



**HAL**  
open science

# La rotation et son interaction avec les oscillations dans les étoiles

Rhita-Maria Ouazzani

► **To cite this version:**

Rhita-Maria Ouazzani. La rotation et son interaction avec les oscillations dans les étoiles. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. LESIA - Observatoire de Paris; Université Pierre & Marie Curie, 2011. Français. NNT: . tel-01429089

**HAL Id: tel-01429089**

**<https://theses.hal.science/tel-01429089>**

Submitted on 6 Jan 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS 6 - PIERRE ET MARIE CURIE

École doctorale DE LA PARTICULE À LA MATIÈRE CONDENSÉE (ED 389)

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité

ASTROPHYSIQUE ET MÉTHODES ASSOCIÉES

---

LA ROTATION ET SON INTERACTION  
AVEC LES OSCILLATIONS DANS LES  
ÉTOILES

par

RHITA-MARIA OUAZZANI

---

Thèse dirigée par Marie-Jo GOUPIL  
et Marc-Antoine DUPRET

Soutenue publiquement

le 28 avril 2011

à l'Observatoire de Meudon

devant le jury composé de :

Laurence REZEAU	Présidente du jury
Michael J. THOMPSON	Rapporteur
François LIGNIÈRES	Rapporteur
Ian W. ROXBURGH	Examineur
Stéphane MATHIS	Examineur
Marie-Jo GOUPIL	Directrice de thèse
Marc-Antoine DUPRET	Codirecteur de thèse

---



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
1.1	Contexte général . . . . .	4
1.1.1	Le modèle stellaire standard . . . . .	4
1.1.2	Les insuffisances du modèle standard . . . . .	4
1.2	Effet de la rotation sur la structure et l'évolution stellaire . . . . .	5
1.2.1	Observations de l'impact de la rotation . . . . .	5
1.2.2	Un processus de transport non standard : le mélange rotationnel	7
1.2.3	Succès, échecs et améliorations du mélange rotationnel . . . . .	11
1.2.4	Un test pour les modèles de structure interne . . . . .	12
1.3	Oscillations stellaires : spectre fréquentiel et géométrie des modes . . . . .	13
1.3.1	Un exemple simple : vibrations dans un tuyau d'orgue . . . . .	13
1.3.2	Oscillations stellaires en l'absence de rotation . . . . .	13
1.3.3	Oscillations d'une étoile en rotation . . . . .	15
1.3.4	Les différents types de pulsateurs . . . . .	16
1.4	Modélisations des oscillations en présence de rotation . . . . .	18
1.4.1	Différentes situations stellaires . . . . .	18
1.4.2	Historique des méthodes perturbatives . . . . .	20
1.4.3	Les approches bidimensionnelles directes : état de l'art . . . . .	22
1.5	Problématique et organisation de la thèse . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Oscillations stellaires : aspects théoriques</b>	<b>27</b>
2.1	Temps caractéristiques . . . . .	28
2.1.1	Le temps dynamique . . . . .	28
2.1.2	Le temps de Kelvin-Helmholtz . . . . .	29
2.1.3	Le temps nucléaire . . . . .	29
2.2	Étoile de séquence principale du point de vue hydrodynamique . . . . .	30
2.3	Oscillations adiabatiques : cas général . . . . .	30
2.3.1	Modèle d'équilibre . . . . .	30
2.3.2	Linéarisation autour de la structure d'équilibre . . . . .	31
2.3.3	Équations d'oscillations non radiales adiabatiques d'une étoile en rotation . . . . .	32
2.3.4	Conditions aux limites . . . . .	34
2.4	Cas particulier : le cas sans rotation . . . . .	35
2.4.1	Équations pour les oscillations adiabatiques non radiales . . . . .	35
2.4.2	Oscillations dans l'approximation de Cowling . . . . .	36

<b>3</b>	<b>Rotation faible : Approches perturbatives</b>	<b>41</b>
3.1	Méthodes perturbatives . . . . .	42
3.2	Corrections d'ordre 1 . . . . .	43
3.3	Corrections d'ordre 2 . . . . .	45
3.3.1	Traitement de la déformation de la structure . . . . .	45
3.3.2	Effet du second ordre sur les fréquences . . . . .	46
3.3.3	Dégénérescence accidentelle . . . . .	47
3.3.4	Limite de validité de l'approche perturbative au second ordre . . . . .	49
3.4	La rotation modérée . . . . .	52
3.4.1	Résolution du problème à l'ordre « pseudo-zéro » . . . . .	53
3.4.2	Correction perturbative des fréquences propres . . . . .	54
3.5	Le splitting rotationnel : écarts à la linéarité . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Calcul bidimensionnel non perturbatif d'oscillations d'étoiles en rotation rapide</b>	<b>73</b>
4.1	Géométrie sphéroïdale . . . . .	74
4.1.1	Définition d'une base sphéroïdale . . . . .	74
4.1.2	Changements de base . . . . .	76
4.2	Obtention d'un système d'équations différentielles . . . . .	77
4.2.1	Intérieur stellaire : $\zeta \in [0; 1]$ . . . . .	78
4.2.2	Dans le vide : entre $\zeta = 1$ et $\zeta = 2$ . . . . .	82
4.2.3	Système d'équations final . . . . .	83
4.3	Décomposition spectrale . . . . .	83
4.3.1	Décomposition sur une base d'harmoniques sphériques . . . . .	83
4.4	Conditions aux limites . . . . .	85
4.4.1	Conditions au centre . . . . .	85
4.4.2	Surface libre . . . . .	90
4.4.3	Potentiel gravitationnel à l'infini . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Méthode numérique</b>	<b>93</b>
5.1	Discrétisation radiale du système différentiel . . . . .	93
5.1.1	Mise en forme du système différentiel . . . . .	94
5.1.2	Schéma discret dans l'intérieur stellaire . . . . .	95
5.1.3	Traitement des couches limites . . . . .	96
5.1.4	Représentation matricielle . . . . .	99
5.2	Résolution numérique du système linéaire . . . . .	103
5.2.1	La méthode d'itération inverse généralisée . . . . .	103
5.2.2	Factorisation LU . . . . .	104
5.3	Performances . . . . .	105
5.3.1	Développement spectral . . . . .	105
5.3.2	Résolution radiale . . . . .	106
5.3.3	Le temps et l'espace mémoire . . . . .	107
<b>6</b>	<b>Validation : comparaison avec Reese et al. (2006)</b>	<b>109</b>
6.1	Modèles d'équilibre . . . . .	110
6.2	Similitudes et différences entre les deux approches . . . . .	110
6.2.1	Similitudes . . . . .	110

6.2.2	Différences . . . . .	110
6.3	Méthode de comparaison . . . . .	111
6.4	Comparaison des modes propres d'oscillation . . . . .	112
6.4.1	Classification des modes . . . . .	112
6.4.2	Évolution des modes propres avec la rotation . . . . .	112
6.4.3	Vérification du comportement au centre . . . . .	113
6.5	Comparaison des fréquences propres . . . . .	120
6.6	Un croisement évité . . . . .	122
<b>7</b>	<b>Application : Oscillation d'un modèle évolué et déformé</b>	<b>127</b>
7.1	Déformation du modèle . . . . .	128
7.1.1	Solution de l'équation hydrostatique . . . . .	130
7.1.2	Solution de l'équation de Poisson . . . . .	131
7.1.3	Détermination de la pression . . . . .	132
7.1.4	Processus d'itération . . . . .	133
7.2	Système de coordonnées adapté pour le calcul des oscillations . . . . .	133
7.2.1	1 <sup>er</sup> domaine : Au centre entre $\zeta = 0$ et $\zeta = R_{\text{eq}}^c$ . . . . .	134
7.2.2	2 <sup>e</sup> domaine : Entre $\zeta = R_{\text{eq}}^c$ , et $\zeta = 1$ . . . . .	135
7.2.3	3 <sup>e</sup> domaine : Entre $\zeta = 1$ , et $\zeta = 2$ . . . . .	135
7.2.4	Système de coordonnées global . . . . .	137
7.2.5	Interpolation du modèle . . . . .	137
7.3	Oscillations . . . . .	138
7.3.1	Modèle d'équilibre . . . . .	139
7.3.2	Spectre d'oscillation . . . . .	141
7.3.3	Géométrie des modes propres d'oscillation . . . . .	142
<b>8</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>151</b>
8.1	Pulsateurs de type solaire et rotateurs lents . . . . .	152
8.2	Pulsateurs classiques . . . . .	153
8.2.1	Rotateurs modérés . . . . .	153
8.2.2	Rotateurs rapides . . . . .	154
<b>9</b>	<b>Conclusion and future prospects (english version)</b>	<b>159</b>
9.1	Solarlike pulsators and slow rotators . . . . .	159
9.2	Classical pulsators . . . . .	161
9.2.1	Moderate rotators . . . . .	161
9.2.2	Rapid rotators . . . . .	162
<b>A</b>	<b>Développement spectral des équations d'oscillation</b>	<b>165</b>
A.1	Composante radiale de l'équation de mouvement . . . . .	165
A.2	Divergence du mouvement horizontal . . . . .	166
A.3	Composante radiale du rotationnel de l'équation de mouvement . . . . .	168
A.4	Relation adiabatique . . . . .	169
A.5	Équation de continuité . . . . .	169
A.6	Équation de Poisson . . . . .	170

<b>B</b>	<b>Comportement au centre</b>	<b>173</b>
B.1	Composante radiale de l'équation de mouvement . . . . .	173
B.1.1	Cas général : $m = 0$ et $\text{par} = 1$ , ou $m \neq 0$ . . . . .	175
B.1.2	Cas $m = 0$ et $\text{par} = 0 \Rightarrow \ell_1 = 0, 2, 4 \dots$ . . . . .	175
B.2	Divergence horizontale du mouvement . . . . .	175
B.2.1	Cas général $m = 0$ et $\text{par} = 1$ , ou $m \neq 0$ . . . . .	176
B.2.2	Cas $m = 0$ , et $\text{par} = 0 \Rightarrow \ell_1 = 0, 2, 4 \dots$ . . . . .	176
B.3	Composante radiale du rotationnel de l'équation de mouvement . . . . .	176
B.3.1	Cas général : $m = 0$ et $\text{par} = 1$ , ou $m \neq 0$ . . . . .	177
B.3.2	Cas $m = 0$ et $\text{par} = 0 \Rightarrow \ell_2 = 0, 2, 4 \dots$ et $\ell_{1p} = 1, 3, 5 \dots$ . . . . .	177
B.4	Relation adiabatique . . . . .	178
B.5	Équation de continuité . . . . .	178
B.5.1	Cas général : $m = 0$ et $\text{par} = 1$ , ou $m \neq 0$ . . . . .	179
B.5.2	Cas $m = 0$ , et $\text{par} = 0 \Rightarrow \ell_1 = 0, 2, 4 \dots$ . . . . .	179
B.6	Équation de Poisson . . . . .	180
<b>C</b>	<b>Communications</b>	<b>183</b>
C.1	Effect of stellar rotation on oscillation frequencies . . . . .	184
C.2	Domain of validity of a 1D second order perturbative approach for the effects of rotation on stellar oscillations . . . . .	190
C.3	2D non-perturbative modeling of oscillations in rapidly rotating stars . . . . .	193
C.4	2D Pulsations of an evolved distorted rapidly rotating $2 M_\odot$ star . . . . .	199
	<b>Bibliographie</b>	<b>203</b>

# Abstract

Stellar rotation plays a key role in the evolution of stars. It causes mixing of chemical elements and transport of angular momentum inside the star which will strongly determine the star's history. Asteroseismology is the most efficient observational mean to get information about stellar interiors by measuring magnitude variability induced by seismic waves emerging at the stellar surface. But rotation also impacts these seismic pulsations : the centrifugal force distorts the resonant cavity while the Coriolis force modifies the fluid dynamics. Therefore, in order to get relevant information about the stellar structure from asteroseismology, one should reach a good understanding of the rotational effect on stellar pulsations.

On the one hand, when rotation velocity is small, a perturbative approach gives satisfying results for the computations of the rotational impact on oscillations. Therefore, the first step of my work consisted in the determination of validity domains for such methods.

Within the established validity domain, I showed that the perturbative method, up to the cubic order in terms of the rotation angular velocity  $\Omega$  and accounting for near degeneracy corrections enables us to constrain stellar surface rotation from seismic observations.

However, when the perturbative approach is no longer relevant, for rapid rotators, I built a non perturbative, two dimensional code which fully takes into account both centrifugal distortion and Coriolis force. The numerical method is based on a spectral multi-domain method which expands the angular dependence of pulsation modes on spherical harmonics series, and which radial treatment is particularly well adapted to the behaviour of equilibrium quantities in evolved models at the interface of convective and radiative regions, and at the stellar surface. The radial differentiation is made by means of a sophisticated finite differences method which is accurate up to the fifth order in terms of the radial resolution.

This code has been validated by comparison with the results of Reese et al. (2006) for polytropic models. The agreement between the two codes is found excellent.

Finally, I used this newly developed tool in order to compute pulsations of an evolved centrifugally distorted model of star computed by Roxburgh (2006). I found a new type of oscillation modes which are the equivalent of low degree gravito-acoustic mixed modes for very rapid rotators. They show amplitude both in the core (in the  $\mu$  gradient region) and in the envelop and angular geometry which varies from the center to the surface of the star. These modes represent a very interesting seismic tool for differential rotation in massive rapidly rotating stars.

**Key words :** star, stellar rotation, oscillations, asteroseismology, rotational splitting, perturbative methods, spectral methods, numerical simulations





## Résumé

La rotation stellaire joue un rôle essentiel dans l'évolution des étoiles. Elle induit des phénomènes de mélange des éléments chimiques et de redistribution du moment cinétique qui vont déterminer l'histoire de la structure de l'étoile. Le moyen observationnel le plus efficace pour sonder les intérieurs stellaires est l'astérosismologie, l'étude des ondes sismiques s'y propageant. Mais la rotation agit également sur les oscillations par l'intermédiaire de la force centrifuge qui déforme la cavité résonnante des modes de pulsation et de la force de Coriolis qui agit sur la dynamique du fluide stellaire. Dans le but de comprendre toute l'information que peut nous apporter l'astérosismologie sur l'intérieur des étoiles, il faut alors se donner les moyens d'appréhender correctement l'effet de la rotation sur les oscillations stellaires.

Dans le cas où la vitesse de rotation de l'étoile est faible, l'approche perturbative nous permet de calculer l'impact de la rotation sur les oscillations de manière suffisamment précise (la fréquence d'oscillation se décompose en série de la vitesse angulaire de rotation  $\Omega$ , l'ordre zéro correspondant au cas sans rotation). Une première étape de ce travail de thèse a donc consisté à déterminer jusqu'à quelle vitesse de rotation les méthodes perturbatives sont valides pour une telle détermination.

Dans la limite où elle est valide, la méthode perturbative poussée à l'ordre 3 en terme de vitesse de rotation m'a permis de montrer comment on pouvait contraindre la rotation de surface à partir des observations sismiques.

Par ailleurs, dans le cas où elles ne sont pas valides, pour les rotateurs rapides, j'ai développé un outil non perturbatif bidimensionnel de calcul des oscillations stellaires capable de prendre en compte à la fois la distorsion centrifuge et l'effet de la force de Coriolis de manière complète. La méthode numérique repose sur une approche spectrale multidomaine, c'est-à-dire que la dépendance angulaire des solutions est développée sur une série tronquée d'harmoniques sphériques, et que le système de coordonnées mis au point permet de s'adapter parfaitement à la structure de l'étoile (que ce soit aux interfaces entre les régions convectives et radiatives ou à la surface stellaire). La différenciation radiale des équations hydrodynamiques se fait au moyen d'une méthode particulièrement stable et précise jusqu'à l'ordre 5 en terme de la résolution radiale.

Le code ainsi mis au point a été validé par comparaison avec les résultats issus du code développé dans Reese et al. (2006) pour des modèles polytropiques. L'accord entre les modes propres issus des deux calculs est excellent.

Enfin, j'ai utilisé cet outil nouvellement développé afin de calculer les pulsations d'un modèle évolué d'étoile dont la déformation induite par la rotation est calculée a posteriori de manière autocohérente suivant la méthode développée par Roxburgh (2006). Ce type de modèle est chimiquement hétérogène et présente un cœur convectif entouré d'une enveloppe radiative, ce qui est particulièrement délicat à traiter étant donné les variations brusques des grandeurs de structure. Ceci m'a permis d'obtenir des modes d'oscillation alors jamais observés en rotation rapide : des modes mixtes (ayant de l'amplitude à la fois dans le cœur et dans l'enveloppe) de bas degré angulaire, qui représentent l'outil sismique de sondage de la rotation différentielle par excellence.

**Mots Clefs :** étoile, rotation, oscillations, astérosismologie, splitting rotationnel, méthodes perturbatives, méthodes spectrales, simulations numériques







# Chapitre 1

## Introduction

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Contexte général . . . . .</b>	<b>4</b>
1.1.1	Le modèle stellaire standard . . . . .	4
1.1.2	Les insuffisances du modèle standard . . . . .	4
<b>1.2</b>	<b>Effet de la rotation sur la structure et l'évolution stellaire</b>	<b>5</b>
1.2.1	Observations de l'impact de la rotation . . . . .	5
1.2.2	Un processus de transport non standard : le mélange rotationnel	7
1.2.3	Succès, échecs et améliorations du mélange rotationnel . . . .	11
1.2.4	Un test pour les modèles de structure interne . . . . .	12
<b>1.3</b>	<b>Oscillations stellaires : spectre fréquentiel et géométrie des modes . . . . .</b>	<b>13</b>
1.3.1	Un exemple simple : vibrations dans un tuyau d'orgue . . . .	13
1.3.2	Oscillations stellaires en l'absence de rotation . . . . .	13
1.3.3	Oscillations d'une étoile en rotation . . . . .	15
1.3.4	Les différents types de pulsateurs . . . . .	16
<b>1.4</b>	<b>Modélisations des oscillations en présence de rotation . . . . .</b>	<b>18</b>
1.4.1	Différentes situations stellaires . . . . .	18
1.4.2	Historique des méthodes perturbatives . . . . .	20
1.4.3	Les approches bidimensionnelles directes : état de l'art . . . .	22
<b>1.5</b>	<b>Problématique et organisation de la thèse . . . . .</b>	<b>24</b>

---

Les étoiles représentent les constituants principaux de l'Univers : elles sont le lieu de processus physiques d'une grande diversité qui se produisent sur des échelles spatio-temporelles aussi bien microscopiques que macroscopiques. Les conditions extrêmes que l'on rencontre dans ces objets en font des laboratoires de physique fondamentale sans équivalent sur Terre. Si l'évolution et la structure stellaires peuvent actuellement être décrites dans les grandes lignes, de nombreux phénomènes restent encore mal compris. Un mécanisme dont les conséquences demeurent peu connues est la rotation stellaire et son impact sur les pulsations des étoiles. Ceci constitue l'objet d'étude de la présente thèse.

## 1.1 Contexte général

La naissance d'une étoile résulte d'une instabilité gravitationnelle au sein d'un nuage de matière interstellaire. La contraction de ce nuage conduit progressivement à l'établissement d'un équilibre hydrostatique pour lequel chaque élément de masse est en équilibre sous l'action de la force gravitationnelle et de la force due au gradient de pression. Lors de la contraction, la température atteint une valeur telle que le cœur « s'allume » : l'hydrogène entre en fusion. L'étoile débute alors une phase qu'on appelle la séquence principale qui représente la majeure partie de sa vie.

### 1.1.1 Le modèle stellaire standard

Le *modèle stellaire standard* conçoit une étoile comme un système isolé, une sphère de plasma en équilibre hydrostatique, en l'absence de rotation et de champ magnétique. L'évolution résulte de processus énergétiques se déroulant dans les couches profondes de l'étoile. L'énergie fournie par la fusion nucléaire à l'intérieur peut être transportée vers l'extérieur principalement par deux types de mécanismes : radiatif ou convectif. Dans le premier type de mécanisme, l'énergie est transportée par les photons, alors que dans le second, ce sont des éléments de matière en mouvement qui transportent l'énergie. De ce point de vue, on peut distinguer trois classes d'étoiles : d'une part des étoiles de très faible masse (moins de  $0,3 M_{\odot}$ ) entièrement convectives, des étoiles de faible masse qui présentent un cœur radiatif surmonté d'une zone convective externe (comme notre Soleil), et d'autre part les étoiles massives constituées d'un cœur convectif et de régions externes principalement radiatives.

De manière générale, le modèle standard permet une bonne approche qualitative de l'évolution stellaire. Dans ce modèle, on considère que les étoiles sont en équilibre hydrostatique, les zones convectives sont considérées comme étant parfaitement mélangées, tandis que les processus de transport ne sont pas pris en compte dans la zone radiative, où les éléments chimiques ne sont soumis qu'à la diffusion microscopique et au triage gravitationnel (en anglais *gravitational settling*).

L'un des premiers succès portés par ce modèle a été d'expliquer la présence de la séquence principale d'âge zéro (ZAMS de l'anglais *Zero Age Main Sequence*), composée des étoiles de différentes masses sur le point de débiter les réactions de fusion nucléaire. Ce modèle a permis par ailleurs de comprendre qu'une fois l'hydrogène central totalement épuisé, l'étoile évolue vers le stade de géantes rouges, où elle présente une enveloppe très étendue et une température effective beaucoup plus faible que sur la séquence principale. Cependant de nombreux désaccords quantitatifs subsistent entre les prédictions d'un tel modèle et les données observationnelles.

### 1.1.2 Les insuffisances du modèle standard

En particulier se pose le problème des anomalies des abondances de surface. En effet la sous-abondance en lithium dans les étoiles de faible masse fournit un excellent test de la modélisation des processus de transport dans les modèles stellaires. Le lithium est produit principalement durant la nucléosynthèse primordiale. Il est détruit lorsque la base de la zone convective superficielle est assez profonde pour que la température requise pour les réactions de destruction de Li soit atteinte. Cela se produit pendant la

phase de préséquence principale (PMS). Or on observe que dans les étoiles de séquence principale ayant une température inférieure à 6750K, l'abondance de Li diminue avec l'âge et ce, malgré le fait que la température de la base de leur enveloppe convective soit trop basse pour qu'il soit détruit par des réactions nucléaires. Des processus de transport (comme par exemple la pénétration convective, ou encore la turbulence de cisaillement induite par la rotation différentielle) ayant lieu dans la région radiative doivent être invoqués pour acheminer le Li vers des régions de température suffisamment élevée.

D'autre part, le modèle standard ne permet pas non plus d'expliquer les anomalies d'abondance dans les étoiles massives telles que les enrichissements en hélium 4 et en azote 14 observés en surface des étoiles de type O et B, enrichissement dont les observations montrent une forte corrélation avec une vitesse de rotation rapide, et qui prouvent que ces éléments ont été transportés du cœur de l'étoile où ils sont produits, jusqu'à la surface (voir par exemple Gies & Lambert 1992). Par ailleurs, si seuls les processus standards de mélange tels que la diffusion microscopique ou la ségrégation gravitationnelle sont à l'œuvre, étant donné que ce sont des processus sélectifs selon les espèces chimiques, de fortes différences seraient observées entre les abondances des divers éléments chimiques présents en surface, ce qui n'est pas le cas. En effet, cela a d'abord été signalé par Eddington (1926). Richer et al. (2000) montrent comment la turbulence de cisaillement peut amoindrir les différences d'abondances.

Enfin, si nous nous intéressons au cas du Soleil, le modèle standard a été remis en cause par les observations sismiques du satellite SOHO (programme commun de la NASA et de l'ESA). En effet, l'inversion sismique des données SOHO-GOLF (Gabriel et al. 1995) montre que le modèle standard ne permet pas de reproduire le profil de la vitesse du son dans la zone radiative (Turck-Chièze et al. 2004). La transition entre la zone convective en rotation différentielle et la zone radiative en rotation quasi uniforme a lieu au sein d'une fine couche appelée tachocline dans laquelle se produit un mouvement de circulation à grande échelle, ainsi que des mouvements turbulents (voir pour les développements théoriques Spiegel & Zahn 1992; Brun et al. 1999). Par ailleurs, les nouveaux calculs d'opacités effectués par Grevesse & Sauval (1998) augmentent les désaccords (voir par exemple Goupil et al. 2011).

Ainsi, il semble que la modélisation des processus de transport dans le modèle standard reste insuffisante. Par ailleurs, le transport de moment angulaire et ses conséquences sur le transport d'éléments chimiques est totalement absent. Dès lors de nouveaux mécanismes de transport doivent être pris en compte, parmi eux le processus d'*overshoot*, de pénétration convective (ces deux processus sont dus à la pénétration de cellules convectives dans les régions radiatives), et celui qui nous intéresse tout particulièrement : le mélange rotationnel.

## 1.2 Effet de la rotation sur la structure et l'évolution stellaire

### 1.2.1 Observations de l'impact de la rotation

L'importance de la rotation et de ses effets a été montrée par de nombreuses observations directes de surface. Par exemple, la spectroscopie permet de mesurer la vitesse



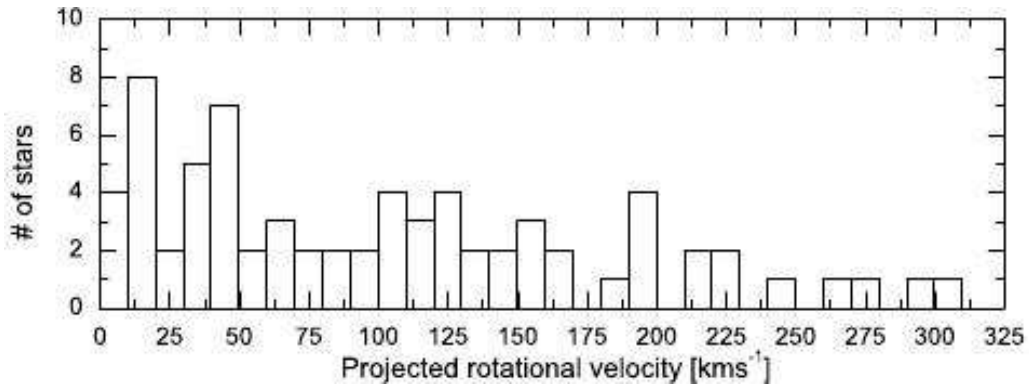


FIGURE 1.1: Histogram of radial velocity for the known  $\beta$ Cephei stars, measured by spectroscopy (Stankov & Handler 2005).

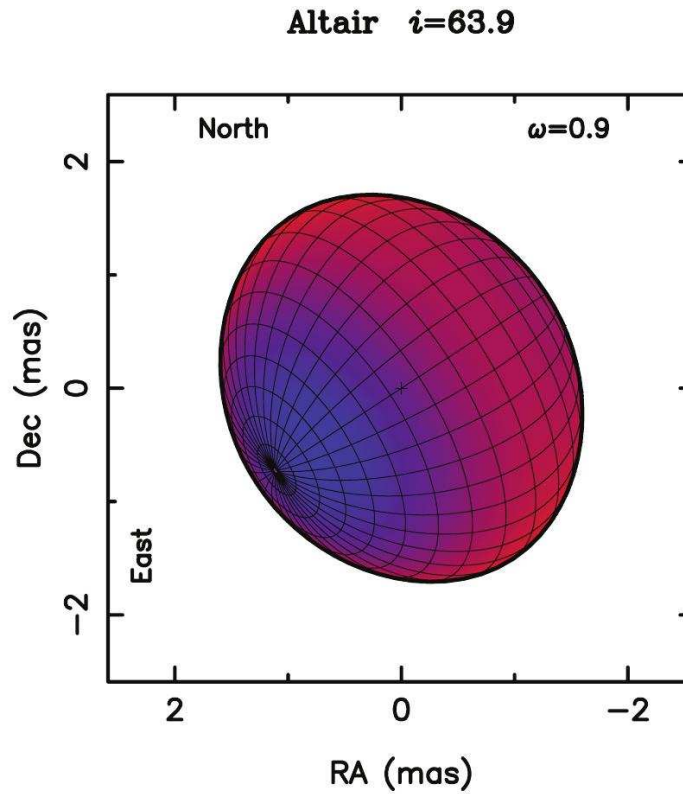


FIGURE 1.2: Temperature diagram of the visible surface of Altair with values ranging from 8740 K at the pole to 6890 K at the equator. This picture shows both the rotationally induced flattening and the gravitational darkening of the star measured by interferometry (Peterson et al. 2006).

de rotation de surface projetée sur l'axe de visée (en appelant  $i$  l'angle d'inclinaison, on mesure  $v \sin i$ ) en s'appuyant sur l'élargissement Doppler des raies spectrales. Dans leur catalogue des étoiles de type  $\beta$ Cephei, Stankov & Handler (2005) ont compilé près de cent ans de mesures spectroscopiques concernant ces étoiles massives. Ils ont permis, entre autres, de déterminer la distribution statistique des  $\beta$ Cephei connues en terme de vitesse de rotation projetée comme illustré à la figure 1.1.

Par ailleurs, les mesures interférométriques permettent de mesurer certains effets de la rotation. Grâce au développement de l'interférométrie, les étoiles autres que le soleil, qui ne pouvaient être résolues spatialement auparavant, révèlent leur structure globale. Ainsi, on peut mesurer l'aplatissement centrifuge de quelques-unes des étoiles proches comme par exemple Achernar ou encore Altair, dont l'aplatissement a pu être reconstitué par Peterson et al. (2006) grâce à des mesures interférométriques. Un autre effet de la rotation, observable grâce à l'interférométrie, est ce qu'on appelle l'assombrissement gravitationnel (ou *gravity darkening*), qui est dû à une baisse de température au niveau de l'équateur, causée par une gravité effective (la force centrifuge diminue la gravité dans l'équilibre hydrostatique) plus basse à l'équateur qu'aux pôles. Ces deux effets peuvent être observés Figure 1.2.

### 1.2.2 Un processus de transport non standard : le mélange rotationnel

Le premier processus de transport non standard à avoir été proposé est celui dû à la pénétration des mouvements convectifs des enveloppes ou des noyaux convectifs dans les régions radiatives adjacentes. S'il est le principal responsable du mélange dans les intérieurs stellaires, ce processus n'intervient cependant qu'aux interfaces des régions convectives/radiatives. Il ne peut donc pas expliquer les observations évoquées au paragraphe précédent concernant les enrichissements de surface des étoiles massives en éléments synthétisés dans le cœur.

Un processus de mélange à grande échelle dans les régions radiatives doit donc être invoqué. Ce processus de mélange global est dû à l'action de la rotation (plus précisément de la rotation différentielle) qui, d'une part, par l'intermédiaire de la force centrifuge, induit un déséquilibre thermique dans les régions radiatives, ce qui génère un mouvement à grande échelle que l'on nomme la circulation méridienne, et d'autre part, par le biais de son cisaillement, provoque un mouvement turbulent. Ces processus transportent de la matière ainsi que du moment cinétique, modifiant la composition chimique et la loi de rotation de l'étoile, et affectent donc sa structure ainsi que son évolution. Ces processus de mélange sont alors de deux natures : un transport advectif pour ce qui est de la circulation méridienne, tandis que la turbulence de cisaillement va tendre à amoindrir le gradient de composition chimique par le biais d'un transport diffusif.

Afin de mettre en évidence ces mouvements, considérons dans un premier temps l'équation de mouvement d'un fluide autogravitant :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} \Phi - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \frac{1}{2} \Omega^2 \vec{\nabla} (s^2) \quad (1.1)$$

Où l'on a négligé le terme visqueux,  $\vec{v}$  étant le champ de vitesse dans l'étoile,  $P$ ,  $\rho$

et  $\Phi$  respectivement la pression, la densité et le potentiel gravifique, le dernier terme exprimant la force centrifuge avec  $s$  désignant la distance à l'axe de rotation,  $s = r \sin \theta$ . Le pendant statique de l'équation (1.1) est :

$$\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P = -\vec{\nabla} \Phi + \frac{1}{2} \Omega^2 \vec{\nabla} (s^2) = \vec{g}_{eff} \quad (1.2)$$

Où  $\vec{g}_{eff}$  désigne la gravité effective. Cette équation montre qu'en présence de rotation, les surfaces de référence ne sont plus les isopotentielles gravifiques, mais les isobares. Revenons à (1.1), en prenant son rotationnel et en introduisant le vecteur vorticité  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \wedge \vec{v}$ , on obtient :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} = \left[ (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} - \vec{\omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \right] - \frac{1}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} P + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\Omega^2) \wedge \vec{\nabla} (s^2) \quad (1.3)$$

Le second terme du membre de gauche représente l'advection de vorticité, les termes entre crochets du membre de droite désignent respectivement le terme de création de vorticité dû à son cisaillement par son champ de vitesse, et la compressibilité du fluide, le terme suivant, qui nous intéresse particulièrement, est le couple barocline tandis que le dernier terme est le rotationnel de la force centrifuge. En négligeant les termes non linéaires, on obtient alors :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \frac{1}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} P + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\Omega^2) \wedge \vec{\nabla} (s^2) \quad (1.4)$$

Que l'on nomme équation barocline. L'équation hydrostatique pour la vorticité est alors donnée par :

$$-\frac{1}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \wedge \vec{\nabla} P = \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\Omega^2) \wedge \vec{\nabla} (s^2) \quad (1.5)$$

Ainsi, lorsque la rotation est uniforme, les gradients de densité et de pression sont parallèles, c'est à dire que la densité est constante sur les isobares, l'étoile est alors qualifiée de barotrope.

De plus, si l'on considère la force centrifuge comme une force perturbatrice petite devant la gravité, on peut alors décomposer la densité en une partie constante sur les isobares et une petite fluctuation due à la rotation :

$$\rho = \bar{\rho}(P) + \tilde{\rho}(P, \Omega) \quad (1.6)$$

L'équation (1.4) devient alors :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \frac{1}{\bar{\rho}} \vec{\nabla} [\tilde{\rho}(P, \Omega)] \wedge \vec{g}_{eff} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\Omega^2) \wedge \vec{\nabla} (s^2) \quad (1.7)$$

Dans le cas simplifi e d'une composition chimique homogène, toute grandeur thermodynamique ne dépend que de deux variables indépendantes, et l'équation d'état qui relie les quantités thermodynamiques dans l'étoile peut alors s'exprimer :

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha \frac{dP}{P} - \delta \frac{dT}{T} \quad (1.8)$$

$$\text{qui, le long d'une isobare donne : } \frac{\tilde{\rho}}{\bar{\rho}} = -\delta \frac{\tilde{T}}{\bar{T}} \quad (1.9)$$

$T$  désigne la température qui, comme la densité, est décomposée en une partie constante sur les isobares, et une partie fluctuante, due à la rotation, et l'on a  $\alpha = (\partial \ln \rho / \partial \ln P)_T$  et  $\delta = (\partial \ln \rho / \partial \ln T)_P$ .

Ainsi en substituant la température à la densité dans l'équation barocline (1.4), il en résulte l'équation suivante :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \vec{\nabla} \left[ \bar{\rho} \delta \frac{\tilde{T}(P, \Omega)}{\bar{T}} \right] \wedge \vec{g}_{eff} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\Omega^2) \wedge \vec{\nabla} (s^2) \quad (1.10)$$

Équation qui permet d'illustrer le fait que la rotation, et notamment différentielle, peut conduire à une variation de vorticité et donc à la création d'une circulation qui est conduite par le déséquilibre thermique.

Comme évoqué précédemment, la force centrifuge brise l'équilibre thermique dans les zones radiatives entre la génération d'énergie nucléaire et le transport radiatif. Il en résulte la création de sources et de puits de chaleur qui sont à l'origine de la circulation méridienne. La mise en évidence de cette génération de transport peut également se faire par l'équation de transport d'énergie. Dans les régions radiatives, elle est donn e par :

$$\rho T \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} S \right) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{rad} + \rho \epsilon \quad (1.11)$$

Attachons-nous à exprimer le terme de transport radiatif en présence de rotation. Pour simplifier le problème, on se place dans le cas d'une loi de rotation conservative, c'est à dire une rotation uniforme ou cylindrique telle qu'elle puisse être associ e au potentiel gravitationnel dans un potentiel effectif  $\Psi$  :

$$\Psi = \Phi - \frac{1}{2} \Omega^2 s^2 \quad (1.12)$$

$$\text{d'où l'équation de Poisson modifi e : } \vec{\nabla}^2 \Psi = 4\pi G \rho - \frac{1}{s} \frac{d(\Omega^2 s^2)}{ds} \quad (1.13)$$

Dans ce cas de figure, le fluide est barotrope, les isopotentielles correspondent alors aux isobares, et si l'on considère toujours que la composition chimique ne varie pas le long de ces isopotentielles, le flux radiatif peut s'exprimer :

$$\vec{F}_{rad} = -\chi(\Psi) \vec{\nabla} T = -\chi(\Psi) \frac{dT}{d\Psi} \vec{\nabla} \Psi \quad (1.14)$$

Ceci constitue le théorème de Von Zeipel. On peut alors déterminer le terme qui intervient dans l'équation de transport d'énergie en fonction de la gravité effective :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{rad} = -\chi \frac{dT}{d\Psi} \vec{\nabla}^2 \Psi - \frac{d}{d\Psi} \left( \chi \frac{dT}{d\Psi} \right) (\vec{\nabla} \Psi)^2 \quad (1.15)$$

Qui en tenant compte de (1.13) s'exprime :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_{rad} = -\chi \frac{dT}{d\Psi} \left( 4\pi G \rho - \frac{1}{s} \frac{d(\Omega^2 s)}{ds} \right) - \frac{d}{d\Psi} \left( \chi \frac{dT}{d\Psi} \right) (\vec{\nabla} \Psi)^2 \quad (1.16)$$

On peut aisément montrer que cette équation ne peut être satisfaite. En effet si les grandeurs  $P$ ,  $\rho$ , et  $T$  sont constantes sur les équipotentielles  $\Psi$ , alors les termes  $\rho \epsilon$  et  $4\pi G \rho \chi dT/d\Psi$  le sont également, ce qui n'est pas le cas des deux termes restants, qui par ailleurs ne s'annulent pas. Quand bien même la rotation serait considérée comme uniforme, le terme  $s^{-1}d(\Omega^2 s^2)/ds$  serait constant tandis que  $(\vec{\nabla} \Psi)^2$  varierait toujours étant donné que la gravité effective est plus importante au pôle qu'à l'équateur (c'est ce qu'on appelle *gravity darkening*).

Le fait que le transport radiatif et l'équation de conservation d'énergie ne puissent être satisfaits simultanément en présence de rotation a été démontré pour la première fois par Von Zeipel en 1924 et porte le nom de paradoxe de Von Zeipel.

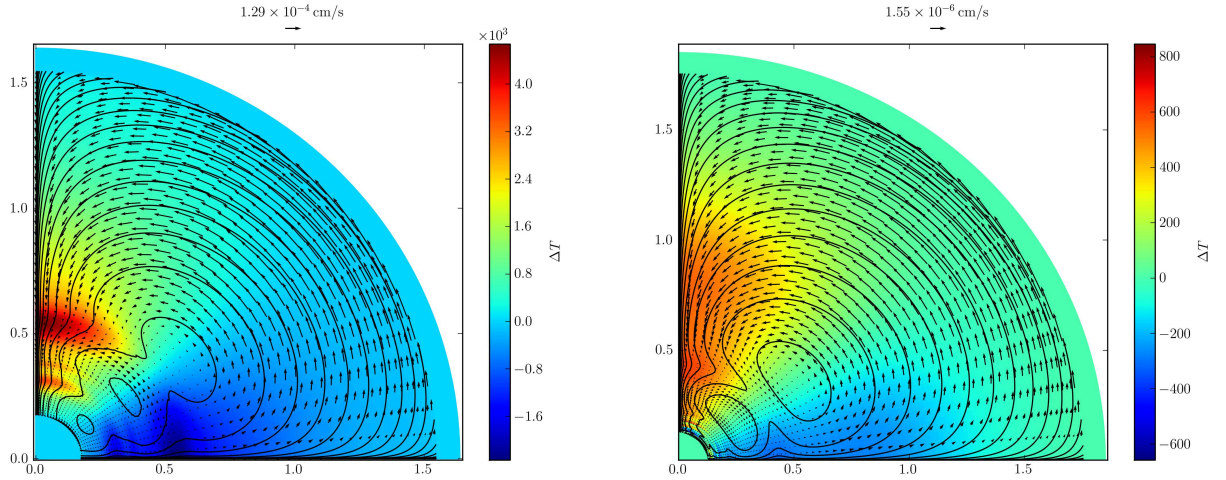


FIGURE 1.3: Meridional circulation in a  $1.5 M_{\odot}$  stellar model **left** : at the beginning and **right** : on the middle of the main sequence. J.P. Marques private communication.

Zahn (1992) proposa un formalisme pour décrire le mécanisme de transport rotationnel par la circulation méridienne et la turbulence pour des étoiles non magnétiques. La clef de ce formalisme est de modéliser de façon cohérente le transport de moment angulaire dont découle le profil de rotation, et le transport d'éléments chimiques. Dans ces premiers travaux, la turbulence est supposée anisotrope dans les zones radiatives (avec un transport plus important dans la direction horizontale que radiale), ce qui sous-tend un profil de rotation en coquille (ne dépendant que de la profondeur), et la dépendance en latitude de la circulation méridienne est décrite au moyen du polynôme de Legendre

d'ordre 2. De cette manière, Zahn (1992) a permis d'établir que la circulation ainsi que la turbulence sont fortement liées à la perte de moment angulaire (modélisée dans ces travaux par des vents stellaires) : en l'absence de vent, la circulation méridienne est faible et peut même disparaître pour les rotateurs lents. Au contraire, si l'étoile perd du moment cinétique par un vent de surface, la circulation permet d'advecier du moment cinétique vers la surface, mais l'advection d'éléments chimiques est inhibée par la turbulence horizontale. Plus tard, des perfectionnements ont été apportés par Maeder & Zahn (1998), puis Mathis & Zahn (2004) ont proposé une amélioration de cette modélisation en développant l'écart à la symétrie sphérique aux ordres supérieurs (en polynômes de Legendre), et en considérant une rotation différentielle en latitude également. Maeder (2009) rassemble l'état actuel de la modélisation des processus non standards induits par la rotation sur la structure et l'évolution stellaire.

### 1.2.3 Succès, échecs et améliorations du mélange rotationnel

Depuis une douzaine d'années, le mélange rotationnel induit par la circulation méridienne et la turbulence de cisaillement tel que formalisé par Zahn (1992) est intégré dans certains codes d'évolution stellaire (dans *The Geneva stellar evolution code* Meynet & Maeder 1997; Palacios et al. 2003, dans *STAREVOL*) avec toutefois une approximation stipulant que la partie horizontale de la circulation se comporte comme un polynôme de Legendre d'ordre 2.

Ces améliorations ont connu depuis de nombreux succès, notamment en ce qui concerne les étoiles massives de la séquence principale. En effet, le mélange rotationnel permet de reproduire avec un bon accord l'enrichissement de surface des étoiles chaudes en hélium et en azote (voir pour l'évolution d'une étoile de  $9 M_{\odot}$  Talon et al. 1997; Meynet & Maeder 2000, pour les étoiles massives en général). Par ailleurs l'évolution du profil de rotation prévue dans ces modèles a été vérifiée par la perturbation induite sur le spectre sismique de ce type d'étoiles par Dupret et al. (2004). Un autre succès remporté par ces nouvelles modélisations a été la reproduction de la destruction du lithium du côté chaud de la brèche du Li par Talon & Charbonnel (1998). Rappelons par ailleurs que le mélange rotationnel a également permis d'expliquer les abondances particulières en éléments chimiques dans les étoiles sous-géantes (Palacios et al. 2003).

Concernant les étoiles de type solaire, le mélange rotationnel a semble-t-il échoué à reproduire les observations. Par exemple, au sujet de l'abondance en lithium de ce type d'étoile, les modèles ont été mis en défaut par le fait que dans les systèmes binaires dont les composantes sont des étoiles de type solaire, l'échange de moment cinétique avec leur orbite fait présager une circulation méridienne plus faible et donc un mélange rotationnel moins efficace. Mais alors comment expliquer l'absence de Li en surfaces des Hyades observée par Balachandran (2002) ? Par ailleurs, les prédictions de ces modèles ont été mises à mal par les observations du satellite SOHO, notamment concernant le profil de rotation issu de l'inversion des données heliosismologiques qui s'est avéré être quasi uniforme dans la région radiative (Kosovichev et al. 1997) alors que la théorie du mélange rotationnel le prévoit comme différentiel.

Dès lors, est apparue la nécessité d'invoquer de nouveaux mécanismes physiques susceptibles d'accroître ou d'atténuer l'efficacité du mélange rotationnel dans les régions radiatives, et de modifier le profil interne de rotation. Ces processus responsables de transport de moment cinétique des profondeurs des étoiles jusqu'à leur surface sont le

champ magnétique et les ondes gravito-inertielles (voir Mathis & Zahn 2005; Mathis 2009, pour les aspects théoriques).

Notons à présent qu'un traitement du mélange rotationnel a été implémenté dans le code d'évolution CESAM2k (d'où sont issus les diagrammes de la Fig. 1.3), avec la perspective proche d'intégrer le transport de moment cinétique par les ondes internes et le champ magnétique. Enfin n'oublions pas d'évoquer ici le projet ESTER (pour Évolution STellaire en Rotation Rieutord et al. 2005) dont l'objectif est de modéliser de manière totalement bidimensionnelle les effets de la rotation sur l'évolution et la structure stellaire.

#### 1.2.4 Un test pour les modèles de structure interne

Les modèles d'évolution stellaire actuels, bien que montrant des succès certains, présentent encore de nombreuses incertitudes. Leur modélisation font usage de paramètres libres qui doivent être fixés empiriquement. Il est donc indispensable d'apporter des contraintes observationnelles afin d'améliorer la prise en compte de mécanismes non standard.

La matière stellaire est opaque, si bien que les informations directement issues des observations ne nous renseignent que sur les quantités de surface (la luminosité, la température de surface, les abondances en surface, la gravité de surface etc.). Dans ce cadre, la sismologie stellaire constitue de nos jours le meilleur moyen de sonder la structure interne des étoiles. Elle consiste en l'étude des ondes sismiques qui se propagent depuis les intérieurs stellaires jusqu'en surface, et provoquent des mouvements de surface ainsi que d'infimes variations du flux lumineux nous parvenant. Elle s'appuie sur des techniques telles que la photométrie ou encore la spectroscopie. Dans l'approche photométrique, on mesure l'intensité lumineuse totale d'une étoile au cours du temps. On obtient alors une courbe de lumière qui donne accès aux fréquences de pulsation par analyse de Fourier. Les caractéristiques de ce spectre d'oscillation (fréquences, amplitudes et équidistances) donnent alors accès aux informations du milieu traversé par les ondes sismiques.

L'avancée des connaissances sur la physique interne émergera ainsi de la confrontation entre la théorie et les observations sismiques. Mais la rotation stellaire agit également sur ces petites variations, les oscillations stellaires. Afin d'exploiter de manière pertinente les observations sismiques des étoiles en rotation, il est nécessaire d'appréhender correctement l'impact de la rotation sur leurs oscillations. Le travail présenté dans cette thèse concerne l'aspect théorique de cet objectif.

**Ce travail de thèse se situe dans le contexte général de la compréhension des phénomènes physiques induits par la rotation sur la structure interne, l'évolution et plus précisément sur les oscillations des étoiles de la séquence principale.**

## 1.3 Oscillations stellaires : spectre fréquentiel et géométrie des modes

### 1.3.1 Un exemple simple : vibrations dans un tuyau d'orgue

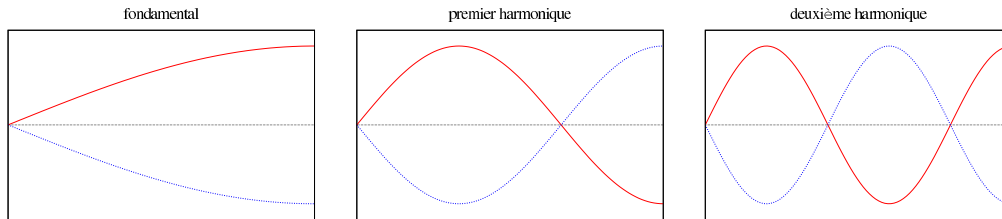


FIGURE 1.4: The first three oscillation modes for an organ pipe with one end (on the left) closed, and one end open (on the right). On the left is the fundamental mode, in the centre the first overtone, and on the right the second overtone.

Considérons les vibrations de l'air dans un tube de vibraphone ou encore dans un tuyau d'orgue. Une de ses extrémités est fermée (celle de gauche sur la Fig. 1.4), tandis que l'autre est ouverte à l'air libre. Si bien que l'air vibre alors selon ce qu'on appelle des modes propres de vibration. Comme illustré Figure 1.4, le déplacement correspondant à chacun des modes de vibration montre un nœud au niveau de la section fermée tandis qu'un ventre apparaît au niveau de la section ouverte. Si l'on considère que la température et la composition de l'air à l'intérieur du tuyau sont uniformes, alors il en va de même pour la vitesse du son. L'air vibre alors selon le mode fondamental (dont le déplacement présente  $n = 1$  nœud Fig. 1.4 gauche), ou selon des harmoniques (Fig. 1.4 figure du milieu et de droite pour les deux premiers harmoniques avec  $n = 2$  et  $n = 3$  respectivement). Les fréquences des harmoniques étant des multiples entiers de celle du fondamental : la fréquence du fondamental est donnée par  $\nu = c/4L$  où  $c$  est la vitesse du son dans le tuyau, et  $L$  sa longueur, tandis que le premier harmonique est associé à la fréquence  $\nu = 3c/4L$ , le second  $\nu = 5c/4L$ , etc. Le spectre de vibration d'un tel système est alors régulier, ces fréquences étant directement liées à la densité, la température, la pression et la composition du gaz contenu dans le tuyau (par l'intermédiaire de la vitesse du son).

De la même manière, on peut étudier les vibrations des étoiles, avec une condition de centre fixe (pour certains types de modes) et de surface libre. Bien sûr, pour les étoiles, comme évoqué à la section précédente, la structure stellaire est bien plus complexe que celle d'un tuyau d'orgue, ce qui entraîne quelques complications.

### 1.3.2 Oscillations stellaires en l'absence de rotation

Les étoiles étant des systèmes tridimensionnels, leurs modes d'oscillations présentent des nœuds dans les trois directions. Ces trois directions sont décrites par la distance au centre  $r$ , la co-latitude  $\theta$  et la longitude  $\varphi$ . Les nœuds de vibration sont situés sur des coquilles concentriques à  $r$  constant, des cônes définis par  $\theta$  constante, et des plans méridiens à  $\varphi$  constant. Dans le cas d'une étoile sphérique dans laquelle l'effet de la rotation sur les fréquences est négligé, le déplacement des modes propres de vibration



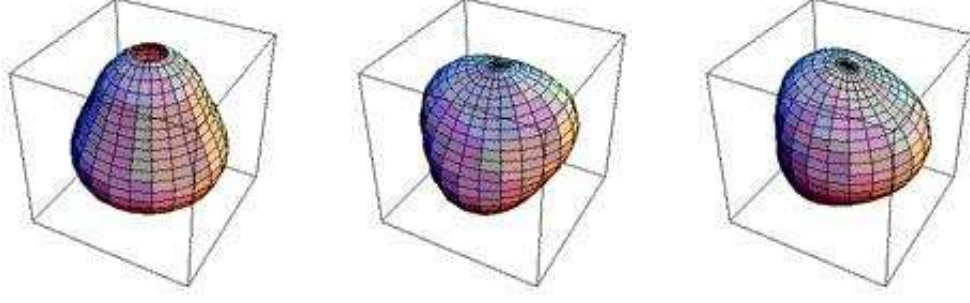


FIGURE 1.5: Three stellar pulsation modes, the first on the left is the first dipolar axisymmetric mode  $\{\ell = 1, m = 0\}$ .

du plasma stellaire dans les trois directions (défini dans la base sphérique  $\{\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\}$ ) est donné par (voir par exemple Aerts et al. 2010) :

$$\xi_r(r, \theta, \varphi, t) = u(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{i\sigma t} \quad (1.17)$$

$$\xi_\theta(r, \theta, \varphi, t) = v(r) \frac{\partial Y_\ell^m(\theta, \varphi)}{\partial \theta} e^{i\sigma t} \quad (1.18)$$

$$\xi_\varphi(r, \theta, \varphi, t) = \frac{w(r)}{\sin \theta} \frac{\partial Y_\ell^m(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} e^{i\sigma t} \quad (1.19)$$

Où  $u(r)$ ,  $v(r)$ ,  $w(r)$  sont les amplitudes,  $\sigma$  la fréquence d'oscillation, et  $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$  sont les harmoniques sphériques définies par :

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi} \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (1.20)$$

Où les fonctions  $P_\ell^m(\cos \theta)$  sont les polynômes de Legendre.

Trois nombres quantiques permettent alors de caractériser les modes propres :

- l'ordre radial  $n$  qui correspond au nombre de nœuds que présente le déplacement le long d'un rayon de l'étoile,
- l'ordre azimutal  $m$  qui correspond au nombre de lignes nodales de type méridien,
- le degré angulaire  $\ell$ ,  $\ell - |m|$  représentant le nombre de lignes nodales de type parallèle.

Le nombre  $m$  prend les valeurs allant de  $-\ell$  à  $+\ell$ , on dénombre alors  $2\ell + 1$  modes différents présentant le même degré  $\ell$ . Sans rotation, pour une étoile sphériquement symétrique, les modes de pulsation constituent des multiplets de  $2\ell + 1$  modes étiquetés  $\{n, \ell\}$  qui présentent la même fréquence d'oscillation. On dit que cette fréquence  $\sigma_{n,\ell}$  est dégénérée.

Le mode d'oscillation le plus simple est le mode fondamental radial avec  $\ell = 0$ , c'est un mode de vibration pour lequel l'étoile se dilate et se contracte alternativement en conservant la symétrie sphérique, le déplacement montrant un nœud au cœur et un ventre à la surface.

Le mode non radial le plus simple est le mode dipolaire axisymétrique pour lequel  $\ell = 1$  et  $m = 0$ . C'est le premier mode de pulsation illustré à la Figure 1.5 à gauche. C'est un mode impair dont le déplacement montre un nœud à l'équateur, l'hémisphère sud se dilatant, alors que le nord se contracte.

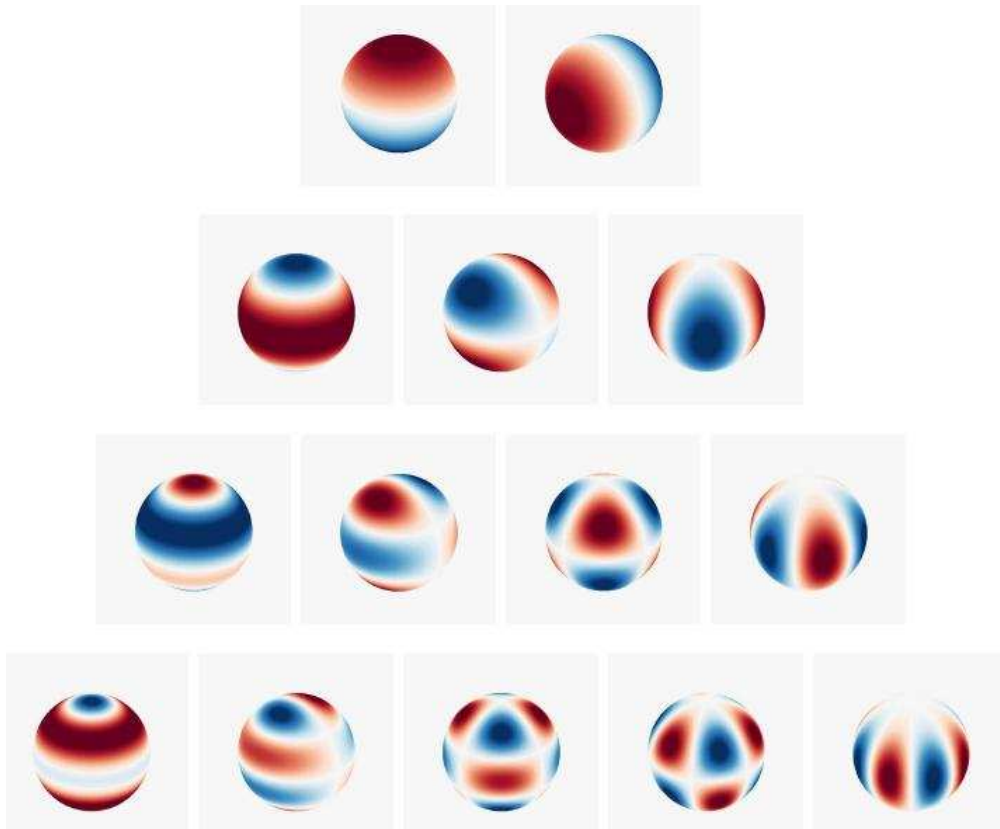


FIGURE 1.6: Spatial representation for spherical harmonics with angular degree ranging from  $\ell = 1$  (top) to  $\ell = 4$  (bottom), and for azimuthal number ranging from  $m = 0$  (left) to  $m = \ell$  (right). Credit : Sébastien Deheuvels PhD thesis.

Le spectre d'oscillation complet (constitué de l'ensemble des fréquences de vibration) d'une étoile en l'absence de rotation, montre une certaine régularité avec des équidistances caractéristiques de la structure acoustique de l'intérieur stellaire. Comme la fréquence de vibration au sein d'un tuyau d'orgue nous renseigne directement sur ses dimensions et sur le gaz qu'elle contient, les équidistances du spectre stellaire constituent des outils de diagnostic sismique fort intéressants. Par exemple, la grande séparation qui désigne l'écart fréquentiel entre deux modes consécutifs de degré angulaire et d'ordre azimutal identique, peut renseigner directement sur la vitesse du son dans l'intérieur stellaire. Cette régularité est d'autant plus marquée dans le domaine des hautes fréquences (domaine qualifié d'asymptotique).

### 1.3.3 Oscillations d'une étoile en rotation

La rotation stellaire agit également sur les oscillations stellaires. Notamment à travers l'apparition de deux forces d'inertie qui agissent à la fois sur la structure et sur la dynamique de l'intérieur stellaire. La force centrifuge déforme la géométrie de l'étoile et modifie ainsi la cavité résonnante des modes d'oscillation. Tandis que la force de Coriolis modifie directement la dynamique de ces oscillations.

Comme évoqué au paragraphe précédent, sans rotation, chaque fréquence est  $2\ell + 1$  fois dégénérée. La rupture de symétrie sphérique induite par la rotation lève cette

dégénérescence. À la fréquence  $\sigma_{n,\ell}$  dans le cas sans rotation correspond alors  $2\ell + 1$  fréquences  $\sigma_{n,\ell,m}$ . La dépendance temporelle des modes propres d'oscillation est en  $e^{i(\sigma t + m\varphi)}$ . Le déphasage en  $m\varphi$  signifie que les modes qui présentent  $m \neq 0$  sont des ondes progressives. Nous adoptons la convention selon laquelle les modes ayant un ordre azimutal  $m$  négatif sont des modes progrades, c'est-à-dire qu'ils se propagent dans le même sens que la rotation, tandis que les modes avec  $m$  positif sont des modes rétrogrades.

On peut montrer aisément qu'en première approximation, l'effet de changement de référentiel ainsi que la force de Coriolis, agissent de telle manière qu'un mode prograde a une fréquence supérieure à celle du mode axisymétrique  $m = 0$ , alors que le mode rétrograde a une fréquence inférieure. Ainsi, la dégénérescence du multiplet est levée, et une nouvelle équidistance apparaît dans le spectre. Ledoux (1951) a montré que dans le référentiel de l'observateur, en première approximation, cette structure fine du multiplet, appelée le splitting rotationnel, pour une étoile en rotation uniforme est donnée par :

$$S_m = \frac{\sigma_{n,\ell,-m} - \sigma_{n,\ell,m}}{2m} = (1 - C_{n,\ell})\Omega \quad (1.21)$$

Où  $C_{n,\ell}$  désigne la constante de Ledoux (qui dépend de la structure stellaire et du mode), et  $\Omega$  la vitesse angulaire de rotation. Le chiffre 1 du membre de droite dans cette équation est dû au changement de référentiel entre le référentiel en corotation, et le référentiel de l'observateur. Ainsi, cette équidistance dans le spectre nous permet directement d'accéder à la vitesse de rotation dans l'étoile.

En réalité, dans les étoiles, la rotation n'est pas uniforme, et dans certains cas une approche au premier ordre n'est pas suffisante (ceci est expliqué plus amplement dans le Chapitre 3). En présence de rotation, la classification des modes de pulsation est grandement compliquée par la distribution spatiale des modes qui est bidimensionnelle (du fait de l'aplatissement centrifuge). Une seule harmonique sphérique ne suffit plus à décrire la dépendance angulaire des modes propres d'oscillation, ils sont alors exprimés sur une base d'harmoniques sphériques (nous y reviendrons notamment dans le Chapitre 4). Ce fait ne permet plus de désigner un mode par un seul degré angulaire  $\ell$ . Si à vitesse de rotation modérée un mode présente un caractère  $\ell$  dominant, en rotation rapide il est impossible de déterminer un caractère  $\ell$  dominant de manière claire, parfois même le nombre de nœuds des modes propres dans la direction angulaire varie du cœur à la surface. Par ailleurs, la densité du spectre de fréquences est bien plus importante que dans le cas sans rotation. Mise à part la levée de dégénérescence abordée plus tôt, la nécessité d'inclure un grand nombre de termes dans le développement spectral des modes propres induit une forte densification du spectre.

### 1.3.4 Les différents types de pulsateurs

Dans les deux paragraphes précédents nous avons évoqué les aspects dynamiques des oscillations stellaires. Tous les modes normaux ainsi décrits existent dans les étoiles. Néanmoins, le fait que certains de ces modes sont observés est dû à l'aspect énergétique de ces pulsations. Lorsqu'une étoile oscille, il en résulte que la température augmente et diminue localement dans l'intérieur stellaire. Dans une grande partie de l'étoile, l'énergie transportée par les oscillations est amortie. Cependant, ces oscillations peuvent

être détectées seulement si dans certaines régions de l'intérieur stellaire de l'énergie leur est fournie, et ce, suffisamment pour compenser l'amortissement qu'elles subissent dans le reste de l'étoile. Ceci s'appelle l'excitation des modes d'oscillation. Il existe principalement deux types de mécanismes d'excitation qui permettent d'exciter des pulsations dans deux régimes de fréquences différents.

Tout d'abord, il est connu depuis longtemps que les pulsations stellaires peuvent être excitées par un processus de type thermique (un cycle de Carnot) qui se déroule lorsqu'une région de l'étoile se réchauffe en compression. Pour les étoiles de type  $\beta$ Cephei ou encore  $\delta$ Scuti, ce processus est relié à un surplus d'opacité dans une région de l'étoile, et est connu sous le nom de  $\kappa$ -mécanisme. Les étoiles pulsantes dont le mécanisme d'excitation correspond au  $\kappa$ -mécanisme sont qualifiées de pulsateurs classiques.

Plus récemment, il a été montré qu'un mécanisme différent est en jeu dans l'excitation des modes dans les étoiles de type solaire. Dans ce type d'étoile, l'excitation est causée par les mouvements turbulents dans l'enveloppe convective. Comme elle est causée par un grand nombre d'éléments convectifs, on peut considérer que l'excitation est aléatoire. On lui donne donc le nom d'excitation stochastique.

Les pulsateurs solaires présentent des modes d'oscillation dans le domaine asymptotique des modes acoustiques de haute fréquence. Ce qui signifie que leur spectre sismique présente un caractère très régulier : au premier ordre, les modes d'ordres radiaux consécutifs et de même degré angulaire sont régulièrement espacés de  $\Delta\nu$ , la grande séparation. Dans le domaine asymptotique, cette grande séparation est proportionnelle à la moyenne  $\langle c/r \rangle$  dans l'étoile où  $c$  est la vitesse du son et  $r$  la distance au centre de l'étoile, et le facteur de proportionnalité dépend du degré angulaire et de l'ordre radial du mode (ce qui rappelle fortement la structure du spectre de vibration dans un tuyau d'orgue). La représentation du spectre sous forme de diagramme échelle est alors très commode pour déterminer le degré des modes associés à ces fréquences. Elle consiste à découper le spectre en tronçons de taille égale à une valeur moyenne de la grande séparation, et à les empiler les uns sur les autres. Les modes de même degré sont alors regroupés sur une ligne verticale dans le diagramme. C'est ainsi que des identifications plausibles ont pu être déterminées pour des spectres sismiques issus des observations de cibles CoRoT (Benomar et al. 2009; Deheuvels et al. 2010).

En ce qui concerne les pulsateurs classiques, la situation est beaucoup plus compliquée. D'une part parce qu'ils oscillent principalement dans des modes de pression et de gravité de bas  $n$  pour lesquels il est difficile de trouver des régularités équivalentes à celles observées pour les modes (p ou g) de hauts ordres radiaux. D'autre part les difficultés émanent également du fait que, dans une même gamme de fréquence, tous les modes ne sont pas excités (ils présentent ce qu'on appelle un spectre lacunaire). Enfin, ces pulsateurs présentent parfois des vitesses de rotation importantes, le spectre n'est alors plus structuré par la grande séparation mais par la structure fine induite par la rotation, qui est encore souvent mal modélisée.

Ainsi, pour ces étoiles massives ou de masse intermédiaire, on compte très peu d'exemples plausibles d'identification de modes de pulsation. Dès lors, l'obtention de contraintes sismiques pour les modèles de structure interne de ces étoiles n'est pas envisageable à très court terme, et la nécessité de compréhension des effets de la rotation sur ces spectres sismiques est manifeste.

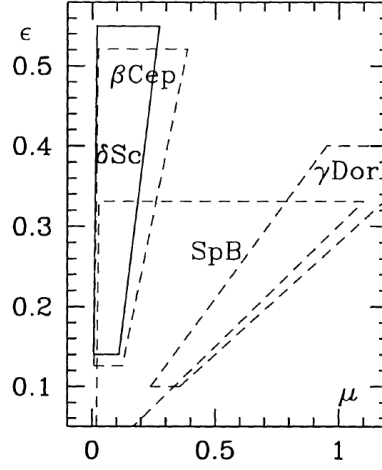


FIGURE 1.7: Diagram of the indicator of the impact of centrifugal flattening  $\epsilon$ , versus the parameter  $\mu$ , indicator of the Coriolis force impact, for different types of stars ( $\delta$ Scuti,  $\gamma$ Doradus,  $\beta$ Cephei and Slowly Pulsating B stars). Credit : Goupil & Talon (2002).

## 1.4 Modélisations des oscillations en présence de rotation

Différentes approches permettent une modélisation réaliste des oscillations d'étoiles en rotation selon le type d'étoile étudié. Le choix de la méthode à adopter dépend de l'importance de la déformation de la cavité résonnante des oscillations, du régime de fréquence des oscillations, et de la vitesse de rotation.

### 1.4.1 Différentes situations stellaires

Ces trois facteurs se retrouvent dans différentes situations stellaires. Goupil et al. (2000) ont mis en place une classification des rotateurs en fonction de paramètres sans dimension permettant d'évaluer l'effet de la rotation sur la structure de la cavité résonnante (déformation centrifuge) et la dynamique des oscillations (accélération de Coriolis). Introduisons le paramètre  $\mu$ , permettant d'apprécier l'effet de la force de Coriolis, défini par le rapport du temps caractéristique associé à la force de Coriolis et de la période d'oscillation :

$$\mu = \frac{P_{\text{osc}}}{P_{\text{rot}}} = \frac{\Omega}{\omega} \quad (1.22)$$

Où  $\Omega$  est la vitesse angulaire de rotation, et  $\omega$  la pulsation des oscillations.

Pour apprécier l'effet de l'accélération centrifuge, on utilise le paramètre  $\epsilon$  qui représente le rapport entre l'énergie cinétique rotationnelle, et l'énergie potentielle gravitationnelle :

$$\epsilon = \frac{\Omega^2 R_{\text{eq}}^2}{GM/R_{\text{eq}}} = \frac{\Omega^2}{GM/R_{\text{eq}}^3} \quad (1.23)$$

Où  $M$  est la masse de l'étoile,  $R_{\text{eq}}$  son rayon à l'équateur et  $G$  la constante gravitationnelle. On peut également utiliser l'aplatissement de l'étoile (Reese et al. 2006), défini par :  $\epsilon = 1 - R_{\text{pol}}/R_{\text{eq}}$ ,  $R_{\text{pol}}$  étant le rayon au pôle.

