



HAL
open science

Deux problèmes de contrôle géométrique : holonomie horizontale et solveur d'esquisse

Boutheina Hafassa

► **To cite this version:**

Boutheina Hafassa. Deux problèmes de contrôle géométrique : holonomie horizontale et solveur d'esquisse. Géométrie différentielle [math.DG]. Université Paris Saclay (COmUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLS017 . tel-01424192

HAL Id: tel-01424192

<https://theses.hal.science/tel-01424192>

Submitted on 2 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLS017

THESE DE DOCTORAT
DE
L'UNIVERSITE PARIS-SACLAY
PREPAREE A
L'UNIVERSITE PARIS-SUD

ECOLE DOCTORALE N°580
Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication

Discipline : Mathématiques et Informatique

Spécialité: Géométrie et Théorie du Contrôle

Par

Mme Boutheina HAFASSA

Deux Problèmes de Contrôle Géométrique:
Holonomie Horizontale et Solveur d'Esquisse

Thèse présentée et soutenue à «CentraleSupélec, Gif-Sur-Yvette », le « 13 Janvier 2016 » :

Composition du Jury :

M. Jean-Baptiste Pomet	Directeur de recherche, INRIA	Président
M. Emmanuel Trélat	Professeur, UPMC (Paris 6)	Rapporteur
M. Grégoire Charlot	Maître de Conférences, Institut Fourier	Rapporteur
Mme Nabila Torki-Hamza	Maître de Conférences, FSB, Tunisie	Examineur
M. Yacine Chitour	Professeur, UPS XI	Directeur de thèse
Mme Najoua Gamara	Professeur, FST, Tunisie	Co-directeur de thèse
M. Frédéric Jean	Professeur, ENSTA ParisTech	Co-encadrant
M. Mario Sigalotti	Chargé de recherche, INRIA	Co-encadrant





Thèse préparée au
Laboratoire des Signaux et Systèmes
UMR8506 (Univ Paris Sud–CNRS–Centralesupelec)
Université Paris Saclay
CENTRALESUPELEC, 3 rue Joliot-Curie,
91192 Gif-sur-Yvette, France

Résumé

Nous étudions deux problèmes qui ont leur origine dans la théorie du contrôle géométrique. Les contributions originales sont celles contenues dans les deux articles insérés dans la thèse.

Le PROBLÈME I consiste à étendre le concept du groupe d'holonomie horizontale sur une variété affine. Plus précisément, nous considérons une variété connexe lisse de dimension finie M , une connexion affine ∇ avec le groupe d'holonomie H^∇ et une distribution lisse Δ complètement non intégrable. Dans un premier temps, nous définissons le groupe d'holonomie Δ -horizontale H_Δ^∇ comme le sous-groupe de H^∇ obtenu par le transport parallèle le long des lacets tangents à Δ . Nous donnons les propriétés élémentaires de H_Δ^∇ et ensuite nous faisons une étude détaillée en utilisant le formalisme de roulement. Il est montré en particulier que H_Δ^∇ est un groupe de Lie. Dans un second temps, nous avons étudié un exemple explicite où M est un groupe de Carnot libre d'ordre 2 avec $m \geq 2$ générateurs, et ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à une métrique riemannienne sur M . Nous avons montré dans ce cas particulier que H_Δ^∇ est compact et strictement inclus dans H^∇ dès que $m \geq 3$.

Le PROBLÈME II étudie la modélisation du problème du solveur d'esquisse. Ce problème est une des étapes d'un logiciel de CFAO. Notre but est d'arriver à une modélisation mathématique bien fondée et systématique du problème du solveur d'esquisse. Il s'agira ensuite de comprendre la convergence de l'algorithme, d'en améliorer les résultats et d'en étendre les fonctionnalités. L'idée directrice de l'algorithme est de remplacer tout d'abord les points de l'espace des sphères par des déplacements (éléments du groupe) et puis d'utiliser une méthode de Newton sur les groupes de Lie ainsi obtenus. Dans cette thèse, nous avons classifié les groupes de déplacements possibles en utilisant la théorie des groupes de Lie. En particulier, nous avons distingué trois ensembles, chaque ensemble contenant un type d'objet : le premier est l'ensemble des points, noté Points (ou \mathcal{P}), le deuxième est l'ensemble des droites, noté Droites (ou Λ_0), et le troisième est l'ensemble des cercles et des droites, que nous notons Λ . Pour chaque type d'objet nous avons étudié tous les groupes de déplacements possibles, selon les propriétés souhaitées. Nous proposons finalement d'utiliser les groupes de déplacements suivant : pour le déplacement des points, le groupe des translations, qui agit transitivement sur \mathcal{P} ; pour les droites, le groupe des translations et rotations, qui est de dimension 3 et agit transitivement (globalement mais pas localement) sur Λ_0 ; sur les droites et cercles, le groupe des anti-translations, rotations et dilatations qui est de dimension 4 et agit transitivement (globalement mais pas localement) sur Λ .

Mots clés : Groupe d'Holonomie (Affine), Roulement des variétés, Géométrie (Sous-) Riemannienne, Théorie du groupe de Lie, CFAO, Esquisse, Groupe de Lorentz, Méthode de Newton

Abstract

Two Problems of Geometric Control: Horizontal Holonomy and Solver of Sketch

We study two problems arising from geometric control theory. The main contributions are those given in the two articles attached to the thesis.

The PROBLEM I consists of extending the concept of horizontal holonomy group for affine manifolds. More precisely, we consider a smooth connected finite-dimensional manifold M , an affine connection ∇ with holonomy group H^∇ and Δ a smooth completely non integrable distribution. We define the Δ -horizontal holonomy group H_Δ^∇ as the subgroup of H^∇ obtained by ∇ -parallel transporting frames only along loops tangent to Δ . We first set elementary properties of H_Δ^∇ and show how to study it using the rolling formalism ([9]). In particular, it is shown that H_Δ^∇ is a Lie group. Moreover, we study an explicit example where M is a free step-two homogeneous Carnot group with $m \geq 2$ generators, and ∇ is the Levi-Civita connection associated to a Riemannian metric on M , and show in this particular case that H_Δ^∇ is compact and strictly included in H^∇ as soon as $m \geq 3$.

The PROBLEM II is studying the modeling of the problem of solver sketch. This problem is one of the steps of a CAD/CAM software. Our goal is to achieve a well founded mathematical modeling and systematic the problem of solver sketch. The next step is to understand the convergence of the algorithm, to improve the results and to expand the functionality. The main idea of the algorithm is to replace first the "points" of the space of spheres by displacements (elements of the group) and then use a Newton's method on Lie groups obtained. In this thesis, we classified the possible displacements of the groups using the theory of Lie groups. In particular, we distinguished three sets, each set containing an object type: the first one is the set of points, denoted **Points** (or \mathcal{P}), the second is the set of lines, denoted **Lines** (or Λ_0), and the third is the set of circles and lines, we note that Λ . For each type of object, we investigated all the possible movements of groups, depending on the desired properties. Finally, we propose to use the following displacement of groups for the displacement of points, the group of translations, which acts transitively on \mathcal{P} ; for the lines, the group of translations and rotations, which is 3-dimensional and acts transitively (globally but not locally) on Λ_0 ; on lines and circles, the group of anti-translations, rotations and dilations which has dimension 4 and acts transitively (globally but not locally) on Λ .

Keywords : (Affine)Holonomy group, Rolling (Development of) manifolds, (Sub) Riemannian Geometry, Theory of Lie groups, CAD/CAM software, Sketch, Lorentz group, Newton's Method

À mes parents..

REMERCIEMENTS

Avec cette thèse, se termine un long voyage durant lequel j'ai eu la chance de côtoyer des gens que j'aimerais maintenant remercier avec ces mots en espérant n'avoir oublié personne. . .

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse Mr. Yacine Chitour qui fut pour moi un directeur idéal, attentif et disponible malgré ses nombreuses charges. Son travail rigoureux, sa disponibilité, son honnêteté, son ingéniosité, sa clairvoyance et ses grandes qualités pédagogiques m'ont été d'un grand soutien, et resteront pour toujours, les moteurs de mon travail de chercheur.

Je remercie également mon co-directeur de thèse Mme Najoua Gamara d'avoir bien assuré la direction de mes travaux de thèse. Un grand merci pour sa profonde gentillesse, sa patience et ses précieux conseils. J'ai beaucoup apprécié travailler à ses côtés tant sur le plan scientifique qu'humain. Sa rigueur scientifique exceptionnelle et m'a énormément aidé à améliorer mon travail et ainsi, développer de nouvelles compétences dans le domaine de la recherche scientifique.

J'adresse mes chaleureux remerciements à mon co-encadrant Mr. Frédéric Jean. Je lui suis gré pour la confiance qu'il m'a accordé tout au long de ces trois années, pour ses multiples conseils avisés, pour son attention de tout instant sur mes travaux et pour toutes les heures qu'il a consacrées pour m'aider à débloquer les différents problèmes rencontrés dans cette thèse. Je voudrai lui exprimer toute ma gratitude pour son soutien continu et sa disponibilité over timing: même durant les pauses-café à l'IHP-Paris. Son respect sans faille des délais serrés de relecture des documents que je lui ai adressé. Enfin, j'ai été extrêmement sensible à ses qualités humaines d'écoute et de compréhension tout au long de ce travail doctoral.

Je souhaiterais exprimer ma gratitude à Mr. Mario Sigalotti, pour avoir encadré ma thèse. Je remercie Mr. Sigalotti pour ses précieux conseils et sa disponibilité. J'ai apprécié le travail en équipe et surtout son sens de la précision, il m'a appris à lire entre les lignes, je crois que je me suis améliorée dans ce sens.

Je remercie Mr. Emmanuel Trelat et Mr. Grégoire Charlot d'avoir bien accepté de rapporter ce travail et surtout pour leur précieux conseils qui m'ont permis d'améliorer ce document.

J'aimerais exprimer de façon particulière ma gratitude envers Mr. Jean-Baptiste Pomet, pour avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury de soutenance. Que vous soyez assuré de mon entière reconnaissance.

Je remercie également Mme Nabila Toriki-Hamza, qui a accepté de juger ce travail en tant qu'examineur. Je lui adresse mes sentiments les plus respectueux.

Mes remerciements particuliers vont de plus, à Mr. Petri Kokkonen, pour toute sa disponibilité et son aide illimité tout au long de la thèse surtout concernant la première partie développée durant mes travaux. Petri, merci pour tous vos e-mails de soutien

ainsi que le temps consacré pour répondre à mes questions.

Je remercie tous les membres du Laboratoire des Signaux et Système pour la sympathie et l'aide qu'ils m'ont témoignées durant ces années de dur labeur.

Je voudrai adresser ma reconnaissance à Mme Françoise Lamnabhi-Lagarrigue, Directrice du Pôle 1 de l'ED STIC de Paris Saclay, pour ses qualités humaines et ses encouragements illimités.

Un très grand merci tout particulier à mon amie Amina Mortada, pour nos multiples et inoubliables moments et aussi conversations sur le roulement des variétés, avec mes meilleurs souhaits pour la suite de sa carrière.

Un énorme merci à mon amie Safaa Al Ali, pour nos innombrables moments avec mes meilleurs souhaits de réussite pour sa vie professionnelle et personnelle. Un grand merci aussi pour mes amis de Paris: Anis Abcha, Chafia Abcha, Jonathan Laporte, Luisp Borja, Med Adlenne Maghenem, Rafael Cisneros, Mattia Mattioni, Iyad Lahsen-Cherif, Mohamed Farouq, Leila Gharsalli, Walid Djema, Sébastien Penz pour leur bonne humeur ainsi que pour les rires et le bon temps partagés de même pour leur profonde gentillesse. Je n'oublie pas le soutien de mes amis de Tunis: Achref Lemjid, Sabrina Naimi, Med Khalil Zghal, Azima Zaatour et tout l'équipe de l'ESSEC de Tunis ainsi que leur aide tout au long de cette belle aventure. Je leur souhaite de très sincères vœux de réussite.

Mes remerciements vont aussi à ma famille. Merci à ma très chère mère Bahja et à mon très cher père Naceur, pour leur soutien indéfectible et leur enthousiasme contagieux à l'égard de mes études. Ils sont les piliers fondateurs de ce que je suis et de ce que je fais. Je tiens encore à saluer mon frère Walid et sa femme Najet, ma soeur Soumaya et son mari Mabrouk, mon petit frère Adel et ma petite soeur Nassima pour leur présence et l'amour qu'ils m'ont porté jusqu'à la fin. Et je n'oublie pas les enfants Maissa, Mohamed Moenes, Malek et Moataz.

Contents

Introduction Générale	11
I Thesis Summary in French	17
1 Groupe d'Holonomie Horizontale	19
1.1 Introduction	20
1.2 Notions préliminaires	22
1.2.1 Liste des notations	22
1.2.2 Rappels de géométrie différentielle	23
1.2.3 Groupe d'holonomie	25
1.2.4 Roulement de variétés différentielles	26
1.3 Principaux résultats: Le groupe d'holonomie horizontale	31
1.3.1 Groupe d'holonomie affine de M	32
1.3.2 Groupe d'holonomie affine de Δ	33
1.3.3 Exemple : Holonomie du groupe de Carnot homogène libre d'ordre 2	33
Perspectives	36
2 Solveur d'Esquisse	37
2.1 CFAO et Modélisation par Contraintes	37
2.2 Problème du Solveur d'Esquisse (PSE)	41
2.2.1 Définitions	41
2.2.2 Espace des Sphères de Lie	42

2.2.3	Méthode de Résolution d'Esquisse	43
2.2.4	Groupe Circulaire	45
2.2.5	Classes de transformations dans le plan	46
	Conclusion et Perspectives	49
II	Papers	51
3	Horizontal Holonomy for Affine Manifolds	53
3.1	Introduction	54
3.2	Notations	56
3.3	Affine Holonomy Group of (M, ∇, Δ)	57
3.3.1	Definitions	57
3.3.2	Holonomy groups associated with distributions using the frame- work of rolling manifolds	58
3.3.3	Integrability of Δ_R	65
3.4	Case Study: Holonomy of Free Step-two Homogeneous Carnot Group .	67
3.4.1	Definitions	67
3.4.2	Riemannian Holonomy Group of (\mathbb{G}_m, g)	69
3.4.3	Horizontal Holonomy Group of (\mathbb{G}_m, g)	72
4	Representation of Geometry in \mathbb{R}^2	79
4.1	Preliminaries	79
4.1.1	Space of Spheres	80
4.1.2	Particular Elements of the Restricted Lorentz Group	85
4.1.3	Annihilator of Geometry	91
4.2	Study of Displacements	92
4.2.1	Strategy	92
4.2.2	Displacement group for the submanifold \mathcal{P}	94
4.2.3	Displacement group for the submanifold Λ	95
4.2.4	Displacement group for the submanifold Λ_c	97
5	Appendix for Chapter 3	103
5.1	<i>o</i> -regular Controls	103
5.2	Connectedness of $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ and H_Δ^∇	107

CONTENTS

6 Appendix: Structure of the Lorentz Group	109
6.1 The Lorentz group	109
6.2 Connected Components of $\mathbf{O}(n-1, 1)$	110
6.3 Surfaces of Transitivity	111
Bibliography	113

Introduction Générale

DANS cette thèse, nous abordons deux problèmes qui ont leur origine dans la théorie du contrôle géométrique. Le PROBLÈME I traite du groupe d'holonomie horizontale pour les variétés affines et le PROBLÈME II a objet d'étude la modélisation d'un solveur d'esquisse en CFAO¹.

Ce manuscrit comprend donc deux parties écrites respectivement en français et en anglais. La première présente les deux problèmes et les principaux résultats de cette thèse. La seconde se compose de deux articles qui détaillent ces résultats et en donnent les preuves.

Le PROBLÈME I consiste à étendre le concept de groupe d'holonomie horizontale sur une variété affine. Plus précisément, nous considérons une variété connexe lisse de dimension finie M , une connexion affine ∇ de groupe d'holonomie H^∇ et une distribution lisse Δ complètement non intégrable. Dans un premier temps, nous définissons le groupe d'holonomie Δ -horizontale associé au triplet (M, ∇, Δ) . Notre premier résultat est le suivant : nous montrons que si Δ est une distribution complètement commandable de rang constant, alors H_Δ^∇ est un sous-groupe de Lie de $GL(n)$ (ou $O(n)$ si ∇ est la connexion de Levi-Civita d'une métrique riemannienne sur M). Cela nous permet d'étudier H_Δ^∇ par sa structure différentielle. De plus, nous proposons aussi d'étudier le groupe d'holonomie Δ -horizontale en utilisant le formalisme du roulement des variétés. Nous utilisons cette approche pour fournir notre deuxième résultat, c'est-à-dire un exemple explicite pour l'inclusion stricte $clos(H_\Delta^\nabla) \subset clos(H^\nabla)$. Nous apportons donc une réponse négative à la question naturelle suivante : si Δ est complètement commandable, est-ce que le groupe d'holonomie Δ -horizontale est dense dans le groupe d'holonomie H^∇ ? L'exemple que nous donnons considère le triplet (M, ∇, Δ) où M est le groupe de Carnot homogène libre d'ordre 2 de $m \geq 2$ générateurs $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$, ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique riemannienne sur M définie de telle sorte que les X_i , $1 \leq i \leq m$ et les crochets de Lie $[X_i, X_j]$, $1 \leq i < j \leq m$ forment une base orthonormée et Δ est la distribution engendrée par la famille $\{X_i, 1 \leq i \leq m\}$. Dans ce cas, M est de dimension $m+n$ avec $n = m(m-1)/2$. Alors, nous montrons que $H^\nabla = SO(m+n)$ et H_Δ^∇ est un sous-groupe de Lie connexe et compact de $SO(m+n)$ de dimension $m+n$. Ainsi nous établissons l'inclusion stricte mentionnée ci-dessus dès

1. En collaboration avec l'entreprise Missler Software qui développe le logiciel TopSolid.

que $m \geq 3$. Ces résultats ont fait l'objet d'un article publié en 2015 [31].

Le PROBLÈME II étudie la modélisation du problème du solveur d'esquisse. Ce problème est une des étapes d'un logiciel de CFAO : l'utilisateur dessine une *esquisse*, ensemble de géométries (point, ligne, cercle, plan ou sphère, ...), dans le plan ou dans l'espace, et spécifie des *contraintes* (fixité, distance, angle, tangence, perpendicularité, coïncidence, symétries, ...) liant ces géométries. Le problème est de modifier au fur et à mesure l'esquisse de façon à satisfaire les contraintes. Le logiciel doit indiquer également à l'utilisateur les degrés de liberté restants, et également si certaines contraintes sont liées entre elles, et donc potentiellement redondantes. Dans le cas de degrés de liberté restants, le logiciel peut bouger la géométrie suivant les mouvements laissés possibles par le système de contrainte. Lorsqu'une géométrie n'a plus de degré de liberté, l'utilisateur doit être averti.

Pour résoudre le problème de la résolution d'une esquisse, on a besoin de trouver un bon espace pour faire les calculs. Il est intéressant dans ce problème de pouvoir considérer les points, droites et cercles comme des objets de même nature, une droite ou un plan étant considérés comme des sphères de rayon infini, un point comme une sphère de rayon nul. Si l'on considère l'espace des formes quadratiques sur un espace vectoriel classique, et qu'on n'utilise que le sous-espace vectoriel de celles qui représentent des sphères, en le munissant de la forme quadratique qui donne, à normalisation près, le rayon de la sphère, on obtient le bon espace. Cet espace est l'*espace des sphères de Lie* et il nous permet de traiter de même façon points, lignes et cercles, ou, en dimension quelconque, points, hyperplans et sphères. Nous nous référons aux livres de Marcel Berger [32] et de Thomas Cecil [33], ces ouvrages étant les rares à traiter ce sujet.

L'utilisation de cet espace en CFAO a été introduite par l'entreprise Missler Software dans son logiciel TopSolid. Ce logiciel fonctionne remarquablement bien mais beaucoup reste à faire sur la compréhension du problème. Notre but est d'arriver à une modélisation mathématique bien fondée et systématique du problème du solveur d'esquisse. Il s'agira ensuite de comprendre la convergence de l'algorithme, d'en améliorer les résultats et d'en étendre les fonctionnalités.

L'idée directrice de l'algorithme est de remplacer tout d'abord les "points" de l'espace des sphères par des déplacements (éléments du groupe) et puis d'utiliser une méthode de Newton sur les groupes de Lie ainsi obtenus. Dans cette thèse, nous avons classifié les groupes de déplacements possibles en utilisant la théorie des groupes de Lie. En particulier, nous avons distingué trois ensembles, chaque ensemble contenant un type d'objet : le premier est l'ensemble des points, noté **Points** (ou \mathcal{P}), le deuxième est l'ensemble des droites, noté **Droites** (ou Λ_0), et le troisième est l'ensemble des cercles et des droites, que nous notons Λ . Pour chaque type d'objet nous avons étudié tous les groupes de déplacements possibles, selon les propriétés souhaitées. Nous proposons finalement d'utiliser les groupes de déplacements suivant : pour le déplacement des points, le groupe des translations, qui agit transitivement sur \mathcal{P} ; pour les droites, le groupe des translations et rotations, qui est de dimension 3 et agit transitivement (globalement mais pas localement) sur Λ_0 ; sur les droites et cercles, le groupe des anti-translations, rotations et dilatations qui est de dimension 4 et agit transitivement (globalement mais pas localement) sur Λ . Ces résultats font l'objet d'un texte destiné à être publié.

Chapitres de la Thèse

Nous terminons cette introduction en décrivant la structure de ce manuscrit.

Chapitre 1 Ce chapitre contient les notions préliminaires nécessaires à l'introduction du PROBLÈME I : on y trouve certains outils de GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE, un aperçu sur les GROUPES D'HOLONOMIE et enfin, dans la Section 1.2, les notions de base de la THÉORIE DU ROULEMENT d'une variété différentielle sur un espace Euclidien (notre présentation s'inspirant très largement de celles de Chitour Y. et Kokkonen P. [9, 10, 11]). Dans la deuxième section, la Section 1.3, nous établissons entre autres les principaux résultats sur le groupe d'holonomie affine d'une variété affine M , le groupe d'holonomie affine d'une distribution Δ et enfin comme application, nous présentons l'étude d'holonomie du groupe de Carnot libre d'ordre 2. Dans la dernière section, nous donnons quelques problèmes ouverts liés à cette approche.

Chapitre 2 Ce chapitre expose le contexte, les méthodes et les modèles retenus pour le PROBLÈME II, dont l'analyse détaillée est repoussée au Chapitre 4. Dans un premier temps, dans la Section 2.1, nous expliquons la problématique de l'application à la CAO, puis, dans Section 2.2, nous étudions l'espace des sphères de Lie et la méthode de Newton dans un groupe de Lie pour résoudre le problème du solveur d'esquisse.

Chapitre 3 Dans ce chapitre, dans la Section 3.3, nous définissons le groupe d'holonomie Δ -horizontale H_{Δ}^{∇} comme le sous-groupe de H^{∇} obtenu par le transport parallèle le long des lacets tangents à Δ . Nous donnons les propriétés élémentaires de H_{Δ}^{∇} et ensuite nous faisons une étude détaillée en utilisant le formalisme de roulement. Il est montré en particulier que H_{Δ}^{∇} est un groupe de Lie. Dans un second temps, dans la Section 3.4, nous avons étudié un exemple explicite où M est un groupe de Carnot libre d'ordre 2 avec $m \geq 2$ générateurs, et ∇ est la connexion de Levi-Civita associé à une métrique riemannienne sur M . Nous avons montré dans ce cas particulier que H_{Δ}^{∇} est compact et strictement inclus dans H^{∇} dès que $m \geq 3$.

Chapitre 4 Ce chapitre traite en détail le problème du solveur d'esquisse. Dans un premier temps, dans la Section 4.1, nous définissons l'espace des sphères de Lie et nous introduisons des éléments particuliers du groupe de Lorentz. Ensuite, dans la Section 4.2, nous déterminons les groupes de déplacements pour \mathcal{P} , Λ_0 et Λ .

Chapitre 5 Ce chapitre contient un résultat technique nécessaire au chapitre 3. Nous généralisons d'abord, dans la Section 5.1, la définition d'un contrôle régulier et nous fournissons un résultat sur l'existence de ces contrôles. Nous définissons ensuite le concept d'application point-final (end-point mapping, en anglais). Le but principal de cet appendice est de généraliser le résultat de [3] au cas où la distribution Δ n'est pas

nécessairement “bracket-generating”. Finalement, dans Section 5.2, nous montrons que les groupes $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ et H_Δ^∇ sont connexes.

Chapitre 6 Dans ce chapitre, nous étudions la structure du groupe de Lorentz $\mathbf{O}(n-1, 1)$. D’abord, dans la Section 6.1, nous définissons le groupe de Lorentz. Ensuite, dans la Section 6.2, nous détaillons les composantes connexes de ce groupe. Enfin, dans la Section 6.3, nous introduisons les surfaces de transitivité. Ces approches sont importantes pour le chapitre 4.

Part I

Thesis Summary in French

Groupe d'Holonomie Horizontale

*"Quand on développe l'espace de Riemann sur l'espace euclidien tangent en x le long d'un cycle partant de x et y revenant, cet espace euclidien subit un déplacement et tous les déplacements correspondant aux différents cycles possibles forment un groupe, appelé **groupe d'holonomie**."*

É.Cartan-La géométrie des espaces de Riemann, 1925.

CE chapitre contient les notions préliminaires nécessaires à l'introduction du PROBLÈME I et contient aussi les principaux résultats de ce problème.

Nous supposons que le lecteur possède les prérequis de théorie du contrôle géométrique. Nous nous référons aux livres de Joyce D. [20] et de Sakai T. [28] pour toute notion de géométrie différentielle et de groupe d'holonomie.

Le lecteur est supposé familier avec les concepts basiques de géométrie sous-riemmanienne. Nous nous référons au livre de Jurdjevic V. [19], de Jean F. [18], au livre de Bonfiglioli A., Lanconelli E. et Uguzzoni F. et aux publications [1, 2] de Agrachev A. et Sachkov Y. Nous nous référons aux publications de Chitour Y. et Kokkonen P. pour des détails plus fournis sur la notion de roulement de deux variétés différentielles [9, 10, 11].

Contents

1.1	Introduction	20
1.2	Notions préliminaires	22
1.2.1	Liste des notations	22
1.2.2	Rappels de géométrie différentielle	23
1.2.3	Groupe d'holonomie	25
1.2.4	Roulement de variétés différentielles	26
1.3	Principaux résultats: Le groupe d'holonomie horizontale .	31
1.3.1	Groupe d'holonomie affine de M	32
1.3.2	Groupe d'holonomie affine de Δ	33

1.3.3 Exemple : Holonomie du groupe de Carnot homogène libre d'ordre 2	33
Perspectives	36

1.1 Introduction

Le but du PROBLÈME I consiste à étendre le concept d'holonomie horizontale d'une connexion affine dans le cadre des distributions sur une variété, c'est-à-dire les sous-fibrés du fibré tangent d'une variété. Plus précisément, considérons le triplet (M, ∇, Δ) , où M est une variété lisse connexe de dimension n , ∇ est une connexion affine sur M et Δ est une distribution lisse sur M . De plus, supposons que la distribution Δ est *complètement commandable*, c'est-à-dire que deux points quelconques dans M peuvent être reliés par une courbe absolument continue (a.c.) tangente presque partout à la distribution Δ .

Rappelons que le groupe d'holonomie H^∇ de la connexion ∇ est le sous-groupe de $GL(n)$ obtenu (à conjugaison près) par le transport parallèle le long des lacets a.c. (ou lisses par morceaux) de M .

Pour tout point $x \in M$, nous définissons le sous-groupe $H_\Delta^\nabla|_x$ de $H^\nabla|_x$, le groupe d'holonomie de ∇ en x , qui est obtenu par le transport parallèle par rapport à ∇ le long d'un ensemble restreint aux lacets a.c. Δ -horizontaux basés en x , c'est-à-dire le long des lacets qui sont tangents à la distribution Δ .

Grâce aux hypothèses de connexité de M et de commandabilité complète de Δ , nous pouvons déduire que les groupes $H_\Delta^\nabla|_x$, $x \in M$, sont tous conjugués à un sous-groupe de Lie H_Δ^∇ de H^∇ , que nous appelons *groupe d'holonomie Δ -horizontale* (ou simplement, horizontale) de ∇ . Dans le cas où ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à une métrique riemannienne g sur M , nous pouvons prendre à la fois H_Δ^∇ et H^∇ comme sous-groupes de $O(n)$ ou $SO(n)$ si M est orientable.

Comprendre la relation entre H_Δ^∇ et H^∇ semble être un défi intéressant. Par exemple, étant donnée une variété affine (M, ∇) , la détermination des conditions nécessaires et (ou) suffisantes sur une distribution complètement commandable Δ de M pour que le groupe d'holonomie horizontale H_Δ^∇ soit égal à H^∇ n'est pas une question évidente. Un autre problème à résoudre consiste à fixer la paire d'une variété et d'une distribution c'est-à-dire (M, Δ) puis à chercher s'il y a des connexions "plus adaptées ou intrinsèques" que d'autres (dans un sens à définir) pour la paire (M, Δ) . De plus, nous pouvons aussi étudier l'application $g \mapsto H_\Delta^{\nabla^g}$ où g est une métrique riemannienne complète sur M et ∇^g est la connexion de Levi-Civita correspondante en décrivant par exemple l'image de cette application. Notons que certaines de ces questions ont été déjà traitées dans [13] où les auteurs considèrent le cas des variétés de type contact avec une distribution résultant d'une connexion adaptée.

Dans cette thèse, nous commençons par définir précisément le groupe d'holonomie Δ -horizontale associé à un triplet admissible donné (M, ∇, Δ) . Notre premier résultat est

le suivant : si Δ est une distribution complètement commandable de rang constant, alors H_{Δ}^{∇} est un sous-groupe de Lie de $GL(n)$ (ou $O(n)$ si ∇ est la connexion de Levi-Civita d'une métrique riemannienne sur M). Cela nous permet d'étudier H_{Δ}^{∇} par sa structure différentielle.

De plus, nous proposons aussi d'étudier le groupe d'holonomie Δ -horizontale dans le cadre du roulement des variétés. En effet, rappelons que E. Cartan a défini les groupes d'holonomie dans [6] (qui correspondent aux groupes d'holonomie affine) par roulement d'une variété sur son espace tangent en tout point. Cette procédure a été généralisée dans [9, 14, 29] à une paire arbitraire de variétés riemanniennes de même dimension et elle est aussi appelée "*roulement d'une variété riemannienne sur une autre sans glissement ni pivotement*". Ce type de roulement a ensuite été prolongé dans [24] dans le cas où les deux variétés n'ont pas nécessairement la même dimension. Voir aussi [8] pour un aperçu historique ainsi que des applications du roulement de variétés.

Dans notre cas, le cadre du roulement revient à définir une distribution \mathcal{D}_R lisse de dimension n , appelée *la distribution de roulement*, sur l'espace d'état Q défini comme la fibre sur le produit de (M, ∇) et $(\mathbb{R}^n, \hat{\nabla}^n)$ où $\hat{\nabla}^n$ est la connexion Euclidienne sur \mathbb{R}^n et la fibre typique sur $(x, \hat{x}) \in M \times \mathbb{R}^n$ est identifiée à l'ensemble des endomorphismes de $T_x M$. Pour chaque $q \in Q$, soit $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q)$, la \mathcal{D}_R -orbite issue de q , c'est-à-dire l'ensemble des points finaux des courbes a.c. commençant à q et tangent à \mathcal{D}_R . Alors, pour chaque $q \in Q$ et $x' \in M$, la fibre de $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q)$ sur x' est conjuguée à un sous-groupe de $\mathbb{R}^n \times GL(n)$ dont la partie de $GL(n)$ est exactement H^{∇} . En outre, puisque $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q)$ est une variété immergée dans Q dont l'espace tangent à chaque $q' \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q)$ contient l'(évaluation en q' de l') algèbre de Lie générée par des champs de vecteur tangents à \mathcal{D}_R (cf. [1, 18, 19]), il est possible de déterminer les éléments de l'algèbre de Lie de H^{∇} comme les crochets de Lie des champs de vecteur tangents à \mathcal{D}_R .

Considérons maintenant une distribution complètement commandable Δ . Nous définissons une *sous-distribution* Δ_R de \mathcal{D}_R sur Q telle que, pour chaque $q \in Q$ et $x' \in M$, la fibre de $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q)$ sur x' est conjuguée à un sous-groupe de $\mathbb{R}^{m+n} \times GL(n)$ dont la partie de $GL(n)$ est maintenant égale à H_{Δ}^{∇} . Comme ce dernier est un groupe de Lie, nous pouvons déterminer les éléments de son algèbre de Lie en calculant les crochets de Lie des champs de vecteurs tangents à Δ_R . Comme aussi mentionné ci-dessus, $GL(n)$ peut être remplacé par $O(n)$ ($SO(n)$ respectivement) si ∇ est la connexion de Levi-Civita d'une métrique riemannienne sur M (si de plus M est orientée).

Nous utilisons cette approche pour fournir notre deuxième résultat principal, c'est-à-dire un exemple explicite pour l'inclusion stricte

$$clos(H_{\Delta}^{\nabla}) \subset clos(H^{\nabla}).$$

Plus précisément, nous considérons le triplet (M, ∇, Δ) où M est le groupe de Carnot homogène libre d'ordre 2 de $m \geq 2$ générateurs $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$, ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à la métrique riemannienne sur M pour laquelle les X_i , $1 \leq i \leq m$ et les crochets de Lie $[X_i, X_j]$, $1 \leq i < j \leq m$ forment une base orthonormée de l'algèbre de Lie et enfin Δ est la distribution définie par le Vect $\{X_i, 1 \leq i \leq m\}$. Dans ce cas, M est de dimension $m+n$ avec $n = m(m-1)/2$. On montre alors que $H^{\nabla} = SO(m+n)$ et que

H_{Δ}^{∇} est un sous-groupe de Lie connexe et compact de $\text{SO}(m+n)$ de dimension $m+n$, établissant ainsi l'inclusion stricte mentionnée ci-dessus dès que $m \geq 3$.

1.2 Notions préliminaires

Dans cette section, nous donnons les notions préliminaires nécessaires à l'introduction du PROBLÈME I.

1.2.1 Liste des notations

Nous donnons ici quelques symboles utilisés ci-après.

M	variété lisse connexe de dimension finie,
$\pi_{E,M}$	espace fibré,
$\Gamma(E)$	espace des sections lisses du fibré vectoriel E sur M ,
$T_x M$	espace tangent pour tout $x \in M$,
$C^{\infty}(M)$	ensemble des fonctions lisses sur M ,
$\mathcal{X}(M)$	ensemble des sections lisses du fibré tangent TM ,
∇	connexion affine,
∇^n	connexion Euclidienne sur \mathbb{R}^n ,
\exp^{∇}	application exponentielle de (M, ∇) ,
R^{∇}	tenseur de courbure associé à ∇ ,
T^{∇}	tenseur de torsion associé à ∇ ,
Δ	distribution,
$\mathcal{O}_{\Delta}(x_0)$	Δ -orbite en x_0 ,
$\text{Lie}(\Delta)_x$	évaluation de l'algèbre de Lie engendrée par Δ en $x \in M$,
$\text{Lie}(\Delta)$	algèbre de Lie engendré par Δ ,
$T_m^k M$	espace des sections du (k, m) -fibré tensoriel de (M, ∇) ,
$(P^{\nabla})_0^t(\gamma)T$	transport parallèle de T par rapport à ∇ le long de γ entre les temps 0 et t ,
$\Omega_M(x)$	ensemble de tous les lacets a.c. basés en point $x \in M$,
Q	espace d'état,
$\mathcal{L}_{NS}(X, \hat{X}) _q$	relèvement de développement sans pivotement de (X, \hat{X}) en $q \in Q$,
$\mathcal{L}_R(X) _q$	relèvement de développement de roulement en $q \in Q$,
$\mathcal{D}_{NS} _q$	distribution de développement sans pivotement en $q \in Q$,
$\mathcal{D}_R _q$	distribution de développement de roulement en $q \in Q$,
$q_{\mathcal{D}_R}$	courbe de roulement le long de γ ,
$\nu(B) _q(f)$	dérivée verticale de f en q dans la direction de B ,
H^{∇}	groupe d'holonomie de la connexion ∇ ,
H_{Δ}^{∇}	groupe d'holonomie Δ -horizontale de ∇ ,
\mathcal{H}^{∇}	groupe d'holonomie affine de ∇ ,
$\mathcal{H}_{\Delta_R}^{\nabla}$	groupe d'holonomie horizontale affine de ∇ ,
\mathbb{G}_m	groupe de Carnot homogène libre d'ordre 2,
\mathfrak{g}_m	algèbre de Lie de \mathbb{G}_m ,

$O(n)$	groupe orthogonal,
$SO(n)$	groupe spécial orthogonal,
$SE(n)$	groupe spécial Euclidien,
$GL(T_x M)$	groupe des endomorphismes linéaires et inversibles de $T_x M$,
$GL(n)$	groupe des matrices $n \times n$ réelles et inversibles,
$Aff(M)$	groupe affine de M ,
$Aff(n)$	groupe affine de l'espace \mathbb{R}^n ,
$Iso(M, g)$	groupe de Lie des isométries de (M, g) ,
f_*	application tangente d'une application f .

1.2.2 Rappels de géométrie différentielle

Nous présentons dans cette section des notions basiques de géométrie différentielle.

Dans ce chapitre, les variétés considérées sont toujours supposées lisses, connexes et de dimension n finie. Soient E, M, F des variétés différentielles, un espace fibré $\pi_{E,M} : E \rightarrow M$ est un morphisme lisse qui vérifie que pour tout $x \in M$ il existe un voisinage U de x dans M et un difféomorphisme $\tau : \pi_{E,M}^{-1}(U) \rightarrow U \times F$ tel que $pr_1 \circ \tau = \pi_{E,M}|_{\pi^{-1}(U)}$, où pr_1 dénote la projection sur le premier facteur. On appelle $E|_x := \pi_{E,M}^{-1}(x)$ la fibre au-dessus du point x , F la *fibre typique* de $\pi_{E,M}$ et τ sa trivialisatation locale. La fibre typique est unique à un difféomorphisme près. De plus, une section lisse du fibré $\pi_{E,M}$ est un morphisme lisse $s : M \rightarrow E$ qui satisfait $\pi_{E,M} \circ s = \text{id}_M$.

Si F est un espace \mathbb{R} -linéaire de dimension finie, on dit que $\pi_{E,M}$ est un fibré vectoriel. D'autre part, si G est un groupe de Lie, alors $\pi : E \rightarrow M$ est un fibré principal du groupe structural G sur M s'il existe une action libre de G sur E qui conserve les fibres de π (cf. [20]).

Soit $\Gamma(E)$ l'espace des sections lisses du fibré vectoriel E sur M . Une connexion linéaire sur E est un morphisme $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E \times T^*M)$ linéaire sur \mathbb{R} et qui vérifie la règle de Leibniz sur l'ensemble des fonctions lisses $C^\infty(M)$. On note par $\mathcal{X}(M)$ l'ensemble des sections lisses du fibré tangent TM .

Une connexion affine ∇ sur M est une connexion linéaire sur TM et qui est donnée par le morphisme bilinéaire sur \mathbb{R} suivant,

$$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M); \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y.$$

Elle est linéaire sur $C^\infty(M)$ par rapport au premier facteur et vérifiée la règle de Leibniz sur $C^\infty(M)$ par rapport au deuxième facteur. Ainsi, on dit que (M, ∇) est une *variété affine*. De plus, si l'application exponentielle \exp_x^∇ de (M, ∇) est définie sur l'ensemble de l'espace tangent $T_x M$ pour tout $x \in M$, alors (M, ∇) est géodésiquement complète. La connexion Euclidienne ∇^n sur \mathbb{R}^n est une connexion affine tel que

$$\nabla_{E_i}^n E_j = 0,$$

pour n'importe quelle paire de champs de vecteurs de la base canonique $\{E_1, \dots, E_n\}$ sur \mathbb{R}^n .

