



**HAL**  
open science

**Le treillis des opérateurs de réduction : applications aux  
bases de Gröbner non commutatives et en algèbre  
homologique**  
Cyrille Chenavier

► **To cite this version:**

Cyrille Chenavier. Le treillis des opérateurs de réduction : applications aux bases de Gröbner non commutatives et en algèbre homologique. Mathématiques [math]. Université paris Diderot, 2016. Français. NNT: . tel-01415910

**HAL Id: tel-01415910**

**<https://theses.hal.science/tel-01415910v1>**

Submitted on 13 Dec 2016

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT – PARIS VII  
SORBONNE PARIS CITÉ

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES MATHÉMATIQUES DE PARIS CENTRE

Institut de Recherche en Informatique Fondamentale  
Équipe Preuves, Programmes et Systèmes

## THÈSE

en vue d'obtenir le grade de  
Docteur de l'Université Paris Diderot  
en Informatique

# Le treillis des opérateurs de réduction : applications aux bases de Gröbner non commutatives et en algèbre homologique

*Présentée et soutenue par*

**Cyrille Chenavier**

*le 9 décembre 2016*

Devant le jury :

Roland BERGER	Invité	Université Jean Monnet, Saint-Étienne
Pierre-Louis CURIEN	Président	CNRS, Université Paris Diderot, Paris 7
Vladimir DOTSENKO	Rapporteur	Trinity College Dublin
Jean-Charles FAUGÈRE	Examinateur	INRIA, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6
Jean GOUBAULT-LARRECQ	Rapporteur	École normale supérieure de Cachan
Yves GUIRAUD	Directeur de thèse	INRIA, Université Paris Diderot, Paris 7
Muriel LIVERNET	Examinatrice	Université Paris Diderot, Paris 7
Philippe MALBOS	Directeur de thèse	Université Claude Bernard, Lyon 1
Paul-André MELLIÈS	Examinateur	CNRS, Université Paris Diderot, Paris 7

## Résumé

Dans cette thèse, on étudie les algèbres associatives unitaires par des méthodes de réécriture. La théorie des bases de Gröbner non commutatives permet de résoudre des problèmes de décidabilité ou de calculer des invariants homologiques par de telles méthodes.

Motivé par des questions d'algèbre homologique, Berger caractérise les bases de Gröbner quadratiques en termes de treillis. Cette caractérisation a pour base les opérateurs de réduction. Ceux-ci sont des projecteurs particuliers d'un espace vectoriel admettant une base totalement ordonnée. Berger montre que, dans le cas où cet espace vectoriel est de dimension finie, l'ensemble des opérateurs de réduction admet une structure de treillis. Il en déduit une formulation de la confluence en termes de treillis lui permettant de caractériser les bases de Gröbner quadratiques.

Dans ce travail, on étend l'approche par les opérateurs de réduction en l'appliquant au cas des algèbres non nécessairement quadratiques. Pour cela, on montre qu'en dimension quelconque l'ensemble des opérateurs de réduction admet également une structure de treillis. En dimension finie, celle-ci coïncide avec celle exhibée par Berger. On en déduit une formulation de la confluence en termes de treillis généralisant celle de Berger. En outre, on donne une interprétation de la complétion en termes de treillis.

La formulation algébrique de la confluence permet en particulier de caractériser les bases de Gröbner non commutatives en termes de treillis. De plus, la formulation algébrique de la complétion, nous permet de montrer que celle-ci peut être obtenue via une construction dans le treillis des opérateurs de réduction. On en déduit une méthode pour construire des bases de Gröbner non commutatives.

On construit également une homotopie contractante du complexe de Koszul en termes d'opérateurs de réduction. La formulation de la confluence en termes de treillis nous permet de caractériser celle-ci par des équations. Ces équations induisent des représentations d'une famille d'algèbres que sont les algèbres de confluence. L'homotopie contractante est construite à partir de ces représentations.

## Remerciements

Mes premiers remerciements sont naturellement et sincèrement pour Yves Guiraud et Philippe Malbos. Je les remercie d'abord pour la confiance qu'ils m'ont témoignée en choisissant de m'encadrer. Je les remercie également de m'avoir permis de découvrir un sujet de recherche passionnant, d'avoir été très disponibles durant ces trois ans et de m'avoir fourni de nombreux conseils. J'ai pu profiter de leurs centres d'intérêt et cultures mathématiques variés et complémentaires. Leur disponibilité et leurs conseils ne se limitaient pas uniquement à des échanges scientifiques : ils m'ont appris à avoir en permanence le souci d'être pédagogique, aussi bien dans la rédaction que dans les communications orales. Il m'ont également appris à être autonome. Pour tout cela donc, je les remercie.

Je remercie Jean Goubault-Larrecq et Vladimir Dotsenko qui m'ont fait l'honneur de rapporter ma thèse. Les échanges enrichissants que j'ai eus avec chacun d'eux m'ont permis d'améliorer mon mémoire.

Je remercie Pierre-Louis Curien, Paul-André Melliès, Muriel Livernet et Jean-Charles Faugère pour avoir accepté de participer au jury le jour de ma soutenance. Leur présence me fait très plaisir. Merci encore à Paul-André Melliès pour sa proposition de travailler ensemble sur une extension de mes travaux.

Je remercie Roland Berger pour avoir accepté l'invitation à ma soutenance. Je suis particulièrement touché par sa présence car j'y tenais beaucoup. Je le remercie également pour les échanges qu'on a eus et l'intérêt qu'il a témoigné lorsque je travaillais sur la rédaction de mon premier article.

Je remercie Samuel Mimram qui m'a donné des conseils lors de la rédaction de mon deuxième article. Ses conseils m'ont aidé à m'adresser à une communauté scientifique autre que celle dans laquelle j'ai été formé. Je ne doute pas que cela me sera de nouveau d'une grande aide à l'avenir.

Je remercie tous les membres du projet ANR CATHRE-FOCAL. Les nombreuses réunions de l'ANR m'ont permis de pouvoir exposer une grande partie de mes travaux.

Je remercie tous les membres de l'IRIF que je ne peux pas énumérer tellement la liste est longue. J'aimerais cependant citer les doctorants et stagiaires qui ont beaucoup contribué à une atmosphère entre "thésards" à la fois intéressante, conviviale et très souvent teintée d'humour. Parmi eux, je commencerai par remercier Maxime, Ludovic, Pierre et Joey pour des raisons tellement nombreuses que je ne peux pas les énumérer. Je remercie Léonard qui a eu la lourde tâche de succéder à Ludovic dans le bureau, tâche qu'il relève très bien et dans un style différent. J'ai différentes raisons de remercier Jovana, si je ne devais en retenir qu'une, ce serait le fait qu'elle est la seule personne que je connais à comprendre le fanatisme que j'ai pour Djokovic. Je remercie Hadrien pour les visites de musées et autres échanges culturels partagés ensemble. Je remercie Théo et Antoine dont j'apprécie et ai apprécié les rôles dans nos repas du midi et autres réunions extra-universitaires. Je remercie Raphaëlle et Clément qui partagent mon intérêt pour l'histoire, particulièrement médiévale. Je remercie Étienne sans qui je serais le seul doctorant supporter lyonnais de PPS, en tout cas me semble-t-il. Je n'oublie pas : Pierre, Amina, Yann, Matthieu, Nicolas, Thibaut, Gabriel et Cyprien. Pour finir sur les membres de l'IRIF, j'aimerais également remercier nominalement Odile et Daniel.

Il est maintenant temps de passer à la famille. L'aide et le soutien que j'en ai reçu sont naturels mais ont été indispensables : partager mes moments d'euphorie et me soutenir dans les périodes difficiles m'a beaucoup aidé. Je commencerai par mes parents. J'ai énormément de raisons de les remercier, pour ce qu'ils ont fait avant et pendant ma thèse. Je les remercie particulièrement pour leur présence téléphonique et attention quotidienne au milieu de ma

thèse lorsque j'en avais le plus besoin. J'en profite également pour remercier Jean-Marc. Je remercie Nicolas qui a été plus qu'un frère. Le temps qu'il m'a consacré et les conseils qu'il m'a donné ont été très précieux. Je remercie Thibault avec qui j'apprécie nos échanges de sms les jours où l'OL joue, ce qui n'est malheureusement pas synonyme de victoire. J'apprécie aussi les parties de warcraft qui ne nous rajeunissent pas mais qui restent de très bons moments. Je remercie mes deux grands-mères et ma tante Elisabeth pour leurs prises de nouvelles régulières et l'intérêt qu'elles ont manifesté pendant ma thèse, aussi bien sur le travail que sur le plan personnel. Je remercie particulièrement mamie, que j'apprécie beaucoup de revoir "comme au bon vieux temps". Je remercie enfin Grabou, en tant que petite soeur trois semaines par an.

Côté amis, je remercie Mickaël et Lionel que j'ai toujours beaucoup de plaisir à revoir même si ce n'est malheureusement pas aussi fréquent que ce que j'aimerais. Je remercie particulièrement Mickaël pour l'aide qu'il m'a régulièrement fournie. J'ai également une pensée pour mon binôme.

Mes derniers remerciements réels vont à Laurence. Plus que tout autre, elle a partagé mes hauts et mes bas. Elle m'a surtout appris à me faire confiance, ce qui était un combat que j'aurais pensé inutile car perdu d'avance il y a encore quelques mois.

Pour finir sur une note fortement non sérieuse, j'aimerais remercier Ronnie Ron et Annette Schwarz. Je rappelle à ceux qui ne connaissent pas ces personnes et qui feraient des recherches google dessus qu'il s'agit d'un paragraphe humoristique.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Réécriture dans les algèbres</b>	<b>21</b>
1.1 Préliminaires	21
1.1.1 Réécriture abstraite	21
1.1.2 Présentations d'algèbres par réécriture	26
1.2 Bases de Gröbner non commutatives	39
1.2.1 Bases de Gröbner non commutatives et présentations convergentes	39
1.2.2 Procédures de construction	42
1.3 Opérateurs de réduction	46
1.3.1 Opérateurs de réduction et algèbres quadratiques	46
1.3.2 Opérateurs de réduction et algèbres non quadratiques	50
<b>2 Opérateurs de réduction</b>	<b>53</b>
2.1 Propriétés de réécriture	54
2.1.1 Structure de treillis et confluence	54
2.1.2 Formes normales, propriété de Church-Rosser et lemme de Newman	61
2.1.3 Opérateurs de réduction et réécriture abstraite	65
2.2 Opérateurs de réduction et complétion	68
2.2.1 Confluence pour une paire d'opérateurs de réduction	68
2.2.2 Complétion	72
2.3 Opérateurs de réduction généralisés	78
2.3.1 Relation d'ordre	78
2.3.2 Propriétés de réécriture	80
<b>3 Opérateurs de réduction et présentations d'algèbres</b>	<b>83</b>
3.1 Présentations par opérateur	83
3.1.1 La famille de réduction d'une présentation	83
3.1.2 Présentations confluentes	85
3.2 Procédure de complétion	87
3.2.1 Énoncé	87
3.2.2 Correction	89
<b>4 Réécriture et Koszulité</b>	<b>97</b>
4.1 Préliminaires	97
4.1.1 Tor gradué	97

4.1.2	Koszulité . . . . .	102
4.2	Preuves de Koszulité par réécriture . . . . .	106
4.2.1	Opérateurs de réduction et Koszulité . . . . .	106
4.2.2	La résolution d’Anick . . . . .	112
<b>5</b>	<b>Algèbres de confluence et acyclicité du complexe de Koszul</b>	<b>119</b>
5.1	Préliminaires . . . . .	121
5.1.1	L’homotopie contractante en petit degré . . . . .	121
5.1.2	Algèbres de confluence . . . . .	126
5.1.3	Le complexe de Koszul normalisé . . . . .	127
5.2	La borne gauche d’une présentation . . . . .	129
5.2.1	Paires de réduction associées à une présentation . . . . .	130
5.2.2	Construction . . . . .	132
5.2.3	Extra-condition et relations de réduction . . . . .	137
5.3	Exemples . . . . .	143
5.3.1	Les algèbres symétriques libres . . . . .	143
5.3.2	Algèbres monomiales satisfaisant la propriété de chevauchement . . . . .	146
5.3.3	L’algèbre enveloppante de l’algèbre de Lie d’Heisenberg . . . . .	148
	<b>Annexe</b>	<b>156</b>
<b>A</b>	<b>Implémentation et exemples</b>	<b>157</b>
A.1	Implémentation des opérateurs de réduction . . . . .	157
A.1.1	Préliminaires . . . . .	157
A.1.2	Code . . . . .	158
A.2	Exemple . . . . .	161

# Introduction

## Réécriture et bases de Gröbner

**Réécriture et formes normales.** Les raisonnements par réécriture sont initiés par Thue [85] au début du vingtième siècle pour étudier des problèmes algorithmiques comme le *problème du mot*. Celui-ci peut être formulé de la façon suivante : étant donné un monoïde  $\mathbf{M}$ , existe-t-il une partie génératrice finie  $X$  de  $\mathbf{M}$  et une procédure permettant de déterminer si deux mots sur  $X$  représentent le même élément de  $\mathbf{M}$  ou non ? Lorsqu'une telle procédure existe, on dit que le problème du mot est *décidable* pour  $\mathbf{M}$ . Une façon de décider ce problème est de déterminer une *présentation par générateurs et relations* finie de  $\mathbf{M}$  ayant une bonne propriété calculatoire appelée *convergence*. Une présentation par générateurs et relations de  $\mathbf{M}$  est un couple  $\langle X \mid R \rangle$  où  $X$  est un ensemble et  $R$  est un ensemble de couples  $(w, w')$  de mots sur  $X$  tel que  $\mathbf{M}$  est isomorphe au monoïde libre sur  $X$  quotienté par la congruence engendrée par  $R$ . Une telle présentation est dite finie lorsque  $X$  et  $R$  sont des ensembles finis. Une présentation par un système de réécriture de  $\mathbf{M}$  est une présentation où les éléments de  $R$  sont orientés. Une relation  $(w, w')$  de  $R$  n'est pas considérée comme une égalité  $w \equiv w'$  dans  $\mathbf{M}$  mais comme une règle de calcul, ou *règle de réécriture*,  $w \longrightarrow w'$ . Ces règles induisent des étapes de calcul, ou *étapes de réécriture*, de la forme  $w_1 w w_2 \longrightarrow w_1 w' w_2$  pour tout couple de mots  $(w_1, w_2)$ . Lorsqu'il existe une suite d'étapes de réécriture d'un mot  $w$  à un mot  $w'$ , on dit que  $w$  se *réécrit* en  $w'$ . Dans ce cas,  $w$  et  $w'$  représentent le même élément de  $\mathbf{M}$ . Une présentation est dite convergente si elle satisfait les deux propriétés suivantes :

1. elle est *terminante*, c'est-à-dire, il n'existe pas de suite d'étapes de réécriture infinie,
2. elle est *confluente*, c'est-à-dire, si un mot se réécrit en deux autres mots, ceux-ci se réécrivent en un même mot.

Un mot  $w$  est appelé une *forme normale* s'il ne peut pas se réécrire, c'est-à-dire, s'il n'existe pas d'étape de réécriture de la forme  $w \longrightarrow w'$ . Une forme normale d'un mot  $w$  est une forme normale  $w'$  telle que  $w$  se réécrit en  $w'$ . En particulier, lorsque  $w'$  est une forme normale de  $w$ ,  $w$  et  $w'$  représentent le même élément de  $\mathbf{M}$ .

On suppose que  $\mathbf{M}$  admet une présentation convergente finie. D'après l'hypothèse de terminaison, tout mot admet au moins une forme normale. De plus, d'après l'hypothèse de confluence, cette forme normale est unique et pour la calculer il suffit de réécrire un mot tant que celui-ci n'est pas une forme normale. Enfin, d'après l'hypothèse de finitude, il est possible de tester si un mot est une forme normale ou non en testant si chacun de ses sous-mots est le membre gauche d'une règle de réécriture. Pour tester si deux mots représentent le même élément de  $\mathbf{M}$ , il suffit de calculer leurs formes normales et de tester si celles-ci sont égales ou non. Une présentation convergente finie offre donc une procédure, appelée *procédure de la forme normale*, permettant de décider le problème du mot pour  $\mathbf{M}$ .



Après les travaux de Thue, la réécriture admet des développements dans différentes directions, à commencer par la logique. Dans les années 30, la réécriture permet en effet de formuler les notions d’algorithme ou de procédure effective (voir [41]). Le  $\lambda$ -calcul est un autre domaine d’application de la réécriture. Celui-ci, introduit par Church [35, 36] qui s’intéresse aux fondements de la logique formelle, est utilisé en théorie des langages de programmation. La  $\beta$ -réduction est une opération du  $\lambda$ -calcul correspondant à l’exécution d’une instruction dans un programme et est interprétée comme une étape de réécriture.

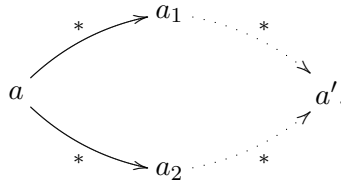
Ces développements conduisent Newman à définir la réécriture abstraite [71] afin d’avoir un cadre général. Un *système de réécriture abstrait* est la donnée d’un couple  $(A, \longrightarrow)$  où  $A$  est un ensemble et  $\longrightarrow$  est une relation binaire sur  $A$ . Cette relation doit être pensée comme un ensemble d’étapes de réécriture. La réécriture abstraite permet d’avoir une formulation générale des notions de forme normale, de confluence, de terminaison et de convergence :

1.  $a \in A$  est une forme normale pour  $\longrightarrow$  s’il n’existe pas  $a' \in A$  tel que  $a \longrightarrow a'$ ,
2.  $\longrightarrow$  est terminante s’il n’existe pas de suite infinie

$$a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_n \longrightarrow \cdots ,$$

d’éléments de  $A$ ,

3. en notant  $\xrightarrow{*}$  la clôture réflexive transitive de  $\longrightarrow$ , cette dernière est dite *confluente* si, pour tout triplet  $(a, a_1, a_2)$  d’éléments de  $A$  tel que  $a \xrightarrow{*} a_1$  et  $a \xrightarrow{*} a_2$ , il existe  $a' \in A$  tel que  $a_1 \xrightarrow{*} a'$  et  $a_2 \xrightarrow{*} a'$  :



4.  $\longrightarrow$  est dite *convergente* si elle est confluente et terminante.

Lorsque  $\longrightarrow$  est terminante, tout élément de  $A$  admet au moins une forme normale. Si elle est de plus confluente, alors tout élément de  $A$  admet exactement une forme normale. Ainsi, lorsque  $\longrightarrow$  est convergente, tout élément admet une unique forme normale et deux éléments de  $A$  appartiennent à la même classe d’équivalence pour la relation d’équivalence induite par  $\longrightarrow$  si et seulement si leurs formes normales sont égales.

**Formes normales et bases de Gröbner commutatives.** Le calcul de formes normales admet également des applications en algèbre commutative. Soient  $\mathbb{K}$  un corps commutatif et  $\mathbf{A}$  une  $\mathbb{K}$ -algèbre commutative. Une *présentation par générateurs et relations* de  $\mathbf{A}$  est un couple  $\langle X \mid R \rangle$  tel que

1.  $X$  est un ensemble,
2.  $R$  est une partie de l’algèbre polynomiale  $\mathbb{K}[X]$  sur  $X$  telle qu’on a un isomorphisme d’algèbres

$$\mathbf{A} \simeq \frac{\mathbb{K}[X]}{I(R)},$$

où  $I(R)$  est l’idéal de  $\mathbb{K}[X]$  engendré par  $R$ .

Dans sa thèse [22, 23], Buchberger étudie les algèbres commutatives via un *ordre monomial*, c'est-à-dire, un ordre  $<$  total terminant sur les monômes tel qu'étant donnés trois monômes  $m_1, m_2, m_3$  on a l'implication suivante :

$$m_1 < m_2 \implies m_1 m_3 < m_2 m_3.$$

Le caractère total de cet ordre implique que tout polynôme  $f$  admet un plus grand monôme relativement à  $<$  dans sa décomposition dans la base canonique de  $\mathbb{K}[X]$ . Ce monôme est noté  $\text{lm}(f)$ , son coefficient dans  $f$  est noté  $\text{lc}(f)$  et on pose

$$r(f) = \text{lc}(f) \text{lm}(f) - f.$$

Étant donné un ordre monomial  $<$ , on associe à  $\langle X \mid R \rangle$  le système de réécriture  $\left( \mathbb{K}[X], \xrightarrow{R} \right)$  défini par

$$\lambda \text{lm}(f) m + g \xrightarrow{R} \frac{\lambda}{\text{lc}(f)} r(f) m + g,$$

où

1.  $m$  est un monôme,
2.  $\lambda$  est un scalaire non nul,
3.  $f$  appartient à  $R$ ,
4.  $g$  est un polynôme tel que  $\text{lm}(f) m$  n'appartient pas à sa décomposition.

La présentation  $\langle X \mid R \rangle$ , équipée de  $<$ , est dite *convergente* si  $\xrightarrow{R}$  l'est.

Dans [24], Buchberger introduit les *bases de Gröbner*. Étant donné un idéal  $I$  de  $\mathbb{K}[X]$  et un ordre monomial  $<$ , une base de Gröbner de  $I$  est une partie  $R$  de  $I$  telle que, pour tout  $f \in I$ , il existe  $g \in R$  et un monôme  $m$  tels que  $\text{lm}(f)$  est égal à  $\text{lm}(g) m$ . Les bases de Gröbner sont reliées aux présentations convergentes de la façon suivante :  $\langle X \mid R \rangle$ , équipée d'un ordre monomial  $<$ , est convergente si et seulement si  $R$  est une base de Gröbner de  $I(R)$ .

Les bases de Gröbner permettent de construire des bases linéaires d'algèbres commutatives. En effet, soient  $\mathbf{A}$  une algèbre commutative et  $\langle X \mid R \rangle$  une présentation convergente de  $\mathbf{A}$  pour un ordre monomial fixé. Tout élément de  $\mathbb{K}[X]$  admet une unique forme normale. Ces formes normales déterminant les classes d'équivalence modulo  $R$ , deux polynômes représentent le même élément de  $\mathbf{A}$  si et seulement si leurs formes normales sont égales. Ainsi, en tant qu'espace vectoriel,  $\mathbf{A}$  est isomorphe à l'espace des formes normales. De plus, un polynôme est une forme normale si et seulement si tous les monômes figurant dans sa décomposition sont également des formes normales, de sorte que l'espace des formes normales admet pour base l'ensemble des monômes en formes normales. Les classes d'équivalence modulo  $R$  de ces monômes forment donc une base linéaire de  $\mathbf{A}$ . Exprimer de telles bases fournit de nombreuses applications calculatoires [29] : test d'appartenance à un idéal, résolution de systèmes polynomiaux, détermination de la table de multiplication d'une algèbre ou calcul d'intersection de variétés en géométrie algébrique, par exemple.

**Bases de Gröbner non commutatives.** Dans cette thèse, la structure algébrique qu'on étudie par des méthodes de réécriture est celle des algèbres associatives unitaires sur un corps commutatif  $\mathbb{K}$ . Dans la suite de cette introduction, lorsqu'on emploie la terminologie d'algèbre, on désigne une algèbre associative unitaire sur  $\mathbb{K}$ .

Étant donné un ensemble  $X$ , l'algèbre libre sur  $X$  est l'algèbre tensorielle sur  $X$ . On identifie cette dernière à l'espace vectoriel engendré par l'ensemble  $X^*$  des mots sur  $X$  et on la note  $\mathbb{K}X^*$ . Étant donnée une algèbre  $\mathbf{A}$ , une *présentation par générateurs et relations* de  $\mathbf{A}$  est la donnée d'un couple  $\langle X \mid R \rangle$  où

1.  $X$  est un ensemble,
2.  $R$  est une partie de  $\mathbb{K}X^*$  telle qu'on a un isomorphisme d'algèbres

$$\mathbf{A} \simeq \frac{\mathbb{K}X^*}{I(R)},$$

où  $I(R)$  est l'idéal bilatère engendré par  $R$ .

Comme dans le cas commutatif, les *ordres monomiaux* permettent d'associer un système de réécriture à une présentation. Dans ce contexte non commutatif, un ordre monomial est un ordre total terminant  $<$  sur  $X^*$  tel qu'étant donnés quatre mots  $w, w', w_1, w_2$  on a l'implication suivante :

$$w < w' \implies w_1 w w_2 < w_1 w' w_2.$$

Un exemple de tel ordre est l'ordre *deg-lex*. Pour définir celui-ci, on considère un ordre total terminant  $<$  sur  $X$ . L'ordre deg-lex induit sur  $X^*$  est défini par  $w$  est inférieur à  $w'$  si

1. la longueur de  $w$  est strictement inférieure à celle de  $w'$  ou
2.  $w$  et  $w'$  ont même longueur et il existe  $w'', w_1, w_2 \in X^*$ ,  $x_1, x_2 \in X$  tels que  $x_1 < x_2$ ,  $w = w'' x_1 w_1$  et  $w' = w'' x_2 w_2$ .

On fixe une présentation  $\langle X \mid R \rangle$  d'une algèbre  $\mathbf{A}$  ainsi qu'un ordre monomial  $<$ . Tout élément  $f$  de  $\mathbb{K}X^*$  admet un plus grand mot relativement à  $<$ , noté  $\text{lm}(f)$ , dans sa décomposition. Comme dans le cas commutatif, on note  $\text{lc}(f)$  le coefficient de  $\text{lm}(f)$  dans  $f$  et

$$r(f) = \text{lc}(f) \text{lm}(f) - f.$$

Le système de réécriture associé à  $\langle X \mid R \rangle$ , équipé de  $<$ , est

$$\lambda w_1 \text{lm}(f) w_2 + g \xrightarrow{R} \frac{\lambda}{\text{lc}(f)} w_1 r_f w_2 + g,$$

où

1.  $w_1$  et  $w_2$  appartiennent à  $X^*$ ,
2.  $\lambda$  est un scalaire non nul,
3.  $f$  appartient à  $R$ ,
4.  $g$  est un élément de  $\mathbb{K}X^*$  tel que  $w_1 \text{lm}(f) w_2$  n'appartient pas à sa décomposition.

Du fait de l'analogie avec les travaux de Buchberger, Mora introduit dans [70] la terminologie de *bases de Gröbner non commutatives*. Étant donné un ordre monomial, une base de Gröbner non commutative d'un idéal  $I$  de  $\mathbb{K}X^*$  est une partie  $R$  de  $I$  telle que, pour tout  $f \in I$ , il existe des mots  $w_1, w_2$  et  $g \in R$  tels que  $\text{lm}(f)$  est égal à  $w_1 \text{lm}(g) w_2$ . Une présentation  $\langle X \mid R \rangle$ , équipée d'un ordre monomial, est convergente si et seulement si  $R$  est une base de Gröbner non commutative de  $I(R)$ .

On a vu précédemment comment les bases de Gröbner permettent de déterminer des bases linéaires d'algèbres commutatives. De la même façon, les bases de Gröbner non commutatives

permettent de déterminer des bases d'algèbres associatives unitaires. Le calcul de telles bases par des méthodes de réécriture apparaît, avant Mora, chez Bokut [17] et Bergman [15] afin d'étudier des problèmes de plongements.

Un autre champ d'application des bases de Gröbner non commutatives est l'algèbre homologique. Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre *augmentée*, c'est-à-dire, il existe une application  $\mathbb{K}$ -linéaire  $\varepsilon : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $\ker(\varepsilon)$  est un idéal et  $\mathbf{A}$  admet une décomposition en somme directe  $\ker(\varepsilon) \oplus \mathbb{K}$ . En algèbre homologique, on s'intéresse au calcul d'invariants homologiques de  $\mathbf{A}$  tels que les  $\text{Tor}_n$ , par exemple. Une méthode pour effectuer un tel calcul consiste à construire une *résolution projective* de  $\mathbb{K}$ , c'est-à-dire, une suite

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{P}_n \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{P}_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{P}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \rightarrow 0,$$

telle que, pour tout entier  $n$ ,  $\mathbf{P}_n$  est un  $\mathbf{A}$ -module projectif et l'image de  $\partial_{n+1}$  est égale au noyau de  $\partial_n$ . Une telle résolution existe toujours et peut être construite à partir de la bar résolution de  $\mathbf{A}$  [1], par exemple. Cependant, la bar résolution n'est pas optimale pour calculer les  $\text{Tor}$ . Par ailleurs, il existe des résolutions libres dites *minimales*, c'est-à-dire, des résolutions

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{A}[X_n] \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{A}[X_{n-1}] \rightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_4} \mathbf{A}[X_3] \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{A}[X_2] \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{A}[X_1] \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{A}[X_0] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \rightarrow 0,$$

où chaque  $\mathbf{A}[X_n]$  est le module libre sur l'ensemble  $X_n$  et telles que les applications induites

$$\mathbb{K} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}[X_n] \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbb{K}} \otimes \partial_n} \mathbb{K} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}[X_{n-1}],$$

sont nulles. Lorsqu'une telle résolution existe, alors le  $n$ -ième  $\text{Tor}$  est l'espace vectoriel engendré par  $X_n$ . Cependant, il est généralement délicat d'avoir la construction effective d'une telle résolution. Les travaux d'Anick, Green [2, 3] ou Kobayashi [61] montrent l'utilité des bases de Gröbner non commutatives en algèbre homologique. En effet, celles-ci permettent de définir les modules  $\mathbf{P}_n$  en termes de branchements critiques, c'est-à-dire, de mots pouvant être réécrits de plusieurs façons. Ces résolutions ne sont pas minimales en général mais sont définies de façon inductive, ce qui permet d'effectuer les calculs. L'apport de la réécriture en algèbre homologique concerne d'autres structures algébriques et notamment les monoïdes avec la résolution de Kobayashi [60], qui prolonge les résultats de Squier dans [83].

## Opérateurs de réduction et Koszulité

On fixe un corps commutatif  $\mathbb{K}$ .

**Opérateurs de réduction et algèbres quadratiques.** Dans [11], Berger étudie les algèbres *quadratiques finiment présentées*, c'est-à-dire, les algèbres admettant une présentation  $\langle X \mid R \rangle$  telle que  $X$  est fini et  $R$  est une partie finie de  $\mathbb{K}X \otimes \mathbb{K}X$ . On identifie ce dernier à l'espace vectoriel  $\mathbb{K}X^{(2)}$  engendré par l'ensemble  $X^{(2)}$  des mots de longueur 2 sur  $X$ . Par exemple, l'algèbre présentée par  $\langle x, y \mid yy - yx \rangle$  est quadratique finiment présentée.

Berger étudie de telles algèbres par des méthodes de réécriture et considère pour cela un ordre monomial. Dans notre exemple, soit  $<$  l'ordre deg-lex induit par  $x < y : yx$  est inférieur à  $yy$  pour cet ordre.

On fixe une algèbre quadratique finiment présentée  $\mathbf{A}$ , une présentation quadratique finie  $\langle X \mid R \rangle$  de  $\mathbf{A}$  et un ordre monomial  $<$ . Quitte à normaliser, on peut supposer que  $\text{lc}(f)$  est égal

à 1 pour tout  $f \in R$ . On rappelle qu'on note  $r(f) = \text{lm}(f) - f$ . L'ensemble  $X$  étant fini,  $X^{(2)}$  est également fini. De plus, un ordre monomial est en particulier un ordre total. L'ensemble  $R$  est donc inclus dans un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base totalement ordonnée. La méthode du pivot de Gauss nous permet ainsi de nous ramener au cas où  $R$  satisfait les conditions suivantes :

1. les éléments  $\text{lm}(f)$  où  $f \in R$  sont deux à deux distincts,
2. pour tout  $f \in R$  et pour tout  $g \in R$ ,  $\text{lm}(f)$  ne figure pas dans la décomposition de  $r(g)$ .

Soit  $S$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}X^{(2)}$  défini sur la base  $X^{(2)}$  par

1.  $S(\text{lm}(f)) = r(f)$  pour tout  $f \in R$ ,
2.  $S(w) = w$  si  $w$  n'est pas de la forme  $\text{lm}(f)$  pour  $f \in R$ .

Les hypothèses faites sur  $R$  impliquent que  $S$  est bien défini, est un projecteur et est tel, que pour tout  $w \in X^{(2)}$ ,  $S(w)$  est soit égal à  $w$  soit une combinaison linéaire de mots de longueur 2 strictement inférieurs à  $w$  pour  $<$ . Dans notre exemple,  $S(yy)$  est égal à  $yx$  et  $S(w)$  est égal à  $w$  si  $w$  est différent de  $yy$ .

L'opérateur  $S$  défini dans le paragraphe précédent permet à Berger d'étudier la confluence des présentations d'algèbres quadratiques en termes de treillis. Cette étude a pour base les *opérateurs de réduction*. Soit  $(G, <)$  un ensemble *bien ordonné*, c'est-à-dire,  $G$  est un ensemble et  $<$  est un ordre total terminant sur  $G$ .

**Définition.** Un *opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$*  est un endomorphisme  $T$  de  $\mathbb{K}G$  tel que

1.  $T$  est idempotent,
2. pour tout  $g \in G$ ,  $T(g)$  est soit égal à  $g$ , soit une combinaison linéaire d'éléments de  $G$  strictement inférieurs à  $g$  pour  $<$ .

On note  $\mathbf{RO}(G, <)$  l'ensemble des opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ . De plus, pour tout  $T \in \mathbf{RO}(G, <)$ , on note  $\text{Red}(T)$  l'ensemble des éléments de  $G$  fixés par  $T$  et  $\text{Nred}(T)$  le complémentaire de  $\text{Red}(T)$  dans  $G$ .

On remarque que l'opérateur  $S$  associé à une présentation d'algèbre quadratique est un opérateur de réduction relativement à  $(X^{(2)}, <)$ , où  $<$  est l'ordre monomial fixé. Plus généralement, étant donnés deux entiers  $p$  et  $q$ , tous les opérateurs de la forme

$$S_{p,q} = \text{Id}_{X^{(p)}} \otimes S \otimes \text{Id}_{X^{(q)}},$$

sont des opérateurs de réduction relativement à  $(X^{(p+q+2)}, <)$ . En reprenant notre exemple, pour tout  $w \in X^{(p+q+2)}$ ,  $S_{p,q}(w)$  est égal à

1.  $w_1yxw_2$  si  $w = w_1yyw_2$  avec  $w_1 \in X^{(p)}$  et  $w_2 \in X^{(q)}$ ,
2.  $w$ , sinon.

**Opérateurs de réduction et bases de Gröbner quadratiques.** On fixe un ensemble bien ordonné  $(G, <)$  tel que  $G$  est fini. Soit  $\mathcal{L}(\mathbb{K}G)$  l'ensemble des sous-espaces de  $\mathbb{K}G$ . Dans [11, Théorème 2.3], Berger montre que la restriction de l'application

$$\begin{aligned} \ker: \text{End}(\mathbb{K}G) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}G), \\ T &\longmapsto \ker(T) \end{aligned}$$

à  $\mathbf{RO}(G, <)$  est une bijection. Soit  $V$  un sous-espace de  $\mathbb{K}G$ . La construction de l'opérateur  $T \in \mathbf{RO}(G, <)$  de noyau  $V$  proposée par Berger nécessite de déterminer quel est le plus grand élément de  $G$  figurant dans la décomposition d'un élément de  $V$ . Un tel élément existe si et seulement si  $V$  est de dimension finie. Ainsi,  $T$  peut être construit par une telle méthode pour tout sous-espace de  $\mathbb{K}G$  si et seulement si  $G$  est fini.

L'ensemble  $\mathcal{L}(\mathbb{K}G)$  admet une structure de treillis : l'ordre est l'inclusion, la borne inférieure est l'intersection et la borne supérieure est la somme. Par transport de structure,  $(\mathbf{RO}(G, <), \preceq, \wedge, \vee)$  est un treillis où

1.  $T_1 \preceq T_2$  si  $\ker(T_2) \subset \ker(T_1)$ ,
2. la borne inférieure  $T_1 \wedge T_2$  de deux opérateurs de réduction  $T_1$  et  $T_2$  est l'opérateur de réduction de noyau  $\ker(T_1) + \ker(T_2)$ ,
3. la borne supérieure  $T_1 \vee T_2$  de deux opérateurs de réduction  $T_1$  et  $T_2$  est l'opérateur de réduction de noyau  $\ker(T_1) \cap \ker(T_2)$ .

Soit  $F$  une partie de  $\mathbf{RO}(G, <)$ . On pose

$$\text{Red}(F) = \bigcap_{T \in F} \text{Red}(T) \quad \text{et} \quad \wedge F = \bigwedge_{T \in F} T.$$

Dans [11, Section 2], Berger montre que  $\text{Red}(\wedge F)$  est inclus dans  $\text{Red}(F)$  et on pose

$$\text{Obs}^F = \text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F).$$

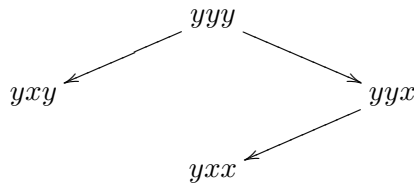
Suivant la terminologie de Berger, la famille  $F$  est dite *confluente* si  $\text{Obs}^F$  est l'ensemble vide. La terminologie employée provient du fait que, d'après [11, Théorème 3.6],  $F$  est confluente si et seulement si la relation  $\longrightarrow$  sur  $\mathbb{K}G$ , définie par  $v \longrightarrow T(v)$  pour  $T \in \mathbf{RO}(G, <)$  tel que  $T(v)$  est différent de  $v$ , est confluente.

Cette formulation de la confluence induit une caractérisation en termes de treillis des présentations quadratiques convergentes, c'est-à-dire, des bases de Gröbner quadratiques (non commutatives). Plus précisément, soient  $\mathbf{A}$  une algèbre quadratique finiment présentée,  $\langle X \mid R \rangle$  une présentation quadratique de  $\mathbf{A}$ ,  $<$  un ordre monomial et  $S$  l'opérateur de réduction relativement à  $(X^{(2)}, <)$  associé. Une telle donnée induit pour tout entier  $n$  un système de réécriture abstrait sur  $\mathbb{K}X^{(n)}$  défini par  $f \xrightarrow{R} S_{p,q}(f)$  où  $p+q$  est égal à  $n-2$  et  $f \in \mathbb{K}X^{(2)}$  n'est pas fixé par  $S_{p,q}$ . Ainsi, la présentation  $\langle X \mid R \rangle$  est convergente si et seulement si, pour tout entier  $n$ ,

$$F_n = \{S_{p,q}, p+q = n-2\},$$

est un ensemble d'opérateurs de réduction relativement à  $(X^{(n)}, <)$  confluente. Dans [11, Section 2], Berger montre qu'il suffit que  $F_3$  soit confluente pour que chaque  $F_n$  le soit. On en déduit la formulation des bases de Gröbner quadratiques en termes de treillis voulue :  $R$  est une base de Gröbner quadratique de  $I(R)$  si et seulement si la paire  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)$  d'opérateurs de réduction relativement à  $(X^{(3)}, <)$  est confluente.

On reprend l'exemple où  $\mathbf{A}$  est présentée par  $\langle x, y \mid yy - yx \rangle$  avec l'ordre deg-lex induit par  $x < y$ . On remarque d'abord que  $xyx$  et  $yxx$  sont des formes normales. Ainsi, d'après le diagramme



la présentation  $\langle X \mid R \rangle$  n'est pas convergente pour ce choix d'ordre monomial. De plus, toujours pour cet ordre, on rappelle que  $S$  envoie  $yy$  sur  $yx$  et fixe tous les autres mots de longueur 2. En particulier,

$$\begin{aligned} yxy - yxx &= y(yy - yx) + (yy - yx)x - (yy - yx)y \\ &= y(yy - S(yy)) + (yy - S(yy))x - (yy - S(yy))y \\ &= (\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(3)}} - \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)(yyy) + (\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(3)}} - S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X})(yyx - yyy) \end{aligned}$$

appartient à  $\ker(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X} \wedge \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S) = \ker(\text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S) + \ker(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X})$ . En particulier,  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X} \wedge \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)(yxy)$  est égal à  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X} \wedge \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)(yxx)$ , de sorte que  $yxy$  n'appartient pas à  $\text{Red}(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X} \wedge \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)$ . De plus,  $yxy$  appartient à la fois à  $\text{Red}(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X})$  et  $\text{Red}(\text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)$ , de sorte que

$$yxy \in \text{Obs}^{(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)}.$$

Ainsi,  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)$  n'est pas confluent.

On remarque que dans l'exemple précédent,  $yxy$  est supérieur à  $yxx$  et que ces deux mots appartiennent à la même classe d'équivalence pour la relation considérée. En particulier,  $yxy$  est une forme normale qui n'est pas minimale dans sa classe d'équivalence. On verra dans la remarque 2.1.3.5 du chapitre 2 que ceci est un fait général.

**Opérateurs de réduction et algèbres non quadratiques.** Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre (non nécessairement quadratique),  $\langle X \mid R \rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$  et  $<$  un ordre monomial. Dans le théorème 2.1.1.12 du chapitre 2, on montre en particulier que sous de telles hypothèses, on peut supposer que  $R$  satisfait les deux conditions suivantes :

1. les éléments  $\text{lm}(f)$  où  $f \in R$  sont deux à deux distincts,
2. pour tout  $f \in R$  et pour tout  $g \in R$ ,  $\text{lm}(f)$  ne figure pas dans la décomposition de  $r(g)$ .

Ainsi, lorsqu'on se donne une présentation équipée d'un ordre monomial  $<$ , on lui associe l'opérateur de réduction relativement à  $(X^*, <)$  défini par

1.  $S(\text{lm}(f)) = r(f)$  pour tout  $f \in R$ ,
2.  $S(w) = w$  si  $w$  n'est pas de la forme  $\text{lm}(f)$  pour  $f \in R$ .

Dans le cas quadratique, cet opérateur n'agit que sur  $\mathbb{K}X^{(2)}$  et on se retrouve dans la situation développée lors des paragraphes précédents. On a en particulier vu que l'étude des opérateurs de réduction relativement à des ensembles finis est suffisante pour caractériser les bases de Gröbner quadratiques.

Dans le cas non quadratique,  $S$  n'induit a priori pas d'opérateurs de réduction sur des sous-espaces de  $\mathbb{K}X^*$ . Ainsi, dans le but caractériser les bases de Gröbner non commutatives quelconques en termes de treillis, il faut munir  $\mathbf{RO}(X^*, <)$  d'une telle structure. Or,  $X^*$  étant un ensemble infini, le cadre des opérateurs de réduction en dimension finie ne permet pas d'obtenir celle-ci. Le premier objectif de cette thèse est d'étendre les résultats de Berger au cas des ensembles bien ordonnés non nécessairement finis.

**Structure de treillis et confluence en dimension quelconque.** On fixe un ensemble bien ordonné  $(G, <)$ . Le premier résultat de cette thèse concernant les opérateurs de réduction est l'extension au cas des ensembles non nécessairement finis du théorème 2.3 de [11] :

**Proposition 2.1.1.14, chapitre 2.** Soit  $V$  un sous-espace de  $\mathbb{K}G$ . Il existe un unique opérateur de réduction de noyau  $V$ .

On étend donc la structure de treillis au cas des ensembles bien ordonnés :  $(\mathbf{RO}(G, <), \preceq, \wedge, \vee)$  est un treillis où

1.  $T_1 \preceq T_2$  si  $\ker(T_2) \subset \ker(T_1)$ ,
2.  $T_1 \wedge T_2$  est l'opérateur de réduction de noyau  $\ker(T_1) + \ker(T_2)$ ,
3.  $T_1 \vee T_2$  est l'opérateur de réduction de noyau  $\ker(T_1) \cap \ker(T_2)$ .

Soit  $F$  une partie de  $\mathbf{RO}(G, <)$ . On pose

$$\text{Red}(F) = \bigcap_{T \in F} \text{Red}(T) \quad \text{et} \quad \wedge F = \bigwedge_{T \in F} T.$$

Dans le lemme 2.1.1.18 du chapitre 2, on montre que si  $T_1 \preceq T_2$ , alors  $\text{Red}(T_1)$  est inclus dans  $\text{Red}(T_2)$ . En particulier, pour tout  $T \in F$ , on a  $\wedge F \preceq T$ , de sorte que  $\text{Red}(\wedge F)$  est inclus dans  $\text{Red}(T)$ . Ainsi,  $\text{Red}(\wedge F)$  est inclus dans  $\text{Red}(F)$  et on pose

$$\text{Obs}^F = \text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F).$$

On dit que  $F$  est *confluente* si  $\text{Obs}^F$  est l'ensemble vide. Dans la section 2.1.3 du chapitre 2, on montre que  $F$  est confluente si et seulement si la relation  $\longrightarrow$  sur  $\mathbb{K}G$ , définie par  $v \longrightarrow T(v)$  pour  $T \in \mathbf{RO}(G, <)$  tel que  $T(v)$  est différent de  $v$ , est confluente.

**Complétion.** Avant de relier les opérateurs de réduction aux présentations d'algèbres, on s'intéresse à la complétion en termes d'opérateurs de réduction.

Un exemple d'algorithme de complétion est celui de Buchberger pour construire des bases de Gröbner. Cet algorithme prend en entrée une présentation d'une algèbre commutative  $\mathbf{A}$  et un ordre monomial et retourne une présentation convergente de  $\mathbf{A}$ . Plus généralement, un algorithme de complétion permet de transformer un système de réécriture en un système équivalent, c'est-à-dire induisant la même relation d'équivalence, et confluente.

Dans la section 2.2.2 du chapitre 2 on formule la complétion algébriquement : une *complétion* d'une partie  $F \subset \mathbf{RO}(G, <)$  est une partie  $F' \subset \mathbf{RO}(G, <)$  telle que

1.  $F'$  est confluente,
2.  $F \subset F'$  et  $\wedge F' = \wedge F$ .

Dans la proposition 2.1.3.4 du chapitre 2, on montre que l'opérateur  $\wedge F$  caractérise entièrement la relation d'équivalence induite par la relation  $\longrightarrow$  associée à  $F$ . Ainsi, la condition  $\wedge F' = \wedge F$  signifie précisément qu'on ne change pas cette relation d'équivalence.

On étudie également l'existence d'une telle complétion. On introduit pour cela la notion de *complément* : un complément de  $F$  est un opérateur  $C \in \mathbf{RO}(G, <)$  tel que

1.  $(\wedge F) \wedge C = \wedge F$ ,
2.  $\text{Obs}^F \subset \text{Nred}(C)$ ,

et on montre

**Proposition 2.2.2.2, chapitre 2.** Soit  $C \in \mathbf{RO}(G, <)$  tel que  $(\wedge F) \wedge C$  est égal à  $\wedge F$ . Alors,  $F \cup \{C\}$  est une complétion de  $F$  si et seulement si  $C$  est un complément de  $F$ .



En notant  $\sqrt{F}$  l'opérateur de réduction de noyau  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ , on pose

$$C^F = (\wedge F) \vee (\sqrt{F}).$$

L'opérateur  $C^F$  est appelé le  $F$ -complément. Le résultat principal de la section 2.2 du chapitre 2 est

**Théorème 2.2.2.6, chapitre 2.** *Soit  $F$  une partie de  $\mathbf{RO}(G, <)$ . Le  $F$ -complément est un complément de  $F$ .*

**Opérateurs de réduction et présentations d'algèbres.** On relie les opérateurs de réduction aux présentations d'algèbres dans le chapitre 3. On fixe une algèbre  $\mathbf{A}$ .

Une *présentation par opérateur* de  $\mathbf{A}$  est un triplet  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  où

1.  $X$  est un ensemble et  $<$  est un ordre monomial sur  $X^*$ ,
2.  $S$  est un opérateur de réduction relativement à  $(X^*, <)$ ,
3. on a un isomorphisme d'algèbres

$$\mathbf{A} \simeq \frac{\mathbb{K}X^*}{I(\ker(S))}.$$

Dans la section 3.1.2 du chapitre 3, on étudie la propriété de confluence d'une telle présentation et on relie les présentations par opérateur confluentes aux bases de Gröbner non commutatives. Soit  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  une présentation par opérateur de  $\mathbf{A}$ . Pour tout couple d'entiers  $(n, m)$ , on pose

$$S_{n,m} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(\leq n+m-1)}} \oplus (\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(n)}} \otimes S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}).$$

Explicitement, étant donné  $w \in X^*$ ,  $S_{n,m}(w)$  est égal à  $w$  si la longueur de  $w$  est strictement inférieure à  $n + m$ . Si la longueur de  $w$  est supérieure à  $n + m$ , on pose  $w = w_1 w_2 w_3$ , où  $w_1$  et  $w_3$  sont de longueurs  $n$  et  $m$ , respectivement. Dans ce cas,  $S_{n,m}(w)$  est égal à  $w_1 S(w_2) w_3$ . La famille de réduction de  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est

$$F^{\langle (X, <) \mid S \rangle} = \{S_{n,m}, (n, m) \in \mathbb{N}^2\}.$$

On montre dans le lemme 3.1.1.4 du chapitre 3 que chacun des  $S_{n,m}$  est un opérateur de réduction relativement à  $(X^*, <)$ . On dit que  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est *confluente* si  $F^{\langle (X, <) \mid S \rangle} \subset \mathbf{RO}(X^*, <)$  est confluente. Le lien avec les bases de Gröbner non commutatives est donné dans la proposition 3.1.2.5 du chapitre 3 :  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est confluente si et seulement si l'ensemble des  $w - S(w)$  tel que  $w$  n'appartient pas à  $\text{Red}(S)$  est une base de Gröbner non commutative de l'idéal qu'il engendre.

Dans la section 3.2 du chapitre 3, le  $F$ -complément permet d'obtenir une procédure permettant de construire des présentations par opérateur confluentes. En particulier, d'après la proposition 3.1.2.5, cela offre une méthode pour construire des bases de Gröbner non commutatives.

**Koszulité.** La caractérisation des bases de Gröbner quadratiques en termes d'opérateurs de réduction permet à Berger d'étudier la propriété homologique de *Koszulité*. Celle-ci est introduite par Priddy [77] dans le but de développer des méthodes permettant de construire des résolutions minimales pour les algèbres quadratiques. Dans [12], Berger étend la notion de Koszulité au cas des algèbres *homogènes*, c'est-à-dire, les algèbres admettant une présentation  $\langle X \mid R \rangle$  telle qu'il existe un entier  $N \geq 2$  tel que  $R$  est inclus dans  $\mathbb{K}X^{(N)}$ . L'entier  $N$  est le *degré* d'une telle algèbre. On remarque en particulier qu'une algèbre quadratique est une algèbre homogène de degré 2.

Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$  et  $\langle X \mid R \rangle$  une présentation homogène de  $\mathbf{A}$ . On note  $\varepsilon : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{K}$  l'application  $\mathbb{K}$ -linéaire envoyant tous les générateurs de  $\mathbf{A}$  sur 0. Soit  $\ell_N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la fonction définie pour tout entier  $k$  par

$$\begin{aligned}\ell_N(2k) &= kN, \text{ et} \\ \ell_N(2k+1) &= kN+1.\end{aligned}$$

Le *complexe de Koszul* de  $\mathbf{A}$  est le complexe de  $\mathbf{A}$ -modules à gauche :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{A} \otimes J_n \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{A} \otimes J_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_4} \mathbf{A} \otimes J_3 \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}R \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{A} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0,$$

où les espaces vectoriels  $J_n$  sont définis par

$$J_n = \bigcap_{i=0}^{\ell_N(n)-N} \mathbb{K}X^{(i)} \otimes \mathbb{K}R \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n)-N-i)}.$$

Les différentielles du complexe de Koszul sont définies par les inclusions de  $\mathbb{K}R$  dans  $\mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X$ , de  $J_3$  dans  $\mathbf{A} \otimes \mathbb{K}R$  et de  $J_n$  dans  $\mathbf{A} \otimes J_{n-1}$  pour tout entier  $n$  tel que  $n \geq 4$ . En général, ce complexe n'est pas une résolution de  $\mathbb{K}$ . Les algèbres pour lesquelles il s'agit d'une résolution sont dites *Koszul*. L'un des intérêts d'une telle algèbre est que son complexe de Koszul est une résolution minimale de  $\mathbb{K}$  d'après [12, Section 2].

Dans [77], Priddy montre qu'une algèbre admettant une présentation quadratique convergente est de type Koszul. Les travaux d'Anick permettent de retrouver ce résultat. Dans [11], Berger montre également ce résultat en utilisant les opérateurs de réduction.

Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre quadratique et  $\langle X \mid R \rangle$  une présentation quadratique convergente de  $\mathbf{A}$  pour un ordre monomial fixé. L'intérêt de l'approche utilisant les opérateurs de réduction est que celle-ci permet de construire une *homotopie contractante* du complexe de Koszul. En notant

$$J_0 = \mathbb{K}, \quad J_1 = \mathbb{K}X \text{ et } J_2 = \mathbb{K}R,$$

une telle homotopie contractante est la donnée pour tout entier  $n$  d'une application  $\mathbb{K}$ -linéaire  $h_n : \mathbf{A} \otimes J_n \rightarrow \mathbf{A} \otimes J_{n+1}$  telle que

$$\partial_{n+1}h_n + h_{n-1}\partial_n = \text{Id}_{\mathbf{A} \otimes J_n},$$

pour tout entier  $n \geq 1$ .

Dans [12], Berger s'intéresse à l'extension du théorème de Priddy au cas des algèbres homogènes non nécessairement quadratiques. Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$  et  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  une présentation par opérateur homogène de  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire, telle que  $\ker(S)$  est

inclus dans  $\mathbb{K}X^{(N)}$ . La présentation  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est dite *confluente aux bords* si, pour tout entier  $m$  tel que  $1 \leq m \leq N - 1$ , la paire d'opérateurs de réduction relativement à  $(X^{(N+m)}, <)$

$$P_m = (\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} \otimes S, S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}),$$

est confluente. De plus, on dit que  $\mathbf{A}$  satisfait l'*extra-condition* si, pour tout entier  $m$  tel que  $2 \leq m \leq N - 1$ , on a l'inclusion suivante :

$$\left( \mathbb{K}X^{(m)} \otimes \ker(S) \right) \cap \left( \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(m)} \right) \subset \mathbb{K}X^{(m-1)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X.$$

Berger montre dans [12, Section 3] qu'une algèbre satisfaisant l'extra-condition et admettant une présentation confluente aux bords  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  telle que  $X$  est fini est de type Koszul.

Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre quadratique, c'est-à-dire,  $N$  vaut 2. On remarque d'abord que dans ce cas l'extra-condition est une condition vide. De plus, la condition de confluence aux bords devient :  $P_3 = (S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)$  est confluente. Cela signifie que  $\mathbf{A}$  admet une présentation quadratique convergente. Le résultat de Berger dans le cas quadratique est donc le théorème de Priddy.

**Algèbres de confluence et homotopie contractante du complexe de Koszul.** On fixe une algèbre homogène  $\mathbf{A}$  de degré  $N$  et une présentation par opérateur homogène  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  de  $\mathbf{A}$  telle que  $X$  est fini. On suppose que  $\mathbf{A}$  satisfait l'extra-condition et que  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est confluente aux bords. Lorsque  $N$  est différent de 2, Berger ne construit pas d'homotopie contractante du complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$ . La construction d'une telle homotopie contractante est le sujet du chapitre 5 de cette thèse.

Dans la section 5.2.1 du chapitre 5, on construit pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  une paire  $P_{n,m} = (T_1^{n,m}, T_2^{n,m})$  d'opérateurs de réduction relativement à  $(X^{(m)}, <)$ . Celle-ci est appelée la *paire de réduction de bi-degré  $(n, m)$  associée à  $\langle (X, <) \mid S \rangle$* . Le premier résultat du chapitre est

**Théorème 5.2.1.4, chapitre 5.** *Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène admettant une présentation confluente aux bords  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  telle que  $X$  est fini. Les paires de réduction de cette présentation sont confluentes.*

L'hypothèse que  $X$  est fini est nécessaire dans ce théorème. La démonstration de celui-ci fait en effet appel à un résultat sur la confluence des opérateurs de réduction en dimension finie dont la preuve ne se généralise pas en dimension quelconque. Dans la section 5.2.2 du chapitre 5, on déduit du fait que les paires  $P_{n,m}$  sont confluentes qu'il existe un entier  $k_{n,m}$  tel que

$$L_{k_{n,m}}(T_2^{n,m}, T_1^{n,m}) = L_{k_{n,m}}(T_1^{n,m}, T_2^{n,m}),$$

où  $L_k(t, s)$  désigne le produit  $\cdots sts$  avec  $k$  facteurs.

Pour tout entier  $k$ , soit  $\mathcal{A}_k$  l'algèbre présentée par  $\langle s_1, s_2 \mid s_i^2 - s_i, L_k(s_2, s_1)^k - L_k(s_1, s_2) \rangle$ . Cette algèbre est appelée *algèbre de confluence de degré  $k$* . On considère les morphismes d'algèbres

$$\begin{aligned} \varphi^{P_{n,m}} : \mathcal{A}_{k_{n,m}} &\longrightarrow \text{End}(\mathbb{K}X^{(m)}). \\ s_i &\longmapsto T_i^{n,m} \end{aligned}$$

On considère un élément particulier de  $\mathcal{A}_{k_n, m}$  :

$$\gamma_1 = (1 - s_2)(s_1 + s_1 s_2 s_1 + \cdots + L_{2i+1}(s_2, s_1)),$$

où l'entier  $i$  dépend de  $k_{n, m}$ . Dans la section 5.2.2, on construit grâce à  $\varphi^{P_{n, m}}(\gamma_1)$  une famille d'applications  $\mathbb{K}$ -linéaires

$$\begin{aligned} h_0 &: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X, \\ h_1 &: \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \ker S, \\ h_2 &: \mathbf{A} \otimes \ker S \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_3, \\ h_n &: \mathbf{A} \otimes J_n \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_{n+1}, \text{ pour } n \geq 3. \end{aligned}$$

La famille  $(h_n)_n$  est appelée la *borne gauche* de  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ . Dans la proposition 5.2.2.6, on montre que la borne gauche de  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est une homotopie contractante du complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$  si et seulement si  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  satisfait certaines identités, appelées *relations de réduction*. Finalement, on montre dans la section 5.2.3 du chapitre 5 que lorsque l'extra-condition est vérifiée alors les relations de réduction sont vraies. Le résultat principal du chapitre est donc

**Théorème 5.2.3.5, chapitre 5.** *Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène satisfaisant l'extra-condition et admettant une présentation confluyente aux bords  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  telle que  $X$  est fini. La borne gauche de  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est une homotopie contractante du complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$ .*

## Organisation

La thèse est organisée en cinq chapitres. Le premier est une introduction à la réécriture dans les algèbres associatives unitaires. On commence par rappeler les outils et résultats de réécriture abstraite dont on a besoin dans la suite. On rappelle ensuite le lemme du diamant qui permet de caractériser les présentations d'algèbres convergentes. On s'intéresse ensuite à deux approches algébriques de la confluence : celle en termes de bases de Gröbner non commutatives puis celle en termes d'opérateurs de réduction d'après les travaux de Berger.

Dans le deuxième chapitre, on développe la théorie des opérateurs de réduction en dimension quelconque. Grâce à la structure de treillis sur ces opérateurs, on formule plusieurs concepts et résultats de réécriture abstraite algébriquement. On s'intéresse en particulier à la complétion : on la formule en termes de treillis et on montre qu'elle peut être obtenue via une construction dans le treillis des opérateurs de réduction. Finalement, on étudie une version généralisée des opérateurs de réduction. Les travaux de ce chapitre font l'objet d'une pré-publication [34].

Dans le troisième chapitre, on relie les opérateurs de réduction aux présentations d'algèbres. On définit les présentations par opérateur ainsi que la propriété de confluence d'une telle présentation. On caractérise les présentations confluentes en termes de bases de Gröbner non commutatives. On énonce également une procédure pour construire des présentations confluentes. On en déduit une procédure pour construire des bases de Gröbner non commutatives.

Le quatrième chapitre porte sur les applications de la réécriture en Koszulité. On commence par rappeler la définition de cette notion ainsi que des caractérisations en termes de résolutions utiles pour la suite. On explique ensuite deux démarches permettant des preuves de Koszulité par réécriture. La première, due à Berger, utilise les opérateurs de réduction. La seconde, en termes de présentations convergentes, a pour base les travaux d'Anick.

Dans le cinquième chapitre, on utilise les opérateurs de réduction pour construire une homotopie contractante du complexe de Koszul. Pour cela, on rappelle comment sont définies les algèbres de confluence. On utilise des représentations de ces algèbres en termes d'opérateurs de réduction pour construire un candidat pour l'homotopie contractante. On montre que lorsque l'extra-condition est vraie, ce candidat est valide. On illustre cette construction sur différents exemples. Ce chapitre fait l'objet d'une publication [33].

# Chapitre 1

## Réécriture dans les algèbres

Dans ce chapitre, on présente le sujet de cette thèse. On commence par une section préliminaire où on introduit les outils permettant d'étudier les algèbres associatives par des méthodes de réécriture. On présente ensuite deux de ces méthodes : la première en termes de bases de Gröbner non commutatives et la seconde en termes d'opérateurs de réduction. Cette deuxième méthode est à la base du travail effectué au cours de cette thèse.

Pour un exposé détaillé concernant la réécriture dans les algèbres associatives, on réfère le lecteur à [21, Chapitre 2].

### 1.1 Préliminaires

Dans la section 1.1.1, on rappelle les définitions et résultats de réécriture abstraite utiles pour la suite. Le lecteur familier avec la réécriture peut passer directement à la section 1.1.2.

#### 1.1.1 Réécriture abstraite

**1.1.1.1. Systèmes de réécriture abstraits.** Un *système de réécriture abstrait* est la donnée d'un couple  $(A, \longrightarrow)$ , où  $A$  est un ensemble et  $\longrightarrow$  est une relation binaire sur  $A$ . Dans la suite, on note  $a \longrightarrow a'$  à la place de  $(a, a') \in \longrightarrow$ .

Dans toute cette section, on fixe un système de réécriture abstrait  $(A, \longrightarrow)$ .

