



HAL
open science

Modélisation ds matériaux caoutchouteux par une nouvelle densité hyperélastique isotrope hybride - Théorie et implémentation éléments finis

Alain Nguessong Nkenfack

► **To cite this version:**

Alain Nguessong Nkenfack. Modélisation ds matériaux caoutchouteux par une nouvelle densité hyperélastique isotrope hybride - Théorie et implémentation éléments finis. Mécanique des matériaux [physics.class-ph]. Université de Technologie de Belfort-Montbéliard; Université de Ngaoundéré, 2015. Français. NNT : 2015BELF0257 . tel-01417568

HAL Id: tel-01417568

<https://theses.hal.science/tel-01417568>

Submitted on 15 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques
UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE BELFORT-MONTBÉLIARD
UNIVERSITÉ DE NGAOUNDÉRE

Modélisation des matériaux caoutchouteux par une nouvelle densité hyperélastique isotrope hybride - Théorie et implémentation éléments finis

■ ALAIN NGUÉSSONG NKENFACK

SPIM

Thèse de Doctorat



école doctorale sciences pour l'ingénieur et microtechniques
UNIVERSITÉ DE TECHNOLOGIE DE BELFORT-MONTBÉLIARD

UNIVERSITÉ DE NGAOUNDÉRÉ

N° 2 5 7

THÈSE en cotutelle présentée par ALAIN NGUESSONG NKENFACK

pour obtenir le

Grade de Docteur de
l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

Grade de Docteur/PhD de
l'Université de Ngaoundéré

Spécialité : **Mécanique**

Soutenue publiquement le 01 avril 2015 devant le Jury composé de :

ERWAN VERRON	Président du jury	Professeur, École Centrale de Nantes
PIERRE VILLON	Rapporteur	Professeur, Université de Technologie de Compiègne
YVON CHEVALIER	Rapporteur	Professeur Émérite, Institut Supérieur de Mécanique de Paris (Supméca)
ALEXIS KUITCHE	Membre du jury	Professeur, Université de Ngaoundéré
TIBI BEDA	Co-directeur de thèse	Professeur, Université de Ngaoundéré
FRANÇOIS PEYRAUT	Co-directeur de thèse	Professeur, Université de Technologie de Belfort-Montbéliard

À ma famille

REMERCIEMENTS

Cette thèse est le fruit d'un accord de cotutelle, chapeauté par une convention-cadre entre l'Université de Ngaoundéré au Cameroun et l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard en France. J'adresse mes salutations les plus sincères aux responsables et aux personnels des deux institutions universitaires.

Je remercie chaleureusement mes deux directeurs de thèse, Monsieur le Professeur François PEYRAUT et Monsieur le Professeur Tibi BEDA pour la confiance qu'ils m'ont accordée en acceptant de diriger ce travail doctoral ainsi que pour leurs multiples conseils. Ils ont su à cette occasion m'apprendre les rouages subtils du monde de la recherche.

J'adresse également mes sincères remerciements aux membres du jury. Merci à Messieurs les Professeurs Pierre VILLON et Yvon CHEVALIER d'avoir accepté la fastidieuse tâche d'être rapporteur de ce manuscrit. C'est un honneur de vous avoir comme rapporteurs. Je remercie Monsieur le Professeur Erwan VERRON qui a accepté de présider ce jury. C'est un honneur de vous avoir comme Président de jury. Merci Monsieur le Professeur Alexis KUITCHE, Responsable de l'Unité de Formation Doctorale Physique Appliquée et Ingénierie de l'Université de Ngaoundéré. C'est un très grand honneur de vous avoir comme membre de ce jury.

Je remercie toutes les personnes qui ont participé et rendu mon expérience doctorale agréable. Je remercie le Docteur Guy Edgar NTAMACK pour sa diligence et ses conseils. Je remercie Béatrice ROSSEZ pour son efficacité dans le suivi administratif de mes dossiers, son accueil ainsi que sa bonne humeur et je remercie Pascal ALDINGER pour tous les précieux conseils qu'il m'a donné.

Je remercie également Monsieur le Professeur Zhi-Qiang FENG, Directeur du Laboratoire de Mécanique d'Evry (Université d'Evry Val d'Essonne), pour avoir implémenté dans le code de calcul FER le modèle hyperélastique que nous avons développé dans le cadre de ce travail de thèse. Sans son aide, la dernière partie de ce mémoire, relative aux exemples numériques, n'aurait pas pu voir le jour.

Je remercie enfin le Service de la Coopération et de l'Action Culturelle de l'Ambassade de France au Cameroun qui m'a octroyé une allocation de mobilité gérée par Campus-France. Cela m'a permis d'effectuer trois séjours de recherche de quatre mois chacun en France. Pendant ces séjours, les travaux de recherche ont été réalisés au sein du laboratoire IRTES-M3M (EA7274) de l'UTBM.

SOMMAIRE

Remerciements	vii
Liste des figures	xv
Liste des tableaux	xvii
Introduction générale	1
1 État de l'art	7
1.1 Le caoutchouc	8
1.1.1 Les types de caoutchouc	8
1.1.1.1 Le caoutchouc naturel	8
1.1.1.2 Les caoutchoucs synthétiques	11
1.1.2 Sollicitations mécaniques des élastomères	11
1.1.2.1 Comportement statique : élasticité des élastomères	11
1.1.2.2 Comportement endommageable	13
1.1.2.3 Comportement dynamique	14
1.1.2.4 L'amplification des déformations	16
1.1.3 Conclusion	17
1.2 Mécanique des milieux continus en grandes déformations	17
1.2.1 Description du mouvement.	18
1.2.1.1 Transformation d'un élément de volume	19
1.2.1.2 Transformation d'un élément de surface	19

1.2.2	Description des déformations.	20
1.2.3	Description des contraintes.	20
1.2.4	Équations d'équilibres.	22
1.2.5	Principe de l'indifférence matérielle.	23
1.2.6	Thermodynamique des milieux continus.	24
1.3	Étude du comportement hyperélastique	25
1.3.1	Condition d'incompressibilité.	27
1.3.2	Application à différents cas de sollicitation	28
1.3.2.1	Traction et compression uniaxiale.	28
1.3.2.2	Traction biaxiale	30
1.3.2.3	Cisaillement pur	31
1.3.2.4	Glissement simple	33
1.3.3	Étude de la densité d'énergie.	34
1.3.3.1	Approche moléculaire	36
1.3.3.2	Approche phénoménologique	43
1.4	Critères de sélection d'une densité	47
1.4.1	Domaine de déformation	48
1.4.2	Prédiction des sollicitations mécaniques	48
1.4.3	Stabilité thermodynamique	49
1.4.4	Observations expérimentales	49
1.4.5	Courbe de Mooney	50
2	Construction du modèle hybride	55
2.1	Choix de l'énergie d'entrelacement.	57
2.2	Modèle hybride	61
2.2.1	Contrainte du raidissement final.	61

2.2.2	Nouvelle approximation de la fonction inverse de Langevin.	62
2.2.2.1	Introduction	62
2.2.2.2	Première amélioration de la formule de Cohen.	63
2.2.2.3	Seconde amélioration de la formule de Cohen.	65
2.2.2.4	Optimisation des paramètres en une étape.	69
2.2.3	Densité d'énergie Gaussienne.	71
2.2.4	Optimisation en une étape des paramètres matériaux.	75
2.2.5	Nouveau Modèle Hybride.	76
2.3	Validation du modèle hybride	80
2.3.1	Données expérimentales	80
2.3.2	Lois de comportement	81
2.3.2.1	Lois de comportement d'Arruda et Boyce	81
2.3.2.2	Lois de comportement de Pucci et Saccomandi	82
2.3.2.3	Lois de comportement du modèle hybride	83
2.3.3	Identification des paramètres rhéologiques	83
2.3.4	Résultats et discussions	84
2.3.4.1	Comparaison avec les données de Treloar [148]	84
2.3.4.2	Comparaison avec les données de Yeoh-Fleming [166].	86
2.3.4.3	Comparaison avec les données de Nunes et Moreira [115].	87
2.3.5	Validation du modèle hybride à partir de cinq critères	88
2.3.5.1	Domaine de déformation	88
2.3.5.2	prédiction des types de sollicitation	88
2.3.5.3	Stabilité thermodynamique du modèle hybride.	90
2.3.5.4	Observations expérimentales du modèle hybride	91
2.3.5.5	Courbe de Mooney du modèle hybride.	92
	Conclusion	94

3 Analyse numérique du modèle hybride	97
3.1 Généralités	98
3.2 Tenseur tangent d'élasticité	101
3.2.1 Calcul du second tenseur de Piola-Kirchhoff	102
3.2.2 Application au modèle hybride	104
3.2.3 Tenseur tangent d'élasticité	105
3.2.4 Tenseur d'élasticité réduit du quatrième ordre	108
3.2.5 Application au modèle hybride	110
3.3 Implémentation du modèle hybride dans le code FER	115
3.3.1 Présentation de FER	115
3.3.2 Validation de l'implémentation du modèle hybride dans FER	116
Conclusion	119
 Conclusion et perspectives	 121
 Annexes	 127
 A Propriété sur le premier invariant de \mathbf{C} : $I_1 = Tr(\mathbf{C})$	 127
 B Généralisation de la densité d'énergie non affine	 129
 C Quelques règles de calcul tensoriel de base	 133
 Bibliographie	 135

LISTE DES FIGURES

1.1	Caoutchouc naturel [34]	9
1.2	Formule semi-développé du cis-1,4-polyisoprène.	9
1.3	Chaînes moléculaires réticulées d'un polymère a) en l'absence de contrainte, et b) durant une déformation élastique résultant de l'application d'une contrainte de traction [28].	10
1.4	Réaction intervenant pendant la vulcanisation [28]	10
1.5	Contribution de l'entropie et de l'énergie interne par rapport au travail externe de l'effort total [151]	12
1.6	Observation de l'effet Mullins lors d'un essai de traction avec un mode de chargement et de déchargement.	13
1.7	Analyse de l'effet de Payne - évolution de propriétés mécaniques en fonction du niveau de déformation pour un élastomère SBR renforcé en silice [87].	15
1.8	Influence de la fréquence de sollicitation [26]	16
1.9	Phénomène d'amplification de déformation	17
1.10	configuration initiale et déformée.	18
1.11	Transformation d'un élément de surface.	19
1.12	Efforts internes.	21
1.13	Sollicitation en traction uniaxiale.	28
1.14	Sollicitation en traction biaxiale.	30
1.15	Sollicitation en cisaillement pur.	31
1.16	Sollicitation en glissement simple.	33

1.17 Jonctions des contraintes [49]	40
1.18 Modèle 8-chaînes : configuration : (a) non-déformée, (b) tension uniaxiale, (c) tension biaxiale [5].	41
1.19 Quelques modèles hyperélastiques isotropes standards	47
1.20 (a) courbe contrainte-élongation ; (b) courbe de Mooney.	51
2.1 Contrainte d'entrelacement du tenseur de Cauchy.	59
2.2 Courbes représentatives de la fonction de Langevin et de son inverse.	63
2.3 Erreur absolue de la formule de Cohen. (a) : forme puissance de l'erreur. (b) : forme affine du logarithme de l'erreur.	64
2.4 (a) : erreurs relatives. (b) : comparaison avec les valeurs exactes de la fonction inverse de Langevin aux voisinage de l'erreur relative maximale.	65
2.5 erreur absolue après la première amélioration de la formule de Cohen.	66
2.6 Prédiction de Θ' par des polynômes de degré 3 ($P(y)$) et de degré 7 ($Q(y)$).	68
2.7 (a) : erreurs relatives de l'approximation de Cohen, première et seconde améliorations ; (b) : zoom sur la seconde amélioration.	69
2.8 erreurs relatives entre la fonction inverse de Langevin et les deux approxi- mations des équations (2.36) et (2.39).	70
2.9 comparaison de la fonction inverse de Langevin avec l'approximation de l'équation (2.39) et celle de Cohen.	71
2.10 Prédiction de la contrainte réduite de l'équation (2.42) pour les données de Yeoh-Fleming (a) et de Treloar (b).	73
2.11 Modélisation du résidu par une fonction Gaussienne.	74
2.12 Comparaison des données expérimentales de Yeoh-Fleming (a) et de Tre- loar (b) avec la prédiction de la contrainte réduite de l'équation (2.47).	76
2.13 Comparaison des lois de comportement d'Arruda-Boyce, de Pucci- Saccomandi et du modèle hybride par rapport aux données de Treloar [148] : (a) traction uniaxiale ; (b) courbe de Mooney ; (c) cisaillement pur ; (d) traction équilibriauxiale.	85

2.14	Comparaison des lois de comportement d'Arruda-Boyce, de Pucci-Saccomandi et du modèle hybride par rapport aux données de Yeoh et Fleming [166] : (a) traction et compression uniaxiale ; (b) courbe de Mooney.	86
2.15	Comparaison des lois de comportement d'Arruda-Boyce, de Pucci-Saccomandi et du modèle hybride par rapport aux données en glissement simple de Nunes et Moreira [115].	88
2.16	Comparaison du modèle hybride avec les données de compression uniaxiale d'Arruda et Boyce [5] : (a) courbe contraintes-élongations ; (b) courbe de Mooney	89
2.17	Comportement des dérivées du modèle hybride par rapport aux invariants I_1 et I_2 : (a) $\frac{\partial W}{\partial I_1}$, (b) $\frac{\partial W}{\partial I_2}$.	92
3.1	Implémentation de l'algorithme de Newton-Raphson dans FER [124].	112
3.2	Contact et impact d'une balle en caoutchouc dans un entonnoir rigide [45].	116
3.3	Iso-valeur des champs de vitesse au cours de l'aplatissement d'une particule en fusion (http://imee.univ-evry.fr/feng/FerDrop.html).	116
3.4	Cube en traction-compression uniaxiale.	117
3.5	Comparaison théorie-numérique.	117
3.6	Simulation FER (a)- maillage non-déformé (b)- contraintes de Von Mises sur le maillage déformé (c) - contraintes de Von Mises avec changement de la table des couleurs.	118
A.1	Courbe de la fonction $Q(\lambda_2)$.	128
A.2	Courbe de la fonction $P(\lambda_1)$.	128
B.1	Courbe de la fonction $g(\lambda)$ (équation (2.58))	130
B.2	Courbe de la fonction $g_2^{-1}(u)$ (équation (B.11))	132

LISTE DES TABLEAUX

2.1	Paramètres matériaux de la loi de comportement (équation 2.42) évalués à partir des données de Yeoh-Fleming [166] et de Treloar [148].	73
2.2	Paramètres matériaux de l'équation (2.45) évalués à partir des données de Yeoh-Fleming et de Treloar.	74
2.3	Paramètres matériaux de la loi de comportement de l'équation (2.47) évalués à partir des données de Yeoh-Fleming et de Treloar.	75
2.4	Paramètres rhéologiques du caoutchouc testé par Treloar [148]	84
2.5	Paramètres rhéologiques du caoutchouc testé par Yeoh et Fleming [166]	86
2.6	Paramètres rhéologiques de l'élastomère testé par Nunes et Moreira [115]	87
2.7	Paramètres rhéologiques du modèle hybride identifiés avec l'essai d'Arruda et Boyce [5]	89
2.8	Valeurs des extrema de la courbe de Mooney (2.76).	93
3.1	Récapitulatif des équations nécessaires à une implémentation éléments finis du modèle hybride.	113
3.2	suite du Tableau 3.1-récapitulatif des équations nécessaires à une implémentation éléments finis du modèle hybride.	114

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le cadre de la recherche et du développement des lois de comportement des matériaux caoutchouteux. Un intérêt particulier est porté au comportement hyperélastique non-linéaire, isotrope et incompressible de ces matériaux dans le cadre de réponses en grandes déformations et grands déplacements.

En postulant l'existence du potentiel d'énergie libre de Helmholtz exprimé en fonction du gradient de déformation et défini par unité de masse, on établit la loi de comportement à partir des inéquations de Clausius-Duhem. Le développement de la loi de comportement hyperélastique nécessite la maîtrise préalable de la densité d'énergie de déformation qui peut être déterminée par une approche moléculaire ou par une approche phénoménologique. Les densités moléculaires sont construites à partir de l'analyse microscopique du réseau de chaînes polymériques. Les densités sont développées en intégrant des considérations physiques, traitées soit par une distribution Gaussienne [6, 76, 80, 148], soit par une distribution non-Gaussienne [5, 38, 40, 42, 49, 65, 76, 90, 91, 100, 106, 152, 158, 164]. Quant aux densités phénoménologiques, le matériau est considéré comme une boîte noire dont on ignore le fonctionnement à l'échelle microscopique et dont on essaye de reproduire le comportement à l'échelle macroscopique.

Les densités phénoménologiques sont obtenues de deux manières différentes :

- la première manière consiste à déterminer une expression mathématique sous forme de séries polynômiales ou puissances (écrites en fonction des valeurs propres ou des invariants du tenseur de déformation), reproduisant au mieux les données expérimentales [20, 29, 107, 114, 116, 137, 153, 165] ;
- la deuxième manière consiste à déterminer directement une forme analytique reproduisant les observations expérimentales des dérivées de la densité d'énergie par rapport aux deux premiers invariants principaux du tenseur de déformation [15, 55, 57, 64, 70, 93, 130, 167].

Compte tenu du nombre élevé de modèles développés dans la littérature [3, 23, 37, 71, 72, 73, 83, 92, 166], il n'est pas toujours facile de sélectionner le modèle approprié correspondant à un matériau donné. De surcroit, malgré la très grande diversité de modèles disponibles, il n'est pas simple, voire dans certains cas impossible, de choisir le modèle qui décrira le mieux le comportement du matériau pour une large gamme de sollicitations [54, 144, 156]. Pour remédier à cette situation, une formulation possible consiste à combiner les approches moléculaire et phénoménologique. On obtient ainsi des modèles que nous qualifierons d'hybride. En particulier, nous proposons dans ce mémoire une nouvelle densité d'énergie superposant quatre parties :

- une partie liée à l'hypothèse des déformations affines observée par le raidissement final de certaines chaînes macromoléculaires des élastomères. Cette partie est classique et est obtenue en utilisant la probabilité non-Gaussienne ou de Langevin [5]. Nous lui apportons cependant une modification concernant l'approximation de la fonction de Langevin inverse, modification qui sera détaillée ultérieurement ;
- une partie liée à la contrainte d'entrelacement des chaînes macromoléculaires observée lors du phénomène de cristallisation. Cette partie est classique et est modélisée par une fonction logarithme provenant de l'énergie phénoménologique de Gent-Thomas [55] ;
- une partie liée à la contrainte des chaînes présentant des déformations non-affines [90]. Cette partie constitue une contribution originale. Elle est modélisée par une fonction Gaussienne qui s'exprime sous forme intégrale.
- une partie, qualifiée de volumique, permet de gérer de manière classique [117, 118] la contrainte d'incompressibilité.

Ce mémoire de thèse s'organise en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à l'état de l'art sur la modélisation du comportement des matériaux caoutchouteux. Dans un premier temps, l'origine, les différents comportements mécaniques (comportements statique et dynamique, et endommagement) des caoutchoucs sont présentés. Dans un deuxième temps, les tenseurs de déformations et de contraintes sont étudiés dans le cadre de la mécanique des milieux continus en grande déformation. L'étude de ces grandeurs permet de construire la loi de comportement hyperélastique en tenant compte des propriétés d'élasticité, de non dissipation d'énergie

et de quasi incompressibilité. Par la suite, la loi de comportement est appliquée aux cas de sollicitations simples comme la traction uniaxiale, la traction équibiaxiale et biaxiale, le cisaillement pur et le glissement simple. Les lois de comportement étant intimement liées à la densité d'énergie de déformation, une revue des densités les plus usuelles est effectuée. Enfin, en partant du constat qu'il existe un nombre élevé de densités d'énergie hyperélastique dans la littérature, nous proposons des critères de sélection de ces densités. Plusieurs de ces critères ont été reportés dans [1, 54, 70, 156] et sont listés ci-après :

- couvrir l'ensemble du domaine de déformation ;
- prédire tous les modes de déformations et ce avec les mêmes paramètres ;
- vérifier les conditions de stabilité thermodynamique ;
- vérifier les observations expérimentales de Rivlin-Saunders [137] et Treloar [150] ;
- prédire la courbe de Mooney [107].

Le deuxième chapitre est consacré à la mise au point d'un modèle hyperélastique isotrope original constitué par la superposition de quatre densités d'énergie. Les deux premières tirent partie des atouts respectifs des approches moléculaire et phénoménologique et, parmi un certain nombre de densités disponibles dans la littérature [5, 6, 15, 29, 49, 55, 83, 90, 107, 116], notre choix s'est porté :

- sur la densité du modèle 8-chaîne d'Arruda et Boyce [5, 23] pour la densité moléculaire, ce qui permet de modéliser la contrainte de raidissement final ;
- sur une formulation logarithmique classique [15, 55, 64, 92, 93, 130] pour la densité phénoménologique, ce qui permet de représenter de manière satisfaisante sur le plan physique les contraintes d'entrelacement des chaînes macromoléculaires.

Le modèle 8-chaîne d'Arruda et Boyce incluant dans sa formulation l'inverse de la fonction de Langevin, le paragraphe 2.2.2 de ce deuxième chapitre est consacré à l'introduction d'une nouvelle approximation de cette fonction inverse qui ne possède pas d'expression littérale connue. Parmi les techniques d'approximations les plus utilisées, on peut citer :

- les approximations basées sur des fonctions rationnelles et notamment les approximations de Padé. L'avantage de ce type d'approximation est un comportement asymptotique très satisfaisant au voisinage de 1 sachant que la fonction inverse prend sa

source dans l'intervalle $[0, 1[$ pour les applications qui nous intéressent. Dans ce contexte, plusieurs approximations ont été proposées respectivement par Treloar [149], Cohen [33] et Puso [131];

- les approximations basées sur un développement de Taylor [77, 150] qui bénéficient d'une bonne précision pour les faibles valeurs d'abscisses. Cependant, Itskov et al. [77] ont récemment montré que 115 termes dans le développement de Taylor étaient nécessaires pour obtenir une prédiction raisonnable dans l'intervalle $[0, 0.95]$.

Afin d'obtenir une précision élevée sur tout l'intervalle $[0, 1[$, nous avons décidé de partir sur la base de l'approximation de Cohen (l'une des plus employées dans la littérature) et de modéliser le résidu entre cette approximation et les valeurs exactes de la fonction inverse de Langevin (approach-in-stages method [12]). Le résidu est ainsi évalué dans un premier temps par une fonction puissance puis, dans un deuxième temps, par une fonction polynomiale. Cette approche en deux étapes permet d'obtenir deux termes correctifs à ajouter à la fonction de Cohen. En procédant de cette manière, on établit que l'erreur relative maximale au terme des deux étapes passe de 4.94% pour l'approximation de Cohen à 0.046% pour la nouvelle approximation. À notre connaissance, cela fournit l'une des meilleures précisions possibles à ce jour pour une formulation littérale de la fonction inverse de Langevin. Cette nouvelle approximation de la fonction de Langevin inverse a fait l'objet d'une publication dans une revue internationale [113]. Il s'agit de la première contribution scientifique originale de ce travail de thèse.

Une étude comparative entre les prédictions du modèle constitué de la superposition des densités d'énergie moléculaire et phénoménologique et les données expérimentales de Treloar [150] et de Yeoh et Fleming [166] est ensuite menée dans le cas d'une déformation homogène de type traction-compression uniaxiale. Cette étude prouve la nécessité d'inclure une troisième densité d'énergie dont on montrera qu'elle adopte un profil Gaussien. Cette densité supplémentaire permettra de faire le rapprochement avec l'hypothèse des déformations non-affines présentée par Kroon [90]. Une quatrième densité est enfin introduite sur des bases classiques [118] afin de gérer l'incompressibilité du matériau. Le modèle final qui en résulte, du fait qu'il combine quatre densités d'énergie de nature très différente, sera qualifié d'hybride. Il s'agit de la deuxième contribution scientifique originale de ce travail de thèse. Une étude comparative entre ce modèle et des données expérimentales concernant des essais en traction-compression uniaxiale et biaxiale ainsi

que des essais en cisaillement pur et simple [5, 93, 114, 115, 150, 166] a été effectuée. Cette étude est complétée par la confrontation du nouveau modèle avec les critères de sélection présentés précédemment. Ces différentes confrontations permettent d'établir la pertinence du modèle hybride proposé.

Le troisième chapitre traite de la formulation éléments finis utilisée pour l'implémentation de la loi de comportement non-linéaire du modèle hybride. Pour l'implémentation numérique, le choix s'est porté sur une discrétisation en formulation Lagrangienne totale avec la méthode itérative de Newton-Raphson [10, 17, 36, 168]. Cette méthode itérative consistant à approcher le problème initial non-linéaire par une succession de systèmes linéarisés, le tenseur tangent d'élasticité du quatrième ordre doit être calculé. Le calcul de ce tenseur se fait en exprimant l'énergie de déformation sous une forme découplée à savoir une partie volumique et une partie isochore [68, 69]. Cette formulation découplée est ensuite appliquée au cas du modèle hybride. Les calculs tensoriels qui en résultent, assez longs et fastidieux, permettent de déterminer les modules tangents. Il s'agit de la troisième contribution originale de ce travail de thèse.

Les modules tangents ont été ensuite implémentés dans le code de calcul aux éléments finis FER (Finite Element Research). Il s'agit d'un code universitaire développé par le groupe MDS (Modélisation en Dynamique des Structures) du Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Évry (LMEE). Il est spécialisé dans la simulation des problèmes de mécanique du solide impliquant du contact et de l'impact entre solides déformables et non déformables [43, 44, 123]. Au terme de ce chapitre, une simulation numérique est effectuée pour un test homogène en traction-compression uniaxiale pour lequel on dispose d'une solution de référence. Les résultats de la simulation permettent de valider le modèle numérique implémenté par comparaison avec la solution de référence. En complément de cette validation, un exemple numérique en déformation non homogène est présenté.

ÉTAT DE L'ART

Le caoutchouc, encore appelé élastomère, appartient à la famille des polymères. Leur possibilité de subir de grandes déformations et leur capacité à amortir les vibrations les destinent à de nombreuses applications par exemple dans le transport automobile, aérien et ferroviaire (systèmes d'amortissement), le domaine biomédical (prothèse, implant mammaire) ou le génie civil (joint d'étanchéité, gaines isolantes). Ce chapitre est consacré à la présentation de la structure, des propriétés physicochimiques et des différents types de comportement que revêt le caoutchouc. Il est structuré en quatre sections :

La section 1.1 traite de la constitution, de la description et des propriétés physicochimiques des matériaux caoutchouteux ainsi que des types de sollicitations qui leurs sont généralement appliqués.

La section 1.2 rappelle les fondamentaux de la mécanique des milieux continus appliquée aux grandes déformations [32, 58, 118]. Ces rappels portent sur l'étude des tenseurs de déformation et de contrainte, ainsi que sur les propriétés d'isotropie et d'incompressibilité des élastomères.

La section 1.3 est consacrée aux lois de comportement hyperélastiques en se basant sur les propriétés spécifiques des élastomères. En particulier, nous rappelons qu'un comportement hyperélastique est défini en négligeant l'effet thermique et la dissipation interne de l'énergie dans les inégalités de Clausius-Duhem. Sur cette base, les lois de comportement des essais de traction uniaxiale, équi-biaxiale, de cisaillement pur et simple sont développées. Nous catégorisons ensuite les lois de comportement par leurs approches moléculaires ou phénoménologiques. Enfin, un inventaire non exhaustif est effectué en classifiant 25 des modèles les plus connus [5, 11, 13, 15, 20, 29, 55, 57, 64, 78, 79, 81, 83, 90, 92, 107, 114, 116, 117, 130, 153, 165, 166]. Cette classification est opérée en

distinguant les modèles moléculaires et les modèles phénoménologiques. En complément de cette classification, on pourra consulter utilement l'article de Verron et al. [156] dans lequel une étude comparative est opérée sur 20 modèles, en considérant comme critère la capacité de ces modèles à identifier les paramètres matériaux et à corrélérer un ensemble de données expérimentales avec ces paramètres.

Enfin, la section 1.4 est consacrée à la problématique de notre étude c'est à dire la proposition d'une nouvelle loi de comportement qui englobe les approches moléculaires et phénoménologiques dans un seul modèle. En effet l'élaboration de modèles hyperélastiques est généralement effectuée à l'aide de deux méthodologies distinctes (moléculaire et phénoménologique). Il est donc utile de disposer de critères de sélection qui permettront d'identifier les modèles les plus performants pour chacune de ces deux catégories et de les intégrer dans une approche unifiée. Ces critères, au nombre de cinq (domaine de déformation, prédiction des sollicitations mécaniques, stabilité thermodynamique, observation expérimentales et courbe de Mooney) sont explicités dans les paragraphes 1.4.1 à 1.4.5.

1.1/ LE CAOUTCHOUC

1.1.1/ LES TYPES DE CAOUTCHOUC

Le caoutchouc est constitué de longues chaînes moléculaires reliées entre elles par des enchevêtrements de nœuds. La présence des chaînes carbonées dans la structuration chimique de ces matériaux provoque un comportement hautement non-linéaire [35, 46, 96]. Le caoutchouc devient thermoplastique pour des déformations de 600 à 1000% d'allongement. Il possède par ailleurs une grande plage thermique d'utilisation, entre -50^0 et 150^0 C environ. Il est enfin amortissant ou résilient c'est à dire capable d'absorber de l'énergie due aux chocs. Dans le langage courant, le terme caoutchouc recouvre à la fois le caoutchouc naturel et les caoutchoucs synthétiques.

1.1.1.1/ LE CAOUTCHOUC NATUREL

Le caoutchouc naturel est obtenu à partir du latex sécrété par les végétaux comme l'hévéa, le guayule, le *Ficus elastica* et le *Castilloa ulei*. À titre d'exemple, la Figure 1.1)

présente un morceau de caoutchouc naturel avant vulcanisation.



FIGURE 1.1 – Caoutchouc naturel [34]

Le latex est un liquide blanchâtre extrait de l'écorce de l'arbre par incision de celle-ci. Il contient environ 40% de caoutchouc dans l'eau et un faible pourcentage de protéines, de sels minéraux, d'acides gras et de glucides. Il est très instable et il est obtenu par évaporation de l'eau et par coagulation. Les premières méthodes de stabilisation du caoutchouc étaient opérées par enfumage, par ébullition ou en le mélangeant avec des végétaux composés d'acides et de sels organiques. À ce jour, le caoutchouc est obtenu à partir de l'évaporation ou de la coagulation en utilisant des acides (acide acétique, acide formique). Sa conservation à l'état liquide est assurée par de l'ammoniaque.

Le caoutchouc naturel est un polymère linéaire dénommé « cis-1,4-polyisoprène », de formule brut $(C_5H_8)_n$ et donc la formule semi-développée est illustrée par la Figure 1.2. C'est un hydrocarbure insaturé de par les doubles liaisons carbone-carbone et formé de longues chaînes macromoléculaires enchevêtrées. Les enchevêtrements permettent le retour à l'état initial après étirement. Pendant l'extension, les chaînes macromoléculaires sont étirées, et s'orientent dans le sens de la traction (Figure 1.3) et forment des zones cristallines.

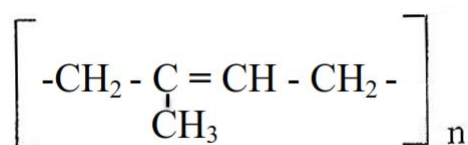


FIGURE 1.2 – Formule semi-développé du cis-1,4-polyisoprène.

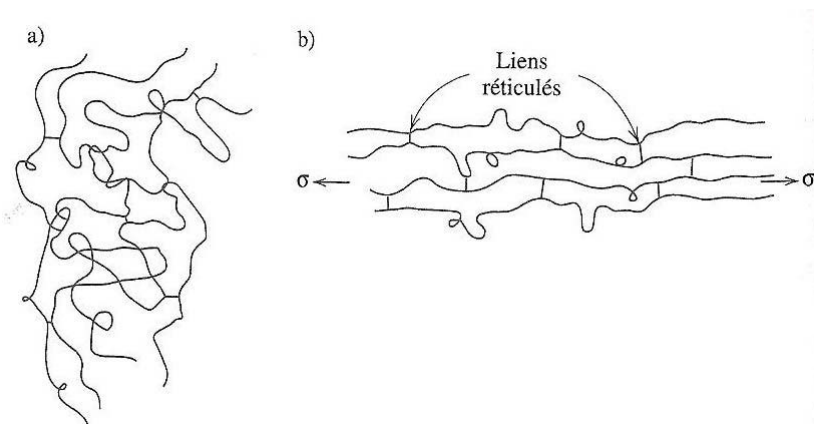


FIGURE 1.3 – Chaînes moléculaires réticulées d'un polymère a) en l'absence de contrainte, et b) durant une déformation élastique résultant de l'application d'une contrainte de traction [28].

À l'état brut, le caoutchouc n'est pas résistant au fluage sous contrainte. Pour améliorer ses propriétés, il est vulcanisé c'est à dire malaxé avec du soufre puis chauffé. La molécule de caoutchouc est donc réticulée par pontage des chaînes d'atomes de soufre comme l'indique l'équation bilan de la Figure 1.4. Le soufre réagit au niveau des doubles liaisons C=C, créant ainsi des nœuds de réticulation. Cette réaction avec le soufre permet de réduire le taux d'oxydation du caoutchouc et d'améliorer ainsi sa résistance au frottement. Mais même après la vulcanisation, le caoutchouc contient toujours une proportion importante de liaisons doubles. L'opération de vulcanisation est irréversible et améliore la résistance thermique du caoutchouc, en supprimant sa thermo plasticité. La vulcanisation améliore en plus la force de cohésion, l'élasticité, et empêche le suintement. Elle rend le caoutchouc non plastique, faiblement rémanent, quasi-insoluble et non auto-soudant. Le soufre peut être remplacé par le chlorure de soufre, le sélénium, le polynitrobenzène, les peroxydes organiques ou les quinones pour la vulcanisation [28].

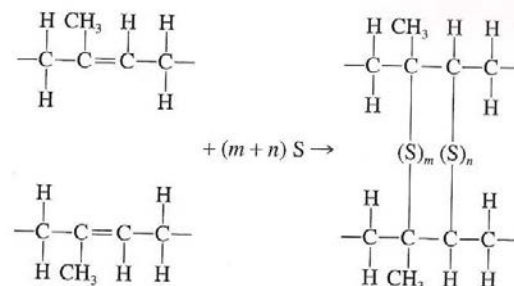


FIGURE 1.4 – Réaction intervenant pendant la vulcanisation [28]

1.1.1.2/ LES CAOUTCHOUCS SYNTHÉTIQUES

Les pénuries du caoutchouc naturel découlant des première et seconde guerres mondiales marquent le début du développement des caoutchoucs synthétiques. Dans les années 1909, Holfmann a produit le méthylisoprène, mettant ainsi sur pied le premier caoutchouc synthétique [52]. Par la suite la copolymérisation du butadiène a permis d'obtenir le Buna (désignant l'association du butadiène et le natrium). Ne parvenant pas à obtenir de l'isoprène synthétique, les recherches se sont portées sur le butadiène. Du même procédé est alors né le styrène-butadiène (SBR, Styrène Butadiene Rubber), au début des années 1930. Tous ces caoutchoucs de synthèse ne sont pas constitués de polymères stéréo réguliers comme l'est le caoutchouc naturel. Les méthodes catalytiques de Ziegler et Natta [112] permettent dans les années 1960, d'obtenir des matériaux comme le polybutadiène (BR, Butadiene Rubber), le poly-isoprène (IR, Isoprene Rubber) et le polymère éthylène-propylène (EPM, Ethylene-Propylene-Monomer et EPDM, Ethylene-Propylene-Diene-Monomer), qui ont une configuration similaire à celle du caoutchouc naturel.

1.1.2/ SOLLICITATIONS MÉCANIQUES DES ÉLASTOMÈRES

Nous traitons dans ce paragraphe des différents types de comportements rencontrés à l'échelle macroscopique lorsque les élastomères sont soumis à des sollicitations mécaniques. Il s'agit du comportement du matériau en régime quasi statique avec des lois élastiques non-linéaires, du comportement endommageable (effet Mullins, cristallisation, fatigue), du comportement dynamique (viscoélasticité, effets Payne et de Fletcher-Gent) et de l'amplification des déformations due à l'hétérogénéité des constituants d'un matériau caoutchouteux.

1.1.2.1/ COMPORTEMENT STATIQUE : ÉLASTICITÉ DES ÉLASTOMÈRES

Le comportement statique des élastomères non dissipatifs est communément modélisé par une loi qui est qualifiée d'hyperélastique. La détermination de cette loi se fait par le biais d'une énergie de déformation généralement notée W .

Le caoutchouc naturel réticulé contient des chaînes macromoléculaires liées entre elles par des nœuds de réticulations et qui forment un réseau tridimensionnel. L'assemblage

des chaînes étant aléatoire et désordonné, une approche statistique permet de décrire la position la plus probable de la chaîne. L'énergie de déformation est directement liée à la variation de l'entropie du réseau de chaînes. Des éléments thermodynamiques permettent de montrer que la réponse est composée des contributions de la variation de l'énergie interne et de la variation de l'entropie [151]. La Figure 1.5 permet d'observer que la contribution de l'entropie est très importante par rapport à celle de l'énergie interne.

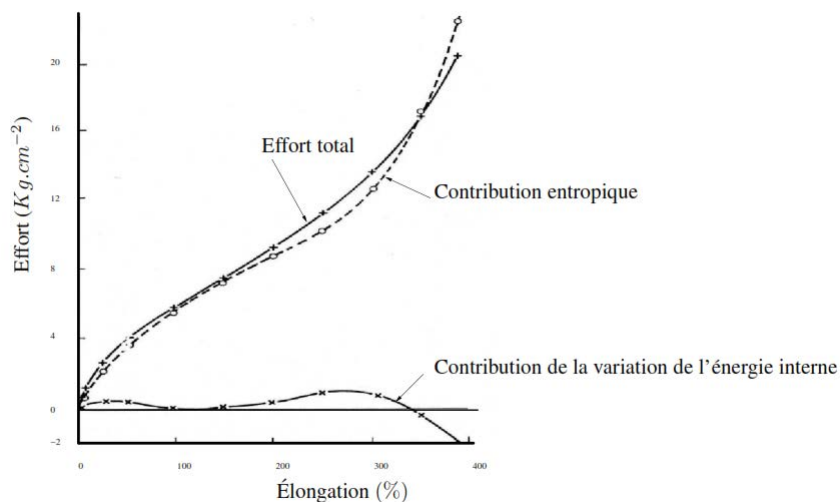


FIGURE 1.5 – Contribution de l'entropie et de l'énergie interne par rapport au travail externe de l'effort total [151]

Le réseau tridimensionnel de l'élastomère se déforme de façon réversible et la force moléculaire de rappel due à la diminution de l'entropie (c'est-à-dire la diminution du nombre de conformations possibles) est à l'origine du retour à la forme initiale. En état non déformé, l'orientation et la distribution des chaînes macromoléculaires sont désordonnées et aléatoires. Chacune est repliée sur elle-même au repos. Sous sollicitation, le désordre des chaînes décroît et on obtient un arrangement orienté. Une analyse basée sur un calcul statistique permet de déterminer cette entropie (mesure du désordre) du réseau de chaînes. On parle d'élasticité entropique dans la littérature. Les premiers développements de la théorie statistique de l'élasticité des caoutchoucs ont été menés par Meyer en 1935 [103], Kuhn et Guth en 1942 [91], James et Guth en 1943 [78], Treloar en 1944 [148], Flory en 1944-1946 [48] et Ishiara et al. en 1951 [76].

Dans les années 1940, Mooney [107] propose un modèle avec une approche phénoménologique. Cette approche est présentée par Treloar en 1975 [151] comme « *ayant*

l'objectif plus limité (que l'approche moléculaire) de décrire les propriétés mécaniques du caoutchouc à l'aide d'un cadre mathématique bien défini sans se soucier des interprétations moléculaires ». Dès lors, plusieurs modèles d'énergies phénoménologiques ont été proposés [3, 16, 29, 55, 64, 93, 114, 117, 165].

1.1.2.2/ COMPORTEMENT ENDOMMAGEABLE

Un comportement endommageable est par nature irréversible. L'effet Mullins, la cristallisation sous contrainte et la fatigue entrent dans la catégorie des phénomènes irréversibles généralement observés lors de la sollicitation des élastomères. Il est à noter que ces effets ne seront pas considérés dans ce mémoire où on se limitera aux plages de sollicitation correspondant à des déformations réversibles.

Effet Mullins

L'effet Mullins correspond à une variation de rigidité en fonction de l'histoire de déformation [111]. Il se manifeste par une perte de rigidité pendant la phase de décharge, ce qui a pour effet l'apparition d'une déformation rémanente (Figure 1.6).

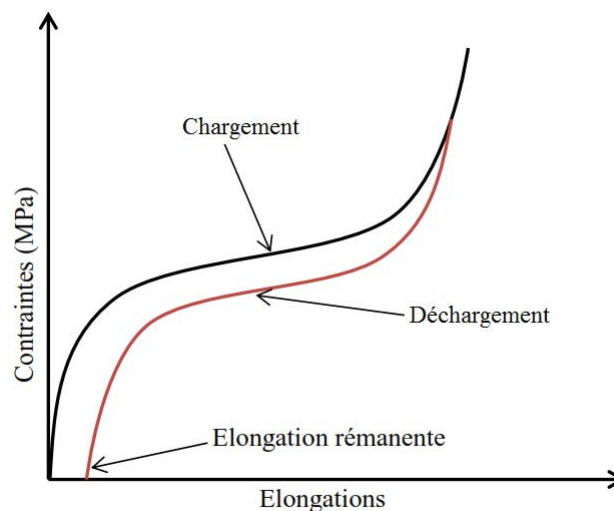


FIGURE 1.6 – Observation de l'effet Mullins lors d'un essai de traction avec un mode de chargement et de déchargement.

Les zones du matériau pauvres en charges sont principalement déformées ce qui augmente localement la contrainte [109, 110]. Plusieurs considérations ont été prises en compte dans la littérature pour analyser l'effet Mullins. On peut l'associer à un endom-

agement des liaisons entre les chaînes [24, 25], à une rupture des liaisons à faible énergie [67, 99, 111] ou l'interpréter de manière phénoménologique sans se soucier du comportement micromécanique [2, 59, 105]. L'effet Mullins peut également être expliqué en considérant le glissement des chaînes macromoléculaires au niveau de la surface de charges [21, 37, 59, 104, 108].

