



HAL
open science

Optimisation de forme par méthode Level Set pour les équations intégrales de l'électromagnétisme. Application à la conception d'antennes

Sophie Coquan

► **To cite this version:**

Sophie Coquan. Optimisation de forme par méthode Level Set pour les équations intégrales de l'électromagnétisme. Application à la conception d'antennes. Analyse numérique [math.NA]. Université Paris Diderot (Paris 7), 2016. Français. NNT: . tel-01421480

HAL Id: tel-01421480

<https://theses.hal.science/tel-01421480>

Submitted on 22 Dec 2016

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT (PARIS 7)
SORBONNE PARIS CITE
ÉCOLE DOCTORALE DE SCIENCES MATHÉMATIQUES
DE PARIS CENTRE

Laboratoire Jacques-Louis Lions - CNRS UMR 7598

THÈSE DE DOCTORAT

Discipline : Mathématiques Appliquées

Présentée par
Sophie COQUAN

OPTIMISATION DE FORME PAR MÉTHODE LEVEL SET
POUR LES ÉQUATIONS INTÉGRALES DE
L'ÉLECTROMAGNÉTISME
APPLICATION À LA CONCEPTION D'ANTENNES

Sous la direction de **François JOUVE**

Rapporteurs :

M. **Habib** **AMMARI** ETH Zürich
M. **Abderrahmane** **BENDALI** INSA de Toulouse

Soutenue publiquement le **28 septembre 2016** devant le jury composé de :

M. Grégoire	ALLAIRE	École Polytechnique	Examineur
M. Habib	AMMARI	ETH Zürich	Rapporteur
M. Abderrahmane	BENDALI	INSA de Toulouse	Rapporteur
Mme Anne-Sophie	BONNET-BEN DHIA	CNRS - ENSTA Paritech	Examinatrice
M. François	JOUVE	Université Paris Diderot	Directeur
M. Jean-Paul	MARTINAUD	THALES Systèmes Aéroportés	Examineur
M. Jean-Claude	NEDELEC	Université Rennes 1	Examineur

*À mon grand-père,
qui en aura vu le début mais pas l'aboutissement.*

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon directeur, François Jouve, pour sa disponibilité, ses conseils avisés, sa patience à toute épreuve et son optimisme sans faille (surtout lorsque ce dernier me faisait défaut).

Je suis très honorée que Habib Ammari ait accepté de rapporter cette thèse, et je le remercie vivement pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail. Je remercie sincèrement Abderrahmane Bendali pour avoir pris le temps de lire ma thèse avec tant d'attention, mais également pour m'avoir introduit au monde des équations intégrales et de l'électromagnétisme, il y a quatre ans de cela, à Toulouse.

Je suis également très reconnaissante envers Grégoire Allaire, Anne-Sophie Bonnet-Ben Dhia, Jean-Paul Martinaud et Jean-Claude Nédelec d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

J'ai eu la chance, durant ces trois années, de bénéficier du suivi régulier et des conseils de Jean-Claude Nédelec. Je le remercie chaleureusement pour tout ce qu'il m'a appris, sur les mathématiques mais aussi sur les mathématiciens ! Merci également à Charles Dapogny et Pascal Frey pour m'avoir si gentiment permis d'utiliser leurs excellents codes de manipulation de maillage ; dans le cas contraire, j'y serai sûrement encore.

Au sein de Thales Systèmes Aéroportés, j'ai eu le privilège de faire partie de l'équipe Modélisation/Simulation de Jean-Paul Martinaud. Je tiens à le remercier de m'avoir acceptée et si bien intégrée dans sa petite équipe, et bien évidemment pour le temps qu'il m'a consacré et tous les conseils, toujours pertinents et jamais mis en défaut, qu'il m'a donnés. Cette thèse n'aurait jamais vu le jour sans l'aide de Samuel Nosal ; un immense merci à toi Sam, pour m'avoir si bien guidé d'abord pendant mon stage puis pendant ma thèse, pour ton soutien indéfectible, dans les bons moments comme dans les moins bons, ta confiance envers et contre tout, ton aide, tes conseils, ta gentillesse et ta bonne humeur permanente. Je tiens à remercier également Gilles Salin pour m'avoir si bien guidée dans les méandres du Fortran et des Éléments Finis ; ses compétences en informatique et en films muets des années 50 sont inégalables.

Mes remerciements s'adressent également à l'ensemble des membres du plateau IM pour leur accueil et leur gentillesse ; merci particulièrement à Benjamin, Bernard, Christian, Grégoire, Guillaume, Jean-François, Laurent, Stefan, aux deux Thierry (le frisé et le un peu moins frisé), et Xavier pour tous ces moments de convivialité. Et puisqu'on parle de convivialité, je dois bien sûr remercier la fine équipe de YES pour tous ces joyeux moments, à Elancourt, Paris, Bordeaux, Hengelo, Cannes et j'en passe. J'y ai fait de nombreuses et très belles rencontres ; je ne pourrais malheureusement pas tous les citer ici mais je ferai une mention spéciale à Alex, Anne-Laure, Caroline, Emilie, Fanny, Franck, Guillaume B., Marlène, Rémy et William.

Ces années de thèse n'auraient pas été les mêmes sans la compagnie chaleureuse de ceux qui ont été présents à mes côtés (quasi) quotidiennement. C'est pourquoi je souhaite adresser un immense merci à mes camarades thésards de Paris 7 pour tous ces bons mo-

ments partagés, toutes ces discussions et ces rires autour d'un café (ou autre ...) à Sophie Germain (ou ailleurs ...). Sans eux, cela aurait été un chemin bien long et bien solitaire. Je n'aurais pas le courage d'écrire des remerciements personnalisés à chacun d'entre eux (désolée Maud, je sens que tu vas m'en vouloir), aussi me contenterais-je de les citer. Merci, donc, à Adrien, Anna, Arturo, Aser, Christophe, Clément, David, Guillaume, Huy, Jiatu, Lorick, Marc-Antoine, Maud, Nicolas, Noufel, Oriane, Pierre, Thomas (l'ancien), Thomas (le moins ancien) et Vu-Lan ; sans oublier les petits nouveaux, Côme, Mi-Song, Rémy, Xiao Li et Yann. Bon courage à eux !

Je remercie également la grande et joyeuse famille des féminines de Suresnes / ASTAS, pour tous ces moments de bonheur, sur le terrain et en dehors. Vous êtes incroyables, vous avez changé ma vie de la plus belle des manières, et l'aventure ne fait que commencer.

Un grand merci à mes amis, qui ont si bien su me faire (trop souvent ?) décompresser. Merci particulièrement à mes camarades de la ville rose, ceux restés toulousains et ceux devenus parisiens (et ceux partis plus loin) et aux albigeois, toujours là malgré le temps qui passe. Je ne peux pas tous les citer, j'espère qu'ils me pardonneront.

Enfin, je tiens à remercier l'ensemble de ma famille pour leur présence aux cours de ces 26 dernières années, particulièrement mes frères et sœurs, Nathalie, Guilhem et Marion et leurs petites familles. Pour terminer, je remercie mes parents ; la liste des raisons est trop longue et les mots ne sont pas assez forts pour exprimer tout ce que je leur dois, mais j'espère qu'ils le savent.

Résumé

Cette thèse vise à mettre en place une méthode de calcul automatique de forme optimale pour les antennes, par modification de la forme des motifs métalliques constituant les éléments rayonnants d'une antenne.

La première partie propose un état de l'art des deux principales thématiques de cette thèse. Le chapitre 1 présente la simulation électromagnétique des antennes, basée sur la méthode des équations intégrales et résolue par éléments finis de frontière. Le chapitre 2 présente l'algorithme d'optimisation de forme utilisé, qui couple une analyse de sensibilité avec la méthode Level Set pour l'évolution de la géométrie.

La deuxième partie s'intéresse à l'application de cet algorithme d'optimisation au problème qui a motivé cette thèse, à savoir le calcul de la forme optimale d'un motif métallique sur un élément rayonnant. Le calcul des champs électriques et magnétiques est effectué par la méthode des équations intégrales, qui renvoie notamment l'observable à minimiser : le coefficient de réflexion de l'antenne. Les chapitres 3 et 4 présentent les aspects théoriques de ce travail, dans le domaine continu et le domaine discret respectivement.

La troisième partie explique la mise en œuvre numérique des résultats établis théoriquement dans la partie 2. Le chapitre 5 décrit la boucle globale de l'algorithme d'optimisation de forme. Les résultats obtenus par cet algorithme sont présentés dans le chapitre 6 : ils s'appuient sur plusieurs éléments rayonnants dont la forme de la métallisation évolue afin d'optimiser le coefficient de réflexion ainsi que d'autres critères dérivés.

Abstract

This thesis aims at establishing a method which computes automatically the optimal design of an antenna, by modifying the shape of metallic patterns constituting the radiating elements of an antenna.

In the first part is proposed a state of the art of the two main topics of this thesis. The electromagnetic simulation of antennas based on the integral equations method and solved by the boundary elements method is presented in Chapter 1. Chapter 2 presents the utilized shape optimization algorithm, which combines a sensitivity analysis and the Level Set method for tracking the evolution of the geometry.

The second part deals with the application of this optimization algorithm to the problem that motivated this thesis, namely computing the optimal shape of a metallic pattern on a radiating element. The electric and magnetic fields computation is performed by the integral equation method which returns, among others, the observable to minimize: the reflection coefficient. Chapters 3 and 4 present the theoretical aspects of this work, in the continuous domain and the discrete domain respectively.

In part 3 is explained the numerical implementation of the theoretical results established in part 2. Chapter 5 addresses the global loop of the shape optimization algorithm. The numerical results obtained by this algorithm are set out in chapter 6: they are based on several radiating elements whose shape of the metallization evolves in order to optimize the reflection coefficient as well as other derived criteria.

Table des matières

Introduction	13
I État de l'art	25
1 Équations intégrales de frontière en électromagnétisme	27
1 Méthode des équations intégrales	28
1.1 Équations de Maxwell	28
1.1.1 Équations de Maxwell harmoniques	28
1.1.2 Formulation à un seul champ	29
1.1.3 Conditions de radiation	29
1.2 Rayonnement d'une source dans l'espace libre	30
1.2.1 Solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz	30
1.2.2 Solution des équations de Maxwell	30
1.3 Quelques éléments d'analyse	31
1.3.1 Formule des sauts	31
1.3.2 Notions de géométrie différentielle	32
1.3.3 Espaces fonctionnels	35
1.3.4 Notes sur les noyaux singuliers	37
1.4 Représentation intégrale de la solution	39
1.4.1 Problème aux limites	39
1.4.2 Formule de représentation	40
1.4.3 Formule de trace	41
1.4.4 Équations intégrales	42
2 Résolution numérique	43
2.1 Formulation variationnelle	43
2.2 Méthode des éléments finis de frontière	44
2.2.1 Approximation variationnelle	44
2.2.2 Éléments sur la mise en œuvre numérique	47
2.2.3 Commentaires sur la résolution	47
3 Quelques informations concernant les antennes	47
3.1 Caractéristiques générales des antennes	48
3.1.1 Principe de fonctionnement	48
3.1.2 Réflexion et transmission	48
3.2 Modes guidés	49
3.2.1 Les guides d'onde	49
3.2.2 Modes et fréquences de coupure	50
3.2.3 Réflexion et transmission dans les guides d'onde	52
3.3 Antenna Design	52

2	Optimisation de forme par méthode Level Set	55
1	Méthode Level Set	56
1.1	Méthodes pour le suivi d'interface	56
1.1.1	Tour d'horizon des méthodes existantes	56
1.1.2	Introduction à la méthode Level Set	57
1.2	Présentation de la méthode Level Set	58
1.2.1	Définition implicite d'un domaine	58
1.2.2	Description de l'évolution de la frontière	59
1.3	Quelques aspects numériques	61
1.3.1	Résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi	61
1.3.2	Initialisation de la fonction Level Set	62
2	Optimisation de forme	62
2.1	Définition d'un problème d'optimisation de forme	63
2.1.1	Un peu d'histoire	63
2.1.2	Une rapide vue d'ensemble des différentes méthodes	64
2.2	Analyse de sensibilité par la méthode d'Hadamard	64
2.2.1	Méthode de variation de frontière	65
2.2.2	Différentiation par rapport à la forme	66
2.2.3	Algorithme générique d'optimisation de forme	69
3	Optimisation de forme par méthode Level Set	70
3.1	Algorithme d'optimisation	70
3.2	Remarques	70
II	Optimisation de forme pour l'électromagnétisme	73
3	Le problème d'optimisation de forme	75
1	Contexte et présentation du problème	77
1.1	Tour d'horizon des problèmes existants en électromagnétisme	77
1.2	Contexte industriel	78
2	Formulation du problème d'optimisation	80
2.1	Quelques informations préalables	80
2.1.1	Notations utilisées	80
2.1.2	Sur les types d'interface	80
2.1.3	Particularités du problème	81
2.2	Écriture du problème en termes de courants surfaciques	81
2.2.1	Fonction objectif	81
2.2.2	Équations intégrales	82
2.3	Analyse de sensibilité	83
2.4	Dérivée de forme et problème adjoint	84
2.4.1	Une première expression de la dérivée de forme	84
2.4.2	Introduction du problème adjoint	85
2.4.3	Une deuxième expression de la dérivée de forme	86
3	Calcul des opérateurs intégraux transportés	89
3.1	Dérivée des termes de base	89
3.1.1	Noyau de Green	89
3.1.2	Gradient du noyau de Green	89
3.1.3	Élément de surface	90
3.1.4	Normale unitaire	92
3.2	Dérivée des opérateurs différentiels surfaciques	93

	3.2.1	Gradient tangentiel	94
	3.2.2	Divergence surfacique	95
3.3		Dérivée des opérateurs intégraux	95
	3.3.1	Opérateur de simple couche	95
	3.3.2	Opérateur K_i	96
	3.3.3	Opérateur L_i	97
4		Adaptation à la méthode Level Set	98
	4.1	Particularisation de la déformation	98
	4.1.1	Simplification des opérateurs dérivés	98
	4.1.2	Une troisième expression de la dérivée de forme	99
	4.2	Reformulation pour la méthode Level Set	100
	4.2.1	Terme A_i	100
	4.2.2	Terme B_i	101
	4.2.3	Terme C_i	103
	4.2.4	Terme D_i	103
	4.2.5	Terme E_i	104
	4.2.6	Terme F_i	106
	4.2.7	Terme H_i	106
	4.3	Une quatrième et dernière expression de la dérivée de forme	107
4		Discretisation par éléments finis de frontière	111
1		Résolution du problème adjoint	112
	1.1	Décomposition dans la base des modes	112
	1.2	Formulation variationnelle du problème adjoint	113
	1.3	Résolution numérique	114
2		Écriture dans la base des éléments finis de frontière	115
	2.1	Rappels des formules de discrétisation	115
	2.1.1	Calcul d'intégrales sur le maillage	115
	2.1.2	Formule de quadrature de Gauss	116
	2.1.3	Interpolation des inconnues sur le maillage	116
	2.2	Reformulation des termes hypersinguliers	117
	2.2.1	Classification des termes	118
	2.2.2	Terme $f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$	118
	2.3	Bilan : formulation discrète de la vitesse	119
3		Gestion des singularités	120
	3.1	Intégrales singulières	121
	3.2	Alternance des formules de Gauss	122
III		Mise en œuvre numérique et résultats	125
5		Algorithmes numériques	127
1		Résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi	128
	1.1	Rappel du contexte	128
	1.1.1	Dérivée de forme et vitesse d'advection	128
	1.1.2	Principe de la résolution numérique	129
	1.2	Calcul de la vitesse numérique	130
	1.2.1	Passage du maillage à la grille	130
	1.2.2	Calcul de la normale à la frontière	131
	1.2.3	Régularisation de la vitesse	132

1.3	Initialisation de la fonction Level Set	132
1.3.1	Idée générale	132
1.3.2	Calcul de la distance signée approchée	133
1.4	Bilan : résolution de l'équation	137
2	Évolution de la géométrie	137
2.1	Remaillage	137
2.2	Zone de relaxation	138
3	Algorithme d'optimisation	139
3.1	Schéma global	139
3.2	Critère de convergence	140
6	Résultats numériques	143
1	Présentation des cas-test	144
1.1	Guide d'onde	145
1.1.1	Présentation générale	145
1.1.2	Différentes initialiations	146
1.2	Double-patch	147
1.2.1	Présentation générale	147
1.2.2	Différentes initialiations	148
2	Minimisation du module du coefficient de réflexion	149
2.1	Guide d'onde - Premier résultat	149
2.1.1	Coup d'œil sur la vitesse	150
2.1.2	Résultats de l'algorithme	150
2.1.3	Validité de la solution	151
2.2	Double-patch - Premier résultat	154
2.2.1	Résultats de l'algorithme	154
2.2.2	Validité de la solution	156
2.3	Influence de l'initialisation	156
2.3.1	Guide d'onde	156
2.3.2	Double-patch	158
2.3.3	Synthèse	160
2.4	Influence des paramètres du maillage	161
2.4.1	Taille de la grille	161
2.4.2	Maillage de la zone de relaxation	162
3	Optimisation multi-fréquences	163
3.1	Fonction coût	163
3.2	Double-patch - résultats	164
3.3	Analyse	165
4	Coefficient de réflexion cible : module	166
4.1	Calcul de la dérivée de forme	167
4.2	Guide d'onde - Résultats	167
4.3	Analyse	168
5	Coefficient de réflexion cible : amplitude et phase	168
5.1	Calcul de la dérivée de forme	169
5.2	Résultats	170
5.2.1	Guide d'onde - Rectangle décentré	170
5.2.2	Guide d'onde - Cercle centré	172
5.2.3	Bilan	173
6	Conclusion et perspectives	173

Introduction

Durant les dernières décennies, la simulation numérique a pris une place de plus en plus importante dans le monde industriel, jusqu'à devenir un outil indispensable. Dans le passé, le processus de design industriel passait nécessairement par la fabrication d'une maquette sur laquelle on effectuait des mesures, à la suite desquelles on définissait les mesures correctives à appliquer avant de fabriquer une nouvelle maquette, et ainsi de suite jusqu'à satisfaction des spécifications et fabrication du premier prototype.

L'apparition de la simulation numérique a bouleversé ce processus : le prototype est remplacé par une maquette virtuelle, la mesure est remplacée par des calculs numériques, et les mesures correctives sont ainsi appliquées directement au modèle numérique, et ainsi de suite, encore une fois, jusqu'à satisfaction des spécifications. Une fois le design correspondant à ces spécifications calculé, on peut construire le prototype final.

Le gain en terme de coût et de temps de fabrication est immense. L'augmentation continue de la puissance des ordinateurs, couplée au développement de méthodes d'analyse mathématique avancées ont permis d'améliorer grandement les calculs. Aujourd'hui, on est capable d'effectuer en quelques heures des simulations qui, il y a quelques années à peine, auraient pris des siècles ; et d'aboutir à des designs qui n'auraient pas été imaginés avant l'apparition de la simulation numérique.

Ces nouvelles méthodes d'analyse – où le design est figé par l'utilisateur – sont bien ancrées dans le paysage industriel. L'heure est désormais au développement de méthodes pour la synthèse du design : le code de calcul a la possibilité de modifier les paramètres de conception. En effet, la complexification des contraintes industrielles rend la conception plus délicate : l'utilisation d'une heuristique parfois intuitive, même couplée à d'excellents moyens de modélisation et de simulation, ne suffit parfois pas à proposer un produit conforme à toutes les exigences. Les mesures correctives à appliquer sont alors difficiles à définir, et le design final difficile à imaginer.

Dès lors, on voit apparaître l'intérêt pour une nouvelle classe de méthodes numériques qui, s'appuyant sur les méthodes de simulation déjà existantes, ont pour but le calcul du design optimal, c'est-à-dire réalisant toutes les exigences. Si un algorithme est capable de calculer une géométrie optimale non intuitive pour un ingénieur, ou de réaliser des analyses de tolérance automatiques sur un grand nombre de paramètres, alors on a encore augmenté l'efficacité du recours à la simulation en automatisant la définition des mesures correctives et en calculant, sans intervention humaine, un design satisfaisant aux spécifications.

Objectif de la thèse

Les travaux effectués dans cette thèse s'inscrivent dans la problématique de conception optimale présentée ci-dessus.

Plus spécifiquement, on s'intéresse à la conception d'antennes, telles que l'on peut en trouver dans les radars : l'antenne est alors l'interface entre l'espace libre où circulent les ondes électromagnétiques et le système radar qui traite les informations reçues. L'antenne jouant un rôle primordial dans les performances du système radar, sa conception est soumise à de nombreuses contraintes en terme de performances mais également de poids, de taille, de bande de fréquence, etc.

Encore plus spécifiquement, on s'intéresse ici aux propriétés d'émission d'une antenne réseau, c'est-à-dire composée d'un certain nombre de modules élémentaires appelés *éléments rayonnants* qui sont alimentés par un ensemble de dispositifs électroniques agissant sur les caractéristiques (forme, polarisation, direction...) de l'onde formée. Le fonctionnement d'une antenne sera détaillé au chapitre 1.

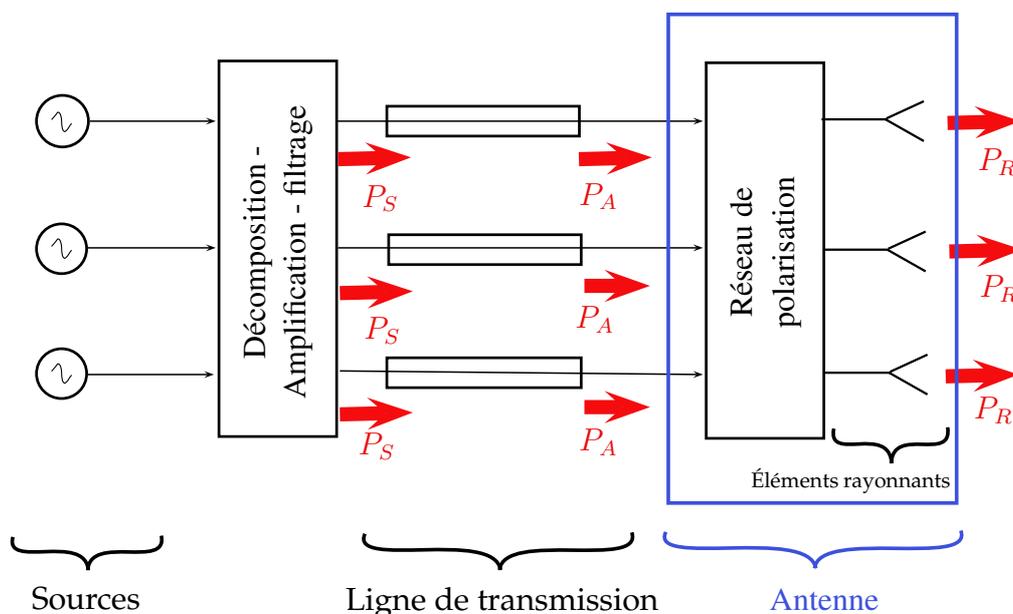


FIGURE 1 – Schéma simplifié de la transmission d'un signal d'une source à l'espace libre via une antenne réseau

Dans cette thèse, nous allons nous intéresser à la forme de ces éléments rayonnants unitaires, et en particulier aux éléments rayonnants de type patch. Ce type d'élément rayonnant, quelque soit sa géométrie, possède toujours à sa surface une zone métallisée, appelée *patch métallique*, qui va créer le couplage entre l'onde dans le guide, qui permet la transmission de cette dernière à l'antenne, et l'espace libre. Nous allons chercher, dans ces travaux, à optimiser la forme de ce patch métallique.

Pour les besoins de la thèse, on se limitera au cas d'un élément rayonnant pris en espace libre, et non pas en réseau fini, afin de simplifier les écritures mathématiques. L'extension au cas des réseaux n'est pas traitée ici, mais ne pose pas de problème théorique supplémentaire.

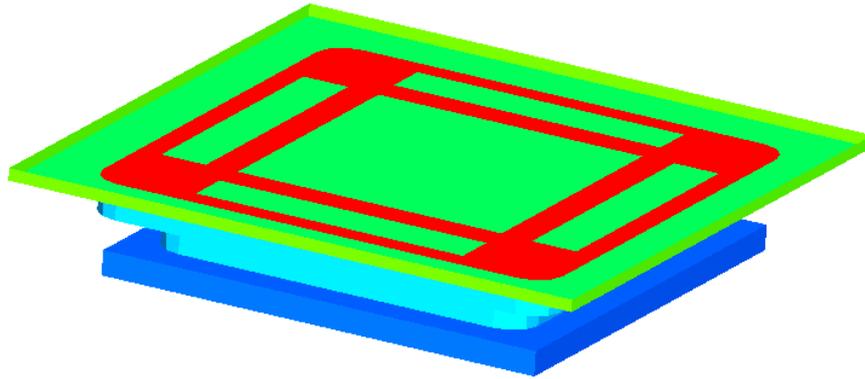


FIGURE 2 – Exemple d’élément rayonnant avec un substrat diélectrique (en vert) partiellement métallisé (en rouge)

La forme de cette métallisation va directement influencer sur les caractéristiques du champ électromagnétique rayonné, ce qui nous amène à la question principale lors de la définition d’un problème d’optimisation : quel est le critère que l’on veut réaliser ?

Lors de l’émission de l’onde, l’antenne va transmettre une certaine quantité d’énergie dans l’espace libre. Cette quantité dépend des paramètres géométriques et physiques : design géométrique, matériaux, fréquence, polarisation,... En fonction de ces paramètres, une partie de cette énergie est toujours réfléchi vers l’alimentation de l’antenne.

Dans la bande de fréquence de fonctionnement de l’antenne, minimiser cette quantité d’énergie réfléchi revient à augmenter la portée de l’antenne ou à diminuer la puissance nécessaire à son fonctionnement. Cela revient donc aussi à améliorer les performances du radar.

Ainsi, nous allons dans nos travaux chercher à minimiser la quantité d’énergie réfléchi dans l’antenne. Il ne s’agit pas de la seule quantité intéressante à minimiser, mais nous nous y restreindrons afin de tester la faisabilité de nos méthodes, l’optimisation d’autres critères ne posant pas de difficultés théoriques ou pratiques supplémentaires.

Organisation de ce mémoire

Ce manuscrit se divise en six chapitres, regroupés dans trois parties. Nous présentons ici brièvement le contenu de chacun de ces chapitres, de manière très formelle.

Partie I : État de l’art

Chapitre 1 : Équations intégrales de frontière en électromagnétisme

Le premier chapitre, bibliographique, présente le problème de la diffraction d’une onde électromagnétique par un obstacle.

On commence par rappeler les équations de Maxwell, qui régissent la propagation d’un

champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) dans un milieu isotrope de \mathbb{R}^3 , de permittivité diélectrique ε et de perméabilité magnétique μ . Les équations de Maxwell sous forme harmonique s'écrivent :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu_0\mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0\mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

En réécrivant ces équations, on se ramène à une équation d'Helmholtz, dont on connaît la solution élémentaire g . Cela nous amène à la définition du noyau de Green, qui nous sera utile par la suite :

$$G(x, y) = g(x - y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^3$$

En utilisant la solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz, on peut écrire la solution des équations de Maxwell dans le vide.

Afin de résoudre le problème de la diffraction d'une onde par un obstacle, on introduit la formule des sauts, qui, particularisée pour le rotationnel d'un champ de vecteur \mathbf{A} , s'écrit :

$$\nabla \times \{\mathbf{A}\} = \{\nabla \times \mathbf{A}\} + s([\mathbf{A} \times \mathbf{n}])$$

où s est la distribution de simple couche.

On introduit ensuite un certain nombre d'outils de géométrie différentielle qui nous permettent de définir les opérateurs gradient tangentiel ∇_Γ et divergence surfacique div_Γ .

Nous introduisons également les espaces fonctionnels $H(\text{rot}, \Gamma)$ et $H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ qui serviront de cadre à cette étude, ainsi que quelques informations sur la valeur principale de Cauchy et la partie finie d'Hadamard qui nous permettront de définir les intégrales singulières et hypersingulières qui interviendront dans les équations.

Nous arrivons ensuite au point le plus important du chapitre : la représentation intégrale de la solution du problème de diffraction d'une onde par un objet. Celle-ci est obtenue à partir de la solution des équations de Maxwell dans \mathbb{R}^3 et la formule des sauts, et s'applique aux inconnues que sont les courants électriques et magnétiques (\mathbf{j}, \mathbf{m}) définis comme les traces tangentielles des champs sur la surface Γ de l'objet :

$$\begin{cases} \mathbf{j} = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \\ \mathbf{m} = \mathbf{E} \times \mathbf{n} \end{cases}$$

La formule de représentation intégrale s'écrit alors, $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^{\text{inc}}(x) + (\mathcal{L}\mathbf{j})(x) - (\mathcal{K}\mathbf{m})(x) \\ \mathbf{H}(x) = \mathbf{H}^{\text{inc}}(x) + (\mathcal{K}\mathbf{j})(x) + \frac{\varepsilon}{\mu}(\mathcal{L}\mathbf{m})(x) \end{cases}$$

où les opérateurs intégraux \mathcal{L} et \mathcal{K} s'expriment de la manière suivante :

$$\begin{cases} (\mathcal{L}\mathbf{X})(x) = \frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla \int_\Gamma G(x, y) \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{X}(y) d\Gamma(y) + i\omega\mu \int_\Gamma G(x, y) \mathbf{X}(y) d\Gamma(y) & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \\ (\mathcal{K}\mathbf{X})(x) = \int_\Gamma \nabla_x G(x, y) \times \mathbf{X}(y) d\Gamma(y) & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \end{cases}$$

En définissant les traces L et K sur Γ de ces opérateurs, on peut écrire les équations intégrales appelées EFIE et MFIE $\forall x \in \Gamma$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbf{E}_T^\pm(x) &= \mathbf{E}_T^{\text{inc}}(x) + (L\mathbf{j})(x) - (K\mathbf{m})(x) \\ \frac{1}{2}\mathbf{H}_T^\pm(x) &= \mathbf{H}_T^{\text{inc}}(x) + (K\mathbf{j})(x) + \frac{\varepsilon}{\mu}(L\mathbf{m})(x)\end{aligned}$$

On présente ensuite la méthode de résolution numérique de ces équations intégrales que nous utiliserons, la méthode des éléments finis de frontière. Elle se base sur les éléments finis de Raviart-Thomas, dont les fonctions de base s'écrivent, pour un élément K du maillage :

$$\forall l = 1, \dots, 3, \quad \mathbf{B}_{l,K}(x) = \frac{1}{2|K|}(\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}_{l-1}) \text{ pour } x \in K$$

où $\mathbf{r}(x)$ est le rayon vecteur du point x . Les courants surfaciques s'écrivent alors dans cette base :

$$\mathbf{j}|_K = \lambda_{1,K}\mathbf{B}_{1,K} + \lambda_{2,K}\mathbf{B}_{2,K} + \lambda_{3,K}\mathbf{B}_{3,K}$$

où les degrés de liberté globaux $\lambda_{l,K}$ sont les flux sortants de K à travers chaque arête :

$$\lambda_{l,K} = \int_{K'_l} \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\nu}_l ds$$

Enfin, nous terminons le chapitre par quelques informations générales concernant les antennes, dont les principales ont déjà été introduites dans les objectifs de la thèse. Nous introduisons également quelques caractéristiques des guides d'onde, en particulier les trois catégories de modes de propagation de l'onde : les modes TE, TM et TEM. Enfin, nous présentons brièvement le code de calcul industriel *Antenna Design*, qui résout les équations de Maxwell sous forme intégrale par la méthode des éléments finis de frontière, et que nous utiliserons dans les simulations numériques présentées au chapitre 6.

Chapitre 2 : Optimisation de forme par méthode Level Set

Ce deuxième chapitre, également bibliographique, présente la méthode d'optimisation de forme que nous utiliserons dans cette thèse : la méthode Level Set.

Après avoir effectué un rapide tour d'horizon des méthodes de suivi d'interface existantes, on se concentre sur celle qui nous intéresse particulièrement, la méthode Level Set. Elle se base sur la représentation implicite d'un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$ à l'aide d'une fonction auxiliaire $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ appelée fonction Level Set :

$$\begin{cases} \phi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma = \partial\Omega \\ \phi(x) > 0 & \text{si } x \in {}^c\overline{\Omega} \end{cases}$$

Cette fonction va nous permettre de décrire l'évolution de la frontière Γ de Ω au cours du temps, puisque cette frontière est déterminée, à chaque instant t , comme étant l'ensemble des points pour lesquels la fonction Level Set ϕ est nulle.

Ainsi, si l'on introduit le vecteur vitesse $\mathbf{V}(t, x) = v(t, x)\mathbf{n}(t, x)$, qui est le champ de

vecteurs dirigé suivant la normale à Γ dictant le mouvement de la frontière, on trouve que l'évolution de la frontière est régie par une équation d'Hamilton-Jacobi dont la solution est la fonction Level Set correspondante :

$$\forall (x, t) \in \mathbf{R}^d \times [0, T], \quad \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + v(t, x)|\nabla \phi(t, x)| = 0$$

Cette équation est résolue sur une grille cartésienne par un schéma aux différences finies d'ordre 2. Cette résolution nécessite l'initialisation de la fonction Level Set ϕ , que l'on va chercher à être le plus proche possible de la fonction distance signée.

Nous présentons ensuite le problème d'optimisation de forme, qui se définit comme la recherche de la forme optimale d'un domaine Ω parmi un ensemble de formes admissibles et qui minimise un critère appelé fonction coût.

Afin de calculer les variations de la fonction coût par rapport à la forme, nous devons définir un cadre pour les perturbations de la forme. La méthode que nous utilisons est la méthode de variation de frontière d'Hadamard qui permet d'effectuer une analyse de sensibilité de la fonction coût J lorsque l'on perturbe la frontière de Ω .

On introduit pour cela un champ de vecteur θ et on considère les déformées de Ω par le champ θ :

$$\Omega_\theta = \left\{ x + \theta(x), x \in \Omega \right\}$$

Ce cadre nous permet d'introduire la notion de différentiation par rapport au domaine. On définit la dérivée de forme de J par rapport à Ω comme la dérivée de Fréchet en $\theta = 0$ de la fonction $\theta \mapsto J((I + \theta)(\Omega))$ et on a le développement asymptotique suivant :

$$J(I + \theta)(\Omega) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|} = 0$$

Nous présentons ensuite quelques formules et propriétés utiles sur les dérivées d'intégrales, ainsi que les notions de dérivées lagrangiennes et eulériennes et d'état adjoint. Ces notions vont nous permettre d'énoncer la proposition donnant la dérivée de forme d'une intégrale dont l'intégrande est une fonction dépendant du domaine, solution d'une équation aux dérivées partielles.

Les propriétés des dérivées d'intégrales nous apprennent que la dérivée de forme ne dépend que de la composante normale de la déformation du domaine. Au final, la dérivée de forme peut s'écrire de la manière suivante :

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Gamma} v_{\Omega}(\theta \cdot \mathbf{n}) ds$$

où le champ scalaire v_{Ω} , que l'on sait calculer, dépend de l'état et de l'état adjoint. Cette expression nous donne une direction de descente naturelle : $\theta = -v_{\Omega} \mathbf{n}$ puisque pour t un pas de descente suffisamment petit, on peut écrire :

$$J(\Omega_\theta) = J(\Omega) - t \int_{\Gamma} v_{\Omega}^2 ds + o(t) < J(\Omega)$$

La fonction coût est bien décroissante pour cette direction.

Ainsi, si l'on couple ce calcul de dérivée de forme et de direction de descente avec la

méthode Level Set, on obtient un algorithme efficace d'optimisation de forme qui permet une évolution de frontière libre. À chaque itération k du processus, on calcule la direction de descente θ_k par la méthode d'Hadamard et on utilise sa composante normale $v_{\Omega^k} = \theta_k \cdot \mathbf{n}$ pour résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} - v_{\Omega^k} |\nabla \phi| = 0 \\ \phi(t = 0, \cdot) = \phi^k \end{cases}$$

Partie II : Optimisation de forme pour l'électromagnétisme

Chapitre 3 : Le problème d'optimisation de forme

Le chapitre 3 présente la réponse proposée au problème présenté au début de cette introduction, à savoir l'application de la méthode d'optimisation de forme par Level Set au problème de diffraction électromagnétique résolu par équations intégrales.

Dans un premier temps, on rappelle le contexte et la problématique. Le patch métallique dont nous souhaitons optimiser la forme est schématisé sur la figure suivante :

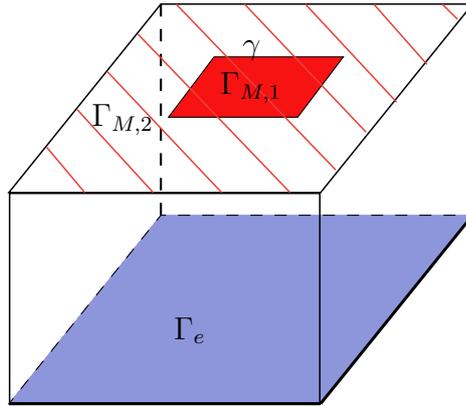


FIGURE 3 – Schéma global d'un patch métallique sur un élément rayonnant où la surface hachurée est notée $\Gamma_M = \Gamma_{M,1} \cup \Gamma_{M,2}$ et la frontière du patch $\gamma = \Gamma_{M,1} \cap \Gamma_{M,2}$

La fonction Level Set associée à ce problème est donc définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \phi(x) < 0 & \text{si } x \in \Gamma_{M,1} \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \gamma \\ \phi(x) > 0 & \text{si } x \in \Gamma_{M,2} \end{cases}$$

On rappelle que la fonction coût à minimiser est ici la quantité d'énergie réfléchie dans l'antenne. Elle peut également s'écrire comme le flux du vecteur de Poynting du champ diffracté à travers une section du guide d'onde, soit :

$$J(\Gamma) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} (\mathbf{E}^{\text{diff}} \times \overline{\mathbf{H}^{\text{diff}}}) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma \right) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}) \, d\sigma \right)$$

On applique ensuite la méthode d'analyse de sensibilité présentée au chapitre précédent à la fonction coût, et donc aux grandeurs physiques qui y interviennent. On note les dérivées de forme de la manière suivante :

$$\begin{aligned}\mathbf{j}(\Gamma^\theta, x + \theta(x)) &= \mathbf{j}(\Gamma, x) + \mathbf{j}^{(1)}(\theta, x) + o(\theta) \\ \mathbf{m}(\Gamma^\theta, x + \theta(x)) &= \mathbf{m}(\Gamma, x) + \mathbf{m}^{(1)}(\theta, x) + o(\theta)\end{aligned}$$

La dérivée de forme de la fonction coût s'écrit donc, dans un premier temps :

$$J'(\Gamma)(\theta) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \left(\mathbf{m}^{(1)}(\theta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}) + \mathbf{j}^{(1)}(\theta) \cdot (\bar{\mathbf{m}} \times \boldsymbol{\nu}) \right) d\sigma \right)$$

L'introduction d'un problème adjoint, et sa solution, appelée état adjoint et notée (\mathbf{p}, \mathbf{q}) , nous permet la reformulation de cette dérivée de forme, qui devient :

$$\begin{aligned}J'(\Gamma)(\theta) &= \frac{1}{2} \Re \left(\sum_{i=1}^2 \left[\int_{\Gamma_i} \left(L_i^{(1)}(\theta) [\mathbf{j}_i] - K_i^{(1)}(\theta) [\mathbf{m}_i] \right) \cdot \mathbf{p}_i d\sigma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\Gamma_i} \left(-K_i^{(1)}(\theta) [\mathbf{j}_i] - \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} L_i^{(1)}(\theta) [\mathbf{m}_i] \right) \cdot \mathbf{q}_i d\sigma \right] \right)\end{aligned}$$

où i est l'indice des différents domaines diélectriques composant l'antenne et $L_i^{(1)}(\theta)$ et $K_i^{(1)}(\theta)$ sont les dérivées des opérateurs intégraux intervenant dans les équations intégrales.

Le calcul de ces opérateurs intégraux est ensuite effectué, en dérivant tous leurs termes constitutifs (notamment les opérateurs différentiels) et en appliquant les règles de dérivation d'intégrales. Ces calculs aboutissent à une troisième expression pour la dérivée de forme de la fonction coût.

Enfin, nous reformulons les expressions des opérateurs intégraux afin d'obtenir une dérivée de forme ayant la structure souhaitée pour y appliquer la méthode Level Set, à savoir :

$$J'(\Gamma)(\theta) = \int_{\Gamma_M} \mathbf{V}(y) \cdot \theta(y) d\sigma(y)$$

Une fois ces calculs effectués, on obtient bien une dernière expression de la dérivée de forme que l'on pourra exploiter :

$$J'(\Gamma)(\theta) = \int_{\Gamma_M} \left(\frac{1}{2} \Re \left(\sum_{i=1}^2 r_i [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{q}](y) \right) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y)$$

où le terme dans l'intégrande, lui-même constitué d'une somme d'intégrales sur la totalité de la surface, sera présenté dans la proposition finale du chapitre.

Chapitre 4 : Discrétisation par éléments finis de frontière

Le chapitre 4 présente l'application numérique des résultats théoriques présentés au chapitre 3.

Dans un premier temps, on revient sur l'implémentation de la résolution du problème

adjoint. Notons qu'il s'agit de la seule étape de calcul qui soit intrusive, c'est-à-dire qui nécessite de modifier le code de calcul *Antenna Design*.

On s'appuie pour cela sur la forme particulière des champs et des courants dans un guide d'onde, à savoir leur décomposition dans la base des modes.

Si on note $\beta_{m_i}, \forall m_i = 1, \dots, n_m$ les coefficients de la décomposition du champ incident dans cette base, $\alpha_{m_i m_r}, \forall m_i = 1, \dots, n_m, \forall m_r = 1, \dots, n_m$ les composantes de la matrice S des coefficients de réflexion et de transmission entre le mode m_i et le mode m_r et $\mathbf{E}_{m_i}, \mathbf{H}_{m_i}, \forall m_i = 1, \dots, n_m$ ces modes, alors les champs admettent la décomposition suivante :

$$\forall x \in \Gamma_e, \quad \mathbf{E}(x) = \sum_{m_i}^{n_m} \sum_{m_r}^{n_m} \beta_{m_i} \alpha_{m_i m_r} \mathbf{E}_{m_r}(x) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(x) = \sum_{m_i}^{n_m} \sum_{m_r}^{n_m} \beta_{m_i} \alpha_{m_i m_r} \mathbf{H}_{m_r}(x)$$

Grâce à cette décomposition, on peut réécrire le second membre du problème direct, noté b_D , sur la section Γ_e du guide comme une somme de seconds membres par mode :

$$b_D \mathbf{1}_{\Gamma_e} = \sum_{m_i}^{n_m} \beta_{m_i} b_{m_i}$$

et de même pour le second membre du problème adjoint :

$$b_A = \sum_{m_i}^{n_m} \sum_{m_r}^{n_m} \bar{\beta}_{m_i} \bar{\alpha}_{m_i m_r} \bar{b}_{m_r}$$

D'un point de vue matriciel, si on considère une propagation monomodale, cela revient tout simplement à résoudre le système

$$[A][J U] = [B (\bar{B} \mathbf{1}_{\Gamma_e})]$$

et à reconstruire le vecteur état adjoint de la manière suivante :

$$P = \bar{\beta} \bar{\alpha} U$$

Le calcul des termes constitutifs de la dérivée de forme se fait a posteriori, à partir des inconnues calculées numériquement sur le maillage, à partir de trois formules indispensables :

- la décomposition des intégrales sur le maillage :

$$\forall y \in \Gamma, \int_{\Gamma} f(x, y) d\sigma(x) = \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K f(x, y) d\sigma_K(x)$$

- la formule de quadrature de Gauss :

$$\forall y \in \Gamma, \forall K \in \Gamma_h, \int_K f(x, y) d\sigma_K(x) \approx |K| \sum_{s=1}^{N_G} \omega_s f|_K(x_s, y)$$

où N_G est le nombre de points de Gauss considérés, x_s leurs coordonnées et ω_s les poids qui y sont associés ;

- la formule d'interpolation des inconnues en tout point du maillage, à partir des fonctions de base et des degrés de liberté :

$$\mathbf{j}|_K(x) = \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K} \mathbf{B}_{l,K}(x)$$

Après reformulation d'un terme hypersingulier, on a donc à notre disposition une expression discrétisée de la dérivée de forme de la fonction coût. Les termes qui la constituent étant pour la plupart singuliers, on définit une stratégie qui nous permet d'approcher ces intégrales singulières :

- Pour le terme d'auto-influence (intégrale double sur le même élément), on effectue une approximation de ces intégrales en annulant la partie singulière ;
- On alterne les formules de Gauss, et donc les coordonnées des points de Gauss. Ainsi, on minimise l'influence des intégrales singulières sur le calcul de la dérivée de forme de la fonction coût.

Partie III : Mise en œuvre numérique et résultats

Chapitre 5 : Algorithme numérique

Le chapitre 5 présente la mise en œuvre numérique de la méthode d'optimisation et l'algorithme utilisé.

On commence par rappeler le contexte, à savoir que l'on a en notre possession une dérivée de forme du type

$$J'(\Gamma)(\theta) = \int_{\Gamma_M} \mathbf{V}(y) \cdot \theta(y) d\sigma(y)$$

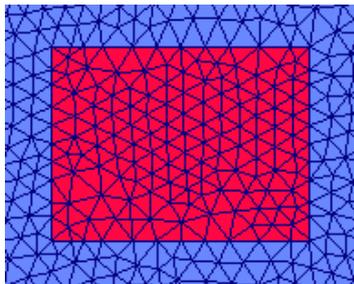
et que l'on doit résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi avec comme terme de vitesse

$$v(y) = -\mathbf{V}(y) \cdot \mathbf{n}(y) \quad \forall y \in \Gamma_M$$

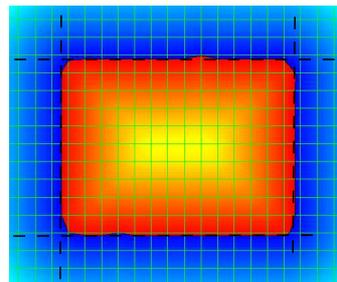
Cette équation sera résolue sur une grille cartésienne fixe, ce qui va nécessiter des passages successifs du maillage (où sont calculés les courants) à la grille (où sera calculée la vitesse). Ce passage sera effectué par localisation de chaque point de la grille dans les éléments du maillage.

La normale à la frontière Γ_M est quant à elle calculée à partir de la fonction Level Set, à l'aide d'un schéma numérique de type différences finies, et la vitesse finale est régularisée par une méthode basée sur l'opérateur Laplacien.

Une des difficultés numériques qui se pose est celle de l'initialisation de la fonction Level Set. Comme expliqué dans le chapitre 2, on va chercher à se rapprocher le plus possible de la fonction distance signée, en calculant le plus précisément possible la distance de chaque point de la grille aux arêtes du maillage délimitant le patch métallique. Pour un patch métallique rectangulaire, on obtient l'initialisation suivante :



Maillage initial



Level-Set après initialisation

FIGURE 4 – Initialisation de la fonction Level-Set

Nous présentons ensuite la stratégie utilisée pour faire évoluer, au fil des itérations, la géométrie du patch. Cette stratégie repose sur deux étapes principales :

- le remaillage de Γ_M suivant la nouvelle fonction Level Set calculée après résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi par interpolation de cette nouvelle Level Set sur l'ancien maillage, découpage de l'ancien maillage et génération d'un nouveau maillage ;
- le maintien de la conformité de ce nouveau maillage avec le reste du maillage par remaillage d'une zone tampon entre les deux, appelée zone de relaxation.

Enfin, nous présentons schématiquement l'algorithme d'optimisation qui a été implémenté et qui prend en compte les étapes d'initialisation, de calcul de la vitesse, de résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, de remaillage et de calcul direct. Nous revenons également sur le choix de critère d'arrêt effectué, qui est un critère de stagnation de la solution.

Chapitre 6 : Résultats numériques

Le chapitre 6 présente les résultats numériques obtenus lors de l'application de l'algorithme à quelques cas-tests.

Dans un premier temps, nous présentons les deux cas-tests considérés :

- un guide d'onde rectangulaire, dont l'embouchure est partiellement métallisée,
- un élément rayonnant constitué de deux blocs diélectriques partiellement métallisés.

Pour chacun de ces cas-tests, on considèrera plusieurs géométries initiales pour le patch métallique à optimiser.

On étudie ensuite les résultats obtenus par l'algorithme. Nous citerons ici un exemple de résultat obtenu, celui de l'optimisation du coefficient de réflexion pour le guide d'onde :

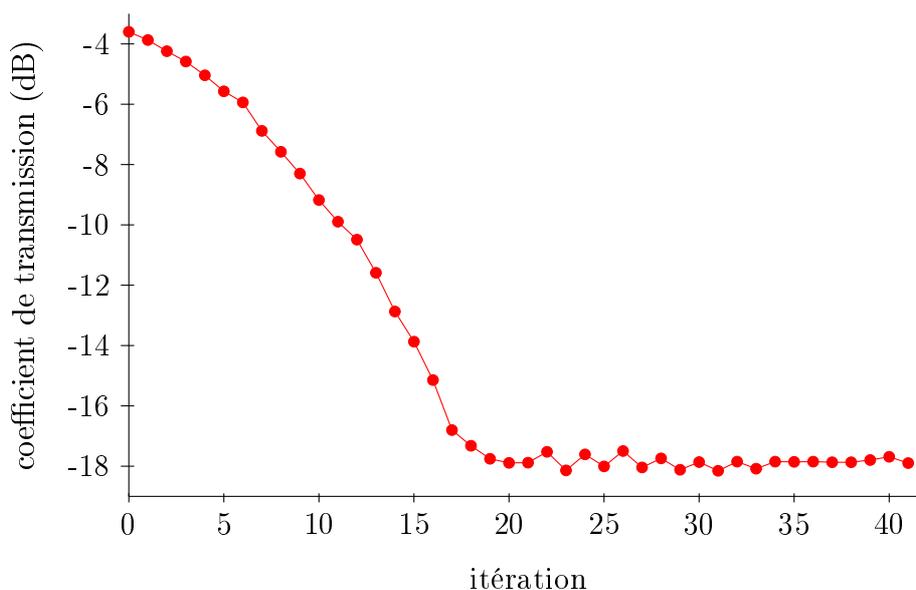


FIGURE 5 – Courbe de convergence de la fonction coût : guide d'onde

Nous revenons également sur l'influence de la géométrie initiale du patch métallique, qui s'avère très importante puisque beaucoup de géométries ont des coefficients de réflexion similaires, et l'algorithme, de type gradient, ne peut converger que vers un minimum local.

Nous étudions également l'influence de certains paramètres numériques, tels que la taille de la grille cartésienne et la qualité du maillage de la zone de relaxation.

Dans le cas du cas-test élément rayonnant, il est intéressant de regarder les résultats obtenus lorsque l'on veut optimiser la forme du patch sur une bande de fréquence. Les résultats obtenus ici sont très satisfaisants, puisque l'algorithme converge vers une forme optimale nous permettant d'élargir la bande de fonctionnement.

Pour le cas-test guide d'onde, on cherche après cela à atteindre un coefficient de réflexion cible, plutôt que de le minimiser. Dans un premier temps, on vise un coefficient de réflexion au module fixé, ce qui se rapproche beaucoup de la minimisation du module. Dans un second temps, on cherche à atteindre un coefficient de réflexion complexe, c'est-à-dire que l'on veut contrôler à la fois l'amplitude et la phase du coefficient. Cela nécessite une adaptation de la fonction coût qui se traduit par une modification de l'état adjoint :

$$P_2 = \bar{\beta} (\overline{\alpha - \delta}) U \quad (0.1)$$

où U est le vecteur solution calculé comme présenté dans le chapitre 4 et δ est le coefficient de réflexion cible.

Dans les deux cas, les résultats obtenus sont également satisfaisants et nous permettent d'atteindre très précisément le coefficient de réflexion cible. Par exemple, pour le guide d'onde, avec contrôle de l'amplitude et de la phase :

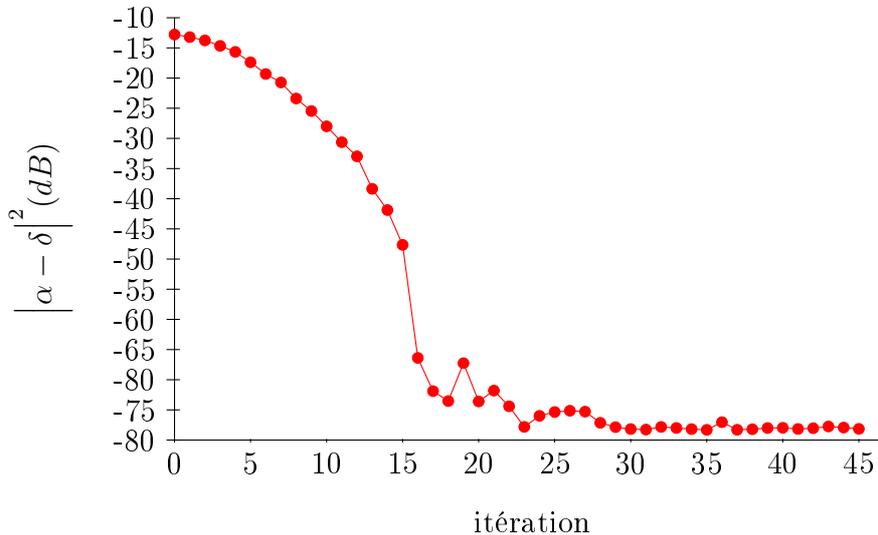


FIGURE 6 – Courbe de convergence : minimisation de l'écart à $\delta = -0.6 + 0.4i$

Nous concluons le chapitre – et par-là même la thèse – par un bilan du comportement de l'algorithme et des résultats obtenus, ainsi que par un certain nombre de perspectives d'amélioration qui restent à explorer.

Partie I
État de l'art

Chapitre 1

Équations intégrales de frontière en électromagnétisme

Contents

1	Méthode des équations intégrales	28
1.1	Équations de Maxwell	28
1.2	Rayonnement d'une source dans l'espace libre	30
1.3	Quelques éléments d'analyse	31
1.4	Représentation intégrale de la solution	39
2	Résolution numérique	43
2.1	Formulation variationnelle	43
2.2	Méthode des éléments finis de frontière	44
3	Quelques informations concernant les antennes	47
3.1	Caractéristiques générales des antennes	48
3.2	Modes guidés	49
3.3	Antenna Design	52

Introduction

Nous présentons dans ce chapitre le problème de la diffraction électromagnétique que nous souhaitons résoudre, ainsi que le principe de sa résolution par la méthode des équations intégrales et la mise en œuvre numérique de cette dernière.

Dans un premier temps, nous rappelons les équations de base de l'électromagnétisme, les équations de Maxwell, ici utilisées sous leur forme harmonique et associées à une condition de rayonnement à l'infini. Nous présentons également la résolution explicite de ces équations par l'intermédiaire de la solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz. Nous introduisons ensuite les outils nécessaires à la mise en place des équations intégrales, en particulier la formule des sauts qui y joue un rôle primordial, le cadre fonctionnel et quelques notions de géométrie différentielle qui sont nécessaires.

Une fois posées les fondations, nous pouvons passer à la formulation du problème de diffraction d'une onde par un objet. C'est cette expression qui, à l'aide de la formule des sauts, nous permet d'obtenir la célèbre formule de représentation intégrale, qui donne

une expression explicite du champ électromagnétique en fonction de la solution élémentaire et de fonctions définies sur la frontière de l'objet diffractant, que sont les sauts des traces de ce même champ. La formule de représentation intégrale permet de transformer l'équation aux dérivées partielles posée dans tout le domaine en une équation intégrale posée sur le bord de l'objet diffractant : elle permet non seulement de gagner une dimension d'espace mais également de passer d'un problème posé dans un domaine non borné à un problème posé dans un domaine borné. Nous présentons également les équations intégrales EFIE et MFIE, qui seront celles utilisées par la suite, ainsi que l'équation intégrale PMCHWT (pour Poggio-Miller-Chan-Harrington-Wu-Tsai) pour une interface diélectrique.

Dans un second temps, nous présentons la méthode de résolution numérique qui est utilisée pour l'approximation des équations intégrales : la méthode des Éléments Finis de Frontière. Nous revenons d'abord sur l'écriture de la formulation variationnelle du problème, puis expliquons brièvement le principe de la méthode. Nous insistons sur la principale caractéristique de l'utilisation d'une méthode de résolution surfacique, à savoir le gain en terme de nombre d'inconnues, accompagné cependant d'un accroissement notable de la complexité numérique.

Enfin, nous terminons ce chapitre par une présentation générale du fonctionnement d'une antenne, en expliquant brièvement le principe de fonctionnement et en énumérant les grandeurs caractéristiques les plus usitées.

Nous nous attardons ensuite sur un type de ligne de transmission très courant dans la structure d'une antenne : les guides d'ondes. En particulier, nous insistons sur les guides d'onde rectangulaires et les lignes coaxiales, qui seront utilisés par la suite dans nos travaux. La propagation des ondes électromagnétiques dans ces structures, appelée propagation guidée, possède des propriétés bien particulières que nous évoquons et dont la compréhension nous sera utile par la suite.

Nous concluons ce chapitre par une brève présentation du code de calcul *Antenna Design*, développé en interne au sein de *Thales Systèmes Aéroportés*, sur lequel nous nous appuyons lors de nos travaux.

1 Méthode des équations intégrales

Dans cette section, nous nous basons principalement sur les ouvrages de Nédélec ([Ned01]), Colton & Kress ([CK92]) et Sauter & Schawb ([SS11]) ainsi que sur les manuels d'Abboud & Terrasse ([AT07]) et Bendali([Ben11]).

1.1 Équations de Maxwell

1.1.1 Équations de Maxwell harmoniques

On considère une onde électromagnétique se propageant dans un milieu isotrope de \mathbb{R}^3 de permittivité diélectrique ε et de perméabilité magnétique μ . On suppose que le milieu est homogène et possède les caractéristiques du vide, c'est-à-dire que $\varepsilon = \varepsilon_0$ et $\mu = \mu_0$, où ε_0 et μ_0 sont respectivement la permittivité et la perméabilité du vide. L'onde électromagnétique est décrite par le champ électrique \mathcal{E} et le champ magnétique

\mathcal{H} satisfaisant les équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathcal{E} + \mu_0 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \times \mathcal{H} - \varepsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

On se place ici dans le régime harmonique : la dépendance en temps est supposée être sinusoïdale et les champs électrique et magnétique vibrent à la même pulsation ω . En plongeant la solution dans le plan complexe, nous considérons donc un couple solution de la forme :

$$\begin{cases} \mathcal{E}(t, x) = \Re(\mathbf{E}(x)e^{-i\omega t}) \\ \mathcal{H}(t, x) = \Re(\mathbf{H}(x)e^{-i\omega t}) \end{cases}$$

Notons que la convention choisie ici est en $e^{-i\omega t}$.

En ne considérant que les ondes harmoniques, on peut s'affranchir de la dépendance en temps et écrire les équations de Maxwell dans le domaine fréquentiel. On note également par $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$ la vitesse de la lumière dans le vide et par $k = \frac{\omega}{c} = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ le nombre d'onde dans le vide.

Les équations de Maxwell harmoniques s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - i\omega \mu_0 \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\omega \varepsilon_0 \mathbf{E} = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

1.1.2 Formulation à un seul champ

On peut éliminer l'un des deux champs \mathbf{E} ou \mathbf{H} du système (1.2) afin d'obtenir un système posé pour seulement l'un des deux champs. En particulier, pour le champ \mathbf{E} :

$$\begin{cases} \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \end{cases}$$

Le champ \mathbf{H} est alors donné par

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega \mu_0} \nabla \times \mathbf{E}$$

En remarquant que $(\Delta \mathbf{E})_j = \Delta E_j$, $j = 1..3$, on obtient un système d'équations d'Helmholtz découplées sur chaque composante du champ \mathbf{E} :

$$-(\Delta + k^2)E_j = 0, \quad j = 1..3$$

1.1.3 Conditions de radiation

Afin de caractériser la solution des équations de Maxwell harmoniques, on introduit une condition supplémentaire, dite *condition de radiation de Silver-Müller* :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E} - \sqrt{\mu_0} \mathbf{H} \times \frac{x}{|x|} \right) = 0 \quad (1.3)$$

Cette condition est nécessaire pour assurer l'unicité de la solution ([Ned01]). Elle permet de sélectionner, parmi les deux solutions possibles, la seule solution physiquement admissible (qui équivaut, dans le domaine temporel, à la solution causale).