**1.1.1.2. Notations.** On note  $\xrightarrow{+}$ ,  $\xrightarrow{*}$  et  $\xleftarrow{*}$  la clôture transitive, la clôture réflexive transitive et la clôture réflexive transitive symétrique de  $\longrightarrow$ , respectivement. On dit que  $a$  se *réécrit* en  $a'$  si  $a \xrightarrow{*} a'$ .

**1.1.1.3. Remarques.** Soient  $a$  et  $a'$  deux éléments de  $A$ .

1. On a  $a \xrightarrow{+} a'$  si et seulement s'il existe un entier  $n \geq 2$  et  $a_1, \dots, a_n \in A$  tels que  $a = a_1$ ,  $a' = a_n$  et pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$ , on a  $a_i \longrightarrow a_{i+1}$ .
2. On a  $a \xrightarrow{*} a'$  si et seulement si  $a = a'$  ou  $a \xrightarrow{+} a'$ .
3. On a  $a \xleftarrow{*} a'$  si et seulement s'il existe un "zig-zag" entre  $a$  et  $a'$ , c'est-à-dire, si et seulement s'il existe  $a_1, \dots, a_n \in A$  tels que  $a = a_1$ ,  $a' = a_n$  et pour tout  $1 \leq i \leq n - 1$ , on a  $a_i \xrightarrow{*} a_{i+1}$  ou  $a_i \xleftarrow{*} a_{i+1}$ .

**1.1.1.4. Éléments réductibles, formes normales.** Soit  $a \in A$ .

1. On dit que  $a$  est *réductible* pour  $\rightarrow$  s'il existe  $a' \in A$  tel que  $a \rightarrow a'$ .
2. On dit que  $a$  est une *forme normale* (ou *est en forme normale*) pour  $\rightarrow$  s'il n'est pas réductible pour  $\rightarrow$ .
3. Une *forme normale de  $a$*  pour  $\rightarrow$  est une forme normale  $a'$  telle que  $a \xrightarrow{*} a'$ .

On dit que  $\rightarrow$  est *normalisante* si tout élément de  $A$  admet au moins une forme normale pour  $\rightarrow$ .

**1.1.1.5. Terminaison.** On dit que  $\rightarrow$  *termine* (ou est *terminante*) s'il n'existe pas de suite infinie  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $A$  telle que

$$a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \rightarrow \cdots$$

Dans la littérature, on retrouve également la terminologie de relation *bien fondée* ou *noethérienne* pour désigner une relation terminante.

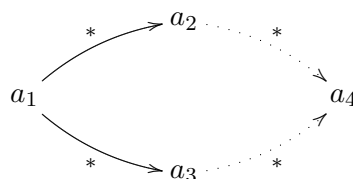
**1.1.1.6. Lemme.** *Une relation terminante est normalisante.*

*Démonstration.* On suppose que  $\rightarrow$  termine. On montre par récurrence que tout élément  $a \in A$  admet au moins une forme normale pour  $\rightarrow$ . Si  $a$  est une forme normale, alors il est une forme normale de lui-même. On suppose que  $a$  n'est pas une forme normale avec l'hypothèse de récurrence que pour tout  $a'$  tel que  $a \xrightarrow{+} a'$ ,  $a'$  admet une forme normale. Puisque  $a$  n'est pas une forme normale, il existe  $a'$  tel que  $a \rightarrow a'$ . Par hypothèse de récurrence,  $a'$  admet une forme normale  $a''$ . En particulier,  $a$  se réécrit en  $a''$ , de sorte que  $a''$  est une forme normale de  $a$ .

□

**1.1.1.7. Ensembles bien ordonnés.** Dans tout ce document, on appelle simplement "ordre" un ordre strict et un "ensemble ordonné" un ensemble muni d'un ordre strict. Étant donné un ensemble ordonné  $(E, <)$ , on dit que l'ordre  $<$  est *total* si, pour tout couple  $(e, e')$  d'éléments de  $E$ , on a  $e < e'$  ou  $e' < e$ . On dit que  $(E, <)$  est un ensemble *bien ordonné* si  $<$  est total et terminant.

**1.1.1.8. Confluence.** On dit que  $\rightarrow$  est *confluente* si, pour tout triplet  $(a_1, a_2, a_3)$  d'éléments de  $A$  tel que  $a_1 \xrightarrow{*} a_2$  et  $a_1 \xrightarrow{*} a_3$ , il existe  $a_4 \in A$  tel que  $a_2 \xrightarrow{*} a_4$  et  $a_3 \xrightarrow{*} a_4$  :



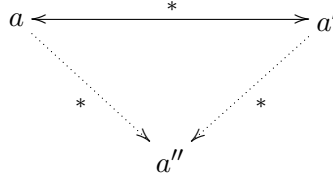
**1.1.1.9. Lemme.** Soit  $\longrightarrow$  une relation normalisante. Alors,  $\longrightarrow$  est confluente si et seulement si tout élément de  $A$  admet une unique forme normale pour  $\longrightarrow$ .

*Démonstration.* On suppose que  $\longrightarrow$  est confluente. Soient  $a \in A$  et  $a_1, a_2 \in A$  deux formes normales de  $a$  pour  $\longrightarrow$ . On a en particulier  $a \xrightarrow{*} a_1$  et  $a \xrightarrow{*} a_2$ . Comme  $\longrightarrow$  est confluente, il existe  $a_3 \in A$  tel que  $a_1 \xrightarrow{*} a_3$  et  $a_2 \xrightarrow{*} a_3$ . Les éléments  $a_1$  et  $a_2$  étant des formes normales, il sont égaux à  $a_3$ . Ainsi,  $a_1$  et  $a_2$  sont égaux, de sorte que  $a$  admet une unique forme normale.

Réciproquement, on suppose que tout élément de  $A$  admet une unique forme normale pour  $\longrightarrow$ . Soient  $a_1, a_2, a_3 \in A$  tels que  $a_1 \xrightarrow{*} a_2$  et  $a_1 \xrightarrow{*} a_3$ . Soient  $\hat{a}_2$  et  $\hat{a}_3$  les formes normales de  $a_2$  et  $a_3$ , respectivement. Alors,  $\hat{a}_2$  et  $\hat{a}_3$  sont des formes normales de  $a_1$ , de sorte que  $\hat{a}_2$  et  $\hat{a}_3$  sont égaux. Ainsi,  $\longrightarrow$  est confluente. □

**1.1.1.10. Convergence.** On dit que  $\longrightarrow$  est *convergente* si elle est terminante et confluente.

**1.1.1.11. Propriété de Church-Rosser.** On dit que  $\longrightarrow$  a la *propriété de Church-Rosser* si, pour tout couple  $(a, a')$  d'éléments de  $A$  tel que  $a \xleftrightarrow{*} a'$ , il existe  $a'' \in A$  tel que  $a \xrightarrow{*} a''$  et  $a' \xrightarrow{*} a''$  :



Le théorème de Church-Rosser [37], prouvé initialement pour le  $\lambda$ -calcul (voir [8] pour une référence sur le  $\lambda$ -calcul), reste vrai en réécriture abstraite :

**1.1.1.12. Théorème.** La relation  $\longrightarrow$  est confluente si et seulement si elle a la propriété de Church-Rosser.

*Démonstration.* On suppose que  $\longrightarrow$  a la propriété de Church-Rosser. Soient  $a_1, a_2, a_3 \in A$  tels que  $a_1 \xrightarrow{*} a_2$  et  $a_1 \xrightarrow{*} a_3$ . On a en particulier  $a_2 \xleftrightarrow{*} a_3$ . La relation  $\longrightarrow$  ayant la propriété de Church-Rosser, il existe  $a_4$  tel que  $a_2 \xrightarrow{*} a_4$  et  $a_3 \xrightarrow{*} a_4$ . Ainsi,  $\longrightarrow$  est confluente.

Réciproquement, on suppose que  $\longrightarrow$  a la propriété de Church-Rosser. Soient  $a, a' \in A$  tels que  $a \xleftrightarrow{*} a'$ . Il existe un entier  $n \geq 1$  et  $a_1, \dots, a_n \in A$  tels que  $a_1 = a$ ,  $a_n = a'$  et pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $a_i \longrightarrow a_{i+1}$  ou  $a_{i+1} \longrightarrow a_i$ . Il faut donc montrer qu'il existe  $a'' \in A$  tel que  $a_1 \xrightarrow{*} a''$  et  $a_n \xrightarrow{*} a''$ . On montre cette assertion par récurrence sur  $n$ . Si  $n$  est égal à 1, on a  $a_1 = a_n$  et on prend pour  $a''$  la valeur commune de  $a_1$  et  $a_n$ . Si  $n$  est supérieur à 2, par hypothèse de récurrence, il existe  $b \in A$  tel que  $a_1 \xrightarrow{*} b$  et  $a_{n-1} \xrightarrow{*} b$ . On sépare deux cas :

**Cas 1 :** On a  $a_n \longrightarrow a_{n-1}$ . En particulier, on a  $a_n \longrightarrow a_{n-1} \xrightarrow{*} b$ , de sorte que  $a_n \xrightarrow{*} b$ . On a également  $a_1 \xrightarrow{*} b$ , de sorte qu'on choisit  $a'' = b$ .

**Cas 2 :** On a  $a_{n-1} \longrightarrow a_n$ . On a en particulier  $a_{n-1} \xrightarrow{*} b$  et  $a_{n-1} \xrightarrow{*} a_n$ . La relation  $\longrightarrow$  étant confluente, il existe  $c \in A$  tel que  $b \xrightarrow{*} c$  et  $a_n \xrightarrow{*} c$ . On a donc  $a_1 \xrightarrow{*} b \xrightarrow{*} c$ , et donc  $a_1 \xrightarrow{*} c$ . On choisit  $a'' = c$ . □

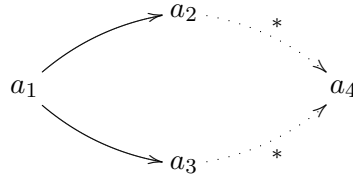


**1.1.1.13. Lemme.** *On suppose que  $\longrightarrow$  est convergente. Tout élément de  $a$  admet une unique forme normale pour  $\longrightarrow$ . De plus, étant donnés  $a, a' \in A$ , on a  $a \xrightarrow{*} a'$  si et seulement si les formes normales de  $a$  et  $a'$  sont égales.*

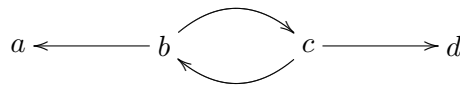
*Démonstration.* Soit  $a \in A$ . La relation  $\longrightarrow$  étant convergente, elle est en particulier terminante. Ainsi, d'après le lemme 1.1.1.6,  $a$  admet une forme normale. Soient  $a_1$  et  $a_2$  deux formes normales de  $a$ . En particulier, on a  $a \xrightarrow{*} a_1$  et  $a \xrightarrow{*} a_2$ . Or,  $\longrightarrow$  étant convergente,  $\longrightarrow$  est confluente, de sorte qu'il existe  $a_3 \in A$  tel que  $a_1 \xrightarrow{*} a_3$  et  $a_2 \xrightarrow{*} a_3$ . Les éléments  $a_1$  et  $a_2$  étant des formes normales, ils sont égaux à  $a_3$  et donc en particulier égaux. Ainsi,  $a$  admet une unique forme normale. Cette unique forme normale est notée  $\widehat{a}$ .

Soient  $a \in A$  et  $a' \in A$ . Si  $\widehat{a}$  et  $\widehat{a'}$  sont égaux, alors on a  $a \xrightarrow{*} \widehat{a} = \widehat{a'}$  et  $a' \xrightarrow{*} \widehat{a} = \widehat{a'}$ . En particulier, on a  $a \xrightarrow{*} a'$ . On suppose que  $a \xrightarrow{*} a'$ . La relation  $\longrightarrow$  étant convergente, elle est confluente, c'est-à-dire, elle a la propriété de Church-Rosser d'après le théorème 1.1.1.12. Ainsi, il existe  $a'' \in A$  tel que  $a \xrightarrow{*} a''$  et  $a' \xrightarrow{*} a''$ , de sorte que  $a \xrightarrow{*} \widehat{a''}$  et  $a' \xrightarrow{*} \widehat{a''}$ . En particulier, on a  $\widehat{a} = \widehat{a''}$  et  $\widehat{a'} = \widehat{a''}$ . Ainsi,  $\widehat{a}$  et  $\widehat{a'}$  sont égaux. □

**1.1.1.14. Confluence locale.** On dit que  $\longrightarrow$  est *localement confluente* si, pour tout triplet  $(a_1, a_2, a_3)$  d'éléments de  $A$  tel que  $a_1 \longrightarrow a_2$  et  $a_1 \longrightarrow a_3$ , alors il existe  $a_4 \in A$  tel que  $a_2 \xrightarrow{*} a_4$  et  $a_3 \xrightarrow{*} a_4$  :



Une relation localement confluente n'est pas confluente en général. En effet, soit  $(A, \longrightarrow)$  où  $A = \{a, b, c, d\}$  et  $b \longrightarrow a$ ,  $b \longrightarrow c$ ,  $c \longrightarrow b$  et  $c \longrightarrow d$  :



On a

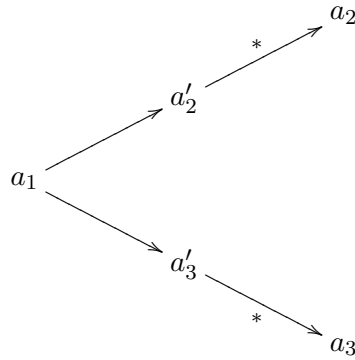
1.  $b \longrightarrow a$ ,  $b \longrightarrow c$  et  $c \xrightarrow{*} a$ ,
2.  $c \longrightarrow b$ ,  $c \longrightarrow d$  et  $b \xrightarrow{*} d$ .

Ainsi,  $\longrightarrow$  est localement confluente. Cependant, on a  $b \xrightarrow{*} a$  et  $b \xrightarrow{*} d$  avec  $c$  et  $d$  qui sont des formes normales. Ainsi,  $\longrightarrow$  n'est pas confluente.

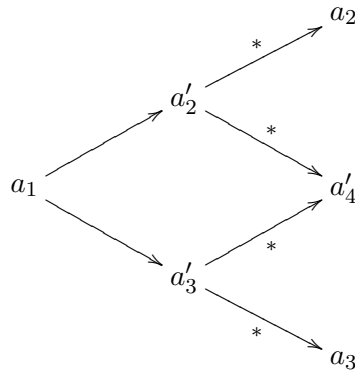
**1.1.1.15. Théorème [71, Théorème 3].** *On suppose que  $\longrightarrow$  termine. Alors,  $\longrightarrow$  est confluente si et seulement si elle est localement confluente.*

*Démonstration.* L'implication directe est une conséquence des définitions d'une relation confluente et d'une relation localement confluente.

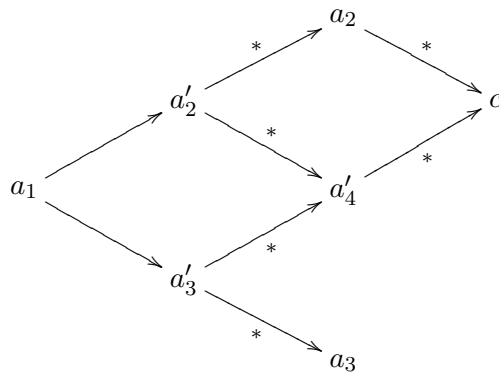
On suppose que  $\longrightarrow$  est localement confluente. Pour tout  $a_1$ , soit  $P(a_1)$  la propriété : étant donnés  $a_2, a_3 \in A$  tels que  $a_1 \xrightarrow{*} a_2$  et  $a_1 \xrightarrow{*} a_3$ , il existe  $a_4 \in A$  tel que  $a_2 \xrightarrow{*} a_4$  et  $a_3 \xrightarrow{*} a_4$ . Il s'agit de montrer que  $P(a_1)$  est vraie pour tout  $a_1 \in A$ . On montre cette assertion par récurrence sur  $a_1$  le long de la relation  $\xrightarrow{+}$ . Si  $a_1$  est une forme normale, alors  $a_2$  et  $a_3$  sont égaux à  $a_1$  et on choisit  $a_4 = a_1$ . On suppose que  $a_1$  n'est pas une forme normale et que  $P(a'_1)$  est vraie pour tout  $a'_1$  tel que  $a_1 \xrightarrow{+} a'_1$ . Soient  $a_2, a_3 \in A$  tels que  $a_1 \xrightarrow{*} a_2$  et  $a_1 \xrightarrow{*} a_3$ . On doit montrer qu'il existe  $a_4 \in A$  tel que  $a_2 \xrightarrow{*} a_4$  et  $a_3 \xrightarrow{*} a_4$ . Si  $a_2$  (respectivement  $a_3$ ) est égal à  $a_1$ , alors on prend  $a_4 = a_3$  (respectivement  $a_4 = a_2$ ). Si  $a_2$  et  $a_3$  sont différentes de  $a_1$  soient  $a'_2$  et  $a'_3$  tels que  $a_1 \xrightarrow{*} a_2 = a_1 \longrightarrow a'_2 \xrightarrow{*} a_2$  et  $a_1 \xrightarrow{*} a_3 = a_1 \longrightarrow a'_3 \xrightarrow{*} a_3$  :



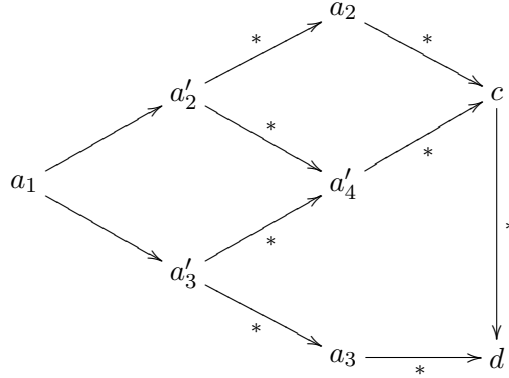
La relation  $\longrightarrow$  étant localement confluente, il existe  $a'_4 \in A$  tel que



De plus, on a  $a_1 \longrightarrow a'_2$ , donc  $P(a'_2)$  est vraie par hypothèse de récurrence. Ainsi, il existe  $c \in A$  tel que



Enfin, on a  $a - 1 \longrightarrow a'_3$ , donc  $P(a'_3)$  est vraie par hypothèse de récurrence. Ainsi, il existe  $d \in A$  tel que



Ainsi,  $P(a_1)$  est vraie. □

### 1.1.2 Présentations d'algèbres par réécriture

Dans cette section, on fixe un corps commutatif  $\mathbb{K}$ . Tous les espaces vectoriels et algèbres considérés ont pour corps des scalaires  $\mathbb{K}$ . Les algèbres sont toutes supposées être associatives et unitaires. De plus, les idéaux considérés sont tous supposés être bilatères.

**1.1.2.1. Notations et conventions.** Soient  $X$  un ensemble et  $V$  un espace vectoriel.

1. Le monoïde libre engendré par  $X$  est noté  $X^*$  : il s'agit de l'ensemble des mots sur  $X$ , où la multiplication est donnée par la concaténation des mots et le neutre est le mot vide, noté 1.
2. Étant donnés  $w, w' \in X^*$ , on dit que  $w$  est un *sous-mot* de  $w'$  s'il existe  $w_1, w_2 \in X^*$  tels que

$$w' = w_1 w w_2.$$

3. Étant donné un entier  $n$ , on note

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{n \text{ fois}},$$

le produit tensoriel de  $n$  copies de  $V$  avec la convention que  $V^{\otimes 0}$  est égal à  $\mathbb{K}$ . En particulier, si  $\mathcal{B}$  est une base de  $V$ , l'ensemble des tenseurs élémentaires  $e_1 \otimes \dots \otimes e_n$  où chaque  $e_i$  appartient à  $\mathcal{B}$  est une base de  $V^{\otimes n}$ . De plus, on note

$$\begin{aligned} T(V) &= \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^{\otimes n} \\ &= \mathbb{K} \oplus V \oplus \bigoplus_{n \geq 2} V^{\otimes n}, \end{aligned}$$

l'algèbre tensorielle sur  $V$ .

4. On note  $\mathbb{K}X$  l'espace vectoriel engendré par  $X$  : les éléments non nuls de cet espace vectoriel sont les combinaisons linéaires finies d'éléments de  $X$  à coefficients dans  $\mathbb{K}$ . Plus précisément, pour tout  $v \in \mathbb{K}X \setminus \{0\}$ , il existe une unique partie finie  $\text{supp}(v)$  de  $X$  et une famille de scalaires non nuls  $(\lambda_x)_{x \in \text{supp}(v)}$  tels que

$$v = \sum_{x \in \text{supp}(v)} \lambda_x x.$$

On dit que  $\text{supp}(v)$  est le *support* de  $v$ . En particulier, le support de 0 est l'ensemble vide.

5. L'algèbre libre sur  $X$  est  $\mathbb{K}X^*$  et son morphisme de multiplication étend par bi-linéarité la multiplication de  $X^*$ . Plus précisément, étant donnés deux éléments

$$\sum_{i \in I} \lambda_i w_i \text{ et } \sum_{j \in J} \mu_j w'_j,$$

de  $\mathbb{K}X^*$ , leur produit est donné par

$$\left( \sum_{i \in I} \lambda_i w_i \right) \cdot \left( \sum_{j \in J} \mu_j w'_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} (\lambda_i \mu_j) w_i w'_j.$$

6. Étant donné un entier  $n$ , on note  $X^{(n)}$  l'ensemble des mots de longueur  $n$  sur  $X$ . Dans toute cette thèse, on identifie  $\mathbb{K}X^{(n)}$  à  $\mathbb{K}X^{\otimes n}$  via l'isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\varphi_n : \mathbb{K}X^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}X^{(n)},$$

défini sur la base des tenseurs élémentaires par

$$\varphi_n(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = x_1 \cdots x_n.$$

Le morphisme

$$\varphi = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n : T(\mathbb{K}X) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}X^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}X^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{K}X^{(n)},$$

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \longmapsto x_1 \cdots x_n$$

est en particulier un isomorphisme d'algèbres entre  $T(\mathbb{K}X)$  et  $\mathbb{K}X^*$ . On utilise également cette identification tout au long de cette thèse.

7. Étant donnée une partie  $R$  de  $\mathbb{K}X^*$ , l'idéal de  $\mathbb{K}X^*$  engendré par  $R$  est noté  $I(R)$ . Cet idéal admet une décomposition (en somme non nécessairement directe)

$$I(R) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \mathbb{K}X^{(n)} \otimes \mathbb{K}R \otimes \mathbb{K}X^{(m)}.$$

Dans tout le reste de la section, on fixe une algèbre  $\mathbf{A}$ .

**1.1.2.2. Présentations d'algèbres.** Une *présentation par générateurs et relations* (ou plus simplement, une *présentation*) de  $\mathbf{A}$  est la donnée d'un ensemble  $X$  de générateurs, d'un ensemble  $R \subset \mathbb{K}X^*$  de relations et d'un isomorphisme d'algèbres

$$\frac{\mathbb{K}X^*}{I(R)} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}.$$

Une telle présentation est écrite  $\langle X \mid R \rangle$ . De plus, étant donné un élément  $f \in \mathbb{K}X^*$ , on note  $\bar{f}$  l'image de  $f$  dans  $\mathbf{A}$  à travers la projection canonique sur  $\mathbb{K}X^*/I(R)$ .

**1.1.2.3. Ordres monomiaux.** Un *ordre monomial* sur  $X^*$  est un ordre  $<$  sur  $X^*$  tel que

1.  $(X^*, <)$  est un ensemble bien ordonné,
2. étant donnés  $w, w', w_1, w_2 \in X^*$  tels que  $w < w'$ , on a  $w_1ww_2 < w_1w'w_2$ .

L'ordre  $<$  étant total et le support  $\text{supp}(f)$  d'un élément  $f \in \mathbb{K}X^* \setminus \{0\}$  étant fini,  $\text{supp}(f)$  admet un plus grand élément noté  $\text{lm}(f)$  et appelé *monôme dominant* de  $f$ . On note de plus  $\text{lc}(f)$  le coefficient de  $\text{lm}(f)$  dans  $f$ .

**1.1.2.4. Lemme.** Soient  $X$  un ensemble et  $<$  un ordre monomial sur  $X^*$ . Alors, 1 est minimal pour  $<$ .

*Démonstration.* On suppose par l'absurde que 1 n'est pas minimal. Ainsi, il existe  $w \in X^*$  tel que  $w < 1$ . L'ordre  $<$  étant monomial, pour tout entier  $n$ , on a

$$w^{n+1} = ww^n < 1w^n = w^n.$$

On a ainsi une chaîne décroissante

$$1 > w > w^2 \dots > w^n > w^{n+1} > \dots,$$

ce qui contredit que  $<$  est terminant. Ainsi, 1 est minimal. □

**1.1.2.5. L'ordre deg-lex.** Un exemple classique d'ordre monomial est l'ordre *deg-lex*. On suppose que  $X$  est équipé d'un ordre  $<$  total et terminant, c'est-à-dire,  $(X, <)$  est un ensemble bien ordonné. On considère, pour tout entier  $n$ , l'ordre  $<_{\text{lex}}^n$  défini sur  $X^{(n)}$  de la façon suivante :

$$x_1 \cdots x_n <_{\text{lex}}^n y_1 \cdots y_n \text{ si } \exists 1 \leq k \leq n \text{ tel que } \forall i < k, x_i = y_i \text{ et } x_k < y_k.$$

On remarque en particulier  $<_{\text{lex}}^1$  coïncide avec  $<$ . En notant  $|w|$  la longueur d'un mot  $w$ , on considère l'ordre  $<_{\text{deg-lex}}$  sur  $X^*$  défini par

$$w <_{\text{deg-lex}} w' \text{ si } |w| < |w'| \text{ ou } |w| = |w'| \text{ et } w <_{\text{lex}}^{|w|} w'.$$

On rappelle d'après [5, Lemme 2.4.3] que l'ordre  $<$  étant total et terminant,  $(X^*, <_{\text{deg-lex}})$  est un ensemble bien ordonné. De plus,  $<_{\text{deg-lex}}$  vérifie

$$w <_{\text{deg-lex}} w' \implies \forall w_1, w_2 \in X^*, w_1ww_2 <_{\text{deg-lex}} w_1w'w_2,$$

par définition, de sorte qu'il s'agit d'un ordre monomial.

**1.1.2.6. Convention.** L'ordre  $<_{\text{deg-lex}}$  est appelé l'ordre deg-lex *induit* par  $<$ . De plus, afin d'alléger les notations, cet ordre est simplement noté  $<$  à la place de  $<_{\text{deg-lex}}$ . Enfin, lorsque l'on considère un ensemble bien ordonné  $(X, <)$ , l'ensemble  $X^*$  est toujours supposé être muni de l'ordre deg-lex induit par  $<$ .

**1.1.2.7. Exemple.** Soit  $X = \{x, y, z\}$  ordonné de la façon suivante :  $x < y < z$ . Alors, on a

1.  $x < yz$ ,
2.  $xy < zx$ .

**1.1.2.8. Présentations terminantes, confluentes, convergentes.** Une *présentation équipée d'un ordre monomial* de  $\mathbf{A}$  est un triplet  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  où  $\langle X \mid R \rangle$  est une présentation de  $\mathbf{A}$  et  $<$  est un ordre monomial sur  $X^*$ .

Soit  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation équipée d'un ordre monomial de  $\mathbf{A}$ . On rappelle que, pour tout  $f \in \mathbb{K}X^* \setminus \{0\}$ , on note  $\text{lm}(f)$  le plus grand mot du support de  $f$  et  $\text{lc}(f)$  le coefficient de  $\text{lm}(f)$  dans  $f$ . De plus, on pose

$$r(f) = \text{lc}(f) \text{lm}(f) - f.$$

La donnée de l'ordre  $<$  permet d'associer à  $\langle X \mid R \rangle$  le système de réécriture abstrait  $\left( \mathbb{K}X^*, \xrightarrow{R} \right)$  défini par

$$\lambda w_1 \text{lm}(f) w_2 + g \xrightarrow{R} \frac{\lambda}{\text{lc}(f)} w_1 r(f) w_2 + g, \quad (1.1)$$

où

1.  $w_1$  et  $w_2$  appartiennent à  $X^*$ ,
2.  $\lambda$  est un scalaire non nul,
3.  $f$  appartient à  $R$ ,
4.  $g$  est un élément de  $\mathbb{K}X^*$  tel que  $w_1 \text{lm}(f) w_2$  n'appartient pas à son support.

On dit que  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est *terminante*, *confluente* ou *convergente* si  $\xrightarrow{R}$  l'est. Étant donnés  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\mathbb{K}X^*$ , on dit également que  $f$  est une forme normale pour  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  ou que  $f$  se réécrit en  $g$  pour  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  si c'est le cas pour  $\xrightarrow{R}$ .

**1.1.2.9. Convention.** Afin d'alléger le texte, on dit que  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est une présentation de  $\mathbf{A}$  à la place d'une présentation équipée d'un ordre monomial.

**1.1.2.10. Règles et étapes de réécriture.** Soit  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$ . Les éléments de  $R$  sont appelés les *règles de réécriture* de  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  et ceux de la forme (1.1) du paragraphe précédent sont appelés les *étapes de réécriture* de  $\langle (X, <) \mid R \rangle$ .

**1.1.2.11. Remarques.** Soit  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$ .

1. Un ordre monomial étant terminant,  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  l'est également.

2. En posant

$$R' = \left\{ \frac{f}{\text{lc}(f)}, f \in R \right\},$$

$\langle X \mid R' \rangle$  est encore une présentation de  $\mathbf{A}$  et les relations  $\xrightarrow{R'}$  et  $\xrightarrow{R}$  coïncident. À partir de maintenant, on suppose que lorsqu'on se donne une présentation  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  de  $\mathbf{A}$ , alors, pour tout  $f \in R$ ,  $\text{lc}(f)$  est égal à 1.

Dans la preuve de la proposition 1.1.2.13, on a besoin du lemme suivant :

**1.1.2.12. Lemme.** *Soit  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$ . Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $\mathbb{K}X^*$  tels que  $f \xleftarrow{*}_R g$ . Alors, pour tout  $h \in \mathbb{K}X^*$ , on a  $f + h \xleftarrow{*}_R g + h$ .*

*Démonstration.* On commence par montrer que si  $f \xrightarrow{R} g$  alors, pour tout  $h \in \mathbb{K}X^*$ , on a  $f + h \xleftarrow{*}_R g + h$ . Par définition de  $f \xrightarrow{R} g$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ ,  $w, w' \in X^*$ ,  $f_1 \in R$  et  $f_2 \in \mathbb{K}X^*$ , dont le support ne contient pas  $w\text{lm}(f_1)w'$ , tels que

$$f = \lambda w\text{lm}(f_1)w' + f_2 \quad \text{et} \quad g = \lambda wr(f_1)w' + f_2.$$

On pose de plus

$$h = \mu w\text{lm}(f_1)w' + h',$$

où  $\mu \in \mathbb{K}$  et  $h' \in \mathbb{K}X^*$  est tel que son support ne contient pas  $w\text{lm}(f_1)w'$ . Si  $\mu$  est égal à 0, on a

$$f + h = \lambda w\text{lm}(f_1)w' + f_2 + h \xrightarrow{R} \lambda wr(f_1)w' + f_2 + h = g + h.$$

Si  $\mu$  est égal à  $-\lambda$ , on a

$$f + h = f_2 + h',$$

et

$$g + h = \mu w\text{lm}(f_1)w' - \mu wr(f_1)w' + f_2 + h' \xrightarrow{R} \mu wr(f_1)w' - \mu wr(f_1)w' + f_2 + h' = f + h.$$

Si  $\mu$  est non nul et est différent de  $-\lambda$ , on a

$$f + h = (\lambda + \mu) w\text{lm}(f_1)w' + f_2 + h' \xrightarrow{R} (\lambda + \mu) wr(f_1)w' + f_2 + h',$$

et

$$g + h = \mu w\text{lm}(f_1)w' + h' + \lambda wr(f_1)w' + f_2 \xrightarrow{R} (\lambda + \mu) wr(f_1)w' + f_2 + h'.$$

Ainsi, pour tout  $h \in \mathbb{K}X^*$ , on a  $f + h \xleftarrow{*}_R g + h$ .

On suppose maintenant que  $f \xleftarrow{*}_R g$ . Il existe  $f_1, \dots, f_n \in \mathbb{K}X^*$  tels que  $f = f_1$ ,  $g = f_n$  et, pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ , on a  $f_i \xrightarrow{R} f_{i+1}$  ou  $f_{i+1} \xrightarrow{R} f_i$ . D'après ce qu'on vient de voir, pour tout  $1 \leq i \leq n-1$  et pour tout  $h \in \mathbb{K}X^*$ , on a  $f_i + h \xleftarrow{*}_R f_{i+1} + h$ . On a donc  $f + h \xleftarrow{*}_R g + h$ .  $\square$

**1.1.2.13. Proposition.** Soit  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$ . Soient  $g$  et  $h$  deux éléments de  $\mathbb{K}X^*$ . Alors, on a l'équivalence

$$\bar{g} = \bar{h} \iff g \xrightarrow[R]{*} h.$$

*Démonstration.* On a  $\bar{g} = \bar{h}$  si et seulement si  $f - g$  appartient à  $I(R)$ , c'est-à-dire, si et seulement s'il existe  $w_1, \dots, w_n, w'_1, \dots, w'_n \in X^*$ ,  $f_1, \dots, f_n \in R$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$g - h = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i f_i w'_i.$$

On suppose que  $g \xrightarrow[R]{*} h$ . Il existe  $g_1, \dots, g_n \in \mathbb{K}X^*$  tels que  $g = g_1$ ,  $h = g_n$  et, pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ , on a  $g_i \xrightarrow[R]{*} g_{i+1}$  ou  $g_{i+1} \xrightarrow[R]{*} g_i$ . Ainsi, pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ ,  $g_i - g_{i+1}$  est de la forme  $\lambda_i w_i f_i w'_i$  avec  $w_i, w'_i \in X^*$  et  $f_i \in R$ . On a donc

$$\begin{aligned} g - h &= g_1 - g_n \\ &= (g_1 - g_2) + (g_2 - g_3) + \dots + (g_{n-1} - g_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i w_i f_i w'_i. \end{aligned}$$

On a donc  $\bar{g} = \bar{h}$ .

Réciproquement, on suppose qu'il existe  $w_1, \dots, w_n, w'_1, \dots, w'_n \in X^*$ ,  $f_1, \dots, f_n \in R$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$g - h = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i f_i w'_i. \quad (1.2)$$

Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on a  $w_i \text{lm}(f_i) w'_i \xrightarrow[R]{*} w_i r(f_i) w'_i$  et donc  $w_i \text{lm}(f_i) w'_i \xrightarrow[R]{*} w_i r(f_i) w'_i$ . Ainsi, d'après le lemme 1.1.2.12, on a  $w_i f_i w'_i \xrightarrow[R]{*} 0$ . En utilisant de nouveau le lemme 1.1.2.12 ainsi que (1.2), on a  $f - g \xrightarrow[R]{*} 0$  et donc  $f \xrightarrow[R]{*} g$ . □

**1.1.2.14. Branchements critiques.** Soit  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$ . Un *branchement critique* de  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est un 5-uplet  $b = (w_1, w_2, w_3, f, g)$  où

1.  $w_1, w_2, w_3$  sont des mots tels que  $w_2 \neq 1$ ,
2.  $f, g$  appartiennent à  $R$ ,

tel que  $b$  satisfait l'une des deux conditions suivantes :

1.  $w_1 w_2 = \text{lm}(f)$  et  $w_2 w_3 = \text{lm}(g)$ ,
2.  $w_1 w_2 w_3 = \text{lm}(f)$  et  $w_2 = \text{lm}(g)$ .

Un branchement de type 1 est appelé un branchement de *chevauchement* et un branchement de type 2 est appelé un branchement d'*inclusion*. Le mot  $w = w_1 w_2 w_3$  est appelé la *source* de  $b$ . Enfin, si  $b$  est un branchement de chevauchement (respectivement d'inclusion), on dit qu'il est *résoluble* (ou *confluent*) si  $r(f)w_3$  et  $w_1 r(g)$  (respectivement  $r(f)$  et  $w_1 r(g)w_3$ ) se réécrivent en



une valeur commune. Si  $b$  est un branchement de chevauchement, il est résoluble si et seulement s'il existe  $h \in \mathbb{K}X^*$  tel que

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & r(f)w_3 \\ \text{lm}(f)w_3 = w_1\text{lm}(g) & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \\ & \xrightarrow{\quad} & w_1r(g) \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} h$$

\* \* \* \*

S'il s'agit d'un branchement d'inclusion,  $b$  est résoluble si et seulement s'il existe  $h \in \mathbb{K}X^*$  tel que

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\quad} & r(f) \\ \text{lm}(f) = w_1\text{lm}(g)w_3 & \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} \\ & \xrightarrow{\quad} & w_1r(g)w_3 \end{array} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \end{array} h$$

\* \* \* \*

**1.1.2.15. Convention.** Lorsqu'une présentation  $\langle\langle X, < \mid R \rangle\rangle$  est fixée, on dit simplement qu'un élément se réécrit en un autre ou est en forme normale et on parle simplement de branchement critique sans faire référence à  $\langle\langle X, < \mid R \rangle\rangle$ .

**1.1.2.16.  $S$ -polynômes.** Soit  $\langle\langle X, < \mid R \rangle\rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$ . Étant donné un branchement critique  $b = (w_1, w_2, w_3, f, g)$ , on pose

1.  $\text{SP}(b) = fw_3 - w_1g$  si  $b$  est un branchement de chevauchement,
2.  $\text{SP}(b) = f - w_1gw_3$  si  $b$  est un branchement d'inclusion.

On dit que  $\text{SP}(b)$  est le  $S$ -polynôme de  $b$ .

**1.1.2.17. Remarque.** Si  $b$  est un branchement de chevauchement, on a

$$\begin{aligned} \text{SP}(b) &= fw_3 - w_1g \\ &= (\text{lm}(f) - r(f))w_3 - w_1(\text{lm}(g) - r(g)) \\ &= w_1r(g) - r(f)w_3. \end{aligned}$$

De façon analogue, on montre que si  $b$  est un branchement d'inclusion, on a

$$\text{SP}(b) = w_1r(g)w_3 - r(f).$$

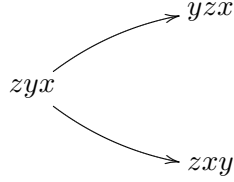
**1.1.2.18. Branchements résolubles relativement à l'ordre monomial.** On dit que  $b$  est *résoluble relativement à  $<$*  si le  $S$ -polynôme de  $b$  admet une décomposition

$$\text{SP}(b) = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i f_i w'_i,$$

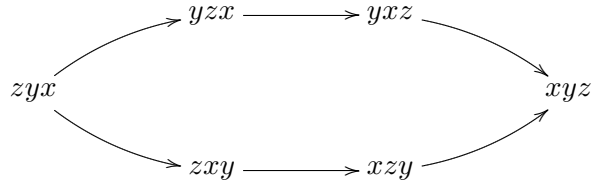
où  $I$  est un ensemble fini tel que, pour tout  $i \in I$ ,

1.  $\lambda_i$  est un scalaire non nul,
2.  $w_i, w'_i \in X^*$  et  $f_i \in R$  sont tels que  $w_i \text{lm}(f_i) w'_i$  est inférieur à la source de  $b$  pour  $<$ .

**1.1.2.19. Exemple.** Soient  $X = \{x, y, z\}$  et  $R = \{f_1 = yx - xy, f_2 = zx - xz, f_3 = zy - yz\}$ . Soit  $<$  l'ordre deg-lex induit par  $x < y < z$ . Soit  $b = (x, y, z, f_1, f_3)$  l'unique branchement critique de  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  :



Ce branchement critique est résoluble :



On déduit de ce diagramme de confluence la relation :

$$\begin{aligned} zyx - xyz &= (zy - yz)x + y(zx - xz) + (yx - xy)z \\ &= z(yx - xy) + (zx - xz)y + x(zy - yz). \end{aligned}$$

On a en particulier

$$f_3x + yf_2 + f_1z = zf_1 + f_2y + xf_3,$$

et donc

$$\begin{aligned} \text{SP}(b) &= f_3x - zf_1 \\ &= f_2y + xf_3 - yf_2 - f_1z. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\text{lm}(f_2)y = zxy, \quad x\text{lm}(f_3) = xzy, \quad y\text{lm}(f_2) = yzx \quad \text{et} \quad \text{lm}(f_1)z = yxz. \quad (1.3)$$

Chaque mot figurant dans (1.3) est inférieur à  $zyx$  qui est la source de  $b$ . Ainsi,  $b$  est résoluble relativement à  $<$ .

Dans la preuve du lemme du diamant, on a besoin du lemme suivant :

**1.1.2.20. Lemme.** Soit  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$ . Soient  $f$  et  $g$  deux éléments de  $X^*$  admettant une unique forme normale, notée  $\widehat{f}$  et  $\widehat{g}$ , respectivement. Alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda f + g$  admet une unique forme normale et celle-ci est égale à  $\lambda \widehat{f} + \widehat{g}$ .

*Démonstration.* Si  $\lambda f + g$  est une forme normale, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soient  $h_1, \dots, h_n \in \mathbb{K}X^*$  tels que  $h_1 = \lambda f + g$ ,  $h_n$  est une forme normale et, pour tout  $1 \leq i \leq n-1$ , on a

$$h_i \xrightarrow{R} h_{i+1}.$$

On montre que  $h_n$  est égal à  $\lambda \widehat{f} + \widehat{g}$ .

Soient  $l_1, \dots, l_n \in R$  tels que  $h_{i+1}$  est obtenu en remplaçant un mot de la forme  $w_i \text{lm}(l_i) w'_i$  par  $w_i r(l_i) w'_i$  dans la décomposition de  $h_i$ . Soient  $f_1, \dots, f_n$  définis par récurrence de la façon suivante :  $f_1 = \lambda f$  et en notant

$$f_i = \lambda_i w_i \text{lm}(l_i) w'_i + f'_i,$$

où  $w_i \text{lm}(l_i) w'_i$  n'apparaît pas dans la décomposition de  $f'_i$ , alors on pose

$$f_{i+1} = \lambda_i w_i r(l_i) w'_i + f'_i.$$

On a en particulier

$$\lambda f \xrightarrow[R]{*} f_n.$$

Or,  $f$  admet  $\widehat{f}$  comme unique forme normale, de sorte qu'il en est de même pour  $f_n$ . Soient  $f_{n+1}, \dots, f_{n+m}$  tels que  $f_{n+m}$  est égal à  $\lambda \widehat{f}$  et  $f_{n+i+1}$  est obtenu en remplaçant un mot de la forme  $w_{n+i} \text{lm}(l_{n+i}) w'_{n+i}$  par  $w_i r(l_{n+i}) w'_i$  dans la décomposition de  $f_{n+i}$ . On définit par récurrence  $g_1, \dots, g_{n+m}$  de la même façon qu'on a défini  $f_1, \dots, f_n$  :  $g_1$  est égal à  $g$  et  $g_{i+1}$  est obtenu à partir de  $g_i$  en remplaçant  $w_i \text{lm}(l_i) w'_i$  par  $w_i r(l_i) w'_i$ . En particulier, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on a

$$h_i = f_i + g_i,$$

et

$$h_n = f_n + g_n \xrightarrow[R]{*} h_{n+m} = f_{n+m} + g_{n+m}.$$

Or,  $h_n$  est une forme normale, de sorte que

$$f_{n+m} + g_{n+m} = \lambda \widehat{f} + g_{n+m},$$

est égal à  $h_n$ . En particulier,  $g_{n+m}$  est lui-même une forme et est donc une forme normale de  $g$ . Ainsi,  $g_{n+m}$  est égal à  $\widehat{g}$ , de sorte qu'on a

$$h_n = \lambda \widehat{f} + \widehat{g}.$$

□

Avec la terminologie considérée dans cette thèse, le lemme du diamant (que l'on retrouve parfois sous le nom de *lemme de Bergman*) s'énonce de la façon suivante :

**1.1.2.21. Théorème [15, Théorème 1.2].** *Soit  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout branchement critique est résoluble.*
2. *Tout branchement critique est résoluble relativement à  $<$ .*
3. *Tout élément de  $\mathbb{K}X^*$  admet une unique forme normale.*
4. *L'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{K}\{w, w \in X^* \text{ est une forme normale}\} &\longrightarrow \mathbf{A}, \\ w &\longmapsto \overline{w} \end{aligned}$$

*est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

*Démonstration.* On commence par montrer que 3 et 4 sont équivalents. Pour cela, on remarque que 4 signifie que

$$B = \{\bar{w}, w \in X^* \text{ est une forme normale}\},$$

est une base linéaire de  $\mathbf{A}$ . On suppose 4. Soient  $f \in \mathbb{K}X^*$  et

$$f_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \text{ et } f_2 = \sum_{j=1}^m \mu_j w'_j,$$

deux formes normales de  $f$ . Chaque  $w_i$  et  $w'_j$  est une forme normale, et on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{w}_i = \sum_{j=1}^m \mu_j \bar{w}'_j. \quad (1.4)$$

Comme  $B$  est une base de  $\mathbf{A}$  et que chaque  $\bar{w}_i$  et  $\bar{w}'_j$  appartient à  $B$ , l'équation (1.4) implique que  $n = m$  et que pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\lambda_i$  est égal à  $\mu_i$  et  $w_i$  est égal à  $w'_i$ . Ainsi,  $f_1$  est égal à  $f_2$ , et donc  $f$  admet une unique forme normale, de sorte que 4 implique 3. On suppose 3. Soient  $a \in \mathbf{A}$  et  $f \in \mathbb{K}X^*$  tels que  $a$  est égal à  $\bar{f}$ . Comme  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est terminante,  $f$  admet une forme normale. Ainsi, il existe des scalaires  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  et des formes normales  $w_1, \dots, w_n \in X^*$  tels que

$$\begin{aligned} a &= \bar{f} \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{w}_i. \end{aligned}$$

En particulier,  $B$  est une famille génératrice de  $\mathbf{A}$ . Soit

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{w}_i = 0,$$

une combinaison linéaire nulle d'éléments de  $B$ . D'après la proposition 1.1.2.13, on a

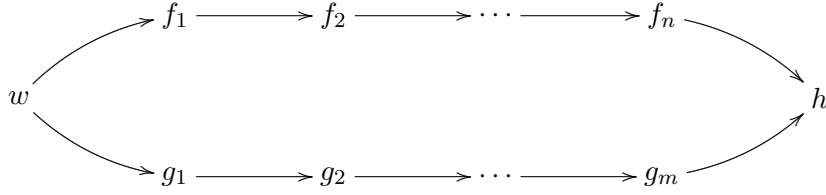
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i \xrightarrow[R]{*} 0.$$

Par hypothèse, tout élément de  $\mathbb{K}X^*$  admet une unique forme normale, de sorte que  $\xrightarrow[R]{*}$  est confluyente, et donc convergente, d'après le lemme 1.1.1.9. Ainsi,  $\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$  et 0 étant des formes normales, on déduit du lemme 1.1.1.13 que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$  est nul. Ainsi, chaque  $\lambda_i$  est égal à 0, de sorte que  $B$  est libre et est donc une base de  $\mathbf{A}$ . Ainsi, 3 et 4 sont équivalents.

On suppose 3. D'après le lemme 1.1.1.9,  $\xrightarrow[R]{*}$  est confluyente, de sorte que chaque branchement critique est résoluble. Ainsi, 3 implique 1. On suppose 1. Soient  $b = (w_1, w_2, w_3, f, g)$  un branchement critique et  $w$  la source de  $b$ . On pose

1.  $f_1 = r(f)w_3$  et  $g_1 = w_1 r(g)$  si  $b$  est un branchement de chevauchement,
2.  $f_1 = r(f)$  et  $g_1 = w_1 r(g)w_3$  si  $b$  est un branchement d'inclusion.

Or,  $b$  étant confluent par hypothèse, il existe  $f_2, \dots, f_n, g_2, \dots, g_m, h \in \mathbb{K}X^*$  tels que



On a

$$\begin{aligned}
 \text{SP}(b) &= g_1 - f_1 \\
 &= \sum_{i=1}^{m-1} (g_i - g_{i+1}) + (g_m - h) - \sum_{i=1}^{n-1} (f_i - f_{i+1}) - (f_n - h). \tag{1.5}
 \end{aligned}$$

Chaque  $f_i$ , pour  $1 \leq i \leq n-1$ , se réécrivant en  $f_{i+1}$ ,  $f_i - f_{i+1}$  est de la forme  $\lambda w' f' w''$ , où  $w', w'' \in X^*$  et  $f' \in R$  sont tels que  $w' \text{lm}(f') w''$  appartient au support de  $f_i$ . De plus,  $\text{lm}(f_i)$  est strictement inférieur à  $w$ , de sorte que  $w' \text{lm}(f') w''$  est strictement inférieur à  $w$ . En procédant de même pour  $f_n$  et sur les  $g_i$ , on déduit de (1.5) que  $\text{SP}(b)$  est une combinaison linéaire de  $w' f'' w''$  où  $w', w'' \in X^*$  et  $f'' \in R$  sont tels que  $w' \text{lm}(f'') w'' < w$ . Ainsi,  $b$  est résoluble relativement à  $<$ , de sorte que 1 implique 2.

Il reste à montrer que 2 implique 3. D'après le lemme 1.1.2.20, l'ensemble des  $f \in \mathbb{K}X^*$  admettant une unique forme normale est un sous-espace de  $\mathbb{K}X^*$ . Ainsi, pour montrer que 3 est vrai, il suffit de montrer que chaque mot  $w$  admet une unique forme normale. On montre cette assertion par récurrence. Si  $w$  est égal à 1, alors il est en forme normale et admet donc lui-même comme unique forme normale. Soit  $w \in X^*$ . On suppose par hypothèse de récurrence que tout  $w' < w$  admet une unique forme normale. Si  $w$  est une forme normale, alors il admet une unique forme normale qui est lui-même. Sinon, soient  $f$  et  $g$  tels que

$$w \xrightarrow{R} f \text{ et } w \xrightarrow{R} g.$$

En particulier,  $f, g$  et  $f-g$  sont des combinaisons linéaires de mots strictement inférieurs à  $w$  et admettent donc une unique forme normale, notées  $\widehat{f}, \widehat{g}$  et  $\widehat{f-g}$ , par hypothèse de récurrence. Pour montrer que  $w$  admet une unique forme normale, il suffit de montrer que  $\widehat{f}$  et  $\widehat{g}$  sont égaux. D'après le lemme 1.1.2.20, il s'agit de montrer que

$$\begin{aligned}
 \widehat{f-g} &= \widehat{f} - \widehat{g} \\
 &= 0. \tag{1.6}
 \end{aligned}$$

Soient  $w_1, w'_1, w_2, w'_2 \in X^*$  et  $h, h' \in R$  tels que

$$\begin{aligned}
 w &= w_1 \text{lm}(h) w_2 \\
 &= w'_1 \text{lm}(h') w'_2,
 \end{aligned}$$

et

$$f = w_1 r(h) w_2 \text{ et } g = w'_1 r(h') w'_2.$$

On suppose sans perte de généralité que la longueur de  $w_1$  est inférieure à  $w'_1$ . On sépare trois cas :

**Cas 1 :**  $\text{lm}(h)$  et  $\text{lm}(h')$  se chevauchent dans  $w$  mais aucun de ces mots ne contient l'autre. On a donc un branchement de chevauchement  $b = (u_1, u_2, u_3, h, h')$  tel que  $u_1u_2u_3$  est un sous-mot de  $w$ . En particulier, on a

$$w'_1 = w_1u_1, \text{lm}(h) = u_1u_2, \text{lm}(h') = u_2u_3, w_2 = u_3w'_2 \text{ et } w = w_1u_1u_2u_3w'_2.$$

Par hypothèse, tous les branchements critiques sont résolubles relativement à  $<$ . Ainsi, il existe  $v_1, \dots, v_n, v'_1, v'_n \in X^*$ ,  $f_1, \dots, f_n \in R$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tels que

$$\begin{aligned} \text{SP}(b) &= r(h)u_3 - u_1r(h') \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i f_i v'_i, \end{aligned}$$

où chaque  $v_i \text{lm}(f_i) v'_i$  est strictement inférieur à  $u_1u_2u_3$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on pose

$$g_i = w_1 v_i f_i v'_i w'_2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} f - g &= w_1 r(h) w_2 - w'_1 r(h') w'_2 \\ &= w_1 (r(h) u_3 - u_1 r(h')) w'_2 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i w_1 v_i f_i v'_i w'_2 \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i. \end{aligned}$$

Or, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $v_i \text{lm}(f_i) v'_i$  est inférieur à  $u_1u_2u_3$ . Ainsi, l'ordre  $<$  étant monomial,  $\text{lm}(g_i) = w_1 v_i \text{lm}(f_i) v'_i w'_2$  est inférieur à  $w = w_1u_1u_2u_3w'_2$ . Par hypothèse de récurrence, chaque  $g_i$  admet une unique forme normale, notée  $\widehat{g}_i$ . Or, on a

$$g_i = w_1 v_i \text{lm}(f_i) v'_i w'_2 - w_1 v_i r(f_i) v'_i w'_2 \xrightarrow{R} w_1 v_i r(f_i) v'_i w'_2 - w_1 v_i r(f_i) v'_i w'_2 = 0,$$

de sorte que  $\widehat{g}_i$  est égal à 0. D'après le lemme 1.1.2.20, on a donc

$$\begin{aligned} \widehat{f - g} &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \widehat{g}_i \\ &= 0, \end{aligned}$$

de sorte que (1.6) est vraie.

**Cas 2 :**  $\text{lm}(h)$  et  $\text{lm}(h')$  se chevauchent dans  $w$  avec l'un qui est inclus dans l'autre. Comme on a suppose que  $w_1$  est de longueur inférieure à  $w'_1$ ,  $\text{lm}(h')$  est inclus dans  $\text{lm}(h)$ . On a donc un branchement d'inclusion  $b = (u_1, u_2, u_3, h, h')$  tel que  $u_1u_2u_3$  est un sous-mot de  $w$ . En particulier, on a

$$w'_1 = w_1u_1, \text{lm}(h) = u_1u_2u_3, \text{lm}(h') = u_2, w'_2 = u_3w_2 \text{ et } w = w_1u_1u_2u_3w'_2.$$

On procède comme dans le cas 1 :  $b$  est résoluble relativement à  $<$ , de sorte qu'on en déduit une décomposition

$$f - g = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i,$$

où chaque  $\text{lm}(g_i)$  est strictement inférieur à  $w$  et  $g_i$  se réduit en 0. D'après le lemme 1.1.2.20, on en déduit que (1.6) est vraie.

**Cas 3 :**  $\text{lm}(h)$  et  $\text{lm}(h')$  ne se chevauchent pas dans  $w$ . Ainsi, il existe un mot  $u$  tel que

$$w = w_1 \widehat{\text{lm}}(h) u \widehat{\text{lm}}(h') w'_2.$$

On a donc

$$f = w_1 r(h) u \widehat{\text{lm}}(h') w'_2 \quad \text{et} \quad g = w_1 \widehat{\text{lm}}(h) u r(h') w'_2.$$

Soit

$$r(h) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i,$$

la décomposition de  $r(h)$  dans la base  $X^*$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on pose

$$v_i = w_1 u_i u \widehat{\text{lm}}(h') w'_2 \quad \text{et} \quad g_i = w_1 u_i u r(h') w'_2.$$

Or,  $v_i$  est strictement inférieur à  $w$ , de sorte que  $v_i$  et  $g_i$  admettent une unique forme normale par hypothèse de récurrence. De plus, on a

$$v_i \xrightarrow{R} g_i,$$

de sorte que ces formes normales sont égales. D'après le lemme 1.1.2.20,

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \quad \text{et} \quad w_1 r(h) u r(h') w'_2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i,$$

admettent donc la même forme normale. On montre de même que  $g$  admet la même unique forme normale que  $w_1 r(h) u r(h') w'_2$ . Ainsi,  $\widehat{f}$  et  $\widehat{g}$  égaux, c'est-à-dire, la relation (1.6) est vraie.  $\square$

### 1.1.2.22. Remarques.

1. On rappelle que  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est terminante et donc normalisante. Ainsi, d'après le lemme 1.1.1.9, cette présentation est confluente (et donc convergente) si et seulement si tout élément de  $\mathbb{K}X^*$  admet une unique forme normale. Les assertions du lemme du diamant sont donc des caractérisations du fait que  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est convergente.
2. La dernière condition du lemme du diamant permet en particulier d'exhiber des bases d'algèbres associatives. Le fait de construire de telles bases en utilisant des méthodes de réécriture apparaît déjà chez Bokut [17]<sup>1</sup>.

---

1. On précise que Bokut considère la notion de présentation *close par compositions*. Cette dernière signifie précisément que tous les branchements critiques sont résolubles relativement à  $<$ .

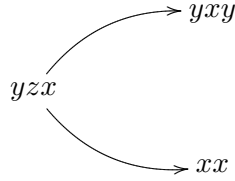
**1.1.2.23. Exemple.** On reprend l'exemple 1.1.2.7 : soient  $X = \{x, y, z\}$  et  $<$  l'ordre deg-lex induit par  $x < y < z$ . Soit

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbb{K}\{x, y\}^*}{I(yz - x, zx - xy)},$$

l'algèbre présentée par

$$\langle (\{x, y, z\}, <) \mid yz - x, zx - xy \rangle. \quad (1.7)$$

Cette présentation admet comme unique branchement critique  $b = (y, z, x, yz - x, zx - xy)$  :



Ce branchement critique n'est pas résoluble relativement à  $<$  puisque la décomposition de son  $S$ -polynôme est donnée par

$$\begin{aligned} \text{SP}(b) &= yxy - xx \\ &= (yz - x)x - y(zx - xy), \end{aligned}$$

et que  $yzx$  est strictement supérieur à  $yxy$ . En particulier, on en déduit que la présentation (1.8) n'est pas convergente. On peut également vérifier que  $b$  n'est pas confluent, puisque  $yxy$  et  $xx$  sont des formes normales.

## 1.2 Bases de Gröbner non commutatives

On fixe un corps commutatif  $\mathbb{K}$ .

### 1.2.1 Bases de Gröbner non commutatives et présentations convergentes

Dans cette section, on définit les *bases de Gröbner non commutatives* et on les relie aux présentations convergentes. Avant cela, on effectue un bref rappel historique sur la découverte de ces bases.

**1.2.1.1. Historique.** La découverte des bases de Gröbner est attribuée à Buchberger dont l'objectif durant sa thèse [22, 23] était de déterminer des bases linéaires pour des quotients d'algèbres polynomiales par un idéal. La méthode proposée par Buchberger était d'exprimer de telles bases en termes de monômes en formes normales, c'est-à-dire, par des méthodes de réécriture. Il introduit la terminologie de base de Gröbner dans [24] en l'honneur de son directeur de thèse, celui-ci ayant en effet des idées quant à la façon d'attaquer le problème [50]. Les idées développées par Buchberger apparaissent dans des travaux antérieurs, par exemple [54] pour les anneaux de séries formelles. Cependant, Buchberger est le premier à avoir également étudié la question sous un angle algorithmique<sup>2</sup>.

2. L'aspect effectif des bases de Gröbner est l'un de leurs principaux intérêts. Cela permet en effet de calculer certains invariants, de nature homologique par exemple, associés à des algèbres. Le lien entre les bases de Gröbner et le calcul de ces invariants est abordé dans le chapitre 4.



Contemporain de Buchberger et motivé par l'étude de problèmes de décidabilité dans d'autres structures que les algèbres commutatives [82], Shirshov démontre l'analogie du lemme de Newman pour les algèbres de Lie [80, 81]<sup>3</sup>. Il introduit pour cela la notion d'ensemble *stable* dans une algèbre de Lie libre, ces ensembles étant les analogues de bases de Gröbner. Dans un cadre non commutatif, la découverte des bases de Gröbner est attribuée à Bokut [17] et Bergman [15] du fait de l'analogie de leurs travaux avec ceux de Buchberger. En effet, comme on l'a vu dans la section précédente, ils formulent un critère permettant de déterminer des bases d'algèbres associatives en termes de mots en formes normales. Pour finir, la notion de base de Gröbner non commutative et la définition formelle de celles-ci sont introduites par Mora [70]. Dans toute cette section, on reprend le formalisme de celui-ci.

**1.2.1.2. Notation.** Dans toute cette section, on fixe un ensemble  $X$  ainsi qu'un ordre monomial  $<$  sur  $X^*$ . Étant donnée une partie  $E$  de  $\mathbb{K}X^*$ , on note

$$\text{lm}(E) = \{\text{lm}(f), f \in E\}.$$

**1.2.1.3. Idéaux monomiaux.**

1. Une partie  $I$  de  $X^*$  est appelée un *idéal monomial* si, pour tout  $w \in I$  et pour tout couple de mots  $(w_1, w_2)$ ,  $w_1 w w_2$  appartient à  $I$ .
2. Soient  $I$  un idéal monomial et  $R$  une partie de  $I$ . On dit que  $R$  engendre  $I$  si, pour tout  $w \in I$ , il existe un sous-mot de  $w$  appartenant à  $R$ .

**1.2.1.4. Remarque.** Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{K}X^*$ . Pour tout  $f \in I$  et pour tout couple de mots  $(w_1, w_2)$ ,  $w_1 f w_2$  appartient à  $I$ , de sorte que  $w_1 \text{lm}(f) w_2 = \text{lm}(w_1 f w_2)$  appartient à  $\text{lm}(I)$ . En particulier,  $\text{lm}(I)$  est un idéal monomial.

**1.2.1.5. Définition.** Soient  $I$  un idéal de  $\mathbb{K}X^*$  et  $R$  une partie de  $I$ . On dit que  $R$  est une *base de Gröbner non commutative* de  $I$  si  $\text{lm}(R)$  engendre  $\text{lm}(I)$ .

