Représentations l-modulaires des groupes p-adiques : décomposition en blocs de la catégorie des représentations lisses de GL(m,D), groupe métaplectique et représentation de Weil

Gianmarco Chinello

▶ **To cite this version:**

Gianmarco Chinello. Représentations l-modulaires des groupes p-adiques : décomposition en blocs de la catégorie des représentations lisses de GL(m,D), groupe métaplectique et représentation de Weil. Théorie des groupes [math.GR]. Université de Versailles-Saint Quentin en Yvelines, 2015. Français. NNT : 2015VERS045V . tel-01412584

HAL Id: tel-01412584
https://theses.hal.science/tel-01412584

Submitted on 8 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LMV
Laboratoire de mathématiques
de Versailles - CNRS UMR 8100

UNIVERSITÉ DE
VERSAILLES
ST-QUENTIN-EN-YVELINES

Thèse
présentée pour obtenir le titre de
docteur de l'université de Versailles St-Quentin-en-Yvelines

Spécialité :
Mathématiques

Représentations ℓ-modulaires des groupes p-adiques

Décomposition en blocs de la catégorie des représentations lisses de $GL(m, D)$, groupe métaplectique et représentation de Weil

---

Gianmarco Chinello

Soutenue le 7 Septembre 2015 devant le jury composé de :

Mme Corinne Blondel	Université Paris Diderot	Rapporteur
M. Jean-François Dat	Université Pierre et Marie Curie	Examinateur
M. Guy Henniart	Université Paris Sud	Examinateur
M. Benjamin Schraen	Université de Versailles St-Quentin	Examinateur
M. Vincent Sécherre	Université de Versailles St-Quentin	Directeur
M. Shaun Stevens	University of East Anglia	Rapporteur

Après avis des rapporteurs :

Mme Corinne Blondel	Université Paris Diderot
M. Shaun Stevens	University of East Anglia

Résumé

Cette thèse traite deux problèmes concernant la théorie des représentations ℓ-modulaires d'un groupe p-adique. Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p différente de ℓ. Dans la première partie, on étudie la décomposition en blocs de la catégorie des représentations lisses ℓ-modulaires de $GL(n, F)$ et de ses formes intérieures. On veut ramener la description d'un bloc de niveau positif à celle d'un bloc de niveau 0 (d'un autre groupe du même type) en cherchant des équivalences de catégories. En utilisant la théorie des types de Bushnell-Kutzko dans le cas modulaire et un théorème de la théorie des catégories, on se ramene à trouver un isomorphisme entre deux algèbres d'entrelacement. La preuve de l'existence d'un tel isomorphisme n'est pas complète car elle repose sur une conjecture qu'on énonce et qui est prouvée pour plusieurs cas. Dans une deuxième partie on généralise la construction du groupe métaplectique et de la représentation de Weil dans le cas des représentations sur un anneau intègre. On construit une extension centrale du groupe symplectique sur F par le groupe multiplicatif d'un anneau intègre et on prouve qu'il satisfait les mêmes propriétés que dans le cas des représentations complexes.

ℓ-MODULAR REPRESENTATIONS OF p-ADIC GROUPS

Block decomposition of the category of smooth representations of $GL(m, D)$, metaplectic group and Weil representation

Abstract

This thesis focuses on two problems on ℓ-modular representation theory of p-adic groups. Let F be a non-archimedean local field of residue characteristic p different from ℓ. In the first part, we study block decomposition of the category of smooth modular representations of $GL(n, F)$ and its inner forms. We want to reduce the description of a positive-level block to the description of a 0-level block (of a similar group) seeking equivalences of categories. Using the type theory of Bushnell-Kutzko in the modular case and a theorem of category theory, we reduce the problem to find an isomorphism between two intertwining algebras. The proof of the existence of such an isomorphism is not complete because it relies on a conjecture that we state and we prove for several cases. In the second part we generalize the construction of metaplectic group and Weil representation in the case of representations over un integral domain. We define a central extension of the symplectic group over F by the multiplicative group of an integral domain. We prove that it satisfies the same properties as in the complex case.

Remerciements

Tout d'abord je tiens vraiment à exprimer mes remerciements les plus profonds à mon directeur, Vincent Sécherre, pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de diriger mon mémoire de Master 2 et puis cette thèse de doctorat. Pendant ces quatre ans et demi il m'a appris, avec beaucoup de patience, ce qu'était la recherche et son œil critique m'a été très précieux pour améliorer la clarté de l'exposition et la rigueur des démonstrations. Je lui suis reconnaissant pour toutes les heures qu'il a consacrées à ma recherche, pour tous ses conseils, ses remarques et ses critiques constructives sur ce travail. Sans sa disponibilité cette thèse n'aurait jamais pu voir le jour.

Mes remerciements vont également à Shaun Stevens et Corinne Blondel pour avoir accepté l'immense travail de relire cette thèse, malgré le délai serré, et d'en être rapporteurs. Je souhaite remercier aussi Jean-François Dat, Guy Henniart et Benjamin Schraen pour l'honneur qu'ils me font d'être dans mon jury de thèse et d'être présents à ma soutenance.

Ma thèse s'est déroulée au sein du *Laboratoire de Mathématiques de Versailles* et je voudrais adresser mes remerciements à tous ces membres. Je remercie particulièrement Yvan Martel, le directeur lors de mon arrivée, et Catherine Donati-Martin, la directrice actuelle, pour m'avoir accueilli au sein du laboratoire le premier et au conseil de labo la deuxième. Puis, mes remerciements vont aussi à Laure Frèrejean et à Nadège Arnaud, la gestionnaire et la bibliothécaire du laboratoire. J'aimerais remercier aussi les directeurs du département de mathématiques, Otared Kavian avant et Laurent Dumas après, qui m'ont permis d'enseigner pendant ces ans de doctorat malgré mon français (pas du tout parfait). Merci aussi à Liliane Roger secrétaire du département pour son efficacité et sa gentillesse.

Je remercie sincèrement toute l'équipe d'*Algèbre et Géométrie*, dont je fais partie, et surtout le directeur Vincent Cossart et les organisateurs du séminaire, Benjamin et Maria, qui m'ont permis de présenter plusieurs fois mes travaux.

Merci à Anis, Antoine, Aurélien, Benedetta, Benjamin, Bernd, Camilla, Cécile, Jérémy, Jimena, Jonas, Loïc, Sadaka, Tamara, Venket et à tous les autres doctorants/ATER/post-doc que j'ai rencontrés pendant ces 4 ans à Versailles pour les nombreux bons moments passés ensemble. Mais surtout un grand merci à Daniele avec qui j'ai passé trois belles années en colocation et avec qui j'ai écrit mon premier article de recherche.

Je veut remercier aussi les membres du département de mathématiques d'Orsay où j'ai effectué les enseignements la dernière année. Merci surtout à Pierre Pansu, Olivier Fouquet, Nicolas Burq, Philippe Rambour, Jyoti, Santosh et les autres gens avec qui j'ai travaillé.

Avant de conclure, je ne peux pas oublier de remercier tous les amis avec qui j'ai passé d'agréables moments à Paris : Anna, Beatrice, Davide, Federico, Giacomo, Giorgio, Giovanni, Giulia, Giulio, Marco, Marco, Margherita, Michele, Liviana, Paolo, Paolo, Pierre, Riccardo, Silvia, Tommaso, Valentina, Vito. Merci de m'avoir permis d'oublier momentanément le travail dans des soirées, repas, pique-niques, ecc.

Infine qualche parola in italiano per ringraziare la mia famiglia. Un immenso grazie ai miei genitori, Maristella e Silvio, per avermi sempre supportato e incoraggiato in questa magnifica esperienza. Senza di voi non sarei mai arrivato fin qui. Grazie anche a mia sorella Lorena, ai miei futuri suoceri Piera e Mauro e ai miei nonni per la loro vicinanza nei periodi trascorsi in Italia.

I miei ultimi e più profondi ringraziamenti sono per la persona che di più conta per me. Grazie Marta per avermi sempre voluto bene e per essermi sempre stata vicino nonostante la lontananza. Grazie per avermi sostenuto anche nei momenti di difficoltà e per aver aspettato il mio ritorno. Per te ci sarò sempre. Ti amo.

Table des matières

Introduction **iii**

I Catégorie des représentations lisses de $GL_m(D)$ **1**

1 Préliminaires **3**

1.1 Groupes localement profinis 3

1.2 Algèbres avec un idempotent 4

1.3 Théorie des représentations 6

1.4 L'algèbre $\mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)$ 8

1.5 Les catégories $\mathscr{R}_\sigma(\mathtt{G})$ et $\mathscr{R}(\mathtt{G}, \sigma)$ 13

1.6 L'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G}, \mathtt{H})$ 15

1.7 Théorie de Fourier pour les groupes finis 19

1.8 Induction et restriction parabolique 23

2 L'algèbre $\mathscr{H}_R(GL_m(\mathbf{D}), \mathbb{I}_m + M_m(\wp_{\mathbf{D}}))$ **25**

2.1 Système de racines 26

2.2 Générateurs 27

2.3 Relations 31

2.4 Présentation par générateurs et relations 34

2.5 Idempotents centraux : $\mathrm{car}(R) = 0$ 39

2.6 Idempotents centraux : $\mathrm{car}(R) > 0$ 44

2.7 L'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(SL_m(\mathbf{F}), K^1_{\mathbf{S}})$ 46

3 L'algèbre $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ **49**

3.1 Types simples maximaux 49

3.2 Types semi-simples 52

3.3 L'algèbre $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ 53

3.4 "Preuve" du théorème 3.7 55

4 Équivalence de catégories $\mathscr{R}(G, \boldsymbol{\eta}_{max}) \simeq \mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$ 75
4.1 Équivalence 77
4.2 Correspondance parmi les blocs 81
4.3 Blocs de niveau 0 84

II Weil representation and metaplectic groups over an integral domain 87

5 Introduction 89

6 Notation and definitions 93
6.1 Quadratic forms 93
6.2 Integration theory 94
6.3 The symplectic group 96

7 The metaplectic group 101
7.1 The group $B_0(W)$ 101
7.2 The group $\mathbb{B}_0(W)$ 103
7.3 The metaplectic group 107

8 The Weil factor 109
8.1 The Weil factor 109
8.2 Metaplectic realizations of forms 114

9 Fundamental properties of the Weil factor 115
9.1 The quaternion division algebra over F 115
9.2 The Witt group 117
9.3 The image of the Weil factor 119

10 The reduced metaplectic group 121

11 Fonctorialité du groupe métaplectique 127
11.1 Fonctorialité de $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_\bullet(G))$ 127
11.2 Fonctorialité de $\mathrm{Mp}_\bullet(W)$ 130

Introduction

Cette thèse traite deux problèmes qui s'inscrivent dans le cadre de la théorie des représentations lisses modulaires d'un groupe réductif connexe sur un corps local non archimédien. D'une coté on étudie la décomposition en blocs de la catégorie de ces représentations et d'une autre coté on généralise les notions du groupe métaplectique et de la représentation de Weil au cas des représentations sur un anneau intègre.

Catégorie des représentations lisses de $GL_m(D)$

Soient p un nombre premier, F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et D une algèbre à division centrale de dimension finie sur F dont le degré réduit est noté d. Étant donné $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $G = GL_m(D)$, qui est une forme intérieure du groupe $GL_{md}(F)$. Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. On est intéressé à la catégorie $\mathscr{R}_R(G)$ des représentations lisses de G sur R. Si $R = \mathbb{C}$ on parle de représentations complexes et si R est de caractéristique positive ℓ on parle de représentations *ℓ-modulaires* et celles-ci sont l'objet de mon travail.

Dans l'étude d'une catégorie de représentations d'un groupe, une simplification pour sa description consiste en la décomposition de cette catégorie en blocs, qui sont des sous-catégories pleines et indécomposables. Dans ce cas toute représentation se décompose de façon unique en somme directe de sous-représentations, chacune dans un bloc, et tout morphisme entre représentations est un produit de morphismes, chacun dans un bloc. En conséquence, pour la compréhension de toute la catégorie, est suffisante la connaissance de chaque bloc qui est déterminé par les représentations irréductibles qu'il contient.

Par exemple si on considère les représentations d'un groupe fini sur R, de caractéristique premier au cardinal du groupe, alors toute représentation est semi-simple et donc chaque bloc est formé des représentations isomorphes à une somme directe de copies d'une représentation irréductible fixée. Cela n'est pas vrai si la caractéristique de R divise le cardinal du groupe ou si le groupe n'est pas fini.

Le cas complexe

Un résultat classique de Bernstein ([Ber84]) est la décomposition de la catégorie $\mathscr{R}_{\mathbb{C}}(G)$ en un produit infini de blocs, appelés *blocs de Bernstein*. Plus précisément il repartit les représentations complexes de G selon leur support cuspidal en utilisant les notions d'induction et de restriction paraboliques.

- Une représentation irréductible est *cuspidale* si son image par le foncteur de Jacquet r_P^G est nulle pour tout sous-groupe parabolique propre P de G.

Cette propriété est équivalente à la suivante.

- Une représentation irréductible est *supercuspidale* si elle n'est pas isomorphe à un sous-quotient d'une induite parabolique propre $i_P^G(\sigma)$ où σ est une représentation irréductible d'un facteur de Levi M de P.

Si M est un sous-groupe de Levi de G et σ une représentation cuspidale de M on appelle *paire cuspidale* de G la paire (M,σ) et *classe d'inertie* de (M,σ) l'ensemble $[M,\sigma]_G$ des paires cuspidales (M',σ') qui sont G-conjuguées à $(M,\sigma\chi)$ où χ est un caractére non-ramifié de M. Alors toute représentation irréductible π de G est isomorphe à un quotient d'une induite parabolique $i_P^G(\sigma)$ où P est un sous-groupe parabolique de G et σ est une représentation irréductible cuspidale d'un facteur de Levi M de P. La paire cuspidale (M,σ) est déterminée par π à G-conjugaison près et elle est appelée *support cuspidal* de π. Alors on a une décomposition

$$\mathscr{R}_{\mathbb{C}}(G) = \bigoplus_{[M,\sigma]_G} \mathscr{R}_{\mathbb{C}}^{[M,\sigma]_G}(G) \qquad (\star)$$

où $\mathscr{R}_{\mathbb{C}}^{[M,\sigma]_G}(G)$ est le bloc formé des représentations complexes de G dont tous les sous-quotients irréductibles ont support cuspidal dans $[M,\sigma]_G$. On remarque que la preuve de cette décomposition utilise le fait que la propriété d'être cuspidale est équivalente à celle d'être supercuspidale.

La théorie des types, développée par Bushnell et Kutzko ([BK93]) dans le cas $d = 1$ (cas déployé) et généralisée par Broussous, Sécherre et Stevens ([Séc04], [Séc05a], [Séc05b], [SS08], [BSS12], [SS12]) dans le cas $d > 1$, permet de décrire les blocs de Bernstein de $\mathscr{R}_{\mathbb{C}}(G)$ comme des catégories de modules sur certaines $\mathbb{C}$-algèbres. Cette théorie consiste en la construction d'une famille de couples (K,ρ), dites *types*, formés d'un sous-groupe ouvert compact K de G et d'une représentation lisse complexe irréductible ρ de K telle que à chaque bloc de Bernstein $\mathcal{B}$ de $\mathscr{R}_{\mathbb{C}}(G)$ correspond un unique couple (K,ρ) tel que les objets irréductibles de $\mathcal{B}$ sont les représentations lisses complexes irréductibles de G dont la restriction à K contient ρ. Dans ce cas, le bloc $\mathcal{B}$ est équivalent à la catégorie des modules à droite sur l'algèbre d'entrelacement $\mathscr{H}_{\mathbb{C}}(G,\rho)$ de ρ qui est la $\mathbb{C}$-algèbre des G-endomorphismes de l'induite compacte de ρ à G. En plus, en utilisant la théorie

des types, on connaît la structure des algèbres $\mathscr{H}_{\mathbb{C}}(G,\rho)$ et donc on a une description complète des blocs de Bernstein de $\mathscr{R}_{\mathbb{C}}(G)$.

Le cas modulaire

La théorie des représentations ℓ-modulaires des groupes réductifs p-adiques (avec ℓ différent de p) a été développée par Vignéras dans [Vig96] et [Vig98], où elle présente en détail les représentations de $GL_n(F)$. Après, Minguez et Sécherre dans [MS14a] ont généralisé cet étude dans le cas de $GL_m(D)$.

La théorie des représentations modulaires a des grandes similarités avec la théorie complexe mais elles ont aussi des différences importantes. Par exemple la condition $\ell \neq p$ assure l'existence d'une mesure de Haar sur G à valeurs dans R, mais le fait que ℓ est positif implique que la mesure d'un sous-groupe ouvert compact de G peut être nulle. Puis, les représentations modulaires d'un groupe ouvert compact ne sont pas, en général, semi-simples et les notions de représentation cuspidale et supercuspidale ne sont pas équivalentes car il existe des représentations cuspidales qui ne sont pas supercuspidales. Pour ces raisons les methodes utilisées dans le cas complexe ne sont plus entièrement utilisables dans le cas modulaire.

Comme dans le cas complexe, on peut définir le support cuspidal d'une représentation irréductible π de G et on sait qu'il est unique à G-conjugaison près ([Vig96]). De manière similaire au cas cuspidal, si M est un sous-groupe de Levi de G et σ une représentation irréductible supercuspidale de M on appelle *paire supercuspidale* de G la paire (M,σ) et *classe d'inertie* de (M,σ) l'ensemble $[M,\sigma]_G$ des paires supercuspidales (M',σ') qui sont G-conjuguées à $(M,\sigma\chi)$ où χ est un caractére non-ramifié de M. Alors toute représentation irréductible π de G est isomorphe à un sous-quotient d'une induite parabolique $i_P^G(\sigma)$ où P est un sous-groupe parabolique de G et σ est une représentation irréductible supercuspidale d'un facteur de Levi M de P. La paire supercuspidale (M,σ) est déterminée par π à G-conjugaison près ([MS14a]) et elle est appelée *support supercuspidal* de π.

La théorie des types de Bushnell et Kutzko a été généralisée dans le cas modulaire par Vignéras ([Vig96], [Vig98]) pour le groupe $GL_n(F)$ et par Minguez, Sécherre et Stevens ([MS14b], [SS15]) pour ses formes intérieures. Dans [MS14b] et [MS14a] les auteurs étendent au cas modulaire la construction des types semi-simples de G, ils donnent une classification des représentations irréductibles de G en fonction des représentations supercuspidales et une classification de celles-ci en utilisant la théorie des types. Un outil important qu'ils utilisent est un foncteur, noté K, qui permet de faire un lien entre les représentations de G et les représentations de certains groupes linéaires finis. En effet les classifications, qu'ils ont proposé, reposent sur la classification des représentations irréductibles modulaires de GL_n sur un corps fini de Dipper et James ([DJ86], [Jam86]). En utilisant ces résultats et l'unicité du support supercuspidal, dans [SS15] les auteurs

prouvent un résultat analogue à $(\star)$: on a une décomposition

$$\mathscr{R}_R(G) = \bigoplus_{[M,\sigma]_G} \mathscr{R}_R^{[M,\sigma]_G}(G) \qquad (\star\star)$$

où les $[M,\sigma]_G$ varient parmi les classes d'inertie des paires supercuspidales de G et $\mathscr{R}_R^{[M,\sigma]_G}(G)$ est le bloc formé des R-représentations de G dont tous les sous-quotients irréductibles ont support supercuspidal dans $[M,\sigma]_G$. La preuve de $(\star\star)$, contrairement à la preuve de $(\star)$, utilise la théorie des types. En particulier en utilisant le foncteur K, ils associent à la classe d'équivalence d'un supertype semi-simple (voir définition 4.1) une sous-catégorie de $\mathscr{R}_R(G)$ et ils prouvent qu'elle est égale à une sous-catégorie de la forme $\mathscr{R}_R^{[M,\sigma]_G}(G)$.

Contrairement au cas complexe, la théorie des types n'a pas encore permis de trouver une équivalence de catégories décrivant les blocs de $\mathscr{R}_R(G)$. C'est ici que la première partie de cette thèse s'insère. Le problème qu'on veut resoudre est la description des blocs de la catégorie $\mathscr{R}_R(G)$ comme des catégories de modules sur certaines R-algèbres et la description de ces algèbres. Au lieu d'attaquer le problème dans sa globalité, on l'a simplifié en ramenant la description de chaque bloc à l'étude de certains blocs, dits de niveau 0.

Théorie des types dans le cas modulaire

Introduisons brièvement la théorie des types, qu'on trouve plus en détail dans le chapitre 3 (voir aussi [MS14b]).

Un *(super)type simple maximal* de G est une représentation irréductible λ d'un sous-groupe ouvert compact J de G qu'on note (J,λ). Il existe une décomposition $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ où κ et σ sont des représentations irréductibles de J, σ est triviale sur un pro-p-sous-groupe distingué J^1 de J et elle est (super)cuspidale vue comme représentation du groupe réductif fini J/J^1. La représentation κ est le prolongement à J d'une représentation irréductible de J^1, dite *représentation de Heisenberg* et notée η. Le type (J,λ) est dit de *niveau 0* si η et κ sont les caractères triviaux de J^1 et J.

Un *(super)type semi-simple* $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ de G est défini comme paire couvrante d'un (super)type simple maximal (J_M,λ_M) d'un sous-groupe de Levi M de G (voir définition 3.3). Alors $\boldsymbol{\lambda}$ est une représentation irréductible de $\mathbf{J}$ et il existe une décomposition $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\sigma}$, analogue à celle pour les (super)types simples. En plus la restriction de $\boldsymbol{\kappa}$ à $\mathbf{J}^1$ est irréductible et elle est notée $\boldsymbol{\eta}$. Enfin on dit que deux (super)types semi-simples sont *équivalents* si leurs indutes à G sont isomorphes et on note $[\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda}]$ la classe d'équivalence de $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$.

On peut associer à chaque supertype semi-simple $(\mathbf{J},\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\sigma})$ des paires $(\mathbf{J}_{max},\boldsymbol{\kappa}_{max})$ et $(\mathbf{J}^1_{max},\boldsymbol{\eta}_{max})$ (voir section 3.3) et un foncteur exact $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}} : \mathscr{R}_R(G) \longrightarrow \mathscr{R}_R(\mathbf{J}_{max}/\mathbf{J}^1_{max})$ qui établit un lien entre les représentations de G et les représentations du groupe linéaire

fini $\mathscr{G} = \mathbf{J}_{max}/\mathbf{J}^1_{max}$. Si on note $\mathscr{M} = \mathbf{J}/\mathbf{J}^1$ alors $(\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma})$ est une paire supercuspidale de $\mathscr{G}$. Dans le cas de niveau 0, le groupe $\mathscr{G}$ est égal à $GL_m(\mathfrak{k}_D)$ où $\mathfrak{k}_D$ est le corps résiduel de D et le foncteur $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}$ associe à toute représentation de G la représentation de $\mathscr{G}$ sur l'espace de ses invariants sous le radical pro-unipotent du sous-groupe compact maximal $GL_m(\mathcal{O}_D)$ de $GL_m(D)$, où $\mathcal{O}_D$ est l'anneau des entiers de D.

Comme déjà mentionné, dans [SS15] les auteurs prouvent qu'il existe une correspondence bijective entre les classes d'inertie des paires supercuspidales de G et les classes d'équivalence des supertypes semi-simples de G : la classe d'inertie $[M, \sigma]_G$ correspond à la classe d'équivalence $[\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}]$ si les sous-quotients irréductibles de $\mathrm{ind}_{\mathbf{J}}^{G}(\boldsymbol{\lambda})$ sont exactement les représentations irréductibles de G qui ont leurs support supercuspidal dans $[M, \sigma]_G$. Puis ils associent à $[\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}]$ la sous-catégorie $\mathscr{R}_R(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ des représentations V de G qui sont engendrées par le sous-espace maximal de $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(V)$ dont tous les sous-quotients irréductibles ont support supercuspidal dans une classe d'équivalence déterminée par $(\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma})$ (voir définition 1.58) et ils prouvent que $\mathscr{R}_R(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathscr{R}_R^{[M,\sigma]_G}(G)$ si $[\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}]$ correspond à $[M, \sigma]_G$. Cela donne une décomposition en blocs

$$\mathscr{R}_R(G) = \bigoplus_{[\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda}]} \mathscr{R}_R(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}) \qquad (\star\star\star)$$

où les $[\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}]$ varient parmi les classes d'équivalence des supertypes semi-simples de G. Un bloc $\mathscr{R}_R(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ dans $(\star\star\star)$ est dit de *niveau* 0 si $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est de niveau 0 et de *niveau positif* sinon. On appelle sous-catégorie de niveau 0 de $\mathscr{R}_R(G)$ la somme directe des blocs de niveau 0 et si on fixe une paire $(\mathbf{J}^1_{max}, \boldsymbol{\eta}_{max})$ comme ci-dessus, on note $\mathscr{R}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ la somme directe des blocs $\mathscr{R}_R(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ tels que $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est associé à $\boldsymbol{\eta}_{max}$. Pour ramener la description d'un bloc de niveau positif à l'étude d'un blocs de niveau 0 il suffit de trouver une équivalence de catégories entre $\mathscr{R}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ et une sous-catégorie de niveau 0, pas nécessairement de $\mathscr{R}_R(G)$.

Résultats obtenus dans la thèse

Par la théorie de types, à chaque strate simple (et donc à tout supertype simple défini à partir d'elle) est associé un groupe linéaire à coefficients dans D', une algèbre à division centrale de dimension finie sur une extension finie E de F. Alors à chaque supertype semi-simple $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est assoicié un groupe, noté $B^\times$, qui est un produit de groupes de cette forme et qui ne dépend que de la représentation $\boldsymbol{\eta}_{max}$ associée à $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$.

Le premier objectif de cette thèse est de prouver que la sous-catégorie $\mathscr{R}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ de $\mathscr{R}_R(G)$ est équivalente à la sous-catégorie de niveau 0 de $\mathscr{R}_R(B^\times)$. Pour prouver ce résultat on utilise un théoreme de la théorie des catégories (voir théorème 1.6) qui, appliqué au notre cas, donne une équivalence entre $\mathscr{R}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ et la catégorie des modules sur la R-algèbre, notée $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$, des fonctions $\Phi : G \to \mathrm{End}_R(V)$, où V désigne l'espace

de $\boldsymbol{\eta}_{max}$, telles que $\Phi(jgj') = \boldsymbol{\eta}_{max}(j) \circ \Phi(g) \circ \boldsymbol{\eta}_{max}(j')$ pour tout $j, j' \in \mathbf{J}^1_{max}$ et $g \in G$ et dont le support est une union finie de $\mathbf{J}^1_{max}$-doubles classes. De manière analogue, si K^1 désigne le radical unipotent du sous-groupe compact maximal de $B^\times$, on a une équivalence entre la sous-catégorie de niveau 0 de $\mathscr{R}_R(B^\times)$, notée $\mathscr{R}_R(B^\times, K^1)$, et la catégorie des modules sur la R-algèbre, notée $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$, des fonctions $\Phi : B^\times \to R$ biinvariants par K^1 et dont le support est une union finie de K^1-doubles classes. Donc, pour prouver l'équivalence entre $\mathscr{R}_R(B^\times, K^1)$ et $\mathscr{R}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ il suffit de trouver un isomorphisme d'algèbres entre $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$ et $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$. La méthode qu'on a utilisée dans cette thèse pour démontrer qu'il existe un isomorphisme entre $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$ et $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$, est de produire une présentation par générateurs et relations de la première algèbre et puis de prouver qu'il existe un morphisme entre le deux algèbres. Le chapitre 2 est consacré à trouver une présentation de $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$ qui est donnée par la proposition 2.16. La section 3.3 est dédiée à la construction d'isomorphismes entre $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$ et $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$. La preuve de ce dernier résultat n'est pas complète car elle repose sur une conjecture (conjecture 3.35 à page 66) qui assure que certains éléments de $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ satisfont les dernières deux relations de la proposition 2.16. On connaît plusieurs cas pour lesquels la conjecture est satisfaite (voir remarque 3.39) et donc on a l'espoir qu'il suffit seulement de terminer les calculs. Dans le reste de la thèse on a considéré vraie cette conjecture.

Une fois qu'on sait que $\mathscr{R}_R(B^\times, K^1)$ et $\mathscr{R}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ sont équivalentes, on a produit de façon explicite la correspondance entre les blocs de niveau 0 de $\mathscr{R}_R(B^\times)$ et les blocs de $\mathscr{R}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$. Cela ramene la description d'un bloc de niveau positif de $\mathscr{R}_R(G)$ à l'étude d'un blocs de niveau 0 de $\mathscr{R}_R(B^\times)$. Enfin on a approfondi le problème de décrire les blocs de niveau 0. Puisque à chaque bloc de $\mathscr{R}_R(B^\times, K^1)$ correspond un idempotent central primitif de l'algèbre $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$, on a déduit l'ensemble $\mathrm{Id}(B^\times)$ des idempotents centraux de cette algèbre à partir des idempotents centraux de la même algèbre dans le cas $car(R) = 0$, par réduction modulo ℓ. Cela implique que chaque bloc de niveau 0 de $\mathscr{R}_R(B^\times)$ est équivalent à la catégorie des modules sur l'algèbre $e\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$ avec $e \in \mathrm{Id}(B^\times)$. Tout en sachant une présentation de $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$ et une formule pour $e \in \mathrm{Id}(B^\times)$, on n'a pas une description complète de l'algèbre $e\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$.

Résumé des chapitres

La première partie de la thèse est composée de quatre chapitres.

Dans le chapitre 1 on introduit les définitions initiales et les outils qu'on utilisera pendant toute la première partie de la thèse. On présente la théorie des représentations lisses modulaires d'un groupe localement profini $\mathtt{G}$ (sections 1.1, 1.3 et 1.8), on définit et on étudie des algèbres d'entrelacement et des sous-catégories de $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$ (sections 1.4, 1.5, 1.6), on énonce des résultats généraux sur les algèbres avec idempotents (section 1.2) et enfin on traite la théorie de Fourier pour les groupes finis (section 1.7).

Le chapitre 2 est dédié à l'étude de l'algèbre $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$. Dans les quatres premières sections on choisit des générateurs de cette algèbre, on cherche des relations qu'ils satisfont et on prouve que ceux-ci définissent une présentation par générateurs et relations de $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$. Dans les sections 2.5 et 2.6 on trouve une formule pour les idempotents centraux de $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$: d'abord dans le cas de caractéristique de R nulle en utilisant la théorie de Fourier pour les groupes finis et puis dans le cas de caractéristique positive par réduction modulo ℓ. Enfin dans la section 2.7 on donne quelques résultats dans le cas où le groupe est un groupe spécial linéaire à coefficients dans F.

Dans chapitre 3 on s'intéresse à l'algèbre $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ et son lien avec l'algèbre $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$. D'abord on introduit la théorie des types dans le cas modulaire (sections 3.1 et 3.2) et puis on ramene l'étude de l'algèbre $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ au cas de l'algèbre $\mathscr{H}_R(G, \eta)$ (section 3.3). Enfin, dans la section 3.4 on prouve que les algèbres $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$ et $\mathscr{H}_R(G, \eta)$ sont isomorphes. On rappelle que la preuve repose sur la conjecture 3.35 et donc elle n'est pas complète.

Le chapitre 4 est la continuation naturelle de ce qui a été fait dans le chapitre 3. On prouve l'équivalence entre les catégories $\mathscr{R}_R(B^\times, K^1)$ et $\mathscr{R}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ (section 4.1), on décrit la correspondance parmi les blocs de ces catégories (section 4.2) et enfin on approfondit l'étude des blocs de niveau 0 (section 4.3) en utilisant les idempotents centraux de l'algèbre $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$.

Prespective de recherche

D'abord il faut terminer la preuve de la conjecture 3.35 pour avoir un résultat complet dans le cas de $G = GL_m(D)$.

Puis il peut être intéressant de travailler selon les deux axes suivants :

- Continuer avec l'étude des blocs de niveau 0 en décrivant les algèbres $e\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$ avec $e \in \mathrm{Id}(B^\times)$.
- Généraliser le résultat pour des autres groupes réducfits connexes, par exemple $SL_m(F)$ ou $SL_m(D)$.

Précisons les deux points ci-dessus :

Pour le premier, on peut essayer de trouver une présentation par générateurs et relations de l'algèbre $e\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$ en sachant une présentation de $\mathscr{H}_R(B^\times, K^1)$ et une formule pour les $e \in \mathrm{Id}(B^\times)$. Une autre méthode pour simplifier le problème est suggérée par un travail récent de Dat ([Dat15]) où il prouve que chaque bloc de niveau 0 de $\mathscr{R}_{\overline{\mathbb{Z}}_\ell}(GL_n(F))$ est équivalent au bloc unipotent d'un certain produit de groupes linéaires. Si on généralise ce résultat dans le cas de $G = GL_m(D)$, cela permet de décrire seulement le bloc unipotent pour avoir une description complète de $\mathscr{R}_R(G)$.

En ce qui concerne le deuxième point on a déjà un résultat partiel (voir section 2.7) qui affirme que l'algèbre $\mathscr{H}_R(SL_m(F), K_S^1)$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathscr{H}_R(GL_m(F), K^1)$. Pendant le doctorat j'ai essayé de trouver une présentation par générateurs et relations de $\mathscr{H}_R(SL_m(F), K_S^1)$ en utilisant la méthode du chapitre 2, mais j'ai rencontré des problèmes techniques car il y a des propriétés que j'utilise, qui sont vraies pour un groupe général linéaire mais pas pour un groupe spécial linéaire. Cependant on peut espérer que l'algèbre analogue à $\mathscr{H}_R(G, \eta)$ dans le cas $G = SL_m(F)$ soit isomorphe à une sous-algèbre de $\mathscr{H}_R(G, \eta)$ et donc à $\mathscr{H}_R(SL_m(F), K_S^1)$. C'est évident que pour généraliser tous les résultats de cette thèse on a besoin d'une théorie des types modulaire dans le cas de $SL_m(D)$ qui n'est pas entièrement construite.

Représentation de Weil et groupes métaplectiques sur un anneau intègre

Dans la deuxième partie de cette thèse on présente le problème de définir le groupe métaplectique et la représentation de Weil sur un anneau intègre. Ce travail a été fait en commun avec Daniele Turchetti et il constitue l'article [CT15]. Introduisons brièvement les résultats qu'on a obtenus. Pour une introduction complète voir le chapitre 5.

Le cas complexe

Les notions de groupe métaplectique et de représentation de Weil apparaissent dans l'article [Wei64] de André Weil, où il construit une représentation projective complexe du groupe symplectique sur un corps local et puis il l'étend en obtenant une représentation d'un revêtement du groupe symplectique.

Dans la construction de Weil on considère un corps local F, un F-espace vectoriel de dimension finie X, l'espace $W = X \times X^*$ et le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$. Soient $T = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ le groupe multiplicatif des nombres complexes de norme unitaire et $\chi : F \to T$ un caractère lisse complexe non trivial de F. Alors Weil montre l'existence d'une représentation complexe projective de $\mathrm{Sp}(W)$, c'est-à-dire définie à multiplication d'un élément de T près, sur l'espace $L^2(X)$ des fonctions complexes de X de carré intégrable. Puis il construit une extension centrale $\mathrm{Mp}(W)$ de $\mathrm{Sp}(W)$ par T telle qu'on peut étendre cette représentation projective à une représentation $\mathrm{Mp}(W) \to GL(L^2(X))$, dite *représentation de Weil*. Il montre enfin que le groupe $\mathrm{Mp}(W)$ contient un revêtement double non trivial de $\mathrm{Sp}(W)$ sur lequel la représentation de Weil peut être restreinte.

Le cas "modulaire"

Dans notre travail, on suppose que F est un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique différente de 2 et de caractéristique résiduelle p. Soit

q le cardinal du corps résiduel de F. On considère un anneau intègre R tel que $p \in R^\times$, R contient une racine carrée de q et les racines p^n-èmes de l'unité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui assure l'existence d'un R-caractère lisse non trivial $\chi : F \to R^\times$. On veut remplacer T par le groupe multiplicatif $R^\times$ de R dans la construction de Weil. On a prouvé que ces hypothèses sur R sont suffisantes pour reproduire les résultats de Weil en utilisant la même stratégie.

Pour construire le revêtement double non trivial de $\mathrm{Sp}(W)$, qu'on appelle *groupe métaplectique réduit*, d'abord on construit le groupe métaplectique $\mathrm{Mp}(W)$ de façon telle à avoir une suite exacte courte pas scindée

$$1 \longrightarrow R^\times \longrightarrow \mathrm{Mp}(W) \longrightarrow \mathrm{Sp}(W) \longrightarrow 1. \qquad (*)$$

Ensuite on étudie les sous-groupes de $\mathrm{Mp}(W)$ qui sont des extensions non triviales de $\mathrm{Sp}(W)$. On peut résumer le résultat dans le théorème suivant.

Théorème. *Soit* $\mathrm{car}(R) \neq 2$. *Il existe un sous-groupe* $\mathrm{Mp}_2(W)$ *de* $\mathrm{Mp}(W)$ *tel que la suite exacte courte* $(*)$ *se restreint en la suite exacte courte non scindée*

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \mathrm{Mp}_2(W) \longrightarrow \mathrm{Sp}(W) \longrightarrow 1. \qquad (**)$$

Il y a plusieurs problèmes qui se manifestent quand la caractéristique de R est positive. L'hypothèse $p \in R^\times$ assure l'existence d'une mesure de Haar sur X à valeurs dans R mais on n'a plus la notion de fonction de carré integrable. Donc on remplace $L^2(X)$ par l'espace $\mathcal{S}(X)$ des fonctions de Schwarz, c'est-à-dire des fonctions à support compact et localement constantes à valeurs dans R. On a aussi développé une théorie de Fourier sur la base du paragraphe 3.10 de [Vig96]. En outre, puisque R est de caractéristique positive, les calculs diffèrent dans plusieurs situations, par exemple lorsqu'il faut calculer explicitement les propriétés de la norme réduite sur les quaternions en relation avec l'arithmétique de R.

Enfin dans le chapire 11, qui ne fait pas partie de [CT15], on prouve que la construction du groupe métaplectique est "fonctorielle" dans un certain sens : on construit un foncteur entre une catégorie, où les objets sont les paires (R, χ) comme ci-dessus, et la catégorie des groupes tel que l'image de (R, χ) par ce foncteur soit le groupe métaplectique associé à R et χ.

Première partie

Catégorie des représentations lisses de $GL_m(D)$

Chapitre 1

Préliminaires

Dans tout le manuscrit on utilise les notations suivantes.

- On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs.
- Si X est un ensemble fini on note $|X|$ son cardinal.
- On désigne avec $\bigsqcup$ une union disjointe.
- Si A est un anneau unitaire et $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{I}_n$ la matrice identité à coefficients dans A.
- Soient A un anneau unitaire, $\mathtt{G}$ un groupe et X un ensemble contenu dans $\mathtt{G}$. On note $\mathbf{1}_X : \mathtt{G} \longrightarrow A$ la fonction caractéristique de X définie par

$$\mathbf{1}_X(g) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in X \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

  pour tout $g \in \mathtt{G}$.
- Soit A un anneau (pas forcément unitaire). On note Mod_A la catégorie des A-modules à gauche non dégénérés ($M = AM$) et $\mathrm{Mod} - A$ la catégorie des A-modules à droite non dégénérés ($M = MA$). Si on note A^{op} l'anneau opposé de A alors il y a une équivalence de catégories entre Mod_A et $\mathrm{Mod} - A^{\mathrm{op}}$.

1.1 Groupes localement profinis

Cette thèse concerne la théorie des représentations de certains groupes qui font partie d'une famille de groupes qu'on appelle localement profinis.

Définition 1.1. Un groupe topologique $\mathtt{G}$ est dit *localement profini* s'il vérifie les propriétés équivalentes suivantes :

(i) il est localement compact et totalement discontinu ;

(ii) il est séparé et ses sous-groupes ouverts compacts forment un système fondamental de voisinages de l'unité.

On peut aussi définir la catégorie des groupes localement profinis, où les morphismes sont des morphismes de groupes qui sont des applications continues.

Exemple. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier. Des exemples de groupes localement profinis sont les groupes finis ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $GL_n(\mathbb{F}_p)$), les groupes profinis ($\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}$, $GL_n(\mathbb{Z}_p)$) et les groupes réductifs p-adiques ($\mathbb{Q}_p^\times$, $GL_n(\mathbb{Q}_p)$).

Pour certains groupes localement profinis on peut définir une notion similaire à la notion d'ordre pour les groupes finis, qu'on appelle *pro-ordre*. On observe qu'un sous-groupe compact d'un groupe localement profini est un groupe profini.

- On appelle *entier surnaturel* une application

$$n : \{\text{nombres premiers}\} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

  et on écrit formellement $n = \prod p^{n(p)}$. On définit formellement le produit, le p.p.c.m. et le p.g.c.d. de deux entiers surnaturels.

- Si $\mathtt{K}$ est un groupe profini admettant une base dénombrable d'ouverts compacts, le *pro-ordre* de $\mathtt{K}$ est l'entier surnaturel

$$|\mathtt{K}| = p.p.c.m[\mathtt{K} : \mathtt{K}']$$

  où $\mathtt{K}'$ varie parmi les sous-groupes ouverts compacts de $\mathtt{K}$.

- Si $\mathtt{G}$ est un groupe localement profini admettant une base dénombrable d'ouverts compacts, le *pro-ordre* de $\mathtt{G}$ est l'entier surnaturel

$$|\mathtt{G}| = p.p.c.m|\mathtt{K}|$$

  où $\mathtt{K}$ varie parmi les sous-groupes ouverts compacts de $\mathtt{G}$.

Exemple. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, p un nombre premier, F un corps p-adique, $\mathcal{O}_F$ son anneau des entiers et q le cardinal du corps résiduel de F. Alors

$$|GL_n(F)| = |GL_n(\mathcal{O}_F)| = \prod_{i=1}^{n}(q^i - 1)p^\infty.$$

Pour plus de détails sur les groupes localement profinis et leurs propriétés, voir I.1.1-6 de [Vig96].

1.2 Algèbres avec un idempotent

Dans cette section on introduit des résultats qui permettent de prouver que deux catégories sont équivalentes. Pour plus de détails voir I.6 de [Vig96].

Soient R un anneau commutatif unitaire, A une R-algèbre (pas nécessairement unitaire) et e un idempotent de A. Alors eAe est une R-algèbre unitaire avec unité e.

Lemme 1.2.

(a) Soit V un A-module à gauche. L'application $\vartheta_V : eV \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(Ae, V)$ définie par $\vartheta_V(ev)(ae) = aev$ pour tout $v \in V$ et $a \in A$, est un isomorphisme de R-modules d'inverse $\varphi \longmapsto \varphi(e)$.

(b) Soit $V = Ae$. Alors $\vartheta_{Ae} : eAe \longrightarrow (\mathrm{End}_A(Ae))^{op}$ est un isomorphisme de R-algèbres.

Démonstration.

(a) L'application ϑ_V est bien définie car pour tout $v \in V$ et $a, a' \in A$ on a $\vartheta_V(ev)(a'ae) = a'aev = (a'\vartheta_V(ev))(ae)$ et elle est clairement R-linéaire. En plus pour tout $v \in V$ on a $\vartheta_V(ev)(e) = ev$ et pour tout $a \in A$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(Ae, V)$ on a$\vartheta_V(\varphi(e))(ae) = ae\varphi(e) = \varphi(ae)$. Donc ϑ_V est un isomorphisme de R-modules.

(b) Il suffit de prouver que ϑ_{Ae} respecte le produit. On a $\vartheta_{Ae}(ea'ea''e)(ae) = aea'ea''e = (\vartheta_{Ae}(ea''e) \circ \vartheta_{Ae}(ea'e))(ea)$ pour tout $a, a', a'' \in A$ et donc ϑ_{Ae} est un isomorphisme de R-algèbres. □

Pour tout A-module à gauche V, le groupe eV est un eAe-module à gauche et le groupe $\mathrm{Hom}_A(Ae, V)$ est un $\mathrm{End}_A(Ae)$-module à droite. Par le lemme 1.2(b), $\mathrm{Hom}_A(Ae, V)$ devient un eAe module à gauche par l'action $eae.\varphi = \varphi \circ \vartheta_{Ae}(eae)$ pour tout $a \in A$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(Ae, V)$.

Proposition 1.3. *Soit V un A-module à gauche. L'application ϑ_V définie dans le lemme 1.2(a) est un isomorphisme de eAe-modules à gauche.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que ϑ_V est eAe-linéaire. Pour tout $a, a' \in A$ on a $\vartheta_V(ea'ev)(ae) = aea'ev = (\vartheta_V(ev) \circ \vartheta_{Ae}(ea'e))(ae) = (ea'e.\vartheta_V(ev))(ae)$. □

Maintenant on donne quelques résultats contenus dans I.6 de [Vig96].

Lemme 1.4 (I.6.3 de [Vig96])**.** *L'application $V \longmapsto eV$ induit une bijection entre les classes d'isomorphisme des A-modules simples V tels que $eV \neq 0$ et les classes d'isomorphisme des eAe-modules simples.*

Définition 1.5. On dit que A *a assez d'idempotents* si pour tout ensemble fini $\{a_1, \ldots, a_r\}$ dans A, il existe un idempotent $e = e^2 \in A$ tel que $a_i \in eAe$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Maintenant on suppose que l'algèbre A a assez d'idempotents et que les A-modules sont non dégénérés. On note $\mathcal{C}$ la sous-catégorie pleine de Mod_A des A-modules V qui sont engendrés par eV (c'est-à-dire $V = AeV$).

Théorème 1.6 (I.6.6 de [Vig96])**.** *Si tout sous-module non nul V' d'un objet V de $\mathcal{C}$ vérifie $eV' \neq 0$ alors le foncteur $V \longmapsto eV$ est une équivalence de catégories de quasi-inverse $W \longmapsto Ae \otimes_{eAe} W$ entre $\mathcal{C}$ et Mod_{eAe}.*

On veut récrire ce résultat pour les $\mathrm{End}(Ae)$-modules à droite. Pour tout A-module V on note

$$\widetilde{V} = \sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}_A(Ae,V)} \varphi(Ae)$$

qui est un sous-A-module de V. Par la proposition 1.3, la condition que V est engendré par eV devient $V = \widetilde{V}$ et donc $\mathcal{C}$ est la sous-catégorie pleine de Mod_A des A-modules V tels que $V = \widetilde{V}$.

Corollaire 1.7. *Si $\mathrm{Hom}_A(Ae, V') \neq 0$ pour tout sous-module non nul V' d'un objet V de $\mathcal{C}$ alors le foncteur $V \longmapsto \mathrm{Hom}_A(Ae, V)$ est une équivalence de catégories de quasi-inverse $W \longmapsto W \otimes_{\mathrm{End}(Ae)} Ae$ entre $\mathcal{C}$ et $\mathrm{Mod} - \mathrm{End}(Ae)$.*

Démonstration. Par le lemme 1.2 les catégories Mod_{eAe} et $\mathrm{Mod} - \mathrm{End}(Ae)$ sont équivalentes et les actions à gauche deviennent des actions à droite si on remplace eAe par $\mathrm{End}(Ae)$. Par la proposition 1.3, la condition $eV' \neq 0$ devient $\mathrm{Hom}_A(Ae, V') \neq 0$. On obtient le résultat par le théorème 1.6. □

1.3 Théorie des représentations

Dans cette section on introduit la notion de représentation, qui est à la base de cette thèse. Puis on définit la catégorie des représentations lisses d'un groupe profini et on voit qu'elle est équivalente à une catégorie de modules.

Soient $\mathtt{G}$ un groupe localement profini et R un anneau commutatif unitaire. Une représentation de $\mathtt{G}$ sur R est un morphisme de groupes

$$\pi : \mathtt{G} \to GL(V) = \mathrm{Aut}_R(V)$$

où V est un R-module. On la note (π, V) ou seulement π ou V s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Dans ce manuscrit on s'intéresse à certaines représentations, dites lisses.

Définition 1.8. Une représentation (π, V) de $\mathtt{G}$ est dite *lisse* si pour tout $v \in V$ le fixateur $\mathtt{G}_v = \{g \in \mathtt{G} \,|\, \pi(g)(v) = v\}$ de v dans $\mathtt{G}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathtt{G}$. On note $\mathrm{Rep}_R(\mathtt{G}) = \mathrm{Rep}(\mathtt{G})$ l'ensemble des représentations lisses de $\mathtt{G}$ sur R.

On peut définir une notion de morphisme entre deux représentations lisses.

Définition 1.9. Soient (π, V) et (ρ, W) deux représentations lisses de $\mathtt{G}$. Un *morphisme de représentations* (ou $\mathtt{G}$-morphisme) est un morphisme de R-modules $\phi : V \to W$ tel que

$\phi \circ \pi(g) = \rho(g) \circ \phi$ pour tout $g \in \mathtt{G}$. On note $\mathrm{Hom}_{\mathtt{G}}(\pi, \rho)$ l'ensemble des $\mathtt{G}$-morphismes de (π, V) vers (ρ, W) et $\mathrm{End}_{\mathtt{G}}(\pi) = \mathrm{Hom}_{\mathtt{G}}(\pi, \pi)$.

Les représentations lisses de $\mathtt{G}$ sur R forment une catégorie abélienne dont les objets sont les éléments de $\mathrm{Rep}(\mathtt{G})$ et les morphismes sont les éléments de $\mathrm{Hom}_{\mathtt{G}}(\pi, \rho)$ pour tout $\pi, \rho \in \mathrm{Rep}(\mathtt{G})$. On note cette catégorie $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$.

On note $\mathrm{Irr}_R(\mathtt{G}) = \mathrm{Irr}(\mathtt{G})$ l'ensemble des représentations irréductibles lisses de $\mathtt{G}$ sur R qui sont les objets simples de $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$.

Dès maintenant toutes les représentations sont supposées lisses.

1.3.1

Dans ce paragraphe on introduit la notion de bloc de $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$.

Définition 1.10. Soit $\mathcal{C}$ une sous-catégorie pleine et abélienne de $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$. S'il existe deux sous-catégories pleines et abéliennes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de $\mathcal{C}$ telles que

- pour tout $V \in \mathrm{Rep}(\mathtt{G})$ il existe un objet V_1 de $\mathcal{C}_1$ et un objet V_2 de $\mathcal{C}_2$ tels que $V = V_1 \oplus V_2$,
- $\mathrm{Hom}_{\mathtt{G}}(V_1, V_2) = 0$ pour tous objets V_1 de $\mathcal{C}_1$ et V_2 de $\mathcal{C}_2$

alors on dit que $\mathcal{C}$ est la somme directe de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ et on note $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$.

Définition 1.11. Une sous-catégorie pleine et abélienne $\mathcal{C}$ de $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$ est *indécomposable* si elle n'est pas une somme directe de deux sous-catégories pleines et abéliennes non triviales. Dans ce cas on dit que $\mathcal{C}$ est un *bloc* de $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$.

Remarque 1.12. Un bloc $\mathcal{C}$ de $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$ est déterminé par les représentations irréductibles qu'il contient et puisque il est une sous-catégorie pleine et abélienne, ces représentations sont les sous-quotients irréductibles de ses objets.

1.3.2

Dans ce paragraphe on suppose qu'il existe un sous-groupe ouvert compact $\mathtt{K}_0$ de $\mathtt{G}$ de pro-ordre inversible dans $R^\times$ (c'est-à-dire que si $|\mathtt{K}_0| = \prod p^{n(p)}$ alors les premiers p tels que $n(p) \neq 0$ sont inversibles dans $R^\times$). On considère la mesure de Haar $\mathtt{dg}$ de $\mathtt{G}$ à valeurs dans R telle que $\int_{\mathtt{K}_0} \mathtt{dg} = 1$ (voir I.2 de [Vig96]).

Définition 1.13. L'*algèbre de Hecke globale* $\mathscr{H}_R(\mathtt{G})$ de $\mathtt{G}$ est la R-algèbre des fonctions $f : \mathtt{G} \longrightarrow R$ localement constantes et à support compact munie du produit de convolution

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{\mathtt{G}} f_1(g) f_2(g^{-1}x) \mathtt{dg}$$

pour tout $f_1, f_2 \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G})$ et $x \in \mathtt{G}$.

On donne deux résultats importants contenus dans [Vig96].

Théorème 1.14 (I.4.4 de [Vig96]). *Les catégories $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$ et $\mathrm{Mod}_{\mathscr{H}_R(\mathtt{G})}$ sont équivalentes.*

Proposition 1.15 (I.3.2 de [Vig96]). *L'algèbre $\mathscr{H}_R(\mathtt{G})$ a assez d'idempotents (voir définition 1.5).*

1.4 L'algèbre $\mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)$

Dans cette section on introduit une algèbre qui sera un outil indispensable pour prouver les résultats fondamentaux de cette thèse.

Soient $\mathtt{G}$ un groupe localement profini, R un anneau commutatif unitaire, $\mathtt{H}$ un sous-groupe ouvert de $\mathtt{G}$ et (σ, V_σ) une représentation de $\mathtt{H}$ sur R.

Définition 1.16. Soit $\mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)$ la R-algèbre des fonctions $\Phi : \mathtt{G} \to \mathrm{End}_R(V_\sigma)$ telles que $\Phi(hgh') = \sigma(h) \circ \Phi(g) \circ \sigma(h')$ pour tout $h, h' \in \mathtt{H}$ et $g \in \mathtt{G}$ et dont le support est une union finie de $\mathtt{H}$-doubles classes, munie du produit de convolution

$$(\Phi_1 * \Phi_2)(g) = \sum_x \Phi_1(x)\Phi_2(x^{-1}g) \tag{1.1}$$

où x décrit un système de représentants de $\mathtt{G}/\mathtt{H}$ dans $\mathtt{G}$.

Le produit de convolution (1.1) est bien défini car pour tout $h \in \mathtt{H}$ et $x \in \mathtt{G}$ on a

$$\Phi_1(xh)\Phi_2((xh)^{-1}g) = \Phi_1(x)\sigma(h)\sigma(h^{-1})\Phi_2(x^{-1}g) = \Phi_1(x)\Phi_2(x^{-1}g).$$

Pour tout $g \in \mathtt{G}$, on note $\mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)_{\mathtt{H}g\mathtt{H}}$ le sous-module de $\mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)$ des fonctions qui s'annulent hors de la double classe $\mathtt{H}g\mathtt{H}$. Si σ est le caractère trivial du groupe $\mathtt{H}$, on note $\mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \mathtt{H})$ l'algèbre de Hecke correspondante. Dans ce cas, il y a un isomorphisme canonique d'algèbres $\mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \mathtt{H}) \cong \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G}, \mathtt{H}) \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

Soit $g \in \mathtt{G}$. On note $\mathtt{H}^g = g^{-1}\mathtt{H}g$ et (σ^g, V_σ) la représentation de $\mathtt{H}^g$ définie par $\sigma^g(x) = \sigma(gxg^{-1})$ pour tout $x \in \mathtt{H}^g$. On note $I_g(\sigma)$ le R-module $\mathrm{Hom}_{\mathtt{H}\cap\mathtt{H}^g}(\sigma, \sigma^g)$ et $I_{\mathtt{G}}(\sigma)$ l'ensemble des $g \in \mathtt{G}$ pour lesquels $I_g(\sigma) \neq 0$, qu'on appelle *ensemble d'entrelacement* de σ dans $\mathtt{G}$. Si $g \in I_{\mathtt{G}}(\sigma)$ on dit que g *entrelace* σ.

Proposition 1.17. *Pour tout $g \in I_{\mathtt{G}}(\sigma)$, l'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)_{\mathtt{H}g\mathtt{H}} & \longrightarrow & I_g(\sigma) \\ \Phi & \longmapsto & \Phi(g) \end{array}$$

est un isomorphisme de R-modules. Donc un élément $g \in \mathtt{G}$ entrelace σ si et seulement s'il existe un élément $\Phi \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)$ tel que $\Phi(g) \neq 0$.

Démonstration. Soit $\Phi \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G},\sigma)_{\mathtt{H}g\mathtt{H}}$. Alors $\Phi(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{H}\cap\mathtt{H}^g}(\sigma,\sigma^g)$ car $\sigma^g(x)\circ\Phi(g) = \sigma(gxg^{-1})\circ\Phi(g) = \Phi(gx) = \Phi(g)\circ\sigma(x)$ et donc l'application est bien définie. On prend $\phi \in I_g(\sigma)$ et on considère l'élément de $\mathscr{H}_R(\mathtt{G},\sigma)_{\mathtt{H}g\mathtt{H}}$ défini par $\Phi(hgh') = \sigma(h)\circ\phi\circ\sigma(h')$ pour tout $h,h' \in \mathtt{H}$. Il est bien défini car si $h_1gh'_1 = h_2gh'_2$ alors $h'_2h'^{-1}_1 = g^{-1}h_2^{-1}h_1g \in \mathtt{H}\cap\mathtt{H}^g$ et donc on obtient

$$\begin{aligned}\Phi(h_2gh'_2) &= \sigma(h_2)\phi\,\sigma(h'_2) = \sigma(h_2)\phi\,\sigma(h'_2h'^{-1}_1)\sigma(h'_1)\\ &= \sigma(h_2)\phi\,\sigma(g^{-1}h_2^{-1}h_1g)\sigma(h'_1) = \sigma(h_2)\sigma(h_2^{-1}h_1)\phi\,\sigma(h'_1) = \Phi(h_1gh'_1).\end{aligned}$$

Cela définit l'inverse de l'application $\Phi \longmapsto \Phi(g)$ qui est donc bijective. Elle est clairement R-linéaire et donc elle est un isomorphisme de R-modules. □

1.4.1

Dans ce paragraphe on définit une représentation de $\mathtt{G}$, appelée induite, à partir de la représentation (σ,V_σ) de $\mathtt{H}$. Puis on lui associe une algèbre qui est isomorphe à l'algèbre $\mathscr{H}_R(\mathtt{G},\sigma)$.

Définition 1.18. Soit $\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$ le R-module constitué des fonctions $f : \mathtt{G} \to V_\sigma$ localement constantes à support compact modulo $\mathtt{H}$ telles que $f(hg) = \sigma(h)f(g)$ pour tout $h \in \mathtt{H}$ et $g \in \mathtt{G}$. On munit $\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$ de l'action de $\mathtt{G}$ par translation à droite, c'est-à-dire de l'action $g.f : x \to f(xg)$ pour tout $g,x \in \mathtt{G}$ et $f \in \mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$. La représentation $\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$ est lisse car on a supposé $\mathtt{H}$ ouvert (voir I.5.2(b) de [Vig96]) et on l'appelle *induite compacte* de σ.

Cela définit un foncteur

$$\begin{aligned}\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}} : \mathscr{R}_R(\mathtt{H}) &\longrightarrow \mathscr{R}_R(\mathtt{G})\\ (\rho,W) &\longmapsto \mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\rho)\end{aligned}$$

tel que si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{H}}(\rho_1,\rho_2)$ alors $\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\varphi)(f) = \varphi\circ f$ pour tout $f \in \mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\rho_1)$. On appelle $\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}$ le foncteur d'*induction compacte* de $\mathtt{H}$ à $\mathtt{G}$.

Il existe aussi le foncteur $\mathrm{res}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}$ de *restriction* de $\mathtt{G}$ à $\mathtt{H}$ qui à toute représentations (π,V) de $\mathtt{G}$ associe la représentation $(\pi_{|_{\mathtt{H}}},V)$ de $\mathtt{H}$ définie par $\pi_{|_{\mathtt{H}}}(h) = \pi(h)$ pour tout $h \in \mathtt{H}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté on note encore π par $\pi_{|_{\mathtt{H}}}$.

Pour tout $v \in V_\sigma$ on considère la fonction $i_v \in \mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$ à support $\mathtt{H}$ définie par $i_v(h) = \sigma(h)(v)$ pour tout $h \in \mathtt{H}$. Alors, pour tout $x \in \mathtt{G}$ la fonction $x^{-1}.i_v : g \longmapsto i_v(gx^{-1})$ est à support $\mathtt{H}x$ et prend la valeur v en x. Donc pour tout $f \in \mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$ on a l'égalité

$$f = \sum_{x\in\mathtt{H}\backslash\mathtt{G}} x^{-1}.i_{f(x)}. \tag{1.2}$$

Si on note i_{V_σ} l'image de $v \longmapsto i_v$, alors i_{V_σ} engendre $\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$ dans $\mathrm{Rep}(\mathtt{G})$.

Remarque 1.19. Si on est dans les hypothèses du paragraphe 1.3.2 et donc s'il existe l'algèbre de Hecke globale de $\mathtt{G}$, alors on peut identifier $\mathscr{H}_R(\mathtt{H})$ à la sous-algèbre de $\mathscr{H}_R(\mathtt{G})$ des fonctions à support dans $\mathtt{H}$. Par le théorème 1.14 on peut identifier $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$ avec $\mathrm{Mod}_{\mathscr{H}_R(\mathtt{G})}$ et $\mathscr{R}_R(\mathtt{H})$ avec $\mathrm{Mod}_{\mathscr{H}_R(\mathtt{H})}$ et on obtient $\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma) = \mathscr{H}_R(\mathtt{G}) \otimes_{\mathscr{H}_R(\mathtt{H})} V_\sigma$ (voir I.5.2 de [Vig96]).

Proposition 1.20 (Réciprocité de Frobenius)**.** *Le foncteur* $\mathrm{res}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}$ *est un adjoint à droite de* $\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}$ *et pour toute* $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(\mathtt{G})$ *l'application* $\mathrm{Hom}_{\mathtt{H}}(\sigma, V) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathtt{G}}(\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma), V)$ *définie par* $\phi \longmapsto \psi$ *tels que* $\phi(v) = \psi(i_v)$ *est un isomorphisme de* R*-modules.*

Démonstration. Voir I.5.7(ii) de [Vig96]. □

La R-algèbre $\mathrm{End}_{\mathtt{G}}\left(\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)\right)$ des $\mathtt{G}$-endomorphismes de $\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$ est appelée *algèbre de Hecke de* $\mathtt{G}$ *relativement à* σ.

Proposition 1.21. *L'application* $\xi : \mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathtt{G}}(\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma))$ *définie par*

$$\xi(\Phi)(f)(g) = (\Phi * f)(g) = \sum_{x \in \mathtt{G}/\mathtt{H}} \Phi(x) f(x^{-1}g) \tag{1.3}$$

pour tout $\Phi \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)$, $f \in \mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$ *et* $g \in \mathtt{G}$ *est un isomorphisme de* R*-algèbres avec inverse définie par* $\xi^{-1}(\theta)(g)(v) = \theta(i_v)(g)$ *pour tout* $\theta \in \mathrm{End}_{\mathtt{G}}\left(\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)\right)$, $g \in \mathtt{G}$ *et* $v \in V_\sigma$.

Démonstration. On prouve que l'application ξ est bien définie.

- On vérifie que la somme dans (1.3) est bien définie : pour tout $h \in \mathtt{H}$, $x, g \in \mathtt{G}$ on a

$$\Phi(xh) f((xh)^{-1}g) = \Phi(x)\sigma(h) f(h^{-1}x^{-1}g) = \Phi(x)\sigma(h)\sigma(h^{-1}) f(x^{-1}g) = \Phi(x) f(x^{-1}g).$$

- On vérifie que $\xi(\Phi)(f) \in \mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$ pour tout $\Phi \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)$ et $f \in \mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$:

$$\begin{aligned} \xi(\Phi)(f)(hg) &= \sum_{x \in \mathtt{G}/\mathtt{H}} \Phi(x) f(x^{-1}hg) = \sum_{x \in \mathtt{G}/\mathtt{H}} \Phi(x) f((h^{-1}x)^{-1}g) \\ &= \sum_{x' \in \mathtt{G}/\mathtt{H}} \Phi(hx') f(x'^{-1}g) = \sigma(h)\big(\xi(\Phi)(f)(g)\big) \end{aligned}$$

  pour tout $h \in \mathtt{H}$ et $g \in \mathtt{G}$. En plus $\xi(\Phi)(f)$ est localement constante et à support compact modulo $\mathtt{H}$.

- On vérifie que $\xi(\Phi) \in \mathrm{End}_{\mathtt{G}}(\mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma))$ pour tout $\Phi \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)$:

$$\xi(\Phi)(g.f)(g') = \sum_{x \in \mathtt{G}/\mathtt{H}} \Phi(x) f(x^{-1}g'g) = g.(\xi(\Phi)(f))(g')$$

  pour tout $f \in \mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$ et $g, g' \in \mathtt{G}$.

Donc ξ est bien définie et clairement elle est un morphisme de R-modules. On vérifie qu'il respecte le produit de convolution :

$$\begin{aligned}\xi(\Phi_1 * \Phi_2)(f)(g) &= \sum_{x\in\mathtt{G}/\mathtt{H}}\sum_{y\in\mathtt{G}/\mathtt{H}} \Phi_1(y)\Phi_2(y^{-1}x)f(x^{-1}g)\\ &= \sum_{y\in\mathtt{G}/\mathtt{H}} \Phi_1(y)\sum_{x'\in\mathtt{G}/\mathtt{H}} \Phi_2(x')f(x'^{-1}y^{-1}g)\\ &= \xi(\Phi_1)\Big(\xi(\Phi_2)(f)\Big)(g) = \Big(\xi(\Phi_1)\circ\xi(\Phi_2)\Big)(f)(g)\end{aligned}$$

pour tout $\Phi_1,\Phi_2 \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G},\sigma)$, $f \in \mathrm{ind}_{\mathtt{H}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$ et $g \in \mathtt{G}$ et donc ξ est un morphisme de R-algèbres. Puis on a

$$\xi^{-1}(\xi(\Phi))(g)(v) = \sum_{x\in\mathtt{G}/\mathtt{H}} \Phi(x)i_v(x^{-1}g)$$

avec $\Phi(x)i_v(x^{-1}g) \neq 0$ seulement si $x \in g\mathtt{H}$. On obtient $\xi^{-1}(\xi(\Phi))(g)(v) = \Phi(g)(v)$ et donc ξ est un isomorphisme de R-algèbres. □

1.4.2

Dans ce paragraphe on étudie la structure de l'algèbre $\mathscr{H}_R(\mathtt{G},\sigma)$ quand $\mathtt{G}$ est un produit direct de groupes localement profinis.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$ soient $\mathtt{G}_i$ un groupe localement profini, $\mathtt{H}_i$ un sous-groupe ouvert de $\mathtt{G}_i$ et (σ_i, V_i) une représentation de $\mathtt{H}_i$. Alors le groupe $\mathtt{G} = \mathtt{G}_1 \times \cdots \times \mathtt{G}_r$ est localement profini, $\mathtt{H} = \mathtt{H}_1 \times \cdots \times \mathtt{H}_r$ est un sous-groupe ouvert de $\mathtt{G}$ et on a un isomorphisme de groupes $\mathtt{G}/\mathtt{H} \cong \mathtt{G}_1/\mathtt{H}_1 \times \cdots \times \mathtt{G}_r/\mathtt{H}_r$.

On note V_σ le R-module $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$. Soient $\varphi_i \in \mathrm{End}_R(V_i)$ (resp. $GL(V_i)$) pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$. On note $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_r$ l'application dans $\mathrm{End}_R(V_\sigma)$ (resp. $GL(V_\sigma)$) définie par $(\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_r)(v_1 \otimes \cdots \otimes v_r) = \varphi_1(v_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_r(v_r)$ pour tout $v_1 \in V_1, \dots, v_r \in V_r$.

On peut considérer la représentation (σ, V_σ) de $\mathtt{H}$ définie par

$$\sigma(h_1,\dots,h_r) = \sigma_1(h_1) \otimes \cdots \otimes \sigma_r(h_r)$$

pour tout $h_i \in \mathtt{H}_i$ et $i \in \{1,\dots,r\}$. On observe que si pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$ on note $\mathtt{p}_i : \mathtt{H} \to \mathtt{H}_i$ la projection canonique, alors $\sigma = (\sigma_1 \circ \mathtt{p}_1) \otimes \cdots \otimes (\sigma_r \circ \mathtt{p}_r)$. Pour simplifier les notations, dans tout le manuscrit on écrit $\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$.

On veut démontrer qu'il existe un morphisme d'algèbres

$$\mathscr{H}_R(\mathtt{G}_1,\sigma_1) \otimes \cdots \otimes \mathscr{H}_R(\mathtt{G}_r,\sigma_r) \longrightarrow \mathscr{H}_R(\mathtt{G},\sigma).$$

Lemme 1.22. *Soit* $\zeta : \mathscr{H}_R(\mathtt{G}_1, \sigma_1) \times \cdots \times \mathscr{H}_R(\mathtt{G}_r, \sigma_r) \longrightarrow \mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)$ *l'application définie par* $\zeta(f_1, \ldots, f_r)(g_1, \ldots, g_r) = f_1(g_1) \otimes \cdots \otimes f_r(g_r)$ *pour tout* $f_i \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G}_i, \sigma_i)$, $g_i \in \mathtt{G}_i$ *et* $i \in \{1, \ldots, r\}$. *Alors* ζ *est multilinéaire (c'est-à-dire linéaire sur chaque composante).*

Démonstration. On vérifie que ζ est bien définie. Puisque pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ le support de f_i est une union finie de $\mathtt{H}_i$-doubles classes alors le support de $\zeta(f_1, \ldots, f_r)$ est une union finie de $\mathtt{H}$-doubles classes. Puis, si $h_i, h_i' \in \mathtt{H}_i$ et $g_i \in \mathtt{G}_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, alors on a

$$\begin{aligned}\zeta(f_1, \ldots, f_r)(h_1 g_1 h_1', \ldots, h_r g_r h_r') &= f_1(h_1 g_1 h_1') \otimes \cdots \otimes f_r(h_r g_r h_r') \\ &= \Big(\sigma_1(h_1) \circ f(g_1) \circ \sigma_1(h_1')\Big) \otimes \cdots \otimes \Big(\sigma_r(h_r) \circ f_r(g_r) \circ \sigma_r(h_r')\Big) \\ &= \sigma(h_1, \ldots, h_r) \circ \Big(f(g_1) \otimes \cdots \otimes f_r(g_r)\Big) \circ \sigma(h_1', \ldots, h_r')\end{aligned}$$

et donc $\zeta(f_1, \ldots, f_r) \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)$. Pour vérifier que ζ est multilinéaire il suffit de voir qu'elle est linéaire sur la première composante. Soient $\alpha, \beta \in R$, $f_1' \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G}_1, \sigma_1)$ et $f_i \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G}_i, \sigma_i)$, $g_i \in \mathtt{G}_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. Alors on a

$$\begin{aligned}\zeta(\alpha f_1 + \beta f_1', f_2, \ldots, f_r)(g_1, \ldots, g_r) &= (\alpha f_1 + \beta f_1')(g_1) \otimes f_2(g_2) \otimes \cdots \otimes f_r(g_r) \\ &= \alpha f_1(g_1) \otimes f_2(g_2) \otimes \cdots \otimes f_r(g_r) + \beta f_1'(g_1) \otimes f_2(g_2) \otimes \cdots \otimes f_r(g_r) \\ &= \big(\alpha\zeta(f_1, f_2, \ldots, f_r) + \beta\zeta(f_1', f_2, \ldots, f_r)\big)(g_1, \ldots, g_r)\end{aligned}$$

et donc ζ est multilinéaire. □

Le lemme 1.22 implique qu'il existe une application linéaire

$$\zeta' : \bigotimes_{i=1}^{r} \mathscr{H}_R(\mathtt{G}_i, \sigma_i) \to \mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma).$$

Proposition 1.23. *L'application* ζ' *est un morphisme de* R*-algèbres.*

Démonstration. Soient $f_i, f_i' \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G}_i, \mathtt{H}_i)$ et $g_i \in \mathtt{G}_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$. En utilisant la bijection $\mathtt{G}/\mathtt{H} \cong \mathtt{G}_1/\mathtt{H}_1 \times \cdots \times \mathtt{G}_r/\mathtt{H}_r$ on obtient

$$\begin{aligned}&\Big(\zeta'(f_1 \otimes \cdots \otimes f_r) * \zeta'(f_1' \otimes \cdots \otimes f_r')\Big)(g_1, \ldots, g_r) = \\ &\quad= \sum_{(x_1, \ldots, x_r) \in \mathtt{G}/\mathtt{H}} \Big(f_1(x_1) \otimes \cdots \otimes f_r(x_r)\Big) \circ \Big(f_1'(x_1^{-1} g_1) \otimes \cdots \otimes f_r'(x_r^{-1} g_r)\Big) \\ &\quad= \sum_{x_1 \in \mathtt{G}_1/\mathtt{H}_1} f_1(x_1) f_1'(x_1^{-1} g_1) \otimes \cdots \otimes \sum_{x_r \in \mathtt{G}_r/\mathtt{H}_r} f_r(x_r) f_r'(x_r^{-1} g_r) \\ &\quad= \zeta'(f_1 * f_1', \ldots, f_r * f_r')(g_1, \ldots, g_r)\end{aligned}$$

et donc ζ' est un morphisme de R-algèbres. □

Proposition 1.24. *Si σ_i est le caractère trivial de $\mathtt{H}_i$ pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$ alors l'application ζ' est un isomorphisme de R-algèbres.*

Démonstration. Pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, on considère un ensemble Ξ_i de représentants des $\mathtt{H}_i$-doubles classes de $\mathtt{G}_i$. Alors $\{\mathbf{1}_{\mathtt{H}_i x_i \mathtt{H}_i} \,|\, x_i \in \Xi_i\}$ et $\{\mathbf{1}_{\mathtt{H}_1 x_1 \mathtt{H}_1 \times \cdots \times \mathtt{H}_r x_r \mathtt{H}_r} \,|\, x_i \in \Xi_i, 1 \leq i \leq r\}$ sont des bases de $\mathscr{H}_R(\mathtt{G}_i,\mathtt{H}_i)$ et de $\mathscr{H}_R(\mathtt{G},\mathtt{H})$ comme R-modules. On obtient ζ' bijective car $\mathbf{1}_{\mathtt{H}_1 x_1 \mathtt{H}_1 \times \cdots \times \mathtt{H}_r x_r \mathtt{H}_r} = \zeta'(\mathbf{1}_{\mathtt{H}_1 x_1 \mathtt{H}_1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}_{\mathtt{H}_r x_r \mathtt{H}_r})$. □

1.5 Les catégories $\mathscr{R}_\sigma(\mathtt{G})$ et $\mathscr{R}(\mathtt{G},\sigma)$

Dans cette section on associe à une représentation irréductible et projective [1] d'un sous-groupe ouvert compact de $\mathtt{G}$, deux sous-catégories de $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$ et on voit que si ces catégories coïncident alors elles sont équivalentes à la catégorie des modules sur l'algèbre introduite dans la section 1.4.