1.2. NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Les définitions intrinsèques du tenseur de courbure R^∇ et du tenseur de torsion T^∇ associés à la connexion affine ∇ sont,

$$\begin{aligned} R^\nabla(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \\ T^\nabla(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \end{aligned}$$

où X , Y et Z sont des champs de vecteurs quelconques sur M . Si $T^\nabla(X, Y)$ est nulle pour tout champs de vecteurs X et Y sur M , alors on dit que la connexion ∇ est sans torsion ou symétrique.

Une variété M munie d'une métrique définie positive g est appelée *variété riemannienne* et notée par (M, g) . De plus, dans cette thèse, nous ne considérons que les variétés complètes et orientées. On utilise $\|v\|_g$ pour noter $g(v, v)^{1/2}$ pour tout $v \in T_x M$ et $x \in M$.

Rappelons qu'une distribution lisse Δ sur la variété M est un sous-fibré lisse de TM . Pour tout $x \in M$, nous définissons le drapeau de distributions Δ^j , $j \geq 1$ associé à Δ défini par

$$\Delta^1|_x := \Delta|_x \text{ et } \Delta^{s+1}|_x := \Delta^s|_x + [\Delta^1, \Delta^s]|_x, \quad \text{pour } s \geq 1.$$

La distribution Δ sur M est de rang constant $m \leq n$ i.e. $\dim(\Delta|_x) = m$ pour tout $x \in M$. La distribution Δ vérifie la condition de rang constant de l'algèbre de Lie (LARC) si, pour tout $x \in M$, il existe un entier $r = r(x)$ tel que $\Delta^r|_x = T_x M$. Le nombre $r(x)$ est appelé ordre de Δ au point x (voir, [18] pour plus de détails). D'autre part, une courbe $\gamma : I \rightarrow M$ a.c., définie sur un intervalle réel I est une courbe Δ -admissible (ou Δ -horizontale) si elle est tangente à la distribution Δ presque partout (p.p.) sur I , c'est-à-dire si pour p.p. $t \in I$,

$$\dot{\gamma}(t) \in \Delta|_{\gamma(t)}.$$

Fixons $x_0 \in M$, la Δ -orbite en x_0 , notée par $\mathcal{O}_\Delta(x_0)$, i.e., l'ensemble des points finaux des courbes Δ -admissible de M commençant par x_0 , c'est-à-dire,

$$\mathcal{O}_\Delta(x_0) = \{\gamma(1) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \text{ courbe a.c. } \Delta\text{-admissible, } \gamma(0) = x_0\}.$$

Par le théorème de l'orbite, $\mathcal{O}_\Delta(x_0)$ est une sous-variété lisse immergée de M contenant x_0 (voir, [18]). Ainsi, pour tout $y \in \mathcal{O}_\Delta(x_0)$, l'espace tangent $T_y \mathcal{O}_\Delta(x_0)$ contient, $Lie_y(\Delta)$, l'évaluation en $y \in M$ de l'algèbre de Lie $Lie(\Delta)$ engendré par Δ .

De plus, si Δ' est une *sous-distribution* de Δ (i.e., $\Delta' \subset \Delta$), alors

$$\mathcal{O}_{\Delta'}(x_0) \subset \mathcal{O}_\Delta(x_0), \quad \text{pour tout } x_0 \in M.$$

Pour tout $x \in M$, une distribution lisse Δ est dite *complètement commandable* si,

$$\mathcal{O}_\Delta(x) = M,$$

c'est-à-dire si deux points quelconques de M peuvent être reliés par une courbe a.c. Δ -admissible. Rappelons que la condition LARC est une condition suffisante pour la commandabilité complète de Δ (voir, [18]) si M est une variété connexe.

1.2.3 Groupe d'holonomie

On note par $T_m^k M$ l'espace des sections du (k, m) -fibré tensoriel de (M, ∇) . Si $\gamma : I \rightarrow M$ est une courbe a.c. dans M et définie sur un intervalle réel $I \ni 0$, alors le transport parallèle $(P^\nabla)_0^t(\gamma)T_0$ d'un tenseur $T_0 \in T_m^k|_{\gamma(0)}M$ par rapport à ∇ le long de γ en $t \in I$ est la solution unique du problème de Cauchy donné par l'EDO

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)}((P^\nabla)_0^t(\gamma)T_0) = 0, \quad \text{p.p. } t \in I,$$

et la condition initiale,

$$(P^\nabla)_0^0(\gamma)T_0 = T_0.$$

Soit $(\hat{M}, \hat{\nabla})$ une autre variété affine et $f : M \rightarrow \hat{M}$ un morphisme lisse. Alors, on dit que f est affine si, pour toute courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ a.c., on a

$$f_*|_{\gamma(1)} \circ (P^\nabla)_0^1(\gamma) = (P^{\hat{\nabla}})_0^1(f \circ \gamma) \circ f_*|_{\gamma(0)}. \quad (1.1)$$

On utilise la notation $\text{Aff}(M)$ pour le groupe des transformations affines et inversibles de la variété M et on l'appelle *groupe affine* de M . En particulier, le groupe affine de l'espace \mathbb{R}^n muni de la connexion euclidienne est noté par $\text{Aff}(n)$. Rappelons que $\text{Aff}(n)$ est égal au produit semi-direct $\mathbb{R}^n \rtimes \text{GL}(n)$ où le produit de groupe \diamond est donné par

$$(v, L) \diamond (u, K) := (Lu + v, L \circ K).$$

En outre, un morphisme lisse $f : M \rightarrow \hat{M}$ est une isométrie locale entre deux variétés riemanniennes (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) si, pour tout $x \in M$, $f_*|_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \hat{M}$ est un morphisme isométrique. Si f est de plus bijectif alors elle est une isométrie et on dit que (M, g) et (\hat{M}, \hat{g}) sont isométriques. Ces variétés sont localement isométriques s'il existe une variété riemannienne (N, h) et des isométries locales $F : N \rightarrow M$ et $G : N \rightarrow \hat{M}$ qui sont aussi des revêtements. Par ailleurs, on utilise $\text{Iso}(M, g)$ pour noter le groupe de Lie des isométries de (M, g) .

Pour toute courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ a.c. et $F \in \text{Iso}(M, g)$, on a (cf. [28], page 41, Eq. (3.5))

$$F_*|_{\gamma(t)} \circ (P^{\nabla^g})_s^t(\gamma) = (P^{\nabla^g})_s^t(F \circ \gamma) \circ F_*|_{\gamma(s)}, \quad \forall s, t \in [0, 1]. \quad (1.2)$$

Dans les équations (1.1) et (1.2), f_* et F_* sont les applications tangentes de f et F respectivement.

D'autre part, on dit qu'une courbe $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ est un *lacet* basé en point $x \in M$ s'il vérifie $\gamma(a) = \gamma(b) = x$. Et on note par $\Omega_M(x)$ l'ensemble de tous les lacets a.c. $[0, 1] \rightarrow M$ basés en point $x \in M$.

Pour toutes courbes a.c. $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ et $\delta : [0, 1] \rightarrow M$ sur M telles que $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = \delta(0) = y$ et $\delta(1) = z$ où $x, y, z \in M$, on définit l'opération " \cdot " de telle sorte que $\delta \cdot \gamma$ est une courbe a.c. définie comme suit

$$\delta \cdot \gamma : [0, 1] \rightarrow M; \quad (\delta \cdot \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \delta(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2. NOTIONS PRÉLIMINAIRES

Les définitions du transport parallèle et d'ensemble des lacets nous permettent de définir le groupe d'holonomie $H^\nabla|_x$ de M en x par rapport à la connexion ∇ comme suit

$$H^\nabla|_x = \{(P^\nabla)_0^1(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_M(x)\}.$$

Pour tout $x \in M$, $H^\nabla|_x$ est un sous-groupe de $GL(T_x M)$, c'est-à-dire le groupe des matrices $n \times n$ inversibles. Si M est connexe, on peut joindre deux points quelconques x et y de M par une courbe a.c. $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. Ainsi, on aura

$$(P^\nabla)_0^1(\gamma)H^\nabla|_x(P^\nabla)_1^0(\gamma) = H^\nabla|_y,$$

i.e., $H^\nabla|_x$ et $H^\nabla|_y$ sont deux sous-groupes conjugués de $GL(T_x M)$. Si (M, g) est une variété riemannienne et ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à g alors $H^\nabla|_x$ est un sous-groupe de $O(T_x M)$. De plus, supposons que M est orientée, alors $H^\nabla|_x$ est un sous-groupe de $SO(T_x M)$.

1.2.4 Roulement de variétés différentielles

Dans cette section, nous reprenons en majeure partie les notations des publications de Chitour Y. et Kokkonen P. [9, 10, 11].

Ici, nous étudions un modèle de roulement d'une variété différentielle sur un espace Euclidien pour déterminer le groupe d'holonomie horizontale. Considérons le problème de roulement d'une surface M sur une autre surface \hat{M} dans l'espace Euclidien \mathbb{R}^3 . Un exemple très connu est le problème «plan-boule», où on roule une boule sur un plan dans \mathbb{R}^3 (voir Figure 1.1).

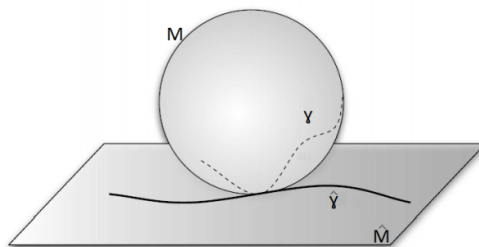


FIGURE 1.1 –

Lorsque les deux surfaces sont en contact, i.e. elles ont un plan tangent commun au point de contact on supposera que leurs vecteurs normaux extérieurs sont opposés en ce point (voir Figures 1.2 et 1.3).

Si $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ est une courbe lisse sur M , la surface M est dite *rouler* sur \hat{M} le long de γ *sans glisser ni pivoter*, si les conditions **(SG)** et **(SP)** (présentées ci-dessous) sont vérifiées. Soient $\gamma : [0, T] \rightarrow M$, $\hat{\gamma} : [0, T] \rightarrow \hat{M}$ les chemins tracés sur M , \hat{M} , respectivement, par le point de contact (voir Figure 1.4). A l'instant $t \in [0, T]$, l'orientation relative du plan tangent en $\hat{\gamma}(t)$ de \hat{M} par rapport à (celui en $\gamma(t)$ de)

M est mesurée par un angle $\theta(t)$ dans le plan tangent commun aux points de contact $\gamma(t)$, $\hat{\gamma}(t)$ respectivement. L'espace d'état Q du problème de roulement est alors de dimension cinq, puisqu'un point dans Q est défini en fixant un point sur M , un point sur \hat{M} et un angle, c'est-à-dire un point du cercle unité S^1 .

La condition **(SG)** «roulement sans glissement» exige, pour tout $t \in [0, T]$, que la vitesse $\hat{\gamma}(t)$ soit égale à la vitesse $\dot{\gamma}(t)$ tournée d'un angle $\theta(t)$ dans le plan tangent. En revanche, la condition **(SP)** «roulement sans pivotement» exige que les axes de rotation relatifs dans l'espace ambiant \mathbb{R}^3 des corps M et \hat{M} restent dans le plan tangent commun, ce qui se traduit en une condition pour $\dot{\theta}(t)$.

Une question fondamentale associée au problème de roulement est celle de sa commandabilité, c'est-à-dire,

Existe-t-il, pour deux points donnés q_0, q_1 dans Q , une courbe γ dans M telle que la procédure de roulement de M sur \hat{M} le long de γ amène le système de q_0 en q_1 ?

Si c'est le cas, pour n'importe quelle paire de points q_0, q_1 dans Q , le modèle (ou le système de contrôle correspondant) est dit *complètement commandable*.

Nous allons donner dans cette section des notations et des résultats importants, qui jouent un rôle important dans le PROBLÈME I.

Soit M une variété lisse de dimension n et ∇ une connexion sur M . Dans ce qui suit, on pose $(\hat{M}, \hat{\nabla}) := (\mathbb{R}^n, \hat{\nabla}^n)$ où $\hat{\nabla}^n$ est la connexion Euclidienne de \mathbb{R}^n . On associe à (M, ∇) le tenseur de courbure R^∇ et à la variété produit $(M, \nabla) \times (\mathbb{R}^n, \hat{\nabla}^n)$ la connexion affine $\bar{\nabla}$, avec

$$\bar{\nabla}_{(X, \hat{X})}(Y, \hat{Y}) = (\nabla_X Y, \hat{\nabla}_{\hat{X}} \hat{Y}),$$

où X et Y (\hat{X} et \hat{Y} respectivement) deux champs de vecteurs sur M (sur \hat{M} respectivement).

Définition 1.2.1. L'espace d'état de roulement de (M, ∇) sur $(\mathbb{R}^n, \hat{\nabla}^n)$ est

$$Q := Q(M, \mathbb{R}^n) = \{A : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n \mid A \text{ inversible}, x \in M\}.$$

Un point q appartient à Q est écrit comme suit $q = (x, \hat{x}; A)$.

Par définition, $\pi_Q : Q \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ est un espace fibré avec sa fibre typique $GL(n)$.

Dans la définition suivante nous allons écrire géométriquement les conditions de roulement sans pivotement ni glissement.

Définition 1.2.2. Soit $q(\cdot)$ une courbe a.c. sur Q définie par

$$\begin{aligned} q & : [a, b] \rightarrow Q \\ t & \mapsto (\gamma(t), \hat{\gamma}(t); A(t)) \end{aligned}$$

Alors, on a

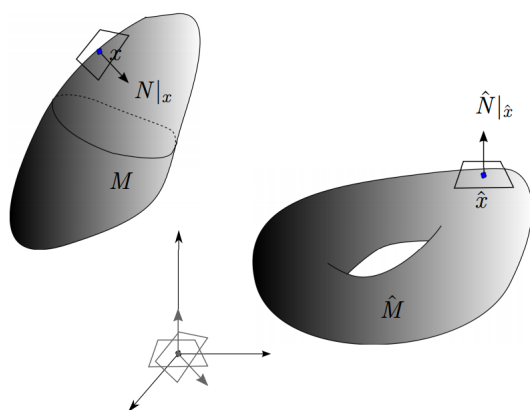


FIGURE 1.2 –

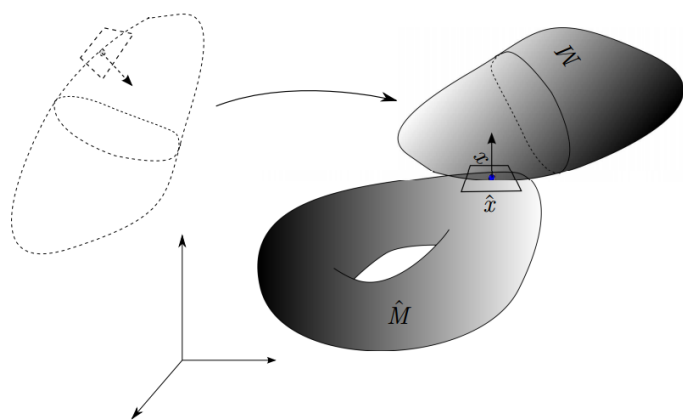


FIGURE 1.3 –

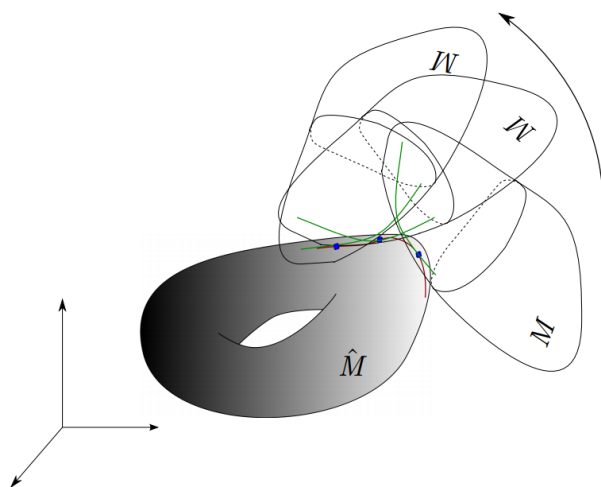


FIGURE 1.4 –

(I) La courbe $q(\cdot)$ décrit un roulement de M contre \hat{M} **sans pivotement** si

$$\text{(SP)} \quad \bar{\nabla}_{(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))} A(t) = 0 \quad \text{p.p. } t \in [a, b]. \quad (1.4)$$

(II) La courbe $q(\cdot)$ décrit un roulement de M sur \hat{M} **sans glissement** si

$$\text{(SG)} \quad A(t)\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}(t) \quad \text{p.p. } t \in [a, b]. \quad (1.5)$$

(III) La courbe $q(\cdot)$ décrit un roulement de M contre \hat{M} **sans glissement ni pivotement** si (I) et (II) sont vérifiés.

(IV) Les courbes $q(\cdot)$ de Q qui décrivent un mouvement de roulement sans pivotement ni glissement de M contre \hat{M} sont exactement les courbes intégrales du système affine en la commande et sans dérive suivant

$$\begin{cases} \dot{\gamma}(t) & = u(t), \\ \dot{\hat{\gamma}}(t) & = A(t)u(t), \\ \bar{\nabla}_{(u(t), A(t)u(t))} A(t) & = 0, \end{cases} \quad \text{pour p.p. } t \in [a, b], \quad (1.6)$$

où le contrôle u est une fonction mesurable définie sur un intervalle réel fini $I \subset \mathbb{R}$ et des valeurs dans TM .

Définition 1.2.3. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe a.c. sur M partant de x_0 . Le *développement* de γ dans $T_{x_0}M$ par rapport à ∇ est la courbe a.c. $\Lambda_{x_0}^\nabla(\gamma) : [0, 1] \rightarrow T_{x_0}M$ définie par

$$\Lambda_{x_0}^\nabla(\gamma)(t) = \int_0^t (P^\nabla)_s^0(\gamma) \dot{\gamma}(s) ds, \quad t \in [0, 1].$$

Définition 1.2.4. Soit $(x_0, \hat{x}_0) \in M \times \mathbb{R}^n$, $A_0 \in T_{x_0}^*M \otimes \mathbb{R}^n$ et $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ une courbe a.c. telle que $\gamma(0) = x_0$. Le développement de γ sur \mathbb{R}^n passant par A_0 par rapport à $\bar{\nabla}$ est la courbe a.c. $\Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma) : [0, 1] \rightarrow M$ définie par

$$\Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma)(t) := (\Lambda_{\hat{x}_0}^{\hat{\nabla}})^{-1}(A_0 \circ \Lambda_{x_0}^\nabla(\gamma))(t), \quad t \in [0, 1].$$

De plus, le transport parallèle relatif à A_0 le long de γ par rapport à $\bar{\nabla}$ est le morphisme linéaire suivant

$$(P^{\bar{\nabla}})_0^t(\gamma)A_0 : T_{\gamma(t)}M \rightarrow T_{\Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma)(t)}\hat{M}, \quad \text{pour tout } t \in [0, 1],$$

$$(P^{\bar{\nabla}})_0^t(\gamma)A_0 := (P^{\hat{\nabla}})_0^t(\Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma)) \circ A_0 \circ (P^\nabla)_t^0(\gamma).$$

On définit maintenant le relèvement de développement sans pivotement, la distribution de développement sans pivotement, le relèvement de développement de roulement et la distribution de développement de roulement.

Définition 1.2.5. Soit $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$, $(X, \hat{X}) \in T_{(x, \hat{x})}(M \times \hat{M})$ et γ (resp. $\hat{\gamma}$) une courbe a.c. sur M (resp. sur \hat{M}) commençant en x (resp. \hat{x}) avec vitesse initiale X

1.2. NOTIONS PRÉLIMINAIRES

(resp. \hat{X}). Le *relèvement de développement sans pivotement* de (X, \hat{X}) est l'unique vecteur $\mathcal{L}_{NS}(X, \hat{X})|_q$ de $T_q Q$ en $q = (x, \hat{x}; A)$ qui vérifie

$$\mathcal{L}_{NS}(X, \hat{X})|_q := \frac{d}{dt}\Big|_0 (P^{\hat{\nabla}})_0^t(\hat{\gamma}) \circ A \circ (P^{\nabla})_t^0(\gamma).$$

La *distribution de développement sans pivotement* \mathcal{D}_{NS} en $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$ est la distribution lisse de dimension $2n$ qui est égale à

$$\mathcal{D}_{NS}|_q := \mathcal{L}_{NS}(T_{(x, \hat{x})}M \times \hat{M})|_q.$$

Si $\hat{X} = AX$, alors le *relèvement de développement de roulement* en $q \in Q$ est le morphisme injectif $\mathcal{L}_R(X)|_q$

$$\mathcal{L}_R(X)|_q := \mathcal{L}_{NS}(X, AX)|_q = \frac{d}{dt}\Big|_0 (P^{\hat{\nabla}})_0^t(\hat{\gamma}) \circ A \circ (P^{\nabla})_t^0(\gamma).$$

La *distribution de développement de roulement* \mathcal{D}_R en $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$ est la distribution lisse de dimension n qui est égale à

$$\mathcal{D}_R|_q := \mathcal{L}_R(T_x M)|_q.$$

On dit que la courbe $I \ni t \mapsto q(t) = (\gamma(t), \hat{\gamma}(t); A(t))$ a.c. sur Q est une *courbe de développement de roulement* si et seulement elle est tangente à \mathcal{D}_R p.p. sur I , c'est-à-dire si et seulement si

$$\dot{q}(t) = \mathcal{L}_R(\dot{\gamma}(t))|_{q(t)} \text{ p.p. sur } I.$$

Proposition 1.2.1. *Pour tout $q_0 := (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$ et toute courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ a.c. de position initiale x_0 , il existe des courbes a.c. uniques telles que*

$$\hat{\gamma}(t) := \Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma)(t) \quad \text{et} \quad A(t) := (P^{\bar{\nabla}})_0^t(\gamma)A_0$$

vérifiant

$$A(t)\dot{\gamma}(t) = \dot{\hat{\gamma}}(t) \quad \text{et} \quad \bar{\nabla}_{(\hat{\gamma}(t), \dot{\hat{\gamma}}(t))} A(t) = 0, \quad \text{pour tout } t \in [0, T],$$

pour un maximal $T = T(\gamma)$ tel que $0 < T \leq 1$.

On appelle $t \mapsto q_{\mathcal{D}_R}(\gamma, q_0) := (\gamma(t), \hat{\gamma}(t); A(t))$ la courbe de roulement le long γ avec la position initiale q_0 .

De plus, si (M, ∇) est complète, on peut prendre au dessus $T = 1$ pour toute courbe γ .

Soit $\pi_Q : Q \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ un espace fibré et $q \in Q$. On note par $V|_q(\pi_Q)$ l'ensemble des champs de vecteurs $B \in T|_q Q$ tels que $(\pi_Q)_*(B) = 0$. La collection des espaces $V|_q(\pi_Q)$, $q \in Q$ définit une sous-variété lisse $V(\pi_Q)$ de TQ , appelée *distribution verticale*. On définit $\pi_{V(\pi_Q)} := \pi_{TQ}|_{V(\pi_Q)}$ qui est un sous-fibré vectoriel de $\pi_{TQ} : TQ \rightarrow Q$.

Nous allons écrire un élément de $V|_q(\pi_Q)$ en $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$ comme $\nu(B)|_q$ où $B \in T_x^* M \otimes \mathbb{R}^n$ vérifie $B \in A(\mathfrak{gl}(T_x M))$. Le but est de prendre la dérivée par rapport à

$\nu(B)|_q$ de toute application f définie sur (un ouvert de) Q avec les valeurs dans la variété de (m, k) -tenseurs de Q , c'est-à-dire,

$$\nu(B)|_q(f) := \frac{d}{dt}|_0 f(q + tB),$$

que nous appelons *dérivée verticale* de f en q dans la direction B .

On va présenter maintenant les différents types des crochets de Lie sur Q .

Proposition 1.2.2. *Soit $\mathcal{O} \subset T^*M \otimes \mathbb{R}^n$ une sous variété immergée. Prenons $\bar{Z} = (Z, \hat{Z}), \bar{S} = (S, \hat{S}) \in C^\infty(\pi_{\mathcal{O}}, \pi_{T^*M \otimes \mathbb{R}^n})$ tels que, pour tout $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}$, $\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(q))|_q, \mathcal{L}_{NS}(\bar{S}(q))|_q \in T_q\mathcal{O}$ et $U, V \in C^\infty(\pi_{\mathcal{O}}, \pi_{T^*M \otimes \mathbb{R}^n})$, tels que pour tout $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}$, $\nu(U(q))|_q, \nu(V(q))|_q \in T_q\mathcal{O}$. Alors, on a*

$$\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(A))|_q \bar{S}(\cdot) := \bar{\nabla}_{\bar{Z}(A)}(\bar{S}(A)),$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(\cdot)), \mathcal{L}_{NS}(\bar{S}(\cdot))]|_q &= \mathcal{L}_{NS}(\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(A))|_q \bar{S}(\cdot) - \mathcal{L}_{NS}(\bar{S}(A))|_q \bar{Z}(\cdot))|_q \\ &\quad - \mathcal{L}_{NS}(T^\nabla(Z, S))|_q + \nu(AR^\nabla(Z, S))|_q, \end{aligned}$$

$$[\mathcal{L}_R(Z), \mathcal{L}_R(S)]|_q = \mathcal{L}_R([Z, S])|_q + \mathcal{L}_{NS}(AT^\nabla(Z, S))|_q + \nu(AR^\nabla(Z(q), S(q)))|_q,$$

$$[\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(\cdot)), \nu(U(\cdot))]|_q = -\mathcal{L}_{NS}(\nu(U(A))|_q \bar{Z}(\cdot))|_q + \nu(\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(A))|_q U(\cdot))|_q,$$

$$[\nu(U(\cdot)), \nu(V(\cdot))]|_q = \nu(\nu(U(A))|_q V - \nu(V(A))|_q U)|_q.$$

1.3 Principaux résultats: Le groupe d'holonomie horizontale

Le but de cette section est de décrire les principaux résultats de [31]. Soit le triplet (M, ∇, Δ) , où M est une variété lisse, ∇ est une connexion affine sur M et Δ est une distribution lisse complètement commandable sur M . Nous commençons cette section par la définition suivante.

Définition 1.3.1. L'ensemble des lacets a.c. Δ -admissibles basés en $x \in M$ est défini par

$$\Omega_\Delta(x) := \{\gamma \mid \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ a.c., } \gamma(a) = \gamma(b) = x \text{ et } \dot{\gamma}(t) \in \Delta|_{\gamma(t)} \text{ p.p.}\}.$$

D'après la définition au dessus, le résultat suivant est immédiat.

Proposition 1.3.1. *Pour chaque $x \in M$, l'ensemble $\Omega_\Delta(x)$ est non-vide et stable par la loi " \cdot " donnée dans (1.3).*

1.3. PRINCIPAUX RÉSULTATS: LE GROUPE D'HOLONOMIE HORIZONTALE

Nous définissons maintenant le groupe d'holonomie associé à la distribution Δ comme suit.

Définition 1.3.2. Pour tout $x \in M$, le groupe d'holonomie associé à Δ en un point x est défini par

$$H_{\Delta}^{\nabla}|_x := \{(P^{\nabla})_0^1(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_{\Delta}(x)\}.$$

Proposition 1.3.2. Pour tous points $x, y \in M$, $H_{\Delta}^{\nabla}|_x$ est un sous-groupe de $H^{\nabla}|_x$ et aussi $H_{\Delta}^{\nabla}|_x$ et $H_{\Delta}^{\nabla}|_y$ sont conjugués.

Définition 1.3.3. La classe de conjugaison de $H_{\Delta}^{\nabla}|_x$, pour tout $x \in M$, définit un sous-groupe H_{Δ}^{∇} de $H^{\nabla} \subset \text{GL}(n)$ et on l'appelle le groupe d'holonomie horizontale associé à Δ et à la connexion affine ∇ .

La question suivante semble naturelle : la fermeture de H_{Δ}^{∇} est-elle égale à H^{∇} ? En effet, est-ce que le caractère "complètement commandable" de la distribution implique une réponse positive à la question ?

La réponse est non. La preuve sera donnée dans un exemple en sous-section 1.3.3 : on y traite du roulement du groupe de Carnot homogène d'ordre 2 sur l'espace Euclidien \mathbb{R}^n . Pour cela, on considère le développement de roulement de (M, ∇) sur l'espace Euclidien $(\mathbb{R}^n, \hat{\nabla}^n)$ et on utilise les résultats de la Section 4 de [11].

1.3.1 Groupe d'holonomie affine de M

Soit M une variété lisse de dimension n et ∇ une connexion sur M . Dans la suite de cette section, on pose $(\hat{M}, \hat{\nabla}) := (\mathbb{R}^n, \hat{\nabla}^n)$ où $\hat{\nabla}^n$ est la connexion Euclidienne de \mathbb{R}^n .

Proposition 1.3.3. L'espace fibré $\pi_{Q,M} : Q \rightarrow M$ est un $\text{Aff}(n)$ -fibré principal avec l'action à gauche $\mu : \text{Aff}(n) \times Q \rightarrow Q$ donnée par

$$\mu((\hat{y}, C), q) = (x, C\hat{x} + \hat{y}; C \circ A), \quad \text{pour } q = (x, \hat{x}; A) \in Q.$$

L'action μ conserve la distribution \mathcal{D}_R , c'est-à-dire que pour tout $q \in Q$ et $B \in \text{Aff}(n)$, on a

$$(\mu_B)_* \mathcal{D}_R|_q = \mathcal{D}_R|_{\mu_B(q)}, \quad \text{où } \mu_B : Q \rightarrow Q; q \mapsto \mu(B, q).$$

De plus, il existe un sous-groupe unique \mathcal{H}_q^{∇} de $\text{Aff}(n)$ appelé groupe d'holonomie affine de (M, ∇) et qui vérifie

$$\mu(\mathcal{H}_q^{\nabla} \times \{q\}) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x).$$

Si $q' = (x, \hat{x}'; A') \in Q$ appartient à la fibre de $\pi_{Q,M}$ au-dessus de q , alors \mathcal{H}_q^{∇} et $\mathcal{H}_{q'}^{\nabla}$ sont conjugués dans $\text{Aff}(n)$ et les classes de conjugaison de \mathcal{H}_q^{∇} sont de la forme $\mathcal{H}_{q'}^{\nabla}$. Cette classe de conjugaison est notée par \mathcal{H}^{∇} .

1.3.2 Groupe d'holonomie affine de Δ

Considérons maintenant une distribution lisse et complètement commandable Δ sur (M, ∇) . Nous allons définir la sous-distribution de \mathcal{D}_R par restriction à Δ au lieu de considérer tout l'espace tangente de M .

Définition 1.3.4. La distribution de roulement Δ_R de Δ est la sous-distribution lisse de \mathcal{D}_R définie en $(x, \hat{x}; A) \in Q$ par

$$\Delta_R|_{(x, \hat{x}; A)} = \mathcal{L}_R(\Delta|_x)|_{(x, \hat{x}; A)}. \quad (1.7)$$

Puisque Δ est complètement commandable, on a le résultat suivant.

Corollaire 1.3.5. Pour tout $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$ et toute courbe $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ a.c. et Δ -admissible qui commence en x_0 , il existe une unique courbe a.c. Δ_R -admissible $q_{\Delta_R}(\gamma, q_0) : [0, T] \rightarrow Q$, avec $0 < T \leq 1$.

Corollaire 1.3.6. L'action μ mentionnée dans la proposition 1.3.3 conserve la distribution Δ_R . De plus, pour tout $q \in Q$, il existe un unique sous-groupe $\mathcal{H}_{\Delta_R|q}^\nabla$ de \mathcal{H}_q^∇ qu'on l'appelle le groupe d'holonomie affine sur Δ_R et qui vérifie

$$\mu(\mathcal{H}_{\Delta_R|q}^\nabla \times \{q\}) = \mathcal{O}_{\Delta_R}(q) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x),$$

où $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ est l'orbite associée à la distribution Δ_R en q_0 .

Proposition 1.3.4. Pour tout $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$, la restriction de $\pi_{Q,M} : Q \rightarrow M$ sur l'orbite $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ est une submersion sur M .

Corollaire 1.3.7. Pour tout $x \in M$, la fibre $\pi_{Q,M}^{-1}(x) \cap \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ de $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ au-dessus de x est vide ou bien une sous-variété plongée et fermée dans $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ de dimension $\delta = \dim \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) - \dim M$.

Le résultat principal de cette sous-section est le suivant.

Proposition 1.3.5. Le groupe d'holonomie horizontale H_Δ^∇ est un sous-groupe de Lie de $GL(n)$ et le groupe d'holonomie horizontale affine $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ est un sous-groupe de Lie de $Aff(n)$.

1.3.3 Exemple : Holonomie du groupe de Carnot homogène libre d'ordre 2

Dans cet exemple, la variété affine (M, ∇) que nous considérons est le groupe de Carnot homogène libre d'ordre 2, noté par \mathbb{G}_m , de $m \geq 2$ générateurs, muni d'une métrique riemannienne et sa connexion de Levi-Civita. Pour la décrire, nous allons utiliser les définitions de base jacobienne, groupe homogène et groupe de Carnot de [5, Chap 1 & Chap 2].

1.3. PRINCIPAUX RÉSULTATS: LE GROUPE D'HOLONOMIE HORIZONTALE

Pour un entier $m \geq 2$, on fixe l'ensemble

$$\mathcal{I} := \{(h, k) \mid 1 \leq k < h \leq m\} \text{ de cardinal } n := m(m-1)/2.$$

Soit $S^{(h,k)}$ une $m \times m$ -matrice réelle antisymétrique dont les coefficients sont -1 dans la position (h, k) , $+1$ dans la position (k, h) et 0 ailleurs.

Dans \mathbb{R}^{m+n} , où un point arbitraire est écrit (v, γ) avec $v \in \mathbb{R}^m$, et $\gamma \in \mathbb{R}^n$, on définit la loi de groupe " \star " par

$$(v, \gamma) \star (v', \gamma') = \left(\begin{array}{l} v_i + v'_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \gamma_{h,k} + \gamma'_{h,k} + \frac{1}{2}(v_h v'_k - v_k v'_h), \quad (h, k) \in \mathcal{I} \end{array} \right).$$

Alors, il est facile de vérifier que le groupe $\mathbb{G}_m := (\mathbb{R}^{m+n}, \star)$ est un groupe de Lie, plus précisément, un groupe de Carnot homogène libre d'ordre 2 de m générateurs. En effet, un calcul simple montre que la dilatation δ_λ donnée par

$$\begin{aligned} \delta_\lambda &: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n} \\ (v, \gamma) &\mapsto (\lambda v, \lambda^2 \gamma) \end{aligned}$$

est un automorphisme de \mathbb{G}_m pour tout $\lambda > 0$. D'autre part, la base (jacobienne) de l'algèbre de Lie \mathfrak{g}_m de \mathbb{G}_m est donnée par $X_h, \Gamma_{h,k}$ où

$$\begin{aligned} X_h &= \frac{\partial}{\partial v_h} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < i \leq m} \left(\sum_{l=1}^m S_{h,l}^{(i,j)} v_l \right) \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_{i,j}} \right), \\ &= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{1}{2} \sum_{1 < i \leq m} v_i \frac{\partial}{\partial \gamma_{i,1}} & \text{si } h = 1, \\ \frac{\partial}{\partial v_h} + \frac{1}{2} \sum_{h < i \leq m} v_i \frac{\partial}{\partial \gamma_{i,h}} - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < h} v_j \frac{\partial}{\partial \gamma_{h,j}} & \text{si } 1 < h < m, \\ \frac{\partial}{\partial v_m} - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < m} v_j \frac{\partial}{\partial \gamma_{m,j}} & \text{si } h = m, \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{h,k} = \frac{\partial}{\partial \gamma_{h,k}}, \quad (h, k) \in \mathcal{I}.$$

Les crochets de Lie sur $\mathbb{G}_m = (\mathbb{R}^{m+n}, \star)$ sont donnés par

$$\begin{aligned} [X_h, X_k] &= \sum_{1 \leq j < i \leq m} S_{h,k}^{(i,j)} \frac{\partial}{\partial \gamma_{i,j}} = \frac{\partial}{\partial \gamma_{h,k}} = \Gamma_{h,k}, \\ [X_h, \Gamma_{i,j}] &= 0, \\ [\Gamma_{h,k}, \Gamma_{i,j}] &= 0, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\text{rank}(\text{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}) = \dim(\text{Vect}\left\{\frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_m}, (\Gamma_{h,k})_{(h,k) \in \mathcal{I}}\right\}) = m + n = \dim \mathfrak{g}_m.$$

On peut donc conclure que \mathbb{G}_m est un groupe de Carnot homogène libre d'ordre 2 et de m générateurs X_1, \dots, X_m . L'algèbre de Lie \mathfrak{g}_m est égale à $V_1 \oplus V_2$, où $V_1 = \text{Vect}\{X_1, \dots, X_m\}$ et $V_2 = \text{Vect}\{\Gamma_{h,k}, (h, k) \in \mathcal{I}\}$.

1.3.3.1 Groupe d'Holonomie Riemannienne de (\mathbb{G}_m, g)

On considère une variété analytique (\mathbb{G}_m, g) avec une métrique g , par rapport à la base donnée au dessus, donnée par

$$\begin{aligned} g(X_i, X_j) &= \delta_{i,j}, & \text{si } i, j \in \{1, \dots, m\}, \\ g(X_i, \Gamma_{h,k}) &= 0, & \text{si } i \in \{1, \dots, m\} \text{ et } (h, k) \in \mathcal{I}, \\ g(\Gamma_{h,k}, \Gamma_{i,j}) &= \delta_{h,i} \delta_{k,j}, & \text{si } (i, j), (h, k) \in \mathcal{I}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Dans la suite du present chapitre, on trouve utile d'introduire la notation suivante de champs de vecteurs au lieu de $\Gamma_{h,k}$, pour $h, k \in \{1, \dots, m\}$, afin de faciliter les calculs en évitant la confusion entre les deux cas $k < h$ et $h < k$.

Definition 1.3.6. *Pour tout $h, k \in \{1, \dots, m\}$, on définit,*

$$\Omega_{h,k} = \begin{cases} \Gamma_{h,k} & \text{si } h > k, \\ -\Gamma_{k,h} & \text{si } h < k, \\ 0 & \text{si } h = k. \end{cases}$$

Par la définition ci-dessus, le crochet de Lie $[X_h, X_k]$ est égal à $\Omega_{h,k}$, pour tout $h, k \in \{1, \dots, m\}$. De plus, soit ∇^g la connexion de Levi-Civita associée à la métrique Riemannienne dans (1.8).

On note par $\nabla_X^g Y$ la dérivé covariante d'un champ de vecteur Y dans la direction d'un autre champ de vecteur X sur \mathbb{G}_m . Elle est égale à

$$\nabla_X^g Y = \sum_{h=1}^m \alpha_h(X, Y) X_h + \sum_{1 \leq k < h \leq m} \beta_{(h,k)}(X, Y) \Omega_{h,k}.$$

En utilisant la formule de Koszul suivante

$$2g(\nabla_X^g Y, Z) = g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X),$$

on obtient le résultat suivant.

Lemma 1.3.7. *Pour $h, k, l, s, t \in \{1, \dots, m\}$, on a les dérivées covariantes suivantes sur (\mathbb{G}_m, g) ,*

$$\begin{aligned} \nabla_{X_h}^g X_k &= \frac{1}{2} \Omega_{h,k}, & \nabla_{\Omega_{h,k}}^g \Omega_{s,t} &= 0, \\ \nabla_{X_i}^g \Omega_{h,k} &= \frac{1}{2} (\delta_{kl} X_h - \delta_{hl} X_k), & \nabla_{\Omega_{h,k}}^g X_l &= \frac{1}{2} (\delta_{kl} X_h - \delta_{hl} X_k). \end{aligned}$$

Le résultat principal de ce paragraphe est le théorème suivant.

