covariance operator  $\text{Cov}(\tilde{b}(x), \tilde{b}(y))$  can be reduced to,

$$\text{Cov}(\tilde{b}(x), \tilde{b}(y)) = E[\tilde{b}(x) \tilde{b}(y)] - \underbrace{E[\tilde{b}(x)]}_{=0} \underbrace{E[\tilde{b}(y)]}_{=0} = E[\tilde{b}(x) \tilde{b}(y)]. \quad (2.4)$$

Then, we simply establish that the covariance is expressed by,

$$\text{Cov}(\tilde{b}(x), \tilde{b}(y)) = E[\tilde{b}(x) \tilde{b}(y)],$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[ \begin{aligned} &\left( \alpha \sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^\beta} \left( c_k \cos \left( 2k\pi \frac{x}{L} \right) + s_k \sin \left( 2k\pi \frac{x}{L} \right) \right) \right) \\ &\times \left( \alpha \sum_{j=1}^{N_m} \frac{1}{j^\beta} \left( c_j \cos \left( 2j\pi \frac{y}{L} \right) + s_j \sin \left( 2j\pi \frac{y}{L} \right) \right) \right) \end{aligned} \right], \\
&= \alpha^2 E \left[ \begin{aligned} &\sum_{k=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} \frac{1}{(kj)^\beta} \left( \begin{aligned} &c_k c_j \cos \left( 2k\pi \frac{x}{L} \right) \cos \left( 2j\pi \frac{y}{L} \right) \\ &+ c_k s_j \cos \left( 2k\pi \frac{x}{L} \right) \sin \left( 2j\pi \frac{y}{L} \right) \\ &+ s_k c_j \sin \left( 2k\pi \frac{x}{L} \right) \cos \left( 2j\pi \frac{y}{L} \right) \\ &+ s_k s_j \sin \left( 2k\pi \frac{x}{L} \right) \sin \left( 2j\pi \frac{y}{L} \right) \end{aligned} \right) \end{aligned} \right], \\
&= \alpha^2 \sum_{k=1}^{N_m} \sum_{j=1}^{N_m} \frac{1}{(kj)^\beta} \left( \begin{aligned} &\cos \left( 2k\pi \frac{x}{L} \right) \cos \left( 2j\pi \frac{y}{L} \right) E[c_k c_j] \\ &+ \cos \left( 2k\pi \frac{x}{L} \right) \sin \left( 2j\pi \frac{y}{L} \right) E[c_k s_j] \\ &+ \sin \left( 2k\pi \frac{x}{L} \right) \cos \left( 2j\pi \frac{y}{L} \right) E[s_k c_j] \\ &+ \sin \left( 2k\pi \frac{x}{L} \right) \sin \left( 2j\pi \frac{y}{L} \right) E[s_k s_j] \end{aligned} \right).
\end{aligned}$$

If the index  $k$  is different from  $j$ , we use the imposed independence property of the random variables  $c$  and  $s$  that permits to write,

$$E[c_k c_j] = E[c_k s_j] = E[s_k s_j] = 0, \quad (2.5)$$

to simplify the last expression of the covariance,

$$\begin{aligned}
Cov(\tilde{b}(x), \tilde{b}(y)) &= \alpha^2 \sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^{2\beta}} \left( \begin{aligned} &\cos \left( 2k\pi \frac{x}{L} \right) \cos \left( 2k\pi \frac{y}{L} \right) \underbrace{E[c_k^2]}_{=1} \\ &+ \sin \left( 2k\pi \frac{x}{L} \right) \sin \left( 2k\pi \frac{y}{L} \right) \underbrace{E[s_k^2]}_{=1} \end{aligned} \right).
\end{aligned}$$

By considering that  $y = x + \Delta$  and the following trigonometric relation,

$$\cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \sin(\theta_2),$$

the covariance finally takes the following form,

$$Cov(\tilde{b}(x), \tilde{b}(x + \Delta)) = \alpha^2 \sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^{2\beta}} \cos \left( 2k\pi \frac{\Delta}{L} \right). \quad (2.6)$$

In respect to (2.3), the correlation is expressed by,

$$\text{Cor}(\tilde{b}(x), \tilde{b}(x + \Delta)) = \frac{\sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^{2\beta}} \cos\left(2k\pi \frac{\Delta}{L}\right)}{\sum_{k=1}^{N_m} \frac{1}{k^{2\beta}}}. \quad (2.7)$$

## Paramètres de TELEMAC-2D

---

On s'intéresse à quelques paramètres pour la résolution sous TELEMAC et on introduit par moment des éléments de théorie qui en sont à l'origine. Ce faisant, on cherche à décrire les paramètres sur lesquels il est possible de jouer afin d'améliorer les temps de calcul. L'essentiel de ce qui est décrit vient du manuel d'utilisation [112].

**Nombre de Courant.** Le nombre de Courant ou encore noté CFL (pour Courant – Friedrichs – Lewy) décrit le nombre de mailles traversées par une particule d'eau sur un pas de temps. Il s'agit d'un critère de stabilité pour le schéma numérique qui assure que celui-ci "n'explosera pas". Cette condition s'applique pour le calcul du pas de temps en dimension  $n$  :

$$CFL = \Delta t \sum_{i=1}^n \frac{v_i}{\Delta x_i}, \quad (0.8)$$

où,

$$\begin{cases} v_i & \text{la valeur de la composante de vitesse } v \text{ dans la direction } x_i, \\ \Delta t & \text{le pas de temps,} \\ \Delta x_i & \text{le pas d'espace dans la direction } x_i. \end{cases}$$

Dans un des cas traités par TELEMAC à savoir les équations de Saint-Venant en 2D, la condition s'écrit :

$$CFL = \Delta t \left( \frac{|u| + \sqrt{gh}}{\Delta x} + \frac{|v| + \sqrt{gh}}{\Delta y} \right), \quad (0.9)$$

où,

$$\begin{cases} u & \text{la composante de vitesse dans la direction } x, \\ v & \text{la composante de vitesse dans la direction } y, \\ g & \text{l'accélération de pesanteur.} \end{cases}$$

Ce qu'il est important de noter en éléments finis, c'est que la borne supérieure de la CFL est généralement difficile à estimer. La plupart des schémas préconise de prendre une CFL égale à 1 or ceci n'est pas toujours applicable. Tester des CFL supérieures, à pas de temps variables, peut s'avérer tout aussi efficace pour un coût en temps d'exécution faible.



**Pas de temps variable.** Ce paramètre va plus ou moins de pair avec la condition CFL. En effet, le pas de temps variable n'a de sens qu'en contrôlant sa valeur maximale via la CFL. En volumes finis, il devient nécessaire de considérer un pas de temps variable avec une CFL de 1 dans la mesure où l'algorithme utilisé est explicite. Dans le cas des éléments finis, si l'algorithme employé est implicite, il est inconditionnellement stable et la CFL ainsi que le pas de temps variable deviennent obsolètes.

**Période de sortie listing, bilan de masse.** Ces deux paramètres concernent l'affichage à un pas de temps donné ; BILAN DE MASSE imprime des informations sur les flux de masse dans le domaine. Il apparaît clairement que plus le nombre d'affichages sera important (donc une PERIODE DE SORTIE LISTING petite) et plus le temps d'exécution sera grand. Néanmoins, ceci est à relativiser dans la mesure où, à moins de faire des affichages à chaque pas de temps puis d'en faire aucun, le temps de calcul ne sera pas réduit de façon probante.

**Période de sortie graphique.** La PERIODE DE SORTIE GRAPHIQUE a une forte influence sur le temps de calcul. En effet, écrire sur un fichier de sortie est significativement chronophage. De plus, il va de soi que plus le maillage sera fin et plus le temps d'écriture sera important. Il faut donc limiter le nombre de sorties graphiques à l'essentiel pour un temps de calcul optimal.

**Discrétisations en espace.** Le mot-clé DISCRETISATIONS EN ESPACE spécifie le type de discrétisation à savoir :

- 11 : triangle linéaire (triangle à 3 nœuds),
- 12 : triangle quasi-bulle (triangle à 4 nœuds),
- 13 : triangle quadratique (triangle à 6 nœuds).

Dans la pratique, l'utilisateur peut sélectionner l'une des trois configurations suivantes :

- 11, 11 : vitesse et hauteur linéaires (valeur par défaut, configuration recommandée), configuration la plus efficace en termes de coût mémoire et temps de calcul,
- 12, 11 : vitesse quasi-bulle et hauteur linéaire, recommandée lorsque des oscillations de surface libre apparaissent,
- 13, 11 : vitesse quadratique et hauteur linéaire, améliore la qualité des résultats au détriment des performances informatiques.

Pour le second cas, on préconise un traitement différent en utilisant le mot-clé COMPATIBILITE DU GRADIENT DE SURFACE LIBRE.