Soient $\mathtt{G}$ un groupe localement profini, R un anneau commutatif unitaire, $\mathtt{K}$ un sous-groupe ouvert compact de $\mathtt{G}$ et (σ, V_σ) une représentation irréductible et projective de $\mathtt{K}$. Par I.5.9(d) de [Vig96] l'induction compacte $\mathrm{ind}_{\mathtt{K}}^{\mathtt{G}}$ respecte les projectifs et donc $\rho = \mathrm{ind}_{\mathtt{K}}^{\mathtt{G}}(\sigma)$ est une représentation projective de $\mathtt{G}$ et le foncteur

$$\mathbf{M}_\sigma = \mathrm{Hom}_{\mathtt{G}}(\rho, -) : \mathscr{R}_R(\mathtt{G}) \longrightarrow \mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(\mathtt{G},\sigma)$$

est exact. Pour toute $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(\mathtt{G})$ l'action de $\Phi \in \mathscr{H}_R(\mathtt{G},\sigma)$ sur $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{G}}(\rho, V)$ est donnée par $\varphi.\Phi = \varphi \circ \xi(\Phi)$ où ξ est l'isomorphisme de la proposition 1.21.

On peut associer à la représentation σ deux sous-catégories de $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$.

Définition 1.25. Soit $\mathscr{R}_\sigma(\mathtt{G})$ la sous-catégorie pleine (et abélienne) de $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$ dont les objets sont les V telles que tout sous-quotient irréductible V' de V satisfait $\mathbf{M}_\sigma(V') \neq 0$.

Définition 1.26. Pour toute représentation (π, V) de $\mathtt{G}$ on note

$$V^\sigma = \sum_{\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathtt{K}}(\sigma, V)} \phi(\sigma)$$

qui est une sous-représentation de $\mathrm{res}_{\mathtt{K}}^{\mathtt{G}}(\pi, V)$. On note aussi $V[\sigma]$ la sous-représentation de V engendrée par V^σ.

Proposition 1.27. *Pour tout $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(\mathtt{G})$ on a*

$$V[\sigma] = \sum_{\psi \in \mathbf{M}_\sigma(V)} \psi(\rho) \quad \textit{et} \quad \mathbf{M}_\sigma(V) = \mathbf{M}_\sigma(V[\sigma]).$$

En plus, si W est une sous-représentation de V alors $\mathbf{M}_\sigma(W) = \mathbf{M}_\sigma(V)$ si et seulement si $W[\sigma] = V[\sigma]$.

1. Ici projective signifie que le foncteur covariant $X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathtt{K}}(\sigma, X)$ est exact.

Démonstration. En utilisant la proposition 1.20 et (1.2) on obtient

$$V[\sigma] = \sum_{g\in\mathtt{G}} \pi(g) \sum_{\phi\in\mathrm{Hom}_{\mathtt{K}}(\sigma,V)} \phi(\sigma) = \sum_{g\in\mathtt{G}} \pi(g) \sum_{\psi\in\mathrm{Hom}_{\mathtt{G}}(\rho,V)} \psi(i_{V_\sigma})$$
$$= \sum_{\psi\in\mathrm{Hom}_{\mathtt{G}}(\rho,V)} \psi\left(\sum_{g\in\mathtt{G}} g.i_{V_\sigma}\right) = \sum_{\psi\in\mathrm{Hom}_{\mathtt{G}}(\rho,V)} \psi(\rho)$$

et donc $\mathrm{Hom}_{\mathtt{G}}(\rho, V) = \mathrm{Hom}_{\mathtt{G}}(\rho, V[\sigma])$. On suppose maintenant $W \subset V$. Si $W[\sigma] = V[\sigma]$ alors $\mathbf{M}_\sigma(W) = \mathbf{M}_\sigma(V)$ et si $\mathbf{M}_\sigma(W) = \mathbf{M}_\sigma(V)$ alors

$$W[\sigma] = \sum_{\psi\in\mathbf{M}_\sigma(W)} \psi(\rho) = \sum_{\psi\in\mathbf{M}_\sigma(V)} \psi(\rho) = V[\sigma]. \qquad \square$$

Définition 1.28. Soit $\mathscr{R}(\mathtt{G}, \sigma)$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$ dont les objets sont les V telles que $V = V[\sigma]$.

Soit $(\pi, V) \in \mathrm{Rep}(\mathtt{G})$. Si σ est le caractère trivial du sous-groupe $\mathtt{K}$ alors $V^\sigma = V^{\mathtt{K}} = \{v \in V \,|\, \pi(k)v = v \text{ pour tout } k \in \mathtt{K}\}$ est l'ensemble des vecteurs $\mathtt{K}$-invariants de V. Dans ce cas on note $\mathscr{R}(\mathtt{G}, \mathtt{K})$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}_R(\mathtt{G})$ dont les objets sont les V engendrées par $V^{\mathtt{K}}$.

Proposition 1.29. *Soit $V \in \mathrm{Rep}(\mathtt{G})$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Pour tout sous-quotient irréductible U de V on a $\mathbf{M}_\sigma(U) \neq 0$;

(ii) pour tout sous-quotient non nul W de V on a $\mathbf{M}_\sigma(W) \neq 0$;

(iii) pour tout sous-quotient Z de V on a $Z = Z[\sigma]$;

(iv) pour toute sous-représentation Z de V on a $Z = Z[\sigma]$.

Démonstration.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Soient W un sous-quotient non nul de V et $W_1 \subset W_2$ deux sous-représentations de W telles que $U = W_2/W_1$ est irréductible. Par (i) on a $\mathbf{M}_\sigma(U) \neq 0$ qui implique $\mathbf{M}_\sigma(W_2) \neq 0$ et donc $\mathbf{M}_\sigma(W) \neq 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Soit Z un sous-quotient de V. Par la proposition 1.27 on a $\mathbf{M}_\sigma(Z) = \mathbf{M}_\sigma(Z[\sigma])$ et $\mathbf{M}_\sigma(Z/Z[\sigma]) = 0$. Donc par (ii) on a $Z = Z[\sigma]$.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Soient U un sous-quotient irréductible de V et $Z_1 \subsetneq Z_2$ deux sous-représentations de V telles que $U = Z_2/Z_1$. Par (iv) on a $Z_1[\sigma] = Z_1 \neq Z_2 = Z_2[\sigma]$ et par la proposition 1.27 on a $\mathbf{M}_\sigma(Z_1) \neq \mathbf{M}_\sigma(Z_2)$. Donc on obtient $\mathbf{M}_\sigma(U) \neq 0$. $\square$

Remarque 1.30. La proposition 1.29 implique que la sous-catégorie $\mathscr{R}_\sigma(\mathtt{G})$ est contenue dans la sous-catégorie $\mathscr{R}(\mathtt{G}, \sigma)$.

1.5.1

Dans ce paragraphe on suppose qu'il existe un sous-groupe ouvert compact $\mathtt{K}_0$ de $\mathtt{G}$ de pro-ordre inversible dans $R^\times$ et donc qu'il existe l'algèbre de Hecke globale $\mathscr{H}_R(\mathtt{G})$ de $\mathtt{G}$ (voir paragraphe 1.3.2). On veut utiliser les résultats de la section 1.2 avec $A = \mathscr{H}_R(\mathtt{G})$ qui a assez d'idempotents par la proposition 1.15.

On énonce un lemme valable pour les anneaux unitaires, tel que $\mathscr{H}_R(\mathtt{K})$.

Lemme 1.31. *Soient A' un anneau unitaire et P un A'-module à gauche simple et projectif. Alors il existe un idempotent $e \in A'$ tel que $P \cong A'e$.*

Démonstration. Tout morphisme non nul $\varphi : A' \longrightarrow P$ est surjectif et donc il existe un morphisme $\psi : P \longrightarrow A'$ tel que $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_P$. Cela implique que $A' = P' \oplus Q$ avec $P' = \psi(P)$ et Q deux idéaux à gauche de A'. La projection sur P' est un idempotent de l'anneau des endomorphismes de A' vu comme A'-module à gauche. Puisque A' est unitaire on a $A' \cong \mathrm{End}_{A'}(A')$ car tout endomorphisme est la multiplication à droite par un élément de A'. On obtient $P \cong P' = A'e$ avec e idempotent de A'. □

Théorème 1.32. *Si $\mathscr{R}_\sigma(\mathtt{G}) = \mathscr{R}(\mathtt{G},\sigma)$ alors $V \longmapsto \mathbf{M}_\sigma(V)$ est une équivalence de catégories de quasi-inverse $W \longmapsto W \otimes_{\mathscr{H}_R(\mathtt{G},\sigma)} \rho$ entre $\mathscr{R}(\mathtt{G},\sigma)$ et $\mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(\mathtt{G},\sigma)$.*

Démonstration. Par le théorème 1.14 le R-module V_σ est un $\mathscr{H}_R(\mathtt{K})$-module simple et projectif. Par le lemme 1.31 il existe un idempotent e de $\mathscr{H}_R(\mathtt{K})$ tel que $V_\sigma = \mathscr{H}_R(\mathtt{K})e$ comme $\mathscr{H}_R(\mathtt{K})$-module. Par la remarque 1.19 on obtient $\rho = \mathscr{H}_R(\mathtt{G}) \otimes_{\mathscr{H}_R(\mathtt{K})} \mathscr{H}_R(\mathtt{K})e$ qui est un $\mathscr{H}_R(\mathtt{G})$-module à gauche. L'application $\sum_i (f_i \otimes h_i e) \longmapsto \big(\sum_i f_i h_i\big)e$ est un isomorphisme de $\mathscr{H}_R(\mathtt{G})$-modules de $\mathscr{H}_R(\mathtt{G}) \otimes_{\mathscr{H}_R(\mathtt{K})} \mathscr{H}_R(\mathtt{K})e$ à $\mathscr{H}_R(\mathtt{G})e$ d'inverse $fe \longmapsto fe \otimes e$ et donc $\rho = \mathscr{H}_R(\mathtt{G})e$. Par la proposition 1.21 l'algèbre $\mathscr{H}_R(\mathtt{G},\sigma)$ est isomorphe à l'algèbre $\mathrm{End}_{\mathtt{G}}(\rho) \cong \mathrm{End}_{\mathscr{H}_R(\mathtt{G})}(\mathscr{H}_R(\mathtt{G})e)$. L'hypothèse $\mathscr{R}_\sigma(\mathtt{G}) = \mathscr{R}(\mathtt{G},\sigma)$ implique que les conditions du corollaire 1.7 sont vérifiées et donc on obtient le résultat. □

1.6 L'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G},\mathtt{H})$

Dans cette section on étudie plus en détail l'algèbre introduite dans la section 1.4 dans le cas où σ est le caractère trivial d'un sous-groupe ouvert de $\mathtt{G}$.

Soient $\mathtt{G}$ un groupe localement profini et $\mathtt{H}$ un sous-groupe ouvert de $\mathtt{G}$. On considère l'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G},\mathtt{H})$. Pour tout $x \in \mathtt{G}$ on note $f_x : \mathtt{G} \to \mathbb{Z}$ la fonction caractéristique de la double classe $\mathtt{H}x\mathtt{H}$ et on choisit une fois pour toute un ensemble Ξ de représentants des $\mathtt{H}$-doubles classes de $\mathtt{G}$. Pour simplifier les notations on note $f_x f_y = f_x * f_y$ pour tout $x, y \in \mathtt{G}$.

Soient $x, y \in \mathtt{G}$. On a

$$\mathtt{H}x\mathtt{H}y\mathtt{H} = \bigsqcup_{\xi \in \Upsilon_{xy}} \mathtt{H}\xi\mathtt{H}$$

avec $\Upsilon_{xy} \subset \Xi$ et pour tout $\xi \in \Upsilon_{xy}$ on a

$$\mathtt{H}x\mathtt{H} \cap \xi\mathtt{H}y^{-1}\mathtt{H} = \bigsqcup_{z \in Z_\xi} z\mathtt{H}$$

où Z_ξ est un sous-ensemble fini de $\mathtt{G}$. Par la formule du produit de convolution (1.1) dans $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G}, \mathtt{H})$, le support de $f_x f_y$ est contenu dans $\mathtt{H}x\mathtt{H}y\mathtt{H}$ et $(f_x f_y)(\xi) = |Z_\xi|$ pour tout $\xi \in \Upsilon_{xy}$. On obtient

$$f_x f_y = \sum_{\xi \in \Upsilon_{xy}} |Z_\xi| f_\xi. \tag{1.4}$$

On observe que $|Z_\xi| = |(\mathtt{H}x\mathtt{H} \cap \xi\mathtt{H}y^{-1}\mathtt{H})/\mathtt{H}|$ pour tout $\xi \in \Upsilon_{xy}$.

Lemme 1.33. *Soient $x, y \in \mathtt{G}$.*

(a) Le support de $f_x f_y$ est $\mathtt{H}x\mathtt{H}y\mathtt{H}$.

(b) Si x ou y normalise $\mathtt{H}$ alors $f_x f_y = f_{xy}$.

Démonstration. Pour tout $\xi \in \Upsilon_{xy}$ on a $\xi = h_1 x h_2 y h_3$ avec $h_1, h_2, h_3 \in \mathtt{H}$ et donc on a $h_1 x\mathtt{H} \subset \mathtt{H}x\mathtt{H} \cap \xi\mathtt{H}y^{-1}\mathtt{H}$. On obtient $|Z_\xi| > 0$ qui implique que le support de $f_x f_y$ est exactement $\mathtt{H}x\mathtt{H}y\mathtt{H}$. Si x ou y normalise $\mathtt{H}$ alors $\mathtt{H}x\mathtt{H}y\mathtt{H} = \mathtt{H}xy\mathtt{H}$, $\Upsilon_{xy} = \{\tilde{\xi}\}$ avec $\mathtt{H}\tilde{\xi}\mathtt{H} = \mathtt{H}xy\mathtt{H}$ et $|Z_{\tilde{\xi}}| = 1$. On obtient $f_x f_y = f_{\tilde{\xi}} = f_{xy}$. □

1.6.1

Soit $\mathtt{N}$ un sous-groupe de $\mathtt{G}$ tel que $\mathtt{H} \subset N_{\mathtt{G}}(\mathtt{N}) = \{g \in \mathtt{G} \mid g\mathtt{N} = \mathtt{N}g\}$. Dans ce paragraphe on veut prouver que, sous certaines hypothèses, l'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{N}, \mathtt{H} \cap \mathtt{N})$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G}, \mathtt{H})$.

Lemme 1.34.

(a) L'ensemble $\mathtt{G}' = \mathtt{NH}$ est un sous-groupe ouvert de $\mathtt{G}$.

(b) Le sous-groupe $\mathtt{N}$ est distingué dans $\mathtt{G}'$, le sous-groupe $\mathtt{H}_{\mathtt{N}} = \mathtt{H} \cap \mathtt{N}$ est distingué dans $\mathtt{H}$ et $\mathtt{G}'/\mathtt{N} \cong \mathtt{H}/\mathtt{H}_{\mathtt{N}}$.

Démonstration.

(*a*) On a $\mathtt{HN} = \mathtt{NH}$ et donc $\mathtt{G}'$ est un groupe. Il est ouvert car il contient $\mathtt{H}$.

(*b*) Par hypothèse on a $\mathtt{H} \subset N_{\mathtt{G}}(\mathtt{N})$ et donc $\mathtt{G}' \subset N_{\mathtt{G}}(\mathtt{N})$. Par le deuxième théorème d'isomorphisme $\mathtt{H}_{\mathtt{N}}$ est distingué dans $\mathtt{H}$ et $\mathtt{H}/\mathtt{H}_{\mathtt{N}} \cong \mathtt{G}'/\mathtt{N}$. □

Par le lemme 1.34 on a le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mathtt{H}_{\mathtt{N}} & \longrightarrow & \mathtt{H} & \longrightarrow & \mathtt{H}/\mathtt{H}_{\mathtt{N}} & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathtt{N} & \longrightarrow & \mathtt{G}' & \longrightarrow & \mathtt{G}'/\mathtt{N} & \longrightarrow & 1. \end{array} \tag{1.5}$$

On note $\mathtt{H}' = N_{\mathtt{G}}(\mathtt{H}) \cap \mathtt{N} = N_{\mathtt{G}'}(\mathtt{H}) \cap \mathtt{N}$ et on suppose que :

(H1) la suite $1 \longrightarrow \mathtt{H_N} \longrightarrow \mathtt{H} \longrightarrow \mathtt{H}/\mathtt{H_N} \longrightarrow 1$ est scindée. On appelle $\mathtt{A}$ un sous-groupe de $\mathtt{H}$ qui relève $\mathtt{H}/\mathtt{H_N}$.

(H2) $\mathtt{N} = \mathtt{H}'\mathtt{B}\mathtt{H}'$ avec $b\mathtt{A}b^{-1} = \mathtt{A}$ pour tout $b \in \mathtt{B}$.

Puisque la flèche $\mathtt{H} \longrightarrow \mathtt{G}'$ dans (1.5) est une inclusion, par l'hypothèses (H1) la suite $1 \longrightarrow \mathtt{N} \longrightarrow \mathtt{G}' \longrightarrow \mathtt{G}'/\mathtt{N} \longrightarrow 1$ est scindée et $\mathtt{A}$ releve $\mathtt{G}'/\mathtt{N}$ dans $\mathtt{G}'$. Alors on obtient $\mathtt{H} = \mathtt{H_N}\mathtt{A}$, $\mathtt{G}' = \mathtt{N}\mathtt{A}$ et $\mathtt{A} \cap \mathtt{H_N} = \mathtt{A} \cap \mathtt{N} = \{1\}$.

On veut prouver que sous les hypothèses (H1) et (H2), l'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{N},\mathtt{H_N})$ est isomorphe à l'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G}',\mathtt{H})$ qui est une sous-algèbre de $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G},\mathtt{H})$.

Lemme 1.35. *On a* $\mathtt{H}x\mathtt{H} \cap \mathtt{N} = \mathtt{H_N}x\mathtt{H_N}$ *pour tout* $x \in \mathtt{N}$.

Démonstration. Si $x \in \mathtt{N}$, par (H2) on peut écrire $x = h_1' b h_2'$ avec $h_1', h_2' \in \mathtt{H}'$ et $b \in \mathtt{B}$. On obtient $\mathtt{H}x\mathtt{H} \cap \mathtt{N} = h_1'\mathtt{H}b\mathtt{H}h_2' \cap \mathtt{N} = h_1'(\mathtt{H}b\mathtt{H} \cap \mathtt{N})h_2'$. Par (H2) on a $\mathtt{H}b\mathtt{H} \cap \mathtt{N} = \mathtt{H_N}\mathtt{A}b\mathtt{H_N} \cap \mathtt{N} = \mathtt{H_N}(\mathtt{A} \cap \mathtt{N})b\mathtt{H_N} = \mathtt{H_N}b\mathtt{H_N}$. On obtient $\mathtt{H}x\mathtt{H} \cap \mathtt{N} = h_1'(\mathtt{H_N}b\mathtt{H_N})h_2' = \mathtt{H_N}x\mathtt{H_N}$ car $\mathtt{H}' \subset N_{\mathtt{N}}(\mathtt{H_N})$. □

Lemme 1.36. *L'application* $\mathtt{H_N}x\mathtt{H_N} \longmapsto \mathtt{H}x\mathtt{H}$ *est une bijection entre* $\mathtt{H_N}\backslash\mathtt{N}/\mathtt{H_N}$ *et* $\mathtt{H}\backslash\mathtt{G}'/\mathtt{H}$.

Démonstration. L'application est bien définie car si $x, x' \in \mathtt{N}$ avec $\mathtt{H_N}x\mathtt{H_N} = \mathtt{H_N}x'\mathtt{H_N}$ alors $x \in \mathtt{H_N}x'\mathtt{H_N}$ et donc $\mathtt{H}x\mathtt{H} = \mathtt{H}x'\mathtt{H}$. Elle est injective car si $x, x' \in \mathtt{N}$ avec $\mathtt{H}x\mathtt{H} = \mathtt{H}x'\mathtt{H}$ alors $\mathtt{H}x\mathtt{H} \cap \mathtt{N} = \mathtt{H}x'\mathtt{H} \cap \mathtt{N}$ et par le lemme 1.35 on a $\mathtt{H_N}x\mathtt{H_N} = \mathtt{H_N}x'\mathtt{H_N}$. Elle est surjective car si $y = nh \in \mathtt{G}'$ avec $n \in \mathtt{N}$ et $h \in \mathtt{H}$ alors $\mathtt{H}y\mathtt{H} = \mathtt{H}nh\mathtt{H} = \mathtt{H}n\mathtt{H}$. □

Pour tout $x \in \mathtt{N}$ on note $f_{\mathtt{N},x} \in \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{N},\mathtt{H_N})$ la fonction caractéristique de la double classe $\mathtt{H_N}x\mathtt{H_N}$ et on observe que $f_x \in \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G}',\mathtt{H})$ car $\mathtt{H}x\mathtt{H} \subset \mathtt{G}'$. Si on fixe un ensemble de représentants $\Xi_{\mathtt{N}}$ des $\mathtt{H_N}$-doubles classes de $\mathtt{N}$, par le lemme 1.36 les ensembles $\{f_x \,|\, x \in \Xi_{\mathtt{N}}\}$ et $\{f_{\mathtt{N},x} \,|\, x \in \Xi_{\mathtt{N}}\}$ sont des bases des $\mathbb{Z}$-modules $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G}',\mathtt{H})$ et $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{N},\mathtt{H_N})$. On obtient un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\begin{array}{rcl} \zeta : \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G}',\mathtt{H}) & \longrightarrow & \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{N},\mathtt{H_N}) \\ \displaystyle\sum_{x\in\Xi_{\mathtt{N}}} a_x f_x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{x\in\Xi_{\mathtt{N}}} a_x f_{\mathtt{N},x}. \end{array}$$

On veut prouver qu'il est un isomorphisme d'algèbres.

Lemme 1.37. *Pour tout* $x, y \in \mathtt{N}$ *on a* $\mathtt{H_N}x\mathtt{H_N}y\mathtt{H_N} = \mathtt{H}x\mathtt{H}y\mathtt{H} \cap \mathtt{N}$.

Démonstration. Par le lemme 1.35 on a $\mathtt{H_N}x\mathtt{H_N}y\mathtt{H_N} = (\mathtt{H}x\mathtt{H} \cap \mathtt{N})(\mathtt{H}y\mathtt{H} \cap \mathtt{N}) \subset \mathtt{H}x\mathtt{H}y\mathtt{H} \cap \mathtt{N}$. Soit maintenant $z = h_1 x h_2 y h_3 \in \mathtt{H}x\mathtt{H}y\mathtt{H} \cap \mathtt{N}$ avec $h_1, h_2, h_3 \in \mathtt{H}$. On a $z = (h_1 x h_1^{-1})(h_1 h_2 y h_3)$ avec $h_1 x h_1^{-1} \in \mathtt{N}$ car $\mathtt{H}$ normalise $\mathtt{N}$ et donc $h_1 h_2 y h_3 \in \mathtt{N}$ car $z \in \mathtt{N}$. Enfin on obtient $\mathtt{H}x\mathtt{H}y\mathtt{H} \cap \mathtt{N} \subset (\mathtt{H}x\mathtt{H} \cap \mathtt{N})(\mathtt{H}y\mathtt{H} \cap \mathtt{N})$. □

Proposition 1.38. *L'application* ζ *est un isomorphisme d'algèbres.*

Démonstration. Il suffit de prouver $\zeta(f_x f_y) = f_{\mathtt{N},x} f_{\mathtt{N},y}$ pour tout $x, y \in \Xi_{\mathtt{N}}$. Le support de $f_x f_y$ est $\mathtt{H}x\mathtt{H}y\mathtt{H} = \bigsqcup_{\xi\in\Upsilon_{xy}} \mathtt{H}\xi\mathtt{H}$ avec $\Upsilon_{xy} \subset \Xi_{\mathtt{N}} \subset \mathtt{N}$, pour tout $\xi \in \Upsilon_{xy}$ on a $\mathtt{H}x\mathtt{H} \cap \xi\mathtt{H}y^{-1}\mathtt{H} = \bigsqcup_{z\in Z_\xi} z\mathtt{H}$ avec $Z_\xi \subset \mathtt{N}$ et $f_x f_y = \sum_{\xi\in\Upsilon_{xy}} |Z_\xi| f_\xi$. Par les lemmes 1.37 et 1.35 le support de $f_{\mathtt{N},x} f_{\mathtt{N},y}$ est

$$\mathtt{H}_{\mathtt{N}}x\mathtt{H}_{\mathtt{N}}y\mathtt{H}_{\mathtt{N}} = \mathtt{H}x\mathtt{H}y\mathtt{H} \cap \mathtt{N} = \bigsqcup_{\xi\in\Upsilon_{xy}} \mathtt{H}\xi\mathtt{H} \cap \mathtt{N} = \bigsqcup_{\xi\in\Upsilon_{xy}} \mathtt{H}_{\mathtt{N}}\xi\mathtt{H}_{\mathtt{N}}.$$

Par le lemme 1.35, pour tout $\xi \in \Upsilon_{xy}$ on a $\mathtt{H}_{\mathtt{N}}x\mathtt{H}_{\mathtt{N}} \cap \xi\mathtt{H}_{\mathtt{N}}y^{-1}\mathtt{H}_{\mathtt{N}} = (\mathtt{H}x\mathtt{H} \cap \mathtt{N}) \cap \xi(\mathtt{H}y^{-1}\mathtt{H} \cap \mathtt{N}) = \mathtt{H}x\mathtt{H} \cap \xi\mathtt{H}y^{-1}\mathtt{H} \cap \mathtt{N} = \bigsqcup_{z\in Z_\xi} z\mathtt{H} \cap \mathtt{N} = \bigsqcup_{z\in Z_\xi} z\mathtt{H}_{\mathtt{N}}$. On obtient $f_{\mathtt{N},x} f_{\mathtt{N},y} = \sum_{\xi\in\Upsilon_{xy}} |Z_\xi| f_{\mathtt{N},\xi} = \zeta\left(\sum_{\xi\in\Upsilon_{xy}} |Z_\xi| f_\xi\right) = \zeta(f_x f_y)$. □

Maintenant on fixe $g \in N_{\mathtt{G}}(\mathtt{N})$. On veut prouver que les algèbres $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{N}, \mathtt{H}_{\mathtt{N}})$ et $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{N}, \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g)$ sont isomorphes.

Lemme 1.39. *L'application* $\mathtt{H}_{\mathtt{N}}x\mathtt{H}_{\mathtt{N}} \longmapsto \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g x^g \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g$ *où* $x^g = g^{-1}xg$*, est une bijection entre* $\mathtt{H}_{\mathtt{N}}\backslash\mathtt{N}/\mathtt{H}_{\mathtt{N}}$ *et* $\mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g\backslash\mathtt{N}/\mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g$.

Démonstration. L'application est bien définie et injective car pour tout $x, y \in \mathtt{N}$ on a $\mathtt{H}_{\mathtt{N}}x\mathtt{H}_{\mathtt{N}} = \mathtt{H}_{\mathtt{N}}y\mathtt{H}_{\mathtt{N}} \iff g^{-1}\mathtt{H}_{\mathtt{N}}x\mathtt{H}_{\mathtt{N}}g = g^{-1}\mathtt{H}_{\mathtt{N}}y\mathtt{H}_{\mathtt{N}}g \iff \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g x^g \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g = \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g y^g \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g$ et elle est clairement surjective. □

Pour tout $x \in \mathtt{N}$ on note $f'_{\mathtt{N},x} \in \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{N}, \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g)$ la fonction caractéristique de la double classe $\mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g x \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g$. Par le lemme 1.39 l'ensemble $\{f'_{\mathtt{N},x^g} \mid x \in \Xi_{\mathtt{N}}\}$ est une base de $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{N}, \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g)$ et l'application

$$\begin{array}{rcl} \zeta_g : \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{N}, \mathtt{H}_{\mathtt{N}}) & \longrightarrow & \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{N}, \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g) \\ \displaystyle\sum_{x\in\Xi_{\mathtt{N}}} a_x f_{\mathtt{N},x} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{x\in\Xi_{\mathtt{N}}} a_x f'_{\mathtt{N},x^g}. \end{array}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{Z}$-modules.

Proposition 1.40. *L'application* ζ_g *est un isomorphisme d'algèbres.*

Démonstration. Il suffit de prouver $\zeta_g(f_{\mathtt{N},x} f_{\mathtt{N},y}) = f'_{\mathtt{N},x^g} f'_{\mathtt{N},y^g}$ pour tout $x, y \in \Xi_{\mathtt{N}}$. Le support de $f_{\mathtt{N},x} f_{\mathtt{N},y}$ est $\mathtt{H}_{\mathtt{N}}x\mathtt{H}_{\mathtt{N}}y\mathtt{H}_{\mathtt{N}} = \bigsqcup_{\xi\in\Upsilon_{xy}} \mathtt{H}_{\mathtt{N}}\xi\mathtt{H}_{\mathtt{N}}$ avec $\Upsilon_{xy} \subset \Xi_{\mathtt{N}}$, pour tout $\xi \in \Upsilon_{xy}$ on a $\mathtt{H}_{\mathtt{N}}x\mathtt{H}_{\mathtt{N}} \cap \xi\mathtt{H}_{\mathtt{N}}y^{-1}\mathtt{H}_{\mathtt{N}} = \bigsqcup_{z\in Z_\xi} z\mathtt{H}_{\mathtt{N}}$ avec $Z_\xi \subset \mathtt{N}$ et $f_{\mathtt{N},x} f_{\mathtt{N},y} = \sum_{\xi\in\Upsilon_{xy}} |Z_\xi| f_{\mathtt{N},\xi}$. Le support de $f'_{\mathtt{N},x^g} f'_{\mathtt{N},y^g}$ est

$$\mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g x^g \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g y^g \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g = g^{-1}\mathtt{H}_{\mathtt{N}}x\mathtt{H}_{\mathtt{N}}y\mathtt{H}_{\mathtt{N}}g = \bigsqcup_{\xi\in\Upsilon_{xy}} g^{-1}\mathtt{H}_{\mathtt{N}}\xi\mathtt{H}_{\mathtt{N}}g = \bigsqcup_{\xi\in\Upsilon_{xy}} \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g \xi^g \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g.$$

On a $\mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g x^g \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g \cap \xi^g \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g (y^{-1})^g \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g = g^{-1}(\mathtt{H}_{\mathtt{N}}x\mathtt{H}_{\mathtt{N}} \cap \xi\mathtt{H}_{\mathtt{N}}y^{-1}\mathtt{H}_{\mathtt{N}})g = g^{-1}\bigsqcup_{z\in Z_\xi} z\mathtt{H}_{\mathtt{N}}g = \bigsqcup_{z\in Z_\xi} z^g \mathtt{H}_{\mathtt{N}}^g$ pour tout $\xi \in \Upsilon_{xy}$. On obtient $f'_{\mathtt{N},x^g} f'_{\mathtt{N},y^g} = \sum_{\xi\in\Upsilon_{xy}} |Z_\xi| f'_{\mathtt{N},\xi^g} = \zeta_g\left(\sum_{\xi\in\Upsilon_{xy}} |Z_\xi| f_{\mathtt{N},\xi}\right) = \zeta_g(f_{\mathtt{N},x} f_{\mathtt{N},y})$. □

Corollaire 1.41. *Pour tout $g \in N_g(\mathtt{N})$ l'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{N}, \mathtt{H}^g_{\mathtt{N}})$ est isomorphe à la sous-algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G}', \mathtt{H})$ de $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathtt{G}, \mathtt{H})$.*

1.7 Théorie de Fourier pour les groupes finis

Les deux dernières sections du chapitre 1 sont dédiées au groupes finis. Dans cette section on rappelle quelques résultats sur la théorie de Fourier pour ce type de groupes.

Soient $\mathscr{G}$ un groupe fini et R un corps algébriquement clos de caractéristique 0. On note $R[\mathscr{G}]$ l'algèbre des fonctions $f : \mathscr{G} \longrightarrow R$ munie du produit de convolution $f * f' : x \longmapsto \sum_{g\in\mathscr{G}} f(g)f'(g^{-1}x)$ et $Cl(\mathscr{G})$ la sous-algèbre de $R[\mathscr{G}]$ des fonctions f constantes sur les classes de conjugaison de $\mathscr{G}$.

Pour tout $g \in \mathscr{G}$ on note $\mathbf{1}_g \in R[\mathscr{G}]$ la fonction caractéristique de g et $cc(g)$ la classe de conjugaison de g. On fixe un ensemble de représentants Y des classes de conjugaison de $\mathscr{G}$. Alors $\{\mathbf{1}_g \,|\, g \in \mathscr{G}\}$ est une base de $R[\mathscr{G}]$ et $\{\sum_{g\in cc(x)} \mathbf{1}_g \,|\, x \in Y\}$ une base de $Cl(\mathscr{G})$ comme R-espaces vectoriels.

Lemme 1.42. *L'algèbre $Cl(\mathscr{G})$ est le centre de l'algèbre $R[\mathscr{G}]$.*

Démonstration. Soit f dans le centre de $R[\mathscr{G}]$. Pour tout $x \in \mathscr{G}$ on a $\mathbf{1}_x * f = f * \mathbf{1}_x$ qui implique $f(y) = (\mathbf{1}_x * f)(xy) = (f * \mathbf{1}_x)(xy) = f(xyx^{-1})$ pour tout $x, y \in \mathscr{G}$ et donc $f \in Cl(\mathscr{G})$. Soit maintenant $f' \in Cl(\mathscr{G})$. Pour tout $f \in R[\mathscr{G}]$ et tout $x \in \mathscr{G}$ on a $(f'*f)(x) = \sum_g f'(g)f(g^{-1}x) = \sum_g f'(x^{-1}gx)f(g^{-1}x) = \sum_{g'} f(g')f'(g'^{-1}x) = (f*f')(x)$ et donc f' est dans le centre de $R[\mathscr{G}]$. □

Soit X un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de $\mathscr{G}$. On note χ_π le caractère de $\pi \in X$ et on observe que $\chi_\pi(xy) = \chi_\pi(yx)$ pour tout $x, y \in \mathscr{G}$ et $\pi \in X$. Pour tout $(\pi, V_\pi) \in X$ on fixe une base de V_π et on considère les $\pi_{ij} \in R[\mathscr{G}]$ tels que les coefficients de $\pi(g)$ sont les $\pi_{ij}(g)$ avec $1 \le i, j \le \dim(\pi)$.

On observe que, puisque la caractéristique de R est nulle, on a $|X| = |Y|$.

Lemme 1.43.

(a) Pour tout $\pi, \rho \in X$ on a

$$\sum_{g\in\mathscr{G}} \chi_\pi(g)\chi_\rho(g^{-1}) = \begin{cases} |\mathscr{G}| & \text{si } \pi = \rho \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) Pour tout $g, h \in \mathscr{G}$ on a

$$\sum_{\pi\in X} \chi_\pi(g)\chi_\pi(h^{-1}) = \begin{cases} |C_{\mathscr{G}}(g)| = \frac{|\mathscr{G}|}{|cc(g)|} & \text{si } g, h \text{ sont conjugués} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration.

(a) Soient d et d' les dimensions de π et ρ respectivement. Pour tout $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq d'$ on note E_{ij} la matrice de taille $d \times d'$ avec tous les coefficients nuls sauf le coefficient 1 en position (i,j) et on définit le morphisme

$$\varphi(i,j) = \sum_{g \in \mathscr{G}} \pi(g) E_{ij} \rho(g^{-1}) \in \mathrm{Hom}(\rho, \pi).$$

Alors le coefficient en position (i,j) de $\varphi(i,j)$ est $\varphi_{ij}(i,j) = \sum_{g\in\mathscr{G}} \pi_{ii}(g)\rho_{jj}(g^{-1})$ et

$$\sum_{g\in\mathscr{G}} \chi_\pi(g)\chi_\rho(g^{-1}) = \sum_{g\in\mathscr{G}} \sum_{i=1}^{d} \pi_{ii}(g) \sum_{j=1}^{d'} \rho_{jj}(g^{-1}) = \sum_{i,j} \varphi_{ij}(i,j).$$

Si $\pi \neq \rho$ alors $\varphi(i,j)$ est nul pour tout i et j et en particulier $\varphi_{ij}(i,j) = 0$. Si $\pi = \rho$ alors $d = d'$ et $\varphi(i,j) = \sum \pi(g) E_{ij} \pi(g^{-1})$ est une matrice scalaire (par le lemme de Schur) et sa trace est égale à $|\mathscr{G}|$ fois la trace de E_{ij}. Alors $\varphi(i,j)$ est la matrice scalaire avec coefficient $|\mathscr{G}|/d$ si $i = j$ et la matrice nulle sinon. On obtient $\sum_{i,j} \varphi_{ij}(i,j) = |\mathscr{G}|$.

(b) Soit A la matrice carrée de taille $|X| = |Y|$ indexée par X sur les lignes et Y sur les colonnes et telle que le coefficient en position (π, y) soit $|cc(y)|\chi_\pi(y)$. Soit B la matrice carrée de taille $|X|$ indexée par Y sur les lignes et X sur les colonnes et telle que le coefficient en position (y,π) soit $\chi_\pi(y^{-1})$. Par (a) on a $AB = |\mathscr{G}|\mathbb{I}_{|X|}$ et donc on obtient $BA = |\mathscr{G}|\mathbb{I}_{|X|}$. Le coefficient en position (y,y') de BA est $\sum_{\pi\in X} |cc(y')|\chi_\pi(y^{-1})\chi_\pi(y')$ dont le résultat. □

Proposition 1.44. *Pour tout $f \in R[\mathscr{G}]$ on a*

$$f = \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi\in X} \dim(\pi) \sum_{i,j=1}^{\dim(\pi)} \sum_{g\in\mathscr{G}} f(g)\pi_{ji}(g^{-1})\pi_{ij}$$

et $\{\pi_{ij} \mid \pi \in X, 1 \leq i,j \leq \dim(\pi)\}$ est une base de $R[\mathscr{G}]$.

Démonstration. Il suffit de prouver l'enoncé pour les $\mathbf{1}_g$ avec $g \in \mathscr{G}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi\in X} \dim(\pi) \sum_{i,j} \pi_{ji}(g^{-1})\pi_{ij}(x) &= \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi\in X} \dim(\pi)\mathrm{tr}(\pi(g^{-1})\pi(x)) \\
&= \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi\in X} \chi_\pi(1)\chi_\pi(g^{-1}x) \\
&\overset{\text{(lemme 1.43(b))}}{=} \frac{1}{|\mathscr{G}|} |C_{\mathscr{G}}(1)| \mathbf{1}_g(x) = \mathbf{1}_g(x).
\end{aligned}$$

Alors $\{\pi_{ij} \mid \pi \in X, 1 \leq i,j \leq \dim(\pi)\}$ est une famille génératrice de $R[\mathscr{G}]$ et son cardinal est $\sum_{\pi\in X} \dim(\pi)^2 = |\mathscr{G}| = \dim(R[\mathscr{G}])$. Elle est donc une base de $R[\mathscr{G}]$. □

Proposition 1.45. *Pour tout $f \in Cl[\mathscr{G}]$ on a*

$$f = \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi \in X} \sum_{g \in \mathscr{G}} f(g)\chi_\pi(g^{-1})\chi_\pi$$

et $\{\chi_\pi \,|\, \pi \in X\}$ est une base de $Cl[\mathscr{G}]$.

Démonstration. Pour tout $x \in \mathscr{G}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi \in X} \sum_{g \in \mathscr{G}} f(g)\chi_\pi(g^{-1})\chi_\pi(x) &= \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{g \in \mathscr{G}} f(g) \sum_{\pi \in X} \chi_\pi(g^{-1})\chi_\pi(x) \\ \text{(lemme 1.43(b))} &= \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{g \in cc(x)} f(g)|C_{\mathscr{G}}(x)| \\ &= \frac{|C_{\mathscr{G}}(x)||cc(x)|}{|\mathscr{G}|} f(x) = f(x).\end{aligned}$$

Alors $\{\chi_\pi \,|\, \pi \in X\}$ est une famille génératrice de $Cl(\mathscr{G})$ et son cardinal est $|X| = \dim(Cl[\mathscr{G}])$. Elle est donc une base de $Cl(\mathscr{G})$. □

On définit l'application

$$\begin{aligned}\mathscr{F} : R[\mathscr{G}] &\longrightarrow \prod_{\pi \in X} \mathrm{End}_R(V_\pi) \\ f &\longmapsto \Big(\sum_{g \in \mathscr{G}} f(g)\pi(g)\Big)_{\pi \in X}\end{aligned}$$

qui est un morphisme d'espaces vectoriels. La dimension de $\prod \mathrm{End}_R(V_\pi)$ comme R-espace vectoriel est $\sum_{\pi \in X} \dim_R(\mathrm{End}_R(V_\pi)) = \sum_{\pi \in X} \dim(\pi)^2 = |\mathscr{G}|$ qui est la dimension de $R[\mathscr{G}]$.

Proposition 1.46. *Pour tout $f, f' \in R[\mathscr{G}]$ on a $\mathscr{F}(f * f') = \mathscr{F}(f) \circ \mathscr{F}(f')$.*

Démonstration. Il suffit de prouver l'enoncé pour $f = \mathbf{1}_x$ et $f' = \mathbf{1}_y$ avec $x, y \in \mathscr{G}$. On observe que $\mathbf{1}_x * \mathbf{1}_y = \mathbf{1}_{xy}$. On obtient

$$\mathscr{F}(\mathbf{1}_x * \mathbf{1}_y) = \Big(\sum_{g \in \mathscr{G}} \mathbf{1}_{xy}(g)\pi(g)\Big)_\pi = \Big(\pi(x) \circ \pi(y)\Big)_\pi = \mathscr{F}(\mathbf{1}_x) \circ \mathscr{F}(\mathbf{1}_y)$$

et donc $\mathscr{F}$ est un morphisme d'algèbres. □

Théorème 1.47. *L'application $\mathscr{F}$ est un isomorphisme d'algèbres avec inverse*

$$\mathscr{F}^{-1} : (u_\pi)_\pi \longmapsto \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{g \in \mathscr{G}} \sum_{\pi \in X} \dim(\pi)\mathrm{tr}(\pi(g^{-1}) \circ u_\pi)\mathbf{1}_g.$$

On appelle $\mathscr{F}$ transformée de Fourier sur $\mathscr{G}$.

Démonstration. Par la proposition 1.44, on a $\mathbf{1}_g(x) = \frac{1}{|\mathscr{G}|}\sum_{\pi\in X}\dim(\pi)\chi_\pi(g^{-1}x)$ pour tout $g, x \in \mathscr{G}$. Pour tout $f \in R[\mathscr{G}]$ on obtient

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}(\mathscr{F}(f)) &= \frac{1}{|\mathscr{G}|}\sum_{g\in\mathscr{G}}\sum_{\pi\in X}\dim(\pi)\mathrm{tr}\Big(\pi(g^{-1})\circ\sum_{g'\in\mathscr{G}}f(g')\pi(g')\Big)\mathbf{1}_g \\ &= \sum_{g'\in\mathscr{G}}f(g')\sum_{g\in\mathscr{G}}\Big(\frac{1}{|\mathscr{G}|}\sum_{\pi\in X}\dim(\pi)\chi_\pi(g^{-1}g')\Big)\mathbf{1}_g \\ &= \sum_{g'\in\mathscr{G}}f(g')\sum_{g\in\mathscr{G}}\mathbf{1}_g(g')\mathbf{1}_g = \sum_{g\in\mathscr{G}}f(g)\mathbf{1}_g = f.\end{aligned}$$

Cela implique que $\mathscr{F}$ est un morphisme injectif d'algèbres. En particulier il est un morphisme injectif de R-espaces vectoriels de la même dimension et donc il est bijectif. □

Soit $R^X = \{(a_\pi)_{\pi\in X} \,|\, a_\pi \in R\}$ l'algèbre munie du produit ponctuel. On définit l'application $\mathscr{F}' : Cl[\mathscr{G}] \longrightarrow R^X$ par $f \longmapsto \left(\frac{1}{\dim(\pi)}\sum_{g\in\mathscr{G}}f(g)\chi_\pi(g)\right)_{\pi\in X}$.

Théorème 1.48. *L'application $\mathscr{F}'$ est un isomorphisme d'algèbres avec inverse*

$$\mathscr{F}'^{-1} : (a_\pi)_\pi \longmapsto \frac{1}{|\mathscr{G}|}\sum_{g\in\mathscr{G}}\sum_{\pi\in X}a_\pi\dim(\pi)\chi_\pi(g^{-1})\mathbf{1}_g.$$

Démonstration. Si $f \in Cl[\mathscr{G}]$ et $\pi \in X$ alors $\sum_{g\in\mathscr{G}}f(g)\pi(g) \in \mathrm{End}_{\mathscr{G}}(\pi)$ car

$$\pi(x)\sum_{g\in\mathscr{G}}f(g)\pi(g) = \sum_{g\in\mathscr{G}}f(g)\pi(xg) = \sum_{g\in\mathscr{G}}f(x^{-1}gx)\pi(gx) = \sum_{g\in\mathscr{G}}f(g)\pi(g)\pi(x).$$

Alors par le lemme de Schur on a $\mathrm{End}_{\mathscr{G}}(\pi) \cong R$ et donc on obtient $\sum_{g\in\mathscr{G}}f(g)\pi(g) = \frac{1}{\dim(\pi)}\sum_{g\in\mathscr{G}}f(g)\chi_\pi(g)\mathbb{I}_{V_\pi}$ où $\mathbb{I}_{V_\pi}$ est l'identité de $\mathrm{End}_R(V_\pi)$. Alors $\mathscr{F}' = \theta\circ\mathscr{F}$ où θ est l'inverse de l'isomorphisme d'algèbres $R^X \longrightarrow \prod_\pi \mathrm{End}_{\mathscr{G}}(\pi)$ défini par $(a_\pi) \longmapsto a_\pi\mathbb{I}_{V_\pi}$. Donc $\mathscr{F}'$ est un isomorphisme d'algèbres et son inverse est défini par

$$\mathscr{F}'^{-1}\big((a_\pi)_\pi\big) = \mathscr{F}^{-1}\big((a_\pi\mathbb{I}_{V_\pi})_\pi\big) = \frac{1}{|\mathscr{G}|}\sum_{g\in\mathscr{G}}\sum_{\pi\in X}\dim(\pi)a_\pi\chi_\pi(g^{-1})\mathbf{1}_g.$$ □

Corollaire 1.49. *Les idempotents centraux primitifs de $R[\mathscr{G}]$ sont les éléments*

$$e_\pi = \frac{\dim(\pi)}{|\mathscr{G}|}\sum_{g\in\mathscr{G}}\chi_\pi(g^{-1})\mathbf{1}_g$$

avec $\pi \in X$.

Démonstration. Par le lemme 1.42 l'algèbre $Cl(\mathscr{G})$ est le centre de $R[\mathscr{G}]$. Les idempotents primitifs de R^X sont les $(\mathbf{1}_{\{\pi\}}(\pi'))_{\pi'\in X}$ pour tout $\pi \in X$ et donc par le théorème 1.48 les idempotents centraux primitifs de $R[\mathscr{G}]$ sont les $\mathscr{F}^{-1}(\mathbf{1}_{\{\pi\}}(\pi')) = e_\pi$ pour tout $\pi \in X$. □

1.8 Induction et restriction parabolique

Dans cette section on considère des groupes généraux linéaires finis et on introduit les notions de représentations cuspidale et supercuspidale et de supports cuspidal et supercuspidal.

Soient $m \in \mathbb{N}^*$, p un nombre premier, q une puissance de p, $\mathbb{F}_q$ le corps fini avec q éléments et $\mathscr{G}$ le groupe $GL_m(\mathbb{F}_q)$. Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p.

Définition 1.50. Un *sous-groupe de Levi standard* $\mathscr{M}$ de $\mathscr{G}$ est un groupe de la forme $\mathscr{M} = \prod_{i=1}^{r} GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)$ où $r \in \mathbb{N}^*$, $m_i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et $\sum_{i=1}^{r} m_i = m$. Un *sous-groupe de Levi* de $\mathscr{G}$ est un sous-groupe conjugué à un sous-groupe de Levi standard.

Soit $\mathscr{M} = \prod_{i=1}^{r} GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)$ un sous-groupe de Levi standard de $\mathscr{G}$. On considère le sous-groupe parabolique standard supérieur $\mathscr{P}$ de $\mathscr{G}$ associé à $\mathscr{M}$ qui est formé des matrices triangulaires supérieures par blocs de tailles $(m_1, \dots, m_r)$ et son radical unipotent $\mathscr{U}$. Alors $\mathscr{P} = \mathscr{M}\mathscr{U}$ et $\mathscr{M} \cap \mathscr{U} = \{1\}$.

Définition 1.51. Le foncteur d'*induction parabolique*

$$i_{\mathscr{M}}^{\mathscr{G}} : \mathscr{R}_R(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{R}_R(\mathscr{G})$$

est le composé du prolongement trivial $\mathscr{R}_R(\mathscr{M}) \longrightarrow \mathscr{R}_R(\mathscr{P})$ et du foncteur d'induction $\mathrm{ind}_{\mathscr{P}}^{\mathscr{G}} : \mathscr{R}_R(\mathscr{P}) \longrightarrow \mathscr{R}_R(\mathscr{G})$.

Définition 1.52. Le foncteur de *restriction parabolique*

$$r_{\mathscr{M}}^{\mathscr{G}} : \mathscr{R}_R(\mathscr{G}) \longrightarrow \mathscr{R}_R(\mathscr{M})$$

est le composé de la restriction $\mathscr{R}_R(\mathscr{G}) \longrightarrow \mathscr{R}_R(\mathscr{P})$ et du foncteur des U-invariants $\mathscr{R}_R(\mathscr{P}) \longrightarrow \mathscr{R}_R(\mathscr{M})$ défini par

$$(\pi, V) \longmapsto V^U = \{v \in V \mid \pi(u)v = v \text{ pour tout } u \in U\}.$$

Les foncteurs $i_{\mathscr{M}}^{\mathscr{G}}$ et $r_{\mathscr{M}}^{\mathscr{G}}$ sont appelés aussi *induction* et *restriction de Harish-Chandra* et notés $R_{\mathscr{M}}^{\mathscr{G}}$ et ${}^*R_{\mathscr{M}}^{\mathscr{G}}$. Ils ne dépendent pas du choix du sous-groupe parabolique associé à $\mathscr{M}$ (voir [HL94]), c'est-à-dire qu'un choix différent du sous-groupe parabolique de facteur de Levi $\mathscr{M}$ donne des foncteurs isomorphes. En plus le foncteur $r_{\mathscr{M}}^{\mathscr{G}}$ est l'adjoint à gauche et à droite de $i_{\mathscr{M}}^{\mathscr{G}}$. Si $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}'$ sont deux sous-groupes de Levi de $\mathscr{G}$ on peut définir les foncteurs d'induction et restriction parabolique $i_{\mathscr{M}}^{\mathscr{M}'}$ et $r_{\mathscr{M}}^{\mathscr{M}'}$ et on a $i_{\mathscr{M}'}^{\mathscr{G}} i_{\mathscr{M}}^{\mathscr{M}'} = i_{\mathscr{M}}^{\mathscr{G}}$ et $r_{\mathscr{M}}^{\mathscr{M}'} r_{\mathscr{M}'}^{\mathscr{G}} = r_{\mathscr{M}}^{\mathscr{G}}$ (voir II.2.1 de [Vig96]).

Définition 1.53. Une représentation $\pi \in \mathrm{Rep}_R(\mathscr{G})$ est appelée *cuspidale* si $r_{\mathscr{M}}^{\mathscr{G}}(\pi) = 0$ pour tout sous-groupe de Levi $\mathscr{M} \neq \mathscr{G}$.

Proposition 1.54. *Une représentation $\pi \in \mathrm{Rep}_R(\mathscr{G})$ est cuspidale si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(\pi, i^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}}(\rho)) = 0$ pour tout sous-groupe de Levi $\mathscr{M} \neq \mathscr{G}$ et toute $\rho \in \mathrm{Rep}_R(\mathscr{M})$.*

Démonstration. On utilise le fait que $r^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}}$ est un adjoint à gauche de $i^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}}$. Si π n'est pas cuspidale alors il existe un sous-groupe de Levi $\mathscr{M} \neq \mathscr{G}$ tel que $r^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}}(\pi) \neq 0$. Alors on obtient $0 \neq \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(r^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}}(\pi), r^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}}(\pi)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(\pi, i^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}} r^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}}(\pi))$. Inversement s'il existe une représentation $\rho \in \mathrm{Rep}_R(\mathscr{M})$ telle que $\mathscr{M} \neq \mathscr{G}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(\pi, i^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}}(\rho)) \neq 0$ alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(r^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}}(\pi), \rho) \neq 0$ et donc $r^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}}(\pi) \neq 0$. □

Définition 1.55. Une représentation irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}_R(\mathscr{G})$ est appelée *supercuspidale* si π n'est isomorphe à aucun sous-quotient d'une induite parabolique d'une représentation irréductible d'un sous-groupe de Levi $\mathscr{M} \neq \mathscr{G}$.

On observe qu'une représentation irréductible $\pi \in \mathrm{Irr}_R(\mathscr{G})$ est cuspidale si et seulement si elle n'est pas une sous-représentation d'une induite parabolique d'une représentation d'un sous-groupe de Levi $\mathscr{M} \neq \mathscr{G}$. Donc une représentation $\pi \in \mathrm{Irr}_R(\mathscr{G})$ supercuspidale est toujours cuspidale.

Si R est de caractéristique 0 (ou plus en général, si la caractéristique de R ne divise pas le pro-ordre de $\mathscr{G}$) alors ces deux notions coïncident car les représentations de $\mathscr{G}$ sont semi-simples et donc un sous-quotient est toujours un quotient. Si la caractéristique de R divise le pro-ordre de $\mathscr{G}$ alors les représentations ne sont pas en général semi-simples et il existe des représentations cuspidales qui ne sont pas supercuspidales.

Définition 1.56. Une *paire cuspidale* (resp. *supercuspidale*) de $\mathscr{G}$ est une paire $(\mathscr{M}, \rho)$ formée d'un sous-groupe de Levi $\mathscr{M}$ de $\mathscr{G}$ et d'une représentation irréductible cuspidale (resp. supercuspidale) ρ de $\mathscr{M}$. La classe de $\mathscr{G}$-conjugaison de $(\mathscr{M}, \rho)$ est l'ensemble des paires $(\mathscr{M}^g, \rho^g)$ avec $g \in \mathscr{G}$ et elle est notée $(\mathscr{M}, \rho)_{\mathscr{G}}$.

Remarque 1.57. Soit $\pi \in \mathrm{Irr}_R(\mathscr{G})$. Alors il existe un sous-groupe de Levi $\mathscr{M}$ de $\mathscr{G}$ et une représentation cuspidale (resp. supercuspidale) ρ de $\mathscr{M}$ tels que π est une sous-représentation (resp. sous-quotient) de $i^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}}(\rho)$. Une telle paire $(\mathscr{M}, \rho)$ est unique à conjugaison près (voir [Jam86], III.2.5 de [Vig96] ou 3.1 de [MS14a]), on l'appelle *support cuspidal* (resp. *supercuspidal*) de π et on la note $sc(\pi)$ (resp. $ss(\pi)$).

On introduit une relations d'équivalence parmi les paires supercuspidales de $\mathscr{G}$ (voir la définition 1.14 de [SS15]).

Définition 1.58. Soit Γ un groupe d'automorphismes de $\mathbb{F}_q$. Soient $(\mathscr{M}, \rho)$ une paire supercuspidale de $\mathscr{G}$ où $\mathscr{M} \cong \prod_{i=1}^{r} GL_{m_i}(\mathbb{F}_q)$ et $\rho = \bigotimes_{i=1}^{r} \rho_i$. On note $\Gamma_{\mathscr{M}} = \Gamma^r$ et si $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r) \in \Gamma_{\mathscr{M}}$ on note $\rho^{\epsilon} = \bigotimes_{i=1}^{r} \rho_i^{\epsilon_i}$. La *classe d'équivalence* de $(\mathscr{M}, \rho)$ est l'ensemble, noté $[\mathscr{M}, \rho]$, des paires supercuspidales $(\mathscr{M}', \rho')$ de $\mathscr{G}$ telles qu'il existe $\epsilon \in \Gamma_{\mathscr{M}}$ avec $(\mathscr{M}', \rho')_{\mathscr{G}} = (\mathscr{M}, \rho^{\epsilon})_{\mathscr{G}}$.

Chapitre 2

L'algèbre $\mathscr{H}_R(GL_m(\mathbf{D}), \mathbb{I}_m + M_m(\wp_{\mathbf{D}}))$

Après le théorème 1.32 on voudrais avoir une description explicite de l'algèbre $\mathscr{H}_R(\mathtt{G}, \sigma)$ pour obtenir des informations sur la catégorie $\mathscr{R}_R(\mathtt{G}, \sigma)$ lorsque les hypothèses de ce théorème sont vérifiées. Dans ce chapitre on se concentre sur le cas où $\mathtt{G}$ est une forme intérieure d'un groupe général linéaire sur un corps localement compact non archimédien et σ le caractère trivial d'un sous-groupe ouvert compact de $\mathtt{G}$. Dans la première partie on donne une présentation par générateurs et relations d'une telle algèbre et puis, en utilisant la théorie de Fourier pour le groupes finis (section 1.7), on déduit des idempotents centraux de cette algèbre.

Soient $\mathbf{F}$ un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et $\mathbf{D}$ une algèbre à division centrale de dimension finie sur $\mathbf{F}$. Étant donné un entier $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathbf{G} = GL_m(\mathbf{D})$. On note $\mathcal{O}_{\mathbf{D}}$ l'anneau des entiers de $\mathbf{D}$, ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}_{\mathbf{D}}$, $\wp_{\mathbf{D}} = \varpi\mathcal{O}_{\mathbf{D}}$ son ideal premier et $\mathfrak{k}_{\mathbf{D}} = \mathcal{O}_{\mathbf{D}}/\wp_{\mathbf{D}}$ le corps résiduel de $\mathbf{D}$ de cardinal q. On note $K = GL_m(\mathcal{O}_{\mathbf{D}})$ et $K^1 = \mathbb{I}_m + M_m(\wp_{\mathbf{D}})$.

On considère l'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$ et on utilise les notations de la section 1.6 avec $\mathtt{G} = \mathbf{G}$ et $\mathtt{H} = K^1$. On rappelle que

- Ξ est un ensemble de représentants des K^1-doubles classes de $\mathbf{G}$,
- pour tout $x, y \in \mathbf{G}$ le support de $f_x * f_y = f_x f_y$ est

$$K^1 x K^1 y K^1 = \bigsqcup_{\xi \in \Upsilon_{xy}} K^1 \xi K^1$$

  avec $\Upsilon_{xy} \subset \Xi$,
- pour tout $x, y \in \mathbf{G}$ on a

$$f_x f_y = \sum_{\xi \in \Upsilon_{xy}} \left|(K^1 x K^1 \cap \xi K^1 y^{-1} K^1)/K^1\right| f_\xi$$

- si x ou y normalise K^1 alors $f_x f_y = f_{xy}$.

2.1 Système de racines

Dans cette section on introduit la théorie des systèmes de racines dans le cas d'un groupe général linéaire. La référence classique pour le cas général est le chapitre VI de [Bou02].

On note $\mathbf{\Phi} = \{\alpha_{ij} \mid 1 \leq i \neq j \leq m\}$ l'ensemble des racines de $\mathbf{GL}_m$ relativement au tore des matrices diagonales. On considère les ensembles des racines positives $\mathbf{\Phi}^+ = \{\alpha_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq m\}$, des racines negatives $\mathbf{\Phi}^- = -\mathbf{\Phi}^+ = \{\alpha_{ij} \mid 1 \leq j < i \leq m\}$ et des racines simples $\Sigma = \{\alpha_{ii+1} \mid 1 \leq i \leq m-1\}$ de $\mathbf{GL}_m$ relativement au sous-groupe de Borel des matrices triangulaires supérieures.

Pour tout $\alpha = \alpha_{ii+1} \in \Sigma$ soit $s_\alpha = s_i$ la permutation $(i, i+1)$ et soit $W = \langle s_1, \ldots, s_{m-1} \rangle$ le groupe de permutations de m éléments, qui est le groupe de Weyl de $\mathbf{GL}_m$. On considère la fonction longueur $\ell : W \longrightarrow \mathbb{N}$ de W relativement aux $s_1, \ldots, s_{m-1}$ définie par

$$\ell(w) = \min\{n \in \mathbb{N} \,|\, w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n} \text{ avec } \alpha_j \in \Sigma\}$$

pour tout $w \in W$. On a $\ell(ws_\alpha) = \ell(w) \pm 1$ pour tout $w \in W$ et $\alpha \in \Sigma$.

Le groupe W agit sur $\mathbf{\Phi}$ par $w\alpha_{ij} = \alpha_{w(i)w(j)}$. Pour tout $w \in W$, on note

$$N(w) = \{\alpha \in \mathbf{\Phi}^+ \,|\, w\alpha \in \mathbf{\Phi}^-\}$$

et on observe que $N(s_\alpha) = \{\alpha\}$ pour tout $\alpha \in \Sigma$.

Lemme 2.1. *On a*

$$|N(ws_\alpha)| = \begin{cases} |N(w)| + 1 & \text{si } w\alpha \in \mathbf{\Phi}^+ \\ |N(w)| - 1 & \text{si } w\alpha \in \mathbf{\Phi}^- \end{cases}$$

pour tout $w \in W$ et $\alpha \in \Sigma$.

Démonstration. Si $w\alpha \in \mathbf{\Phi}^+$ alors $N(ws_\alpha) = s_\alpha N(w) \cup \{\alpha\}$ et si $w\alpha \in \mathbf{\Phi}^-$ alors $N(ws_\alpha) = s_\alpha(N(w) \setminus \{\alpha\})$. □

Proposition 2.2. *Pour tout $w \in W$ on a $\ell(w) = |N(w)|$.*

Démonstration. On observe que $|N(1)| = \ell(1) = 0$. On prouve $N(w) \leq \ell(w)$ par récurrence sur la longueur de $w \in W$. Soient $w, w' \in W$, $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \Sigma$ tels que $\ell(w) = n+1$, $\ell(w') = n$ et $w = w's_\alpha$. Par l'hypothèse de récurrence et par le lemme 2.1 on obtient $|N(w)| = |N(w's_\alpha)| \leq |N(w')| + 1 \leq \ell(w') + 1 = \ell(w)$. On prouve $\ell(w) \leq N(w)$ par récurrence sur $|N(w)|$. Soient $w \neq 1$ dans W et $n \in \mathbb{N}$ tels que $|N(w)| = n+1$. Par le lemme 2.1 il existe $\alpha \in \Sigma$ tel que $|N(ws_\alpha)| = n$ sinon $w\alpha' \in \mathbf{\Phi}^+$ pour tout $\alpha' \in \Sigma$ qui implique $w(1) < w(2) < \cdots < w(m-1)$ et donc $w = 1$. Par l'hypothèse de récurrence on obtient $\ell(w) \leq \ell(ws_\alpha) + 1 \leq |N(ws_\alpha)| + 1 = |N(w)|$. □

Pour tout $w \in W$ on obtient

$$\ell(ws_\alpha) = \begin{cases} \ell(w)+1 & \text{si } w\alpha \in \mathbf{\Phi}^+ \\ \ell(w)-1 & \text{si } w\alpha \in \mathbf{\Phi}^-. \end{cases} \tag{2.1}$$

Soit $P \subset \Sigma$. On note $\mathbf{\Phi}_P^+$ l'ensemble des racines positives engendrées par P, $\mathbf{\Phi}_P^- = -\mathbf{\Phi}_P^+$, $\mathbf{\Phi}_P = \mathbf{\Phi}_P^+ \cup \mathbf{\Phi}_P^-$, $\mathbf{\Psi}_P^+ = \mathbf{\Phi}^+ - \mathbf{\Phi}_P^+$ et $\mathbf{\Psi}_P^- = -\mathbf{\Psi}_P^+$. On note $W_P = \langle s_\alpha, \alpha \in P\rangle$ qui est un sous-groupe de W. Enfin on note $\widehat{P} = \Sigma - P$, $\widehat{\alpha} = \widehat{\{\alpha\}}$ et on observe que $\mathbf{\Phi}_P^+ = \bigcap_{\alpha\in\widehat{P}} \mathbf{\Phi}_{\widehat{\alpha}}^+$.

Exemple. Soit $\alpha = \alpha_{ii+1} \in \Sigma$. Alors $\widehat{\alpha} = \{\alpha_{jj+1} \in \Sigma \,|\, j \neq i\}$ et

$$\begin{aligned} \mathbf{\Phi}_{\widehat{\alpha}}^+ &= \{\alpha_{hk} \in \mathbf{\Phi}^+ \,|\, 1 \leq h < k \leq i \text{ ou } i+1 \leq h < k \leq m\}, \\ \mathbf{\Psi}_{\widehat{\alpha}}^+ &= \{\alpha_{hk} \in \mathbf{\Phi}^+ \,|\, 1 \leq h \leq i < k \leq m\}. \end{aligned}$$

Pour tout $P \subset \Sigma$ il existe un unique élément de longueur minimale dans chaque classe de W/W_P ou de $W_P\backslash W$.

Proposition 2.3. *Soient $P \subset \Sigma$ et w l'élément de longueur minimale dans la classe $wW_P \in W/W_P$. Alors $w\alpha \in \mathbf{\Phi}^+$ pour tout $\alpha \in \mathbf{\Phi}_P^+$.*

Démonstration. Par hypothèse, pour tout $\alpha \in P$ on a $\ell(ws_\alpha) = \ell(w)+1$ et donc par (2.1) on a $w\alpha \in \mathbf{\Phi}^+$. □

2.2 Générateurs

Dans cette section on cherche des générateurs de la $\mathbb{Z}$-algèbre $\mathscr{H}_\mathbb{Z}(\mathbf{G}, K^1)$ de la forme f_x avec $x \in \mathbf{G}$.

Pour tout $\alpha = \alpha_{ii+1} \in \Sigma$ on considère la matrice

$$\tau_\alpha = \tau_i = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_i & 0 \\ 0 & \varpi\mathbb{I}_{m-i} \end{pmatrix} \in \mathbf{G}$$

et on note $\tau_0 = \varpi\mathbb{I}_m$ et $\tau_m = \mathbb{I}_m$. On note $\mathbf{\Delta}$ le monoïde commutatif engendré par les τ_α avec $\alpha \in \Sigma$. Tout élément $\tau \in \mathbf{\Delta}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\tau = \prod_{\alpha\in\Sigma} \tau_\alpha^{i_\alpha}$ avec les $i_\alpha \in \mathbb{N}$ et de manière unique sous la forme $\tau = \mathrm{diag}(1, \varpi^{a_1}, \ldots, \varpi^{a_{m-1}})$ avec $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{m-1}$.

Si $P \subset \{0, \ldots, m\}$ ou si $P \subset \Sigma$, on note $\tau_P = \prod_{x\in P} \tau_x$.

Pour tout $\tau \in \mathbf{\Delta}$ on note $P(\tau) = \{\alpha \in \Sigma \,|\, i_\alpha = 0\}$ et on observe que si $P \subset \Sigma$ alors $P(\tau_P) = \widehat{P}$.

On note $\Omega = K \cup \{\tau_0, \tau_0^{-1}\} \cup \{\tau_\alpha \,|\, \alpha \in \Sigma\}$ et $\mathbf{\Omega} = \{f_\omega \in \mathscr{H}_\mathbb{Z}(\mathbf{G}, K^1) \,|\, \omega \in \Omega\}$. L'ensemble $\mathbf{\Omega}$ est fini car si $\omega \in K^1$ alors $f_\omega = 1$ et $K/K^1 \cong GL_m(\mathfrak{k}_\mathbf{D})$. On veut démontrer que l'algèbre $\mathscr{H}_\mathbb{Z}(\mathbf{G}, K^1)$ est engendrée par $\mathbf{\Omega}$.

Dans tout le chapitre on considère les sous-groupes de K suivants.

- Pour tout $\alpha = \alpha_{ij} \in \mathbf{\Phi}$ on note U_α le sous-groupe des matrices $(a_{hk}) \in K$ avec $a_{hh} = 1$ pour tout $h \in \{1, \dots, m\}$, $a_{ij} \in \mathcal{O}_{\mathbf{D}}$ et $a_{hk} = 0$ si $h \neq k$ et $(h,k) \neq (i,j)$.
- Pour tout $P \subset \Sigma$ on note $U_P^+ = \prod_{\alpha \in \mathbf{\Psi}_P^+} U_\alpha$ et $U_P^- = \prod_{\alpha \in \mathbf{\Psi}_P^-} U_\alpha$. On observe qu'ils sont les intersections avec K des radicaux unipotents des sous-groupes paraboliques standard (supérieure et inférieure) de facteur de Levi le sous-groupe de Levi standard associé à P. Alors on a $U_P^+ = \prod_{\alpha \in \widehat{P}} U_{\widehat{\alpha}}^+$ et $U_P^- = \prod_{\alpha \in \widehat{P}} U_{\widehat{\alpha}}^-$. On observe que si $P_1 \subset P_2 \subset \Sigma$ alors $U_{P_2}^+$ est un sous-groupe de $U_{P_1}^+$ et $U_{P_2}^-$ est un sous-groupe de $U_{P_1}^-$.
- Pour tout $P \subset \Sigma$ on note $M_P^+ = \prod_{\alpha \in \mathbf{\Phi}_P^+} U_\alpha$, $M_P^- = \prod_{\alpha \in \mathbf{\Phi}_P^-} U_\alpha$ et $M_P = \prod_{\alpha \in \mathbf{\Phi}_P} U_\alpha$. Alors on a $M_P = \bigcap_{\alpha \in \widehat{P}} M_{\widehat{\alpha}}$.
- On note $U = U_\emptyset$ et $U^- = U_\emptyset^-$ les sous-groupes des matrices unipotentes supérieures et des matrices unipotentes inférieures de K.
- On sait qu'il existe une unique section multiplicative de la surjection $\mathcal{O}_{\mathbf{D}}^\times \longrightarrow \mathfrak{k}_{\mathbf{D}}^\times$. Donc on peut identifier canoniquement le groupe des matrices diagonales à coefficients dans $\mathfrak{k}_{\mathbf{D}}^\times$ à un sous-groupe T du groupe des matrices diagonales à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbf{D}}^\times$.
- On note $I = K^1 T U$ le sous-groupe de Iwahori standard de $\mathbf{G}$ et $I^1 = K^1 U$ son pro-p-radical.
- On identifie s_α à un élément de $\mathbf{G}$ pour tout $\alpha \in \Sigma$ et W à un sous-groupe de $\mathbf{G}$ par les matrices de permutation.

Remarque 2.4. Le groupe K^1 est distingué dans K, τ_0 normalise K^1, T et les U_α avec $\alpha \in \mathbf{\Phi}$ et il centralise W, W normalise T, T normalise les U_α avec $\alpha \in \mathbf{\Phi}$ et tout $\tau \in \mathbf{\Delta}$ centralise $W_{P(\tau)}$ et normalise T et $M_{P(\tau)}$.

Remarque 2.5. Le groupe W agit sur l'ensemble des U_α avec $\alpha \in \mathbf{\Phi}$ par $wU_\alpha w^{-1} = U_{w\alpha}$ et donc le cardinal du quotient $(U^- \cap wUw^{-1})K^1/K^1 \cong (U^- \cap wUw^{-1})/(K^1 \cap U^- \cap wUw^{-1})$ est $q^{\ell(w)}$ par la proposition 2.2.

On énonce maintenant un lemme qui est à la base des calculs suivants et qui utilise fortement le fait qu'on travaille sur $GL_m(\mathbf{D})$ et pas sur un autre groupe linéaire.

Lemme 2.6. *Soit $\tau \in \mathbf{\Delta}$. On a les inclusions*

$$\tau^{-1} U_{P(\tau)}^+ \tau \subset U_{P(\tau)}^+ \cap K^1 \quad \text{et} \quad \tau U_{P(\tau)}^- \tau^{-1} \subset U_{P(\tau)}^- \cap K^1$$

qui sont des égalités si $\tau = \tau_\alpha$ avec $\alpha \in \Sigma$.

Démonstration. Si $\alpha = \alpha_{ii+1} \in \Sigma$ alors

$$U_{\widehat{\alpha}}^+ = \{(u_{hk}) \in U \mid u_{hk} \in \mathcal{O}_{\mathbf{D}} \text{ si } 1 \leq h \leq i < k \leq m \text{ et } u_{hk} = 0 \text{ sinon}\}$$

et donc $\tau_\alpha^{-1} U_{\widehat{\alpha}}^+ \tau_\alpha = U_{\widehat{\alpha}}^+ \cap K^1$. De manière analogue on a $\tau_\alpha U_{\widehat{\alpha}}^- \tau_\alpha^{-1} = U_{\widehat{\alpha}}^- \cap K^1$. Pour le cas général, on rappelle que $U_{P(\tau)}^+ = \prod_{\alpha \in \widehat{P(\tau)}} U_{\widehat{\alpha}}^+$ et on observe qu'il existe $\tau(\alpha) \in \mathbf{\Delta}$ tel

que $\tau = \tau_\alpha \tau(\alpha)$ et que $(U^+_{\widehat{\alpha}} \cap K^1)^{\tau(\alpha)} \subset U^+_{\widehat{\alpha}} \cap K^1$ pour tout $\alpha \in \widehat{P(\tau)}$. On obtient

$$\begin{aligned}\tau^{-1} U^+_{P(\tau)} \tau = \prod_{\alpha \in \widehat{P(\tau)}} (\tau_\alpha^{-1} U^+_{\widehat{\alpha}} \tau_\alpha)^{\tau(\alpha)} &= \prod_{\alpha \in \widehat{P(\tau)}} (U^+_{\widehat{\alpha}} \cap K^1)^{\tau(\alpha)} \\ \subset \prod_{\alpha \in \widehat{P(\tau)}} (U^+_{\widehat{\alpha}} \cap K^1) &\subset U^+_{P(\tau)} \cap K^1.\end{aligned}$$

De manière analogue on a $\tau U^-_{P(\tau)} \tau^{-1} \subset U^-_{P(\tau)} \cap K^1$. □

Lemme 2.7. *Soient $\tau \in \mathbf{\Delta}$ et $\alpha \in \Sigma$.*

(*a*) *On a $U^+_{P(\tau)} \tau K^1 = \tau K^1$ et $K^1 \tau U^-_{P(\tau)} = K^1 \tau$.*

(*b*) *On a $\tau^{-1} K^1 \tau K^1 \cap K = U^-_{P(\tau)} K^1$ et $\tau K^1 \tau^{-1} K^1 \cap K = U^+_{P(\tau)} K^1$.*

(*c*) *$K^1 \tau_\alpha K^1 = \tau_\alpha U^-_{\widehat{\alpha}} K^1 = K^1 U^+_{\widehat{\alpha}} \tau_\alpha$ et $K^1 \tau_\alpha^{-1} K^1 = \tau_\alpha^{-1} U^+_{\widehat{\alpha}} K^1 = K^1 U^-_{\widehat{\alpha}} \tau_\alpha^{-1}$.*

Démonstration.