Tout d’abord, si l’effet de distorsion centrifuge est suffisamment faible, une méthode perturbative peut s’avérer satisfaisante. Dans cette approche, l’effet de la rotation sur les oscillations est considéré comme perturbatif, et les fréquences sismiques sont développées en puissance de la vitesse angulaire de rotation. Cette méthode s’est avérée pertinente pour le **Soleil**, pour les **étoiles de type solaire** ainsi que pour les **étoiles SdB** (de l’anglais *Sub dwarf B stars*) et les naines blanches. Pour ces rotateurs lents, pour lesquels  $\mu, \epsilon \ll 1$ , bien que la rotation ait joué un rôle important au cours de l’évolution, elle n’agit que modérément sur les oscillations. Un effort doit être fait sur la physique en jeu dans le modèle d’évolution, qui peut être à symétrie sphérique, et l’on pourra négliger l’effet de la rotation sur les oscillations (comme illustré Chapitre 2 Sect. 2.4) ou encore (comme pour le soleil), se contenter d’une approche perturbative du premier ordre (Chapitre 3, Sect. 3.2), voire du second ordre (Sect. 3.3).

Parmi les rotateurs plus rapides, on compte les  $\gamma$ **Doradus** qui oscillent suivant des modes  $g$  d’ordre radial élevé et de degré  $\ell$  faible. Elles montrent des fréquences d’oscillations allant de 3 à 30  $\mu\text{Hz}$  avec des vitesses de rotation pouvant atteindre 200  $\text{km.s}^{-1}$ . Pour ces étoiles, les fréquences d’oscillation sont de l’ordre de la fréquence de rotation. Par ailleurs, les « **Slowly Pulsating B stars** » (SPB) montrent des oscillations dans les modes de gravité d’ordre radial élevé. Leurs fréquences d’oscillation se situent typiquement entre 2 et 20  $\mu\text{Hz}$ . Si en moyenne leur rotation est modérée, certaines peuvent atteindre des vitesses de rotation très élevées jusqu’à 150  $\text{km.s}^{-1}$ . Pour ces types d’étoile, pour lesquels  $\mu, \epsilon < 0.3$ , la distorsion due à l’accélération centrifuge ne devrait pas être très importante, néanmoins les fréquences d’oscillation et de rotation étant proches, on ne saura se satisfaire de méthodes perturbatives linéaires ou du second ordre. Ainsi, si leur structure peut être appréhendée correctement comme étant sphérique ou proche de la sphéricité, le fait que leurs fréquences d’oscillations soient du même ordre de grandeur que leur fréquence de rotation exige que la force de Coriolis soit prise en compte soit à des ordres supérieurs (voir Chapitre 3, Sect. 3.4) soit de manière non perturbative.

Dans la même classe de rotateurs, on trouve les  $\beta$ **Cephei**. Ces étoiles oscillent principalement avec des modes de pression et de gravité d’ordre radial faible. Ce sont majoritairement des pulsateurs classiques (processus d’excitation par  $\kappa$ -mécanisme), certaines peuvent montrer des comportements hybrides (à la fois des pulsations classiques et des pulsations de type solaire Belkacem et al. 2009). Elles présentent des fréquences d’oscillation allant de 30 à 180  $\mu\text{Hz}$ , et des vitesses de rotation valant 50 – 300  $\text{km.s}^{-1}$  (comme illustré Fig. 1.1 tirée de Stankov & Handler 2005). Pour la plupart des  $\beta$ **Cephei**, la distorsion due à l’accélération centrifuge n’est pas négligeable, il en va de même pour l’effet de la rotation sur les oscillations, néanmoins des méthodes perturbatives (à la fois pour la structure et pour les oscillations) poussées à des ordres élevés (cubique pour les pulsations) devrait permettre une modélisation réaliste des pulsations de ce type d’étoile.

Enfin certaines étoiles peuvent être à juste titre qualifiées de rotateurs rapides. Parmi elles, les **étoiles Be**, étoiles de type B qui montrent des raies d’hydrogène en émission. Ce phénomène serait dû au fait que l’étoile est entourée d’un disque de matière, matière qui serait éjectée lors de pulsations. Un tel mécanisme se produit lorsque l’étoile tourne à une vitesse proche de la vitesse Képlérienne  $\Omega_k$ . Pamyatnykh et al. (2004) ont montré par ailleurs que ces étoiles pouvaient présenter une forte

rotation différentielle en rayon. Les étoiles Be sont des pulsateurs de type  $\beta$ Cephei ou SpB, c'est à dire qu'elles oscillent dans des modes de basse fréquence (des modes de pression et de gravité d'ordre radial faible pour les  $\beta$ Cephei, et des modes de gravité d'ordre radial élevé pour les SpB). Ainsi, d'une part du fait de l'aplatissement centrifuge important, et d'autre part du fait de la proximité des fréquences de pulsations et de rotation, seule une approche bidimensionnelle non perturbative peut être acceptable pour la modélisation de leurs pulsations.

Dans la même catégorie de rotateurs rapides on trouve les  $\delta$ Scuti. Ce sont des étoiles pulsantes de masses comprises entre 1,5 et 2,5  $M_{\odot}$ . Elles oscillent principalement dans des modes de pression et de gravité d'ordre radial faible, avec des fréquences d'oscillation valant entre 80 – 500  $\mu\text{Hz}$ . Le mécanisme d'excitation des oscillations est le  $\kappa - \gamma$  mécanisme dans la zone d'ionisation partielle de l'HeII. La plupart des  $\delta$ Scuti sont des rotateurs modérés à rapides avec des vitesses de rotation projetées ( $v \sin i$ ) pouvant atteindre 200 voire 250  $\text{km.s}^{-1}$ . La rotation peut provoquer un mélange d'éléments chimiques et affecter leur évolution (Maeder 1999). Ces étoiles montrent également un effet d'aplatissement et d'assombrissement gravitationnel observé en interférométrie par exemple pour Altair (illustré à la Fig. 1.2 tirée de Peterson et al. 2006). Pour ces étoiles,  $\mu, \epsilon > 0.3$ , en plus du traitement non perturbatif imposé par la force de Coriolis, la distorsion centrifuge exige une approche totalement bidimensionnelle.

Dans le diagramme de la Figure 1.7 figurent les différentes classes d'étoiles selon l'importance de la distorsion centrifuge ou de la force de Coriolis. Il montre que pour les étoiles de type  $\delta$ Scuti comme pour les  $\beta$ Cephei (on suppose que la partie haute de la zone désignée  $\beta$ Cephei est peuplée par des étoiles Be), l'effet de la distorsion centrifuge peut être important avec  $\epsilon$  atteignant 0.5. Pour les  $\gamma$ Doradus, la rotation étant plus lente, l'effet de l'aplatissement semble négligeable tandis que la force de Coriolis domine. Enfin, pour les étoiles SPB, il semble que les deux contributions soient d'importance égale. Cela permet d'évaluer la nécessité d'une approche bidimensionnelle et / ou non perturbative.

### 1.4.2 Historique des méthodes perturbatives

Dans l'approche perturbative, on considère que l'effet de la rotation sur les modes et les fréquences d'oscillation est un effet perturbateur. C'est-à-dire que l'on peut décomposer les fréquences d'oscillation (il en va de même pour les modes propres correspondant) en une fréquence d'oscillation sans rotation et une petite fluctuation due à la rotation. Au total, la fréquence peut se décomposer en série de la vitesse angulaire de rotation  $\Omega$ , l'ordre zéro correspondant au cas sans rotation.

Comme évoqué à la Section 1.3.3, l'histoire des méthodes perturbatives débute avec Ledoux (1951). Dans son approche, Ledoux (1951) considère les corrections du premier ordre en  $\Omega$  pour les fréquences d'oscillation d'une étoile sphérique en rotation uniforme. Ledoux (1951) a ainsi montré qu'au premier ordre en  $\Omega$  l'effet de la rotation n'est dû qu'à l'accélération de Coriolis ( $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}$ ) et au passage entre référentiel en corotation et référentiel inertiel. L'impact de la déformation centrifuge peut alors être négligé, les grandeurs d'équilibre ne varient qu'avec le rayon. Au final, pour Ledoux (1951), l'effet de la rotation est de lever la dégénérescence des modes d'oscillation, formant des multiplets dont les composantes sont séparées d'une distance uniforme dans le spectre de fréquences.

Plus tard, Simon (1969) pousse le développement perturbatif à un ordre supplémentaire afin de calculer en particulier les effets de la distorsion centrifuge sur les oscillations. Il est le premier à proposer alors une méthode de mapping permettant de passer du système de coordonnées sphériques à un système sphéroïdal (sphérique perturbé à l'ordre 2). Il applique cette méthode à des modèles polytropiques d'indice  $N = 3$ . Smeyers & Denis (1971) appliquent ensuite les développements de Simon (1969) à un modèle déformé d'étoile à densité constante, tandis que Chlebowski (1978) l'applique aux pulsations des naines blanches. Saio (1981) calcule les termes du second ordre permettant de prendre en compte les effets de la rotation et les effets de marée pour des modèles polytropiques d'indice  $N = 3$  en rotation uniforme. Il permet alors de mettre en évidence la rupture de symétrie du multiplet qui avait été calculée dans les méthodes perturbatives d'ordre 1 (voir schéma Fig. 1.8).

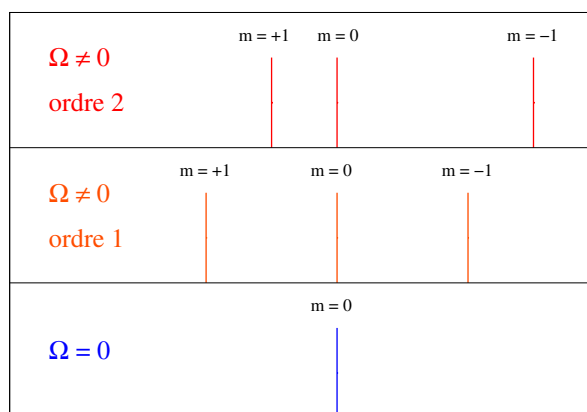


FIGURE 1.8: Schematic view of the degeneracy which is lifted as the star rotates ( $\Omega \neq 0$ ), the splitting being no longer symmetric with respect of the central mode ( $m = 0$ ) when distortion effects are accounted for by second order perturbative methods.

Par la suite, Gough & Thompson (1990) étudient l'effet d'ordre 2 sur les fréquences d'une rotation en coquille (différentielle en rayon) et d'un champ magnétique interne axisymétrique non nécessairement aligné avec l'axe de rotation. La rupture de symétrie des multiplets est confirmée, et ils parviennent à reproduire correctement le splitting des modes solaires à condition que le champ magnétique et le profil de rotation varient doucement. Dziembowski & Goode (1992) développent un formalisme permettant de prendre en compte jusqu'à l'ordre 2 les effets d'une rotation différentielle à la fois en rayon et en latitude  $\Omega(r, \theta)$ . Pour la première fois, des effets de dégénérescence accidentelle (plus amplement discutés au Chapitre 3 Sect. 3.3.3) sont corrigés au premier ordre. Suárez et al. (2006) incluent les corrections de la dégénérescence proche à l'ordre 2.

Enfin, Soufi et al. (1998) développent un formalisme astucieux permettant de calculer les corrections du troisième ordre sur les fréquences, en tenant compte de la dégénérescence accidentelle jusqu'à l'ordre 3 également. Karami et al. (2005) apportent des corrections mineures à cette méthode et l'appliquent à des modèles ZAMS d'étoiles en rotation uniforme.



### 1.4.3 Les approches bidimensionnelles directes : état de l'art

Comme abordé précédemment, nous nous intéressons ici aux travaux considérant les étoiles gazeuses (pas de matière condensée comme dans les étoiles à neutrons et certaines naines blanches), obéissant à la théorie newtonnienne de la gravitation (pas d'effets relativistes comme dans les étoiles à neutron, les naines blanches très condensées), en l'absence de champ magnétique, et en dehors de système multiple. Les travaux concernant la stabilité des étoiles à neutrons (Ipser & Lindblom 1989,1990,1991, et Yoshida & Eriguchi 1995,1997,1999) ne sont pas évoqués ici.

Dans ce cadre, la première tentative de calculs complets d'oscillation en présence de rotation a été celle de Maurice Clement au travers d'une série d'articles dans lesquels l'auteur insiste beaucoup sur les difficultés d'ordre numérique rencontrées. Clement (1981) propose pour la première fois une approche bidimensionnelle directe pour résoudre les équations hydrodynamiques. Il réduit le système d'équation à trois équations différentielles (équation de mouvement radial, divergence horizontale de l'équation de mouvement, équation de Poisson) qu'il transforme en partie (pour les deux dernières) en utilisant le théorème de Gauss appliqué à des petites surfaces ( $dr \times r d\theta$ ) autour de ses points de grille. Il discrétise ensuite les équations en utilisant la méthode des différences finies (linéaires dans la direction radiale, quadratiques dans la direction latitudinale), afin de résoudre ensuite directement le problème aux valeurs propres. Clement (1998) propose une amélioration de cette méthode, provenant principalement d'un meilleur choix des équations différentielles du problème à résoudre, et de la résolution angulaire des équations : les variables sont différenciées en utilisant les transformées de Fourier, Legendre ou Chebychev plutôt que des différences finies. Dans Clement (1984, 1986, 1989), l'auteur adopte une approche différente fondée sur le principe variationnel utilisant un grand nombre de coefficients variationnels ainsi que des bases de fonctions adaptées aux modes acoustiques et aux modes de gravité (Clement 1986), ce qui lui permet de présenter des exemples de croisements évités (définis au Chap. 6, Sect.6.6), et de calculer pour la première fois des modes non axisymétriques (Clement 1989). Enfin, Clement (1998), parallèlement aux améliorations qu'il apporte à sa première méthode, propose également d'intégrer les équations des oscillations en utilisant la méthode de Runge-Kutta simultanément en partant du centre et de la surface et en rattachant les solutions en une surface intermédiaire. Cette méthode nécessitant un présupposé pour les solutions au centre et en surface, elle est intégrée dans un processus itératif type Newton-Raphson. Dans tous ces travaux, les modèles stationnaires sont soit des modèles polytropiques (d'indice polytropique  $N=1,2,3$ ), soit des modèles ZAMS de masse  $15 M_{\odot}$ . Lovekin et al. (2009) ont appliqués la méthode de Clement (1998) à des modèles ZAMS de  $10 M_{\odot}$  en rotation solide ou cylindrique afin d'étudier les contraintes sismiques que l'on peut apporter sur le profil de rotation interne à travers la petite et la grande séparation. Mais elle a montré que ces outils de diagnostic sismique ne permettent pas clairement de faire la distinction entre les deux types de profil étudiés.

À la même période, Lee & Saio (1987) proposent de calculer les oscillations de basse fréquence (modes de gravité et modes rotationnels) pour une étoile massive de la séquence principale, en décomposant la dépendance angulaire des fonctions propres en série d'harmoniques sphériques. Les modes pairs et impairs sont calculés séparément, la série est tronquée à deux termes ce qui ne permet pas d'obtenir de résultats précis, mais permet une bonne approche qualitative du comportement des modes. En faisant

varier la rotation, ils observent des croisements évités, ainsi que la formation de modes à caractère mixte gravito-inertiel (les modes inertiels sont des modes de pulsation dont la force de rappel est la force de Coriolis). Notons par ailleurs que Lee & Baraffe (1995) ont également développé une méthode non perturbative de calcul des oscillations stellaires non adiabatiques. Dans les résultats présentés, les auteurs se sont contentés d'inclure deux termes dans les développements spectraux, tandis que pour la déformation du modèle, ils ont opté pour une approche perturbative en polynômes de Legendre d'ordre 2.

Une autre approche très intéressante est celle choisie par Rieutord & Valdettaro (1997). L'aspect novateur de leur méthode réside dans la proposition d'adopter une approche spectrale dans la direction angulaire et dans la direction radiale également en utilisant une décomposition sur une base (tronquée) de pôlynomes de Chebyshev. Rieutord & Valdettaro (1997); Rieutord et al. (2001, 2002) ainsi que Dintrans & Rieutord (1999) mettent à profit cette méthode afin d'étudier les modes inertiels dans une coquille sphérique. La première application astrophysique de l'approche spectrale dans les deux directions est dûe à Dintrans & Rieutord (2000) qui étudient les modes gravito-inertiels dans un modèle réaliste d'étoile de  $1,5 M_{\odot}$  pour lequel la distorsion centrifuge a été négligée. Cette même méthode a ensuite été adaptée pour l'étude de modes acoustiques dans des modèles polytropiques déformés (modèles bidimensionnels) : tout d'abord par Lignières & Rieutord (2004); Lignières et al. (2006a) qui s'intéressent aux oscillations acoustiques de tels modèles en choisissant dans un premier temps de négliger la force de Coriolis dans l'équation de mouvement ; puis par Reese et al. (2006) où les effets à la fois structurels et dynamiques de la rotation sont pris en compte. Cette méthode a permis à Reese et al. (2008) de trouver une relation empirique donnant une bonne description des régularités dans une gamme de fréquences élevées du spectre acoustique de modèles polytropiques, qui sont différentes des régularités en l'absence de rotation. Ballot et al. (2010) utilisent la méthode mise au point par Reese et al. (2006) pour le calcul de modes de gravité dans des modèles polytropiques déformés (la principale difficulté étant le suivi des modes dans cette gamme de fréquence, le spectre  $\gamma$  étant particulièrement dense). Un pas important vers une modélisation réaliste des oscillations d'étoiles en rotation rapide a été celui effectué dans Reese et al. (2009a), où l'approche spectrale a été adaptée à des modèles bidimensionnels chimiquement homogènes soumis à une loi de rotation conservative (la force centrifuge d'un tel profil de rotation dérive d'un potentiel qui peut être ajouté au potentiel gravitationnel au sein d'un potentiel total, et les quantités thermodynamiques sont constantes le long de ces isopotentiellelles). Un tel modèle est qualifié de barotropique, il peut être obtenu à partir de modèles sphériques au moyen d'une déformation autocohérente (méthode SCF mise au point, pour ce travail, par Jackson et al. 2005). Ces calculs ont permis à Reese et al. (2009a) de dénombrer trois catégories de modes suivant leur morphologie spaciae : les modes îlots, les modes de parois (aussi appelés modes de galerie, de l'anglais *whispering gallery modes*), et les modes chaotiques. Les modes que nous espérons observer à moyen terme sont les modes îlots, équivalents aux modes acoustiques de bas degré angulaire en absence de rotation. Reese et al. (2009b) proposent une méthode d'identification pour de tels modes dans certaines conditions.

Parallèlement, Espinosa et al. (2004) ont proposé une résolution bidimensionnelle non perturbative des équations d'oscillation en présence de rotation, basée sur une méthode spectrale de décomposition sur une base de polynômes de Legendre pour la

dépendance angulaire. La différenciation radiale des équations se faisant au moyen de la méthode des différences finies. En faisant certaines approximations : en négligeant la force de Coriolis, en se plaçant dans le cadre de l'approximation de Cowling (explicitée au Chapitre 2, Sect. 2.4.2) et en négligeant certains termes dans la relation adiabatique, Espinosa et al. (2004) ont pu observer dans leurs spectres synthétiques des croisements évités, ainsi qu'un appariement de modes adjacents de parités opposées au sein des multiplets.

## 1.5 Problématique et organisation de la thèse

Dans la Section 1.2, nous avons évoqué l'importance de l'effet de la rotation sur l'évolution et la structure stellaire. Un travail considérable a été réalisé dans le but de développer les modèles de prise en compte des différents processus de transport de moment cinétique et d'éléments chimiques, et est toujours en cours. Il s'agit maintenant de confronter ces progrès théoriques aux observations. C'est à ce niveau que mon travail intervient, à l'interface de la théorie de l'évolution stellaire et de l'interprétation des observations sismiques. L'enjeu est de mettre au point les outils théoriques pour une utilisation pertinente des observables sismiques, dans le but ultime d'améliorer la compréhension de la structure interne des étoiles et de leur évolution. Il s'agit de relier correctement les propriétés des modèles de structure interne aux quantités sismiques observées, et cela passe par une étude des diagnostics sismiques adaptés qui nécessite un calcul correct des modes propres d'oscillations stellaires.

Dans ce cadre, mon travail de thèse a consisté à étudier les outils de modélisation des oscillations stellaires existants, prenant en compte la rotation, couramment utilisés dans le cadre de l'analyse de données des missions d'astérosismologie, et de caractériser leurs apports et leurs limites. Puis dans un second temps, à développer une approche bidimensionnelle non perturbative réaliste qui permet d'étudier les étoiles en rotation rapide, dans les situations où les méthodes perturbatives ne sont plus valides.

Ainsi, dans une première partie, je m'attache à décrire les méthodes perturbatives existantes dont je détermine les limites de validité (Chapitre 3 Sect. 3.3). Puis j'étudie dans un second temps l'outil sismique de sondage de la rotation par excellence : le *splitting* rotationnel (Chapitre 3 Sect. 3.4).

Enfin, pour les situations où les méthodes perturbatives ne sont pas valides, j'ai développé une nouvelle méthode bidimensionnelle de calcul direct des oscillations stellaires en présence de la rotation. Le projet de réaliser un nouveau programme de calcul d'oscillations stellaires bidimensionnel non perturbatif a été porté d'une part, par la nécessité de vérifier les résultats des précédentes approches complètes par des calculs indépendants et d'autre part, par l'ambition de produire des spectres sismiques synthétiques plus réalistes dans une perspective de confrontation avec les contraintes sismiques observationnelles de la rotation stellaire (qui nécessite des spectres complets pour une grille de modèles d'équilibre). Le formalisme théorique de cette méthode est présenté au Chapitre 4, tandis que la méthode numérique utilisée est exposée au Chapitre 5. J'ai ensuite tenu à valider cette approche par une comparaison de mes résultats avec ceux de Reese et al. (2006) qui, pour des modèles polytropiques bidimensionnels, sont des résultats de référence, ceci fait l'objet du Chapitre 6. Enfin, dans le dernier chapitre de cette thèse (Chap. 7), j'étudie les oscillations d'un modèle stellaire

évolué déformé par la rotation.

Mais avant d'aborder ces différents points en détail, introduisons tout d'abord la théorie des oscillations.



# Chapitre 2

## Oscillations stellaires : aspects théoriques

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Temps caractéristiques . . . . .</b>	<b>28</b>
2.1.1	Le temps dynamique . . . . .	28
2.1.2	Le temps de Kelvin-Helmholtz . . . . .	29
2.1.3	Le temps nucléaire . . . . .	29
<b>2.2</b>	<b>Étoile de séquence principale du point de vue hydrodynamique . . . . .</b>	<b>30</b>
<b>2.3</b>	<b>Oscillations adiabatiques : cas général . . . . .</b>	<b>30</b>
2.3.1	Modèle d'équilibre . . . . .	30
2.3.2	Linéarisation autour de la structure d'équilibre . . . . .	31
2.3.3	Équations d'oscillations non radiales adiabatiques d'une étoile en rotation . . . . .	32
2.3.4	Conditions aux limites . . . . .	34
<b>2.4</b>	<b>Cas particulier : le cas sans rotation . . . . .</b>	<b>35</b>
2.4.1	Équations pour les oscillations adiabatiques non radiales . . . . .	35
2.4.2	Oscillations dans l'approximation de Cowling . . . . .	36

---

Ce chapitre est consacré à la présentation générale de la théorie des oscillations. On se place, comme dans l'intégralité de ce travail de thèse, dans le cas d'étoiles gazeuses (pas de matière condensée comme dans les étoiles à neutrons et certaines naines blanches), obéissant à la théorie newtonnienne de la gravitation (pas d'effets relativistes comme dans les étoiles à neutron, les naines blanches très condensées), en l'absence de champ magnétique, et en dehors de système multiple. On présente en Section 2.1 les temps caractéristiques associés aux différents processus physiques se déroulant dans les étoiles. En Section 2.2 sont présentées les équations générales de l'hydrodynamique dans le cadre des hypothèses évoquées précédemment. Dans la section suivante (Sect. 2.3) sont données les équations différentielles qui régissent les oscillations stellaires non radiales dans le cadre de l'approximation adiabatique et dans le cas général où la rotation est prise en compte, ainsi que leurs conditions aux limites. Enfin, le cas particulier sans rotation est développé dans la dernière section (Sect. 2.4)

dans laquelle on met en évidence l'existence de modes de pression et de gravité au moyen de l'approximation de Cowling.

## 2.1 Temps caractéristiques

Les différents phénomènes qui affectent la structure stellaire se déroulent sur des échelles de temps diverses. Une rapide estimation des temps caractéristiques permet d'apprécier la coexistence de ces phénomènes, et par là, de faire les approximations adéquates.

### 2.1.1 Le temps dynamique

Pour une étoile, l'équilibre hydrostatique est dû à la compensation entre les forces résultant du gradient de pression et du gradient de potentiel gravitationnel. Si l'équilibre entre ces deux forces était rompu, l'étoile s'effondrerait ou exploserait sur une échelle de temps caractéristique appelée temps dynamique.

Si l'on se place dans l'hypothèse où les forces de pression cessent brusquement de s'exercer, le mouvement d'un élément de fluide de masse  $m$  à une distance  $r$  du centre de l'étoile serait alors régi par :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\nabla\Phi = -\frac{Gm}{r^2} \quad (2.1)$$

Où  $r$  est la distance au centre de l'étoile,  $m$ , la masse enserrée dans la sphère de rayon  $r$ ,  $\Phi$ , le potentiel gravitationnel, et  $G$  la constante de gravitation universelle. Ceci, estimé de manière grossière donne un temps de chute libre de :

$$\tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \quad (2.2)$$

Sachant que  $R$  et  $M$  sont le rayon total et la masse totale de l'étoile. Pour évaluer d'une autre manière ce temps caractéristique, on peut imaginer l'hypothèse inverse, où la gravité cesserait brusquement de s'exercer, l'élément de matière serait éjecté hors de l'étoile avec l'accélération :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{\nabla P}{\rho} \quad (2.3)$$

l'étoile exploserait alors, et le temps caractéristique de l'explosion peut être estimé par :

$$\tau_{\text{exp}} = \frac{R}{c_s} \quad (2.4)$$

où  $c$  est la vitesse du son dans le milieu :  $c_s = \sqrt{\Gamma_1 P / \rho}$ . L'équilibre hydrostatique permet de considérer que les effets du gradient de pression et du gradient de potentiel gravitationnel sont du même ordre de grandeur, ainsi pour les temps caractéristiques :

$$\tau_{\text{dyn}} \approx \sqrt{\frac{R^3}{GM}} \approx \frac{R}{c_s} \Rightarrow c_s \approx \sqrt{\frac{GM}{R}} \quad (2.5)$$

Ce temps caractéristique représente également le temps qu'il faut à une onde de pression (onde sonore) pour parcourir le rayon de l'étoile, il correspond alors aussi au temps caractéristique des pulsations acoustiques.

### 2.1.2 Le temps de Kelvin-Helmholtz

Le temps de Kelvin-Helmoltz caractérise les processus thermiques se déroulant dans l'étoile. Pour une étoile de la séquence principale, l'équilibre thermique résulte de la compensation entre la production d'énergie par réaction nucléaire, et la perte d'énergie par rayonnement. On estime le temps caractéristique des processus thermiques dans l'étoile en la supposant brutalement privée de sa source d'énergie nucléaire. L'énergie rayonnée est alors prélevée au réservoir d'énergie totale de l'étoile, et le temps caractéristique est alors donné par le rapport entre l'énergie totale  $E$  et la luminosité  $L$  :

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{E}{L} \quad (2.6)$$

Or, d'après le théorème du viriel, l'énergie totale de l'étoile correspond à la moitié de son énergie potentielle  $\Omega$ , qui d'autre part est donnée par :

$$\Omega \approx -\frac{GM^2}{R} \quad (2.7)$$

Et l'on obtient alors :

$$\tau_{\text{KH}} \approx \frac{GM^2}{LR} \quad (2.8)$$

Le temps de Kelvin-Helmoltz pour le Soleil vaut environ  $3,1 \times 10^7$  années. Il est intéressant de comparer ce temps caractéristique au temps caractéristique des phénomènes dynamiques :

$$\frac{\tau_{\text{KH}}}{\tau_{\text{dyn}}} \approx \frac{G^{3/2}M^{5/2}}{LR^{5/2}} \quad (2.9)$$

Pour le Soleil par exemple, ce rapport s'élève à environ  $6 \times 10^{11}$ . Cette estimation rapide montre que les phénomènes thermiques sont très lents comparés aux phénomènes dynamiques.

Notons cependant que ces estimations sont globales et dans des situations locales particulières, la non-adiabaticité peut s'avérer trop importante pour être négligée. En particulier dans les couches externes de l'étoile, ou encore dans les cavités où ont lieu l'excitation ou l'amortissement des modes, les phénomènes dynamiques et thermiques se déroulent sur la même échelle de temps. Néanmoins, l'approximation adiabatique demeure pertinente pour étudier les caractéristiques dynamiques des oscillations stellaires en dessous de l'atmosphère.

**Tout au long de cette thèse, nous travaillerons dans le cadre de l'approximation adiabatique pour le calcul des oscillations.**

### 2.1.3 Le temps nucléaire

Pour une étoile de la séquence principale, brûlant son hydrogène dans les régions centrales, le temps nucléaire ( $\tau_{\text{nuc}}$ ) est considéré comme étant le temps nécessaire pour que l'étoile brûle 10% de son hydrogène, à une luminosité donnée. Le temps nucléaire caractéristique du Soleil est de  $9,8 \times 10^9$  années. Ceci permet de négliger les effets nucléaires sur la thermodynamique de l'étoile et a fortiori sur les phénomènes dynamiques qui s'y déroulent.



## 2.2 Étoile de séquence principale du point de vue hydrodynamique

L'intérieur stellaire est ici considéré comme un fluide non visqueux (pas de matière condensée comme dans les étoiles à neutrons et certaines naines blanches), obéissant à la théorie newtonnienne de la gravitation (pas d'effets relativistes). Tout au long de cette thèse, le champ magnétique sera négligé, et l'on ne considèrera pas le cas d'étoiles dans un système multiple. Par ailleurs, nous nous plaçons ici dans le cadre de l'approximation adiabatique justifiée au paragraphe précédent. Par conséquent, les équations permettant de décrire les déformations et oscillations d'une étoile sont les équations de l'hydrodynamique. C'est-à-dire les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, et de l'énergie :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.10)$$

$$\rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = -\nabla p - \rho \nabla \Phi \quad (2.11)$$

$$\rho T \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) S = \rho \epsilon_N - \nabla \cdot \mathbf{F} \quad (2.12)$$

Où  $\rho$  désigne la densité,  $p$  la pression,  $T$  la température,  $\mathbf{v}$  la vitesse du fluide,  $S$  son entropie spécifique,  $\Phi$  le potentiel gravitationnel,  $\epsilon_N$  le taux de production d'énergie nucléaire. Dans l'étoile, l'énergie est transportée par deux mécanismes principaux : la radiation et la convection. Le flux total est la somme des flux de transport par ces deux mécanismes :  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_C$ . Toutefois, la prise en compte dans le développement des équations à la fois du flux convectif et de la vitesse convective des éléments de fluides, est très compliquée, et la question de l'interaction entre la convection et les oscillations reste un problème ouvert. On se limite en général, dans le développement des équations d'oscillation, au cas radiatif, en prenant  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_R$  et une vitesse convective nulle.

Pour compléter la description du système, il est nécessaire de considérer des équations supplémentaires. Notamment l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel :

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho \quad (2.13)$$

## 2.3 Oscillations adiabatiques : cas général

### 2.3.1 Modèle d'équilibre

Tout au long de la séquence principale, l'échelle de temps caractéristique de l'évolution stellaire est le temps nucléaire. Nous avons montré à la section précédente que ce temps caractéristique était bien plus long que le temps de Kelvin-Helmoltz et le temps dynamique. On peut alors considérer comme une bonne approximation le fait qu'à un temps donné de son évolution, l'étoile est en équilibre hydrostatique. Par équilibre hydrostatique, nous entendons compensation entre les forces de pression, de gravité, et l'accélération centrifuge. Il s'agit d'un état d'équilibre stationnaire. En prenant les dérivées par rapport au temps comme étant nulles, et en considérant le champ de

vitesse à l'équilibre comme n'étant dû qu'à la rotation axiale de l'étoile, le système (2.10)-(2.12) donne : (Unno et al. 1989; Christensen-Dalsgaard 2003)

$$\vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0 \quad (2.14)$$

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 - \nabla \Phi_0 \quad (2.15)$$

$$\rho_0 \mathbf{T}_0 (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{S}_0 = \rho_0 \epsilon_{N,0} - \nabla \cdot \mathbf{F}_0 \quad (2.16)$$

Où l'indice 0 correspond aux grandeurs à l'équilibre. Le champ de vitesse à l'équilibre est donné par :  $\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ , où  $\boldsymbol{\Omega}$  est le vecteur vitesse angulaire de rotation. On le suppose à symétrie axiale :

$$\vec{\Omega} = \Omega(r, \theta) \cos(\theta) \vec{e}_r - \Omega(r, \theta) \sin(\theta) \vec{e}_\theta \quad (2.17)$$

exprimé dans la base sphérique ( $\vec{e}_r$ ;  $\vec{e}_\theta$ ;  $\vec{e}_\varphi$ ). Étant donné le champ de vitesse solénoïdal,  $\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0$ , et l'advection d'une quantité  $f$  quelconque donne :

$$\mathbf{v}_0 \cdot \nabla f = \Omega \frac{\partial f}{\partial \varphi} \quad (2.18)$$

L'équation (2.14) est donc automatiquement satisfaite, et l'équilibre hydrostatique (2.15) s'écrit :

$$\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p_0 - \nabla \Phi_0 \quad (2.19)$$

On reconnaît dans le membre de gauche l'accélération centrifuge.

### 2.3.2 Linéarisation autour de la structure d'équilibre

Dans une étoile variable, les positions et caractéristiques de chaque élément de masse varient périodiquement sur des échelles de temps de l'ordre du temps dynamique. À chaque instant, l'étoile oscille autour de son état d'équilibre. Nous nous plaçons dans le cadre de la théorie des petites perturbations linéaires, qui suppose que les perturbations de l'équilibre sont suffisamment petites pour n'être considérées qu'au premier ordre. Il existe deux types de formalisme pour décrire les perturbations. Le formalisme lagrangien qui suit les variations des grandeurs physiques d'un élément de masse donné, ayant eu une position initiale  $\mathbf{r}_0$  :

$$\delta f(\mathbf{r}_0, t) = f(\mathbf{r}, t) - f_0(\mathbf{r}_0) \quad (2.20)$$

Le formalisme eulérien, quant à lui, enregistre les variations des grandeurs physiques en chaque point  $(\mathbf{r}, t)$  du fluide :

$$f'(\mathbf{r}, t) = f(\mathbf{r}, t) - f_0(\mathbf{r}) \quad (2.21)$$

Où  $f_0$  désigne la valeur adoptée par la grandeur  $f$  à l'équilibre.

**Nous travaillerons tout au long de cette thèse dans le formalisme des perturbations linéaires eulériennes.**

Dans le cadre de l'approximation linéaire, la perturbation lagrangienne d'une grandeur  $f$  quelconque s'exprime en fonction de la perturbation eulérienne selon :

$$\delta f = f' + \xi \cdot \nabla f_0 \quad (2.22)$$

Où  $\xi$  est le vecteur déplacement qui est relié à la perturbation eulérienne de la vitesse par :

$$\mathbf{v}' = \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \xi - (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \quad (2.23)$$

### 2.3.3 Équations d'oscillations non radiales adiabatiques d'une étoile en rotation

Pour obtenir les équations d'oscillation, on procède comme Unno et al. (1989), c'est-à-dire que l'on perturbe les équations de l'hydrodynamique (2.10)-(2.12), ainsi que l'équation de Poisson (2.13) autour de l'état d'équilibre. L'état d'équilibre autour duquel la structure est perturbée est un état d'équilibre stationnaire, à symétrie axiale c'est-à-dire que la partie azimutale des grandeurs perturbées présente une périodicité  $2\pi$  en terme de l'angle azimutal  $\varphi$ . Ainsi, les dépendances temporelles et azimutales des grandeurs perturbées pourront être décrites à l'aide de  $e^{i(\sigma t + m\varphi)}$ , où  $\sigma$  désigne la fréquence d'oscillation, et  $m$  le nombre azimutal. On obtient alors pour les équations de l'hydrodynamique perturbées :

**Équation de continuité** (conservation de la masse) :

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{v}_0) = 0 \quad (2.24)$$

Qui, en terme du déplacement, en utilisant (2.23) et en intégrant (au sens lagrangien :  $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla}$ ), peut se réécrire :

$$\rho' + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) = 0 \quad (2.25)$$

**Équation de mouvement fluide** (conservation de la quantité de mouvement) :

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) + \rho' (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p' - \rho' \nabla \Phi_0 - \rho_0 \nabla \Phi'$$

Sachant que l'on ne considère ici que le champ de vitesse dû à la rotation :

$$\mathbf{v}_0 \cdot \nabla = \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} = i m \Omega, \quad (2.26)$$

que dans un système de coordonnées sphériques, les vecteurs de base vérifient :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} = \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \varphi} = \cos \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin \theta \mathbf{e}_r - \cos \theta \mathbf{e}_\theta \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial t} = \Omega \sin \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial t} = \Omega \cos \theta \mathbf{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_\varphi}{\partial t} = -\Omega \sin \theta \mathbf{e}_r - \Omega \cos \theta \mathbf{e}_\theta \quad (2.28)$$

et en tenant compte de l'équation de l'équilibre hydrostatique (2.15), on obtient :

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) v'_i \right] \mathbf{e}_i + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla \boldsymbol{\Omega}) r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \nabla \Phi' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \nabla p_0 \quad (2.29)$$

Qui, en terme du déplacement, peut se réécrire :

$$-\tilde{\sigma}^2 \vec{\xi} + 2i\sigma (\tilde{\Omega} \times \vec{\xi}) - (\vec{\xi} \cdot \tilde{\nabla} \Omega^2) r \sin \theta \tilde{\mathbf{e}}_s = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \nabla \Phi' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \nabla p_0 \quad (2.30)$$

Où  $\tilde{\sigma} = m\Omega + \sigma$ , est la fréquence d'oscillation dans le référentiel tournant, et  $\tilde{\mathbf{e}}_s = \sin \theta \tilde{\mathbf{e}}_r + \cos \theta \tilde{\mathbf{e}}_\theta$ . Le premier terme du membre de gauche représente la dérivée temporelle de la perturbation de la vitesse dans le repère tournant, le deuxième terme correspond à l'accélération de Coriolis, et le troisième à l'effet de la rotation différentielle  $(r, \theta)$ . Dans le second membre, à ce stade, aucune hypothèse n'est faite sur les profils de densité, de pression ou de potentiel gravitationnel qui dépendent de  $(r, \theta)$ .

### Équation d'énergie :

$$\rho_0 T_0 \left( \frac{\partial S'}{\partial t} + \mathbf{v}' \cdot \nabla S_0 \right) = (\rho \epsilon_N)' - \nabla \cdot \mathbf{F}'$$

Dans le cas d'oscillations linéaires adiabatiques, l'entropie spécifique est conservée pendant les oscillations, c'est-à-dire que la perturbation lagrangienne de l'entropie est nulle, et l'on peut alors utiliser l'identité thermodynamique :

$$\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta p}{p} - \frac{v_T}{c_p} \delta S$$

qui donne ici :  $\frac{\delta \rho}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta p}{p}$

Où  $\Gamma_1$  est l'exposant adiabatique. Ainsi, en écrivant cette équation dans le formalisme eulérien, à l'aide de (2.22) et de (2.23) on obtient :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) \left( \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{p'}{\Gamma_1 p_0} \right) + \frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \left( \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} - \frac{\nabla p_0}{\Gamma_1 p_0} \right) = 0 \quad (2.31)$$

Cette équation (2.31) remplacera l'équation d'énergie pour l'étude des oscillations stellaires adiabatiques.

### Équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel :

Une fois linéarisée, l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel donne :

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (2.32)$$

Les équations (2.25), (2.30), (2.31) et (2.32), forment un système de 4 équations à 4 inconnues  $(\vec{\xi}, p', \rho', \Phi')$  paramétré par  $\tilde{\sigma}$ . Avec la condition selon laquelle le déplacement doit être normalisé à 1 à la surface, et si l'on ajoute les conditions aux limites suivantes, on obtient alors un système aux valeurs propres  $\tilde{\sigma}$ .

### 2.3.4 Conditions aux limites

**Au centre**, on impose deux conditions :

Sachant qu'au centre on suppose pour les grandeurs d'équilibre les comportements suivants : (Unno et al. 1989)

$$\rho_0 \sim \text{constante}, \quad \partial\Phi_0/\partial r \sim 0, \quad c^2 \sim \text{constante}$$

La régularité de l'équation de mouvement au centre impose pour le déplacement radial ainsi que pour la perturbation de la pression, les comportements suivants :

$$\xi_r \propto r^{\ell-1} \quad \text{et} \quad p' \propto r^\ell \quad (2.33)$$

En ce qui concerne le potentiel gravitationnel, la condition qu'il faut appliquer doit exprimer le fait que le Laplacien du potentiel est borné en 0.

$$\begin{aligned} \text{En prenant, } \Phi' &= \sum_{\ell \geq |m|}^{+\infty} \Phi'_\ell(r) Y_{\ell,m} \\ \text{on obtient : } \Delta\Phi' &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'_\ell}{dr} \right) Y_{\ell,m} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi'_\ell Y_{\ell,m} \end{aligned}$$

Après avoir fait un développement des quantités en puissance de r, pour chaque composante  $\Phi'_\ell$ , on trouve deux solutions indépendantes : une qui tend vers 0 en  $r \rightarrow 0$   $\Phi'_\ell = Ar^\ell$  et une qui diverge :  $\Phi'_\ell = \frac{B}{r^{(\ell+1)}}$ . Ainsi, pour que  $\Delta\Phi'$  soit borné, on sélectionne la première solution, et on a :

$$\frac{d\Phi'_\ell}{dr} - \frac{\ell}{r} \Phi'_\ell = 0 \quad (2.34)$$

**À la surface**, on impose également deux conditions :

Une condition dite de surface libre, afin d'imposer une réflexion totale des ondes de pression à la surface. Cette condition est typiquement imposée dans les modèles de pulsations. C'est une approximation (Unno et al. 1989) qui correspond à prendre la perturbation lagrangienne de la pression comme étant nulle :

$$\begin{aligned} \delta p = 0 &\Leftrightarrow \frac{Dp'}{Dt} + \vec{v}' \cdot \vec{\nabla} p = 0 \\ &\Leftrightarrow i(m\Omega + \sigma) p' + \tilde{v}' \cdot \tilde{\nabla} p = 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Pour le potentiel gravitationnel, il faut appliquer une condition qui traduise le fait que le potentiel doit tendre vers 0 en l'infini. En procédant comme au centre, on développe le potentiel gravitationnel sur une base d'harmoniques sphériques, et la solution pour laquelle le Laplacien de  $\Phi'$  est borné à l'infini est alors  $\Phi'_\ell = \frac{B}{r^{(\ell+1)}}$  ; on a donc :

$$\frac{d\Phi'_\ell}{dr} + \frac{(\ell+1)}{r} \Phi'_\ell = 0 \quad (2.36)$$

Ainsi, le système (2.25), (2.30), (2.31) et (2.32), avec les conditions aux limites (2.33, 2.34) (2.35) (2.36) constitue un système aux valeurs propres dont les fonctions propres sont :  $\vec{\xi}$ ,  $p'$ ,  $\rho'$ ,  $\Phi'$ , et les valeurs propres sont les fréquences d'oscillation  $\tilde{\sigma}$ .

## 2.4 Cas particulier : le cas sans rotation

On considère ici le cas particulier sans rotation. Cela signifie que la vitesse du fluide à l'équilibre est nulle, et que le modèle d'équilibre est à symétrie sphérique.

### 2.4.1 Équations pour les oscillations adiabatiques non radiales

On reprend donc les équations (2.25), (2.30), (2.31) et (2.32), où l'on met  $\vec{\Omega}$  ( donc  $\mathbf{v}_0$ ) à zéro. Comme nous l'avons évoqué précédemment, les grandeurs d'équilibre, sans rotation, sont sphériques (gradient nul selon les directions horizontales). En projetant l'équation de mouvement (2.30) dans les directions radiale et horizontale, on obtient :

$$-\sigma^2 \xi_r + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{\partial \Phi'}{\partial r} + \frac{\rho'}{\rho_0} g = 0 \quad (2.37)$$

$$\text{et} \quad -\sigma^2 \xi_{\perp} + \nabla_{\perp} \cdot \left( \frac{p'}{\rho_0} + \Phi' \right) = 0 \quad (2.38)$$

Avec la gravité à l'équilibre :  $g = d\Phi_0/dr$ ; le déplacement (lié avec la perturbation de la vitesse par l'équation 2.23) se décomposant en composante radiale et composantes angulaires :  $\xi = (\xi_r, \xi_{\theta}, \xi_{\varphi})$ , et  $\xi_{\perp} = (0, \xi_{\theta}, \xi_{\varphi})$ . On définit par ailleurs le gradient horizontal :

$$\nabla_{\perp} = \frac{1}{r} \left( 0, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

On introduit le discriminant de Schwarzschild (Ledoux & Walraven 1958) qui caractérise le degré d'instabilité vis-à-vis de la convection.

$$A_r = \frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1 p_0} \frac{dp_0}{dr} = -\frac{N^2}{g} \quad (2.39)$$

$$\text{d'où la relation adiabatique s'écrit :} \quad \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{p'}{\Gamma_1 p_0} + \xi_r A_r = 0 \quad (2.40)$$

$N$  est la fréquence de Brunt-Väisälä. Si l'on considère schématiquement une bulle de fluide dans un milieu stratifié verticalement, lorsqu'elle se trouve déplacée, en dehors de sa position d'équilibre, la bulle se retrouve dans un milieu plus dense ou moins dense qu'elle et la poussée d'Archimède va tendre à la ramener vers sa position d'équilibre. La bulle dépasse alors sa position d'équilibre sur le chemin du retour, car la force a induit une accélération. Ce phénomène, entretenu, déclenche une oscillation dont la fréquence est la fréquence de Brunt-Väisälä  $N$ .

Revenons au système d'équation, en substituant (2.38) dans l'équation de continuité (2.25), et en développant l'équation de Poisson perturbée (2.32), on obtient :

$$\rho' + \frac{d\rho_0}{dr} \xi_r + \frac{\rho_0}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \xi_r) + \frac{1}{\sigma^2} \nabla_{\perp}^2 \left( \frac{p'}{\rho_0} + \Phi' \right) = 0 \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial r} \right) + \nabla_{\perp}^2 \Phi' - 4\pi G \rho' = 0 \quad (2.42)$$

Les équations (2.37), (2.40), (2.41), (2.42) forment un système d'équations différentielles du second ordre où les variables sont  $\xi_r$ ,  $p'$ ,  $\rho'$  et  $\Phi'$  et le paramètre  $\sigma$ . Les coefficients de ces équations ne dépendent que de  $r$ , et le seul opérateur de dérivation angulaire est  $\nabla_{\perp}^2$ . La séparation des variables en partie radiale et partie angulaire est possible, et la partie angulaire doit être fonction propre du Laplacien horizontal :

$$(r^2 \nabla_{\perp}^2 + \Lambda)Y(\theta, \varphi) = 0 \quad (2.43)$$

Étant donné que la partie azimutale doit présenter une périodicité de  $2\pi$  en terme de l'angle azimutal  $\varphi$ , nous la prendrons égale à  $e^{im\varphi}$ . Les harmoniques sphériques répondent à ces conditions (avec  $\Lambda = \ell(\ell + 1)$ ). On prendra donc pour les quatre variables du système un développement sur une seule harmonique sphérique. Par exemple pour le déplacement radial :

$$\xi_r(r, \theta, \varphi, t) = \xi_r(r) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) e^{i\sigma t} \quad (2.44)$$

En substituant  $\rho'$  par son expression dans (2.41), et en utilisant les propriétés différentielles des harmoniques sphériques, on obtient le système d'équations :

$$(N^2 - \sigma^2) \xi_r + \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{d}{dr} + \frac{g}{\rho_0 c_s^2} \right) p' + \frac{d\Phi'}{dr} = 0 \quad (2.45)$$

$$-\frac{g}{c_s^2} \xi_r + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \xi_r) + \frac{1}{\rho_0 c_s^2} \left( 1 - \frac{L_{\ell}^2}{\sigma^2} \right) p' - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2 \sigma^2} \Phi' = 0 \quad (2.46)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'}{dr} \right) - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \Phi' - 4\pi G \rho_0 \left( \frac{1}{\rho_0 c_s^2} p' + \frac{N^2}{g} \xi_r \right) = 0 \quad (2.47)$$

Où  $L_{\ell}$  est la fréquence de Lamb :

$$L_{\ell}^2 = \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} c_s^2 \quad (2.48)$$

$L_{\ell}$  définit la fréquence de la réponse du milieu à une perturbation de pression, l'oscillation. On comprend alors que les perturbations acoustiques ne peuvent se propager que lorsque leur fréquence est supérieure à la fréquence de Lamb. Nous y reviendrons à la section suivante.

Accompagné des conditions aux limites adéquates (cf section 2.3.4), ces équations représentent les équations de base pour étudier les propriétés dynamiques des oscillations non radiales ( $\ell$  non nécessairement nul).

## 2.4.2 Oscillations dans l'approximation de Cowling

L'approximation de Cowling (Cowling 1941) apparaît comme un bon compromis pour simplifier les équations afin d'étudier les propriétés dynamiques des oscillations non radiales selon des modes de haut ordre radial ( $n$ ), et de haut degré ( $\ell$ ). L'approximation consiste à négliger la perturbation eulérienne du potentiel gravitationnel, ce qui convient pour les modes se propageant dans les régions superficielles de l'étoile, où la densité est bien moins importante que la densité moyenne de l'étoile ( $\rho \ll 3M/4\pi R^3$ ).

Pour des oscillations de hauts ordres radiaux (nombre de nœuds élevé dans la direction radiale), les perturbations varient beaucoup plus rapidement que les grandeurs d'équilibre. En première approximation, on peut donc négliger les dérivées spatiales des grandeurs d'équilibre, notamment  $g = d\Phi_0/dr$ . Ainsi, le système d'équations (2.45)-(2.47) peut être simplifié :

$$\frac{dp'}{dr} = \rho_0 (\sigma^2 - N^2) \xi_r \quad (2.49)$$

$$\frac{d\xi_r}{dr} = \frac{1}{\rho_0 c^2} \left( \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} - 1 \right) p' \quad (2.50)$$

Que l'on rassemble en une équation différentielle du second ordre en  $\xi_r$  :

$$\frac{d^2 \xi_r}{dr^2} = \frac{\sigma^2}{c^2} \left( 1 - \frac{N^2}{\sigma^2} \right) \left( \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} - 1 \right) \xi_r \quad (2.51)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$k^2(r) \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \xi_r}{\partial r^2} = 0 \quad (2.52)$$

qui est une équation d'onde,  $k(r)$  étant le nombre d'onde défini par :

$$k^2(r) = \frac{1}{c^2} \left( 1 - \frac{N^2}{\sigma^2} \right) \left( 1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right) \quad (2.53)$$

Si  $k^2(r)$  est positif, c'est-à-dire si  $k(r)$  est réel, alors les solutions sont des solutions oscillantes, dont la condition de propagation radiale est satisfaite dans deux cas de figure :

- Si  $\sigma^2 > N^2$  et  $\sigma^2 > S_\ell^2$  simultanément, correspondant à la cavité de propagation des modes dits de pression (modes p),
- Si  $\sigma^2 < N^2$  et  $\sigma^2 < S_\ell^2$  simultanément, ce qui correspond à la cavité de propagation des modes dits de gravité (modes g).

Si  $k^2(r)$  est négatif, c'est-à-dire si le nombre d'onde  $k(r)$  est imaginaire pur, alors les solutions de l'équation d'onde sont soit évanescentes, soit explosives.

Pour un mode d'oscillation donné, il existe donc plusieurs régions de l'étoile au sein desquelles la solution oscillante peut être piégée. Les frontières de ces régions sont délimitées par des *points tournants* pour lesquels  $k(r)=0$ .

### Modes de pression

Pour les modes de pression, communément appelés modes p, notamment ceux de hauts ordres radiaux, la fréquence  $\sigma$  est très grande devant la fréquence de Brunt-Väisälä, et  $k^2(r)$  peut alors être considéré comme :

$$k^2(r) \simeq \frac{1}{c_s^2} \left( 1 - \frac{L_\ell^2}{\sigma^2} \right)$$



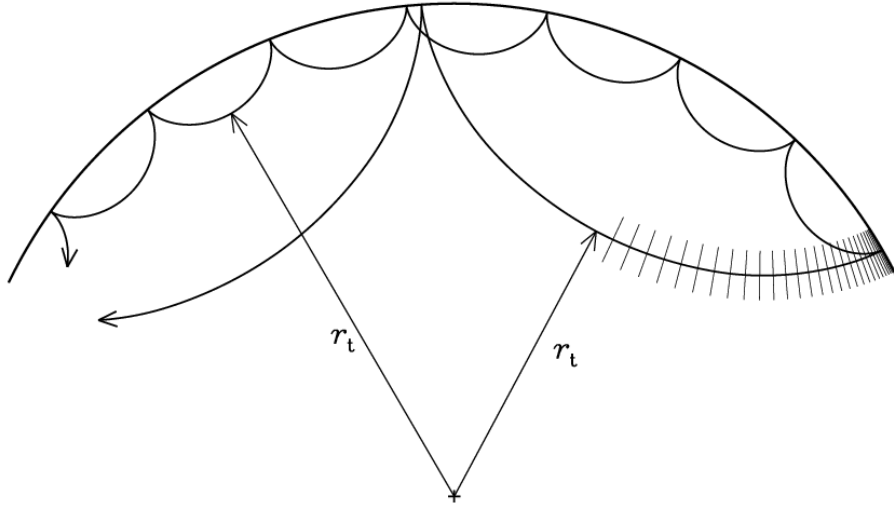


FIGURE 2.1: Propagation rays of sound waves in a cross-section of a Sun-like star. The acoustic ray paths are bend by the increase in sound speed with depth until they reach the inner turning point where they undergo total internal refraction. At the surface, the acoustic waves are reflected by the rapid decrease of density. Credit : Cunha et al. (2007).

Les modes propres sont alors piégés entre la surface et un point tournant dont la position  $r_t$  est déterminée par  $L_\ell(r_t) = \sigma$ , soit, en fonction de la fréquence et du degré du mode :

$$\frac{c_s^2(r_t)}{r_t^2} = \frac{\sigma^2}{\ell(\ell + 1)}$$

Dans le cadre de cette approximation, la dynamique des modes p est ainsi totalement déterminée par la variation radiale de la vitesse du son. Ces modes sont des ondes stationnaires acoustiques piégées, dont la force de rappel est principalement due au gradient de pression. Notons que c'est le cas en ce qui concerne les pulsations solaires. Pour le Soleil, les modes acoustiques montrent des oscillations à des fréquences qui vont approximativement de  $500 \mu\text{Hz}$  à  $5,5 \text{ mHz}$  comme le montre la Figure 2.2 (gauche).

### Modes de gravité

Pour des modes de gravité, aussi appelés mode g, de hauts ordres ( $n$  grand), on peut supposer que la fréquence est très petite devant la fréquence de Lamb, ce qui permet d'écrire :

$$k^2(r) = \left( \frac{N^2}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}$$

Ils sont ainsi piégés entre deux points de réflexion déterminés par la condition  $N(r_t) = \sigma$ , au-delà desquels la poussée d'Achimède change de signe et n'agit donc plus comme force de rappel. Pour un modèle solaire, ces points tournants sont situés proches du centre de l'étoile, et en dessous de la base de la zone convective, tels que :

$$N^2(r_t) = \frac{d\Phi_0}{dr}(r_t) \left( \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p_0}{dr}(r_t) - \frac{d \ln \rho_0}{dr}(r_t) \right) = \sigma^2$$

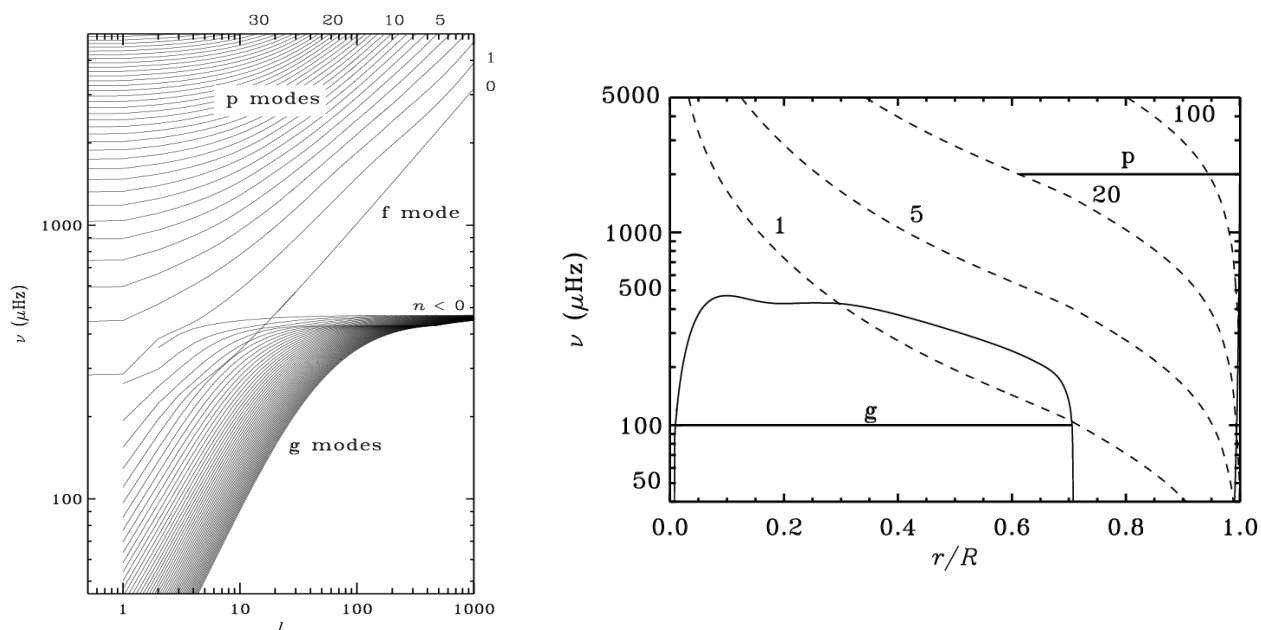


FIGURE 2.2: **Left** : The frequency of modes versus their degree  $\ell$  for a solar model. **Right** : Buoyancy frequency  $N$  (in solid line) and Lamb frequency  $S_\ell$  (in dashed lines), against fractional radius  $r/R$  for a solar model. The heavy horizontal lines indicate trapping regions for a g mode with frequency  $\nu = \omega/2\pi = 100\mu\text{Hz}$ , and for a p mode with degree 20 and  $\nu = 2000\mu\text{Hz}$ . Credit : Christensen-Dalsgaard (2003).

Dans ce cas, la dynamique des modes est dominée par la flottabilité, c'est-à-dire par les variations de  $N$  avec le rayon. Ces modes sont des ondes de gravité piégées, dont la principale force de rappel est la poussée d'Archimède.



# Chapitre 3

## Rotation faible : Approches perturbatives

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Méthodes perturbatives . . . . .</b>	<b>42</b>
<b>3.2</b>	<b>Corrections d'ordre 1 . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>3.3</b>	<b>Corrections d'ordre 2 . . . . .</b>	<b>45</b>
3.3.1	Traitement de la déformation de la structure . . . . .	45
3.3.2	Effet du second ordre sur les fréquences . . . . .	46
3.3.3	Dégénérescence accidentelle . . . . .	47
3.3.4	Limite de validité de l'approche perturbative au second ordre	49
<b>3.4</b>	<b>La rotation modérée . . . . .</b>	<b>52</b>
3.4.1	Résolution du problème à l'ordre « pseudo-zéro » . . . . .	53
3.4.2	Correction perturbative des fréquences propres . . . . .	54
<b>3.5</b>	<b>Le splitting rotationnel : écarts à la linéarité . . . . .</b>	<b>55</b>

---

Contrairement au cas sans rotation, lorsqu'une étoile tourne autour de son axe, à l'état d'équilibre, le champ de vitesse n'est pas nul ( $\vec{v}_0 = \vec{\Omega} \times \vec{r}$ ). Lorsque l'on décrit les mouvements de fluide dans un référentiel tournant, l'effet de la rotation apparaît dans le terme inertiel  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$  dans l'équation de mouvement (voir 2.10), où  $\vec{v}$  est composée de la vitesse de rotation  $\vec{v}_0$  et de la perturbation  $\vec{v}'$ . Ce terme inertiel est constitué de deux types de forces fictives : la force de Coriolis et la force centrifuge dans le référentiel tournant. La force centrifuge déforme la structure d'équilibre de l'étoile, donc la cavité résonnante des oscillations, et modifie ainsi les fréquences d'oscillation. Par ailleurs, l'accélération de Coriolis ( $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}'$ ) présente dans l'équation de mouvement linéarisée, affecte la dynamique du fluide et modifie la structure du spectre sismique de l'étoile.

Ce chapitre est donc consacré à l'étude des approches perturbatives du second et troisième ordre. Dans une première section on présente leur principe général, puis section 3.2 on dérive les corrections d'ordre 1 sur les modes propres d'oscillation. Les corrections du second ordre sont développées à la section 3.3 et leur limite de validité est établie, les corrections cubiques à la section 3.4. Enfin, en section 3.5, on étudie un des principaux outils de diagnostic sismique de la rotation : le splitting rotationnel.

### 3.1 Méthodes perturbatives

Dans le chapitre 2 de ce manuscrit, nous avons développé les équations générales des oscillations adiabatiques non radiales d'étoiles en rotation. À partir du système d'équations constitué de l'équation de mouvement (2.30), la relation adiabatique (2.31) et l'équation de continuité (2.24), on obtient les équations suivantes en terme du déplacement  $\vec{\xi}$  :

$$-\tilde{\sigma}^2 \vec{\xi} + 2i\tilde{\sigma} \left( \vec{\Omega} \times \vec{\xi} \right) - \left( \vec{\xi} \cdot \vec{\nabla} \Omega^2 \right) r \sin \theta \vec{e}_s = -\frac{1}{\rho_0} \mathcal{L} \vec{\xi} \quad (3.1)$$

$$\text{où } -\frac{1}{\rho_0} \mathcal{L} \vec{\xi} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p' - \tilde{\nabla} \Phi' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \vec{\nabla} p_0 \quad (3.2)$$

$$\frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{p'}{\Gamma_1 p_0} + \xi_r A_r = 0 \quad (3.3)$$

$$\rho' + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{\xi}) = 0 \quad (3.4)$$

Auxquelles on ajoute l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel :

$$\vec{\nabla}^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (3.5)$$

Les conditions aux limites imposées sont la non-singularité au centre, et la condition de surface libre en R, avec la condition sur le potentiel gravitationnel tendant vers zéro à l'infini. Étant donné la rupture de symétrie axiale, les équations de ce système sont des équations différentielles partielles du second ordre constituées de dérivées radiales et angulaires, le système n'est donc pas séparable en partie radiale et partie angulaire. Nous pouvons néanmoins rechercher les solutions sous la forme générale d'une décomposition sur les harmoniques sphériques (f représente une fonction propre scalaire) :

$$\vec{\xi}_m(\mathbf{r}, \theta, \varphi, t) = \sum_{\ell \geq |m|}^{+\infty} \left( \xi_{r,\ell}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r + \xi_{h,\ell}(r) \tilde{\nabla} Y_\ell^m + \tau_\ell(r) \vec{e}_r \times \tilde{\nabla} Y_\ell^m \right) e^{i\sigma t} \quad (3.6)$$

$$f'_m(\mathbf{r}, \theta, \varphi, t) = \sum_{\ell \geq |m|}^{+\infty} f'_\ell(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) e^{i\sigma t} \quad (3.7)$$

Les deux premiers termes du développement de  $\vec{\xi}_m(\mathbf{r}, \theta, \varphi, t)$  représentent la partie sphéroïdale des oscillations, tandis que le troisième correspond à la partie toroïdale.

Dans toutes les approches perturbatives, la méthode est la suivante : les équations d'oscillations (3.1), (3.3), (3.3) et (3.5) sont décomposées en contributions d'ordres différents en terme de la vitesse de rotation (ordre 0, 1, 2 et 3).

Les solutions à l'ordre zéro du système aux valeurs propres sont les solutions en l'absence de rotation ( $\sigma_0$ , et  $\xi_0$ ). À l'ordre 0, le système est séparable en partie radiale et angulaire (puisque'il s'agit du problème sans rotation). La résolution de l'ordre 0 montre alors que le déplacement à l'ordre 0  $\xi_0$  peut s'exprimer à l'aide d'une seule harmonique sphérique :

$$\vec{\xi}_0(\mathbf{r}, \theta, \varphi, t) = \left( \xi_{0,r}(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r + \xi_{0,h}(r) \tilde{\nabla} Y_\ell^m \right) e^{i\sigma t} \quad (3.8)$$

Et l'on peut montrer aisément que l'ensemble des solutions d'ordre 0 sont orthogonales et forment une base pour l'espace des modes propres d'oscillation muni du produit scalaire défini par :

$$\langle u|v \rangle = \int_{M_*} \rho_0 u^* v d^3 \vec{r} \quad (3.9)$$

Les corrections aux ordres supérieurs sont alors obtenues successivement en projetant le système à l'ordre  $n$  sur la base des vecteurs propres du système d'ordre  $n-1$ . On remarquera alors que pour obtenir les corrections sur les fréquences propres à l'ordre  $n$ , il n'est nécessaire de connaître les corrections sur les fonctions propres que jusqu'à l'ordre  $n-1$ .

## 3.2 Corrections d'ordre 1

Ledoux (1951) a montré qu'au premier ordre en  $\Omega$  l'effet de la rotation n'est dû qu'à l'accélération de Coriolis ( $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}$ ). L'impact de la déformation centrifuge peut alors être négligé, les grandeurs d'équilibre ne varient qu'avec le rayon. C'est ainsi que les méthodes perturbatives du premier ordre ont été développées par Cowling & Newing (1949) et Ledoux (1951) pour des modèles sphériques d'étoiles en rotation uniforme. En se plaçant dans le cas d'une configuration d'équilibre à symétrie sphérique en rotation  $\Omega(r, \theta)$ , on cherche ici à déterminer les corrections d'ordre 1 à la fréquence. L'équation de mouvement s'exprime :

$$-\tilde{\sigma}^2 \vec{\xi} + 2i\tilde{\sigma} (\vec{\Omega} \times \vec{\xi}) = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \vec{\nabla} p_0 - \vec{\nabla} \Phi' \quad (3.10)$$

Lorsque la force de Coriolis est prise en compte,  $\sigma_{0,k}$  est corrigée d'une valeur  $\sigma_{1,k}$ , tandis que la fonction propre  $\xi_{0,k}$  est corrigée d'un vecteur  $\xi_{1,k}$ , qui peut s'exprimer sur la base des fonctions propres de l'ordre 0 :

$$\vec{\xi}_{1,k} = \sum_{\substack{i \\ i \neq k}} a_{k,i} \vec{\xi}_{0,i} \quad (3.11)$$

Où  $k$  représente le degré ( $\ell$ ), et l'ordre ( $n$ ) du mode d'oscillation. Ce qui induit directement un développement identique (à l'aide des mêmes coefficients  $a_{k,i}$ ) pour les quantités perturbées du premier ordre telles que  $\rho'_{1,k}$ ,  $p'_{1,k}$ , et  $\Phi'_{1,k}$ . En introduisant ces développements dans l'équation d'oscillation (3.10), on obtient, à l'ordre 1 :

$$2\sigma_{0,k}\sigma_{1,k}\vec{\xi}_{0,k} = 2i\sigma_{0,k}(\vec{\Omega} \times \vec{\xi}_{0,k}) - 2m\Omega\sigma_{0,k}\vec{\xi}_{0,k} - \sum_{\substack{i \\ i \neq k}} (\tilde{\sigma}_{0,k}^2 - \tilde{\sigma}_{0,i}^2) a_{k,i} \vec{\xi}_{0,i} \quad (3.12)$$

On notera  $\mathcal{K}_m$  l'opérateur linéaire tel que  $\mathcal{K}_m = m\Omega - i\vec{\Omega} \times$ . Ainsi, en projetant cette équation sur la base des  $\vec{\xi}_{0,k}$  puis en intégrant sur tout le volume de l'étoile, compte tenu de l'orthogonalité des fonctions propres d'ordre 0, la correction d'ordre 1 sur la fréquence est obtenue par :

$$\sigma_{1,k} = \frac{\int \rho_0 \left( \mathcal{K}_m \vec{\xi}_{0,k} \right) \vec{\xi}_{0,k}^* d^3r}{\int \rho_0 \left( \vec{\xi}_{0,k} \cdot \vec{\xi}_{0,k}^* \right) d^3r} \quad (3.13)$$

$I = \int \rho_0 \left( \vec{\xi}_{0,k} \cdot \vec{\xi}_{0,k}^* \right) d^3r$  représentant le moment d'inertie oscillatoire. Ce qui nous permet d'établir :

$$\sigma_{1,k} = m \int_0^R \int_0^\pi \mathcal{K}_{n,\ell}(r, \theta) \Omega(r, \theta) r d\theta dr \quad (3.14)$$

Où  $\mathcal{K}_{n,\ell}$  est appelé noyau rotationnel. Ainsi, la correction au premier ordre de la fréquence dépend de l'indice azimutal  $m$  ; à un degré ( $\ell$ ) et un ordre ( $n$ ) donné, correspondent  $(2\ell + 1)$  modes d'oscillation. Comme le champ magnétique qui induit un effet Zeeman sur les niveaux d'énergie atomiques, la rotation lève la dégénérescence des modes d'oscillation. La structure fine ici est dénommée splitting rotationnel, que l'on notera à l'avenir  $S_m$ .

$$S_m = \frac{\sigma_{n,\ell,-m} - \sigma_{n,\ell,m}}{2m} \quad (3.15)$$

Dans le cas où la rotation est différentielle en rayon seulement,

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{n,\ell}(r) &= (\xi_r^2 + \Lambda \xi_h^2 - 2\xi_r \xi_h + \xi_h^2) \rho_0 r^2 \\ \text{et } I &= \int_0^R \rho_0 r^2 (\xi_r^2 + \Lambda \xi_h^2) dr \\ \text{d'où } \sigma_{1,k} &= m \int_0^R \mathcal{K}_{n,\ell}(r) \Omega(r) dr = m \bar{\Omega} (1 - C_{n,\ell} - J_{n,\ell}), \end{aligned}$$

Où on note  $\bar{\Omega}$  la rotation moyenne au sein de l'étoile. La constante de Ledoux notée  $C_{n,\ell}$  s'exprime :

$$\begin{aligned} C_{n,\ell} &= \frac{1}{I} \int_0^R \rho_0 r^2 (2\xi_r \xi_h + \xi_h^2) dr \\ \text{et } J_{n,\ell} &= \frac{1}{I} \int_0^R \rho_0 r^2 (\Omega(r) - \bar{\Omega}) (\xi_r^2 + \Lambda \xi_h^2 - 2\xi_r \xi_h + \xi_h^2) dr \end{aligned}$$

Ici,  $C_{n,\ell}$  représente l'effet de l'accélération de Coriolis si l'étoile est soumise à une rotation uniforme égale à la rotation moyenne, tandis que  $J_{n,\ell}$  correspond à l'écart par rapport au cas uniforme, soit l'effet de la rotation différentielle en rayon.