**Traitement du système linéaire, Compatibilité du gradient de surface libre.** Le TRAITEMENT DU SYSTEME LINEAIRE est paramétré par 2 valeurs :

1 : équations primitives (par défaut),

2 : équation d'onde.

Lors du traitement du système linéaire, les équations primitives peuvent être remplacées par une équation d'onde généralisée (option 2) obtenue en éliminant la vitesse de l'équation de continuité à partir d'une valeur obtenue grâce à l'équation de quantité de mouvement. Cette technique permet d'améliorer la vitesse de calcul cependant elle ajoute de la diffusion numérique qui aboutit à un lissage des résultats. Dans la plupart des cas, cette option 2 est recommandée car elle offre les meilleures performances en termes de temps de calcul.

Pour reprendre le paragraphe précédent, lors de l'apparition d'oscillations de surface libre (par exemple, en cas de zones de fort gradient de bathymétrie), il est fortement conseillé d'attribuer une valeur inférieure à 1 (0.9 recommandé) au paramètre COMPATIBILITE DU GRADIENT DE SURFACE LIBRE en ayant opté pour l'option 2. Ceci aura pour but de dégrader la compatibilité entre la hauteur d'eau et les vitesses dans l'équation de continuité, mais offrira l'avantage de s'affranchir de l'utilisation de la discrétisation en triangle quasi-bulle, consommatrice de mémoire et de CPU.

**Mass-lumping.** Lorsqu'on se place dans le cas d'équations d'onde (option 2 du TRAITEMENT DU SYSTEME LINEAIRE), l'utilisation du mass-lumping pour la hauteur et les vitesses ainsi que la diffusion pour les vitesses explicites sont activées.

Le MASS-LUMPING consiste à ramener tout ou une partie de la matrice de masse sur sa diagonale ce qui a pour but de réduire considérablement les temps de calcul. Néanmoins, les solutions obtenues sont fortement lissées. On peut appliquer un MASS-LUMPING SUR H et un MASS-LUMPING SUR LA VITESSE (également MASS-LUMPING SUR LES TRACEURS) en attribuant des valeurs allant de 0 (pas de mass-lumping, traitement normal de la matrice de masse) à 1 (mass-lumping maximal, la matrice est diagonale).

**Convection et propagation.** TELEMAR-2D peut éventuellement résoudre le système d'équations par la méthode à pas fractionnaires. Cette méthode consiste à traiter les *équations de convection* d'une part puis les *équations de propagation-diffusion* d'autre part par des schémas numériques possiblement différents. Chaque étape peut être désactivée.

L'étape de CONVECTION est activée par défaut mais il est possible de désactiver certains termes de convection (par défaut, tous activés) à travers les mots-clés :

CONVECTION DE H : pour la prise en compte de la convection de la hauteur,

CONVECTION DE U ET V : pour la convection des vitesses,

CONVECTION DE K ET EPSILON : pour la convection de l'énergie et de la dissipation turbulente,

CONVECTION DES TRACEURS : pour la convection des traceurs.

L'étape de PROPAGATION est indissociable de la diffusion. En désactivant l'une, on désactive forcément l'autre. Par défaut, celles-ci sont activées. En cas d'activation, l'utilisateur peut désactiver la DIFFUSION DES VITESSES en attribuant la valeur NON. L'étape de propagation peut être linéarisée en activant le mot-clé PROPAGATION LINEARISEE notamment lorsqu'on réalise un cas test pour lequel on dispose d'une solution analytique dans le cas linéarisé. Ceci nécessite alors de fixer la hauteur d'eau autour de laquelle s'effectue la linéarisation en utilisant le mot-clé PROFONDEUR MOYENNE POUR LA LINEARISATION (0 par défaut).

**Solveur.** On ne va s'intéresser qu'au mot-clé SOLVEUR bien que l'on puisse aussi préciser un SOLVEUR POUR LA DIFFUSION DES TRACEURS et un SOLVEUR POUR LE MODELE K-EPSILON. Celui-ci s'intéresse à l'étape de propagation hydrodynamique. Il permet de définir des méthodes qui s'apparentent toutes à la méthode du gradient conjugué :

- 1 : méthode du gradient conjugué,
- 2 : méthode du résidu conjugué,
- 3 : méthode du gradient conjugué sur équation normale,
- 4 : méthode de l'erreur minimale,
- 5 : méthode du gradient conjugué carré,
- 6 : méthode BICGSTAB (gradient biconjugué stabilisé),
- 7 : méthode GMRES (Generalized Minimum RESidual).

Par défaut, TELEMAC-2D utilise 3 pour l'étape de propagation.

La méthode du gradient conjugué est généralement recommandée pour les systèmes symétriques. C'est pourquoi, elle est adaptée pour le traitement d'équations d'onde ou d'équations de diffusion.

**Correction de continuité.** Dans certains cas, une erreur de masse résiduelle due aux conditions aux limites où la hauteur est imposée, est constatée. En fait, l'équation de continuité n'est plus vérifiée en ces points et est remplacée par une égalité entre la hauteur et la valeur imposée ce qui entraîne un mauvais calcul du débit sortant et donc une erreur. Imposer une CORRECTION DE CONTINUITÉ permet de corriger les vitesses en ces points afin de vérifier la continuité globale.

**Option pour les frontières liquides.** Cette option s'utilise dans le cas où l'utilisateur ne dispose pas de toutes les informations nécessaires concernant les conditions limites (souvent le cas des frontières maritimes ouvertes où le niveau est connu qu'en quelques

---

points). On dit que le modèle est *sous-contraint*. TELEMAC-2D utilise la méthode de Thompson afin de calculer les valeurs aux limites à partir d'une frontière à niveau imposée. Cette méthode repose sur la méthode des caractéristiques pour évaluer l'information manquante.

Le mot-clé `OPTION POUR LES FRONTIERES LIQUIDES` peut prendre 2 valeurs :

- 1 : imposition forte,
- 2 : méthode de Thompson.

La différence se fait au niveau de l'imposition des valeurs dans le cas 1, et la suggestion des valeurs dans le cas 2.

**Calcul compatible des flux.** Cette option ne s'applique qu'aux volumes finis (approche par calcul de flux aux interfaces, non applicable dans le cas des éléments finis.). En réalité, elle permet de forcer la compatibilité entre le calcul des débits à travers les frontières solides et la condition d'imperméabilité faible.



## Table des figures

---

1.1	Local Riemann problem. . . . .	38
1.2	Propagation of perturbations: Comparison of free surfaces $h + b$ (left) and discharges $q$ (right) for different schemes. . . . .	45
1.3	Propagation of perturbations: Comparison of orders of error for the water height $h$ (left) and the discharge $q$ (right) for different schemes. . . . .	45
1.4	Propagation of perturbations: free surface $h + b$ (left) and discharge $q$ (right) resulting from the centered scheme. . . . .	46
1.5	Fluvial flow: Comparison of free surfaces $h + b$ (left) and discharges $q$ (right) resulting from the simple scheme (with suffix app) and the exact solution (with suffix ex) for a bottom topography $b$ . . . . .	46
1.6	Fluvial flow: Comparison of orders of error for the water height $h$ (left) and the discharge $q$ (right) for different schemes. . . . .	47
1.7	Transcritical flow without shock: Comparison of free surfaces $h + b$ (left) and discharges $q$ (right) resulting from the simple scheme (with suffix app) and the exact solution (with suffix ex) for a bottom topography $b$ . . . . .	48
1.8	Transcritical flow without shock: Comparison of orders of error for the water height $h$ (left) and the discharge $q$ (right) for different schemes. . . . .	48
1.9	Transcritical flow with shock: Comparison of free surfaces $h + b$ (left) and discharges $q$ (right) for different schemes. . . . .	49
1.10	Transcritical flow with shock: Comparison of orders of error for the water height $h$ (left) and the discharge $q$ (right) for different schemes. . . . .	49
1.11	Thacker test case: Comparison of free surfaces $h + b$ (left) and discharges $q$ (right) resulting from the simple scheme (with suffix app) and the exact solution (with suffix ex) for a bottom topography $b$ at time $T = 16$ . . . . .	50
1.12	Thacker test case: Comparison of orders of error for the water height $h$ (left) and the discharge $q$ (right) for different schemes at time $T = 16$ . . . . .	51
1.13	Wet-dry fronts in a nonflat basin: Comparison of free surfaces $h + b$ (left) and discharges $q$ (right) for different schemes. . . . .	52