Cristallisation

Lorsque un élastomère est sollicité jusqu'à un certain niveau d'étirement, on observe des répartitions sous forme cristalline. Il s'agit d'édifices tridimensionnels ordonnés pouvant occuper une portion significative du volume du matériau. Cette phase cristalline coexiste avec une phase amorphe. Même si le phénomène de cristallisation sous contraintes de ce matériau est encore mal connu, certains travaux apportent un éclairage sur ce phénomène [95, 98, 147].

Fatigue

L'endommagement sous chargement cyclique est un phénomène ayant lieu dans les élastomères chargés. La propagation de ce type d'endommagement influe sur la durée de vie du matériau. L'endommagement par fatigue des élastomères chargés lors d'un chargement cyclique regroupe des mécanismes de concentration de contraintes, de cavitation, de coalescence (accumulation des particules de noirs de carbone) et de propagation de fissures. Parmi les travaux menés sur la fatigue des élastomères chargés sous sollicitation cyclique, on peut citer : [4, 101, 132, 140].

1.1.2.3/ COMPORTEMENT DYNAMIQUE

Parmi les comportements observés lors de sollicitations dynamiques, on peut mentionner le comportement viscoélastique, l'effet Payne et l'effet Fletcher-Gent. Ces trois types de comportement dynamique sont décrits dans les sections qui suivent. Mais, comme nous considérons un régime quasi-statique dans ce mémoire, aucun de ces trois types ne sera pris en compte dans le modèle hyperélastique qui sera proposé dans le second chapitre.

Comportement viscoélastique

Les élastomères sont souvent utilisés dans le domaine antivibratoire pour leur aptitude

à dissiper de l'énergie. Ce processus se traduit par une augmentation de la température sous chargement adiabatique. Ainsi, en chargement dynamique, les élastomères ont un comportement élastique caractérisé par un module d'origine entropique et un comportement visqueux plus ou moins visible caractérisé par une viscosité. L'association de ces deux réponses donne un comportement viscoélastique non-linéaire. Le partage entre la réponse élastique et visqueuse dépend étroitement de la fréquence de sollicitation et de la température. L'association de la viscosité et de l'élasticité se traduit par le phénomène de fluage sous déformation constante [3, 160] et d'hystérésis sous déformation cyclique [19, 53].

Effet Payne

L'effet Payne, étudié dans le domaine vibratoire, est interprété comme le processus de rupture du réseau de charges (c'est-à-dire le réseau de particules solides introduites dans le caoutchouc lors de la vulcanisation) ou par des mécanismes de frottement mis en jeu à l'interface charge-matrice [121]. La Figure 1.7 montre un plateau caoutchoutique aux faibles déformations puis une diminution du module dynamique E' avec l'augmentation de la déformation [87, 157]. Cette décroissance est associée à un maximum du module de perte (Figure 1.7 (b)) traduisant une dissipation d'énergie d'autant plus grande que la décroissance de E' est forte.

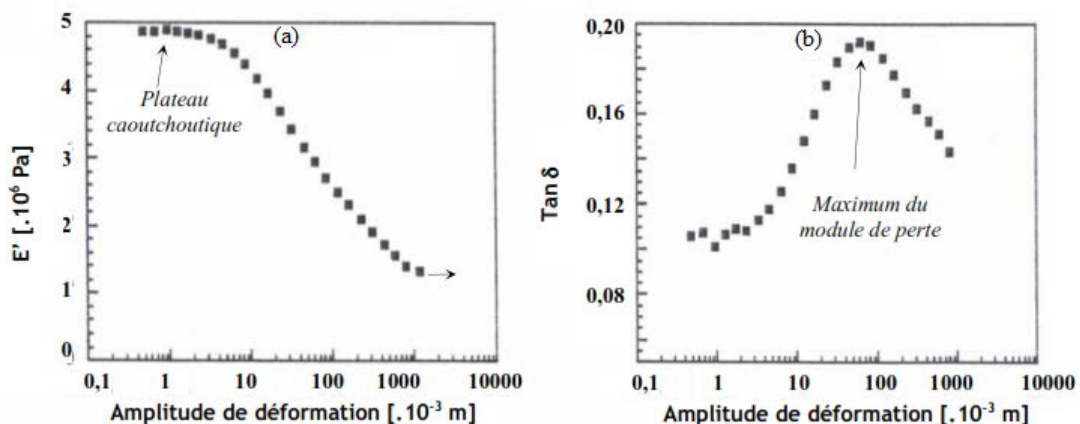


FIGURE 1.7 – Analyse de l'effet de Payne - évolution de propriétés mécaniques en fonction du niveau de déformation pour un élastomère SBR renforcé en silice [87].

L'effet Payne s'amplifie lorsqu'on augmente le taux de particules dans la matrice [66, 133]. Kraus décrit ce phénomène en considérant un taux de rupture dans le réseau de charge

proportionnel au nombre de contact entre particules [89].

Effet Fletcher-Gent

Il s'agit d'un effet observé par Fletcher et Gent [47] sur l'influence de la fréquence de sollicitation sur la loi de comportement. Ces deux auteurs ont constaté que la rigidité et la dissipation d'énergie du matériau augmentent avec la fréquence. Cet effet a également été étudié par d'autres auteurs dont Martinez [102] ainsi que Bukamel [26]. Il est illustré par la Figure 1.8.

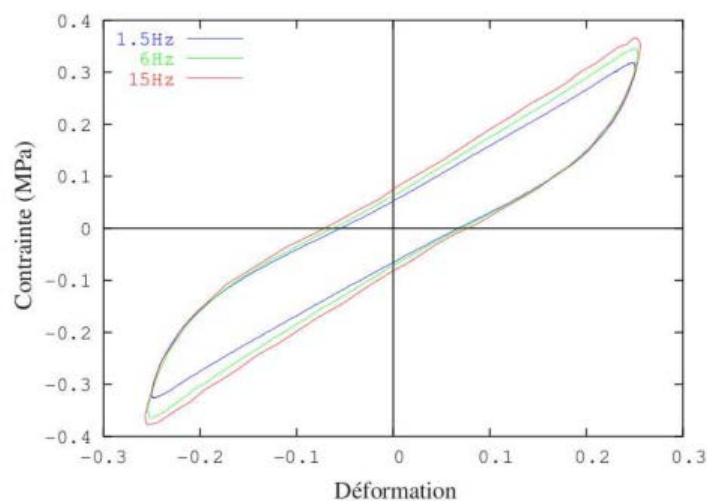


FIGURE 1.8 – Influence de la fréquence de sollicitation [26]

1.1.2.4/ L'AMPLIFICATION DES DÉFORMATIONS

À partir des travaux d'Einstein portant sur l'étude de particules en suspension dans un liquide [41], il est démontré que la présence de noirs de carbone dans la matrice caoutchouteuse provoquent des amplifications de déformations par effet composite. La Figure 1.9 met en relation le déplacement macroscopique l du matériau en fonction du déplacement l_{ma} lié à la matrice et du déplacement l_{ch} des charges de carbone. Les charges étant rigides devant la matrice élastomérique, $\lambda_{ch} = l_{ch}/l_{0ch}$ est égal à un. La loi de comportement de la matrice étant connue, trouver le comportement du matériau revient à connaître les élongations réelles $\lambda_{ma} = l_{ma}/l_{0ma}$ de la matrice en fonction de l'élongation macroscopique $\lambda = l/l_0$ du matériau chargé et du taux volumique de charge ν . Il faut noter que, si l_{ma} est inférieur à l , λ_{ma} est en revanche supérieur à λ , d'où l'amplification des

déformations.

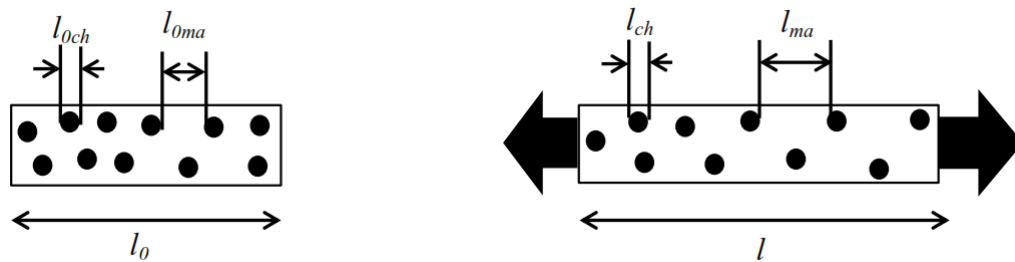


FIGURE 1.9 – Phénomène d'amplification de déformation

Kilian et al. [86] ont alors proposé un modèle tenant compte de cette théorie, ce qui a permis de reproduire avec une bonne précision la tendance du matériau à se renforcer en fonction du taux de charges.

1.1.3/ CONCLUSION

Dans ce paragraphe 1.1, nous avons traité de notions générales de chimie et de physique relatives aux matériaux élastomères, en évoquant notamment la complexité des liaisons et des mécanismes intervenant pendant la déformation de ces matériaux. Les propriétés de grandes déformations et de dissipation d'énergie rendent la modélisation mathématique des élastomères très complexe. L'hypothèse d'un comportement de type hyperélastique est généralement admise pour modéliser le comportement non-linéaire en quasi-statique, ce qui constitue le cadre de ce mémoire. La théorie de la mécanique des milieux continus constitue donc un préalable à l'étude des lois de comportement hyperélastiques, préalable qui est présenté au paragraphe suivant.

1.2/ MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS EN GRANDES DÉFORMATIONS

En mécanique des grandes déformations, il est important de distinguer la configuration initiale de la configuration déformée [51, 58] puisqu'elles induisent des évaluations différentes des contraintes et des déformations, contrairement au cadre défini par l'hypothèse des petites perturbations. On rappellera notamment comment s'opèrent les transformations de volume et de surface, comment se calculent les déformations et les contraintes,

comment s'établissent les équations d'équilibre, en quoi consiste le principe d'indifférence matérielle et, enfin, le rôle de la thermodynamique et en particulier l'inégalité de Clausius Duhem, pour décrire un comportement hyperélastique.

1.2.1/ DESCRIPTION DU MOUVEMENT.

On considère un solide déformable constitué d'un ensemble de points matériels dans l'espace (Figure 1.10). On distingue deux configurations spatiales :

- la configuration Eulérienne ou actuelle dans laquelle le point p du solide C_t est repéré par la coordonnée eulérienne \mathbf{x} à l'instant t ;
- la configuration Lagrangienne ou initiale dans laquelle le point p_0 du solide C_0 est repéré par la coordonnée lagrangienne \mathbf{X} à l'instant initial.

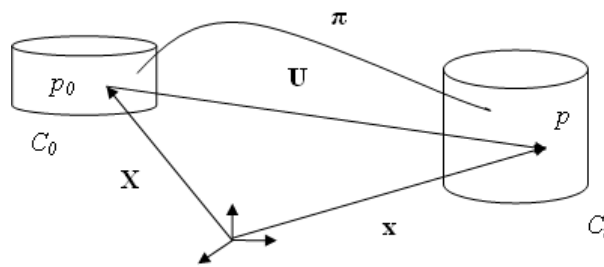


FIGURE 1.10 – configuration initiale et déformée.

La transformation du solide déformable, qui occupe dans la configuration initiale le volume C_0 et le volume C_t dans la configuration actuelle, est décrite par une application bijective π mettant en correspondance chaque position initiale $\mathbf{X} \in C_0$ avec une position actuelle $\mathbf{x} \in C_t$.

$$\mathbf{x} = \pi(\mathbf{X}) \quad (1.1)$$

Le vecteur \mathbf{U} qui lie \mathbf{x} à \mathbf{X} est appelé le vecteur déplacement :

$$\mathbf{U}(\mathbf{X}) = \mathbf{x} - \mathbf{X} \quad (1.2)$$

Ce qui permet d'introduire le tenseur gradient des déformations de la manière suivante :

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.3)$$

1.2.1.1/ TRANSFORMATION D'UN ÉLÉMENT DE VOLUME

Le volume déformé $dv \in C(t)$ est lié à l'élément de volume de la configuration initiale $dV \in C_0$ par le Jacobien J de la transformation, représentant le déterminant du tenseur gradient de déformation \mathbf{F} :

$$dv = JdV, \quad \text{avec} \quad J = \det(\mathbf{F}) \quad (1.4)$$

Notons que l'application π étant bijective, son Jacobien J est non nul. Il est même strictement positif comme rapport de deux volumes élémentaires. La relation (1.4) est encore appelée conservation de la masse en coordonnées lagrangienne.

1.2.1.2/ TRANSFORMATION D'UN ÉLÉMENT DE SURFACE

Un élément de surface dS de normale \mathbf{N} en configuration de référence (Figure 1.11) est lié à la surface déformée ds de normale \mathbf{n} par la formule de Nanson [32, 118] :

$$ds \cdot \mathbf{n} = J \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} \cdot dS \quad (1.5)$$

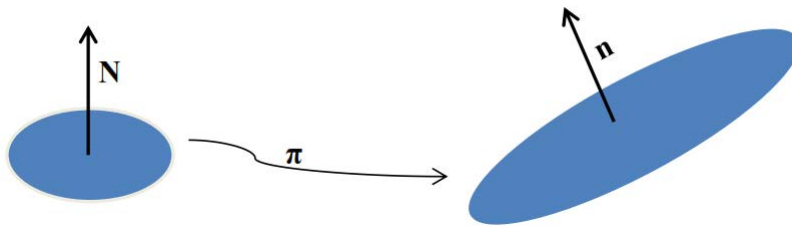


FIGURE 1.11 – Transformation d'un élément de surface.

Il est facile de voir que l'équation (1.5) peut se formuler de manière équivalente par :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}}{\|\mathbf{F}^{-T} \mathbf{N}\|} \quad (1.6)$$

1.2.2/ DESCRIPTION DES DÉFORMATIONS.

On introduit les tenseurs de déformations classiques de Cauchy-Green droit \mathbf{C} et de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} par :

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (1.7)$$

Comme la matrice \mathbf{F} est inversible, les matrices \mathbf{B} et \mathbf{C} le sont aussi. De plus, il est facile de vérifier que \mathbf{B} et \mathbf{C} sont définies positives.

Afin de disposer d'un tenseur des déformations nul lorsque le corps est au repos (c'est-à-dire avec un déplacement nul, ce qui induit que \mathbf{F} vaut l'identité d'après (1.3)), on introduit le tenseur des déformations de Green-Lagrange \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (1.8)$$

Notons que si on développe \mathbf{E} à partir de (1.3) et (1.7), et que l'on néglige le terme quadratique, on obtient le tenseur de déformation linéarisé classique :

$$\epsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} + \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \right) \quad (1.9)$$

Notons enfin qu'il existe d'autres tenseurs de déformation, moins usités, comme par exemple celui d'Euler-Almansi [69] :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (1.10)$$

1.2.3/ DESCRIPTION DES CONTRAINTES.

Si on considère un solide déformable séparé en deux sous domaines (Figure 1.12), l'équilibre impose l'existence de forces internes élémentaires $d\mathbf{f}$ à la frontière des deux sous domaines. Ces forces élémentaires, exprimées en Newton, sont reliées aux pressions \mathbf{t} (exprimées en Pascal) par :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} ds \quad (1.11)$$

L'un des résultats fondamentaux de la mécanique des milieux continus stipule une dépendance linéaire de \mathbf{t} par rapport à la normale extérieure \mathbf{n} du domaine étudié en configu-

ration actuelle :

$$\mathbf{t} = \sigma \cdot \mathbf{n} \quad (1.12)$$

où σ est le tenseur symétrique des contraintes généralisées de Cauchy d'ordre deux.

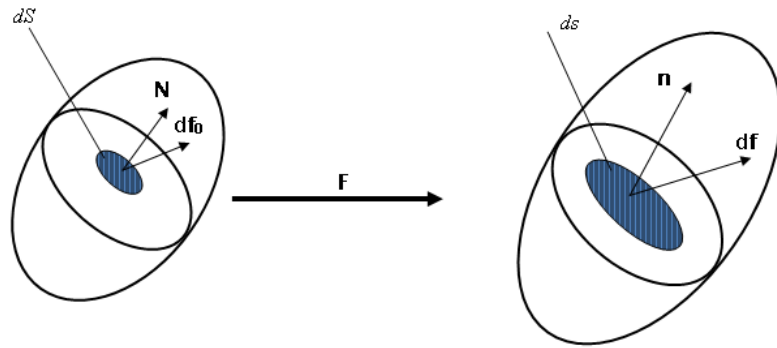


FIGURE 1.12 – Efforts internes.

À partir des équations (1.11) et (1.12), on exprime l'effort exercé sur la surface élémentaire ds par :

$$d\mathbf{f} = \sigma \cdot \mathbf{n} \cdot ds \quad (1.13)$$

La force élémentaire $d\mathbf{f}$ de la configuration actuelle de l'équation (1.13) peut être liée à l'élément de surface dS de la configuration initiale :

$$d\mathbf{f} = \mathbf{T} \cdot dS = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} \cdot dS \quad (1.14)$$

Le vecteur \mathbf{T} représente le vecteur de contrainte de Piola-Kirchhoff ou de Boussinesq. Il mesure la force par unité de surface définie dans la configuration initiale et agit sur la configuration actuelle. Le tenseur \mathbf{P} associé représente le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. En combinant les équations (1.13) et (1.14) avec la formule de Nanson (1.5), on relie le premier tenseur de Piola-Kirchhoff \mathbf{P} au tenseur de Cauchy σ :

$$\mathbf{P} = J\sigma \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (1.15)$$

Le tenseur de contrainte peut également être entièrement déterminé en configuration initiale. Il suffit de transporter l'incrément de force $d\mathbf{f}$ agissant sur le volume actuel vers la

configuration de référence non déformée :

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{F}^{-1} \cdot d\mathbf{f} \quad (1.16)$$

Dans l'équation (1.16), l'incrément de force $d\mathbf{f}_0$, qui n'a aucune signification physique, est supposé agir sur la surface initiale dS . Il s'exprime en fonction du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} :

$$d\mathbf{f}_0 = \mathbf{S} \cdot \mathbf{N} \cdot dS \quad (1.17)$$

Le tenseur \mathbf{S} est symétrique et purement Lagrangien. La relation liant le tenseur de Cauchy σ et le second tenseur de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} s'obtient en combinant les équations (1.5), (1.13), (1.16) et (1.17) :

$$\sigma = \frac{1}{J} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (1.18)$$

1.2.4/ ÉQUATIONS D'ÉQUILIBRES.

Les équations d'équilibre d'un milieu continu expriment la conservation de la quantité de mouvement de ce milieu. Dans le cadre des grandes déformations, elles adoptent une forme différente suivant les configurations dans lesquelles on les exprime. En configuration déformée Ω_t , elles impliquent la divergence Eulérienne \mathbf{div} :

$$\mathbf{div} \sigma(\mathbf{x}, t) + \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, t) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_t, \quad \forall t \quad (1.19)$$

avec :

$$\mathbf{div} \sigma(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \sigma(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.20)$$

Le terme $\mathbf{div} \sigma$ représente la contribution des forces internes à l'équilibre dynamique du milieu. Le terme volumique $\rho \mathbf{f}$ représente typiquement les efforts gravitationnels, ρ étant la masse volumique en configuration déformée :

$$\rho = \frac{dm}{dv} \quad (1.21)$$

dm représentant une variation élémentaire de masse.

Quant au terme $\rho \ddot{\mathbf{u}}$, il concerne les quantités d'accélération.

En configuration non déformée Ω_0 , les équations s'expriment de manière équivalente

avec un formalisme assez proche :

$$\mathbf{Div} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) + \rho_0(\mathbf{X}, t) \mathbf{f}(\mathbf{X}, t) = \rho_0(\mathbf{X}, t) \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t), \quad \forall \mathbf{X} \in \Omega_0, \quad \forall t \quad (1.22)$$

L'opérateur $\mathbf{Div} \mathbf{P}$ représente cette fois ci la divergence Lagrangienne appliquée au premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchoff :

$$\mathbf{Div} \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} \quad (1.23)$$

ρ_0 représente la masse volumique en configuration non déformée :

$$\rho_0 = \frac{dm}{dV_0} \quad (1.24)$$

La résolution de l'équation aux dérivées partielles (1.19) ou (1.22) (selon que l'on travaille en configuration déformée ou en configuration de référence) ne peut se faire qu'à condition :

1. de lui adjoindre des conditions aux limites de type Dirichlet (blocage de degrés de liberté en déplacement sur les parties appropriées de la frontière du domaine d'étude) et des conditions de Neumann associées au chargement appliqué à des parties complémentaires de la frontière du domaine ;
2. d'exprimer la relation qui lie contrainte et déformation via une loi qui exprimera le comportement du matériau.

Le premier point est classique et trouve facilement sa traduction dans le cadre d'une implémentation éléments finis. Le second point fait l'objet des paragraphes qui suivent.

1.2.5/ PRINCIPE DE L'INDIFFÉRENCE MATÉRIELLE.

La loi de comportement permet de relier le tenseur des contraintes à un instant donné au tenseur des déformations au même instant et en tout point du matériau. Pour un milieu élastique, le tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit comme une fonction du tenseur gradient des déformations \mathbf{F} :

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{G}(\mathbf{F}) \quad (1.25)$$

Le principe d'indifférence matérielle impose que, dans la même configuration, la fonctionnelle \mathcal{G} doit être invariante pour tout changement de repère orthonormé. En d'autres termes, si on considère un tenseur orthogonal de changement de base \mathbf{P} , le principe d'indifférence matérielle est vérifié pour la fonctionnelle \mathcal{G} si et seulement si :

$$\mathcal{G}(\mathbf{PF}) = \mathbf{P}\mathcal{G}(\mathbf{F})\mathbf{P}^T \quad (1.26)$$

On pourra trouver plus de détails sur cette notion d'indifférence matérielle dans la thèse de A.T. Ta [145].

1.2.6/ THERMODYNAMIQUE DES MILIEUX CONTINUS.

L'insertion des concepts thermodynamiques dans la mécanique des milieux continus est liée au couplage entre les effets mécaniques et les effets thermiques rencontrés dans de nombreux problèmes technologiques. À partir du bilan de l'énergie mécanique et thermique d'un système (premier principe de la thermodynamique) et de l'inégalité fondamentale du bilan de l'entropie (second principe de la thermodynamique), les inégalités de Clausius-Duhem sont obtenues pour différentes configurations :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_0 = -\rho_0 (\dot{\Psi} - S\dot{T}) - \frac{\mathbf{Q} \cdot \text{Grad}T}{T} + \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \geq 0 & \text{en configuration mixte} \\ \Phi_0 = -\rho_0 (\dot{\Psi} - S\dot{T}) - \frac{\mathbf{Q} \cdot \text{Grad}T}{T} + \mathbf{S} : \dot{\mathbf{E}} \geq 0 & \text{en configuration initiale} \\ \Phi = -\rho (\dot{\Psi} - S\dot{T}) - \frac{\mathbf{q} \cdot \text{Grad}T}{T} + \sigma : \mathbf{D} \geq 0 & \text{en configuration actuelle} \end{array} \right. \quad (1.27)$$

où Φ_0 et Φ représentent respectivement la dissipation énergétique en configuration initiale et en configuration actuelle ; Ψ est l'énergie libre spécifique de Helmholtz ; \mathbf{Q} et \mathbf{q} représentent les vecteurs flux de chaleur ; T est la température absolue et S l'entropie. L'énergie de déformation par unité de volume initial s'écrit :

$$W = \rho_0 \Psi \quad (1.28)$$

Les inégalités de Clausius-Duhem du système (1.27) constituent un outil de construction des lois de comportement. Cette construction consiste à écrire l'énergie libre spécifique en fonction des variables introduites pour représenter les phénomènes observés. Ainsi, pour construire une loi de comportement, on doit :

- définir des variables d'état. En effet l'axiome de l'état local postule que l'état du matériau est entièrement défini par la connaissance à un instant donné des valeurs des variables observables (température, déformations \mathbf{F} , \mathbf{E} ou \mathbf{B} suivant la description privilégiée) et des variables internes qui sont introduites pour décrire des phénomènes complexes tels que la dissipation et l'endommagement ;
- postuler l'existence d'une fonction d'énergie thermodynamique W qui dépend des variables observables et des variables internes. C'est de ce potentiel d'énergie que dérive la loi de comportement ;
- postuler l'existence d'un pseudo potentiel de dissipation Φ fonction des variables de flux pour décrire l'évolution des variables associées aux processus dissipatifs.

L'ensemble de ces hypothèses conduit à un système d'équations dont la résolution donne l'écriture des lois de comportement. On déduit en particulier des équations (1.27) que le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} dérive de la fonction énergie de déformation W :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} \quad (1.29)$$

Ce résultat est obtenu en considérant que la dissipation interne d'énergie est nulle (matériau élastique) et en négligeant les effets thermiques (évolution isotherme ou adiabatique).

Tout le problème de la modélisation des phénomènes hyperélastiques réside donc dans la détermination analytique de cette fonction énergie de déformation W .

1.3/ ÉTUDE DU COMPORTEMENT HYPERÉLASTIQUE

Un matériau est dit élastique si le tenseur des contraintes de Cauchy à un instant t dépend uniquement de l'état de déformation à ce même instant (hypothèse de Cauchy). Il est considéré comme hyperélastique si, en plus, on considère un état de grande déformation. Green [39, 118] suppose l'existence d'une fonction densité d'énergie W définie par l'expression de l'équation (1.28). Cette densité d'énergie est indispensable pour modéliser le comportement des matériaux hyperélastiques.

Grâce au principe d'objectivité (encore appelé principe d'indifférence matérielle, cf. paragraphe 1.2.5), il est possible de montrer que la densité d'énergie W (qui dépend originel-

lement de \mathbf{F} d'après (1.25)) est en fait une fonction de $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$. Cela signifie que W est aussi une fonction du tenseur de déformation \mathbf{E} d'après la relation (1.8), ce que traduit l'équation (1.29). Dans le cas d'un matériau isotrope (c'est-à-dire possédant les mêmes propriétés dans toutes les directions), l'énergie peut de surcroît être exprimée en fonction des trois invariants principaux du tenseur de Cauchy-Green \mathbf{C} (ou des invariants de \mathbf{B} qui a les mêmes que ceux de \mathbf{C}) :

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (1.30)$$

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}); \quad I_2 = \frac{1}{2} \left[(\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^2) \right]; \quad I_3 = \det(\mathbf{C}) \quad (1.31)$$

où I_i $i = 1, 2, 3$ représentent les invariants de \mathbf{C} et de \mathbf{B} .

Le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} défini par l'équation (1.29) s'écrit alors :

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{C}} = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{C}} \quad (1.32)$$

Les dérivations des invariants I_i par rapport au tenseur de Cauchy-Green droit \mathbf{C} constituent un calcul classique [32] :

$$\frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{I}; \quad \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} = I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}; \quad \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = I_3 \mathbf{C}^{-1} \quad (1.33)$$

En remplaçant (1.33) dans l'équation (1.32), on obtient :

$$\mathbf{S} = 2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{C}^{-1} \right] \quad (1.34)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy est obtenu en remplaçant (1.34) dans l'équation (1.18) :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^2 + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \mathbf{I} \right] \quad (1.35)$$

À noter que, si on considère le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\mathbf{B}^3 - I_1 \mathbf{B}^2 + I_2 \mathbf{B} - I_3 \mathbf{I} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}^2 = I_1 \mathbf{B} - I_2 \mathbf{I} + I_3 \mathbf{B}^{-1} \quad (1.36)$$

on obtient la forme équivalente de (1.35) suivante :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{2}{J} \left[\left(I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} + I_3 \frac{\partial W}{\partial I_3} \right) \mathbf{I} + \frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} - I_3 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \right] \quad (1.37)$$

1.3.1/ CONDITION D'INCOMPRESSIBILITÉ.

La déformation des matériaux caoutchouteux se fait à volume pratiquement constant, ce qui traduit la conservation du volume au cours de la déformation. Cette propriété est prise en compte en considérant que le Jacobien J du tenseur gradient de déformation \mathbf{F} est égal à un :

$$J = \det(\mathbf{F}) = 1 \quad (1.38)$$

Les déformations qui conservent le volume du solide n'étant pas entièrement libres, la cinématique de telles déformations sont soumises à certaines restrictions. On parle de liaisons internes. Pour tenir compte de ces liaisons, il faut ajouter à la forme générale de la loi de comportement une contrainte a priori indéterminée sous la forme d'une pression hydrostatique p jouant le rôle d'un multiplicateur de Lagrange :

$$\sigma = \gamma(\mathbf{F}) - p\mathbf{I} \quad (1.39)$$

L'aménagement des équations (1.34) et (1.35), en tenant compte de la formulation (1.39) et en supposant que W ne dépend que de I_1 et I_2 , s'écrit :

- en configuration de référence

$$\mathbf{S} = 2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C} \right] - p\mathbf{C}^{-1} \quad (1.40)$$

- en configuration actuelle

$$\sigma = 2 \left[\left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \mathbf{B} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^2 \right] - p\mathbf{I} \quad (1.41)$$

ce qui peut encore s'écrire, en utilisant (1.37) :

$$\sigma = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} \mathbf{B} + I_2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \right] - p\mathbf{I} \quad (1.42)$$

Notons pour finir que, lorsque l'énergie de déformation est exprimée en fonction des valeurs propres du tenseur gradient de déformation \mathbf{F} , les composantes du tenseur de Cauchy sont déterminées par la relation suivante [69, 118]

$$\sigma_i = \lambda_i \frac{\partial W}{\partial \lambda_i} - p \quad \text{avec } i = 1, 2, 3 \quad (1.43)$$

1.3.2/ APPLICATION À DIFFÉRENTS CAS DE SOLLICITATION

Dans cette partie, on va s'intéresser à différents types de sollicitation conduisant à des déformations homogènes. Cela signifie que le déplacement dépend des variables spatiales de manière affine, ce qui fournit des tenseurs de déformations et de contraintes constants en espace. Les déformations homogènes sont intéressantes à étudier car elles correspondent à des conditions classiques d'expérimentation. Elles permettent ainsi d'identifier les paramètres matériau en corrélant les calculs théoriques aux mesures expérimentales. Elles permettent en outre d'exhiber des solutions analytiques qui sont utiles pour valider des solutions numériques par éléments finis.

1.3.2.1/ TRACTION ET COMPRESSION UNIAXIALE.

La sollicitation en traction uniaxiale consiste à étirer suivant une direction une face d'une éprouvette de section carré comme l'illustre la Figure 1.13. Les autres facettes libres de l'éprouvette ne subissent pas d'effort extérieur et sont en état de contraintes nulles.

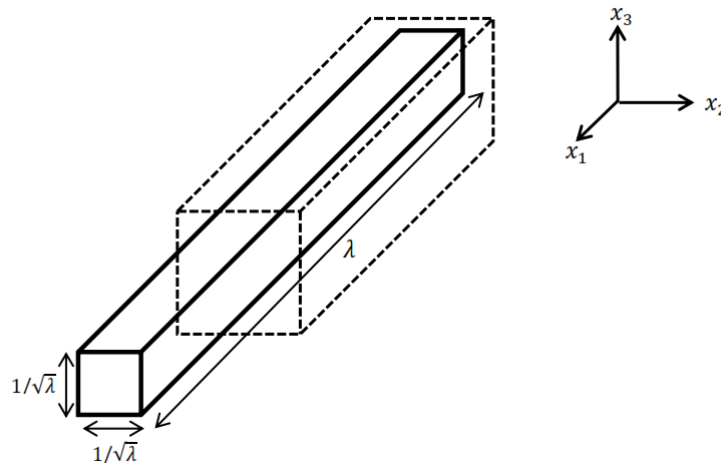


FIGURE 1.13 – Sollicitation en traction uniaxiale.

Dans le repère lié à l'éprouvette et suivant la direction d'extension, les élongations principales dans ce mode de sollicitation s'écrivent :

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = \lambda_3 \quad (1.44)$$

En tenant compte de l'incompressibilité ($\lambda_2 = \lambda_3 = 1/\sqrt{\lambda}$), la matrice \mathbf{F} du tenseur gradient

de déformation s'écrit :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

On déduit le tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} à partir du tenseur gradient de déformation de l'équation (1.45) :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda^2 \end{pmatrix} \quad (1.46)$$

Les invariants définis à l'équation (1.31) s'écrivent alors dans le cas de la traction uniaxiale :

$$I_1 = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda}; \quad I_2 = \frac{1}{\lambda^2} + 2\lambda; \quad I_3 = 1 \quad (1.47)$$

En remplaçant les tenseurs \mathbf{B} et \mathbf{B}^2 de l'équation (1.46) et les invariants de l'équation (1.47) dans l'équation (1.41), on obtient les trois composantes σ_1 , σ_2 et σ_3 du tenseur des contraintes de Cauchy qui est diagonal dans ce cas :

$$\sigma_1 = 2\lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + 4\lambda \frac{\partial W}{\partial I_2} - p; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \frac{2}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \lambda \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} - p \quad (1.48)$$

Compte tenu des conditions de chargement sur les faces libres d'effort, les composantes σ_2 et σ_3 du tenseur σ sont égales à zéro, ce qui permet de déterminer p à partir de la seconde égalité de l'équation (1.48). En remplaçant p dans l'expression de σ_1 , on obtient la loi de comportement pour un cas de chargement uniaxial homogène :

$$\sigma_1 = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (1.49)$$

En compression uniaxiale, la forme analytique de la loi de comportement demeure la même que pour la traction uniaxiale (équation (1.49)). La différence se situe au niveau de l'élongation λ qui est compris entre 0 et 1.

1.3.2.2/ TRACTION BIAXIALE

La traction biaxiale consiste à étirer un échantillon simultanément dans deux directions, tandis que la troisième direction est libre. La sollicitation en traction biaxiale est illustrée sur la Figure 1.14.

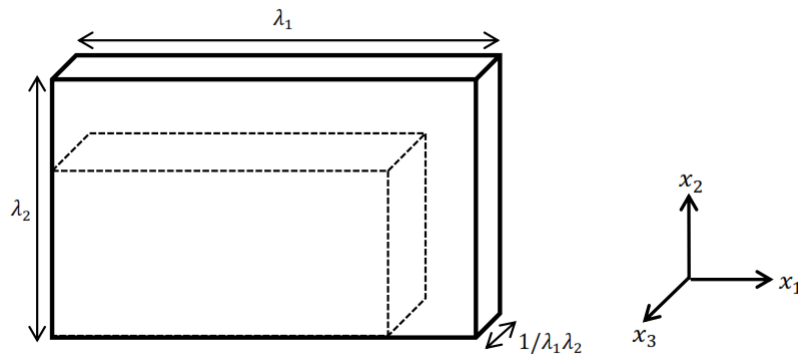


FIGURE 1.14 – Sollicitation en traction biaxiale.

En considérant la condition d'incompressibilité, le tenseur gradient des déformations \mathbf{F} s'écrit alors :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

On en déduit le tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1^4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1^{-4}\lambda_2^{-4} \end{pmatrix} \quad (1.51)$$

Les invariants définis par l'équation (1.31) s'écrivent alors dans le cas de la traction biaxiale :

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}; \quad I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}; \quad I_3 = 1 \quad (1.52)$$

En reportant les tenseurs \mathbf{B} et \mathbf{B}^2 de l'équation (1.51) et les invariants de l'équation (1.52) dans l'équation (1.41), on obtient les trois composantes σ_1 , σ_2 et σ_3 du tenseur des

contraintes de Cauchy qui s'écrit dans ce cas de manière diagonale :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_2^2 + \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \lambda_1^2 - p \\ \sigma_2 = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_1^2 + \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2}) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \lambda_2^2 - p \\ \sigma_3 = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} - p \end{cases} \quad (1.53)$$

En faisant l'hypothèse classique de contrainte plane $\sigma_3 = 0$, on déduit le multiplicateur p de la troisième équation de (1.53) :

$$p = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \lambda_1^{-2} \lambda_2^{-2} \quad (1.54)$$

En reportant le p obtenu dans les deux premières équations de (1.53), on obtient :

$$\sigma_1 = 2 \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right); \quad \sigma_2 = 2 \left(\lambda_2^2 - \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (1.55)$$

Dans le cas d'une traction équi-biaxiale, l'étirement est le même dans les deux directions, c'est-à-dire que $\lambda_1 = \lambda_2$. À partir de l'équation (1.55), cette particularité implique :

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2 \left(\lambda_1^2 - \frac{1}{\lambda_1^4} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (1.56)$$

1.3.2.3/ CISAILLEMENT PUR

Le cisaillement pur correspond à un essai de traction uniaxiale en déformation plane comme illustré sur la Figure 1.15.

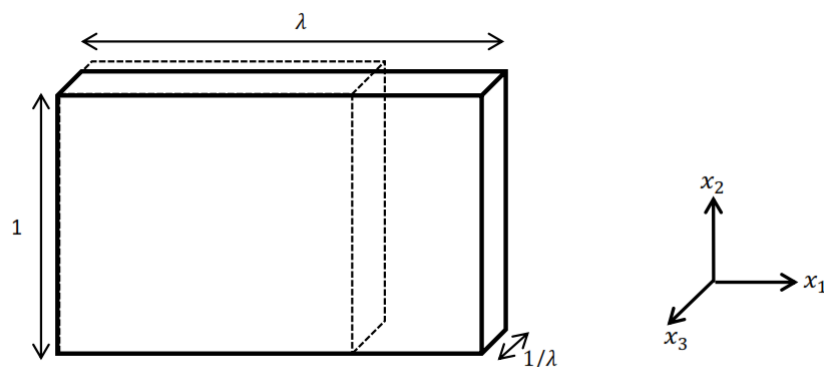


FIGURE 1.15 – Sollicitation en cisaillement pur.

Les élongations principales dans ce mode de sollicitation s'écrivent :

$$\lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = \lambda^{-1} \quad (1.57)$$

Le tenseur gradient de déformation \mathbf{F} s'écrit :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

On déduit le tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} à partir du tenseur de déformation de l'équation (1.58) :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-2} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} \lambda^4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-4} \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

Les trois invariants tels que définis à l'équation (1.31) pour ce mode de sollicitation deviennent :

$$I_1 = I_2 = 1 + \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}; \quad I_3 = 1 \quad (1.60)$$

En remplaçant les expressions des tenseurs \mathbf{B} et \mathbf{B}^2 de l'équation (1.59) et des invariants de l'équation (1.60) dans l'équation (1.41), on obtient les trois composantes du tenseur des contraintes de Cauchy en cisaillement :

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2\lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2(1 + \lambda^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} - p \\ \sigma_2 = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2 \left(\frac{1}{\lambda^2} + \lambda^2 \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} - p \\ \sigma_3 = \frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} - p \end{cases} \quad (1.61)$$

L'hypothèse des contraintes planes nous permet d'écrire :

$$\sigma_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial W}{\partial I_1} + 2 \left(1 + \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\partial W}{\partial I_2} \quad (1.62)$$

En reportant l'équation (1.62) dans les deux premières égalités de l'équation (1.61), on

obtient les composantes σ_1 et σ_2 du tenseur de contrainte de Cauchy :

$$\sigma_1 = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right); \quad \sigma_2 = 2 \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (1.63)$$

1.3.2.4/ GLISSEMENT SIMPLE

L'essai de glissement simple est illustré sur la Figure 1.16 :

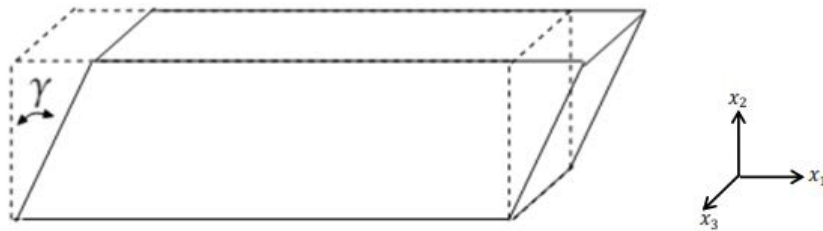


FIGURE 1.16 – Sollicitation en glissement simple.

Le tenseur gradient de déformation pour ce mode de sollicitation s'écrit :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.64)$$

où γ représente l'angle de glissement.

Le tenseur de Cauchy-Green gauche \mathbf{B} est déduit de l'expression de l'équation (1.64) :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 + \gamma^2 & \gamma & 0 \\ \gamma & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{B}^2 = \begin{pmatrix} (1 + \gamma^2)^2 + \gamma^2 & \gamma(2 + \gamma^2) & 0 \\ \gamma(2 + \gamma^2) & 1 + \gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

Contrairement aux trois cas de sollicitation traités précédemment, on remarque que les matrices \mathbf{F} , \mathbf{B} et \mathbf{B}^2 ne sont plus diagonales. Les trois invariants du tenseur de Cauchy-Green s'écrivent :

$$I_1 = I_2 = 3 + \gamma^2; \quad I_3 = 1 \quad (1.66)$$

En remplaçant les expressions des équations (1.65) et (1.66) dans l'équation (1.41), on

obtient les composantes du tenseur de contrainte de Cauchy en glissement simple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = 2 \left[(1 + \gamma^2) \frac{\partial W}{\partial I_1} + (2 + \gamma^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] - p \\ \sigma_2 = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + 2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] - p \\ \sigma_3 = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + (2 + \gamma^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] - p \\ \sigma_3 = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \gamma \end{array} \right. \quad (1.67)$$

Ainsi, contrairement aux trois cas traités précédemment, du fait que les déformations sont non diagonales, on voit apparaître une contrainte de cisaillement σ_{12} non nulle. En utilisant une hypothèse de contrainte plane (par rapport à la direction perpendiculaire au plan de cisaillement), on déduit le multiplicateur de Lagrange p de la troisième équation de (1.67) :

$$p = 2 \left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + (2 + \gamma^2) \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \quad (1.68)$$

En reportant p dans les deux premières équations de (1.67), on obtient facilement :

$$\sigma_1 = 2\gamma^2 \frac{\partial W}{\partial I_1}; \quad \sigma_2 = -2\gamma^2 \frac{\partial W}{\partial I_2}; \quad \sigma_{12} = \sigma_{21} = 2\gamma \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (1.69)$$

Finalement, comme on vient de le voir, au travers des divers exemples traités, la connaissance du comportement d'un matériau hyperélastique revient à connaître la fonction densité d'énergie W . La discussion sur la détermination de cette densité (comment l'établir ? comment la valider ? comment discriminer les différentes densités entre elles ?) fait l'objet de la fin de ce premier chapitre.

1.3.3/ ÉTUDE DE LA DENSITÉ D'ÉNERGIE.