**1.2.1.6. Remarques.**

1. On rappelle d'après [70, Théorème 1.8] que  $R$  est une base de Gröbner non commutative de  $I$  si et seulement si, pour tout  $f \in I$ , il existe  $g_1, \dots, g_n \in R$ ,  $w_1, \dots, w_n, w'_1, \dots, w'_n \in X^*$  et des scalaires non nuls  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que

$$(a) \quad w_1 \text{lm}(g_1) w'_1 = \text{lm}(f),$$

$$(b) \quad w_{i+1} \text{lm}(g_{i+1}) w'_{i+1} < w_i \text{lm}(g_i) w'_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n-1,$$

et

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i w_i g_i w'_i.$$

En particulier, si  $R$  est une base de Gröbner non commutative de  $I$ , alors  $R$  engendre  $I$  comme idéal.

2. Étant donnée une partie  $R$  de  $\mathbb{K}X^*$ , on dit simplement que  $R$  est base de Gröbner non commutative s'il s'agit d'une base de Gröbner non commutative de l'idéal engendré  $I(R)$ .

---

3. Ces trois articles sont écrits en russe. On réfère le lecteur à [79] pour une version anglaise.

**1.2.1.7. Notation.** Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{K}X^*$ . On note

$$O(I) = X^* \setminus \text{lm}(I).$$

**1.2.1.8. Théorème [70, Théorème 1.3].** Soit  $I$  un idéal de  $\mathbb{K}X^*$ . On a la décomposition en somme directe d'espaces vectoriels suivante

$$\mathbb{K}X^* = I \oplus \mathbb{K}O(I).$$

*Démonstration.* Le caractère direct de la somme provient du fait que s'il existait un élément non nul  $f$  de  $I \cap \mathbb{K}O(I)$ , alors  $\text{lm}(f)$  appartiendrait à la fois à  $\text{lm}(I)$  et à  $O(I)$ . Or,  $O(I)$  étant le complémentaire de  $\text{lm}(I)$  dans  $X^*$ , ces deux ensembles ont une intersection vide.

On montre à présent que tout  $f \in \mathbb{K}X^*$  peut s'écrire  $g + h$  avec  $g \in I$  et  $h \in \mathbb{K}O(I)$ . On pose

$$g_0 = 0, \quad h_0 = 0 \quad \text{et} \quad f_0 = f.$$

Soit  $n$  un entier. On suppose construits  $f_n$ ,  $g_n$  et  $h_n$  et que ceux-ci satisfont les conditions suivantes :

1.  $g_n$  appartient à  $I$ ,
2.  $h_n$  appartient à  $\mathbb{K}O(I)$ ,
3.  $f_n + g_n + h_n$  est égal à  $f$ .

On suppose que  $f_n$  est non nul. Si  $\text{lm}(f_n)$  appartient à  $\mathbb{K}O(I)$ , alors on pose

$$g_{n+1} = g_n, \quad h_{n+1} = h_n + \text{lc}(f_n) \text{lm}(f_n) \quad \text{et} \quad f_{n+1} = f_n - \text{lc}(f_n) \text{lm}(f_n).$$

Si  $\text{lm}(f_n)$  appartient à  $\text{lm}(I)$ , alors soit  $g \in I$  tel que  $\text{lm}(g)$  est égal à  $\text{lm}(f_n)$  et  $\text{lc}(g)$  est égal à 1. On pose

$$g_{n+1} = g_n + \text{lc}(f_n)g, \quad h_{n+1} = h_n \quad \text{et} \quad f_{n+1} = f_n - \text{lc}(f_n)g.$$

En particulier,  $g_{n+1}$  appartient à  $I$ ,  $h_{n+1}$  appartient à  $\mathbb{K}O(I)$  et  $f_{n+1}$  est égal à  $g_{n+1} + h_{n+1}$ . De plus,  $\text{lm}(f_{n+1})$  est strictement inférieur à  $\text{lm}(f_n)$ . L'ordre  $<$  étant monomial, il s'en suit qu'il existe un entier  $n_0$  tel que  $f_{n_0}$  est nul. On pose alors

$$g = g_{n_0} \quad \text{et} \quad h = h_{n_0}.$$

□

**1.2.1.9. Bases de Gröbner non commutatives et présentations convergentes.** Le lien entre les bases de Gröbner non commutatives et les présentations convergentes est donné par le théorème suivant :

**1.2.1.10. Théorème.** Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre et  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$ . Alors,  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est convergente si et seulement si  $R$  est une base de Gröbner non commutative.

*Démonstration.* On pose  $I = I(R)$ . En particulier,  $\langle X \mid R \rangle$  étant une présentation de  $\mathbf{A}$ , on a un isomorphisme d'algèbres

$$\frac{\mathbb{K}X^*}{I} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}.$$

D'après le théorème 1.2.1.8,  $\{\bar{w}, w \in O(I)\}$  est une base de  $\mathbf{A}$ . De plus,  $R$  est une base de Gröbner non commutative si et seulement si  $O(I)$  est le complémentaire de l'idéal monomial engendré par  $\text{lm}(R)$ , c'est-à-dire, si et seulement si  $O(I)$  est égal à l'ensemble des mots dont aucun sous-mot n'appartient à  $\text{lm}(R)$ . Un mot dont aucun sous-mot n'appartient à  $\text{lm}(R)$  est précisément une forme normale pour  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$ , de sorte que  $R$  est une base de Gröbner non commutative si et seulement si  $\{\bar{w}, w \in X^* \text{ est en forme normale}\}$  est une base de  $\mathbf{A}$ . D'après le lemme du diamant, on conclut donc que  $R$  est une base de Gröbner non commutative si et seulement si la présentation  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$  est convergente.  $\square$

## 1.2.2 Procédures de construction

Dans cette section, on présente deux procédures de construction de bases de Gröbner non commutatives : l'algorithme de Buchberger et l'algorithme  $F_4$  de Faugère. On précise un point de terminologie. Buchberger et Faugère ont formulé leurs algorithmes respectifs dans un cadre commutatif et on présente ici les versions non commutatives de ceux-ci. Dans un contexte non commutatif, ces deux algorithmes ne terminent pas a priori (voir remarque 1.2.2.2), si bien qu'on préfère les appeler des procédures plutôt que des algorithmes. Cependant, lorsqu'il s'agit de nommer ces procédures, on continue de dire algorithme de Buchberger et algorithme  $F_4$ .

**1.2.2.1. Algorithme de Buchberger.** Dans ce paragraphe, on rappelle l'algorithme de Buchberger pour les algèbres associatives. Il s'agit d'une procédure dont le but est, étant données une algèbre  $\mathbf{A}$  et une présentation  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$  de  $\mathbf{A}$ , de calculer une présentation convergente  $\langle\langle X, < \rangle \mid R' \rangle$  de  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire, telle que  $R'$  est une base de Gröbner non commutative de  $I(R)$ . Avant d'énoncer l'algorithme de Buchberger, différentes remarques doivent être faites :

1. La procédure que l'on présente est formulée par Mora [70, Section 5.4] mais il s'agit d'une adaptation de l'algorithme formulé par Buchberger pour les algèbres commutatives.
2. On suppose que  $X$  et  $R$  sont finis car la procédure nécessite de connaître les branchements critiques de  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$ .
3. On suppose qu'on a une méthode  $\text{BC}(f, E)$  prenant en entrée un élément  $f \in \mathbb{K}X^*$  et une partie finie  $E$  de  $\mathbb{K}X^*$  et renvoyant l'ensemble des branchements critiques de  $\langle\langle X, < \rangle \mid E \cup \{f\} \rangle$  faisant intervenir  $f$ , c'est-à-dire, les branchements critiques de la forme  $(w_1, w_2, w_3, f, g)$  ou de la forme  $(w_1, w_2, w_3, g, f)$  avec  $g \in E \cup \{f\}$ .
4. On rappelle enfin que le  $S$ -polynôme d'un branchement critique  $b$  est noté  $\text{SP}(b)$ .

### 1.2.2.2. Remarques.

1. L'algorithme de Buchberger n'a a priori pas de raison de terminer. En effet, si tel était le cas, tout idéal engendré par un nombre fini d'éléments admettrait une base de Gröbner non commutative finie (voir théorème 1.2.2.3). Or, il est connu que ceci n'est pas vrai en général (voir [70, Section 1.3]).
2. Lorsque la procédure ne termine pas, on suppose que le choix de  $b$  à la première instruction de la boucle est *équitable*, c'est-à-dire, que tout branchement critique apparaissant dans l'un des  $B_d$  est sélectionné dans cette première instruction pour un indice supérieur à  $d$ .

---

**Algorithme 1** Algorithme de Buchberger associatif

---

**Initialisation** :  $d := 0$ ,  $R_0 := R$ ,  $B_0 := \{\text{branchements critiques de } \langle(X, <) | R_0\rangle\}$ .

```
1: tant que  $B_d \neq \emptyset$  faire
2:   choisir  $b \in B_d$ ;
3:    $h :=$  une forme normale de SP ( $b$ ) pour  $\langle(X, <) | R_d\rangle$ ;
4:   si  $h \neq 0$  alors
5:      $R_{d+1} := R_d \cup \{h\}$ ;
6:      $B_{d+1} := (B_d \setminus \{b\}) \cup \text{BC}(h, R_d)$ ;
7:      $d = d + 1$ ;
8:   sinon
9:      $R_{d+1} := R_d$ ;
10:     $B_{d+1} := (B_d \setminus \{b\})$ ;
11:     $d = d + 1$ ;
12:   fin si
13: fin tant que
```

---

On peut procéder de la sorte en rajoutant chaque nouvelle paire critique dans une file puis en sélectionnant la première paire critique de la file à chaque itération.

**1.2.2.3. Théorème.** Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre et  $\langle(X, <) | R\rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$ .

1. Si l'algorithme de Buchberger termine après  $d$  itérations de la boucle **tant que**, on pose  $R' = R_d$ .
2. Si l'algorithme ne termine pas, on pose

$$R' = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} R_d.$$

Ainsi défini,  $R'$  est une base de Gröbner non commutative.

*Démonstration.* Pour tout entier  $d$  et pour tout branchement critique  $b$  de  $\langle(X, <) | R_d\rangle$ , le  $S$ -polynôme de  $b$  appartient à  $I(R_d)$ . Ainsi, chacun des  $\langle(X, <) | R_d\rangle$  présente l'algèbre  $\mathbf{A}$ . De plus, par construction,  $R'$  est tel que chaque branchement critique de  $\langle(X, <) | R'\rangle$  est résoluble. D'après le lemme du diamant,  $\langle(X, <) | R'\rangle$  est donc une présentation convergente de  $\mathbf{A}$ , c'est-à-dire,  $R'$  est une base de Gröbner non commutative d'après le théorème 1.2.1.10.  $\square$

**1.2.2.4. Exemple.** On reprend l'exemple 1.1.2.23 : soient  $X = \{x, y, z\}$  et  $<$  l'ordre deg-lex induit par  $x < y < z$ . Soit  $\mathbf{A}$  l'algèbre présentée par

$$\langle(\{x, y, z\}, <) | yz - x, zx - xy\rangle. \quad (1.8)$$

On a

$$R_0 = \{yz - x, zx - xy\},$$

et

$$B_0 = \{b_0 = (y, z, x, yz - x, zx - xy)\}.$$

On a vu que

$$\text{SP}(b_0) = yxy - xx,$$

et que celui-ci est en forme normale. Le mot  $yxy$  est supérieur à  $xx$ , donc on a

$$R_1 = \{yz - x, zx - xy, yxy - xx\},$$

et

$$B_1 = \{b_1 = (yx, y, z, yxy - xx, yz - x), b_2 = (yx, y, xy, yxy - xx, yxy - xx)\}.$$

Le  $S$ -polynôme de  $b_1$

$$\text{SP}(b_1) = yxx - xxz,$$

est en forme normale, de sorte que

$$R_2 = \{yz - x, zx - xy, yxy - xx, yxx - xxz\},$$

et

$$B_2 = \{b_2 = (yx, y, xy, yxy - xx, yxy - xx), b_3 = (yx, y, xx, yxy - xx, yxx - xxz)\}.$$

On vérifie que les  $S$ -polynômes

$$\text{SP}(b_2) = yxxx - xxxxy \text{ et } \text{SP}(b_3) = yxxxz - xxxxx,$$

se réduisent en 0, de sorte que  $R_2$  est une base de Gröbner non commutative.

### 1.2.2.5. Remarques.

1. Dans le cas commutatif, le lemme de Dickson [42] garantit que l'algorithme de Buchberger termine, de sorte que tout idéal d'une algèbre commutative admet une base de Gröbner finie. Cela induit des applications dans différents domaines aussi bien en mathématiques qu'en informatique fondamentale (voir [20, Chapitre 6] et [28]). On mentionne également qu'outre Buchberger [25], différents auteurs ont proposé des versions plus efficaces de son algorithme. Parmi eux, Faugère [46, 47] a une approche matricielle. On présente celle-ci dans le prochain paragraphe. Dans la section 3.2 du chapitre 3, on propose une procédure permettant de construire des bases de Gröbner non commutatives qui utilisent également une approche matricielle.
2. L'algorithme de Buchberger est appelé une procédure de complétion. Des procédures de complétion apparaissent dans d'autres branches de la réécriture et notamment en réécriture de termes (voir [5] pour une référence sur la réécriture de termes) avec l'algorithme de Knuth-Bendix [59]. Le lien entre l'algorithme de Buchberger et celui de Knuth-Bendix apparaît dans différentes références [26, 27, 30, 66]. Avant Knuth et Bendix, Todd et Coxeter avaient inventé une procédure de complétion similaire [86] pour des présentations de groupes.

**1.2.2.6. Algorithme  $F_4$  associatif.** L'algorithme  $F_4$  est énoncé par Faugère dans un cadre commutatif. On présente ici la version non commutative de cet algorithme.

1. Comme on l'a dit dans la remarque 1.2.2.5, Faugère utilise un point de vue matriciel dans son algorithme. En effet, étant donnée une famille finie  $E$  de  $\mathbb{K}X^*$ , soit  $M$  la réunion des supports des éléments de  $E$ . On considère la matrice  $\text{mat}(E)$  dont les vecteurs colonnes sont les éléments de  $M$  écrits dans l'ordre décroissant et les lignes sont les éléments de  $E$ . Par exemple, si  $X = \{x < y < z\}$  et  $E = \{yzx - xx, yzx - yxy\}$ , on a

$$\text{mat}(E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De façon duale, si on a une matrice  $A$  dont les vecteurs colonnes sont associés à des mots, on pose  $\text{Pol}(A) \subset \mathbb{K}X^*$  l'ensemble des éléments de  $\mathbb{K}X^*$  correspondant aux lignes de  $A$ .

2. Soit  $U$  la fonction qui, à un branchement critique  $b = (w_1, w_2, w_3, f, g)$ , associe le couple  $(f', g') \in \mathbb{K}X^* \times \mathbb{K}X^*$  défini par
  - (a)  $f' = fw_3$  et  $g' = w_1g$  si  $b$  est un branchement de chevauchement,
  - (b)  $f' = f$  et  $g' = w_1gw_3$  si  $b$  est un branchement d'inclusion.
3. La méthode  $\text{BC}(f, E)$  est celle du point 3 du paragraphe 1.2.2.1.
4. Soient  $E$  et  $R$  deux parties finies de  $\mathbb{K}X^*$ . On considère un ensemble  $S$  d'étapes de réécriture de  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$  permettant de fournir des formes normales pour  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$  de chacun des éléments de  $E$ . On pose

$$\text{NF}(E, R) = \left\{ f - g, f \xrightarrow[R]{} g \in S \right\}.$$

On se donne une méthode  $\text{Red1}(E, R)$  renvoyant  $E$  auquel on a ajouté un tel ensemble  $\text{NF}(E, R)$ . Soit  $\text{Red}(E, R)$  la méthode définie par

$$\text{Red}(E, R) = \text{Gaus}(\text{mat}(\text{Red1}(E, R))),$$

où  $\text{Gaus}(A)$  est la forme échelonnée réduite d'une matrice  $A$ .

5. La version que l'on présente n'est pas complète puisque l'algorithme de Faugère prend également en entrée une fonction permettant de sélectionner une partie de l'ensemble des branchements critiques d'une présentation donnée. La procédure que l'on présente est celle où cette fonction sélectionne tous les branchements critiques.

On prend en entrée de la procédure une présentation  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$  de  $\mathbf{A}$  telle que  $X$  et  $R$ .

---

**Algorithme 2** Algorithme  $F_4$  associatif

---

**Initialisation** :  $d := 0$ ,  $R_0 := R$ ,  $B_0 := \{\text{branchements critiques de } \langle (X, <) \mid R_0 \rangle\}$ .

```
1: tant que  $B_d \neq \emptyset$  faire
2:    $d = d + 1$ ;
3:    $B_d := \emptyset$ ;
4:    $R_d := R_{d-1}$ ;
5:    $E_d := \{f', \exists b \in B_{d-1} \text{ tel que } U(b) = (f', g') \text{ ou } U(b) = (g', f')\}$ ;
6:    $L_d := \text{Pol}(\text{Red}(E_d, R_{d-1}))$ ;
7:    $\tilde{L}_d := \{f \in L_d, \text{lm}(f) \notin \text{lm}(\text{Red1}(E_d, R_{d-1}))\}$ ;
8:   pour  $h \in \tilde{L}_d$  faire
9:      $B_d = B_d \cup \text{BC}(h, R_{d-1})$ ;
10:     $R_d = R_d \cup \{h\}$ ;
11:  fin pour
12: fin tant que
```

---

**1.2.2.7. Algorithme  $F_4$  et bases de Gröbner non commutatives.** Comme pour celui de Buchberger, l'algorithme  $F_4$  n'a a priori pas de raison de terminer. On définit  $R'$  par

1. si la procédure termine après  $d$  itérations de la boucle **tant que**, on pose  $R' = R_d$ ,
2. si la procédure ne termine pas, on pose

$$R' = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} R_d.$$

Pour chaque entier  $d$ , les lignes de la matrice  $\text{mat}(\text{Red1}(E_d, R_{d-1}))$  appartiennent à l'idéal engendré par  $I(R_{d-1})$ . La matrice échelonnée réduite d'une matrice  $A$  étant obtenue à partir de celle-ci par des opérations élémentaires sur les lignes, les lignes de

$$\text{Red}(E, R) = \text{Gaus}(\text{mat}(\text{Red1}(E, R))),$$

appartiennent également à  $I(R_{d-1})$ . Ainsi,  $F_d$  et  $\tilde{F}_d$  sont inclus dans cet idéal. En particulier, chaque  $\langle (X, <) \mid R_d \rangle$  présente la même algèbre, c'est-à-dire  $\mathbf{A}$ . Ainsi,  $\langle (X, <) \mid R' \rangle$  est une présentation de  $\mathbf{A}$ . On montre à la fin de la section 2.2.2 du chapitre 2 que cette présentation est convergente, c'est-à-dire, que  $R'$  est une base de Gröbner non commutative.

## 1.3 Opérateurs de réduction

Dans cette section, on décrit l'approche de Berger [11] pour caractériser les présentations convergentes des *algèbres quadratiques*. On présente ensuite l'objectif de cette thèse.

### 1.3.1 Opérateurs de réduction et algèbres quadratiques

Afin de caractériser les présentations convergentes d'algèbres quadratiques, Berger introduit une structure de treillis sur une famille d'opérateurs appelés *opérateurs de réduction*. On commence cette section en rappelant comment Berger obtient cette structure. On effectue ensuite un bref rappel sur les algèbres quadratiques puis on énonce la façon dont Berger formule la confluence pour leurs présentations.

**1.3.1.1. Treillis.** Un treillis est un triplet  $(E, \leq, \wedge, \vee)$  où  $(E, \leq)$  est un ensemble ordonné tel que tout couple  $(e, e')$  d'éléments de  $E$  admet une borne inférieure  $e \wedge e'$  et une borne supérieure  $e \vee e'$ .

On réfère le lecteur à [48] pour une référence sur les treillis.

**1.3.1.2. Opérateurs de réduction.** Soit  $(G, <)$  un ensemble bien ordonné. Pour tout  $v \in \mathbb{K}G$ , le support de  $v$  étant fini, il admet un plus grand élément noté  $\text{lg}(v)$  et appelé *générateur dominant* de  $v$ . On étend l'ordre  $<$  sur  $G$  en un ordre partiel sur  $\mathbb{K}G$  de la façon suivante : on a  $v < v'$  si  $v = 0$  et  $v' \neq 0$ , ou si  $\text{lg}(v) < \text{lg}(v')$ .

Un *opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$*  est un endomorphisme idempotent  $T$  de  $\mathbb{K}G$  tel pour tout  $g \in G$ , on a  $T(g) \leq g$ . En d'autres termes, un endomorphisme idempotent de  $\mathbb{K}G$  est un opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$  si et seulement si, pour tout  $g \in G$ , l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1.  $T(g) = g$  ou
2.  $\text{lg}(T(g)) < g$ .

L'ensemble des éléments de  $G$  fixés par  $T$  est noté  $\text{Red}(T)$ . On note  $\mathbf{RO}(G, <)$  l'ensemble des opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ .

**1.3.1.3. Structure de treillis.** Soit  $\mathcal{L}(\mathbb{K}G)$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{K}G$ . Sous l'hypothèse que  $G$  est fini, Berger montre dans [11, Théorème 2.3] que l'application

$$\begin{aligned} \ker: \mathbf{RO}(G, <) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}G), \\ T &\longmapsto \ker(T) \end{aligned}$$

est une bijection. Dans la démonstration de la proposition 2.1.1.14 du chapitre 2, on prouve ce résultat dans le cas plus général où  $(G, <)$  est un ensemble bien ordonné. L'ensemble  $\mathcal{L}(\mathbb{K}G)$  admet une structure de treillis : la relation d'ordre est l'inclusion, la borne inférieure est l'intersection et la borne supérieure est la somme. Par transport de structure on obtient donc une structure de treillis sur  $(\mathbf{RO}(G, <), \preceq, \wedge, \vee)$  où

1.  $T_1 \preceq T_2$  si  $\ker(T_2) \subset \ker(T_1)$ ,
2.  $T_1 \wedge T_2$  est l'opérateur de réduction de noyau  $\ker(T_1) + \ker(T_2)$ ,
3.  $T_1 \vee T_2$  est l'opérateur de réduction de noyau  $\ker(T_1) \cap \ker(T_2)$ .

**1.3.1.4. Remarques.**

1. La raison pour laquelle l'ordre sur  $\mathbf{RO}(G, <)$  n'est pas défini par  $T_1 \preceq T_2$  si  $\ker(T_1)$  est inclus dans  $\ker(T_2)$  est donnée dans la remarque 2.1.2.11 du chapitre 2.
2. Les opérateurs de réduction apparaissent chez Bergman sous le nom de *réduction*. En effet, étant donnés une présentation  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  d'une algèbre  $\mathbf{A}$ , Bergman considère pour tout couple de mots  $(w_1, w_2)$  et pour toute règle  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}X^*$  défini pour tout mot  $w$  par

$$U_{w_1 f w_2}(w) = \begin{cases} w_1 r(f) w_2, & \text{si } w = w_1 \text{lm}(f) w_2 \\ w, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces opérateurs sont en fait utilisés par Bergman comme un formalisme puisqu'ils permettent de décrire différents concepts de réécriture (terminaison, confluence, formes normales,...) en termes fonctionnels.



**1.3.1.5. Confluence.** Soit  $(G, <)$  un ensemble fini totalement ordonné. On rappelle d'après [11] qu'étant donnée une famille  $F$  d'opérateurs de réduction, on a l'inclusion

$$\bigcap_{T \in F} \text{Red}(T) \subset \text{Red} \left( \bigwedge_{T \in F} T \right). \quad (1.9)$$

On dit que  $F$  est *confluente* si l'inclusion (1.9) est une égalité. On rappelle de plus d'après [11, Théorème 3.8] que si  $F = (T_1, T_2)$  est une paire d'opérateurs de réduction, alors elle est confluente si et seulement s'il existe un entier  $n$  tel que

$$L_n(T_2, T_1) = L_n(T_1, T_2),$$

où  $L_n(T, S)$  désigne le produit  $\cdots S \circ T \circ S$  avec  $n$  facteurs. Dans la démonstration du lemme 2.2.1.3 du chapitre 2, on prouve l'extension de [11, Théorème 3.8] au cas des ensembles bien ordonnés.

On introduit à présent les algèbres quadratiques. Avant de les définir, on doit rappeler ce qu'est une algèbre graduée :

**1.3.1.6. Algèbres graduées.** Une *algèbre graduée*  $\mathbf{A}$  est un espace vectoriel gradué

$$\mathbf{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_n,$$

admettant une structure d'algèbre telle que, pour tout couple d'entiers  $(n, m)$ , on a

$$\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{A}_m \subset \mathbf{A}_{n+m}.$$

Les espaces vectoriels  $\mathbf{A}_n$  sont appelés les *composantes homogènes* de  $\mathbf{A}$ .

**1.3.1.7. Algèbres quadratiques.** Une algèbre graduée  $\mathbf{A}$  est dite *quadratique* si le morphisme d'algèbres

$$\text{T}(\mathbf{A}_1) \xrightarrow{\pi} \mathbf{A},$$

défini par  $\pi(a) = a$  pour tout  $a \in \mathbf{A}_1$  est surjectif et est tel que le noyau de  $\pi$  est engendré, en tant qu'idéal de  $\text{T}(\mathbf{A}_1)$ , par

$$R_{\mathbf{A}} = \ker(\pi) \cap \mathbf{A}_1^{\otimes 2}.$$

En d'autres termes,  $\mathbf{A}$  est quadratique si elle est engendrée par  $\mathbf{A}_1$  et si les éléments de  $\mathbf{A}_1$  vérifient des relations homogènes de degré 2 dans  $\mathbf{A}$ .

**1.3.1.8. Présentations quadratiques.** Soient  $X$  un ensemble et  $R$  une partie de  $\mathbb{K}X^{(2)}$ . L'idéal  $I(R)$  admet une structure naturelle d'espace vectoriel gradué dont les composantes homogènes sont données par  $I(R)_n = \{0\}$  pour  $n = 0$  et 1,  $I(R)_2 = \mathbb{K}R$  et pour  $n \geq 2$ ,

$$I(R)_n = \sum_{i=0}^{n-2} \mathbb{K}X^{(i)} \otimes \mathbb{K}R \otimes \mathbb{K}X^{(n-i-2)}.$$

Ainsi, l'algèbre présentée par  $\langle X \mid R \rangle$  admet une structure naturelle d'algèbre graduée (et même quadratique), dont les composantes homogènes sont

$$\left( \frac{\mathbb{K}X^*}{I(R)} \right)_n = \frac{\mathbb{K}X^{(n)}}{I(R)_n}.$$

Étant donnée une algèbre quadratique  $\mathbf{A}$ , une *présentation quadratique* de  $\mathbf{A}$  est une présentation  $\langle X \mid R \rangle$  de  $\mathbf{A}$  telle que  $R$  est inclus dans  $\mathbb{K}X^{(2)}$  et l'isomorphisme

$$\frac{\mathbb{K}X^*}{I(R)} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mathbb{K}X^{(n)}}{I(R)_n} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_n,$$

conserve la graduation, c'est-à-dire, il induit pour tout entier  $n$  un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\frac{\mathbb{K}X^{(n)}}{I(R)_n} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_n.$$

**1.3.1.9. Remarque.** De façon équivalente, une présentation quadratique de  $\mathbf{A}$  est la donnée d'un couple  $\langle X \mid R \rangle$  tel que

1.  $R$  est inclus dans  $\mathbb{K}X^{(2)}$ ,
2. il existe un isomorphisme  $\varphi$  entre  $\mathbb{K}X$  et  $\mathbf{A}_1$ ,
3. la restriction de  $\varphi^{\otimes 2}$  à  $\mathbb{K}R$  induit un isomorphisme entre ce dernier et  $R_{\mathbf{A}}$ .

**1.3.1.10. Opérateurs de réduction et présentations d'algèbres quadratiques.** Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre quadratique,  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation quadratique de  $\mathbf{A}$ . La méthode proposée par Berger consiste à considérer l'opérateur de réduction relativement à  $(X^{(2)}, <)$  dont le noyau est  $\mathbb{K}R$ . Afin de pouvoir considérer un tel opérateur, on suppose de plus que  $X$  est fini.

**1.3.1.11. Remarque.** Soient  $X$  un ensemble fini,  $R$  une partie de  $\mathbb{K}X^{(2)}$  et  $S$  l'opérateur de réduction de noyau  $\mathbb{K}R$ . L'opérateur  $S$  étant un projecteur, l'ensemble

$$\{w - S(w), w \notin \text{Red}(S)\},$$

est une base de  $\ker(S)$  et donc de  $\mathbb{K}R$ . Ainsi, toute partie de  $\mathbb{K}X^{(2)}$  peut être remplacée de façon unique par une famille de la forme  $\{w - S(w)\}$  où  $S$  est un opérateur de réduction. Dans la preuve de la proposition suivante, on suppose que les règles d'une présentation quadratique sont de la forme  $w - S(w)$ .

**1.3.1.12. Proposition.** Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre quadratique et  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation quadratique de  $\mathbf{A}$  où  $X$  est un ensemble fini. Soit  $S$  l'opérateur de réduction de noyau  $\mathbb{K}R$ . Alors,  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est convergente si et seulement si la paire  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)$  d'opérateurs de réduction relativement à  $(X^{(3)}, <)$  est confluente.

*Démonstration.* D'après le lemme du diamant,  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est convergente si et seulement si tous ses branchements critiques sont résolubles. Les règles étant quadratiques, les branchements critiques sont de la forme  $b = (x, y, z, xy - S(xy), yz - S(yz))$ , où  $x, y, z \in X$  sont tels que  $xy$  et  $yz$  sont non fixés par  $S$  :

$$\begin{array}{ccc} & & S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}(xyz) = S(xy)z \\ & \nearrow & \\ xyz & & \\ & \searrow & \\ & & \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S(xyz) = xS(yz) \end{array}$$

Ce branchement critique est résoluble si et seulement s'il existe des composées  $U_1$  et  $U_2$  de  $S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}$  et de  $\text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S$  telles que  $U_1(S(xy)z) = U_2(xS(yz))$ . Ainsi,  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est convergente si et seulement s'il existe un entier  $n$  tel que, pour toute source  $w$  de branchement critique, on a

$$L_n(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)(w) = L_n(\text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S, S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X})(w). \quad (1.10)$$

L'équation(1.10) étant vraie si  $w$  n'est pas la source d'un branchement critique, on en déduit que  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est convergente si et seulement s'il existe un entier  $n$  tel que

$$L_n(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S) = L_n(\text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S, S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}),$$

c'est-à-dire, si et seulement si la paire  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)$  est confluente d'après 1.3.1.5.  $\square$

**1.3.1.13. Remarque.** Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre quadratique et  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation quadratique de  $\mathbf{A}$ . Soit  $S$  l'opérateur de réduction de noyau  $\mathbb{K}R$ . Lorsque  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)$  est confluente, Berger emploie la terminologie d'*algèbre X-confluente*. Ainsi, d'après la proposition 1.3.1.12, les algèbres  $X$ -confluents sont précisément les algèbres admettant une présentation quadratique convergente.

## 1.3.2 Opérateurs de réduction et algèbres non quadratiques

**1.3.2.1. Opérateurs de réduction et relations homogènes.** Un cadre naturel pour étendre la caractérisation de la confluence en termes d'opérateurs de réduction est celui des algèbres admettant une présentation  $\langle X \mid R \rangle$  où

1.  $X$  et  $R$  sont finis,
2. pour tout  $f \in R$ , il existe un entier  $n_f$  tel que  $f \in \mathbb{K}X^{(n_f)}$ .

En effet,  $R$  étant fini, l'entier

$$M = \max \{n_f, f \in R\},$$

est bien défini. De plus, on a l'inclusion

$$\mathbb{K}R \subset \bigoplus_{n \leq M} \mathbb{K}X^{(n)}. \quad (1.11)$$

L'ensemble  $X$  étant fini, il existe un nombre fini de mots de longueur inférieure à  $M$ , de sorte que l'inclusion (1.11) garantit que  $\mathbb{K}R$  est de dimension finie. Ainsi, en notant  $X^{(\leq M)}$  l'ensemble des mots de longueur inférieure à  $M$ , il existe un opérateur de réduction  $S$  relativement à  $(X^{(\leq M)}, <)$  de noyau  $\mathbb{K}R$ . De plus, pour tout entier  $n$  inférieur à  $M$ ,  $S$  induit des endomorphismes  $S^{(n)}$  de  $\mathbb{K}X^{(n)}$  et un mot  $w$  de longueur  $n$  peut se réécrire en  $\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(i)}} \otimes S^{(k)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(j)}}(w)$ , où  $i + j + k$  est égal à  $n$ . Les sources de branchements critiques ayant une longueur comprise entre 3 et  $2M - 1$ , la propriété de convergence de  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  peut donc être étudiée par celle de confluence des ensembles

$$F_n = \left\{ \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(i)}} \otimes S^{(k)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(j)}}, i + j + k = n \right\},$$

où  $n$  est compris entre 3 et  $2M - 1$ .

**1.3.2.2. Opérateurs de réduction et relations non homogènes.** Les algèbres décrites dans le paragraphe précédent forment une classe restrictive d'algèbres n'incluant pas certains exemples classiques comme l'algèbre universelle enveloppante  $U(\mathcal{L})$  d'une algèbre de Lie  $\mathcal{L}$ . En effet,  $U(\mathcal{L})$  admet une présentation dont les générateurs forment une base de  $\mathcal{L}$  et les relations font intervenir des termes quadratiques et linéaires. Plus généralement, étant donnée une présentation  $\langle\langle X, < \mid R \rangle\rangle$  d'une algèbre  $\mathbf{A}$ , l'endomorphisme de  $\mathbb{K}X^*$  défini pour tout mot  $w$  par

$$S(w) = \begin{cases} r(f), & \text{s'il existe } f \in R, \text{ tel que } w = \text{lm}(f) \\ w, & \text{sinon,} \end{cases} \quad (1.12)$$

n'induit pas nécessairement un opérateur de réduction sur une partie finie de  $X^*$ .

**1.3.2.3. Remarque.** Étant donnée une présentation quelconque  $\langle\langle X, < \mid R \rangle\rangle$ , l'opérateur  $S$  défini en (1.12) n'est a priori

1. pas bien défini, puisqu'il peut exister deux règles  $f$  et  $g$  telles que  $\text{lm}(f) = \text{lm}(g)$ ,
2. pas idempotent, puisqu'il peut exister deux règles  $f$  et  $g$  telles que  $\text{lm}(g)$  appartient au support de  $r(f)$ .

Cependant, le théorème 2.1.1.12 du chapitre 2 garantit que si on se donne un ordre monomial, on peut se ramener à des hypothèses faisant que  $S$  est bien défini et est un projecteur.

**1.3.2.4. Problématique.** La remarque faite dans le paragraphe 1.3.2.2 incite à développer une théorie des opérateurs de réduction relativement à un ensemble infini. Plus précisément, il s'agit de montrer qu'en dimension infinie, on a une structure de treillis sur l'ensemble de ces opérateurs, que cette structure de treillis permet de définir une notion de confluence et que celle-ci permet de caractériser les présentations d'algèbres convergentes.



## Chapitre 2

# Opérateurs de réduction

Dans ce chapitre, on étend les résultats de Berger sur les opérateurs de réduction au cas des ensembles bien ordonnés non nécessairement finis. Plus précisément, on montre dans la section 2.1.1 que l'application

$$\begin{aligned} \ker: \mathbf{RO}(G, <) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}G), \\ T &\longmapsto \ker(T) \end{aligned} \tag{2.1}$$

est encore un bijection et on en déduit une formulation de la confluence qui généralise celle de Berger dans le cas où  $G$  est fini. On précise que, dans ce cas, sa preuve que (2.1) est une bijection est différente de celle qu'on propose. En effet, sa preuve nécessite d'exhiber pour tout sous-espace  $V$  de  $\mathbb{K}G$  le plus grand générateur figurant dans la décomposition d'un élément de  $V$ . Pour qu'un tel générateur existe, il faut en particulier que  $V$  soit de dimension finie et donc que  $G$  soit fini. Dans la section 2.1.2, on formule différents concepts provenant de la réécriture abstraite en termes d'opérateurs de réduction : on montre notamment les analogues du théorème de Church-Rosser, du lemme de Newman et de la caractérisation de la confluence en termes d'unique formes normales. Dans la section 2.1.3, on relie la notion de confluence en termes d'opérateurs de réduction à celle provenant de la réécriture abstraite.

Dans la section 2.2, on s'intéresse à la complétion en termes d'opérateurs de réduction. On formule celle-ci algébriquement et on montre qu'elle peut être obtenue en termes de treillis. On commence dans la section 2.2.1 par étudier les propriétés de la borne supérieure d'une paire d'opérateurs de réduction confluente. Dans la section 2.2.2, on définit la notion de complétion pour les opérateurs de réduction en termes de treillis. On s'intéresse aussi à la question de l'existence d'une telle complétion. On introduit pour cela la notion de *complément* et on montre dans le théorème 2.2.2.6 qu'un tel complément existe toujours et que celui-ci peut être construit grâce à la structure de treillis.

Dans la section 2.3 on s'intéresse à des opérateurs de réduction relativement à des ensembles munis d'un ordre qui n'est pas supposé être total. Cette section a principalement pour but de montrer que la plupart des constructions faites dans les sections 2.1 et 2.2 nécessitent un ordre total.

Enfin, dans le cas où  $(G, <)$  est un ensemble fini totalement ordonné, on propose dans l'annexe A une implémentation de la bijection entre  $\mathcal{L}(\mathbb{K}G)$  et  $\mathbf{RO}(G, <)$ . On en déduit une implémentation de différentes constructions sur les opérateurs de réduction : borne supérieure, borne inférieure et compléments.

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne un corps commutatif.

## 2.1 Propriétés de réécriture

Dans toute cette section on fixe un ensemble bien ordonné  $(G, <)$ . On rappelle que pour tout  $v \in \mathbb{K}G$ , on pose  $S_v$  le support de  $v$  : il s'agit de l'ensemble des éléments de  $G$  figurant dans la décomposition de  $v$ . On rappelle également que le plus grand élément du support est noté  $\text{lg}(v)$  et que le coefficient de celui-ci dans  $v$  est noté  $\text{lc}(v)$ . On rappelle enfin qu'on étend l'ordre sur  $G$  en un ordre partiel sur  $\mathbb{K}G$  défini de la façon suivante : on a  $v < v'$  si  $v = 0$  et  $v' \neq 0$ , ou si  $\text{lg}(v) < \text{lg}(v')$ .

### 2.1.1 Structure de treillis et confluence

On commence par rappeler ce qu'est un opérateur de réduction :

**2.1.1.1. Définition.** Un opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$  est un endomorphisme idempotent  $T$  de  $\mathbb{K}G$  tel que, pour tout  $g \in G$ , on a  $T(g) \leq g$ . L'ensemble des opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$  est noté  $\mathbf{RO}(G, <)$ .

**2.1.1.2. Générateurs réduits.** Soit  $T \in \mathbf{RO}(G, <)$ . Un élément  $g$  de  $G$  est dit  $T$ -réduit si  $T(g) = g$ . L'ensemble des générateurs  $T$ -réduits est noté  $\text{Red}(T)$  et son complémentaire dans  $G$  est noté  $\text{Nred}(T)$ .

**2.1.1.3. Remarque.** Soit  $T$  un opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$ . L'image de  $T$  est égale à  $\mathbb{K}\text{Red}(T)$ .

**2.1.1.4. Matrices de réduction.** Dans la plupart des exemples de cette section,  $G$  est un ensemble fini :  $G = \{g_1 < \dots < g_n\}$ . On adopte dans ce cas la notation matricielle pour désigner les applications linéaires. Soit  $T$  un endomorphisme de  $\mathbb{K}G$ . La matrice de  $T$  relativement à la base  $\{g_1, \dots, g_n\}$  est appelée *matrice canonique de  $T$  relativement à  $(G, <)$* . De plus, une matrice carrée  $M$  est appelée *matrice de réduction* si elle vérifie les conditions suivantes :

1.  $M$  est triangulaire supérieure et ses éléments diagonaux sont égaux à 0 ou 1,
2. si un terme diagonal est égal à 0, alors les autres termes de la ligne à laquelle il appartient sont égaux à 0,
3. si un terme diagonal est égal à 1, alors les autres termes de la colonne à laquelle il appartient sont égaux à 0.

Le lemme suivant garantit qu'un endomorphisme de  $\mathbb{K}G$  est un opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$  si et seulement si sa matrice canonique relativement à  $(G, <)$  est une matrice de réduction :

**2.1.1.5. Lemme.** *Une matrice de réduction est idempotente.*

*Démonstration.* Soit  $M$  une matrice de réduction. Soient  $(m_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  les coefficients de  $M$  avec la convention que  $i$  et  $j$  désignent la ligne et la colonne de  $m_{ij}$ , respectivement. Soit  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  le produit  $M \times M$ . Pour tout  $1 \leq i, j \leq n$ , on a

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^n m_{ik} m_{kj}.$$

Soit  $1 \leq i \leq n$  tel que  $m_{ii} = 0$ . D'après le point 2 de la définition d'une matrice de réduction, pour tout  $1 \leq k \leq n$ , on a  $m_{ik} = 0$ . Pour tout  $1 \leq j \leq n$ , on a donc

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 0 \\ &= m_{ij}. \end{aligned}$$

Ainsi, les  $i$ -ièmes lignes de  $M$  et de  $A$  sont égales quand  $m_{ii}$  vaut 0. Soit  $1 \leq i \leq n$  tel que  $m_{ii} = 1$ . Pour tout  $1 \leq j \leq n$ , on a

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{k \neq i} m_{ik}m_{kj} + m_{ii}m_{ij} \\ &= \sum_{k \neq i} m_{ik}m_{kj} + m_{ij}. \end{aligned}$$

Soit  $k \neq i$  tel que  $m_{ik}$  est non nul. D'après le point 3 de la définition d'une matrice de réduction,  $m_{kk}$  est différent de 1 et est donc égal à 0. D'après le point 2,  $m_{kj}$  est donc égal à 0. Ainsi,  $m_{ik}m_{kj}$  est nul pour tout  $k \neq i$ , de sorte que  $a_{ij}$  est égal à  $m_{ij}$ . Ainsi, les  $i$ -èmes lignes de  $M$  et de  $A$  sont égales quand  $m_{ii}$  vaut 1. Toutes les lignes de  $M$  et de  $A$  sont donc égales, de sorte que  $M$  est égale à  $A$ , c'est-à-dire,  $M$  est idempotente. □

#### 2.1.1.6. Exemples.

1. La matrice nulle et la matrice identité sont des matrices de réduction. Plus généralement, toute matrice diagonale n'admettant que des 0 ou des 1 sur la diagonale est une matrice de réduction.
2. La matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

est une matrice de réduction.

3. La matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est triangulaire supérieure, n'admettant que des 1 et des 0 sur la diagonale mais n'est pas une matrice de réduction. En effet, cette matrice ne satisfait pas le point 3 de la définition d'une matrice de réduction.

#### 2.1.1.7. Remarques.

1. La composée de deux projecteurs n'est pas nécessairement un projecteur. A fortiori, la composée de deux opérateurs de réduction n'est pas nécessairement un opérateur de réduction. Cependant, quand cette composée est un projecteur, alors il s'agit d'un opérateur de réduction.



2. On insiste sur le fait que la notion d'opérateur de réduction dépend de l'ordre sur  $G$ . On considère l'exemple 2 de 2.1.1.6 où on renverse l'ordre des deux premiers générateurs. La matrice canonique de  $T$  relativement à  $G$  muni du nouvel ordre devient

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Or, il ne s'agit pas d'une matrice de réduction puisqu'elle ne satisfait pas la condition 2 de la définition d'une telle matrice.

**2.1.1.8. Bases réduites.** Soit  $V$  un sous-espace de  $\mathbb{K}G$ . Une *base réduite* de  $V$  est une base  $\mathcal{B}$  de  $V$  vérifiant les deux conditions suivantes :

1. Pour tout  $e \in \mathcal{B}$ ,  $\text{lc}(e)$  est égal à 1.
2. Étant donné deux éléments  $e$  et  $e'$  de  $\mathcal{B}$  tels que  $e$  est différent de  $e'$ ,  $\text{lg}(e')$  n'appartient pas au support de  $e$ .

**2.1.1.9. Notation.** La condition 2 de 2.1.1.8 implique que  $\text{lg}(e)$  est différent de  $\text{lg}(e')$ . Ainsi, une base réduite  $\mathcal{B}$  est indexée par l'ensemble  $\tilde{G} = \{\text{lg}(e), e \in \mathcal{B}\}$ . Dans la suite, on note  $\mathcal{B} = (e_g)_{g \in \tilde{G}}$ , où, pour tout  $g \in \tilde{G}$ , on a  $\text{lg}(e_g) = g$ .

**2.1.1.10. Remarque.** Soit  $V$  un sous-espace de  $\mathbb{K}G$  et soit  $\mathcal{B} = (e_g)_{g \in \tilde{G}}$  une base réduite de  $V$ . Pour tout  $g \in G$ , on note

$$V_g = \{v \in V, \text{lg}(v) = g\}.$$

L'ensemble  $V_g$  est non vide si et seulement si  $g$  appartient à  $\tilde{G}$ . Ainsi, si  $\mathcal{B}_1 = (e_g)_{g \in \tilde{G}_1}$  et  $\mathcal{B}_2 = (e'_g)_{g \in \tilde{G}_2}$  sont deux bases réduites de  $V$ , alors  $\tilde{G}_1$  et  $\tilde{G}_2$  sont égaux.

**2.1.1.11. Exemple.** Soit  $G = \{g_1 < g_2 < g_3 < g_4\}$  et soit  $V$  le sous-espace de  $\mathbb{K}G$  engendré par

$$v_1 = g_2 - g_1, \quad v_2 = g_4 - g_3, \quad v_3 = g_4 - g_2.$$

Les éléments  $\text{lg}(v_2)$  et  $\text{lg}(v_3)$  sont égaux à  $g_4$ , de sorte que  $\{v_1, v_2, v_3\}$  n'est pas une base réduite de  $V$ . En posant

$$\begin{aligned} v_2' &= v_3 - v_2 \\ &= g_3 - g_2, \end{aligned}$$

l'ensemble  $\{v_1, v_2', v_3\}$  est une base de  $V$ . Il ne s'agit toujours pas d'une base réduite puisque  $\text{lg}(v_1) = g_2$  appartient au support de  $v_2'$  et  $v_3$ . En posant

$$\begin{aligned} v_2'' &= v_2' + v_1 \\ &= v_2'' = g_3 - g_1 \text{ et} \\ v_3' &= v_3 + v_1 \\ &= g_4 - g_1 \end{aligned}$$

l'ensemble  $\{v_1, v_2'', v_3'\}$  est une base de  $V$ . Cette base est réduite. En utilisant la notation de 2.1.1.9, cette base est égale à  $\{e_{g_2}, e_{g_3}, e_{g_4}\}$ , où  $e_{g_i}$  est égal à  $g_i - g_1$  pour  $i \in \{2, 3, 4\}$ .

**2.1.1.12. Théorème.** Soit  $(G, <)$  un ensemble bien ordonné. Tout sous-espace de  $\mathbb{K}G$  admet une unique base réduite.

*Démonstration.* Soit  $V$  un sous-espace de  $\mathbb{K}G$ . On rappelle qu'on note

$$V_g = \{v \in V, \text{lg}(v) = g\}.$$

On construit d'abord par récurrence sur  $G$  une base réduite de  $V$ . Soit  $g_0$  le plus petit élément de  $G$ . Si  $V_{g_0}$  est vide, on pose  $\mathcal{B}_{g_0} = \emptyset$ . Sinon,  $g_0$  appartient à  $V$  et on pose  $\mathcal{B}_{g_0} = \{g_0\}$ . Soit  $g \in G$ . On suppose par hypothèse de récurrence que pour tout  $g' < g$  est construit un ensemble  $\mathcal{B}_{g'}$  tel que les conditions suivantes sont satisfaites :

1. Pour tout  $g' < g$ ,  $\mathcal{B}_{g'}$  contient au plus un élément.
2. En notant

$$I_g = \{g' \in G, g' < g \text{ et } \mathcal{B}_{g'} \neq \emptyset\},$$

pour tout  $g' \in I_g$ , on a

- (a) l'unique élément  $e_{g'}$  de  $\mathcal{B}_{g'}$  appartient à  $V$ ,
- (b)  $\text{lg}(e_{g'})$  est égal à  $g'$  et  $\text{lc}(e_{g'})$  est égal à 1,
- (c) pour tout  $\tilde{g} \in I_g$  tel que  $\tilde{g}$  est différent de  $g'$ , alors  $\tilde{g}$  n'appartient pas au support de  $e_{g'}$ ,
- (d)  $V_{g'}$  est inclus dans  $\mathbb{K}\{e_{\tilde{g}}, \tilde{g} \in I_g\}$ .

Si  $V_g$  est vide, alors on pose  $\mathcal{B}_g = \emptyset$ . Si  $V_g$  est non vide, soit  $v_g$  un élément de  $V_g$  tel que  $\text{lc}(v_g)$  est égal à 1. En particulier,  $v_g$  admet une décomposition

$$v_g = \sum_{g' \in J} \mu_{g'} g' + g,$$

où, pour tout  $g' \in J$ , on a  $g' < g$ . On pose  $\mathcal{B}_g = \{e_g\}$ , où

$$e_g = v_g - \sum_{g' \in I_g} \mu_{g'} e_{g'}.$$

L'ensemble  $\mathcal{B}_g$  contient au plus un élément. Par construction,  $e_g$  appartient à  $V$ ,  $\text{lg}(e_g)$  est égal à  $g$  et  $\text{lc}(e_g)$  est égal à 1, de sorte que les points 2a et 2b sont vrais. De plus, pour tout  $g' \in I_g$ ,  $g'$  n'appartient pas au support de  $e_g$ , de sorte que le point 2c est vérifié. Il reste à prouver que  $V_g$  est inclus dans l'espace vectoriel engendré par les éléments  $e_{g'}$  où  $g'$  appartient à  $I_g \cup \{g\}$ . Cet espace vectoriel est égal à  $\mathbb{K}\{e_{\tilde{g}}, \tilde{g} \in I_g\} \oplus \mathbb{K}e_g$ . Soit  $v$  un élément de  $V_g$ . Alors,  $v - \text{lc}(v)e_g$  appartient à  $V$  et  $\text{lg}(v - \text{lc}(v)e_g)$  est strictement inférieur à  $g$ . Par hypothèse de récurrence,  $v - \text{lc}(v)e_g$  appartient à  $\mathbb{K}\{e_{\tilde{g}}, \tilde{g} \in I_g\}$ , de sorte que  $v$  appartient à  $\mathbb{K}\{e_{\tilde{g}}, \tilde{g} \in I_g\} \oplus \mathbb{K}e_g$  et donc 2d est vrai. Cette construction par récurrence produit une famille d'ensembles  $(\mathcal{B}_g)_{g \in G}$  telle que

$$\mathcal{B} = \bigcup_{g \in G} \mathcal{B}_g,$$

est une famille génératrice de  $V = \bigcup_{g \in G} V_g$ . De plus, cette famille est libre car les générateurs dominants de ses éléments sont deux à deux distincts. Ainsi,  $\mathcal{B}$  est une base de  $V$  qui est réduite par construction.

On montre à présent qu'une telle base est unique. Soient  $\mathcal{B}_1 = (e_g)_{g \in \tilde{G}}$  et  $\mathcal{B}_2 = (e'_g)_{g \in \tilde{G}}$  deux bases réduites de  $V$ . Soit  $g \in \tilde{G}$ . On suppose que  $e_g$  est différent de  $e'_g$ . Soit

$$e'_g - e_g = \sum_{g' \in I} \lambda_{g'} e'_{g'},$$

la décomposition de  $e'_g - e_g$  selon la base  $\mathcal{B}_2$ . Le générateur dominant de  $e'_g - e_g$  est le plus grand élément de  $I$ , de sorte qu'il appartient à  $\tilde{G}$ . Soit  $\tilde{G}^c$  le complémentaire de  $\tilde{G}$  dans  $G$ . La condition 2 de la définition d'une base réduite implique que  $e_g - g$  et  $e'_g - g$  appartiennent à  $\mathbb{K}\tilde{G}^c$ . Ainsi,  $\lg(e'_g - e_g)$  appartient à  $\tilde{G}^c$ , ce qui est une contradiction. Ainsi, pour tout  $g \in \tilde{G}$ , les éléments  $e_g$  et  $e'_g$  sont égaux, c'est-à-dire, les bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  sont égales.  $\square$

### 2.1.1.13. Remarques.

1. Pour une autre démonstration de ce résultat, on réfère le lecteur à celle de [21, Proposition 1.2.1.6].
2. Dans [21, Proposition 1.2.1.6], deux démonstrations du théorème 2.1.1.12 sont proposées : une théorique, c'est-à-dire, ne proposant pas une procédure de construction et une algorithmique mais nécessitant que  $G$  est un ensemble fini (cette dernière utilisant la méthode du pivot de Gauss). On propose ici une démonstration qui englobe le cas où  $G$  est infini et qui est également procédurale. En particulier, dans le cas où  $G$  est fini, on obtient une autre démonstration constructive.

**2.1.1.14. Proposition.** *Soit  $V$  un sous-espace de  $\mathbb{K}G$ . Il existe un unique opérateur de réduction  $T$  dont le noyau est égal à  $V$ . De plus,  $\text{Nred}(T)$  est égal à  $\tilde{G}$ , où  $\mathcal{B} = (e_g)_{g \in \tilde{G}}$  est la base réduite de  $V$ .*

*Démonstration.* Soit  $T$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}G$  défini sur la base  $G$  de la façon suivante

$$T(g) = \begin{cases} g - e_g, & \text{si } g \in \tilde{G} \\ g, & \text{si } g \in \tilde{G}^c. \end{cases}$$

Par définition d'une base réduite,  $T$  est un opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$  et, par construction,  $\text{Nred}(T)$  est égal à  $\tilde{G}$ . De plus,  $T$  étant un opérateur de réduction, il s'agit en particulier d'un projecteur. Ainsi, le noyau de  $T$  est égal à l'image de  $\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T$ , c'est-à-dire,  $\ker(T)$  est l'espace vectoriel engendré par les  $g - T(g)$ . Or, selon que  $g$  est  $T$ -réduit ou non,  $g - T(g)$  est égal à 0 ou à  $e_g$ . Ainsi,  $\ker(T)$  est l'espace vectoriel engendré par les  $e_g$ , c'est-à-dire,  $V$ .

Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux opérateurs de réduction de noyau  $V$ . En particulier, les deux ensembles  $\{g - T_1(g), g \in \text{Nred}(T_1)\}$  et  $\{g - T_2(g), g \in \text{Nred}(T_2)\}$  sont des bases réduites de  $V$ . D'après le théorème 2.1.1.12, ces deux ensembles sont égaux. Ainsi,  $T_1(g)$  est différent de  $g$  si et seulement si  $T_2(g)$  est différent de  $g$  et dans ce cas  $T_1(g)$  est égal à  $T_2(g)$ . Il s'en suit que  $T_1(g)$  et  $T_2(g)$  sont égaux pour tout  $g \in G$ , de sorte que  $T_1$  et  $T_2$  sont égaux.  $\square$

**2.1.1.15. Notation.** La proposition 2.1.1.14 implique que l'application noyau

$$\begin{aligned} \ker: \text{End}(\mathbb{K}G) &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}G), \\ T &\longmapsto \ker(T) \end{aligned}$$

induit une bijection entre  $\mathbf{RO}(G, <)$  et  $\mathcal{L}(\mathbb{K}G)$ . On note

$$\ker^{-1} : \mathcal{L}(\mathbb{K}G) \longrightarrow \mathbf{RO}(G, <),$$

l'application réciproque.

**2.1.1.16. Structure de treillis.** On considère la relation binaire sur  $\mathbf{RO}(G, <)$  définie par

$$T_2 \preceq T_1 \text{ si et seulement si } \ker(T_1) \subset \ker(T_2).$$

Cette relation est réflexive et transitive. D'après la proposition 2.1.1.14, elle est également anti-symétrique. Il s'agit donc d'une relation d'ordre sur  $\mathbf{RO}(G, <)$ . De plus, les opérateurs de réduction étant des projecteurs, on a

$$\begin{aligned} &\ker(T_1) \subset \ker(T_2) \\ \iff &\text{im}(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1) \subset \ker(T_1) \\ \iff &T_2 \circ (\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1) = 0 \\ \iff &T_2 \circ T_1 = T_2. \end{aligned}$$

On en déduit l'équivalence suivante :

$$T_2 \preceq T_1 \text{ si et seulement si } T_2 \circ T_1 = T_2. \quad (2.2)$$

On munit à présent  $\mathbf{RO}(G, <)$  d'une structure de treillis. La borne inférieure  $T_1 \wedge T_2$  et la borne supérieure  $T_1 \vee T_2$  de deux éléments  $T_1$  et  $T_2$  de  $\mathbf{RO}(G, <)$  sont définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} T_1 \wedge T_2 = \ker^{-1}(\ker(T_1) + \ker(T_2)), \\ T_1 \vee T_2 = \ker^{-1}(\ker(T_1) \cap \ker(T_2)). \end{cases}$$

**2.1.1.17. Exemple.** Soient  $G = \{g_1 < g_2 < g_3 < g_4\}$  et  $P = (T_1, T_2)$ , où

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a

$$\ker(T_1) = \mathbb{K}\{g_2 - g_1\} \oplus \mathbb{K}\{g_4 - g_3\},$$

et

$$\ker(T_2) = \mathbb{K}\{g_4 - g_2\}.$$

Le noyau de  $T_1 \wedge T_2$  est l'espace vectoriel engendré par  $v_1 = g_2 - g_1$ ,  $v_2 = g_4 - g_3$  et  $v_3 = g_4 - g_2$ . Il s'agit de l'espace vectoriel de l'exemple 2.1.1.11. Ainsi, le noyau de  $T_1 \wedge T_2$  est l'espace vectoriel engendré par  $\{g_2 - g_1, g_3 - g_1, g_4 - g_1\}$ , de sorte que l'on a

$$T_1 \wedge T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus,  $g_4 - g_2$  n'appartient pas au noyau de  $T_1$ . Ainsi,  $\ker(T_1) \cap \ker(T_2)$  est réduit à  $\{0\}$  et donc  $T_1 \vee T_2$  est l'opérateur identité.

**2.1.1.18. Lemme.** Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ . Alors, on a :

$$T_1 \preceq T_2 \implies \text{Red}(T_1) \subset \text{Red}(T_2).$$

*Démonstration.* Soient  $\mathcal{B}_1 = (e_g)_{g \in \tilde{G}_1}$  et  $\mathcal{B}_2 = (e'_g)_{g \in \tilde{G}_2}$  les bases réduites de  $\ker(T_1)$  et  $\ker(T_2)$ , respectivement. On a

$$\{\lg(v), v \in \ker(T_1)\} = \tilde{G}_1,$$

et

$$\{\lg(v), v \in \ker(T_2)\} = \tilde{G}_2.$$

Ainsi, si  $\ker(T_2)$  est inclus dans  $\ker(T_1)$ , alors  $\tilde{G}_2$  est inclus dans  $\tilde{G}_1$ . On déduit de la proposition 2.1.1.14 que  $\text{Red}(T_1)$  est inclus dans  $\text{Red}(T_2)$ . □

**2.1.1.19. Obstructions.** Soit  $F$  une famille d'opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ . On pose :

$$\text{Red}(F) = \bigcap_{T \in F} \text{Red}(T) \quad \text{et} \quad \wedge F = \ker^{-1} \left( \sum_{T \in F} \ker(T) \right).$$

En utilisant l'inégalité  $\wedge F \preceq T$  pour tout  $T \in F$ , on déduit du lemme 2.1.1.18 qu'on a l'inclusion suivante :

$$\text{Red}(\wedge F) \subset \text{Red}(F).$$

On note

$$\text{Obs}^F = \text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F).$$

**2.1.1.20. Confluence.** Soit  $F$  une famille d'opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ . La famille  $F$  est dite *confluente* si  $\text{Obs}^F$  est l'ensemble vide.

**2.1.1.21. Exemples.** On considère la paire  $P$  de l'exemple 2.1.1.17. On a

$$\text{Red}(P) = \{g_1, g_3\},$$

et

$$\text{Red}(T_1 \wedge T_2) = \{g_1\}.$$

Ainsi,  $\text{Obs}^P$  est égal à  $\{g_3\}$  et donc  $P$  n'est pas confluente.

### 2.1.2 Formes normales, propriété de Church-Rosser et lemme de Newman

Dans cette section, on fixe une partie  $F$  de  $\mathbf{RO}(G, <)$ . On note par  $\langle F \rangle$  le sous-monoïde de  $(\text{End}(\mathbb{K}G), \circ)$  engendré par  $F$ .

**2.1.2.1. Ordre multi-ensemble.** Étant donnés  $v, v' \in \mathbb{K}G$ , soit  $S_{v'} \setminus S_v$  l'ensemble des éléments appartenant au support de  $v'$  mais pas à celui de  $v$ .

On pose  $v <_{\text{mul}} v'$  si  $S_{v'} \setminus S_v$  est non vide et si, pour tout  $g \in S_v \setminus S_{v'}$ , il existe  $g' \in S_{v'} \setminus S_v$  tel que  $g < g'$ . Cet ordre est la restriction à l'ensemble des parties finies de  $G$  de l'ordre multi-ensemble induit par  $<$ . On rappelle d'après [5, Théorème 2.5.5] que, l'ordre  $<$  étant terminant,  $<_{\text{mul}}$  est terminant.

#### 2.1.2.2. Lemme.

1. L'élément nul de  $\mathbb{K}G$  est minimal pour  $<_{\text{mul}}$ .
2. Soient  $v \in \mathbb{K}G$  et  $T \in \mathbf{RO}(G, <)$  tels que  $v$  n'appartient pas à  $\mathbb{K}\text{Red}(T)$ . Alors, on a  $T(v) <_{\text{mul}} v$ .