1.14	Wet-dry fronts in a nonflat basin: Comparison of free surfaces $h + b$ (left) and discharges $q$ (right) for different schemes. . . . .	52
1.15	Non-unique solution test case: Comparison of water heights $h$ (left) and velocities $u$ (right) for different schemes. . . . .	53
1.16	Non-unique solution test case: Comparison of the conservative (left) and non-conservative (right) entropy for different schemes. . . . .	54
2.1	Local Riemann problem. . . . .	64
2.2	Fluvial flow: Comparison of dune evolution for different numerical schemes. . . . .	71
2.3	Fluvial flow: Relative $L^2$ -error on $b$ . . . . .	72
2.4	Anti-dune: Comparison of anti-dune evolution for different schemes at different times. . . . .	73
2.5	Antidune: Relative $L^2$ -error on $b$ . . . . .	74
2.6	Trancritical flow without shock: Comparison of dune evolution for different numerical schemes. . . . .	75
2.7	Trancritical flow without shock: Relative $L^2$ -error. . . . .	75
2.8	Dam break over a wet bottom: Free surfaces (left) and bottom topographies (right) for different schemes. . . . .	76
2.9	Dam break over a wet bottom: Relative $L^2$ -error. . . . .	76
2.10	Dam break over a wet bottom: Comparison between the Grass and the Meyer-Peter & Müller formulae for free surfaces (left) and bottom topographies (right). . . . .	77
2.11	Dam break over a dry bottom: Free surfaces (left) and bottom topographies (right) for different schemes. . . . .	78
2.12	Dune evolution in fluvial (top line), torrential (middle line) and transcritical (bottom line) flow - Comparison of splitting strategy with downwind (left column) or upwind (right column) discretization for Exner equation . . . . .	80
2.13	Fluvial flow: Comparison of dune evolution for different numerical schemes. . . . .	81
2.14	Torrential flow: Comparison of dune evolution for different numerical schemes. . . . .	82
2.15	Trancritical flow without shock: Comparison of dune evolution for different numerical schemes. . . . .	83
2.16	Dam break over a wet bottom: Free surfaces (left) and bottom topographies (right) for different schemes. . . . .	84
2.17	Dam break over a dry bottom: Free surfaces (left) and bottom topographies (right) for different schemes. . . . .	84
2.18	Newton test case: Evolution of the bed topography. . . . .	92
2.19	Soni test case: Evolution of the bed topography deviation. . . . .	95

2.20	Dam break test case: Evolution of the bed topography. . . . .	97
3.1	Flume experiment of bedload transport on high slopes, data kindly provided by A. Recking. Experiment was performed as described in [148]. . . . .	104
3.2	SVE. Variance of the bottom topography (left) and of the velocity (right) as a function of time and space for the finest mesh. . . . .	113
3.3	SVE. Empirical mean of the topography deviation for two meshes. . . . .	114
3.4	SVE. Empirical variance of the topography deviation for different meshes. . . . .	114
3.5	SVE. Empirical mean of the velocity for two meshes. . . . .	115
3.6	SVE. Empirical variance of the velocity for different meshes. . . . .	115
3.7	SVE. Empirical mean of the velocity as a function of time for the finest mesh. . . . .	115
3.8	SVE. Empirical mean of the velocity for different meshes. . . . .	115
3.9	SVE. Superimposed PDFs for the topography deviation (left) and the velocity (right) computed on the finest mesh at times [0.01; 0.1] and [1; 2]. . . . .	116
3.10	SV. Added noise as a function of space with $\alpha = 10^{-1}$ and $N_x = 150$ for two different realizations. . . . .	117
3.11	SV. Empirical mean of the velocity as a function of time. . . . .	117
3.12	SV. Variance of the water height (left) and the velocity (right) as a function of space and time for $N_x = 150$ . . . . .	118
3.13	SV. Superimposed PDFs for the water height at times [0.02; 0.1] and [1; 10] (left), and the velocity at times [0.01; 0.05] and [3; 10] (right) with $N_x = 150$ . . . . .	120
3.14	SV. Values of $K_s$ as a function of time. . . . .	120
3.15	SV. Empirical mean of the velocity as a function of time. . . . .	120
3.16	SV. Empirical mean of the velocity as a function of time with $K_s = 31.43$ . . . . .	121
3.17	SV. PDF of the discrete source term with $K_s = 31.43$ . . . . .	121
3.18	SV. Variance of the water height (left) and the velocity (right) as a function of space and time for $N_x = 150$ . . . . .	121
3.19	SV. Superimposed PDFs for the water height at times [0.02; 0.1] and [1; 10] (left), and the velocity at times [0.01; 0.05] and [3; 10] (right) with $N_x = 150$ . . . . .	122
3.20	Empirical mean of the topography deviation as a function of space for different meshes in the fluvial (left) and the torrential (right) cases. . . . .	123
3.21	Empirical mean of the topography deviation with its 95% confidence interval for the fluvial (left) and the torrential (right) regimes. . . . .	124



3.22	Comparison between the numerical and the analytical values of the variance of $\sum_{i=0}^{N_x-1} \tilde{b}_i/N_x$ as a function of the amplitude $\alpha$ (left) and the smoothness $\beta$ (right). . . . .	124
3.23	Spatial correlation of the topography deviation at the center of the domain $x = 37.5$ obtained from the analytical formula (left) and the Monte-Carlo simulations (right). . . . .	126
3.24	Comparison of the spatial correlation of the topography deviation at the input, the center and the output of the domain obtained from the Monte-Carlo simulations. . . . .	126
3.25	Comparison between topography deviations for a low value $\beta = 0.5$ (left) and a high value $\beta = 3$ (right) for a fixed $\alpha = 0.1$ . . . . .	127
3.26	Periodic boundary conditions. Empirical mean of the water height at a fixed point ( $x_{fix} = 37.5$ ) as a function of time in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for different values of $\beta$ for $N_x = 150$ at fixed times $t \in \{0, 100, 200, 300, 400, 500\}$ . . . . .	128
3.27	Periodic boundary conditions. Empirical variance of the bed topography averaged over space as a function of the parameters of amplitude $\alpha$ and smoothness $\beta$ in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for $N_x = 150$ . . . . .	129
3.28	Periodic boundary conditions. Surface of the values of the Strickler coefficient in function of the amplitude $\alpha$ and the smoothness $\beta$ in fluvial (left; with $\alpha \in [0.012, 0.075]$ and $\beta \in [0.625, 3]$ ) and in torrential (right; with $\alpha \in [0.009, 0.086]$ and $\beta \in [0.5, 3]$ ) regimes for $N_x = 150$ . . . . .	129
3.29	Periodic boundary conditions. Empirical variance of the water height averaged over space as a function of the parameters of amplitude $\alpha$ and smoothness $\beta$ in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for $N_x = 150$ . . . . .	130
3.30	Periodic boundary conditions. Empirical variance of the water height averaged over space as a function of the parameters of amplitude $\alpha$ for a fixed $\beta = 1$ (left) and the smoothness $\beta$ for a fixed $\alpha$ (right) ( $\alpha = 0.062 m$ in fluvial regime, $\alpha = 0.043 m$ in torrential regime) in the two regimes for $N_x = 150$ . . . . .	131
3.31	Periodic boundary conditions. Empirical mean of the water height deviation as a function of space at time $t = 500 s$ in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for different mesh sizes. . . . .	132
3.32	Periodic boundary conditions. Empirical mean of the discharge deviation as a function of space at time $t = 500 s$ in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for different mesh sizes. . . . .	132
3.33	Periodic boundary conditions. Empirical variance of the water height deviation as a function of space at time $t = 500 s$ in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for different mesh sizes. . . . .	133

3.34	Periodic boundary conditions. Empirical variance of the discharge deviation as a function of space at time $t = 500 s$ in fluvial (left) and in torrential (right) regimes for different mesh sizes. . . . .	133
3.35	Periodic boundary conditions. Empirical variance of the water height deviation averaged over space as a function of the mesh size at time $t = 500 s$ in fluvial (left) and in torrential (right) regimes. . . . .	134
3.36	Periodic boundary conditions. Empirical variance of the discharge deviation averaged over space as a function of the mesh size at time $t = 500 s$ in fluvial (left) and in torrential (right) regimes. . . . .	134
3.37	Periodic boundary conditions. Spatial correlation of the bottom topography (top line), the water height (middle line) and the discharge (bottom line) deviations at the center of the domain $x = 37.5$ for the fluvial (left column) and the torrential (right column) regimes for different mesh sizes. . . . .	137
3.38	Periodic boundary conditions. Spatial correlation of topographical (top line) and the water height (bottom line) deviations at the center of the domain $x = 37.5$ for the fluvial (left) and the torrential (right) regimes for different values of $\beta$ . . . . .	139
3.39	Periodic boundary conditions. Correlation lengths for the water height deviation $L_{c,\tilde{h}}$ as a function of $\beta \in [0.5, 1]$ upstream (dashed line) and downstream (plain line) in the fluvial (red line) and the torrential (blue line) regimes. . . . .	139
4.1	Maillage. . . . .	151
4.2	Courbe de speed-up pour la grappe de calcul. . . . .	152
4.3	Résultats pour la hauteur d'eau obtenus au temps final $t = 4 h$ pour une exécution séquentielle (à gauche) et parallèle à 8 processeurs (à droite). . . . .	153
4.4	Résultats pour la hauteur d'eau obtenus au temps final $t = 50 h$ pour une exécution séquentielle (à gauche) et parallèle à 32 processeurs (à droite). . . . .	154
4.5	Erodabilité du sol ( <i>Hanson et Simon, 2001</i> ). . . . .	161
4.6	Longueur de fosse en fonction de la longueur de brèche. . . . .	170
4.7	Largeur de fosse en fonction de la longueur de brèche. . . . .	171
4.8	Largeur de fosse en fonction de la longueur de fosse. . . . .	171