Si la rotation est uniforme dans l'étoile, on retrouve alors l'expression établie par Ledoux (1951) :  $\sigma_k = \sigma_{0,k} + m\Omega(1 - C_{n,\ell})$ . Et le splitting rotationnel se calcule alors par :  $S_m = \Omega(1 - C_{n,\ell})$ . Pour les modes de pression de hauts ordres radiaux, la partie horizontale des modes propres étant très petite devant la partie radiale,  $C_{n,\ell} \simeq 0$ , tandis que dans le domaine asymptotique des modes de gravité,  $C_{n,\ell} \simeq 1/(\ell + 1)$ .

### 3.3 Corrections d'ordre 2

Deux approches perturbatives d'ordre 2 ont été développées indépendamment par Gough & Thompson (1990), puis par Dziembowski & Goode (1992) dans un but premier de modéliser l'effet de la rotation différentielle sur le spectre solaire. Nous nous concentrons ici sur la méthode développée par Dziembowski & Goode (1992).

#### 3.3.1 Traitement de la déformation de la structure

Lorsqu'on considère des rotations légèrement plus élevées, on ne peut pas négliger la déformation de l'étoile dans sa structure d'équilibre, induite par la force centrifuge. Si l'on exprime l'accélération centrifuge à l'aide de polynômes de Legendre :

$$\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_r(r)[1 - P_2(\cos \theta)]\tilde{e}_r + \mathcal{A}_\theta(r) \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta} \tilde{e}_\theta \quad (3.16)$$

avec  $\mathcal{A}_r(r) = \frac{2}{3} r \Omega^2$ , et  $\mathcal{A}_\theta(r) = -\frac{1}{3} r \Omega^2$

L'effet de la force centrifuge se scinde alors en deux parties : d'une part la perturbation à symétrie sphérique, qui modifie la gravité apparente au sein de l'étoile, et une perturbation dépendante de la latitude  $\theta$ , qui génère la distorsion de l'étoile. Ainsi, toutes les grandeurs de structure se décomposent de la même manière en une partie sphériquement symétrique, et une partie non sphérique, par exemple pour la densité à l'équilibre :

$$\rho_0(r, \theta) = \tilde{\rho}_0(r) + \epsilon^2 \rho_{22}(r) P_2(\cos \theta) \quad (3.17)$$

On rappelle que  $\epsilon$  vaut  $\Omega/\Omega_k$ , avec  $\Omega_k = \sqrt{GM/R^3}$ .

En projetant l'équilibre hydrostatique exprimé dans (2.19) sur les vecteurs de base  $\tilde{e}_r$  et  $\tilde{e}_\theta$ , on obtient :

$$\frac{2}{3} r \Omega^2 [1 - P_2(\cos \theta)] = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{\partial \Phi_0}{\partial r} \quad (3.18)$$

$$-\frac{1}{3} r \Omega^2 \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta} = \frac{1}{r \rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta} \quad (3.19)$$

À la manière de Kippenhahn & Weigert (1994), la partie sphériquement symétrique de l'effet de la force centrifuge est intégrée à une gravité effective telle que :

$$\frac{d\tilde{p}_0}{dr} = -\tilde{\rho}_0 g_{\text{eff}}, \quad \text{où} \quad g_{\text{eff}} = \frac{d\tilde{\Phi}_0}{dr} - \frac{2}{3} r \Omega^2 \quad (3.20)$$

En ce qui concerne les parties à symétrie non sphérique des grandeurs d'équilibre ( $p_{22}$ ,  $\rho_{22}$  et  $\Phi_{22}$ ), selon Dziembowski & Goode (1992), ils sont calculés par :

$$p_{22} = -\tilde{\rho}_0 r^2 \bar{\Omega}^2 u_2, \quad \text{et} \quad \rho_{22} = \frac{\tilde{\rho}_0 r \bar{\Omega}^2}{\tilde{g}} \left( \frac{d \ln \tilde{\rho}_0}{d \ln r} u_2 + b_2 \right) \quad (3.21)$$

$$\text{où} \quad u_2 = \frac{\Phi_{22}}{r^2 \bar{\Omega}^2} + \frac{1}{3} (1 + \eta(\eta + 2)) \quad \text{et} \quad b_2 = \frac{1}{3} r \frac{d(\eta(\eta + 2))}{dr} \quad (3.22)$$



$\Phi_{22}$  est obtenue par intégration de l'équation de Poisson :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi_{22}}{dr} \right) - \frac{6}{r^2} \Phi_{22} = 4\pi G \rho_{22} \quad (3.23)$$

Avec les conditions aux limites appropriées :  $\Phi_{22} \propto r^2$  au centre, et  $\Phi_{22} \propto r^{-3}$  à la surface de l'étoile.

### 3.3.2 Effet du second ordre sur les fréquences

Lorsque les accélérations de Coriolis et centrifuge sont prises en compte, la fréquence d'oscillation est corrigée de sorte que :  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$ , et il en va de même pour les grandeurs perturbées :

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 + \vec{\xi}_1 + \vec{\xi}_2, \quad \text{et} \quad \rho' = \tilde{\rho}' + \rho'_2 \quad (3.24)$$

En introduisant ces développements dans l'équation de mouvement (3.1), on obtient :

$$\text{à l'ordre 0 :} \quad -\sigma_0^2 \rho_0 \vec{\xi}_0 + \mathcal{L}_0 \vec{\xi}_0 = 0, \quad (3.25)$$

$$\text{à l'ordre 1 :} \quad -\left[ 2\sigma_0(\sigma_1 + \mathcal{K}_m) \vec{\xi}_0 + \sigma_0^2 \vec{\xi}_0 \right] \rho_0 + \mathcal{L}_0 \vec{\xi}_1 = 0 \quad (3.26)$$

Où  $\mathcal{L}_0$  correspond aux termes d'ordre 0 de l'opérateur  $\mathcal{L}$  (cf équation 3.2), et contient la déformation sphérique due à l'accélération centrifuge.

À l'ordre 2 :

$$\left[ -2\rho_0\sigma_0\sigma_2 - \rho_0\sigma_1^2 + \rho_0\mathcal{D} + \rho_0\mathcal{I} \right] \vec{\xi}_0 + \rho_0\mathcal{F}\vec{\xi}_1 + \rho_0\mathcal{S}\vec{\xi}_2 = 0 \quad (3.27)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \frac{1}{\rho_0} \mathcal{L}_2 - \frac{\rho_{22}}{\rho_0} \sigma_0^2 \\ \mathcal{I} &= -2\sigma_1 \mathcal{K}_m - 2m\Omega \mathcal{K}_m + r \sin \theta \tilde{\mathbf{e}}_s \cdot \tilde{\nabla} \Omega^2 \\ \mathcal{F} &= -2\sigma_0 (\sigma_1 + \mathcal{K}_m) \\ \mathcal{S} &= -\sigma_0^2 + \frac{1}{\rho_0} \mathcal{L}_0 \end{aligned}$$

Où  $\mathcal{L}_2$  correspond aux termes d'ordre 2 de l'opérateur  $\mathcal{L}$ . L'opérateur  $\mathcal{D}$  contient l'effet de la distorsion centrifuge, tandis que  $\mathcal{I}$  représente l'effet du second ordre de l'inertie.  $\mathcal{F}$  est dû à l'effet de la perturbation d'ordre 1 de la fonction propre.

On rappelle que les fonctions propres du problème à l'ordre zéro  $\vec{\xi}_0$  forment une base sur laquelle est développée la fonction propre du système global :

$$\vec{\xi}_k = \vec{\xi}_{0,k} + \vec{\xi}_{1,k} + \vec{\xi}_{2,k} = \vec{\xi}_{0,k} + \sum_{\substack{i \\ i \neq k}} a_{k,i} \vec{\xi}_{0,i} + \sum_{\substack{i \\ i \neq k}} b_{k,i} \vec{\xi}_{0,i} \quad (3.28)$$

Où  $k$  représente l'ensemble des  $\{n, \ell, m\}$ . Les perturbations du déplacement à chaque ordre vérifient :

$$\int_R \rho_0 \vec{\xi}_0^* \cdot \vec{\xi}_1 \rho_0 d^3r = \int_R \rho_0 \vec{\xi}_0^* \cdot \vec{\xi}_2 \rho_0 d^3r = 0 \quad (3.29)$$

En projetant l'équation (3.26) sur la base des  $\vec{\xi}_0$ , on obtient alors l'équation (3.13). On procède de même pour les corrections d'ordre 2, et en tenant compte du fait que l'opérateur  $\mathcal{L}_0$  est hermitique, on obtient :

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{\sigma_1^2}{2\sigma_0} + \frac{1}{2I\sigma_0} \int_R \rho_0 \vec{\xi}_0^* \cdot \mathcal{D} \vec{\xi}_0 \rho_0 d^3r && \leftrightarrow \sigma_2^D \\ &+ \frac{1}{2I\sigma_0} \int_R \rho_0 \vec{\xi}_0^* \cdot \mathcal{I} \vec{\xi}_0 \rho_0 d^3r && \leftrightarrow \sigma_2^I \\ &+ \frac{1}{2I\sigma_0} \int_R \rho_0 \vec{\xi}_0^* \cdot \mathcal{F} \vec{\xi}_1 \rho_0 d^3r && \leftrightarrow \sigma_2^P + \sigma_2^T \end{aligned} \quad (3.30)$$

Où l'on signale les correspondances avec les notations de Dziembowski & Goode (1992), selon qui les corrections perturbatives de la fréquence d'oscillation au second ordre sont des polynômes en  $m^2$ . Comme à la section précédente, les fonctions propres du problème à l'ordre zéro sont les solutions du problème sans rotation, à ceci près que la gravité en jeu dans ce système doit être la gravité effective, explicitée dans l'équation (3.20). L'équation (3.30) montre que, pour obtenir les corrections d'ordre 2 à la fréquence, il est nécessaire de calculer les fonctions propres à l'ordre 1 ( $\vec{\xi}_1$ ). Conformément à la décomposition proposée (2.44), on décompose  $\vec{\xi}_1$  en une partie poloïdale, et une partie toroïdale  $\vec{\xi}_1 = \vec{\xi}_1^P + \vec{\xi}_1^T$ . La partie toroïdale est trouvée en prenant la composante radiale du rotationnel de l'équation de mouvement au premier ordre (3.26), tandis que la partie poloïdale peut être calculée en résolvant (3.26) directement (Hansen et al. 1978; Saio 1981; Dziembowski & Goode 1992).

### 3.3.3 Dégénérescence accidentelle

Ce phénomène a été discuté pour la première fois dans le contexte des oscillations stellaires par Chandrasekhar & Lebovitz (1962). On se place ici dans le cas simplifié où la rotation est uniforme au sein de l'étoile, et où l'on néglige l'effet de la force de Coriolis, ce qui peut être une approximation correcte pour étudier la dynamique des modes de pression de haute fréquence qui se propagent principalement dans une cavité proche de la surface où la force centrifuge domine. Le système ne comporte alors que des contributions d'ordre zéro et deux. Les fonctions propres à l'ordre 2 se décomposent sur la base des fonctions propres à l'ordre zéro :

$$\vec{\xi}_{2,k} = \sum_{\substack{i \\ i \neq k}} b_{k,i} \vec{\xi}_{0,i} \quad (3.31)$$

et l'équation de mouvement au second ordre donne, conformément à (3.27) :

$$\begin{aligned} 2\rho_0\sigma_{0,k}\sigma_{2,k}\vec{\xi}_{0,k} - (\mathcal{L}_2 - \sigma_{0,k}^2\rho_{22})\vec{\xi}_{0,k} &= \mathcal{L}_0\vec{\xi}_{2,k} - \rho_0\sigma_{0,k}^2\vec{\xi}_{2,k} \\ &= \mathcal{L}_0\sum_{\substack{i \\ i\neq k}} b_{k,i}\tilde{\xi}_{0,i} - \rho_0\sigma_{0,k}^2\sum_{\substack{i \\ i\neq k}} b_{k,i}\tilde{\xi}_{0,i} \end{aligned} \quad (3.32)$$

En projetant sur la base des  $\vec{\xi}_{0,k}$ , on obtient les coefficients  $b_{k,i}$ , et la correction d'ordre 2 peut alors s'écrire :

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_{2,k} &= -\sum_{\substack{i \\ i\neq k}} \frac{\mathcal{B}_{i,k}}{(\sigma_{0,i}^2 - \sigma_{0,k}^2)} \tilde{\xi}_{0,i} \quad \text{et} \quad \sigma_{2,k} = \frac{\mathcal{B}_{k,k}}{2\sigma_{0,k}} \\ \text{avec :} \quad \mathcal{B}_{i,k} &= \frac{1}{\Gamma} \int \tilde{\xi}_{0,i}^* \cdot (\mathcal{L}_2 - \sigma_{0,k}^2\rho_{22}) \vec{\xi}_{0,k} d^3r \end{aligned} \quad (3.33)$$

La présence de la différence  $(\sigma_{0,i}^2 - \sigma_{0,k}^2)$  au dénominateur de l'équation (3.33) peut être problématique car dans le cas où  $\sigma_{0,i} \sim \sigma_{0,k}$ , elle peut entraîner une correction importante, de l'ordre 0, et donc remettre en question le développement perturbatif. Comme en mécanique quantique, la proximité des deux modes  $i$  et  $k$  peut entraîner un croisement évité. On considère alors que ces deux modes sont couplés, la fonction propre à l'ordre zéro s'écrit alors :  $\vec{\xi}_{0,k,i} = c_k\tilde{\xi}_{0,k} + c_i\tilde{\xi}_{0,i}$ , sachant que les fréquences propres des modes individuels trouvées par le calcul précédent sont  $\sigma_k = \sigma_{0,k} + \sigma_{2,k}$ , et  $\sigma_i = \sigma_{0,i} + \sigma_{2,i}$ , on recherche la fréquence propre couplée  $\sigma_{k,i}$ . En introduisant ce développement dans l'équation (3.32), et en projetant alternativement sur  $\vec{\xi}_{0,k}$ , puis sur  $\vec{\xi}_{0,i}$ , on obtient un système d'équation qui, si on considère que  $\sigma_{0,k}^2 + 2\sigma_{0,k}\sigma_{2,k} \sim \sigma_k^2$ , peut se mettre sous la forme :

$$c_k(\sigma_k^2 - \sigma_{k,i}^2) + c_i\mathcal{B}_{k,i} = 0, \quad c_i(\sigma_i^2 - \sigma_{k,i}^2) + c_k\mathcal{B}_{i,k} = 0 \quad (3.34)$$

Dont les solutions doivent vérifier :

$$\sigma_{k,i}^4 - \sigma_{k,i}^2(\sigma_k^2 + \sigma_i^2) + \sigma_k^2\sigma_i^2 - \mathcal{B}_{k,i}\mathcal{B}_{i,k} = 0 \quad (3.35)$$

Ainsi, les fréquences des modes couplés sont donc :

$$\sigma_{\pm}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_k^2 + \sigma_i^2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_k^2 - \sigma_i^2)^2 + 4\mathcal{B}_{k,i}\mathcal{B}_{i,k}} \quad (3.36)$$

Les fonctions propres correspondantes  $\xi_{\pm}$  sont composées également des deux contributions d'ordre zéro des modes  $i$  et  $k$ . Lorsque l'on prend en compte l'effet de la force de Coriolis, et que l'on considère une rotation différentielle au sein de l'étoile, bien que le problème se complique la procédure demeure identique. La dégénérescence proche a été incluse dans des calculs perturbatifs d'ordre 2 par Simon (1969), Dziembowski & Goode (1992), Suárez et al. (2006), et dans des calculs perturbatifs d'ordre cubique par Soufi et al. (1998) et Karami et al. (2005).

### 3.3.4 Limite de validité de l’approche perturbative au second ordre

L’approche perturbative d’ordre 2 présentée dans cette section est une méthode rapide et peu coûteuse du point de vue numérique. Elle repose principalement sur deux hypothèses, selon lesquelles l’écart à la sphéricité induit par la rotation est faible, et la fréquence de rotation est petite devant les fréquences d’oscillation. Ces hypothèses permettent des approximations simplificatrices pour le calcul, mais peuvent s’avérer non pertinentes pour une détermination quantitative précise des fréquences d’oscillation dans certaines situations stellaires. Ainsi, dans le cadre de l’exploitation des données sismiques des missions d’astérosismologie actuelles, il est important de caractériser précisément le domaine de validité de l’approche perturbative.

Ces préoccupations ont fait l’objet d’un certain nombre de travaux. À commencer par Reese et al. (2006), qui se sont attachés à déterminer le domaine de validité d’une méthode perturbative d’ordre 3 pour les oscillations d’un modèle de structure polytropique. Les fréquences perturbatives étaient calculées à partir d’un ajustement des fréquences non perturbatives sur un polynôme du troisième ordre en terme de la fréquence de rotation. Plus tard, Lovekin & Deupree (2008) font une étude de validité mais cette fois-ci avec des modèles ZAMS, leur fréquences perturbatives sont également issues d’ajustements polynômiaux. Ensuite, Ouazzani et al. (2009) ont comparé les résultats de calculs perturbatifs du second ordre (Dziembowski & Goode 1992) à ceux de calculs complets pour des modèles polytropiques (les fréquences perturbatives étant calculées pour un modèle polytropique sphérique tandis que les fréquences non perturbatives le sont pour des modèles bidimensionnels). Suárez et al. (2010) ont ensuite déterminé l’erreur induite par la méthode perturbative sur les diagrammes échelle. Les auteurs ont mis en lumière l’importance de la prise en compte de la correction de la dégénérescence accidentelle. Enfin, très récemment, Burke et al. (2011) ont établi le domaine de validité de la méthode perturbative d’ordre 2 (Gough & Thompson 1990) par comparaison avec un calcul complet, et ce pour un modèle ZAMS d’étoile de  $1 M_{\odot}$ , dont l’écart à la sphéricité est exprimé en terme de polynôme de Legendre d’ordre 2.

Nous présentons dans cette thèse une étude de validité de l’approche perturbative d’ordre 2 (Dziembowski & Goode 1992), **incluant cette fois les corrections de la dégénérescence accidentelle** pour un modèle ZAMS de  $8,5 M_{\odot}$  prenant en compte la distorsion centrifuge comme une perturbation de la structure sphérique s’exprimant en polynôme de Legendre d’ordre 2, comme décrit en Section 3.3.1.

Dans ce travail, par validité on entend le fait que l’impact des approximations (dues aux hypothèses assumées par la méthode) sur les valeurs des fréquences calculées, est inférieur aux barres d’erreur observationnelles. On estime l’erreur induite par ces approximations en comparant les résultats de fréquences propres perturbatives avec ceux d’un calcul complet fournis par Daniel Reese, calcul non perturbatif, issu du programme TOP (Reese et al. 2009a). On détermine ce domaine de validité en terme de vitesse angulaire de rotation. Le calcul perturbatif est valide, à vitesse angulaire de rotation donnée, tant que la différence avec les fréquences non perturbatives est inférieure aux barres d’erreur CoRoT. Les barres d’erreur CoRoT sont prises comme étant la résolution d’un pic dans le spectre de Fourier pour des durées d’observation de 20 jours (*short run*) et de 150 jours (*long run*), respectivement,  $0,6 \mu Hz$  et  $0,08 \mu Hz$ .

Afin de calculer les oscillations par la méthode perturbative d’ordre 2 avec ou sans dégénérescence accidentelle, nous avons utilisé le code WarM (Warsaw Meudon pulsa-

tion code, Soufi et al. 1998). Les comparaisons ont été effectuées avec les calculs non perturbatifs issus du programme TOP (Two dimensional Oscillation Program, Reese et al. 2009a). Le modèle d'équilibre placé en amont de ces codes est un modèle ZAMS de  $8.5M_{\odot}$  calculé par le code d'évolution CESAM2k (Morel & Lebreton 2008), décrit en Table 3.1.

TABLE 3.1: Stellar parameters of the ZAMS model Sect.2 and 3.

$M = 8.5 M_{\odot}$	$R = 3.96 R_{\odot}$
$L = 13 \times 10^3 L_{\odot}$	$X_0 = 0.7$
$P_c = 8.8 \times 10^3 \text{ dyn.cm}^{-2}$	$\rho_c = 3.6 \times 10^{-9} \text{ g.cm}^{-3}$

Ce modèle a ensuite été déformé au sein du code d'oscillation WarM comme décrit à la Section 3.3.1. Afin d'effectuer les calculs non perturbatifs, le modèle déformé est ensuite interpolé sur le système de coordonnées mis au point par Bonazzola et al. (1998) dont il sera question plus en détail au Chapitre 4, Section 4.1.1.

Avant d'établir avec précision la validité de l'approche perturbative d'ordre 2, j'ai tenu à comparer les résultats issus des deux calculs (perturbatif et complet) en l'absence de rotation. Cette comparaison est présentée dans la Figure 3.2. Ces différences sont principalement dues aux développements des équations d'oscillation qui sont différents dans les deux approches, ainsi qu'à la résolution numérique de ces deux systèmes.

Une autre source importante de différences est la manière dont sont imposées les conditions aux limites, notamment en surface. En effet, l'approche non perturbative telle qu'implémentée dans TOP (Reese et al. 2009a) s'appuie sur une condition de surface stellaire libre selon laquelle la variation lagrangienne de la pression est nulle en surface, tandis que dans WarM (Soufi et al. 1998), la condition imposée est que la pression soit bornée en surface (Dziembowski 1971).

Cette différence étant due à des biais systématiques, nous choisissons de ne pas la prendre en compte pour la détermination des domaines de validité, en la retirant systématiquement des différences de fréquences entre les résultats issus des deux calculs.

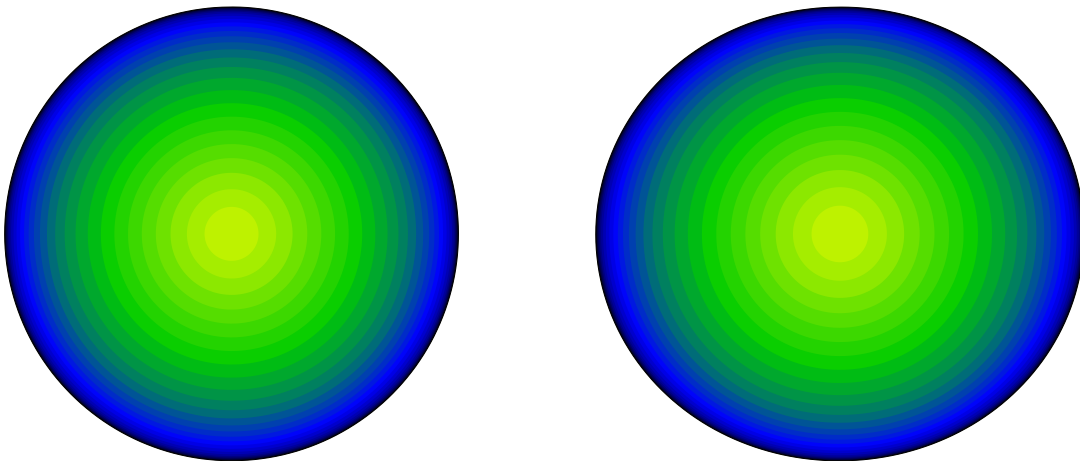


FIGURE 3.1: Logarithmic pressure map in the stellar interior, for the spherical model computed by the evolution code (on the left), and for the distorted model including second order perturbation of the structure caused by a uniform rotation of  $\Omega = 38\% \Omega_k$  (on the right).

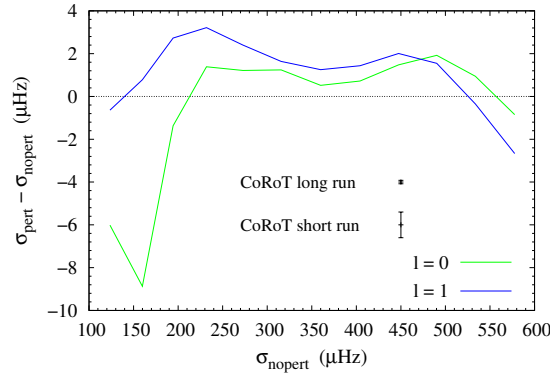


FIGURE 3.2: Frequency discrepancies between perturbative computations (with WarM) and non perturbative ones (with TOP) without rotation for  $\ell = 0$  and 1 modes.

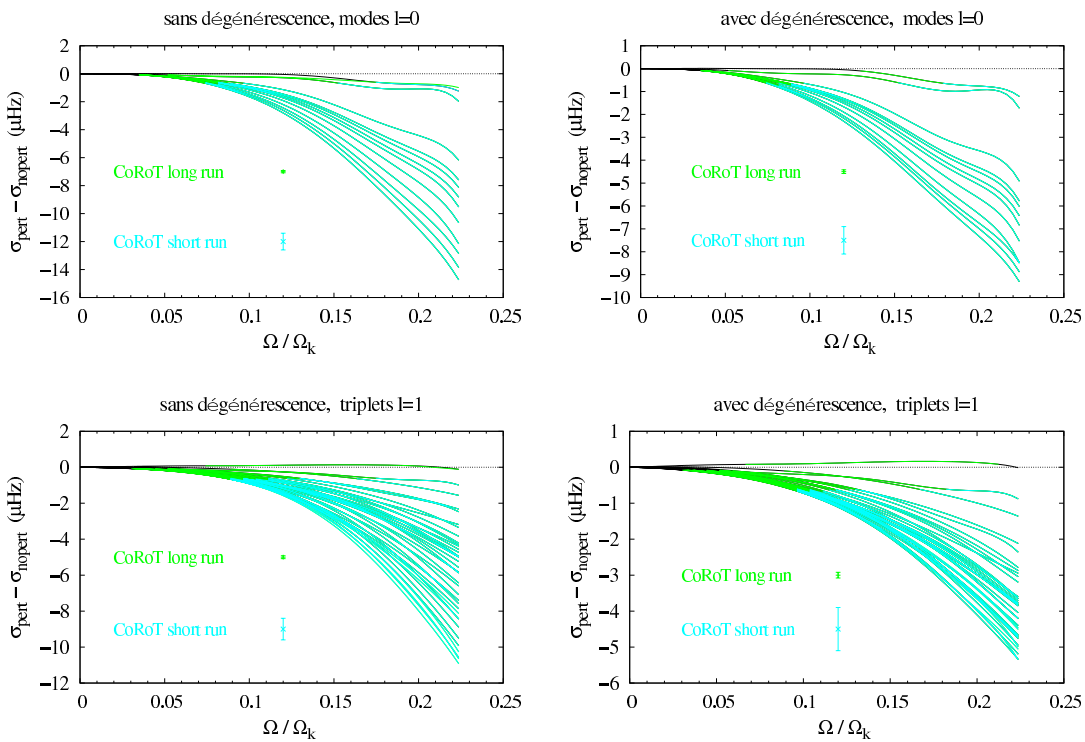


FIGURE 3.3: Validity domains of the second order perturbative approach with (on the right) and without (on the left) near degeneracy corrections for acoustic modes with  $\ell = 0$  (top) and for triplets  $\ell = 1$ ,  $m = -1, 0, +1$  (bottom). Radial orders range from  $n = 1$  to 12.

La figure 3.3 montre les différences de fréquences calculées par les deux méthodes comparées avec les barres d'erreurs CoRoT pour une observation longue (*long run*) ou courte (*short run*). Les modes calculés sont caractérisés par des ordres radiaux allant de  $n = 1$  à  $n = 12$ , pour des degrés angulaires nuls (deux graphiques du haut) et égaux à 1 pour ceux du bas. Dans chacun de ces graphiques, les écarts de fréquences augmentent avec l'ordre radial du mode. Les deux graphiques de droite ont été réalisés pour une méthode perturbative d'ordre 2 incluant les corrections de la dégénérescence proche, tandis que pour les calculs illustrés par les deux graphes de gauche les corrections ont

été exclues.

En comparant les graphiques représentant les différences de fréquences sans les corrections de dégénérescence avec ceux les incluant, on remarque que la correction permet de réduire drastiquement les différences entre les fréquences issues du calcul complet et celles issues du calcul perturbatif. En effet, pour les modes  $\ell = 0$  (deux graphiques du haut de la Fig. 3.3), la correction permet de passer d'une erreur maximale pour l'ensemble des modes de  $16 \mu\text{Hz}$  à une erreur de  $10 \mu\text{Hz}$ . Pour les modes  $\ell = 1$  (deux graphiques du bas de la Fig. 3.3), c'est encore plus spectaculaire. La correction de la dégénérescence permet de réduire l'erreur sur les fréquences d'un facteur 2 (de  $10 \mu\text{Hz}$  à  $5 \mu\text{Hz}$ ).

Toujours d'après cette Figure 3.3, on peut établir qu'en l'absence de correction de la dégénérescence, la méthode perturbative d'ordre 2 n'est plus valide au delà de  $5\%\Omega_k$  si l'on accepte une erreur de l'ordre des barres d'erreur CoRoT pour un *long run*, la validité est étendue à  $10\%\Omega_k$  pour un *short run*. Ces domaines de validité sont équivalents pour les modes  $\ell = 0$  et  $\ell = 1$ . Ces valeurs semblent confirmer les domaines établis dans Burke et al. (2011). Si l'on inclut la correction sur la dégénérescence accidentelle, le domaine de validité correspondant aux barres d'erreur pour un *long run* n'est pas amélioré, tandis pour les barres d'erreur correspondant au *short run*, le domaine de validité semble s'étendre à environ  $12\%\Omega_k$ .

On peut néanmoins questionner la pertinence de cette méthode d'évaluation des domaines de validité par comparaison avec les barres d'erreur observationnelles. En effet, une autre manière d'évaluer la validité de l'approche perturbative serait d'étudier l'impact des approximations sur une mesure de la rotation à partir du splitting rotationnel. Ceci fera l'objet de futurs travaux de comparaison, utilisant par ailleurs le code d'oscillation non perturbatif bidimensionnel ACOR qui est présenté dans le second volet de cette thèse.

### 3.4 La rotation modérée

Lorsque la rotation est modérée, dans le développement perturbatif des fréquences en puissance de la vitesse angulaire de rotation, l'ordre 3 peut s'avérer important, en particulier pour les calculs de splittings, qui impliquent des différences de fréquences. On s'intéresse ici à la méthode perturbative d'ordre cubique, telle qu'elle a été développée par Soufi et al. (1998). Remarquons qu'avec les méthodes classiques de théories perturbatives, comme développées à la section précédente, il est à chaque fois nécessaire de calculer les fonctions propres à l'ordre  $n$  pour dériver les fréquences propres à l'ordre  $n+1$ . Soufi et al. (1998) ont développé une méthode astucieuse, selon laquelle il est possible de construire un système d'ordre « pseudo-zéro » qui contient une partie de la contribution de la force de Coriolis d'ordre 1. De cette manière, il n'est pas nécessaire de calculer les fonctions propres du système à l'ordre 2 pour trouver les corrections d'ordre 3 sur les fréquences propres. En ce qui concerne la prise en compte de la déformation centrifuge, on procède de la même manière que pour la méthode perturbative d'ordre 2 : la partie à symétrie sphérique de la déformation centrifuge est incluse dans le système à travers la gravité effective, et on calcule la partie non sphérique en résolvant l'équilibre hydrostatique et l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel. On peut alors dériver les quantités  $\tilde{p}_0$ ,  $\tilde{\rho}_0$ ,  $\tilde{\Phi}_0$ , ainsi que  $p_{22}$ ,  $\rho_{22}$  et  $\Phi_{22}$ .

L'équation de mouvement (3.1) est alors mise sous la forme :

$$\mathbb{L} \vec{\xi} = (\mathcal{Z} + \epsilon \mathcal{F}) \vec{\xi} + \epsilon^2 (\mathcal{D} + \epsilon \mathcal{C}) \vec{\xi} + O(\epsilon^4) = 0 \quad (3.37)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathcal{L}_0 - \tilde{\rho}_0 \tilde{\sigma}^2 \\ \mathcal{F} &= 2 \tilde{\rho}_0 \Omega \tilde{\sigma} \mathcal{K}_m \\ \mathcal{D} &= \mathcal{L}_2 - \rho_{22} \tilde{\sigma}^2 \\ \mathcal{C} &= 2 \rho_{22} \Omega \tilde{\sigma} \mathcal{K}_m \end{aligned} \quad (3.38)$$

On rappelle l'usage de  $\tilde{\sigma} = \sigma + m\Omega$ .  $\mathcal{L}_0$ ,  $\mathcal{L}_2$ , et  $\mathcal{K}_m$  ayant la même signification qu'à la section précédente.  $\mathcal{Z}$  représente l'opérateur linéaire d'oscillation qui subsiste sans rotation (pour  $\tilde{\sigma} = \sigma$ ), l'opérateur  $\mathcal{F}$  correspond à l'effet de la force de Coriolis, les deux derniers opérateurs sont dus au fait que les oscillations ne se font pas autour d'un état d'équilibre sphérique, mais autour d'un état sphéroïdal aplati, ce qui provoque une déformation de la structure (qui génère  $\mathcal{D}$ ), ainsi qu'une modification de l'accélération de Coriolis ( $\mathcal{C}$ ). On suppose un développement des fréquences propres et fonctions propres comme suit : on rappelle que  $\epsilon = \Omega R^{3/2} / (GM)^{1/2}$ ,

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 + \epsilon^2 \vec{\xi}_c + O(\epsilon^4) \quad \sigma = \sigma_0 + \epsilon^2 \sigma_c + O(\epsilon^4) \quad (3.39)$$

Dans lesquels l'ordre 1 (en  $\epsilon$ ) et l'ordre 1 (en  $\epsilon^3$ ) sont respectivement contenus implicitement dans l'ordre « pseudo-zéro », et « pseudo-deux ». Ainsi, les opérateurs  $\mathcal{Z}$ ,  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  peuvent également se décomposer en contributions « pseudo-zéro », et « pseudo-deux ». En ne conservant que les contributions d'ordre inférieur à 4, l'équation d'oscillation devient alors :

$$\mathbb{L} \vec{\xi} = \mathbb{L}_0 \vec{\xi}_0 + \epsilon^2 [-2\sigma_c \mathcal{Z}_I + (\mathcal{D}_0 + \epsilon \mathcal{C}_0)] \vec{\xi}_0 + \epsilon^2 \mathbb{L}_0 \vec{\xi}_c + O(\epsilon^4) = 0 \quad (3.40)$$

Où les indices 0 pour les opérateurs correspondent aux opérateurs exprimés dans (3.38) pour lesquels  $\tilde{\sigma} = \sigma_0$ . On définit également  $\mathcal{Z}_0 + \mathcal{F}_0 = \mathbb{L}_0$ , et  $\mathcal{Z}_c + \mathcal{F}_c = -2\sigma_c \mathcal{Z}_I$ .

### 3.4.1 Résolution du problème à l'ordre « pseudo-zéro »

Nous supposons, pour les fonctions propres du système à l'ordre « pseudo-zéro », un développement du même type que celui effectué dans (3.6) en une partie poloïdale, et une partie toroïdale :

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_0 &= \vec{\xi}_{p0} + \epsilon \vec{\xi}_{t1} \quad (3.41) \\ \text{où } \vec{\xi}_{p0} &= \sum_{\ell \geq |m|}^{+\infty} \left( r y_\ell(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r + r z_\ell(r) \vec{\nabla}_h Y_\ell^m \right) \\ \vec{\xi}_{t1} &= \sum_{\ell \geq |m|}^{+\infty} \frac{\bar{\Omega}}{\bar{\sigma}} r \tau_\ell(r) \vec{e}_r \times \vec{\nabla}_h Y_\ell^m \end{aligned}$$



On considère comme fonctions propres d'ordre « pseudo-zéro » les solutions du système d'équations :

$$\begin{aligned} \left[ L_0 \vec{\xi}_{p0} \right]_{\text{pol}} &= \vec{0} \\ \left[ L_0 \vec{\xi}_0 + \epsilon^2 \mathcal{D}_0 \vec{\xi}_{p0} \right]_{\text{tor}} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (3.42)$$

Le reste des contributions sera alors considéré comme une perturbation de ce système. Les indices « pol » et « tor » correspondent à prendre la composante poloïdale ou toroïdale de l'expression entre crochets. On obtient alors des fonctions propres qui se décomposent sur les harmoniques sphériques comme :

$$\begin{aligned} \vec{\xi}_{p0} &= r \left( y_\ell(r) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \vec{e}_r + z_\ell(r) \vec{\nabla}_h Y_\ell^m \right) \\ \vec{\xi}_{t1} &= r \frac{\bar{\Omega}}{\bar{\sigma}_0} \left( \tau_{\ell+1}(r) \vec{e}_r \times \vec{\nabla}_h Y_{\ell+1}^m + \tilde{\tau}_{\ell-1}(r) \vec{e}_r \times \vec{\nabla}_h Y_{\ell-1}^m \right) \end{aligned} \quad (3.43)$$

Où  $y$ ,  $z$ ,  $\tau$  et  $\tilde{\tau}$  sont obtenus en résolvant le système (3.42). la relation d'orthogonalité des fonctions propres n'implique que leur partie poloïdale :

$$\int \vec{\xi}_{p0,i} [\tilde{\rho}_0(\tilde{\sigma}_{0,i} + \tilde{\sigma}_{0,k}) - 2\Omega \mathcal{K}_m] \vec{\xi}_{p0,k} d^3r = 2\sigma_{0,k}^{(0)} I_{\delta_{i,k}} \quad (3.44)$$

Ici,  $I$  est le moment oscillatoire poloïdal :  $I_k = \int \tilde{\rho}_0 \tilde{\xi}_{p0,i}^* \tilde{\xi}_{p0,k} d^3r$ . Par ailleurs (3.44) permet de dériver  $\sigma_{0,k}^{(0)}$  lorsque  $i = k$ , qui peut être assimilée comme étant la véritable contribution d'ordre zéro à la fréquence propre d'ordre « pseudo-zéro ». La résolution du système (3.42) permet également de trouver la fréquence propre totale à l'ordre « pseudo-zéro », que l'on peut réécrire :

$$\sigma_{0,k} = \sigma_{0,k}^{(0)} + m\bar{\Omega} (1 - C_{n,\ell} - J_{n,\ell}) + O(\epsilon^2) \quad (3.45)$$

Où  $\sigma_{0,k}^{(0)}$  est la fréquence propre en l'absence de rotation.

### 3.4.2 Correction perturbative des fréquences propres

Le choix du système d'ordre « pseudo-zéro » à résoudre ne permet pas de considérer que l'on a  $L_0 \vec{\xi}_0 = 0$ . C'est-à-dire que subsiste pour les fonctions propres trouvées précédemment un terme que l'on notera  $\mathcal{T}_0$ , tel que :  $L_0 \vec{\xi}_0 = \epsilon^2 \mathcal{T}_0 \vec{\xi}_0$ . L'équation d'oscillation (3.40) s'écrit alors :

$$L \vec{\xi} = \epsilon^2 \left[ L_0 \vec{\xi}_c - 2\sigma_c \mathcal{Z}_1 \vec{\xi}_0 + (\mathcal{T}_0 + \mathcal{D}_0 + \epsilon \mathcal{C}_0) \vec{\xi}_0 \right] + O(\epsilon^4) = 0 \quad (3.46)$$

Par ailleurs, on suppose que les corrections aux fonctions propres peuvent se décomposer sur la base des fonctions propres de l'ordre « pseudo-zéro ». En projetant (3.46) sur cette base, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2I} \int \vec{\xi}_0 L_0 \vec{\xi}_c d^3r - \sigma_c \sigma_0^{(0)} + \frac{H}{2I} + O(\epsilon^2) &= 0 \\ \text{avec } H &= \int \vec{\xi}_0 [\mathcal{T}_0 + \mathcal{D}_0 + \epsilon \mathcal{C}_0] \vec{\xi}_0 d^3r \end{aligned} \quad (3.47)$$

Le premier terme de (3.47) peut être considéré comme étant de l'ordre de  $\epsilon^2$ . En effet,  $L_0$  est hermitique, et  $L_0 \tilde{\xi}_0 = \epsilon^2 \mathcal{T}_0 \tilde{\xi}_0$ . On obtient alors la correction sur la fréquence :

$$\sigma_c = \frac{H}{2I\sigma_0^{(0)}} = \sigma^T + \sigma^C + \sigma^D + O(\epsilon^4) \quad (3.48)$$

Ainsi, au total, les fréquences d'oscillation peuvent se noter :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_0 + \epsilon^2 \sigma_c, \\ \text{où } \sigma_0 &= \sigma_0^{(0)} + \sigma_1 + \sigma_2^{eigen} + \sigma_3^{eigen}, \\ \text{et } \sigma_c &= \sigma_2^D + \sigma_2^T + \sigma_3^D + \sigma_3^T + \sigma_3^C. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Où  $\sigma_2^{eigen}$  et  $\sigma_3^{eigen}$  sont inclus implicitement dans le terme  $O(\epsilon^2)$  de (3.45), tandis que  $\sigma^{2T}$  et  $\sigma^{3T}$ , sont les effets d'ordre 2 et 3 de l'accélération de Coriolis,  $\sigma^{2D}$  et  $\sigma^{3D}$  effets d'ordre 2 et 3 de la distorsion centrifuge, et  $\sigma^{3C}$  couplage des deux effets, d'ordre 3.

### 3.5 Le splitting rotationnel : écarts à la linéarité

Dans la littérature, le splitting rotationnel a connu différentes définitions. On peut le trouver par exemple sous la forme  $S_m = \sigma_m - \sigma_0/m$ , ou encore  $S_m = \sigma_m - \sigma_{m-1}$ . Tout au long de ce travail de thèse, nous avons choisi de définir le splitting associé au multiplet  $\{\sigma_{n,\ell}\}$  par :

$$S_m = \frac{\sigma_{n,\ell,m} - \sigma_{n,\ell,-m}}{2m} \quad (3.50)$$

Toutes ces définitions ne sont équivalentes qu'au premier ordre en terme de vitesse angulaire de rotation. Aux ordres supérieurs, les deux premières définitions sont fortement « contaminées » par l'effet de la distorsion centrifuge, tandis que la dernière ne contient au second ordre que l'effet de la dégénérescence accidentelle.

Comme évoqué précédemment, le splitting rotationnel peut être interprété comme la fréquence de rotation moyennée sur les couches de l'étoile, sondées par les modes d'oscillation observés (couches proches de la surface pour les oscillations acoustiques, ou des couches plus profondes, proche de l'émergence du cœur convectif ou encore de la base de la zone convective pour les modes de gravité).

CoRoT et Kepler ont d'ores et déjà permis la mesure de splittings rotationnels moyens pour des étoiles telles que HD 49933 (Benomar et al. 2009) ou HD 181420 (Barban et al. 2009), en ce qui concerne CoRoT. Pour ces pulsateurs de type solaire, l'analyse des spectres observationnels a permis de mettre en évidence une différence entre la valeur de la rotation extraite de l'outil sismique qu'est le splitting rotationnel, et la signature basse fréquence de la rotation dans le spectre de Fourier.

Ce pic à basse fréquence dans le spectre de Fourier est dû à de petites variations de magnitude dans la courbe de lumière, causées par le passage de taches stellaires sur la surface de l'étoile (voir pour la modélisation des taches Collier Cameron 2002; Mosser et al. 2009, en ce qui concerne celle des taches des deux cibles CoRoT citées). Étant situées à une latitude donnée de la surface stellaire, ces taches, à travers leur signature dans le spectre de Fourier ne nous donnent accès qu'à une valeur locale de la rotation de surface.

Un tel écart entre les deux indicateurs de la rotation (sismique avec le splitting, et de surface avec la signature de la période de rotation) peut également être dû au fait que le splitting rotationnel ne peut être considéré comme linéaire, c'est-à-dire que des termes d'ordres supérieurs doivent être pris en compte lorsque l'on extrait la fréquence de rotation à partir du splitting observé.

Ainsi, afin de s'assurer que l'écart entre les deux indicateurs peut apporter une contrainte sur la rotation différentielle de surface (en latitude), il est nécessaire d'invalider l'hypothèse selon laquelle cet écart serait dû à des termes négligés dans la modélisation du splitting rotationnel.

Dans l'article qui suit, nous effectuons cette étude d'une part pour une étoile massive de type  $\beta$ Cephei. Nous montrons que pour ce type de rotateurs modérés à rapides qui oscillent dans des modes acoustiques et de gravité proche du fondamental, les contributions au splitting d'une rotation différentielle en latitude, ou celle de la dégénérescence proche (qui intervient à l'ordre 2 dans le splitting) sont du même ordre. Néanmoins, lorsqu'il est possible de détecter deux splittings individuels correspondant à deux modes de natures différentes (mixte et pur g par exemple), il est possible de distinguer les deux effets. Une méthode est alors proposée. D'autre part, nous avons étudié les contributions de la rotation différentielle en latitude et celle d'ordre 2 et 3 au splitting pour une étoile de type solaire : HD 181420. Pour cette étoile, pour laquelle on s'attend à observer des taches liées à l'activité magnétique, aux vitesses de rotation en jeu, la contribution de la rotation différentielle en latitude est nettement dominante, et l'on montre que le splitting rotationnel peut apporter une contrainte sur le gradient de rotation de surface en supplément de celles apportées par la spectro-polarimétrie par exemple (Donati et al. 2010).

**Article :** Rotational splitting for fast rotators : Deviation from linear dependence with rotation velocity, Ouazzani R. M., Goupil M. J., Dziembowski W. A. 2011, discussions en cours avec co-auteurs à soumettre à *Astronomy and Astrophysics* avant mi-avril.

## Rotational splitting for fast rotators: Deviation from linear dependence with rotation velocity

R-M. Ouazzani<sup>1</sup> and M-J. Goupil<sup>1</sup>

LESIA, UMR8109, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, Observatoire de Paris, 92195 Meudon Cedex, France  
e-mail: rhiita-maria.ouazzani@obspm.fr

Received April 1, 2010; accepted May 16, 2010

### ABSTRACT

*Context.* With the unprecedented photometric quality reached by CoRoT and Kepler space missions, we start to infer information on internal rotation rates from seismic data.

*Aims.* We wish to figure out whether the differences between the seismic rotation period as determined by a mean rotational splitting, and the rotation period measured from the low frequency peak in the Fourier spectrum - observed for some of the CoRoT targets- can provide constraints on surface differential rotation.

*Methods.* For fast rotators, one must take into account departure from linear splitting (in terms of the rotation rate  $\Omega$ ) in order to derive properly the rotation period. Ignoring these deviations would result in an incorrect rotation period that would differ from the period derived from the low frequency in a Fourier spectrum. The difference could then erroneously be attributed to differential rotation in latitude. In order to be able to detect differential rotation in latitude for fast rotators using seismic measurements, one must then first discredit contributions to the splitting of higher orders in the rotation rate. We then studied the effect of cubic order and of latitudinal differential rotation on the splittings for two different types of pulsator.

*Results.* For  $\beta$ Cephei stars, the two contributions are of the same magnitude. A method is proposed to disentangle between the two. For Solar like stars, the latitudinal shear has clearly a dominant effect, and we were able to give prescription for the latitudinal shear on the surface of HD 181420 a CoRoT target.

*Conclusions.* Deviation from the linear splitting can be due two both cubic order effects of rotation and to latitudinal differential rotation. The relative influence of the two effects strongly depends on the type of the oscillation modes of the star and its mean rotation rate.

**Key words.** stellar oscillation – stellar rotation – seismology – differential rotation

### 1. Introduction

The CoRoT and Kepler space-borne missions provide uninterrupted observations spanning a long period of time, and the extraction of rotational splittings has become possible -mean values with CoRoT, and possible individual ones with the 5 months long Kepler observations-. That will strongly improve the study of stellar rotation.

Characteristic spacings appear in the power spectrum of the oscillating star light curves such as the rotational splitting, used to determine the rotation rate. CoRoT has made possible the extraction of mean values of the rotational splitting for stars such as HD 181420 (Barban et al., 2009), HD 49933 (Benomar et al., 2009) and V1449 Aql (Belkacem et al., 2009) for instance. The mean rotational splitting extracted from observations can be interpreted as the rotation rate averaged over the star layers probed by the observed oscillation modes -surface layers if we deal with acoustic modes, or deeper layers located at the edge of the convective core if gravity modes are at stake-. On some of the CoRoT spectra analyzed sofar (HD 181420, V1449 Aql), a difference between what is interpreted as the low frequency signature of rotation in the Fourier spectrum, and the rotation rate deduced from the mean rotational splitting is found. The low frequency peak in the Fourier spectrum, due to small magnitude variations in the light curve, is attributed to stellar spots (see for a complete review Collier Cameron, 2002; Mosser et al., 2009, for spot modeling). These spots are located at given latitudes of

the stellar surface, they therefore give access only to the surface rotation at given latitude of the star. This rotation value can then differ from the seismic rotation value resulting from an averaged over the layers where the modes propagate. On the other hand, for a uniform rotation, the difference can also be due to the rotation derived from seismic measurements. Indeed even ignoring the effect of magnetic field on the splittings, if the rotation is rapid enough, the rotation value derived from the usual linear relation between the rotational splitting and the rotation rate is no longer valid and then provides an erroneous rotation rate. In that case, the relationship between the rotational splitting and the angular rotation velocity has been quantified thanks to perturbative methods. To the lowest approximation level- valid for slow rotation-, the stellar structure is that of a nonrotating star (spherically symmetric) and the rotational splitting is linearly related to the rotation angular velocity,  $\Omega$  (Ledoux (1945)) due to Coriolis acceleration. Gough & Thompson (1990) and Dziembowski & Goode (1992) derived the oscillation frequencies including second order ( $O(\Omega^2)$ ) corrections arising mostly due to distortion of the structure by the centrifugal acceleration. The oscillation frequencies are then no longer linear with respect of  $\Omega$  but the rotational splitting computed as the differences between sectoral modes remains linear in  $\Omega$  and this is also true when considering latitudinally dependent rotation. This remains valid up to some rotation value ((Reese et al., 2006; Ouazzani et al., 2009; Burke et al., 2011)). However for more rapid rotation, accidental de-

R-M. Ouazzani and M-J. Goupil: Rotational splitting for fast rotators:

generacies and higher order frequency corrections must be taken into account (DG92, Soufi et al. 1998) and the rotational splitting no longer varies linearly with the  $\Omega$ . The rotation rate that is then derived must take these corrections into account.

We then address the following issue: can the observed differences between the two indicators (the mean value of the splitting and the low frequency peak in the Fourier spectrum) be explained by differential rotation in latitude? The present work then studies when it is relevant to favour one of these hypotheses rather than the other. In order to derive the proper differential rotation from observed frequency spectra, we must be able first to discredit a third order contribution or near-degeneracy effect on the rotational splitting. We expect that the difference between the two seismic indicators - i.e. the low frequency peak and the rotational splitting - depends on the type of pulsator, and the characteristics of its observed modes. We then consider both solarlike oscillating main sequence stars as well as  $\beta$ Cephei pulsators.

The paper is organised as follows: Sect. 2 gives the basic theoretical framework of this study. In Sect. 3, we focus on the effects of cubic order and near-degeneracy contributions, as well as the effects of a latitudinal shear on the splitting. In Sect. 4, we study the competition between these three effects in a massive rapidly rotating star, and Sect. 5 in a solarlike pulsator with a model that is representative of the CoRoT target HD181420. Section 6 is dedicated to conclusions.

## 2. Basic theoretical framework

In presence of rotation, both the centrifugal and Coriolis accelerations come into play. The centrifugal force affects the structure of the star - through distortion - and the resonant cavity of the modes is modified. The Coriolis force enters the equation of motion and affects the motion of the waves and frequencies of normal modes. As rotation breaks the azimuthal symmetry, it lifts the frequency degeneracy: without rotation, modes given  $(n, \ell, m)$ ,  $m = -\ell, \ell$  are  $2\ell + 1$  degenerated -i.e. they have the same frequency  $\omega_0$ -. With rotation, these  $2\ell + 1$  modes have different frequencies. To first approximation in rotation rate,  $\omega_{\ell, m} = \omega_{\ell, 0} + m\Omega\beta_\ell$ , in the observer frame, where  $\Omega$  is the rotation rate and  $\beta_\ell = 1 - C_\ell$  a coefficient related to the Ledoux constant  $C_\ell$  (Ledoux, 1945). Characteristic spacings appear on the spectrum such as the rotational splitting that we define here as:

$$s_{\ell, m} = \frac{\omega_{\ell, m} - \omega_{\ell, -m}}{2m} \quad (1)$$

that is used to determine the rotation rate. From now on, we drop the subscript  $(n, \ell, m)$  unless there is an ambiguity. We also use  $\sigma = \omega/\Omega_k$  (where  $\Omega_k = \sqrt{GM/R^3}$  is the break-up frequency) instead of  $\omega_{\ell, m}$ .

### 2.1. Equilibrium configuration

Let us consider uniform rotation. If we neglect large scale velocity such as meridional circulation, following Unno et al. (1989) the equilibrium state of a rotating star can be characterized by an axisymmetric velocity field :

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r} = \Omega_0 r \sin \theta \mathbf{e}_\phi \quad (2)$$

where  $\Omega_0$  stands for the angular rotation velocity,  $\theta$  is the colatitude, and  $\mathbf{e}_\phi$  is the basis vector corresponding to constant azimuthal order.

The stationary equation of motion in an inertial frame of reference is:

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \phi = \mathbf{F} \quad (3)$$

with  $P$ ,  $\rho$  and  $\phi$  being the pressure, density and gravitational potential respectively. For a rotating star, the left hand side corresponds to the centrifugal acceleration  $\mathbf{F} = -\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ , which can be written as:

$$\mathbf{F} = F_r(r) [1 - P_2(\cos \theta)] \mathbf{e}_r - F_\theta(r) \frac{dP_2(\cos \theta)}{d\theta} \mathbf{e}_\theta \quad (4)$$

where  $P_2(\cos \theta)$  is the second order Legendre polynomial, and  $F_r(r)$  and  $F_\theta(r)$  only depend on the radius.

The effect of the centrifugal force is then two folds: spherically symmetric perturbation - which mainly perturbs gravity - and non spherically symmetric one which is responsible for oblateness. Then all the equilibrium quantities  $X$ , are expressed following this scheme:

$$X(r, \theta) = \tilde{X}(r) + X_{22}(r)P_2(\cos \theta) \quad (5)$$

Where  $\tilde{X}(r)$  is the spherically symmetric part of the equilibrium quantity  $X$ , whereas  $X_{22}(r)$  is due to the centrifugal distortion. The spherically symmetric part is obtained substituting Eq. (5) in the  $\theta$ -independent part of Eq. (3): (see for exemple Kippenhahn & Weigert, 1994)

$$\frac{d\tilde{p}}{dr} = -\tilde{\rho} g_{\text{eff}}, \quad (6)$$

where  $g_{\text{eff}}$  is the effective gravity:

$$g_{\text{eff}} = \tilde{g} - \frac{2}{3} r \Omega^2,$$

$$\text{and } \tilde{g} = \frac{G M_r}{r^2}$$

The non spherically symmetric part is obtained substituting equation Eq. (5) in the  $\theta$ -dependent part of Eq. (3): (see Dziembowski & Goode, 1992)

$$p_{22} = -\tilde{\rho} r^2 \Omega^2 u_2, \quad (7)$$

$$\rho_{22} = \frac{\tilde{\rho} r \Omega^2}{\tilde{g}} \left( \frac{d \ln \tilde{\rho}}{d \ln r} \right) u_2, \quad (8)$$

$$u_2 = \frac{\phi_{22}}{r^2} \Omega^2 + \frac{1}{3}, \quad (9)$$

where

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\phi_{22}}{dr} \right) - \frac{6}{r^2} \phi_{22} = 4\pi G \rho_{22}. \quad (10)$$

The boundary conditions can be found in Soufi et al. (1998) (hereafter S98).

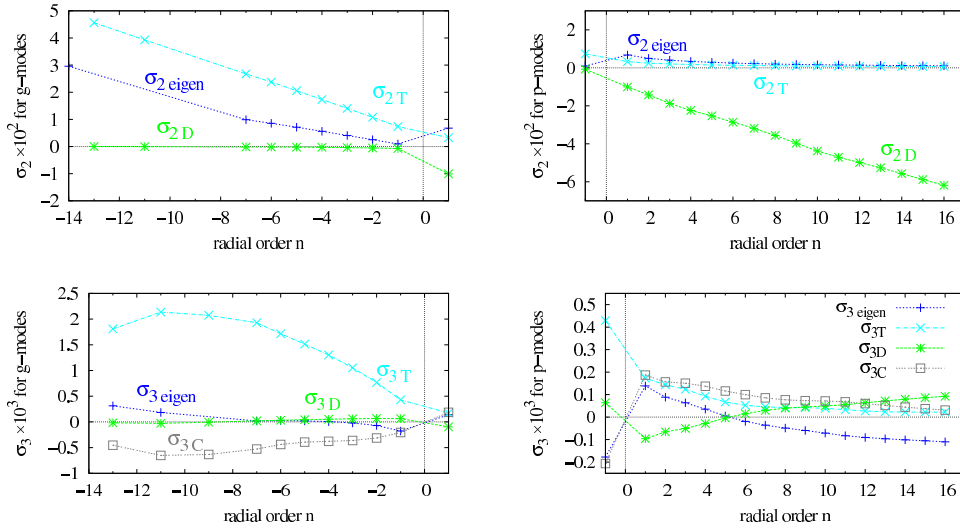
### 2.2. Oscillation frequencies up to cubic order in $\Omega$

Using expansions of the type of Eq. (5) for the oscillation quantities - i.e.  $p' = \tilde{p}' + p'_2$  - the oscillation system is then expanded up to the cubic order. According to S98 (see also Karami et al., 2005), the equation of oscillation then becomes:

$$\mathcal{L}\xi = (A + \epsilon B)\xi + \epsilon^2 (D + \epsilon C)\xi + O(\epsilon^4) = 0 \quad (11)$$

$\epsilon$  being equal to  $\Omega/\Omega_k$ , where  $\Omega_k = \sqrt{GM/R^3}$  is the break-up frequency. The operator  $A$  represents the basic linear oscillation operator here including the spherically symmetric perturbation

R-M. Ouazzani and M-J. Goupil: Rotational splitting for fast rotators:



**Fig. 1.** Contributions of different approximation orders to  $l = 1, m = 0$  mode frequencies:  $\sigma_{2\text{eigen}}$  ( $\sigma_{3\text{eigen}}$ ) for the implicit 2<sup>nd</sup> (3<sup>rd</sup> respectively) order contribution to the eigenfrequency;  $\sigma_{2T}$  and  $\sigma_{3T}$  for 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> order frequency corrections due of Coriolis acceleration;  $\sigma_{2D}$  and  $\sigma_{3D}$  represent 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> order frequency corrections due to the centrifugal distortion;  $\sigma_{3C}$  comes from the coupling of distortion and Coriolis effects. The contributions are plotted as a function of the radial order  $n$  for a ZAMS 8.5  $M_{\odot}$  model in solid rotation of 15%  $\Omega_k$ , i.e. around 95  $\text{km.s}^{-1}$  (stellar parameters in Tab.1). Frequencies are scaled by  $\Omega_k = \sqrt{GM/R^3}$ :  $\sigma = \omega/\Omega_k$ . We recall the use of a negative radial order  $n$  for gravity modes and a positive one for acoustic modes.

du to rotation (through  $g_{\text{eff}}$ ). The operators B, D respectively contain the effect of the Coriolis force and of non-spherically symmetric distortion. The operator C shows that a coupling between the non-spherically symmetric distortion and the Coriolis force exists.

As done in S98, and in Karami et al. (2005), parts of the Coriolis and centrifugal distortion effects are included into the pseudo-zero<sup>th</sup> order eigensystem. This way, we are able to solve the eigenvalue problem up to cubic order without having to solve the successive equations for the eigenfunctions at each order. Solving this eigensystem yields eigenfunctions  $\xi_0$  with eigenfrequencies  $\sigma_0$  which are corrected by  $\sigma_c$  a posteriori, such as:

$$\xi = \xi_0 + \xi_c \quad (12)$$

$$\sigma_m = \sigma_{0,m} + \sigma_{c,m} \quad (13)$$

$$\text{with } \sigma_{c,m} = \sigma_{2m}^T + \sigma_{2m}^D + \sigma_{3m}^T + \sigma_{3m}^D + \sigma_{3m}^C \quad (14)$$

$\sigma_{c,m}$  represent the 2<sup>nd</sup> and 3<sup>rd</sup> order corrections to eigenfrequencies, the exponent T stands for contribution of the Coriolis force, the exponent D for the non spherically symmetric distortion, and C for the coupling of the two.

In this perturbative method, we include a significant part of the second and third order effects into the oscillation frequencies through corrective terms e.g.  $\sigma_{c,m}$  (Eq.14). Still some quadratic and cubic contributions are included in the eigensystem (through the coefficients  $h_1$  and  $\zeta$  for instance, see Eq. (A12) in S98) and therefore contribute to the eigenfrequency  $\sigma_0$ . The solution of the eigenproblem, the pseudo-zero<sup>th</sup> order  $\sigma_0$  can therefore be formally written as:

$$\sigma_{0,m} = \sigma_0^{(0)} + \sigma_{1,m} + \sigma_{2,m}^{\text{eigen}} + \sigma_{3,m}^{\text{eigen}} \quad (15)$$

$\sigma_0^{(0)}$  being the classic zero<sup>th</sup> order frequency, say the frequency computed without taking into account rotation in the oscillation

calculations,  $\sigma_{1,m} = m\Omega\beta/\Omega_k$  stands for the Coriolis contribution to the first order ( $\beta$  is defined Eq. B.5),  $\sigma_{2,m}^{\text{eigen}}$  mostly contain the effect of spherically symmetric distortion due to centrifugal acceleration (through  $g_{\text{eff}}$ ), and  $\sigma_{3,m}^{\text{eigen}}$  remnants of Coriolis contribution.

### 2.3. Relative magnitude of the different contributions

Here we quantify the implicit contributions ( $\sigma_{2,m}^{\text{eigen}}$  and  $\sigma_{3,m}^{\text{eigen}}$  from Eq. 15), and compare them to the corrective terms of the related orders from Eq.14. To be able to extract these implicit contributions from the pseudo-zero<sup>th</sup> order eigenfrequencies, we remind that the zero<sup>th</sup> and second order contributions are expected as even polynomials of  $m$  (combinations of  $m^0$  and  $m^2$  terms), whereas first and third order contributions should be proportional to  $m^1$  and  $m^3$ . Therefore, we obtain  $\sigma_0^{(0)}$  putting  $\Omega = 0$  in the eigensystem,  $\sigma_{2,m}^{\text{eigen}}$  can be found adding  $\sigma_{-m}$  to  $\sigma_m$ :

$$\sigma_{2,m}^{\text{eigen}} = \frac{(\sigma_{0,m} + \sigma_{0,-m})}{2} - \sigma_0^{(0)} \quad (16)$$

and  $\sigma_{3,m}^{\text{eigen}}$  is obtained subtracting  $\sigma_{-m}$  to  $\sigma_m$ , taking  $m\Omega\beta/\Omega_k$  for the first order:

$$\sigma_{3,m}^{\text{eigen}} = \frac{(\sigma_{0,m} - \sigma_{0,-m})}{2} - m\frac{\Omega}{\Omega_k}\beta \quad (17)$$

In this work, stellar models and adiabatic oscillation frequencies are computed with the evolution code CESAM2k (Morel, 1997; Morel & Lebreton, 2008) and the WarM (Warsaw Meudon) oscillation code respectively. The plots presented in Fig.1 have been performed for a 8.5 $M_{\odot}$  ZAMS model of star described in Table 1 rotating at  $\Omega \approx 15\% \Omega_k$  ( $v_{\Omega} = R\Omega = 95 \text{ km.s}^{-1}$ ). This figure shows all the contributions of different

R-M. Ouazzani and M-J. Goupil: Rotational splitting for fast rotators:

**Table 1.** Stellar parameters of the ZAMS model (Sect.2 and 3.)

$M = 8.5 M_{\odot}$	$R = 3.96 R_{\odot}$
$L = 13 \times 10^3 L_{\odot}$	$X_0 = 0.7$
$P_c = 8.8 \times 10^3 \text{ dyn.cm}^{-2}$	$\rho_c = 3.6 \times 10^{-9} \text{ g.cm}^{-3}$
$\sigma_{\text{rot}} = 15\% \Omega_k$	$v_{\text{rot}} = 95 \text{ km.s}^{-1}$

orders to the total frequencies for g-modes ( $g_{14}$  to  $g_1$ ) and p-modes ( $p_1$  to  $p_{16}$ ). What first comes out of Fig.1 is that, as expected, for all the terms, the behavior is significantly different for p-modes than for g-modes.

Concerning g-modes, the second order correction due to Coriolis acceleration dominates over the others, and grows linearly with the radial order (in absolute value) as was already stated in Ballot et al. (2010) for polytropic models. The Coriolis effect remains dominant at the third order, whereas distorsion seems to have no effect. The coupling between Coriolis and distorsion ( $\sigma_{3C}$ ), being negative, reduces the impact of Coriolis force.

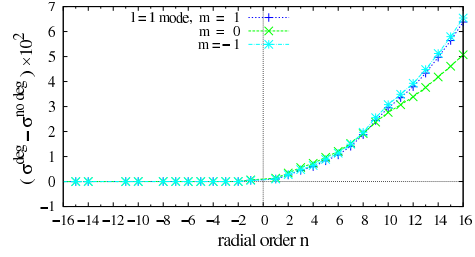
For p-modes, the dominant second order term is  $\sigma_2^D$  due to distorsion- as can be expected for modes which are mostly confined in superficial layers where the centrifugal acceleration is higher-. Once again the dominant term grows linearly with the radial order as stated in Goupil (2009) and Reese et al. (2006) for polytropic models. At the third order,  $\sigma_3^{\text{eigen}}$  and  $\sigma_3^D$  are of the same magnitude but with opposite signs and compensates each other to some extent, then, all the terms have to be taken into account.

To sum up, as expected, for g-modes, the most important contributions are related to the effect of Coriolis acceleration. Whereas for p-modes, we must take into account both implicit eigenfrequency terms, and effects of centrifugal distorsion. On Table C.3 are given the numerical values for the different contributions.

#### 2.4. Near degeneracy

The perturbative approach is based on the formalism of perturbation theory as it has been developed for quantum mechanics. The expansion of eigenfunctions corrections on the basis of pseudo-zeroth order eigenfunctions uses coefficients which are over-estimated when two eigenfrequencies are close enough. This well known methodological error can be corrected using what Dziembowski & Goode (1992) called accidental-degeneracies corrections. For the range of stellar models we are interested in, our numerical applications reveal that near-degeneracy occurs for quite a number of modes. Rotation couples modes with the same  $m$  and for  $\ell$  differing by 2, and normal modes are no longer associated with a single spherical harmonic. In the present work, we studied coupling of two resonant modes (designated by  $k_j$  for  $(n_j, \ell_j, m)$ ,  $j = 1, 2$ ) with the eigenfrequencies verifying  $\sigma_1 > \sigma_2$ .