*Démonstration.* On montre le point 1. Soit  $v$  un élément non nul de  $\mathbb{K}G$ . En particulier,  $S_0 \setminus S_v$  est vide et  $S_v \setminus S_0$  n'est pas vide. Ainsi, on a  $0 <_{\text{mul}} v$ .

On montre le point 2. On pose

$$v = \sum_{i \in I} \lambda_i g_i + \sum_{j \in J} \lambda_j g_j,$$

où, pour tout  $i \in I$ ,  $g_i$  n'est pas  $T$ -réduit et pour tout  $j \in J$ ,  $g_j$  est  $T$ -réduit. On a donc

$$T(v) = \sum_{i \in I} \lambda_i T(g_i) + \sum_{j \in J} \lambda_j g_j.$$

Ainsi,  $S_{T(v)} \setminus S_v$  est inclus dans

$$S = \bigcup_{i \in I} S_{T(g_i)}.$$

De plus, pour tout  $i \in I$ ,  $g_i$  n'appartient pas à  $S$  et est différent de chaque  $g_j$  pour  $j \in J$ . Ainsi, chaque  $g_i$  appartient à  $S_v \setminus S_{T(v)}$ . Or, pour tout  $g \in S_{T(g_i)}$ , on a  $g < g_i$ , se sorte que  $T(v) <_{\text{mul}} v$ . □

#### 2.1.2.3. Formes normales.

1. Une  $F$ -forme normale est un élément de  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ .
2. Soient  $v$  et  $v'$  deux éléments de  $\mathbb{K}G$ . On dit que  $v$  se réécrit en  $v'$  s'il existe  $R \in \langle F \rangle$  tel que  $v'$  est égal à  $R(v)$ .
3. Soit  $v$  un élément de  $\mathbb{K}G$ . Une  $F$ -forme normale de  $v$  est une  $F$ -forme normale  $v'$  telle que  $v$  se réécrit en  $v'$ .

**2.1.2.4. Remarque.** Soit  $v \in \mathbb{K}G$ . Si  $v$  se réécrit en  $v'$ , alors  $v - v'$  appartient à  $\ker(\wedge F)$ .

**2.1.2.5. Propriété de Church-Rosser.** On dit que  $F$  a la *propriété de Church-Rosser* si, pour tout  $v \in \mathbb{K}G$ ,  $v$  se réécrit en  $\wedge F(v)$ .

**2.1.2.6. Théorème.** *Une partie de  $\mathbf{RO}(G, <)$  est confluente si et seulement si elle a la propriété de Church-Rosser.*

*Démonstration.* Soit  $F \subset \mathbf{RO}(G, <)$ .

On suppose que  $F$  a la propriété de Church-Rosser. Soit  $g$  un élément de  $\text{Red}(F)$ . Pour tout  $T \in F$ ,  $T(g)$  est égal à  $g$ . Ainsi,  $R(g)$  est égal à  $g$  pour tout  $R \in \langle F \rangle$ . Comme  $F$  a la propriété de Church-Rosser, on en déduit que  $g$  est égal à  $\wedge F(g)$ , de sorte que  $g$  appartient à  $\text{Red}(\wedge F)$ . Cela prouve que  $\text{Red}(F)$  est inclus dans  $\text{Red}(\wedge F)$ , ce qui signifie que  $F$  est confluente.

On suppose que  $F$  est confluente. Soit  $v \in \mathbb{K}G$ . On suppose que tout  $v' \in \mathbb{K}G$  tel que  $v' <_{\text{mul}} v$  se réécrit en  $\wedge F(v')$ . Si  $v$  appartient à  $\mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$ , alors  $v$  est égal à  $\wedge F(v)$ , de sorte que  $v$  se réécrit en  $\wedge F(v)$ . Si  $v$  n'appartient pas à  $\mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$  alors,  $F$  étant confluente,  $v$  n'appartient pas à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ . Ainsi, il existe  $T \in F$  tel que  $T(v)$  est différent de  $v$ . L'élément  $T(v)$  est strictement plus petit que  $v$  pour  $<_{\text{mul}}$ . Par hypothèse de récurrence, il existe donc  $R \in \langle F \rangle$  tel que  $R(T(v))$  est égal à  $\wedge F(T(v))$ . L'inégalité  $\wedge F \preceq T$  implique que  $\wedge F \circ T$  est égal à  $\wedge F$ , de sorte que  $\wedge F(T(v))$  est égal à  $\wedge F(v)$ . Ainsi,  $R' = R \circ T$  est un élément de  $\langle F \rangle$  tel que  $R'(v)$  est égal à  $\wedge F(v)$ . Ainsi,  $v$  se réécrit en  $\wedge F(v)$ . L'ordre  $<_{\text{mul}}$  étant terminant, on en déduit que le théorème 2.1.2.6 est vrai. □

**2.1.2.7. Lemme.** *Soit  $v$  un élément de  $\mathbb{K}G$  et soit  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\langle F \rangle$  telle que, pour tout entier  $n$ ,  $R_n$  divise à droite  $R_{n+1}$  dans  $\langle F \rangle$ . La suite  $(R_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire.*

*Démonstration.* On procède par récurrence sur  $v$ . Si  $v$  est égal à 0, la suite  $(R_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à 0 et donc stationnaire. Soit  $v \in \mathbb{K}G$ . On suppose que le lemme 2.1.2.7 est vrai pour tout  $v' \in \mathbb{K}G$  tel que  $v' <_{\text{mul}} v$ . Si la suite  $(R_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$  est constante égale à  $v$ , alors elle est stationnaire. Si elle n'est pas constante, il existe un entier  $n_0$  tel que  $R_{n_0}(v)$  est différent de  $v$ , de sorte que l'on a  $R_{n_0}(v) <_{\text{mul}} v$ . Par hypothèse, pour tout entier  $n$ ,  $R_n$  divise à droite  $R_{n+1}$  dans  $\langle F \rangle$ , c'est-à-dire, il existe  $R'_n \in \langle F \rangle$  tel que  $R_{n+1}$  est égal à  $R'_n \circ R_n$ . Soit  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite d'éléments de  $\langle F \rangle$  définie par

$$Q_0 = R'_{n_0} \text{ et } Q_{n+1} = R'_{n_0+n} \circ Q_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Pour tout entier  $n$ ,  $Q_n$  divise à droite  $Q_{n+1}$  dans  $\langle F \rangle$ . Par hypothèse de récurrence, la suite  $(Q_n(R_{n_0}(v)))_{n \in \mathbb{N}}$  est donc stationnaire. De plus, pour tout entier  $n$ ,  $Q_n \circ R_{n_0}$  est égal à  $R_{n_0+n}$ , de sorte que la suite  $(R_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire. Ceci termine la preuve du lemme. □

**2.1.2.8. Proposition.** *Tout élément de  $\mathbb{K}G$  admet une  $F$ -forme normale.*

*Démonstration.* Soit  $v \in \mathbb{K}G$ . Il s'agit de montrer qu'il existe  $R \in \langle F \rangle$  tel que  $R(v)$  appartient à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ . Par l'absurde, on suppose que pour tout  $R \in \langle F \rangle$ ,  $R(v)$  n'appartient pas à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ . Le morphisme  $\text{Id}_{\mathbb{K}G}$  appartenant à  $\langle F \rangle$ ,  $v$  n'appartient pas à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ . En particulier, il existe  $T_0 \in F$  tel que  $v$  n'appartient pas à  $\mathbb{K}\text{Red}(T_0)$ . Soit  $n \geq 1$ . On suppose construits des éléments  $T_0, \dots, T_n$  de  $F$  tels que  $T_{n-1} \circ \dots \circ T_0(v)$  n'appartient pas à  $\mathbb{K}\text{Red}(T_n)$ . Le morphisme

$$R_n = T_n \circ \dots \circ T_0,$$

appartient à  $\langle F \rangle$ . Ainsi,  $R_n(v)$  n'appartient pas à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ , de sorte qu'il existe  $T_{n+1} \in F$  tel que  $R_n(v)$  n'appartient pas à  $\mathbb{K}\text{Red}(T_{n+1})$ . Ce procédé permet d'obtenir une suite  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\langle F \rangle$  telle que, pour tout entier  $n$ ,  $R_n$  divise à droite  $R_{n+1}$  dans  $\langle F \rangle$  et telle que la suite  $(R_n(v))_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas stationnaire. Cela contredit le lemme 2.1.2.7. Ainsi, la proposition 2.1.2.8 est vraie.  $\square$

**2.1.2.9. Notation.** Pour tout  $v \in \mathbb{K}G$ , soit

$$[v] = \{v' \in \mathbb{K}G, v' - v \in \ker(\wedge F)\}.$$

**2.1.2.10. Lemme.** *Pour tout  $v \in \mathbb{K}G$ ,  $\wedge F(v)$  est le plus petit élément de  $[v]$  pour l'ordre  $<_{\text{mul}}$ . De plus, si tout élément  $v$  de  $\mathbb{K}G$  admet exactement une  $F$ -forme normale, celle-ci est égale à  $\wedge F(v)$ .*

*Démonstration.* On commence par montrer la première assertion. Soit  $v \in \mathbb{K}G$  et soit  $v' \in [v]$ . L'élément  $v'$  appartient également à  $[\wedge F(v)]$ , c'est-à-dire, il existe  $v'' \in \ker(\wedge F)$  tel que

$$v' = \wedge F(v) + v''. \quad (2.3)$$

Comme  $v''$  appartient à  $\ker(\wedge F)$ , il admet une décomposition

$$v'' = \sum \lambda_i (g_i - \wedge F(g_i)), \quad (2.4)$$

où chaque  $g_i$  n'est pas  $\wedge F$ -réduit. Soit  $g \in G$  appartenant au support de  $\wedge F(v)$  mais n'appartenant pas à celui de  $v'$ . Pour montrer que  $v'$  est supérieur à  $\wedge F(v)$ , il suffit de montrer qu'il existe un indice  $i$  tel que

1.  $g_i$  est supérieur à  $g$ ,
2.  $g_i$  n'appartient pas au support de  $\wedge F(v)$ ,
3.  $g_i$  appartient au support de  $v'$ .

La relation (2.3) et l'hypothèse sur  $g$  impliquent que ce dernier appartient au support de  $v''$ . De plus,  $g$  est dans l'image de  $\wedge F$ , c'est-à-dire, il est  $\wedge F$ -réduit. D'après la relation (2.4), on en déduit que  $g$  appartient au support de  $\wedge F(g_i)$  pour un certain  $i$ . En particulier,  $g$  est plus petit que  $g_i$ . De plus,  $g_i$  n'étant pas  $\wedge F$ -réduit, il n'appartient pas au support de  $\wedge F(v)$ . Finalement,  $g_i$  appartenant au support de  $v''$  mais pas à celui de  $\wedge F(v)$ , la relation (2.3) implique qu'il appartient au support de  $v'$ . Ainsi, on a  $\wedge F(v) <_{\text{mul}} v'$  pour tout  $v' \in [v]$ , de sorte que la première partie du lemme est prouvée.

On montre la seconde partie du lemme. On suppose que tout  $v \in \mathbb{K}G$  admet une unique  $F$ -forme normale, notée  $N(v)$ . On commence par montrer que l'opérateur  $N$  est un opérateur de réduction. Il s'agit d'un opérateur idempotent par construction. De plus, pour tout  $R \in \langle F \rangle$  et pour tout  $g \in G$ , on a soit  $R(g) = g$ , soit  $R(g) < g$ . Ainsi, pour tout  $g \in G$ , on a soit  $N(g) = g$ , soit  $N(g) < g$ . On en déduit que  $N$  est un opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$ . On montre à présent que  $N$  est égal à  $\wedge F$ . Soit  $T \in F$  et soit  $v \in \ker(T)$ . L'élément  $v$  se réécrit en particulier en 0, de sorte que  $N(v)$  est égal à 0. Ainsi, le noyau de  $T$  est inclus dans celui de  $N$  pour tout  $T \in F$ , c'est-à-dire,  $N$  est inférieur à  $T$  pour tout  $T \in F$ . Ainsi, on a l'inégalité

$$N \preceq \wedge F.$$



De plus, d'après la relation (2.2) (voir 2.1.1.16), pour tout  $T \in F$ , l'opérateur  $\wedge F \circ T$  est égal à  $\wedge F$ . Ainsi, pour tout  $R \in \langle F \rangle$ ,  $\wedge F \circ R$  est égal à  $\wedge F$ . On en déduit que  $\wedge F \circ N$  est égal à  $\wedge F$ . En utilisant de nouveau la relation (2.2), on a

$$\wedge F \preceq N.$$

Ainsi,  $N$  est égal à  $\wedge F$ , de sorte que le lemme 2.1.2.10 est vrai. □

**2.1.2.11. Remarque.** Le lemme 2.1.2.10 signifie que la borne inférieure d'une famille d'opérateurs de réduction satisfait une condition de minimalité. On revient à la définition de l'ordre sur  $\mathbf{RO}(G, <)$ . La bijection entre  $\mathcal{L}(\mathbb{K}G)$  et  $\mathbf{RO}(G, <)$  incite à poser

$$T_1 \preceq T_2 \text{ si } \ker(T_1) \subset \ker(T_2).$$

Cependant, en définissant l'ordre de cette façon, on échangerait  $\wedge$  et  $\vee$ . En particulier, si  $F$  est une partie de  $\mathbf{RO}(G, <)$ , la borne supérieure des éléments de  $F$  enverrait tout vecteur  $v$  sur le plus petit élément de  $[v]$  pour  $<_{\text{mul}}$ . La borne supérieure d'une famille d'opérateurs de réduction satisfèrait donc une condition de minimalité alors qu'avec la convention employée c'est la borne inférieure qui satisfait cette condition de minimalité.

**2.1.2.12. Proposition.** *La famille  $F$  est confluente si et seulement si tout élément de  $\mathbb{K}G$  admet exactement une  $F$ -forme normale.*

*Démonstration.* On suppose que  $F$  est confluente. Soit  $v$  un élément de  $\mathbb{K}G$  et soient  $v_1$  et  $v_2$  deux  $F$ -formes normales de  $v$ . Soient  $R_1$  et  $R_2$  deux éléments de  $\langle F \rangle$  tels que  $R_i(v)$  est égal à  $v_i$ , pour  $i = 1$  ou  $2$ . Les éléments  $v - v_1$  et  $v - v_2$  appartiennent à  $\ker(\wedge F)$ . Ainsi, on a

$$v_1 - v_2 \in \ker(\wedge F).$$

De plus,  $v_1$  et  $v_2$  appartenant à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ ,  $v_1 - v_2$  appartient également à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ , c'est-à-dire,

$$v_1 - v_2 \in \mathbb{K}\text{Red}(\wedge F) = \text{im}(\wedge F),$$

puisque  $F$  est confluente. Ainsi,  $v_1 - v_2$  appartient à  $\text{im}(\wedge F) \cap \ker(\wedge F)$ . L'opérateur  $\wedge F$  étant un projecteur, cet espace vectoriel est réduit à  $\{0\}$ . On en déduit que  $v_1$  est égal à  $v_2$ , et donc que  $v$  admet une unique  $F$ -forme normale.

On suppose que tout élément de  $\mathbb{K}G$  admet une unique  $F$ -forme normale. Soit  $v$  un élément de  $\mathbb{K}G$ . D'après le lemme 2.1.2.10, la forme normale de  $v$  est égale à  $\wedge F(v)$ . Ainsi,  $v$  se réécrit en  $\wedge F(v)$ , de sorte que  $F$  a la propriété de Church-Rosser. D'après le théorème 2.1.2.6,  $F$  est confluente. □

**2.1.2.13. Confluence locale.** On dit que  $F$  est *localement confluente* si, pour tout  $v \in \mathbb{K}G$  et pour tout couple  $(T_1, T_2)$  d'éléments de  $F$ , il existe  $v' \in \mathbb{K}G$  tel que  $T_1(v)$  et  $T_2(v)$  se réécrivent en  $v'$ .

Le dernier résultat de cette section est la formulation du lemme de Newman en termes d'opérateurs de réduction.

**2.1.2.14. Proposition.** *La famille  $F$  est confluyente si et seulement si elle est localement confluyente.*

*Démonstration.* On suppose que  $F$  est confluyente. Soit  $v \in \mathbb{K}G$  et soient  $T_1, T_2 \in F$ . Soit  $i = 1$  ou  $2$ . D'après le théorème 2.1.2.6,  $T_i(v)$  se réécrit en  $\wedge^F(T_i(v))$ , c'est-à-dire  $\wedge^F(v)$  d'après la relation (2.2) (voir 2.1.1.16). Ainsi,  $F$  est localement confluyente.

On suppose que  $F$  est localement confluyente. D'après la proposition 2.1.2.12, il est suffisant de montrer que tout  $v \in \mathbb{K}G$  admet une unique  $F$ -forme normale. On montre cette assertion par récurrence. Soit  $v \in \mathbb{K}G$ . On suppose que pour tout  $v' <_{\text{mul}} v$ ,  $v'$  admet une unique  $F$ -forme normale. Si  $v$  appartient à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ , alors  $v$  est une  $F$ -forme normale et admet donc une unique  $F$ -forme normale. Soit  $v$  n'appartenant pas à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$  et soient  $v_1$  et  $v_2$  deux  $F$ -formes normales de  $v$ . Pour  $i = 1$  ou  $2$ , il existe  $R_i \in \langle F \rangle$  tel que

$$v_i = R_i(v).$$

On pose

$$R_i = R'_i \circ T_i,$$

où  $T_i$  et  $R'_i$  appartiennent à  $F$  et  $\langle F \rangle$ , respectivement. L'opérateur  $T_i$  est choisi de telle sorte que  $T_i(v)$  est différent de  $v$ . La famille  $F$  étant localement confluyente, il existe  $u \in \mathbb{K}G$  tel que  $T_i(v)$  se réécrit en  $u$ . D'après la proposition 2.1.2.8,  $u$  admet une  $F$ -forme normale  $\hat{u}$ . De plus,  $v_i$  est égal à  $R'_i(T_i(v))$ , de sorte que  $\hat{u}$  est également une  $F$ -forme normale de  $T_i(v)$ . On a  $T_i(v) <_{\text{mul}} v$ . Ainsi, par hypothèse de récurrence,  $T_i(v)$  admet une unique  $F$ -forme normale, de sorte que  $v_i$  est égal à  $\hat{u}$  pour  $i = 1$  ou  $2$ . Ainsi,  $v_1$  et  $v_2$  sont égaux et donc  $v$  admet une unique  $F$ -forme normale. L'ordre  $<_{\text{mul}}$  étant terminant, on en déduit que la proposition 2.1.2.14 est vraie. □

### 2.1.3 Opérateurs de réduction et réécriture abstraite

On fixe  $F \subset \mathbf{RO}(G, <)$ .

**2.1.3.1. Définition.** On considère le système de réécriture abstrait

$$\left( \mathbb{K}G, \xrightarrow{F} \right),$$

où  $\xrightarrow{F}$  est définie par  $v \xrightarrow{F} v'$  s'il existe  $T \in F$  tel que  $v$  n'appartient pas à  $\mathbb{K}\text{Red}(T)$  et  $v'$  est égal à  $T(v)$ .

**2.1.3.2. Remarques.**

1. Si on a  $v \xrightarrow{F} v'$ , alors on a  $v' <_{\text{mul}} v$ . L'ordre  $<_{\text{mul}}$  étant terminant, la relation  $\xrightarrow{F}$  termine.
2. On a  $v \xrightarrow{F}^* v'$  si et seulement s'il existe  $R \in \langle F \rangle$  tel que  $v'$  est égal à  $R(v)$ , c'est-à-dire, si et seulement si  $v$  se réécrit en  $v'$ . En particulier,  $v \xrightarrow{F}^* v'$  implique que  $v - v'$  appartient à  $\ker(\wedge^F)$ .

**2.1.3.3. Lemme.** Soient  $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{K}G$  tels que  $v_1 \xrightarrow[F]{*} v_2$ . Alors, on a  $v_1 + v_3 \xrightarrow[F]{*} v_2 + v_3$ .

*Démonstration.* Pour tout couple  $(u_1, u_2)$  d'éléments de  $\mathbb{K}G$  et pour tout élément  $T$  de  $F$ , on a  $u_1 + u_2 \xrightarrow[F]{*} T(u_1 + u_2)$  ainsi que  $u_1 + T(u_2) \xrightarrow[F]{*} T(u_1 + u_2)$ . On a donc

$$u_1 + u_2 \xrightarrow[F]{*} u_1 + T(u_2). \quad (2.5)$$

Soit  $u_3 \in \mathbb{K}G$  tel que  $u_2 \xrightarrow[F]{*} u_3$ , c'est-à-dire, il existe  $R \in \langle F \rangle$  tel que  $u_3$  est égal à  $R(u_2)$ . D'après la relation (2.5), on a

$$u_1 + u_2 \xrightarrow[F]{*} u_1 + u_3. \quad (2.6)$$

Soient  $v_1, v_2 \in \mathbb{K}G$  tels que  $v_1 \xrightarrow[F]{*} v_2$ , c'est-à-dire, il existe un zig-zag

$$v_1 = u_1 \xrightarrow[F]{*} u_2 \xrightarrow[F]{*} u_3 \xrightarrow[F]{*} \cdots \xrightarrow[F]{*} u_{r-1} \xrightarrow[F]{*} u_r = v_2,$$

où, pour tout  $1 \leq i \leq r-1$ , on a  $u_i \xrightarrow[F]{*} u_{i+1}$  ou  $u_{i+1} \xrightarrow[F]{*} u_i$ . La relation (2.6) implique que, pour tout  $v_3 \in \mathbb{K}G$  et pour tout  $i \in \{1, \dots, r-1\}$ , on a  $u_i + v_3 \xrightarrow[F]{*} u_{i+1} + v_3$ . Ainsi, le lemme 2.1.3.3 est vrai. □

**2.1.3.4. Proposition.** Soient  $v_1, v_2 \in \mathbb{K}G$ . On a l'équivalence

$$v_1 \xrightarrow[F]{*} v_2 \iff v_1 - v_2 \in \ker(\wedge F).$$

*Démonstration.* On suppose que  $v_1 \xrightarrow[F]{*} v_2$ . Il existe un zig-zag

$$v_1 = u_1 \xrightarrow[F]{*} u_2 \xrightarrow[F]{*} u_3 \xrightarrow[F]{*} \cdots \xrightarrow[F]{*} u_{r-1} \xrightarrow[F]{*} u_r = v_2,$$

où, pour tout  $1 \leq i \leq r-1$ , on a  $u_i \xrightarrow[F]{*} u_{i+1}$  ou  $u_{i+1} \xrightarrow[F]{*} u_i$ . Chaque  $u_i - u_{i+1}$  appartient à  $\ker(\wedge F)$ , de sorte que

$$v_1 - v_2 = (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_{r-2} - u_{r-1}) + (u_{r-1} - u_r),$$

appartient à  $\ker(\wedge F)$ .

Réciproquement, on suppose que  $v_1 - v_2$  appartient au noyau de  $\wedge F$ . L'ensemble

$$\{v - T(v), T \in F \text{ et } v \in \mathbb{K}G\},$$

est un ensemble générateur de  $\ker(\wedge F)$ . Ainsi, il existe  $T_1, \dots, T_n \in F$  et  $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{K}G$  tels que  $v_1 - v_2$  est égal à  $\sum_{i=1}^n u_i - T_i(u_i)$ , de sorte que

$$v_1 = \sum_{i=1}^n u_i - T_i(u_i) + v_2.$$

Pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on a  $u_i - T_i(u_i) \xrightarrow[F]{*} 0$ . Ainsi, d'après le lemme 2.1.3.3, on a  $v_1 \xrightarrow[F]{*} v_2$ . □

**2.1.3.5. Remarque.** Soit  $v \in \mathbb{K}G$  et soit  $[v]$  l'ensemble des  $v' \in \mathbb{K}G$  tels que  $v' - v$  appartient à  $\ker(\wedge F)$ . D'après la proposition 2.1.3.4,  $[v]$  est la classe d'équivalence de  $v$  pour la relation  $\xrightarrow[F]{*}$ . D'après le lemme 2.1.2.10,  $\wedge F(v)$  est donc le plus petit élément de cette classe d'équivalence pour  $<_{\text{mul}}$ . En particulier,

$$\mathbb{K}\text{Obs}^F = \mathbb{K}(\text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F)),$$

est l'ensemble des formes normales qui ne sont pas minimales dans leurs classes d'équivalence pour la relation  $\xrightarrow[F]{*}$ .

**2.1.3.6. Proposition.** *La famille  $F$  a la propriété de Church-Rosser si et seulement si  $\xrightarrow[F]{*}$  a la propriété de Church-Rosser.*

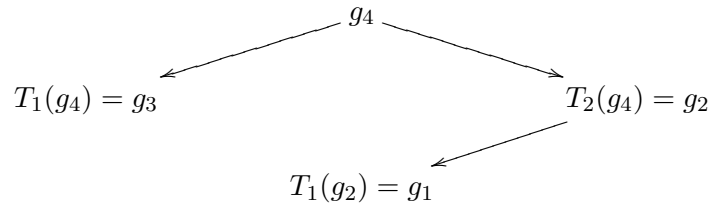
*Démonstration.* On suppose que  $F$  a la propriété de Church-Rosser. Soient  $v, v' \in \mathbb{K}G$  tels que  $v \xrightarrow[F]{*} v'$ . D'après la proposition 2.1.3.4,  $v - v'$  appartient au noyau de  $\wedge F$ . Soit  $u$  la valeur commune de  $\wedge F(v)$  et  $\wedge F(v')$ . Comme  $F$  a la propriété de Church-Rosser,  $v$  et  $v'$  se réécrivent en  $u$ , c'est-à-dire, on a  $v \xrightarrow[F]{*} u$  et  $v' \xrightarrow[F]{*} u$ . Ainsi,  $\xrightarrow[F]{*}$  a la propriété de Church-Rosser.

Réciproquement, on suppose que  $\xrightarrow[F]{*}$  a la propriété de Church-Rosser. Soit  $v \in \mathbb{K}G$ . D'après la proposition 2.1.3.4, on a  $v \xrightarrow[F]{*} \wedge F(v)$ . La relation  $\xrightarrow[F]{*}$  ayant la propriété de Church-Rosser, il existe  $u \in \mathbb{K}G$  tel que  $v \xrightarrow[F]{*} u$  et  $\wedge F(v) \xrightarrow[F]{*} u$ . De plus,  $\wedge F(v)$  appartient à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ , de sorte qu'il s'agit d'une  $F$ -forme normale. Ainsi,  $u$  est égal à  $\wedge F(v)$ . On a donc  $v \xrightarrow[F]{*} \wedge F(v)$ , c'est-à-dire,  $v$  se réécrit  $\wedge F(v)$ . Cela prouve que  $F$  a la propriété de Church-Rosser.  $\square$

**2.1.3.7. Corollaire.** *La famille  $F$  est confluente si et seulement si  $\xrightarrow[F]{*}$  est confluente.*

*Démonstration.* D'après le théorème 2.1.2.6,  $F$  est confluente si et seulement si elle a la propriété de Church-Rosser. D'après la proposition 2.1.3.6,  $F$  a la propriété de Church-Rosser si et seulement si  $\xrightarrow[F]{*}$  a la propriété de Church-Rosser, c'est-à-dire, si et seulement si  $\xrightarrow[F]{*}$  est confluente.  $\square$

**2.1.3.8. Exemple.** On considère la paire  $P$  de l'exemple 2.1.1.17. On a vu que cette paire n'est pas confluente. D'après le diagramme suivant



on a  $g_4 \xrightarrow[P]{*} g_1$  et  $g_4 \xrightarrow[P]{*} g_3$ . Les deux éléments  $g_1$  et  $g_3$  sont des formes normales pour  $\xrightarrow[P]{*}$ , de sorte que celle-ci n'est pas confluente.

## 2.2 Opérateurs de réduction et complétion

### 2.2.1 Confluence pour une paire d'opérateurs de réduction

Avant d'aborder la complétion en termes d'opérateurs de réduction, on doit étudier les propriétés de la borne supérieure d'une paire d'opérateurs de réduction confluente.

Dans cette section, on fixe un ensemble bien ordonné  $(G, <)$  ainsi qu'une paire  $P = (T_1, T_2)$  d'opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ .

**2.2.1.1. Les produits tressés.** Étant donnés  $S$  et  $T$  deux endomorphismes de  $\mathbb{K}G$ , on note  $L_n(T, S)$  le produit  $\cdots S \circ T \circ S$  avec  $n$  facteurs :

$$L_n(T, S) = \underbrace{\cdots S \circ T \circ S}_{n \text{ facteurs}}.$$

Soit  $g \in G$ . D'après le lemme 2.1.2.7, il existe un entier  $n$  tel que  $L_n(T, S)(g)$  et  $L_n(S, T)(g)$  sont des  $P$ -formes normales. Soit  $n_g$  le plus petit entier satisfaisant cette condition. Soient  $L(T_2, T_1)$  et  $L(T_1, T_2)$  les endomorphismes de  $\mathbb{K}G$  définis par

$$L(T_2, T_1)(g) = L_{n_g}(T_2, T_1)(g) \text{ et } L(T_1, T_2)(g) = L_{n_g}(T_1, T_2)(g),$$

pour tout  $g \in G$ .

**2.2.1.2. Remarque.** Les espaces vectoriels  $\text{im}(L(T_2, T_1))$  et  $\text{im}(L(T_1, T_2))$  sont inclus dans  $\mathbb{K}\text{Red}(P)$ . Ainsi, tout  $v \in \mathbb{K}G$  admet au plus deux  $P$ -formes normales :  $L(T_2, T_1)(v)$  et  $L(T_1, T_2)(v)$ .

**2.2.1.3. Lemme.** *La paire  $P$  est confluente si et seulement si  $L(T_2, T_1)$  et  $L(T_1, T_2)$  sont égaux. Dans ce cas, on a*

$$\begin{aligned} \wedge P &= L(T_2, T_1) \\ &= L(T_1, T_2). \end{aligned}$$

*Démonstration.* D'après la proposition 2.1.2.12,  $P$  est confluente si et seulement si tout élément de  $\mathbb{K}G$  admet une unique  $P$ -forme normale. Ainsi,  $P$  est confluente si et seulement si, pour tout  $v \in \mathbb{K}G$ ,  $L(T_2, T_1)(v)$  et  $L(T_1, T_2)(v)$  sont égaux. Cela prouve la première partie du lemme. La seconde partie est une conséquence du lemme 2.1.2.10. □

**2.2.1.4. Lemme.** *Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a*

$$L_n(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1) = \text{Id}_{\mathbb{K}G} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (L_i(T_1, T_2) + L_i(T_2, T_1)) + (-1)^n L_n(T_2, T_1), \quad (2.7)$$

et

$$L_n(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2) = \text{Id}_{\mathbb{K}G} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (L_i(T_1, T_2) + L_i(T_2, T_1)) + (-1)^n L_n(T_1, T_2). \quad (2.8)$$

*Démonstration.* On montre uniquement (2.7). La preuve de (2.8) est obtenue en inversant les rôles de  $T_1$  et  $T_2$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on pose

$$L_n = L_n (\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1),$$

et

$$R_n = \text{Id}_{\mathbb{K}G} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (L_i (T_1, T_2) + L_i (T_2, T_1)) + (-1)^n L_n (T_2, T_1).$$

On a

$$L_1 = \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1.$$

De plus, la somme dans  $R_1$  est prise sur un ensemble vide, de sorte que

$$R_1 = \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1.$$

Ainsi,  $L_1$  et  $R_1$  sont égaux.

Soit  $n \geq 1$ . On suppose que  $L_n$  et  $R_n$  sont égaux et on montre que  $L_{n+1}$  et  $R_{n+1}$  sont égaux.

On suppose d'abord que  $n$  est pair. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_{n+1} (\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1) \\ &= (\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1) \circ L_n (\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1) \\ &= (\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1) \circ L_n. \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= (\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1) \circ R_n \\ &= (\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1) \circ \left( \text{Id}_{\mathbb{K}G} + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (L_i (T_1, T_2) + L_i (T_2, T_1)) + (-1)^n L_n (T_2, T_1) \right) \\ &= (\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (L_i (T_1, T_2) + L_i (T_2, T_1)) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} (T_1 \circ L_i (T_1, T_2) + T_1 \circ L_i (T_2, T_1)) \\ &\quad + (-1)^n L_n (T_2, T_1) + (-1)^{n+1} T_1 \circ L_n (T_2, T_1). \end{aligned}$$

En posant

$$E = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (L_i (T_1, T_2) + L_i (T_2, T_1) - T_1 \circ L_i (T_1, T_2) - T_1 \circ L_i (T_2, T_1)),$$

on a donc

$$L_{n+1} = (\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1) + E + (-1)^n L_n (T_2, T_1) + (-1)^{n+1} T_1 \circ L_n (T_2, T_1).$$

Or,  $n$  étant pair, on a

$$T_1 \circ L_n (T_2, T_1)^n = L_{n+1} (T_2, T_1).$$

Soit  $P$  (respectivement  $I$ ) l'ensemble des entiers pairs (respectivement impairs) compris entre 1 et  $n - 1$ . Pour tout  $i \in P$ , l'opérateur  $T_1$  étant un projecteur, on a

$$T_1 \circ L_i(T_1, T_2) = L_i(T_1, T_2) \quad \text{et} \quad T_1 \circ L_i(T_2, T_1) = L_{i+1}(T_2, T_1).$$

Pour tout  $i \in I$ , on a

$$T_1 \circ L_i(T_1, T_2) = L_{i+1}(T_1, T_2) \quad \text{et} \quad T_1 \circ L_i(T_2, T_1) = L_i(T_2, T_1).$$

On a donc

$$\begin{aligned} E &= \sum_{i \in P} (L_i(T_2, T_1) - L_{i+1}(T_2, T_1)) - \sum_{i \in I} (L_i(T_1, T_2) - L_{i+1}(T_1, T_2)) \\ &= -T_2 + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i (L_i(T_1, T_2) + L_i(T_2, T_1)) + L_n(T_1, T_2). \end{aligned}$$

Ainsi, quand  $n$  est pair,  $L_{n+1}$  est égal à

$$\begin{aligned} \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1 - T_2 + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i (L_i(T_1, T_2) + L_i(T_2, T_1)) + L_n(T_1, T_2) + L_n(T_2, T_1) + (-1)^{n+1} L_{n+1}(T_2, T_1) \\ = R_{n+1}. \end{aligned}$$

Lorsque  $n$  est impair, on a

$$L_{n+1} = (\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2) \circ L_n.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence, on a

$$L_{n+1} = \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2 + E' + (-1)^n L_n(T_2, T_1) + (-1)^{n+1} L_{n+1}(T_2, T_1),$$

où

$$E' = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (L_i(T_1, T_2) + L_i(T_2, T_1) - T_2 \circ L_i(T_1, T_2) - T_2 \circ L_i(T_2, T_1)).$$

On étudiant les expressions dans  $E'$  selon la parité de  $i$ , on a

$$E' = -T_1 + \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i (L_i(T_1, T_2) + L_i(T_2, T_1)) - L_n(T_1, T_2).$$

On obtient donc que  $L_{n+1}$  est égal à  $R_{n+1}$ . □

**2.2.1.5. Produits tressés duaux.** On considère les deux opérateurs  $L(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1)$  et  $L(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2)$  définis par

$$\begin{aligned} L(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1)(g) &= L_{n_g}(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1)(g), \\ L(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2)(g) &= L_{n_g}(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2)(g), \end{aligned}$$

pour tout  $g \in G$ .

**2.2.1.6. Remarque.** Les lemmes 2.2.1.3 et 2.2.1.4 impliquent que lorsque la paire  $P$  est confluente, alors  $L(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1)$  et  $L(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2)$  sont égaux.

**2.2.1.7. Notation.** À partir de maintenant,  $P$  est supposée être confluente. On note :

$$\begin{aligned} T &= L(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1) \\ &= L(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2). \end{aligned}$$

**2.2.1.8. Lemme.** *Le morphisme  $\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T$  est un opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$ . De plus, on a*

$$\text{Nred}(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T) = \text{Nred}(T_1) \cap \text{Nred}(T_2).$$

*Démonstration.* On montre d'abord que  $\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T$  est un projecteur. Les opérateurs  $\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1$  et  $\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2$  sont des projecteurs. Ainsi, par définition de  $T$ , pour tout  $g \in G$ , et pour  $i = 1$  ou  $2$ , on a

$$(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_i) \circ T(g) = T(g).$$

Ainsi,  $T$  est un projecteur, de sorte que  $\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T$  est également un projecteur.

Soit  $g \in G$ . On montre que  $g - T(g)$  est soit égal à  $g$ , soit strictement plus petit que  $g$ . D'après le lemme 2.2.1.4, on a

$$g - T(g) = \sum_{i=1}^{n_g-1} (-1)^{i+1} (L_i(T_1, T_2) + L_i(T_2, T_1))(g) + (-1)^{n_g+1} L_{n_g}(T_2, T_1)(g).$$

Ainsi, si  $g$  appartient à  $\text{Nred}(T_1) \cap \text{Nred}(T_2)$ , alors  $g - T(g)$  est strictement plus petit que  $g$ . Si  $g$  n'appartient pas à  $\text{Nred}(T_1) \cap \text{Nred}(T_2)$ , par exemple  $g$  appartient à  $\text{Red}(T_1)$  (le cas  $g \in \text{Red}(T_2)$  est analogue), on a

$$\begin{aligned} g - T(g) &= g + T_2(g) + \sum_{i=2}^{n_g-1} (-1)^{i+1} (L_i(T_1, T_2)^i + L_{i-1}(T_1, T_2))(g) + (-1)^{n_g+1} L_{n_g-1}(T_1, T_2)(g) \\ &= g. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T$  est un opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$  et  $\text{Nred}(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T)$  est égal à  $\text{Nred}(T_1) \cap \text{Nred}(T_2)$ . □

**2.2.1.9. Lemme.** *La borne supérieure  $T_1 \vee T_2$  est égale à  $\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T$ .*

*Démonstration.* L'opérateur  $\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T$  étant un opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$  et  $\ker^{-1}$  étant une bijection, il suffit de montrer que les noyaux de  $\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T$  et  $T_1 \vee T_2$  sont égaux. D'après le lemme 2.2.1.4, pour tout  $v \in \mathbb{K}G$ , on a

$$\begin{aligned} v - T(v) &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} (L_i(T_1, T_2) + L_i(T_2, T_1))(v) + (-1)^{n+1} L_n(T_2, T_1)(v) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} (L_i(T_1, T_2) + L_i(T_2, T_1))(v) + (-1)^{n+1} L_n(T_1, T_2)(v), \end{aligned}$$



où  $n$  est un entier supérieur à  $n_g$  pour tout  $g \in G$  appartenant au support de  $v$ . Ainsi,  $\ker(T_1 \vee T_2) = \ker(T_1) \cap \ker(T_2)$  est inclus dans  $\ker(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T)$ . De plus, l'opérateur  $\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T$  étant un projecteur, son noyau est égal à  $\text{im}(T)$ , c'est-à-dire, on a

$$\begin{aligned} \ker(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T) &= \text{im}(\text{L}(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1)) \\ &= \text{im}(\text{L}(\text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_1, \text{Id}_{\mathbb{K}G} - T_2)). \end{aligned}$$

Ce dernier est inclus dans  $\ker(T_1)$  et  $\ker(T_2)$ , de sorte qu'il est inclus dans  $\ker(T_1) \cap \ker(T_2)$ , c'est-à-dire,  $\ker(T_1 \vee T_2)$ . □

**2.2.1.10. Lemme.** *On a*

$$\text{Nred}(T_1 \vee T_2) = \text{Nred}(T_1) \cap \text{Nred}(T_2).$$

*Démonstration.* Il s'agit d'une conséquence des lemmes 2.2.1.8 et 2.2.1.9. □

## 2.2.2 Complétion

Soient  $(G, <)$  un ensemble bien ordonné et  $F$  une partie de  $\mathbf{RO}(G, <)$ .

### 2.2.2.1. Définitions.

1. Un *complétion* de  $F$  est une partie  $F'$  de  $\mathbf{RO}(G, <)$  telle que
  - (a)  $F'$  est confluente,
  - (b)  $F \subset F'$  et  $\wedge F' = \wedge F$ .
2. Un *complément* de  $F$  est un élément  $C$  de  $\mathbf{RO}(G, <)$  tel que
  - (a)  $(\wedge F) \wedge C = \wedge F$ ,
  - (b)  $\text{Obs}^F \subset \text{Nred}(C)$ .

Un complément est dit *minimal* si l'inclusion (2b) est une égalité.

**2.2.2.2. Proposition.** *Soit  $C \in \mathbf{RO}(G, <)$  tel que  $(\wedge F) \wedge C$  est égal à  $\wedge F$ . Alors,  $F \cup \{C\}$  est une complétion de  $F$  si et seulement si  $C$  est un complément de  $F$ .*

*Démonstration.* On pose

$$F' = F \cup \{C\}.$$

La famille  $F'$  contient  $F$  et est telle que  $\wedge F' = \wedge F$  par hypothèse. Ainsi,  $F'$  est une complétion de  $F$  si et seulement si elle est confluente, c'est-à-dire, si et seulement si  $\text{Red}(F')$  est égal à  $\text{Red}(\wedge F')$ . L'ensemble  $\text{Red}(F')$  est égal à  $\text{Red}(F) \cap \text{Red}(C)$  et  $\wedge F'$  est égal à  $\wedge F$ . Ainsi,  $F'$  est confluente si et seulement si on a la relation suivante

$$\text{Red}(F) \cap \text{Red}(C) = \text{Red}(\wedge F).$$

De plus,  $\text{Red}(F)$  est l'union disjointe de  $\text{Red}(\wedge F)$  et  $\text{Obs}^F$ . Ainsi, on a

$$\text{Red}(F) \cap \text{Red}(C) = \left( \text{Red}(\wedge F) \cap \text{Red}(C) \right) \amalg (\text{Obs}^F \cap \text{Red}(C)). \quad (2.9)$$

L'hypothèse  $(\wedge F) \wedge C = \wedge F$  signifie que  $\wedge F$  est inférieur à  $C$ . Ainsi, d'après le lemme 2.1.1.18,  $\text{Red}(\wedge F)$  est inclus dans  $\text{Red}(C)$ . D'après la relation (2.9), on a donc

$$\text{Red}(F) \cap \text{Red}(C) = \text{Red}(\wedge F) \coprod (\text{Obs}^F \cap \text{Red}(C)).$$

On en déduit que  $F'$  est confluente si et seulement si  $\text{Obs}^F \cap \text{Red}(C)$  est vide, c'est-à-dire, si et seulement si  $C$  est un complément de  $F$ . □

### 2.2.2.3. Exemples.

1. L'opérateur  $\wedge F$  est un complément de  $F$ . En général, ce complément n'est pas minimal (voir point 2).
2. On considère la paire  $P = (T_1, T_2)$  de l'exemple 2.1.1.17 :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soient

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les ensembles  $\text{Nred}(C_1)$  et  $\text{Nred}(C_2)$  sont égaux à  $\{g_3\}$ . Ce dernier est égal à  $\text{Obs}^P$  (voir exemple 2.1.1.21). De plus,  $\ker(C_1)$  et  $\ker(C_2)$  sont les espaces vectoriels engendrés par  $g_3 - g_1$  et  $g_3 - g_2$ , respectivement. Ces deux espaces vectoriels sont inclus dans  $\ker(T_1 \wedge T_2)$ . Ainsi,  $C_1$  et  $C_2$  sont supérieurs à  $T_1 \wedge T_2$ , c'est-à-dire, on a

$$(\wedge P) \wedge C_1 = \wedge P \text{ et } (\wedge P) \wedge C_2 = \wedge P.$$

On en déduit que  $C_1$  et  $C_2$  sont deux compléments minimaux de  $P$ . On rappelle également que  $\text{Nred}(T_1 \wedge T_2)$  est égal à  $\{g_2, g_3, g_4\}$  (voir exemple 2.1.1.17), de sorte que  $T_1 \wedge T_2$  n'est pas minimal.

**2.2.2.4. Le  $F$ -complément.** Le  $F$ -complément est l'opérateur

$$C^F = (\wedge F) \vee (\vee \overline{F}),$$

où  $\vee \overline{F}$  est égal à  $\ker^{-1}(\mathbb{K}\text{Red}(F))$ .

**2.2.2.5. Lemme.**

1. On a

$$\vee \overline{F} \circ \wedge F \circ \vee \overline{F} = \vee \overline{F} \circ \wedge F.$$

2. La paire  $P = (\wedge F, \vee \overline{F})$  est confluente.

*Démonstration.* L'image de  $\wedge F$  est incluse dans  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ , qui est égal au noyau de  $\vee \overline{F}$ . Ainsi,  $\vee \overline{F} \circ \wedge F$  et  $\vee \overline{F} \circ \wedge F \circ \vee \overline{F}$  sont égaux à l'opérateur nul :

$$\begin{aligned}\vee \overline{F} \circ \wedge F \circ \vee \overline{F} &= 0 \\ &= \vee \overline{F} \circ \wedge F,\end{aligned}$$

ce qui prouve le point 1. De plus, les opérateurs  $L(\wedge F, \vee \overline{F})$  et  $L(\vee \overline{F}, \wedge F)$  sont en particulier tous les deux égaux à l'opérateur nul. Ainsi, d'après le lemme 2.2.1.3,  $P$  est confluente, ce qui prouve le point 2. □

**2.2.2.6. Théorème.** *Soit  $F$  une partie de  $\mathbf{RO}(G, <)$ . Le  $F$ -complément est un complément minimal de  $F$ .*

*Démonstration.* Par définition,  $C^F$  est supérieur à  $\wedge F$ , c'est-à-dire,  $C^F$  satisfait (2a) de 2.2.2.1. On montre à présent que  $\text{Obs}^F$  est égal à  $\text{Nred}(C^F)$ . D'après le point 2 du lemme 2.2.2.5, la paire  $(\wedge F, \vee \overline{F})$  est confluente. Ainsi, d'après le lemme 2.2.1.10, on a

$$\begin{aligned}\text{Nred}(C^F) &= \text{Nred}((\wedge F) \vee (\vee \overline{F})) \\ &= \text{Nred}(\wedge F) \cap \text{Nred}(\vee \overline{F}) \\ &= \text{Nred}(\wedge F) \cap \text{Red}(F) \\ &= \text{Obs}^F.\end{aligned}$$

□

Dans le corollaire 2.2.2.9, on donne une expression plus explicite du  $F$ -complément. Pour cela, on a besoin du lemme suivant :

**2.2.2.7. Lemme.** *On a l'inclusion*

$$C^F(\text{Obs}^F) \subset \mathbb{K}\text{Red}(\wedge F).$$

*Démonstration.* D'après le point 1 du lemme 2.2.2.5, on a

$$\vee \overline{F} \circ \wedge F \circ \vee \overline{F} = \vee \overline{F} \circ \wedge F.$$

D'après le point 2 lemme 2.2.2.5, la paire  $P = (\wedge F, \vee \overline{F})$  est confluente. Ainsi, d'après le lemme 2.2.1.9, on a

$$C^F = \text{Id}_{\mathbb{K}G} - \left( \text{Id}_{\mathbb{K}G} - \vee \overline{F} \right) \circ \left( \text{Id}_{\mathbb{K}G} - \wedge F \right).$$

Les ensembles  $\text{Obs}^F$  et  $\mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$  sont inclus dans  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ , qui est égal au noyau de  $\vee \overline{F}$ . Ainsi, pour tout  $g \in \text{Obs}^F$ , on a

$$\begin{aligned}C^F(g) &= g - \left( \text{Id}_{\mathbb{K}G} - \vee \overline{F} \right) \circ \left( \text{Id}_{\mathbb{K}G} - \wedge F \right)(g) \\ &= \wedge F(g) + \vee \overline{F}(g) - \vee \overline{F} \circ \wedge F(g) \\ &= \wedge F(g).\end{aligned}$$

Cela prouve que  $C^F(\text{Obs}^F)$  est inclus dans  $\mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$ . □

**2.2.2.8. Proposition.** *Le  $F$ -complément est l'unique complément minimal de  $F$  tel que  $C^F(\text{Obs}^F)$  est inclus dans  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ .*

*Démonstration.* Soit  $C$  un complément minimal de  $F$  tel que  $C(\text{Obs}^F)$  est inclus dans  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ . Pour tout  $g \in G \setminus \text{Obs}^F$ ,  $C^F(g)$  et  $C(g)$  sont égaux à  $g$ . Il est donc suffisant de montrer que pour tout  $g \in \text{Obs}^F$ ,  $C(g)$  est égal à  $C^F(g)$ . L'ensemble  $C(\text{Obs}^F)$  étant inclus dans  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$  et  $\text{Nred}(C)$  étant égal à  $\text{Obs}^F$ ,  $C(\text{Obs}^F)$  est en fait inclus dans  $\mathbb{K}(\text{Red}(F) \setminus \text{Obs}^F)$ , c'est-à-dire, il est inclus dans  $\mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$ . D'après le lemme 2.2.2.7,  $C^F(\text{Obs}^F)$  est également inclus dans  $\mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$ . Ainsi, pour tout  $g \in \text{Obs}^F$ , on a

$$\wedge F \circ C^F(g) = C^F(g) \text{ et } \wedge F \circ C(g) = C(g). \quad (2.10)$$

La relation (2a) de 2.2.2.1 implique que  $C^F$  et  $C$  sont supérieurs à  $\wedge F$ . Ainsi, l'équivalence (2.2) (voir 2.1.1.16) implique que  $\wedge F \circ C^F$  et  $\wedge F \circ C$  sont égaux à  $\wedge F$ . Ainsi, d'après la relation (2.10),  $C^F(g)$  et  $C(g)$  sont égaux à  $\wedge F(g)$  pour tout  $g \in \text{Obs}^F$ , de sorte que la proposition 2.2.2.8 est vraie. □

**2.2.2.9. Corollaire.** *Le  $F$ -complément est l'endomorphisme de  $\mathbb{K}G$  défini sur la base  $G$  par*

$$C^F(g) = \begin{cases} \wedge F(g), & \text{si } g \in \text{Obs}^F \\ g, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**2.2.2.10. Exemple.** L'opérateur  $C_1$  de l'exemple 2.2.2.3, point 2 est le  $P$ -complément.

**2.2.2.11. Matrices échelonnées réduites et bases réduites.** On finit cette section en reliant le  $F$ -complément à l'algorithme  $F_4$  de Faugère. Pour cela, on remarque que, si on fixe un ensemble fini totalement ordonné  $G = \{g_1 < \dots < g_n\}$  et une famille  $L = \{v_1, \dots, v_k\}$  de vecteurs, alors  $L$  est la base réduite de l'espace vectoriel qu'elle engendre si et seulement si la matrice de  $L$  dans la base  $G$  est échelonnée réduite. De plus, si on a une famille de vecteurs  $L$ , alors les lignes non nulles de la matrice échelonnée réduite  $M(L)$  de cette famille

$$M(L) = \text{Gaus}(\text{mat}(L)),$$

forment la base réduite de l'espace vectoriel engendré par  $L$ .

**2.2.2.12. Le  $F$ -complément et l'algorithme de Faugère.** On commence par rappeler les notations du paragraphe 1.2.2.6 du chapitre 1. Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre et  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$  telle que  $X$  et  $R$  sont finis. Pour tout entier  $d$  supérieur à 1,

1.  $R_{d-1}$  désigne l'ensemble des règles au début de la  $d$ -ième itération de la boucle **tant que**,
2.  $B_{d-1}$  est l'ensemble des branchements critiques rajoutés lors de la  $d - 1$ -ième itération de la boucle **tant que**,
3.  $E_d$  est l'ensemble de tous les
  - (a)  $f' = fw_3$  et  $g' = w_1g$  où  $(w_1, w_2, w_3, f, g) \in B_{d-1}$  est un branchement de chevauchement,

- (b)  $f' = f$  et  $g' = w_1gw_3$  où  $(w_1, w_2, w_3, f, g) \in B_{d-1}$  est un branchement d'inclusion,
4.  $\mathbf{Red1}(E_d, R_{d-1})$  est la réunion de  $E_d$  et d'un ensemble d'éléments de la forme  $f - g$  où les  $f \xrightarrow{R_{d-1}} g$  sont des étapes de réécriture de  $\langle (X, <) \mid R_{d-1} \rangle$  permettant de fournir des formes normales pour chaque élément de  $E_d$ ,
  5.  $\mathbf{Red}(E_d, R_{d-1})$  est la matrice échelonnée réduite de la matrice de  $\mathbf{Red1}(E_d, R_{d-1})$  dans la base  $w_1 < \dots < w_r$  où chaque  $w_i$  appartient au support d'un élément de  $\mathbf{Red1}(E_d, R_{d-1})$ ,
  6. étant donnée une matrice  $A$  dont les vecteurs colonnes sont des mots, l'ensemble des lignes de  $A$  est noté  $\text{Pol}(A) \subset \mathbb{K}X^*$ ,
  7.  $L_d = \text{Pol}(\mathbf{Red}(E_d, R_{d-1}))$ ,
  8.  $\tilde{L}_d = \{f \in L_d, \text{lm}(f) \notin \text{lm}(\mathbf{Red1}(E_d, R_{d-1}))\}$ .

Comme  $<$  est un ordre monomial sur  $X^*$ ,  $(X^*, <)$  est en particulier un ensemble bien ordonné. En particulier, on a une notion d'opérateur de réduction relativement à  $(X^*, <)$ . Pour tout  $f \in \mathbf{Red1}(E_d, R_{d-1})$ , on note

$$T_f = \ker^{-1}(\mathbb{K}f),$$

l'opérateur de réduction dont le noyau est l'espace vectoriel engendré par  $f$ . On pose

$$F_d = \{T_f, f \in \mathbf{Red1}(E_d, R_{d-1})\}.$$

**2.2.2.13. Proposition.** *En reprenant les notations de 2.2.2.12,  $\tilde{L}_d$  est la base réduite du noyau de  $C^{F_d}$ .*

*Démonstration.* Par définition de la méthode  $\mathbf{Red}$ , on a

$$L_d = \text{Pol}(\text{Gaus}(\text{mat}(\mathbf{Red1}(E_d, R_{d-1}))))). \quad (2.11)$$

De plus, par définition de  $F_d$ , on a

$$\ker(\wedge F_d) = \mathbb{K}\mathbf{Red1}(E_d, R_{d-1}).$$

D'après ce qu'on a vu en 2.2.2.11 et d'après la relation (2.11),  $L_d$  est donc la base réduite de  $\ker(\wedge F_d)$ . Ainsi, on a

$$L_d = \{w - \wedge F_d(w), w \in \text{Nred}(\wedge F_d)\}.$$

Or, on a la partition suivante de  $\text{Nred}(\wedge F_d)$  :

$$\text{Nred}(\wedge F_d) = \left( \bigcup_{T \in F_d} \text{Nred}(T) \right) \amalg \text{Obs}^{F_d}.$$

Les éléments de  $\mathbf{Red1}(E_d, R_{d-1})$  sont précisément les  $\text{Nred}(T)$  où  $T$  appartient à  $F_d$ , de sorte que

$$\tilde{L}_d = \{w - \wedge F_d(w), w \in \text{Obs}^{F_d}\}.$$

D'après le corollaire 2.2.2.9,  $\tilde{L}_d$  est donc la base réduite de  $\ker(C^{F_d})$ . □

On rappelle qu'on définit  $R'$  par

1. si la procédure termine après  $d$  itérations de la boucle **tant que**, on pose  $R' = R_d$ ,
2. si la procédure ne termine pas, on pose

$$R' = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} R_d.$$

On peut à présent prouver la version non commutative de [46, Théorème 2.2] :

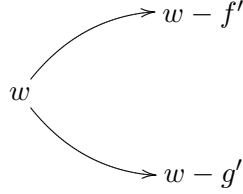
**2.2.2.14. Théorème.** *Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre et  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$ . Alors,  $\langle (X, <) \mid R' \rangle$  est une présentation convergente de  $\mathbf{A}$ .*

*Démonstration.* On a déjà vu en 1.2.2.7 du chapitre 1 que  $\langle (X, <) \mid R' \rangle$  est une présentation de  $\mathbf{A}$ . Pour montrer que cette présentation est convergente, il suffit de montrer d'après le lemme du diamant que chaque branchement critique est résoluble. Or, par construction de  $R'$ , un branchement critique de  $\langle (X, <) \mid R' \rangle$  est un branchement critique de  $\langle (X, <) \mid R_d \rangle$  pour un certain entier  $d$ , de sorte qu'on doit montrer que pour tout entier  $d$ , les branchements critiques de  $\langle (X, <) \mid R_d \rangle$  sont résolubles.

Soient  $d$  un entier supérieur à 1 et  $b = (w_1, w_2, w_3, f, g)$  un branchement critique de  $\langle (X, <) \mid R_{d-1} \rangle$ . On note

1.  $f' = fw_3$  et  $g' = w_1g$  si  $b$  est un branchement de chevauchement,
2.  $f' = f$  et  $g' = w_1gw_3$  si  $b$  est un branchement d'inclusion.

En notant  $w$  la source de  $b$ , celui-ci est représenté par



Or,  $E_d$  étant inclus dans  $\text{Red1}(E_d, R_{d-1})$ , l'ensemble

$$F_d = \{\ker^{-1}(\mathbb{K}h), h \in \text{Red1}(E_d, R_{d-1})\},$$

contient les opérateurs de réduction  $T_1$  et  $T'_1$  de noyaux  $f'$  et  $g'$ , respectivement. Ces deux opérateurs admettent pour seul vecteur non réduit  $w$ , et on a

1.  $T_1(w) = w - f'$  et
2.  $T'_1(w) = w - g'$ .

Or, la famille  $F_d \cup \{C^{F_d}\}$  étant confluyente, il existe des éléments  $T_2, \dots, T_n$  et  $T'_2, \dots, T'_k$  de  $F_d \cup \{C^{F_d}\}$  tels que

$$T_n \circ \dots \circ T_1(w) = T'_k \circ \dots \circ T'_1(w).$$

De plus, d'après la proposition 2.2.2.13,  $R_d$  est égal à

$$R_d = R_{d-1} \bigcup \{w - C^{F_d}(w), w \in \text{Obs}^{F_d}\}.$$

Ainsi, pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$  et pour tout  $j \in \{1, \dots, k-1\}$  il existe des étapes de réécriture de  $\langle (X, <) \mid R_d \rangle$

$$T_i \circ \dots \circ T_1(w) \xrightarrow{R_d} T_{i+1}(T_i \circ \dots \circ T_1(w)) \text{ et } T'_j \circ \dots \circ T'_1(w) \xrightarrow{R_d} T'_{j+1}(T'_j \circ \dots \circ T'_1(w)),$$

de sorte que  $b$  est résoluble et  $\langle (X, <) \mid R' \rangle$  est une présentation convergente de  $\mathbf{A}$ . □

## 2.3 Opérateurs de réduction généralisés

Jusqu'à présent, on a étudié des opérateurs de réduction relativement à un ensemble bien ordonné. Dans cette section, on étudie le cas général où on ne considère pas nécessairement un ordre total. On fixe un ensemble ordonné  $(G, <)$ .

### 2.3.1 Relation d'ordre

La définition générale d'opérateur de réduction s'énonce de la façon suivante :

**2.3.1.1. Définition.** Un *opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$*  est un endomorphisme idempotent  $T$  de  $\mathbb{K}G$  tel que, pour tout  $g \in G$ , l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1.  $T(g) = g$  ou
2. pour tout  $g'$  appartenant au support de  $T(g)$ , on a  $g' < g$ .

Comme dans le cas des ensembles bien ordonnés, l'ensemble des opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$  est noté  $\mathbf{RO}(G, <)$ . Étant donné un opérateur de réduction  $T$ , l'ensemble des générateurs  $T$ -réduits est noté  $\text{Red}(T)$  et son complémentaire dans  $G$  est noté  $\text{Nred}(T)$ .

**2.3.1.2. Projecteurs et opérateurs de réduction.** Soient  $G$  un ensemble et  $F$  un ensemble des projecteurs linéaires de  $\mathbb{K}G$ . On souhaite munir  $G$  d'un ordre  $<$  faisant de  $F$  une partie de  $\mathbf{RO}(G, <)$ . Pour cela, on considère la relation binaire  $\lesssim_F$  sur  $G$  définie par  $g' \lesssim_F g$  s'il existe  $T \in F$  tel que  $T(g)$  est différent de  $g$  et tel que  $g'$  appartient au support de  $T(g)$ . La clôture réflexive transitive de  $\lesssim_F$  est notée  $<_F$ . Cette relation n'est pas nécessairement anti-symétrique. En effet, soient  $G = \{g_1, g_2\}$  et  $F = (T_1, T_2)$ , où  $T_1$  et  $T_2$  sont définis par

1.  $T_1(g_2) = g_1$  et  $T_1(g_1) = g_1$ ,
2.  $T_2(g_1) = g_2$  et  $T_2(g_2) = g_2$ .

On a alors  $g_1 <_F g_2$  et  $g_2 <_F g_1$ . Cependant, lorsque  $<_F$  termine, il est en particulier anti-symétrique de sorte qu'il s'agit d'une relation d'ordre. Dans ce cas  $F$  est inclus dans  $\mathbf{RO}(G, <_F)$ .

**2.3.1.3. Bases réduites.** On souhaite munir l'ensemble  $\mathbf{RO}(G, <)$  d'une structure de treillis. On ne peut pas utiliser l'argument de la section 2.1.1 car un sous-espace de  $\mathbb{K}G$  n'admet pas nécessairement de base réduite. En effet, soit  $G = \{g_1, g_2, g_3\}$  ordonné de la façon suivante :  $g_1 < g_3$  et  $g_2 < g_3$ . Le sous-espace de  $\mathbb{K}G$  engendré par  $g_3 - g_1$  et  $g_3 - g_2$  n'admet pas de base réduite.