## Liste des tableaux

---

2.1	Parameters for the Newton test case. . . . .	90
2.2	Initial data for the Newton test case. . . . .	90
2.3	Calibration parameters for the Newton test case. . . . .	90
2.4	Newton test case: Performing index . . . . .	91
2.5	Parameters for the Soni test case. . . . .	93
2.6	Initial data for the Soni test case. . . . .	94
2.7	Calibration parameters for the Soni test case. . . . .	94
2.8	Soni test case: Performing index . . . . .	94
2.9	Parameters for the dam break test case. . . . .	96
2.10	Initial data for the dam break test case. . . . .	96
2.11	Calibration parameters for the dam break test case. . . . .	97
2.12	Stability of each numerical scheme (S: Splitting method, N-S: Non-splitting method) in function of the test cases; green for a stable behaviour and red for an unstable one. . . . .	98
3.1	Initial conditions in torrential regime. . . . .	111
3.2	Physical parameters of the sediment flux in torrential regime. . . . .	112
3.3	SVE. Characterization of the confidence interval. . . . .	113
3.4	SV. Comparison of the results obtained for the three test cases with $N_x = 150$ : Saint-Venant + perturbed $b$ and constant $K_s$ , Saint-Venant + perturbed $b$ and modified $K_s$ at each time step, and stochastic Saint-Venant–Exner. . . . .	121
3.5	Color scale for the parameter $\beta$ . . . . .	126
3.6	Initial conditions torrential and fluvial regimes. . . . .	127
3.7	Periodic boundary conditions. Spatial mean of the variances, the empirical means and their 95% confidence interval for the quantities of interest $\tilde{b}$ , $\tilde{h}$ and $\tilde{q}$ obtained with the finest mesh $N_x = 2400$ . . . . .	135

---

3.8	Periodic boundary conditions. Spatial mean of the variances for the quantities of interest $\tilde{b}$ , $\tilde{h}$ and $\tilde{q}$ obtained with the coarsest mesh $N_x = 150$ . . . . .	135
4.1	Composants du cluster. . . . .	147
4.2	Comparaison des temps d'exécution suivant le nombre de processeurs utilisés. . . . .	150
4.3	Comparaison des temps d'exécution suivant le nombre de processeurs utilisés. . . . .	153
4.4	Description qualitative des valeurs de $K_d$ (Hanson et al., 2010). . . . .	161
4.5	Données sur les brèches historiques de la levée d'Orléans (source <i>Etude de dangers de la levée d'Orléans - digues de classe A - Annexe 18</i> ). . . . .	169
4.6	Tableau des variances des variables $L_b$ , $L_f$ et $l_f$ . . . . .	170
4.7	Tableau des covariances entre les variables $L_b$ , $L_f$ et $l_f$ . . . . .	170
4.8	Tableau des indices de corrélation entre les variables $L_b$ , $L_f$ et $l_f$ . . . . .	170
4.9	Tableau des statistiques de test. . . . .	170

# Bibliographie

---

- [1] Etude de dangers des digues domaniales de Roanne et le Coteau – Modélisation hydraulique bidimensionnelle de la Loire. Technical report, Dir. Départ. des Territoires de la Loire & Anteagroup, mai 2013.
- [2] C. Ancey. Stochastic modeling in sediment dynamics : Exner equation for planar bed incipient bed load transport conditions. *J. Geophys. Res.*, 115 :1–21, 2010.
- [3] C. Ancey, A. C. Davidson, T. Böhm, M. Jodeau, and P. Frey. Entrainment and motion of coarse particles in a shallow water stream down a steep slope. *J. Fluid Mech.*, 595 :83–114, 2008.
- [4] N. Andrianov. Performance of numerical methods on the non-unique solution to the Riemann problem for the shallow water equations. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 47 :825–831, 2005.
- [5] E. Audusse, C. Berthon, C. Chalons, O. Delestre, N. Goutal, M. Jodeau, J. Sainte-Marie, J. Giesselmann, and G. Sadaka. Sediment transport modelling : relaxation schemes for Saint-Venant–Exner and three layer models. In EDP Sciences, editor, *ESAIM :Proc.*, pages 80–94, 2012.
- [6] E. Audusse, F. Bouchut, M.-O. Bristeau, R. Klein, and B. Perthame. A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows. *SIAM J. Sci. Comp.*, 25 :2050–2065, 2004.
- [7] E. Audusse, S. Boyaval, Y. Gao, and D. Hilhorst. Numerical simulations of the periodic inviscid Burgers equation with stochastic forcing. *ESAIM : Proc.*, 48 :308–320, January 2015.
- [8] E. Audusse, C. Chalons, and P. Ung. A simple well-balanced and positive numerical scheme for the shallow-water system. *Commun. Math. Sci.*, 13(5) :1317–1332, 2015.
- [9] E. Audusse, O. Delestre, M. H. Le, M. Masson-Fauchier, P. Navaro, and R. Serra. Parallelization of a relaxation scheme modelling the bedload transport of sediments in shallow water flow. In EDP Sciences, editor, *ESAIM : Proc.*, pages 80–94, 2013.
- [10] R. A. Bagnold. The nature of saltation and of ‘bed-load’ transport in water. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 332(1591) :473–504, 1973.

- [11] F. Ballio, V. Nikora, and S. E. Coleman. On the definition of solid discharge in hydro-environment research and applications. *J. Hydraul. Res.*, 52(2) :173–184, 2014.
- [12] F. Benkhaldoun, S. Sahmim, and M. Seaid. Solution of the sediment transport equations using a finite volume method based on sign matrix. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(4) :2866–2889, 2009.
- [13] A. Bermudez, A. Dervieux, J. A. Desideri, and M. E. Vazquez. Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes. *Comput. Method. Appl. M.*, 155(1-2) :49–72, 1998.
- [14] A. Bermudez and M. E. Vazquez. Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. *Comput. Fluid.*, 23(8) :1049–1071, 1994.
- [15] C. Berthon and C. Chalons. A fully well-balanced, positive and entropy-satisfying Godunov-type method for the shallow-water equations. *Math. Comp.*, 2015. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00956799>.
- [16] C. Berthon and F. Foucher. Efficient well-balanced hydrostatic upwind schemes for shallow-water equations. *J. Comput. Phys.*, 231 :4993–5015, 2012.
- [17] A. Bollermann, G. Chen, A. Kurganov, and S. Noelle. A well-balanced reconstruction for wet/dry fronts. *J. Sci. Computing*, 56 :267–290, 2013.
- [18] A. Bollermann, S. Noelle, and M. Lukáčová-Medvid'ová. Finite volume evolution Galerkin methods for the shallow water equations with dry beds. *Commun. Comput. Phys.*, 10(2) :371–404, 2011.
- [19] R. Botchorishvili, B. Perthame, and A. Vasseur. Equilibrium schemes for scalar conservation laws with stiff sources. *Math. Comput.*, 72(241) :131–157, 2003.
- [20] F. Bouchut. *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws and well-balanced schemes for sources*. Birkhäuser Verlag, Frontiers in Mathematics, 2004.
- [21] A. Bouharguane and B. Mohammadi. Minimization principles for the evolution of a soft sea bed interacting with a shallow sea. *Int. J. Comput. Fluid D.*, 26 :163–172, 2012.
- [22] G. W. Brier. Verification of forecasts expressed in terms of probability. *Mon. Wea. Rev.*, 78 :1–3, 1950.
- [23] S. Bryson, Y. Epshteyn, A. Kurganov, and G. Petrova. Well-balanced positivity preserving central-upwind scheme on triangular grids for the Saint-Venant system. *ESAIM : M2AN*, 45(3) :423–446, 2011.
- [24] B. Camenen and M. Larson. A general formula for non-cohesive bed load sediment transport. *Estuarine, Coastal and Shelf Science*, 63 :249–260, 2005.
- [25] A. Canestrelli, M. Dumbser, A. Siviglia, and E.F. Toro. Well-balanced high-order centered schemes on unstructured meshes for shallow water equations with fixed and mobile bed. *Adv. Water Resour.*, 33 :291–303, 2010.