Meyer et Ferri ont montré que l'élasticité des caoutchoucs est essentiellement entropique [82, 103, 150]. Ils ont effectué des essais de traction uniaxiale de l'ordre de 350% de déformation sur du caoutchouc faiblement vulcanisé en faisant varier la température. Ils ont conclu à la proportionnalité de l'effort avec la température :

$$f(T) = \alpha T \quad (1.70)$$

f représente l'effort de traction, T la température et α le coefficient de dilatation thermique.

D'autre part, la relation thermodynamique liant l'effort f exercé sur une éprouvette à l'énergie interne U , à l'entropie S et à la température T s'écrit [137] :

$$f = \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) - T \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)_T \quad (1.71)$$

La coordonnée z représente la direction suivant laquelle s'exerce l'effort de traction f .

La contribution de l'énergie interne U de l'équation (1.71) peut être considérée comme négligeable comme cela est illustré sur la Figure 1.5 (paragraphe 1.1.2.1). Ainsi, à partir de l'équation (1.71), on écrit la variation de l'énergie de déformation ΔW en fonction de la variation d'entropie ΔS par unité de volume non déformé :

$$\Delta W = f \Delta z = -T \Delta S \quad (1.72)$$

On constate à partir des équations (1.70) et (1.71) que le coefficient de dilatation thermique α est égal à l'opposé de la variation d'entropie par rapport au déplacement.

Pour déterminer une expression analytique du potentiel élastique W , trois approches sont généralement utilisées :

- l'approche microscopique ou micro-mécanique ou encore moléculaire [146, 151] qui prend explicitement en compte la nature des atomes et leurs agencements au sein du matériau ;
- l'approche prenant en compte des hypothèses de périodicité d'un volume représentatif du matériau hétérogène [56, 88]. Cette approche est souvent utilisée pour les propriétés homogènes équivalentes des composites et se base sur la théorie de l'homogénéisation [18, 142]. Elle est qualifiée de minimécanique dans la thèse de A. Ould Eyih [120] ;
- l'approche macroscopique ou phénoménologique qui donne une expression analytique des fonctions W , décrivant le mieux possible les phénomènes observés sans se préoccuper d'une quelconque explication physique [107, 137, 150]. Cette philosophie se situe à l'opposé des deux précédentes approches qui cherchent à trouver une explication physique aux phénomènes observés avec des paramètres liés à la géométrie, à la morphologie et à la nature du matériau sollicité.

Dans la suite de ce mémoire, nous nous intéresserons successivement aux approches moléculaire et phénoménologique généralement utilisées dans le cadre de la modélisation des matériaux élastomères.

1.3.3.1/ APPROCHE MOLÉCULAIRE

Les formulations moléculaires de l'élasticité des caoutchoucs utilisent deux fonctions de distributions :

- la fonction de distribution Gaussienne ;
- la fonction de distribution non-Gaussienne ou de Langevin.

Distribution Gaussienne

En théorie Gaussienne [91, 150], on considère qu'une chaîne est composée de n chaînons de même longueur L . La rotation entre les chaînons voisins étant libre, chaque liaison peut pivoter de manière à ce que la direction de la chaîne change à chaque chaînon [91]. La distance entre les extrémités de la chaîne est en moyenne $L\sqrt{n}$ avec n le nombre de segments de monomères de longueur L . En supposant fixée une extrémité de la chaîne à l'origine du repère cartésien, l'autre point peut se mouvoir de manière aléatoire dans l'espace. Repérer ce point devient un problème de probabilité dont la solution en première approximation est évaluée par une fonction de distribution Gaussienne [91, 100, 150] qui prend la forme suivante :

$$p(r) = \left(\frac{b}{\sqrt{\pi}}\right)^3 \exp(-b^2 r^2) \quad (1.73)$$

avec :

$$b^2 = \frac{3}{2nL^2} \quad \text{et} \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (1.74)$$

Les coordonnées spatiales eulériennes du point libre sont x, y et z et r représente la distance entre les extrémités de la chaîne dans la configuration actuelle. La chaîne étant complètement libre, l'entropie est donnée par l'équation de Boltzmann [69, 74] :

$$S = k_B \ln [p(r)] \quad (1.75)$$

où k_B représente la constante de Boltzmann.

En remplaçant la fonction de probabilité de l'équation (1.73) puis b et r (cf. équation (1.74)) dans l'équation (1.75), l'entropie se réécrit :

$$S = k_B \left\{ \ln \left[\left(\frac{b}{\sqrt{\pi}} \right)^3 - b^2 r^2 \right] \right\} = k \left\{ \ln \left[\left(\frac{3}{2\pi n L^2} \right)^{3/2} - \frac{3}{2n L^2} (x^2 + y^2 + z^2) \right] \right\} \quad (1.76)$$

La théorie Gaussienne permet de construire la densité d'énergie à partir de deux hypothèses :

- les points de jonctions entre les chaînes restent fixes c'est-à-dire que les chaînes glissent mais les nœuds d'enchevêtrements sont fixes ;
- la déformation macroscopique se répercute à l'échelle microscopique dans les mêmes proportions sur tous les segments entre liaisons (déformations affines).

Ces hypothèses permettent de mettre en relation les coordonnées spatiales lagrangiennes (x_0, y_0, z_0) et celles eulériennes (x, y, z) :

$$x = \lambda_1 x_0; \quad y = \lambda_2 y_0; \quad z = \lambda_3 z_0 \quad (1.77)$$

où λ_i ($i = 1, 2, 3$) représentent les valeurs propres du tenseur gradient de déformation.

La variation d'entropie de la chaîne entre l'état initial et l'état actuel s'obtient en prenant en compte l'équation (1.77) dans l'équation (1.76) :

$$\Delta S = \Delta S_0 - \Delta S_1 = -\frac{3k_B}{2nL^2} \left[(\lambda_1^2 - 1)x_0^2 + (\lambda_2^2 - 1)y_0^2 + (\lambda_3^2 - 1)z_0^2 \right] \quad (1.78)$$

Le réseau de chaînes contient N_g groupes et N_p chaînes. La variation d'entropie de chaque groupe de N_p chaînes s'écrit :

$$\Delta S_p = \sum_{i=1}^{N_p} \Delta S_{ip} = -\frac{3k_B}{2nL^2} \left[(\lambda_1^2 - 1) \sum_{i=1}^{N_p} x_{ip}^2 + (\lambda_2^2 - 1) \sum_{i=1}^{N_p} y_{ip}^2 + (\lambda_3^2 - 1) \sum_{i=1}^{N_p} z_{ip}^2 \right] \quad (1.79)$$

Les directions étant équiprobables, on pose :

$$\sum_{i=1}^{N_p} x_{ip}^2 = \sum_{i=1}^{N_p} y_{ip}^2 = \sum_{i=1}^{N_p} z_{ip}^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{N_p} r_{ip}^2 = \frac{N_p}{3} \overline{r_{ip}^2} \quad (1.80)$$

où on a posé :

$$r_{ip}^2 = x_{ip}^2 + y_{ip}^2 + z_{ip}^2; \quad \overline{r_{ip}^2} = \frac{1}{N_p} \sum_{i=1}^{N_p} r_{ip}^2 \quad (1.81)$$

En tenant compte de la simplification de l'équation (1.80) dans l'équation (1.79), la variation d'entropie se réduit à :

$$\Delta S_p = -\frac{k_B}{2nL^2} N_p \overline{r_{ip}^2} (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (1.82)$$

On suppose enfin que toutes les chaînes d'un groupe possèdent la même longueur :

$$\overline{r_{ip}^2} = nL^2 \quad (1.83)$$

En reportant l'équation (1.83) dans l'équation (1.82), et en faisant la sommation sur tous les groupes qui forment le réseau, on obtient :

$$\Delta S = \sum_{p=1}^{N_g} \Delta S_p = -\frac{1}{2} k_B N (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad \text{avec} \quad N = \sum_{p=1}^{N_g} N_p \quad (1.84)$$

Dans le cas des déformations isothermes, l'énergie libre de Helmholtz s'obtient en remplaçant l'expression de l'équation (1.84) dans celle de l'équation (1.72) :

$$W = \frac{1}{2} N k_B T (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 3) \quad (1.85)$$

Le modèle d'énergie issue de la distribution Gaussienne définie par l'équation (1.85) est aussi appelé modèle néo-Hookéen. Cette fonction d'énergie dépend d'un seul paramètre matériau $\mu = N k_B T$ représentant le module de cisaillement. En terme de prédiction, c'est un modèle indiqué pour des niveaux de déformations très modérés. Cependant, pour des modélisations nécessitant une grande précision dans une gamme variée et étendue des déformations, les simplifications introduites pour le traitement d'un réseau de chaînes sont trop grossières. La théorie non-Gaussienne décrite ci-après est alors mieux indiquée pour tenir compte de la déformation limite des chaînes.

Distribution non-Gaussienne.

En grande déformation, les chaînes du réseau sont de plus en plus déroulées et il devient nécessaire d'introduire une distribution plus raffinée que la distribution Gaussienne

pour analyser les propriétés du réseau. Ainsi, pour une chaîne, Kuhn et al. [91], en tenant compte de la distribution des angles de liaisons entre les chaînons de chaque chaîne du réseau, ont proposé l'utilisation de la densité de probabilité $p(r)$ suivante :

$$p(r) = \exp \left\{ c_1 - N \left[\frac{r}{nL} \beta_c + \ln \left(\frac{\beta_c}{\sinh \beta_c} \right) \right] \right\} \quad (1.86)$$

où c_1 est une constante et β_c est l'angle d'orientation des chaînes défini par :

$$\coth \beta_c - \frac{1}{\beta_c} = \frac{r}{nL} \quad (1.87)$$

Les symboles \sinh et \coth représentent respectivement le sinus et la cotangente hyperbolique. En introduisant la fonction de Langevin \mathcal{L} :

$$\mathcal{L}(\beta_c) = \coth \beta_c - \frac{1}{\beta_c} \quad (1.88)$$

l'équation (1.87) peut se reformuler de la manière suivante :

$$\mathcal{L}(\beta_c) = \frac{r}{nL} \quad (1.89)$$

Il découle de l'équation (1.89) que β_c peut s'exprimer avec la fonction inverse de Langevin \mathcal{L}^{-1} :

$$\beta_c = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{r}{nL} \right) \quad (1.90)$$

avec nL qui représente la limite d'extensibilité des chaînes macromoléculaires et qui traduit la valeur maximale que peut prendre r .

Étant donné que l'entropie de la chaîne est proportionnelle au logarithme de la densité de probabilité $p(r)$ (équation de Boltzmann (1.75)), il résulte en remplaçant l'expression de l'équation (1.86) dans (1.75) puis dans (1.72) que la variation de la densité d'énergie s'écrit :

$$\Delta W = Nk_B T \left[\frac{\lambda_c \beta_c - \beta_{co}}{\sqrt{n}} + \ln \left(\frac{\beta_c \sinh \beta_{co}}{\beta_{co} \sinh \beta_c} \right) \right] \quad (1.91)$$

où λ_c représente l'élongation moyenne des chaînes d'un groupe :

$$\lambda_c = \frac{r}{L \sqrt{n}} \quad (1.92)$$

et β_{c0} représente la valeur initiale de l'angle :

$$\beta_{c0} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad (1.93)$$

La théorie non-Gaussienne est appliquée au développement statistique des réseaux de chaînes ayant des déformations affines. C'est ainsi que, suivant leur degré de complexité, plusieurs modèles ont été proposés [5, 48, 76, 78, 122, 152, 163]. Les modèles à chaînes idéales [5], encore appelés modèles à réseau affine ("phantom part" en anglais), présentent des difficultés de prédiction à des niveaux modérés de sollicitation. Ces difficultés proviennent de la non prise en compte de l'enchevêtrement des chaînes entre elles, cet enchevêtrement (ou entrelacement) empêchant les chaînes de se mouvoir librement. Ainsi, plusieurs modèles [2, 6, 42, 48, 49, 50, 84, 85] ont été construits en combinant la contribution du réseau affine W_{ph} avec une contribution due à l'entrelacement des chaînes du réseau W_c :

$$W = W_{ph} + W_c \quad (1.94)$$

Comme exemple de modèle exprimé sous la forme de l'équation (1.94), le modèle de Flory et Erman [48, 49, 50], encore appelé modèle à jonctions des contraintes, tient compte des points de jonctions entre les chaînes. Cela contraint ces chaînes à se déplacer dans un voisinage réduit du fait de la présence d'autres chaînes (cf. Figure 1.17).



FIGURE 1.17 – Jonctions des contraintes [49]

La partie affine W_{ph} de ce modèle correspond au modèle néo-Hookéen décrit par l'équation (1.85) et la partie liée aux contraintes d'entrelacements du réseau s'écrit :

$$W_c = \frac{1}{2} Nk_B T \sum_{i=1}^3 [B_i + D_i - \ln(B_i + 1) - \ln(D_i + 1)] \quad (1.95)$$

avec :

$$B_i = \kappa^2 \frac{\lambda_i^2 - 1}{(\lambda_i^2 + \kappa)^2}, \quad \text{et} \quad D_i = \frac{\lambda_i^2}{\kappa} B_i \quad (1.96)$$

où κ est un paramètre lié à la fluctuation des contraintes.

Le modèle 8-chaînes [5] est quant à lui basé sur la disposition des chaînes du centre vers les huit sommets d'un cube (cf. Figure 1.18). Chaque chaîne contribue proportionnellement à la déformation, ce qui permet de relier l'élongation de chaque chaîne au premier invariant de déformation. Ce modèle 8-chaînes améliore les modèles 3 et 4 chaînes que l'on peut consulter par ailleurs dans la littérature [48, 78, 152]. Sa fonction densité d'énergie s'écrit en généralisant l'équation (1.91) au cas de n chaînes :

$$W^{8-ch} = Nk_B T n \left[\frac{\lambda_c \beta_c - \beta_{co}}{\sqrt{n}} + \ln \left(\frac{\beta_c \sinh \beta_{co}}{\beta_{co} \sinh \beta_c} \right) \right] \quad (1.97)$$

avec

$$\beta_c = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right); \quad \lambda_c^2 = \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}{3} = \frac{I_1}{3} \quad (1.98)$$

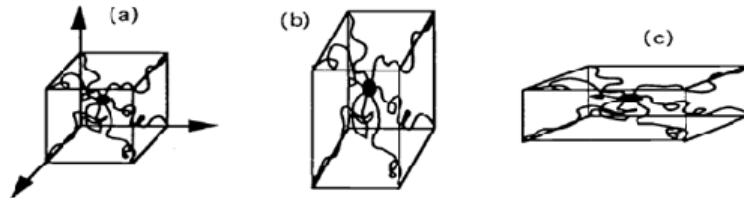


FIGURE 1.18 – Modèle 8-chaînes : configuration : (a) non-déformée, (b) tension uniaxiale, (c) tension biaxiale [5].

Le calcul des contraintes associées au modèle 8-chaînes s'opère en reportant l'équation (1.97) dans l'équation (1.43) :

$$\sigma_i^{8-ch} = \lambda_i \frac{\partial W^{8-ch}}{\partial \lambda_i} - p \quad (1.99)$$

Le calcul de la dérivée de la densité d'énergie donne à partir de (1.97) :

$$\frac{\partial W^{8-ch}}{\partial \lambda_i} = Nk_B T n \left[\frac{\partial \beta_c}{\partial \lambda_i} \frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} + \frac{\beta_c}{\sqrt{n}} \frac{\partial \lambda_c}{\partial \lambda_i} + \frac{\sinh \beta_c}{\beta_c} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{\beta_c}{\sinh \beta_c} \right) \right] \quad (1.100)$$

Or, en développant la dérivée, et grâce à la définition (1.88) de la fonction de Langevin, il

est facile de montrer que :

$$\frac{\sinh \beta_c}{\beta_c} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(\frac{\beta_c}{\sinh \beta_c} \right) = -\frac{\partial \beta_c}{\partial \lambda_i} \mathcal{L}(\beta_c) \quad (1.101)$$

On reporte (1.101) dans (1.100) et on utilise (1.98) :

$$\frac{\partial W^{8-ch}}{\partial \lambda_i} = Nk_B T n \left[\frac{\partial \beta_c}{\partial \lambda_i} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} - \mathcal{L}(\beta_c) \right) + \frac{\beta_c}{\sqrt{n}} \frac{\partial \lambda_c}{\partial \lambda_i} \right] = Nk_B T \sqrt{n} \beta_c \frac{\partial \lambda_c}{\partial \lambda_i} \quad (1.102)$$

On dérive enfin λ_c par rapport à λ_i à partir de (1.98) :

$$\frac{\partial \lambda_c}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{3} \frac{\lambda_i}{\lambda_c} \quad (1.103)$$

En combinant les équations (1.98), (1.99), (1.102) et (1.103), on obtient la loi de comportement du modèle d'Arruda et Boyce [23] :

$$\sigma_i^{8-ch} = \frac{\mu}{3} \sqrt{n} \frac{\lambda_i^2}{\lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) - p \quad (1.104)$$

où on a posé $\mu = Nk_B T$.

Il a été démontré [156] que ce modèle donne des simulations satisfaisantes là où les modèles trois chaînes et quatre chaînes sont plus approximatifs.

Sur la base de la superposition donnée par l'équation (1.94), Boyce et Arruda ont associé le modèle 8-chaînes (équation (1.97)) à la partie liée aux contraintes d'entrelacements du modèle de Flory-Erman de l'équation (1.95). Cette association a permis d'améliorer les prédictions pour les déformations modérées ainsi qu'en cisaillement mais un peu moins en traction équibiaxiale [23].

Récemment Kroon a proposé une nouvelle formulation associant trois densités d'énergie différentes [90]. Il considère que les chaînes se déforment en restant confinées dans un tube formé par les réseaux voisins [40, 65, 81]. Ainsi, les chaînes se déformant proportionnellement au tube ont une déformation affine et les autres une déformation non-affine. La troisième énergie est liée à l'entrelacement des chaînes entre elles. Le modèle s'écrit de la manière suivante en fonction des invariants I_1 et I_2 :

$$W = C_{cn} \left[\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \beta_c + \ln \left(\frac{\beta_c}{\sinh \beta_c} \right) \right] + C_{nc} (\lambda_{nc}^2 - 1)^\alpha + C_{con} n \nu - p (J - 1) \quad (1.105)$$

avec λ_c l'élongation moyenne des chaînes ayant une déformation affine et λ_{nc} l'élongation moyenne des chaînes ayant une déformation non-affine. Notons que :

$$\lambda_c \lambda_{nc} = \sqrt{\frac{I_1}{3}}, \quad \nu = \sqrt{\frac{I_2}{3}} \quad (1.106)$$

α, n, C_c, C_{nc} et C_{con} sont des paramètres matériau, p étant le multiplicateur de Lagrange qui permet de gérer l'incompressibilité.

1.3.3.2/ APPROCHE PHÉNOMÉNOLOGIQUE

En général les fonctions d'énergie phénoménologique sont des fonctions algébriques, de type polynômial ou puissance, ou des fonctions analytiques transcendantes comme des exponentielles ou des logarithmes.

Développement par les fonctions algébriques.

Le premier modèle polynomial a été proposé par Mooney [107]. Il s'exprime en fonction des invariants I_1 et I_2 :

$$W = C_{10}(I_1 - 3) + C_{01}(I_2 - 3) \quad (1.107)$$

Le modèle de l'équation (1.107) a été généralisé par Rivlin en l'écrivant sous la forme d'une série polynomiale infinie [135, 136]. Cette série s'exprime en fonction des trois invariants du tenseur des déformations de Cauchy-Green :

$$W = \sum_{(i,j,k)=(0,0,0)}^{\infty} C_{ijk}(I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j (I_3 - 1)^k \quad (1.108)$$

où C_{ijk} est l'ensemble des paramètres matériau. C_{000} est pris égal à zéro pour satisfaire la condition qui veut qu'une densité d'énergie soit nulle pour un matériau au repos ($I_1 = I_2 = 3; I_3 = 1$).

De nombreux modèles disponibles dans la littérature sont des troncatures à différents degrés de l'équation (1.108) [20, 79, 165, 166].

L'un des premiers modèles écrits sous la forme de fonctions puissances est celui proposé par Valanis et Landels [153]. La fonction énergie s'écrit comme la somme de fonctions w_i impliquant séparément chaque élongation principale λ_i du tenseur gradient de déforma-

tion :

$$W = w_1(\lambda_1) + w_2(\lambda_2) + w_3(\lambda_3) \quad (1.109)$$

Dans la même logique de l'équation (1.109), nous avons le modèle d'Ogden [116, 119] qui s'écrit :

$$W = \sum_{p=1}^N \frac{\mu_p}{\alpha_p} (\lambda_1^{\alpha_p} + \lambda_2^{\alpha_p} + \lambda_3^{\alpha_p} - 3) \quad (1.110)$$

Les paramètres matériau μ_p et α_p sont définis de telle sorte que le produit $\mu_p \alpha_p$ soit positif.

En pratique, les modèles écrits en fonction des élongations λ_i posent des difficultés liées aux variations d'expressions avec le mode de sollicitations. En outre, leurs implémentations éléments finis nécessitent une attention particulière, notamment pour gérer correctement les cas particuliers de valeurs propres double ou triple [126]. Par ailleurs, des lois puissances, dans le même esprit que l'équation (1.110), ont été proposées en remplaçant les valeurs propres par les invariants principaux du tenseur des déformations de Cauchy-Green [11, 13, 29, 114]. Ce type de lois permet de réduire le nombre de terme de la série polynomiale de Rivlin qui est donnée par l'équation (1.108).

Développement par les fonctions analytiques

Ils s'agit des modèles exprimés par des fonctions exponentielles ou logarithmiques. Le choix de la forme se fait de manière intuitive à partir des observations expérimentales du comportement des dérivées de l'énergie par rapport aux invariants [137]. En effet, il est expérimentalement établi que :

- $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ est une constante indépendante de I_1 et I_2 pour $I_1 \leq 12$, et devient exponentiellement croissante par rapport à I_1 pour $I_1 > 12$ [150];
- $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ est indépendante par rapport à I_1 mais est une fonction décroissante par rapport à I_2 [137].

Les énergies de déformation construites à partir de ces observations expérimentales s'expriment généralement en fonction des invariants du tenseur des déformations de Cauchy-Green. Le potentiel d'énergie est choisi comme la somme d'intégrales de deux fonctions indépendantes $f(u)$ et $g(u)$:

$$W(I_1, I_2) = \int_3^{I_1} f(u) du + \int_3^{I_2} g(u) du \quad (1.111)$$

En dérivant l'équation (1.111), on obtient :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = f(I_1), \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} = g(I_2) \quad (1.112)$$

À partir de l'équation (1.112), Les fonctions $f(I_1)$ et $g(I_2)$ sont choisies de manière à satisfaire les observations expérimentales. Plusieurs modèles ont ainsi été déterminés [15, 16, 55, 57, 64, 92, 93, 130]. À titre d'exemples, nous explicitons ci-après les modèles de Pucci-Saccomandi [130] et de Beda [15] :

- modèle de Pucci-Saccomandi [130]

La densité d'énergie du modèle de Pucci-Saccomandi adopte la forme suivante :

$$W = -\frac{\mu}{2} J_m \ln\left(1 - \frac{I_1 - 3}{J_m}\right) + K \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (1.113)$$

où μ , J_m et K sont les paramètres matériau du modèle.

En reportant l'équation (1.113) dans (1.112), on obtient :

$$f(I_1) = \frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{\mu J_m}{2(J_m + 3 - I_1)} \quad (1.114)$$

$$g(I_2) = \frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{K}{I_2} \quad (1.115)$$

On remarque que, d'après l'équation (1.114), $f(I_1)$ est une fonction croissante qui tend vers une asymptote verticale en $J_m + 3$. Quant à la fonction $g(I_2)$ associée à l'équation (1.115), elle est décroissante. Signalons que le comportement asymptotique de $f(I_1)$ a permis à Verron et al. [155] de déterminer des relations entre, d'une part les paramètres μ et J_m du modèle de Gent [57] qui correspond au premier terme de l'équation (1.113), et, d'autre part, les paramètres $\mu = Nk_B T$ et n du modèle d'Arruda-Boyce (équation (1.97)). Il apparaît ainsi des connexions entre le modèle phénoménologique de Gent et le modèle moléculaire d'Arruda-Boyce [22, 70, 71].

- modèle de Beda [15]

L'expression du modèle de Beda est donnée par :

$$W = \sum_{p=1}^M \frac{C_{p0}}{p} (I_1 - 3)^p + K \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (1.116)$$

où C_{p0} , M et K sont les paramètres matériau du modèle.

On remarque que la dépendance de ce modèle par rapport à I_2 est la même que celle du modèle de Pucci-Saccomandi (cf. équation (1.113)). La fonction $g(I_2)$ est donc la même que celle du modèle de Pucci-Saccomandi (équation (1.115)). La dépendance par rapport à I_1 diffère en revanche et en reportant l'équation (1.116) dans (1.112), on obtient :

$$f(I_1) = \frac{\partial W}{\partial I_1} = \sum_{p=1}^M C_{p0}(I_1 - 3)^{p-1} \quad (1.117)$$

On note que la fonction $f(I_1)$ est un polynôme croissant puisque I_1 est supérieur ou égal à 3 (cf. annexe A de ce mémoire). Cependant, contrairement à la fonction f du modèle de Pucci-Saccomandi (équation (1.114)), ce polynôme ne présente pas de comportement asymptotique pour une valeur donnée de I_1 . Enfin, il est à remarquer que le modèle de Beda fournit, dans certaines situations, des résultats proches de ceux obtenus avec le modèle de Pucci-Saccomandi [15].

À ce stade, nous pouvons donc conclure qu'il existe une très grande diversité d'approches pour aborder la problématique de la modélisation du comportement des matériaux hyperélastiques isotropes. Cette diversité peut être catégorisée en deux grandes familles : les approches moléculaires et les approches phénoménologiques. Sans prétendre à l'exhaustivité, la Figure 1.19 constitue une tentative pour répertorier les modèles les plus connus dans ces deux familles. On remarque à cet égard que l'approche phénoménologique est plus prolifique que l'approche moléculaire. Ceci étant, compte tenu de cette grande diversité, se pose la question du choix d'un modèle par rapport à un autre. Pour tenter de répondre à cette question, la section suivante propose des critères pouvant servir à guider le choix d'une densité d'énergie. Sur ce sujet, on pourra aussi consulter utilement [156] qui propose une classification en fonction de la capacité d'un modèle à corrélérer les données d'essai avec les mêmes paramètres matériau.

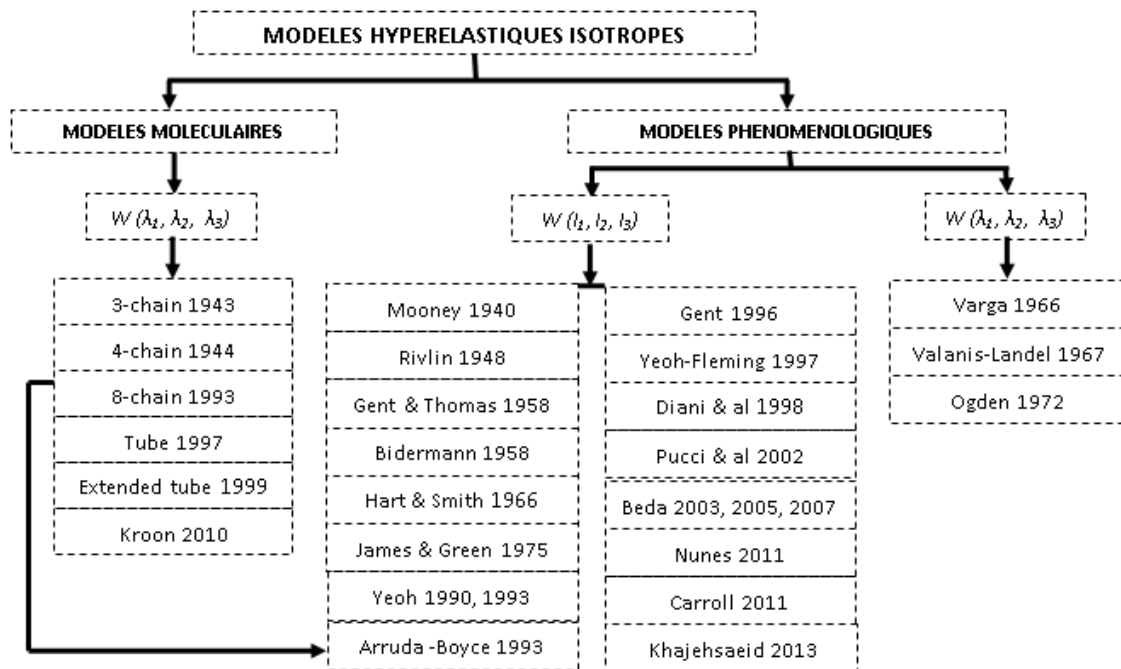


FIGURE 1.19 – Quelques modèles hyperélastiques isotropes standards

1.4/ CRITÈRES DE SÉLECTION D'UNE DENSITÉ

Les constats établis en fin de section précédente conduisent à se poser la question de l'approche à choisir (moléculaire ou phénoménologique) ainsi que celle de la sélection du modèle adéquat pour traiter un problème hyperélastique donné (en termes de matériau, de géométrie, de conditions aux limites et de chargement). Compte tenu des multiples travaux de comparaison de modèles hyperélastiques qui ont été menés dans la littérature [1, 54, 70, 155, 156], nous proposons les cinq critères de sélection suivants :

- couvrir l'ensemble du domaine de déformation des matériaux hyperélastiques ;
- prédire tous les modes de déformations avec les mêmes paramètres matériau ;
- vérifier les conditions de stabilité thermodynamique ;
- vérifier les observations expérimentales de Rivlin-Saunders et Treloar ;
- prédire la courbe de Mooney.

Ces cinq critères sont examinés en détail dans les sections qui suivent.

1.4.1/ DOMAINE DE DÉFORMATION

Il est expérimentalement établi qu'un matériau hyperélastique peut se déformer à plus de 700% de sa dimension initiale [15, 165]. Dans la littérature, en dehors des modèles partiels, qui ne sont valables que pour les déformations modérées, comme le modèle de Mooney [107], le modèle de Gent-Thomas [55] ou le modèle de Nunes [114], tous les autres modèles sont susceptibles de reproduire la forme en « S » caractéristique de la réponse d'un caoutchouc. Ce premier critère ne permet donc d'écarter que les modèles partiels évoqués ci-dessus, si tant est que les déformations étudiées soient d'un niveau assez élevé.

1.4.2/ PRÉDICTION DES SOLLICITATIONS MÉCANIQUES

Le premier objectif d'une modélisation est de fournir des éléments prédictifs permettant d'anticiper le comportement d'un matériau en fonctionnement, sans avoir recours systématiquement aux essais, la plupart du temps longs et coûteux. Un modèle bien élaboré doit bien entendu posséder des paramètres matériaux qui soient opérationnels pour l'ensemble des modes de sollicitation considérés. L'identification de ces paramètres matériaux se ramène généralement à l'écriture d'un problème de minimisation de l'écart entre les données expérimentales et les valeurs obtenues analytiquement ou numériquement [156]. Les modèles ayant une dépendance linéaire par rapport aux paramètres du matériau conduisent à l'utilisation de la méthode des moindres carrés classique [168]. Les autres nécessitent la mise en œuvre de méthodes non-linéaires comme celle proposée par Beda-Chevalier [12]. On peut également noter à ce sujet que Harb et al. [60, 61, 62] ont récemment proposé, dans le domaine de l'hyperélasticité anisotrope appliquée à la biomécanique, une méthode hybride combinant un calcul analytique au sens des moindres carrés ordinaires pour les paramètres ayant une dépendance linéaire et un algorithme génétique pour les paramètres avec dépendance non-linéaire. Cependant, la stratégie d'identification ne conduit pas nécessairement à l'existence d'un jeu de paramètres optimal et les jeux optimaux peuvent aussi ne pas être uniques. Pour limiter ce problème, certains auteurs ont montré l'importance de combiner plusieurs types de sollicitation expérimentale, en sommant les écarts avec la théorie obtenus sur plusieurs essais [14, 119, 144]. La détermination des paramètres est une opération clé dans

la modélisation qui peut être complétée par des conditions de stabilités (voir paragraphe suivant), ce qui permet de faire un tri parmi les jeux de paramètres identifiés. Cela permet aussi de réduire les plages de variation des valeurs prises par ces paramètres.

1.4.3/ STABILITÉ THERMODYNAMIQUE

Les inégalités de Baker-Ericksen [7], qui stipulent que la plus grande contrainte principale est associée à la plus grande déformation principale, se traduisent par :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} \geq 0; \quad \frac{\partial W}{\partial I_2} \geq 0 \quad (1.118)$$

Ces inégalités sont consistantes avec les observations empiriques relevées dans [138]. Elles introduisent des restrictions qui vont porter sur le signe des différents paramètres matériaux du modèle ou sur une combinaison de ces paramètres.

Par ailleurs, pour un matériau au repos, le déplacement est nul, ce qui induit que :

$$\mathbf{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \mathbf{C} = \mathbf{B} = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad I_1 = I_2 = 3; \quad I_3 = 1 \quad (1.119)$$

Comme les contraintes doivent aussi être nulles si le matériau est au repos, on obtient en reportant (1.119) dans (1.42) :

$$2 \frac{\partial W}{\partial I_1} (3, 3, 1) + 4 \frac{\partial W}{\partial I_2} (3, 3, 1) - p = 0 \quad (1.120)$$

Enfin, la densité d'énergie de déformation d'un matériau au repos doit naturellement être nulle :

$$W(3, 3, 1) = 0 \quad (1.121)$$

En conclusion, on considèrera qu'un modèle respecte les conditions de stabilité thermodynamique s'il vérifie les équations (1.120) et (1.121) ainsi que les inéquations (1.118).

1.4.4/ OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES

Il s'agit d'observations expérimentales reportées dans la littérature [137, 149, 150] sur le comportement des dérivées de l'énergie de déformation par rapport aux invariants I_1 et I_2 . Ces observations ont été commentées dans le paragraphe 1.3.3.2 de ce mémoire et

on les rappelle ici :

- $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ est une constante indépendante de I_1 et I_2 pour $I_1 \leq 12$, et devient exponentiellement croissante par rapport à I_1 pour $I_1 > 12$ [150];
- $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ est indépendante par rapport à I_1 mais est une fonction décroissante par rapport à I_2 [137].

Plusieurs modèles d'énergie ont été élaborés sur cette base [29, 64, 92, 93]. On peut donc considérer comme étant un critère valable que de vouloir construire, ou sélectionner, un modèle consistant avec ces observations.

1.4.5/ COURBE DE MOONEY

La courbe de Mooney s'obtient en transformant la loi de comportement de traction uniaxiale de l'équation (1.49) :

$$\frac{\sigma}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} = 2 \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (1.122)$$

On introduit alors la fonction Φ définie par :

$$\Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\sigma}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} \quad (1.123)$$

Cette fonction $\Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ est appelée la contrainte réduite. Elle est très sensible à la transition entre la traction et la compression car le numérateur et le dénominateur tendent tous les deux vers zéro quand l'élongation λ tend vers un. La transition est obtenue par un passage à la limite :

$$\Phi(1) = \lim_{\lambda \rightarrow 1} \left[\frac{\sigma}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} \right] \quad (1.124)$$

La courbe associée à la fonction Φ définie par l'équation (1.123) est très souvent référencée dans la littérature sous le terme de courbe de Mooney [15, 63, 83, 86, 107, 150, 166, 167]. Cette courbe, qui permet de visualiser la transition entre les sollicitations en traction et en compression, est très sensible au niveau de cette transition. Il s'agit donc d'un outil efficace pour discriminer entre eux des modèles qui apparemment donnent des résultats similaires pour des courbes classiques de type contraintes-élongations. On peut observer cette propriété avec trois modèles de la littérature qui donnent des résultats similaires

dans le cadre de courbes contraintes-élongations classiques (Figure 1.20(a)) alors que de grandes différences apparaissent avec la courbe de Mooney (Figure 1.20(b)). Ces trois modèles sont les modèles de Beda 2005 [13], de Beda 2007 [15] et de Yeoh et Fleming [166]. On constate que les trois modèles corréleront parfaitement les données d'essai de Yeoh et Fleming si on s'arrête aux courbes contraintes-élongations classiques. On observe par contre une dispersion beaucoup plus forte si on considère la courbe de Mooney, ce qui permet de tirer les enseignements suivants :

- le modèle de Beda 2007 est le meilleur des trois modèles en terme de prédiction,
- les modèles de Beda 2005 et de Yeoh-Fleming ne fournissent une prédiction satisfaisante que pour les grandes valeurs de tension (c'est-à-dire pour λ grand devant un, autrement dit $\frac{1}{\lambda}$ petit devant un). L'une des raisons de ce constat est liée au fait que les modèles de Beda 2005 et de Yeoh-Fleming présentent un comportement asymptotique associé à la fonction Φ au voisinage de la valeur de transition $\lambda = 1$. C'est cela qui explique les deux pics observés sur la Figure 1.20(b).

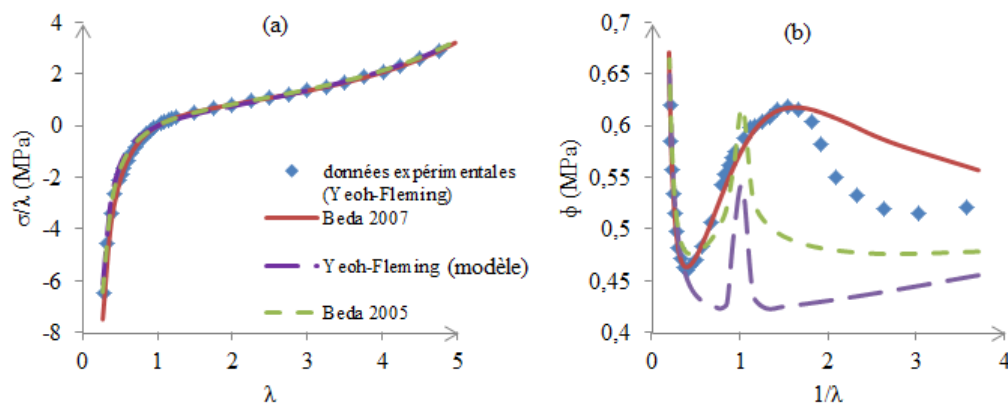


FIGURE 1.20 – (a) courbe contrainte-élongation ; (b) courbe de Mooney.

De plus, nous observons que la courbe de Mooney des données de Yeoh et Fleming de la Figure 1.20 (b) présente trois extrema permettant de délimiter quatre domaines de comportement :

- Si $\frac{1}{\lambda} \in \left] 0, \frac{1}{\lambda_{I1}} \right[$ (où $\frac{1}{\lambda_{I1}}$ représente l'abscisse du premier minimum local de Φ), on est dans le domaine du raidissement final en traction. L'invariant I_1 peut être considéré comme le plus influant dans cet intervalle car il est connu que les modèles dépendant de l'invariant I_1 sont appropriés pour la modélisation de très grandes déformations [71, 90, 130].

- Si $\frac{1}{\lambda} \in \left] \frac{1}{\lambda_{I1}}, \frac{1}{\lambda_h} \right[$ (où $\frac{1}{\lambda_h}$ représente l'abscisse du maximum local de Φ), on est dans le domaine des déformations modérées de traction. La zone de transition entre la traction et la compression y est incluse et la loi de comportement peut s'écrire en fonction des invariants I_1 et I_2 . Dans ce domaine, la loi de comportement est fortement influencée par les contraintes d'entrelacement des chaînes macromoléculaires et des contraintes liées à la matrice caoutchouteuse.
- Si $\frac{1}{\lambda} \in \left] \frac{1}{\lambda_h}, \frac{1}{\lambda_{I2}} \right[$ (où $\frac{1}{\lambda_h}$ représente l'abscisse du deuxième minimum local de Φ), on est dans le domaine de compression. Dans cette zone, les chaînes macromoléculaires se tassent. Ainsi, comme dans le premier domaine, l'invariant I_1 est le plus influent.
- Au delà de $\frac{1}{\lambda_{I2}}$, progressivement, on assiste à l'écrasement du matériau donc à une rupture des chaînes macromoléculaires.

De ce fait, les extrema de la courbe de Mooney constituent des données caractéristiques d'une loi de comportement. Ils peuvent être déterminés analytiquement en résolvant :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda^{-1}} = 0 \quad (1.125)$$

Beda, à partir du modèle de Gent-Thomas [55], a résolu analytiquement l'équation (1.125) pour obtenir l'abscisse du maximum [15] :

$$\frac{1}{\lambda_h} = \sqrt[3]{4} = 1.587 \quad (1.126)$$

Cette valeur est très proche de la valeur de 1.5 obtenue à partir des données expérimentales de Yeoh et Fleming [63], ce que confirme la Figure 1.20 (b). La détermination analytique des extrema, lorsqu'elle est possible, peut ainsi servir d'élément de contrôle pour valider un modèle hyperélastique.

En conclusion, on a vu que les approches combinant les modèles moléculaire et phénoménologique, telle que décrite par l'équation (1.94), présentaient généralement des difficultés de prédiction pour les essais multiaxiaux comme la traction équi-biaxiale [15, 22, 23, 49, 64, 93, 138]. Pour améliorer cette situation, Kroon [90] a récemment proposé l'ajout d'une densité supplémentaire W_{na} représentant l'énergie liée à la contrainte des chaînes ayant des déformations non-affines :

$$W = W_{ph} + W_c + W_{na} \quad (1.127)$$

Le chapitre suivant est consacré au développement d'un nouveau modèle hyperélastique isotrope élaboré sur la base de l'équation (1.127). La densité W_{na} proposée combinera une formulation Gaussienne avec une expression intégrale. Il s'agit d'une contribution originale. Le modèle obtenu sera validé à partir des cinq critères proposés dans le paragraphe 1.4 de ce chapitre ainsi qu'avec des confrontations avec des mesures expérimentales.

CONSTRUCTION DU MODÈLE HYBRIDE

Ce chapitre focalise sur la construction d'une nouvelle densité d'énergie de déformation isotrope et incompressible qui combinera de manière hybride plusieurs contributions afin de tirer le meilleur partie des différentes approches disponibles dans la littérature.

Les modèles hyperélastiques sont généralement déterminés à partir de la statistique des chaînes macromoléculaires ou bien alors de manière phénoménologique. Les modèles fondés sur l'approche moléculaire apportent des explications sur les phénomènes entrant en jeu lors de la déformation du réseau de chaînes macromoléculaires. Ces modèles sont basés sur la mécanique statistique Gaussienne (énergie de déformation de neo-Hooke déduite de la loi de probabilité Gaussienne [78, 79, 80, 161]) ou alors sur des approches non-Gaussienne permettant d'expliquer le phénomène de raidissement final et de limite d'extensibilité des chaînes macromoléculaires [5, 38, 63, 90, 91, 106, 144, 156].