1.2 Rayonnement d'une source dans l'espace libre

1.2.1 Solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz

On appelle solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz la distribution g solution de :

$$-(\Delta g + k^2 g) = \delta \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

Ainsi, la solution de l'équation d'Helmholtz avec terme source

$$-(\Delta w + k^2 w) = T \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$$

s'écrit $w = g * T$. La solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz en 3D et pour la convention harmonique choisie est donnée par :

$$g(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|}$$

Par la suite, on appellera noyau de Green la fonction $G(x, y) = g(x - y)$:

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \quad (1.4)$$

1.2.2 Solution des équations de Maxwell

On cherche une solution des équations de Maxwell avec termes sources :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu_0 \mathbf{H} = -\mathbf{T}_1 \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} = \mathbf{T}_2 \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\varepsilon_0} \mathbf{E} - \sqrt{\mu_0} \mathbf{H} \times \frac{x}{|x|} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

Si on réécrit la formulation à un seul champ en prenant en compte les termes sources, on obtient :

$$-(\Delta + k^2) \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \left(\frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot \mathbf{T}_2 + \mathbf{T}_2 \right) - \nabla \times \mathbf{T}_1 \quad (1.6)$$

avec cette fois

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left(\mathbf{T}_1 + \nabla \times \mathbf{E} \right) \quad (1.7)$$

Alors, en utilisant la solution élémentaire de l'équation d'Helmholtz g étudiée précédemment, le système de Maxwell (1.5) admet une et une seule solution donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \left(\frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot (g * \mathbf{T}_2) + (g * \mathbf{T}_2) \right) - \nabla \times (g * \mathbf{T}_1) \\ \mathbf{H} = \nabla \times (g * \mathbf{T}_2) + i\omega\varepsilon_0 \left(\frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot (g * \mathbf{T}_1) + (g * \mathbf{T}_1) \right) \end{array} \right. \quad (1.8)$$

Remarque 1.1. L'expression de \mathbf{H} est obtenue à partir de (1.7) en utilisant le fait que $-(\Delta + k^2)(g * \mathbf{T}_1) = \mathbf{T}_1$.

1.3 Quelques éléments d'analyse

1.3.1 Formule des sauts

On reprend les conventions et notations de [AT07]. Dans toute la suite, on note Ω^- un domaine borné de \mathbb{R}^3 et Γ sa frontière. Son complémentaire dans \mathbb{R}^3 est un ouvert non-borné que l'on notera Ω^+ . De plus, on note \mathbf{n} la normale unitaire à Γ orientée vers l'extérieur.

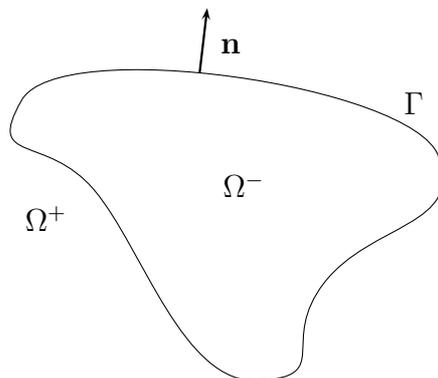


FIGURE 1.1 – Domaine intérieur Ω^- de frontière Γ et domaine extérieur Ω^+

Pour une fonction u régulière dans $\overline{\Omega^+}$ et $\overline{\Omega^-}$ (et pouvant donc admettre une discontinuité de première espèce à la traversée de Γ), nous notons u^+ sa restriction à $\overline{\Omega^+}$ et u^- sa restriction à $\overline{\Omega^-}$:

$$\{u\} = \begin{cases} u^+ & \text{dans } \overline{\Omega^+} \\ u^- & \text{dans } \overline{\Omega^-} \end{cases}$$

On définit le saut de la trace de u à travers Γ comme :

$$[u] = u^+ - u^-$$

Distribution de simple couche

Soit σ une fonction régulière définie sur Γ . On appelle *distribution de simple couche* de densité σ sur Γ la mesure de Radon $s(\sigma) = \sigma(x)d\Gamma(x)$:

$$\langle s(\sigma), \varphi \rangle = \int_{\Gamma} \sigma(x)\varphi(x)d\Gamma(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \quad (1.9)$$

C'est une distribution d'ordre 0 à support dans Γ . La définition se généralise pour une densité $\boldsymbol{\sigma}$ vectorielle :

$$\langle s(\boldsymbol{\sigma}), \varphi \rangle = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}(x)\varphi(x)d\Gamma(x) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \quad (1.10)$$

Produit de convolution

On rappelle que si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on peut définir $f * \varphi$ par

$$(f * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(x - y)dy$$

$f * \varphi$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Cette définition se généralise à $\mathcal{D}' * \mathcal{D}$: pour $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, on pose

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle$$

qui appartient à $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Par exemple, pour la distribution de simple couche, on a :

$$(s(\sigma) * \varphi)(x) = \int_{\Gamma} \varphi(x - y) \sigma(y) d\Gamma(y) \quad (1.11)$$

et de la même manière pour une densité $\boldsymbol{\sigma}$ vectorielle :

$$(s(\boldsymbol{\sigma}) * \varphi)(x) = \int_{\Gamma} \varphi(x - y) \boldsymbol{\sigma}(y) d\Gamma(y) \quad (1.12)$$

Formule des sauts

On reprend les notations définies précédemment. Soit u une fonction régulière par morceaux dans \mathbb{R}^3 qui subit un saut à travers une surface Γ régulière orientée. La formule des sauts donne la valeur d'une dérivée partielle de u au sens des distributions en fonction des dérivées partielles de u^+ dans Ω^+ et u^- dans Ω^- et du saut de u :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \{u\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\} - s([u] \mathbf{n}_i) \quad \forall i = 1..3 \quad (1.13)$$

On peut particulariser cette relation pour le rotationnel d'un champ de vecteurs \mathbf{A} régulier de part et d'autre de Γ :

$$\nabla \times \{\mathbf{A}\} = \{\nabla \times \mathbf{A}\} + s([\mathbf{A} \times \mathbf{n}]) \quad (1.14)$$

1.3.2 Notions de géométrie différentielle

Dans le cadre des équations intégrales, nous sommes amenés à manipuler des opérateurs et vecteurs définis sur le bord Γ du domaine. Il est donc nécessaire de donner une signification précise aux notions de régularité de la surface, ainsi que de présenter les outils nécessaires à la définition des opérateurs différentiels surfaciques.

Nous reprenons ici les conventions et notations de Nédelec dans [Ned01].

Cartes locales

On considère un recouvrement du domaine Ω^- par une union finie d'ouverts ω_i , $0 \leq i \leq p$. On dit que la surface Γ est régulière si $\forall i$, il existe un difféomorphisme ϕ_i qui envoie l'ensemble ω_i sur la boule unité Q , de telle manière que :

- $\Gamma \cap \omega_i$ est envoyée sur le plan $z = 0$ de la boule unité
- $\omega_i \cap \Omega^-$ est envoyée sur la région $z \leq 0$
- $\omega_i \cap \Omega^+$ est envoyée sur la région $z \geq 0$

À ce recouvrement du domaine Ω^- on associe une partition de l'unité, c'est-à-dire un ensemble de fonctions positives $\lambda_i \in \mathcal{C}^\infty(\omega_i)$, $i = 0, \dots, p$, à support compact inclus dans ω_i telles que

$$\sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$$

Un tel recouvrement et les difféomorphismes correspondants sont appelés un *atlas* et les paires (ω_i, ϕ_i) sont appelées *cartes locales*.

Pour une carte (ω_i, ϕ_i) , on note $\Gamma_i = \Gamma \cap \omega_i$ et γ le plan $z = 0$ de Q .

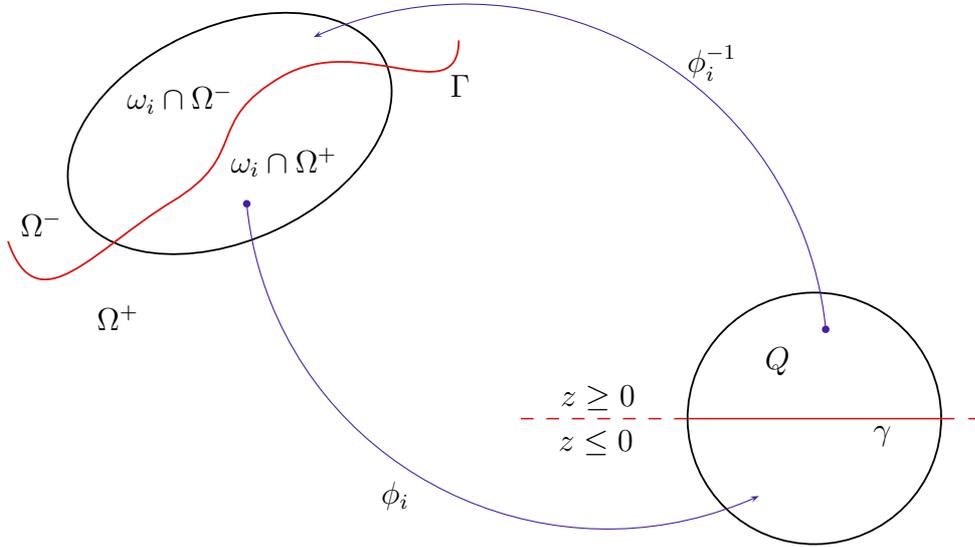


FIGURE 1.2 – Cartes locales

Opérateurs différentiels surfaciques

On définit ici quelques opérateurs différentiels sur une surface Γ définie par un système de cartes comme décrit précédemment.

Pour tout point $y \in \mathbb{R}^3$, on note $\delta(y)$ la distance de y à la surface Γ :

$$\delta(y) = \inf_{x \in \Gamma} |y - x|$$

Pour un ε suffisamment petit, et si la surface est régulière et orientée, tout point y dans un voisinage Γ_ε admet une unique projection $\mathcal{P}(y)$ sur la surface :

$$|y - \mathcal{P}(y)| = \delta(y)$$

Pour une surface régulière, $y - \mathcal{P}(y)$ est dirigée selon la normale à la surface en ce point. On peut donc écrire :

$$\begin{cases} y = \mathcal{P}(y) + s\mathbf{n}(\mathcal{P}(y)), & -\varepsilon \leq s \leq \varepsilon \\ s = \delta(y) \text{ pour } y \in \Omega_e, & s = -\delta(y) \text{ pour } y \in \Omega_i \end{cases}$$

La partie de la surface $\Gamma_i = \omega_i \cap \Gamma$ est paramétrisée par le difféomorphisme ϕ_i^{-1} qui envoie γ sur l'ensemble Γ_i . On appelle (ξ_1, ξ_2) les variables associées et on construit la paramétrisation de l'ensemble ω_i de la forme :

$$y(\xi_1, \xi_2, s) = x(\xi_1, \xi_2) + s\mathbf{n}(\xi_1, \xi_2), \quad -\varepsilon \leq s \leq \varepsilon$$

À toute fonction u définie sur la surface Γ , on associe l'extension \tilde{u} définie par :

$$\tilde{u}(y) = u(\mathcal{P}(y)) \tag{1.15}$$

On introduit la famille de surfaces parallèles

$$\Gamma_s = \{y; y = x + s\mathbf{n}(x); x \in \Gamma\}$$

Et on introduit la famille d'opérateurs différentiels qui agissent sur des fonctions définies sur les surfaces Γ ou Γ_s .

Définition 1.1 (Gradient tangentiel). *Soit $u \in C^\infty(\Gamma)$. Le gradient tangentiel de u est défini par :*

$$\nabla_\Gamma u = \nabla \tilde{u}|_\Gamma \quad (1.16)$$

On souhaite introduire une famille d'opérateurs agissant sur des champs de vecteurs tangents \mathbf{v} . On choisit comme base vectorielle du plan tangent à Γ_s :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1(x, s) &= \frac{\partial y}{\partial \xi_1} = \frac{\partial x}{\partial \xi_1} + s \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} \\ \mathbf{e}_2(x, s) &= \frac{\partial y}{\partial \xi_2} = \frac{\partial x}{\partial \xi_2} + s \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} \end{cases}$$

Un vecteur dans le plan tangent s'exprime de la manière suivante :

$$\mathbf{v} = v^1 \mathbf{e}_1 + v^2 \mathbf{e}_2$$

Dans ce système de coordonnées, l'élément de surface est :

$$d\sigma = |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| d\xi_1 d\xi_2$$

et on choisit comme orientation pour la normale :

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|}$$

On introduit le tenseur métrique g qui agit du plan tangent dans le plan cotangent et dont la matrice s'écrit

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j)$$

La matrice inverse est notée g^{-1} et l'image de $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ par g^{-1} est $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2)$ que l'on choisit comme base de vecteurs du plan cotangent. Un vecteur dans le plan cotangent s'écrit

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}^1 + v_2 \mathbf{e}^2$$

Le gradient tangentiel s'exprime dans le plan cotangent :

$$\nabla_\Gamma u = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \mathbf{e}^1 + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \mathbf{e}^2$$

Définition 1.2 (divergence surfacique). *Soit $\mathbf{v} \in (C^\infty(\Gamma))^2$ un champ de vecteurs tangents à Γ . La divergence surfacique est définie par :*

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} = \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}|_\Gamma \quad (1.17)$$

Théorème 1.1 (Formule de Stokes). *Soit une fonction $u \in C^1(\Gamma)$ et soit $\mathbf{v} \in (C^1(\Gamma))^2$ un champ de vecteurs tangents défini sur une surface fermée Γ . On a alors :*

$$\int_\Gamma (\nabla_\Gamma u \cdot \mathbf{v}) d\sigma + \int_\Gamma u \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} d\sigma = 0 \quad (1.18)$$

On en déduit l'expression de la divergence surfacique d'un vecteur dans les coordonnées du repère mobile :

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{v} = \frac{1}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|} \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} (|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| v^1) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| v^2) \right)$$

1.3.3 Espaces fonctionnels

Nous introduisons à présent les espaces fonctionnels qui serviront de cadre à cette étude. Nous procéderons en deux étapes :

- dans un premier paragraphe, nous rappelons les définitions des espaces de Sobolev pour un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^3$;
- dans un second paragraphe, nous utilisons ces définitions ainsi que les cartes locales définies précédemment pour donner un sens aux espaces de Sobolev sur la frontière Γ et nous énonçons le théorème de trace, qui sera à l'origine des choix d'espaces fonctionnels considérés par la suite.

Espaces de Sobolev dans Ω

On rappelle dans un premier temps les définitions des espaces fonctionnels usuels pour un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^3$.

Définition 1.3. *L'ensemble des fonctions de carré intégrable sur Ω s'écrit :*

$$L^2(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega), \int_{\Omega} |u|^2 dx < \infty \right\}$$

C'est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Définition 1.4. *On appelle espace de Sobolev d'ordre 1 l'espace :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \forall i = 1, \dots, 3 \right\}$$

C'est un espace de Hilbert muni de la norme

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

On définit de proche en proche les espaces de Sobolev d'ordre m , $m \in \mathbb{N}^$:*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\Omega) \right\}$$

On peut également définir les espaces de Sobolev de façon naturelle à partir de la transformée de Fourier :

Définition 1.5. *Soit \hat{u} la transformée de Fourier de u . Alors :*

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}$$

et la norme associée est :

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

On s'intéresse désormais aux espaces de Sobolev d'ordre s , où s est un réel quelconque.

Définition 1.6. *L'espace de Sobolev d'ordre s , $s \in \mathbb{R}$ se définit de la manière suivante :*

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty \right\}$$

et la norme associée est :

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \int_{\Omega} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

On note que l'espace dual associé à $H^s(\Omega)$ est $H^{-s}(\Omega)$.

On introduit désormais deux espaces fonctionnels qui nous seront utiles par la suite.

Définition 1.7. *Soit \mathbf{v} un vecteur de \mathbb{R}^3 . On définit :*

$$H(\text{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \text{div}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega) \right\} \quad (1.19)$$

$$H(\text{rot}, \Omega) = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \text{rot}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega)^3 \right\} \quad (1.20)$$

Espaces de Sobolev sur Γ

On peut désormais définir les espaces de Sobolev sur Γ à l'aide des cartes locales définies précédemment :

Définition 1.8. *Une fonction u définie sur la surface Γ est dans $H^s(\Gamma)$ si pour tout ensemble ω_i , la fonction $(\lambda_i u) \circ \phi_i$ est dans $H^s(\mathbb{R}^2)$.*

On définit également l'ensemble $TH^s(\Gamma)$ pour les vecteurs tangents à Γ , où \mathbf{n} est la normale à Γ :

$$TH^s(\Gamma) = \left\{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, v_i \in H^s(\Gamma) \forall i = 1, \dots, 3 \right\}$$

Enfin, introduisons les deux espaces de Hilbert suivants :

Définition 1.9.

$$H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ \mathbf{v} \in TH^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{div}_{\Gamma} \mathbf{v} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\} \quad (1.21)$$

$$H_{\text{rot}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left\{ \mathbf{v} \in TH^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{v} \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \right\} \quad (1.22)$$

On peut désormais écrire le théorème de trace pour $H(\text{rot}, \Omega)$ qui nous intéresse (on omettra d'énoncer le théorème équivalent pour $H(\text{div}, \Omega)$, qui n'aura pas d'utilité par la suite). Les preuves de ces théorèmes se trouvent dans la thèse d'Isabelle Terrasse [Ter93].

Théorème 1.2 (Théorème de trace de $H(\text{rot}, \Omega)$ dans un ouvert régulier).

On note γ_τ l'application suivante sur les fonctions régulières :

$$\begin{aligned} \gamma_\tau : \mathcal{D}(\Omega)^3 &\longrightarrow \mathcal{D}(\Gamma)^2 \\ \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{v} \times \mathbf{n}_\Gamma \end{aligned}$$

On note γ_t l'application suivante sur les fonctions régulières :

$$\begin{aligned} \gamma_t : \mathcal{D}(\Omega)^3 &\longrightarrow \mathcal{D}(\Gamma)^2 \\ \mathbf{v} &\longmapsto \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n})|_\Gamma \end{aligned}$$

Alors :

- γ_τ se prolonge en une application linéaire continue de $H(\text{rot}, \Omega)$ dans $H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$
- γ_t se prolonge en une application linéaire continue de $H(\text{rot}, \Omega)$ dans $H_{\text{rot}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

Quels espaces fonctionnels pour \mathbf{E} et \mathbf{H} ?

L'énergie de l'onde peut être définie par

$$\mathcal{E} = \int_{\Omega} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2) d\Omega.$$

Afin que l'énergie soit finie, on doit avoir $\mathbf{E} \in L^2(\Omega)$ et $\mathbf{H} \in L^2(\Omega)$.

Or les équations de Maxwell nous donnent :

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{i\omega\epsilon_0} \nabla \times \mathbf{H} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}$$

Ce qui implique la condition supplémentaire $\nabla \times \mathbf{E} \in L^2(\Omega)$ et $\nabla \times \mathbf{H} \in L^2(\Omega)$.

Ainsi, le champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) solution des équations de Maxwell est dans $H(\text{rot}, \Omega)$.

1.3.4 Notes sur les noyaux singuliers

On considère les intégrales de la forme :

$$K(x) = \int_{\Gamma} k(x, y) f(y) d\Gamma(y) \tag{1.23}$$

où $k(x, y) \sim |x - y|^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Lorsque $x \rightarrow y$, le noyau $k(x, y)$ tend vers l'infini et on l'appelle donc *noyau singulier*. Ces intégrales impropres pourront alors être définies au sens de la *valeur principale de Cauchy* (voir, par exemple, [Gui91]) ou de la *partie finie d'Hadamard* (introduite par Hadamard dans [Had23]).

On commence par illustrer simplement les concepts de valeur principale de Cauchy et de partie finie d'Hadamard dans \mathbb{R} avant de les généraliser. On considère l'intégrale singulière élémentaire

$$I = \int_{-a}^b \frac{1}{x} dx$$

où a et b sont deux réels strictement positifs. On pose alors

$$I(\varepsilon) = \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x} dx$$

Ainsi,

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I(\varepsilon)$$

Or on est capable de calculer cette limite

$$I(\varepsilon) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$I(\varepsilon)$ possède donc une limite finie quand $\varepsilon \rightarrow 0$: on l'appelle *valeur principale de Cauchy*.

Si désormais on considère l'intégrale fortement singulière

$$I = \int_{-a}^b \frac{1}{x^2} dx$$

Et on note à nouveau

$$I(\varepsilon) = \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx + \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{x^2} dx$$

Le calcul de cette intégrale nous donne

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} + \frac{2}{\varepsilon}$$

qui ne possède pas de limite finie lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$: la valeur principale de Cauchy n'existe pas.

On peut cependant séparer ce terme en deux parties : une partie infinie $\frac{2}{\varepsilon}$ et une partie finie $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ appelée *partie finie d'Hadamard*.

On a alors, dans le cas général d'une frontière Γ d'un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^3$, les définitions suivantes :

Définition 1.10. Soit $k(x, y)$ un noyau et $K(x)$ l'intégrale associée définie comme dans (1.23), avec $\alpha = 1$. On appelle *valeur principale de Cauchy* la limite suivante :

$$\text{vp } K(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus B(x, \varepsilon)} k(x, y) f(y) d\Gamma(y)$$

Définition 1.11. Soit $k(x, y)$ un noyau et $K(x)$ l'intégrale associée définie comme dans (1.23), avec $\alpha \geq 2$. Si on note

$$K(\varepsilon, x) = \int_{\Gamma \setminus B(x, \varepsilon)} k(x, y) f(y) d\Gamma(y)$$

et si $K(\varepsilon, x)$ se décompose en

$$K(\varepsilon, x) = K_0(\varepsilon, x) + K_1(\varepsilon, x)$$

où $\lim_{\varepsilon} K_0(\varepsilon, x) < \infty$ et $\lim_{\varepsilon} K_1(\varepsilon, x) = \infty$.

Alors on appelle *partie finie d'Hadamard* la limite suivante :

$$\text{pf } K(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_0(\varepsilon, x)$$

Remarque 1.2. Lorsque l'on augmente d'une dimension, les noyaux perdent un degré de singularité. Par exemple, l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|y|} dy$$

est une intégrale régulière. En effet, après passage aux coordonnées polaires on a :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{r} r dr d\theta$$

Lorsque Ω est un domaine de \mathbb{R}^3 de frontière Γ et l'opérateur K est défini par (1.23), où $k(x, y) \sim |x - y|^{-\alpha}$, $\alpha > 0$, alors :

- Si $\alpha = 1$, l'intégrale est régulière, pour les mêmes raisons que dans la remarque 1.2
- Si $\alpha = 2$, l'intégrale est appelée *intégrale singulière*. Elle doit alors être prise au sens de la valeur principale de Cauchy (notée vp)
- Si $\alpha \geq 3$, l'intégrale est appelée *intégrale hypersingulière*. Elle doit alors être prise au sens de la partie finie d'Hadamard (notée pf)

1.4 Représentation intégrale de la solution

Les résultats énoncés dans cette section et leurs preuves sont principalement tirés de [Ned01] et [Ben84].

Par la suite, on notera Ω^- un domaine borné de \mathbb{R}^3 d'indices de milieu ε^-, μ^- et Ω^+ son complémentaire non-borné dans \mathbb{R}^3 d'indices de milieu ε^+, μ^+ (éventuellement égaux à la permittivité et la perméabilité du vide). De plus, on note :

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon^- & \text{dans } \Omega^- \\ \varepsilon^+ & \text{dans } \Omega^+ \end{cases} \quad \text{et} \quad \mu = \begin{cases} \mu^- & \text{dans } \Omega^- \\ \mu^+ & \text{dans } \Omega^+ \end{cases}$$

1.4.1 Problème aux limites

Soit (\mathbf{E}, \mathbf{H}) un champ défini et régulier dans $\overline{\Omega^+}$ et $\overline{\Omega^-}$ tel que $(\mathbf{E}^+, \mathbf{H}^+) \in H(\text{rot}, \Omega^+)$ et $(\mathbf{E}^-, \mathbf{H}^-) \in H(\text{rot}, \Omega^-)$, et pouvant admettre une singularité en Γ et vérifiant

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} & = 0 & \text{dans } \overline{\Omega^+} \text{ et } \overline{\Omega^-} \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} & = 0 & \text{dans } \overline{\Omega^+} \text{ et } \overline{\Omega^-} \\ \text{CR}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) & = 0 \end{cases} \quad (1.24)$$

où $(\mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H}^{\text{inc}}) \in H(\text{rot}, \Omega^+)$ est une onde plane incidente et $\text{CR}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}})$ indique la condition de radiation de Silver-Müller.

On introduit maintenant deux nouvelles grandeurs physiques : les *courants surfaciques*, ou *courants équivalents*, \mathbf{j} et \mathbf{m} . Ils sont définis comme les traces tangentielles des champs sur la frontière Γ de l'objet :

$$\begin{cases} \mathbf{j} = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \\ \mathbf{m} = \mathbf{E} \times \mathbf{n} \end{cases} \quad (1.25)$$

D'après le théorème de trace 1.2, on va chercher les solutions \mathbf{j} et \mathbf{m} dans $H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. A l'aide de la formule des sauts (1.14), on peut réduire le problème (1.24) à un problème posé dans \mathbb{R}^3 tout entier avec second membre :

Théorème 1.3. *La solution du problème (1.24) vérifie :*

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - i\omega\mu\mathbf{H} & = -s([\mathbf{m}]) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \nabla \times \mathbf{H} + i\omega\varepsilon\mathbf{E} & = s([\mathbf{j}]) & \text{dans } \mathbb{R}^3 \\ \text{CR}(\mathbf{E} - \mathbf{E}^{\text{inc}}, \mathbf{H} - \mathbf{H}^{\text{inc}}) & = 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

1.4.2 Formule de représentation

Grâce au résultat du théorème 1.3, on peut utiliser le résultat (1.8) pour obtenir l'expression suivante pour \mathbf{E} et \mathbf{H} :

$$\begin{cases} \mathbf{E} & = i\omega\mu\left(\frac{1}{k^2}\nabla\nabla \cdot (g * s([\mathbf{j}])) + (g * s([\mathbf{j}]))\right) - \nabla \times (g * s([\mathbf{m}])) \\ \mathbf{H} & = \nabla \times (g * s([\mathbf{m}])) + i\omega\varepsilon\left(\frac{1}{k^2}\nabla\nabla \cdot (g * s([\mathbf{m}])) + (g * s([\mathbf{m}]))\right) \end{cases} \quad (1.27)$$

Et en utilisant la propriété (1.12) du produit de convolution avec le potentiel de simple couche, on obtient le théorème de représentation intégrale suivant :

Théorème 1.4 (de représentation intégrale). *La solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) de (1.24) admet la représentation intégrale suivante pour $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$, où \mathbf{j} et $\mathbf{m} \in H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$:*

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x) & = \mathbf{E}^{\text{inc}}(x) + \frac{i}{\omega\varepsilon}\nabla\nabla \cdot \int_{\Gamma} G(x, y)[\mathbf{j}](y)d\Gamma(y) + i\omega\mu \int_{\Gamma} G(x, y)[\mathbf{j}](y)d\Gamma(y) \\ & \quad - \nabla \times \int_{\Gamma} G(x, y)[\mathbf{m}](y)d\Gamma(y) \\ \mathbf{H}(x) & = \mathbf{H}^{\text{inc}}(x) + \frac{i}{\omega\mu}\nabla\nabla \cdot \int_{\Gamma} G(x, y)[\mathbf{m}](y)d\Gamma(y) + i\omega\varepsilon \int_{\Gamma} G(x, y)[\mathbf{m}](y)d\Gamma(y) \\ & \quad + \nabla \times \int_{\Gamma} G(x, y)[\mathbf{j}](y)d\Gamma(y) \end{cases} \quad (1.28)$$

En utilisant la définition 1.2 de la divergence surfacique vue précédemment, on peut réécrire la formule de représentation intégrale :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x) & = \mathbf{E}^{\text{inc}}(x) + (\mathcal{L}[\mathbf{j}])(x) - (\mathcal{K}[\mathbf{m}])(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \\ \mathbf{H}(x) & = \mathbf{H}^{\text{inc}}(x) + (\mathcal{K}[\mathbf{j}])(x) + \frac{\varepsilon}{\mu}(\mathcal{L}[\mathbf{m}])(x), & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \end{cases} \quad (1.29)$$

où les opérateurs intégraux \mathcal{L} et \mathcal{K} peuvent être exprimés pour $X \in H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} (\mathcal{L}\mathbf{X})(x) & = \frac{i}{\omega\varepsilon}\nabla \int_{\Gamma} G(x, y)\nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{X}(y)d\Gamma(y) + i\omega\mu \int_{\Gamma} G(x, y)\mathbf{X}(y)d\Gamma(y) & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \\ (\mathcal{K}\mathbf{X})(x) & = \int_{\Gamma} \nabla_x G(x, y) \times \mathbf{X}(y)d\Gamma(y) & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma \end{cases} \quad (1.30)$$

Pour construire une équation intégrale, on effectue la démarche suivante : on commence par calculer le champ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) solution des équations de Maxwell harmoniques dans le domaine extérieur, en "oubliant" ce qu'il se passe dans le domaine intérieur. Pour cela, on doit faire un choix de prolongement des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} dans le domaine intérieur. Il existe un grand nombre de choix de prolongements possible. Le plus simple, qui sera considéré ici, est celui du prolongement par zéro :

$$\mathbf{E}|_{\Omega^-} = \mathbf{H}|_{\Omega^-} = 0$$

Ainsi, on s'affranchit des champs $\mathbf{E}|_{\Omega^-}$ et $\mathbf{H}|_{\Omega^-}$ ainsi que des courants $\mathbf{j}|_{\Omega^-}$ et $\mathbf{m}|_{\Omega^-}$. On obtient alors la représentation intégrale suivante, appelée *formule de Stratton-Chu* ([Str41],[CK92]):

Théorème 1.5. *Soit \mathbf{E} et \mathbf{H} définis et réguliers dans $\overline{\Omega^+}$ et une onde plane $(\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc})$ vérifiant les équations (et la condition de radiation) (1.24) dans Ω^+ . Alors en notant par*

$$\mathbf{j} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma} \quad \text{et} \quad \mathbf{m} = \mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma}$$

on a :

$$\mathbf{E}^{inc}(x) + (\mathcal{L}\mathbf{j})(x) - (\mathcal{K}\mathbf{m})(x) = \begin{cases} \mathbf{E}(x) & \text{si } x \in \Omega^+ \\ 0 & \text{si } x \in \Omega^- \end{cases} \quad (1.31)$$

$$\mathbf{H}^{inc}(x) + (\mathcal{K}\mathbf{j})(x) + \frac{\varepsilon}{\mu}(\mathcal{L}\mathbf{m})(x) = \begin{cases} \mathbf{H}(x) & \text{si } x \in \Omega^+ \\ 0 & \text{si } x \in \Omega^- \end{cases} \quad (1.32)$$

De la même manière, on peut prolonger la solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) dans Ω^- par 0 dans Ω^+ pour obtenir la formule de Stratton-Chu dans $\overline{\Omega^-}$.

La démarche à suivre peut donc être résumée de la manière suivante :

- Résolution du problème extérieur, avec prolongement par zéro de la solution à l'intérieur et condition de radiation
- Résolution du problème intérieur, avec prolongement par zéro de la solution à l'extérieur
- Superposition des solutions, qui se traduit par la proposition suivante :

Proposition 1.1. *Les champs électrique et magnétique solutions de (1.24) sont définis dans $\Omega^+ \cup \Omega^-$ de la manière suivante :*

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x) = \mathbf{E}^{inc}(x) + (\mathcal{L}\mathbf{j})(x) - (\mathcal{K}\mathbf{m})(x) \\ \mathbf{H}(x) = \mathbf{H}^{inc}(x) + (\mathcal{K}\mathbf{j})(x) + \frac{\varepsilon}{\mu}(\mathcal{L}\mathbf{m})(x) \end{cases} \quad (1.33)$$

1.4.3 Formule de trace

La formule de représentation intégrale établie précédemment, ainsi que son corollaire sous la forme de la formule de Stratton-Chu, nous donne le champ électromagnétique dans $\overline{\Omega^+}$ et $\overline{\Omega^-}$. On s'intéresse maintenant au comportement de cette solution à la traversée de l'interface Γ . On a le théorème suivant :

Théorème 1.6. *La trace tangentielle de $\mathcal{L}\mathbf{X}$ est continue à la traversée de Γ et est donnée en tout point x où Γ admet un plan tangent par :*

$$(\mathcal{L}\mathbf{X})_T^\pm(x) = L\mathbf{X}(x) \quad (1.34)$$

avec

$$L\mathbf{X}(x) = \frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla_\Gamma \int_\Gamma G(x, y) \nabla_\Gamma \cdot \mathbf{X}(y) d\Gamma(y) + i\omega\mu \left(\int_\Gamma G(x, y) \mathbf{X}(y) d\Gamma(y) \right)_T$$

À l'inverse, la trace tangentielle de $\mathcal{K}\mathbf{X}$ est discontinue à la traversée de Γ et est donnée en tout point x où Γ admet un plan tangent par :

$$(\mathcal{K}\mathbf{X})_T^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{X} + K\mathbf{X}(x) \quad (1.35)$$

avec

$$K\mathbf{X}(x) = \text{vp} \int_\Gamma \nabla_x G(x, y) \times \mathbf{X}(y) d\Gamma(y)$$

Remarque 1.3. Afin d'alléger les notations, on omettra par la suite la notation vp pour désigner la valeur principale de Cauchy dans l'opérateur K : elle sera en revanche toujours considérée implicitement.

On obtient donc la formulation intégrale suivante :

Théorème 1.7. *Soit \mathbf{E} et \mathbf{H} définis par (1.33). Alors*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_T^\pm &= \mathbf{E}_T^{\text{inc}} + L\mathbf{j} - \left(\pm \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{m} + K\mathbf{m} \right) \\ \mathbf{H}_T^\pm &= \mathbf{H}_T^{\text{inc}} + \left(\pm \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{j} + K\mathbf{j} \right) + \frac{\varepsilon}{\mu} L\mathbf{m} \end{aligned} \quad (1.36)$$

1.4.4 Équations intégrales

On remarque dans un premier temps qu'il est possible de simplifier l'expression des champs tangents $\mathbf{E}_T^\pm(x)$ et $\mathbf{H}_T^\pm(x)$ pour $x \in \Gamma$. En effet, on a :

$$\frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{m} = \frac{1}{2} \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_T$$

et

$$\frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{j} = \frac{1}{2} \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) = -\frac{1}{2} \mathbf{H}_T$$

Ainsi, les équations intégrales (1.36) se réécrivent pour $x \in \Gamma$:

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}_T^\pm(x) = \mathbf{E}_T^{\text{inc}}(x) + (L\mathbf{j})(x) - (K\mathbf{m})(x) \quad (1.37)$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{H}_T^\pm(x) = \mathbf{H}_T^{\text{inc}}(x) + (K\mathbf{j})(x) + \frac{\varepsilon}{\mu} (L\mathbf{m})(x) \quad (1.38)$$

L'équation (1.37) est appelée *EFIE* pour *Electric Field Integral Equation* et l'équation (1.38) est appelée *MFIE* pour *Magnetic Field Integral Equation*.

Dans le cas d'un objet diélectrique, les conditions de continuité des composantes tangentielles des champs à l'interface Γ s'écrivent :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_T^+ - \mathbf{E}_T^-) = 0 \quad (1.39)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_T^+ - \mathbf{H}_T^-) = 0 \quad (1.40)$$

Ainsi, si on note $\mathbf{j} = \mathbf{j}^+ = -\mathbf{j}^-$ et $\mathbf{m} = \mathbf{m}^+ = -\mathbf{m}^-$, alors en injectant les équations (1.37) et (1.38) dans les conditions aux limites (1.39) et (1.40) on obtient un système de deux équations intégrales couplées :

$$\begin{cases} (L^+ + L^-)\mathbf{j} - (K^+ + K^-)\mathbf{m} = -\mathbf{E}_T^{\text{inc}}(x) \\ (K^+ + K^-)\mathbf{j} + \left(\frac{\varepsilon^+}{\mu^+}L^+ + \frac{\varepsilon^-}{\mu^-}L^-\right)\mathbf{m} = -\mathbf{H}_T^{\text{inc}}(x) \end{cases} \quad (1.41)$$

Le système d'équations (1.41) constitue la formulation *PMCHWT* pour *Poggio-Miller-Chang-Harrington-Wu-Tsai* ([PM73],[MMPG94]). Cette formulation est particulièrement adaptée aux problèmes multi-domaines, où elle peut être écrite interface par interface.

2 Résolution numérique

2.1 Formulation variationnelle

On rappelle l'expression des champs tangents donnés par (1.37) et (1.38) pour $x \in \Gamma$:

$$\frac{1}{2}\mathbf{E}_T(x) = \mathbf{E}_T^{\text{inc}}(x) + (L\mathbf{j})(x) - (K\mathbf{m})(x) \quad (1.42)$$

$$\frac{1}{2}\mathbf{H}_T(x) = \mathbf{H}_T^{\text{inc}}(x) + (K\mathbf{j})(x) + \frac{\varepsilon}{\mu}(L\mathbf{m})(x) \quad (1.43)$$

On introduit les courants tests \mathbf{j}' et \mathbf{m}' , également tangents à Γ .

En application du principe de réaction de Rumsey ([Rum54]), on introduit la forme bilinéaire donnant la réaction des courants \mathbf{j}, \mathbf{m} sur les courants tests \mathbf{j}', \mathbf{m}' dans Ω^\pm qui se définit de la manière suivante (voir [Ben84] et [BFG99]) :

$$R(\mathbf{j}, \mathbf{m}, \mathbf{j}', \mathbf{m}') = \int_{\Gamma} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}' - \mathbf{H} \cdot \mathbf{m}') d\Gamma$$

En multipliant (1.42) et (1.43) par les courants tests, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{E}_T(x) \cdot \mathbf{j}'(x) d\Gamma(x) &= \int_{\Gamma} \mathbf{E}_T^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{j}'(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} (L\mathbf{j})(x) \cdot \mathbf{j}'(x) d\Gamma(x) \\ &\quad - \int_{\Gamma} (K\mathbf{m})(x) \cdot \mathbf{j}'(x) d\Gamma(x) \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{H}_T(x) \cdot \mathbf{m}'(x) d\Gamma(x) &= \int_{\Gamma} \mathbf{H}_T^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{m}'(x) d\Gamma(x) + \int_{\Gamma} (K\mathbf{j})(x) \cdot \mathbf{m}'(x) d\Gamma(x) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{\mu} \int_{\Gamma} (L\mathbf{m})(x) \cdot \mathbf{m}'(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (1.44)$$

On remarque que l'on peut réécrire les termes en \mathbf{E}_T et \mathbf{H}_T en fonction des courants :

$$\mathbf{E}_T \cdot \mathbf{j}' = \left(\boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\nu}) \right) \cdot \mathbf{j}' = (\mathbf{m} \times \mathbf{j}') \cdot \boldsymbol{\nu} \quad (1.45)$$

$$\mathbf{H}_T \cdot \mathbf{m}' = \left(\boldsymbol{\nu} \times (\mathbf{H} \times \boldsymbol{\nu}) \right) \cdot \mathbf{m}' = -(\mathbf{j} \times \mathbf{m}') \cdot \boldsymbol{\nu} \quad (1.46)$$

En soustrayant dans (1.44) la deuxième équation à la première et en utilisant les égalités (1.45) et (1.46), on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} \left(\mathbf{E}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{j}'(x) - \mathbf{H}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{m}'(x) \right) d\Gamma(x) \\ & = \int_{\Gamma} (L\mathbf{j})(x) \cdot \mathbf{j}'(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} (K\mathbf{m})(x) \cdot \mathbf{j}'(x) d\Gamma(x) - \int_{\Gamma} (K\mathbf{j})(x) \cdot \mathbf{m}'(x) d\Gamma(x) \\ & \quad - \frac{\varepsilon}{\mu} \int_{\Gamma} (L\mathbf{m})(x) \cdot \mathbf{m}'(x) d\Gamma(x) - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left(\mathbf{m}(x) \times \mathbf{j}'(x) + \mathbf{j}(x) \times \mathbf{m}'(x) \right) \cdot \boldsymbol{\nu}(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (1.47)$$

À l'aide d'une intégration par parties, on peut se débarrasser de l'intégrale fortement singulière :

$$\int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} G(x, y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{j}(y) d\Gamma(y) \right) \cdot \mathbf{j}'(x) d\Gamma(x) = - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{j}(y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{j}'(x) d\Gamma(y) d\Gamma(x)$$

Ainsi, les intégrales intervenant dans la formulation variationnelle (1.47) peuvent se réécrire :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (L\mathbf{j})(x) \cdot \mathbf{j}'(x) d\Gamma(x) & = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \left(-\frac{i}{\omega\varepsilon} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{j}(y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{j}'(x) + i\omega\mu \mathbf{j}(y) \cdot \mathbf{j}'(x) \right) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \\ \int_{\Gamma} (K\mathbf{m})(x) \cdot \mathbf{j}'(x) d\Gamma(x) & = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \nabla_x G(x, y) \times \mathbf{m}(y) \cdot \mathbf{j}'(x) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \end{aligned}$$

La formulation variationnelle (1.47) possède une unique solution (voir preuve dans [Ben84]).

2.2 Méthode des éléments finis de frontière

La méthode des éléments finis de frontière (ou BEM pour Boundary Element Method) est une méthode d'approximation numérique de type Galerkin pour les équations intégrales. Elle s'oppose à la méthode des éléments finis de volume qui s'applique directement à l'EDP, mais l'objectif est le même : la solution obtenue par discrétisation des équations intégrales permet de remonter à la solution de l'EDP par la formule de représentation intégrale.

2.2.1 Approximation variationnelle

On approche la surface de l'objet par une surface polyédrique composée de triangles plans satisfaisant aux conditions usuelles de recouvrement de la méthode des éléments finis (entre autres, l'intersection de deux triangles distincts se réduit soit au vide, soit à un sommet, soit à une arête).

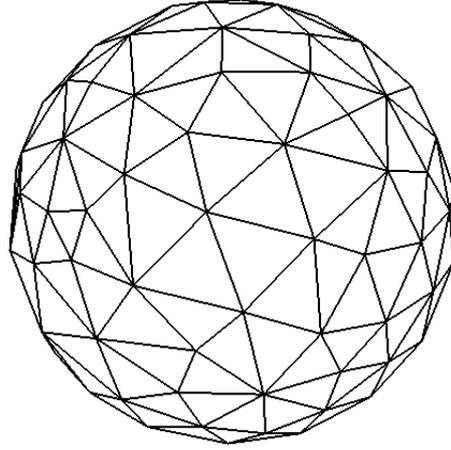
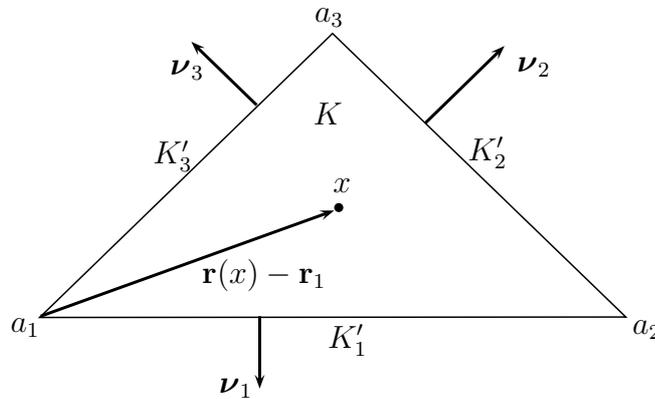


FIGURE 1.3 – Maillage triangulaire d'une sphère

Les éléments considérés ici sont les éléments de Raviart-Thomas ([RT77]), aussi appelés éléments de Rao-Wilton-Glisson ([RWG82]).

On note Γ_h la surface Γ approchée et on désigne par $K \in \Gamma_h$ un triangle du maillage. On désigne également par $a_j, j = 1..3$ les sommets de K , par $K'_j, j = 1..3$ ses arêtes (où K'_j a pour sommets a_j et a_{j+1}), par $|K|$ son aire, par $|K'_j|, j = 1..3$ la longueur de l'arête j et par ν_j la normale sortante à l'arête j .

Par ailleurs, on note $\mathbf{r}(x)$ le rayon vecteur du point x (vecteur d'origine 0 et d'extrémité x) \mathbf{r}_j le rayon vecteur de l'arête j .


 FIGURE 1.4 – Notations pour un élément K du maillage

Les fonctions de base des éléments de Raviart-Thomas pour l'élément K sont définies de la manière suivante :

$$\forall l = 1, \dots, 3, \quad \mathbf{B}_{l,K}(x) = \frac{1}{2|K|}(\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}_{l-1}) \text{ pour } x \in K \quad (1.48)$$

On approche alors l'espace variationnel $H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ par le sous-espace X^h tel que $\mathbf{j} \in X^h$ où :

$$\mathbf{j}|_K = \lambda_{1,K}\mathbf{B}_{1,K} + \lambda_{2,K}\mathbf{B}_{2,K} + \lambda_{3,K}\mathbf{B}_{3,K} \quad (1.49)$$

Les degrés de liberté globaux $\lambda_{l,K}$ sont les flux sortants de K à travers chaque arête :

$$\lambda_{l,K} = \int_{K'_l} \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\nu}_l ds$$

Remarque 1.4. Pour faciliter l'écriture, on n'a considéré que les courants électriques \mathbf{j} ici. Les courants magnétiques \mathbf{m} s'écrivent de la même façon.

En numérotant les arêtes du maillage de 1 à N et en fixant une orientation sur chaque arête (ainsi, pour chaque paire de triangles K^+ et K^- délimités par une arête commune, le flux sortant de K^+ est compté positivement et celui sortant de K^- est compté négativement), on peut exprimer \mathbf{j} dans la base de ses degrés de liberté globaux :

$$[\mathbf{j}] = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \lambda_{N+1} \\ \vdots \\ \lambda_{2N} \end{pmatrix}$$

où les N premiers degrés de liberté correspondent aux inconnues électriques \mathbf{j} et les N suivants aux inconnues magnétiques \mathbf{m} .

Ainsi, en disposant des valeurs des degrés de liberté précédents et d'une table de connectivité renseignée (comprenant les relations de numérotations entre degrés de liberté locaux et globaux et les valeurs des orientations des arêtes), on peut reconstruire \mathbf{j} en tout point du maillage.

On peut alors écrire la discrétisation des équations intégrales par cette méthode d'éléments finis. Pour la formulation variationnelle (1.47), le problème approché s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \mathbf{j} \in X^h, \mathbf{m} \in X^h \text{ tel que } \forall \mathbf{j}' \in X^h, \forall \mathbf{m}' \in X^h, \\ a(\{\mathbf{j}, \mathbf{m}\}, \{\mathbf{j}', \mathbf{m}'\}) = - \int_{\Gamma} (\mathbf{E}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{j}'(x) - \mathbf{H}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{m}'(x)) d\Gamma(x) \end{cases} \quad (1.50)$$

avec

$$\begin{aligned} & a(\{\mathbf{j}, \mathbf{m}\}, \{\mathbf{j}', \mathbf{m}'\}) \\ &= \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \left(- \frac{i}{\omega \varepsilon} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{j}(y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{j}'(x) + i\omega \mu \mathbf{j}(y) \cdot \mathbf{j}'(x) \right) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \\ & \quad - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \nabla_x G(x, y) \times \mathbf{m}(y) \cdot \mathbf{j}'(x) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \\ & \quad - \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \nabla_x G(x, y) \times \mathbf{j}(y) \cdot \mathbf{m}'(x) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \\ & \quad - \frac{\epsilon}{\mu} \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \left(- \frac{i}{\omega \varepsilon} \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{m}(y) \nabla_{\Gamma} \cdot \mathbf{m}'(x) + i\omega \mu \mathbf{m}(y) \cdot \mathbf{m}'(x) \right) d\Gamma(y) d\Gamma(x) \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{m}(x) \times \mathbf{j}'(x) + \mathbf{j}(x) \times \mathbf{m}'(x)) \cdot \boldsymbol{\nu}(x) d\Gamma(x) \end{aligned} \quad (1.51)$$

De façon usuelle, cette équation variationnelle se ramène à un système linéaire :

$$[A][J] = [B] \quad (1.52)$$

2.2.2 Éléments sur la mise en œuvre numérique

L'assemblage de la matrice $[A]$ se fait de manière différente que dans une méthode d'éléments finis classique : la double intégration dans la forme bilinéaire (1.51) implique une interaction entre tous les triangles du maillage. On a donc ici une matrice élémentaire $A^{[K,L]}$ pour chaque couple de triangles K et L .

Lors du calcul des matrices élémentaires (de la matrice $[A]$ mais également du second membre $[B]$), nous sommes amenés à évaluer des intégrales. Pour cela, on utilise une formule d'intégration gaussienne avec points intérieurs (voir [AS64]) :

$$\int_K \varphi(x) d\sigma_K(x) \approx |K| \sum_{s=1}^{N_G} \omega_s \varphi(x_s) \quad (1.53)$$

où N_G est le nombre de points d'intégration de Gauss.

Une fois le système (1.52) résolu, on peut reconstruire les courants \mathbf{j} et \mathbf{m} en tout point du maillage. Pour cela, on doit dans un premier temps déterminer à quel triangle K il appartient puis utiliser la formule (1.49).

2.2.3 Commentaires sur la résolution

De par la présence d'une intégrale double dans la formulation variationnelle, tous les degrés de liberté sont couplés. La conséquence est que la matrice $[A]$ est une matrice dense. Les équations intégrales nous permettent de gagner une dimension d'espace et donc de considérer des inconnues moins nombreuses, mais la réduction du nombre d'inconnues s'accompagne du passage d'une matrice creuse, dans les cas des formulations variationnelles volumiques, à une matrice pleine.

La complexité asymptotique de l'assemblage est donc en $\mathcal{O}(N^2)$ (N étant ici le nombre total de degrés de liberté, électriques et magnétiques) et celle de la résolution par une méthode directe est en $\mathcal{O}(N^3)$.

Par ailleurs, cette matrice est complexe, symétrique, non hermitienne et non définie positive.

On note également la présence d'intégrales singulières lors des calculs de matrices élémentaires correspondants à des triangles proches. En effet, le noyau de Green présente une singularité en $x = y$. Celle-ci est intégrable, mais néanmoins non calculable par une classique quadrature de Gauss. On utilise alors une procédure d'intégration semi-analytique, où la partie régulière de l'intégrale intérieure est évaluée par une quadrature de Gauss et la partie singulière par un calcul analytique (méthode de De Hoop, voir [Ben84] et [BD86]).

3 Quelques informations concernant les antennes

On effectue ici quelques rappels très généraux sur le fonctionnement d'une antenne, avec un focus particulier sur les grandeurs qui nous intéressent (puissance transmise, co-

efficace de réflexion) et sur les types d'alimentation qui nous concernent (guides d'onde). Toutes ces notions sont tirées de l'ouvrage de référence de Jacques Darricau [Dar93] ainsi que du manuel très exhaustif de Sophocles Orfanidis [Orf02].

3.1 Caractéristiques générales des antennes

3.1.1 Principe de fonctionnement

Le rôle d'une antenne est d'assurer la transition d'un signal entre un guide d'onde et l'espace libre. Elle peut être utilisée en *émission* (du guide d'onde vers l'espace libre) ou en *réception* (de l'espace libre vers le guide d'onde). Dans le cadre de nos travaux, nous nous intéressons uniquement aux propriétés d'émission d'une antenne : c'est donc celles-ci que nous présenterons ici.

Une antenne d'émission est un dispositif qui assure la transmission de l'énergie entre un émetteur et l'espace libre où cette énergie va se propager.

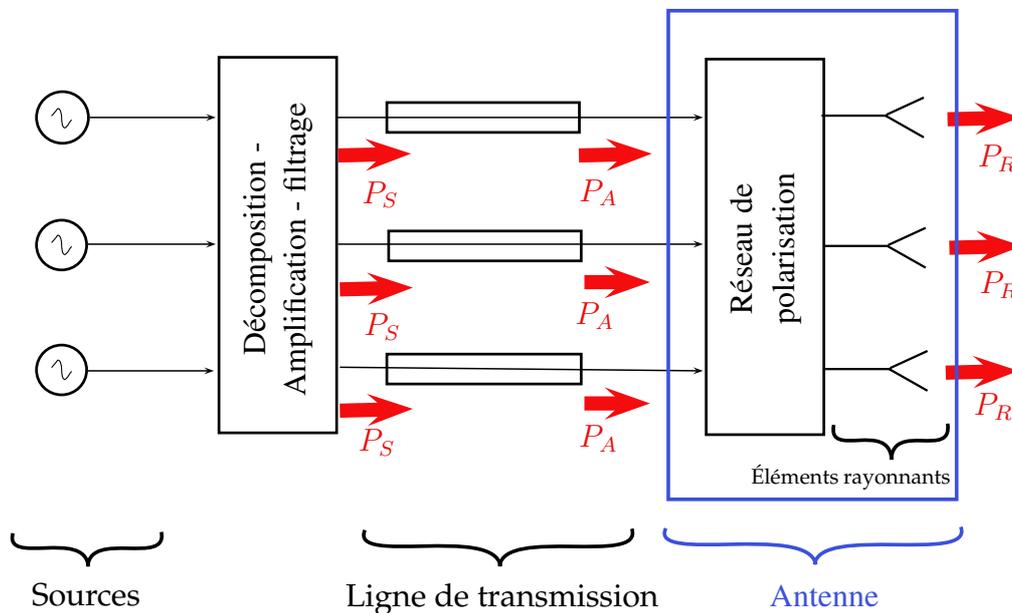


FIGURE 1.5 – Schéma simplifié de la transmission d'un signal d'une source à l'espace libre

Le signal à transmettre est émis par une ou plusieurs sources. On note P_S sa puissance, qui aura éventuellement été amplifiée si besoin. L'émetteur est relié à l'antenne pour une *ligne de transmission* : en général, il s'agit de lignes coaxiales ou de guides d'ondes. À la sortie de la ligne, le signal de puissance P_A (différente de P_S à cause des pertes liées à la ligne) peut être transmis aux éléments rayonnants (après un éventuel passage par une étape de polarisation dans le cas d'une antenne réseau). Les éléments rayonnants transmettent l'énergie fournie par la source à l'espace libre où l'onde électromagnétique rayonnée, de puissance P_R , va se propager.

3.1.2 Réflexion et transmission

Le coefficient de réflexion est une grandeur sans dimension qui indique la quantité d'énergie réfléchiée dans la ligne. Il se définit comme le rapport (complexe) entre la quan-

tité d'énergie réfléchie et incidente :

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_i}$$

Il est relié à une autre quantité importante, appelée *taux d'ondes stationnaires* (TOS) qui mesure la qualité de l'adaptation de l'antenne : une antenne est dite adaptée si elle maximise la puissance transmise de l'émetteur au récepteur. La condition à respecter afin de garantir l'adaptation est que l'impédance de la ligne soit égale à l'impédance de l'antenne.

Le TOS est relié au module du coefficient de réflexion $\rho = |\Gamma|$ par la relation :

$$TOS = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}$$

Ces deux grandeurs expriment une quantité fondamentale dans l'étude d'une antenne : une antenne mal adaptée subira non seulement des pertes d'énergie, mais favorisera également l'apparition d'interférences sous la forme d'ondes stationnaires (lorsque l'onde incidente et l'onde réfléchie se superposent).

On définit également le *vecteur de Poynting* :

$$\mathbf{\Pi} = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)$$

Il représente la puissance de l'onde sortante, et donne la direction de propagation de l'onde.

3.2 Modes guidés

3.2.1 Les guides d'onde

Nous revenons ici sur les caractéristiques principales d'un certain type de lignes de transmission : les guides d'onde. Ceci sont très largement utilisés pour transmettre de manière efficace un signal d'un point à un autre de l'espace. Il en existe plusieurs types, que l'on choisit en fonction de la fréquence à laquelle on souhaite opérer, de la quantité d'énergie que l'on souhaite transférer ou encore de la quantité de pertes que l'on peut tolérer. Les deux types de guides d'onde les plus répandus sont les guides rectangulaires et les câbles coaxiaux :

- Le guide rectangulaire est une structure de guidage à un conducteur en forme de tube creux de section rectangulaire. C'est un guide *simplement connexe*. Les ondes se propagent suivant l'axe Oz et on choisit comme convention $a > b$.

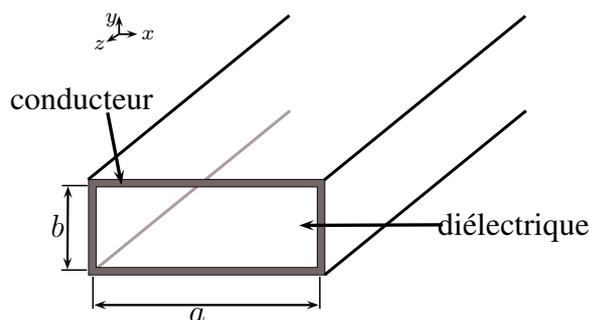


FIGURE 1.6 – Guide d'ondes rectangulaire

Les guides d'onde rectangulaires sont largement utilisés pour transmettre de grandes quantités d'énergie micro-onde à des fréquences supérieures à 3 GHz.

- Le câble coaxial est constitué d'un conducteur central et d'une tresse métallique séparés par un diélectrique isolant. C'est un guide *multiplément connexe*.

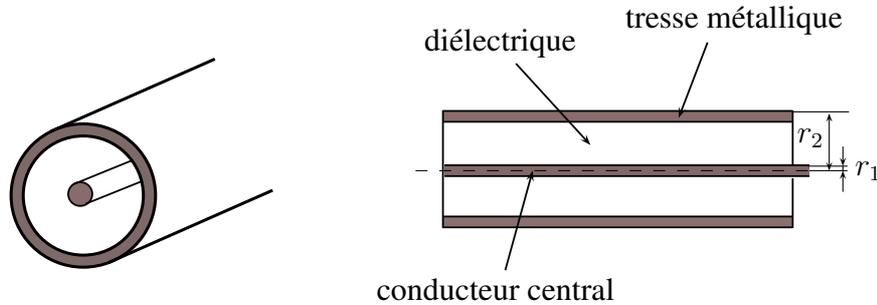


FIGURE 1.7 – Câble coaxial : vu d'ensemble et coupe transversale

Les guides d'onde coaxiaux constituent la structure de guidage la plus utilisée dans les composants RF, tout particulièrement pour les fréquences inférieures à 3 GHz (au-delà, les pertes peuvent devenir importantes).

3.2.2 Modes et fréquences de coupure

Dans un guide, l'onde électromagnétique qui se propage selon la direction \mathbf{e}_z peut être décomposée en une partie *longitudinale*, le long de la direction \mathbf{e}_z , et une partie *transverse*, le long des directions \mathbf{e}_x et \mathbf{e}_y . Cette décomposition s'écrit :

$$\mathbf{E} = [\mathbf{E}_T(x, y) + E_z(x, y)\mathbf{e}_z]e^{i(kz - \omega t)}$$

De par les conditions aux limites vérifiées par le champ électromagnétique, la propagation n'est possible que pour les ondes vérifiant certaines valeurs de k quantifiées. Ces ondes sont appelées *modes de propagation*. Ces modes peuvent être classés en 3 catégories :

- Un mode *transverse électrique*, ou mode TE, est tel que $E_z = 0$, c'est-à-dire que le champ électrique est orthogonal à la direction de propagation
- Un mode *transverse magnétique*, ou mode TM, est tel que $H_z = 0$, c'est-à-dire que le champ magnétique est orthogonal à la direction de propagation
- Un mode *transverse électrique-magnétique*, ou mode TEM, est tel que $E_z = 0$ et $H_z = 0$, c'est-à-dire que les champs électrique et magnétique sont tous deux orthogonaux à la direction de propagation

Guide rectangulaire

Nous allons à présent expliquer un peu plus en détail la propagation des modes dans le cas du guide rectangulaire. On s'intéresse ici aux modes TE.

- Dans un premier temps, on suppose le champ électrique polarisé suivant \mathbf{e}_y :

$$\mathbf{E} = E(x, y)e^{i(kz - \omega t)}\mathbf{e}_y$$

Alors en écrivant les équations satisfaites par ce champ et en tenant compte des conditions limites, on montre que le champ électrique a pour expression :

$$\mathbf{E} = E_{0y} \sin\left(\frac{m\pi}{a}\right) e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_y, \quad m \in \mathbf{N}^*$$

Chaque valeur de m définit un mode, noté TE_{m0} .