Théorème 1.3.8. *Soit (\mathbb{G}_m, ∇^g) un groupe de Carnot homogène libre d'ordre 2 de dimension $m+n$ muni de la connexion de Levi-Civita ∇^g donné au lemme 1.3.7. Alors, le groupe d'holonomie H^{∇^g} est égal à $\text{SO}(m+n)$.*

1.3.3.2 Groupe d'Holonomie Horizontale de (\mathbb{G}_m, g)

On définit la distribution $\Delta := \text{Vect}\{X_1, \dots, X_m\}$ sur \mathbb{G}_m et $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$. On note qu'elle est de rang constant m . On va tout d'abord calculer une base de l'espace tangent $T_q \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ pour tout $q \in \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ et ensuite étudier le groupe d'holonomie $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ de roulement de (\mathbb{G}_m, g) contre $(\mathbb{R}^{m+n}, s_{m+n})$, où s_{m+n} est la métrique Euclidienne sur \mathbb{R}^{m+n} , (voir tout les détails en Section 3.4.3).

Le résultat principal de cette section est le suivant.

Proposition 1.3.8. *Si \mathbb{G} est un groupe de Carnot homogène d'ordre 2, muni de la connexion de Levi-Civita ∇^g associée à une métrique riemannienne g , on a que*

- (a) *le groupe d'holonomie horizontale affine $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ est un sous-groupe de Lie connexe de $\text{SE}(m+n)$ de dimension $2(n+m)$,*
- (b) *le groupe d'holonomie horizontale H_Δ^∇ est un sous-groupe de Lie connexe compact de $\text{SO}(m+n)$ de dimension $m+n$,*

En particulier, les inclusions

$$\text{clos}(\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla) \subset \text{clos}(\mathcal{H}^\nabla) \quad \text{et} \quad \text{clos}(H_\Delta^\nabla) \subset \text{clos}(H^\nabla)$$

sont strictes si et seulement si $m \geq 3$.

Perspectives

1. Établir des résultats de type Ambrose-Singer pour décrire l'algèbre de Lie des groupes d'holonomie.
2. Déterminer les obstructions possibles pour les groupes d'holonomie horizontale.

Solveur d'Esquisse

LE problème du solveur d'esquisse est celui de la construction naturelle de géométries sous contraintes, c'est un problème de nature géométrique qui est au coeur de la **C**onception et **F**abrication **A**ssistées par **O**rdinateur (**CFAO**). En suivant la démarche introduite dans le logiciel TopSolid de Missler Software et décrite dans [35], la modélisation de ce problème requiert l'introduction d'un espace particulier, l'espace des sphères de Lie, alors que sa résolution nécessite l'étude de la dynamique de l'algorithme de Newton sur des groupes de Lie, positionnant ainsi ce problème dans le cadre du contrôle géométrique. Dans ce manuscrit, nous nous concentrons essentiellement sur les aspects modélisation de ce problème, en donnant une analyse complète des groupes susceptibles d'être utilisés et les dynamiques de Newton associées.

Ce travail a été réalisé avec Y. Chitour, F. Jean et M. Sigalotti, dans le cadre d'une collaboration avec Missler Software initiée par l'AMIES (Agence pour les mathématiques en interaction avec l'entreprise et la société).

Contents

2.1	CFAO et Modélisation par Contraintes	37
2.2	Problème du Solveur d'Esquisse (PSE)	41
2.2.1	Définitions	41
2.2.2	Espace des Sphères de Lie	42
2.2.3	Méthode de Résolution d'Esquisse	43
2.2.4	Groupe Circulaire	45
2.2.5	Classes de transformations dans le plan	46
	Conclusion et Perspectives	49

2.1 CFAO et Modélisation par Contraintes

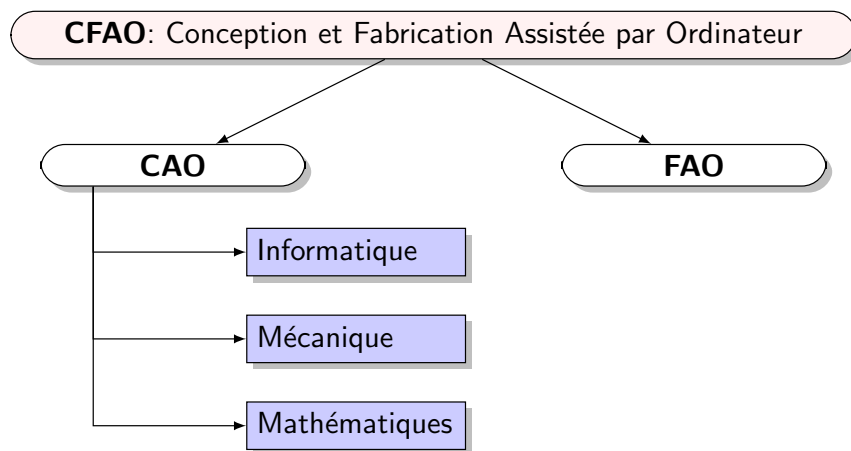
La **CFAO** est un terme large qui concerne l'utilisation de la technologie des ordinateurs pour aider à la conception, l'analyse et la fabrication de produits. Dans la vie courante,

2.1. CFAO ET MODÉLISATION PAR CONTRAINTES

la plupart des pièces sont conçus en **CFAO**, par exemple, *voiture, avion, moteur*, mais aussi *savon, emballage de savon, machine à emballer les savons,...* La **CFAO** se subdivise en deux domaines,

la **CAO** Conception Assistée par Ordinateur,
la **FAO** Fabrication Assistée par Ordinateur.

La **CAO** comprend l'ensemble des programmes et des techniques de modélisation géométrique permettant de concevoir, dessiner et tester virtuellement les produits avant de les fabriquer. Il est ensuite facile de transmettre les informations à la **FAO**.



La **CAO** est donc au croisement de trois sciences : l'informatique, la mécanique et les mathématiques. La modélisation géométrique joue un rôle important dans ce processus de conception des produits industriels, nous y reviendrons.

Il y a deux types de modélisation qui coexistent en **CAO**, donnant lieu à des représentations mathématiques différentes au sein des logiciels. Ces deux types correspondent aux deux objectifs différents d'un concepteur : soit faire du beau, du fluide (design : carrosserie de voiture, fuselage,...) parce que cela se voit ou doit avancer dans un milieu fluide, soit faire de la fonction : lien, mouvement (mur, poutre, boîte de vitesse, train d'atterrissage,...) parce que cela doit être résistant et marcher.

(1) Design : Il s'agit de modéliser géométriquement une forme, délimitée par des surfaces supportées par une structure topologique en fil de fer. Parce que "le beau fait vendre" ou pour des raisons d'aérodynamisme, les surfaces doivent être harmonieuses, bien contrôlées en courbure, et se raccorder impeccablement. *Exemple* : carrosserie de voiture, fuselage, ... (voir Figure 2.1).

Dans ce type de modélisation vont dominer les représentations de Bézier, ou leur généralisation aux Nurbs (Non Uniform Rational Bernstein Splines). Parce qu'il permettait de résoudre des problèmes inabordables avant l'ordinateur – modélisation géométrique de formes polynomiales quelconques – ce domaine a concentré l'essentiel de la recherche



FIGURE 2.1 –
 URL : <http://www.directindustry.fr/>

en CAO, depuis les années 70 jusqu'aux années 2000. Le sujet a décliné depuis car considéré comme résolu, mais il y a encore des avancées notables (TSplines) et la recherche y est toujours active.

(2) Fonctions : Tout mouvement qui doit se perpétuer dans l'espace, animé par un moteur, est forcément issu d'un sous-groupe du groupe des déplacements euclidiens : translation, rotation, ... Cela contraint les formes dites *fonctionnelles*, devant être en contact les unes avec les autres, qui se retrouvent devoir être des plans, des cylindres, des sphères et des hélicoïdes. Les pièces fonctionnelles ne se voyant pas, elles doivent être simples, pour se fabriquer à moindre coût, c'est-à-dire, schématiquement, par les mouvements de translation d'une fraise ou les mouvements de rotation d'un tour. *Exemple* : mur, poutre, boîte de vitesse, train d'atterrissage, moto-réducteur, ... (voir Figure 2.2).

Sur ce type de pièces assurant des liaisons et des mouvements, il n'est pas étonnant que la ligne et le cercle dominant dans le plan, de même que le plan et la sphère dans l'espace, comme éléments géométriques de base.

C'est pour la conception de ce deuxième type de pièces qu'apparaît le problème qui nous intéresse dans cette thèse, la résolution d'esquisse. Il se pose de la façon suivante. Un utilisateur fournit explicitement l'emplacement des objets géométriques (en 2D les points, les droites et les cercles, en 3D les points, les plans et les sphères). Il spécifie aussi les différentes relations que doivent vérifier les différentes parties de l'objet, on les appelle *contraintes géométriques* (restreignant les positions possibles pour les objets). A titre d'exemple, distance entre points, distance entre points et droites, angles entre droites, parallélisme entre droites, incidence entre points et droites, entre points et cercles, tangence entre cercles, tangence entre droites et cercles, ...

La question qui se pose est :



FIGURE 2.2 –
URL : <http://www.topsolid.com/>

Comment de façon pratique placer les objets de façon à satisfaire toutes les contraintes ?

On montre par exemple dans la figure 2.3 une capture d'écran du module de résolution d'esquisse du logiciel TopSolid : au fur et à mesure que l'utilisateur dessine les contraintes se résolvent, le logiciel indiquant les degrés de liberté¹ restants, et également si certaines contraintes sont liées entre elles, et donc potentiellement redondantes. Dans le cas de degrés de liberté restants, le logiciel peut bouger la géométrie suivant les mouvements laissés possibles par le système de contrainte (géométrie en couleur magenta). Lorsqu'une géométrie n'a plus de degré de liberté, l'utilisateur est averti (géométrie bleue).

Pour traiter le problème de la résolution d'une esquisse, on a besoin de trouver un bon espace pour faire les calculs. Il est intéressant de pouvoir considérer les points, droites et cercles comme des objets de même nature, une droite ou un plan étant considérés comme des sphères de rayon infini, un point comme une sphère de rayon nul. Si l'on considère l'espace des formes quadratiques sur un espace vectoriel classique, et qu'on n'utilise que le sous-espace vectoriel de celles qui représentent des sphères, en le munissant de la forme quadratique qui donne, à normalisation près, le rayon de la sphère, on obtient le bon espace. Cet espace est l'*espace des sphères de Lie* et il nous permet de traiter de même façon points, lignes et cercles, ou, en dimension quelconque, points, hyperplans et sphères. Nous nous référons aux livres de Marcel Berger [32] et de Thomas Cecil [33], ces ouvrages étant les rares à traiter ce sujet.

L'utilisation de cet espace en CFAO a été introduite par l'entreprise Missler Software dans son logiciel TopSolid. Ce logiciel fonctionne remarquablement bien mais beaucoup reste à faire sur la compréhension du problème. Notre but est d'arriver à une modélisation mathématique bien fondée et systématique du problème du solveur d'esquisse. Il

1. Dans l'espace, un point et un plan ont chacun 3 degrés de liberté alors qu'une droite en possède 4. Une contrainte de distance supprime 1 degré de liberté, une contrainte de type "être le milieu de deux points" supprime les 3 degrés de liberté d'un point.

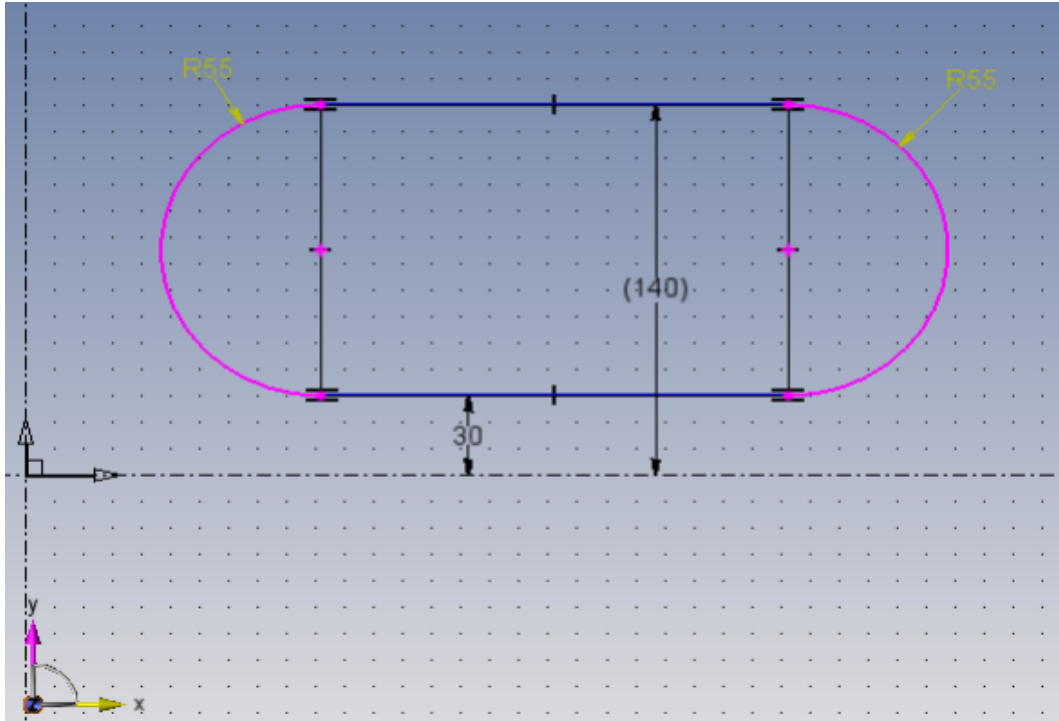


FIGURE 2.3 –

s'agira ensuite de comprendre la convergence de l'algorithme, d'en améliorer les résultats et d'en étendre les fonctionnalités. Pour la modélisation, une des idées directrices de l'algorithme est de remplacer tout d'abord les "points" de l'espace des sphères par des déplacements (éléments du groupe) et puis d'utiliser une méthode de Newton sur les groupes de Lie ainsi obtenus. Nous nous sommes donc concentrés sur une étude systématique des types de groupes de déplacements possibles.

2.2 Problème du Solveur d'Esquisse (PSE)

2.2.1 Définitions

Définissons d'abord précisément le problème. On appelle *géométrie de \mathbb{R}^2* un sous-ensemble de \mathbb{R}^2 qui est soit un point, soit un cercle, soit une droite. Plus généralement, une géométrie de \mathbb{R}^n sera un point, une sphère ou un hyperplan affine.

Une *esquisse* est un ensemble de géométries. Deux esquisses sont de même nature si elles comportent le même nombre de géométries et le même nombre de points (le nombre de sphères et d'hyperplans peuvent donc être différents mais leur nombre total est constant, un hyperplan étant considéré comme une sphère de courbure nulle et donc de même nature).

Le Problème du solveur d'esquisse (PSE) s'énonce comme suit : *étant donnée une esquisse initiale et des contraintes, trouver une esquisse de même nature satisfaisant*

les contraintes.

2.2.2 Espace des Sphères de Lie

Rappelons que l'équation d'une sphère de centre p de rayon $r \geq 0$ dans \mathbb{R}^n est $|x-p|^2 = r^2$, ou encore $|x|^2 - 2p^T x + |p|^2 - r^2 = 0$, c'est-à-dire une forme quadratique affine dont la partie homogène est $|x|^2$. En fait toute forme quadratique affine de la forme

$$q(x) = k|x|^2 + a^T x + h, \quad (2.1)$$

est une équation de sphère pourvu que les coefficients réels h, k et le vecteur a de \mathbb{R}^n satisfassent $|a|^2 - 4kh \geq 0$ et $k \neq 0$, il suffit en effet de poser

$$p = -a/(2k) \text{ et } r^2 = (|a|^2 - 4kh)/4k^2.$$

De plus quand $k = 0$ et $a \neq 0$, la forme quadratique (2.1) donne l'équation d'un hyperplan affine.

On peut donc identifier points, sphères et hyperplans avec un certain sous-ensemble des formes quadratiques affines. Précisons cette identification.

D'abord l'ensemble des formes quadratiques affines de la forme (2.1) est un espace vectoriel de dimension $n + 2$. Le discriminant $\rho(q)$ de la forme quadratique q , qui est égal à

$$\rho(q) = |a|^2 - 4kh,$$

joue un rôle important ici, donc nous allons représenter une forme quadratique affine q par le vecteur $\xi = (a, h - k, h + k) \in \mathbb{R}^{n+2}$ de façon à diagonaliser ρ , c'est-à-dire que $\rho(\xi) = \rho(q)$ s'écrit

$$\rho(\xi) = \xi_1^2 + \dots + \xi_{n+1}^2 - \xi_{n+2}^2.$$

Le discriminant est donc la *métrique (ou norme) de Lorentz*. Un point $\xi = (\bar{\xi}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2})$ de \mathbb{R}^{n+2} représente la forme quadratique affine

$$q_\xi(x) = -\frac{1}{2}(\xi_{n+1} - \xi_{n+2})|x|^2 + \bar{\xi}^T x + \frac{1}{2}(\xi_{n+1} + \xi_{n+2}),$$

le point clé étant que les équations des sphères (y compris les points) et des hyperplans sont associées à des éléments ξ de norme $\rho(\xi) \geq 0$.

Remarquons ensuite que deux équations proportionnelles définissent le même objet géométrique donc le bon espace pour travailler n'est pas \mathbb{R}^{n+2} mais l'espace projectif \mathbb{P}^{n+1} (l'ensemble des classes d'équivalences pour la relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$ définie par : $\xi \sim \eta$ si $\xi = \lambda\eta$ pour un réel $\lambda \neq 0$).

Finalement, nous définissons l'*espace des sphères* \mathcal{S} comme suit, c'est-à-dire,

$$\mathcal{S} = \{[\xi] \in \mathbb{P}^{n+1} \mid \rho(\xi) \geq 0\}.$$

Dans le langage de la physique, \mathcal{S} correspond aux classes d'équivalence de vecteurs de type espace (de norme de Lorentz positive) et de type lumière (de norme de Lorentz

nulle).

D'après notre discussion ci-dessus, à tout objet (point, sphère ou hyperplan) de \mathbb{R}^n est associé un unique élément $[\xi]$ de \mathcal{S} qui définit l'équation q_ξ de l'objet. Ainsi, nous obtenons une application injective ϕ entre $\mathbb{R}^n \cup \text{Sphères} \cup \text{Hyperplans}$ et l'espace des sphères \mathcal{S} :

– en notant p un point de \mathbb{R}^n , l'application ϕ sur l'ensemble des points est égale à

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathcal{S} \\ p &\mapsto \left[\left(p, \frac{1-\|p\|^2}{2}, \frac{1+\|p\|^2}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

– en notant $S(p, r)$ la sphère de centre p et de rayon r , l'application ϕ sur l'ensemble Sphères est égale à

$$\begin{aligned} \phi : \text{Sphères} &\rightarrow \mathcal{S} \\ S(p, r) &\mapsto \left[\left(p, \frac{1-\|p\|^2+r^2}{2}, \frac{1+\|p\|^2-r^2}{2} \right) \right], \end{aligned}$$

– en notant $H(N, h)$ l'hyperplan d'équation cartésienne $N^T x + h = 0$, l'application ϕ sur Hyperplans est égale à

$$\begin{aligned} \phi : \text{Hyperplans} &\rightarrow \mathcal{S} \\ H(N, h) &\mapsto [(N, h, -h)]. \end{aligned}$$

Inversement tout élément de l'espace des sphères définit l'équation d'un des trois objets géométriques ci-dessus, à l'exception de $[(0, \dots, 0, 1, -1)]$ qui correspond aux formes quadratiques constantes. On va donc ajouter à \mathbb{R}^n un point à l'infini et on note **Points** l'espace ainsi obtenu, c'est-à-dire **Points** = $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ (muni de la topologie adéquate, **Points** est le compactifié d'Alexandrov de \mathbb{R}^n). En posant

$$\phi(\infty) = [(0, \dots, 0, 1, -1)]$$

on transforme ainsi ϕ en une bijection,

$$\phi : \text{Points} \cup \text{Sphères} \cup \text{Hyperplans} \rightarrow \mathcal{S}.$$

L'image $\phi(\text{Points})$ est l'ensemble $\{\rho = 0\}$ des éléments de \mathcal{S} de norme nulle et $\phi(\text{Sphères} \cup \text{Hyperplans})$ est l'ensemble $\{\rho > 0\}$ des éléments de norme positive.

2.2.3 Méthode de Résolution d'Esquisse

Soit f une esquisse à N objets $([\xi_1], \dots, [\xi_N]) \in \mathcal{S}^N$. Se donner un nombre p de contraintes scalaires sur une telle esquisse c'est se donner une fonction $F : \mathcal{S}^N \rightarrow \mathbb{R}^p$, l'esquisse satisfaisant la contrainte si $F([\xi_1], \dots, [\xi_N]) = 0$. Le problème du solveur d'esquisse se formule donc ainsi :

étant donné une esquisse $([\xi_1^*], \dots, [\xi_N^*]) \in \mathcal{S}^N$, trouver une esquisse $([\xi_1], \dots, [\xi_N])$ de même nature telle que $F([\xi_1], \dots, [\xi_N]) = 0$.

Remarque 2.2.1. Notons par ρ la métrique de Lorentz. Par esquisses de *même nature* nous entendons le fait que $\rho([\xi_i])$ et $\rho([\xi_i^*])$ soit de même signe pour chaque i , c'est-à-dire que $[\xi_i]$ représente un élément de **Points** si et seulement si c'est le cas pour $[\xi_i^*]$.

La méthode standard pour résoudre une équation $F = 0$ est la méthode de Newton, rappelons-en le principe.

La méthode de Newton classique Soit $F : E \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application définie sur un espace vectoriel euclidien E .

Partant d'une approximation x^0 d'un zéro de F , on fait un développement limité de la fonction F au premier ordre en x^0 ,

$$F(x) \simeq F(x^0) + DF(x^0)(x - x^0),$$

et on choisit un point x^1 qui annule le membre de droite, c'est-à-dire

$$x^1 = x^0 - DF(x^0)^\dagger F(x^0), \tag{2.2}$$

où $DF(x^0)^\dagger$ est l'inverse de Moore–Penrose de l'application $DF(x^0)$. L'algorithme consiste ensuite à itérer la construction à partir de x^1 .

Observons cependant que nous travaillons ici sur l'ensemble \mathcal{S} , qui n'est pas un sous-espace vectoriel (c'est une variété à bord). Il est donc nécessaire d'utiliser une méthode de Newton sur des variétés. De telles méthodes existent (voir [40]) mais nécessitent une structure supplémentaire pour généraliser (2.2) et posent de gros problèmes de mise en oeuvre. Il y a cependant un cas où elles fonctionnent bien, c'est le cas où la variété est un groupe de Lie (les groupes de Lie possèdent une structure supplémentaire naturelle qui permet de définir les déplacements infinitésimaux).

La méthode de Newton sur un groupe de Lie Supposons que l'application F est définie sur un groupe de Lie \mathbf{H} , $\mathbf{H} = \exp(\mathfrak{h})$, et reprenons l'argument de la méthode de Newton classique.

Partant d'une approximation h^0 d'un zéro de F , tout point de \mathbf{H} s'écrit sous la forme $h^0 \exp(a)$, a étant un élément de l'algèbre de Lie \mathfrak{h} . Le développement limité de la fonction F au premier ordre s'écrit

$$F(h^0 \exp(a)) = F(h^0) + DF(h^0)(h^0 a) + o(a).$$

En annulant dans le membre de droite les termes jusqu'au premier ordre, on obtient la formule suivante pour l'itération :

$$h^1 = h^0 \exp\left((h^0)^{-1}(-DF(h^0)^\dagger F(h^0))\right).$$

L'algorithme de Newton sur les groupes de Lie a les mêmes propriétés de convergence que ceux définis sur des espaces vectoriels.

Revenons au problème du solveur d'esquisse (PSE). L'idée sera de chercher la nouvelle esquisse comme une modification de l'ancienne. On va donc chercher chaque $[\xi_i]$ sous la forme $g_i \cdot [\xi_i^*]$, où g_i est une transformation d'un certain type ; il faudra alors résoudre un problème de la forme

$$G(g_1, \dots, g_N) := F(g_1 \cdot [\xi_1^*], \dots, g_N \cdot [\xi_N^*]) = 0.$$

En admettant qu'on puisse choisir les transformations g_i de façon à ce que l'ensemble des transformations possibles (g_1, \dots, g_N) forme un groupe de Lie \mathbf{H} tel que $\mathbf{H} = \exp(\mathfrak{h})$, on peut donc utiliser la méthode de Newton sur les groupes de Lie que nous venons de présenter pour résoudre ce problème.

La question qui se pose maintenant est

Quelle classe de transformations choisir ?

2.2.4 Groupe Circulaire

Nous devons d'abord trouver une classe de transformations de \mathcal{S} dans lui-même qui préserve la nature des géométries, c'est-à-dire qui envoie le sous-ensemble $\{\rho = 0\}$ sur lui-même et $\{\rho > 0\}$ sur lui-même. Pour conserver la structure projective de notre espace, nous cherchons ces applications comme des transformations projectives de \mathbb{P}^{n+1} . Rappelons que toute transformation projective g de \mathbb{P}^{n+1} vérifie $g \cdot [\xi] = [A\xi]$ pour une application linéaire $A \in \mathbf{GL}(n+2)$, c'est-à-dire $g = [A]$. Or il suffit qu'une telle transformation laisse l'ensemble $\{\rho = 0\}$ invariant pour qu'elle laisse aussi \mathcal{S} invariant. Ainsi la classe d'applications que nous allons considérer est celle des transformations projectives de \mathbb{P}^{n+1} qui préservent la condition $\rho(\xi) = 0$. Ces transformations forment un groupe \mathbb{G} appelé *groupe circulaire* (voir [32, Chap 20]).

Une propriété importante de \mathbb{G} est que chacun de ses éléments préserve non seulement la relation $\rho(\xi) = 0$ mais aussi le produit scalaire de Lorentz $\langle \xi, \eta \rangle = 0$. Ainsi l'orthogonalité et les angles sont conservés. Il s'avère en fait que

$$\mathbb{G} \stackrel{\text{isomorphe}}{\cong} \mathbf{O}(n+1, 1) / \{\pm I\},$$

où $\mathbf{O}(n+1, 1)$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{GL}(n+2)$ qui préservent le produit scalaire de Lorentz, et qui s'appelle le *groupe de Lorentz*. Nous pouvons nous référer à la vaste littérature sur le groupe de Lorentz pour décrire notre groupe \mathbb{G} . Nous rappelons les propriétés principales de $\mathbf{O}(n+1, 1)$ dans la section 6.2.

Grâce aux Proposition 6.2.1, Lemme 6.2.2 et Lemme 6.3.2, en ne gardant dans \mathbb{G} que les transformations projectives associées à une transformation linéaire de $\mathbf{SO}^+(n+1, 1)$, on obtient un groupe

$$\mathbb{G}^+ \stackrel{\text{isomorphe}}{\cong} \mathbf{SO}^+(n+1, 1),$$

qui agit transitivement sur $\{\rho = 0\}$ d'une part, et sur $\{\rho > 0\}$ d'autre part.

2.2. PROBLÈME DU SOLVEUR D'ESQUISSE (PSE)

Observons que la propriété de transitivité (Lemme 6.3.2) est importante pour le problème de l'esquisse, puisqu'elle garantit que chacun des deux ensembles s'écrit comme $\mathbb{G}^+ \cdot [\xi^*]$, où $[\xi^*]$ est un élément quelconque de l'ensemble considéré ; ainsi, avec les notations utilisées plus haut, résoudre $F([\xi_1], \dots, [\xi_N]) = 0$ et résoudre $G(g_1, \dots, g_N) = 0$ sont deux problèmes équivalents.

De plus, le fait que \mathbb{G}^+ soit isomorphe à $\text{SO}^+(n+1, 1)$ implique que c'est un groupe de Lie, d'algèbre de Lie \mathfrak{g} isomorphe à $\mathfrak{so}(n+1, 1)$, qui vérifie

$$\mathbb{G}^+ = \exp(\mathfrak{g}).$$

Cependant dans notre problème PSE il n'est pas nécessaire, ni souhaitable, d'utiliser tout le groupe \mathbb{G}^+ . En effet ce dernier est de dimension $(n+1)(n+2)/2$ alors que l'ensemble $\{\rho > 0\}$ est de dimension $n+1$ et l'ensemble $\{\rho = 0\}$ est de dimension n . Travailler avec \mathbb{G}^+ conduirait donc à augmenter de façon importante la dimension de l'espace (6 au lieu de 3 par exemple quand $n = 2$), et donc le temps de calcul et la complexité des algorithmes. De plus, on ne serait pas capable de déterminer à partir de \mathbb{G}^+ le nombre de degrés de liberté restant sur une esquisse : il peut en effet exister des déplacements respectant les contraintes mais laissant l'esquisse invariante.

En théorie nous pourrions, en partant d'un élément $[\xi] \in \mathcal{S}$, nous restreindre à l'espace quotient

$$\mathbb{G}^+ / \mathbf{Iso}([\xi]),$$

où $\mathbf{Iso}([\xi])$ est l'ensemble des transformations de \mathbb{G}^+ qui laissent $[\xi]$ invariant, appelé *sous-groupe d'isotropie*. Cet espace quotient a la bonne dimension mais n'est en général pas un groupe, ce qui rend l'utilisation de méthodes numériques telle que la méthode de Newton délicate.

Un des problèmes cruciaux de la modélisation du PSE est donc de déterminer les sous-ensembles de \mathbb{G}^+ qui permettent l'utilisation d'une méthode de Newton et qui ont de bonnes propriétés de transitivité tout en étant le plus petit possible. C'est cette étape de modélisation que nous allons étudier dans la suite. Nous verrons qu'en pratique nous préférons travailler sur des sous-ensembles de \mathbb{G}^+ de dimension éventuellement supérieure à celle de $\mathbb{G}^+ / \mathbf{Iso}([\xi])$ ou dont l'action n'est pas globalement transitive, mais qui sont des sous-groupes de \mathbb{G}^+ .

2.2.5 Classes de transformations dans le plan

On se place à partir de maintenant dans le cas plan, c'est-à-dire pour $n = 2$. Dans le PSE nous avons besoin de transformer une géométrie en une autre de même nature. d'après la définition introduite section 2.2.1, cela signifie que nous considérons des transformations soit sur l'ensemble des points \mathcal{P} , soit sur l'ensemble Λ des cercles et droites. Il est intéressant également de chercher, pour tout $c \geq 0$, les transformations sur Λ_c l'ensemble des cercles à courbure constante c . En associant à un cercle de courbure $c > 0$ son centre, on peut identifier toute sous-variété Λ_c , $c > 0$, avec \mathcal{P} , donc le seul ensemble non-trivial parmi les Λ_c est Λ_0 , l'ensemble des droites affines.

Les sous-variétés précédentes sont des sous-variétés de \mathbb{P}^3 que nous allons identifier avec des sous-variétés de \mathbb{R}^4 (la normalisation qui permet cette identification est décrite au chapitre 4). Par conséquent nous allons chercher les transformations comme des éléments du groupe de Lorentz $\mathrm{SO}^+(3, 1)$ et non de \mathbb{G}^+ .

Étant donnée N une des sous-variétés précédentes, on va chercher un ensemble de transformations $\mathbf{F} \subset \mathrm{SO}^+(3, 1)$ qui possède autant que possible des propriétés suivantes :

- (1) $\mathbf{F}N \subset N$ (invariance de N par F) ;
- (2) \mathbf{F} est un groupe égal à l'exponentielle de son algèbre de Lie (structure de groupe) ;
- (3) $\mathbf{F} \xi = N$ pour un $\xi \in N$ ou pour tout $\xi \in N$ (transitivité) ;
- (4) \mathbf{F} est une famille d'éléments à $\dim N$ paramètres (dimension minimale).

La condition (1) permet de préserver la nature d'une géométrie de N alors que (2) est nécessaire pour la mise en oeuvre d'une méthode de Newton. Les conditions (3) et (4) peuvent en revanche être affaiblies si nécessaire : on peut par exemple se contenter de transitivité locale pour faire fonctionner une méthode de Newton, et la dimension peut ne pas être minimale mais aussi petite que possible.

L'outil principal pour caractériser ces quatre propriétés est le résultat suivant.

Théorème 2.2.2. Soient M une variété et $\mathbb{G} = \exp(\mathfrak{g})$ un groupe agissant transitivement sur M . Considérons N une sous-variété connexe de M et $\mathbb{H} = \exp(\mathfrak{h})$ un sous-groupe de Lie de \mathbb{G} laissant N invariant. Si, pour $\xi \in N$,

$$\dim \mathrm{Ann}_{\mathbb{H}}(\xi) = \dim \mathbb{H} - \dim N, \quad (2.3)$$

alors $\mathbb{H}\xi$, l'orbite de ξ pour l'action de \mathbb{H} , est un voisinage de ξ . Si de plus (2.3) est valable pour tout $\xi \in N$, alors \mathbb{H} agit transitivement sur N .

Notons que ce théorème résulte de l'application du théorème d'inversion locale à l'application $\exp_{\xi, \mathfrak{h}} : \mathfrak{h} \rightarrow N$ définie par

$$\exp_{\xi, \mathfrak{h}}(A) = \exp(A)\xi, \quad A \in \mathfrak{h}.$$

La surjectivité de cette application implique que l'action de \mathbb{H} sur N est transitive. Nous dirons aussi que l'action est *localement transitive en* $\xi \in N$ si $\exp_{\xi, \mathfrak{h}}$ est une submersion en $A = 0$. Si l'action est localement transitive en tout point de N , elle est globalement transitive mais la réciproque est fautive en général, nous en verrons un exemple plus loin.

Pour trouver un ensemble \mathbf{F} satisfaisant les conditions (1)–(4), notre stratégie est de chercher, pour $k = 0, 1, \dots$, un ensemble de la forme $\mathbf{F} = \exp(S)$, en imposant successivement à S les restrictions suivantes :

- (\mathcal{P}_1) S est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{so}^+(3, 1)$ de dimension égale à $\dim N + k$;
- (\mathcal{P}_2) $\dim \mathrm{Ann}_{\mathrm{SO}^+(3, 1)}(\xi) \cap S = k, \forall \xi \in N$;

(\mathcal{P}_3) S est une sous-algèbre de $\mathfrak{so}^+(3, 1)$;

(\mathcal{P}_4) $\exp(S)$ laisse N invariant.

Nous avons réalisé une étude systématique des possibilités pour $k = 0$ et 1 , qui est présentée dans le chapitre 4. Il en résulte que les meilleurs candidats pour les ensembles \mathbf{F} sont les suivants.

1. Le groupe de déplacements sur \mathcal{P} (et sur $\Lambda_c, c > 0$). Sur \mathcal{P} , sous-variété de dimension 2, on a un sous-groupe de dimension 2 qui agit transitivement, le groupe des translations,

$$\mathbb{G}_{\mathcal{P}} := \exp(\mathfrak{t}).$$

Ce sous-groupe possède toutes les bonnes propriétés : dimension minimale, transitivité locale en tout point, caractère abélien, interprétation géométrique aisée dans le plan. C'est clairement le candidat idéal.

2. Le groupe de déplacements sur Λ . Sur Λ , sous-variété de dimension 3, il n'existe pas de sous-groupe de $\mathfrak{so}^+(3, 1)$ de dimension 3 possédant les propriétés (1)–(3). Nous avons donc analysé les sous-groupes de dimension 4 satisfaisant ces dernières propriétés et avons donné un ensemble d'équations qu'ils doivent satisfaire. Parmi ces sous-groupes, le seul que nous ayons trouvé qui possède une interprétation géométrique relativement simple est le groupe \mathbb{G}_{Λ} engendré par les rotations, les dilatations et les anti-translations (une anti-translation est l'image d'une translation par l'involution de Cartan).

Il faut noter toutefois que l'action de \mathbb{G}_{Λ} sur Λ est transitive mais pas localement transitive en tout point puisqu'elle n'est pas localement transitive sur l'ensemble des droites vectorielles (sous-ensemble de Λ_0). Le PSE est invariant par translation et rotation, donc les droites vectorielles n'ont pas de signification intrinsèque et peuvent être évitées a priori. Ce manque de transitivité locale pourrait cependant poser des problèmes pour la méthode de locale.

3. Le groupe de déplacements sur Λ_0 . Sur Λ_0 , sous-variété de dimension 2, il n'existe pas de sous-groupe de $\mathfrak{so}^+(3, 1)$ de dimension 2 possédant les propriétés (1)–(3). Après analyse de ces propriétés pour les sous-groupes de dimension 3, il apparaît que le sous-groupe des translations et rotations,

$$\mathbb{G}_{\Lambda_0} := \exp(\mathfrak{t} \oplus \mathfrak{r}),$$

a une action transitive et localement transitive en tout point, en plus d'une bonne interprétation géométrique.

Conclusion et Perspectives

Dans cette partie du mémoire nous avons analysé la modélisation du problème du solveur d'esquisse au moyen de l'espace des sphères afin d'en dégager une formalisation mathématiquement bien fondée. À partir d'une telle modélisation, il est possible d'implémenter une méthode de Newton pour résoudre (au moins localement) le problème, comme cela est fait depuis plusieurs années dans le logiciel TopSolid.

Plusieurs questions se posent maintenant, auxquelles nous comptons nous attaquer par la suite.

- Nous avons exposé ci-dessus les modèles qui nous semblent les plus pertinents d'un point de vue géométrique mais nous avons vu que d'autres sont possibles. Il reste à déterminer lesquels sont les mieux adaptés pour l'algorithme. Par ailleurs nous n'avons pas encore clairement identifié les modèles utilisés dans le logiciel TopSolid, mais il semble que ce dernier pourrait être amélioré par l'utilisation d'une modélisation plus adaptée.
- La convergence d'une méthode de Newton n'est garantie que localement. Or il semble que l'algorithme proposé dans TopSolid converge en fait globalement. Un de nos objectifs est d'expliquer ce phénomène ; le fait que les contraintes s'expriment essentiellement en fonction du produit scalaire de Lorentz y joue certainement un rôle important.
- La résolution de l'algorithme à partir d'une condition initiale donnée doit permettre d'obtenir une solution au PSE. Il serait cependant très utile en pratique d'obtenir plusieurs solutions, voire l'ensemble des solutions. Nous comptons nous attaquer à cette question en analysant la structure de la dynamique de l'algorithme de Newton. Comme dans la question précédente, c'est la forme particulière des contraintes qui donne un espoir d'aboutir.

Part II

Papers

Horizontal Holonomy for Affine Manifolds

Boutheina Hafassa Amina Mortada Yacine Chitour
 Petri Kokkonen

IN this chapter, we consider a smooth connected finite-dimensional manifold M , an affine connection ∇ with holonomy group H^∇ and Δ a smooth completely non integrable distribution. We define the Δ -horizontal holonomy group H_Δ^∇ as the subgroup of H^∇ obtained by ∇ -parallel transporting frames only along loops tangent to Δ . We first set elementary properties of H_Δ^∇ and show how to study it using the rolling formalism ([9]). In particular, it is shown that H_Δ^∇ is a Lie group. Moreover, we study an explicit example where M is a free step-two homogeneous Carnot group with $m \geq 2$ generators, and ∇ is the Levi-Civita connection associated to a Riemannian metric on M , and show in this particular case that H_Δ^∇ is compact and strictly included in H^∇ as soon as $m \geq 3$.