Dans le cadre des approches non-Gaussienne, l'énergie de déformation des chaînes macromoléculaires est déduite de la loi de probabilité de Langevin [91]. Flory et Erman [48], Ball et al. [6], Van Der Waals [84] et Heinrich et al. [65] ont pour leur part développé des énergies de déformations en prenant en considération les contraintes d'entrelacements des chaînes macromoléculaires du matériau. Ainsi l'énergie de déformation peut s'écrire en deux partie [49] :

- la partie liée au raidissement final des chaînes macromoléculaires encore appelée "phantom part" en anglais ;
- la partie liée aux contraintes d'entrelacements des chaînes de macromolécules.

Récemment, pour compléter la forme de l'énergie proposée par Flory et Erman, Kroon [90] a stipulé l'existence d'une disparité de degré d'étirement des chaînes macromolécu-

lares. Il définit ainsi une troisième partie de l'énergie de déformation, liée aux contraintes des chaînes ayant des étirements différents à celles soumises au raidissement final.

De manière concomitante, des modèles phénoménologiques ont été développés sur la base de l'observation du comportement macroscopique [1, 3, 11, 13, 15, 20, 29, 55, 83, 92, 114, 117, 130, 165, 167].

Dans ce contexte, nous proposons un nouveau modèle de déformation des matériaux caoutchouteux en tirant partie à la fois de l'approche moléculaire et de l'approche phénoménologique. Ce modèle original se base sur le modèle 8-chaînes d'Arruda et Boyce [5] pour modéliser le raidissement final et associe :

- l'énergie de la contrainte des chaînes ayant un étirement non-affine modélisée par une fonction de forme Gaussienne avec une formulation intégrale ;
- l'énergie de la contrainte d'entrelacement des chaînes modélisée par une fonction logarithmique.

Ce nouveau modèle original peut être considéré comme hybride puisqu'il relève des deux approches (moléculaire et phénoménologique). Il comporte six paramètres rhéologiques. Ces paramètres sont identifiés à partir d'un calcul de minimisation entre des résultats théoriques issus de la loi de comportement et des données expérimentales.

Ce chapitre est structuré en trois sections.

Dans la section 2.1, nous discutons du choix entre l'énergie des contraintes d'entrelacements de Gent et Thomas [55] (énergie phénoménologique) et celle proposée par Flory et Erman [49] (énergie moléculaire).

La section 2.2 est consacrée à la mise au point d'un modèle hyperélastique isotrope original constitué par la superposition de trois densités d'énergie. La première est la densité d'énergie phénoménologique de Gent et Thomas présentée dans la section 2.1 précédente. La deuxième densité d'énergie est le modèle moléculaire 8-chaînes proposé par Arruda-Boyce [5] qui permet de représenter les contraintes de raidissement final des chaînes moléculaires avec une disposition des chaînes allant du centre d'un cube vers les 8 sommets de ce cube. Ce modèle 8-chaînes incluant dans sa formulation l'inverse de la fonction de Langevin, le paragraphe 2.2.2 est consacré à l'introduction d'une nouvelle approximation de cette fonction, ce qui a fait l'objet d'une publication dans une revue internationale [113]. La troisième densité d'énergie est phénoménologique en ce sens qu'elle

a été établie sur la base de l'observation de courbes expérimentales macroscopiques. Elle a été conçue pour corriger le résidu résultant de l'utilisation des deux précédentes densités dans un cas de traction-compression uniaxiale [166]. On montre en particulier que cette troisième densité conduit à des contraintes de forme Gaussienne (paragraphe 2.2.3), que les paramètres matériaux qui lui sont associés peuvent être identifiés et qu'enfin il est possible de la généraliser par une forme intégrale à partir de l'essai de traction-compression uniaxiale particulier qui a permis de la construire (paragraphe 2.2.5). Il est à noter que, pour les applications numériques, une quatrième densité d'énergie sera rajoutée ultérieurement (troisième chapitre de ce mémoire) afin de tenir compte de la contrainte d'incompressibilité.

La section 2.3 est quant à elle consacrée à la validation du nouveau modèle hybride que nous proposons. Cette validation est effectuée à l'aune des cinq critères de sélection développés à la section 1.4 du chapitre 1 précédent. Les résultats analytiques provenant du modèle hybride sont ensuite comparés avec succès à des données expérimentales en traction uniaxiale et équi-biaxiale, en cisaillement pur, en compression uniaxiale et en glissement simple [5, 115, 148, 166].

2.1/ CHOIX DE L'ÉNERGIE D'ENTRELAACEMENT.

En raison des difficultés de prédiction du modèle 8-chaînes en sollicitation équi-biaxiale, Boyce et Arruda en 2000 [23] ont apporté des améliorations à ce modèle en lui associant l'énergie des contraintes d'entrelacement de Flory-Erman [49]. L'expression finale de la densité d'énergie du modèle de Boyce-Flory est donnée par l'équation (1.94) avec :

- la partie W_{ph} liée au raidissement des chaînes macromoléculaires ayant pour expression le modèle 8-chaînes défini par l'équation (1.97) ;
- la partie W_c liée aux contraintes d'entrelacement des chaînes macromoléculaires avec pour expression le modèle de Flory-Erman défini par l'équation (1.95).

Cependant, de nombreux auteurs [15, 55, 64, 92, 93, 130] utilisent une formulation logarithmique comme énergie des contraintes d'entrelacements :

$$W_c = K \ln\left(\frac{I_2}{3}\right) \quad (2.1)$$

La suite de ce paragraphe a pour objectif de justifier le choix dans notre modèle de l'expression (2.1) comme énergie des contraintes d'entrelacements. Nous allons à cet effet étudier le comportement de cette énergie dans le cas d'un chargement uniaxial. En injectant l'équation (1.94) dans la loi de comportement uniaxiale définie par l'équation (1.49), nous obtenons en particulier :

$$\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left[\left(\frac{\partial W_{ph}}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W_{ph}}{\partial I_2} \right) + \left(\frac{\partial W_c}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W_c}{\partial I_2} \right) \right] \quad (2.2)$$

Pour simplifier l'expression (2.2), on peut exprimer les contraintes uniquement en fonction de λ grâce à une dérivation en cascade :

$$\frac{\partial W_{ph}}{\partial \lambda} = \frac{\partial W_{ph}}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial W_{ph}}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda} \quad (2.3)$$

Soit encore, en utilisant l'expression (1.47) des deux premiers invariants dans le cas particulier d'une traction uniaxiale :

$$\frac{\partial W_{ph}}{\partial \lambda} = \frac{\partial W_{ph}}{\partial I_1} \left(2\lambda - \frac{2}{\lambda^2} \right) + \frac{\partial W_{ph}}{\partial I_2} \left(2 - \frac{2}{\lambda^3} \right) = \frac{2}{\lambda} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial W_{ph}}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W_{ph}}{\partial I_2} \right) \quad (2.4)$$

En utilisant le même procédé de dérivation, on obtient une expression similaire à (2.4) pour $\frac{\partial W_c}{\partial \lambda}$:

$$\frac{\partial W_c}{\partial \lambda} = \frac{2}{\lambda} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\partial W_c}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W_c}{\partial I_2} \right) \quad (2.5)$$

En reportant (2.4) et (2.5) dans (2.2), on obtient la forme simplifiée annoncée des contraintes qui ne dépend que de λ :

$$\sigma = \lambda \left(\frac{\partial W_{ph}}{\partial \lambda} + \frac{\partial W_c}{\partial \lambda} \right) \quad (2.6)$$

Sur la base de l'équation (2.6), le tenseur des contraintes de Cauchy peut s'écrire comme la somme de la contrainte de raidissement des chaînes macromoléculaires σ_{ph} et de la contrainte d'entrelacement des chaînes macromoléculaires σ_c :

$$\sigma = \sigma_{ph} + \sigma_c; \quad \sigma_{ph} = \lambda \frac{\partial W_{ph}}{\partial \lambda}; \quad \sigma_c = \lambda \frac{\partial W_c}{\partial \lambda} \quad (2.7)$$

La contrainte d'entrelacement σ_c du modèle moléculaire de Flory-Erman définie par l'équation (1.95) s'écrit alors :

$$\sigma_c = \lambda \frac{\partial W_c}{\partial \lambda} = \frac{Nk_B T}{2} \lambda \left[\frac{dB_1}{d\lambda} \left(\frac{B_1}{1+B_1} \right) + \frac{dB_2}{d\lambda} \left(\frac{B_2}{1+B_2} \right) + \frac{dB_3}{d\lambda} \left(\frac{B_3}{1+B_3} \right) + \frac{dD_1}{d\lambda} \left(\frac{D_1}{1+D_1} \right) + \frac{dD_2}{d\lambda} \left(\frac{D_2}{1+D_2} \right) + \frac{dD_3}{d\lambda} \left(\frac{D_3}{1+D_3} \right) \right] \quad (2.8)$$

avec :

$$B_1 = \kappa^2 \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 + \kappa)^2}, \quad D_1 = \frac{\lambda^2}{\kappa} B_1, \quad B_2 = B_3 = \kappa^2 \frac{\frac{1}{\lambda} - 1}{\left(\frac{1}{\lambda} + \kappa\right)^2}, \quad D_2 = D_3 = \frac{B_2}{\lambda \kappa} \quad (2.9)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{dB_1}{d\lambda} &= \kappa^2 \frac{2\lambda(\kappa + 2 - \lambda^2)}{(\lambda^2 + \kappa)^3}, & \frac{dD_1}{d\lambda} &= \frac{\lambda}{\kappa} \left(2B_1 + \lambda \frac{dB_1}{d\lambda} \right) \\ \frac{dB_2}{d\lambda} &= \frac{dB_3}{d\lambda} = \kappa^2 \frac{\frac{1}{\lambda} - \kappa - 2}{\lambda^2 \left(\frac{1}{\lambda} + \kappa\right)^3}, & \frac{dD_2}{d\lambda} &= \frac{dD_3}{d\lambda} = \frac{1}{\lambda \kappa} \left(\frac{dB_2}{d\lambda} - \frac{B_2}{\lambda} \right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

Pour sa part, la contrainte d'entrelacement du modèle phénoménologique défini par l'équation (2.1) adopte une forme beaucoup plus simple :

$$\sigma_c = \lambda \frac{\partial W_c}{\partial \lambda} = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{K}{I_2} \quad (2.11)$$

Les prédictions des contraintes décrites par les équations (2.8) et (2.11) sont tracées sur la Figure (2.1). Les paramètres rhéologiques $Nk_B T = 0.68 \text{ MPa}$, $\kappa = 0.55$ et $K = 0.3 \text{ MPa}$ [15, 23] correspondent à ceux des données expérimentales du caoutchouc de Treloar [148].

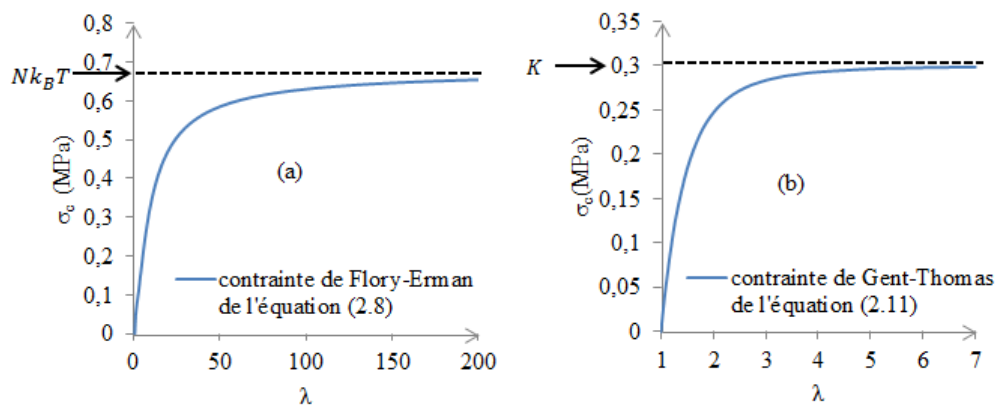


FIGURE 2.1 – Contrainte d'entrelacement du tenseur de Cauchy.

On remarque que les deux courbes présentent des tendances similaires avec des contraintes croissantes avec l'élongation. On note également un comportement asymptotique lorsque λ tend vers l'infini. En exploitant l'équation (2.11), ainsi que l'expression (1.47) de l'invariant I_2 , il est facile d'établir que l'asymptote horizontale associée au modèle de Gent-Thomas est caractérisée par le paramètre K :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{K}{I_2} \right] = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[2 \frac{\lambda - \frac{1}{\lambda^2}}{2\lambda + \frac{1}{\lambda^2}} K \right] = K \quad (2.12)$$

Pour ce qui concerne le modèle de Flory et Erman, le calcul du comportement asymptotique est un peu plus complexe à réaliser. Il faut en effet réaliser un calcul asymptotique sur chacune des six composantes de l'équation (2.8). En isolant les termes dominants, il n'est pas très difficile, mais assez fastidieux, de montrer que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left[\frac{dB_1}{d\lambda} \left(\frac{B_1}{1+B_1} \right) \right] = 0 \quad (2.13)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left[\frac{dB_2}{d\lambda} \left(\frac{B_2}{1+B_2} \right) \right] = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left[\frac{dB_3}{d\lambda} \left(\frac{B_3}{1+B_3} \right) \right] = 1 \quad (2.14)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left[\frac{dD_1}{d\lambda} \left(\frac{D_1}{1+D_1} \right) \right] = 0 \quad (2.15)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left[\frac{dD_2}{d\lambda} \left(\frac{D_2}{1+D_2} \right) \right] = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \left[\frac{dD_3}{d\lambda} \left(\frac{D_3}{1+D_3} \right) \right] = 0 \quad (2.16)$$

Si on les reporte dans l'équation (2.8), on conclut de ces passages à la limite, que :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sigma_c = Nk_B T \quad (2.17)$$

L'étude comparative illustrée par la Figure 2.1 montre qu'il n'existe pas d'argument physique pour choisir un modèle plutôt qu'un autre. Cependant, le modèle de Gent et Thomas est un peu plus simple algébriquement, comme l'a prouvé le calcul du comportement asymptotique qui vient d'être réalisé. L'équation (2.11) résultant de la densité d'énergie phénoménologique définie par la formule (2.1) sera donc choisie comme la contrainte d'entrelacement du modèle hybride que nous proposons.

2.2/ MODÈLE HYBRIDE

Après avoir porté notre choix sur l'expression de l'énergie d'entrelacement définie par l'équation (2.1), nous procédons dans ce paragraphe étape par étape à la détermination de l'expression de la densité d'énergie liée à la contrainte non-affine, pour au final définir l'expression complète du modèle hybride.

Dans un premier temps, nous exprimons la contrainte de raidissement final avec la fonction inverse de Langevin. Cette fonction n'ayant pas d'expression littérale connue, il est nécessaire d'en introduire une approximation. De nombreuses approximations existent dans la littérature [33, 77, 131, 149, 151] mais avec des précisions inégales qui peuvent atteindre jusqu'à 5% d'erreur. Afin d'obtenir une précision supérieure, nous avons décidé de proposer une nouvelle approximation extrêmement précise. Pour cela, nous avons modélisé le résidu entre l'approximation de Cohen [33] et les valeurs exactes de la fonction inverse de Langevin, ces dernières étant calculées par symétrie de la fonction de Langevin par rapport à la première bissectrice du plan. L'approximation de Cohen est ensuite corrigée grâce à la modélisation du résidu proposée. Cette technique de correction par résidu est utilisée de manière itérative, et ce à deux reprises. Cela permet au final de gagner un facteur 100 sur la précision de l'approximation de la fonction de Langevin inverse originellement proposée par Cohen.

Dans un deuxième temps, la loi de comportement superposant les densités (1.97) et (2.1) est comparée à des données expérimentales en traction uniaxiale. L'analyse du résidu montre la nécessité d'introduire un correctif et on établit que ce dernier adopte un profil Gaussien.

C'est donc au final la superposition d'une troisième densité de nature Gaussienne avec les densités d'entrelacement et de raidissement final qui permet d'obtenir des corrélations d'excellente qualité avec l'expérience. Le modèle qui en résulte est fortement hybride puisqu'il est constitué par la superposition de trois densités de nature différente. Il constitue l'une des originalités de ce mémoire.

2.2.1/ CONTRAINTE DU RAIDISSEMENT FINAL.

Cette contrainte est déterminée en considérant le modèle 8-chaînes d'Arruda et Boyce [5, 23] défini par la densité d'énergie (1.97). En traction uniaxiale, en utilisant l'équation

(2.2), on obtient :

$$\sigma_{ph} = \frac{\mu}{3} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.18)$$

où μ , qui représente le module de cisaillement, est égal à $Nk_B T$. λ_c est défini par l'équation (1.98) et n représente le nombre de chaînes par unité de volume. \mathcal{L}^{-1} est la fonction inverse de Langevin qui ne possède pas d'expression littérale connue à ce jour et a souvent été approchée par des fonctions rationnelles [33, 131, 151] ou par des développements de Taylor [77, 149]. Ces approximations fournissent cependant des qualités de précision inégales. L'une des approximations les plus utilisées demeure celle proposée par Cohen sur la base des approximants de Padé [113]. Dans ce travail de thèse, nous proposons une nouvelle approximation très précise de \mathcal{L}^{-1} en corrigeant l'approximation de Cohen grâce à une modélisation de son résidu. Cette technique de correction par modélisation du résidu est présentée en détail dans le paragraphe suivant.

2.2.2/ NOUVELLE APPROXIMATION DE LA FONCTION INVERSE DE LANGEVIN.

2.2.2.1/ INTRODUCTION

On rappelle que la fonction de Langevin \mathcal{L} est définie par (cf. équation (1.88)) :

$$\mathcal{L}(x) = \coth(x) - \frac{1}{x} \quad (2.19)$$

où \coth est la fonction cotangente hyperbolique.

La courbe de la fonction inverse de Langevin \mathcal{L}^{-1} peut se construire en exploitant la propriété suivante :

$$\begin{aligned} (x, y = \mathcal{L}(x)) &\in \text{à la courbe représentative de } \mathcal{L} \Leftrightarrow \\ (y, x = \mathcal{L}^{-1}(y)) &\in \text{à la courbe représentative de } \mathcal{L}^{-1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Cette propriété (2.20) est illustrée par la Figure 2.2 où la courbe représentative de \mathcal{L}^{-1} est la courbe symétrique de \mathcal{L} par rapport à la droite $y = x$.

L'une des approximations les plus utilisées dans la littérature étant celle proposée par Cohen [33], nous avons décidé de partir sur cette base pour construire une nouvelle approximation de la fonction inverse de Langevin. La formule approchée proposée par

Cohen est basée sur l'approximation (3,2) de Padé :

$$\mathcal{L}^{-1}(y) \approx y \frac{3-y^2}{1-y^2} \quad (2.21)$$

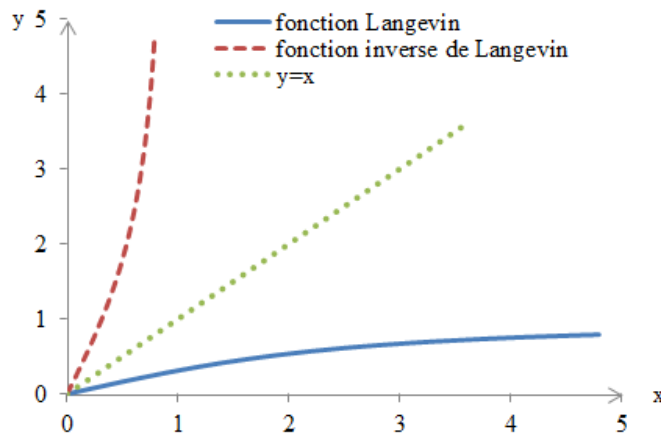


FIGURE 2.2 – Courbes représentatives de la fonction de Langevin et de son inverse.

2.2.2.2/ PREMIÈRE AMÉLIORATION DE LA FORMULE DE COHEN.

On peut remplacer l'approximation de la formule de Cohen décrite par l'équation (2.21) par une égalité stricte en introduisant la fonction erreur Θ :

$$\mathcal{L}^{-1}(y) = y \frac{3-y^2}{1-y^2} + \Theta(y) \quad (2.22)$$

$$\Theta(y) = \mathcal{L}^{-1}(y) - y \frac{3-y^2}{1-y^2} \quad (2.23)$$

La courbe de cette fonction erreur est représentée sur la Figure 2.3(a). On remarque qu'elle adopte la forme d'une fonction puissance ou exponentielle. Notre choix s'est porté préférentiellement sur la fonction puissance car elle est facilement intégrable dans le cadre du développement de modèles hyperélastiques. On remarque également (Figure 2.3(b)) la dépendance affine de la courbe bi-logarithmique de $|\Theta(y)|$ en fonction de y . Cela confirme le fait que $\Theta(y)$ peut prendre la forme d'une fonction puissance :

$$-\Theta(y) \approx ay^\alpha \quad (2.24)$$

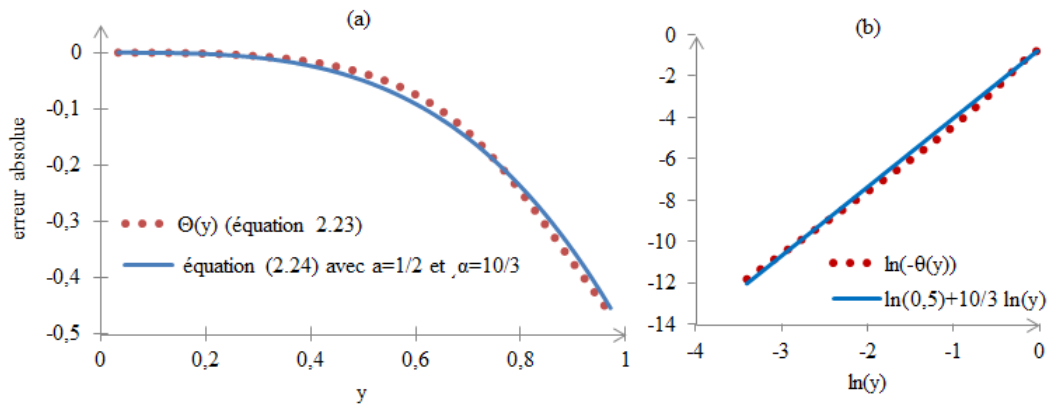


FIGURE 2.3 – Erreur absolue de la formule de Cohen. (a) : forme puissance de l'erreur. (b) : forme affine du logarithme de l'erreur.

Les coefficients a et α de l'équation (2.24) ont été identifiés avec la méthode des moindres carrés de manière à s'ajuster au mieux avec l'erreur $\Theta(y)$: $a = \frac{1}{2}$ et $\alpha = \frac{10}{3}$. La formule de Cohen peut par conséquent être améliorée en utilisant (2.22) et l'approximation (2.24) de l'erreur :

$$\mathcal{L}^{-1}(y) \simeq y \frac{3-y^2}{1-y^2} - \frac{1}{2} y^{10/3} \quad (2.25)$$

L'erreur relative commise sur l'évaluation de la fonction de Langevin inverse en utilisant l'équation (2.25) est tracée sur la Figure 2.4 (a). On note une amélioration notable par rapport à l'approximation de Cohen, avec notamment un pic maximum d'erreur relative de 0.77% contre 4.94%. La fonction inverse de Langevin, l'approximation de Cohen et l'approximation que nous proposons sont tracées toutes les trois sur la Figure 2.4 (b) dans l'intervalle $[0.65, 0.85]$, c'est-à-dire au voisinage de l'erreur relative maximale relevée pour la formule de Cohen. On note une amélioration sur tout l'intervalle considéré et une excellente corrélation avec le tracé de la fonction inverse de Langevin, ce tracé étant effectué en exploitant la propriété (2.20).

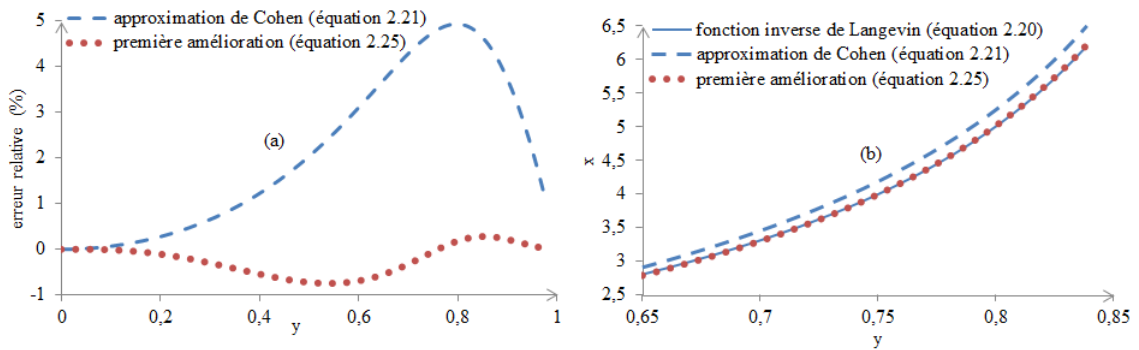


FIGURE 2.4 – (a) : erreurs relatives. (b) : comparaison avec les valeurs exactes de la fonction inverse de Langevin aux voisinages de l'erreur relative maximale.

2.2.2.3/ SECONDE AMÉLIORATION DE LA FORMULE DE COHEN.

L'objectif de ce paragraphe est d'essayer de réduire encore l'erreur commise avec l'approximation introduite par l'équation (2.25) en utilisant la même technique que celle employée pour la première amélioration. À cet effet, un développement similaire à celui de la section précédente est effectué en partant sur l'approximation définie par l'équation (2.25) et en introduisant une seconde erreur absolue Θ' :

$$\mathcal{L}^{-1}(y) = y \frac{3 - y^2}{1 - y^2} - \frac{1}{2} y^{10/3} + \Theta'(y) \quad (2.26)$$

$$\Theta'(y) = \mathcal{L}^{-1}(y) - y \frac{3 - y^2}{1 - y^2} + \frac{1}{2} y^{10/3} \quad (2.27)$$

Cette nouvelle erreur absolue Θ' est représentée sur la Figure 2.5. Il y apparaît clairement que Θ' possède trois racines en $y = 0$, $y = 0.76$ et $y = 1$, ainsi qu'un maximum local en $y = 0.6$ et un minimum local en $y = 0.89$. Il faut cependant noter que la racine égale à 1 s'entend au sens d'une limite puisque ni la fonction inverse de Langevin, ni le second terme de l'équation (2.27), ne sont définis en $y = 1$ (ils tendent tous les deux vers l'infini au voisinage de 1). Suite à ces différentes observations, nous suggérons d'utiliser le polynôme de degré trois suivant pour approcher Θ' :

$$P(y) = by(y - 0.76)(y - 1) \quad (2.28)$$

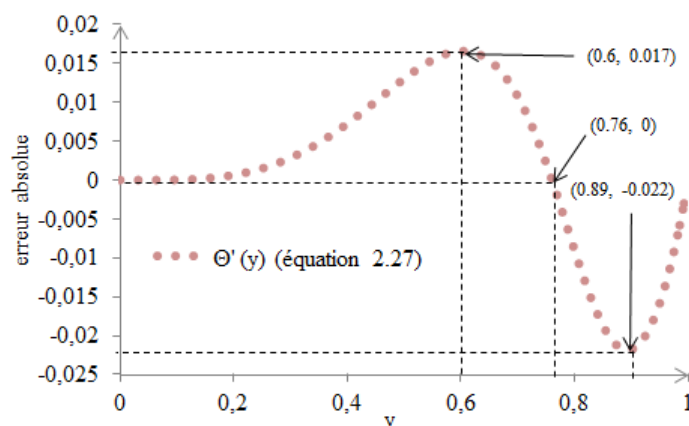


FIGURE 2.5 – erreur absolue après la première amélioration de la formule de Cohen.

On peut noter que le dernier terme de P , qui s'annule pour y égal à 1, n'apportera aucune correction à l'approximation de Cohen au voisinage de 1. Cette propriété est bénéfique parce que la formule de Cohen est réputée donner une excellente approximation du comportement asymptotique de \mathcal{L}^{-1} quand y tend vers 1. La prise en compte de P comme terme correctif supplémentaire n'apportera ainsi aucune perturbation au voisinage de 1. Le coefficient b est calculé pour sa part de manière à faire coïncider au mieux les valeurs des minimum et maximum locaux de Θ' et de P . Il est obtenu à partir de la minimisation de la fonction quadratique f suivante :

$$f(b) = [P(0.6) - 0.017]^2 + [P(0.86) + 0.022]^2 \quad (2.29)$$

La dérivée de f par rapport à b s'annule pour une valeur de b égale à 0.57. Cependant si on reporte cette valeur dans l'équation (2.28), on observe que le polynôme cubique P donne une prédiction assez médiocre de $\Theta'(y)$ (Figure 2.6). Pour remédier à ce problème, et améliorer la qualité de l'approximation tout en conservant la même approche, nous avons augmenté le degré du polynôme P en remplaçant le monôme y dans l'équation (2.28) par une fonction puissance y^β :

$$Q(y) = by^\beta (y - 0.76)(y - 1) \quad (2.30)$$

En donnant ainsi plus de flexibilité au modèle, grâce à l'introduction du paramètre supplémentaire qu'est l'exposant β , on peut espérer aboutir à une meilleure approximation de l'erreur Θ' . Cet exposant est calculé de manière à faire coïncider au mieux la position des

minimum et maximum locaux de Θ' et de Q . On rappelle que les maximum et minimum locaux de Θ' sont respectivement situés en $y = 0.6$ et $y = 0.89$ (Figure 2.5). Pour obtenir la meilleur correspondance possible, on dérive d'abord Q :

$$Q'(y) = by^{\beta-1} [(\beta + 2)y^2 - 1.76(\beta + 1)y + 0.76\beta] \quad (2.31)$$

Les deux racines y^+ et y^- qui annulent Q' sont calculées par :

$$y^\pm(\beta) = \frac{1.76(\beta + 1) \pm \sqrt{\Delta}}{2(\beta + 2)} \quad (2.32)$$

où le discriminant Δ est donné par :

$$\Delta = (\beta + 1)^2 (1.76)^2 - 4\beta(\beta + 2)0.76 \quad (2.33)$$

Il est facile de montrer que ce discriminant est strictement positif, et ce quelle que soit la valeur prise par le paramètre β . Les racines définies par l'équation (2.32) sont donc toujours réelles. Pour chercher la valeur optimale de β , nous minimisons la fonction objectif mesurant l'écart quadratique entre les racines de Q' données par l'équation (2.32) et celles de $\Theta'(y)$:

$$\min_{\beta} obj = [y^+(\beta) - 0.89]^2 + ([y^-(\beta) - 0.6])^2 \quad (2.34)$$

En utilisant la méthode des moindres carrés pour réaliser la minimisation, on obtient une valeur optimale de β égale à 5.134. Pour simplifier la présentation, nous avons retenu une valeur arrondie à 5 pour β . Le coefficient b est dès lors calculé de la même manière que pour le cas de l'équation (2.29) en remplaçant P par Q . Nous avons obtenu une valeur de b égale à 2.94 et, à nouveau pour simplifier la présentation, nous avons retenu une valeur arrondie égale à 3. La deuxième erreur $\Theta'(y)$ peut ainsi être approchée par un polynôme de degré 7 dont l'expression est très simple :

$$\Theta'(y) \simeq Q(y) = 3y^5 (y - 0.76)(y - 1) \quad (2.35)$$

On observe sur la Figure 2.6 une excellente corrélation entre l'erreur Θ' et son approximation polynomiale (2.35). On peut donc reporter l'équation (2.35) dans (2.26) afin d'obtenir

une approximation encore plus précise de la fonction inverse de Langevin :

$$\mathcal{L}^{-1}(y) \simeq y \frac{3-y^2}{1-y^2} - \frac{1}{2}y^{10/3} + 3y^5(y-0.76)(y-1) \quad (2.36)$$

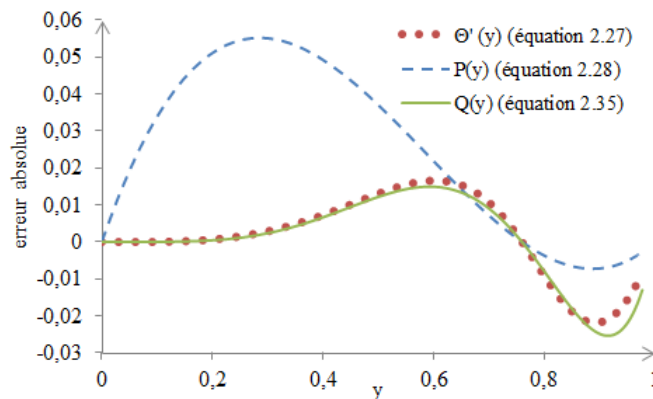


FIGURE 2.6 – Prédiction de Θ' par des polynômes de degré 3 ($P(y)$) et de degré 7 ($Q(y)$).

La courbe de l'erreur relative entre les valeurs exactes de la fonction inverse de Langevin (déterminées grâce à la propriété (2.20)) et l'approximation définie par l'équation (2.36) est tracée sur la Figure 2.7 (a). On observe une diminution très sensible de l'erreur due à l'apport de la deuxième amélioration de la formule de Cohen, l'erreur relative maximale passant en effet de 4.94% pour l'approximation de Cohen à 0.072% avec la deuxième amélioration. Il est néanmoins possible d'améliorer encore cette précision en généralisant l'expression de l'approximation (2.36) de la manière suivante :

$$\mathcal{L}^{-1}(y) \simeq y \frac{3-y^2}{1-y^2} + ay^\alpha + by^\beta(y-0.76)(y-1) \quad (2.37)$$

L'idée est de conserver la structure générale de l'équation (2.36) (qui marche bien) en lui conférant plus de souplesse grâce à quatre paramètres réels a , b , α et β . Ces paramètres pourront être identifiés en une seule étape d'optimisation, ce qui devrait permettre de mieux échantillonner l'espace des solutions optimales possibles. L'identification simultanée de ces quatre paramètres est réalisée au paragraphe suivant.

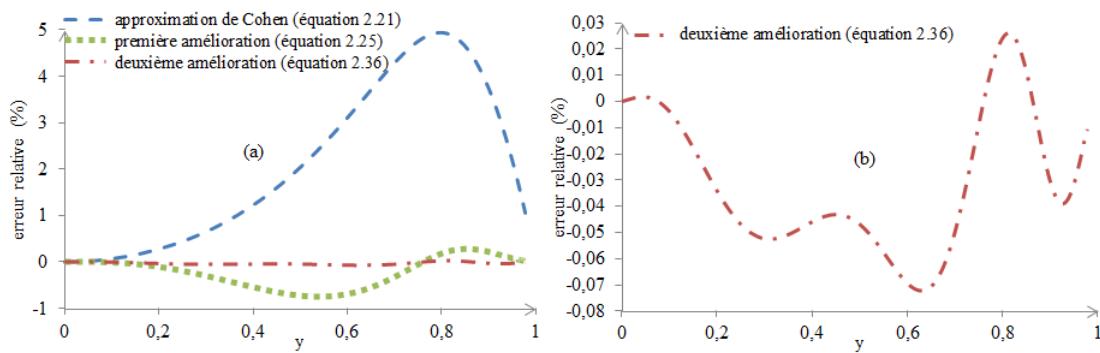


FIGURE 2.7 – (a) : erreurs relatives de l'approximation de Cohen, première et seconde améliorations ; (b) : zoom sur la seconde amélioration.

2.2.2.4/ OPTIMISATION DES PARAMÈTRES EN UNE ÉTAPE.

Les paramètres a, b, α et β de l'équation (2.37) sont identifiés en minimisant la fonction objectif suivante qui mesure l'écart quadratique moyen entre la fonction de Langevin inverse et son approximation (2.37) :

$$\min_{a,b,\alpha,\beta} obj = \frac{\sum_y \left[1 - \frac{y \frac{3-y^2}{1-y^2} + ay^\alpha + by^\beta (y-0.76)(y-1)}{\mathcal{L}^{-1}(y)} \right]^2}{\text{nombre de valeurs de } y \text{ échantillonné}} \quad (2.38)$$

Le nombre de valeurs de y échantillonné dans (2.38) a été pris égal à 2000. En utilisant la méthode de minimisation par moindres carrés, on obtient $a = -0.488, \alpha = 3.243, b = 3.311, \beta = 4.789$. L'expression (2.37) de l'approximation de la fonction inverse de Langevin se réécrit alors :

$$\mathcal{L}^{-1}(y) \simeq y \frac{3-y^2}{1-y^2} - 0.488y^{3.243} + 3.311y^{4.789} (y-0.76)(y-1) \quad (2.39)$$

Si on utilise la fonction objectif (2.38) pour évaluer l'erreur commise sur l'approximation de la fonction de Langevin inverse, on obtient $1.70823E^{-08}$ avec l'équation (2.39) au lieu de $1.033E^{-07}$ avec l'équation (2.36), soit un gain d'un facteur égal environ à 10. Si on raisonne en termes d'erreur relative maximale, l'utilisation de l'approximation de l'équation (2.39) à la place de celle de l'équation (2.36) améliore la corrélation de 0.072% à 0.046%, comme cela est illustré sur la Figure 2.8.

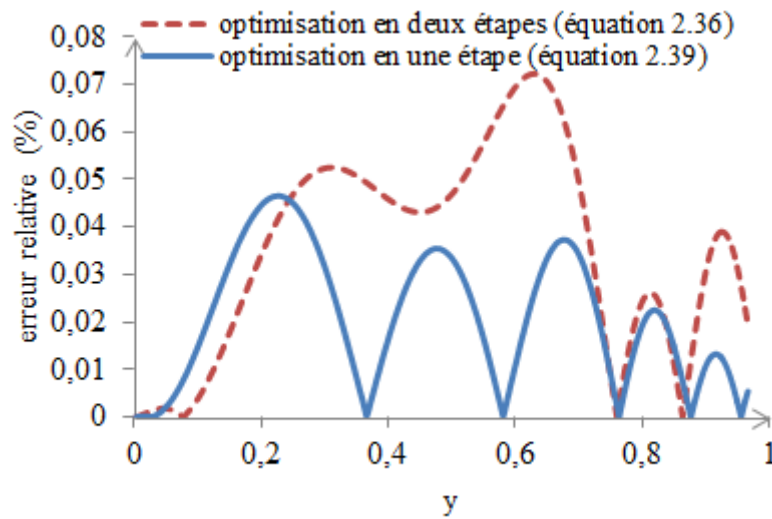


FIGURE 2.8 – erreurs relatives entre la fonction inverse de Langevin et les deux approximations des équations (2.36) et (2.39).

La Figure 2.9 montre dans différents intervalles la correction apportée à l'approximation de Cohen. On remarque que l'amélioration est particulièrement significative dans l'intervalle $[0.65, 0.85]$ dans lequel l'approximation de Cohen atteint la valeur maximale de son erreur (Figure 2.9 (c)).

Pour terminer ce paragraphe, il faut relever que la fonction inverse de Langevin est une fonction impaire. Cet aspect n'a pas été pris en compte puisque l'usage de la fonction inverse de Langevin se limite à l'intervalle $[0, 1[$ dans le cadre de la mécanique. Cependant, l'approximation (2.39) que nous proposons peut sans problème se généraliser à l'intervalle $]-1, 1[$. Il suffit pour cela d'adapter les termes en puissance de la manière suivante :

$$\mathcal{L}^{-1}(y) \approx y \frac{3 - y^2}{1 - y^2} - 0.488y|y|^{2.243} + 3.311y|y|^{3.789} (|y| - 0.76)(|y| - 1) \quad (2.40)$$

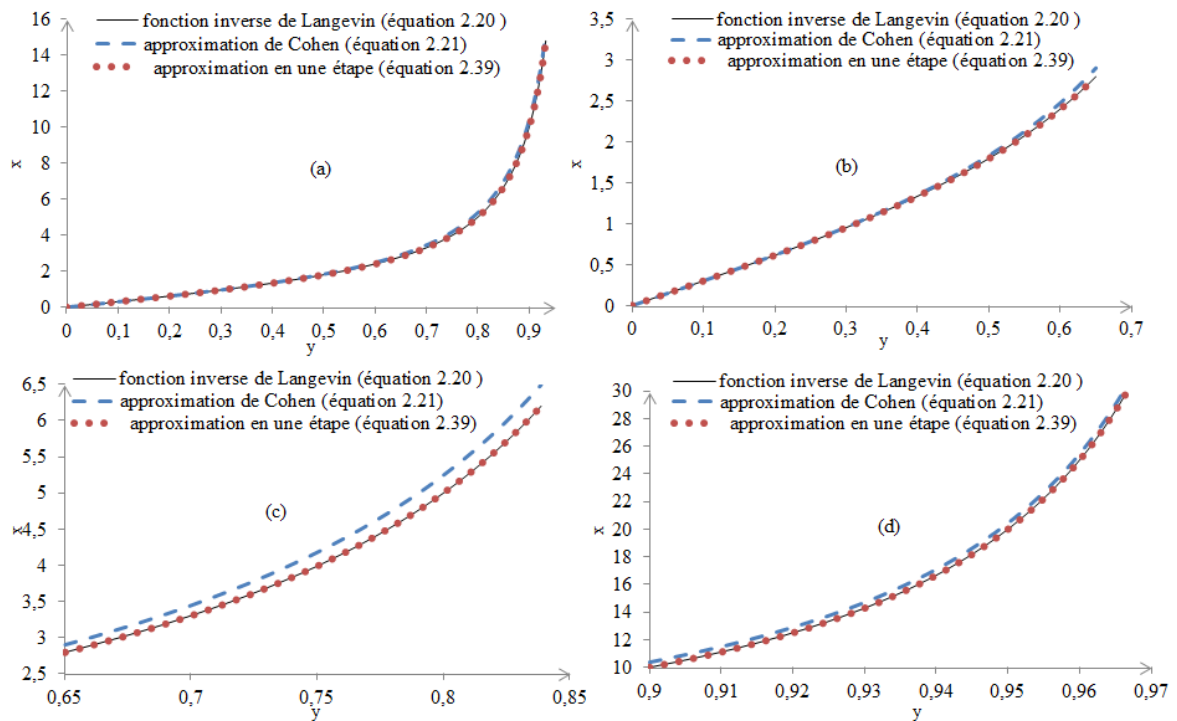


FIGURE 2.9 – comparaison de la fonction inverse de Langevin avec l'approximation de l'équation (2.39) et celle de Cohen.