Cependant,  $\mathbf{RO}(G, <)$  est muni d'un ordre. Afin de définir celui-ci, on a besoin du lemme suivant :

**2.3.1.4. Lemme.** Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$  tels que  $\ker(T_1)$  est inclus dans  $\ker(T_2)$ . Alors,  $\text{Red}(T_2)$  est inclus dans  $\text{Red}(T_1)$ .

*Démonstration.* Par l'absurde, on suppose qu'il existe  $g \in \text{Red}(T_2)$  n'appartenant pas à  $\text{Red}(T_1)$ . L'élément  $g - T_1(g)$  appartient au noyau de  $T_1$ , de sorte qu'il appartient à celui de  $T_2$ . Ainsi, on a

$$T_2(g) = T_2(T_1(g)).$$

Le générateur  $g$  appartient à  $\text{Red}(T_2)$ , de sorte que  $T_2(g)$  est égal à  $g$  et donc on a

$$T_2(T_1(g)) = g.$$

De plus,  $g$  n'étant pas  $T_1$ -réduit, tout générateur appartenant au support de  $T_1(g)$  est strictement plus petit que  $g$ , de sorte que tout générateur appartenant au support de  $T_2(T_1(g))$  est également strictement plus petit que  $g$ . D'où la contradiction.  $\square$

**2.3.1.5. Relation d'ordre.** La relation binaire définie par  $T_1 \preceq T_2$  si  $\ker(T_2) \subset \ker(T_1)$  est réflexive and transitive. De plus, d'après le lemme 2.3.1.4, si deux opérateurs de réduction ont le même noyau, ils ont la même image, de sorte qu'ils sont égaux. Ainsi,  $\preceq$  est anti-symétrique. Il s'agit donc d'une relation d'ordre sur  $\mathbf{RO}(G, <)$ .

### 2.3.1.6. Structure de treillis.

1. L'ordre introduit dans 2.3.1.5 n'induit pas de structure de treillis. En effet, on considère  $G = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5\}$  ordonné de la façon suivante :  $g_1 < g_3$ ,  $g_1 < g_4$ ,  $g_2 < g_3$ ,  $g_2 < g_4$ ,  $g_3 < g_5$  et  $g_4 < g_5$ . Soient  $T_1$  et  $T_2$  les opérateurs de réduction définis par

- (a)  $\text{Red}(T_i) = \{g_1, g_2, g_3, g_4\}$  pour  $i = 1$  ou  $2$ ,
- (b)  $T_1(g_5) = g_3$  et  $T_2(g_5) = g_4$ .

Soient  $U_1$  et  $U_2$  les opérateurs de réduction définis par

- (a)  $\text{Red}(U_i) = \{g_1, g_2\}$  pour  $i = 1$  ou  $2$ ,
- (b)  $U_1(g_j) = g_2$  et  $U_2(g_j) = g_1$  pour  $j \in \{3, 4, 5\}$

L'espace vectoriel

$$\ker(T_1) + \ker(T_2) = \mathbb{K}\{g_5 - g_4\} \oplus \mathbb{K}\{g_5 - g_3\},$$

est inclus dans  $\ker(U_i)$  pour  $i = 1$  ou  $2$ . Pour  $i = 1$  ou  $2$ , on a donc les inégalités

$$U_i \preceq T_1 \text{ et } U_i \preceq T_2.$$

De plus, il n'existe pas d'opérateur de réduction de noyau  $\mathbb{K}\{g_5 - g_4\} \oplus \mathbb{K}\{g_5 - g_3\}$ , de sorte que  $U_1$  et  $U_2$  sont deux éléments maximaux inférieurs à  $T_1$  et  $T_2$ . Ainsi,  $T_1$  et  $T_2$  n'admettent pas de borne inférieure.

2. De plus, même lorsqu'une borne inférieure existe, son noyau n'est pas nécessairement la somme des noyaux. On considère l'exemple de 2.3.1.3 :  $G = \{g_1, g_2, g_3\}$  avec  $g_1 < g_3$  et  $g_2 < g_3$ , et soit  $P = (T_1, T_2)$  où, pour  $i = 1$  ou  $2$ ,

- (a)  $\text{Nred}(T_i) = \{g_3\}$ ,
- (b)  $T_i(g_3) = g_i$

Soit  $U$  un opérateur de réduction à la fois inférieur à  $T_1$  et à  $T_2$ . En particulier, on a

$$\ker(T_1) + \ker(T_2) = \mathbb{K}\{g_3 - g_2\} \oplus \mathbb{K}\{g_3 - g_1\} \subset \ker(U).$$

L'espace vectoriel  $\ker(T_1) + \ker(T_2)$  n'admettant pas de base réduite, l'inclusion précédente est une inclusion stricte. Ainsi, le noyau de  $U$  est de dimension au moins 3 et est donc égal à  $\mathbb{K}G$ . L'opérateur nul est donc le seul élément à la fois inférieur à  $T_1$  et  $T_2$ , de sorte que  $P$  admet cet opérateur comme borne inférieure.



### 2.3.2 Propriétés de réécriture

Dans cette section, on étudie les propriétés de réécriture des opérateurs de réduction généralisés. D'après la section précédente, étant donnée une partie  $F$  de  $\mathbf{RO}(G, <)$ , il n'existe pas nécessairement d'opérateur de réduction dont le noyau est la somme des noyaux des éléments de  $F$ . Ainsi, dans le but de définir la notion de confluence comme on le fait dans 2.1.1.20, on doit considérer des parties de  $\mathbf{RO}(G, <)$  pour lesquelles un tel opérateur de réduction existe. On introduit pour cela la définition suivante :

**2.3.2.1. Parties complétables.** Une partie  $F$  de  $\mathbf{RO}(G, <)$  telle qu'il existe  $U \in \mathbf{RO}(G, <)$  de noyau

$$\ker(U) = \sum_{T \in F} \ker(T),$$

est dite *complétable*.

**2.3.2.2. Notation.** Soit  $F$  une partie complétable. La relation  $\preceq$  étant une relation d'ordre, il existe un unique opérateur de réduction  $U$  tel que

$$\ker(U) = \sum_{T \in F} \ker(T).$$

Cet opérateur est noté  $\wedge F$ .

**2.3.2.3. Parties complétables et réécriture abstraite.** Soit  $F$  une partie de  $\mathbf{RO}(G, <)$ . On définit la relation  $\xrightarrow[F]{*}$  comme dans la section 2.1.3. De plus, en utilisant les mêmes arguments que dans cette section, pour tout couple  $(v, v')$  d'éléments de  $\mathbb{K}G$ , on a l'équivalence

$$v \xrightarrow[F]{*} v' \iff v - v' \in \sum_{T \in F} \ker(T).$$

Ainsi, si  $F$  est complétable, la proposition 2.1.3.4 se généralise au cas des ensembles non nécessairement bien ordonnés : pour tout couple  $(v, v')$  d'éléments de  $\mathbb{K}G$ , on a

$$v \xrightarrow[F]{*} v' \iff v - v' \in \ker(\wedge F). \quad (2.12)$$

**2.3.2.4. Remarque.** L'équivalence (2.12) implique en particulier que quand  $F$  est complétable, on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\frac{\mathbb{K}G}{\xrightarrow[F]{*}} \simeq \frac{\mathbb{K}G}{\ker(\wedge F)}.$$

Cet isomorphisme n'est cependant a priori pas vrai lorsque l'on considère une partie de  $\mathbf{RO}(G, <)$  admettant une borne inférieure. En effet, on reprend le deuxième exemple de 2.3.1.6 : soient  $G = \{g_1, g_2, g_3\}$  avec  $g_1 < g_3$  et  $g_2 < g_3$  et  $P = (T_1, T_2)$  où, pour  $i = 1$  ou  $2$ , on a

1.  $\text{Nred}(T_i) = \{g_3\}$ ,
2.  $T_i(g_3) = g_i$ .

On a vu que  $P$  admet comme borne inférieure

$$T_1 \wedge T_2 = 0_{\mathbb{K}G}.$$

En particulier, tout élément de  $\mathbb{K}G$  appartient au noyau de  $T_1 \wedge T_2$ , de sorte que

$$\frac{\mathbb{K}G}{\ker(T_1 \wedge T_2)} = \{0\}.$$

Pourtant, pour tout

$$v = \lambda g_1 + \mu g_2 + \nu g_3 \in \mathbb{K}G,$$

on a

$$v \xrightarrow[F]{*} (\lambda + \mu + \nu) g_1.$$

Ainsi, le quotient de  $\mathbb{K}G$  par  $\xrightarrow[F]{*}$  est isomorphe à  $\mathbb{K}g_1$ .

**2.3.2.5. Confluence et propriété de Church-Rosser.** Soit  $F$  une partie complétable.

1. D'après le lemme 2.3.1.4,  $\text{Red}(\wedge F)$  est inclus dans  $\text{Red}(T)$  pour tout  $T \in F$ , de sorte que

$$\text{Obs}^F = \text{Red}(F) \setminus \text{Red}(\wedge F),$$

est bien défini. On dit que  $F$  est *confluente* si  $\text{Obs}^F$  est l'ensemble vide.

2. Étant donnés deux éléments  $v$  et  $v'$  de  $\mathbb{K}G$ , on dit que  $v$  se réécrit en  $v'$  comme dans la section 2.1.2 et que  $F$  a la *propriété de Church-Rosser* si, pour tout  $v \in \mathbb{K}G$ ,  $v$  se réécrit en  $\wedge F(v)$ .

**2.3.2.6. Théorème.** Soit  $F$  une partie complétable. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $F$  est confluente et  $\xrightarrow[F]{*}$  est normalisante,
2.  $F$  a la propriété de Church-Rosser,
3.  $\xrightarrow[F]{*}$  est confluente.

*Démonstration.* La preuve de l'équivalence entre 2 et 3 fonctionne de la même façon que dans la proposition 2.1.3.6 (en effet, on vérifie que dans la section 2.1.3 on a uniquement besoin de l'existence de  $\wedge F$ ).

On montre que 2 implique que  $F$  est confluente de la même façon que dans le théorème 2.1.2.6. De plus, si 2 est vrai, tout élément  $v$  de  $\mathbb{K}G$  se réécrit en  $\wedge F(v)$ , c'est-à-dire, on a  $v \xrightarrow[F]{*} \wedge F(v)$ . Or,  $\wedge F(v)$  appartient à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ , de sorte qu'il s'agit d'une forme normale pour  $\xrightarrow[F]{*}$ . Ainsi,  $\xrightarrow[F]{*}$  est normalisante et donc 2 implique 1.

On suppose que 1 est vrai et on montre 3. Soient  $v_1$ ,  $v_2$  et  $v_3$  trois éléments de  $\mathbb{K}G$  tels que

$$v_1 \xrightarrow[F]{*} v_2 \text{ et } v_1 \xrightarrow[F]{*} v_3.$$

La relation  $\xrightarrow[F]{*}$  étant normalisante,  $v_2$  et  $v_3$  admettent une forme normale. Soient  $\widehat{v}_2$  et  $\widehat{v}_3$  les formes normales de  $v_2$  et  $v_3$ , respectivement. On a  $\widehat{v}_2 \xrightarrow[F]{*} \widehat{v}_3$ , de sorte que  $\widehat{v}_2 - \widehat{v}_3$  appartient au

noyau de  $\wedge F$ . De plus,  $\widehat{v}_2$  et  $\widehat{v}_3$  étant des formes normales, ils appartiennent à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ , c'est-à-dire,  $\mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$  puisque  $F$  est confluente. Ainsi,  $\widehat{v}_2 - \widehat{v}_3$  appartient également à  $\mathbb{K}\text{Red}(\wedge F)$ , c'est-à-dire, il appartient à l'image de  $\wedge F$ . Ainsi,  $\widehat{v}_2 - \widehat{v}_3$  appartient à  $\ker(\wedge F) \cap \text{im}(\wedge F)$  qui est réduit à  $\{0\}$  puisque  $\wedge F$  est un projecteur. On en déduit que  $\widehat{v}_2$  est égal à  $\widehat{v}_3$ , de sorte que  $\xrightarrow{F}$  est confluente. □

**2.3.2.7. Complétion.** Étant donnée une partie complétable  $F$ , la notion de *complément* est définie de la façon suivante : un complément de  $F$  est un opérateur de réduction  $C$  satisfaisant

1.  $\wedge F \preceq C$ ,
2.  $\text{Obs}^F \subset \text{Nred}(C)$ .

**2.3.2.8. Complétion et réécriture.** Soit  $C$  un opérateur de réduction supérieur à  $\wedge F$ . On écrit  $F' = F \cup \{C\}$ . Le noyau de  $C$  étant inclus dans celui de  $\wedge F$ , on a

$$\sum_{T \in F'} \ker(T) = \sum_{T \in F} \ker(T).$$

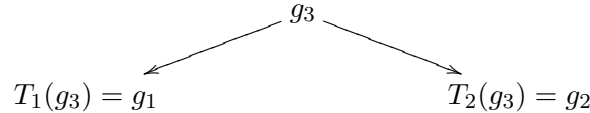
Ainsi,  $F'$  est également complétable et  $\wedge F'$  est égal à  $\wedge F$ . En particulier, les relations d'équivalence  $\xrightarrow{F}^*$  et  $\xrightarrow{F'}^*$  sont les mêmes. En utilisant les arguments de la preuve de la proposition 2.2.2.2, on a

**2.3.2.9. Proposition.** Soit  $C \in \mathbf{RO}(G, <)$  tel que  $C$  est supérieur à  $\wedge F$ . Alors, la famille  $F \cup \{C\}$  est confluente si et seulement si  $C$  est un complément de  $F$ .

**2.3.2.10. Remarque.** Le fait qu'une partie de  $\mathbf{RO}(G, <)$  n'est pas nécessairement complétable est à mettre en parallèle avec le fait que si on essaie d'appliquer une procédure de complétion au système de réécriture associé à une partie non complétable, alors celle-ci échoue. En effet, on considère l'exemple de 2.3.1.3 :  $G = \{g_1, g_2, g_3\}$  avec  $g_1 < g_3$  et  $g_2 < g_3$ , et soit  $P = (T_1, T_2)$  où, pour  $i = 1$  ou  $2$ ,

1.  $\text{Nred}(T_i) = \{g_3\}$ ,
2.  $T_i(g_3) = g_i$ .

On a vu dans le point 2 de 2.3.1.6 que  $T_1 \wedge T_2$  est l'opérateur nul, et donc que son noyau n'est pas égal à  $\ker(T_1) + \ker(T_2)$ , de sorte que  $P$  n'est pas complétable. De plus, d'après le diagramme



$g_3$  admet deux formes normales  $g_1$  et  $g_2$ . Or,  $g_1$  et  $g_2$  ne sont pas comparables pour  $<$ , de sorte que la procédure de complétion échoue.

## Chapitre 3

# Opérateurs de réduction et présentations d'algèbres

Dans ce chapitre, on relie les opérateurs de réduction aux présentations d'algèbres. On commence par formuler dans la section 3.1.1 la notion d'algèbre présentée par un opérateur de réduction. Dans la section 3.1.2, on définit la propriété de confluence d'une telle présentation. Dans la proposition 3.1.2.5, on caractérise les présentations par opérateur confluentes en termes de bases de Gröbner non commutatives. Dans la section 3.2, on propose une procédure permettant de construire des présentations par opérateur confluentes. Grâce à la proposition 3.1.2.5, on en déduit une procédure pour construire des bases de Gröbner non commutatives.

On fixe une algèbre  $\mathbf{A}$ .

### 3.1 Présentations par opérateur

#### 3.1.1 La famille de réduction d'une présentation

**3.1.1.1. Définition.** Une *présentation par opérateur* de  $\mathbf{A}$  est un triplet  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ , où

1.  $X$  est un ensemble et  $<$  est un ordre monomial sur  $X^*$ ,
2.  $S$  est un opérateur de réduction relativement à  $(X^*, <)$ ,
3. on a un isomorphisme d'algèbres

$$\mathbf{A} \simeq \frac{\mathbb{K}X^*}{I(\ker(S))}.$$

On fixe une présentation par opérateur  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  de  $\mathbf{A}$ .

**3.1.1.2. Définition.** Soit  $n$  un entier. On rappelle qu'on note  $X^{(n)}$  l'ensemble des mots de longueur  $n$ . On note de plus par  $X^{(\leq n)}$  l'ensemble des mots de longueur inférieure ou égale à  $n$ . Pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  différent de  $(0, 0)$ , on pose

$$S_{n,m} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(\leq n+m-1)}} \oplus (\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(n)}} \otimes S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}).$$

Explicitement, étant donné  $w \in X^*$ ,  $S_{n,m}(w)$  est égal à  $w$  si la longueur de  $w$  est strictement inférieure à  $n + m$ . Si la longueur de  $w$  est supérieure à  $n + m$ , on pose  $w = w_1 w_2 w_3$ , où  $w_1$  et

$w_3$  sont de longueur  $n$  et  $m$ , respectivement. Dans ce cas,  $S_{n,m}(w)$  est égal à  $w_1S(w_2)w_3$ . On pose également  $S_{0,0} = S$ . La famille de réduction de  $\langle (X, <) | S \rangle$  est

$$F^{\langle (X, <) | S \rangle} = \{S_{n,m}, (n, m) \in \mathbb{N}^2\}.$$

**3.1.1.3. Notation.** La présentation  $\langle (X, <) | S \rangle$  étant fixée, on note  $F$  à la place de  $F^{\langle (X, <) | S \rangle}$  sa famille de réduction.

**3.1.1.4. Lemme.** Soient  $n$  et  $m$  deux entiers. Alors,  $S_{n,m}$  est un opérateur de réduction relativement à  $(X^*, <)$  et son noyau est égal à  $\mathbb{K}X^{(n)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(m)}$ .

*Démonstration.* On montre d'abord que  $S_{n,m}$  est un opérateur de réduction relativement à  $(X^*, <)$ . L'opérateur  $S$  étant un projecteur,  $S_{n,m}$  est également un projecteur. Soit  $w \in X^*$ . Si la longueur de  $w$  est strictement inférieure à  $n + m$ , alors  $S_{n,m}(w)$  est égal à  $w$ . Si la longueur de  $w$  est supérieure à  $n + m$ , on pose  $w = w_1w_2w_3$ , où  $w_1$  et  $w_3$  sont de longueur  $n$  et  $m$ , respectivement. Si  $w_2$  appartient à  $\text{Red}(S)$ , alors  $S_{n,m}(w)$  est égal à  $w$ . Dans l'autre cas, soit

$$S(w_2) = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i,$$

la décomposition de  $S(w_2)$  selon la base  $X^*$ . On a

$$S_{n,m}(w) = \sum_{i \in I} \lambda_i w_1 w_i w_3.$$

Pour tout  $i \in I$ ,  $w_i$  est strictement inférieur à  $w_2$ . L'ordre  $<$  étant un ordre monomial,  $w_1 w_i w_3$  est strictement inférieur à  $w$ . Ainsi,  $S_{n,m}$  est un opérateur de réduction relativement à  $(X^*, <)$ .

On montre la deuxième partie du lemme. Étant donné un entier  $k$ , on note  $X^{(\geq k)}$  l'ensemble des mots de longueur supérieure à  $k$ . Pour tout  $f \in \mathbb{K}X^*$ , on pose  $f = f_1 + f_2$ , où  $f_1$  et  $f_2$  sont les images de  $f$  à travers les projections naturelles de  $\mathbb{K}X^*$  sur  $\mathbb{K}X^{(\leq n+m-1)}$  et  $\mathbb{K}X^{(\geq n+m)}$ , respectivement. Ces deux espaces vectoriels sont stabilisés par  $S_{n,m}$  et  $S_{n,m}(f_1)$  est égal à  $f_1$ . Ainsi,  $f$  appartient à  $\ker(S_{n,m})$  si et seulement si  $f_1$  est égal à 0 et  $f_2$  appartient à  $\ker(S_{n,m})$ . De plus,  $f_2$  admet une unique décomposition de la forme

$$f_2 = \sum_{i \in I} w_i f_i w'_i,$$

où, pour tout  $i \in I$ ,

1.  $w_i$  et  $w'_i$  sont des mots de longueur  $n$  et  $m$ , respectivement,
2. pour tout  $j \in I$  tel que  $j$  est différent de  $i$ , la paire  $(w_i, w'_i)$  est différente de  $(w_j, w'_j)$ ,
3.  $f_i$  est un élément non nul de  $\mathbb{K}X^*$ .

On a

$$S_{n,m}(f_2) = \sum_{i \in I} w_i S(f_i) w'_i.$$

Ainsi,  $f_2$  appartient à  $\ker(S_{n,m})$  si et seulement si, pour tout  $i \in I$ ,  $f_i$  appartient à  $\ker(S)$ . Le noyau de  $S_{n,m}$  est donc égal à  $\mathbb{K}X^{(n)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(m)}$ . □

**3.1.1.5. Formes normales.** Une *forme normale* pour  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est une  $F$ -forme normale. En particulier, un mot  $w$  est en forme normale si et seulement si tous ses sous-mots appartiennent à  $\text{Red}(S)$ , de sorte que l'ensemble des formes normales est égal à  $\mathbb{K}\text{Red}(F)$ .

**3.1.1.6. La bases des mots  $\wedge F$ -réduits.** D'après le lemme 3.1.1.4,  $F$  est incluse dans  $\mathbf{RO}(X^*, <)$  et, en reprenant les notations de 3.1.1.2, on a

$$\begin{aligned} \ker(\wedge F) &= \sum_{n,m \geq 0} \ker(S_{n,m}) \\ &= \sum_{n,m \geq 0} \mathbb{K}X^{(n)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(m)} \\ &= I(\ker(S)). \end{aligned}$$

L'opérateur  $\wedge F$  étant un projecteur, on a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{K}X^* &= \text{im}(\wedge F) \oplus \ker(\wedge F) \\ &= \mathbb{K}\text{Red}(\wedge F) \oplus I(\ker(S)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

de sorte qu'on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\begin{aligned} \psi: \mathbb{K}\text{Red}(\wedge F) &\xrightarrow{\sim} \mathbf{A}. \\ w &\mapsto \bar{w} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\{\bar{w}, w \in \text{Red}(\wedge F)\},$$

est une base de  $\mathbf{A}$  en tant qu'espace vectoriel.

**3.1.1.7. Remarque.** On pose

$$I = I(\ker(S)).$$

On rappelle qu'on note

$$O(I) = X^* \setminus \text{lm}(I).$$

L'idéal  $I$  étant le noyau de  $\wedge F$ , on en déduit que

$$I = \mathbb{K}\{w - \wedge F(w), w \in \text{Nred}(\wedge F)\}.$$

En particulier,  $\text{lm}(I)$  est égal à  $\text{Nred}(\wedge F)$ . La décomposition (3.1) permet ainsi de retrouver le théorème de Mora (théorème 1.2.1.8 du chapitre 1) :

$$\mathbb{K}X^* = \mathbb{K}O(I) \oplus I.$$

### 3.1.2 Présentations confluentes

Dans cette section, on fixe une présentation par opérateur  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  de  $\mathbf{A}$ . On note  $F$  sa famille de réduction.

**3.1.2.1. Définition.** On dit que  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est *confluente* si  $F$  l'est.

**3.1.2.2. Remarque.** La présentation  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  est confluente si et seulement si  $\text{Red}(F)$  est égal à  $\text{Red}(\wedge F)$ . Ainsi, d'après ce qu'on a vu en 3.1.1.6,  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  est confluente si et seulement si

$$\{\bar{w}, w \text{ est une forme normale pour } \langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle\},$$

est une base de  $\mathbf{A}$ .

**3.1.2.3. Présentations quadratiques.** On dit que  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  est *quadratique* si  $\ker(S)$  est inclus dans  $\mathbb{K}X^{(2)}$ . Pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose

$$F_n = \{\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(i)}} \otimes S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(j)}}, i + j + 2 = n\}.$$

On a la partition

$$F = \coprod_{n \geq 2} F_n.$$

Les éléments de  $F_n$  sont précisément les éléments de  $F$  qui agissent non trivialement sur les mots de longueur  $n$ . De plus, on a

$$\text{Obs}^F = \coprod_{n \geq 2} \text{Obs}^{F_n}.$$

En particulier, si  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  est confluente, alors  $F_3 = (S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)$  est confluente. Réciproquement, on montre grâce au lemme de Newman en termes d'opérateurs de réduction (voir proposition 2.1.2.14 du chapitre 2) que si  $F_3$  est confluente alors chaque  $F_n$  est également confluente, de sorte que  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  est confluente. Ainsi, la notion d'algèbre admettant une présentation par opérateur quadratique confluente coïncide avec la notion d'algèbre  $X$ -confluente introduite par Berger (voir remarque 1.3.1.13 du chapitre 1).

Afin de relier les présentations par opérateur confluentes aux bases de Gröbner non commutatives, on a besoin du lemme suivant :

**3.1.2.4. Lemme.** *Soit  $R$  la base réduite de  $\ker(S)$ . Un mot appartient à  $\text{Red}(F)$  si et seulement s'il n'appartient pas à l'idéal monomial engendré par  $\text{lm}(R)$ .*

*Démonstration.* L'ensemble  $\text{Red}(F)$  est l'ensemble des mots  $w$  tels que tout sous-mot de  $w$  appartient à  $\text{Red}(S)$ . D'après la proposition 2.1.1.14 du chapitre 2, un mot appartient à  $\text{Red}(S)$  si et seulement s'il n'appartient pas à  $\text{lm}(R)$ , de sorte que le lemme 3.1.2.4 est vrai.  $\square$

**3.1.2.5. Proposition.** *Soit  $R$  la base réduite de  $\ker(S)$ . La présentation  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  est confluente si et seulement si  $R$  est une base Gröbner non commutative.*

*Démonstration.* D'après le lemme du diamant,  $R$  est une base de Gröbner non commutative si et seulement si l'ensemble des mots en formes normales pour  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$  est une base de  $\mathbf{A}$ . Or, un mot est en forme normale pour  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$  si et seulement s'il n'appartient pas à l'idéal monomial engendré par  $\text{lm}(R)$ , de sorte que d'après le lemme 3.1.2.4, un mot est en forme normale pour  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$  si et seulement s'il est en forme normale pour  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$ . Ainsi, d'après ce qu'on a vu dans la remarque 3.1.2.2,  $R$  est une base de Gröbner non commutative si et seulement si  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  est confluente.  $\square$

**3.1.2.6. Remarque.** La preuve de la proposition 3.1.2.5 passe par les caractérisations de la confluence en termes de formes normales. On propose dans cette remarque une preuve de cette proposition sans passer par cette caractérisation.

On suppose que  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  n'est pas confluent. Soit  $w \in \text{Obs}^F$ . L'élément  $w - \wedge F(w)$  appartient au noyau de  $\wedge F$ , c'est-à-dire, il appartient à  $I(\ker(S))$  d'après ce qu'on a vu en 3.1.1.6. Or,  $I(\ker(S))$  est égal à  $I(R)$ . De plus, le monôme dominant de  $w - \wedge F(w)$  est égal à  $w$ , et donc il appartient à  $\text{Red}(F)$ . D'après le lemme 3.1.2.4,  $w$  n'appartient pas à l'idéal monomial engendré par  $\text{lm}(R)$  et donc  $R$  n'est pas une base de Gröbner non commutative.

On suppose que  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est confluent. Soit  $f \in I(R)$ . On suppose sans perte de généralité que  $\text{lc}(f)$  est égal à 1. Le noyau de  $\wedge F$  étant égal à  $I(R)$ ,  $\wedge F(f)$  est égal à 0. Ainsi, on a

$$\wedge F(\text{lm}(f)) = \wedge F(\text{lm}(f) - f). \quad (3.2)$$

Le monôme dominant de  $\text{lm}(f) - f$  est strictement inférieur à  $\text{lm}(f)$ . En particulier,  $\text{lm}(f)$  n'est pas  $\wedge F$ -réduit d'après (3.2). La famille  $F$  étant confluyente, cela implique que  $\text{lm}(f)$  n'appartient pas à  $\text{Red}(F)$ . D'après le lemme 3.1.2.4,  $\text{lm}(f)$  appartient donc à l'idéal monomial engendré par  $\text{lm}(R)$ , de sorte que  $R$  est une base de Gröbner non commutative.

## 3.2 Procédure de complétion

Dans cette section, on propose une procédure de complétion en termes d'opérateurs de réduction : celui-ci permet, étant donnée une présentation par opérateur de  $\mathbf{A}$ , de construire une présentation par opérateur confluyente de  $\mathbf{A}$ . D'après la proposition 3.1.2.5, cette procédure fournit en particulier une méthode pour construire des bases de Gröbner non commutatives.

### 3.2.1 Énoncé

**3.2.1.1. Méthode Réduction.** Soient  $X$  un ensemble et  $<$  un ordre monomial sur  $X^*$ . La procédure de complétion fait appel à une méthode **Réduction** prenant en entrée une partie finie  $E$  de  $\mathbb{K}X^*$  et un opérateur de réduction  $S$  dont le noyau est de dimension finie et renvoie une famille d'opérateurs de réduction. On rappelle que le support de  $f \in \mathbb{K}X^*$  est noté  $S_f$  et qu'on note

$$\ker^{-1} : \mathcal{L}(\mathbb{K}G) \longrightarrow \mathbf{RO}(G, <),$$

l'application qui à un sous-espace vectoriel  $V$  de  $\mathbb{K}X^*$  associe l'opérateur de réduction relativement à  $(X^*, <)$  de noyau  $V$ . La méthode **Réduction** $(E, S)$  s'exécute de la façon suivante :

1. Soient

$$M = \bigcup_{f \in E} S_f \setminus \text{lm}(E) \text{ et } F = \{\ker^{-1}(\mathbb{K}f), f \in E\}.$$

2. Tant que  $\exists w_1 w w_2 \in M$  tel que  $w \in \text{Nred}(S)$ ,

(a) on ajoute  $\ker^{-1}(\mathbb{K}w_1(w - S(w))w_2)$  à  $F$ ,

(b) on retire  $w_1 w w_2$  de  $M$ ,

(c) on ajoute le support de  $w_1 S(w) w_2$  à  $M$ .

3. **Réduction** renvoie l'ensemble  $F$  obtenu à la sortie de la boucle **Tant que**.



**3.2.1.2. Remarque.** La méthode **Réduction** permet, étant donnés une partie finie  $E$  de  $\mathbb{K}X^*$  et un opérateur de réduction  $S$ , de calculer des formes normales des éléments de  $E$  pour la présentation  $\langle (X, <) \mid \{w - S(w), w \in \text{Nred}(S)\} \rangle$ . En effet, un élément  $f \in \mathbb{K}X^*$  n'est pas en forme normale tant que son support contient un mot de la forme  $w_1 w w_2$  avec  $w \in \text{Nred}(S)$  et lorsque c'est le cas,  $f$  se réécrit en  $\ker^{-1}(\mathbb{K}w_1(w - S(w))w_2)(f)$ . L'ensemble  $E$  étant fini et  $\langle (X, <) \mid \{w - S(w), w \in \text{Nred}(S)\} \rangle$  étant terminante, on en déduit en particulier que la boucle **Tant que** s'exécute un nombre fini de fois et donc que **Réduction** renvoie effectivement un résultat.

**3.2.1.3. Branchements critiques.** La dernière chose dont on a besoin pour énoncer la procédure de complétion est de formuler la notion de branchement critique pour une présentation par opérateur  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ . On considère les notations de 3.1.1.2 : on pose  $S_{0,0} = S$  et pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $n + m$  est non nul,

$$S_{n,m} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(\leq n+m-1)}} \oplus \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(n)}} \otimes S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}.$$

Un *branchement critique* de  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est un triplet  $(w, (n, m), (n', m')) \in X^* \times \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$  tel que

1.  $w \in \text{Nred}(S_{n,m}) \cap \text{Nred}(S_{n',m'})$ ,
2.  $n = 0$  ou  $n' = 0$ ,
3.  $m = 0$  ou  $m' = 0$ ,
4.  $n + n' + m + m'$  est strictement inférieur à la longueur de  $w$ .

La procédure prend en entrée une présentation  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  de  $\mathbf{A}$  telle que  $X$  est fini et le noyau de  $S$  est de dimension finie. En particulier, l'ensemble des branchements critiques d'une telle présentation est fini.

---

**Algorithme 3** Procédure de complétion

---

**Initialisation** :  $d := 0$ ,  $S^0 := S$ ,  $Q_0 := \emptyset$ ,  $P_0 := \{\text{branchements critiques de } \langle (X, <) \mid S^0 \rangle\}$ ,  
 $E_0 := \{w - S^0_{n,m}(w), (w, (n, m), (n', m')) \in P_0 \text{ ou } (w, (n', m'), (n, m)) \in P_0\}$ .

- 1: **tant que**  $Q_d \neq P_d$  **faire**
  - 2:    $F_d := \text{Reduction}(E_d, S^d)$ ;
  - 3:    $S^{d+1} := S^d \wedge C^{F_d}$ ;
  - 4:    $Q_{d+1} := P_d$ ;
  - 5:    $d = d + 1$ ;
  - 6:    $P_d := \{\text{branchements critiques de } \langle (X, <) \mid S^d \rangle\}$ ;
  - 7:    $E_d := \{w - S^d_{n,m}(w), (w, (n, m), (n', m')) \in P_d \setminus Q_d \text{ ou } (w, (n', m'), (n, m)) \in P_d \setminus Q_d\}$ ;
  - 8: **fin tant que**
- 

**3.2.1.4. Remarques.**

1. Pour que la dernière instruction de la boucle **tant que** soit exécutée,  $Q_d$  doit être inclus dans  $P_d$ . On vérifie que c'est le cas : soit  $(w, (n, m), (n', m'))$  un branchement critique de  $\langle (X, <) \mid S^d \rangle$ . En particulier,  $w$  appartient à  $\text{Nred}(S^d_{n,m}) \cap \text{Nred}(S^d_{n',m'})$ . De plus, par construction,  $S^{d+1}$  est inférieur à  $S^d$  et donc, d'après le lemme 2.1.1.18 du chapitre 2,  $\text{Nred}(S^d)$  est inclus dans  $\text{Nred}(S^{d+1})$ . En particulier,  $w$  appartient également à

$\text{Nred}(S^{d+1}_{n,m}) \cap \text{Nred}(S^{d+1}_{n',m'})$ . On en déduit que  $(w, (n, m), (n', m'))$  est un branchement critique de  $\langle (X, <) \mid S^{d+1} \rangle$  et donc que  $Q_{d+1} = P_d$  est inclus dans  $P_{d+1}$ .

2. Afin que la procédure présentée puisse être exécutée, il faut calculer des opérateurs de réduction à partir de leurs noyaux. Or, comme on considère des opérateurs de réduction relativement à l'ensemble infini  $X^*$ , il n'est a priori pas possible d'effectuer un tel calcul. Cependant, d'après le lemme qui suit, pour tout entier  $d$ , les noyaux de  $S^d$  et de  $C^{F_d}$  sont de dimensions finies. Ainsi,  $S^d$  et  $C^{F_d}$  peuvent être calculés par restrictions à des sous-espaces de  $\mathbb{K}X^*$  de dimensions finies.
3. On a mentionné dans la remarque 1.2.2.5 du chapitre 1 que l'approche est matricielle. La raison est justement qu'on est dans un cas où l'on regarde des opérateurs de réduction relativement à des ensembles finis et que ceux-ci peuvent donc être décrits par leurs matrices de réduction.

**3.2.1.5. Lemme.** *Pour tout entier  $d$ , les noyaux de  $S^d$  et de  $C^{F_d}$  sont de dimensions finies.*

*Démonstration.* On montre par récurrence la propriété pour  $S^d$ . On devra pour cela montrer la propriété pour  $C^{F_d}$ . Le noyau de  $S^0$  est de dimension finie par hypothèse sur l'entrée de la procédure. Soit  $d$  un entier. On suppose que le noyau de  $S^d$  est de dimension finie. On pose

$$M_d = \bigcup_{f \in E_d} S_f,$$

la réunion des mots appartenant au support d'un élément de  $E_d$ . Les éléments de  $F_d$  n'agissent que sur  $M_d$ , de sorte qu'on a l'inclusion

$$\ker(C^{F_d}) \subset \mathbb{K}M_d. \quad (3.3)$$

Le noyau de  $S^d$  étant de dimension finie par hypothèse de récurrence, il existe un nombre fini de branchements critiques pour  $\langle (X, <) \mid S^d \rangle$ . Ainsi,  $E_d$  et donc  $M_d$  sont des ensembles finis de sorte que  $\ker(C^{F_d})$  est de dimension finie d'après (3.3). De plus, le noyau de  $S^{d+1}$  est la somme des noyaux de  $S^d$  et de  $C^{F_d}$ . Ces deux noyaux étant de dimension finie, par hypothèse de récurrence pour  $S^d$  et d'après ce qu'on vient de voir pour  $C^{F_d}$ , celui de  $S^{d+1}$  est également de dimension finie, ce qui prouve le lemme.  $\square$

## 3.2.2 Correction

Le but de la fin de cette section est de montrer que la procédure proposée permet d'obtenir une présentation par opérateur confluent de  $\mathbf{A}$ .

**3.2.2.1. Définition.** Soient  $T$  un opérateur de réduction relativement à  $(X^*, <)$ ,  $w \in X^*$  et  $f \in \mathbb{K}X^*$ . On dit que  $f$  admet une *décomposition de type*  $(T, w)$  s'il admet une décomposition (non nécessairement unique)

$$f = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i^1 (w_i - T(w_i)) w_i^2,$$

où

1. les  $\lambda_i$  sont des scalaires,
2. les  $w_i^1$ ,  $w_i^2$  et  $w_i$  sont des mots tels que  $w_i^1 w_i w_i^2$  est strictement inférieur à  $w$ .

**3.2.2.2. Lemme.** Soient  $w \in X^*$  et  $T, T' \in \mathbf{RO}(X^*, <)$  tels que  $T'$  est inférieur à  $T$ .

1. Soit  $(n, m)$  un couple d'entiers tel que  $w$  n'est pas  $T_{n,m}$ -réduit. Alors,  $(T_{n,m} - T'_{n,m})(w)$  admet une décomposition de type  $(T', w)$ .
2. Soit  $f \in \mathbb{K}X^*$  admettant une décomposition de type  $(T, w)$ . Alors,  $f$  admet une décomposition de type  $(T', w)$ .

*Démonstration.* On commence par montrer le point 1. On pose  $w = w^{(n)}w'w^{(m)}$ , où  $w^{(n)}$  et  $w^{(m)}$  sont de longueur  $n$  et  $m$ , respectivement. Soit

$$T(w') = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i,$$

la décomposition de  $T(w')$  selon la base  $X^*$ . Par hypothèse,  $T'$  est inférieur à  $T$  et donc  $T' \circ T$  est égal à  $T'$  (voir relation(2.2) de 2.1.1.16 du chapitre 2). Ainsi, on a

$$\begin{aligned} (T_{n,m} - T'_{n,m})(w) &= w^{(n)}(T(w') - T'(w'))w^{(m)} \\ &= w^{(n)}(T(w') - T'(T(w')))w^{(m)} \\ &= \sum_{i \in I} \lambda_i w^{(n)}(w_i - T'(w_i))w^{(m)}. \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $w$  n'est pas  $T_{n,m}$ -réduit. Ainsi,  $w'$  n'est pas  $T$ -réduit et donc chaque  $w_i$  est strictement inférieur à  $w'$ . L'ordre  $<$  étant un ordre monomial, chaque  $w^{(n)}w_iw^{(m)}$  est donc strictement inférieur à  $w^{(n)}w'w^{(m)} = w$ . Ainsi,  $(T_{n,m} - T'_{n,m})(w)$  admet une décomposition de type  $(T', w)$ .

On montre le point 2. Soit

$$f = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i^1 (w_i - T(w_i)) w_i^2, \quad (3.4)$$

une décomposition de  $f$  de type  $(T, w)$ . En notant

$$A = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i^1 (w_i - T'(w_i)) w_i^2 \text{ et } B = \sum_{i \in I} \lambda_i w_i^1 (T(w_i) - T'(w_i)) w_i^2,$$

on a

$$f = A - B.$$

La décomposition (3.4) étant de type  $(T, w)$ , chaque  $w_i^1 = w_i^1 w_i w_i^2$  est strictement inférieur à  $w$ . En particulier,  $A$  est de type  $(T', w)$ . Pour tout  $i \in I$ , soient  $n_i$  et  $m_i$  les longueurs de  $w_i^1$  et  $w_i^2$ , respectivement. On a alors,

$$B = \sum_{i \in I} \lambda_i (T_{n_i, m_i} - T'_{n_i, m_i})(w_i^1).$$

On peut supposer sans perte de généralité que chaque  $w_i$  est non  $T$ -réduit, de sorte que chaque  $w_i^1$  est non  $T_{n_i, m_i}$ -réduit. Ainsi, d'après le premier point du lemme, chaque  $(T_{n_i, m_i} - T'_{n_i, m_i})(w_i^1)$  admet une décomposition de type  $(T', w_i^1)$  et donc de type  $(T', w)$  puisque  $w_i^1$  est strictement inférieur à  $w$ . Ainsi,  $B$  admet une décomposition de type  $(T', w)$ , de sorte que  $f$  admet également une telle décomposition. □

**3.2.2.3. Lemme.** Soient  $d$  un entier et  $(w, (n, m), (n', m')) \in P_d \setminus Q_d$ . Alors

$$f = S_{n,m}^d(w) - S_{n',m'}^d(w),$$

admet une décomposition de type  $(S^{d+1}, w)$ .

*Démonstration.* On commence par montrer que

$$\wedge F_d(f) = 0. \quad (3.5)$$

Par construction,  $E_d$  contient  $w - S_{n,m}^d(w)$  et  $w - S_{n',m'}^d(w)$ . Ainsi, par définition de la méthode **Reduction**,  $F_d$  contient  $T_1 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{w - S_{n,m}^d(w)\})$  et  $T_2 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{w - S_{n',m'}^d(w)\})$ . En particulier,

$$f = (w - S_{n,m}^d(w)) - (w - S_{n',m'}^d(w)),$$

appartient au noyau de  $T_1 \wedge T_2$  et donc à celui de  $\wedge F_d$ .

On montre à présent que  $f$  admet une décomposition de type  $(S^{d+1}, w)$ . L'opérateur  $C^{F_d}$  étant un complément de  $F_d$ , on a

$$\wedge (F_d \cup \{C^{F_d}\}) = \wedge F_d, \quad (3.6)$$

et  $F_d \cup \{C^{F_d}\}$  est confluent, c'est-à-dire, il a la propriété de Church-Rosser. Ainsi, d'après les relations (3.5) et (3.6),  $f$  se réécrit en 0, c'est-à-dire, il existe  $T_1, \dots, T_r \in F_d \cup \{C^{F_d}\}$ , tels que

$$T_r \circ \dots \circ T_1(f) = 0. \quad (3.7)$$

On pose

$$f_1 = (\text{Id}_{\mathbb{K}X^*} - T_1)(f),$$

et pour tout  $k \in \{2, \dots, r\}$ ,

$$f_k = (\text{Id}_{\mathbb{K}X^*} - T_k)(T_{k-1} \circ \dots \circ T_1(f)).$$

D'après (3.7), on a donc

$$f = \sum_{k=1}^r f_k. \quad (3.8)$$

Comme  $(w, (n, m), (n', m'))$  est un branchement critique,  $w$  appartient à  $\text{Nred}(S_{n,m}^d)$  et à  $\text{Nred}(S_{n',m'}^d)$ , de sorte que le monôme dominant de  $f$  est strictement inférieur à  $w$ . De plus, chaque  $T_i$  est soit de la forme  $\ker^{-1}(\mathbb{K}w_1(w_2 - S^d(w_2))w_3)$ , soit égal à  $C^{F_d}$ . Ainsi, chaque  $f_i$  admet une décomposition de type  $(S^d, w)$  ou de type  $(C^{F_d}, w)$ . Comme  $S^d$  et  $C^{F_d}$  sont inférieurs à  $S^{d+1}$ , chaque  $f_i$  admet une décomposition de type  $(S^{d+1}, w)$  d'après le point 2 du lemme 3.2.2.2, de sorte que  $f$  admet une décomposition de type  $(S^{d+1}, w)$  d'après (3.8).  $\square$

**3.2.2.4. Proposition.** Soit  $d$  un entier. Pour tout  $(w, (n, m), (n', m')) \in Q_d$ , le  $S$ -polynôme

$$S_{n,m}^d(w) - S_{n',m'}^d(w),$$

admet une décomposition de type  $(S^d, w)$ .

*Démonstration.* On montre la proposition par récurrence sur  $d$ . Comme  $Q_0$  est l'ensemble vide, elle est vraie pour  $d = 0$ .

On suppose que pour tout  $(w, (n, m), (n', m')) \in Q_d$ ,  $S^d_{n,m}(w) - S^d_{n',m'}(w)$  admet une décomposition de type  $(S_d, w)$ . On pose

1.  $A = (S^d_{n',m'} - S^{d+1}_{n',m'})(w)$ ,
2.  $B = (S^d_{n,m} - S^{d+1}_{n,m})(w)$ ,
3.  $C = (S^d_{n,m} - S^d_{n',m'})(w)$ .

Ainsi, on a

$$S^{d+1}_{n,m}(w) - S^{d+1}_{n',m'}(w) = A - B + C.$$

Par construction,  $S^{d+1}$  est inférieur à  $S^d$ . De plus,  $(w, (n, m), (n', m'))$  étant un branchement critique,  $w$  est en particulier non  $S^d_{n,m}$ -réduit et non  $S^d_{n',m'}$ -réduit. Ainsi, d'après le point 1 du lemme 3.2.2.2,  $A$  et  $B$  admettent une décomposition de type  $(S^{d+1}, w)$ . Il reste à montrer que  $C$  admet une décomposition de type  $(S^{d+1}, w)$ . Par construction,  $Q_{d+1}$  est égal à  $P_d$  qui contient lui-même  $Q_d$  (voir point 1 de la remarque 3.2.1.4). Si  $(w, (n, m), (n', m'))$  n'appartient pas à  $Q_d$ , alors  $C$  admet une décomposition de type  $(S^{d+1}, w)$  d'après le lemme 3.2.2.3. Si  $(w, (n, m), (n', m'))$  appartient à  $Q_d$ , alors  $C$  admet une décomposition de type  $(S^d, w)$  par hypothèse de récurrence. Ainsi, d'après le point 2 du lemme 3.2.2.2,  $C$  admet une décomposition du type  $(S^{d+1}, w)$ . □

**3.2.2.5. Présentations complétées.** Comme pour le cas de l'algorithme de Buchberger associatif, la procédure de complétion en termes d'opérateurs de réduction n'a pas de raison de terminer. Si la procédure de complétion termine après  $d$  itérations de la boucle **tant que**, on pose  $S^n = S^d$  pour tout entier  $n$  supérieur à  $d$ , de sorte que la suite  $(S^d)_{d \in \mathbb{N}}$  est bien définie dans les deux cas. On pose

$$S' = \bigwedge_{d \in \mathbb{N}} S^d.$$

Le triplet  $\langle (X, <) \mid S' \rangle$  est appelé la *présentation complétée* de  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ .

Le dernier lemme dont on a besoin avant de prouver le résultat principal du chapitre est

**3.2.2.6. Lemme.**

1. Pour tout entier  $d$ , soit  $I_d$  l'idéal engendré par  $\ker(S^d)$ . La suite  $(I_d)_{d \in \mathbb{N}}$  est constante.
2. On a

$$\text{Nred}(S') = \bigcup_{d \in \mathbb{N}} \text{Nred}(S^d).$$

*Démonstration.* On montre le point 1. Par définition de la méthode **Réduction**, le noyau de chaque élément de  $F_d$  est inclus dans  $I_d$ . En particulier,

$$\ker(\wedge F_d) = \sum_{T \in F_d} \ker(T),$$

est également inclus dans  $I_d$ . De plus,  $C^{F_d}$  étant un complément de  $F_d$ , il est inférieur à  $\wedge F_d$ , c'est-à-dire, son noyau est inclus dans celui de  $\wedge F_d$ . En particulier,  $\ker(C^{F_d})$  est inclus dans  $I_d$ , de sorte que

$$\ker(S^{d+1}) = \ker(S^d) + \ker(C^{F_d}),$$

est également inclus dans  $I_d$ . La suite  $(I_d)_{d \in \mathbb{N}}$  est donc décroissante. De plus, la suite  $(S^d)_{d \in \mathbb{N}}$  est décroissante, ce qui signifie que  $(\ker(S^d))_{d \in \mathbb{N}}$  est croissante. La suite  $(I_d)_{d \in \mathbb{N}}$  est donc croissante et décroissante et donc constante.

On montre le point 2. Par passage au complémentaire, l'égalité à montrer signifie que la famille  $\{S^d, d \in \mathbb{N}\}$  est confluyente. D'après le lemme de Newman (proposition 2.1.2.14 du chapitre 2), il suffit donc de montrer que cette famille est localement confluyente. Soient  $v \in \mathbb{K}X^*$  et  $d$  et  $d'$  deux entiers. On suppose sans perte de généralité que  $d'$  est supérieur à  $d$ . En particulier,  $(S^d)_{d \in \mathbb{N}}$  étant décroissante, on a

$$S^{d'} \circ S^d = S^{d'}.$$

Ainsi,  $S^d(v)$  se réécrit en  $S^{d'}(v)$ , de sorte que  $\{S^d, d \in \mathbb{N}\}$  est localement confluyente. □

**3.2.2.7. Théorème.** *Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre et  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  une présentation de  $\mathbf{A}$ . La présentation complétée de  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est une présentation confluyente de  $\mathbf{A}$ .*

*Démonstration.* Soit  $S'$  l'opérateur défini en 3.2.2.5.

On montre d'abord que  $\langle (X, <) \mid S' \rangle$  est une présentation de  $\mathbf{A}$ . D'après le point 1 du lemme 3.2.2.6, l'idéal engendré par chaque  $S^d$  est égal à l'idéal  $I$  engendré par le noyau de  $S^0 = S$ . En particulier, l'idéal engendré par

$$\ker(S') = \sum_{d \in \mathbb{N}} \ker(S^d),$$

est égal à  $I$ . Ainsi,  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  étant une présentation de  $\mathbf{A}$ ,  $\langle (X, <) \mid S' \rangle$  est une présentation de  $\mathbf{A}$ .

On montre à présent que cette présentation est confluyente. D'après la proposition 3.1.2.5, il s'agit de montrer que  $\{w - S'(w), w \in \text{Nred}(S')\}$  est une base de Gröbner non commutative, c'est-à-dire, que

$$\langle (X, <) \mid \{w - S'(w), w \in \text{Nred}(S')\} \rangle, \quad (3.9)$$

est une présentation convergente de  $\mathbf{A}$  d'après le théorème 1.2.1.10 du chapitre 1. D'après le lemme du diamant, il suffit de montrer que chaque branchement critique de la présentation (3.9) est résoluble relativement à  $<$ . Ces branchements critiques sont les 5-uplets de la forme  $b = (w_1, w_2, w_3, w - S'(w), w' - S'(w'))$  où

1.  $w$  et  $w'$  appartiennent à  $\text{Nred}(S')$ ,
2.  $w_1, w_2, w_3$  sont tels que
  - (a)  $w_1 w_2 = w$  et  $w_2 w_3 = w'$  si  $b$  est un branchement de chevauchement,
  - (b)  $w_1 w_2 w_3 = w$  et  $w_2 = w'$  si  $b$  est un branchement d'inclusion.

Soient  $w_0 = w_1 w_2 w_3$  la source de  $b$  et  $(n, m, n', m')$  les entiers définis par

1.  $m = n' = 0$ ,  $n$  est la longueur de  $w_1$  et  $m'$  celle de  $w_3$  si  $b$  est un branchement de chevauchement,
2.  $n' = m' = 0$ ,  $n$  est la longueur de  $w_1$  et  $m$  celle de  $w_3$  si  $b$  est un branchement d'inclusion.

Le  $S$ -polynôme de  $b$  est en particulier égal à

$$S(b) = (S'_{n,m} - S'_{n',m'}) (w_0).$$

Comme  $w$  et  $w'$  appartiennent à  $\text{Nred}(S')$ , il existe d'après le point 2 du lemme 3.2.2.6 des entiers  $d$  et  $d'$  tels que  $w$  et  $w'$  sont non réduits pour  $S^d$  et  $S^{d'}$ , respectivement. On suppose sans perte de généralité que  $d$  est supérieur à  $d'$ , de sorte que  $w$  et  $w'$  sont tous les deux non  $S^d$ -réduits. On pose

1.  $A_d = (S^{d+1}_{n',m'} - S'_{n',m'}) (w_0)$ ,
2.  $B_d = (S^{d+1}_{n,m} - S'_{n,m}) (w_0)$ ,
3.  $C_d = (S^{d+1}_{n,m} - S^{d+1}_{n',m'}) (w_0)$ .

Ainsi, on a

$$S(b) = A_d - B_d + C_d. \quad (3.10)$$

Comme  $w$  et  $w'$  sont non  $S^d$ -réduits,  $(w_0, (n, m), (n', m'))$  est un branchement critique de  $\langle (X, <) \mid S^d \rangle$ , c'est-à-dire, il appartient à  $P_d = Q_{d+1}$ . Ainsi, d'après la proposition 3.2.2.4,  $C_d$  admet une décomposition de type  $(S^{d+1}, w_0)$  et admet donc une décomposition de type  $(S', w_0)$  d'après le point 2 du lemme 3.2.2.2. De plus,  $S^{d+1}$  étant inférieur à  $S^d$ ,  $w$  et  $w'$  sont également non  $S^{d+1}$ -réduits, de sorte que  $w_0$  n'est pas  $S^{d+1}_{n,m}$ -réduit ni  $S^{d+1}_{n',m'}$ -réduit. Comme  $S'$  est inférieur à  $S^{d+1}$ ,  $A_d$  et  $B_d$  admettent une décomposition de type  $(S', w_0)$  d'après le point 1 du lemme 3.2.2.2. Ainsi, d'après (3.10),  $S(b)$  admet une décomposition de type  $(S', w_0)$ , c'est-à-dire,  $b$  est résoluble relativement à  $<$ . □

**3.2.2.8. Exemple.** On reprend l'exemple 1.1.2.23 du chapitre 1. On a  $X = \{x, y, z\}$  et on considère l'ordre deg-lex induit par  $x < y < z$ . Soit  $\mathbf{A}$  l'algèbre présentée par  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  où  $S$  est défini pour tout mot  $w$  par

$$S(w) = \begin{cases} x, & \text{si } w = yz \\ xy, & \text{si } w = zx \\ w, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On ne détaille pas les calculs successifs des  $F$ -compléments. Ceux-ci apparaissent dans la section A.2 de l'annexe. On a un seul branchement critique pour  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  :

$$P_0 = \left\{ b_1 = (yzx, (1, 0), (0, 1)) \right\},$$

et

$$E_0 = \left\{ yzx - xx, yzx - yxy \right\}.$$

Les mots  $xx$  et  $yxy$  étant en formes normales,  $\text{Réduction}(E_0, S)$  est égal à

$$F_0 = \left\{ T_1 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yzx - xx\}), T_2 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yzx - yxy\}) \right\}.$$

Le  $F_0$ -complément  $C^{F_0}$  peut être calculé par restriction sur l'espace vectoriel engendré par  $G_1 = \{yzx > yxy > xx\}$ . En identifiant les opérateurs  $T_1$  et  $T_2$  à leurs matrices canoniques relativement à  $G_1$ , on a

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$C^{F_0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur  $S^1 = S \wedge C^{F_0}$  peut être calculé par restriction sur l'espace vectoriel engendré par  $G_2 = \{yxy > zx > yz > xy > xx > x\}$  :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C^{F_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et on obtient que  $S^1$  est l'opérateur défini pour tout mot  $w$  par

$$S^1(w) = \begin{cases} x, & \text{si } w = yz \\ xy, & \text{si } w = zx \\ xx, & \text{si } w = yxy \\ w, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$P_1 = \{b_1, b_2 = (yxyz, (2, 0), (0, 1)), b_3 = (yxyxy, (2, 0), (0, 2))\}.$$

Ainsi,  $P_1 \setminus Q_1$  contient  $b_2$  et  $b_3$ , et on a

$$E_1 = \{yxyz - xxz, yxyz - yxx, yxyxy - xxxy, yxyxy - yxxx\}.$$

Les mots  $xxz$ ,  $yxx$ ,  $xxxy$  et  $yxxx$  sont en formes normales, de sorte que  $\text{Réduction}(E_1, S^1)$  est égal à

$$F_1 = \left\{ \begin{array}{l} T_3 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yxyz - xxz\}), T_4 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yxyz - yxx\}) \\ T_5 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yxyxy - xxxy\}), T_6 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yxyxy - yxxx\}) \end{array} \right\}.$$

La restriction de  $C^{F_1}$  au sous-espace engendré par  $\{yxyxy > yxyz > yxxx > xxxy > yxx > xxz\}$  est

$$C^{F_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de sorte que  $S^2$  est l'opérateur défini pour tout mot  $w$  par

$$S^2(w) = \begin{cases} x, & \text{si } w = yz \\ xy, & \text{si } w = zx \\ xx, & \text{si } w = yxy \\ xxz, & \text{si } w = yxx \\ xxxy, & \text{si } w = yxxx \\ w, & \text{sinon,} \end{cases}$$



et

$$P_2 \setminus Q_2 = \left\{ b_4 = (xyyxx, (2, 0), (0, 2)), b_5 = (xyyxxx, (2, 0), (0, 3)), b_6 = (yxxx, (0, 0), (0, 1)) \right\}.$$

On a

$$E_2 = \left\{ \begin{array}{l} yxxx - xxzx, yxxx - xxxy, xyxxx - yxxxxy \\ yxyxx - yxxxz, yxyxxx - xxxxx, yxyxx - xxxx \end{array} \right\},$$

et on vérifie que

$$F_2 = \left\{ \begin{array}{l} T_7 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yxxx - xxzx\}), T_8 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yxxx - xxxy\}) \\ T_9 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{xyyxxx - yxxxxy\}), T_{10} = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{xyyxx - yxxxz\}) \\ T_{11} = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{xyyxxx - xxxxx\}), T_{12} = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{xyyxx - xxxx\}) \\ T_{13} = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{xxzx - xxxy\}), T_{14} = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yxxxz - xxxyz\}) \\ T_{15} = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{xxxzy - xxxx\}), T_{16} = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yxxxxy - xxxxyy\}) \\ T_{17} = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{xxxxyy - xxxxx\}) \end{array} \right\}.$$

On a alors

$$C^{F_2} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^*},$$

de sorte que  $S^3$  est égal à  $S_2$  et donc  $Q_3$  est égal à  $P_3$ . Ainsi,

$$\langle (X, <) \mid S^2 \rangle,$$

est une présentation confluente de  $\mathbf{A}$ .

# Chapitre 4

## Réécriture et Koszulité

Dans ce chapitre on illustre l'apport de la réécriture en algèbre homologique via la propriété de *Koszulité*. Une algèbre est de type Koszul lorsque certains groupes d'homologie appelés Tor satisfont une propriété de minimalité que l'on énonce dans la définition 4.1.2.10.

On commence par rappeler dans la section 4.1.1 comment sont définis les Tor avant de définir les algèbres Koszul dans la section 4.1.2. Dans la section 4.2 on énonce deux conditions suffisantes de Koszulité en termes de réécriture : la première (section 4.2.1), due à Berger, en termes d'opérateurs de réduction, la seconde (section 4.2.2), basée sur les travaux d'Anick, en termes de présentations convergentes.

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  est un corps commutatif.

### 4.1 Préliminaires

#### 4.1.1 Tor gradué

Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre. Le but de cette section est d'introduire les outils d'algèbre homologique nécessaires pour énoncer la notion de Koszulité. On commence par définir les groupes Tor associés à  $\mathbf{A}$  puis on explique comment une graduation sur  $\mathbf{A}$  en induit une sur les Tor.

**4.1.1.1. Notations et conventions.** Voici les conventions et notations employées dans ce chapitre.

1. On note
  - (a)  $\mathbf{A}\text{Mod}$  la catégorie des  $\mathbf{A}$ -modules à gauche,
  - (b)  $\text{Mod}\mathbf{A}$  la catégorie des  $\mathbf{A}$ -modules à droite,
  - (c)  $\mathbf{Ab}$  la catégorie des groupes abéliens.
2. Le bi-foncteur du produit tensoriel sur  $\mathbf{A}$  est noté

$$\begin{aligned} - \otimes_{\mathbf{A}} - : \text{Mod}\mathbf{A} \times \mathbf{A}\text{Mod} &\longrightarrow \mathbf{Ab}. \\ (\mathbf{R}, \mathbf{L}) &\longmapsto \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{L} \end{aligned}$$

3. Étant donnée une catégorie  $\mathbf{C}$ , on note  $c \in \mathbf{C}$  si  $c$  est un objet de  $\mathbf{C}$ . De plus, si  $c$  et  $c'$  sont deux objets de  $\mathbf{C}$ , la notation

$$c \xrightarrow{f} c',$$

signifie que  $f$  est un morphisme entre  $c$  et  $c'$  dans  $\mathbf{C}$ .

4. Étant donné un espace vectoriel  $V$ , le module à gauche engendré par  $V$  est noté

$$\mathbf{A} \otimes V.$$

Explicitement, si  $\mathcal{B}$  est une base de  $V$ , alors  $\mathbf{A} \otimes V$  est le  $\mathbf{A}$ -module libre sur  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire, il admet une décomposition en somme directe de  $\mathbf{A}$ -modules à gauche

$$\mathbf{A} \otimes V = \bigoplus_{e \in \mathcal{B}} \mathbf{A}e,$$

où  $\mathbf{A}e$  est le module libre sur l'élément  $e$ .

Pour une référence sur la théorie des catégories, on réfère le lecteur à [68].