Near degeneracy is taken into account by assuming that the pseudo-zero<sup>th</sup> order part of the eigenfunction is a mixture of the two resonant modes eigenfunctions. The correction can be expanded on the basis of pseudo-zero<sup>th</sup> eigenfunctions ( $\xi_{0,k}$ , for



**Fig. 2.** Frequency differences between degenerate  $\sigma^{deg}$  and non-degenerate  $\sigma^{no deg}$  solutions scaled by  $\Omega_k = \sqrt{GM/R^3}$  ( $\sigma = \omega/\Omega_k$ ) with respect of radial order  $n$  of the modes for  $\ell = 1$  modes with azimuthal order  $m = -1, 0, 1$ . Computations made for a ZAMS  $8.5 M_{\odot}$  model in uniform rotation of  $15\% \Omega_k$ , i.e. around  $95 \text{ km.s}^{-1}$  (stellar parameters in Tab.1).

$k = 1, N$ ).

$$\xi = \sum_{k_j} \mathcal{A}_{k_j} \xi_{0,k_j} + \xi_c \quad j = 1, 2$$

with

$$\xi_c = \sum_{k \neq k_j} \alpha_k \xi_{0,k} \quad k = 1, N$$

(18)

The eigenfunction correction  $\xi_c$  is composed of all the nonresonant modes. The total eigenfunction is associated with an eigenvalue  $\sigma_m^{deg}$ , and must satisfy the oscillation equation Eq. (11), which give an eigensystem which determinant can be written as:

$$(\sigma_{k_1} - \sigma_m^{deg})(\sigma_{k_2} - \sigma_m^{deg}) - \mathcal{H}_m^2 = 0 \quad (19)$$

where the frequencies  $\sigma_{k_1}$  and  $\sigma_{k_2}$  are given by Eq. (13). The coupling term  $\mathcal{H}_m$  corresponds to integrals containing second and third order contributions with the second order term being mostly due to distorsion and third order one to both distorsion and Coriolis force (see for more details S98). The solutions of Eq. (19), designated by  $\sigma^{deg}$ , provide the desired eigenfrequencies:

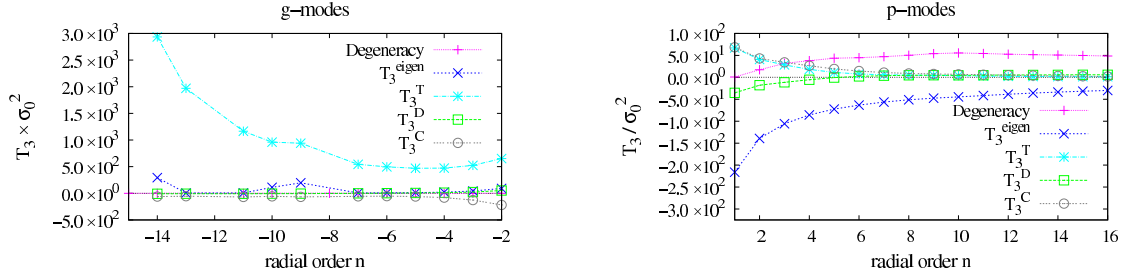
$$\sigma_m^{deg} = \bar{\sigma}_m \pm \sqrt{\Delta_m^2 + \mathcal{H}_m^2} \quad (20)$$

$$\text{where } \bar{\sigma}_m = \frac{\sigma_{k_1} + \sigma_{k_2}}{2} \quad \text{and} \quad \Delta_m = \frac{\sigma_{k_1} - \sigma_{k_2}}{2}$$

where the sign + (resp. -) corresponds to mode  $k_1$  (resp.  $k_2$ ). Note that if  $\mathcal{H}_m = 0$  or  $|\mathcal{H}_m| \ll |\Delta_m|$ , then the two modes  $k_1$  and  $k_2$  are no longer coupled or are only weakly coupled, and their frequencies  $\sigma_{k_1}^{deg}$  and  $\sigma_{k_2}^{deg}$  are given or nearly given by Eq. (13).

After having computed eigenfrequencies and their corrections up to third order as developed in Section 2.2 Eq. (13), we use Eq. (20) in order to derive near-degenerate frequencies for an  $8.5 M_{\odot}$  ZAMS model of star (same as in Sect.2.2, see table 1). In order to compare the magnitude of this near-degeneracy effect with second and third order contributions (illustrated Fig.1), we represent in Fig 2 the frequency differences between the computations with and without near-degeneracy being accounted for.

R-M. Ouazzani and M-J. Goupil: Rotational splitting for fast rotators:



**Fig. 3.** Scaled contributions to the splittings due to implicit third order term in the eigenfrequencies -3 eigen: to Coriolis effect -3T; to distortion -3D; to the coupling of the two -3C; to near-degeneracy, **Left:** multiplied by the central mode frequency square for  $\ell = 1$  g-modes, **Right:** divided by the central mode frequency square for  $\ell = 1$  p-modes. Computations made for a ZAMS model of star of  $8.5 M_{\odot}$  in solid rotation of  $15\% \Omega_k$ , i.e. around  $95 \text{ km.s}^{-1}$  (stellar parameters in Tab.1).

What first comes out of Figure 2 is that near-degeneracy affects mostly p-modes ( $n > 0$ ). This is not surprising as they are more sensitive to outer regions more affected by distortion which effects dominate in coupling coefficient  $\mathcal{H}$ . Moreover, this correction is found of same magnitude as the other second order corrections (see Fig.1). It has the opposite sign from the distortion contribution for p-modes, therefore, it reduces the over-estimated effect of distortion, and the resulting total oscillation frequency is thus closer to the real one (as shown in Suárez et al., 2010, near-degeneracy corrections extend the validity domain of such perturbative methods).

Finally, we notice that the  $\pm 1$  components of the  $\ell = 1$  triplet are modified by roughly the same quantity which announces that the rotational splitting must not be strongly affected by near-degeneracy (see Sect. 3.2).

### 3. Departure from linear splitting

The rotational splitting can be defined as :  $S_m = (\sigma_m - \sigma_0)/m$ . One also uses  $S_m = \sigma_m - \sigma_{m-1}$ . In this work, we use a scaled expression of the rotational splitting (Eq.1):

$$S_m = \frac{\sigma_m - \sigma_{-m}}{2m} \quad (21)$$

These various definitions are equivalent only at first perturbation order in the rotation rate  $\Omega$  and equal to the linear splitting:

$$S_m = \int_0^R \int_0^\pi K_m(r, \theta) \Omega(r, \theta) d\theta dr \quad (22)$$

where the analytical expression for the kernels  $K_m$  is given in Goupil (2010) for instance. At higher orders in terms of  $\Omega$ , the two first definitions are contaminated by the effect of asphericity, which introduces an antisymmetric component in the frequency as a function of  $m$ . We choose to remove this second order contribution using the splitting expressed in Eq.21, which from now on will be referred to as splitting:

#### 3.1. Cubic order effect on the splitting

Assuming a uniform rotation  $\Omega = \Omega_0$ , the splitting including frequency correction due to cubic order effects is given by:

$$S_m^{\text{cubic}} = \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \beta + \frac{\Omega_0}{\sigma_0} \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \right)^2 T_{3,m} \quad (23)$$

$$T_{3,m} = T_{3,m}^{\text{eigen}} + T_{3,m}^T + T_{3,m}^D + T_{3,m}^C \quad (24)$$

where  $\sigma_0 = \omega_0/\Omega_k$  is the normalized frequency of the corresponding axisymmetric mode,  $\Omega_0$  is the uniform rotation angular velocity, and  $\beta$  is the integral of the kernel  $K_m$  over the star (see Appendix B, Eq. B.5).

$T_{3,m}$  contains the implicit third order contribution as well as effects due to the Coriolis acceleration, the distortion, and the coupling of the two. From now on, we define the departure from linear splitting as follows:

$$\delta S_m^{\text{cubic}} \equiv S_m^{\text{cubic}} - \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \right) \beta = \frac{\Omega_0}{\sigma_0} \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \right)^2 T_{3,m} \quad (25)$$

#### 3.2. Near degeneracy correction

According to the formalism explained in Section 2.4, if we consider the coupling of  $\ell = 1$  and  $\ell = 3$  modes, let the degenerate frequency of  $\ell = 1$  modes be:

$$\begin{aligned} \sigma_{\ell=1,m}^{\text{deg}} &= \frac{\sigma_{\ell=1,m} + \sigma_{\ell=3,m}}{2} + \sqrt{\Delta_m^2 + \mathcal{H}_m^2} \\ &= \sigma_{\ell=1,m} - \Delta_m + \sqrt{\Delta_m^2 + \mathcal{H}_m^2} \end{aligned} \quad (26)$$

where  $\sigma_{\ell=1,m}$  and  $\sigma_{\ell=3,m}$  are non degenerate frequencies given by Eq.13. Then the splitting accounting for near-degeneracy is given by:

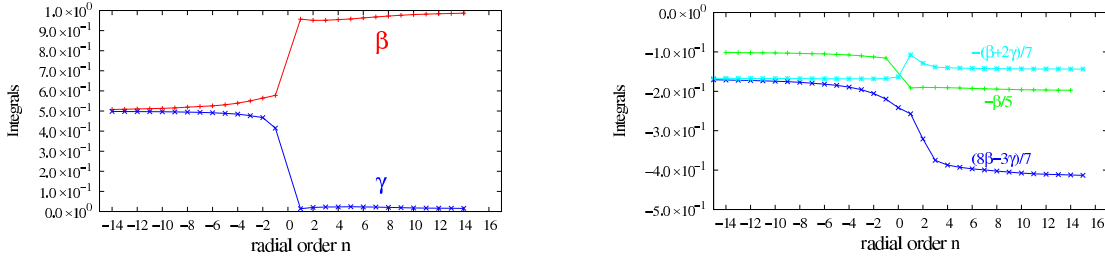
$$\begin{aligned} S_{\ell=1,m=1}^{\text{deg}} &= S_{\ell=1,m=1}^{\text{ND}} - \frac{1}{2}(\Delta_1 - \Delta_{-1}) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\sqrt{\Delta_1^2 + \mathcal{H}_1^2} - \sqrt{\Delta_{-1}^2 + \mathcal{H}_{-1}^2}) \end{aligned} \quad (27)$$

where

$$S_{\ell=1,m=1}^{\text{ND}} = \frac{\sigma_{1,+1} - \sigma_{1,-1}}{2} \quad (28)$$



R-M. Ouazzani and M-J. Goupil: Rotational splitting for fast rotators:



**Fig. 4.** Behavior of **Left:** the scaled integrals  $\beta$  and  $\gamma$  (Eq. 33). **Right:** the scaled contributions to the splitting, with the radial order  $n$  (Eq. 38 to 40). Computations made for a ZAMS model of  $8.5 M_{\odot}$  in uniform rotation of  $15\% \Omega_k$ , i.e. around  $95 \text{ km.s}^{-1}$  (stellar parameters in Tab.1).

with  $ND$  standing for non-degenerate. The contribution of near-degeneracy to the splitting then is given by  $S_{\ell=1, m=\pm 1}^{\text{deg}} - S_{\ell=1, m=\pm 1}^{\text{ND}}$ .

It is worth recalling that neglecting all cubic order contributions in Eq.13, 14 and 20 results in  $\Delta_1 = \Delta_{-1}$  and  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_{-1}$ . In that particular case, degeneracy does not contribute to the rotational splitting, the rotational splitting is linear in  $\Omega$  up to second order and satisfies :

$$S_m = \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \beta \quad (29)$$

### 3.2.1. Sensitivity to the nature of eigenmode

Fig.3 displays the near degenerate contributions to the splitting for p and g modes together with the cubic ones for a ZAMS model of star (Tab.1). The values of these different contributions are given mode by mode in Table D.2.

In order to emphasize possible asymptotic behavior, the contributions have been either divided for g-modes or multiplied for p-modes by  $\sigma_0^2$ . In Fig.3 (left), for g-modes, the Coriolis correction  $T_3^g$  dominates (is around  $10^2$  times the other contributions) and decreases with the radial order to a roughly constant value for low  $|n|$ . The scale is too large to see the behavior of  $T_3^{\text{eigen}}$ ,  $T_3^D$ ,  $T_3^C$  and the near degeneracy contribution to the splitting from this figure, but we refer to Table D.1 where it is shown that there is no asymptotic behavior for these four contributions. We note again that near-degeneracy has no effect on g-modes splittings. Near-degeneracy is fully negligible for all g -modes except for the  $n = -1$  mode that actually is a mixed mode. The g-mode spectrum is much denser than the p-mode one but as shown in Fig. D.2 in Appendix D, the coupling term  $H_m$  is even much smaller than  $\Delta_m$ . This is due to the fact that distortion effects are small for g-modes and therefore the overall (second order and cubic order) contribution to  $H_m$  remains small.

In Fig. 3 (right), the implicit cubic order and the near degenerate contributions dominate for p-modes but with opposite signs and therefore roughly compensate each other. Hence again as for pulsation frequencies, the near-degeneracy correction tends to reduce over-estimated contributions for rotational splittings. The contributions dominated by centrifugal distortion show a  $\sigma_0^2$  behavior, particularly the near-degeneracy one. In Appendix A, it is shown that near-degeneracy contributes to the rotational splitting only if third order effects are taken into account (see Eq.A.6). However it is also shown that second order effects ( $\mathcal{H}_2$ )- dominated by distortion ( $\mathcal{H}_2$ ) for p modes- are involved. This ex-

plains that the near degeneracy frequency variation follows a  $\sigma_0^2$  behavior for p-modes.

### 3.3. Effect of latitudinal shear on the splitting

#### 3.3.1. A first order contribution

Hansen et al. (1977) derived the expression for the rotational splitting of adiabatic nonradial oscillations for slow differential (steady, axially symmetric) rotation  $\Omega(r, \theta)$  and applied it to numerical models of white dwarfs and of massive main sequence stars assuming a cylindrically symmetric rotation law. In the solar case, the effects of latitudinal differential rotation on theoretical frequencies were investigated by Gough & Thompson (1990), Dziembowski & Goode (1991) and Dziembowski & Goode (1992) who also considered the case of  $\delta$  Scuti stars.

In order to be able to compute the splittings from Eq. (22), one must specify a rotation law. It is convenient to assume a rotation of the type:

$$\Omega(r, \theta) = \sum_{s=0}^{S_{\text{max}}} \Omega_{2s}(r) (\cos \theta)^{2s} \quad (30)$$

where  $\theta$  is the colatitude. The surface rotation at the equator is  $\Omega(r=R, \theta=\pi/2) = \Omega_0(r=R)$ .

Note that in the solar case,  $\Omega_2, \Omega_4$  are negative and the equator rotates faster than the poles (Dziembowski & Goode, 1991).

Inserting Eq. (30) into Eq. (22) yields the following expression for the splitting:

$$S_m = \frac{1}{\Omega_k} \int_0^R \Omega_0(r) K(r) dr + \frac{1}{\Omega_k} \sum_{s=0}^{S_{\text{max}}} m^{2s} H_{m,s}(\Omega) \quad (31)$$

The expression for  $H_{m,s}(\Omega)$  can be found in Appendix B.

In the present work, we consider latitudinally differential rotation only. In that case, the splitting becomes: (Goupil, 2010)

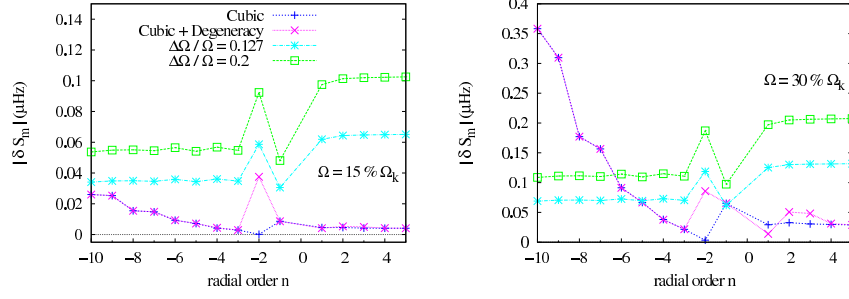
$$S_m = \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \beta + \frac{1}{\Omega_k} \sum_{s=0}^{S_{\text{max}}} m^{2s} (R_s(\Omega) \beta + Q_s(\Omega) \gamma) \quad (32)$$

Expressions for  $R_s$  and  $Q_s$  can be found in Appendix B.  $\beta$  and  $\gamma$  depend on the radial and horizontal components of the mode:

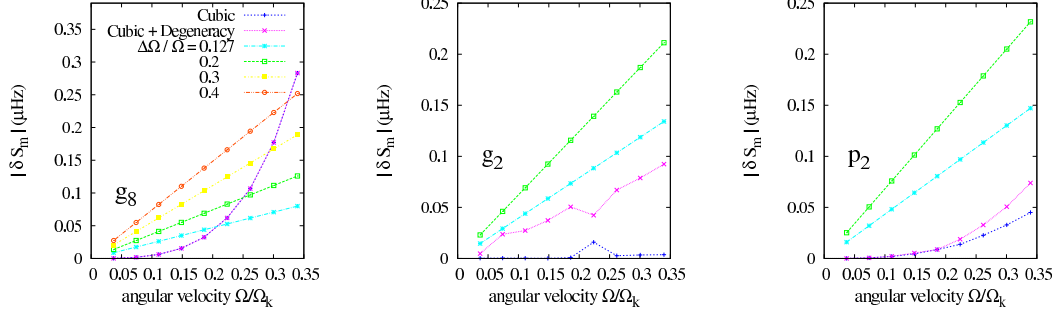
$$\beta = \frac{1}{I} \int_0^R [\xi_r^2 - 2\xi_r \xi_h + (\Lambda - 1)\xi_h^2] \rho_0 r^2 dr \quad (33)$$

$$\gamma = -\frac{1}{I} \int_0^R \xi_h^2 \rho_0 r^2 dr \quad (34)$$

R-M. Ouazzani and M-J. Goupil: Rotational splitting for fast rotators:



**Fig. 5.** Departure from the linear splitting for  $(\ell = 1, m = 1)$  triplets, **Left:** for  $\Omega = 15\% \Omega_k$ , **Right:** for  $\Omega = 30\% \Omega_k$ , due to cubic order effects -in dark blue- and to latitudinal differential rotation of 12.7% -in light blue-, 20% -in green- with respect to the radial order. Computed for the model of  $\beta$ Cephei of  $10 M_\odot$  in uniform rotation of  $30\% \Omega_k$ , i.e.  $160 \text{ km.s}^{-1}$  described Sect. 4.1 (Tab.2).



**Fig. 6.** Departure from the linear splitting for  $(\ell = 1, m = 1)$  triplets due to cubic order effects -in dark blue- and to latitudinal differential rotation of 12.7% -in light blue-, 20% -in green-, 30% -in yellow-, and 40% -in orange-, with respect to the rotation rate scaled by the break up frequency  $\Omega_k$  for a  $g_8$  mode, a  $g_2$  mode and a  $p_2$  mode. Computed for the model of  $\beta$ Cephei of  $10 M_\odot$  in uniform rotation described Sect. 4.1 (Tab.2).

$I$  being the inertia of the mode:

$$I = \int_0^R (\xi_r^2 + \Lambda \xi_h^2) \rho_0 r^2 dr \quad (35)$$

In the solar case,  $\beta \sim -1$  and  $|\beta| \gg |\gamma|$  for the excited high frequency p-modes. Then the  $(\ell = 1, m = 1)$  splitting is:

$$S_{\ell=1, m=1} \approx \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \left( \frac{\Omega_2}{\Omega_0} + \frac{9}{11} \frac{\Omega_4}{\Omega_0} - 1 \right) \quad (36)$$

With  $\Omega_2/\Omega_0 = -0.127$ ,  $\Omega_4/\Omega_0 = -0.159$  (Dziembowski & Goode, 1989), one obtains a departure from linear splitting of  $|S_{1,1}/\Omega_0 + 1| = 0.257$  i.e. a 25% change in the solar case. For upper main sequence stars, excited modes are around the fundamental radial mode and may be mixed modes with  $|\beta| \sim |\gamma| \sim 1/2$ . This leads for instance to  $|S_{1,1}/\Omega_0 + 1| \sim 7\%$  for  $\Omega_2/\Omega_0$  and  $\Omega_4/\Omega_0$  equal to 1/10 of the solar values.

For sake of simplicity, we restrict our study to  $s = 1$  in Eq. (31). The rotation law can then be expressed as:

$$\Omega(\theta) = \Omega_0 - \Delta\Omega \cos^2 \theta \quad (37)$$

After some calculations provided in Appendix B, we are able to express the splittings of several  $(\ell, m)$  modes:

a. triplets  $(1, 1)$ :

$$S_{\ell=1, m=1}^{\text{lat}} = \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \beta \left( 1 - \frac{1}{5} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right) \quad (38)$$

b.  $(\ell, m) = (2, 1)$  modes:

$$S_{\ell=2, m=1}^{\text{lat}} = \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \left( \beta + \frac{1}{7} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} (8\gamma - 3\beta) \right) \quad (39)$$

c.  $(\ell, m) = (2, 2)$  modes:

$$S_{\ell=2, m=2}^{\text{lat}} = \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \left( 2\beta - \frac{1}{7} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} (2\gamma + \beta) \right) \quad (40)$$

### 3.3.2. Sensitivity to the nature of eigenmode

As shown in Eq. (32) to Eq. (35), the additional term due to the latitudinal shear strongly depends on the eigenfunction of the mode, through the radial and horizontal components of the displacement. Therefore we investigate the scaled contributions for different types of modes. Again, the plots presented in Fig.4 have been performed for a ZAMS model of star of  $8.5 M_\odot$  and  $4 R_\odot$  rotating at  $\Omega \simeq 4\% \Omega_k$  ( $v_\Omega = R\Omega = 24 \text{ km.s}^{-1}$ ). Once again, computations for more evolved models of stars give similar results - except for mixed modes around  $n = 1$ - even with stronger rotation rates.

Fig.4 shows that the dependency of  $\beta$  and  $\gamma$  integrals to the nature of the mode, i.e. p or g. Globally, for g-modes, at a given rotation rate, we expect a small contribution of the latitudinal shear to the splittings - smaller for  $S_{1,1}$  than for  $S_{2,1}$  and  $S_{2,2}$ , whereas for p-modes, the contribution is quite important for  $S_{2,1}$ .

For the sake of simplicity we will focus on  $\ell = 1$  modes splittings from now on.

R-M. Ouazzani and M-J. Goupil: Rotational splitting for fast rotators:

#### 4. The case of a $\beta$ Cephei

Massive stars on the main sequence are usually fast rotators and their fast rotation affects their internal structure as well as their evolution. Rotation of  $\beta$  Cephei stars extends from slow rotational velocity ( $v < 50$  km/s) to extremely rapid ones ( $v > 250$  km/s) (Stankov & Handler, 2005). These stars usually have a radiative envelope which may or may not be in latitudinal differential rotation. For these fast rotators, one can wonder whether cubic order or near degeneracy contributions dominate over latitudinal shear ones.

##### 4.1. Competition between the three effects

Here we investigate the importance of the deviations from the linear splitting for an evolved main sequence model for a  $10 M_{\odot}$  star with a  $6.7 R_{\odot}$  radius (see Table 2 for stellar parameters of the model).

**Table 2.** Stellar parameters of the  $\beta$ Cephei model Sect.4

$M = 10 M_{\odot}$	$R = 6.7 R_{\odot}$
$L = 9.6 \times 10^3 L_{\odot}$	$X_0 = 0.7$
$P_c = 8.1 \times 10^3 \text{ dyn.cm}^{-2}$	$\rho_c = 3.6 \times 10^{-9} \text{ g.cm}^{-3}$

##### 4.1.1. Departure from linear splitting as a function of the frequency

According to the region a mode belongs to, very different behaviour are observed for the non linear contributions to the splitting, that are plotted on Figure 5.

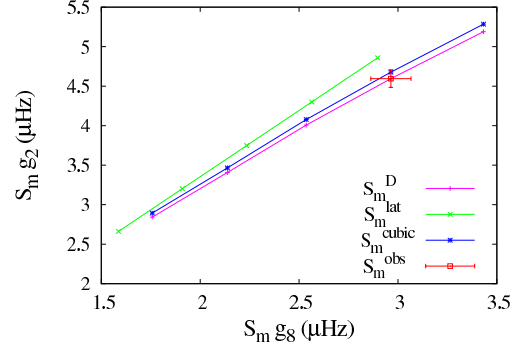
Figure 5 is plotted the departure from linear splitting due to cubic order effect with or without near degeneracy correction, and to latitudinal differential rotation, for  $\ell = 1$  modes with radial order ranging from -10 to 5 for the stellar model which parameters are given Table 2, rotating at  $15\% \Omega_k$  (left) and  $30\% \Omega_k$  (right). On these plots we observe three regions where the behavior of  $\delta S_{\ell,m}$  differs. In the g modes region, as the cubic order effect is proportional to  $\left(\frac{\Omega}{\Omega_k}\right)^2 \frac{\Omega}{\sigma_0}$  Eq. (25), the smaller the frequency, the higher cubic order terms are, and this effect increases with the rotation rate. For a rotation velocity of  $30\% \Omega_k$ , cubic order effects overtake latitudinal differential rotation one for radial orders below  $n = -5$ .

In the p modes region, latitudinal shear effects are much larger than cubic order effects for all the radial orders.

In between, in the mixed modes region, the near degeneracy contribution is particularly high and cubic order effects with degeneracy corrections are of same order as effects of a latitudinal shear of  $\Delta\Omega/\Omega = 0.127$  for high rotation velocity ( $\Omega = 30\% \Omega_k$ ).

In order to get a better understanding of these different types of behavior, one can look at Figure C.1 in Appendix. Figure C.1 is plotted modes inertia (defined in Eq. 35) with respect of their radial order. From this Figure, the three frequency domains related to the nature of modes are clearly identified: below  $g_4$  ( $n \in [-10, -4]$ ) are pure g modes, above  $p_4$  are pure p modes, and in between is located the mixed modes region.

Figure C.2 shows that near degeneracy has very small effect on g mode splittings: although frequency differences ( $\Delta_m$ ) between  $\ell = 1$  and  $\ell = 3$  modes are much smaller for g modes than for p modes (the y axis is in logarithmic scale), the fact that  $\mathcal{H}_m$  (which quantifies near degeneracy) is dominated by sec-



**Fig. 7.**  $S_{\ell,m}(g_8)$  versus  $S_{\ell,m}(g_2)$  (for  $\ell = 1$  due to cubic order effects in blue, to near degeneracy in purple, and to a latitudinal shear in red) for an increasing rotation rate (left to right: from  $18\% \Omega_k$  to  $34\% \Omega_k$ ) for an evolved model of star of  $10 M_{\odot}$  (detail in Tab.2). The errorbars have been taken from Degroote et al. (2009) for V1449 Aquilae.

ond order terms (due to distorsion) and takes small values for g modes makes near degeneracy more or less negligible for g modes below  $g_4$ . In the higher order p modes domain, frequency differences between  $\ell = 1$  and  $\ell = 3$  modes  $\Delta_m$  increase causing the near degeneracy contribution to the splitting to decrease. Therefore, the near degeneracy effect is larger in the intermediate region where frequency differences are still small, whereas the term  $\mathcal{H}_m$  starts to increase. Which causes the departure from linear splitting due to cubic order with near degeneracy accounted for to be of same order as the latitudinal shear contribution (Fig. 5).

##### 4.1.2. Departure from linear splitting with respect to the rotation rate

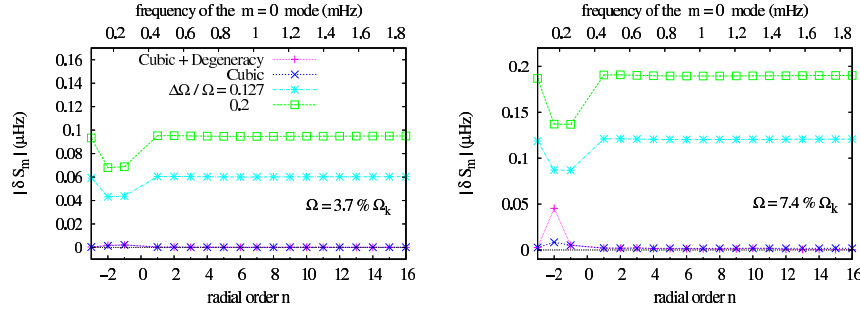
We studied the relative values of third order, near degeneracy and latitudinal shear contributions to the splitting with respect to the rotation velocity mode by mode. In appendix, Fig. 6 shows three different cases:

- mode  $g_8$  illustrates the the case of high order g-modes (or pure g-modes) where the cubic order contribution overtakes the latitudinal shear of  $\Delta\Omega/\Omega = 0.127$  contribution as soon as the mean rotation exceeds  $17\% \Omega_k$  (which corresponds to a rotation velocity of around  $80 \text{ km.s}^{-1}$ ).
- mode  $g_2$  is located in the mixed modes region where near degeneracy overtakes cubic order effects (over  $20\% \Omega_k$  which corresponds to  $100 \text{ km.s}^{-1}$ ). Both effects remain nevertheless small compared to latitudinal differential rotation ones.
- mode  $p_2$  is still a mixed mode but with a nature closer to a pure p mode for which near degeneracy is of same order than cubic order effects, both small compared to latitudinal differential rotation.

##### 4.1.3. How do we disentangle the two effects?

In the previous subsection, we have shown that for a massive star on the main sequence, in the frequency range where we expect pulsation modes, it is not easy to conclude whether a departure from the linear splitting is due to latitudinal differential rotation rather than to cubic order effects. Here we suggest a method to disentangle between the two effects.

R-M. Ouazzani and M-J. Goupil: Rotational splitting for fast rotators:



**Fig. 8.** Departure from the linear splitting for  $(\ell = 1, m = 1)$  triplets - left: for  $\Omega = 3.7\% \Omega_k$ , right:  $\Omega = 7.4\% \Omega_k$  -, due to cubic order effects -in blue- cubic order effects with near-degeneracy -in pink- and to latitudinal differential rotation of 12.7% -in light blue-, 20% -in green- with respect to the radial order. Computations made for the model of HD 181420 ( $1.36M_\odot$ , see Tab. 4).

Let consider two modes:  $g_8$  and  $g_2$  as representative of one pure g-mode and one mixed-mode respectively as seen in the previous section. In Fig. 7  $S_1(g_8)$  versus  $S_1(g_2)$  is plotted for the two different assumptions (latitudinal shear or cubic order effects with near-degeneracy correction) for different rotation rates ( $\Omega \leq 35\% \Omega_k$ ). Note that for g modes,  $\beta$  is roughly equal to 1/2, and for p modes  $\beta$  approaches 1. Accordingly, the ratio between  $S_1^{\text{lat}}(g_2)$  and  $S_1^{\text{lat}}(g_8)$  does not depend on  $\Delta\Omega$  and is approximately equal to 2. On the other hand, the curve  $S_1(g_8)$  as a function of  $S_1(g_2)$  for splittings including cubic order effects with near-degeneracy correction start to deviate from a slope 2 when rotation is large enough. The deviation increases with the rotation rate as expected.

Let now define  $S_1^{\text{obs}}$  as the observed splittings for  $l = 1$  modes for a fast rotator with a uniform rotation  $\Omega_0^{\text{me}}$ . Their values are then assumed to be given by  $S_1^{\text{obs}} = S_1^{\text{D}}(\Omega_0^{\text{me}})$  (Eq. 28) i.e. rotational splittings computed up to cubic order effects and including near-degeneracy correction.

If one misinterprets  $S_1^{\text{obs}}$  as due to a latitudinal shear,  $S_1^{\text{obs}}$  is assumed to obey Eq. 38. The point representing  $S_m^{\text{obs}}(g_8)$  as a function of  $S_m^{\text{obs}}(g_2)$  ought to lie on the straight line with slope 2 in Fig. 7. We represent this point with the splittings  $S_m^{\text{obs}}(g_8)$  and  $S_m^{\text{obs}}(g_2)$  computed according top Eq. 28) assuming a rotation rate of  $30\% \Omega_k$ ,  $v = 160 \text{ km.s}^{-1}$ . As the observed point is not located on the straight line drawn by  $S_m^{\text{lat}}(g_2) = 2S_m^{\text{lat}}(g_8)$ , we are then able to conclude that the deviation from the linear splitting is not due to a latitudinal shear.

In the case of massive stars on the main sequence, the effects of latitudinal differential rotation and cubic order or near degeneracy are of the same order in the frequency domain where we expect to observe oscillation modes. This is mostly due to the mixed nature of modes around the fundamental frequency, and should therefore depend on the evolution stage of the star. But if two individual rotational splittings are available (for one g-mode under the mixed modes region, and one p-mode above it), this method helps to disentangle whether a departure from the linear splitting is due to cubic order contribution, accidental degeneracy, or latitudinal shear.

## 5. The case of HD181420

Low mass main sequence stars are known to be slow rotators. Indeed due to their outer convection zone, they undergo magnetic braking during their evolution (Kawaler, 1988). Observational evidences exist for surface latitudinal differential

rotation (stellar spots due again to their outer convection zone). Hence for these stars, the averaged rotation rate  $\Omega$  is much smaller compared to more massive stars such as  $\beta$ Cephei stars and  $\Delta\Omega = \Omega_{\text{equa}} - \Omega_{\text{poles}}$ , the difference between the rotation rates at the equator and the poles, can be large (25% for the Sun, between 1% and 45% for a star like Procyon, Bonanno et al., 2007). One therefore expects that latitudinal corrections to the splittings dominate over cubic order ones which are negligible.

An illustrative exemple is HD 181420, an F2 main sequence star whose fundamental parameters have been determined by Bruntt (2009) :  $m_v = 6.57$ ,  $L/L_\odot = 4.28 \pm 0.28$ ,  $T_{\text{eff}} = (6580 \pm 105)\text{K}$ ,  $[\text{Fe}/\text{H}] = 0.00 \pm 0.06$ ,  $M/M_\odot = 1.31 \pm 0.063$ ,  $v \sin i = (18 \pm 1)\text{km.s}^{-1}$ . It has been observed during the first long run of CoRoT, and the results of its light curve analysis has been performed by Barban et al. (2009). They find two possible interpretations for the mode identification, as listed in Tab.3. Later Bedding & Kjeldsen (2010) used some empirical scaling method that seems to favor scenario 1.

**Table 3.** Results concerning rotation from the analysis performed in Barban et al. (2009)

Results	Scenario 1	Scenario 2
$v_{\text{rot}} =$	$4.5 \mu\text{Hz}$	$4.5 \mu\text{Hz}$
$v_{\text{split}} =$	$(2.59 \pm 0.38) \mu\text{Hz}$	$(3.29 \pm 0.17) \mu\text{Hz}$

### 5.1. Competition between the three effects

Here we investigate the importance of the deviations from the linear splitting for a main sequence stellar model with a  $1.4M_\odot$  mass and a  $1.6R_\odot$  radius (see Table 4 for stellar parameters taken for the representative model of HD 181420).

**Table 4.** Stellar parameters of the model of HD181420 (Sect.5)

$M = 1.36M_\odot$	$R = 1.63R_\odot$
$L = 4.4L_\odot$	$X_0 = 0.7$
$P_c = 183 \text{ dyn.cm}^{-2}$	$\rho_c = 5.1 \times 10^{-10} \text{ g.cm}^{-3}$

In Fig. 8, we plotted the three kinds of contributions -i.e. cubic order, cubic order with near degeneracy, and latitudinal shear- with respect of the central mode frequency for  $(\ell = 1, \pm 1)$

R-M. Ouazzani and M-J. Goupil: Rotational splitting for fast rotators:

splittings for two different rotational angular velocities ( $3.7\% \Omega_k$  and  $7.4\% \Omega_k$  which correspond to  $15 \text{ km.s}^{-1}$  and  $30 \text{ km.s}^{-1}$  respectively for our model Tab.4). Once again, these contributions show particular behavior in the mixed mode region. We focus here on higher frequencies as for this solarlike star, oscillation modes are detected in the frequency range between 1 mHz and 2 mHz (Barban et al., 2009). Therefore, these plots show that even for high rotation rates for this type of star ( $7.4\% \Omega_k$ ), cubic order contributions (with or without near-degeneracy) can be neglected compared to additional terms due to latitudinal shear. This leads to the conclusion that for this star in particular - as we expect for solar like stars in general -, the cubic order contributions to the splitting can be safely neglected in front of potential latitudinal shear contributions.

### 5.2. Determination of a latitudinal shear from seismic observations

The results of the analysis provided in Barban et al. (2009) show a low frequency peak in the Fourier spectrum attributed to stellar spots around  $4.5 \mu\text{Hz}$ . For the mean value of the  $\ell = 1$  splitting, they find  $v_{\text{split1}} = (2.59 \pm 0.38) \mu\text{Hz}$  for scenario 1 and  $v_{\text{split2}} = (3.29 \pm 0.17) \mu\text{Hz}$  for scenario 2. If a uniform surface rotation is assumed, it is not possible to reproduce the observables. Let us suppose a latitudinal shear  $\Delta\Omega$  such as:

$$\Omega(\theta) = \Omega_0 - \Delta\Omega \cos^2 \theta \quad (41)$$

The rotation frequency is then given by :

$$v_{\text{rot}}(\theta) = v_{\text{eq}} \left( 1 - \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \cos^2 \theta \right) \quad (42)$$

where  $v_{\text{eq}}$  and  $v_{\text{rot}}$  correspond to the equatorial rotation angular velocity taken as  $\Omega_0$  and the rotation frequency at the latitude  $\theta$  in  $\mu\text{Hz}$  respectively.

Using again the rotation law Eq. 41 to derive the rotational splitting from Eq. 32, we obtain for  $\ell = 1, m = \pm 1$ :

$$S_{1,1} = \Omega_0 \beta \left( 1 - \frac{1}{5} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right) \quad (43)$$

As already mentioned in Sect. (3.2.1), for solar like stars, as  $\beta \sim 1$ , this expression can be approximated by:

$$v_{\text{split}} = v_{\text{eq}} \left( 1 - \frac{1}{5} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right) \quad (44)$$

where  $v_{\text{split}}$  corresponds to  $S_{1,1}$ .

Then Eq. 42 and Eq. 44 are two equations with three unknowns:  $v_{\text{eq}}$ ,  $\cos \theta$  and  $\Delta\Omega/\Omega_0$ . Dividing Eq.44 by Eq.42 leads to:

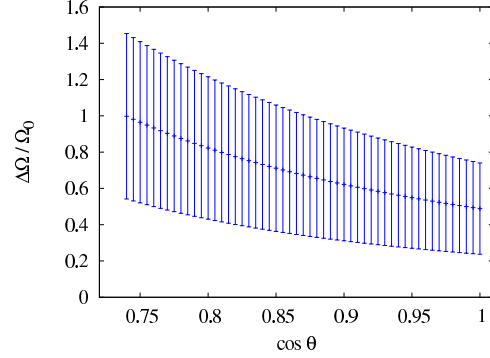
$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{v_{\text{split}} - v_{\text{rot}}}{\cos^2 \theta v_{\text{split}} - \frac{1}{5} v_{\text{rot}}} \quad (45)$$

We then determine  $\Delta\Omega/\Omega_0$  as a function of  $\cos \theta$ , along with the following constraints:

$$\theta \in \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] \Rightarrow \cos \theta \in [0; 1] \quad (46)$$

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \in [-1; 1] \quad (47)$$

For the scenario 2, there is no solution for  $\Delta\Omega/\Omega_0$  satisfying the constraints.



**Fig. 9.** Possible values for  $\Delta\Omega/\Omega_0$ , in the scenario 1 where  $v_{\text{split1}} = (2.59 \pm 0.38) \mu\text{Hz}$  and  $v_{\text{rot}} = (4.5 \pm 1.5) \mu\text{Hz}$ . Errorbars are due to observational error on the splitting and on the frequency of the low frequency rotation signature

In Fig. 9 is presented the set of values of  $\Delta\Omega/\Omega_0$  which correspond to the observables -i.e.  $v_{\text{split1}}$  and  $v_{\text{rot}}$ - considering that the low frequency peak is due to a unique punctual spot with an infinite lifetime. It corresponds to possible values for the spot latitude from  $0^\circ$  to  $42^\circ$  with latitudinal shear of  $\Delta\Omega/\Omega_0 = 0.489 \pm 0.252$  -i.e. equator rotating twice faster than the poles- and  $\Delta\Omega/\Omega_0 = 0.998 \pm 0.998 \pm 0.426$  -i.e. almost solid rotation.

For solar like stars such as HD 181420, which are mostly slow rotators and oscillate with high order p mode, cubic order effects on the splitting are shown to be small in front of effects of latitudinal differential rotation. Therefore, given a splitting and a rotation period signature, it is possible to infer a range for the latitudinal shear coefficient  $\Delta\Omega/\Omega_0$ . Although no precise determination of latitudinal shear is possible unless the spot latitude is fully determined, this can be taken as a seismic constraint to be added to other observational constraints such as the ones brought up by spectropolarimetric results such as Donati et al. (2010) and/or spot modelling such as Mosser et al. (2009).

## 6. Conclusions

With the help of the perturbative approach established in Soufi et al. (1998), we investigated the different contributions due to second and third order contributions of the Coriolis and the centrifugal accelerations on p and g modes frequencies as well as near degeneracy effects on the rotational splittings. Their effects have then been compared with those of a latitudinal shear at the stellar surface. We studied two types of oscillating stars. For an evolved model of  $\beta\text{Cephei}$ , the effect of near degeneracy, cubic order and of a latitudinal shear are of the same magnitude in the range of frequency where such stars show oscillations -i.e. low order p and g modes- and for reasonable rotation rates ranging from  $15\% \Omega_k$  to  $30\% \Omega_k$ . Nevertheless, when two individual splittings, for two modes of different nature (one pur g and one mixed for example), are available, a method is proposed to distinguish between a latitudinal shear and the other effects. Concerning solar like stars, in the high order p mode frequency range, and for rotation rates smaller than  $7.4\% \Omega_k$  - which corresponds to  $30 \text{ km.s}^{-1}$  for an  $1.36 M_\odot$ ,  $1.63 R_\odot$  star - the effect of latitudinal differential rotation is clearly dominant. In the case of HD 181420, a study based on the results of the seismic analysis

R-M. Ouazzani and M-J. Goupil: Rotational splitting for fast rotators:

achieved by Barban et al. (2009), shows that the seismic splitting is compatible with a differential rotation in latitude ranging from  $\Delta\Omega/\Omega_0 = 0.489 \pm 0.252$  to  $\Delta\Omega/\Omega_0 = 0.998 \pm 0.426$ . In this work, we focused on latitudinal differential rotation or uniform rotation. Observed differences between internal (seismic) and surface rotation (low frequency peak in a power spectrum) can also possibly arise from radial differential rotation. This will be investigated in a further work.

## References

- Ballot, J., Lignières, F., Reese, D. R., & Rieutord, M. 2010, *A&A*, 518, A30  
 Barban, C., et al. 2009, *A&A*, 506, 51  
 Belkacem, K., et al. 2009, *Science*, 324, 1540  
 Benomar, O., et al. 2009, *A&A*, 507, L13  
 Bonanno, A., Küker, M., & Paterno, L. 2007, *A&A*, 462, 1031  
 Bruntt, H. 2009, *A&A*, 506, 235  
 Burke, K. D., Reese, D. R., & Thompson, M. J. 2011, arXiv:1102.0382  
 Collier Cameron, A. 2002, *Astronomische Nachrichten*, 323, 336  
 Degroote, P., et al. 2009, *A&A*, 506, 111  
 Donati, J.-F., et al. 2010, *MNRAS*, 409, 1347  
 Dziembowski, W. A., & Goode, P. R. 1992, *ApJ*, 394, 670  
 Dziembowski, W. A., & Goode, P. R. 1989, *ApJ*, 347, 540  
 Dziembowski, W. A., & Goode, P. R. 1991, *Solar interior and atmosphere (A92-36201 14-92)*, Tucson, AZ, University of Arizona Press, 1991, p. 501-518, 501  
 Gough, D. O., & Thompson, M. J. 1990, *MNRAS*, 242, 25  
 Goupil, M. J. 2009, *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, 765, 45  
 Goupil, M. J. 2010, *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, in press  
 Hansen, C. J., Cox, J. P., & van Horn, H. M. 1977, *ApJ*, 217, 151  
 Jerzykiewicz, M., Handler, G., Shobbrook, R. R., Pigulski, A., Medupe, R., Mokgwetsi, T., Thagwane, P., & Rodríguez, E. 2005, *MNRAS*, 360, 619  
 Karami, K., Christensen-Dalsgaard, J., Pijpers, F. P., Goupil, M. J., & Dziembowski, W. A. 05, arXiv:astro-ph/0502194  
 Karami, K. 2008, *Chinese Journal of Astronomy and Astrophysics*, 8, 285  
 Kawaler, S. D. 1988, *ApJ*, 333, 236  
 Kippenhahn, R., & Weigert, A. 1994, *Stellar Structure and Evolution*, XVI, 468 pp. 192 figs.. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York. Also *Astronomy and Astrophysics Library*,  
 Ledoux, P. 1945, *ApJ*, 102, 143  
 Morel, P. 1997, *A&AS*, 124, 597  
 Morel, P., & Lebreton, Y. 2008, *Ap&SS*, 316, 61  
 Mosser, B., Baudin, F., Lanza, A. F., Hulot, J. C., Catala, C., Baglin, A., & Auvergne, M. 2009, *A&A*, 506, 245  
 Ouazzani, R.-M., Goupil, M.-J., Dupret, M.-A., & Reese, D. 2009, *Communications in Asteroseismology*, 158, 283  
 Ouazzani, R. M., Goupil, M. J., Dupret, M. A., & Reese, D. 2010, *Ap&SS*, 64  
 Ouazzani, R.-M., Goupil, M.-J., Dupret, M.-A., & Reese, D. 2009, *Communications in Asteroseismology*, 158, 283  
 Reese, D., Lignières, F., & Rieutord, M. 2006, *A&A*, 455, 621  
 Reese, D. 2006, Ph.D. Thesis  
 Soufi, F., Goupil, M. J., & Dziembowski, W. A. 1998, *A&A*, 334, 911  
 Stankov, A., & Handler, G. 2005, *VizieR Online Data Catalog*, 215, 80193  
 Schou, J., et al. 1998, *ApJ*, 505, 390  
 Suárez, J. C., Moya, A., Amado, P. J., Martín-Ruiz, S., Rodríguez-López, C., & Garrido, R. 2009, *ApJ*, 690, 1401  
 Suárez, J. C., Goupil, M. J., Reese, D. R., Samadi, R., Lignières, F., Rieutord, M., & Lochard, J. 2010, *ApJ*, 721, 537  
 Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, *Nonradial oscillations of stars*, Tokyo: University of Tokyo Press, 1989, 2nd ed.,

## Appendix A: Near degeneracy corrections to the splitting of high order p modes

This section is dedicated to a qualitative estimation of the near degeneracy corrections to the rotational splitting:

$$S_{\ell=1,m=1}^{\text{deg}} - S_{\ell=1,m=1}^{\text{ND}} = \frac{\sqrt{\Delta_1^2 + \mathcal{H}_1^2} - \sqrt{\Delta_{-1}^2 + \mathcal{H}_{-1}^2}}{2} - \frac{1}{2}(\Delta_1 - \Delta_{-1}) \quad (\text{A.1})$$

where  $\Delta_1$  and  $\mathcal{H}_1$  are normalized to the break up frequency  $\Omega_k$ . The oscillation frequency given in Eq. (15) can be rewritten under the generic form :

$$\sigma_{n,\ell,m} = \sigma_{0n,\ell}^0 + m \frac{\Omega}{\Omega_k} \beta_{n,\ell} + m^2 d_{n,\ell,m} + m t_{n,\ell,m}$$

where  $d_{n,\ell,m}$  and  $t_{n,\ell,m}$  represent the second and third order contributions. Therefore the term  $\Delta_1$  and  $\Delta_{-1}$  appearing in Eq. (28) for the coupling of an  $\ell = 1, n$  and an  $\ell = 3, n'$  mode can be written as:

$$\Delta_1 = \Delta^0 + \frac{\Omega}{\Omega_k}(\beta_{n,1} - \beta_{n',3}) + (d_{n,1,1} - d_{n',3,1}) + (t_{n,1,1} - t_{n',3,1}) \quad (\text{A.2})$$

where  $\Delta^0$  stands for  $\sigma_{0n,1}^0 - \sigma_{0n',3}^0$ , the difference between eigenfrequencies without rotation. For high frequency p-modes, the radial contributions concentrate in the outer layers and are then nearly the same for mode  $(n, \ell = 1)$  and mode  $(n', \ell = 3)$ . It is then legitimate to neglect the differences in their radial contributions between both modes. We then omit the radial order subscripts  $n, n'$ . For the same reason, the Ledoux constants are also quite similar  $\beta_1 \sim \beta_3$ . Then

$$\Delta_1 \approx \Delta^0 + (d_{1,1} - d_{3,1}) + (t_{1,1} - t_{3,1})$$

Similarly

$$\Delta_{-1} \approx \Delta^0 + (d_{n,1,1} - d_{3,1}) - (t_{1,1} - t_{3,1}) \quad (\text{A.3})$$

Hence, the quantity  $(\Delta_1 - \Delta_{-1})$  in Eq. (A.1):

$$\Delta_{-1} - \Delta_1 \approx 2(t_{1,1} - t_{3,1}) \quad (\text{A.4})$$

is of third order. One can then approximate  $\Delta_{-1} \sim \Delta_1$  in the square root of Eq.A.1 and the correction brought by near-degeneracy to the splitting is given by:

$$S_{\ell=1}^{\text{deg}} - S_{\ell=1}^{\text{ND}} \approx (t_{1,1} - t_{3,1}) + \frac{\sqrt{\Delta_1^2 + \mathcal{H}_1^2} - \sqrt{\Delta_{-1}^2 + \mathcal{H}_{-1}^2}}{2} \quad (\text{A.5})$$

For the coupling term, one can separate the second  $\mathcal{H}_2$  and third  $\mathcal{H}_3$  order terms as:  $\mathcal{H}_m = \mathcal{H}_2 + m\mathcal{H}_3$ , then  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3$ , and  $\mathcal{H}_{-1} = \mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_3$ . With  $|\mathcal{H}_3| \ll |\mathcal{H}_2|$ , one is left for the near-degeneracy correction to the splitting with:

$$S_{\ell=1}^{\text{deg}} - S_{\ell=1}^{\text{ND}} \approx (t_{1,1} - t_{3,1}) + \frac{2\mathcal{H}_2\mathcal{H}_3}{\sqrt{\Delta_1^2 + \mathcal{H}_2^2}} \quad (\text{A.6})$$

which shows that for slow rotators, such as HD 181420, if cubic order effects are not accounted for, then the near degeneracy contribution (which is responsible for the splitting asymmetry) is zero, and the splitting is a linear function of rotation. If cubic order effects are included, then near degeneracy breaks the splitting symmetry, and the dominant contribution to departure from linear splitting comes from distortion (dominant in  $\mathcal{H}_2$ ).

R-M. Ouazzani and M-J. Goupil: Rotational splitting for fast rotators:

### Appendix B: Contribution of the latitudinal shear on the splitting

In order to be able to compute the splittings from Eq.1 and Eq.22, one must specify a rotation law. It is convenient to assume a rotation of the type:

$$\Omega(r, \theta) = \sum_{s=0}^{s_{\max}} \Omega_{2s}(r) (\cos \theta)^{2s} \quad (\text{B.1})$$

where  $\theta$  is the colatitude and we take  $s_{\max} = 1$ . The surface rotation at the equator is  $\Omega(r = R, \theta = \pi/2) = \Omega_0(r = R)$ .

Inserting Eq.30 into Eq.22 yields the following expression for the generalized splitting:

$$S_m = \frac{1}{\Omega_k} \int_0^R \Omega_0(r) K(r) dr + \frac{1}{\Omega_k} \sum_{s=0}^{s=2} m^{2s} H_{m,s}(\Omega) \quad (\text{B.2})$$

with, (Goupil, 2010, see)

$$H_{m,s}(\Omega) = -\frac{1}{I} \int_0^R \left[ R_s (\xi_r^2 - 2\xi_r \xi_h + \xi_h^2 (\Lambda - 1)) + Q_s \xi_h^2 \right] \rho_0 r^2 dr$$

where  $R_s$  and  $Q_s$  depend on  $\Omega_2, \Omega_4$  and  $\Lambda = \ell(\ell + 1)$ .

For example, if shellular rotation is expected, then  $\Omega(r, \theta) = \Omega_0(r)$  and  $s_{\max} = 0$ . Moreover,  $\Omega_2, \Omega_4 = 0$ , ie  $R_j = Q_j = 0$  for  $j = 0, 2$  and :

$$S_m = -\frac{1}{I} \int_0^R \frac{\Omega_0(r)}{\Omega_k} \left[ \xi_r^2 - 2\xi_r \xi_h + \Lambda \xi_h^2 \right] \rho_0 r^2 dr \quad (\text{B.3})$$

If we consider latitudinally differential rotation only,  $\Omega_{2j,j} = 0, 2$  are depth independent,  $\Omega_0 = \Omega_{\text{equator}}$ ,  $\Omega_2 = -\Delta\Omega$ , and  $\Omega_4 = 0$ .  $R_s$  and  $Q_s$  are constant and :

$$S_m = \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \beta + \frac{1}{\Omega_k} \sum_{s=0}^{s=2} m^{2s} (R_s(\Omega) \beta + Q_s(\Omega) \gamma) \quad (\text{B.4})$$

with  $\beta$  and  $\gamma$  defined as:

$$\beta = \frac{1}{I} \int_0^R \left[ \xi_r^2 - 2\xi_r \xi_h + (\Lambda - 1) \xi_h^2 \right] \rho_0 r^2 dr \quad (\text{B.5})$$

$$\gamma = -\frac{1}{I} \int_0^R \xi_h^2 \rho_0 r^2 dr \quad (\text{B.6})$$

And  $I$  being the inertia of the mode:

$$I = \int_0^R (\xi_r^2 + \Lambda \xi_h^2) \rho_0 r^2 dr \quad (\text{B.7})$$

Then the rotational splitting of a  $\{n, \ell, m\}$  mode is given by:

$$S_{\ell,m} = \Omega_0 \beta + R_0^\ell \beta + Q_0^\ell \gamma + m^2 (R_1^\ell \beta + Q_1^\ell \gamma) \quad (\text{B.8})$$

In Goupil (2010),  $Q_s$  and  $R_s$  are given for  $s = 0, 1, 2$ :

$$R_0^\ell = -\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \frac{2\Lambda - 1}{4\Lambda - 3} \quad (\text{B.9})$$

$$R_1^\ell = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \frac{2}{4\Lambda - 3} \quad (\text{B.10})$$

$$Q_0^\ell = -\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \frac{2(1 - 3\Lambda)}{4\Lambda - 3} \quad (\text{B.11})$$

$$Q_1^\ell = -\frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \frac{10}{4\Lambda - 3} \quad (\text{B.12})$$

Here we study in particular :

a.  $\ell = 1, m = \pm 1$  triplet ( $\Lambda = 2$ ) for which:

$$S_{1,1} = \Omega_0 \beta \left( 1 - \frac{1}{5} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right) \quad (\text{B.13})$$

b. modes  $\ell = 2, m = \pm 1$  ( $\Lambda = 6$ ) :

$$S_{2,1} = \Omega_0 \beta + \frac{1}{7} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} (8\gamma - 3\beta) \quad (\text{B.14})$$

c. modes  $\ell = 2, m = \pm 2$  ( $\Lambda = 6$ ) :

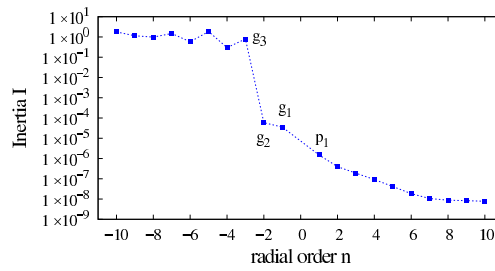
$$S_{2,2} = 2 \Omega_0 \beta - \frac{1}{7} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} (2\gamma + \beta) \quad (\text{B.15})$$

R-M. Ouazzani and M-J. Goupil: Rotational splitting for fast rotators:

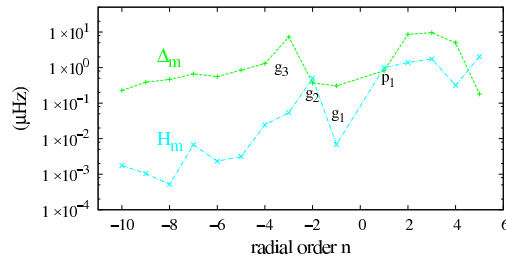
**Appendix C: Conditions for significant near degeneracy**

As already mentioned, near degeneracy between two modes occurs whenever the frequencies are close, their azimuthal number is the same and their degrees differ by 2. However the magnitude of the near degenerate correction to both frequencies also depend on the magnitude of the coupling term  $H_m$ . In turn the magnitude of  $H_m$  depend on the nature of the involved modes whether they are g-modes, p-modes or mixed modes with p or g dominant nature.

The g-mode spectrum is much denser than the p-mode one hence as shown in Fig. D.2  $\Delta_m$  is much smaller than for p-modes. This ought to favor near degeneracy. However the coupling term  $H_m$  for g-modes is much smaller than for p-modes. This is due to the fact that distortion effects are small for g-modes and therefore the overall (second order and cubic order) contribution to  $H_m$  remains small. As a result, the coupling term is much smaller than  $\Delta_m$  for g-modes which are then almost not coupled.



**Fig. C.1.** Inertia of axisymmetric  $\ell = 1$  modes for the  $\beta$ Cephei model of  $10 M_{\odot}$  in uniform rotation of  $30\% \Omega_c$ , i.e.  $160 \text{ km.s}^{-1}$  (Sect.4.1, Tab.2) with respect to the radial order  $n$ .



**Fig. C.2.** Terms  $\Delta_m$  and  $\mathcal{H}_m$  which are involved in near-degeneracy correction (see Eq.20) for  $\ell = 1$  modes for the same  $\beta$ Cephei model as in Fig.D.1. Logscale is used for y axis.



**Appendix D: Values for third order contributions to the frequency and to the splitting**

**Table D.1.** Scaled contributions to the splittings for  $\ell = 1$  modes due to implicit third order term in the eigenfrequency  $-T^{eigen}$ - to Coriolis effect  $-T^T$ - to distortion  $-T^D$ - and to the coupling of the two  $-T^C$ -, multiplied by the central mode frequency square for g-modes. The impact of near-degeneracy is so small that its contribution is fully negligible and is therefore not listed. The first row lists the radial order and the second row the centroid mode  $m = 0$

n	$\sigma_0$	$T_3^{eigen} \times \sigma_0^2$	$T_3^T \times \sigma_0^2$	$T_3^D \times \sigma_0^2$	$T_3^C \times \sigma_0^2$
-10	0.17	0.111E+03	0.961E+03	-0.557E+01	-0.581E+02
-9	0.18	0.197E+03	0.940E+03	-0.575E+01	-0.666E+02
-8	0.20	0.692E+01	0.544E+03	-0.402E+00	-0.574E+02
-7	0.25	0.895E+01	0.496E+03	0.271E+01	-0.538E+02
-6	0.29	0.127E+02	0.470E+03	0.624E+01	-0.596E+02
-5	0.34	0.215E+02	0.473E+03	0.118E+02	-0.807E+02
-4	0.41	0.423E+02	0.524E+03	0.234E+02	-0.127E+03
-3	0.52	0.909E+02	0.652E+03	0.530E+02	-0.219E+03
-2	0.70	0.108E+03	0.986E+03	0.147E+03	-0.404E+03

**Table D.2.** Scaled contributions to the splittings for  $\ell = 1$  modes due to third order effects multiplied by the central mode frequency square for p-modes. The first row lists the radial order and the second row the centroid mode  $m = 0$

n	$\sigma_0$	$T_3^{eigen}/\sigma_0^2$	$T_3^T/\sigma_0^2$	$T_3^D/\sigma_0^2$	$T_3^C/\sigma_0^2$	$T_3^{deg}/\sigma_0^2$
-1	1.06	-0.332E+05/ $\sigma_0^4$	0.103E+05/ $\sigma_0^4$	-0.543E+04/ $\sigma_0^4$	0.105E+05/ $\sigma_0^4$	-0.162E+04/ $\sigma_0^4$
1	3.52	-0.216E+03	0.670E+02	-0.353E+02	0.684E+02	0.695E+00
2	4.73	-0.139E+03	0.406E+02	-0.180E+02	0.431E+02	0.173E+02
3	5.78	-0.106E+03	0.284E+02	-0.114E+02	0.341E+02	0.318E+02
4	6.85	-0.858E+02	0.180E+02	-0.551E+01	0.263E+02	0.379E+02
5	7.96	-0.724E+02	0.111E+02	-0.663E+00	0.192E+02	0.435E+02
6	9.11	-0.633E+02	0.764E+01	0.216E+01	0.144E+02	0.447E+02
7	10.30	-0.563E+02	0.578E+01	0.383E+01	0.109E+02	0.472E+02
8	11.49	-0.512E+02	0.492E+01	0.454E+01	0.880E+01	0.503E+02
9	12.67	-0.475E+02	0.438E+01	0.470E+01	0.759E+01	0.541E+02
10	13.82	-0.445E+02	0.373E+01	0.469E+01	0.685E+01	0.556E+02
11	14.96	-0.415E+02	0.289E+01	0.487E+01	0.598E+01	0.543E+02
12	16.11	-0.386E+02	0.220E+01	0.521E+01	0.492E+01	0.527E+02
13	17.28	-0.359E+02	0.180E+01	0.550E+01	0.394E+01	0.516E+02
14	18.46	-0.336E+02	0.160E+01	0.568E+01	0.314E+01	0.509E+02
15	?	-0.317E+02	0.148E+01	0.578E+01	0.251E+01	0.498E+02





# Chapitre 4

## Calcul bidimensionnel non perturbatif d'oscillations d'étoiles en rotation rapide

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Géométrie sphéroïdale</b>	<b>74</b>
4.1.1	Définition d'une base sphéroïdale	74
4.1.2	Changements de base	76
<b>4.2</b>	<b>Obtention d'un système d'équations différentielles</b>	<b>77</b>
4.2.1	Intérieur stellaire : $\zeta \in [0; 1]$	78
4.2.2	Dans le vide : entre $\zeta = 1$ et $\zeta = 2$	82
4.2.3	Système d'équations final	83
<b>4.3</b>	<b>Décomposition spectrale</b>	<b>83</b>
4.3.1	Décomposition sur une base d'harmoniques sphériques	83
<b>4.4</b>	<b>Conditions aux limites</b>	<b>85</b>
4.4.1	Conditions au centre	85
4.4.2	Surface libre	90
4.4.3	Potentiel gravitationnel à l'infini	90

---

Le calcul d'oscillations d'étoiles en rotation pose principalement deux types de difficultés. D'une part, la rotation, par l'intermédiaire de la force centrifuge, déforme la cavité résonnante des oscillations. Si l'on considère une rotation solénoïdale de l'étoile (c'est-à-dire autour d'un axe nord-sud fixe), la symétrie azimutale est conservée tandis que la symétrie sphérique est rompue : l'étoile adopte une géométrie sphéroïdale. Cet effet, s'il est suffisamment important, nécessite un traitement du problème à deux dimensions. Par ailleurs, lorsque l'on prend en compte la rotation dans le calcul d'oscillation, l'accélération de Coriolis intègre l'équation de mouvement du fluide. Si la rotation est suffisamment faible, le traitement perturbatif permet d'évaluer de manière acceptable l'effet de la rotation sur les oscillations. Mais pour des vitesses de rotation élevées, le traitement perturbatif ne convient plus (une étude de validité de l'approche perturbative est présentée au Chap. 3).

Nous présentons dans ce chapitre l'approche adoptée afin de développer une méthode non perturbative à deux dimensions pour le calcul des oscillations non radiales adiabatiques d'une étoile en rotation rapide. Le projet de réaliser un nouveau programme de calcul d'oscillations stellaires, prenant en compte aussi bien les effets structurels que dynamiques de la rotation, a été porté par l'ambition de produire des spectres sismiques synthétiques les plus réalistes possibles dans une perspective de confrontation avec les contraintes sismiques observationnelles de la rotation stellaire. Bien sûr, le degré de réalisme des spectres synthétiques ainsi obtenus dépend fortement de la modélisation de la structure interne effectuée en amont de ce code. Néanmoins, pour la partie du processus de modélisation qui concerne les oscillations, il était nécessaire de faire le moins d'hypothèses possible (voire aucune) sur la thermodynamique du modèle stationnaire. Les seuls présupposés sont les symétries azimutale et équatoriale du modèle de structure. Le vecteur vitesse angulaire de rotation est supposé à symétrie axiale :

$$\vec{\Omega} = \Omega(r, \theta) \cos(\theta) \vec{e}_r - \Omega(r, \theta) \sin(\theta) \vec{e}_\theta \quad (4.1)$$

Afin d'éviter les problèmes de discontinuité des grandeurs physiques (et de leurs dérivées) à l'interface des zones convective et radiative, et pour faciliter l'implémentation des conditions aux limites en surface, nous choisissons d'adopter un système de coordonnées sphéroïdal (correspondant à celui proposé par Bonazzola et al. 1998, pour des modèles polytropiques; pour des modèles réalistes d'étoile, un autre système est présenté au Chap. 7). Concernant la résolution des équations hydrodynamiques développées au Chapitre 2 (Eq. 2.24, 2.29, 2.31 et 2.32), la méthode choisie doit permettre de décrire de manière convenable les comportements, notamment radiaux, des grandeurs physiques d'un modèle réaliste (c'est-à-dire stratifié et présentant des variations radiales abruptes pour certaines quantités, comme la densité par exemple). C'est pourquoi, pour la différenciation radiale des variables, nous choisissons d'adopter une méthode de dérivation par différences finies (Scuflaire et al. 2008) qui permet d'obtenir une précision du cinquième ordre en terme du pas radial; tandis qu'une approche spectrale est adoptée dans la direction angulaire (de même que dans Rieutord 1987, nous utilisons une décomposition sur une base tronquée d'harmoniques sphériques). Dans le souci constant de mettre au point un outil rapide, nous avons donc redoublé d'efforts pour réduire le temps de calcul et l'espace mémoire sans sacrifier au réalisme de notre approche.

## 4.1 Géométrie sphéroïdale

### 4.1.1 Définition d'une base sphéroïdale

Dans l'approche adoptée, une méthode spectrale décrit le comportement angulaire des modes propres d'oscillation. Les méthodes spectrales sont connues pour être d'une grande précision pour les traitements numériques en dynamique des fluides. Pour une fonction  $\mathcal{C}^\infty$ , l'erreur numérique décroît comme  $e^{-M}$  où  $M$  est le nombre de coefficients impliqués dans le développement spectral. Lorsque les fonctions traitées ne sont pas  $\mathcal{C}^\infty$ , mais présentent des discontinuités, ces méthodes perdent nettement en précision. Ce qui est le cas dans les modèles réalistes, où l'on rencontre des variations rapides des grandeurs internes, par exemple celles dues à une variation brusque du poids moléculaire moyen à l'émergence d'un cœur convectif.

La méthode spectrale multidomaine a été établie par Bonazzola et al. (1998) pour décrire l'espace-temps autour des binaires spirales d'étoiles à neutron et de trous noirs. Elle a pour principe de base de diviser l'espace en domaines choisis de manière à ce que les discontinuités physiques soient situées aux frontières de ces domaines. Dans le cas de la modélisation d'une étoile en rotation, il s'agit simplement de considérer deux domaines distincts, un domaine  $V_1$  qui contient l'étoile, et un domaine extérieur  $V_2$ , la surface stellaire se situant à la frontière entre ces deux domaines.

Cette méthode s'appuie sur un système de coordonnées qui évolue de la symétrie sphérique au centre vers la symétrie sphéroïdale à la surface stellaire, pour revenir à la symétrie sphérique en une surface extérieure, frontière extérieure du domaine  $V_2$ .

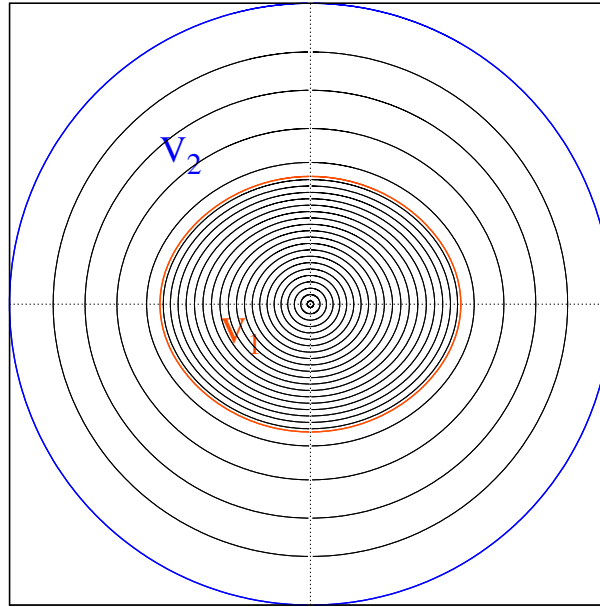


FIGURE 4.1: Coordinate system used in ACOR.  $V_1$  extends from the center to the stellar surface, and  $V_2$  encompasses the star.

