Annexe A

Photos des interrogations orales dites classiques

A.1. Étudiant K.

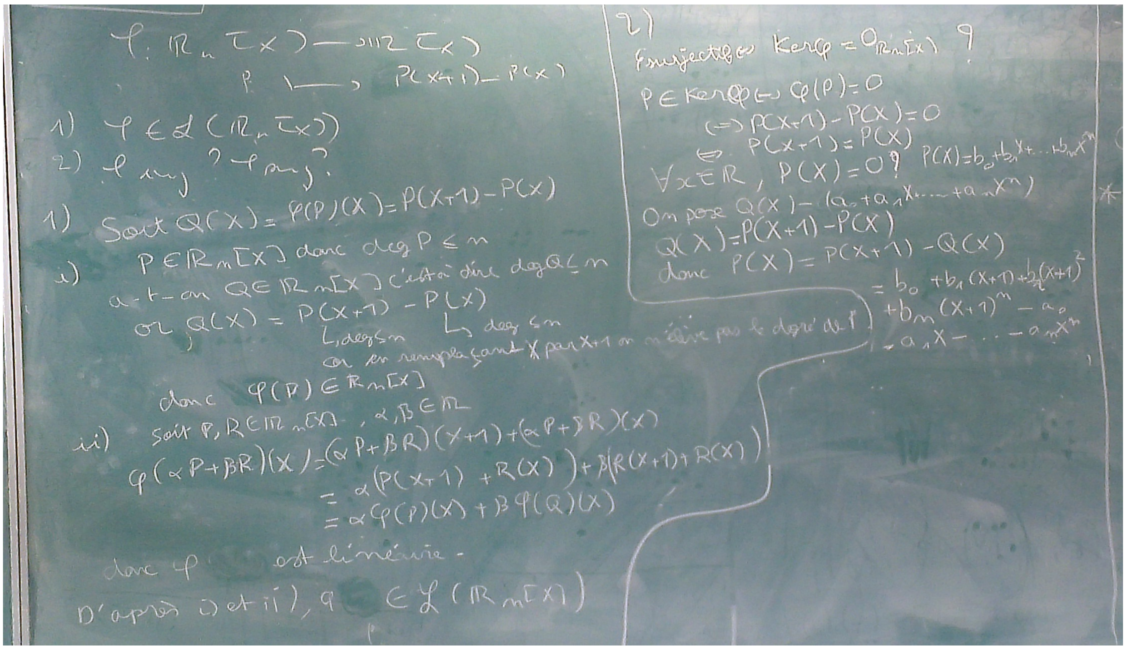

Figure A.1.

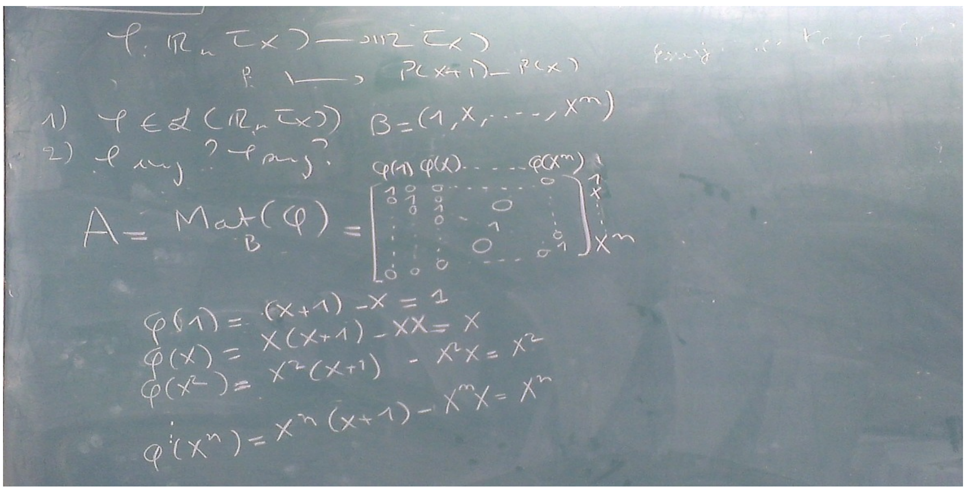

Figure A.2.

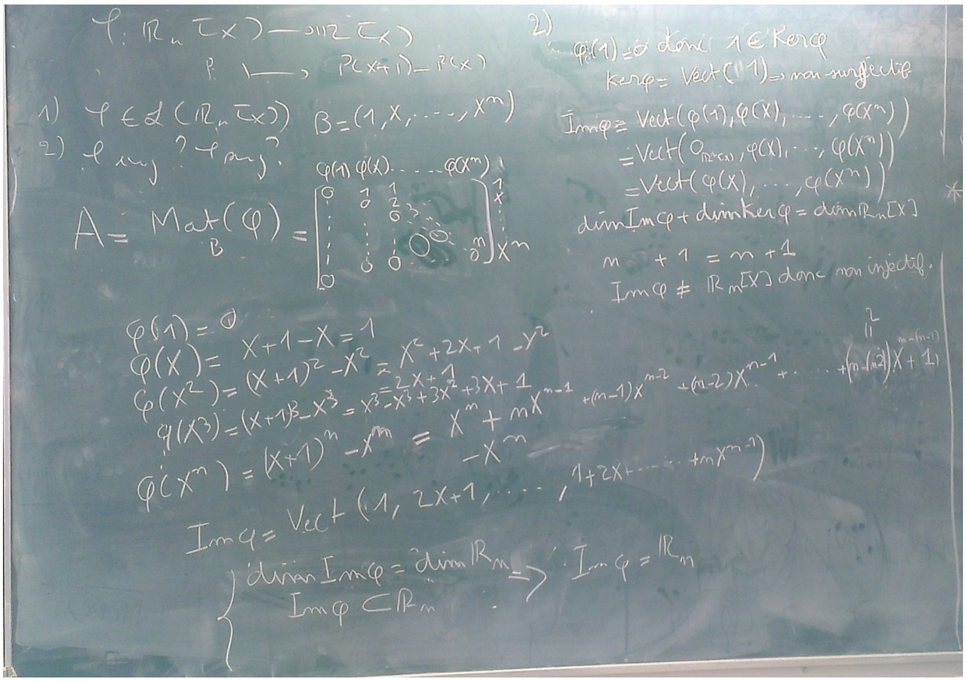

Figure A.3.

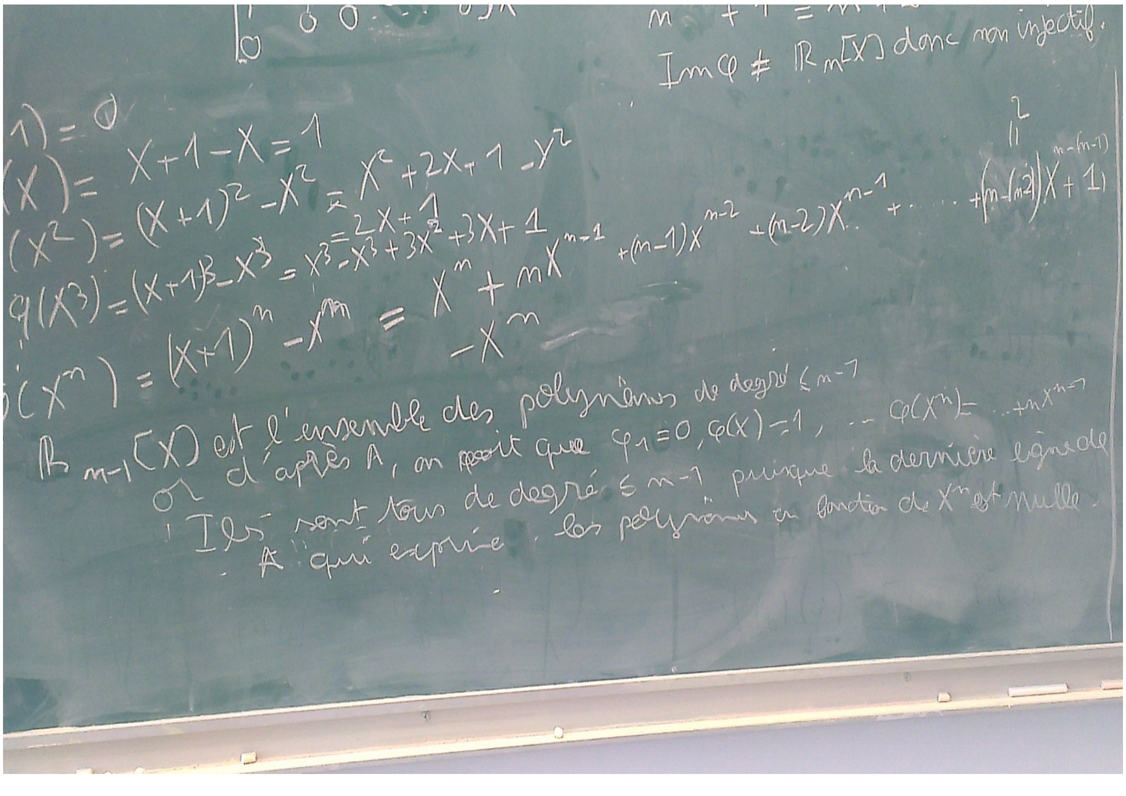

Figure A.4.

A.2. ÉTUDIANT L.

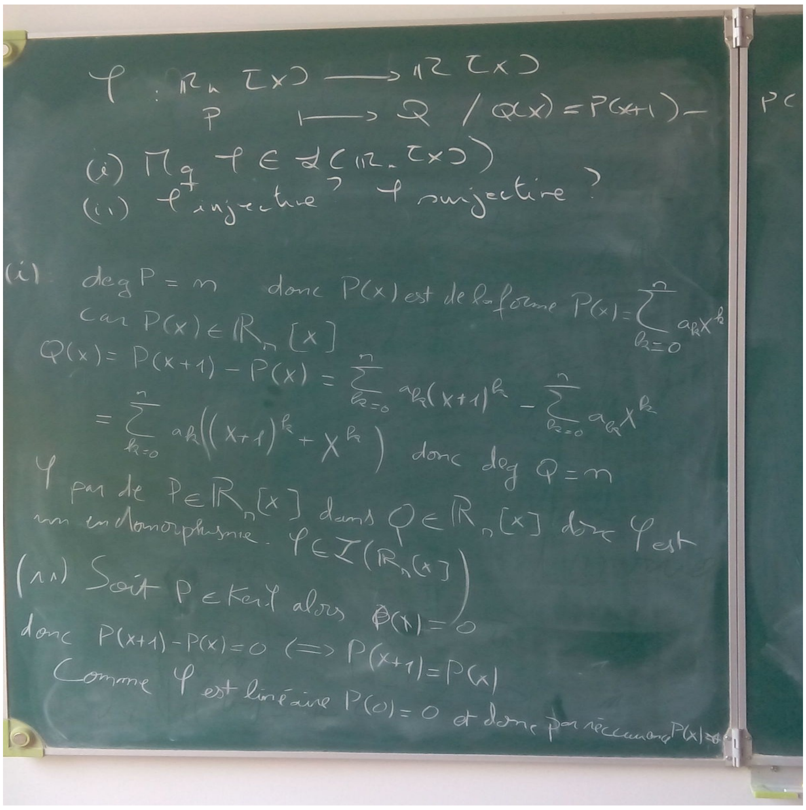

Figure A.5.

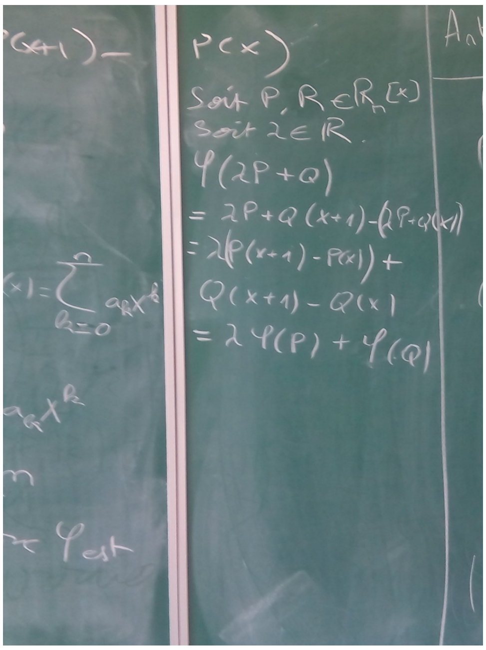

Figure A.6.