- [26] A. Canestrelli, A. Siviglia, M. Dumbser, and E.F. Toro. Well-balanced high-order centred schemes for non-conservative hyperbolic systems. Applications to shallow water equations with fixed and mobile bed. *Adv. Water Resour.*, 32 :834–844, 2009.
- [27] H. Capart. *Dam-break induced geomorphic flows and the transition from solid-like to fluid-like behaviour across evolving interfaces*. PhD thesis, Université catholique de Louvain, 2000.
- [28] M. J. Castro Díaz, E. D. Fernández-Nieto, and A. M. Ferreiro. Sediment transport models in shallow water equations and numerical approach by high order finite volume methods. *Comput. & Fluids*, 37 :299–316, 2008.
- [29] M. J. Castro Díaz, E. D. Fernández-Nieto, A. M. Ferreiro, and C. Parés. Two- dimensional sediment transport models in shallow water equations. A second order finite volume approach on unstructured meshes,. *Comput. Method. Appl. M.*, 198 :2520–2538, 2009.
- [30] M. J. Castro Díaz, A. Pardo, C. Parés, and E. F. Toro. On some fast well-balanced first order solvers for nonconservative systems. *Math. Comp.*, 79(271) :1427–1472, 2010.
- [31] T. Chacón Rebollo, A. Domínguez Delgado, and E. D. Fernández-Nieto. An entropy-correction free solver for non homogeneous shallow water equations. *ESAIM : M2AN*, 37 :363–390, 2003.
- [32] C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, P.-A. Raviart, and N. Seguin. Godunov-type schemes for hyperbolic systems with parameter dependent source. The case of Euler system with friction. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS)*, 20(11), 2010.
- [33] H. Chanson. Solutions analytiques de l’onde de rupture de barrage sur plan horizontal et incliné. *La Houille Blanche*, 3 :76–86, 2006.
- [34] P. Chasse and C. Vanroye. Principes de modélisation hydraulique d’une ou plusieurs brèches de digues dans Telemac2D : application à l’analyse de l’aléa inondation sur le secteur de la Pège (pays de Saint-Gilles-Croix-de-Vie). In Hermes Sciences Publication & Lavoisier, editor, *Digues maritimes et fluviales de protection contre les submersions - 2e colloque national Digues 2013*, pages 459–463. Irstea, Promosciences, Centre des Congrès d’Aix en Provence, MEDDE et CFBR, juin 2013.
- [35] Y.-H. Chen and B.-A. Anderson. Development of a methodology for estimating embankment damage due to flood overtopping. Technical report, Office of Engineering & Highway Operations R&D, U.S. Dept. of Agriculture, march 1986.
- [36] A. Chertock, S. Cui, A. Kurganov, and T. Wu. Well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for the shallow water system with friction terms. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 78(6) :355–383, 2015.
- [37] A. Chinnayya, A.-Y. Leroux, and N. Seguin. A well-balanced numerical scheme for the approximation of the shallow-water equations with topography : the resonance phenomenon. *International Journal on Finite Volumes*, 1 :1–33, 2004.



- [38] CIRIA. The International Levee Handbook. Technical report, CIRIA, 2013.
- [39] P. Claudin, B. Andreotti, and S. Douady. Selection of dune shapes and velocities. part 2 : A two-dimensional modelling. *Eur. Phys. J. B*, 28(341), 2002.
- [40] S. E. Coleman and V. I. Nikora. Exner equation : A continuum approximation of a discrete granular system. *Water Resour. Res.*, 45, 2009.
- [41] S. Cordier, M. H. Le, and T. Morales de Luna. Bedload transport in shallow water models : Why splitting (may) fail, how hyperbolicity (can) help. *Adv. Water Resour.*, 34 :980–989, 2011.
- [42] R. Courant, K. Friedrichs, and H. Lewy. Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik. *Mathematische Annalen*, 100(1) :32–74, 1928.
- [43] J. A. Cunge, F. M. Holly, and A. Verway. *Practical Aspects of Computational River Hydraulics*. Pitman, 1980.
- [44] C. M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Springer-Verlag, 2000.
- [45] A. J.-C. de Saint-Venant. Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *C. R. Acad. Sc.*, 73 :147–154, 1871.
- [46] H. De Vriend, J. Zyserman, J. Nicholson, J. Roelvink, P. Pechon, and H. Southgate. Medium-term 2dh coastal area modelling. *Coast. Eng.*, 21(1-3) :193–224, 1993.
- [47] A. Debussche and J. Vovelle. Long-time behavior in scalar conservation laws. *Differential and Integral Equations*, 22(3-4) :225–238, 2009.
- [48] A. Debussche and J. Vovelle. Scalar conservation laws with stochastic forcing. *J. Funct. Anal.*, 259(4) :1014–1042, 2010.
- [49] A. Debussche and J. Vovelle. Invariant measure of scalar first-order conservation laws with stochastic forcing. *Probability Theory and Related Fields*, 163(3) :575–611, 2015.
- [50] A. I. Delis and I. Papoglou. Relaxation approximation to bed-load sediment transport. *J. Comp. Ap M.*, 213 :521–546, 2008.
- [51] H. Einstein. The bed-load function for sediment transportation in open channel flows. Technical Report 1026, United States Department of Agriculture, 1950.
- [52] H. A. Einstein. Formulas for the Transportation of Bed Load. *Trans. Amer. Soc. Civ. Engin.*, 107 :561–573, 1942.
- [53] K. El Kadi Abderrezzak and A. Paquier. One-dimensional numerical modeling of sediment transport and bed deformation in open channels. *Water Resour. Res.*, 45, 2009.

- [54] K. El Kadi Abderrezzak and A. Paquier. Applicability of Sediment Transport Capacity Formulas to Dam-Break Flows over Movable Beds. *J. Hydraul. Eng.*, 137(2) :209–211, 2011.
- [55] W. J. Elliott and J. M. Laflen. A process-based rill erosion model. *Trans. ASAE*, 36(1) :65–72, 1993.
- [56] F. Engelund and E. Hansen. *A monograph on sediment transport in alluvial streams*. Teknisk forlag, 1967.
- [57] M. Esteves, X. Faucher, S. Galle, and M. Vauclin. Overland flow and infiltration modelling for small plots during unsteady rain : numerical results versus observed values. *J. Hydrol.*, 228(3) :265–282, 2000.
- [58] F. M. Exner. Über die wechselwirkung zwischen wasser und geschiebe in flüssen. *Akad. Wiss. Wien Math. Naturwiss. Klasse*, 134(2a) :165–204, 1925.
- [59] R. Fernandez Luque and R. Van Beek. Erosion and transport of bed-load sediment. *J. Hydraul. Res.*, 14(2) :127–144, 1976.
- [60] E. D. Fernández-Nieto, M. J. Castro Díaz, and C. Parés. On an Intermediate Field Capturing Riemann Solver Based on a Parabolic Viscosity Matrix for the Two-Layer Shallow Water System. *J. Sc. Comput.*, 48 :117–140, 2011.
- [61] E. D. Fernández-Nieto, C. Lucas, T. Morales de Luna, and S. Cordier. On the influence of the thickness of the sediment moving layer in the definition of the bedload transport formula in Exner systems. *Comput. Fluids*, 91 :87–106, 2014.
- [62] G. R. Foster and L. D. Meyer. Transport of particles by shallow flow. *Trans. ASAE*, 15(1) :99–102, 1972.
- [63] E. Foufoula-Georgiou and C. Stark. Introduction to special section on stochastic transport and emergent scaling on earth’s surface : Rethinking geomorphic transport – stochastic theories, broad scales of motion and nonlocality. *J. Geophys. Res. : Earth Surface*, 115(F2), 2010.
- [64] J. R. D. Francis. Experiments on the motion of solitary grains along the bed of a water-stream. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 332(1591) :443–471, 1973.
- [65] W. Froude. On useful displacement as limited by weight of structure and of propulsive power. *Trans. Inst. Naval Architects*, 15 :148–155, 1874.
- [66] D. J. Furbish, A. E. Ball, and M. W. Schmeckle. A probabilistic description of the bed load sediment flux : 4. fickian diffusion at low transport rates. *J. Geophys. Res.*, 117, 2012.
- [67] D. J. Furbish, P. K. Haff, J. C. Roseberry, and M. W. Schmeckle. A probabilistic description of the bed load sediment flux : 1. theory. *J. Geophys. Res.*, 117, 2012.