Dans ce système, on définit une nouvelle coordonnée radiale  $\zeta$  (qui ne correspond pas à la distance au centre).  $\zeta$  vaut zéro au centre, constante égale à 1 à la surface stellaire, et à 2 à la surface extérieure à  $V_2$ . Et la distance au centre  $r$  doit être une fonction continue et bijective de  $\zeta$  dans chaque domaine, ainsi qu'à la frontière, où  $r(1, \theta) = R_s(\theta)$  (surface de l'étoile). Bonazzola et al. (1998) proposent de choisir l'homéomorphisme suivant :

$$\forall \zeta \in [0; 1], \forall \theta \in [0; \pi],$$

$$r(\zeta, \theta) = (1 - \epsilon)\zeta + \frac{5\zeta^3 - 3\zeta^5}{2} (R_s(\theta) - 1 + \epsilon) \quad (4.2)$$

$$\forall \zeta \in [1; 2], \forall \theta \in [0; \pi],$$

$$r(\zeta, \theta) = 2\epsilon + (1 - \epsilon)\zeta + (2\zeta^3 - 9\zeta^2 + 12\zeta - 4) (R_s(\theta) - 1 + \epsilon) \quad (4.3)$$

Où  $R_s(\theta)$  correspond au rayon à la surface de l'étoile,  $\epsilon$  représente l'aplatissement de l'étoile  $\epsilon = 1 - R_{\text{pole}}/R_{\text{eq}}$ . Cette définition assure la continuité de  $r(\zeta, \theta)$  et  $r_\zeta(\zeta, \theta)$  (où  $r_\zeta$  représente  $\partial r/\partial \zeta$ ) à travers la frontière  $\zeta = 1$ . À  $\zeta = 2$ , on a  $r = 2$  et  $r_\zeta = (1 - \epsilon)$ . De la même manière, on notera  $r_\theta = \partial r/\partial \theta$ . Dans le cas particulier où la rotation est nulle, alors l'aplatissement  $\epsilon$  est nul,  $R_s$  ne dépend pas de la latitude, et  $r(\zeta, \theta) = \zeta$ .

Notons que dans cette définition du système de coordonnées, les surfaces iso- $\zeta$  ne seront jamais correspondantes aux isobares. Au chapitre 7, nous proposons, pour un modèle évolué d'étoile, un système de coordonnées à trois domaines, dans le cas où  $r_\zeta$  n'est pas constant à la surface stellaire. Dans ce cas réaliste, précisons que le système choisi permet d'assurer la constance de la coordonnée  $\zeta$  sur les isobares dans une grande partie de l'intérieur stellaire.

On définit alors une nouvelle base sphéroïdale orthogonale (et non normée) de l'espace physique :

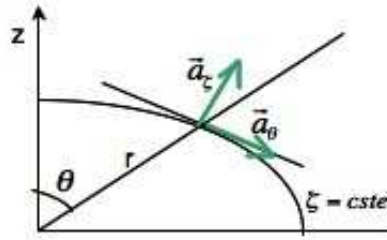


FIGURE 4.2: Scheme of the basis vectors :  $\vec{a}_\theta$  is tangential to iso- $\zeta$  surfaces, whereas  $\vec{a}_\zeta$  is directly orthogonal to  $\vec{a}_\theta$ .

$$\begin{aligned}
 \text{vecteur orthogonal aux surfaces } \zeta = \text{constante} : & \quad \vec{a}_\zeta = g \left( \vec{e}_r - \frac{r_\theta}{r} \vec{e}_\theta \right) \\
 \text{vecteurs colinaires aux surfaces } \zeta = \text{constante} : & \quad \vec{a}_\theta = g \left( \vec{e}_\theta + \frac{r_\theta}{r} \vec{e}_r \right) \\
 \text{Où l'on a introduit : } & \quad g(\zeta, \theta) = \frac{1}{1 + \frac{r_\theta^2}{r^2}}, \quad \vec{a}_\varphi = \vec{e}_\varphi
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

et où  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$  sont les vecteurs de la base sphérique bien connue. Réciproquement :

$$\vec{e}_r = \vec{a}_\zeta + \frac{r_\theta}{r} \vec{a}_\theta \quad \vec{e}_\theta = -\frac{r_\theta}{r} \vec{a}_\zeta + \vec{a}_\theta \quad \vec{e}_\varphi = \vec{a}_\varphi \tag{4.5}$$

#### 4.1.2 Changements de base

**Opérateurs différentiels** : Dans les équations du fluide stellaire, des opérateurs différentiels en terme des coordonnées sphériques apparaissent. Il est utile de calculer leur équivalent dans le système de coordonnées sphéroïdales :

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{\partial X}{\partial r} \right)_\theta &= \frac{1}{r_\zeta} \left( \frac{\partial X}{\partial \zeta} \right)_\theta, \\
 \left( \frac{\partial X}{\partial \theta} \right)_\zeta &= \left( \frac{\partial X}{\partial \theta} \right)_r + \frac{r_\theta}{r_\zeta} \left( \frac{\partial X}{\partial \zeta} \right)_\theta.
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

**Perturbation de la vitesse :** on peut ainsi exprimer la perturbation de la vitesse dans la nouvelle base en fonction de ses composantes dans l'ancienne :  $\mathbf{v}'_\phi$  reste inchangé alors que les autres composantes s'expriment comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_\zeta &= \mathbf{v}'_r - \frac{r_\theta}{r} \mathbf{v}'_\theta, & \text{réciproquement : } & \mathbf{v}'_r = g(\mathbf{v}'_\zeta + \frac{r_\theta}{r} \tilde{\mathbf{v}}'_\theta) \\ \tilde{\mathbf{v}}'_\theta &= \mathbf{v}'_\theta + \frac{r_\theta}{r} \mathbf{v}'_r, & & \mathbf{v}'_\theta = g(\tilde{\mathbf{v}}'_\theta - \frac{r_\theta}{r} \mathbf{v}'_\zeta) \end{aligned} \quad (4.7)$$

Où le terme  $g$  a été introduit dans l'équation 4.5.

## 4.2 Obtention d'un système d'équations différentielles

Les équations d'oscillations adiabatiques non radiales sont établies dans le chapitre 2 dans le cas général :

**Équation de continuité**

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}' + \rho' \mathbf{v}_0) = 0 \quad (4.8)$$

**Équation de mouvement fluide**

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) v'_i \right] \mathbf{e}_i + 2\Omega \times \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla \Omega) r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p' - \nabla \Phi' + \frac{\rho'}{\rho_0^2} \nabla p_0 \quad (4.9)$$

**Relation adiabatique**

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) \left( \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{p'}{\Gamma_1 p_0} \right) + \mathbf{v}' \cdot \left( \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} - \frac{\nabla p_0}{\Gamma_1 p_0} \right) = 0 \quad (4.10)$$

**Équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel**

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (4.11)$$

**Adimensionnement :** Lorsque des équations sont traitées numériquement, il est préférable que les grandeurs soient adimensionnées lors des calculs. Nous choisissons de définir de nouvelles grandeurs sans dimension :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \left( \frac{4\pi R_{eq}^3}{M} \right) \rho & \tilde{p} &= \left( \frac{4\pi R_{eq}^4}{GM^2} \right) p & \tilde{\phi} &= \left( \frac{R_{eq}}{GM} \right) \phi \\ \sigma &= \frac{\omega}{\Omega_k} & \tilde{\Omega} &= \frac{\Omega}{\Omega_k} \end{aligned}$$

Sachant que  $R_{eq}$  désigne le rayon de l'étoile à l'équateur et  $M$  sa masse totale. Par la suite, nous désignerons par  $r$  le rayon adimensionné au rayon équatorial  $R_{eq}$ . Les équations s'expriment avec les grandeurs adimensionnées, cela donne par exemple pour l'équation de Poisson :  $\nabla^2 \tilde{\Phi}' = \tilde{\rho}'$ . Dorénavant, nous omettrons les tildes, toutes les grandeurs évoquées plus loin seront des grandeurs adimensionnées. Les indices 0 pour les grandeurs d'équilibre seront également omis.



### 4.2.1 Intérieur stellaire : $\zeta \in [0; 1]$

Plutôt que projeter simplement l'équation de mouvement fluide (2.29) dans la nouvelle base, nous avons choisi de décomposer l'équation de mouvement en champ radial, poloïdal et toroïdal. Ce choix permet d'obtenir une équation dans laquelle les dérivées partielles par rapport aux coordonnées angulaires n'apparaissent pas (4.12, obtenue en projetant l'équation de mouvement sur le vecteur de base  $\vec{a}_\zeta$ ), et deux autres équations dans lesquelles ce sont les dérivées partielles des fonctions propres par rapport à  $\zeta$ , la coordonnée radiale, qui n'apparaissent pas (4.17, 4.20). Cette décomposition se révélera particulièrement utile pour réduire le nombre d'inconnues du système d'équations différentielles final.

#### Composante radiale de l'équation de mouvement

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi'}{\partial \zeta} = & -i(m\Omega + \sigma) M_\zeta v'_\zeta - i(m\Omega + \sigma) \sin \theta M_\mu \tilde{v}'_\theta \\ & - \sin \theta M_\phi v'_\phi - \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} + M_{\rho'} \rho' + M_{\pi'} \pi' \end{aligned} \quad (4.12)$$

Avec,

$$\begin{aligned} M_\zeta &= r_\zeta g(\zeta, \mu) \\ M_\mu &= -r_\zeta g(\zeta, \mu) \frac{r_\mu}{r} \\ M_\phi &= -2\Omega r_\zeta \\ M_{\rho'} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \\ M_{\pi'} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Où la colatitude  $\theta$  disparaît au profit de  $\mu = \cos \theta$ , ainsi  $r_\theta = -\sin \theta r_\mu$ . On a effectué le changement de variable :  $\pi' = p' / \rho$  afin d'éviter les problèmes de singularité à la surface, pour les modèles polytropiques par exemple. Il est aisément vérifiable qu'en l'absence de rotation, cette équation est équivalente à l'équation (2.37).

#### Divergence de la composante horizontale de l'équation de mouvement

On étudie les mouvements de flux à travers les surfaces sphéroïdales. Pour ce faire, on prend la divergence de la composante horizontale de l'équation de mouvement. On applique l'opérateur  $r \vec{\nabla}_\perp \cdot$ , où pour un vecteur quelconque  $\vec{X}$  :

$$\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{X} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta X_\theta)_\zeta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} (X_\varphi) \quad (4.14)$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta (m\Omega + \sigma) \tilde{v}'_{\theta} \right)_{\zeta} - \frac{2}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \Omega \sin \theta \left( \frac{r_{\theta}}{r} \sin \theta + \cos \theta \right) v'_{\phi} \right)_{\zeta} - \frac{m(m\Omega + \sigma)}{\sin \theta} v'_{\phi} \\
& + 2im\Omega g \left( \cot \theta + \frac{r_{\theta}}{r} \right) \tilde{v}'_{\theta} + img \left[ 2\Omega \left( 1 - \frac{r_{\theta}}{r} \cot \theta \right) + \frac{r}{r_{\zeta}} \left( 1 - \frac{r_{\theta}^2}{r^2} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} - \frac{r_{\theta}}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right] v'_{\zeta} + img \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \tilde{v}'_{\theta} \\
& = \frac{1}{r} L^2 \pi' + \frac{1}{r} L^2 \Phi' + \frac{r_{\theta}}{r^2} \frac{\partial \pi'}{\partial \theta} + \frac{r_{\theta}}{r^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin \theta}{r\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \pi' \right)_{\zeta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin \theta}{r\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \rho' \right)_{\zeta}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Où l'opérateur  $L^2$  désigne l'opérateur moment cinétique orbital :

$$\begin{aligned}
L^2 \Psi &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} \\
&= -(1 - \mu^2) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \mu^2} + 2\mu \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} - \frac{1}{(1 - \mu^2)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

Dont les harmoniques sphériques sont fonctions propres :  $L^2 Y_{\ell}^m(\theta, \varphi) = \ell(\ell+1) Y_{\ell}^m(\theta, \varphi)$ .

Ainsi, après avoir fait le changement de variable  $\mu = \cos \theta$ , pour la divergence de la composante horizontale de l'équation de mouvement, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= (m\Omega + \sigma) \left[ \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \tilde{v}'_{\theta} \right) - \frac{m}{\sin \theta} v'_{\varphi} \right] - D_{\varphi\mu} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v'_{\varphi}) \\
&- iD_{\zeta} v'_{\zeta} - i \sin \theta D_{\mu} \tilde{v}'_{\theta} - \sin \theta D_{\varphi} v'_{\varphi} - \frac{1}{r} L^2 \pi' - \frac{1}{r} L^2 \Phi' \\
&+ D_{\Phi\mu} \frac{\partial \Phi'}{\partial \mu} + D_{\rho\rho'} + D_{\rho\mu} \frac{\partial \rho'}{\partial \mu} + D_{\pi\pi'} + D_{\pi\mu} \frac{\partial \pi'}{\partial \mu}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Avec,

$$\begin{aligned}
D_{\varphi\mu} &= \Omega t \quad \text{où} \quad t(\zeta, \mu) = 2 \left( \mu - (1 - \mu^2) \frac{r_{\mu}}{r} \right) \\
D_{\zeta} &= -mg \left[ 2\Omega \left( 1 - \frac{r_{\theta}}{r} \cot \theta \right) + \frac{r}{r_{\zeta}} \left( 1 - \frac{r_{\theta}^2}{r^2} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} - \frac{r_{\theta}}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right] \\
D_{\mu} &= m \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} (1 + g) - \frac{\Omega g t}{1 - \mu^2} \right] \\
D_{\varphi} &= -\frac{\partial(\Omega t)}{\partial \mu} \\
D_{\rho} &= -\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{r\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) \\
D_{\rho\mu} &= -\frac{(1 - \mu^2)}{r\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \\
D_{\pi} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{r\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right) \\
D_{\pi\mu} &= \frac{1 - \mu^2}{r} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} - \frac{r_{\mu}}{r} \right) \\
D_{\Phi\mu} &= -\frac{(1 - \mu^2) r_{\mu}}{r^2}
\end{aligned}$$

Cette équation est la contrepartie de l'équation (2.38) dans le cas sans rotation. En effet, en l'absence de rotation, tous les termes  $D_\mu$ ,  $D_\varphi$ , etc. sont nuls, et on sait d'après (2.23) que sans rotation,  $\mathbf{v}' = i\sigma\xi$ . On retrouve alors la relation (2.38) :

$$\begin{aligned}\sigma^2 \nabla_\perp \cdot \xi &= \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} (\pi' + \Phi') \\ \Leftrightarrow \sigma^2 \nabla_\perp \cdot \xi_\perp &= \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \left( \frac{p'}{\rho_0} + \Phi' \right)\end{aligned}\quad (4.18)$$

### Composante suivant $\vec{a}_\zeta$ du rotationnel de l'équation de mouvement

Afin de mettre en évidence les mouvements toroïdaux de fluide, on prend le rotationnel de l'équation de mouvement perturbée. On introduit le vecteur vorticité (Unno et al. 1989) tel que :  $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}$ . En terme du vecteur vorticité, le rotationnel de l'équation de mouvement s'écrit :

$$\left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \omega'_i \right] \mathbf{e}_i + (\omega' \cdot \nabla \Omega) r \sin \theta \mathbf{e}_\phi + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) 2\Omega - (2\Omega \cdot \nabla) \mathbf{v}' + (\nabla \cdot \mathbf{v}') 2\Omega + \nabla \times \left( \frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

On projette ensuite cette équation vectorielle sur la direction  $\vec{a}_\zeta$ . Après calculs, on obtient :

$$\begin{aligned}0 &= i(m\Omega + \sigma) \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v'_\varphi) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{v}'_\theta}{\partial \varphi} \right] + i(m\Omega + \sigma) \frac{r_\theta}{r} v'_\varphi + i \sin \theta R_\varphi v'_\varphi \\ &+ R_\zeta v'_\zeta + \sin \theta R_\mu \tilde{v}'_\theta + R_{\zeta\mu} \frac{\partial v'_\zeta}{\partial \mu} + R_{\mu\mu} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{v}'_\theta) + iR_\pi \pi' + iR_\rho \rho'\end{aligned}$$

Avec,

$$\begin{aligned}R_\zeta &= a t + (1 - \mu^2) \frac{r_\mu}{r} c + \Omega t (d + f) \\ R_\mu &= -t b + c - 2\Omega + \Omega(e + h) t \\ R_{\zeta\mu} &= -\Omega(1 - \mu^2) \left( 2 + \frac{r_\mu}{r} g t \right) \\ R_{\mu\mu} &= \Omega t g \\ R_\varphi &= \frac{m\Omega t}{(1 - \mu^2)} \\ R_\pi &= -\frac{m}{r\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \\ R_\rho &= \frac{m}{r\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \mu}\end{aligned}$$

Où  $a(\zeta, \mu)$ ,  $b(\zeta, \mu)$ ,  $c(\zeta, \mu)$ ,  $d(\zeta, \mu)$ ,  $e(\zeta, \mu)$ ,  $f(\zeta, \mu)$ ,  $h(\zeta, \mu)$  et  $t(\zeta, \mu)$  sont des coefficients sans dimension explicités en Annexe A, dans les équations (A.6)   (A.13),  $g(\zeta, \mu)$  est défini dans (4.5).

### Relation adiabatique

Dans le cas particulier où l'on considère une étoile sphérique à l'équilibre, on définit le discriminant de Schwarzschild comme établi par Ledoux & Walraven (1958). Dans le cas présent, bidimensionnel, de nouvelles quantités analogues au discriminant de Schwarzschild semblent plus appropriées :

$$A_\zeta = \frac{1}{\Gamma_1} \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \zeta} \right)_\mu - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \zeta} \right)_\mu \quad (4.20)$$

$$A_\mu = \frac{1}{\Gamma_1} \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \mu} \right)_\zeta - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \mu} \right)_\zeta \quad (4.21)$$

De cette manière, la relation adiabatique (2.31) peut être écrite :

$$i(m\Omega + \sigma) \left( \frac{1}{\rho} \rho' - \frac{\rho}{\Gamma_1 p} \pi' \right) - \tilde{A}_\zeta v'_\zeta + \sin \theta \tilde{A}_\mu \tilde{v}'_\theta = 0 \quad (4.22)$$

Où l'on a introduit :  $\tilde{A}_\mu = g A_\mu / r$ , et  $\tilde{A}_\zeta = A_\zeta / r_\zeta - (1 - \mu^2) r_\mu \tilde{A}_\mu / r$ .

### Équation de continuité

Reprenons l'équation de continuité linéarisée (2.25) :

$$i(m\Omega + \sigma) \frac{\rho'}{\rho} + \nabla \cdot \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \cdot \nabla \ln \rho = 0$$

En s'aidant de l'équation d'énergie (2.31) on obtient :

$$i(m\Omega + \sigma) \frac{\rho}{\Gamma_1 p} \pi' + \frac{1}{\Gamma_1} \mathbf{v}' \cdot \nabla \ln p + \nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$$

Ce qui après développements, puis en rassemblant par variables, donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_\zeta}{\partial \zeta} &= -i(m\Omega + \sigma) \frac{r_\zeta \rho}{\Gamma_1 p} \pi' - g \frac{r_\zeta}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{v}'_\theta) - \frac{r_\zeta}{r \sin \theta} \frac{\partial v'_\varphi}{\partial \varphi} \\ &+ C_\zeta v'_\zeta - \sin \theta C_\mu \tilde{v}'_\theta + C_{\zeta, \mu} \frac{\partial v'_\zeta}{\partial \mu} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Avec,

$$\begin{aligned} C_\zeta &= \frac{1}{\Gamma_1 p} \left( g \frac{(1 - \mu^2) r_\mu r_\zeta}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \mu} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + g \frac{r_\zeta}{r} \left( (1 - \mu^2) \frac{r_\mu}{2r} - \frac{r}{2r_\mu} h - d \right) \\ C_\mu &= -g \frac{r_\zeta}{r} \left( \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{\partial p}{\partial \mu} + e + h + \frac{r_\mu}{r} \right) \\ C_{\zeta \mu} &= (1 - \mu^2) g \frac{r_\zeta r_\mu}{r^2} \end{aligned}$$

### Équation de Poisson

Pour développer l'équation de Poisson, on calcule le Laplacien du potentiel sphérique dans le système de coordonnées  $(\zeta, \theta, \varphi)$  en utilisant les relations différentielles établies dans (4.6) :

$$\begin{aligned} \rho' &= \frac{1}{r_\zeta^2 \cdot g(\zeta, \mu)} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{r_\zeta} \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} \left[ \frac{r_\theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{r_\theta}{r_\zeta} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{r^2}{r_\zeta} \right) - \frac{r_\zeta}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{r_\theta}{r_\zeta} \sin \theta \right) \right] \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Phi'}{\partial \theta} \right) - \frac{2r_\theta}{r_\zeta r^2} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \zeta \partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial \varphi^2} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Enfin, pour conserver un système différentiel du premier ordre, il est nécessaire d'introduire une nouvelle variable au problème, on la notera  $d\Phi'$  telle que :

$$d\Phi' = \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} \quad (4.25)$$

En rassemblant par variables, on obtient alors :

$$\frac{\partial d\Phi'}{\partial \zeta} = P_{\rho'} \rho' + P_{d\Phi'} d\Phi' + P_{d\Phi'\mu} \frac{\partial d\Phi'}{\partial \mu} + P_{\Phi'\mu} L^2(\Phi') \quad (4.26)$$

Avec,

$$\begin{aligned} P_{d\Phi'} &= \frac{g}{r_\zeta} \frac{\partial r_\zeta}{\partial \zeta} - g \frac{r_\zeta}{r} \left( 2 + 2\mu \frac{r_\mu}{r} - (1 - \mu^2) \frac{1}{r} \frac{\partial r_\mu}{\partial \mu} \right) \\ P_{d\Phi'\mu} &= 2(1 - \mu^2) \frac{r_\mu r_\zeta}{r^2} g \\ P_{\Phi'\mu} &= \frac{r_\zeta^2}{r^2} g \\ P_{\rho'} &= r_\zeta^2 g \end{aligned} \quad (4.27)$$

#### 4.2.2 Dans le vide : entre $\zeta = 1$ et $\zeta = 2$

Dans cette partie de l'étoile, on prend  $\rho' = 0$  et l'équation de Poisson devient alors :

$$\frac{\partial d\Phi'}{\partial \zeta} = P_{d\Phi'} d\Phi' + P_{d\Phi'\mu} \frac{\partial d\Phi'}{\partial \mu} + P_{\Phi'\mu} L^2(\Phi') \quad (4.28)$$

Avec,

$$\begin{aligned} P_{d\Phi'} &= \frac{g}{r_\zeta} \frac{\partial r_\zeta}{\partial \zeta} - g \frac{r_\zeta}{r} \left( 2 + 2\mu \frac{r_\mu}{r} - (1 - \mu^2) \frac{1}{r} \frac{\partial r_\mu}{\partial \mu} \right) \\ P_{d\Phi'\mu} &= 2(1 - \mu^2) \frac{r_\mu r_\zeta}{r^2} g \\ P_{\Phi'\mu} &= \frac{r_\zeta^2}{r^2} g \end{aligned}$$

### 4.2.3 Système d'équations final

Au final, on obtient un système d'équations aux dérivées partielles, dont deux ne font pas intervenir de dérivées par rapport à la coordonnée radiale  $\zeta$  (4.17, 4.20), (4.22) est une équation algébrique, et les autres sont des équations différentielles partielles en  $\zeta$  et  $\mu$ . Les sept inconnues du système sont la perturbation de la pression ( $\pi'$ ), de la densité ( $\rho'$ ), du potentiel gravitationnel ( $\Phi'$ ), de sa dérivée ( $d\Phi'$ ), et les trois composantes de la perturbation de la vitesse dans le système de coordonnées sphéroïdales ( $v'_\zeta, \tilde{v}'_\theta, v'_\varphi$ ). Dans l'intérieur stellaire :

$$E_1 \Leftrightarrow (4.12)$$

$$E_2 \Leftrightarrow (4.25)$$

$$E_3 \Leftrightarrow (4.26)$$

$$E_4 \Leftrightarrow (4.23)$$

$$E_5 \Leftrightarrow (4.17)$$

$$E_6 \Leftrightarrow (4.20)$$

$$E_7 \Leftrightarrow (4.22)$$

Et pour la zone comprise entre la surface de l'étoile et la surface délimitée par  $\zeta = 2$  :

$$E'_1 \Leftrightarrow (4.28)$$

$$E'_2 \Leftrightarrow (4.25)$$

## 4.3 Décomposition spectrale

### 4.3.1 Décomposition sur une base d'harmoniques sphériques

On décompose les variables sur une base d'harmoniques sphériques (Rieutord 1987) que l'on notera  $Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)$ . On sait que tout champ de vecteur de l'espace physique peut se décomposer en parties radiale, sphéroïdale et toroïdale. Pour la perturbation de la vitesse, on peut alors écrire :

$$\vec{v}' = \sum_{\ell \geq |m|}^{+\infty} u_\ell \vec{\mathcal{R}}_\ell^m + v_\ell \vec{\mathcal{S}}_\ell^m + w_\ell \vec{\mathcal{T}}_\ell^m$$

$$\text{Où } \vec{\mathcal{R}}_\ell^m = i Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \vec{a}_\zeta$$

$$\vec{\mathcal{S}}_\ell^m = i \vec{\nabla}_h Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) = i \left( \frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \vec{a}_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \vec{a}_\varphi \right)$$

$$\vec{\mathcal{T}}_\ell^m = -i \vec{\nabla}_h \times \vec{\mathcal{R}}_\ell^m = \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{\partial \varphi} \vec{a}_\theta - \frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \vec{a}_\varphi \right)$$

Ce qui donne pour chaque composante de la perturbation de la vitesse :

$$v'_\zeta(\zeta, \theta, \varphi) = i \sum_{\ell \geq |m|}^{+\infty} u_\ell(\zeta) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad (4.29)$$

$$\tilde{v}'_\theta(\zeta, \theta, \varphi) = i \sum_{\ell \geq |m|}^{+\infty} \left( v'_\ell(\zeta) \frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} + w'_\ell(\zeta) \frac{m}{\sin \theta} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \right) \quad (4.30)$$

$$v'_\varphi(\zeta, \theta, \varphi) = - \sum_{\ell \geq |m|}^{+\infty} \left( v'_\ell(\zeta) \frac{m}{\sin \theta} Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) + w'_\ell(\zeta) \frac{\partial Y_{\ell,m}(\theta, \varphi)}{\partial \theta} \right) \quad (4.31)$$

Pour les perturbations scalaires ( $p'$ ,  $\rho'$ ,  $\Phi'$ ), la décomposition spectrale est simple :

$$f'(\zeta, \theta, \varphi) = \sum_{\ell \geq |m|}^{+\infty} f'_\ell(\zeta) Y_{\ell,m}(\theta, \varphi) \quad (4.32)$$

Ainsi, toute équation aux dérivées partielles E (parmi  $E_1$ - $E_7$ ,  $E'_1$ - $E'_2$ ) s'écrit alors, après décomposition des variables sur les harmoniques sphériques :

$$\sum_{\ell_2 \geq |m|}^{+\infty} E_{\ell_2}(Y_{\ell_2}^m) = 0 \quad (4.33)$$

On applique ensuite à cette équation l'opérateur projection sur l'espace propre associé à l'harmonique sphérique  $Y_{\ell_1}^m$ , et ceci pour tout les  $\ell_1 \geq |m|$ , ce qui s'écrit :

$$\forall \ell_1 \geq |m|, \quad \sum_{\ell_2 \geq |m|}^{+\infty} \int \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi} E_{\ell_2}(Y_{\ell_2,m}) Y_{\ell_1,m}^* = 0 \quad (4.34)$$

En pratique, on limitera les décompositions spectrales (4.29-4.31) à un nombre fini M de termes, et on projettera les équations sur le même nombre d'harmoniques sphériques. Une équation aux dérivées partielles est ainsi transformée en un système de M équations différentielles en  $\zeta$ .

En étudiant le système d'équations développé à la section précédente, on remarque que les opérateurs en question sont de parité déterminée (on parle ici de parité liée à la symétrie par rapport à l'équateur  $\mu = 0$ ) :

\* Les opérateurs intervenant dans l'équation du rotationnel (4.20) qui s'appliquent aux développements spectraux des variables  $w'_\ell$  sont pairs, tandis que pour les autres variables ce sont des opérateurs impairs. Ainsi, pour l'ensemble des variables hormis  $w'_\ell$ , l'équation du rotationnel (4.20) ne couple que les fonctions angulaires de parités différentes, alors que pour  $w'_\ell$  elle couple les fonctions angulaires de parité identique.

\*\* Les opérateurs apparaissant dans les équations autres que l'équation du rotationnel sont pairs pour tous les développements spectraux sauf celui des variables  $w'_\ell$ . Ainsi, ces équations (4.12, 4.17, 4.22, 4.23, 4.26) ne couplent que les  $w'_\ell$  de parités opposées, tandis que pour les autres variables, les couplages se font à parité identique.

Pour les harmoniques sphériques, on considère que leur parité est déterminée par la parité de  $\ell - |m|$ . Elles doivent par ailleurs vérifier la règle d'orthonormalité :

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\theta=-\pi}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sin\theta d\theta d\varphi Y_{\ell_1, m_1}^* Y_{\ell_2, m_2} = \delta_{\ell_1, \ell_2} \delta_{m_1, m_2} \quad (4.35)$$

Ces règles de sélection permettent d'effectuer le calcul des fonctions propres paires et impaires indépendamment. On dira qu'un mode propre est pair si les fonctions propres  $\pi'_\ell, \phi'_\ell, d\phi'_\ell, u'_\ell, v'_\ell, \rho'_\ell$  qui lui sont associées sont paires ( $w'_\ell$  étant impair).

Par ailleurs, les harmoniques sphériques ont une dépendance azimutale en  $e^{im\varphi}$ . Et cette dépendance demeure inchangée par le système. Ainsi, grâce à la règle d'orthonormalisation des harmoniques sphériques (4.35), on peut considérer que les équations du système ne couplent que des fonctions angulaires d'ordre azimutal identique. Tous les calculs sont effectués pour un indice azimutal donné, pour un degré  $\ell$  de parité soit identique, soit différente de celle de  $m$ , et pour un nombre de termes de couplage  $M$  donné, les  $\ell$  sont sélectionnés par :  $\forall j \in [1, M]$ ,

$$\begin{aligned} \ell &= |m| + 2(j-1) + par, & \text{pour } \pi'_\ell, \phi'_\ell, d\phi'_\ell, u'_\ell, v'_\ell, \rho'_\ell, \\ \ell_p &= |m| + 2(j-1) + par + (-1)^{par}, & \text{pour } w'_{\ell_p}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

Avec  $par = 0$  si les parités de  $m$  et de  $\ell$  sont identiques,  $par = 1$  sinon.

Les développements spectraux des équations d'oscillation sont donnés en Annexe A.

## 4.4 Conditions aux limites

Afin de fermer le système d'équations, il est nécessaire d'imposer des conditions aux limites. Nous sommes en présence de quatre équations différentielles du premier ordre. Pour discrétiser les équations, nous allons utiliser un schéma similaire aux différences finies. Ainsi, pour un modèle à  $N_r$  couches radiales, ce schéma nous apporte  $4 \times (N_r - 1)$  équations. Il est donc nécessaire d'imposer 4 équations supplémentaires : les conditions aux limites. La résolution du problème discrétisé se faisant de manière directe et simultanée, nous avons donc recours à 2 conditions aux limites au centre, 1 à la surface stellaire, puis une au niveau d'une surface extérieure en  $\zeta = 2$ .

### 4.4.1 Conditions au centre

#### Comportement des fonctions radiales au centre

Afin de bien comprendre les conditions aux limites au centre (qui sont particulières du fait du système de coordonnées), et de déterminer les termes dominants dans les équations, conformément à Rieutord (2004), rappelons le comportement au centre de l'étoile des perturbations scalaires :

$$\pi'_\ell = \mathcal{O}(\zeta^\ell) \quad \Phi'_\ell = \mathcal{O}(\zeta^\ell) \quad \rho'_\ell = \mathcal{O}(\zeta^\ell)$$



En ce qui concerne la perturbation de la vitesse, les fonctions radiales de sa décomposition spectrale se comportent comme :

$$\begin{aligned} u_\ell &= \mathcal{O}(\zeta^{\ell-1}) \quad \text{et} \quad u_0 = \mathcal{O}(\zeta), \\ v'_\ell &= \mathcal{O}(\zeta^{\ell-1}) \quad \text{et} \quad v_0 = 0, \\ w'_\ell &= \mathcal{O}(\zeta^\ell) \end{aligned}$$

En tenant compte de la parité particulière associée aux variables  $w'_\ell$ , nous résumons dans la table qui suit (Tab. 4.1) les différents termes intervenant dans les divers cas de figure, ainsi que leur comportement au centre.

TABLE 4.1: Central behavior of the first terms in the spectral expansion in different cases : in blue are given the **odd modes** and in red the **even modes**.

	$u'_\ell, v'_\ell$	$w'_\ell$	$\pi'_\ell, \Phi'_\ell, d\Phi'_\ell, \rho'_\ell$
<i>m = 0 et par = 1</i>	$u'_1 \propto \zeta^0$ $u'_3 \propto \zeta^2$	$w'_2 \propto \zeta^2$ $w'_4 \propto \zeta^4$	$\pi'_1 \propto \zeta$ $\pi'_3 \propto \zeta^3$
<i>m ≠ 0 et par = 0</i>	$u'_{ m } \propto \zeta^{ m -1}$ $u'_{ m +2} \propto \zeta^{ m +1}$	$w'_{ m +1} \propto \zeta^{ m +1}$ $w'_{ m +3} \propto \zeta^{ m +3}$	$\pi'_{ m } \propto \zeta^{ m }$ $\pi'_{ m +2} \propto \zeta^{ m +2}$
<i>m = 0 et par = 0</i>	$u'_0 \propto \zeta$ $u'_2 \propto \zeta^1$	$w'_1 \propto \zeta$ $w'_3 \propto \zeta^3$	$\pi'_0 \propto \zeta^0$ $\pi'_2 \propto \zeta^0$
<i>m ≠ 0 et par = 1</i>	$u'_{ m +1} \propto \zeta^{ m }$ $u'_{ m +3} \propto \zeta^{ m +2}$	$w'_{ m } \propto \zeta^{ m }$ $w'_{ m +2} \propto \zeta^{ m +2}$	$\pi'_{ m +1} \propto \zeta^{ m +1}$ $\pi'_{ m +3} \propto \zeta^{ m +3}$

Notons que dans le cas où l'on veut calculer un mode impair, il est inutile de chercher à calculer le terme  $w'_0$  qui n'a pas de sens (comme dans le cas sphérique, la composante  $\ell = 0$  n'a pas de partie toroïdale).

### Comportement des équations au centre

Afin de dégager les termes dominants des équations au voisinage du centre, effectuons leur passage à la limite. Pour des raisons méthodologiques, exprimons alors les fonctions propres au centre comme suit :

$$\begin{aligned} \pi'_\ell(\zeta) &= \zeta^\ell \tilde{\pi}'_\ell(\zeta) & \Phi'_\ell(\zeta) &= \zeta^\ell \tilde{\Phi}'_\ell(\zeta) & \rho'_\ell(\zeta) &= \zeta^\ell \tilde{\rho}'_\ell(\zeta) \\ u_\ell(\zeta) &= \zeta^{\ell-1} \tilde{u}_\ell(\zeta) & v_\ell(\zeta) &= \zeta^{\ell-1} \tilde{v}_\ell(\zeta) & w_\ell(\zeta) &= \zeta^\ell \tilde{w}_\ell(\zeta) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Où les grandeurs tildées auront un comportement constant au centre. Par ailleurs pour

la dérivée du potentiel gravitationnel, il vient :

$$\begin{aligned}
 d\Phi' &= \frac{\partial\Phi'}{\partial\zeta} = \frac{\partial}{\partial\zeta} \left( \zeta^\ell \tilde{\Phi}'_\ell \right) \\
 &= \zeta^\ell \frac{\partial\tilde{\Phi}'_\ell}{\partial\zeta} + \ell \zeta^{\ell-1} \tilde{\Phi}'_\ell \\
 &= \zeta^{\ell+1} d\tilde{\Phi}'_\ell + \ell \zeta^{\ell-1} \tilde{\Phi}'_\ell
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$\text{avec } d\tilde{\Phi}'_\ell = \frac{1}{\zeta} \frac{\partial\tilde{\Phi}'_\ell}{\partial\zeta} \tag{4.39}$$

En Annexe B, on trouvera les détails des développements pour les équations du problème au centre, c'est-à-dire lorsque les grandeurs d'équilibre sont considérées comme sphériques. Au final, on obtient :

Cas général :

Équation de mouvement radial (Eq. B.5)

$$\begin{aligned}
 \zeta^\ell \frac{\partial\tilde{\pi}'_\ell}{\partial\zeta} &= \left[ (m\Omega + \sigma) (1 - \epsilon) \tilde{u}'_\ell - 2m\Omega (1 - \epsilon) \tilde{v}'_\ell - \ell \tilde{\Phi}'_\ell - \ell \tilde{\pi}'_\ell - 2(\ell - 1) J_\ell^m \Omega (1 - \epsilon) \tilde{w}'_{\ell-1} \right] \zeta^{\ell-1} \\
 &+ \left[ \mathcal{M}_\rho \tilde{\rho}'_\ell + \mathcal{M}_\pi \tilde{\pi}'_\ell + 2(\ell + 2) J_{\ell+1}^m \Omega (1 - \epsilon) \tilde{w}'_{\ell+1} - d\tilde{\Phi}'_\ell \right] \zeta^{\ell+1}
 \end{aligned} \tag{4.40}$$

Équation de la divergence du mouvement (Eq. B.9)

$$\begin{aligned}
 0 &= \left[ ((m\Omega + \sigma) \ell(\ell + 1) - 2m\Omega) \tilde{v}'_\ell - 2m\Omega \tilde{u}'_\ell - 2\Omega(\ell + 1)(\ell - 1) J_\ell^m \tilde{w}'_{\ell-1} \right. \\
 &\left. - \frac{\zeta}{r} \ell(\ell + 1) \tilde{\pi}'_\ell - \frac{\zeta}{r} \ell(\ell + 1) \tilde{\Phi}'_\ell \right] \zeta^{\ell-1} - 2\Omega \ell(\ell + 2) J_{\ell+1}^m \tilde{w}'_{\ell+1} \zeta^{\ell+1}
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Composante radiale du rotationnel de l'équation de mouvement (Eq. B.12)

$$\begin{aligned}
 0 &= 2\Omega \left[ -(\ell_{1p} - 1)(\ell_{1p} + 1) J_{\ell_{1p}}^m \tilde{v}'_{\ell_{1p}-1} + (\ell_{1p} + 1) J_{\ell_{1p}}^m \tilde{u}'_{\ell_{1p}-1} \right] \zeta^{\ell_{1p}-2} \\
 &+ \left[ ((m\Omega + \sigma)\ell_{1p}(\ell_{1p} + 1) - 2m\Omega) \tilde{w}'_{\ell_{1p}} - 2\Omega \ell_{1p} J_{\ell_{1p}+1}^m \left( (\ell_{1p} + 2) \tilde{v}'_{\ell_{1p}+1} + \tilde{u}'_{\ell_{1p}+1} \right) \right] \zeta^{\ell_{1p}}
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Relation adiabatique (Eq. B.18)

$$0 = (m\Omega + \sigma) \frac{1}{\rho_0} \zeta^\ell \tilde{\rho}'_\ell - (m\Omega + \sigma) \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \zeta^\ell \tilde{\pi}'_\ell - \frac{1}{r_\zeta} \mathcal{A}_\zeta \zeta^\ell \tilde{u}'_\ell \tag{4.43}$$

Équation de continuité (Eq. B.23)

$$\begin{aligned}
 \zeta^{\ell-1} \frac{\partial\tilde{u}'_\ell}{\partial\zeta} &= [(-(\ell - 1) + \mathcal{C}_\zeta) \tilde{u}'_\ell + \ell(\ell + 1) \tilde{v}'_\ell] \zeta^{\ell-2} \\
 &- (1 - \epsilon)(m\Omega + \sigma) \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \zeta^\ell \tilde{\pi}'_\ell
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Équation de Poisson (Eq. B.27)

$$\zeta^{\ell+1} \frac{\partial d\tilde{\Phi}'_\ell}{\partial\zeta} = (1 - \epsilon)^2 \zeta^\ell \tilde{\rho}'_\ell - (2\ell + 3) \zeta^\ell d\tilde{\Phi}'_\ell \tag{4.45}$$

On remarque à première vue que les équations de mouvement radial (4.40), de continuité (4.44), ainsi que l'équation de Poisson (4.45) sont singulières au centre.

Les conditions aux limites pourraient alors être imposées de telle manière que les termes singuliers s'annulent quand  $\zeta \rightarrow 0$  :

$$0 = (m\Omega + \sigma)(1 - \epsilon) \tilde{u}'_\ell - 2m\Omega(1 - \epsilon) \tilde{v}'_\ell \quad (4.46)$$

$$- \ell \tilde{\Phi}'_\ell - \ell \tilde{\pi}'_\ell - 2(\ell - 1) J_\ell^m \Omega(1 - \epsilon) \tilde{w}'_{\ell-1}$$

$$0 = (1 - \epsilon)^2 \tilde{\rho}'_\ell - (2\ell + 3) d\tilde{\Phi}'_\ell \quad (4.47)$$

Cas |  $m$  | = 0 et  $par = 0$  et  $\ell = 0$  :

Ce cas est particulier du fait que, près du centre,  $u_0 = \mathcal{O}(\zeta)$ , ainsi, l'équation de mouvement n'est pas singulière (voir B.6). Par contre, l'équation de continuité présente une singularité, selon B.24 :

$$\zeta \frac{\partial \tilde{u}'_0}{\partial \zeta} = \left[ - (1 - \epsilon) \sigma \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \tilde{\pi}'_0 + (\mathcal{C}_\zeta - 1) \tilde{u}'_0 \right] \zeta^0 \quad (4.48)$$

L'équation algébrique à imposer au centre dans le cas |  $m$  | = 0 et  $par = 0$  et  $\ell = 0$  serait donc :

$$0 = - (1 - \epsilon) \sigma \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \tilde{\pi}'_0 + (\mathcal{C}_\zeta - 1) \tilde{u}'_0 \quad (4.49)$$

En ce qui concerne l'équation de Poisson, elle est identique au cas général et présente donc également une singularité. L'équation algébrique à imposer dans ce cas est donnée par (4.47).

Ainsi, on aurait les équations algébriques à imposer au centre dans tous les cas de figure. Mais en réalité, l'équation (4.46) est redondante avec les équations (4.41) et (4.42). En effet, au premier ordre, l'équation du rotationnel impose le comportement  $u'_\ell = \ell v'_\ell$  que l'on souhaite. Ceci, introduit dans l'équation de la divergence au premier ordre, donne l'équation du mouvement radial.

Si l'on choisit de prendre en compte tous les ordres dans les équations, les équations algébriques (4.41) et (4.42) permettent d'exprimer la somme des termes singuliers  $\mathcal{O}(\zeta^{\ell-1})$  dans l'équation de mouvement radial (4.40) et de continuité (4.44) sous la forme de termes d'ordre  $\mathcal{O}(\zeta^{\ell+1})$ , et de lever ainsi la singularité au sein de ces équations différentielles. Mais alors un traitement des termes d'ordre  $\mathcal{O}(\zeta^{\ell+1})$  est nécessaire, y compris des termes différenciés. L'obtention d'équations algébriques pour imposer le comportement au centre des variables « tildées » n'est donc pas possible.

Outre ce point, l'utilisation des variables tildées pose un problème numérique très sérieux près du centre. En effet, les matrices  $M \times M$  du problème font apparaître pour l'élément  $(\ell_1, \ell_2)$  un coefficient  $\zeta^{\ell_2}/\zeta^{\ell_1}$ . Les éléments en dessous de la diagonale ( $\ell_1 > \ell_2$ ) « explosent » donc quand on se rapproche du centre. Les matrices deviennent donc extrêmement mal conditionnées et la résolution des équations linéaires associées est affectée d'erreurs numériques considérables.

Nous choisissons alors d'imposer les conditions au centre sur les variables « non tildées » (directement sur les parties radiales de la décomposition en harmoniques sphériques). Selon les valeurs de l'indice azimutal  $m$  et la parité du mode se présentent différents cas de figure (voir Tab. 4.1) :

Cas général :

Le cas général englobe toutes les composantes vérifiant :

- $|m| = 0$  et  $par = 1$ ,
- $|m| \neq 0$  et  $par = 0$ ,

ainsi que les composantes en dehors de la première pour

- $|m| = 0$  et  $par = 0$ , c'est-à-dire  $\ell = 2, 4, 6, \dots$
- $|m| \neq 0$  et  $par = 1$ , c'est-à-dire  $\ell = |m| + 3, |m| + 5, |m| + 7, \dots$

$$0 = u'_\ell - \ell v'_\ell \quad (4.50)$$

$$0 = w'_\ell \quad (4.51)$$

$$0 = (1 - \epsilon) (m\Omega + \sigma) u'_\ell - 2m\Omega(1 - \epsilon) v'_\ell - \frac{\ell}{\zeta} \Phi'_\ell - \frac{\ell}{\zeta} \pi'_\ell \quad (4.52)$$

$$0 = d\Phi'_\ell - \frac{\ell}{\zeta} \Phi'_\ell \quad (4.53)$$

Cas  $|m| = 0$  et  $par = 0$  et  $\ell = 0$  :

Dans ce cas précis,  $w'_{\ell-1}$  n'a pas de sens, et on imposera alors :

$$0 = v'_0 \quad (4.54)$$

$$0 = (1 - \epsilon) \zeta \sigma^2 \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \pi'_0 + 3u'_0 \quad (4.55)$$

$$0 = d\Phi'_0 \quad (4.56)$$

Où la condition sur la vitesse radiale est issue des termes dominants de l'équation de continuité.

Cas  $|m| \neq 0$  et  $par = 1$  et  $\ell = |m| + 1$  :

$$0 = u'_{|m|+1} - \ell v'_{|m|+1} \quad (4.57)$$

$$0 = ((m\Omega + \sigma) |m| (|m| + 1) - 2m\Omega) w'_{|m|} - 2\Omega |m| J^m_{|m|+1} ( (|m| + 2) v'_{|m|+1} + u'_{|m|+1} ) \quad (4.58)$$

$$0 = (m\Omega + \sigma) (1 - \epsilon) u'_{|m|+1} - 2m\Omega(1 - \epsilon) v'_{|m|+1} - \ell \Phi'_{|m|+1} - \ell \pi'_{|m|+1} - 2 |m| J^m_{|m|+1} \Omega (1 - \epsilon) w'_{|m|} \quad (4.59)$$

$$0 = d\Phi'_{|m|+1} - \frac{|m| + 1}{\zeta} \Phi'_{|m|+1} \quad (4.60)$$

Les composantes  $w'_\ell$  sont négligées dans tous les autres cas. Après vérifications, cette méthode s'avère la plus sûre numériquement. Une vérification du bon comportement des fonctions propres près du centre est présentée dans le Chapitre 6.

### 4.4.2 Surface libre

La condition aux limites que nous avons choisi d'adopter à la surface physique de l'étoile est la condition de surface libre  $\delta p = 0$ . On suppose que la surface du modèle d'équilibre est déterminée comme étant une isobare, en  $\zeta$  constante égale à 1, la pression à l'équilibre  $p_0$  est donc constante.

$$\begin{aligned} \delta p = 0 &\Leftrightarrow \frac{Dp'}{Dt} + \mathbf{v}' \cdot \nabla p_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\partial p'}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) p' + \mathbf{v}' \cdot \nabla p_0 = 0 \\ &\Leftrightarrow i(m\Omega + \sigma) p' = -\frac{1}{r_\zeta} \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} v'_\zeta \end{aligned} \quad (4.61)$$

Comme à l'intérieur de l'étoile, on développe les variables  $p'$  et  $v'_\zeta$  sur une base d'harmoniques sphériques, et l'on obtient alors les équations :

Pour  $\ell_1 = |m| + par + 2(j_1 - 1)$  où  $j_1 = 1, M$  :

$$\sum_{\ell_2} \tilde{\pi}'_{\ell_2} \int_{\mu} Y_{\ell_2} Y_{\ell_1}^* d\mu + \sum_{\ell_2} \tilde{u}'_{\ell_2} \int_{\mu} \frac{1}{r_\zeta \rho_0 (m\Omega + \sigma)} \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} Y_{\ell_2} Y_{\ell_1}^* d\mu = 0 \quad (4.62)$$

L'équation (4.62) sera prise comme condition aux limites à la surface de l'étoile.

### 4.4.3 Potentiel gravitationnel à l'infini

Il faut appliquer une condition sur le potentiel gravitationnel, qui traduise le fait que le potentiel tend vers 0 en l'infini. C'est pour cette raison que nous avons ajouté un deuxième domaine autour de l'étoile (4.3), qui permet de calculer le potentiel gravitationnel jusqu'à une frontière sphérique en  $\zeta = 2$ . Au-delà de cette surface,  $\Phi'$  doit resté borné.

$$\begin{aligned} \text{En prenant , } \Phi' &= \sum_{\ell \geq |m|}^{+\infty} \Phi'_\ell(r) Y_{\ell,m} \\ \text{on obtient : } \Delta \Phi' &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\Phi'_\ell}{dr} \right) Y_{\ell,m} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \Phi'_\ell Y_{\ell,m} \end{aligned} \quad (4.63)$$

Il s'agit alors de résoudre  $\Delta \Phi' = 0$ . Pour ce faire, on développe en série le potentiel gravitationnel. Pour chaque composante  $\Phi'_\ell$ , on trouve deux solutions indépendantes : une qui tend vers l'infini quand  $r$  tend vers l'infini :  $\Phi'_\ell = Ar^\ell$ , et une qui tend vers 0 en l'infini :  $\Phi'_\ell = \frac{B}{r^{(\ell+1)}}$ . Ainsi, pour que  $\Phi'$  tende vers 0 en l'infini, la solution qui convient est alors  $\Phi'_\ell = \frac{B}{r^{(\ell+1)}}$ . On a donc :

$$\frac{d\Phi'_\ell}{dr} = -\frac{(\ell+1)}{r} \Phi'_\ell \quad (4.64)$$

Soit en terme des variables du problème :

$$d\Phi'_{\ell_1} = -(\ell_1 + 1) \frac{r_\zeta}{r} \tilde{\Phi}'_{\ell_1} \quad (4.65)$$

Sachant qu'en  $\zeta = 2$ , sur cette surface sphérique, on a également  $r = 2$ , et  $r_\zeta = (1 - \epsilon)$ , où  $\epsilon$  est l'applatissage de l'étoile à la surface. On obtient alors :  
 Pour  $\ell_1 = |m| + par + 2(j_1 - 1)$  où  $j_1 = 1, M$  :

$$\Phi'_{\ell_1} = - \frac{2}{(1 - \epsilon)(\ell_1 + 1)} d\Phi'_{\ell_1} \quad (4.66)$$

Qui sera prise comme condition aux limites sur la surface extérieure.



# Chapitre 5

## Méthode numérique

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Discrétisation radiale du système différentiel . . . . .</b>	<b>93</b>
5.1.1	Mise en forme du système différentiel . . . . .	94
5.1.2	Schéma discret dans l'intérieur stellaire . . . . .	95
5.1.3	Traitement des couches limites . . . . .	96
5.1.4	Représentation matricielle . . . . .	99
<b>5.2</b>	<b>Résolution numérique du système linéaire . . . . .</b>	<b>103</b>
5.2.1	La méthode d'itération inverse généralisée . . . . .	103
5.2.2	Factorisation LU . . . . .	104
<b>5.3</b>	<b>Performances . . . . .</b>	<b>105</b>
5.3.1	Développement spectral . . . . .	105
5.3.2	Résolution radiale . . . . .	106
5.3.3	Le temps et l'espace mémoire . . . . .	107

---

La majeure partie de mon travail de thèse a consisté à écrire un code calculant les fonctions propres et valeurs propres des oscillations adiabatiques non radiales de modèles stellaires bidimensionnels, en prenant en compte la rotation de manière complète. Le traitement bidimensionnel non perturbatif des oscillations d'étoiles en rotation rapide est un problème lourd numériquement. C'est pourquoi mon souci constant a été de développer un outil maniable et rapide afin, à terme, qu'il soit intégré dans une chaîne d'interprétation de données. Dans ce chapitre, je présente la méthode numérique que j'ai développée et implémentée dans mon code dans le but de résoudre le système d'équations régissant les oscillations linéaires adiabatiques d'étoiles en rotation rapide. Le formalisme dans lequel ce travail a été fait, ainsi que les équations en question, ont été exposés dans le chapitre précédent.

### 5.1 Discrétisation radiale du système différentiel

À la fin du chapitre 4, nous avons obtenu un système d'équations composé de quatre équations différentielles partielles du premier ordre (4.12), (4.26), (4.25) et (4.23), et de trois équations algébriques (4.17), (4.20), et (4.22). Avec les conditions aux limites



(4.50) à (4.60) au centre, (4.62) à la surface stellaire, et (4.66) en une surface extérieure, ce système d'équations constitue un problème d'équations différentielles aux limites. Les différenciations seront traitées par une méthode similaire aux différences finies.

### 5.1.1 Mise en forme du système différentiel

Nous choisissons de résoudre le système aux valeurs propres par une méthode itérative type méthode de Newton. Nous supposons donc une valeur d'essai  $\sigma_0$  pour la fréquence d'oscillation. La résolution du problème aux valeurs propres consiste à déterminer le mode d'oscillation dont la fréquence propre  $\sigma$  est la plus proche de  $\sigma_0$ , ainsi que l'écart à la valeur propre initiale  $\delta\sigma$  ( $\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma$ ). Puis  $\sigma$  est prise comme nouvelle valeur d'essai et le processus est itéré jusqu'à convergence. On met alors le système sous forme d'équations matricielles :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\zeta} &= (A_{11} + \delta\sigma A_{12})y_1 + (A_{21} + \delta\sigma A_{22})y_2 \\ 0 &= (B_{11} + \delta\sigma B_{12})y_1 + (B_{21} + \delta\sigma B_{22})y_2 \end{aligned} \quad (5.1)$$

Où  $y_1$  et  $y_2$  sont les vecteurs colonnes contenant les projections spectrales des variables du problème,  $y_1$  contient celles des variables différenciées par le système ( $\tilde{\pi}'_\ell$ ,  $\tilde{\Phi}'_\ell$ ,  $d\tilde{\Phi}'_\ell$  et  $\tilde{u}'_\ell$ ) que l'on appellera variables principales, et  $y_2$  celles des autres variables ( $\tilde{v}'_\ell$ ,  $\tilde{w}'_\ell$  et  $\tilde{\rho}'_\ell$ ) que l'on désignera par variables secondaires. Ainsi, les fonctions propres d'un mode d'oscillation d'ordre azimutal  $m$ , de parité par, issues d'un calcul comprenant  $M$  termes de couplage se mettent sous la forme vectorielle :

$$y_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\pi}'_\ell \\ \tilde{\Phi}'_\ell \\ d\tilde{\Phi}'_\ell \\ \tilde{u}'_\ell \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad y_2 = \begin{bmatrix} \tilde{v}'_\ell \\ \tilde{w}'_\ell \\ \tilde{\rho}'_\ell \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Avec  $\ell = |m| + \text{par} + 2(i-1)$ , pour  $i = 1, M$ . Les matrices  $A_{11}$ ,  $A_{12}$ ,  $A_{21}$ ,  $A_{22}$ , sont les matrices des coefficients associés aux variables dans les équations :

$$\begin{bmatrix} \text{mouvement radial } (E_1) \\ \text{définition de } d\Phi' (E_2) \\ \text{Poisson } (E_3) \\ \text{continuité } (E_4) \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

Alors que les matrices  $B_{11}$ ,  $B_{12}$ ,  $B_{21}$ ,  $B_{22}$ , contiennent les coefficients des équations :

$$\begin{bmatrix} \text{divergence horizontale du mouvement } (E_5) \\ \text{composante radiale du rotationnel du mouvement } (E_6) \\ \text{relation adiabatique } (E_7) \end{bmatrix}. \quad (5.4)$$

Grâce aux trois équations algébriques, nous pouvons exprimer les variables non différenciées dans le système en fonction des variables principales. Pour cela, on utilise l'équation matricielle (5.1). Il faut donc inverser la matrice  $(B_{21} + \delta\sigma B_{22})$ , qui est une matrice carrée réelle de rang  $3M$ ,  $M$  étant le nombre de termes dans le développement spectral.

Pour des scalaires  $b_{21}$  et  $b_{22}$ , on aurait :

$$\frac{1}{b_{21} + \delta\sigma b_{22}} = \frac{1}{b_{21}} \left( \frac{1}{1 + \delta\sigma b_{22}/b_{21}} \right) \sim \frac{1}{b_{21}} \left( 1 - \delta\sigma \frac{b_{22}}{b_{21}} + o(\delta\sigma^2) \right) \quad (5.5)$$

Pour les matrices, on assimile  $B_{21}$  à  $b_{21}$  et  $B_{22}$  à  $b_{22}$ , et on vérifie que l'on ait :

$$(B_{21} + \delta\sigma B_{22})^{-1} \sim B_{21}^{-1} - \delta\sigma B_{21}^{-1} B_{22} B_{21}^{-1} + o(\delta\sigma^2) \quad (5.6)$$

**Vérification :**

$$\begin{aligned} & (B_{21} + \delta\sigma B_{22}) (B_{21}^{-1} - \delta\sigma B_{21}^{-1} B_{22} B_{21}^{-1} + o(\delta\sigma^2)) \\ &= I_d + \delta\sigma B_{22} B_{21}^{-1} - \delta\sigma I_d B_{22} B_{21}^{-1} + o(\delta\sigma^2) \\ &= I_d + o(\delta\sigma^2) \end{aligned}$$

Où  $I_d$  est la matrice identité  $3M \times 3M$ . Pourvu que l'on ait un écart à la valeur supposée de  $\sigma$  suffisamment petit, on obtient :

$$y_2 \simeq [B_{21}^{-1} B_{11} + \delta\sigma (B_{21}^{-1} B_{12} - B_{21}^{-1} B_{22} B_{21}^{-1} B_{11})] y_1 \quad (5.7)$$

$$\text{Que l'on notera plus tard : } y_2 = (B + \delta\sigma B_{\delta\sigma}) y_1 \quad (5.8)$$

L'inverse de la matrice  $B_{21}$  est calculé par la méthode de Gauss-Jordan. Le système d'équation s'exprime alors :

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\zeta} &= (A_{11} + \delta\sigma A_{12}) y_1 + (A_{21} + \delta\sigma A_{22}) (B + \delta\sigma B_{\delta\sigma}) y_1 \\ &= [A_{11} + A_{21} B + \delta\sigma (A_{12} + A_{22} B + A_{21} B_{\delta\sigma}) + o(\delta\sigma^2)] y_1 \\ \text{Que l'on note : } \quad \frac{dy_1}{d\zeta} &= (A + \delta\sigma A_{\delta\sigma}) y_1 \end{aligned} \quad (5.9)$$

### 5.1.2 Schéma discret dans l'intérieur stellaire

Dans le schéma aux différences finies, le domaine continu d'intégration est remplacé par un ensemble discret de  $N$  points. Ces points se situent sur une grille radiale  $(\zeta_i)_{i=1,n}$ , et les fonctions propres sont représentées par (5.2) à chaque couche  $i$ . Le système mis sous la forme de l'équation (5.9) décrit le comportement des variables à une couche donnée. La méthode des différences finies utilisée ici a été introduite par Scufflaire et al. (2008). Elle permet de différencier les fonctions propres en reliant les couches deux à deux (couches  $\zeta_i$  et  $\zeta_{i+1}$  avec  $\zeta_{i+1} - \zeta_i = h$ ) tout en obtenant une précision radiale de l'ordre de  $o(h^5)$ . Elle s'appuie sur le développement de Taylor à l'ordre 4 : (on abandonne l'indice  $_1$  pour  $y_1$ )

$$y(i) + \frac{h}{2} \frac{dy}{d\zeta}(i) + \frac{h^2}{12} \frac{d^2y}{d\zeta^2}(i) = y(i+1) - \frac{h}{2} \frac{dy}{d\zeta}(i+1) + \frac{h}{12} \frac{d^2y}{d\zeta^2}(i+1) + o(h^5) \quad (5.10)$$

Or à partir de (5.9) en notant  $\tilde{A} = A + \delta\sigma A_{\delta\sigma}$ , on peut calculer :

$$\frac{d^2y}{d\zeta^2} = \left[ \tilde{A}^2 + \frac{d\tilde{A}}{d\zeta} \right] y \quad (5.11)$$

Où la dérivation de la matrice  $\tilde{A}$  correspond à la matrice des éléments de  $\tilde{A}$  dérivés. Au final, en remplaçant dans (5.10), on obtient :

$$\left[ I_d + \frac{h}{2} \tilde{A}(i) + \frac{h^2}{12} \left( \tilde{A}^2(i) + \frac{d\tilde{A}}{d\zeta}(i) \right) \right] y(i) = \left[ I_d - \frac{h}{2} \tilde{A}(i+1) + \frac{h^2}{12} \left( \tilde{A}^2(i+1) + \frac{d\tilde{A}}{d\zeta}(i+1) \right) \right] y(i+1) + o(h^5)$$

En développant  $\tilde{A} = A + \delta\sigma A_{\delta\sigma}$ , et en ne gardant que les termes du 1<sup>er</sup> ordre en  $\delta\sigma$ , on obtient pour la couche  $i$  :

$$\alpha_i^+ y(i) - \alpha_{i+1}^- y(i+1) = \delta\sigma [\beta_i^+ y(i) + \beta_{i+1}^- y(i+1)] + o(h^5) \quad (5.12)$$

Avec,

$$\begin{aligned} \alpha_i^+ &= I_d + \frac{h}{2} A(i) + \frac{h^2}{12} \left( A^2(i) + \frac{dA}{d\zeta}(i) \right) \\ \beta_i^+ &= \frac{h}{2} A_{\delta\sigma}(i) + \frac{h^2}{12} \left( A(i) A_{\delta\sigma}(i) + A_{\delta\sigma}(i) A(i) + \frac{dA_{\delta\sigma}}{d\zeta}(i) \right) \\ \alpha_i^- &= I_d - \frac{h}{2} A(i+1) + \frac{h^2}{12} \left( A^2(i+1) + \frac{dA}{d\zeta}(i+1) \right) \\ \beta_i^- &= -\frac{h}{2} A_{\delta\sigma}(i+1) + \frac{h^2}{12} \left( A(i+1) A_{\delta\sigma}(i+1) + A_{\delta\sigma}(i+1) A(i+1) + \frac{dA_{\delta\sigma}}{d\zeta}(i+1) \right) \end{aligned}$$

Ici,  $I_d$  désigne la matrice identité ( $4M \times 4M$ ). Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$  les matrices diagonales par blocs telles que si l'on définit  $Y$  le vecteur de variables :

$$Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix} \quad (\text{couches } 1, \dots, N) \quad (5.13)$$

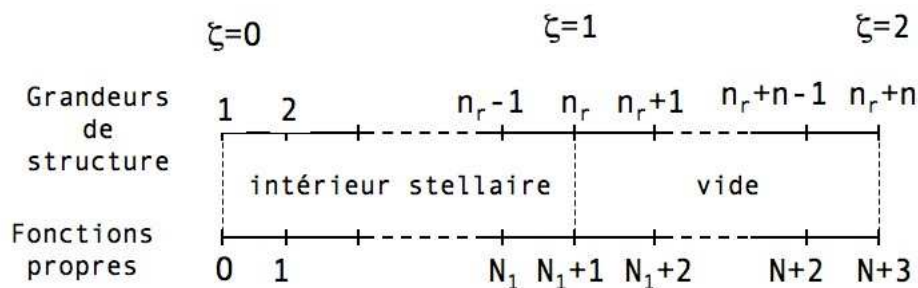
Alors le problème peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{A} Y = \delta\sigma \mathcal{A}_{\delta\sigma} Y \quad (5.14)$$

$\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$  étant des matrices diagonales par blocs. Le bloc  $i$  couplant les couches  $i$  et  $i+1$  à travers les coefficients  $\alpha_i^+$ ,  $\alpha_{i+1}^-$ ,  $\beta_i^+$  et  $\beta_{i+1}^-$ .

### 5.1.3 Traitement des couches limites

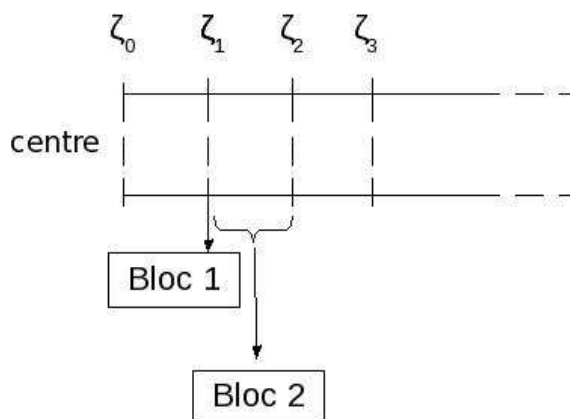
Considérons que l'on a un modèle de structure avec des couches radiales décrivant l'intérieur stellaire au moyen de  $n_r$  points de grille radiale. Pour des raisons pratiques dues au mode de différenciation, on définit les fonctions propres sur ces couches indicées radialement de 0 à  $N_1 + 1$ , avec  $N_1 = n_r - 2$ , il vient :  $\zeta(0) = 0$ , et  $\zeta(N_1 + 1) = 1$ . À ces  $n_r$  couches, on ajoute  $n_v$  couches pour décrire la région du vide entre  $\zeta = 1$  et  $\zeta = 2$ . On note  $N = N_1 + n_v$ . Cette région est balayée par les indices  $N_1 + 2$  jusqu'à



$N + 3$ . Ainsi, de cette manière, une fois appliquée la méthode des différences finies avec les conditions aux limites, les grandes matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$  seront constituées d'une diagonale de  $N$  blocs (indices des blocs allant de 1 à  $N$ ).

Pour les couches limites, c'est-à-dire au centre, en  $\zeta = 1$  et en  $\zeta = 2$ , les conditions de dérivabilité ne sont pas réunies pour que l'on puisse appliquer la méthode des différences finies telle qu'elle est présentée à la section précédente. C'est pourquoi on choisit de traiter le problème différemment, soit au travers d'équations algébriques (au centre), soit par la méthode traditionnelle des différences finies en  $\zeta = 1$ , et  $\zeta = 2$ .