Contents

3.1	Introduction	54
3.2	Notations	56
3.3	Affine Holonomy Group of (M, ∇, Δ)	57
3.3.1	Definitions	57
3.3.2	Holonomy groups associated with distributions using the frame- work of rolling manifolds	58
3.3.3	Integrability of Δ_R	65
3.4	Case Study: Holonomy of Free Step-two Homogeneous Carnot Group	67
3.4.1	Definitions	67
3.4.2	Riemannian Holonomy Group of (\mathbb{G}_m, g)	69
3.4.3	Horizontal Holonomy Group of (\mathbb{G}_m, g)	72

3.1 Introduction

THE purpose of this paper consists of extending the concept of horizontal holonomy of an affine connection in the context of distributions on a manifold i.e., subbundles of the tangent bundle of a manifold. More precisely, consider the triple (M, ∇, Δ) where M is an n -dimensional smooth connected manifold, ∇ is an affine connection on M (one says then that (M, ∇) is an affine manifold) and Δ is a smooth distribution on M . One furthermore assumes that Δ is completely controllable, i.e., every pair of points in M can be connected by an absolutely continuous tangent to the distribution Δ . Recall that the holonomy group H^∇ of ∇ is the subgroup of $\text{GL}(n)$ obtained (up to conjugation) by ∇ -parallel transporting frames along absolutely continuous (or piecewise smooth) loops of M .

For every point $x \in M$, we define the subset $H_\Delta^\nabla|_x$ of $H^\nabla|_x$, the holonomy group of ∇ at x , obtained by parallel transporting with respect to ∇ frames of M along a restricted set of absolutely continuous Δ -horizontal loops based at x , namely along loops which are tangent (almost everywhere) to the distribution Δ . Thanks to the hypotheses of connectedness of M and complete controllability of Δ , one can deduce that the sets $H_\Delta^\nabla|_x$, $x \in M$ are all conjugate to a Lie-subgroup H_Δ^∇ of H^∇ that we call Δ -horizontal (or simply horizontal) holonomy group of ∇ . In the case where ∇ is the Levi-Civita connection associated to some Riemannian metric g on M , one can take both H_Δ^∇ and H^∇ as subgroups of $\text{O}(n)$ and even $\text{SO}(n)$ if in addition M is assumed to be oriented. Understanding the relationships between H^∇ and H_Δ^∇ appears to be an interesting challenge. For instance, given an affine manifold (M, ∇) , determining necessary and (or) sufficient conditions on a completely controllable distribution Δ of M so that the H_Δ^∇ equals H^∇ is not an obvious question, besides trivial cases. Another issue to be addressed consists of fixing the pair manifold and distribution i.e., (M, Δ) and then let the connection ∇ vary. One question could be to understand if there are connections "more adapted or intrinsic" than others (in a sense to be defined) for the pair (M, Δ) . Moreover, one could also study the mapping $g \mapsto H_\Delta^{\nabla^g}$ where g is a complete Riemannian metric on M and ∇^g the corresponding Levi-Civita connection, for instance describing the range of this mapping. Note that such issues have been already addressed in [13] where the authors consider the case of manifolds of contact type with a distribution arising from an adapted connection.

In this paper, we essentially start this program by defining precisely the Δ -horizontal holonomy group associated to a given admissible triple (M, ∇, Δ) . Our first main result besides elementary ones is the following: we prove that if Δ is a constant rank completely controllable distribution, then H_Δ^∇ is a Lie subgroup of $\text{GL}(n)$ (or $\text{O}(n)$ if ∇ is the Levi-Civita connection of some Riemannian metric on M). This enables us to study H_Δ^∇ via its differentiable structure. Moreover, we also propose to study Δ -horizontal holonomy groups by recasting them within the framework of rolling manifolds. Indeed, recall that E. Cartan defines holonomy groups in [6] (or affine holonomy groups as it is referred nowadays) by "developing" a manifold on its tangent space at any point. This procedure has been generalized in [9, 14, 29] to an arbitrary pair of Riemannian manifolds of same dimension and it is also called "rolling a Riemannian manifold onto

another one without slipping nor spinning”. Yet, that type of rolling was extended in [24] to the case where both manifolds do not have necessarily the same dimension. See also [8] for a historical account as well as applications of the rolling of manifolds.

In the present situation, the rolling framework amounts to define an n -dimensional smooth distribution \mathcal{D}_R , called the rolling distribution, on the state space Q defined as the fiber bundle over the product of (M, ∇) and $(\mathbb{R}^n, \hat{\nabla}^n)$ where $\hat{\nabla}^n$ is the Euclidean connection on \mathbb{R}^n and the typical fiber over $(x, \hat{x}) \in M \times \mathbb{R}^n$ is identified with the set of endomorphisms of $T_x M$. For every $q \in Q$, let $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q)$, be the \mathcal{D}_R -orbit through q , i.e., the set of endpoints of the absolutely continuous curves starting at q and tangent to \mathcal{D}_R . Then, for every $q \in Q$ and $x' \in M$, the fiber of $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q)$ over x' (if non-empty) is conjugate to a subgroup of $\mathbb{R}^n \rtimes \text{GL}(n)$ whose $\text{GL}(n)$ -part is exactly H^∇ . Moreover, since $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q)$ is an immersed manifold in Q whose tangent space at every $q' \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q)$ contains the (evaluation at q' of the) Lie algebra generated by vector fields tangent to \mathcal{D}_R (cf. [1, 18, 19]), it is possible to determine elements of the Lie algebra of H^∇ as Lie brackets of vector fields tangent to \mathcal{D}_R . Given now a completely controllable distribution Δ , one can define a subdistribution Δ_R of \mathcal{D}_R on Q so that, for every $q \in Q$ and $x' \in M$ the fiber over x' of $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q)$ is conjugate to a subgroup of $\mathbb{R}^n \rtimes \text{GL}(n)$ whose $\text{GL}(n)$ -part is now equal to H_Δ^∇ . Since the latter has been proved to be a Lie group, one can determine elements of its Lie algebra by computing Lie brackets of vector fields tangent to Δ_R . Note that, as also mentioned above, $\text{GL}(n)$ can be replaced by $\text{O}(n)$ ($\text{SO}(n)$ respectively) if ∇ is the Levi-Civita connection of some Riemannian metric on M (if in addition M is oriented).

We use that approach to provide our second main result, namely an explicit example for the strict inclusion $\text{clos}(H_\Delta^\nabla) \subset \text{clos}(H^\nabla)$. More precisely, we consider the triple (M, ∇, Δ) where M is a free step-two homogeneous Carnot group of $m \geq 2$ generators $(X_i)_{1 \leq i \leq m}$, ∇ is the Levi-Civita associated with the Riemannian metric on M defined in such a way that the X_i 's, $1 \leq i \leq m$ and the Lie brackets $[X_i, X_j]$, $1 \leq i < j \leq m$ form an orthonormal basis and Δ is the distribution defined by the span of the X_i 's, $1 \leq i \leq m$. In this case M is of dimension $m + n$ with $n = m(m - 1)/2$. Then we prove that (M, ∇) has full holonomy i.e., $H^\nabla = \text{SO}(m + n)$, and that H_Δ^∇ is a connected compact Lie subgroup of $\text{SO}(m + n)$ of dimension $m + n$, hence establishing the above mentioned strict inclusion as soon as $m \geq 3$.

We close this introduction by describing the structure of the following chapter. We define in the first section the (∇, Δ) -holonomy group first using classical concepts and secondly by relying on the rolling framework. In the second section, we consider in details the case study of the free step-two homogeneous Carnot group of $m \geq 2$ generators and we conclude with an appendix containing a technical result needed in the second section.

3.2 Notations

Let M be an n -dimensional smooth connected manifold where n is a positive integer. Let $\mathcal{X}(M)$ be the set of smooth vector fields on M . An affine connection ∇ on M is an \mathbb{R} -bilinear map

$$\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M); \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

which is $C^\infty(M)$ -linear in the first variable and verifies the Leibniz rule over $C^\infty(M)$ in the second variable. The pair (M, ∇) is said to be an affine manifold. If, moreover, the exponential map \exp_x^∇ of (M, ∇) is defined on the whole tangent space $T_x M$ for all $x \in M$, then (M, ∇) is said to be a (geodesically) complete affine manifold. We use ∇^n and ∇^g respectively to denote the Euclidean connection on \mathbb{R}^n and the Levi-Civita connection of a Riemannian manifold (M, g) . The notation $[\cdot, \cdot]$ stands for the Lie bracket operation in TM .

We define the curvature tensor R^∇ and the torsion tensor T^∇ of a affine connection ∇ as

$$\begin{aligned} R^\nabla(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \\ T^\nabla(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \end{aligned}$$

respectively, for X, Y, Z in $\mathcal{X}(M)$.

If $\gamma : I \rightarrow M$ is any absolutely continuous (a.c. for short) curve in M defined on a real interval I containing 0, we use $(P^\nabla)_0^t(\gamma)T_0$, $t \in I$, to denote the ∇ -parallel transport along γ of a tensor T_0 of rank (m, k) at $\gamma(0)$. It is the unique solution $T(t)$ (in terms of tensor fields of rank (m, k) defined along γ) for the Cauchy problem

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} T(t) = 0, \quad \text{for a.e. } t \in I, \quad T(0) = T_0.$$

Let $(\hat{M}, \hat{\nabla})$ be another affine manifold and $f : M \rightarrow \hat{M}$ be a smooth map. We say that f is affine if for any a.c. curve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$, one has

$$f_*|_{\gamma(1)} \circ (P^\nabla)_0^1(\gamma) = (P^{\hat{\nabla}})_0^1(f \circ \gamma) \circ f_*|_{\gamma(0)}. \quad (3.1)$$

An a.c. curve $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ is a loop based at $x \in M$ if $\gamma(a) = \gamma(b) = x$. We denote by $\Omega_M(x)$ the space of all a.c. loops $[0, 1] \rightarrow M$ based at some given point $x \in M$. Moreover, if $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ and $\delta : [0, 1] \rightarrow M$ are two a.c. curves on M such that $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = \delta(0) = y$ and $\delta(1) = z$ where $x, y, z \in M$, the concatenation $\delta \cdot \gamma$ is the a.c. curve defined by

$$\delta \cdot \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \quad (\delta \cdot \gamma)(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ \delta(2t - 1) & t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases} \quad (3.2)$$

The previous definitions allow us to state the subsequent definition of holonomy group.

Definition 3.2.1. For every $x \in M$, the holonomy group $H^\nabla|_x$ at x is defined by

$$H^\nabla|_x = \{(P^\nabla)_0^1(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_M(x)\}.$$

For every $x \in M$, $H^\nabla|_x$ is a subgroup of $\text{GL}(T_x M)$, the group of isomorphisms of $T_x M$, which is clearly isomorphic to $\text{GL}(n)$ the group of $n \times n$ invertible matrices with real entries. Since M is connected, it is well-known that, for any two points $x, y \in M$, $H^\nabla|_x$ and $H^\nabla|_y$ are conjugate subgroups of $\text{GL}(T_x M)$ and thus one can define $H^\nabla \subset \text{GL}(n)$ the holonomy group of the affine connection ∇ (cf. [20]).

We also recall that a smooth distribution Δ on M is a smooth subbundle of TM . The flag of Δ is the collection of the distributions Δ^j , $j \geq 1$, where, for every $x \in M$, $\Delta^1|_x := \Delta|_x$ and $\Delta^{s+1}|_x := \Delta^s|_x + [\Delta^1, \Delta^s]|_x$ for $s \geq 1$. We say that the distribution Δ on M is of constant rank $m \leq n$ if $\dim(\Delta|_x) = m$ for every $x \in M$ and that Δ verifies the Lie algebraic rank condition (LARC) if, for any $x \in M$, there exists an integer $r = r(x)$ such that $\Delta^r|_x = T_x M$. The number $r(x)$ is called the step of Δ at x (cf. [18] for more details).

An a.c. curve $\gamma : I \rightarrow M$, where I is a bounded interval in \mathbb{R} , is said to be Δ -admissible, or Δ -horizontal, if it is tangent to Δ a.e. on I , i.e., if for a.e. $t \in I$, $\dot{\gamma}(t) \in \Delta|_{\gamma(t)}$. For $x_0 \in M$, the Δ -orbit through x_0 , denoted $\mathcal{O}_\Delta(x_0)$, is the set of endpoints of the Δ -admissible curves of M starting at x_0 , i.e.,

$$\mathcal{O}_\Delta(x_0) = \{\gamma(1) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow M, \text{ a.c. } \Delta\text{-admissible curve, } \gamma(0) = x_0\}.$$

By the Orbit Theorem (cf. [18]), one has that $\mathcal{O}_\Delta(x_0)$ is an immersed smooth submanifold of M containing x_0 so that the tangent space $T_y \mathcal{O}_\Delta(x_0)$ for every $y \in \mathcal{O}_\Delta(x_0)$ contains $\text{Lie}_y(\Delta)$, the evaluation at $y \in M$ of the Lie algebra $\text{Lie}(\Delta)$ generated by Δ . Furthermore, if a smooth distribution Δ' on M is a subdistribution of Δ (i.e., $\Delta' \subset \Delta$), then $\mathcal{O}_{\Delta'}(x_0) \subset \mathcal{O}_\Delta(x_0)$ for all $x_0 \in M$. A smooth distribution Δ is said to be completely controllable if, for every $x \in M$, $\mathcal{O}_\Delta(x) = M$ i.e. any two points of M can be joined by an a.c. Δ -admissible curve. Recall that, the Lie Algebra Rank Condition (LARC), i.e. $\text{Lie}_x(\Delta) = T_x M$, is a sufficient condition for the complete controllability of Δ (cf. [18]) when M is connected, which is what we assume in this paper.

3.3 Affine Holonomy Group of (M, ∇, Δ)

3.3.1 Definitions

Consider the triple (M, ∇, Δ) where M is a smooth manifold, ∇ an affine connection on M and Δ a completely controllable smooth distribution on M . In this section, we will restrict Definition 3.2.1 to the Δ -admissible curves on M . To this end, we will define the set of all Δ -admissible loop based at points of M .

Definition 3.3.1. We define $\Omega_\Delta(x)$ the set of all a.c. Δ -admissible loops based at x , as

$$\Omega_\Delta(x) := \{\gamma \mid \gamma : [a, b] \rightarrow M \text{ a.c., } \gamma(a) = \gamma(b) = x \text{ and } \dot{\gamma}(t) \in \Delta|_{\gamma(t)} \text{ a.e.}\}$$

3.3. AFFINE HOLONOMY GROUP OF (M, ∇, Δ)

The following result is immediate from the definitions.

Proposition 3.3.2. *The set $\Omega_\Delta(x)$ of all a.c. Δ -admissible loops based at x is not empty and is closed under the operation “ \cdot ” given in (3.2).*

We define the holonomy group associated with the distribution Δ as follows.

Definition 3.3.3. *For every $x \in M$, the holonomy group associated with Δ at x is defined as*

$$H_\Delta^\nabla|_x := \{(P^\nabla)_0^1(\gamma) \mid \gamma \in \Omega_\Delta(x)\}.$$

Proposition 3.3.4. *For every $x, y \in M$, $H_\Delta^\nabla|_x$ is a subgroup of $H^\nabla|_x$ and $H_\Delta^\nabla|_x$ is conjugate to $H_\Delta^\nabla|_y$.*

Proof. Since $\Omega_\Delta(x)$ is a nonempty set for any $x \in M$, then $H_\Delta^\nabla|_x$ is also a nonempty subset of $H^\nabla|_x$. By Definitions 2.2.1 and 2.2.2 of [20], the inverse map of $(P^\nabla)_0^1(\gamma)$ is $(P^\nabla)_0^1(\gamma^{-1})$ and $(P^\nabla)_0^1(\delta) \circ (P^\nabla)_0^1(\gamma)$ is equal to $(P^\nabla)_0^1(\delta \cdot \gamma)$, for any $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ and $\delta : [0, 1] \rightarrow M$ belonging to $\Omega_\Delta(x)$. Thus, we get the first statement. Next, taking into account the fact that Δ is completely controllable, one deduces the rest of the proposition.

Definition 3.3.5. *The conjugacy class of the $H_\Delta^\nabla|_x$, for $x \in M$, defines a subgroup H_Δ^∇ of $H^\nabla \subset \text{GL}(n)$ and we call it the Δ -horizontal holonomy group associated with Δ and the affine connection ∇ .*

3.3.2 Holonomy groups associated with distributions using the framework of rolling manifolds

Let M be a smooth n -dimensional manifold and ∇ a connection on M . Set $(\hat{M}, \hat{\nabla}) := (\mathbb{R}^n, \hat{\nabla}^n)$ where $\hat{\nabla}^n$ is the Euclidean connection on \mathbb{R}^n . We associate to (M, ∇) the curvature tensor R^∇ and to the product manifold $(M, \nabla) \times (\mathbb{R}^n, \hat{\nabla}^n)$ the affine connection $\bar{\nabla}$.

3.3.2.1 Affine Holonomy Group of M

We recall next basic definitions and results stated in [9] and [21].

Definition 3.3.6. *The state space of the development of (M, ∇) on $(\mathbb{R}^n, \hat{\nabla}^n)$ is*

$$Q := Q(M, \mathbb{R}^n) = \{A : T_x M \rightarrow \mathbb{R}^n \mid A \text{ is invertible, } x \in M\}.$$

A point $q \in Q$ is written as $q = (x, \hat{x}; A)$. Note that the word “development” can also be replaced by “rolling”. By the definition, $\pi_Q : Q \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ is a fiber bundle with typical fiber $\text{GL}(n)$.

Definition 3.3.7. Let $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ be an a.c. curve on M starting at $\gamma(0) = x_0$. We define the development of γ on $T_{x_0}M$ with respect to ∇ as the a.c. curve $\Lambda_{x_0}^\nabla(\gamma) : [0, 1] \rightarrow T_{x_0}M$

$$\Lambda_{x_0}^\nabla(\gamma)(t) = \int_0^t (P^\nabla)_s^0(\gamma) \dot{\gamma}(s) ds, \quad t \in [0, 1].$$

The following result can be found from [23].

Proposition 3.3.8. Let ∇ be an affine connection. Then for any a.c. curve $\Gamma : [0, 1] \rightarrow T_{x_0}M$ there exists a maximal $T = T(\Gamma)$ such that $0 < T \leq 1$ and an a.c. curve $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ satisfying

$$\Lambda_{x_0}^\nabla(\gamma)(t) = \Gamma(t), \quad \forall t \in [0, T].$$

Moreover, one can take $T = 1$ for all such Γ s if and only if (M, ∇) is complete.

By identification of $T_x^*M \otimes \mathbb{R}^n$ as the space of all \mathbb{R} -linear maps from the tangent space T_xM at $x \in M$ onto the tangent space of \mathbb{R}^n at $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, one gets the following definitions.

Definition 3.3.9. Let $(x_0, \hat{x}_0) \in M \times \mathbb{R}^n$, $A_0 \in T_{x_0}^*M \otimes \mathbb{R}^n$ and an a.c. curve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ such that $\gamma(0) = x_0$. We define the development of γ onto \mathbb{R}^n through A_0 with respect to $\bar{\nabla}$ as the a.c. curve $\Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma) : [0, T] \rightarrow M$ given by

$$\Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma)(t) := (\Lambda_{\hat{x}_0}^{\hat{\nabla}^n})^{-1}(A_0 \circ \Lambda_{x_0}^\nabla(\gamma))(t), \quad t \in [0, T]$$

with $T = T(\gamma)$ as in the previous definition.

We also define the relative parallel transport of A_0 along γ with respect to $\bar{\nabla}$ to be the linear map

$$\begin{aligned} (P^{\bar{\nabla}})_0^t(\gamma)A_0 &: T_{\gamma(t)}M \rightarrow T_{\Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma)(t)}\hat{M}, \text{ such that for } t \in [0, 1], \\ (P^{\bar{\nabla}})_0^t(\gamma)A_0 &:= (P^{\hat{\nabla}^n})_0^t(\Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma)) \circ A_0 \circ (P^\nabla)_t^0(\gamma) = A_0 \circ (P^\nabla)_t^0(\gamma). \end{aligned}$$

We define the No-Spinning development lift of $(X, \hat{X}) \in T_{(x, \hat{x})}(M \times \mathbb{R}^n)$, the Rolling development lift and the Rolling development distribution of $X \in T_xM$ respectively as follows.

Definition 3.3.10. Let $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$, $(X, \hat{X}) \in T_{(x, \hat{x})}(M \times \mathbb{R}^n)$ and γ (resp. $\hat{\gamma}$) be an a.c. curve on M (resp. on \mathbb{R}^n) starting at x (resp. \hat{x}) with initial velocity X (resp. \hat{X}). The No-Spinning development lift of (X, \hat{X}) is the unique vector $\mathcal{L}_{NS}(X, \hat{X})|_q$ of T_qQ at $q = (x, \hat{x}; A)$ given by

$$\mathcal{L}_{NS}(X, \hat{X})|_q := \frac{d}{dt}\Big|_0 (P^{\hat{\nabla}^n})_0^t(\hat{\gamma}) \circ A \circ (P^\nabla)_t^0(\gamma) = \frac{d}{dt}\Big|_0 A \circ (P^\nabla)_t^0(\gamma).$$

If, moreover, the initial velocity of $\hat{\gamma}$ is AX , then we define the Rolling lift \mathcal{L}_R at $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$ to be the injective map from T_xM onto T_qQ , such that for every $X \in T_xM$,

$$\mathcal{L}_R(X)|_q := \mathcal{L}_{NS}(X, AX)|_q = \frac{d}{dt}\Big|_0 (P^{\hat{\nabla}^n})_0^t(\hat{\gamma}) \circ A \circ (P^\nabla)_t^0(\gamma) = \frac{d}{dt}\Big|_0 A \circ (P^\nabla)_t^0(\gamma).$$

3.3. AFFINE HOLONOMY GROUP OF (M, ∇, Δ)

The Rolling distribution \mathcal{D}_R at $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$ is an n -dimensional smooth distribution defined by

$$\mathcal{D}_R|_q := \mathcal{L}_R(T_x M)|_q. \quad (3.3)$$

We say that an a.c. curve $t \mapsto q(t) = (\gamma(t), \hat{\gamma}(t); A(t))$ on Q , is a rolling curve if and only if it is tangent to \mathcal{D}_R for a.e. $t \in I$, where I is a bounded interval of \mathbb{R} , i.e. if and only if $\dot{q}(t) = \mathcal{L}_R(\dot{\gamma}(t))|_{q(t)}$ for a.e. $t \in I$. For a proof of next proposition, see [9, 23].

Proposition 3.3.11. *For any $q_0 := (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$ and any a.c. curve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ starting at x_0 , there exist unique a.c. curves $\hat{\gamma}(t) := \Lambda_{A_0}^{\bar{\nabla}}(\gamma)(t)$ and $A(t) := (P^{\bar{\nabla}})_0^t(\gamma)A_0$ such that $A(t)\dot{\gamma}(t) = \dot{\hat{\gamma}}(t)$ and $\bar{\nabla}_{(\dot{\gamma}(t), \dot{\hat{\gamma}}(t))}A(t) = 0$, for all $t \in [0, T]$, for a maximal $T = T(\gamma)$ such that $0 < T \leq 1$. We refer to $t \mapsto q_{\mathcal{D}_R}(\gamma, q_0) := (\gamma(t), \hat{\gamma}(t); A(t))$ as the rolling curve along γ with initial position q_0 .*

Moreover, if (M, ∇) is complete, then one may take above $T = 1$ for all γ 's.

Consider the smooth bundle $\pi_Q : Q \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$ and $q \in Q$. We define $V|_q(\pi_Q)$ to be the set of all $B \in T|_q Q$ such that the tangent application $(\pi_Q)_*(B) = 0$. The collection of spaces $V|_q(\pi_Q)$, $q \in Q$ defines a smooth submanifold $V(\pi_Q)$ of TQ . We will write an element of $V|_q(\pi_Q)$ at $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$ as $\nu(B)|_q$ where $B \in T_x^* M \otimes \mathbb{R}^n$ verifies $B \in A(\mathfrak{gl}(T_x M))$. To know what it means to take the derivative of any smooth map f defined on (an open subset of) Q with values in the manifold of (m, k) -tensors of Q , with respect to $\nu(B)|_q$, we set

$$\nu(B)|_q(f) := \frac{d}{dt}\Big|_0 f(q + tB).$$

We called it the vertical derivative of f at q in the direction B .

We next present the main computation tools obtained in Proposition 3.7, Lemma 3.18, Proposition 3.24, Proposition 3.26, Proposition 4.1, Proposition 4.6 [22].

Proposition 3.3.12. *Let $\mathcal{O} \subset T^*M \otimes \mathbb{R}^n$ be an immersed submanifold, $\bar{Z} = (Z, \hat{Z})$, $\bar{S} = (S, \hat{S}) \in C^\infty(\pi_{\mathcal{O}}, \pi_{T^*M \otimes \mathbb{R}^n})$ be such that for all $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}$, $\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(q))|_q$, $\mathcal{L}_{NS}(\bar{S}(q))|_q \in T_q \mathcal{O}$ and $U, V \in C^\infty(\pi_{\mathcal{O}}, \pi_{T^*M \otimes \mathbb{R}^n})$, be such that for all $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}$, $\nu(U(q))|_q$, $\nu(V(q))|_q \in T_q \mathcal{O}$. Then, one has*

$$\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(A))|_q \bar{S}(\cdot) := \bar{\nabla}_{\bar{Z}(A)}(\bar{S}(A)), \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(\cdot)), \mathcal{L}_{NS}(\bar{S}(\cdot))]|_q &= \mathcal{L}_{NS}(\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(A))|_q \bar{S}(\cdot) - \mathcal{L}_{NS}(\bar{S}(A))|_q \bar{Z}(\cdot))|_q \\ &\quad - \mathcal{L}_{NS}(T^\nabla(Z, S))|_q + \nu(AR^\nabla(Z, S))|_q, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$[\mathcal{L}_R(Z), \mathcal{L}_R(S)]|_q = \mathcal{L}_R([Z, S])|_q + \mathcal{L}_{NS}(AT^\nabla(Z, S))|_q + \nu(AR^\nabla(Z(q), S(q)))|_q, \quad (3.6)$$

$$[\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(\cdot)), \nu(U(\cdot))]|_q = -\mathcal{L}_{NS}(\nu(U(A))|_q \bar{Z}(\cdot))|_q + \nu(\mathcal{L}_{NS}(\bar{Z}(A))|_q U(\cdot))|_q, \quad (3.7)$$

$$[\nu(U(\cdot)), \nu(V(\cdot))]|_q = \nu(\nu(U(A))|_q V - \nu(V(A))|_q U)|_q. \quad (3.8)$$

Both sides of the equalities in (3.4), (3.5), (3.6), (3.7) and (3.8) are tangent to \mathcal{O} .

We use $\text{Aff}(M)$ to denote the affine group of all invertible affine transformations from the affine manifold M onto itself. In particular, the affine group of \mathbb{R}^n is denoted by $\text{Aff}(n)$. One can extend readily Proposition 3.10 of [11] to get the following result.

Proposition 3.3.13. *For any $f \in \text{Aff}(M)$, $\hat{f} \in \text{Aff}(n)$ and any $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$, define the following smooth right and left actions of $\text{Aff}(M)$ and $\text{Aff}(n)$ on Q*

$$q_0 \cdot f := (f^{-1}(x_0), \hat{x}_0; A_0 \circ f_*|_{f^{-1}(x_0)}), \quad \hat{f} \cdot q_0 := (x_0, \hat{f}(\hat{x}_0); \hat{f}_*|_{\hat{x}_0} \circ A_0).$$

Then, for any a.c. curve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ starting at x_0 , one has for a.e. $t \in [0, 1]$

$$\hat{f} \cdot q_{\mathcal{D}_R}(\gamma, q_0)(t) \cdot f = q_{\mathcal{D}_R}(f^{-1} \circ \gamma, \hat{f} \cdot q_0 \cdot f)(t).$$

Proof. By the definition of an affine transformation f on M , we have Eq. (3.1) for any a.c. curve $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$. This implies that, for a.e. $t \in [0, 1]$

$$f_*|_{\gamma(t)} \circ (P^\nabla)_0^t(\gamma) = (P^\nabla)_0^t(f \circ \gamma) \circ f_*|_{\gamma(0)}.$$

We have the same conclusion for affine transformations \hat{f} on \mathbb{R}^n . Then, since $\text{Aff}(n)$ is a Lie group and by what precedes, one can repeat the steps of the proof of Proposition 3.10 in [11] with the group $\text{Aff}(n)$ instead of isometry groups on M and \mathbb{R}^n to get the claim.

Recall that if G is a Lie group, then a smooth bundle $\pi : E \rightarrow M$ is a principal G -bundle over M if there exists a smooth and free action of G on E which preserves the fibers of π , cf. [20]. Furthermore, we recall that the affine group $\text{Aff}(n)$ is equal to $\mathbb{R}^n \rtimes GL(n)$ and its product group \diamond is given by

$$(v, L) \diamond (u, K) := (Lu + v, L \circ K).$$

Using the previous proposition, one can extend immediately the simple but crucial Proposition 4.1 in [11] to derive the next result.

Proposition 3.3.14. *The bundle $\pi_{Q,M} : Q \rightarrow M$ is a principal $\text{Aff}(n)$ -bundle with the left action $\mu : \text{Aff}(n) \times Q \rightarrow Q$;*

$$\mu((\hat{y}, C), (x, \hat{x}; A)) = (x, C\hat{x} + \hat{y}; C \circ A).$$

The action μ preserves \mathcal{D}_R , i.e. for any $q \in Q$ and $B \in \text{Aff}(n)$, we have $(\mu_B)_ \mathcal{D}_R|_q = \mathcal{D}_R|_{\mu_B(q)}$ where $\mu_B : Q \rightarrow Q; q \mapsto \mu(B, q)$. Moreover, for any $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$, there exists a unique subgroup \mathcal{H}_q^∇ of $\text{Aff}(n)$, called the affine holonomy group of (M, ∇) verifying*

$$\mu(\mathcal{H}_q^\nabla \times \{q\}) = \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x).$$

If $q' = (x, \hat{x}'; A') \in Q$ belongs to the same $\pi_{Q,M}$ -fiber as q , then \mathcal{H}_q^∇ and $\mathcal{H}_{q'}^\nabla$ are conjugate in $\text{Aff}(n)$ and all conjugacy classes of \mathcal{H}_q^∇ are of the form $\mathcal{H}_{q'}^\nabla$. This conjugacy class is denoted by \mathcal{H}^∇ and its projection in $GL(n)$ is equal to H^∇ the holonomy group of the affine connection ∇ .

Proof. Let $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$ and $B = (\hat{y}, C) \in \text{Aff}(n)$. Since $C \circ A$ is in $GL(n)$, then $\mu(B, q) \in Q$. In order to prove that μ is transitive and proper, we follow the same steps of the proof of Proposition 4.1 in [11] due to Proposition 3.3.13.

3.3.2.2 Affine Holonomy Group of Δ

Consider now a smooth completely controllable distribution Δ on (M, ∇) . We will determine the sub-distribution of \mathcal{D}_R by restriction to Δ instead of considering the whole tangent space of M .

Definition 3.3.15. *The rolling distribution Δ_R on Δ is the smooth sub-distribution of \mathcal{D}_R defined on $(x, \hat{x}; A) \in Q$ by*

$$\Delta_R|_{(x, \hat{x}; A)} = \mathcal{L}_R(\Delta|_x)|_{(x, \hat{x}; A)}. \quad (3.9)$$

Since Δ is completely controllable, we use Proposition 3.3.11 to obtain the next corollary.

Corollary 3.3.16. *For any $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$ and any a.c. Δ -admissible curve $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ starting at x_0 , there exists a unique a.c. Δ_R -admissible curve $q_{\Delta_R}(\gamma, q_0): [0, T] \rightarrow Q$ where $0 < T \leq 1$.*

Since we can easily restrict the proof of Proposition 3.3.14 (cf. [11]) on Δ_R , we get the next proposition.

Corollary 3.3.17. *The action μ mentioned in Proposition 3.3.14 preserves the distribution Δ_R . Moreover, for every $q \in Q$, there exists a unique algebraic subgroup $\mathcal{H}_{\Delta_R|q}^\nabla$ of \mathcal{H}_q^∇ , called the affine holonomy group of Δ_R , such that*

$$\mu(\mathcal{H}_{\Delta_R|q}^\nabla \times \{q\}) = \mathcal{O}_{\Delta_R}(q) \cap \pi_{Q, M}^{-1}(x),$$

where $x = \pi_{Q, M}(q)$ and $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q)$ is the Δ_R -orbit at q .

As before, one gets the following: if $q' = (x, \hat{x}'; A') \in Q$ belongs to the same $\pi_{Q, M}$ -fiber as q , then $\mathcal{H}_{\Delta_R|q}^\nabla$ and $\mathcal{H}_{\Delta_R|q'}^\nabla$ are conjugate in $\text{Aff}(n)$ and all conjugacy classes of $\mathcal{H}_{\Delta_R|q}^\nabla$ are of the form $\mathcal{H}_{\Delta_R|q'}^\nabla$. This conjugacy class is denoted by $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ and its projection in $GL(n)$ is a subgroup of H^∇ which is equal to the Δ -horizontal holonomy group associated with Δ and the affine connection ∇ .

Definition 3.3.18. *We denote by $\mathcal{O}_{\Delta_R}^{loop}(q_0)$ the set of the end points of the rolling development curves with initial conditions any point $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0)$ and any a.c. Δ -admissible loop at x_0 , i.e., for $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$,*

$$\mathcal{O}_{\Delta_R}^{loop}(q_0) = \{q_{\Delta_R}(\gamma, q_0)(1) \mid \gamma: [0, 1] \rightarrow M, \text{ a.c. } \Delta\text{-admissible loop at } x_0\}.$$

If we fix a point q_0 of $Q = Q(M, \mathbb{R}^n)$ where the initial contact point on M is equal to x_0 and that on \mathbb{R}^n is the origin, then we may consider the rolling development of M along a loop based at x_0 . Then, one obtains a control problem whose state space is the fiber $\pi_{Q, M}^{-1}(x_0)$ and the reachable set is in the fiber $\pi_{Q, M}^{-1}(x_0)$ (for more details, cf. [11]). Then, $\mathcal{O}_{\Delta_R}^{loop}(q_0)$ is trivially in bijection with $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q, M}^{-1}(x_0)$ and so $\mu(\mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla \times \{q_0\}) \simeq \mathcal{O}_{\Delta_R}^{loop}(q_0)$.

Proposition 3.3.19. *For any $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$ the restriction of $\pi_{Q,M} : Q \rightarrow M$ into the orbit $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ is a submersion onto M .*

Proof. Clearly it is enough to show that $(\pi_{Q,M})_* T_{q_0} \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) = T_{x_0} M$. Also recall that by the assumption of complete controllability of Δ we have $M = \mathcal{O}_{\Delta}(x_0)$.

Write $E^{x,t}(u)$ and $\tilde{E}^{q,t}(u)$ for the end-point maps of Δ and Δ_R starting from $x \in M$ and $q \in Q$, respectively. One easily sees that E and \tilde{E} are related by

$$\pi_{Q,M} \circ \tilde{E}^{q,t} = E^{x,t}, \quad (3.10)$$

for any $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$ and t when these objects are defined. We also denote by k the rank of Δ (i.e. the rank of Δ_R).

Let $\bar{u} \in L^2([0, 1], \mathbb{R}^k)$ be any o-regular control of $E^{x_0,1}$ which belongs to the domain of definition of $\tilde{E}^{q_0,1}$. The existence of such a \bar{u} is guaranteed by Proposition 5.1.7 given in the appendix and Proposition 3.3.11, as in this case $(\hat{M}, \hat{g}) = \mathbb{R}^n$ is complete.

Let then $X \in T_{x_0} M$ be arbitrary, and notice that $T_{x_0} \mathcal{O}_{\Delta}(x_0) = T_{x_0} M$. By o-regularity of \bar{u} with respect to $E^{x_0,1}$, there exists a C^1 -map $u : I \rightarrow L^2([0, 1], \mathbb{R}^k)$, where I is an open neighbourhood of 0, such that $u(0) = \bar{u}$ and $h(t, s) := E^{x_0,t}(u(s))$, $(t, s) \in [0, 1] \times I$, satisfies $\frac{\partial}{\partial s} h(1, s)|_{s=0} = X$. Indeed, let $G : I \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta}(x_0)$ be any smooth curve such that $\dot{G}(0) = X$. The o-regularity of \bar{u} means that $D_u E^{x_0,1}$, i.e. the differential of $E^{x_0,1}$ at u , is surjective linear map from $L^2([0, 1], \mathbb{R}^k)$ onto $T_{E^{x_0,1}(u)} \mathcal{O}_{\Delta}(x_0)$ when $u = \bar{u}$, and hence for all u close to \bar{u} in $L^2([0, 1], \mathbb{R}^k)$. Still for such u close to \bar{u} , one defines $P(u)$ as the Moore-Penrose inverse of $D_u E^{x_0,1}$ given by

$$P(u) = (D_u E^{x_0,1})^T (D_u E^{x_0,1} (D_u E^{x_0,1})^T)^{-1},$$

where $(D_u E^{x_0,1})^T$ denotes the L^2 -adjoint of $D_u E^{x_0,1}$. According to [7, Proposition 2], the maximal solution $u(\cdot)$ of the Cauchy problem $\frac{du(s)}{ds} = P(u(s)) \frac{dG(s)}{ds}$, $u(0) = \bar{u}$ is well-defined on a non empty interval centered at zero, which concludes the argument of the claim (after shrinking I if necessary).

Write $\tilde{h}(t, s) = \tilde{E}^{q_0,t}(u(s))$ for $(t, s) \in [0, 1] \times I$. For each $i = 1, \dots, d$ and $s \in I$, the maps $t \mapsto h(t, s)$ and $t \mapsto \tilde{h}(t, s)$ are absolutely continuous and Δ - and Δ_R -admissible curves, respectively, and $h(t, s) = \pi_{Q,M}(\tilde{h}(t, s))$ by (3.10). In particular, $\frac{\partial}{\partial s} \tilde{h}(1, s)|_{s=0}$ is a vector in $T_{q_0} \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ and

$$(\pi_{Q,M})_* \left(\frac{\partial}{\partial s} \tilde{h}(1, s)|_{s=0} \right) = \frac{\partial}{\partial s} h(1, s)|_{s=0} = X,$$

which shows that $X \in (\pi_{Q,M})_*(T_{q_0} \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0))$. Because X was an arbitrary tangent vector of M at x_0 , we conclude that $T_{x_0} M \subset (\pi_{Q,M})_*(T_{q_0} \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0))$.

The opposite inclusion $(\pi_{Q,M})_*(T_{q_0} \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)) \subset T_{x_0} M$ being trivially true, this completes the proof.

Remark 3.3.20. Here is an alternative proof in the case that the distribution Δ satisfies LARC on a connected manifold M i.e. $Lie_x(\Delta) = T_x M$ for all $x \in M$.

3.3. AFFINE HOLONOMY GROUP OF (M, ∇, Δ)

Given vector fields Y_1, \dots, Y_r and a subset $J = \{i_1, \dots, i_l\}$ of $\{1, \dots, r\}$ we write Y_J for the iterated bracket $[Y_{i_1}, [Y_{i_2}, \dots [Y_{i_{l-1}}, Y_{i_l}] \dots]]$ of length l . Given $X \in T_{x_0}M = T_{x_0}\mathcal{O}_\Delta(x_0)$, there are, by the assumption, vector fields Y_1, \dots, Y_r tangent to Δ , subsets J_1, \dots, J_t of $\{1, \dots, r\}$ and real numbers a_1, \dots, a_t such that $X = \sum_{s=1}^t a_s Y_{J_s}|_{x_0}$. The lifts $\mathcal{L}_R(Y_i)$, $i = 1, \dots, r$ are tangent to Δ_R and satisfy $(\pi_{Q,M})_* \mathcal{L}_R(Y_i) = Y_i$, hence if we write

$$\mathcal{L}_R(Y)_J := [\mathcal{L}_R(Y_{i_1}), [\mathcal{L}_R(Y_{i_2}), \dots [\mathcal{L}_R(Y_{i_{l-1}}), \mathcal{L}_R(Y_{i_l})] \dots]],$$

when J is as above, we have that $\mathcal{L}_R(Y)_{J_s}$ is tangent to $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ for every $s = 1, \dots, t$ and

$$(\pi_{Q,M})_*|_{q_0} \left(\sum_{s=1}^t a_s \mathcal{L}_R(Y)_{J_s} \right) = \sum_{s=1}^t a_s Y_{J_s}|_{x_0} = X,$$

i.e. $X \in (\pi_{Q,M})_* T_{q_0} \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$. By arbitrariness of X in $T_{x_0}M$ we have that $\pi_{Q,M}$ is a submersion.