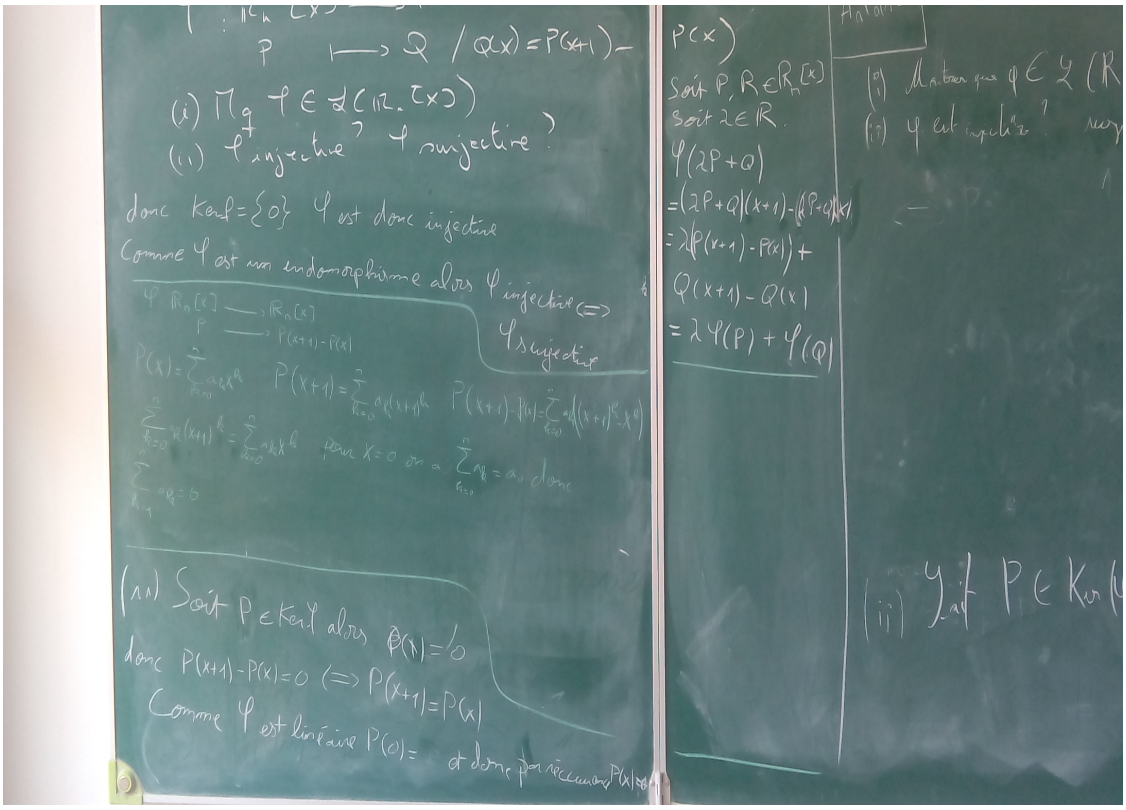

Figure A.7.

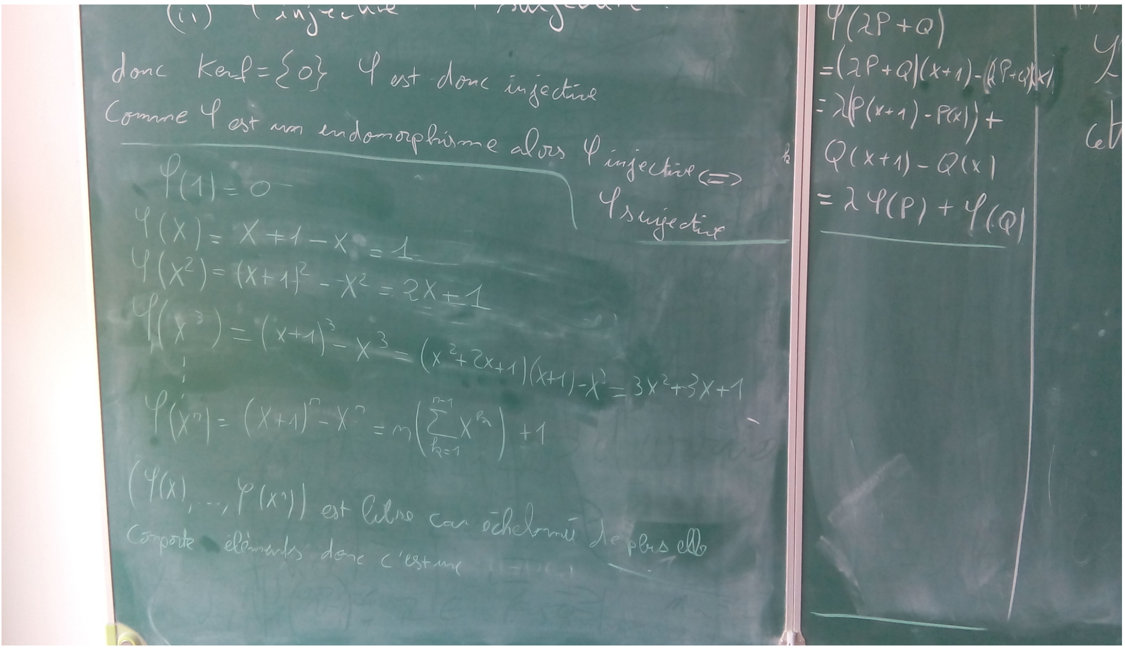

Figure A.8.

A.3. ÉTUDIANTE B.

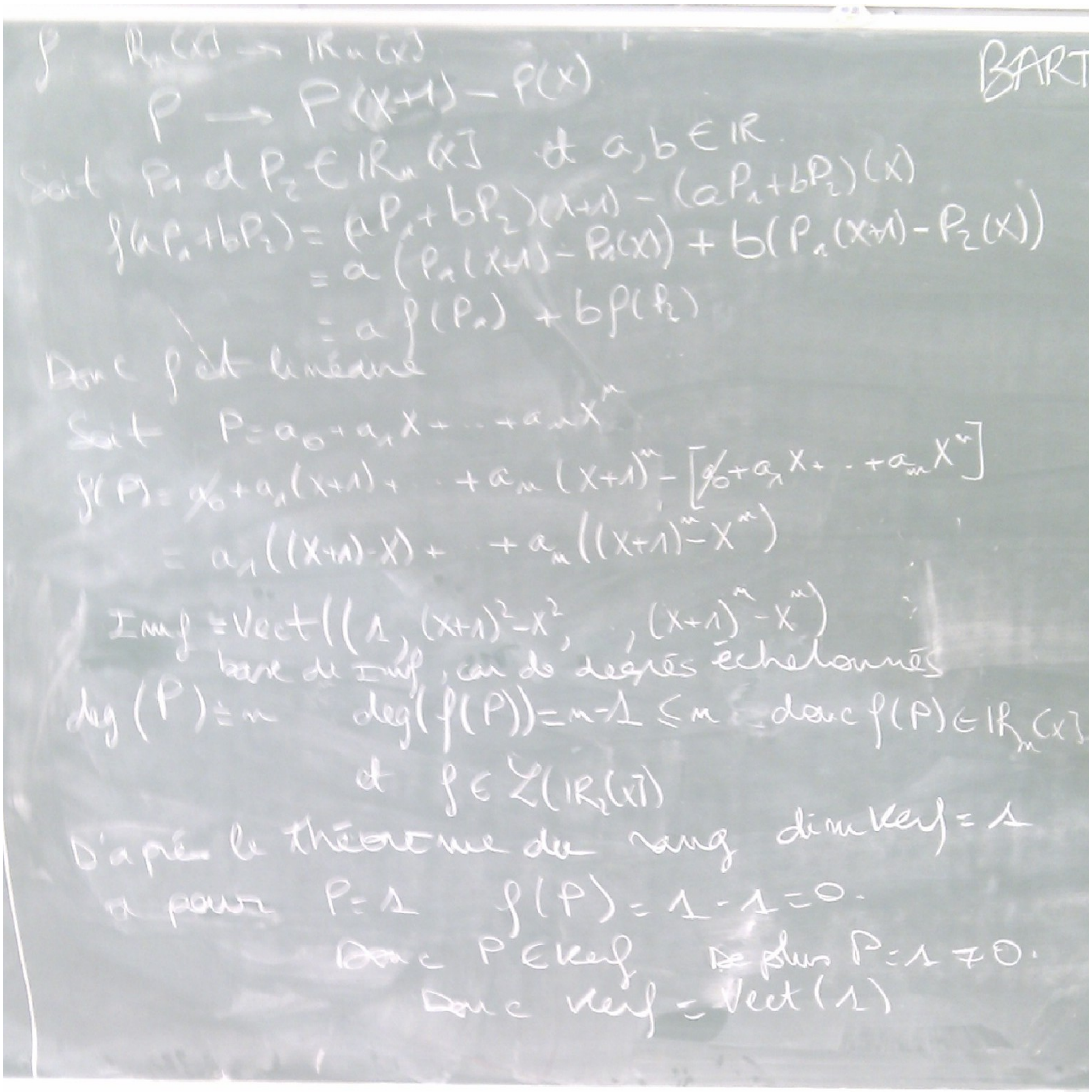

Figure A.9.

A.4. Étudiant C.

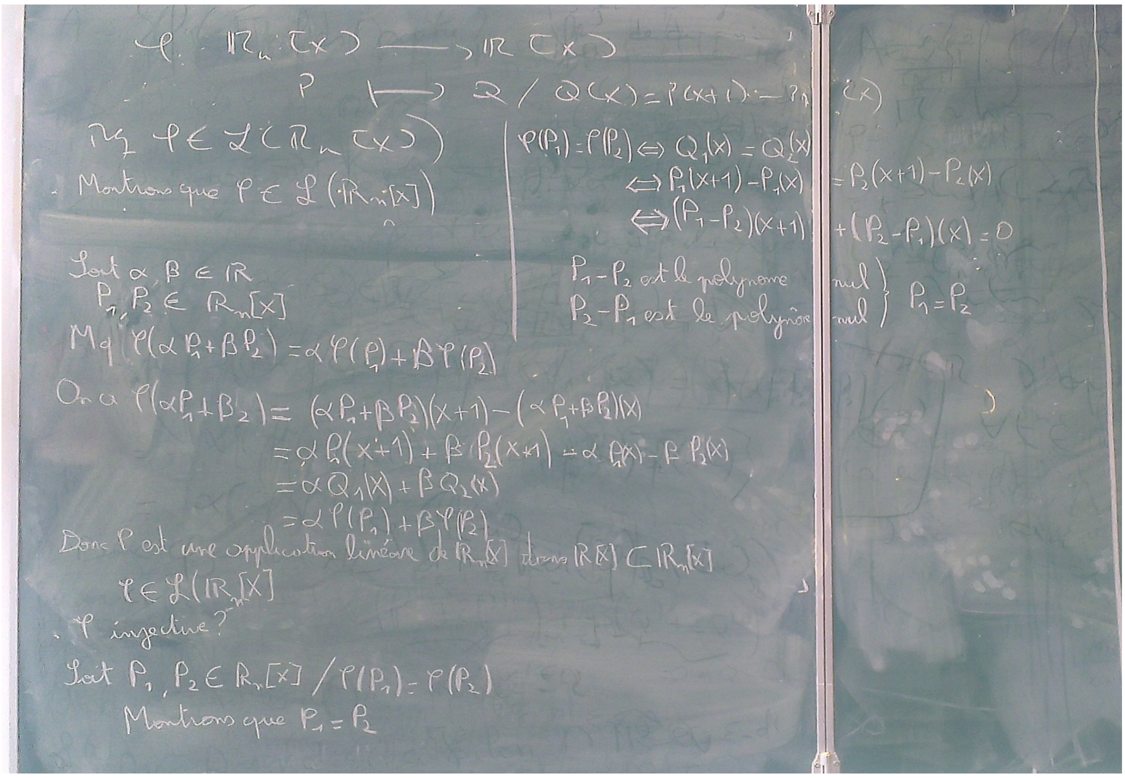

Figure A.10.