Ce mode a pour nombre d'onde $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2$. Si $k^2 < 0$, l'onde est évanescente, dans le cas contraire elle est propagative. On peut donc définir la *fréquence de coupure* du mode TE_{m0} :

$$f_c = \frac{mc}{2a}$$

• Supposons à présent que le champ électrique est polarisé suivant \mathbf{e}_x . Le champ électrique a alors pour expression :

$$\mathbf{E} = E_{0x} \sin\left(\frac{n\pi}{b}\right) e^{i(kz - \omega t)} \mathbf{e}_x, \quad n \in \mathbf{N}^*$$

Chaque valeur de n définit un mode TE_{0n} , de fréquence de coupure :

$$f_c = \frac{nc}{2b}$$

• Enfin, si le champ électrique a une direction quelconque, il s'écrit comme la superposition d'un champ suivant \mathbf{e}_y et d'un champ suivant \mathbf{e}_x . On obtient alors un mode TE_{mn} de fréquence de coupure

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{m\pi c}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi c}{b}\right)^2}$$

On remarque que la fréquence de coupure la plus basse correspond est celle du mode TE_{10} . Il s'agit donc du premier mode propagatif d'un guide d'onde rectangulaire, et on l'appelle *mode fondamentale*.

Remarque 1.5. L'analyse peut se faire de la même manière pour les modes TM mais ne sera pas détaillée ici.

On précise cependant que l'expression des champs \mathbf{H} pour les modes TM nous montrent deux points importants :

- il n'y a pas de propagation possible pour les modes TM_{10} et TM_{01} (toutes les composantes du champ \mathbf{H} s'annulent) ;
- il n'y a pas de propagation possible pour le mode TEM .

Guide coaxial

Nous nous contenterons d'exposer la principale caractéristique de la propagation dans un guide coaxial, sans entrer dans les justifications mathématiques.

La structure doublement connexe de ce guide permet la propagation du mode TEM comme mode fondamental, qui n'a pas de fréquence de coupure. Cette propriété possède un grand intérêt pratique, puisqu'elle permet d'avoir un guide aux dimensions relativement petites, même pour des fréquences basses.

3.2.3 Réflexion et transmission dans les guides d'onde

On peut déterminer facilement la quantité d'énergie transmise le long du guide, ainsi que les pertes. L'énergie totale portée par le champ électromagnétique le long du guide est obtenu en intégrant la composante longitudinale du vecteur de Poynting sur une section du guide :

$$P_T = \int_S \Pi_z dS \quad \text{où } \Pi_z = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \mathbf{e}_z$$

Lors d'une propagation multimodale, on a un couplage entre les différents modes propagatifs et donc une matrice de coefficients de réflexion et de transmission (cette matrice est appelée *matrice S*). En règle générale, on cherche à avoir une propagation monomodale car ce couplage génère une dispersion et donc une perte d'information. Le seul coefficient de réflexion sera donc celui du mode fondamental sur lui-même.

3.3 Antenna Design

Le code de calcul *Antenna Design* résout les équations de Maxwell sous forme intégrale par une méthode d'éléments finis de frontière, comme il a été présenté dans les sections précédentes.

Le code permet la prise en compte de différents types d'alimentation (ondes planes, modes guidés, générateurs ...), de géométrie d'antenne, de matériaux et pour toute fréquence désirée. Il permet de calculer, en tout point de l'espace, le rayonnement électromagnétique d'une antenne donnée. Il est utilisé, entre autres, pour calculer le diagramme de rayonnement d'une antenne, souvent sujet à des spécifications strictes, ainsi que toutes les grandeurs caractéristiques (coefficient de réflexion, pertes...) évoquées précédemment.

Le code nécessite des outils de pré-traitement (construction de la géométrie et du maillage), et des outils de post-traitement (visualisation, tracés) car son seul but est le calcul des courants et des champs à partir d'un maillage et des données physiques (fréquence, matériaux,...). Une fois ces données d'entrée définies, le code effectue les étapes de calcul suivantes :

- Assemblage de la matrice du système linéaire $[A]$: pour chaque couple de triangle, calcul des contributions élémentaires puis assemblage dans la matrice globale
- Assemblage du second membre $[B]$ de la même manière
- Résolution du système linéaire $[A] \begin{pmatrix} J \\ M \end{pmatrix} = [B]$ par méthode directe après factorisation de Cholesky

On s'intéresse particulièrement à l'alimentation par modes guidés (voir figure 1.8). Le guide d'onde infini est modélisé par un guide de longueur D terminé par une surface appelée *plan de champ*. Le nombre de modes incidents sur ce plan, qui dépend de la fréquence étudiée comme vu précédemment, est défini par l'utilisateur. Si la longueur D du guide est suffisamment grande, les modes évanescents sont dissipés et on ne considère que les modes propagatifs.

Dans le cas des modes guidés, l'onde incidente est calculée en deux étapes :

- Obtention de la distribution des champs sur le plan de champs : les modes sont connus et ce calcul nécessite une simple résolution d'une équation de Laplace;

- Les traces de ces champs sont alors utilisées comme courants incidents pour l'antenne complète et apparaissent dans le second membre du système linéaire.

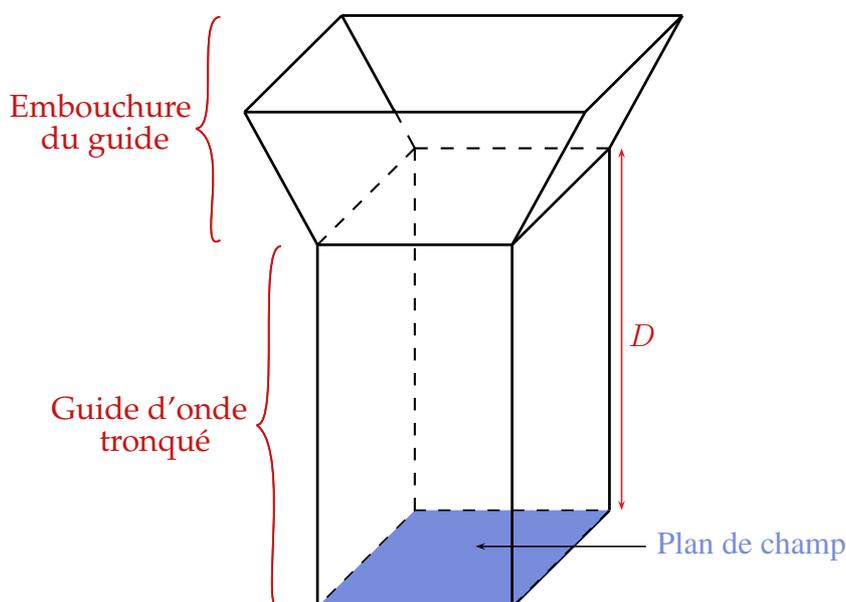


FIGURE 1.8 – Schéma d'une antenne avec alimentation par modes guidés

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté le cadre mathématique de la résolution d'un problème d'électromagnétisme, en reprenant les principales étapes qui la constitue :

- la définition du problème de rayonnement électromagnétique, à savoir les équations de Maxwell harmoniques et leurs solutions dans l'espace libre ainsi que les notions de calculs nécessaires à la compréhension,
- la représentation intégrale de ce problème, menant à la définition d'un nouveau problème qui prend la forme d'un système d'équations intégrales,
- la résolution numérique de ce problème par la méthode des éléments finis de frontière,
- le présentation du cadre de l'étude, à savoir les antennes alimentées par modes guidés,
- la description de *Antenna Design*, le code de calcul mettant en œuvre la méthode de résolution décrite précédemment.

Le problème physique étudié dans cette étude s'inscrit dans ce cadre et sera résolu de cette manière. Les aspects théoriques de la méthode des équations intégrales seront repris et utilisés dans le chapitre 3, les aspects numériques seront quand à eux exploités dans le chapitre 4.

Chapitre 2

Optimisation de forme par méthode Level Set

Contents

1	Méthode Level Set	56
1.1	Méthodes pour le suivi d'interface	56
1.2	Présentation de la méthode Level Set	58
1.3	Quelques aspects numériques	61
2	Optimisation de forme	62
2.1	Définition d'un problème d'optimisation de forme	63
2.2	Analyse de sensibilité par la méthode d'Hadamard	64
3	Optimisation de forme par méthode Level Set	70
3.1	Algorithme d'optimisation	70
3.2	Remarques	70

Introduction

Nous présentons dans ce chapitre un algorithme d'optimisation de forme basé sur le couplage entre un calcul de dérivée de forme par analyse de sensibilité et la méthode Level Set pour la propagation de frontière.

Dans une première section nous présentons la méthode Level Set. Après une brève explication du contexte des méthodes de suivi d'interface et quelques informations historiques sur la méthode Level Set, nous expliquons plus en détails en quoi consiste cette dernière. Dans cette optique, nous introduisons le concept clé de la méthode qui est celui de la représentation implicite d'une frontière au travers d'une fonction auxiliaire, la fonction Level Set. Dans ce cadre, on peut alors déterminer l'équation qui régit l'évolution de cette fonction et donc de la frontière au cours du temps : il s'agit d'une équation d'Hamilton-Jacobi qui, une fois résolue, nous donne la position de la frontière à l'instant choisi. Nous donnons quelques éléments sur sa résolution numérique par une méthode de type différences finies sur une grille cartésienne, et insistons sur un point particulièrement important : l'initialisation et la réinitialisation de la fonction Level Set.

Dans une deuxième section, nous jetons les bases de l'optimisation de forme, en commençant par un historique rapide et non exhaustif de ce type de problèmes, ainsi qu'une classification des méthodes que l'on utilise pour les résoudre.

Nous introduisons ensuite la méthode qui va plus particulièrement nous intéresser : la méthode de variation de frontière d'Hadamard. Cette dernière va nous fournir un cadre rigoureux pour définir la notion de différentiation par rapport au domaine, qui nous permettra d'effectuer une analyse de sensibilité et de calculer la *dérivée de forme* du problème. Une fois en possession de cette dérivée, nous sommes en mesure de présenter un algorithme intuitif de type descente de gradient pour résoudre un problème d'optimisation de forme.

Enfin, dans une troisième section, nous associons les deux notions vues aux sections précédentes afin de présenter un algorithme d'optimisation de forme couplant une analyse de sensibilité par la méthode d'Hadamard et une évolution du domaine par la méthode Level Set. En fait, ce couplage se fait assez naturellement puisque l'analyse de sensibilité nous donne une direction de descente qu'il nous suffit d'injecter comme terme d'advection dans l'équation d'Hamilton Jacobi qui contrôle l'évolution de la frontière.

Nous terminons donc ce chapitre par la présentation de l'algorithme général d'optimisation de forme que nous utiliserons dans la suite de cette étude et par quelques remarques concernant la méthode, qui nous seront également utiles.

1 Méthode Level Set

Commençons par quelques généralités sur les méthodes de suivi d'interface avant d'introduire celle qui nous intéresse tout particulièrement : la méthode Level Set.

1.1 Méthodes pour le suivi d'interface

1.1.1 Tour d'horizon des méthodes existantes

On définit une interface comme une frontière entre deux domaines aux propriétés différentes. Les domaines d'application faisant appel à la notion d'interface étant variés et en nombre important, il nous sera difficile, et hors de propos, de les énumérer de façon exhaustive. Aussi nous contenterons-nous d'en évoquer quelques-uns :

- En mécanique des fluides : interfaces entre l'eau et l'air lors de la modélisation du déferlement d'une vague, entre deux gaz non miscibles en chimie, entre l'air et le carburant lors du remplissage des boosters d'une fusée, entre gaz frais et gaz brûlés en combustion, ...
- En mécanique des solides : interfaces entre deux domaines lors de la gravure par déposition de circuits intégrés, entre liquide et solide lors d'un processus de solidification, ...
- En imagerie : interface entre deux couleurs, reconstruction d'interface en IRM, détection d'objets, ...

Il ne s'agit là que de quelques exemples ; le concept d'interface est omniprésent dans une grande variété de domaines de la physique et offre de nombreux problèmes ouverts de grande importance.

Cette variété se retrouve également dans les méthodes numériques disponibles pour simuler un mouvement d'interface. Là encore, nous ne chercherons pas à les recenser tous mais plutôt à dégager quelques catégories. Nous évoquons ici deux catégories importantes :

- le type de suivi d'interface :
 - les méthodes de type *front tracking* réalisent un suivi explicite de l'interface, par l'intermédiaire des particules qui la constituent,
 - les méthodes de type *front capturing* capturent l'interface en la caractérisant implicitement, par l'intermédiaire d'une fonction auxiliaire.
- la nature de la méthode :
 - les méthodes lagrangiennes, dans lesquelles un volume discrétisé contient toujours les mêmes particules fluides. Elles utilisent souvent des maillages mobiles non structurés dont les éléments épousent la forme de l'interface.
 - les méthodes eulériennes, dans lesquelles on ne cherche pas à localiser les particules individuellement. Elles utilisent des maillages fixes, souvent structurés, au travers desquels circulent les particules fluides.

Bien évidemment, toutes les classes de méthodes possèdent leurs avantages et leurs inconvénients. Par exemple, les méthodes lagrangiennes suivent l'interface et sont donc extrêmement précises dans son positionnement, alors que le maillage fixe des méthodes eulériennes pourra échouer à capturer une très petite variation de l'interface. En revanche, les méthodes lagrangiennes nécessitent un remaillage à chaque pas de temps, ce qui pénalise le temps de simulation, tout particulièrement en 3D. Les méthodes eulériennes peuvent également gérer des déformations plus grandes.

Le choix de la méthode utilisée dépendra donc, comme souvent, d'un choix de priorité parmi de nombreux critères (robustesse, coût d'implémentation, coût de simulation, degré de précision souhaité), mais également de la physique qui gouverne le phénomène étudié et qui influera sur la détermination d'une stratégie adaptée.

1.1.2 Introduction à la méthode Level Set

Les sous-sections suivantes sont consacrées à la présentation de la méthode d'évolution d'interface qui sera utilisée dans la suite de cette étude : la *méthode Level Set*. Celle-ci rentre dans la catégorie des méthodes eulériennes de type *front capturing*, et nous allons en détailler par la suite le principe de fonctionnement.

En 1988, Osher et Sethian publient un article [OS88] dans lequel ils présentent une nouvelle méthode d'évolution d'interface, ainsi qu'un ensemble d'algorithmes numériques et de résultats obtenus grâce à cette méthode : c'est la naissance de celle qu'on appellera par la suite *méthode Level Set*. Depuis lors, elle est devenue une méthode de choix pour la description de mouvement d'interface et a été utilisée dans un très large panel de champs d'applications.

Comme lors de la présentation générale des méthodes de suivi d'interface, il ne nous sera pas possible de présenter une liste exhaustive des applications de la méthode Level Set. Nous pouvons cependant citer quelques travaux de référence en reprenant les exemples

d'applications considérés précédemment :

- En mécanique des fluides : utilisation pour décrire l'interface entre deux fluides incompressibles dans [SSO94], et application entre autres à la propagation des vagues, ainsi que pour étudier le mouvement de l'interface entre deux gaz dans [MOS92];
- En mécanique des solides : utilisation pour le processus de gravure par déposition de circuits intégrés dans [AS95a] et [AS95b], ainsi que pour l'étude d'un problème de solidification dans [CMOS97];
- utilisation pour la reconstruction à partir d'images IRM dans [ZOF01], pour la détection d'objets dans [CV01], ainsi que dans le débruitage dans [RO94].

Les présentations étant faites, il est désormais temps de passer à la description plus détaillée de la méthode Level Set. On s'appuie pour cela sur les ouvrages de référence de Osher et Fedkiw [OF06] et de Sethian [Set99b].

1.2 Présentation de la méthode Level Set

1.2.1 Définition implicite d'un domaine

L'idée de base de la méthode Level Set est de remplacer la représentation usuelle d'un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^d$ par une représentation implicite, comme le sous-domaine négatif d'une fonction auxiliaire $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} \phi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \Gamma = \partial\Omega \\ \phi(x) > 0 & \text{si } x \in {}^c\bar{\Omega} \end{cases} \quad (2.1)$$

La fonction ϕ est appelée *fonction Level Set*, et la frontière Γ de Ω est décrite par la courbe de niveau 0 de ϕ (voir figure 2.1).

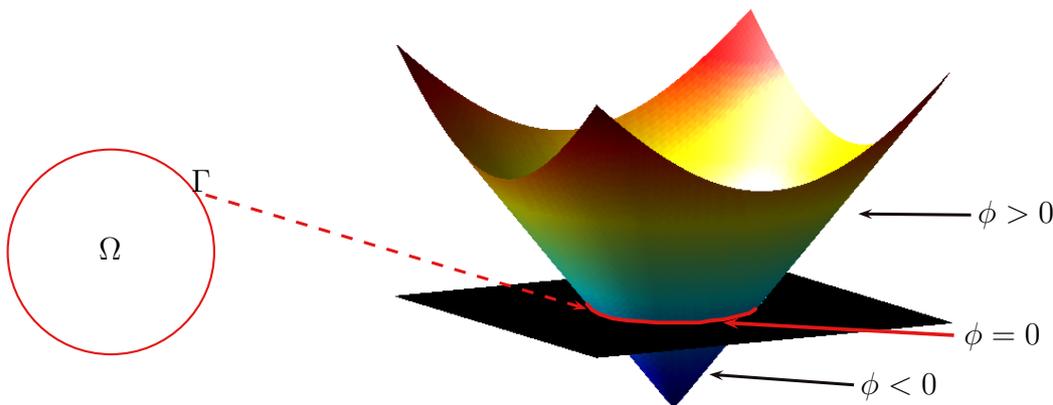


FIGURE 2.1 – À gauche : un domaine $\Omega \in \mathbb{R}^2$ de frontière Γ circulaire; à droite : une fonction Level Set ϕ associée

Dès lors, si on s'intéresse au déplacement de Γ au cours du temps, on n'a qu'à étudier l'évolution de la fonction $\phi(t, \cdot)$: à chaque instant t , l'interface est déterminée comme

étant l'ensemble des points pour lesquels la fonction Level Set ϕ est nulle :

$$\Gamma(t) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d, \phi(t, x) = 0 \right\} \quad (2.2)$$

La méthode Level Set permet donc de traduire le mouvement d'un domaine $\Omega(t)$ au cours du temps en une équation aux dérivées partielles dont la solution est fonction Level Set $\phi(t, \cdot)$: l'obtention de cette équation sera détaillée par la suite.

Les descriptions explicite et implicite d'un domaine sont équivalentes, et les données géométriques sur le domaine peuvent s'exprimer en fonction de ϕ (pour de plus amples détails, voir [You10]).

Si $\Omega \in \mathbb{R}^d$ est au moins de classe \mathcal{C}^1 , alors $\forall x \in \Gamma$ où $\nabla\phi(x) \neq 0$, le vecteur normal unitaire sortant à Γ peut s'exprimer ainsi :

$$\mathbf{n}(x) = \frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|} \quad (2.3)$$

De plus, si Ω est de classe \mathcal{C}^2 , alors $\forall x \in \Gamma$ où $\nabla\phi(x) \neq 0$ la courbure moyenne s'écrit :

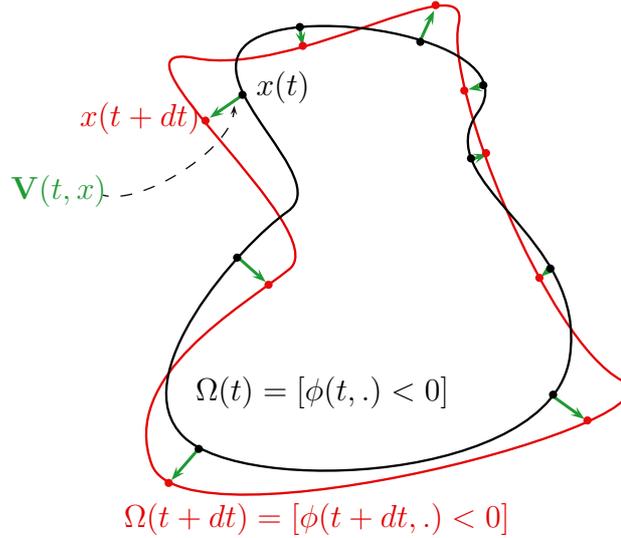
$$\kappa(x) = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla\phi(x)}{|\nabla\phi(x)|} \right) \quad (2.4)$$

1.2.2 Description de l'évolution de la frontière

On s'intéresse maintenant à l'évolution au cours du temps du domaine $\Omega(t)$ et d'une fonction Level Set associée $\phi : [0, T] \times \mathbb{R}^d \ni (t, x) \mapsto \phi(t, x) \in \mathbb{R}$. On introduit à présent le champ de vecteur à l'origine du mouvement de $\Omega(t)$: le *vecteur vitesse* $\mathbf{V}(t, x)$. La vitesse est fonction, d'une part évidemment, du temps t et de la position x , mais également de la géométrie de $\Omega(t)$. Un des cas les plus courants et les plus importants est celui d'un vecteur vitesse dont la direction est toujours normale à l'interface, c'est-à-dire :

$$\mathbf{V}(t, x) = v(t, x)\mathbf{n}(t, x) \quad (2.5)$$

où $v(t, x)$ est une fonction scalaire. Ce modèle représente par exemple la progression d'un front de flamme en combustion. Il en existe d'autres (qui s'expriment en fonction de la courbure moyenne, ou bien en fonction de caractéristiques géométriques globales du domaine $\Omega(t)$), mais nous considérerons ici le cas d'une vitesse normale à Γ comme décrite par (2.5).


 FIGURE 2.2 – Évolution du domaine $\Omega(t)$ dictée par $V(t, \cdot)$ après un temps dt

On note $\mathcal{O} \in [0, T] \times \mathbf{R}^d$ un ensemble ouvert tel que $\Gamma(t) \in \mathcal{O} \forall t$. On suppose ϕ et \mathbf{V} suffisamment régulières. La définition de la fonction Level Set ϕ nous permet d'écrire :

$$\forall (x, t) \in \mathcal{O}, \phi(t, x(t)) = 0$$

En dérivant en chaîne cette expression, on obtient l'équation de transport Level Set suivante :

$$\forall (t, x) \in \mathcal{O}, \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + \mathbf{V}(t, x) \cdot \nabla \phi(t, x) = 0 \quad (2.6)$$

En utilisant l'expression de \mathbf{V} selon la normale à l'interface (2.5) ainsi que l'expression de la normale en fonction de la fonction Level Set ϕ (2.3), l'équation de transport (2.6) se réécrit comme une équation d'Hamilton-Jacobi :

$$\forall (x, t) \in \mathcal{O}, \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + v(t, x) |\nabla \phi(t, x)| = 0 \quad (2.7)$$

On touche ici du doigt l'intérêt principal du choix de la méthode Level Set de représenter implicitement un domaine : de cette manière, l'évolution du domaine Ω au cours du temps est régie par une équation aux dérivées partielles dont est solution la fonction Level Set qui lui est associée. Cette équation, que l'on sait résoudre numériquement, nous permet de localiser dans l'espace la frontière Γ à chaque instant t .

Bien évidemment, dans le cas général, l'évolution du domaine ne se fait pas toujours de manière indolore. Un domaine évoluant selon un champ de vecteur vitesse simple peut par exemple développer des singularités en temps fini. Il en est de même lors d'un changement de topologie du domaine. On peut également mentionner l'importance du choix de la nature de la fonction Level Set, qui aura une influence sur la qualité du suivi d'interface. Enfin, la méthode de résolution numérique joue bien sûr un rôle important. La littérature regorge de travaux effectués dans le but de pallier ces problèmes, aussi ne nous attarderons-nous pas sur leur énumération et leurs solutions et préférons rester sur une présentation plus généraliste.

Nous revenons toutefois sur quelques aspects très généraux de la mise en œuvre numérique de la méthode Level Set.

1.3 Quelques aspects numériques

1.3.1 Résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi

On s'intéresse à la discrétisation numérique de l'équation d'Hamilton-Jacobi dans le cas bidimensionnel, à savoir

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + v|\nabla \phi| = 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^2 \\ \phi(0, \cdot) = \phi_0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

pour une vitesse v donnée et une fonction Level Set initiale ϕ_0 toutes deux supposées bornées et continues.

On reprend le schéma numérique présenté dans [Set99b].

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\Delta t = \frac{T}{N}$ le pas de temps pour la discrétisation de l'intervalle temporel $[0, T]$ en sous-intervalles $[t^n, t^{n+1}]$, $n = 0, \dots, N - 1$ avec $t^n = n\Delta t$. Le plan \mathbb{R}^2 est doté d'une grille cartésienne de pas Δx dans la direction x et Δy dans la direction y . L'inconnue ϕ à l'instant t^n et au point de la grille $(i\Delta x, j\Delta y)$, $i, j \in \mathbb{Z}$ est noté ϕ_{ij}^n .

On note les quantités :

$$D_{ij}^{+x} \phi^n = \frac{\phi_{i+1j}^n - \phi_{ij}^n}{\Delta x}, \quad D_{ij}^{-x} \phi^n = \frac{\phi_{ij}^n - \phi_{i-1j}^n}{\Delta x}$$

et on définit de la même manière $D_{ij}^{+y} \phi^n$ et $D_{ij}^{-y} \phi^n$.

On peut écrire le schéma explicite d'ordre 1 suivant :

$$\begin{cases} \phi_{ij}^0 = \phi_0(i\Delta x, j\Delta y) & \forall i, j \in \mathbb{Z} \\ \phi_{ij}^{n+1} = \phi_{ij}^n - \Delta t \left(\max(v_{ij}, 0) \nabla_{ij}^+ \phi^n + \min(v_{ij}, 0) \nabla_{ij}^- \phi^n \right) & \forall i, j \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.9)$$

où les quantités $\nabla_{ij}^+ \phi^n$ et $\nabla_{ij}^- \phi^n$ relatives à la discrétisation de $|\nabla \phi|$ s'écrivent :

$$\nabla_{ij}^+ \phi^n = \left(\max \left(\max(D_{ij}^{-x} \phi^n, 0), -\min(D_{ij}^{+x} \phi^n, 0) \right)^2 + \max \left(\max(D_{ij}^{-y} \phi^n, 0), -\min(D_{ij}^{+y} \phi^n, 0) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\nabla_{ij}^- \phi^n = \left(\max \left(\max(D_{ij}^{+x} \phi^n, 0), -\min(D_{ij}^{-x} \phi^n, 0) \right)^2 + \max \left(\max(D_{ij}^{+y} \phi^n, 0), -\min(D_{ij}^{-y} \phi^n, 0) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Afin d'assurer la convergence de ce schéma, on a besoin d'une condition CFL qui nous garantit que le front ne traversera pas plus d'une maille de grille en un pas de temps. Cette condition s'écrit :

$$\left(\sup_{i,j} v_{ij} \right) \Delta t \leq \min(\Delta x, \Delta y) \quad (2.10)$$

On trouve également dans [Set99b] les détails concernant le même schéma mais à l'ordre 2 en espace, qui sera en fait plus couramment utilisé. À noter qu'on peut également construire des schémas similaires d'ordre supérieur en temps à l'aide des méthodes de Runge-Kutta.

1.3.2 Initialisation de la fonction Level Set

Nous remarquerons que jusqu'à présent, aucune fonction Level Set spécifique n'a été choisie : le cadre théorique développé précédemment est en fait indépendant du choix de la fonction ϕ effectué. Malheureusement, il n'en va pas de même lors d'une résolution numérique : des variations trop abruptes ou trop faibles de ϕ autour de Γ peuvent causer des instabilités et des difficultés à localiser Γ avec précision, ou encore à calculer numériquement le vecteur normal ou la courbure moyenne.

La fonction qui s'avère être le meilleur choix d'initialisation pour la fonction ϕ est la *fonction distance signée* d_Ω à Ω , définie de la manière suivante :

Définition 2.1. Soit $\Omega \in \mathbb{R}^d$ un domaine borné. La fonction distance signée Ω est la fonction $\mathbb{R}^d \ni x \mapsto d_\Omega(x) \in \mathbb{R}$ définie par :

$$d_\Omega(x) = \begin{cases} -d(x, \Gamma) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \in \Gamma \\ d(x, \Gamma) & \text{si } x \in {}^c\Omega \end{cases} \quad (2.11)$$

où $d(x, \Gamma)$ désigne la fonction distance euclidienne usuelle à l'ensemble Ω .

La fonction distance signée possède les propriétés de régularité et de différentiabilité nécessaires, ainsi que d'intéressantes propriétés géométriques (pour une description de ces caractéristiques, voir par exemple les travaux de Delfour et Zolésio dans [DZ11]).

Il existe dans la littérature un certain nombre de méthodes numériques utilisées pour calculer (ou approcher au mieux) la fonction distance signée. On peut citer entre autres la méthode *Fast Marching* ([Set99a]) et la méthode *Fast Sweeping* ([Zha05]).

Maintenant que nous avons pointé du doigt l'importance d'un point de vue numérique de manipuler des fonctions Level Set aussi proches que possible de la fonction distance signée, il nous faut signaler qu'une initialisation seule n'est pas suffisante. En effet, même si $\phi(0, \cdot)$ est la distance signée à $\Omega(0)$, la solution $\phi(t, \cdot)$ solution de (2.7) peut bien souvent développer des variations trop abruptes ou pas assez aux alentours de $\Gamma(t)$, au fur et à mesure que t augmente.

Dès lors, il devient crucial de redéfinir périodiquement $\phi(t, \cdot)$ comme étant la fonction distance signée à $\Omega(t)$: cette étape est appelée *réinitialisation de la Level Set*. Le calcul de la distance signée dans ce cas est facilitée par le fait que nous possédons déjà une fonction Level Set, notée ϕ_0 ; la régularisation de cette fonction Level Set en une nouvelle fonction ψ plus proche de la fonction distance signée est proposée par Osher, Sussman et Smereka dans [SSO94]. Il s'agit résoudre l'équation suivante, appelée *équation de redistanciation* :

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{sgn}(\phi_0(x))(|\nabla \psi| - 1) = 0 & \text{pour } (t, x) \in [0, \infty] \times \mathbb{R}^d \\ \psi(0, x) = \phi_0(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^d \end{cases} \quad (2.12)$$

Sur une grille, cette équation peut être résolue par une méthode similaire à celle présentée dans le paragraphe précédent, avec en plus une étape de lissage de la fonction discontinue $\text{sgn}(\phi_0)$.

2 Optimisation de forme

Passons maintenant à la définition de ce qu'est l'optimisation de forme et à la présentation de la méthode choisie pour résoudre les problèmes qui en découlent, la méthode

de variation de frontière d'Hadamard.

2.1 Définition d'un problème d'optimisation de forme

2.1.1 Un peu d'histoire

Résoudre un problème d'optimisation de forme, c'est trouver la forme optimale d'un domaine Ω parmi un ensemble de *formes admissibles* \mathcal{U}_{ad} qui minimise (ou maximise) un critère donné appelé *fonction coût* ou *fonction objectif* $J(\Omega)$:

$$\min_{\Omega \in \mathcal{U}_{ad}} J(\Omega)$$

L'exemple historique d'optimisation de forme le plus célèbre est sans doute celui de la reine Didon (latin : Dido) relaté dans l'*Énéide* de Virgile : après s'être échappée de Tyre, la princesse phénicienne Dido arrive sur une côte d'Afrique du Nord et demande au roi local Jarbas une portion de terre pour y ériger une ville. Celui-ci accepte de lui céder autant de terre qu'elle peut faire tenir dans la peau d'un bœuf. Didon décide alors de découper la peau du bœuf en très fines lamelles et de les attacher les unes aux autres avant d'utiliser la corde ainsi obtenue pour dessiner son territoire comme un arc de cercle comprenant une portion de la côte, et y fonde la célèbre ville de Carthage. Ce problème est appelé problème isopérimétrique (la longueur de la corde étant fixe) et la solution qui maximise l'aire est bien le cercle.

Depuis, la quantité de problèmes d'optimisation de forme a bien augmenté et les résoudre est devenu une étape incontournable dans la conception et le design industriel. L'intérêt grandissant porté à ce sujet a entraîné l'étude et le développement d'un grand nombre de méthodes théoriques et numériques pour résoudre les problèmes d'optimisation de forme. Nous nous référons ici aux ouvrages [Pir84], [SZ92], [HP06] et principalement à [All06] dont nous reprendrons le cheminement.

Bien que certaines questions d'ordre théorique restent ouvertes (voir [HS05] pour une vue d'ensemble), beaucoup de questions venant de différents domaines de la physique peuvent être reformulées en problèmes d'optimisation de forme et résolus grâce aux méthodes associées. On peut en citer quelques-uns :

- la recherche de profil d'aile optimal en aéronautique, ainsi qu'un grand nombre d'autres problèmes venant de la mécanique des fluides dont on peut trouver des exemples dans [MP01] ;
- la conception optimale en mécanique des structures, avec par exemple l'optimisation des propriétés des matériaux ([RGB02],[Sig95]), ou bien la minimisation de la contrainte ([AJ08],[DB98]) ;
- la détection de contours en imagerie ([CKS97]), ainsi que beaucoup d'autres applications dans cette discipline très actuelle ;
- le design optimal de dispositifs électromagnétiques, point sur lequel nous reviendrons plus en détails par la suite, étant donné sa proximité avec le sujet de ce manuscrit.

2.1.2 Une rapide vue d'ensemble des différentes méthodes

De nombreuses techniques d'optimisation de forme ont été développées au cours des années. Ces techniques sont en fait reliées à la manière dont on décide de représenter les formes, car de cette représentation dépendra la façon d'étudier les variations du domaine, point primordial en optimisation puisque la majorité des méthodes nécessitent un calcul de gradient.

Traditionnellement, on distingue trois grandes familles de représentation : l'optimisation paramétrique, géométrique et topologique. Nous en effectuons une brève description.

Optimisation paramétrique

La forme est décrite *a priori* en utilisant un nombre fini de paramètres. Par exemple, il peut s'agir d'un ensemble de paramètres physiques pertinents (des longueurs caractéristiques, des épaisseurs, etc... voir exemple dans [All06]). Dans une logique similaire, la forme peut-être paramétrisée par des polynômes, comme des courbes de Bézier, des splines ou des NURBS (voir [CK08] et les références à l'intérieur). Dans tous les cas, les formes sont paramétrisées explicitement par un nombre fini de *degrés de liberté*, qui peuvent être, suivant les cas, les paramètres physiques, les points de contrôle des courbes de Bézier (ou des splines), ou encore les nœuds du maillage.

Du fait de sa simplicité de formulation et de mise en œuvre, cette approche est très largement utilisée dans l'industrie ; néanmoins, elle offre des possibilités de variations de forme très limitées.

Optimisation géométrique

L'approche est ici un peu plus générale : la variable d'optimisation est ici la frontière du domaine elle-même. La topologie de la forme est fixée, et la frontière peut évoluer de manière totalement libre.

La manière de représenter la forme et ses variations est donc plus complexe, et sera décrite plus en détails dans la section 2.2.

Optimisation topologique

L'optimisation topologique ne possède aucune des restrictions précédentes : on cherche ici la forme optimale, en autorisant tout type de variations y compris les changements de topologie. Elle ne nécessite donc pas de savoir à l'avance de combien de composantes connexes la structure est constituée et permet donc d'en trouver le nombre optimal. Ici, la forme est représentée par une fonction densité qui vaut 1 à l'intérieur de la forme et 0 à l'extérieur.

La première méthode d'optimisation topologique est la célèbre méthode d'homogénéisation (voir par exemple [Tar00]), mais de nombreuses autres ont été développées au fil des années.

2.2 Analyse de sensibilité par la méthode d'Hadamard

Comme nous l'avons mentionné précédemment, un des points les plus importants en optimisation de forme est de définir comment on effectue les perturbations d'une forme et donc comment on calcule les variations de la fonction objectif J par rapport à la forme. Une possibilité est d'effectuer une analyse de sensibilité de J lorsque l'on perturbe la frontière de la forme Ω .

On présente ici une de ces méthodes de variation de frontière appelée méthode d’Hadamard, introduite par J. Hadamard dans [Had09] et étudiée rigoureusement par Murat et Simon dans [MS76b] et [MS76a], ainsi que la notion de différentiation par rapport au domaine qui en découle naturellement.

2.2.1 Méthode de variation de frontière

Soit Ω un domaine de référence et θ un déplacement de faible amplitude. L’idée de base de la méthode de variation de frontière d’Hadamard est de considérer les déformées de Ω par le champ $\theta : (I + \theta)\Omega$ (voir figure 2.3).

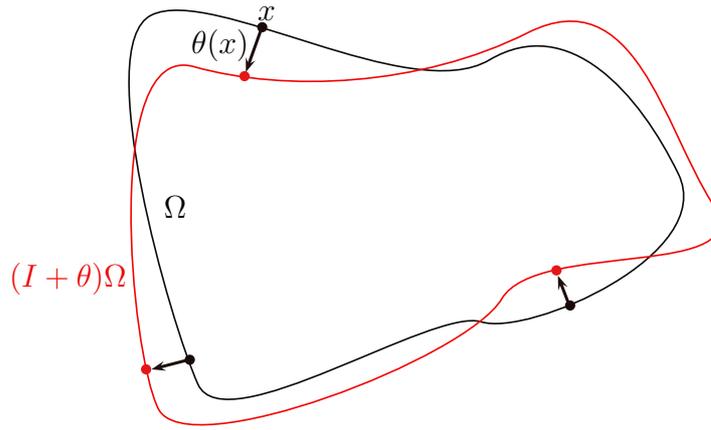


FIGURE 2.3 – Variation d’une forme de référence Ω par la méthode d’Hadamard

Précisons maintenant le cadre mathématique de la méthode :

Définition 2.2. On définit l’espace des fonctions lipschitziennes ϕ de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d telles que ϕ et $\nabla\phi$ sont uniformément bornés sur \mathbb{R}^d :

$$W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) = \left\{ \phi \in L^\infty(\mathbb{R}^d), \frac{\partial\phi}{\partial x_i} \in L^\infty(\mathbb{R}^d) \forall i = 1, \dots, d \right\} \quad (2.13)$$

C’est un espace de Banach pour la norme

$$\|\phi\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(|\phi(x)|_{\mathbb{R}^d} + |\nabla\phi(x)|_{\mathbb{R}^{d \times d}} \right)$$

où $|\cdot|_{\mathbb{R}^d}$ désigne la norme euclidienne dans \mathbb{R}^d et $|\cdot|_{\mathbb{R}^{d \times d}}$ une norme matricielle sur \mathbb{R}^d .

Remarque 2.1. On note $C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ l’ensemble des champs de vecteurs continûment différentiables et uniformément bornés ainsi que leur gradient.

Soit Ω un domaine de référence et θ un champ de vecteurs tel que $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$. L’ensemble des formes admissibles $\mathcal{C}(\Omega)$ est alors composé des ouverts $\Omega_\theta = (I + \theta)\Omega$ définis par :

$$\Omega_\theta = \left\{ x + \theta(x), x \in \Omega \right\} \quad (2.14)$$

On peut donc voir θ comme le champ de vecteurs qui transporte la forme de référence Ω en une forme Ω_θ . On a également la proposition suivante, qui nous garantit que pour θ suffisamment petit alors T est un difféomorphisme (voir preuve dans [All06]), ce qui nous permettra par la suite d’introduire la notion de différentiation par rapport au domaine :

Proposition 2.1. *Soit θ un champ de vecteurs tel que $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ avec de plus $\|\theta\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)} < 1$. Alors l'application $T = I + \theta$ est une bijection de \mathbb{R}^d qui appartient à l'ensemble des difféomorphismes.*

2.2.2 Différentiation par rapport à la forme

Nous pouvons désormais définir la notion de différentiation par rapport au domaine :

Définition 2.3. *Soit $J(\Omega)$ une fonctionnelle du domaine. J est différentiable par rapport à la forme en Ω si la fonction*

$$\begin{aligned} W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\longmapsto J((I + \theta)(\Omega)) \end{aligned}$$

est Fréchet différentiable en $\theta = 0$. La dérivée de Fréchet associée, notée $J'(\Omega)$, est appelée dérivée de forme de J en Ω . De plus, on a le développement asymptotique suivant dans un voisinage de 0 :

$$J(I + \theta)(\Omega) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|} = 0 \quad (2.15)$$

Dérivation d'intégrales

On commence ici par présenter les dérivées de formes d'intégrales dont l'intégrande ne dépend pas du domaine. On rappelle tout d'abord les lemmes classiques sur les changements de variable dans les intégrales :

Lemme 2.1. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et T un difféomorphisme de \mathbb{R}^d . Alors $f \in L^p(T(\Omega))$ si et seulement si $f \circ T \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ et on a :*

$$\int_{T(\Omega)} f dx = \int_{\Omega} f \circ T |\det \nabla T| dx$$

D'autre part, $f \in W^{1,p}(T(\Omega))$ si et seulement si $f \circ T \in W^{1,p}(\Omega)$ et on a :

$$(\nabla f) \circ T = ((\nabla T)^{-1})^t \nabla (f \circ T) \quad (2.16)$$

Lemme 2.2. *Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d et T un difféomorphisme de \mathbb{R}^d . Alors $f \in L^1(\partial T(\Omega))$ si et seulement si $f \circ T \in L^1(\partial \Omega)$ et on a :*

$$\int_{\partial T(\Omega)} f ds = \int_{\partial \Omega} f \circ T |\det \nabla T| \left| ((\nabla T)^{-1})^t \mathbf{n} \Big|_{\mathbb{R}^d} \right| ds$$

où \mathbf{n} est la normale extérieure à $\partial \Omega$

On peut donc écrire les propositions suivantes (dont les preuves, faites dans [All06], découlent directement des lemmes précédents) :

Proposition 2.2. *Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d de frontière Γ . Soit $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^d)$ et soit J l'application de $\mathcal{C}(\Omega)$ dans \mathbb{R} définie par :*

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} f(x) dx$$

Alors J est différentiable en Ω et on a :

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\theta(x)f(x)) dx = \int_{\Gamma} f(x)\theta(x) \cdot \mathbf{n}(x) dx, \quad \forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$$

Proposition 2.3. Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d de frontière Γ . Soit $f \in W^{2,1}(\mathbb{R}^d)$ et soit J l'application de $\mathcal{C}(\Omega)$ dans \mathbb{R} définie par :

$$J(\Omega) = \int_{\Gamma} f(x) ds$$

Alors J est différentiable en Ω et on a :

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Gamma} \left(\nabla f \cdot \theta + f(\operatorname{div} \theta - \nabla \theta \cdot \mathbf{n}) \right) ds = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} + \kappa f \right) \theta \cdot \mathbf{n} ds, \quad \forall \theta \in C^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$$

où $\kappa = \operatorname{div} \mathbf{n}$ est la courbure moyenne de Γ .

Dérivées lagrangienne et eulérienne

On s'intéresse désormais à la différentiation par rapport à la forme de fonctions qui dépendent du domaine, que l'on note $u(\Omega, x)$. C'est le cas par exemple lorsque $u(\Omega, x)$ est la solution d'une EDP définie sur Ω . On définit deux types de dérivées de forme : la *dérivée eulérienne* et la *dérivée lagrangienne*.

La dérivée eulérienne se définit de manière locale et représente la variation de u en un point x fixé :

Définition 2.4. Soit x un point appartenant au domaine de référence Ω et au domaine transporté $\Omega_{\theta} = (I+\theta)\Omega$. On peut écrire le développement asymptotique en $\theta = 0$ suivant :

$$u((I+\theta)(\Omega), x) = u(\Omega, x) + U(\theta, x) + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|} = 0 \quad (2.17)$$

$U(\theta, x)$ est appelée *dérivée eulérienne* de la fonction $u(\Omega, x)$.

Le développement précédent a un sens pour les points $x \in \Omega$ étant donné que pour θ suffisamment petit, $x \in \Omega_{\theta}$. Néanmoins, il n'est pas clair que cela soit valable pour un point du bord $x \in \Gamma$ puisque rien ne nous dit que ce point appartienne au domaine transporté Ω_{θ} . Dans ce cas, $u(\Omega, x)$ et $u(\Omega_{\theta}, x)$ n'appartiennent pas au même domaine et on ne peut donc pas écrire le développement asymptotique.

Pour pallier ce problème, on introduit la dérivée lagrangienne qui représente cette fois la variation de u en un point x qui bouge avec le domaine. $I + \theta$ étant une bijection, on a correspondance entre le point $x \in \Omega$ et le point $x_{\theta} \in \Omega_{\theta}$. On peut donc définir les fonctions $u(\Omega_{\theta}, x_{\theta} = u((I+\theta)(\Omega)) \circ (I+\theta) = u((I+\theta)(\Omega), x + \theta(x))$ et $u(\Omega, x)$ qui sont définies cette fois sur le même domaine Ω .

Définition 2.5. Soit x un point appartenant au domaine de référence Ω . On peut écrire le développement asymptotique en $\theta = 0$ suivant :

$$u((I+\theta)(\Omega), x + \theta(x)) = u(\Omega, x) + Y(\theta, x) + o(\theta) \quad \text{avec} \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|} = 0 \quad (2.18)$$

$Y(\theta, x)$ est appelée *dérivée lagrangienne* de la fonction $u(\Omega, x)$.

Les deux notions sont bien sûr liées :

$$Y(\theta, x) = U(\theta, x) + \theta(x) \cdot \nabla u(\Omega, x)$$

Dérivation de la solution d'une équation dépendant du domaine

Les deux paragraphes précédents nous fournissent les outils nécessaires pour nous intéresser à la dérivabilité des intégrales dont l'intégrande est une fonction dépendant de la forme, solution d'une équation aux dérivées partielles.

Proposition 2.4. *Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^d et $u(\Omega)$ une fonction de $\mathcal{C}(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$. On définit sa transportée de $C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\Omega)$ par :*

$$u(\Omega_\theta, x_\theta) = u((I + \theta)(\Omega)) \circ (I + \theta)$$

et on note Y sa dérivée lagrangienne. Alors la fonction $J_1 : \mathcal{C}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J_1 = \int_{\Omega} u(\Omega) dx$$

est différentiable en Ω et $\forall \theta \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, on a :

$$J_1'(\Omega)(\theta) = \int_{\Omega} (u(\Omega) \operatorname{div} \theta + Y(\theta)) dx = \int_{\Omega} (\operatorname{div}(u(\Omega)\theta) + U(\theta)) dx$$

De plus, si $u(\Omega_\theta, x_\theta)$ est une fonction de $C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\partial\Omega)$, alors la fonction $J_2 : \mathcal{C}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J_2 = \int_{\partial\Omega} u(\Omega) ds$$

est différentiable en Ω et $\forall \theta \in C^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$, on a :

$$J_2'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} (u(\Omega)(\operatorname{div} \theta - \nabla \theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) + Y(\theta)) ds = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u(\Omega)}{\partial \mathbf{n}} + \kappa u(\Omega) \right) \theta \cdot \mathbf{n} ds$$

Dans le cas général, le calcul de la dérivée de forme de la fonction objectif J nécessite donc le calcul de la dérivée lagrangienne de u . Si u est la solution d'une équation aux dérivées partielles, alors ce calcul peut se faire de la manière suivante :

- On écrit l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la fonction $u(\Omega, x)$ et par sa transportée $u(\Omega_\theta, x_\theta)$
- On soustrait la première équation à la deuxième, faisant apparaître une nouvelle EDP dont la dérivée lagrangienne $Y(\theta, x)$ est solution

Dans les faits, on ne résout pas cette nouvelle EDP : son second membre possède généralement une expression assez complexe puisqu'il contient les transportées des opérateurs de l'EDP de départ; et surtout il dépend de θ . Il faudrait donc ici résoudre une EDP pour chaque direction θ !

Pour pallier cette difficulté, on fait appel à un outil hérité de la théorie du contrôle optimal : *l'état adjoint* ([Lio71]).

Définition 2.6. *Soit Ω un ouvert et u solution de l'équation aux dérivées partielles*

$$\mathcal{L}(u) = b \quad \text{dans } \Omega$$

où l'opérateur \mathcal{L} tient compte des conditions limites éventuelles sur $\Gamma = \partial\Omega$.

Soit la fonction objectif $J : \mathcal{C}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$J = \int_{\Omega} j(u(\Omega)) dx$$

Alors on appelle état adjoint p la solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\mathcal{L}^*(p) = j'(u) \quad \text{dans } \Omega$$

où l'opérateur \mathcal{L}^* est l'adjoint de l'opérateur \mathcal{L} .

L'état adjoint nécessite la résolution d'une seule EDP, indépendante de θ , et permet de réécrire la dérivée de forme de la fonction coût de manière explicite en fonction de la solution de l'EDP de départ (l'état) de la solution de l'EDP adjointe (l'état adjoint) et des transportées des opérateurs intervenants dans l'EDP de départ (qui sont elles dépendantes de θ).

Le cheminement de cette méthode deviendra beaucoup plus clair au chapitre 3, où nous l'utiliserons pour calculer la dérivée de forme qui nous intéresse.

2.2.3 Algorithme générique d'optimisation de forme

Grâce à l'introduction de l'état adjoint, et en accord avec la proposition 2.2 qui traduit le fait que la dérivée de forme ne dépend que de la composante normale de la déformation du domaine Ω , on s'intéresse aux fonctions coûts dont les dérivées de forme peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\forall \theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Gamma} v_{\Omega}(\theta \cdot \mathbf{n}) ds \quad (2.19)$$

où le champ scalaire v_{Ω} dépend de l'état et de l'état adjoint.

Cette expression nous donne une direction de descente naturelle :

$$\theta = -v_{\Omega} \mathbf{n}$$

En effet, si on injecte cette expression de θ dans le développement asymptotique (2.15), on obtient pour t un pas de descente suffisamment petit :

$$J(\Omega_{\theta}) = J(\Omega) - t \int_{\Gamma} v_{\Omega}^2 ds + o(t) < J(\Omega)$$

La fonction coût est bien décroissante et θ est donc bien une direction de descente pour J en Ω .

Sur ces considérations, nous pouvons définir un algorithme générique d'optimisation de forme en utilisant l'analyse de sensibilité découlant de la méthode d'Hadamard :

Algorithme 1 Optimisation de forme par analyse de sensibilité

Partant d'un domaine initial Ω^0 , pour $k = 0, \dots$ jusqu'à convergence,

- Calcul de l'état u_{Ω^k} et de l'état adjoint p_{Ω^k} par résolutions des systèmes correspondants
 - Calcul de v_{Ω^k} à partir de u_{Ω^k} et p_{Ω^k} , et calcul de la direction de descente $\theta^k = -v_{\Omega^k} \mathbf{n}$
 - Choix du pas de descente t^k suffisamment petit pour que $J((I + t^k \theta^k)(\Omega^k)) < J(\Omega^k)$
 - Nouvelle forme obtenue : $\Omega^{k+1} = (I + t^k \theta^k)(\Omega^k)$
-

3 Optimisation de forme par méthode Level Set

Dans la section 1, nous avons présenté les bases de la méthode Level Set, qui permet de faire évoluer une frontière dans le temps sous l'influence d'un champ de vecteurs vitesse. Dans la section 2, nous avons présenté le calcul de la dérivée de forme par la méthode d'Hadamard et en avons extrait un champ de vecteurs qui nous indique comment faire évoluer la forme dans une direction qui fait décroître la fonction objectif.

Dans cette section, nous présentons la méthode proposée par G. Allaire, F. Jouve et A.-M. Toader dans [AJT04], qui fait suite aux travaux effectués dans [OS01] et [SW00] et qui permet de coupler la méthode Level Set avec l'analyse de sensibilité afin de créer un algorithme d'optimisation de forme.

3.1 Algorithme d'optimisation

L'idée de base de la méthode est la suivante : dans l'équation d'Hamilton-Jacobi, si on utilise comme vitesse d'advection la dérivée de forme calculée par analyse de sensibilité, alors on déplace la frontière de Ω , représentée par la Level Set 0 de la fonction ϕ , dans la direction de descente indiquée par la dérivée de forme.

Soit D un domaine de calcul fixé, dans lequel les formes $\Omega^0, \dots, \Omega^k, \dots$ calculées durant le processus d'optimisation évolueront. D est maillé par une grille cartésienne. L'algorithme d'optimisation de forme par la méthode Level Set se résume alors ainsi :

Algorithme 2 Optimisation de forme par analyse de sensibilité et méthode Level Set

Partant d'un domaine initial Ω^0 , pour $k = 0, \dots$ jusqu'à convergence,

- Calcul de l'état u_{Ω^k} et de l'état adjoint p_{Ω^k} par résolution des systèmes correspondants
- Calcul de v_{Ω^k} à partir de u_{Ω^k} et p_{Ω^k} , et de la direction de descente $\theta^k = -v_{\Omega^k} \mathbf{n}$
- Choix du pas de descente τ^k et résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi avec la composante normale $\theta_k \cdot \mathbf{n} = -v_{\Omega^k}$ comme vitesse d'advection :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} - v_{\Omega^k} |\nabla \phi| = 0 & \text{dans } [0, \tau^k] \times D \\ \phi(t = 0, \cdot) = \phi^k & \text{dans } D \end{cases}$$

- Nouvelle forme obtenue : $\Omega^{k+1} = \{x \in D, \phi(\tau^k, x) < 0\}$
-

3.2 Remarques

Changements de topologie

Bien que la méthode d'Hadamard suppose que la topologie de la forme reste la même, cette limitation est surmontée grâce à la capacité de la méthode Level Set à autoriser les changements de topologie. Un tel changement aura alors lieu lorsque, à une itération k , le pas de temps τ^k n'a pas été choisi suffisamment petit pour que $(I + \tau^k \theta^k)$ soit un difféomorphisme lipschitzien. Cette astuce numérique nous permet donc de tirer pleinement profit de la liberté de changement topologique de la méthode Level Set.

Extension de la vitesse

L'analyse de sensibilité nous fournit une dérivée de forme qui n'est définie que sur le bord du domaine Ω : or, l'équation d'Hamilton-Jacobi est résolue dans le domaine D tout entier. La frontière n'étant pas explicitement discrétisée dans notre cas, l'idée la plus simple serait de définir la vitesse aux nœuds des éléments traversés par la Level Set 0, et de la considérer nulle pour tous les autres nœuds. Cependant, ce choix aura tendance à ralentir l'algorithme : la forme ne pourra pas évoluer là où la vitesse est nulle, et nous ne pourrons donc pas effectuer plusieurs itérations de transport à la suite. Il paraît donc plus intéressant d'étendre la vitesse à l'intégralité du domaine D .

Changement de fonction coût

On remarque que cette méthode est extrêmement dépendante du choix de fonction coût qui a été effectué. Si l'on désire changer de fonction coût, alors l'état adjoint p_Ω change, ainsi que la vitesse d'advection v_Ω .

Réinitialisation

Comme il a été précisé dans le paragraphe 1.3.2, il est primordial, pour des raisons de stabilité, de réinitialiser de temps en temps la fonction Level Set ϕ . Ceci nécessite donc, au bout d'un certain nombre d'itérations, de résoudre l'équation (2.12), et ce de manière périodique.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons pu étudier, dans un premier temps, la méthode Level Set pour le suivi de frontière, qui repose sur la résolution d'une équation d'Hamilton-Jacobi.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes familiarisés avec le concept d'optimisation de forme, et plus particulièrement avec l'optimisation de forme géométrique et l'analyse de sensibilité qui permet le calcul, primordial, de la dérivée de forme.

Enfin, le couplage de ces deux notions nous a permis la définition d'un algorithme d'optimisation de forme par méthode Level Set.

Il nous reste à présent à retourner à notre problématique initiale, celle de l'électromagnétisme et plus spécifiquement des équations intégrales, afin d'y appliquer cette méthode.

Partie II

Optimisation de forme pour l'électromagnétisme

Chapitre 3

Le problème d'optimisation de forme

Contents

1	Contexte et présentation du problème	77
1.1	Tour d'horizon des problèmes existants en électromagnétisme	77
1.2	Contexte industriel	78
2	Formulation du problème d'optimisation	80
2.1	Quelques informations préalables	80
2.2	Écriture du problème en termes de courants surfaciques	81
2.3	Analyse de sensibilité	83
2.4	Dérivée de forme et problème adjoint	84
3	Calcul des opérateurs intégraux transportés	89
3.1	Dérivée des termes de base	89
3.2	Dérivée des opérateurs différentiels surfaciques	93
3.3	Dérivée des opérateurs intégraux	95
4	Adaptation à la méthode Level Set	98
4.1	Particularisation de la déformation	98
4.2	Reformulation pour la méthode Level Set	100
4.3	Une quatrième et dernière expression de la dérivée de forme	107

Introduction

Dans un premier chapitre, nous avons présenté le problème d'électromagnétisme et sa résolution par la méthode des équations intégrales telle qu'elle est en œuvre dans le code de calcul *Antenna Design*, qui sera utilisé dans la suite des travaux. Dans un deuxième chapitre, nous avons présenté le problème d'optimisation de forme et sa résolution par une analyse de sensibilité couplée à la méthode Level Set.

Il est désormais temps de coupler ces deux aspects du problème : on souhaite mettre en place un algorithme d'optimisation de forme par méthode Level Set pour calculer le design optimal d'un dispositif électromagnétique, pour lequel les équations de Maxwell sont résolues par méthode des équation intégrales. Les développements mathématiques préliminaires à l'application de l'algorithme constituent le cœur de nos travaux, et seront présentés dans ce chapitre.

Dans un premier temps, nous nous attachons à définir un peu plus précisément le problème d'optimisation de forme. On commence par un rapide tour d'horizon des problèmes existant en électromagnétisme et des méthodes utilisées pour les résoudre, à la suite de quoi nous présentons le contexte dans lequel vont se situer nos travaux : nous y définissons la géométrie des éléments rayonnants auquel nous nous intéressons et la fonction coût que l'on souhaite minimiser.

La seconde section de ce chapitre présente le couplage recherché entre les équations intégrales et la méthode de variation de frontière d'Hadamard. On commence par formaliser les particularités de notre cas d'application et rappeler les équations intégrales utilisées. On appelle ce système *problème direct*. Sa résolution fournit les solutions des équations de Maxwell : courants surfaciques équivalents et champs rayonnés.

On applique ensuite l'analyse de sensibilité à ce problème, telle qu'elle a été présentée dans le chapitre 2. On définit le difféomorphisme qui déforme la frontière et les transportées des grandeurs présentes par ce même difféomorphisme (opérateurs intégraux et inconnues électromagnétiques). L'analyse de sensibilité nous permet alors de caractériser les dérivées de forme des solutions du problème direct : elles sont solutions d'un problème auxiliaire, appelé *problème dérivé*, dont les opérateurs sont identiques à ceux du problème direct mais où le second membre fait intervenir les opérateurs intégraux transportés.

Enfin, on s'intéresse à la dérivée de forme de la fonction coût. On l'écrit dans un premier temps en fonction des dérivées de forme des inconnues électromagnétiques solution du problème dérivé. Celui-ci étant en fait peu propice à une résolution numérique, on introduit un troisième problème, le *problème adjoint*. Celui-ci va nous permettre d'écrire une deuxième expression de la dérivée de forme de la fonction coût, qui dépendra des solutions du problème direct, des solutions du problème adjoint, et des opérateurs intégraux transportés.

Afin d'avoir en notre possession une expression explicite et exploitable de la dérivée de forme de la fonction coût, il nous faut développer l'expression des opérateurs intégraux transportés qui y apparaissent : c'est le but de la troisième section.

Cette étape nécessite le calcul des dérivées de forme de tous les termes constituant les opérateurs intégraux, que l'on développe grâce aux outils de géométrie différentielle pour les surfaces présentés dans le chapitre 1. Une fois ces calculs effectués, nous les couplons à la formule de changement de variable sous une intégrale afin d'obtenir les expressions des opérateurs dérivés des opérateurs intégraux.

Pour terminer, on doit désormais tenir compte des particularités de notre cas d'application, présentées dans la première section, et de celles de la méthode Level Set.

Dans un premier temps, en prenant en compte une spécificité du problème, on modifie légèrement les opérateurs intégraux transportés calculés à la section précédente, et on les utilise pour écrire la troisième expression de la dérivée de forme de la fonction coût : celle-ci est à présent totalement explicite et ne dépend plus que des solutions du problème direct et du problème adjoint.

Cependant, la méthode Level Set nous demande une écriture de la dérivée de forme bien particulière : dans un second temps, et en tenant compte d'une autre spécificité de notre problème, nous allons donc chercher à reformuler nos opérateurs intégraux transportés afin qu'ils soient conformes à l'écriture désirée pour la dérivée de forme. Cette étape,

très calculatoire, aboutit à une quatrième et dernière expression pour la dérivée de forme de la fonction coût, qui sera celle utilisée dans l'algorithme numérique développé par la suite.