Classical results now apply to give the following.

Corollary 3.3.21. *For any $x \in M$ the fiber $\pi_{Q,M}^{-1}(x) \cap \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ of $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ over x is either empty or a (closed) embedded submanifold of $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ of dimension $\delta = \dim \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) - \dim M$.*

We arrive at the main result of this subsection.

Proposition 3.3.22. *Assume that Δ is a constant rank completely controllable distribution on (M, ∇) where M is a connected smooth manifold and ∇ an affine connection. Then, the Δ -horizontal holonomy group H_Δ^∇ and the affine holonomy group $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ of Δ_R as defined previously are Lie subgroups of $\text{Aff}(n)$.*

Proof. It is enough to prove the claim for $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$. We first argue that $\mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla$ is an algebraic subgroup of $\text{Aff}(n)$. To this end, to any $p \in \pi_{Q,M}^{-1}(x_0)$ (i.e. p is an arbitrary element of the fiber of Q over x_0) we match a unique $(y_p, C_p) \in \text{Aff}(n)$ such that $\mu((y_p, C_p), q_0) = p$. Recall that $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x_0)$ is identified with $\mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla$ through this correspondence.

Then given $p_1, p_2 \in \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x_0)$, there are Δ -admissible (piecewise smooth) loops $\gamma_1, \gamma_2 \in \Omega_M(x_0)$ in M based at x_0 such that $p_i = q_{\Delta_R}(\gamma_i, q_0)(1)$ for $i = 1, 2$. Letting $p = q_{\Delta_R}(\gamma_1 \cdot \gamma_2, q_0)(1)$ we have

$$\begin{aligned} \mu((y_p, C_p), q_0) = p &= q_{\Delta_R}(\gamma_1 \cdot \gamma_2, q_0)(1) = q_{\Delta_R}(\gamma_1, q_{\Delta_R}(\gamma_2, q_0))(1) = q_{\Delta_R}(\gamma_1, p_2)(1) \\ &= q_{\Delta_R}(\gamma_1, \mu((y_{p_2}, C_{p_2}), q_0))(1) = \mu((y_{p_2}, C_{p_2}), q_{\Delta_R}(\gamma_1, q_0)(1)) \\ &= \mu((y_{p_2}, C_{p_2}), p_1) = \mu((y_{p_2}, C_{p_2}), \mu((y_{p_1}, C_{p_1}), q_0)) \\ &= \mu((y_{p_2}, C_{p_2})(y_{p_1}, C_{p_1}), q_0), \end{aligned}$$

i.e. $(y_p, C_p) = (y_{p_2}, C_{p_2})(y_{p_1}, C_{p_1})$, because the action μ is free. Since $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ is Δ -admissible loop, we have $p = q_{\Delta_R}(\gamma_1 \cdot \gamma_2, q_0)(1) \in \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x_0)$ i.e. $(y_p, C_p) \in \mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla$, and therefore $\mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla$ is indeed an algebraic subgroup of $\text{Aff}(n)$ as claimed.

In other words we have shown that if $m : \text{Aff}(n) \times \text{Aff}(n) \rightarrow \text{Aff}(n)$ is the smooth group multiplication operation on $\text{Aff}(n)$, then

$$m(\mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla \times \mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla) \subset \mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla.$$

By the Orbit theorem 5.1.2 as given in the appendix (see also [16]), we know that any smooth map $f : Z \rightarrow Q$ for any smooth manifold Z such that $f(Z) \subset \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ is smooth as a map $f : Z \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$. In other words, $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ is an *initial submanifold* of M (cf. [16]).

By Corollary 3.3.21 $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x_0)$ is a smooth embedded submanifold of $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$, hence an initial submanifold of Q . Since $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x_0) \subset \pi_{Q,M}^{-1}(x_0)$ and $\pi_{Q,M}^{-1}(x_0)$ is diffeomorphic to $\text{Aff}(n)$ using the action μ , we have that $\mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla$ is a smooth immersed submanifold of $\text{Aff}(n)$ as well. Now the group multiplication m restricted to $\mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla$ which we write as m' is a smooth map $m' : \mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla \times \mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla \rightarrow \text{Aff}(n)$ whose image is a subset of $\mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla$. Pulling this map back by the action μ on Q we obtain a smooth map $M : (\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x_0)) \times (\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x_0)) \rightarrow Q$ whose image is contained in $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x_0)$. As mentioned above, $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x_0)$ is an initial submanifold of Q , hence M is smooth as a map into $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x_0)$. This then is reflected, by applying the action μ once more, in the fact that m' is smooth as a map into $\mathcal{H}_{\Delta_R|q_0}^\nabla$. Thus the latter space is a Lie-subgroup of $\text{Aff}(n)$.

Remark 3.3.23. If g is a Riemannian metric on the smooth manifold M and ∇^g is the Levi-Civita connection associated to g , the development formalism can be treated as the rolling system without spinning nor slipping of two oriented connected Riemannian manifolds (M, g) and (\mathbb{R}^n, s_n) , where s_n is the Euclidean metric on \mathbb{R}^n . Thus, the state space $Q(M, \mathbb{R}^n)$ is a principal $\text{SE}(n)$ -bundle (cf [9], [10] and [11] for more details).

3.3.3 Integrability of Δ_R

A natural question arises in the framework of horizontal holonomy, namely under which conditions the horizontal holonomy group $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ is trivial. More generally, we pose this question on the level of Lie algebra, which translates on the group level to asking when $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ is discrete in its underlying Lie group topology. As $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ is identified with a fiber $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x_0)$ of the orbit $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$, we see that answering question comes down to studying when the distribution Δ_R itself is involutive.

In the case where $\Delta = TM$, it is known that the answer is that $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ is discrete if and only if (M, ∇) has vanishing curvature and torsion. This justifies the following definition.

Definition 3.3.24. *We say that the triple (M, ∇, Δ) is Δ -horizontally flat if Δ_R is involutive.*

By (3.5), we see that for any vector field X, Y tangent to Δ we have for any $q = (x, \hat{x}; A) \in Q$,

$$[\mathcal{L}_R(X), \mathcal{L}_R(Y)]|_q = \mathcal{L}_R([X, Y])|_q - \mathcal{L}_{NS}(T^\nabla(X, Y))|_q + \nu(AR^\nabla(X, Y))|_q$$

3.3. AFFINE HOLONOMY GROUP OF (M, ∇, Δ)

where, as before, T^∇ and R^∇ are the torsion and the curvature of ∇ , respectively.

This formula immediately implies a simple characterization of the involutivity of Δ_R .

Proposition 3.3.25. *The manifold with connection (M, ∇) is Δ -horizontally flat if and only if Δ is involutive and for all $x \in M$ and $X, Y \in \Delta|_x$,*

$$T^\nabla(X, Y) = 0, \quad R^\nabla(X, Y) = 0$$

For the rest of this subsection, we assume that M is a Riemannian manifold with metric g and that ∇ is the associated Levi-Civita connection.

Let Δ^\perp be the g -orthogonal complement of Δ , and let $P : TM \rightarrow \Delta$ and $P^\perp : TM \rightarrow \Delta^\perp$ be the orthogonal projections onto Δ and Δ^\perp , respectively. Define the fundamental II form of Δ by

$$\text{II}(X, Y) = P^\perp(\nabla_X Y), \quad \forall X, Y \in \Delta|_x, \quad x \in M.$$

When $\xi \in \Delta^\perp|_x$ is given, one defines the shape operator $S_\xi : \Delta|_x \rightarrow \Delta|_x$ of Δ with respect to ξ to be given by

$$g(S_\xi(X), Y) = -g(\xi, \text{II}(X, Y)), \quad \forall X, Y \in \Delta|_x.$$

In the case where Δ is involutive II is symmetric, and we define the *induced Δ -connection* D and *induced Δ^\perp -connection* D^\perp by

$$\begin{aligned} D_X Y &= P(\nabla_X Y), \\ D_X^\perp \xi &= P^\perp(\nabla_X \xi), \end{aligned}$$

for $X \in \Delta|_x$, for any vector field Y tangent to Δ and for any vector field ξ tangent to Δ^\perp . Furthermore, if one defines for $X, Y, Z \in \Delta|_x$, $\xi \in \Delta^\perp|_x$, where $x \in M$,

$$\begin{aligned} R^D(X, Y)Z &= D_X D_Y Z - D_Y D_X Z - D_{[X, Y]}Z, \\ R^\perp(X, Y)\xi &= D_X^\perp D_Y^\perp \xi - D_Y^\perp D_X^\perp \xi - D_{[X, Y]}^\perp \xi, \end{aligned}$$

then the following result holds.

Corollary 3.3.26. *The Riemannian manifold (M, g) is Δ -horizontally flat if and only if Δ is involutive and for all $X, Y, U, V \in \Delta|_y$, $\xi, \eta \in \Delta^\perp|_y$ and $y \in M$,*

$$g(R^D(X, Y)U, V) = g(\text{II}(X, U), \text{II}(Y, V)) - g(\text{II}(X, V), \text{II}(Y, U)), \quad (3.11)$$

$$g((\nabla_X \text{II})(Y, U), \xi) = g((\nabla_Y \text{II})(X, U), \xi), \quad (3.12)$$

$$g(R^\perp(X, Y)\xi, \eta) = g(S_\xi(X), S_\eta(Y)) - g(S_\eta(X), S_\xi(Y)). \quad (3.13)$$

Proof. Indeed, if L is a leaf of Δ , h is the metric on L induced by g , then D is exactly the Levi-Civita connection of h , and II restricted to L is the second fundamental form of (L, h) in (M, g) . The result follows from these observations combined ([4, Theorem 1.72]) with the Gauss, Codazzi-Mainardi and Ricci equations, which are (3.11), (3.12) and (3.13), respectively.

3.4 Case Study: Holonomy of Free Step-two Homogeneous Carnot Group

The goal of this section is to provide an example of a triple (M, ∇, Δ) such that Δ verifies the LARC (and thus is completely controllable) and H_Δ^∇ is a connected compact Lie group strictly included in H^∇ . After giving the required definitions to treat the example, we first compute H^∇ and then show the above mentioned properties of H_Δ^∇ using the rolling formalism.

3.4.1 Definitions

The affine manifold (M, ∇) we consider is the free step-two homogeneous Carnot group \mathbb{G}_m of $m \geq 2$ generators, endowed with a Riemannian metric and its Levi-Civita connection. To describe it, we will use the definitions of Jacobian basis, homogeneous group and Carnot group of Chapters 1 and 2 of [5].

For a positive integer m greater than or equal to 2, set $\mathcal{I} := \{(h, k) \mid 1 \leq k < h \leq m\}$ of cardinal $n := m(m-1)/2$. Let $S^{(h,k)}$ be the $m \times m$ real skew-symmetric matrix whose entries are -1 in the position (h, k) , $+1$ in the position (k, h) and 0 elsewhere. On \mathbb{R}^{m+n} where an arbitrary point is written (v, γ) with $v \in \mathbb{R}^m$, and $\gamma \in \mathbb{R}^n$, define the group law \star by setting

$$(v, \gamma) \star (v', \gamma') = \left(\begin{array}{c} v_i + v'_i, \quad i = 1, \dots, m \\ \gamma_{h,k} + \gamma'_{h,k} + \frac{1}{2}(v_h v'_k - v_k v'_h), \quad (h, k) \in \mathcal{I} \end{array} \right). \quad (3.14)$$

Then it is easy to verify that $\mathbb{G}_m := (\mathbb{R}^{m+n}, \star)$ is a Lie group, more precisely a free step-two homogeneous Carnot group of m generators. Indeed, a trivial computation shows that the dilation δ_λ given by

$$\delta_\lambda : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}; \quad \delta_\lambda(v, \gamma) = (\lambda v, \lambda^2 \gamma), \quad (3.15)$$

is an automorphism of \mathbb{G}_m for every $\lambda > 0$. On the other hand, the (Jacobian) basis of the Lie algebra \mathfrak{g}_m of \mathbb{G}_m is given by $X_h, \Gamma_{h,k}$ where

$$X_h = \frac{\partial}{\partial v_h} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < i \leq m} \left(\sum_{l=1}^m S_{h,l}^{(i,j)} v_l \right) \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_{i,j}} \right),$$

$$= \begin{cases} \frac{\partial}{\partial v_1} + \frac{1}{2} \sum_{1 < i \leq m} v_i \frac{\partial}{\partial \gamma_{i,1}} & \text{if } h = 1, \\ \frac{\partial}{\partial v_h} + \frac{1}{2} \sum_{h < i \leq m} v_i \frac{\partial}{\partial \gamma_{i,h}} - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < h} v_j \frac{\partial}{\partial \gamma_{h,j}} & \text{if } 1 < h < m, \\ \frac{\partial}{\partial v_m} - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq j < m} v_j \frac{\partial}{\partial \gamma_{m,j}} & \text{if } h = m, \end{cases}$$

$$\Gamma_{h,k} = \frac{\partial}{\partial \gamma_{h,k}}, \quad (h, k) \in \mathcal{I}.$$

while the Lie brackets on $\mathbb{G}_m = (\mathbb{R}^{m+n}, \star)$ are given by

$$[X_h, X_k] = \sum_{1 \leq j < i \leq m} S_{h,k}^{(i,j)} \frac{\partial}{\partial \gamma_{i,j}} = \frac{\partial}{\partial \gamma_{h,k}} = \Gamma_{h,k},$$

$$[X_h, \Gamma_{i,j}] = 0, \quad [\Gamma_{h,k}, \Gamma_{i,j}] = 0.$$

Then,

$$\text{rank}(\text{Lie}\{X_1, \dots, X_m\}) = \dim(\text{span}\left\{ \frac{\partial}{\partial v_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial v_m}, (\Gamma_{h,k})_{(h,k) \in \mathcal{I}} \right\}) = m + n = \dim \mathfrak{g}_m.$$

Therefore, we can conclude that \mathbb{G}_m is a homogeneous Carnot group of step 2 and m generators X_1, \dots, X_m . The Lie algebra \mathfrak{g}_m is equal to $V_1 \oplus V_2$, where $V_1 = \text{span}\{X_1, \dots, X_m\}$ and $V_2 = \text{span}\{\Gamma_{h,k}, (h, k) \in \mathcal{I}\}$.

Moreover, (\mathbb{G}_m, g) is an analytic manifold where the metric g , with respect to the previous basis, is given by

$$g(X_i, X_j) = \delta_{i,j}, \quad \text{if } i, j \in \{1, \dots, m\},$$

$$g(X_i, \Gamma_{h,k}) = 0, \quad \text{if } i \in \{1, \dots, m\} \text{ and } (h, k) \in \mathcal{I}, \quad (3.16)$$

$$g(\Gamma_{h,k}, \Gamma_{i,j}) = \delta_{h,i} \delta_{k,j}, \quad \text{if } (i, j), (h, k) \in \mathcal{I}.$$

In the sequel of this article, we find useful to introduce the following notation of vector fields instead of $\Gamma_{h,k}$, for $h, k \in \{1, \dots, m\}$, in order to facilitate computations by avoiding the confusion between the two cases $k < h$ and $h < k$.

Definition 3.4.1. For every $h, k \in \{1, \dots, m\}$, we define,

$$\Omega_{h,k} = \begin{cases} \Gamma_{h,k} & \text{if } h > k, \\ -\Gamma_{k,h} & \text{if } h < k, \\ 0 & \text{if } h = k. \end{cases} \quad (3.17)$$

By the above definition, the Lie bracket $[X_h, X_k]$ is equal to $\Omega_{h,k}$, for any $h, k \in \{1, \dots, m\}$. Furthermore, let ∇^g be the Levi-Civita connection associated to the Riemannian metric in (3.16).

Lemma 3.4.2. *For $h, k, l, s, t \in \{1, \dots, m\}$, we have the following covariant derivatives on (\mathbb{G}_m, g) ,*

$$\begin{aligned} \nabla_{X_h}^g X_k &= \frac{1}{2}\Omega_{h,k}, & \nabla_{\Omega_{h,k}}^g \Omega_{s,t} &= 0, \\ \nabla_{X_l}^g \Omega_{h,k} &= \frac{1}{2}(\delta_{kl}X_h - \delta_{hl}X_k), & \nabla_{\Omega_{h,k}}^g X_l &= \frac{1}{2}(\delta_{kl}X_h - \delta_{hl}X_k). \end{aligned}$$

Proof. Let us denote by $\nabla_X^g Y$ the covariant differential of a vector field Y in the direction of another vector field X on \mathbb{G} . It is equal to

$$\nabla_X^g Y = \sum_{h=1}^m \alpha_h(X, Y)X_h + \sum_{1 \leq k < h \leq m} \beta_{(h,k)}(X, Y)\Omega_{h,k}. \quad (3.18)$$

On the other hand, by Koszul's formula (cf. [28]), we have

$$2g(\nabla_X^g Y, Z) = g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X). \quad (3.19)$$

Combining (3.18) and (3.19), we easily find the coefficients $\alpha_h(X, Y)$ and $\beta_{(h,k)}(X, Y)$ and hence we obtain the claim.

3.4.2 Riemannian Holonomy Group of (\mathbb{G}_m, g)

The main of this subsection is to prove the following theorem.

Theorem 3.4.3. *Let (\mathbb{G}_m, ∇^g) be a free step-two homogeneous Carnot group of dimension $m+n$ endowed with the Levi-Civita connection ∇^g given in Lemma 3.4.2. Then, (\mathbb{G}_m, ∇^g) has full holonomy group $H^{\nabla^g} = \text{SO}(m+n)$.*

To this end, we compute the Riemannian tensor curvature R and as well as part of its covariant derivation of (\mathbb{G}_m, ∇^g) .

Lemma 3.4.4. *For any $h, k, l, i, j \in \{1, \dots, m\}$, the Riemannian curvature tensor R of (\mathbb{G}_m, ∇^g) is given by the following skew-symmetric matrices,*

$$R(X_h, X_k) = \frac{3}{4}(X_h \wedge X_k) + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}, \quad (3.20)$$

$$R(X_l, \Omega_{h,k}) = \frac{1}{4}(X_h \wedge \Omega_{k,l} + X_k \wedge \Omega_{l,h}), \quad (3.21)$$

$$R(\Omega_{i,j}, \Omega_{h,k}) = \frac{1}{4}(\delta_{ik}X_h \wedge X_j + \delta_{jk}X_i \wedge X_h + \delta_{ih}X_j \wedge X_k + \delta_{jh}X_k \wedge X_i). \quad (3.22)$$

3.4. CASE STUDY: HOLONOMY OF FREE STEP-TWO HOMOGENEOUS CARNOT GROUP

Proof. From Lemma 3.4.2 and the intrinsic definition of R ,

$$R(X, Y)Z = \nabla_X^g \nabla_Y^g Z - \nabla_Y^g \nabla_X^g Z - \nabla_{[X, Y]}^g Z, \quad \forall X, Y, Z \in T_x \mathbb{G}_m,$$

we get, for any $h, k, l, i, j \in \{1, \dots, m\}$,

$$\begin{aligned} R(X_h, X_k)X_l &= \frac{3}{4}(\delta_{hl}X_k - \delta_{kl}X_h), \\ R(X_h, X_k)\Omega_{i,j} &= \frac{1}{4}(\delta_{ih}\Omega_{k,j} + \delta_{jh}\Omega_{i,k} - \delta_{ik}\Omega_{h,j} - \delta_{jk}\Omega_{i,h}). \end{aligned}$$

Similarly, for any $h, k, l, i, j, t \in \{1, \dots, m\}$, $R(X_l, \Omega_{h,k})$ is given by

$$\begin{aligned} R(X_l, \Omega_{h,k})X_t &= \frac{1}{4}(\delta_{th}\Omega_{k,l} - \delta_{tk}\Omega_{h,l}), \\ R(X_l, \Omega_{h,k})\Omega_{i,j} &= \frac{1}{4}((\delta_{jk}\delta_{il} - \delta_{jl}\delta_{ki})X_h + (\delta_{jl}\delta_{hi} - \delta_{il}\delta_{jh})X_k). \end{aligned}$$

Finally, for any $i, j, h, k, l \in \{1, \dots, m\}$, $R(\Omega_{i,j}, \Omega_{h,k})$ is given by

$$\begin{aligned} R(\Omega_{i,j}, \Omega_{h,k})X_l &= \frac{1}{4}((\delta_{lk}\delta_{jh} - \delta_{hl}\delta_{jk})X_i + (\delta_{hl}\delta_{ik} - \delta_{lk}\delta_{ih})X_j \\ &\quad + (\delta_{il}\delta_{jk} - \delta_{jl}\delta_{ik})X_h + (\delta_{lj}\delta_{ih} - \delta_{hj}\delta_{il})X_k), \\ R(\Omega_{i,j}, \Omega_{h,k})\Omega_{s,t} &= 0, \quad \forall s, t \in \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Collecting the above equalities, we get Eq. (3.20), Eq. (3.21) and Eq. (3.22).

Using the definition of the covariant derivative of tensors, which is,

$$(\nabla_Z^g R(X, Y))(W) = \nabla_Z^g (R(X, Y)W) - R(X, Y)\nabla_Z^g W, \quad \forall X, Y, Z, W \in T_x \mathbb{G}_m,$$

we deduce the following lemma.

Lemma 3.4.5. *The covariant derivatives of R in the direction of vector fields X_t on \mathbb{G}_m , for $t \in \{1, \dots, m\}$, are*

$$\begin{aligned} \nabla_{X_t}^g R(X_h, X_k) &= -R(X_t, \Omega_{h,k}) + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^m (\delta_{kt}X_j \wedge \Omega_{h,j} - \delta_{ht}X_j \wedge \Omega_{k,j}), \\ \nabla_{X_t}^g R(X_l, \Omega_{h,k}) &= \frac{1}{8}(\Omega_{t,h} \wedge \Omega_{k,l} + \Omega_{t,k} \wedge \Omega_{l,h} + 2\delta_{lt}X_h \wedge X_k + \delta_{ht}X_k \wedge X_l - \delta_{kt}X_h \wedge X_l), \\ \nabla_{X_t}^g R(\Omega_{i,j}, \Omega_{h,k}) &= \frac{1}{8}(\delta_{ik}R(X_j, \Omega_{h,t}) + \delta_{jk}R(X_h, \Omega_{i,t}) + \delta_{ih}R(X_k, \Omega_{j,t}) + \delta_{jh}R(X_i, \Omega_{k,t})), \end{aligned}$$

where h, k, l, i, j are any integers in $\{1, \dots, m\}$.

Similarly, the covariant derivatives of R in the direction of vector fields $\Omega_{s,t}$ on \mathbb{G}_m ,

for every $s, t \in \{1, \dots, m\}$, are

$$\begin{aligned}\nabla_{\Omega_{s,t}}^g R(X_h, X_k) &= \frac{3}{8}(\delta_{th}X_s \wedge X_k - \delta_{sh}X_t \wedge X_k + \delta_{tk}X_h \wedge X_s - \delta_{sk}X_h \wedge X_t), \\ \nabla_{\Omega_{s,t}}^g R(X_l, \Omega_{h,k}) &= \frac{1}{8}(\delta_{th}X_s \wedge \Omega_{k,l} - \delta_{sh}X_t \wedge \Omega_{k,l} + \delta_{tk}X_s \wedge \Omega_{l,h} - \delta_{sk}X_t \wedge \Omega_{l,h}), \\ \nabla_{\Omega_{s,t}}^g R(\Omega_{i,j}, \Omega_{h,k}) &= \frac{1}{8}((\delta_{ih}\delta_{tk} - \delta_{ik}\delta_{th})X_j \wedge X_s + (\delta_{ik}\delta_{jt} - \delta_{jk}\delta_{ti})X_h \wedge X_s \\ &\quad + (\delta_{jh}\delta_{ti} - \delta_{ih}\delta_{tj})X_k \wedge X_s + (\delta_{jk}\delta_{th} - \delta_{jh}\delta_{tk})X_i \wedge X_s \\ &\quad - (\delta_{ik}\delta_{js} - \delta_{jk}\delta_{is})X_h \wedge X_t - (\delta_{jk}\delta_{sh} - \delta_{jh}\delta_{sk})X_i \wedge X_t \\ &\quad - (\delta_{jh}\delta_{si} - \delta_{ih}\delta_{sj})X_k \wedge X_t - (\delta_{ih}\delta_{sk} - \delta_{ik}\delta_{sh})X_j \wedge X_t),\end{aligned}$$

where h, k, l, i, j are any integers in $\{1, \dots, m\}$.

We next deduce from the two previous lemmas the main computational result of the section.

Proposition 3.4.6. *Fix some $q_0 \in Q := Q(\mathbb{G}_m, \mathbb{R}^{m+n})$ and let $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$, then $\text{SO}(T_x\mathbb{G}_m) \subset \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$.*

Proof. Fix some $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$, for any $h, k, i, j \in \{1, \dots, m\}$ such that $i \neq j$ and $k \neq h$, the first order Lie brackets on $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ are

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_R(X_h), \mathcal{L}_R(X_k)]|_q &= \mathcal{L}_R(\Omega_{h,k})|_q + \nu(AR(X_h, X_k))|_q \\ &= \mathcal{L}_R(\Omega_{h,k})|_q + \frac{3}{4}\nu(A(X_h \wedge X_k))|_q + \frac{1}{4}\nu\left(A\left(\sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}\right)\right)|_q, \\ [\mathcal{L}_R(\Omega_{i,j}), \mathcal{L}_R(\Omega_{h,k})]|_q &= \frac{1}{4}\nu\left(A(\delta_{ik}X_h \wedge X_j + \delta_{jk}X_i \wedge X_h + \delta_{ih}X_j \wedge X_k + \delta_{jh}X_k \wedge X_i)\right)|_q, \\ [\mathcal{L}_R(X_i), \mathcal{L}_R(\Omega_{h,k})]|_q &= \frac{1}{4}\nu\left(A(X_h \wedge \Omega_{k,i} + X_k \wedge \Omega_{i,h})\right)|_q.\end{aligned}$$

Thanks to Eq. (3.3), both the $\mathcal{L}_R(X_h)$'s and the $\mathcal{L}_R(\Omega_{i,j})$'s are tangent to the rolling distribution. Therefore, they are also tangent to $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ as well as their iterated Lie brackets. By taking $i = k$ in the bracket $[\mathcal{L}_R(\Omega_{i,j}), \mathcal{L}_R(\Omega_{h,k})]|_q$, we get that, for any $h, j \in \{1, \dots, m\}$, $\nu(A(X_h \wedge X_j))|_q$ is tangent to $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$. In addition, from the first and the last brackets of the above Lie brackets, we obtain that $\nu\left(A\left(\sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}\right)\right)|_q$ and $\nu\left(A(X_h \wedge \Omega_{k,i} + X_k \wedge \Omega_{i,h})\right)|_q$ are tangent to $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$, for any $h, k, i, j \in \{1, \dots, m\}$. Thus, we can compute the next bracket in $T_q\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$, for $q \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$,

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_R(X_i), \nu((\cdot)(X_h \wedge X_k))]|_q &= \delta_{ki}\mathcal{L}_{NS}(AX_h)|_q - \delta_{hi}\mathcal{L}_{NS}(AX_k)|_q \\ &\quad - \frac{1}{2}\nu\left(A(X_h \wedge \Omega_{k,i} + X_k \wedge \Omega_{i,h})\right)|_q.\end{aligned}$$

Using $[\mathcal{L}_R(X_i), \mathcal{L}_R(\Omega_{h,k})]|_q$ and then putting $i = h$ in the last Lie bracket, we obtain

3.4. CASE STUDY: HOLONOMY OF FREE STEP-TWO HOMOGENEOUS CARNOT GROUP

that $\mathcal{L}_{NS}(AX_k)|_q$ is tangent to $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$, for all $k \in \{1, \dots, m\}$. In addition, we have

$$\begin{aligned} & [\mathcal{L}_R(\Omega_{t,s}), \nu((\cdot)(X_h \wedge \Omega_{k,i} + X_k \wedge \Omega_{i,h}))]|_q \\ &= (\delta_{tk}\delta_{ls} - \delta_{tl}\delta_{sk})\mathcal{L}_{NS}(AX_h)|_q + (\delta_{ht}\delta_{ls} - \delta_{tl}\delta_{hs})\mathcal{L}_{NS}(AX_k)|_q \\ &+ \frac{1}{2}(\delta_{sh}\nu(A(X_t \wedge \Omega_{k,l}))|_q + \delta_{sk}\nu(A(X_t \wedge \Omega_{l,h}))|_q \\ &\quad - \delta_{th}\nu(A(X_s \wedge \Omega_{k,l}))|_q + \delta_{tk}\nu(A(X_s \wedge \Omega_{l,h}))|_q). \end{aligned}$$

Since $\mathcal{L}_{NS}(AX_k)|_q$ is tangent to $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$, for all $k \in \{1, \dots, m\}$, then $\nu(A(X_t \wedge \Omega_{h,k}))|_q$ is also tangent for any distinct integers $h, k, t \in \{1, \dots, m\}$. The last Lie bracket to compute is

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_{NS}(X_t), \nu(A(X_l \wedge \Omega_{h,k}))]|_q &= \frac{1}{2}(\delta_{tk}\nu(A(X_l \wedge X_h))|_q - \delta_{th}\nu(A(X_l \wedge X_k))|_q \\ &\quad + \nu(A(\Omega_{t,l} \wedge \Omega_{h,k}))|_q). \end{aligned}$$

Therefore, for every $h, k, t, l \in \{1, \dots, m\}$, $\nu(A(\Omega_{t,l} \wedge \Omega_{h,k}))|_q$ is tangent to $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$. Hence, for all $q \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ the following vector fields

$$\nu(A(X_h \wedge X_k))|_q, \quad \nu(A(X_t \wedge \Omega_{h,k}))|_q, \quad \nu(A(\Omega_{t,l} \wedge \Omega_{h,k}))|_q,$$

are tangent to $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$. This completes the proof because we have that $\nu(AB)|_q \in T_q\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ if and only if $B \in \mathfrak{so}(T_x\mathbb{G}_m)$ for $q = (x, \hat{x}; A) \in \mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$.

We return to prove the main theorem in the beginning of the current subsection.

Proof. [Proof of Theorem 3.4.3] As the vertical bundle of Q is included in the tangent space of $\mathcal{O}_{\mathcal{D}_R}(q_0)$ by Proposition 3.4.6, then the rolling problem $(\Sigma)_R$ is completely controllable (see Corollary 5.21 in [9]). According to Theorem 4.3 in [11], the holonomy group of \mathbb{G}_m is equal to $\text{SO}(m+n)$. Note that one could have used as well the main result in [25] stating that the tangent space of the holonomy group at every point $x \in M$ contains the evaluations at x of the curvature tensor and its covariant derivatives at any order.

3.4.3 Horizontal Holonomy Group of (\mathbb{G}_m, g)

We define the distribution $\Delta := \text{span}\{X_1, \dots, X_m\}$ on \mathbb{G}_m and $q_0 = (x_0, \hat{x}_0; A_0) \in Q$. Note that it is of constant rank m . We will first compute a basis of $T_q\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ for any $q \in \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ and then investigate the holonomy group $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ of rolling of (\mathbb{G}_m, g) against $(\mathbb{R}^{m+n}, s_{m+n})$, where s_{m+n} is the Euclidean metric on \mathbb{R}^{m+n} .

3.4.3.1 The Tangent Space of $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$

Proposition 3.4.7. *For any $q_0 \in Q$, the tangent space of $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ is generated by the following linearly independent vector fields:*

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{NS}(X_h)|_q, \mathcal{L}_{NS}(AX_h)|_q, \mathcal{L}_{NS}(A\Omega_{h,k})|_q, \mathcal{L}_{NS}(\Omega_{h,k})|_q + \frac{1}{2}\nu(A(X_h \wedge X_k))|_q, \quad (3.23) \\ & \nu\left(A\left(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j}\right)\right)|_q, \nu\left(A\left(X_h \wedge X_k + \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}\right)\right)|_q. \end{aligned}$$

Proof. Recall that all the data of the problem are analytic. Then, by the analytic version of the Orbit theorem of Nagano-Sussmann (cf. [2]), the orbit $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ is an immersed analytic submanifold in the state space Q and $T_q\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) = Lie_q(\Delta_R)$. Therefore, we are left to determine vector fields spanning $Lie_q(\Delta_R)$, i.e., to compute enough iterated Lie brackets of Δ .

For any $h, k, l, s, t, p \in \{1, \dots, m\}$, we have

$$\begin{aligned} & [\mathcal{L}_R(X_h), \mathcal{L}_R(X_k)]|_q = \mathcal{L}_R(\Omega_{h,k})|_q + \nu(AR(X_h, X_k))|_q \\ & = \mathcal{L}_R(\Omega_{h,k})|_q + \frac{3}{4}\nu(A(X_h \wedge X_k))|_q + \frac{1}{4}\nu(A(\sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}))|_q. \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & [\mathcal{L}_R(X_l), [\mathcal{L}_R(X_h), \mathcal{L}_R(X_k)]]|_q \\ & = \delta_{kl} \left(\frac{3}{4}\mathcal{L}_{NS}(AX_h)|_q + \frac{1}{8}\nu(A\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j})|_q \right) \\ & - \delta_{hl} \left(\frac{3}{4}\mathcal{L}_{NS}(AX_k)|_q + \frac{1}{8}\nu(A(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{k,j}))|_q \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} & [\mathcal{L}_R(X_t), [\mathcal{L}_R(X_l), [\mathcal{L}_R(X_h), \mathcal{L}_R(X_k)]]]|_q \\ & = \delta_{kl} \left(\frac{1}{2}\mathcal{L}_{NS}(A\Omega_{t,h})|_q + \frac{1}{16}\nu(A(X_t \wedge X_h))|_q + \frac{1}{16}\nu(A(\sum_{j=1}^m \Omega_{t,j} \wedge \Omega_{h,j}))|_q \right) \\ & - \delta_{hl} \left(\frac{1}{2}\mathcal{L}_{NS}(A\Omega_{t,k})|_q + \frac{1}{16}\nu(A(X_t \wedge X_k))|_q + \frac{1}{16}\nu(A(\sum_{j=1}^m \Omega_{t,j} \wedge \Omega_{k,j}))|_q \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned}
& [\mathcal{L}_R(X_s), [\mathcal{L}_R(X_t), [\mathcal{L}_R(X_l), [\mathcal{L}_R(X_h), \mathcal{L}_R(X_k)]]]]|_q \\
&= \delta_{kl} \left(\delta_{hs} \left(\frac{3}{8} \mathcal{L}_{NS}(AX_t)|_q + \frac{1}{32} \nu(A(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{t,j})) \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_{ts} \left(\frac{3}{8} \mathcal{L}_{NS}(AX_h)|_q + \frac{1}{32} \nu(A(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j})) \right) \right) \\
&- \delta_{hl} \left(\delta_{ks} \left(\frac{3}{8} \mathcal{L}_{NS}(AX_t)|_q + \frac{1}{32} \nu(A(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{t,j})) \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_{ts} \left(\frac{3}{8} \mathcal{L}_{NS}(AX_k)|_q + \frac{1}{32} \nu(A(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{k,j})) \right) \right). \tag{3.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [\mathcal{L}_R(X_p), [\mathcal{L}_R(X_s), [\mathcal{L}_R(X_t), [\mathcal{L}_R(X_l), [\mathcal{L}_R(X_h), \mathcal{L}_R(X_k)]]]]]]|_q \\
&= \delta_{kl} \left(\delta_{hs} \left(\frac{7}{32} \mathcal{L}_{NS}(A\Omega_{p,t})|_q + \frac{1}{64} \nu(A(X_p \wedge X_t))|_q + \frac{1}{64} \nu(A(\sum_{j=1}^m \Omega_{p,j} \wedge \Omega_{t,j}))|_q \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_{ts} \left(\frac{7}{32} \mathcal{L}_{NS}(A\Omega_{p,h})|_q + \frac{1}{64} \nu(A(X_p \wedge X_h))|_q + \frac{1}{64} \nu(A(\sum_{j=1}^m \Omega_{p,j} \wedge \Omega_{h,j}))|_q \right) \right) \\
&- \delta_{hl} \left(\delta_{ks} \left(\frac{7}{32} \mathcal{L}_{NS}(A\Omega_{p,t})|_q + \frac{1}{64} \nu(A(X_p \wedge X_t))|_q + \frac{1}{64} \nu(A(\sum_{j=1}^m \Omega_{p,j} \wedge \Omega_{t,j}))|_q \right) \right. \\
&\quad \left. - \delta_{ts} \left(\frac{7}{32} \mathcal{L}_{NS}(A\Omega_{p,k})|_q + \frac{1}{64} \nu(A(X_p \wedge X_k))|_q + \frac{1}{64} \nu(A(\sum_{j=1}^m \Omega_{p,j} \wedge \Omega_{k,j}))|_q \right) \right). \tag{3.28}
\end{aligned}$$

First we should remark that, by iteration, the commutators

$$[\mathcal{L}_R(X_{\alpha_r}), \dots, [\mathcal{L}_R(X_{\alpha_2}), \mathcal{L}_R(X_{\alpha_1})] \dots],$$

where $\alpha_i \in \{1, \dots, m\}$ and $r \geq 3$ are written either as the vectors in (3.25) and (3.27), or as those in (3.26) and (3.28). Therefore, one only has to prove that (3.24), (3.25), (3.26), (3.27) and (3.28) are linear combinations of the vector fields in (3.23) and then show that the Lie algebra generated by these vector fields is involutive. Indeed, fix some $h, k \in \{1, \dots, m\}$ such that $k \neq h$ and take $p = s = t = l = k$ in the above Lie brackets. Calculate $\frac{1}{4}(\text{3.25}) + (\text{3.27})$ and $\frac{1}{2}(\text{3.25}) + (\text{3.27})$, we get that

$$\mathcal{L}_{NS}(AX_h)|_q, \quad \nu(A(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j}))|_q$$

are vectors in $Lie(\Delta_R)$. On the other hand, $\frac{1}{4}(\text{3.26}) + (\text{3.28})$ and $\frac{7}{16}(\text{3.26}) + (\text{3.28})$ imply that

$$\mathcal{L}_{NS}(A\Omega_{h,k})|_q, \quad \nu(A(X_h \wedge X_k + \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}))|_q$$

belong also to $Lie(\Delta_R)$. The last two vectors with (3.24) give us another vector in $Lie(\Delta_R)$ which is

$$\mathcal{L}_{NS}(\Omega_{h,k})|_q + \frac{1}{2}\nu(A(X_h \wedge X_k))|_q.$$

To show that the vector fields given in Eq. (3.23) form a basis for $Lie(\Delta_R)$, it remains to compute their first order Lie brackets to see that they define an involutive Lie algebra.