### Au centre

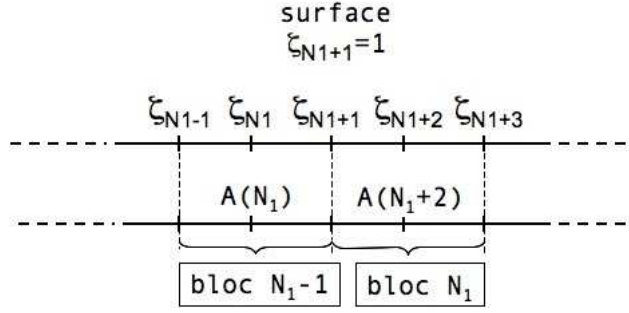


Les premières conditions aux limites consistent à imposer les équations algébriques déterminées dans les équations (4.50) à (4.60). Elles sont prises au niveau du premier point après le centre, soit  $\zeta_1$ . Elles se mettent sous la forme matricielle :

$$0 = (E_1(1) + \delta\sigma E_{1\delta\sigma}(1))y_1(1) + (E_2(1) + \delta\sigma E_{2\delta\sigma}(1))y_2(1) \quad (5.15)$$

### En $\zeta = 1$

$\zeta = 1$  représente la surface de l'étoile, on passe alors d'une région où la physique de l'étoile est décrite par l'ensemble des variables principales, à une région de vide, où seules  $\Phi'$  et  $d\Phi'$  demeurent, les autres variables étant nulles. Ainsi, dans le  $N_1^{\text{me}}$  bloc des matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$ , reliant les couches  $N_1$  et  $N_1 + 1$ , la variable  $\tilde{\pi}'_\ell$  ne doit plus apparaître explicitement dans la partie du bloc correspondant à la couche  $N_1 + 1$ . Pour



cette raison, on exprime la variable  $\tilde{\pi}'_\ell$  en fonction des autres variables dites principales dans cette couche à l'aide de la condition aux limites donnée en (4.62) :

$$\begin{aligned} \tilde{\pi}'_{\ell_1} = & - \sum_{\ell_2} \tilde{u}'_{\ell_2} \int_{\mu} \frac{1}{(m\Omega + \sigma_0)} \frac{1}{r_\zeta \rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} Y_{\ell_2} Y_{\ell_1}^* d\mu \\ & + \delta\sigma \sum_{\ell_2} \tilde{u}'_{\ell_2} \int_{\mu} \frac{1}{(m\Omega + \sigma_0)^2} \frac{1}{r_\zeta \rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} Y_{\ell_2} Y_{\ell_1}^* d\mu + o(\delta\sigma^2) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Que l'on met sous forme matricielle :

$$[\tilde{\pi}'_{\ell_1}(N_1 + 1)]_{\substack{i=1,M \\ \ell_1=|m|+\text{par}+2(i-1)}} = (C + \delta\sigma C_{\delta\sigma}) \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}'_\ell(N_1 + 1) \\ d\tilde{\Phi}'_\ell(N_1 + 1) \\ \tilde{u}'_\ell(N_1 + 1) \end{bmatrix}_{\substack{j=1,M \\ \ell=|m|+\text{par}+2(j-1)}} \quad (5.17)$$

$$\text{Où } C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{(m\Omega + \sigma_0)} \frac{1}{r_\zeta \rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \end{bmatrix}, \text{ et } C_{\delta\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{(m\Omega + \sigma_0)^2} \frac{1}{r_\zeta \rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} \end{bmatrix}$$

À la surface, on préfère utiliser les différences finies traditionnelles :

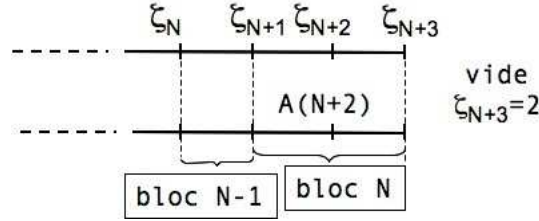
$$\frac{y(N_1 + 1) - y(N_1 - 1)}{h} = [A(N_1) + \delta\sigma A_{\delta\sigma}(N_1)] \frac{y(N_1 + 1) + y(N_1 - 1)}{2} \quad (5.18)$$

La différenciation se fait entre les couches  $N_1 - 1$  et  $N_1 + 1$ , les valeurs de  $A$  et  $A_{\delta\sigma}$  étant prises au point intermédiaire, c'est à dire en  $N_1$ . Les  $M$  premières lignes du système (5.18) peuvent se réécrire :

$$\begin{aligned} (C + \delta\sigma C_{\delta\sigma}) \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}'_\ell(N_1 + 1) \\ d\tilde{\Phi}'_\ell(N_1 + 1) \\ \tilde{u}'_\ell(N_1 + 1) \end{bmatrix} - [\tilde{\pi}'_\ell(N_1 - 1)] = \\ \frac{h}{2} [A(N_1) + \delta\sigma A_{\delta\sigma}(N_1)]_{\substack{i=1,M \\ j=1,4M}} y(N_1 - 1) \\ + \frac{h}{2} [A(N_1) + \delta\sigma A_{\delta\sigma}(N_1)]_{\substack{i=1,M \\ j=1,M}} (C + \delta\sigma C_{\delta\sigma}) \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}'_\ell(N_1 + 1) \\ d\tilde{\Phi}'_\ell(N_1 + 1) \\ \tilde{u}'_\ell(N_1 + 1) \end{bmatrix} \\ + \frac{h}{2} [A(N_1) + \delta\sigma A_{\delta\sigma}(N_1)]_{\substack{i=M+1,4M \\ j=1,M}} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}'_\ell(N_1 + 1) \\ d\tilde{\Phi}'_\ell(N_1 + 1) \\ \tilde{u}'_\ell(N_1 + 1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Les 3M dernières lignes du système se calculent comme dans le cas standard dans l'intérieur stellaire.

En  $\zeta = 2$



Dans le dernier bloc des grandes matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$ , c'est-à-dire le bloc reliant les deux dernières couches du modèle, dans le sous-bloc correspondant à la dernière couche, à l'équation de Poisson nous substituons la condition aux limites suivante :

$$\tilde{\Phi}'_{\ell} = -\frac{4}{(2\ell+1) - \epsilon(\ell+1)} d\tilde{\Phi}'_{\ell} = \mathcal{E}_{\ell} d\tilde{\Phi}'_{\ell} \quad (5.20)$$

Dans ce cas, comme à la surface, nous privilégions la méthode de résolution par les différences finies traditionnelles :

$$\frac{y(N+3) - y(N+1)}{h} = [A(N+2) + \delta\sigma A_{\delta\sigma}(N+2)] \frac{y(N+1) + y(N+3)}{2} \quad (5.21)$$

Ici encore, les différences finies sont faites entre les couches  $N+1$  et  $N+3$ , les valeurs de  $A$  et  $A_{\delta\sigma}$  étant prises au point intermédiaire, c'est à dire en  $N+2$ .

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}'_{\ell}(N+1) \\ d\tilde{\Phi}'_{\ell}(N+1) \end{bmatrix} + \frac{h}{2} A(N+2) \begin{bmatrix} \tilde{\Phi}'_{\ell}(N+1) \\ d\tilde{\Phi}'_{\ell}(N+1) \end{bmatrix} = \\ \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{\ell} d\tilde{\Phi}'_{\ell}(N+3) \\ d\tilde{\Phi}'_{\ell}(N+3) \end{bmatrix} - \frac{h}{2} A(N+2) \begin{bmatrix} \mathcal{E}_{\ell} d\tilde{\Phi}'_{\ell}(N+3) \\ d\tilde{\Phi}'_{\ell}(N+3) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Dans cette partie de l'étoile il n'y a plus de dépendance en  $\delta\sigma$ .

#### 5.1.4 Représentation matricielle

En combinant toutes les équations obtenues dans les deux sections précédentes, on obtient un système de  $N_t$  équations à  $N_t$  inconnues où  $N_t = 2M \times (N_1 + N - 1)$ ,  $M$  étant le nombre de termes dans le développement spectral en harmoniques sphériques,  $N$  le nombre de couches où sont calculées les fonctions propres, et  $N_1$  le nombre de couches où sont calculées les fonctions propres dans l'intérieur stellaire. Ce système peut se mettre sous la forme canonique :

$$\mathcal{A}Y = \delta\sigma \mathcal{A}_{\delta\sigma} Y$$

Où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$  sont des matrices carrées réelles diagonales par blocs de dimension  $N_t$ ,  $Y$  étant le vecteur propre inconnu de dimension  $N_t$ , et  $\delta\sigma$  la valeur propre recherchée. Avec

les Figures 5.1, 5.2 et 5.3 est donnée une illustration de la structure de la matrice bande  $\mathcal{A}$ . Dans ces figures, les éléments non nuls de  $\mathcal{A}$  sont schématisés par des carrés noirs. Il faut préciser que chaque colonne qui correspond à une variable est en fait constituée de  $M$  colonnes relatives aux termes du développement spectral de cette variable sur les harmoniques sphériques. Dans ces trois figures, la droite en pointillés verts représente la diagonale de la matrice. Les variables (colonnes) sont regroupées par couches, ainsi que les équations (lignes). La couche  $n$  est couplée à la couche  $n-1$  au sein du bloc  $n$ . La figure 5.1 illustre l'aspect de la matrice au centre, avec les conditions aux limites. Les blocs grisés contenant 1 et -1 représentent des sous-matrices identité de dimension  $M \times M$  ( $M$  : nombre de termes de couplage). Notons que les  $2 M$  premières lignes de la grande matrice  $\mathcal{A}$  illustrée à la Figure 5.1 sont tout à fait accessoires et n'ont mathématiquement aucun impact sur la solution.

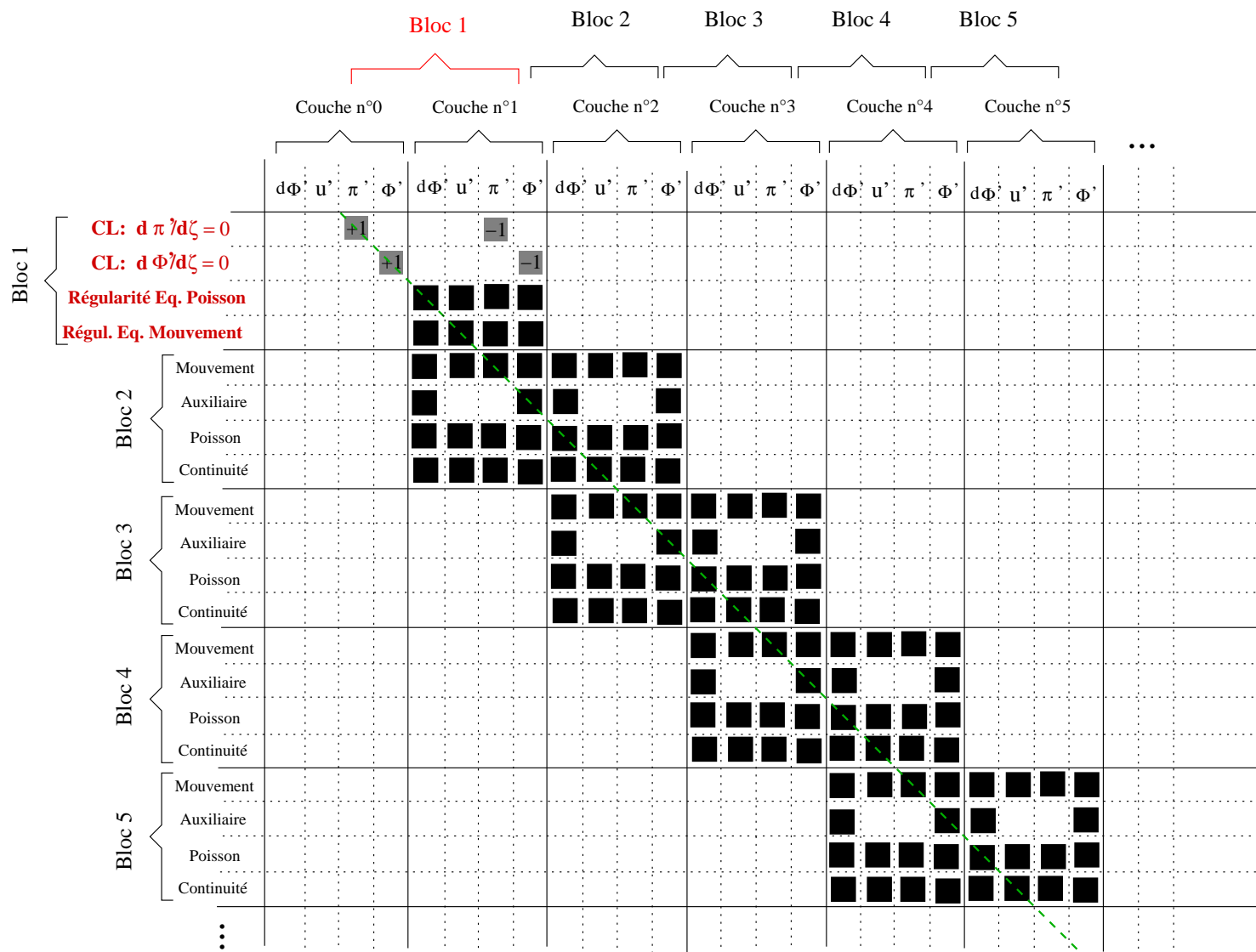


FIGURE 5.1: Block representation of the first lines and columns of the matrix  $\mathcal{A}$ , containing the boundary conditions at the center of the star (in the first block top left in red). The oblique green dashed line corresponds to the diagonal of  $\mathcal{A}$  and the indexes of the layers are given on the top, for the blocks the indexes are indicated both top and left. The black small blocks represent the non zero elements of the matrix.



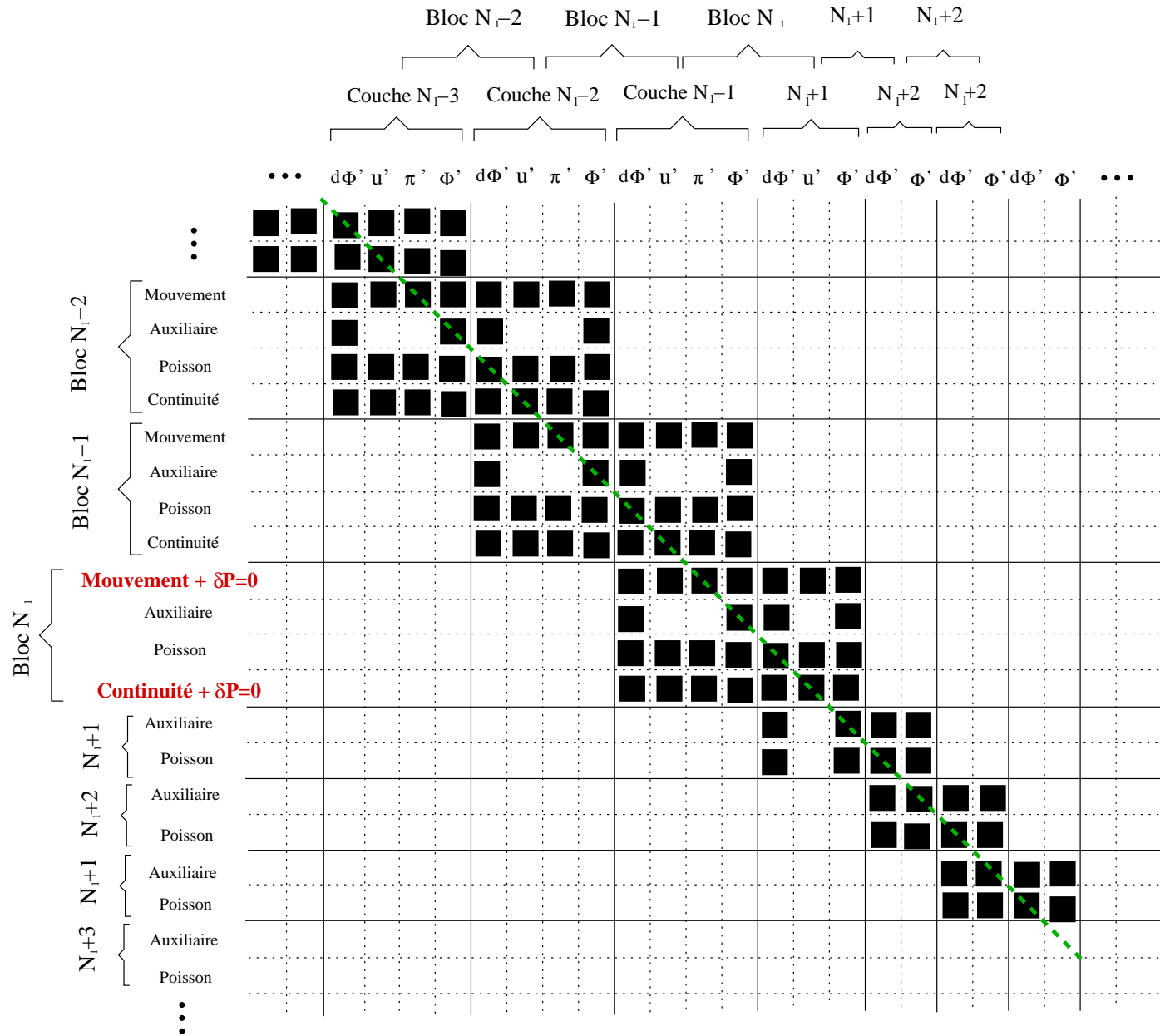


FIGURE 5.2: Block representation of the lines and columns located in the middle of the matrix  $\mathcal{A}$ , containing the boundary condition at the stellar surface (in the block  $N_1$  in red). The oblique green dashed line corresponds to the diagonal of  $\mathcal{A}$  and the indexes of the layers are given on the top, for the block the indexes are indicated both top and left. The black small blocks represent the non zero elements of the matrix.

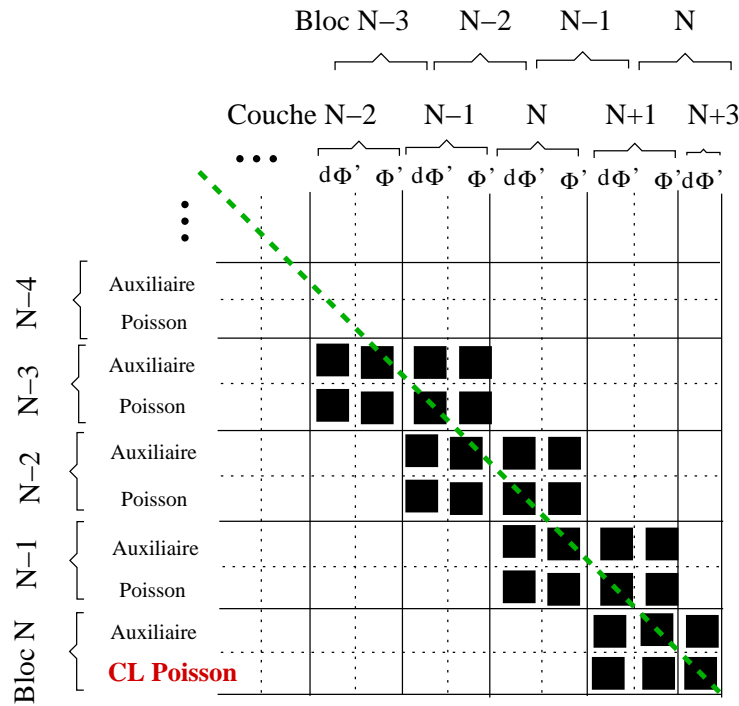


FIGURE 5.3: Block representation of the last lines and columns of the matrix  $\mathcal{A}$ , containing the boundary condition at the outer surface of  $V_2$  (see Chap.4 Fig.4.1) (in the last block bottom right). The oblique green dashed line corresponds to the diagonal of  $\mathcal{A}$  and the indexes of the layers are given on the top, for the block the indexes are indicated both top and left. The black small blocks represent the non zero elements of the matrix.

## 5.2 Résolution numérique du système linéaire

Dans la section précédente, nous avons dérivé un système fini d'équations algébriques représentant le problème aux valeurs propres des oscillations adiabatiques linéaires avec prise en compte complète de la rotation. Ce problème a été mis sous la forme matricielle :  $\mathcal{A}Y = \delta\sigma \mathcal{A}_{\delta\sigma} Y$ . Dans cette section, nous montrons comment ce système peut être résolu numériquement.

### 5.2.1 La méthode d'itération inverse généralisée

La forme matricielle générale du problème est proche d'un problème classique aux valeurs propres, à la différence près que  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$  n'est pas la matrice identité. Une méthode aussi efficace que connue pour résoudre un problème aux valeurs propres est la méthode d'itération inverse (Wilkinson 1965). Dupret (2001) a généralisé cette méthode au cas où  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$  n'est pas la matrice identité. C'est cette méthode que nous avons utilisée et que nous développons ici. Elle repose sur un théorème qui stipule :

#### Théorème

Si l'on considère le problème aux valeurs propres généralisé :

$$\mathcal{A}Y = \delta\sigma \mathcal{A}_{\delta\sigma} Y \tag{5.23}$$

Où  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$  sont deux matrices carrées de dimension  $N$  telles que :

- $\mathcal{A}$  est inversible
- $\mathcal{A}^{-1} \mathcal{A}_{\delta\sigma}$  est diagonalisable.

Alors pour tout vecteur propre initial  $Y_0$ , et pour tout scalaire  $\delta\sigma_0$  qui n'est pas une valeur propre de (5.23), l'algorithme d'itération inverse :

$$Y_{k+1} = (\mathcal{A} - \delta\sigma_0 \mathcal{A}_{\delta\sigma})^{-1} \mathcal{A}_{\delta\sigma} Y_k \quad (5.24)$$

converge géométriquement vers le vecteur propre de (5.23) dont la valeur propre est la plus proche de  $\delta\sigma_0$ .

Plusieurs avantages d'ordre numérique découlent de cette méthode. Tout d'abord, la linéarité de l'algorithme permet de normaliser le vecteur propre  $Y_k$  à chaque itération. D'un point de vue numérique, ces normalisations permettent d'éviter de manipuler de grands nombres.

Par ailleurs, rappelons que nous avons choisi de résoudre le système aux valeurs propres par une méthode itérative type méthode de Newton. Tel que le problème aux valeurs propres est formulé, nous prenons  $\sigma_0$  comme valeur de départ pour  $\sigma$ , ce qui induit que  $\delta\sigma_0 = 0$ , et l'algorithme d'itération inverse peut alors être réduit à :

$$\mathcal{A} Y_{k+1} = \mathcal{A}_{\delta\sigma} Y_k. \quad (5.25)$$

Une fois le vecteur propre  $Y$  calculé avec une précision satisfaisante, la valeur propre  $\delta\sigma$  peut être dérivée en utilisant une généralisation du rapport de Rayleigh :

$$\delta\sigma = \frac{Y^* \mathcal{A}_{\delta\sigma}^* \mathcal{A} Y}{Y^* \mathcal{A}_{\delta\sigma}^* \mathcal{A}_{\delta\sigma} Y} \quad (5.26)$$

Où  $Y^*$  et  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}^*$  sont les vecteur/matrice conjugués hermitiens de  $Y$  et  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$ . Et l'on peut montrer aisément que la valeur de  $\delta\sigma$  qui vérifie (5.26) minimise :

$$S^2 = \|(\mathcal{A} - \delta\sigma \mathcal{A}_{\delta\sigma}) Y\|^2 = Y^* (\mathcal{A}^* - \delta\sigma \mathcal{A}_{\delta\sigma}^*) (\mathcal{A} - \delta\sigma \mathcal{A}_{\delta\sigma}) Y \quad (5.27)$$

### 5.2.2 Factorisation LU

Dans la méthode d'itération inverse généralisée, on doit résoudre le système linéaire (5.25) à chaque itération. Cette résolution se fait au moyen de la méthode de factorisation LU (Wilkinson 1965), dont nous rappellerons brièvement le principe.

Considérons tout d'abord un système linéaire  $Dy = b$  à résoudre. La méthode classique de triangularisation de Gauss consiste à factoriser la matrice  $D$  :  $D = LU$ , où  $L$  est une matrice triangulaire inférieure, et  $U$  une matrice triangulaire supérieure. Une fois la triangularisation effectuée, la résolution est facilitée en résolvant successivement les deux systèmes triangulaires :  $Lx = b$  et  $Uy = x$ .

Dans le cadre de la méthode d'itération inverse, la matrice représentant le système linéaire est  $\mathcal{A}$ . Étant donné que la matrice  $\mathcal{A}$  reste identique tout au long du processus d'itération inverse, la factorisation LU ne doit être effectuée qu'une seule fois, et à chaque étape  $k$ , il suffit de résoudre les deux systèmes linéaires triangulaires :

$$Lx = \mathcal{A}_{\delta\sigma} Y_k, \quad (5.28)$$

$$\text{et } UY_{k+1} = x. \quad (5.29)$$

## 5.3 Performances

Comme évoqué dans l'introduction de ce chapitre, le développement du programme ACOR s'est fait avec la préoccupation constante d'une mise en œuvre simple et rapide du calcul des oscillations, dans le cadre de la modélisation intégrée à une chaîne d'interprétation de données. Nous évaluons donc dans cette partie le rôle des paramètres numériques pour la convergence des modes d'oscillation, et les performances de calcul de l'implémentation. Tel que le code a été implémenté, ce qui mobilise principalement les ressources de calcul et de mémoire de la machine est l'intégration angulaire des coefficients de matrices du problème. Si nous symbolisons le système d'équations aux dérivées partielles par l'opérateur  $E$ , cette intégration s'exprime :

$$\forall \ell_1 \geq |m|, \quad \sum_{\ell_2 \geq |m|}^{+\infty} \int \frac{\sin \theta d\theta d\varphi}{4\pi} E_{\ell_2}(Y_{\ell_2,m}) Y_{\ell_1,m}^* = 0 \quad (5.30)$$

En effet, ces coefficients sont évalués en chaque couche radiale (pour  $N_r$  couches) par une projection des équations sur la base des  $M$  harmoniques sphériques prises en compte dans le calcul. Le produit scalaire pour cette projection consistant en une intégration de Gauss-Legendre sur les  $N_\mu$  secteurs angulaires. Ainsi, en évaluant le rôle des paramètres de calculs  $N_r$ , et  $M$ , nous pourrions en définir les valeurs optimales pour un bon compromis entre le temps de calcul, l'espace mémoire occupé, et la précision des résultats.

### 5.3.1 Développement spectral

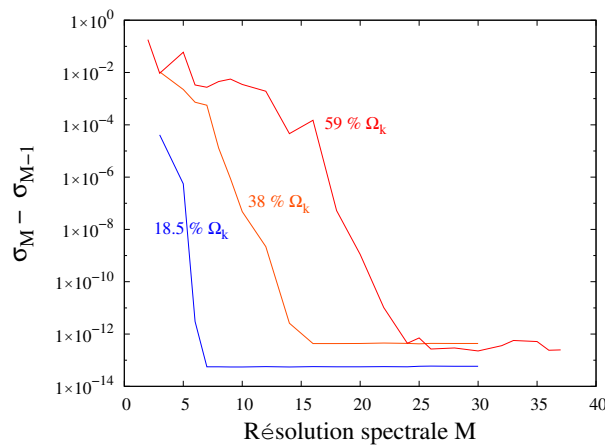


FIGURE 5.4: Convergence as a function of the number of spherical harmonics included in the spectral expansion, taken as the difference between frequency resulting from computations with  $M-1$  spherical harmonics and computations using  $M$  spherical harmonics, for an  $n = 3$  mode dominated by an  $\ell = 1$ ,  $m = 0$  component, and for three different rotational velocities : 18.5%  $\Omega_k$  in blue, 38%  $\Omega_k$  in orange and 59%  $\Omega_k$  in red.

Le développement spectral bidomaine tel que nous le pratiquons pour notre résolution des comportements angulaires (cf Chap. 4, Sect.4.1.1) est connu pour être d'une grande précision. Dans le cas idéal où les grandeurs décrivant le modèle de structure seraient  $C^\infty$ , la précision des calculs angulaires augmenterait avec le nombre de termes de couplage  $M$  comme  $e^{-M}$ . La rotation induit des profils non sphériques pour les grandeurs

de structure ainsi que pour les fonctions propres. Plus la rotation est importante, plus l'écart à la sphéricité augmente, et plus il faut prendre en compte des contributions de degrés angulaires différents dans le calcul.

Sur la Figure 5.4 nous reportons la convergence sur les fréquences propres en fonction du nombre de termes impliqués dans le développement spectral. Ces calculs ont été réalisés pour des modèles de structure polytropiques bidimensionnels en rotation uniforme. L'allure de ces courbes est conforme à nos attentes. Plus la vitesse angulaire de rotation est importante, plus grand est le nombre de termes du développement spectral nécessaire à la convergence. En effet, si nous considérons un modèle de structure en rotation à  $\Omega = 18.5\% \Omega_k$ , la convergence est atteinte pour 7 termes de couplage, tandis qu'au minimum 16 termes sont nécessaires pour un modèle tournant à  $38\% \Omega_k$ . Lorsque le modèle présente une rotation de  $59\% \Omega_k$ , une convergence satisfaisante est atteinte autour de 25 termes de couplage. Lorsque la convergence est atteinte, elle présente une bonne stabilité.

### 5.3.2 Résolution radiale

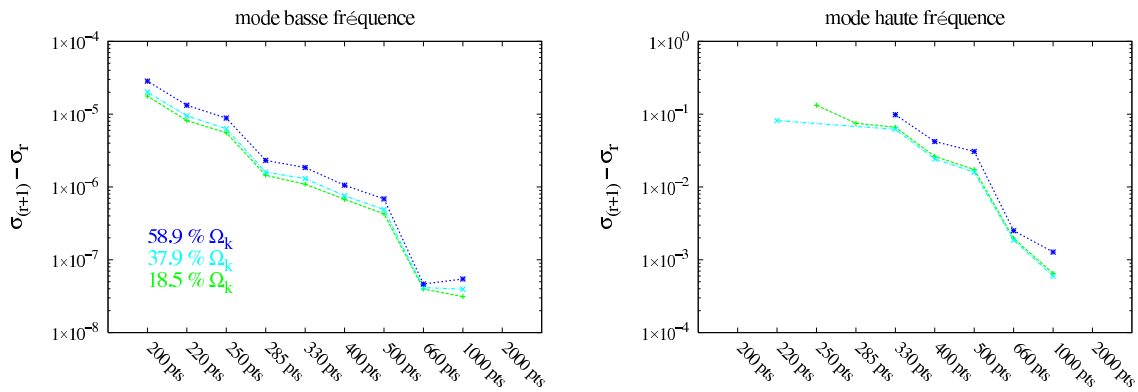


FIGURE 5.5: Convergence as a function of the radial resolution, taken as the differences between frequency resulting from computations with  $r$  points in the radial grid and computations using  $(r+1)$  points. For example, at the abscissa corresponding to 1000 points is plotted the difference between the frequency obtained with 2000 points and the one obtained with 1000 points. These plots have been performed for modes dominated by an  $\ell = 2$ ,  $m = 0$  component with an  $n = 3$  on the left panel, and  $n = 9$  on the right panel, both at three different rotational velocities :  $18.5\% \Omega_k$  in green,  $37.9\% \Omega_k$  in light blue and  $58.9\% \Omega_k$  in dark blue.

Étant donné que ce qui demande le plus de temps de calcul est l'intégration angulaire des coefficients de matrices du problème linéaire, et que celle-ci est calculée en chaque point de la grille radiale, nous étudions ici la convergence des fréquences propres en fonction de la résolution de cette grille radiale. Bien sûr, plus la fréquence d'un mode est élevée, plus son ordre radial est élevé, et plus le mode présente d'oscillations radiales. Ainsi, comme nous pouvons le remarquer d'après la Figure 5.5, alors que la convergence est atteinte pour des modèles de 660 points pour les modes basse fréquence, pour les modes de fréquence plus élevée, cette convergence est plus difficile. Ceci est valable quelle que soit la vitesse de rotation du modèle.

### 5.3.3 Le temps et l'espace mémoire

Si ce qui demande le plus de temps de calcul est la projection des équations dans l'espace des harmoniques sphériques, ce qui mobilise le plus la mémoire de la machine est l'inversion des grandes matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$ . Dans le tableau suivant figurent les chiffres de la mémoire occupée et du temps de calcul de notre code en fonction de la résolution radiale ( $N_r$ ), et de la résolution spectrale ( $M$ ).

TABLE 5.1: Numerical resources used by ACOR with a spectral resolution  $M$  and a radial one of  $N_r$ .

$N_r$	$M$	taille de la matrice	temps	mémoire
2500	40	$110 \times 10^6$	25 min	3,1 Go
2500	26	$46 \times 10^6$	7 min 30	1,3 Go
2500	18	$22 \times 10^6$	3 min 30	700 Mo
2500	10	$7 \times 10^6$	1 min	300 Mo
1250	40	$55 \times 10^6$	12 min	1,5 Go
1250	26	$23 \times 10^6$	3 min 30	700 Mo
1250	18	$11 \times 10^6$	1 min 30	350 Mo
1250	10	$3.5 \times 10^6$	30 s	140 Mo
625	40	$27 \times 10^6$	5 min 10	790 Mo
625	26	$12 \times 10^6$	1 min 45	350 Mo
625	18	$5.5 \times 10^6$	46 s	180 Mo
625	10	$3.5 \times 10^6$	30 s	75 Mo

Étant donné que les grandes matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{A}_{\delta\sigma}$  ne sont pas des matrices pleines, les dimensions données dans ce tableau correspondent à la somme des dimensions des blocs qui les constituent. Dans l'intérieur stellaire, cela correspond à  $(2 \times 4 \times M) \times (4 \times M) \times N_{\text{int}}$ , et dans le vide à  $(2 \times 2 \times M) \times (2 \times M) \times N_{\text{vide}}$  (car chaque bloc couple deux couches successives).



# Chapitre 6

## Validation : comparaison avec Reese et al. (2006)

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Modèles d'équilibre</b>	<b>110</b>
<b>6.2</b>	<b>Similitudes et différences entre les deux approches</b>	<b>110</b>
6.2.1	Similitudes	110
6.2.2	Différences	110
<b>6.3</b>	<b>Méthode de comparaison</b>	<b>111</b>
<b>6.4</b>	<b>Comparaison des modes propres d'oscillation</b>	<b>112</b>
6.4.1	Classification des modes	112
6.4.2	Évolution des modes propres avec la rotation	112
6.4.3	Vérification du comportement au centre	113
<b>6.5</b>	<b>Comparaison des fréquences propres</b>	<b>120</b>
<b>6.6</b>	<b>Un croisement évité</b>	<b>122</b>

---

Afin de valider notre approche des oscillations adiabatiques non radiales d'étoiles en rotation, nous avons effectué un certain nombre de tests. Dans la courte revue présentée en Section 1.4.3 du chapitre d'introduction, l'approche non perturbative de Reese et al. (2006) a été présentée. Il s'agit d'une méthode spectrale bidimensionnelle qui permet de calculer les modes d'oscillation adiabatique de modèles polytropiques déformés. L'effet de la force centrifuge ainsi que celui de la force de Coriolis étant pris en compte de manière complète. La qualité de leurs résultats a été confirmée par un test variationnel. Afin de valider notre approche j'ai donc tenu, dans un premier temps, à comparer les résultats de nos calculs aux leurs. Précisons que les comparaisons peuvent être considérées comme étant tout à fait fiables, car une collaboration étroite avec Daniel Reese a permis d'effectuer des comparaisons de calculs d'oscillation partant des mêmes modèles d'équilibre polytropiques. Pour des raisons de simplicité, les deux approches seront désignées par les acronymes ACOR (Adiabatic Code of Oscillation including Rotation) pour notre approche, et TOP (Two-dimensional Oscillation Program) pour celle de Reese et al. (2006).



## 6.1 Modèles d'équilibre

Pour ces travaux de comparaison, nous avons utilisé des modèles polytropiques bidimensionnels d'indice  $N = 3$  en rotation uniforme tels qu'ils sont développés dans Reese et al. (2006). Un modèle polytropique d'étoile est un modèle simplifié dans lequel on a introduit une relation ad hoc entre la densité et la pression. Ceci permet de calculer la structure acoustique du modèle sans avoir à résoudre l'équation régissant le transport de chaleur. Ces modèles satisfont aux relations suivantes :

$$P_0 = K\rho_0^\gamma \quad (6.1)$$

$$\vec{\nabla} P_0 - \rho_0 \vec{\nabla} \left( \Phi_0 - \frac{1}{2} \Omega^2 s^2 \right) = \vec{0} \quad (6.2)$$

$$\Delta \Phi_0 = 4\pi G \rho_0 \quad (6.3)$$

La première relation est la relation polytropique, elle relie la pression d'équilibre  $P_0$  à la densité  $\rho_0$  sans faire appel à la température. Dans cette équation,  $K$  représente la constante polytropique,  $\gamma$  l'exposant polytropique. Il est relié à l'indice polytropique par  $\gamma = 1 + 1/N$ . La seconde équation est l'équation d'équilibre hydrostatique qui exprime l'équilibre entre le gradient de pression et le gradient de potentiel total (gravitationnel  $\Phi_0$  et centrifuge où  $s$  est la distance à l'axe de rotation). La dernière équation est l'équation de Poisson pour le potentiel gravitationnel. En introduisant une pseudo-enthalpie définie par  $h_0 = \int dP_0/\rho_0$  que l'on substitue à  $\rho_0$  et  $P_0$ , on peut intégrer aisément l'équation de mouvement qui, injectée dans l'équation de Poisson, réduit le problème à une équation différentielle du second ordre. Le détail de la résolution peut être trouvée dans Rieutord et al. (2005).

## 6.2 Similitudes et différences entre les deux approches

### 6.2.1 Similitudes

Comme Reese et al. (2006), nous avons choisi comme système de coordonnées spatiales les coordonnées sphéroïdales proposées par Bonazzola et al. (1998) qui a pour principe de base de diviser l'espace en domaines choisis de manière à ce que les discontinuités physiques soient situées aux frontières.

Nous adoptons également une approche spectrale pour les dépendances angulaires des fonctions propres (Rieutord 1987) qui sont développées sur une base d'harmoniques sphériques.

La condition aux limites imposée en surface correspond dans les deux approches à une condition de surface libre, c'est-à-dire que la perturbation lagrangienne de la pression tend vers zéro en surface.

### 6.2.2 Différences

Le choix de la base de vecteurs de l'espace physique diffère. Nous avons choisi une base orthogonale (voir Eq.4.4).

Le choix des équations dérivées à partir de l'équation de mouvement est également différent.

La discrétisation du système différentiel dans notre approche se fait au moyen d'une méthode de résolution par les différences finies (Scuflaire et al. 2008), alors que Reese et al. (2006) effectuent un développement spectral des coefficients radiaux  $f'_\ell$  sur une base de polynômes de Tchebichev. Pour des modèles polytropiques, cette approche peut s'avérer pertinente car les grandeurs de structures ne présentent pas de variations abruptes. On s'attend donc pour les fonctions propres à des comportements radiaux lisses, de type polynomial. Pour des modèles plus réalistes, c'est-à-dire non polytropiques, une résolution radiale par les différences finies semble plus adaptée.

Les conditions aux limites imposées au centre dans l'approche TOP diffèrent de celles adoptées dans ACOR (voir Chap. 4 Sect. 4.4.1).

### 6.3 Méthode de comparaison

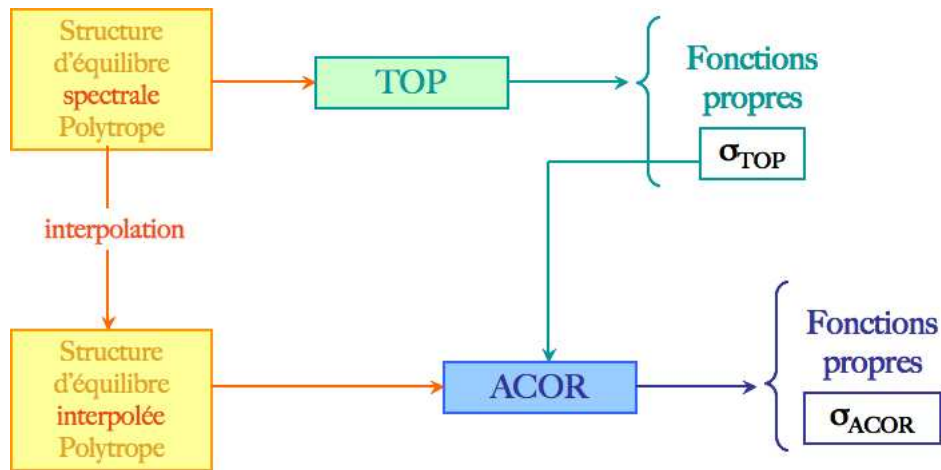


FIGURE 6.1: Scheme of the comparison process between the two computations : the  $N=3$  polytropic spectral equilibrium models used for TOP calculations are interpolated on a denser radial grid in order to be given in input to ACOR. The eigenfrequency computed by TOP is then taken as the target eigenvalue for frequency determination with ACOR.

Nous avons procédé de la manière suivante : comme modèle d'équilibre, TOP prend en entrée un modèle polytropique bidimensionnel calculé par la méthode décrite en Section 6.1 dont les comportements radiaux sont décomposés sur une base de polynômes de Tchebichev. Ce modèle spectral est interpolé sur une grille régulière de points radiaux, puis placé en entrée de notre code. Pour la recherche des fréquences propres par ACOR (rappelons que nous utilisons un schéma itératif), nous avons procédé à un suivi des modes en augmentant progressivement la rotation. Tout d'abord, pour les deux premières vitesses de rotation, nous avons pris comme fréquence cible la fréquence propre d'un mode d'oscillation calculé par TOP puis, pour les vitesses de rotation suivantes, nous avons effectué une extrapolation linéaire de la fréquence cible à partir des fréquences calculées par ACOR pour les deux vitesses de rotation précédentes. En pratique, la fréquence cible  $\sigma_n$  pour le calcul des modes d'oscillation à la vitesse de rotation  $\Omega_n$ , est calculée par :

$$\sigma_n = \sigma_{n-2} \frac{\Omega_n - \Omega_{n-1}}{\Omega_{n-2} - \Omega_{n-1}} + \sigma_{n-1} \frac{\Omega_{n-2} - \Omega_n}{\Omega_{n-2} - \Omega_{n-1}}$$

Cette interpolation linéaire peut sembler simpliste, mais à l'observation de l'évolution de la fréquence avec la vitesse angulaire de rotation, elle semblera tout à fait justifiée (cf Fig. 6.10). Étant donné la méthode de résolution du problème aux valeurs propres dans ACOR, comme évoqué à la section 5.2.1, l'algorithme d'itération inverse converge sur les fonctions propres du système linéaire, les valeurs propres correspondantes étant calculées a posteriori par le rapport de Rayleigh. Une attention particulière sera donc d'abord portée sur les comparaisons des fonctions propres d'oscillation issues des deux programmes.

Nous avons effectué des comparaisons de calculs d'oscillations pour des modèles polytropiques (d'indice 3) identiques pour des vitesses de rotation uniformes allant de 0 à 80% de la vitesse képlérienne, et pour un échantillon de modes représentatifs de l'ensemble des oscillations stellaires observées : modes d'oscillation à basse fréquence, à haute fréquence, pairs ou impairs, et de bas degré angulaire.

## 6.4 Comparaison des modes propres d'oscillation

### 6.4.1 Classification des modes

Un des principaux effets de la rotation sur les modes d'oscillation stellaire est dû à la déformation centrifuge qui induit une rupture de la symétrie sphérique de la structure d'équilibre. Contrairement au cas sans rotation, une seule harmonique sphérique ne suffit plus à décrire le comportement angulaire des modes propres d'oscillation, on développe alors les fonctions propres sur une somme d'harmoniques sphériques :

$$f'(\zeta, \theta, \varphi) = \sum_{|m| \leq \ell} f'_\ell(\zeta) Y_\ell^m(\theta, \varphi) \quad (6.4)$$

Les différents termes du développement sont couplés par l'intermédiaire des termes non sphériques qui interviennent dans le système aux valeurs propres. À faible rotation, les termes de degrés angulaires différents sont peu couplés, et le degré du coefficient dominant dans le développement correspond au degré du mode en l'absence de rotation. Si l'on considère des vitesses de rotation plus importantes, le couplage entre les différents termes est plus fort, et le mode présente des caractéristiques angulaires mixtes, mettant en jeu plusieurs harmoniques sphériques de degrés différents. En général, le caractère dominant est le même qu'à basse vitesse de rotation, mais il peut arriver que le mode change de comportement angulaire dominant lors de croisements évités (ce phénomène est abordé plus en détail en Section 6.6). Notons que ce couplage ne permet plus de parler de mode de degré donné  $\ell$ , on parlera plutôt de mode à dominance  $\ell$ .

### 6.4.2 Évolution des modes propres avec la rotation

Ce phénomène de couplage des comportements de degrés angulaires différents peut être mis en évidence à l'observation des coefficients radiaux du développement en harmoniques sphériques (les  $f'_\ell(\zeta)$  de l'équation 6.4). C'est ce que nous faisons aux Figures 6.3 et 6.4, en montrant les contributions de différents degrés angulaires pour un mode pair (Fig.6.4 avec un mode à dominance  $\ell = 2$ ,  $m = 0$ , d'ordre radial  $n = 1$ ), ainsi que pour un mode impair (Fig.6.3 avec un mode à dominance  $\ell = 1$ ,  $m = 0$ , d'ordre

radial  $n=3$ ), calculés par TOP et par ACOR indépendamment. Tout d'abord, ces figures montrent un bon accord entre les fonctions propres issues des deux programmes d'oscillation, avec le même comportement en fonction de la vitesse de rotation. Par exemple, pour le mode impair, Figure 6.3, à basse vitesse de rotation ( $18.5\%\Omega_k$ ), le degré  $\ell = 1$  est clairement dominant, les autres contributions étant négligeables, tandis qu'à des vitesses de rotation plus élevées, les autres contributions prennent plus de poids dans le développement, et peuvent devenir du même ordre que la contribution principale.

Par ailleurs, les représentations en deux dimensions proposées Figures 6.5, 6.6, 6.7, et 6.8 (placées en fin de section) montrent la morphologie des modes d'oscillation issus des deux codes pour différentes vitesses de rotation. J'ai choisi ici la fonction propre  $\pi' \sqrt{\rho} = p'/\sqrt{\rho}$  qui montre le meilleur contraste dans cette représentation. Les deux approches font apparaître pour ces modes d'oscillation des comportements qui évoluent de la même manière à mesure que la vitesse de rotation augmente. En effet, pour les modes impairs (Fig.6.6), la structure sphérique pour la fonction propre, présente à faible vitesse de rotation, s'étire et s'allonge vers l'équateur de la même manière pour les deux codes (Fig.6.5 est à considérer à part car subissant un croisement évité entre un mode à dominance  $\ell = 1$ , et un mode à dominance  $\ell = 5$ ). Pour les modes pairs (Fig. 6.7 et 6.8), ces structures ont plutôt tendance à s'allonger vers le pôle le long de l'axe de rotation.

Ces comparaisons permettent de considérer un bon accord quant aux fonctions propres des modes d'oscillation, ce qui permet de valider l'approche analytique ainsi que la méthode de résolution numérique par itération inverse, dont la convergence se réalise sur les fonctions propres et non pas, comme dans d'autres méthodes, sur les valeurs propres, qui sont ici calculées a posteriori par le rapport de Rayleigh (Sect.5.2.1).

### 6.4.3 Vérification du comportement au centre

Figure 6.2, nous présentons les comportements radiaux au centre pour des composantes spectrales calculées dans les trois cas de figure que nous distinguons pour nos conditions au centre (cf Sect. 4.4.1 du Chap. 4). Notons que le choix des conditions au centre ont un impact crucial notamment sur les fréquences d'oscillation.

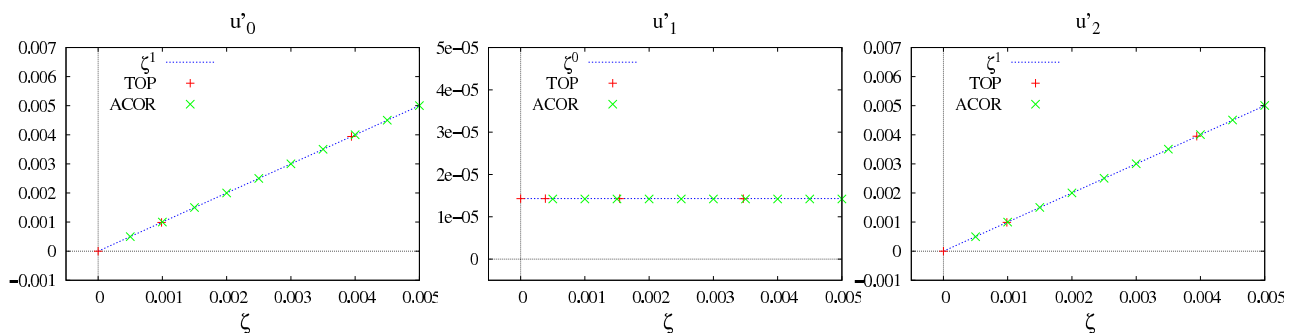


FIGURE 6.2: Scaled radial behavior of ACOR eigenfunctions (green dots) and of TOP ones (red dots) close to the center of the star, compared to the expected behavior in  $\zeta^{|\ell-1|}$  (in blue dashed lines), for three components corresponding to three different cases of parity and azimuthal orders :  $u'_0$  for an  $m = 0$ ,  $par = 0$  mode,  $u'_1$  for an  $m = 0$ ,  $par = 1$  mode, and  $u'_2$  for an  $m = 1$ ,  $par = 1$  one.

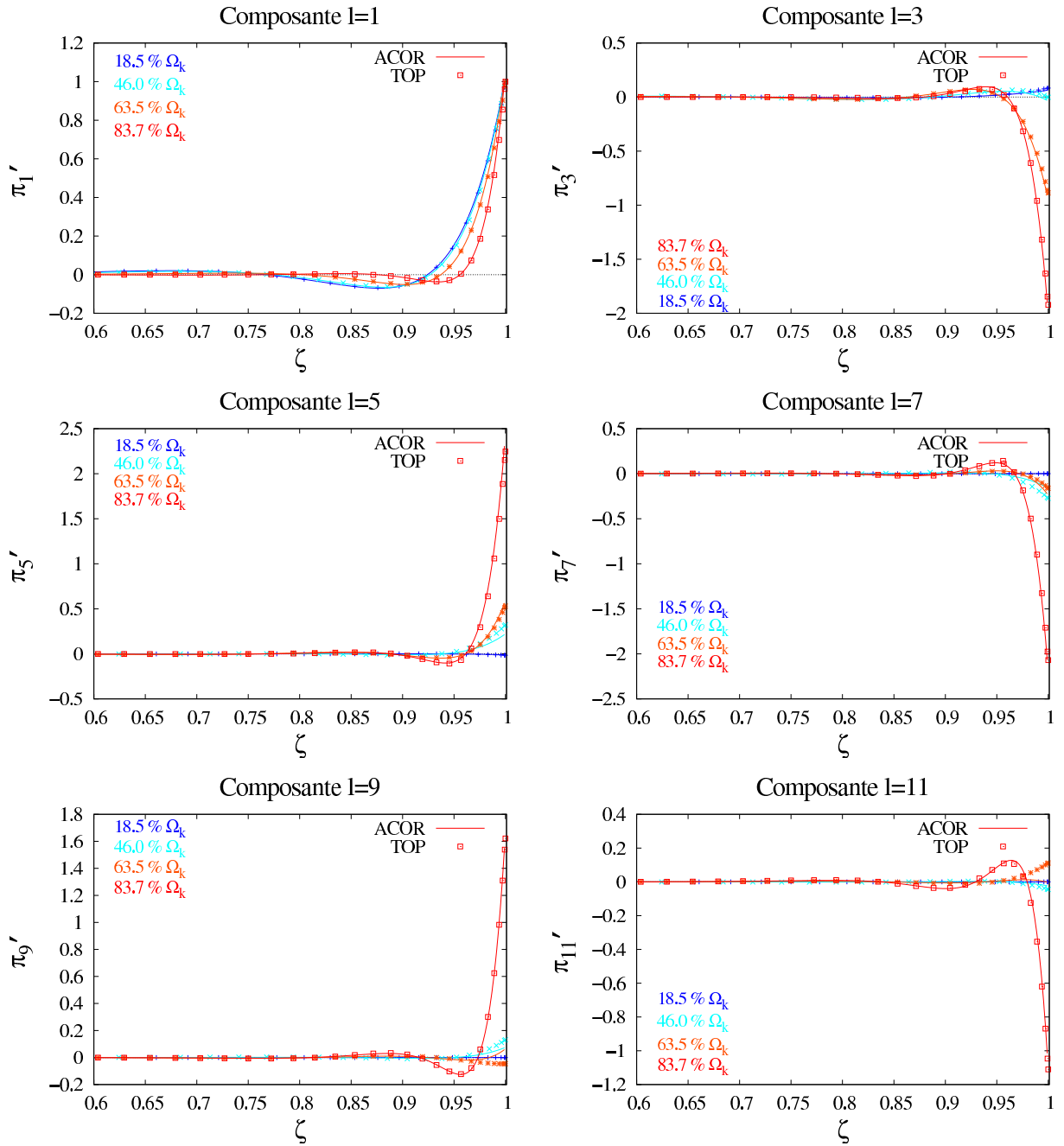


FIGURE 6.3: Radial parts of the eigenfunction  $\pi'_\ell$  for a low frequency mode dominated by an  $\ell = 1$ ,  $m = 0$  component, for an  $N=3$  polytropic model uniformly rotating at 18.5%, 46%, 63.5% and 83.7% of the Keplerian break up velocity.

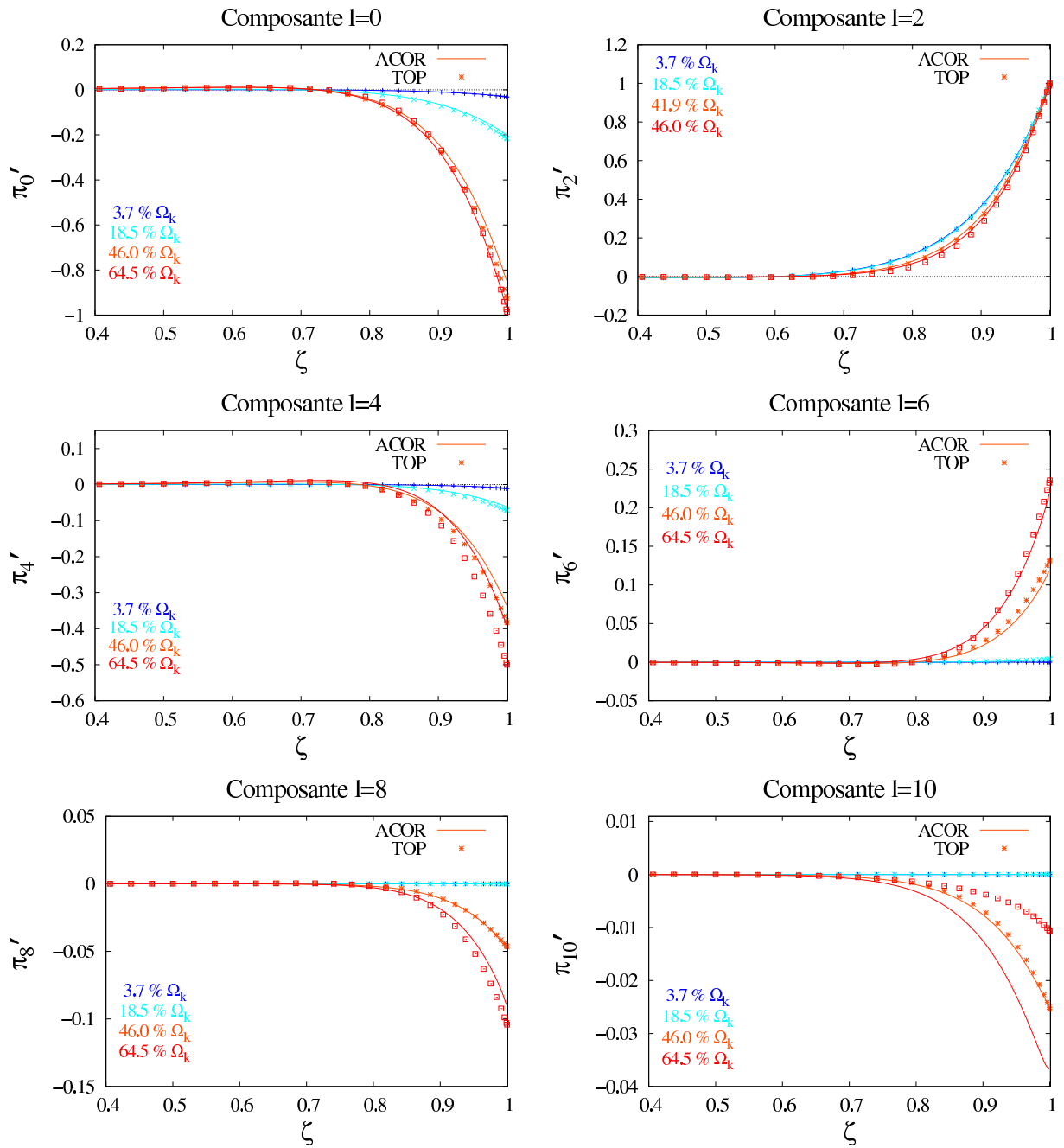


FIGURE 6.4: Radial parts of the eigenfunction  $\pi'_\ell$  for a low frequency mode dominated by an  $\ell = 2$ ,  $m = 0$  component, for an N=3 polytropic model uniformly rotating at 3.7%, 18.5%, 46% and 64.5% of the Keplerian break up velocity.

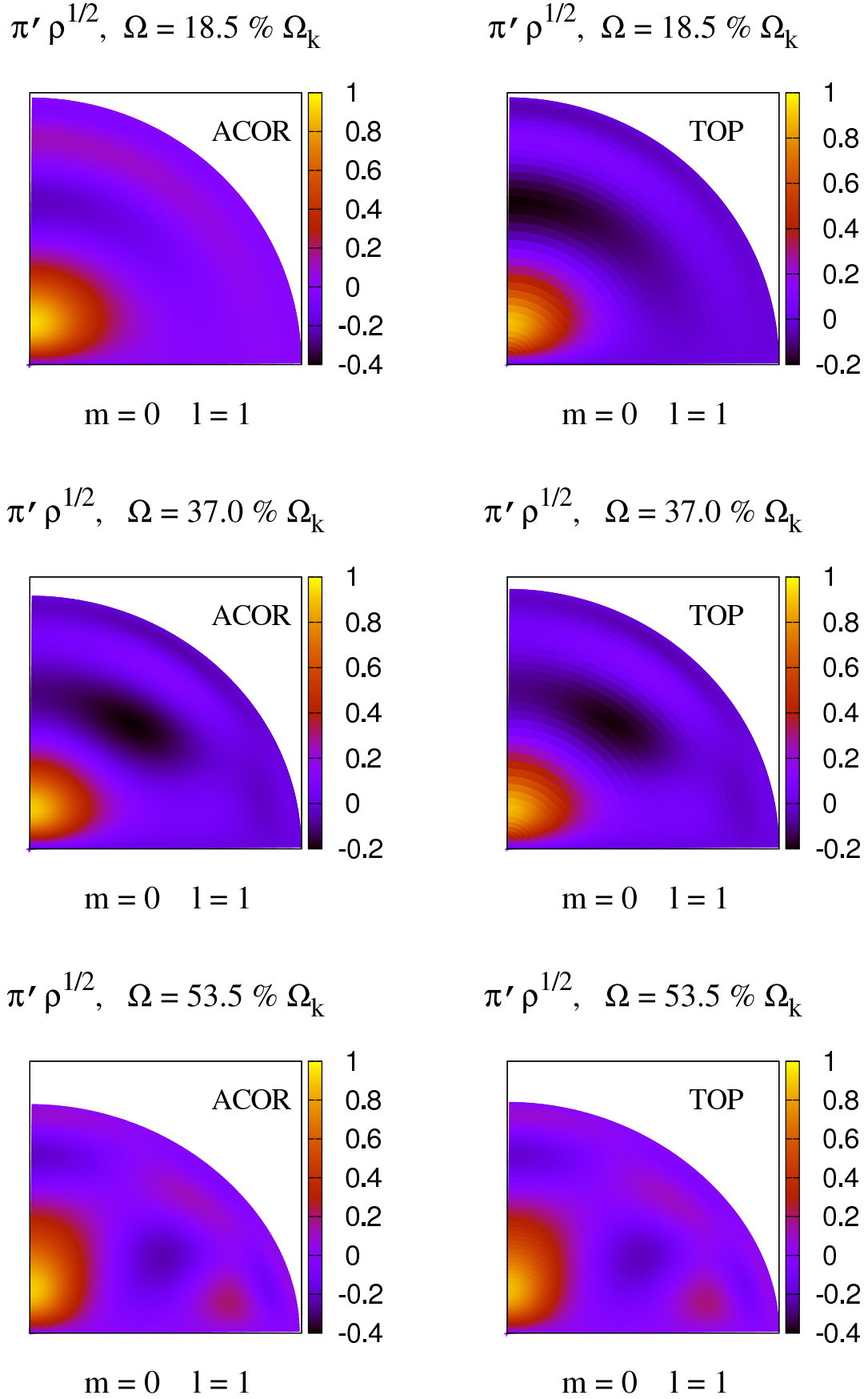


FIGURE 6.5: Spatial distribution in a meridional plane of a low frequency mode dominated by an  $\ell = 1$ ,  $m = 0$  component (corresponding to a frequency of  $100 \mu\text{Hz}$  for a  $10 M_\odot$  star, and to a frequency of  $250 \mu\text{Hz}$  for a  $1.9 M_\odot$  star), **left** : computed with ACOR, **right** : computed with TOP.

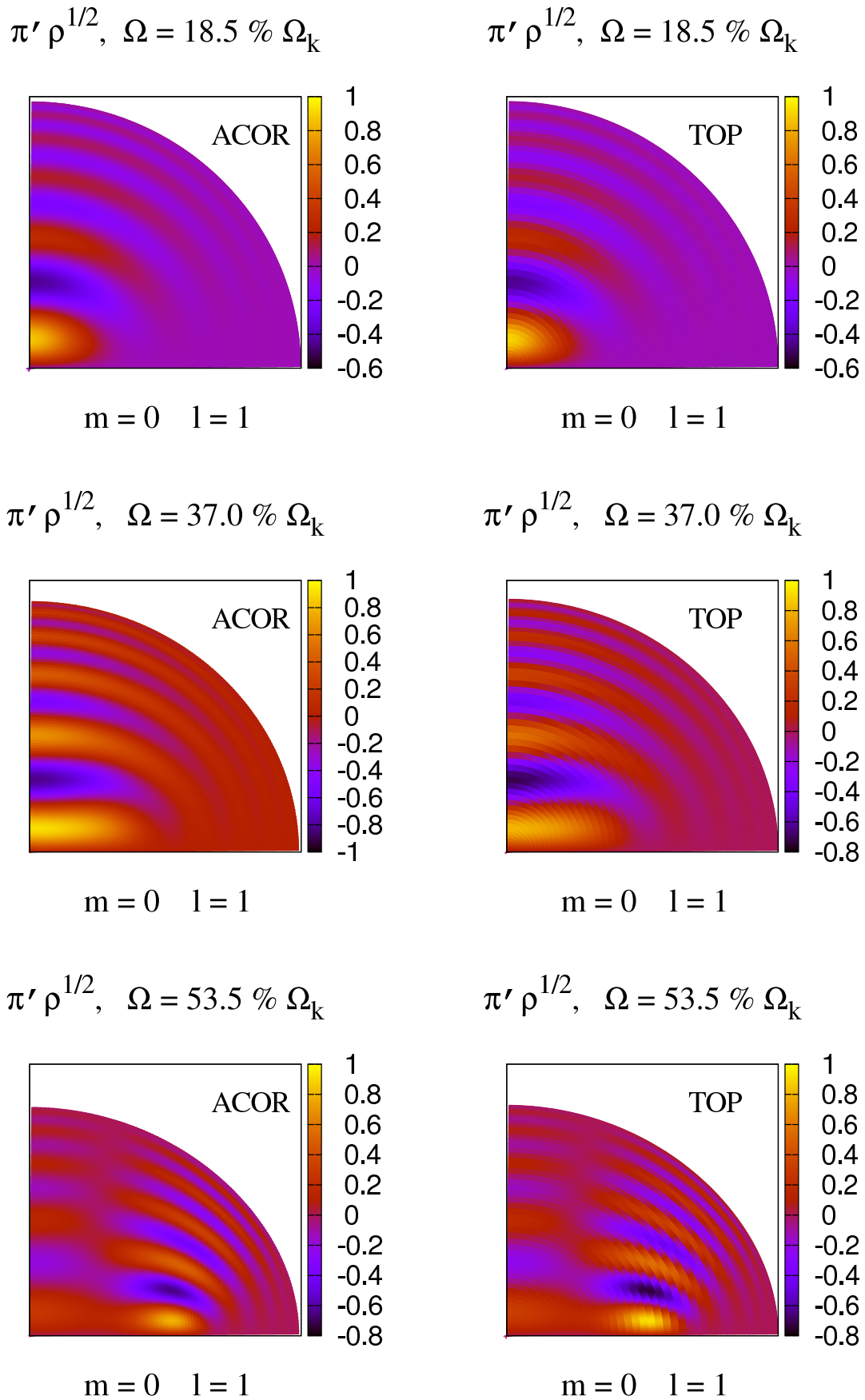


FIGURE 6.6: Spatial distribution in a meridional plane of a high frequency mode dominated by an  $\ell = 1, m = 0$  component (corresponding to a frequency of  $270 \mu\text{Hz}$  for a  $10 M_\odot$  star, and to a frequency of  $600 \mu\text{Hz}$  for a  $1.9 M_\odot$  star), **left** : computed with ACOR, **right** : computed with TOP.



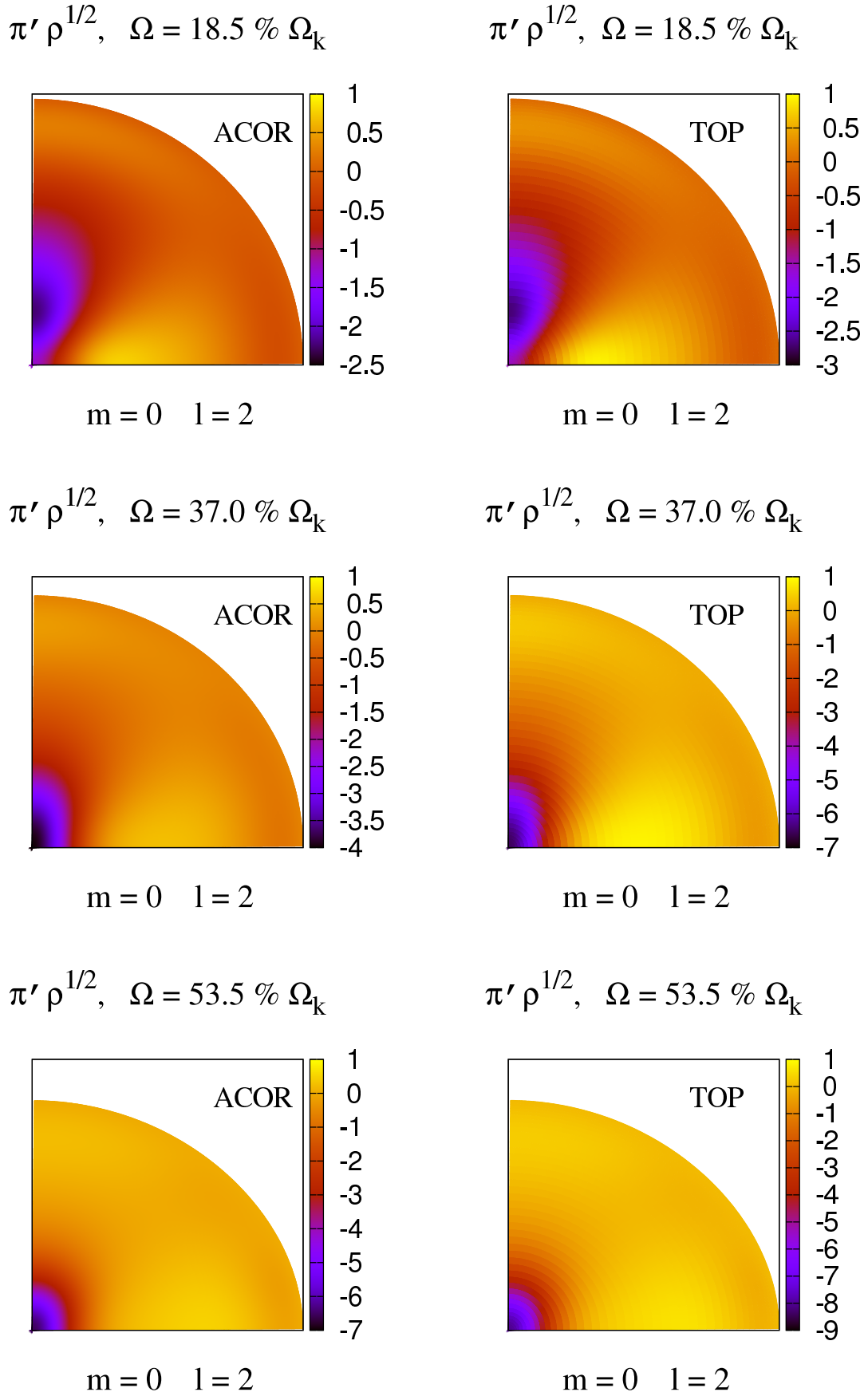


FIGURE 6.7: Spatial distribution in a meridional plane of a low frequency mode dominated by an  $\ell = 2$ ,  $m = 0$  component (corresponding to a frequency of  $70 \mu\text{Hz}$  for a  $10 M_\odot$  star, and to a frequency of  $160 \mu\text{Hz}$  for a  $1.9 M_\odot$  star), **left** : computed with ACOR, **right** : computed with TOP.