(*a*) Par le lemme 2.6 on a $\tau^{-1} U^+_{P(\tau)} \tau \subset K^1$ et $\tau U^-_{P(\tau)} \tau^{-1} \subset K^1$.

(*b*) On peut décomposer K^1 comme $(K^1 \cap U^-_{P(\tau)})(K^1 \cap M_{P(\tau)}) D (K^1 \cap U^+_{P(\tau)})$ où D est le groupe des matrices diagonales à coefficients dans $1 + \wp_{\mathbf{D}}$. Puisque τ normalise $(K^1 \cap M_{P(\tau)})$ et D on obtient

$$\tau^{-1} K^1 \tau K^1 = \tau^{-1}(K^1 \cap U^-_{P(\tau)}) \tau (K^1 \cap M_{P(\tau)}) D \tau^{-1} (K^1 \cap U^+_{P(\tau)}) \tau K^1.$$

Par le lemme 2.6 on a $\tau^{-1}(K^1 \cap U^+_{P(\tau)})\tau \subset \tau^{-1} U^+_{P(\tau)} \tau \subset K^1$ et donc on obtient $\tau^{-1} K^1 \tau K^1 \cap K = \tau^{-1}(K^1 \cap U^-_{P(\tau)}) \tau K^1 \cap K$. On a $U^-_{P(\tau)} \subset \tau^{-1}(K^1 \cap U^-_{P(\tau)})\tau$ par le lemme 2.6. En plus on a $\tau^{-1}(K^1 \cap U^-_{P(\tau)})\tau \cap K \subset \tau^{-1} U^-_{P(\tau)} \tau \cap K \subset U^-_{P(\tau)}$. On obtient $\tau^{-1} K^1 \tau K^1 \cap K = U^-_{P(\tau)} K^1$. De manière analogue on obtient $\tau K^1 \tau^{-1} K^1 \cap K = U^+_{P(\tau)} K^1$.

(*c*) Puisque $\tau_\alpha^{-1} K^1 \tau_\alpha$ et $\tau_\alpha K^1 \tau_\alpha^{-1}$ sont contenus dans K, si on applique (*b*) on obtient $K^1 \tau_\alpha K^1 = \tau_\alpha U^-_{\widehat{\alpha}} K^1$ et $K^1 \tau_\alpha^{-1} K^1 = \tau_\alpha^{-1} U^+_{\widehat{\alpha}} K^1$. Si on prend les inverses on obtient $K^1 \tau_\alpha^{-1} K^1 = K^1 U^-_{\widehat{\alpha}} \tau_\alpha^{-1}$ et $K^1 \tau_\alpha K^1 = K^1 U^+_{\widehat{\alpha}} \tau_\alpha$. □

Lemme 2.8. *Les f_{τ_α} avec $\alpha \in \Sigma$ commutent entre eux et si $\tau = \prod_{\alpha \in \Sigma} \tau_\alpha^{i_\alpha} \in \mathbf{\Delta}$ alors $f_\tau = \prod_{\alpha \in \Sigma} f_{\tau_\alpha}^{i_\alpha}$.*

Démonstration. On le démontre par récurrence sur le nombre naturel $I(\tau) = \sum_{\alpha \in \Sigma} i_\alpha$. Si $I(\tau) = 0$ alors $\tau = 1$ et le résultat est vrai. Si $I(\tau) > 0$, on prend $\alpha' \in \Sigma$ tel que $i_{\alpha'} > 0$, on pose $\tau' = \tau_{\alpha'}^{-1} \tau \in \mathbf{\Delta}$ et on observe que $I(\tau') < I(\tau)$. Le support de $f_{\tau_{\alpha'}} f_{\tau'}$ est $K^1 \tau_{\alpha'} K^1 \tau' K^1$ donc par le lemme 2.7(*c*) il est $K^1 U^+_{\widehat{\alpha'}} \tau_{\alpha'} \tau' K^1$ et par le lemme 2.7(*a*) il est

$K^1\tau K^1$ car $P(\tau) \subset P(\tau_{\alpha'})$. Par (1.4) on obtient

$$\begin{aligned} f_{\tau_{\alpha'}} f_{\tau'}(\tau) &= \left|(K^1\tau_{\alpha'}K^1 \cap \tau K^1 \tau'^{-1} K^1)/K^1\right| = \left|(\tau_{\alpha'}^{-1} K^1 \tau_{\alpha'} K^1 \cap \tau' K^1 \tau'^{-1} K^1)/K^1\right| \\ &= \left|(U^-_{\widehat{\alpha'}} K^1 \cap \tau' K^1 \tau'^{-1} K^1)/K^1\right|. \end{aligned}$$

On a $U^-_{\widehat{\alpha'}} K^1 \cap \tau' K^1 \tau'^{-1} K^1 = U^-_{\widehat{\alpha'}} K^1 \cap K \cap \tau' K^1 \tau'^{-1} K^1 = U^-_{\widehat{\alpha'}} K^1 \cap U^+_{P(\tau')} K^1 = K^1$ par le lemme 2.7(b) et donc $f_{\tau_{\alpha'}} f_{\tau'}(\tau) = 1$. Cela prouve que $f_\tau = f_{\tau_{\alpha'}} f_{\tau'}$ et donc que les f_{τ_α} commutent entre eux car $f_{\tau_{\alpha_1}} f_{\tau_{\alpha_2}} = f_{\tau_{\alpha_1}\tau_{\alpha_2}} = f_{\tau_{\alpha_2}\tau_{\alpha_1}} = f_{\tau_{\alpha_2}} f_{\tau_{\alpha_1}}$ pour tout $\alpha_1, \alpha_2 \in \Sigma$. Enfin, par l'hypothèse de récurrence on obtient $f_\tau = \prod f_{\tau_\alpha}^{i_\alpha}$. □

Lemme 2.9. *Le groupe* $\mathbf{G}$ *se décompose comme* $\mathbf{G} = K^1 U T \tau_0^{\mathbb{Z}} W \mathbf{\Delta} W U K^1$. *Plus precisement si* $x \in \mathbf{G}$, *il existe* $k_1, k_2 \in K^1$, $u_1, u_2 \in U$ *et des uniques* $t \in T$, $i \in \mathbb{Z}$, $\tau \in \mathbf{\Delta}$, $w_1 \in W$ *et* w_2 *de longueur minimale dans* $W_{P(\tau)} w_2 \in W_{P(\tau)} \backslash W$ *tels que* $x = k_1 u_1 t \tau_0^i w_1 \tau w_2 u_2 k_2 \in \mathbf{G}$.

Démonstration. On connaît la décomposition

$$\mathbf{G} = \bigsqcup_{\tilde{w} \in \widetilde{W}} I^1 \tilde{w} I^1 = \bigsqcup_{\tilde{w} \in \widetilde{W}} K^1 U \tilde{w} U K^1$$

où $\widetilde{W}$ est le groupe des matrices monomiales à coefficients dans $\mathfrak{k}_{\mathbf{D}}^\times \ltimes \varpi^{\mathbb{Z}}$. Si on fixe $\tilde{w} \in \widetilde{W}$, on peut écrire $\tilde{w} = t w \mathrm{diag}(\varpi^{a_1}, \dots, \varpi^{a_m})$ avec $t \in T$, $w \in W$ et $a_j \in \mathbb{Z}$. Puis on a $\mathrm{diag}(\varpi^{a_1}, \dots, \varpi^{a_m}) = w_2^{-1} \mathrm{diag}(\varpi^{a_{w_2(1)}}, \dots, \varpi^{a_{w_2(m)}}) w_2$ avec $a_{w_2(1)} \leq \dots \leq a_{w_2(m)}$ et w_2 de longueur minimale dans $W_P w_2 \in W_P \backslash W$ où $P = \{\alpha_{jj+1} \in \Sigma \,|\, a_{w_2(j)} = a_{w_2(j+1)}\}$. On obtient

$$\tilde{w} = t w w_2^{-1} \tau_0^{a_{w_2(1)}} \prod_{h=1}^{m-1} \tau_h^{a_{w_2(h+1)} - a_{w_2(h)}} w_2.$$

Si on pose $w_1 = w w_2^{-1}$, $i = a_{w_2(1)} \in \mathbb{Z}$ et $\tau = \prod \tau_h^{a_{w_2(h+1)} - a_{w_2(h)}} \in \mathbf{\Delta}$ on a $P = P(\tau)$ et $\tilde{w} = t \tau_0^i w_1 \tau w_2$ et donc on a prouvé $\mathbf{G} = K^1 U T \tau_0^{\mathbb{Z}} W \mathbf{\Delta} W U K^1$.
Maintenant on suppose que $\tilde{w} = t \tau_0^i w_1 \tau w_2 = t' \tau_0^{i'} w_1' \tau' w_2'$ avec $t, t' \in T$, $i, i' \in \mathbb{Z}$, $\tau, \tau' \in \mathbf{\Delta}$, $w_1, w_1' \in W$, w_2 de longueur minimale dans $W_{P(\tau)} w_2$ et w_2' de longueur minimale dans $W_{P(\tau')} w_2'$. On a

$$w_1 w_2 (w_2^{-1} w_1^{-1} t \tau_0^i w_1 w_2 w_2^{-1} \tau w_2) = w_1' w_2' (w_2'^{-1} w_1'^{-1} t' \tau_0^{i'} w_1' w_2' w_2'^{-1} \tau' w_2')$$

et puisque les deux matrices entre parenthèses sont diagonales on obtient $w_1 w_2 = w_1' w_2'$ et $(w_2^{-1} w_1^{-1} t w_1 w_2)(\tau_0^i w_2^{-1} \tau w_2) = (w_2^{-1} w_1^{-1} t' w_1 w_2)(\tau_0^{i'} w_2'^{-1} \tau' w_2')$. Les matrices $\tau_0^i w_2^{-1} \tau w_2$ et $\tau_0^{i'} w_2'^{-1} \tau' w_2'$ sont à coefficients dans $\varpi^{\mathbb{Z}}$ et les matrices $w_2^{-1} w_1^{-1} t w_1 w_2$ et $w_2^{-1} w_1^{-1} t' w_1 w_2$ sont dans T. On obtient $t = t'$ et

$$\tau_0^i w_2^{-1} \tau w_2 = \tau_0^{i'} w_2'^{-1} \tau' w_2' \quad \text{qui implique} \quad \tau_0^{i-i'} \tau = w_2 w_2'^{-1} \tau' w_2' w_2^{-1}.$$

Puisque $\tau_0^{i-i'}\tau$ et τ' sont des matrices de la forme $\mathrm{diag}(\varpi^{b_1},\dots,\varpi^{b_m})$ avec $b_1 \le \cdots \le b_m$ on a $w_2' w_2^{-1} \in W_{P(\tau')}$ et donc $\tau_0^{i-i'}\tau = \tau'$. Cela implique $i = i'$, $\tau = \tau'$ et $W_{P(\tau)}w_2' = W_{P(\tau)}w_2$ et puisque on a choisit w_2' et w_2 de longueur minimale on a $w_2' = w_2$. □

Proposition 2.10. *L'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$ est engendrée par l'ensemble $\mathbf{\Omega}$ et la sous-algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(K, K^1)$ par les éléments f_u, f_t, f_{s_α} avec $u \in U$, $t \in T$ et $\alpha \in \Sigma$.*

Démonstration. Par le lemme 2.9, pour tout élément $x \in \mathbf{G}$ on a une décomposition $x = k_1 u_1 t \tau_0^i w_1 \tau w_2 u_2 k_2$ avec $k_1, k_2 \in K^1$, $u_1, u_2 \in U$, $t \in T$, $i \in \mathbb{Z}$, $\tau = \prod \tau_\alpha^{i_\alpha} \in \mathbf{\Delta}$ et $w_1, w_2 \in W$. Par le lemme 1.33(b) et le lemme 2.8 on a

$$f_x = f_{u_1 t \tau_0^i w_1} f_\tau f_{w_2 u_2} = f_{u_1} f_t f_{\tau_0}^i f_{w_1} \prod_{\alpha \in \Sigma} f_{\tau_\alpha}^{i_\alpha} f_{w_2} f_{u_2} \tag{2.2}$$

qui prouve que $\mathbf{\Omega}$ engendre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$. Pour la deuxième assertion, on observe que $K = K^1 UTWUK^1$ et donc $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(K, K^1)$ est engendrée par f_u, f_t, f_{s_α} avec $u \in U$, $t \in T$ et $\alpha \in \Sigma$. □

2.3 Relations

Dans cette section on veut trouver des relations qui existent parmi les générateurs de $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$ qu'on a définis dans la section précédente.

Proposition 2.11. *Soient $\tau \in \mathbf{\Delta}$, $u_1 \in U^+_{P(\tau)}$ et $u_2 \in U^-_{P(\tau)}$. Alors $f_{u_1} f_\tau = f_\tau = f_\tau f_{u_2}$.*

Démonstration. Les éléments u_1 et u_2 normalisent K^1 et donc par le lemme 2.7(a) le support de $f_{u_1} f_\tau$ et de $f_\tau f_{u_2}$ est $K^1 \tau K^1$. Alors $(f_{u_1} f_\tau)(\tau) = \left|(u_1 K^1 \cap \tau K^1 \tau^{-1} K^1)/K^1\right| = 1$ et $(f_\tau f_{u_2})(\tau) = \left|(K^1 \tau K^1 \cap \tau u_2 K^1)/K^1\right| = 1$, d'où le résultat. □

Pour tout $\alpha = \alpha_{ii+1} \in \Sigma$ et $w \in W$ on considère les ensembles suivantes :

- $A(w,\alpha) = \{w(j) \,|\, i+1 \le j \le m\} \subset \{1,\dots,m\}$,
- $B(w,\alpha) = \{w(j) - 1 \,|\, i+1 \le j \le m\} \subset \{0,\dots,m-1\}$,
- $P'(w,\alpha) = A(w,\alpha) \setminus B(w,\alpha)$,
- $P(w,\alpha) = \{\alpha_{ii+1} \in \Sigma \,|\, i \in P'(w,\alpha)\}$,
- $Q(w,\alpha) = B(w,\alpha) \setminus A(w,\alpha)$.

On observe que $\tau_{P'(w,\alpha)} = \tau_{P(w,\alpha)}$ car $0 \notin P'(w,\alpha)$.

Soient $\alpha = \alpha_{ii+1} \in \Sigma$, $w' \in W$ et w de longueur minimale dans $w' W_{\widehat{\alpha}} \in W/W_{\widehat{\alpha}}$. Alors on a

$$w' \tau_i w'^{-1} = w \tau_i w^{-1} = \prod_{h=i+1}^{m} w \tau_{h-1} \tau_h^{-1} w^{-1} = \prod_{h=i+1}^{m} \tau_{w(h)-1} \tau_{w(h)}^{-1}.$$

On obtient $w\tau_\alpha w^{-1} = \tau^{-1}_{P'(w,\alpha)}\tau_{Q(w,\alpha)} = \tau^{-1}_{P(w,\alpha)}\tau_{Q(w,\alpha)}$. Cette égalité nous suggère d'étudier le produit dans $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$

$$f_{\tau_{P(w,\alpha)}} f_w f_{\tau_\alpha} f_{w^{-1}}. \tag{2.3}$$

Plus en général on est intéressé à l'étude du produit $f_\tau f_{w'} f_{\tau_\alpha}$ pour tout $\tau \in \mathbf{\Delta}$, $w' \in W$ et $\alpha \in \Sigma$. Par la remarque 2.4 on a $f_\tau f_{w'} f_{\tau_\alpha} = f_{w_1} f_\tau f_w f_{\tau_\alpha} f_{w_2}$ avec $w' = w_1 w w_2$, $w_1, w_2 \in W$ et w de longueur minimale dans $W_{P(\tau)} w W_{\widehat{\alpha}}$.

Lemme 2.12. *Soient $P \subset \Sigma$, $\alpha \in \Sigma$ et w de longueur minimale dans $W_P w W_{\widehat{\alpha}} \in W_P \backslash W / W_{\widehat{\alpha}}$. Alors $P \cap P(w, \alpha) = \emptyset$.*

Démonstration. Soit $\alpha = \alpha_{ii+1}$. L'élément w^{-1} est de longueur minimale dans la classe $w^{-1}W_P \in W/W_P$ et donc par la proposition 2.3 on a $w^{-1}\mathbf{\Phi}^+_P \subset \mathbf{\Phi}^+$. Puis, pour tout $x \in P'(w, \alpha)$ on a $w^{-1}(x) \geq i+1 > i \geq w^{-1}(x+1)$ et donc $w^{-1}\mathbf{\Phi}^+_{P(w,\alpha)} \subset \mathbf{\Phi}^-$ qui donne $P \cap P(w, \alpha) = \emptyset$. □

Le lemme 2.12 implique que $P(\tau) \cap P(w, \alpha) = \emptyset$ et donc que $f_\tau = f_{\tau'} f_{\tau_{P(w,\alpha)}}$ avec $\tau' \in \mathbf{\Delta}$. On obtient $f_\tau f_{w'} f_{\tau_\alpha} = f_{w_1} f_{\tau'} (f_{\tau_{P(w,\alpha)}} f_w f_{\tau_\alpha} f_{w^{-1}}) f_{w w_2}$ et donc on a ramené l'étude de $f_\tau f_{w'} f_{\tau_\alpha}$ à l'étude de (2.3).

On énonce maintenant deux lemmes qui nous permettent de calculer le support de (2.3) et une proposition qui donne la relation entre (2.3) et $f_{\tau_{Q(w,\alpha)}}$.

Lemme 2.13. *Soient $\alpha \in \Sigma$, $w \in W$ et $P \subset \Sigma$. Alors*

$$K^1 \tau_P K^1 w \tau_\alpha w^{-1} K^1 = K^1 \tau_P w \tau_\alpha w^{-1} (U^+_{\widehat{P}} \cap w U^-_{\widehat{\alpha}} w^{-1}) K^1.$$

Démonstration. Par le lemme 2.7(c) on a $K^1 \tau_\alpha K^1 = \tau_\alpha U^-_{\widehat{\alpha}} K^1$. On obtient

$$\begin{aligned} K^1 \tau_P K^1 w \tau_\alpha w^{-1} K^1 &= K^1 \tau_P w K^1 \tau_\alpha K^1 w^{-1} = K^1 \tau_P w \tau_\alpha U^-_{\widehat{\alpha}} K^1 w^{-1} \\ &= K^1 \tau_P w \tau_\alpha w^{-1} \Big(\prod_{\alpha' \in w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}}} U_{\alpha'} \Big) K^1. \end{aligned}$$

Par le lemme 2.6, si $\alpha' \in w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}}$ on a $w\tau_\alpha w^{-1} U_{\alpha'} w \tau_\alpha^{-1} w^{-1} = U_{\alpha'} \cap K^1$ et donc par la remarque 2.4 et le lemme 2.6 on a $(\tau_P w \tau_\alpha w^{-1}) U_{\alpha'} (\tau_P w \tau_\alpha w^{-1})^{-1} \subset K^1$ si et seulement si $\alpha' \notin w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}} \cap \mathbf{\Psi}^+_{\widehat{P}}$. On obtient

$$K^1 \tau_P K^1 w \tau_\alpha w^{-1} K^1 = K^1 \tau_P w \tau_\alpha w^{-1} \Big(\prod_{\alpha' \in w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}} \cap \mathbf{\Psi}^+_{\widehat{P}}} U_{\alpha'} \Big) K^1$$

d'où le résultat □

Lemme 2.14. *Soient $\alpha = \alpha_{ii+1} \in \Sigma$, $w \in W$ et $P = P(w, \alpha)$. Alors on a*

$$\mathbf{\Psi}^+_{\widehat{P}} \cap w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}} = \mathbf{\Phi}^+ \cap w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}} \quad et \quad U^+_{\widehat{P}} \cap wU^-_{\widehat{\alpha}}w^{-1} = U \cap wU^-_{\widehat{\alpha}}w^{-1}.$$

Si en plus w est de longueur minimale dans $wW_{\widehat{\alpha}} \in W/W_{\widehat{\alpha}}$ alors on a

$$\mathbf{\Phi}^+ \cap w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}} = \mathbf{\Phi}^+ \cap w\mathbf{\Phi}^- \quad et \quad U \cap wU^-_{\widehat{\alpha}}w^{-1} = U \cap wU^-w^{-1}.$$

Démonstration. Pour démontrer la première assertion il suffit de voir que $\mathbf{\Phi}^+_{\widehat{P}} \cap w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}} = \emptyset$. On suppose par l'absurde qu'il existe $\alpha' \in \mathbf{\Phi}^+_{\widehat{P}} \cap w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}}$. Puisque $\alpha' \in w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}}$ on a $\alpha' = \alpha_{w(h)w(k)}$ pour certains $i+1 \leq h \leq m$ et $1 \leq k \leq i$ et puisque $\alpha' \in \mathbf{\Phi}^+_{\widehat{P}}$ on a $\alpha_{w(h)w(k)} = \alpha_{w(h)w(h)+1} + \cdots + \alpha_{w(k)-1w(k)}$ avec $\alpha_{w(h)w(h)+1}, \cdots, \alpha_{w(k)-1w(k)} \notin P(w, \alpha)$ et donc $w(h), \ldots, w(k)-1 \notin P'(w, \alpha)$. Par construction on a $w(h) \in A(w, \alpha)$ qui implique $w(h) \in B(w, \alpha)$ et $w(h)+1 \in A(w, \alpha)$. Par récurrence on obtient $w(k) \in A(w, \alpha)$ qui est en contradiction avec $1 \leq k \leq i$. On a prouvé que $\mathbf{\Phi}^+_{\widehat{P}} \cap w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}} = \emptyset$ et donc $\mathbf{\Psi}^+_{\widehat{P}} \cap w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}} = \mathbf{\Phi}^+ \cap w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}}$ d'où $U^+_{\widehat{P}} \cap wU^-_{\widehat{\alpha}}w^{-1} = U \cap wU^-_{\widehat{\alpha}}w^{-1}$. Si on suppose en plus que w est de longueur minimale dans $wW_{\widehat{\alpha}} \in W/W_{\widehat{\alpha}}$ alors par la proposition 2.3 on a $w\mathbf{\Phi}^-_{\widehat{\alpha}} \subset \mathbf{\Phi}^-$ et donc $\mathbf{\Phi}^+ \cap w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}} = \mathbf{\Phi}^+ \cap w\mathbf{\Phi}^-$ d'où $U \cap wU^-_{\widehat{\alpha}}w^{-1} = U \cap wU^-w^{-1}$. □

Proposition 2.15. *Soient $\alpha \in \Sigma$ et w de longueur minimale dans $wW_{\widehat{\alpha}} \in W/W_{\widehat{\alpha}}$. Alors on a*

$$f_{\tau_{P(w,\alpha)}} f_w f_{\tau_\alpha} f_{w^{-1}} = q^{\ell(w)} f_{\tau_{Q(w,\alpha)}} \sum_{u \in U \cap wU^-w^{-1}} f_u.$$

Démonstration. On note $P = P(w, \alpha)$ et $Q = Q(w, \alpha)$. Par les lemmes 2.13 et 2.14 le support de $f_{\tau_P} f_w f_{\tau_\alpha} f_{w^{-1}}$ est $K^1\tau_P w\tau_\alpha w^{-1}(U \cap wU^-w^{-1})K^1 = K^1\tau_Q(U \cap wU^-w^{-1})K^1$. Si $u \in U \cap wU^-w^{-1} = U^+_{\widehat{P}} \cap wU^-_{\widehat{\alpha}}w^{-1}$ on a

$$\begin{aligned}
(f_{\tau_P} f_{w\tau_\alpha w^{-1}})(\tau_Q u) &= \left|(K^1\tau_P K^1 \cap \tau_Q u K^1 w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}K^1)/K^1\right| \\
&= \left|(\tau_P^{-1}K^1\tau_P K^1 \cap w\tau_\alpha w^{-1}uK^1 w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}K^1)/K^1\right| \\
&= \left|(\tau_P^{-1}K^1\tau_P K^1 \cap w\tau_\alpha K^1(w^{-1}uw)\tau_\alpha^{-1}K^1 w^{-1})/K^1\right|.
\end{aligned}$$

Par le lemme 2.7(c) on obtient

$$\begin{aligned}
(f_{\tau_P} f_{w\tau_\alpha w^{-1}})(\tau_Q u) &= \left|(\tau_P^{-1}K^1\tau_P K^1 \cap w\tau_\alpha K^1\tau_\alpha^{-1}K^1 w^{-1})/K^1\right| \\
&= \left|(\tau_P^{-1}K^1\tau_P K^1 \cap wU^+_{\widehat{\alpha}}K^1 w^{-1})/K^1\right| \\
&= \left|(\tau_P^{-1}K^1\tau_P K^1 \cap wU^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1}K^1)/K^1\right|
\end{aligned}$$

On note $V = wU^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1}$. Par le lemme 2.7($b$) on a

$$\tau_P^{-1}K^1\tau_P K^1 \cap VK^1 = \tau_P^{-1}K^1\tau_P K^1 \cap K \cap VK^1 = U^-_{\widehat{P}}K^1 \cap VK^1.$$

On veut prouver que $U^-_{\widehat{P}} K^1 \cap VK^1 = (U^- \cap V)K^1$. On considère la décomposition $V = (U^- \cap V)(U \cap V)$. Soit $x = v_1 v_2 k \in U^-_{\widehat{P}} K^1 \cap VK^1$ avec $v_1 \in U^- \cap V$, $v_2 \in U \cap V$ et $k \in K^1$. Alors on a $v_1^{-1} x \in (U^- \cap V) U^-_{\widehat{P}} K^1 \cap (U \cap V)K^1 \subset U^- K^1 \cap UK^1 = K^1$ et donc $x \in (V \cap U^-)K^1$ et $U^-_{\widehat{P}} K^1 \cap VK^1 \subset (U^- \cap V)K^1$. Par le lemme 2.14 on a $\mathbf{\Phi}^+_{\widehat{P}} \cap w\mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}} = \emptyset$ qui implique $\mathbf{\Phi}^-_{\widehat{P}} \cap w\mathbf{\Psi}^+_{\widehat{\alpha}} = \emptyset$, $U^-_{\widehat{P}} \cap V = U^- \cap V$ et donc $(U^- \cap V)K^1 = (U^-_{\widehat{P}} \cap V)K^1 \subset U^-_{\widehat{P}} K^1 \cap VK^1$. On obtient

$$(f_{\tau_P} f_{w\tau_\alpha w^{-1}})(\tau_Q u) = \left|(U^- \cap wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1})K^1/K^1\right|.$$

Puisque w est de longueur minimale dans $wW_{\widehat{\alpha}}$, par la proposition 2.3 on a $w\mathbf{\Phi}^+_{\widehat{\alpha}} \subset \mathbf{\Phi}^+$ et $U^- \cap wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} = U^- \cap wUw^{-1}$. On obtient $(f_{\tau_P} f_{w\tau_\alpha w^{-1}})(\tau_Q u) = \left|(U^- \cap wUw^{-1})K^1/K^1\right|$ qui vaut $q^{\ell(w)}$ par la remarque 2.5. □

On énonce maintenant une proposition qui résume les relations parmi les générateurs f_ω de $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(GL_m(\mathbf{D}), K^1)$ qu'on a trouvé.

Proposition 2.16. *Les éléments $f_\omega \in \mathbf{\Omega}$ vérifient les relations suivantes.*

0. $f_k = 1$ *pour tout* $k \in K^1$;
1. $f_{k_1} f_{k_2} = f_{k_1 k_2}$ *pour tout* $k_1, k_2 \in K$;
2. $f_{\tau_0} f_{\tau_0^{-1}} = 1$, $f_{\tau_0} f_\omega = f_{\tau_0 \omega \tau_0^{-1}} f_{\tau_0}$ *et* $f_{\tau_0^{-1}} f_\omega = f_{\tau_0^{-1} \omega \tau_0} f_{\tau_0^{-1}}$ *pour tout* $\omega \in \Omega$;
3. $f_{\tau_\alpha} f_t = f_{\tau_\alpha t \tau_\alpha^{-1}} f_{\tau_\alpha}$ *pour tout* $t \in T$ *et* $\alpha \in \Sigma$;
4. $f_{\tau_\alpha} f_u = f_{\tau_\alpha u \tau_\alpha^{-1}} f_{\tau_\alpha}$ *si* $u \in U_{\alpha'}$ *avec* $\alpha' \in \mathbf{\Phi}_{\widehat{\alpha}}$, *pour tout* $\alpha \in \Sigma$;
5. $f_u f_{\tau_\alpha} = f_{\tau_\alpha}$ *si* $u \in U_{\alpha'}$ *avec* $\alpha' \in \mathbf{\Psi}^+_{\widehat{\alpha}}$, *pour tout* $\alpha \in \Sigma$;
6. $f_{\tau_\alpha} f_u = f_{\tau_\alpha}$ *si* $u \in U_{\alpha'}$ *avec* $\alpha' \in \mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}}$, *pour tout* $\alpha \in \Sigma$;
7. $f_{\tau_\alpha} f_{s_{\alpha'}} = f_{s_{\alpha'}} f_{\tau_\alpha}$ *pour tout* $\alpha \neq \alpha'$ *dans* Σ ;
8. $f_{\tau_\alpha} f_{\tau_{\alpha'}} = f_{\tau_{\alpha'}} f_{\tau_\alpha}$ *pour tout* $\alpha, \alpha' \in \Sigma$;
9. $f_{\tau_{P(w,\alpha)}} f_w f_{\tau_\alpha} f_{w^{-1}} = q^{\ell(w)} f_{\tau_{Q(w,\alpha)}} \sum_{u \in U \cap wU^- w^{-1}} f_u$ *pour tout* $\alpha \in \Sigma$ *et* w *de longueur minimale dans* $wW_{\widehat{\alpha}} \in W/W_{\widehat{\alpha}}$.

Démonstration. Grâce au lemme 1.33(b) et à la remarque 2.4 on obtient les relations 1 et 2 car K et τ_0 normalisent K^1, la relation 3 car les τ_α normalisent T, la relation 4 car τ_α normalise les $U_{\alpha'}$ avec $\alpha' \in \mathbf{\Phi}_{\widehat{\alpha}}$ et la relation 7 car τ_α commute avec $s_{\alpha'}$ si $\alpha \neq \alpha'$. Puis on obtient les relations 5 et 6 par la proposition 2.11, la relation 8 par le lemme 2.8 et la relation 9 par la proposition 2.15. □

2.4 Présentation par générateurs et relations

Maintenant on veut prouver que la liste de relations de la proposition 2.16 donne une présentation de l'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$.

Définition 2.17. Soit $\mathscr{A}$ la $\mathbb{Z}$-algèbre engendrée par les éléments $\mathbf{f}_\omega$ avec $\omega \in \Omega$ qui satisfont les relations suivantes :

0. $\mathbf{f}_k = 1$ pour tout $k \in K^1$;
1. $\mathbf{f}_{k_1}\mathbf{f}_{k_2} = \mathbf{f}_{k_1k_2}$ pour tout $k_1, k_2 \in K$;
2. $\mathbf{f}_{\tau_0}\mathbf{f}_{\tau_0^{-1}} = 1$, $\mathbf{f}_{\tau_0}\mathbf{f}_\omega = \mathbf{f}_{\tau_0\omega\tau_0^{-1}}\mathbf{f}_{\tau_0}$ et $\mathbf{f}_{\tau_0^{-1}}\mathbf{f}_\omega = \mathbf{f}_{\tau_0^{-1}\omega\tau_0}\mathbf{f}_{\tau_0^{-1}}$ pour tout $\omega \in \Omega$;
3. $\mathbf{f}_{\tau_\alpha}\mathbf{f}_t = \mathbf{f}_{\tau_\alpha t\tau_\alpha^{-1}}\mathbf{f}_{\tau_\alpha}$ pour tout $t \in T$ et $\alpha \in \Sigma$;
4. $\mathbf{f}_{\tau_\alpha}\mathbf{f}_u = \mathbf{f}_{\tau_\alpha u\tau_\alpha^{-1}}\mathbf{f}_{\tau_\alpha}$ si $u \in U_{\alpha'}$ avec $\alpha' \in \mathbf{\Phi}_{\widehat{\alpha}}$, pour tout $\alpha \in \Sigma$;
5. $\mathbf{f}_u\mathbf{f}_{\tau_\alpha} = \mathbf{f}_{\tau_\alpha}$ si $u \in U_{\alpha'}$ avec $\alpha' \in \mathbf{\Psi}^+_{\widehat{\alpha}}$, pour tout $\alpha \in \Sigma$;
6. $\mathbf{f}_{\tau_\alpha}\mathbf{f}_u = \mathbf{f}_{\tau_\alpha}$ si $u \in U_{\alpha'}$ avec $\alpha' \in \mathbf{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}}$, pour tout $\alpha \in \Sigma$;
7. $\mathbf{f}_{\tau_\alpha}\mathbf{f}_{s_{\alpha'}} = \mathbf{f}_{s_{\alpha'}}\mathbf{f}_{\tau_\alpha}$ pour tout $\alpha \neq \alpha'$ dans Σ ;
8. $\mathbf{f}_{\tau_\alpha}\mathbf{f}_{\tau_{\alpha'}} = \mathbf{f}_{\tau_{\alpha'}}\mathbf{f}_{\tau_\alpha}$ pour tout $\alpha, \alpha' \in \Sigma$;
9. $\prod_{\alpha' \in P(w,\alpha)} \mathbf{f}_{\tau_{\alpha'}}\mathbf{f}_w\mathbf{f}_{\tau_\alpha}\mathbf{f}_{w^{-1}} = q^{\ell(w)} \prod_{\alpha'' \in Q(w,\alpha)} \mathbf{f}_{\tau_{\alpha''}} \sum_{u \in U \cap wU^-w^{-1}} \mathbf{f}_u$ pour tout $\alpha \in \Sigma$ et w de longueur minimale dans $wW_{\widehat{\alpha}} \in W/W_{\widehat{\alpha}}$.

Pour simplifier les notations, si $\tau = \prod_{\alpha\in\Sigma} \tau_\alpha^{i_\alpha} \in \mathbf{\Delta}$ on note $\mathbf{f}_\tau = \prod \mathbf{f}_{\tau_\alpha}^{i_\alpha} \in \mathscr{A}$ qui est bien défini par 8 de la définition 2.17 et si i est un entier négatif on note $\mathbf{f}_{\tau_0}^i = \mathbf{f}_{\tau_0^{-1}}^{-i} \in \mathscr{A}$.

Lemme 2.18. *Soient $\tau \in \mathbf{\Delta}$, $u_1 \in U^+_{P(\tau)}$, $u_2 \in U^-_{P(\tau)}$ et $u_3 \in M_{P(\tau)}$. Alors $\mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{u_2}$ et $\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{u_3} = \mathbf{f}_{\tau u_3\tau^{-1}}\mathbf{f}_\tau$.*

Démonstration. Puisque $\tau_{\widehat{P(\tau)}}$ divise τ dans $\mathbf{\Delta}$ et $U^+_{P(\tau)} = \prod_{\alpha\in\widehat{P(\tau)}} U^+_{\widehat{\alpha}}$ alors par 5 et 8 de la définition 2.17 on a $\mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}_\tau$. De manière analogue par 6 et 8 de la définition 2.17 on a $\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{u_2} = \mathbf{f}_\tau$. Puisque $M_{P(\tau)} = \bigcap_{\alpha\in\widehat{P(\tau)}} M_{\widehat{\alpha}}$, par 4 et 8 de la définition 2.17 on a $\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{u_3} = \mathbf{f}_{\tau u_3\tau^{-1}}\mathbf{f}_\tau$. □

Par la proposition 2.16, il existe un morphisme d'algèbres ϑ de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$ qui envoie $\mathbf{f}_\omega$ dans f_ω pour tout $\omega \in \Omega$ et ce morphisme est surjectif par la proposition 2.10. Dans cette section on veut prouver que ϑ est un isomorphisme en construisant un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules surjectif ϑ' de $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$ vers $\mathscr{A}$ tel que $\vartheta(\vartheta'(\Phi)) = \Phi$ pour tout $\Phi \in \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$.

Lemme 2.19. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{\Omega} & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ f_\omega & \longmapsto & \mathbf{f}_\omega \end{array} \tag{2.4}$$

est bien définie.

Démonstration. Soient $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ tels que $K^1\omega_1K^1 = K^1\omega_2K^1$. Si ω_1 normalise K alors $\omega_1\omega_2^{-1} \in K^1$: si $\omega_1 \in K$ par 0 et 1 de la définition 2.17 on a $\mathbf{f}_{\omega_1} = \mathbf{f}_{\omega_2}$ et si $\omega_1 \in \{\tau_0^{\pm 1}\}$ alors $\omega_2 = \omega_1$. Si $\omega_1 \in \{\tau_\alpha \,|\, \alpha \in \Sigma\}$ alors $\omega_2 \in \Omega \cap K^1\omega_1K^1$ et donc $\omega_2 = \omega_1$. Cela prouve que (2.4) est bien définie. □

Maintenant on veut étendre (2.4) à un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules $\vartheta' : \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1) \to \mathscr{A}$. Puisque tout $\Phi \in \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$ s'écrit de manière unique sous la forme $\Phi = \sum_{x\in\Xi} \alpha_x f_x$ avec les $\alpha_x \in \mathbb{Z}$, il suffit de définir l'image de f_x pour tout $x \in \Xi$.

Soit $x \in \mathbf{G}$. Par (2.2) il existe $u_1, u_2 \in U$, $t \in T$, $i \in \mathbb{Z}$, $\tau = \prod_{\alpha\in\Sigma} \tau_\alpha^{i_\alpha} \in \mathbf{\Delta}$ et $w_1, w_2 \in W$ tels que $f_x = f_{u_1} f_t f_{\tau_0}^i f_{w_1} f_\tau f_{w_2} f_{u_2}$. On veut prouver que l'application $f_x \longmapsto \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2}$ est bien définie.

Lemme 2.20. *Soient $t \in T$, $i \in \mathbb{Z}$, $\tau \in \mathbf{\Delta}$, $w_1 \in W$ et w_2 de longueur minimale dans $W_{P(\tau)}w_2 \in W_{P(\tau)}\backslash W$. Alors pour tout $u_1, u_2 \in U$ il existe $\widetilde{u_1} \in w_1U^-w_1^{-1} \cap U$ et $\widetilde{u_2} \in w_2^{-1}Uw_2 \cap U$ tels que*

$$\mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2} = \mathbf{f}_{\widetilde{u_1}}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{\widetilde{u_2}}.$$

Démonstration. Par 1 et 2 de la définition 2.17 on a

$$\mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2} = \mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{u_1'}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2}$$

où on pose $u_1' = \tau_0^{-i}t^{-1}u_1t\tau_0^i \in U$. Soit $P = P(\tau)$. On considère la décomposition $U = (w_2^{-1}U_P^-w_2 \cap U)(w_2^{-1}M_P^-w_2 \cap U)(w_2^{-1}Uw_2 \cap U)$. Puisque w_2 est de longueur minimale dans W_Pw_2 par la proposition 2.3 on a $w_2^{-1}\mathbf{\Phi}_P^- \subset \mathbf{\Phi}^-$ et donc $w_2^{-1}M_P^-w_2 \cap U = \{1\}$. La décomposition devient $U = (w_2^{-1}U_P^-w_2 \cap U)(w_2^{-1}Uw_2 \cap U)$. Soit $u_2 = u_{2,1}u_{2,2}$ selon cette décomposition. Par 1 de la définition 2.17 et par le lemme 2.18 on a

$$\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2} = \mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2u_{2,1}w_2^{-1}}\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_{2,2}} = \mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_{2,2}}.$$

On considère la décomposition $U = (w_1U^-w_1^{-1} \cap U)(w_1M_P^+w_1^{-1} \cap U)(w_1U_P^+w_1^{-1} \cap U)$ et soit $u_1' = u_{1,1}u_{1,2}u_{1,3}$ selon cette décomposition. Alors par 1 et 4 de la définition 2.17 et le lemme 2.18 on a

$$\mathbf{f}_{u_1'}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}_{u_{1,1}}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_{w_1^{-1}u_{1,2}w_1}\mathbf{f}_{w_1^{-1}u_{1,3}w_1}\mathbf{f}_\tau = \mathbf{f}_{u_{1,1}}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{\tau^{-1}w_1^{-1}u_{1,2}w_1\tau}.$$

On obtient $\mathbf{f}_{u_1'}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2} = \mathbf{f}_{u_{1,1}}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{w_2^{-1}\tau^{-1}w_1^{-1}u_{1,2}w_1\tau w_2}\mathbf{f}_{u_{2,2}}$. On observe que par la proposition 2.3 on a$w_2^{-1}\tau^{-1}w_1^{-1}u_{1,2}w_1\tau w_2 \in w_2^{-1}M_P^+w_2 \subset w_2^{-1}Uw_2 \cap U$. Donc si on pose $\widetilde{u_1} = t\tau_0^iu_{1,1}\tau_0^{-i}t^{-1} \in w_1U^-w_1^{-1} \cap U$ et $\widetilde{u_2} = w_2^{-1}\tau^{-1}w_1^{-1}u_{1,3}w_1\tau w_2u_{2,2} \in w_2^{-1}Uw_2 \cap U$ on obtient le résultat. □

Lemme 2.21. *Soit $x \in \mathbf{G}$. Il existe $t \in T$, $i \in \mathbb{Z}$, $\tau \in \mathbf{\Delta}$, $w_1 \in W$, w_2 de longueur minimale dans $W_{P(\tau)}w_2 \in W_{P(\tau)}\backslash W$, $u_1 \in w_1U^-w_1^{-1} \cap U$ et $u_2 \in w_2^{-1}Uw_2 \cap U$ tels que*

$$f_x = f_{u_1}f_tf_{\tau_0}^if_{w_1}f_\tau f_{w_2}f_{u_2}. \tag{2.5}$$

En plus une décomposition de f_x de cette forme est unique.

Démonstration. Par (2.2) et par le lemme 2.9 il existe $u_1, u_2 \in U$ et des uniques $t \in T$, $i \in \mathbb{Z}$, $\tau \in \mathbf{\Delta}$, $w_1 \in W$ et w_2 de longueur minimale dans $W_{P(\tau)}w_2$ tels que

$$f_x = f_{u_1} f_t f_{\tau_0}^i f_{w_1} f_\tau f_{w_2} f_{u_2} = \vartheta(\mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2}).$$

Le lemme 2.20 dit qu'on peut choisir u_1 dans $w_1U^-w_1^{-1} \cap U$ et u_2 dans $w_2^{-1}Uw_2 \cap U$. Soient maintenant $u_1, u_1' \in w_1U^-w_1^{-1} \cap U$ et $u_2, u_2' \in w_2^{-1}Uw_2 \cap U$ tels que $f_x = f_{u_1} f_t f_{\tau_0}^i f_{w_1} f_\tau f_{w_2} f_{u_2} = f_{u_1'} f_t f_{\tau_0}^i f_{w_1} f_\tau f_{w_2} f_{u_2'}$. Par le lemme 1.33($b$) on obtient

$$f_\tau = f_{w_1^{-1}\tau_0^{-i}t^{-1}u_1^{-1}u_1' t\tau_0^i w_1} f_\tau f_{w_2u_2'u_2^{-1}w_2^{-1}} = f_{u_-} f_\tau f_{u_+}$$

où $u_- = w_1^{-1}\tau_0^{-i}t^{-1}u_1^{-1}u_1' t\tau_0^i w_1 \in U^-$ et $u_+ = w_2u_2'u_2^{-1}w_2^{-1} \in U$. Par la proposition 2.10 il existe $\tilde{u}_1 \in U$, $\tilde{t} \in T$, $\tilde{w} \in W$, $\tilde{u}_2 \in M_P^+$ et $\tilde{u}_3 \in U_P^+$ tels que $f_{u_-} = f_{\tilde{u}_1} f_{\tilde{t}} f_{\tilde{w}} f_{\tilde{u}_2} f_{\tilde{u}_3}$. Par la proposition 2.11, la relation 4 de la proposition 2.16 et le lemme 1.33(b) on a $f_\tau = f_{\tilde{u}_1} f_{\tilde{t}} f_{\tilde{w}} f_{\tilde{u}_2} f_{\tilde{u}_3} f_\tau f_{u_+} = f_{\tilde{u}_1} f_{\tilde{t}} f_{\tilde{w}} f_\tau f_{\tau^{-1}\tilde{u}_2\tau u_+}$ et par le lemme 2.9 on a $\tilde{t} = \tilde{w} = 1$. On obtient $f_{u_-} = f_{\tilde{u}_1\tilde{u}_2\tilde{u}_3}$ qui implique $u_- \in U^- \cap K^1U \subset K^1$ et donc $f_\tau = f_\tau f_{u_+}$. Cela implique $K^1\tau K^1 \cap K^1\tau u_+ K^1 \neq \emptyset$ et donc $u_+ \in \tau^{-1}K^1\tau K^1 \cap U \subset U^-K^1 \cap U \subset K^1$. On a prouvé $f_{u_-} = f_{u_+} = 1$ qui implique $f_{u_1'} = f_{u_1}$ et $f_{u_2'} = f_{u_2}$ d'où l'unicité de la décomposition (2.5). □

Soient $x \in \Xi$ et $f_x = f_{u_1} f_t f_{\tau_0}^i f_{w_1} f_\tau f_{w_2} f_{u_2}$ l'unique décomposition de f_x de la forme (2.5). On définit $\vartheta'(f_x) = \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2}$ et le morphisme de $\mathbb{Z}$-modules

$$\begin{array}{rcl} \vartheta' : \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1) & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ \displaystyle\sum_{x\in\Xi} a_x f_x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{x\in\Xi} a_x \vartheta'(f_x). \end{array} \tag{2.6}$$

Maintenant on veut prouver que ϑ' est surjectif.

Lemme 2.22. *Soient $x \in \mathbf{G}$ et $f_x = f_{u_1} f_t f_{\tau_0}^i f_{w_1} f_\tau f_{w_2} f_{u_2}$ une décomposition de la forme (2.2). Alors $\vartheta'(f_x) = \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2}$.*

Démonstration. Si $w_2 = w_3w_4$ avec $w_3 \in W_{P(\tau)}$ et w_4 de longueur minimale dans $W_{P(\tau)}w_2$ alors par 1 et 7 de la définition 2.17 on a $\mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2} = \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1w_3}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_4}\mathbf{f}_{u_2}$. Par le lemme 2.20 il existe $\widetilde{u_1} \in w_1w_3U^-w_3^{-1}w_1^{-1} \cap U$ et $\widetilde{u_2} \in w_4^{-1}Uw_4 \cap U$ tels que $\mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1w_3}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_4}\mathbf{f}_{u_2} = \mathbf{f}_{\widetilde{u_1}}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1w_3}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_4}\mathbf{f}_{\widetilde{u_2}}$ dans $\mathscr{A}$. Puisque $f_x = \vartheta(\mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2}) = \vartheta(\mathbf{f}_{\widetilde{u_1}}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1w_3}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_4}\mathbf{f}_{\widetilde{u_2}}) = f_{\widetilde{u_1}} f_t f_{\tau_0}^i f_{w_1w_3} f_\tau f_{w_4} f_{\widetilde{u_2}}$ est l'unique décomposition de la forme (2.5), on obtient $\vartheta'(f_x) = \mathbf{f}_{\widetilde{u_1}}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1w_3}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_4}\mathbf{f}_{\widetilde{u_2}} = \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2}$. □

Proposition 2.23. *Le morphisme ϑ' défini en (2.6) est surjectif.*

Démonstration. Puisque ϑ' est un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules, il suffit de prouver que tout élément $\mathbf{a}$ du sous-monoïde multiplicatif de $\mathscr{A}$ engendré par les $\mathbf{f}_\omega$ avec $\omega \in \Omega$ est dans

l'image de ϑ'. On prouve ce résultat par récurrence sur le nombre d'éléments $\mathbf{f}_\omega$ avec $\omega \in \Omega$ nécessaires pour obtenir $\mathbf{a}$. On a $\mathbf{f}_\omega = \vartheta'(f_\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Maintenant on suppose $\mathbf{a} = \vartheta'(\Phi_\mathbf{a}) \in \mathscr{A}$ avec $\Phi_\mathbf{a} \in \mathscr{H}_\mathbb{Z}(\mathbf{G}, K^1)$ et on prouve que $\mathbf{af}_\omega$ est dans l'image de ϑ' pour tout $\omega \in \Omega$. Grâce à 1 de la définition 2.17, au fait que $K = K^1UTWUK^1$ et au fait que ϑ est un morphisme de $\mathbb{Z}$-algèbres, il suffit de prouver que l'élément $\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_\omega$ est dans l'image de ϑ' pour tout $x \in \mathbf{G}$ et tout $\omega \in U \cup T \cup \{\tau_0^{\pm 1}\} \cup \{s_\alpha, \tau_\alpha \,|\, \alpha \in \Sigma\}$. Soit $f_x = f_{u_1} f_t f_{\tau_0}^i f_{w_1} f_\tau f_{w_2} f_{u_2}$ l'unique décomposition de f_x de la forme (2.5).

- Si $\tilde{u} \in U$ on obtient $\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_{\tilde{u}} = \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{u_2\tilde{u}} = \vartheta'(f_{u_1} f_t f_{\tau_0}^i f_{w_1} f_\tau f_{w_2} f_{u_2\tilde{u}})$ par 1 de la définition 2.17 et le lemme 2.22.
- Si $\tilde{t} \in T$ on obtient $\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_{\tilde{t}} = \vartheta'(f_{u_1} f_{t(\tau_0^i w_1 \tau w_2)\tilde{t}(\tau_0^i w_1 \tau w_2)^{-1}} f_{\tau_0}^i f_{w_1} f_\tau f_{w_2} f_{\tilde{t}^{-1}u_2\tilde{t}})$ par 1, 2 et 3 de la définition 2.17 et le lemme 2.22.
- Par 2 de la définition 2.17 et par le lemme 2.22 on obtient l'égalité $\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_{\tau_0^{+\varepsilon}} = \vartheta'(f_{u_1} f_t f_{\tau_0}^{i+\varepsilon} f_{w_1} f_\tau f_{w_2} f_{\tau_0^{-\varepsilon} u_2 \tau_0^{+\varepsilon}})$ pour $\varepsilon \in \{1, -1\}$.
- Soient $\alpha \in \Sigma$ et $s = s_\alpha$. Puisque α est simple, $U^+_{\{\alpha\}} = \prod_{\alpha' \in \mathbf{\Phi}^+ \setminus \{\alpha\}} U_{\alpha'}$ est un groupe et on a $U \cap w_2^{-1}Uw_2 = (U_\alpha \cap w_2^{-1}Uw_2)(U^+_{\{\alpha\}} \cap w_2^{-1}Uw_2)$. Si on prend $u_2 = v_1v_2$ selon cette décomposition on obtient $sv_2s \in U$ et par 1 de la définition 2.17 on a $\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_s = \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2 s}\mathbf{f}_{sv_1 s}\mathbf{f}_{sv_2 s}$. Si $v_1 = 1$ par le lemme 2.22 on a $\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_s = \vartheta'(f_{u_1} f_t f_{\tau_0}^i f_{w_1} f_\tau f_{w_2 s} f_{su_2 s})$. Si $v_1 \neq 1$ alors $U_\alpha \subset w_2^{-1}Uw_2$ et donc $\alpha \in w_2^{-1}\mathbf{\Phi}^+$. En plus il existe $v_3, v_4 \in U_\alpha$ et $t' \in T$ tels que $sv_1s = v_3st'v_4$ et donc par 1 de la définition 2.17 on obtient $\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_s = \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2 sv_3 sw_2^{-1}}\mathbf{f}_{w_2 t' w_2^{-1}}\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{v_4 sv_2 s}$.
  - Si $\alpha \in w_2^{-1}\mathbf{\Psi}^+_{P(\tau)}$ on a $w_2 sv_3 sw_2^{-1} \in U^-_{P(\tau)}$ et on obtient

$$\begin{aligned}
\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_s &= \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2 sv_3 sw_2^{-1}}\mathbf{f}_{w_2 t' w_2^{-1}}\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{v_4 sv_2 s} \\
\text{(lemme 2.18)} &= \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2 t' w_2^{-1}}\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{v_4 sv_2 s} \\
\text{(1,2,3 Déf. 2.17)} &= \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_{t\tau_0^i w_1 \tau w_2 t'(\tau_0^i w_1 \tau w_2)^{-1}}\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{v_4 sv_2 s} \\
\text{(lemme 2.22)} &= \vartheta'(f_{u_1} f_{t\tau_0^i w_1 \tau w_2 t'(\tau_0^i w_1 \tau w_2)^{-1}} f_{\tau_0}^i f_{w_1} f_\tau f_{w_2} f_{v_4 sv_2 s}).
\end{aligned}$$

  - Si $\alpha \in w_2^{-1}\mathbf{\Phi}^+_{P(\tau)} \cap w_2^{-1}w_1^{-1}\mathbf{\Phi}^-$ on a $w_1\tau w_2 sv_3(w_1\tau w_2 s)^{-1} \in U$ et $w_2 sv_3 sw_2^{-1} \in M_{P(\tau)}$. On obtient

$$\begin{aligned}
\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_s &= \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2 sv_3 sw_2^{-1}}\mathbf{f}_{w_2 t' w_2^{-1}}\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{v_4 sv_2 s} \\
\text{(lemme 2.18)} &= \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_{\tau w_2 sv_3 sw_2^{-1}\tau^{-1}}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2 t' w_2^{-1}}\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{v_4 sv_2 s} \\
\text{(1 Déf 2.17)} &= \mathbf{f}_{u_1(t\tau_0^i w_1 \tau w_2 s)v_3(t\tau_0^i w_1 \tau w_2 s)^{-1}}\mathbf{f}_t\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2 t' w_2^{-1}}\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{v_4 sv_2 s} \\
\text{(1,2,3 Déf. 2.17)} &= \mathbf{f}_{u_1 t\tau_0^i w_1 \tau w_2 sv_3(t\tau_0^i w_1 \tau w_2 s)^{-1}}\mathbf{f}_{t\tau_0^i w_1 \tau w_2 t'(\tau_0^i w_1 \tau w_2)^{-1}}\mathbf{f}_{\tau_0}^i\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{v_4 sv_2 s} \\
\text{(lemme 2.22)} &= \vartheta'(f_{u_1 t\tau_0^i w_1 \tau w_2 sv_3(t\tau_0^i w_1 \tau w_2 s)^{-1}} f_{t\tau_0^i w_1 \tau w_2 t'(\tau_0^i w_1 \tau w_2)^{-1}} f_{\tau_0}^i f_{w_1} f_\tau f_{w_2} f_{v_4 sv_2 s}).
\end{aligned}$$

  - Si $\alpha \in w_2^{-1}\mathbf{\Phi}^+_{P(\tau)} \cap w_2^{-1}w_1^{-1}\mathbf{\Phi}^+$ on a $w_1\tau w_2 v_1(w_1\tau w_2)^{-1} \in U$ et $w_2 v_1 w_2^{-1} \in M_{P(\tau)}$.

On obtient

$$\begin{aligned}
\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_s &= \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}^i_{\tau_0}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2 s}\mathbf{f}_{sv_1 s}\mathbf{f}_{sv_2 s}\\
\text{(1 Déf 2.17)} &= \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}^i_{\tau_0}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2 v_1 w_2^{-1}}\mathbf{f}_{w_2 s}\mathbf{f}_{sv_2 s}\\
\text{(lemme 2.22)} &= \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}^i_{\tau_0}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_{\tau w_2 v_1 w_2^{-1}\tau^{-1}}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2 s}\mathbf{f}_{sv_2 s}\\
\text{(1,2 Déf. 2.17)} &= \mathbf{f}_{u_1 t\tau_0^i w_1\tau w_2 v_1 (t\tau_0^i w_1\tau w_2)^{-1}}\mathbf{f}_t\mathbf{f}^i_{\tau_0}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2 s}\mathbf{f}_{sv_2 s}.\\
\text{(lemme 2.22)} &= \vartheta'(f_{u_1 t\tau_0^i w_1\tau w_2 v_1 (t\tau_0^i w_1\tau w_2)^{-1}} f_t f^i_{\tau_0} f_{w_1} f_\tau f_{w_2 s} f_{sv_2 s}).
\end{aligned}$$

- Soient maintenant $\alpha \in \Sigma$ et $u_2 = v_1 v_2$ selon $U = M^+_{\widehat{\alpha}} U^+_{\widehat{\alpha}}$. Par 4 et 5 de la définition 2.17 on a $\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_{\tau_\alpha} = \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}^i_{\tau_0}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{\tau_\alpha}\mathbf{f}_{\tau_\alpha^{-1} v_1\tau_\alpha}$. Si w est l'élément de longueur minimale dans $w_2 W_{\widehat{\alpha}} \in W/W_{\widehat{\alpha}}$, $P = P(w,\alpha)$ et $Q = Q(w,\alpha)$ on obtient $\tau\tau_P^{-1} \in \mathbf{\Delta}$ et

$$\begin{aligned}
\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_{\tau_\alpha} &= \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}^i_{\tau_0}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_\tau\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{\tau_\alpha}\mathbf{f}_{\tau_\alpha^{-1} v_1\tau_\alpha}\\
\text{(1,8 Déf 2.17)} &= \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}^i_{\tau_0}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_{\tau\tau_P^{-1}}\mathbf{f}_{\tau_P}\mathbf{f}_w\mathbf{f}_{w^{-1}w_2}\mathbf{f}_{\tau_\alpha}\mathbf{f}_{\tau_\alpha^{-1} v_1\tau_\alpha}\\
\text{(lemme 2.18)} &= \mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}^i_{\tau_0}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_{\tau\tau_P^{-1}}\mathbf{f}_{\tau_P}\mathbf{f}_w\mathbf{f}_{\tau_\alpha}\mathbf{f}_{w^{-1}w_2}\mathbf{f}_{\tau_\alpha^{-1} v_1\tau_\alpha}\\
\text{(1,9 Déf 2.17)} &= q^{\ell(w)}\sum_{u\in U\cap wUw^{-1}}\mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}^i_{\tau_0}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_{\tau\tau_P^{-1}}\mathbf{f}_{\tau_Q}\mathbf{f}_u\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{\tau_\alpha^{-1} v_1\tau_\alpha}\\
\text{(8 Déf 2.17)} &= q^{\ell(w)}\sum_{u\in U\cap wUw^{-1}}\Big(\mathbf{f}_{u_1}\mathbf{f}_t\mathbf{f}^i_{\tau_0}\mathbf{f}_{w_1}\mathbf{f}_{\tau\tau_P^{-1}\tau_Q}\mathbf{f}_u\Big)\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{\tau_\alpha^{-1} v_1\tau_\alpha}\\
\text{(lemme 2.22)} &= q^{\ell(w)}\sum_{u\in U\cap wUw^{-1}}\vartheta'(f_{u_1} f_t f^i_{\tau_0} f_{w_1} f_{\tau\tau_P^{-1}\tau_Q} f_u)\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{\tau_\alpha^{-1} v_1\tau_\alpha}.
\end{aligned}$$

  Par les calculs ci-dessus, l'élément $\vartheta'(f_{u_1} f_t f^i_{\tau_0} f_{w_1} f_{\tau\tau_P^{-1}\tau_Q} f_u)\mathbf{f}_{w_2}\mathbf{f}_{\tau_\alpha^{-1} v_1\tau_\alpha}$ est dans l'image de ϑ' et donc $\vartheta'(f_x)\mathbf{f}_{\tau_\alpha}$ aussi.

On conclut que ϑ' est un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules surjectif. □

Corollaire 2.24. *Les algèbres $\mathscr{A}$ et $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$ sont isomorphes.*

Démonstration. On a construit un morphisme surjectif d'algèbres $\vartheta : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$ et un morphisme surjectif de $\mathbb{Z}$-modules $\vartheta' : \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1) \longrightarrow \mathscr{A}$ tels que pour tout $\Phi \in \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$ on a $\vartheta(\vartheta'(\Phi)) = \Phi$. Soient maintenant $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathscr{A}$ tels que $\vartheta(\mathbf{a}_1) = \vartheta(\mathbf{a}_2)$ et $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$ tels que $\mathbf{a}_1 = \vartheta'(\Phi_1)$ et $\mathbf{a}_2 = \vartheta'(\Phi_2)$. On a $\Phi_1 = \vartheta(\vartheta'(\Phi_1)) = \vartheta(\vartheta'(\Phi_2)) = \Phi_2$ qui implique $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$. On obtient ϑ injectif et donc il est un isomorphisme d'algèbres d'inverse ϑ'. □

2.5 Idempotents centraux : $\mathrm{car}(R) = 0$

Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique 0. Dans cette section on cherche des idempotents orthogonaux et centraux de l'algèbre $\mathscr{H}_R(\mathbf{G}, K^1) = \mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1) \otimes_{\mathbb{Z}} R$.

Soient $\mathscr{G} = GL_m(\mathfrak{k}_{\mathbf{D}}) \cong K/K^1$ et $\nu : K \longrightarrow \mathscr{G}$ la projection canonique. On utilise les notations de la section 1.7. On rappelle que X désigne un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de $\mathscr{G}$.

On a un isomorphisme d'algèbres $\mathscr{H}_R(K, K^1) \cong R[\mathscr{G}]$ qui envoie f_k sur $\mathbf{1}_{\nu(k)}$ pour tout $k \in K$. Puisque f_k ne dépend que par $\nu(k)$, pour tout $g \in \mathscr{G}$ on note $f_g = f_k$ avec $\nu(k) = g$. Par le corollaire 1.49, les idempotents centraux primitifs de l'algèbre $\mathscr{H}_R(K, K^1)$ sont les

$$e^0_\pi = \frac{\dim(\pi)}{|\mathscr{G}|} \sum_{g \in \mathscr{G}} \chi_\pi(g^{-1}) f_g$$

avec $\pi \in X$. On met l'indice 0 à l'exposant pour se rappeler qu'on est en caractéristique 0.

Pour toute classe $[\mathscr{M}, \sigma]$ de paires cuspidales de $\mathscr{G}$ (voir définition 1.58 avec $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{\mathbf{D}}/\mathfrak{k}_{\mathbf{F}})$), on considère l'ensemble

$$A^0_{[\mathscr{M},\sigma]} = A^0_\sigma = \{\pi \in X \mid sc(\pi) \in [\mathscr{M}, \sigma]\}$$

et l'idempotent central

$$e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} = \sum_{\pi \in A^0_\sigma} e^0_\pi = \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi \in A^0_\sigma} \sum_{g \in \mathscr{G}} \dim(\pi) \chi_\pi(g^{-1}) f_g \in \mathscr{H}_R(K, K^1).$$

On veut prouver que les $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]}$ sont des idempotents orthogonaux et centraux de l'algèbre $\mathscr{H}_R(\mathbf{G}, K^1)$. On rappelle que pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$ on a défini un élément f_{τ_i} de $\mathscr{H}_R(\mathbf{G}, K^1)$ et que cette algèbre est engendrée par les f_g avec $g \in \mathscr{G}$, f_{τ_0}, $f_{\tau_0^{-1}}$ et f_{τ_i} avec $i \in \{1, \dots, m-1\}$. Pour démontrer que les $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]}$ sont des idempotents centraux de $\mathscr{H}_R(\mathbf{G}, K^1)$, il suffit de prouver $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} = f_{\tau_i} e^0_{[\mathscr{M},\sigma]}$ pour tout $i \in \{0, \dots, m-1\}$ et toutes classes $[\mathscr{M}, \sigma]$ de paires cuspidales de $\mathscr{G}$.

On fixe $i \in \{0, \dots, m-1\}$. On considère le sous-groupe de Levi standard

$$\mathscr{M}_i = \begin{pmatrix} GL_i(\mathfrak{k}_{\mathbf{D}}) & 0 \\ 0 & GL_{m-i}(\mathfrak{k}_{\mathbf{D}}) \end{pmatrix}$$

de $\mathscr{G}$, le sous-groupe parabolique standard supérieur $\mathscr{P}_i = \mathscr{M}_i \mathscr{U}_i$ et le parabolique standard inférieur $\mathscr{P}_i^- = \mathscr{M}_i \mathscr{U}_i^-$ de $\mathscr{G}$. On observe que $|\mathscr{U}_i| = |\mathscr{U}_i^-|$.

Lemme 2.25. *Pour toute $[\mathscr{M}, \sigma]$ on a*

$$e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} = \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi \in A^0_\sigma} \sum_{g \in \mathscr{G}} \dim(\pi) \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u \in \mathscr{U}_i} \chi_\pi(ug^{-1}) f_g f_{\tau_i}.$$

$$f_{\tau_i} e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} = \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi \in A^0_\sigma} \sum_{g \in \mathscr{G}} \dim(\pi) \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u_- \in \mathscr{U}_i^-} \chi_\pi(u_- g^{-1}) f_{\tau_i} f_g.$$

Démonstration. On utilise les relations $f_u f_{\tau_i} = f_{\tau_i}$ et $f_{\tau_i} f_{u_-} = f_{\tau_i}$ pour tout $u \in \mathscr{U}_i$ et $u_- \in \mathscr{U}_i^-$ (voir proposition 2.16). Pour tout $u \in \mathscr{U}_i$ on a

$$e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} = \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi \in A^0_\sigma} \sum_{g \in \mathscr{G}} \dim(\pi) \chi_\pi(g^{-1}) f_{gu} f_{\tau_i} = \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi \in A^0_\sigma} \sum_{g \in \mathscr{G}} \dim(\pi) \chi_\pi(ug^{-1}) f_g f_{\tau_i}$$

et donc

$$e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} = \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi \in A^0_\sigma} \sum_{g \in \mathscr{G}} \dim(\pi) \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u \in \mathscr{U}_i} \chi_\pi(ug^{-1}) f_g f_{\tau_i}.$$

On obtient la deuxième égalité de manière analogue. □

Lemme 2.26. *Pour toute classe $[\mathscr{M}, \sigma]$ on a les égalités $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} = \mathscr{F}^{-1}\big((u_\pi)_{\pi \in X}\big) f_{\tau_i}$ et $f_{\tau_i} e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} = f_{\tau_i} \mathscr{F}^{-1}\big((v_\pi)_{\pi \in X}\big)$ où*

$$u_\pi = \begin{cases} \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u \in \mathscr{U}_i} \pi(u) & \text{si } \pi \in A^0_\sigma \\ 0_{V_\pi} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$v_\pi = \begin{cases} \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u_- \in \mathscr{U}_i^-} \pi(u_-) & \text{si } \pi \in A^0_\sigma \\ 0_{V_\pi} & \text{sinon} \end{cases}.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^{-1}\big((u_\pi)_{\pi \in X}\big) &= \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi \in A^0_\sigma} \sum_{g \in \mathscr{G}} \dim(\pi) \mathrm{tr}\Big(\pi(g^{-1}) \circ \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u \in \mathscr{U}_i} \pi(u)\Big) f_g \\ &= \frac{1}{|\mathscr{G}|} \sum_{\pi \in A^0_\sigma} \sum_{g \in \mathscr{G}} \dim(\pi) \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u \in \mathscr{U}_i} \chi_\pi(g^{-1}u) f_g f_{\tau_i}. \end{aligned}$$

Par le lemme 2.25 on obtient $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} = \mathscr{F}^{-1}\big((u_\pi)_{\pi \in X}\big) f_{\tau_i}$. On obtient la deuxième égalité de manière analogue. □

On observe que l'image de $\sum_{u \in \mathscr{U}_i} \pi(u)$ est dans $V_\pi^{\mathscr{U}_i}$ et que l'image de $\sum_{u_- \in \mathscr{U}_i^-} \pi(u_-)$ est dans $V_\pi^{\mathscr{U}_i^-}$.

Corollaire 2.27. *Soit $\mathscr{M}$ un sous-groupe de Levi de $\mathscr{G}$. S'il n'existe pas $g \in \mathscr{G}$ tel que $\mathscr{M}^g \subset \mathscr{M}_i$ alors $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} = 0 = f_{\tau_i} e^0_{[\mathscr{M},\sigma]}$ pour toute représentation cuspidale σ de $\mathscr{M}$.*

Démonstration. Soit $[\mathscr{M}, \sigma]$ une classe de paires cuspidales de $\mathscr{G}$ telle qu'il n'existe pas $g \in \mathscr{G}$ tel que $\mathscr{M}^g \subset \mathscr{M}_i$. Par définition et unicité du support cuspidal on a $V_\pi^{\mathscr{U}_i} = 0 = V_\pi^{\mathscr{U}_i^-}$ pour tout $\pi \in A^0_\sigma$. Par le lemme 2.26 on a donc $u_\pi = 0 = v_\pi$ pour tout $\pi \in X$ et donc $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} = 0 = f_{\tau_i} e^0_{[\mathscr{M},\sigma]}$ □

Dès maintenant on fixe une classe $[\mathscr{M}, \sigma]$ de paires cuspidales de $\mathscr{G}$ telle que $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}_i$. On cherche des éléments $\Phi, \Phi^- \in \mathscr{H}_R(K, K^1)$ tels que $\mathscr{F}(\Phi) = (u_\pi)_\pi$ et $\mathscr{F}(\Phi^-) = (v_\pi)_\pi$.

Soit X_i un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de $\mathscr{M}_i$. On note $A^0_{\sigma,i} = \{\rho \in X_i \,|\, sc(\rho) \in [\mathscr{M}, \sigma]\}$ où $sc(\rho) \in [\mathscr{M}, \sigma]$ signifie $sc(\rho) \in (\mathscr{M}', \sigma')_{\mathscr{M}_i}$ avec $(\mathscr{M}', \sigma')_{\mathscr{G}} \subset [\mathscr{M}, \sigma]$.

Proposition 2.28. *On considère les éléments*

$$\Phi = \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) f_m * \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u \in \mathscr{U}_i} f_u \in R[\mathscr{P}_i] \subset R[\mathscr{G}]$$

$$\Phi^- = \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) f_m * \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u_- \in \mathscr{U}_i^-} f_{u_-} \in R[\mathscr{P}_i^-] \subset R[\mathscr{G}].$$

Alors $\mathscr{F}(\Phi) = (u_\pi)_\pi$ et $\mathscr{F}(\Phi^-) = (v_\pi)_\pi$.

Démonstration. Pour tout $\pi \in X$ on note $\mathscr{F}(\Phi)_\pi$ la composante de $\mathscr{F}(\Phi)$ dans $\mathrm{End}(V_\pi)$ et on décompose $V_\pi = V_\pi^{\mathscr{U}_i} \oplus W_\pi$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\Phi)_\pi &= \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) \pi(m) \circ \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u \in \mathscr{U}_i} \pi(u) \\ &= \Big(\sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) r^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}_i}(\pi)(m) \oplus 0_{W_\pi} \Big) \circ \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u \in \mathscr{U}_i} \pi(u)\end{aligned}$$

On note

$$\Psi_\pi = \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) r^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}_i}(\pi)(m)$$

et on décompose $r^{\mathscr{G}}_{\mathscr{M}_i}(\pi) = \nu_1 \oplus \cdots \oplus \nu_r$ avec (ν_j, V_j) représentations irréductibles de $\mathscr{M}_i$. On obtient

$$\Psi_\pi = \bigoplus_{j=1}^{r} \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) \nu_j(m).$$

On observe que $\sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) \nu_j(m) \in \mathrm{End}_{\mathscr{M}_i}(\nu_j) \cong R$ et que

$$\mathrm{tr}\left(\sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) \nu_j(m) \right) = \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) \chi_{\nu_j}(m).$$

Par le lemme 1.43 cette trace est égale à $\dim(\nu_j)$ s'il existe $\rho \in A^0_{\sigma,i}$ tel que $\nu_j \cong \rho$ et elle est égale à 0 sinon.

- Si $\pi \in A^0_\sigma$ alors $sc(\nu_j) \in [\mathscr{M}, \sigma]$ pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$, donc $\Psi_\pi = \bigoplus \mathbb{I}_{V_j} = \mathbb{I}_{V_\pi^{\mathscr{U}_i}}$ et donc $\mathscr{F}(\Phi)_\pi = \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u \in \mathscr{U}_i} \pi(u) = u_\pi$.
- Si $\pi \notin A^0_\sigma$ alors $sc(\nu_j) \notin [\mathscr{M}, \sigma]$ pour tout $j \in \{1, \ldots, r\}$ et donc $\mathscr{F}(\Phi)_\pi = 0 = u_\pi$.