1 Contexte et présentation du problème

1.1 Tour d'horizon des problèmes existants en électromagnétisme

L'application de méthodes d'optimisation de forme pour résoudre des problèmes en électromagnétisme ne date pas d'hier, et de nombreux travaux sur ce sujet sont disponibles dans la littérature. Cependant, le spectre de formulations, de champs d'applications et de méthodes est très varié. Il nous sera difficile d'en faire un inventaire exhaustif, aussi nous contenterons-nous de citer quelques travaux :

- Dans la recherche de forme optimale lors de la conception de dispositifs électromagnétiques, l'application d'algorithmes heuristiques, comme par exemple les algorithmes immunitaires ([CKJH97]) ou génétiques ([ÛMK94]), donne de très bons résultats. Le principal intérêt de ce type de méthodes est la facilité de leur mise en œuvre et leur capacité à trouver un optimum global. Néanmoins, le grand nombre de simulations nécessaires peut, lors d'applications à des dispositifs complexes, entraîner un coût de calcul rédhibitoire.
- Toujours dans la conception de dispositifs métalliques, un certain nombre d'articles se sont intéressés à l'optimisation de la forme des patches métalliques (qui, comme nous le verrons dans la section suivante, sera aussi le cas de cette étude). Ce problème a principalement été traité par des méthodes d'optimisation paramétrique (voir par exemple [UNI⁺09], [HWP14]), où le calcul de la sensibilité est fait numériquement.
- L'utilisation du gradient topologique et de la méthode adjointe présentée dans [GGM01] et appliquée aux équations de Maxwell dans [MPS05] fournit de très bons résultats pour des applications en problèmes inverses, et notamment dans la détection d'objets enterrés ou dans l'espace libre.
- Plus récemment, la méthode adjointe couplée à un calcul de dérivée de forme pour les équations de Maxwell a été utilisée dans [SPSL15], pour l'optimisation de forme de nano-antennes.
- On trouve également des exemples d'utilisation de la méthode Level Set pour l'électromagnétisme : dans [KBP09] et [LHB⁺14], les auteurs utilisent cette méthode couplée avec une analyse de sensibilité des équations de Maxwell.
- Dans [AKLZ10] et [AKLZ12], H. Ammari effectue une analyse de sensibilité des équations de Maxwell sous forme intégrale en 2D pour des problématiques de reconstruction d'objet en imagerie.
- Le calcul des dérivées de forme pour les équations intégrales en électromagnétisme a été traité par F. Le Louer ([LL09], [CLL12a], [CLL12b]) pour des équations intégrales issues de l'acoustique (équations de Kleinman-Martin, voir [CLL11])

en reprenant les travaux effectués dans [Pot96]. Elle y étudie très en détails les questions de dérivabilité des opérateurs surfaciques et intégraux. Ces calculs ne seront néanmoins pas utilisés lors de la résolution numérique mais remplacés par une dérivée discrète.

- Dans sa thèse, J. Razafiarivelo ([Raz96]) étudie un problème d'optimisation de forme pour un guide d'onde en deux dimensions, et utilise pour le résoudre une méthode basée sur le calcul des dérivées de forme des équations intégrales et sur la résolution d'un problème adjoint. Là encore, ce calcul ne sera pas implémenté numériquement : l'auteur utilise à la place un calcul de dérivée discrète et une méthode d'optimisation paramétrique basée sur une représentation de la frontière par des splines.

Les deux derniers travaux cités, à savoir les thèses de F. Le Louer ([LL09]) et J. Razafiarivelo ([Raz96]), sont ceux se rapprochant le plus de notre étude. De nombreux calculs qui y sont développés ont servi de point de départ à ceux que nous développerons dans ce chapitre.

1.2 Contexte industriel

On cherche à mettre en place un algorithme d'optimisation de forme efficace pour la conception d'éléments rayonnants. On rappelle qu'un élément rayonnant est une source unitaire constitutive d'une antenne réseau. Le diagramme de l'antenne réseau est formé de la somme des diagrammes des éléments rayonnants unitaires pondérée en amplitude et en phase.

Le champ électromagnétique rayonné par ce dispositif est calculé par le logiciel *Antenna Design*, qui résout les équations de Maxwell par la méthode des équations intégrales : les inconnues sont donc ici les courants équivalents, définis sur la surface de l'antenne, à partir desquels on peut si on le souhaite calculer le champ en tout point de l'espace.

On souhaite ici utiliser la méthode d'optimisation de forme par analyse de sensibilité et Level Set présentée dans le chapitre précédent. La conséquence majeure de l'utilisation d'*Antenna Design* dans ce contexte se profile alors : nous allons devoir effectuer l'analyse de sensibilité de la méthode d'optimisation sur la formulation par équations intégrales du problème.

Mais avant de réfléchir aux calculs nécessaires à l'algorithme, nous allons devoir définir un peu plus précisément le problème en répondant aux deux questions primordiales suivantes :

- **Comment se définit précisément la forme à optimiser ?**

Nous devons en effet commencer par définir le domaine de référence qui pourra évoluer au sein du processus d'optimisation. Un élément rayonnant, qui peut être de géométrie aussi complexe que l'on souhaite, présente sur sa surface au moins une zone métallisée : c'est cette métallisation qui va créer le couplage entre l'onde dans l'espace libre et dans le guide d'onde. On appelle cette zone *patch métallique*, dont la géométrie va caractériser la forme et l'intensité de l'onde émise.

Tout naturellement, c'est donc la forme du patch métallique que nous allons chercher à optimiser ici.

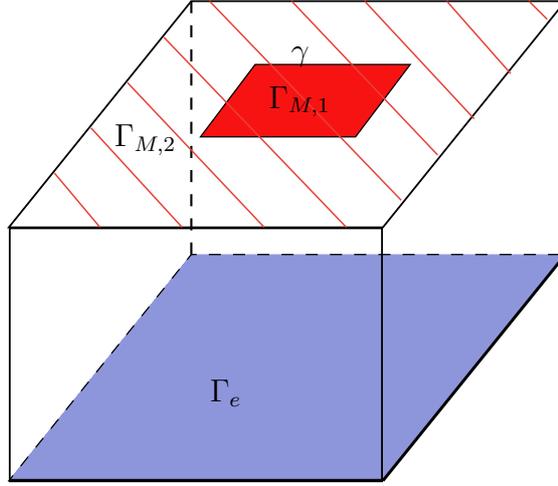


FIGURE 3.1 – Schéma global d'un patch métallique sur un guide d'onde où la surface hachurée est notée $\Gamma_M = \Gamma_{M,1} \cup \Gamma_{M,2}$ et la frontière du patch $\gamma = \Gamma_{M,1} \cap \Gamma_{M,2}$

En adoptant les notations de la figure 3.1, on va définir la fonction Level Set associée à ce problème de la manière suivante :

$$\begin{cases} \phi(x) < 0 & \text{si } x \in \Gamma_{M,1} \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \gamma \\ \phi(x) > 0 & \text{si } x \in \Gamma_{M,2} \end{cases} \quad (3.1)$$

La surface $\Gamma_{M,1}$ représente donc le domaine à optimiser et on va faire évoluer sa frontière γ sur l'ensemble du domaine de calcul Γ_M .

La surface en bleue, notée Γ_e , correspond au plan de champ que nous avons évoqué dans la section 3.3 du chapitre 1: c'est la section du guide sur laquelle on calcule les modes.

- **Quelle est la fonction objectif à minimiser ?**

Comme nous l'avons souligné au chapitre 1, une antenne va transmettre une partie de son énergie tandis qu'une autre partie va se réfléchir. Il paraît naturel de chercher à ce que l'antenne transmette un maximum d'énergie possible : l'énergie réfléchi dans l'antenne est en effet perdue, et peut de plus générer des interférences. La fonction objectif que l'on va donc chercher à minimiser est donc le coefficient de réflexion de l'antenne. La propagation que l'on va considérer étant monomodale, il n'y a qu'un seul coefficient de réflexion à considérer.

Nous avons également présenté au chapitre 1 le vecteur de Poynting, en expliquant que le flux de celui-ci à travers une section du guide était un moyen de mesurer l'énergie totale circulant dans un guide :

$$P_T = \int_S \Pi_z dS \quad \text{où } \Pi_z = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}) \cdot \mathbf{e}_z$$

Si on choisit comme section du guide S le plan de champ et si on ne considère que les champs diffractés dans l'expression du flux, alors cette grandeur représente l'énergie réfléchi : en effet, le seul champ diffracté présent dans l'alimentation du guide est celui qui aura été réfléchi par l'antenne. Il s'agit donc d'un candidat tout trouvé pour exprimer notre fonction objectif à partir des champs électrique et magnétique :

$$J(\Gamma) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} (\mathbf{E}^{\text{diff}} \times \overline{\mathbf{H}^{\text{diff}}}) \cdot \boldsymbol{\nu} d\sigma \right)$$

où ν représente la normale au plan de champs Γ_e .

2 Formulation du problème d'optimisation

2.1 Quelques informations préalables

2.1.1 Notations utilisées

Commençons par constituer un petit formulaire des différentes notations qui seront utilisées par la suite :

- En se référant à la figure 3.1 :
 - Ω_1 est le domaine intérieur du pavé, de constantes diélectriques $\varepsilon_1, \mu_1, k_1$
 - Ω_2 est le domaine extérieur, de constantes diélectriques $\varepsilon_2, \mu_2, k_2$
 - Γ_i est la frontière de $\Omega_i \forall i = 1, 2$ (ici, $\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2$ est l'interface entre Ω_1 et Ω_2)
 - Γ_M est une partie de Γ , sur laquelle est défini le patch métallique
 - Γ_e est la section du guide sur laquelle sont calculés les modes (plan de champ)
- $\mathbf{E}_i, \mathbf{H}_i \in H(\text{rot}, \Omega_i)$ sont le champ électrique et le champ magnétique diffractés dans $\Omega_i, \forall i = 1, 2$
- $\mathbf{j}_i, \mathbf{m}_i \in H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ sont les courants surfaciques électriques et magnétiques où $\mathbf{j}_i = \boldsymbol{\nu}_i \times \mathbf{H}_i$ et $\mathbf{m}_i = \mathbf{E}_i \times \boldsymbol{\nu}_i \forall i = 1, 2$
- $\forall x \in \Gamma, \boldsymbol{\nu}_i(x)$ est la normale sortante à Ω_i en x

2.1.2 Sur les types d'interface

On distingue trois différents types d'interface :

- Une interface classique entre deux domaines diélectriques Ω_1 et Ω_2 est appelée *interface diélectrique*. Sur ce type de frontière, on a continuité des composantes tangentielles des champs :

$$\mathbf{E}_{1T} = \mathbf{E}_{2T} \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{1T} = \mathbf{H}_{2T}$$

En tout point x de la frontière, on sait que $\boldsymbol{\nu}_1(x) = -\boldsymbol{\nu}_2(x)$. Ainsi, le saut des courants est nul, ce qui signifie que l'on a :

$$\mathbf{j}_1 = -\mathbf{j}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{m}_1 = -\mathbf{m}_2$$

- Une interface entre un domaine diélectrique Ω_1 et un domaine en métal plein Ω_2 est appelée *interface métallique*. Dans le métal plein, aucun champ ni courant n'existe. De plus, le champ électrique est nul sur une interface avec du métal : aucun courant magnétique ne peut donc circuler. On a donc :

$$\mathbf{H}_{1T} \neq 0 ; \mathbf{H}_{2T} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_{1T} = \mathbf{E}_{2T} = 0$$

Ce qui se traduit en terme de courants :

$$\mathbf{j}_1 \neq -\mathbf{j}_2 ; \mathbf{j}_2 = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = 0$$

- Une plaque métallique comme représentée sur la figure 3.1 est un cas particulier d'interface, où les deux domaines Ω_1 et Ω_2 sont diélectriques mais le saut des courants électriques est non nul. Le champ électrique est quant à lui nul sur la surface à cause de la métallisation, et donc les courants magnétiques n'existent pas. On a donc pour les champs :

$$\mathbf{H}_{1T} \neq \mathbf{H}_{2T} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_{1T} = \mathbf{E}_{2T} = 0$$

$$\mathbf{j}_1 \neq -\mathbf{j}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_2 = 0$$

2.1.3 Particularités du problème

Première particularité : le domaine Ω n'est pas déformé

On remarque que bien que les équations considérées soient posées dans \mathbb{R}^3 tout entier, le domaine à optimiser est lui en deux dimensions : ce n'est pas la forme du domaine Ω (intérieur du pavé) qui va évoluer mais uniquement celle de sa frontière Γ , dans le plan du patch.

Cela signifie que le champ de vecteurs θ qui déforme la frontière étudié au chapitre 2 ne sera défini que pour des points appartenant à Γ . De plus, l'évolution de γ ne peut se faire que dans le plan de la surface Γ : la composante normale à Γ de θ doit être nulle. Dans un premier temps, nous n'allons cependant pas prendre en compte cette particularité et effectuer notre étude pour un champ de vecteurs θ quelconque. Nous particulariserons aux champs θ tangentiels dans un second temps.

En fait, comme nous allons le voir juste après, seul ce qui se passe sur Γ nous intéresse : les courants surfaciques sont définis sur Γ et les équations intégrales considérées sont celles obtenues grâce aux formules de trace pour les points appartenant à Γ .

Deuxième particularité : le domaine d'intégration Γ_e de J n'est pas déformé

La fonction coût est en effet calculée sur une section du guide, zone qui n'est pas amenée à évoluer au cours du processus d'optimisation. Cela permet d'éliminer les termes issus de la formule de changement de variable sous une intégrale qui intervenaient lors du calcul de la dérivée de forme de la fonction coût au chapitre 2 et donc de simplifier les calculs.

2.2 Écriture du problème en termes de courants surfaciques

2.2.1 Fonction objectif

On rappelle l'expression de la fonction coût choisie précédemment, définie comme le flux du vecteur de Poynting du champ diffracté à travers la section du guide sur laquelle sont calculés les modes :

$$J(\Gamma) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} (\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma \right) \quad (3.2)$$

Comme nous avons pu le voir au chapitre 1, les inconnues lors de la résolution des équations de Maxwell par méthode des équations intégrales ne sont pas les champs mais les courants surfaciques équivalents. Il sera donc plus commode d'exprimer la fonction coût en fonction de ces courants :

Proposition 3.1. *La fonction coût définie par (3.2) se réécrit de manière équivalente :*

$$J(\Gamma) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}) \, d\sigma \right) \quad (3.3)$$

Preuve. On peut réécrire J en fonction des composantes tangentielles des champs uniformément :

$$J(\Gamma) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} (\mathbf{E}_T \times \bar{\mathbf{H}}_T) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma \right)$$

À partir de là, on peut facilement faire apparaître les courants :

$$J(\Gamma) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} (\boldsymbol{\nu} \times \mathbf{E}_T) \cdot \bar{\mathbf{H}}_T \, d\sigma \right)$$

$$J(\Gamma) = -\frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \mathbf{m} \cdot [\boldsymbol{\nu} \times (\bar{\mathbf{H}} \times \boldsymbol{\nu})] \, d\sigma \right)$$

$$J(\Gamma) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}) \, d\sigma \right) \quad \square$$

2.2.2 Équations intégrales

Rappelons désormais le système d'équations intégrales vérifiées par les courants surfaciques. On reprend ici la EFIE et la MFIE définis dans (1.37) et (1.38) du chapitre 1, que l'on écrit pour chacun des domaines Ω_1 et Ω_2 .

Pour $x \in \Gamma_1$,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{E}_{1T}(x) &= \mathbf{E}_T^{\text{inc}}(x) + L_1[\mathbf{j}_1](x) - K_1[\mathbf{m}_1](x) \\ \frac{1}{2} \mathbf{H}_{1T}(x) &= \mathbf{H}_T^{\text{inc}}(x) + K_1[\mathbf{j}_1](x) + \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} L_1[\mathbf{m}_1](x) \end{cases} \quad (3.4)$$

Pour $x \in \Gamma_2$,

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \mathbf{E}_{2T}(x) &= L_2[\mathbf{j}_2](x) - K_2[\mathbf{m}_2](x) \\ \frac{1}{2} \mathbf{H}_{2T}(x) &= K_2[\mathbf{j}_2](x) + \frac{\varepsilon_2}{\mu_2} L_2[\mathbf{m}_2](x) \end{cases} \quad (3.5)$$

où les opérateurs intégrodifférentiels L_i et K_i , $\forall i = 1, 2$ sont définis de la manière suivante :

$$L_i[\mathbf{X}_i](x) := \frac{i}{\omega \varepsilon_i} \nabla \int_{\Gamma_i} G_i(x, y) \nabla_{\Gamma_i} \cdot \mathbf{X}_i(y) \, d\sigma(y) + i\omega \mu_i \int_{\Gamma_i} G_i(x, y) \mathbf{X}_i(y) \, d\sigma(y)$$

$$K_i[\mathbf{X}_i](x) := \int_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{X}_i(y) \, d\sigma(y)$$

Finalement, dans chaque domaine Ω_i , $i = 1, 2$, les courants surfaciques $\mathbf{j}_i, \mathbf{m}_i \in H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i)$ sont solutions du couple d'équations intégrales suivant :

$$\begin{cases} -L_i[\mathbf{j}_i] + K_i[\mathbf{m}_i] + \frac{1}{2} \mathbf{E}_{iT} &= \left(\mathbf{E}_T^{\text{inc}} \right) \mathbf{1}_{i=1} \\ K_i[\mathbf{j}_i] + \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} L_i[\mathbf{m}_i] - \frac{1}{2} \mathbf{H}_{iT} &= -\left(\mathbf{H}_T^{\text{inc}} \right) \mathbf{1}_{i=1} \end{cases} \quad (3.6)$$

Le système d'équations (3.6) sera appelé *problème direct*.

2.3 Analyse de sensibilité

À présent, nous allons pouvoir appliquer l'analyse de sensibilité étudiée au chapitre 2 à notre problème.

On note $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ et Ψ_θ le difféomorphisme qui déforme la frontière Γ :

$$\begin{aligned} \Psi_\theta : \Gamma &\longrightarrow \Gamma^\theta = (I + \theta)(\Gamma) \\ x &\longmapsto x + \theta(x) \end{aligned} \quad (3.7)$$

On écrit les développements asymptotiques relatifs au difféomorphisme Ψ_θ pour les inconnues électriques et magnétiques :

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\Gamma^\theta, x + \theta(x)) &= \mathbf{j}(\Gamma, x) + \mathbf{j}^{(1)}(\theta, x) + o(\theta) \\ \mathbf{m}(\Gamma^\theta, x + \theta(x)) &= \mathbf{m}(\Gamma, x) + \mathbf{m}^{(1)}(\theta, x) + o(\theta) \\ \mathbf{E}(\Gamma^\theta, x + \theta(x)) &= \mathbf{E}(\Gamma, x) + \mathbf{E}^{(1)}(\theta, x) + o(\theta) \\ \mathbf{H}(\Gamma^\theta, x + \theta(x)) &= \mathbf{H}(\Gamma, x) + \mathbf{H}^{(1)}(\theta, x) + o(\theta) \end{aligned}$$

Les quantités $\mathbf{j}^{(1)}(\theta, x)$, $\mathbf{m}^{(1)}(\theta, x)$, $\mathbf{E}^{(1)}(\theta, x)$ et $\mathbf{H}^{(1)}(\theta, x)$ sont les transportées, ou dérivées lagrangiennes de $\mathbf{j}(\Gamma, x)$, $\mathbf{m}(\Gamma, x)$, $\mathbf{E}(\Gamma, x)$ et $\mathbf{H}(\Gamma, x)$ respectivement.

Par la suite, on notera $\mathbf{j}^\theta(x_\theta) = \mathbf{j}(\Gamma^\theta, x + \theta(x))$ et $\mathbf{j}(x) = \mathbf{j}(\Gamma, x)$, et de même pour les autres variables.

Les champs incidents présents au second membre sont eux indépendants de θ : en effet, il s'agit des modes propagés par le guide d'onde qui ne sera pas déformé.

De la même manière, on définit les transportées des opérateurs intégraux par le difféomorphisme Ψ_θ :

$$\begin{aligned} L^\theta[X](x_\theta) &= L[X](x) + L^{(1)}(\theta)[X](x) + o(\theta) \\ K^\theta[X](x_\theta) &= K[X](x) + K^{(1)}(\theta)[X](x) + o(\theta) \end{aligned}$$

On rappelle que pour une frontière initiale $\Gamma_i, i = 1, 2$, les équations intégrales s'écrivent :

$$\begin{cases} -L_i[\mathbf{j}_i](x) + K_i[\mathbf{m}_i](x) + \frac{1}{2}\mathbf{E}_{iT}(x) &= \left(\mathbf{E}_T^{\text{inc}}(x)\right)\mathbf{1}_{i=1} \\ K_i[\mathbf{j}_i](x) + \frac{\varepsilon_i}{\mu_i}L_i[\mathbf{m}_i](x) - \frac{1}{2}\mathbf{H}_{iT}(x) &= -\left(\mathbf{H}_T^{\text{inc}}\right)(x)\mathbf{1}_{i=1} \end{cases}$$

Sur la frontière Γ^θ , transportée de Γ par le difféomorphisme Ψ_θ , les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} -L_i^\theta[\mathbf{j}_i^\theta](x_\theta) + K_i^\theta[\mathbf{m}_i^\theta](x_\theta) + \frac{1}{2}\mathbf{E}_{iT}^\theta(x_\theta) &= \left(\mathbf{E}_T^{\text{inc}}\right)(x_\theta)\mathbf{1}_{i=1} \\ K_i^\theta[\mathbf{j}_i^\theta](x_\theta) + \frac{\varepsilon_i}{\mu_i}L_i^\theta[\mathbf{m}_i^\theta](x_\theta) - \frac{1}{2}\mathbf{H}_{iT}^\theta(x_\theta) &= -\left(\mathbf{H}_T^{\text{inc}}\right)(x_\theta)\mathbf{1}_{i=1} \end{cases}$$

où $\mathbf{j}^{(1)}(\theta)$ et $\mathbf{m}^{(1)}(\theta)$ sont solution du problème dérivé (3.8).

On a donc comme expression de la dérivée de forme de la fonction coût :

$$J'(\Gamma)(\theta) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \left(\mathbf{m}^{(1)}(\theta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}) + \mathbf{j}^{(1)}(\theta) \cdot (\overline{\mathbf{m}} \times \boldsymbol{\nu}) \right) d\sigma \right) \quad (3.10)$$

Preuve. La surface Γ_e n'étant pas impactée, les termes relatifs au changement de variable sous l'intégrale n'apparaissent pas. La normale $\boldsymbol{\nu}$ à Γ_e est elle aussi invariante par le difféomorphisme Ψ_θ .

$$\begin{aligned} J(\Gamma_\theta) \circ \Psi_\theta &= \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \mathbf{m}^\theta \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}^\theta) d\sigma \right) \\ &= J(\Gamma) + \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \left(\mathbf{m}^{(1)}(\theta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}) + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{j}^{(1)}(\theta)}) \right) d\sigma \right) + o(\theta) \\ &= J(\Gamma) + \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \left(\mathbf{m}^{(1)}(\theta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}) + \overline{\mathbf{j}^{(1)}(\theta)} \cdot (\mathbf{m} \times \boldsymbol{\nu}) \right) d\sigma \right) + o(\theta) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que pour deux vecteurs complexes quelconques \mathbf{u} et \mathbf{v} on a

$$\Re(\bar{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\nu})) = \Re(\mathbf{u} \cdot (\bar{\mathbf{v}} \times \boldsymbol{\nu}))$$

on obtient bien le résultat :

$$J(\Gamma_\theta) \circ \Psi_\theta = J(\Gamma) + \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \left(\mathbf{m}^{(1)}(\theta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}) + \mathbf{j}^{(1)}(\theta) \cdot (\overline{\mathbf{m}} \times \boldsymbol{\nu}) \right) d\sigma \right) + o(\theta) \quad \square$$

2.4.2 Introduction du problème adjoint

On rappelle tout d'abord l'expression du problème direct $\forall i = 1, 2$:

$$\begin{cases} -L_i[\mathbf{j}_i] + K_i[\mathbf{m}_i] + \frac{1}{2} \mathbf{E}_{iT} = \left(\mathbf{E}_T^{\text{inc}} \right) \mathbf{1}_{i=1} \\ K_i[\mathbf{j}_i] + \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} L_i[\mathbf{m}_i] - \frac{1}{2} \mathbf{H}_{iT} = -\left(\mathbf{H}_T^{\text{inc}} \right) \mathbf{1}_{i=1} \end{cases}$$

Et celle du problème dérivé :

$$\begin{cases} -L_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)] + K_i[\mathbf{m}_i^{(1)}(\theta)] + \frac{1}{2} \mathbf{E}_{iT}^{(1)}(\theta) = L_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i] - K_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{m}_i] + o(\theta) \\ K_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)] + \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} L_i[\mathbf{m}_i^{(1)}(\theta)] - \frac{1}{2} \mathbf{H}_{iT}^{(1)}(\theta) = -K_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i] - \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} L_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{m}_i] + o(\theta) \end{cases}$$

À présent, nous allons introduire un troisième problème, qui nous permettra d'obtenir une expression plus commode de la dérivée de forme de la fonction coût :

$$\begin{cases} -L_i^*[\mathbf{p}_i] + K_i^*[\mathbf{q}_i] + \frac{1}{2} \mathbf{E}_{iT}^q = \left(\overline{\mathbf{m}}_i \times \boldsymbol{\nu} \right) \mathbf{1}_{\Gamma_e} \\ K_i^*[\mathbf{p}_i] + \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} L_i^*[\mathbf{q}_i] - \frac{1}{2} \mathbf{H}_{iT}^p = \left(\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}_i \right) \mathbf{1}_{\Gamma_e} \end{cases} \quad (3.11)$$

Le problème (3.11) est appelé *problème adjoint*, et la solution $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{E}^q, \mathbf{H}^p\}$ est appelée *état adjoint*. On a, tout comme dans le problème direct, $\mathbf{p} = \boldsymbol{\nu} \times H^p$ et $\mathbf{q} = \mathbf{E}^q \times \boldsymbol{\nu}$.

Contrairement au problème dérivé, il est indépendant du champ de vecteurs θ .

2.4.3 Une deuxième expression de la dérivée de forme

Nous allons désormais voir comment l'introduction du problème adjoint nous permet d'obtenir une expression de la dérivée de forme qui nous convient. La proposition ci-dessous nous donne cette nouvelle expression, et sa démonstration nous permet de comprendre d'où vient l'expression de ce problème adjoint.

Proposition 3.4. *Pour un champ de vecteur $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$, on a la formule suivante pour la dérivée de la fonction coût préalablement caractérisée par (3.10) :*

$$J'(\Gamma)(\theta) = \frac{1}{2} \Re \left(\sum_{i=1}^2 \left[\int_{\Gamma_i} \left(L_i^{(1)}(\theta) [\mathbf{j}_i] - K_i^{(1)}(\theta) [\mathbf{m}_i] \right) \cdot \mathbf{p}_i d\sigma \right. \right. \\ \left. \left. + \int_{\Gamma_i} \left(-K_i^{(1)}(\theta) [\mathbf{j}_i] - \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} L_i^{(1)}(\theta) [\mathbf{m}_i] \right) \cdot \mathbf{q}_i d\sigma \right] \right) \quad (3.12)$$

où $\{\mathbf{j}_i, \mathbf{m}_i\}$ est solution de (3.6) et $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i\}$ est solution de (3.11), $\forall i = 1, 2$.

Preuve. On part de la première expression de la dérivée de forme de J :

$$J'(\Gamma)(\theta) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \left(\mathbf{m}^{(1)}(\theta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}) + \mathbf{j}^{(1)}(\theta) \cdot (\bar{\mathbf{m}} \times \boldsymbol{\nu}) \right) d\sigma \right)$$

Dans un premier temps, on s'intéresse au deuxième terme de cette expression que l'on réécrit sur l'ensemble de la frontière Γ :

$$\int_{\Gamma_e} \mathbf{j}^{(1)}(\theta) \cdot (\bar{\mathbf{m}} \times \boldsymbol{\nu}) d\sigma = \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i^{(1)}(\theta) \cdot ((\bar{\mathbf{m}}_i \times \boldsymbol{\nu}) \mathbf{1}_{\Gamma_e}) d\sigma \right)$$

On reconnaît alors le second membre de la première équation du problème adjoint (3.11), ce qui nous permet de réécrire le terme :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_e} \mathbf{j}^{(1)}(\theta) \cdot (\bar{\mathbf{m}} \times \boldsymbol{\nu}) d\sigma &= \sum_{i=1}^2 \left(- \int_{\Gamma_i} L_i^* [\mathbf{p}_i] \cdot \mathbf{j}_i^{(1)}(\theta) d\sigma + \int_{\Gamma_i} K_i^* [\mathbf{q}_i] \cdot \mathbf{j}_i^{(1)}(\theta) d\sigma \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \mathbf{E}_{iT}^q \cdot \mathbf{j}_i^{(1)}(\theta) d\sigma \right) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(- \int_{\Gamma_i} L_i [\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)] \cdot \mathbf{p}_i d\sigma + \int_{\Gamma_i} K_i [\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)] \cdot \mathbf{q}_i d\sigma \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i^{(1)}(\theta) \cdot \mathbf{E}_{iT}^q d\sigma \right) \end{aligned}$$

(par définition d'un opérateur adjoint).

Occupons-nous de la même manière du premier terme :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_e} \mathbf{m}^{(1)}(\theta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}) d\sigma &= \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Gamma_i} \mathbf{m}_i^{(1)}(\theta) \cdot \left((\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}_i) \mathbf{1}_{\Gamma_e} \right) d\sigma \right) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Gamma_i} K_i^*[\mathbf{p}_i] \cdot \mathbf{m}_i^{(1)}(\theta) d\sigma + \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} \int_{\Gamma_i} L_i^*[\mathbf{q}_i] \cdot \mathbf{m}_i^{(1)}(\theta) d\sigma \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \mathbf{H}_{iT}^p \cdot \mathbf{m}_i^{(1)}(\theta) d\sigma \right) \\
 &= \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Gamma_i} K_i[\mathbf{m}_i^{(1)}(\theta)] \cdot \mathbf{p}_i d\sigma + \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} \int_{\Gamma_i} L_i[\mathbf{m}_i^{(1)}(\theta)] \cdot \mathbf{q}_i d\sigma \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_i} \mathbf{m}_i^{(1)}(\theta) \cdot \mathbf{H}_{iT}^p d\sigma \right)
 \end{aligned}$$

On va pouvoir supprimer certains termes :

- Si on est sur une partie de Γ de type interface diélectrique, alors :

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i^{(1)}(\theta) \cdot \mathbf{E}_{iT}^q d\sigma &= \int_{\Gamma} \left(\mathbf{j}_1^{(1)}(\theta) \cdot \mathbf{E}_{1T}^q + \mathbf{j}_2^{(1)}(\theta) \cdot \mathbf{E}_{2T}^q \right) d\sigma \\
 &= \int_{\Gamma} \mathbf{j}_1^{(1)}(\theta) \cdot \left(\mathbf{E}_{1T}^q - \mathbf{E}_{2T}^q \right) d\sigma \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

car $\mathbf{E}_{1T}^q = \mathbf{E}_{2T}^q$ et $\mathbf{j}_1^{(1)}(\theta) = -\mathbf{j}_2^{(1)}(\theta)$.

De la même manière,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \mathbf{m}_i^{(1)}(\theta) \cdot \mathbf{H}_{iT}^p d\sigma &= \int_{\Gamma} \left(\mathbf{m}_1^{(1)}(\theta) \cdot \mathbf{H}_{1T}^p + \mathbf{m}_2^{(1)}(\theta) \cdot \mathbf{H}_{2T}^p \right) d\sigma \\
 &= \int_{\Gamma} \mathbf{m}_1^{(1)}(\theta) \cdot \left(\mathbf{H}_{1T}^p - \mathbf{H}_{2T}^p \right) d\sigma \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

car $\mathbf{H}_{1T}^p = \mathbf{H}_{2T}^p$ et $\mathbf{m}_1^{(1)}(\theta) = -\mathbf{m}_2^{(1)}(\theta)$.

- Si on est sur une partie de Γ de type interface métallique (plaque métallique ou bien métal plein), alors :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i^{(1)}(\theta) \cdot \mathbf{E}_{iT}^q d\sigma = 0$$

car $\mathbf{E}_{1T}^q = \mathbf{E}_{2T}^q = 0$ et

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \mathbf{m}_i^{(1)}(\theta) \cdot \mathbf{H}_{iT}^p d\sigma = 0$$

car $\mathbf{m}_1^{(1)}(\theta) = \mathbf{m}_2^{(1)}(\theta) = 0$

Si on injecte tout ça dans la dérivée de forme de J , on obtient :

$$\begin{aligned}
 J'(\Gamma)(\theta) &= \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \left(\mathbf{m}^{(1)}(\theta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \bar{\mathbf{j}}) + \mathbf{j}^{(1)}(\theta) \cdot (\bar{\mathbf{m}} \times \boldsymbol{\nu}) \right) d\sigma \right) \\
 &= \frac{1}{2} \Re \left(\sum_{i=1}^2 \left(- \int_{\Gamma_i} L_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)] \cdot \mathbf{p}_i d\sigma + \int_{\Gamma_i} K_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)] \cdot \mathbf{q}_i d\sigma \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{\Gamma_i} K_i[\mathbf{m}_i^{(1)}(\theta)] \cdot \mathbf{p}_i d\sigma + \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} \int_{\Gamma_i} L_i[\mathbf{m}_i^{(1)}(\theta)] \cdot \mathbf{q}_i d\sigma \right) \right) \\
 &= \frac{1}{2} \Re \left(\sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Gamma_i} \left(-L_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)] + K_i[\mathbf{m}_i^{(1)}(\theta)] \right) \cdot \mathbf{p}_i d\sigma \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{\Gamma_i} \left(K_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)] + \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} L_i[\mathbf{m}_i^{(1)}(\theta)] \right) \cdot \mathbf{q}_i d\sigma \right) \right)
 \end{aligned}$$

On rajoute artificiellement les termes

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \mathbf{E}_{iT}^{(1)}(\theta) \cdot \mathbf{p}_i d\sigma \quad \text{et} \quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \mathbf{H}_{iT}^{(1)}(\theta) \cdot \mathbf{q}_i d\sigma$$

à l'expression précédente. Par les mêmes arguments que précédemment, ces termes sont nuls quelque soit le type d'interface.

On a alors

$$\begin{aligned}
 J'(\Gamma)(\theta) &= \frac{1}{2} \Re \left(\sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Gamma_i} \left(-L_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)] + K_i[\mathbf{m}_i^{(1)}(\theta)] + \frac{1}{2} \mathbf{E}_{iT}^{(1)}(\theta) \right) \cdot \mathbf{p}_i d\sigma \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{\Gamma_i} \left(K_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)] + \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} L_i[\mathbf{m}_i^{(1)}(\theta)] - \frac{1}{2} \mathbf{H}_{iT}^{(1)}(\theta) \right) \cdot \mathbf{q}_i d\sigma \right) \right)
 \end{aligned}$$

où l'on reconnaît l'expression du problème dérivé (3.8). On peut alors utiliser le second membre de ce problème pour obtenir l'expression désirée pour la dérivée de forme de la fonction objectif J :

$$\begin{aligned}
 J'(\Gamma)(\theta) &= \frac{1}{2} \Re \left(\sum_{i=1}^2 \left[\int_{\Gamma_i} \left(L_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i] - K_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{m}_i] \right) \cdot \mathbf{p}_i d\sigma \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \int_{\Gamma_i} \left(-K_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i] - \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} L_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{m}_i] \right) \cdot \mathbf{q}_i d\sigma \right] \right) \quad \square
 \end{aligned}$$

On a désormais en notre possession une formule explicite pour la dérivée de forme de la fonction objectif (3.12), qui nécessite au préalable la résolution du problème direct (3.6) et du problème adjoint (3.11), tous deux indépendants du vecteur de déformation θ .

Il nous manque encore un dernier ingrédient si l'on veut calculer cette dérivée de forme : l'expression des opérateurs dérivés $L_i^{(1)}(\theta)$ et $K_i^{(1)}(\theta)$. C'est l'objet de la section suivante.

3 Calcul des opérateurs intégraux transportés

Le but de cette section est le calcul des opérateurs $L^{(1)}(\theta)$ et $K^{(1)}(\theta)$, transportés de L et K par le difféomorphisme (3.7), où $\forall i = 1, 2$:

$$L_i[\mathbf{X}_i](x) := \frac{i}{\omega\varepsilon_i} \nabla_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} G_i(x, y) \nabla_{\Gamma_i} \cdot \mathbf{X}_i(y) d\Gamma(y) + i\omega\mu_i \int_{\Gamma_i} G_i(x, y) \mathbf{X}_i(y) d\Gamma(y)$$

$$K_i[\mathbf{X}_i](x) := \int_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{X}_i(y) d\Gamma(y)$$

On effectue ces calculs en plusieurs étapes :

- On calcule les dérivées des termes sous les intégrales :
 - les termes classiques : le noyau de Green G , son gradient ∇G , l'élément de surface $d\sigma$ et la normale à la surface $\boldsymbol{\nu}$;
 - les opérateurs différentiels surfaciques : le gradient tangentiel ∇_{Γ} et la divergence surfacique div_{Γ} .
- À partir de là, on calcule les dérivées des opérateurs intégraux :
 - l'opérateur de simple couche \mathcal{S} ;
 - l'opérateur L ;
 - l'opérateur K .
- On utilise les résultats obtenus pour donner une expression de la dérivée de forme de la fonction objectif.

3.1 Dérivée des termes de base

3.1.1 Noyau de Green

Proposition 3.5. *Soit $x, y \in \Gamma$ et $x_{\theta}, y_{\theta} \in \Gamma_{\theta}$, où Γ_{θ} est la déformée de Γ par le difféomorphisme Ψ_{θ} (3.7). On a le développement asymptotique suivant :*

$$G(x_{\theta}, y_{\theta}) = G(x, y) + (\theta(x) - \theta(y)) \cdot \nabla_x G(x, y) + o(\theta) \quad (3.13)$$

Preuve. La fonction G ne dépendant pas du domaine, la démonstration est directe :

$$\begin{aligned} G(x_{\theta}, y_{\theta}) &= G(x + \theta(x), y + \theta(y)) \\ &= G(x, y) + \theta(x) \cdot \nabla_x G(x, y) + \theta(y) \cdot \nabla_y G(x, y) + o(\theta) \\ &= G(x, y) + (\theta(x) - \theta(y)) \cdot \nabla_x G(x, y) + o(\theta) \end{aligned}$$

car $\nabla_x G(x, y) = \nabla_y G(x, y)$. □

3.1.2 Gradient du noyau de Green

Proposition 3.6. *Soit $x, y \in \Gamma$ et $x_{\theta}, y_{\theta} \in \Gamma_{\theta}$, où Γ_{θ} est la déformée de Γ par le difféomorphisme Ψ_{θ} (3.7). On a le développement asymptotique suivant :*

$$\nabla G(x_{\theta}, y_{\theta}) = \nabla G(x, y) + \left[\nabla_x \nabla_x G(x, y) \right] (\theta(x) - \theta(y)) + o(\theta) \quad (3.14)$$

Preuve. Là encore, la justification est immédiate :

$$\begin{aligned}\nabla G(x_\theta, y_\theta) &= \nabla G(x + \theta(x), y + \theta(y)) \\ &= \nabla G(x, y) + [\nabla_x \nabla_x G(x, y)]\theta(x) + [\nabla_y \nabla_x G(x, y)]\theta(y) + o(\theta) \\ &= \nabla G(x, y) + [\nabla_x \nabla_x G(x, y)](\theta(x) - \theta(y)) + o(\theta)\end{aligned}$$

$$\text{car } [\nabla_y \nabla_x G(x, y)] = -[\nabla_x \nabla_x G(x, y)]. \quad \square$$

3.1.3 Élément de surface

Proposition 3.7. *Soit $d\sigma$ l'élément de surface sur Γ . On note $d\sigma_\theta$ l'élément de surface sur Γ_θ , déformée de Γ par le difféomorphisme Ψ_θ (3.7). On a le développement asymptotique suivant :*

$$d\sigma_\theta(y_\theta) = d\sigma(y) + \text{div}_\Gamma \theta(y) d\sigma(y) + o(\theta) \quad (3.15)$$

Preuve. On reprend les notations des cartes locales vues dans la section 1.3.2 du chapitre 1. On effectue la preuve en deux étapes.

Étape 1

Pour un point $y \in \Gamma$, on note (ω_i, ϕ_i) la carte locale définie au voisinage du point y et γ l'image de $\Gamma_i = \Gamma \cap \omega_i$. Les variables associées à γ sont notées (ξ_1, ξ_2) , et un point $y \in \Gamma$ est donc l'image de (ξ_1, ξ_2) par $\phi_i^{-1} : y = \phi_i^{-1}(\xi_1, \xi_2)$.

On rappelle que la base vectorielle du plan tangent à Γ en (ξ_1, ξ_2) s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 &= \frac{\partial y}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi_i^{-1}}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\partial y}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \phi_i^{-1}}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2) \end{cases}$$

L'élément d'aire sur Γ_i est alors donné par :

$$d\sigma(y) = \left| \frac{\partial \phi_i^{-1}}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) \times \frac{\partial \phi_i^{-1}}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2) \right| d\xi_1 d\xi_2 = |\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2| d\xi_1 d\xi_2$$

Si maintenant on considère un point $y_\theta = y + \theta(y) \in \Gamma_\theta$. $\Psi_\theta = I + \theta$ est un difféomorphisme de Γ sur Γ_θ et donc la carte locale définie au voisinage de y_θ est donnée par $(\omega_i, \phi_i \circ \Psi_\theta^{-1})$. Ainsi, on a que

$$y_\theta = (\phi_i \circ \Psi_\theta^{-1})^{-1}(\xi_1, \xi_2) = (\Psi_\theta \circ \phi_i^{-1})(\xi_1, \xi_2)$$

et donc l'élément d'aire sur Γ_θ est donné par :

$$\begin{aligned}d\sigma_\theta(y_\theta) &= \left| \frac{\partial(\Psi_\theta \circ \phi_i^{-1})}{\partial \xi_1}(\xi_1, \xi_2) \times \frac{\partial(\Psi_\theta \circ \phi_i^{-1})}{\partial \xi_2}(\xi_1, \xi_2) \right| d\xi_1 d\xi_2 \\ &= \left| \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial y}(\phi_i^{-1}(\xi_1, \xi_2)) \mathbf{e}_1(\xi_1, \xi_2) \times \frac{\partial \Psi_\theta}{\partial y}(\phi_i^{-1}(\xi_1, \xi_2)) \mathbf{e}_2(\xi_1, \xi_2) \right| d\xi_1 d\xi_2 \\ &= |(I + \nabla \theta) \mathbf{e}_1 \times (I + \nabla \theta) \mathbf{e}_2| d\xi_1 d\xi_2\end{aligned}$$

Étape 2

À présent, on cherche $g(\theta)$ telle que

$$d\sigma_\theta(y_\theta) = g(\theta)d\sigma(y)$$

On a alors que

$$g(\theta) = \frac{|(I + \nabla\theta)\mathbf{e}_1 \times (I + \nabla\theta)\mathbf{e}_2|}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|}$$

- Introduisons les deux fonctions :

$$\begin{array}{ccc} f : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & |u| \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{F} : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ \theta & \longmapsto & (I + \nabla\theta)\mathbf{e}_1 \times (I + \nabla\theta)\mathbf{e}_2 \end{array}$$

- On écrit le développement limité de \mathbf{F} en $\theta = 0$:

$$\mathbf{F}(\theta) = \mathbf{F}(0) + [\nabla\mathbf{F}(0)]\theta + o(\theta)$$

où $[\nabla\mathbf{F}]$ désigne la matrice jacobienne de \mathbf{F} . Dans le développement précédent, on note

$$\mathbf{F}_1(\theta) = [\nabla\mathbf{F}(0)]\theta$$

- On développe l'expression du gradient $\nabla_\theta(f(\mathbf{F}(\theta)))$ de $f(\mathbf{F}(\theta))$ par rapport à θ :

$$\begin{aligned} \forall i = 1, \dots, 3, \quad \frac{\partial}{\partial\theta_i}(f(\mathbf{F}(\theta))) &= \frac{df}{d\mathbf{F}}(\mathbf{F}(\theta)) \cdot \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\theta_i}(\theta) \\ &= \frac{\mathbf{F}(\theta)}{|\mathbf{F}(\theta)|} \cdot \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\theta_i}(\theta) \end{aligned}$$

et donc

$$\nabla_\theta(f(\mathbf{F}(\theta))) = [\nabla\mathbf{F}(\theta)]^t \frac{\mathbf{F}(\theta)}{|\mathbf{F}(\theta)|}$$

- Enfin, en utilisant l'expression de $\nabla_\theta(f(\mathbf{F}(\theta)))$ et celle de $\mathbf{F}_1(\theta)$, on écrit le développement limité de $f(\mathbf{F}(\theta))$ en $\theta = 0$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{F}(\theta)) &= f(\mathbf{F}(0)) + \nabla_\theta(f(\mathbf{F}(\theta))) \cdot \theta + o(\theta) \\ &= f(\mathbf{F}(0)) + \left([\nabla\mathbf{F}(0)]^t \frac{\mathbf{F}(0)}{|\mathbf{F}(0)|} \right) \cdot \theta + o(\theta) \\ &= f(\mathbf{F}(0)) + \left([\nabla\mathbf{F}(0)]\theta \right) \cdot \frac{\mathbf{F}(0)}{|\mathbf{F}(0)|} + o(\theta) \\ &= |\mathbf{F}(0)| + \mathbf{F}_1(\theta) \cdot \frac{\mathbf{F}(0)}{|\mathbf{F}(0)|} + o(\theta) \end{aligned}$$

- La fonction $g(\theta)$ que l'on recherche s'écrit alors :

$$g(\theta) = \frac{f(\mathbf{F}(\theta))}{f(\mathbf{F}(0))} = 1 + \mathbf{F}_1(\theta) \cdot \frac{\mathbf{F}(0)}{|\mathbf{F}(0)|^2} + o(\theta)$$

On rappelle l'expression de la normale à la surface vue au chapitre 1 :

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|} = \frac{\mathbf{F}(0)}{|\mathbf{F}(0)|}$$

Ainsi,

$$g(\theta) = 1 + \frac{\mathbf{F}_1(\theta)}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|} \cdot \boldsymbol{\nu} + o(\theta)$$

- Il nous reste à déterminer l'expression de $\mathbf{F}_1(\theta)$. On développe l'expression de $\mathbf{F}(\theta)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\theta) &= (I + \nabla\theta)\mathbf{e}_1 \times (I + \nabla\theta)\mathbf{e}_2 \\ &= \underbrace{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}_{\mathbf{F}(0)} + \underbrace{\mathbf{e}_1 \times [\nabla\theta]\mathbf{e}_2 + [\nabla\theta]\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}_{\mathbf{F}_1(\theta)} + o(\theta) \end{aligned}$$

Or on peut montrer que pour une matrice A et deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} donnés, on a :

$$\mathbf{u} \times A\mathbf{v} - \mathbf{v} \times A\mathbf{u} = \text{Trace}(A)\mathbf{u} \times \mathbf{v} - A^t(\mathbf{u} \times \mathbf{v})$$

En utilisant le fait que $\text{Trace}([\nabla\theta]) = \text{div}\theta$, cela nous donne donc :

$$\mathbf{F}_1(\theta) = \text{div}\theta(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2) - [\nabla\theta]^t(\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)$$

- Enfin, on a donc :

$$\begin{aligned} g(\theta) &= 1 + \text{div}\theta \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|} \cdot \boldsymbol{\nu} - \left([\nabla\theta]^t \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|} \right) \cdot \boldsymbol{\nu} + o(\theta) \\ &= 1 + \text{div}\theta - \left([\nabla\theta]^t \boldsymbol{\nu} \right) \cdot \boldsymbol{\nu} + o(\theta) \\ &= 1 + \text{div}_\Gamma\theta + o(\theta) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le résultat

$$d\sigma_\theta(y_\theta) = d\sigma(y) + \text{div}_\Gamma\theta(y)d\sigma(y) + o(\theta) \quad \square$$

3.1.4 Normale unitaire

Proposition 3.8. Soit $\boldsymbol{\nu}$ la normale unitaire à la surface Γ . On note $\boldsymbol{\nu}_\theta$ la normale unitaire à la surface Γ_θ , déformée de Γ par le difféomorphisme Ψ_θ (3.7). On a le développement asymptotique suivant :

$$\boldsymbol{\nu}_\theta(y_\theta) = \boldsymbol{\nu}(y) - [\nabla_\Gamma\theta(y)]\boldsymbol{\nu}(y) + o(\theta) \quad (3.16)$$

Remarque 3.1. Pour un vecteur \mathbf{u} de \mathbf{R}^3 , on note $[\nabla_\Gamma\mathbf{u}]$ la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est le gradient tangentiel de la $i^{\text{ème}}$ composante de \mathbf{u} .

Preuve. La preuve reprend le même cheminement et certains résultats de la preuve de la proposition 3.7 vue précédemment.

Pour $y \in \Gamma$, on a

$$\boldsymbol{\nu}(y) = \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|}$$

Et donc pour $y_\theta \in \Gamma_\theta$, on a

$$\boldsymbol{\nu}_\theta(y_\theta) = \frac{(I + \nabla\theta)\mathbf{e}_1 \times (I + \nabla\theta)\mathbf{e}_2}{|(I + \nabla\theta)\mathbf{e}_1 \times (I + \nabla\theta)\mathbf{e}_2|}$$

On reprend les fonctions f et F considérées précédemment, ainsi que leurs développements. On a donc :

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\mathbf{F}(0)}{|\mathbf{F}(0)|} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\nu}_\theta = \frac{\mathbf{F}(\theta)}{|\mathbf{F}(\theta)|}$$

On rajoute la fonction

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \frac{1}{u} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boldsymbol{\nu}_\theta = \mathbf{F}(\theta) h(f(\mathbf{F}(\theta)))$$

où on a le développement suivant :

$$\begin{aligned} h(f(\mathbf{F}(\theta))) &= h(f(\mathbf{F}(0))) + \nabla_\theta \left(h(f(\mathbf{F}(0))) \right) \cdot \theta + o(\theta) \\ &= h(f(\mathbf{F}(0))) - \frac{1}{|\mathbf{F}(0)|^2} \left([\nabla\mathbf{F}(0)]^t \frac{\mathbf{F}(0)}{|\mathbf{F}(0)|} \right) \cdot \theta + o(\theta) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{F}(0)|} - \mathbf{F}_1(\theta) \cdot \frac{\mathbf{F}(0)}{|\mathbf{F}(0)|^3} + o(\theta) \end{aligned}$$

De cette manière, on a :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nu}_\theta &= \mathbf{F}(\theta) h(f(\mathbf{F}(\theta))) \\ &= \left(\mathbf{F}(0) + \mathbf{F}_1(\theta) \right) \left(\frac{1}{|\mathbf{F}(0)|} - \mathbf{F}_1(\theta) \cdot \frac{\mathbf{F}(0)}{|\mathbf{F}(0)|^3} \right) + o(\theta) \\ &= \frac{\mathbf{F}(0)}{|\mathbf{F}(0)|} - \frac{(\mathbf{F}_1(\theta) \cdot \mathbf{F}(0))\mathbf{F}(0)}{|\mathbf{F}(0)|^3} + \frac{\mathbf{F}_1(\theta)}{|\mathbf{F}(0)|} + o(\theta) \\ &= \boldsymbol{\nu} - \left((\operatorname{div}\theta\boldsymbol{\nu} - [\nabla\theta]^t\boldsymbol{\nu}) \cdot \boldsymbol{\nu} \right) \boldsymbol{\nu} + \operatorname{div}\theta\boldsymbol{\nu} - [\nabla\theta]^t\boldsymbol{\nu} + o(\theta) \end{aligned}$$

Pour deux vecteurs \mathbf{u} et \mathbf{v} de \mathbb{R}^3 , on sait que :

$$[\nabla_\Gamma\mathbf{u}]\mathbf{v} = [\nabla\theta]^t\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot [\nabla\theta]^t\mathbf{v})\mathbf{v}$$

D'où le résultat

$$\boldsymbol{\nu}_\theta = \boldsymbol{\nu} - [\nabla_\Gamma\theta]\boldsymbol{\nu} + o(\theta) \quad \square$$

3.2 Dérivée des opérateurs différentiels surfaciques

On s'intéresse aux dérivées des opérateurs surfaciques : le gradient tangentiel et la divergence surfacique.

3.2.1 Gradient tangentiel

Proposition 3.9. *Soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)$ une fonction définie sur la surface Γ , et on note u_θ la fonction définie sur Γ_θ , déformée de Γ par le difféomorphisme Ψ_θ (3.7), telle que les deux fonctions sont reliées par la relation $u = u_\theta \circ \Psi_\theta$.*

On a le développement asymptotique suivant :

$$\nabla_{\Gamma_\theta} u_\theta(y_\theta) = \nabla_\Gamma u(y) - [\nabla_\Gamma \theta(y)] \nabla_\Gamma u(y) + \left([\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla_\Gamma u(y) \right) \boldsymbol{\nu}(y) + o(\theta) \quad (3.17)$$

Preuve. On rappelle la définition du gradient tangentiel vue au chapitre 1 pour une fonction u définie sur Γ :

$$\nabla_\Gamma u(y) = \nabla \tilde{u}(y) - (\boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla \tilde{u}(y)) \boldsymbol{\nu}(y)$$

où \tilde{u} est une extension à tout \mathbb{R}^3 de u , définie par exemple comme dans la relation (1.15) du chapitre 1.

On a donc, en utilisant le développement de la normale vu précédemment :

$$\begin{aligned} \nabla_{\Gamma_\theta} u_\theta(y_\theta) &= \nabla \tilde{u}_\theta(y_\theta) - (\boldsymbol{\nu}_\theta(y_\theta) \cdot \nabla \tilde{u}_\theta(y_\theta)) \boldsymbol{\nu}_\theta(y_\theta) \\ &= (\nabla \tilde{u}_\theta \circ \Psi_\theta)(y) - \left(\boldsymbol{\nu}(y) \cdot (\nabla \tilde{u}_\theta \circ \Psi_\theta)(y) \right) \boldsymbol{\nu}(y) \\ &\quad + \left(\boldsymbol{\nu}(y) \cdot (\nabla \tilde{u}_\theta \circ \Psi_\theta)(y) \right) [\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \\ &\quad + \left([\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot (\nabla \tilde{u}_\theta \circ \Psi_\theta)(y) \right) \boldsymbol{\nu}(y) + o(\theta) \end{aligned}$$

De plus, grâce à la formule du chapitre 2, on peut écrire :

$$(\nabla \tilde{u}_\theta \circ \Psi_\theta) = ([\nabla \Psi_\theta]^{-1})^t \nabla (\tilde{u}_\theta \circ \Psi_\theta) = (I - [\nabla \theta]^t) \nabla \tilde{u} + o(\theta)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \nabla_{\Gamma_\theta} u_\theta(y_\theta) &= \nabla \tilde{u}(y) - [\nabla \theta(y)]^t \nabla \tilde{u}(y) - (\boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla \tilde{u}(y)) \boldsymbol{\nu}(y) + \left(\boldsymbol{\nu}(y) \cdot [\nabla \theta(y)]^t \nabla \tilde{u}(y) \right) \boldsymbol{\nu}(y) \\ &\quad + (\boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla \tilde{u}(y)) [\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) + \left([\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla \tilde{u}(y) \right) \boldsymbol{\nu}(y) + o(\theta) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que :

- $\nabla \tilde{u}(y) - (\boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla \tilde{u}(y)) \boldsymbol{\nu}(y) = \nabla_\Gamma \tilde{u}(y)$
- $-[\nabla \theta(y)]^t \nabla \tilde{u}(y) + \left(\boldsymbol{\nu}(y) \cdot [\nabla \theta(y)]^t \nabla \tilde{u}(y) \right) \boldsymbol{\nu}(y) = -[\nabla_\Gamma \theta] \nabla \tilde{u}(y)$
- $-[\nabla_\Gamma \theta] \nabla \tilde{u}(y) + (\boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla \tilde{u}(y)) [\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) = -[\nabla_\Gamma \theta] \nabla_\Gamma \tilde{u}(y)$
- $[\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla \tilde{u}(y) = [\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla_\Gamma \tilde{u}(y)$

On obtient le résultat voulu :

$$\nabla_{\Gamma_\theta} u_\theta(y_\theta) = \nabla_\Gamma u(y) - [\nabla_\Gamma \theta(y)] \nabla_\Gamma u(y) + \left([\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla_\Gamma u(y) \right) \boldsymbol{\nu}(y) + o(\theta) \quad \square$$

3.2.2 Divergence surfacique

Proposition 3.10. *Soit $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^\infty(\Gamma)^3$ une fonction vectorielle définie sur la surface Γ , et on note \mathbf{u}^θ la fonction définie sur Γ_θ , telle que les deux fonctions sont reliées par la relation $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\theta \circ \Psi_\theta$.*

On a le développement asymptotique suivant :

$$\operatorname{div}_{\Gamma_\theta} \mathbf{u}^\theta(y_\theta) = \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}(y) - \operatorname{Trace} \left([\nabla_\Gamma \theta(y)] [\nabla_\Gamma \mathbf{u}(y)] \right) + [\nabla_\Gamma \mathbf{u}(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot [\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) + o(\theta) \quad (3.18)$$

Preuve. Par définition, on sait que

$$\operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}(y) = \operatorname{Trace} \left([\nabla_\Gamma \mathbf{u}(y)] \right)$$

où $[\nabla_\Gamma \mathbf{u}]$ est la matrice dont la $i^{\text{ème}}$ colonne est le gradient tangentiel de la $i^{\text{ème}}$ composante de \mathbf{u} : $[\nabla_\Gamma \mathbf{u}] = [\nabla_\Gamma \mathbf{u}_i]_{i=1,\dots,3}$.