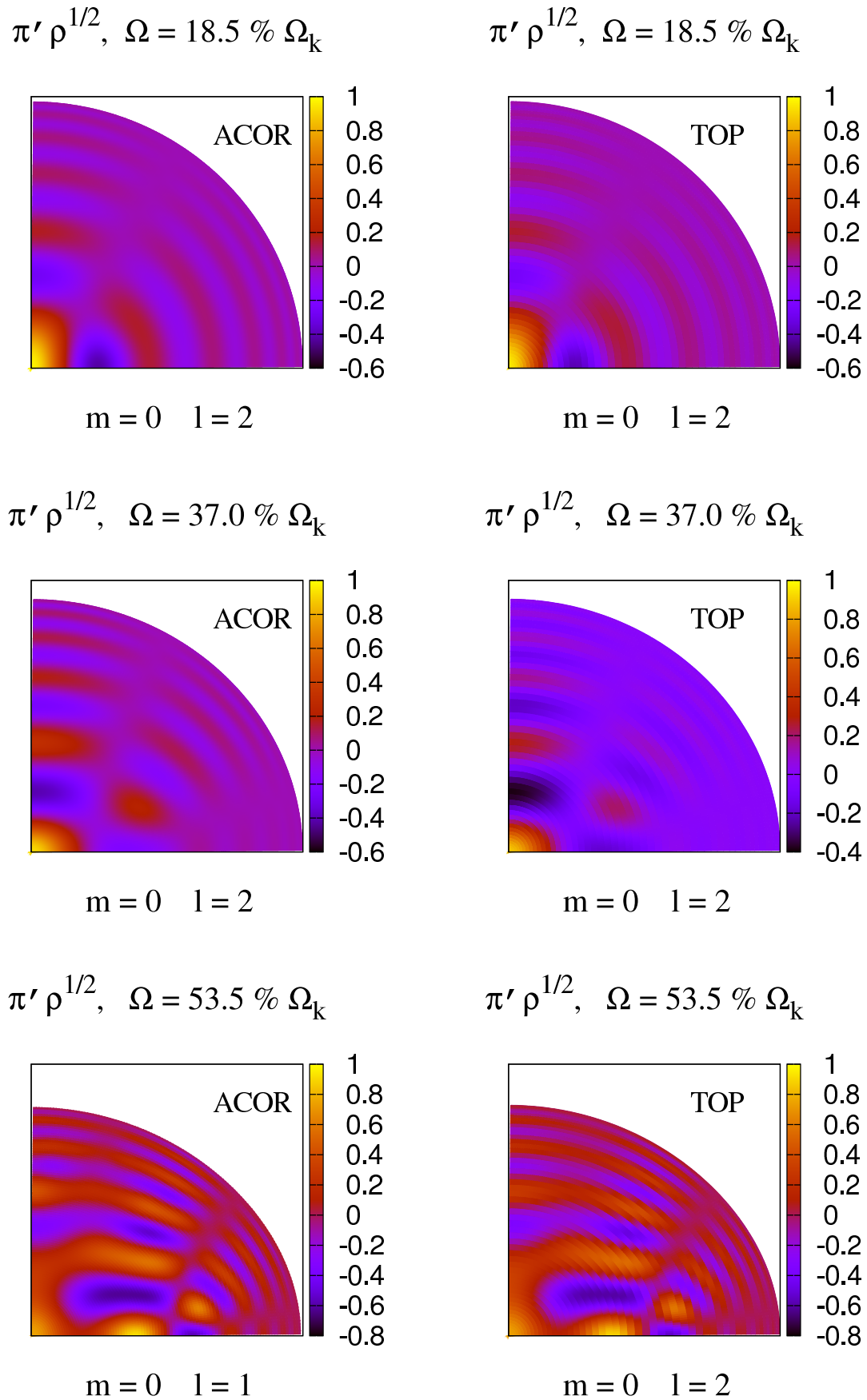


FIGURE 6.8: Spatial distribution in a meridional plane of a high frequency mode dominated by an  $\ell = 2, m = 0$  component (corresponding to a frequency of  $270 \mu\text{Hz}$  for a  $10 M_\odot$  star, and to a frequency of  $600 \mu\text{Hz}$  for a  $1.9 M_\odot$  star), **left** : computed with ACOR, **right** : computed with TOP.

Ces graphiques (Fig. 6.2) montrent que le comportement voulu est parfaitement imposé aux fonctions propres dans tous les cas.

## 6.5 Comparaison des fréquences propres

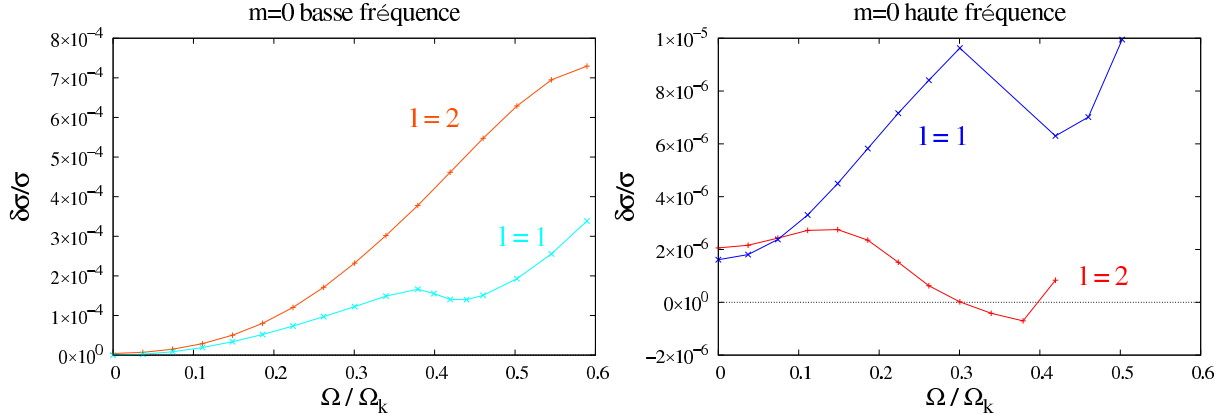


FIGURE 6.9: Relative discrepancies between eigenfrequencies computed by ACOR and by TOP ( $\delta\sigma/\sigma = (\sigma_{\text{TOP}} - \sigma_{\text{ACOR}})/\sigma_{\text{TOP}}$ ) as a function of the rotation angular velocity scaled by the Keplerian break up frequency  $\Omega/\Omega_k$ . For four axisymmetric modes : low frequency modes, one dominated by an  $m = 0, \ell = 1$  component (light blue) and another by an  $m = 0, \ell = 2$  component (orange) on the left panel, and high frequency modes, one dominated by an  $m = 0, \ell = 1$  component (dark blue) and another by an  $m = 0, \ell = 2$  component (red) on the left panel.

Notons tout d'abord que l'accord en fréquence des calculs issus des deux programmes d'oscillation est de l'ordre de  $\delta\sigma/\sigma \sim 10^{-4} - 10^{-6}$ , ce qui est tout à fait satisfaisant.

La principale remarque que l'on puisse faire en observant ces comparaisons entre les fréquences propres calculées par les deux approches (Fig.6.9), est que les écarts en fréquence entre les deux approches sont plus importants pour les modes situés dans une région de basse fréquence que dans une région de haute fréquence. Par exemple à une vitesse angulaire de rotation de  $30\% \Omega_k$ , tandis que les différences de fréquences figurant sur le graphique de gauche atteignent  $2 \times 10^{-4}$  en valeur relative (cela correspond à un écart de  $0,01 \mu\text{Hz}$  pour un modèle de  $10 M_\odot$  présentant une vitesse angulaire de  $160 \text{ km.s}^{-1}$ ), pour des modes de plus haute fréquence, pour une vitesse de rotation identique, l'écart de fréquence tombe à moins de  $1 \times 10^{-5}$  ( $0,002 \mu\text{Hz}$ ).

A priori, les modes de basse fréquence sont plus sensibles aux couches centrales de la structure d'équilibre. Les différences de résultats peuvent être dues d'une part aux différences entre les conditions aux limites au centre, qui comme évoqué à la section 6.2 sont prises différemment, ou d'autre part du fait qu'en entrée d'ACOR, nous prenons comme modèle d'équilibre le modèle polytropique interpolé sur une grille radiale régulière (distribution des points radiaux uniforme au sein du modèle), alors que TOP prend en charge directement le modèle spectral. Une première amélioration pourrait s'opérer en interpolant le modèle spectral sur une grille radiale présentant un nombre accru de points près du centre.

Une autre explication possible pourrait être le fait que plus  $\mu = \Omega/\omega = \Omega/\sigma \times \Omega_k$  est grand (à vitesse de rotation donnée, plus  $\sigma$  est petit), plus la force de Coriolis joue

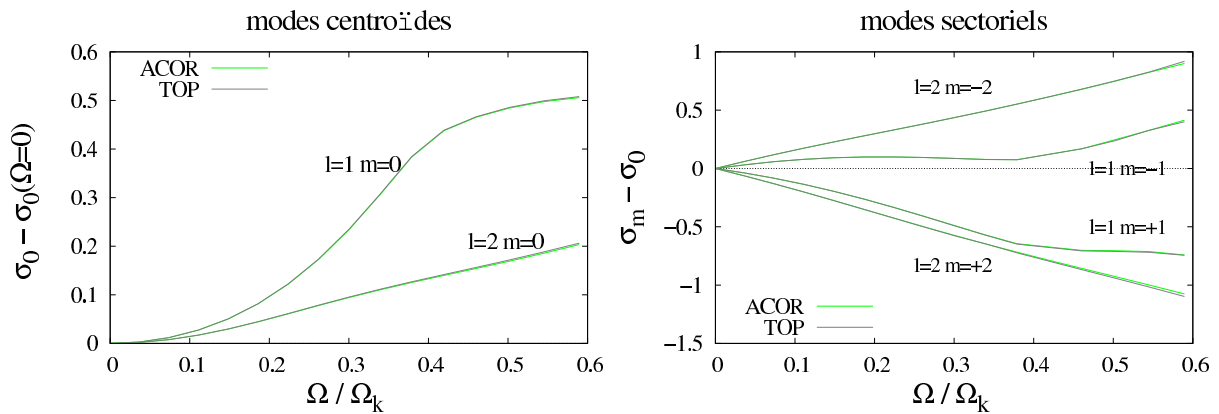


FIGURE 6.10: Behavior of eigenfrequencies with respect of the rotational angular velocity  $\Omega/\Omega_k$  : **Left** : for low frequency centroid modes with dominant component  $\ell = 1, m = 0$ , and  $\ell = 2, m = 0$  computed with ACOR (green) and with TOP (grey). **Right** : frequency differences between sectorial modes  $m = \pm\ell$  and their relative centroid ones, dominated by components  $\ell = 1, m = \pm 1$  and  $\ell = 2, m = \pm 2$  respectively, as a function of rotation angular velocity.

un rôle important dans les équations, et donc plus les couplages entre les composantes de degrés angulaires différents sont importants. Les incertitudes qui demeurent quant au calcul des intégrales de couplage (6.4) sont donc d'autant plus importantes.

Remarquons par ailleurs qu'il n'y a pas de discrimination entre les modes pairs ou impairs, les différences de fréquences sont similaires pour les deux types de modes. Cela me conforte sur le traitement des différentes parités par mon code.

Les erreurs observationnelles considérées au Chapitre 3 Section 3.3.4 sont de  $0.6 \mu\text{Hz}$  et  $0.08 \mu\text{Hz}$  (selon la durée d'observation avec CoRoT). En comparaison, on remarque donc que l'accord entre les résultats des deux calculs est très satisfaisant.

Une des caractéristiques observationnelles de la rotation en sismologie stellaire est le splitting rotationnel, écart en fréquence entre deux modes de même ordre radial et degré angulaire, et d'ordre azimutal opposé. Cet écart étant dû à la levée de dégénérescence induite par la rotation sur les modes d'oscillation, il informe directement sur le profil de rotation dans l'étoile. La Figure 6.10 montre la structure de deux multiplets en fonction de la vitesse de rotation. Les panneaux de droite de ces deux figures montrent qu'avec notre approche (ACOR), nous obtenons une structure des multiplets tout à fait similaire à celle obtenue avec l'approche de Reese et al. (2006). Les panneaux de gauche de ces figures montrent également que l'évolution des fréquences des modes centroïdes présente le même comportement avec les deux méthodes. Notons, à cette occasion, que la fréquence des modes centroïdes semble augmenter quasi linéairement avec la vitesse angulaire de rotation, ce qui justifie l'extrapolation linéaire utilisée pour déterminer les fréquences cibles placées en entrée d'ACOR.

Notons ici que le triplet à dominance  $\ell = 1$  subit un croisement évité avec un mode à dominance  $\ell = 5$ , ce qui explique le changement de pente observé Figure 6.10. Ce mode est représenté notamment dans sa distribution spatiale Figure 6.5.

## 6.6 Un croisement évité

En mécanique quantique (voir par exemple Cohen-Tannoudji et al. 1973), un croisement évité (plus communément appelé anti-croisement de niveaux) a lieu par exemple pour un système atomique à deux états ( $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ ), dans un champ magnétique externe, lorsque le niveau d'énergie de  $|1\rangle$  augmente avec le champ magnétique tandis que celui de  $|2\rangle$  diminue. Pour un couplage non nul entre les deux états, l'énergie du système ne peut être dégénérée, il y a alors croisement évité.

Une dernière vérification concernant la modélisation de la dynamique des modes d'oscillation de modèles polytropiques en rotation rapide est de s'assurer que le phénomène de croisement évité est correctement modélisé. Comme évoqué précédemment, un croisement évité se produit lorsque deux modes d'oscillation de même symétrie (même ordre azimutal, et degré angulaire de parité identique), donc couplés par les équations d'oscillation, sont très proches en termes de fréquence, et pour une vitesse de rotation donnée  $\Omega_{ac}$ . Lorsque l'on calcule le spectre d'oscillation pour un modèle en rotation à une vitesse de rotation inférieure à  $\Omega_{ac}$ , les deux modes présentent respectivement un comportement angulaire à dominance  $\ell_{ac1}$  et  $\ell_{ac2}$ , le mode à dominance  $\ell_{ac1}$  étant celui de plus basse fréquence. Pour une vitesse de rotation supérieure à  $\Omega_{ac}$ , les caractéristiques angulaires s'échangent, et le mode présentant la fréquence la plus basse présente un comportement angulaire à dominance  $\ell_{ac2}$ , alors que le mode de fréquence supérieure est dominé par le degré  $\ell_{ac1}$ .

Comme évoqué dans le chapitre introductif, ce phénomène a été observé dans les modèles pour la première fois par Clement (1986), puis l'existence de ce phénomène a été confirmée par Lee & Saio (1987); Espinosa et al. (2004); Reese et al. (2006).

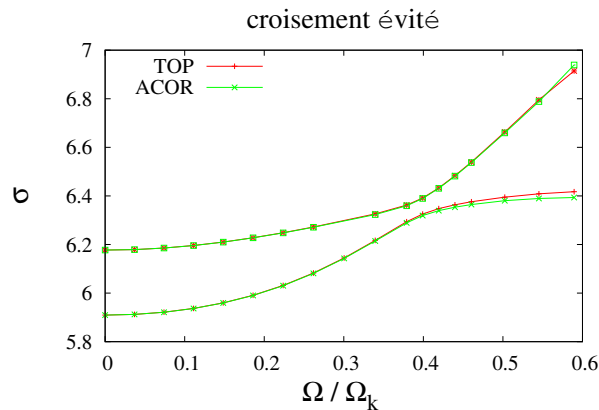


FIGURE 6.11: Frequency behavior of two modes in avoided crossing as a function of rotation velocity scaled by  $\Omega_k$ . The avoided crossing seems to occur around 40%  $\Omega_k$  between two axisymmetric  $n = 3$  modes: one dominated by an  $\ell = 1$  component, and another one dominated by an  $\ell = 5$  component, computed with ACOR (in green) and TOP (in red). Their spatial geometry is illustrated on Fig. 6.12.

La Figure 6.11 illustre un croisement évité entre un mode à dominance  $\ell = 1$ , et un mode à dominance  $\ell = 5$ , tout deux  $m = 0$  et  $n = 3$ . Avant le croisement, le mode de plus basse fréquence présente un comportement à dominance  $\ell = 1$ , alors qu'après le croisement évité, il est dominé par le degré  $\ell = 5$ . La figure 6.11 nous permet tout d'abord de remarquer que le croisement évité est modélisé précisément de la même

manière par les deux approches (TOP et ACOR), c'est-à-dire qu'il a lieu à la même vitesse de rotation (autour de  $40\%\Omega_k$ ), et la figure 6.12 permet d'observer la manière dont se déroule le transfert de degré angulaire.

De ce travail de comparaison émerge tout d'abord un très bon accord entre les fonctions propres issues des deux modélisations. La structure du spectre et la dynamique des modes d'oscillation avec la rotation, issues des deux codes sont tout à fait similaires également. Les comparaisons sont par ailleurs tout aussi concluantes pour les fréquences propres au regard des erreurs observationnelles. Sachant que les valeurs propres sont très sensibles aux paramètres numériques tels que la résolution radiale ou la résolution angulaire, ou encore aux conditions aux limites imposées pour le système aux valeurs propres, il n'est pas raisonnable d'espérer obtenir des fréquences propres davantage proches, et les différences peuvent nous donner une estimation de la précision des calculs concernant les fréquences d'oscillation.

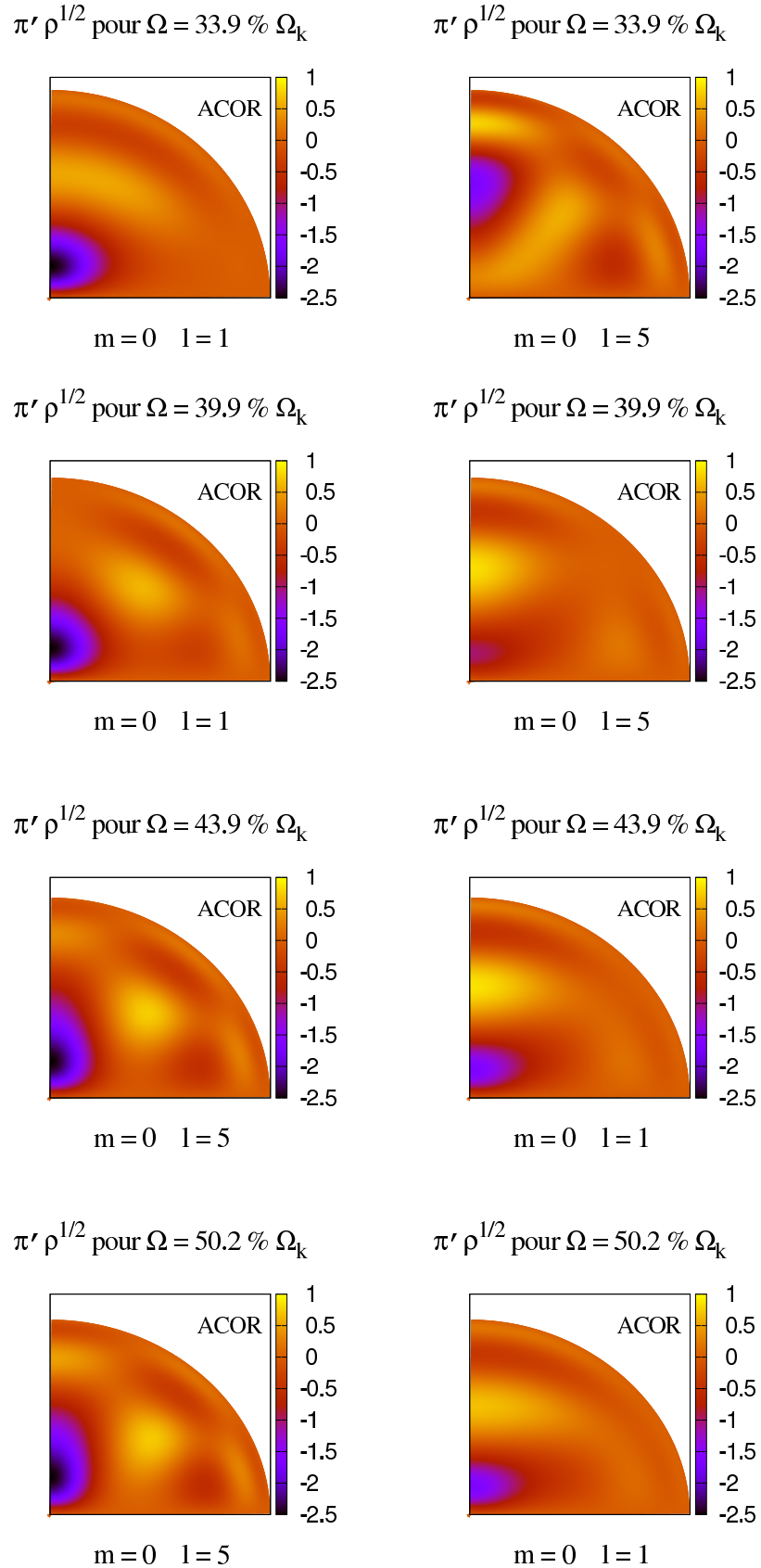


FIGURE 6.12: Spatial distribution in a meridional plane of two low frequency modes (radial order  $n = 3$ , azimuthal order  $m = 0$ ) in avoided crossing occurring around  $\Omega = 40\% \Omega_k$  modelled by ACOR. **Left** : at low rotation velocity, the mode is dominated by an  $\ell = 1$  component and change nature when the velocity increases to become  $\ell = 5$ . **Right** : at low rotation velocity, the mode is dominated by an  $\ell = 5$  component and change nature when the velocity increases to become  $\ell = 1$ .







# Chapitre 7

## Application : Oscillation d'un modèle évolué et déformé

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Déformation du modèle</b>	<b>128</b>
7.1.1	Solution de l'équation hydrostatique	130
7.1.2	Solution de l'équation de Poisson	131
7.1.3	Détermination de la pression	132
7.1.4	Processus d'itération	133
<b>7.2</b>	<b>Système de coordonnées adapté pour le calcul des oscillations</b>	<b>133</b>
7.2.1	1 <sup>er</sup> domaine : Au centre entre $\zeta = 0$ et $\zeta = R_{\text{eq}}^c$	134
7.2.2	2 <sup>e</sup> domaine : Entre $\zeta = R_{\text{eq}}^c$ , et $\zeta = 1$	135
7.2.3	3 <sup>e</sup> domaine : Entre $\zeta = 1$ , et $\zeta = 2$	135
7.2.4	Système de coordonnées global	137
7.2.5	Interpolation du modèle	137
<b>7.3</b>	<b>Oscillations</b>	<b>138</b>
7.3.1	Modèle d'équilibre	139
7.3.2	Spectre d'oscillation	141
7.3.3	Géométrie des modes propres d'oscillation	142

---

Comme évoqué dans le chapitre introductif, la rotation a deux types d'effets sur la structure stellaire : d'une part, un effet géométrique dû à la déformation centrifuge, d'autre part, un effet qui intervient au long de l'évolution de l'étoile sur la microphysique interne, avec les courants de circulation méridienne et la turbulence de cisaillement qui redistribuent le moment cinétique et mélangent les éléments chimiques.

Actuellement, on dispose d'une part, de modèles bidimensionnels ZAMS calculés pour des lois de rotation arbitrairement conservatives (voir Deupree 1990, 1995; Lovekin et al. 2009, plus récemment. Notons que les modèles calculés par les auteurs présentent un nombre restreint de couches et sont donc inadaptés aux calculs sismiques de précision). D'autre part, on dispose de modèles stellaires bidimensionnels non évolués dans lesquels l'effet de la rotation sur la thermodynamique stellaire est entièrement pris en compte (Rieutord & Espinosa Lara 2009). À l'heure actuelle, on ne peut simuler simultanément

et de manière complète les effets de la rotation, c'est-à-dire qu'on ne sait obtenir de modèles d'évolution stellaire en deux dimensions.

Par contre, nous disposons d'outils d'évolution stellaire en symétrie sphérique (ou s'écartant légèrement de la symétrie sphérique) et de méthodes de déformation a posteriori permettant d'obtenir à un stade donné de l'évolution d'une étoile un modèle stellaire bidimensionnel. C'est l'approche que nous avons adoptée dans ce chapitre : nous présentons ici une étude des oscillations de modèles stellaires évolués et déformés. Ce travail est préliminaire, il s'agit de montrer la mise en œuvre d'une telle chaîne de modélisation. Les modèles à symétrie sphérique utilisés ici sont des modèles qui ne prennent pas en compte la circulation méridienne et la turbulence (modèles issus de STAROX, voir Roxburgh 2008).

Ce travail représente la première étape d'un projet dont le but est de déformer des modèles incluant l'effet de la rotation sur la microphysique au cours de l'évolution stellaire, avec des prescriptions cohérentes sur le comportement latitudinal de la vitesse de rotation.

## 7.1 Déformation du modèle

Les méthodes de champ autocohérent (Self Consistent Field) permettent de modéliser la structure hydrostatique d'une étoile en rotation rapide, subissant la déformation induite par l'accélération centrifuge. De manière générale, ces méthodes divisent la modélisation de la structure stellaire en deux étapes. Une première étape consiste à construire le potentiel gravitationnel au sein de l'étoile en tenant compte de la force centrifuge et pour un profil de densité donné. Dans une seconde étape il s'agit, à partir du potentiel gravitationnel calculé à l'étape précédente, d'intégrer l'équation de Poisson afin de déterminer le champ de densité en équilibre avec le Laplacien de potentiel gravitationnel. En partant d'une distribution de densité initiale, ces deux étapes sont intégrées dans un processus itératif qui est stoppé lorsque la distribution de densité converge de manière satisfaisante. Cette approche a été adoptée pour la première fois pour des modèles d'étoile homogène en rotation uniforme par Faulkner et al. (1968) et Kippenhahn & Thomas (1970), puis pour des modèles stellaires (en l'absence de viscosité et de circulation) en rotation en coquille ( $\Omega(r)$ ) par Ostriker & Mark (1968). Roxburgh (2004) met au point une telle méthode pour des modèles stellaires ZAMS en rotation uniforme avec une détermination des paramètres de l'écart à la sphéricité cohérente. Jackson et al. (2005) appliquent la méthode SCF pour calculer des modèles stellaires ZAMS en rotation en coquille. Enfin, Roxburgh (2006) propose d'adopter l'approche autocohérente afin de construire un modèle hydrostatique bidimensionnel stratifié, en rotation différentielle, à partir d'un profil radial de densité  $\rho_m(r)$  déterminé par un code d'évolution à symétrie sphérique qui sera pris comme profil de densité à une latitude donnée  $\theta_m$ .

C'est précisément avec cette méthode, dans le cadre d'une collaboration avec Ian Roxburgh, que j'ai modélisé les oscillations d'un modèle stellaire évolué déformé par une rotation différentielle  $(r, \theta)$  rapide. L'équilibre thermique n'intervient pas dans les calculs, étant considéré comme imposé par la turbulence de cisaillement et la circulation méridienne. La rotation peut être prise comme étant différentielle en rayon et en latitude, néanmoins, cela nécessite une prescription pour le profil latitudinal de la

vitesse angulaire de rotation. La structure hydrostatique bidimensionnelle d'une étoile en rotation rapide, c'est-à-dire le champ de densité  $\rho_0(r, \theta)$ , de pression  $p_0(r, \theta)$  et de potentiel gravitationnel  $\Phi_0(r, \theta)$  peut être entièrement déterminé par la vitesse angulaire de rotation  $\Omega(r, \theta)$ , le profil de densité  $\rho_m(r)$  et la pression de surface  $p_s$  le long d'une latitude donnée  $\theta_m$ . L'exposant adiabatique  $\Gamma_1(r, \theta)$  et le profil de la composition en hydrogène  $X(r, \theta)$  peuvent être déterminés à partir de l'équation d'état, étant donnés  $\rho_0(r, \theta)$  et  $p_0(r, \theta)$  et le profil de la composition chimique en  $\theta_m$ ,  $X_m(r)$ . Ainsi, étant donné un modèle à symétrie sphérique avec une prescription du comportement latitudinal de la vitesse angulaire de rotation, on peut obtenir avec l'approche auto-cohérente un modèle hydrostatique bidimensionnel pouvant être utilisé pour le calcul des oscillations adiabatiques d'étoiles en rotation rapide.

Les équations gouvernant la structure hydrostatique d'une étoile en rotation sont l'équation de mouvement fluide et l'équation de Poisson :

$$\left( \vec{v}_0 \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{v}_0 = - \frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} - \vec{\nabla} \Phi_0 \quad (7.1)$$

$$\text{et } \vec{\nabla}^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0 \quad (7.2)$$

Dans ce chapitre, nous prendrons un champ de vitesse dû uniquement à la rotation ; l'effet du champ magnétique, les courants de circulation méridienne ainsi que la turbulence ne sont pas pris en compte. Ainsi, on a  $\vec{v}_0 = \vec{\Omega} \times \vec{r} = r \sin \theta \Omega \vec{e}_\varphi$  dans la base sphérique  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ , et l'équation de l'hydrostatique s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\vec{\nabla} p_0}{\rho_0} &= - \vec{\nabla} \Phi_0 + r \Omega^2 \vec{e}_s = - \vec{F} \\ \text{où } \vec{e}_s &= \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta \end{aligned} \quad (7.3)$$

Conformément à Roxburgh (2006), en prenant le rotationnel de l'équation (7.3) on élimine de l'équation le gradient de pression, et on obtient alors le système d'équations :

$$\left( F_\theta \frac{\partial \rho_0}{\partial r} - \frac{F_r}{r} \frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} \right) \vec{e}_\varphi = \rho_0 \text{rot} (r \Omega^2 \vec{e}_s) \quad (7.4)$$

$$\vec{\nabla}^2 \Phi_0 = 4\pi G \rho_0 \quad (7.5)$$

Les équations (7.4) et (7.5) constituent un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) avec conditions aux limites, qui permet de déterminer un profil bidimensionnel de densité  $\rho_0(r, \theta)$ , ainsi que le champ gravitationnel correspondant  $\Phi_0(r, \theta)$ , à partir des valeurs de  $\rho_0(r, \theta_m) = \rho_0(r)$  à l'angle  $\theta_m$ , et d'une prescription de  $\Omega(r, \theta)$ . La pression  $p_0(r, \theta)$  peut être déterminée par l'équation (7.3) pourvu que sa valeur à la surface  $p_s$  soit connue.

La méthode de champ autocohérent (Roxburgh 2006) consiste alors à résoudre l'équation de Poisson (7.5) en supposant un profil de densité donné ( $\rho_0(r, \theta_m) = \rho_0(r)$ ), puis de résoudre l'équation hydrostatique (7.4) en considérant le potentiel gravitationnel  $\Phi_0(r, \theta)$  trouvé précédemment et ensuite d'itérer ce processus jusqu'à obtenir convergence du profil de densité.

### 7.1.1 Solution de l'équation hydrostatique

On considère le potentiel gravitationnel  $\Phi_0(r, \theta)$  connu, et on cherche à résoudre l'équation (7.4), équation différentielle partielle à coefficients non constants, avec second membre connaissant  $\rho_0(r, \theta_m)$ . Pour ce faire, Roxburgh (2006) propose une méthode astucieuse appelée méthode des caractéristiques. Cela consiste dans un premier temps à déterminer les courbes paramétrées  $\{r(s), \theta(s)\}$  avec  $s > 0$  (appelées courbes caractéristiques) le long desquelles l'équation différentielle partielle devient une équation différentielle ordinaire (EDO), puis à résoudre l'équation différentielle ordinaire le long de ces courbes caractéristiques. Cherchons tout d'abord à déterminer les équations de ces caractéristiques. Si l'on met l'EDP (7.4) sous la forme :

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial \theta} - r \frac{F_\theta}{F_r} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = -r \rho_0 \frac{F_\theta}{F_r} \overrightarrow{\text{rot}} (r \Omega^2 \vec{e}_s) \cdot \vec{e}_\varphi \quad (7.6)$$

Les courbes caractéristiques  $(r(s), \theta(s))$  doivent vérifier :

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds} \quad (7.7)$$

$$\text{avec } \frac{dr}{ds} = -r \frac{F_\theta}{F_r} \text{ et } \frac{d\theta}{ds} = 1 \quad (7.8)$$

Ceci nous donne alors  $d\theta = ds$ , on choisit  $\theta = s$ , on obtient alors l'équation déterminant les courbes caractéristiques  $r(\theta)$  :

$$\frac{dr}{d\theta} + r \frac{F_\theta}{F_r} = 0 \quad (7.9)$$

$$\text{avec : } r(\theta_m) = r_m \quad (7.10)$$

Où les  $r_m$  sont sur la grille radiale du modèle sphérique qui donne  $\rho_0(r)$ , étant pris comme distribution des points radiaux à l'angle de référence  $\theta_m$  dans le modèle déformé. L'équation (7.10) représente la condition aux limites pour les courbes  $r(\theta)$ . Roxburgh (2006) recherche ensuite les solutions de (7.9) sous la forme  $r(\theta) = r_m g_m(\theta)$ , et l'on a :

$$\frac{dg_m}{d\theta} = - \frac{r}{r_m} \frac{F_\theta}{F_r} \quad (7.11)$$

$$\text{avec } g_m = 1 \text{ en } (r_m, \theta_m) \quad (7.12)$$

Que l'on intègre sur une grille de secteurs angulaires  $\theta_j$  tels que  $\theta_j \in [0; \pi/2]$ .

Le long des caractéristiques  $r(\theta)$  ainsi déterminées, l'équation différentielle partielle (7.6) devient une EDO :

$$\frac{d\rho_0}{d\theta} + f(\theta) \rho_0 = 0 \quad (7.13)$$

$$\text{Où : } f(\theta) = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} (r \Omega^2 \vec{e}_s) \cdot \vec{e}_\varphi \quad (7.14)$$

Que l'on intègre le long des caractéristiques  $(r(\theta_j), \theta_j)$ .

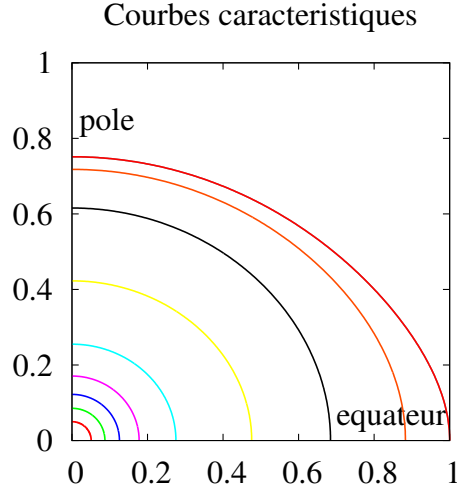


FIGURE 7.1: Characteristics curves computed for a  $M = 2 M_{\odot}$ ,  $R_{\text{eq}} = 2.4 R_{\odot}$  stellar model with initial hydrogen abundance of  $X = 0.72$ , metallicity of  $Y = 0.02$ , (for further details on the evolution model one should refer to Roxburgh 2008), differentially rotating with a surface equatorial velocity of  $282 \text{ km.s}^{-1}$ .

### 7.1.2 Solution de l'équation de Poisson

Étant donné la densité  $\rho_0(r, \theta)$  sur la grille  $(r_i, \theta_j)$ , on cherche maintenant à résoudre l'équation de Poisson 7.5 pour  $\Phi_0$  en utilisant l'algorithme décrit par Roxburgh (2004). On décompose  $\rho_0$  et  $\Phi_0$  en polynômes de Legendre :

$$\rho_0(r, \theta) = \sum_0^{N_k} c_k(r) P_{2k}(\cos \theta) \quad (7.15)$$

$$\Phi_0(r, \theta) = \sum_0^{N_k} f_k(r) P_{2k}(\cos \theta) \quad (7.16)$$

L'équation de Poisson donne alors  $N_k + 1$  équations :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df_k}{dr} \right) - \frac{2k(2k+1)}{r^2} f_k = 4\pi G c_k \quad (7.17)$$

Vérifiant les conditions aux limites :

$$f_k(0) = 0 \text{ pour } k \neq 0 \quad (7.18)$$

$$\text{et } (2k+1) f_k + r \frac{df_k}{dr} = 0 \text{ en } r = R_s \quad (7.19)$$

$r = R_s$  correspondant à une surface sphérique en dehors de l'étoile.

La décomposition spectrale du champ de densité se fait simplement en imposant qu'à chaque rayon  $r_i$ , l'équation 7.15 soit vérifiée pour tous les angles  $\theta_k$  (où les  $\theta_k$  sont un sous-ensemble des  $\theta_j$  avec  $k = 0, N_k$ ). Ce qui revient à résoudre l'équation matricielle :

$$c_k = W_{k,n}^{-1} \rho_n, \quad \text{où } W_{k,n} = P_{2k}(\cos \theta_n), \quad k, n = 0, N_k \quad (7.20)$$

Une fois les coefficients  $c_k$  déterminés, on peut résoudre l'équation 7.17 comme une équation différentielle ordinaire non linéaire du second ordre. Alors que Jackson et al. (2005) résolvent cette équation par la méthode des différences finies, Roxburgh (2006) utilise une résolution par représentation intégrale de l'équation 7.17. On peut encore résoudre cette équation différentielle par la méthode de variation de la constante. Dans cette méthode, on résout dans un premier temps l'équation homogène de Laplace :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df_k}{dr} \right) - \frac{2k(2k+1)}{r^2} f_k = 0 \quad (7.21)$$

En faisant un développement en série pour la composante  $f_k$  du potentiel gravitationnel, on trouve une solution de la forme :

$$f_k = A r^{2k} + \frac{B}{r^{2k+1}} \quad (7.22)$$

La méthode consiste à résoudre ensuite l'équation de Poisson 7.17, en introduisant le développement en série 7.22 pour  $f_k$ , et en considérant  $A$  et  $B$  comme des fonctions de  $r$ . On constate que  $A$  et  $B$  restent indéterminés, on impose alors une condition supplémentaire :

$$r^{2k} \frac{dA}{dr} + \frac{1}{r^{2k+1}} \frac{dB}{dr} = 0 \quad (7.23)$$

On obtient alors un système d'équations sur  $\frac{dA}{dr}$  et  $\frac{dB}{dr}$  :

$$\frac{dA}{dr} = \frac{4\pi G}{(4k+1)r^{2k-1}} c_k(r) \quad (7.24)$$

$$\frac{dB}{dr} = -r^{2k+2} \frac{4\pi G}{(4k+1)} c_k(r) \quad (7.25)$$

Et sachant que les conditions aux limites permettent d'établir :  $A(R_s) = 0$  et  $B(0) = 0$ , on obtient :

$$f_k(r) = \frac{4\pi G r^{2k}}{4k+1} \int_{R_s}^r \frac{1}{u^{2k+1}} c_k(u) du - \frac{4\pi G}{(4k+1)r^{2k+1}} \int_0^r u^{2k+2} c_k(u) du \quad (7.26)$$

On peut démontrer que cette expression est équivalente à l'équation :

$$f_k(r) = r^{2k} \int_{R_s}^r \frac{4\pi G}{u^{4k+2}} \left[ \int_0^u c_k(v) v^{2k+2} dv \right] du - \lambda_k r^{2k} \quad (7.27)$$

$$\text{où } \lambda_k = \frac{4\pi G}{(4k+1)R_s^{4k+1}} \int_0^{R_s} c_k(r) r^{2k+2} dr \quad (7.28)$$

obtenue par Roxburgh (2006), au moyen d'une intégration par parties.

### 7.1.3 Détermination de la pression

Le fait que, le long des courbes caractéristiques  $r(\theta)$ , l'équation 7.9 soit vérifiée, implique que l'on ait :  $\vec{dr} \cdot \vec{F} = 0$ . En projetant l'équation hydrostatique sur  $\vec{dr}$ , j'ai alors  $dp_0 = 0$  le long des caractéristiques, ce qui signifie que les caractéristiques sont

des isobares, ou encore que la pression est constante sur les caractéristiques. De cette manière, la connaissance de la pression le long d'un rayon à la latitude de référence  $\theta_m$  suffit pour déterminer le champ de pression  $p(r, \theta)$ . On détermine alors  $p(r, \theta_m)$  grâce à l'équation hydrostatique projetée dans la direction radiale :

$$\frac{\partial p}{\partial r}(r, \theta_m) = -\rho_0(r, \theta_m) \left( \frac{\partial \Phi_0}{\partial r}(r, \theta_m) - \Omega^2 r \sin^2 \theta_m \right) \quad (7.29)$$

Avec la condition aux limites selon laquelle  $p(R_m, \theta_m) = p_s$ ,  $R_m$  étant le rayon à la latitude  $\theta_m$ . Les champs de densité et de potentiel gravitationnel étant calculés comme indiqué dans les Sections 7.1.1 et 7.1.2, l'équation différentielle 7.29 est aisément intégrable.

### 7.1.4 Processus d'itération

À la première itération, nous considérons un profil de densité donné par un modèle sphérique, comme densité à la latitude de référence  $\theta_m$  :  $\rho_m(r)$ . Ce profil initial de densité est pris comme point de départ pour un premier calcul de potentiel gravitationnel selon la méthode exposée en Section 7.1.2. Le potentiel gravitationnel ainsi déterminé est ensuite injecté dans le calcul expliqué à la Section 7.1.1, et ainsi de suite jusqu'à convergence. La convergence étant satisfaite lorsque les différences relatives entre les rayons polaires et équatoriaux entre deux itérations successives n'excèdent pas  $10^{-9}$  (Roxburgh 2006).

## 7.2 Système de coordonnées adapté pour le calcul des oscillations

Ainsi, à la suite de la déformation, on obtient un modèle bidimensionnel décrit sur les courbes caractéristiques qui, comme évoqué précédemment, correspondent à des isobares.

Afin de ne pas ajouter d'incertitudes à celles issues du modèle de structure, nous avons tenu à utiliser le plus possible un système de coordonnées où la coordonnée radiale correspondrait aux courbes caractéristiques. Il est important par ailleurs de conserver ce système de coordonnées au niveau de l'émergence du cœur convectif, ainsi qu'à la surface de l'étoile où les variations brusques des grandeurs d'équilibre suivent les isobares. Néanmoins, afin d'éviter les problèmes de conditions aux limites au centre (où il est nécessaire d'imposer un comportement sphérique aux fonctions propres) ainsi qu'en une surface extérieure à l'étoile (où la condition sur la perturbation du potentiel gravitationnel doit être prise en une surface sphérique) nous avons mis au point un système de coordonnées hybride. Ce système permet de passer continuellement d'un système sphérique au centre (pour un certain nombre de couches radiales en dessous de ce qu'on appelle le gradient de  $\mu$ ) à un système correspondant aux isobares à la surface stellaire, puis de la surface à une surface extérieure sphérique.

Dans ce nouveau système de coordonnées, comme dans Bonazzola et al. (1998) la coordonnée radiale  $\zeta$  doit s'exprimer en fonction de la coordonnée radiale sphérique  $r$  au moyen d'un homéomorphisme, c'est-à-dire d'une fonction bijective monotone. De manière générale, on choisira de prendre la grille de  $\zeta(i)$  sur la grille de  $r$  correspondant



aux caractéristiques à l'équateur :  $\zeta(i) = r(i, \theta_{\text{eq}})$ . Puis pour trouver la transformation  $(\zeta, \theta) \mapsto r(\zeta, \theta)$  qui convient, dans chaque domaine, on procède comme suit :

### 7.2.1 1<sup>er</sup> domaine : Au centre entre $\zeta = 0$ et $\zeta = R_{\text{eq}}^c$

Il s'agit de choisir la transformation qui permet de passer d'un système sphérique en  $\zeta = 0$  à une isobare en  $\zeta = R_{\text{eq}}^c$ , où  $R_{\text{eq}}^c$  est le rayon équatorial en un point du cœur convectif. Le choix pour  $R_{\text{eq}}^c$  est libre. Il apparaît après des essais qu'un  $R_{\text{eq}}^c$  égal à la moitié de la distance qui sépare le centre du point situé au début de la signature du gradient de  $\mu$  dans la fréquence de Brunt-Väisälä (par défaut) convient aux calculs. C'est donc le choix que j'ai adopté ici. En l'absence de cœur convectif,  $R_{\text{eq}}^c$  est pris comme étant un centième du rayon stellaire à l'équateur. On rappelle que dans le cas des modèles polytropiques, on avait choisi pour l'intérieur stellaire la transformation proposée par Bonazzola et al. (1998) :

$$\forall \zeta \in [0; 1], \forall \theta \in [0; \pi],$$

$$r(\zeta, \theta) = (1 - \epsilon) \zeta + \frac{5\zeta^3 - 3\zeta^5}{2} (R_s(\theta) - 1 + \epsilon) \quad (7.30)$$

Ce qui donnait pour la dérivée de  $r$  en fonction de  $\zeta$  :

$$r_\zeta(\zeta, \theta) = (1 - \epsilon) + \frac{15}{2}(\zeta^3 - \zeta^5) (R_s(\theta) - 1 + \epsilon) \quad (7.31)$$

qui est constante égale à  $(1 - \epsilon)$  en  $\zeta = 1$ . On cherche une transformation similaire pour le domaine situé entre  $\zeta_c = 0$  et  $\zeta_c = 1$  où  $\zeta_c = \zeta/R_{\text{eq}}^c$ . Le raccord au niveau du point en  $R_{\text{eq}}^c$  doit être continu pour  $r$ , mais également pour  $r_\zeta$ . Dans une étoile en rotation, étant donné que la force centrifuge intègre l'équilibre hydrostatique, les isobares sont plus resserrées aux pôles qu'à l'équateur (composante radiale de la force centrifuge en  $\sin \theta$ ). Ainsi, lorsque  $\zeta$  tend vers  $R_{\text{eq}}^c$  par valeur supérieure (2<sup>e</sup> domaine),  $r_\zeta$  dépend de la latitude. Ceci peut se comprendre aisément si l'on approxime  $r_\zeta$  par :

$$\frac{r(\zeta_{i+1}, \theta_j) - r(\zeta_i, \theta_j)}{\zeta_{i+1} - \zeta_i} \quad (7.32)$$

Pour assurer la continuité de  $r_\zeta$  à travers la frontière  $\zeta = R_{\text{eq}}^c$ , il est donc nécessaire que lorsque  $\zeta$  tend vers  $R_{\text{eq}}^c$  par valeur inférieure,  $r_\zeta$  dépende également de la latitude. On choisit alors un système de coordonnées tel que :

$$\forall \zeta_c = \zeta/R_{\text{eq}}^c \in [0; 1], \forall \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad (7.33)$$

$$r(\zeta, \theta) = R_{\text{eq}}^c \left[ \zeta_c + P_1(\zeta_c) \left( \frac{R_c(\theta)}{R_{\text{eq}}^c} - 1 \right) + P_2(\zeta_c) \left( \frac{1}{R_{\text{eq}}^c} \frac{dR_c}{d\zeta}(\theta) - 1 \right) \right]$$

Où  $dR_c/d\zeta$  est la dérivée de  $r$  par rapport à  $\zeta$  au point  $\zeta = R_{\text{eq}}^c$ . Comme dans (7.30)  $P_1$  et  $P_2$  sont des polynômes de degré cinq. Les contraintes sur  $P_1$  et  $P_2$  sont imposées par le fait que :

$$\begin{aligned} \text{En } \zeta = 0 \quad \text{et } \forall \theta, \quad r(0, \theta) = 0 \quad \text{et } r_\zeta(0, \theta) = 1 \\ \text{En } \zeta = R_{\text{eq}}^c \quad \text{et } \forall \theta, \quad r(R_{\text{eq}}^c, \theta) = R_c(\theta) \quad \text{et } r_\zeta(R_{\text{eq}}^c, \theta) = \frac{dR_c}{d\zeta}(\theta) \end{aligned}$$

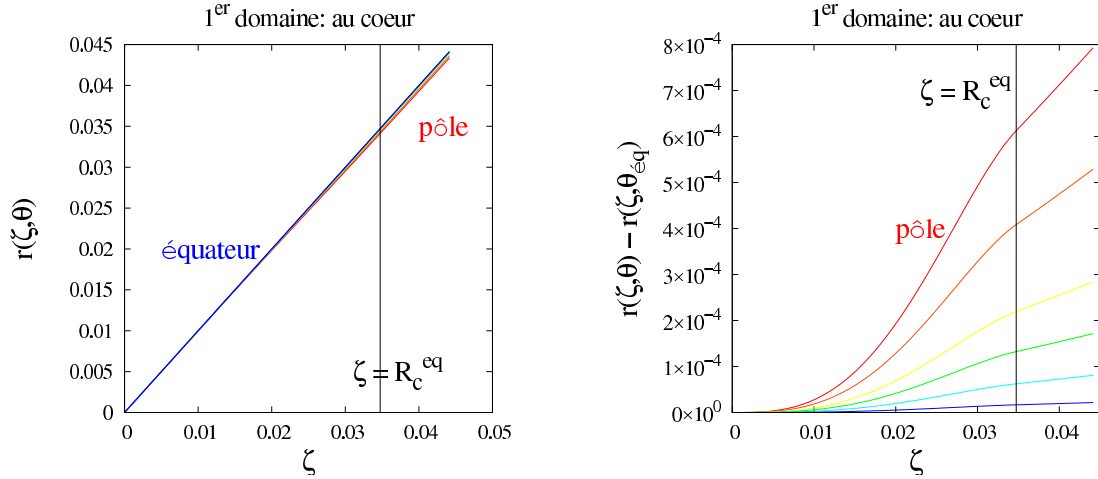


FIGURE 7.2: **Left** : Transformation  $\zeta \mapsto r(\zeta, \theta)$  as a function of  $\zeta$ , for co-latitudes ranging from 0 (pole) to  $\pi/2$  (equator). **Right** :  $r(\zeta, \theta) - r(\zeta, \theta_{\text{eq}})$  as a function of  $\zeta$ , for co-latitudes ranging from 0 (pole) to  $\pi/2$  (equator).

On choisit alors  $P_1$  et  $P_2$  tels que :

$$\forall \zeta_c \in [0; 1], \forall \theta \in [0; \pi], \quad (7.34)$$

$$r(\zeta, \theta) = R_c^{\text{eq}} \left[ \zeta_c + \frac{5\zeta_c^3 - 3\zeta_c^5}{2} \left( \frac{R_c(\theta)}{R_c^{\text{eq}}} - 1 \right) + \frac{\zeta_c^5 - \zeta_c^3}{2} \left( \frac{1}{R_c^{\text{eq}}} \frac{dR_c}{d\zeta}(\theta) - 1 \right) \right]$$

Sur la figure 7.2, on voit bien que le choix de transformation  $\zeta \mapsto r$  est bien un homéomorphisme pour toutes les valeurs de latitude comprises entre 0 et  $\pi/2$ .

### 7.2.2 2<sup>e</sup> domaine : Entre $\zeta = R_c^c$ , et $\zeta = 1$

Comme expliqué précédemment, entre  $R_c^c$  et la surface stellaire  $\zeta = 1$ , le système de coordonnées suit les isobares, c'est-à-dire que  $\zeta(i) = r(i, \theta_{\text{eq}})$ , et  $r(\zeta, \theta)$  est déterminée par l'équation des caractéristiques (7.11).

### 7.2.3 3<sup>e</sup> domaine : Entre $\zeta = 1$ , et $\zeta = 2$

Il s'agit dans ce domaine extérieur à l'étoile de passer d'un système de coordonnées isobares en  $\zeta = 1$  à un système de coordonnées sphériques en  $\zeta = 2$  afin d'imposer la condition aux limites sur la perturbation du potentiel gravitationnel. Dans le cas où l'on traite des modèles polytropiques sur une grille radiale régulière (Chapitre 5), nous utilisons la transformation homéomorphe proposée par Bonazzola et al. (1998) :

$$\forall \zeta \in [1; 2], \forall \theta \in [0; \pi],$$

$$r(\zeta, \theta) = 2\epsilon + (1 - \epsilon)\zeta + (2\zeta^3 - 9\zeta^2 + 12\zeta - 4)(R_s(\theta) - 1 + \epsilon) \quad (7.35)$$

Dans ce domaine, comme au centre, on doit assurer la continuité de  $r$  et de  $r_\zeta$  à travers la surface stellaire. Comme la dérivée de  $r$  par rapport à  $\zeta$  par valeur inférieure se fait sur les isobares (7.32), et que les isobares sont plus resserrées aux pôles qu'à l'équateur,

il est nécessaire que  $r_\zeta$  dépende également de la latitude quand  $\zeta$  tend vers 1 par valeur supérieure, et qu'en  $\zeta = 1$ ,  $r(1, \theta) = R_s(\theta)$ , le rayon à la surface stellaire, pour tout  $\theta$ . Ainsi, on ajoute ici aussi un terme supplémentaire dans le développement de  $r$  en fonction de  $\zeta$  :

$$\forall \zeta \in [1; 2], \forall \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad (7.36)$$

$$r(\zeta, \theta) = \zeta + P_3(\zeta) (R_s(\theta) - 1) + P_4(\zeta) \left( \frac{dR_s}{d\zeta}(\theta) - 1 \right)$$

Où  $dR_s/d\zeta$  est la dérivée de  $r$  par rapport à  $\zeta$  à la surface stellaire. Comme dans (7.35),  $P_3$  et  $P_4$  sont des polynômes de degré trois. Les contraintes sur  $P_3$  et  $P_4$  sont imposées par :

$$\begin{aligned} \text{En } \zeta = 1 \quad \text{et } \forall \theta, \\ r(1, \theta) = R_s(\theta) \quad \text{et } \quad r_\zeta(1, \theta) = \frac{dR_s(\theta)}{d\zeta} \\ \text{En } \zeta = 2 \quad \text{et } \forall \theta, \\ r(2, \theta) = 2 \quad \text{et } \quad r_\zeta(2, \theta) = 1 \end{aligned} \quad (7.37)$$

Il convient alors de prendre  $P_3$  et  $P_4$  tels que :

$$\forall \zeta \in [1; 2], \forall \theta \in [0; \pi], \quad (7.38)$$

$$r(\zeta, \theta) = \zeta + (2\zeta^3 - 9\zeta^2 + 12\zeta - 4) (R_s(\theta) - 1) + (\zeta^3 - 5\zeta^2 + 8\zeta - 4) \left( \frac{dR_s}{d\zeta}(\theta) - 1 \right)$$

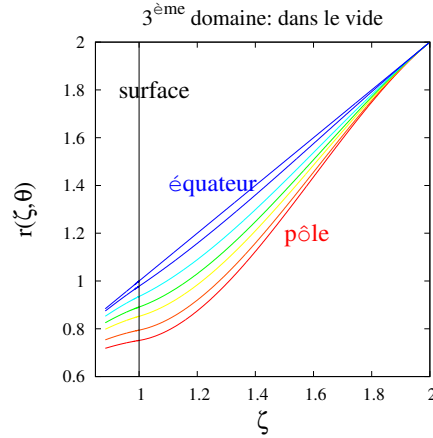


FIGURE 7.3: Transformation  $\zeta \mapsto r(\zeta, \theta)$  as a function of  $\zeta$  for co-latitudes ranging from 0 (pole) to  $\pi/2$  (equator).

Ici également, comme illustré Figure 7.3, on voit bien que le choix de transformation  $\zeta \mapsto r$  est bien un homéomorphisme pour toutes les valeurs de latitude comprises entre 0 et  $\pi/2$ . On retrouve bien  $\zeta(i) = r(i, \theta_{eq})$  pour les valeurs de  $r$  à l'équateur, avec un rayon qui diminue jusqu'à atteindre un minimum au pôle.

### 7.2.4 Système de coordonnées global

Récapitulons alors les transformations nous permettant de définir le nouveau système de coordonnées :

$\forall \zeta_c \in [0; 1], \forall \theta \in [0; \pi]$ , **domaine**  $V_0$  :

$$r(\zeta, \theta) = R_c^{\text{eq}} \left[ \zeta_c + \frac{5\zeta_c^3 - 3\zeta_c^5}{2} \left( \frac{R_c(\theta)}{R_c^{\text{eq}}} - 1 \right) + \frac{\zeta_c^5 - \zeta_c^3}{2} \left( \frac{1}{R_c^{\text{eq}}} \frac{dR_c}{d\zeta}(\theta) - 1 \right) \right] \quad (7.39)$$

$\forall \zeta \in [\zeta_c; 1], \forall \theta \in [0; \pi]$ , **domaine**  $V_1$  :

$$r(\zeta, \theta) \text{ correspond à } r(\theta_m) \text{ suivant les courbes caractéristiques} \quad (7.40)$$

$\forall \zeta \in [1; 2], \forall \theta \in [0; \pi]$ , **domaine**  $V_2$  :

$$r(\zeta, \theta) = \zeta + (2\zeta^3 - 9\zeta^2 + 12\zeta - 4) (R_s(\theta) - 1) + (\zeta^3 - 5\zeta^2 + 8\zeta - 4) \left( \frac{dR_s}{d\zeta}(\theta) - 1 \right) \quad (7.41)$$

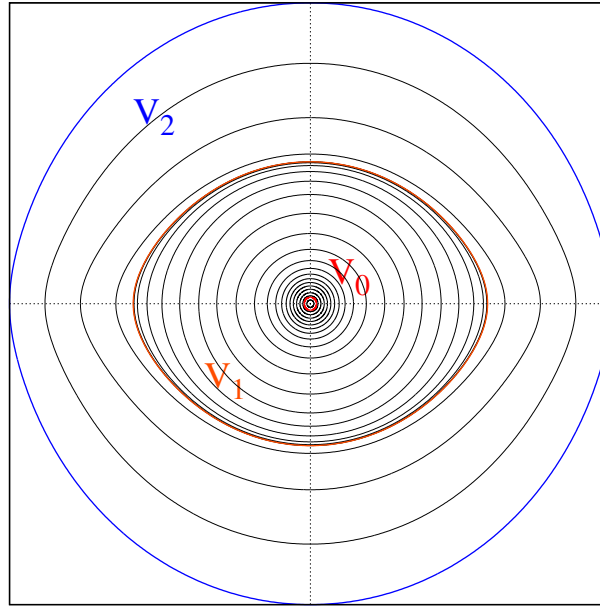


FIGURE 7.4: Coordinate system used in ACOR.  $V_0$  corresponds to a region inside the convective core,  $V_1$  extends from a boundary inside the convective core to the stellar surface, and  $V_2$  encompasses the star.

### 7.2.5 Interpolation du modèle

Dans les domaines où nous effectuons un changement de système de coordonnées, il est nécessaire d'interpoler le modèle sur la grille  $(\zeta_i, \theta_j)$  finale. Ainsi, dans le 1<sup>er</sup> et le 3<sup>e</sup> domaine, nous réalisons une interpolation polynomiale de degré trois. On rappelle

que la grille de coordonnées radiales  $\zeta_i$  est choisie telle que  $\zeta_i = r_{\text{car}}(i, \theta_{\text{eq}})$  sur les caractéristiques. Ainsi, pour chaque  $\zeta_i, \theta_j$ , on détermine le rayon  $r^{\text{map}}$  correspondant dans le nouveau système de coordonnées grâce aux fonctions explicitées en (7.34) pour le cœur puis en (7.38) pour la région extérieure. On se place à une latitude  $\theta_j$  donnée. Connaissant les valeurs d'une grandeur  $F$ , et de sa dérivée  $\frac{\partial F}{\partial r^{\text{car}}}$  issue du modèle SCF, aux différents points  $(r_i^{\text{car}})_{i=1,n}$ , on cherche à interpoler  $F$  au point  $r^{\text{map}}$ . Pour chaque intervalle  $[r_i^{\text{car}}; r_{i+1}^{\text{car}}]$ , il existe un unique polynôme  $P_3(r)$  tel que :

$$\begin{aligned} P_3(r_i^{\text{car}}) &= F(r_i^{\text{car}}), & P_3(r_{i+1}^{\text{car}}) &= F(r_{i+1}^{\text{car}}), \\ P'_3(r_i^{\text{car}}) &= F'(r_i^{\text{car}}), & \text{et } P'_3(r_{i+1}^{\text{car}}) &= F'(r_{i+1}^{\text{car}}). \end{aligned} \quad (7.42)$$

Pour obtenir un tel polynôme  $P_3$ , on construit une base de quatre polynômes  $P_1, P_2, P_{r1}$  et  $P_{r2}$  tels que :

$$\begin{aligned} P_1(r_i^{\text{car}}) &= 1, & P_1(r_{i+1}^{\text{car}}) &= 0, & P'_1(r_i^{\text{car}}) &= 0, & P'_1(r_{i+1}^{\text{car}}) &= 0 \\ P_2(r_i^{\text{car}}) &= 0, & P_2(r_{i+1}^{\text{car}}) &= 1, & P'_2(r_i^{\text{car}}) &= 0, & P'_2(r_{i+1}^{\text{car}}) &= 0 \\ P_{r1}(r_i^{\text{car}}) &= 0, & P_{r1}(r_{i+1}^{\text{car}}) &= 0, & P'_{r1}(r_i^{\text{car}}) &= 1, & P'_{r1}(r_{i+1}^{\text{car}}) &= 0 \\ P_{r2}(r_i^{\text{car}}) &= 0, & P_{r2}(r_{i+1}^{\text{car}}) &= 0, & P'_{r2}(r_i^{\text{car}}) &= 0, & P'_{r2}(r_{i+1}^{\text{car}}) &= 1 \end{aligned} \quad (7.43)$$

Ces quatre polynômes de degré 3 sont donnés par :

$$\begin{aligned} P_1(r) &= \frac{(r - r_{i+1}^{\text{car}})^2 * (2r - 3r_i^{\text{car}} + r_{i+1}^{\text{car}})}{(r_{i+1}^{\text{car}} - r_i^{\text{car}})^3} \\ P_2(r) &= \frac{-(r - r_i^{\text{car}})^2 * (2r - 3r_{i+1}^{\text{car}} + r_i^{\text{car}})}{(r_{i+1}^{\text{car}} - r_i^{\text{car}})^3} \\ P_{r1}(r) &= \frac{(r - r_i^{\text{car}}) * (r - r_{i+1}^{\text{car}})^2}{(r_{i+1}^{\text{car}} - r_i^{\text{car}})^2} \\ P_{r2}(r) &= \frac{(r - r_i^{\text{car}})^2 * (r - r_{i+1}^{\text{car}})}{(r_{i+1}^{\text{car}} - r_i^{\text{car}})^2} \end{aligned} \quad (7.44)$$

Le polynôme recherché  $P_3$  est simplement obtenu par une combinaison linéaire des polynômes de base :

$$P_3(r) = F(r_i^{\text{car}}) * P_1(r) + F(r_{i+1}^{\text{car}}) * P_2(r) + F'(r_i^{\text{car}}) * P_{r1}(r) + F'(r_{i+1}^{\text{car}}) * P_{r2}(r) \quad (7.45)$$

L'avantage de cette méthode est qu'elle est locale, contrairement aux méthodes basées sur les splines. En effet, les coefficients des polynômes mis en jeu ne dépendent que des valeurs de la grandeur à interpoler  $F$  en deux points voisins. Ceci permet d'éviter les problèmes de propagation d'oscillations des polynômes utilisés pour l'interpolation autour de points auxquels la grandeur  $F$  varie brusquement.

## 7.3 Oscillations

Cette section est dédiée à la présentation des modes propres d'oscillations d'un modèle calculé par I. Roxburgh selon la méthode exposée en Section 7.1, utilisant le

système de coordonnées de l'espace mis au point en Section 7.2. Dans un premier paragraphe, nous présentons précisément le modèle stellaire étudié. Nous donnons ensuite, dans un second paragraphe, les résultats de calculs d'oscillations d'un tel modèle réalisés avec le code d'oscillation non perturbatif bidimensionnel ACOR présenté aux Chapitres 4 et 5.

### 7.3.1 Modèle d'équilibre

Pour modèle d'équilibre, nous avons choisi un modèle stellaire bidimensionnel non barotrope. Le champ de vitesse dû à la rotation est différentiel en rayon et en latitude et est illustré en Figure 7.5. La vitesse angulaire de rotation au cœur vaut trois fois sa valeur en surface, et décroît continuellement dans l'enveloppe. Pour forcer le bon comportement des grandeurs thermodynamiques dans les régions proches de la surface stellaire (Roxburgh 2006),  $\Omega$  est prise constante dans les dernières couches. Comme évoqué dans la Section 1 de ce chapitre, le champ de vitesse dû à la circulation méridienne est négligé dans l'équilibre hydrostatique. Dans les couches stellaires externes, où la densité et la pression sont très basses, la circulation méridienne peut devenir très importante. Négliger l'advection de moment angulaire par cette circulation dans l'équation hydrostatique peut s'avérer incorrect. Néanmoins, le temps caractéristique de la circulation peut être très court, et l'on peut raisonnablement considérer avoir rapidement atteint un état d'équilibre dans lequel il n'y aurait pas de circulation méridienne, et où le profil de rotation serait très proche d'un profil plat (Roxburgh 1964).

Ce modèle a été calculé à partir d'un modèle sphérique de  $2 M_{\odot}$  et  $2.4 R_{\odot}$  présentant une composition initiale caractérisée par  $X = 0.72$  et  $Z = 0.02$ . Le profil de rotation  $\Omega_0(r)/\Omega_0(\text{surface})$  est fixé au long de l'évolution, et la rotation de surface est déterminée par la conservation du moment angulaire total. L'étoile a été évoluée jusqu'à atteindre une composition centrale en hydrogène de  $X_c = 0.35$ , stade auquel la rotation de surface

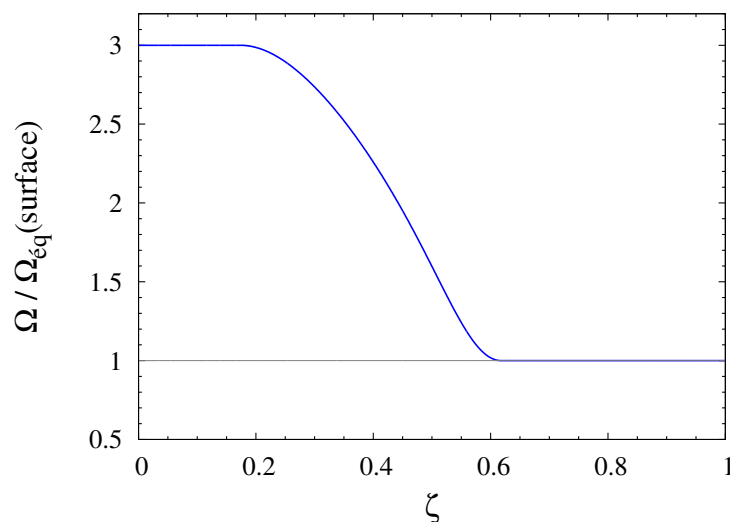


FIGURE 7.5: Radial profile of the rotation angular velocity scaled by the equatorial angular velocity at the surface.  $\Omega$  is constant on isobares but differential in the normal direction. Therefore, the model is not barotropic.

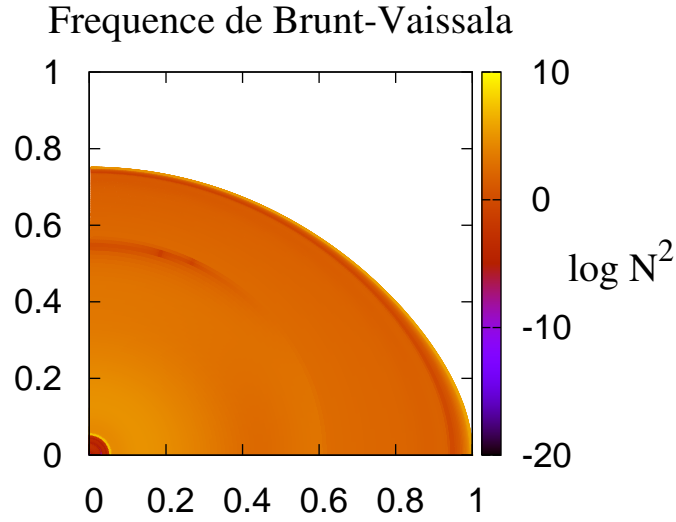


FIGURE 7.6: 2D map of the logarithm of the Brunt-Vaissala frequency square in a meridional plane ( $N^2 = g_r ((\Gamma_1 p_0)^{-1} \partial p_0 / \partial \zeta - (\rho_0)^{-1} \partial \rho_0 / \partial \zeta)$ ), for the  $M = 2 M_\odot$ ,  $R_{\text{eq}} = 2.4 R_\odot$  model .

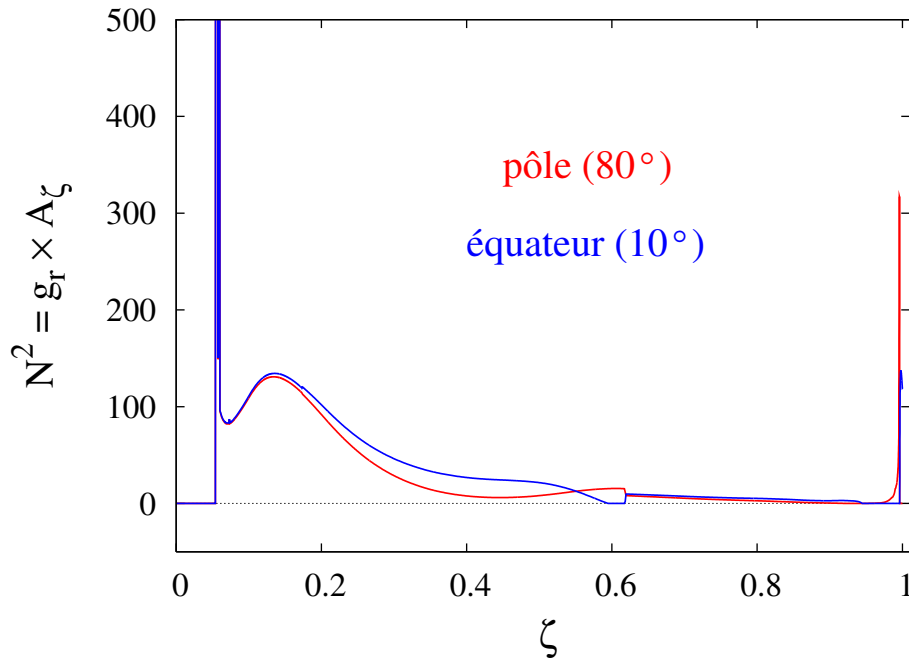


FIGURE 7.7: Radial profile of the Brunt-Vaissala frequency square  $N^2 = g_r ((\Gamma_1 p_0)^{-1} \partial p_0 / \partial \zeta - (\rho_0)^{-1} \partial \rho_0 / \partial \zeta)$  of the model, close to the pole ( $10^\circ$  in red) and close to the equator ( $80^\circ$  in blue).

a atteint la valeur de  $80\% \Omega_k$  à l'équateur, soit une vitesse de  $282 \text{ km.s}^{-1}$ .