De manière analogue on prouve que $\mathscr{F}(\Phi^-)_\pi = v_\pi$ pour tout $\pi \in X$. □

Théorème 2.29. *Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Les élément $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]}$ où $[\mathscr{M},\sigma]$ varie parmi les classes d'équivalence des paires cuspidales de $\mathscr{G}$, sont des idempotents orthogonaux et centraux de $\mathscr{H}_R(\mathbf{G}, K^1)$.*

Démonstration. Par le corollaire 2.27, s'il n'existe pas $g \in \mathscr{G}$ tel que $\mathscr{M}^g \subset \mathscr{M}_i$ alors $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} = f_{\tau_i} e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} = 0$. Si $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}_i$, par le lemme 2.26, la proposition 2.28 et le théorème 1.47 on a $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} = \Phi f_{\tau_i}$ et $f_{\tau_i} e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} = f_{\tau_i}\Phi^-$. En utilisant le fait que $f_u f_{\tau_i} = f_{\tau_i}$ et $f_{\tau_i} f_{u_-} = f_{\tau_i}$ pour tout $u \in \mathscr{U}_i$, $u_- \in \mathscr{U}_i^-$ et le fait que $f_m f_{\tau_i} = f_{\tau_i} f_{\tau_i^{-1} m \tau_i}$ et $\sum_{u_- \in \mathscr{U}_i^-} f_{u_-} f_m = f_m \sum_{u_- \in \mathscr{U}_i^-} f_{u_-}$ pour tout $m \in \mathscr{M}_i$ on obtient

$$\begin{aligned} e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} = \Phi f_{\tau_i} &= \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) f_m \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u \in \mathscr{U}_i} f_u f_{\tau_i} \\ &= \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) f_m f_{\tau_i} \\ &= f_{\tau_i} \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) f_{\tau_i^{-1} m \tau_i} \\ &= f_{\tau_i} \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(\tau_i m^{-1} \tau_i^{-1}) f_m. \end{aligned}$$

La conjugaison par ϖ induit un automorphisme $\epsilon_\varpi \in \Gamma = \mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_\mathbf{D}/\mathfrak{k}_\mathbf{F})$ et donc la conjugaison par τ_i^{-1} correspond à l'élément $\epsilon = (1, \epsilon_\varpi^{-1}) \in \Gamma_{\mathscr{M}_i}$. On obtient

$$e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} = f_{\tau_i} \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_{\rho^\epsilon}(m^{-1}) f_m.$$

Par la définition 1.58, on obtient $\rho^\epsilon \in A^0_{\sigma,i}$ pour tout $\rho \in A^0_{\sigma,i}$ et puisque $\dim(\rho) = \dim(\rho^\epsilon)$ on obtient

$$\begin{aligned} e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} f_{\tau_i} &= f_{\tau_i} \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) f_m \\ &= f_{\tau_i} \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u_- \in \mathscr{U}_i^-} f_{u_-} \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) f_m \\ &= f_{\tau_i} \sum_{\rho \in A^0_{\sigma,i}} \frac{\dim(\rho)}{|\mathscr{M}_i|} \sum_{m \in \mathscr{M}_i} \chi_\rho(m^{-1}) f_m \frac{1}{|\mathscr{U}_i|} \sum_{u_- \in \mathscr{U}_i^-} f_{u_-} \\ &= f_{\tau_i} \Phi^- = f_{\tau_i} e^0_{[\mathscr{M},\sigma]}. \end{aligned}$$

On a prouvé que les $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]}$ commutent avec les générateurs de l'algèbre $\mathscr{H}(\mathbf{G}, K^1)$ et donc sont des idempotents centraux de cette algèbre. Enfin si $[\mathscr{M},\sigma]$ et $[\mathscr{M}',\sigma']$ sont deux classes distinctes alors $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]} e^0_{[\mathscr{M}',\sigma']} = 0$ car $A^0_{[\mathscr{M},\sigma]}$ et $A^0_{[\mathscr{M}',\sigma']}$ sont disjoints. □

2.6 Idempotents centraux : $\mathrm{car}(R) > 0$

Soit R un corps algebriquement clos de caractéristique $\ell > 0$ différente de p. Dans cette section on cherche des idempotents centraux de $\mathscr{H}_R(\mathbf{G}, K^1)$ en utilisant les résultats de la section 2.5 et du chapitre 5 de [Hel12] (voir aussi [CE04] et III.2 de [Vig96]).

On note $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt de R et $\mathbb{K}$ la clôture algébrique du corps de fractions de $W(R)$, qui est de caractéristique 0. Par exemple si on considère $R = \overline{\mathbb{F}}_\ell$, alors $W(R)$ est l'extension non ramifiée maximale $\mathbb{Z}_\ell^{nr}$ de $\mathbb{Z}_\ell$ et $\mathbb{K}$ est la clôture algébrique $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ du corps des nombres p-adiques.

Comme dans la section 2.5, on note $\mathscr{G} = GL_m(\mathfrak{k}_{\mathbf{D}})$ et X un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de $\mathscr{G}$ sur $\mathbb{K}$. Dans la section 2.5 on a trouvé les idempotents centraux primitifs e_π^0 avec $\pi \in X$ de $\mathscr{H}_{\mathbb{K}}(K, K^1)$ et des idempotents centraux $e^0_{[\mathscr{M},\sigma]}$ de $\mathscr{H}_{\mathbb{K}}(\mathbf{G}, K^1)$.

Définition 2.30. Soit $g \in \mathscr{G}$ d'ordre $a \in \mathbb{N}^*$ et soient $a' \in \mathbb{N}^*$ premier à ℓ et $b \in \mathbb{N}$ tels que $a = a'\ell^b$. Soient $c, d \in \mathbb{Z}$ tels que $c\ell^b + da' = 1$. Alors $g_1 = g^{c\ell^b}$ est d'ordre a', $g_2 = g^{da'}$ est d'ordre ℓ^b et $g = g_1 g_2 = g_2 g_1$. Cette décomposition est unique et on appelle g_1 la *partie ℓ-régulière* de g qu'on note g^{reg}. Un élément $g \in \mathscr{G}$ est dit *ℓ-régulier* si son ordre est premier à ℓ.

Soit s un élément semi-simple de $\mathscr{G}$ (à $\mathscr{G}$-conjugaison près). Soit $\mathscr{M}_s = \prod_{i=1}^r GL_{m_i}(\mathfrak{k}_{\mathbf{D}})$ le plus petit sous-groupe de Levi qui contient s. Alors s se décompose comme $s = s_1 \cdots s_r$ et les polynômes caractéristiques des s_i sont irréductibles. Les valeurs propres de chaque s_i donnent une extension de $\mathfrak{k}_{\mathbf{D}}$ de degré m_i et d'après Green (voir [Gre55]) on peut associer à s_i une représentation cuspidale irréductible σ_i^0 de $GL_{m_i}(\mathfrak{k}_{\mathbf{D}})$ sur $\mathbb{K}$. Si on pose $\sigma_s^0 = \otimes_{i=1}^r \sigma_i^0$, on obtient une classe de $\mathscr{G}$-conjugaison de paires cuspidales $(\mathscr{M}_s, \sigma_s^0)_{\mathscr{G}}$ de $\mathscr{G}$ sur $\mathbb{K}$. On définit l'ensemble

$$I(s) = \{\pi \in X \mid sc(\pi) \in (\mathscr{M}_s, \sigma_s^0)_{\mathscr{G}}\}.$$

Alors σ_s^0 est une représentation irréductible cuspidale de $\mathscr{G}$ si et seulement si le polynôme caractéristique de s est irréductible. Dans ce cas on dit que s est *irréductible*.

On note r_ℓ la réduction modulo ℓ. On a les propriétés suivantes (voir 5 de [Hel12], 2.2 de [Vig96] ou 3 de [Jam86]).

1. Si $\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{K}}(\mathscr{G})$ est cuspidale alors $r_\ell(\pi)$ est cuspidale dans $\mathrm{Irr}_R(\mathscr{G})$. En plus toute $\pi' \in \mathrm{Irr}_R(\mathscr{G})$ cuspidale est dans l'image de r_ℓ par une telle π.
2. Si $\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{K}}(\mathscr{G})$ et π' est un sous-quotient irréductible de $r_\ell(\pi)$ alors $ss(\pi') = ss(r_\ell(sc(\pi)))$.
3. Si $\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{K}}(\mathscr{G})$ est la représentation cuspidale associée à l'élément semi-simple irréductible s de $\mathscr{G}$ alors $r_\ell(\pi)$ est supercuspidale si et seulement si s^{reg} est irréductible.

4. Si $\pi_1, \pi_2 \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{K}}(\mathscr{G})$ sont deux représentations cuspidales associées à s_1 et s_2 alors $r_\ell(\pi_1) = r_\ell(\pi_2)$ si et seulement si $s_1^{reg} = s_2^{reg}$.

On obtient les bijections suivantes.

$$\{\pi \in \mathrm{Irr}_{\mathbb{K}}(\mathscr{G}) \text{ cuspidale}\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{classe de } \mathscr{G}\text{-conjugaison de} \\ s \in \mathscr{G} \text{ semi-simple irréductible} \end{array} \right\}$$

$$\{\pi \in \mathrm{Irr}_{R}(\mathscr{G}) \text{ cuspidale}\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{classe de } \mathscr{G}\text{-conjugaison de } s' \in \mathscr{G} \\ \text{semi-simple } \ell\text{-régulier tel qu'il existe} \\ s \text{ semisimple irréductible avec } s' = s^{reg} \end{array} \right\}$$

$$\{\pi \in \mathrm{Irr}_{R}(\mathscr{G}) \text{ supercus.}\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{classe de } \mathscr{G}\text{-conjugaison de } s \in \mathscr{G} \\ \text{semi-simple } \ell\text{-régulier et irréductible} \end{array} \right\}$$

Maintenant on fixe une classe de $\mathscr{G}$-conjugaison d'un élément semisimple ℓ-régulier $\tilde{s} \in \mathscr{G}$. On a lui associé une classe de $\mathscr{G}$-conjugaison de paires cuspidales $(\mathscr{M}_{\tilde{s}}, \sigma^0_{\tilde{s}})_{\mathscr{G}}$ de $\mathscr{G}$ sur $\mathbb{K}$ qui correspond à une classe de $\mathscr{G}$-conjugaison de paires supercuspidales $(\mathscr{M}_{\tilde{s}}, r_\ell(\sigma^0_{\tilde{s}}))_{\mathscr{G}}$ de $\mathscr{G}$ sur R. On considère les ensembles

$$A_{\tilde{s}} = \{s \in \mathscr{G} \text{ semi-simple tel que } s^{reg} = \tilde{s}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}(\tilde{s}) = \bigcup_{s \in A_{\tilde{s}}} I(s).$$

On a associé à tout $s \in A_{\tilde{s}}$ une classe de $\mathscr{G}$-conjugaison de paires cuspidales $(\mathscr{M}_s, \sigma^0_s)_{\mathscr{G}}$ de $\mathscr{G}$ sur $\mathbb{K}$ telle que $\mathscr{M}_{\tilde{s}} \subset \mathscr{M}_s$. Alors $(\mathscr{M}_s, r_\ell(\sigma^0_s))$ est une classe de $\mathscr{G}$-conjugaison de paires cuspidales de $\mathscr{G}$ sur R telle que $ss(r_\ell(\sigma^0_s)) \in (\mathscr{M}_{\tilde{s}}, r_\ell(\sigma^0_{\tilde{s}}))_{\mathscr{G}}$. On obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\tilde{s}) &= \{\pi \in X \mid sc(\pi) \in (\mathscr{M}_s, \sigma^0_s)_{\mathscr{G}} \text{ avec } s^{reg} = \tilde{s}\} \\ &= \{\pi \in X \mid sc(\pi) \in (\mathscr{M}_s, \sigma^0_s)_{\mathscr{G}} \text{ avec } ss(r_\ell(\sigma^0_s)) \in (\mathscr{M}_{\tilde{s}}, r_\ell(\sigma^0_{\tilde{s}}))_{\mathscr{G}}\} \\ &= \{\pi \in X \mid ss(r_\ell(sc(\pi))) \in (\mathscr{M}_{\tilde{s}}, r_\ell(\sigma^0_{\tilde{s}}))_{\mathscr{G}}\}. \end{aligned}$$

Théorème 2.31 (Théorème 5.6 de [Hel12])**.** *Pour tout élément semisimple ℓ-régulier $\tilde{s} \in \mathscr{G}$, l'idempotent $e^0_{\tilde{s}} = \sum_{\pi \in \mathcal{E}(\tilde{s})} e^0_\pi$ est dans $\mathscr{H}_{W(R)}(K, K^1)$.*

Pour la preuve voir aussi le théorème 9.12 de [CE04].

Maintenant on considère $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{\mathbf{D}}/\mathfrak{k}_{\mathbf{F}})$ et une classe $[\mathscr{M}, \tilde{\sigma}]$ de paires supercuspidales de $\mathscr{G}$ sur R (voir définition 1.58). On définit les ensembles

$$\begin{aligned} A_{\tilde{\sigma}} &= \{\tilde{s} \in \mathscr{G} \text{ semi-simple, } \ell\text{-régulier tel que } (\mathscr{M}_{\tilde{s}}, r_\ell(\sigma^0_{\tilde{s}}))_{\mathscr{G}} \subset [\mathscr{M}, \tilde{\sigma}]\} \\ \mathcal{E}(\tilde{\sigma}) &= \bigcup_{\tilde{s} \in A_{\tilde{\sigma}}} \mathcal{E}(\tilde{s}) = \{\pi \in X \mid sc(\pi) \in (\mathscr{M}_s, \sigma^0_s)_{\mathscr{G}} \text{ avec } s^{reg} \in A_{\tilde{\sigma}}\} \\ &= \{\pi \in X \mid sc(\pi) \in (\mathscr{M}_s, \sigma^0_s)_{\mathscr{G}} \text{ avec } ss(r_\ell(\sigma^0_s)) \in [\mathscr{M}, \tilde{\sigma}]\} \end{aligned}$$

Lemme 2.32. *On a* $\mathcal{E}(\tilde{\sigma}) = \{\pi \in X \mid sc(\pi) \in [\mathscr{M}_s, \sigma_s^0] \text{ avec } ss(r_\ell(\sigma_s^0)) \in [\mathscr{M}, \tilde{\sigma}]\}$.

Démonstration. Soit $\pi \in X$ tel que $sc(\pi) \in [\mathscr{M}_s, \sigma_s^0]$ et $ss(r_\ell(\sigma_s^0)) \in [\mathscr{M}, \tilde{\sigma}]$. Alors le groupe $\mathscr{M}_s$ est de la forme $\prod_{i=1}^r GL_{m_i}(\mathfrak{k}_{\mathbf{D}})$, $s = s_1 \cdots s_r$ et il existe un élément $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r) \in \Gamma_{\mathscr{M}_s} = \Gamma^r$ (voir définition 1.58) tel que $sc(\pi) \in (\mathscr{M}_s, (\sigma_s^0)^\epsilon)_{\mathscr{G}}$. En plus on a $\tilde{s} = s^{reg}$ dans $A_{\tilde{\sigma}}$ et $ss(r_\ell(\sigma_s^0))$ dans $(\mathscr{M}, r_\ell(\sigma_{\tilde{s}}^0))_{\mathscr{G}} \subset [\mathscr{M}, \tilde{\sigma}]$. On doit prouver que $ss(r_\ell((\sigma_s^0)^\epsilon)) \in [\mathscr{M}, \tilde{\sigma}]$. Puisque $\mathscr{M}_{\tilde{s}} \subset \mathscr{M}_s$, on peut voir ϵ comme un élément de $\Gamma_{\mathscr{M}_{\tilde{s}}}$. La classe de $\mathscr{G}$-conjugaison $(\mathscr{M}_s, (\sigma_s^0)^\epsilon)_{\mathscr{G}}$ correspond la classe de l'élément $s^\epsilon = s_1^{\epsilon_1} \ldots s_r^{\epsilon_r}$ dont la partie ℓ-régulière est $(s^\epsilon)^{reg} = (s^{reg})^\epsilon = \tilde{s}^\epsilon$. On obtient $ss(r_\ell((\sigma_s^0)^\epsilon)) \in (\mathscr{M}, r_\ell((\sigma_{\tilde{s}}^0))^\epsilon)_{\mathscr{G}} \subset [\mathscr{M}, \tilde{\sigma}]$. □

Le lemme 2.32 implique que l'idempotent

$$e_{\tilde{\sigma}}^0 = \sum_{\tilde{s} \in A_{\tilde{\sigma}}} e_{\tilde{s}}^0 = \sum_{\pi \in \mathcal{E}(\tilde{\sigma})} e_\pi^0 \in \mathscr{H}_{W(R)}(K, K^1)$$

est une somme d'idempotents centraux de $\mathscr{H}_{\mathbb{K}}(\mathbf{G}, K^1)$ et donc il est un idempotent central de $\mathscr{H}_{W(R)}(\mathbf{G}, K^1)$.

On a $\mathscr{H}_R(\mathbf{G}, K^1) = \mathscr{H}_{W(R)}(\mathbf{G}, K^1) \otimes_{W(R)} R$ et donc pour tout classe $[\mathscr{M}, \tilde{\sigma}]$ de paires supercuspidales de $\mathscr{G}$ sur R, on obtient un idempotent central $e_{[\mathscr{M}, \tilde{\sigma}]} = e_{\tilde{\sigma}}^0 \otimes 1$ de $\mathscr{H}_R(\mathbf{G}, K^1)$. On observe qu'il est non nul car sinon $e_{\tilde{\sigma}}^0$ appartient à $\mathscr{H}_{\ell W(R)}(K, K^1)$ où $\ell W(R)$ est l'idéal maximal de $W(R)$ mais, puisque $e_{\tilde{\sigma}}^0 = (e_{\tilde{\sigma}}^0)^n \in \mathscr{H}_{\ell^n W(R)}(K, K^1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on obtient

$$e_{\tilde{\sigma}} \in \bigcap_{n \geq 1} \mathscr{H}_{\ell^n W(R)}(K, K^1) \cong \bigcap_{n \geq 1} \left(\ell^n W(R)[\mathscr{G}]\right) = \Big(\bigcap_{n \geq 1} \ell^n W(R)\Big)[\mathscr{G}] = 0$$

qui n'est pas possible.

Théorème 2.33. *Soit R un corps algébriquement clos de caractéristique positive différente de p. Les élément $e_{[\mathscr{M}, \sigma]}$ où $[\mathscr{M}, \sigma]$ varie parmi les classes d'équivalence des paires supercuspidales de $\mathscr{G}$, sont des idempotents orthogonaux et centraux de $\mathscr{H}_R(\mathbf{G}, K^1)$.*

Démonstration. Pour toute classe d'équivalence $[\mathscr{M}, \sigma]$ des paires supercuspidales de $\mathscr{G}$ on a construit par réduction modulo ℓ un idempotent central non nul $e_{[\mathscr{M}, \sigma]}$ de $\mathscr{H}_R(\mathbf{G}, K^1)$. Si $[\mathscr{M}, \sigma] \neq [\mathscr{M}', \sigma']$ alors $e_{[\mathscr{M}, \sigma]} e_{[\mathscr{M}, \sigma']} = 0$ car $\mathcal{E}(\sigma)$ et $\mathcal{E}(\sigma')$ sont disjoints. □

2.7 L'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(SL_m(\mathbf{F}), K_{\mathbf{S}}^1)$

Dans la première partie de ce chapitre on a présenté une description explicite de l'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(GL_m(\mathbf{D}), K^1)$. On aimerais déduire des informations sur d'autres algèbres correspondant à des sous-groupes de $GL_m(\mathbf{D})$, tel qu'un groupe spécial linéaire.

On considère les notations de la section 1.6 et du paragraphe 1.6.1 avec les groupes suivants.

- $\mathtt{G} = GL_m(\mathbf{F})$ qu'on note $\mathbf{G}$.
- $\mathtt{H} = \mathbb{I}_m + M_m(\wp_{\mathbf{F}})$ qu'on note K^1.
- $\mathtt{N} = SL_m(\mathbf{F})$ qu'on note $\mathbf{S}$ et qui est distingué dans $\mathbf{G}$.
- $\mathtt{G}' = \mathbf{S}K^1$ qui est le sous-groupe de $\mathbf{G}$, qu'on note $\mathbf{G}'$, des matrices avec déterminant dans $1 + \wp_{\mathbf{F}}$.
- $\mathtt{H}_{\mathtt{N}} = \mathbf{S} \cap K^1$ qui est un sous-groupe ouvert compact de $\mathbf{S}$, qu'on note $K^1_{\mathbf{S}}$.
- $\mathtt{H}' = N_{\mathbf{G}}(K^1) \cap \mathbf{S} = \mathbf{F}^{\times} GL_m(\mathcal{O}_{\mathbf{F}}) \cap \mathbf{S} = SL_m(\mathcal{O}_{\mathbf{F}})$, qu'on note $K_{\mathbf{S}}$.

L'hypothèse (H1) du paragraphe 1.6.1 est vérifiée car $kK^1_{\mathbf{S}} \longmapsto \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \det(k)^{-1})$ est une section de $K^1 \longrightarrow K^1/K^1_{\mathbf{S}}$. Alors le sous-groupe $\mathtt{A} = \{\mathrm{diag}(1, \ldots, 1, x) \,|\, x \in 1+\wp_{\mathbf{F}}\}$ relève $K^1/K^1_{\mathbf{S}}$ dans K^1 et $\mathbf{G}'/\mathbf{S}$ dans $\mathbf{G}'$. L'hypothèse (H2) est vérifiée car $\mathbf{S}$ se décompose comme $K_{\mathbf{S}}\mathtt{B}K_{\mathbf{S}}$ avec $\mathtt{B} = \{\mathrm{diag}(\varpi^{a_1}, \ldots, \varpi^{a_n}) \,|\, a_1 \leq \cdots \leq a_n, \sum a_j = 0\}$ qui centralise $\mathtt{A}$.

Par les propositions 1.38 et 1.40, pour tout $g \in \mathbf{G}$ l'algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{S}, (K^1_{\mathbf{S}})^g)$ est isomorphe à la sous-algèbre $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}', K^1)$ de $\mathscr{H}_{\mathbb{Z}}(\mathbf{G}, K^1)$.

Ce résultat peut permettre un étude ultérieure pour prouver les résultats contenus dans cette thèse dans le cas du groupe $SL_m(\mathbf{F})$.

Chapitre 3

L'algèbre $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$

Dans ce chapitre on introduit la théorie des types sur une forme intérieure G d'un groupe général linéaire sur un corps localement compact non archimédien. On associe à un type semi-simple maximal de G une représentation irréductible et projective $\boldsymbol{\eta}_{max}$ d'un sous-groupe ouvert compact de G, et on construit des isomorphismes entre l'algèbre $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ et une algèbre de la forme vue dans le chapitre 2.

Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p et R un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p. Soit D une algèbre à division centrale de dimension finie sur F dont le degré réduit est noté d. Étant donné $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $A = M_m(D)$ et $G = GL_m(D)$, qui est une forme intérieure de $GL_{md}(F)$.

3.1 Types simples maximaux

Dans cette section on introduit rapidement la théorie des types simples de G à coefficients dans R. On utilisera cette théorie dans la section 3.2 pour définir les types semi-simples et dans la section 3.3 pour définir la représentation $\boldsymbol{\eta}_{max}$. On peut trouver plus de détails de cette théorie dans 2.1-5 de [MS14b].

Strates simples

Pour une définition précise de strate et de strate simple voir 1.6 de [SS08] (définition 1.15). Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate simple de A. L'élément β est dans A et la sous-F-algèbre $F[\beta]$ de A engendrée par β est un corps qu'on note E. On peut associer à Λ un $\mathfrak{O}_F$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}(\Lambda)$ de A (voir 1.2 de [Séc04]), une famille décroissante $(U_k(\Lambda))_{k\geq 0}$ de sous-groupes ouverts compacts de G (voir 1.2 de [SS08]) et à $[\Lambda, n, 0, \beta]$ deux sous-groupes ouverts compacts $J = J(\beta, \Lambda)$, $H = H(\beta, \Lambda)$ de $U(\Lambda) = U_0(\Lambda)$ (voir 2.4 de [SS08]). On note $J^1 = J^1(\beta, \Lambda) = J(\beta, \Lambda) \cap U_1(\Lambda)$ et $H^1 = H^1(\beta, \Lambda) = H(\beta, \Lambda) \cap U_1(\Lambda)$ qui sont deux pro-p-groupes.

Le centralisateur B de E dans A est une E-algèbre centrale simple et donc il existe $m' \in \mathbb{N}^*$, une E-algèbre à division D' et un isomorphisme ι de E-algèbres de B à $M_{m'}(D')$. Si d' est le degré réduit de D' sur E, on a la relation $m'd' = \frac{md}{[E:F]}$. Si $U(\Lambda) \cap B^\times$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $B^\times$ alors on peut choisir ι tel que $\iota(U(\Lambda) \cap B^\times) = GL_{m'}(\mathcal{O}_{D'})$ et $\iota(U_1(\Lambda) \cap B^\times) = \mathbb{I}_{m'} + M_{m'}(\wp_{D'})$. Le groupe J est égal à $(U(\Lambda) \cap B^\times)J^1$ et cela induit un isomorphisme canonique de groupes (voir 2.3 de [MS14b])

$$J/J^1 \cong (U(\Lambda) \cap B^\times)/(U_1(\Lambda) \cap B^\times) \tag{3.1}$$

permettant d'associer canoniquement et bijectivement une représentation de J triviale sur J^1 à une représentation de $U(\Lambda) \cap B^\times$ triviale sur $U_1(\Lambda) \cap B^\times$.

Caractères simples

Pour une définition précise de *R-caractère simple* voir 2 de [SS08] et 2.2 de [MS14b]. Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate simple de A. On note $\mathscr{C}(\Lambda, 0, \beta)$ l'ensemble des R-caractères simples de niveau 0 qui est un ensemble fini de R-caractères de H^1. Pour une définition précise de *transfert* voir [Séc04] et [SS08], on rappelle ici le principe. Soient $\widetilde{m} \in \mathbb{N}^*$ et $[\widetilde{\Lambda}, \widetilde{n}, 0, \widetilde{\beta}]$ une strate simple de $M_{\widetilde{m}}(D)$. S'il existe un isomorphisme de F-algèbres $\varphi : F[\beta] \longrightarrow F[\widetilde{\beta}]$ tel que $\varphi(\beta) = \widetilde{\beta}$ alors il y a une bijection $\mathscr{C}(\Lambda, 0, \beta) \longrightarrow \mathscr{C}(\widetilde{\Lambda}, 0, \widetilde{\beta})$ canoniquement associée à φ, appelée application de transfert. Parmi les $\theta \in \mathscr{C}(\Lambda, 0, \beta)$, il existe aussi une relation d'équivalence qu'on appelle *endo-équivalence* (voir [BSS12]). On appelle *endo-classes* les classes définies par cette relation et on les note $\boldsymbol{\Theta}$.

Représentations de Heisenberg

Soient $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate simple de A et $\theta \in \mathscr{C}(\Lambda, 0, \beta)$. Par la proposition 2.1 de [MS14b] il existe une représentation irréductible η de J^1, unique à isomorphisme près, dont la restriction à H^1 contient θ. Une telle η s'appelle *représentation de Heisenberg* associée à θ. L'ensemble d'entrelacement de η est $I_G(\eta) = J^1 B^\times J^1 = JB^\times J$ et pour tout $y \in B^\times$ le R-espace vectoriel $I_y(\eta) = \mathrm{Hom}_{J^1 \cap (J^1)^y}(\eta, \eta^y)$ est de dimension 1. Pour plus de détails voir 2.3 de [MS14b].

β-extensions

Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate simple de A, $\theta \in \mathscr{C}(\Lambda, 0, \beta)$ et η une représentation de Heisenberg associée à θ. Une *β-extension* de η (ou de θ) est une représentation irréductible κ de J prolongeant η et dont l'ensemble d'entrelacement est $I_G(\kappa) = JB^\times J$. Par la proposition 2.4 de [MS14b], tout $\theta \in \mathscr{C}(\Lambda, 0, \beta)$ admet une β-extension et par la formule (2.2) de [MS14b] l'ensemble de tous les β-extensions de θ est égal à

$$\mathcal{B}(\theta) = \{\kappa \otimes (\chi \circ N_{B/E}) \,|\, \chi \text{ caractère de } \mathcal{O}_E^\times \text{ trivial sur } 1 + \wp_E\} \tag{3.2}$$

où $N_{B/E}$ désigne la norme réduite de B sur E et $\chi \circ N_{B/E}$ est vu comme un caractère de J trivial sur J^1 grâce à (3.1). On observe que pour tout $\kappa \in \mathcal{B}(\theta)$ et tout $y \in B^\times$, le R-espace vectoriel $I_y(\kappa)$ est de dimension 1 car il est non nul et contenu dans $I_y(\eta)$. Pour plus de détails voir 2.4 de [MS14b].

Types simples maximaux

Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate simple de A telle que $U(\Lambda) \cap B^\times$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $B^\times$. Par (3.1), il existe un isomorphisme $J/J^1 \cong GL_{m'}(\mathfrak{k}_{D'})$, qui dépend du choix de l'isomorphisme $B \cong M_{m'}(D')$, permettant d'associer une représentation de J triviale sur J^1 à une représentation de $GL_{m'}(\mathfrak{k}_{D'})$.

Définition 3.1. Un *type simple maximal* de G associé à $[\Lambda, n, 0, \beta]$ est une représentation irréductible λ de J de la forme $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ où $\kappa \in \mathcal{B}(\theta)$ avec $\theta \in \mathscr{C}(\Lambda, 0, \beta)$ et σ est une représentation cuspidale de $GL_{m'}(\mathfrak{k}_{D'})$ qui s'identifie à une représentation irréductible de J triviale sur J^1. On note (J, λ) un tel couple. Si σ est une représentation supercuspidale de $GL_{m'}(\mathfrak{k}_{D'})$ alors (J, λ) est appelé *supertype* simple maximal.

Si on ne suppose pas que $U(\Lambda) \cap B^\times$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $B^\times$, on peut définir des types simples qui ne sont pas maximaux. Dans cette thèse on n'utilise que la notion de type simple maximal.

Remarque 3.2. Soient (J, λ) un type simple maximal associé à une strate simple $[\Lambda, n, 0, \beta]$ et $\theta \in \mathscr{C}(\Lambda, 0, \beta)$ contenu dans λ. Alors le choix d'une β-extension $\kappa \in \mathcal{B}(\theta)$ détermine la décomposition $\lambda = \kappa \otimes \sigma$ où σ est une représentation cuspidale de $GL_{m'}(\mathfrak{k}_{D'})$ qui s'identifie à une représentation irréductible de J triviale sur J^1. Si on choisit une autre β-extension $\kappa' = \kappa \otimes (\chi \circ N_{B/E}) \in \mathcal{B}(\theta)$ on obtient une décomposition $\lambda = \kappa' \otimes \sigma'$ où $\sigma' = \sigma \otimes (\chi^{-1} \circ N_{B/E})$

Paires couvrantes

Soient M un sous-groupe de Levi de G et P un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M et radical unipotent U. On note P^- le sous-groupe parabolique de G opposé de P par rapport à M et U^- son radical unipotent. Soient K et K_M des sous-groupes ouverts compacts de G et M respectivement et $\tau \in \mathrm{Irr}_R(K)$, $\tau_M \in \mathrm{Irr}_R(M)$. On note $K^+ = K \cap U$ et $K^- = K \cap U^-$. On dit que la paire (K, τ) est *décomposée au-dessus de* (K_M, τ_M) *relativement à* P si $K \cap M = K_M$, $K = K^- K_M K^+$, la restriction de τ à K_M est égale à τ_M et les restrictions de τ à K^- et K^+ sont triviales. Si cette condition est vérifiée pour tout sous-groupe parabolique P de facteur de Levi M on dit que (K, τ) est *décomposée au-dessus de* (K_M, τ_M). Une paire (K, τ) décomposée au-dessus de (K_M, τ_M) est une *paire couvrante* si elle vérifie la condition (0.3) de [Blo05]. Pour plus de détails sur les paires couvrantes voir [Blo05, Vig98].

3.2 Types semi-simples

Dans cette section on présente la construction des types semi-simples de G à coefficients dans R, qu'on peut trouver dans 2.8-9 de [MS14b].

Soient $r \in \mathbb{N}^*$ et $(m_1, \dots, m_r)$ une famille d'entiers strictement positifs de somme m. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, on fixe un type simple maximal (J_i, λ_i) de $GL_{m_i}(D)$, une strate simple $[\Lambda_i, n_i, 0, \beta_i]$ de $A_i = M_{m_i}(D)$ telle que $J_i = J(\beta_i, \Lambda_i)$. Soit $\theta_i \in \mathscr{C}(\Lambda_i, 0, \beta_i)$ un caractère simple contenu dans λ_i. Soit B_i le centralisateur de $E_i = F[\beta_i]$ dans A_i et soient $m_i' \in \mathbb{N}^*$ et D_i' une E_i-algèbre à division de degré réduit d_i' tels que $B_i \cong M_{m_i'}(D_i')$. Alors $U(\Lambda_i) \cap B_i^\times$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $B_i^\times$ qu'on identifie avec $GL_{m_i'}(\mathcal{O}_{D_i'})$.

Soit M le sous-groupe de Levi standard de G constitué des matrices diagonales par blocs de taille $m_1, \dots, m_r$. Si on note $J_M = \prod_{i=1}^r J_i$ et $\lambda_M = \bigotimes_{i=1}^r \lambda_i$ alors (J_M, λ_M) est appelé *type simple maximal* de M.

On réunit les θ_i suivant leur classe d'endo-équivalence, ce qui définit une partition $\{1, \dots, r\} = \bigsqcup_{j=1}^l I_j$ où $l \in \mathbb{N}^*$. Quitte à renuméroter les (J_i, λ_i) on peut supposer qu'il existe des entiers $0 = a_0 < a_1 < \cdots < a_l = r$ tels qu'on ait $I_j = \{i \in \mathbb{N} \,|\, a_{j-1} < i \leq a_j\}$. Pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$ on note $m^j = \sum_{i \in I_j} m_i$ et $m'^j = \sum_{i \in I_j} m_i'$ et on considère le sous-groupe de Levi standard L de G contenant M constitué des matrices diagonales par blocs de taille $m^1, \dots, m^l$.

Pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$ on choisit une strate simple $[\Lambda^j, n^j, 0, \beta^j]$ de $M_{m^j}(D)$ comme dans 2.8 de [MS14b]. Soit B^j le centralisateur de $E^j = F[\beta^j]$ dans $M_{m^j}(D)$. Alors il existe une E^j-algèbre à division D'^j et un isomorphisme qui identifie B^j à $M_{m'^j}(D'^j)$ et $U(\Lambda^j) \cap B^{j\times}$ au sous-groupe parahorique standard de $GL_{m'^j}(\mathcal{O}_{D'^j})$ associé aux m_i' avec $i \in I_j$. Soit θ^j le transfert des θ_i avec $i \in I_j$ à $\mathscr{C}(\Lambda^j, 0, \beta^j)$ (il ne dépend pas de i). On choisit une β-extension κ^j de θ^j. Dans la section 2.8 de [MS14b] sont définis deux sous-groupes ouverts compacts $\mathbf{J}_j \subset J(\beta^j, \Lambda^j)$ et $\mathbf{J}_j^1 \subset J^1(\beta^j, \Lambda^j)$ de G tels que $\mathbf{J}_j/\mathbf{J}_j^1 \cong \prod_{i \in I_j} J_i/J_i^1$, et des représentations $\boldsymbol{\kappa}_j$ de $\mathbf{J}_j$ et $\boldsymbol{\eta}_j$ de $\mathbf{J}_j^1$ telles que $\mathrm{ind}_{\mathbf{J}_j^1}^{J^1(\beta^j,\Lambda^j)} \boldsymbol{\eta}_j \cong \mathrm{res}_{J^1(\beta^j,\Lambda^j)}^{J(\beta^j,\Lambda^j)} \kappa^j$, $\mathrm{ind}_{\mathbf{J}_j}^{J(\beta^j,\Lambda^j)} \boldsymbol{\kappa}_j \cong \kappa^j$, $\mathbf{J}_j \cap M = \prod_{i \in I_j} J_i$ et $\mathrm{res}_{\mathbf{J}_j \cap M}^{\mathbf{J}_j} \boldsymbol{\kappa}_j = \bigotimes_{i \in I_j} \kappa_i$ où $\kappa_i \in \mathcal{B}(\theta_i)$ pour tout $i \in I_j$. On obtient une décomposition $\lambda_i = \kappa_i \otimes \sigma_i$ pour tout $i \in I_j$ où σ_i est une représentation de J_i triviale sue J_i^1. On note $\boldsymbol{\sigma}_j$ la représentation $\bigotimes_{i \in I_j} \sigma_i$ considérée comme représentation de $\mathbf{J}_j$ triviale sur $\mathbf{J}_j^1$ et on pose $\boldsymbol{\lambda}_j = \boldsymbol{\kappa}_j \otimes \boldsymbol{\sigma}_j$ et η_i la restriction de κ_i à $J^1(\beta_i, \Lambda_i)$ pour tout $i \in I_j$. Alors $(\mathbf{J}_j, \boldsymbol{\lambda}_j)$ est une paire couvrante de $(\prod_{i \in I_j} J_i, \bigotimes_{i \in I_j} \lambda_i)$ (proposition 2.26 de [MS14b]), $(\mathbf{J}_j, \boldsymbol{\kappa}_j)$ est décomposée au-dessus de $(\prod_{i \in I_j} J_i, \bigotimes_{i \in I_j} \kappa_i)$ et $(\mathbf{J}_j^1, \boldsymbol{\eta}_j)$ est une paire couvrante de $(\prod_{i \in I_j} J_i^1, \bigotimes_{i \in I_j} \eta_i)$ (proposition 2.27 de [MS14b]).

On pose $J_M^1 = \prod_{i=1}^r J_i^1$, $\kappa_M = \bigotimes_{i=1}^r \kappa_i$, $\eta_M = \bigotimes_{i=1}^r \eta_i$, $\mathbf{J}_L = \prod_{j=1}^l \mathbf{J}_j$, $\mathbf{J}_L^1 = \prod_{j=1}^l \mathbf{J}_j^1$, $\boldsymbol{\lambda}_L = \bigotimes_{j=1}^l \boldsymbol{\lambda}_j$, $\boldsymbol{\kappa}_L = \bigotimes_{j=1}^l \boldsymbol{\kappa}_j$, $\boldsymbol{\eta}_L = \bigotimes_{j=1}^l \boldsymbol{\eta}_j$ et $\boldsymbol{\sigma}_L = \bigotimes_{j=1}^l \boldsymbol{\sigma}_j$. Par construction $(\mathbf{J}_L, \boldsymbol{\lambda}_L)$ et $(\mathbf{J}_L^1, \boldsymbol{\eta}_L)$ sont des paires couvrantes de (J_M, λ_M) et (J_M^1, η_M) respectivement et $(\mathbf{J}_L, \boldsymbol{\kappa}_L)$ est décomposée au-desuss de (J_M, κ_M).

Définition 3.3. Par la proposition 2.28 de [MS14b] il existe une paire couvrante $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ de $(\mathbf{J}_L, \boldsymbol{\lambda}_L)$ et donc de (J_M, λ_M), qu'on appelle *type semi-simple* de G. Si les (J_i, λ_i) sont des supertypes simples maximaux, on appelle $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ *supertype semi-simple* de G.

Le type semi-simple $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est associé à une strate $[\boldsymbol{\Lambda}, \mathbf{n}, 0, \boldsymbol{\beta}]$ de A, pas forcément simple (section 2.9 de [MS14b]). On note B le centralisateur de $\boldsymbol{\beta}$ dans A, $B_L^\times = B^\times \cap L = \prod_{j=1}^l B^{j\times}$ et $\mathbf{J}^1 = \mathbf{J} \cap U_1(\boldsymbol{\Lambda})$. Par les propositions 2.30 et 2.31 de [MS14b] il existe une unique paire décomposée $(\mathbf{J}^1, \boldsymbol{\eta})$ au-dessus de $(\mathbf{J}_L^1, \boldsymbol{\eta}_L)$ et donc au-dessus de (J_M^1, η_M), son ensemble d'entrelacement est $I_G(\boldsymbol{\eta}) = \mathbf{J}B_L^\times\mathbf{J}$ et pour tout $y \in B_L^\times$ le R-espace vectoriel $I_y(\boldsymbol{\eta})$ est de dimension 1. On a des isomorphismes

$$\mathbf{J}/\mathbf{J}^1 \cong \mathbf{J}_L/\mathbf{J}_L^1 \cong \prod_{i=1}^r J_i/J_i^1 \cong \prod_{i=1}^r GL_{m_i'}(\mathfrak{k}_{D_i'}).$$

On peut identifier $\boldsymbol{\sigma}_L$ à une représentation irréductible $\boldsymbol{\sigma}$ de $\mathbf{J}$ triviale sur $\mathbf{J}^1$. Par la proposition 2.33 de [MS14b] il existe une unique paire décomposée $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\kappa})$ au-dessus de $(\mathbf{J}_L, \boldsymbol{\kappa}_L)$ et donc au-dessus de (J_M, κ_M) et on a $\boldsymbol{\eta} = \mathrm{res}^{\mathbf{J}}_{\mathbf{J}^1}\boldsymbol{\kappa}$, $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\sigma}$ et $I_G(\boldsymbol{\kappa}) = \mathbf{J}B_L^\times\mathbf{J}$. On note $\mathscr{M}$ le groupe fini $\prod_{i=1}^r GL_{m_i'}(\mathfrak{k}_{D_i'})$. Alors on peut identifier $\boldsymbol{\sigma}$ à une représentation cuspidale (supercuspidale si $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est un supertype semi-simple) de $\mathscr{M}$.

Remarque 3.4. Le choix des β-extensions $\kappa^j \in \mathcal{B}(\theta^j)$ pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$ détermine les $\kappa_i \in \mathcal{B}(\theta_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, les $\boldsymbol{\kappa}^j$ pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, $\boldsymbol{\kappa}_L$ et $\boldsymbol{\kappa}$ et donc les décompositions $\lambda_i = \kappa_i \otimes \sigma_i$, $\boldsymbol{\lambda}_j = \boldsymbol{\kappa}_j \otimes \boldsymbol{\sigma}_j$ et $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\sigma}$.

3.3 L'algèbre $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$

Dans cette section on définit une représentation irréductible et projective $\boldsymbol{\eta}_{max}$ associée à un supertype semi-simple de G et on décrit l'algèbre $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$.

Soit $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ un supertype semi-simple de G. On utilise les notations de la section 3.2 et on considère les résultats qu'on trouve dans 6 de [SS15].

Par la section 6.2 de [SS15], pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$ on peut choisir une strate simple $[\Lambda_{max,j}, n_{max,j}, 0, \beta^j]$ de $M_{m^j}(D)$ telle que $U(\Lambda_{max,j}) \cap B^{j\times}$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $B^{j\times}$ qui contient $U(\Lambda^j) \cap B^{j\times}$. Dans ce cas on peut identifier $U(\Lambda_{max,j}) \cap B^{j\times}$ à $GL_{m'^j}(\mathcal{O}_{D'^j})$. On peut aussi choisir $\theta_{max,j} \in \mathscr{C}(\Lambda_{max,j}, 0, \beta^j)$ tel que le transfert de $\theta_{max,j}$ à $\mathscr{C}(\Lambda^j, 0, \beta^j)$ soit θ^j. Soient $J_{max,j} = J(\beta^j, \Lambda_{max,j})$, $J^1_{max,j} = J^1(\beta^j, \Lambda_{max,j})$. On choisit une β-extension $\kappa_{max,j}$ de $\theta_{max,j}$. Alors par (5.2) de [SS15], il existe une unique $\kappa^j \in \mathcal{B}(\theta^j)$ telle que

$$\mathrm{ind}_{J(\beta^j,\Lambda^j)}^{(U(\Lambda_j)\cap B^{j\times})U_1(\Lambda^j)}\kappa^j \cong \mathrm{ind}_{(U(\Lambda_j)\cap B^{j\times})J^1_{max,j}}^{(U(\Lambda^j)\cap B^{j\times})U_1(\Lambda^j)}\kappa_{max,j}$$

et donc par la remarque 3.4 le choix de $\kappa_{max,j}$ détermine $\boldsymbol{\kappa}_j$. On note $\eta_{max,j}$ la restriction de $\kappa_{max,j}$ à $J^1_{max,j}$.

On note

$$K_L = \prod_{j=1}^{l} U(\Lambda_{max,j}) \cap B^{j\times}, \quad K_L^1 = \prod_{j=1}^{l} U_1(\Lambda_{max,j}) \cap B^{j\times},$$

$J_{max} = \prod_{j=1}^{l} J_{max,j}$, $J_{max}^1 = \prod_{j=1}^{l} J_{max,j}^1$, $\kappa_{max} = \bigotimes_{j=1}^{l} \kappa_{max,j}$ et $\eta_{max} = \bigotimes_{j=1}^{l} \eta_{max,j}$. Alors on a $J_{max}/J_{max}^1 \cong K_L/K_L^1 \cong \prod_{j=1}^{l} GL_{m'^j}(\mathfrak{k}_{D'^j})$. Si on note $\mathscr{G}$ le groupe fini $\prod_{j=1}^{l} GL_{m'^j}(\mathfrak{k}_{D'^j})$ alors $(\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma})$ est une paire supercuspidale de $\mathscr{G}$.

Comme dans la section 3.2, par les propositions 2.30, 2.31, 2.33 de [MS14b] on peut définir deux sous-groupes ouverts compacts $\mathbf{J}_{max}$ et $\mathbf{J}_{max}^1$ de G tels que $\mathbf{J}_{max}/\mathbf{J}_{max}^1 \cong J_{max}/J_{max}^1 \cong \mathscr{G}$ et des paires décomposées $(\mathbf{J}_{max}, \boldsymbol{\kappa}_{max})$ et $(\mathbf{J}_{max}^1, \boldsymbol{\eta}_{max})$ au-dessus de (J_{max}, κ_{max}) et (J_{max}^1, η_{max}) respectivement, telles que les ensembles d'entrelacement de $\boldsymbol{\kappa}_{max}$ et de $\boldsymbol{\eta}_{max}$ dans G soient $\mathbf{J}_{max} B_L^{\times} \mathbf{J}_{max}$ et que les R-espaces vectoriels $I_y(\boldsymbol{\eta}_{max})$ et $I_y(\boldsymbol{\kappa}_{max})$ soient de dimension 1 pour tout $y \in B_L^{\times}$.

Remarque 3.5. Puisque pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$ le choix de $\kappa_{max,j} \in \mathcal{B}(\theta_{max,j})$ détermine $\boldsymbol{\kappa}_j$, le choix de κ_{max} détermine $\boldsymbol{\kappa}$ et $\boldsymbol{\kappa}_{max}$ et la décomposition $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\kappa} \otimes \boldsymbol{\sigma}$. Par contre, $\boldsymbol{\eta}_{max}$, le groupe $\mathscr{G}$ et la classe de conjugaison de $\mathscr{M}$ sont uniquement déterminés par le (super)type semi-simple $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$, independement du choix de κ_{max} ou de $\boldsymbol{\kappa}$.

Proposition 3.6. *Il existe un isomorphisme de R-algèbres*

$$\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max}) \cong \bigotimes_{j=1}^{l} \mathscr{H}_R(G_j, \eta_{max,j})$$

où $G_j = GL_{m^j}(D)$ pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$.

Démonstration. Par la proposition 1.23 il existe un morphisme d'algèbres

$$\bigotimes_{j=1}^{l} \mathscr{H}_R(G_j, \eta_{max,j}) \longrightarrow \mathscr{H}_R(L, \eta_{max})$$

et il est un isomorphisme par le lemme 2.4 et la proposition 2.5 de [Gui13]. Puisque $I_G(\boldsymbol{\eta}_{max}) \subset \mathbf{J}_{max} L \mathbf{J}_{max}$ la sous-algèbre $\mathscr{H}_R(\mathbf{J}_{max} L \mathbf{J}_{max}, \boldsymbol{\eta}_{max})$ de $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ des fonctions à support dans $\mathbf{J}_{max} L \mathbf{J}_{max}$ coïncide avec $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ et donc par II.6-8 de [Vig98] (voir aussi le théorème 7.2(ii) de [BK98]) il existe un isomorphisme de R-algèbres $\mathscr{H}_R(L, \eta_{max}) \longrightarrow \mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ qui préserve le support. □

Maintenant on veut démontrer qu'il existe un isomorphisme de R-algèbres

$$\mathscr{H}_R(B_L^{\times}, K_L^1) \longrightarrow \mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max}). \tag{3.3}$$

Par les propositions 3.6 et 1.24 on obtient $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max}) \cong \bigotimes_{j=1}^{l} \mathscr{H}_R(G_j, \eta_{max,j})$ et

$\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1) \cong \bigotimes_{j=1}^l \mathscr{H}_R(B^{j\times}, U_1(\Lambda_{max,j}) \cap B^{j\times})$. Pour démontrer que l'isomorphisme (3.3) existe, il suffit de prouver que pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$ il existe un isomorphisme $\mathscr{H}_R(B^{j\times}, U_1(\Lambda_{max,j}) \cap B^{j\times}) \cong \mathscr{H}_R(G_j, \eta_{max,j})$. Cela est équivalent à prouver le résultat suivant.

Théorème 3.7. *Soient $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate simple de A et B le centralisateur de $E = F[\beta]$ dans A. On suppose que $U(\Lambda) \cap B^\times$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $B^\times$. Si $\theta \in \mathscr{C}(\Lambda, 0, \beta)$ et η la représentation de Heisenberg associée alors on a un isomorphisme d'algèbres $\mathscr{H}_R(G, \eta) \cong \mathscr{H}_R(B^\times, U_1(\Lambda) \cap B^\times)$.*

3.4 "Preuve" du théorème 3.7

Avec les notations du théorème 3.7 on veut construire des isomorphismes de R-algèbres de $\mathscr{H}_R(B^\times, U_1(\Lambda) \cap B^\times)$ vers $\mathscr{H}_R(G, \eta)$. On verra que de tels isomorphismes dependent du choix d'une β-extension de η et d'un élément non nul qui entrelace η.

Dans le titre on a mis des guillemets car la preuve du théorème 3.7 qu'on présente dans cette section repose sur des hypothèses supplementaires qu'on fait (conjecture 3.35). Dans la remarque 3.39 on voit certains cas dans lesquels la conjecture est vraie.

Par le chapitre 2, on connaît une présentation par générateurs et relations de l'algèbre $\mathscr{H}_R(B^\times, U_1(\Lambda) \cap B^\times) \cong \mathscr{H}_\mathbb{Z}(B^\times, U_1(\Lambda) \cap B^\times) \otimes_\mathbb{Z} R$ car on peut identifier $B^\times$ à $GL_{m'}(D')$, $U(\Lambda) \cap B^\times$ à $GL_{m'}(\mathcal{O}_{D'})$ et $U_1(\Lambda) \cap B^\times$ à $\mathbb{I}_{m'} + M_{m'}(\wp_{D'})$ où D' est une E-algèbre à division centrale et $m' \in \mathbb{N}^*$. On identifie $\varpi_{D'}$ à ϖ et les τ_i avec $i \in \{0, \dots, m'-1\}$, définis dans la section 2.2, à des éléments de $B^\times$ et donc de G.

On note $K_B = U(\Lambda) \cap B^\times$, $K_B^1 = U_1(\Lambda) \cap B^\times$, $J = J(\beta, \Lambda)$, $J^1 = J^1(\beta, \Lambda)$ et $H^1 = H^1(\beta, \Lambda)$. On rappelle qu'on a l'égalité $J = K_B J^1$ qui induit un isomorphisme canonique de groupes $J/J^1 \cong K_B/K_B^1$. On identifie tout élément de $GL_{m'}(\mathcal{O}_{D'})$ à un élément de K_B et donc de J.

Comme dans le chapitre 2 on note $f_x = \mathbf{1}_{K_B^1 x K_B^1} \in \mathscr{H}_R(B^\times, K_B^1)$ pour tout $x \in B^\times$ et $\Phi_1\Phi_2 = \Phi_1 * \Phi_2$ pour tout Φ_1, Φ_2 dans $\mathscr{H}_R(B^\times, K_B^1)$ ou dans $\mathscr{H}_R(G, \eta)$. On note $\Omega_B = K_B \cup \{\tau_0, \tau_0^{-1}\} \cup \{\tau_i \,|\, 1 \le i \le m'-1\}$ et $\mathbf{\Omega}_B = \{f_\omega \,|\, \omega \in \Omega_B\}$,. Pour définir un morphisme d'algèbres $\Theta : \mathscr{H}_R(B^\times, K_B^1) \to \mathscr{H}_R(G, \eta)$, il suffit de choisir des éléments $\Theta(f_\omega) \in \mathscr{H}_R(G, \eta)$ pour tout $f_\omega \in \mathbf{\Omega}_B$ de façon que les $\Theta(f_\omega)$ respectent les relations de la définition 2.17.

On énonce un lemme qui généralise le lemme 1.33(b).

Lemme 3.8. *Soient $x_1, x_2 \in G$, $\widetilde{f}_1 \in \mathscr{H}_R(G, \eta)_{J^1 x_1 J^1}$ et $\widetilde{f}_2 \in \mathscr{H}_R(G, \eta)_{J^1 x_2 J^1}$. Si x_1 ou x_2 normalise J^1 alors le support de $\widetilde{f}_1\widetilde{f}_2$ est inclus dans $J^1 x_1 x_2 J^1$ et $(\widetilde{f}_1\widetilde{f}_2)(x_1x_2) = \widetilde{f}_1(x_1) \circ \widetilde{f}_2(x_2)$.*

Démonstration. On rappelle que $(\widetilde{f}_1\widetilde{f}_2)(g) = \sum_{x\in G/J^1} \widetilde{f}_1(x)\circ\widetilde{f}_2(x^{-1}g)$ et donc le support de $\widetilde{f}_1\widetilde{f}_2$ est dans $J^1x_1J^1x_2J^1 = J^1x_1x_2J^1$. Le support de $x \mapsto \widetilde{f}_1(x)\widetilde{f}_2(x^{-1}x_1x_2)$ est dans $x_1(x_1^{-1}J^1x_1J^1 \cap x_2J^1x_2^{-1}J^1) = x_1J^1$. On obtient $(\widetilde{f}_1\widetilde{f}_2)(x_1x_2) = \widetilde{f}_1(x_1)\circ\widetilde{f}_2(x_1^{-1}x_1x_2) = \widetilde{f}_1(x_1)\circ\widetilde{f}_2(x_2)$. □

Dès maintenant on fixe une β-extension κ de η. On rappelle que $\mathrm{res}^J_{J^1}\kappa = \eta$, $I_G(\eta) = I_G(\kappa) = J^1B^\times J^1$ et pour tout $y \in B^\times$ on a $I_y(\eta) = I_y(\kappa)$ qui est un R-espace vectoriel de dimension 1. Soit V_η le R-espace vectoriel de η et κ. On observe que $\kappa(j) \in I_j(\eta)$ pour tout $j \in J$.

3.4.1

Dans ce paragraphe on veut prouver que la sous-algèbre $\mathscr{H}_R(K_B, K_B^1)$ de $\mathscr{H}_R(B^\times, K_B^1)$ est isomorphe à la sous-algèbre $\mathscr{H}_R(J, \eta)$ de $\mathscr{H}_R(G, \eta)$. On observe que $\mathscr{H}_R(K_B, K_B^1)$ est isomorphe à l'algèbre du groupe $R[K_B/K_B^1] \cong R[J/J^1]$, donc on peut identifier tout $\Phi \in \mathscr{H}_R(K_B, K_B^1)$ à une fonction $\Phi \in \mathscr{H}_R(J, J^1)$.

Lemme 3.9. *Il existe un isomorphisme Θ' entre $\mathscr{H}_R(K_B, K_B^1)$ et $\mathscr{H}_R(J, \eta)$ défini par $\Phi \longmapsto \Phi\otimes\kappa$ pour tout $\Phi \in \mathscr{H}_R(K_B, K_B^1)$.*

Démonstration. On vérifier que Θ' est bien définie : pour tout $\Phi \in \mathscr{H}_R(K_B, K_B^1)$ on a $\Phi\otimes\kappa : J \to \mathrm{End}_R(V_\eta)$ et $(\Phi\otimes\kappa)(j_1jj_1') = \Phi(j)\kappa(j_1jj_1') = \eta(j_1)\circ(\Phi(j)\kappa(j))\circ\eta(j_1')$ pour tout $j \in J$ et $j_1, j_1' \in J^1$. Elle est R-linéaire et

$$\begin{aligned}\Theta'(\Phi_1 * \Phi_2)(j) &= \sum_{x\in J/J^1} \Phi_1(x)\Phi_2(x^{-1}j)\kappa(j) = \sum_{x\in J/J^1} \Phi_1(x)\Phi_2(x^{-1}j)\kappa(x)\circ\kappa(x^{-1}j)\\ &= \sum_{x\in J/J^1} (\Phi_1(x)\kappa(x))\circ(\Phi_2(x^{-1}j)\kappa(x^{-1}j)) = (\Theta'(\Phi_1) * \Theta'(\Phi_2))(j)\end{aligned}$$

pour tout $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathscr{H}_R(K_B, K_B^1)$ et $j \in J$ et donc Θ' est un morphisme de R-algèbres. Il est injectif car $\kappa(j) \in GL(V_\eta)$ pour tout $j \in J$. Soient $\widetilde{f} \in \mathscr{H}_R(J, \eta)$ et $j \in J$. Par la proposition 1.17 on a $\widetilde{f}(j) \in I_j(\eta) = \mathrm{Hom}_{J^1}(\eta, \eta^j)$ qui est de dimension 1 car η est irréductible. Alors $\widetilde{f}(j) \in R\kappa(j)$ et donc on peut écrire $\widetilde{f}(j) = \Phi(j)\kappa(j)$ avec $\Phi : J \longrightarrow R$. Puisque $\widetilde{f} \in \mathscr{H}_R(J, \eta)$, pour tout $j_1 \in J^1$ on a $\Phi(j_1j)\kappa(j_1j) = \widetilde{f}(j_1j) = \eta(j_1)\widetilde{f}(j) = \eta(j_1)\Phi(j)\kappa(j) = \Phi(j)\kappa(j_1j)$ d'où $\Phi \in \mathscr{H}_R(J, J^1)$. On conclut que Θ' est surjectif et donc il est un isomorphisme d'algèbres. □

3.4.2

Dans ce paragraphe on introduit des notations et des outils qui on utilisera pour la construction des $\widetilde{f}_{\tau_i}$ avec $i \in \{0, \ldots, m'-1\}$.

Remarque 3.10. Comme dans les paragraphes 1.2 et 1.3 de [Séc05b] on peut choisir un $E\otimes_F D$-module à droite simple N et poser $\mathcal{A} = \mathrm{End}_D(N)$ qui est une F-algèbre centrale

simple (notée $A(E)$ dans [Séc05b]). Alors on peut identifier G à $GL_{m'}(\mathcal{A})$ et considérer les matrices carrées de taille m' à coefficients dans $\mathcal{A}$ comme des éléments de G.

Remarque 3.11. Par 1.4.8 et 1.5.2 de [Séc05b] il existe un unique ordre héréditaire normalisé par $E^\times$ dans $\mathcal{A}$. On le note $\mathfrak{A}$ et on note $\mathfrak{P}$ son radical (ils sont notés $\mathfrak{A}(E)$ et $\mathfrak{P}(E)$ dans [Séc05b]). Par le lemme 1.6 de [Séc05a] on peut identifier $U(\Lambda)$ à $GL_{m'}(\mathfrak{A})$ et $U_1(\Lambda)$ à $\mathbb{I}_{m'} + M_{m'}(\mathfrak{P})$.

Soient $\mathcal{M} = \mathcal{A}^\times \times \cdots \times \mathcal{A}^\times$ (m' copies) qui est un sous-groupe de Levi de G, $\mathcal{P}$ le sous-groupe parabolique de G des matrices triangulaires supérieures de taille m' de facteur de Levi $\mathcal{M}$ et de radical unipotent $\mathcal{U}$ et $\mathcal{P}^-$ le sous-groupe parabolique opposé à $\mathcal{P}$ par rapport à $\mathcal{M}$, de radical unipotent $\mathcal{U}^-$. On note $J^1_\mathcal{M} = J^1 \cap \mathcal{M}$, $J^1_\mathcal{P} = (J^1 \cap \mathcal{P})H^1$ et $J^1_{\mathcal{P}^-} = (J^1 \cap \mathcal{P}^-)H^1$.
Soient θ le caractère simple contenu dans η et θ_0 le transfert de θ à $\mathscr{C}(\mathfrak{A}, 0, \beta)$ rélatif à la strate simple $[\mathfrak{A}, n_0, 0, \beta]$ de $\mathcal{A}$. Par la proposition 7.1.19 de [BK93] les restrictions de θ à $H^1 \cap \mathcal{U}$ et $H^1 \cap \mathcal{U}^-$ sont triviales et la restriction de θ à $H^1 \cap \mathcal{M} = H^1(\beta, \mathfrak{A}) \times \cdots \times H^1(\beta, \mathfrak{A})$ est $\theta_0^{\otimes m'}$. Si on note $J^1_0 = J^1(\beta, \mathfrak{A})$ et η_0 la représentation de Heisenberg de θ_0 alors on peut identifier $J^1_\mathcal{M}$ à $J^1_0 \times \cdots \times J^1_0$ et considérer la représentation irréductible $\eta_\mathcal{M} = \eta_0^{\otimes m'}$ de $J^1_\mathcal{M}$.

On énonce la proposition 7.2.4 de [BK93] qui est valable pour les représentations sur R car J^1 est un pro-p-groupe.

Proposition 3.12. *Soient $\mathcal{G}$ le p-groupe fini $(J^1 \cap \mathcal{U})/(H^1 \cap \mathcal{U})$ et $\widehat{\mathcal{G}}$ le groupe des caractères de $\mathcal{G}$.*

1. *Pour tout $\phi \in \widehat{\mathcal{G}}$ il existe une unique représentation irréductible η_ϕ de $J^1_\mathcal{P}$ telle que sa restriction à $J^1_\mathcal{M}$ est $\eta_\mathcal{M}$, sa restriction à H^1 est un multiple de θ et sa restriction à $J^1 \cap \mathcal{U}$ est un multiple de ϕ.*
2. *La restriction de η à $J^1_\mathcal{P}$ est $\bigoplus_{\phi \in \widehat{\mathcal{G}}} \eta_\phi$.*
3. *Pour tout $\phi \in \widehat{\mathcal{G}}$ on a $\mathrm{ind}_{J^1_\mathcal{P}}^{J^1}(\eta_\phi) = \eta$ et $\mathrm{res}_{J^1_\mathcal{M}}^{J^1_\mathcal{P}}(\eta_\phi) = \eta_\mathcal{M}$.*
4. *Pour tout $\phi, \phi' \in \widehat{\mathcal{G}}$ il existe un unique $g \in \mathcal{G}^- = (J^1 \cap \mathcal{U}^-)/(H^1 \cap \mathcal{U}^-)$ tel que $\eta_{\phi'} = (\eta_\phi)^g$.*

En particulier si on considère le caractère trivial ϕ_0 de $\mathcal{G}$, la représentation η_{ϕ_0} est le prolongement trivial de $\eta_\mathcal{M}$ à $J^1_\mathcal{P}$ et η est l'induite de η_{ϕ_0} à J^1.

On utilise les notations sur le système de racines de $\mathbf{GL}_{m'}$ de la section 2.1 et on considère les sous-groupes de $U(\Lambda) \cap B^\times$, via l'identification avec $GL_{m'}(\mathcal{O}_{D'})$, définis à la page 28. On définit des sous-groupes de G, via l'identification avec $GL_{m'}(\mathcal{A})$, analogues à ceux-ci en remplaçant U par $\mathcal{U}$ et $\mathcal{O}_{D'}$ par $\mathcal{A}$. Cela signifie que pour tout $\alpha = \alpha_{ij} \in \Sigma$ on note $\mathcal{U}_\alpha$ le groupe des matrices $(a_{hk})_{1 \leq h,k \leq m'} \in G$ avec $a_{hh} = 1$, $a_{ij} \in \mathcal{A}$ et $a_{hk} = 0$ si $h \neq k$ et $(h,k) \neq (i,j)$. Pour tout $P \subset \Sigma$ on note $\mathcal{U}^+_P = \prod_{\alpha \in \mathbf{\Psi}^+_P} \mathcal{U}_\alpha$, $\mathcal{U}^-_P = \prod_{\alpha \in \mathbf{\Psi}^-_P} \mathcal{U}_\alpha$

et $\mathcal{M}_P = \prod_{\alpha\in\mathbf{\Phi}_P} \mathcal{U}_\alpha$. Avec ces définitions on a $\mathcal{U} = \mathcal{U}^+_\emptyset$ et $\mathcal{U}^- = \mathcal{U}^-_\emptyset$. On rappelle que si $P_1 \subset P_2 \subset \Sigma$ alors $\mathcal{U}^+_{P_2}$ est un sous-groupe de $\mathcal{U}^+_{P_1}$ et $\mathcal{U}^-_{P_2}$ un sous-groupe de $\mathcal{U}^-_{P_1}$.

Remarque 3.13. Pour tout $\alpha \in \Sigma$ on a $\mathcal{U}_\alpha \cap K_B = U_\alpha$ et donc pour tout $P \subset \Sigma$ on a $\mathcal{U}^+_P \cap K_B = U^+_P$, $\mathcal{U}^-_P \cap K_B = U^-_P$ et $\mathcal{M}_P \cap K_B = M_P$.

On note $\mathfrak{J}, \mathfrak{J}^1$ et $\mathfrak{H}^1$ les $\mathcal{O}_F$-réseaux de A tels que $J = \mathfrak{J}^\times$, $J^1 = \mathbb{I}_{m'} + \mathfrak{J}^1$ et $H^1 = \mathbb{I}_{m'} + \mathfrak{H}^1$ (voir 3 de [BK93]).

Remarque 3.14. On a $\mathfrak{H}^1 \subset \mathfrak{J}^1 \subset M_{m'}(\mathfrak{P})$, $\varpi\mathfrak{J}^1 \subset \varpi\mathfrak{J} \subset \mathfrak{H}^1$ et $\mathfrak{J} = \mathfrak{B} + \mathfrak{J}^1$ (voir 3.1.12, 3.1.13 de [BK93]). En plus $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}^1$ et $\mathfrak{H}^1$ sont des $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B})$-bimodules par 3.1.2 de [Séc04]. On note aussi $\mathcal{N}_\alpha = \mathcal{U}_\alpha - \mathbb{I}_{m'}$ pour tout $\alpha \in \mathbf{\Phi}$.

Remarque 3.15. Le groupe J^1 admet une décomposition de Iwahori pour tout sous-groupe de Levi $\mathcal{M}'$ contenant $\mathcal{M}$ de G (voir théorème 7.1.14 de [BK93]). Cela signifie que si $\mathcal{U}'$ et $\mathcal{U}'^-$ sont les radicaux unipotents de deux sous-groupes paraboliques de G de facteur de Levi $\mathcal{M}'$ et opposés par rapport à $\mathcal{M}'$, alors $J^1 = (J^1 \cap \mathcal{U}'^-)(J^1 \cap \mathcal{M}')(J^1 \cap \mathcal{U}')$ et la décomposition d'un élément de J^1, qui dérive de cette égalité, est unique.

Lemme 3.16. *Soient $\tau \in \mathbf{\Delta}$ et $P = P(\tau)$.*

(a) $J^1 = (J^1 \cap \mathcal{U}^-_P)(J^1 \cap \mathcal{M}_P)J^1_{\mathcal{M}}(J^1 \cap \mathcal{U}^+_P) = (J^1 \cap \mathcal{U}^+_P)(J^1 \cap \mathcal{M}_P)J^1_{\mathcal{M}}(J^1 \cap \mathcal{U}^-_P)$.

(b) On a $(J^1 \cap \mathcal{U}^+_P)^\tau \subset J^1 \cap \mathcal{U}^+_P$, $(J^1 \cap \mathcal{U}^-_P)^{\tau^{-1}} \subset J^1 \cap \mathcal{U}^-_P$ *et* $(J^1 \cap \mathcal{M}_P)^\tau = J^1 \cap \mathcal{M}_P$.

(c) On a $(J^1 \cap \mathcal{U})^\tau \subset J^1 \cap \mathcal{U}$, $(J^1 \cap \mathcal{U}^-)^{\tau^{-1}} \subset J^1 \cap \mathcal{U}^-$ *et* $(J^1_{\mathcal{M}})^\tau = J^1_{\mathcal{M}}$.

Démonstration.

(*a*) On observe que $(J^1 \cap \mathcal{M}_P)J^1_{\mathcal{M}} = J^1_{\mathcal{M}}(J^1 \cap \mathcal{M}_P)$ est l'intersection de J^1 avec le sous-groupe de Levi de G associé à $P \subset \Sigma$. On obtient le résultat par la remarque 3.15.

(*b*) On a $(J^1 \cap \mathcal{U}^+_P)^\tau = (J^1 \cap \prod_{\alpha\in\mathbf{\Psi}^+_P} \mathcal{U}_\alpha)^\tau = \mathbb{I}_{m'} + (\mathfrak{J}^1 \cap \prod_{\alpha\in\mathbf{\Psi}^+_P} \mathcal{N}_\alpha)^\tau$. Puisque $\varpi\mathfrak{J}^1 \subset \mathfrak{J}^1$ on obtient $(\mathfrak{J}^1 \cap \prod_{\alpha\in\mathbf{\Psi}^+_P} \mathcal{N}_\alpha)^\tau \subset \mathfrak{J}^1 \cap \prod_{\alpha\in\mathbf{\Psi}^+_P} \mathcal{N}_\alpha$ et donc on a $(J^1 \cap \mathcal{U}^+_P)^\tau \subset J^1 \cap \mathcal{U}^+_P$. De manière analogue on prouve $(J^1 \cap \mathcal{U}^-_P)^{\tau^{-1}} \subset J^1 \cap \mathcal{U}^-_P$.
On a $(J^1 \cap \mathcal{M}_P)^\tau = (J^1 \cap \prod_{\alpha\in\mathbf{\Phi}_P} \mathcal{U}_\alpha)^\tau = \mathbb{I}_{m'} + (\mathfrak{J}^1 \cap \prod_{\alpha\in\mathbf{\Phi}_P} \mathcal{N}_\alpha)^\tau$. Puisque τ_0 normalise J^1 on a $\varpi^{-1}\mathfrak{J}^1\varpi = \mathfrak{J}^1$ et on obtient $(\mathfrak{J}^1 \cap \prod_{\alpha\in\mathbf{\Phi}_P} \mathcal{N}_\alpha)^\tau = \mathfrak{J}^1 \cap \prod_{\alpha\in\mathbf{\Phi}_P} \mathcal{N}_\alpha$ et donc $(J^1 \cap \mathcal{M}_P)^\tau = J^1 \cap \mathcal{M}_P$.

(*c*) On a $(J^1 \cap \mathcal{U})^\tau \subset \big((J^1 \cap \mathcal{M}_P)(J^1 \cap \mathcal{U}^+_P)\big)^\tau \cap \mathcal{U}$ qui est dans $(J^1 \cap \mathcal{M}_P)(J^1 \cap \mathcal{U}^+_P) \cap \mathcal{U} = J^1 \cap \mathcal{U}$ par (*b*). De manière analogue on prouve $(J^1 \cap \mathcal{U}^-)^{\tau^{-1}} \subset J^1 \cap \mathcal{U}^-$. Enfin, puisque $J^1_{\mathcal{M}} = J^1_0 \times \cdots \times J^1_0$ et ϖ normalise J^1_0 on obtient $(J^1_{\mathcal{M}})^\tau = J^1_{\mathcal{M}}$. □

On énonce maintenant des lemmes qui généralisent des résultats trouvés dans le chapitre 2.

Lemme 3.17. *Si $\tau \in \mathbf{\Delta}$ alors $J^1\tau J^1 = (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau)})\tau J^1 = J^1\tau(J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau)})$ et $J^1\tau^{-1}J^1 = (J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau)})\tau^{-1}J^1 = J^1\tau^{-1}(J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau)})$.*

Démonstration. Soit $P = P(\tau)$. Par le lemme 3.16(a) on a les décompositions $J^1 = (J^1 \cap \mathcal{U}_P^-)(J^1 \cap \mathcal{M}_P)J^1_{\mathcal{M}}(J^1 \cap \mathcal{U}_P^+) = (J^1 \cap \mathcal{U}_P^+)(J^1 \cap \mathcal{M}_P)J^1_{\mathcal{M}}(J^1 \cap \mathcal{U}_P^-)$. On obtient $J^1\tau J^1 = (J^1 \cap \mathcal{U}_P^-)\tau(J^1 \cap \mathcal{M}_P)^\tau(J^1_{\mathcal{M}})^\tau(J^1 \cap \mathcal{U}_P^+)^\tau J^1$ qui est égal à $(J^1 \cap \mathcal{U}_P^-)\tau J^1$ par (b) et (c) du lemme 3.16. On prouve les autres égalités de manière analogue. □

Lemme 3.18. *On a* $\mathcal{U}^- J^1 \cap \mathcal{U} = J^1 \cap \mathcal{U} \subset J^1$ *et* $\mathcal{U} J^1 \cap \mathcal{U}^- = J^1 \cap \mathcal{U}^- \subset J^1$.

Démonstration. On a

$$\mathcal{U}^- J^1 \cap \mathcal{U} = \mathcal{U}^-(J^1 \cap \mathcal{U}^-)(J^1 \cap \mathcal{M})(J^1 \cap \mathcal{U}) \cap \mathcal{U} = \big(\mathcal{U}^-(J^1 \cap \mathcal{M}) \cap \mathcal{U}\big)(J^1 \cap \mathcal{U}) = J^1 \cap \mathcal{U}.$$

On prouve de manière analogue la deuxième assertion. □

Lemme 3.19. *Soient* $\tau, \tau' \in \mathbf{\Delta}$. *Alors*

$$J^1\tau J^1\tau' J^1 = J^1\tau\tau' J^1 \quad \textit{et} \quad \tau^{-1}J^1\tau J^1 \cap \tau' J^1 \tau'^{-1} J^1 = J^1.$$

Démonstration. Par le lemme 3.17 on a $J^1\tau J^1\tau' J^1 = J^1\tau(J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau)})\tau' J^1$ qui est inclus dans $J^1\tau\tau'(J^1 \cap \mathcal{U})^{\tau'} J^1$ et dans $J^1\tau\tau' J^1$ par le lemme 3.16(c). Par le lemme 3.17 on a $\tau^{-1}J^1\tau J^1 \cap \tau' J^1 \tau'^{-1} J^1 \subset (J^1 \cap \mathcal{U}^-)^\tau J^1 \cap (J^1 \cap \mathcal{U})^{\tau'^{-1}} J^1 = \Big((J^1 \cap \mathcal{U}^-)^\tau J^1 \cap (J^1 \cap \mathcal{U})^{\tau'^{-1}}\Big) J^1$ qui par le lemme 3.18 est égal à J^1. □

3.4.3

Dans ce paragraphe on choisit, pour tout $i \in \{0, \dots, m'-1\}$, un élément non nul dans $I_{\tau_i}(\eta)$. Cela permet de définir des éléments dans $\mathscr{H}_R(G, \eta)_{J^1\tau_i J^1}$ grâce à la proposition 1.17. On rappelle que $\gamma_i \in I_{\tau_i}(\eta) = I_{\tau_i}(\kappa)$ si

$$\gamma_i \circ \eta(x) = \eta(\tau_i x \tau_i^{-1}) \circ \gamma_i \quad \text{ ou si } \quad \gamma_i \circ \kappa(x') = \kappa(\tau_i x' \tau_i^{-1}) \circ \gamma_i \tag{3.4}$$

pour tout $x \in J^1 \cap \tau_i^{-1} J^1 \tau_i$ et $x' \in J \cap \tau_i^{-1} J \tau_i$.

Soit $\tau \in \mathbf{\Delta}$. On note $J^1_{\mathcal{M},\tau} = (J^1 \cap \mathcal{M}_{P(\tau)})J^1_{\mathcal{M}}$, $J^1_{\mathcal{P},\tau} = (J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau)})J^1_{\mathcal{M},\tau}H^1$ et $J^1_{\mathcal{P}^-,\tau} = (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau)})J^1_{\mathcal{M},\tau}H^1$. On note $\eta_{\mathcal{M},\tau}$ l'induite à $J^1_{\mathcal{M},\tau}$ du prolongement trivial de $\eta_{\mathcal{M}}$ à $(J^1_{\mathcal{P}} \cap \mathcal{M}_{P(\tau)})J^1_{\mathcal{M}}$, $\mathcal{G}_{P(\tau)} = (J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau)})/(H^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau)})$ et $\mathcal{G}^-_{P(\tau)} = (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau)})/(H^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau)})$.