Annexe B

Photos des interrogations orales dites expérimentales

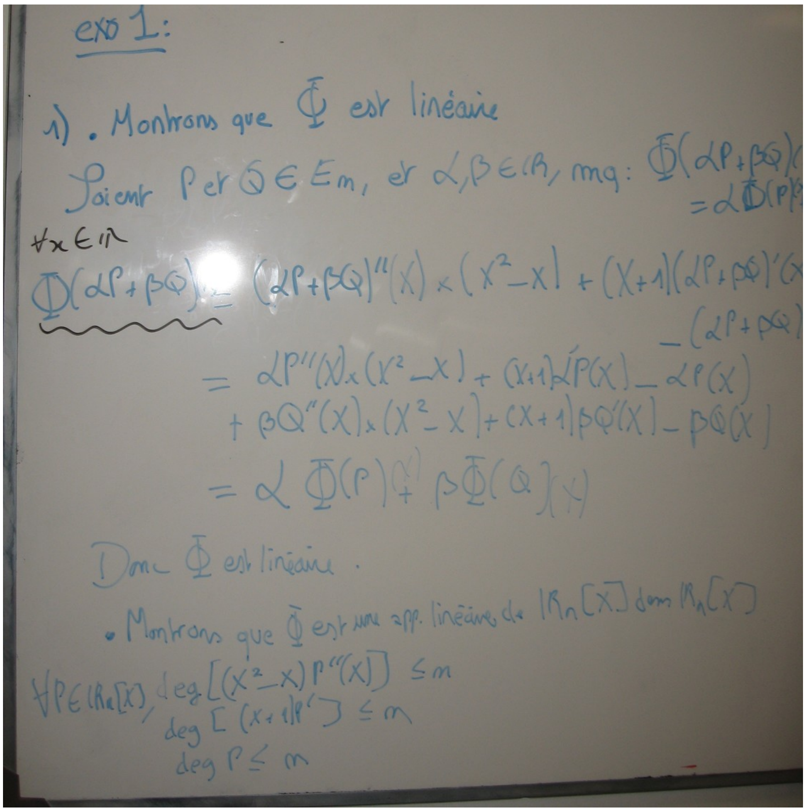

Figure B.1.

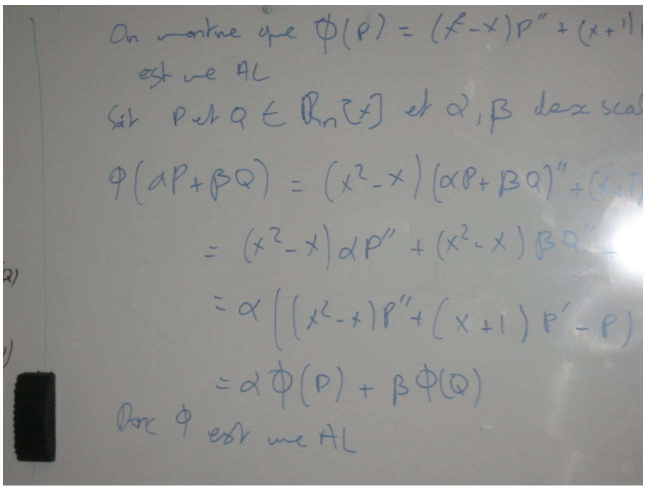

Figure B.2.

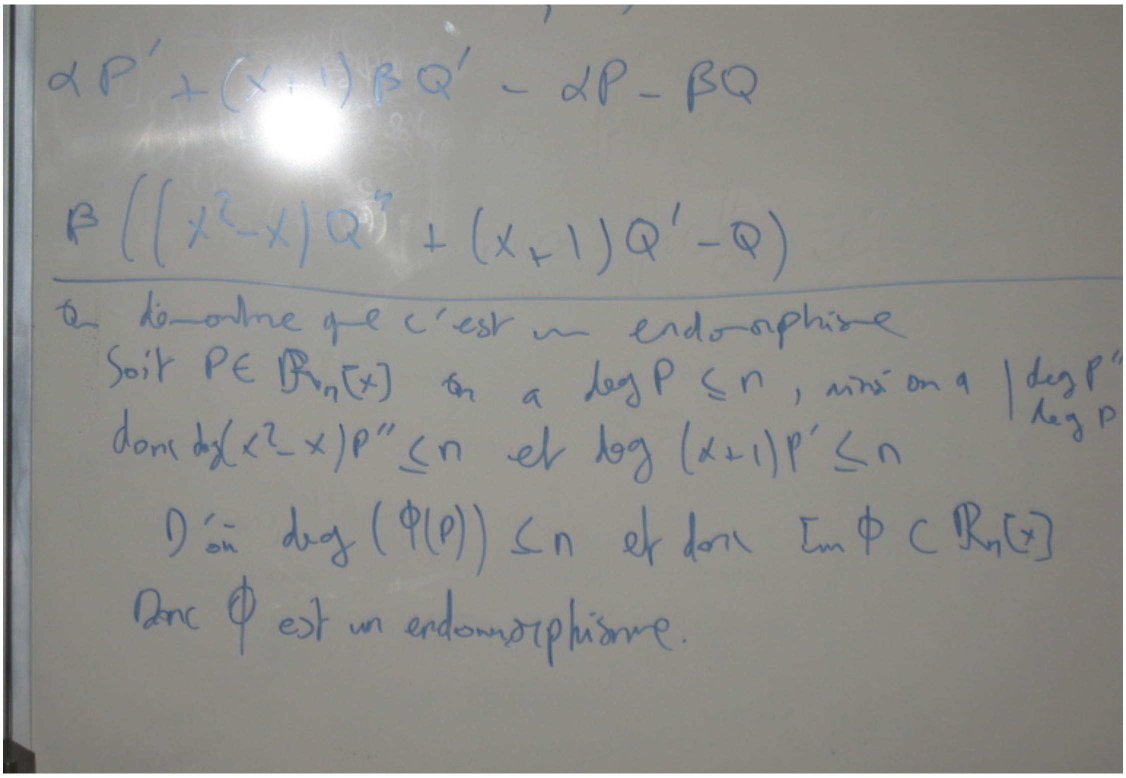

Figure B.3.

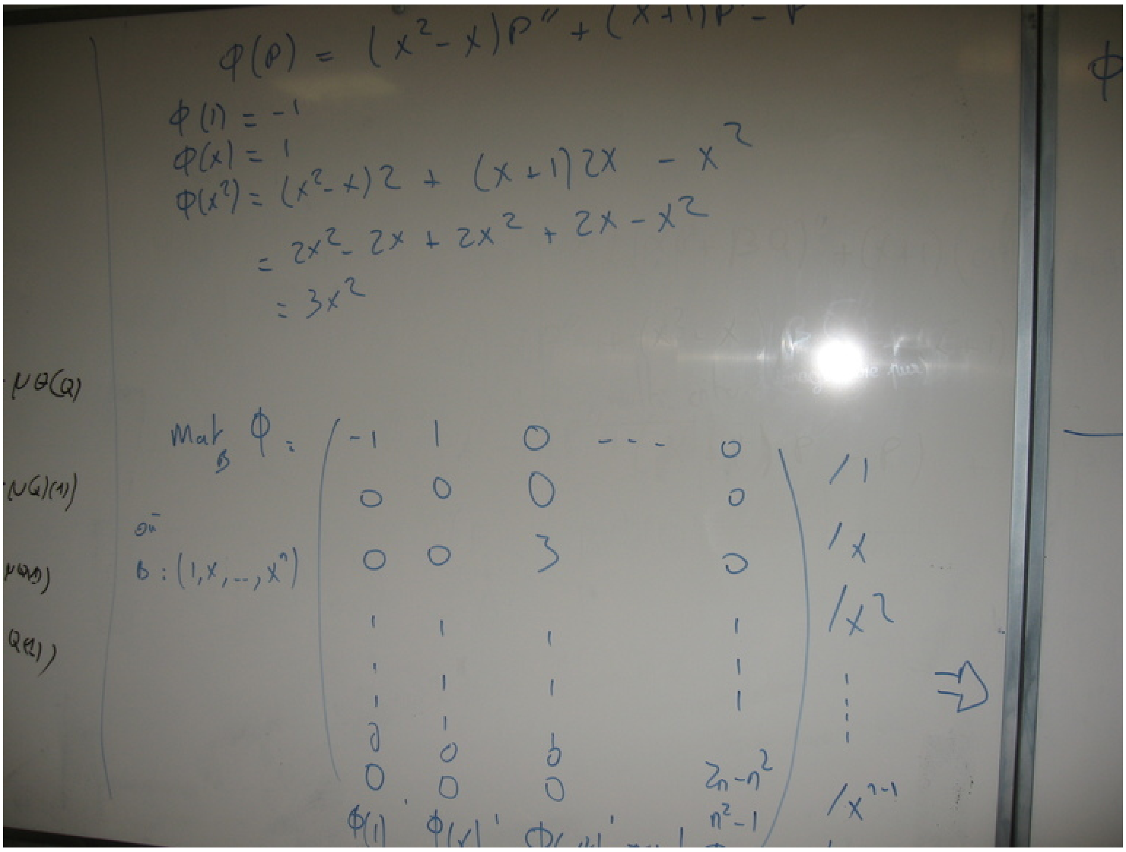

Figure B.4.

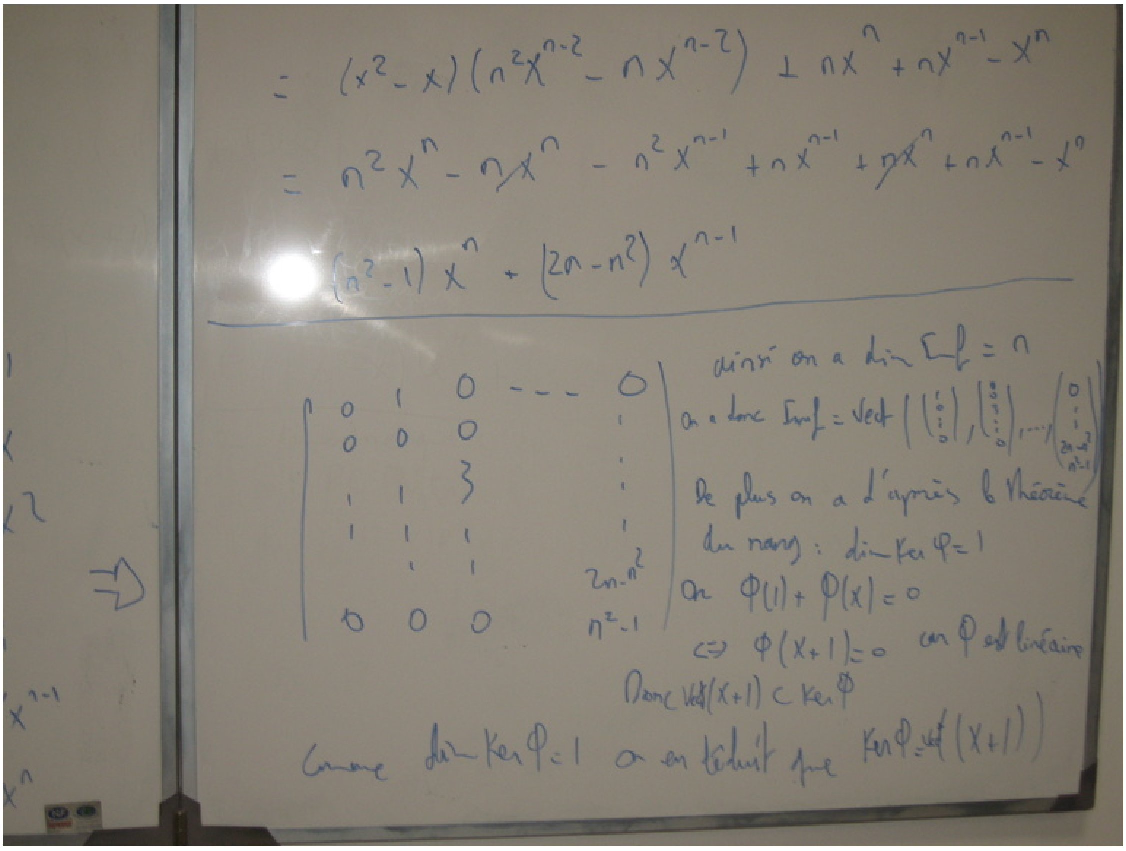

Figure B.5.