2.2.3/ DENSITÉ D'ÉNERGIE GAUSSIENNE.

À ce stade du mémoire, on rappelle la stratégie qui a été mise en place pour construire un modèle hybride efficace :

- nous avons sélectionné l'énergie d'entrelacement logarithmique de Gent-Thomas définie par l'équation (2.1) (paragraphe 2.1) ;
- nous avons sélectionné l'énergie de raidissement final 8-chaînes d'Arruda et Boyce définie par l'équation (1.97). Cette énergie fait intervenir la fonction inverse de Langevin (paragraphe 1.3.3.1) ;
- nous avons élaboré une nouvelle approximation originale et précise de la fonction de Langevin inverse (paragraphe 2.2.2).

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'associer les contraintes d'entrelacement et de raidissement final associées aux densités (2.1) et (1.97) et de les comparer aux données expérimentales obtenues en traction uniaxiale par Treloar [148] et par Yeoh-Fleming [166]. L'analyse du résidu montrera la nécessité d'introduire un correctif que l'on modélisera par une densité Gaussienne.

En reportant les expressions des équations (2.11) et (2.18) dans l'équation (2.7), on obtient :

$$\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left[\frac{\mu}{6} \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) + \frac{K}{\lambda I_2} \right] \quad (2.41)$$

La fonction \mathcal{L}^{-1} de l'équation (2.41) sera calculée grâce à l'approximation (2.40) que nous avons élaborée précédemment. Par ailleurs, la contrainte (2.41) peut être réécrite de manière équivalente en utilisant la contrainte réduite Φ :

$$\Phi \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\sigma}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} = 2 \left[\frac{\mu}{6} \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) + \frac{K}{\lambda I_2} \right] \quad (2.42)$$

Cette contrainte réduite permet de tracer la courbe de Mooney [107] qui possède de multiples avantages :

- il s'agit d'une courbe très sensible à la variation d'élongation. Elle permet donc de différencier plus facilement les différents modèles que l'on souhaiterait comparer ;
- elle est très utilisée pour la validation des modèles hyperélastiques [15, 63, 83, 86, 167] ;
- la courbe de Mooney donne la possibilité d'investiguer finement la phase de transition entre un chargement en traction et un chargement en compression.

Les paramètres matériaux μ, n et K de la loi de comportement (2.41) seront déterminés en minimisant la différence quadratique entre la contrainte réduite Φ , calculée numériquement à partir du modèle, et la contrainte réduite Φ_{exp} calculée à partir des mesures expérimentales de contraintes :

$$\min_{\mu, n, K} obj = \sum_{\lambda} \left[\frac{\Phi_{exp} - \Phi \left(\frac{1}{\lambda} \right)}{\Phi_{exp}} \right]^2 \quad (2.43)$$

La sommation dans l'équation (2.43) porte sur chacune des élongations associées à un point de mesure expérimentale. Les données expérimentales sont celles obtenues par :

- Yeoh et Fleming dans le cadre de la traction et de la compression uniaxiale d'une éprouvette obtenue à partir de caoutchouc naturel vulcanisé [166]
- Treloar en traction uniaxiale d'une éprouvette réalisée à partir de caoutchouc naturel vulcanisé avec 8% de soufre [148].

Les valeurs des paramètres obtenues sont regroupées dans le Tableau 2.1.

Paramètres matériaux	μ (MPa)	n (-)	K (MPa)
Données de Yeoh-Fleming	0.3805	15.13	0.26
Données de Treloar	0.2662	24.94	0.2687

Tableau 2.1 – Paramètres matériaux de la loi de comportement (équation 2.42) évalués à partir des données de Yeoh-Fleming [166] et de Treloar [148].

La comparaison entre les prédictions de la loi de comportement (2.42) (calculées avec les paramètres matériaux répertoriés dans le Tableau 2.1) et les données expérimentales de Yeoh-Fleming et de Treloar est représentée sur la Figure 2.10.

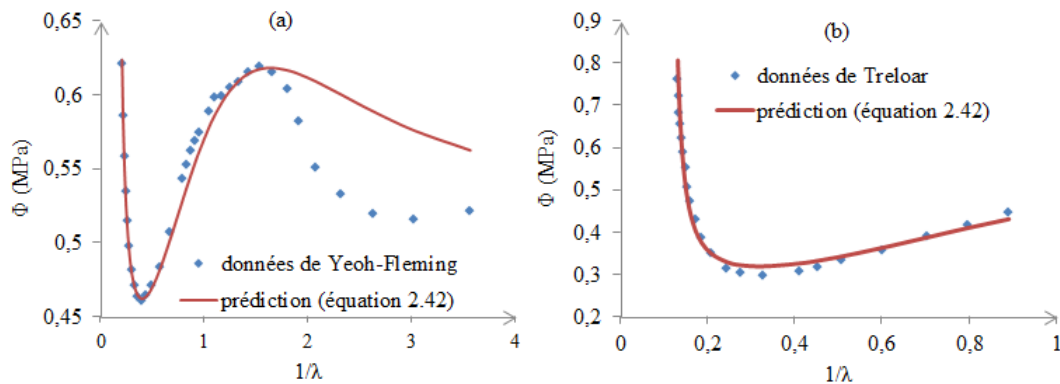


FIGURE 2.10 – Prédiction de la contrainte réduite de l'équation (2.42) pour les données de Yeoh-Fleming (a) et de Treloar (b).

On peut observer que les prédictions obtenues à partir de l'équation (2.42) présentent des difficultés relativement minimales de corrélation avec les données de Treloar en traction, particulièrement à proximité du minimum de la courbe. On remarque par contre une différence plus notable avec les données de Yeoh-Fleming en très grande compression. Pour résoudre ces difficultés de corrélation avec les essais, nous allons corriger le modèle en se basant sur une approche par étape [12] et en analysant au préalable le comportement du résidu $\Theta\left(\frac{1}{\lambda}\right)$:

$$\Theta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \Phi_{exp} - \Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (2.44)$$

où $\Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ est définie par (2.42).

Le résidu défini par l'équation (2.44) est représenté sur la Figure 2.11 pour les données de Yeoh-Fleming (Figure 2.11 (a)) et pour les données de Treloar (Figure 2.11 (b)). Dans

un cas comme dans l'autre, on remarque que l'allure du résidu Θ prend la forme d'une exponentielle Gaussienne (plus précisément l'inverse d'une exponentielle Gaussienne). Il apparait alors naturel d'adopter la fonction f suivante pour approcher au mieux le comportement de Θ :

$$\Theta\left(\frac{1}{\lambda}\right) \approx f\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\eta \exp\left[-\left(\frac{\frac{1}{\lambda} - \zeta}{\xi}\right)^2\right] \quad (2.45)$$

où η , ζ et ξ représentent respectivement l'amplitude maximale, l'abscisse du minimum de la Gaussienne et la variance de f . Ces trois nouveaux coefficients ont été identifiés par moindres carrés en minimisant la différence quadratique entre Θ et f (Tableau 2.2). En observant le Figure 2.11, on remarque que les valeurs obtenues pour ζ correspond bien à la position du minimum de f avec $\zeta = 2.741$ pour les données de Yeoh-Fleming (Figure 2.11 (a)) et $\zeta = 0.365$ pour les données de Treloar (Figure 2.11 (b)).

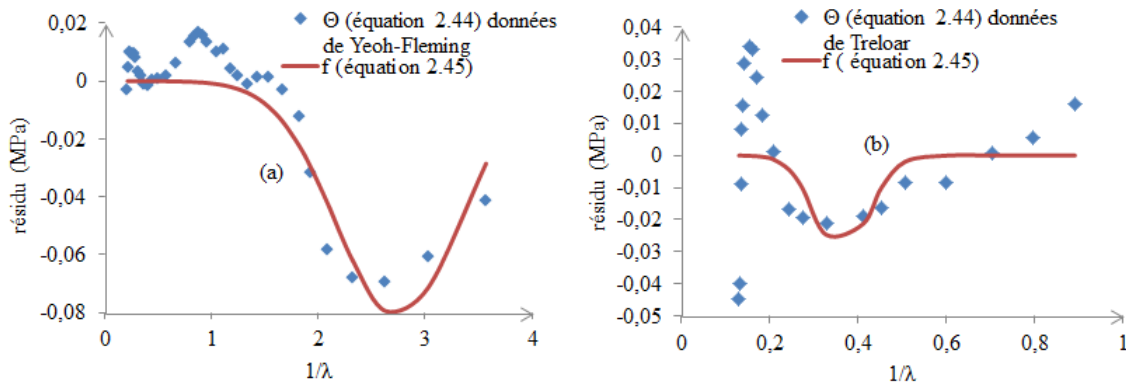


FIGURE 2.11 – Modélisation du résidu par une fonction Gaussienne.

Paramètres matériaux	η (MPa)	ζ (-)	ξ (-)
Données de Yeoh-Fleming	0.081	2.741	0.813
Données de Treloar	0.029	0.365	0.087

Tableau 2.2 – Paramètres matériaux de l'équation (2.45) évalués à partir des données de Yeoh-Fleming et de Treloar.

La prédiction du résidu par la fonction Gaussienne de l'équation (2.45) permet l'introduction d'une meilleure approximation des données expérimentales que celle fournie par l'équation (2.42) :

$$\Phi_{exp} = \Phi + \Phi_{exp} - \Phi = \Phi + \Theta \approx \Phi + f \quad (2.46)$$

À partir des équations (2.42), (2.45) et (2.46), il est alors possible d'introduire une nouvelle contrainte réduite plus précise :

$$\Phi\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{\sigma}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} = 2 \left[\frac{\mu}{6} \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}}\right) + \frac{K}{\lambda M_2} \right] - \eta \exp \left[- \left(\frac{\frac{1}{\lambda} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] \quad (2.47)$$

2.2.4/ OPTIMISATION EN UNE ÉTAPE DES PARAMÈTRES MATÉRIAUX.

À l'instar de ce qui a été pratiqué pour l'approximation de la fonction de Langevin inverse (paragraphe 2.2.2.4), on peut identifier d'un seul tenant les six paramètres matériau de la loi de comportement (2.47) plutôt que de procéder en deux étapes comme cela vient d'être fait (c'est-à-dire d'abord μ , n et K , cf. Tableau 2.1, puis ensuite η , ζ et ξ , cf. Tableau 2.2). Cela ne peut a priori qu'améliorer la qualité prédictive du modèle. Pour identifier les six paramètres μ , n , K , η , ζ et ξ contenus dans l'équation (2.47), le problème d'optimisation (2.43) est à nouveau résolu mais en prenant cette fois pour Φ l'expression (2.47) à la place de (2.42). La fonction objectif est minimisée en utilisant l'algorithme de Levenberg-Marquadt [129]. Les paramètres identifiés sont présentés dans le Tableau 2.3. En comparaison avec les valeurs de paramètres obtenus précédemment en deux étapes (voir Tableaux 2.1 et 2.2), on peut noter une légère modification des paramètres matériaux relatifs aux données de Yeoh-Fleming et un changement plus significatif pour ceux relatifs aux données de Treloar.

Paramètres matériaux	μ (MPa)	n (-)	K (MPa)	η (MPa)	ζ (-)	ξ (-)
Données de Yeoh-Fleming	0.379	14.9	0.295	0.096	2.708	1.132
Données de Treloar	0.3579	27.66	0.1266	0.1011	0.319	0.327

Tableau 2.3 – Paramètres matériaux de la loi de comportement de l'équation (2.47) évalués à partir des données de Yeoh-Fleming et de Treloar.

La Figure 2.12 montre la corrélation entre la prédiction de la loi décrite par l'équation (2.47) et les données expérimentales de Yeoh-Fleming et de Treloar. La très bonne qualité des résultats (à comparer avec les résultats plus médiocres de la Figure 2.10) démontre l'amélioration importante apportée par l'équation (2.47) par rapport à l'équation (2.42). Cette amélioration des résultats provient de l'ajout du terme Gaussien décrit par l'équation (2.45). Ce terme sera donc à prendre en considération dans le nouveau modèle hybride que nous cherchons à construire, en complément des contraintes

d'entrelacement et de raidissement final déjà présentes. Les dernières étapes de construction de ce modèle, et notamment la détermination de la densité d'énergie associée aux contraintes théoriques que nous avons déterminées, sont décrites dans le paragraphe qui suit.

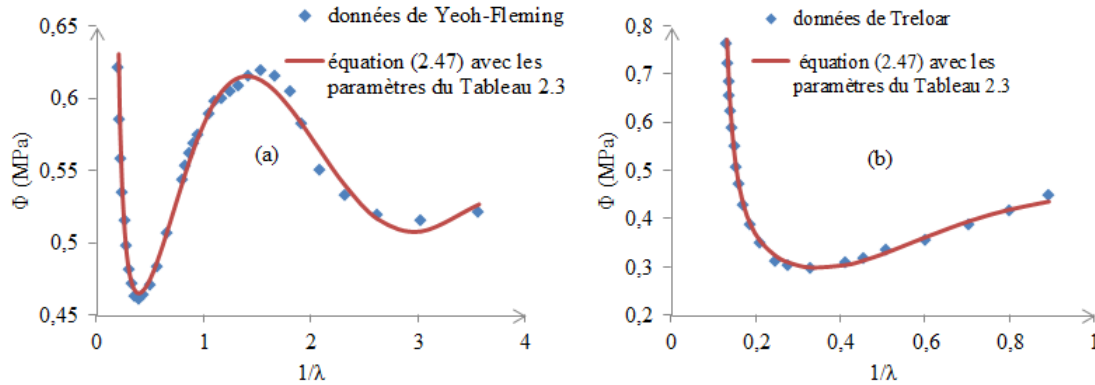


FIGURE 2.12 – Comparaison des données expérimentales de Yeoh-Fleming (a) et de Treloar (b) avec la prédiction de la contrainte réduite de l'équation (2.47).

2.2.5/ NOUVEAU MODÈLE HYBRIDE.

Sur la base des calculs réalisés aux deux paragraphes précédents, nous proposons une nouvelle loi de comportement hybride qui se traduit par l'apport de l'équation (2.47). À ce stade, il faut noter que la contrainte qui en résulte, et qui est donnée ci-après, n'est valable que dans le cadre de l'essai de traction-compression dont elle est issue :

$$\sigma = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left\{ \frac{\mu}{6} \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) + \frac{K}{\lambda I_2} - \frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{\frac{1}{\lambda} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] \right\} \quad (2.48)$$

En établissant un parallèle avec la théorie des contraintes non-affines proposée par Kroon [90], il apparaît naturel de considérer la contrainte additionnelle (qui revêt une forme exponentielle Gaussienne) comme une contrainte non-affine. Le modèle de Kroon (cf. équation (1.105)) présente en effet un terme non-affine sous la forme d'une fonction puissance, assez proche dans l'esprit de la fonction exponentielle que nous préconisons.

La contrainte non-affine associée à notre modèle sera donc notée σ_{na} :

$$\sigma_{na} = -\eta \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \exp \left[- \left(\frac{\frac{1}{\lambda} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] \quad (2.49)$$

Les trois questions qui se posent alors sont les suivantes :

1. Quelle densité d'énergie W_{na} peut être associée à la contrainte non-affine σ_{na} ?
2. Comment valider le modèle hybride que nous proposons sur d'autres configurations que celle qui a servi à l'établir ?
3. Si cette densité d'énergie W_{na} peut être exhibée, comment l'étendre au cas général sachant que la contrainte (2.49) dont elle est issue n'est valable que dans le cas d'un chargement uniaxial où λ représente l'élongation ?

La réponse à la première question est assez simple. Il suffit en effet d'établir un parallèle avec la formulation de l'équation (2.6) dans laquelle le tenseur des contraintes de Cauchy s'écrit comme la somme de la contrainte de raidissement des chaînes macromoléculaires et de la contrainte d'entrelacements des chaînes macromoléculaires. Sur le même principe, la contrainte non-affine σ_{na} constitue un troisième terme additionnel qui, grâce à l'équation (2.49), peut être reliée à une densité d'énergie non-affine W_{na} par :

$$\sigma_{na} = \lambda \frac{\partial W_{na}}{\partial \lambda} \quad \Rightarrow \quad W_{na} = -\eta \int_1^\lambda \left(s - \frac{1}{s^2} \right) \exp \left[- \left(\frac{\frac{1}{s} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] ds \quad (2.50)$$

La borne inférieure de l'intégrale (2.50) a été choisie égale à un de sorte à ce que la densité d'énergie W_{na} soit nulle lorsque l'élongation λ prend la valeur 1 (pas de déformation). On note par ailleurs que le terme à intégrer dans (2.50) ne possède a priori pas de primitive connue. On laisse donc la densité d'énergie sous une forme intégrale, ce qui ne pose pas de problèmes spécifiques. On remarque enfin que la forme Gaussienne de l'exponentielle offre des similarités avec des densités d'énergie standards utilisées pour modéliser les tissus biologiques en hyperélasticité anisotrope [68]. Ceci étant dit, à ce stade, il est difficile de savoir si cette observation trouve sa source dans des liens physiques profonds ou si cela procède simplement d'un hasard anecdotique.

La réponse à la seconde question, relative à la validation du modèle hybride, est apportée au paragraphe 2.3 qui suit.

La réponse à la troisième question (comment généraliser au cas tridimensionnel la densité unidimensionnelle (2.50)) est plus complexe à traiter. La formule (2.50) n'a en effet qu'une portée limitée en l'état puisqu'elle s'exprime en fonction d'un paramètre d'élongation λ qui n'a de sens qu'en traction-compression. Pour le cas général, on rappelle que les contraintes de Cauchy résultent de l'application de l'équation (1.42) :

$$\sigma_{na} = 2 \left[\frac{\partial W_{na}}{\partial I_1} \mathbf{B} + I_2 \frac{\partial W_{na}}{\partial I_2} \mathbf{I} - \frac{\partial W_{na}}{\partial I_2} \mathbf{B}^{-1} \right] - p \mathbf{I} \quad (2.51)$$

La question qui se pose est de relier le cas général donné par cette équation au cas particulier de la traction-compression qui s'exprime par le biais de l'équation (2.49). Pour établir cette connexion, on remarque d'abord que la contrainte non-affine complète la contrainte de raidissement final qui ne dépend que de I_1 ainsi que cela a été observé dans [90]. Nous pouvons donc considérer W_{na} comme une fonction dépendante uniquement de l'invariant I_1 . En utilisant l'expression (1.46) du tenseur des déformations de Cauchy-Green \mathbf{B} , l'équation (2.51) se simplifie :

$$\sigma_{na} = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 \frac{dW_{na}}{dI_1}(I_1) - p & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\lambda} \frac{dW_{na}}{dI_1}(I_1) - p & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\lambda} \frac{dW_{na}}{dI_1}(I_1) - p \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Les conditions de bord libre en traction-compression uniaxiale permettent de calculer le multiplicateur de Lagrange p :

$$p = \frac{2}{\lambda} \frac{dW_{na}}{dI_1}(I_1) \quad (2.53)$$

On en déduit la contrainte de traction-compression :

$$\sigma_{na} = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{dW_{na}}{dI_1}(I_1) \quad (2.54)$$

En égalant les équations (2.49) et (2.54), on obtient :

$$\frac{dW_{na}}{dI_1}(I_1) = -\frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{\frac{1}{\lambda} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] \quad (2.55)$$

Enfin, on connaît l'expression de I_1 en fonction de λ (cf. équation (1.47)). D'où :

$$\frac{dW_{na}\left(\lambda^2 + \frac{2}{\lambda}\right)}{dI_1} = -\frac{\eta}{2} \exp\left[-\left(\frac{\frac{1}{\lambda} - \zeta}{\xi}\right)^2\right] \quad (2.56)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dW_{na}}{du}(u) = -\frac{\eta}{2} \exp\left[-\left(\frac{(g^{-1}(u))^{-1} - \zeta}{\xi}\right)^2\right] \quad (2.57)$$

où on a posé :

$$u = g(\lambda) = \lambda^2 + \frac{2}{\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = g^{-1}(u) \quad (2.58)$$

On intègre l'équation (2.57) :

$$W_{na}(I_1) = -\frac{\eta}{2} \int_3^{I_1} \exp\left[-\left(\frac{(g^{-1}(u))^{-1} - \zeta}{\xi}\right)^2\right] du \quad (2.59)$$

La borne inférieure de l'intégrale a été prise égale à 3 de telle sorte que la densité d'énergie soit nulle si le matériau est au repos. En effet, si le matériau est au repos, le tenseur des déformations de Cauchy-Green à gauche \mathbf{B} est égal à l'identité et sa trace I_1 vaut 3. Par ailleurs, afin que la densité d'énergie définie par l'équation (2.59) soit complètement déterminée, il est nécessaire de calculer $g^{-1}(u)$, c'est-à-dire la fonction inverse de g qui est définie par l'équation (2.58). Ce calcul est réalisé dans l'annexe B de ce mémoire. Il permet d'écrire la densité d'énergie non affine sous la forme suivante :

$$W_{na} = -\frac{\eta}{2} \int_3^{I_1} \exp\left[-\left(\frac{(g_2^{-1}(u))^{-1} - \zeta}{\xi}\right)^2\right] du \quad (2.60)$$

où la fonction $g_2^{-1}(u)$ est définie explicitement par l'équation (B.11) de l'annexe B.

L'équation (2.60) constitue une généralisation de la densité d'énergie non-affine introduite par l'équation (2.50) et recouvre ainsi la loi unidimensionnelle qui a été établie dans les paragraphes précédents en lien avec des données expérimentales. Au final, toutes les observations effectuées dans ce paragraphe nous permettent de proposer un modèle hybride combinant le modèle 8-chaînes d'Arruda et Boyce avec une énergie Gaussienne représentant l'énergie des contraintes non-affines et avec une énergie phénoménologique pour la contrainte d'entrelacement des chaînes de macromolécules contenues dans la

matrice caoutchouteuse :

$$W = \mu n \left[\frac{\lambda_c \beta_c - \beta_{co}}{\sqrt{n}} + \ln \left(\frac{\beta_c \sinh \beta_{co}}{\beta_{co} \sinh \beta_c} \right) \right] - \frac{\eta}{2} \int_3^{I_1} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(u))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] du + K \ln \left(\frac{I_2}{3} \right) \quad (2.61)$$

Afin de valider la loi de comportement associée à la densité (2.61), il est nécessaire d'effectuer des comparaisons avec des données expérimentales autres que celles ayant servi à établir cette loi. Cela fait l'objet du paragraphe suivant. Ces comparaisons seront réalisées dans des cas de charges simples permettant d'exhiber des solutions analytiques.

2.3/ VALIDATION DU MODÈLE HYBRIDE

Cette section est consacrée à la validation du modèle hybride, à partir de la comparaison des résultats analytiques du modèle théorique avec des données expérimentales extraites de la littérature [5, 115, 148, 166]. Les comparaisons seront également réalisées avec le modèle moléculaire 8-chaînes d'Arruda et Boyce (équation (1.97)) [5], et le modèle phénoménologique de Pucci et Saccomandi (équation (1.113))[130], ce qui permettra de jauger l'apport du modèle hybride relativement à deux modèles déjà connus et éprouvés. Enfin, le modèle hybride sera passé au crible des cinq critères présentés au premier chapitre (section 1.4).

2.3.1/ DONNÉES EXPÉRIMENTALES

Les données expérimentales utilisées dans cette section sont issues de la littérature. Il s'agit :

- des données de Treloar [148], obtenues à partir des essais d'extensions uniaxiale, équi-biaxiale et de cisaillement pur sur des éprouvettes élaborées à base de caoutchouc naturel vulcanisé au noir de carbone ;
- des données de Yeoh et Fleming [166] obtenues à partir des essais de traction et compression uniaxiales sur des éprouvettes élaborées à base de caoutchouc naturel vulcanisé au soufre associé à un accélérateur (N-cyclohexyl-2 benzothiazolesulfenamide) ;

- des données d'Arruda et Boyce [5] obtenues à partir des essais de compression sur des éprouvettes élaborées à base d'élastomères en silicone ;
- des données de Nunes et Moreira [115], obtenues à partir des essais de cisaillement simple (glissement) sur des éprouvettes élaborées à base d'adhésif de silane (Flextec FT 101).

2.3.2/ LOIS DE COMPORTEMENT

On introduit dans ce paragraphe les formules analytiques des contraintes pour les cas de charge suivants :

- traction-compression uniaxiale ;
- traction équibiaxiale ;
- cisaillement pur ;
- glissement simple ;

et pour les modèles suivants :

- modèle 8-chaînes d'Arruda et Boyce [5] ;
- modèle de Pucci et Saccomandi [130] ;
- modèle hybride.

C'est au travers de ces différentes combinaisons de cas de charge et de modèles que nous allons opérer la validation du modèle hybride. On utilisera à cet effet les densités d'énergie définies par les équations (1.97), (1.113) et (2.61) ainsi que les lois de comportement en traction et compression uniaxiale (1.49), en traction équibiaxiale (1.56), en cisaillement pur (1.63) et en glissement simple (1.69).

2.3.2.1/ LOIS DE COMPORTEMENT D'ARRUDA ET BOYCE

– Traction-compression uniaxiale

$$\sigma_1 = \frac{\mu}{3} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.62)$$

– Traction équibiaxiale

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\mu}{3} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.63)$$

– Cisaillement pur

$$\sigma_1 = \frac{\mu}{3} \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.64)$$

– Glissement simple

$$\sigma_{12} = \frac{\mu}{3} \gamma \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.65)$$

La contrainte réduite en traction-compression uniaxiale se déduit de la loi de comportement (2.62) :

$$\frac{\sigma_1}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} = \frac{\mu}{3} \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.66)$$

2.3.2.2/ LOIS DE COMPORTEMENT DE PUCCI ET SACCOMANDI

– Traction-compression uniaxiale

$$\sigma_1 = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left(\frac{\mu}{2} \frac{J_m}{J_m - I_1 + 3} + \frac{K}{\lambda I_2} \right) \quad (2.67)$$

– Traction équibiaxiale

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \left(\frac{\mu}{2} \frac{J_m}{J_m - I_1 + 3} + \lambda^2 \frac{K}{I_2} \right) \quad (2.68)$$

– Cisaillement pur

$$\sigma_1 = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\mu}{2} \frac{J_m}{J_m - I_1 + 3} + \frac{K}{I_2} \right) \quad (2.69)$$

– Glissement simple

$$\sigma_{12} = 2\gamma \left(\frac{\mu}{2} \frac{J_m}{J_m - I_1 + 3} + \frac{K}{I_2} \right) \quad (2.70)$$

La contrainte réduite en traction-compression uniaxiale se déduit de la loi de comportement (2.67) :

$$\frac{\sigma_1}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} = 2 \left(\frac{\mu}{2} \frac{J_m}{J_m - I_1 + 3} + \frac{K}{\lambda I_2} \right) \quad (2.71)$$

2.3.2.3/ LOIS DE COMPORTEMENT DU MODÈLE HYBRIDE

– Traction-compression uniaxiale

$$\sigma_1 = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda} \right) \left\{ \frac{\mu \sqrt{n}}{6 \lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(I_1))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] + \frac{K}{\lambda I_2} \right\} \quad (2.72)$$

– Traction équi-biaxiale

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^4} \right) \left\{ \frac{\mu \sqrt{n}}{6 \lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(I_1))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] + \lambda^2 \frac{K}{I_2} \right\} \quad (2.73)$$

– Cisaillement pur

$$\sigma_1 = 2 \left(\lambda^2 - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left\{ \frac{\mu \sqrt{n}}{6 \lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(I_1))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] + \frac{K}{I_2} \right\} \quad (2.74)$$

– Glissement simple

$$\sigma_{12} = 2\gamma \left\{ \frac{\mu \sqrt{n}}{6 \lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(I_1))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] + \frac{K}{I_2} \right\} \quad (2.75)$$

La contrainte réduite en traction-compression uniaxiale se déduit de la loi de comportement(2.72) :

$$\frac{\sigma_1}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} = 2 \left\{ \frac{\mu \sqrt{n}}{6 \lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(I_1))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] + \frac{K}{\lambda I_2} \right\} \quad (2.76)$$

Sur la base de ces lois de comportement, les paramètres rhéologiques doivent être identifiés de manière à satisfaire l'ensemble des tests d'un matériau donné. Cette identification est opérée au paragraphe suivant.

2.3.3/ IDENTIFICATION DES PARAMÈTRES RHÉOLOGIQUES

Les paramètres rhéologiques (encore appelés paramètres matériau) sont ajustés en minimisant une fonction objectif qui s'exprime comme la somme moyennée des écarts qua-

dratiques entre les valeurs mesurées et les valeurs analytiques calculées :

$$obj = \min_{\mathbf{q}} \frac{\sum_{i=1}^m [\sigma_i^* - \sigma_i(\lambda^*, \mathbf{q})]^2}{m} \quad (2.77)$$

où m représente le nombre de points de mesures, σ_i^* la contrainte mesurée et σ_i la contrainte calculée. σ_i dépend des élongations mesurées λ^* ainsi que du vecteur \mathbf{q} contenant l'ensemble des paramètres matériau de la loi de comportement. Pour minimiser la fonction objectif (2.77), nous avons opté pour l'algorithme de Levenberg-Marquardt [129] qui est disponible dans la bibliothèque d'optimisation « Optimtool » du logiciel MatLab. Huit jeux de paramètres rhéologiques différents seront identifiés (cf. Tableaux 2.3, 2.4, 2.5, 2.6) puisque trois modèles seront concernés (Arruda-Boyce, Pucci-Saccomandi et hybride) ainsi que trois matériaux différents (Treloar, Yeoh-Fleming et Nunes-Moreira).

2.3.4/ RÉSULTATS ET DISCUSSIONS

2.3.4.1/ COMPARAISON AVEC LES DONNÉES DE TRELOAR [148]

Les paramètres rhéologiques associés aux lois de comportement d'Arruda et Boyce, de Pucci et Saccomandi et du modèle hybride sont calculés dans ce paragraphe à partir des données d'essai en traction uniaxiale de Treloar [148]. La fonction objectif de l'équation (2.77) est minimisée en utilisant les contraintes calculées à partir des équations (2.62) et (2.67). Les valeurs des paramètres ainsi obtenues sont regroupées dans le Tableau 2.4. Les paramètres du modèle hybride ont déjà été calculés précédemment (cf. Tableau 2.3).

Paramètres	μ (MPa)	n (-)	J_m (-)	K (MPa)
Arruda-Boyce	0.31	26.83	-	-
Pucci-Saccomandi	0.262	-	84.57	0.295

Tableau 2.4 – Paramètres rhéologiques du caoutchouc testé par Treloar [148]

En remplaçant les valeurs des paramètres contenus dans les Tableaux 2.3 et 2.4 dans les lois de comportement (2.62)-(2.76) développées au paragraphe 2.3.2, nous obtenons les courbes de la Figure 2.13.

On remarque tout d'abord que les trois modèles corréleront parfaitement les données d'essai en traction uniaxiale (Figure 2.13 (a)), ce qui est logique puisque les paramètres rhéologiques ont été déterminés à partir de ces données d'essai. Les courbes de Moo-

ney (Figure 2.13 (b)) permettent cependant de nuancer ce constat puisqu'elles mettent à jour des différences qui n'étaient pas perceptibles auparavant. Nous constatons en particulier que le modèle moléculaire d'Arruda-Boyce est excellent pour le raidissement final à très grandes déformations ($0 < 1/\lambda < 0.3$) mais qu'il diverge nettement des données d'essai pour des déformations plus modérées ($1/\lambda > 0.3$). Nous pouvons également observer une très légère difficulté de prédiction du modèle de Pucci-Saccomandi au niveau du minimum de la courbe de Mooney. Si on considère les courbes de Mooney, c'est donc le modèle hybride qui fournit la meilleure prédiction. On remarque ensuite que les trois modèles donnent des prédictions extrêmement satisfaisantes dans le cas du cisaillement pur (Figure 2.13 (c)). Dans le cas de la traction équi-biaxiale (Figure 2.13 (d)), les tendances sont correctement décrites par les modèles d'Arruda-Boyce et de Pucci-Saccomandi et le modèle hybride coïncide parfaitement avec les données d'essai. C'est un point notable car le cisaillement pur et la traction équi-biaxiale ne sont pas des cas de charge qui ont été impliqués dans l'identification des paramètres rhéologiques. Au final, le modèle hybride permet d'obtenir la meilleure corrélation avec l'ensemble des données de Treloar.

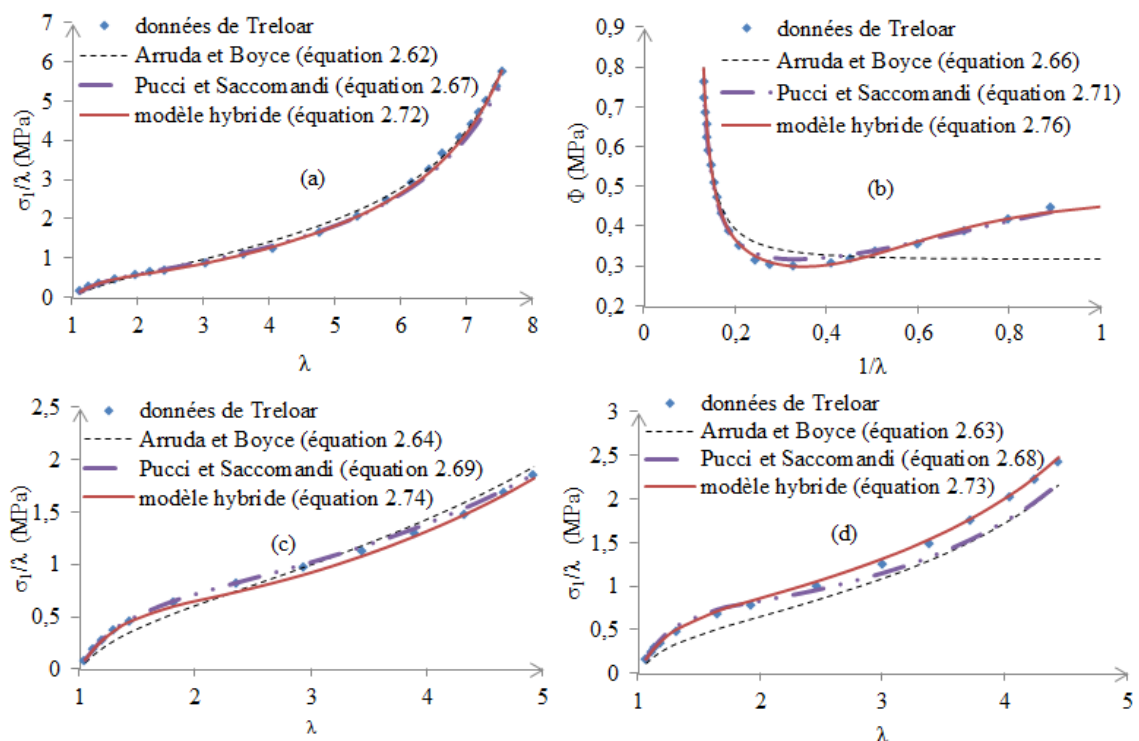


FIGURE 2.13 – Comparaison des lois de comportement d'Arruda-Boyce, de Pucci-Saccomandi et du modèle hybride par rapport aux données de Treloar [148] : (a) traction uniaxiale ; (b) courbe de Mooney ; (c) cisaillement pur ; (d) traction équi-biaxiale.

2.3.4.2/ COMPARAISON AVEC LES DONNÉES DE YEOH-FLEMING [166].

Les paramètres rhéologiques associés aux lois de comportement d'Arruda et Boyce, de Pucci et Saccomandi et du modèle hybride sont calculés dans ce paragraphe à partir des données d'essai en traction-compression uniaxiale de Yeoh et Fleming [166]. La fonction objectif (2.77) est donc minimisée en calculant les contraintes à partir des équations (2.62) et (2.67). Les valeurs des paramètres rhéologiques optimaux sont regroupées dans le Tableau 2.5. Les paramètres du modèle hybride ont été déjà calculés précédemment (cf. Tableau 2.3).

Paramètres	μ (MPa)	n (-)	J_m (-)	K (MPa)
Arruda-Boyce	0.494	37	–	–
Pucci-Saccomandi	0.39	–	57	0.265

Tableau 2.5 – Paramètres rhéologiques du caoutchouc testé par Yeoh et Fleming [166]

En remplaçant les valeurs de ces paramètres dans les lois de comportement (2.62), (2.66), (2.67), (2.71), (2.72) et (2.76) développées au paragraphe 2.3.2, nous obtenons les courbes présentées sur la Figure 2.14.

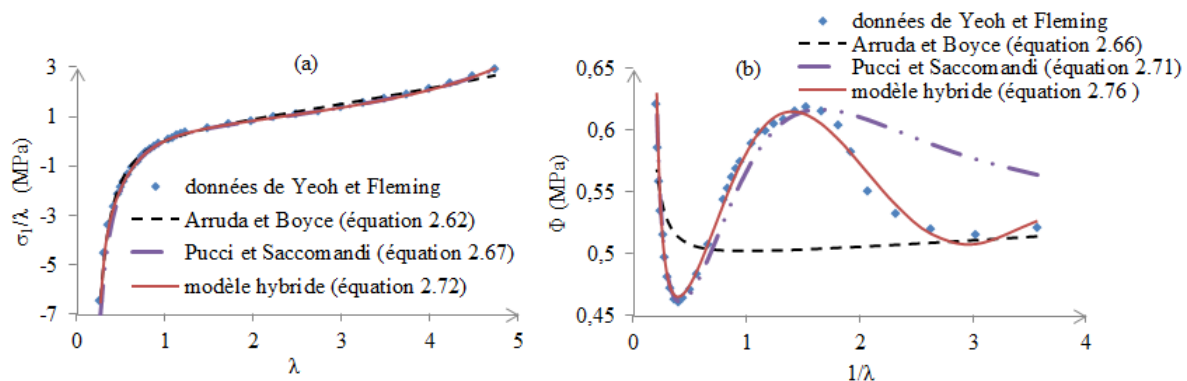


FIGURE 2.14 – Comparaison des lois de comportement d'Arruda-Boyce, de Pucci-Saccomandi et du modèle hybride par rapport aux données de Yeoh et Fleming [166] : (a) traction et compression uniaxiale ; (b) courbe de Mooney.

Logiquement, les trois modèles corréleront parfaitement les données d'essai en traction-compression uniaxiale (Figure 2.14 (a)) puisque les paramètres rhéologiques ont été identifiés sur la base de cet essai. En revanche, les courbes de Mooney font apparaître une très grande disparité (Figure 2.14 (b)). Le modèle de Pucci-Saccomandi n'appa-

raît notamment valable qu'en traction et pour les compressions modérées. Le modèle 8-chaînes d'Arruda-Boyce prédit pour sa part à nouveau excellemment le raidissement final en traction uniaxiale. Mais il diverge très nettement pour les tractions modérées et en compression. Pour ce qui le concerne, le modèle hybride fournit une excellente corrélation dans toute la plage de chargement, tant en traction qu'en compression.

2.3.4.3/ COMPARAISON AVEC LES DONNÉES DE NUNES ET MOREIRA [115].

Les paramètres rhéologiques associés aux lois de comportement d'Arruda-Boyce, de Pucci-Saccomandi et du modèle hybride sont calculés dans ce paragraphe pour l'élastomère testé par Nunes et Moreira en glissement simple [115]. La fonction objectif (2.77) est donc minimisée en utilisant les contraintes calculées à partir des équations (2.65), (2.70) et (2.75). Les valeurs des paramètres optimaux sont regroupées dans le Tableau 2.6.

Paramètres	μ (MPa)	n (-)	J_m (-)	K (MPa)	η (MPa)	ζ	ξ
Arruda-Boyce	0.37	46.51	–	–	–	–	–
Pucci-Saccomandi	0.252	–	139.53	0.473	–	–	–
Modèle hybride	0.26	46.50	–	0.444	0.734	0.378	0.272

Tableau 2.6 – Paramètres rhéologiques de l'élastomère testé par Nunes et Moreira [115]

En remplaçant les valeurs de ces paramètres dans les équations (2.65), (2.70) et (2.75), nous obtenons les courbes présentées sur la Figure 2.15. Ces courbes montrent une très bonne corrélation de la loi de comportement de Pucci et Saccomandi et du modèle hybride avec un écart quadratique moyen de $1.67 \cdot 10^{-4}$ pour le premier et de $1.57 \cdot 10^{-4}$ pour le second. On constate en revanche que la loi de comportement d'Arruda et Boyce présente un résultat très approximatif pour ce matériau et ce mode de sollicitation.

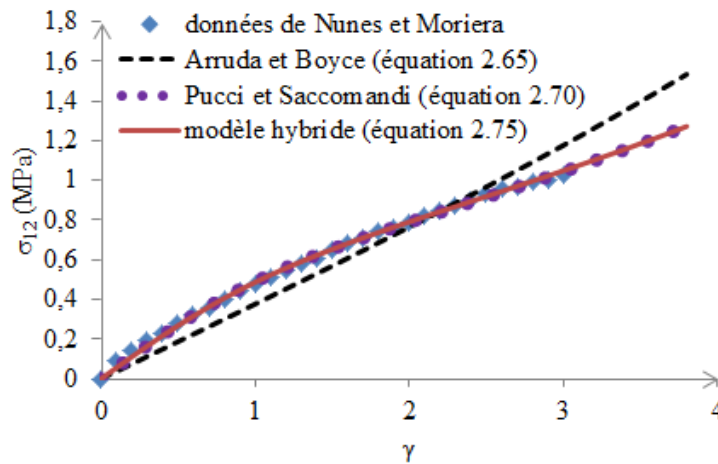


FIGURE 2.15 – Comparaison des lois de comportement d'Arruda-Boyce, de Pucci-Saccomandi et du modèle hybride par rapport aux données en glissement simple de Nunes et Moreira [115].

2.3.5/ VALIDATION DU MODÈLE HYBRIDE À PARTIR DE CINQ CRITÈRES

On se propose dans ce paragraphe de passer en revue les cinq critères qui ont été énoncés au paragraphe 1.4 du premier chapitre et d'étudier si le modèle hybride est en conformité avec ces critères.

2.3.5.1/ DOMAINE DE DÉFORMATION

Nous avons vu au paragraphe 2.3.4.1 que le modèle hybride permettait de prédire parfaitement les données d'essai en traction uniaxiale de Treloar [148], et ce jusqu'à 700% d'élongation (cf. Figure 2.13 (a)). On a fait un constat de même nature (500% d'élongation avec les données d'essai de Yeoh et Fleming [166], au paragraphe 2.3.4.2 (Figure 2.14 (a))). Dans les deux cas, on a également relevé une très bonne capacité à représenter le comportement des matériaux testés pour des compressions élevées. Le modèle hybride a donc fait la preuve de son efficacité à couvrir une très large gamme de niveaux de déformation.