La proposition 7.2.4 de [BK93] est valable plus en général pour tout Levi de G qui contiennent $\mathcal{M}$.

Proposition 3.20.

1. *Pour tout* $\phi \in \widehat{\mathcal{G}_{P(\tau)}}$ *il existe une unique représentation irréductible* η_ϕ *de* $J^1_{\mathcal{P},\tau}$ *telle que sa restriction à* $J^1_{\mathcal{M},\tau}$ *est* $\eta_{\mathcal{M},\tau}$, *sa restriction à* H^1 *est un multiple de* θ *et sa restriction à* $J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau)}$ *est un multiple de* ϕ.
2. *La restriction de* η *à* $J^1_{\mathcal{P},\tau}$ *est* $\bigoplus_{\phi \in \widehat{\mathcal{G}_{P(\tau)}}} \eta_\phi$.

3. Pour tout $\phi \in \widehat{\mathcal{G}_{P(\tau)}}$ *on a* $\mathrm{ind}_{J^1_{\mathcal{P},\tau}}^{J^1} \eta_\phi = \eta$ *et* $\mathrm{res}_{J^1_{\mathcal{M},\tau}}^{J^1_{\mathcal{P},\tau}} \eta_\phi = \eta_{\mathcal{M},\tau}$.

4. Pour tout $\phi, \phi' \in \widehat{\mathcal{G}_{P(\tau)}}$ *il existe un unique* $g \in \mathcal{G}^-_{P(\tau)}$ *tel que* $\eta_{\phi'} = (\eta_\phi)^g$.

On obtient un résultat analogue si on remplace $\mathcal{U}$ *et* $\mathcal{P}$ *par* $\mathcal{U}^-$ *et* $\mathcal{P}^-$.

Remarque 3.21. Puisque pour tout $w \in W$ l'application $\kappa(w)$ est un isomorphisme entre η et η^w, on peut appliquer la proposition 3.20 à η^w. Alors pour tout $\widetilde{\phi} \in (\widehat{\mathcal{G}_{P(\tau)}})^w$ il existe une unique représentation irréductible $\eta_{\widetilde{\phi}}$ de $(J^1_{\mathcal{P},\tau})^w$ telle que sa restriction à $(J^1_{\mathcal{M},\tau})^w$ est $(\eta_{\mathcal{M},\tau})^w$, sa restriction à $(H^1)^w = H^1$ est un multiple de $\theta^w \cong \theta$ et sa restriction à $(J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau)})^w$ est un multiple de $\widetilde{\phi}$. En plus la restriction de η à $(J^1_{\mathcal{P},\tau})^w$ est $\bigoplus_{\widetilde{\phi} \in (\widehat{\mathcal{G}_{P(\tau)}})^w} \eta_{\widetilde{\phi}}$.

On souhaite étudier les éléments de $I_\tau(\eta)$. Par le lemme 3.16 on a $J^1 \cap (J^1)^\tau = (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau)}) J^1_{\mathcal{M},\tau} (J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau)})^\tau$ qui est dans $J^1_{\mathcal{P}^-,\tau}$ car $\varpi \mathfrak{J}^1 \subset \mathfrak{H}^1$. De manière analogue on a $J^1 \cap (J^1)^{\tau^{-1}} \subset J^1_{\mathcal{P},\tau}$. Par la proposition 3.20 on obtient

$$\eta_{|_{J^1 \cap (J^1)^\tau}} = \bigoplus_{\phi^- \in \widehat{\mathcal{G}^-_{P(\tau)}}} (\eta_{\phi^-})_{|_{J^1 \cap (J^1)^\tau}}$$

$$(\eta^\tau)_{|_{J^1 \cap (J^1)^\tau}} = \Big(\eta_{|_{J^1 \cap (J^1)^{\tau^{-1}}}}\Big)^\tau = \Big(\bigoplus_{\phi^+ \in \widehat{\mathcal{G}_{P(\tau)}}} (\eta_{\phi^+})_{|_{J^1 \cap (J^1)^{\tau^{-1}}}}\Big)^\tau = \bigoplus_{\phi^+ \in \widehat{\mathcal{G}_{P(\tau)}}} (\eta^\tau_{\phi^+})_{|_{J^1 \cap (J^1)^\tau}}$$

et les facteurs $(\eta_{\phi^-})_{|_{J^1 \cap (J^1)^\tau}}$ et $(\eta_{\phi^+})_{|_{J^1 \cap (J^1)^{\tau^{-1}}}}$ sont irréductibles car leur restriction à $J^1_{\mathcal{M},\tau}$ est $\eta_{\mathcal{M},\tau}$ qui est irréductible. On obtient

$$I_\tau(\eta) = \mathrm{Hom}_{J^1 \cap (J^1)^\tau}(\eta, \eta^\tau) = \mathrm{Hom}_{J^1 \cap (J^1)^\tau}\Big(\bigoplus_{\phi^-} \eta_{\phi^-}, \bigoplus_{\phi^+} \eta^\tau_{\phi^+}\Big)$$

et on sait qu'il est un espace de dimension 1.

Remarque 3.22. Soit $w \in W$. On a $J^1 \cap (J^1)^{w\tau w^{-1}} = (J^1 \cap (J^1)^\tau)^{w^{-1}} \subset (J^1_{\mathcal{P}^-,\tau})^{w^{-1}}$ et $J^1 \cap (J^1)^{w\tau^{-1}w^{-1}} \subset (J^1_{\mathcal{P},\tau})^{w^{-1}}$. Par la remarque 3.21 on obtient

$$\begin{aligned} I_{w\tau w^{-1}}(\eta) &= \mathrm{Hom}_{J^1 \cap (J^1)^{w\tau w^{-1}}}(\eta, \eta^{w\tau w^{-1}}) \\ &= \mathrm{Hom}_{J^1 \cap (J^1)^{w\tau w^{-1}}}\Big(\bigoplus_{\widetilde{\phi}^-} \eta_{\widetilde{\phi}^-}, \bigoplus_{\widetilde{\phi}^+} \eta^{w\tau w^{-1}}_{\widetilde{\phi}^+}\Big) \end{aligned}$$

où $\widetilde{\phi}^-$ et $\widetilde{\phi}^+$ varient parmi les caractères de $(\mathcal{G}^-_{P(\tau)})^{w^{-1}}$ et de $(\mathcal{G}_{P(\tau)})^{w^{-1}}$.

Lemme 3.23. *Soient* ϕ_0^- *et* ϕ_0^+ *les caractères triviaux de* $\mathcal{G}^-_{P(\tau)}$ *et* $\mathcal{G}_{P(\tau)}$ *respectivement. Alors* $\mathrm{Hom}_{J^1 \cap (J^1)^\tau}(\eta_{\phi_0^-}, \eta^\tau_{\phi_0^+}) \neq 0$.

Démonstration. On observe que $\eta_{\phi_0^-}$ et $\eta_{\phi_0^+}$ sont les prolongements triviaux de $\eta_{\mathcal{M},\tau}$ à $J^1_{\mathcal{P}^-,\tau}$ et à $J^1_{\mathcal{P},\tau}$ respectivement. Par le lemme 3.16 on a $J^1 \cap (J^1)^\tau = (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau)}) J^1_{\mathcal{M},\tau} (J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau)})^\tau$.

Puisque τ entrelace $\eta_{\mathcal{M},\tau}$ on peut prendre $\varphi \in I_\tau(\eta_{\mathcal{M},\tau})$ non nul. On veut prouver que $\varphi \in \mathrm{Hom}_{J^1\cap(J^1)^\tau}(\eta_{\phi_0^-}, \eta^\tau_{\phi_0^+})$. Soient $x_\mathcal{M} \in J^1_{\mathcal{M},\tau}$, $x_- \in J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau)}$ et $x_+ \in (J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau)})^\tau \subset H^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau)}$. Alors $\eta_{\phi_0^-}(x_-)$, $\eta_{\phi_0^-}(x_+)$, $\eta^\tau_{\phi_0^+}(x_-)$ et $\eta^\tau_{\phi_0^+}(x_+)$ sont triviales et on a

$$\varphi \circ \eta_{\phi_0^-}(x_- x_\mathcal{M} x_+) = \varphi \circ \eta_{\mathcal{M},\tau}(x_\mathcal{M}) = \eta^\tau_{\mathcal{M},\tau}(x_\mathcal{M}) = \eta^\tau_{\phi_0^+}(x_- x_\mathcal{M} x_+).$$

Cela prouve que $I_\tau(\eta_{\mathcal{M},\tau}) \subset \mathrm{Hom}_{J^1\cap(J^1)^\tau}(\eta_{\phi_0^-}, \eta^\tau_{\phi_0^+})$ qui est non nul. □

Remarque 3.24. Puisque $I_\tau(\eta) = \mathrm{Hom}_{J^1\cap(J^1)^\tau}\Big(\bigoplus_{\phi^-} \eta_{\phi^-}, \bigoplus_{\phi^+} \eta^\tau_{\phi^+}\Big)$ est de dimension 1, l'espace $\mathrm{Hom}_{J^1\cap(J^1)^\tau}(\eta_{\phi_0^-}, \eta^\tau_{\phi_0^+})$ est de dimension au plus 1 et donc par le lemme 3.23 on a $I_\tau(\eta_{\mathcal{M},\tau}) = \mathrm{Hom}_{J^1\cap(J^1)^\tau}(\eta_{\phi_0^-}, \eta^\tau_{\phi_0^+})$. Cela implique que les éléments de $I_\tau(\eta)$ sont de la forme $\varphi \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$ avec $\varphi \in I_\tau(\eta_{\mathcal{M},\tau})$. On observe que, puisque τ normalise $J^1_{\mathcal{M},\tau}$, tout élément non nul dans $I_\tau(\eta_{\mathcal{M},\tau})$ est inversible.

Remarque 3.25. Soit $w \in W$. Si $\widetilde{\phi}_0^-$ et $\widetilde{\phi}_0^+$ sont les caractères triviaux de $(\mathcal{G}^-_{P(\tau)})^{w^{-1}}$ et de $(\mathcal{G}_{P(\tau)})^{w^{-1}}$, alors $\mathrm{Hom}_{J^1\cap(J^1)^{w\tau w^{-1}}}(\eta_{\widetilde{\phi}_0^-}, \eta^{w\tau w^{-1}}_{\widetilde{\phi}_0^+}) \neq 0$, il est égal à $I_{w\tau w^{-1}}(\eta^{w^{-1}}_{\mathcal{M},\tau})$ et les éléments de $I_{w\tau w^{-1}}(\eta)$ sont de la forme $\varphi \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$ avec $\varphi \in I_{w\tau w^{-1}}(\eta^{w^{-1}}_{\mathcal{M},\tau})$. Puisque $w\tau w^{-1}$ normalise $(J^1_{\mathcal{M},\tau})^{w^{-1}}$, tout élément non nul dans $I_{w\tau w^{-1}}(\eta^{w^{-1}}_{\mathcal{M},\tau})$ est inversible.

Dès maintenant on fixe $\gamma = \gamma_{m'-1} \in I_{\tau_{m'-1}}(\eta)$ non nul. On construit par récurrence des éléments non nuls $\gamma_i \in I_{\tau_i}(\eta)$ pour tout $i \in \{0, \ldots, m'-1\}$.

On note $w_i = s_{i+1} \cdots s_{m'-1}$ pour tout $i \in \{0, \ldots, m'-2\}$ et $w_{m'-1} = 1$ et on considère l'élément $w_i \tau_{m'-1} w_i^{-1} = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, \varpi, 1 \ldots, 1)$ avec ϖ en position $i+1$. Soit $\delta_i = \kappa(w_i) \circ \gamma \circ \kappa(w_i^{-1})$ qui est un élément non nul de $I_{w_i \tau_{m'-1} w_i^{-1}}(\eta)$.

Remarque 3.26. Si $\widetilde{\phi}^-_{i,0}$ et $\widetilde{\phi}^+_{i,0}$ sont les caractères triviaux des groupes $(\mathcal{G}^-_{P(\tau_{m'-1})})^{w_i^{-1}}$ et $(\mathcal{G}_{P(\tau_{m'-1})})^{w_i^{-1}}$ respectivement alors par la remarque 3.25 il existe $\varphi_i \in I_{w\tau w^{-1}}(\eta^{w^{-1}}_{\mathcal{M},\tau})$ inversible tel que

$$\delta_i = \varphi_i \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \in \mathrm{Hom}_{J^1\cap(J^1)^{w_i\tau_{m'-1}w_i^{-1}}}\Big(\bigoplus_{\widetilde{\phi}_i^-} \eta_{\widetilde{\phi}_i^-}, \bigoplus_{\widetilde{\phi}_i^+} \eta^{w_i\tau_{m'-1}w_i^{-1}}_{\widetilde{\phi}_i^+}\Big)$$

où $\widetilde{\phi}_i^-$ et $\widetilde{\phi}_i^+$ varient parmi les caractères de $(\mathcal{G}^-_{P(\tau_{m'-1})})^{w_i^{-1}}$ et $(\mathcal{G}_{P(\tau_{m'-1})})^{w_i^{-1}}$.

Pour tout $k \in \{1, \ldots, m'-1\}$ on introduit la notation suivante : on ajoute l'indice (k) à l'exposant pour indiquer qu'on considère des matrices dans $GL_k(\mathcal{A})$. On obtient les groupes $J^{1(k)}$, $J^{1(k)}_\mathcal{M}$, $J^{1(k)}_\mathcal{P}$, $J^{1(k)}_{\mathcal{P}^-}$, etc. Par exemple on a $J^1_{\mathcal{M},\tau_i} = J^{1(i)} \times J^{1(m'-i)}$.

Soit $H_i = (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau_i)})(J^{1(i)} \times J^{1(m'-i)}_\mathcal{P})(J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau_i)})^{\tau_i}$. Puisque $H_i \subset J^1 \cap (J^1)^{\tau_i} \subset J^1_{\mathcal{P}^-,\tau_i}$ on a $\eta_{|H_i} = \bigoplus \eta_{\phi_i^-}$ où ϕ_i^- varie parmi les caractères de $\mathcal{G}^-_{P(\tau_i)}$. En plus si on note $\mathcal{G}'_i = \mathbb{I}_i \times (J^{1(m'-i)} \cap \mathcal{U}^{(m'-i)})/(H^{1(m'-i)} \cap \mathcal{U}^{(m'-i)})$ alors $(\eta_{\mathcal{M},\tau_i})_{|_{J^{1(i)} \times J^{1(m'-i)}_\mathcal{P}}}$ est une

somme directe de représentations indexées par les caractères de $\mathcal{G}'_i$. Alors chaque $\eta_{\phi_i^-}$ est une somme directe indexée par $\widehat{\mathcal{G}'_i}$ et donc on obtient

$$\eta_{|_{H_i}} = \bigoplus_{\phi_i^- \in \widehat{\mathcal{G}^-_{P(\tau_i)}}} \bigoplus_{\phi'_i \in \widehat{\mathcal{G}'_i}} (\eta_{\phi_i^-, \phi'_i})_{|_{H_i}}.$$

De manière analogue on obtient

$$(\eta^{\tau_i})_{|_{H_i}} = \bigoplus_{\phi_i^+ \in \widehat{\mathcal{G}_{P(\tau_i)}}} \bigoplus_{\phi'_i \in \widehat{\mathcal{G}'_i}} (\eta^{\tau_i}_{\phi_i^+, \phi'_i})_{|_{H_i}}.$$

Lemme 3.27. *Pour tout $i \in \{0, \dots, m'-1\}$ on pose $D_i = \delta_{m'-1} \circ \cdots \circ \delta_i$. Alors on a $D_i \in \mathrm{Hom}_{H_i}(\eta, \eta^{\tau_i})$ et si $\phi^-_{i,0}$, $\phi^+_{i,0}$ et $\phi'_{i,0}$ sont les caractères triviaux de $\mathcal{G}^-_{P(\tau_i)}$, $\mathcal{G}_{P(\tau_i)}$ et $\mathcal{G}'_i$ respectivement, alors il existe $\psi_i \in \mathrm{Hom}_{H_i}(\eta_{\phi^-_{i,0}, \phi'_{i,0}}, \eta^{\tau_i}_{\phi^+_{i,0}, \phi'_{i,0}})$ inversible tel que $D_i = \psi_i \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$.*

Démonstration. On note $\widetilde{J}^1_{\mathcal{P}} = \bigcap_{k=1}^{m'} (J^1)^{\tau_k^{-1}} \cap J^1$ qui est contenu dans $J^1_{\mathcal{P}}$ et qui contient $J^1_{\mathcal{M}}$ et $J^1 \cap \mathcal{U}$. En particulier on a $(H^1 \cap \mathcal{U}^-)\widetilde{J}^1_{\mathcal{P}} = J^1_{\mathcal{P}}$. Puisque $\tau_0 \tau_k^{-1} = \prod_{h=0}^{k-1} w_h \tau_{m'-1} w_h^{-1}$ on a

$$\widetilde{J}^1_{\mathcal{P}} = \bigcap_{k=1}^{m'} (J^1)^{\prod_{h=0}^{k-1} w_h \tau_{m'-1} w_h^{-1}} \cap J^1.$$

L'application D_i est un morphisme de η à η^{τ_i} sur le groupe

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_i &= J^1 \cap (J^1)^{w_i \tau_{m'-1} w_i^{-1}} \cap (J^1)^{(w_i \tau_{m'-1} w_i^{-1})(w_{i+1} \tau_{m'-1} w_{i+1}^{-1})} \cap \cdots \cap (J^1)^{\tau_i} \\ &= \bigcap_{k=i+1}^{m'} (J^1)^{\prod_{h=i}^{k-1} w_h \tau_{m'-1} w_h^{-1}} \cap J^1\end{aligned}$$

On veut prouver $\widetilde{H}_i = (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau_i)})(J^{1(i)} \times \widetilde{J}^{1(m'-i)}_{\mathcal{P}})(J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau_i)})^{\tau_i}$. On a

$$\widetilde{H}_i \cap J^1_{\mathcal{M}, \tau_i} = \bigcap_{k=i+1}^{m'} (J^{1(i)} \times J^{1(m'-i)})^{\prod_{h=i}^{k-1} w_h \tau_{m'-1} w_h^{-1}} \cap J^1 = J^{1(i)} \times \widetilde{J}^{1(m'-i)}_{\mathcal{P}}.$$

On peut vérifier que $J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau_i)} \subset (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau_i)})^{\prod_{h=i}^{k-1} w_h \tau_{m'-1} w_h^{-1}}$ et $(J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau_i)})^{\tau_i} \subset (J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau_i)})^{\prod_{h=i}^{k-1} w_h \tau_{m'-1} w_h^{-1}}$ pour tout $k \in \{i+1, \dots, m'\}$ et donc $\widetilde{H}_i \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau_i)} = J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau_i)}$ et $\widetilde{H}_i \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau_i)} = (J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau_i)})^{\tau_i}$. On obtient $\widetilde{H}_i = (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{P(\tau_i)})(J^{1(i)} \times \widetilde{J}^{1(m'-i)}_{\mathcal{P}})(J^1 \cap \mathcal{U}^+_{P(\tau_i)})^{\tau_i}$ et $D_i \in \mathrm{Hom}_{\widetilde{H}_i}(\eta, \eta^{\tau_i})$. Puisque η et η^{τ_i} sont triviales sur $\mathbb{I}_i \times (H^{1(m'-i)} \cap (\mathcal{U}^-)^{(m'-i)})$ on obtient $D_i \in \mathrm{Hom}_{H_i}(\eta, \eta^{\tau_i})$.

On vérifie la deuxième assertion par récurrence sur i. Si $i = m'-1$ alors $H_{m'-1} = J^1 \cap (J^1)^{\tau_{m'-1}}$, $D_{m'-1} = \delta_{m'-1} = \gamma \in I_{\tau_{m'-1}}(\eta)$ et par la remarque 3.24 un tel $\psi_{m'-1}$ existe. Maintenant on suppose que l'assertion soit vraie par $i+1 \in \{1, \dots, m'-1\}$ et on la prouve

par i. Par hypothèse de récurrence il existe $\psi_{i+1} \in \mathrm{Hom}_{H_{i+1}}\big(\eta_{\phi^-_{i+1,0},\phi'_{i+1,0}}, \eta^{\tau_{i+1}}_{\phi^+_{i+1,0},\phi'_{i+1,0}}\big)$ inversible tel que

$$D_{i+1} = \psi_{i+1} \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \in \mathrm{Hom}_{H_{i+1}}\Big(\bigoplus_{\phi^-_{i+1},\phi'_{i+1}} \eta_{\phi^-_{i+1},\phi'_{i+1}}, \bigoplus_{\phi^+_{i+1},\phi'_{i+1}} \eta^{\tau_{i+1}}_{\phi^+_{i+1},\phi'_{i+1}} \Big)$$

et par la remarque 3.26 il existe $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_{J^1\cap(J^1)^{w_i\tau_{m'-1}w_i^{-1}}}\big(\eta_{\widetilde{\phi}^-_{i,0}}, \eta^{w_i\tau_{m'-1}w_i^{-1}}_{\widetilde{\phi}^+_{i,0}}\big)$ inversible tel que

$$\delta_i = \varphi_i \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 \in \mathrm{Hom}_{J^1\cap(J^1)^{w_i\tau_{m'-1}w_i^{-1}}}\Big(\bigoplus_{\widetilde{\phi}^-_i} \eta_{\widetilde{\phi}^-_i}, \bigoplus_{\widetilde{\phi}^+_i} \eta^{w_i\tau_{m'-1}w_i^{-1}}_{\widetilde{\phi}^+_i} \Big).$$

On considère la composition $D_i = D_{i+1} \circ \delta_i$. Si on note $H = \widetilde{H}_i^{w_i\tau^{-1}_{m'-1}w_i^{-1}}$, on est intéressé par les facteurs en commun entre $(\eta_{\widetilde{\phi}^+_{i,0}})_{|H}$ et $(\eta_{\phi^-_{i+1,0},\phi'_{i+1,0}})_{|H}$ où $\widetilde{\phi}^+_{i,0}$, $\phi^-_{i+1,0}$ et $\phi'_{i+1,0}$ sont les caractères triviaux de $(\mathcal{G}_{P(\tau_{m'-1})})^{w_i^{-1}}$, $\mathcal{G}^-_{P(\tau_{i+1})}$ et $\mathcal{G}'_{i+1}$ respectivement. On observe que

$$(\mathcal{G}_{P(\tau_{m'-1})})^{w_i^{-1}} = \big((\mathcal{G}_{P(\tau_{m'-1})})^{w_i^{-1}} \cap \mathcal{G}_{P(\tau_i)}\big)\big((\mathcal{G}_{P(\tau_{m'-1})})^{w_i^{-1}} \cap \mathcal{G}^-_{P(\tau_{i+1})}\big)$$

et

$$\mathcal{G}^-_{P(\tau_{i+1})} = \big(\mathcal{G}^-_{P(\tau_{i+1})} \cap \mathcal{G}^-_{P(\tau_i)}\big)\big((\mathcal{G}_{P(\tau_{m'-1})})^{w_i^{-1}} \cap \mathcal{G}^-_{P(\tau_{i+1})}\big).$$

Alors $\eta_{|_H}$ se décompose en une somme directe de représentations indexées par les caractères de $(\mathcal{G}_{P(\tau_{m'-1})})^{w_i^{-1}} \cap \mathcal{G}_{P(\tau_i)}$, de $(\mathcal{G}^+_{P(\tau_{m'-1})})^{w_i^{-1}} \cap \mathcal{G}^-_{P(\tau_{i+1})}$, de $\mathcal{G}^-_{P(\tau_{i+1})} \cap \mathcal{G}^-_{P(\tau_i)}$ et de $\mathcal{G}'_{i+1}$. Soient ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 et $\phi'_{i+1,0}$ les caractères triviaux de ces quatre groupes. Puisuqe $\phi_1\phi_2 = \widetilde{\phi}^+_{i,0}$, la restriction $(\eta_{\widetilde{\phi}^+_{i,0}})_{|H}$ est indexée par les caractères de $\mathcal{G}^-_{P(\tau_{i+1})} \cap \mathcal{G}^-_{P(\tau_i)}$ et de $\mathcal{G}'_{i+1}$ et puisuqe $\phi_2\phi_3 = \phi^-_{i+1,0}$, la restriction $(\eta_{\phi^-_{i+1,0},\phi'_{i+1,0}})_{|H}$ est indexée par les caractères de $(\mathcal{G}_{P(\tau_{m'-1})})^{w_i^{-1}} \cap \mathcal{G}_{P(\tau_i)}$. Cela implique que l'unique facteur en commun entre $(\eta_{\widetilde{\phi}^+_{i,0}})_{|H}$ et $(\eta_{\phi^-_{i+1,0},\phi'_{i+1,0}})_{|H}$ est le facteur indexé par les caractères triviaux ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 et $\phi'_{i+1,0}$. On observe que si η' est l'induite à $J^{1(i)} \times J^{1(m'-i)}_{\mathcal{M}}$ du prolongement trivial de $\eta_{\mathcal{M}}$ à $J^{1(i)}_{\mathcal{P}} \times J^{1(m'-i)}_{\mathcal{M}}$ alors ce facteur en commun est le prolongement trivial à H de η'. On obtient que la composition $D_i = D_{i+1} \circ \delta_i$ est non nulle car φ_i et ψ_{i+1} sont inversibles et car $(\eta_{\widetilde{\phi}^+_{i,0}})_{|H}$ et $(\eta_{\phi^-_{i+1,0},\phi'_{i+1,0}})_{|H}$ ont un facteur en commun. En plus D_i prend des valeurs non nuls seulement sur l'espace du prolongement trivial de η' à H_i, c'est à dire $\eta_{\phi^-_{i,0},\phi'_{i,0}}$, et l'image est contenue dans l'espace du prolongement trivial de η'^{τ_i} à H_i, c'est à dire $\eta^{\tau_i}_{\phi^+_{i,0},\phi'_{i,0}}$. Cela signifie qu'il existe $\psi_i \in \mathrm{Hom}_{H_i}(\eta_{\phi^-_{i,0},\phi'_{i,0}}, \eta^{\tau_i}_{\phi^+_{i,0},\phi'_{i,0}})$ non nul tel que $D_i = \psi_i \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0$. Un tel ψ_i est inversible car il appartient à $I_{\tau_i}(\eta')$ et τ_i normalise $J^{1(i)} \times J^{1(m'-i)}_{\mathcal{M}}$. □

Pour tout $i \in \{0, \ldots, m'-1\}$ on a construit $D_i \in \mathrm{Hom}_{H_i}(\eta, \eta^{\tau_i})$ non nul. On note $\mathcal{G}'^-_i = \mathbb{I}_i \times (J^{1(m'-i)} \cap (\mathcal{U}^-)^{(m'-i)})/(H^{1(m'-i)} \cap (\mathcal{U}^-)^{(m'-i)})$. Alors $\mathbb{I}_i \times (J^{1(m'-i)} \cap (\mathcal{U}^-)^{(m'-i)})$

normalise H_i, $J^1 \cap (J^1)^{\tau_i} = (\mathbb{I}_i \times (J^{1(m'-i)} \cap (\mathcal{U}^-)^{(m'-i)}))H_i$ et $(J^1 \cap (J^1)^{\tau_i})/H_i \cong \mathcal{G}_i'^-$. On note $\widetilde{J}_{\mathfrak{P}} = \bigcap_{k=1}^{m'} (J)^{\tau_k^{-1}} \cap J$ et on observe que $\widetilde{J}_{\mathfrak{P}} \cap \mathcal{U}^- \subset H^1 \cap \mathcal{U}^-$ car $\varpi\mathfrak{J} \subset \mathfrak{H}^1$. On note $\mathcal{G}_i = \mathbb{I}_i \times (J^{1(m'-i)} \cap (\mathcal{U}^-)^{(m'-i)})/(\widetilde{J}_{\mathfrak{P}}^{(m'-i)} \cap (\mathcal{U}^-)^{(m'-i)})$ et $c_i = |\mathcal{G}_i/\mathcal{G}_i'^-| = |(H^{1(m'-i)} \cap (\mathcal{U}^-)^{(m'-i)})/(\widetilde{J}_{\mathfrak{P}}^{(m'-i)} \cap (\mathcal{U}^-)^{(m'-i)})|$ qui est non nul car il est une puissance de p. On définit

$$\gamma_i = \sum_{g \in \mathcal{G}_i} \eta^{\tau_i}(g) \circ D_i \circ \eta(g^{-1}) = c_i \sum_{g \in \mathcal{G}_i'^-} \eta^{\tau_i}(g) \circ D_i \circ \eta(g^{-1}). \tag{3.5}$$

Alors $\gamma_i \in I_{\tau_i}(\eta)$ car pour tout x dans un ensemble de représentants de $\mathcal{G}_i'^-$ et $y \in H_i$ on a

$$\begin{aligned}
\gamma_i \circ \eta(xy) &= c_i \sum_{g \in \mathcal{G}_i'^-} \eta^{\tau_i}(g) \circ D_i \circ \eta((x^{-1}g)^{-1}) \circ \eta(y) \\
(h = x^{-1}g) &= c_i \sum_{h \in \mathcal{G}_i'^-} \eta^{\tau_i}(xh) \circ D_i \circ \eta(h^{-1}yh) \circ \eta(h^{-1}) \\
&= c_i \sum_{g \in \mathcal{G}_i'^-} \eta^{\tau_i}(xh) \circ \eta^{\tau_i}(h^{-1}yh) \circ D_i \circ \eta(h^{-1}) \\
&= \eta^{\tau_i}(xy) \circ \gamma_i.
\end{aligned}$$

On veut prouver $\gamma_i \neq 0$. On prend $v \neq 0$ dans l'espace W de $\eta_{\phi_{i,0}^-, \phi_{i,0}'}$. Par 4 de la proposition 3.20 les éléments de $\mathcal{G}_i'^-$ permutent les caractères de $\mathcal{G}_i'$, et donc si $g \in \mathcal{G}_i'^- \setminus \{1\}$ on a $\eta(g^{-1})v \notin W$ et $D_i(\eta(g)v) = 0$. Alors on obtient $\gamma_i(v) = D_i(v) \neq 0$ qui implique $\gamma_i \neq 0$. Plus precisement pour tout caractère ϕ_i' de $\mathcal{G}_i'$ il existe un unique $g \in \mathcal{G}_i'^-$ tel que $(\eta_{\phi_{i,0}^-, \phi_i'})^g = \eta_{\phi_{i,0}^-, \phi_{i,0}'}$ et donc pour tout $v \neq 0$ dans l'espace de $\eta_{\phi_{i,0}^-, \phi_i'}$ on a $\gamma_i(v) \neq 0$.

On a construit pour tout $i \in \{0, \ldots, m'-1\}$, un élément non nul γ_i de $I_{\tau_i}(\eta)$. On observe que puisque τ_0 normalise J^1, l'élément γ_0 est inversible. Par la proposition 1.17, pour tout $i \in \{0, \ldots, m'-1\}$ l'application $\widetilde{f}_{\tau_i} : J^1 \tau_i J^1 \longrightarrow \mathrm{End}(V_\eta)$ définie par $\widetilde{f}_{\tau_i}(j_1 \tau_i j_1') = \eta(j_1) \circ \gamma_i \circ \eta(j_i')$ pour tout $j_1, j_1' \in J^1$ est dans $\mathscr{H}_R(G, \eta)_{J^1 \tau_i J^1}$. On observe que l'application $\widetilde{f}_{\tau_0}$ est inversible dans $\mathscr{H}_R(G, \eta)$ avec inverse $\widetilde{f}_{\tau_0^{-1}} : \tau_0^{-1} J^1 \longrightarrow \mathrm{End}(V_\eta)$ définie par $\widetilde{f}_{\tau_0^{-1}}(\tau_0^{-1} j) = \gamma_0^{-1} \circ \eta(j)$ pour tout $j \in J^1$. On note $\widetilde{f}_k = \Theta'(f_k)$ pour tout $k \in K_B$, où Θ' est l'isomorphisme défini dans le lemme 3.9.

Lemme 3.28. *L'application*

$$\begin{array}{ccc} \Theta'' : \boldsymbol{\Omega}_B & \longrightarrow & \mathscr{H}_R(G, \eta) \\ f_\omega & \longmapsto & \widetilde{f}_\omega \end{array} \tag{3.6}$$

est bien définie

Démonstration. Elle est bien définie sur les f_k avec $k \in K_B$ car Θ' est un morphisme et elle est bien définie sur les τ_i avec $i \in \{0, \ldots, m'-1\}$ car $K_B^1 \tau_i K_B^1 = K_B^1 \tau_j K_B^1$ implique $i = j$. □

3.4.4

Dans ce paragraphe on veut prouver que les $\widetilde{f}_\omega$ avec $\omega \in \Omega_B$ respectent les relations de la définition 2.17. Dans ce cas on peut étendre l'application du lemme 3.28 à un morphisme d'algèbres de $\mathscr{H}_R(B^\times, K_B^1)$ vers $\mathscr{H}_R(G,\eta)$.

Lemme 3.29. *Pour tout $i,j \in \{0,\dots,m'-1\}$ la fonction $\widetilde{f}_{\tau_i}\widetilde{f}_{\tau_j}$ est dans $\mathscr{H}_R(G,\eta)_{J^1\tau_i\tau_jJ^1}$ et $(\widetilde{f}_{\tau_i}\widetilde{f}_{\tau_j})(\tau_i\tau_j) = \gamma_i \circ \gamma_j$.*

Démonstration. Si i ou j est nul alors le lemme est vrai par le lemme 3.8. Sinon par le lemme 3.19 le support de $\widetilde{f}_{\tau_i}\widetilde{f}_{\tau_j}$ est dans $J^1\tau_iJ^1\tau_jJ^1 = J^1\tau_i\tau_jJ^1$ et le support de $x \mapsto \widetilde{f}_{\tau_i}(x)\widetilde{f}_{\tau_j}(x^{-1}\tau_i\tau_j)$ est dans $J^1\tau_iJ^1 \cap \tau_i\tau_jJ^1\tau_j^{-1}J^1 = \tau_iJ^1$. On obtient $(\widetilde{f}_{\tau_i}\widetilde{f}_{\tau_j})(\tau_i\tau_j) = \widetilde{f}_{\tau_i}(\tau_i) \circ \widetilde{f}_{\tau_j}(\tau_j) = \gamma_i \circ \gamma_j$. □

Remarque 3.30. Le lemme 3.29 et la proposition 1.17 impliquent que $\gamma_i \circ \gamma_j$ et $\gamma_j \circ \gamma_i$ sont des éléments de $I_{\tau_i\tau_j}(\eta)$ car ils sont les images d'éléments dans $\mathscr{H}_R(G,\eta)_{J^1\tau_i\tau_jJ^1}$. Plus en général, si on prend $\tau,\tau' \in \mathbf{\Delta}$, $\gamma \in I_\tau(\eta)$ et $\gamma' \in I_{\tau'}(\eta)$ alors $J^1 \cap (J^1)^{\tau'} \cap (J^1)^{\tau\tau'} = J^1 \cap (J^1)^{\tau\tau'} = J^1 \cap (J^1)^{\tau} \cap (J^1)^{\tau\tau'}$ et donc $\gamma \circ \gamma'$ et $\gamma' \circ \gamma$ sont des éléments de $I_{\tau\tau'}(\eta)$. Enfin, puisque l'espace $I_{\tau\tau'}(\eta)$ est de dimension 1, on sait que $\gamma \circ \gamma'$ et $\gamma' \circ \gamma$ diffèrent par une constante dans R.

Lemme 3.31. *Soient $i \in \{1,\dots,m'-1\}$ et $\alpha \in \mathbf{\Psi}^+_{\widehat{\alpha_{ii+1}}}$. Alors pour tout $u \in U_\alpha$ et $u' \in U_{-\alpha}$ on a $\widetilde{f}_u\widetilde{f}_{\tau_i} = \widetilde{f}_{\tau_i}$ et $\widetilde{f}_{\tau_i}\widetilde{f}_{u'} = \widetilde{f}_{\tau_i}$.*

Démonstration. Les éléments $\tau_i^{-1}u\tau_i$ et $\tau_iu'\tau_i^{-1}$ sont dans $K_B^1 \subset J^1$. Donc le support de $\widetilde{f}_u\widetilde{f}_{\tau_i}$ et de $\widetilde{f}_{\tau_i}\widetilde{f}_{u'}$ est $J^1\tau_iJ^1$. On obtient $\widetilde{f}_{\tau_i}(u\tau_i) = \widetilde{f}_{\tau_i}(\tau_i\tau_i^{-1}u\tau_i) = \gamma_i \circ \eta(\tau_i^{-1}u\tau_i)$ qui est égale à $\kappa(u) \circ \gamma_i = (\widetilde{f}_u\widetilde{f}_{\tau_i})(u\tau_i)$ par le lemme 3.8 et car $\gamma_i \in I_{\tau_i}(\kappa)$. De manière analogue on a $\widetilde{f}_{\tau_i}(\tau_iu') = \widetilde{f}_{\tau_i}(\tau_iu'\tau_i^{-1}\tau_i) = \eta(\tau_iu'\tau_i^{-1}) \circ \gamma_i = \gamma_i \circ \kappa(u') = (\widetilde{f}_{\tau_i}\widetilde{f}_{u'})(\tau_iu')$. □

Maintenant on fixe $1 \le i \le m'-1$ et on considère $\alpha = \alpha_{ii+1}$, w de longueur minimale dans $wW_{\widehat{\alpha}}$, $P = P(w,\alpha)$ et $Q = Q(w,\alpha)$ (voir la section 2.3). On étudie la fonction $\widetilde{f}_{\tau_P}\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}} \in \mathscr{H}_R(G,\eta)$. La partie la plus compliquée est de prouver que son support est $J^1\tau_Q(U \cap wU^-w^{-1})J^1$ tel que requis par la relation 9 de la définition 2.17. On rappelle que puisque $I_G(\eta) = J^1B^\times J^1$ le support de toute fonction dans $\mathscr{H}_R(G,\eta)$ est dans $J^1B^\times J^1$.

On pose

$$\mathcal{V}(w,\alpha) = (J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1} \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}} \tag{3.7}$$

qui est un pro-p-groupe. On observe que

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(w,\alpha) &= \prod_{\alpha' \in w\mathbf{\Psi}^+_{\widehat{\alpha}} \cap \mathbf{\Psi}^-_{\widehat{P}}} (J^1 \cap \mathcal{U}_{\alpha'})^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}} = \mathbb{I}_{m'} + \prod_{\alpha' \in w\mathbf{\Psi}^+_{\widehat{\alpha}} \cap \mathbf{\Psi}^-_{\widehat{P}}} (\mathfrak{J}^1 \cap \mathcal{N}_{\alpha'})^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}} \\ &= \mathbb{I}_{m'} + \prod_{\alpha' \in w\mathbf{\Psi}^+_{\widehat{\alpha}} \cap \mathbf{\Psi}^-_{\widehat{P}}} (\varpi^{-1}\mathfrak{J}^1 \cap \mathcal{N}_{\alpha'}).\end{aligned} \tag{3.8}$$

On observe que $\mathcal{V}(w,\alpha) \cap J^1 = J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}}$ et on rappelle que par la remarque 3.13 on a $wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap U^-_{\widehat{P}} = w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}} \cap K_B$.

Lemme 3.32. *Le groupe $wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap U^-_{\widehat{P}}$ est dans $\mathcal{V}(w,\alpha)$, il normalise $\mathcal{V}(w,\alpha) \cap J^1$ et*

$$(wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap U^-_{\widehat{P}}) \cap (\mathcal{V}(w,\alpha) \cap J^1) = wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap U^-_{\widehat{P}} \cap K^1_B.$$

Démonstration. Par le lemme 2.6 on a $U^+_{\widehat{\alpha}} = \tau_\alpha(U^+_{\widehat{\alpha}} \cap K^1_B)\tau_\alpha^{-1}$. Alors $wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap U^-_{\widehat{P}} = (wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap K^1_B)^{w\tau_\alpha^{-1} w^{-1}} \cap U^-_{\widehat{P}}$ qui est inclus dans $(w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap J^1)^{w\tau_\alpha^{-1} w^{-1}} \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}} = \mathcal{V}(w,\alpha)$ car $(\mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{w\tau_\alpha w^{-1}} = \mathcal{U}^-_{\widehat{P}}$. Puis, le groupe $wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap U^-_{\widehat{P}}$ normalise $\mathcal{V}(w,\alpha) \cap J^1$ car on a $wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap U^-_{\widehat{P}} \subset K_B$ et K_B normalise J^1. Enfin, puisque $K_B \cap J^1 = K^1_B$, on obtient $wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap U^-_{\widehat{P}} \cap \mathcal{V}(w,\alpha) \cap J^1 = wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap U^-_{\widehat{P}} \cap K_B \cap J^1 = wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap U^-_{\widehat{P}} \cap K^1_B$. □

Remarque 3.33. Par le lemme 3.32 le groupe $(wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap U^-_{\widehat{P}})(\mathcal{V}(w,\alpha) \cap J^1)$ est un sous-groupe de $\mathcal{V}(w,\alpha)$ et en utilisant (3.8) on obtient qu'il est égal à

$$\begin{aligned}&\left(\mathbb{I}_{m'} + \prod_{\alpha' \in w\boldsymbol{\Psi}^+_{\widehat{\alpha}} \cap \boldsymbol{\Psi}^-_{\widehat{P}}} (\mathfrak{B} \cap \mathcal{N}_{\alpha'})\right)\left(\mathbb{I}_{m'} + \prod_{\alpha' \in w\boldsymbol{\Psi}^+_{\widehat{\alpha}} \cap \boldsymbol{\Psi}^-_{\widehat{P}}} (\mathfrak{J}^1 \cap \mathcal{N}_{\alpha'})\right)\\ &= \mathbb{I}_{m'} + \prod_{\alpha' \in w\boldsymbol{\Phi}^- \cap \boldsymbol{\Phi}^+} (\mathfrak{J} \cap \mathcal{N}_{\alpha'}) = J \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}} = J \cap \mathcal{V}(w,\alpha)\end{aligned}$$

car $(\mathfrak{B} \cap \mathcal{N}_{\alpha'})(\mathfrak{J}^1 \cap \mathcal{N}_{\alpha'}) = \mathfrak{J} \cap \mathcal{N}_{\alpha'}$ et $\mathfrak{J} \subset \varpi^{-1}\mathfrak{J}^1$. On pose

$$d(w,\alpha) = [\mathcal{V}(w,\alpha) : J \cap \mathcal{V}(w,\alpha)] \in R$$

qui est non nul car il est une puissance de p.

Remarque 3.34. Par le lemme 2.14 on a $w\boldsymbol{\Psi}^+_{\widehat{\alpha}} \cap \boldsymbol{\Psi}^-_{\widehat{P}} = w\boldsymbol{\Phi}^+ \cap \boldsymbol{\Phi}^-$ et donc on obtient $w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}} = w\mathcal{U}w^{-1} \cap \mathcal{U}^-$ et $wU^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap U^-_{\widehat{P}} = wUw^{-1} \cap U^-$. On a $\mathcal{V}(w,\alpha) \cap J = (wUw^{-1} \cap U^-)(\mathcal{V}(w,\alpha) \cap J^1)$ et donc par la remarque 2.5 on a $[\mathcal{V}(w,\alpha) : \mathcal{V}(w,\alpha) \cap J^1] = d(w,\alpha)\ [\mathcal{V}(w,\alpha) \cap J : \mathcal{V}(w,\alpha) \cap J^1] = d(w,\alpha)[wUw^{-1} \cap U^- : wUw^{-1} \cap U^- \cap K^1_B] = d(w,\alpha)q^{\ell(w)}$ où q est le cardinal de $\mathfrak{k}_{D'}$.

Conjecture 3.35.

(a) Pour tout $i, j \in \{0, \ldots, m'-1\}$ on a $\gamma_i \circ \gamma_j = \gamma_j \circ \gamma_i$.

(b) Soit γ_P (resp. γ_Q) la composition des γ_i pour tout $\alpha_{ii+1} \in P$ (resp. $i \in Q$) qui est bien définie par (a) et qui est dans $I_{\tau_P}(\eta)$ (resp. $I_{\tau_Q}(\eta)$) par la remarque 3.30. Soit $\mathcal{G} = (J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})/(J^{w\tau_\alpha w^{-1}} \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})$. Alors

$$\gamma_Q = \sum_{g \in \mathcal{G}} \eta^{\tau_Q}(g) \circ \gamma_P \circ \kappa(w) \circ \gamma_i \circ \kappa(w^{-1}) \circ \eta(g^{-1}). \tag{3.9}$$

Remarque 3.36. Par la remarque 3.30 on sait que $\gamma_i \circ \gamma_j$ et $\gamma_j \circ \gamma_i$ sont des éléments de $I_{\tau_i\tau_j}(\eta)$ et donc ils diffèrent par une constante dans R. La conjecture 3.35 dit que cette constante est 1. En effet on sait que, puisque $I_{\tau_i}(\eta)$ et $I_{\tau_j}(\eta)$ sont de dimension 1, ou bien chaque élément de $I_{\tau_i}(\eta)$ commute avec chaque élément de $I_{\tau_j}(\eta)$ on bien aucun élément de $I_{\tau_i}(\eta)$ commute avec les éléments de $I_{\tau_j}(\eta)$.

Remarque 3.37. On a $\gamma_P \circ \kappa(w) \circ \gamma_i \circ \kappa(w^{-1}) \in \mathrm{Hom}_{J^1\cap(J^1)^{w\tau_i w^{-1}}\cap(J^1)^{\tau_Q}}(\eta, \eta^{\tau_Q})$. On veut prouver que le terme à droite de l'égalité (3.9) est dans $I_{\tau_Q}(\eta)$.
La décomposition de Iwahori du groupe $J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap (J^1)^{\tau_Q}$ est donnée par

$$J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap (J^1)^{\tau_Q} = (J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap \mathcal{U}^-)\, J^1_{\mathcal{M}}\, \left(J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap (J^1)^{\tau_Q} \cap \mathcal{U}\right)$$

car on a $J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap \mathcal{U}^- \subset (J^1 \cap \mathcal{U}^-) \subset (J^1 \cap \mathcal{U}^-)^{\tau_Q}$ et $J^1_{\mathcal{M}} = (J^1_{\mathcal{M}})^{w\tau_i w^{-1}} = (J^1_{\mathcal{M}})^{\tau_Q}$. On observe que, puisque $(J^1)^{\tau_Q} \cap \mathcal{U}$ et $(J^1)^{\tau_P} \cap \mathcal{U}$ sont contenus dans $J^1 \cap \mathcal{U}$ par le lemme 3.16(c), on obtient

$$\begin{aligned} J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap (J^1)^{\tau_Q} \cap \mathcal{U} &= (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap (J^1)^{\tau_Q} \cap \mathcal{U} = (J^1 \cap (J^1)^{\tau_P} \cap \mathcal{U})^{w\tau_i w^{-1}} \\ &= ((J^1)^{\tau_P} \cap \mathcal{U})^{w\tau_i w^{-1}} = (J^1 \cap \mathcal{U})^{\tau_Q} \end{aligned}$$

et donc $J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap (J^1)^{\tau_Q} = (J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap \mathcal{U}^-) J^1_{\mathcal{M}} (J^1 \cap \mathcal{U})^{\tau_Q}$. On veut prouver l'égalité

$$\mathcal{G}(J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap (J^1)^{\tau_Q}) = J^1 \cap (J^1)^{\tau_Q}.$$

Par le lemme 2.14 on a $w\mathbf{\Psi}^+_{\widehat{\alpha}} \cap \mathbf{\Psi}^-_{\widehat{P}} = w\mathbf{\Phi}^+ \cap \mathbf{\Phi}^-$ et donc on a l'égalité $J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}} = J^1 \cap w\mathcal{U}w^{-1} \cap \mathcal{U}^-$. Puis, le groupe $(J^1 \cap w\mathcal{U}w^{-1} \cap \mathcal{U}^-)(J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap \mathcal{U}^-)$ est contenu dans $J^1 \cap \mathcal{U}^-$. Son conjugué par w est $\left((J^1 \cap w\mathcal{U}w^{-1} \cap \mathcal{U}^-)(J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap \mathcal{U}^-)\right)^w = \left(J^1 \cap \mathcal{U} \cap w^{-1}\mathcal{U}^- w\right)\left(J^1 \cap (w^{-1}J^1 w)^{\tau_i} \cap w^{-1}\mathcal{U}^- w\right)$ et ce dernier contient $\left(J^1 \cap \mathcal{U} \cap w^{-1}\mathcal{U}^- w\right)\left(J^1 \cap (w^{-1}J^1 w)^{\tau_i} \cap w^{-1}\mathcal{U}^- w \cap \mathcal{U}^-\right)$ qui est égal à $(J^1 \cap \mathcal{U} \cap w^{-1}\mathcal{U}^- w)(J^1 \cap w^{-1}\mathcal{U}^- w \cap \mathcal{U}^-) = (J^1 \cap \mathcal{U}^-)^w$ car par le lemme 3.16(c) on a $w^{-1}J^1 w \cap \mathcal{U}^- = J^1 \cap \mathcal{U}^- \subset (J^1)^{\tau_i} \cap \mathcal{U}^-$. Donc on obtient l'égalité $(J^1 \cap w\mathcal{U}w^{-1} \cap \mathcal{U}^-)(J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap \mathcal{U}^-) = J^1 \cap \mathcal{U}^-$ et aussi l'égalité $\mathcal{G}(J^1 \cap (J^1)^{w\tau_i w^{-1}} \cap (J^1)^{\tau_Q}) = (J^1 \cap \mathcal{U}^-) J^1_{\mathcal{M}} (J^1 \cap \mathcal{U})^{\tau_Q} = J^1 \cap (J^1)^{\tau_Q}$.
Cela prouve que le terme à droite de l'égalité (3.9) est dans $I_{\tau_Q}(\eta)$ et donc il diffère de γ_Q par une constante dans R. La conjecture 3.35 dit que cette constante est 1.

Remarque 3.38. Si on prend $i = m' - 1$ (et donc $\alpha = \alpha_{m'-1m'}$) et $w = w_j = s_{j+1} \cdots s_{m'-1}$ avec $j \in \{0, \ldots, m' - 2\}$, qui est de longueur minimale dans $wW_{\widehat{\alpha}}$, on a $P = P(w_j, \alpha) = \{\alpha_{j+1j+2}\}$ et $Q(w_j, \alpha) = \{\alpha_{jj+1}\}$. En utilisant la notation $\delta_j = \kappa(w_j) \circ \gamma \circ \kappa(w_j^{-1})$ introduite dans le paragraphe 3.4.3, la relation (3.9) devient

$$\gamma_j = \sum_{g \in \mathcal{G}} \eta^{\tau_j}(g) \circ \gamma_{j+1} \circ \delta_j \circ \eta(g^{-1}) \tag{3.10}$$

où $\mathcal{G} = (J^1 \cap w_j \mathcal{U} w_j^{-1} \cap \mathcal{U}^-)/(J^{w_j \tau_{m'-1} w_j^{-1}} \cap w_j \mathcal{U} w_j^{-1} \cap \mathcal{U}^-)$. On veut prouver qu'elle est cohérente avec la définition (3.5). On peut prouver facilement que $\mathcal{G}_j = \mathcal{G}\mathcal{G}_{j+1}$ et donc par (3.5) on a

$$\gamma_j = \sum_{g \in \mathcal{G}} \sum_{g' \in \mathcal{G}_{j+1}} \eta^{\tau_j}(gg') \circ D_{j+1} \circ \delta_j \circ \eta(g'^{-1} g^{-1}).$$

Pour tout $g' \in \mathcal{G}_{j+1}$ on a $\eta^{\tau_j}(g') = \eta^{\tau_{j+1}}(g')$, $g'^{-1} \in J^1 \cap (J^1)^{w_j \tau_{m'-1} w_j^{-1}}$ et $g'^{-1} = (g'^{-1})^{w_j \tau_{m'-1}^{-1} w_j^{-1}}$ et donc $\delta_j \circ \eta(g'^{-1}) = \eta(g'^{-1}) \circ \delta_j$. On obtient

$$\begin{aligned} \gamma_j &= \sum_{g \in \mathcal{G}} \eta^{\tau_j}(g) \sum_{g' \in \mathcal{G}_{j+1}} \eta^{\tau_{j+1}}(g') \circ D_{j+1} \circ \eta(g'^{-1}) \circ \delta_j \circ \eta(g^{-1}) \\ &= \sum_{g \in \mathcal{G}} \eta^{\tau_j}(g) \circ \gamma_{j+1} \circ \delta_j \circ \eta(g^{-1}) \end{aligned}$$

qui est exactement la relation (3.10).

Remarque 3.39. La conjecture 3.35 est vraie pour $m' = 1$ car dans ce cas on a $\boldsymbol{\Delta} = \{1\}$ et donc il n'y a rien à prouver. Elle est vraie pour $m' = 2$: dans ce cas on a $\Sigma = \{\alpha_{12}\}$, $W = \{1, s_{12}\}$ et l'unique cas non trivial de la relation (3.9) est

$$\gamma_0 = \sum_{g \in \mathcal{G}} \eta^{\tau_0}(g) \circ \gamma \circ \kappa(s_{12}) \circ \gamma \circ \kappa(s_{12}) \circ \eta(g^{-1})$$

qui est vrai par la définition de γ_0 ; en plus on peut prouver $\gamma_0 \circ \gamma = \gamma \circ \gamma_0$ en utilisant que γ_0 est inversible. La conjecture est vraie sous l'hypothèse $H^1 = J^1$ pour n'importe quel $m' \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas η est décomposée au-dessus de $\eta_{\mathcal{M}}$, les D_i sont dans $I_{\tau_i}(\eta)$ et inversibles et la définition (3.5) devient $\gamma_i = |\mathcal{G}| D_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, m'-1\}$. En utilisant ces propriétés on peut prouver [1] que les γ_i commutent et vérifient la relation (3.9).

On introduit des sous-groupes de G dont les éléments sont des matrices carrées de taille m' à coefficients dans $\mathcal{A}$ (voir la remarque 3.10). On rappelle que $\mathfrak{A}$ est l'unique ordre héréditaire normalisé par $E^\times$ dans $\mathcal{A}$ et $\mathfrak{P}$ est son radical.

- Soit $\mathcal{Z}$ le groupe des matrices (z_{ij}) telles que $z_{ii} = 1$, $z_{ij} \in \varpi^{-1}\mathfrak{P}$ si $i < j$ et $z_{ij} = 0$ si $i > j$.
- Soit $\mathcal{V}$ le groupe

$$(J^1 \cap w \mathcal{U}^-_{\widehat{\alpha}} w^{-1} \cap \mathcal{U}^+_{\widehat{P}})^{w \tau_\alpha w^{-1}} = \mathbb{I}_{m'} + \prod_{\alpha' \in w \boldsymbol{\Psi}^-_{\widehat{\alpha}} \cap \boldsymbol{\Phi}^+_{\widehat{P}}} (\varpi^{-1} \mathfrak{J}^1 \cap \mathcal{U}_{\alpha'}) \subset \mathcal{Z}.$$

On remarque qu'il est différent du groupe $\mathcal{V}(w, \alpha)$ défini par (3.7).

1. La preuve de ce fait n'est pas simple et on ne la reporte pas ici.

- Soit $\tilde{I}^1$ le groupe des matrices (m_{ij}) telles que $m_{ii} \in 1+\mathfrak{P}$, $m_{ij} \in \mathfrak{A}$ si $i < j$ et $m_{ij} \in \mathfrak{P}$ si $i > j$.
- Soit $\widetilde{W}$ le groupe des matrices monomiales à coefficients dans $\mathfrak{k}_{D'}^{\times} \ltimes \varpi^{\mathbb{Z}}$ analogue à celui du lemme 2.9.

Lemme 3.40. *On a* $J^1\tau_P J^1 w\tau_\alpha w^{-1}J^1 = J^1\tau_Q \mathcal{V} J^1$.

Démonstration. Par le lemme 3.17 on a $J^1\tau_P J^1 w\tau_\alpha w^{-1}J^1 = J^1\tau_P(J^1 \cap \mathcal{U}^+_{\widehat{P}})w\tau_\alpha w^{-1}J^1 = J^1\tau_P(J^1 \cap w\mathcal{U}^-_{\widehat{\alpha}}w^{-1} \cap \mathcal{U}^+_{\widehat{P}})w\tau_\alpha w^{-1}J^1$ d'où le résultat. □

Lemme 3.41. *Soit* $\tau \in \mathbf{\Delta}$. *Si* $z \in \mathcal{Z}$ *est tel que* $\tilde{I}^1\tau z\tilde{I}^1 \cap \widetilde{W} \neq \emptyset$ *alors* $\tilde{I}^1\tau z\tilde{I}^1 \cap \widetilde{W} = \{\tau\}$.

Démonstration. Soient $x, y \in \tilde{I}^1$ tels que $x\tau zy \in \widetilde{W}$. On procède par étapes.
Première étape. On considère la décomposition $\tilde{I}^1 = (\tilde{I}^1 \cap \mathcal{U}^-)(\tilde{I}^1 \cap \mathcal{U})(\tilde{I}^1 \cap \mathcal{M})$ et on écrit $x = x_1x_2x_3$ selon cette décomposition. Alors on a

$$x\tau zy = x_1\tau\big((\tau^{-1}x_2\tau)(\tau^{-1}x_3\tau)z(\tau^{-1}x_3^{-1}\tau)\big)(\tau^{-1}x_3\tau)y.$$

On observe que $\tau^{-1}x_3\tau$ est une matrice diagonale à coefficients dans $1+\mathfrak{P}$ et la conjugaison de z par cet élément est dans $\mathcal{Z}$. L'élément $\tau^{-1}x_2\tau$ est dans $\tilde{I}^1 \cap \mathcal{U}$ et si on le multiplie par un élément de $\mathcal{Z}$ on obtient un autre élément de $\mathcal{Z}$. Si on pose $z_1 = \tau^{-1}x_2x_3\tau z\tau^{-1}x_3^{-1}\tau$ alors $\tilde{I}^1\tau z\tilde{I}^1 = \tilde{I}^1\tau z_1\tilde{I}^1$ et $(\tilde{I}^1 \cap \mathcal{U}^-)\tau z_1\tilde{I}^1 \cap \widetilde{W} \neq \emptyset$. Donc on peut supposer $x \in \tilde{I}^1 \cap \mathcal{U}^-$.
Deuxième étape. Soient $a_1 \leq \cdots \leq a_{m'} \in \mathbb{N}$ tels que $\tau = \mathrm{diag}(\varpi^{a_i})$ et $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_1 = \cdots = a_s$ et $a_1 < a_{s+1}$. On veut démontrer que $z_{ij} \in \mathfrak{A}$ pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$. On suppose le contraire. On considère la valuation v sur $\mathcal{A}$ associée à $\mathfrak{P}$, on pose $b = \min\{\mathrm{v}(\varpi^{a_1}z_{ij}) \,|\, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq m'\}$, $h = \max\{1 \leq i \leq s \,|\, \text{il existe } z_{ij} \text{ avec } \mathrm{v}(\varpi^{a_1}z_{ij}) = b\}$ et $k = \min\{1 \leq j \leq m' \,|\, \text{il existe } z_{hj} \text{ avec } \mathrm{v}(\varpi^{a_1}z_{hj}) = b\}$. Par hypothèse l'élément z_{hk} n'est pas dans $\mathfrak{A}$ et donc $h < k$ et

$$(a_1 - 1)\mathrm{v}(\varpi) < b < a_1\mathrm{v}(\varpi). \tag{3.11}$$

On observe que pour tout $i \in \{1, \ldots, m'\}$ et $j > i$ on a $\mathrm{v}(\varpi^{a_i}z_{ij}) \geq b$: si $i \leq s$ par définition de b et si $i > s$ car $\mathrm{v}(\varpi^{a_i}z_{ij}) = a_i\mathrm{v}(\varpi) + \mathrm{v}(z_{ij}) > (a_i - 1)\mathrm{v}(\varpi) \geq a_1\mathrm{v}(\varpi) > b$. On considère le coefficient en position (h, k) de $x\tau zy$ qui est égal à

$$\sum_{e=1}^{m'}\sum_{f=e}^{m'} x_{he}\varpi^{a_e}z_{ef}y_{fk} = \sum_{e=1}^{s}\sum_{f=e}^{m'} x_{he}\varpi^{a_1}z_{ef}y_{fk} + \sum_{e=s+1}^{m'}\sum_{f=e}^{m'} x_{he}\varpi^{a_e}z_{ef}y_{fk}.$$

La valuation de la deuxième somme est plus grande que $b+1$. Dans la première somme :

- si $e = h$ et $f = k$ on obtient $x_{hh}\varpi^{a_1}z_{hk}y_{kk}$ qui est de valuation b car $x_{hh}, y_{kk} \in 1+\mathfrak{P}$;
- si $e = h$ et $f < k$ la valuation est plus grande que $b+1$ par définition de k ;

- si $e = h$ et $f > k$ la valuation est plus grande que $b+1$ car $y_{fk} \in \mathfrak{P}$;
- si $e > h$ la valuation est plus grande que $b+1$ par définition de h ;
- si $e < h$ la valuation est plus grande que $b+1$ car $x_{he} \in \mathfrak{P}$.

On obtient un élément de valuation b. Alors b est un multiple de $\mathrm{v}(\varpi)$ car $x\tau zy \in \widetilde{W}$ mais cela est en contradiction avec (3.11). Donc $z_{ij} \in \mathfrak{A}$ pour tout $i \in \{1, \dots, s\}$ et on peut décomposer $z = z'z''$ avec $z'_{ii} = 1$, $z'_{ij} = z_{ij}$ si $i \in \{s+1, \dots, m'\}$ et $j > i$ et $z'_{ij} = 0$ sinon et $z''_{ii} = 1$, $z''_{ij} = z_{ij}$ si $i \in \{1, \dots, s\}$ et $j > i$ et $z'_{ij} = 0$ sinon. Alors $z'' \in \tilde{I}^1$ et donc $\tilde{I}^1 \tau z \tilde{I}^1 = \tilde{I}^1 \tau z' \tilde{I}^1$ et $(\tilde{I}^1 \cap \mathcal{U}^-)\tau z' \tilde{I}^1 \cap \widetilde{W} \neq \emptyset$. Donc on peut supposer z de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{I}_s & 0 \\ 0 & \hat{z} \end{smallmatrix}\right)$ avec $\hat{z}$ dans l'ensemble $\hat{\mathcal{Z}}$ analogue à $\mathcal{Z}$ en dimension $m' - s$.
Troisième étape. On décompose $x = x'x''$ avec $x'_{ii} = 1$, $x'_{ij} = x_{ij}$ si $i \in \{s+1, \dots, m'\}$ et $j < i$ et $x'_{ij} = 0$ sinon et $x''_{ii} = 1$, $x''_{ij} = x_{ij}$ si $i \in \{1, \dots, s\}$ et $j < i$ et $x'_{ij} = 0$ sinon. Après les premières deux étape x'' est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{m'-s} \end{smallmatrix}\right)$ et $\tau^{-1} x'' \tau \in \tilde{I}^1$ commute avec z. Donc on peut supposer x de la forme $\left(\begin{smallmatrix} \mathbb{I}_s & 0 \\ x''' & \hat{x} \end{smallmatrix}\right)$ avec $x''' \in M_{(m'-s)\times s}(\mathfrak{P})$ et $\hat{x}$ dans l'ensemble $\hat{\tilde{I}}^1$ analogue à $\tilde{I}^1$ en dimension $m' - s$.
Quatrième étape. Soient $\tau = \left(\begin{smallmatrix} \varpi^{a_1}\mathbb{I}_s & 0 \\ 0 & \hat{\tau} \end{smallmatrix}\right)$ avec $\hat{\tau} \in \hat{\boldsymbol{\Delta}}$ analogue à $\boldsymbol{\Delta}$ en dimension $m' - s$ et $y = \left(\begin{smallmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & \hat{y} \end{smallmatrix}\right)$ avec y_1 matrice carrée de taille s et $\hat{y} \in \hat{\tilde{I}}^1$. Alors le produit $x\tau zy$ est

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_s & 0 \\ x''' & \hat{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi^{a_1}\mathbb{I}_s & 0 \\ 0 & \hat{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{I}_s & 0 \\ 0 & \hat{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varpi^{a_1} y_1 & \varpi^{a_1} y_2 \\ t & x'''\varpi^{a_1} y_2 + \hat{x}\hat{\tau}\hat{z}\hat{y} \end{pmatrix}$$

où $t = x'''\varpi^{a_1} y_1 + \hat{x}\hat{\tau}\hat{z}y_3$. Puisque cette matrice est dans $\widetilde{W}$ elle est monomiale et puisque le déterminant de y_1 est dans $1 + \mathfrak{P}$, y_1 est inversible. Alors y_1 est dans l'intersection de l'analogue de $\widetilde{W}$ et de l'analogue de $\tilde{I}^1$ en dimension s. On obtient $y_1 = \mathbb{I}_s$ et par conséquent on a $y_2 = t = 0$. Cela implique que $x\tau zy$ est $\left(\begin{smallmatrix} \varpi^{a_1}\mathbb{I}_s & 0 \\ 0 & \hat{x}\hat{\tau}\hat{z}\hat{y} \end{smallmatrix}\right)$ avec $\hat{x}\hat{\tau}\hat{z}\hat{y}$ qui est dans $\widehat{\widetilde{W}}$ analogue de $\widetilde{W}$ en dimension $m' - s$. Maintenant on peut conclure par récurrence sur la dimension des matrices car $\hat{\tilde{I}}^1 \hat{\tau} \hat{z} \hat{\tilde{I}}^1 \cap \widehat{\widetilde{W}} \neq \emptyset$. □

Lemme 3.42. *On a* $J^1 \tau_P J^1 w \tau_\alpha w^{-1} J^1 \cap J^1 B^\times J^1 = J^1 \tau_Q (U \cap wU^- w^{-1}) J^1$.

Démonstration. Par le lemme 3.40 on a l'égalité $J^1 \tau_P J^1 w \tau_\alpha w^{-1} J^1 = J^1 \tau_Q \mathcal{V} J^1$ et puisque $\mathfrak{J}^1 \subset M_{m'}(\mathfrak{P})$ on a $\mathcal{V} \subset \mathcal{Z}$ et $J^1 \subset \tilde{I}^1$. On obtient

$$\begin{aligned} J^1 \tau_P J^1 w \tau_\alpha w^{-1} J^1 \cap B^\times \subset \tilde{I}^1 \tau_Q \mathcal{Z} \tilde{I}^1 \cap K_B^1 U \widetilde{W} U K_B^1 &= K_B^1 U (\tilde{I}^1 \tau_Q \mathcal{Z} \tilde{I}^1 \cap \widetilde{W}) U K_B^1 \\ \text{(lemme 3.41)} &= K_B^1 U \tau_Q U K_B^1 = K_B^1 \tau_Q U K_B^1. \end{aligned}$$

Cela implique $J^1 \tau_P J^1 w \tau_\alpha w^{-1} J^1 \cap B^\times = J^1 \tau_Q \mathcal{V} J^1 \cap K_B^1 \tau_Q U K_B^1$. Soit maintenant $v \in \mathcal{V}$ tel que $J^1 \tau_Q v J^1 \cap K_B^1 \tau_Q U K_B^1 \neq \emptyset$. Alors par le lemme 3.17 on a $v \in \tau_Q^{-1} J^1 \tau_Q J^1 U \cap \mathcal{U} = \big(\tau_Q^{-1}(J^1 \cap \mathcal{U}_{\widehat{Q}}^-)\tau_Q J^1 \cap \mathcal{U}\big) U$ et par le lemme 3.18 on a $v \in U J^1 \cap \mathcal{V}$. Par le lemme 2.14 on a $U \cap wU^- w^{-1} = U_{\widehat{P}}^+ \cap w U_{\widehat{\alpha}}^- w^{-1}$ et de manière analogue au lemme 3.32 on peut prouver

$U^+_{\widehat{P}} \cap wU^-_{\widehat{\alpha}}w^{-1} \subset \mathcal{V}$. On obtient

$$\begin{aligned} UJ^1 \cap \mathcal{V} &= (U \cap wU^-w^{-1})(U \cap wUw^{-1})J^1 \cap \mathcal{V} = (U \cap wU^-w^{-1})\Big(J^1(U \cap wUw^{-1}) \cap \mathcal{V}\Big) \\ &= (U \cap wU^-w^{-1})w\Big(J^1(w^{-1}Uw \cap U) \cap \mathcal{V}^w\Big)w^{-1} \end{aligned}$$

Par définition de $\mathcal{V}$ on a $\mathcal{V}^w = (J^1 \cap w\mathcal{U}^-_{\widehat{\alpha}}w^{-1} \cap \mathcal{U}^+_{\widehat{P}})^{w\tau_\alpha} \subset (\mathcal{U}^-_{\widehat{\alpha}})^{\tau_\alpha} \subset \mathcal{U}^-$ et donc

$$\begin{aligned} UJ^1 \cap \mathcal{V} &\subset (U \cap wU^-w^{-1})w\big(J^1\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^-\big)w^{-1} \\ \text{(lemme 3.18)} &= (U \cap wU^-w^{-1})J^1. \end{aligned}$$

On obtient $J^1\tau_P J^1 w\tau_\alpha w^{-1}J^1 \cap J^1B^\times J^1 = J^1\tau_Q(U \cap wU^-w^{-1})J^1$. □

On a trouvé le support de $\widetilde{f}_{\tau_P}\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}}$. Maintenant on énonce un lemme qui permet de déterminer la valeur de $\widetilde{f}_{\tau_P}\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}}$ en τ_Q.