Et on sait grâce à la proposition précédente 3.9 que, $\forall i = 1, \dots, 3$, on a :

$$\nabla_{\Gamma_\theta} \mathbf{u}_i^\theta(y_\theta) = \nabla_\Gamma \mathbf{u}_i(y) - [\nabla_\Gamma \theta(y)] \nabla_\Gamma \mathbf{u}_i(y) + \left([\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla_\Gamma \mathbf{u}_i(y) \right) \boldsymbol{\nu}(y) + o(\theta)$$

et donc

$$\begin{aligned} \operatorname{Trace} \left(\nabla_{\Gamma_\theta} \mathbf{u}^\theta(y_\theta) \right) &= \operatorname{Trace} \left([\nabla_\Gamma \mathbf{u}(y)] \right) - \operatorname{Trace} \left([\nabla_\Gamma \theta(y)] [\nabla_\Gamma \mathbf{u}(y)] \right) \\ &\quad + \operatorname{Trace} \left(\left[\left([\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla_\Gamma \mathbf{u}_i(y) \right) \boldsymbol{\nu}(y) \right]_{i=1,\dots,3} \right) + o(\theta) \end{aligned}$$

Si on développe le troisième terme :

$$\begin{aligned} \operatorname{Trace} \left(\left[\left([\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla_\Gamma \mathbf{u}_i(y) \right) \boldsymbol{\nu}(y) \right]_{i=1,\dots,3} \right) &= \sum_{i=1}^3 \left([\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot \nabla_\Gamma \mathbf{u}_i(y) \right) \boldsymbol{\nu}_i \\ &= \left([\nabla_\Gamma \mathbf{u}] \left([\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \right) \right) \cdot \boldsymbol{\nu}(y) \\ &= [\nabla_\Gamma \mathbf{u}] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot [\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \end{aligned}$$

D'où le résultat

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_{\Gamma_\theta} \mathbf{u}^\theta(y_\theta) &= \operatorname{Trace} \left(\nabla_{\Gamma_\theta} \mathbf{u}^\theta(y_\theta) \right) \\ &= \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{u}(y) - \operatorname{Trace} \left([\nabla_\Gamma \theta(y)] [\nabla_\Gamma \mathbf{u}(y)] \right) + [\nabla_\Gamma \mathbf{u}(y)] \boldsymbol{\nu}(y) \cdot [\nabla_\Gamma \theta(y)] \boldsymbol{\nu}(y) + o(\theta) \end{aligned}$$

□

3.3 Dérivée des opérateurs intégraux

3.3.1 Opérateur de simple couche

Proposition 3.11. *Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ et Ψ_θ le difféomorphisme défini par (3.7), et soit $\mathbf{j}_i \in H_{\operatorname{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \forall i = 1, 2$, de dérivée lagrangienne $\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)$. On rappelle la définition de l'opérateur potentiel de simple couche :*

$$\mathcal{S}_i[\mathbf{j}_i](x) = \int_{\Gamma_i} G_i(x, y) \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y)$$

Alors on a le développement asymptotique suivant :

$$\mathcal{S}_i^\theta[\mathbf{j}_i^\theta](x_\theta) = \mathcal{S}_i[\mathbf{j}_i](x) + \mathcal{S}_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i](x) + \mathcal{S}_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)](x) + o(\theta)$$

où l'opérateur dérivé de l'opérateur de simple couche s'exprime de la manière suivante :

$$\mathcal{S}_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i](x) = \int_{\Gamma} \left((\theta(x) - \theta(y)) \cdot \nabla_x G_i(x, y) + G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \theta(y) \right) \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y) \quad (3.19)$$

Preuve. On combine la formulation de changement de variables dans une intégrale aux résultats des propositions 3.5 et 3.7 :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i^\theta[\mathbf{j}_i^\theta](x_\theta) &= \int_{\Gamma_i^\theta} G_i(x_\theta, y_\theta) \mathbf{j}_i^\theta(y_\theta) d\sigma_\theta(y_\theta) \\ &= \int_{\Gamma_i} (G_i \circ \Psi_\theta)(x, y) (\mathbf{j}_i^\theta \circ \Psi_\theta)(y) (d\sigma_\theta \circ \Psi_\theta)(y) \\ &= \underbrace{\int_{\Gamma_i} G_i(x, y) \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y)}_{\mathcal{S}_i[\mathbf{j}_i](x)} + \underbrace{\int_{\Gamma_i} G_i(x, y) \mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)(y) d\sigma(y)}_{\mathcal{S}_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)](x)} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Gamma} \left((\theta(x) - \theta(y)) \cdot \nabla_x G_i(x, y) + G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \theta(y) \right) \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y)}_{\mathcal{S}_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i](x)} \end{aligned}$$

D'où l'expression (3.19) obtenue pour l'opérateur dérivé de l'opérateur \mathcal{S}_i . \square

3.3.2 Opérateur K_i

Proposition 3.12. Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ et Ψ_θ le difféomorphisme défini par (3.7), et soit $\mathbf{j}_i \in H_{\operatorname{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \forall i = 1, 2$, de dérivée lagrangienne $\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)$. On rappelle la définition de l'opérateur K_i :

$$K_i[\mathbf{j}_i](x) = \int_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y)$$

Alors on a le développement asymptotique suivant :

$$K_i^\theta[\mathbf{j}_i^\theta](x_\theta) = K_i[\mathbf{j}_i](x) + K_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i](x) + K_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)](x) + o(\theta)$$

où l'opérateur dérivé de l'opérateur de simple couche s'exprime de la manière suivante :

$$K_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i](x) = \int_{\Gamma} \left([\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)] (\theta(x) - \theta(y)) + \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \theta(y) \right) \times \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y) \quad (3.20)$$

Preuve. On combine la formulation de changement de variables dans une intégrale aux résultats des propositions 3.6 et 3.7 :

$$\begin{aligned}
 K_i^\theta[\mathbf{j}_i^\theta](x_\theta) &= \int_{\Gamma_i^\theta} \nabla_x G_i(x_\theta, y_\theta) \times \mathbf{j}_i^\theta(y_\theta) d\sigma_\theta(y_\theta) \\
 &= \int_{\Gamma_i} (\nabla_x G_i \circ \Psi_\theta)(x, y) \times (\mathbf{j}_i^\theta \circ \Psi_\theta)(y) (d\sigma_\theta \circ \Psi_\theta)(y) \\
 &= \underbrace{\int_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y)}_{K_i[\mathbf{j}_i](x)} + \underbrace{\int_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)(y) d\sigma(y)}_{K_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)](x)} \\
 &\quad + \underbrace{\int_{\Gamma} \left([\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)] (\theta(x) - \theta(y)) + \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \theta(y) \right) \times \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y)}_{K_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i](x)}
 \end{aligned}$$

D'où l'expression (3.20) obtenue pour l'opérateur dérivé de l'opérateur K_i . \square

3.3.3 Opérateur L_i

Proposition 3.13. Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ et Ψ_θ le difféomorphisme défini par (3.7), et soit $\mathbf{j}_i \in H_{\operatorname{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_i) \forall i = 1, 2$, de dérivée lagrangienne $\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)$. On rappelle la définition de l'opérateur L_i :

$$L_i[\mathbf{j}_i](x) = \frac{i}{\omega \varepsilon_i} \nabla \int_{\Gamma_i} G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y) + i\omega \mu_i \int_{\Gamma_i} G_i(x, y) \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y)$$

Alors on a le développement asymptotique suivant :

$$L_i^\theta[\mathbf{j}_i^\theta](x_\theta) = L_i[\mathbf{j}_i](x) + L_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i](x) + L_i[\mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)](x) + o(\theta)$$

où l'opérateur dérivé de l'opérateur de simple couche s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 L_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i](x) &= \frac{i}{\omega \varepsilon_i} \int_{\Gamma_i} \left([\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)] (\theta(x) - \theta(y)) + \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \theta(y) \right) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y) \\
 &\quad + \frac{i}{\omega \varepsilon_i} \int_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \left(- \operatorname{Trace} \left([\nabla_{\Gamma_i} \theta(y)] [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] \right) \right. \\
 &\quad \quad \left. + [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] \boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot [\nabla_{\Gamma_i} \theta(y)] \boldsymbol{\nu}_i(y) \right) d\sigma(y) \\
 &\quad + i\omega \mu_i \int_{\Gamma_i} \left((\theta(x) - \theta(y)) \cdot \nabla_x G_i(x, y) + G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \theta(y) \right) \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Preuve. L'opérateur L_i peut se décomposer en deux termes :

$$L_i[\mathbf{j}_i](x) = \frac{i}{\omega \varepsilon_i} \nabla \mathcal{S}_i[\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i](x) + i\omega \mu_i \mathcal{S}_i[\mathbf{j}_i](x)$$

- L'opérateur dérivé du deuxième terme a déjà été établi dans la proposition 3.11.
- Le premier terme peut se réécrire de la manière suivante :

$$\nabla \mathcal{S}_i[\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i](x) = \nabla \int_{\Gamma_i} G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y) = \operatorname{vp} \int_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y)$$

Encore une fois, on s'affranchit de la notation de la valeur principale de Cauchy tout en gardant le sens.

On combine la formulation de changement de variables dans une intégrale aux résultats des propositions 3.6, 3.10 et 3.7 :

$$\begin{aligned}
 & \nabla \mathcal{S}_i^\theta [\operatorname{div}_{\Gamma_i^\theta} \mathbf{j}_i^\theta](x_\theta) \\
 &= \int_{\Gamma_i^\theta} \nabla_x G_i(x_\theta, y_\theta) \operatorname{div}_{\Gamma_i^\theta} \mathbf{j}_i^\theta(y_\theta) d\sigma_\theta(y_\theta) \\
 &= \int_{\Gamma_i} (\nabla_x G_i \circ \Psi_\theta)(x, y) (\operatorname{div}_{\Gamma_i^\theta} \mathbf{j}_i^\theta \circ \Psi_\theta)(y) (d\sigma_\theta \circ \Psi_\theta)(y) \\
 &= \underbrace{\int_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y)}_{\nabla \mathcal{S}_i [\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i](x)} + \underbrace{\int_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)(y) d\sigma(y)}_{\nabla \mathcal{S}_i [\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i^{(1)}(\theta)](x)} \\
 &+ \int_{\Gamma_i} \left([\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)] (\theta(x) - \theta(y)) + \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \theta(y) \right) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y) \\
 &+ \underbrace{\int_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \left(-\operatorname{Trace} \left([\nabla_{\Gamma_i} \theta(y)] [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] \right) + [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] \boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot [\nabla_{\Gamma_i} \theta(y)] \boldsymbol{\nu}_i(y) \right) d\sigma(y)}_{(\nabla \mathcal{S}_i)^{(1)}(\theta) [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i](x)}
 \end{aligned}$$

Ainsi, sachant que

$$L_i^{(1)}(\theta) [\mathbf{j}_i](x) = \frac{i}{\omega \varepsilon_i} (\nabla \mathcal{S}_i)^{(1)}(\theta) [\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i](x) + i \omega \mu_i \mathcal{S}_i^{(1)}(\theta) [\mathbf{j}_i](x)$$

on trouve l'expression (3.21) obtenue pour l'opérateur dérivé de l'opérateur L_i . \square

4 Adaptation à la méthode Level Set

En tenant compte de certaines caractéristiques spécifiques à notre cas d'application, on va pouvoir simplifier légèrement l'expression de la dérivée de forme de la fonction coût, et surtout la réécrire sous une forme plus adaptée à l'utilisation de la méthode Level Set.

4.1 Particularisation de la déformation

4.1.1 Simplification des opérateurs dérivés

Les calculs des opérateurs dérivés développés dans la section précédente sont très généraux et ne tiennent pas compte des spécificités qui peuvent survenir dans des cas d'application précis.

En particulier, comme spécifié dans le paragraphe 2.1.3, on rappelle que dans notre cas, la déformation opère dans le plan tangent : la frontière Γ ne sera en effet pas déformée, c'est le patch métallique imprimé à sa surface qui va se déplacer sur la surface. Cela se traduit par la condition suivante sur le champ de vecteurs θ considéré :

$$\forall x \in \Gamma, \theta(x) \cdot \boldsymbol{\nu}(x) = 0$$

condition que l'on peut également écrire sous la forme

$$\forall x \in \Gamma, [\nabla\theta(x)]\boldsymbol{\nu}(x) = 0$$

Cela va nous permettre d'éliminer les termes relatifs à la dérivée de la normale unitaire à la surface, que l'on retrouve dans la dérivée de la divergence surfacique et donc également dans l'opérateur dérivé $L_i^{(1)}(\theta)$. Ainsi, on écrit désormais cet opérateur de la manière suivante :

$$\begin{aligned} L_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i](x) &= \frac{i}{\omega\varepsilon_i} \int_{\Gamma_i} \left([\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)] (\theta(x) - \theta(y)) + \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \theta(y) \right) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y) \\ &\quad - \frac{i}{\omega\varepsilon_i} \int_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{Trace} \left([\nabla_{\Gamma_i} \theta(y)] [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] \right) d\sigma(y) \\ &\quad + i\omega\mu_i \int_{\Gamma_i} \left((\theta(x) - \theta(y)) \cdot \nabla_x G_i(x, y) + G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \theta(y) \right) \mathbf{j}_i(y) d\sigma(y) \end{aligned} \quad (3.22)$$

4.1.2 Une troisième expression de la dérivée de forme

On va désormais utiliser les opérateurs dérivés exprimés dans (3.20) et (3.22) afin d'écrire une expression explicite de la dérivée de forme de notre fonction coût.

On rappelle son expression, donnée par la proposition 3.4, où $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ et où $\{\mathbf{j}_i, \mathbf{m}_i\}$ est solution de (3.6) et $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i\}$ est solution de (3.11), $\forall i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} J'(\Gamma)(\theta) &= \frac{1}{2} \Re \left(\sum_{i=1}^2 \left[\int_{\Gamma_i} \left(L_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i] - K_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{m}_i] \right) \cdot \mathbf{p}_i d\sigma \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \int_{\Gamma_i} \left(-K_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{j}_i] - \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} L_i^{(1)}(\theta)[\mathbf{m}_i] \right) \cdot \mathbf{q}_i d\sigma \right] \right) \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on développe tous les termes et qu'on les subdivise en termes plus simples, on obtient l'expression suivante pour la dérivée de forme de la fonction coût :

$$\begin{aligned} J'(\Gamma)(\theta) &= \frac{1}{2} \Re \left(\sum_{i=1}^2 \left[+ \frac{i}{\omega\varepsilon_i} \left(F_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) + H_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) + E_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) \right) \right. \right. \\ &\quad + i\omega\mu_i \left(C_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) + D_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) \right) \\ &\quad - A_i(\mathbf{m}_i, \mathbf{p}_i) - B_i(\mathbf{m}_i, \mathbf{p}_i) \\ &\quad - A_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{q}_i) - B_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{q}_i) \\ &\quad - \frac{i}{\omega\mu_i} \left(F_i(\mathbf{m}_i, \mathbf{q}_i) + H_i(\mathbf{m}_i, \mathbf{q}_i) + E_i(\mathbf{m}_i, \mathbf{q}_i) \right) \\ &\quad \left. \left. - i\omega\varepsilon_i \left(C_i(\mathbf{m}_i, \mathbf{q}_i) + D_i(\mathbf{m}_i, \mathbf{q}_i) \right) \right] \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

où les termes sus-mentionnés se définissent de la manière suivante, pour deux vecteurs $\mathbf{j}, \mathbf{p} \in H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$:

$$A_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = + \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \left([\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)] (\theta(x) - \theta(y)) \times \mathbf{j}_i(y) \right) \cdot \mathbf{p}_i(x) d\sigma(y) d\sigma(x) \quad (3.24)$$

$$B_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = + \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \text{div}_{\Gamma_i} \theta(y) \left(\nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{j}_i(y) \right) \cdot \mathbf{p}_i(x) d\sigma(y) d\sigma(x) \quad (3.25)$$

$$C_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = + \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \left((\theta(x) - \theta(y)) \cdot \nabla_x G_i(x, y) \right) \mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x) d\sigma(y) d\sigma(x) \quad (3.26)$$

$$D_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = + \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \text{div}_{\Gamma_i} \theta(y) G_i(x, y) \mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x) d\sigma(y) d\sigma(x) \quad (3.27)$$

$$E_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = - \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \text{Trace} \left([\nabla_{\Gamma_i} \theta(y)] [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] \right) \nabla_x G_i(x, y) \cdot \mathbf{p}_i(x) d\sigma(y) d\sigma(x) \quad (3.28)$$

$$F_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = + \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \text{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) \left([\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)] (\theta(x) - \theta(y)) \right) \cdot \mathbf{p}_i(x) d\sigma(y) d\sigma(x) \quad (3.29)$$

$$H_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = + \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \text{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) \text{div}_{\Gamma_i} \theta(y) \nabla_x G_i(x, y) \cdot \mathbf{p}_i(x) d\sigma(y) d\sigma(x) \quad (3.30)$$

4.2 Reformulation pour la méthode Level Set

Désormais, on souhaite trouver une formulation de ces termes plus propice à l'utilisation de la méthode des Level Set. On rappelle qu'on appelle Γ_M la surface impactée par la déformation (voir figure 3.1), sur laquelle la frontière du patch γ métallique évolue. Ainsi, on va chercher à exprimer la dérivée de forme de la fonction coût comme

$$J'(\Gamma)(\theta) = \int_{\Gamma_M} \mathbf{V}(y) \cdot \theta(y) d\sigma(y)$$

où le terme $\mathbf{V}(y), \forall y \in \Gamma_M$, sera utilisé comme vitesse d'advection dans l'équation de transport comme expliqué dans l'algorithme 2 du chapitre 2.

Afin de réécrire les termes présentés dans le paragraphe précédent, on va utiliser le fait que

$$\forall x \in \Gamma \setminus \Gamma_M, \theta(x) = 0$$

De la même manière que nous avons décomposé Γ en frontières par domaine Ω_i , notées Γ_i , on note $\Gamma_{M,i}$ la surface Γ_M vue depuis le domaine $\Omega_i, \forall i = 1, \dots, 2$.

Enfin, de manière à ce que le patch métallique ne déborde pas de la surface sur lequel il est gravé, on impose une condition au bord pour θ :

$$\forall x \in \partial\Gamma_M, \theta(x) = 0$$

4.2.1 Terme A_i

Proposition 3.14. *Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ et $\mathbf{j}, \mathbf{p} \in H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Si $\theta = 0$ sur $\Gamma \setminus \Gamma_M$, alors le terme $A_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i), \forall i = 1, \dots, 2$ donné par (3.24) se réécrit de la manière suivante :*

$$A_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = \int_{\Gamma_{M,i}} \left(a_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + a_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \quad (3.31)$$

où

$$a_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \int_{\Gamma_i} [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t (\mathbf{j}_i(x) \times \mathbf{p}_i(y)) d\sigma(x) \quad (3.32)$$

$$a_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i} [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x)) d\sigma(x) \quad (3.33)$$

Preuve. Dans un premier temps, on peut réécrire le terme sous l'intégrale dans $A_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i)$:

$$\left([\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)] (\theta(x) - \theta(y)) \times \mathbf{j}_i(y) \right) \cdot \mathbf{p}_i(x) = \left([\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x)) \right) \cdot (\theta(x) - \theta(y))$$

On pose :

$$\mathbf{f}_i^1(x, y) = [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x))$$

$$\mathbf{f}_i^2(x, y) = [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t (\mathbf{j}_i(x) \times \mathbf{p}_i(y))$$

On remarque que $\mathbf{f}_i^1(y, x) = \mathbf{f}_i^2(x, y)$ et $\mathbf{f}_i^2(y, x) = \mathbf{f}_i^1(x, y)$.

Reprenons le terme $A_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i)$ avec ces notations :

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) &= \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^1(x, y) \cdot \theta(x) d\sigma(y) d\sigma(x) - \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^1(x, y) \cdot \theta(y) d\sigma(y) d\sigma(x) \\ &= \int_{\Gamma_{M,i}} \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^1(x, y) \cdot \theta(x) d\sigma(y) d\sigma(x) - \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_{M,i}} \mathbf{f}_i^1(x, y) \cdot \theta(y) d\sigma(y) d\sigma(x) \\ &= \int_{\Gamma_{M,i}} \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^1(y, x) \cdot \theta(y) d\sigma(x) d\sigma(y) - \int_{\Gamma_{M,i}} \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^1(x, y) \cdot \theta(y) d\sigma(x) d\sigma(y) \\ &= \int_{\Gamma_{M,i}} \left(\int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^2(x, y) d\sigma(x) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) - \int_{\Gamma_{M,i}} \left(\int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^1(x, y) d\sigma(x) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \end{aligned}$$

D'où le résultat avec

$$a_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^2(x, y) d\sigma(x) \quad \text{et} \quad a_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^1(x, y) d\sigma(x) \quad \square$$

4.2.2 Terme B_i

Proposition 3.15. Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ et $\mathbf{j}, \mathbf{p} \in H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Si $\theta = 0$ sur $\Gamma \setminus \Gamma_M$, alors le terme $B_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i)$, $\forall i = 1, \dots, 2$ donné par (3.25) se réécrit de la manière suivante :

$$B_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = \int_{\Gamma_{M,i}} \left(b_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + b_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + b_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \quad (3.34)$$

où

$$b_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i} [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] (\nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{p}_i(x)) d\sigma(x) \quad (3.35)$$

$$b_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i} \left(\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x)) \right) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma(x) \quad (3.36)$$

$$b_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \int_{\Gamma_i} [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x)) d\sigma(x) \quad (3.37)$$

Preuve. On pose :

$$f_i(y) = \int_{\Gamma_i} \left(\nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{j}_i(y) \right) \cdot \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x)$$

Ainsi, en utilisant la formule de Stokes (1.18) vue au chapitre 1, on peut écrire :

$$B_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = \int_{\Gamma_{M,i}} f_i(y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \theta(y) d\sigma(y) = - \int_{\Gamma_{M,i}} \nabla_{\Gamma_i} (f_i(y)) \cdot \theta(y) d\sigma(y)$$

avec

$$\begin{aligned} \nabla_{\Gamma_i} (f_i(y)) &= \int_{\Gamma_i} \nabla_{\Gamma_i} \left(\left(\nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{j}_i(y) \right) \cdot \mathbf{p}_i(x) \right) d\sigma(x) \\ &= \int_{\Gamma_i} \left[\nabla_{\Gamma_i} \left(\nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{j}_i(y) \right) \right] \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x) \end{aligned}$$

Or, pour trois vecteurs quelconques $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$, on a que :

$$\left[\nabla_{\Gamma} (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \right] \mathbf{w} = \left[\nabla_{\Gamma} \mathbf{u} \right] (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) + \left[\nabla_{\Gamma} \mathbf{v} \right] (\mathbf{u} \times \mathbf{w})$$

Ainsi,

$$\left[\nabla_{\Gamma_i} \left(\nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{j}_i(y) \right) \right] \mathbf{p}_i(x) = \left[\nabla_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \right] (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x)) + \left[\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) \right] (\nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{p}_i(x))$$

De plus, par définition du gradient tangentiel, on a :

$$\left[\nabla_{\Gamma} \mathbf{u} \right] \mathbf{w} = \left[\nabla \mathbf{u} \right]^t \mathbf{w} - (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{w}) \left[\nabla \mathbf{u} \right]^t \boldsymbol{\nu}$$

Et donc

$$\begin{aligned} \left[\nabla_{\Gamma_i} \nabla_x G_i(x, y) \right] (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x)) &= \left[\nabla_y \nabla_x G_i(x, y) \right]^t (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x)) \\ &\quad - \left(\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x)) \right) \left[\nabla_y \nabla_x G_i(x, y) \right]^t \boldsymbol{\nu}_i(y) \end{aligned}$$

Ainsi, en sachant que

$$\left[\nabla_y \nabla_x G_i(x, y) \right] = - \left[\nabla_x \nabla_x G_i(x, y) \right]$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla_{\Gamma_i} (f_i(y)) &= \underbrace{\int_{\Gamma_i} \left[\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) \right] (\nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{p}_i(x)) d\sigma(x)}_{-b_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}] (y)} \\ &\quad - \underbrace{\int_{\Gamma_i} \left[\nabla_x \nabla_x G_i(x, y) \right]^t (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x)) d\sigma(x)}_{b_i^3 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}] (y)} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Gamma_i} \left(\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x)) \right) \left[\nabla_x \nabla_x G_i(x, y) \right]^t \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma(x)}_{-b_i^2 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}] (y)} \end{aligned}$$

□

4.2.3 Terme C_i

Proposition 3.16. *Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ et $\mathbf{j}, \mathbf{p} \in H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Si $\theta = 0$ sur $\Gamma \setminus \Gamma_M$, alors le terme $C_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i), \forall i = 1, ..2$ donné par (3.26) se réécrit de la manière suivante :*

$$C_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = \int_{\Gamma_{M,i}} \left(c_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + c_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \quad (3.38)$$

où

$$c_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \int_{\Gamma_i} (\mathbf{p}_i(y) \cdot \mathbf{j}_i(x)) \nabla_x G_i(x, y) d\sigma(x) \quad (3.39)$$

$$c_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i} (\mathbf{p}_i(x) \cdot \mathbf{j}_i(y)) \nabla_x G_i(x, y) d\sigma(x) \quad (3.40)$$

Preuve. En réécrivant le terme sous l'intégrale dans $C_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i)$:

$$\left((\theta(x) - \theta(y)) \cdot \nabla_x G_i(x, y) \right) \mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x) = \left((\mathbf{p}_i(x) \cdot \mathbf{j}_i(y)) \nabla_x G_i(x, y) \right) \cdot (\theta(x) - \theta(y))$$

et en notant

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_i^1(x, y) &= (\mathbf{p}_i(x) \cdot \mathbf{j}_i(y)) \nabla_x G_i(x, y) \\ \mathbf{f}_i^2(x, y) &= (\mathbf{p}_i(y) \cdot \mathbf{j}_i(x)) \nabla_x G_i(x, y) \end{aligned}$$

on montre de la même manière que pour le terme $A_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i)$ dans la preuve de la proposition 3.14 que :

$$C_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = \int_{\Gamma_{M,i}} \left(\int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^2(x, y) d\sigma(x) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) - \int_{\Gamma_{M,i}} \left(\int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^1(x, y) d\sigma(x) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y)$$

D'où le résultat avec

$$c_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^2(x, y) d\sigma(x) \quad \text{et} \quad c_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i} \mathbf{f}_i^1(x, y) d\sigma(x) \quad \square$$

4.2.4 Terme D_i

Proposition 3.17. *Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ et $\mathbf{j}, \mathbf{p} \in H_{\text{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Si $\theta = 0$ sur $\Gamma \setminus \Gamma_M$, alors le terme $D_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i), \forall i = 1, ..2$ donné par (3.27) se réécrit de la manière suivante :*

$$D_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = \int_{\Gamma_{M,i}} \left(d_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + d_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + d_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \quad (3.41)$$

où

$$d_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i} G_i(x, y) [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x) \quad (3.42)$$

$$d_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i} (\mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) (\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \nabla_x G_i(x, y)) \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma(x) \quad (3.43)$$

$$d_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \int_{\Gamma_i} (\mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) \nabla_x G_i(x, y) d\sigma(x) \quad (3.44)$$

Preuve. On pose :

$$f_i(y) = \int_{\Gamma_i} G_i(x, y) \mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x)$$

Ainsi, en utilisant la formule de Stokes (1.18) vue au chapitre 1, on peut écrire :

$$D_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = \int_{\Gamma_{M,i}} f_i(y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \theta(y) d\sigma(y) = - \int_{\Gamma_{M,i}} \nabla_{\Gamma_i}(f_i(y)) \cdot \theta(y) d\sigma(y)$$

avec

$$\nabla_{\Gamma_i}(f_i(y)) = \int_{\Gamma_i} \left[\nabla_{\Gamma_i}(G_i(x, y) \mathbf{j}_i(y)) \right] \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x)$$

Or, pour deux vecteurs quelconques \mathbf{u}, \mathbf{v} et un scalaire a , on a que :

$$\left[\nabla_{\Gamma}(a\mathbf{u}) \right] \mathbf{v} = a \left[\nabla_{\Gamma} \mathbf{u} \right] \mathbf{v} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \nabla_{\Gamma} a$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \left[\nabla_{\Gamma_i}(G_i(x, y) \mathbf{j}_i(y)) \right] \mathbf{p}_i(x) &= G_i(x, y) \left[\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) \right] \mathbf{p}_i(x) + (\mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) \nabla_{\Gamma_i} G_i(x, y) \\ &= G_i(x, y) \left[\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) \right] \mathbf{p}_i(x) + (\mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) \nabla_y G_i(x, y) \\ &\quad - (\mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) (\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \nabla_y G_i(x, y)) \boldsymbol{\nu}_i(y) \end{aligned}$$

Et on obtient bien

$$\begin{aligned} \nabla_{\Gamma_i}(f_i(y)) &= \underbrace{\int_{\Gamma_i} G_i(x, y) \left[\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) \right] \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x)}_{-d_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)} - \underbrace{\int_{\Gamma_i} (\mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) \nabla_x G_i(x, y) d\sigma(x)}_{d_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Gamma_i} (\mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) (\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \nabla_x G_i(x, y)) \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma(x)}_{-d_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)} \quad \square \end{aligned}$$

4.2.5 Terme E_i

Proposition 3.18. Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ et $\mathbf{j}, \mathbf{p} \in H_{\operatorname{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Si $\theta = 0$ sur $\Gamma \setminus \Gamma_M$, alors le terme $E_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i), \forall i = 1, \dots, 2$ donné par (3.28) se réécrit de la manière suivante :

$$E_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = \int_{\Gamma_{M,i}} \left(e_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + e_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + e_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \quad (3.45)$$

où

$$e_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = \int_{\Gamma_i} \left[\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) \right] \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x) \quad (3.46)$$

$$e_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = \int_{\Gamma_i \setminus \Gamma_{M,i}} \left[\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) \right] \left[\nabla_x \nabla_x G_i(x, y) \right]^t \left((\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) \boldsymbol{\nu}_i(y) \right) d\sigma(x) \quad (3.47)$$

$$e_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = \int_{\Gamma_i} (\mathbf{p}_i(y) \cdot \nabla_x G_i(x, y)) \nabla_{\Gamma_i}(\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{p}_i(x)) d\sigma(x) \quad (3.48)$$

Preuve. Sachant que

$$\text{Trace}\left([\nabla_{\Gamma_i}\theta(y)][\nabla_{\Gamma_i}\mathbf{j}_i(y)]\right) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{j}_i(y)}{\partial k} \cdot \nabla_{\Gamma_i}\theta_k(y)$$

et en notant

$$f_i(x, y) = \mathbf{p}_i(x) \cdot \nabla_x G_i(x, y)$$

On peut utiliser la formule de Stokes (1.18) :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} f_i(x, y) \text{Trace}\left([\nabla_{\Gamma_i}\theta(y)][\nabla_{\Gamma_i}\mathbf{j}_i(y)]\right) d\sigma(y) &= \int_{\Gamma_{M,i}} f_i(x, y) \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \mathbf{j}_i(y)}{\partial k} \cdot \nabla_{\Gamma_i}\theta_k(y) d\sigma(y) \\ &= - \sum_{k=1}^3 \int_{\Gamma_{M,i}} \theta_k(y) \text{div}_{\Gamma_i} \left(f_i(x, y) \frac{\partial \mathbf{j}_i(y)}{\partial k} \right) d\sigma(y) \end{aligned}$$

où

$$\text{div}_{\Gamma_i} \left(f_i(x, y) \frac{\partial \mathbf{j}_i(y)}{\partial k} \right) = \nabla_{\Gamma_i} f_i(x, y) \cdot \frac{\partial \mathbf{j}_i(y)}{\partial k} + f_i(x, y) \text{div}_{\Gamma_i} \left(\frac{\partial \mathbf{j}_i(y)}{\partial k} \right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \theta_k(y) \text{div}_{\Gamma_i} \left(f_i(x, y) \frac{\partial \mathbf{j}_i(y)}{\partial k} \right) &= \sum_{k=1}^3 \theta_k(y) \nabla_{\Gamma_i} f_i(x, y) \cdot \frac{\partial \mathbf{j}_i(y)}{\partial k} + \sum_{k=1}^3 \theta_k(y) \frac{\partial}{\partial k} (\text{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)) f_i(x, y) \\ &= \theta(y) \cdot \left([\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] [\nabla_{\Gamma_i, y} \nabla_x G_i(x, y)] \mathbf{p}_i(x) \right) \\ &\quad + \theta(y) \cdot \left((\mathbf{p}_i(x) \cdot \nabla_x G_i(x, y)) \nabla_{\Gamma_i} (\text{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)) \right) \end{aligned}$$

En utilisant la définition du gradient tangentiel et le fait que $\boldsymbol{\nu}_i(x) \cdot \mathbf{p}_i(x) = 0 \forall x \in \Gamma_i$, on montre que :

$$[\nabla_{\Gamma_i, y} \nabla_x G_i(x, y)] \mathbf{p}_i(x) = -[\nabla_{\Gamma_i, x} \nabla_x G_i(x, y)] \mathbf{p}_i(x) + (\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}_i(y)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} E_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) &= - \int_{\Gamma_{M,i}} \left(\underbrace{\int_{\Gamma_i} [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] [\nabla_{\Gamma_i, x} \nabla_x G_i(x, y)] \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x)}_{-e_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)} \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\Gamma_{M,i}} \left(\underbrace{\int_{\Gamma_i} [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \left((\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) \boldsymbol{\nu}_i(y) \right) d\sigma(x)}_{e_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)} \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \\ &\quad + \int_{\Gamma_{M,i}} \left(\underbrace{\int_{\Gamma_i} (\mathbf{p}_i(y) \cdot \nabla_x G_i(x, y)) \nabla_{\Gamma_i} (\text{div}_{\Gamma_i} \mathbf{p}_i(x)) d\sigma(x)}_{e_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)} \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \end{aligned}$$

Le domaine d'intégration du terme $e_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$ est réduit du fait de la nullité, $\forall y \in \Gamma_{M,i}$, du terme $\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x) = 0$ si $x \in \Gamma_{M,i}$.

Enfin, on termine la preuve en appliquant une dernière fois la formule de Stokes, on a :

$$\begin{aligned} e_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) &= - \int_{\Gamma_i} [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] [\nabla_{\Gamma_i, x} \nabla_x G_i(x, y)] \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x) \\ &= \int_{\Gamma_i} [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x) \quad \square \end{aligned}$$

4.2.6 Terme F_i

Proposition 3.19. *Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ et $\mathbf{j}, \mathbf{p} \in H_{\operatorname{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Si $\theta = 0$ sur $\Gamma \setminus \Gamma_M$, alors le terme $F_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i)$, $\forall i = 1, \dots, 2$ donné par (3.29) se réécrit de la manière suivante :*

$$F_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = \int_{\Gamma_{M,i}} \left(f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + f_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \quad (3.49)$$

où

$$f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \int_{\Gamma_i} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(x) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \mathbf{p}_i(y) d\sigma(x) \quad (3.50)$$

$$f_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x) \quad (3.51)$$

$$(3.52)$$

Preuve. En écrivant

$$F_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = \int_{\Gamma_i} \int_{\Gamma_i} \left([\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)] (\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) \mathbf{p}_i(x)) \right) \cdot (\theta(x) - \theta(y)) d\sigma(y) d\sigma(x)$$

et en effectuant la même démarche que pour les preuves des propositions 3.14 et 3.16, on obtient le résultat. \square

4.2.7 Terme H_i

Proposition 3.20. *Soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ et $\mathbf{j}, \mathbf{p} \in H_{\operatorname{div}}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Si $\theta = 0$ sur $\Gamma \setminus \Gamma_M$, alors le terme $H_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i)$, $\forall i = 1, \dots, 2$ donné par (3.30) se réécrit de la manière suivante :*

$$H_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = \int_{\Gamma_{M,i}} \left(h_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + h_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + h_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \quad (3.53)$$

où

$$h_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i \setminus \Gamma_{M,i}} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) (\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma(x) \quad (3.54)$$

$$h_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \int_{\Gamma_i} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x) \quad (3.55)$$

$$h_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i} (\nabla_x G_i(x, y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) \nabla_{\Gamma_i} (\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)) d\sigma(x) \quad (3.56)$$

Preuve. On pose :

$$f_i(y) = \int_{\Gamma_i} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) (\nabla_x G_i(x, y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) d\sigma(x)$$

Ainsi, en utilisant la formule de Stokes (1.18) vue au chapitre 1, on peut écrire :

$$H_i(\mathbf{j}_i, \mathbf{p}_i) = \int_{\Gamma_{M,i}} f_i(y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \theta(y) d\sigma(y) = - \int_{\Gamma_{M,i}} \nabla_{\Gamma_i} (f_i(y)) \cdot \theta(y) d\sigma(y)$$

avec

$$\begin{aligned} \nabla_{\Gamma_i} (f_i(y)) &= \int_{\Gamma_i} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) [\nabla_{\Gamma_i, y} \nabla_x G_i(x, y)] \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x) \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Gamma_i} (\nabla_x G_i(x, y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) \nabla_{\Gamma_i} (\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)) d\sigma(x)}_{-h_i^3 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)} \end{aligned}$$

Comme dans la preuve de la proposition 3.18, on décompose la matrice $[\nabla_{\Gamma_i, y} \nabla_x G_i(x, y)]$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_i} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) [\nabla_{\Gamma_i, y} \nabla_x G_i(x, y)] \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x) &= - \underbrace{\int_{\Gamma_i} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x)}_{h_i^2 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)} \\ &\quad + \underbrace{\int_{\Gamma_i \setminus \Gamma_{M,i}} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) (\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma(x)}_{-h_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)} \end{aligned}$$

D'où le résultat. \square

4.3 Une quatrième et dernière expression de la dérivée de forme

On peut désormais réécrire la dérivée de forme de la fonction coût sous la forme appropriée à la résolution par la méthode Level Set.

Pour $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$, $\{\mathbf{j}_i, \mathbf{m}_i\}$ solution de (3.6) et $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i\}$ solution de (3.11), $\forall i = 1, 2$, on reprend l'expression (3.23) de cette dérivée et en y injectant les calculs effectués précédemment, on obtient :

$$J'(\Gamma)(\theta) = \int_{\Gamma_M} \left(\frac{1}{2} \Re \left(\sum_{i=1}^2 r_i [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{q}](y) \right) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \quad (3.57)$$

où

$$\begin{aligned}
 r_i[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{q}](y) = & + \frac{i}{\omega \varepsilon_i} \left(f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + f_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + h_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + h_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right. \\
 & \left. + h_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + e_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + e_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + e_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right) \\
 & + i\omega\mu_i \left(c_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + c_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + d_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right. \\
 & \left. + d_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + d_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right) \\
 & - \left(a_i^1[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) + a_i^2[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) \right) \\
 & - \left(b_i^1[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) + b_i^2[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) + b_i^3[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) \right) \\
 & - \left(a_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{q}](y) + a_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{q}](y) \right) \\
 & - \left(b_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{q}](y) + b_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{q}](y) + b_i^3[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{q}](y) \right) \\
 & - \frac{i}{\omega\mu_i} \left(f_i^1[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + f_i^2[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + h_i^1[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + h_i^2[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) \right. \\
 & \left. + h_i^3[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + e_i^1[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + e_i^2[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + e_i^3[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) \right) \\
 & - i\omega\varepsilon_i \left(c_i^1[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + c_i^2[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + d_i^1[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) \right. \\
 & \left. + d_i^2[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + d_i^3[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) \right)
 \end{aligned}$$

Or, on remarque que certains termes s'annulent :

$$\begin{aligned}
 a_i^2[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) &= -b_i^3[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) \\
 c_i^2[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) &= -d_i^3[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) \\
 e_i^3[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) &= -h_i^3[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) \\
 f_i^2[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) &= -h_i^2[\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y)
 \end{aligned}$$

On énonce à présent la proposition qui résume tous les résultats obtenus dans le chapitre, en nous donnant l'expression de la dérivée de forme de la fonction coût qui sera utilisée par la suite dans l'algorithme d'optimisation par la méthode Level Set.

Proposition 3.21. *Soit un objet rayonnant défini comme sur la figure 3.1 et soit $\theta \in W^{1,\infty}(\Gamma, \Gamma)$ un champ de vecteurs tel que*

$$\forall x \in \Gamma \setminus \Gamma_M, \theta(x) = 0 \text{ et } \forall x \in \partial\Gamma_M, \theta(x) = 0$$

Soient $\{\mathbf{j}_i, \mathbf{m}_i\}$ solution du problème direct (3.6) et $\{\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_i\}$ solution du problème adjoint (3.11), $\forall i = 1, 2$.

Alors la dérivée de forme de la fonction coût définie par (3.3) peut s'écrire sous la forme :

$$J'(\Gamma)(\theta) = \int_{\Gamma_M} \left(\frac{1}{2} \Re \left(\sum_{i=1}^2 r_i [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{q}](y) \right) \right) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \quad (3.58)$$

avec

$$\begin{aligned} r_i [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{m}, \mathbf{p}, \mathbf{q}](y) = & + \frac{i}{\omega \varepsilon_i} \left(f_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + h_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + e_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + e_i^2 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right) \\ & + i\omega\mu_i \left(c_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + d_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) + d_i^2 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \right) \\ & - \left(a_i^1 [\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) + b_i^1 [\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) + b_i^2 [\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{p}](y) \right) \\ & - \left(a_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{q}](y) + b_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{q}](y) + b_i^2 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{q}](y) \right) \\ & - \frac{i}{\omega\mu_i} \left(f_i^1 [\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + h_i^1 [\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + e_i^1 [\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + e_i^2 [\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) \right) \\ & - i\omega\varepsilon_i \left(c_i^1 [\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + d_i^1 [\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) + d_i^2 [\Gamma, \mathbf{m}, \mathbf{q}](y) \right) \end{aligned} \quad (3.59)$$

où

$$\begin{aligned} a_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) & = + \int_{\Gamma_i} [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t (\mathbf{j}_i(x) \times \mathbf{p}_i(y)) d\sigma(x) \\ b_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) & = - \int_{\Gamma_i} [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] (\nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{p}_i(x)) d\sigma(x) \\ b_i^2 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) & = - \int_{\Gamma_i} \left(\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x)) \right) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma(x) \\ c_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) & = + \int_{\Gamma_i} (\mathbf{p}_i(y) \cdot \mathbf{j}_i(x)) \nabla_x G_i(x, y) d\sigma(x) \\ d_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) & = - \int_{\Gamma_i} G_i(x, y) [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x) \\ d_i^2 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) & = - \int_{\Gamma_i} (\mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) (\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \nabla_x G_i(x, y)) \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma(x) \\ e_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) & = + \int_{\Gamma_i} [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{p}_i(x) d\sigma(x) \\ e_i^2 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) & = + \int_{\Gamma_i \setminus \Gamma_{M,i}} [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \left((\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) \boldsymbol{\nu}_i(y) \right) d\sigma(x) \\ f_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) & = + \int_{\Gamma_i} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(x) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \mathbf{p}_i(y) d\sigma(x) \\ h_i^1 [\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) & = - \int_{\Gamma_i \setminus \Gamma_{M,i}} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) (\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma(x) \end{aligned}$$

Chapitre 4

Discrétisation par éléments finis de frontière

Contents

1	Résolution du problème adjoint	112
1.1	Décomposition dans la base des modes	112
1.2	Formulation variationnelle du problème adjoint	113
1.3	Résolution numérique	114
2	Écriture dans la base des éléments finis de frontière	115
2.1	Rappels des formules de discrétisation	115
2.2	Reformulation des termes hypersinguliers	117
2.3	Bilan : formulation discrète de la vitesse	119
3	Gestion des singularités	120
3.1	Intégrales singulières	121
3.2	Alternance des formules de Gauss	122

Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la discrétisation des résultats présentés dans le chapitre précédent, en vue de leur implémentation au sein d'un algorithme d'optimisation de forme.

Dans un premier temps, on s'intéresse au calcul de l'état adjoint. En effet, les termes présentés dans la proposition 3.21 du chapitre précédent font intervenir à la fois la solution du problème direct et la solution du problème adjoint. Ce dernier, d'une structure similaire au problème direct, sera résolu au sein du code de calcul *Antenna Design*.

On montre dans cette section que la résolution de ce problème est grandement simplifiée par les propriétés bien particulières de la propagation des ondes par modes guidés : dans un guide d'ondes, le champ électromagnétique peut se décomposer dans la base de ces modes. Cette décomposition est utilisée lors de l'écriture de la formulation variationnelle du problème direct. Ainsi, en écrivant de la même manière la formulation variationnelle du problème adjoint, on obtient un système matriciel à résoudre très similaire à celui du problème direct. L'implémentation et la résolution en sont donc fortement facilitées.

La seconde section de ce chapitre présente l'écriture des termes constitutifs de la dérivée de forme présentés dans la proposition 3.21 du chapitre précédent dans la base de discrétisation considérée, à savoir la base des éléments finis de frontière.

Nous commençons par rappeler les principales formules liées au calcul numérique des intégrales et à leur décomposition dans la base des éléments du maillage, déjà présentées dans le chapitre 1.

Cette décomposition, associée à une utilisation de la formule de Stokes, va nous permettre de reformuler un terme intégral qui nous gênait, du fait de son hypersingularité, et de lui faire gagner un degré de régularité.

À la suite de ça, nous pouvons faire le bilan des termes discrétisés à implémenter dans le but de calculer numériquement la dérivée de forme de la fonction objectif.

Enfin, dans une troisième section, nous présentons les traitements utilisés afin de calculer, de manière aussi simple que possible, les intégrales singulières. En effet, la quasi-totalité des termes de la proposition 3.21 ont un intégrande singulier. Cela signifie que lorsqu'on s'approche du point de singularité, ces intégrales ne sont plus définies.

Le calcul précis d'intégrales singulières étant extrêmement compliqué et coûteux à mettre en œuvre, nous avons pris le parti dans ces travaux d'utiliser des techniques plus simples et moins élaborées pour s'affranchir de ces singularités. Nous justifions ici cette approche de manière formelle, et montrons que le calcul approché de ces intégrales tel qu'il est effectué ici n'a que peu d'incidence sur le résultat final.

1 Résolution du problème adjoint

La première étape de l'implémentation numérique des termes calculés dans le chapitre précédent est le calcul de l'état adjoint. Il s'agit de la seule étape de calcul qui est intrusive : la résolution du problème adjoint s'effectue de manière similaire à celle du problème direct et doit donc être implémentée au sein du code de calcul *Antenna Design*.

1.1 Décomposition dans la base des modes

Dans un premier temps, nous devons revenir sur une technique utilisée lors de la résolution du problème direct et qui nous sera utile pour la résolution du problème adjoint. Sur le maillage, les inconnues et les fonctions tests sont décomposés en degrés de liberté, comme présenté au chapitre 1. Cependant, pour les éléments du maillage appartenant au plan de champ, les choses se passent un peu différemment.

Nous avons vu dans le chapitre 1 que dans un guide d'onde, tout champ électromagnétique peut se décomposer dans une base de modes guidés dont un seul un nombre fini est propagatif, les autres étant évanescents.

Ainsi, pour une fréquence donnée, si on a n_m modes propagatifs, alors on peut écrire les décompositions suivantes pour le champ incident :

$$\forall x \in \Gamma_e, \mathbf{E}^{\text{inc}}(x) = \sum_{m_i}^{n_m} \beta_{m_i} \mathbf{E}_{m_i}^{\text{inc}}(x) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}^{\text{inc}}(x) = \sum_{m_i}^{n_m} \beta_{m_i} \mathbf{H}_{m_i}^{\text{inc}}(x)$$

où les $\beta_{m_i}, \forall m_i = 1, \dots, n_m$ sont les coefficients de la décomposition du champ incident dans la base des modes, et les $\mathbf{E}_{m_i}^{\text{inc}}, \forall m_i = 1, \dots, n_m$ sont les modes incidents normalisés

en énergie.

Lorsque le plan de champ est suffisamment loin de l'embouchure du guide, les modes réfléchis évanescents sont suffisamment atténués pour ne pas être pris en compte dans l'expression du mode réfléchi. On peut donc tronquer la somme sur les modes et on obtient :

$$\forall x \in \Gamma_e, \quad \mathbf{E}(x) = \sum_{m_i}^{n_m} \sum_{m_r}^{n_m} \beta_{m_i} \alpha_{m_i m_r} \mathbf{E}_{m_r}(x) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}(x) = \sum_{m_i}^{n_m} \sum_{m_r}^{n_m} \beta_{m_i} \alpha_{m_i m_r} \mathbf{H}_{m_r}(x)$$

L'ensemble des coefficients $\alpha_{m_i m_r}, \forall m_i = 1, \dots, n_m, \forall m_r = 1, \dots, n_m$ forme la *matrice S* des coefficients de réflexion et de transmission entre le mode m_i et le mode m_r .

$\forall m_i = 1, \dots, n_m$, les modes incidents et réfléchis $\mathbf{E}_{m_i}^{\text{inc}}$ et \mathbf{E}_{m_i} sont identiques au sens de propagation près :

$$\mathbf{E}_{m_i}^{\text{inc}}(x, t) = \mathbf{A}_{m_i}(x_1, x_2) e^{-i(kx_3 - \omega t)} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_{m_i}(x, t) = \mathbf{A}_{m_i}(x_1, x_2) e^{-i(-kx_3 - \omega t)}$$

Pour le champ magnétique, on a donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{m_i}^{\text{inc}}(x, t) &= \nabla \times \mathbf{E}_{m_i}^{\text{inc}}(x, t) = \nabla \times \left(\mathbf{A}_{m_i}(x_1, x_2) e^{-i(kx_3 - \omega t)} \right) \\ \mathbf{H}_{m_i}(x, t) &= \nabla \times \mathbf{E}_{m_i}(x, t) = \nabla \times \left(\mathbf{A}_{m_i}(x_1, x_2) e^{-i(-kx_3 - \omega t)} \right) \end{aligned}$$

Par convention, on choisit de placer le plan de champ Γ_e dans le plan de référence des phases, c'est-à-dire à la hauteur $x_3 = 0$. Ainsi,

$$\forall x \in \Gamma_e, \quad \mathbf{E}_{m_i}(x) = \mathbf{E}_{m_i}^{\text{inc}}(x) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}_{m_i}(x) = -\mathbf{H}_{m_i}^{\text{inc}}(x)$$

Sur le plan de champ, les champs et les courants sont pleinement déterminés par la connaissance des modes et des coefficients de la décomposition modale. Ces modes étant généralement beaucoup moins nombreux que les éléments du maillage, il est bien plus intéressant de calculer les inconnues dans la base des modes plutôt que dans la base des degrés de liberté.

1.2 Formulation variationnelle du problème adjoint

Intéressons-nous tout d'abord à l'écriture de la formulation variationnelle du problème direct sur le plan de champ. Nous avons vu que les inconnues pouvaient se décomposer dans la base des modes. Ainsi, le second membre b_D de la formulation variationnelle du problème direct (3.6) du chapitre 3 sur le plan de champ s'écrit :

$$\begin{aligned} b_D \mathbf{1}_{\Gamma_e} &= - \int_{\Gamma_e} \left(\mathbf{E}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{j}'(x) - \mathbf{H}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{m}'(x) \right) d\sigma(x) \\ &= - \int_{\Gamma_e} \left(\sum_{m_i}^{n_m} \beta_{m_i} \mathbf{E}_{m_i}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{j}'(x) - \sum_{m_i}^{n_m} \beta_{m_i} \mathbf{H}_{m_i}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{m}'(x) \right) d\sigma(x) \end{aligned}$$

Le choix effectué dans *Antenna Design* est de décomposer le second membre dans la base des modes. Au niveau matriciel, on aura donc un second membre par mode. Au niveau de la formulation variationnelle, cela revient à écrire :

$$\begin{aligned} b_D \mathbf{1}_{\Gamma_e} &= - \sum_{m_i}^{n_m} \left(\int_{\Gamma_e} \beta_{m_i} \mathbf{E}_{m_i}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{j}'(x) - \beta_{m_i} \mathbf{H}_{m_i}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{m}'(x) d\sigma(x) \right) \\ &= \sum_{m_i}^{n_m} \beta_{m_i} b_{m_i} \end{aligned}$$

Intéressons-nous à présent à l'écriture de la formulation variationnelle du problème adjoint (3.11) du chapitre 3. Son second membre s'écrit :

$$\begin{aligned} b_A &= \int_{\Gamma_e} \left((\overline{\mathbf{m}} \times \boldsymbol{\nu}) \cdot \mathbf{j}'(x) + (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{m}}) \cdot \mathbf{m}'(x) \right) d\sigma(x) \\ &= - \int_{\Gamma_e} \left(\overline{\mathbf{E}}(x) \cdot \mathbf{j}'(x) - \overline{\mathbf{H}}(x) \cdot \mathbf{m}'(x) \right) d\sigma(x) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne dans la base des modes :

$$\begin{aligned} b_A &= - \sum_{m_i}^{n_m} \sum_{m_r}^{n_m} \left(\int_{\Gamma_e} \overline{\beta}_{m_i} \overline{\alpha}_{m_i m_r} \overline{\mathbf{E}}_{m_r}(x) \cdot \mathbf{j}'(x) + \overline{\beta}_{m_i} \overline{\alpha}_{m_i m_r} \overline{\mathbf{H}}_{m_r}(x) \cdot \mathbf{m}'(x) d\sigma(x) \right) \\ &= - \sum_{m_i}^{n_m} \sum_{m_r}^{n_m} \left(\int_{\Gamma_e} \overline{\beta}_{m_i} \overline{\alpha}_{m_i m_r} \overline{\mathbf{E}}_{m_r}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{j}'(x) - \overline{\beta}_{m_i} \overline{\alpha}_{m_i m_r} \overline{\mathbf{H}}_{m_r}^{\text{inc}}(x) \cdot \mathbf{m}'(x) d\sigma(x) \right) \\ &= \sum_{m_i}^{n_m} \sum_{m_r}^{n_m} \overline{\beta}_{m_i} \overline{\alpha}_{m_i m_r} \overline{b}_{m_r} \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que les fonctions de base \mathbf{j}' et \mathbf{m}' sont réelles.

Le second membre du problème adjoint dépend donc linéairement du conjugué du second membre du problème direct et des coefficients de réflexion sur chaque mode.

Enfin, étudions le membre de gauche de la formulation variationnelle du problème adjoint. On a de manière quasi-immédiate que

$$\int_{\Gamma} L^*[\mathbf{p}](x) \cdot \mathbf{j}'(x) d\sigma(x) = \int_{\Gamma} L[\mathbf{p}](x) \cdot \mathbf{j}'(x) d\sigma(x)$$

et que

$$\int_{\Gamma} K^*[\mathbf{q}](x) \cdot \mathbf{j}'(x) d\sigma(x) = \int_{\Gamma} K[\mathbf{q}](x) \cdot \mathbf{j}'(x) d\sigma(x)$$

La matrice du problème adjoint est donc la même que la matrice du problème direct.

1.3 Résolution numérique

Par souci de clarté, nous noterons J le vecteur des degrés de liberté électriques et magnétiques et P le vecteur des degrés de liberté adjoints électriques et magnétiques. Numériquement, le problème direct est traduit par le problème matriciel suivant :

$$[A][J_1 \cdots J_{n_m}] = [B_1 \cdots B_{n_m}] \quad (4.1)$$

L'écriture matricielle du problème adjoint est donc :

$$[A][P_1 \cdots P_{n_m}] = \left[\overline{\beta}_1 \sum_{m_r}^{n_m} \overline{\alpha}_{1m_r} (\overline{B}_{m_r} \mathbf{1}_{\Gamma_e}) \cdots \overline{\beta}_{n_m} \sum_{m_r}^{n_m} \overline{\alpha}_{n_m m_r} (\overline{B}_{m_r} \mathbf{1}_{\Gamma_e}) \right] \quad (4.2)$$

Ce qui équivaut à écrire

$$\forall m_i = 1, \dots, n_m, P_{m_i} = \overline{\beta}_{m_i} \sum_{m_r}^{n_m} \overline{\alpha}_{m_i m_r} U_{m_r} \quad \text{où} \quad [A][U_1 \cdots U_{n_m}] = [(\overline{B}_1 \mathbf{1}_{\Gamma_e}) \cdots (\overline{B}_{n_m} \mathbf{1}_{\Gamma_e})]$$

La résolution numérique de ce problème est donc très facile à mettre en œuvre :

- Aux m vecteurs de second membre du problème direct, on rajoute m seconds membres relatifs au problème adjoint. Le système matriciel à résoudre devient donc :

$$[A][J_1 \cdots J_{n_m} U_1 \cdots U_{n_m}] = [B_1 \cdots B_{n_m} (\overline{B}_1 \mathbb{1}_{\Gamma_e}) \cdots (\overline{B}_{n_m} \mathbb{1}_{\Gamma_e})]$$

- On résout le système matriciel précédent à l'aide de la factorisation de Cholesky
- Les solutions du problème direct $J_1 \cdots J_{n_m}$ nous donnent accès aux coefficients de réflexion $\alpha_{n_m m_r}, \forall m_i = 1, \dots, n_m, \forall m_r = 1, \dots, n_m$. On peut donc reconstruire a posteriori les solutions du problème adjoint :

$$[P_1 \cdots P_{n_m}] = \left[\overline{\beta}_1 \sum_{m_r}^{n_m} \overline{\beta}_{1 m_r} U_{m_r} \cdots \overline{\beta}_{n_m} \sum_{m_r}^{n_m} \overline{\alpha}_{n_m m_r} U_{m_r} \right]$$

Remarque 4.1. Comme nous l'avons mentionné dans les chapitres précédents, nous sommes intéressés en pratique par avoir une propagation monomodale. Nous n'avons donc qu'un seul second membre pour le problème direct et un seul pour le problème adjoint, et il en va de même pour les solutions ainsi que pour le coefficient de réflexion. Le système linéaire à résoudre est donc dans ce cas

$$[A][J U] = [B (\overline{B} \mathbb{1}_{\Gamma_e})] \quad (4.3)$$

et l'état adjoint devient

$$P = \overline{\beta} \overline{\alpha} U \quad (4.4)$$

2 Écriture dans la base des éléments finis de frontière

Dans le chapitre précédent, nous avons énoncé la proposition 3.21 qui donne l'expression de la dérivée de forme de la fonction coût en fonction des solutions du problème direct et du problème adjoint.

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, nous allons extraire de cette dérivée la vitesse pour le transport de la frontière, conformément à la présentation qui a été faite de l'algorithme d'optimisation de forme par méthode Level Set.

Le problème direct et le problème adjoint étant résolus de manière approchée par une méthode d'éléments finis de frontière, nous allons devoir exprimer la vitesse en fonction des solutions discrètes obtenues après résolution des problèmes. Cela nécessite l'écriture des termes présentés dans le chapitre précédent dans la base des éléments finis de frontière, afin que ceux-ci soient directement exprimés en fonction des grandeurs calculées par le code de calcul *Antenna Design*.

2.1 Rappels des formules de discrétisation

2.1.1 Calcul d'intégrales sur le maillage

On rappelle que l'on approche la surface Γ par un maillage triangulaire, noté Γ_h . Les équations intégrales sont résolues par une méthode d'éléments finis de frontière telle

qu'elle a été présentée dans la section 2.2 du chapitre 1.

Ainsi, si on note $K \in \Gamma_h$ un triangle du maillage, on peut écrire la décomposition suivante pour une intégrale sur Γ , où f est une fonction quelconque définie sur la surface :

$$\forall y \in \Gamma, \int_{\Gamma} f(x, y) d\sigma(x) = \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K f(x, y) d\sigma_K(x) \quad (4.5)$$

2.1.2 Formule de quadrature de Gauss

On rappelle désormais la formule d'intégration de Gauss utilisée pour le calcul des intégrales sur les triangles du maillage :

$$\forall y \in \Gamma, \forall K \in \Gamma_h, \int_K f(x, y) d\sigma_K(x) \approx |K| \sum_{s=1}^{N_G} \omega_s f|_K(x_s, y) \quad (4.6)$$

où N_G est le nombre de points de Gauss considérés, x_s leurs coordonnées et ω_s les poids qui y sont associés.

2.1.3 Interpolation des inconnues sur le maillage

Les formules (4.5) et (4.6) rappelées précédemment nous permettent d'exprimer les termes intervenant dans la vitesse et listés dans la proposition 3.21 en fonction des solutions des problèmes direct et adjoint prises en des points particuliers qui sont les points de Gauss des triangles du maillage.

Les dernières formules qui nous manquent sont donc celles qui donnent \mathbf{j} , \mathbf{m} , \mathbf{p} , \mathbf{q} et leurs dérivées en tout point du maillage. Par la suite, nous donnerons ces formules pour l'inconnue \mathbf{j} , mais elles s'écrivent de la même manière pour \mathbf{m} , \mathbf{p} et \mathbf{q} .

Le code direct nous donne accès aux degrés de liberté $\lambda_{l,K}$ qui représentent le flux de \mathbf{j} (et identiquement \mathbf{m} , \mathbf{p} , \mathbf{q}) à travers l'arête l de l'élément K :

$$\lambda_{l,K} = \int_{K'_l} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_l ds$$

Les fonctions de base des éléments de Raviart-Thomas sont pour l'arête l de l'élément K :

$$\mathbf{B}_{l,K}(x) = \frac{1}{2|K|} (\mathbf{r}(x) - \mathbf{r}_{l-1}) \quad \forall x \in K$$

Ainsi, la valeur de l'inconnue \mathbf{j} (et identiquement \mathbf{m} , \mathbf{p} , \mathbf{q}) en un point quelconque x d'un triangle K s'exprime en fonction des degrés de libertés et des fonctions de base :

$$\mathbf{j}|_K(x) = \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K} \mathbf{B}_{l,K}(x) \quad (4.7)$$

Cette formule nous donne accès aux autres grandeurs que nous devons discrétiser, à savoir la divergence surfacique et le gradient tangentiel des inconnues. Les fonctions de bases étant linéaires, ces quantités seront constantes par élément. Ainsi, si on note (x_1, x_2, x_3) les coordonnées du point x appartenant au triangle K et a_l^1, a_l^2, a_l^3 les coordonnées du

sommet $a_l, \forall l = 1, \dots, 3$ du triangle K , alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall j = 1, \dots, 3, \partial_j \mathbf{j}|_K(x) &= \frac{1}{2|K|} \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K} \partial_j \left((x_1 - a_{l-1}^1) \mathbf{e}_1 + (x_2 - a_{l-1}^2) \mathbf{e}_2 + (x_3 - a_{l-1}^3) \mathbf{e}_3 \right) \\ &= \frac{1}{2|K|} \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K} \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

Et donc la matrice jacobienne de \mathbf{j} s'écrit :

$$\forall x \in K, [\nabla \mathbf{j}|_K](x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2|K|} \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2|K|} \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2|K|} \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K} \end{pmatrix}$$

Ce qui nous donne pour la divergence

$$\forall x \in K, \operatorname{div} \mathbf{j}|_K(x) = \frac{3}{2|K|} \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K}$$

et pour la divergence surfacique

$$\forall x \in K, \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{j}|_K(x) = \operatorname{div} \mathbf{j}|_K(x) - \left([\nabla \mathbf{j}|_K](x) \boldsymbol{\nu}(x) \right) \cdot \boldsymbol{\nu}(x)$$

Ce qui, de manière immédiate, revient à écrire :

$$\forall x \in K, \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{j}|_K(x) = \frac{1}{|K|} \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K} \quad (4.8)$$

On a également besoin de la matrice gradient tangentiel de \mathbf{j} , qui s'écrit, pour un vecteur quelconque \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} \forall x \in K, [\nabla_{\Gamma} \mathbf{j}|_K](x) \mathbf{u}(x) &= [\nabla \mathbf{j}|_K](x) \mathbf{u}(x) - \left(\boldsymbol{\nu}(x) \cdot [\nabla \mathbf{j}|_K](x) \mathbf{u}(x) \right) \boldsymbol{\nu}(x) \\ &= \left(\frac{1}{2|K|} \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K} \right) \mathbf{u}(x) - \left(\frac{1}{2|K|} \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K} \right) \left(\boldsymbol{\nu}(x) \cdot \mathbf{u}(x) \right) \boldsymbol{\nu}(x) \end{aligned}$$

Ce qui nous donne au final :

$$\forall x \in K, [\nabla_{\Gamma} \mathbf{j}|_K](x) \mathbf{u}(x) = \left(\frac{1}{2|K|} \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K} \right) \mathbf{u}_T(x) \quad (4.9)$$

2.2 Reformulation des termes hypersinguliers

Les termes intégraux formulés dans la proposition 3.21 se décomposent, comme vu dans la formule (4.5), en somme d'intégrales sur les triangles du maillage. Cependant, certains termes font intervenir les dérivées secondes du noyau de Green : ce sont des intégrales hypersingulières.