**4.1.1.2. Complexes de chaînes.** Soit  $\mathbf{C}$  une catégorie abélienne. Un *complexe de chaînes*  $(X, \partial)$  dans  $\mathbf{C}$  est la donnée d'un ensemble

$$X = \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}},$$

d'objets de  $\mathbf{C}$  et pour tout entier  $n$  supérieur à 1 d'un morphisme

$$c_n \xrightarrow{\partial_n} c_{n-1},$$

tel que

$$\text{im}(\partial_{n+1}) \subset \ker(\partial_n).$$

En d'autres termes, il s'agit d'une suite

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} c_n \xrightarrow{\partial_n} c_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} c_1 \xrightarrow{\partial_1} c_0,$$

d'objets de  $\mathbf{C}$  telle que, pour tout entier  $n$  supérieur à 1, on a

$$\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0.$$

Les applications  $\partial_n$  sont appelées les *différentielles* (ou les *bords*) de  $(X, \partial)$ .

**4.1.1.3. Remarque.** Les complexes de chaînes qu'on considère sont ceux où la catégorie  $\mathbf{C}$  est  $\mathbf{Ab}$ ,  $\mathbf{AMod}$  ou celle des espaces vectoriels. On parle alors de complexes de groupes abéliens, de  $\mathbf{A}$ -modules à gauche ou d'espaces vectoriels.

**4.1.1.4. Résolutions.** Soit  $\mathbf{L} \in \mathbf{AMod}$ . Une *résolution projective* (respectivement *résolution libre*)  $(\mathbf{P}_\bullet, \partial)$  de  $\mathbf{L}$  dans  $\mathbf{AMod}$  est une suite exacte de  $\mathbf{A}$ -modules à gauche

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{P}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbf{L} \longrightarrow 0, \quad (4.1)$$

telle que, pour tout entier  $n$ , le module  $\mathbf{P}_n$  est projectif (respectivement libre).

**4.1.1.5. Homotopie contractante.** Une résolution (libre ou projective) est en particulier un complexe de  $\mathbf{A}$ -modules à gauche. Une façon classique de prouver qu'un tel complexe est une résolution consiste à construire une *homotopie contractante*. Plus précisément, soit  $(\mathbf{P}_\bullet, \partial)$  un complexe de  $\mathbf{A}$ -modules à gauche

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{P}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbf{L} \longrightarrow 0,$$

tel que chaque  $\mathbf{P}_n$  soit projectif. Un homotopie contractante de  $(\mathbf{P}_\bullet, \partial)$  est une famille d'applications  $\mathbb{K}$ -linéaires

1.  $h_{-1} : \mathbf{L} \longrightarrow \mathbf{P}_0$ ,
2.  $h_n : \mathbf{P}_n \longrightarrow \mathbf{P}_{n+1}$  pour tout entier  $n$ ,

telle que

1.  $\partial_0 \circ h_{-1} = \text{Id}_{\mathbf{L}}$ ,
2.  $\partial_{n+1} \circ h_n + h_{n-1} \circ \partial_n = \text{Id}_{\mathbf{P}_n}$ , pour tout entier  $n$  supérieur à 0.

Lorsqu'une telle homotopie contractante existe, alors  $\partial_0$  est surjective d'après le point 1. De plus, pour tout entier  $n$  supérieur à 0, on a l'inclusion

$$\ker(\partial_n) \subset \text{im}(\partial_{n+1}), \quad (4.2)$$

d'après le point 2. Or,  $(\mathbf{P}_\bullet, \partial)$  étant un complexe de chaînes, l'inclusion réciproque de (4.2) est vraie, de sorte que  $(\mathbf{P}_\bullet, \partial)$  est une résolution de  $\mathbf{L}$ .

**4.1.1.6. Foncteur Tor.** Soit  $\mathbf{R} \in \text{Mod}\mathbf{A}$ . On pose

$$\text{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, -) = L_n(\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} -) : \mathbf{A}\text{Mod} \longrightarrow \mathbf{Ab},$$

où  $L_n(\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} -)$  désigne le  $n$ -ième foncteur dérivé du foncteur  $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} -$ . Pour une définition des foncteurs dérivés, on réfère le lecteur à [53, Section IV.5].

On rappelle d'après [53, Section IV.11] comment calculer ce foncteur. Soit  $\mathbf{L}$  un  $\mathbf{A}$ -module à gauche. Soit  $(\mathbf{P}_\bullet, \partial)$  une résolution projective de  $\mathbf{L}$  dans  $\mathbf{A}\text{Mod}$  :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{P}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbf{L} \longrightarrow 0. \quad (4.3)$$

En appliquant le foncteur  $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} -$  à cette résolution, on obtient le complexe de groupes abéliens  $(\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_\bullet, \text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial)$  :

$$\cdots \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial_3} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_2 \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial_2} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial_1} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial_0} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{L} \longrightarrow 0.$$

Le groupe  $\text{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{L})$  est alors le  $n$ -ième groupe d'homologie de ce complexe :

$$\text{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{L}) \simeq \frac{\ker \left( \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_n \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial_n} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_{n-1} \right)}{\text{im} \left( \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_{n+1} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial_{n+1}} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_n \right)}. \quad (4.4)$$

#### 4.1.1.7. Remarque.

1. On rappelle d'après [53, Chapitre IV, proposition 5.1] que si

$$\cdots \xrightarrow{\partial'_3} \mathbf{Q}_2 \xrightarrow{\partial'_2} \mathbf{Q}_1 \xrightarrow{\partial'_1} \mathbf{Q}_0 \xrightarrow{\partial'_0} \mathbf{L} \longrightarrow 0,$$

est une autre résolution de  $\mathbf{L}$  dans  $\mathbf{A}\text{Mod}$  que (4.3), alors a un isomorphisme de groupes

$$\frac{\ker \left( \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_n \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial_n} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_{n-1} \right)}{\text{im} \left( \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_{n+1} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial_{n+1}} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_n \right)} \simeq \frac{\ker \left( \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{Q}_n \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial'_n} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{Q}_{n-1} \right)}{\text{im} \left( \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{Q}_{n+1} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial'_{n+1}} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{Q}_n \right)}.$$

Ainsi, l'isomorphisme (4.4) est indépendant du choix de la résolution projective de  $\mathbf{L}$  choisie.

2. Les morphismes apparaissant dans  $(\mathbf{P}_{\bullet}, \partial)$  étant  $\mathbf{A}$ -linéaires, ils sont également  $\mathbb{K}$ -linéaires. En particulier, le complexe  $(\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_{\bullet}, \text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial)$  est un complexe d'espaces vectoriels, de sorte que  $\text{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{L})$  est également un espace vectoriel.

#### 4.1.1.8. Résolutions minimales.

Soit  $\mathbf{L}$  un  $\mathbf{A}$ -module à gauche et soit

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{A} \otimes V_n \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{A} \otimes V_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{A} \otimes V_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{A} \otimes V_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbf{L} \longrightarrow 0,$$

une résolution libre de  $\mathbf{L}$  dans  $\mathbf{A}\text{Mod}$ . Une telle résolution est dite *minimale* si les applications induites

$$\mathbb{K} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A} \otimes V_n \simeq V_n \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbb{K}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial_n} \mathbb{K} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A} \otimes V_{n-1} \simeq V_{n-1},$$

sont nulles. On rappelle d'après [87, Section 3.9] que, dans ce cas, pour tout entier  $n$ , on a un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\text{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbf{L}) \simeq V_n.$$

#### 4.1.1.9. Algèbres graduées.

On rappelle que  $\mathbf{A}$  est dite graduée si elle admet une décomposition en somme directe d'espaces vectoriels

$$\mathbf{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_n,$$

telle que, pour tout couple d'entiers  $(n, m)$ , on a

$$\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{A}_m \subset \mathbf{A}_{n+m}.$$

Jusqu'à la fin de cette section, on suppose que  $\mathbf{A}$  est graduée.

**4.1.1.10. Modules gradués.** Un  $\mathbf{A}$ -module à gauche (respectivement à droite)  $\mathbf{M}$  est dit *gradué* s'il admet une décomposition en somme directe d'espaces vectoriels

$$\mathbf{M} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{M}_n,$$

telle que, pour tout couple d'entiers  $(n, m)$ , on a

$$\mathbf{A}_n \cdot \mathbf{M}_m \subset \mathbf{M}_{n+m} \text{ (respectivement } \mathbf{M}_m \cdot \mathbf{A}_n \subset \mathbf{M}_{n+m}\text{)}.$$

Soient  $\mathbf{M}$  et  $\mathbf{N}$  deux  $\mathbf{A}$ -modules à gauche (respectivement à droite) gradués. Un morphisme

$$\varphi : \mathbf{M} \longrightarrow \mathbf{N},$$

de  $\mathbf{A}$ -modules à gauche (respectivement à droite) est dit *de degré 0* si, pour tout entier  $n$ , on a l'inclusion

$$\varphi(\mathbf{M}_n) \subset \mathbf{N}_n.$$

La catégorie dont les objets sont les  $\mathbf{A}$ -modules à gauche (respectivement à droite) gradués et les morphismes sont les morphismes de degré 0 est la *catégorie des  $\mathbf{A}$ -modules à gauche gradués* (respectivement  *$\mathbf{A}$ -modules à droite gradués*) et est notée  $\mathbf{A}\text{Mod}_g$  (respectivement  $\text{Mod}_{\mathbf{A}g}$ ).

**4.1.1.11. Modules purs.** Soient  $\mathbf{M}$  un  $\mathbf{A}$ -module à gauche gradué et  $n$  un entier. On dit que  $\mathbf{M}$  est *pur en degré  $n$*  si on a :

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{M}_n.$$

En d'autres termes,  $\mathbf{M}$  est pur en degré  $n$  si et seulement s'il est engendré par sa composante homogène de degré  $n$ .

**4.1.1.12. Graduation sur le Tor.** Soient  $\mathbf{L}$  un  $\mathbf{A}$ -module à gauche gradué et  $\mathbf{R}$  un  $\mathbf{A}$ -module à droite gradué. Soit  $(\mathbf{P}_\bullet, \partial)$  :

$$\cdots \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{P}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbf{L} \longrightarrow 0,$$

une résolution projective de  $\mathbf{L}$  dans  $\mathbf{A}\text{Mod}$ . On rappelle que pour tout entier  $n$ , on a

$$\text{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{L}) = \frac{\ker \left( \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_n \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial_n} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_{n-1} \right)}{\text{im} \left( \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_{n+1} \xrightarrow{\text{Id}_{\mathbf{R}} \otimes_{\mathbf{A}} \partial_{n+1}} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{P}_n \right)}. \quad (4.5)$$

Le module  $\mathbf{L}$  étant gradué, la résolution projective  $(\mathbf{P}_\bullet, \partial)$  peut être choisie dans  $\mathbf{A}\text{Mod}_g$ . Dans ce cas, les applications apparaissant dans (4.5) sont linéaires et de degré 0. En particulier,  $\text{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{L})$  admet une structure d'espace vectoriel gradué dont les composantes homogènes sont notées  $\text{Tor}_{n,(m)}^{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{L})$  :

$$\text{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{L}) = \bigoplus_{m \in \mathbb{N}} \text{Tor}_{n,(m)}^{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{L}).$$

On définit l'espace vectoriel bi-gradué :

$$\begin{aligned} \text{Tor}^{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{L}) &= \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \text{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{L}) \\ &= \bigoplus_{n, m \in \mathbb{N}} \text{Tor}_{n,(m)}^{\mathbf{A}}(\mathbf{R}, \mathbf{L}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

### 4.1.2 Koszulté

Dans cette section, on définit la Koszulté et on rappelle quelques-unes de ces caractérisations. Celles-ci sont utilisées dans la section 4.2.

**4.1.2.1. Historique.** Les algèbres Koszul sont introduites par Priddy [77]. Dans son article, il construit certaines résolutions, appelées *résolutions de Koszul*, lui permettant de calculer les groupes Tor associés à une algèbre. La terminologie qu'il emploie provient du fait que la construction de ces résolutions est inspirée par celles introduites par Koszul pour étudier l'homologie et la cohomologie des algèbres de Lie [62]. Les algèbres considérées par Priddy sont quadratiques. Il exhibe pour celles-ci un candidat pour obtenir une résolution qu'est le *complexe de Koszul*. Étant donnée une algèbre quadratique  $\mathbf{A}$ , le complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$  est un complexe de modules libres

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{A} \otimes J_n \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{A} \otimes J_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{A} \otimes J_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{A} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{K} \longrightarrow 0.$$

L'intérêt de ce complexe est que, lorsqu'il s'agit d'une résolution, celle-ci est minimale et donc on a

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \simeq J_n.$$

En particulier, lorsqu'il s'agit d'une résolution, ce complexe offre une méthode pour calculer  $\mathrm{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$ . Les algèbres Koszul sont alors précisément celles dont le complexe de Koszul est une résolution de  $\mathbb{K}$ .

Dans [12], Berger étend la notion de Koszulté au cas des *algèbres homogènes*, c'est-à-dire, les algèbres graduées engendrées par leurs éléments de degré 1 telles que ces éléments vérifient des relations homogènes d'un certain degré  $N$ . Il est motivé par les algèbres *d'Artin-Schelter* [4], celles-ci étant homogènes non quadratiques et admettant des résolutions minimales vérifiant des propriétés analogues à celles des algèbres Koszul.

On mentionne enfin que, plus récemment, différents auteurs ont proposé des généralisations de la notion de Koszulté (voir point 2 de la remarque 4.1.2.16) dans des directions différentes. Certain de ces auteurs sont notamment motivés par le fait que la notion de Koszulté au sens de Berger n'est pas stable sous certaines opérations. Dans ce chapitre, la notion de Koszulté considérée est celle de Berger.

**4.1.2.2. Remarque.** Dans son article, Priddy considère en fait d'abord des algèbres  $\mathbf{A}$  admettant une présentation  $\langle X \mid R \rangle$  dont les relations sont des combinaisons linéaires de termes quadratiques et linéaires, c'est-à-dire, telle que  $R$  est inclus dans  $\mathbb{K}X \oplus \mathbb{K}X^{(2)}$ . Si la famille

$$\{\bar{x}, x \in X\},$$

est libre dans  $\mathbf{A}$ , alors  $\langle X \mid R \rangle$  est dite *pré-Koszul*. Par la suite, Priddy se restreint aux présentations pré-Koszul qu'il qualifie d'*homogènes*, c'est-à-dire, dont la projection naturelle de  $R$  sur  $\mathbb{K}X$  est nulle. Une algèbre est dite *pré-Koszul homogène* si elle admet une telle présentation. Une algèbre pré-Koszul homogène est donc une algèbre quadratique dans le sens où on l'a introduit dans le paragraphe 1.3.1.7 du chapitre 1.

**4.1.2.3. Algèbres homogènes.** Soit

$$\mathbf{A} = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_n,$$

une algèbre graduée. Soit  $N$  un entier supérieur à 2. On rappelle que l'algèbre tensorielle sur  $\mathbf{A}_1$  est notée  $T(\mathbf{A}_1)$ . On dit que  $\mathbf{A}$  est *homogène de degré  $N$*  si le morphisme d'algèbres

$$T(\mathbf{A}_1) \xrightarrow{\pi} \mathbf{A},$$

défini par  $\pi(a) = a$  pour tout  $a \in \mathbf{A}_1$ , est surjectif et est tel que le noyau de  $\pi$  est engendré, en tant qu'idéal de  $T(\mathbf{A}_1)$ , par

$$R_{\mathbf{A}} = \ker(\pi) \cap \mathbf{A}_1^{\otimes N}.$$

**4.1.2.4. Remarque.** Lorsque  $N$  est égal à 2, on retrouve précisément la notion d'algèbre quadratique introduite en 1.3.1.7 du chapitre 1. Ainsi, une algèbre quadratique n'est rien d'autre qu'une algèbre homogène de degré 2.

**4.1.2.5. Algèbres augmentées.** Une algèbre  $\mathbf{A}$  est dite *augmentée* s'il existe une application  $\mathbb{K}$ -linéaire  $\varepsilon : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $\ker(\varepsilon)$  est un idéal et telle que  $\mathbf{A}$  admet une décomposition en somme directe

$$\mathbf{A} = \mathbb{K}1_{\mathbf{A}} \oplus \ker(\varepsilon).$$

Le morphisme  $\varepsilon$  est appelé l'*augmentation* de  $\mathbf{A}$ . Ce morphisme permet de munir  $\mathbb{K}$  d'une structure de  $\mathbf{A}$ -bi-module de la façon suivante :

$$a_1 \cdot \lambda \cdot a_2 = \varepsilon(a_1) \lambda \varepsilon(a_2),$$

pour  $a_1, a_2 \in \mathbf{A}$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

**4.1.2.6. Algèbres homogènes et augmentations.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$ . En reprenant les notations de 4.1.2.3, on a pour tout entier  $n$  un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathbf{A}_n \simeq \frac{\mathbf{A}_1^{\otimes n}}{\ker(\pi) \cap \mathbf{A}_1^{\otimes n}}.$$

On a en particulier une décomposition

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \oplus \mathbf{A}_+,$$

où  $\mathbf{A}_0$  est égal à  $\mathbb{K}1_{\mathbf{A}}$  et l'espace vectoriel

$$\mathbf{A}_+ = \bigoplus_{n \geq 1} \mathbf{A}_n,$$

est un idéal bilatère de  $\mathbf{A}$ . Ainsi,  $\mathbf{A}$  est augmentée et son augmentation est le morphisme  $\mathbb{K}$ -linéaire

$$\varepsilon : \mathbf{A} \rightarrow \mathbb{K},$$

défini par

$$\varepsilon(1_{\mathbf{A}}) = 1_{\mathbb{K}} \text{ et } \varepsilon(\mathbf{A}_+) = 0.$$

En particulier,  $\mathbb{K}$  admet une structure de  $\mathbf{A}$ -module à gauche et de  $\mathbf{A}$ -module à droite. En voyant  $\mathbb{K}$  comme un espace vectoriel gradué concentré en degré 0, les structures de  $\mathbf{A}$ -modules (à gauche et à droite) sur  $\mathbb{K}$  en font un module gradué.



**4.1.2.7. Présentations homogènes.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$ . Une *présentation homogène* de  $\mathbf{A}$  est un couple  $\langle (X, \langle \rangle) \mid R \rangle$  tel que

1.  $R$  est inclus dans  $\mathbb{K}X^{(N)}$ ,
2. il existe un isomorphisme  $\varphi$  entre  $\mathbb{K}X$  et  $\mathbf{A}_1$ ,
3. la restriction de  $\varphi^{\otimes N}$  à  $\mathbb{K}R$  induit un isomorphisme entre ce dernier et  $R_{\mathbf{A}}$ .

**4.1.2.8. La suite diagonale.** Soient  $N$  un entier et  $\ell_N : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  la fonction définie pour tout entier  $k$  par

$$\begin{aligned}\ell_N(2k) &= kN, \text{ et} \\ \ell_N(2k+1) &= kN+1.\end{aligned}$$

On écrit  $\ell_N$  comme une suite :

$$\ell_N = (0, 1, N, N+1, 2N, 2N+1, \dots).$$

En particulier,  $\ell_2$  est la suite identité :

$$\ell_2 = (0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots),$$

de sorte que l'ensemble des couples de la forme  $(n, \ell_2(n))$  est la diagonale de  $\mathbb{N}^2$ . Par extension, la suite  $\ell_N$  est appelée la *suite diagonale*.

**4.1.2.9. Proposition [14, Proposition 2.1].** Soient  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$  et  $n$  un entier. Pour tout entier  $m$  inférieur à  $\ell_N(n)$ , on a :

$$\mathrm{Tor}_{n,(m)}^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = \{0\}.$$

La proposition précédente signifie que l'espace vectoriel  $\mathrm{Tor}^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K})$  est concentré au-dessus de la diagonale de  $\mathbb{N}^2$  contenant les points  $(n, \ell_N(n))$ . Avec ce point de vue, la propriété de Koszulité s'énonce comme étant une condition de minimalité :

**4.1.2.10. Définition.** Une algèbre  $\mathbf{A}$  homogène de degré  $N$  est dite *Koszul* si, pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $m$  est différent de  $\ell_N(n)$ , on a :

$$\mathrm{Tor}_{n,(m)}^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = \{0\}.$$

Dans la suite de ce chapitre, on va voir que la réécriture permet de prouver la Koszulité de certaines algèbres. On a pour cela besoin du résultat classique suivant (voir par exemple [76]) :

**4.1.2.11. Proposition.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$ . Alors,  $\mathbf{A}$  est de type Koszul si et seulement s'il existe une résolution libre de  $\mathbb{K}$  dans  $\mathbf{A}\mathrm{Mod}_g$

$$\dots \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{F}_2 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{F}_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{F}_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{K} \longrightarrow 0,$$

telle que, pour tout entier  $n$ , le module  $\mathbf{F}_n$  est pur en degré  $\ell_N(n)$ .

**4.1.2.12. Remarque.** Une résolution comme celle de la proposition 4.1.2.11 est appelée une résolution *sur la diagonale* puisque chaque  $\mathbf{F}_n$  est de la forme

$$\mathbf{F}_n = \mathbf{A} \otimes V_{\ell_N(n)},$$

où  $V_{\ell_N(n)}$  est un espace vectoriel gradué, concentré en degré  $\ell_N(n)$ .

**4.1.2.13. Le complexe de Koszul.** Dans ce paragraphe on rappelle la construction du *complexe de Koszul* d'une algèbre homogène. Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$  et soit  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation homogène de  $\mathbf{A}$ . On considère la famille d'espaces vectoriels  $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$J_0 = \mathbb{K}, \quad J_1 = \mathbb{K}X, \quad J_2 = \mathbb{K}R,$$

et, pour tout entier  $n$  supérieur à 3,

$$J_n = \bigcap_{i=0}^{\ell_N(n)-N} \mathbb{K}X^{(i)} \otimes \mathbb{K}R \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n)-N-i)}.$$

Soit  $n$  un entier. Pour tout  $w \in X^{(\ell_N(n+1))}$ , soient  $w_1 \in X^{(\ell_N(n+1)-\ell_N(n))}$  et  $w_2 \in X^{(\ell_N(n))}$  tels que  $w = w_1 w_2$ . On introduit l'application  $\mathbf{A}$ -linéaire :

$$\begin{aligned} F_{n+1}: \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n+1))} &\longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))}. \\ 1_{\mathbf{A}} \otimes w &\longmapsto \overline{w_1} \otimes w_2 \end{aligned}$$

On rappelle d'après [12, Section 3] que le *complexe de Koszul* de  $\mathbf{A}$  est le complexe  $(K_{\bullet}, \partial)$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{A} \otimes J_n \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{A} \otimes J_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{A} \otimes J_1 \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{A} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0,$$

où  $\partial_n$  est la restriction de  $F_n$  à  $\mathbf{A} \otimes J_n$ .

**4.1.2.14. Remarques.**

1. Soit  $n$  un entier. Les deux remarques suivantes garantissent que le complexe de Koszul est bien défini.

(a) On a l'inclusion

$$J_{n+1} \subset \mathbb{K}X^{(\ell_N(n+1)-\ell_N(n))} \otimes J_n.$$

Ainsi,  $F_{n+1}(\mathbf{A} \otimes J_{n+1})$  est inclus dans  $\mathbf{A} \otimes J_n$ .

(b) On suppose que  $n$  est supérieur à 1. On a l'inclusion

$$J_{n+1} \subset \mathbb{K}R \otimes J_{n-1}.$$

Ainsi, la restriction de  $F_n \circ F_{n+1}$  à  $\mathbf{A} \otimes J_{n+1}$  s'annule.

2. Les différentielles du complexe de Koszul sont des morphismes de degré 0. En particulier, le complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$  induit, pour tout entier  $m$ , un complexe  $(K_{\bullet}^{(m)}, \partial)$  d'espaces vectoriels gradués concentrés en degré  $m$ .

**4.1.2.15. Proposition [12, Proposition 2.12].** *Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène. Alors,  $\mathbf{A}$  est de type Koszul si et seulement si son complexe de Koszul est une résolution de  $\mathbb{K}$ .*

#### 4.1.2.16. Remarques.

1. Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre de type Koszul. Alors, le complexe de Koszul est une résolution minimale de  $\mathbb{K}$  (voir [12, Section 2]). Ainsi, d'après 4.1.1.8, pour tout entier  $n$ , on a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$\mathrm{Tor}_n^{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \simeq J_n.$$

2. Il existe d'autres caractérisations de la Koszulité. Par exemple (voir [12, Proposition 2.14] ou [43, Corollaire 4.1]) en termes *d'algèbre de Yoneda*

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{A}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Ext}_{\mathbf{A}}^n(\mathbb{K}, \mathbb{K}).$$

Pour une définition des groupes  $\mathrm{Ext}_{\mathbf{A}}^n$  voir [53, Section IV.7]. Le point de vue utilisant l'algèbre de Yoneda est celui utilisé par plusieurs auteurs [67, 32, 49] pour généraliser la notion de Koszulité.

3. On rappelle d'après [76] que les algèbres Koszul apparaissent :
  - (a) en géométrie algébrique où des anneaux de coordonnées projectifs [57, 16], homogènes [31, 55, 74] ou de courbes [88, 38] sont Koszul, ainsi que certains anneaux de fonctions régulières [58] ou de sections de fibrés en droite [73],
  - (b) en topologie où la catégorie des faisceaux pervers sur les espaces triangulés sont équivalentes à des catégories de modules sur une algèbre Koszul [75, 89], où la propriété de rationalité  $K[\pi, 1]$  est caractérisée par la Koszulité d'algèbres de cohomologie [72] ou encore où des algèbres d'holonomie associées à des arrangements hyperplans sont Koszul [78],
  - (c) en théorie des représentations où certaines sous-catégories de la catégorie  $\mathcal{O}$  sont équivalentes à des catégories de modules de type fini sur des algèbres Koszul [9, 10, 6], cela permettant de résoudre un cas particulier de la conjecture de Kazhdan–Lusztig [56, 45],
  - (d) en combinatoire où la série de Hilbert d'une algèbre Koszul est reliée à celle de son dual [44, 63, 13], cela permettant notamment de généraliser [52, 51] le théorème maître de MacMahon [69],
  - (e) en physique où les algèbres de Yang–Mills sont des algèbres Koszul [39, 40],
  - (f) en géométrie non commutative [18, 19, 84].

## 4.2 Preuves de Koszulité par réécriture

### 4.2.1 Opérateurs de réduction et Koszulité

Dans cette section, on présente une preuve de Koszulité utilisant les présentations par opérateur. On doit au préalable rappeler la proposition 3.14 de [12] qui donne une condition suffisante de Koszulité en termes de treillis distributifs.

**4.2.1.1. Treillis distributifs.** Un treillis  $(E, \leq, \wedge, \vee)$  est dit *distributif* si, pour tout triplet  $(e_1, e_2, e_3)$  d'éléments de  $E$ , on a

$$e_1 \wedge (e_2 \vee e_3) = (e_1 \wedge e_2) \vee (e_1 \wedge e_3).$$

De façon équivalente, cela signifie que, pour tout triplet  $(e_1, e_2, e_3)$  d'éléments de  $E$ , on a

$$(e_1 \wedge e_2) \vee e_3 = (e_1 \vee e_3) \wedge (e_2 \vee e_3).$$

**4.2.1.2. Distributivité et résolutions.** Soit  $W$  un espace vectoriel. Soit  $\mathcal{L}(W)$  le treillis des sous-espaces de  $W$  : l'ordre sur  $\mathcal{L}(W)$  est l'inclusion, la borne inférieure est l'intersection et la borne supérieure est la somme. Soit  $\mathcal{L}$  un sous-treillis de  $\mathcal{L}(W)$  engendré par un nombre fini d'éléments  $W_1, \dots, W_k$ . On rappelle d'après [76] comment caractériser le fait que  $\mathcal{L}$  est distributif en termes de suites exactes.

On note  $\partial_0$  le morphisme d'inclusion

$$\bigcap_{i=1}^k W_i \xrightarrow{\partial_0} \bigcap_{i=2}^k W_i.$$

Pour tout entier  $j$  tel que  $2 \leq j \leq k-1$ , on note

$$\mathbf{C}_j = \frac{\bigcap_{i=j+1}^k W_i}{\left( \bigcap_{i=j+1}^k W_i \right) \cap \left( \sum_{i=1}^{j-1} W_i \right)}.$$

On note  $\partial_1$  la projection

$$\bigcap_{i=2}^k W_i \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{C}_2 = \frac{\bigcap_{i=3}^k W_i}{\left( \bigcap_{i=3}^k W_i \right) \cap W_1}.$$

La composée  $\partial_1 \circ \partial_0$  est en particulier égale au morphisme nul. Pour tout entier  $j \in \{2, \dots, k-2\}$ , on note  $\partial_j$  le morphisme naturel

$$\mathbf{C}_j \xrightarrow{\partial_j} \mathbf{C}_{j+1}.$$

On vérifie que pour tout entier  $j$  tel que  $1 \leq j \leq k-3$ ,  $\partial_{j+1} \circ \partial_j$  est le morphisme nul. On note  $\partial_{k-1}$  le morphisme naturel

$$\mathbf{C}_{k-1} = \frac{W_k}{W_k \cap \left( \sum_{i=1}^{k-2} W_i \right)} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \frac{W}{\sum_{i=1}^{k-1} W_i}.$$

On vérifie que  $\partial_{k-1} \circ \partial_{k-2}$  est le morphisme nul. Enfin, on note  $\partial_k$  la projection canonique

$$\frac{W}{\sum_{i=1}^{k-1} W_i} \xrightarrow{\partial_k} \frac{W}{\sum_{i=1}^k W_i}.$$

On vérifie que  $\partial_k \circ \partial_{k-1}$  est le morphisme nul. On obtient donc un complexe  $\mathbf{C}_{\mathcal{L}}$  d'espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow \bigcap_{i=1}^k W_i \xrightarrow{\partial_0} \bigcap_{i=2}^k W_i \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{C}_2 \xrightarrow{\partial_2} \dots \xrightarrow{\partial_{j-1}} \mathbf{C}_j \xrightarrow{\partial_j} \dots \xrightarrow{\partial_{k-2}} \mathbf{C}_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \frac{W}{\sum_{i=1}^{k-1} W_i} \xrightarrow{\partial_k} \frac{W}{\sum_{i=1}^k W_i} \longrightarrow 0.$$

On rappelle d'après [76, Proposition 7.2] que  $\mathcal{L}$  est distributif si et seulement si  $\mathbf{C}_{\mathcal{L}}$  est une suite exacte.

**4.2.1.3. Algèbres distributives.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$ . Pour tout entier  $m$ , soit  $\mathcal{L}_m^{\mathbf{A}}$  le sous-treillis de  $\mathcal{L}(\mathbf{A}_1^{\otimes m})$  engendré par les éléments de la forme

$$\mathbf{A}_1^{\otimes i} \otimes R_{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{A}_1^{\otimes j},$$

où  $i$  et  $j$  vérifient  $i + j + N = m$ . L'algèbre  $\mathbf{A}$  est dite *distributive* si, pour tout entier  $m$ , le treillis  $\mathcal{L}_m^{\mathbf{A}}$  est distributif.

**4.2.1.4. Remarque.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$  et soit  $\langle\langle X, < \mid R \rangle\rangle$  une présentation homogène de  $\mathbf{A}$ . Pour tout entier  $m$ , soit  $\mathcal{L}_m^{\langle\langle X, < \mid R \rangle\rangle}$  le sous treillis de  $\mathcal{L}(\mathbb{K}X^{(m)})$  engendré par les éléments de la forme

$$\mathbb{K}X^{(i)} \otimes \mathbb{K}R \otimes \mathbb{K}X^{(j)},$$

où  $i$  et  $j$  vérifient  $i + j + N = m$ . Alors, l'algèbre  $\mathbf{A}$  est distributive si et seulement si, pour tout entier  $m$ , le treillis  $\mathcal{L}_m^{\langle\langle X, < \mid R \rangle\rangle}$  est distributif.

**4.2.1.5. Distributivité et Koszulité.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre quadratique. Alors, pour tout entier  $m$ , le complexe  $\mathbf{C}_{\mathcal{L}_m^{\mathbf{A}}}$  est une suite exacte si et seulement si le complexe  $(K_{\bullet}^{(m)}, \partial)$  introduit dans la remarque 4.1.2.14 est une suite exacte. Grâce à la proposition 4.1.2.15, on en déduit le théorème de Backelin :

**4.2.1.6. Théorème [7].** *Une algèbre quadratique est Koszul si et seulement si elle est distributive.*

**4.2.1.7. L'extra-condition.** Dans le cas homogène non quadratique, si  $m$  n'est pas divisible par  $N$  ou n'est pas congru à 1 modulo  $N$ , alors le complexe  $(K_{\bullet}^{(m)}, \partial)$  n'est pas de la forme  $\mathbf{C}_{\mathcal{L}_m^{\mathbf{A}}}$ . En particulier, une algèbre distributive non quadratique n'est pas nécessairement de type Koszul (voir la remarque 4.2.1.23 pour un contre exemple). Pour qu'une telle algèbre soit de type Koszul, il faut donc une condition supplémentaire (voir [12, Section 2] pour une étude détaillée du lien entre distributivité et Koszulité).

Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$ . On dit que  $\mathbf{A}$  satisfait *l'extra-condition* si, pour tout entier  $m$  tel que  $2 \leq m \leq N - 1$ , on a l'inclusion suivante :

$$(\mathbf{A}_1^{\otimes m} \otimes R_{\mathbf{A}}) \cap (R_{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{A}_1^{\otimes m}) \subset \mathbf{A}_1^{\otimes m-1} \otimes R_{\mathbf{A}} \otimes \mathbf{A}_1.$$

**4.2.1.8. Remarques.**

1. Soit  $\langle\langle X, < \mid R \rangle\rangle$  une présentation homogène de  $\mathbf{A}$ . Alors,  $\mathbf{A}$  satisfait l'extra-condition si et seulement si, pour tout entier  $m$  tel que  $2 \leq m \leq N - 1$ , on a l'inclusion suivante :

$$(\mathbb{K}X^{(m)} \otimes \mathbb{K}R) \cap (\mathbb{K}R \otimes \mathbb{K}X^{(m)}) \subset \mathbb{K}X^{(m-1)} \otimes \mathbb{K}R \otimes \mathbb{K}X.$$

2. Lorsque  $N$  est égal à 2, l'extra-condition est vide de sorte que toutes les algèbres quadratiques la satisfont.

**4.2.1.9. Proposition [12, Proposition 3.4].** *Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène distributive. Alors,  $\mathbf{A}$  est de type Koszul si et seulement si elle satisfait l'extra-condition.*

On va voir que si  $\mathbf{A}$  admet une présentation par opérateur admettant de bonnes propriétés (voir 4.2.1.17), alors elle est distributive. Cela permet, grâce à la proposition 4.2.1.9, d'avoir une condition suffisante de Koszulté en termes de présentation par opérateur. On doit au préalable rappeler certains résultats de [11] concernant les propriétés de treillis d'opérateurs de réduction relativement à un ensemble fini totalement ordonné.

**4.2.1.10. Définition.** Soit  $(G, <)$  un ensemble bien ordonné. Soit  $F$  une famille d'opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ . On dit que  $F$  est *2-confluente* si toute paire  $(T_1, T_2)$  telle que  $T_1$  et  $T_2$  appartiennent à  $F$  est confluente.

**4.2.1.11. Proposition [11, Proposition 2.11].** *Soit  $(G, <)$  un ensemble fini totalement ordonné. Soit  $F$  une famille 2-confluente d'opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ . Alors, le sous-treillis de  $\mathbf{RO}(G, <)$  engendré par  $F$  est 2-confluent.*

**4.2.1.12. Remarque.** Pour prouver la proposition 4.2.1.11, Berger utilise un argument faisant intervenir des dimensions d'espaces vectoriels. Cet argument fonctionne car  $G$  est un ensemble fini.

Afin d'étudier les propriétés de distributivité de certains treillis d'opérateurs de réduction, on a besoin du lemme suivant :

**4.2.1.13. Lemme.** *Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux treillis. Soit  $\varphi : T_1 \rightarrow T_2$  un morphisme de treillis strictement croissant. Alors,  $\varphi$  est injectif.*

*Démonstration.* On suppose par l'absurde qu'il existe deux éléments distincts  $a$  et  $b$  de  $T_1$  tels que  $\varphi(a)$  et  $\varphi(b)$  sont égaux. On note

$$\begin{aligned} c &= \varphi(a) \\ &= \varphi(b). \end{aligned}$$

En particulier,  $\varphi$  étant un morphisme de treillis, on a

$$\begin{aligned} \varphi(a \vee b) &= \varphi(a) \vee \varphi(b) \\ &= c. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Or,  $a$  et  $b$  étant différents,  $a \vee b$  est différent de  $a$  et de  $b$ . Le morphisme  $\varphi$  étant strictement croissant,  $\varphi(a)$  et  $\varphi(b)$  sont strictement inférieurs à  $\varphi(a \vee b)$ , ce qui contredit (4.7). Ainsi,  $\varphi$  est injectif. □

**4.2.1.14. Propriétés de treillis.** Soit  $(G, <)$  un ensemble bien ordonné. Soit  $P = (T_1, T_2)$  une paire d'opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ . On rappelle que lorsque  $P$  est confluente, alors on a les égalités

$$\text{Red}(T_1 \wedge T_2) = \text{Red}(T_1) \cap \text{Red}(T_2) \quad \text{et} \quad \text{Red}(T_1 \vee T_2) = \text{Red}(T_1) \cup \text{Red}(T_2). \tag{4.8}$$

On suppose que  $G$  est fini et soit  $\mathcal{P}(G)$  l'ensemble des parties de  $G$ . Soit  $F$  une famille 2-confluente d'opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ . Soit  $\mathcal{T}$  le sous-treillis de  $\mathbf{RO}(G, <)$  engendré par  $F$ . D'après la proposition 4.2.1.11,  $\mathcal{T}$  est 2-confluent. D'après les formules (4.8), la restriction de l'application

$$\begin{aligned} \text{Red}: \mathbf{RO}(G, <) &\longrightarrow \mathcal{P}(G), \\ T &\longmapsto \text{Red}(T) \end{aligned}$$

à  $\mathcal{T}$  est donc un morphisme de treillis. On rappelle de plus d'après le lemme 2.1.1.18 du chapitre 2 que

$$T_1 \preceq T_2 \implies \text{Red}(T_1) \subset \text{Red}(T_2).$$

Ainsi, Red est un morphisme de treillis croissant. Soit  $i = 1$  ou  $2$ . On rappelle que  $\ker(T_i)$  a pour base l'ensemble des  $g - T_i(g)$  où  $g \in \text{Nred}(T_i)$ . En notant  $|E|$  le cardinal d'un ensemble fini  $E$ , on a donc

$$\begin{aligned} \dim(\ker(T_i)) &= |\text{Nred}(T_i)| \\ &= |G| - |\text{Red}(T_i)|. \end{aligned}$$

Ainsi, si on a une inégalité stricte  $T_1 \prec T_2$ , c'est-à-dire, si l'inclusion  $\ker(T_2) \subset \ker(T_1)$  est stricte, alors l'inclusion  $\text{Red}(T_1) \subset \text{Red}(T_2)$  est elle-même stricte. Le morphisme Red est donc strictement croissant de sorte qu'il est injectif d'après le lemme 4.2.1.13. Le treillis des parties de  $G$  étant distributif, on en déduit que  $\mathcal{T}$  est distributif. On obtient donc :

**4.2.1.15. Proposition [11, Théorème 2.12].** *Soit  $(G, <)$  un ensemble fini totalement ordonné. Soit  $F$  une famille 2-confluente d'opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ . Alors, le sous-treillis de  $\mathbf{RO}(G, <)$  engendré par  $F$  est distributif.*

On peut à présent étudier sous quelles hypothèses sur une présentation par opérateur une algèbre  $\mathbf{A}$  est distributive.

**4.2.1.16. Présentations par opérateur homogènes.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$ . Une présentation par opérateur  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  de  $\mathbf{A}$  est dite *homogène* si le noyau de  $S$  est inclus dans  $\mathbb{K}X^{(N)}$  et si l'isomorphisme

$$\mathbf{A} \simeq \frac{\mathbb{K}X^*}{I(\ker(S))},$$

conserve la graduation. En notant  $R$  la base réduite de  $\ker(S)$ , la présentation  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est homogène si et seulement si  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  l'est. Dans la suite de cette section, lorsqu'on considère une présentation par opérateur homogène  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ , on note également par  $S$  la restriction de  $S$  à  $\mathbb{K}X^{(N)}$ .

**4.2.1.17. Présentations confluentes aux bords.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$  et soit  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  une présentation par opérateur homogène de  $\mathbf{A}$ . La présentation  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est dite *confluente aux bords* si, pour tout entier  $m$  tel que  $1 \leq m \leq N - 1$ , la paire d'opérateurs de réduction relativement à  $(X^{(N+m)}, <)$

$$P_m = (\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} \otimes S, S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}),$$

est confluente.

**4.2.1.18. Remarque.** On suppose que  $N$  est égal à 2 et soit  $R$  la base réduite de  $\ker(S)$ . D'après le théorème 1.3.1.12 du chapitre 1, la présentation  $\langle\langle X, < \mid S \rangle\rangle$  est confluente aux bords si et seulement si la présentation  $\langle\langle X, < \mid R \rangle\rangle$  est convergente.

Dans le paragraphe 4.2.1.21, on a besoin du lemme 4.2.1.20. Pour énoncer ce lemme, on a besoin de la définition suivante :

**4.2.1.19. Anti-isomorphisme de treillis.** Soient  $(T_1, <_1, \wedge_1, \vee_1)$  et  $(T_2, <_2, \wedge_2, \vee_2)$  deux treillis. Un *anti-isomorphisme* de treillis est une application bijective

$$\varphi : T_1 \longrightarrow T_2,$$

telle que, pour  $t, t' \in T_1$ , on a

$$\varphi(t \wedge_1 t') = \varphi(t) \vee_2 \varphi(t') \quad \text{et} \quad \varphi(t \vee_1 t') = \varphi(t) \wedge_2 \varphi(t').$$

**4.2.1.20. Lemme.** Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux treillis. Soit  $\varphi : T_1 \longrightarrow T_2$  un anti-isomorphisme de treillis. Si  $T_1$  est distributif, alors  $T_2$  est distributif.

*Démonstration.* Soient  $a, b$  et  $c$  trois éléments de  $T_2$ . L'application  $\varphi$  étant une bijection, il est suffisant de montrer qu'on a l'égalité

$$\varphi^{-1}(a \wedge (b \vee c)) = \varphi^{-1}((a \wedge b) \vee (a \wedge c)). \quad (4.9)$$

L'application  $\varphi$  étant un anti-isomorphisme de treillis, on a

$$\varphi^{-1}(a \wedge (b \vee c)) = \varphi^{-1}(a) \vee (\varphi^{-1}(b) \wedge \varphi^{-1}(c)).$$

De plus, le treillis  $T_1$  étant distributif, on a

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}((a \wedge b) \vee (a \wedge c)) &= (\varphi^{-1}(a) \vee \varphi^{-1}(b)) \wedge (\varphi^{-1}(a) \vee \varphi^{-1}(c)) \\ &= (\varphi^{-1}(a) \wedge (\varphi^{-1}(a) \vee \varphi^{-1}(c))) \vee (\varphi^{-1}(b) \wedge (\varphi^{-1}(a) \vee \varphi^{-1}(c))) \\ &= \varphi^{-1}(a) \vee (\varphi^{-1}(b) \wedge \varphi^{-1}(a)) \vee (\varphi^{-1}(b) \wedge \varphi^{-1}(c)) \\ &= \varphi^{-1}(a) \vee (\varphi^{-1}(b) \wedge \varphi^{-1}(c)). \end{aligned}$$

Ainsi, la formule (4.9) est satisfaite et donc  $T_2$  est distributif.  $\square$

**4.2.1.21. Présentations confluentes aux bords et distributivité.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$  et soit  $\langle\langle X, < \mid S \rangle\rangle$  une présentation par opérateur confluente aux bords de  $\mathbf{A}$  telle que  $X$  est fini. Pour tout couple d'entiers  $(m, i)$  tel que  $m \geq N$  et  $0 \leq i \leq m - N$ , on pose

$$S_i^{(m)} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(i)}} \otimes S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m-i-N)}}.$$

Il s'agit d'un opérateur de réduction relativement à  $(X^{(m)}, <)$ .

Soit  $m$  un entier supérieur à  $N$ . Soit  $\mathcal{T}_m$  le sous-treillis de  $\mathbf{RO}(X^{(m)}, <)$  engendré par  $S_0^{(m)}, \dots, S_{m-N}^{(m)}$ . La présentation  $\langle\langle X, < \mid S \rangle\rangle$  étant confluente aux bords, on en déduit (voir [12, Section 3]) que  $\mathcal{T}_m$  est 2-confluent et donc distributif d'après la proposition 4.2.1.15. De plus, l'application

$$\ker : \mathbf{RO}(X^{(m)}, <) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}X^{(m)}),$$



est un anti-isomorphisme de treillis par définition de l'ordre sur  $\mathbf{RO}(X^{(m)}, <)$ . D'après le lemme 4.2.1.20, le treillis

$$\mathcal{L}_m^{\langle (X, <) | \ker(S) \rangle} = \ker(\mathcal{T}_m),$$

est donc distributif. Ainsi, une algèbre admettant une présentation confluente aux bords est distributive. On obtient donc

**4.2.1.22. Théorème [12].** *Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène admettant une présentation  $\langle (X, <) | S \rangle$  confluente aux bords telle que  $X$  est fini. Alors,  $\mathbf{A}$  est de type Koszul si et seulement si elle satisfait l'extra-condition.*

**4.2.1.23. Remarque.** Soit  $\mathbf{A}$  l'algèbre présentée par  $\langle (\{x, y\}, <) | S \rangle$ , où  $<$  est un ordre monomial quelconque et  $S$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{K}X^{(3)}$  défini sur la base  $X^{(3)}$  par

$$S(w) = \begin{cases} 0, & \text{si } w = xyx \\ w, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les opérateurs  $(\text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S) \circ (S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X})$  et  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}) \circ (\text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)$  envoient  $xyxx, xyxy, xxyx$  et  $xyyx$  sur 0 et fixe tous les autres mots de longueur 4. En particulier, ils sont égaux, de sorte que  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)$  est confluente d'après le lemme 2.2.1.3 du chapitre 2. De plus, les opérateurs  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(2)}}) \circ (\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(2)}} \otimes S)$  et  $(\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(2)}} \otimes S) \circ (S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(2)}})$  envoient les mots de la forme  $xyxw$  et  $wxyx$  avec  $w \in X^{(2)}$  sur 0 et fixent tous les autres mots de longueur 5. Ainsi,  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(2)}}, \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(2)}} \otimes S)$  est également confluente. La présentation  $\langle (X, <) | S \rangle$  est donc confluente aux bords, de sorte que  $\mathbf{A}$  est distributive.

De plus, on a

$$\begin{aligned} \left( \mathbb{K}^{(2)} \otimes \ker(S) \right) \cap \left( \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(2)} \right) &= \mathbb{K}xyyx \text{ et} \\ \mathbb{K}X \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X &= \mathbb{K}xyyx \oplus \mathbb{K}xyxy \oplus \mathbb{K}yxxy \oplus \mathbb{K}xyxy. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathbf{A}$  ne satisfait pas l'extra-condition et donc  $\mathbf{A}$  n'est pas de type Koszul.

On vérifie que le complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$  n'est pas une résolution de  $\mathbb{K}$  : l'espace vectoriel  $J_3$  est réduit à  $\{0\}$  et la différentielle

$$\partial_2 : \mathbf{A} \otimes \ker(S) \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X,$$

est définie par

$$\partial_2(1_{\mathbf{A}} \otimes xyx) = \overline{xy} \otimes x.$$

Ainsi,  $\overline{xy} \otimes xyx$  appartient au noyau de  $\partial_2$ . On a donc une inclusion stricte

$$\text{im}(\partial_3) \subsetneq \ker(\partial_2).$$

## 4.2.2 La résolution d'Anick

Dans cette section, on présente une autre preuve de Koszulté en termes de réécriture. Celle-ci est basée sur le fait que les présentations convergentes permettent de construire des résolutions de modules.

Dans toute cette section, on fixe une algèbre  $\mathbf{A}$  et une présentation convergente  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$  de  $\mathbf{A}$ . On suppose sans perte de généralité que  $\text{lc}(f)$  est égal à 1 pour tout  $f \in R$ . On rappelle que le système de réécriture  $\left(\mathbb{K}X^*, \xrightarrow{R}\right)$  associé à  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$  est

$$\lambda w_1 \text{lm}(f) w_2 + g \xrightarrow{R} \lambda w_1 (\text{lm}(f) - f) w_2 + g,$$

où

1.  $w_1$  et  $w_2$  appartiennent à  $X^*$ ,
2.  $\lambda$  est un scalaire non nul,
3.  $f$  appartient à  $R$ ,
4.  $g$  est un élément de  $\mathbb{K}X^*$  tel que  $w_1 \text{lm}(f) w_2$  n'appartient pas à son support.

En particulier, un mot est réductible si l'un de ses sous-mots appartient à  $\text{lm}(R)$  et est en forme normale sinon.

**4.2.2.1. Chaînes d'Anick.** On rappelle d'après [2] les notions de *n-chaîne* et de *queue* d'une *n-chaîne*. La seule  $-1$ -chaîne est  $1_{\mathbf{A}}$  qui est sa propre queue. Les  $0$ -chaînes sont les éléments de  $X$  qui sont également leurs propres queues. Une *n-chaîne* est un mot  $wt$  tel que

1.  $w$  est une  $n - 1$ -chaîne,
2.  $t$  est en forme normale,
3. en notant  $t'$  la queue de  $w$  et en posant

$$t't = x_1 \cdots x_k,$$

alors  $t't$  est réductible d'une unique façon, et cette unique réduction s'applique sur un sous-mot de la forme  $x_j \cdots x_k$ , avec  $j \in \{1, \dots, k - 1\}$ .

Dans ce cas,  $t$  est la queue de la *n-chaîne*  $wt$ . Pour tout entier  $n$ , on note

$$\mathbf{C}_n = \{n - \text{chaînes}\},$$

l'ensemble des *n-chaînes*.

**4.2.2.2. Remarques.**

1. On a

$$\mathbf{C}_2 = \text{lm}(R).$$

2. La définition de *n-chaîne* que donne Anick est plus générale. Cette définition dépend de ce qu'Anick appelle des *obstructions*. Dans le cas où on considère une algèbre admettant une présentation convergente  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$ , ces obstructions sont précisément les éléments de  $\text{lm}(R)$  et la définition de *n-chaîne* d'Anick coïncide avec 4.2.2.1.
3. Dans le cas où  $\mathbf{A}$  est une algèbre homogène de degré  $N$  et  $\langle\langle X, < \rangle \mid R \rangle$  est une présentation homogène convergente de  $\mathbf{A}$ , alors la condition 3 de 4.2.2.1 signifie que pour tout entier  $i$  tel que  $1 \leq i \leq k - N$ , le mot  $x_i \cdots x_{i+N}$  n'est pas réductible mais que le mot  $x_{k-N+1} \cdots x_k$  est réductible.

**4.2.2.3. Exemple.** Soient

$$X = \{x_1 < \cdots < x_r\} \text{ et } R = \{x_j x_i - x_i x_j, 1 \leq i < j \leq r\}.$$

On montre par récurrence sur  $n$  que

$$\mathbf{C}_n = \{x_{i_n} \cdots x_{i_1}, i_1 < \cdots < i_n\},$$

si  $n$  est inférieur ou égal à  $r$  et

$$\mathbf{C}_n = \emptyset,$$

si  $n$  est strictement supérieur à  $r$ .

**4.2.2.4. La résolution d'Anick.** On suppose que  $\mathbf{A}$  est augmentée :

$$\mathbf{A} = \mathbb{K}1_{\mathbf{A}} \oplus \mathbf{A}_+,$$

et soit

$$\varepsilon: \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{K},$$

le morphisme d'augmentation. On rappelle d'après [2, Théorème 1.4] qu'on a une résolution de  $\mathbb{K}$ , vu comme  $\mathbf{A}$ -module à gauche, dans  $\mathbf{A}\text{Mod}$

$$\cdots \xrightarrow{\partial_4} \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}\mathbf{C}_2 \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}\mathbf{C}_1 \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}\mathbf{C}_0 = \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}\mathbf{C}_{-1} = \mathbf{A} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0. \quad (4.10)$$

**4.2.2.5. Remarque.** Pour obtenir une telle résolution, Anick construit en même temps les différentielles et une homotopie contractante de (4.10), ce qui lui permet de prouver qu'il s'agit effectivement d'une résolution. Pour construire cette homotopie contractante, il identifie (en tant qu'espace vectoriel) l'algèbre  $\mathbf{A}$  au sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}X^*$  engendré par les mots en formes normales. Cela est possible car on fait l'hypothèse que l'algèbre  $\mathbf{A}$  admet une présentation convergente, c'est-à-dire, qu'un tel isomorphisme existe d'après le lemme du diamant.

**4.2.2.6. Résolution d'Anick et Koszulité.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$  et soit  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation homogène convergente de  $\mathbf{A}$ . Les modules libres apparaissant dans la résolution d'Anick ont une graduation induite par la longueur des  $n$ -chaînes. De plus, par définition des différentielles de la résolution d'Anick, celles-ci conservent la graduation. En particulier, la résolution d'Anick est une résolution de  $\mathbb{K}$  par des  $\mathbf{A}$ -modules à gauche gradués. On montre de plus par récurrence que lorsque  $N$  est égal à 2, alors les  $n$ -chaînes sont de longueur  $n + 1$ . Ainsi, dans ce cas, la résolution d'Anick est sur la diagonale. On déduit donc de la proposition 4.1.2.11 :

**4.2.2.7. Théorème [2].** *Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre admettant une présentation quadratique convergente. Alors,  $\mathbf{A}$  est de type Koszul.*

**4.2.2.8. Présentations de Poincaré-Birkhoff-Witt.** Le théorème 4.2.2.7 est initialement démontré par Priddy [77, Théorème 5.3]. Soit  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  une présentation quadratique de  $\mathbf{A}$ . On pose

$$E^{(1)} = X,$$

et pour tout entier  $n \geq 2$ ,

$$E^{(n)} = \{x_1 \cdots x_n, x_i \in X \text{ et } x_i x_{i+1} \notin \text{lm}(R) \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n-1\}.$$

En posant

$$E = \bigcup_{n \geq 1} E^{(n)},$$

on dit que  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est une *présentation de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW)* de  $\mathbf{A}$  si

$$\mathcal{B} = \{\bar{e}, e \in E\},$$

est une base de  $\mathbf{A}^1$ . D'après le lemme du diamant,  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbf{A}$  si et seulement si  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est une présentation convergente. La formulation de 4.2.2.7 devient donc

**4.2.2.9. Théorème [77, Théorème 5.3].** *Une algèbre admettant une présentation PBW est Koszul.*

#### 4.2.2.10. Remarques.

1. La preuve que propose Priddy est basée sur le fait que lorsqu'une algèbre admet une présentation PBW, la résolution cobar [1] induit une résolution de  $\mathbb{K}$ , concentrée sur la diagonale. De plus, cette construction fait intervenir la base duale de  $\mathcal{B}$ . L'étude du lien entre une algèbre quadratique et son algèbre duale est l'objet de la *dualité de Koszul*, également introduite par Priddy et généralisée par Dotsenko et Vallette [43] pour les algèbres homogènes.
2. On rappelle le théorème de Berger : une algèbre homogène de degré  $N$  admettant une présentation confluyente aux bords est Koszul si et seulement si elle satisfait l'extra-condition. Or, lorsque  $N$  est égal à 2, on a vu que la condition de confluence aux bords signifie que  $\langle (X, <) \mid R \rangle$ , où  $R$  est la base réduite de  $\ker(S)$ , est convergente et que l'extra-condition est une condition vide. Ainsi, le théorème de Berger dans le cas où  $N$  est égal à 2 est la formulation du théorème de Priddy en termes d'opérateurs de réduction.
3. Il s'agit d'un fait général que la famille  $\mathcal{B}$  introduite en 4.2.2.8 est une famille génératrice (en tant qu'espace vectoriel) de  $\mathbf{A}$ . Ainsi, le critère de Koszullité proposé par Priddy concerne la liberté d'une telle famille. Seulement, étant donnée une algèbre quadratique quelconque,  $\mathcal{B}$  peut être infinie de sorte qu'il n'y a a priori pas de méthode générale permettant de tester si elle est libre. Cependant, d'après le lemme du diamant, la liberté de cette famille équivaut à ce que tous les branchements critiques sont confluyents. Or, si  $X$  est fini, alors il en est de même pour  $R$  (puisque ce dernier est inclus dans l'espace vectoriel de dimension finie  $\mathbb{K}X^{(2)}$ ) et donc il existe un nombre fini de branchements critiques. Le critère de Priddy se ramène donc à étudier si un nombre fini de branchements critiques sont confluyents et est donc possible à tester en pratique.

---

1. Suivant la terminologie de Priddy, cela équivaut à dire que  $\mathcal{B}$  est une base PBW de  $\mathbf{A}$ . On préfère cependant employer la terminologie de présentation PBW dans la mesure où la propriété que  $\mathcal{B}$  est une base ne dépend pas seulement de  $\mathbf{A}$  mais de la présentation choisie.

**4.2.2.11. Algèbres homogènes et résolution d'Anick.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$  admettant une présentation homogène convergente. Alors, la résolution d'Anick n'est pas nécessairement concentrée sur la diagonale. En effet, dans l'exemple de la remarque 4.2.1.23, il n'existe qu'une seule 2-chaîne :  $xyxyx$ . Cette dernière est de longueur 5 et non  $\ell_3(3) = 4$ .

Cependant, on va voir que sous l'hypothèse du théorème de Berger rappelé dans la remarque précédente, alors la résolution d'Anick est sur la diagonale. On a pour cela besoin de la proposition suivante :

**4.2.2.12. Proposition.** *Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$  satisfait l'extra-condition et admettant une présentation par opérateur confluyente aux bords  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ . Soit  $w = x_1 \cdots x_m$  la source d'un branchement critique pour  $\langle (X, <) \mid R \rangle$ , où  $R$  est la base réduite de  $\ker(S)$ . Alors, le mot  $x_{m-N} \cdots x_{m-1}$  est réductible pour  $\langle (X, <) \mid R \rangle$ .*

*Démonstration.* La présentation  $\langle (X, <) \mid R \rangle$  est homogène de degré  $N$ . En particulier, la longueur  $m$  de  $w$  est comprise entre  $N + 1$  et  $2N - 1$ . Si  $m = N + 1$ , il n'y a rien à prouver. On suppose donc que  $m$  est supérieur à  $N + 2$ .

On pose

$$S_1 = S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m-N)}} \text{ et } S_2 = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m-N)}} \otimes S.$$

La présentation  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  étant confluyente aux bords, la paire d'opérateurs de réduction  $(S_1, S_2)$  est confluyente. Ainsi, d'après le lemme 2.2.1.9 du chapitre 2, on a

$$\begin{aligned} \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} - S_1 \vee S_2 &= \text{L}(\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} - S_2, \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} - S_1) \\ &= \text{L}(\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} - S_1, \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} - S_2). \end{aligned}$$

De plus,  $w$  appartient à  $\text{Nred}(S_1) \cap \text{Nred}(S_2)$  et donc à  $\text{Nred}(S_1 \vee S_2)$  d'après le lemme 2.2.1.10 du chapitre 2. En particulier, on a

$$\text{lm}(w - S_1 \vee S_2(w)) = w.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \text{im}(\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} - S_1 \vee S_2) &= \ker(S_1 \vee S_2) \\ &= \ker(S_1) \cap \ker(S_2), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\text{im}(\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} - S_1 \vee S_2) = \mathbb{K}R \otimes \mathbb{K}X^{(m-N)} \cap \mathbb{K}X^{(m-N)} \otimes \mathbb{K}R.$$

L'algèbre  $\mathbf{A}$  satisfaisant l'extra-condition, on en déduit l'inclusion

$$\text{im}(\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} - S_1 \vee S_2) \subset \mathbb{K}X^{(m-N-1)} \otimes \mathbb{K}R \otimes \mathbb{K}X.$$

Il existe donc  $w_1, \dots, w_l \in X^{(m-N-1)}$ ,  $f_1, \dots, f_l \in R$ ,  $x_1, \dots, x_l \in X$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in \mathbb{K}$  tels que

$$w - S_1 \vee S_2(w) = \sum_{i=1}^l \lambda_i w_i f_i x_i.$$

Ainsi,  $\text{lm}(w - S_1 \vee S_2(w)) = w$  est égal à  $w_i \text{lm}(f_i) x_i$  pour un certain  $1 \leq i \leq l$ . On en déduit donc que  $x_{n-N} \cdots x_{m-1}$  est égal à  $\text{lm}(f_i)$  et donc que  $w$  est réductible pour  $\langle (X, <) \mid R \rangle$ .  $\square$

**4.2.2.13. Présentations confluentes aux bords et résolution d'Anick.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène de degré  $N$  satisfaisant l'extra-condition et admettant une présentation confluyente aux bords  $\langle\langle X, < \mid S \rangle\rangle$ . Soit  $R$  la base réduite de  $\ker(S)$ . On montre par récurrence grâce à la proposition 4.2.2.12 que les  $n$ -chaînes associées à la présentation  $\langle\langle X, < \mid R \rangle\rangle$  sont toutes de longueur  $\ell_N(n+1)$ . En particulier, la résolution d'Anick associée à  $\langle\langle X, < \mid R \rangle\rangle$  est sur la diagonale. On en déduit donc une autre preuve du théorème [12, Théorème 3.11] de Berger.



## Chapitre 5

# Algèbres de confluence et acyclicité du complexe de Koszul

Dans ce chapitre, on utilise les opérateurs de réduction pour construire une homotopie contractante du complexe de Koszul. On fixe un corps commutatif  $\mathbb{K}$ , une algèbre  $\mathbf{A}$  homogène de degré  $N$  ainsi qu'une présentation par opérateur homogène  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  de  $\mathbf{A}$  telle que  $X$  est fini.