2.3.5.2/ PRÉDICTION DES TYPES DE SOLLICITATION

On rappelle qu'un modèle cohérent et consistant avec la physique se doit de produire un jeu de paramètres rhéologiques invariant avec le mode de sollicitation appliqué à un

matériau donné. On a vu que le modèle hybride remplissait cette condition (paragraphe 2.3.4.1) puisque le même jeu de paramètres permettait de prédire correctement le comportement d'un caoutchouc naturel vulcanisé au noir de carbone, à la fois pour un essai en traction uniaxiale, pour un essai en cisaillement pur et pour un essai en traction équi-biaxiale (Figure 2.13).

Un bon modèle doit également être capable de rendre compte des tendances même lorsque les mesures expérimentales présentent un profil chaotique. Le modèle hybride a manifestement cette capacité comme le prouve la comparaison de la courbe de Mooney (Figure 2.16 (b)) avec les données d'essai d'Arruda et Boyce [5]. Cette courbe de Mooney montre en effet de nombreux changements de pente avec de brusques variations. Les paramètres rhéologiques du modèle hybride permettant de fournir une représentation correcte de ces variations sont fournis dans le Tableau 2.7.

Paramètres	μ (MPa)	n (-)	K (MPa)	η (MPa)	ζ	ξ
Modèle hybride	0.117	9.03	1.284	0.717	1.554	2.116

Tableau 2.7 – Paramètres rhéologiques du modèle hybride identifiés avec l'essai d'Arruda et Boyce [5]

Les données d'essai d'Arruda et Boyce correspondent à de la compression uniaxiale pour laquelle on a vu (cf. paragraphe 2.3.4.1) que des modèles plus conventionnels que le modèle hybride éprouvaient des difficultés à corréler de manière satisfaisante les mesures. Cela s'explique par la forte dispersion de ces mesures qui apparaît de manière significative avec les courbes de Mooney.

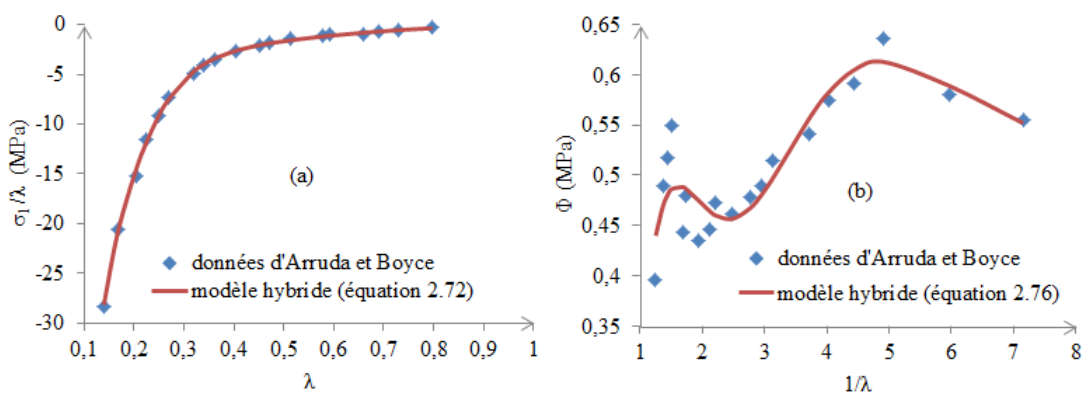


FIGURE 2.16 – Comparaison du modèle hybride avec les données de compression uniaxiale d'Arruda et Boyce [5] : (a) courbe contraintes-élongations ; (b) courbe de Mooney

2.3.5.3/ STABILITÉ THERMODYNAMIQUE DU MODÈLE HYBRIDE.

On a vu que les inéquations empiriques (1.118) de Baker-Ericksen impliquaient que les dérivées $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ et $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ sont positives. Dans le cas particulier du modèle hybride, on obtient ces deux dérivées à partir de l'équation (2.61). La dérivée par rapport à I_1 donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial I_1} &= \mu n \frac{d}{dI_1} \left[\frac{\lambda_c \beta_c - \beta_{co}}{\sqrt{n}} + \ln \left(\frac{\beta_c \sinh \beta_{co}}{\beta_{co} \sinh \beta_c} \right) \right] - \frac{\eta}{2} \frac{d}{dI_1} \left\{ \int_3^{I_1} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(u))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] du \right\} \\ &= \mu n \left[\frac{\beta_c}{\sqrt{n}} \frac{d\lambda_c}{dI_1} + \frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \frac{d\beta_c}{dI_1} + \frac{1}{\beta_c} \frac{d\beta_c}{dI_1} - \frac{d\beta_c}{dI_1} \coth \beta_c \right] - \frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(I_1))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] \\ &= \mu n \left\{ \frac{\beta_c}{\sqrt{n}} \frac{d\lambda_c}{dI_1} + \left[\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} - \left(\coth \beta_c - \frac{1}{\beta_c} \right) \right] \frac{d\beta_c}{dI_1} \right\} - \frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(I_1))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.78)$$

La dérivée de λ_c par rapport à I_1 est calculée à partir de (1.98) :

$$\frac{d\lambda_c}{dI_1} = \frac{1}{6\lambda_c} \quad (2.79)$$

On peut également déduire de (1.98) que :

$$\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} = \mathcal{L}(\beta_c) = \coth \beta_c - \frac{1}{\beta_c} \quad (2.80)$$

Au final, en considérant les expressions de (2.79) et de (2.80) dans (2.78), on obtient :

$$\frac{\partial W}{\partial I_1} = \frac{\mu}{6} \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(I_1))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] \quad (2.81)$$

Le calcul de la dérivée de W par rapport à I_2 est beaucoup plus facile à réaliser :

$$\frac{\partial W}{\partial I_2} = \frac{K}{I_2} \quad (2.82)$$

La Figure 2.17 (a) montre clairement que $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ est positif pour I_1 supérieur ou égal à 3, ce qui prouve la première inégalité (1.118). On se limite au cas où I_1 est supérieur ou égal à 3 car on a démontré que cette condition était toujours satisfaite pour un matériau incompressible (Annexe A). L'équation (2.82) montre par ailleurs que le paramètre rhéologique K doit être positif pour que $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ le soit. On observe que c'est bien le cas pour tous les

exemples que nous avons traité avec le modèle hybride (Tableaux 2.3, 2.6 et 2.7).

Une autre condition de stabilité vue au paragraphe 1.4.3, qui se traduit par l'équation (1.120), exige une contrainte nulle en l'absence de sollicitation. En appliquant cette condition au modèle hybride (équation (2.61)), on obtient :

$$\frac{\mu \sqrt{n}}{3} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \eta \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(3))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] + \frac{4K}{3} - p = 0 \quad (2.83)$$

où la valeur de $g_2^{-1}(3)$ est obtenue à partir de l'équation (B.11) de l'annexe B :

$$g_2^{-1}(3) = 2 \cos \left(\frac{1}{3} \arccos(-1) + \frac{4\pi}{3} \right) = 1 \quad (2.84)$$

En reportant (2.84) dans (2.83), il vient :

$$p = \frac{\mu \sqrt{n}}{3} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) - \eta \exp \left[- \left(\frac{1 - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] + \frac{4K}{3} \quad (2.85)$$

Le multiplicateur de Lagrange p , calculé dans la situation où le matériau est au repos, permet donc de prendre en compte la condition de contrainte nulle dans cette situation.

La dernière condition (équation 1.121) à prendre en considération stipule que la densité d'énergie doit être nulle pour un matériau au repos. Le modèle hybride satisfait bien cette condition puisque, d'après l'équation (2.61) :

$$W(3, 3, 1) = \mu n \left[\frac{\beta_0 - \beta_0}{\sqrt{n}} + \ln(1) \right] - \frac{\eta}{2} \int_3^3 \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(u))^{-1} - \zeta}{\gamma} \right)^2 \right] du + K \ln(1) = 0 \quad (2.86)$$

2.3.5.4/ OBSERVATIONS EXPÉRIMENTALES DU MODÈLE HYBRIDE

On rappelle (cf. paragraphe 1.4.4) que plusieurs observations expérimentales reportées dans la littérature par Rivlin et Saunders et Treloar [137, 150] ont établi que :

- $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ est une constante indépendante de I_1 et I_2 pour I_1 inférieur à 12 et croît exponentiellement pour I_1 supérieur à 12 ;
- $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ ne dépend pas de I_1 et est une fonction décroissante de I_2 .

La Figure 2.17 permet d'observer que le comportement des dérivées $\frac{\partial W}{\partial I_1}$ et $\frac{\partial W}{\partial I_2}$ est en conformité avec les observations de Rivlin-Saunders et Treloar.

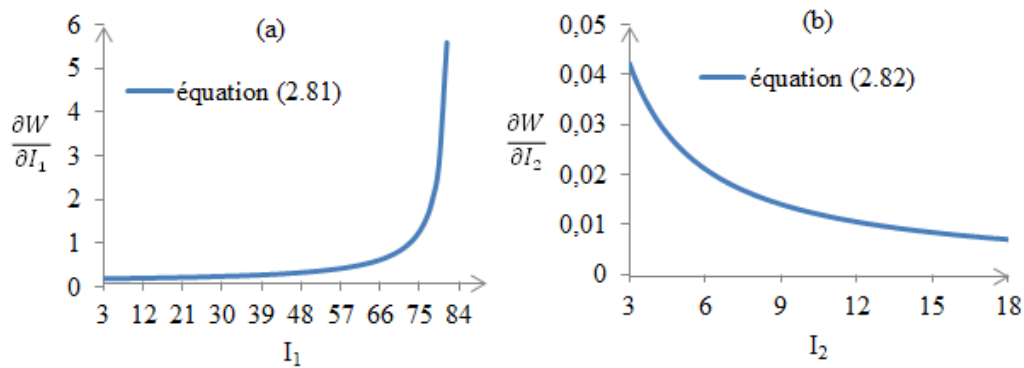


FIGURE 2.17 – Comportement des dérivées du modèle hybride par rapport aux invariants I_1 et I_2 : (a) $\frac{\partial W}{\partial I_1}$, (b) $\frac{\partial W}{\partial I_2}$.

2.3.5.5/ COURBE DE MOONEY DU MODÈLE HYBRIDE.

On a établi aux paragraphes 2.3.4.1, 2.3.4.2 et 2.3.5.2 que le modèle hybride prédisait très efficacement le comportement d'un matériau avec les courbe de Mooney (Figures 2.13(b), 2.14(b) et 2.16 (b)). Cela procède de la logique puisque le terme phénoménologique original que nous avons proposé, basé sur une densité de forme Gaussienne intégrale, a été introduit dans le modèle hybride afin de corrélérer au mieux ces courbes de Mooney. Par ailleurs, il a été rappelé au paragraphe 1.4.5 que les extrema de la courbe de Mooney constituaient des données caractéristiques d'une loi de comportement. Ces extrema sont déterminés en cherchant les zéros de la dérivée de la fonction de Mooney (équation (1.125)), dérivée qui est calculée par rapport à l'inverse de l'élongation. On dérive donc la contrainte réduite du modèle hybride à partir de l'équation (2.76) :

$$\frac{d}{d\lambda^{-1}} \left\{ \frac{\mu \sqrt{n}}{6 \lambda_c} \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\lambda_c}{\sqrt{n}} \right) - \frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(I_1))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] + \frac{K}{\lambda I_2} \right\} = 0 \quad (2.87)$$

L'équation (2.87) est non linéaire en $\frac{1}{\lambda}$. On cherche ses zéros en utilisant la fonction « fzero » du logiciel MatLab, fonction qui combine la méthode par dichotomie, la méthode de la sécante et la méthode d'interpolation quadratique inverse [27]. Les trois valeurs d'extrema pour les données de Yeoh-Fleming et de Treloar ont été calculées avec cette fonction « fzero ». Les résultats sont reportés dans le Tableau 2.8. L'obtention de ces trois valeurs signifie que le modèle hybride est un modèle complet en ce sens qu'il est capable de reproduire les quatre domaines de déformation présentés au paragraphe 1.4.5 : rai-

dissement final en traction, déformations modérées en traction, transition entre traction et compression et enfin compression.

	$1/\lambda_{l1}$	$1/\lambda_h$	$1/\lambda_{l2}$
Données de Yeoh-Fleming	0.397	1.417	3.014
Données de Treloar	0.35	1.642	5.927

Tableau 2.8 – Valeurs des extrema de la courbe de Mooney (2.76).

CONCLUSION.

Ce chapitre a été consacré à la construction d'une nouvelle densité d'énergie hyperélastique isotrope. Cette densité a été développée en considérant l'hypothèse proposée par Flory et Erman [48, 49], complétée par Kroon [90], sur les contraintes dominantes qui régissent le comportement des élastomères :

- la contrainte d'entrelacement des chaînes macromoléculaires ;
- la contrainte de raidissement final des chaînes macromoléculaires (contrainte des déformations affines des chaînes) ;
- la contrainte liée aux déformations non-affines d'autres chaînes macromoléculaires.

La première partie de ce chapitre a été consacrée au choix de l'énergie d'entrelacement. Une étude comparative a notamment été réalisée entre la loi de comportement de l'énergie d'entrelacement moléculaire proposée dans [49] et la loi de comportement phénoménologique développée dans [15, 55, 64, 130]. Les résultats de cette étude comparative montrent que les deux lois de comportement sont réalistes mais que la contrainte d'entrelacement phénoménologique (équation (2.11)) est la plus simple à utiliser d'un point de vue algébrique. C'est donc la densité d'énergie phénoménologique définie par l'équation (2.1) qui a été choisie comme énergie de la contrainte d'entrelacement du modèle hybride.

La deuxième partie de ce chapitre a porté sur les densités d'énergie liées aux déformations affines et non affines. Pour ce qui concerne les déformations affines, nous avons choisi le modèle 8-Chaînes [5] qui permet de représenter la contrainte de raidissement final. L'expression de cette contrainte faisant intervenir la fonction inverse de Langevin, une nouvelle approximation extrêmement précise de cette fonction a été proposée. Cette approximation est obtenue en modélisant le résidu entre l'approximation de Cohen [33] et les valeurs exactes de la fonction inverse de Langevin. La nouvelle approximation a permis de gagner un facteur 100 sur la qualité de l'approximation.

Des comparaisons avec des données expérimentales en traction-compression uniaxiale [150, 166] ont cependant démontré que le modèle 8-chaînes combiné avec l'énergie d'entrelacement n'était pas suffisamment précis pour obtenir une corrélation satisfaisante avec des mesures exprimées en terme de courbe de Mooney. Nous avons donc analysé et modélisé le résidu, ce qui a permis d'introduire un correctif adoptant un profil Gaussien

sous forme intégrale (2.60). Ce correctif permet de représenter l'influence des déformations non affines. L'expression Gaussienne a été obtenue en étendant au cas général la modélisation du résidu qui a été réalisée dans le cas particulier d'un essai de traction-compression (2.50). La superposition d'une troisième densité de nature Gaussienne intégrale avec les densités d'entrelacement et de raidissement final permet d'obtenir notre modèle original que nous avons qualifié d'hybride.

La troisième partie de ce chapitre a été consacrée à la validation de ce modèle hybride. Il s'est notamment révélé très performant pour plusieurs types de sollicitations homogènes : traction et compression uniaxiale, traction équibiaxiale, cisaillement pur et glissement simple [5, 115, 148, 166]. Dans ces différentes situations, le modèle hybride fournit en effet des résultats plus cohérent avec les mesures, si on raisonne en terme de courbe de Mooney, que les modèles traditionnels de la littérature. Le modèle hybride a également été validé en jugeant sa capacité à satisfaire les cinq critères de sélection qui ont été introduits au paragraphe 1.4 du premier chapitre.

Compte tenu des très bonnes performances qu'il présente en terme de représentativité du comportement des matériaux caoutchouteux, nous avons implémenté le modèle hybride présenté dans ce chapitre dans un code de calcul aux éléments finis. Tous les calculs tensoriels préluant à l'implémentation sont présentés dans le chapitre qui suit ainsi que les premiers résultats numériques que nous avons obtenus.

ANALYSE NUMÉRIQUE DU MODÈLE HYBRIDE

Ce troisième et dernier chapitre traite de l'implémentation éléments finis du modèle hyperélastique hybride présenté au chapitre précédent dans le code de calcul FER (Finite Element Research). FER est un code de calcul universitaire développé par le groupe MDS (Modélisation en Dynamique des Structures) du Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Évry (LMEE). Il est spécialisé dans le traitement des problèmes de mécanique par la méthode des éléments finis, notamment pour ce qui concerne les phénomènes d'impact et de contact [30, 31, 127, 128]. Il est à noter que nous avons utilisé dans le logiciel FER la méthode de pénalisation pour prendre en compte la contrainte d'incompressibilité. C'est la raison pour laquelle nous avons introduit dans le modèle hybride une quatrième densité d'énergie qui remplace le multiplicateur de Lagrange utilisé dans les deux chapitres précédents.

Ce chapitre est structuré en trois sections.

La section 3.1 décrit la formulation variationnelle qui est basée sur des considérations énergétiques et qui est généralement utilisée dans les codes de calcul pour l'implémentation de lois de comportement non-linéaires. Pour l'implémentation numérique de ces lois, le choix s'est porté sur une discrétisation en formulation Lagrangienne totale. Le principal intérêt d'une approche en Lagrangien total est que la configuration initiale reste constante, ce qui permet de simplifier les calculs [162]. Le problème à résoudre étant fortement non-linéaire, la méthode itérative de Newton-Raphson est utilisée. Cette méthode revenant à trouver de manière itérative les solutions du système linéarisé, la détermination du tenseur tangent d'élasticité est nécessaire.

La section 3.2 est consacrée au calcul de ce tenseur tangent d'élasticité. Le développement de ce tenseur passe par le calcul tensoriel des dérivées premières et secondes de l'énergie de déformation par rapport au tenseur de déformation de Green-Lagrange. L'énergie de déformation est exprimée sous une forme découplée avec une partie volumique et une partie isochore afin de gérer de manière optimale, sur le plan numérique, la condition d'incompressibilité [68, 69, 159]. Cette formulation découplée est ensuite appliquée au modèle hybride que nous avons développé au chapitre 2. Nous développerons notamment, par des calculs tensoriels assez longs et fastidieux, les expressions des tenseurs tangents (du second et du quatrième ordre) qui seront implémentés dans FER. Comme la densité hybride inclue quatre termes, il est difficile d'avoir au final une vue d'ensemble sur les calculs réalisés qui sont assez nombreux. C'est pourquoi une synthèse des résultats principaux qui sont indispensables à l'implémentation éléments finis a été réalisée dans les Tableaux 3.1 et 3.2.

La section 3.3 est dédiée à la présentation du logiciel FER et à la validation de l'implémentation du modèle hybride dans ce logiciel. Cette validation a été réalisée par comparaison entre résultats numériques et solution analytique de référence obtenue dans le cas d'une traction-compression uniaxiale homogène. Cette section s'achève par la présentation d'un exemple numérique qui concerne une sollicitation en traction-compression non homogène.

3.1/ GÉNÉRALITÉS

L'implémentation dans les codes de calculs éléments finis passe par le choix de la méthode d'approximation. Il en existe plusieurs qui ont au final le même objectif qui est de remplacer un problème mathématique défini sur un milieu continu (équations différentielles, équations aux dérivées partielles ou équations intégrales) par un problème discret (équations matricielles) de dimension finie et résolu numériquement. Parmi toutes ces méthodes d'approximation, on peut en particulier citer :

- la méthode des résidus pondérés ou d'annulation d'erreur qui utilise comme point de départ les équations locales, les équations différentielles définies sur l'intérieur du domaine, et les conditions aux limites du problème définies sur les frontières du domaine [36] ;

- la méthode variationnelle qui a pour point de départ une formulation mathématique basée sur des considérations énergétiques [168].

Nous utiliserons dans le cadre de ce travail le principe des travaux virtuels qui est une méthode variationnelle. Pour l'implémentation numérique, nous proposons une discrétisation éléments finis en formulation Lagrangienne totale [10, 17, 36, 124, 127, 141, 168]. Contrairement au Lagrangien actualisé, qui assemble la matrice de raideur tangente sur la configuration actuelle, la méthode du Lagrangien total utilise la configuration de référence. Chacune de ces deux méthodes possède ses avantages respectifs. La formulation Lagrangienne actualisée est plus efficace d'un point de vue informatique [9] car elle ne prend pas en compte la matrice initiale de déplacement. Mais avec la formulation Lagrangienne totale, la configuration initiale reste constante, ce qui simplifie les calculs [162].

Le tenseur de déformations de Green-Lagrange inclut une partie linéaire et une partie non-linéaire fonction des déplacements nodaux \mathbf{u} :

$$\mathbf{E} = \left[\mathbf{B}_L + \frac{1}{2} \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u}) \right] \mathbf{u} \quad (3.1)$$

où \mathbf{B}_L est le tenseur reliant la partie linéaire des déformations aux déplacements nodaux et $\mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})$ est le tenseur reliant les termes quadratiques non-linéaires des déformations aux déplacements nodaux. La différentielle de l'équation (3.1) donne :

$$\delta \mathbf{E} = [\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})] \delta \mathbf{u} \quad (3.2)$$

D'après le principe des travaux virtuels :

$$\delta W = \int_{V_0} \mathbf{S} \delta \mathbf{E} dV_0 - \mathbf{F}_{ext} \delta \mathbf{u} \quad (3.3)$$

où V_0 est le volume du corps dans la configuration de référence et \mathbf{F}_{ext} le vecteur des forces extérieures. En remplaçant l'expression de l'équation (3.2) dans celle de l'équation (3.3), on obtient :

$$\delta W = \int_{V_0} \mathbf{S} [\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})] \delta \mathbf{u} dV_0 - \mathbf{F}_{ext} \delta \mathbf{u} = (\mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext}) \delta \mathbf{u} \quad (3.4)$$

où le vecteur des forces intérieures est défini par :

$$\mathbf{F}_{int} = \int_{V_0} \mathbf{S} [\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})] dV_0 \quad (3.5)$$

Comme $\delta \mathbf{u}$ est arbitraire et la variation d'énergie nulle, on déduit de l'équation (3.4) :

$$\mathbf{F}_{int} - \mathbf{F}_{ext} = 0 \quad (3.6)$$

Pour résoudre le problème non-linéaire posé à l'équation (3.6), la méthode itérative de Newton-Raphson est indiquée. Cette méthode revient à trouver de manière itérative les solutions du système linéarisé suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{K}_T^i \Delta \mathbf{u} = \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{int}^i \\ \mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \Delta \mathbf{u} \end{cases} \quad (3.7)$$

où i représente l'itération connue et $i + 1$ l'itération à calculer. \mathbf{K}_T^i est le tenseur de raideur tangente actualisée à chaque itération, $\Delta \mathbf{u}$ est l'incrément des déplacements nodaux et \mathbf{F}_{int}^i est le vecteur des forces internes supposé connu à l'itération i . Le tenseur de raideur tangent est obtenu en dérivant les forces internes par rapport à \mathbf{u} en partant de l'équation (3.5) :

$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}_{int}}{\partial \mathbf{u}} = \int_{V_0} \left[\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})) + \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} \right] dV_0 \quad (3.8)$$

Par ailleurs, la différentielle du second tenseur de Piola-Kirchhoff \mathbf{S} nous permet d'obtenir l'incrément de contrainte en fonction de l'incrément de déformation à partir de (1.29) :

$$\delta \mathbf{S} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}^2} \delta \mathbf{E} \quad (3.9)$$

Ce qui nous permet d'introduire le tenseur tangent d'élasticité d'ordre 4 utilisé dans la linéarisation :

$$\mathbb{D} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E}^2} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}} \quad (3.10)$$

Compte tenu de la relation (1.8) qui lie \mathbf{E} à \mathbf{C} , l'équation (3.10) s'écrit encore de manière équivalente :

$$\mathbb{D} = 4 \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{C}^2} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.11)$$

Soit encore en reportant l'expression de l'équation (3.2) dans celle de l'équation (3.9) :

$$\delta \mathbf{S} = \mathbb{D} [\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})] \delta \mathbf{u} \quad (3.12)$$

En remplaçant $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{u}}$ par l'équation (3.12) dans le tenseur de raideur tangent (équation (3.8)), on peut réécrire ce tenseur en fonction du tenseur tangent d'élasticité \mathbb{D} :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T = & \int_{V_0} \mathbf{B}_L^T \mathbb{D} \mathbf{B}_L dV_0 + \int_{V_0} \mathbf{S} \frac{\partial \mathbf{B}_{NL}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} dV_0 \\ & + \int_{V_0} (\mathbf{B}_L^T \mathbb{D} \mathbf{B}_{NL} + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbb{D} \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_{NL}^T \mathbb{D} \mathbf{B}_{NL}) dV_0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Le premier terme de l'expression de l'équation (3.13) représente la matrice de raideur élastique, le second terme la matrice de rigidité géométrique (ou matrice de raideur initiale en contrainte) et le troisième la matrice de raideur initiale en déplacement.

On voit donc que la détermination du tenseur tangent d'élasticité \mathbb{D} est capitale pour la mise en place d'une implémentation éléments finis. Ce tenseur tangent est calculé dans le paragraphe suivant.

Par ailleurs, dans la suite de ce chapitre, on va manipuler à de nombreuses reprises des tenseurs d'ordre 2 et 4. Les opérateurs qui vont agir sur ces tenseurs sont nombreux et classiques. Ils sont rappelés dans l'annexe C de ce mémoire.

3.2/ TENSEUR TANGENT D'ÉLASTICITÉ

Pour simplifier l'implémentation éléments finis et optimiser les performances numériques avec les modèles hyperélastiques, l'énergie de déformation s'exprime sous une forme découplée séparant la partie volumique de la partie isochore [68, 69, 159] :

$$W(\mathbf{C}) = W^{vol}(J) + W^{iso}(\bar{\mathbf{C}}) \quad (3.14)$$

où $\bar{\mathbf{C}}$ représente le tenseur réduit de Cauchy-Green à droite. Ce tenseur est obtenu en découplant la réponse du matériau en une partie volumique et une partie isochore [159] :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{vol} \bar{\mathbf{F}} \quad (3.15)$$

où la partie volumique \mathbf{F}^{vol} est définie par :

$$\mathbf{F}^{vol} = J^{1/3} \mathbf{I} \quad (3.16)$$

Le déterminant de cette partie volumique vaut J . La partie isochore $\bar{\mathbf{F}}$ est donnée par :

$$\bar{\mathbf{F}} = J^{-1/3} \mathbf{F} \quad (3.17)$$

Son déterminant vaut 1. On déduit de (3.17) que le tenseur réduit des déformations de Cauchy-Green droit $\bar{\mathbf{C}}$ s'exprime en fonction de \mathbf{C} par :

$$\bar{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{F}}^T \bar{\mathbf{F}} = J^{-2/3} \mathbf{F}^T \mathbf{F} = J^{-2/3} \mathbf{C} \quad (3.18)$$

On en conclut que les invariants réduits associés à $\bar{\mathbf{C}}$ sont liés à ceux de \mathbf{C} par :

$$\bar{I}_1 = tr(\bar{\mathbf{C}}) = J^{-2/3} I_1 = I_3^{-1/3} I_1 \quad (3.19)$$

$$\bar{I}_2 = \frac{1}{2} \left\{ [tr(\bar{\mathbf{C}})]^2 - tr(\bar{\mathbf{C}}^2) \right\} = J^{-4/3} I_2 = I_3^{-2/3} I_2 \quad (3.20)$$

3.2.1/ CALCUL DU SECOND TENSEUR DE PIOLA-KIRCHHOFF

À partir de l'équation (3.14), le second tenseur de Piola-Kirchhoff défini par l'équation (1.32) s'écrit désormais sous une forme découplée :

$$\mathbf{S} = 2 \left(\frac{dW^{vol}}{dJ} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial W^{iso}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \right) = \mathbf{S}^{vol} + \mathbf{S}^{iso} \quad (3.21)$$

où on a posé :

$$\mathbf{S}^{vol} = 2 \frac{dW^{vol}}{dJ} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}}; \quad \mathbf{S}^{iso} = 2 \frac{\partial W^{iso}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.22)$$

On remarque tout d'abord en utilisant (1.33) que :

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} = \frac{(\partial I_3^{1/2})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2J} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} = \frac{1}{2J} I_3 \mathbf{C}^{-1} = \frac{J}{2} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.23)$$

Commençons par calculer le tenseur \mathbf{S}^{iso} en déterminant, à l'aide de l'équation (3.23), la dérivée du tenseur $\bar{\mathbf{C}}$ par rapport à \mathbf{C} :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (J^{-2/3} \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} + \mathbf{C} \otimes \frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}} = J^{-2/3} \left(\mathbf{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (3.24)$$

où l'opérateur \otimes et le tenseur $\mathbf{\Pi}$ sont définis respectivement par les équations (C.1) et (C.7) de l'annexe C.

On conclut en utilisant (3.22) et (3.24) :

$$\mathbf{S}^{iso} = \bar{\mathbf{S}} : \mathbb{P}^T = \mathbb{P} : \bar{\mathbf{S}} \quad (3.25)$$

où le tenseur $\bar{\mathbf{S}}$ d'ordre 2 est défini par :

$$\bar{\mathbf{S}} = 2 \frac{\partial W^{iso}(\bar{\mathbf{C}})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \quad (3.26)$$

\mathbb{P} est le tenseur du quatrième ordre correspondant au calcul de l'équation (3.24) :

$$\mathbb{P} = J^{-2/3} \left(\mathbf{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) \Leftrightarrow \mathbb{P}^T = J^{-2/3} \left(\mathbf{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (3.27)$$

Le produit doublement contracté ($:$) est défini par l'équation (C.3) de l'annexe C.

On remarque, en comparant (3.27) avec (3.24), que :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{P}^T \quad (3.28)$$

On s'intéresse maintenant au calcul de \mathbf{S}^{vol} . En se servant de (3.22) et de (3.23), le résultat pour le calcul de \mathbf{S}^{vol} est immédiat :

$$\mathbf{S}^{vol} = J \frac{dW^{vol}}{dJ} \mathbf{C}^{-1} \quad (3.29)$$

On récapitule avec (3.21), (3.25) et (3.29) :

$$\mathbf{S} = J \frac{dW^{vol}}{dJ} \mathbf{C}^{-1} + \mathbb{P} : \bar{\mathbf{S}} \quad (3.30)$$

Le calcul du tenseur $\bar{\mathbf{S}}$, qui apparaît dans (3.30) et qui est défini par (3.26), s'obtient classiquement en utilisant les invariants réduits \bar{I}_1 et \bar{I}_2 définis par les équations (3.19)

et (3.20). En supposant que W^{iso} dépend de ces deux invariants réduits, on obtient, en suivant la même démarche que pour l'équation (1.34) :

$$\bar{\mathbf{S}} = 2 \left[\left(\frac{\partial W^{iso}}{\partial \bar{I}_1} + \bar{I}_1 \frac{\partial W^{iso}}{\partial \bar{I}_2} \right) \mathbf{I} - \frac{\partial W^{iso}}{\partial \bar{I}_2} \bar{\mathbf{C}} \right] \quad (3.31)$$

3.2.2/ APPLICATION AU MODÈLE HYBRIDE

Pour prendre en compte l'incompressibilité dans le modèle défini au chapitre précédent par l'équation (2.61), on lui adjoint une densité volumique avec un comportement parabolique comme cela a été suggéré dans [117] :

$$W^{vol} = \frac{2}{d\vartheta^2} \left[J^{-\vartheta} + \vartheta \ln(J) - 1 \right] \quad (3.32)$$

où $2/d$ représente le module d'incompressibilité et ϑ est un paramètre réel. Dans cette étude, nous choisissons $\vartheta = -2$ comme préconisé par Simo et Mieche dans [143].

La partie isochore de la densité d'énergie hybride correspond à l'équation (2.61) dans laquelle on a remplacé les invariants classiques par les invariants réduits :

$$W^{iso} = \mu n \left[\frac{\bar{\lambda}_c \bar{\beta}_c - \bar{\beta}_{co}}{\sqrt{n}} + \ln \left(\frac{\bar{\beta}_c \sinh \bar{\beta}_{co}}{\bar{\beta}_{co} \sinh \bar{\beta}_c} \right) \right] - \frac{\eta}{2} \int_3^{\bar{I}_1} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(u))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] du + K \ln \left(\frac{\bar{I}_2}{3} \right) \quad (3.33)$$

avec :

$$\bar{\lambda}_c = \sqrt{\frac{\bar{I}_1}{3}}; \quad \bar{\beta}_c = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} \right) \quad (3.34)$$

Une implémentation éléments finis nécessite de pouvoir calculer le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff à partir de la dérivée de la densité d'énergie. Concrètement, dans notre cas, cela signifie qu'il est nécessaire de calculer $\frac{dW^{vol}}{dJ}$ à partir de (3.32) et $\frac{\partial W^{iso}}{\partial \bar{I}_1}$ et $\frac{\partial W^{iso}}{\partial \bar{I}_2}$ à partir de (3.33). Les résultats seront ensuite reportés dans (3.31) et dans (3.30).

Un calcul différentiel élémentaire permet d'obtenir :

$$\frac{dW^{vol}}{dJ} = \frac{1}{d} \left(J - \frac{1}{J} \right); \quad \frac{\partial W^{iso}}{\partial \bar{I}_2} = \frac{K}{\bar{I}_2} \quad (3.35)$$

Le calcul de $\frac{\partial W^{iso}}{\partial \bar{I}_1}$ s'obtient simplement en remplaçant λ_c par $\bar{\lambda}_c$, β_c par $\bar{\beta}_c$ et I_1 par \bar{I}_1 dans les équations (2.80) et (2.81).

$$\frac{\partial W^{iso}}{\partial \bar{I}_1} = \frac{\mu}{6} \frac{\sqrt{n}}{\bar{\lambda}_c} \bar{\beta}_c - \frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(\bar{I}_1))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] \quad (3.36)$$

3.2.3/ TENSEUR TANGENT D'ÉLASTICITÉ

Pour calculer le tenseur tangent d'élasticité, on combine (3.11) avec (3.21), ce qui permet d'obtenir une décomposition avec une partie volumique et une partie isochore :

$$\mathbb{D} = 2 \left(\frac{\partial \mathbf{S}^{vol}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \mathbf{S}^{iso}}{\partial \mathbf{C}} \right) = \mathbb{D}^{vol} + \mathbb{D}^{iso} \quad (3.37)$$

avec :

$$\mathbb{D}^{vol} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}^{vol}}{\partial \mathbf{C}}; \quad \mathbb{D}^{iso} = 2 \frac{\partial \mathbf{S}^{iso}}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.38)$$

Le tenseur volumique d'élasticité \mathbb{D}^{vol} est développé en remplaçant l'expression (3.29) dans (3.38) :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{vol} &= 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(J \frac{dW^{vol}}{dJ} \mathbf{C}^{-1} \right) = 2 \left[\frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \frac{dW^{vol}}{dJ} \mathbf{C}^{-1} + J \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left(\frac{dW^{vol}}{dJ} \right) \mathbf{C}^{-1} + J \frac{dW^{vol}}{dJ} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right] \\ &= 2 \left[\frac{dW^{vol}}{dJ} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} + J \frac{d^2 W^{vol}}{dJ^2} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{C}} \mathbf{C}^{-1} + J \frac{dW^{vol}}{dJ} \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \right] \end{aligned} \quad (3.39)$$

La dérivée de \mathbf{C}^{-1} par rapport à \mathbf{C} est un calcul standard [68, 105, 126] dont on donne ici juste le résultat :

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} = -\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} \quad (3.40)$$

où l'opérateur \odot est défini par l'équation (C.4) de l'annexe C.

La prise en compte des équations (3.23) et (3.40) dans (3.39), permet finalement d'écrire la partie volumique du tenseur d'élasticité :

$$\mathbb{D}^{vol} = J \left(\frac{dW^{vol}}{dJ} + J \frac{d^2 W^{vol}}{dJ^2} \right) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2J \frac{dW^{vol}}{dJ} \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} \quad (3.41)$$

Le tenseur isochore d'élasticité \mathbb{D}^{iso} est quant à lui calculé en remplaçant l'expression

(3.25) dans (3.38) :

$$\mathbb{D}^{iso} = 2 \frac{\partial (\mathbb{P} : \bar{\mathbf{S}})}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.42)$$

En remplaçant l'expression (3.27) de \mathbb{P} dans (3.42), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{iso} &= 2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[J^{-2/3} \left(\boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) : \bar{\mathbf{S}} \right] \\ &= 2 \left[\left(\boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) : \bar{\mathbf{S}} \right] \otimes \frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}} + 2 J^{-2/3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[\left(\boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) : \bar{\mathbf{S}} \right] \end{aligned} \quad (3.43)$$

Le premier terme du tenseur \mathbb{D}^{iso} est calculé en utilisant successivement (3.23), (3.27) et (3.25) :

$$2 \left[\left(\boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) : \bar{\mathbf{S}} \right] \otimes \frac{\partial J^{-2/3}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{2}{3} \left[J^{-2/3} \left(\boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) : \bar{\mathbf{S}} \right] \otimes \mathbf{C}^{-1} = -\frac{2}{3} \mathbf{S}^{iso} \otimes \mathbf{C}^{-1} \quad (3.44)$$

Le second terme de \mathbb{D}^{iso} est développé en se servant de l'équation (C.5) de l'annexe C :

$$\begin{aligned} 2 J^{-2/3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[\left(\boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) : \bar{\mathbf{S}} \right] &= 2 J^{-2/3} \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \left[\boldsymbol{\Pi} : \bar{\mathbf{S}} - \frac{1}{3} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}) : \bar{\mathbf{S}} \right] : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \\ &= 2 J^{-2/3} \left[\frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} - \frac{1}{3} \frac{\partial ((\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right] : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (3.45)$$

Dans l'équation (3.45), il est nécessaire d'expliciter l'expression $\frac{\partial ((\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1})}{\partial \bar{\mathbf{C}}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial ((\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} &= \mathbf{C}^{-1} \otimes \frac{\partial (\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + (\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C}) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \\ &= \mathbf{C}^{-1} \otimes \left[\mathbf{C} : \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + \bar{\mathbf{S}} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right] + (\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C}) \frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \end{aligned} \quad (3.46)$$

La dérivée de \mathbf{C} par rapport à $\bar{\mathbf{C}}$ s'obtient à partir de (3.18) :

$$\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = J^{2/3} \boldsymbol{\Pi} \quad (3.47)$$

En reportant ce résultat dans l'équation (3.46), ainsi qu'en utilisant l'équation (3.40) qui donne la dérivée de \mathbf{C}^{-1} par rapport à \mathbf{C} , on obtient :

$$\frac{\partial ((\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1})}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + J^{2/3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{S}} - J^{2/3} (\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} \quad (3.48)$$

On remplace (3.48) dans (3.45) :

$$2J^{-2/3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[\left(\boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) : \bar{\mathbf{S}} \right] = 2J^{-2/3} \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} - \frac{2}{3} J^{-2/3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.49)$$

$$- \frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \bar{\mathbf{S}} : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}} + \frac{2}{3} (\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} : \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \mathbf{C}}$$

Pour simplifier (3.49), on utilise (3.28), (3.25) et on introduit le tenseur réduit d'élasticité du quatrième d'ordre :

$$\bar{\mathbb{D}} = 2 \frac{\partial \bar{\mathbf{S}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \quad (3.50)$$

On obtient alors :

$$2J^{-2/3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[\left(\boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) : \bar{\mathbf{S}} \right] = J^{-2/3} \left(\bar{\mathbb{D}} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \bar{\mathbb{D}} \right) : \mathbb{P}^T - \frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}^{iso} \quad (3.51)$$

$$+ \frac{2}{3} (\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} : \mathbb{P}^T$$

Afin de simplifier encore (3.51), on s'intéresse aux premier et dernier termes. En particulier, en utilisant (C.5) de l'annexe C et (3.27) :

$$J^{-2/3} \left(\bar{\mathbb{D}} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} : \bar{\mathbb{D}} \right) : \mathbb{P}^T = J^{-2/3} \left(\boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) : \bar{\mathbb{D}} : \mathbb{P}^T = \mathbb{P} : \bar{\mathbb{D}} : \mathbb{P}^T \quad (3.52)$$

Pour ce qui concerne le dernier terme de (3.51), on utilise les équations (C.2) et (C.5) de l'annexe C et à nouveau (3.27) :

$$\frac{2}{3} (\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} : \mathbb{P}^T = \frac{2}{3} J^{-2/3} \text{Tr}(\bar{\mathbf{S}} \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} : \left(\boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (3.53)$$

$$= \frac{2}{3} \text{Tr}(J^{-2/3} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{C}) \left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right)$$

Par un calcul tensoriel un peu fastidieux, mais assez simple à réaliser, on peut montrer que :

$$\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} : \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} = -\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \quad (3.54)$$

On reporte (3.54) dans (3.53) :

$$\frac{2}{3} (\bar{\mathbf{S}} : \mathbf{C}) \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} : \mathbb{P}^T = \frac{2}{3} \text{Tr}(J^{-2/3} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{C}) \left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} + \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (3.55)$$

On conclut en remplaçant (3.52) et (3.55) dans (3.51) :

$$2J^{-2/3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{C}} \left[\left(\boldsymbol{\Pi} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right) : \bar{\mathbf{S}} \right] = \mathbb{P} : \bar{\mathbb{D}} : \mathbb{P}^T - \frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}^{iso} + \frac{2}{3} Tr(J^{-2/3} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{C}) \left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} + \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \quad (3.56)$$

Finalement, on obtient le tenseur isochore \mathbb{D}^{iso} du quatrième ordre en reportant les équations (3.44) et (3.56) dans (3.43) :

$$\begin{aligned} \mathbb{D}^{iso} = & \mathbb{P} : \bar{\mathbb{D}} : \mathbb{P}^T + \frac{2}{3} Tr(J^{-2/3} \bar{\mathbf{S}} \mathbf{C}) \left(\mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \\ & - \frac{2}{3} \left(\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}^{iso} + \mathbf{S}^{iso} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Cette formule est générale (elle est valable pour n'importe quelle loi de comportement hyperélastique isotrope incompressible) et classique. Elle correspond à des résultats que l'on peut trouver par exemple dans [68, 159].