2.2.1 Classification des termes

Parmi les termes intégraux présentés dans la proposition 3.21, cinq d'entre eux font intervenir la matrice Hessienne du noyau de Green : il s'agit des termes $a_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$, $b_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$, $e_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$, $f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$ et $h_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$.

On sait que la variable d'espace y ne parcourt pas l'ensemble de la surface Γ mais uniquement sa partie Γ_M . Ces intégrales sont hypersingulières lorsque les points x et y sont proches, c'est-à-dire lorsque $x \in \Gamma_M$.

On peut alors séparer ces termes en trois catégories :

- Les termes

$$e_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = \int_{\Gamma_i \setminus \Gamma_{M,i}} [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \left((\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) \boldsymbol{\nu}_i(y) \right) d\sigma(x)$$

$$\text{et } h_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i \setminus \Gamma_{M,i}} \text{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) (\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i(x)) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma(x)$$

sont en fait réguliers, car leur domaine d'intégration exclut Γ_M et est donc disjoint du domaine auquel appartient le point y .

- Les termes

$$a_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \int_{\Gamma_i} [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t (\mathbf{j}_i(x) \times \mathbf{p}_i(y)) d\sigma(x)$$

$$\text{et } b_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \int_{\Gamma_i} \left(\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i(x)) \right) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma(x)$$

ne s'annulent pas lorsque $x \in \Gamma_M$ mais on remarque que seule leur composante suivant la normale $\boldsymbol{\nu}$ est non nulle.

Nous verrons au chapitre suivant, lors du calcul de la vitesse numérique pour l'équation de transport, que seuls les termes tangentiels à Γ_M sont considérés. Le calcul de ces intégrales hypersingulières n'aura donc pas d'incidence sur le calcul de la vitesse, et ne nécessite donc pas d'être traité.

- Le terme

$$f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \int_{\Gamma_i} \text{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(x) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \mathbf{p}_i(y) d\sigma(x)$$

est quant à lui réellement hypersingulier et nécessite d'être traité. Ce traitement est l'objet du paragraphe suivant.

2.2.2 Terme $f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$

On va utiliser la décomposition de ce terme en somme d'intégrales sur les triangles du maillage pour les reformuler de manière à supprimer l'hypersingularité :

$$\begin{aligned} f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) &= \int_{\Gamma_i} \text{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(x) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \mathbf{p}_i(y) d\sigma(x) \quad \text{où } y \in \Gamma_M \\ &= \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K \text{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i|_K(x) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \mathbf{p}_i(y) d\sigma_K(x) \\ &= \sum_{K \in \Gamma_h} f_i^1[K, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) \end{aligned}$$

On voit bien que lorsque $y \in K$, l'intégrale $f_i^1[K, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$ est hypersingulière.

Dans un premier temps, on sépare $f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$ en une somme d'un terme singulier et un terme régulier :

$$\begin{aligned}
 f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) &= \int_{\Gamma_i} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(x) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \mathbf{p}_i(y) d\sigma(x) \quad \text{où } y \in \Gamma_{M,i} \\
 &= \int_{\Gamma_i} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(x) [\nabla_{\Gamma} \nabla_x G_i(x, y)] \mathbf{p}_i(y) d\sigma(x) \\
 &\quad + \int_{\Gamma_i} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(x) (\mathbf{p}_i(y) \cdot \boldsymbol{\nu}(x)) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}(x) d\sigma(x) \\
 &= \int_{\Gamma_i} [\nabla_{\Gamma} \nabla_x G_i(x, y)] (\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(x) \mathbf{p}_i(y)) d\sigma(x) \\
 &\quad + \int_{\Gamma_i \setminus \Gamma_{M,i}} \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(x) (\mathbf{p}_i(y) \cdot \boldsymbol{\nu}(x)) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}(x) d\sigma(x)
 \end{aligned}$$

car si $x \in \Gamma_{M,i}$ et $y \in \Gamma_{M,i}$ alors $\mathbf{p}_i(y) \cdot \boldsymbol{\nu}(x) = 0$. Le deuxième terme de cette décomposition est bien régulier.

À présent, on s'intéresse à la décomposition du premier terme en somme d'intégrales sur les triangles du maillage. Pour chaque triangle K , on peut appliquer la formule de Stokes :

$$\begin{aligned}
 &\int_K [\nabla_{\Gamma} \nabla_x G_i(x, y)] (\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i|_K(x) \mathbf{p}_i(y)) d\sigma_K(x) \\
 &= - \int_K \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma, x} (\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i|_K(x) \mathbf{p}_i(y)) d\sigma_K(x) \\
 &\quad + \int_{\partial K} \nabla_x G_i(x, y) (\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i|_K(x) \mathbf{p}_i(y)) \cdot \mathbf{n}(x) d\lambda_K(x)
 \end{aligned}$$

où ∂K dénote la frontière de l'élément K , i.e. ses arêtes, et \mathbf{n} la normale à cette frontière. Les fonctions de base des éléments finis de Raviart-Thomas étant linéaires, on a que :

$$\operatorname{div}_{\Gamma, x} (\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i|_K(x) \mathbf{p}_i(y)) = 0$$

Ainsi, finalement, on peut réécrire le terme $f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$ en une somme sur les triangles d'intégrales régulières et une somme sur les arêtes des triangles d'intégrales singulières :

$$\begin{aligned}
 f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) &= \sum_{K \in \Gamma_h \setminus \Gamma_{M,i}} \int_K (\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i|_K(x) (\mathbf{p}_i(y) \cdot \boldsymbol{\nu}(x))) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}(x) d\sigma_K(x) \\
 &\quad + \sum_{K \in \Gamma_h} \int_{\partial K} \nabla_x G_i(x, y) (\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i|_K(x) \mathbf{p}_i(y)) \cdot \mathbf{n}(x) d\lambda_K(x)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

On a ainsi gagné un degré de régularité.

2.3 Bilan : formulation discrète de la vitesse

Les termes apparaissant dans la proposition 3.21, en tenant compte des réécritures précédemment effectuées, s'expriment, $\forall i = 1, \dots, 2$, dans le domaine discret de la manière

suivante :

$$a_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t (\mathbf{j}_i|_K(x) \times \mathbf{p}_i(y)) d\sigma_K(x) \quad (4.11)$$

$$b_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] (\nabla_x G_i(x, y) \times \mathbf{p}_i|_K(x)) d\sigma_K(x) \quad (4.12)$$

$$b_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K \left(\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot (\mathbf{j}_i(y) \times \mathbf{p}_i|_K(x)) \right) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma_K(x) \quad (4.13)$$

$$c_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K (\mathbf{p}_i(y) \cdot \mathbf{j}_i|_K(x)) \nabla_x G_i(x, y) d\sigma_K(x) \quad (4.14)$$

$$d_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K G_i(x, y) [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] \mathbf{p}_i|_K(x) d\sigma_K(x) \quad (4.15)$$

$$d_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K (\mathbf{j}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i|_K(x)) (\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \nabla_x G_i(x, y)) \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma_K(x) \quad (4.16)$$

$$e_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \sum_{K \in \Gamma_h} \int_K [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] \nabla_x G_i(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{p}_i|_K(x) d\sigma_K(x) \quad (4.17)$$

$$e_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \sum_{K \in \Gamma_h \setminus \Gamma_{M,i}} \int_K [\nabla_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y)] [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \left((\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i|_K(x)) \boldsymbol{\nu}_i(y) \right) d\sigma_K(x) \quad (4.18)$$

$$f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \sum_{K \in \Gamma_h \setminus \Gamma_{M,i}} \int_K \left(\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i|_K(x) (\mathbf{p}_i(y) \cdot \boldsymbol{\nu}(x)) \right) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}(x) d\sigma_K(x) \quad (4.19)$$

$$f_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = + \sum_{K \in \Gamma_h} \int_{\partial K} \nabla_x G_i(x, y) (\operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i|_K(x) \mathbf{p}_i(y)) \cdot \mathbf{n}(x) d\lambda_K(x) \quad (4.20)$$

$$h_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y) = - \sum_{K \in \Gamma_h \setminus \Gamma_{M,i}} \int_K \operatorname{div}_{\Gamma_i} \mathbf{j}_i(y) (\boldsymbol{\nu}_i(y) \cdot \mathbf{p}_i|_K(x)) [\nabla_x \nabla_x G_i(x, y)]^t \boldsymbol{\nu}_i(y) d\sigma_K(x) \quad (4.21)$$

Ces intégrales sont ensuite évaluées grâce à la formule de quadrature de Gauss (4.6), et les inconnues en ces points sont évaluées par les formules d'interpolation (4.7), (4.8) et (4.9).

3 Gestion des singularités

Après nous être débarrassés des termes hypersinguliers, il convient de définir un traitement numérique à appliquer aux autres termes, que l'on peut partager en deux catégories :

- Le terme d_i^1 est régulier, comme expliqué dans la section 1.3.4 du chapitre 1. Cependant, lorsque les points x et y sont trop proches, le noyau de Green $G(x, y)$

tend vers l'infini. Ces instabilités numériques seront évitées grâce à une astuce expliquée dans la section 3.2.

- Les termes $a_i^2, b_i^1, c_i^1, d_i^2, e_i^1$ et f_i^1 font intervenir la matrice jacobienne du noyau de Green. Ils sont donc singuliers et seront traités de la manière décrite dans la section suivante 3.1.

3.1 Intégrales singulières

On rappelle tout d'abord l'expression du noyau de Green et de son gradient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3, \quad G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} \quad \text{et} \quad \nabla G(x, y) = \frac{(ik|x-y| - 1)e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|^3} (x - y)$$

On commence par poser $r = |x - y|$ et $\mathbf{r} = x - y$. On peut donc réécrire le gradient du noyau de Green :

$$\nabla G(r) = \frac{(ikr - 1)e^{ikr}}{4\pi r^3} \mathbf{r} \quad (4.22)$$

La singularité apparaît lorsque $r \rightarrow 0$. Afin de la traiter, on va chercher à séparer sa partie singulière de sa partie régulière à l'aide d'un développement de Taylor en $r = 0$:

$$\nabla G(r) = \frac{1}{4\pi} \left(\underbrace{-\frac{1}{r^3}}_{\text{partie singulière}} \underbrace{-\frac{k^2}{2} \frac{1}{r} - \frac{ik^3}{3} + \frac{k^4}{8} r + \frac{ik^5}{30} r^2 - \frac{k^6}{144} r^3}_{\text{partie régulière}} \right) \mathbf{r} + o(r^4) \quad (4.23)$$

On va donc chercher à savoir comment se comporte une intégrale du type

$$I(x, \varepsilon) = \int_{B_\varepsilon(y)} \nabla G(x, y) \mathbf{F}(x, y) d\sigma_K(x)$$

lorsque $x \rightarrow y$, et où \mathbf{F} est une fonction vectorielle de degré inférieur ou égal à 1 et $B_\varepsilon(y)$ est la boule de rayon ε , avec ε aussi petit que l'on veut, centrée en y .

Le calcul de la partie régulière de cette intégrale, à savoir

$$I_R(x, \varepsilon) = \int_{B_\varepsilon(y)} \left(-\frac{k^2}{2} \frac{1}{r} - \frac{ik^3}{3} + \frac{k^4}{8} r + \frac{ik^5}{30} r^2 - \frac{k^6}{144} r^3 \right) \mathbf{F}(x, y) d\sigma_K(x)$$

ne pose pas de problème, et est donc effectué tel quel.

En revanche, le calcul de la partie singulière de cette intégrale, à savoir

$$I_S(x, \varepsilon) = \int_{B_\varepsilon(y)} \frac{x - y}{|x - y|^3} \mathbf{F}(x, y) d\sigma_K(x)$$

nécessite d'être traité. On choisit donc de considérer une approximation affine pour la fonction $\mathbf{F}(x, y)$ de degré au plus 1 :

$$\forall y_\varepsilon \in B_\varepsilon(y), \quad \mathbf{F}(x, y_\varepsilon) - \mathbf{F}(x, y) \approx \nabla_y \mathbf{F}(x, y) \cdot (y_\varepsilon - y)$$

Ainsi, on fait l'hypothèse que la fonction $\mathbf{F}(x, y)$ est constante sur $B_\varepsilon(y)$ et que donc

$$I_S(x, \varepsilon) = \int_{B_\varepsilon(y)} \frac{x - y}{|x - y|^3} \mathbf{F}(x, y) d\sigma_K(x) \approx \mathbf{F}(x, y) \int_{B_\varepsilon(y)} \frac{x - y}{|x - y|^3} d\sigma_K(x)$$

La fonction $\frac{x-y}{|x-y|^3}$ étant impaire, on a que :

$$\int_{B_\varepsilon(y)} \frac{x-y}{|x-y|^3} d\sigma_K(x) = 0$$

Ainsi, grâce à l'approximation affine sur $\mathbf{F}(x, y)$, on considère que

$$I_S(x, \varepsilon) \approx 0$$

et donc que

$$I(x, \varepsilon) \approx I_R(x, \varepsilon) = \int_{B_\varepsilon(y)} \left(-\frac{k^2}{2} \frac{1}{r} - \frac{ik^3}{3} + \frac{k^4}{8} r + \frac{ik^5}{30} r^2 - \frac{k^6}{144} r^3 \right) \mathbf{F}(x, y) d\sigma_K(x) \quad (4.24)$$

En pratique, on choisit pour ε une valeur proche de la taille moyenne d'une arête de maillage.

3.2 Alternance des formules de Gauss

Que l'intégrale considérée soit régulière ou singulière, on a tout intérêt à éviter le plus possible les instabilités numériques dues à la trop grande proximité des points x et y . On rappelle que les intégrales sur les triangles sont évaluées par une formule de quadrature de Gauss. Pour chaque triangle considéré, dont on note a_1, a_2 et a_3 les sommets, le point x parcourt donc l'ensemble des points de Gauss choisis pour ce triangle. On rappelle la formule d'intégration de Gauss (4.6) :

$$\forall y \in \Gamma, \forall K \in \Gamma_h, \int_K f(x, y) d\sigma_K(x) = |K| \sum_{s=1}^{N_G} \omega_s f|_K(x_s, y),$$

ainsi que les valeurs les plus utilisées pour les coordonnées des points de Gauss et les poids associés [AS64] :

N_G	Poids	Coordonnées
1	$\omega_1 = 1$	$x_1 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3$
3	$\omega_1 = \frac{1}{3}$ $\omega_2 = \frac{1}{3}$ $\omega_3 = \frac{1}{3}$	$x_1 = \frac{2}{3}a_1 + \frac{1}{6}a_2 + \frac{1}{6}a_3$ $x_2 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{6}a_3$ $x_3 = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{6}a_2 + \frac{2}{3}a_3$
7	$A = \frac{155 + \sqrt{15}}{2400}$; $B = \frac{31}{120} - A$ $\omega_1 = \frac{9}{40}$ $\omega_2 = A$ $\omega_3 = A$ $\omega_4 = A$ $\omega_5 = B$ $\omega_6 = B$ $\omega_7 = B$	$U = \frac{6 + \sqrt{5}}{21}$; $V = \frac{4}{7} - U$ $x_1 = \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{3}a_2 + \frac{1}{3}a_3$ $x_2 = Ua_1 + Ua_2 + (1 - 2U)a_3$ $x_3 = (1 - 2U)a_1 + Ua_2 + Ua_3$ $x_4 = Ua_1 + (1 - 2U)a_2 + Ua_3$ $x_5 = (1 - 2V)a_1 + Va_2 + Va_3$ $x_6 = Va_1 + (1 - 2V)a_2 + Va_3$ $x_7 = Va_1 + Va_2 + (1 - 2V)a_3$

Afin de considérer des points x et y les moins proches possibles, on définit la méthode de sélection de la formule de Gauss utilisée suivante :

Algorithme 3 Sélection de la formule de Gauss pour le calcul numérique des intégrales

```

Partant de  $y \in \Gamma_M$ 
for all  $K \in \Gamma_h$  do
  if  $y \notin K$  then
    return  $N_G = 7$ 
  else
    Calcul des coordonnées des points  $x_1, x_2, x_3$  (formule de Gauss à 3 points)
     $d = \min(|y - x_1|, |y - x_2|, |y - x_3|)$ 
    Calcul des coordonnées du point  $x_G$  (formule de Gauss à 1 point)
    if  $|y - x_G| < d$  then
      return  $N_G = 3$ 
    else
      return  $N_G = 1$ 
    end if
  end if
end for

```

Si on résume le principe de la méthode :

- Si le triangle considéré n'est pas le triangle auquel appartient le point y , alors l'intégrale est régulière et on utilise la formule de Gauss à 7 points ($N_G = 7$).
- Si le triangle considéré est le triangle auquel appartient le point y , alors l'intégrale est singulière, et on choisit, entre la formule de Gauss à 3 points ($N_G = 3$) et la formule de Gauss à 1 point ($N_G = 1$), celle qui maximise la distance entre le point y et le(s) point(s) de Gauss considéré(s).

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté tous les outils nécessaires à l'implémentation des calculs développés dans le chapitre précédent, à savoir le calcul de l'état adjoint par *Antenna Design* et la discrétisation dans la base des éléments finis de frontière des termes constitutifs de la dérivée de forme ; le tout en cherchant à minimiser l'influence des intégrales singulières sur les résultats des calculs.

Désormais, il s'agit de mettre en œuvre ses résultats sur le calcul de la dérivée de forme au sein d'un algorithme d'optimisation, afin de répondre à la problématique initiale de nos travaux.

Partie III

Mise en œuvre numérique et résultats

Chapitre 5

Algorithme numérique

Contents

1	Résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi	128
1.1	Rappel du contexte	128
1.2	Calcul de la vitesse numérique	130
1.3	Initialisation de la fonction Level Set	132
1.4	Bilan : résolution de l'équation	137
2	Évolution de la géométrie	137
2.1	Remaillage	137
2.2	Zone de relaxation	138
3	Algorithme d'optimisation	139
3.1	Schéma global	139
3.2	Critère de convergence	140

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons la mise en œuvre numérique des résultats des chapitres 3 et 4 au sein d'un algorithme d'optimisation de forme par méthode Level Set tel que présenté au chapitre 2 de ce manuscrit.

Dans un premier temps, nous revenons sur l'étape primordiale de la méthode Level Set : la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, qui permet le déplacement de la frontière de la forme à optimiser.

Pour cela, nous rappelons brièvement le rôle joué par le terme de vitesse calculé au chapitre 3, ainsi que l'utilisation d'une grille cartésienne pour la résolution numérique de l'équation.

Ensuite, nous nous attardons sur le point essentiel de la résolution : le calcul de la vitesse sur la grille cartésienne. Les grandeurs intervenant dans l'expression de la vitesse étant toutes connues sur le maillage triangulaire ayant servi à la résolution des équations intégrales, il est nécessaire de projeter ces quantités sur la grille. Il est également nécessaire d'introduire un schéma numérique pour le calcul de la normale étendue à la frontière métallique, celle-ci intervenant également dans l'expression de la vitesse. Une fois le calcul numérique de la vitesse traité, celle-ci peut-être un peu chahutée : nous décidons donc de la régulariser à l'aide d'une méthode de lissage par application d'un Laplacien.

Pour la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi, nous avons également besoin de calculer la fonction Level-Set correspondant à la forme du patch métallique à optimiser. Une fois l'équation résolue, nous sommes en possession des valeurs de cette fonction Level-Set, que nous pourrions réutiliser à l'itération suivante. Cependant, nous avons besoin de ces valeurs pour la première itération : nous présentons donc ici une manière d'initialiser la fonction Level-Set sur la grille cartésienne, à l'aide du maillage triangulaire sous-jacent. Cette méthode nous donne une fonction approchant la fonction distance signée : afin de régulariser cette fonction, on effectue a posteriori une étape de *réinitialisation*, ou *redistanciation*, telle qu'étudiée au chapitre 2.

La résolution de l'équation proprement dite, sera effectuée par une méthode de différences finies telle que celle présentée, elle aussi, au chapitre 2.

Au sein de l'algorithme d'optimisation, une fois l'équation de transport résolue, nous sommes en possession d'une nouvelle fonction Level Set, définissant une nouvelle géométrie. Il s'agit donc, dans un second temps, de définir la manière dont on va faire évoluer la géométrie afin qu'elle corresponde à celle nouvellement calculée.

Pour cela, nous choisissons de remailler intégralement la surface impactée par le changement de forme, tout en laissant inchangé le reste du maillage. Le remaillage de la zone en question nécessite cette fois un passage de la fonction Level Set de la grille vers le maillage.

Lors de ce remaillage, nous devons rester vigilant à maintenir une conformité entre le nouveau maillage localisé et le reste du maillage, qui n'a pas été modifié. Cette conformité est assurée via l'utilisation d'une zone tampon, appelée *zone de relaxation*, entre les deux maillages.

Enfin, une fois décrites les étapes principales de la méthode que sont la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi et l'évolution de la géométrie, il est temps de présenter l'algorithme d'optimisation de forme par méthode Level Set dans sa globalité.

À la suite de cela, nous nous attardons sur la stratégie choisie afin d'assurer la convergence, le plus efficacement possible sans toutefois aller trop vite, de l'algorithme.

1 Résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi

1.1 Rappel du contexte

1.1.1 Dérivée de forme et vitesse d'advection

Dans les chapitres précédents, nous avons écrit la dérivée de forme de la fonction objectif considérée de la manière suivante :

$$J'(\Gamma)(\theta) = \int_{\Gamma_M} \mathbf{V}(y) \cdot \theta(y) d\sigma(y) \quad (5.1)$$

où le terme $\mathbf{V}(y), \forall y \in \Gamma_M$ est constitué des termes unitaires présentés dans la proposition 3.21 du chapitre 3 et dont la discrétisation a été explicitée dans le chapitre 4.

On note $\mathbf{n}(y), \forall y \in \Gamma_M$ la normale (étendue) en y à la frontière γ du patch métallique. Si on prend

$$\theta(y) = -(\mathbf{V}(y) \cdot \mathbf{n}(y))n(y) \quad (5.2)$$

alors l'expression de la dérivée de forme nous donne :

$$\begin{aligned} J(\Gamma^\theta) &= J(\Gamma) - \int_{\Gamma_M} \mathbf{V}(y) \cdot \left((\mathbf{V}(y) \cdot \mathbf{n}(y)) \mathbf{n}(y) \right) d\sigma(y) + o(\theta) \\ &= J(\Gamma) - \underbrace{\int_{\Gamma_M} (\mathbf{V}(y) \cdot \mathbf{n}(y))^2 d\sigma(y)}_{>0} + o(\theta) \end{aligned}$$

Le champ de vecteur θ défini par (5.2) est donc bien une direction de descente. Ainsi, comme expliqué dans le chapitre 2, utiliser $-\mathbf{V}(y) \cdot \mathbf{n}(y)$ comme vitesse dans une équation de transport et les propriétés de la fonction Level Set revient à résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi (2.7) du chapitre 2 que nous rappelons ici :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}(t, y) + v(t, y) |\nabla \phi(t, y)| = 0$$

où t est un paramètre de temps fictif et où le terme de vitesse v est défini par :

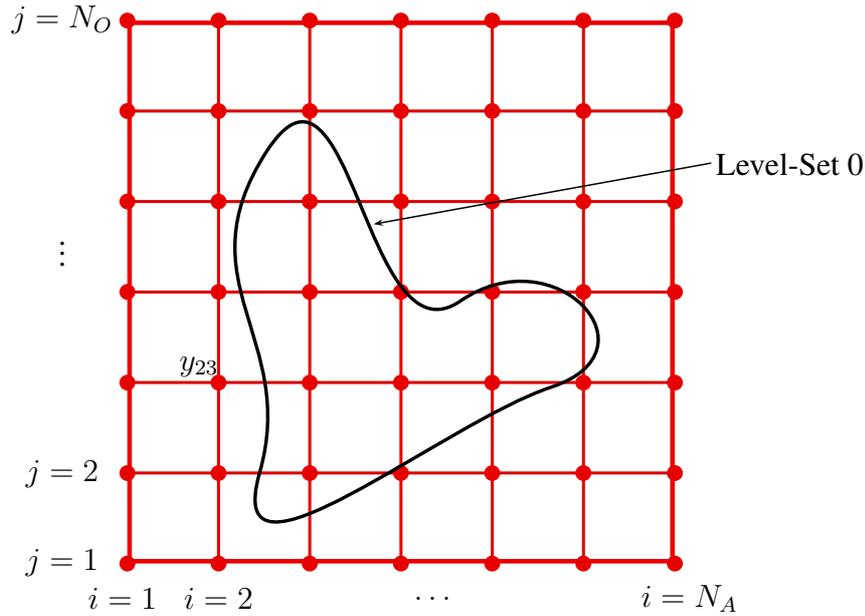
$$\forall y \in \Gamma_M, v(y) = -\mathbf{V}(y) \cdot \mathbf{n}(y) \quad (5.3)$$

Afin d'utiliser la méthode Level Set présentée au chapitre 2 dans notre algorithme, nous allons être amenés à évaluer ce terme de vitesse dans le but de résoudre l'équation d'Hamilton-Jacobi.

Remarque 5.1. Dans le chapitre précédent, nous avons mentionné que deux des termes constitutifs de la vitesse, $a_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$ et $b_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$, n'étaient pas à prendre en compte car seule leur composante suivant la normale $\boldsymbol{\nu}$ était non nulle. Cet état de fait découle de l'expression de la vitesse (5.3) que nous venons d'énoncer : le produit scalaire avec la normale \mathbf{n} à γ dans le plan de Γ_M annule tous les termes qui ne sont pas tangentiels.

1.1.2 Principe de la résolution numérique

Comme mentionné dans le chapitre 2, l'équation d'Hamilton-Jacobi qui régit le transport de la fonction level-set va être résolue sur une grille cartésienne fixe recouvrant Γ_M . On note G cette grille, N_A son nombre de points en abscisse, N_O son nombre de points en ordonnée et $N_{GC} = N_A \times N_O$ son nombre de nœuds (voir figure 5.1 ci-dessous).


 FIGURE 5.1 – Grille cartésienne G de taille N_{GC}

Afin de résoudre cette équation, nous avons besoin de deux choses :

- La valeur de la vitesse v en tout point y_{ij} de la grille ;
- La valeur de la fonction level-set 0 représentant la frontière γ en tout point y_{ij} de la grille.

Voyons maintenant comment nous pouvons obtenir ces valeurs.

1.2 Calcul de la vitesse numérique

1.2.1 Passage du maillage à la grille

Le calcul numérique de $v(y_{ij}), \forall y_{ij} \in G$, nécessite l'évaluation, pour chaque point de la grille, de certaines grandeurs connues jusqu'à présent sur le maillage :

- Les termes $b_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$, $d_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$, $e_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$ et $e_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$ font intervenir la quantité $[\nabla_{\Gamma} \mathbf{j}_i(y)]$;
- Les termes $c_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$, $f_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$ et $f_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$ font intervenir la quantité $\mathbf{p}_i(y)$;
- Le terme $d_i^2[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$ fait intervenir la quantité $\mathbf{j}_i(y)$;
- Le terme $h_i^1[\Gamma, \mathbf{j}, \mathbf{p}](y)$ fait intervenir la quantité $\text{div}_{\Gamma} \mathbf{j}_i(y)$.

Le calcul de ces quantités pour chaque point y_{ij} de la grille se fait de la manière suivante (voir également figure 5.2 ci-après) :

- On parcourt les éléments du maillage Γ_h afin de trouver le triangle K auquel appartient le point y_{ij}

- On calcule les quantités souhaitées au point y_{ij} à partir des degrés de liberté du triangle K par la formule d'interpolation sur le maillage :

$$\mathbf{j}|_K(y_{ij}) = \sum_{l=1}^3 \lambda_{l,K} \mathbf{B}_{l,K}(y_{ij})$$

ainsi que celles concernant $[\nabla_{\Gamma} \mathbf{j}_i(y)]$ et $\text{div}_{\Gamma} \mathbf{j}_i(y)$ vues au chapitre précédent.

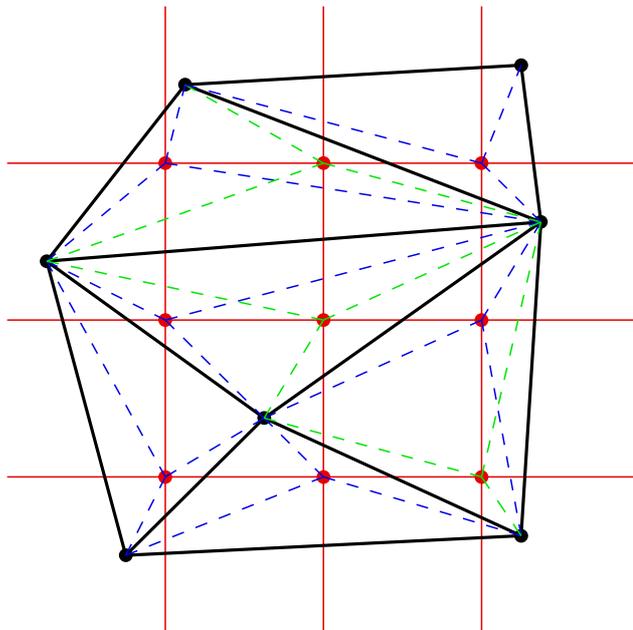


FIGURE 5.2 – Passage du maillage Γ_h à la grille cartésienne G

1.2.2 Calcul de la normale à la frontière

Enfin, afin d'évaluer la vitesse v en chaque point y_{ij} de la grille, il nous reste à évaluer l'extension à toute la grille de la normale $\mathbf{n}(y_{ij})$ sortante à γ .

Comme nous l'avons rappelé au chapitre 2, cette normale peut s'exprimer en fonction de la fonction level-set 0 ϕ qui décrit γ :

$$\forall y \in \Gamma_M, \mathbf{n}(y) = \frac{\nabla \phi(y)}{|\nabla \phi(y)|} \quad (5.4)$$

Or, nous avons accès aux valeurs de la fonction level-set ϕ en tout point y_{ij} de la grille (ces valeurs sont en effet indispensables à la résolution numérique de l'équation d'Hamilton-Jacobi). On peut donc calculer une extension de $\mathbf{n}(y_{ij}), \forall y_{ij} \in G$ à partir des valeurs $\phi_{ij} = \phi(y_{ij})$.

Reprenons les notations définies au chapitre 2. On note Δy_1 le pas de la grille dans la direction y_1 et Δy_2 dans la direction y_2 , et on note les quantités :

$$D_{ij}^{+y_1} \phi = \frac{\phi_{i+1j} - \phi_{ij}}{\Delta y_1}, \quad D_{ij}^{-y_1} \phi = \frac{\phi_{ij} - \phi_{i-1j}}{\Delta y_1}$$

(et, de manière équivalente, $D_{ij}^{+y_2}$ et $D_{ij}^{-y_2}$).

On peut alors utiliser le schéma numérique suivant (défini dans [Set99b]) :

$$\mathbf{n}_{ij} = \frac{\mathbf{n}_{ij}^*}{|\mathbf{n}_{ij}^*|} \quad (5.5)$$

où

$$\mathbf{n}_{ij}^* = \frac{(D_{ij}^{+y_1}, D_{ij}^{+y_2})}{\left((D_{ij}^{+y_1})^2 + (D_{ij}^{+y_2})^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(D_{ij}^{-y_1}, D_{ij}^{+y_2})}{\left((D_{ij}^{-y_1})^2 + (D_{ij}^{+y_2})^2\right)^{\frac{1}{2}}} \\ + \frac{(D_{ij}^{+y_1}, D_{ij}^{-y_2})}{\left((D_{ij}^{+y_1})^2 + (D_{ij}^{-y_2})^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{(D_{ij}^{-y_1}, D_{ij}^{-y_2})}{\left((D_{ij}^{-y_1})^2 + (D_{ij}^{-y_2})^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

1.2.3 Régularisation de la vitesse

La vitesse calculée de la manière décrite précédemment, du fait de la complexité des termes qui la constituent et de leurs singularités, est assez chahutée. Afin de faciliter le transport, on cherche à avoir une vitesse plus lisse.

À cette fin, on utilise une méthode de régularisation (voir [DG06], par exemple, pour une application de cette méthode) basée sur l'application de l'opérateur Laplacien Δ . Cette méthode s'applique de la manière suivante :

Soit $\forall y_{ij} \in G, v(y)$ la vitesse calculée classiquement. Alors on peut remplacer v par v^* telle que :

$$\xi \Delta v^* + v^* = v$$

où ξ est choisi en fonction de la taille de la grille, afin d'étendre la régularisation sur quelques mailles de la grille.

La vitesse v^* ainsi calculée est beaucoup plus lisse au passage de la frontière :

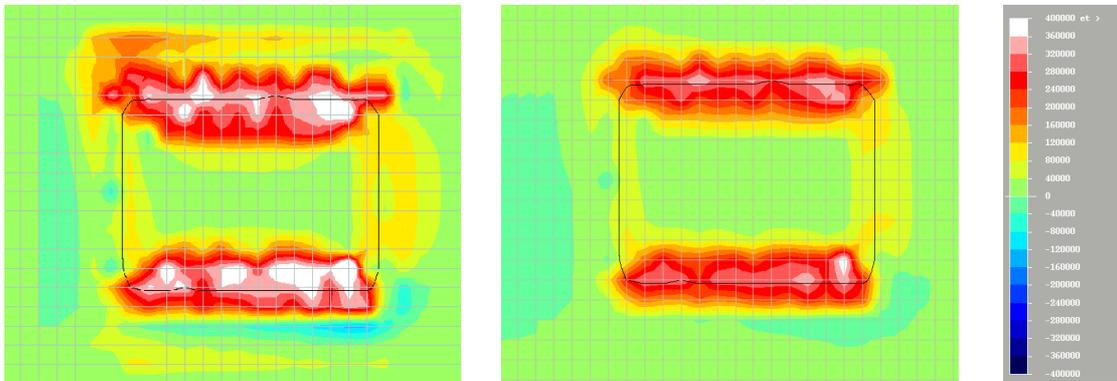


FIGURE 5.3 – Vitesse avant régularisation (à gauche) et après régularisation (à droite)

1.3 Initialisation de la fonction Level Set

1.3.1 Idée générale

La résolution de l'équation de transport nécessite également la valeur de la fonction Level-Set ϕ en tout point de la grille. Une fois résolue, nous avons accès à la nouvelle fonction Level Set transportée : cela signifie qu'à l'itération k , on peut utiliser la Level Set sortie de l'itération $k - 1$.

Nous avons donc besoin de calculer uniquement la fonction Level Set initiale, celle de l'itération 1.

Nous avons vu au chapitre 2 que le meilleur choix possible d'initialisation est celui de la distance signée. En pratique, le calcul de la distance signée est cependant très complexe. Nous choisissons donc de calculer cette initialisation de la manière suivante :

- Calcul de la distance signée approchée,
- Régularisation de cette fonction Level Set en une fonction plus proche de la fonction distance signée par résolution de *l'équation de redistanciation* (2.12) du chapitre 2.

1.3.2 Calcul de la distance signée approchée

On rappelle que l'objectif de ce calcul est d'affecter, à chaque point de la grille, une valeur la plus proche possible de sa distance au bord du patch métallique. Si le point est à l'intérieur du patch, on lui affecte une valeur négative, et s'il est à l'extérieur, on lui affecte une valeur positive.

On effectue ce calcul en plusieurs étapes.

Étape 1 : Initialisation

Dans un premier temps, on parcourt les éléments du maillage afin de détecter et de stocker les arêtes du bord du patch métallique. Pour chaque élément, on parcourt les points de la grille qui y sont inclus et on leur affecte :

- la valeur -20 si le point est dans un élément métallique,
- la valeur 20 si le point est dans un élément diélectrique.

Étape 2 : Maillage

On parcourt à nouveau les éléments du maillage, et on sélectionne ceux qui ont **une arête commune** avec le bord du patch métallique et on effectue les opérations suivantes :

- Les deux nœuds du triangle qui sont sur le bord du métal se voient affectés la valeur 0.
- Pour le troisième nœud, on calcule la hauteur h du triangle en ce point (ce qui équivaut à la distance du point à l'arête du bord) et on lui affecte cette valeur (signée, suivant si l'élément est métallique ou non).

Par exemple, sur la figure 5.4 ci-dessous, on a représenté en vert les arêtes du bord du patch métallique, les triangles du maillage en noir et les points de la grille en rouge. Les triangles numérotés 1 à 6 ont une arête commune avec la frontière et sont donc sélectionnés ; les nœuds entourés en noir se voient affectés la valeur 0 ou h (où h est la hauteur du triangle en pointillés bleus).

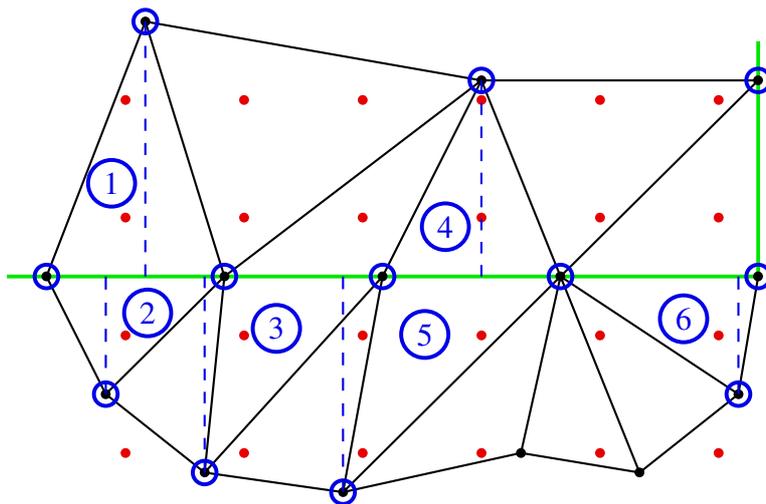


FIGURE 5.4 – Étape 2 : affectation d’une valeur à certains nœuds du maillage

Étape 3 : Maillage, traitements particuliers

À présent, on s’occupe des triangles ayant **uniquement un sommet commun** avec le bord du patch métallique. Certains nœuds de ces triangles se sont déjà vu affecter une valeur (cf figure 5.4 ci-dessus), mais ce n’est pas le cas pour quelques-uns d’entre eux. Pour ces nœuds-ci, on choisit de leur affecter comme valeur la longueur de l’arête qui les relie au bord du patch. Il s’agit donc d’une valeur non exacte de leur distance au bord.

Par exemple, si on reprend le même maillage que précédemment, sont concernés les triangles numérotés de 1 à 3 sur la figure 5.5 ci-dessous :

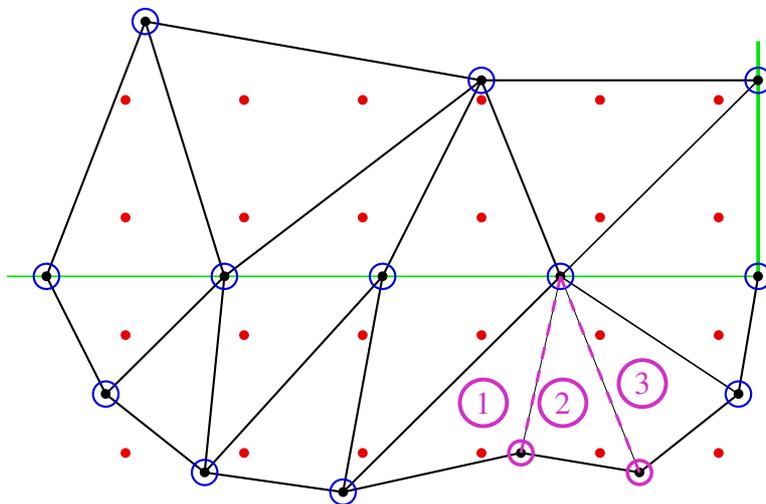


FIGURE 5.5 – Étape 3 : affectation d’une valeur distance approchée à certains nœuds du maillage

Étape 4 : Grille

Désormais, tous les nœuds des triangles du bord ont une valeur, relativement proche de leur distance signée à ce même bord. Il ne nous reste plus qu’à affecter une valeur aux nœuds de la grille. Pour cela, on parcourt les points de la grille et on sélectionne ceux qui appartiennent à ces triangles du bord. Pour chacun de ces nœuds :

- On calcule les coordonnées barycentriques du point de la grille dans le triangle,
- On affecte à ce point la valeur calculée à partir des valeurs aux nœuds du triangle et de ces coordonnées barycentriques.

Ainsi, on calcule la distance signée du point de la grille au bord du patch métallique. Bien évidemment, lorsque la valeur de cette distance avait été mal calculée aux nœuds du maillage (cf étape 3, figure 5.5 ci-dessus), cela induit une erreur sur le calcul de la distance.

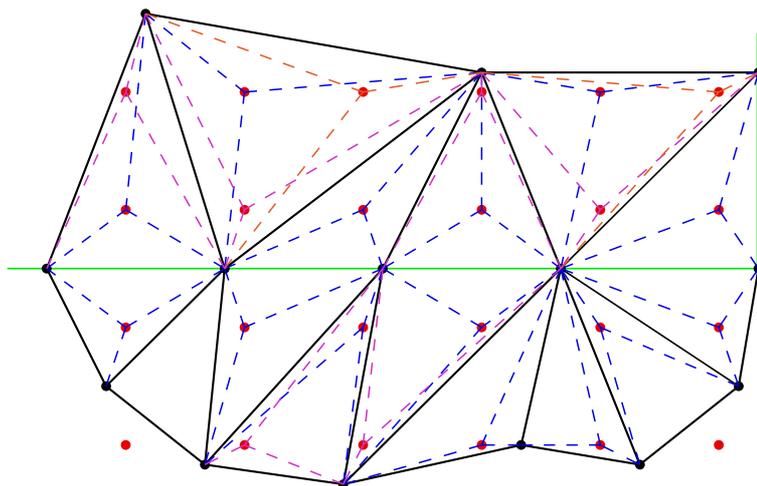


FIGURE 5.6 – Etape 4 : affectation d'une valeur distance approchée aux nœuds de la grille

Bilan

Si on récapitule les résultats obtenus sur l'exemple précédent, on peut dégager quatre types de points, représentés sur la figure 5.7 ci-dessous :

- Les points entourés en bleu foncé se sont vus attribuer la valeur exacte de la distance signée.
- Les points entourés en violet se sont vus attribuer une valeur approchée de la distance signée (cf étape 3).
- Les points entourés en orange, comme tous les points qui n'appartiennent pas aux éléments juxtaposés à la frontière, ont toujours la valeur 20 (ou -20).
- Le point entouré en bleu ciel s'est vu attribuer la valeur 0, car tous les nœuds du triangle appartiennent à la frontière métallique.

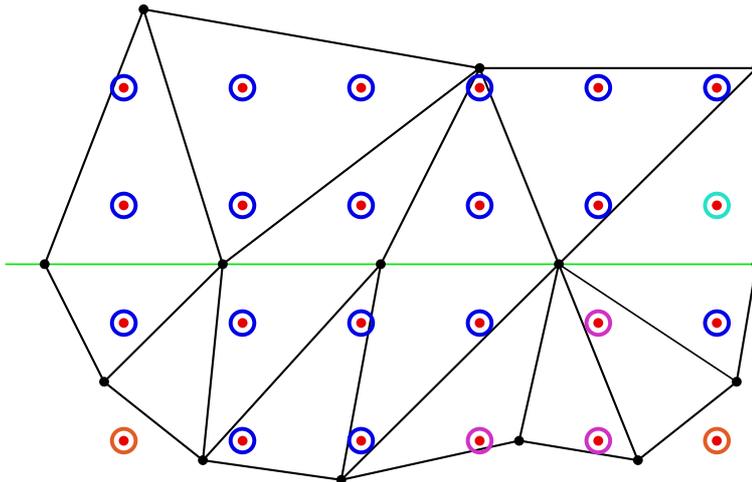


FIGURE 5.7 – Bilan des valeurs de la fonction Level Set affectées aux points de la grille

La majorité des points proches de la frontière ont donc une valeur exacte, ou suffisamment proche, de la distance signée. Les points plus lointains, en revanche, ont une valeur fautive (-20 ou 20) : l'étape de redistanciation qui suit l'initialisation de la fonction Level Set va permettre de lisser cette dernière, et d'en obtenir une valeur satisfaisante en tout point.

Enfin, on remarque que la grille ne doit pas être plus grossière que le maillage, sinon les points les plus proches de la frontière métallique n'appartiennent pas aux triangles du bord.

Exemple

Voyons les résultats obtenus pour l'initialisation de la fonction Level Set d'un cas-test. On représente à gauche le maillage de départ (le patch métallique est en rouge), au milieu la Level Set calculée après initialisation comme décrit précédemment, et à droite la Level Set après initialisation et résolution de l'équation de redistanciation. Sur les deux dernières figures, on représente en pointillés noirs l'emplacement réel de la frontière métallique.

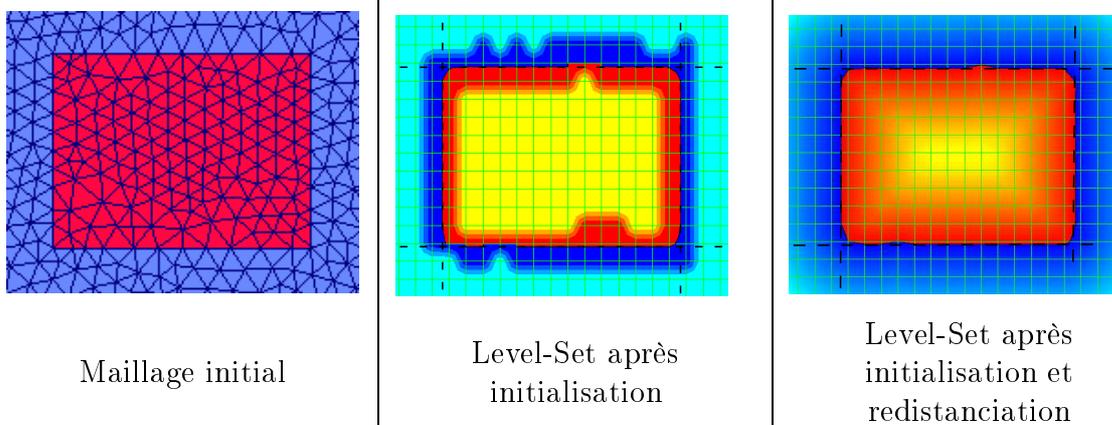


FIGURE 5.8 – Initialisation de la fonction Level-Set

1.4 Bilan : résolution de l'équation

Les données d'entrée nécessaires à la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi sont :

- la valeur de la fonction Level Set en tout point de grille,
- la valeur de la vitesse en tout point de la grille,
- un certain nombre de paramètres numériques (les pas de grille Δx et Δy , la constante de la condition CFL c , sur laquelle nous revenons par la suite, etc.).

La résolution proprement dite est effectuée par le schéma numérique d'ordre 2 présenté dans [Set99b], dont l'analogie à l'ordre 1 a été explicité dans la section 1.3.1 du chapitre 2.

En sortie, on récupère la valeur aux nœuds de la grille de la nouvelle fonction Level Set.

2 Évolution de la géométrie

D'une itération à l'autre, la fonction Level-Set va se déplacer. Il est donc nécessaire de définir un moyen de déplacer la géométrie du patch afin de suivre cette nouvelle frontière. Dans ce but, nous choisissons ici de remailler entièrement Γ_M à chaque itération. La zone concernée étant généralement de faible dimension comparé à l'ensemble du maillage, le coût en temps de calcul est faible.

Nous présentons ici les deux aspects importants de cette étape :

- la méthode utilisée pour effectuer le remaillage,
- le maintien de la conformité du maillage de Γ_M avec le reste du maillage.

2.1 Remaillage

Afin d'obtenir un nouveau maillage conforme à la nouvelle géométrie, on procède de la manière suivante :

- Interpolation de la nouvelle fonction Level-Set de la grille cartésienne vers l'ancien maillage ;
- Relimitation de l'ancien maillage suivant la nouvelle Level-Set : on casse les triangles traversés par la nouvelle frontière. On obtient alors un nouveau maillage, conforme à la nouvelle Level-Set, mais mal conditionné ;
- Remaillage du nouveau maillage obtenu à l'aide du logiciel MMSGS développé par C. Dapogny, C. Dobrzynski et P. Frey ([DDF14]).

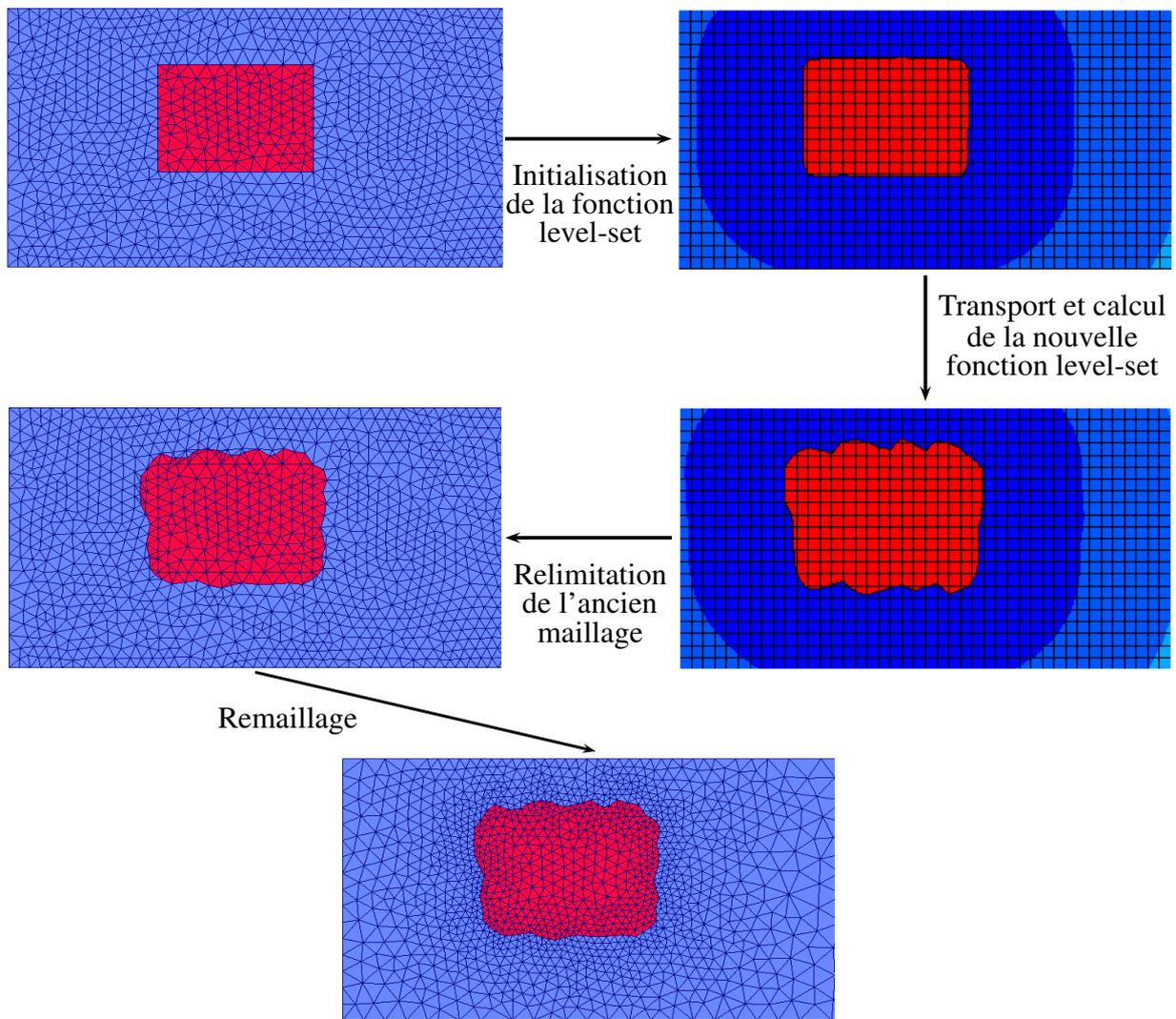


FIGURE 5.9 – Initialisation de la fonction Level-Set

2.2 Zone de relaxation

À chaque itération, nous allons devoir être attentif à ce que le nouveau maillage de Γ_M reste conforme avec le reste du maillage. À cet effet, nous choisissons de définir une zone, autour de Γ_M qui aura pour but d'encaisser les modifications du maillage au bord de Γ_M d'un côté, tout en restant fixe de l'autre côté. Il s'agit donc d'une zone tampon entre Γ_M et le reste du maillage, et nous l'appelons *zone de relaxation*.

À chaque itération, on la remaillage de la manière suivante :

- Pour chaque triangle de la zone de relaxation, si un nouveau nœud (ou plus) appartient à ce triangle, on le casse en deux sous-triangles (ou plus) : sur la figure 5.10 ci-dessous, passage du triangle ① aux triangles ①, ② et ③, du triangle ③ aux triangles ⑤ et ⑥, et du triangle ⑤ aux triangles ⑧ et ⑨ ;
- Les éléments qui ont été scindés (ici les triangles ①, ③ et ⑤) sont supprimés ;
- Les nœuds n'apparaissant plus dans le bord du maillage de Γ_M sont fusionnés avec les nouveaux nœuds de la zone de relaxation les plus proches et les éléments

devenus plats (ici les triangles ①, ③ et ⑨) sont supprimés.

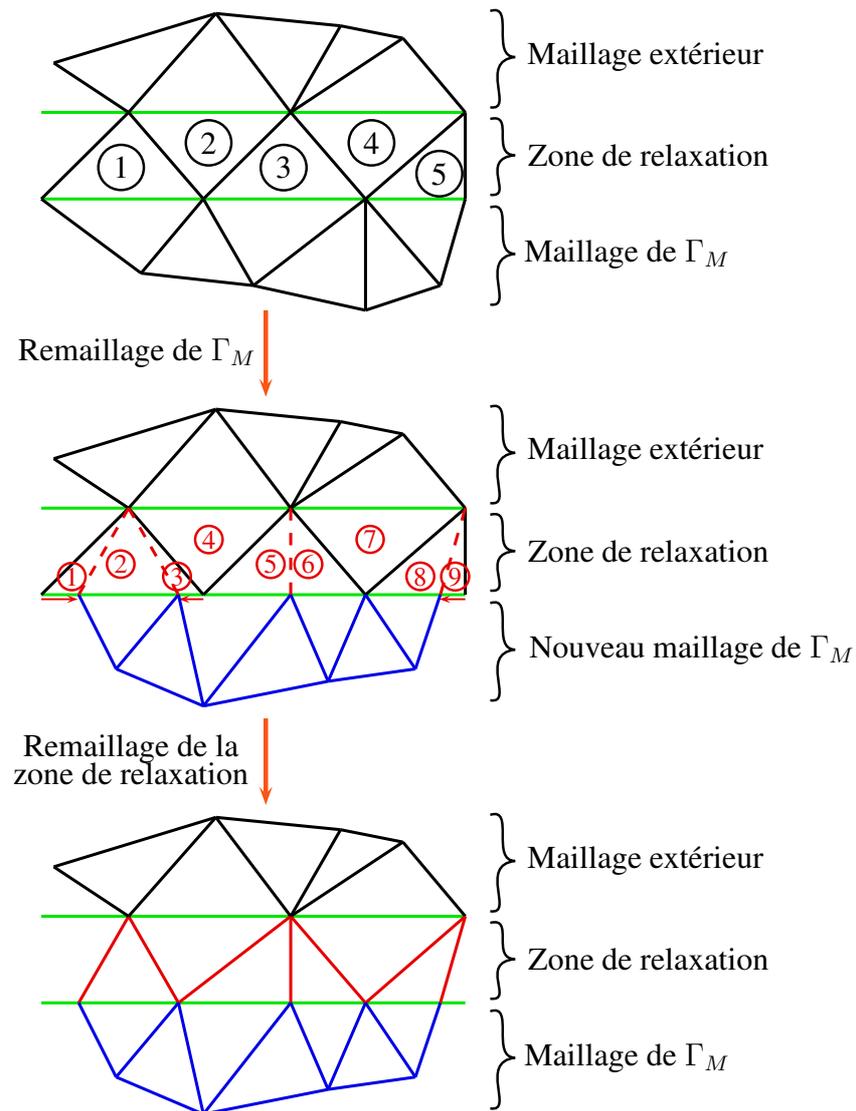


FIGURE 5.10 – Remaillage de la zone de relaxation

Ainsi, au fur et à mesure des itérations, on garde un maillage interne (celui de Γ_M) et un maillage externe compatibles grâce à la modification du maillage de la zone de relaxation.

3 Algorithme d'optimisation

3.1 Schéma global

Nous avons à présent tous les outils nécessaires à la mise en place de l'algorithme d'optimisation. On peut synthétiser son principe de fonctionnement dans le schéma suivant :

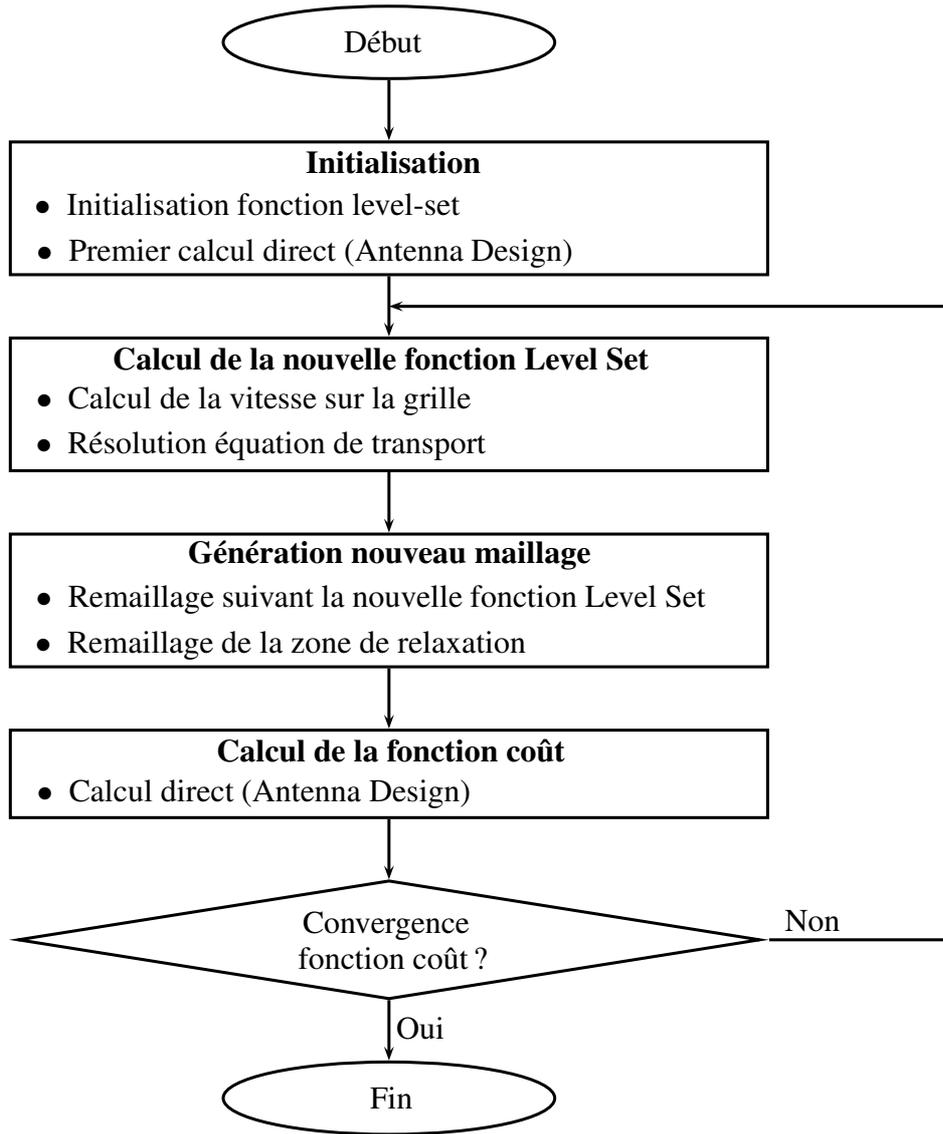


FIGURE 5.11 – Schéma de l’algorithme d’optimisation de forme par méthode Level Set

3.2 Critère de convergence

Enfin, il ne nous reste plus qu’à définir une stratégie efficace qui garantisse la convergence la plus rapide possible.

Il y a deux paramètres, liés à la résolution de l’équation d’Hamilton-Jacobi, sur lesquels nous pouvons influencer afin d’améliorer la vitesse de convergence de l’algorithme :

- la constante c de la condition CFL. On rappelle que la condition CFL sur le pas de temps s’écrit :

$$\left(\sup_{i,j} |v_{ij}| \right) \Delta t \leq \min(\Delta x, \Delta y) \quad (5.6)$$

Et on note c la constante choisie telle que

$$\left(\sup_{i,j} |v_{ij}| \right) \Delta t = c \min(\Delta x, \Delta y) \quad (5.7)$$

Plus cette constante est proche de 1, plus le transport se fera rapidement. Pour $c > 1$, le schéma est instable. On choisit comme constante maximale $c_{max} = 0.9$.