- [68] D. J. Furbish, J. C. Roseberry, and M. W. Schmeckle. A probabilistic description of the bed load sediment flux : 3. the particle velocity distribution and the diffusive flux. *J. Geophys. Res.*, 117, 2012.
- [69] D. J. Furbish and M. W. Schmeckle. A probabilistic derivation of the exponential-like distribution of bed load particle velocities. *Water Resour. Res.*, 2013.
- [70] J. M. Gallardo, C. Parés, and M. J. Castro Díaz. On a well-balanced high-order finite volume scheme for shallow water equations with topography and dry areas. *J. Comput. Phys.*, 227(1) :574–601, 2007.
- [71] G. Gallice. Solveurs simples positifs et entropiques pour les systèmes hyperboliques avec terme source. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(8) :713–716, 2002.
- [72] G. Gallice. Positive and entropy stable Godunov-type schemes for gas dynamics and MHD equations in Lagrangian or Eulerian coordinates. *Num. Math.*, 94(4) :673–713, 2003.
- [73] T. Gallouët, J.-M. Hérard, and N. Seguin. Some approximate Godunov schemes to compute shallow-water equations with topography. *Computers and Fluids*, 32 :479–513, 2003.
- [74] V. Ganti, A. Singh, P. Passalacqua, and E. Foufoula-Georgiou. Subordinated brownian motion model for sediment transport. *Phys. Rev. E*, 80(1), 2009.
- [75] Y. Gao. *Méthodes de volumes finis pour des équations aux dérivées partielles déterministes et stochastiques*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 2015.
- [76] G. Garegnani, G. Rosatti, and L. Bonaventura. Free surface flows over mobile bed : mathematical analysis and numerical modeling of coupled and decoupled approaches. *Commun. Appl. Ind. Math.*, 2(1), 2011.
- [77] G. Garegnani, G. Rosatti, and L. Bonaventura. On the range of validity of the Exner-based models for mobile-bed river flow simulations. *J. Hydraul. Res.*, 2013.
- [78] J.-F. Gerbeau and B. Perthame. Derivation of Viscous Saint-Venant System for Laminar Shallow Water. *Discrete Cont. Dyn. Syst. Ser. B*, 1(1), 2001.
- [79] R. Ghanem and P. Spanos. *Stochastic finite elements : a spectral approach*. Springer Verlag, 1991.
- [80] E. Godlewski and P.-A. Raviart. *Numerical approximations of hyperbolic systems of conservation laws*, volume 118 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, 1996.
- [81] L. Gosse. A priori error estimate for a well-balanced scheme designed for inhomogeneous scalar conservation laws. *C.R. Acad. Sc. Paris*, 327 :467–472, 1998.
- [82] L. Gosse and A.-Y. Leroux. A well-balanced scheme designed for inhomogeneous scalar conservation laws. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 323 :543–546, 1996.
- [83] W. Graf and M. Altinakar. *Hydraulique fluviale Tome 2 Ecoulement non permanent et phénomènes de transport*. Presses polytechniques et universitaire romandes, 1996.

- [84] A. J. Grass. Sediment transport by waves and currents. *SERC London Cent. Mar. Technol.*, FL29, 1981.
- [85] M. Greco, M. Iervolino, A. Leopardi, and A. Vacca. A two-phase model for fast geomorphic shallow flows. *Int. J. Sediment Res.*, 27 :409–425, 2012.
- [86] J. M. Greenberg and A.-Y. Leroux. A well balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations. *SIAM J. Num. Anal.*, 33, 1996.
- [87] J. M. Greenberg, A. Y. Leroux, R. Barailles, and A. Noussair. Analysis and approximation of conservation laws with source terms. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(5) :1980–2007, 1997.
- [88] P. H. Gunawan, R. Eymard, and S. R. Pudjaprasetya. Staggered scheme for the Exner-shallow water equations. *Computat. Geosci.*, 2015.
- [89] P. Hall. Alternating bar instabilities in unsteady channel flows over erodible beds. *J. Fluid. Mech.*, 2004.
- [90] A. Harten, P.-D. Lax, and B. van Leer. On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM Review*, 25(1) :53–61, 1983.
- [91] B. C. P. Heng, G. C. Sander, and C. F. Scott. Modeling overland flow and soil erosion on nonuniform hillslopes : A finite volume scheme. *Water Resour. Res.*, 45(5), 2009.
- [92] J.-M. Hervouet. *Hydrodynamique des écoulements à surface libre, modélisation numérique avec la méthode des éléments finis*. Presses de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2003.
- [93] J.-M. Hervouet. Hydrodynamics of free surface flows. Modelling with the finite element method. *Wiley & Sons*, 2007.
- [94] J.-M. Hervouet and C. Villaret. Simulation numérique des évolutions sédimentaires, importance d’une approche intégrée. In *Actes des VIIIèmes Journées Nationales Génie Cotier - Génie Civil de Compiègne 2004*, pages 185–193. Paralia, 2004.
- [95] High-Performance Portable MPI (MPICH2). <http://www.mpich.org/>.
- [96] M. S. Horritt. Stochastic modelling of 1-D shallow water flows over uncertain topography. *J. Comput. Phys.*, 180(1) :327–338, 2002.
- [97] J. Hudson, J. Damgaard, N. Dodd, T. Chesher, and A. Cooper. Numerical approaches for 1D morphodynamic modelling. *Coast. Eng.*, 52 :691–707, 2005.
- [98] J. Hudson and P. K. Sweby. Formulations for numerically approximating hyperbolic systems governing sediment transport. *J. Sci. Comput.*, 19 :225–252, 2003.
- [99] J. Hudson and P. K. Sweby. A high-resolution scheme for the equations governing 2d bed-load sediment transport. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 47 :1085–1091, 2005.

- [100] N. M. Hunter, P. D. Bates, M. S. Horritt, and M. D. Wilson. Simple spatially-distributed models for predicting flood inundation : A review. *Geomorphology*, 90 :208–225, 2007.
- [101] D. J. Jerolmack and D. Mohrig. A unified model for subaqueous bed form dynamics. *Water Resour. Res.*, 41(12), 2005.
- [102] S. Jin. A steady state capturing method for hyperbolic systems with geometrical source terms. *ESAIM : M2AN*, 35 :631–645, 2001.
- [103] S. Jin and X. Wen. Two interface-type numerical methods for computing hyperbolic systems with geometrical source terms having concentrations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 26(6) :2079–2101, 2005.
- [104] S. Jin and Z. Xin. The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions. *Commun. Pure Appl. Math.*, 48 :235–276, 1995.
- [105] A. Kalinske. Movement of sediment as bed load in rivers. *Transactions, American Geophysical Union*, 28(4) :615–620, 1947.
- [106] M. Kleinhans and L. van Rijn. Stochastic prediction of sediment transport in sand-gravel bed rivers. *J. Hydraul. Eng.*, 128(4) :412–425, 2002.
- [107] A. Kovacs and G. Parker. A new vectorial bedload formulation and its application to the time evolution of straight river channels. *J. Fluid Mech.*, 267 :153–183, 1994.
- [108] G.V. Kozyrakis, A.I Delis, G. Alexandrakis, and N.A. Kampanis. Numerical modeling of sediment transport applied to coastal morphodynamics. *Appl. Numer. Math.*, 2014.
- [109] A. Kurganov and D. Levy. Central-upwind schemes for the Saint-Venant system. *ESAIM : M2AN*, 32 :397–425, 2002.
- [110] A. Kurganov and G. Petrova. A second-order well-balanced positivity preserving central-upwind scheme for the Saint-Venant system. *Commun. Math. Sci.*, 5 :133–160, 2007.
- [111] E. Lajeunesse, L. Malverti, and F. Charru. Bed load transport in turbulent flow at the grain scale : Experiments and modeling. *J. Geophys. Res.*, 115, 2010.
- [112] P. Lang. *Système de modélisation TELEMAC – Hydrodynamique bidimensionnelle – Logiciel TELEMAC-2D version 6.0 – Manuel de l'utilisateur*, octobre 2010.
- [113] C. Laroche, M. Alquier, and L. Solignac. Modélisation d’une brèche par surverse et de sa fosse d’érosion par implémentation d’une loi d’érosion dans TELEMAC2D. In Hermes Sciences Publication & Lavoisier, editor, *Digues maritimes et fluviales de protection contre les submersions - 2e colloque national Digues 2013*, pages 473–480. Irstea, Promosciences, Centre des Congrès d’Aix en Provence, MEDDE et CFBR, juin 2013.
- [114] M. H. Le. *Modélisation multi-échelle et simulation numérique de l’érosion des sols de la parcelle au bassin versant*. PhD thesis, Université d’Orléans, 2012.