Pour obtenir l'expression définitive de \mathbb{D}^{iso} , il suffit d'explicitier l'expression du tenseur réduit d'élasticité du quatrième ordre $\bar{\mathbb{D}}$ qui apparaît dans le premier terme de (3.57). Cette expression est calculée dans le paragraphe qui suit.

3.2.4/ TENSEUR D'ÉLASTICITÉ RÉDUIT DU QUATRIÈME ORDRE

Pour des raisons de simplification d'écriture, on introduit les notations suivantes :

$$W_i^{iso} = \frac{\partial W^{iso}}{\partial \bar{I}_i}; \quad W_{ij}^{iso} = \frac{\partial W_i^{iso}}{\partial \bar{I}_j} = \frac{\partial^2 W^{iso}}{\partial \bar{I}_i \partial \bar{I}_j}; \quad i, j = 1, 2 \quad (3.58)$$

En utilisant la notation (3.58), le second tenseur réduit de Piola-Kirchhoff $\bar{\mathbf{S}}$ de l'équation (3.31) s'écrit :

$$\bar{\mathbf{S}} = 2 \left[(W_1^{iso} + \bar{I}_1 W_2^{iso}) \mathbf{I} - W_2^{iso} \bar{\mathbf{C}} \right] \quad (3.59)$$

Le tenseur $\bar{\mathbb{D}}$ s'obtient en remplaçant (3.59) dans (3.50) :

$$\bar{\mathbb{D}} = 4 \left[\mathbf{I} \otimes \left(\frac{\partial W_1^{iso}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} W_2^{iso} + \bar{I}_1 \frac{\partial W_2^{iso}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right) - \bar{\mathbf{C}} \otimes \frac{\partial W_2^{iso}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} - W_2^{iso} \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right] \quad (3.60)$$

Sachant qu'on a supposé que W^{iso} dépend des deux invariants \bar{I}_1 et \bar{I}_2 (cf. équation (3.31)), on obtient, en utilisant la règle de dérivation en cascade :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{D}} = 4 \left[\mathbf{I} \otimes \left(\frac{\partial W_1^{iso}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + \frac{\partial W_1^{iso}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} W_2^{iso} + \bar{I}_1 \frac{\partial W_2^{iso}}{\partial \bar{I}_1} \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} + \bar{I}_1 \frac{\partial W_2^{iso}}{\partial \bar{I}_2} \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right) \right. \\ \left. - \frac{\partial W_2^{iso}}{\partial \bar{I}_1} \bar{\mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} - \frac{\partial W_2^{iso}}{\partial \bar{I}_2} \bar{\mathbf{C}} \otimes \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{\mathbf{C}}} - W_2^{iso} \frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

Par ailleurs, on obtient pour les invariants réduits \bar{I}_1 et \bar{I}_2 les mêmes règles de dérivation que pour les invariants I_1 et I_2 (cf. équation (1.33)) :

$$\frac{\partial \bar{I}_1}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{I}; \quad \frac{\partial \bar{I}_2}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \bar{I}_1 \mathbf{I} - \bar{\mathbf{C}} \quad (3.62)$$

De plus, d'après l'équation (C.7) de l'annexe C :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{C}}}{\partial \bar{\mathbf{C}}} = \mathbf{\Pi} \quad (3.63)$$

Enfin, pour des raisons évidentes de symétrie :

$$W_{ij}^{iso} = W_{ji}^{iso} \quad (3.64)$$

On reporte (3.62), (3.63) et (3.64) dans (3.61) :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{D}} = 4 \left[\left(W_{11}^{iso} + 2\bar{I}_1 W_{12}^{iso} + W_2^{iso} + \bar{I}_1^2 W_{22}^{iso} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \left(W_{12}^{iso} + \bar{I}_1 W_{22}^{iso} \right) (\bar{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{C}}) \right. \\ \left. + W_{22}^{iso} \bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{C}} - W_2^{iso} \mathbf{\Pi} \right] \end{aligned} \quad (3.65)$$

Afin de simplifier l'écriture de $\bar{\mathbb{D}}$, on introduit les notation suivantes :

$$\begin{cases} \bar{\delta}_1 = 4 \left(W_{11}^{iso} + 2\bar{I}_1 W_{12}^{iso} + W_2^{iso} + \bar{I}_1^2 W_{22}^{iso} \right); & \bar{\delta}_2 = -4 \left(W_{12}^{iso} + \bar{I}_1 W_{22}^{iso} \right) \\ \bar{\delta}_3 = 4 W_{22}^{iso}; & \bar{\delta}_4 = -4 W_2^{iso} \end{cases} \quad (3.66)$$

donc :

$$\bar{\mathbb{D}} = \bar{\delta}_1 \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + \bar{\delta}_2 (\mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{I}) + \bar{\delta}_3 \bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{C}} + \bar{\delta}_4 \mathbf{\Pi} \quad (3.67)$$

À ce stade, avant de traiter le cas particulier du modèle hybride, il est nécessaire de récapituler les principaux résultats tensoriels obtenus dans le cas général, les calculs ayant été particulièrement nombreux. On rappelle notamment (équation (3.37)) que le

calcul du tenseur d'élasticité tangent du quatrième ordre \mathbb{D} nécessite le calcul du tenseur volumique tangent \mathbb{D}^{vol} ainsi que le calcul du tenseur tangent isochore \mathbb{D}^{iso} . Le tenseur \mathbb{D}^{vol} est calculé par l'équation (3.41), ce qui nécessite de connaître les dérivées $\frac{dW^{vol}}{dJ}$ et $\frac{d^2W^{vol}}{dJ^2}$. Pour sa part, \mathbb{D}^{iso} s'exprime en fonction du tenseur réduit du quatrième ordre $\bar{\mathbb{D}}$ (équation (3.57)) qui vient d'être déterminé via la formule (3.67). Il fait intervenir (équation (3.66)) les dérivées W_{11}^{iso} , W_{22}^{iso} , W_{12}^{iso} et W_2^{iso} . Le paragraphe suivant est consacré au calcul de ces 6 dérivées $\frac{dW^{vol}}{dJ}$, $\frac{d^2W^{vol}}{dJ^2}$, W_{11}^{iso} , W_{22}^{iso} , W_{12}^{iso} et W_2^{iso} dans le contexte particulier du modèle hybride que nous proposons.

3.2.5/ APPLICATION AU MODÈLE HYBRIDE

La dérivée première de W^{vol} par rapport à J a déjà été calculée grâce à l'équation (3.35). On en déduit la dérivée seconde :

$$\frac{d^2W^{vol}}{dJ^2} = \frac{1}{d} \left(1 + \frac{1}{J^2} \right) \quad (3.68)$$

Le calcul des dérivées premières W_1^{iso} et W_2^{iso} a déjà été réalisé (cf. équations (3.35) et (3.36)). On en déduit les dérivées secondes :

– Calcul de W_{11}^{iso}

D'après (3.36) :

$$W_{11}^{iso} = \frac{\mu}{6} \frac{\sqrt{n}}{\bar{\lambda}_c} \left(\frac{d\bar{\beta}_c}{d\bar{I}_1} - \frac{\bar{\beta}_c}{\bar{\lambda}_c} \frac{d\bar{\lambda}_c}{d\bar{I}_1} \right) - \frac{\eta}{\xi^2} \left[\frac{(g_2^{-1}(\bar{I}_1))^{-1} - \zeta}{(g_2^{-1}(\bar{I}_1))^2} \right] \frac{dg_2^{-1}(\bar{I}_1)}{d\bar{I}_1} \exp \left[- \left(\frac{(g_2^{-1}(\bar{I}_1))^{-1} - \zeta}{\xi} \right)^2 \right] \quad (3.69)$$

avec $\bar{\beta}_c = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} \right)$ approché selon la formule proposée dans [113] :

$$\bar{\beta}_c \simeq \frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} \frac{3 - \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} \right)^2}{1 - \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} \right)^2} + a \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} \right)^\alpha + b \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} \right)^\beta \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} - 0.76 \right) \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} - 1 \right) \quad (3.70)$$

On rappelle (équation (2.39)) que les paramètres numériques permettant d'approcher la fonction de Langevin inverse $\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} \right)$ ont été calculés dans le paragraphe 2.2.2.4 :

$a = -0.488$, $\alpha = 3.243$, $b = 3.311$ et $\beta = 4.789$.

En utilisant le résultat de la dérivée de $\bar{\lambda}_c$ par rapport à \bar{I}_1 que l'on déduit directement de l'équation (2.79) :

$$\frac{d\bar{\lambda}_c}{d\bar{I}_1} = \frac{1}{6\bar{\lambda}_c} \quad (3.71)$$

on en déduit la dérivée de $\bar{\beta}_c$ par rapport à \bar{I}_1 :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\beta}_c}{d\bar{I}_1} = \frac{1}{6\bar{\lambda}_c \sqrt{n}} & \left\{ \frac{3 + \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^4}{\left[1 - \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^2\right]^2} + a \alpha \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha-1} \right. \\ & \left. + b \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^{\beta-1} \left[(\beta + 2) \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^2 - 1.76 (\beta + 1) \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right) + 0.76\beta \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Quant à la dérivée de $g_2^{-1}(\bar{I}_1)$ par rapport à \bar{I}_1 , elle s'obtient facilement à partir de l'équation (B.11) de l'annexe B :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{I}_1} [g_2^{-1}(\bar{I}_1)] = \sqrt{\frac{3}{\bar{I}_1}} & \left\{ \frac{1}{3} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\sqrt{\frac{27}{\bar{I}_1^3}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{3}{\bar{I}_1^3 - 27}} \sin \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\sqrt{\frac{27}{\bar{I}_1^3}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Le report des équations (3.71), (3.72) et (3.73) dans (3.69) permet de connaître complètement W_{11}^{iso} . Il est par ailleurs à noter que la formule (3.73) n'est pas définie lorsque \bar{I}_1 vaut 3, c'est-à-dire lorsque le matériau est au repos. Pour traiter numériquement cette singularité, l'initialisation des itérations de Newton-Raphson est réalisée avec une valeur artificiellement très grande de W_{11}^{iso} .

– Calcul de W_{22}^{iso} et de W_{12}^{iso}

Les calculs sont immédiats d'après (3.35) :

$$W_{22}^{iso} = -\frac{K}{\bar{I}_2} \quad (3.74)$$

$$W_{12}^{iso} = 0 \quad (3.75)$$

Les expressions indispensables à une implémentation éléments finis du modèle hybride que nous proposons sont synthétisées dans les Tableaux 3.1 et 3.2. Ces deux tableaux résument l'ensemble des calculs tensoriels qui ont été effectués dans ce chapitre. Les formules correspondants à ces calculs ont été implémentées dans le code universitaire FER (Finite Element Research) selon l'organigramme de la Figure 3.1.

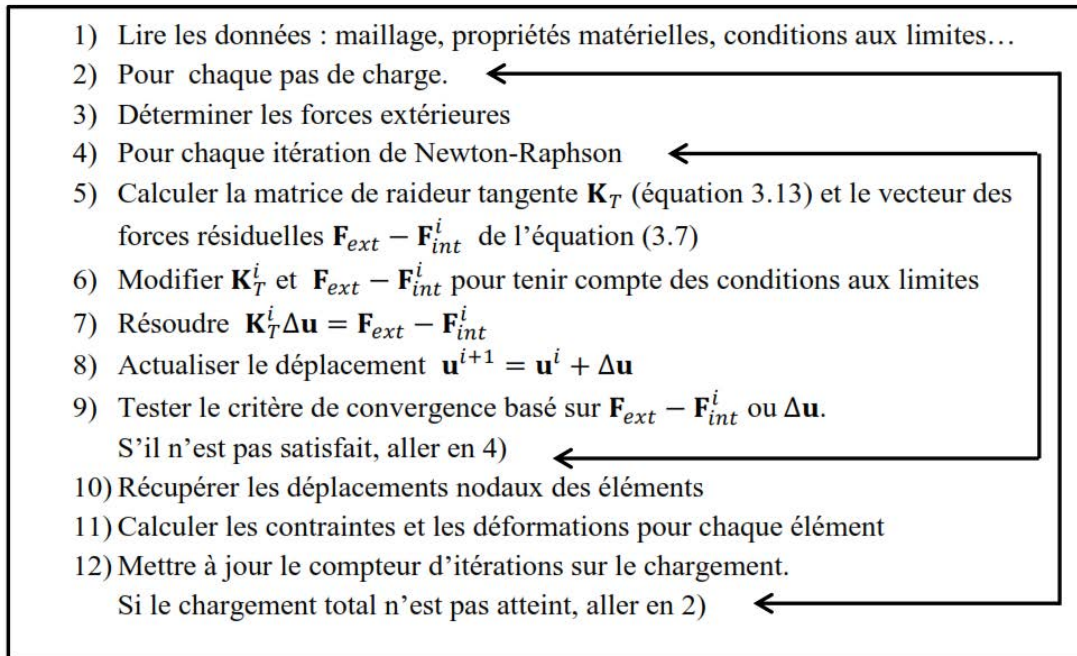


FIGURE 3.1 – Implémentation de l'algorithme de Newton-Raphson dans FER [124].

Après une présentation du logiciel FER au début du paragraphe suivant, le modèle numérique ainsi implémenté fait l'objet d'une validation par une étude comparative entre résultats numériques et analytiques dans un cas de déformation homogène.

	Expressions littérales	Éqs
Paramètres	$\mu = 0.379MPa$; $n = 14.9$; $K = 0.295MPa$; $\eta = 0.096MPa$; $\zeta = 2.708$; $\xi = 1.132$; $d = 10^{-3}$ $a = -0.488$; $\alpha = 3.243$; $b = 3.311$; $\beta = 4.789$	
\otimes	produit tensoriel classique	(C.1)
:	double produit contracté	(C.2)
\odot	$(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})_{ijkl} = C_{ij}D_{kl}$ $(\mathbb{A} : \mathbf{C})_{ij} = A_{ijkl}C_{kl}$; $(\mathbb{A} : \mathbb{B})_{ijkl} = A_{ijpq}B_{pqkl}$ $(\mathbf{C} \odot \mathbf{D})_{ijkl} = \frac{1}{2}(C_{ik}D_{jl} + C_{il}D_{jk})$	(C.4)
Invariants	$I_1 = Tr(\mathbf{C})$; $I_2 = \frac{1}{2}[(Tr(\mathbf{C}))^2 - Tr(\mathbf{C}^2)]$; $J = \sqrt{\det(\mathbf{C})}$ $\bar{I}_1 = J^{-2/3}I_1$; $\bar{I}_2 = J^{-4/3}I_2$	
$\bar{\lambda}_c$	$\sqrt{\frac{\bar{I}_1}{3}}$	(3.34)
$g_2^{-1}(u)$	$2\sqrt{\frac{u}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\sqrt{\frac{27}{u^3}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right]$	(3.34)
$\bar{\beta}_c$	$\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} \frac{3 - \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^2}{1 - \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^2} + a \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^\alpha + b \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^\beta \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} - 0.76\right) \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}} - 1\right)$	(3.70)
$\frac{d\bar{\lambda}_c}{d\bar{I}_1}$	$\frac{1}{6\bar{\lambda}_c}$	(3.71)
$\frac{d\bar{\beta}_c}{d\bar{I}_1}$	$\frac{1}{6\bar{\lambda}_c \sqrt{n}} \left\{ \frac{3 + \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^4}{1 - \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^2} + a\alpha \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha-1} + b \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^{\beta-1} \left[(\beta+2) \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right)^2 - 1.76(\beta+1) \left(\frac{\bar{\lambda}_c}{\sqrt{n}}\right) + 0.76\beta \right] \right\}$	(3.72)
$\frac{d g_2^{-1}(\bar{I}_1)}{d\bar{I}_1}$	$\sqrt{\frac{3}{\bar{I}_1}} \left\{ \frac{1}{3} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\sqrt{\frac{27}{\bar{I}_1^3}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] + \sqrt{\frac{3}{\bar{I}_1^3 - 27}} \sin \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\sqrt{\frac{27}{\bar{I}_1^3}} \right) + \frac{4\pi}{3} \right] \right\}$	(3.73)
\mathbb{P}, \mathbb{P}^T	$\mathbb{P} = J^{-2/3} \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C} \right)$; $\mathbb{P}^T = J^{-2/3} \left(\mathbb{I} - \frac{1}{3} \mathbf{C} \otimes \mathbf{C}^{-1} \right)$; $\Pi_{ijkl} = \delta_{ik}\delta_{jl}$	(3.27)

Tableau 3.1 – Récapitulatif des équations nécessaires à une implémentation éléments finis du modèle hybride.

	Expressions littérales	Éqs	
W_1^{iso}	Densité isochore	$\mu n \left[\frac{\lambda_c \bar{\beta}_c - \bar{\beta}_{co}}{\sqrt{n}} + \ln \left(\frac{\bar{\beta}_c \sinh \bar{\beta}_{co}}{\bar{\beta}_{co} \sinh \bar{\beta}_c} \right) \right] - \frac{\eta}{2} \int_0^{\bar{I}_1} \exp \left[- \left(\frac{g_2^{-1}(u)}{\xi} \right)^{-1} - \zeta \right] du + K \ln \left(\frac{\bar{I}_2}{3} \right)$	(3.33)
W_1^{iso}	Dérivée 1 ^{ere}	$\frac{\mu}{6} \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \bar{\beta}_c - \frac{\eta}{2} \exp \left[- \left(\frac{g_2^{-1}(\bar{I}_1)}{\xi} \right)^{-1} - \zeta \right]$	(3.36)
W_2^{iso}	Dérivée 1 ^{ere}	$\frac{K}{\bar{I}_2}$	(3.35)
W_{11}^{iso}	Dérivée 2 ^{nde}	$\frac{\mu}{6} \frac{\sqrt{n}}{\lambda_c} \left(\frac{d\bar{\beta}_c}{d\bar{I}_1} - \frac{\bar{\beta}_c}{\lambda_c} \frac{d\lambda_c}{d\bar{I}_1} \right) - \frac{\eta}{\xi^2} \left[\frac{g_2^{-1}(\bar{I}_1)}{g_2^{-1}(\bar{I}_1)^2} - \zeta \right] \frac{d g_2^{-1}(\bar{I}_1)}{d\bar{I}_1} \exp \left[- \left(\frac{g_2^{-1}(\bar{I}_1)}{\xi} \right)^{-1} - \zeta \right]$	(3.69)
W_{22}^{iso}	Dérivée 2 ^{nde}	$-\frac{K}{\bar{I}_2^2}$	(3.74)
W_{12}^{iso}	Dérivée 2 ^{nde}	0	(3.75)
W^{vol}	Densité volumique	$\frac{1}{d} \left(\frac{J^2 - 1}{2} - \ln J \right)$	(3.32)
$\frac{dW^{vol}}{dJ}$	Dérivée 1 ^{ere}	$\frac{1}{d} \left(J - \frac{1}{J} \right)$	(3.35)
$\frac{d^2 W^{vol}}{dJ^2}$	Dérivée 2 ^{nde}	$\frac{1}{d} \left(1 + \frac{1}{J^2} \right)$	(3.68)
$\bar{\mathbf{S}}$	Tenseur réduit de P.K	$2 \left(W_1^{iso} + \bar{I}_1 W_2^{iso} \right) \mathbf{I} - W_2^{iso} \bar{\mathbf{C}}$	(3.59)
\mathbf{S}^{iso}	Tenseur isochore de P.K	$\mathbb{P} : \mathbf{S}$	(3.25)
\mathbf{S}	Tenseur de P.K	$J \frac{dW^{vol}}{dJ} \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{S}^{iso}$	(3.30)
$\bar{\mathbb{D}}$	Tenseur réduit tangent	$4 \left(W_{11}^{iso} + 2\bar{I}_1 W_{12}^{iso} + W_2^{iso} + \bar{I}_1^2 W_{22}^{iso} \right) \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} - \left(W_{12}^{iso} + \bar{I}_1 W_{22}^{iso} \right) (\bar{\mathbf{C}} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \bar{\mathbf{C}}) + W_{22}^{iso} \bar{\mathbf{C}} \otimes \bar{\mathbf{C}} - W_2^{iso} \bar{\mathbb{D}}$	(3.65)
\mathbb{D}^{iso}	Tenseur isochore tangent	$\mathbb{P} : \bar{\mathbb{D}} : \mathbb{P} : \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1} - \frac{2}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \frac{1}{3} \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - \frac{2}{3} (\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{S}^{iso} + \mathbf{S}^{iso} \otimes \mathbf{C}^{-1})$	(3.57)
\mathbb{D}^{vol}	Tenseur volumique tangent	$J \left(\frac{dW^{vol}}{dJ} + J \frac{d^2 W^{vol}}{dJ^2} \right) \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} - 2J \frac{dW^{vol}}{dJ} \mathbf{C}^{-1} \odot \mathbf{C}^{-1}$	(3.41)
\mathbb{D}	Tenseur tangent d'élasticité	$\mathbb{D}^{iso} + \mathbb{D}^{vol}$	(3.37)

Tableau 3.2 – suite du Tableau 3.1 -récapitulatif des équations nécessaires à une implémentation éléments finis du modèle hybride.

3.3/ IMPLÉMENTATION DU MODÈLE HYBRIDE DANS LE CODE FER

3.3.1/ PRÉSENTATION DE FER

Le logiciel universitaire FER (Finite Element Research) est développé par l'équipe MDS (Modélisation en Dynamique des Structures) du Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Évry (LMEE). La plateforme de ce logiciel aux éléments finis dispose des possibilités de simulations suivantes :

- calcul statique ou dynamique ;
- lois de comportement en élasticité linéaire ou en hyperélasticité non-linéaire ;
- calcul multiphysique : mécanique du solide, mécanique des fluides, thermique, biomécanique ;
- problèmes 2D ou 3D ;
- contact avec ou sans frottement entre plusieurs solides déformables ou rigides par la méthode du bi-potentiel ;
- dynamique rapide avec impact ;
- pré et post processeur intégrés.

Le code FER est principalement écrit en C++ suivant un modèle de programmation orienté objet. Ses sous-programmes de calcul sont codés en FORTRAN et font appel, dans un souci de performance, les bibliothèques mathématiques optimisées BLAS et LAPACK [43, 44]. Plusieurs travaux d'implémentation ont déjà été menés dans le passé dans le domaine de l'hyperélasticité avec les modèles suivants : Blatz-Ko [123], 3é [154], Yeoh [134], Ogden [126] et HGO [127]. Ces implémentations permettent de réaliser des simulations dynamiques (<http://lmee.univ-evry.fr/feng/Ferview.html>) illustrées sur la Figure 3.2 avec le couplage de non linéarités locales (contact et impact) avec des non linéarités matérielles modélisées par la loi hyperélastique d'Ogden.

Il est également possible de développer sur FER la simulation d'un aplatissement de particule en fusion, dans le cadre de problème dynamique couplé au phénomène de transfert. La Figure 3.3 illustre une variation des champs de vitesse au cours de ce phénomène. Cela illustre la capacité de FER à réaliser du couplage entre mécanique du solide, mécanique des fluides et thermique en incluant du contact et de la dynamique rapide avec impact.

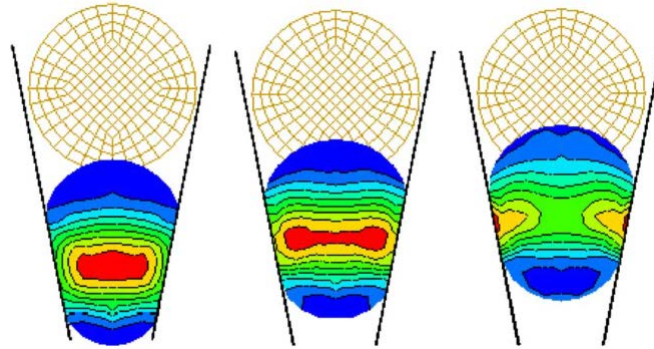


FIGURE 3.2 – Contact et impact d'une balle en caoutchouc dans un entonnoir rigide [45].

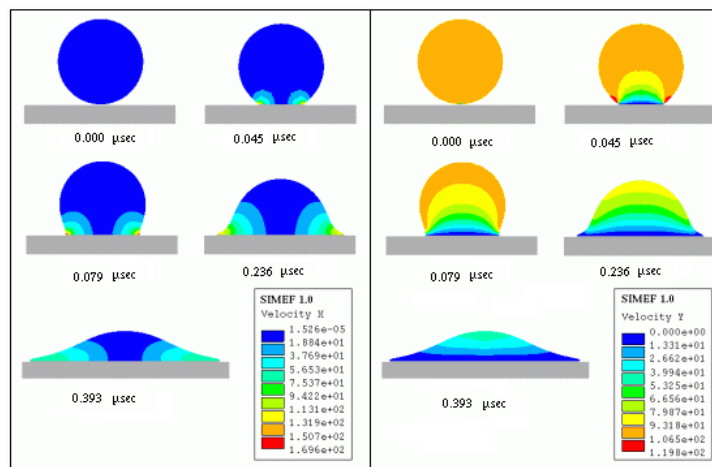


FIGURE 3.3 – Iso-valeur des champs de vitesse au cours de l'aplatissement d'une particule en fusion (<http://lmee.univ-evry.fr/feng/FerDrop.html>).

3.3.2/ VALIDATION DE L'IMPLÉMENTATION DU MODÈLE HYBRIDE DANS FER

Ce paragraphe est consacré à la validation du modèle hyperélastique hybride implémenté dans FER. Pour cela, nous avons considéré un test homogène de traction-compression uniaxiale avec les conditions aux limites illustrées sur la Figure 3.4. En particulier, on impose un déplacement sur la face avant du cube, ce qui permet de faire varier l'élongation λ_1 de 0 exclus à 5. L'intérêt de ce test est qu'il permet de calculer analytiquement les contraintes associées au modèle hybride (équation (2.72)). Ces contraintes serviront de valeur de référence pour valider le calcul numérique effectué avec FER. Les paramètres matériau du modèle ont été choisis conformément aux valeurs identifiés des données expérimentales de Yeoh-Fleming, contenues dans le Tableau 2.3.

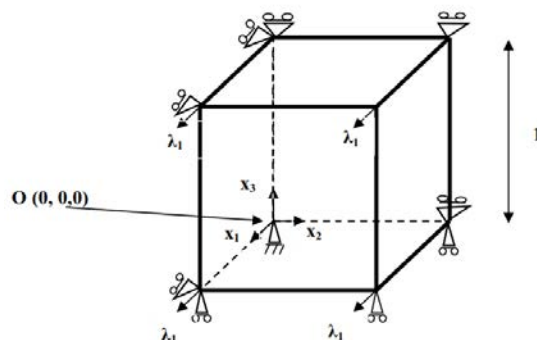


FIGURE 3.4 – Cube en traction-compression uniaxiale.

La Figure 3.5 représente la courbe analytique de référence et les résultats numériques obtenus avec FER. On constate une corrélation parfaite entre la théorie et les résultats numériques, ce qui valide l'implémentation du modèle hybride dans FER.

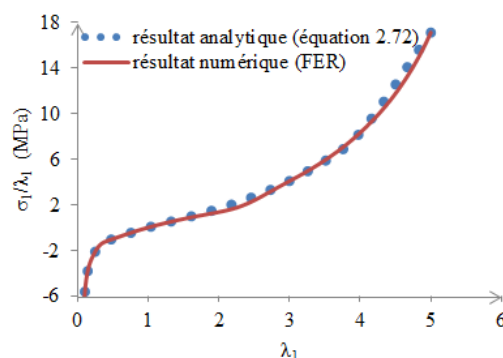


FIGURE 3.5 – Comparaison théorie-numérique.

Pour tester la robustesse de ce modèle numérique, un cas de sollicitation non-homogène en traction a été traité, en considérant une éprouvette rectangulaire de dimension 10x3x0.5 mm (Figure 3.6). La partie inférieure de l'éprouvette est encastree et la partie supérieure est soumise à un déplacement imposé qui varie de 0 à 3.96 mm. La simulation a été réalisée avec un maillage composé de 3200 éléments briques cubiques et de 4305 nœuds (Figure 3.6 (a)). La Figure 3.6 (b) présente la distribution des contraintes de Von Mises sur l'éprouvette déformée. On peut observer une distribution radiale symétrique des contraintes au centre de l'éprouvette ce qui rend compte de l'isotropie du modèle hybride. Cette distribution est particulièrement visible sur la Figure 3.6 (c) où on a fixé à 0.9 MPa la valeur maximum de la table des couleurs. On observe par ailleurs la diminution de la surface de la section qui compense l'allongement de l'éprouvette,

permettant ainsi de conserver le volume, ce qui est conforme à la nature incompressible du modèle hybride.

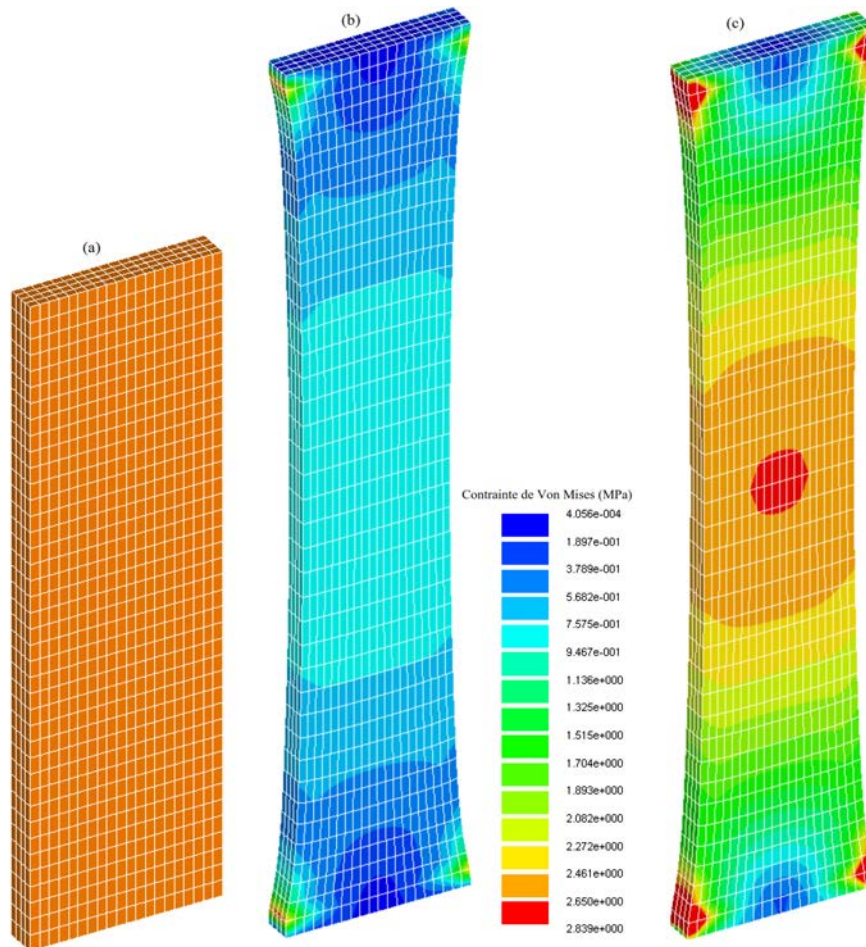


FIGURE 3.6 – Simulation FER (a)- maillage non-déformé (b)- contraintes de Von Mises sur le maillage déformé (c) - contraintes de Von Mises avec changement de la table des couleurs.

CONCLUSION.

Ce chapitre a été consacré à l'implémentation éléments finis du modèle hybride dans le code de calcul universitaire FER. Le tenseur tangent d'élasticité du quatrième ordre a été calculé et intégré dans l'algorithme de Newton-Raphson implémenté dans FER. Le modèle numérique obtenu a été validé à l'aide d'un exemple classique de chargement homogène en traction-compression uniaxiale pour lequel on dispose d'une solution analytique de référence. Afin de tester les capacités de notre modèle dans des situations de chargement plus complexes, une simulation 3D a été également réalisée sur une éprouvette rectangulaire soumise à un chargement non-homogène de traction.

CONCLUSION GÉNÉRALE ET PERSPECTIVES.

L'objectif de ce travail de recherche était d'apporter une contribution à la modélisation du comportement hyperélastique de matériaux de type caoutchouc présentant des caractéristiques isotrope et incompressible.

L'étude bibliographique et l'état de l'art (premier chapitre du mémoire) ont permis de rappeler les aspects constitutifs et les divers comportements liés aux matériaux caoutchouteux, à savoir les comportements statique, endommageable et dynamique. Notre travail s'est focalisé sur le comportement statique. L'état de l'art a permis d'établir cinq critères d'appréciation des performances des matériaux hyperélastiques :

- couvrir l'ensemble du domaine de déformation ;
- prédire tous les modes de déformations avec les mêmes paramètres matériau ;
- vérifier les conditions de stabilité thermodynamique ;
- vérifier les observations expérimentales de Rivlin-Saunders et Treloar ;
- prédire la courbe de Mooney.

Un nouveau modèle hyperélastique hybride, vérifiant ces cinq critères, a été proposé dans le second chapitre du mémoire. Ce modèle hybride a été construit sur la base des postulats de Flory et Erman [48, 49] complétés ultérieurement par Kroon [90]. Les points clés à prendre en considération sont :

1. la contrainte d'entrelacement des chaînes macromoléculaires ;
2. la contrainte de raidissement final des chaînes macromoléculaires (contrainte des déformations affines des chaînes) ;
3. la contrainte liée aux déformations non-affines d'autres chaînes macromoléculaires.

Les deux premières contraintes ont été modélisées à partir des approches phénoménologique et moléculaire. Pour la densité d'énergie phénoménologique, nous avons choisi

une formulation logarithmique classique [15, 55, 64, 92, 93, 130]. Pour la contrainte de raidissement final, le modèle moléculaire 8-chaînes d'Arruda et Boyce [5, 23] a été considéré.

L'expression du modèle moléculaire 8-chaînes dépend cependant de la fonction inverse de Langevin qui n'a pas d'expression littérale connue. Une approximation a donc été proposée sur la base de l'approximation de Cohen en utilisant la technique « approach-in-stages method » [12]. Cette approche en deux étapes a permis d'ajouter deux termes correctifs à la fonction de Cohen et a fait passer l'erreur relative maximale de 4.94% à 0.046% [113].

Une étude comparative entre les prédictions du modèle constitué de la superposition des densités d'énergie moléculaire et phénoménologique et les données expérimentales de Treloar [148] et de Yeoh-Fleming [166] a enfin démontré la nécessité de prendre en compte une troisième densité d'énergie originale qui adopte un profil Gaussien et une forme intégrale. Le modèle final est donc une combinaison de trois densités d'énergie de nature très différente, d'où l'appellation de modèle hybride. Pour l'implémentation éléments finis, et afin de tenir compte de l'incompressibilité, une quatrième densité standard [143] a également été rajoutée au modèle.

La conformité du modèle hybride avec les cinq critères d'appréciation exhibés au chapitre 1, ainsi que des comparaisons théorie-expérience, ont permis d'établir la pertinence de ce modèle. Il a donc fait l'objet d'une implémentation éléments finis dans le code de calcul FER. Il s'agit d'un code universitaire développé au sein du Laboratoire de Mécanique de l'Université d'Évry. Pour réaliser cette implémentation, le tenseur tangent d'élasticité du quatrième ordre doit être calculé. Ce tenseur est obtenu en linéarisant la loi de comportement. Il s'exprime donc à partir de la dérivée seconde de la fonction densité d'énergie par rapport au tenseur de déformation de Green-Lagrange. Tous les calculs tensoriels associés à la détermination des modules tangents sont effectués dans le chapitre 3 de ce mémoire. Leurs implémentations éléments finis dans le code de calcul FER y est explicité en détail. Deux exemples numériques sont ensuite abordés. Le premier concerne un test homogène de traction-compression uniaxiale. Il montre une corrélation parfaite entre les calculs éléments finis et une solution analytique de référence. Le second exemple traite le cas d'une déformation non homogène en traction d'une éprouvette de section rectangulaire.

En termes de perspectives, dans la continuité de ces travaux, plusieurs directions peuvent être explorées :

- Tester le modèle hybride dans d'autres cas de chargements non-homogènes comme un chargement en traction-torsion pour lequel on dispose de solution de référence [94].
- Traiter un cas numérique complexe avec le modèle hybride, impliquant par exemple du contact et de l'impact puisque le logiciel FER est spécialisé dans ce domaine.
- Étudier la possibilité de régulariser la singularité à l'origine sur la dérivée seconde de la densité d'énergie, singularité qui a été signalée au paragraphe 3.2.5 du chapitre 3.
- L'extension de la densité d'énergie non affine d'un cas uniaxial particulier au cas général a été réalisée en opérant un choix parmi deux solutions possibles (cf. Annexe B). Ce choix a été argumenté en rappelant que le principal intérêt de la densité non affine était d'apporter une correction dans le domaine de la compression uniaxiale. Une investigation intéressante à mener serait de combiner la solution en compression avec la solution en traction. Une combinaison astucieuse de ces deux solutions serait en effet peut être à même de résoudre la singularité précédemment citée.

ANNEXES

A

PROPRIÉTÉ SUR LE PREMIER INVARIANT DE \mathbf{C} : $I_1 = Tr(\mathbf{C})$

L'objet de cette annexe est d'établir un résultat technique sur la trace I_1 du tenseur des déformations de Cauchy-Green à droite \mathbf{C} . Ce résultat prouve que I_1 est supérieur ou égal à 3 dans le cas où le matériau est considéré comme incompressible.

En effet, I_1 étant la trace de \mathbf{C} , on a en régime incompressible :

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (\text{A.1})$$

les λ_i étant les valeurs propres de \mathbf{C} , valeurs propres qui sont positives.

On introduit alors une fonction P de λ_1 , paramétrée par λ_2 :

$$P(\lambda_1) = \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \quad (\text{A.2})$$

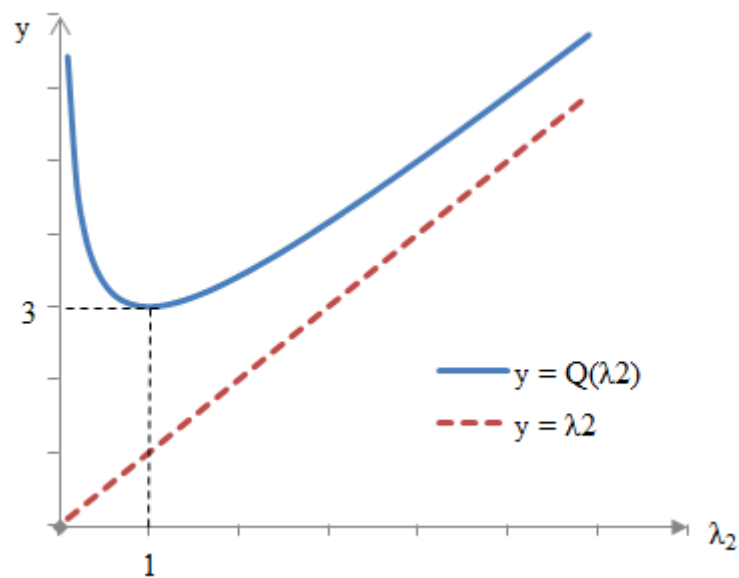
Il est facile de vérifier que P est croissante pour λ_1 supérieur à $\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}$ et décroissante sinon.

Par ailleurs, on a :

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right) = \lambda_2 + \frac{2}{\sqrt{\lambda_2}} \quad (\text{A.3})$$

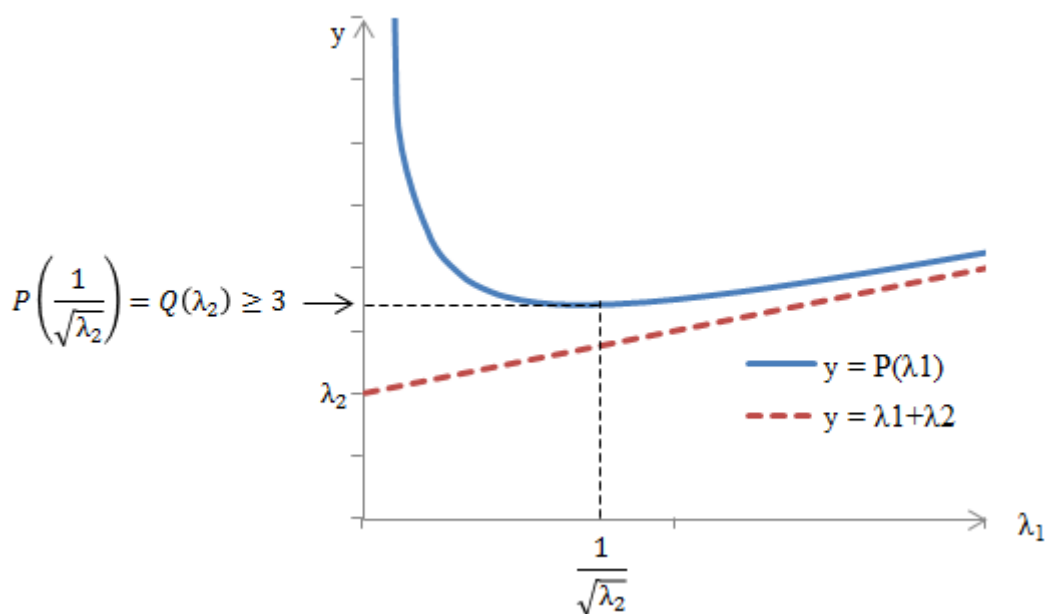
Notons Q cette fonction de λ_2 . Par une étude de fonction triviale (Figure A.1), on prouve facilement que :

$$Q(\lambda_2) = P\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_2}}\right) \geq 3 \quad \forall \lambda_2 > 0 \quad (\text{A.4})$$

FIGURE A.1 – Courbe de la fonction $Q(\lambda_2)$.

On en déduit que (Figure A.2) :

$$P(\lambda_1) = \lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} \geq 3 \quad \forall \lambda_1 > 0 \quad \forall \lambda_2 > 0 \quad (\text{A.5})$$

FIGURE A.2 – Courbe de la fonction $P(\lambda_1)$.