- le nombre d'itérations de transport k , pour une même vitesse, effectuées pour une itération de l'algorithme. On choisit $k_{max} = 3$.

Algorithme 4 Stratégie de convergence de l'algorithme

À l'itération $l < l_{max} = 50$, après calcul de la fonction coût J_l

$k_{max} = 3, c_{max} = 0.9, n_{stagn} = 0$

if $J_l \leq 0.998 J_{l-1}$ **then**

$c = \min(c_{max}, 1.2 c)$

$k = k_{max}$

$prec = false$

Passage à l'itération suivante, nouveau calcul de vitesse

else if $J_l > 1.01 J_{l-1}$ **then**

$k = 1$

$c = c/2$

$prec = true$

Retour à l'itération précédente, même vitesse mais pas de transport plus petit

else if $0.998 J_{l-1} < J_l \leq 1.01 J_{l-1}$ **then**

Pas de modification des constantes k et c

if $prec = true$ **then**

$n_{stagn} = n_{stagn} + 1$

else

$n_{stagn} = 1$

$prec = true$

end if

Passage à l'itération suivante, nouveau calcul de vitesse

end if

if $n_{stagn} = 6$ **then**

Si la fonction coût a stagné pendant 6 itérations consécutives

return Convergence

end if

Conclusion

Grâce au calcul de la vitesse, à la résolution de l'équation d'Hamilton-Jacobi et à l'évolution du maillage, nous avons pu mettre en place un algorithme d'optimisation de forme complet. Désormais, nous arrivons à l'étape cruciale de notre étude : les tests numériques de l'algorithme, qui nous permettront de valider la méthode et les calculs.

Chapitre 6

Résultats numériques

Contents

1	Présentation des cas-test	144
1.1	Guide d'onde	145
1.2	Double-patch	147
2	Minimisation du module du coefficient de réflexion	149
2.1	Guide d'onde - Premier résultat	149
2.2	Double-patch - Premier résultat	154
2.3	Influence de l'initialisation	156
2.4	Influence des paramètres du maillage	161
3	Optimisation multi-fréquences	163
3.1	Fonction coût	163
3.2	Double-patch - résultats	164
3.3	Analyse	165
4	Coefficient de réflexion cible : module	166
4.1	Calcul de la dérivée de forme	167
4.2	Guide d'onde - Résultats	167
4.3	Analyse	168
5	Coefficient de réflexion cible : amplitude et phase	168
5.1	Calcul de la dérivée de forme	169
5.2	Résultats	170
6	Conclusion et perspectives	173

Introduction

Maintenant que le cadre théorique et pratique a été défini, nous allons présenter les résultats obtenus numériquement par la méthode présentée tout au long des précédents chapitres.

Afin de tester l'algorithme d'optimisation, nous allons considérer deux cas-tests sur lesquels nous allons baser nos études, et que nous présentons dans une première section. Le premier est un guide d'onde métallisé, et le second, plus proche des applications antennaires, est un élément rayonnant à deux patches destiné à fonctionner en réseau.

Nous considérons diverses géométries initiales pour ces deux dispositifs rayonnants, que nous présentons également.

La deuxième section, la plus importante, présente les premiers résultats obtenus par l'algorithme et différents tests de robustesse de ce dernier.

Dans un premier temps, nous présentons les résultats obtenus sur nos cas-tests lors de la minimisation du module du coefficient de réflexion de l'antenne, qui est la fonction coût considérée dans les chapitres précédents et sur laquelle nous avons basé nos calculs. Ces résultats, très satisfaisants, sont ensuite analysés afin de juger de la validité ou non de la solution obtenue.

Ensuite, nous étudions un peu plus précisément l'influence de la géométrie initiale du patch métallique sur le résultat de l'algorithme, grâce aux différentes initialisations présentées dans la première section. La solution optimale n'étant pas a priori unique ; et la méthode d'optimisation permettant la convergence vers des minima locaux ; nous observons l'importance de la géométrie initiale sur la géométrie finale.

Enfin, nous nous intéressons à l'influence des paramètres numériques du problème, c'est-à-dire la définition de la grille cartésienne de calcul et le maillage triangulaire sous-jacent.

Dans une troisième section, nous considérons la même fonction coût que précédemment, sauf qu'au lieu de chercher à minimiser le coefficient de réflexion pour une fréquence donnée, nous cherchons à le minimiser sur une bande de fréquence. Il s'agit d'une problématique très importante lors de la conception d'éléments rayonnants, puisqu'on va chercher, de cette manière, à élargir la bande de fonctionnement de l'antenne.

Le test est effectué sur l'élément rayonnant double-patch, et le résultat obtenu, ici aussi très intéressant, est analysé et commenté.

Dans une quatrième section, nous présentons un test très similaire au premier, sauf qu'au lieu de chercher à minimiser le module du coefficient de réflexion, nous cherchons cette fois à atteindre un module de coefficient de réflexion cible.

Ce test ressemble beaucoup au premier test, mais nous permet tout de même d'atteindre notre objectif avec une grande précision.

Enfin, dans une cinquième section, nous présentons les résultats obtenus lors de la considération d'une fonction coût légèrement différente de la première. Au lieu de chercher à atteindre un module de coefficient de réflexion cible, on va chercher à atteindre cette fois un coefficient de réflexion cible complexe. En d'autres mots, nous allons chercher à atteindre à la fois une amplitude et une phase définies.

Ce test nécessite une légère modification dans la fonction coût, qui se traduit par une variation de l'état adjoint. On observe ensuite les résultats obtenus sur le guide d'onde et y apportons quelques commentaires.

Pour terminer, nous dressons un bilan des résultats obtenus lors de nos travaux, et y apportons quelques pistes de réflexion qui restent encore à considérer.

1 Présentation des cas-test

Dans un premier temps, nous présentons les deux cas-tests que nous allons étudier. Le premier est un simple guide d'onde et le deuxième est un élément rayonnant un peu

plus complexe.

1.1 Guide d'onde

1.1.1 Présentation générale

On considère un guide d'onde plongé dans le vide dont l'embouchure est partiellement métallisée tel que présenté sur la figure suivante :

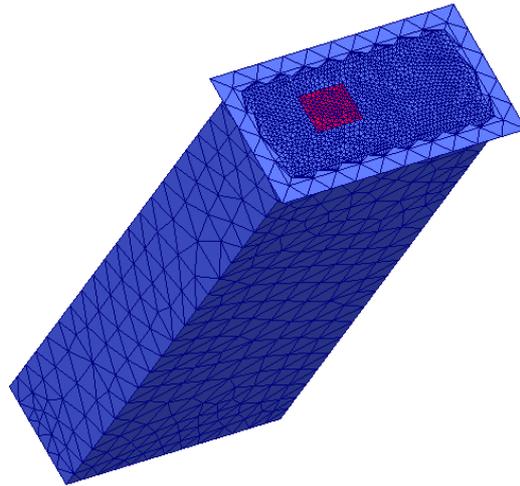


FIGURE 6.1 – Vue globale du guide d'onde

Regardons le guide un peu plus en détails :

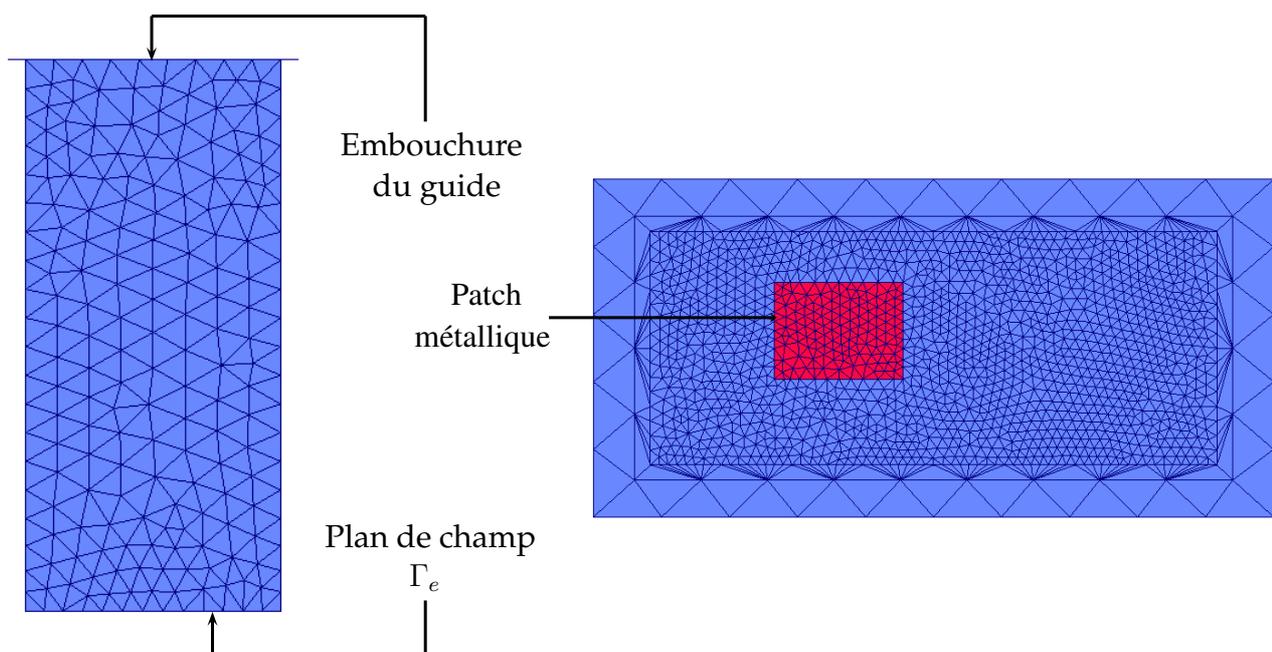


FIGURE 6.2 – Coupe transversale du guide (à gauche) et vue de dessus de l'embouchure du guide (à droite)

Le guide d'onde est rempli par un matériau diélectrique (dans notre cas, l'air). On ne considère donc que deux domaines : le domaine extérieur (l'air) et le domaine intérieur du guide (également l'air). On se place à la fréquence 9 GHz. La surface Γ_M sur laquelle le patch métallique va évoluer et la zone tampon entre Γ_M et le reste du maillage sont définies comme sur la figure suivante :

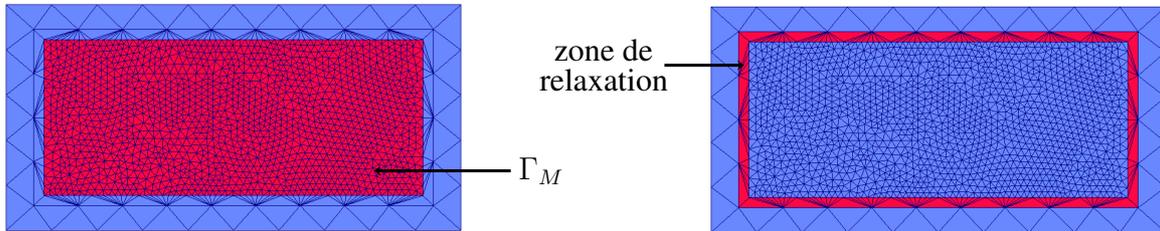


FIGURE 6.3 – Coupe transversale du guide (à gauche) et vue de dessus de l'embouchure du guide (à droite)

1.1.2 Différentes initialisations

On va considérer plusieurs formes et positions pour le patch métallique initial :

1ère initialisation - Rectangle décentré

Il s'agit du cas qui a été présenté dans le paragraphe précédent. Le patch métallique initial est un rectangle, légèrement décalé par rapport au centre de Γ_M . Les caractéristiques du maillage sont les suivantes :

- Nombre de triangles : 4206
- Nombre de nœuds : 2107
- Nombre de degrés de liberté : 10868
- Taille moyenne d'arête sur Γ_M : 0.41 mm

2ème initialisation - Cercle centré

La deuxième initialisation considérée pour le patch métallique est un cercle, centré cette fois-ci. Le maillage est légèrement plus grossier sur Γ_M :

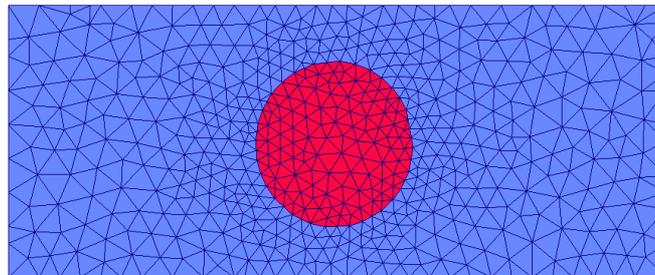


FIGURE 6.4 – Maillage de Γ_M pour un patch métallique circulaire centré

Les caractéristiques du maillage sont les suivantes :

- Nombre de triangles : 2470
- Nombre de noeuds : 1239
- Nombre de degrés de liberté : 5660
- Taille moyenne d'arête sur Γ_M : 0.63 mm

3ème initialisation - Bande horizontale Enfin, la troisième géométrie initiale que nous allons étudier est celle d'une bande métallique horizontale aussi large que possible :

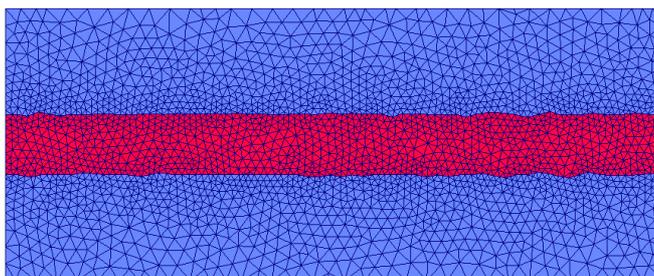


FIGURE 6.5 – Maillage de Γ_M pour une bande métallique horizontale

Les caractéristiques du maillage sont les suivantes :

- Nombre de triangles : 6286
- Nombre de noeuds : 3147
- Nombre de degrés de liberté : 11475
- Taille moyenne d'arête sur Γ_M : 0.29 mm

1.2 Double-patch

1.2.1 Présentation générale

On considère cette fois-ci un élément rayonnant constitué de deux blocs de diélectrique dont une partie de la surface est métallisée, séparés par un troisième domaine diélectrique. Le patch du bas est alimenté par un câble coaxial. Cet élément rayonnant est schématisé de la manière suivante :

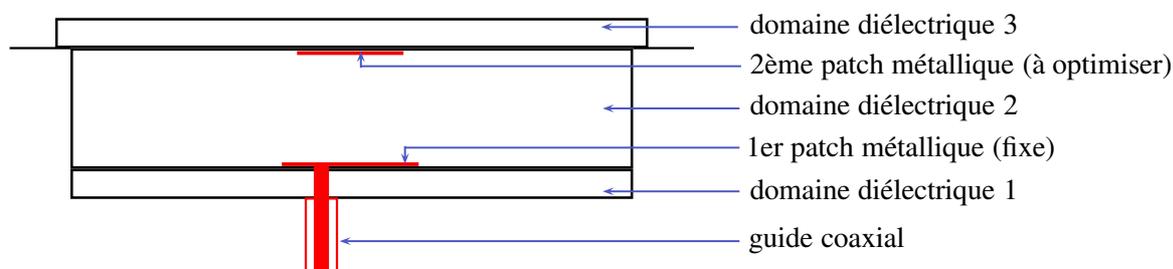


FIGURE 6.6 – Schéma de l'élément rayonnant de type double-patch

Le but d'un tel dispositif est d'élargir la bande de fréquence du patch inférieur, grâce à l'ajout d'un patch supérieur, de fréquence de coupure différente .

Cette géométrie fait, cette fois, intervenir quatre domaines : les deux blocs (domaines 1 et 3 sur le schéma) sont remplis par un matériau diélectrique de permittivité 3.56, le domaine 2 est rempli d'air, et le domaine extérieur est également le vide. Le guide d'onde coaxial est rempli d'un autre matériau diélectrique, le PTFE (téflon) de permittivité 2.5. On se place à la fréquence 9 GHz.

Le patch métallique alimenté par le guide d'onde est fixe. En revanche, on s'intéresse à l'optimisation de la forme du patch supérieur, dont voici le maillage :

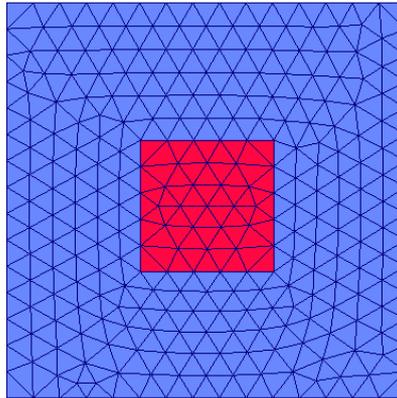


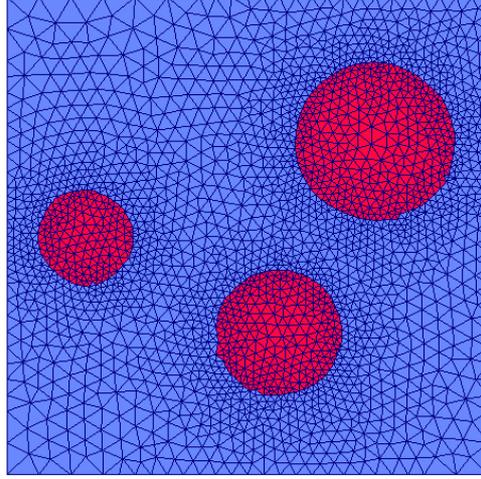
FIGURE 6.7 – Maillage du patch supérieur (à optimiser) de l'élément rayonnant de type double-patch

1.2.2 Différentes initialiations

1ère initialisation - Carré centré Il s'agit du cas qui a été présenté dans le paragraphe précédent. Le patch métallique initial est un carré centré sur Γ_M . Les caractéristiques du maillage sont les suivantes :

- Nombre de triangles : 3726
- Nombre de noeuds : 1808
- Nombre de degrés de liberté : 8545
- Taille moyenne d'arête sur Γ_M : 1 mm

2ème initialisation - Trois cercles La deuxième géométrie initiale consiste en trois patches métalliques circulaires répartis sur la surface.

FIGURE 6.8 – Maillage de Γ_M pour trois patches ronds

Les caractéristiques du maillage sont les suivantes :

- Nombre de triangles : 7776
- Nombre de noeuds : 3833
- Nombre de degrés de liberté : 20531
- Taille moyenne d'arête sur Γ_M : 0.56

2 Minimisation du module du coefficient de réflexion

On va désormais chercher à tester l'algorithme d'optimisation sur les cas-tests présentés dans la section précédente pour la minimisation du module du coefficient de réflexion. Il s'agit bien de la partie réelle du flux du vecteur de Poynting à travers la section du guide, tel qu'étudié dans les chapitres précédents.

Dans le cas du guide d'onde, cette fonctionnelle n'est pas très intéressante : minimiser le module du coefficient de réflexion revient en fait à supprimer totalement la surface métallisée. Ainsi, afin d'obtenir des résultats plus parlants, on choisit de maximiser le coefficient de réflexion : cela n'a certes pas d'intérêt industriel, mais permet de tester l'algorithme en considérant simplement l'opposé de la vitesse calculée.

Dans le cas de l'élément rayonnant double patch, sa structure plus complexe ne permet pas la définition d'une solution évidente comme pour le guide d'onde : il sera donc intéressant, cette fois-ci, de chercher un minimum pour le coefficient de réflexion.

2.1 Guide d'onde - Premier résultat

On cherche donc ici à maximiser le module du coefficient de réflexion, ce qui revient de manière équivalente à minimiser le module du coefficient de transmission.

2.1.1 Coup d'œil sur la vitesse

Avant d'étudier les résultats de l'algorithme, il est intéressant de regarder l'allure de la vitesse, pour la première itération :

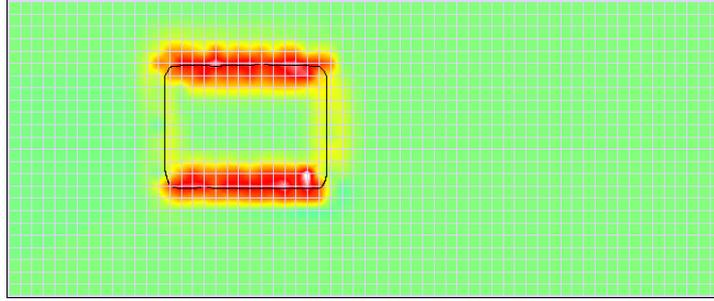


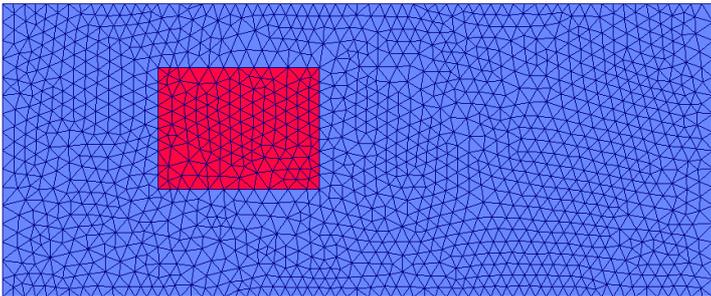
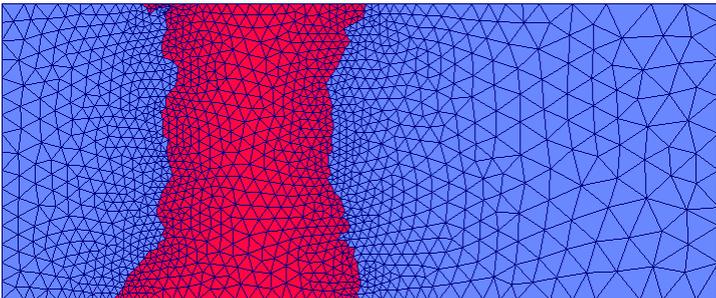
FIGURE 6.9 – Vitesse initiale, guide d'onde avec patch métallique rectangulaire

On remarque que la vitesse, autour de la frontière métallique, est quasiment partout positive : cela indique que le patch aura tendance à s'étendre.

De plus, on remarque également que la vitesse prend des valeurs beaucoup plus fortes sur les frontières horizontales du patch, alors qu'elle est très faible sur les frontières verticales. Cela signifie que le coefficient de réflexion possède une sensibilité plus forte au mouvement du patch dans le sens de sa hauteur. Au contraire, un changement de sa largeur aura une faible influence sur la fonction coût. On s'attend donc à une déformation plus importante dans une direction que dans l'autre.

2.1.2 Résultats de l'algorithme

Lorsque l'on applique l'algorithme au guide d'onde avec patch métallique rectangulaire décentré, on obtient le résultat suivant pour la géométrie initiale et la géométrie finale :

Géométrie	Coefficient de transmission
	0.6607 (-3.59 dB)
	0.1237 (-18.15 dB)

L'algorithme converge en 41 itérations et atteint son minimum à l'itération n°31. Usuellement, on a pour habitude d'exprimer le coefficient de réflexion (ou de transmission) en décibels :

$$\alpha_{dB} = 20 \log_{10} |\alpha|$$

La courbe représentant le coefficient de transmission (en dB) en fonction du nombre d'itération est la suivante :

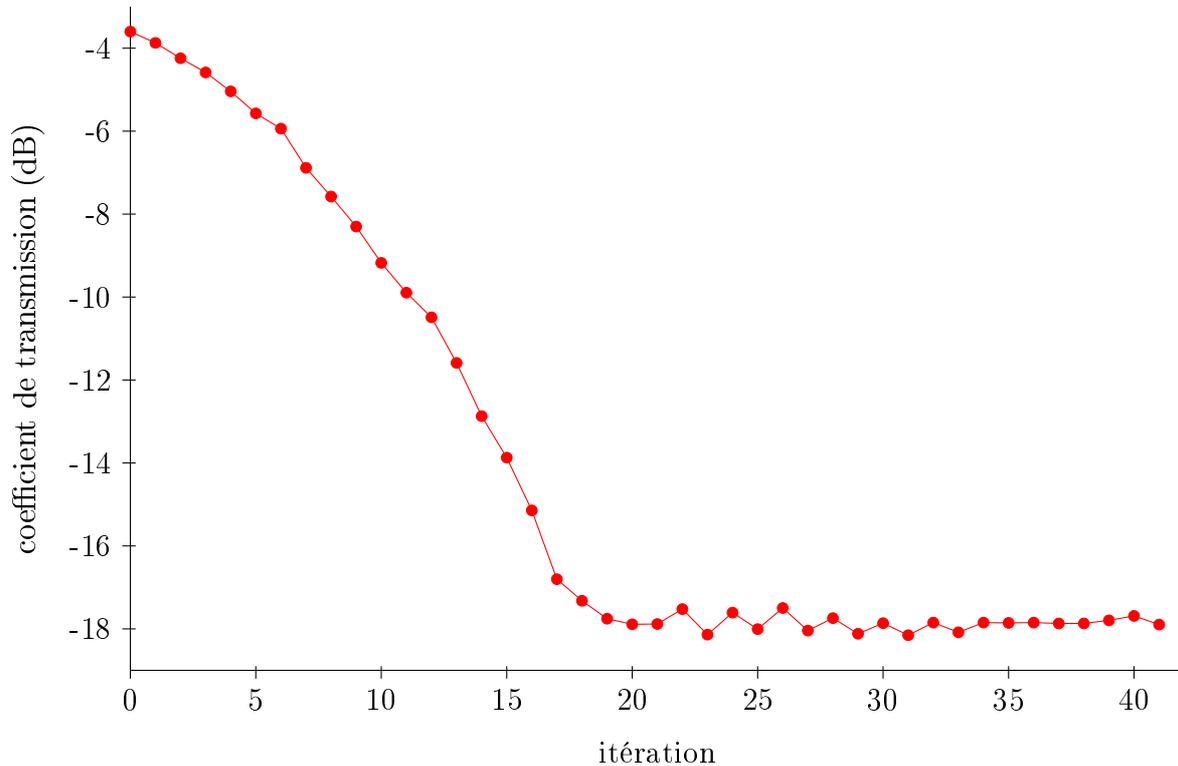


FIGURE 6.10 – Courbe de convergence : guide d'onde, 1ère initialisation

Le temps de calcul total est de 6h37m sur un processeur Intel®Core™i7 (4 cœurs, 8 Go de mémoire).

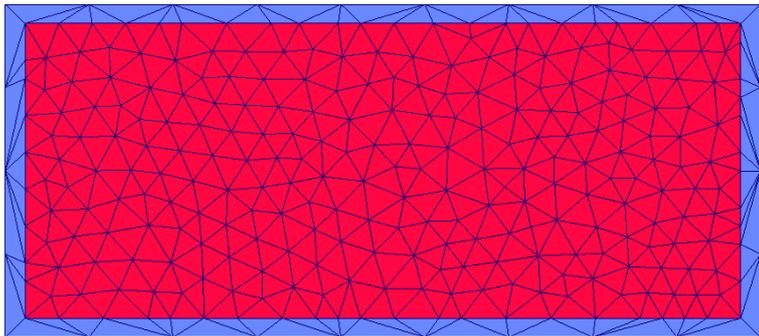
Par la suite, le même processeur sera utilisé. On notera également que le calcul direct est parallélisé, contrairement au calcul de la vitesse qui est séquentiel.

En moyenne, sur une itération, le temps de calcul est réparti de la manière suivante :

- résolution du problème direct et du problème adjoint : 1/3 du temps de calcul ;
- calcul de la vitesse : 2/3 du temps de calcul ;
- transport et remaillage : temps de calcul négligeable.

2.1.3 Validité de la solution

Il convient désormais d'essayer de juger de la validité de ce maximum. Intuitivement, on pense tout d'abord à la géométrie qui consiste à métalliser la totalité de la surface :

Géométrie	Coefficient de transmission
	<p style="text-align: center;">0.1704 (-15.37 dB)</p>

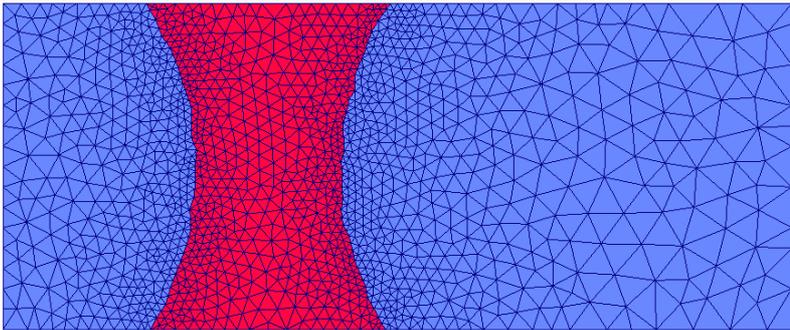
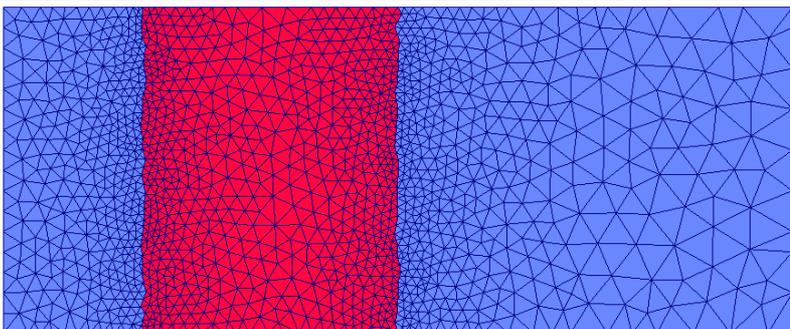
On a fait apparaître la zone de relaxation sur le maillage ci-dessus, afin de rappeler que l'embouchure du guide ne peut pas être totalement métallisée.

On remarque que le coefficient de transmission est ici plus élevé que celui de la géométrie obtenue par l'algorithme (environ 3 dB de plus), qui nous a donc permis de trouver une solution meilleure que la géométrie la plus intuitive.

On peut à présent comparer notre résultat avec celui obtenu pour des géométries proches de celle calculée par l'algorithme.

Dans un premier temps, on en choisit deux :

- La première est celle d'un patch métallique vertical aux bords incurvés vers l'intérieur. Elle est quasiment identique à la géométrie optimale donnée par l'algorithme mais a été lissée et symétrisée.
- La deuxième est celle d'un patch métallique vertical, dont la largeur est la même que celle du patch précédent prise à ces extrémités haute et basse.

Géométrie	Coefficient de transmission
	<p style="text-align: center;">0.1243 (-18.11 dB)</p>
	<p style="text-align: center;">0.1658 (-15.61 dB)</p>

On observe tout d'abord que le premier patch, celui qui lisse la géométrie calculée par

l'algorithme, donne presque exactement le même résultat. Cela n'a rien de surprenant, mais nous indique que les instabilités observées sur la géométrie sont a priori numériques et n'ont pas d'influence sur le coefficient de réflexion.

On observe également que le deuxième patch (vertical aux bords droits) donne un résultat légèrement moins bon que le patch optimal. Cela signifie que la volonté de l'algorithme de creuser les bords vers l'intérieur améliore effectivement le résultat.

Afin d'analyser ce comportement, on va faire varier la largeur h du patch incurvé (voir figure 6.11 ci-dessous), afin d'observer l'évolution du coefficient de transmission :

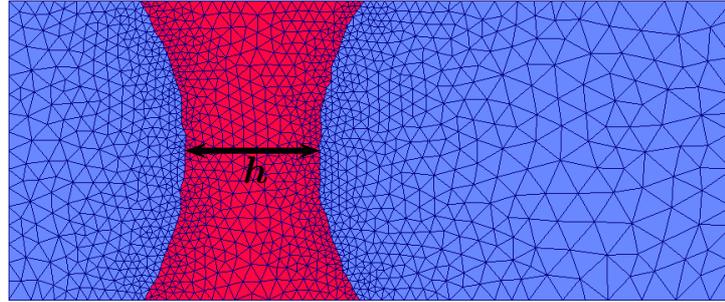


FIGURE 6.11 – Patch métallique incurvé de largeur centrale h et de largeur extérieure fixée 7cm

On obtient, pour un échantillon de valeurs de h représentatives, la courbe suivante du coefficient de transmission en fonction de h :

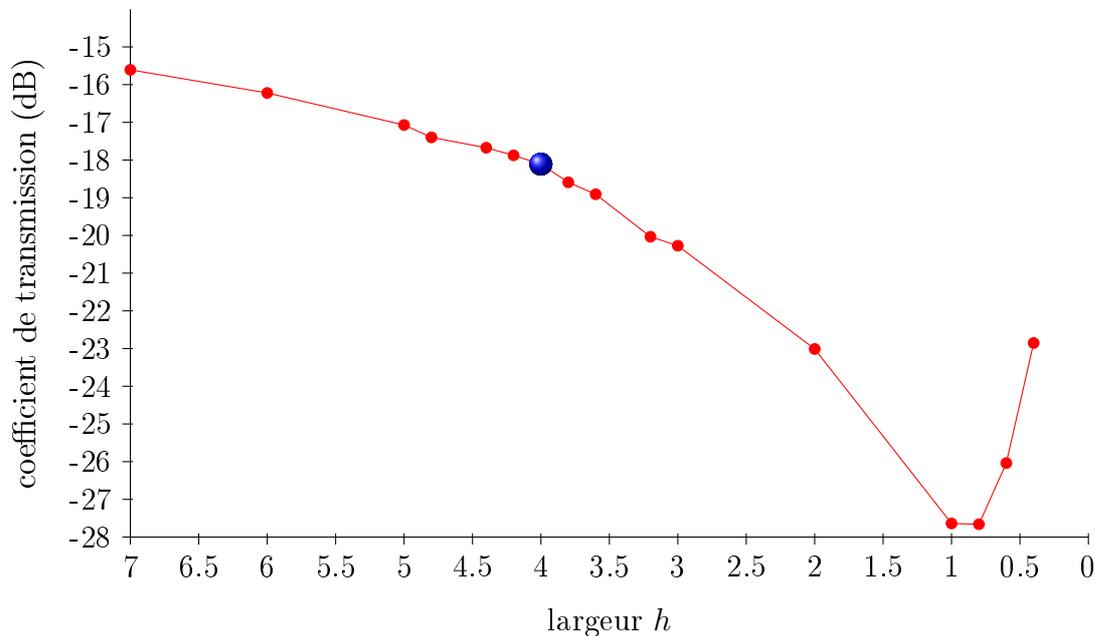


FIGURE 6.12 – Coefficient de transmission en fonction de la largeur h du milieu du patch métallique

Le point en bleu sur la figure 6.12 ci-dessus représente la valeur de h qui correspond à la géométrie optimale calculée par l'algorithme. C'est donc celle utilisée précédemment pour construire le patch incurvé symétrique le plus proche possible de la géométrie optimale calculée, et il s'agit de la valeur $h = 4$.

La valeur $h = 7$ correspond au patch métallique vertical également étudié précédemment.

On remarque immédiatement que la valeur de h calculée par l'algorithme n'est pas la valeur optimale. Cela signifie que si l'algorithme avait continué à creuser dans la même direction, il aurait pu trouver un meilleur minimum.

On essaye de relancer l'algorithme à partir de la géométrie optimale légèrement lissée, afin de voir s'il parvient à repartir dans la bonne direction, mais le résultat n'est pas meilleur. Si on observe la vitesse, pour la première itération, on obtient :

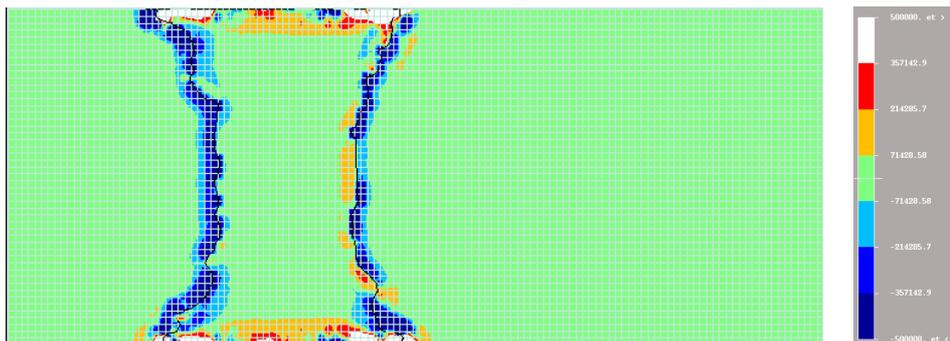


FIGURE 6.13 – Vitesse pour la géométrie optimale

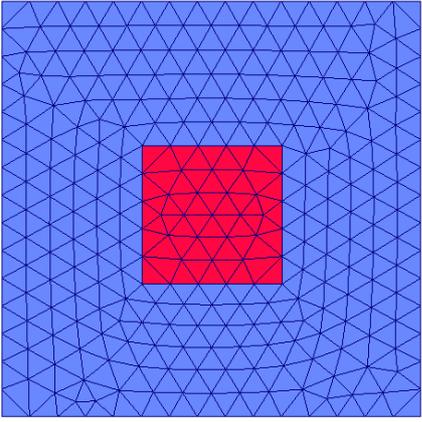
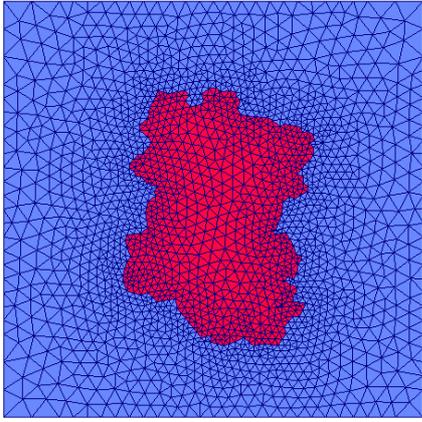
On remarque que la vitesse change de signe au passage de l'interface, ou du moins devient nulle : du côté gauche, elle est négative à l'extérieur du métal et quasi-nulle à l'intérieur ; et du côté droit elle est négative à l'extérieur du métal et positive ou nulle à l'intérieur. De plus, la vitesse prend des valeurs très fortes aux extrémités supérieure et inférieure du patch, par rapport aux valeurs prises aux extrémités gauche et droite. Ceci explique qu'elle ne peut plus faire évoluer la fonction Level-Set dans une direction ou une autre, et que celle-ci reste donc bloquée.

Les causes de ce dysfonctionnement sont difficiles à définir, bien que l'on puisse incriminer, a priori, des imperfections dans le calcul de la vitesse. Nous reviendrons sur ce point lors de la conclusion de ce chapitre.

2.2 Double-patch - Premier résultat

2.2.1 Résultats de l'algorithme

À présent, étudions les résultats obtenus pour le cas-test double patch, avec patch métallique initial carré centré :

Géométrie	Coefficient de réflexion
	0.7511 (-2.49 dB)
	0.3242 (-9.78 dB)

L'algorithme converge en 42 itérations et atteint son minimum à l'itération n°41. La courbe de convergence est la suivante :

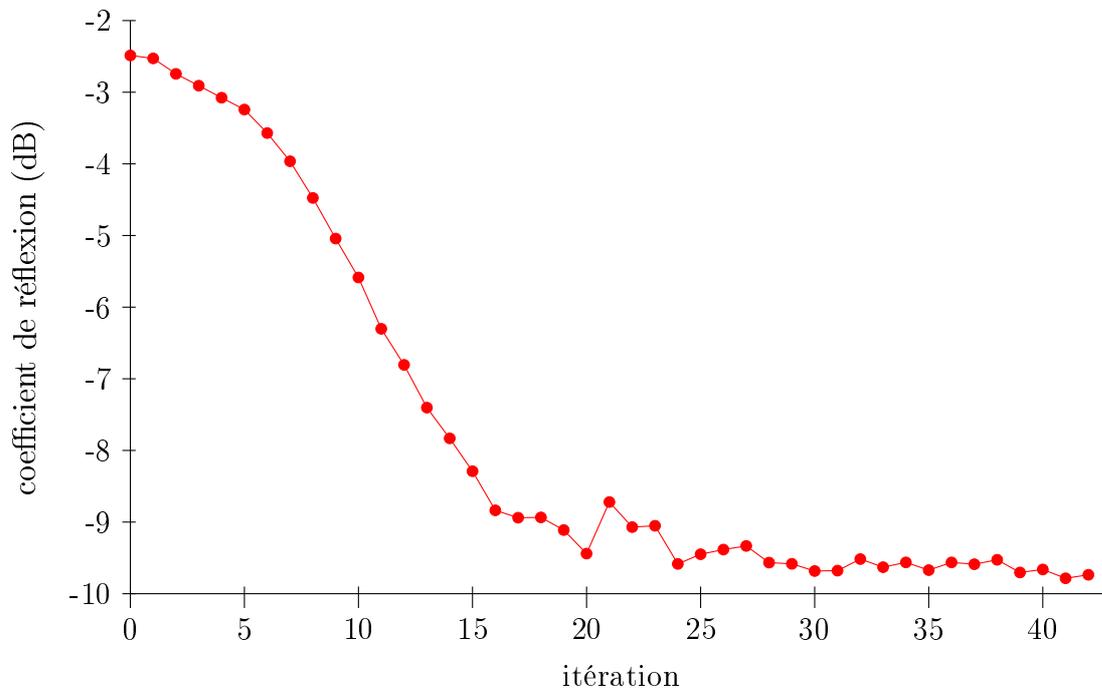
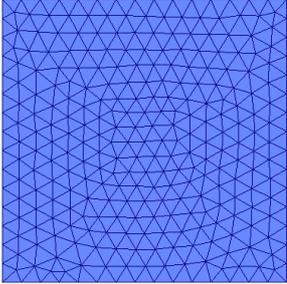


FIGURE 6.14 – Courbe de convergence : double-patch, 1ère initialisation

Le temps de calcul est de 17h32m.

2.2.2 Validité de la solution

Tout d'abord, observons le coefficient de réflexion lorsque l'on ne métallise pas du tout Γ_M :

Géométrie	Coefficient de réflexion
	0.8125 (-1.80 dB)

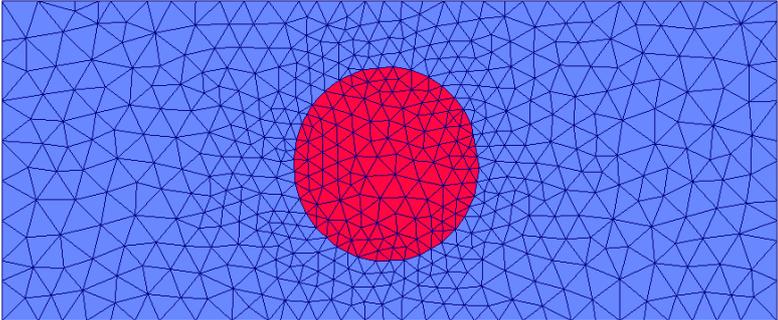
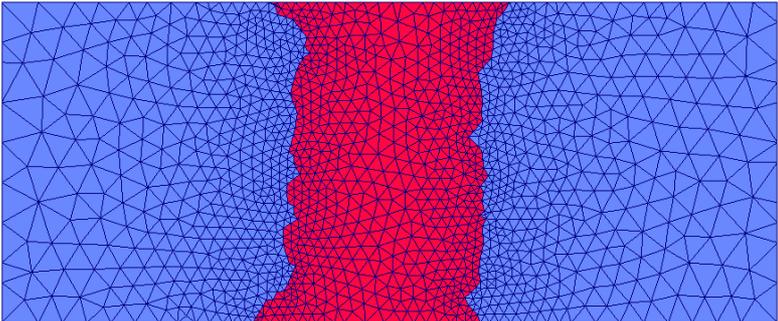
La présence du patch métallique fixe rend difficile la définition d'une "bonne" géométrie intuitive. Le test précédent nous apprend que le patch métallique inférieur n'est pas adapté à la fréquence étudiée : en effet, en l'absence de patch supérieur, son coefficient de réflexion est grand. Cela signifie qu'on sera, dans tous les cas, bloqués par la désadaptation du patch inférieur. On peut améliorer son coefficient de réflexion en optimisant la forme du patch supérieur, mais il ne sera pas possible d'obtenir un très bon coefficient de réflexion ; ce qui explique que l'algorithme ne permette pas d'aller au-delà de -10 dB.

2.3 Influence de l'initialisation

2.3.1 Guide d'onde

2ème initialisation - Résultats

Appliquons désormais l'algorithme d'optimisation au guide d'onde avec patch métallique initial circulaire centré :

Géométrie	Coefficient de transmission
	0.6135 (-4.24 dB)
	0.1607 (-15.88 dB)

On retrouve le même comportement que pour la première initialisation, avec cette fois-ci un minimum local légèrement moins bon que le précédent.

L'algorithme converge en 30 itérations et atteint son minimum à la 20ème itération. La courbe de convergence est la suivante :

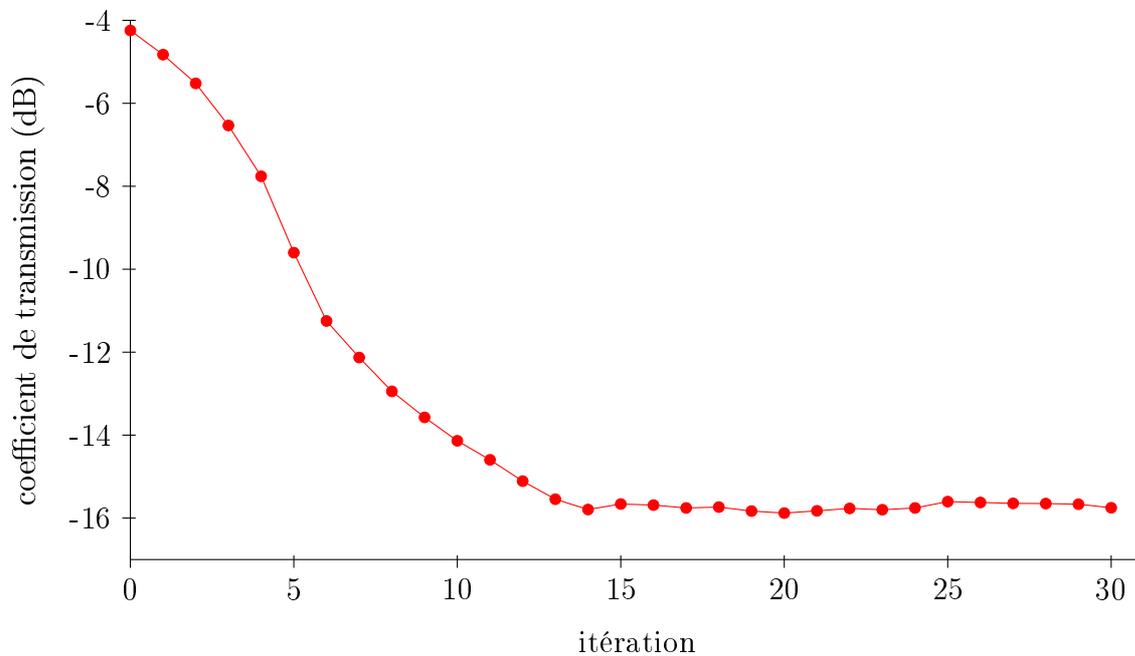
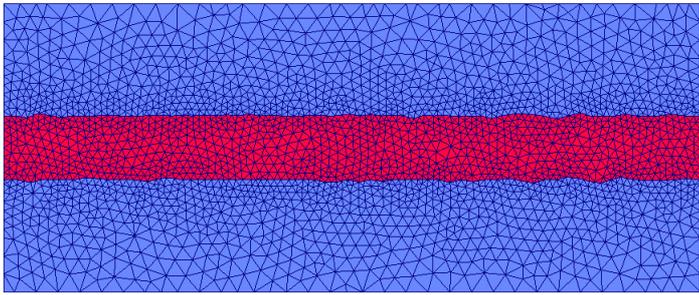
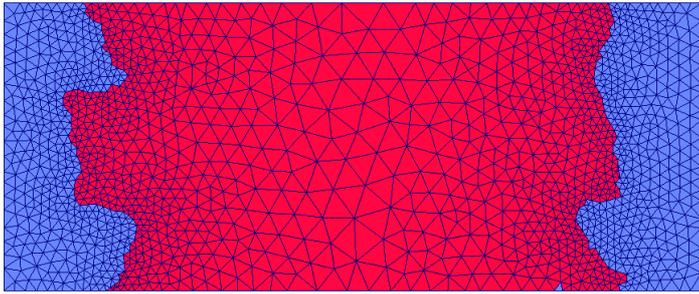


FIGURE 6.15 – Courbe de convergence : guide d'onde, 2ème initialisation

Le temps de calcul est de 3h48m.

3ème initialisation - Résultats

Enfin, observons les résultats obtenus pour la troisième géométrie initiale :

Géométrie	Coefficient de transmission
	0.6844 (-3.29 dB)
	0.1292 (-17.77 dB)

L'algorithme converge en 49 itérations et atteint son minimum à la 39ème. La courbe de convergence est la suivante :

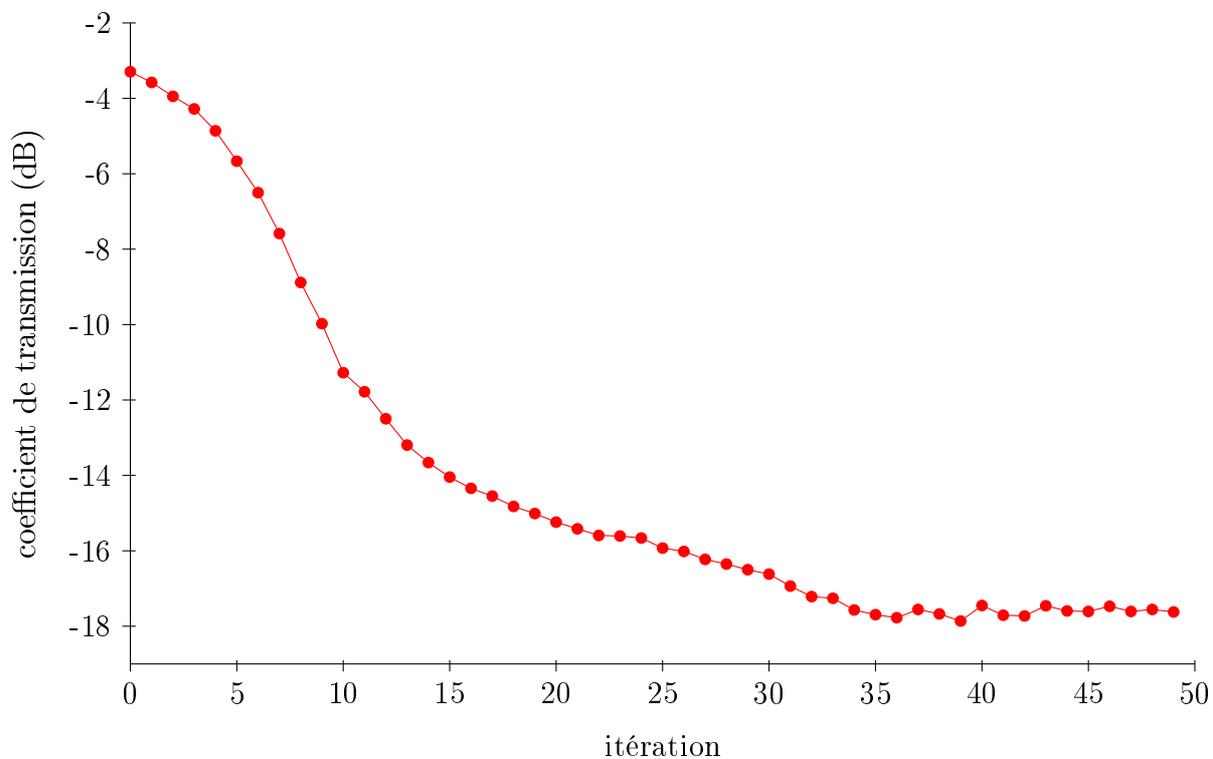
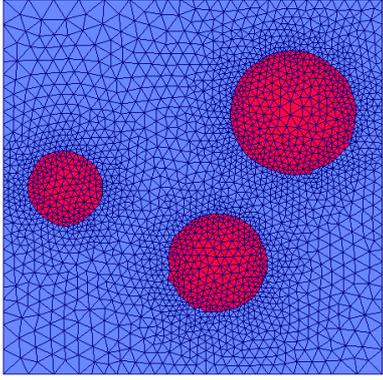
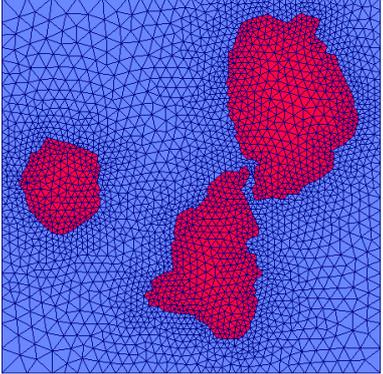


FIGURE 6.16 – Courbe de convergence : guide d'onde, 3ème initialisation

Le temps de calcul est de 9h48m.

2.3.2 Double-patch

Observons à présent les résultats obtenus pour la deuxième géométrie initiale de l'élément rayonnant double-patch :

Géométrie	Coefficient de transmission
	0.7612 (-2.37 dB)
	0.4126 (-7.69 dB)

L'algorithme converge en 35 itérations et atteint son minimum à la 25ème. La courbe de convergence est la suivante :

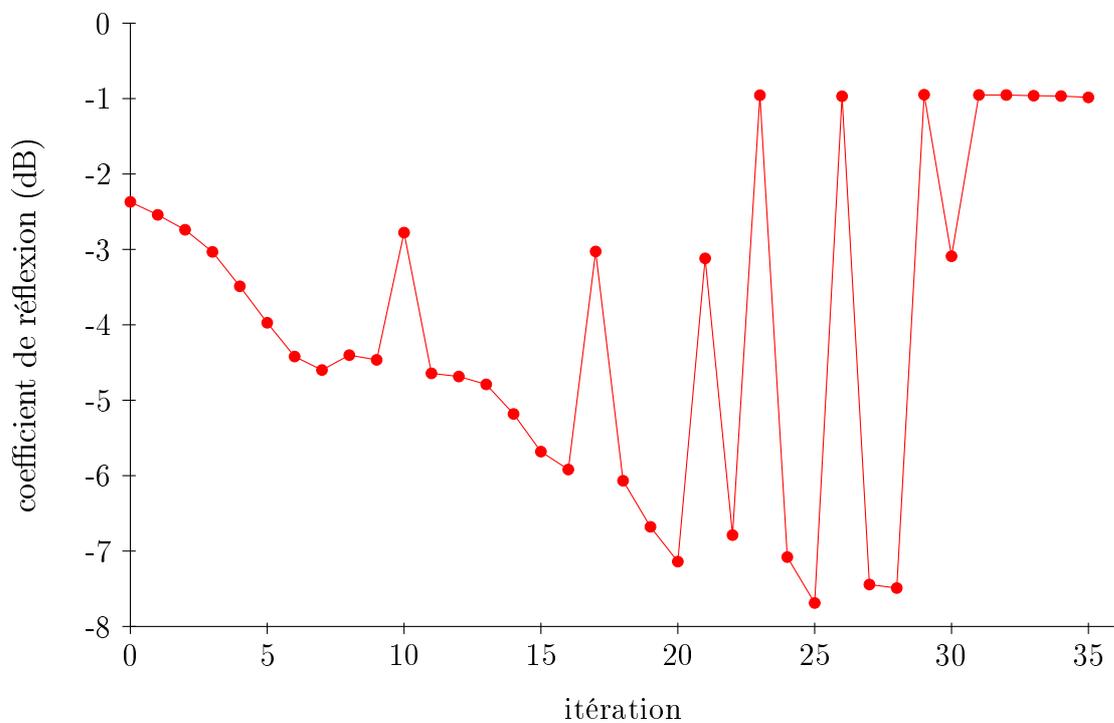


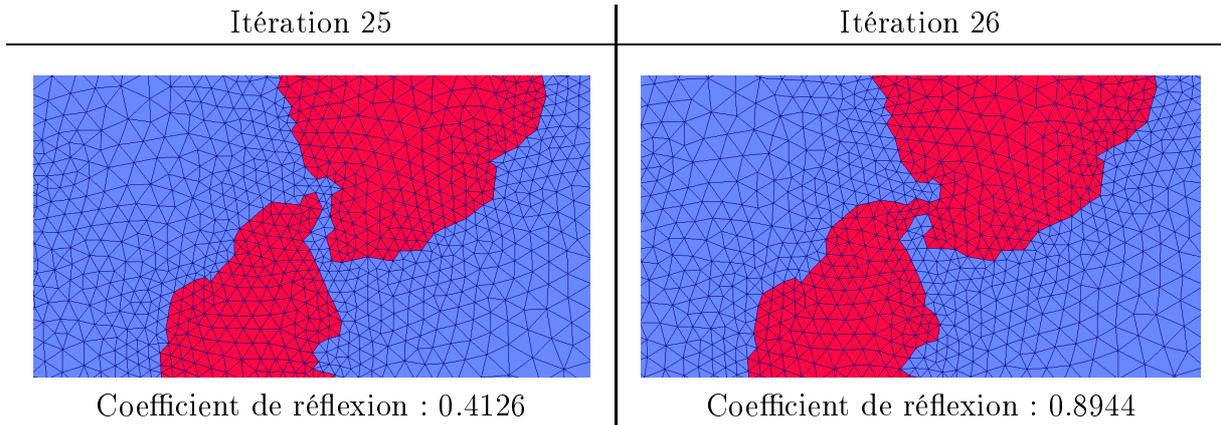
FIGURE 6.17 – Courbe de convergence : double-patch, 2ème initialisation

Le temps de calcul est de 15h45.

On remarque immédiatement que la courbe de convergence n'est pas du tout monotone. Régulièrement, la fonction coût remonte de manière très marquée.

Cela survient lorsque les deux patches métalliques rentrent en contact : il se produit alors un court-circuit et le coefficient de réflexion devient beaucoup plus grand. L'algorithme revient alors à la géométrie précédente, mais la vitesse finit toujours par joindre les deux patches.

Par exemple, si on zoome sur la jonction entre les patches à l'itération 25 (optimum) et à l'itération 26, on observe :



La jonction, bien que de faible épaisseur, suffit à faire doubler le module du coefficient de réflexion.

Ainsi, bien que la vitesse tende à faire se rejoindre les deux patches, le changement de topologie détériore beaucoup la fonction coût. Les choix de critères d'arrêt de l'algorithme le forcent à s'arrêter à la 35ème itération, mais peut-être l'algorithme aurait-il trouvé une nouvelle direction de descente par la suite.

2.3.3 Synthèse

On remarque assez rapidement que l'initialisation a une grande influence sur la géométrie optimale : le problème d'optimisation ne possède pas de solution unique, et beaucoup de géométries ont des coefficients de réflexion similaires.

Ainsi, en fonction de la géométrie initiale choisie, on tombera dans tel ou tel minimum local, et les géométries atteintes seront très différentes.

Néanmoins, les valeurs des coefficients de réflexion optimaux restent assez similaires :

- Guide d'onde : -18.15 dB pour la 1ère initialisation, -15.88 dB pour la 2ème et -17.77 dB pour la 3ème.
- Double-patch : -9.78 dB pour la 1ère initialisation et -7.69 dB pour la 2ème.

Enfin, on notera l'importance de la topologie sur la solution : un changement de topologie, pour des patches métalliques, induit un court-circuit et donc une forte non-linéarité dans la fonction coût. Ils sont donc assez délicats à gérer au sein du processus d'optimisation.

2.4 Influence des paramètres du maillage

2.4.1 Taille de la grille

On va chercher désormais à étudier l'influence de la taille des mailles de la grille sur le résultat du calcul. Jusqu'à présent, pour le guide d'onde, on a utilisé une grille cartésienne, que l'on note G_1 , aux propriétés suivante :

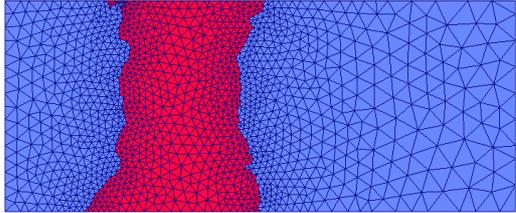
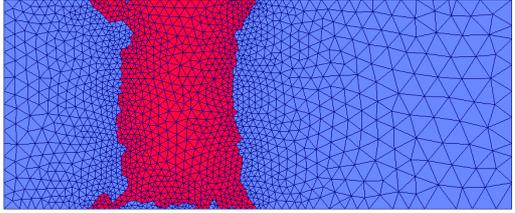
- Nombre de points dans l'axe des abscisses : $N_{x_1} = 63$
- Nombre de points dans l'axe des ordonnées : $N_{x_2} = 25$
- Pas de la grille dans la direction des abscisses : $\Delta_{x_1} = 0.3492$ mm
- Pas de la grille dans la direction des abscisses : $\Delta_{x_2} = 0.3747$ mm

On rappelle que pour le guide avec patch initial rectangulaire décentré, la taille moyenne d'une arête sur Γ_M est de 0.41 mm. Nous avons donc fait le choix de considérer une grille de taille similaire au maillage.