- [115] O. P. Le Maître and O. M. Knio. *Spectral Methods for Uncertainty Quantification With Applications to Computational Fluid Dynamics*. Springer, 2010.
- [116] R. LeVeque. Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods : The quasi-steady wave-propagation algorithm. *J. Comput. Phys.*, 146 :346–365, 1998.
- [117] R. J. LeVeque. *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press, 2002.
- [118] D. Liu. *Uncertainty Quantification with Shallow Water Equations*. PhD thesis, University of Florence, 2010.
- [119] Logiciel ADCIRC. <http://adcirc.org/>.
- [120] Logiciel BLUE KENUE. [http://www.nrc-cnrc.gc.ca/fra/solutions/consultatifs/blue\\_kenue\\_index.html](http://www.nrc-cnrc.gc.ca/fra/solutions/consultatifs/blue_kenue_index.html).
- [121] Logiciel DELFT3D. <http://oss.deltares.nl/web/delft3d>.
- [122] Logiciel HEC-RAS. <http://www.hec.usace.army.mil/software/hec-ras>.
- [123] Logiciel HYDROSIM. <http://hydrosim52.software.informer.com/>.
- [124] Logiciel MIKE. <http://www.mikebydhi.com>.
- [125] Logiciel TELEMAC-MASCARET. <http://www.opentelemac.org>.
- [126] D. Lyn and M. Altinakar. St. venant-exner equations for near-critical and transcritical flows. *J. Hydraul. Eng.*, 128(6) :579–587, 2002.
- [127] R. Manning. On the flow of water in open channels and pipes. *Transactions of the Institution of Civil Engineers of Ireland*, 20 :161–207, 1891.
- [128] E. Meyer-Peter and R. Müller. Formulas for bed-load transport. *Second Meeting IAHSR, Appendix 2*, pages 39–64, 1948.
- [129] A. Mignot, E. Paquier and S. Haider. Modeling floods in a dense urban area using 2D shallow water equations. *J. Hydrol.*, 237(1-2) :186–199, 2006.
- [130] M. Morris. Breaching Processes : A state of art review. Technical report T06-06-03, HR Wallingford, february 2005.
- [131] J. Murillo and P. Garcia-Navarro. An Exner-based coupled model for two-dimensional transient flow over erodible bed. *J. Comput. Ph.*, 229 :8704–8732, 2010.
- [132] C. T. Newton. An experimental investigation of bed degradation in an open channel. Technical report, Boston Society of Civil Engineers, 1951.
- [133] R. W. D. Nickalls. A new bound for polynomials when all roots are real. *The Mathematical Gazette*, 95(534) :520–526, November 2011. [www.nickalls.org/dick/papers/maths/bounds2011.pdf](http://www.nickalls.org/dick/papers/maths/bounds2011.pdf).

- [134] P. Nielsen. *Coastal Bottom Boundary Layers and Sediment Transport*, volume 4 of *Advanced Series on Ocean Engineering*. World Scientific Publishing, 1992.
- [135] S. Noelle, Y. Xing, and C.-W. Shu. *Methods for Balance Laws*, volume 24, chapter High-order well-balanced schemes, pages 1–66. *quaderni di matematica*, 2009.
- [136] United States Department of Agriculture, editor. *National Engineering Handbook*, chapter Transmission of Sediment by Water. Section 3 : Sedimentation. Natural Resources Conservation Service Michigan, 2008.
- [137] A. S. Paintal. A stochastic model of bed load transport. *J. Hydraul. Res.*, 9(4) :527–554, 1971.
- [138] C. Paola and V. R. Voller. A generalized Exner equation for sediment mass balance. *J. Geophys. Res.*, 110, 2005.
- [139] A. N. Papanicolaou, M. Elhakeem, G. Krallis, S. Prakash, and J. Edinger. Sediment Transport Modeling Review—Current and Future Developments. *J. Hydraul. Eng.*, 2008.
- [140] A. Paquier. *Modélisation et simulation de la propagation de l'onde de rupture de barrage*. PhD thesis, Université Jean Monnet, October 1995.
- [141] C. Parés. Numerical methods for nonconservative hyperbolic systems : a theoretical framework. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(1) :300–321, 2006.
- [142] G. Parker. Surface-based bedload transport relation for gravel rivers. *J. Hydraul. Res.*, 28(4) :417–436, 1990.
- [143] G. Parker. 1D Sediment Transport Morphodynamics with applications to Rivers and Turbidity Currents. [http://hydro-lab.illinois.edu/people/parkerg/powerpoint\\_lectures.htm](http://hydro-lab.illinois.edu/people/parkerg/powerpoint_lectures.htm), 2004.
- [144] G. Parker, C. Paola, and S. Leclair. Probabilistic Exner sediment continuity equation for mixtures with no active layer. *J. Hydraul. Eng.*, 126 :818–826, 2000.
- [145] E. Parthéniades. Erosion and deposition of cohesive soils. *Journal of the Hydraulic Division*, 91 :105–139, 1965.
- [146] B. Perthame and C. Simeoni. A kinetic scheme for the Saint-Venant system with source term. *Calcolo, Springer-Verlag*, 38 :201–231, 2001.
- [147] A. Recking. Simple method for calculating reach-averaged bed-load transport. *J. Hydraul. Eng.*, 139(1) :70–75, 2013.
- [148] A. Recking, P. Frey, A. Paquier, P. Belleudy, and J.-Y. Champagne. Bed-Load Transport Flume Experiments on Steep Slopes. *J. Hydraul. Eng.*, 134(9), 2008.
- [149] F. Reech. *Mémoire sur les machines à vapeur et leur application à la navigation*. Arthus Bertrand, 1844.

- [150] M. Ricchiuto and A. Bollermann. Stabilized residual distribution for shallow water simulations. *J. Comput. Phys.*, 228(4) :1071–1115, 2009.
- [151] P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes. *J. Comput. Phys.*, 43 :357–372, 1981.
- [152] G. Rosatti and L. Begnudelli. A closure-independent Generalized Roe solver for free-surface, two-phase flows over mobile bed. *J. Comput. Phys.*, 255 :362–383, 2013.
- [153] G. Rosatti and L. Fraccarollo. A well-balanced approach for flows over mobile-bed with high sediment-transport. *J. Comput. Phys.*, 220(1) :312–338, 2006.
- [154] G. Rosatti, J. Murillo, and L. Fraccarollo. Generalized Roe schemes for 1D two-phase, free-surface flows over a mobile bed. *J. Comput. Ph.*, 227 :10058–10077, 2008.
- [155] J. C. Roseberry, M. W. Schmeckle, and D. J. Furbish. A probabilistic description of the bed load sediment flux : 2. particle activity and motions. *J. Geophys. Res.*, 117, 2012.
- [156] M. Rousseau. *Propagation d'incertitudes et analyse de sensibilité pour la modélisation de l'infiltration et de l'érosion*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2012.
- [157] G Russo. *Hyperbolic Problems : Theory, Numerics, Applications : Eighth International Conference in Magdeburg, February/March 2000 Volume II*, volume 141 of *ISNM International Series of Numerical Mathematics*, chapter Central schemes for balance laws, pages 821–829. Birkhäuser Basel, 2001.
- [158] G. Russo and A. Khe. High order well balanced schemes for systems of balance laws. In *Hyperbolic Problems : Theory, Numerics and Applications*, volume 67, pages 919–928. Amer. Math. Soc. : Providence, 2009.
- [159] G. Russo and A. Khe. High order well-balanced schemes based on numerical reconstruction of the equilibrium variables. In *WASCOM 2009 : 15th Conference on Waves and Stability in Continuous Media*, pages 230–241. World Sci. Publ., 2010.
- [160] D. Serre. *Systèmes de lois de conservation I & II*. Diderot Editeur Arts & Sciences, 1996.
- [161] A. Shields. Anwendung der Aehnlichkeitsmechanik und der Turbulenzforschung auf die Geschiebebewegung (Application of similarity mechanics and turbulence research on shear flow). *Mitteilungen der Preussischen Versuchsanstalt für Wasserbau*, 1936.
- [162] G. Simpson and S. Castelltort. Coupled model of surface water flow, sediment transport and morphological evolution. *Comput. Geosci.*, 32(10) :1600–1614, 2006.
- [163] V.-P. Singh and P.-D. Scarlatos. Analysis of the gradual earth-dam failure. *J. Hydraul. Eng.*, 114(1), january 1998.
- [164] A. Siviglia, G. Nobile, and M. Colombini. Quasi-conservative formulation of the one dimensional Saint-Venant-Exner model. *J. Hydraul. Eng.*, 134(10) :1521–1526, 2008.