Lemme 3.43. *On a $\tau_P^{-1}J^1\tau_P J^1 \cap w\tau_\alpha w^{-1}J^1 w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}J^1 = \mathcal{V}(w,\alpha)J^1$ où $\mathcal{V}(w,\alpha)$ est défini par (3.7).*

Démonstration. On note H l'ensemble à gauche. Par le lemme 3.17 on a

$$\begin{aligned} H &= \tau_P^{-1}(J^1 \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})\tau_P J^1 \cap w\tau_\alpha(J^1 \cap \mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}})\tau_\alpha^{-1}w^{-1}J^1 \\ &= \Big((J^1 \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{\tau_P}J^1 \cap (J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1})^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}}\Big)J^1 \end{aligned}$$

On veut prouver

$$\mathcal{V}(w,\alpha) = (J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1} \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}} \subset (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{\tau_P}. \tag{3.12}$$

Puisque $w\tau_\alpha^{-1}w^{-1} = \tau_Q^{-1}\tau_P$ on obtient $\mathcal{V}(w,\alpha) \subset (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{\tau_Q^{-1}\tau_P}$ qui est dans $(\mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{\tau_Q^{-1}\tau_P} = \mathcal{U}^-_{\widehat{P}}$ et, par le lemme 3.16(c), dans $(J^1 \cap \mathcal{U}^-)^{\tau_P}$. Alors $\mathcal{V}(w,\alpha) \subset \mathcal{U}^-_{\widehat{P}} \cap (J^1 \cap \mathcal{U}^-)^{\tau_P} = (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{\tau_P}$. Cela implique $\mathcal{V}(w,\alpha) \subset (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{\tau_P} \cap (J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1})^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}}$ et donc $\mathcal{V}(w,\alpha)J^1 \subset H$. Maintenant on décompose le groupe $(J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1})^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}}$ en le produit $(J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1} \cap \mathcal{U}^-)^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}}(J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1} \cap \mathcal{U})^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}}$. On a $w\mathbf{\Psi}^+_{\widehat{\alpha}} \cap \mathbf{\Phi}^- = w\mathbf{\Psi}^+_{\widehat{\alpha}} \cap \mathbf{\Psi}^-_{\widehat{P}}$ par le lemme 2.14 et donc on obtient $(J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1} \cap \mathcal{U}^-)^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}} = \mathcal{V}(w,\alpha) \subset (J^1 \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{\tau_P}$. On obtient

$$\begin{aligned} H &= \Big((J^1 \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{\tau_P}J^1 \cap (J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1})^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}}\Big)J^1 \\ &= \Big((J^1 \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{\tau_P}J^1 \cap \mathcal{V}(w,\alpha)(J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1} \cap \mathcal{U})^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}}\Big)J^1 \\ &= \mathcal{V}(w,\alpha)\Big((J^1 \cap \mathcal{U}^-_{\widehat{P}})^{\tau_P}J^1 \cap (J^1 \cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1} \cap \mathcal{U})^{w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}}\Big)J^1 \\ &\subset \mathcal{V}(w,\alpha)(\mathcal{U}^-J^1 \cap \mathcal{U})J^1 \end{aligned}$$

qui par le lemme 3.18 implique $H \subset \mathcal{V}(w,\alpha)J^1$. □

Lemme 3.44. *On a* $\widetilde{f}_{\tau_P}\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}} = q^{\ell(w)}\widetilde{f}_{\tau_Q}\sum_{u\in U\cap wU^-w^{-1}}\widetilde{f}_u$

Démonstration. Par le lemme 3.42 le support de la fonction $\widetilde{f}_{\tau_P}\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}}$ est contenu dans $J^1\tau_Q(U\cap wU^-w^{-1})J^1$. Soit $u \in U\cap wU^-w^{-1}$. Par le lemme 2.14 on a $U\cap wU^-w^{-1} = U^+_{\widehat{P}} \cap wU^-_{\widehat{\alpha}}w^{-1}$, par le lemme 3.31 on a $\widetilde{f}_{\tau_\alpha} = \widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}uw}$ et par le lemme 3.8 on a $\widetilde{f}_{w^{-1}uw}\widetilde{f}_{w^{-1}} = \widetilde{f}_{w^{-1}}\widetilde{f}_u$. On obtient

$$(\widetilde{f}_{\tau_P}\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}})(\tau_Q u) = (\widetilde{f}_{\tau_P}\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}}\widetilde{f}_u)(\tau_Q u) = (\widetilde{f}_{\tau_P}\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}})(\tau_Q)\circ\kappa(u)$$

et donc il suffit de calculer $(\widetilde{f}_{\tau_P}\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}})(\tau_Q)$ et vérifier qu'il est égal à $q^{\ell(w)}\gamma_Q = q^{\ell(w)}\widetilde{f}_{\tau_Q}(\tau_Q)$. Par le lemme 3.43 le support de $x \longmapsto \widetilde{f}_{\tau_P}(x)(\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}})(x^{-1}\tau_Q)$ est contenu dans $\tau_P\mathcal{V}(w,\alpha)J^1 = \tau_Q(J^1\cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1}\cap\mathcal{U}^-_{\widehat{P}})w\tau_\alpha^{-1}w^{-1}J^1$. Si on note $\mathcal{G}$ le quotient $\mathcal{V}(w,\alpha)^{w\tau_\alpha w^{-1}}/(\mathcal{V}(w,\alpha)\cap J)^{w\tau_\alpha w^{-1}} = (J^1\cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1}\cap\mathcal{U}^-_{\widehat{P}})/(J^{w\tau_\alpha w^{-1}}\cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1}\cap\mathcal{U}^-_{\widehat{P}})$ et $\mathcal{G}'$ le quotient $(\mathcal{V}(w,\alpha)\cap J)^{w\tau_\alpha w^{-1}}/(\mathcal{V}(w,\alpha)\cap J^1)^{w\tau_\alpha w^{-1}}$ on obtient

$$\begin{aligned}(\widetilde{f}_{\tau_P}\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}})(\tau_Q) &= \sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{g'\in\mathcal{G}'}\widetilde{f}_{\tau_P}(\tau_Q g g'\tau_Q^{-1}\tau_P)(\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}})(w\tau_\alpha w^{-1}g'^{-1}g^{-1})\\ &= \sum_{g\in\mathcal{G}}\sum_{g'\in\mathcal{G}'}\eta^{\tau_Q}(gg')\circ\gamma_P\circ\kappa(w)\circ\gamma_i\circ\kappa(w^{-1})\circ\eta(g'^{-1}g^{-1}).\end{aligned}$$

Puisque $\varpi\mathfrak{J}\subset\mathfrak{H}^1$ (voir remarque 3.14) on a $J^{w\tau_\alpha w^{-1}}\cap w\mathcal{U}^+_{\widehat{\alpha}}w^{-1}\cap\mathcal{U}^-_{\widehat{P}}\subset H^1\cap\mathcal{U}^-$ et donc $\eta(g')$ est trivial pour tout $g'\in\mathcal{G}'$. On rappelle que le cardinal de $\mathcal{G}'$ est $q^{\ell(w)}$ (voir la remarque 3.34) et donc on obtient

$$(\widetilde{f}_{\tau_P}\widetilde{f}_w\widetilde{f}_{\tau_\alpha}\widetilde{f}_{w^{-1}})(\tau_Q) = q^{\ell(w)}\sum_{g\in\mathcal{G}}\eta^{\tau_Q}(g)\circ\gamma_P\circ\kappa(w)\circ\gamma_i\circ\kappa(w^{-1})\circ\eta(g^{-1})$$

qui par la conjecture 3.35(b) est égal à $q^{\ell(w)}\gamma_Q$. □

Proposition 3.45. *L'application Θ'' du lemme 3.28 respecte les relations de la proposition 2.16.*

Démonstration. L'application Θ'' respecte les relations 0 et 1 car Θ' est un morphisme d'algèbres. Le lemme 3.8 et la propriété (3.4) impliquent que Θ'' respecte les relations 3, 4 et 7 et que $\widetilde{f}_{\tau_0}\widetilde{f}_k = \widetilde{f}_{\tau_0 k\tau_0^{-1}}\widetilde{f}_{\tau_0}$ et $\widetilde{f}_{\tau_0^{-1}}\widetilde{f}_k = \widetilde{f}_{\tau_0^{-1}k\tau_0}\widetilde{f}_{\tau_0^{-1}}$ pour tout $k\in K_B$ (une partie de la relation 2). Le lemme 3.31 implique que Θ'' respecte les relations 5 et 6. Le lemme 3.29 et la conjecture 3.35(a) impliquent que Θ'' respecte la relation 8 et la partie restante de la relation 2. Enfin le lemme 3.44 (qui utilise la conjecture 3.35(b)) implique que l'application Θ'' respecte la relation 9. □

Théorème 3.46. *Pour tout $\gamma\in I_{\tau_{m'-1}}(\eta)$ non nul (et toute β-extension κ de η) il existe un isomorphisme d'algèbres $\Theta_\gamma : \mathscr{H}_R(B^\times, K_B^1)\to\mathscr{H}_R(G,\eta)$.*

Démonstration. L'application Θ'' respecte les relations de la proposition 2.16 et donc on la peut étendre à un morphisme d'algèbres de $\mathscr{H}_R(B^\times, K_B^1)$ vers $\mathscr{H}_R(G,\eta)$. Puis, puisque $I_G(\eta) = J^1 B^\times J^1$ et $\dim_R(I_y(\eta)) = 1$ pour tout $y \in I_G(\eta)$, l'ensemble $\{\Theta_\gamma(f_x) \mid x \in \Xi\}$ est une famille génératrice de $\mathscr{H}_R(G,\eta)$ comme espace vectoriel et donc Θ_γ est surjectif. Enfin l'ensemble $\{\Theta_\gamma(f_x) \mid x \in \Xi\}$ est linéairement indépendant et donc Θ_γ est injective. □

3.4.5

On reprendre les notations de la section 3.3. Après le théorème 3.7 on sait que des isomorphismes (3.3) existent et par le théorème 3.46 ces isomorphismes dépendent du choix

- d'un isomorphisme $B_L^\times = \prod_{j=1}^l B^{j\times} \cong \prod_{j=1}^l GL_{m'^j}(D'^j)$ qui identifie $U(\Lambda_{max,j}) \cap B^{j\times}$ à $GL_{m'^j}(\mathcal{O}_{D'^j})$ et $U_1(\Lambda_{max,j}) \cap B^{j\times}$ à $\mathbb{I}_{m'^j} + M_{m'^j}(\wp_{D'^j})$ pour tout $j \in \{1,\dots,l\}$,
- d'un prolongement $\boldsymbol{\kappa}_{max}$ de $\boldsymbol{\eta}_{max}$ à $\mathbf{J}_{max}$ comme dans la section 3.3,
- d'un élément non nul $\gamma \in I_\tau(\boldsymbol{\eta}_{max})$ où $\tau = \mathrm{diag}(\tau_{m'^1-1},\dots,\tau_{m'^l-1})$ et $\tau_{m'^j-1} = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{m'^j-1} & 0 \\ 0 & \varpi_{D'^j} \end{pmatrix} \in B^{j\times} \subset GL_{m^j}(D)$ pour tout $j \in \{1,\dots,l\}$.

Donc si on fixe un isomorphisme $B_L^\times \cong \prod_{j=1}^l GL_{m'^j}(D'^j)$ et un prolongement $\boldsymbol{\kappa}_{max}$ de $\boldsymbol{\eta}_{max}$ à $\mathbf{J}_{max}$ comme ci-dessus, on obtient le théorème suivant.

Théorème 3.47. *Pour tout $\gamma \in I_\tau(\eta)$ non nul il existe un isomorphisme d'algèbres $\Theta_\gamma : \mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1) \to \mathscr{H}_R(G,\eta)$.*

Chapitre 4

Équivalence de catégories $\mathscr{R}(G, \boldsymbol{\eta}_{max}) \simeq \mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$

Dans ce chapitre on veut construire, en utilisant l'isomorphisme (3.3), une équivalence de catégories entre la somme de certains blocs de niveau positif de $\mathscr{R}_R(G)$ et la sous-catégorie de niveau 0 de la décomposition de Bernstein de $\mathscr{R}_R(B_L^\times)$ en décrivant la correspondance parmi ces blocs. Cela on permet de ramener l'étude d'un bloc de niveau positif à l'étude d'un bloc de niveau 0 qu'on décrit à la fin du chapitre.

On utilise les notations du chapitre 3 (mais pas de la section 3.4). Soit $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ un supertype semi-simple de G. On veut lui associer une sous-catégorie de $\mathscr{R}_R(G)$. On peut trouver cette construction dans [SS15].

Définition 4.1. La classe d'équivalence de $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ est l'ensemble $[\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}]$ des supertypes semi-simples $(\widetilde{\mathbf{J}}, \widetilde{\boldsymbol{\lambda}})$ de G tels que $\mathrm{ind}_{\widetilde{\mathbf{J}}}^G(\widetilde{\boldsymbol{\lambda}}) \cong \mathrm{ind}_{\mathbf{J}}^G(\boldsymbol{\lambda})$.

On reprend les notations de la section 3.3. On a associé à $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$:

- un sous-groupe de Levi L de G,
- un sous-groupe ouvert compact $\mathbf{J}_{max}$ de G et un pro-p-sous-groupe $\mathbf{J}_{max}^1$ de $\mathbf{J}_{max}$,
- une représentations irréductible $\boldsymbol{\eta}_{max}$ de $\mathbf{J}_{max}^1$, qui est projective car $\mathbf{J}_{max}^1$ est de pro-ordre inversible dans $R^\times$,
- des sous-groupes $K_L^1 \subset K_L \subset B_L^\times$ de G,
- des groupes finis $\mathscr{G} = \prod_{j=1}^{l} GL_{m'^j}(\mathfrak{k}_{D'^j})$ et $\mathscr{M} = \prod_{i=1}^{r} GL_{m_i'}(\mathfrak{k}_{D_i'})$.

En plus $\mathscr{M}$ est un sous-groupe de Levi de $\mathscr{G}$ et on a $\mathbf{J}_{max}/\mathbf{J}_{max}^1 \cong K_L/K_L^1 \cong \mathscr{G}$ et $\mathbf{J}/\mathbf{J}^1 \cong \mathscr{M}$.

Remarque 4.2. La procédure qui à $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ associe $\boldsymbol{\eta}_{max}$ dépend de plusieurs choix non canoniques, par exemple le choix de l'isomorphisme $\iota : B_L^\times \longrightarrow \prod GL_{m'^j}(D'^j)$. Pour obtenir une correspondance canonique, on note $\boldsymbol{\Theta}_i$ l'endo-classe de θ_i avec $i \in \{1, \ldots, r\}$

et on associe canoniquement à $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ la somme formelle $\boldsymbol{\Theta}(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\Theta} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i d}{[E_i:F]}\boldsymbol{\Theta}_i$. En plus le groupe $\mathscr{G}$ et la classe de $\mathscr{G}$-conjugaison de $\mathscr{M}$ dépendent seulement de $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$. En effet le groupe $\mathscr{G}$ dépend seulement de $\boldsymbol{\Theta}$ car $m'^j[\mathfrak{k}_{D'^j} : \mathfrak{k}_{E^j}] = \frac{m^j d}{[E^j:F]} = \sum_{i\in I_j} \frac{m_i d}{[E_i:F]}$ qui est le coefficient de $\boldsymbol{\Theta}_i$ dans $\boldsymbol{\Theta}$. Pour plus de détails voir 6.3 de [SS15].

Dès maintenant on fixe un prolongement $\boldsymbol{\kappa}_{max}$ de $\boldsymbol{\eta}_{max}$ à $\mathbf{J}_{max}$, comme dans la section 3.3, qui détermine uniquement une décomposition $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\sigma}$ où $\boldsymbol{\kappa} \in \mathrm{Irr}_R(\mathbf{J})$ et $\boldsymbol{\sigma}$ est une représentation supercuspidale de $\mathscr{M}$ vue comme représentation irréductible de $\mathbf{J}$ triviale sur $\mathbf{J}^1$. On considère le foncteur

$$\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}} : \mathscr{R}(G) \longrightarrow \mathscr{R}(\mathbf{J}_{max}/\mathbf{J}^1_{max}) = \mathscr{R}(\mathscr{G})$$

défini par $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(\pi) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}^1_{max}}(\boldsymbol{\kappa}_{max}, \pi)$ pour tout $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$ avec $\mathbf{J}_{max}$ qui agit sur $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(\pi)$ par

$$x.\varphi = \pi(x)\circ\varphi\circ\boldsymbol{\kappa}_{max}(x)^{-1} \tag{4.1}$$

pour tout $x \in \mathbf{J}_{max}$. On note $\pi(\boldsymbol{\kappa}_{max})$ cette représentation de $\mathscr{G}$. Pour plus de détails sur ce foncteur voir 5 de [MS14b] et [SS15].

On rappelle qu'on a $\boldsymbol{\sigma} = \bigotimes_{i=1}^{r}\sigma_i$ où σ_i est une représentation supercuspidale de $GL_{m'_i}(\mathfrak{k}_{D'_i})$. On note $\Gamma_{\mathscr{M}} = \prod_{j=1}^{l}\mathrm{Gal}(\mathfrak{k}_{D'^j}/\mathfrak{k}_{E^j})^{|I_j|}$. On rappelle (voir définition 1.58) que la classe d'équivalence de $(\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma})$ est l'ensemble, noté $[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]$, des paires supercuspidales $(\mathscr{M}',\boldsymbol{\sigma}')$ de $\mathscr{G}$ telles qu'il existe $\epsilon \in \Gamma_{\mathscr{M}}$ tel que $(\mathscr{M}',\boldsymbol{\sigma}')$ est $\mathscr{G}$-conjuguée à $(\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}^\epsilon)$.

Définition 4.3. Pour tout $V \in \mathrm{Rep}(G)$ on note $V[\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\sigma}]$ la sous-représentation de V engendrée par le sous-espace maximal de $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(V)$ dont tous les sous-quotients irréductibles ont support supercuspidal dans $[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]$ (voir 9.1 de [SS15]). On note $V[\boldsymbol{\Theta}]$ la sous-représentation de V engendrée par $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(V)$.

Maintenant on peut associer à $(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ une sous-catégorie de $\mathscr{R}_R(G)$ comme dans la section 10.1 de [SS15].

Définition 4.4. Soit $\mathscr{R}(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ la sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}(G)$ des représentations V telles que $V = V[\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\sigma}]$.

Remarque 4.5. Pour tout $V \in \mathrm{Rep}(G)$ on a $V[\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\sigma}][\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\sigma}] = V[\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\sigma}]$ (voir lemme 9.1 de [SS15]) et donc $V[\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\sigma}]$ est un objet de $\mathscr{R}(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$.

La construction ci-dessus sert à énoncer le résultat suivant qui se trouve dans le chapitre 10 de [SS15].

Théorème 4.6. *La catégorie $\mathscr{R}(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ ne dépend que de la classe $[\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda}]$ et elle est un bloc (voir définition 1.11) de $\mathscr{R}_R(G)$.*

Démonstration. Le résultat est vrai par les propositions 10.2 et 10.5 et le théorème 10.4 de [SS15]. □

En particulier $\mathscr{R}(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$ ne dépend pas du choix de la décomposition de $\boldsymbol{\lambda}$ ou de $\boldsymbol{\kappa}_{max}$.

Remarque 4.7. La preuve du théorème 4.6, contenue dans [SS15], nécessite la notion de classe d'inertie d'une paire supercuspidale (et donc de support supercuspidal) de G (voir 1.1.3, 2.1.2 et 2.1.3 de [MS14a]) qui est notée Ω dans [SS15]. Ces notions sont très importantes dans l'étude des représentations de $GL_m(D)$ mais dans cette thèse on ne les utilise pas explicitement.

4.1 Équivalence

En général il existe plusieurs supertypes semi-simples de G qui sont associés à une somme formelle $\boldsymbol{\Theta}$ d'endo-classes. On note $\mathbf{X}=\mathbf{X}_{\boldsymbol{\Theta}}=\{[\mathbf{J}',\boldsymbol{\lambda}']\,|\,(\mathbf{J}',\boldsymbol{\lambda}')$ est associé à $\boldsymbol{\Theta}\}$. Dans cette section on prouve que la somme $\bigoplus_{[\mathbf{J}',\boldsymbol{\lambda}']\in\mathbf{X}}\mathscr{R}(\mathbf{J}',\boldsymbol{\lambda}')$ est équivalente à la sous-catégorie de niveau 0 de $\mathscr{R}_R(B_L^\times)$.

Soit $\mathbf{Y}=\mathbf{Y}_{\boldsymbol{\Theta}}$ l'ensemble des classes d'équivalence de paires supercuspidales de $\mathscr{G}$, qui est uniquement déterminé par $\boldsymbol{\Theta}$ par la remarque 4.2.

On rappelle qu'on a déjà fixé un prolongement $\boldsymbol{\kappa}_{max}$ de $\boldsymbol{\eta}_{max}$ à $\mathbf{J}_{max}$. Par la proposition 10.6 de [SS15] il existe une bijection

$$\phi_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}:\mathbf{X}\longrightarrow\mathbf{Y} \tag{4.2}$$

définie par $\phi_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}([\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda}])=[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]$ si le support supercuspidal des sous-quotients irréductibles de $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(V)$ est dans $[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]$ pour tout (où équivalentement pour un) objet V de $\mathscr{R}(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda})$. Cela est équivalent à dire qu'il existe $\boldsymbol{\kappa}$ comme dans la section 3.2 (qui dépend de $\boldsymbol{\kappa}_{max}$) tel que $\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\kappa}\otimes\boldsymbol{\sigma}'$ avec $(\mathscr{M},\sigma')\in[\mathscr{M},\sigma]$.

On énonce deux proposition qu'on trouve dans [SS15].

Proposition 4.8 (Corollaire 9.4 de [SS15])**.** *Pour tout $V\in\mathrm{Rep}(G)$ on a*

$$V[\boldsymbol{\Theta}]=\bigoplus_{[\mathscr{M}',\boldsymbol{\sigma}']\in\mathbf{Y}}V[\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\sigma}']. \tag{4.3}$$

Proposition 4.9 (Lemme 10.3 de [SS15])**.** *Soient $[\mathbf{J}',\boldsymbol{\lambda}']\in\mathbf{X}$ et W un objet irréductible de $\mathscr{R}(\mathbf{J}',\boldsymbol{\lambda}')$. Alors $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(W)\neq 0$.*

Puisque $\mathbf{J}^1_{max}$ est de pro-ordre inversible dans $R^\times$, la représentation $\boldsymbol{\eta}_{max}$ est projective et donc on peut utiliser les notations et les résultats de la section 1.5. On a défini le foncteur

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}_{max}}:\mathscr{R}_R(G)\longrightarrow\mathrm{Mod}-\mathscr{H}_R(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$$

par $\mathbf{M}(V)=\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_{\mathbf{J}^1_{max}}^G(\boldsymbol{\eta}_{max}),V)$ pour tout $V\in\mathrm{Rep}(G)$.

Remarque 4.10. La réciprocité de Frobenius (proposition 1.20) induit un isomorphisme naturel entre le foncteur $\mathbf{M}$ composé avec le foncteur d'oubli $\mathrm{Mod}-\mathscr{H}_R(G,\boldsymbol{\eta}_{max}) \to \mathrm{Mod}_R$ et le foncteur $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}$ composé avec le foncteur d'oubli $\mathscr{R}(\mathscr{G}) \to \mathrm{Mod}_R$. Cela implique que pour tout $V \in \mathrm{Rep}(G)$ la sous-représentation $V[\boldsymbol{\Theta}]$ de V est la sous-représentation $V[\boldsymbol{\eta}_{max}]$ définie dans la définition 1.26.

On a défini aussi les sous-catégories pleines $\mathscr{R}_{\boldsymbol{\eta}_{max}}(G)$ et $\mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$ de $\mathscr{R}_R(G)$. On rappelle que $\mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$ est la catégorie des $V \in \mathrm{Rep}(G)$ telles que $V = V[\boldsymbol{\Theta}]$ et $\mathscr{R}_{\boldsymbol{\eta}_{max}}(G)$ est la catégorie des $V \in \mathrm{Rep}(G)$ telles que tout sous-quotient irréductible V' de V satisfait $\mathbf{M}(V') \neq 0$.

Lemme 4.11. *On a* $\mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max}) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{\eta}_{max}}(G)$.

Démonstration. Après la remarque 1.30 il suffit de prouver $\mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max}) \subset \mathscr{R}_{\boldsymbol{\eta}_{max}}(G)$. Soit V une représentation dans $\mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$. Par la proposition 4.8 on a $V = \bigoplus_{\mathbf{Y}} V[\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\sigma}']$ et par la remarque 4.5 la représentation $V[\boldsymbol{\Theta},\boldsymbol{\sigma}']$ est un objet de $\mathscr{R}(\mathbf{J}',\boldsymbol{\lambda}')$ où $[\mathbf{J}',\boldsymbol{\lambda}'] = \phi^{-1}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}([\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}']) \in \mathbf{X}$. Donc on obtient l'inclusion $\mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max}) \subset \bigoplus_{\mathbf{X}} \mathscr{R}(\mathbf{J}',\boldsymbol{\lambda}')$. Soient maintenant W un objet de $\bigoplus_{\mathbf{X}} \mathscr{R}(\mathbf{J}',\boldsymbol{\lambda}')$ et W' un sous-quotient irréductible de W. Alors W' est un objet irréductible de $\mathscr{R}(\mathbf{J}',\boldsymbol{\lambda}')$ pour un $[\mathbf{J}',\boldsymbol{\lambda}'] \in \mathbf{X}$ et donc par la proposition 4.9 on a $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(W) \neq 0$ et par la remarque 4.10 on a $\mathbf{M}(W') \neq 0$ qui implique $\bigoplus_{\mathbf{X}} \mathscr{R}(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda}') \subset \mathscr{R}_{\boldsymbol{\eta}_{max}}(G)$. □

Remarque 4.12. On a prouvé

$$\mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max}) = \mathscr{R}_{\boldsymbol{\eta}_{max}}(G) = \bigoplus_{[\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda}]\in\mathbf{X}} \mathscr{R}(\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda}).$$

Par la proposition 1.29, une représentation V appartient à cette catégorie si et seulement si elle vérifie l'une des conditions équivalentes :

(i) $V = V[\boldsymbol{\Theta}]$;

(ii) pour tout sous-quotient Z de V on a $Z = Z[\boldsymbol{\Theta}]$;

(iii) pour tout sous-quotient irréductible U de V on a $\mathbf{M}(U) \neq 0$;

(iv) pour tout sous-quotient non nul W de V on a $\mathbf{M}(W) \neq 0$.

Théorème 4.13. *Le foncteur* $\mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}_{max}}$ *est une équivalence de catégories entre* $\mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$ *et* $\mathrm{Mod}-\mathscr{H}_R(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$.

Démonstration. On applique le théorème 1.32 avec $\mathtt{G} = G$ et $\sigma = \boldsymbol{\eta}_{max}$. □

Maintenant on définit la notion de représentation de niveau 0 et on énonce un théorème similaire au précédent pour ce type de représentations.

Définition 4.14. Une représentation irréductible (τ, V) de $B_L^\times$ est dite de *niveau 0* si $V^{K_L^1} = \{v \in V \,|\, \pi(k)v = v \text{ pour tout } k \in K_L^1\} \neq 0$ et une représentation (τ', V') de $B_L^\times$ est de *niveau* 0 si tout sous-quotient irréductible de V' est de niveau 0.

Soit $1_{K_L^1}$ le caractère trivial de K_L^1 qui est projectif car K_L^1 est de pro-ordre inversible dans $R^\times$. Dans la section 1.5 on a défini le foncteur

$$\mathbf{M}_{1_{K_L^1}} = \mathrm{Hom}_{B_L^\times}(\mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1), -) : \mathscr{R}_R(B_L^\times) \longrightarrow \mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1).$$

On a un isomorphisme de R-modules $\mathrm{Hom}_{B_L^\times}(\mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1), V) \cong V^{K_L^1}$ pour tout objet (τ, V) de $\mathscr{R}_R(B_L^\times)$ et donc les objets de $\mathscr{R}_{1_{K_L^1}}(B_L^\times)$ sont exactement les représentations de niveau 0 de $B_L^\times$. On appelle cette catégorie, la *sous-catégorie de niveau 0* de $\mathscr{R}_R(B_L^\times)$.

Remarque 4.15. Par II.5.8 de [Vig96] (voir aussi proposition 6.3 de [Dat09]) la sous-catégorie de niveau 0 est une somme directe de blocs de $\mathscr{R}_R(B_L^\times)$.

On rappelle que $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$ est la sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}(B_L^\times)$ des $V \in \mathrm{Rep}(B_L^\times)$ engendrées par $V^{K_L^1}$.

Théorème 4.16. *Le foncteur* $\mathrm{Hom}_{B_L^\times}(\mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1), -)$ *est une équivalence de catégories entre* $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$ *et* $\mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ *de quasi-inverse*

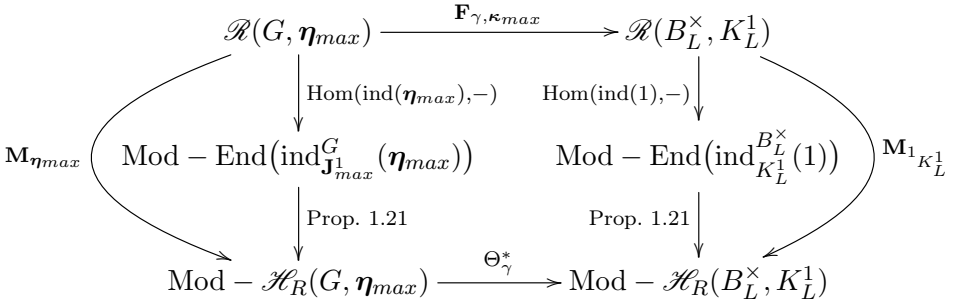
$$W \longmapsto W \otimes_{\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)} \mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1).$$

Démonstration. On prouve $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1) = \mathscr{R}_{1_{K_L^1}}(B_L^\times)$ pour appliquer le théorème 1.32. Par la remarque 1.30 on a $\mathscr{R}_{1_{K_L^1}}(B_L^\times) \subset \mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$ et par la remarque 4.15 on a $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1) = \mathscr{R}_{1_{K_L^1}}(B_L^\times) \oplus \mathcal{C}$ où $\mathcal{C}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathscr{R}_R(B_L^\times)$ dont les objets simples W vérifient $W^{K_L^1} = 0$. Soit V un objet de $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$. Alors il existe une représentation V_1 de niveau 0 et un objet V_2 de $\mathcal{C}$ tels que $V = V_1 \oplus V_2$. On suppose que $V_2 \neq 0$. Alors il existe $v \in V_2^{K_L^1}$ non nul. On note V_3 la sous-représentation de V_2 engendrée par v. Puisque V_3 est non nulle et de type fini elle a une sous-représentation V_4 telle que $W = V_3/V_4$ est irréductible (voir §3 n.1, proposition 4 de [Bou58]). Puisque V_2 est un objet de $\mathcal{C}$ on a $W^{K_L^1} = 0$ et puisque le foncteur des K_L^1-invariants est exact on a $V_3^{K_L^1} = V_4^{K_L^1}$. Mais cela implique $V_3 = V_4$ car $v \in V_4^{K_L^1}$ qui est en contradiction avec W irréductible. On obtient $\mathcal{C} = 0$ et $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1) = \mathscr{R}_{1_{K_L^1}}(B_L^\times)$. Alors on peut appliquer le théorème 1.32 avec $\mathtt{G} = B_L^\times$ et $\sigma = 1_{K_L^1}$ d'où le résultat. □

Corollaire 4.17. *Les catégories* $\mathscr{R}(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ *et* $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Par le théorème 3.46 il existe des isomorphismes entre $\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ et $\mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$. On obtient une équivalence de catégories entre $\mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ et $\mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$. On conclut avec les théorèmes 4.13 et 4.16. □

On regarde plus en détail ces équivalences de catégories. On rappelle qu'on a fixé un isomorphisme $B_L^\times \cong \prod GL_{m'^j}(D'^j)$ et un prolongement $\boldsymbol{\kappa}_{max}$ de $\boldsymbol{\eta}_{max}$. On fixe maintenant un élément $\gamma \in I_\tau(\boldsymbol{\eta}_{max})$ non nul comme dans le paragraphe 3.4.5. Par le théorème 3.47 on a un isomorphisme $\Theta_\gamma : \mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1) \longrightarrow \mathscr{H}_R(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$ qui induit une équivalence de catégories $\Theta_\gamma^* : \mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(G,\boldsymbol{\eta}_{max}) \longrightarrow \mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$. On obtient le diagramme



- Le foncteur $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\boldsymbol{\eta}_{max}} : \mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max}) \longrightarrow \mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$ est une équivalence de catégories par le théorème 4.13. Par la proposition 1.21 l'action (à droite) de $\mathscr{H}_R(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$ sur $\mathbf{M}(V)$ est donnée par $(m.\Psi)(f) = m(\Psi * f)$ pour tout $m \in \mathbf{M}(V)$, $\Psi \in \mathscr{H}_R(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$ et $f \in \mathrm{ind}(\boldsymbol{\eta}_{max})$.
- On considère le foncteur Θ_γ^*. L'action (à droite) d'un élément Φ de $\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ sur un $\mathscr{H}_R(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$-module N est donnée par par $N.\Phi = N.\Theta_\gamma(\Phi)$.
- Par le théorème 4.16, le foncteur $W \longmapsto W \otimes_{\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)} \mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1)$ est une équivalence de catégories de $\mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ à $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$ où, par la proposition 1.21, l'action (à gauche) de $\Phi \in \mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ sur $f \in \mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1)$ est donnée par $\Phi.f = \Phi * f$. L'action (à gauche) de $x \in B_L^\times$ sur $w \otimes f \in W \otimes \mathrm{ind}(1)$ est donnée par $x.(w \otimes f) = w \otimes (x.f)$.
- En composant les trois foncteurs précédents, on obtient l'équivalence de catégories $\mathbf{F}_{\gamma,\boldsymbol{\kappa}_{max}} : \mathscr{R}_R(G,\boldsymbol{\eta}_{max}) \longrightarrow \mathscr{R}_R(B_L^\times, K_L^1)$ du corollaire 4.17 donnée par

$$\mathbf{F}_{\gamma,\boldsymbol{\kappa}_{max}}(\pi, V) = \mathbf{M}(\pi, V) \otimes_{\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)} \mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1). \tag{4.4}$$

  où l'action (à droite) de $\Phi \in \mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ sur $m \in \mathbf{M}(\pi, V)$ est donnée par $(m.\Phi)(f) = m(\Theta(\Phi) * f)$ pour tout $f \in \mathrm{ind}_{\mathbf{J}^1_{max}}^G(\boldsymbol{\eta}_{max})$.

4.1.1

Dans ce paragraphe on discute de la dépendance des résultats de la section 4.1 par le choix du prolongement de $\boldsymbol{\eta}_{max}$ à $\mathbf{J}_{max}$. On a déjà vu que si on fixe une somme formelle d'endo-classes $\boldsymbol{\Theta}$ alors par la remarque 4.2 le groupe $\mathscr{G}$ ne dépend pas de ce choix. Si on fixe $(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ alors par la remarque 4.2 et le théorème 4.6, la classe de $\mathscr{G}$-conjugaison de $\mathscr{M}$ et la catégorie $\mathscr{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ ne dépendent pas de ce choix.

Soient $\boldsymbol{\kappa}_{max}$ et $\boldsymbol{\kappa}'_{max}$ deux prolongements de $\boldsymbol{\eta}_{max}$ à $\mathbf{J}_{max}$. Alors leurs restrictions à $\prod_{j=1}^{l} J_{max,j}$ sont $\bigotimes_{j=1}^{l} \kappa_{max,j}$ et $\bigotimes_{j=1}^{l} \kappa'_{max,j}$ respectivement où $\kappa_{max,j}$ et $\kappa'_{max,j}$ sont des β-extensions de $\theta_{max,j}$ pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$.

Par (3.2) il existe des caractères χ_j de $\mathcal{O}_{E^j}^{\times}$ triviaux sur $1 + \wp_{E^j}$ tels que $\kappa'_{max,j} = \kappa_{max,j} \otimes (\chi_j \circ N_{B^j/E^j})$ pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$.

- On considère les foncteurs $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}$ et $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}'_{max}}$ et pour tout $\pi \in \mathrm{Rep}(G)$ les représentations $\pi(\boldsymbol{\kappa}_{max}) = \bigotimes_j \pi(\kappa_{max,j})$ et $\pi(\boldsymbol{\kappa}'_{max}) = \bigotimes_j \pi(\kappa'_{max,j})$ de $\mathscr{G}$ définies par (4.1). Alors $\pi(\kappa_{max,j})$ et $\pi(\kappa'_{max,j})$ sont tordues l'une de l'autre par le caractère $\chi_j \circ N_{\mathfrak{k}_{D'^j}/\mathfrak{k}_{E^j}} \circ \det$ (voir remarque 5.2 de [MS14b]) où on identifie χ_j à un caractère de $\mathfrak{k}_{E^j}$.
- On considère les bijections $\phi_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}$ et $\phi_{\boldsymbol{\kappa}'_{max}}$ entre $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$. La bijection $\phi_{\boldsymbol{\kappa}'_{max}} \circ \phi_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}^{-1}$ permute les éléments de $\mathbf{Y}$. Soit $[\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma}] \in \mathbf{Y}$. Alors $\mathscr{M} = \prod_{j=1}^{l} \mathscr{M}_j$ où $\mathscr{M}_j \cong \mathbf{J}_j/\mathbf{J}_j^1$ et $\boldsymbol{\sigma} = \bigotimes_{j=1}^{l} \boldsymbol{\sigma}_j$ (voir notation de la section 3.2) avec $[\mathscr{M}_j, \boldsymbol{\sigma}_j]$ classe de paires supercuspidales de $GL_{m'^j}(\mathfrak{k}_{D'^j})$. On note $\chi^{-1} = (\chi_1^{-1}, \dots, \chi_l^{-1})$ et $\boldsymbol{\sigma} \otimes \chi^{-1} = \bigotimes_{j=1}^{l} (\boldsymbol{\sigma}_j \otimes \chi_j^{-1})$. Alors la bijection $\phi_{\boldsymbol{\kappa}'_{max}} \circ \phi_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}^{-1}$ envoie $[\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma}]$ dans $[\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma} \otimes \chi^{-1}]$.

Le choix du prolongement de $\boldsymbol{\eta}_{max}$ ne change pas la somme (4.3) car les $V[\boldsymbol{\Theta}, \boldsymbol{\sigma}']$ sont permutées dans la somme directe par un autre choix. Donc $V[\boldsymbol{\Theta}]$, l'égalité $\mathscr{R}(G, \boldsymbol{\eta}_{max}) = \bigoplus_{[\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda}] \in \mathbf{X}} \mathscr{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ et l'équivalence du théorème 4.13 ne dépendent pas du choix du prolongement de $\boldsymbol{\eta}_{max}$. Par contre, puisque l'isomorphisme $\Theta_\gamma : \mathscr{H}_R(B_L^{\times}, K_L^1) \longrightarrow \mathscr{H}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$ dépend du choix du prolongement de $\boldsymbol{\eta}_{max}$, le foncteur $\mathbf{F}_{\gamma, \boldsymbol{\kappa}_{max}}$ dépend de ce choix.

4.2 Correspondance parmi les blocs

Après le corollaire 4.17 et (4.4), on veut comprendre la correspondance parmi les blocs de $\mathscr{R}(B_L^{\times}, K_L^1)$ et de $\mathscr{R}(G, \boldsymbol{\eta}_{max})$.

On considère le foncteur des K_L^1-invariants

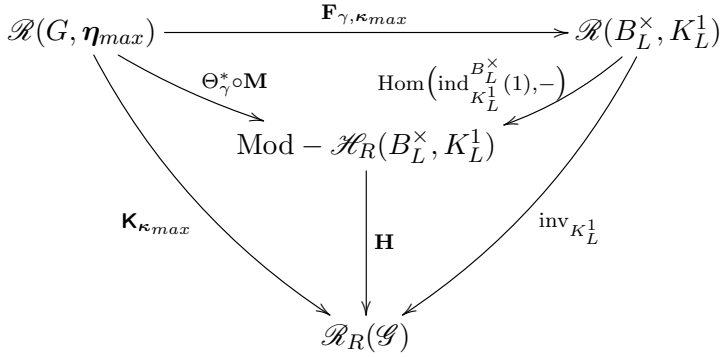
$$\mathrm{inv}_{K_L^1} : \mathscr{R}(B_L^{\times}, K_L^1) \longrightarrow \mathscr{R}(K_L/K_L^1) = \mathscr{R}(\mathscr{G})$$

avec K_L qui agit sur $\mathrm{inv}_{K_L^1}(\tau, Z) = Z^{K_L^1}$ par $x.z = \tau(x)z$ pour tout $x \in K_L$ et $z \in Z^{K_L^1}$. On considère aussi le foncteur $\mathbf{H} : \mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(B_L^{\times}, K_L^1) \longrightarrow \mathscr{R}(K_L/K_L^1)$ qui est le composé de la restriction $\mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(B_L^{\times}, K_L^1) \longrightarrow \mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(K_L, K_L^1)$ et de l'équivalence de catégories $\mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(K_L, K_L^1) \simeq \mathscr{R}(K_L/K_L^1)$ définie par $W \longmapsto (\tau', W)$ où $\tau'(k)w = w.f_{k^{-1}} = w.\mathbf{1}_{k^{-1}K_L^1}$ pour tout $k \in K_L$ et $w \in W$.

Lemme 4.18. *Le foncteur K_L^1-invariants $\mathrm{inv}_{K_L^1}$ est le composé de l'équivalence de catégories $\mathrm{Hom}_{B_L^{\times}}\big(\mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^{\times}}(1), -\big) : \mathscr{R}(B_L^{\times}, K_L^1) \longrightarrow \mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(B_L^{\times}, K_L^1)$ vue dans le théorème 4.16 et du foncteur $\mathbf{H} : \mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(B_L^{\times}, K_L^1) \longrightarrow \mathscr{R}(K_L/K_L^1) = \mathscr{R}(\mathscr{G})$ vu ci-dessus.*

Démonstration. Soit (τ, Z) un objet de $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$. Par la réciprocité de Frobenius on a un isomorphisme de R-modules $\mathrm{Hom}_{B_L^\times}\big(\mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1), Z\big) \cong Z^{K_L^1}$ donné par $\varphi \longmapsto \varphi(1_{K_L^1})$ pour tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_{B_L^\times}\big(\mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1), Z\big)$. Pour tout $k \in K_L$ et tout $\varphi \in \mathrm{Hom}_{B_L^\times}\big(\mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1), Z\big)$ on a $(\tau'(k)\varphi)(1_{K_L^1}) = (\varphi.f_{k^{-1}})(1_{K_L^1}) = \varphi(f_{k^{-1}} * 1_{K_L^1}) = \varphi(k.1_{K_L^1}) = \tau(k)\varphi(1_{K_L^1})$ d'où le résultat. □

On rappelle qu'on a défini le foncteur $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}} : \mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max}) \longrightarrow \mathscr{R}(\mathbf{J}_{max}/\mathbf{J}_{max}^1) = \mathscr{R}(\mathscr{G})$ où le groupe $\mathbf{J}_{max}$ qui agit sur $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(\pi) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{J}_{max}^1}(\boldsymbol{\kappa}_{max}, \pi)$ par $\pi(\boldsymbol{\kappa}_{max})(x)(\varphi) = \pi(x) \circ \varphi \circ \boldsymbol{\kappa}_{max}(x)^{-1}$ pour tout $x \in \mathbf{J}_{max}$. On obtient le diagramme



(4.5)

Proposition 4.19. *Il existe un isomorphisme naturel entre* $\mathrm{inv}_{K_L^1} \circ \mathbf{F}_{\gamma,\boldsymbol{\kappa}_{max}}$ *et* $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}$.

Démonstration. Soit (π, V) un objet de $\mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$. Alors on a un isomorphisme de $\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$-modules $\mathrm{Hom}_{B_L^\times}\big(\mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1), \mathbf{F}_{\gamma,\boldsymbol{\kappa}_{max}}(\pi, V)\big) \cong \mathbf{M}(\pi, V)$ où l'action d'un élément $\Phi \in \mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ sur $m \in \mathbf{M}(\pi, V)$ est donnée par $m.\Phi = m.\Theta_\gamma(\Phi)$. Par le lemme 4.18 il y a une action de $k \in K_L/K_L^1 \cong \mathscr{G}$ sur $m \in \mathbf{M}(\pi, V)$ donnée par $k.m = m.\widetilde{f}_{k^{-1}}$ où $\widetilde{f}_{k^{-1}} \in \mathscr{H}_R(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$ a support $k^{-1}\mathbf{J}_{max}^1$ et $\widetilde{f}_{k^{-1}}(k^{-1}) = \boldsymbol{\kappa}_{max}(k^{-1})$. Par la remarque 4.10 il y a un isomorphisme de R-modules $\mathbf{M}(\pi, V) \cong \mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(\pi, V)$. On doit prouver que l'action de K_L sur $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(\pi, V)$ correspond à l'action de $\mathbf{J}_{max}$ sur $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(\pi, V)$.
On rappelle que dans le paragraphe 1.4.1 on a défini pour tout $v \in V_{\boldsymbol{\eta}_{max}}$ un élément $i_v : \mathbf{J}_{max}^1 \longrightarrow V_{\boldsymbol{\eta}_{max}}$ dans $\mathrm{ind}_{\mathbf{J}_{max}^1}^G(\boldsymbol{\eta}_{max})$ tel que $i_v(1) = v$ et par (1.2), ces éléments engendrent $\mathrm{ind}_{\mathbf{J}_{max}^1}^G(\boldsymbol{\eta}_{max})$ dans $\mathrm{Rep}(G)$. Soit $v \in V_{\boldsymbol{\eta}_{max}}$. Le support de $\widetilde{f}_{k^{-1}} * i_v$ est $\mathbf{J}_{max}^1 k^{-1}$ et le support de la fonction $x \longmapsto \widetilde{f}_{k^{-1}}(x) i_v(x^{-1}k^{-1})$ est $k^{-1}\mathbf{J}_{max}^1$. Alors on a $(\widetilde{f}_{k^{-1}} * i_v)(k^{-1}) = \widetilde{f}_{k^{-1}}(k^{-1})v = \boldsymbol{\kappa}_{max}(k^{-1})v$. On obtient $\widetilde{f}_{k^{-1}} * i_v = k.i_{\boldsymbol{\kappa}_{max}(k^{-1})v}$ et

$$(m.\widetilde{f}_{k^{-1}})(i_v) = m(\widetilde{f}_{k^{-1}} * i_v) = m(k.i_{\boldsymbol{\kappa}_{max}(k^{-1})v}) = \pi(k)\big(m(i_{\boldsymbol{\kappa}_{max}(k^{-1})v})\big).$$

Par la réciprocité de Frobenius (proposition 1.20) il existe $\varphi_m \in \mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(\pi, V)$ tel que $\varphi_m(v) = m(i_v)$ pour tout $v \in V_{\boldsymbol{\eta}_{max}}$. On obtient

$$(m.\widetilde{f}_{k^{-1}})(i_v) = \pi(k)\big(m(i_{\boldsymbol{\kappa}_{max}(k^{-1})v})\big) = \pi(k)\big(\varphi_m(\boldsymbol{\kappa}_{max}(k^{-1})v)\big)$$

pour tout $v \in V_{\boldsymbol{\eta}_{max}}$. Alors l'action de $k \in K_L$ sur $\varphi_m \in \mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(\pi, V)$ est donnée par $k.\varphi_m = \pi(k) \circ \varphi_m \circ \boldsymbol{\kappa}_{max}(k^{-1})$ qui est exactement l'action de $\mathbf{J}_{max}$. Cela conclut la démonstration. □

Maintenant on cherche une décomposition en blocs de $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$. Soit $[\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma}] \in \mathbf{Y}$. Alors $\mathscr{M} = \prod_{j=1}^{l} \mathscr{M}_j$ où $\mathscr{M}_j \cong \mathbf{J}_j/\mathbf{J}_j^1$ et $\boldsymbol{\sigma} = \bigotimes_{j=1}^{l} \boldsymbol{\sigma}_j$ (voir notation de la section 3.2) avec $[\mathscr{M}_j, \boldsymbol{\sigma}_j]$ classe de paires supercuspidales de $GL_{m'^j}(\mathfrak{k}_{D'^j})$. La définition 4.4 appliqué au cas avec $G = B^{j\times}$ et $\boldsymbol{\eta}_{max}$ le caractère trivial de $U_1(\Lambda_{max,j}) \cap B^{j\times}$ donne, pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$, une sous-catégorie pleine et abélienne $\mathscr{R}(U(\Lambda_{max,j}) \cap B^{j\times}, \boldsymbol{\sigma}_j)$ de $\mathscr{R}_R(B^{j\times})$ dont les objets sont les représentations $V_j \in \mathrm{Rep}(B^{j\times})$ engendrées par le sous-espace maximal de $V_j^{U_1(\Lambda_{max,j})\cap B^{j\times}}$ dont tous les sous-quotients irréductibles ont support supercuspidale dans $[\mathscr{M}_j, \boldsymbol{\sigma}_j]$. On obtient une sous-catégorie pleine $\mathscr{R}(K_L, \boldsymbol{\sigma})$ de $\mathscr{R}_R(B_L^\times)$ (et de $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$) dont les objet sont les $V \in \mathrm{Rep}(B_L^\times)$ engendrées par le sous-espace maximal de $V^{K_L^1}$ dont tous les sous-quotients irréductibles ont support supercuspidale dans $[\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma}]$. Le théorème 4.6 et la remarque 4.12 donnent une décomposition en blocs de $\mathscr{R}(B^{j\times}, U_1(\Lambda_{max,j}) \cap B^{j\times})$ pour tout $j \in \{1, \dots, l\}$ et donc on obtient une décomposition en blocs

$$\mathscr{R}_R(B_L^\times, K_L^1) = \bigoplus_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]\in\mathbf{Y}} \mathscr{R}(K_L, \boldsymbol{\sigma}).$$

On rappelle qu'on a une décomposition en blocs $\mathscr{R}_R(G, \boldsymbol{\eta}_{max}) = \bigoplus_{[\mathbf{J},\boldsymbol{\lambda}]\in\mathbf{X}} \mathscr{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ par la remarque 4.12 et une bijection $\phi_{\boldsymbol{\kappa}_{max}} : \mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$ définie en (4.2). On reprend le diagramme (4.5)

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\mathbf{X}} \mathscr{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}) & \xrightarrow{\mathbf{F}_{\gamma,\boldsymbol{\kappa}_{max}}} & \bigoplus_{\mathbf{Y}} \mathscr{R}(K_L, \boldsymbol{\sigma}) \\ & {\scriptstyle \mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}} \searrow \quad \swarrow {\scriptstyle \mathrm{inv}_{K_L^1}} & \\ & \mathscr{R}_R(\mathscr{G}) & \end{array}$$

qui est commutatif par la proposition 4.19.

Théorème 4.20. *Soient* $[\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}] \in \mathbf{X}$ *et* $[\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma}] = \phi_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}([\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda}]) \in \mathbf{Y}$. *Alors* $\mathbf{F}_{\gamma,\boldsymbol{\kappa}_{max}}$ *induit une équivalence de catégories entre le bloc* $\mathscr{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$ *de* $\mathscr{R}_R(G)$ *et le bloc* $\mathscr{R}(K_L, \boldsymbol{\sigma})$ *de* $\mathscr{R}_R(B_L^\times)$.

Démonstration. Si V est un objet de $\mathscr{R}(\mathbf{J}, \boldsymbol{\lambda})$, par la proposition 4.19 il existe un isomorphisme de $\mathscr{G}$-représentations de $\mathrm{inv}_{K_L^1}(\mathbf{F}_{\gamma,\boldsymbol{\kappa}_{max}}(V))$ à $\mathsf{K}_{\boldsymbol{\kappa}_{max}}(V)$. Alors les sous-quotients irréductibles de $\mathrm{inv}_{K_L^1}(\mathbf{F}_{\gamma,\boldsymbol{\kappa}_{max}}(V))$ ont support supercuspidal dans $[\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma}]$ et cela implique que $\mathbf{F}_{\gamma,\boldsymbol{\kappa}_{max}}(V)$ est un objet de $\mathscr{R}(K_L, \boldsymbol{\sigma})$. □

Remarque 4.21. On observe que cette correspondance ne dépend pas du choix de γ dans $I_\tau(\boldsymbol{\eta}_{max})$.

4.3 Blocs de niveau 0

Dans la section 4.1 on a trouvé une équivalence de catégories entre $\mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$ et $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$ et dans la section 4.2 on a décrit la correspondance parmi les blocs de $\mathscr{R}(G,\boldsymbol{\eta}_{max})$ et ceux de $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$. Dans cette section on voudrait étudier plus en détail les blocs de $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$, qu'on appelle *blocs de niveau 0* de $\mathscr{R}_R(B_L^\times)$.

On rappelle qu'un idempotent central $\mathtt{e}$ d'un anneau unitaire $\mathtt{A}$ est dit *idempotent central primitif* s'il est non nul et s'il n'est pas somme de deux idempotents centraux orthogonaux non nuls de $\mathtt{A}$. Dans ce cas $\mathtt{eA}$ est un anneau avec unité $\mathtt{e}$. Si $\{\mathtt{e_1},\dots,\mathtt{e_r}\}$ est l'ensemble des idempotents centraux primitifs de $\mathtt{A}$ alors $1=\mathtt{e_1}+\cdots+\mathtt{e_r}$ et il existe une décomposition de $\mathtt{A}$ en somme directe d'anneau indécomposables $\mathtt{A}=\mathtt{e_1A}\oplus\cdots\oplus\mathtt{e_rA}$ (voir §22 de [Lam91]). On obtient une décomposition en blocs $\mathrm{Mod}-\mathtt{A}=\bigoplus_{\mathtt{i}=1}^{\mathtt{r}}\mathrm{Mod}-\mathtt{e_iA}$ où $\mathrm{Mod}-\mathtt{e_iA}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}-\mathtt{A}$ des $\mathtt{A}$-modules $\mathtt{M}$ tels que $\mathtt{Me_i}=\mathtt{M}$ (ou de façon équivalente dont tout sous-quotient irréductible $\mathtt{M'}$ vérifie $\mathtt{M'e_i}=\mathtt{M'}$).

On a déjà vu la décomposition en blocs

$$\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)=\bigoplus_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]\in\mathbf{Y}}\mathscr{R}(K_L,\boldsymbol{\sigma})$$

où $\mathbf{Y}$ est l'ensemble des classes d'équivalence de paires supercuspidales de $\mathscr{G}$. En plus il existe une équivalence de catégories entre $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$ et $\mathrm{Mod}-\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ par le théorème 4.16. Donc il existe une correspondance entre les classes d'équivalence de paires supercuspidales de $\mathscr{G}$ et les idempotents centraux primitifs de l'algèbre $\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$.

On a $\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)\cong\bigotimes_{j=1}^{l}\mathscr{H}_R\big(GL_{m'^j}(D'^j),\mathbb{I}_{m'^j}+M_{m'^j}(\wp_{D'^j})\big)$ (voir section 3.2). Alors, puisque le produit tensoriel commute avec le produit direct fini, tout idempotent central de l'algèbre $\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ est un produit d'idempotents centraux des algèbres $\mathscr{H}_R\big(GL_{m'^j}(D'^j),\mathbb{I}_{m'^j}+M_{m'^j}(\wp_{D'^j})\big)$ qu'on a décrit dans la section 2.5 si $\mathrm{car}(R)=0$ et dans la section 2.6 si $\mathrm{car}(R)>0$.

Soit $[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]\in\mathbf{Y}$ avec $\mathscr{M}=\prod_{j=1}^{l}\mathscr{M}_j$ et $\boldsymbol{\sigma}=\bigotimes_{j=1}^{l}\boldsymbol{\sigma}_j$ tels que $(\mathscr{M}_j,\boldsymbol{\sigma}_j)$ est une paire supercuspidale de $GL_{m'^j}(\mathfrak{k}_{D'^j})$ pour $j\in\{1,\dots,l\}$. On définit

$$e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]}=\bigotimes_{j=1}^{l}e^0_{[\mathscr{M}_j,\boldsymbol{\sigma}_j]}\ \text{ si car(R)=0},\quad e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]}=\bigotimes_{j=1}^{l}e_{[\mathscr{M}_j,\boldsymbol{\sigma}_j]}\ \text{ si car}(R)=\ell>0.$$

On rappelle qu'on utilise l'indice 0 à l'exposant pour indiquer le cas $\mathrm{car}(R)=0$ et dans le cas $\mathrm{car}(R)=\ell$ on considère toujours $\ell\neq p$. On obtient un ensemble $\mathrm{Id}(B_L^\times)=\{e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]}\,|\,[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]\in\mathbf{Y}\}$ d'idempotents de $\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$.

Théorème 4.22. *Les $e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]}\in\mathrm{Id}(B_L^\times)$ sont les idempotents centraux primitifs de l'algèbre $\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$.*

Démonstration. Les $e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]} \in \mathrm{Id}(B_L^\times)$ sont orthogonaux et centraux par le théorème 2.29 si $\mathrm{car}(R) = 0$ et par le théorème 2.33 si $\mathrm{car}(R) > 0$. Puisque $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$ se décompose en $|\mathbf{Y}|$ blocs, alors $\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ doit avoir $|\mathbf{Y}|$ idempotents centraux primitifs et donc les $e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]} \in \mathrm{Id}(B_L^\times)$ sont les idempotents centraux primitifs de $\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$. □

On obtient une décomposition $\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1) = \bigoplus_{\mathbf{Y}} e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]}\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ qui induit une décomposition en blocs

$$\mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1) = \bigoplus_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]\in\mathbf{Y}} \mathrm{Mod} - e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]}\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1).$$

On rappelle qu'un objet irréductible W de la catégorie $\mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ est un objet de $\mathrm{Mod} - e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]}\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ si $We_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]} \neq 0$.

Théorème 4.23. *Soient $[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]$ une classe de paires supercuspidales de $\mathscr{G}$ et $\boldsymbol{\sigma}^*$ la contragrédiente de $\boldsymbol{\sigma}$. Alors le bloc $\mathscr{R}(K_L,\boldsymbol{\sigma})$ de $\mathscr{R}(B_L^\times, K_L^1)$ est équivalent à la catégorie* $\mathrm{Mod} - e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}^*]}\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$.

Démonstration. On rappelle qu'on a un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\bigoplus_{\mathbf{Y}} \mathscr{R}(K_L,\boldsymbol{\sigma}) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}\left(\mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1),-\right)} & \bigoplus_{\mathbf{Y}} \mathrm{Mod} - e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]}\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1) \\
{\scriptstyle \mathrm{inv}_{K_L^1}}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \mathbf{H}} & \downarrow \\
\mathscr{R}_R(K_L/K_L^1) = \mathscr{R}_R(\mathscr{G}) & \xleftarrow{\simeq} & \mathrm{Mod} - \mathscr{H}_R(K_L, K_L^1)
\end{array}$$

qui est commutatif par le lemme 4.18. Une représentation (ρ, V) de $\mathscr{G} \cong K_L/K_L^1$ sur R est naturellement un $\mathscr{H}_R(K_L, K_L^1)$-module à droite par l'action $v.f_k = \rho(k^{-1})v$.
On considère le cas $\mathrm{car}(R) = 0$. L'action de l'élément $e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}^*]} \in \mathscr{H}_R(K_L, K_L^1)$ sur (ρ, V) correspond à

$$\varphi_{\boldsymbol{\sigma}^*}(\rho) = \sum_{\pi\in A^0_{\boldsymbol{\sigma}^*}} \frac{\dim(\pi)}{|\mathscr{G}|} \sum_{g\in\mathscr{G}} \chi_\pi(g^{-1})\rho(g^{-1}) = \sum_{\pi\in A^0_{\boldsymbol{\sigma}}} \frac{\dim(\pi^*)}{|\mathscr{G}|} \sum_{g\in\mathscr{G}} \chi_\pi(g)\rho(g^{-1})$$

où $A^0_{\boldsymbol{\sigma}} = \{\pi \in X \mid sc(\pi) \in [\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}]\}$ et X est un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de $\mathscr{G}$ sur R. Alors on a $\varphi_{\boldsymbol{\sigma}^*}(\rho) \in \mathrm{End}_{\mathscr{G}}(\rho)$. Soient (τ, Z) un objet de $\mathscr{R}(K_L,\boldsymbol{\sigma})$, $(\bar\tau, Z^{K_L^1}) = \mathrm{inv}_{K_L^1}(\tau, Z)$ dans $\mathrm{Rep}_R(\mathscr{G})$ et $(\bar\tau', Z')$ un sous-quotient irréductible de $(\bar\tau, Z^{K_L^1})$. On doit prouver que $Z'.e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}^*]} \neq 0$. L'action de $e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}^*]}$ correspond à $\varphi_{\boldsymbol{\sigma}^*}(\bar\tau') \in \mathrm{End}_{\mathscr{G}}(\bar\tau') \cong R$. Par définition de $\mathscr{R}(K_L,\boldsymbol{\sigma})$ la représentation $(\bar\tau', Z')$ est dans $A^0_{\boldsymbol{\sigma}}$ et donc, par le lemme 1.43(a), la trace de $\varphi_{\boldsymbol{\sigma}^*}(\bar\tau')$ est

$$\sum_{\pi\in A^0_{\boldsymbol{\sigma}}} \frac{\dim(\pi^*)}{|\mathscr{G}|} \sum_{g\in\mathscr{G}} \chi_\pi(g)\chi_{\bar\tau'}(g^{-1}) = \frac{\dim(\bar\tau'^*)}{|\mathscr{G}|} \sum_{g\in\mathscr{G}} \chi_{\bar\tau'}(g)\chi_{\bar\tau'}(g^{-1}) = \dim(\bar\tau'^*).$$

Alors on obtient $\varphi_{\boldsymbol{\sigma}^*}(\bar{\tau}') = \mathbb{I}_{Z'}$, $Z'.e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}^*]} \neq 0$ et donc $Z^{K_L^1}$ est un objet de la catégorie $\mathrm{Mod} - e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}^*]}\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$.
On considère le cas $\mathrm{car}(R) = \ell > 0$ différente de p. L'action d'un $e_{[\mathscr{M}',\boldsymbol{\sigma}'^*]} \in \mathrm{Id}(B_L^\times)$ sur $(\rho, V) \in \mathrm{Rep}_R(\mathscr{G})$ correspond à

$$\varphi_{\boldsymbol{\sigma}'^*}(\rho) = \Big(\Big(\sum_{\pi\in\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}')} \frac{\dim(\pi^*)}{|\mathscr{G}|}\sum_{g\in\mathscr{G}}\chi_\pi(g)\Big)\otimes R\Big)\rho(g^{-1})$$

où $\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}') = \{\pi \in X \,|\, ss(r_\ell(sc(\pi))) \in [\mathscr{M}', \boldsymbol{\sigma}']\}$ et X est un ensemble de représentants des classes d'isomorphisme des représentations irréductibles de $\mathscr{G}$ sur le corps des fractions $\mathbb{K}$ de l'anneau des vecteurs de Witt $W(R)$ de R. Cette somme est bien définie car $\sum_{\pi\in\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}')} \frac{\dim(\pi^*)}{|\mathscr{G}|}\sum_{g\in\mathscr{G}}\chi_\pi(g) \in W(R)$ par le théorème 2.31 et le lemme 2.32. En plus on a $\varphi_{\boldsymbol{\sigma}'^*}(\rho) \in \mathrm{End}_{\mathscr{G}}(\rho)$.
Soient (τ, Z) un objet de $\mathscr{R}(K_L, \boldsymbol{\sigma})$, $(\bar{\tau}, Z^{K_L^1}) = \mathrm{inv}_{K_L^1}(\tau, Z)$ dans $\mathrm{Rep}_R(\mathscr{G})$ et $(\bar{\tau}', Z')$ un sous-quotient irréductible de $(\bar{\tau}, Z^{K_L^1})$. On doit prouver que $Z'.e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}^*]} \neq 0$. Puisque $\mathrm{Hom}\big(\mathrm{ind}_{K_L^1}^{B_L^\times}(1), -\big)$ est une équivalence de catégories, il suffit de prouver $Z'.e_{[\mathscr{M}',\boldsymbol{\sigma}'^*]} = 0$ pour tout $[\mathscr{M}', \boldsymbol{\sigma}'] \neq [\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma}]$. L'action de l'élément $e_{[\mathscr{M}',\boldsymbol{\sigma}'^*]}$ sur $(\bar{\tau}', Z')$ correspond à $\varphi_{\boldsymbol{\sigma}'^*}(\bar{\tau}') \in \mathrm{End}_{\mathscr{G}}(\bar{\tau}') \cong R$. Par définition de $\mathscr{R}(K_L, \boldsymbol{\sigma})$ la représentation $(\bar{\tau}', Z')$ est un sous-quotient de $i_{\mathscr{M}''}^{\mathscr{G}}(\boldsymbol{\sigma}'')$ avec $(\mathscr{M}'', \boldsymbol{\sigma}'') \in [\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma}]$. La représentation supercuspidale $\boldsymbol{\sigma}''$ est la réduction modulo ℓ d'une représentation cuspidale ρ de $\mathscr{M}''$ sur $\mathbb{K}$ et donc $(\bar{\tau}', Z')$ est un sous-quotient de $i_{\mathscr{M}''}^{\mathscr{G}}(r_\ell(\rho)) = r_\ell(i_{\mathscr{M}''}^{\mathscr{G}}(\rho))$. Cela implique qu'il existe une représentation $(\pi', V') \in \mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma})$ telle que $(\bar{\tau}', Z')$ est un sous-quotient de $r_\ell(\pi')$. Puisque $\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma})$ est disjoint à $\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}')$ si $[\mathscr{M}', \boldsymbol{\sigma}'] \neq [\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma}]$, on obtient

$$\sum_{\pi\in\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}')} \frac{\dim(\pi^*)}{|\mathscr{G}|}\sum_{g\in\mathscr{G}}\chi_\pi(g)\pi'(g^{-1}) = 0 \tag{4.6}$$

car il est dans $\mathrm{End}_{\mathscr{G}}(\pi') \cong \mathbb{K}$ et sa trace est nulle par le lemme 1.43(a). Alors (4.6) implique $\varphi_{\boldsymbol{\sigma}'^*}(r_\ell(\pi')) = 0$ et donc $\varphi_{\boldsymbol{\sigma}'^*}(\bar{\tau}') = 0$. Cela prouve que $Z^{K_L^1}$ n'est pas un objet de $\mathrm{Mod} - e_{[\mathscr{M}',\boldsymbol{\sigma}'^*]}\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$ pour tout $[\mathscr{M}', \boldsymbol{\sigma}'] \neq [\mathscr{M}, \boldsymbol{\sigma}]$ et donc il est un objet de $\mathrm{Mod} - e_{[\mathscr{M},\boldsymbol{\sigma}^*]}\mathscr{H}_R(B_L^\times, K_L^1)$. □

Deuxième partie

Weil representation and metaplectic groups over an integral domain

Dans cette deuxième partie du manuscit (chapitres 5-11), on présente intégralement l'article [CT15]. Cette article concerne la représentation de Weil et le groupe métaplectique et il généralise des résultats obtenus par Weil dans [Wei64], dans le contexte des représentations modulaires et plus en général sur un anneau intègre. Il y a un chapitre supplementaire par rapport à [CT15] (chapitre 11) où on prouve que la construction du groupe métaplectique est "fonctorielle".

Cette deuxième partie est indépendant de la première et donc on remet à zéro les notations.

Chapitre 5

Introduction

The present article deals with the seminal work of André Weil on the Heisenberg representation and the metaplectic group. In [Wei64] the author gives an interpretation of the behavior of theta functions throughout the definition of the metaplectic group with a complex linear representation attached to it, known as the Weil or metaplectic representation. A central tool in his construction is the group $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, in which most computations are developed. We replace T with the multiplicative group of an integral domain R and we construct a Weil representation in this more general context. The scope is to help fitting Weil's theory to give applications in the setting of modular representations (see, for example, [Min12]).

The classical results of [Wei64] are the following. Let X be a finite dimensional vector space over a local field k, X^* its dual and $W = X \times X^*$. Let $A(W)$ be the product $W \times T$ with the Heisenberg group structure as defined in section 7.1 below. The author studies the projective representation of the symplectic group $\mathrm{Sp}(W)$, coming from the action of $\mathrm{Sp}(W)$ over a complex representation of $A(W)$. This projective representation lifts to an actual representation of a central extension $\mathrm{Mp}(W)$ of $\mathrm{Sp}(W)$, called **metaplectic group**. The lift is called nowadays **Weil representation** or metaplectic representation. The author shows also that the metaplectic group contains properly a subgroup $\mathrm{Mp}_2(W)$ which is a two-folded cover of $\mathrm{Sp}(W)$ on which the Weil representation can be restricted. Moreover, if $k \neq \mathbb{C}$, it is not possible to restrict the Weil representation to $\mathrm{Sp}(W)$.

Let us recall another construction for the Weil representation in the complex case (cfr. for example [MVW87]). The starting point is the Stone-von Neumann theorem, asserting that, given a non-trivial character $\chi : k \to \mathbb{C}^\times$, there exists an infinite dimensional irreducible $\mathbb{C}$-representation of the Heisenberg group

$$\rho : W \times k \to \mathrm{Aut}(S)$$

with central character χ, and that it is unique up to isomorphism. The symplectic group

acts on the Heisenberg group by $\sigma.(w,x) \mapsto (\sigma w, x)$ and this action is trivial on the center. Then, for every $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$, the representation $\rho_\sigma : (w,x) \mapsto \rho(\sigma w, x)$ is irreducible and has the same central character χ, so it is isomorphic to ρ. This means that there exists $\Psi_\sigma \in \mathrm{Aut}(S)$ such that $\Psi_\sigma \circ \rho \circ \Psi_\sigma^{-1} = \rho_\sigma$. Notice that Ψ_σ is unique up to multiplication by an element of $\mathbb{C}^\times$, by Schur's lemma. We obtain in this way a faithful projective representation

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}(W) & \to & \mathrm{Aut}(S)/\mathbb{C}^\times \\ \sigma & \mapsto & \Psi_\sigma. \end{array}$$

Defining

$$\mathrm{Mp}_{\mathbb{C}}(W) := \mathrm{Sp}(W) \times_{\mathrm{Aut}(S)/\mathbb{C}^\times} \mathrm{Aut}(S)$$

the metaplectic group comes out, by definition, with a representation that lifts the projective represntation of $\mathrm{Sp}(W)$: the complex Weil representation.
Notice that this construction is more abstract than the one in [Wei64] and that depend on the irreducibility of ρ, which in general is not given when we replace $\mathbb{C}$ by R. We want to avoid the use of Stone-Von Neumann theorem and to give an explicit description of the Weil representation. This is why we choose to follow the approach of Weil rather than this construction.

Let F be a locally compact, non-discrete, non-archimedean field of characteristic $\neq 2$. Let $p > 0$ be the characteristic and q the cardinality of its residue field. We let X be a F-vector space of finite dimension, we note $W = X \times X^*$ and we replace the group T by the multiplicative group of an integral domain R such that $p \in R^\times$, R contains p^n-th roots of unity for every n (to ensure the existence of a nontrivial smooth character $F \to R^\times$) and a square root of q. The object of this work is to show that the strategy of proof used by Weil can be adapted in this setting. Weil's techniques can be exploited in the same way whenever a result involves just the field F, like the intrinsic theory of quadratic forms over X and the description of the symplectic group. Nevertheless, different kinds of problems occur in the new generality. The main issues are the lack of complex conjugation and complex absolute value. Because of this, Fourier and integration theory in the present work are different from the complex case ; mainly we consider Haar measures with values in R and operators acting over the space of R-valued Schwartz functions over an F-vector space instead of L^2-functions, using Vignéras' approach (section I.2 of [Vig98]). Moreover, allowing R to be of positive characteristic makes it necessary to change some formulas, for example in the proof of theorem 9.1 to include the case where $q^2 = 1$ in R.

The central result of this paper is the existence of the **reduced metaplectic group**, which is defined in the following way. The starting point is the definition of the metaplectic group $\mathrm{Mp}(W)$ and the existence of a non-split short exact sequence

$$1 \longrightarrow R^\times \longrightarrow \mathrm{Mp}(W) \longrightarrow \mathrm{Sp}(W) \longrightarrow 1. \qquad (\star)$$

Theorem 10.3 and theorem 10.4 give a description of a minimal subgroup of $\mathrm{Mp}(W)$ which is a non-trivial extension of $\mathrm{Sp}(W)$. We can summarize them in a unique statement :

Theorem. *Let* $\mathrm{char}(R) \neq 2$. *There exists a subgroup* $\mathrm{Mp}_2(W)$ *of* $\mathrm{Mp}(W)$ *such that the short exact sequence* $(\star)$ *restricts to a short exact sequence*

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \mathrm{Mp}_2(W) \longrightarrow \mathrm{Sp}(W) \longrightarrow 1 \qquad (\star\star)$$

that does not split.

This result permits the definition of a Weil representation of $\mathrm{Mp}(W)$, that we describe explicitly.

Let us describe the main body of the article.

Section 6 contains a brief explanation of basic notations and definitions where essentially no new result appears. However some features differ from the one in [Wei64]. We introduce the integration theory in our setting that is slightly different from the complex one. Over a F-vector space, we consider a R-valued Haar measure as in [Vig98], that exists since $p \in R^\times$ and the R-module of Schwartz functions, i.e. compactly supported locally constant functions, in place of L^2-functions. The main differences with the complex case are that may exist non-empty open subsets of the vector space with zero volume if the characteristic of R is positive, and that integrals of Schwartz functions are actually finite sums. This theory permits also the definition of a Fourier transform and of its inverse. In the end of the section we study element of $\mathrm{Sp}(W)$ as matrices acting over W. We consider this as a left action (rather than on the right, as in [Wei64]) but we want to show the same formulas. Then we have to change some definitions *ad hoc*.

In section 7 we define the faithful **Heisenberg representation** U of $A(W)$ on the R-module of Schwartz functions of X and we introduce the groups $\mathrm{B}_0(W)$ of automorphisms of $A(W)$ acting trivially on the center and $\mathbb{B}_0(W)$, the normalizer of $U(A(W))$ in $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X))$. After that we define $\mathrm{Mp}(W)$, as a fibered product of $\mathrm{Sp}(W)$ and $\mathbb{B}_0(W)$ over $\mathrm{B}_0(W)$, and the sequence $(\star)$, proving that it is exact. This fact is a direct consequence of the theorem 7.5, stating the exactness of a sequence of the form

$$1 \longrightarrow R^\times \longrightarrow \mathbb{B}_0(W) \xrightarrow{\pi_0} \mathrm{B}_0(W) \longrightarrow 1.$$

The proof of the analogue of theorem 7.5 in sections 8, 9, 10 of [Wei64] uses a construction that has been introduced by Segal in the setting of complex unitary operators for L^2-functions (cfr. chapter 2 of [Seg63]). It is indeed possible to mimic it for Schwartz functions over R, but this does not yield surjectivity of π_0 when R has not unique factorization. In fact lemma 2 in [Wei64] does not hold in our setting. To get around this problem we give explicit generators of $\mathrm{B}_0(W)$ and we show that they are in the image of π_0.

In section 8 we define the Weil factor $\gamma(f) \in R^\times$, associated to a quadratic form f

over F. It is the constant that permits to transpose some relations between maps taking values in $\mathrm{B}_0(W)$, to the liftings of those maps, that take values in $\mathbb{B}_0(W)$. We prove some properties of the map $\gamma : f \mapsto \gamma(f)$ and an explicit summation formula for $\gamma(f)$.

In section 9 we go further into the study of properties of the Weil factor. In theorem 9.1 we prove that $\gamma(n) = -1$, where n is the reduced norm over the quaternion algebra over F. To prove this theorem we can not use directly the proof in [Wei64] since the author shows that $\gamma(n)$ is a negative real number of absolute value 1 and computes integrals on subsets that may have volume zero when R is of positive characteristic. The key tool is the summation formula proved in section 8. We also show that γ respects the Witt group structure over the set of quadratic forms and, combining this with known results over quadratic forms, we show that $\gamma(f)$ is at most a fourth root of unity in $R^\times$.

Finally, in section 10, we use the results from previous sections to construct the reduced metaplectic group and prove the main theorem : we build up a R-character of $\mathrm{Mp}(W)$, whose restriction on $R^\times$ is the map $x \mapsto x^2$, and we define $\mathrm{Mp}_2(W)$ as its kernel. We prove that $\mathrm{Mp}_2(W)$ is a cover of $\mathrm{Sp}(W)$ with kernel the group of square roots of unity in R, so that if $\mathrm{char}(R) = 2$ the sequence $(\star)$ splits.

The existence of a Weil representation over R is a result which is strongly motivated by recent research problems. Minguez studies local theta correspondences in [Min08] and p-adic reductive pairs in the ℓ-modular case in [Min12]. Here he asks how does Howe correspondence behave with respect to reduction modulo ℓ and he suggests that a Weil representation over $\bar{\mathbb{F}}_\ell$ has to be constructed and the theory of the metaplectic group has to be extended. A general construction with a strong geometric flavor is given by Shin to study the case of representations over $\bar{\mathbb{F}}_p$, which is not possible to treat following a naive approach. In [Shi12], the author defines in great generality p-adic Heisenberg group schemes over a noetherian scheme. He proves a geometric analogue of Stone-Von Neumann theorem and Schur's lemma. Thanks to this he is able to construct a Weil representation provided the existence of a (geometric) Heisenberg representation. Showing that the latter exists for every algebraically closed field in every characteristic, he is able to define the new notion of mod p-Weil representation. The great advantage of his construction is in fact the possibility to treat the case where $\mathrm{char}(R) = p$ (in this case every character $F \to R^\times$ is trivial, so one does really need another approach). On the other hand an elementary approach, like the one in the present article, permits to define a Weil representation over integral domains that are not fields. The possibility of working in this generality is motivated, among other things, by the recent interest in representation theory of reductive groups over discrete valuation rings. We cite, for example, the paper [EH11] of Emerton and Helm on Langlands correspondences "in families". Finally we shall mention the works of Gurevich and Hadani (see, for example, [GH07] and [GH09]) that generalize several constructions of [Wei64], still remaining in the context of complex representations (i.e. with $R = \mathbb{C}$).

Chapitre 6

Notation and definitions

Let F be a locally compact non-archimedean field of characteristic different from 2. We write $\mathcal{O}_F$ for the ring of integers of F, we fix a uniformizer ϖ of $\mathcal{O}_F$, we denote p the residue characteristic and q the cardinality of the residue field of F. Let R be an integral domain such that $p \in R^\times$. We assume that there exists a smooth non-trivial character $\chi : F \longrightarrow R^\times$, that is a group homomorphism from F to $R^\times$ whose kernel is an open subgroup of F.

These properties assure the existence of an integer $l = \min\{j \in \mathbb{Z} \,|\, \varpi^j \mathcal{O}_F \subset \ker(\chi)\}$ called the *conductor* of χ.

6.1 Quadratic forms

We denote by G any finite dimensional vector space over F.