On commence par une section préliminaire 5.1. Dans la section 5.1.1 on construit l'homotopie contractante en petit degré homologique. Dans la section 5.1.2, on introduit pour tout entier  $k$  l'algèbre  $\mathcal{A}_k$  présentée par

$$\langle s_1, s_2 \mid L_k(s_1, s_2) - L_k(s_2, s_1), s_1^2 - s_1, s_2^2 - s_2 \rangle,$$

où  $L_k(t, s)$  désigne le produit  $\dots sts$  avec  $k$  facteurs. L'algèbre  $\mathcal{A}_k$  est l'*algèbre de confluence de degré  $k$* . On utilise des paires confluentes d'opérateurs de réduction relativement à un ensemble fini pour construire des représentations de ces algèbres. On prouve certaines relations satisfaites par ces représentations. Ces relations sont utilisées dans la section 5.2.2. Dans la section 5.1.3, on utilise les opérateurs de réduction pour exprimer un nouveau complexe appelé le *complexe de Koszul normalisé*. Ce complexe est tel qu'il suffit d'en construire une homotopie contractante pour obtenir celle du complexe de Koszul.

Dans la section 5.2.1, on définit pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $m \geq \ell_N(n)$  une paire

$$P_{n,m} = (T_1^{n,m}, T_2^{n,m}),$$

d'opérateurs de réduction relativement à  $(X^{(m)}, <)$ , appelée la *paire de réduction de bi-degré  $(n, m)$  associée à  $\langle (X, <) \mid S \rangle$* . On montre dans le théorème 5.2.1.4 que si  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est confluent aux bords, alors ses paires de réduction sont confluentes. On insiste sur le fait que ce théorème nécessite que  $X$  est fini.

Dans la section 5.2.2, on suppose que  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est confluent aux bords. On utilise le fait que ses paires de réduction sont confluentes pour construire pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $m \geq \ell_N(n)$ , une représentation de l'algèbre de confluence

$$\begin{aligned} \varphi^{P_{n,m}}: \langle s_1, s_2 \mid L_{k_{n,m}}(s_1, s_2) - L_{k_{n,m}}(s_2, s_1), s_1^2 - s_1, s_2^2 - s_2 \rangle &\longrightarrow \text{End}(\mathbb{K}X^{(m)}), \\ s_i &\longmapsto T_i^{n,m} \end{aligned}$$



où  $k_{n,m}$  est un entier dépendant de  $(n, m)$ . On considère alors l'élément particulier de cette algèbre

$$\gamma_1 = (1 - s_2)(s_1 + s_1 s_2 s_1 + \cdots + L_{2i+1}(s_2, s_1)),$$

où l'entier  $i$  dépend de  $k_{n,m}$ . La forme de cet élément est motivée dans la section 5.1.1.

Dans la section 5.2.2 on utilise les éléments  $\varphi^{P_{n,m}}(\gamma_1)$  pour construire une famille d'applications  $\mathbb{K}$ -linéaires

1.  $h_0 : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X,$
2.  $h_1 : \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \ker S,$
3.  $h_2 : \mathbf{A} \otimes \ker S \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_3,$
4.  $h_n : \mathbf{A} \otimes J_n \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_{n+1}$  pour  $n$  supérieur à 3,

où les  $J_n$  sont les espaces vectoriels définis dans le paragraphe 4.1.2.13 du chapitre 4 :

$$J_n = \bigcap_{i=0}^{\ell_N(n)-N} \mathbb{K}X^{(i)} \otimes \ker S \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n)-N-i)}.$$

La famille  $(h_n)_n$  est appelée la *borne gauche* de  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ . Dans la proposition 5.2.2.6, on montre que cette famille est une homotopie contractante du complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$  si et seulement si certaines identités, appelées *relations de réduction*, sont vérifiées.

Dans la section 5.2.3, on montre que si  $\mathbf{A}$  satisfait l'extra-condition alors les relations de réduction sont vérifiées. On en déduit le résultat principal de ce chapitre qu'est le théorème 5.2.3.5 : si  $\mathbf{A}$  satisfait l'extra-condition et admet une présentation confluyente aux bords, alors la borne gauche de cette présentation est une homotopie contractante du complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$ . Dans le cas où  $N$  est égal à 2, la borne gauche est l'homotopie contractante construite par Berger dans [11, Section 5].

Dans la section 5.3 on illustre la construction de la borne gauche sur trois exemples : les algèbres symétriques libres dans la section 5.3.1, les algèbres monomiales satisfaisant la propriété de chevauchement dans la section 5.3.2 et l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'Heisenberg dans la section 5.3.3.

On finit cette introduction en rappelant la construction du complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$ . On rappelle d'après 4.1.2.6 du chapitre 4 que  $\mathbf{A}$  est munie d'un idéal d'augmentation

$$\mathbf{A}_+ = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{A}_n,$$

et on note par  $\varepsilon$  le morphisme d'augmentation. On considère l'application  $\mathbf{A}$ -linéaire définie par

$$F_{n+1} : \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n+1))} \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))},$$

$$1_{\mathbf{A}} \otimes w \longmapsto \overline{w_1} \otimes w_2$$

où  $w \in X^{(\ell_N(n+1))}$ ,  $w_1 \in X^{(\ell_N(n+1)-\ell_N(n))}$  et  $w_2 \in X^{(\ell_N(n))}$  sont tels que  $w$  est égal à  $w_1 w_2$ . Le complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$  est le complexe

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \mathbf{A} \otimes J_n \xrightarrow{\partial_n} \mathbf{A} \otimes J_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{A} \otimes \ker(S) \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{A} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0,$$

où pour tout entier  $n$ ,  $\partial_n$  est la restriction de  $F_n$  à

1.  $\mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X$  si  $n$  est égal à 1,
2.  $\mathbf{A} \otimes \ker(S)$  si  $n$  est égal à 2,
3.  $\mathbf{A} \otimes J_n$  si  $n$  est supérieur à 3.

## 5.1 Préliminaires

On note  $F$  la famille de réduction de  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ . Pour tout entier  $n$  supérieur à  $N$ , soit

$$F_n = \{\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(i)}} \otimes S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(j)}}, i + j + N = n\}.$$

La présentation  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  étant homogène de degré  $N$ , on a une graduation

$$F = \coprod_{n \geq N} F_n,$$

de sorte que :

$$\text{Obs}^F = \coprod_{n \geq N} \text{Obs}^{F_n},$$

et pour tout entier  $n$ , la restriction de  $\wedge F$  à  $\mathbb{K}X^{(n)}$  est égale à

1.  $\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(n)}}$  si  $n$  est strictement inférieur à  $N$ ,
2.  $\wedge F_n$  si  $n$  est supérieur ou égal à  $N$ .

### 5.1.1 L'homotopie contractante en petit degré

On suppose que  $\mathbf{A}$  satisfait l'extra-condition et que la présentation  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est confluyente aux bords. En particulier, on montre grâce au lemme de Newman en termes d'opérateurs de réduction (proposition 2.1.2.14 du chapitre 2) que si  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est confluyente aux bords, alors chaque  $F_n$  est confluyente. Chaque  $\text{Obs}^{F_n}$  est donc vide ce qui implique que  $\text{Obs}^F$  est vide, c'est-à-dire,  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est confluyente. Ainsi (voir remarque 3.1.2.2 du chapitre 3),

$$\{\bar{w}, w \text{ est une forme normale pour } \langle (X, <) \mid S \rangle\},$$

est une base de  $\mathbf{A}$ . De plus, chaque élément  $f \in \mathbb{K}X^*$  admet une unique forme normale, notée  $\widehat{f}$ .

L'hypothèse que  $X$  est fini n'est pas nécessaire dans cette section. On y construit des applications  $\mathbb{K}$ -linéaires

$$h_{-1} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbf{A} \text{ et } h_n : \mathbf{A} \otimes J_n \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_{n+1}, \text{ pour } 0 \leq n \leq 2,$$

telles que

$$\partial_1 h_0 + h_{-1} \varepsilon = \text{Id}_{\mathbf{A}} \text{ et } \partial_{n+1} h_n + h_{n-1} \partial_n = \text{Id}_{\mathbf{A} \otimes J_n}, \text{ pour } 0 \leq n \leq 2.$$

Pour tout  $w \in X^*$ , on définit  $[w] \in \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X$  de la façon suivante :

$$[w] = \begin{cases} 0, & \text{si } w \text{ est le mot vide} \\ \bar{w}' \otimes x, & \text{où } w' \in X^* \text{ et } x \in X \text{ sont tels que } w = w'x. \end{cases}$$

L'application

$$[\ ] : X^* \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X,$$

s'étend de façon unique en une application  $\mathbb{K}$ -linéaire de  $\mathbb{K}X^*$  dans  $\mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X$ . Pour tout mot non vide  $w \in X^* \setminus \{1\}$  et pour tout  $a \in \mathbf{A}$ , l'action de  $a$  sur  $[w]$  est donnée par

$$a.[w] = [aw],$$

où  $f \in \mathbb{K}X^*$  est tel que  $a = \bar{f}$ .

En petit degré homologique, le complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$  est

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbb{K}X \otimes \ker(S) \cap \ker(S) \otimes \mathbb{K}X) \xrightarrow{\partial_3} \mathbf{A} \otimes \ker(S) \xrightarrow{\partial_2} \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{A} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{K} \longrightarrow 0,$$

où

1.  $\partial_1$  est définie par

$$\partial_1(1_{\mathbf{A}} \otimes v) = \bar{v},$$

pour tout  $v \in \mathbb{K}X$ ,

2.  $\partial_2$  est définie par

$$\partial_2(1_{\mathbf{A}} \otimes f) = [f],$$

pour tout  $f \in \ker(S)$ ,

3.  $\partial_3$  est définie par

$$\partial_3(1_{\mathbf{A}} \otimes g) = \sum_{i \in I} \bar{v}_i \otimes f_i,$$

où les  $v_i \in \mathbb{K}X$  et  $f_i \in \ker(S)$  sont tels que

$$g = \sum_{i \in I} v_i f_i.$$

Par définition,  $\partial_3(1_{\mathbf{A}} \otimes g)$  ne dépend pas de la décomposition de  $g$  dans  $\mathbb{K}X \otimes \ker(S)$  choisie.

**5.1.1.1. Les constructions de  $h_{-1}$  et  $h_0$ .** On définit les applications  $h_{-1} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbf{A}$  et  $h_0 : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A} \otimes V$  par

$$h_{-1}(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbf{A}} \text{ et } h_0(a) = [\hat{f}], \text{ où } f \in \mathbb{K}X^* \text{ est tel que } \bar{f} = a.$$

On a en particulier  $h_0(1_{\mathbf{A}}) = 0$  et  $h_{-1}\varepsilon(1_{\mathbf{A}}) = 1_{\mathbf{A}}$ , de sorte que

$$(\partial_1 h_0 + h_{-1}\varepsilon)(1_{\mathbf{A}}) = 1_{\mathbf{A}}.$$

De plus, si  $a$  appartient à  $\mathbf{A}_m$  pour un entier  $m$  supérieur à 1, on a  $\varepsilon(a) = 0$  et  $\partial_1 h_0(a) = a$ , de sorte que

$$(\partial_1 h_0 + h_{-1}\varepsilon)|_{\mathbf{A}_+} = \text{Id}_{\mathbf{A}_+}.$$

On a donc

$$\partial_1 h_0 + h_{-1}\varepsilon = \text{Id}_{\mathbf{A}}.$$

**5.1.1.2. La construction de  $h_1$ .** En tant qu'espace vectoriel,  $\mathbf{A}$  admet

$$\{\bar{w}, w \in X^* \text{ est une forme normale}\},$$

comme base. Ainsi,  $\mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X$  a pour base l'ensemble des  $\bar{w} \otimes x$  où  $w \in X^*$  est en forme normale et  $x \in X$ . Pour définir

$$h_1 : \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \ker(S),$$

il est donc suffisant de définir  $h_1(\bar{w} \otimes x)$  pour toute forme normale  $w \in X^*$  et pour tout  $x \in X$ . De plus,  $h_1(\bar{w} \otimes x)$  doit satisfaire la relation

$$\begin{aligned} \partial_2 h_1(\bar{w} \otimes x) &= \bar{w} \otimes x - h_0 \partial_1(\bar{w} \otimes x) \\ &= \bar{w} \otimes x - h_0(\overline{wx}). \end{aligned} \quad (5.1)$$

On définit  $h_1(\bar{w} \otimes x)$  par récurrence sur  $wx$ . Si  $wx$  est une forme normale, on pose

$$h_1(\bar{w} \otimes x) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} h_0(\overline{wx}) &= [\widehat{wx}] \\ &= [wx] \\ &= \bar{w} \otimes x, \end{aligned}$$

de sorte que la relation (5.1) est vérifiée.

Par hypothèse de récurrence, on suppose que  $h_1(\overline{w'} \otimes x')$  est défini et satisfait (5.1) pour toute forme normale  $w' \in X^*$  et tout  $x' \in X$  tels que  $w'x' < wx$ . Comme  $w$  est une forme normale mais que  $wx$  n'est pas, celui-ci est réductible par la droite, c'est-à-dire, il existe  $w_1 \in X^*$  et  $w_2 \in \text{Nred}(S)$  tels que  $wx$  est égal à  $w_1w_2$ . Soit

$$f = w_2 - S(w_2).$$

On pose

$$h_1(\bar{w} \otimes x) = \bar{w}_1 \otimes f + h_1([w_1 S(w_2)]).$$

On a

$$\begin{aligned} \partial_2 h_1(\bar{w} \otimes x) &= [w_1 f] + \partial_2 h_1([w_1 S(w_2)]) \\ &= [w_1 w_2] - [w_1 S(w_2)] + \partial_2 h_1([w_1 S(w_2)]). \end{aligned}$$

Par hypothèse de récurrence, on a

$$\partial_2 h_1([w_1 S(w_2)]) = [w_1 S(w_2)] - [\widehat{w_1 w_2}],$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \partial_2 h_1(\bar{w} \otimes x) &= [w_1 w_2] - [\widehat{w_1 w_2}] \\ &= \bar{w} \otimes x - [\widehat{wx}] \\ &= \bar{w} \otimes x - h_0(\overline{wx}). \end{aligned}$$

Ainsi, la relation (5.1) est vérifiée.

**5.1.1.3. Remarque.** On considère les morphismes  $\mathbb{K}$ -linéaires

$$\begin{aligned} T_1 &: \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X \longrightarrow \mathbb{K}X^{(N)}, \quad \overline{w_1 w_2} \otimes x \longmapsto \bar{w}_1 \otimes w_2 x, \\ T_1^1 &: \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(N)} \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X, \quad \bar{w}_1 \otimes w_2 x \longmapsto \overline{w_1 w_2} \otimes x, \\ T_2^1 &: \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(N)}, \quad \overline{w_1 w_2} \otimes x \longmapsto \bar{w}_1 \otimes \widehat{w_2 x}. \end{aligned}$$

La construction inductive de  $h_1$  implique que  $h_1(\bar{w} \otimes x)$  est égal à

$$(T_1 - T_2^1)(\bar{w} \otimes x) + (T_1 - T_2^1)(T_1^1 T_2^1(\bar{w} \otimes x)) + (T_1 - T_2^1)\left(\left(T_1^1 T_2^1\right)^2(\bar{w} \otimes x)\right) + \dots,$$

où  $(T_1 - T_2^1)\left(\left(T_1^1 T_2^1\right)^{2k}(\bar{w} \otimes x)\right)$  s'annule pour  $k$  suffisamment grand.

Pour définir  $h_2$ , on a besoin du lemme suivant :

**5.1.1.4. Lemme.** Soient  $w_1 \in X^*$ ,  $w_2 \in X^{(N-1)}$  et  $x_1, x_2 \in X$  tels que :

1.  $w_1 x_1$  et  $x_1 w_2$  sont des formes normales,
2.  $w_2 x_2$  n'est pas une forme normale.

Alors,  $w_1 x_1 w_2$  est une forme normale.

*Démonstration.* Par l'absurde, on suppose que  $w_1 x_1 w_2$  n'est pas une forme normale. Par hypothèse,  $w_1 x_1$  et  $x_1 w_2$  sont des formes normales. Ainsi, il existe un diviseur à droite  $u$  de  $w_1$  et un diviseur à gauche  $v$  de  $w_2$  tels que  $u x_1 v$  est de longueur  $N$  et n'est pas une forme normale. En particulier,  $u x_1 w_2 x_2$  est la source d'un branchement critique. D'après la proposition 4.2.2.12 du chapitre 4, le mot  $x_1 w_2$  est réductible, ce qui est une contradiction. Ainsi, le lemme 5.1.1.4 est vrai.  $\square$

**5.1.1.5. La construction de  $h_2$ .** Comme pour  $h_1$ , il est suffisant de définir  $h_2$  sur une base de  $\mathbf{A} \otimes \ker(S)$ . Une telle base est l'ensemble

$$\{\bar{w} \otimes (w' - S(w')), w \in X^* \text{ est une forme normale et } w' \in \text{Nred}(S)\}.$$

De plus, étant donné une forme normale  $w$  et un mot non  $S$ -réduit  $w'$ , la définition de  $h_2(\bar{w} \otimes (w' - S(w')))$  doit satisfaire la relation

$$\partial_3 h_2(\bar{w} \otimes (w' - S(w'))) = \bar{w} \otimes (w' - S(w')) - h_1 \partial_2(\bar{w} \otimes (w' - S(w'))). \quad (5.2)$$

Soient  $x_1, x_2 \in X$  et  $w_1, w_2 \in X^*$  tels que

$$w = w_1 x_1 \text{ et } w' = w_2 x_2.$$

On définit  $h_2(\bar{w} \otimes (w' - S(w')))$  par récurrence sur  $x_1 w_2$ . Si  $x_1 w_2$  est une forme normale, alors on pose

$$h_2(\bar{w} \otimes (w' - S(w'))) = 0.$$

En posant

$$f = w' - S(w'),$$

on a :

$$\begin{aligned} h_1 \partial_2(\bar{w} \otimes f) &= h_1([wf]) \\ &= h_1([w w']) - h_1([w S(w')]) \\ &= h_1(\bar{w} w_2 \otimes x_2) - h_1([w S(w')]). \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.1.1.4,  $ww_2$  est une forme normale. Ainsi, par construction de  $h_1$ , on a

$$h_1(\overline{ww_2} \otimes x_2) = \overline{w} \otimes f + h_1([wS(w')]).$$

On en déduit que  $h_1 \partial_2(\overline{w} \otimes f)$  est égal à  $\overline{w} \otimes f$  et donc la relation (5.2) est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on suppose que  $h_2(\overline{u} \otimes g)$  est défini et (5.2) est vraie pour tout

1.  $u \in X^*$  en forme normale,
2.  $g = w'' - S(w'')$  avec  $w'' \in \text{Nred}(S)$ ,

tels que  $yv < x_1w_2$  où  $y \in X$  et  $v \in X^{(N-1)}$  sont tels que

1.  $u = u'y$  avec  $u' \in X^*$ ,
2.  $w'' = vz$  avec  $z \in X$ .

Soient

$$S_1 = S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X} \text{ et } S_2 = \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S.$$

La présentation  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  étant confluente aux bords, la paire  $P = (S_1, S_2)$  est confluente. D'après ce qu'on a vu dans le lemme 2.2.1.9 du chapitre 2, on a

$$\begin{aligned} \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(N+1)}} - S_1 \vee S_2 &= L(\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(N+1)}} - S_2, \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(N+1)}} - S_1) \\ &= L(\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(N+1)}} - S_1, \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(N+1)}} - S_2). \end{aligned}$$

Soit  $\Lambda$  la valeur de ce morphisme. Il s'agit d'un projecteur, de sorte que

$$\begin{aligned} \text{im}(\Lambda) &= \ker(\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(N+1)}} - \Lambda) \\ &= \ker(S_1 \vee S_2) \\ &= \ker(S_1) \cap \ker(S_2) \\ &= J_3. \end{aligned}$$

D'après 2.2.1.5 du chapitre 2

$$\Lambda(x_1w') = \left( \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(N+1)}} + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (L_i(S_1, S_2) + L_i(S_2, S_1)) + (-1)^k L_k(S_2, S_1) \right) (x_1w'),$$

où  $k$  est le plus petit entier tel que  $L_k(S_2, S_1)(x_1w')$  et  $L_k(S_1, S_2)(x_1w')$  sont des formes normales. On a donc

$$\Lambda(x_1w') = (\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(N+1)}} - S_2)(x_1w') + (\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(N+1)}} - S_2) \left( \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i g_i(S_1, S_2) \right) (x_1w'),$$

où  $g_i(S_1, S_2)$  est le produit  $S_1 \circ S_2 \circ S_1 \cdots$  avec  $i$  facteurs. En particulier, il existe des mots  $u_1, \dots, u_l \in \text{Nred}(S)$ ,  $y_1, \dots, y_l \in X$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  des scalaires non nuls tels que  $y_i u_i < x_1w_2$  pour tout  $1 \leq i \leq l$  et

$$\Lambda(x_1w') = x_1f + \sum_{i=1}^l \lambda_i y_i (u_i - S(u_i)).$$

On pose alors

$$h_2(\overline{w} \otimes f) = \overline{w_1} \otimes \Lambda(x_1w') - \sum_{i=1}^l \lambda_i h_2(\overline{w_1 x_i} \otimes f_i).$$

On montre dans la section 5.2 que la relation (5.2) est vérifiée.

**5.1.1.6. Remarque.** On considère les applications  $\mathbb{K}$ -linéaires

$$\begin{aligned} T_2 &: \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(N)} \longrightarrow \mathbb{K}X^{(N+1)}, \quad \overline{w_1 x} \otimes w_2 \longmapsto \overline{w_1} \otimes xw_2, \\ T_1^2 &: \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(N+1)} \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(N)}, \quad \overline{w_1} \otimes xw_2 \longmapsto \overline{w_1 x} \otimes w_2, \\ T_2^2 &: \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(N)} \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(N+1)}, \quad \overline{w_1 x} \otimes w_2 \longmapsto \overline{w_1} \otimes xw_2 - \Lambda(xw_2). \end{aligned}$$

La construction inductive de  $h_2$  implique que  $h_2(\overline{w} \otimes f)$  est égal à

$$(T_2 - T_2^2)(\overline{w} \otimes f) + (T_2 - T_2^2)(T_2^1 T_2^2(\overline{w} \otimes f)) + (T_2 - T_2^2)\left(\left(T_2^1 T_2^2\right)^2(\overline{w} \otimes f)\right) + \dots,$$

où  $(T_2 - T_2^2)\left(\left(T_2^1 T_2^2\right)^{2k}(\overline{w} \otimes f)\right)$  s'annule pour  $k$  suffisamment grand.

## 5.1.2 Algèbres de confluence

On fixe un ensemble fini totalement ordonné  $(G, <)$ .

**5.1.2.1. Définition.** Soit  $k$  un entier supérieur à 1. L'*algèbre de confluence de degré  $k$*  est l'algèbre présentée par

$$\langle s_1, s_2 \mid s_i^2 - s_i, L_k(s_1, s_2) - L_K(s_2, s_1), i = 1, 2 \rangle,$$

et est notée  $\mathcal{A}_k$ .

On considère les éléments suivants de  $\mathcal{A}_k$  :

$$\begin{aligned} \sigma &= L_k(s_1, s_2), \\ &= L_k(s_2, s_1), \\ \gamma_1 &= (1 - s_2) \sum_{i \in I} L_i(s_2, s_1), \\ \gamma_2 &= (1 - s_1) \sum_{i \in I} L_i(s_1, s_2), \\ \lambda &= 1 - (\sigma + \gamma_1 + \gamma_2), \end{aligned}$$

où  $I$  est l'ensemble des entiers impairs compris entre 1 et  $k - 1$ . On vérifie qu'on a les relations suivantes :

$$\gamma_i s_i = \gamma_i, \text{ pour } i = 1 \text{ ou } 2, \quad (5.3a)$$

$$s_i \gamma_i = s_i - \sigma, \text{ pour } i = 1 \text{ ou } 2. \quad (5.3b)$$

**5.1.2.2.  $P$ -représentations des algèbres de confluence.** Soit  $P = (T_1, T_2)$  une paire confluyente d'opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ . D'après le lemme 2.2.1.3 du chapitre 2, on a

$$L(T_2, T_1) = L(T_1, T_2). \quad (5.4)$$

De plus, on rappelle que pour tout  $g \in G$ , on note  $n_g$  le plus petit entier tel que  $L_{n_g}(T_2, T_1)(g)$  et  $L_{n_g}(T_1, T_2)(g)$  sont des  $P$ -formes normales. Comme  $G$  est fini, l'ensemble des  $n_g$  admet un

plus grand élément  $k$ , de sorte que  $L(T_2, T_1)$  et  $L(T_1, T_2)$  sont égaux à  $L_k(T_2, T_1)$  et  $L_k(T_1, T_2)$ , respectivement. D'après (5.4), on a donc

$$L_k(T_2, T_1) = L_k(T_1, T_2).$$

On considère alors le morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned} \varphi^P : \mathcal{A}_k &\longrightarrow \text{End}(\mathbb{K}G), \\ s_i &\longmapsto T_i \end{aligned}$$

appelé la *P-représentation* de  $\mathcal{A}_k$ . D'après le lemme 2.2.1.3 du chapitre 2, on a

$$\varphi^P(\sigma) = T_1 \wedge T_2, \quad (5.5)$$

De plus, on vérifie que

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (L_i(s_1, s_2) + L_i(s_2, s_1)) + (-1)^k L_k(s_2, s_1), \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^i (L_i(s_1, s_2) + L_i(s_2, s_1)) + (-1)^k L_k(s_1, s_2), \end{aligned}$$

de sorte que, d'après le lemme 2.2.1.9 et la relation (2.2.1.4) de 2.2.1.5 du chapitre 2, on a

$$\varphi^P(1 - \lambda) = T_1 \vee T_2. \quad (5.6)$$

**5.1.2.3. Les bornes gauche et droite.** Soit  $P = (T_1, T_2)$  une paire confluente d'opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ . Par définition de  $\lambda$  et d'après 5.1.2.2, on a :

$$T_1 \vee T_2 = T_1 \wedge T_2 + \varphi^P(\gamma_1) + \varphi^P(\gamma_2). \quad (5.7)$$

Les morphismes  $\varphi^P(\gamma_1)$  et  $\varphi^P(\gamma_2)$  sont appelés *borne gauche* et *borne droite* de  $P$ , respectivement.

**5.1.2.4. Lemme.** Soit  $P = (T_1, T_2)$  une paire confluente d'opérateurs de réduction relativement à  $(G, <)$ . Soit  $W$  un sous-espace de  $\mathbb{K}G$  inclus dans  $\ker(T_i)$  pour  $i = 1$  ou  $2$ . Alors, on a :

$$\varphi^P(\gamma_i)|_W = (T_1 \vee T_2)|_W.$$

*Démonstration.* Par définition,  $\sigma$  et  $\gamma_i$  se factorisent à droite par  $s_i$ . Ainsi, les restrictions de  $\varphi^P(\sigma) = T_1 \wedge T_2$  et  $\varphi^P(\gamma_i)$  à  $W$  s'annulent. Le lemme 5.1.2.4 est donc une conséquence de la relation (5.7).  $\square$

### 5.1.3 Le complexe de Koszul normalisé

**5.1.3.1. Formes normales et complexe de Koszul.** On rappelle d'après le paragraphe 3.1.1.6 du chapitre 3 que

$$\begin{aligned} \psi : \text{im}(\wedge F) = \mathbb{K}\text{Red}(\wedge F) &\longrightarrow \mathbf{A}, \\ w &\longmapsto \bar{w} \end{aligned}$$



est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Soit  $\phi$  la réciproque de  $\psi$ . Pour tout entier  $n$ , le morphisme

$$\begin{aligned}\phi_n &= \phi \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{\ell_N(n)}} : \mathbf{A} \otimes J_n \longrightarrow \text{im}(\wedge F) \otimes J_n, \\ a \otimes f &\longmapsto \phi(a) \otimes f\end{aligned}$$

est un isomorphisme. En appliquant cet isomorphisme au complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$ , on obtient le complexe d'espaces vectoriels  $(K'_\bullet, \partial')$

$$\cdots \xrightarrow{\partial'_{n+1}} \text{im}(\wedge F) \otimes J_n \xrightarrow{\partial'_n} \text{im}(\wedge F) \otimes J_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\partial'_2} \text{im}(\wedge F) \otimes \mathbb{K}X \xrightarrow{\partial'_1} \text{im}(\wedge F) \xrightarrow{\varepsilon'} \mathbb{K} \longrightarrow 0,$$

où  $\partial'_n$  est égal à  $\phi_{n-1} \circ \partial_n \circ \phi_n^{-1}$ .

**5.1.3.2. Définition.** Le complexe  $(K'_\bullet, \partial')$  est le *complexe de Koszul normalisé* de  $\mathbf{A}$ .

**5.1.3.3. Lemme.** Pour tout  $n \geq 1$ , le morphisme  $\partial'_n$  est la restriction à  $\text{im}(\wedge F) \otimes J_n$  de

$$\varphi_n : \bigoplus_{m \geq \ell_N(n)} \mathbb{K}X^{(m)} \longrightarrow \mathbb{K}X^*,$$

défini par

$$\varphi_n|_{\mathbb{K}X^{(m)}} = \wedge F_{m-\ell_N(n-1)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{\ell_N(n-1)}},$$

pour tout  $m \geq \ell_N(n)$ .

*Démonstration.* On rappelle que  $\partial_n : \mathbf{A} \otimes J_n \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_{n-1}$  est la restriction à  $\mathbf{A} \otimes J_n$  de l'application  $\mathbf{A}$ -linéaire définie par

$$\begin{aligned}F_n : \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))} &\longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n-1))}, \\ 1_{\mathbf{A}} \otimes w &\longmapsto \overline{w_1} \otimes w_2\end{aligned}$$

où  $w_1 \in X^{(\ell_N(n)-\ell_N(n-1))}$  et  $w_2 \in X^{(\ell_N(n-1))}$  sont tels que  $w = w_1 w_2$ . Or,  $\mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))}$  admet pour base

$$\left\{ \overline{w'} \otimes w, w' \in \text{Red}(\wedge F) \text{ et } w \in X^{(\ell_N(n))} \right\},$$

et pour tout élément de cette base,  $F_n$  étant  $\mathbf{A}$ -linéaire, on a

$$F_n(\overline{w'} \otimes w) = \overline{w' w_1} \otimes w_2.$$

Le noyau de  $\wedge F$  étant égal à l'idéal engendré par  $\ker(S)$ , on a

$$F_n(\overline{w'} \otimes w) = \overline{\wedge F(w' w_1)} \otimes w_2.$$

Le morphisme  $\partial'_n$  est donc la restriction à  $\text{im}(\wedge F) \otimes J_n$  du morphisme

$$\varphi : \mathbb{K}X^* \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))} = \bigoplus_{m \geq \ell_N(n)} \mathbb{K}X^{(m)} \longrightarrow \mathbb{K}X^*,$$

défini pour tout  $w' \in X^*$  et pour tout  $w = w_1 w_2 \in X^{(\ell_N(n))}$ , avec  $w_1 \in X^{(\ell_N(n) - \ell_N(n-1))}$  et  $w_2 \in X^{(\ell_N(n-1))}$ , par

$$\begin{aligned}\varphi(w'w) &= \wedge F(w'w_1)w_2 \\ &= \wedge F_{m-\ell_N(n-1)}(w'w_1)w_2 \\ &= \left( \wedge F_{m-\ell_N(n-1)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(\ell_N(n-1))}} \right) (w'w),\end{aligned}$$

où  $m$  est la longueur de  $w'w$ . Ceci prouve le lemme 5.1.3.3. □

## 5.2 La borne gauche d'une présentation

On note  $I$  l'idéal engendré par le noyau de  $S$  :

$$I = I(\ker(S)).$$

Il s'agit d'un espace vectoriel gradué dont les composantes homogènes  $I_m$  sont égales à 0 si  $m$  est strictement inférieur à  $N$  et

$$I_m = \sum_{i=0}^{m-N} \mathbb{K}X^{(i)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(m-N-i)},$$

si  $m$  est supérieur à  $N$ .

De plus, pour tout entier  $m$ , on note

$$\ker^{-1} : \mathcal{L}(\mathbb{K}X^{(m)}) \longrightarrow \mathbf{RO}(X^{(m)}, <),$$

l'application qui à un sous-espace de  $\mathbb{K}X^{(m)}$  associe l'unique opérateur de réduction dont le noyau est ce sous-espace.

Enfin, pour tout entier  $m$  et pour tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq m - N$ , on pose

$$S_i^{(m)} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(i)}} \otimes S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m-N-i)}}.$$

Il s'agit d'un opérateur de réduction relativement à  $(X^{(m)}, <)$  dont le noyau est égal à

$$\ker(S_i^{(m)}) = \mathbb{K}X^{(i)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(m-N-i)}.$$

La présentation  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  étant confluite aux bords, les opérateurs  $S_i^{(m)}$  sont deux à deux confluents. Or,  $X$  étant fini, chaque  $X^{(m)}$  est fini, de sorte que d'après [11, Proposition 2.11] (voir proposition 4.2.1.11 du chapitre 4) le treillis que les  $S_i^{(m)}$  engendrent est 2-confluent, c'est-à-dire, les éléments de ce treillis sont deux à deux confluents. On rappelle enfin d'après [11, Théorème 2.12] (voir proposition 4.2.1.15 du chapitre 4) que ce treillis étant 2-confluent, il est distributif, c'est-à-dire, pour tout triplet  $(T_1, T_2, T_3)$  d'éléments de ce treillis, on a

$$(T_1 \wedge T_2) \vee T_3 = (T_1 \vee T_2) \wedge (T_2 \vee T_3).$$

### 5.2.1 Paires de réduction associées à une présentation

Pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $m \geq \ell_N(n)$ , on considère la paire d'opérateurs de réduction relativement à  $(X^{(m)}, <)$

$$P_{n,m} = (T_1^{n,m}, T_2^{n,m}),$$

définie par

$$T_1^{n,m} = \ker^{-1} \left( I_{m-\ell_N(n)} \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))} \right),$$

$$T_2^{n,m} = \begin{cases} \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}, & \text{si } m < \ell_N(n+1) \\ \ker^{-1} \left( \mathbb{K}X^{(m-\ell_N(n+1))} \otimes J_{n+1} \right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

**5.2.1.1. Définition.** La paire  $P_{n,m}$  est appelée la *paire de réduction de bi-degré  $(n, m)$*  associée à  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ .

**5.2.1.2. Lemme.** Soient  $n$  et  $m$  deux entiers tels que  $n \geq 1$  et  $\ell_N(n) \leq m < \ell_N(n+1)$ . Alors, on a

$$m - \ell_N(n-1) \leq N - 1,$$

et

$$T_1^{n-1,m} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}.$$

*Démonstration.* On montre d'abord d'abord que  $m - \ell_N(n-1)$  est inférieur à  $N - 1$ . Si  $m$  est un multiple de  $N$  :  $m = kN$ , l'hypothèse  $\ell_N(n) \leq m < \ell_N(n+1)$  implique que  $n$  est égal à  $2k$ , et donc  $\ell_N(n-1)$  est égal à  $(k-1)N + 1$ . Ainsi,  $m - \ell_N(n-1)$  est égal à  $N - 1$ . Si  $m$  n'est pas un multiple de  $N$  :  $m = kN + r$  où  $1 \leq r \leq N - 1$ , l'hypothèse  $\ell_N(n) \leq m < \ell_N(n+1)$  implique que  $\ell_N(n)$  est égal à  $2k + 1$ . Ainsi,  $m - \ell_N(n-1) = m - kN$  est plus petit que  $N - 1$ .

On montre à présent que  $T_1^{n-1,m}$  est égal à  $\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}$ . La première partie du lemme implique que  $I_{m-\ell_N(n-1)}$  est réduit à  $\{0\}$ . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \ker \left( T_1^{n-1,m} \right) &= I_{m-\ell_N(n-1)} \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n-1))} \\ &= \{0\}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire,  $T_1^{n-1,m}$  est égal à  $\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}$ . □

**5.2.1.3. Lemme.** Soient  $n$  et  $m$  deux entiers.

1. Si  $m \geq \ell_N(n+2)$ , alors on a

$$T_1^{n,m} = S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n+2)}^{(m)}.$$

2. Si  $n \geq 1$  et  $m \geq \ell_N(n+1)$ , alors on a

$$T_2^{n,m} = S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \vee \cdots \vee S_{m-N}^{(m)}.$$

*Démonstration.* Par définition de  $\wedge$ , on a

$$\begin{aligned}
\ker \left( S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n+2)}^{(m)} \right) &= \sum_{i=0}^{m-\ell_N(n+2)} \ker \left( S_i^{(m)} \right) \\
&= \sum_{i=0}^{m-\ell_N(n+2)} \mathbb{K}X^{(i)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(m-N-i)} \\
&= \left( \sum_{i=0}^{m-\ell_N(n+2)} \mathbb{K}X^{(i)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(m-\ell_N(n)-N-i)} \right) \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))} \\
&= \left( \sum_{i=0}^{m-\ell_N(n)-N} \mathbb{K}X^{(i)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(m-\ell_N(n)-N-i)} \right) \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))} \\
&= I_{m-\ell_N(n)} \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))} \\
&= \ker(T_1^{n,m}).
\end{aligned}$$

Par définition de  $\vee$ , on a

$$\begin{aligned}
\ker \left( S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \vee \cdots \vee S_{m-N}^{(m)} \right) &= \bigcap_{i=m-\ell_N(n+1)}^{m-N} \ker \left( S_i^{(m)} \right) \\
&= \bigcap_{i=m-\ell_N(n+1)}^{m-N} \mathbb{K}X^{(i)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(m-N-i)} \\
&= \mathbb{K}X^{(m-\ell_N(n+1))} \otimes \left( \bigcap_{i=0}^{\ell_N(n+1)-N} \mathbb{K}X^{(i)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n+1)-N-i)} \right) \\
&= \mathbb{K}X^{(m-\ell_N(n+1))} \otimes J_{n+1} \\
&= \ker(T_2^{n,m}).
\end{aligned}$$

L'application  $\ker^{-1}$  étant une bijection, on obtient les deux relations voulues.  $\square$

**5.2.1.4. Théorème.** *Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène admettant une présentation confluente aux bords  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  telle que  $X$  est fini. Les paires de réduction de cette présentation sont confluentes.*

*Démonstration.* Soient  $n$  et  $m$  deux entiers tels que  $m \geq \ell_N(n)$ . On doit montrer que la paire de réduction de bi-degré  $(n, m)$  associée à  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est confluente. Pour cela, on considère quatre cas.

**Cas 1.** On suppose que  $n = 0$ . La paire

$$P_{0,0} = (\text{Id}_{\mathbb{K}}, \text{Id}_{\mathbb{K}}),$$

est confluente. Pour tout entier  $m$  supérieur à 1, on a

$$\ker(T_2^{0,m}) = \mathbb{K}X^{(m)},$$

c'est-à-dire,  $T_2^{0,m}$  est l'application nulle. En particulier, les opérateurs  $T_1^{0,m}$  et  $T_2^{0,m}$  commutent, c'est-à-dire, ils vérifient la relation

$$T_1^{0,m} \circ T_2^{0,m} = T_2^{0,m} \circ T_1^{0,m}.$$

Ainsi,  $P_{0,m}$  est confluyente d'après le lemme 2.2.1.3 du chapitre 2 pour tout entier  $m$  supérieur à 1 et donc pour tout entier  $m$ .

**Cas 2.** On suppose que  $n \geq 1$  et  $\ell_N(n) \leq m < \ell_N(n+1)$ . On a

$$P_{n,m} = (T_1^{n,m}, \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}).$$

Ainsi, les opérateurs  $T_1^{n,m}$  et  $T_2^{n,m}$  commutent, de sorte que les paires  $P_{n,m}$  telles que  $n \geq 1$  et  $\ell_N(n) \leq m < \ell_N(n+1)$  sont confluentes.

**Cas 3.** On suppose que  $n \geq 1$  et  $\ell_N(n+1) \leq m < \ell_N(n+2)$ . D'après le lemme 5.2.1.2, on a

$$P_{n,m} = (\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}, T_2^{n,m}).$$

En particulier, les opérateurs  $T_1^{n,m}$  et  $T_2^{n,m}$  commutent. Ainsi, les paires  $P_{n,m}$  telles que  $n \geq 1$  et  $\ell_N(n+1) \leq m < \ell_N(n+2)$  sont confluentes.

**Cas 4.** On suppose que  $n \geq 1$  et  $m \geq \ell_N(n+2)$ . D'après le lemme 5.2.1.3,  $T_1^{n,m}$  et  $T_2^{n,m}$  appartiennent au treillis engendré par les  $S_i^{(m)}$ , pour  $0 \leq i \leq m-N$ . Celui-ci étant 2-confluent, les paires  $P_{n,m}$  telles que  $n \geq 1$  et  $m \geq \ell_N(n+2)$  sont confluentes. □

## 5.2.2 Construction

Dans cette section, on suppose que  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est confluyente aux bords. En particulier, ses paires de réduction  $P_{n,m}$  sont confluentes. On rappelle que pour tout entier  $m$ , on note

$$F_m = \left\{ S_i^{(m)}, 0 \leq i \leq m-N \right\},$$

et

$$F = \coprod_{m \geq N} F_m,$$

la famille de réduction de  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ .

**5.2.2.1. Lemme.** Soit  $(n, m)$  un couple d'entiers tel que  $m \geq \ell_N(n)$ . Alors, on a

$$T_1^{n,m} = \wedge F_{m-\ell_N(n)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(\ell_N(n))}}.$$

*Démonstration.* On a

$$\begin{aligned}
\ker \left( \wedge F_{m-\ell_N(n)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(\ell_N(n))}} \right) &= \left( \sum_{i=0}^{m-\ell_N(n)-N} \ker \left( S_i^{(m)} \right) \right) \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))} \\
&= \left( \sum_{i=0}^{m-\ell_N(n)-N} \mathbb{K}X^{(i)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(m-N-i)} \right) \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))} \\
&= I_{m-\ell_N(n)} \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))} \\
&= \ker(T_1^{n,m}).
\end{aligned}$$

L'application  $\ker^{-1}$  étant une bijection, le lemme 5.2.2.1 est prouvé. □

**5.2.2.2. Notation.** Soit  $n$  un entier. On pose

$$h'_n : \bigoplus_{m \geq \ell_N(n)} \mathbb{K}X^{(m)} \longrightarrow \mathbb{K}X^*,$$

l'application  $\mathbb{K}$ -linéaire définie par

$$h'_{n|\mathbb{K}X^{(m)}} = \varphi^{P_{n,m}}(\gamma_1),$$

où  $\varphi^{P_{n,m}}(\gamma_1)$  est la borne gauche de  $P_{n,m}$ .

**5.2.2.3. Lemme.** *L'image de  $h'_n$  est incluse dans  $\text{im}(\wedge F) \otimes J_{n+1}$ .*

*Démonstration.* Soit  $m$  un entier supérieur à  $\ell_N(n)$ . Soit  $k_{n,m}$  tel que

$$L_{k_{n,m}}(T_2^{n,m}, T_1^{n,m}) = L_{k_{n,m}}(T_1^{n,m}, T_2^{n,m}).$$

On rappelle que dans l'algèbre de confluence de degré  $k_{n,m}$ , on a

$$\gamma_1 = (1 - s_2) \sum_{i \in I} L_i(s_2, s_1),$$

où  $I$  est l'ensemble des entiers impairs compris entre 1 et  $k_{n,m} - 1$ .

Si  $m$  est strictement inférieure à  $\ell_N(n+1)$ , alors  $T_2^{n,m}$  est égal à  $\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}$ . En particulier, la restriction de  $h'_n$  à

$$\bigoplus_{m=\ell_N(n)}^{\ell_N(n+1)-1} \mathbb{K}X^{(m)}, \tag{5.8}$$

est le morphisme nul. L'image par  $h'_n$  de (5.8) est donc incluse dans  $\text{im}(\wedge F) \otimes J_{n+1}$ .

On suppose à présent que  $m$  est supérieur à  $\ell_N(n+1)$ . On pose

$$H = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} + \sum_{i \in I'} L_i(T_2^{n,m}, T_1^{n,m}),$$

où  $I'$  est l'ensemble des entiers pairs compris entre 2 et  $k_{n,m} - 2$ . On a donc

$$\varphi^{P_{n,m}}(\gamma_1) = (\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} - T_2^{n,m}) \circ T_1^{n,m} \circ H.$$

L'image de

$$T_1^{n,m} = \wedge F_{m-\ell_N(n)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(\ell_N(n))}},$$

est l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme  $w_1 w_2$ , où  $w_1 \in \text{Red}(\wedge F_{m-\ell_N(n)})$  et  $w_2 \in X^{(\ell_N(n))}$ . De plus, en notant

$$G = \ker^{-1}(J_{n+1}),$$

on a

$$T_2^{n,m} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m-\ell_N(n+1))}} \otimes G,$$

ce qui implique

$$(\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} - T_2^{n,m}) = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m-\ell_N(n+1))}} \otimes (\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(\ell_N(n+1))}} - G).$$

Ainsi, l'image de  $\varphi^{P_{n,m}}(\gamma_1)$  est incluse dans l'espace vectoriel engendré par les éléments de la forme  $wf$  où  $w \in \text{Red}(\wedge F_{m-\ell_N(n+1)})$  et  $f \in J_{n+1}$ , c'est-à-dire, elle est incluse dans  $\text{im}(\wedge F_{m-\ell_N(n+1)}) \otimes J_{n+1}$ .  $\square$

**5.2.2.4. Définition.** Pour tout entier  $n$ , on pose

$$h_n = \phi_{n+1}^{-1} \circ h'_n \circ \phi_n : \mathbf{A} \otimes J_n \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_{n+1},$$

où

$$\phi_n : \mathbf{A} \otimes J_n \xrightarrow{\sim} \text{im}(\wedge F) \otimes J_n,$$

est l'isomorphisme  $\mathbb{K}$ -linéaire défini en 5.1.3.1. La famille  $(h_n)_n$  est la *borne gauche* de  $\langle\langle X, < \mid S \rangle\rangle$ .

**5.2.2.5. Relations de réduction.** Pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $m \geq \ell_N(n)$ , on pose

$$K_n^{(m)} = \text{im}(\wedge F_{m-\ell_N(n)}) \otimes J_n.$$

En particulier, on a

$$\text{im}(\wedge F) \otimes J_n = \bigoplus_{m \geq \ell_N(n)} K_n^{(m)}.$$

On dit que  $\langle\langle X, < \mid S \rangle\rangle$  satisfait les *relations de réduction* si, pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $m \geq \ell_N(n)$ , on a l'égalité suivante :

$$(r_{n,m}) \quad T_1^{n,m} \wedge T_2^{n,m} \Big|_{K_n^{(m)}} = T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m} \Big|_{K_n^{(m)}}.$$

**5.2.2.6. Proposition.** *Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène admettant une présentation confluente aux bords  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  telle que  $X$  est fini. La borne gauche de  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  est une homotopie contractante du complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$  si et seulement si  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  satisfait les relations de réduction.*

*Démonstration.* La borne gauche de  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  est une homotopie contractante du complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$  si et seulement si la famille

$$(h'_n : \text{im}(\wedge F) \otimes J_n \longrightarrow \text{im}(\wedge F) \otimes J_{n+1})_n,$$

définie en 5.2.2.2 est une homotopie contractante du complexe de Koszul normalisé de  $\mathbf{A}$ .

D'après le lemme 5.1.3.3, la restriction de

$$T_1^{m-1,m} = \wedge F_{m-\ell_N(n-1)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(\ell_N(n-1))}},$$

à  $K_n^{(m)}$  est égale à la restriction de  $\partial'_n$  à  $K_n^{(m)}$ . Ainsi, la famille  $(h'_n)_n$  est une homotopie contractante de  $(K'_\bullet, \partial')$  si et seulement si, pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $n \geq 1$  et  $m \geq \ell_N(n)$ , la relation suivante est vraie :

$$(\varphi^{P_{n,m}}(s_1) \varphi^{P_{n,m}}(\gamma_1) + \varphi^{P_{n-1,m}}(\gamma_1) \varphi^{P_{n-1,m}}(s_1))_{|K_n^{(m)}} = \text{Id}_{K_n^{(m)}}.$$

D'après les relations 5.3b (voir page 126) et 5.5 (voir page 127), on a :

$$\begin{aligned} \varphi^{P_{n,m}}(s_1) \varphi^{P_{n,m}}(\gamma_1) &= T_1^{n,m} - \varphi^{P_{n,m}}(\sigma) \\ &= T_1^{n,m} - T_1^{n,m} \wedge T_2^{n,m}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(h'_n)_n$  est une homotopie contractante de  $(K'_\bullet, \partial')$  si et seulement si

$$(T_1^{n,m} - T_1^{n,m} \wedge T_2^{n,m} + \varphi^{P_{n-1,m}}(\gamma_1) \varphi^{P_{n-1,m}}(s_1))_{|K_n^{(m)}} = \text{Id}_{K_n^{(m)}}.$$

On a

$$\begin{aligned} \text{im}(T_1^{n,m}) &= \text{im}(\wedge F_{m-\ell_N(n)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(\ell_N(n))}}) \\ &= \text{im}(\wedge F_{m-\ell_N(n)}) \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))}, \end{aligned}$$

de sorte que  $K_n^{(m)}$  est inclus dans  $\text{im}(T_1^{n,m})$ . En particulier, la restriction de  $T_1^{n,m}$  à  $K_n^{(m)}$  est l'application identité. On en déduit que la borne gauche de  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  est une homotopie contractante du complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$  si et seulement si la relation suivante est vraie

$$(\varphi^{P_{n-1,m}}(\gamma_1) \varphi^{P_{n-1,m}}(s_1))_{|K_n^{(m)}} = T_1^{n,m} \wedge T_2^{n,m} |_{K_n^{(m)}}.$$

D'après la relation 5.3a (voir page 126), on a

$$\varphi^{P_{n-1,m}}(\gamma_1) \varphi^{P_{n-1,m}}(s_1) = \varphi^{P_{n-1,m}}(\gamma_1).$$

Par construction,  $K_n^{(m)}$  est inclus dans  $\ker(T_2^{n-1,m})$ . Ainsi, d'après le lemme 5.1.2.4, on a

$$\varphi^{P_{n-1,m}}(\gamma_1) = T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m},$$



Ainsi, la borne gauche de  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est une homotopie contractante du complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$  si et seulement si

$$T_1^{n,m} \wedge T_2^{n,m} \Big|_{K_n^{(m)}} = T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m} \Big|_{K_n^{(m)}},$$

c'est-à-dire, si et seulement si  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  satisfait les relations de réduction.  $\square$

Dans la preuve du théorème 5.2.3.5, on a besoin du lemme suivant :

**5.2.2.7. Lemme.** *Soient  $n$  et  $m$  deux entiers tels que  $n \geq 1$  et  $m \geq \ell_N(n+1)$ . Les opérateurs  $T_1^{n,m}$  et  $T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m}$  commutent.*

*Démonstration.* La paire  $P_{n,m}$  étant confluente, on déduit de la relation 5.6 (voir page 127) que  $T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m}$  est polynomial en  $T_1^{n-1,m}$  et  $T_2^{n-1,m}$ . Ainsi, il est suffisant de montrer que  $T_1^{n,m}$  commute avec  $T_1^{n-1,m}$  et  $T_2^{n-1,m}$ .

Soit

$$G = \ker^{-1}(J_n).$$

On a

$$T_2^{n-1,m} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m-\ell_N(n))}} \otimes G.$$

Ainsi,

$$T_1^{n,m} = \wedge F_{m-\ell_N(n)} \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(\ell_N(n))}},$$

commute avec  $T_2^{n,m}$  avec une composée égale à

$$\begin{aligned} T_1^{n,m} \circ T_2^{n-1,m} &= \wedge F_{m-\ell_N(n)} \otimes G \\ &= T_2^{n-1,m} \circ T_1^{n,m}. \end{aligned}$$

On monte à présent que  $T_1^{n,m}$  commute avec  $T_1^{n-1,m}$ . Si  $m$  est strictement inférieur à  $\ell_N(n+2)$ , alors, d'après le lemme 5.2.1.2,  $T_1^{n,m}$  est égal à  $\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}$ . En particulier, il commute avec  $T_1^{n-1,m}$ . On suppose que  $m$  est supérieur à  $\ell_N(n+2)$ . D'après le lemme 5.2.1.3, on a

$$T_1^{n,m} = S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n+2)}^{(m)},$$

et

$$T_1^{n-1,m} = S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)}.$$

En particulier,  $T_1^{n,m}$  est supérieur à  $T_1^{n-1,m}$ , c'est-à-dire, d'après la relation (2.2) du chapitre 2, on a

$$T_1^{n-1,m} \circ T_1^{n,m} = T_1^{n-1,m}.$$

De plus, d'après le lemme 2.1.1.18 du chapitre 2, on a

$$\text{im}(T_1^{n-1,m}) \subset \text{im}(T_1^{n,m}).$$

En particulier,  $T_1^{n,m}$  étant un projecteur, on a

$$T_1^{n,m} \circ T_1^{n-1,m} = T_1^{n-1,m},$$

de sorte que  $T_1^{n,m}$  et  $T_1^{n-1,m}$  commutent avec une composée égale à  $T_1^{n-1,m}$ .  $\square$

### 5.2.3 Extra-condition et relations de réduction

Dans cette section, on suppose que  $\mathbf{A}$  satisfait l'extra-condition et que  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  est confluente aux bords. On prouve que  $\langle\langle X, < \rangle \mid S \rangle$  satisfait les relations de réduction.

**5.2.3.1. Lemme.** *Soient  $m, r$  et  $k$  des entiers tels que*

1.  $m \geq N + 2$ ,
2.  $2 \leq k \leq N - 1$ ,
3.  $r + k \leq m - N$ .

Alors, on a

1.  $S_r^{(m)} \vee S_{r+k}^{(m)} = S_r^{(m)} \vee \dots \vee S_{r+k}^{(m)}$ ,
2.  $\left( S_r^{(m)} \wedge \dots \wedge S_{r+k-1}^{(m)} \right) \vee S_{r+k}^{(m)} = S_{r+k-1}^{(m)} \vee S_{r+k}^{(m)}$ .

*Démonstration.* On montre le point 1. En notant  $V = \mathbb{K}X$ , l'extra-condition implique que

$$\left( V^{\otimes r+k} \otimes \ker(S) \otimes V^{\otimes m-N-r-k} \right) \cap \left( V^{\otimes r} \otimes \ker(S) \otimes V^{\otimes m-N-r} \right) \subset V^{\otimes r+k-1} \otimes \ker(S) \otimes V^{\otimes m-N-r-k+1}.$$

En appliquant la bijection  $\ker^{-1}$ , cela est équivalent à l'inégalité

$$S_{r+k-1}^{(m)} \preceq S_r^{(m)} \vee S_{r+k}^{(m)}.$$

On a donc

$$S_r^{(m)} \vee S_{r+k-1}^{(m)} \vee S_{r+k}^{(m)} = S_r^{(m)} \vee S_{r+k}^{(m)}.$$

On obtient alors la première relation par récurrence sur  $k$ .

On montre le point 2. On rappelle que le treillis engendré par  $S_0^{(m)}, \dots, S_{m-N}^{(m)}$  est distributif. Ainsi, on a

$$\left( S_r^{(m)} \wedge \dots \wedge S_{r+k-1}^{(m)} \right) \vee S_{r+k}^{(m)} = \left( S_r^{(m)} \vee S_{r+k}^{(m)} \right) \wedge \dots \wedge \left( S_{r+k-1}^{(m)} \vee S_{r+k}^{(m)} \right).$$

De plus, d'après le premier point, pour tout entier  $i$  tel que  $0 \leq i \leq n - 2$ , on a

$$S_{r+i}^{(m)} \vee S_{r+k}^{(m)} = S_{r+i}^{(m)} \vee \dots \vee S_{r+k}^{(m)},$$

de sorte que

$$S_{r+k-1}^{(m)} \vee S_{r+k}^{(m)} \preceq S_{r+i}^{(m)} \vee S_{r+k}^{(m)}.$$

Par définition de la borne inférieure, la relation 2 est vraie. □

**5.2.3.2. Lemme.** *Soient  $n$  et  $m$  deux entiers tels que  $n \geq 2$  et  $\ell_N(n+1) \leq m < \ell_N(n+2)$ .*

On a

$$\left( S_0^{(m)} \wedge \dots \wedge S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \right) \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} = S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \vee \dots \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)}. \quad (5.9)$$

*Démonstration.* D'après le lemme 5.2.1.2, l'hypothèse  $\ell_N(n+1) \leq m < \ell_N(n+2)$  implique que  $m - \ell_N(n)$  est inférieur à  $N - 1$ .

Si  $m$  est égal à  $\ell_N(n+1)$ , on a

$$\left( S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \right) \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} = S_0^{(m)} \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)},$$

et

$$S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \vee \cdots \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} = S_0^{(m)} \vee \cdots \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)}.$$

Ainsi, la relation (5.9) est une conséquence du lemme 5.2.3.1 point 1.

On suppose que  $m$  n'est pas égal à  $\ell_N(n+1)$ . En particulier, on a

$$\ell_N(n+1) < m < \ell_N(n+2). \quad (5.10)$$

Si  $n$  était impair, on aurait  $\ell_N(n+2) = \ell_N(n+1) + 1$ , de sorte que  $m$  ne pourrait pas vérifier (5.10). Ainsi,  $n$  est pair, de sorte qu'on a

$$\left( S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \right) \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} = \left( S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n)-1}^{(m)} \right) \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)},$$

et

$$S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \vee \cdots \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} = S_{m-\ell_N(n)-1}^{(m)} \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)}.$$

Si  $n$  est égal à 2 et  $m$  est égal à  $N+1$ , alors on a

$$\begin{aligned} \left( S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n)-1}^{(m)} \right) \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} &= S_0^{(N+1)} \vee S_1^{(N+1)} \\ &= S_{m-\ell_N(n)-1}^{(m)} \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)}. \end{aligned}$$

Si le couple  $(n, m)$  est différent de  $(2, N+1)$ , la relation (5.9) est une conséquence du lemme 5.2.3.1 point 2. □

**5.2.3.3. Lemme.** Soient  $n$  et  $m$  deux entiers tels que  $n \geq 2$  et  $m \geq \ell_N(n+2)$ . En posant

$$U_{n,m} = S_{m-\ell_N(n+2)+1}^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)},$$

on a

$$U_{n,m} \vee T_2^{n-1,m} = T_2^{n,m}.$$

*Démonstration.* D'après le lemme 5.2.1.3, on a

$$\begin{aligned} T_2^{n-1,m} &= S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} \vee \cdots \vee S_{m-N}^{(m)}, \text{ et} \\ T_2^{n,m} &= S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \vee \cdots \vee S_{m-N}^{(m)}. \end{aligned}$$

La loi  $\vee$  étant associative, il suffit de prouver :

$$U_{n,m} \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} = S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \vee \cdots \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)}. \quad (5.11)$$

Si  $n$  est impair, on a  $\ell_N(n+2) = \ell_N(n+1) + 1$ . En particulier,

$$U_{n,m} \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} = S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)}.$$

De plus,  $\ell_N(n+1) - \ell_N(n)$  est égal à  $N - 1$ . Ainsi, la relation (5.11) est une conséquence du lemme 5.2.3.1 point 1.

Si  $n$  est pair, on a  $\ell_N(n+1) = \ell_N(n) + 1$ . En particulier,

$$U_{n,m} \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} = \left( S_{m-\ell_N(n+2)+1}^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n)-1}^{(m)} \right) \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)},$$

et

$$S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \vee \cdots \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} = S_{m-\ell_N(n)-1}^{(m)} \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)}.$$

De plus,  $\ell_N(n+2) - 1 - \ell_N(n)$  est égal à  $N - 1$ . Ainsi, la relation (5.11) est une conséquence du lemme 5.2.3.1 point 2.  $\square$

**5.2.3.4. Proposition.** *Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène. On suppose que  $\mathbf{A}$  admet une présentation confluyente aux bords  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ . Alors,  $\mathbf{A}$  satisfait l'extra-condition si et seulement si, pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $n \geq 1$  et  $m \geq \ell_N(n+1)$ , on a*

$$T_1^{n,m} \wedge \left( T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m} \right) = T_1^{n,m} \wedge T_2^{n,m}.$$

*Démonstration.* On pose

$$L_{n,m} = T_1^{n,m} \wedge \left( T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m} \right),$$

et

$$R_{n,m} = T_1^{n,m} \wedge T_2^{n,m}.$$

On suppose que  $L_{n,m}$  et  $R_{n,m}$  sont égaux. On doit montrer que, pour tout entier  $m$  tel que  $2 \leq m \leq N - 1$ , l'inclusion suivante est vraie :

$$\left( \mathbb{K}X^{(m)} \otimes \ker(S) \right) \cap \left( \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(m)} \right) \subset \mathbb{K}X^{(m-1)} \otimes \ker(S) \otimes \mathbb{K}X.$$

En appliquant la bijection  $\ker^{-1}$ , il faut montrer l'inégalité suivante :

$$S_{m-1}^{(N+m)} \succeq S_0^{(N+m)} \vee S_m^{(N+m)}. \quad (5.12)$$

D'après le lemme 5.2.1.2, on a

$$T_1^{2,N+m} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(N+m)}}.$$

De plus, d'après le lemme 5.2.1.3, on a

$$\begin{aligned} T_1^{1,N+m} &= S_0^{(N+2)} \wedge \cdots \wedge S_{m-1}^{(N+m)}, \\ T_2^{1,N+m} &= S_m^{(N+m)}, \\ T_2^{2,N+m} &= S_{m-1}^{(N+m)} \vee S_m^{(N+m)}. \end{aligned}$$

Par hypothèse,  $L_{2,N+m}$  et  $R_{2,N+m}$  sont égaux, donc on a

$$\left( S_0^{(N+m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-1}^{(N+m)} \right) \vee S_m^{(N+m)} = S_{m-1}^{(N+m)} \vee S_m^{(N+m)}. \quad (5.13)$$

Le treillis engendré par  $S_0^{(N+m)}, \dots, S_m^{(N+m)}$  étant distributif, (5.13) équivaut à

$$\left( S_0^{(N+m)} \vee S_m^{(N+m)} \right) \wedge \cdots \wedge \left( S_{m-1}^{(N+m)} \vee S_m^{(N+m)} \right) = S_{m-1}^{(N+m)} \vee S_m^{(N+m)}.$$

En particulier, on a

$$S_{m-1}^{(N+m)} \vee S_m^{(N+m)} \preceq S_0^{(N+m)} \vee S_m^{(N+m)},$$

de sorte que

$$S_{m-1}^{(N+m)} \preceq S_0^{(N+m)} \vee S_m^{(N+m)}.$$

Ainsi, (5.12) est vraie.