- [165] C. J. Sloff. Analysis of basic equations of sediment-laden flows. Communications on Hydraulic and Geotechnical Engineering 93-8, Delft University of Technology, 1993.
- [166] M. W. Smith, N. J. Cox, and L. J. Bracken. Applying flow resistance equations to overland flows. *Prog. Phys. Geog.*, 31(4) :363–387, 2007.
- [167] S. Smolyak. Quadrature and interpolation formulas for tensor products of certain classes of functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 4(240-243), 1963.
- [168] S Soares-Frazao and Y Zech. HLLC scheme with novel wave-speed estimators appropriate for two-dimensional shallow-water flow on erodible bed. *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 66 :1019–1036, 2011.
- [169] J. P. Soni. Laboratory study of aggradation in alluvial channels. *J. Hydrol.*, 49 :87–106, 1981.
- [170] R. Soulsby. *Dynamics of Marine Sands : A Manual for Practical Applications*. Thomas Telford, 1997.
- [171] B. Spinewine. *Two-layer flow behaviour and the effects of granular dilatancy in dam-break induced sheet-flow*. PhD thesis, Université catholique de Louvain, 2005.
- [172] B. Spinewine and Y. Zech. Small-scale laboratory dam-break waves on movable beds. *J. Hydraul. Res.*, 45(1) :73–86, 2007.
- [173] A. Tekatlian and S. Poligot-Pitsch. Rupture de digues : pratiques actuelles de modélisation du processus de rupture et des conséquences en terme d’inondation. Recommandations aux Maîtres d’Ouvrages 18675, CETE Méditerranée, mars 2005.
- [174] E. F. Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : A practical introduction*. Springer-Verlag, 2nd edition, 1999.
- [175] R. Tourment and P. Ledoux. Les ruptures et principaux désordres sur les digues lors de la crue du Rhône en décembre 2003. Colloque Sécurité des digues fluviales et de navigation, octobre 2004.
- [176] E. Valette, C. Villaret, P. Tassi, and M. Jodeau. St Egrève reservoir - Multi-dimensional modelling of flushing and evolution of the channel bed. In *Proceedings of the XXth TELEMAC-MASCARET User Conference*, pages 127–132. Bundesanstalt für Wasserbau, 2013.
- [177] L. van Rijn and D. Walstra. Morphology of Pits, Channels and Trenches Part I : Literature review and study approach. Technical report, DG Rijkswaterstaat - Rijks-Instituut voor Kust en Zee (RIKZ), 2002.
- [178] L. C. van Rijn. Sediment Transport, Part I : Bed Load Transport. *J. Hydraul. Eng.*, 110(10) :1431–1456, 1984.
- [179] L. C. van Rijn. *Principles of Sediment Transport in Rivers, Estuaries and Coastal Seas*. Aqua Publications, 1993.

- [180] C. Villaret, J.-M. Hervouet, R. Kopmann, and U. Merkel. Morphodynamic modeling using the Telemac finite-element system. *Comput. Geosci.*, 53, 2013.
- [181] P.-L. Viollet, J.-P. Chabard, P. Esposito, and D. Laurence. *Mécanique des fluides appliquée, écoulements incompressibles dans les circuits, canaux et rivières autour de structures et dans l'environnement*. Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [182] D. S. Wilks. *Statistical Methods in the Atmospheric Sciences*. Academic Press, 1995.
- [183] F. Wu and Y. Chou. Rolling and lifting probabilities for sediment entrainment. *J. Hydraul. Eng.*, 129(2) :110–119, 2003.
- [184] W. Wu and S. S. Y. Wang. One-dimensional explicit finite-volume model for sediment transport with transient flows over movable beds. *J. Hydraul. Res.*, 46(1) :87–98, 2008.
- [185] J. Xia, B. Lin, R. A. Falconer, and G. Wang. Modelling dam-break flows over mobile beds using a 2D coupled approach. *Adv. Water Resour.*, 33(2) :171–183, 2010.
- [186] Y. Xing, C.-W. Shu, and S. Noelle. On the advantage of well-balanced schemes for moving-water equilibria of the shallow water equations. *J. Sci. Comput.*, 48(1-3) :339–349, 2011.
- [187] D. Xiu. *Numerical Methods for Stochastic Computations - A Spectral Method Approach*. Princeton University Press, 2010.
- [188] M. Barahona Y. Niño, A. Atala and D. Aracena. Discrete particle model for analyzing bedform development. *J. Hydraul. Eng.*, 128(4) :381–389, 2002.
- [189] J. Zabsonré, C. Lucas, and E. D. Fernández-Nieto. An energetically consistent viscous sedimentation model. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 19(3) :477–499, 2009.
- [190] W. Zhang and T. W. Cundy. Modeling of two dimensional overland flow. *Water Resour. Res.*, 25(9) :2019–2035, 1989.
- [191] X. Zhang, W. Long, H. Xie, J. Zhu, and J. Wang. Numerical simulation of flood inundation processes by 2D shallow water equations. *Front. Archit. Civ. Eng. China*, 1(1) :107–113, 2007.
- [192] X. Zhang, S. Oishi, H. Ishidaira, and K. Takeuchi. Practical Aspects in the Simulation of Flood Inundation Using 2D Shallow Water Equations on A Complex Land-Cover. *J. Japan Soc. Hydrol. and Water Resour.*, 16(5) :501–517, 2003.
- [193] D.-Y. Zhong, G.-Q. Wang, and L. Zhang. A bed-load function based on kinetic theory. *Int. J. Sediment Res.*, 27(4) :460–472, 2012.





**Philippe UNG**

## **Simulation numérique du transport sédimentaire. Aspects déterministes et stochastiques.**

### **Résumé :**

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude d'un modèle de transport de sédiments en nous plaçant sous deux angles d'approche différents.

L'un concerne la modélisation numérique du problème et propose une méthode de résolution numérique basée sur un solveur de Riemann approché pour le système de Saint-Venant-Exner qui reste un des systèmes les plus répandus pour traiter le transport sédimentaire par charriage. Ce dernier repose sur un couplage du modèle hydraulique de Saint-Venant et du modèle morphodynamique d'Exner. Le point essentiel de la méthode proposée se situe au niveau du traitement du couplage de ce système.

En effet, il existe deux stratégies; la première consiste à découpler la résolution de la partie fluide de la partie solide et les faire interagir à des instants donnés alors que la seconde considère une résolution couplée du système en mettant à jour conjointement les grandeurs hydrauliques et solides aux mêmes instants.

Se posera alors la question du choix de la stratégie de résolution pour laquelle nous apporterons des éléments de réponses en comparant les deux approches.

L'autre se concentre sur la mise en place d'une méthodologie pour l'étude des incertitudes liées au même modèle. Pour ce faire, nous proposons une formulation stochastique du système de Saint-Venant-Exner et nous cherchons à caractériser la variabilité des sorties par rapport aux paramètres d'entrée naturellement aléatoires. Cette première étude révélera la nécessité de revenir à un système de Saint-Venant avec un fond bruité pour étudier la sensibilité des grandeurs hydrauliques par rapport aux perturbations topographiques.

**Mots clés :** équations de Saint-Venant-Exner, méthode des volumes finis, systèmes hyperboliques, transport solide, écoulements géophysiques, propagation d'incertitudes, méthode de Monte-Carlo.

## **Numerical simulation of the sediment transport. Deterministic and stochastic aspects.**

### **Summary :**

In this thesis, we are interested on the study of a sediment transport model through two different approaches. One of them concerns the numerical modelling of the problem and proposes a numerical problem-solving method based on an approximate Riemann solver for the Saint-Venant-Exner system which is one of the most common model to deal with sedimentary bed-load transport. This last one is based on a coupling between the hydraulic model of Saint-Venant and the morphodynamic model of Exner. The key point of the proposed method is the treatment of the coupling issue.

Indeed, there exists two strategies; the first one consists on decoupling the resolution of the fluid part from the solid part and making them interact at fixed times whereas the second one considers a coupled approach to solve the system by jointly updating the hydraulic and solid quantities at same times.

We then raise the issue of the choice of the strategy for which we suggest answers by comparing both approaches.

The other one focuses on the development of a methodology to study the uncertainties related to the model previously mentioned. To this end, we propose a stochastic formulation of the Saint-Venant-Exner system and we look for characterizing the variabilities of the outputs in relation to the naturally random input parameters. This first study reveals the need for a return to the Saint-Venant system with a perturbed bed to understand the sensitivity of the hydraulic quantities on the topographical perturbations.

**Keywords :** Saint-Venant-Exner equations, finite volume method, hyperbolic systems, solid transport, geophysical flow, uncertainties propagation, Monte-Carlo method.



### **Laboratoire de Mathématiques – Analyse, Probabilités, Modélisation – Orléans (MAPMO)**

Université d'Orléans, UFR Sciences  
Bâtiment de mathématiques - Rue de Chartres  
B.P. 6759 - 45067 Orléans cedex 2  
FRANCE