We have,

$$\begin{aligned} & [\nu((\cdot)(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j})), \nu((\cdot)(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{k,j}))]|_q \\ &= \nu(A(X_h \wedge X_k + \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}))|_q, \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} & [\nu((\cdot)(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{l,j})), \nu((\cdot)(X_h \wedge X_k + \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}))]|_q \\ &= \delta_{kl}\nu(A(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j}))|_q - \delta_{hl}\nu(A(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{k,j}))|_q, \end{aligned} \quad (3.30)$$

and,

$$\begin{aligned} & [\nu((\cdot)(X_l \wedge X_t + \sum_{j=1}^m \Omega_{l,j} \wedge \Omega_{t,j})), \nu((\cdot)(X_h \wedge X_k + \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}))]|_q \\ &= \delta_{kl}\nu(A(X_h \wedge X_t + \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{t,j}))|_q + \delta_{hl}\nu(A(X_t \wedge X_k + \sum_{j=1}^m \Omega_{t,j} \wedge \Omega_{k,j}))|_q \\ &+ \delta_{tk}\nu(A(X_l \wedge X_h + \sum_{j=1}^m \Omega_{l,j} \wedge \Omega_{h,j}))|_q + \delta_{ht}\nu(A(X_k \wedge X_l + \sum_{j=1}^m \Omega_{k,j} \wedge \Omega_{l,j}))|_q. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Moreover, the Lie brackets between $\mathcal{L}_{NS}(\Omega_{h,k}) + \frac{1}{2}\nu(A(X_h \wedge X_k))$ and the remaining vectors of (3.23) are

$$\begin{aligned} & [\mathcal{L}_{NS}(X_l), \mathcal{L}_{NS}(\Omega_{h,k}) + \frac{1}{2}\nu((\cdot)(X_h \wedge X_k))]|_q = 0, \\ & [\mathcal{L}_{NS}((\cdot)X_l), \mathcal{L}_{NS}(\Omega_{h,k}) + \frac{1}{2}\nu((\cdot)(X_h \wedge X_k))]|_q = 0, \\ & [\mathcal{L}_R((\cdot)\Omega_{i,j}), \mathcal{L}_{NS}(\Omega_{h,k}) + \frac{1}{2}\nu((\cdot)(X_h \wedge X_k))]|_q = 0, \\ & [\mathcal{L}_{NS}((\cdot)\Omega_{l,t}), \mathcal{L}_{NS}(\Omega_{h,k}) + \frac{1}{2}\nu((\cdot)(X_h \wedge X_k))]|_q = 0, \\ & [\mathcal{L}_{NS}(\Omega_{h,k}) + \frac{1}{2}\nu((\cdot)(X_h \wedge X_k)), \mathcal{L}_{NS}(\Omega_{l,t}) + \frac{1}{2}\nu((\cdot)(X_l \wedge X_t))]|_q = 0, \\ & [\mathcal{L}_{NS}(\Omega_{h,k}) + \frac{1}{2}\nu((\cdot)(X_h \wedge X_k)), \nu((\cdot)(X_l \wedge X_t + \sum_{j=1}^m \Omega_{l,j} \wedge \Omega_{t,j}))]|_q = 0, \\ & [\mathcal{L}_{NS}(\Omega_{h,k}) + \frac{1}{2}\nu((\cdot)(X_h \wedge X_k)), \nu((\cdot)(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{l,j}))]|_q = 0. \end{aligned}$$

3.4. CASE STUDY: HOLONOMY OF FREE STEP-TWO HOMOGENEOUS CARNOT GROUP

Then, the vector fields

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{NS}(X_h)|_q, \mathcal{L}_{NS}(AX_h)|_q, \mathcal{L}_{NS}(A\Omega_{h,k})|_q, \mathcal{L}_{NS}(\Omega_{h,k})|_q + \frac{1}{2}\nu(A(X_h \wedge X_k))|_q, \\ & \nu\left(A\left(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j}\right)\right)|_q, \nu\left(A\left(X_h \wedge X_k + \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}\right)\right)|_q, \end{aligned}$$

form an involutive distribution and any vector fields in $Lie(\Delta_R)$ is a linear combination of them. It remains to check that they are linearly independent. It is clearly enough to do that for the family of vector fields $\nu\left(A\left(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j}\right)\right)|_q$. Suppose there exists $(\alpha_h)_{1 \leq h \leq m}$, such that $\sum_{h=1}^m \alpha_h \sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j} = 0$. Then $\sum_{j=1}^m X_j \wedge \left(\sum_{h=1, h \neq j}^m \alpha_h \Omega_{h,j}\right) = 0 \forall j \in \{1, \dots, m\}$. Hence, $\sum_{h=1, h \neq j}^m \alpha_h \Omega_{h,j} = 0$ for every $j, h \in \{1, \dots, m\}$, so $\alpha_h = 0$ for every $h \in \{1, \dots, m\}$. Therefore,

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}_{NS}(X_h)|_q, \mathcal{L}_{NS}(AX_h)|_q, \mathcal{L}_{NS}(A\Omega_{h,k})|_q, \mathcal{L}_{NS}(\Omega_{h,k})|_q + \frac{1}{2}\nu(A(X_h \wedge X_k))|_q, \\ & \nu\left(A\left(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j}\right)\right)|_q, \nu\left(A\left(X_h \wedge X_k + \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}\right)\right)|_q, \end{aligned}$$

is a global basis of $Lie_q(\Delta_R)$ and hence the dimension of $Lie_q(\Delta_R)$ is constant and equal to $3(m+n)$. We deduce that $\dim \mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) = 3(m+n)$ and the tangent space of $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$ is generated by the vectors in (3.23).

Remark 3.4.8. According to this proposition, $\mathcal{L}_{NS}(AX_h)|_q$ and $\mathcal{L}_{NS}(A\Omega_{h,k})|_q$ are tangent to $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$. This implies that $\pi_{Q, \mathbb{R}^N}(\mathcal{O}_{\Delta_R}) = \mathbb{R}^{m+n}$ which means that all the translations along \mathbb{R}^{m+n} are included in the tangent space of the orbit. Furthermore, the families of vector fields $\nu\left(A\left(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j}\right)\right)|_q$ and $\nu\left(A\left(X_h \wedge X_k + \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}\right)\right)|_q$ form an involutive vertical distribution.

3.4.3.2 Study of $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla|_q$

The main result of the subsection is given next.

Proposition 3.4.9. (i) *The affine Δ -horizontal holonomy group $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ is a connected Lie subgroup of $SE(m+n)$ of dimension $2(m+n)$.*
(ii) *The Δ -horizontal holonomy group H_{Δ}^∇ is a connected compact Lie subgroup of $SO(m+n)$ of dimension $m+n$.*

In particular, the inclusions $\text{clos}(\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla) \subset \text{clos}(\mathcal{H}^\nabla)$ and $\text{clos}(H_{\Delta}^\nabla) \subset \text{clos}(H^\nabla)$ are strict if and only if $m \geq 3$.

Proof. As an immediate adaptation of Proposition 3.3.22 to the case where one is dealing with principal $SE(m+n)$ -bundles, one gets that the affine holonomy group $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ is a Lie subgroup of $SE(m+n)$. Notice then that, if $\Pi : SE(m+n) \rightarrow SO(m+n)$ is the projection onto the $SO(m+n)$ factor of $SE(m+n)$, one has, by definition $H^\nabla = \Pi(\mathcal{H}^\nabla)$ and $H_{\Delta}^\nabla = \Pi(\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla)$. This shows that the Δ -horizontal holonomy group H_{Δ}^∇ is a Lie subgroup of $SO(m+n)$.

We next prove that for every $q' \in Q$, a basis of $\text{Lie}(\mathcal{H}_{\Delta_R|q'}^\nabla)$ the Lie-algebra of $\mathcal{H}_{\Delta_R|q'}^\nabla$ is given by the evaluation at q' of the vector fields whose values at $q = (x, \hat{x}, A) \in Q$ are

$$\mathcal{L}_{NS}(AX_h)|_q, \mathcal{L}_{NS}(A\Omega_{h,k})|_q, \nu\left(A\left(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j}\right)\right)|_q, \nu\left(A\left(X_h \wedge X_k + \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}\right)\right)|_q, \quad (3.32)$$

and hence this Lie algebra has dimension $2(m+n) = m(m+1)$. To see that, consider an arbitrary element $V \in \text{Lie}(\mathcal{H}_{\Delta_R|q'}^\nabla)$, seen itself as a linear subspace of $T_{q'}\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0)$. Then V is a linear combination of the vector fields described in Eq. (3.23) evaluated at q' and V projects to a zero-vector in TM . By an obvious computation, one deduces that V is a linear combination of the vector fields given in Eq. (3.32). Conversely, it is clear that the vector fields given in Eq. (3.32) generate a distribution whose integral manifolds lie in $\mathcal{O}_{\Delta_R}(q_0) \cap \pi_{Q,M}^{-1}(x')$ where $x' = \pi_{Q,M}(q')$. This proves that the Lie-algebra $\text{Lie}(\mathcal{H}_{\Delta_R|q'}^\nabla)$ of $\mathcal{H}_{\Delta_R|q'}^\nabla$ has dimension $2(m+n) = m(m+1)$. One could also check that the distribution generated by the vector fields in Eq. (3.32) is involutive.

By a similar reasoning, a basis of $\text{Lie}(H_{\Delta|q'}^\nabla)$ is given by the (evaluations at q' of) vector fields (see also (3.33) below)

$$\nu\left(A\left(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j}\right)\right)|_q, \nu\left(A\left(X_h \wedge X_k + \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}\right)\right)|_q,$$

and hence this Lie algebra has dimension $m+n = m(m+1)/2$.

It is proved in Appendix that $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ is connected and, as a consequence, H_{Δ}^∇ is connected as well.

It remains to prove the rest of Claim (ii). For $1 \leq h \leq m$, let $A_h \in \mathfrak{so}(m+n)$ corresponding to the vertical vector $\nu\left(A\left(\sum_{j=1}^m X_j \wedge \Omega_{h,j}\right)\right)$ and, for $(h,k) \in \mathcal{I}$, let $B_{h,k} \in \mathfrak{so}(m+n)$ corresponding to the vertical vector $\nu\left(A\left(X_h \wedge X_k + \sum_{j=1}^m \Omega_{h,j} \wedge \Omega_{k,j}\right)\right)$. We extend the notations for the $B_{h,k}$ to for any $1 \leq h, k \leq m$ by setting $B_{h,k} = -B_{k,h}$. The basis of $L := \text{Lie}(H_{\Delta}^\nabla)$ is given by the matrices A_h , $1 \leq h \leq m$ and $B_{h,k}$, $(h,k) \in \mathcal{I}$ and thanks to Eqs. (3.29), (3.30) and (3.31), one has

$$[A_i, A_j] = B_{i,j}, [A_i, B_{h,k}] = \delta_{ki}A_h - \delta_{hi}A_k, [B_{l,t}, B_{h,k}] = \delta_{kl}B_{h,t} + \delta_{hl}B_{t,k} + \delta_{tk}B_{l,h} + \delta_{ht}B_{k,l}. \quad (3.33)$$

We next prove that $L = \mathfrak{so}(m+1)$ and, for that purpose, we build a Lie algebra isomorphism φ between L and $\mathfrak{so}(m+1)$. Let $(e_j)_{1 \leq j \leq m+1}$ be an orthonormal basis of \mathbb{R}^{m+1} . To each $(h,k) \in \mathcal{I}$ and $1 \leq t \leq m$, define $\varphi(B_{h,k}) = e_k \wedge e_h$ and $\varphi(A_t) = e_t \wedge e_{m+1}$ and then extend the definition of φ by linearity to the whole L . It is then immediate to check that φ is a Lie algebra isomorphism.

Recall that H_{Δ}^∇ is connected. Since its Lie algebra L is semi-simple and compact, it follows from Weyl's theorem (cf. [26, Theorem 26.1]) that H_{Δ}^∇ is compact in $\text{SO}(m+n)$ and of dimension $m+n$ (for more details on semi-simple Lie groups, see [15, 17]).

3.4. CASE STUDY: HOLONOMY OF FREE STEP-TWO HOMOGENEOUS
CARNOT GROUP

Representation of Geometry in \mathbb{R}^2

Boutheina Hafassa Yacine Chitour Frédéric Jean
 Mario Sigalotti

Contents

4.1 Preliminaries	79
4.1.1 Space of Spheres	80
4.1.2 Particular Elements of the Restricted Lorentz Group	85
4.1.3 Annihilator of Geometry	91
4.2 Study of Displacements	92
4.2.1 Strategy	92
4.2.2 Displacement group for the submanifold \mathcal{P}	94
4.2.3 Displacement group for the submanifold Λ	95
4.2.4 Displacement group for the submanifold Λ_c	97

4.1 Preliminaries

THIS section deals with the space of spheres and discusses the important properties related to this space. Before introducing the space of spheres, we begin with the following definition.

Definition 4.1.1. *A geometry in \mathbb{R}^n is a subset of \mathbb{R}^n which is either a point, a sphere or an affine hyperplane. In particular, a planar geometry is either a point in \mathbb{R}^2 , a circle or a line.*

The set of geometries in \mathbb{R}^n can be considered to be connected if any hyperplane is considered as a sphere of infinite radius, and any point is considered as a sphere of radius zero. This is the point of view of the space of spheres. For references on this

space, we refer to M. Berger's book [32, Chapter 20] and T. E Cecil's book [33, Chapter 2].

4.1.1 Space of Spheres

In the spaces of spheres, a geometry is described through the parameters of its Cartesian equation. We denote the Euclidean norm of a vector v in \mathbb{R}^n by $|v|$. Let us consider a sphere with center p and radius $r \geq 0$ in \mathbb{R}^n ($n = 2, 3$). Its equation is

$$|x - p|^2 = r^2$$

or, equivalently, $|x|^2 - 2p^\top x + |p|^2 - r^2 = 0$. This is an affine quadratic equation whose 2-homogeneous part is equal to $|x|^2$. In fact, any affine quadratic form of the type

$$q(x) = k|x|^2 + a^\top x + h \tag{4.1}$$

leads to an equation $q(x) = 0$ whose solutions form a sphere, provided that the real coefficients h, k and the vector $a \in \mathbb{R}^n$ satisfy $|a|^2 - 4kh > 0$ and $k \neq 0$. Indeed, the center and the radius of the sphere are given by $p = \frac{-a}{2k}$ and $r^2 = \frac{|a|^2 - 4kh}{4}$, respectively. Furthermore, when $k = 0$ and $a \neq 0$, the quadratic form q yields the equation of an affine hyperplane, while if $|a|^2 - 4kh = 0$, then we recover a point as the unique solution to the equation $q = 0$. So, we can identify points, spheres and hyperplanes with a subset of the space of affine quadratic forms.

The set of affine quadratic forms of the type (4.1) is an $(n + 2)$ -dimensional vector space. Since the quantity $\rho(q) = |a|^2 - 4kh$ plays an important role here, we will represent an affine quadratic form q by the vector $\xi = (a, h - k, h + k) \in \mathbb{R}^{n+2}$ in such a way that $\rho(q) = \rho(\xi)$ can be written as

$$\rho(\xi) = \xi_1^2 + \cdots + \xi_{n+1}^2 - \xi_{n+2}^2.$$

In this way we diagonalize the Lorentz norm ρ .

With any point $\xi = (\bar{\xi}, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ we associate the affine quadratic form on \mathbb{R}^n

$$q_\xi(x) = -\frac{1}{2}(\xi_{n+1} - \xi_{n+2})|x|^2 + \bar{\xi}^\top x + \frac{1}{2}(\xi_{n+1} + \xi_{n+2}).$$

The quadratic forms yielding to equations for spheres (including points) and hyperplanes are those associated with elements ξ of (Lorentz) norm $\rho(\xi) \geq 0$. Notice that two proportional equations define the same geometric object, so geometries are naturally associated with elements of the projective space \mathbb{P}^{n+1} . Recall that \mathbb{P}^{n+1} is the set of equivalence classes of vectors in $\mathbb{R}^{n+2} \setminus \{0\}$ modulo the equivalence relation,

$$\xi \sim \eta \text{ iff } \xi = \lambda\eta, \text{ for some real } \lambda \neq 0.$$

We denote by $[\xi]$ the equivalence class determined by a nonzero vector ξ .

Notice that the sign of the Lorentz norm is constant on equivalence classes of the relation \sim . It then makes sense to define the *space of spheres*, denoted by \mathcal{C}/\sim , as the set of elements of \mathbb{P}^{n+1} on which the Lorentz norm is non-negative, i.e.,

$$\mathcal{C}/\sim = \{[\xi] \in \mathbb{P}^{n+1} \mid \rho(\xi) \geq 0\}.$$

We can associate with any geometry a unique element of \mathbb{P}^{n+1} as follows:

(i) with a point $p \in \mathbb{R}^n$ we associate $[\xi]$, where

$$\xi = \left(p, \frac{1 - |p|^2}{2}, \frac{1 + |p|^2}{2} \right), \quad (4.2)$$

(ii) with a sphere $S \subset \mathbb{R}^n$ with center p and radius r we associate $[\xi]$, where

$$\xi = \left(p, \frac{1 - |p|^2 + r^2}{2}, \frac{1 + |p|^2 - r^2}{2} \right), \quad (4.3)$$

(iii) with a hyperplane H of equation $N^\top x = h$ with $x \in \mathbb{R}^n$ and unit normal N we associate $[\xi]$, where

$$\xi = (N, -h, h). \quad (4.4)$$

We obtain in this way an injective map

$$\phi : \mathbb{R}^n \cup \text{Spheres} \cup \text{Hyperplanes} \longrightarrow \mathcal{C}/\sim. \quad (4.5)$$

Conversely any element of \mathcal{C}/\sim defines the equation of a geometry, with the exception of $[(0, \dots, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})]$, which corresponds to the constant quadratic forms. Therefore, we will add to \mathbb{R}^n a point at infinity and we use **Points** to denote the space $\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ (which coincides with the Alexandroff extension of \mathbb{R}^n). Setting $\phi(\infty) = [(0, \dots, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})]$, we transform ϕ in a bijection map. Therefore, (4.5) becomes

$$\phi : \text{Points} \cup \text{Spheres} \cup \text{Hyperplanes} \longrightarrow \mathcal{C}/\sim.$$

The image $\phi(\text{Points})$ is the set $\{\rho = 0\}$ of elements of \mathcal{C}/\sim of null norm and $\phi(\text{Spheres} \cup \text{Hyperplanes})$ is the set $\{\rho > 0\}$ of elements of positive norm.

Lorentz inner product Observe that the Lorentz metric plays a crucial role in the space of spheres. Let us define the non-degenerate symmetric bilinear form $\langle \cdot, \cdot \rangle$ on \mathbb{R}^{n+2} with signature $(n+1, 1)$, called *Lorentz inner product*, as

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_{n+1} \eta_{n+1} - \xi_{n+2} \eta_{n+2}. \quad (4.6)$$

We can rewrite (4.6) as

$$\langle \xi, \eta \rangle = \xi^\top J \eta,$$

where J is the matrix $J := \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$.

Notice that

$$\rho(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle. \quad (4.7)$$

This inner product is not positive definite and separates the vectors in three different classes.

4.1. PRELIMINARIES

Definition 4.1.2. A vector ξ in \mathbb{R}^{n+2} is said to be spacelike, lightlike, or timelike, respectively, if $\rho(\xi)$ is positive, zero or negative.

Notation 4.1.3. We denote by \mathcal{C} the cone in \mathbb{R}^{n+2} defined as

$$\mathcal{C} = \{\xi \in \mathbb{R}^{n+2} \mid \rho(\xi) \geq 0, \xi \neq 0\}.$$

An important property of \mathcal{C} is that the geometrical properties of an object are coded by its Lorentz norm and its inner product with the other elements. Indeed, we have the following result, where we have chosen as representative of the point at infinity the $(n+2)$ -tuple $\xi_\infty := (0, \dots, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Property 4.1.4. Let $\xi \in \mathcal{C}$. We have

- if $\rho(\xi) > 0$ and $\langle \xi, \xi_\infty \rangle \neq 0$, then ξ corresponds to the sphere $S(p, r)$, where

$$p = \frac{\bar{\xi}}{\langle \xi, \xi_\infty \rangle} \quad \text{and} \quad r = \frac{\sqrt{\rho(\xi)}}{|\langle \xi, \xi_\infty \rangle|};$$

- if $\rho(\xi) > 0$ and $\langle \xi, \xi_\infty \rangle = 0$, then ξ corresponds to the hyperplane $H(N, h)$, where

$$N = \frac{\bar{\xi}}{\sqrt{\rho(\xi)}} \quad \text{and} \quad h = \frac{\xi_{n+1}}{\sqrt{\rho(\xi)}};$$

- if $\rho(\xi) = 0$ and $\langle \xi, \xi_\infty \rangle \neq 0$, then $[\xi]$ represents a point;
- if $\rho(\xi) = 0$ and $\langle \xi, \xi_\infty \rangle = 0$, then $[\xi] = [\xi_\infty]$ represents the point at infinity.

Remark 4.1.5. The inner product between two elements of \mathcal{C}/\sim encodes the relative positions of the corresponding geometries. For example, let us consider two elements $[\xi], [\zeta]$ of \mathcal{C}/\sim , the first one representing a point $p \in \mathbb{R}^n$, i.e. $\phi(p) = [\xi]$. Then $\langle \zeta, \xi \rangle = 0$ if and only if p belongs to $\phi^{-1}([\zeta])$ (which is a point, a sphere or an hyperplane).

The space of spheres is therefore a good candidate to model a sketch: the geometries are viewed as elements of \mathcal{C}/\sim and all constraints are expressed using the Lorentz inner product. We discuss in the next sections how to solve such a sketch, that is, how to perturb continuously the elements of a set of geometries in order to enforce a prescribed family of constraints.

Normalization Our goal here is to give some coordinates on \mathcal{C} , i.e., to work on a subset of \mathbb{R}^{n+2} instead of the space \mathbb{P}^{n+1} . Indeed, for implementing algorithmically a sketch resolution, it is useful to work with quadratic forms rather than elements of the standard projective space \mathbb{P}^{n+1} . So, every equivalence class $X \in \mathcal{C}/\sim$ will have a unique *normalized representative* $\xi_X \in \mathcal{C}$, which satisfies $[\xi_X] = X$.

To give a unique normalized representative for every geometry ξ_X , there are many choices of normalization, for example the one given in the following table.

	Point $p \rightarrow \xi_p$	Sphere $S \rightarrow \xi_S$	Hyperplane $H \rightarrow \xi_H$
Normalization (N_1)	$\rho(\xi_p) = 0$ & $\langle \xi_p, \xi_\infty \rangle = -1$	$\rho(\xi_S) = 1$ & $\langle \xi_S, \xi_\infty \rangle > 0$	$\rho(\xi_H) = 1$ & $\langle \xi_H, \xi_0 \rangle \geq 0$ & $\langle \xi_H, \xi_\infty \rangle = 0$

Notice that in the table ξ_0 denotes the normalized representative of the point 0.

Remark 4.1.6. The normalization above is given in [34] and [35].

In the sequel of this work, we restrict our attention to the case $n = 2$. Moreover, based on (N_1), we work with the non-connected set $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^4$,

$$\mathcal{C} = \{\rho = 1\} \cup \{\rho = 0, \langle \xi, \xi_\infty \rangle = -1\},$$

which is the union of two submanifolds of \mathbb{R}^4 of dimension 3 and 2 respectively.

Notation 4.1.7. Hereafter, we use the following notations

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &:= \{\xi \in \mathbb{R}^4 \mid \rho(\xi) = 0, \langle \xi, \xi_\infty \rangle = -1\}, \\ \Lambda &:= \{\xi \in \mathbb{R}^4 \mid \rho(\xi) = 1\}, \\ \Lambda_c &:= \{\xi \in \mathbb{R}^4 \mid \rho(\xi) = 1, \langle \xi, \xi_\infty \rangle = c\}. \end{aligned}$$

The normalization above provides a bijection map ξ between the set of geometries {points, circles, lines} and the space $\Lambda \cup \mathcal{P}$. It can be resumed as follows.

Point p	Circle $C := C(p, r)$	Line $H := H(N, h)$
$\xi(p) = (-2p, -1 + p ^2, -1 - p ^2)$ $\left\{ \begin{array}{l} \rho(\xi(p)) = 0 \\ \langle \xi(p), \xi_\infty \rangle = -1 \end{array} \right.$	$\xi(C) = \left(\frac{p}{r}, \frac{1- p ^2+r^2}{2r}, \frac{1+ p ^2-r^2}{2r} \right)$ $\rho(\xi(C)) = 1$	$\xi(H) = (N, h, -h)$ $\left\{ \begin{array}{l} \rho(\xi(H)) = 1 \\ \langle \xi(H), \xi_\infty \rangle = 0 \end{array} \right.$

In the following paragraph, we briefly give some important definitions and properties of the Lorentz group. More details are given in Annex 6.

Properties of Lorentz Group The Lorentz group $\mathbf{O}(3, 1)$ is the subgroup of $\text{GL}(4, \mathbb{R})$ which preserves the Lorentz inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. In matrix form, we have

$$\mathbf{O}(3, 1) = \{M \in \text{GL}(4, \mathbb{R}) \mid M^\top J M = J\},$$

where the matrix J is defined as

$$J = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I_3 \text{ being the } 3 \times 3\text{-identity matrix.}$$

Differentiating the condition $M^\top JM = J$ at the identity, we obtain the Lie algebra \mathfrak{g} of $\mathbf{O}(3,1)$. This gives us

$$\mathfrak{g} = J\mathfrak{so}(4) = \{A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \mid A^\top J + JA = 0\}.$$

Property 4.1.8. The following properties hold true.

1. The Lie algebra \mathfrak{g} can be written as follows

$$\mathfrak{g} = \left\{ A(\omega, v) = \begin{pmatrix} s(\omega) & v \\ v^\top & 0 \end{pmatrix} \mid v, \omega \in \mathbb{R}^3 \right\}, \text{ with } s(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(3).$$

2. The commutation between two elements $A(\bar{\omega}, \bar{v})$ and $A(\hat{\omega}, \hat{v})$ of \mathfrak{g} is given by

$$[A(\bar{\omega}, \bar{v}), A(\hat{\omega}, \hat{v})] = A(\bar{\omega} \wedge \hat{\omega} + \hat{v} \wedge \bar{v}, \bar{\omega} \wedge \hat{v} - \hat{\omega} \wedge \bar{v}).$$

Proof. Straightforward by a direct computation.

Next, we recall the following important properties of $\mathbf{O}(3,1)$. More details are given in Annex 6 (see in particular Lemma 6.3.2).

- Property 4.1.9.**
1. The Lorentz group $\mathbf{O}(3,1)$ has 4 connected components. Its identity component (i.e., the component containing the identity element) is often called the *restricted Lorentz group*, and is denoted $\mathbf{SO}^+(3,1)$.
 2. The restricted Lorentz group is a Lie group which is the image of its Lie subalgebra by the exponential map,

$$\mathbf{SO}^+(3,1) = \exp(\mathfrak{so}(3,1)).$$

3. For every $c \geq 0$ the group $\mathbf{SO}^+(3,1)$ acts transitively on $\{\rho = c\}$.

Remark 4.1.10. The third property in the list above means that given an element ξ of positive or null Lorentz norm, any point of same norm can be written as $M\xi$, for some $M \in \mathbf{SO}^+(3,1)$.

In order to study the orbit of an element ξ of \mathcal{C} under the action of subgroups of $\mathbf{SO}^+(3,1)$, it is useful to consider the transformations that leave ξ fixed.

Definition 4.1.11. *The isotropy group of ξ is the subgroup of the Lorentz group $\mathbf{SO}^+(3,1)$ consisting of the elements leaving ξ invariant, i.e.,*

$$\mathbf{Iso}(\xi) = \{g \in \mathbf{SO}^+(3,1) \mid g\xi = \xi\}.$$

For any given $\xi \in \mathcal{C}$, since $\mathbf{SO}^+(3, 1)$ acts transitively on $\{\eta \in \mathcal{C} \mid \rho(\eta) = \rho(\xi)\}$, then there is a bijection between $\{\eta \in \mathcal{C} \mid \rho(\eta) = \rho(\xi)\}$ and the quotient $\mathbf{SO}^+(3, 1) / \mathbf{Iso}(\xi)$.

Lemma 4.1.12. *Let $M \in \mathbf{O}(3, 1)$. Then, $M \cdot \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ if and only if $M \in \mathbf{Iso}(\xi_\infty)$.*

Proof. Let $M \in \mathbf{O}(3, 1)$. Then $M \cdot \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ if and only if $\langle M\xi, \xi_\infty \rangle = -1$ for all $\xi \in \mathcal{P}$ (recall that $\rho(M\xi) = \rho(\xi)$). Since $\langle M\xi, M\xi_\infty \rangle = -1$, we deduce that $M \cdot \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ if and only if $\langle M\xi, M\xi_\infty \rangle = \langle M\xi, \xi_\infty \rangle$, that is, $\langle M\xi, (M - J)\xi_\infty \rangle = 0$, or, equivalently, $M\xi \in (M\xi_\infty - \xi_\infty)^\perp \cap \{\rho = 0\}$.

Clearly if $M\xi_\infty = \xi_\infty$ then $M \cdot \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$. Assume now that $M\xi_\infty \neq \xi_\infty$. Now notice that $(M\xi_\infty - \xi_\infty)^\perp \cap \{\rho = 0\} = \mathbb{R}(M\xi_\infty - \xi_\infty)$ (see [33]). Hence, if $M \cdot \mathcal{P} \subset \mathcal{P}$ then for all $\xi \in \mathcal{P}$ there would exist $\lambda \in \mathbb{R}$ such that $M\xi = \lambda(M\xi_\infty - \xi_\infty)$. Since, moreover, $\langle M\xi, \xi_\infty \rangle = -1$ and $\langle M\xi, M\xi_\infty \rangle = -1$, then λ would be equal to zero, which is impossible.

4.1.2 Particular Elements of the Restricted Lorentz Group

Let us denote by \mathfrak{g} the Lie algebra of the Lie group $\mathbf{SO}^+(3, 1)$. In order to discuss the orbits of different subgroups of $\mathbf{SO}^+(3, 1)$, we describe some of its elements: translations, “anti-translations”, dilations, and rotations.

4.1.2.1 Translations

Let \mathfrak{t} be the two-dimensional vector subspace of \mathfrak{g} defined by

$$\begin{aligned} \mathfrak{t} &= \left\{ T(u) = A(\omega, v) \mid \omega = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}, u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ T(u) = \begin{pmatrix} 0 & u & u \\ -u^\top & 0 & 0 \\ u^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}^2 \right\}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Lemma 4.1.13. *The 2-dimensional vector subspace \mathfrak{t} is an Abelian Lie subalgebra of \mathfrak{g} . Moreover, $\exp(T(u)) \cdot \xi(p) = \xi(p + u)$. Then, $\exp(\mathfrak{t})$ represents the translation group.*

Proof. Due to Property 4.1.8, we can easily prove that $[T(u), T(u')] = 0$ for every $u, u' \in \mathbb{R}^2$. Therefore, the vector subspace \mathfrak{t} is an Abelian Lie subalgebra of \mathfrak{g} .

One easily checks that the exponential of a matrix $T(u) \in \mathfrak{t}$ is

$$e^{T(u)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & u_1 & u_1 \\ 0 & 1 & u_2 & u_2 \\ -u_1 & -u_2 & 1 - \frac{|u|^2}{2} & -\frac{|u|^2}{2} \\ u_1 & u_2 & \frac{|u|^2}{2} & 1 + \frac{|u|^2}{2} \end{pmatrix}.$$

4.1. PRELIMINARIES

Hence, the matrices of the form above form an Abelian subgroup $\exp(\mathfrak{t})$ of $\mathbf{SO}^+(3,1)$. Furthermore, for every $\xi \in \mathcal{C}$ representing a point, a circle or a line, we have

$$e^{T(u)}.\xi = \begin{pmatrix} (\xi_3 + \xi_4)u + \xi_{(1,2)} \\ -\frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4)|u|^2 - u^T \xi_{(1,2)} + \xi_3 \\ \frac{1}{2}(\xi_3 + \xi_4)|u|^2 + u^T \xi_{(1,2)} + \xi_4 \end{pmatrix}, \quad \text{where } \xi_{(1,2)} = (\xi_1, \xi_2)^T. \quad (4.9)$$

In particular, if ξ represents a point, i.e., $\xi_{(1,2)} = -2p$, $\xi_3 = -1 + |p|^2$ and $\xi_4 = -1 - |p|^2$, then Equation (4.9) becomes

$$e^{T(u)}.\xi(p) = (-2(u+p), |u+p|^2 - 1, -|u+p|^2 - 1).$$

We conclude that, $e^{T(u)}.\xi(p) = \xi(p+u)$, so the displacement corresponds to a translation in \mathbb{R}^2 . This completes the proof.

Remark 4.1.14. By Remark 4.1.5, we know that a geometry g is characterized by

$$g = \{p \mid \langle \xi(p), \xi(g) \rangle = 0\}.$$

Since $\langle e^{T(u)}\xi(p), e^{T(u)}\xi(g) \rangle = \langle \xi(p), \xi(g) \rangle$, then, $e^{T(u)}\xi(g) = \xi(g+u)$.

4.1.2.2 Anti-translations

Let $K(u)$ be a matrix of \mathfrak{g} of the form

$$K(u) = \begin{pmatrix} 0 & -u & u \\ u^T & 0 & 0 \\ u^T & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{where } u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2.$$

The matrices of this type form a 2-dimensional vector subspace of \mathfrak{g} , denoted by $\bar{\mathfrak{t}}$, which can be parametrized as follows:

$$\bar{\mathfrak{t}} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

It is easy to check that $[\bar{\mathfrak{t}}, \bar{\mathfrak{t}}] = 0$, so $\bar{\mathfrak{t}}$ is an *Abelian Lie subalgebra* of \mathfrak{g} .

The exponential of the matrix $K(u)$ is equal to

$$e^{K(u)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -u_1 & u_1 \\ 0 & 1 & -u_2 & u_2 \\ u_1 & u_2 & 1 - \frac{1}{2}|u|^2 & \frac{1}{2}|u|^2 \\ u_1 & u_2 & -\frac{1}{2}|u|^2 & 1 + \frac{1}{2}|u|^2 \end{pmatrix}.$$

We recall now a classical definition for semisimple Lie algebras.

Definition 4.1.15. *The Cartan involution θ is the automorphism of $\mathfrak{so}(3,1)$ defined by*

$$\theta(A) = -A^T.$$

Remark 4.1.16. By the definition above, we observe that the image of $\bar{\mathfrak{t}}$ under the Cartan involution θ is the Lie subalgebra \mathfrak{t} , defined in the paragraph above.

Geometric Interpretation In this section, we study the action of the group $\exp(\bar{\mathfrak{t}})$ on a geometry $\xi \in \Lambda$, distinguishing the three cases where ξ represents a circle, a vector line and an affine line not passing through the origin.

Circles Let for instance $\xi = \xi_{C(0,1)}$. Then we have

$$e^{K(u)}\xi = \left(-u_1, -u_2, 1 - \frac{|u|^2}{2}, -\frac{|u|^2}{2}\right)^\top =: \bar{\xi}.$$

Observe that $\langle \bar{\xi}, \xi_\infty \rangle = 1 - |u|^2$. Therefore,

1. if $\langle \bar{\xi}, \xi_\infty \rangle = 0$, i.e., $|u|^2 = 1$, then $\bar{\xi}$ represents an affine line of unit normal $\bar{N} = (-u_1, -u_2)$ and $\bar{h} = \frac{1}{2}$;
2. if $|u|^2 < 1$, then $\bar{\xi}$ represents a circle of center $p = (-u_1, -u_2)$ and radius $r = \frac{1}{1-|u|^2}$;
3. if $|u|^2 > 1$, then $\bar{\xi}$ represents a circle of center $p = (u_1, u_2)$ and radius $r = \frac{1}{|u|^2-1}$.

By the group $\exp(\bar{\mathfrak{t}})$, we can pass continuously from a circle of centre 0 to circles of different radii, passing through affine lines.

Vector lines Let $\xi = (N, 0, 0)$ with $N \in \mathbb{R}^2$ of unit norm. Then, we have

$$e^{K(u)}\xi = (N, u^\top N, u^\top N)^\top =: \bar{\xi}.$$

Observe that $\langle \bar{\xi}, \xi_\infty \rangle = 2u^\top N$. Therefore,

1. if $u \perp N$, then, $e^{K(u)}\xi = \xi$ (we do not move);
2. if $u^\top N > 0$, then, $\bar{\xi}$ represents a circles of center $p = N$ and radius $r = \frac{1}{2u^\top N}$;
3. if $u^\top N < 0$, then, $\bar{\xi}$ represents a circles of center $p = -N$ and radius $r = \frac{1}{2u^\top N}$.

We can pass continuously from a vector line to a circle through the action of $\exp(\bar{\mathfrak{t}})$.

Affine lines Consider an affine line $\xi = (N, h, -h)$ with $h \neq 0$. Then, we have

$$e^{K(u)}\xi = \begin{pmatrix} N - 2hu \\ u^\top N + (1 - |u|^2)h \\ u^\top N - (1 + |u|^2)h \end{pmatrix} =: \bar{\xi}.$$

Observe that $\langle \bar{\xi}, \xi_\infty \rangle = 2(u^\top N - h|u|^2)$. Therefore,

1. if $\langle \bar{\xi}, \xi_\infty \rangle = 0$, then $e^{K(u)}\xi$ is an affine line not passing through the origin and orthogonal to $N - 2hu$;
2. if $\langle \bar{\xi}, \xi_\infty \rangle \neq 0$, then $\bar{\xi}$ represents a circle of center $p = \frac{N-2hu}{2(u^\top N - |u|^2 h)}$ and radius $r = \frac{1}{2(u^\top N - |u|^2 h)}$.

By $\exp(\bar{\mathfrak{t}})$, we can pass continuously from an affine line to a circle.

4.1.2.3 Dilations

For $\lambda \in \mathbb{R}$, we consider the matrix $D(\lambda)$ defined by

$$D(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Lemma 4.1.17. *Let \mathfrak{d} be the vector subspace of \mathfrak{g} defined as*

$$\mathfrak{d} = \left\{ D(\lambda) = A(0, \lambda e_3) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathfrak{g}. \quad (4.10)$$

Then, \mathfrak{d} is a one-dimensional Abelian Lie subalgebra of \mathfrak{g} and $\exp(\mathfrak{d}) \in \mathbf{SO}^+(3, 1)$ represents the group of homotheties.

Proof. Since \mathfrak{d} is a one-dimensional vector subspace of \mathfrak{g} , then obviously \mathfrak{d} is abelian. The exponential of the matrix $D(\lambda)$ is equal to

$$e^{D(\lambda)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch}(\lambda) & \text{sh}(\lambda) \\ 0 & 0 & \text{sh}(\lambda) & \text{ch}(\lambda) \end{pmatrix}.$$

For every $\xi \in \mathcal{C}$, we get

$$e^{D(\lambda)}\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3 \text{ch}(\lambda) + \xi_4 \text{sh}(\lambda), \xi_3 \text{sh}(\lambda) + \xi_4 \text{ch}(\lambda))^T =: \bar{\xi}. \quad (4.11)$$

Observe that, by (4.11), we have

$$\langle \bar{\xi}, \xi_\infty \rangle = (\xi_3 + \xi_4)(\text{ch}(\lambda) + \text{sh}(\lambda)) = (\xi_3 + \xi_4)e^\lambda. \quad (4.12)$$

Therefore, from (4.12), we have

1. if $\xi \in \text{Lines}$, then $\langle \bar{\xi}, \xi_\infty \rangle = -2e^\lambda$,
2. if $\xi \in \text{Circles}$, then $\langle \bar{\xi}, \xi_\infty \rangle = \frac{1}{r}e^\lambda$.

We deduce that $e^{D(\lambda)}$ is a homothety of ratio $e^{-\lambda}$.

4.1.2.4 Rotations

Let us define the vector subspace

$$\begin{aligned} \mathfrak{r} &= \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, v = 0 \right\} \\ &= \left\{ R(\alpha) = \begin{pmatrix} B(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid B(\alpha) \in \mathfrak{so}(2) \right\}. \end{aligned}$$

The one-dimensional space \mathfrak{r} is an Abelian Lie subalgebra of \mathfrak{g} . It is immediately verified that the exponential of the matrix $R(\alpha)$ defined above is equal to

$$e^{R(\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Then, we obtain the following result.