À présent, on lance l'algorithme sur le même maillage, avec une grille G_2 deux fois plus fine, c'est-à-dire :

- Nombre de points dans l'axe des abscisses : $N_{x_1} = 126$
- Nombre de points dans l'axe des ordonnées : $N_{x_2} = 50$
- Pas de la grille dans la direction des abscisses : $\Delta_{x_1} = 0.1746$ mm
- Pas de la grille dans la direction des abscisses : $\Delta_{x_2} = 0.1874$ mm

Comparons les résultats obtenus avec les deux grilles :

	Grille G_1	Grille G_2
Géométrie finale		
Coefficient de transmission	0.1237	0.1295
Nombre d'itérations	41	50
Itération de l'optimum	31	44
Temps de calcul	6h37m	28h26

On remarque que, du point de vue du résultat sur le coefficient de transmission, les résultats sont similaires. En revanche, du point de vue de la géométrie, on observe que l'algorithme n'a pas atteint le bord inférieur de Γ_M . Néanmoins, cela ne semble pas avoir beaucoup d'influence sur le coefficient de transmission, et l'allure générale de la solution est similaire.

La grille G_2 étant plus fine, le transport se fait beaucoup plus lentement, ce qui explique que le nombre d'itérations nécessaire à la convergence est plus important. Si on rajoute à cela le fait que le calcul de la vitesse est 4 fois plus long, on obtient un temps de calcul assez prohibitif.

On peut en conclure qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une grille de calcul qui soit trop fine : le calcul ne gagne pas suffisamment en précision pour améliorer la fonction coût, et le coût en terme de temps de calcul est très grand.

On comprend assez facilement qu'il ne faut pas non plus considérer une grille de calcul qui soit moins fine que le maillage : cela induirait une perte d'informations lors du passage de la grille au maillage et introduirait des erreurs dans le calcul de la vitesse numérique.

On choisit donc de continuer à considérer une grille de calcul qui soit de taille similaire à la taille du maillage sur Γ_M .

2.4.2 Maillage de la zone de relaxation

Lors de nos calculs, nous avons utilisé un maillage de la zone de relaxation qui n'était pas très bien conditionné : en effet, le maillage de Γ_M considéré est plus fin que le maillage du reste de l'antenne. La découpe des éléments de la zone de relaxation crée donc des éléments de faible aire, comme on peut le voir ici :

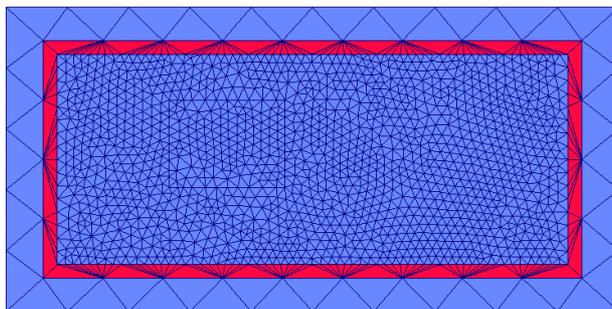


FIGURE 6.18 – Maillage de la zone de relaxation mal conditionné

On va chercher ici à s'assurer que ce mauvais conditionnement, bien que très localisé, n'induit pas d'erreur suffisamment importante sur la calcul direct pour influencer sur le résultat de l'algorithme.

On construit donc un nouveau maillage plus homogène, un peu plus grossier sur Γ_M et plus fin sur la zone de relaxation et l'extérieur :

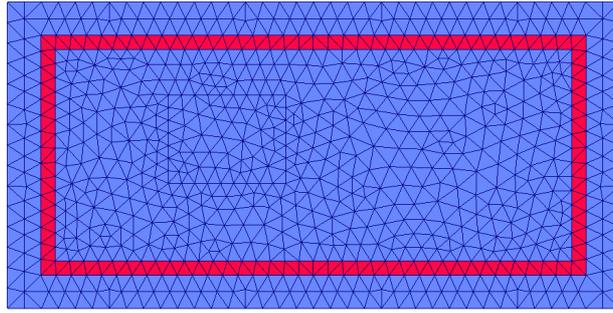
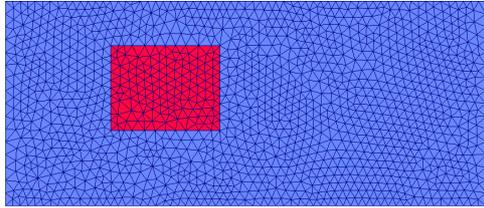
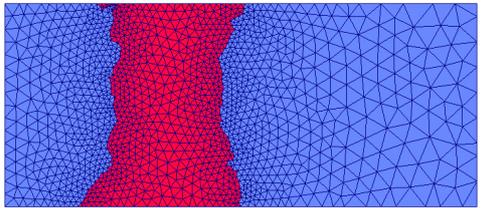
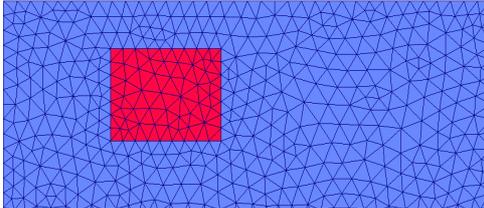
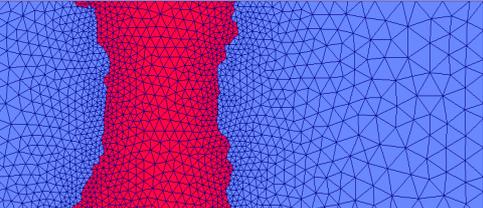


FIGURE 6.19 – Maillage de la zone de relaxation bien conditionné

On relance donc l'algorithme à partir de ce nouveau maillage, et on compare les résultats obtenus avec ceux de l'ancien maillage :

	Géométrie initiale	Géométrie finale
Maillage 1		
	Coefficient de transmission : 0.6607	Coefficient de transmission : 0.1237
Maillage 2		
	Coefficient de transmission : 0.6625	Coefficient de transmission : 0.1206

On voit que la différence de maillage induit une très légère différence dans le calcul de la fonction coût pour la géométrie initiale, mais cela n'affecte a priori pas le fonctionnement de l'algorithme. La géométrie finale du nouveau maillage est très semblable à celle du premier maillage, et les différences sont principalement des instabilités de bord. Les coefficients de transmission optimaux sont assez similaires également.

On peut donc faire l'hypothèse que le mauvais conditionnement de la zone de relaxation, dû à la stratégie choisie de casser les éléments du maillage à chaque itération, n'a pas d'influence significative sur le déroulement de l'algorithme et sur son résultat.

3 Optimisation multi-fréquences

3.1 Fonction coût

Dans beaucoup d'applications, on peut être intéressé par la minimisation du coefficient de réflexion sur une bande de fréquences. Dans ces cas-là, la fonction coût s'écrit simplement comme une combinaison linéaire (pondérée ou non) des coefficients de ré-

flexion de chaque fréquence de la bande :

$$J_{mf}(\Gamma) = \sum_{f=f_{min}}^{f_{max}} \omega_f J_f(\Gamma) \quad (6.1)$$

Ainsi, il en va de même pour la vitesse de l'équation de transport. L'optimisation multi-fréquence ne rajoute aucune difficulté théorique, mais elle multiplie le temps de calcul par le nombre de fréquences considérées.

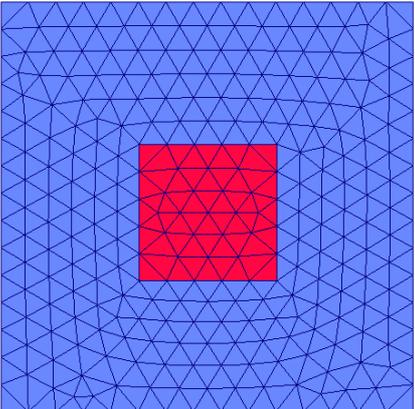
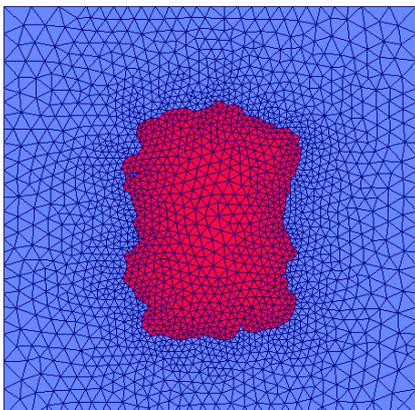
3.2 Double-patch - résultats

On s'intéresse à l'élément rayonnant double-patch, que l'on cherche à optimiser sur la bande de fréquences 9 GHz - 11 GHz. La fonction coût considérée ici est :

$$J_{mf}(\Gamma) = \sum_{i=1}^{N_f} \frac{1}{N_f} J_f(\Gamma) \quad (6.2)$$

On choisit 0.5 GHz comme pas en fréquence, et on étudie donc $N_f = 5$ fréquences.

On obtient les résultats suivants :

Géométrie	Coefficient de réflexion moyen
	<p>0.6150 (-4.22 dB)</p>
	<p>0.1809 (-14.85 dB)</p>

L'algorithme converge en 28 itérations et atteint son minimum à la 12ème.

La courbe de convergence est la suivante :

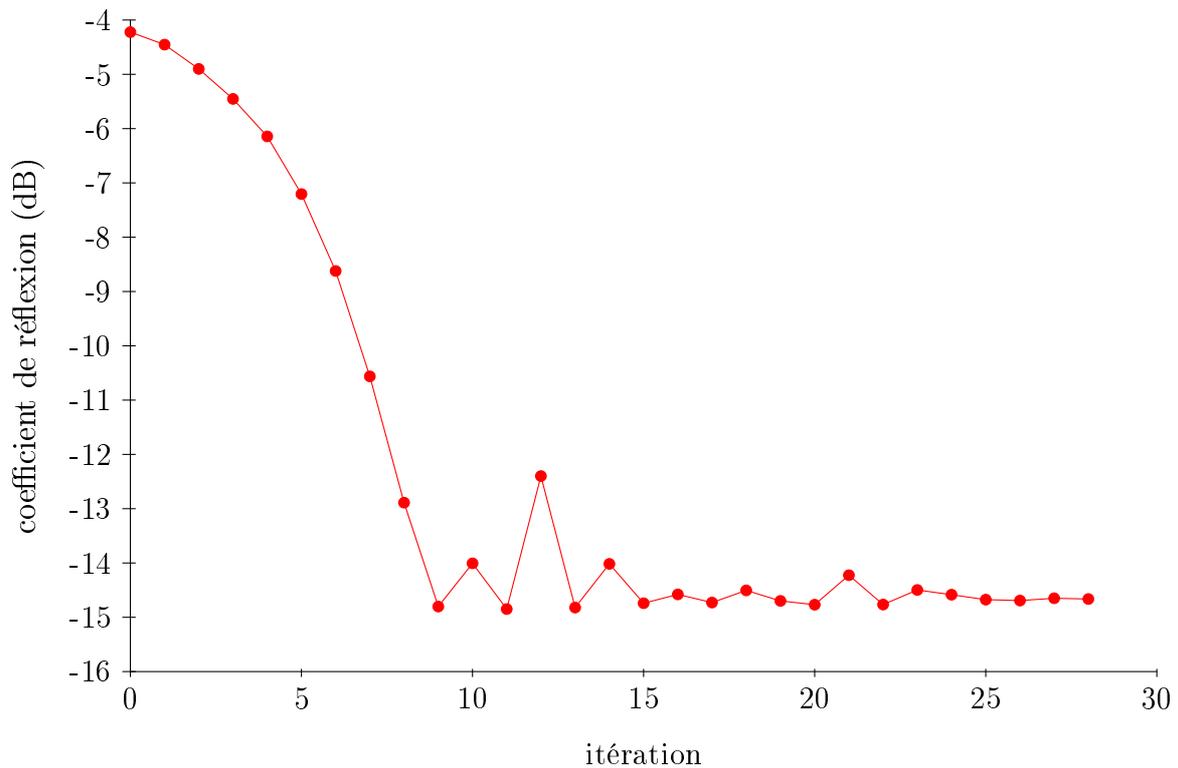


FIGURE 6.20 – Courbe de convergence : double-patch, optimisation multi-fréquence

Le temps de calcul est de 48h13m.

3.3 Analyse

On lance un calcul direct sur l'élément rayonnant optimisé, en prenant cette fois-ci un pas en fréquence de 0.1 GHz. On effectue le même calcul en l'absence de patch supérieur, ainsi qu'avec le patch initial, et on observe les coefficients de réflexion pour chacune des fréquences :

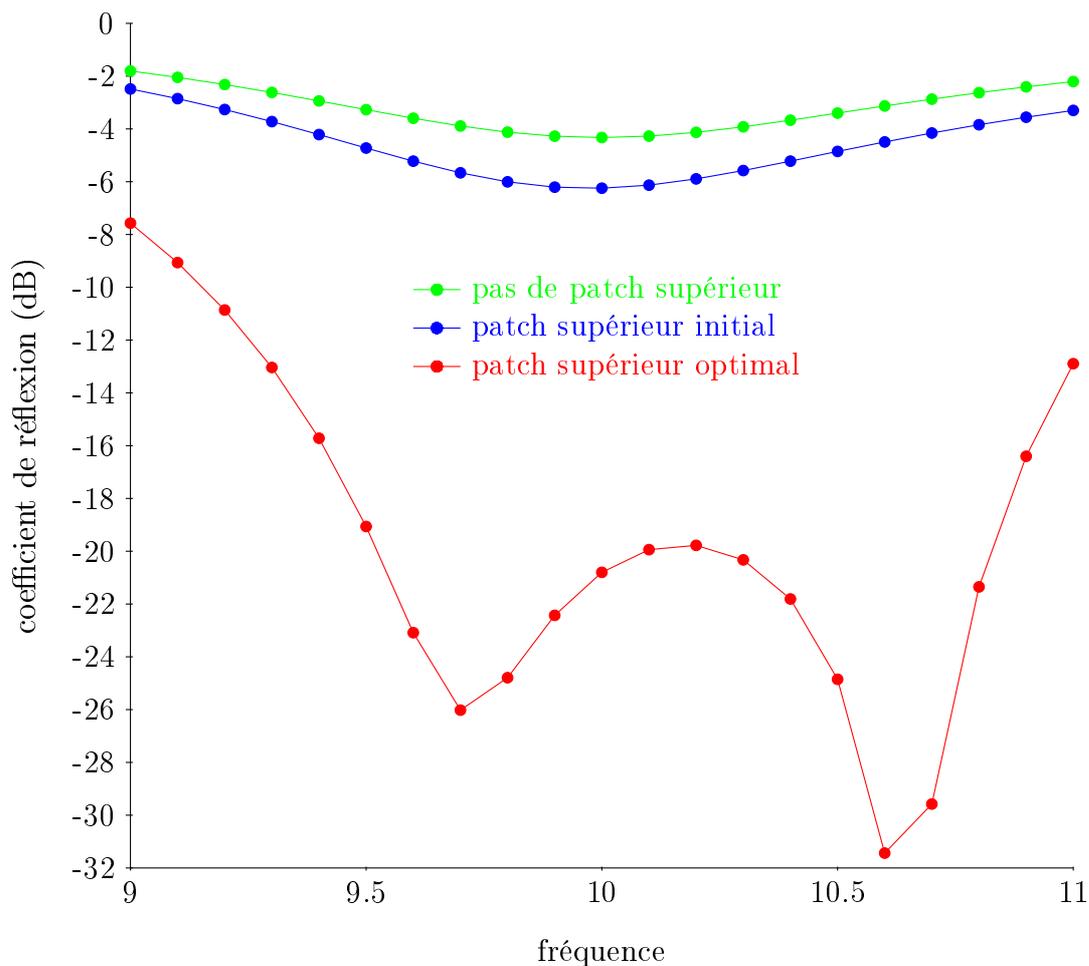


FIGURE 6.21 – Coefficient de réflexion en fonction de la fréquence pour les trois géométries d'intérêt

On observe tout d'abord que le patch inférieur n'est pas adapté : le coefficient de réflexion est assez élevé. La fréquence de coupure se situe autour de 10 GHz.

En ajoutant le patch initial rectangulaire, on améliore un peu le coefficient de réflexion, sans modifier son allure sur la bande de fréquence.

En ajoutant le patch optimal calculé par l'algorithme, on modifie le comportement de l'élément rayonnant. En effet, on remarque que l'on a généré un deuxième pôle. Ces pôles se situent autour de 9.7 GHz et 10.6 GHz. On a donc bien réussi, grâce au patch supérieur, à élargir la bande de fréquence de l'élément rayonnant.

4 Coefficient de réflexion cible : module

De la même manière qu'on a cherché à minimiser le module du coefficient de réflexion précédemment, on peut être intéressé à chercher à atteindre un coefficient de réflexion de module fixé.

4.1 Calcul de la dérivée de forme

La fonction coût correspondant à cette problématique est très proche de la précédente, puisqu'au lieu d'écrire cette fonction sous la forme

$$J(\Gamma) = |\alpha|,$$

on l'écrit à présent sous la forme

$$J_2(\Gamma) = (|\alpha| - |\delta|)^2 = (J(\Gamma) - |\delta|)^2 \quad (6.3)$$

où $|\delta|$ est le module que l'on cherche à atteindre. Dans ce cas, la dérivée de forme devient

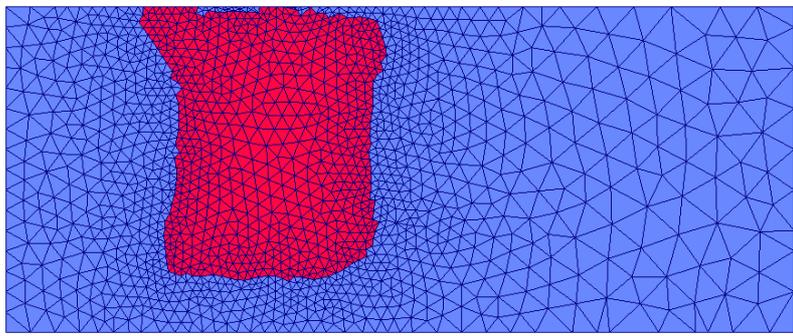
$$J'_2(\Gamma)(\theta) = 2(J(\Gamma) - |\delta|)J'(\Gamma) \quad (6.4)$$

et la vitesse numérique pour l'équation de transport devient

$$\forall y \in \Gamma_M, \mathbf{v}_2(y) = -\mathbf{V}_2(y) \cdot \mathbf{n}(y) = -2(J(\Gamma) - |\delta|)\mathbf{V}(y) \cdot \mathbf{n}(y) \quad (6.5)$$

4.2 Guide d'onde - Résultats

Si on fixe comme valeur à atteindre $|\delta| = 0.6$ (soit -4.4370 dB), alors on obtient :

Géométrie	Coefficient de réflexion
	0.6001 (-4.4355 dB)

L'algorithme converge en 30 itérations et atteint son minimum à la 17ème.

La courbe de convergence est la suivante :

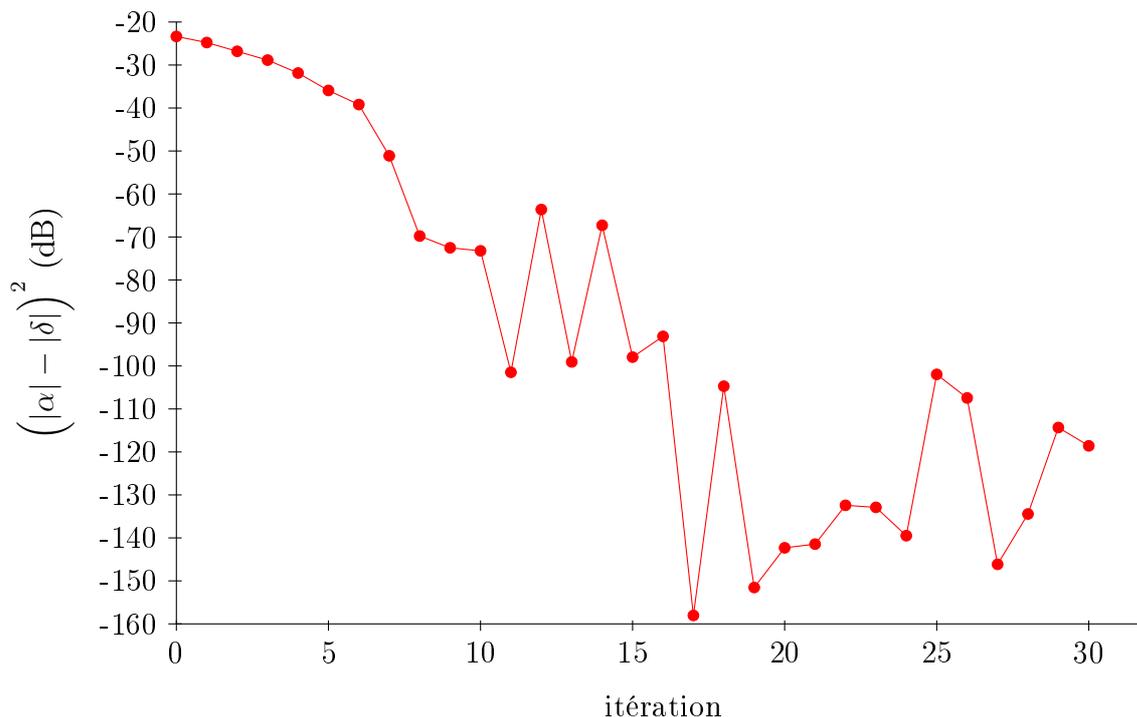


FIGURE 6.22 – Courbe de convergence : guide d’onde, minimisation de l’écart à $|\delta| = 0.6$

Le temps de calcul est de 4h59m.

4.3 Analyse

En réalité, ce test n’apporte pas grand chose de plus que la minimisation étudiée précédemment. La dérivée de forme, et donc la vitesse étant quasiment identique, le problème est en fait similaire à celui de la minimisation.

Cependant, il est intéressant de noter que contrairement au cas de la minimisation, on arrive ici à atteindre des valeurs pour la fonction coût très proches de zéro, ce qui montre la très grande précision de l’algorithme qui permet d’atteindre exactement la valeur voulue pour l’amplitude du coefficient de réflexion.

5 Coefficient de réflexion cible : amplitude et phase

Une autre problématique que l’on peut considérer, cette fois un peu différente de la précédente, est la minimisation de l’écart du coefficient de réflexion complexe à un coefficient complexe choisi : il s’agit donc de contrôler à la fois l’amplitude (module du coefficient de réflexion, en dB) et la phase (argument du coefficient de réflexion, en degrés) de l’onde.

On effectue le test uniquement sur le guide d’onde : cela n’aurait pas de sens pour l’élément rayonnant double-patch, qui est un cas-test de type antennaire. Dans ce cas, le seul but recherché est de minimiser le coefficient de réflexion et d’élargir la bande de fréquence.

Le guide d'onde, au contraire, n'est pas à proprement parler une antenne. Chercher à contrôler son amplitude et sa phase peut donc avoir un intérêt dans certaines applications.

5.1 Calcul de la dérivée de forme

Cette fois-ci, la fonction coût nécessite une réécriture. On rappelle que la fonction coût initiale s'écrit :

$$J(\Gamma) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} (\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma \right)$$

Si on note δ le coefficient de réflexion souhaité, et $(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{H}_\delta)$ le champ électromagnétique correspondant, alors la fonction coût à considérer s'exprime sous la forme

$$J_3(\Gamma) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} ((\mathbf{E} - \mathbf{E}_\delta) \times (\overline{\mathbf{H}} - \overline{\mathbf{H}_\delta})) \cdot \boldsymbol{\nu} \, d\sigma \right) \quad (6.6)$$

qu'on peut réécrire de manière équivalente, de la même manière que dans la proposition 3.3 du chapitre 3 :

$$J_3(\Gamma) = \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} (\mathbf{m} - \mathbf{m}_\delta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times (\overline{\mathbf{j}} - \overline{\mathbf{j}_\delta})) \, d\sigma \right) \quad (6.7)$$

Alors, en reprenant le même raisonnement que dans la proposition 3.3 du chapitre 3, on écrit la transportée de la fonction coût par le difféomorphisme Ψ_θ :

$$\begin{aligned} J_3(\Gamma_\theta) \circ \Psi_\theta &= \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} (\mathbf{m}^\theta - \mathbf{m}_\delta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times (\overline{\mathbf{j}^\theta} - \overline{\mathbf{j}_\delta})) \, d\sigma \right) \\ &= \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \left(\mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{j}}) + \mathbf{m}^{(1)}(\theta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{j}}) + \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{j}^{(1)}(\theta)}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbf{m} \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{j}_\delta}) - \mathbf{m}^{(1)}(\theta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{j}_\delta}) - \mathbf{m}_\delta \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{j}}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \mathbf{m}_\delta \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{j}^{(1)}(\theta)}) + \mathbf{m}_\delta \cdot (\boldsymbol{\nu} \times \overline{\mathbf{j}_\delta}) \right) d\sigma \right) + o(\theta) \\ &= J_3(\Gamma) + \frac{1}{2} \Re \left(\int_{\Gamma_e} \left(\mathbf{m}^{(1)}(\theta) \cdot (\boldsymbol{\nu} \times (\overline{\mathbf{j}} - \overline{\mathbf{j}_\delta})) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \mathbf{j}^{(1)}(\theta) \cdot ((\overline{\mathbf{m}} - \overline{\mathbf{m}_\delta}) \times \boldsymbol{\nu}) \, d\sigma \right) \right) + o(\theta) \end{aligned}$$

Ainsi, le problème adjoint devient pour chaque domaine i :

$$\begin{cases} -L_i^*[\mathbf{p}_i] + K_i^*[\mathbf{q}_i] + \frac{1}{2} \mathbf{E}_{iT}^q = ((\overline{\mathbf{m}}_i - \overline{\mathbf{m}_{\delta,i}}) \times \boldsymbol{\nu}) \mathbf{1}_{\Gamma_e} \\ K_i^*[\mathbf{p}_i] + \frac{\varepsilon_i}{\mu_i} L_i^*[\mathbf{q}_i] - \frac{1}{2} \mathbf{H}_{iT}^p = (\boldsymbol{\nu} \times (\overline{\mathbf{j}}_i - \overline{\mathbf{j}_{\delta,i}})) \mathbf{1}_{\Gamma_e} \end{cases} \quad (6.8)$$

Enfin, rappelons que dans le chapitre 4 nous avons montré que, dans la base des éléments finis de frontière, la solution du problème adjoint s'écrivait

$$P = \overline{\beta} \overline{\alpha} U \quad \text{où } U \text{ est solution de } [A][J U] = [B (\overline{B} \mathbf{1}_{\Gamma_e})]$$

Ainsi, en suivant le même raisonnement, notre nouvel état adjoint s'écrit :

$$P_2 = \bar{\beta} (\overline{\alpha - \delta}) U \quad (6.9)$$

Au final, on voit que la dérivée de forme de la fonction coût ne change cette fois pas d'expression. En revanche, c'est l'état adjoint qui va être différent.

On remarque cependant que l'expression du nouvel état adjoint étant très similaire à celle du précédent, il n'est pas nécessaire d'aller modifier, dans le code direct, la résolution du problème adjoint. Le changement de fonction coût n'est donc pas intrusif.

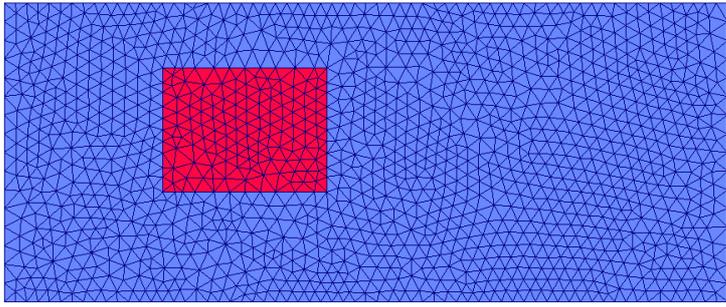
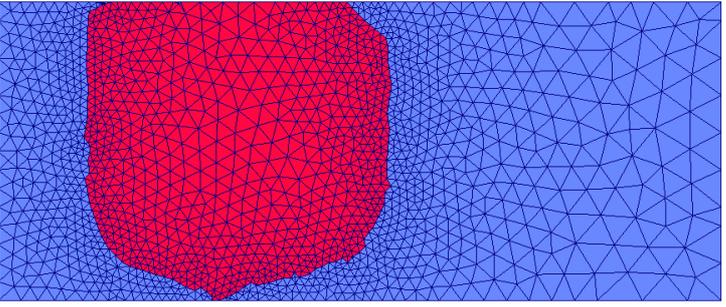
5.2 Résultats

5.2.1 Guide d'onde - Rectangle décentré

On observe les résultats obtenus avec le guide d'onde, en choisissant comme coefficient de réflexion cible

$$\delta = -0.6 + 0.4i \quad (\text{amplitude : } -2.84 \text{ dB et phase : } 146.31^\circ)$$

On notera que cette valeur ne fait pas partie des valeurs prises par le coefficient de réflexion lors de sa maximisation précédemment étudiée. On obtient, comme résultat initial et optimal :

Géométrie	Coefficient de réflexion
	$-0.1286 + 0.3140i$ (amplitude : -9.39 dB) (phase : 112.27°)
	$-0.6038 + 0.4103i$ (amplitude : -2.73 dB) (phase : 145.80°)

L'algorithme converge en 45 itérations et atteint son minimum à la 35ème.

La courbe de convergence est la suivante :

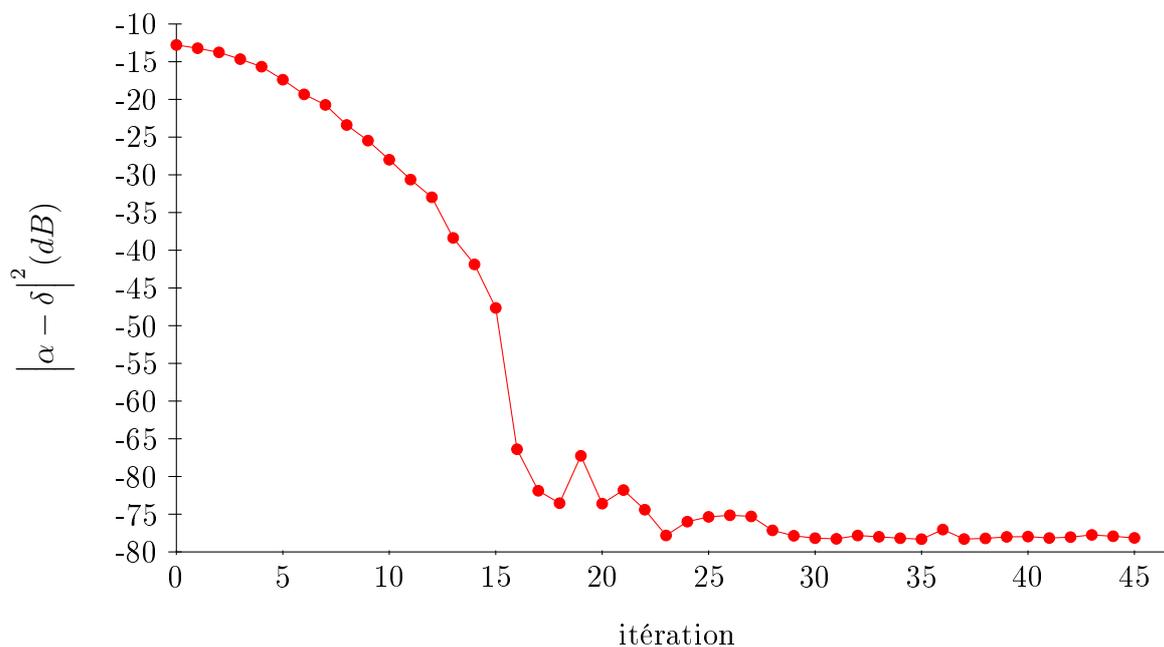


FIGURE 6.23 – Courbe de convergence : minimisation de l'écart à $\delta = -0.6 + 0.4i$

Le temps de calcul est de 7h06m.

On peut également regarder les courbes de convergence de l'amplitude et de la phase, prises séparément :

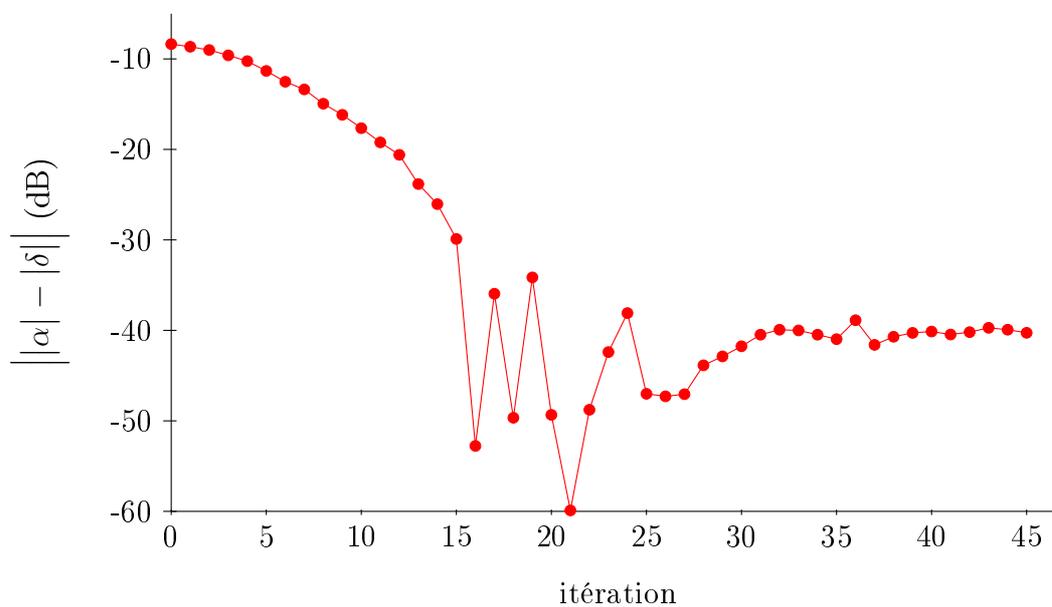


FIGURE 6.24 – Courbe de convergence : amplitude

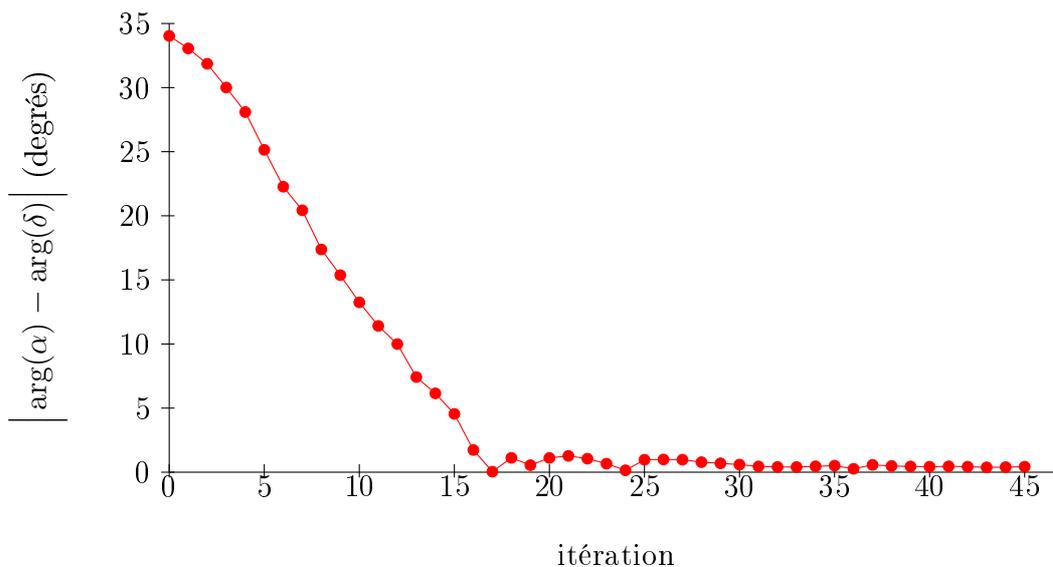


FIGURE 6.25 – Courbe de convergence : phase

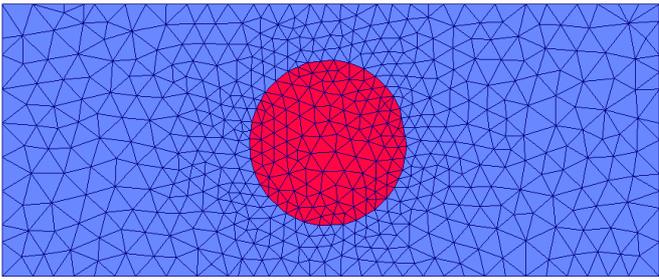
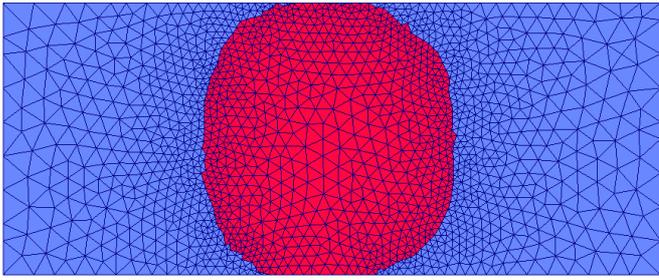
On remarque que la convergence de la fonction coût est principalement dictée par la convergence en amplitude : la convergence en phase est plus monotone et régulière.

5.2.2 Guide d'onde - Cercle centré

Si on effectue le même test avec le guide d'onde avec patch initial circulaire centré, toujours en choisissant comme coefficient de réflexion cible

$$\delta = -0.6 + 0.4i \quad (\text{amplitude : } -2.84 \text{ dB et phase : } 146.31^\circ),$$

on obtient :

Géométrie	Coefficient de réflexion
	$-0.1286 + 0.3140i$ (amplitude : -8.26 dB) (phase : 114.99°)
	$-0.6132 + 0.4321i$ (amplitude : -2.50 dB) (phase : 144.83°)

L'algorithme converge en 45 itérations et atteint son minimum à la 35ème.

La courbe de convergence est la suivante :

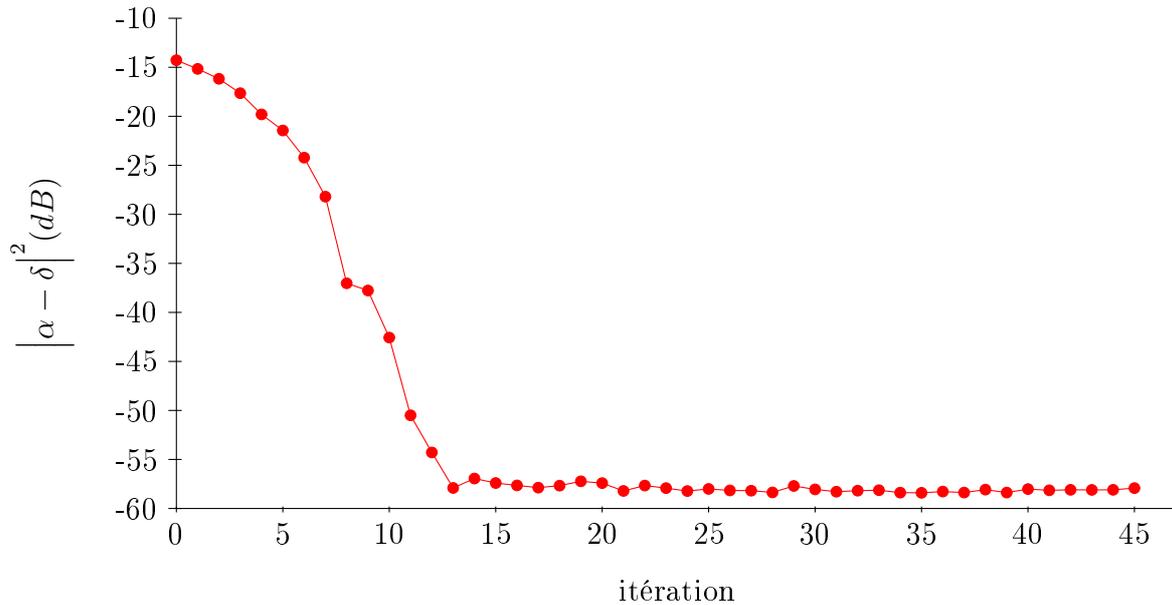


FIGURE 6.26 – Courbe de convergence : minimisation de l'écart à $\delta = -0.6 + 0.4i$

Le temps de calcul est de 6h47m.

5.2.3 Bilan

Les résultats obtenus ici sont très satisfaisants : on a réussi à atteindre de manière très précise un coefficient de réflexion cible choisi, en contrôlant à la fois son amplitude et sa phase.

Ces résultats sont un peu meilleurs dans le cas du premier patch (rectangulaire) que pour le deuxième, montrant encore une fois l'influence de la géométrie initiale.

Les modifications nécessaires à apporter à la fonction coût initiale sont minimales, puisque seul l'état adjoint est légèrement modifié. Néanmoins, ces résultats rajoutent des perspectives d'applications de la méthode.

6 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats numériques obtenus lors de la mise en application de l'algorithme d'optimisation de forme développé dans les chapitres précédents. Les quelques tests effectués nous permettent d'ores et déjà de dresser une liste des enseignements que nous pouvons tirer des résultats obtenus, ainsi que d'esquisser quelques perspectives d'études pour approfondir et affiner ces résultats.

★ Dans un premier temps, faisons un bilan des observations effectuées dans le chapitre:

- Tout d'abord, revenons sur le premier résultat présenté ici, la minimisation du module du coefficient de transmission pour le guide d'onde. Nous avons observé que, bien que le résultat obtenu soit très satisfaisant d'un point de vue de la convergence,

l'algorithme avait néanmoins échoué à continuer dans une direction qui aurait permis d'obtenir un meilleur minimum (cf figure 6.12).

Ce comportement ne répond donc pas entièrement à nos attentes, et bien que nous ne puissions pas en établir les raisons avec certitude, est certainement lié aux approximations faites lors du calcul de la vitesse. En effet, il faut rappeler que le calcul des intégrales singulières tel que présenté dans 3.1 est très approximatif. La simplification effectuée est imparfaite, mais il s'agit d'un problème complexe qui ne peut pas être traité de manière simple.

De plus, les singularités des opérateurs calculés ont tendance à générer des instabilités de bord, qui se traduisent, comme sur les géométries présentées ici, par des frontières de la forme assez chahutées. Ces instabilités sont traitées par le logiciel de remaillage comme des contraintes de maillage, et sont donc entretenues, itération après itération, et parfois même amplifiées par ce processus.

Ce comportement, ainsi que les approximations faites pour le calcul des intégrales singulières sont sûrement à incriminer dans la stagnation de l'algorithme dans un "mauvais minimum". Ces raisons ne sont peut-être pas les seules en cause ici, mais nous donnent déjà une piste d'amélioration.

- Nous avons également regardé l'influence de la géométrie initiale sur le résultat, et souligné son importance. Ceci est conforme à ce à quoi nous pouvions nous attendre, et ce pour deux raisons : tout d'abord car le problème physique possède un très grand nombre de géométries pour lesquelles le coefficient de transmission aura des valeurs faibles et assez similaires ; ensuite car l'algorithme utilisé ici est de type gradient, et n'assure donc une convergence que vers des minima locaux.

Cette étude nous a également permis de soulever un problème important, celui des changements de topologie. On a pu voir lors du cas-test à trois composantes connexes qu'un tel changement était délicat à gérer, ceci étant principalement dû à la physique du problème. Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, la fusion entre deux patchs métalliques produit un court-circuit et la séparation d'un patch en deux patchs séparés produit un circuit ouvert. Ces phénomènes étant fortement non linéaires, ils induisent une très forte variation de la fonction coût et sont donc difficiles à gérer pour l'algorithme. On peut imaginer que l'augmentation du nombre de composantes connexes ne sera pas très fréquent pour ce genre d'application, ce qui est un peu dommage étant donné qu'il s'agit là d'un avantage particulier des méthodes Level Set.

- Nous avons cherché à étudier l'influence des paramètres de taille du maillage et de la grille sur les résultats de l'algorithme. Assez naturellement, nous en avons conclu qu'il était important d'avoir un pas de grille qui soit à peu près similaire au pas du maillage triangulaire, voire légèrement plus fin. Si la grille est trop grossière, on perd en précision, et si elle est trop fine, on perd en temps de calcul sans pour autant gagner en précision. Le choix d'une grille de finesse similaire au maillage constitue donc un bon compromis entre la précision du calcul et sa durée.

- Un des tests les plus importants de ce chapitre était probablement celui de l'optimisation du patch métallique de l'élément rayonnant sur une bande de fréquences. Il s'agit d'une préoccupation industrielle très intéressante et donc d'une perspective d'application directe de l'algorithme. De plus, le résultat obtenu, à savoir la création d'un deuxième pôle, ouvre des perspectives très prometteuses.

- Enfin, les résultats obtenus lors du contrôle simultané de l'amplitude et de la phase du signal réfléchi sont également très intéressants. Une simple modification dans le calcul de l'état adjoint nous permet de considérer une fonction coût au champ applicatif différent de la première.

★ Au vu des résultats obtenus et des observations qui en ont découlé, nous pouvons citer quelques directions qu'il serait intéressant d'explorer afin d'approfondir cette étude :

- Tous ces tests nous donnent des résultats intéressants à étudier. Néanmoins, il aurait été intéressant d'en faire en plus grande quantité, par exemple avec d'autres cas-tests, d'autres topologies, d'autres valeurs à atteindre, des bandes de fréquence plus larges, etc. Ceci n'a pas été possible du fait du temps de calcul nécessaire qui est rédhibitoire. Il serait donc intéressant d'optimiser le code, par exemple en parallélisant le calcul de la vitesse, et d'utiliser des ressources de calcul plus importantes, afin de multiplier les tests et d'exploiter ainsi des résultats plus nombreux.

- Comme nous l'avons souligné précédemment, la gestion des intégrales singulières a été faite de manière assez peu précise. Afin d'évaluer l'influence de l'erreur commise, il faudrait utiliser une méthode plus élaborée de gestion des noyaux singuliers. On peut citer, par exemple, les travaux de Nicolas Salles dans sa thèse [Sal13] qui donnent d'excellents résultats.

- De la même manière, la méthode utilisée pourrait le remaillage pour être améliorée. Par exemple, on pourrait imaginer une méthode capable de lisser les irrégularités du bord au lieu de les raffiner.

- Toujours sur le plan numérique, il faut souligner qu'une erreur est commise lors des passages successifs entre la grille et le maillage. Ces interpolations pourraient être évitées en résolvant l'équation de transport directement sur le maillage triangulaire (voir par exemple [BDF12] pour une utilisation de la méthode des caractéristiques à cet effet).

- D'un point de vue des champs d'application de la méthode, il est évidemment primordial de chercher à traiter des cas plus industriels. Par exemple, un élément rayonnant comme le double-patch n'a d'intérêt qu'à l'intérieur d'un réseau. L'adaptation de la méthode aux antennes réseaux ne présente pas de difficulté insurmontable, puisque le seul changement qui intervient au niveau du calcul est celui de la fonction de Green, qui sera légèrement modifiée afin de prendre en compte la périodicité.

- Enfin, dans la même idée d'industrialisation de la méthode, il serait intéressant d'étudier des fonctions coût différentes, telle que par exemple le maintien du diagramme de rayonnement de l'antenne en-dessous d'un certain gabarit, défini comme l'énergie émise en chaque point de l'espace.

Bibliographie

- [AJ08] Grégoire Allaire and François Jouve. Minimum stress optimal design with the level set method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32(11):909–918, 2008.
- [AJT04] Grégoire Allaire, François Jouve, and Anca-Maria Toader. Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, 194(1):363–393, 2004.
- [AKLZ10] Habib Ammari, Hyeonbae Kang, Mikyoung Lim, and Habib Zribi. Conductivity interface problems. part I: small perturbations of an interface. *Transactions of the American Mathematical Society*, 362(5):2435–2449, 2010.
- [AKLZ12] Habib Ammari, Hyeonbae Kang, Mikyoung Lim, and Habib Zribi. The generalized polarization tensors for resolved imaging. part I: Shape reconstruction of a conductivity inclusion. *Mathematics of Computation*, 81(277):367–386, 2012.
- [All06] Grégoire Allaire. *Conception optimale de structures*. Mathématiques & applications. Springer, 2006.
- [AS64] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation, 1964.
- [AS95a] David Adalsteinsson and James A. Sethian. A level set approach to a unified model for etching, deposition, and lithography I: algorithms and two-dimensional simulations. *Journal of Computational Physics*, 120(1):128–144, 1995.
- [AS95b] David Adalsteinsson and James A. Sethian. A level set approach to a unified model for etching, deposition, and lithography II: Three-dimensional simulations. *Journal of Computational Physics*, 122(2):348–366, 1995.
- [AT07] Toufic Abboud and Isabelle Terrasse. *Modélisation des phénomènes de propagation d’ondes*. École polytechnique, 2007.
- [BD86] Abderrahmane Bendali and Christophe Devys. Calcul numérique du rayonnement de cornets électromagnétiques dont l’ouverture est partiellement remplie par un diélectrique. *L’Onde Électrique*, 66(1):77–81, 1986.
- [BDF12] Thi Thu Cuc Bui, Charles Dapogny, and Pascal Frey. An accurate anisotropic adaptation method for solving the level set advection equation. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 70(7):899–922, 2012.

- [Ben84] Abderrahmane Bendali. *Approximation par Éléments Finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie, 1984.
- [Ben11] Abderrahmane Bendali. *Équations intégrales en électromagnétisme*. INSA de Toulouse, 2011.
- [BFG99] Abderrahmane Bendali, M'Barek Fares, and Jean Gay. A boundary-element solution of the Leontovitch problem. *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, 47(10):1597–1605, 1999.
- [CK92] David L. Colton and Rainer Kress. *Integral equation method in scattering theory*. Malabar, Fla. Krieger Pub. Co., 1992. Originally published: New-York: Wiley, 1983.
- [CK08] Peter W. Christensen and Anders Klarbring. *An introduction to structural optimization*, volume 153. Springer Science & Business Media, 2008.
- [CKJH97] Jang-Sung Chun, Min-Kyu Kim, Hyun-Kyo Jung, and Sun-Ki Hong. Shape optimization of electromagnetic devices using immune algorithm. *IEEE Transactions on Magnetics*, 33(2):1876–1879, 1997.
- [CKS97] Vicent Caselles, Ron Kimmel, and Guillermo Sapiro. Geodesic active contours. *International Journal of Computer Vision*, 22(1):61–79, 1997.
- [CLL11] Martin Costabel and Frédérique Le Louër. On the Kleinman-Martin integral equation method for electromagnetic scattering by a dielectric body. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 71(2):635–656, 2011.
- [CLL12a] Martin Costabel and Frédérique Le Louër. Shape derivatives of boundary integral operators in electromagnetic scattering. part I: Shape differentiability of pseudo-homogeneous boundary integral operators. *Integral Equations and Operator Theory*, 72(4):509–535, 2012.
- [CLL12b] Martin Costabel and Frédérique Le Louër. Shape derivatives of boundary integral operators in electromagnetic scattering. part II: Application to scattering by a homogeneous dielectric obstacle. *Integral Equations and Operator Theory*, 73(1):17–48, 2012.
- [CMOS97] S Chen, Barry Merriman, Stanley Osher, and Peter Smereka. A simple level set method for solving Stefan problems. *Journal of Computational Physics*, 135(1):8–29, 1997.
- [CV01] Tony F. Chan and Luminita A. Vese. Active contours without edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, 10(2):266–277, 2001.
- [Dar93] Jacques Darricau. *Physique et Théorie du Radar : Principes et performances de base*. Sodipe, 1993.
- [DB98] Pierre Duysinx and Martin P. Bendsøe. Topology optimization of continuum structures with local stress constraints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 43(8):1453–1478, 1998.

-
- [DDF14] Charles Dapogny, Cécile Dobrzynski, and Pascal Frey. Three-dimensional adaptive domain remeshing, implicit domain meshing, and applications to free and moving boundary problems. *Journal of Computational Physics*, 262:358–378, 2014.
- [DG06] Frédéric De Gournay. Velocity extension for the level-set method and multiple eigenvalues in shape optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 45(1):343–367, 2006.
- [DZ11] Michel Delfour and Jean-Paul Zolésio. *Shapes and geometries: metrics, analysis, differential calculus, and optimization*, volume 22 of *Advances in Design and Control*. SIAM, 2011.
- [GGM01] Stéphane Garreau, Philippe Guillaume, and Mohamed Masmoudi. The topological asymptotic for PDE systems: The elasticity case. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(6):1756–1778, 2001.
- [Gui91] Massimo Guiggiani. The evaluation of Cauchy principal value integrals in the boundary element method - a review. *Mathematical and Computer Modelling*, 15(3):175–184, 1991.
- [Had09] Jacques Hadamard. *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*, volume 33. Imprimerie Nationale, 1909.
- [Had23] Jacques Hadamard. *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Dover Phoenix, New York, NY, USA, 1923.
- [HP06] Antoine Henrot and Michel Pierre. *Variation et optimisation de formes: une analyse géométrique*, volume 48. Springer Science & Business Media, 2006.
- [HS05] Antoine Henrot and Jan Sokolowski. Mathematical challenges in shape optimization. *Control and Cybernetics*, 43(1):37–57, 2005.
- [HWB14] Emadeldeen Hassan, Eddie Wadbro, and Martin Berggren. Patch and ground plane design of microstrip antennas by material distribution topology optimization. *Progress In Electromagnetics Research B*, 59:89–102, 2014.
- [KBP09] Young Sun Kim, Jin Kyu Byun, and Il Han Park. A level set method for shape optimization of electromagnetic systems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 45(3):1466–1469, 2009.
- [LHB⁺14] Kang Hyouk Lee, Seung Geon Hong, Myung Ki Baek, Hong Soon Choi, Young Sun Kim, and Il Han Park. Adaptive level set method for accurate boundary shape in optimization of electromagnetic systems. *COMPEL - The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering*, 33(3):809–820, 2014.
- [Lio71] Jacques-Louis Lions. *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, volume 170. Springer Verlag, 1971.
- [LL09] Frédérique Le Louër. *Optimisation de forme d'antennes lentilles intégrées aux ondes millimétriques*. PhD thesis, Université de Rennes 1, 2009.

- [MMPG94] L. N. Medgyesi-Mitschang, J. M. Putnam, and M. B. Gedera. Generalized method of moments for three-dimensional penetrable scatterers. *Journal of Optical Society of America A*, 11(4):1383–1398, Apr. 1994.
- [MOS92] Wim Mulder, Stanley Osher, and James A. Sethian. Computing interface motion in compressible gas dynamics. *Journal of Computational Physics*, 100(2):209–228, 1992.
- [MP01] Bijan Mohammadi and Olivier Pironneau. *Applied shape optimization for fluids*, volume 28. Oxford University Press Oxford, 2001.
- [MPS05] Mohamed Masmoudi, Julien Pommier, and Bessem Samet. The topological asymptotic expansion for the Maxwell equations and some applications. *Inverse Problems*, 21(2):547, 2005.
- [MS76a] François Murat and Jacques Simon. Optimization techniques modeling and optimization in the service of man part 2. chapter Etude de problemes d’optimal design, pages 54–62. Springer Berlin Heidelberg, 1976.
- [MS76b] François Murat and Jacques Simon. *Sur le contrôle par un domaine géométrique*. Internal Report RR-76015, Laboratoire d’Analyse Numérique de l’Université Paris VI, 1976.
- [Ned01] Jean-Claude Nedelec. *Acoustic and electromagnetic equations : integral representations for harmonic problems*. Applied Mathematical Sciences. Springer, New-York, 2001.
- [OF06] Stanley Osher and Ronald Fedkiw. *Level set methods and dynamic implicit surfaces*, volume 153. Springer Science & Business Media, 2006.
- [Orf02] Sophocles J. Orfanidis. *Electromagnetic waves and antennas*. Rutgers University New Brunswick, NJ, 2002.
- [OS88] Stanley Osher and James A. Sethian. Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1):12–49, 1988.
- [OS01] Stanley Osher and Fadil Santosa. Level set methods for optimization problems involving geometry and constraints: frequencies of a two-density inhomogeneous drum. *Journal of Computational Physics*, 171(1):272–288, 2001.
- [Pir84] Olivier Pironneau. *Optimal shape design for elliptic systems*. Springer, New-York, 1984.
- [PM73] A. J. Poggio and E.K. Miller. Integral equation solutions of three-dimensional scattering problems. *Computer Techniques for Electromagnetics*, pages 159–264, 1973.
- [Pot96] Roland Potthast. Domain derivatives in electromagnetic scattering. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 19(15):1157–1175, 1996.
- [Raz96] Jean Razafiarivelo. *Optimisation de la forme de transitions entre guides électromagnétiques par une méthode intégrale d’éléments finis*. PhD thesis, 1996.

-
- [RGB02] Helder Rodrigues, Jose M. Guedes, and Martin P. Bendsoe. Hierarchical optimization of material and structure. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 24(1):1–10, 2002.
- [RO94] Leonid Rudin and Stanley Osher. Total variation based image restoration with free local constraints. In *Image Processing, 1994. Proceedings. ICIP-94., IEEE International Conference*, volume 1, pages 31–35. IEEE, 1994.
- [RT77] Pierre-Arnaud Raviart and Jean-Marie Thomas. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. *Mathematical Aspects of the Finite Element Method, Lecture Notes in Mathematics*, 606:292–315, 1977.
- [Rum54] V. H. Rumsey. Reaction concept in electromagnetic theory. *Phys. Rev.*, 94:1483–1491, Jun. 1954.
- [RWG82] Sadasiva M. Rao, Donald R. Wilton, and Allen W. Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, 30(3):409–418, 1982.
- [Sal13] Nicolas Salles. *Calcul des singularités dans les méthodes d'équations intégrales variationnelles*. PhD thesis, Université Paris-Sud, 2013.
- [Set99a] James A. Sethian. Fast marching methods. *SIAM review*, 41(2):199–235, 1999.
- [Set99b] James A. Sethian. *Level set methods and fast marching methods: evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science*, volume 3. Cambridge University Press, 1999.
- [Sig95] Ole Sigmund. Tailoring materials with prescribed elastic properties. *Mechanics of Materials*, 20(4):351–368, 1995.
- [SPSL15] Johannes Semmler, Lukas Pflug, Michael Stingl, and Günter Leugering. Shape optimization in electromagnetic applications. In *New Trends in Shape Optimization*, pages 251–269. Springer, 2015.
- [SS11] Stefan Sauter and Cristoph Schwab. *Boundary Element Methods*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer, Berlin, 2011.
- [SSO94] Mark Sussman, Peter Smereka, and Stanley Osher. A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow. *Journal of Computational Physics*, 114(1):146–159, 1994.
- [Str41] Julius A. Stratton. *Electromagnetic Theory*. McGraw-Hill Companies, New York, 1941.
- [SW00] James A. Sethian and Andreas Wiegmann. Structural boundary design via level set and immersed interface methods. *Journal of Computational Physics*, 163(2):489–528, 2000.
- [SZ92] Jan Sokolowski and Jean-Paul Zolesio. *Introduction to shape optimization*. Springer, 1992.

- [Tar00] Luc Tartar. An introduction to the homogenization method in optimal design. In *Optimal shape design*, pages 47–156. Springer, 2000.
- [Ter93] Isabelle Terrasse. *Résolution mathématique et numérique des équations de Maxwell stationnaires par une méthode de potentiels retardés*. PhD thesis, École Polytechnique, 1993.
- [ÜMK94] Fuat Üler, Osama Mohammed, and Chang-Seop Koh. Utilizing genetic algorithms for the optimal design of electromagnetic devices. *IEEE Transactions on Magnetics*, 30(6):4296–4298, 1994.
- [UNI+09] Naotaka Uchida, Shinji Nishiwaki, Kazuhiro Izui, Masataka Yoshimura, Tsuyoshi Nomura, and Kazuo Sato. Simultaneous shape and topology optimization for the design of patch antennas. In *EuCAP 3rd European Conference on Antennas and Propagation*, pages 103–107. IEEE, 2009.
- [You10] Laurent Younes. *Shapes and diffeomorphisms*, volume 171 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, 2010.
- [Zha05] Hongkai Zhao. A fast sweeping method for eikonal equations. *Mathematics of Computation*, 74(250):603–627, 2005.
- [ZOF01] Hong-Kai Zhao, Stanley Osher, and Ronald Fedkiw. Fast surface reconstruction using the level set method. In *IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision. Proceedings.*, pages 194–201. IEEE, 2001.