B

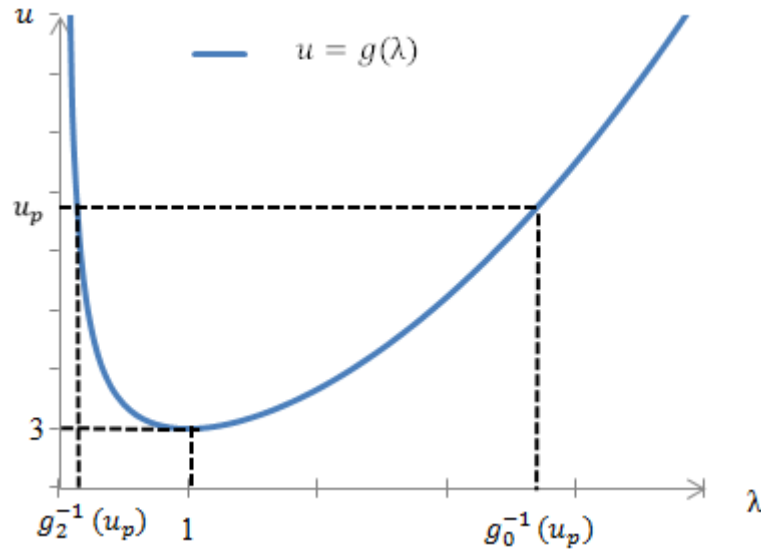
GÉNÉRALISATION DE LA DENSITÉ D'ÉNERGIE NON AFFINE

L'objectif de cette annexe est de calculer l'inverse de la fonction g définie par l'équation (2.58). On rappelle que cette fonction apparaît lorsque l'on étend au cas général la densité d'énergie non affine que l'on a exhibé dans le cas d'une traction-compression uniaxiale (paragraphe 2.2.5).

On remarque d'abord que, d'un point de vue mécanique, les élongations sont strictement positives ($\lambda > 0$), sans quoi on aurait apparition de longueur, de surface ou de volume négatif [125]. On se restreint donc à une étude sur l'intervalle $]0, +\infty[$. La fonction $g(\lambda)$ n'est cependant pas monotone, et donc pas bijective, sur cet intervalle (Figure B.1). En effet, pour une valeur donnée u_p de u , on remarque qu'il existe deux valeurs de λ (notées $g_2^{-1}(u_p)$ et $g_0^{-1}(u_p)$ sur la Figure B.1) qui lui correspondent en abscisse. La fonction g est par contre bijective sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$ pris séparément. Le premier intervalle correspond à de la compression et le second à de la traction. Nous allons donc déterminer la fonction réciproque de g sur chacun de ces deux intervalles. Pour commencer, on déduit facilement de l'équation (2.58) que :

$$\left[g^{-1}(u)\right]^3 - u\left[g^{-1}(u)\right] + 2 = 0 \quad \text{avec} \quad u \geq 3 \quad (\text{B.1})$$

L'équation du troisième degré (B.1) peut être résolue par la méthode de Cardan [8, 126].

FIGURE B.1 – Courbe de la fonction $g(\lambda)$ (équation (2.58))

Ainsi, en posant $p = -u$ et $q = 2$, le discriminant Δ de l'équation (B.1) s'écrit :

$$\Delta = -(4p^3 + 27q^2) = 108 \left[\left(\frac{u}{3}\right)^3 - 1 \right] \quad (\text{B.2})$$

On constate que Δ est positif pour tout $u \geq 3$. Ainsi, d'après les formules de Cardan, les trois solutions de l'équation (B.1) se mettent sous la forme :

$$g_k^{-1}(u) = 2 \sqrt{\frac{u}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\sqrt{\frac{27}{u^3}} \right) + \frac{2k\pi}{3} \right] \quad k = 0, 1, 2 \quad (\text{B.3})$$

ou plus simplement :

$$g_k^{-1}(u) = 2 \sqrt{\frac{u}{3}} \cos \left(\theta + \frac{2k\pi}{3} \right) \quad \theta = \frac{1}{3} \arccos \left(-\sqrt{\frac{27}{u^3}} \right) \quad (\text{B.4})$$

où l'indice k permet de distinguer les trois racines de l'équation polynomiale cubique.

On remarque tout d'abord que :

$$u \geq 3 \Rightarrow \arccos \left(-\sqrt{\frac{27}{u^3}} \right) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \Rightarrow \theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right] \quad (\text{B.5})$$

Nous allons ensuite analyser les solutions $g_0^{-1}(u)$, $g_1^{-1}(u)$ et $g_2^{-1}(u)$ en fonction des valeurs de k :

1. $k = 0$:

L'équation (B.4) se réduit à :

$$g_0^{-1}(u) = 2\sqrt{\frac{u}{3}} \cos \theta \quad (\text{B.6})$$

À partir de l'encadrement (B.5) de θ , nous en déduisons :

$$\frac{1}{2} \leq \cos \theta \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{u}{3}} \leq g_0^{-1}(u) \leq \sqrt{u} \quad (\text{B.7})$$

L'inégalité (B.7) permet de conclure que, pour tout $u \geq 3$, la racine $g_0^{-1}(u)$ est supérieure ou égale à un. Elle correspond donc à un chargement en traction. Elle s'exprime à partir de (B.4) et (B.6) :

$$g_0^{-1}(u) = 2\sqrt{\frac{u}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\sqrt{\frac{27}{u^3}} \right) \right] \quad (\text{B.8})$$

2. $k = 1$:

L'expression de l'équation (B.4) s'écrit :

$$g_1^{-1}(u) = 2\sqrt{\frac{u}{3}} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (\text{B.9})$$

Or d'après l'encadrement (B.5) de θ :

$$-1 \leq \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \leq -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -2\sqrt{\frac{u}{3}} \leq g_1^{-1}(u) \leq -\sqrt{u} \quad (\text{B.10})$$

L'inégalité (B.10) permet de conclure que la racine $g_1^{-1}(u)$ est négative, ce qui ne correspond pas à une solution physiquement admissible.

3. $k = 2$:

L'équation (B.4) s'écrit :

$$g_2^{-1}(u) = 2\sqrt{\frac{u}{3}} \cos \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \quad (\text{B.11})$$

Le tracé de la courbe associée à la fonction $g_2^{-1}(u)$ (Figure B.2) montre que la racine $g_2^{-1}(u)$ correspond à de la compression.

Il apparaît donc, en raison du fait que g n'est pas inversible sur $]0, +\infty[$, que deux solutions sont candidates. La première (équation (B.8)) correspond à de la traction et la seconde

(équation (B.11)) correspond à de la compression. Il faut donc choisir l'une de ces deux solutions possibles. Pour que ce choix soit le plus pertinent possible, on remarque d'abord (Figures 2.10(a) et 2.12 (a)) que l'influence de l'énergie Gaussienne W_{na} est plus importante dans le domaine de la compression ($\lambda^{-1} > 1$) que dans celui de traction. Le choix de la solution $g_2^{-1}(u)$ défini par l'équation (B.11) s'impose ainsi naturellement.

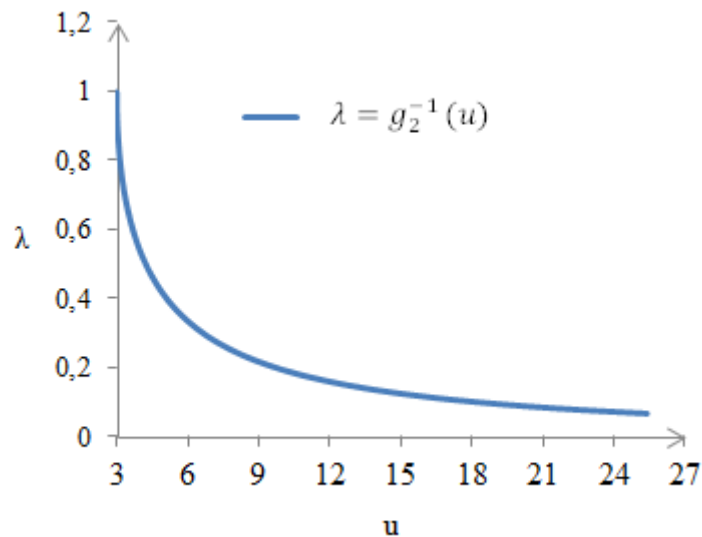


FIGURE B.2 – Courbe de la fonction $g_2^{-1}(u)$ (équation (B.11))

QUELQUES RÈGLES DE CALCUL TENSORIEL DE BASE

L'objectif de cette annexe est de rappeler quelques règles élémentaires de calcul tensoriel utiles en mécanique. Ces règles sont utilisées de manière intensive dans le chapitre 3 de ce mémoire, notamment pour le calcul des tenseurs tangents d'ordre 2 et 4. Pour une revue plus complète du calcul tensoriel dans le cadre de la mécanique des milieux continus, on pourra consulter utilement [139].

Dans cette annexe, on adoptera la convention de sommation sur l'indice répété.

– Le produit tensoriel classique \otimes est défini par :

$$(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D})_{ijkl} = C_{ij}D_{kl} \quad (\text{C.1})$$

– Le double produit contracté : est défini différemment selon l'ordre des tenseurs concernés :

$$\mathbf{C} : \mathbf{D} = C_{ij}D_{ji} = \text{Tr}(\mathbf{C} : \mathbf{D}); \quad (\mathbb{A} : \mathbb{B})_{ijkl} = A_{ijpq}B_{pqkl} \quad (\text{C.2})$$

$$(\mathbb{A} : \mathbf{C})_{ij} = A_{ijkl}C_{kl}; \quad (\mathbf{C} : \mathbb{A})_{ij} = C_{kl}A_{lkij} \quad (\text{C.3})$$

– L'opérateur \odot est défini par :

$$(\mathbf{C} \odot \mathbf{D})_{ijkl} = \frac{1}{2}(C_{ik}D_{jl} + C_{il}D_{jk}) \quad (\text{C.4})$$

où \mathbb{A} et \mathbb{B} représentent des tenseurs d'ordre 4 et \mathbf{C} et \mathbf{D} des tenseurs d'ordre 2.

Les propriétés suivantes sont des propriétés classiques entre opérateurs :

$$\mathbf{C} = \mathbf{\Pi} : \mathbf{C}; \quad \mathbb{A} = \mathbf{\Pi} : \mathbb{A}; \quad (\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) : \mathbf{E} = \mathbf{C} (\mathbf{D} : \mathbf{E}) = (\mathbf{E} : \mathbf{D}) \mathbf{C} \quad (\text{C.5})$$

où $\mathbf{\Pi}$ est un tenseur du quatrième ordre défini par un produit de symboles de Kronecker.

$$\Pi_{ijkl} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (\text{C.6})$$

Enfin, on remarque que :

$$\frac{\partial C_{ij}}{\partial C_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{\Pi} \quad (\text{C.7})$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Ali A., Hosseini M., Sahari B. (2010) *A review and comparison on some rubber elasticity models*. Journals of Scientific and Industrial Research, vol. 69, pp.495-500
- [2] Ambacher H., Enderle H. F., Kilian H. G., Sauter A. (1989) *Relaxation in permanent networks*, Prog. Colloid Polym. Sci., vol. 80, pp. 209-220
- [3] Amin A. F. M. S., Alam M. S., Okui Y. (2002) *A improved hyperelasticity relation in modeling viscoelasticity response of natural and high damping rubbers in compression : experiments, parameter identification and numerical verification*. Mech. Mater., vol. 34, pp. 75-95
- [4] Andrieux F., Saanouni K., Sidoroff F. (1997) *Sur les solides hyperélastiques à compressibilité induite par l'endommagement*. C. R. Acad. Sci, vol. 324 pp. 281-288
- [5] Arruda E., Boyce M. (1993) *A three-dimensional constitutive model for the large stretch behavior of rubber elastic materials*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 41, pp. 389-412
- [6] Ball R. C., Doi M., Edwards S. F., Warner M. (1981) *Elasticity of entangled networks*. Polymer, vol. 22, pp. 1010-1018
- [7] Baker M., Ericksen J. L. (1954) *Inequalities restricting the form of the stress-deformation relation for isotropic elastic solids and Reiner-Rivlin fluid*. Journal of the Washington Academy of Science, vol. 44, pp. 33-35
- [8] Basar Y., Itskov M. (1998) *Finite element formulation of the Ogden material model with application to rubber-like shells*. Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 42, pp. 1279-1305
- [9] Bathe K. J., Bolourchi S. (1979) *Large displacement analysis of three-dimensional beam structures*. Int J Num Meth Eng, vol. 14 pp.961-986
- [10] Bathe K.J. (1982) *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall
- [11] Beda T., Chevalier Y. (2003) *Hybrid continuum model for large elastic deformation of rubber*. Journal of applied physics, vol. 94, pp. 2701-2077

- [12] Beda T., Chevalier Y. (2003) *Non-linear approximation method by an approach in stages*. Computational Mechanics vol. 32, pp. 177-184
- [13] Beda T. (2005) *Reconciling the fundamental phenomenological expression of the strain energy of rubber with established experimental facts*. Journal of polymer sciences : part B : polymer physics, vol. 43, pp. 125-134
- [14] Beda T. (2005) *Optimizing the Ogden Strain Energy Expression of Rubber Materials* Journal of Engineering Materials and Technology, vol. 127, pp. 351-353
- [15] Beda T. (2007) *Modeling hyperelastic behavior of rubber : a novel invariant-based and a review of constitutive models*. Journal of polymer science : part B : polymer physics, vol. 45, 1713-1732
- [16] Beda T. (2014) *An approach for hyperelastic model-building and parameters estimation a review of constitutive models*. European Polymer Journal, vol. 50, pp. 97-108
- [17] Belytschko T., Liu W. K., Moran B. (2000) *Nonlinear finite elements for continua and structures*. Chichester, Wiley
- [18] Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolau G. (1978) *Asymptotic analysis for periodic structure*. North-Holland
- [19] Bergström J. S., Boyce M. C. (1998) *Constitutive modeling of the large stain time-dependent behavior of elastomers*. J. Mech. Phys. Solids, Vol. 46, pp. 931-954
- [20] Biderman V. L. (1958) *Calculations of rubber parts*. Rascheti na Prochnost, vol. 40
- [21] Boonstra B. B. (1965) *Reinforcement of elastomers*. Ed G. Krauss, Interscience
- [22] Boyce M. C. (1996) *Direct comparison of the Gent and Arruda-Boyce constitutive models of rubber elasticity*. Rubber Chem. Technol. vol. 69, pp. 781-785
- [23] Boyce C. M., Arruda E. M. (2000) *Constitutive models of rubber elasticity : a review*. Rubber Chem. Technol., vol. 73, pp. 505-523
- [24] Bueche F. (1960) *Molecular basis for the Mullins effect*. J. Appl. Polym. Sci., vol. 4, p.170
- [25] Bueche F. (1965) *Reinforcement of elastomers*. G. Kraus, Interscience Publishers
- [26] Bukamel A. (2006) *Modélisations mécaniques et numériques des matériaux et structures en élastomères*. PhD thesis, Université de la méditerranée Aix-Marseille II
- [27] Brent R. (1973) *Algorithms for minimization without derivatives*. Prentice-Hall

- [28] Callister William D. (2001) *Science et génie des matériaux*. Mont-Royal Éditions Modulo
- [29] Carroll M. M. (2011) *A strain energy function for vulcanized rubbers* Journal Elasticity, vol. 103, pp. 173-187
- [30] Chamoret D., Peyraut F., Gomes S., Feng Z.-Q. (2010) *Finite element approach applied to human digital model for biomechanical modeling*. International Journal on Interactive Design and Manufacturing, vol. 4, pp. 75-82
- [31] Chamoret D., Roth S., Feng Z.-Q., Yan X.-T., Gomes S., Peyraut F. (2013) *A novel approach to modelling and simulating the contact behaviour between a human hand model and a deformable object*. Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, vol. 16, pp. 130–140
- [32] Ciarlet P. (1988) *Mechanical Elasticity : three dimensional elasticity*, Elsevier
- [33] Cohen A. (1991) *A Padé approximant to the inverse Langevin function*. Rheol. Acta vol. 30, pp. 270-273
- [34] Corbin G. (2011) *Les caoutchoucs dans les collections patrimoniales - Identification et processus de dégradation*. Centre National des Arts Plastiques
- [35] Corsaro, Sperling (1990) *Sound and vibration damping with polymers*. American Chemical Society
- [36] Crisfield M. A. (1991) *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Chichester, John Wiley and Sons, vol. 1
- [37] Dannenberg E. M. (1966) *Molecular slippage mechanism of reinforcement*. Trans. Inst. Rubber, Ind., vol. 42
- [38] Davidson J.D. Goulbourne N.C. (2013) *A non-affine network model for elastomers undergoing finite deformations*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 61, pp. 1784-1797
- [39] Duvaut G. (1990) *Mécanique des milieux continus*. Edition Masson
- [40] Edwards S. F., Vilgis T. A. (1988) *The tube model theory of rubber elasticity*. Rep. Prog. Phy., vol. 51, pp. 243-297
- [41] Einstein A. (1906) *Eine neue Bestimmung des Molekuldimensionen*. Annalen des Physik (Leipzig), vol. 19, pp. 289-306

- [42] Enderle H. F., Kilian H. G. (1987) *General deformation modes of a van der Waals network*. Prog. in Colloid and Polym. Sci., vol. 75, pp. 55-61
- [43] Feng Z.-Q., Joli P., Seguy N. (2004) *FER/Mech-a software with interactive graphics for dynamic analysis of multibody system*. Advances in Engineering Software, vol. 35, pp. 1-8
- [44] Feng Z.-Q., Magnain B., Cros J. M. (2005) *FER/Impact : logiciel de simulation numérique des problèmes d'impact*. 7ème Colloque national en calcul des structure
- [45] Feng Z.-Q., Peyraut F., He Q.-C. (2006) *Finite deformations of Ogden's materials under impact loading*. International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 41 pp. 575–585
- [46] Ferry J. D. (1980) *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley and sons
- [47] Fletcher W., Gent A. (1953) *Non-linearity in the dynamic properties of vulcanised rubber compounds*. IRI Transaction, pp. 266-280
- [48] Flory P. J. (1944) *Network structure and elastic properties of vulcanized rubber*. Chem Rev, vol 35, pp 51-75
- [49] Flory P. J., Erman B. (1982) *Theory of Elasticity of Polymer Networks*. Macromolecules, vol. 15, pp. 800-806
- [50] Flory P. J. (1994) *Network structure and the elasticity properties of vulcanized rubber*. Chem. Rev., vol. 35, pp. 51-75
- [51] Fung Y. C. (1965) *Solid Mechanics*, Prentice-Hall, International Series in Dynamics
- [52] Fontanille M., Gnanou Y. (2002) *Chimie et physico-chimie des polymères*. Dunod
- [53] Gabrieli C. C. (1995) *Modélisation théorique et numérique du comportement viscoélastique d'élastomères sous sollicitations harmoniques*. Thèse de doctorat, Aix-Marseille II, Institut de Mécanique de Marseille
- [54] Garcia R. J., Gonzalez S. Y. L.(2006) *Comparison of hyperelastic material models in the analysis of fabrics*. International Journal of Clothing Science and Technology, vol. 18 number 5, pp. 314-325
- [55] Gent A. N., Thomas A. G. (1958) *Forms of the stored (strain) energy function for vulcanized rubber*. J. Polym. Sci., vol. 28, pp. 625-637
- [56] Gent A. N., Thomas A. G. (1959) *Deformation of formed elastic materials*. J. of Applied Polymer. Science., vol. 1, pp. 107-113

- [57] Gent A. N. (1996) *A new constitutive relation for rubber*. Rubber Chem. Technol., vol. 69, pp. 59-61
- [58] Germain P. (1973) *Cours de mécanique des milieux continus*. Masson et Cie
- [59] Govindjee S., Simo J. C. (1991) *A micro-mechanically based continuum damage model of carbon black-filled rubbers incorporating Mullins effect*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 39 pp. 87-112
- [60] Harb N., Labeled N., Domaszewski M., Peyraut F. (2011) *A New Parameter Identification Method of Soft Biological Tissue Combining Genetic Algorithm with Analytical Optimization.*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 200, Issues 1-4, pp. 208-215
- [61] Harb N. (2013) *Identification inverse de paramètres biomécanique en hyperélasticité anisotrope*. Thèse de l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard
- [62] Harb N., Labeled N., Domaszewski M., Peyraut F. (2014) *Optimization of material parameter identification in biomechanics*. Structural and Multidisciplinary Optimization, vol. 49, Issue 2, pp. 337-349
- [63] Han W. H., Horkay F., Mckenna G. B. (1999) *Mechanical and swelling behaviors of rubber : a comparison of some molecular models with experiment*. Mathematics and Mechanics Solids, vol. 4, pp. 139-167
- [64] Hart-Smith L. J. (1966) *Elasticity parameter for finite deformations of rubber-like materials*. Dpt. of Applied Mechanics, Monash University, Clayton, Victoria, vol. 17
- [65] Heinrich G., Kaliske M. (1997) *Theoretical and numerical formulation of a molecular based constitutive tube-model of rubber elasticity*. Comput. Theo. Polym. Sci., vol. 7, pp. 227-241
- [66] Heinrich, Klüppel (2002) *Recent advances in the theory of filler networking in elastomers*. Advances in Polymer Science, vol. 160
- [67] Heuillet P. (1992) *Caractérisation de l'endommagement des propergols solides composites*. Ph. D. thesis, Université de Technologie de Compiègne.
- [68] Holzapfel, G. A., Gasser T., Ogden R. (2000) *A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comparative study of material models*. J. Elast., vol. 61, pp. 1-48

- [69] Holzapfel G. A. (2000) *Nonlinear solid mechanics : A Continuum Approach for Engineering*. John Wiley & Sons
- [70] Horgan C. O., Saccomandi G., (2002) *Constitutive modelling of rubber-like and biological materials with limiting chain extensibility*. Mathematics and Mechanics of Solids, vol. 7, pp. 353-371
- [71] Horgan C. O., Saccomandi G. (2002) *A molecular-statistical basis for the Gent constitutive model of rubber elasticity* Journal of Elasticity, vol. 68, pp. 167-176
- [72] Horgan C.O., Saccomandi G. (2006) *Phenomenological hyperelastic strain-stiffening constitutive models for rubber*. Rubber Chem. Technol., vol. 79, pp. 152–169
- [73] Hoss L., Marczak J. R. (2010) *A new constitutive model for rubber-like materials* Mecanica computacional, vol. 19, pp. 2759-2773
- [74] Huang K. (1987) *Statistical mechanics*. John Wiley & Sons
- [75] Idjeri M. (2013) *Sur l'analyse des déformations homogènes et hétérogènes des structures en élastomères*. PhD. Thesis, Université Paris-Est
- [76] Ishiara A., Hashitsume N., Tatibana M. (1951) *Statistical theory of rubber-like elasticity IV (two dimensional stretching)*. J. Chem. Phys., vol. 19, pp. 1508-1512
- [77] Itskov M., Dargazany R., Hornes K. (2011) *Taylor expansion of the inverse function with application to the Langevin function*. Mathematics and Mechanics of Solids, vol. 17, pp. 693-701
- [78] James H. M., Guth E. (1943) *Theory of the elastic properties of the rubber*. J. Chem. Phys., vol. 11, pp. 455-481
- [79] James A. G., Green A., Simpson G. M. (1975) *Strain energy functions of rubber I. Characterization of gum vulcanizates*. J. Appl. Polym. Sci., vol. 19, pp. 2033-2058
- [80] Jernigan R. L., Flory P.J. (1969) *Distribution functions for chain molecules*. J. Chem. Phys., vol. 50, pp. 4185-4200
- [81] Kaliske M., Heinrich G. (1999) *An extended tube-model for rubber elasticity : statistical-mechanical theory and finite element implantation*. Rub. Chem. Technol., vol. 72, pp. 602-632
- [82] Kausch H. H., Heymans N., Plummer C. J., Decroly P. (2001) *Matériaux polymères : propriété mécaniques et physiques. Principes de mise en oeuvre*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, vol. 6

- [83] Khajehsaeid H., Arghavani J., Naghdabadi R. (2013) *A hyperelastic constitutive model for rubber-like materials*. European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 38, pp.144-151
- [84] Kilian H. G. (1981) *Equation of state of real networks*. Polymer, vol. 22, pp. 209-217
- [85] Kilian H. G., Enderle H. F., Unseld K. (1986) *The use of the van der Waals model to elucidate universal aspects of structure-property relationships in simply extended dry and swollen rubbers*. Colloid Polym. Sci., vol. 264, pp. 866-879
- [86] Kilian H. G., Schenk H., Wolff S. (1987) *Large deformation in filled networks of different architecture and its interpretation in terms of van der Waals model*. Colloid Polym. Sci., vol. 265, pp. 410-423
- [87] Klüppel M. (2003) *The role of disorder in filler reinforcement of elastomers on various length scales*. Advances in Polymer Science, vol. 164, pp. 1-86
- [88] Ko W. L. (1965) *Deformations of formed elastomer*. Journal of Cellular Plastics, pp. 45-50
- [89] Kraus G. (1984) *Applied polymer science*. Applied Polymer Symposium, pp. 39-75
- [90] Kroon M. (2011) *An 8-chain model for rubber-like materials accounting for non-affine chain deformations and topological constraints*. Journal of Elasticity, vol. 102, pp. 99-116
- [91] Kuhn W., Guth E. (1942) *Beziehungen zwischen elastischen konstanten und dehnungsdoppelbrechung hochelastischer stoffe*. Kolloideitschrift, vol. 101, pp. 248-271
- [92] Lambert-Diani J., Rey C. (1998) *Elaboration de nouvelles lois de comportement pour les élastomères - principe et avantages*. C. R. Acad. Sci., vol. 326, pp. 483-488
- [93] Lambert-Diani J., Rey C. (1999) *New phenomenological behavior laws for rubbers and thermoplastic elastomers*. Eur. J. Mech. A/Solids, vol. 18, pp. 1027-1043
- [94] Lectez A.-S, Verron E., Huneau B. (2014) *How to identify a hyperelastic constitutive equation for rubber-like materials with multiaxial tension–torsion experiments*. International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 65, pp. 260–270
- [95] Legorju-jago K., Bathias C. (2006) *Fatigue initiation and propagation in natural and synthetic rubbers*. International Journal of Fatigue, vol. 24, pp. 85-92
- [96] Lindley P. B. (1974) *Le calcul des éléments en caoutchouc naturel dans l'art de l'ingénieur*. Technical report

- [97] Maas S., Gronski W. (1995) *Deformation of filler morphology in strained carbon black loaded rubbers. A study by Atomic Force Microscop.* Rubb. Chem. Technol., vol. 68, p. 652
- [98] Marchal J. (2006) *Cristallisation des caoutchoucs chargés et non chargés sous contraintes : effet sur les chaînes amorphes.* Thèse de Doctorat troisième cycle de l'Université de Paris XI
- [99] Marckmann G., Verron E., Gornet L., Chagnon G., Charrier P., et Fort P. (2002) *A theory of network alteration for the Mullins effect.*, J. Mech. Phys. Solids, vol. 50, pp. 2011-2028
- [100] Mark J. E., Erman B. (1988) *Rubberlike elasticity - A molecular primer.* Journal Wiley & Sons
- [101] Mars W. V., Fatemi A. (2004) *A literature survey on fatigue analysis for rubber.* International Journal of Fatigue, vol. 24, pp. 949-961
- [102] Martinez J. M. (2005) *Modélisation et caractérisation du comportement hyper-visco-plastique d'un élastomère sous sollicitations multi-harmoniques et à différentes températures.* PhD thesis, Université de la méditerranée Aix-Marseille II
- [103] Meyer K., Ferri C. (1935) *Sur l'élasticité des caoutchoucs.* Helv. Chim. Acta, vol. 18, pp. 570-589
- [104] Miehe C. (1993) *Computation of isotropic tensor functions.* Comm. Numer. Meth. Engng., vol. 9 pp. 889-896
- [105] Miehe C. (1995) *Discontinuous and continuous damage evolution in Ogden-type large-strain elastic materials.* European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 14 pp. 697-720
- [106] Millard F. B. (2008) *On constitutive models for limited elastic, molecular based materials.* Mathematics and Mechanics of Solids, vol. 13, pp. 375-387
- [107] Mooney M. (1940) *A theory of large elastic deformation.* J. Appl. Phys., vol. 11, pp. 582-592
- [108] Moreau C. (2000) *Étude expérimentale et numérique de l'hyperélasticité avec prise en compte de la compressibilité. Identification paramétrique inverse. Application aux élastomères compacts : polychloroprène, mélanges à base de caoutchouc naturel.* Thèse de Doctorat de l'Université de Bretagne Sud

- [109] Mullins L. (1947) *Effect of stretching on the properties of rubber*. J. Rubber Res., vol. 16, p. 275
- [110] Mullins L., Tobin N. R. (1957) *Theoretical model for the elastic behavior of filler-reinforced vulcanized rubber*. Rubb. Chem. Tech., vol. 30, pp. 551-571
- [111] Mullins L. (1969) *Softening of rubber by deformation*. Rubber Chem. Technol., vol. 42, pp. 339-345.
- [112] Natta G., Danusso F. (1967) *Stereoregular polymers and stereospecific polymerizations*. Pergamon Press
- [113] Nguessong N. A., Beda T., Peyraut F. (2014) *A new based errors approach to approximate the inverse Langevin function*. Rheologica Acta, vol. 53, pp. 585-591
- [114] Nunes L. C. S. (2011) *Mechanical characterization of hyperelastic polydimethylsiloxane by simple shear test*. Materials Science and Engineering A, vol. 528, pp. 1799-1818
- [115] Nunes L. C. S., Moreira D. C. (2013) *Simple shear under large deformation : Experimental and theoretical analyses*. European Journal of Mechanics A/Solids, vol. 42, pp. 315-322
- [116] Ogden R. W. (1972) *Large deformation isotropic elasticity - on the correlation of theory and experiment for incompressible rubberlike solids*. Proc. R. Soc. Lond. A., vol. 326, pp. 565-584
- [117] Ogden R.W. (1972) *Large deformation isotropic elasticity : on the correlation of theory and experiment for compressible rubberlike solids*. Proc. R. Soc. Lond. A., vol. 328, pp. 567-583
- [118] Ogden R. W. (1984) *Non-linear elastic deformation*. Dover Publication
- [119] Ogden R. W., Saccomandi G., Sgura I. (2004) *Fitting hyperelastic models to experimental data*. Computational Mechanics, vol. 34, pp. 484-502
- [120] Ould Eyih A. (1993) *Contribution à l'étude du comportement en grandes déformations des mousses - Modèle de simulation numérique de chargement d'un siège par un mannequin*. Thèse de l'École Centrale de Lyon
- [121] Payne A. P. (1960) *A note on the existence of a Yield Point in the dynamique modulus of loaded vulcanizates.*, J. Appl. Polym. Sci., vol. 3, pp. 127-127

- [122] Perrin G. (2000) *Analytic stress-strain relationship for isotropic network model of rubber elasticity*. C. R. Acad. Sci., vol.328, pp.5-10
- [123] Peyraut F., Feng Z.-Q., Laped N. (2003) *Solution of large deformation contact problems with friction between Blatz-Ko hyperelastic bodies*. International Journal of Engineering Science, vol. 41, pp. 2213-2225
- [124] Peyraut F. (2004) *Étude numérique du modèle hyperélastique compressible de Blatz-Ko en mécanique non linéaire*. Mémoire HDR, Université de Franche-Comté
- [125] Peyraut F., Feng Z.-Q., Laped N. (2007) *A material-independent algorithm for preserving of the orientation of the spatial basis attached to deforming medium*. Computational Mechanics, vol. 40, pp. 1053–1060
- [126] Peyraut F., Feng Z.-Q., He Q.-C., Laped N. (2009) *Robust numerical analysis of homogeneous and non-homogeneous deformations*. Applied Numerical Mathematics, vol. 59, pp. 1499-1514
- [127] Peyraut F., Chamoret D., Gomes S., Feng Z.-Q. (2010) *Implémentation éléments finis du modèle hyperélastique anisotrope HGO*. European Journal of Computational Mechanics, vol. 19, pp. 1-24
- [128] Peyraut F., Feng Z.-Q., Laped N., Renaud C. (2010) *A closed form solution for the uniaxial tension test of biological soft tissues*. International Journal of Non-Linear Mechanics, vol. 45, pp. 535-541
- [129] Press W., Teukolsky S., Vetterling W., Flannery B. (1994) *Numerical recipes in C. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press
- [130] Pucci E., Saccomandi G. (2002) *A note on the Gent model for rubber-like materials*. Rubber Chemistry and Technology, vol. 75, pp. 839-851
- [131] Puso M. (2003) *Mechanistic constitutive models for rubber elasticity and viscoelasticity*. PhD thesis, University of California
- [132] Rahman N., Isanasari A., Anggraeni R., Honggokusumo S., Iguchi M., Masuko T., Tashiro K. (2003) *Modern interpretation on the high stretching of natural rubber attained by the classic racking method*. Polymer, vol. 44, pp. 283-288
- [133] Ramier J. (2004) *Comportement mécanique d'élastomères chargés, influence de charge-polymère, influence de la morphologie*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

- [134] Renauld C., Cros J. M., Feng Z., Yang B. (2009) *The Yeoh model applied to the modeling of large deformation contact/impact problems*. Int. Journal of Impact Engineering, vol. 36, pp. 659-666
- [135] Rivlin R. S. (1948) *Large elastic deformations of isotropic materials. Fundamental concepts*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 240, pp. 459-490
- [136] Rivlin R. S. (1948) *Developments of the general theory large elastic deformations of isotropic materials. IV. Further developments of the General Theory*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, vol. 241, pp. 379-397
- [137] Rivlin R. S., Saunders D. W. (1951) *Large elastic deformation of isotropic materials-VII experiments on the deformation rubber*. Philos. T. Roy. Soc., vol.243, pp. 251-288
- [138] Giuseppe Saccomandi (2004) *Phenomenology of Rubberlike Materials*. Mechanics and Thermomechanics of Rubberlike Solids, International Centre for Mechanical Sciences, vol. 452, pp. 91-134
- [139] Salençon J. (1988) *Mécanique des milieux continus*. Édition : Paris : Ed. Marketing, 2 vol. (270, 316 p.), Collection : Ellipses
- [140] Saintier N., Cailletaud G., Piques R. (2006) *Crack initiation and propagation under multiaxial fatigue in a natural rubber*. International Journal of Fatigue, vol. 28, pp. 61-72
- [141] Saleeb A. F., Chang T. Y. P., Arnold S. M. (1992) *On the development of explicit robust schemes for implementation of a class of hyperelastic models in large-strain analysis of rubbers*. Int. J. Numer. Meth. Engng., vol. 33, pp. 1237–1249
- [142] Sanchez-Palencia E. (1980) *Non homogeneous media and vibration theory*. Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag, vol. 129
- [143] Simo J. C., Mieche C. (1992) *Associative coupled thermoplasticity at finite strains : Formulation, numerical analysis and implementation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 85, pp. 273-310
- [144] Steinmann P., Hossain M., Possart G. (2012) *Hyperelastic models for rubber-like materials : consistent tangent operators and suitability for Treloar's data*. Arch. Appl. Mech. DOI 10.1007/s00419-012-0610-z

- [145] Ta A.T. (2014) *Modélisation de lois de comportement anisotropes par la théorie mathématique des invariants - Application aux matériaux biologiques fibreux*. Thèse de Doctorat de l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard.
- [146] Taber A. L. (2004) *Nonlinear theory of elasticity - Applications in biomechanics*. World Scientific Publishing
- [147] Toki S., Fujimaki T., Okuyama M. (2000) *Strain-induced crystallization of natural rubber as detected real-time by wide-angle X-ray diffraction technique*. *Polymer*, vol. 41, pp. 5423-5429
- [148] Treloar L. R. G. (1944) *Stress-strain data for vulcanized rubber under various types of deformation*. *Trans. Faraday Soc.*, vol. 40, pp. 59-70
- [149] Treloar L. R. G. (1954) *The photo-elastic properties of short chain molecular networks*. *Trans. Faraday Soc.*, vol. 50, pp. 881-896
- [150] Treloar L. R. G. (1973) *The elasticity and related properties of rubbers*, IOPscience, *Rep. Prog. Phys.*, vol. 36, pp. 755-826
- [151] Treloar L. R. G. (1975) *The Physics of Rubber Elasticity*, 3rd ed., Clarendon Press
- [152] Treloar L. R. G., Riding G. (1978) *A non-Gaussian theory for rubber in biaxial strain. I. Mechanical properties*. *Proc. R. Soc. Lond.*, vol. 369, pp. 261-280
- [153] Valanis K. C., Landel R. F. (1967) *The strain-energy function of a hyperelastic material in terms of the extension ratios*. *J. Appl. phys.*, vol. 8, pp. 2997-3002
- [154] Vallée D., Feng Z.-Q., Fortuné D., Peyraut F. (2006) *The 3é hyperelastic model applied to the modeling of 3D impact problems*. *Finite Element in Analysis and Design*, vol. 43, pp. 51-58
- [155] Verron E., Marckmann G., Chagnon G. (2004) *A comparison of the Hart-Smith model with Arruda-Boyce and Gent formulation for rubber elasticity*. *Rubber Chem. Technol.*, vol. 77, pp. 724-735
- [156] Verron E., Marckmann G. (2006) *Comparison of hyperelastic models for rubber-like materials*. *Rubber Chemistry and Technology*, vol. 79, pp. 835-858
- [157] Vilgis T. A. (2005) *Time scales in the reinforcement of elastomers*. *Polymer*, vol. 45, pp. 4223-4229
- [158] Wang M. C., Guth E. (1952) *Statistical Theory of Networks of Non-Gaussian Flexible Chains*. *J. Chem. Phys.*, vol. 20, pp. 1144-1157

- [159] Weiss J. A., Maker B. N., Govindjee S. (1996) *Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic hyperelasticity*. Computational Methods Applied Engineering, vol. 135, pp. 107-128
- [160] Wineman A. S., Rajagopal K. R. (2000) *Mechanical response of polymers. An introduction*. Cambridge University Press
- [161] Wineman A. (2005) *Some results for generalized neo-Hookean elastic materials*. Int. J. Non-linear Mech., vol. 40, pp. 271-279
- [162] Wood R.D., Zienkiewicz O. C. (1977) *Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells*. Comput. and Struct., vol. 7, pp. 725-735
- [163] Wu P. D., Van Der Giessen E. (1993) *On improved network models for rubber elasticity and their applications to orientation hardening in glassy polymers*. J. Mech. Phys. Solids, vol. 41, pp. 427-456
- [164] Yatsuyanagi F., Suzuki N., Ito M., Kaidou H. (2001) *Effects of secondary structure of fillers on the mechanical properties of silica filled rubber systems*. Polymer, vol. 42, p.9523
- [165] Yeoh O. H. (1990) *Characterization of elastic properties of carbon-black-filled rubber vulcanizates*. Rubber. Chem. Technol., vol. 63, pp. 792-805
- [166] Yeoh H. O., Fleming D. P. (1997) *A new attempts to reconcile the statistical and phenomenological theories of rubber elasticity*. Journal of Polymer Science : Part B : Polymer Physics, vol. 35, pp. 1919-1931
- [167] Zhu-Ping Huang (2014) *A novel constitutive formulation for rubberlike materials in thermoelasticity*. Journal of applied Mechanics, vol. 81, pp. 041013-1/0.013-8
- [168] Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. (1991) *The Finite element method*. 4th Edition Berkshire - McGraw-Hill, vol. 2

Résumé :

Les travaux de cette thèse ont porté sur le développement d'une nouvelle loi de comportement hyperélastique, isotrope et incompressible permettant de modéliser les matériaux caoutchouteux en grande déformation et en grand déplacement. Cette nouvelle loi combine une approche moléculaire et une approche phénoménologique, ce qui permet de couvrir un spectre large de sollicitations. Elle est constituée par la superposition de quatre termes:

- un terme lié à la contrainte d'entrelacement des chaînes macromoléculaires observée avec le phénomène de cristallisation. Ce terme est modélisé par une fonction logarithme provenant de l'énergie phénoménologique de Gent-Thomas;
- un terme lié à l'hypothèse des déformations affines observées avec le raidissement final de certaines chaînes macromoléculaires des élastomères. Ce terme provient de la probabilité non-Gaussienne de Langevin. Nous l'avons modélisé par la loi moléculaire 8-chaînes d'Arruda-Boyce avec un aménagement qui consiste à utiliser une approximation originale de la fonction de Langevin inverse;
- un terme lié à la contrainte des chaînes ayant des déformations non-affines. Ce terme est modélisé par une fonction Gaussienne sous forme intégrale. Il s'agit d'une contribution originale de ce travail de thèse;
- une partie volumique standard permettant de prendre en compte l'incompressibilité du matériau.

Les deux principales originalités de la thèse concernent donc l'élaboration d'une approximation inédite de la fonction de Langevin inverse ainsi que la construction d'un nouveau modèle hyperélastique isotrope, hybride et incompressible.

Afin d'étudier la pertinence du modèle proposé, des comparaisons ont été réalisées avec plusieurs jeux de données expérimentales disponibles dans la littérature. Ces comparaisons ayant été couronnées de succès, l'implémentation numérique du modèle que nous proposons a été effectuée dans le code universitaire aux éléments finis FER.

Mots-clés : Élastomères. Grandes déformations. Hyperélasticité. Implémentation Éléments Finis

Abstract:

This thesis concerns the development of a new incompressible isotropic hyperelastic behavior law allowing the modeling of rubber materials with large strain and large displacement. This new law mixes a molecular approach with a phenomenological one and therefore covers a wide range of loading. It has been built by a sum over four terms:

- a term related to the interleaving macromolecular chains observed with the crystallization phenomenon. This term is modeled by a logarithmic function coming from the phenomenological energy of Gent-Thomas,
- a term related to the assumption of affine deformations observed with the final stiffening of a part of macromolecular elastomeric chains. This term comes from the non Gaussian probability of Langevin. We have modeled it by the 8-chains molecular law of Arruda-Boyce but with an original approximation of the inverse of the Langevin function,
- a term related to the stress occurring with non affine strains. This term has been modeled by a Gaussian function adopting an integral form. This is one of the original contribution of this thesis work,
- a classical volumetric term taking into account the incompressibility of the material.

The two main originalities of the thesis are therefore the introduction of a new approximation of the inverse of the Langevin function and the development of a new hyperelastic energy density which is isotropic, incompressible and hybrid.

In order to study the efficiency of the proposed model, comparisons were made with several experimental data available in the literature. These comparisons have been successful and we have implemented our model in the university finite element software FER.

Keywords: Rubber-like material. Large strain. Hyperelasticity. Finite Element implementation.

The logo for the SPIM (École doctorale SPIM) features the letters 'S', 'P', 'I', and 'M' in a large, white, sans-serif font. The 'S' is stylized with a blue horizontal bar passing through its middle. The letters are arranged in a slightly overlapping manner.

■ École doctorale SPIM - Université de Technologie Belfort-Montbéliard

F - 90010 Belfort Cedex ■ tél. +33 [0]3 84 58 31 39

■ ed-spim@univ-fcomte.fr ■ www.ed-spim.univ-fcomte.fr