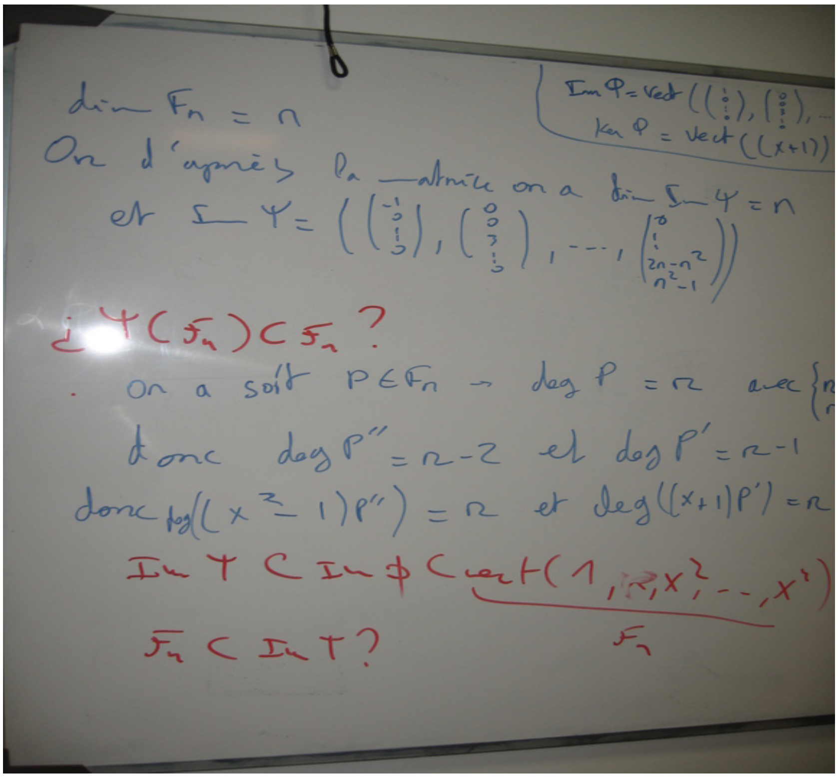

Figure B.6.

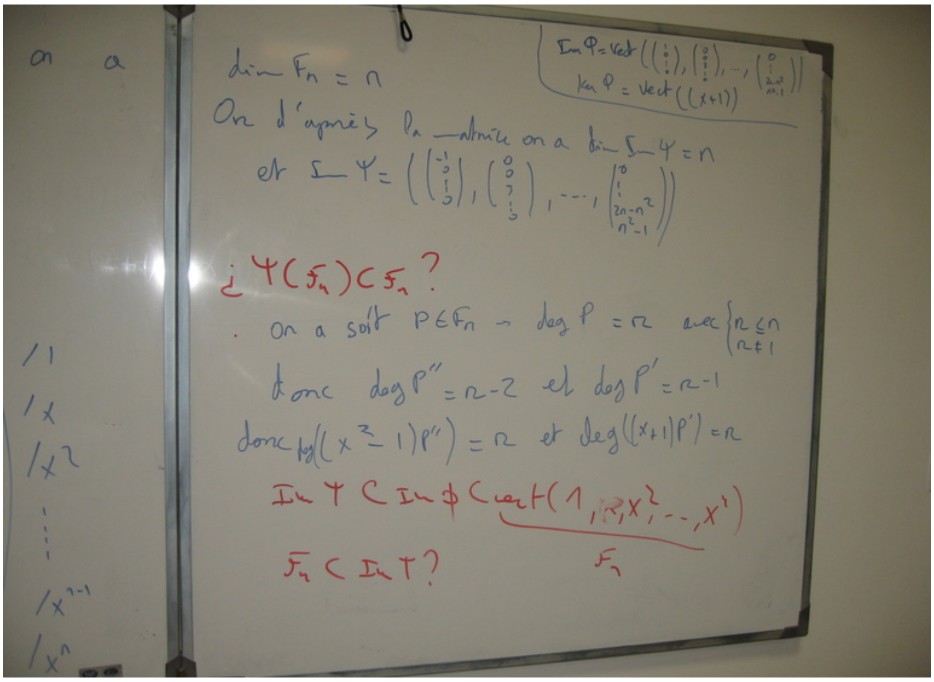

Figure B.7.

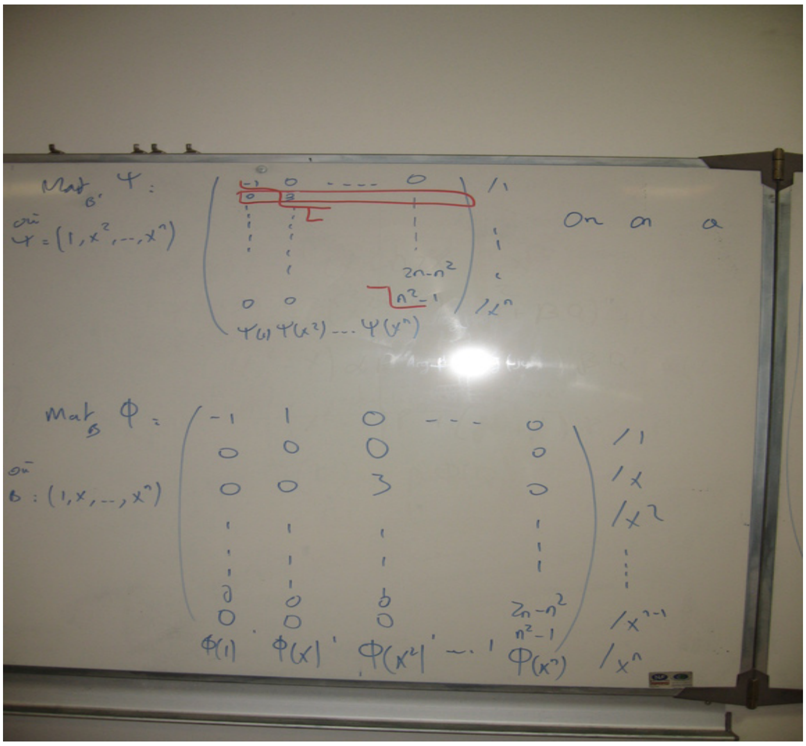

Figure B.8.

Annexe C

Programme d'algèbre linéaire de BCPST première année

II - ALGÈBRE LINÉAIRE

Les scalaires ne pourront être que les nombres réels ou les nombres complexes. La notion générale d'espace vectoriel n'est pas au programme de première année. Le but du professeur de première année sera de faire maîtriser les concepts fondamentaux sans excès de technicité ni d'abstraction en centrant son travail sur le calcul matriciel. Le professeur choisira les démonstrations qu'il présente et celles qu'il admet.

Ce qui suit fournit un ordre de présentation possible, il n'est pas obligatoire. K désignera l'ensemble des nombres réels ou complexes.

Figure C.1.

A - Systèmes d'équations linéaires

Définition. Discussion et résolution d'un système linéaire d'équations par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes. Systèmes équivalents. Cas particuliers des systèmes triangulaires. Système homogène. Un système linéaire a zéro, une ou une infinité de solutions. Dans ce dernier cas, on exprime toutes les inconnues en fonction de certaines d'entre elles. La solution générale d'un système est de la forme (solution particulière)+(solution générale du système homogène). Système de Cramer (système de n équations et n inconnues qui a une solution unique).	Par opérations élémentaires on entend : multiplier une équation par un scalaire non nul, ajouter à une équation une combinaison linéaire des autres. On fera le lien entre l'intersection de droites et de plans dans le plan et dans l'espace et la résolution de systèmes linéaires. On illustrera ces notions à l'aide d'exemples dont la résolution est simple. Les déterminants sont hors programme.

B - Matrices à coefficients dans K

Matrices. Matrices lignes, colonnes, carrées, triangulaires, diagonales. Matrice nulle, matrice unité (identité). Opérations sur les matrices : somme, produit par un scalaire, produit. Propriétés de ces opérations (en particulier formule du binôme pour des matrices qui commutent). Écriture matricielle d'un système linéaire. Matrice inversible, matrice inverse. Inverse d'un produit. Recherche pratique de l'inverse d'une matrice, par la résolution d'un système de Cramer. Transposée d'une matrice. Transposée d'une somme, d'un produit de matrices, de l'inverse d'une matrice. Matrice symétrique.	Produit de matrices diagonales. Les justifications théoriques (relatives à l'algèbre linéaire) seront données ultérieurement au titre D.

C - Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

En première année, on ne donnera pas la définition générale d'espace vectoriel. On travaillera dans Kn.

Définition de l'espace vectoriel K^n, règles de calcul. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs. Sous-espaces vectoriels. Intersection de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs. Famille génératrice finie d'un sous-espace vectoriel. Famille libre finie. Famille liée finie. Base d'un sous-espace vectoriel. Dimension. Base canonique de K^n. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base. Dans un sous-espace vectoriel de dimension p : Toute famille libre a au plus p éléments. Une famille libre ayant p éléments est une base. Toute famille génératrice a au moins p éléments. Une famille génératrice ayant p éléments est une base. Rang d'une famille finie de vecteurs.	On fera le lien avec les règles de calcul des vecteurs du plan et de l'espace de la géométrie. On entend par sous-espace vectoriel un ensemble de vecteurs stable par combinaison linéaire et contenant le vecteur nul. On utilisera la notation vect(x1, x2,...xk). On admettra que toutes les bases d'un sous-espace vectoriel ont même cardinal appelé dimension du sous-espace vectoriel. Tout ou partie des démonstrations correspondantes pourra être admis.

Figure C.2.

D - Applications linéaires

Définition d'une application linéaire de K^p dans K^n. Noyau, image. Lien avec : f injective, f surjective, f bijective. Opérations sur les applications linéaires : addition, multiplication par un scalaire, composition, réciproque. Propriétés de ces opérations. Détermination d'une application linéaire par l'image des vecteurs de la base canonique, matrice de l'application linéaire dans les bases canoniques. Matrice de la somme de deux applications linéaires, du produit par un scalaire d'une application linéaire, de la composée de deux applications linéaires, de l'application réciproque. Rang d'une application linéaire, rang d'une matrice, rang de la transposée (résultat admis), rang d'un système.	

Figure C.3.

Annexe D

Programme d'algèbre linéaire de ECS première année

II – Algèbre linéaire

Le programme se place dans le cadre des espaces vectoriels sur K, où $\mathsf{K} = \mathsf{R}$ ou C.

Les notions d'algèbre et de groupe sont hors programme.

L'objet de ce chapitre est de mettre en place l'outil vectoriel et l'outil matriciel. Il convient de mener conjointement l'étude des applications linéaires et celle des matrices, et de mettre en valeur les interactions entre ces deux aspects.

1) Espaces vectoriels et applications linéaires

a) Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels.

Structure d'espace vectoriel.
Sous-espaces vectoriels.

Cette étude doit être accompagnée de nombreux exemples issus de l'algèbre (espaces K^n, espaces de polynômes) et de l'analyse (espaces de suites, de fonctions).

Combinaisons linéaires.
Sous-espace engendré.

On ne considèrera que des combinaisons linéaires de familles finies.

Familles libres, familles génératrices, bases.

Base canonique de K^n.

Somme de sous-espaces, somme directe de deux sous-espaces, sous-espaces supplémentaires.

b) Applications linéaires.

Noyau et image d'une application linéaire.

Cas des projecteurs et des symétries.