On suppose à présent que l'extra-condition est vraie. On doit montrer que, pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $n \geq 1$  et  $m \geq \ell_N(n+1)$ ,  $L_{n,m}$  et  $R_{n,m}$  sont égaux. Pour cela, on considère trois cas.

**Cas 1.** On suppose que  $n = 1$ . On montre d'abord :

$$L_{1,m} = T_1^{0,m}. \quad (5.14)$$

Le noyau de  $\ker(T_2^{0,m})$  est égal à  $\mathbb{K}X^{(m-1)} \otimes J_1 = \mathbb{K}X^{(m)}$ , c'est-à-dire,

$$T_2^{0,m} = 0_{\mathbb{K}X^{(m)}}.$$

En particulier,  $T_1^{0,m} \vee T_2^{0,m}$  est égal à  $T_1^{0,m}$ , de sorte que

$$L_{1,m} = T_1^{1,m} \wedge T_1^{0,m}.$$

De plus, on a

$$\ker(T_1^{1,m}) = I_{m-1} \otimes \mathbb{K}X,$$

et

$$\ker(T_1^{0,m}) = I_m.$$

Or, l'inclusion  $I_m \subset I_{m-1} \otimes \mathbb{K}X$  implique que

$$T_1^{0,m} \preceq T_1^{1,m}.$$

de sorte que la relation (5.14) est vraie.

On suppose que  $m = N$ . Le noyau de  $T_1^{1,N}$  est égal à  $I_{N-1} \otimes \mathbb{K}X = \{0\}$ , c'est-à-dire,

$$T_1^{1,N} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(N)}}.$$

En particulier, on a

$$R_{1,N} = T_2^{1,N}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} T_1^{0,N} &= \ker^{-1}(I_N) \\ &= \ker^{-1}(\ker(S)), \text{ et} \\ T_2^{1,N} &= \ker^{-1}(J_2) \\ &= \ker^{-1}(\ker(S)). \end{aligned}$$

Ainsi,  $L_{1,N}$  et  $R_{1,N}$  sont tous les deux égaux à  $S$ .

On suppose que  $m \geq N + 1$ . D'après le lemme 5.2.1.3, on a

$$\begin{aligned} T_1^{0,m} &= S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-N}^{(m)}, \\ T_1^{1,m} &= S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-N-1}^{(m)}, \\ T_2^{1,m} &= S_{m-N}^{(m)}. \end{aligned}$$

Ainsi,  $L_{1,m}$  et  $R_{1,m}$  sont égaux à  $S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-N}^{(m)}$ . La proposition 5.2.3.4 est donc vraie pour  $n = 1$  et  $m \geq N$ .

**Cas 2.** On suppose que  $n \geq 2$  et  $\ell_N(n+1) \leq m < \ell_N(n+2)$ . D'après le lemme 5.2.1.2,  $m - \ell_N(n)$  est plus petit que  $N - 1$ . Ainsi, le noyau de  $T_1^{n,m}$  est égal à  $\{0\}$ , c'est-à-dire,  $T_1^{n,m}$  est égal à  $\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}$ . On a donc

$$L_{n,m} = T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m},$$

et

$$R_{n,m} = T_2^{n,m}.$$

D'après le lemme 5.2.1.3, on a

$$\begin{aligned} T_1^{n-1,m} &= S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)}, \\ T_2^{n-1,m} &= S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} \vee \cdots \vee S_{m-N}^{(m)}, \\ T_2^{n,m} &= S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \vee \cdots \vee S_{m-N}^{(m)}. \end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme 5.2.3.2, on a

$$\left( S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \right) \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)} = S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)} \vee \cdots \vee S_{m-\ell_N(n)}^{(m)}.$$

La loi  $\vee$  étant associative, on en déduit que la proposition 5.2.3.4 est vraie pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $n \geq 2$  et  $\ell_N(n+1) \leq m < \ell_N(n+2)$ .

**Cas 3.** On suppose que  $n \geq 2$  et  $m \geq \ell_N(n+2)$ . D'après le lemme 5.2.1.3, on a

$$\begin{aligned} T_1^{n-1,m} &= S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)}, \\ T_1^{n,m} &= S_0^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n+2)}^{(m)}. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant  $U_{n,m} = S_{m-\ell_N(n+2)+1}^{(m)} \wedge \cdots \wedge S_{m-\ell_N(n+1)}^{(m)}$ , on a

$$T_1^{n-1,m} = T_1^{n,m} \wedge U_{n,m}.$$

Le treillis engendré par  $S_0^{(m)}, \dots, S_{m-N}^{(m)}$  étant distributif, on a

$$T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m} = \left( T_1^{n,m} \vee T_2^{n-1,m} \right) \wedge \left( U_{n,m} \vee T_2^{n-1,m} \right).$$

En utilisant l'inégalité  $T_1^{n,m} \preceq \left( T_1^{n,m} \vee T_2^{n-1,m} \right)$ , on obtient :

$$L_{n,m} = T_1^{n,m} \wedge \left( U_{n,m} \vee T_2^{n-1,m} \right).$$

D'après le lemme 5.2.3.3,  $U_{n,m} \vee T_2^{n-1,m}$  est égal à  $T_2^{n,m}$ . Ainsi, la proposition 5.2.3.4 est vraie pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $n \geq 2$  et  $m \geq \ell_N(n+2)$ .  $\square$

**5.2.3.5. Théorème.** Soit  $\mathbf{A}$  une algèbre homogène satisfaisant l'extra-condition et admettant une présentation confluente aux bords  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  telle que  $X$  est fini. La borne gauche de  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est une homotopie contractante du complexe de Koszul de  $\mathbf{A}$ .

*Démonstration.* D'après la proposition 5.2.2.6, il est suffisant de montrer que pour tout couple d'entiers  $(n, m)$  tel que  $n \geq 1$  et  $m \geq \ell_N(n)$ , on a

$$(r_{n,m}) \quad T_1^{n,m} \wedge T_2^{n,m} \Big|_{K_n^{(m)}} = T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m} \Big|_{K_n^{(m)}},$$

où

$$K_n^{(m)} = \text{im} (\wedge F_{m-\ell_N(n)}) \otimes J_n.$$

On suppose que  $\ell_N(n) \leq m < \ell_N(n+1)$  et on montre que

$$T_1^{n,m} \wedge T_2^{n,m} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} \quad (5.15)$$

et

$$T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}. \quad (5.16)$$

L'hypothèse  $\ell_N(n) \leq m < \ell_N(n+1)$  implique que  $m - \ell_N(n)$  est plus petit que  $N - 1$ . En particulier, le noyau de  $T_1^{n,m}$  est égal à  $\{0\}$ , c'est-à-dire,

$$T_1^{n,m} = \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}.$$

De plus,  $T_2^{n,m}$  est égal à  $\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}$  par définition. Ainsi, la relation (5.15) est vraie. De plus, d'après le lemme 5.2.1.2, le morphisme  $T_1^{n-1,m}$  est égal à  $\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}$ , de sorte que (5.16) est également vraie. Ainsi,  $r_{n,m}$  avec  $\ell_N(n) \leq m < \ell_N(n+1)$  est vraie.

On suppose que  $m \geq \ell_N(n+1)$ . D'après le lemme 5.2.2.7,  $T_1^{n,m}$  et  $T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m}$  commutent. D'après le lemme 2.2.1.3 du chapitre 2, on a donc

$$T_1^{n,m} \wedge (T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m}) = (T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m}) \circ T_1^{n,m}. \quad (5.17)$$

D'après le lemme 5.2.2.1, on a

$$\text{im} (T_1^{n,m}) = \text{im} (\wedge F_{m-\ell_N(n)}) \otimes \mathbb{K}X^{(\ell_N(n))},$$

et donc  $K_n^{(m)}$  est inclus dans  $\text{im} (T_1^{n,m})$ . L'opérateur  $T_1^{n,m}$  étant un projecteur, sa restriction à  $K_n^{(m)}$  est l'identité, de sorte que d'après (5.17), on a

$$\left( T_1^{n,m} \wedge (T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m}) \right) \Big|_{K_n^{(m)}} = (T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m}) \Big|_{K_n^{(m)}}.$$

Enfin,  $\mathbf{A}$  satisfaisant l'extra-condition, on a d'après la proposition 5.2.3.4

$$T_1^{n,m} \wedge (T_1^{n-1,m} \vee T_2^{n-1,m}) = T_1^{n,m} \wedge T_2^{n,m}.$$

Ainsi, la relation  $(r_{n,m})$  est vraie.  $\square$

## 5.3 Exemples

Dans cette section, on illustre la construction de la borne gauche sur trois exemples : les algèbres symétriques libres dans la section 5.3.1, les algèbres monomiales satisfaisant la propriété de chevauchement dans la section 5.3.2 et l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'Heisenberg [4] dans la section 5.3.3.

On ne donne pas les constructions de  $h_{-1}$  et  $h_0$  puisque celles-ci apparaissent dans la section 5.1.1. De plus, pour chacun de ces exemples, l'algèbre  $\mathbf{A}$  considérée admet une présentation par opérateur confluent aux bords et admet donc pour base l'ensemble des mots en formes normales. Ainsi, pour définir les morphismes

$$h_n : \mathbf{A} \otimes J_n \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_{n+1},$$

il suffit de définir  $h_n(\bar{w} \otimes f)$  où  $w$  est un mot en forme normale et  $f$  est un élément d'une base fixée de  $J_n$ . Enfin, dans chaque cas, la forme normale d'un élément  $f \in \mathbb{K}X^*$  est notée  $\hat{f}$ .

### 5.3.1 Les algèbres symétriques libres

Dans cette section, on considère l'algèbre symétrique  $\mathbf{A} = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_d]$  sur  $d$  générateurs. Cette algèbre admet la présentation  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ , où  $X$  est égal à  $\{x_1, \dots, x_d\}$ ,  $<$  est l'ordre deg-lex induit par  $x_1 < \dots < x_d$  et  $S$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{K}X^{(2)}$  défini par

$$S(x_i x_j) = \begin{cases} x_j x_i, & \text{si } i > j \\ x_i x_j, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**5.3.1.1. Confluence aux bords et extra-condition.** Soit  $w = x_i x_j x_k \in X^{(3)}$ . Si  $k$  est strictement plus petit que  $j$  et  $i$  est strictement plus petit que  $k$ , on a

$$\begin{aligned} L_3(S \otimes \text{Id}_V, \text{Id}_V \otimes S)(w) &= L_3(\text{Id}_V \otimes S, S \otimes \text{Id}_V)(w) \\ &= x_k x_j x_i. \end{aligned}$$

Dans les autres cas,  $L_2(S \otimes \text{Id}_V, \text{Id}_V \otimes S)(w)$  et  $L_2(\text{Id}_V \otimes S, S \otimes \text{Id}_V)(w)$  sont égaux. En particulier, les deux opérateurs  $L_3(S \otimes \text{Id}_V, \text{Id}_V \otimes S)$  et  $L_3(\text{Id}_V \otimes S, S \otimes \text{Id}_V)$  sont égaux. Ainsi, la paire  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)$  est confluyente, de sorte que  $\langle (X, <) \mid S \rangle$  est confluyente aux bords. De plus,  $N$  est égal à 2 et donc l'extra-condition est satisfaite.

**5.3.1.2. Formes normales.** La forme normale d'un mot

$$w = x_{i_1} \cdots x_{i_n},$$

est égale à

$$\hat{w} = x_{j_1} \cdots x_{j_n},$$

où  $\{j_1, \dots, j_n\} = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\}$  et  $j_1 \leq \dots \leq j_n$ .



**5.3.1.3. Le complexe de Koszul de l'algèbre symétrique.** Le morphisme

$$\partial_1 : \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X \longrightarrow \mathbf{A},$$

est défini par

$$\partial_1(1_{\mathbf{A}} \otimes x_i) = \overline{x_i},$$

pour tout  $1 \leq i \leq d$ . Le morphisme

$$\partial_2 : \mathbf{A} \otimes \ker(S) \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X,$$

est défini par

$$\partial_2(1_{\mathbf{A}} \otimes (x_j x_i - x_i x_j)) = \overline{x_j} \otimes x_i - \overline{x_i} \otimes x_j,$$

pour tout  $1 \leq i < j \leq d$ . Si  $d$  est supérieur à 3, l'espace vectoriel  $J_3$  est engendré par les éléments

$$\begin{aligned} r_{i_1 < i_2 < i_3} &= x_{i_3}(x_{i_2}x_{i_1} - x_{i_1}x_{i_2}) - x_{i_2}(x_{i_3}x_{i_1} - x_{i_1}x_{i_3}) + x_{i_1}(x_{i_3}x_{i_2} - x_{i_2}x_{i_3}) \\ &= (x_{i_3}x_{i_2} - x_{i_2}x_{i_3})x_{i_1} - (x_{i_3}x_{i_1} - x_{i_1}x_{i_3})x_{i_2} + (x_{i_2}x_{i_1} - x_{i_1}x_{i_2})x_{i_3}, \end{aligned}$$

où  $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq d$ . Le morphisme

$$\partial_3 : \mathbf{A} \otimes J_3 \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \ker(S),$$

est défini par

$$\partial_3(1_{\mathbf{A}} \otimes r_{i_1 < i_2 < i_3}) = \overline{x_{i_3}} \otimes (x_{i_2}x_{i_1} - x_{i_1}x_{i_2}) - \overline{x_{i_2}} \otimes (x_{i_3}x_{i_1} - x_{i_1}x_{i_3}) + \overline{x_{i_1}} \otimes (x_{i_3}x_{i_2} - x_{i_2}x_{i_3}).$$

On suppose que  $d$  est supérieur à 4 et soit  $n$  un entier tel que  $3 \leq n \leq d - 1$ . Soit  $I_n$  l'ensemble des suites  $i_1 < \dots < i_n$  telles que  $1 \leq i_1$  et  $i_n \leq d$ . On suppose que  $r_l$  est défini pour tout  $l \in I_n$ . Pour tout  $l = i_1 < \dots < i_{n+1} \in I_{n+1}$  et pour tout  $1 \leq j \leq n + 1$ , soit  $l_j$  l'élément de  $I_n$  obtenu en supprimant l'élément  $i_j$  de la suite  $l$ . On pose

$$r_l = \sum_{j=0}^{n+1} \eta(n+j)x_{i_j}r_{l_j},$$

où  $\eta : \mathbb{N} \longrightarrow \{-1, 1\}$  est définie par  $\eta(k) = 1$  si  $k$  est impair et  $\eta(k) = -1$ , sinon. Pour tout  $4 \leq n \leq d$ , l'espace vectoriel  $J_n$  est engendré par les éléments  $r_l$  où  $l \in I_n$ . Le morphisme

$$\partial_n : \mathbf{A} \otimes J_n \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_{n-1},$$

est défini par

$$\partial_n(1_{\mathbf{A}} \otimes r_l) = \sum_{j=1}^n (-1)^{-\eta(n-1+j)} \overline{x_{i_j}} \otimes r_{l_j}.$$

De plus, pour tout entier  $n$  supérieur à  $d + 1$ ,  $J_n$  est réduit à  $\{0\}$ .

**5.3.1.4. La construction de  $h_1$ .** Soit  $m$  un entier supérieur à 2. Soit  $P_{1,m} = (T_1^{1,m}, T_2^{1,m})$  la paire de réduction de bi-degré  $(1, m)$  associée à  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ . Les morphismes  $T_1^{1,m}$  et  $T_2^{1,m}$  sont définis par

$$\begin{aligned} T_1^{1,m}(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) &= \widehat{w}x_{i_m}, \text{ où } w = x_{i_1} \cdots x_{i_{m-1}}, \text{ et} \\ T_2^{1,m}(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) &= x_{i_1} \cdots x_{i_{m-2}}\widehat{w}, \text{ où } w = x_{i_{m-1}}x_{i_m}. \end{aligned}$$

Ces morphismes satisfont la relation

$$L_4(T_1^{1,m}, T_2^{1,m}) = L_3(T_2^{1,m}, T_1^{1,m}).$$

On considère donc la  $P_{1,m}$  - représentation de  $\mathcal{A}_4$  :

$$\begin{aligned} \varphi_{1,m}: \mathcal{A}_4 &\longrightarrow \text{End}(\mathbb{K}X^{(m)}). \\ s_i &\longmapsto T_i^{1,m} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi_{1,m}(\gamma_1) &= \varphi_{1,m}((1 - s_2)(s_1 + s_1s_2s_1)) \\ &= T_1^{1,m} - T_2^{1,m} \circ T_1^{1,m}. \end{aligned}$$

Explicitement, soit  $w = w'x_{i_2}$  un mot en forme normale. Alors,  $\varphi_{1,m}(\gamma_1)(wx_{i_1})$  est égal à  $w'(x_{i_2}x_{i_1} - x_{i_1}x_{i_2})$  si  $i_2 < i_1$  et  $\varphi_{1,m}(\gamma_1)(wx_{i_1})$  est égal à 0 sinon. Ainsi, l'application

$$h_1: \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \ker(S),$$

est définie par

$$h_1(\overline{w} \otimes x_{i_1}) = \begin{cases} \overline{w'} \otimes (x_{i_2}x_{i_1} - x_{i_1}x_{i_2}), & \text{si } w = w'x_{i_2} \text{ avec } i_2 < i_1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**5.3.1.5. La construction de  $h_2$ .** Soit  $m$  un entier supérieur à 3. Soit  $P_{2,m} = (T_1^{2,m}, T_2^{2,m})$  la paire de réduction de bi-degré  $(2, m)$  associée à  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ . Les morphismes  $T_1^{2,m}$  et  $T_2^{2,m}$  sont définis par

$$\begin{aligned} T_1^{2,m}(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) &= \widehat{w}x_{i_{m-1}}x_{i_m}, \text{ où } w = x_{i_1} \cdots x_{i_{m-2}}, \text{ et} \\ T_2^{2,m}(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) &= \begin{cases} x_{i_1} \cdots x_{i_{m-3}}(r_{i_{m-2} < i_{m-1} < i_m}), & \text{si } i_{m-2} < i_{m-1} < i_m \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Ces morphismes satisfont la relation

$$L_4(T_1^{2,m}, T_2^{2,m}) = L_3(T_2^{2,m}, T_1^{2,m}).$$

On considère donc la  $P_{2,m}$  - représentation de  $\mathcal{A}_4$  :

$$\begin{aligned} \varphi_{2,m}: \mathcal{A}_4 &\longrightarrow \text{End}(\mathbb{K}X^{(m)}). \\ s_i &\longmapsto T_i^{2,m} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}\varphi_{2,m}(\gamma_1) &= \varphi_{2,m}((1-s_2)(s_1+s_1s_2s_1)) \\ &= T_1^{2,m} - T_2^{2,m} \circ T_1^{2,m}.\end{aligned}$$

Soit  $wx_{i_2}x_{i_1} \in X^{(m)}$  où  $w = w'x_{i_3}$  est en forme normale. Alors,  $\varphi_{2,m}(\gamma_1)(wx_{i_2}x_{i_1})$  est égal à  $w'r_{i_1 < i_2 < i_3}$  si  $i_2 < i_1$  et  $\varphi_{2,m}(\gamma_1)(wx_{i_2}x_{i_1})$  est égal à 0 sinon. Ainsi, l'application

$$h_2 : \mathbf{A} \otimes \ker(S) \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_3,$$

est définie par

$$h_2(\bar{w} \otimes (x_{i_2}x_{i_1} - x_{i_1}x_{i_2})) = \begin{cases} \bar{w}' \otimes (r_{i_1 < i_2 < i_3}), & \text{si } w = w'x_{i_3} \text{ avec } i_1 < i_2 < i_3 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**5.3.1.6. La construction de  $h_n$ .** Plus généralement, soit  $w = w'x_{i_{n+1}}$  un mot en forme normale. L'application

$$h_n : \mathbf{A} \otimes J_n \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_{n+1},$$

est définie par

$$h_n(\bar{w} \otimes r_{i_1 < \dots < i_n}) = \begin{cases} \bar{w}' \otimes r_{i_1 < \dots < i_{n+1}}, & \text{si } w = w'x_{i_{n+1}} \text{ avec } i_1 < \dots < i_{n+1} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**5.3.1.7. Remarque.** La borne gauche de  $\langle\langle X, < \mid S \rangle\rangle$  est l'homotopie contractante construite dans la preuve de [65, Proposition 3.4.8].

## 5.3.2 Algèbres monomiales satisfaisant la propriété de chevauchement

On considère l'exemple provenant de [12, Proposition 3.8].

**5.3.2.1. Algèbres monomiales.** Soit  $N$  un entier. Une *algèbre monomiale* de degré  $N$  est une algèbre admettant une présentation  $\langle X \mid R \rangle$  où  $R$  est un ensemble de mots de longueur  $N$ .

Dans toute cette section, on fixe une algèbre monomiale  $\mathbf{A}$  ainsi qu'une présentation  $\langle X \mid R \rangle$  de  $\mathbf{A}$  telle que  $R$  est inclus dans  $X^{(N)}$ . On suppose de plus que  $\langle X \mid R \rangle$  satisfait la *propriété de chevauchement*. Celle-ci s'énonce de la façon suivante :

**5.3.2.2. La propriété de chevauchement.** On dit que  $\langle X \mid R \rangle$  satisfait la propriété de chevauchement si, pour tout entier  $n$  tel que  $N+2 \leq n \leq 2N-1$  et pour tout mot  $w = x_{i_1} \cdots x_{i_n}$  tel que  $x_{i_1} \cdots x_{i_N}$  et  $x_{i_{n-N+1}} \cdots x_{i_n}$  appartiennent à  $R$ , alors tout sous-mot de longueur  $N$  de  $w$  appartient également à  $R$ .

**5.3.2.3. Remarque.** La propriété de chevauchement est équivalente à l'extra-condition. Cette dernière étant un invariant de l'algèbre, on en déduit que toutes les autres présentations  $\langle X' \mid R' \rangle$  de  $\mathbf{A}$  telles que  $R'$  est inclus dans  $X'^{(N)}$  satisfont également la propriété de chevauchement.

**5.3.2.4. Présentation par opérateur.** Soit  $<$  un ordre monomial quelconque. Alors,  $\mathbf{A}$  admet la présentation  $\langle\langle X, < \mid S \rangle\rangle$  où  $S$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{K}X^{(N)}$  défini par

$$S(w) = \begin{cases} 0, & \text{si } w \in R \\ w, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**5.3.2.5. Confluence aux bords et extra-condition.** Pour tout entier  $m$  compris entre 1 et  $N - 1$ , les opérateurs  $S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}$  et  $\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} \otimes S$  commutent, de sorte que la paire  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}}, \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m)}} \otimes S)$  est confluente. Ainsi, la présentation  $\langle\langle X, < \mid S \rangle\rangle$  est confluente aux bords. De plus, la propriété de chevauchement étant équivalente à l'extra-condition,  $\mathbf{A}$  satisfait l'extra-condition.

**5.3.2.6. Le complexe de Koszul d'une algèbre monomiale.** Soit  $n$  un entier supérieur à 2. L'espace vectoriel  $J_n$  est engendré par les mots  $w$  de longueur  $\ell_N(n)$  tels que tout sous-mot de longueur  $N$  de  $w$  appartient à  $R$ . Le morphisme

$$\partial_n : \mathbf{A} \otimes J_n \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_{n-1},$$

est défini par

$$\partial_n \left( \mathbf{1}_{\mathbf{A}} \otimes x_{i_1} \cdots x_{i_{\ell_N(n)}} \right) = \overline{x_{i_1} \cdots x_{i_{\ell_N(n) - \ell_N(n-1)}}} \otimes x_{i_{\ell_N(n) - \ell_N(n-1) + 1}} \cdots x_{i_{\ell_N(n)}}.$$

**5.3.2.7. L'homotopie contractante.** Soient  $n$  et  $m$  deux entiers tels que  $m \geq \ell_n(n)$ . Soit  $P_{n,m} = (T_1^{n,m}, T_2^{n,m})$  la paire de réduction de bi-degré  $(n, m)$  associée à  $\langle\langle X, < \mid S \rangle\rangle$ . Les opérateurs  $T_1^{n,m}$  et  $T_2^{n,m}$  sont définis par

$$T_1^{n,m}(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) = \begin{cases} 0, & \text{si un sous-mot de longueur } N \text{ de } x_{i_1} \cdots x_{i_{m - \ell_n(n)}} \text{ appartient à } R \\ w, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$T_2^{n,m}(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) = \begin{cases} 0, & \text{si } x_{i_{m - \ell_N(n+1) + 1}} \cdots x_{i_m} \in J_{n+1} \\ w, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces opérateurs commutent. On considère donc la  $P_{n,m}$ -représentation de  $\mathcal{A}_2$  :

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m} : \mathcal{A}_2 &\longrightarrow \text{End} \left( \mathbb{K}X^{(m)} \right). \\ s_i &\longmapsto T_i^{n,m} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m}(\gamma_1) &= \varphi_{n,m}((1 - s_2)s_1) \\ &= T_1^{n,m} - T_2^{n,m} \circ T_1^{n,m}. \end{aligned}$$

Soit  $w = x_{i_1} \cdots x_{i_m}$  un élément de  $X^{(m)}$ . Si  $w$  est tel que aucun sous-mot de longueur  $N$  de  $x_{i_1} \cdots x_{i_{m - \ell_n(n)}}$  n'appartient à  $R$  et si  $x_{i_{m - \ell_N(n+1) + 1}} \cdots x_{i_m}$  appartient à  $J_{n+1}$ , alors  $\varphi_{n,m}(\gamma_1)(w)$  est égal à  $w$ . Dans les autres cas,  $\varphi_{n,m}(\gamma_1)(w)$  est égal à 0. Ainsi, l'application

$$h_n : \mathbf{A} \otimes J_n \longrightarrow \mathbf{A} \otimes J_{n+1},$$

est définie par

$$h_n \left( \bar{w} \otimes x_{i_{m-\ell_N(n)+1}} \cdots x_{i_m} \right) = \begin{cases} \bar{w}' \otimes x_{i_{m-\ell_N(n+1)+1}} \cdots x_{i_m}, & \text{si } x_{i_{m-\ell_N(n+1)+1}} \cdots x_{i_m} \in J_{n+1} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où  $w = x_{i_1} \cdots x_{i_{m-\ell_N(n)}}$  est en forme normale et  $w' = x_{i_1} \cdots x_{i_{m-\ell_N(n+1)}}$ .

### 5.3.3 L'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'Heisenberg

**5.3.3.1. Présentation par opérateur.** L'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'Heisenberg est l'algèbre  $\mathbf{A}$  présentée par  $\langle\langle X, < \mid S \rangle\rangle$  où  $X = \{x < y\}$  et  $S$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{K}X^{(3)}$  défini par

$$S(w) = \begin{cases} 2xyx - xxy, & \text{si } w = yxx \\ 2yxy - xyy, & \text{si } w = yyx \\ w, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**5.3.3.2. Confluence aux bords et extra-condition.** On vérifie que

$$\begin{aligned} L_2(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)(yyxx) &= L_2(\text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S, S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X})(yyxx) \\ &= yxyx - 2xyxy + xxyy. \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $w \in X^{(4)}$  différent de  $yyxx$ , on a

$$L_2(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S)(w) = L_2(\text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S, S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X})(w).$$

Ainsi, on a

$$L_2(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S) = L_2(\text{Id}_{\mathbb{K}X} \otimes S, S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}),$$

de sorte que  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X}, \text{Id}_{\mathbb{K}X})$  est confluent.

Pour tout  $w \in X^{(5)}$ ,  $L_2(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(2)}}, \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(2)}} \otimes S)(w)$  et  $L_2(\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(2)}} \otimes S, S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(2)}})(w)$  sont égaux, de sorte que

$$L_2(S \otimes \text{Id}_{V^{\otimes 2}}, \text{Id}_{V^{\otimes 2}} \otimes S) = L_2(\text{Id}_{V^{\otimes 2}} \otimes S, S \otimes \text{Id}_{V^{\otimes 2}}).$$

Ainsi,  $(S \otimes \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(2)}}, \text{Id}_{\mathbb{K}X^{(2)}} \otimes S)$  est confluent et donc la présentation  $\langle\langle X, < \mid S \rangle\rangle$  est confluent aux bords.

Enfin,  $\mathbb{K}X^{(2)} \otimes \ker(S) \cap \ker(S) \otimes \mathbb{K}X^{(2)}$  est réduit à  $\{0\}$ , de sorte que  $\mathbf{A}$  satisfait l'extra-condition.

**5.3.3.3. Le complexe de Koszul.** Le morphisme

$$\partial_1 : \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X \longrightarrow \mathbf{A},$$

est défini par

$$\partial_1(1_{\mathbf{A}} \otimes x) = \bar{x} \text{ et } \partial_1(1_{\mathbf{A}} \otimes y) = \bar{y}.$$

En posant

$$f_1 = yxx - 2xyx + xxy \text{ et } f_2 = yyx - 2yxy + xyy,$$

le morphisme

$$\partial_2 : \mathbf{A} \otimes \ker(S) \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \mathbb{K}X,$$

est défini par

$$\begin{aligned} \partial_2(1_{\mathbf{A}} \otimes f_1) &= \overline{y}x \otimes x - 2\overline{x}y \otimes x + \overline{x} \otimes y, \text{ et} \\ \partial_2(1_{\mathbf{A}} \otimes f_2) &= \overline{y}y \otimes x - 2\overline{y}x \otimes y + \overline{x}y \otimes y. \end{aligned}$$

L'espace vectoriel  $J_3 = (\mathbb{K}X \otimes \ker(S)) \cap (\ker(S) \otimes \mathbb{K}X)$  est l'espace vectoriel engendré par

$$\begin{aligned} v &= yf_1 + xf_2 \\ &= f_2x + f_1y. \end{aligned}$$

Le morphisme

$$\partial_3 : \mathbf{A} \otimes J_3 \longrightarrow \mathbf{A} \otimes \ker(S),$$

est défini par

$$\partial_3(1_{\mathbf{A}} \otimes v) = \overline{y} \otimes f_1 + \overline{x} \otimes f_2.$$

Pour tout entier  $n$  tel que  $n \geq 4$ , l'espace vectoriel  $J_n$  est réduit à  $\{0\}$ .

**5.3.3.4. La construction de  $h_1$ .** Soit  $m$  un entier supérieur à 3. Soit  $P_{1,m} = (T_1^{1,m}, T_2^{1,m})$  la paire de réduction de bi-degré  $(1, m)$  associée à  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ . Les morphismes  $T_1^{1,m}$  et  $T_2^{1,m}$  sont définis par

$$\begin{aligned} T_1^{1,m}(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) &= \widehat{w}x_{i_m}, \text{ où } w = x_{i_1} \cdots x_{i_{m-1}}, \text{ et} \\ T_2^{1,m}(x_{i_1} \cdots x_{i_m}) &= x_{i_1} \cdots x_{i_{m-3}}\widehat{w}, \text{ où } w = x_{i_{m-2}}x_{i_{m-1}}x_{i_m}. \end{aligned}$$

Ces morphismes commutent. On considère donc la  $P_{1,m}$ -représentation de  $\mathcal{A}_2$  :

$$\begin{aligned} \varphi_{1,m} : \mathcal{A}_2 &\longrightarrow \text{End}(\mathbb{K}X^{(m)}). \\ s_i &\longmapsto T_i^{1,m} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi_{1,m}(\gamma_1) &= \varphi_{1,m}((1 - s_2)s_1) \\ &= T_1^{1,m} - T_2^{1,m} \circ T_1^{1,m}. \end{aligned}$$

Soit  $w$  un mot en forme normale de longueur  $m - 1$ . Le mot  $wy$  ne se factorise pas à droite par  $yx$  ou  $yy$ . Ainsi,  $\varphi_{1,m}(\gamma_1)(wy)$  est égal à 0. En particulier, on a

$$h_1(\overline{w} \otimes y) = 0,$$

pour toute forme normale  $w \in X^*$ . Si  $w$  ne se factorise pas à droite par  $yx$  ou  $yy$ ,  $\varphi_{1,m}(\gamma_1)(wx)$  est égal à 0. Si  $w$  peut s'écrire  $w'yx$  (respectivement  $w'yy$ ), alors  $\varphi_{1,m}(\gamma_1)(wx)$  est égal à  $w'(2xyx - xxy)$  (respectivement  $w'(2yxy - xyy)$ ). Ainsi, on a :

$$h_1(\overline{w} \otimes x) = \begin{cases} \overline{w'} \otimes (2xyx - xxy), & \text{si } w = w'yx \\ \overline{w'} \otimes (2yxy - xyy), & \text{si } w = w'yy \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

**5.3.3.5. La construction de  $h_2$ .** Soit  $m$  un entier supérieur à 4. Soit  $P_{2,m} = (T_1^{2,m}, T_2^{2,m})$  la paire de réduction de bi-degré  $(2, m)$  associée à  $\langle (X, <) \mid S \rangle$ . Le morphisme  $T_1^{2,m}$  est défini pour tout  $w \in X^{(m)}$  par

$$T_1^{2,m}(w) = \widehat{w}_1 w_2,$$

où  $w_1 \in X^*$  et  $w_2 \in X^{(4)}$  sont tels que  $w = w_1 w_2$ . L'opérateur  $T_2^{2,m}$  est égal à  $\text{Id}_{\mathbb{K}X^{(m-4)}} \otimes U$  où  $U$  est égal à  $\ker^{-1}(J_3)$ . Le noyau de  $U$  est l'espace vectoriel engendré par  $v$ . Ainsi,  $U(\text{lm}(v))$  est égal à  $\text{lm}(v) - v$ , et pour tout  $w \in X^{(4)} \setminus \{\text{lm}(v)\}$ ,  $U(w)$  est égal à  $w$ . Ainsi,  $T_2^{2,m}$  est défini sur la base  $X^{(m)}$  par

$$T_2^{2,m}(w) = \begin{cases} w' (2yxyx - yxxy - xyxy + 2xyxy - xxyy), & \text{si } w = w'yyxx \\ w, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les morphismes  $T_1^{2,m}$  et  $T_2^{2,m}$  commutent. On considère donc la  $P_{2,m}$ -représentation de  $\mathcal{A}_2$  :

$$\begin{aligned} \varphi_{2,m}: \mathcal{A}_2 &\longrightarrow \text{End}(\mathbb{K}X^{(m)}). \\ s_i &\longmapsto T_i^{2,m} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \varphi_{2,m}(\gamma_1) &= \varphi_{2,m}((1 - s_2)s_1) \\ &= T_1^{2,m} - T_2^{2,m} \circ T_1^{2,m}. \end{aligned}$$

Soit  $w$  un mot en forme normale de longueur  $m - 1$ . Le mot  $yyxx$  ne figure pas dans la décomposition de  $wf_2$ . Ainsi,  $\varphi_{2,m}(\gamma_1)(wf_2)$  est égal à 0. En particulier, on a

$$h_2(\overline{w} \otimes f_2) = 0,$$

pour tout mot en forme normale  $w$ . Si  $w$  ne se factorise pas à droite par  $y$ , le mot  $yyx$  ne figure pas dans la décomposition de  $wf_1$ . Ainsi,  $\varphi_{2,m}(wf_1)$  est égal à 0. Si  $w$  peut s'écrire  $w = w'y$ , alors  $\varphi_{2,m}(\gamma_1)(wf_1)$  est égal à  $w'(yyxx - U(yyxx))$ . On a donc

$$h_2(\overline{w} \otimes f_1) = \begin{cases} \overline{w'} \otimes v, & \text{si } w = w'y \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} v &= yf_1 + xf_2 \\ &= f_2x + f_1y. \end{aligned}$$

**5.3.3.6. Remarque.** L'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie d'Heisenberg est un cas particulier d'algèbre de Yang-Mills. Dans [64], les auteurs montrent en utilisant le critère de Berger que toutes les algèbres de Yang-Mills sont de type Koszul. Cependant, ils n'exhibent pas d'homotopie contractante du complexe de Koszul.

# Bibliographie

- [1] John F. Adams. On the cobar construction. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 42 :409–412, 1956.
- [2] David J. Anick. On the homology of associative algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 296(2) :641–659, 1986.
- [3] David J. Anick and Edward L. Green. On the homology of quotients of path algebras. *Comm. Algebra*, 15(1-2) :309–341, 1987.
- [4] Michael Artin and William F. Schelter. Graded algebras of global dimension 3. *Adv. in Math.*, 66(2) :171–216, 1987.
- [5] Franz Baader and Tobias Nipkow. *Term rewriting and all that*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [6] Erik Backelin. Koszul duality for parabolic and singular category  $\mathcal{O}$ . *Represent. Theory*, 3 :139–152 (electronic), 1999.
- [7] Jörgen Backelin and Ralf Fröberg. Koszul algebras, Veronese subrings and rings with linear resolutions. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 30(2) :85–97, 1985.
- [8] Henk P. Barendregt. *The lambda calculus, its syntax and semantics*, volume 40 of *Studies in Logic (London)*. College Publications, London, 2012. [Reprint of the 1984 revised edition, MR0774952], With addenda for the 6th imprinting, Mathematical Logic and Foundations.
- [9] Alexander. A. Beilinson, Victor. A. Ginsburg, and Vadim. V. Schechtman. Koszul duality. *J. Geom. Phys.*, 5(3) :317–350, 1988.
- [10] Alexander A. Beilinson, Victor A. Ginzburg, and Wolfgang Soergel. Koszul duality patterns in representation theory. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(2) :473–527, 1996.
- [11] Roland Berger. Confluence and Koszulity. *J. Algebra*, 201(1) :243–283, 1998.
- [12] Roland Berger. Koszulity for nonquadratic algebras. *J. Algebra*, 239(2) :705–734, 2001.
- [13] Roland Berger. Combinatorics and  $N$ -Koszul algebras. *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 5(8) :1205–1214, 2008.
- [14] Roland Berger and Nicolas Marconnet. Koszul and Gorenstein properties for homogeneous algebras. *Algebr. Represent. Theory*, 9(1) :67–97, 2006.
- [15] George M. Bergman. The diamond lemma for ring theory. *Adv. in Math.*, 29(2) :178–218, 1978.
- [16] Roman Bezrukavnikov. Koszul property and Frobenius splitting of Schubert varieties. *arXiv preprint alg-geom/9502021*, 1995.
- [17] Leonid A. Bokut'. Imbeddings into simple associative algebras. *Algebra i Logika*, 15(2) :117–142, 245, 1976.



- [18] Alexei I. Bondal. Helices, representations of quivers and Koszul algebras. In *Helices and vector bundles*, volume 148 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 75–95. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [19] Alexei I. Bondal and Alexander E. Polishchuk. Homological properties of associative algebras : the method of helices. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 57(2) :3–50, 1993.
- [20] Nirmal K. Bose, John P. Guiver, Edward W. Kamen, Hector M. Valenzuela, and Bruno Buchberger. *Multidimensional systems theory*, volume 16 of *Mathematics and its Applications*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1985. Progress, directions and open problems in multidimensional systems.
- [21] Murray R. Bremner and Vladimir Dotsenko. *Algebraic operads : an algorithmic companion*. CRC Press, 2016.
- [22] Bruno Buchberger. Ein Algorithmus zum Auffinden der Basiselemente des Restklassenrings nach einem nulldimensionalen Polynomideal. *Universität Innsbruck, Austria, Ph. D. Thesis*, 1965.
- [23] Bruno Buchberger. Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems. *Aequationes Math.*, 4 :374–383, 1970.
- [24] Bruno Buchberger. A theoretical basis for the reduction of polynomials to canonical forms. *ACM SIGSAM Bull.*, 10(3) :19–29, 1976.
- [25] Bruno Buchberger. A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner-bases. In *Symbolic and algebraic computation (EUROSAM '79, Internat. Sympos., Marseille, 1979)*, volume 72 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 3–21. Springer, Berlin-New York, 1979.
- [26] Bruno Buchberger. Basic features and development of the critical-pair/completion procedure. In *Rewriting techniques and applications (Dijon, 1985)*, volume 202 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 1–45. Springer, Berlin, 1985.
- [27] Bruno Buchberger. History and basic features of the critical-pair/completion procedure. *J. Symbolic Comput.*, 3(1-2) :3–38, 1987. *Rewriting techniques and applications (Dijon, 1985)*.
- [28] Bruno Buchberger. Applications of Gröbner bases in nonlinear computational geometry. In *Mathematical aspects of scientific software (Minneapolis, Minn., 1986/87)*, volume 14 of *IMA Vol. Math. Appl.*, pages 59–87. Springer, New York, 1988.
- [29] Bruno Buchberger. Introduction to Gröbner bases. In *Gröbner bases and applications (Linz, 1998)*, volume 251 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 3–31. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.
- [30] Bruno Buchberger and Rüdiger Loos. Algebraic simplification. In *Computer algebra*, pages 11–43. Springer, Vienna, 1983.
- [31] David C. Butler. Normal generation of vector bundles over a curve. *J. Differential Geom.*, 39(1) :1–34, 1994.
- [32] Thomas Cassidy and Brad Shelton. Generalizing the notion of Koszul algebra. *Math. Z.*, 260(1) :93–114, 2008.
- [33] Cyrille Chenavier. Confluence Algebras and Acyclicity of the Koszul Complex. *Algebr. Represent. Theory*, 19(3) :679–711, 2016.

- [34] Cyrille Chenavier. Reduction Operators and Completion of Rewriting Systems. working paper or preprint, June 2016.
- [35] Alonzo Church. A set of postulates for the foundation of logic. *Ann. of Math. (2)*, 33(2) :346–366, 1932.
- [36] Alonzo Church. A set of postulates for the foundation of logic. *Ann. of Math. (2)*, 34(4) :839–864, 1933.
- [37] Alonzo Church and John. B. Rosser. Some properties of conversion. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 39(3) :472–482, 1936.
- [38] Aldo Conca, Maria Evelina Rossi, and Giuseppe Valla. Gröbner flags and Gorenstein algebras. *Compositio Math.*, 129(1) :95–121, 2001.
- [39] Alain Connes and Michel Dubois-Violette. Yang-Mills algebra. *Lett. Math. Phys.*, 61(2) :149–158, 2002.
- [40] Alain Connes and Michel Dubois-Violette. Yang-Mills and some related algebras. In *Rigorous quantum field theory*, volume 251 of *Progr. Math.*, pages 65–78. Birkhäuser, Basel, 2007.
- [41] Martin Davis. *Computability and unsolvability*. McGraw-Hill Series in Information Processing and Computers. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-Toronto-London, 1958.
- [42] Leonard Eugene Dickson. Finiteness of the Odd Perfect and Primitive Abundant Numbers with  $n$  Distinct Prime Factors. *Amer. J. Math.*, 35(4) :413–422, 1913.
- [43] Vladimir Dotsenko and Bruno Vallette. Higher Koszul duality for associative algebras. *Glasg. Math. J.*, 55(A) :55–74, 2013.
- [44] Michel Dubois-Violette and Todor Popov. Homogeneous algebras, statistics and combinatorics. *Lett. Math. Phys.*, 61(2) :159–170, 2002.
- [45] Ben Elias and Geordie Williamson. The Hodge theory of Soergel bimodules. *Ann. of Math. (2)*, 180(3) :1089–1136, 2014.
- [46] Jean-Charles Faugère. A new efficient algorithm for computing Gröbner bases ( $F_4$ ). *J. Pure Appl. Algebra*, 139(1-3) :61–88, 1999. Effective methods in algebraic geometry (Saint-Malo, 1998).
- [47] Jean-Charles Faugère. A new efficient algorithm for computing Gröbner bases without reduction to zero ( $F_5$ ). In *Proceedings of the 2002 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 75–83 (electronic). ACM, New York, 2002.
- [48] George Grätzer. *General lattice theory*. Birkhäuser Verlag, Basel, second edition, 1998. New appendices by the author with B. A. Davey, R. Freese, B. Ganter, M. Greferath, P. Jipsen, H. A. Priestley, H. Rose, E. T. Schmidt, S. E. Schmidt, F. Wehrung and R. Wille.
- [49] Edward L. Green and Eduardo N. Marcos.  $d$ -Koszul algebras,  $2-d$ -determined algebras and  $2-d$ -Koszul algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 215(4) :439–449, 2011.
- [50] Wolfgang Gröbner. Über die Eliminationstheorie. *Monatsh. Math.*, 54 :71–78, 1950.
- [51] Phùng Hồ Hai, Benoit Kriegk, and Martin Lorenz.  $N$ -homogeneous superalgebras. *J. Noncommut. Geom.*, 2(1) :1–51, 2008.
- [52] Phùng Hồ Hai and Martin Lorenz. Koszul algebras and the quantum MacMahon master theorem. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 39(4) :667–676, 2007.

- [53] Peter J. Hilton and Urs Stambach. *A course in homological algebra*, volume 4 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.
- [54] Heisuke Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. of Math. (2)* **79** (1964), 109–203; *ibid. (2)*, 79 :205–326, 1964.
- [55] S. P. Inamdar and Vikram B. Mehta. Frobenius splitting of Schubert varieties and linear syzygies. *Amer. J. Math.*, 116(6) :1569–1586, 1994.
- [56] David Kazhdan and George Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.*, 53(2) :165–184, 1979.
- [57] George R. Kempf. Some wonderful rings in algebraic geometry. *J. Algebra*, 134(1) :222–224, 1990.
- [58] George R. Kempf. Syzygies for points in projective space. *J. Algebra*, 145(1) :219–223, 1992.
- [59] Donald E. Knuth and Peter B. Bendix. Simple word problems in universal algebras. In *Computational Problems in Abstract Algebra (Proc. Conf., Oxford, 1967)*, pages 263–297. Pergamon, Oxford, 1970.
- [60] Yuji Kobayashi. Complete rewriting systems and homology of monoid algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 65(3) :263–275, 1990.
- [61] Yuji Kobayashi. Gröbner bases of associative algebras and the Hochschild cohomology. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 357(3) :1095–1124 (electronic), 2005.
- [62] Jean-Louis Koszul. Homologie et cohomologie des algèbres de Lie. *Bull. Soc. Math. France*, 78 :65–127, 1950.
- [63] Benoit Kriegk. Un critère numérique pour la propriété de Koszul généralisée. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 344(9) :545–548, 2007.
- [64] Benoit Kriegk and Michel Van den Bergh. Representations of non-commutative quantum groups. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 110(1) :57–82, 2015.
- [65] Jean-Louis Loday and Bruno Vallette. *Algebraic operads*, volume 346 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2012.
- [66] Rüdiger Loos. Term reduction systems and algebraic algorithms. In *GWAI-81*, pages 214–234. Springer, 1981.
- [67] Jia-feng Lü, Ji-wei He, and Di-ming Lu. Piecewise-Koszul algebras. *Sci. China Ser. A*, 50(12) :1795–1804, 2007.
- [68] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.
- [69] Percy A. MacMahon. *Combinatory analysis*. Two volumes (bound as one). Chelsea Publishing Co., New York, 1960.
- [70] Teo Mora. An introduction to commutative and noncommutative Gröbner bases. *Theoret. Comput. Sci.*, 134(1) :131–173, 1994. Second International Colloquium on Words, Languages and Combinatorics (Kyoto, 1992).
- [71] Maxwell H. A. Newman. On theories with a combinatorial definition of “equivalence.”. *Ann. of Math. (2)*, 43 :223–243, 1942.

- [72] Stefan Papadima and Sergey Yuzvinsky. On rational  $K[\pi, 1]$  spaces and Koszul algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 144(2) :157–167, 1999.
- [73] Giuseppe Pareschi. Koszul algebras associated to adjunction bundles. *J. Algebra*, 157(1) :161–169, 1993.
- [74] Alexander E. Polishchuk. On the Koszul property of the homogeneous coordinate ring of a curve. *J. Algebra*, 178(1) :122–135, 1995.
- [75] Alexander E. Polishchuk. Perverse sheaves on a triangulated space. *Math. Res. Lett.*, 4(2-3) :191–199, 1997.
- [76] Alexander E. Polishchuk and Leonid Positselski. *Quadratic algebras*, volume 37 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.
- [77] Stewart B. Priddy. Koszul resolutions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 152 :39–60, 1970.
- [78] Brad Shelton and Sergey Yuzvinsky. Koszul algebras from graphs and hyperplane arrangements. *J. London Math. Soc. (2)*, 56(3) :477–490, 1997.
- [79] Anatoly I. Shirshov. *Selected works of A. I. Shirshov*. Contemporary Mathematicians. Birkhäuser Verlag, Basel, 2009. Translated from the Russian by Murray Bremner and Mikhail V. Kotchetov, Edited by Leonid A. Bokut, Victor Latyshev, Ivan Shestakov and Efim Zelmanov.
- [80] Anatoly I. Širšov. On the bases of a free Lie algebra. *Algebra i Logika Sem.*, 1(1) :14–19, 1962.
- [81] Anatoly I. Širšov. Some algorithm problems for Lie algebras. *Sibirsk. Mat. Ž.*, 3 :292–296, 1962.
- [82] Anatoly I. Širšov. Some algorithmic problems for  $\varepsilon$ -algebras. *Sibirsk. Mat. Ž.*, 3 :132–137, 1962.
- [83] Craig C. Squier. Word problems and a homological finiteness condition for monoids. *J. Pure Appl. Algebra*, 49(1-2) :201–217, 1987.
- [84] John Tate and Michel Van den Bergh. Homological properties of Sklyanin algebras. *Invent. Math.*, 124(1-3) :619–647, 1996.
- [85] Axel Thue. Probleme über Veränderungen von Zeichenreihen nach gegebenen Regeln. *Kristiania Vidensk. Selsk, Skr.*, 10 :493–524, 1914.
- [86] John A. Todd and Harold S.M. Coxeter. A practical method for enumerating cosets of a finite abstract group. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (Series 2)*, 5(01) :26–34, 1936.
- [87] Victor A. Ufnarovskij. Combinatorial and asymptotic methods in algebra. In *Algebra*, VI, volume 57 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 1–196. Springer, Berlin, 1995.
- [88] Alexander Vishik and M. Finkelberg. The coordinate ring of general curve of genus  $g \geq 5$  is Koszul. *J. Algebra*, 162(2) :535–539, 1993.
- [89] Maxim Y. Vybornov. *Sheaves on triangulated spaces and Koszul duality*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1999. Thesis (Ph.D.)–Yale University.



# Annexe A

## Implémentation et exemples

### A.1 Implémentation des opérateurs de réduction

#### A.1.1 Préliminaires

Soient  $(G, <)$  un ensemble fini totalement ordonné et  $\mathbb{K}$  un corps commutatif. Dans la section A.1.2, on donne l'implémentation d'application

$$\ker^{-1} : \mathcal{L}(\mathbb{K}G) \longrightarrow \mathbf{RO}(G, <),$$

qui à un sous-espace de  $\mathbb{K}G$  associe l'opérateur de réduction relativement à  $(G, <)$  dont le noyau est ce sous-espace. On en déduit les implémentations des bornes supérieure et inférieure et du  $F$ -complément.

On rappelle d'après le théorème 2.1.1.12 du chapitre 2, que tout sous-espace  $V$  de  $\mathbb{K}G$  admet une unique base réduite  $\mathcal{B}$ . On rappelle que cette base est notée

$$\mathcal{B} = (e_g)_{g \in \tilde{G}},$$

où, pour tout  $g \in \tilde{G}$ ,  $\lg(e_g)$  est égal à  $g$ . On rappelle enfin que  $\ker^{-1}(V)$  est défini sur la base  $G$  de  $\mathbb{K}G$  de la façon suivante :

$$T(g) = \begin{cases} g - e_g, & \text{si } g \in \tilde{G} \\ g, & \text{si } g \notin \tilde{G}. \end{cases}$$

Dans ce qui suit, les calculs ne sont pas effectués sur des sous-espaces de  $\mathbb{K}G$  mais sur des listes de vecteurs. Le sous-espace sous-jacent à une telle liste  $L$  est celui engendré par  $L$ . Notre implémentation de  $\ker^{-1}$  fonctionne de la façon suivante : on se donne une liste de vecteurs  $L$ , on exprime la base réduite  $\mathcal{B}$  de l'espace vectoriel engendré par  $L$  puis on définit grâce à  $\mathcal{B}$  l'opérateur de réduction dont le noyau est ce sous-espace. On utilise pour cela plusieurs méthodes intermédiaires qui sont écrites dans la section A.1.2. Ces méthodes sont programmées avec le logiciel SageMath<sup>1</sup>, dans la langage Python.

---

1. <http://www.sagemath.org>

## A.1.2 Code

**A.1.2.1. Méthodes préliminaires.** On commence par introduire différentes méthodes préliminaires qui seront utilisées dans la suite.

```
1 def f(u,v,a) :
    return v-a*u

    def nonNul(v) :
5         V=VectorSpace(QQ,len(v))
        return v!=V.zero()

def lg(v): # retourne lg(v)
9     k=0
    for i in [0..len(v)-1]:
11         if v[i]!=0: k=i+1
    return k

def ordre(u,v):
15     if lg(u)>lg(v): return int(-1)
    elif lg(u)==lg(v): return int(0)
17     else: return int(1)

19 def vecteurDominant(L): # retourne v de L tel que lg(v) est maximal
    v=L[0]
21     for i in [1..len(L)-1]:
        if lg(L[i])>lg(L[i-1]): v=L[i]
23     return v

25 def dimensionEspaceEngendre(L):
    A=matrix(L)
27     V=A.image()
    return dim(V)
```

**A.1.2.2. Méthode pivot.** La méthode suivante prend en entrée une liste de vecteurs  $L$  et un vecteur  $v$ . Elle remplace chaque élément  $v'$  de  $L$  par un vecteur  $v' - \lambda v$  où le scalaire  $\lambda$  est choisi de sorte que le coefficient de  $\lg(v)$  dans  $v' - \lambda v$  est nul. On supprime ensuite tous les éléments nuls de la liste ainsi obtenue.

```
def pivot(L,v):
2     k,G=lg(v),[]
    for i in [0..len(L)-1]:
4         G=G+[f(v,L[i],L[i][k-1]/v[k-1])]
    return filter(nonZero,G)+[v]
```

**A.1.2.3. Méthode baseOrdonnee.** Soit  $L$  une liste de vecteurs. On souhaite construire une liste de vecteurs  $L'$  satisfaisant les conditions suivantes :

1.  $L'$  engendre le même sous-espace que  $L$ ,

2. les générateurs dominants des éléments de  $L'$  sont deux à deux distincts,
3. étant donnés deux éléments distincts  $v$  et  $v'$  de  $L'$ , le générateur dominant de  $v$  ne figure pas dans la décomposition de  $v'$ .

On considère pour cela une méthode préliminaire prenant en entrée une liste de vecteurs  $L$  et utilisant comme pivot un vecteur de cette liste dont le générateur dominant est maximal. Cette méthode retourne la liste ainsi obtenue en ordonnant ses éléments en fonction de leurs générateurs dominants. La liste  $L'$  retournée satisfait donc les conditions suivantes

1.  $L'$  et  $L$  engendrent le même sous-espace,
2.  $L'$  ne contient aucun élément non nul,
3. pour tout entier  $i$ , le  $i$ -ème élément de  $L'$  a un générateur dominant inférieur à celui du  $i + 1$ -ème,
4. il existe un seul élément de  $L'$  de générateur dominant maximal.

```

1 def baseOrdonneeEtape1(L):
    G=pivot(L,vecteurDominant(L))
3     G.sort(cmp=ordre)
    return G

def baseOrdonnee(L):
7     n,G=dimensionEspaceEngendre(L),listeOrdonneeEtape1(L)
    for i in [1..n-1]:
9         G=pivot(G,G[i])
        G.sort(cmp=ordre)
11    return G

```

**A.1.2.4. Méthode baseReduiteCroissante.** La liste de vecteurs retournée par la méthode du paragraphe précédent n'est pas encore une base réduite. Il faut en effet diviser les vecteurs de cette liste par leurs générateurs dominants. C'est ce que réalise la méthode suivante :

```

1 def baseReduiteCroissante(L):
    G=baseOrdonnee(L)
3     n=len(G)
    H=[]
5     for i in [0..n-1]:
        v,k=G[i],lg(G[i])
7         H=H+[1/v[k-1]*v]
    return H

```

**A.1.2.5. Méthode baseReduiteDecroissante.** La méthode précédente retourne une base réduite. Les éléments de cette base sont écrits dans l'ordre croissant en fonction de leurs générateurs dominants. La méthode suivante retourne la base réduite écrite dans l'ordre inverse :

```

def baseReduiteDecroissante(L):
2     if L==[]: return L
    else: G=baseReduiteCroissante(L); G.reverse(); return G

```



**A.1.2.6. Méthode opérateur.** La méthode suivante prend en entrée une liste des vecteurs et retourne l'opérateur de réduction dont le noyau est engendré par cette liste de vecteurs.

```

1 def opérateur(G):
    L=baseReduiteDecroissante(G)
3     n=len(L[0])
    V=VectorSpace(QQ,n)
5     v=V.zero()
    G=(lg(L[0])-1)*[v]+[L[0]]
7     k=len(L)
    for i in [1..k-1]:
9         G=G+(lg(L[i])-lg(L[i-1])-1)*[v]+[L[i]]
    G=G+(n-lg(L[k-1]))*[v]
11    return identity_matrix(QQ,n)-matrix(G).transpose()

```

**A.1.2.7. Méthodes borneInf et borneSup.** Les deux méthodes suivantes calculent les bornes inférieure et supérieure de deux opérateurs de réduction.

```

1 def borneInf(T_1,T_2):
    V_1,V_2=kernel(T_1.transpose()),kernel(T_2.transpose())
3     G_1,G_2=basis(V_1),basis(V_2)
    L_1,L_2=baseReduiteDecroissante(G_1),baseReduiteDecroissante(G_2)
5     G=L_1+L_2
    L=baseReduiteDecroissante(G)
7     return opérateur(L)

9 def borneSup(T_1,T_2):
    V_1,V_2=kernel(T_1.transpose()),kernel(T_2.transpose())
11    V=V_1.intersection(V_2)
    G=basis(V)
13    L=baseReduiteDecroissante(G)
    return opérateur(L)

```

**A.1.2.8. Méthode complement.** Par définition du  $F$  complément, on a besoin d'une méthode prenant en entrée un opérateur de réduction  $T$  et renvoyant  $\ker \mathbb{K}\text{Red}(T)$ .

```

def tilde(T):
2     n,L=T.nrows(),[]
    for i in [0..n-1]:
4         j,k=i,n-i-1
            if T[i,i]==1: L=L+[vector(j*[0]+[1]+k*[0])]
6     return opérateur(L)

8 def complement(L):
    n,C,T=len(L),L[0],tilde(L[0])
10    for i in [1..n-1]: C=borneInf(C,L[i])
    for j in [1..n-1]: T=borneSup(T,tilde(L[j]))
12    return borneSup(C,T)

```

## A.2 Exemple

Dans cette section, on calcule les  $F$ -compléments successifs qui interviennent dans 3.2.2.8 du chapitre 3.

On a

$$F_0 = \{T_1, T_2\},$$

où

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient

$$\begin{aligned} C^{F_0} &= \text{complement}([T_1, T_2]) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a

$$F_1 = \left\{ \begin{array}{l} T_3 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yxyz - x^2z\}), \quad T_4 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yxyz - yx^2\}) \\ T_5 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yxyxy - x^3y\}), \quad T_6 = \ker^{-1}(\mathbb{K}\{yxyxy - yx^3\}) \end{array} \right\}.$$

On considère l'ordre deg-lex induit par  $x < y < z$ . On a ainsi

$$x^2z < yx^2 < x^3y < yx^3 < yxyz < yxyxy.$$

Les matrices de  $T_3, T_4, T_5$  et  $T_6$  relativement à  $\{x^2z < yx^2 < x^3y < yx^3 < yxyz < yxyxy\}$  sont

$$\begin{aligned} T_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ T_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On obtient

$$\begin{aligned} C^{F_1} &= \text{complement}([T_3, T_4, T_5, T_6]) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

On a

$$F_2 = \left\{ \begin{array}{l} T_7 = \ker^{-1} (\mathbb{K}\{yx^3 - x^2zx\}), T_8 = \ker^{-1} (\mathbb{K}\{yx^3 - x^2y\}) \\ T_9 = \ker^{-1} (\mathbb{K}\{yxyx^3 - yx^4y\}), T_{10} = \ker^{-1} (\mathbb{K}\{yxyx^2 - yx^3z\}) \\ T_{11} = \ker^{-1} (\mathbb{K}\{yxyx^3 - x^5\}), T_{12} = \ker^{-1} (\mathbb{K}\{yxyx^2 - x^4\}) \\ T_{13} = \ker^{-1} (\mathbb{K}\{x^2zx - x^3y\}), T_{14} = \ker^{-1} (\mathbb{K}\{yx^3z - x^3yz\}) \\ T_{15} = \ker^{-1} (\mathbb{K}\{x^3yz - x^4\}), T_{16} = \ker^{-1} (\mathbb{K}\{yx^4y - x^3yxy\}) \\ T_{17} = \ker^{-1} (\mathbb{K}\{x^3yxy - x^5\}) \end{array} \right\}.$$

On a

$$x^4 < x^3y < x^2zx < yx^3 < x^5 < x^3yz < yx^3z < yxyx^2 < x^3yxyx < yx^4y < yxyx^3. \quad (\text{A.1})$$

On exprime les matrices de  $T_7, \dots, T_{17}$  dans la base (A.1). On obtient alors que le  $F_2$ -complément est la matrice identité de taille 11.