Lemma 4.1.18. *The group $\exp(\mathfrak{r}) \in \mathbf{SO}^+(3, 1)$ represents the group of rotations.*

4.1.2.5 Remarks

In this section, we establish the relationship between the previously introduced Lie subalgebras of \mathfrak{g} .

It is easy to check that we have the following Lie bracket relations

$$[\mathfrak{t}, \mathfrak{t}] = 0, \quad [\mathfrak{t}, \mathfrak{r}] \subseteq \mathfrak{t}, \quad [\mathfrak{t}, \mathfrak{d}] \subseteq \mathfrak{t}, \quad [\mathfrak{r}, \mathfrak{d}] = 0.$$

We also have

$$[\bar{\mathfrak{t}}, \bar{\mathfrak{t}}] = 0, \quad [\bar{\mathfrak{t}}, \mathfrak{r}] \subseteq \bar{\mathfrak{t}}, \quad [\bar{\mathfrak{t}}, \mathfrak{d}] \subseteq \bar{\mathfrak{t}}.$$

So, the following direct sums are subalgebras of \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g}_\Lambda^1 := \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{d} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_\Lambda^2 := \bar{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{d} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_\Lambda^3 := \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{r} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_\Lambda^4 := \bar{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{r} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_\Lambda^5 := \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{d} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_\Lambda^6 := \bar{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{d} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_\Lambda^7 := \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{d} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe that

1. if $i \in \{1, 2\}$, then \mathfrak{g}_Λ^i is a 4-dimensional Lie subalgebra of \mathfrak{g} ,
2. if $i \in \{3, \dots, 6\}$, then \mathfrak{g}_Λ^i is a 3-dimensional Lie subalgebras of \mathfrak{g} .
3. \mathfrak{g}_Λ^7 is a 2-dimensional Lie subalgebras of \mathfrak{g} .

Other useful Lie subalgebras of \mathfrak{g} can be defined as

$$\mathfrak{s}_1 = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = 0 \right\}, \quad \mathfrak{s}_2 = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}, v = 0 \right\},$$

$$\mathfrak{z}_1 = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = 0, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{z}_2 = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = 0, v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

It is easy to check the following Lie bracket relations

$$\begin{aligned} [\mathfrak{s}_1, \mathfrak{d}] &\subset \mathfrak{z}_2, & [\mathfrak{d}, \mathfrak{z}_2] &\subset \mathfrak{s}_1, & [\mathfrak{s}_1, \mathfrak{z}_2] &\subset \mathfrak{d}, \\ [\mathfrak{s}_2, \mathfrak{d}] &\subset \mathfrak{z}_1, & [\mathfrak{d}, \mathfrak{z}_1] &\subset \mathfrak{s}_2, & [\mathfrak{s}_2, \mathfrak{z}_1] &\subset \mathfrak{d}, \\ [\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2] &\subset \mathfrak{r}, & [\mathfrak{z}_1, \mathfrak{r}] &\subset \mathfrak{z}_2, & [\mathfrak{z}_2, \mathfrak{r}] &\subset \mathfrak{z}_1, \\ [\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2] &\subset \mathfrak{r}, & [\mathfrak{s}_1, \mathfrak{r}] &\subset \mathfrak{s}_2, & [\mathfrak{s}_2, \mathfrak{r}] &\subset \mathfrak{s}_1. \end{aligned}$$

Then, for $i = 8, \dots, 11$, each \mathfrak{g}_Λ^i , defined here below, is a 3-dimensional Lie subalgebra of \mathfrak{g} :

$$\mathfrak{g}_\Lambda^8 := \mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{z}_2 \oplus \mathfrak{d} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_\Lambda^9 := \mathfrak{s}_2 \oplus \mathfrak{z}_1 \oplus \mathfrak{d} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_\Lambda^{10} := \mathfrak{z}_1 \oplus \mathfrak{z}_2 \oplus \mathfrak{r} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

$$\mathfrak{g}_\Lambda^{11} := \mathfrak{s}_1 \oplus \mathfrak{s}_2 \oplus \mathfrak{r} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

We conclude this section by a table which describes the typical matrix of any of the Lie subalgebras of \mathfrak{g} introduced above, as well as its exponential map.

Lie Subalgebra	Matrix Lie Subalgebra	Matrix exponential
$\mathfrak{t} = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$	$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_1 & v_1 \\ 0 & 0 & v_2 & v_2 \\ -v_1 & -v_2 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & v_1 & v_1 \\ 0 & 1 & v_2 & v_2 \\ -v_1 & -v_2 & 1 - \frac{ v ^2}{2} & -\frac{ v ^2}{2} \\ v_1 & v_2 & \frac{ v ^2}{2} & 1 + \frac{ v ^2}{2} \end{pmatrix}$
$\bar{\mathfrak{t}} = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$	$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -v_1 & v_1 \\ 0 & 0 & -v_2 & v_2 \\ v_1 & v_2 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e^K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -v_1 & v_1 \\ 0 & 1 & -v_2 & v_2 \\ v_1 & v_2 & 1 - \frac{ v ^2}{2} & \frac{ v ^2}{2} \\ v_1 & v_2 & -\frac{ v ^2}{2} & 1 + \frac{ v ^2}{2} \end{pmatrix}$
$\mathfrak{s}_1 = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v = 0 \right\}$	$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e^{S_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\omega_1) & -\sin(\omega_1) & 0 \\ 0 & \sin(\omega_1) & \cos(\omega_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{s}_2 = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}, v = 0 \right\}$	$S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \omega_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e^{S_2} = \begin{pmatrix} \cos(\omega_2) & 0 & \sin(\omega_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\omega_2) & 0 & \cos(\omega_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{r} = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, v = 0 \right\}$	$R = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & 0 & 0 \\ \omega_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e^R = \begin{pmatrix} \cos(\omega_3) & -\sin(\omega_3) & 0 & 0 \\ \sin(\omega_3) & \cos(\omega_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\mathfrak{z}_1 = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = 0, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$	$Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e^{Z_1} = \begin{pmatrix} \text{ch}(v_1) & 0 & 0 & \text{sh}(v_1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sh}(v_1) & 0 & 0 & \text{ch}(v_1) \end{pmatrix}$
$\mathfrak{z}_2 = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = 0, v = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$	$Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & v_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$e^{Z_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{ch}(v_2) & 0 & \text{sh}(v_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \text{sh}(v_2) & 0 & \text{ch}(v_2) \end{pmatrix}$
$\mathfrak{d} = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = 0, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\}$	$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & v_3 & 0 \end{pmatrix}$	$e^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{ch}(v_3) & \text{sh}(v_3) \\ 0 & 0 & \text{sh}(v_3) & \text{ch}(v_3) \end{pmatrix}$

4.1.3 Annihilator of Geometry

We conclude Section 4.1 by defining the annihilator of the geometry ξ .

Definition 4.1.19. *The annihilator of ξ , denoted by $\text{Ann}(\xi)$, is the set of all $A \in \mathfrak{g}$ such that $A\xi = 0$.*

Remark 4.1.20. For $\lambda \neq 0$, we have $\text{Ann}(\lambda\xi) = \text{Ann}(\xi)$. Then, we can define $\text{Ann}([\xi]) = \text{Ann}(\xi)$.

We set $\xi = (\tilde{\xi}, \xi_4) \in \mathcal{C}$ with $\tilde{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Then, by Property 4.1.8, $\text{Ann}(\xi)$ can be written as

$$\text{Ann}(\xi) = \{A(\omega, v) \mid \omega \wedge \tilde{\xi} + \xi_4 v = 0 \text{ and } v^\top \tilde{\xi} = 0\}. \quad (4.13)$$

Remark 4.1.21. 1. If $\xi \in \mathcal{C}$, then $\tilde{\xi} \neq 0$ (otherwise $\rho(\xi) < 0$: timelike).

2. Let $\xi \in \mathcal{C}$. The following properties hold true

- (a) if $\xi_4 = 0$, then $A(\omega, v) \in \text{Ann}(\xi)$ if and only if $\omega \parallel \tilde{\xi}$ and $v \perp \tilde{\xi}$.
- (b) if $\xi_4 \neq 0$, then $A(\omega, v) \in \text{Ann}(\xi)$ implies that $v \perp \tilde{\xi}$ (and ω may be any vector of \mathbb{R}^3).

Now, we decompose the Lie algebra \mathfrak{g} as the following direct sum

$$\mathfrak{g} = \text{Ann}(\xi) \oplus \text{supp}(\text{Ann}(\xi)),$$

where $\text{supp}(\text{Ann}(\xi))$ denotes any supplement of $\text{Ann}(\xi)$. For example we can take the Euclidean orthogonal of $\text{Ann}(\xi)$, denoted by $(\text{Ann}(\xi))^\perp$ and defined as follows.

Definition 4.1.22. *The Euclidean orthogonal of the annihilator of ξ is given by*

$$(\text{Ann}(\xi))^\perp = \{B \in \mathfrak{g} \mid \text{Tr}(A^\top B) = 0 \ \forall A \in \text{Ann}(\xi)\}.$$

By using the relations $\text{Tr}(s(\omega)s(\bar{\omega})) = -2\omega^\top \bar{\omega}$ and $\text{Tr}(v\bar{v}^\top + v^\top \bar{v}) = 2v^\top \bar{v}$, we have

$$(\text{Ann}(\xi))^\perp = \{A(\bar{\omega}, \bar{v}) \in \mathfrak{g} \mid \omega^\top \bar{\omega} + v^\top \bar{v} = 0 \ \forall (\omega, v) \in \mathbb{R}^6 \text{ such that } A(\omega, v) \in \text{Ann}(\xi)\}. \quad (4.14)$$

4.2 Study of Displacements

In this section, we focus on displacements of geometries and on orbits of subgroups of $\text{SO}^+(3, 1)$.

4.2.1 Strategy

The sketch-solving algorithm works by modifying continuously the geometries in the sketch in order to decrease some functional, which corresponds to the constraints that the user wants to impose. The modification can be asked, moreover, to preserve some of the properties of the geometry. For instance, the user could ask a line to stay a line, or a circle to keep its radius.

Given a geometry $\xi \in \mathcal{C}$, we want to parameterize the family of all geometries sharing some property of ξ that should be preserved as an orbit $\text{Orb}_\xi(\mathbf{F}) = \mathbf{F}\xi$, where $\mathbf{F} \subset \text{SO}^+(3, 1)$ is a subgroup of displacements. The ideal situation is when \mathbf{F} is isomorphic to the quotient $\text{SO}^+(3, 1) / \text{Iso}(\xi)$ (which, however, is not in general a subgroup of ξ). In more general cases, we might want the dimension of \mathbf{F} to be as small as possible, in order to reduce the number of parameters entering in the minimization procedure which corresponds to the solution of the constraints.

The most relevant families of geometries that we want to parameterize by displacements are the following:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \{\xi \in \mathbb{R}^4 \mid \rho(\xi) = 0, \langle \xi, \xi_\infty \rangle = -1\}, \\ \Lambda &= \{\xi \in \mathbb{R}^4 \mid \rho(\xi) = 1\}, \\ \Lambda_c &= \{\xi \in \mathbb{R}^4 \mid \rho(\xi) = 1, \langle \xi, \xi_\infty \rangle = c\} \text{ (in particular, } \Lambda_0 = \{\xi \in \mathbb{R}^4 \mid \rho(\xi) = 1, \langle \xi, \xi_\infty \rangle = 0\}\text{)}.\end{aligned}$$

Note that all such sets are submanifolds of \mathbb{R}^4 contained in a level set of the Lorentz norm ρ .

Let N be one of the families of the list above and fix $\xi \in N$. The main tool for characterizing the subgroups of $\mathbf{SO}^+(3, 1)$ acting transitively on N is the following classical result.

Theorem 4.2.1. *Let N be a connected submanifold of \mathbb{R}^4 and let S be a Lie subalgebra of \mathfrak{g} . Denote by \mathbf{F} the group generated by S , i.e., $\mathbf{F} = \exp(S)$. If*

$$\dim(\text{Ann}(\xi) \cap S) = \dim S - \dim N \quad (4.15)$$

and $\mathbf{F}.\xi \subset N$ for every $\xi \in N$, then, \mathbf{F} acts transitively on N , i.e.,

$$\text{Orb}_\xi(\mathbf{F}) = \mathbf{F}.\xi = N, \quad \forall \xi \in N. \quad (4.16)$$

Proof. For any fixed $\xi \in N$, consider the map

$$\begin{aligned}\phi_\xi &: S \rightarrow N \\ &A \mapsto \exp(A).\xi.\end{aligned}$$

Since $D\phi_\xi(0).M = M\xi$ for every $M \in S$, then $\ker D\phi_\xi(0) = \text{Ann}(\xi) \cap S$. We deduce that the dimension of the image of $D\phi_\xi(0)$ is equal to $\dim S - \dim(\text{Ann}(\xi) \cap S) = \dim N$, that is, ϕ_ξ is a submersion at 0. The orbit $\mathbf{F}.\xi$ is therefore a neighborhood of ξ . Since the orbits of \mathbf{F} provide a partition of N ($\xi' \in \mathbf{F}.\xi$ if and only if $\xi \in \mathbf{F}.\xi'$), then we conclude by the connectedness of N that (4.16) holds true.

Notice that in the case where $\dim S = \dim N$, condition (4.15) becomes $\dim(\text{Ann}(\xi) \cap S) = \{0\}$. Thus our strategy consists of finding, when possible, \mathbf{F} in the form $\mathbf{F} = \exp(S)$, where S satisfies the following properties:

- (\mathcal{P}_1) S is a vector subspace of \mathfrak{g} of dimension equal to $\dim N$;
- (\mathcal{P}_2) $\text{Ann}(\xi) \cap S = \{0\}$, $\forall \xi \in N$;
- (\mathcal{P}_3) S is a Lie subalgebra of \mathfrak{g} ;
- (\mathcal{P}_4) $\mathbf{F}N \subset N$.

When not all three properties can be satisfied simultaneously, we will discuss how to relax them in order to get a suitable choice of displacements to use in the sketch-solving algorithm.

4.2.2 Displacement group for the submanifold \mathcal{P}

The natural choice for a two-dimensional group of displacements of the set of points is the group \mathfrak{t} of planar translations. Let us check how this choice is the unique one which is compatible with the general approach discussed in the previous section.

Due to Lemma 4.1.12, displacements satisfying (\mathcal{P}_4) for $N = \mathcal{P}$ should be searched in the isotropy group of ξ_∞ . Hence, we look for a subspace S of \mathfrak{g} which is contained in the Lie algebra of $\mathbf{Iso}(\xi_\infty)$, i.e., in $\text{Ann}(\xi_\infty)$, and which is transversal to $\text{Ann}(\xi)$ for every $\xi \in \mathcal{P}$ (property (\mathcal{P}_2)).

Let us compute $\text{Ann}(\xi_\infty)$. By Equation (4.13), we have

$$\text{Ann}(\xi_\infty) = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega \in \mathbb{R}^3, v = \begin{pmatrix} \omega_2 \\ -\omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.17)$$

Therefore, the annihilator of ξ_∞ is a three-dimensional vector subspace of \mathfrak{g} .

Consider now the element of \mathcal{P} corresponding to the origin of the plane, i.e., $\xi_0 := \xi(0) = (0, 0, -1, -1)$. Following the same computations as for $\text{Ann}(\xi_\infty)$, we find that the annihilator of ξ_0 is equal to

$$\text{Ann}(\xi_0) = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega \in \mathbb{R}^3, v = \begin{pmatrix} -\omega_2 \\ \omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.18)$$

Now, we want to calculate a supplement of $\text{Ann}(\xi_0)$ in \mathfrak{g} . According to (4.14), the Euclidean orthogonal is equal to

$$(\text{Ann}(\xi_0))^\perp = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}^3 \right\}. \quad (4.19)$$

By intersecting $\text{Ann}(\xi_\infty)$ and $\text{Ann}(\xi_0)^\perp$ we get

$$\text{Ann}(\xi_\infty) \cap (\text{Ann}(\xi_0))^\perp = \mathfrak{t}.$$

Notice now that for every point $p \in \mathbb{R}^2$, the annihilator of $\xi_p = (-2p, -1 + |p|^2, -1 - |p|^2)$ is equal to

$$\text{Ann}(\xi_p) = \{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega \wedge \tilde{\xi} + \xi_4 v = 0 \text{ and } v^\top \tilde{\xi} = 0 \}.$$

As expected, $\text{Ann}(\xi_p) \cap \mathfrak{t} = \{0\}$ and

$$\begin{aligned} \varphi_p: \quad \mathfrak{t} &\longrightarrow \mathcal{P} \\ T(u) &\longmapsto \exp(T(u)).p \end{aligned}$$

is a diffeomorphism for every $p \in \mathbb{R}^2$.

Moreover, if $A(\omega, v) \in \text{Ann}(\xi_\infty)$ and $\omega_3 \neq 0$, then it is easy to check that $A(\omega, v) \in \text{Ann}(\xi_p)$, where $p = (\omega_1/\omega_3, \omega_2/\omega_3)$. We deduce that every element of $\text{Ann}(\xi_\infty)$ which is transversal to all $\text{Ann}(\xi_p)$ belongs to \mathfrak{t} .

We can resume the discussion of this section in the following proposition.

Proposition 4.2.2. *Let $\mathbb{G}_{\mathcal{P}} = \exp(S)$, where S is a two-dimensional subspace of \mathfrak{g} such that $\mathbb{G}_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$ and $\text{Ann}(\xi) \cap S = \{0\}$ for every $\xi \in \mathcal{P}$. Then $S = \mathfrak{t}$ and, for every $\xi \in \mathcal{P}$,*

$$\text{Orb}_{\xi}(\mathbb{G}_{\mathcal{P}}) = \mathcal{P}.$$

4.2.3 Displacement group for the submanifold Λ

Recall that Λ is the 3-dimensional submanifold of \mathcal{C} defined as

$$\Lambda = \{\xi \in \mathbb{R}^4 \mid \rho(\xi) = 1\}.$$

In this section, we want to determine a displacement group of $\mathbf{SO}^+(3,1)$ which acts transitively on Λ . Notice that condition (\mathcal{P}_4) introduced in Section 4.2.1 is automatically satisfied, since the elements of $\mathbf{SO}^+(3,1)$ preserve the Lorentz norm. We will show that there exists no S satisfying the properties (\mathcal{P}_1) – (\mathcal{P}_3) .

We start by proving the following technical lemma.

Lemma 4.2.3. *Let $A(\omega, v) \notin \text{Ann}(\xi)$ for every $\xi \in \Lambda$. Then*

$$\omega^{\top}v \neq 0. \tag{4.20}$$

Proof. Let $A(\omega, v)$ be such that $\omega \wedge \tilde{\xi} + \xi_4 v \neq 0$ or $v^{\top}\tilde{\xi} \neq 0$ for every $\xi = (\tilde{\xi}, \xi_4) \in \Lambda$.

Recall that $\xi \in \mathbb{R}^4$ is in Λ if and only if $\rho(\xi) = \|\tilde{\xi}\|^2 - \xi_4^2 = 1$. In particular, $\{\tilde{\xi} \mid \xi \in \Lambda\} \supset S^2$. Therefore, $v \neq 0$, since otherwise for all $\xi \in S^2$ we would have $\omega \wedge \tilde{\xi} \neq 0$. Hence,

$$\omega \wedge \tilde{\xi} + \xi_4 v \neq 0, \quad \text{for every } \xi \in \Lambda \text{ such that } \tilde{\xi} \perp v. \tag{4.21}$$

If $\omega \perp v$, then one could reach a contradiction in (4.21) by taking as $\tilde{\xi}$ a unitary vector proportional to ω and setting $\xi_4 = 0$. Hence (4.20) holds true.

In the following theorem we deduce from the above lemma that no subspace S of dimension 3 can satisfy the constraints (\mathcal{P}_1) and (\mathcal{P}_2) introduced Section 4.2.1.

Theorem 4.2.4. *There is no subspace S of \mathfrak{g} such that $\dim S \geq 2$ and $\text{Ann}(\xi) \cap S = \{0\}$ for every $\xi \in \Lambda$.*

Proof. Consider the vector space \mathcal{I} defined as

$$\mathcal{I} = \{A(\omega, v) \mid \omega, v \in \mathbb{R}^3, \omega \perp v\}.$$

For every subspace S of \mathfrak{g} , since $\dim \mathcal{I} = 5$ and $\dim(\mathcal{I} \cup S) \leq \dim(\mathfrak{g}) = 6$, then we have

$$\dim(\mathcal{I} \cap S) = \dim \mathcal{I} + \dim S - \dim(\mathcal{I} \cup S) \geq \dim S - 1.$$

If $\dim S \geq 2$, then $\dim(\mathcal{I} \cap S) \geq 1$. Therefore, S contains an element $A(\omega, v) \neq 0$ such that $\omega^{\top}v = 0$. Thanks to Lemma 4.2.3, S cannot be transversal to every $\text{Ann}(\xi)$, $\xi \in \Lambda$.

4.2. STUDY OF DISPLACEMENTS

The theorem leads us to look for an S of dimension at least 4 satisfying $\dim(\text{Ann}(\xi) \cap S) = \dim S - \dim \Lambda$ for $\xi \in \Lambda$, as in (4.15). Based on such requirement on S , we evaluated in a systematic way the 4-dimensional Lie subalgebras of \mathfrak{g} . In order to do so, we considered finite subsets of \mathfrak{g} and computed the generated Lie algebra, testing its dimension and computing the intersection with the annihilators $\text{Ann}(\xi)$, $\xi \in \Lambda$.

After a long computation, we identified the Lie subalgebra \mathfrak{g}_Λ , described in the following proposition, which, although not satisfying (4.15) at every $\xi \in \Lambda$, it satisfies it in an open and dense subset of Λ and, moreover, generates a group whose action on Λ is transitive.

In order to state the proposition, let us introduce the following notation. We denote by Λ_V the subset of \mathcal{C} corresponding to all one-dimensional subspaces of \mathbb{R}^2 , i.e.,

$$\Lambda_V = \{\xi_V := (\xi_1, \xi_2, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid \rho(\xi_V) = 1\}.$$

Proposition 4.2.5. *Let \mathfrak{g}_Λ be the vector space of dimension 4 defined as*

$$\mathfrak{g}_\Lambda = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Then \mathfrak{g}_Λ is a Lie subalgebra of \mathfrak{g} and it satisfies

$$\mathfrak{g}_\Lambda = \bar{\mathfrak{t}} \oplus \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{d}, \quad (4.22)$$

where, $\bar{\mathfrak{t}}$, \mathfrak{r} and \mathfrak{d} are defined, respectively, in Sections 4.1.2.1, 4.1.2.4, and 4.1.2.3. Moreover, $\dim(\mathfrak{g}_\Lambda \cap \text{Ann}(\xi)) = 1$ for every $\xi \in \Lambda \setminus \Lambda_V$ and, letting $\mathbb{G}_\Lambda = \exp(\mathfrak{g}_\Lambda)$, then

$$\text{Orb}_\xi(\mathbb{G}_\Lambda) = \Lambda, \quad \text{for all } \xi \in \Lambda. \quad (4.23)$$

Proof. As recalled in Section 4.1.2.5, we have the following Lie bracket relations

$$[\bar{\mathfrak{t}}, \bar{\mathfrak{t}}] = 0, \quad [\bar{\mathfrak{t}}, \mathfrak{r}] \subseteq \bar{\mathfrak{t}}, \quad [\bar{\mathfrak{t}}, \mathfrak{d}] \subseteq \bar{\mathfrak{t}}.$$

Therefore, the direct sum decomposition in (4.22) is a Lie subalgebra of \mathfrak{g} of dimension 4. Its equality with \mathfrak{g}_Λ follows from the characterizations of $\bar{\mathfrak{t}}$, \mathfrak{r} and \mathfrak{d} given in Sections 4.1.2.1, 4.1.2.4, and 4.1.2.3.

For every $\xi \in \Lambda$ let

$$\text{Ann}_{\mathfrak{g}_\Lambda}(\xi) := \text{Ann}(\xi) \cap \mathfrak{g}_\Lambda. \quad (4.24)$$

By a direct computation, we have, for every $\xi \in \Lambda$,

$$\text{Ann}_{\mathfrak{g}_\Lambda}(\xi) = \{\hat{A}(X) \mid X \in \mathbb{R}^4, M_\xi \cdot X = 0\},$$

where

$$\hat{A}(v_1, v_2, v_3, \omega_3) = A\left(\begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}\right), \quad \text{and} \quad M_\xi = \begin{pmatrix} \xi_4 - \xi_3 & 0 & 0 & -\xi_2 \\ 0 & \xi_4 - \xi_3 & 0 & \xi_1 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_4 & 0 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

In order to compute the dimension of $\text{Ann}_{\mathfrak{g}_\Lambda}(\xi)$, we evaluate the rank of the matrix M_ξ .

- If $\xi \in \Lambda \setminus \Lambda_V$, we have $\text{rank}(M) = 3$. So, the dimension of $\text{Ann}_{\mathfrak{g}_\Lambda}(\xi)$ is equal to 1. We also have

$$\text{Ann}_{\mathfrak{g}_\Lambda}(\xi) = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} -\frac{\xi_1}{\xi_2} v_1 \\ -v_1 \\ \frac{\xi_4 - \xi_3}{\xi_2} v_1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ -\frac{\xi_1}{\xi_2} v_1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

- If $\xi \in \Lambda_V$, we have $\text{rank}(M) = 2$. So, the dimension of $\text{Ann}_{\mathfrak{g}_\Lambda}(\xi)$ is equal to 2. We have

$$\text{Ann}_{\mathfrak{g}_\Lambda}(\xi) = \left\{ A(\omega, v) \in \mathfrak{g} \mid \omega = \begin{pmatrix} -\frac{\xi_1}{\xi_2} v_1 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ -\frac{\xi_1}{\xi_2} v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Denote by \mathbb{G}_Λ the Lie group of the Lie subalgebra \mathfrak{g}_Λ , i.e.

$$\mathbb{G}_\Lambda = \exp(\mathfrak{g}_\Lambda).$$

Recall that the dimension of Λ is equal to 3 and the codimension of Λ_V in Λ is equal to 2. In particular, $\Lambda \setminus \Lambda_V$ is connected.

Let $\xi \in \Lambda \setminus \Lambda_V$ and consider the set $\Omega_\xi \subset \Lambda \setminus \Lambda_V$ defined as

$$\{e^{t_k A_k} \dots e^{t_1 A_1}(\xi) \mid k \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_k > 0, A_1, \dots, A_k \in \mathfrak{g}_\Lambda \text{ such that } e^{s A_j} e^{t_{j-1} A_{j-1}} \dots e^{t_1 A_1}(\xi) \in \Lambda \setminus \Lambda_V \text{ for } j = 1, \dots, k, s \in [0, t_j]\}.$$

Notice that $\Omega_\xi \subset \text{Orb}_\xi(\mathbb{G}_\Lambda)$. Reasoning as in Theorem 4.2.1, we can conclude that $\{\Omega_\xi\}_{\xi \in \Lambda \setminus \Lambda_V}$ is a partition of $\Lambda \setminus \Lambda_V$ in open and connected subsets. Hence, there exist \mathcal{O} in Λ such that for every $\xi \in \Lambda \setminus \Lambda_V$

$$\text{Orb}_\xi(\mathbb{G}_\Lambda) = \mathcal{O} \supset \Lambda \setminus \Lambda_V.$$

Furthermore, if $\xi \in \Lambda_V$, since the dimension of $\text{Ann}_{\mathfrak{g}_\Lambda}(\xi)$ is larger than the dimension of Λ_V , then $\text{Orb}_\xi(\mathbb{G}_\Lambda)$ contains at least a point ξ_1 in $\Lambda \setminus \Lambda_V$. Therefore, $\text{Orb}_\xi(\mathbb{G}_\Lambda) = \text{Orb}_{\xi_1}(\mathbb{G}_\Lambda) = \mathcal{O}$. In particular, $\mathcal{O} \supset \Lambda \setminus \Lambda_V \cup \{\xi\}$. Since this equality is true for every $\xi \in \Lambda_V$, we conclude that

$$\text{Orb}_\xi(\mathbb{G}_\Lambda) = \mathcal{O} = \Lambda$$

for every $\xi \in \Lambda$, concluding the proof.

4.2.4 Displacement group for the submanifold Λ_c

For $c \geq 0$, let Λ_c be the set of $\xi \in \mathbb{R}^4$ verifying

$$\rho(\xi) = 1 \quad \text{and} \quad \langle \xi, \xi_\infty \rangle = c, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^4.$$

In particular, when $c = 0$, the set of the lines is defined as

$$\Lambda_0 = \left\{ \forall \xi \in \mathbb{R}^4 \mid \rho(\xi) = 1 \text{ and } \langle \xi, \xi_\infty \rangle = 0 \right\}.$$

4.2. STUDY OF DISPLACEMENTS

In this subsection, we will study the displacement group of Λ_c . To determine this group we need to find a supplement S of all the annihilators of $\xi \in \Lambda_c$ which verifies some properties (\mathcal{P}_i) defined previously.

One of the properties consists of preserving the Lorentz scalar product $\langle \xi, \xi_\infty \rangle = c$. We therefore try to determine the following group

$$G_c = \left\{ M = \exp(B) \in \mathbf{SO}^+(3, 1) \mid \xi \in \Lambda_c \Rightarrow M\xi \in \Lambda_c \right\}.$$

For every matrix $B \in \mathfrak{g}$, of the form

$$\begin{pmatrix} s(\omega) & v \\ v^\top & 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \omega, v \in \mathbb{R}^3,$$

we have, for $t \in \mathbb{R}$ and $\xi \in \Lambda_c$,

$$\exp(tB)\xi \in \Lambda_c.$$

This implies that

$$\langle \exp(tB)\xi, \xi_\infty \rangle = \langle \xi, \xi_\infty \rangle.$$

We derive the quantity above, we obtain, for $t = 0$,

$$\langle B\xi, \xi_\infty \rangle = 0, \quad \forall \xi \in \Lambda_c. \tag{4.25}$$

The displacement group when $c \neq 0$. In this case, the group of translations is sufficient for our purposes because one circle can be transformed into another one of the same radius just by applying the translation sending the center of the first circle to the center of the second one. The circles for which the Lorentz norm is constant and different from zero are indeed in one to one correspondence with the points (see Section 4.2.2). We therefore get the following proposition.

Proposition 4.2.6. *Let $c \neq 0$ and set $\mathbb{G}_{\Lambda_c} = \exp(\mathfrak{t})$. Then for every $\xi \in \Lambda_c$ we have*

$$\text{Orb}_\xi(\mathbb{G}_{\Lambda_c}) = \Lambda_c.$$

The displacement group when $c = 0$. In this paragraph, we will study the group of displacement on the submanifold Λ_0 .

In the following result, we characterize the elements $A(\omega, v)$ of \mathfrak{g} which preserve the scalar product (4.25).

Proposition 4.2.7. *For $\xi \in \Lambda_0$, one has $\langle A(\omega, v)\xi, \xi_\infty \rangle = 0$ if and only if*

$$\omega_1 = -v_2 \quad \text{and} \quad \omega_2 = v_1, \tag{4.26}$$

where $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ and $v = (v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{R}^3$.

Proof. Let $B := A(\omega, v)$ be a matrix in \mathfrak{g} which verifies $\langle B\xi, \xi_\infty \rangle = 0$ for every $\xi = (\tilde{\xi}, \xi_4) \in \Lambda_0$. Since $B.\xi = \begin{pmatrix} \omega \wedge \tilde{\xi} + \xi_4 v \\ v^\top \tilde{\xi} \end{pmatrix}$ and $\xi_4 = -\xi_3$, then $\langle B\xi, \xi_\infty \rangle = 0$ implies that $0 = v^\top \tilde{\xi} + (\omega \wedge \tilde{\xi} - \xi_3 v)_3 = (v_1 - \omega_2)\xi_1 + (v_2 + \omega_1)\xi_2$. Since this holds for every $\xi \in \Lambda_0$ we deduce that $v_1 = \omega_2$ and $v_2 = -\omega_1$. This completes the proof.

As a consequence of the proposition, in order to satisfy Property (\mathcal{P}_4) , we look for S satisfying the constraint

$$S \subset \left\{ A(\omega, v) \mid v \in \mathbb{R}^3, \omega = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \right\} =: \bar{S}.$$

In analogy with Lemma 4.2.3, let us study which elements of \bar{S} are transversal to $\text{Ann}(\xi)$ for every $\xi \in \Lambda_0$.

Lemma 4.2.8. *Let $A(\omega, v) \in \bar{S}$. Then $A(\omega, v) \notin \text{Ann}(\xi)$ for every $\xi \in \Lambda_0$ if and only if $\omega_3 \neq 0$.*

Proof. Because of the definition of Λ_0 , we can rewrite the condition that $A(\omega, v) \notin \text{Ann}(\xi)$ for every $\xi \in \Lambda_0$ as $\omega \wedge \tilde{\xi} - \xi_3 v \neq 0$ or $v^\top \tilde{\xi} \neq 0$ for every $\tilde{\xi} = (\hat{\xi}, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ such that $\hat{\xi} \in S^1$.

First assume that $\omega_3 = 0$. Then for every $\hat{\xi} \in S^1$ orthogonal to (v_1, v_2) we have that $\tilde{\xi} = (\hat{\xi}, 0)$ satisfies $\omega \wedge \tilde{\xi} - \xi_3 v = 0$ and $v^\top \tilde{\xi} = 0$.

In order to prove the converse, let $\omega_3 \neq 0$. Assume for now that also $v_3 \neq 0$. Then $v^\top w \neq 0$. Hence, for every $\tilde{\xi} \in S^1 \times \mathbb{R}$ such that $\tilde{\xi} \perp v$, either $\xi_3 = 0$ and then $\omega \wedge \tilde{\xi} - \xi_3 v = \omega \wedge \tilde{\xi} \neq 0$ or $\xi_3 \neq 0$ and then $\omega^\top(\omega \wedge \tilde{\xi} - \xi_3 v) = -\xi_3 \omega^\top v \neq 0$.

Consider now the case where $\omega_3 \neq 0$ and $v = 0$. Then $\omega = (0, 0, \omega_3)^\top$ and $\omega \wedge \tilde{\xi} - \xi_3 v = \omega \wedge \tilde{\xi} \neq 0$ for every $\tilde{\xi} = (\hat{\xi}, \xi_3) \in S^1 \times \mathbb{R}$.

Finally, assume that $\omega_3 \neq 0$, $v_3 = 0$ and $(v_1, v_2) \neq 0$. If $\tilde{\xi} \in S^1 \times \mathbb{R}$ and $\tilde{\xi} \perp v$, then $\hat{\xi}$ is of the type $\lambda(-v_2, v_1)$ with $\lambda \neq 0$. Then $\omega \wedge \tilde{\xi} - \xi_3 v = -\lambda \omega_3 v \neq 0$. This concludes the proof of the lemma.

A consequence of the lemma above is that there exist no two-dimensional subspace of \bar{S} such that Property (\mathcal{P}_2) holds true, since every two-dimensional subspace of \bar{S} contains a nonzero element $A(\omega, v)$ with $\omega_3 = 0$.

Let us now determine when a vector subspace S of \bar{S} is a Lie subalgebra of \mathfrak{g} . This is equivalent to ask that, for every $A(\omega, v), A(\bar{\omega}, \bar{v}) \in S$, the Lie bracket $[A(\omega, v), A(\bar{\omega}, \bar{v})] = A(W, V)$ belongs to S .

By a direct calculation, we have

$$W = \begin{pmatrix} v_1 \bar{\omega}_3 - \omega_3 \bar{v}_1 + \bar{v}_2 v_3 - \bar{v}_3 v_2 \\ -\bar{v}_2 \omega_3 + v_2 \bar{\omega}_3 + \bar{v}_3 v_1 - \bar{v}_1 v_3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} v_1 \bar{v}_3 - \omega_3 \bar{v}_2 - \bar{v}_1 v_3 + \bar{\omega}_3 v_2 \\ \bar{v}_1 \omega_3 + v_2 \bar{v}_3 - \bar{\omega}_3 v_1 - \bar{v}_2 v_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. STUDY OF DISPLACEMENTS

Conditions $W_1 = -V_2$ and $W_2 = V_1$ are automatically satisfied, which means that \bar{S} is a Lie subalgebra of \mathfrak{g} .

Subalgebras of \bar{S} of dimension two can be obtained by picking two linearly independent elements $A(\omega, v)$, $A(\bar{\omega}, \bar{v})$ of \bar{S} that commute. In view of Lemma 4.2.8 it is reasonable to choose ω so that $\omega_3 \neq 0$. Up to normalizing ω_3 and replacing $A(\bar{\omega}, \bar{v})$ by $A(\bar{\omega}, \bar{v}) - (\bar{\omega}_3/\omega_3)A(\omega, v)$, we can assume that $\omega_3 = 1$ and $\bar{\omega}_3 = 0$.

If $\bar{v}_3 = 0$ then it follows from $[A(\omega, v), A(\bar{\omega}, \bar{v})] = 0$ that $\bar{v}_2 + \bar{v}_1 v_3 = 0$ and $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 v_3 = 0$, from which we deduce $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$. This, in turns, implies that $A(\bar{\omega}, \bar{v}) = 0$, which is impossible.

Hence we can normalize $\bar{v}_3 = 1$ and $v_3 = 0$. The condition $[A(\omega, v), A(\bar{\omega}, \bar{v})] = 0$ is equivalent to

$$v_1 = \bar{v}_2, \quad v_2 = -\bar{v}_1.$$

We have therefore identified a family of two-dimensional Lie subalgebras of \bar{S} . In the following lemma we describe their action on Λ_0 .

Lemma 4.2.9. *Let $\omega = (-v_2, v_1, 1)$, $v = (v_1, v_2, 0)$, $\bar{\omega} = (-v_1, -v_2, 0)$, $\bar{v} = (-v_2, v_1, 1)$. Then the group generated by $S = \text{span}\{A(\omega, v), A(\bar{\omega}, \bar{v})\}$ does not act transitively on Λ_0 .*

Proof. The only elements of S which are not transversal to every $\text{Ann}(\xi)$, $\xi \in \Lambda_0$, are those proportional to $A(\bar{\omega}, \bar{v})$. If $\tilde{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S^1 \times \mathbb{R}$ is such that $\bar{v}^\top \tilde{\xi} = 0$ and $\bar{\omega} \wedge \tilde{\xi} - \xi_3 \bar{v} = 0$, we get that $\xi_3 = v_2 \xi_1 - v_1 \xi_2$.

Therefore, the submanifold of points $\xi \in \Lambda_0$ at which $\text{Ann}(\xi) \cap S = \text{span}\{A(\bar{\omega}, \bar{v})\} \neq \{0\}$ is given by $\Lambda_{v_1, v_2} = \{(\xi_1, \xi_2, \xi_3, -\xi_3) \in \mathbb{R}^4 \mid (\xi_1, \xi_2) \in S^1, \xi_3 = v_2 \xi_1 - v_1 \xi_2\}$. One easily checks that the vector field $\xi \mapsto A(\omega, v)\xi$ is tangent to Λ_{v_1, v_2} . Hence, for every $\xi \in \Lambda_0 \setminus \Lambda_{v_1, v_2}$,

$$\exp(S).\xi = \Lambda_0 \setminus \Lambda_{v_1, v_2}.$$

In particular $\exp(S)$ does not act transitively on Λ_0 .

A special case of the algebras described in the previous lemma is when $v_1 = v_2 = 0$, that is,

$$S = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_3 \end{pmatrix} \right\}. \quad (4.27)$$

The Abelian Lie subalgebra S of \mathfrak{g} can be decomposed as

$$S = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{d}, \quad (4.28)$$

where \mathfrak{r} and \mathfrak{d} are defined in Paragraph 4.1.2.4 and Paragraph 4.1.2.3 respectively.