Isomorphismes, endomorphismes, automorphismes.
Composée de deux applications linéaires.
Isomorphisme réciproque d'un isomorphisme.
Espace vectoriel $L(E, F)$ des applications linéaires d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F.
Espace vectoriel $L(E)$ des endomorphismes de E.
Ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E.

2) Espaces vectoriels de dimension finie

Espaces admettant une famille génératrice finie.
Existence de bases.
Si L est libre et si G est génératrice, le nombre d'éléments de L est inférieur ou égal au nombre d'éléments de G.
Dimension d'un espace vectoriel.
Théorème de la base incomplète.

Un K-espace vectoriel est de dimension n si et seulement si il est isomorphe à K^n.
Dans un espace de dimension n, une famille libre (resp génératrice) formée de n vecteurs est une base.

Dimension d'un sous-espace vectoriel.

Droites, plans et hyperplans vectoriels.

Existence et dimension d'un supplémentaire.

Si F et G sont supplémentaires,
$$\dim F + \dim G = \dim E$$

Rang d'un famille finie de vecteurs, rang d'une application linéaire.

Figure D.1.

Formule du rang : étant donnés des espaces vectoriels E et F et une application linéaire u de E dans F, $\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Im} u)$.	Application à la caractérisation des isomorphismes. Formes linéaires et hyperplans.

3) Matrices et calcul matriciel

Espace vectoriel $M_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{K}$. Matrice d'une famille finie de vecteurs dans une base. Matrices colonnes.	
Matrice d'une application linéaire dans des bases.	Isomorphisme avec $L(E, F)$. Matrices lignes et formes linéaires.
Produit d'une matrice et d'une matrice colonne.	Lien avec l'image d'un vecteur par une application linéaire.
Produit matriciel.	Lien avec la composition des applications linéaires. Formule du binôme lorsque $AB = BA$.
Rang d'une matrice.	Égalité des rangs d'une application linéaire et de sa matrice dans des bases.
Matrices inversibles, inverse d'une matrice. Ensemble $GL_n(\mathbf{K})$. Inverse d'un produit.	Lien avec les isomorphismes et avec $GL(E)$. Caractérisation des matrices triangulaires inversibles.
Calcul de l'inverse d'une matrice.	On présentera, sur des exemples, différentes méthodes. Inversion des matrices $(2, 2)$.
Transposée d'une matrice, matrices symétriques.	Transposition d'un produit, de l'inverse.

4) Systèmes linéaires

Définition des systèmes linéaires. Écriture matricielle d'un système linéaire.	
Système homogène. Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire. Système de Cramer.	Lien avec les noyaux.
Résolution par la méthode du pivot de Gauss.	La méthode sera présentée à l'aide d'exemples. On adoptera les notations suivantes pour le codage des opérations élémentaires sur les lignes : $L_i \leftarrow L_i + aL_j$, $L_i \leftarrow aL_i$ $(a \neq 0)$, $L_j \leftrightarrow L_i$ Exemples de problèmes se ramenant à la résolution de systèmes linéaires.

Figure D.2.

Annexe E

Programme d'algèbre linéaire de MPSI

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme d'algèbre et géométrie est organisé autour des concepts fondamentaux d'espace vectoriel et d'application linéaire, et de leurs interventions en algèbre, en analyse et en géométrie. La maîtrise de l'algèbre linéaire élémentaire en dimension finie constitue un objectif essentiel.

Le cadre d'étude est bien délimité : brève mise en place des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire, de sous-espaces vectoriels supplémentaires, de produit scalaire, sous leur forme générale, en vue notamment des interventions en analyse ; en dimension finie, étude des concepts de base, de dimension et de rang, mise en place du calcul matriciel, étude des espaces vectoriels euclidiens ; interventions de l'algèbre linéaire en géométrie affine et en géométrie euclidienne. La maîtrise de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel constitue un objectif majeur.

Pour les groupes, les anneaux et les corps, le programme se limite à quelques définitions de base et aux exemples usuels ; toute étude générale de ces structures est hors programme.

Le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme.

Figure E.1.

II. ALGÈBRE LINÉAIRE ET POLYNÔMES

L'objectif est double :
- Acquérir les notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie (indépendance linéaire, bases, dimension, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, rang) et le calcul matriciel.
- Maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires) et le point de vue matriciel.
Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie affine du plan et de l'espace et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

En algèbre linéaire, le programme se limite au cas où le corps de base est K, *où* K *désigne* R *ou* C.

1- Espaces vectoriels

a) Espaces vectoriels

Définition d'un espace vectoriel sur K, d'un sous-espace vectoriel.	Exemples : espace K^n, espaces vectoriels de suites ou de fonctions.
Intersection de sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une partie.	
Somme de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces supplémentaires.	La notion générale de somme directe est hors programme.
Espace vectoriel produit $E \times F$.	
Espace vectoriel $\mathcal{F}(X, F)$ des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F.	

Figure E.2.

b) Translations, sous-espaces affines

Translations d'un espace vectoriel E.
Définition d'un sous-espace affine : partie de E de la forme $a + F$, où F est un sous-espace vectoriel de E. Direction d'un sous-espace affine.
Sous-espaces affines parallèles : W est parallèle à W' si la direction de W est incluse dans celle de W'.
Intersection de deux sous-espaces affines, direction de cette intersection lorsqu'elle n'est pas vide.
Barycentres. Parties convexes (lorsque $\mathbf{K}$=$\mathbf{R}$).

Il convient d'illustrer ces notions par la géométrie du plan et de l'espace, déjà abordée dans les classes antérieures et en début d'année.
Il convient de souligner que le choix d'une origine du plan ou de l'espace permet d'identifier points et vecteurs. On évitera cependant de faire systématiquement cette identification.

c) Applications linéaires

Définition d'une application linéaire, d'une forme linéaire, d'un endomorphisme.
Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F.

Homothéties. Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires. Symétries, affinités.
Exemples d'applications linéaires en analyse, en géométrie.

Composée de deux applications linéaires, réciproque d'une application linéaire bijective. Définition d'un isomorphisme, d'un automorphisme. Linéarité des applications $v \mapsto v \circ u$ et $u \mapsto v \circ u$. Définition du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$

L'étude générale du groupe linéaire est hors programme.

Équations linéaires ; noyau et image d'une application linéaire. Description de l'ensemble des solutions de $u(x) = b$.

Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire. Structure de l'ensemble des suites (u_n) définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Caractérisation des projecteurs par la relation $p^2 = p$.
Caractérisation des symétries par la relation $s^2 = I_E$.

2- Dimension des espaces vectoriels

a) Familles de vecteurs

Définition des combinaisons linéaires de p vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ d'un espace vectoriel ; image par une application linéaire d'une combinaison linéaire.

Le cas des familles indexées par un ensemble infini est hors programme.

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Définition d'une famille génératrice.
Indépendance linéaire : définition d'une famille libre, liée.
Définition d'une base ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base. Base canonique de $\mathbf{K}^n$.
Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $(e_1, \dots, e_p)$ et une famille $(f_1, \dots, f_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel F, il existe une application linéaire u et une seule de E dans F telle que $u(e_j) = f_j$.

La donnée d'une famille de p vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E détermine une application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans E ; noyau et image de cette application ; caractérisation des bases de E, des familles génératrices, des familles libres.

b) Dimension d'un espace vectoriel

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie (espace vectoriel admettant une famille génératrice finie). Théorème de la base incomplète, existence de bases.

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie sont finies et ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E. On convient que l'espace vectoriel réduit à $\{0\}$ est de dimension nulle.
Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$; deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Étant donnée une famille S de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :
- si S est libre, alors $p \leqslant n$, avec égalité si et seulement si S est une base ;
- si S est génératrice, alors $p \geqslant n$, avec égalité si et seulement si S est une base.

Base de $E \times F$ associée à des bases de E et de F ; dimension de $E \times F$.

Figure E.3.

Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $B = (e_j)$ et un espace vectoriel F muni d'une base $C = (f_i)$, une application linéaire u de E dans F et un vecteur x de E, expression des coordonnées de $y = u(x)$ dans C en fonction des coordonnées de x dans B.

Étant donnée une forme linéaire φ sur E, expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans B.

c) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Tout sous-espace vectoriel E' d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim E' \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $E' = E$. Rang d'une famille de vecteurs.

Existence de sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un sous-espace vectoriel donné ; dimension d'un supplémentaire.

Les étudiants doivent connaître la relation $\dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)$.

d) Rang d'une application linéaire

Étant donnée une application linéaire u de E dans F, u définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$; en particulier,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u.$$

Cas d'une forme linéaire : caractérisation et équations d'un hyperplan.

Rang d'une application linéaire, caractérisation des isomorphismes.
Caractérisation des éléments inversibles de $\mathcal{L}(E)$.

Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.

3- Polynômes

L'objectif est d'étudier, par des méthodes élémentaires, les propriétés de base des polynômes et des fractio rationnelles, et d'exploiter ces objets formels pour la résolution de problèmes portant sur les équatio algébriques et les fonctions numériques.

Le programme se limite au cas où le corps de base est $\mathbf{K}$, *où* $\mathbf{K}$ *désigne* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

a) Polynômes à une indéterminée

Espace vectoriel $\mathbf{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbf{K}$; opérations.

Aucune connaissance sur la construction de $\mathbf{K}[X]$ n'est exigible des étudiants.

Degré d'un polynôme (on convient que le degré de 0 est $-\infty$), coefficient dominant, polynôme unitaire (ou normalisé). Degré d'un produit, d'une somme ; les polynômes de degré inférieur ou égal à p constituent un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$.
L'anneau $\mathbf{K}[X]$ est intègre. Corps $\mathbf{K}(X)$ des fractions rationnelles, degré d'une fraction rationnelle.

Notation $a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ ou, le cas échéant, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$.

Multiples et diviseurs d'un polynôme, polynômes associés.
Division euclidienne dans $\mathbf{K}[X]$, algorithme de la division euclidienne.

b) Fonctions polynomiales et rationnelles

Fonction polynomiale associée à un polynôme. Équations algébriques. Zéros (ou racines) d'un polynôme ; ordre de multiplicité. Isomorphisme entre polynômes et fonctions polynomiales.

Reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $X - a$; caractérisation des zéros de P.

§ Algorithme de Horner pour le calcul des valeurs d'une fonction polynomiale.

Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle.
Zéros et pôles d'une fraction rationnelle ; ordre de multiplicité.

Figure E.4.

Définition du polynôme dérivé. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit. Dérivées successives, dérivée n-ième d'un produit (formule de Leibniz). Formule de Taylor, application à la recherche de l'ordre de multiplicité d'un zéro.

Les étudiants doivent connaître les relations

$$P(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(X-a)^n}{n!} P^{(n)}(a),$$

$$P(a+X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{X^n}{n!} P^{(n)}(a).$$

c) Polynômes scindés

Définition d'un polynôme scindé sur $\mathbf{K}$; relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé.

Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétriques des racines d'un polynôme n'est exigible des étudiants.

Théorème de d'Alembert-Gauss. Description des polynômes irréductibles de $\mathbf{C}[X]$ et de $\mathbf{R}[X]$.

La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme.

Décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbf{C}$ et sur $\mathbf{R}$.

Décomposition dans $\mathbf{C}[X]$ de $X^n - 1$.

d) Divisibilité dans l'anneau $\mathbf{K}[X]$

§ Diviseurs communs à deux polynômes, polynômes premiers entre eux. PGCD de deux polynômes ; algorithme d'Euclide. PPCM de deux polynômes ; forme irréductible d'une fraction rationnelle.

La définition des idéaux de $\mathbf{K}[X]$ est hors programme.

Théorème de Bézout. Théorème de Gauss.

Les étudiants doivent connaître l'algorithme donnant les coefficients de l'égalité de Bézout.

Polynômes irréductibles. Existence et unicité de la décomposition d'un polynôme en produit de facteurs irréductibles.

Pour la pratique de la décomposition en produit de facteurs irréductibles, le programme se limite au cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Aucune connaissance spécifique sur l'irréductibilité sur $\mathbf{Q}$ n'est exigible des étudiants.

e) Étude locale d'une fraction rationnelle

§ Existence et unicité de la partie entière d'une fraction rationnelle R ; existence et unicité de la partie polaire de R relative à un pôle a. Lorsque a est un pôle simple de R, expressions de la partie polaire relative à ce pôle.