We recall that a *quadratic form* on G is a continuous map $f : G \to F$ such that $f(ux) = u^2 f(x)$ for every $x \in G$ and $u \in F$ and $(x, y) \longmapsto f(x + y) - f(x) - f(y)$ is F-bilinear. A *character of degree 2* of G is a map $\varphi : G \to R^\times$ such that $(x, y) \longmapsto \varphi(x+y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1}$ is a bicharacter (i.e. a smooth character on each variable) of $G \times G$. We denote by $Q(G)$ the F-vector space of quadratic forms on G, by $X_2(G)$ the group of characters of degree 2 of G endowed with the pointwise multiplication and by $X_1(G)$ the multiplicative group of smooth R-characters of G, that is a subgroup of $X_2(G)$.

We denote by $G^* = \mathrm{Hom}(G, F)$ the dual vector space of G. We write $[x, x^*] = x^*(x) \in F$ and $\langle x, x^* \rangle = \chi([x, x^*]) \in R^\times$ for every $x \in G$ and $x^* \in G^*$. We identify $(G^*)^* = G$ by means of $[x^*, x] = [x, x^*]$. We have a group isomorphism

$$\begin{array}{ccc} G^* & \longrightarrow & X_1(G) \\ x^* & \longmapsto & \langle \cdot\,, x^* \rangle. \end{array} \tag{6.1}$$

Indeed if $\langle x, x^* \rangle = 1$ for every $x \in X$ then $[x, x^*] \in \ker(\chi)$ for every $x \in X$ and this implies that $x^* = 0$ since $\ker(\chi) \neq F$. The surjectivity follows by theorem II.3 of [Wei74]

and I.3.9 of [Vig98].

Definition 6.1. Let $\mathcal{B}$ be the bilinear map from $(G \times G^*) \times (G \times G^*)$ to F defined by $\mathcal{B}\big((x_1, x_1^*), (x_2, x_2^*)\big) = [x_1, x_2^*]$ and let $\mathcal{F} = \chi \circ \mathcal{B}$.

For a F-linear map $\alpha : G \to H$ we denote by $\alpha^* : H^* \to G^*$ its *transpose*. If $H = G^*$ and $\alpha = \alpha^*$ we say that α is *symmetric*. We associate to every quadratic form f on G the symmetric homomorphism $\rho = \rho(f) : G \to G^*$ defined by $\rho(x)(y) = f(x+y) - f(x) - f(y)$ for every $x, y \in G$. Since $\mathrm{char}(F) \neq 2$, the map $f \mapsto \rho(f)$ is an isomorphism from $Q(G)$ to the F-vector space of symmetric homomorphisms from G to G^* with inverse the map sending ρ to the quadratic form $f(x) = [x, \frac{\rho(x)}{2}]$. We say that $f \in Q(G)$ is *non-degenerate* if $\rho(f)$ is an isomorphism and we denote by $Q^{nd}(G)$ the subgroup of $Q(G)$ of non-degenerate quadratic forms on G. We remark that the composition with the character χ gives an injective group homomorphism from $Q(G)$ to $X_2(G)$.

6.2 Integration theory

Let dg be a Haar measure on G with values in R (see I.2 of [Vig98]). We denote by $\mathcal{S}(G)$ the R-module of compactly supported locally constant functions on G with values in R. We can write every $\Phi \in \mathcal{S}(G)$ as $\Phi = \sum_{h \in K_1/K_2} x_h \mathbf{1}_{h+K_2}$ where K_1 and K_2 are two compact open subgroups of G, $x_h \in R$, $\mathbf{1}_{h+K_2}$ is the characteristic function of $h + K_2$ and the sum is taken over the finite number of right cosets of K_2 in K_1.

The *Fourier transform* of $\Phi \in \mathcal{S}(G)$ is the function from G^* to R defined by

$$\mathscr{F}\Phi(g^*) = \int_G \Phi(g)\langle g, g^*\rangle dg \tag{6.2}$$

for every $g^* \in G^*$.

For every compact open subgroup K of G let $K_* = \{g^* \in G^* \mid \langle k, g^*\rangle = 1 \,\forall\, k \in K\}$ define a subgroup of G^*. Notice that the map $K \mapsto K_*$ is inclusion-reversing. If L is any $\mathcal{O}_F$-lattice of G and l is the conductor of χ, then $L_* = \{g^* \in G^* \mid g^*(L) \subset \varpi_F^l \mathcal{O}_F\}$. Explicitly, if $L = \bigoplus_i \varpi_F^{a_i} \mathcal{O}_F$ (with $a_i \in \mathbb{Z}$ for all i) with respect a fixed basis $(e_1, \ldots, e_N)$ of G, then $L_* = \bigoplus_i \varpi_F^{l-a_i} \mathcal{O}_F$ with respect to the dual basis of $(e_1, \ldots, e_N)$ of G^*. These facts imply that K_* is a compact open subgroup of G^* for every compact open subgroup K of G.

Given a Haar measure dg on G such that $\mathrm{vol}(K', dg) = 1$ we call *dual measure of* dg the Haar measure dg^* on G^* such that $\mathrm{vol}(K'_*, dg^*) = 1$.

The *inverse Fourier transform* of $\Psi \in \mathcal{S}(G^*)$ is the function from G to R defined by

$$\mathscr{F}^{-1}\Psi(g) = \int_{G^*} \Psi(g^*)\langle g, -g^*\rangle dg^* \tag{6.3}$$

for every $g \in G$.

For every $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{S}(G^*)$, we denote by $\Psi_1 * \Psi_2 \in \mathcal{S}(G^*)$ the *convolution product* defined by

$$(\Psi_1 * \Psi_2)(x^*) = \int_{G^*} \Psi_1(g^*)\Psi_2(x^* - g^*)dg^*$$

for every $x^* \in G^*$.

Proposition 6.2. *Formulas (6.2) and (6.3) give an isomorphism of R-algebras from $\mathcal{S}(G)$, endowed with the pointwise product, to $\mathcal{S}(G^*)$, endowed with the convolution product.*

Proof. The R-linearity of $\mathscr{F}$ and $\mathscr{F}^{-1}$ is clear from their definitions. Let now K be a compact open subgroup of G and $h \in G$; we have that

$$\mathscr{F}\mathbf{1}_{h+K}(g^*) = \int_G \mathbf{1}_K(g-h)\langle g, g^*\rangle dg = \langle h, g^*\rangle \int_K \langle g, g^*\rangle dg.$$

Moreover we have $\int_K \langle g, g^*\rangle dg = \langle k, g^*\rangle \int_K \langle g, g^*\rangle dg$ for every $k \in K$ and, since R is an integral domain, we obtain that $\mathscr{F}\mathbf{1}_{h+K}(g^*) = \mathrm{vol}(K, dg)\langle h, g^*\rangle \mathbf{1}_{K_*}(g^*)$. Then $\mathscr{F}\Phi \in \mathcal{S}(G^*)$ for every $\Phi \in \mathcal{S}(G)$, since $\mathscr{F}$ is R-linear and Φ is a finite sum of the form $\sum_h x_h \mathbf{1}_{h+K_1}$ with $x_h \in R$ and K_1 a compact open subgroup of G.
Denoting $K_{**} = \{g \in G \,|\, \langle g, g^*\rangle = 1 \,\forall g^* \in K_*\}$ we have that

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\mathbf{1}_{h+K}(g) &= \mathrm{vol}(K, dg) \int_{G^*} \langle h, g^*\rangle \mathbf{1}_{K_*}(g^*)\langle g, -g^*\rangle dg^* \\ &= \mathrm{vol}(K, dg) \int_{K_*} \langle h - g, g^*\rangle dg^* = \mathrm{vol}(K, dg)\mathrm{vol}(K_*, dg^*)\mathbf{1}_{h+K_{**}}.\end{aligned}$$

Moreover if $L = \bigoplus_i \varpi_F^{a_i}\mathcal{O}_F$ is an $\mathcal{O}_F$-lattice of G as above then $L_{**} = \bigoplus_i \varpi_F^{l-(l-a_i)}\mathcal{O}_F = L$. Let now L be an $\mathcal{O}_F$-lattice and K be a compact open subgroup of G such that $L \subset K$; we can write $\mathbf{1}_K = \sum_{h \in K/L} I_{h+L}$ and then we obtain

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\mathbf{1}_K &= \mathrm{vol}(K, dg)\mathrm{vol}(K_*, dg^*)\mathbf{1}_{K_{**}} = \mathrm{vol}(L, dg)\mathrm{vol}(L_*, dg^*) \sum_{h \in K/L} \mathbf{1}_{h+L_{**}} \\ &= \mathrm{vol}(L, dg)\mathrm{vol}(L_*, dg^*)\mathbf{1}_K.\end{aligned}$$

This implies that $K = K_{**}$ and $\mathrm{vol}(K, dg)\mathrm{vol}(K_*, dg^*) = 1$ for every compact open subgroup K of G. This proves that $\mathscr{F}$ is an isomorphism whose inverse is $\mathscr{F}^{-1}$.
Finally for every $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{S}(G^*)$ we have

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}(\Psi_1 * \Psi_2)(g) &= \int_{G^*}\int_{G^*} \Psi_1(g_1^*)\Psi_2(g_2^* - g_1^*)dg_1^*\langle -g, g_2^*\rangle dg_2^* \\ &= \int_G \Psi_1(g_1^*) \int_G \Psi_2(g_3^*)\langle -g, g_3^* + g_1^*\rangle dg_3^* dg_1^* = \mathscr{F}^{-1}(\Psi_1)(g) \cdot \mathscr{F}^{-1}(\Psi_2)(g)\end{aligned}$$

where we have used the change of variables $g_2^* \longmapsto g_3^* = g_2^* - g_1^*$. □

Definition 6.3. Let G and H be two finite dimensional F-vector spaces and let dx and dy be two Haar measures on G and H. If $\nu : G \longrightarrow H$ is an isomorphism then the *module* of ν is the constant $|\nu| = \frac{d(\nu x)}{dy}$, which means that we have

$$\int_H \Phi(y)dy = |\nu| \int_G \Phi(\nu(x))dx$$

where $\Phi \in \mathcal{S}(H)$. Notice that it is an integer power of q in R.

If dx^* and dy^* are the dual measures on G^* and H^* of dx and dy, then $|\nu| = |\nu^*|$ for every isomorphism $\nu : G \longrightarrow H$. Indeed if K is a compact open subgroup of G then

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(K, dx) &= |\nu|^{-1}\mathrm{vol}(\nu(K), dy) \\ &= |\nu|^{-1}\mathrm{vol}(\nu(K)_*, dy^*)^{-1} \\ &= |\nu|^{-1}|\nu^*|\mathrm{vol}(\nu^*(\nu(K))_*, dx^*)^{-1} \end{aligned}$$

and $\nu^*(\nu(K))_* = \{g^* \in G^* \mid \langle \nu(k), \nu^{*-1}(g^*)\rangle = 1 \ \forall\ k \in K\} = K_*$. Then $|\nu| = |\nu^*|$. Moreover if $G = H$ and $dx = dy$ we have that $|\nu|$ is independent of the choice of the Haar measure dx on G.

6.3 The symplectic group

From now on, let X be a finite dimensional F-vector space and let W be the F-vector space $X \times X^*$. We denote by $\mathrm{Sp}(W)$ the group of symplectic automorphisms of W, said to be the *symplectic group* of W, that is the group of automorphisms of W such that

$$\mathcal{B}\big(\sigma(w_1), \sigma(w_2)\big) - \mathcal{B}\big(\sigma(w_2), \sigma(w_1)\big) = \mathcal{B}(w_1, w_2) - \mathcal{B}(w_2, w_1), \tag{6.4}$$

or equivalently, by (6.1), such that

$$\mathcal{F}\big(\sigma(w_1), \sigma(w_2)\big)\mathcal{F}\big(\sigma(w_2), \sigma(w_1)\big)^{-1} = \mathcal{F}(w_1, w_2)\mathcal{F}(w_2, w_1)^{-1}.$$

Proposition 6.4. *Every group automorphism $\sigma : W \longrightarrow W$ which satisfies (6.4) is F-linear.*

Proof. Applying the change of variables $w_1 \longmapsto uw_1$ with $u \in F$ in the equality (6.4), we obtain $\mathcal{B}\big(\sigma(uw_1), \sigma(w_2)\big) - \mathcal{B}\big(\sigma(w_2), \sigma(uw_1)\big) = u\big(\mathcal{B}(w_1, w_2) - \mathcal{B}(w_2, w_1)\big)$ and then using (6.4) again we obtain $\mathcal{B}\big(\sigma(uw_1) - u\sigma(w_1), \sigma(w_2)\big) = \mathcal{B}\big(\sigma(w_2), \sigma(uw_1) - u\sigma(w_1)\big)$ for every $w_1, w_2 \in W$. This implies that $\mathcal{B}\big(\sigma(uw_1) - u\sigma(w_1), \sigma(w_2)\big) = 0$ for every $w_2 \in \sigma^{-1}(0 \times X^*)$ and $\mathcal{B}\big(\sigma(w_2), \sigma(uw_1) - u\sigma(w_1)\big) = 0$ for every $w_2 \in \sigma^{-1}(X \times 0)$. Then $\sigma(uw_1) = u\sigma(w_1)$ for every $w_1 \in W$. □

We can write every $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$ as a matrix of the form $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ where $\alpha : X \to X$, $\gamma : X \to X^*$, $\beta : X^* \to X$ and $\delta : X^* \to X^*$ are F-linear. The transpose of σ is $\sigma^* = \begin{pmatrix} \alpha^* & \gamma^* \\ \beta^* & \delta^* \end{pmatrix}$ which is an automorphism of $W^* = X^* \times X$ such that $|\sigma^*| = |\sigma|$.
Furthermore if $\xi : X \times X^* \longrightarrow X^* \times X$ is the isomorphism defined by $(x, x^*) \longmapsto (-x^*, x)$ and $\sigma^I = \xi^{-1}\sigma^*\xi = \begin{pmatrix} \delta^* & -\beta^* \\ -\gamma^* & \alpha^* \end{pmatrix}$, then we have $|\sigma| = |\sigma^I|$. With these definitions, an element $\sigma \in \mathrm{Aut}(W)$ is symplectic if and only if $\sigma^I\sigma = 1$ and then the module of every symplectic automorphism is equal to 1.

Moreover we can remark that if $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$ then

$$\alpha^*\gamma = \gamma^*\alpha : X \longrightarrow X^* \quad \text{and} \quad \beta^*\delta = \delta^*\beta : X^* \longrightarrow X$$

are symmetric homomorphisms and $\alpha^*\delta - \gamma^*\beta = 1$ and $\delta^*\alpha - \beta^*\gamma = 1$.

We associate to every $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$ the quadratic form defined by

$$f_\sigma(w) = \frac{1}{2}\big(\mathcal{B}(\sigma(w), \sigma(w)) - \mathcal{B}(w, w)\big).$$

It is easy to check that $f_{\sigma_1 \circ \sigma_2} = f_{\sigma_1} \circ \sigma_2 + f_{\sigma_2}$ for every $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Sp}(W)$ and that

$$f_\sigma(w_1 + w_2) - f_\sigma(w_1) - f_\sigma(w_2) = \mathcal{B}(\sigma(w_1), \sigma(w_2)) - \mathcal{B}(w_1, w_2) \tag{6.5}$$

for every $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$ and $w_1, w_2 \in W$.

Symplectic realizations of forms

We introduce some maps, similar to those in 33 of [Wei64], with values in $\mathrm{Sp}(W)$ and we give some relations between them. When comparing our calculations with those of sections 6 and 7 of [Wei64] it shall be remarked that we change most of the definitions because we consider matrices acting on the left rather than on the right, to uniform notation to the contemporary standard. This affects also the formulas that explicit the relations between these applications.

Definition 6.5. We define the following maps.

- An injective group homomorphism from $\mathrm{Aut}(X)$ to $\mathrm{Sp}(W)$:

$$\begin{array}{rcl} d : \mathrm{Aut}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(W) \\ \alpha & \longmapsto & \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix}. \end{array}$$

- An injective map from $\mathrm{Iso}(X^*, X)$ to $\mathrm{Sp}(W)$ where $\mathrm{Iso}(X^*, X)$ is the set of isomorphisms from X^* to X :

$$\begin{array}{rcl} d' : \mathrm{Iso}(X^*, X) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(W) \\ \beta & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{*-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

  We remark that $d'(\beta)^{-1} = d'(-\beta^*)$ for every $\beta \in \mathrm{Iso}(X^*, X)$.
- An injective group homomorphism from $Q(X)$ to $\mathrm{Sp}(W)$:

$$\begin{array}{rcl} t : Q(X) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(W) \\ f & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

  where $\rho = \rho(f)$ is the symmetric homomorphism associated to f.
- An injective group homomorphism from $Q(X^*)$ to $\mathrm{Sp}(W)$:

$$\begin{array}{rcl} t' : Q(X^*) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(W) \\ f' & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & -\rho' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

  where $\rho' = \rho(f')$ is the symmetric homomorphism associated to f'.

Let G be either X or X^*. If $f \in Q(G)$ and $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ we write f^α for $f \circ \alpha$.

Proposition 6.6.

(i) Let $f \in Q(X)$, $f' \in Q(X^*)$ and $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$. Then $d(\alpha)^{-1} t(f) d(\alpha) = t(f^\alpha)$ and $d(\alpha) t'(f') d(\alpha)^{-1} = t'(f'^{\alpha^*})$.

(ii) Let $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$, $\beta \in \mathrm{Iso}(X^*, X)$. Then $d'(\alpha\beta) = d(\alpha) d'(\beta)$ and $d'(\beta\alpha^{*-1}) = d'(\beta) d(\alpha)$.

Proof.

(i) We have $d(\alpha)^{-1} t(f) d(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\rho & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^* \rho \alpha & 1 \end{pmatrix}$. It is easy to check that the symmetric homomorphism associated to f^α is $-\alpha^* \rho \alpha$. With similar explicit calculations the second equality can be proven as well.

(ii) We have $d(\alpha) d'(\beta) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{*-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\beta \\ -\alpha^{*-1}\beta^{*-1} & 0 \end{pmatrix} = d'(\alpha\beta)$ and also $d'(\beta) d(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{*-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{*-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta\alpha^{*-1} \\ -(\beta\alpha^{*-1})^{*-1} & 0 \end{pmatrix} = d'(\beta\alpha^{*-1})$. □

We have $d(\alpha)d'(\beta)d(\alpha)^{-1} = d'(\alpha \circ \beta \circ \alpha^*)$ so that the group $d(\mathrm{Aut}(X))$ acts on the set $d'(\mathrm{Iso}(X^*, X))$ by conjugacy in $\mathrm{Sp}(W)$.

A set of generators for the symplectic group

Let us provide a description of $\mathrm{Sp}(W)$ by generators and relations. We denote by $\Omega(W)$ the subset of $\mathrm{Sp}(W)$ of elements $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ such that β is an isomorphism. The set $\Omega(W)$ is a set of generators for $\mathrm{Sp}(W)$ (cf. 42 of [Wei64]). The precise statement is as follows.

Proposition 6.7. *The group* $\mathrm{Sp}(W)$ *is generated by the elements of* $\Omega(W)$ *with relations* $\sigma\sigma' = \sigma''$ *for every* $\sigma, \sigma', \sigma'' \in \Omega(W)$ *such that the equality* $\sigma\sigma' = \sigma''$ *holds in* $\mathrm{Sp}(W)$.

Weil states also the following fact about the set $\Omega(W)$ (cf. formula (33) of [Wei64]).

Proposition 6.8. *Every element* $\sigma \in \Omega(W)$ *can be written as*

$$\sigma = t(f_1)d'(\beta')t(f_2)$$

for unique $f_1, f_2 \in Q(X)$ *and* $\beta' \in \mathrm{Iso}(X^*, X)$.

Remark 6.9. Let $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Omega(W)$. Then $\sigma = t(f_1)d'(\beta)t(f_2)$ where f_1 and f_2 are the quadratic forms associated to the symmetric homomorphisms $-\delta\beta^{-1}$ and $-\beta^{-1}\alpha$. In particular we have the formula

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \delta\beta^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta^{*-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^{-1}\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Chapitre 7

The metaplectic group

Following Weil's strategy we define the metaplectic group, attached to R and χ, as a central extension of the symplectic group by $R^\times$. To do so, we shall construct the groups $\mathrm{B}_0(W)$ and $\mathbb{B}_0(W)$. In particular, in theorem 7.5 we characterize $\mathbb{B}_0(W)$ as central extension of $\mathrm{B}_0(W)$ by $R^\times$. This characterization permits to define the metaplectic group as fiber product over $\mathrm{B}_0(W)$ of the symplectic group and $\mathbb{B}_0(W)$ and to show that the metaplectic group is a central extension of the symplectic group by $R^\times$.
The main issue related to this group, rather than its formal definition, is to study the maps $\mu : \mathrm{Sp}(W) \to \mathrm{B}_0(W)$ and $\pi_0 : \mathbb{B}_0(W) \to \mathrm{B}_0(W)$, that depend both on R.

7.1 The group $B_0(W)$

Let $A(W)$ be the group whose underlying set is $W \times R^\times$ with the multiplication law

$$(w_1, t_1)(w_2, t_2) = (w_1 + w_2, t_1 t_2 \mathcal{F}(w_1, w_2))$$

where $\mathcal{F}$ is as in Definition 6.1. Its center is $Z = Z(A(W)) = \{(0, t), t \in R^\times\} \cong R^\times$.

We denote by $B_0(W)$ the subgroup of $\mathrm{Aut}(A(W))$ of group automorphisms of $A(W)$ acting trivially on Z, i.e. $B_0(W) = \{s \in \mathrm{Aut}(A(W)) \mid s_{|Z} = \mathrm{id}_Z\}$.

Proposition 7.1. *Let $s \in B_0(W)$. There exists a unique pair $(\sigma, \varphi) \in \mathrm{Sp}(W) \times X_2(W)$ satisfying the property*

$$\varphi(w_1 + w_2)\varphi(w_1)^{-1}\varphi(w_2)^{-1} = \mathcal{F}\big(\sigma(w_1), \sigma(w_2)\big)\mathcal{F}(w_1, w_2)^{-1} \tag{7.1}$$

such that $s(w, t) = (\sigma(w), \varphi(w)t)$ for every $w \in W$ and $t \in R^\times$. Conversely if the pair $(\sigma, \varphi) \in \mathrm{Sp}(W) \times X_2(W)$ satisfies (7.1), then $(w, t) \mapsto (\sigma(w), \varphi(w)t)$ defines an element of $B_0(W)$.

Proof. Let $\eta : A(W) \longrightarrow W$ and $\theta : A(W) \longrightarrow R^\times$ such that $s(w,t) = (\eta(w,t), \theta(w,t))$. For every $w_1, w_2 \in W$ and $t_1, t_2 \in R^\times$ we have

$$\begin{aligned} s((w_1,t_1)(w_2,t_2)) &= \big(\eta(w_1+w_2, t_1t_2\mathcal{F}(w_1,w_2)), \theta(w_1+w_2, t_1t_2\mathcal{F}(w_1,w_2))\big) \\ s(w_1,t_1)s(w_2,t_2) &= \big(\eta(w_1,t_1)+\eta(w_2,t_2), \theta(w_1,t_1)\theta(w_2,t_2)\mathcal{F}(\eta(w_1,t_1),\eta(w_2,t_2))\big). \end{aligned}$$

Since s is a homomorphism then η is so and since $s_{|Z} = \mathrm{id}_Z$ then $\eta(0,t) = 0$ for every $t \in R^\times$. These two facts imply that $\eta(w,t) = \eta(w,1)$ for every $t \in R^\times$ so that σ, defined by $\sigma(w) = \eta(w,1)$, is a group endomorphism of W. We have also

$$\theta(w_1+w_2, t_1t_2\mathcal{F}(w_1,w_2)) = \theta(w_1,t_1)\theta(w_2,t_2)\mathcal{F}(\sigma(w_1),\sigma(w_2)). \tag{7.2}$$

Setting $w_2 = 0$ and $t_1 = 1$ and using the fact that $\theta(0,t) = t$ for every $t \in R^\times$ (since $s_{|Z} = \mathrm{id}_Z$) we obtain that $\theta(w_1,t_2) = \theta(w_1,1)t_2$ for every $w_1 \in W$ and $t_2 \in R^\times$. So, if we set $\varphi(w) = \theta(w,1)$, we obtain that $s(w,t) = (\sigma(w), \varphi(w)t)$ and (7.2) becomes

$$\varphi(w_1+w_2)t_1t_2\mathcal{F}(w_1,w_2) = \varphi(w_1)t_1\varphi(w_2)t_2\mathcal{F}(\sigma(w_1),\sigma(w_2))$$

that is the condition (7.1). Furthermore, if we take $\sigma' \in \mathrm{End}(W)$ and $\varphi' : W \longrightarrow R^\times$ such that $s^{-1}(w,t) = (\sigma'(w), \varphi'(w)t)$, then $(w,t) = s(s^{-1}(w,t)) = (\sigma(\sigma'(w)), \varphi(\sigma'(w))\varphi'(w)t)$ that implies that σ is a group automorphism of W with $\sigma^{-1} = \sigma'$. Now, the left-hand side of (7.1) is symmetric on w_1 and w_2, so σ verify the symplectic property and by proposition 6.4, $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$. Furthermore the right-hand side of (7.1) is a bicharacter and so φ is a character of degree 2 of W. For the vice-versa, it is easy to check that $(w,t) \mapsto (\sigma(w), \varphi(w)t)$ is an endomorphism of $A(W)$ thanks to the property (7.1), and that it is invertible with inverse $(w,t) \mapsto (\sigma^{-1}(w), (\varphi(\sigma^{-1}w))^{-1}t)$. Notice that it acts trivially on Z, so it is an element of $\mathrm{B}_0(W)$. □

From now on, we identify an element $s \in \mathrm{B}_0(W)$ with the corresponding pair (σ,φ) such that $s(w,t) = (\sigma(w), \varphi(w)t)$. If $s_1, s_2 \in B_0(W)$ and (σ_1,φ_1) and (σ_2,φ_2) are their corresponding pairs, then the composition law of $\mathrm{B}_0(W)$ becomes $s_1 \circ s_2 = (\sigma_1,\varphi_1)(\sigma_2,\varphi_2) = (\sigma_1\circ\sigma_2, \varphi)$ where φ is defined by $\varphi(w) = \varphi_2(w)\varphi_1(\sigma_2(w))$. We observe that the identity element is $(\mathrm{id}, 1)$ and the inverse of (σ,φ) is $(\sigma^{-1}, (\varphi\circ\sigma^{-1})^{-1})$.
The projection $\pi' : \mathrm{B}_0(W) \longrightarrow \mathrm{Sp}(W)$ defined by $\pi'(\sigma,\varphi) = \sigma$ is a group homomorphism whose kernel is $\{(\mathrm{id},\tau), \tau \in X_1(W)\}$. Furthermore, by (6.5) and (7.1), we have an injective group homomorphism

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathrm{Sp}(W) & \longrightarrow & \mathrm{B}_0(W) \\ \sigma & \longmapsto & (\sigma, \chi\circ f_\sigma) \end{array} \tag{7.3}$$

such that $\pi'\circ\mu$ is the identity of $\mathrm{Sp}(W)$. This means that $\mathrm{B}_0(W)$ is the semidirect product of $\{(\mathrm{id},\tau), \tau \in X_1(W)\}$ and $\mu(\mathrm{Sp}(W))$ and in particular, by propositions 6.7 and 6.8, it is generated by $\mu(t(Q(X)))$, $\mu(d'(\mathrm{Iso}(X^*,X)))$ and $\{(\mathrm{id},\tau), \tau \in X_1(W)\}$.

Let us define some applications with values in $\mathrm{B}_0(W)$, similar to those in 6 of [Wei64], composing those with values in $\mathrm{Sp}(W)$ with μ. We call them $d_0 = \mu \circ d$, $d'_0 = \mu \circ d'$, $t_0 = \mu \circ t$ and $t'_0 = \mu \circ t'$.

7.2 The group $\mathbb{B}_0(W)$

We define $\mathbb{A}(W)$ as the image of a faithful infinite dimensional representation of $A(W)$ over R and $\mathbb{B}_0(W)$ as its normalizer in $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X))$. Then we show that in fact $\mathbb{B}_0(W)$ is a central extension of $\mathrm{B}_0(W)$ by $R^\times$.

7.2.1 $\mathbb{A}(W)$ and $\mathbb{B}_0(W)$

For every $w = (v, v^*) \in X \times X^* = W$ and every $t \in R^\times$, we denote by $U(w,t)$ the R-linear operator on $\mathcal{S}(X)$ defined by

$$U(w,t)\Phi : x \mapsto t\Phi(x+v)\langle x, v^*\rangle$$

for every function $\Phi \in \mathcal{S}(X)$. It can be directly verified that $U(w,t)$ lies in $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X))$ for every $w \in W$ and $t \in R^\times$. With a slight abuse of notation we write $U(w) = U(w,1)$ for every $w \in W$.

Let $\mathbb{A}(W) = \{U(w,t) \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X)) \mid t \in R^\times, w \in W\}$. It is not hard to see that it is a subgroup of $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X))$ and that its multiplication law is given by

$$U(w_1,t_1)U(w_2,t_2) = U(w_1+w_2, t_1t_2\mathcal{F}(w_1,w_2)). \tag{7.4}$$

Lemma 7.2. *The map*

$$\begin{array}{rcl} U : A(W) & \longrightarrow & \mathbb{A}(W) \\ (w,t) & \longmapsto & U(w,t). \end{array}$$

is a group isomorphism.

Proof. By (7.4) the map U preserves operations and it is cleraly surjective. For injectivity we have to prove that if $t\Phi(x+v)\langle x, v^*\rangle = \Phi(x)$ for every $\Phi \in \mathcal{S}(X)$ and every $x \in X$ then $t = 1$ and $(v, v^*) = (0,0)$. If we take $x = 0$ and Φ the characteristic function $\mathbf{1}_K$ of any compact open subgroup K of X, we obtain that $t\mathbf{1}_K(v) = 1$ for every K and so $t = 1$ and $v = 0$. Therefore we have that $\langle x, v^*\rangle = 1$ for every $x \in X$ and so $v^* = 0$ by (6.1). □

Remark 7.3. The homomorphism U is a representation of $A(W)$ on the R-module $\mathcal{S}(X)$.

The group $\mathrm{B}_0(W)$ acts on $A(W)$ and so on $\mathbb{A}(W)$ via the isomorphism in lemma 7.2. This action is given by

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{B}_0(W) \times \mathbb{A}(W) & \longrightarrow & \mathbb{A}(W) \\ ((\sigma,\varphi), U(w,t)) & \longmapsto & U(\sigma(w), t\varphi(w)). \end{array}$$

Moreover, we can identify $\mathrm{B}_0(W)$ with the group of automorphisms of $\mathbb{A}(W)$ acting trivially on the center $Z(\mathbb{A}(W)) = \{t \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{S}(X)} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X)) \mid t \in R^\times\} \cong R^\times$.

We denote by $\mathbb{B}_0(W)$ the normalizer of $\mathbb{A}(W)$ in $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X))$, that is

$$\mathbb{B}_0(W) = \left\{\mathbf{s} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X)) \mid \mathbf{s}\mathbb{A}(W)\mathbf{s}^{-1} = \mathbb{A}(W)\right\}.$$

So, if $\mathbf{s}$ is an element of $\mathbb{B}_0(W)$, conjugation by $\mathbf{s}$, denoted by $\mathrm{conj}(\mathbf{s})$, is an automorphism of $\mathbb{A}(W)$.

Lemma 7.4. *The map*

$$\begin{array}{rcl} \pi_0 : \mathbb{B}_0(W) & \longrightarrow & \mathrm{B}_0(W) \\ \mathbf{s} & \longmapsto & \mathrm{conj}(\mathbf{s}) \end{array}$$

is a group homomorphism

Proof. Clearly $\mathrm{conj}(\mathbf{s})$ is trivial on the group $Z(\mathbb{A}(W)) = \{t \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{S}(X)} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X)) \mid t \in R^\times\}$ and so it lies in $\mathrm{B}_0(W)$. Moreover $\mathrm{conj}(\mathbf{s}_1\mathbf{s}_2) = \mathrm{conj}(\mathbf{s}_1)\mathrm{conj}(\mathbf{s}_2)$ so that π_0 preserves the group operation. □

Theorem 7.5. *The following sequence is exact :*

$$1 \longrightarrow R^\times \longrightarrow \mathbb{B}_0(W) \xrightarrow{\pi_0} B_0(W) \longrightarrow 1$$

where $R^\times$ injects in $\mathrm{B}_0(W)$ by $t \mapsto t \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{S}(X)}$.

We prove this theorem in paragraph 7.2.3. Before that, we need to construct, as proposed in 13 of [Wei64], some "liftings" to $\mathbb{B}_0(W)$ of the applications d_0, d_0' and t_0.

7.2.2 Realization of forms on $\mathbb{B}_0(W)$

We fix a Haar measure dx on the finite dimensional F-vector space X with values in R. We denote by dx^* the dual measure of dx on X^* and $dw = dxdx^*$ the product Haar measure on W.

From now on, we suppose that there exists a fixed square root $q^{\frac{1}{2}}$ of q in R. If ν is an isomorphism of F-vector spaces and $|\nu| = q^a$ is its module, we denote $|\nu|^{\frac{1}{2}} = (q^{\frac{1}{2}})^a \in R$.

Definition 7.6. We define the following maps.

- A group homomorphism $\mathbf{d}_0 : \mathrm{Aut}(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X))$ defined by

$$\mathbf{d}_0(\alpha)\Phi = |\alpha|^{-\frac{1}{2}}(\Phi \circ \alpha^{-1})$$

  for every $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ and every $\Phi \in \mathcal{S}(X)$.

- A map $\mathbf{d}'_0 : \mathrm{Iso}(X^*, X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X))$ defined by

$$\mathbf{d}'_0(\beta)\Phi = |\beta|^{-\frac{1}{2}}(\mathscr{F}\Phi \circ \beta^{-1})$$

  for every $\beta \in \mathrm{Iso}(X^*, X)$ and every $\Phi \in \mathcal{S}(X)$, where $\mathscr{F}\Phi$ is the Fourier transform of Φ as in (6.2). We remark that $\mathbf{d}'_0(\beta)^{-1} = \mathbf{d}'_0(-\beta^*) = |\beta|^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}^{-1}(\Phi \circ \beta)$.

- A group homomorphism $\mathbf{t}_0 : Q(X) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X))$ defined by

$$\mathbf{t}_0(f)\Phi = (\chi \circ f) \cdot \Phi$$

  for every $f \in Q(X)$ and every $\Phi \in \mathcal{S}(X)$.

We shall now prove that these maps actually map to $\mathbb{B}_0(W)$ and that they lift to $\mathbb{B}_0(W)$ the maps d_0, d'_0 and t_0.

Proposition 7.7. *The images of* $\mathbf{d}_0$, $\mathbf{d}'_0$ *and* $\mathbf{t}_0$ *are in* $\mathbb{B}_0(W)$ *and they satisfy*

$$\pi_0 \circ \mathbf{d}_0 = d_0 \qquad \pi_0 \circ \mathbf{d}'_0 = d'_0 \qquad \textit{and} \qquad \pi_0 \circ \mathbf{t}_0 = t_0.$$

Proof. For every $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$, $\Phi \in \mathcal{S}(X)$, $w = (v, v^*) \in W$ and $x \in X$ we have

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_0(\alpha)U(w)\mathbf{d}_0(\alpha)^{-1}\Phi(x) &= \mathbf{d}_0(\alpha)U(w)|\alpha|^{\frac{1}{2}}(\Phi \circ \alpha)(x) = \Phi(\alpha(\alpha^{-1}(x) + u))\langle \alpha^{-1}(x), v^*\rangle \\ &= \Phi(x + \alpha(u))\langle x, \alpha^{*-1}(v^*)\rangle = d_0(\alpha)U(w)\Phi(x).\end{aligned}$$

For every $\beta \in \mathrm{Iso}(X^*, X)$, $\Phi \in \mathcal{S}(X)$, $w = (v, v^*) \in W$ and $x \in X$ we have

$$\begin{aligned}\mathbf{d}'_0(\beta)U(w)\mathbf{d}'_0(\beta)^{-1}\Phi(x) &= \mathbf{d}'_0(\beta)U(w)|\beta|^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}^{-1}(\Phi \circ \beta)(x) \\ &= \int_X \left(\int_{X^*} \Phi(\beta(x^*))\langle x_1 + v, -x^*\rangle dx^* \right) \langle x_1, v^*\rangle \langle x_1, \beta^{-1}(x)\rangle dx_1 \\ &= \int_X \left(\int_{X^*} \Phi(\beta(x^*))\langle -v, x^*\rangle \langle x_1, -x^*\rangle dx^* \right) \langle x_1, v^* + \beta^{-1}(x)\rangle dx_1 \\ &= \Phi(\beta(v^* + \beta^{-1}(x)))\langle -v, v^* + \beta^{-1}(x)\rangle \\ &= \Phi(x + \beta(v^*))\langle x, -\beta^{*-1}(v)\rangle \langle v, -v^*\rangle = d'_0(\beta)U(w)\Phi(x).\end{aligned}$$

For every $f \in Q(X)$, $\Phi \in \mathcal{S}(X)$, $w = (v, v^*) \in W$ and $x \in X$ we have

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_0(f)U(w)\mathbf{t}_0(f)^{-1}\Phi(x) &= \chi(f(x))\chi(f(x + v))^{-1}\Phi(x + v)\langle x, v^*\rangle \\ &= \chi(f(v))^{-1}\langle x, \rho(v)\rangle^{-1}\Phi(x + v)\langle x, v^*\rangle \\ &= t_0(f)U(w)\Phi(x).\end{aligned}$$

These equalities prove at the same time that the images of $\mathbf{d}_0$, $\mathbf{d}'_0$ and $\mathbf{t}_0$ are in $\mathbb{B}_0(W)$ and that they lift to $\mathbb{B}_0(W)$ respectively the maps d_0, d'_0 and t_0. □

Proposition 7.7 and the injectivity of d_0 and t_0 entail injectivity for $\mathbf{d}_0$ and $\mathbf{t}_0$. Moreover propositions 6.6 and 7.7 say that for every $f \in Q(X)$, $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ and $\beta \in \mathrm{Iso}(X^*, X)$, the three elements $\mathbf{d}_0(\alpha)^{-1}\mathbf{t}_0(f)\mathbf{d}_0(\alpha)$, $\mathbf{d}'_0(\alpha\circ\beta)$ and $\mathbf{d}'_0(\beta\circ\alpha^{*-1})$ of $\mathbb{B}_0(W)$ differ, respectively from $\mathbf{t}_0(f^\alpha)$, $\mathbf{d}_0(\alpha)\mathbf{d}'_0(\beta)$ and $\mathbf{d}'_0(\beta)\mathbf{d}_0(\alpha)$ just by elements of $R^\times$. A direct calculation gives

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_0(\alpha)^{-1}\mathbf{t}_0(f)\mathbf{d}_0(\alpha) &= \mathbf{t}_0(f^\alpha) \\ \mathbf{d}'_0(\alpha\circ\beta) &= \mathbf{d}_0(\alpha)\mathbf{d}'_0(\beta) \\ \mathbf{d}'_0(\beta\circ\alpha^{*-1}) &= \mathbf{d}'_0(\beta)\mathbf{d}_0(\alpha) \end{aligned} \tag{7.5}$$

so that in fact these elements are the identity.

7.2.3 Proof of theorem 7.5

In this paragraph we give a proof of theorem 7.5 that is fundamental for the definition of the metaplectic group.

Firstly we prove that π_0 is surjective : we know that $\mathrm{B}_0(W)$ is generated by $\mu(t(Q(X)))$, $\mu(d'(\mathrm{Iso}(X^*, X)))$ and $\{(\mathrm{id}, \tau), \tau \in X_1(W)\}$ so that it is sufficient to prove that every element in these sets is in the image of π_0. By proposition 7.7, this is proved for the sets $\mu(t(Q(X)))$ and $\mu(d'(\mathrm{Iso}(X^*, X)))$. Moreover by (6.1) we have that every character τ of W is of the form $\tau(v, v^*) = \langle a, v^*\rangle\langle v, a^*\rangle$ for suitable $a \in X$ and $a^* \in X^*$. For every $w = (v, v^*) \in W$ and $t \in R^\times$ we have $(1, \tau)U(w, t) = U(w, t\cdot\tau(w)) = U(w, t\langle a, v^*\rangle\langle v, a^*\rangle) = U(a, -a^*)U(w, t)U(-a, a^*, \langle a, -a^*\rangle)$ and so $(\mathrm{id}, \tau) = \pi_0(U(a, -a^*))$.

Let us now calculate the kernel of π_0. For $\phi \in \mathcal{S}(X \times X^*)$ we denote by $\mathcal{U}(\phi)$ the operator on $\mathcal{S}(X)$ defined by

$$\mathcal{U}(\phi) = \int_W U(w, \phi(w))dw = \int_W \phi(w)U(w)dw.$$

This means that for every $\Phi \in \mathcal{S}(X)$ and every $x \in X$ we have

$$\mathcal{U}(\phi)\Phi(x) = \int_W \phi(w)(U(w)\Phi)(x)dw = \int_W \phi(v, v^*)\Phi(x + v)\langle x, v^*\rangle dvdv^*$$

where $w = (v, v^*)$. Given $P, Q \in \mathcal{S}(X)$ we denote by $\phi_{P,Q} \in \mathcal{S}(X \times X^*)$ the function defined by

$$\phi_{P,Q}(v, v^*) = \int_X P(v')Q(v' + v)\langle -v', v^*\rangle dv'$$

for every $v \in X, v^* \in X^*$. With this definition we obtain

$$\mathcal{U}(\phi_{P,Q})\Phi(x) = \int_X \Phi(x + v)\int_{X^*}\int_X P(v')Q(v' + v)\langle x - v', v^*\rangle dv'dv^*dv$$

and using proposition 6.2 we have

$$\mathcal{U}(\phi_{P,Q})\Phi(x) = \int_X \Phi(x+v)P(x)Q(x+v)dv = \int_X \Phi(v)Q(v)dvP(x).$$

If we denote by $[P,Q] = \int_X P(x)Q(x)dx$ for every $P,Q \in \mathcal{S}(X)$ we have $\mathcal{U}(\phi_{P,Q})\Phi = [\Phi,Q]P$.

Now, $\mathbf{s}$ is in the kernel of π_0 if and only if it lies in the centralizer of $\mathbb{A}(W)$ in $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X))$. If this is the case, then $\mathbf{s}$ commutes with $\mathcal{U}(\phi)$ in $\mathrm{End}(\mathcal{S}(X))$ for every $\phi \in \mathcal{S}(X \times X^*)$, i.e. $\mathbf{s}(U(\phi)\Phi) = U(\phi)(\mathbf{s}(\Phi))$. In particular $\mathbf{s}$ commutes with operators of the form $\mathcal{U}(\phi_{P,Q})$ for every $P,Q \in \mathcal{S}(X)$, that is $[\mathbf{s}\Phi,Q]P = [\Phi,Q]\mathbf{s}P$ for every $\Phi,P,Q \in \mathcal{S}(X)$. If we choose $\Phi = Q = \mathbf{1}_K$ where K is a compact open subgroup of X with $\mathrm{vol}(K,dx) \in R^\times$, we can write

$$\mathbf{s}P = \frac{[\mathbf{s}\Phi,Q]}{[\Phi,Q]}P.$$

In other words $\mathbf{s}$ is of the form $\Phi \mapsto t\Phi$ for a suitable $t \in R$ and t has to be invertible since $\mathbf{s}$ is an automorphism. Hence $\ker(\pi_0) \subseteq \{t \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{S}(X)} \in \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X)) \,|\, t \in R^\times\}$. The converse is true because the center of a group is always contained in its centralizer.

Remark 7.8. In proving theorem 7.5 the techniques used in [Wei64] could be adapted to show that $\ker(\pi_0) \cong R^\times$, but not to prove surjectivity of π_0.

7.3 The metaplectic group

We have just defined in (7.3) and lemma 7.4 the group homomorphisms

$$\begin{array}{rcl} \mu : \mathrm{Sp}(W) & \longrightarrow & \mathrm{B}_0(W) \\ \sigma & \longmapsto & (\sigma, \chi \circ f_\sigma) \end{array} \qquad \text{and} \qquad \begin{array}{rcl} \pi_0 : \mathbb{B}_0(W) & \longrightarrow & \mathrm{B}_0(W) \\ \mathbf{s} & \longmapsto & conj(\mathbf{s}). \end{array}$$

The first one is injective, while the second one is surjective with kernel isomorphic to $R^\times$. We remark that the definition of $\mathbb{B}_0(W)$ and these two homomorphisms depend on the choice of the integral domain R and the smooth non-trivial character χ.

Definition 7.9. The *metaplectic group* of W, attached to R and χ, is the subgroup $\mathrm{Mp}_{R,\chi}(W) = \mathrm{Sp}(W) \times_{\mathrm{B}_0(W)} \mathbb{B}_0(W)$ of $\mathrm{Sp}(W) \times \mathbb{B}_0(W)$ of the pairs $(\sigma,\mathbf{s})$ such that $\mu(\sigma) = \pi_0(\mathbf{s})$.

From now on, we write $\mathrm{Mp}(W)$ instead of $\mathrm{Mp}_{R,\chi}(W)$. We have a group homomorphism

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathrm{Mp}(W) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(W) \\ (\sigma,\mathbf{s}) & \longmapsto & \sigma. \end{array}$$

The morphism π_0 is surjective and surjectivity in the category of groups is preserved under base-change, therefore π is surjective. Moreover an element $(\sigma,\mathbf{s})$ is in the kernel of

π if and only if $\mathbf{s}$ is in the kernel of π_0 ; that is, the kernel is isomorphic to $R^\times$. Thus we obtain :

Theorem 7.10. *The following sequence is exact :*

$$1 \longrightarrow R^\times \longrightarrow \mathrm{Mp}(W) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Sp}(W) \longrightarrow 1 \tag{7.6}$$

where $R^\times$ *injects in* $\mathrm{Mp}(W)$ *by* $t \mapsto (\mathrm{id}, t \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{S}(X)})$.

Since $\mathbb{B}_0(W) = \mathrm{B}_0(W)/R^\times$ and $\mathbb{B}_0(W) \subset \mathrm{Aut}(\mathcal{S}(X))$, we may regard μ as a projective representation of the symplectic group. Then, the metaplectic group is defined in such a way that the map

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Mp}(W) & \longrightarrow & \mathbb{B}_0(W) \\ (\sigma, \mathbf{s}) & \longmapsto & \mathbf{s} \end{array} \tag{7.7}$$

is a faithful representation on the R-module $\mathcal{S}(X)$ that lifts μ.

Chapitre 8

The Weil factor

The sequence (7.6) constitutes the object of our study and the rest of the article is devoted to study its properties. Following the idea of Weil, we define in this section a map γ that associates to every non-degenerate quadratic form f on X an invertible element $\gamma(f) \in R^\times$ (cfr. 14 of [Wei64]). This object, that we call *Weil factor*, shows up at the moment of understanding the map π by lifting a description of $\mathrm{Sp}(W)$ by generators and relations. The study of its properties is at the heart of the results in [Wei64]. We prove that similar properties hold for $\gamma(f) \in R^\times$.
The general idea is : we find the relation (8.2) in $\mathrm{B}_0(W)$ and we lift it into $\mathbb{B}_0(W)$ finding an element of $R^\times$ thanks to theorem 7.5. Then we proceed in two directions : on one hand we prove results that are useful to calculate $\gamma(f)$ while on the other we use the Weil factor to lift to $\mathrm{Mp}(W)$ the relations of proposition 6.7.

8.1 The Weil factor

Let $f \in Q^{nd}(X)$ be a non-degenerate quadratic form on X and let $\rho \in \mathrm{Iso}(X, X^*)$ be its associated symmetric isomorphism. Explicit calculations in $\mathrm{Sp}(W)$ give

$$d'(\rho^{-1})t(f)d'(-\rho^{-1})t(f) = t(-f)d'(\rho^{-1}). \tag{8.1}$$

Moreover, applying proposition 6.6, the equality (8.1) is equivalent to $\big(t(f)d'(\rho^{-1})\big)^3 = \big(d'(\rho^{-1})t(f)\big)^3 = 1$. It follows from equation (8.1) that

$$d'_0(\rho^{-1})t_0(f)d'_0(-\rho^{-1})t_0(f) = t_0(-f)d'_0(\rho^{-1}). \tag{8.2}$$

We denote

$$\mathbf{s} = \mathbf{s}(f) = \mathbf{d}'_0(\rho^{-1})\mathbf{t}_0(f)\mathbf{d}'_0(-\rho^{-1})\mathbf{t}_0(f) \quad \text{and} \quad \mathbf{s}' = \mathbf{s}'(f) = \mathbf{t}_0(-f)\mathbf{d}'_0(\rho^{-1}).$$

We have by proposition 7.7 and equation (8.2), $\pi_0(\mathbf{s}) = \pi_0(\mathbf{s}')$. Hence $\mathbf{s}$ and $\mathbf{s}'$ differ by an element of $R^\times$

Definition 8.1. Let $\gamma(f) \in R^\times$ be such that $\mathbf{s} = \gamma(f)\mathbf{s}'$. We call $\gamma(f)$ the *Weil factor* associated to $f \in Q^{nd}(X)$.

By formulas (7.5) we have $\gamma(f) = \left(\mathbf{t}_0(f)\mathbf{d}'_0(\rho^{-1})\right)^3 = \left(\mathbf{d}'_0(\rho^{-1})\mathbf{t}_0(f)\right)^3$.

We are now ready to investigate some properties of γ, starting from seeing what changes under the action of $\mathrm{Aut}(X)$.

Proposition 8.2. *Let $f \in Q^{nd}(X)$.*

(i) We have $\gamma(-f) = \gamma(f)^{-1}$.

(ii) For every $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ we have $\gamma(f^\alpha) = \gamma(f)$.

Proof. Let $f \in Q^{nd}(X)$ be associated to the symmetric isomorphism ρ.

(i) We have $\gamma(-f) = \left(\mathbf{t}_0(-f)\mathbf{d}'_0(-\rho^{-1})\right)^3 = \left(\mathbf{d}'_0(\rho^{-1})\mathbf{t}_0(f)\right)^{-3} = \gamma(f)^{-1}$.

(ii) The symmetric isomorphism associated to f^α is $\alpha^*\rho\alpha$. Then we have

$$\begin{aligned}\gamma(f^\alpha) &= \left(\mathbf{t}_0(f^\alpha)\mathbf{d}'_0(\alpha^{-1}\rho^{-1}\alpha^{*-1})\right)^3 = \left(\mathbf{d}_0(\alpha)^{-1}\mathbf{t}_0(f)\mathbf{d}_0(\alpha)\mathbf{d}_0(\alpha)^{-1}\mathbf{d}'_0(\rho^{-1})\mathbf{d}_0(\alpha)\right)^3 \\ &= \mathbf{d}_0(\alpha)^{-1}\left(\mathbf{t}_0(f)\mathbf{d}'_0(\rho^{-1})\right)^3\mathbf{d}_0(\alpha) = \gamma(f).\end{aligned}$$

□

Proposition 8.2 gives actually a strong result in a particular case : if $-1 \in (F^\times)^2$ and $a^2 = -1$ with $a \in F^\times$ then $x \mapsto ax$ is an automorphism of X. By proposition 8.2 we have $\gamma(f) = \gamma(-f) = \gamma(f)^{-1}$, in other words $\gamma(f)^2 = 1$. This does not hold in general for a local field F without square roots of -1.

Let $f \in Q^{nd}(X)$ be associated to ρ and define $\varphi = \chi \circ f$. Notice that $\varphi(-x) = \varphi(x)$. For every $\Phi \in \mathcal{S}(X)$, we denote by $\Phi * \varphi$ the convolution product defined by

$$(\Phi * \varphi)(x) = \int_X \Phi(x')\varphi(x - x')dx'$$

for every $x \in X$. We have that $\Phi * \varphi \in \mathcal{S}(X)$, indeed

$$\begin{aligned}(\Phi * \varphi)(x) &= \int_X \Phi(x')\varphi(x - x')dx' = \varphi(x)\int_X \Phi(x')\varphi(-x')\langle x, \rho(-x')\rangle dx' \\ &= \varphi(x)\int_X \Phi(x')\varphi(x')\langle x', -\rho(x)\rangle dx' = |\rho|^{-\frac{1}{2}}\mathbf{t}_0(f)\mathbf{d}_0(-\rho^{-1})\mathbf{t}_0(f)\Phi(x)\end{aligned}$$

where we have used that $\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y)\langle x, \rho(y)\rangle$ for every $x, y \in X$.

Now we state a proposition that gives a summation formula for $\gamma(f)$ and that allows us to calculate in theorem 9.1 the value of γ for a specific quadratic form over F.

Proposition 8.3. *Let $f \in Q^{nd}(X)$ be associated to the symmetric isomorphism $\rho \in \mathrm{Iso}(X, X^*)$ and let $\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in \mathbb{B}_0(W)$ as in Definition 8.1. We set $\varphi = \chi \circ f$.*

1. *For every $\Phi \in \mathcal{S}(X)$ and for every $x \in X$ we have $\mathbf{s}\Phi(x) = |\rho|\mathscr{F}(\Phi * \varphi)(\rho(x))$ and $\mathbf{s}'\Phi(x) = |\rho|^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}\Phi(\rho(x))\varphi(x)^{-1}$.*
2. *For every $\Phi \in \mathcal{S}(X)$ and for every $x^* \in X^*$ we have*

$$\mathscr{F}(\Phi * \varphi)(x^*) = \gamma(f)|\rho|^{-\frac{1}{2}}\mathscr{F}\Phi(x^*)\varphi(\rho^{-1}x^*)^{-1}. \tag{8.3}$$

3. *There exists a sufficiently large compact open subgroup K_0 of X such that for every compact open subgroup K of X containing K_0 and for every $x^* \in X^*$, the integral $\int_K \varphi(x)\langle x, x^*\rangle dx$ does not depend on K. Moreover we have*

$$\int_K \varphi(x)\langle x, x^*\rangle dx = \gamma(f)|\rho|^{-\frac{1}{2}}\varphi(\rho^{-1}x^*)^{-1} \tag{8.4}$$

   and we denote $\mathscr{F}\varphi = \int_K \varphi(x)\langle x, x^*\rangle dx$.

4. *If K is a sufficiently large compact open subgroup of X, we have*

$$\gamma(f) = |\rho|^{\frac{1}{2}} \int_K \chi(f(x))dx. \tag{8.5}$$

Proof.

1. For every $\Phi \in \mathcal{S}(X)$ and every $x \in X$ we have

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}\Phi(x) &= \mathbf{d}'_0(\rho^{-1})\mathbf{t}_0(f)\mathbf{d}'_0(-\rho^{-1})\mathbf{t}_0(f)\Phi(x) \\
&= |\rho| \int_X \int_X \Phi(x_1)\varphi(x_1)\langle x_1, -\rho(x_2)\rangle\varphi(x_2)\langle x_2, \rho(x)\rangle dx_1 dx_2 \\
&= |\rho| \int_X \int_X \Phi(x_1)\varphi(-x_1)\langle x_1, -\rho(x_2)\rangle\varphi(x_2)\langle x_2, \rho(x)\rangle dx_1 dx_2 \\
&= |\rho| \int_X \int_X \Phi(x_1)\varphi(x_2 - x_1)\langle x_2, \rho(x)\rangle dx_1 dx_2 = |\rho|\mathscr{F}(\Phi * \varphi)(\rho(x))
\end{aligned}$$

   and also

$$\mathbf{s}'\Phi(x) = \mathbf{t}_0(-f)\mathbf{d}'_0(\rho^{-1})\Phi(x) = \mathbf{t}_0(-f)|\rho|^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}(\Phi \circ \rho)(x) = \varphi(x)^{-1}|\rho|^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}(\Phi \circ \rho)(x).$$

2. By the equality $\mathbf{s} = \gamma(f)\mathbf{s}'$ we have $|\rho|\mathscr{F}(\Phi * \varphi)(\rho(x)) = \gamma(f)|\rho|^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}\Phi(\rho(x))\varphi(x)^{-1}$ and replacing $\rho(x)$ by x^* we obtain the equality (8.3).
3. Taking $\Phi = \mathbf{1}_H$ for a compact open subgroup H of X in formula (8.3), we obtain

$$\int_X (\mathbf{1}_H * \varphi)(x_1)\langle x_1, x^*\rangle dx_1 = \gamma(f)|\rho|^{-\frac{1}{2}}\mathscr{F}\mathbf{1}_H(x^*)\varphi(\rho^{-1}x^*)^{-1}.$$

We want to calculate the integral in the left hand side. We can take a compact open subgroup K_0 of X large enough to contain both H and the support of $\mathbf{1}_H * \varphi$ obtaining

$$\int_X (\mathbf{1}_H * \varphi)(x_1)\langle x_1, x^*\rangle dx_1 = \int_{K_0}\int_H \varphi_{|K_0}(x_1 - x_2)dx_2\langle x_1, x^*\rangle dx_1.$$

Now, we can prove that $\varphi_{|K_0}$ is locally constant and that we can change the order of the two integrals, i.e.

$$\begin{aligned}\int_X (\mathbf{1}_H * \varphi)(x_1)\langle x_1, x^*\rangle dx_1 &= \int_H\int_{K_0} \varphi_{|K_0}(x_1 - x_2)\langle x_1, x^*\rangle dx_1 dx_2 \\ &= \int_H\int_{K_0} \varphi_{|K_0}(x_1')\langle x_1' + x_2, x^*\rangle dx_1' dx_2 \\ &= \mathscr{F}\mathbf{1}_H(x^*)\int_{K_0} \varphi_{|K_0}(x_1')\langle x_1', x^*\rangle dx_1'.\end{aligned}$$

Since $\mathscr{F}\mathbf{1}_H = \mathrm{vol}(H)\mathbf{1}_{H_*}$ and $\mathrm{vol}(H) \neq 0$, we obtain the equality (8.4) for every $x^* \in H_*$ and every H compact open subgroup of X. Now H_* cover X^*, varying H, and so the equality holds for every $x^* \in X^*$. It is clear that the equality holds also for every compact open subgroup K of X containing K_0.

4. Setting $x^* = 0$ in (8.4) we obtain $\gamma(f) = |\rho|^{\frac{1}{2}}\int_K \varphi(x)dx = |\rho|^{\frac{1}{2}}\int_K \chi(f(x))dx$. □

Remark 8.4. The second result in proposition 8.2 is true more generally for every $\alpha' \in \mathrm{Iso}(X', X)$ where X' is a finite dimensional F-vector space. In fact if K' is a compact open subgroup of X' large enough, $f \in Q^{nd}(X)$ and $\alpha \in \mathrm{Iso}(X', X)$ by (8.5) we have

$$\begin{aligned}\gamma(f\circ\alpha) &= |\alpha^*\rho\alpha|^{\frac{1}{2}}\int_{K'}\chi(f(\alpha(x')))dx' = |\rho|^{\frac{1}{2}}|\alpha|\int_{X'}\mathbf{1}_{\alpha(K')}(\alpha(x'))\chi(f(\alpha(x')))dx' \\ &= |\rho|^{\frac{1}{2}}\int_X \mathbf{1}_{\alpha(K')}(x)\chi(f(x))dx' = \gamma(f).\end{aligned}$$

8.1.1 Symplectic generators in $\mathbb{B}_0(W)$

Definition 8.5. Let $\sigma \in \Omega(W)$. By proposition 6.8 we can write $\sigma = t(f_1)d'(\beta)t(f_2)$ for unique $f_1, f_2 \in Q(X)$ and $\beta \in \mathrm{Iso}(X^*, X)$. We define a map $\mathbf{r}_0 : \Omega(W) \to \mathbb{B}_0(W)$ by

$$\mathbf{r}_0(\sigma) = \mathbf{t}_0(f_1)\mathbf{d}_0'(\beta)\mathbf{t}_0(f_2)$$

for every $\sigma \in \Omega(W)$.

Now we state a theorem that says how an equality $\sigma'' = \sigma\sigma'$ in $\Omega(W)$ lifts to $\mathbb{B}_0(W)$. After a comparison with section 15 of [Wei64] the differences turn out to be the use of Fourier transform for Schwartz functions and previous changes in notations. Finally we have clarified some points and made them explicit.

Theorem 8.6. *Let* $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\sigma' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ *and* $\sigma'' = \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix}$ *be elements of* $\Omega(W)$ *such that* $\sigma'' = \sigma\sigma'$. *Then*

$$\mathbf{r}_0(\sigma)\mathbf{r}_0(\sigma') = \gamma(f_0)\mathbf{r}_0(\sigma'')$$

where f_0 *is the non-degenerate quadratic form on* X *associated to the symmetric isomorphism* $-\beta^{-1}\beta''\beta'^{-1} : X \to X^*$.

Proof. Since $\mathbf{r}_0(\sigma)\mathbf{r}_0(\sigma')$ and $\mathbf{r}_0(\sigma'')$ have the same image by π_0, we can set $\mathbf{r}_0(\sigma)\mathbf{r}_0(\sigma') = \lambda\mathbf{r}_0(\sigma'')$ where $\lambda \in R^\times$ depends on σ, σ'. By Definition 8.5 we have

$$\mathbf{t}_0(f_1)\mathbf{d}'_0(\beta)\mathbf{t}_0(f_2)\mathbf{t}_0(f'_1)\mathbf{d}'_0(\beta')\mathbf{t}_0(f'_2) = \lambda\mathbf{t}_0(f''_1)\mathbf{d}'_0(\beta'')\mathbf{t}_0(f''_2)$$

for suitable $f_1, f_2, f'_1, f'_2, f''_1, f''_2 \in Q(X)$. Setting $f_0 = f_2 + f'_1$, $f_3 = -f_1 + f''_1$ and $f_4 = f''_2 - f'_2$ we obtain $\mathbf{d}'_0(\beta)\mathbf{t}_0(f_0)\mathbf{d}'_0(\beta') = \mathbf{d}'_0(\beta)\mathbf{t}_0(f_0)\mathbf{d}'_0(-\beta'^*)^{-1} = \lambda\mathbf{t}_0(f_3)\mathbf{d}'_0(\beta'')\mathbf{t}_0(f_4)$ where we have used that $\mathbf{d}'_0(\beta')^{-1} = \mathbf{d}'_0(-\beta'^*)$. By remark 6.9 the symmetric homomorphisms associated to f_2 and f'_1 are $\rho_2 = -\beta^{-1}\alpha$ and $\rho'_1 = -\delta'\beta'^{-1}$, hence the symmetric homomorphism associated to f_0 is $\rho_0 = \rho_2 + \rho'_1 = -\beta^{-1}(\alpha\beta' + \beta\delta')\beta'^{-1} = -\beta^{-1}\beta''\beta'^{-1} = -\beta'^{*-1}\beta''^*\beta^{*-1}$ that is also an isomorphism.
We set $\varphi_i = \chi \circ f_i$ for $i = 0, 3, 4$. For every $\Phi \in \mathcal{S}(X)$ and $x \in X$ we have

$$\mathbf{d}'_0(\beta)\mathbf{t}_0(f_0)\mathbf{d}'_0(-\beta'^*)^{-1}\Phi(x) = |\beta|^{-\frac{1}{2}}|\beta'|^{\frac{1}{2}}\mathscr{F}(\mathscr{F}^{-1}(\Phi \circ (-\beta'^*)) \cdot \varphi_0)(\beta^{-1}x).$$

By proposition 6.2 the Fourier transform of a pointwise product is the convolution product of the Fourier transforms and then

$$\mathbf{d}'_0(\beta)\mathbf{t}_0(f_0)\mathbf{d}'_0(\beta')\Phi(x) = |\beta|^{-\frac{1}{2}}|\beta'|^{\frac{1}{2}}\big((\Phi \circ \beta'^*) * \mathscr{F}\varphi_0\big)(\beta^{-1}x) = y.$$

Using formula (8.4) we obtain

$$\begin{aligned} y &= \gamma(f_0)|\rho_0|^{-\frac{1}{2}}|\beta|^{-\frac{1}{2}}|\beta'|^{\frac{1}{2}}\big((\Phi \circ \beta'^*) * (\varphi_0 \circ \rho_0^{-1})^{-1}\big)(\beta^{-1}x) \\ &= \gamma(f_0)|\beta''|^{-\frac{1}{2}}|\beta'|\big((\Phi \circ \beta'^*) * (\varphi_0 \circ \rho_0^{-1})^{-1}\big)(\beta^{-1}x) \\ &= \gamma(f_0)|\beta''|^{-\frac{1}{2}}|\beta'|\int_{X^*} \Phi(\beta'^*(x^*))\varphi_0(\beta^*\beta''^{*-1}\beta'^*(x^*) - \beta'\beta''^{-1}(x))^{-1}dx^* \\ &= \gamma(f_0)|\beta''|^{-\frac{1}{2}}\int_X \Phi(x_1)\varphi_0(-\beta'\beta''^{-1}(x) + \beta^*\beta''^{*-1}(x_1))^{-1}dx_1 \end{aligned}$$

where in the last step we have used the change of variables $\beta'^*(x^*) \mapsto x_1$. Furthermore we have

$$\mathbf{t}_0(f_3)\mathbf{d}'_0(\beta'')\mathbf{t}_0(f_4)\Phi(x) = |\beta''|^{-\frac{1}{2}}\int_X \Phi(x_1)\varphi_4(x_1)\varphi_3(x)\langle x_1, \beta''^{-1}x\rangle dx_1$$

and then

$$\gamma(f_0)\int_X \Phi(x_1)\varphi_0(-\beta'\beta''^{-1}(x)+\beta^*\beta''^{*-1}(x_1))^{-1}dx_1 = \lambda\int_X \Phi(x_1)\varphi_4(x_1)\varphi_3(x)\langle x_1,\beta''^{-1}x\rangle dx_1.$$

We observe that the two sides are of the form $c_i\int_X \Phi(x_1)\vartheta_i(x_1,x)dx_1$ for $i=1,2$, where $c_i\in R^\times$ and ϑ_i are characters of degree 2 of $X\times X$. Since the equality holds for every $\Phi\in\mathcal{S}(X)$ and every $x\in X$, we obtain that $c_1=c_2$ and $\vartheta_1=\vartheta_2$ and so $\gamma(f_0)=\lambda$. □

8.2 Metaplectic realizations of forms

Definitions 6.5 and 7.6 allow us to define some applications from $\mathrm{Aut}(X)$, $\mathrm{Iso}(X^*,X)$ and $Q(X)$ to $\mathrm{Mp}(W)$, similar to those in 34 of [Wei64], that satisfy relations analogous to those of $\mathbf{d}_0$, $\mathbf{d}'_0$ and $\mathbf{t}_0$.

Definition 8.7. Let $\mathrm{Mp}(W)$ be as in Definition 7.9. We define the following applications.

- The injective group homomorphism $\mathbf{d}:\mathrm{Aut}(X)\longrightarrow\mathrm{Mp}(W)$ given by $\mathbf{d}(\alpha)=(d(\alpha),\mathbf{d}_0(\alpha))$ for every $\alpha\in\mathrm{Aut}(X)$.
- The injective map $\mathbf{d}':\mathrm{Iso}(X^*,X)\longrightarrow\mathrm{Mp}(W)$ given by $\mathbf{d}'(\beta)=(d'(\beta),\mathbf{d}'_0(\beta))$ for every $\beta\in\mathrm{Iso}(X^*,X)$.
- The injective group homomorphism $\mathbf{t}:Q(X)\longrightarrow\mathrm{Mp}(W)$ given by $\mathbf{t}(f)=(t(f),\mathbf{t}_0(f))$ for every $f\in Q(X)$.

By proposition 6.6 and by (7.5) we have

$$\mathbf{d}(\alpha)^{-1}\mathbf{t}(f)\mathbf{d}(\alpha)=\mathbf{t}(f^\alpha) \tag{8.6}$$

for every $f\in Q(X)$ and $\alpha\in\mathrm{Aut}(X)$. We have also the equalities $\mathbf{d}'(\alpha\circ\beta)=\mathbf{d}(\alpha)\mathbf{d}'(\beta)$ and $\mathbf{d}'(\beta\circ\alpha^{*-1})=\mathbf{d}'(\beta)\mathbf{d}(\alpha)$ for every $\alpha\in\mathrm{Aut}(X)$ and $\beta\in\mathrm{Iso}(X^*,X)$.

As in Definition 8.5, we can define a map from $\Omega(W)$ to $\mathrm{Mp}(W)$. By proposition 6.8 every element $\sigma\in\Omega(W)$ can be written uniquely as $\sigma=t(f_1)d'(\beta)t(f_2)$: we define

$$\mathbf{r}(\sigma)=\mathbf{t}(f_1)\mathbf{d}'(\beta)\mathbf{t}(f_2) \tag{8.7}$$

that is equivalent to write $\mathbf{r}(\sigma)=(\sigma,\mathbf{r}_0(\sigma))$.

Let $\sigma=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{pmatrix}$, $\sigma'=\begin{pmatrix}\alpha'&\beta'\\ \gamma'&\delta'\end{pmatrix}$ and $\sigma''=\begin{pmatrix}\alpha''&\beta''\\ \gamma''&\delta''\end{pmatrix}$ be in $\Omega(W)$ such that $\sigma\sigma'=\sigma''$. By theorem 8.6 we have

$$\mathbf{r}(\sigma)\mathbf{r}(\sigma')=\gamma(f_0)\mathbf{r}(\sigma'') \tag{8.8}$$

where f_0 is the non-degenerate quadratic form on X associated to the symmetric isomorphism $-\beta^{-1}\beta''\beta'^{-1}$.

Chapitre 9

Fundamental properties of the Weil factor

In this section we find the possible values of $\gamma(f)$ for every non-degenerate quadratic form f over F. Proposition 8.3 gives a summation formula for $\gamma(f)$ and we use it to prove that $\gamma(n) = -1$ where n is the reduced norm of the quaternion division algebra over F. In theorem 9.7 we see that γ is a R-character of the Witt group of F. Moreover we already know by proposition 8.2 that $\gamma(f)^2 = 1$ if F contains a square root of -1 and at the end of this section this is generalized by saying that, for any F, $\gamma(f)$ is a fourth root of unity in R.

For every positive integer m, we denote by q_m the non-degenerate quadratic form $q_m(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$ defined on the m-dimensional vector space F^m.

9.1 The quaternion division algebra over F

In this paragraph we use some results on quaternion algebras over F ([Vig96]) to prove that if $\mathrm{char}(R) \neq 2$ the map $\gamma : Q^{nd}(X) \longrightarrow R^\times$ is non-trivial by means of a concrete example.

By theorem II.1.1 of [Vig96] we know that there exists a unique quaternion division algebra over F (up to isomorphism) that we denote by A. The reduced norm $n : A \longrightarrow F$ is a non-degenerate quadratic form on the F-vector space underlying A and it induces a surjective group homomorphism $n_{|A^\times} : A^\times \longrightarrow F^\times$. Moreover by lemma II.1.4 of [Vig96], if v is a discrete valuation of F such that $v(\varpi) = 1$ then $v \circ n$ is a discrete valuation of A; so we can consider the ring of integers $\mathcal{O}_A = \{z \in A \,|\, n(z) \in \mathcal{O}_F\}$ of A and fix a uniformizer ϖ_A of $\mathcal{O}_A$ such that $\varpi_A^2 = \varpi$. The unique prime ideal of $\mathcal{O}_A$ is $\varpi_A \mathcal{O}_A$ and the cardinality of the residue field of A is q^2 where q is the cardinality of the residue field of F. According to Definition 6.3, we define the module of $x \in F$ (resp. $z \in A$), denoted by $|x|$ (resp. $|z|_A$), as the module of the multiplication (resp. right multiplication) by x

(resp. z). We can easily prove that $|x| = q^{-v(x)}$ and $|z|_A = |n(z)|^2$. We denote by dx and dz the Haar measures on F and A such that $\mathrm{vol}(\mathcal{O}_F, dx) = \mathrm{vol}(\mathcal{O}_A, dz) = 1$.

Theorem 9.1. *Let A be the quaternion division algebra over F and let $n : A \longrightarrow F$ be the reduced norm of A. Then $\gamma(n) = -1$.*

In order to prove this theorem, we start by calculating $|\rho_n|$, where $\rho_n \in \mathrm{Iso}(A, A^*)$ is the symmetric isomorphism associated to the quadratic form n, and then we prove that $\gamma(n)$ does not depend on the choice of the non-trivial character χ.

Lemma 9.2. *If l is the conductor of χ, then $|\rho_n| = q^{4l-2}$.*

Proof. By Definition 6.3 with $\Phi = \mathbf{1}_{(\mathcal{O}_A)_*}$, we have that $|\rho_n| = \mathrm{vol}(\rho^{-1}((\mathcal{O}_A)_*), dz)^{-1}$. Moreover $\rho_n(z_1)(z_2) = tr(z_1\bar{z_2})$ for every $z_1, z_2 \in A$, where $z \mapsto \bar{z}$ is the conjugation of A (cf. page 1 of [Vig96]). Then we have the following equivalences :

$$z \in \rho^{-1}((\mathcal{O}_A)_*) \Longleftrightarrow \langle z, \rho(\mathcal{O}_A)\rangle = 1 \Longleftrightarrow tr(z\mathcal{O}_A) \subset \ker(\chi).$$

We know that $\{z \in A \,|\, tr(z\mathcal{O}_A) \subset \mathcal{O}_F\}$ is a fractional ideal (its inverse is called codifferent ideal), and by corollary II.1.7 of [Vig96] it is exactly $\varpi_A^{-1}\mathcal{O}_A$. Then $z \in \rho^{-1}((\mathcal{O}_A)_*)$ if and only if $z \in \varpi^l\varpi_A^{-1}\mathcal{O}_A = \varpi_A^{2l-1}\mathcal{O}_A$. Hence $|\rho_n| = q^{4l-2}$. □

Lemma 9.3. *Let A and n as in theorem 9.1. Then $\gamma(n)$ does not depend on the choice of the non-trivial smooth R-character χ of F.*

Proof. We know that every non-trivial smooth character of F is of the form $\chi_a : x \mapsto \chi(ax)$ with $a \in F^\times$; in particular the conductor of χ_a is $l - v(a)$ where l is the conductor of χ. Moreover, by (8.5) and lemma 9.2, we have

$$\gamma(n) = |\rho_n|^{\frac{1}{2}} \int_{\varpi_A^{-\lambda}\mathcal{O}_A} \chi(n(z))dz = q^{2l-1} \int_{\varpi_A^{-\lambda}\mathcal{O}_A} \chi(n(z))dz$$

for λ large enough. Now we fix $a \in F^\times$ and we denote by $\gamma_a(n)$ the value of $\gamma(n)$ obtained replacing χ by χ_a. Since n is surjective there exists $z_a \in \varpi^{v(a)}\mathcal{O}_A$ such that $n(z_a) = a$. If we take $\lambda' = \lambda + v(a)$ we obtain

$$\begin{aligned}\gamma_a(n) &= q^{2(l-v(a))-1} \int_{\varpi_A^{-\lambda'}\mathcal{O}_A} \chi_a(n(z))dz = q^{2(l-v(a))-1} \int_{\varpi_A^{-\lambda'}\mathcal{O}_A} \chi(n(z_a z))dz \\ &= q^{2(l-v(a))-1}|z_a|^{-1} \int_{\varpi_A^{-\lambda'+v(a)}\mathcal{O}_A} \chi(n(z))dz = q^{2l-1} \int_{\varpi_A^{-\lambda}\mathcal{O}_A} \chi(n(z))dz = \gamma(n)\end{aligned}$$

which concludes the proof. □

Proof of theorem 9.1. For every $k \geq 0$, we fix a set of representatives $\Xi_{A,k}$ of the classes of $\mathcal{O}_A$ modulo $\varpi_A^k\mathcal{O}_A$. We denote by $\Xi_{A,k}^\times \subset \Xi_{A,k}$ the set of representatives of $\left(\mathcal{O}_A/\varpi_A^k\mathcal{O}_A\right)^\times$ and by $\Xi_{F,k}^\times \subset \Xi_{F,k} \subset n(\Xi_{A,k})$ two sets of representatives of $\left(\mathcal{O}_F/\varpi^k\mathcal{O}_F\right)^\times$ and $\mathcal{O}_F/\varpi^k\mathcal{O}_F$.