In this case $\Lambda_{(0,0)} = \Lambda_V$. It follows that, if ξ represents an affine line of \mathbb{R}^2 not passing through the origin, then

$$\exp(\mathfrak{r} \oplus \mathfrak{d}).\xi = \Lambda_0 \setminus \Lambda_V.$$

The above result is not enough in our case since in the sketch-solving algorithm we need to pass continuously from a line to any other line passing through the origin or not. We therefore try now to find another Lie algebra S , with dimension larger than two, whose exponential acts transitively on Λ_0 .

Increasing the dimension of S by one, we look for a 3-dimensional vector space satisfying properties (\mathcal{P}_3) , (\mathcal{P}_4) and, in order to apply Theorem 4.2.1, such that $\dim(S \cap \text{Ann}(\xi)) = 1$ for every $\xi \in \Lambda_0$.

We propose to take as S the subspace \mathfrak{g}_{Λ_0} of \mathfrak{g} defined as

$$\mathfrak{g}_{\Lambda_0} = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \\ \omega_3 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Observe that $\mathfrak{g}_{\Lambda_0} \subset \overline{S}$, i.e., each of its elements satisfies Property (4.26). According to Paragraphs 4.1.2.1 and 4.1.2.4, \mathfrak{g}_{Λ_0} can be written as the direct sum of the two Lie subalgebras \mathfrak{t} and \mathfrak{r} of the Lie algebra \mathfrak{g} . Moreover, since $[\mathfrak{t}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{t}$, then $\mathfrak{g}_{\Lambda_0} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{r}$ is a 3-dimensional Lie subalgebra of \mathfrak{g} . On the other hand, for every $\xi \in \Lambda_0$, we have

$$\text{Ann}(\xi) \cap \mathfrak{g}_{\Lambda_0} = \left\{ A(\omega, v) \mid \omega = \begin{pmatrix} -v_2 \\ \frac{\xi_2}{\xi_1} v_2 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \frac{\xi_2}{\xi_1} v_2 \\ v_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

which is the set of translations parallel to ξ . Applying Theorem 4.2.1, the above considerations lead to the following result.

Proposition 4.2.10. *The Lie subalgebra $\mathfrak{g}_{\Lambda_0} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{r}$ of \mathfrak{g} verifies Properties (\mathcal{P}_3) and (\mathcal{P}_4) . Moreover, $\dim(\mathfrak{g}_{\Lambda_0} \cap \text{Ann}(\xi)) = 1$ for every $\xi \in \Lambda_0 \setminus \Lambda_V$. Therefore, letting $\mathbb{G}_{\Lambda_0} := \exp(\mathfrak{g}_{\Lambda_0})$, we have*

$$\text{Orb}_{\xi}(\mathbb{G}_{\Lambda_0}) = \Lambda_0, \quad \text{for every } \xi \in \Lambda_0.$$

Appendix for Chapter 3

Contents

5.1	<i>o</i>-regular Controls	103
5.2	Connectedness of $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ and H_Δ^∇	107

5.1 *o*-regular Controls

We first generalize the usual definition of regular control and then provide a result about existence of such controls. Let M be an n -dimensional smooth manifold, \mathcal{F} a (possibly infinite) family of smooth vector fields on M , and let $\Delta_{\mathcal{F}}$ be the smooth *singular* distribution (cf. [16]) spanned by \mathcal{F} , i.e.

$$\Delta_{\mathcal{F}}|_p = \text{span}\{X|_p \mid X \in \mathcal{F}\} \subset T_pM, \quad p \in M.$$

We use the word “singular” (to emphasize the fact that the rank (dimension) of $\Delta_{\mathcal{F}}$ might vary from point to point. One can, in fact, prove given any such family \mathcal{F} , there is a *finite* subfamily $\mathcal{F}_0 = \{X_1, \dots, X_m\}$ such that $\Delta_{\mathcal{F}} = \Delta_{\mathcal{F}_0}$, and $m \leq n(n+1)$ (see [12, 30], or [27] when $\Delta_{\mathcal{F}}$ has constant rank). Moreover, by span S we mean \mathbb{R} -linear span of a set S .

Definition 5.1.1. *An absolutely continuous (a.c.) curve $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ is horizontal with respect to \mathcal{F} if there is a finite subfamily $\{X_1, \dots, X_m\}$ of \mathcal{F} and $u = (u_1, \dots, u_d) \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$ (here m might depend on the curve γ in question), such that for almost every $t \in [0, T]$,*

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) X_i|_{\gamma(t)}.$$

The orbit $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$ of \mathcal{F} through $p \in M$ is the set of all points of M reached by \mathcal{F} -horizontal paths γ with $\gamma(0) = p$.

5.1. O-REGULAR CONTROLS

If Δ is a smooth distribution of *constant rank* k on M , and if $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\Delta$ is the set of smooth vector fields tangent to Δ , then it is easy to see that $\Delta = \Delta_{\mathcal{F}}$, and that an a.c. curve is Δ -horizontal if and only if it is \mathcal{F} -horizontal. Therefore, in this case the concept of orbit coincides with the notion we have used previously in the paper, and one can without ambiguity denote it by $\mathcal{O}_\Delta(p)$ instead of $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$.

For a smooth vector field X write $\Phi_X : D \rightarrow M$ for its flow, where $D = D_X$ is an open connected subset of $\mathbb{R} \times M$ containing $\{0\} \times M$. We also use the notation

$$(\Phi_X)_t(x) = (\Phi_X)^x(t) = \Phi_X(t, x), \quad \text{when } (x, t) \in D.$$

The orbit of a family \mathcal{F} of vector fields has the following properties (cf. [16], [18]).

Theorem 5.1.2 (Orbit Theorem). *1. The orbit $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$ is an immersed submanifold of M .*

2. Any continuous (resp. smooth) map $f : Z \rightarrow M$, where Z is a smooth manifold, such that $f(Z) \subset \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$ is continuous (resp. smooth) as a map $f : Z \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$.

3. If one writes $G_{\mathcal{F}}$ for the set of all locally defined diffeomorphisms of M of the form $(\Phi_{X_r})^{t_1} \circ \dots \circ (\Phi_{X_d})^{t_d}$ for $X_1, \dots, X_d \in \mathcal{F}$ and $t_1, \dots, t_d \in \mathbb{R}$ for which this map is defined, then

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p) &= \{\varphi(p) \mid \varphi \in G_{\mathcal{F}}\} \\ T\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p) &= \text{span}\{\varphi_*(X) \mid \varphi \in G_{\mathcal{F}}, X \in \mathcal{F}\}, \end{aligned}$$

wherever the expressions $\varphi(p)$ and $\varphi_*(X)$ are defined.

As a consequence of Item 3. of the theorem, one sees that $L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$ in Definition 5.1.1 can be replaced by $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$, which for the rest paper will be the appropriate *space of controls* for our needs.

Following [27] we define the concepts of the end-point mapping and that of a regular (L^2 -)control.

Definition 5.1.3. *For every $p \in M$, any time $T > 0$, and any smooth finite family of vector fields $\mathcal{F} = \{X_1, \dots, X_m\}$ on M , there exists a maximal open subset $U_{\mathcal{F}}^{p,T} \subset L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ such that for every $u = (u_1, \dots, u_m) \in U_{\mathcal{F}}^{p,T}$, there exists a unique absolutely continuous solution $\gamma_u : [0, T] \rightarrow M$ to the Cauchy problem*

$$\dot{\gamma}_u(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) X_i(\gamma_u(t)), \quad \gamma_u(0) = p. \quad (5.1)$$

The end-point map $E_{\mathcal{F}}^{p,T}$ associated to \mathcal{F} at p in time T is defined as the mapping

$$E_{\mathcal{F}}^{p,T} : U_{\mathcal{F}}^{p,T} \rightarrow M, \quad E_{\mathcal{F}}^{p,T}(u) = \gamma_u(T).$$

By [27, Proposition 1.8] we have the following.

Proposition 5.1.4. *With p, T, \mathcal{F} as above, the end point map $E_{\mathcal{F}}^{p,T} : U_{\mathcal{F}}^{p,T} \rightarrow M$ is C^1 -smooth.*

This proposition allows us to give the following definition.

Definition 5.1.5. *A control $u \in U_{\mathcal{F}}^{p,T}$ is said to be o-regular with respect to p in time T if the rank of $D_u E_{\mathcal{F}}^{p,T} : L^2([0, T], \mathbb{R}^m) \rightarrow T_{E_{\mathcal{F}}^{p,T}(u)}M$, the differential of $E_{\mathcal{F}}^{p,T}(u)$ at u , is equal to $\dim \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$. Here, “o-regular” stands for orbitally regular.*

Remark 5.1.6. A control u is usually said to be regular (with respect to p in time T) if the rank of $E_{\mathcal{F}}^{p,T}(u)$ is equal to the dimension n of the ambient manifold M (cf [27, Section 1.3]), implying in particular that the orbit $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$ is open in M and thus is n -dimensional. If the distribution generated by \mathcal{F} verifies the LARC, it can be proved that any pair of points in M can be joined by the trajectory tangent to this distribution and corresponding to a regular control, cf. [3]. In this paper, we have extended this definition without assuming controllability.

The main purpose of this appendix is to generalize the result of [3] to the case where the distribution Δ is not necessarily bracket-generating. Indeed, we have the following result.

Proposition 5.1.7. *Let M be an n -dimensional smooth manifold, $\mathcal{F} = \{X_1, \dots, X_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, a smooth finite family of vector fields on M . Then, for every $p \in M$ and time $T > 0$, and every $q \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$, there exists an o-regular control with respect to p in time T such that the unique solution γ_u to the Cauchy problem (5.1) such that $\gamma_u(T) = q$.*

Remark 5.1.8. By the proof of Proposition 1.12 in [27] (see also [16]), the conclusion is immediate if $T_q \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$ is equal for every $q \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$ to $\text{Lie}_q(\mathcal{F})$, the evaluation at q of the Lie algebra generated by \mathcal{F} . In fact, in this case a stronger result holds, namely the set of regular controls is dense in $U_{\mathcal{F}}^{q,T}$ for every $q \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$ and $T > 0$. As a consequence, any control $u_0 \in E_{\mathcal{F}}^{p,T}$ admits an o-regular control u arbitrarily close (in L^2) to u_0 such that

$$E_{\mathcal{F}}^{p,T}(u) = E_{\mathcal{F}}^{p,T}(u_0).$$

Proof. Fix $q_0 \in \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$ and (Z_1^0, \dots, Z_d^0) a basis of $T_{q_0} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$. According to Theorem 5.1.2, there exists $\varphi_1 \in G_{\mathcal{F}}$ and $Y_1 \in \mathcal{F}$ with $q_1 := \varphi_1^{-1}(q_0)$ such that $Z^0 := (\tilde{Z}_1^0, Z_2^0, \dots, Z_d^0)$, where $\tilde{Z}_1^0 = (\varphi_1)_* Y_1|_{q_0}$, forms a basis of $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$ at q_0 . The basis Z^0 is the pushforward of a basis $Z^1 = (Z_1^1, \dots, Z_d^1)$ of $T_{q_1} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$ by φ_1 and obviously $Z_1^1 = Y_1$. We proceed inductively (using Theorem 5.1.2) with this construction for $1 \leq l \leq d$ so that the basis $Z^{l-1} = (Z_1^{l-1}, \dots, Z_{l-1}^{l-1}, \tilde{Z}_l^{l-1}, Z_{l+1}^{l-1}, \dots, Z_d^{l-1})$ of $T_{q_{l-1}} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$ is the pushforward of a basis $Z^l = (Z_1^l, \dots, Z_d^l)$ with $q_l := \varphi_l^{-1}(q_{l-1})$, $Y_l := Z_l^l \in \mathcal{F}$ and $\tilde{Z}_l^{l-1} = (\varphi_l)_*(Z_l^l)$. Finally consider $\varphi_{d+1} \in G$ so that $\varphi_{d+1}(p) = q_n$ and set $\psi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \dots \circ \varphi_{d+1}$. One has that $\psi(p) = q_0$ and there exists $T > 0$ and $u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ such that the unique solution γ_u to the Cauchy problem $\dot{\gamma}_u(t) = \sum_{i=1}^m u_i(t) X_i|_{\gamma_u(t)}$, $x(0) = p$ verifies $\gamma_u(T) = q_0$. Then the flow of diffeomorphisms $\psi^u(t, q)$ corresponding to the time-varying vector field $q \mapsto \sum_{i=1}^m u_i(t) X_i|_q$ verifies $\psi = \psi^u(T, 0)$ and $\psi^u(t, p) = \gamma_u(t)$ where one has, for

5.1. O-REGULAR CONTROLS

$0 \leq s \leq t \leq T$, $\frac{\partial \psi^u(t,q)}{\partial t} = \sum_{i=1}^m u_i(t) X_i|_{\psi^u(t,q)}$ together with the initial condition $\psi^u(0, q) = q$ for every $q \in M$. With the above notations, it is clear that, for every $1 \leq l \leq d$,

$$(d_q \psi^u(T, p)(d_q \psi^u(t_l, p))^{-1} Y_l)_{l=1, \dots, d} =: (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_d)$$

forms a basis of $T_{q_0} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$, where $d_q \psi^u(t, \cdot)$ denotes the differential of $\psi(t, q)$ with respect to the q variable.

Recall that the differential of the end-point map at u is the linear map $D_u E_{\mathcal{F}}^{p,T} : L^2([0, T], \mathbb{R}^m) \rightarrow T_{q_0} \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$ given by

$$D_u E_{\mathcal{F}}^{p,T}(v) = d_q \psi^u(T, p) \int_0^T (d_q \psi^u(t, p))^{-1} X^v(t, \gamma_u(t)) dt, \quad (5.2)$$

where $X^v(t, x) = \sum_{i=1}^m v_i(t) X_i|_x$ for almost every $t \in [0, T]$ and every $x \in M$. We further complete the notations as follows. Let $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{d+1} := T$ the sequence of times where $\gamma_u(t_l) = q_{d+1-l}$ with the convention that $p = q_{d+1}$ and thus $\psi^u(T, p) \psi^u(t_l, p)^{-1}(q_l) = q_0$, for $0 \leq l \leq d+1$. Moreover, one has $Y_l = \sum_{i=1}^m y_{il} X_i|_{q_l}$ for $1 \leq l \leq d$ and some real numbers (y_{il}) .

For every $\varepsilon > 0$ small enough and $1 \leq l \leq d$, consider the sequence (v_ε^l) of functions in $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$ defined by $v_\varepsilon^l(t) = \frac{1}{\varepsilon} (y_{il})_{1 \leq i \leq k}$ if $t_l - \varepsilon \leq t \leq t_l$ and zero otherwise. It is a matter of standard computations (as performed in [27, Proposition 1.10]) to prove that, for every $1 \leq l \leq d$, $D_u E_{\mathcal{F}}^{p,T}(v_\varepsilon^l)$ tends to $d_q \psi^u(T, p)(d_q \psi^u(t_l, p))^{-1} Y_l = \tilde{Z}_l$ as ε tends to zero. Since the range of $D_u E_{\mathcal{F}}^{p,T}$ is closed, we deduce that it contains \tilde{Z}_l for every $1 \leq l \leq d$.

We have therefore proved that u is o-regular at p in time T in the sense of Definition 5.1.3.

Remark 5.1.9. In contrast to what was discussed in Remark 5.1.8, we highlight the fact that in general case where the (finite) family \mathcal{F} of vector fields does not satisfy (everywhere on the orbit) the Hörmander condition $\text{Lie}_q \mathcal{F} = T_q \mathcal{O}_{\mathcal{F}}(p)$, for a given control $u_0 \in U_{\mathcal{F}}^{p,T}$ the o-regular controls u (in the sense of Definition 5.1.5) such that $E_{\mathcal{F}}^{p,T}(u_0) = E_{\mathcal{F}}^{p,T}(u)$ might lie far away from u_0 in L^2 -sense.

As the standard example, consider on $M = \mathbb{R}^2$, with coordinates (x, y) , the vector fields (cf. [16], p.12) $X = \frac{\partial}{\partial x}$ and $Y = \phi(x) \frac{\partial}{\partial y}$ where $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is smooth such that $\phi(x) = 0$ if $x \leq 0$ and $\phi(x) > 0$ for $x > 0$. Let $\mathcal{F} = \{X, Y\}$ and $\mathbb{R}_-^2 = \{(x, y) \mid x < 0\}$

It is clear that for any point $p_0 = (x_0, y_0)$ with $x_0 < 0$, any $T > 0$ and any control u_0 such that $E_{\mathcal{F}}^{p_0,t}(u_0) \in \mathbb{R}_-^2$ for all $t \in [0, T]$, there is an L^2 -neighbourhood of u_0 such that $E_{\mathcal{F}}^{p_0,T}$ is not regular at any of its points.

A regular control u steering p_0 to $q_0 = E_{\mathcal{F}}^{p_0,T}(u_0)$ in time T (i.e. $E_{\mathcal{F}}^{p_0,T}(u) = q_0$), which exists thanks to Proposition 5.1.7, must have the property that $E_{\mathcal{F}}^{p_0,T_0}(u) \notin \mathbb{R}_-^2$ for some $0 < T_0 \leq T$. Therefore, if we write $\gamma_u(t) = (x_u(t), y_u(t)) = E^{p_0,t}(u)$ and $u = (u_1, u_2)$, one has

$$|x_0| \leq |x_u(T_0) - x_0| = \left| \int_0^{T_0} u_1(s) ds \right| \leq \sqrt{T_0} \|u_1\|_{L^2([0, T])} \leq \sqrt{T} \|u\|_{L^2([0, T], \mathbb{R}^2)}.$$

If for example one took $u_0 = 0$, hence $q_0 = p_0$, the above inequality would prove, as was claimed above, that a regular control u steering p_0 to q_0 in time T cannot be near u_0 in L^2 -sense.

5.2 Connectedness of $\mathcal{H}_{\Delta R}^\nabla$ and H_Δ^∇

To prove that these groups are connected, it is enough to show that, for every $g \in \mathbb{G}_m$, the set $\Omega_\Delta(g)$ of all a.c. Δ -admissible loops based at $g \in \mathbb{G}_m$ is itself connected.

For that purpose, we introduce some notations. For real-valued measurable functions u, v defined on $[0, 1]$, define

$$U(t) = \int_0^t u(s) ds$$

and

$$u * v(t) = \int_0^t V(s)u(s) - U(s)v(s) ds$$

for $t \in [0, 1]$. Set $H_0 = (L_0^2)^m$, where L_0^2 as the subspace of functions $u \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$ with zero mean, i.e., $U(1) = 0$. Note then that for every $u \in L_0^2$ and $v \in L^2([0, 1], \mathbb{R})$, one has

$$u * v(1) = -2\langle v, U \rangle$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the inner product in $L^2([0, 1], \mathbb{R})$. One deduces that H_0 is a subspace of H of codimension m . Finally, for $u \in L_0^2$, let $L(u)$ be the subspace of L_0^2 of functions v such that $u * v(1) = 0$. This is a hyperplane in L_0^2 and therefore it is trivially convex. Moreover the relation “ $v \in L(u)$ ” is symmetric because $u * v$ is a skew-symmetric operation.

Fix $\bar{g} \in \mathbb{G}_m$. Consider now the set of a.c. Δ -admissible curves starting at \bar{g} , i.e., the solutions of the Cauchy problems

$$\dot{g} = \sum_{1 \leq i \leq m} u_i X_i(g), \quad g(0) = \bar{g},$$

where $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m) \in H := L^2([0, 1], \mathbb{R}^m)$.

In coordinates $g = (x, \gamma)$ with $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ and $\gamma = (\gamma_{hk})_{(h,k) \in \mathcal{I}}$, one has

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= u_i, & \text{for } i = 1, \dots, m; \\ \dot{\gamma}_{hk} &= \frac{1}{2}(x_k u_h - x_h u_k), & \text{for } (h, k) \in \mathcal{I}. \end{aligned}$$

The terminal point $g(1) = (x(1), \gamma(1))$ is then equal to

$$\bar{g} + \left((U_i(1))_{1 \leq i \leq m}, \left(\frac{1}{2}(u_k * u_h)(1) \right)_{(h,k) \in \mathcal{I}} \right).$$

Define Loop_m as the subset functions $\mathbf{u} \in H_0$ such that $(u_k * u_h)(1) = 0$ for $(h, k) \in \mathcal{I}$, i.e. $u_l \in L(u_h)$ (or equivalently $u_h \in L(u_l)$) for $(h, k) \in \mathcal{I}$. One derives at once that $\Omega_\Delta(\bar{g})$

5.2. CONNECTEDNESS OF $\mathcal{H}_{\Delta_R}^\nabla$ AND H_Δ^∇

is the set of terminal points for a.c. Δ -admissible curves starting at \bar{g} corresponding to control functions $\mathbf{u} \in \text{Loop}_m$. The conclusion holds true if one shows that Loop_m itself is path-connected.

To see that, consider $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ in Loop_m and notice that, for every $\lambda \in \mathbb{R}$, then $\lambda\mathbf{u}$ also belongs to Loop_m . Therefore the latter is contractible, implying in particular that it is connected. Hence the conclusion.

Appendix: Structure of the Lorentz Group

Contents

6.1	The Lorentz group	109
6.2	Connected Components of $O(n-1,1)$	110
6.3	Surfaces of Transitivity	111

6.1 The Lorentz group

Before dealing with the Lorentz group, we give a fundamental result from linear algebra on the signature of a bilinear form (see, [33, Chap2]).

Theorem 6.1.1. *Let $\langle \cdot, \cdot \rangle$ be a bilinear form on an n -dimensional real vector space V . There exists a basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ of V such that*

1. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ for $i \neq j$,
2. $\langle v_i, v_i \rangle = 1$ for $1 \leq i \leq p$,
3. $\langle v_j, v_j \rangle = -1$ for $p+1 \leq j \leq r$,
4. $\langle v_k, v_k \rangle = 0$ for $r+1 \leq k \leq n$.

Definition 6.1.2. *The pair $(p, r-p)$ is called the signature, and r is called the rank of the bilinear form.*

In the coordinates associated with the basis of Theorem 6.1.1 the bilinear form writes as

$$\langle (\xi_1, \dots, \xi_n), (\eta_1, \dots, \eta_n) \rangle = \sum_{i=1}^p \xi_i \eta_i - \sum_{j=p+1}^r \xi_j \eta_j,$$

and its associated quadratic form is

$$\rho(\xi)_{p,r-p} = \sum_{i=1}^p \xi_i^2 - \sum_{j=p+1}^r \xi_j^2. \tag{6.1}$$

6.2. CONNECTED COMPONENTS OF $\mathbf{O}(N-1, 1)$

The non-degenerate (i.e. $r = n$) bilinear form of signature $(n-1, 1)$ is called the *Lorentz metric*. Its associated quadratic form is

$$\rho(\xi) := \rho(\xi)_{n-1,1} = \xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 - \xi_n^2 = \xi^T J \xi, \quad (6.2)$$

where J is the following matrix,

$$J = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

with I_{n-1} the $(n-1) \times (n-1)$ -identity matrix.

The *Lorentz group* $\mathbf{O}(n-1, 1)$ is the group of all invertible linear maps of \mathbb{R}^n that preserve the Lorentz metric. In matrix form,

$$M \in \mathbf{O}(n-1, 1) \quad \Leftrightarrow \quad M^T J M = J. \quad (6.3)$$

Given a matrix $M \in \mathbf{O}(n-1, 1)$, we can write M in the block form as follows

$$M = \begin{pmatrix} A & v \\ u^T & \alpha \end{pmatrix},$$

where A is a $(n-1) \times (n-1)$ -matrix, $u, v \in \mathbb{R}^{n-1}$ and $\alpha \in \mathbb{R}$.

The group $\mathbf{O}(n-1, 1)$ is closed under transposition, i.e. if $M \in \mathbf{O}(n-1, 1)$, then $M^T \in \mathbf{O}(n-1, 1)$ as well. Moreover, since $J^2 = I_n$, the condition (6.3) is equivalent to $JM^T J M = I_n$. Then, the inverse of M is equal to

$$M^{-1} = J M^T J = \begin{pmatrix} A^T & -u \\ -v^T & \alpha \end{pmatrix}.$$

6.2 Connected Components of $\mathbf{O}(n-1, 1)$

We take now a closer look at the connected components of the Lorentz group $\mathbf{O}(n-1, 1)$.

From (6.3) we have

$$\det(M) = \pm 1. \quad (6.4)$$

Thus, the group $\mathbf{O}(n-1, 1)$ of Lorentz transformations consists of two disconnected pieces, one part with $\det(M) = 1$ denoted by $\mathbf{SO}(n-1, 1)$ and a second part that can be written as the product of a transformation with $\det(M) = 1$ and of a transformation J_1 changing the sign of an odd number of coordinates.

Moreover $\mathbf{SO}(n-1, 1)$ has two connected components. Indeed, the component (n, n) of (6.3) gives

$$-1 = \sum_{i=1}^{n-1} (m_{in})^2 - (m_{nn})^2, \quad (6.5)$$

where $M = (m_{ij})$. Thus $(m_{nn})^2 \geq 1$ and $\mathbf{SO}(n-1, 1)$ consists again of two disconnected pieces, one with $m_{nn} \geq 1$ and one with $m_{nn} \leq -1$. The first one contains the identity,

it is a subgroup of $\mathrm{SO}(n-1, 1)$ denoted by $\mathrm{SO}^+(n-1, 1)$ and called the *restricted Lorentz group*. The other pieces can be written as the product of a transformation in $\mathrm{SO}^+(n-1, 1)$ and of a transformation J_2 changing the sign of an even number of coordinates.

Thus

$$\begin{cases} \mathrm{SO}^+(n-1, 1) = \{m_{nn} \geq 1, \det(M) = 1\}, \\ J_2\mathrm{SO}^+(n-1, 1) = \{m_{nn} \leq -1, \det(M) = 1\}, \\ J_1\mathrm{SO}^+(n-1, 1) = \{m_{nn} \leq -1, \det(M) = -1\}, \\ J_1J_2\mathrm{SO}^+(n-1, 1) = \{m_{nn} \geq 1, \det(M) = -1\}. \end{cases} \quad (6.6)$$

When n is even (which is the case in Chapter 4), we can choose $J_1 = J$ and $J_2 = -I_n$, and we obtain the following disjoint union decomposition

$$\mathbf{O}(n-1, 1) = \mathrm{SO}^+(n-1, 1) \cup -\mathrm{SO}^+(n-1, 1) \cup \mathrm{JSO}^+(n-1, 1) \cup -\mathrm{JSO}^+(n-1, 1).$$

We have the following result (see for instance [36]).

Proposition 6.2.1. *The restricted Lorentz group $\mathrm{SO}^+(n-1, 1)$ is connected and the full Lorentz group $\mathbf{O}(n-1, 1)$ has four connected components, which are given in (6.6).*

From now on, we restrict our attention to the relationship between the restricted Lorentz group $\mathrm{SO}^+(n-1, 1)$ and its Lie algebra, $\mathfrak{so}(n-1, 1)$. By differentiating Equation (6.3) at the identity, we get that the Lie algebra of $\mathrm{SO}^+(n-1, 1)$ is equal to

$$\mathfrak{so}(n-1, 1) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M^\top J + JM = 0\}. \quad (6.7)$$

This means that JM is skew-symmetric and so,

$$\mathfrak{so}(n-1, 1) = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M = \begin{pmatrix} B & v \\ v^\top & 0 \end{pmatrix}, v \in \mathbb{R}^{n-1}, B^\top = -B \right\} \quad (6.8)$$

Lemma 6.2.2. *The exponential map $\exp : \mathfrak{so}(n-1, 1) \rightarrow \mathrm{SO}^+(n-1, 1)$ is surjective.*

Thus $\mathrm{SO}^+(n-1, 1) = \exp(\mathfrak{so}(n-1, 1))$. For $n = 4$, the complete proof of this lemma is in [36, Theorem 4.21]. For an arbitrary n , there are two proofs of the surjectivity of the exponential map, one due to Marcel Riesz [39] and one due to Mitsuru Nishikawa [38].

6.3 Surfaces of Transitivity

Let us determine the hypersurfaces of \mathbb{R}^n which are transitive with respect to the restricted Lorentz groups. The main reference for this section [37].

Let us recall first some notations.

Definition 6.3.1. *A nonzero vector $\xi \in \mathbb{R}^n$ is said to be*

6.3. SURFACES OF TRANSITIVITY

- spacelike if $\rho(\xi) > 0$;
- timelike if $\rho(\xi) < 0$;
- lightlike if $\rho(\xi) = 0$;
- positive (resp. negative) if $\xi_n > 0$ (resp. $\xi_n < 0$).

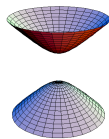
The following result of transitivity is proved in [36].

Lemma 6.3.2. *The group $\text{SO}^+(n-1, 1) = \exp(\mathfrak{so}(n-1, 1))$ acts transitively on the sets $\{\rho(\xi) = c\}$ for $c > 0$, $\{\rho(\xi) = 0, \xi_n > 0\}$, and $\{\rho(\xi) = 0, \xi_n < 0\}$.*

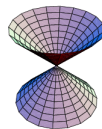
As a consequence, for any ξ with a nonnegative Lorentz norm, every point with the same norm than ξ can be written as $\pm M\xi$, for some $M \in \text{SO}^+(n-1, 1)$.

Each one of the sets above is invariant under the action of $\text{SO}^+(n-1, 1)$ and is called a surface of transitivity of $\text{SO}^+(n-1, 1)$. For $n = 4$, the complete list of the surfaces of transitivity (with pictures below) is the following one:

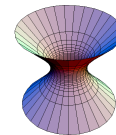
- $\rho(\xi) = c < 0, \xi_4 > 0$ is the upper branch of a hyperboloid of two sheets.
- $\rho(\xi) = c < 0, \xi_4 < 0$ is the lower branch of this hyperboloid.
- $\rho(\xi) = c > 0$ is a hyperboloid of one sheet.
- $\rho(\xi) = 0, \xi_4 > 0$ is the upper branch of the light cone.
- $\rho(\xi) = 0, \xi_4 < 0$ is the lower branch of the light cone.
- The origin of coordinates $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 0$.



Hyperboloid of Two Sheets



Light Cone



Hyperboloid of One Sheet

URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_group

Bibliography

- [1] Agrachev A., Sachkov Y., *An intrinsic Approach to the control of Rolling Bodies*. Proceedings of the Conference on Decision and Control, Phoenix, vol. I, pp. 431-435, (1999)
- [2] Agrachev A., Sachkov Y., *The Orbit Theorem and its Applications*, Encyclopedia of Mathematical Science, Vol. 87, pp. 63-80, (2004)
- [3] Bellaïche A., *The tangent space in sub-Riemannian geometry* Progress in Mathematics, Birkhauser, Vol 144 (1996)
- [4] Besse, A. *Einstein Manifolds*, Springer (2007)
- [5] Bonfiglioli A., Lanconelli E., Uguzzoni F., *Stratified Lie Groups and Potential Theory for their Sub-Laplacians*. Springer Monographs in Mathematics, (2007)
- [6] Cartan E., *La géométrie des espaces de Riemann*. Mémorial des Sciences Mathématiques 9, 1-61 (1925)
- [7] Chitour Y., *A Continuation Method for Motion-Planning Problems*. ESAIM-COCV, 12, pp. 139-168, (2006)
- [8] Chitour Y., Godoy Molina M., Kokkonen P., *The rolling problem: overview and challenges*. Geometric control theory and sub-Riemannian geometry, 103–122, Springer INdAM Ser., 5, Springer, Cham, (2014)
- [9] Chitour Y., Kokkonen P., *Rolling Manifolds: Intrinsic Formulation and Controllability*. Preprint, arXiv:1011.2925v2, (2011)
- [10] Chitour Y., Kokkonen P., *Rolling Manifolds and Controllability: the 3D case*. Accepted for publication in Mémoires de la SMF. (2015)
- [11] Chitour Y., Kokkonen P., *Rolling Manifolds on Space Forms*. Ann. I. H. Poincaré - AN 29, 927-954, (2012)
- [12] Drager, D. L., Lee J. M., Park E., Richardson K., *Smooth distributions are finitely generated*. Ann. Glob. Anal. Geom. (2012)
- [13] Falbel E., Gorodsky C., Rumin M., *Holonomy of sub-Riemannian manifolds*. International Journal of Mathematics, Vol 8, 317-344, (1997)
- [14] Godoy Molina M., Grong E., Markina I., Leite F.S., *An intrinsic formulation of the rolling manifolds problem*. Journal of Dynamical Control Systems, Vol 18 (2012)

BIBLIOGRAPHY

- [15] Goto, M., *On an Arcwise Connected Subgroup of a Lie Group*. Proceedings of the American Mathematical Society Vol. 20, No. 1 (Jan., 1969)
- [16] Harms, P., *The Poincaré Lemma in Subriemannian Geometry*. arXiv:1211.3531 (2012)
- [17] Hilgert J., Neeb K. H., *Structure and Geometry of Lie Groups*. Springer (2011)
- [18] Jean F., *Control of Nonholonomic Systems: from Sub-Riemannian Geometry to Motion PLanning*. Springer Briefs in Mathematics, (2014)
- [19] Jurdjevic V., *Geometric Control Theory*. Cambridge University Press, (1997)
- [20] Joyce D., *Riemannian Holonomy Groups and Calibrated Geometry*. Published in the United States by Oxford University PressInc., New York, (2007)
- [21] Kokkonen P., *A Characterization of Isometries between Riemannian Manifolds by using Development along Geodesic Triangles*. Published in Archivum Mathematicum, Tomus 48, Number 3 (2012)
- [22] Kokkonen P., *Rolling of Manifolds without Spinning*. Published in Journal of Dynamical and Control Systems, Vol. 19, No. 1 (January) (2013)
- [23] Kobayashi S., Nomizu K., *Foundations of Differential Geometry*. Vol. I, Wiley-Interscience, (1996)
- [24] Mortada A., Kokkonen P., Chitour Y., *Rolling manifolds of different dimensions*. accepted for publication in Acta Applicandae Mathematicae (2014)
- [25] Ozeki H., *Infinitesimal holonomy groups of bundle connections*. Nagoya Math, J., 10, 105-123, (1956)
- [26] Postnikov M. M., *Geometry VI - Riemannian geometry*, Encyclopedia of Mathematical Sciences, Springer, (2001)
- [27] Rifford L., *Subriemannian Geometry and Optimal Transport*. Springer Briefs in Mathematics, (2014)
- [28] Sakai T., *Riemannian Geometry*. Translations of Mathematical Monographs, 149. American Mathematical Society, Providence, RI, (1996)
- [29] Sharpe R.W., *Differential Geometry: Cartan's Generalization of Klein's Erlangen Program* Graduate Texts in Mathematics, 166. Springer-Verlag, New York (1997)
- [30] Sussmann, H., *Smooth Distributions Are Globally Finitely Spanned*, Analysis and Design of Nonlinear Control Systems, (2008)
- [31] Hafassa B., Mortada A., Chitour Y., Kokkonen P., *Horizontal Holonomy for Affine Manifolds*. Journal of Dynamical and Control Systems. Springer US, (2015)
- [32] Berger M., *Geometry*. Springer-Verlag, cop, (1987)
- [33] Cecil T., *Lie Sphere Geometry: With Applications to Submanifolds*. Universitext. Springer, (2007)
- [34] Arber Ch., *Communication Personnelle*.
- [35] Arber Ch., Jean F. *La mécanique des sphères de Lie: un futur pour la CAO?*. Journée annuelle, SMF p. 1-15, (2015)
- [36] Gallier J. *Notes On Group Actions Manifolds, Lie Groups and Lie Algebras*, (2005)

BIBLIOGRAPHY

- [37] Gel'fand I. M, Minlos R. A, Shapiro Z. Ya., *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications*. Oxford: Pergamon Press, (1963)
- [38] Nishikawa M. *On the exponential map of the group $O(p, q)_0$* . Memoirs of the Faculty of Science, Kyushu University, Ser. A, 37:63-69, (1983)
- [39] Riesz M. *Clifford Numbers and Spinors*. Kluwer Academic Press, first edition. Edited by E. Folke Bolinder and Pertti Lounesto, (1993)
- [40] Adler R. L., Dedieu J. P., Margulies J. Y., Martens M., Shub M., *Newton's method on Riemannian manifolds and a geometric model for the human spine*. IMA Journal of Numerical Analysis, 22(3), 359-390, (2002)

Titre : Deux Problèmes de Contrôle Géométrique: Holonomie Horizontale et Solveur d'Esquisse

Mots clés : Groupe d'Holonomie (Affine), Roulement des variétés, Géométrie (Sous-) Riemannienne, Théorie du groupe de Lie, CFAO, Groupe de Lorentz

Résumé : Nous étudions deux problèmes qui ont leur origine dans la théorie du contrôle géométrique. Le Problème I consiste à étendre le concept du groupe d'holonomie horizontale sur une variété affine. Plus précisément, nous considérons une variété connexe lisse de dimension finie M , une connexion affine ∇ avec le groupe d'holonomie H^∇ et une distribution lisse Δ complètement non intégrable. Dans un premier temps, nous définissons le groupe d'holonomie horizontale H_Δ^∇ comme le sous-groupe de H^∇ obtenu par le transport parallèle le long des lacets tangents à Δ . Nous donnons les propriétés élémentaires de H_Δ^∇ et ensuite nous faisons une étude détaillée en utilisant le formalisme de roulement. Il est montré en particulier que H_Δ^∇ est un groupe de Lie. Dans un second temps, nous avons étudié un exemple explicite où M est un groupe de Carnot libre d'ordre 2 avec $m \geq 2$ générateurs,

et ∇ est la connexion de Levi-Civita associé à une métrique riemannienne sur M . Nous avons montré dans ce cas particulier que H_Δ^∇ est compact et strictement inclus dans H^∇ dès que $m \geq 3$. Le Problème II étudie la modélisation du problème du solveur d'esquisse. Ce problème est une des étapes d'un logiciel de CFAO. Notre but est d'arriver à une modélisation mathématique bien fondée et systématique du problème du solveur d'esquisse. Il s'agira ensuite de comprendre la convergence de l'algorithme, d'en améliorer les résultats et d'en étendre les fonctionnalités. L'idée directrice de l'algorithme est de remplacer tout d'abord les points de l'espace des sphères par des déplacements et puis d'utiliser une méthode de Newton sur les groupes de Lie ainsi obtenus. Dans cette thèse, nous avons classifié les groupes de déplacements possibles en utilisant la théorie des groupes de Lie.

Title : Two Problems of Geometric Control: Horizontal Holonomy and Solver of Sketch

Keywords : (Affine)Holonomy group, Rolling manifolds, (Sub-) Riemannian Geometry, Theory of Lie groups, CAD/CAM software, Lorentz group

Abstract : We study two problems arising from geometric control theory. The Problem I consists of extending the concept of horizontal holonomy group for affine manifolds. More precisely, we consider a smooth connected finite-dimensional manifold M , an affine connection ∇ with holonomy group and Δ a smooth completely non integrable distribution. We define the horizontal holonomy group as the subgroup of H^∇ obtained by ∇ -parallel transporting frames only along loops tangent to Δ . We first set elementary properties of and show how to study it using the rolling formalism. In particular, it is shown that is a Lie group. Moreover, we study an explicit example where M is a free step-two homogeneous Carnot group with $m \geq 2$ generators, and ∇ is the Levi-Civita connection

associated to a Riemannian metric on M , and show in this particular case that is compact and strictly included in as soon as $m \geq 3$. The Problem II is studying the modeling of the problem of solver sketch. This problem is one of the steps of a CAD/CAM software. Our goal is to achieve a well founded mathematical modeling and systematic the problem of solver sketch. The next step is to understand the convergence of the algorithm, to improve the results and to expand the functionality. The main idea of the algorithm is to replace first the points of the space of spheres by displacements (elements of the group) and then use a Newton's method on Lie groups obtained. In this thesis, we classified the possible displacements of the groups using the theory of Lie groups.