Les étudiants doivent savoir calculer la partie polaire en un pôle double. En revanche, des indications sur la méthode à suivre doivent être fournies pour des pôles d'ordre supérieur ou égal à 3. La division des polynômes suivant les puissances croissantes est hors programme.

Lorsque $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, toute fraction rationnelle R est égale à la somme de sa partie entière et de ses parties polaires. Existence et unicité de la décomposition de R en éléments simples. Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

Aucune connaissance spécifique sur la décomposition en éléments simples sur un corps autre que $\mathbf{C}$ n'est exigible des étudiants.

4- § Calcul matriciel

a) Opérations sur les matrices

Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbf{K}$. Base canonique $(E_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$; dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Définition du produit matriciel, bilinéarité.

Identification des matrices colonnes et des vecteurs de $\mathbf{K}^n$, des matrices lignes et des formes linéaires sur $\mathbf{K}^p$.

Écriture matricielle $Y = M\,X$ de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur.

Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées à n lignes. Isomorphisme canonique de l'anneau $\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ sur l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Matrices carrées inversibles ; définition du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

Sous-anneau des matrices diagonales, des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures).

Transposée d'une matrice. Compatibilité avec les opérations algébriques sur les matrices.

Matrices carrées symétriques, antisymétriques.

Figure E.5.

b) Matrices et applications linéaires

Matrice $M_{B,C}(u)$ associée à une application linéaire u d'un espace vectoriel E muni d'une base B dans un espace vectoriel F muni d'une base C. L'application $u \mapsto M_{B,C}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K})$; dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

La j-ième colonne de $M_{B,C}(u)$ est constituée des coordonnées dans la base C de l'image par u du j-ième vecteur de la base B.

Matrice $M_B(u)$ associée à un endomorphisme u d'un espace vectoriel E muni d'une base B. L'application $u \mapsto M_B(u)$ est un isomorphisme (linéaire) d'anneaux.

Matrice dans une base d'une famille finie de vecteurs, d'une famille finie de formes linéaires.

Matrice de passage d'une base B à une base B' d'un espace vectoriel E ; effet d'un changement de base(s) sur les coordonnées d'un vecteur, sur l'expression d'une forme linéaire, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.

La matrice de passage de la base B à la base B' est, par définition, la matrice de la famille B' dans la base B : sa j-ième colonne est constituée des coordonnées dans la base B du j-ième vecteur de la base B'. Cette matrice est aussi $M_{B',B}(I_E)$.

c) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice.

Interprétation des opérations élémentaires en termes de produits matriciels.

Les opérations élémentaires sur les lignes sont les suivantes :
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre (codage : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) ;
- multiplication d'une ligne par un scalaire non nul (codage : $L_i \leftarrow \alpha L_i$) ;
- échange de deux lignes (codage : $L_i \leftrightarrow L_j$).

Application à l'inversion d'une matrice carrée par l'algorithme du pivot de Gauss.

Cet algorithme permet en outre d'étudier l'inversibilité de la matrice.

d) Rang d'une matrice

Définition du rang d'une matrice (rang de l'application linéaire canoniquement associée, ou encore rang des vecteurs colonnes).

Pour toute application linéaire u de E dans F, le rang de u est égal au rang de $M_{B,C}(u)$, où B est une base de E et C une base de F.

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K})$ est de rang r si et seulement si elle est de la forme UJ_rV où U et V sont des matrices carrées inversibles. Invariance du rang par transposition.

La matrice J_r est l'élément $(\alpha_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathsf{K})$ défini par les relations :

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leqslant r \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Emploi des opérations élémentaires pour le calcul du rang d'une matrice.

e) Systèmes d'équations linéaires

Définition, système homogène associé ; interprétations. Description de l'ensemble des solutions.

Rang d'un système linéaire. Dimension de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène.

Les étudiants doivent connaître l'interprétation d'un système de n équations linéaires à p inconnues, à l'aide des vecteurs de K^n, des formes linéaires sur K^p, et d'une application linéaire de K^p dans K^n (ainsi que la traduction matricielle correspondante).

Existence et unicité de la solution lorsque $r = n = p$ (systèmes de Cramer). Résolution des systèmes de Cramer triangulaires. Algorithme du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes de Cramer.

Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.

Figure E.6.

Annexe F

Programme d'algèbre linéaire de PCSI

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Le programme d'algèbre et géométrie est organisé autour des concepts fondamentaux d'espace vectoriel et d'application linéaire, et de leurs interventions en algèbre, en analyse et en géométrie. La maîtrise de l'algèbre linéaire élémentaire en dimension finie constitue un objectif essentiel.

Le cadre d'étude est bien délimité : brève mise en place des concepts d'espace vectoriel, d'application linéaire, de sous-espaces vectoriels supplémentaires, d'algèbre et de produit scalaire, sous leur forme générale, en vue notamment des interventions en analyse ; en dimension finie, étude des concepts de base, de dimension et de rang, mise en place du calcul matriciel, étude des espaces vectoriels euclidiens ; interventions de l'algèbre linéaire en géométrie affine et en géométrie euclidienne. La maîtrise de l'articulation entre le point de vue géométrique (vecteurs et points) et le point de vue matriciel constitue un objectif majeur.

Pour les groupes, les anneaux et les corps, le programme se limite à quelques définitions de base et aux exemples usuels ; toute étude générale de ces structures est hors programme.

Le point de vue algorithmique est à prendre en compte pour l'ensemble de ce programme.

Figure F.1.

II. ALGÈBRE LINÉAIRE ET GÉOMÉTRIE AFFINE

L'objectif est double :
- acquérir les notions de base sur les espaces vectoriels de dimension finie (indépendance linéaire, bases, dimension, sous-espaces vectoriels supplémentaires et projecteurs, rang), le calcul matriciel et la géométrie affine du plan et de l'espace (sous-espaces affines, barycentres) ;
- maîtriser les relations entre le point de vue géométrique (vecteurs et applications linéaires, points et applications affines) et le point de vue matriciel.
Il convient d'étudier conjointement l'algèbre linéaire et la géométrie affine du plan et de l'espace et, dans les deux cas, d'illustrer les notions et les résultats par de nombreuses figures.

En algèbre linéaire, le programme se limite au cas où le corps de base est $\mathbf{K}$, *où* $\mathbf{K}$ *désigne* $\mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{C}$.

1- Espaces vectoriels

a) Espaces vectoriels

Définition d'un espace vectoriel sur $\mathbf{K}$, d'un sous-espace vectoriel.	Exemples : espace $\mathbf{K}^n$, espaces vectoriels de suites ou de fonctions.
Intersection de sous-espaces vectoriels. Sous-espace engendré par une partie.	
Somme de deux sous-espaces vectoriels. Sous-espaces supplémentaires.	La notion générale de somme directe est hors programme.
Espace vectoriel produit $E \times F$.	
Espace vectoriel $\mathcal{F}(X, F)$ des applications d'un ensemble X dans un espace vectoriel F.	

b) Translations, sous-espaces affines

Translations d'un espace vectoriel E. Définition d'un sous-espace affine : partie de E de la forme $a + F$, où F est un sous-espace vectoriel de E. Direction d'un sous-espace affine. Sous-espaces affines parallèles : W est parallèle à W' si la direction de W est incluse dans celle de W'. Intersection de deux sous-espaces affines, direction de cette intersection lorsqu'elle n'est pas vide.	On centrera cette étude sur les cas du plan et de l'espace, déjà abordés dans les classes antérieures et en début d'année. Il convient de signaler que le choix d'une origine du plan ou de l'espace permet d'identifier points et vecteurs. On évitera cependant de faire systématiquement cette identification.

c) Applications linéaires

Définition d'une application linéaire, d'une forme linéaire, d'un endomorphisme. Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F.	Homothéties. Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires. Symétries, affinités. Exemples d'applications linéaires en analyse, en géométrie.
Composée de deux applications linéaires, réciproque d'une application linéaire bijective. Définition d'un isomorphisme, d'un automorphisme. Définition du groupe linéaire $\mathrm{GL}(E)$	L'étude générale du groupe linéaire est hors programme.
Équations linéaires ; noyau et image d'une application linéaire.	Structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire.
Description de l'ensemble des solutions de $u(x) = b$.	Suites définies par une relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
Caractérisation des projecteurs par la relation $p^2 = p$.	
Caractérisation des symétries par la relation $s^2 = I_E$.	

Figure F.2.

2- Dimension des espaces vectoriels

a) Familles de vecteurs

Définition des combinaisons linéaires de p vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_p$ d'un espace vectoriel ; image par une application linéaire d'une combinaison linéaire.

Le cas des familles indexées par un ensemble infini est hors programme.

Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. Définition d'une famille génératrice.
Indépendance linéaire : définition d'une famille libre, liée.
Définition d'une base ; coordonnées (ou composantes) d'un vecteur dans une base. Base canonique de $\mathbf{K}^n$.

La donnée d'une famille de p vecteurs $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E détermine une application linéaire de $\mathbf{K}^p$ dans E ; noyau et image de cette application ; caractérisation des bases de E, des familles génératrices, des familles libres.

Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $(e_1, \ldots, e_p)$ et une famille $(f_1, \ldots, f_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel F, il existe une application linéaire u et une seule de E dans F telle que $u(e_j) = f_j$.

b) Dimension d'un espace vectoriel

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie (espace vectoriel admettant une famille génératrice finie). Théorème de la base incomplète, existence de bases.

Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie sont
finies et ont le même nombre d'éléments, appelé dimension de E. On convient que l'espace vectoriel réduit à $\{0\}$ est de dimension nulle.
Tout espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbf{K}^n$; deux espaces vectoriels de dimension finie E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim E = \dim F$.

Étant donnée une famille S de vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n :
- si S est libre, alors $p \leqslant n$, avec égalité si et seulement si S est une base ;
- si S est génératrice, alors $p \geqslant n$, avec égalité si et seulement si S est une base.

Base de $E \times F$ associée à des bases de E et de F ; dimension de $E \times F$.

Étant donnés un espace vectoriel E muni d'une base $B = (e_j)$ et un espace vectoriel F muni d'une base $C = (f_i)$, une application linéaire u de E dans F et un vecteur x de E, expression des coordonnées de $y = u(x)$ dans C en fonction des coordonnées de x dans B.

Étant donnée une forme linéaire φ sur E, expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées de x dans B.

c) Dimension d'un sous-espace vectoriel

Tout sous-espace vectoriel E' d'un espace vectoriel de dimension finie E est de dimension finie et $\dim E' \leqslant \dim E$, avec égalité si et seulement si $E' = E$. Rang d'une famille de vecteurs.

Existence de sous-espaces vectoriels supplémentaires d'un sous-espace vectoriel donné ; dimension d'un supplémentaire.

Les étudiants doivent connaître la relation $\dim (E + F) = \dim E + \dim F - \dim (E \cap F)$.

d) Rang d'une application linéaire

Étant donnée une application linéaire u de E dans F, u définit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$; en particulier,

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \dim \operatorname{Im} u.$$

Cas d'une forme linéaire : caractérisation et équations d'un hyperplan.

Rang d'une application linéaire, caractérisation des isomorphismes.
Caractérisation des éléments inversible de $\mathcal{L}(E)$.

Invariance du rang par composition avec un isomorphisme.

Figure F.3.

3- § Calcul matriciel

a) Opérations sur les matrices

Espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbf{K}$. Base canonique $(E_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$; dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Définition du produit matriciel, bilinéarité.

Identification des matrices colonnes et des vecteurs de $\mathbf{K}^n$, des matrices lignes et des formes linéaires sur $\mathbf{K}^p$.
Écriture matricielle $Y = M\,X$ de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur.

Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ des matrices carrées à n lignes, opérations. Isomorphisme canonique de $\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Matrices carrées inversibles ; définition du groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$.

Matrices diagonales, matrices triangulaires supérieures (ou inférieures).

Transposée d'une matrice. Compatibilité avec les opérations algébriques sur les matrices.

Matrices carrées symétriques, antisymétriques.