By lemma 9.3 we can suppose that the conductor of χ is 1, so that χ is trivial on $\varpi_A\mathcal{O}_A$ but not on $\mathcal{O}_A$. Then, for λ large enough, we have

$$\begin{aligned}\gamma(n) &= q\int_{\varpi_A^{-\lambda}\mathcal{O}_A}\chi(n(z))dz = q^{1+2\lambda}\int_{\mathcal{O}_A}\chi\left(\varpi^{-\lambda}n(z)\right)dz\\ &= q^{1+2\lambda}\sum_{z'\in\Xi_{A,\lambda+1}}\int_{\varpi_A^{\lambda+1}\mathcal{O}_A}\chi\left(\varpi^{-\lambda}n(z'+z)\right)dz\\ &= q^{1+2\lambda}\mathrm{vol}(\varpi_A^{\lambda+1}\mathcal{O}_A,dz)\sum_{z'\in\Xi_{A,\lambda+1}}\chi\left(\varpi^{-\lambda}n(z')\right)\\ &= q^{-1}\sum_{z'\in\Xi_{A,\lambda+1}}\chi\left(\varpi^{-\lambda}n(z')\right).\end{aligned}$$

Since $n:\left(\mathcal{O}_A/\varpi_A^{k+1}\mathcal{O}_A\right)^\times\longrightarrow\left(\mathcal{O}_F/\varpi^{k+1}\mathcal{O}_F\right)^\times$ is surjective and its kernel has cardinality $q^k(q+1)$, we have

$$\sum_{z\in\Xi_{A,k+1}^\times}\chi(\varpi^{-k}n(z)) = q^k(q+1)\sum_{x\in\Xi_{F,k+1}^\times}\chi(\varpi^{-k}x) = -q^k(q+1)\sum_{x\in\Xi_{F,k}}\chi(\varpi^{-k+1}x)$$

that is 0 if $k>0$ and $-(q+1)$ if $k=0$. Notice that in the last equality we used that the sum of the values of a non-trivial character over all elements of a finite group is 0.
Then we have that $\sum_{z'\in\Xi_{A,k+1}}\chi\left(\varpi^{-k}n(z')\right)=\sum_{z'\in\Xi_{A,k}}\chi\left(\varpi^{-k+1}n(z')\right)$ for every $k>0$ and we obtain

$$\gamma(n)=q^{-1}\sum_{z'\in\Xi_{A,1}}\chi(n(z'))=q^{-1}\Big(1+\sum_{z'\in\Xi_{A,1}^\times}\chi(n(z'))\Big)=q^{-1}(1-(q+1))=-1.\quad\square$$

Remark 9.4. The theorem 9.1 corresponds to proposition 4 of [Wei64]. Weil proves it showing that $\gamma(n)$ is a negative real number of absolute value 1 and hence his proof does not suit in our presentation. Our proof works for every integral domain R verifying our hypotheses but requires F to be non-Archimedean.

9.2 The Witt group

In this paragraph we introduce the definition of Witt group of F and we prove that γ defines a R-character of this group.

Let G_1, G_2 be two finite dimensional vector spaces over F and f_1, f_2 be two non-degenerate quadratic forms on G_1 and G_2. We define $f_1\oplus f_2\in Q^{nd}(G_1\times G_2)$ by $(f_1\oplus f_2)(x_1\oplus x_2)=f_1(x_1)+f_2(x_2)$ for every $x_1\in G_1$ and $x_2\in G_2$.

Remark 9.5. If $\rho_1 : G_1\to G_1^*$ and $\rho_2 : G_2\to G_2^*$ are the symmetric isomorphisms associated to f_1 and f_2, then $\rho_1\oplus\rho_2 : G_1\times G_2\to(G_1\times G_2)^*$, defined by $(\rho_1\oplus\rho_2)(y_1\oplus y_2)=$

$\rho_1(y_1) \oplus \rho_2(y_2)$ is the symmetric isomorphism associated to $f_1 \oplus f_2$. Indeed, calling this latter $\rho_{1,2}$, we have

$$\begin{aligned}[x_1 \oplus x_2, (\rho_1 \oplus \rho_2)(y_1 \oplus y_2)] &= [x_1, \rho_1(y_1)] + [x_2, \rho_2(y_2)] \\ &= f_1(x_1 + y_1) - f_1(x_1) - f_1(y_1) + f_2(x_2 + y_2) - f_2(x_2) - f_2(y_2) \\ &= (f_1 \oplus f_2)(x_1 \oplus x_2 + y_1 \oplus y_2) - (f_1 \oplus f_2)(x_1 \oplus x_2) - (f_1 \oplus f_2)(y_1 \oplus y_2) \\ &= [x_1 \oplus x_2, \rho_{1,2}(y_1 \oplus y_2)].\end{aligned}$$

Definition 9.6. We say that $f_1 \in Q^{nd}(G_1)$ and $f_2 \in Q^{nd}(G_2)$ are *equivalent* (and we write $f_1 \sim f_2$) if one can be obtained from the other by adding an hyperbolic quadratic form of dimension $\max\{\dim(G_1), \dim(G_2)\} - \min\{\dim(G_1), \dim(G_2)\}$ (see [MH73]). We call *Witt group* of F the set of equivalence classes of non-degenerate quadratic forms over F endowed with the operation induced by $(f_1, f_2) \longmapsto f_1 \oplus f_2$.

Theorem 9.7. *The map $f \mapsto \gamma(f)$ is a R-character of the Witt group of F.*

Proof. Let G_1 and G_2 be two finitely dimensional vector spaces over F, $f_1 \in Q^{nd}(G_1)$ and $f_2 \in Q^{nd}(G_2)$. Proposition 8.3 gives

$$\gamma(f_1 \oplus f_2) = |\rho_1 \oplus \rho_2|^{\frac{1}{2}} \int_{K_1 \times K_2} \chi((f_1 \oplus f_2)(x_1 \oplus x_2)) dx_1 dx_2$$

for compact open subgroups K_1 and K_2 of G_1 and G_2, both large enough. Now, if we consider $\mathbf{1}_{K_{1,*}} \in \mathcal{S}(G_1^*)$, $\mathbf{1}_{K_{2,*}} \in \mathcal{S}(G_2^*)$ and $\mathbf{1}_{K_{1,*} \times K_{2,*}} \in \mathcal{S}(G_1^* \times G_2^*)$, Definition 6.3 gives

$$\begin{aligned}|\rho_1||\rho_2| \int_{G_1} \mathbf{1}_{K_{1,*}}(\rho_1(x_1)) dx_1 \int_{G_2} \mathbf{1}_{K_{2,*}}(\rho_2(x_2)) dx_2 = \\ = \int_{G_1^*} \mathbf{1}_{K_{1,*}}(x_1^*) dx_1^* \int_{G_2^*} (x_2^*) \mathbf{1}_{K_{2,*}} dx_2^* = \int_{G_1^* \times G_2^*} \mathbf{1}_{K_{1,*} \times K_{2,*}}(x_1^* \oplus x_2^*) dx_1^* dx_2^* \\ = |\rho_1 \oplus \rho_2| \int_{G_1 \times G_2} \mathbf{1}_{K_{1,*} \times K_{2,*}}(\rho_1(x_1) \oplus \rho_2(x_2)) dx_1 dx_2\end{aligned}$$

and then $|\rho_1||\rho_2| = |\rho_1 \oplus \rho_2|$. Hence we obtain

$$\gamma(f_1 \oplus f_2) = |\rho_1|^{\frac{1}{2}} |\rho_2|^{\frac{1}{2}} \int_{K_1} \chi(f_1(x_1)) dx_1 \int_{K_2} \chi(f_2(x_2)) dx_2 = \gamma(f_1)\gamma(f_2).$$

We shall now to check that γ is equivariant on the equivalence classes of bilinear forms. To see that, recall that $f_1 \sim f_2$ if and only if there exist $n \in \mathbb{N}$ and an hyperbolic quadratic form $h(\mathbf{x}) = \sum x_i x_{i+n}$ of rank $2n$ such that $f_1 = f_2 \oplus h$. After what proven in the first part $\gamma(f_1) = \gamma(f_2)$ if and only if $\gamma(h) = 1$ and since every hyperbolic form is a sum of the rank 2 form $h_2 : (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$ it's sufficient to show that $\gamma(h_2) = 1$. Now, if we apply the base change $x_1 \mapsto x_1 + x_2$ and $x_2 \mapsto x_1 - x_2$ we obtain $h_2(x_1 + x_2, x_1 - x_2) = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = x_1^2 - x_2^2$ and proposition 8.2 gives that $\gamma(h_2) = \gamma(q_1 \oplus (-q_1)) = \gamma(q_1)\gamma(q_1)^{-1} = 1$. □

9.3 The image of the Weil factor

We exploit some classical results on quadratic forms over F to prove that γ takes values in the group of fourth roots of unity in R.

Definition 9.8. Let G_1, G_2 be two finite dimensional vector spaces over F and f_1, f_2 be two non-degenerate quadratic forms on G_1 and G_2. We say that f_1 and f_2 are *isometric* if there exists an isomorphism $\vartheta : G_1 \longrightarrow G_2$ such that $f_1(x) = f_2(\vartheta(x))$ for every $x \in G_1$.

Notice that, by remark 8.4, if f_1 and f_2 are isometric then $\gamma(f_1) = \gamma(f_2)$. We know also that there are only two isometry classes of non-degenerate quadratic forms on a 4-dimensional vector space over F whose discriminant is a square in $F^\times$. One class is represented by the norm n over the quaternion division algebra and the other by $q_2 \oplus -q_2$. Moreover, if $a, b \in F^\times$ and (a, b) is the Hilbert symbol with values in $R^\times$, the quadratic form $x_1^2 - ax_2^2 - bx_3^2 + abx_4^2$ lies in the first class if $(a, b) = -1$ and in the second one if $(a, b) = 1$. Furthermore by theorems 9.7 and 9.1 we have that

$$\gamma(x_1^2 - ax_2^2 - bx_3^2 + abx_4^2) = (a, b)\,. \tag{9.1}$$

In particular, for $b = -1$ we apply theorem 9.7 to this formula to get the equalities

$$\gamma(q_1)^2\gamma(-aq_1)^2 = (a, -1) \quad \text{and} \quad \gamma(aq_1)^2 = (a, -1)\,\gamma(q_1)^2$$

by proposition 8.2. Since every non-degenerate quadratic form is isometric to $\sum_{i=1}^m a_i x_i^2$ for suitable $m \in \mathbb{N}$ and $a_i \in F^\times$, we have

$$\gamma(f)^2 = \prod_{i=1}^{m} (a_i, -1)\,\gamma(q_1)^2 = (D(f), -1)\,\gamma(q_1)^{2m} \tag{9.2}$$

where $D(f)$ is the discriminant of f. Notice that, since F is non-archimedean, then -1 is either a square or a norm in $F(\sqrt{-1})$. Therefore we have $\gamma(q_4) = (-1, -1) = 1$ and it follows that $\gamma(f)^4 = 1$ for every non-degenerate quadratic form f over F as announced. This is in fact the best possible result whenever -1 is not a square in F. Indeed, in this case, there exists at least an element $a \in F^\times$ such that $(a, -1) = -1$. For such an a, formula (9.1) gives $\gamma(q_1 \oplus -aq_1)^2 = -1$ and then a square root of -1 shall be in the image of γ.

Remark 9.9. This result shows that, whenever -1 is not a square in F and $\mathrm{char}(R) \neq 2$ (in which case $X^4 - 1$ is a separable polynomial) then R contains a primitive fourth root of unity. This fact has an elementary explaination : denote ζ_p an element of order p in $R^\times$ and consider the Gauss sum $\tau = \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{i}{p}\right) \zeta_p^i \in R$, where $\left(\frac{i}{p}\right)$ is the Legendre symbol. The formula

$$\tau^2 = \left(\frac{-1}{p}\right) p$$

holds thanks to a classical argument that can be found, for example, in 3.3 of [Lem00]. The fact that -1 is not a square in F implies that $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ and that $q = p^f$ with f odd. Since R contains a square root of q, then there exists an element $x \in R^\times$ such that $x^2 = p$ and $(\tau \cdot \frac{1}{x})^2 = -1$: there is a primitive fourth root of unity in R.

Chapitre 10

The reduced metaplectic group

The metaplectic group, associated with R and χ, is an extension of $\mathrm{Sp}(W)$ by $R^\times$ through the short exact sequence (7.6). We want to understand when this sequence does (or does not) split, looking for positive numbers $n \in \mathbb{N}$ yielding the existence of subgroups $\mathrm{Mp}_n(W)$ of $\mathrm{Mp}(W)$ such that $\pi_{|\mathrm{Mp}_n(W)}$ is a finite cyclic cover of $\mathrm{Sp}(W)$ with kernel $\mu_n(R)$. We show that, for F locally compact non-discrete non-archimedean field, it is possible to construct $\mathrm{Mp}_2(W)$. Then we prove that, when $\mathrm{char}(R) \neq 2$, $n = 1$ does not satisfy the condition above, namely that the sequence (7.6) does not split. Finally we show what happens in the simpler case when $\mathrm{char}(R) = 2$.

For a closer perspective we suppose that, for some $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Mp}_n(W)$ exists and we look at the following commutative diagram with exact rows and columns

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
1 & \longrightarrow & \mu_n(R) & \longrightarrow & \mathrm{Mp}_n(W) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(W) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\
1 & \longrightarrow & R^\times & \longrightarrow & \mathrm{Mp}(W) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Sp}(W) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle .^n} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_n} & & & & \\
 & & R^\times & \xrightarrow{id} & R^\times & & & &
\end{array}$$

where $\mu_n(R)$ is the group of n-th roots of unity in R. The existence of a homomorphism $\psi_n : \mathrm{Mp}(W) \longrightarrow R^\times$ such that its restriction on $R^\times$ is the n-th power map implies the existence of the first line in the diagram. Indeed, if such ψ_n exists, let $\mathrm{Mp}_n(W)$ be its kernel ; then π induces a surjective homomorphism from $\mathrm{Mp}_n(W)$ to $\mathrm{Sp}(W)$ whose kernel is $\mathrm{Mp}_n(W) \cap R^\times = \mu_n(R)$. Then, as in 43 of [Wei64], the question to address is whether or not there exists $\psi_n : \mathrm{Mp}(W) \to R^\times$ such that $\psi_{n|_{R^\times}}(x) = x^n$ for every $x \in R^\times$.

Lemma 10.1. *A R-character $\psi_n : \mathrm{Mp}(W) \longrightarrow R^\times$ whose restriction on $R^\times$ is the n-th power map is completely determined by $\widetilde{\psi_n} = \psi_n \circ \mathbf{r} : \Omega(W) \longrightarrow R^\times$ where $\mathbf{r}$ is as in (8.7).*

Proof. Let $(\sigma, \mathbf{s}) \in \mathrm{Mp}(W)$. By proposition 6.7 we can write σ as a product $\sigma = \prod_i \sigma_i$ with $\sigma_i \in \Omega(W)$. We set $(\sigma, \mathbf{s}') = \prod_i \mathbf{r}(\sigma_i)$ where $\mathbf{r}$ is as in (8.7). Then, since $\ker(\pi) = R^\times$, we have that $(\sigma, \mathbf{s}) = c(\sigma, \mathbf{s}')$ for a suitable $c \in R^\times$. This implies that the values of ψ_n at $(\sigma, \mathbf{s})$ is $\psi_n(c(\sigma, \mathbf{s}')) = c^n \prod_i \widetilde{\psi_n}(\sigma_i)$. □

By (8.8), the morphism $\widetilde{\psi_n}$ of lemma 10.1 shall verify the condition

$$\widetilde{\psi_n}(\sigma)\widetilde{\psi_n}(\sigma') = \gamma(f_0)^n \widetilde{\psi_n}(\sigma'') \tag{10.1}$$

for every $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\sigma' = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ and $\sigma'' = \begin{pmatrix} \alpha'' & \beta'' \\ \gamma'' & \delta'' \end{pmatrix}$ in $\Omega(W)$ satisfying $\sigma'' = \sigma\sigma'$, where f_0 is a non-degenerate quadratic form on X associated to the symmetric isomorphism $-\beta^{-1}\beta''\beta'^{-1}$.
Conversely we have :

Lemma 10.2. *If $\widetilde{\psi_n} : \Omega(W) \longrightarrow R^\times$ satisfies (10.1), then there exists a unique R-character ψ_n of $\mathrm{Mp}(W)$ such that its restriction to $R^\times$ is the n-th power map and $\psi_n \circ \mathbf{r} = \widetilde{\psi_n}$.*

Proof. Let $(\sigma, \mathbf{s}) \in \mathrm{Mp}(W)$. By proposition 6.7 we can write σ as a product $\sigma = \prod_i \sigma_i$ with $\sigma_i \in \Omega(W)$ and $(\sigma, \mathbf{s}) = c \prod \mathbf{r}(\sigma_i)$ for a suitable $c \in R^\times$. We define $\psi_n(\sigma, \mathbf{s}) = c^n \prod_i \widetilde{\psi_n}(\sigma_i)$. We have to prove that it is well defined. Let $\sigma = \prod_j \sigma_j$ be another presentation of σ that differs from $\prod_i \sigma_i$ by a single relation $\sigma\sigma' = \sigma''$; by (8.8) we obtain

$$(\sigma, \mathbf{s}) = c \prod_i \mathbf{r}(\sigma_i) = \gamma(f_0) c \prod_j \mathbf{r}(\sigma_j)$$

for a suitable $f_0 \in Q^{nd}(X)$ and by (10.1) we have

$$\psi_n(\sigma, \mathbf{s}) = c^n \prod_i \widetilde{\psi_n}(\sigma_i) = c^n \gamma(f_0)^n \prod_j \widetilde{\psi_n}(\sigma_j) = (c\,\gamma(f_0))^n \prod_j \widetilde{\psi_n}(\sigma_j).$$

Now, since every presentation $\sigma = \prod_k \sigma_k$ with $\sigma_k \in \Omega(W)$ differs from $\prod_i \sigma_i$ by a finite number of relations $\sigma\sigma' = \sigma''$, the definition $\psi_n(\sigma, \mathbf{s}) = c^n \prod_i \widetilde{\psi_n}(\sigma_i)$ makes sense. □

After these results the existence of a character ψ_n, and then of a subgroup $\mathrm{Mp}_n(W)$ of $\mathrm{Mp}(W)$ as above, is equivalent to the existence of $\widetilde{\psi_n} : \Omega(W) \longrightarrow R^\times$ that satisfies (10.1).

First of all we suppose that -1 is a square in F. By proposition 8.2 we have $\gamma(f)^2 = 1$ for every $f \in Q^{nd}(X)$ and so $\widetilde{\psi_2} = 1$ satisfies (10.1) with $n = 2$.

We suppose now that -1 is not a square in F. We fix a basis over the F-vector space X and its dual basis over X^*. By definition of $\Omega(W)$ we have that the determinant $\det(\beta)$ of β with respect to these basis is not zero for every $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Omega(W)$. Moreover, since f_0 is associated to the symmetric isomorphism $-\beta^{-1}\beta''\beta'^{-1}$ we have that the discriminant of f_0 is $D(f_0) = \det(-\beta)^{-1} \cdot \det(-\beta'') \cdot \det(-\beta')^{-1}$. Hence taking

$$\widetilde{\psi_2}(\sigma) = (\det(-\beta), -1)\, \gamma(q_1)^{2m}$$

for every $\sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Omega(W)$ and using formula (9.2) we obtain the equality (10.1) with $n = 2$.
We have then proved the

Theorem 10.3. *There exists a subgroup* $\mathrm{Mp}_2(W)$ *of* $\mathrm{Mp}(W)$ *that is a cover of* $\mathrm{Sp}(W)$ *with kernel* $\mu_2(R)$. *In particular, when* $\mathrm{char}(R) \neq 2$, $\mathrm{Mp}_2(W)$ *is a* 2*-cover of* $\mathrm{Sp}(W)$.

Now we want to see if this reduction is optimal in the sense that there does not exist any $\mathrm{Mp}_1(W)$ fitting into the diagram. If this is the case, then the group $\mathrm{Mp}_2(W)$ is the minimal subgroup of $\mathrm{Mp}(W)$ which is a central extension of $\mathrm{Sp}(W)$ and therefore is called *reduced metaplectic group.*

Theorem 10.4. *Let* $\mathrm{char}(R) \neq 2$. *There does not exist a character* $\psi : Mp(W) \to R^\times$ *such that* $\psi_{|R^\times} = id$.

Proof. Let suppose the existence of such a character ψ. Then there exists a character $\psi' : \mathrm{Mp}(F \times F^*) \longrightarrow R^\times$ such that $\psi'_{|R^\times} = id$. In fact the extension by triviality

$$\begin{array}{rcl} \iota : \Omega(F \times F^*) & \to & \Omega(W) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n-1} & 0 & \mathbb{I}_{n-1} \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & \mathbb{I}_{n-1} & 0 & \mathbb{I}_{n-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

is such that $\sigma'' = \sigma\sigma'$ yields $\iota(\sigma'') = \iota(\sigma)\iota(\sigma')$. Then $\widetilde{\psi}' := \widetilde{\psi} \circ \iota$ satisfies the relation

$$\widetilde{\psi}'(\sigma'') = \gamma(f_0)^{-1}\widetilde{\psi}'(\sigma)\widetilde{\psi}'(\sigma')$$

and lemma 10.2 implies the existence of ψ'. Clearly ψ' takes values 1 on the group of commutators of $\mathrm{Mp}(F \times F^*)$. By (8.6) we have

$$\mathbf{t}\left(\frac{c}{1-a^2}x^2\right)\mathbf{d}\left(a^{-1}\right)\mathbf{t}\left(-\frac{c}{1-a^2}x^2\right)\mathbf{d}\left(a\right) = \mathbf{t}\left(\frac{c}{1-a^2}x^2\right)\mathbf{t}\left(-\frac{ca^2}{1-a^2}x^2\right) = \mathbf{t}\left(cx^2\right)$$

for every $a \notin \{0, 1, -1\}$ in F and every $c \in F$. Then for every quadratic form f on F, $\mathbf{t}(f)$ is a commutator of $\mathrm{Mp}(F \times F^*)$ and so $\psi'(\mathbf{t}(f)) = 1$. By Definition 8.1 we obtain the equality in $\mathrm{Mp}(F \times F^*)$

$$\mathbf{d}'(\rho^{-1})\mathbf{t}(f)\mathbf{d}'(-\rho^{-1})\mathbf{t}(f) = \gamma(f)\mathbf{t}(-f)\mathbf{d}'(\rho^{-1})$$

for every $f \in Q^{nd}(F)$ associated to ρ and applying ψ' we obtain $\gamma(f) = \psi'(\mathbf{d}'(\rho^{-1}))$. So, if we denote by ρ_a the symmetric isomorphism associated to $aq_1 : x \longrightarrow ax^2$ we obtain

$$\gamma\left(aq_1\right) = \psi'(\mathbf{d}'(\rho_a^{-1})) = \psi'(\mathbf{d}(2a))\psi'(\mathbf{d}'(\rho_1^{-1})).$$

Now, since every quadratic form f over F is of the form $f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i^2$, we can conclude that

$$\gamma(f) = \prod_{i=1}^{m} \psi'(\mathbf{d}(2a_i))\psi'(\mathbf{d}'(\rho_1^{-1}))^m$$

depends only on m and on the discriminant. But this implies that γ takes the same value on every non-degenerate quadratic form on a 4-dimensional vector space over F with discriminant equal to 1. But this contradicts theorem 9.1. □

We shall remark that, if R has characteristic 2, then necessarily $\gamma(f) = 1$ for every quadratic form f. Then theorem 10.4 is clearly false and the sequence (7.6) splits yielding the existence of $\mathrm{Mp}_1(W) \cong \mathrm{Sp}(W)$.

Relationship with Steinberg theory

The theory of universal central extensions, as exposed for example in [Ste67], permits us to show additional features of the reduced metaplectic group.

Since $\mathrm{Sp}(W)$ is a perfect group, it has an universal central extension $\vartheta : \mathcal{U} \to \mathrm{Sp}(W)$ and since the reduced metaplectic group $\mathrm{Mp}_2(W)$ is a central extension of it, there exists a unique map $\varphi : \mathcal{U} \to \mathrm{Mp}_2(W)$ such that $\pi \circ \varphi = \vartheta$. Moreover, by universal property of $\mathcal{U}$, the image of φ is a central extension of $\mathrm{Sp}(W)$ contained in $\mathrm{Mp}_2(W)$ and in fact φ is surjective by theorem 10.4. Then $\mathrm{Mp}_2(W)$ is contained in every subgroup of $\mathrm{Mp}(W)$ which is a central extension of $\mathrm{Sp}(W)$ and in particular it is contained in all its conjugates : $\mathrm{Mp}_2(W)$ is a normal subgroup of $\mathrm{Mp}(W)$. Moreover the unique map $\varphi' : \mathcal{U} \to \mathrm{Mp}(W)$ given by the universal property factorizes necessarily through φ.

In [Ste67], Steinberg describes the structure of the universal central extension of any Chevalley group by means of generators and relations and he also introduces the so-called Steinberg symbol, which characterizes the kernel of this extension. It has already been noticed (see chapter II of [Moo69]) that the Hilbert symbol enjoys the same properties as the Steinberg symbol. We can actually describe this relationship in our case by studying the behavior of φ on generators of $\mathcal{U}$.

As an example, let us fix an identification of F with F^* and make this correspondence explicit in the case of $\mathrm{SL}(2,F)$. Let Λ be the free group generated by $\{x(u), y(u) : u \in F\}$. Define $w(u) = x(u)y(-u^{-1})x(u)$ and $h(u) = w(u)w(-1)$. Then we have the following (cfr. section 6 of [Ste67]) :

Theorem 10.5. *Consider the following relations on Λ :*

A. $x(u_1+u_2) = x(u_1)x(u_2) \quad$ *and* $\quad y(u_1+u_2) = y(u_1)y(u_2)$ *;*

B. $w(u)x(v)w(-u) = y(-u^{-2}v)$ *;*

C. $h(u_1u_2) = h(u_1)h(u_2)$.

Then $\{A, B\}$ is a complete set of relations for the universal central extension $\mathfrak{U} \to \mathrm{SL}(2,F)$ and adding C, we obtain a complete set of relations for $\mathrm{SL}(2,F)$.
Moreover if $\pi' : \Lambda/(A,B) \to \Lambda/(A,B,C)$ is the canonical projection, then every element of the form $h(u_1)h(u_2)h(u_1u_2)^{-1} \in \ker \pi'$ coincides with the Steinberg symbol associated to u_1 and u_2.

We remark that condition B implies $x(u) = w(1)^{-1}y(-u)w(1)$ and we can check that the map $\phi : \Lambda/(A,B,C) \to \mathrm{SL}(2,F)$ given by $y(u) \mapsto t(uq_1)$ and $w(1) \mapsto d'(-\frac{1}{2})$ is an isomorphism such that $\phi(x(u)) = d'(\frac{1}{2})t(-uq_1)d'(-\frac{1}{2})$, $\phi(w(u)) = d'(-\frac{u}{2})$ and $\phi(h(u)) = d(u)$. Theorem 10.5 assures the existence of a unique map $\varphi : \Lambda/(A,B) \to \mathrm{Mp}(2,F)$ making the following diagram commute

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \ker \pi' & \longrightarrow & \Lambda/(A,B) & \xrightarrow{\pi'} & \Lambda/(A,B,C) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} & & \\ 1 & \longrightarrow & R^\times & \longrightarrow & \mathrm{Mp}(2,F) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{SL}(2,F) & \longrightarrow & 1. \end{array}$$

Let us prove that the image of the Steinberg symbol by φ in $R^\times$ is the Hilbert symbol. We know that $\mathbf{t}$ and $\mathbf{d'}$ are liftings of t and d' to $\mathrm{Mp}(2,F)$. Then $\varphi(y(u)) = c_1(u)\mathbf{t}(uq_1)$ and $\varphi(w(1)) = c_2\mathbf{d'}(-\frac{1}{2})$ for $c_1(u)$ and c_2 suitable elements in $R^\times$. This gives $\varphi(x(u)) = c_1(-u)\mathbf{d'}(\frac{1}{2})\mathbf{t}(-uq_1)\mathbf{d'}(-\frac{1}{2})$. Now, by relation A and B of theorem 10.5 we have that $c_1(u_1+u_2) = c_1(u_1)c_1(u_2)$ and $c_1(u_1u_2^2) = c_1(u_1)$ for every $u_1, u_2 \in F$ and then $c_1(u) = 1$ for every $u \in F$. Using relations in section 8.2 and the definition of the Weil factor we obtain $\varphi(w(u)) = \gamma(-uq_1)\mathbf{d'}(-\frac{u}{2})$ and then $\varphi(h(u)) = \gamma(q_1 \oplus -uq_1)\mathbf{d}(u)$. So we can calculate the image of the Steinberg symbol :

$$\varphi(h(u_1)h(u_2)h(u_1u_2)^{-1}) = \gamma(q_1 \oplus -u_1q_1 \oplus -u_2q_1 \oplus u_1u_2q_1) = (u_1,u_2)$$

by formula (9.1). This gives another proof of the fact that the Hilbert symbol satisfies all the relations of the Steinberg symbol.
Notice that we have shown in this way that the images of $\mathbf{d}, \mathbf{d'}$ and $\mathbf{t}$ lie in $\mathrm{Mp}_2(2,F)$.

Further questions arising

We conclude by saying that we can restrict the representation of the metaplectic group given by (7.7) to a representation of the reduced metaplectic group. This is the **Weil representation** defined over R. As pointed out in the introduction, the relevance of having an explicit form for this representation lies in the fact that its understanding has important applications. Considering R in whole generality may help understand more deeply the essential features underlying results like Howe and Shimura correspondences. A more concrete question is the following. Given a morphism of rings $R_1 \to R_2$ and fixed two smooth non-trivial characters $\chi_1 : F \to R_1$ and $\chi_2 : F \to R_2$, it would be interesting to study the relationships between metaplectic groups and the Weil representation respectively over R_1 and R_2.

Chapitre 11

Fonctorialité du groupe métaplectique

Ce chapitre ne fait pas partie de l'article [CT15]. On veut prouver que la contruction du groupe métaplectique vu dans le chapitre 7 est "fonctorielle" dans un certain sens. On construit un foncteur d'une certaine sous-catégorie de la catégorie des anneaux intègres vers la catégorie des groupes tel que l'image d'un objet de la première catégorie soit un groupe métaplectique.

11.1 Fonctorialité de $\mathrm{Aut}(\mathcal{S}_\bullet(G))$

Soient R_1 et R_2 deux anneaux et $\vartheta : R_1 \longrightarrow R_2$ un morphisme d'anneaux. Soit $\mathcal{S}_{R_i}(G)$ le R_i-module des fonctions à support compact et localement constantes sur G à valeurs dans R_i pour $i \in \{1, 2\}$. On observe que $\mathcal{S}_{R_2}(G)$ est aussi un R_1-module avec $x.f = \vartheta(x).f$ pour tout $x \in R_1$ et $f \in \mathcal{S}_{R_2}(G)$.

Pour tout $X \subset G$ on note $\mathbf{1}^1_X$ la fonction caractéristique de X à coefficients dans R_1 et $\mathbf{1}^2_X$ la fonction caractéristique de X à coefficients dans R_2.

Lemme 11.1. *L'application $\vartheta_{\mathcal{S}} : \mathcal{S}_{R_1}(G) \longrightarrow \mathcal{S}_{R_2}(G)$ définie par $\Phi \longmapsto \vartheta \circ \Phi$ est un morphisme de R_1-modules.*

Démonstration. On vérifie que $\vartheta_{\mathcal{S}}$ est bien définie. Soient $K \subset H$ et $K' \subset H'$ des sous-groupes ouverts compacts de G et $\Phi = \sum_{h \in H/K} \alpha_h \mathbf{1}^1_{h+K} = \sum_{h' \in H'/K'} \beta_{h'} \mathbf{1}^1_{h'+K'} \in \mathcal{S}_{R_1}(G)$. On observe que le support de Φ est dans $H'' = H \cap H'$ et si on pose $K'' = K \cap K'$ on obtient $\sum_{h \in H/K} \alpha_h \mathbf{1}^1_{h+K} = \sum_{h'' \in H''/K''} \gamma_{h''} \mathbf{1}^1_{h''+K''} = \sum_{h' \in H'/K'} \beta_{h'} \mathbf{1}^1_{h'+K'}$ avec $\gamma_{h''} = \alpha_h = \beta_{h'}$ si $h'' \in (h + K) \cap (h' + K')$ et $\gamma_{h''} = 0$ sinon. Donc on peut supposer $\Phi = \sum_{h \in H/K} \alpha_h \mathbf{1}^1_{h+K} = \sum_{h' \in H/K'} \beta_{h'} \mathbf{1}^1_{h'+K'}$ avec $K' \subset K \subset H$. On observe que

$\beta_{h'} = \alpha_h$ si $h' \in h + K$ et que

$$\vartheta_{\mathcal{S}}\Big(\sum_{h\in H/K} \alpha_h \mathbf{1}^1_{h+K}\Big) = \sum_{h\in H/K} \vartheta(\alpha_h)\mathbf{1}^2_{h+K} = \sum_{h\in H/K} \vartheta(\alpha_h) \sum_{k\in K/K'} \mathbf{1}^2_{h+k+K'}$$
$$= \sum_{h'\in H/K'} \vartheta(\beta_{h'})\mathbf{1}^2_{h'+K'} = \vartheta_{\mathcal{S}}\Big(\sum_{h'\in H/K'} \beta_{h'}\mathbf{1}^1_{h'+K'}\Big)$$

En plus $\sum_{h\in H/K} \vartheta(\alpha_h)\mathbf{1}^2_{h+K}$ est dans $\mathcal{S}_{R_2}(G)$ et donc $\vartheta_{\mathcal{S}}$ est bien définie. Puisque ϑ est un morphisme d'anneaux, on obtient que $\vartheta_{\mathcal{S}}$ respecte la somme et $\vartheta_{\mathcal{S}}(xf) = \vartheta(x)\vartheta_{\mathcal{S}}(f) = x.\vartheta_{\mathcal{S}}(f)$ pour tout $x \in R_1$ et $f \in \mathcal{S}_{R_1}(G)$. Donc $\vartheta_{\mathcal{S}}$ est un morphisme de R_1-modules. □

Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $\mathrm{Aut}_{R_i}(\mathcal{S}_{R_i}(G))$ le groupe des automorphismes du R_i-module $\mathcal{S}_{R_i}(G)$. Si $\varepsilon \in \mathrm{Aut}_{R_1}(\mathcal{S}_{R_1}(G))$, on définit $\Theta(\varepsilon) : \mathcal{S}_{R_2}(G) \longrightarrow \mathcal{S}_{R_2}(G)$ par

$$\Theta(\varepsilon)\Big(\sum_{h\in H/K} \alpha_h \mathbf{1}^2_{h+K}\Big) = \sum_{h\in H/K} \alpha_h \vartheta_{\mathcal{S}}(\varepsilon(\mathbf{1}^1_{h+K})) \tag{11.1}$$

pour tout $\sum \alpha_h \mathbf{1}^2_{h+K} \in \mathcal{S}_{R_2}(G)$.

Lemme 11.2. *L'application $\Theta : \varepsilon \mapsto \Theta(\varepsilon)$ est un morphisme de groupes entre $\mathrm{Aut}_{R_1}(\mathcal{S}_{R_1}(G))$ et $\mathrm{Aut}_{R_2}(\mathcal{S}_{R_2}(G))$.*

Démonstration.

- On vérifie que (11.1) est bien défini. Soient $\varepsilon \in \mathrm{Aut}_{R_1}(\mathcal{S}_{R_1}(G))$, $K \subset H$ et $K' \subset H'$ sous-groupes ouverts compacts de G et

$$\Phi = \sum_{h\in H/K} \alpha_h \mathbf{1}^2_{h+K} = \sum_{h'\in H'/K'} \beta_{h'}\mathbf{1}^2_{h'+K'} \in \mathcal{S}_{R_2}(G).$$

On observe que le support de Φ est dans $H'' = H \cap H'$. Si on pose $K'' = K \cap K'$ on obtient

$$\sum_{h\in H/K} \alpha_h \mathbf{1}^2_{h+K} = \sum_{h''\in H''/K''} \gamma_{h''}\mathbf{1}^2_{h''+K''} = \sum_{h'\in H'/K'} \beta_{h'}\mathbf{1}^2_{h'+K'}$$

où $\gamma_{h''} = \alpha_h = \beta_{h'}$ si $h'' \in (h + K) \cap (h' + K')$ et $\gamma_{h''} = 0$ sinon. Donc on peut supposer $\Phi = \sum_{h\in H/K} \alpha_h \mathbf{1}^2_{h+K} = \sum_{h'\in H/K'} \beta_{h'}\mathbf{1}^2_{h'+K'}$ avec $K' \subset K \subset H$. On observe que $\beta_{h'} = \alpha_h$ si $h' \in h + K$ et que

$$\Theta(\varepsilon)\Big(\sum_{h\in H/K} \alpha_h \mathbf{1}^2_{h+K}\Big) = \sum_{h\in H/K} \alpha_h \vartheta_S(\varepsilon(\mathbf{1}^1_{h+K})) = \sum_{h\in H/K} \sum_{k\in K/K'} \alpha_h \vartheta_S(\varepsilon(\mathbf{1}^1_{h+k+K'}))$$
$$= \sum_{h'\in H/K'} \beta_{h'}\vartheta_S(\varepsilon(\mathbf{1}^1_{h'+K'}))$$
$$= \Theta(\varepsilon)\Big(\sum_{h'\in H/K'} \beta_{h'}\mathbf{1}^2_{h'+K'}\Big).$$

En plus par le lemme 11.1 on a $\vartheta_{\mathcal{S}}(\varepsilon(\mathbf{1}^1_{h+K})) \in \mathcal{S}_{R_2}(G)$ pour tout $h \in H$ et donc $\Theta(\varepsilon)(\Phi) \in \mathcal{S}_{R_2}(G)$.

- Par définition, pour tout $\varepsilon \in \mathrm{Aut}_{R_1}(\mathcal{S}_{R_1}(G))$, l'application $\Theta(\varepsilon)$ est R_2-linéaire et donc $\Theta(\varepsilon) \in \mathrm{End}_{R_2}(\mathcal{S}_{R_2}(G))$.
- On vérifie que $\Theta(\varepsilon_1) \circ \Theta(\varepsilon_2) = \Theta(\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2)$ pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathrm{Aut}_{R_1}(\mathcal{S}_{R_1}(G))$. Par R_2-linéarité il suffit de prouver $\Theta(\varepsilon_1)\Theta(\varepsilon_2)(\mathbf{1}^2_{h+K}) = \Theta(\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2)(\mathbf{1}^2_{h+K})$ pour tout $h \in G$ et K un sous-groupe ouvert compact de G. Si $\varepsilon_2(\mathbf{1}^1_{h+K}) = \sum_{h' \in H'/K'} \beta_{h'} \mathbf{1}^1_{h'+K'}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\Theta(\varepsilon_1)\Big(\Theta(\varepsilon_2)(\mathbf{1}^2_{h+K})\Big) &= \Theta(\varepsilon_1)\Big(\sum_{h'} \vartheta(\beta_{h'})\mathbf{1}^2_{h'+K'}\Big) \\
&= \sum_{h'} \vartheta(\beta_{h'})\vartheta_S(\varepsilon_1(\mathbf{1}^1_{h'+K'})) \\
&= \vartheta_S\Big(\sum_{h'} \beta_{h'}\varepsilon_1(\mathbf{1}^1_{h'+K'})\Big) \\
&= \vartheta_S(\varepsilon_1(\varepsilon_2(\mathbf{1}^1_{h+K}))) \\
&= \Theta(\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2)(\mathbf{1}^2_{h+K}).
\end{aligned}$$

Cela prouve que pour tout $\varepsilon \in \mathrm{Aut}_{R_1}(\mathcal{S}_{R_1}(G))$ on a $\Theta(\varepsilon) \in \mathrm{Aut}_{R_2}(\mathcal{S}_{R_2}(G))$ car $\Theta(\varepsilon)^{-1} = \Theta(\varepsilon^{-1})$ et que $\Theta : \mathrm{Aut}_{R_1}(\mathcal{S}_{R_1}(G)) \longrightarrow \mathrm{Aut}_{R_2}(\mathcal{S}_{R_2}(G))$ est un morphisme de groupes. □

Remarque 11.3. On observe que pour tout $\varepsilon \in \mathrm{Aut}_{R_1}(\mathcal{S}_{R_1}(G))$ on a $\vartheta_{\mathcal{S}} \circ \varepsilon = \Theta(\varepsilon) \circ \vartheta_{\mathcal{S}}$.

Proposition 11.4. *Pour tout anneau R soit $\mathbf{F}(R) = \mathrm{Aut}_R(\mathcal{S}_R(G))$ et pour tout morphisme d'anneaux $\vartheta : R_1 \to R_2$ soit $\mathbf{F}(\vartheta) = \Theta : \mathrm{Aut}_{R_1}(\mathcal{S}_{R_1}(G)) \to \mathrm{Aut}_{R_2}(\mathcal{S}_{R_2}(G))$ où Θ est défini dans le lemme 11.2. Alors $\mathbf{F}$ est un foncteur covariant de la catégorie des anneaux à la catégorie des groupes.*

Démonstration. Le lemme 11.2 dit que $\mathbf{F}$ est bien défini et si id_R est le morphisme identité de R alors $\mathbf{F}(id_R)$ est l'identité de $\mathrm{Aut}_R(\mathcal{S}_R(G))$. Soient maintenant R_1, R_2, R_3 trois anneaux et $\vartheta_1 : R_1 \to R_2$, $\vartheta_2 : R_2 \to R_3$ deux morphismes d'anneaux. On vérifie que $\mathbf{F}(\vartheta_2 \circ \vartheta_1) = \mathbf{F}(\vartheta_2) \circ \mathbf{F}(\vartheta_1)$. Soient $\varepsilon \in \mathrm{Aut}_{R_1}(\mathcal{S}_{R_1}(G))$ et $\sum_{h \in H/K} \alpha_h \mathbf{1}^3_{h+K} \in \mathcal{S}_{R_3}(G)$. On note $\vartheta_{\mathcal{S},1}$ et $\vartheta_{\mathcal{S},2}$ les morphismes définis dans le lemme 11.1 associés à ϑ_1 et ϑ_2 respectivement. On obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}(\vartheta_2)\big(\mathbf{F}(\vartheta_1)(\varepsilon)\big)\Big(\sum_h \alpha_h \mathbf{1}^3_{h+K}\Big) &= \sum_h \alpha_h \vartheta_{\mathcal{S},2}\big(\mathbf{F}(\vartheta_1)(\varepsilon)(\mathbf{1}^2_{h+K})\big) \\
&= \sum_h \alpha_h \vartheta_{\mathcal{S},2}(\vartheta_{\mathcal{S},1}(\varepsilon(\mathbf{1}^1_{h+K}))) \\
&= \mathbf{F}(\vartheta_2 \circ \vartheta_1)(\varepsilon)\Big(\sum_h \alpha_h \mathbf{1}^3_{h+K}\Big)
\end{aligned}$$

et donc $\mathbf{F}$ est un foncteur covariant. □

11.2 Fonctorialité de $\mathrm{Mp}_\bullet(W)$

Dans cette section on considère les notations des chapitres 6 et 7 où on a construit le groupe métaplectique.

Définition 11.5. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie dont les objets sont les paires (R,χ) où R est un anneau intègre[1] tel que $p \in R^\times$ et $\chi : F \to R^\times$ un R-caractère non trivial de F. Un morphisme $\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((R_1,\chi_1),(R_2,\chi_2))$ est un morhisme d'anneaux $\vartheta : R_1 \to R_2$ tel que $\chi_2 = \vartheta^\times \circ \chi_1$ où $\vartheta^\times$ est le morphisme de groupes $\vartheta_{|R_1^\times} : R_1^\times \to R_2^\times$.

On veut prouver qu'il existe un foncteur de $\mathcal{C}$ à la catégorie des groupes qui associe à (R,χ) le groupe métaplectique $\mathrm{Mp}_{R,\chi}(W)$ défini dans la définition 7.9.

Dès maintenant on fixe deux objets (R_1,χ_1) et (R_2,χ_2) de $\mathcal{C}$ et un morphisme $\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((R_1,\chi_1),(R_2,\chi_2))$. On veut construire un morphisme entre les groupes métaplectiques associés à (R_1,χ_1) et (R_2,χ_2).

Remarque 11.6. Pour $i \in \{1,2\}$ et pour tout F-espace vectoriel de dimension finie G, soient $X_{2,R_i}(G)$ et $X_{1,R_i}(G)$ les groupes des caractères de degré 2 et des caractères de G à valeurs dans $R_i^\times$. Alors l'application $\phi \longmapsto \vartheta^\times \circ \phi$ induit un morphisme de groupes entre $X_{2,R_1}(G)$ et $X_{2,R_2}(G)$ et, par (6.1), un isomorphisme de groupes entre $X_{1,R_1}(G)$ et $X_{1,R_2}(G)$.

Soient X un F-espace vectoriel de dimension finie, X^* son dual et $W = X \times X^*$. Soit $\mathcal{B} : W \times W \to F$ l'application définie par $((x_1,x_1^*),(x_2,x_2^*)) \mapsto x_2^*(x_1)$ et soit $\mathcal{F}_{R_i} = \chi_i \circ \mathcal{B}$ (voir définition 6.1).

Pour $i \in \{1,2\}$, soit $A_{R_i}(W)$ le groupe dont l'ensemble sous-jacent est $W \times R_i^\times$, muni du produit $(w_1,t_1)(w_2,t_2) = (w_1+w_2, t_1t_2\mathcal{F}_{R_i}(w_1,w_2))$.

Lemme 11.7. *L'application $\vartheta_A : A_{R_1}(W) \longrightarrow A_{R_2}(W)$ définie par $(w,t) \longmapsto (w,\vartheta^\times(t))$ est un morphisme de groupes.*

Démonstration. On a $\vartheta_A((w_1,t_1)(w_2,t_2)) = \vartheta_A(w_1+w_2, t_1t_2\mathcal{F}_{R_1}(w_1,w_2))$ qui par la définition de ϑ_A est égal à $(w_1+w_2, \vartheta^\times(t_1t_2)\mathcal{F}_{R_2}(w_1,w_2)) = (w_1,\vartheta^\times(t_1))(w_2,\vartheta^\times(t_2))$. □

Pour $i \in \{1,2\}$, soit $B_{0,R_i}(W)$ le groupe des automorphismes de $A_{R_i}(W)$ triviaux sur le centre $Z(A_{R_i}(W)) = \{(0,t)\,|\,t \in R_i^\times\}$. Par la proposition 7.1 on peut identifier $B_{0,R_i}(W)$ au groupe des $(\sigma,\varphi) \in \mathrm{Sp}(W)\times X_{2,R_i}(W)$ tels que $\varphi(w_1+w_2)\varphi(w_1)^{-1}\varphi(w_2)^{-1} = \mathcal{F}_{R_i}(\sigma(w_1),\sigma(w_2))\mathcal{F}_{R_i}(w_1,w_2)$ muni du produit $(\sigma_1,\varphi_1)(\sigma_2,\varphi_2) = (\sigma_1\circ\sigma_2, \varphi_2\cdot(\varphi_1\circ\sigma_2))$. Alors (σ,φ) agit sur $(w,t) \in A_{R_i}(W)$ par $(\sigma,\varphi)(w,t) = (\sigma(w),\varphi(w)t)$.
Dans la section 7.1 on a prouvé qu'il existe un morphisme $\mu_{R_i} : \mathrm{Sp}(W) \longrightarrow B_{0,R_i}(W)$ donné par $\mu_{R_i}(\sigma) = (\sigma, \chi_i \circ f_\sigma)$. Cela implique que $B_{0,R_i}(W)$ est isomorphe au produit

1. On rappelle qu'un anneau intègre est commutatif et unitaire.

semi-direct $X_{1,R_i}(W) \rtimes \mathrm{Sp}(W)$ où l'action de $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$ sur $\tau \in X_{1,R_i}(W)$ est donnée par $\sigma.\tau = \tau \circ \sigma^{-1}$. Le produit dans $X_{1,R_i}(W) \rtimes \mathrm{Sp}(W)$ est défini par $(\tau_1, \sigma_1)(\tau_2, \sigma_2) = (\tau_1 \cdot (\tau_2 \circ \sigma_1^{-1}), \sigma_1 \circ \sigma_2)$ pour tout $\tau_1, \tau_2 \in X_{1,R_i}(W)$ et tout $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{Sp}(W)$. L'isomorphisme $\zeta_i : X_{1,R_i}(W) \rtimes \mathrm{Sp}(W) \longrightarrow B_{0,R_i}(W)$ est donné par $(\tau, \sigma) \longmapsto (id, \tau)(\sigma, \chi_i \circ f_\sigma) = (\sigma, (\chi_i \circ f_\sigma) \cdot (\tau \circ \sigma))$ pour tout $\tau \in X_{1,R_i}(W)$ et $\sigma \in \mathrm{Sp}(W)$.

Lemme 11.8. *L'application $\vartheta_B : B_{0,R_1}(W) \to B_{0,R_2}(W)$ définie par $(\sigma, \varphi) \mapsto (\sigma, \vartheta^\times \circ \varphi)$ est un isomorphisme de groupes.*

Démonstration. On a $\vartheta_B((\sigma_1, \varphi_1)(\sigma_2, \varphi_2)) = \vartheta_B(\sigma_1 \circ \sigma_2, \varphi_2 \cdot (\varphi_1 \circ \sigma_2))$ qui est égal à $(\sigma_1 \circ \sigma_2, (\vartheta^\times \circ \varphi_2) \cdot (\vartheta^\times \circ \varphi_1 \circ \sigma_2)) = (\sigma_1, \vartheta^\times \circ \varphi_1)(\sigma_2, \vartheta^\times \circ \varphi_2)$ et donc ϑ_B est un morphisme de groupes. On considère le morphisme de groupes

$$\zeta_2^{-1} \circ \vartheta_B \circ \zeta_1 : X_{1,R_1}(W) \rtimes \mathrm{Sp}(W) \longrightarrow X_{1,R_2}(W) \rtimes \mathrm{Sp}(W).$$

Si $(\tau, \sigma) \in X_{1,R_1}(W) \rtimes \mathrm{Sp}(W)$ alors on a

$$\zeta_2^{-1}(\vartheta_B(\zeta_1(\tau, \sigma))) = \zeta_2^{-1}(\sigma, (\vartheta^\times \circ \chi_1 \circ f_\sigma) \cdot (\vartheta^\times \circ \tau \circ \sigma)) = (\vartheta^\times \circ \tau, \sigma)$$

car $\vartheta^\times \circ \chi_1 = \chi_2$. Alors $\zeta_2^{-1} \circ \vartheta_B \circ \zeta_1$ est un isomorphisme de groupes par la remarque 11.6 et donc ϑ_B aussi. □

Remarque 11.9. Pour tout $s \in B_{0,R_1}$ et $w \in W$ on a $\vartheta_B(s)(w, 1) = \vartheta_A(s(w, 1))$.

Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $\mathbb{A}_{R_i}(W)$ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}_{R_i}(\mathcal{S}_{R_i}(X))$ défini dans le paragraphe 7.2.1. Par le lemme 7.2, $\mathbb{A}_{R_i}(W)$ est isomorphe à $A_{R_i}(W)$ et par le lemme 11.7 il y a un morphisme de groupes $\vartheta_{\mathbb{A}} : \mathbb{A}_{R_1}(W) \to \mathbb{A}_{R_2}(W)$ donné par $U_{R_1}(w, t) \mapsto U_{R_2}(w, \vartheta^\times(t))$. En plus on peut identifier $B_{0,R_i}(W)$ au groupe des automorphismes de $\mathbb{A}_{R_i}(W)$ triviaux sur le centre $Z(\mathbb{A}_{R_i}(W)) = \{U_{R_i}(0, t) \,|\, t \in R_i^\times\}$.

Remarque 11.10. Par la remarque 11.9 on a $\vartheta_B(s)(U_{R_2}(w, 1)) = \vartheta_{\mathbb{A}}(s(U_{R_1}(w, 1)))$ pour tout $s \in B_{0,R_1}$ et $w \in W$. Puis, on peut vérifier facilement que pour tout $w \in W$ et $t \in R_1^\times$ on a $\vartheta_{\mathbb{A}}(U_{R_1}(w, t)) = U_{R_2}(w, \vartheta^\times(t)) = \Theta(U_{R_1}(w, t)) = \mathbf{F}(\vartheta)(U_{R_1}(w, t))$ où Θ est défini dans (11.1) et $\mathbf{F}$ est le foncteur de la proposition 11.4 avec $G = X$.

Pour $i \in \{1, 2\}$ soit $\mathbb{B}_{0,R_i}(W)$ le normalisateur du groupe $\mathbb{A}_{R_i}(W)$ dans $\mathrm{Aut}_{R_i}(\mathcal{S}_{R_i}(X))$. On note $\vartheta_{\mathbb{B}}$ la restriction de $\mathbf{F}(\vartheta)$ à $\mathbb{B}_{0,R_i}(W)$.

Proposition 11.11. *L'application $\vartheta_{\mathbb{B}} : \mathbb{B}_{0,R_1}(W) \longrightarrow \mathbb{B}_{0,R_2}(W)$ est un morphisme de groupes.*

Démonstration. On vérifie que l'image de $\vartheta_{\mathbb{B}}$ est contenue dans $\mathbb{B}_{0,R_2}(W)$. Soient $\mathbf{s}_1 \in \mathbb{B}_{0,R_1}(W)$ et $\mathbf{s}_2 = \vartheta_{\mathbb{B}}(\mathbf{s}_1) = \Theta(\mathbf{s}_1)$. Il faut vérifier que pour tout $w \in W$ et $t \in R_2^\times$ il existe $w' \in W$ et $t' \in R_2^\times$ tels que $\mathbf{s}_2 U_{R_2}(w, t) \mathbf{s}_2^{-1} = U_{R_2}(w', t')$. Puisque $U_{R_2}(w, t) = U_{R_2}(0, t) U_{R_2}(w, 1)$, $U_{R_2}(0, t) = t \cdot id_{\mathcal{S}_{R_2}(X)}$ et $\mathbf{s}_2 U_{R_2}(0, t) \mathbf{s}_2^{-1} = U_{R_2}(0, t)$, on peut supposer

$t = 1$. Soient $w_1 \in W$ et $t_1 \in R_1^\times$ tels que $U_{R_1}(w,1)\mathbf{s}_1^{-1} = \mathbf{s}_1^{-1}U_{R_1}(w_1,t_1)$, $w = (v,v^*)$ et $w_1 = (v_1, v_1^*)$. Alors pour tout sous-groupe ouvert compact K de G et tout $x \in X$ on a

$$\begin{aligned}
U_{R_2}(w,1)\big(\mathbf{s}_2^{-1}(\mathbf{1}_K)\big)(x) &= \mathbf{s}_2^{-1}(\mathbf{1}_K)(x+v)\langle x, v^*\rangle_{R_2} \\
&= \Theta(\mathbf{s}_1^{-1})(\mathbf{1}_K)(x+v)\ \vartheta^\times(\langle x, v^*\rangle_{R_1}) \\
&= \vartheta_{\mathcal{S}}\big(\mathbf{s}_1^{-1}(\mathbf{1}_K)\big)(x+v)\ \vartheta^\times(\langle x, v^*\rangle_{R_1}) \\
&= \vartheta\big(\mathbf{s}_1^{-1}(\mathbf{1}_K)(x+v)\ \langle x, v^*\rangle_{R_1}\big) \\
&= \vartheta\big(U_{R_1}(w,1)(\mathbf{s}_1^{-1}(\mathbf{1}_K))(x)\big) \\
&= \vartheta\big(\mathbf{s}_1^{-1}(U_{R_1}(w_1,t_1)(\mathbf{1}_K))(x)\big) \\
&= (\vartheta_{\mathcal{S}} \circ \mathbf{s}_1^{-1} \circ U_{R_1}(w_1,t_1))(\mathbf{1}_K)(x) \\
\text{(remarque 11.3)} &= (\mathbf{s}_2^{-1} \circ \vartheta_{\mathcal{S}} \circ U_{R_1}(w_1,t_1))(\mathbf{1}_K)(x) \\
\text{(remarque 11.10)} &= (\mathbf{s}_2^{-1} \circ U_{R_2}(w_1, \vartheta^\times(t_1)))(\mathbf{1}_K)(x).
\end{aligned}$$

Alors $\mathbf{s}_2 U_{R_2}(w,1)\mathbf{s}_2^{-1} = U_{R_2}(w_1, \vartheta^\times(t_1))$ et $\mathbf{s}_2 \in \mathbb{B}_{0,R_2}(W)$. Donc $\vartheta_{\mathbb{B}}$ est bien défini et il est un morphisme de groupes par le lemme 11.2. □

Par le lemme 7.4 il existe un morphisme de groupes $\pi_{0,R_i} : \mathbb{B}_{0,R_i}(W) \longrightarrow B_{0,R_i}(W)$ donné par $\mathbf{s} \longmapsto \mathrm{conj}(\mathbf{s})$ pour $i \in \{1,2\}$. En plus π_{0,R_i} induit une suite exacte courte par le théorème 7.5.

Lemme 11.12. *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & R_1^\times & \longrightarrow & \mathbb{B}_{0,R_1}(W) & \xrightarrow{\pi_{0,R_1}} & B_{0,R_1}(W) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta^\times} & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta_{\mathbb{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta_B} & & \\
1 & \longrightarrow & R_2^\times & \longrightarrow & \mathbb{B}_{0,R_2}(W) & \xrightarrow{\pi_{0,R_2}} & B_{0,R_2}(W) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

commute.

Démonstration. Si $t \in R_1^\times$ alors on voit facilement que $\vartheta_{\mathbb{B}}(t \cdot id_{\mathcal{S}_{R_1}(X)}) = \vartheta^\times(t) \cdot id_{\mathcal{S}_{R_2}(X)}$. Soient maintenant $\mathbf{s}_1 \in \mathbb{B}_{0,R_1}(W)$ et $\mathbf{s}_2 = \vartheta_{\mathbb{B}}(\mathbf{s}_1)$. On doit vérifier que $\vartheta_B(\mathrm{conj}(\mathbf{s}_1)) = \mathrm{conj}(\mathbf{s}_2)$ dans $B_{0,R_2}(W)$. Soit $w \in W$. On suppose que $\mathbf{s}_1 U_{R_1}(w,1)\mathbf{s}_1^{-1} = U_{R_1}(w',t')$ avec $w' \in W$ et $t' \in R_1^\times$. Alors on a déjà vu dans la démonstration de la proposition 11.11 que $\mathbf{s}_2 U_{R_2}(w,1)\mathbf{s}_2^{-1} = U_{R_2}(w', \vartheta^\times(t'))$. Par la remarque 11.10 on obtient

$$\begin{aligned}
\vartheta_B(\mathrm{conj}(\mathbf{s}_1))\big(U_{R_2}(w,1)\big) = \vartheta_{\mathbb{A}}(\mathbf{s}_1 U_{R_1}(w,1)\mathbf{s}_1^{-1}) = \vartheta_{\mathbb{A}}(U_{R_1}(w',t')) = U_{R_2}(w', \vartheta^\times(t')) \\
= \mathrm{conj}(\mathbf{s}_2)\big(U_{R_2}(w,1)\big).
\end{aligned}$$

Puisque $B_{0,R_2}(W)$ agit trivialement sur le centre de $\mathbb{A}_{R_2}(W)$ on obtient $\vartheta_B(\mathrm{conj}(\mathbf{s}_1)) = \mathrm{conj}(\mathbf{s}_2)$ et donc le diagramme commute. □

Soit $\mathrm{Mp}_{R_i}(W) = \{(\sigma, \mathbf{s}) \in \mathrm{Sp}(W) \times \mathbb{B}_{0,R_i}(W) \,|\, \mu_{R_i}(\sigma) = \pi_{0,R_i}(\mathbf{s})\}$ pour $i \in \{1,2\}$ (voir définition 7.9).

Proposition 11.13. *L'application $\hat{\vartheta} : \mathrm{Mp}_{R_1}(W) \longrightarrow \mathrm{Mp}_{R_2}(W)$ définie par $\hat{\vartheta}(\sigma, \mathbf{s}) = (\sigma, \vartheta_{\mathbb{B}}(\mathbf{s}))$ est un morphisme de groupes.*

Démonstration. On vérifie qu'elle est bien définie. Soit $(\sigma, \mathbf{s}) \in \mathrm{Mp}_{R_1}(W)$. Par les définitions de μ_{R_2} et ϑ_B on a $\mu_{R_2}(\sigma) = \vartheta_B(\mu_{R_1}(\sigma)) = \vartheta_B(\pi_{0,R_1}(\mathbf{s}))$ et par le lemme 11.12 on a $\vartheta_B(\pi_{0,R_1}(\mathbf{s})) = \pi_{0,R_2}(\vartheta_{\mathbb{B}}(\mathbf{s}))$. Donc $\hat{\vartheta}(\sigma, \mathbf{s}) \in \mathrm{Mp}_{R_2}(W)$ et $\hat{\vartheta}$ est un morphisme de groupes par la proposition 11.11. □

Remarque 11.14. Par le théorème 7.10, pour $i \in \{1,2\}$ le morphisme de groupes $\pi_{R_i} : \mathrm{Mp}_{R_i}(W) \longrightarrow \mathrm{Sp}(W)$ donné par $(\sigma, \mathbf{s}) \longmapsto \sigma$ induit une suite exacte courte. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & R_1^\times & \longrightarrow & \mathrm{Mp}_{R_1}(W) & \xrightarrow{\pi_{R_1}} & \mathrm{Sp}(W) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \vartheta^\times} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{\vartheta}} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\ 1 & \longrightarrow & R_2^\times & \longrightarrow & \mathrm{Mp}_{R_2}(W) & \xrightarrow{\pi_{R_2}} & \mathrm{Sp}(W) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

commute.

Remarque 11.15. On observe que les groupes $A_{R_i}(W)$, $B_{0,R_i}(W)$, $\mathbb{A}_{R_i}(W)$, $\mathbb{B}_{0,R_i}(W)$ et $\mathrm{Mp}_{R_i}(W)$ qu'on a vu ci-dessus dépendent du choix du R_i-caractère non trivial χ_i de F. On n'a pas indiqué la dépendance par χ_i pour simplifier les notations.

On note **Grp** la catégorie des groupes et on énonce le résultat principal de cette section.

Théorème 11.16. *Pour tout objet (R, χ) de $\mathcal{C}$ soient $\mathbf{G}(R, \chi) = \mathbb{B}_{0,R}(W)$ et $\mathbf{H}(R, \chi) = \mathrm{Mp}_R(W)$ et pour tout morphisme $\vartheta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((R_1, \chi_1), (R_2, \chi_2))$ soient $\mathbf{G}(\vartheta) = \vartheta_{\mathbb{B}}$ et $\mathbf{H}(\vartheta) = \hat{\vartheta}$ les morphismes de groupes des propositions 11.11 et 11.13. Alors $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont deux foncteurs coviariant de $\mathcal{C}$ vers* **Grp**.

Démonstration. Si id_R est le morphisme identité d'un objet (R, χ) de $\mathcal{C}$ alors $\mathbf{G}(id_R) = id_{\mathbb{B}_{0,R}(W)}$ et $\mathbf{H}(id_R) = id_{\mathrm{Mp}_R(W)}$. Soient maintenant (R_1, χ_1), (R_2, χ_2) et (R_3, χ_3) trois objets de $\mathcal{C}$ et $\vartheta_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((R_1, \chi_1), (R_2, \chi_2))$, $\vartheta_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}((R_2, \chi_2), (R_3, \chi_3))$. Alors on a $\mathbf{H}(\vartheta_2 \circ \vartheta_1) = \mathbf{H}(\vartheta_2) \circ \mathbf{H}(\vartheta_1)$ par la proposition 11.4 et $\mathbf{G}(\vartheta_2 \circ \vartheta_1) = \mathbf{G}(\vartheta_2) \circ \mathbf{G}(\vartheta_1)$ par définition de $\hat{\vartheta}$. On obtient que $\mathbf{G}$ et $\mathbf{H}$ sont deux foncteurs coviariant de $\mathcal{C}$ vers **Grp**. □

Exemple. On termine cette section avec un exemple. Soient $\ell \neq p$ un nombre premier, $\mathbb{Z}_\ell^{nr}$ l'extension non ramifiée maximale de l'anneau des entiers ℓ-adiques et $\overline{\mathbb{F}}_\ell$ une clôture algébrique du corps fini avec ℓ éléments. Alors la réduction modulo ℓ est un morphisme surjectif d'anneaux $r_\ell : \mathbb{Z}_\ell^{nr} \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell$ et on note $r_\ell^\times : (\mathbb{Z}_\ell^{nr})^\times \longrightarrow \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times$ qui est un morphisme surjectif de groupes. On fixe un caractère non trivial $\chi : F \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell^{nr}$ et on pose $\overline{\chi} = r_\ell^\times \circ \chi$.

Associé à $(\mathbb{Z}_\ell^{nr}, \chi)$ on a les groupes $B_{0,\mathbb{Z}_\ell^{nr}}(W)$, $\mathbb{B}_{0,\mathbb{Z}_\ell^{nr}}(W)$ et $\mathrm{Mp}_{\mathbb{Z}_\ell^{nr}}(W)$ et associé à $(\overline{\mathbb{F}}_\ell, \overline{\chi})$ les groupes $B_{0,\overline{\mathbb{F}}_\ell}(W)$, $\mathbb{B}_{0,\overline{\mathbb{F}}_\ell}(W)$ et $\mathrm{Mp}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(W)$. Par le lemme 11.12 et la remarque 11.14 les diagrammes

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_\ell^{nr})^\times & \longrightarrow & \mathbb{B}_{0,\mathbb{Z}_\ell^{nr}}(W) & \longrightarrow & B_{0,\mathbb{Z}_\ell^{nr}}(W) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle r_\ell^\times} & & \downarrow{\scriptstyle r_{\ell,\mathbb{B}}} & & \downarrow{\scriptstyle r_{\ell,B}} & & \\
1 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times & \longrightarrow & \mathbb{B}_{0,\overline{\mathbb{F}}_\ell}(W) & \longrightarrow & B_{0,\overline{\mathbb{F}}_\ell}(W) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & (\mathbb{Z}_\ell^{nr})^\times & \longrightarrow & \mathrm{Mp}_{\mathbb{Z}_\ell^{nr}}(W) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(W) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle r_\ell^\times} & & \downarrow{\scriptstyle \hat{r}_\ell} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \\
1 & \longrightarrow & \overline{\mathbb{F}}_\ell^\times & \longrightarrow & \mathrm{Mp}_{\overline{\mathbb{F}}_\ell}(W) & \longrightarrow & \mathrm{Sp}(W) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

commutent. Puisque $r_\ell^\times$ est surjectif et $r_{\ell,B}$ bijectif par le lemme 11.8 on obtient que $r_{\ell,\mathbb{B}}$ et $\hat{r}_\ell$ sont surjectifs.

Bibliographie

[Ber84] Joseph Bernstein, *Le "centre" de Bernstein*, Représentations des groupes réductifs sur un corps local, Travaux en cours. Hermann, Paris (1984), 1–32, Rédigé par P. Deligne.

[BK93] Colin J. Bushnell and Philip C. Kutzko, *The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups*, Princeton University Press, 1993.

[BK98] ———, *Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types*, Proc. London Math. Soc. (3) **77** (1998), 582–634.

[Blo05] Corinne Blondel, *Quelques propriétés des paires couvrantes*, Math. Ann. **331** (2005), no. 2, 243–257.

[Bou58] Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique : Algèbre, Chapitre 8. Modules et anneaux semi-simples.*, Hermann, Paris, 1958.

[Bou02] ———, *Lie groups and Lie algebras. Chapters 4-6*, Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[BSS12] Paul Broussous, Vincent Sécherre, and Shaun Stevens, *Smooth representations of $GL_m(D)$ V : Endo-classes*, Doc. Math. **17** (2012), 23–77.

[CE04] Marc Cabanes and Michel Enguehard, *Representation theory of finite reductive groups*, New Mathematical Monographs 1, Cambridge University Press, 2004.

[CT15] Gianmarco Chinello and Daniele Turchetti, *Weil representation and metaplectic groups over an integral domain*, Communications in Algebra **43** (2015), no. 6, 2388–2419.

[Dat09] Jean-Francois Dat, *Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adiques*, J. Inst. Math. Jussieu **8** (2009), 261–333.

[Dat15] ———, *Equivalences of tame blocks for p-adic linear groups*, preprint, 2015.

[DJ86] James Dipper and Gordon James, *Identification of the irreducible modular representations of $GL_n(q)$*, J. Algebra **104** (1986), 266–288.

[EH11] Matthew Emerton and David Helm, *The local Langlands correspondence for $GL(n)$ in families*, preprint, 2011.

[GH07] Shamgar Gurevich and Ronny Hadani., *The geometric Weil representation*, Selecta Mathematica **13** (2007), no. 3, 465–481.

[GH09] Shamgar Gurevich and Ronny Hadani, *Quantization of symplectic vector spaces over finite fields*, Journal of Symplectic Geometry **7** (2009), no. 4, 475–502.

[Gre55] James A. Green, *The characters of the finite general linear groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 402–447.

[Gui13] David-Alexandre Guiraud, *On semisimple l-modular Bernstein-blocks of a p-adic general linear group*, J. Number Theory **133** (2013), 3524–3548.

[Hel12] David Helm, *The Bernstein center of the category of smooth $W(k)[GL_n(F)]$-modules*, preprint, arXiv :1201.1874v2, 2012.

[HL94] Robert B. Howlett and Gustav Lehrer, *On Harish-Chandra induction and restriction for modules of Levi subgroups*, J. Algebra **165** (1994), 172–183.

[Jam86] Gordon D. James, *The irreducible representations of the finite general linear groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **52** (1986), 236–268.

[Lam91] Tsit Yuen Lam, *A first course in noncommutative rings*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 131, Springer-Verlag, New York, 1991.

[Lem00] Franz Lemmermeyer, *Reciprocity laws : from Euler to Eisenstein*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, 2000.

[MH73] John Williard Milnor and Dale Husemoller, *Symmetric bilinear forms*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, vol. 73, Springer-Verlag, 1973.

[Min08] Alberto Minguez, *Correspondance de Howe explicite : paires duales de type II*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **41** (2008), 715–739.

[Min12] ———, *Correspondance de Howe ℓ-modulaire : paires duales de type II*, preprint, 2012.

[Moo69] Calvin Moore, *Group extensions of p-adic and adelic linear groups*, Publ. Math. I.H.É.S **35** (1969), 5–74.

[MS14a] Alberto Minguez and Vincent Sécherre, *Représentations lisses modulo ℓ de $GL_m(D)$*, Duke Math. Journal **163** (2014), no. 4, 795–887.

[MS14b] ———, *Types modulo ℓ pour les formes intérieures de GL_n sur un corps local non archimédien*, Proc. London Math. Soc. (3) **109** (2014), 823–891, Avec un appendice de Vincent Sécherre et Shaun Stevens.

[MVW87] Colette Moeglin, Marie-France Vignéras, and Jean-Loup Waldspurger, *Correspondances de Howe sur un corps p-adique*, Lecture notes in mathematics, vol. 1291, Springer, 1987.

[Séc04] Vincent Sécherre, *Représentations lisses de $GL(m, D)$, I. Caractères simples*, Bull. Soc. Math. France **132** (2004), 327–396.

[Séc05a] ———, *Représentations lisses de $GL(m, D)$, II. β-extensions*, Composition Math. **141** (2005), 1531–1550.

[Séc05b] ———, *Représentations lisses de $GL(m, D)$, III. types simples*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **38** (2005), 951–977.

[Seg63] Irving Ezra Segal, *Transforms for operators and symplectic automorphisms over a locally compact abelian group*, Mathematica Scandinavica **13** (1963), 31–43.

[Shi12] Sug Woo Shin, *Abelian varieties and the Weil representations*, Algebra and Number Theory **6-8** (2012), 1719–1772.

[SS08] Vincent Sécherre and Shaun Stevens, *Représentations lisses de $GL(m, D)$, IV. Représentations supercuspidales*, J. Inst. Math. Jussieu **7** (2008), 527–574.

[SS12] ———, *Smooth representations of $GL_m(D)$ VI : semisimple types*, Int. Math. Res. Not. IMRN **13** (2012), 2994–3039.

[SS15] ———, *Block decomposition of the category of ℓ-modular smooth representations of $GL_n(F)$ and its inner forms*, À paraître dans Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 2015.

[Ste67] Robert Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Yale University, New Haven, Conn., Yale, 1967.

[Vig96] Marie-France Vignéras, *Représentations l-modulaires d'un groupe réductif p-adique avec $l \neq p$*, Progress in Mathematics, vol. 137, Birkhäuser Boston, 1996.

[Vig98] ———, *Induced R-representations of p-adic reductive groups*, Selecta Math. **4** (1998), 549–623.

[Wei64] André Weil, *Sur certains groupes d'opérateurs unitaires*, Acta Mathematica **111** (1964), 143–211.

[Wei74] ———, *Basic number theory*, third ed., Springer-Verlag, 1974.