Les matrices symétriques et les matrices antisymétriques constituent des sous-espaces supplémentaires.

b) Matrices et applications linéaires

Matrice $M_{B,C}(u)$ associée à une application linéaire u d'un espace vectoriel E muni d'une base B dans un espace vectoriel F muni d'une base C. L'application $u \mapsto M_{B,C}(u)$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$; dimension de $\mathcal{L}(E,F)$.

La j-ème colonne de $M_{B,C}(u)$ est constituée des coordonnées dans la base C de l'image par u du j-ème vecteur de la base B.

Matrice $M_B(u)$ associée à un endomorphisme u d'un espace vectoriel E muni d'une base B. L'application $u \mapsto M_B(u)$ est un isomorphisme.
Matrice dans une base d'une famille finie de vecteurs, d'une famille finie de formes linéaires.

Matrice de passage d'une base B à une base B' d'un espace vectoriel E ; effet d'un changement de base(s) sur les coordonnées d'un vecteur, sur l'expression d'une forme linéaire, sur la matrice d'une application linéaire, sur la matrice d'un endomorphisme.

La matrice de passage de la base B à la base B' est, par définition, la matrice de la famille B' dans la base B : sa j-ème colonne est constituée des coordonnées dans la base B du j-ème vecteur de la base B'. Cette matrice est aussi $M_{B',B}(I_E)$.

Les notions de matrices équivalentes, de matrices carrées semblables, sont hors programme.

c) Opérations élémentaires sur les matrices

Opérations (ou manipulations) élémentaires sur les lignes (ou les colonnes) d'une matrice.

Interprétation des opérations élémentaires en termes de produits matriciels.

Les opérations élémentaires sur les lignes sont les suivantes :
- addition d'un multiple d'une ligne à une autre (codage : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$) ;
- multiplication d'une ligne par un scalaire non nul (codage : $L_i \leftarrow \alpha L_i$) ;
- échange de deux lignes (codage : $L_i \leftrightarrow L_j$).

Application à l'inversion d'une matrice carrée par l'algorithme du pivot de Gauss.

Cet algorithme permet en outre d'étudier l'inversibilité de la matrice.

d) Rang d'une matrice

Définition du rang d'une matrice (rang de l'application linéaire canoniquement associée, ou encore rang des vecteurs colonnes).

Pour toute application linéaire u de E dans F, le rang de u est égal au rang de $M_{B,C}(u)$, où B est une base de E et C une base de F.

Une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de rang r si et seulement si elle est de la forme UJ_rV où U et V sont des matrices carrées inversibles. Invariance du rang par transposition.

La matrice J_r est l'élément $(\alpha_{i,j})$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ défini par les relations :

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \leqslant r \\ 0 & \text{dans tous les autres cas.} \end{cases}$$

Emploi des opérations élémentaires pour le calcul du rang d'une matrice.

Figure F.4.

e) Systèmes d'équations linéaires

Définition, système homogène associé ; interprétations. Description de l'ensemble des solutions. Rang d'un système linéaire. Dimension de l'espace vectoriel des solutions d'un système linéaire homogène.	Les étudiants doivent connaître l'interprétation d'un système de n équations linéaires à p inconnues, à l'aide des vecteurs de K^n, des formes linéaires sur K^p, et d'une application linéaire de K^p dans K^n (ainsi que la traduction matricielle correspondante).
Existence et unicité de la solution lorsque $r = n = p$ (systèmes de Cramer). Résolution des systèmes de Cramer triangulaires. Algorithme du pivot de Gauss pour la résolution des systèmes de Cramer.	Le théorème de Rouché-Fontené et les matrices bordantes sont hors programme.

f) Déterminants d'ordres 2 et 3

Déterminant de deux vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension 2, de trois vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension 3. Caractérisation des bases.	On fera le lien avec la notion de déterminant (dans une base orthonormée directe) vue en début d'année.
Application à l'expression de la solution d'un système de Cramer à deux ou trois inconnues.	On traitera le cas de la dimension 2 ; la démonstration en dimension 3 sera faite en seconde année. Les principaux objectifs sont l'étude de l'indépendance linéaire et de petits systèmes de Cramer, en liaison avec les applications géométriques.
Déterminant d'un endomorphisme, du composé de deux endomorphismes ; caractérisation des automorphismes.	Lorsque $\mathsf{K} = \mathsf{R}$, application à l'orientation du plan, de l'espace ; la donnée d'une base détermine une orientation. Bases directes du plan ou de l'espace orienté.
Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant du produit de deux matrices.	

Figure F.5.

Annexe G

Feuille de problèmes de l'expérimentation

Exercice G.1. (Commun à tous les groupes) Soient les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ suivants:

$$E_n = \mathbb{R}_n[X], \quad \mathcal{F}_n = \mathrm{vect}(1, X^2, X^3, \dots, X^n).$$

On désigne par ϕ l'application $P \mapsto (X^2 - X)P'' + (X+1)P' - P$.

1. Montrer que $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Ecrire la matrice de ϕ dans la base $(1, X, X^2, \dots, X^n)$. Déterminer $\operatorname{Ker}\phi$ et $\operatorname{Im}\phi$.
2. Montrer que $\psi = \phi_{|\mathcal{F}_n}$, la restriction de ϕ à $\mathcal{F}_n$, est un automorphisme de $\mathcal{F}_n$. Préciser la matrice de ψ^{-1} dans la base $(1, X^2, \dots, X^n)$.
3. Résoudre les équations $\psi(P) = X^k$, $P \in \mathcal{F}_n$ puis $\phi(P) = X^k$, $P \in \mathcal{E}_n$.

Exercice G.2. (Groupe 5) Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 3$ et E l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. On considère les applications linéaires

$$\begin{array}{rccc} \theta\colon & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & P & \longmapsto & \left(P(0), P\left(\frac{1}{2}\right), P(1)\right) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} \varphi\colon & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & P & \longmapsto & \left(P(0) - P\left(\frac{1}{2}\right), P(1) - P\left(\frac{1}{2}\right)\right) \end{array}.$$

1. Montrer que $\theta \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^3)$. On admet que $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^3)$.
2. Déterminer les images par θ des polynômes

   $$P_1 = (2\,X - 1)\,(X - 1), \quad P_2 = -4\,X\,(X - 1) \quad \text{et} \quad P_3 = X\,(2\,X - 1).$$

   En déduire que θ est surjective.
3. Montrer que φ est surjective.
4. On considère les sous-ensembles de E suivants

   $$F = \{P \in E | \deg P \leqslant 2 \quad \text{et} \quad P(0) = 0\} \qquad G = \left\{P \in E | P(0) = P\left(\frac{1}{2}\right) = P(1)\right\}.$$

   Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice G.3. (Groupe 5)

Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n.

Pour tout endomorphisme f de E, on note $f^0 = \mathrm{Id}$ l'application identité de E, et pour tout entier naturel k, $f^{k+1} = f^k \circ f$.

Soit p un élément de $\mathbb{N}^*$. On dit qu'un endomorphisme f de E est *cyclique d'ordre* p s'il existe un élément x_0 de E vérifiant les trois conditions suivantes :

- $f^p(x_0) = x_0$,
- la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est génératrice de E,
- la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est constituée d'éléments deux à deux distincts. La famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{p-1}(x_0))$ est alors appelée *un cycle* de f.

Soit f un endomorphisme de E cyclique d'ordre p et soit $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ un cycle de f.

1. Montrer que $p \geq n$.
2. Déterminer l'endomorphisme f^p. En déduire que f est inversible.
3. On note m le plus grand des entiers k tel que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0))$ soit libre. Montrer que $f^m(x_0)$ est combinaison linéaire des m vecteurs $x_0, f(x_0), \ldots, f^{m-1}(x_0)$, et qu'il en est de même pour $f^k(x_0)$ pour tout $k > m$.
4. En déduire que $m = n$ et que la famille $\mathcal{B} = (x_0, f(x_0), \ldots, f^{n-1}(x_0))$ est une base de E.
5. (Non exigé) Déterminer la forme de la matrice associée à f relativement à la base $\mathcal{B}$ précédente.
6. (Non exigé)
   a. Soit λ une valeur propre de f. Montrer que le sous-espace propre associé est de dimension 1.
   b. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Annexe H
Compléments de sémiotique

Dans le diagramme suivant, toutes les flèches sont des relations de présupposition logique entre les catégories. Ainsi, $3 \longrightarrow 2$ se lit : tertian présuppose secondan. Comme nous l'avons écrit, la relation de présupposition est transitive : on a $3 \longrightarrow 1$ car $3 \longrightarrow 2$ et $2 \longrightarrow 1$. Comme le précise Marty[H.1], « c'est par souci de simplification que dans le treillis tel qu'il est habituellement présenté que les trois flèches (morphismes) qui définissent les relations entre clases de signes sont représentées par une flèche unique ».

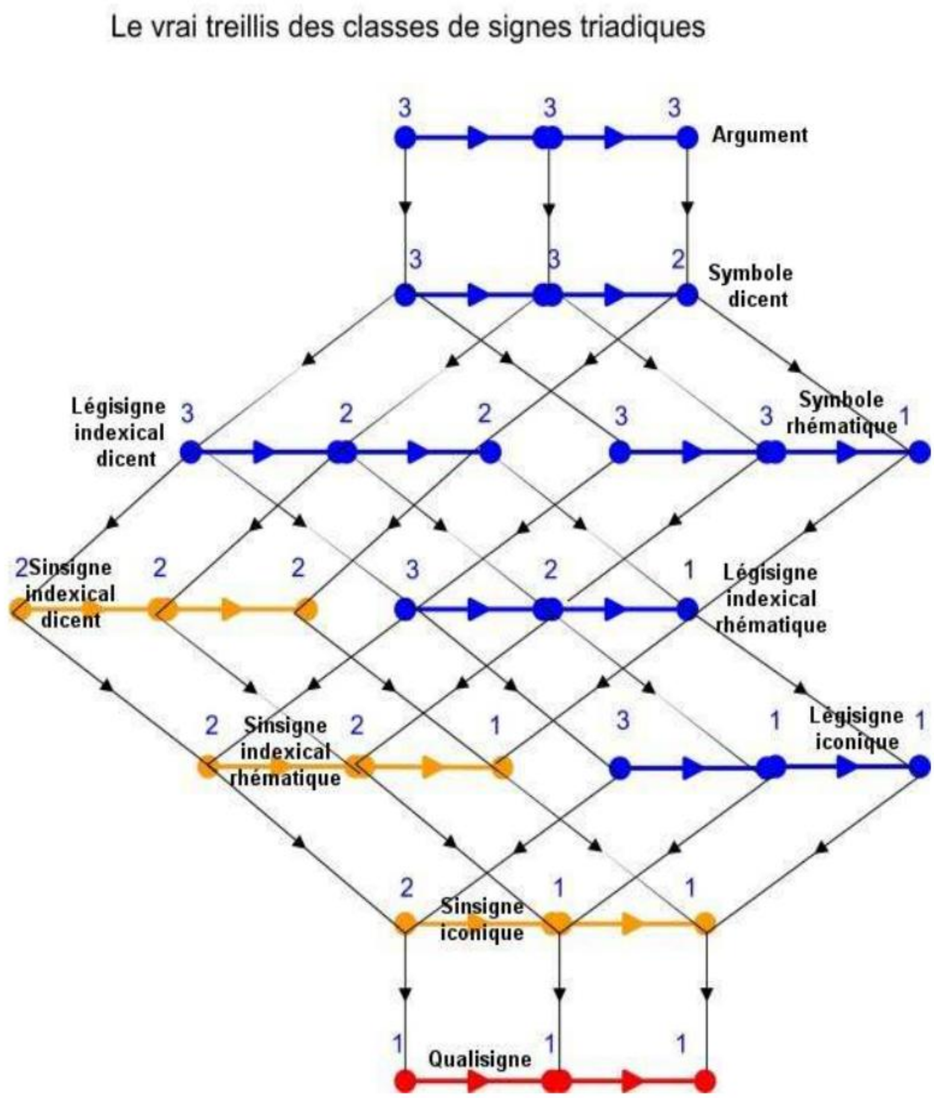

Figure H.1.

H.1. http://perso.numericable.fr/robert.marty/semiotique/vrai-treillis.htm

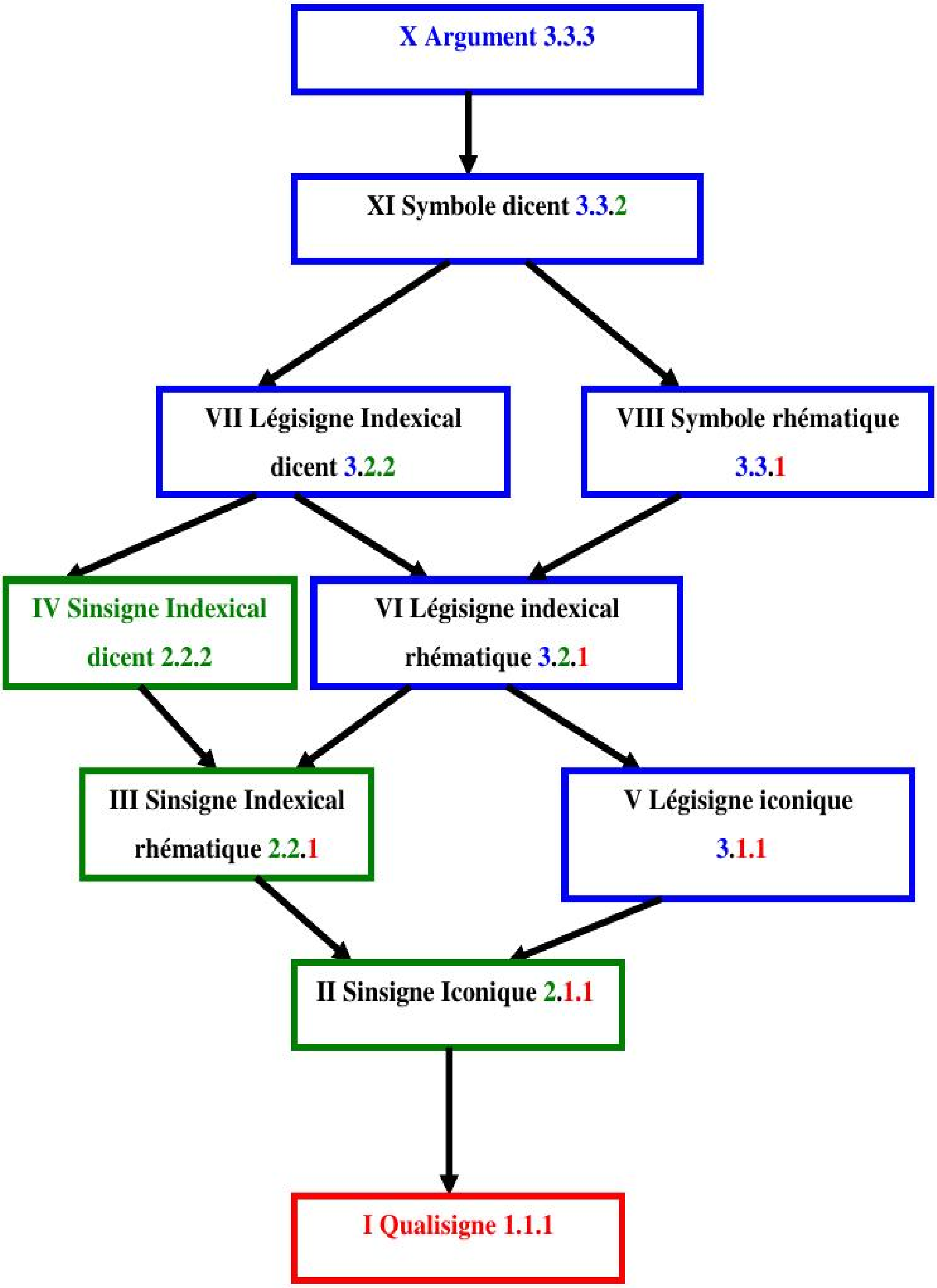

Figure H.2.

Sur ce diagramme, la priméité est représentée en rouge, la secondéité en vert et la tiercéité en bleu. Le premier chiffre représente la trichotomie du representamen, le second celle de l'objet et la troisième celle de l'interprétant. La diagramme suivant reprend les définitions de Marty pour chacune des classes du treillis.

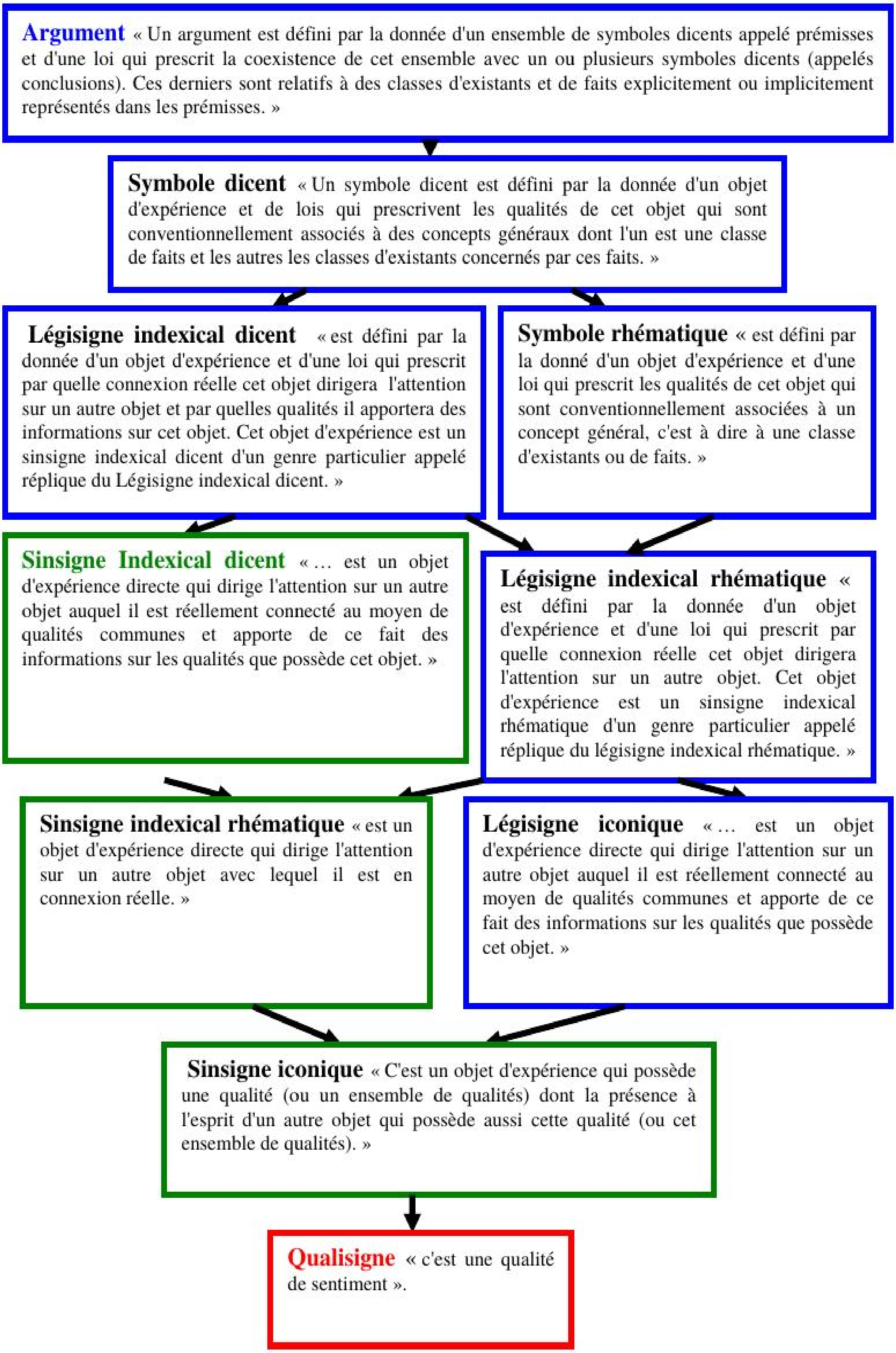
Argument « Un argument est défini par la donnée d'un ensemble de symboles dicents appelé prémisses et d'une loi qui prescrit la coexistence de cet ensemble avec un ou plusieurs symboles dicents (appelés conclusions). Ces derniers sont relatifs à des classes d'existants et de faits explicitement ou implicitement représentés dans les prémisses. »
Symbole dicent « Un symbole dicent est défini par la donnée d'un objet d'expérience et de lois qui prescrivent les qualités de cet objet qui sont conventionnellement associés à des concepts généraux dont l'un est une classe de faits et les autres les classes d'existants concernés par ces faits. »
Légisigne indexical dicent « est défini par la donnée d'un objet d'expérience et d'une loi qui prescrit par quelle connexion réelle cet objet dirigera l'attention sur un autre objet et par quelles qualités il apportera des informations sur cet objet. Cet objet d'expérience est un sinsigne indexical dicent d'un genre particulier appelé réplique du Légisigne indexical dicent. »
Symbole rhématique « est défini par la donné d'un objet d'expérience et d'une loi qui prescrit les qualités de cet objet qui sont conventionnellement associées à un concept général, c'est à dire à une classe d'existants ou de faits. »
Sinsigne Indexical dicent « … est un objet d'expérience directe qui dirige l'attention sur un autre objet auquel il est réellement connecté au moyen de qualités communes et apporte de ce fait des informations sur les qualités que possède cet objet. »
Légisigne indexical rhématique « est défini par la donnée d'un objet d'expérience et d'une loi qui prescrit par quelle connexion réelle cet objet dirigera l'attention sur un autre objet. Cet objet d'expérience est un sinsigne indexical rhématique d'un genre particulier appelé réplique du légisigne indexical rhématique. »
Sinsigne indexical rhématique « est un objet d'expérience directe qui dirige l'attention sur un autre objet avec lequel il est en connexion réelle. »
Légisigne iconique « … est un objet d'expérience directe qui dirige l'attention sur un autre objet auquel il est réellement connecté au moyen de qualités communes et apporte de ce fait des informations sur les qualités que possède cet objet. »
Sinsigne iconique « C'est un objet d'expérience qui possède une qualité (ou un ensemble de qualités) dont la présence à l'esprit d'un autre objet qui possède aussi cette qualité (ou cet ensemble de qualités). »
Qualisigne « c'est une qualité de sentiment ».

Figure H.3.

Annexe I

Éléments d'analyse a priori dans le cadre de la TSD (d'après P. Gibel)

I.1. Cadre de l'étude

- Programmation des unités d'apprentissage sur la période correspondante
- Positionnement de la séquence dans la progression inhérente à la construction ou au renforcement de la notion étudiée

I.2. Analyse a priori de la situation d'apprentissage prise comme objet d'étude

I.2.1. Sur le plan mathématique

- Nature de la réponse attendue (procédure, méthode, technique, algorithme ...)
- Procédures attendues présentées de façon détaillée et construites à partir du répertoire didactique de la classe

I.2.2. Sur le plan didactique

I.2.2.1. Type de situation

- Situation problème :
  - situation de recherche
  - situation d'élaboration d'outil
  - situation de réinvestissement avec changement de cadre
- Situation de réinvestissement
- Situation d'évaluation

I.2.2.2. Variables didactiques

I.2.2.3. Procédures de résolution envisagées (présentation détaillée)

I.2.2.4. Scénario envisagé

- déroulement succinct
- modalités pédagogiques

I.2.2.5. Difficultés envisagées, prévisibles

- lecture (compréhension, langage, interprétation, finalité)
- représentation des données (chgt de cadre, de registre)
- gestion et traitement des données
- mise en œuvre des techniques, des algorithmes, des propriétés ou des théorèmes

I.2.2.6. Aides envisagées

- processus de différenciation envisagée
- modalités de travail
- choix de valeurs particulières pour les variables didactiques de la situation

I.2.2.7. Validation

Ici, on s'appuie sur les moyens de validation dont disposent les étudiants