Le modèle sphérique fourni par I. Roxburgh a été calculé par le code d'évolution STAROX (Roxburgh 2008) en utilisant l'équation d'état et les opacités OPAL, sur une grille radiale de 2000 points. Ce modèle sphérique est pris comme valeur particulière d'un modèle bidimensionnel à une latitude de  $\cos^{-1}(1/\sqrt{3})$  (pour plus de détails voir Roxburgh 2006), puis déformé selon la méthode expliquée en Section 7.1 de ce Chapitre. La grille angulaire est constituée de 240 points. Les courbes caractéristiques d'un tel modèle sont illustrées Figure 7.1.

La Figure 7.6 présente la fréquence de Brunt-Väisälä du modèle  $N^2(r, \theta)$ . Par fréquence de Brunt-Väisälä, nous entendons la grandeur :

$$N^2 = g_r \left( (\Gamma_1 p_0)^{-1} \frac{\partial p_0}{\partial \zeta} - (\rho_0)^{-1} \frac{\partial \rho_0}{\partial \zeta} \right) \quad (7.46)$$

qui est mise en évidence dans la relation adiabatique (4.22),  $\zeta$  étant la coordonnée radiale du système. La Figure 7.7 représente le profil de cette même grandeur le long d'un rayon proche du pôle (en rouge), et le long d'un rayon proche de l'équateur (en bleu). Notons qu'en dessous de  $\zeta = 0.15$  environ (région où l'on voit le pic dû à un fort gradient du poids moléculaire moyen), le profil de  $N^2$  semble sphérique tandis qu'au-delà, le maximum local situé à  $\zeta \simeq 0.15$  semble plus étalé à l'équateur qu'au pôle. Enfin, en surface, on note un deuxième pic qui est beaucoup plus prononcé au pôle qu'à l'équateur.

### 7.3.2 Spectre d'oscillation

Le spectre d'oscillation, issu d'un calcul bidimensionnel non perturbatif incluant la rotation, est très différent du cas sans rotation. En effet, dans le cas sphérique, la dépendance angulaire est exprimée à l'aide d'une harmonique sphérique  $Y_\ell^m$ , et la résolution du système aux valeurs propres donne à la fois la dépendance radiale du mode d'oscillation et sa fréquence d'oscillation. Chaque mode est alors caractérisé par son degré angulaire  $\ell$ , son ordre azimutal  $m$ , et le nombre quantique radial  $n$ . Le spectre complet montre alors une certaine régularité avec des équidistances caractéristiques de la structure acoustique du modèle d'équilibre. Ces équidistances constituent des outils de diagnostic sismique fort intéressants, par exemple la grande séparation qui désigne l'écart fréquentiel entre deux modes consécutifs peut renseigner directement sur la vitesse du son dans l'intérieur stellaire. Cette régularité est d'autant plus marquée dans le domaine des modes acoustiques de haute fréquence (domaine qualifié d'asymptotique).

Le spectre d'oscillation issu de calculs bidimensionnels non perturbatifs présente des caractères radicalement différents. La classification des modes de pulsation est grandement compliquée par la distribution spatiale des modes qui est bidimensionnelle. Le fait que la dépendance angulaire des modes est décrite non plus par une seule mais par une base tronquée d'harmoniques sphériques, ne permet plus de désigner un mode par un seul degré angulaire. Si à vitesse de rotation modérée un mode présente un caractère  $\ell$  dominant, en rotation rapide il est impossible de déterminer un caractère  $\ell$  dominant de manière claire, parfois même le nombre de nœuds des fonctions propres dans la direction angulaire varie du cœur à la surface.



Par ailleurs, la densité du spectre en fréquence est bien plus importante que dans le cas sans rotation. D'une part, la levée de dégénérescence typique de la rotation fait correspondre à chaque fréquence  $\omega_{n,\ell}$  du cas sans rotation  $(2\ell + 1)$  fréquences  $\omega_{n,\ell,m}$ . D'autre part, afin de résoudre des modes de pulsation correctement en rotation rapide, il est nécessaire d'inclure un grand nombre de termes dans le développement spectral des fonctions propres, et cela induit une forte densification du spectre.

Pour cette raison, Lignières et al. (2006a) (dans un calcul bidimensionnel qui ne prend pas en compte la force de Coriolis), puis Reese et al. (2006), Ballot et al. (2010) (prenant en compte la force de Coriolis dans leurs calculs de modes acoustiques et de gravité respectivement), ont mis en place une stratégie de suivi des modes individuels en calculant d'abord le spectre d'oscillation en l'absence de rotation, et en augmentant ensuite progressivement la vitesse de rotation uniforme d'un modèle polytropique bidimensionnel. Mais leurs travaux ont montré la grande difficulté d'un tel suivi, notamment du fait de la présence de nombreux croisements évités qui ne permettent pas de déterminer un caractère angulaire sans ambiguïtés.

Ne disposant que d'un seul modèle d'équilibre, celui décrit à la section précédente (Sect. 7.3.1), une stratégie de suivi des modes avec la vitesse de rotation n'était pas envisageable ici. J'ai donc effectué un balayage d'une région du spectre en fréquence allant de  $5\Omega_k$  jusqu'à  $22\Omega_k$ . Un premier balayage a été effectué à basse résolution radiale, et pour une résolution spectrale de 20 termes, dans le but premier de repérer les modes propres présentant un bas degré angulaire. Puis lorsque de tels modes étaient repérés, les résolutions angulaire et spectrale ont été augmentées jusqu'à ce que le mode soit correctement résolu. Pour la plupart des modes, il a été nécessaire d'aller jusqu'à une résolution angulaire de 2500 points et 40 termes de couplage (pour les modes que nous présentons à la section suivante :  $\ell_{max} = 79$ ). Le spectre d'oscillation issu de ces calculs est très dense. Il est peuplé sur toute la gamme de fréquence explorée par des modes piégés près du cœur.

Notons que Reese et al. (2009a) (par des calculs numériques directs) puis Lignières & Georgeot (2009) (par la dynamique des rayons) ont mis en évidence une structure régulière pour un certain type de modes (les modes îlots évoqués plus loin) dans une région asymptotique pour des modèles polytropiques et ZAMS d'étoile. Étant donné le modèle de structure étudié ici (en particulier son caractère évolué), et le domaine du spectre exploré, je n'ai pas trouvé une telle structure asymptotique.

Nous présentons dans la section suivante les différentes géométries de modes d'oscillations d'un tel modèle dans cette gamme de fréquence.

### 7.3.3 Géométrie des modes propres d'oscillation

Un des effets de la rotation stellaire rapide est de modifier drastiquement la structure géométrique des modes d'oscillation (que l'on peut déterminer par exemple avec la distribution spatiale de l'énergie cinétique). En déformant le modèle d'équilibre, la rotation induit une déformation des cavités résonnantes où les modes d'oscillation sont piégés. Cette structure géométrique détermine la visibilité des modes, ainsi que la région interne sondée. Ainsi, la caractérisation des différentes géométries de modes apparaissant en rotation rapide, est un enjeu pas moins important que la détermination de la structure fréquentielle du spectre pour l'astérosismologie des étoiles en rotation rapide. Afin de distinguer les différentes géométries, nous utiliserons les dénominations

prises en place la première fois par Lignières et al. (2006b). Selon les régions du spectre de fréquence explorées, on dénombre alors trois catégories de modes.

Tout d'abord, vers les plus basses fréquences, en dessous de  $\omega = 7\Omega_k$ , on trouve principalement des modes piégés dans le cœur, c'est-à-dire dans la région délimitée par le premier pic observé dans la fréquence de Brunt-Väisälä (dû au gradient de poids moléculaire moyen). Ces modes adoptent typiquement la géométrie illustrée à la Figure 7.8, avec un degré angulaire élevé. Rappelons ici que dans le cas sphérique, le nombre d'onde des modes dont la fréquence est inférieure aux fréquences de Brunt-Väisälä et de Lamb s'exprime :

$$k^2(r) = \left( \frac{N^2}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2}$$

où  $N$  est la fréquence de Brunt-Väisälä,  $\ell$  le degré du mode et  $\sigma$  sa fréquence propre,  $r$  étant la distance au centre de l'étoile. Ainsi,  $k(r)$  et donc la densité du spectre est d'autant plus importante que  $N$  est élevée, que le degré du mode  $\ell$  est grand, et que la fréquence du mode  $\sigma$  est basse. Cela explique, par analogie, que lorsque l'on inclut un nombre croissant de termes dans le développement spectral (et donc que  $\ell$  augmente potentiellement), et que l'on diminue la fréquence de pulsation cible, une quantité de plus en plus importante de modes sont piégés dans la zone de gradient de  $\mu$  et dans le maximum local qui suit dans la fréquence de Brunt-Väisälä. Ainsi, les modes piégés dans l'enveloppe sont de plus en plus difficiles à observer dans cette région.

Puis, un peu plus haut en fréquence, à partir de  $\omega = 7,5\Omega_k$ , on observe l'apparition de modes que l'on pourrait caractériser de mixtes, c'est-à-dire qu'ils présentent à la fois de l'amplitude dans le cœur et dans l'enveloppe. Ceci est illustré aux Figures 7.9, 7.10 et 7.13. Pour ce dernier, dans l'enveloppe, on distingue une géométrie de type îlot.

À plus haute fréquence, on rencontre ensuite des modes de galerie (qui vient de l'anglais *whispering gallery mode*) comme celui illustré Figure 7.14, et des modes îlot comme dans les Figures 7.15 et 7.16.

En ce qui concerne les modes îlot en général (Fig. 7.10, 7.11, 7.15, 7.16), comme Clement (1984), et plus tard Reese et al. (2006), nous constatons une concentration de l'amplitude de ces modes autour du plan équatorial. Pour les modes îlot de haute fréquence (à partir de  $11\Omega_k$  : Fig. 7.11, 7.15, 7.16), nous observons également l'apparition d'une cavité au niveau de l'équateur, c'est-à-dire que le mode se focalise autour d'une cavité équatoriale, où il ne présente pas d'amplitude.

Par contre, les modes piégés près du cœur (Fig. 7.8, 7.9, 7.12) ou encore les modes de galerie (Fig. 7.14), présentent une amplitude plus importante le long de l'axe de rotation qu'à l'équateur. Cela peut être expliqué, notamment en ce qui concerne le mode de galerie, par le profil de la fréquence de Brunt-Väisälä qui devient très différent au pôle et à l'équateur, dans la région proche de la surface stellaire.

Nous devons noter enfin que dans la gamme de fréquence explorée  $7\Omega_k - 22\Omega_k$ , nous n'avons pas trouvé de mode de type chaotique. En effet, si à basse résolution nous avons rencontré des modes qui ne présentaient pas de géométrie assimilable aux trois catégories mentionnées en début de section, les calculs à haute résolution spectrale ont précisé les morphologies des modes comme étant la plupart du temps soit des modes de galerie, soit des modes îlot.

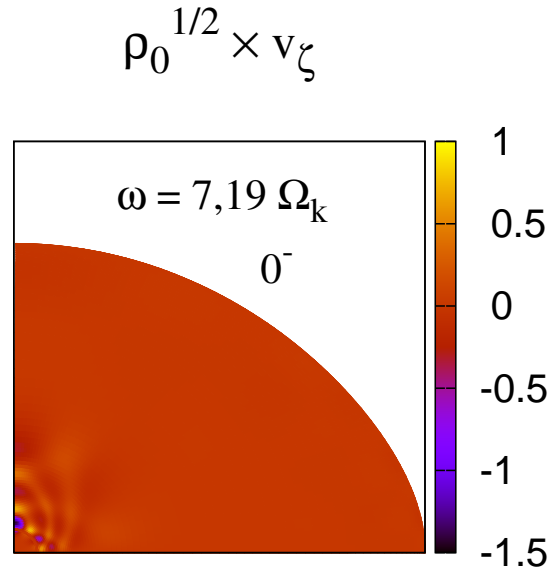


FIGURE 7.8: Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of  $\omega = 7.19\Omega_k$ , trapped in the stellar core, in the  $\mu$  gradient region, with a very high angular degree, which amplitude is higher along the rotation axis than along the equator. Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points.

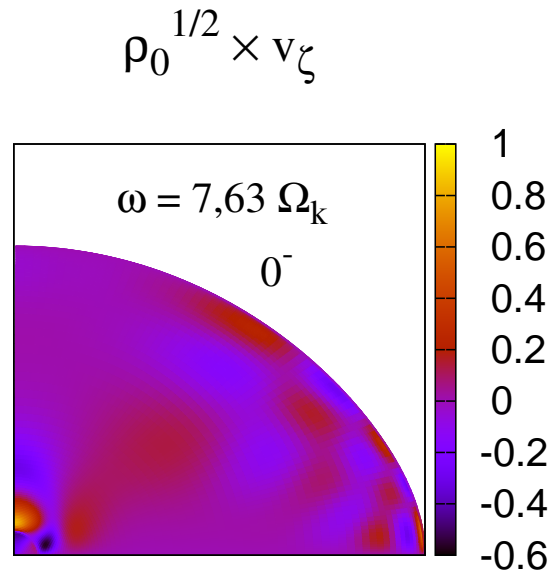


FIGURE 7.9: Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of  $\omega = 7.63\Omega_k$ , showing a mixed nature, i.e. it has amplitude both in the core and in the envelop, probably in avoided crossing between a mode trapped in the core with amplitude along the rotation axis, and a mode trapped in the envelop with higher amplitude along the equator. Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points.

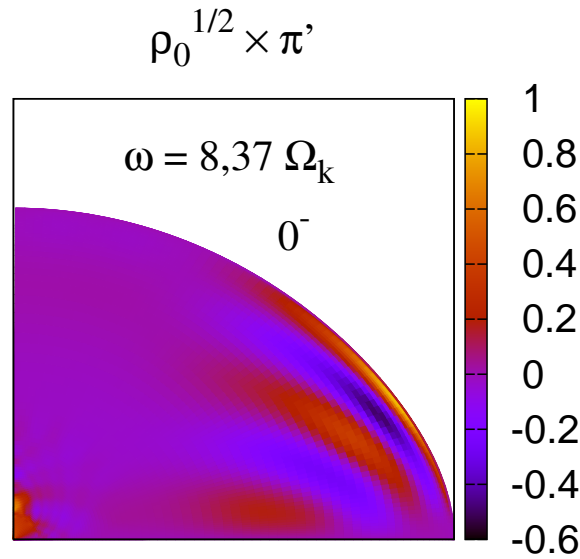


FIGURE 7.10: Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of  $\omega = 8.37\Omega_k$ , showing a mixed nature p-g, i.e. it has amplitude both in the core and in the envelop, probably in avoided crossing between a mode trapped in the core with amplitude along the rotation axis, and an island mode trapped in the envelop with higher amplitude along the equator. Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points.

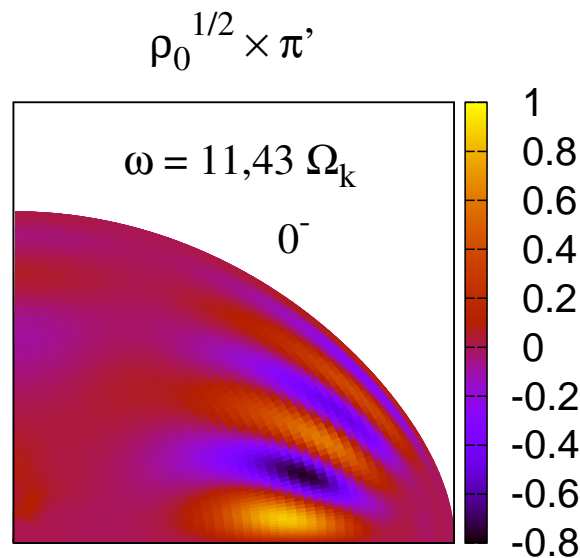


FIGURE 7.11: Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of  $\omega = 11.43\Omega_k$ , trapped in the envelop, showing a clear island mode geometry with  $\ell = 1$  (approximately number of nodes along an isobare) and  $\tilde{n} = 13$  (number of nodes along the equatorial cavity). Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points.

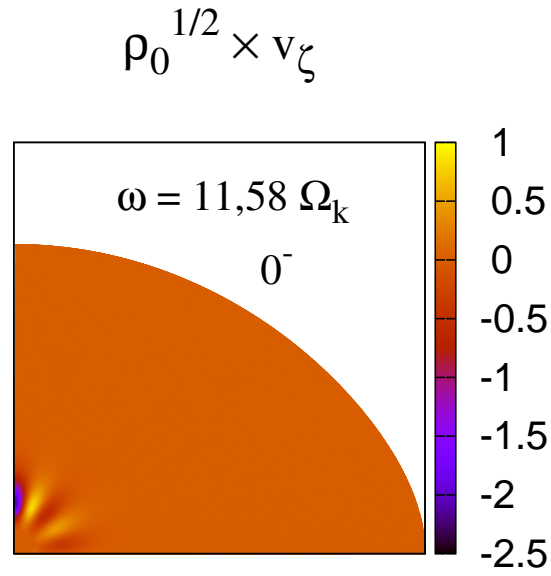


FIGURE 7.12: Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of  $\omega = 11.58\Omega_k$ , trapped in the local maximum following the  $\mu$  gradient in the Brunt-Väisälä frequency profile, showing a higher amplitude along the rotation axis. Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points.

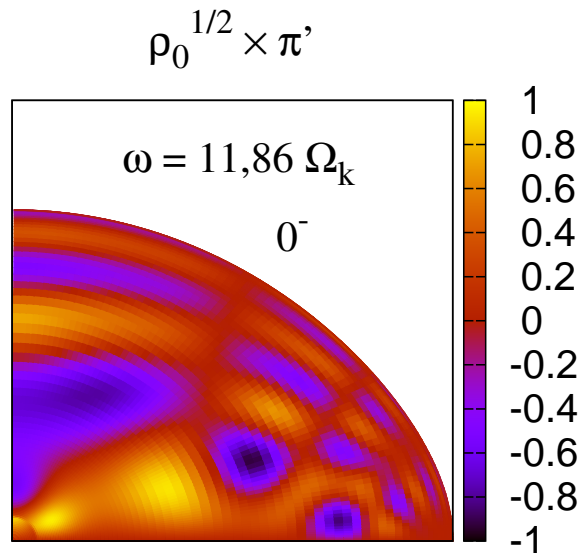


FIGURE 7.13: Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of  $\omega = 11.86\Omega_k$ , showing a mixed nature p-g, with an angular geometry very different in the core than in the envelop, where we observe probably an island mode. Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points.

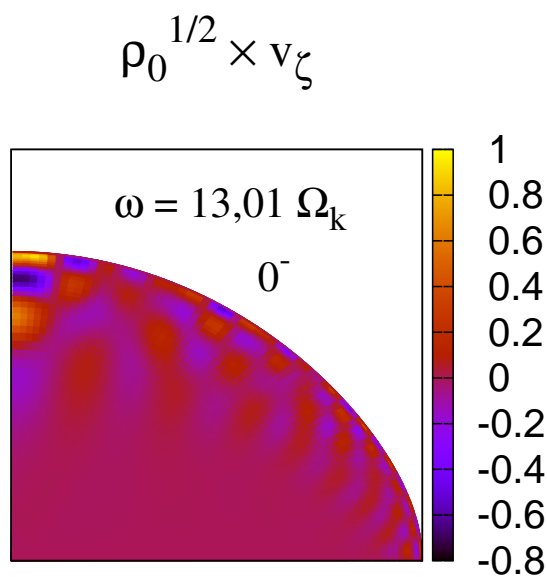


FIGURE 7.14: Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of  $\omega = 13.01\Omega_k$ , with amplitude only in regions very close to the surface. It shows the very typical geometry of a whispering gallery mode. Computations have been performed for 34 spectral terms and 2500 radial grid points.

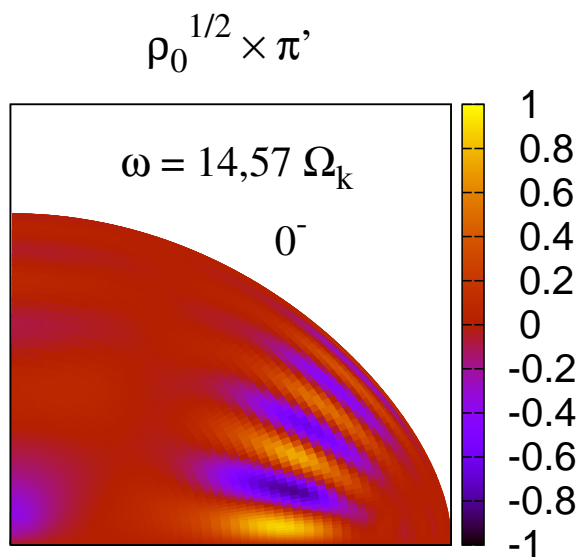


FIGURE 7.15: Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of  $\omega = 14.57\Omega_k$ , trapped in the envelope, showing the geometry typical of an island mode with  $\ell = 1$  and  $\tilde{n} = 17$ . Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points.

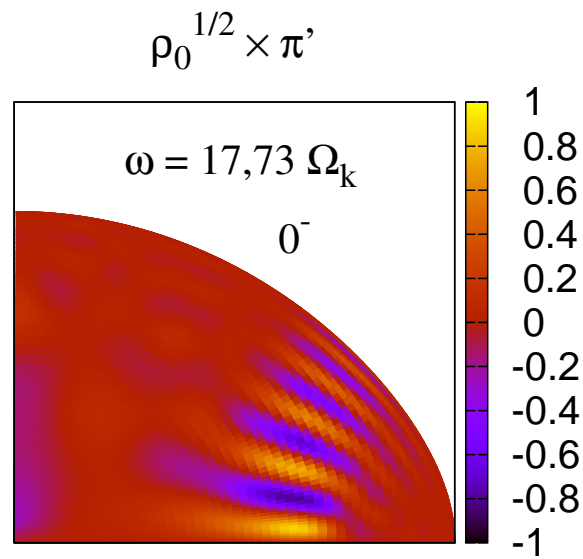


FIGURE 7.16: Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of  $\omega = 17.73\Omega_k$ , trapped in the envelope, showing the geometry typical of an island mode with  $\ell = 1$  and  $\tilde{n} = 21$ . Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points.







# Chapitre 8

## Conclusion et perspectives

### Sommaire

---

<b>8.1 Pulsateurs de type solaire et rotateurs lents . . . . .</b>	<b>152</b>
<b>8.2 Pulsateurs classiques . . . . .</b>	<b>153</b>
8.2.1 Rotateurs modérés . . . . .	153
8.2.2 Rotateurs rapides . . . . .	154

---

Les travaux présentés dans ce manuscrit concernent la modélisation des oscillations stellaires en prenant en compte l'effet de la rotation. Ces travaux ont pour objectif de mettre au point les outils sismiques dans le but de contraindre les modèles de structure interne. L'avènement de l'ère spatiale pour l'astérosismologie a permis d'abaisser le seuil de détection, d'améliorer le rapport signal à bruit et d'obtenir des durées d'observations jamais atteintes auparavant. Pour la première fois nous sommes capables d'obtenir des spectres sismiques d'une grande précision et nous nous trouvons devant un nouveau défi : nous voyons comme jamais nous avons vu, mais que voyons-nous au juste ?

Nous savons que si l'on parvient à mesurer les fréquences de pulsation d'une étoile, et à identifier les modes propres correspondant, on disposera alors d'une information inestimable sur le fluide contenu à l'intérieur de la cavité du mode. C'est là, à la fois tout le potentiel et toute la difficulté de la sismologie stellaire. En effet, si chaque fréquence de pulsation observée correctement identifiée nous apporte une contrainte supplémentaire sur le modèle stellaire, on comprend l'impact que peut avoir l'astérosismologie sur la physique stellaire. Mais l'identification des modes de pulsation reste un problème entier dans beaucoup de cas.

On peut concevoir l'interaction entre les observations et la modélisation comme un cercle vertueux : il est nécessaire de mettre au point une modélisation fine de l'effet de la rotation sur la structure et les oscillations de l'étoile. Ainsi nous serons capables d'identifier les modes de pulsation observés qui peuvent nous apporter des contraintes nouvelles sur la structure interne et ainsi de suite.

À ce stade, il faut alors distinguer deux cas de figure.

## 8.1 Pulsateurs de type solaire et rotateurs lents

Dans ce cadre, les étoiles de type solaire sont les objets les plus favorables. D'une part, du fait que ce sont des pulsateurs solaires, ces étoiles présentent un spectre d'oscillation régulier pour la plupart.

D'autre part, ces étoiles sont des rotateurs lents (les plus rapides d'entre elles tournent à environ  $40 \text{ km.s}^{-1}$ ). Et ceci est un grand avantage. En effet, dans le cadre d'une étude de validité des méthodes perturbatives d'ordre 2, j'ai pu établir avec précision que si l'on inclut la correction de la dégénérescence accidentelle, ces méthodes sont valides jusqu'à  $5\% \Omega_k$  c'est-à-dire  $20 \text{ km.s}^{-1}$  pour une étoile de  $1 M_{\odot}$ . Le critère utilisé pour évaluer cette validité étant que les erreurs induites en négligeant les termes non perturbatifs devaient être inférieures aux barres d'erreur observationnelles pour un *long run* CoRoT (c'est-à-dire pour les observations de longue durée qui permettent d'obtenir des spectres de Fourier très bien résolus). Ainsi, les méthodes perturbatives d'ordre 2 semblent acceptables pour les cibles de type solaire de CoRoT notamment HD 181420 et HD 49933 qui ont été cibles d'observation de *long run*.

Mais considérer comme critère de validité les barres d'erreur observationnelles pour un *long run* de CoRoT peut être trop radical (surtout qu'ici comme barres d'erreur, nous avons considéré la résolution d'un pic dans le spectre de Fourier pour un temps d'observation donné). Une manière plus pertinente peut être d'évaluer cette validité en quantifiant l'erreur induite par la négligence des effets non perturbatifs sur une mesure de vitesse angulaire de rotation à partir d'un *splitting* rotationnel. De cette manière, on est capable d'estimer avec quelle incertitude une vitesse de rotation est déterminée à partir d'une modélisation perturbative du *splitting* rotationnel. Cette stratégie a été utilisée dans Ouazzani et al. (2010) mais sans toutefois considérer les effets de correction de la dégénérescence accidentelle.

Ainsi, pour les étoiles de type solaire, on se trouve dans le cas de figure avantageux où les méthodes perturbatives permettent de déterminer les spectres sismiques de manière suffisamment précise. Pour ce type d'étoile, il s'agit donc d'affûter les outils existants de diagnostic sismique.

Comme nous l'avons déjà évoqué, le *splitting* est l'outil sismique de sondage de la rotation. Au premier ordre, la rotation induit une levée de dégénérescence sur les fréquences de pulsation, les fréquences des différentes composantes d'un multiplet sont alors espacées d'un *splitting* qui est directement proportionnel à la fréquence de rotation. Dès lors que l'on pousse l'approche perturbative aux ordres supérieurs, cet espacement n'est plus linéaire en  $\Omega$ . Dans la première partie de ma thèse, j'ai donc étudié les contributions non linéaires de la rotation sur le *splitting*. J'ai montré que, pour les modes de pression de haute fréquence, les contributions dominantes à l'ordre cubique sont dues d'une part, à la contribution cubique implicite dans le système aux valeurs propres (dans le cadre du formalisme de Soufi et al. 1998), et d'autre part, à la correction de la dégénérescence accidentelle qui montrent toutes deux des signes opposés. Ceci montre bien que la prise en compte de la dégénérescence proche permet de corriger un effet de la rotation surestimé par la méthode perturbative. Par ailleurs, j'ai montré que ces contributions, dominées par la distorsion centrifuge, présentent un comportement asymptotique en  $\sigma_0^2$  (où  $\sigma_0^2$  est la fréquence du mode centroïde correspondant au multiplet), ceci est particulièrement clair pour la correction de la dégénérescence. Notons que cette dernière, bien qu'essentiellement dominée par la distorsion centrifuge,

ne contribue au splitting rotationnel que si les effets cubiques sont pris en compte.

Dans le cadre de cette étude, je me suis intéressée aux spectres des pulsateurs de type solaire observés par CoRoT. Pour deux cibles CoRoT, HD 181420 et HD 49933, les analyses effectuées (respectivement par Barban et al. 2009; Benomar et al. 2009) ont permis de mettre en évidence une différence entre la valeur de la rotation extraite de l'outil sismique qu'est le splitting rotationnel, et la signature basse fréquence de la rotation dans le spectre de Fourier. La question qui se posait alors était de savoir si une telle différence pouvait révéler la présence de rotation différentielle en surface. Dans ces analyses, le splitting a été interprété comme étant directement proportionnel à la vitesse angulaire de rotation  $\Omega$ . Le fait que les contributions non linéaires aient été négligées dans l'interprétation du splitting pourrait également expliquer un tel écart entre les deux indicateurs de la rotation.

Ainsi, j'ai étudié les contributions de la rotation différentielle en latitude ainsi que celles d'ordre 2 et 3 d'une rotation uniforme au splitting pour une des deux cibles CoRoT : HD 181420. Pour cette étoile, pour laquelle on s'attend à observer des taches liées à l'activité magnétique, aux vitesses de rotation en jeu, la contribution de la rotation différentielle en latitude est nettement dominante, et j'ai montré que le splitting rotationnel peut apporter une contrainte sur le gradient de rotation de surface en supplément de celles apportées par la spectropolarimétrie par exemple (Donati et al. 2010).

Une autre possibilité, pour expliquer l'écart détecté entre la rotation de surface et la rotation extraite du splitting rotationnel, serait la rotation différentielle en coquille. En effet, le splitting moyen peut nous renseigner sur la valeur moyenne de la vitesse de rotation au niveau des couches sondées par les modes d'oscillation observés, alors que le pic à basse fréquence dans le spectre de Fourier ne nous renseigne que sur la rotation de surface. Ainsi, un travail réalisable à court terme devrait me permettre d'étudier l'effet d'un gradient de rotation dans la direction radiale sur le splitting rotationnel, et de déterminer si cet effet pourrait expliquer l'écart entre les deux indicateurs de la rotation. L'étape suivante sera de poser la question de la distinction sismique de la rotation différentielle radiale et d'un gradient de rotation en latitude.

## 8.2 Pulsateurs classiques

En ce qui concerne les pulsateurs classiques, la situation est beaucoup plus compliquée. Ils oscillent principalement dans des modes de pression et de gravité de bas  $n$  pour lesquels il est difficile de trouver des régularités équivalentes à celle observée pour les modes (p ou g) de hauts ordres radiaux. Pour ces étoiles massives ou de masse intermédiaire, on compte très peu d'exemples plausibles d'identification de modes de pulsation. Dès lors, l'obtention de contraintes sismiques pour les modèles de structure interne de ces étoiles n'est pas envisageable à très court terme, et la nécessité de compréhension des effets de la rotation sur ces spectres sismiques est manifeste.

### 8.2.1 Rotateurs modérés

Les exceptions concernent essentiellement les étoiles à faible  $v \sin i$  pour lesquelles des contraintes supplémentaires sur les modes de pulsation observés ont pu être ap-

portées par la spectroscopie ou la photométrie multicolore (voir cet exemple d'identification de mode SPB pour 12 Lac Desmet et al. 2009). La spectroscopie permet en effet de contraindre le degré angulaire et l'ordre azimutal des modes à partir des variations de profil des raies spectrales ; variations induites par la perturbation des vitesses photosphériques causée par les modes d'oscillation. La photométrie multicolore est basée sur le fait que l'amplitude et la phase des perturbations de luminosité dépendent de la longueur d'onde qui est caractéristique du mode propre de pulsation. Les mesures effectuées par ces techniques d'observation reposent sur la connaissance de la distribution spatiale des modes en surface. Ces deux méthodes ont été pour l'instant appliquées en supposant un faible écart à la symétrie sphérique. La distribution de surface d'un mode étant représentée par une seule harmonique sphérique.

Par ailleurs, dans le cas de rotateurs lents à modérés, le spectre fréquentiel de ce type d'étoile peut être bien appréhendé par une approche perturbative. En effet, l'étude de validité de la méthode perturbative du second ordre présentée dans cette thèse, s'appuyant sur l'exemple d'un modèle ZAMS d'étoile de  $8,5 M_{\odot}$ , permet d'établir que les méthodes perturbatives du second ordre sont valides jusqu'à  $5\% \Omega_k$  si l'on compare le spectre synthétique à un spectre observationnel issu d'observations CoRoT en *long run*, voire  $12\% \Omega_k$  pour un *short run*. Pour ce modèle de  $8,5 M_{\odot}$ , cela signifie que l'on peut utiliser une approche perturbative pour une rotation inférieure à  $26 \text{ km.s}^{-1}$  pour des longues durées d'observation, voire  $60 \text{ km.s}^{-1}$  pour les plus courtes.

Par exemple, l'étoile HD 46149, observée lors d'un *short run* CoRoT, qui présente une vitesse de rotation projetée  $v \sin i = 30 \pm 10 \text{ km.s}^{-1}$  est une cible tout à fait favorable pour étudier l'impact de la rotation modérée sur le spectre d'oscillation. Par ailleurs, pour cette étoile, on détecte à basse fréquence une variabilité qui est attribuée par l'analyse de Degroote et al. (2010) à la période de rotation de l'étoile, c'est-à-dire à des événements ayant lieu dans l'atmosphère, apparaissant de manière cyclique, compatible avec le cycle de rotation de l'étoile. Ainsi, pour cette étoile, les observations signalent de l'activité en surface, ce qui signifie potentiellement un mécanisme qui pourrait causer de la rotation différentielle en surface. Pour ce type d'étoile alors, je me suis posé la même question que pour les étoiles de type solaire : serait-il possible de détecter de la rotation différentielle en latitude à partir de l'outil sismique qu'est le *splitting* rotationnel ? Afin de tenter d'y répondre, j'ai effectué une étude similaire à celle qui concerne HD 181420, mais cette fois pour un modèle évolué d'étoile de  $10 M_{\odot}$ . Pour ce type de rotateurs modérés qui oscillent dans des modes acoustiques et de gravité proches du fondamental, j'ai montré que les contributions au *splitting* d'une rotation différentielle en latitude, ou celle de la dégénérescence proche (qui intervient à l'ordre 2 dans le *splitting*) sont du même ordre. Néanmoins, lorsqu'il est possible de détecter deux *splittings* individuels correspondant à deux modes de natures différentes (mixte et pur g par exemple), il est possible de distinguer les deux effets, une méthode est proposée dans l'article joint au Chapitre 3.

### 8.2.2 Rotateurs rapides

En ce qui concerne les pulsateurs classiques qui sont en rotation rapide, la situation est encore plus difficile. En effet, les étoiles Be par exemple, qui peuvent être des  $\beta$ Cephei ou des SpB, montrent des pulsations de basse fréquence (autour du fondamental pour les  $\beta$ Cephei, et modes g de hauts ordres radiaux pour les SpB) et peuvent avoir des

vitesse de rotation très élevées, en moyenne  $88\% \Omega_k$ . En conséquence, étant donné que la fréquence de rotation est du même ordre que la fréquence de pulsation, le spectre sismique de telles étoiles n'est plus structuré par la grande séparation, mais par le *splitting*. En effet, l'analyse sismique de l'étoile HD 181231 (étoile de type Be en rotation à  $165 \pm 30 \text{ km.s}^{-1}$ ) réalisée par Neiner et al. (2009) révèle le fait que dans le spectre de Fourier, les fréquences se regroupent par modes d'ordre azimutal identique, de degré angulaire différent. Cet exemple illustre le fait que seule une modélisation pertinente du *splitting* rotationnel dans des conditions de rotation extrême peut permettre une identification correcte des modes d'oscillation observés.

Ceci est l'objectif du second volet de ma thèse, consacré à la construction d'un code d'oscillation bidimensionnel non perturbatif pour le calcul des oscillations adiabatiques non radiales d'étoiles en rotation rapide que j'ai nommé ACOR (*Adiabatic Code of Oscillation including Rotation*). Le code utilise une méthode spectrale tridomaine basée sur un système de coordonnées particulièrement astucieux qui permet d'éviter les difficultés de différenciation radiale, notamment pour des modèles de structure évolués, où les grandeurs d'équilibre subissent de brusques variations à l'émergence du cœur convectif par exemple. Ce système permet également d'imposer des conditions aux limites simples, que ce soit au centre ou en surface de l'étoile. Par ailleurs, la différenciation radiale des équations se fait par une méthode de différences finies sophistiquée mise en place par Scuflaire et al. (2008) qui est précise au cinquième ordre de la résolution radiale en ne couplant que deux points de grille consécutifs. La dépendance angulaire des fonctions propres d'oscillation est décrite au moyen d'une série tronquée d'harmoniques sphériques. Les calculs ont montré une très bonne convergence en fonction du nombre de termes dans le développement spectral en harmoniques sphériques. La convergence en terme de résolution radiale doit être testée plus encore par des calculs sur des modèles polytropiques présentant une résolution radiale de 4 000 points à très court terme. D'autre part, les performances numériques atteintes par ACOR seront améliorées grâce à un travail d'optimisation et de parallélisation qui sera entrepris rapidement, ceci dans le but d'être capable d'utiliser ACOR dans le cadre de calculs massifs pour l'interprétation de données sismiques.

Les calculs de ce code ont pu être validés grâce à une comparaison précise avec les résultats issus de Reese et al. (2006) pour des modèles polytropiques déformés en rotation rapide identiques. L'accord en ce qui concerne la distribution spatiale ainsi que le comportement des modes d'oscillation avec la vitesse de rotation (notamment lors de croisements évités) est excellent. Les écarts de fréquences trouvées par les deux calculs semblent tout à fait satisfaisants compte tenu des différences intrinsèques que présentent les deux approches, et du nombre de couches radiales du modèle d'équilibre.

Actuellement, nous ne disposons pas de modèles stellaires pouvant simuler simultanément et de manière complète les deux effets de la rotation (l'appauvrissement centrifuge et le mélange rotationnel), c'est-à-dire de modèles d'évolution stellaire en deux dimensions. Dans le but de réaliser une modélisation la plus réaliste possible des oscillations d'une étoile de la séquence principale en rotation rapide, j'ai adopté la stratégie suivante : utiliser un outil de simulation de l'évolution stellaire à symétrie sphérique, puis déformer de manière cohérente la structure acoustique d'un tel modèle afin d'obtenir un modèle évolué, déformé par la rotation. Enfin, j'ai utilisé le code d'oscillation ACOR afin de calculer pour la première fois le spectre d'oscillation d'un modèle non barotropique d'une étoile évoluée de  $2 M_{\odot}$ . J'ai pu mettre en évidence la

présence de trois types de modes principalement. D'une part, les modes îlots qui sont équivalents aux modes acoustiques de bas degré et qui sont les modes que nous cherchons à identifier par astérosismologie ; les modes de galerie, pendants à haute vitesse de rotation des modes acoustiques de hauts degrés angulaires. Ces deux catégories de modes sont déjà observées dans les modèles homogènes non évolués par Reese et al. (2009a). D'autre part, des modes piégés dans la cavité du gradient de poids moléculaire moyen, de hauts et de bas degrés. Ainsi que toutes sortes de métissage entre ces différents types de modes. Notamment, ACOR a permis de révéler des modes de pulsation de nature mixte au sens gravito-acoustique, c'est-à-dire des modes piégés à la fois dans le cœur de l'étoile et dans son enveloppe avec des caractères angulaires variables du centre à la surface. Je m'attacherai alors dans un futur proche à étudier la dynamique et la structure de ces modes qui représentent un outil sismique fort intéressant de sondage du profil de rotation dans les rotateurs très rapides, pour lesquels les phénomènes d'éjection de masse et de vents stellaires nous font présumer une importante rotation différentielle.

L'étape suivante sera d'effectuer une étude de régularité pour le spectre fréquentiel. Pour ce faire, il est nécessaire de mettre en place une stratégie de suivi des modes en fonction de la vitesse de rotation moyenne, ou encore un suivi des modes avec l'âge de l'étoile.

D'autre part, nous devons noter que le modèle sphérique utilisé en amont du processus de modélisation ne contient pas les ingrédients physiques nécessaires à la modélisation du mélange rotationnel. Dans un avenir proche, en collaboration avec J.P. Marques Cadilhe, j'ai donc l'intention de mettre en place une chaîne de modélisation plus pertinente quant à l'effet de la rotation sur l'évolution d'une étoile en rotation rapide.

Par ailleurs, comme évoqué pour le cas des rotateurs modérés, l'étude de la variation des profils de raies en spectroscopie est un bon moyen de contraindre le degré angulaire des modes de pulsations d'étoiles en rotation. Dans ce cadre, nous pourrions utiliser ACOR afin d'obtenir la distribution de vitesse perturbée dans l'atmosphère stellaire (ceci fait déjà l'objet d'études, non encore abouties, basée sur les résultats du code TOP).

Enfin, le développement de cet outil de modélisation réaliste des pulsations d'étoiles en rotation rapide, apporte de nouvelles perspectives en ce qui concerne la modélisation du transport de moment angulaire par les ondes gravito-inertielles. En effet, jusqu'à maintenant, ces modélisations utilisaient des calculs asymptotiques pour déterminer les fonctions propres des modes gravito-inertiels. Dans certaines approximations, ACOR pourrait fournir des fonctions propres plus précises dans le cadre de collaborations avec des spécialistes de la modélisation des processus de mélange.







# Chapitre 9

## Conclusion and future prospects (english version)

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Solarlike pulsators and slow rotators . . . . .</b>	<b>159</b>
<b>9.2</b>	<b>Classical pulsators . . . . .</b>	<b>161</b>
9.2.1	Moderate rotators . . . . .	161
9.2.2	Rapid rotators . . . . .	162

---

The work presented in this manuscript deals with modelling stellar pulsations taking into account the effect of rotation on pulsation modes and the related frequencies. Particularly, it aims at engineering appropriate seismic tools in order to constrain stellar models with asteroseismic observations. With CoRoT and Kepler missions we are now able to obtain seismic spectra with unprecedented high precision, and we face a new challenge : We are finally able to look into stellar interiors, but what exactly do we see ?

If one could measure pulsation frequencies and correctly identify the related pulsation modes, a very valuable source of information will be available. Here lie both all the potential achievements, and the difficulty that represents asteroseismology. Actually, each observed and correctly identified pulsation frequency brings a new constraint on stellar models. That shows the potential impact asteroseismology can have on stellar physics. But mode identification remains a complicated issue in many stellar cases.

Let us distinguish the two main cases.

### 9.1 Solarlike pulsators and slow rotators

In this context, solarlike stars represent the most convenient objects. On the one hand they pulsate in the asymptotic region of the spectrum for p modes. This means that their spectra show regularities for most of them.

On the other hand because they are slow rotators (the most rapid solarlike stars rotate at roughly  $40 \text{ km.s}^{-1}$ ). That is a great advantage since rotation is expected to

have a small effect on their pulsations. And this effect can be well approximated by a perturbative approach provided rotation velocity is small enough. I then established the validity domain of a one-dimensional second order perturbative method. I found that if near degeneracy corrections are added to the pulsation frequency, this method gives precise enough determination of pulsation frequencies up to 5 %  $\Omega_k$ , which corresponds to 20 km.s<sup>-1</sup> for a 1 M<sub>⊙</sub> star. The criterium used for this determination of the validity domain is the resolution of a peak in the Fourier spectrum for a CoRoT long run. Therefore, second order perturbative methods are shown to be satisfying enough for solar type stars such as HD 181 420 and HD 49 933 which were observational targets for two CoRoT long runs.

But considering observational error bars as the validity criterium for perturbative methods can be too drastic. Another more relevant way to study the validity of a perturbative approach could be to consider the error induced by neglecting non perturbative effects on the measure of the rotation rate from the rotational splitting. This way we can evaluate the uncertainty related to the perturbative modelling of a rotational splitting. This method has already been used in Ouazzani et al. (2010) for a 1D third order perturbative method without accounting for near degeneracy corrections.

Therefore, for solar type pulsators, which are slow rotators, the perturbative approach leads to precise enough determination of pulsation frequencies. Hence, for these stars, the next step is to improve the modelling of seismic constraints such as, for rotation determination, the rotational splitting.

To the lowest approximation level- valid for very slow rotation-, the rotational splitting is linearly related to the rotation angular velocity,  $\Omega$  (Ledoux 1951) due to Coriolis acceleration. When second order ( $O(\Omega^2)$ ) corrections arising mostly due to distorsion of the structure by the centrifugal acceleration is included, this remains valid up to some rotation value (Reese et al. 2006; Ouazzani et al. 2009; Burke et al. 2011). However for more rapid rotation, accidental degeneracies and higher order frequency corrections must be taken into account (DG92, Soufi et al. 1998) and the rotational splitting no longer varies linearly with  $\Omega$ . The rotation rate that is then derived must take these corrections into account.

In the article given in the third Chapter of this thesis, I studied non linear contributions to the rotational splitting caused by differential rotation in latitude, and by higher order terms in the expansion of frequency as power series of  $\Omega$ . I showed that for high order pressure modes, the implicit cubic order contribution (implicitly solved in the eigensystem) and the near degenerate corrections dominate but with opposite signs and therefore roughly compensate each other. Hence, the near-degeneracy correction tends to reduce over-estimated contributions for rotational splittings. These contributions dominated by centrifugal distorsion show a  $\sigma_0^2$  behaviour ( $\sigma_0$  being the frequency of the centroid mode), particularly the near-degeneracy one. Moreover, I showed that near-degeneracy contributes to the rotational splitting only if third order effects are taken into account but its behaviour is dominated by distorsion.

In this context, I focused on seismic spectra of solar type stars observed by CoRoT. On some of the CoRoT spectra analyzed sofar -as for HD 181420 for instance-, a difference between what is interpreted as the low frequency signature of rotation in the Fourier spectrum, and the rotation rate deduced from the mean rotational splitting is found (Barban et al. 2009). I then adress the following issue : can the observed differences between the two indicators (the mean value of the splitting and the low frequency

peak in the Fourier spectrum) be explained by differential rotation in latitude? The fact that second and third order effects are neglected for the pulsation modelling can also cause such a discrepancy.

In the high order p mode frequency range, and for rotation rates smaller than  $7.4\% \Omega_k$  - which corresponds to  $30 \text{ km.s}^{-1}$  for an  $1.36 M_\odot$ ,  $1.63 R_\odot$  star - I showed that the effect of latitudinal differential rotation is clearly dominant. In the case of HD 181420, I found that based on the results of the seismic analysis achieved by Barban et al. (2009), the seismic splitting is compatible with a differential rotation in latitude for latitudinal shear ranging from  $\Delta\Omega/\Omega_0 = 0.489 \pm 0.252$  to  $\Delta\Omega/\Omega_0 = 0.998 \pm 0.426$ .

In this work, I focused on latitudinal differential rotation or uniform rotation. Observed differences between internal (seismic) and surface rotation (low frequency peak in a power spectrum) can also possibly arise from radial differential rotation. This will be investigated in a further work.

## 9.2 Classical pulsators

Concerning classical pulsators, the situation is much less favourable. These stars pulsate mostly in low radial order p and g modes. Unlike for high order p and g modes, in this frequency range, regularities are very difficult to find out. For these massive or intermediate mass stars, very few reliable examples of mode identification can be found in the literature. Therefore, getting seismic constraints for stellar modelling is not conceivable on a short term. And the first step toward this goal is getting a better understanding of rotational effects on seismic spectra.

### 9.2.1 Moderate rotators

For moderately rotating classical pulsators, helpful additional constraints on mode identification can be brought by spectroscopy or multi-color photometry (see Dupret et al. 2004, for HD 129 929). Spectroscopy helps to constrain the angular degree and azimuthal order of a pulsation mode studying small line profile variations induced by the perturbation of photospheric velocities by pulsation. Multi-color photometry is based on the fact that luminosity perturbation amplitude and phase are related to the wavelength which is characteristic of one pulsation mode. These observational techniques lean on the knowledge of spatial distributions of pulsation modes at the surface of the star. Until now these two methods have been used considering at best a small departure to spherical symmetry, the surface distribution of a mode being modeled by one spherical harmonics.

Moreover, in the case of slow to moderate rotators, the frequency spectrum of classical pulsators can be well computed by a perturbative approach. Actually the validity determination presented in this thesis based on the example of an  $8.5 M_\odot$  ZAMS model establishes that the second order perturbative method is valid up to  $5\% \Omega_k$  if the synthetic spectrum obtained is compared to observational spectra obtained by a CoRoT long run. For this model of  $8.5 M_\odot$ , this means that such a perturbative approach is satisfying enough for rotation up to  $26 \text{ km.s}^{-1}$ , up to  $60 \text{ km.s}^{-1}$  for CoRoT short run observations. For instance, the target HD 46 149, observed during a CoRoT short run, which presents a rotation projected velocity  $v \sin i = 30 \pm 10 \text{ km.s}^{-1}$  is

a favourable object for the study of the impact of moderate rotation on pulsation spectra using perturbative methods. Moreover, Degroote et al. (2010) have detected for this star a variability which has been identified as the star's rotation period. Hence, observations show that events taking place in the star's atmosphere appear periodically. This could be attributed to stellar surface activity, which is known as a phenomenon responsible for surface differential rotation in latitude. Therefore, as I did for solar type stars, for HD 46 149 and for moderately rotating classical pulsators in general, one can wonder if we could possibly detect differential rotating with the knowledge of the rotational splitting. To address this issue, I studied the example of an evolved  $10 M_{\odot}$  star. For such a model of  $\beta$ Cephei, the effect of near degeneracy, cubic order and of a latitudinal shear are of the same magnitude in the range of frequency where such stars show oscillations -i.e. low order p and g modes- and for reasonable rotation rates ranging from  $15\% \Omega_k$  to  $30\% \Omega_k$ . Nevertheless, when two individual splittings, for two modes of different nature (one pure g and one mixed for example), are available, a method is proposed to distinguish between a latitudinal shear and the other effects.

### 9.2.2 Rapid rotators

Concerning classical pulsators which are fastly rotating, the situation is even more complicated. Actually, Be stars, which can be  $\beta$ Cephei stars or SpB stars, show low order pulsation frequencies (around the fundamental for  $\beta$ Cephei stars, and high order g modes for SpB stars), and very high rotation velocity, 88 % in average. As a consequence, given that the rotation frequency is of same order as pulsation frequencies, the oscillation frequencies are no longer spaced by the large separation but by the rotational splitting. The seismic observation of HD 181 231 (a Be star rotating at  $165 \pm 30 \text{ km.s}^{-1}$ ) performed by Neiner et al. (2009) reveals that in the frequency spectrum, the pulsation modes with identical azimuthal order and different angular degree tend to group together. This shows that only a relevant modelling of the rotational splitting in extremely high rotation conditions would make possible a correct mode identification for the observed spectra of such stars.

Therefore the second aspect of my work, dedicated to building a two-dimensional non perturbative code from scratch for adiabatic computations of pulsation modes of rapid rotators which I named ACOR (for Adiabatic Code of Oscillation including Rotation). This code uses a 3-domain spectral approach based on a coordinate system particularly well suited for avoiding radial differentiation difficulties. This allows to handle evolved stellar models whose equilibrium quantities present very rapid variations such as those occurring at the edge of stellar convective cores for instance. Moreover, radial differentiation is made according to a method established by Scuflaire et al. (2008) which precision reaches the fifth order including only two consecutive radial grid points. The angular dependence is expanded in terms of truncated series of spherical harmonics (typically between 30 and 40 terms). The calculations converge very well with the number of terms included in the spectral expansion. Convergence in terms of radial resolution seems to be achieved for 2 000 grid points, but further investigation with 4 000 will follow soon. Moreover, I plan to improve the code numerical performances thanks to optimisation and parallelization. This will be rapidly engineered in order to use ACOR in the context of massive calculations for seismic data interpretation.

Furthermore ACOR modelling has been validated thanks to strict comparisons with Reese et al. (2006) results for identical 2D polytropic rapidly rotating models. Concerning spatial distribution, as well as oscillation mode behaviour with respect of rotation (including avoided crossings), the agreement is found to be excellent. Frequency differences between the two calculations are also found quite small considering intrinsic differences between the two methods, and the number of points of the equilibrium model radial grid.

Nowadays, there is no stellar models which simulates both and simultaneously the effect of rotation on a star evolution and on its geometrical structure (i.e. a code which could do 2D stellar evolution) with resolution satisfying enough to perform pulsation calculations. As a first step for realistic modelling of a rapidly rotating main sequence star, we adopted the following approach : the stellar model has been evolved with spherical symmetry and distorted a posteriori self consistently with Roxburgh (2006) method in order to get the acoustic 2D structure. Finally, we used ACOR in order to compute for the first time the pulsation spectra for a non barotropic evolved model of a  $2 M_{\odot}$  star. This model is shown to pulsate in three types of modes : island modes and whispering gallery modes which are rotating counterparts to low degree and high degree acoustic modes respectively (Reese et al. 2009a), and pulsation modes trapped in the  $\mu$ gradient cavity (rotating counterparts for gravity modes?), and all sort of mixing of these three types of modes. In particular, ACOR has revealed mixed modes in the sense of gravito-acoustic modes, i.e. modes trapped near the stellar core as well as in the envelop with very peculiar angular distribution (angular degree varing drastically from the center of the star to the surface). I intend to study the structure and the dynamics of such pulsation modes extensively, as these modes represent a very interesting seismic tool for getting constraints on rapidly rotating massive stars rotation profile. Such star rotation profile is expected to be strongly differential as for these stars we observe mass ejection and stellar winds.

The stellar evolution code used to compute the spherical model does not take into account chemical elements and angular momentum transport induced by rotation. Therefore, in a close future, in the context of a collaboration with J.P. Marques Cadilhe, we aim at building a modelling chain in order to study all the effects of rotation (structural, on evolution, on pulsations).

Finally, as mentionned in the beginning of this section, the study of line profile variations in spectroscopy represents a good mean to constrain angular degree of pulsation modes at high rotation velocity. In this context, ACOR could be used in order to determine velocity distribution in stellar atmosphere when the star is strongly distorted.

Moreover, this realistic code (ACOR) could open new perspectives concerning the modelling of momentum transport by gravito-inertial modes in stellar interiors. Actually until now attempts to model this phenomenon have been made using asymptotic approximations to determine the eigenfunctions for the modes. Under certain approximations, ACOR could provide accurate eigenfunctions for the modelling of this rotationally induced transport in collaboration with experts on stellar transport processes.



# Annexe A

## Développement spectral des équations d'oscillation

### Sommaire

---

A.1	Composante radiale de l'équation de mouvement . . . . .	165
A.2	Divergence du mouvement horizontal . . . . .	166
A.3	Composante radiale du rotationnel de l'équation de mouvement . . . . .	168
A.4	Relation adiabatique . . . . .	169
A.5	Équation de continuité . . . . .	169
A.6	Équation de Poisson . . . . .	170

---

### A.1 Composante radiale de l'équation de mouvement

En terme des variables globales du problème, nous avons obtenu pour l'équation de mouvement projetée dans la direction radiale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi'}{\partial \zeta} = & -i(m\Omega + \sigma) M_\zeta v'_\zeta - i(m\Omega + \sigma) \sin \theta M_\mu \tilde{v}'_\theta \\ & - \sin \theta M_\phi v'_\phi - \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} + M_{\rho'} \rho' + M_{\pi'} \pi' \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$



Avec,

$$\begin{aligned}
 M_\zeta &= r_\zeta g(\zeta, \mu) & M_{\rho'} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \zeta} \\
 M_\mu &= -r_\zeta g(\zeta, \mu) \frac{r_\mu}{r} & M_{\pi'} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta} \\
 M_\phi &= -2\Omega r_\zeta
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

En utilisant les développements spectraux évoqués aux équations (4.29) à (4.31), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \pi'_{\ell_1}}{\partial \zeta} &= \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \{ (m\Omega + \sigma) M_\zeta u'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \\
 &\quad + m M_\varphi v'_{\ell_2} Y_{\ell_2} - (m\Omega + \sigma) (1 - \mu^2) M_\mu v'_{\ell_2} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \\
 &\quad + m (m\Omega + \sigma) M_\mu w'_{\ell_{2p}} Y_{\ell_{2p}} - (1 - \mu^2) M_\varphi w'_{\ell_2} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \\
 &\quad + M_{\pi'} \pi'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \\
 &\quad + M_{\rho'} \rho'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \\
 &\quad - d\Phi'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \} Y_{\ell_1}^* d\mu
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

## A.2 Divergence du mouvement horizontal

Nous avons obtenu au Chapitre 4 pour l'équation de la divergence de la composante horizontale de l'équation de mouvement :

$$\begin{aligned}
0 = & (m\Omega + \sigma) \left[ \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{v}'_{\theta}) - \frac{m}{\sin \theta} v'_{\varphi} \right] - D_{\varphi\mu} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v'_{\varphi}) \\
& - iD_{\zeta} v'_{\zeta} - i \sin \theta D_{\mu} \tilde{v}'_{\theta} - \sin \theta D_{\varphi} v'_{\varphi} - \frac{1}{r} L^2 \pi' - \frac{1}{r} L^2 \Phi' \\
& + D_{\Phi\mu} \frac{\partial \Phi'}{\partial \mu} + D_{\rho} \rho' + D_{\rho\mu} \frac{\partial \rho'}{\partial \mu} + D_{\pi} \pi' + D_{\pi\mu} \frac{\partial \pi'}{\partial \mu}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

Avec,

$$\begin{aligned}
D_{\varphi\mu} &= \Omega t \quad \text{où} \quad t(\zeta, \mu) = 2 \left( \mu - (1 - \mu^2) \frac{r_{\mu}}{r} \right) \\
D_{\zeta} &= -mg \left[ 2\Omega \left( 1 - \frac{r_{\theta}}{r} \cot \theta \right) + \frac{r}{r_{\zeta}} \left( 1 - \frac{r_{\theta}^2}{r^2} \right) \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} - \frac{r_{\theta}}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta} \right] \\
D_{\mu} &= m \left[ \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} (1 + g) - \frac{\Omega g t}{1 - \mu^2} \right] \\
D_{\varphi} &= -\frac{\partial(\Omega t)}{\partial \mu} \\
D_{\rho} &= -\frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{r \rho^2} \frac{\partial p}{\partial \mu} \right) \\
D_{\rho\mu} &= -\frac{(1 - \mu^2)}{r \rho^2} \frac{\partial p}{\partial \mu} \\
D_{\pi} &= \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1 - \mu^2}{r \rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} \right)
\end{aligned}$$

$$D_{\pi\mu} = \frac{1 - \mu^2}{r} \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu} - \frac{r_{\mu}}{r} \right)$$

$$D_{\Phi\mu} = -\frac{(1 - \mu^2) r_{\mu}}{r^2}$$

En substituant les variables par leur décomposition spectrale :

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \{ D_{\zeta} Y_{\ell_2} u'_{\ell_2} \\
& + \left[ ((m\Omega + \sigma) \ell_2 (\ell_2 + 1) + m D_{\varphi}) Y_{\ell_2} + (-m D_{\varphi\mu} - (1 - \mu^2) D_{\mu}) \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] v'_{\ell_2} \\
& + \left[ \left( m D_{\mu} + D_{\varphi\mu} \frac{m^2}{(1 - \mu^2)} - D_{\varphi\mu} \ell_{2p} (\ell_{2p} + 1) \right) Y_{\ell_{2p}} - (1 - \mu^2) D_{\varphi} \frac{\partial Y_{\ell_{2p}}}{\partial \mu} \right] w'_{\ell_{2p}} \\
& - \frac{1}{r} \ell_2 (\ell_2 + 1) \pi'_{\ell_2} + D_{\pi} Y_{\ell_2} \pi'_{\ell_2} + D_{\pi\mu} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \pi'_{\ell_2} \\
& - \frac{1}{r} \ell_2 (\ell_2 + 1) \Phi'_{\ell_2} + D_{\Phi\mu} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \Phi'_{\ell_2} \\
& + D_{\rho} Y_{\ell_2} \rho'_{\ell_2} + D_{\rho\mu} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \rho'_{\ell_2} \} Y_{\ell_1}^* d\mu
\end{aligned} \tag{A.5}$$

### A.3 Composante radiale du rotationnel de l'équation de mouvement

En projetant le rotationnel de l'équation de mouvement, nous avons obtenu au Chapitre 4 l'équation suivante :

$$0 = i(m\Omega + \sigma) \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v'_\varphi) - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{v}'_\theta}{\partial \varphi} \right] + i(m\Omega + \sigma) \frac{r_\theta}{r} v'_\varphi + i \sin \theta R_\varphi v'_\varphi$$

$$+ R_\zeta v'_\zeta + \sin \theta R_\mu \tilde{v}'_\theta + R_{\zeta\mu} \frac{\partial v'_\zeta}{\partial \mu} + R_{\mu\mu} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{v}'_\theta) + iR_\pi \pi' + iR_\rho \rho'$$

Avec,

$$R_\zeta = at + (1 - \mu^2) \frac{r_\mu}{r} c + \Omega t (d + f)$$

$$R_\mu = -tb + c - 2\Omega + \Omega(e + h)t$$

$$R_{\zeta\mu} = -\Omega(1 - \mu^2) \left( 2 + \frac{r_\mu}{r} g t \right)$$

$$R_{\mu\mu} = \Omega t g$$

$$R_\varphi = \frac{m\Omega t}{(1 - \mu^2)}$$

$$R_\pi = -\frac{m}{r\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \mu}$$

$$R_\rho = \frac{m}{r\rho^2} \frac{\partial p}{\partial \mu}$$

Où on définit les coefficients :

$$a = \frac{r}{r_\zeta} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} - (1 - \mu^2) \frac{r_\mu}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \quad (\text{A.6})$$

$$b = \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \quad (\text{A.7})$$

$$t = 2 \left( \mu - (1 - \mu^2) \frac{r_\mu}{r} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$c = \Omega \left( \frac{t}{r_\zeta} \frac{\partial r_\mu}{\partial \zeta} + \frac{2(1 - \mu^2)}{r} \frac{\partial r_\mu}{\partial \mu} - 2\mu \frac{r_\mu}{r} \right) \quad (\text{A.9})$$

$$d = 2 - (1 - \mu^2) \frac{r_\mu}{r} \left( -\frac{r_\mu}{r} + \frac{1}{r_\zeta} \frac{\partial r_\mu}{\partial \zeta} + \mu \frac{r_\mu}{r} \right) \quad (\text{A.10})$$

$$e = \frac{1}{r_\zeta} \frac{\partial r_\mu}{\partial \zeta} \quad (\text{A.11})$$

$$f = \frac{(1 - 2g)}{r} \left( \frac{1}{2} r_\mu t + (1 - \mu^2) \frac{\partial r_\mu}{\partial \mu} - 2\mu r_\mu \right) \quad (\text{A.12})$$

$$h = 2 \frac{r_\mu}{r} g \left[ -(1 - \mu^2) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial r_\mu}{\partial \mu} - \frac{r_\mu^2}{r^2} \right) + \mu \frac{r_\mu}{r} \right] \quad (\text{A.13})$$

En décomposant les variables :

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \left\{ \left[ R_{\zeta} Y_{\ell_2} + R_{\zeta\mu} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] u'_{\ell_2} \right. \\
& + \left[ \left( -R_{\mu\mu} \ell_2 (\ell_2 + 1) + m(m\Omega + \sigma) \frac{r_{\mu}}{r} - mR_{\varphi} + \frac{m^2}{(1-\mu^2)} R_{\mu\mu} \right) Y_{\ell_2} - (1-\mu^2) R_{\mu} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] v'_{\ell_2} \\
& + \left[ \left( (m\Omega + \sigma) \ell_{2p} (\ell_{2p} + 1) + mR_{\mu} \right) Y_{\ell_{2p}} + \left( (1-\mu^2) (R_{\varphi} - (m\Omega + \sigma) \frac{r_{\mu}}{r}) - mR_{\mu\mu} \right) \frac{\partial Y_{\ell_{2p}}}{\partial \mu} \right] w'_{\ell_{2p}} \\
& + R_{\pi} Y_{\ell_2} \pi'_{\ell_2} \\
& \left. + R_{\rho} Y_{\ell_2} \rho'_{\ell_2} \right\} Y_{\ell_1}^* d\mu
\end{aligned} \tag{A.14}$$

## A.4 Relation adiabatique

Nous avons choisi en remplacement de l'équation d'énergie, la relation adiabatique suivante :

$$i(m\Omega + \sigma) \left( \frac{1}{\rho} \rho' - \frac{\rho}{\Gamma_1 p} \pi' \right) - \tilde{A}_{\zeta} v'_{\zeta} + \sin \theta \tilde{A}_{\mu} \tilde{v}'_{\theta} = 0 \tag{A.15}$$

En termes des composantes spectrales, on obtient :

$$\begin{aligned}
0 = & \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \left\{ (m\Omega + \sigma) \frac{1}{\rho_0} \rho'_{\ell_2} Y_{\ell_2} - (m\Omega + \sigma) \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \pi'_{\ell_2} Y_{\ell_2} - \tilde{A}_{\zeta} u'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \right. \\
& \left. - (1-\mu^2) \tilde{A}_{\mu} v'_{\ell_2} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} + m \tilde{A}_{\mu} w'_{\ell_{2p}} Y_{\ell_{2p}} \right\} Y_{\ell_1}^* d\mu
\end{aligned} \tag{A.16}$$

## A.5 Équation de continuité

En terme des variables globales, on avait obtenu au Chapitre 4 :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v'_{\zeta}}{\partial \zeta} = & -i(m\Omega + \sigma) \frac{r_{\zeta} \rho}{\Gamma_1 p} \pi' - g \frac{r_{\zeta}}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \tilde{v}'_{\theta}) - \frac{r_{\zeta}}{r \sin \theta} \frac{\partial v'_{\varphi}}{\partial \varphi} \\
& + C_{\zeta} v'_{\zeta} - \sin \theta C_{\mu} \tilde{v}'_{\theta} + C_{\zeta\mu} \frac{\partial v'_{\zeta}}{\partial \mu}
\end{aligned} \tag{A.17}$$

Avec,

$$\begin{aligned}
C_{\zeta} = & \frac{1}{\Gamma_1 p} \left( g \frac{(1-\mu^2) r_{\mu} r_{\zeta}}{r^2} \frac{\partial p}{\partial \mu} - \frac{\partial p}{\partial \zeta} \right) + g \frac{r_{\zeta}}{r} \left( (1-\mu^2) \frac{r_{\mu}}{2r} - \frac{r}{2r_{\mu}} h - d \right) \\
C_{\mu} = & -g \frac{r_{\zeta}}{r} \left( \frac{1}{\Gamma_1 p} \frac{\partial p}{\partial \mu} + e + h + \frac{r_{\mu}}{r} \right) \\
C_{\zeta\mu} = & (1-\mu^2) g \frac{r_{\zeta} r_{\mu}}{r^2}
\end{aligned}$$

En substituant leurs décompositions spectrales aux variables correspondantes :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u'_{\ell_1}}{\partial \zeta} &= \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \left\{ \left[ C_\zeta Y_{\ell_2} + C_{\zeta\mu} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] u'_{\ell_2} \right. \\
&\quad + \left[ \frac{r_\zeta}{r} \left( g\ell_2(\ell_2 + 1) + (1-g) \frac{m^2}{(1-\mu^2)} \right) Y_{\ell_2} + (1-\mu^2) C_\mu \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] v'_{\ell_2} \\
&\quad - \left[ m(1-g) \frac{r_\zeta}{r} \frac{\partial Y_{\ell_{2p}}}{\partial \mu} + m C_\mu Y_{\ell_{2p}} \right] w'_{\ell_{2p}} \\
&\quad \left. - r_\zeta (m\Omega + \sigma) \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \pi'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \right\} Y_{\ell_1}^* d\mu
\end{aligned} \tag{A.18}$$

## A.6 Équation de Poisson

On rappelle ce que l'on avait obtenu pour l'équation de Poisson en terme des variables globales du problème :

$$\frac{\partial d\Phi'}{\partial \zeta} = P_{\rho'} \rho' + P_{d\Phi'} d\Phi' + P_{d\Phi'\mu} \frac{\partial d\Phi'}{\partial \mu} + P_{\Phi'\mu} L^2(\Phi') \tag{A.19}$$

Avec,

$$\begin{aligned}
P_{d\Phi'} &= \frac{g}{r_\zeta} \frac{\partial r_\zeta}{\partial \zeta} - g \frac{r_\zeta}{r} \left( 2 + 2\mu \frac{r_\mu}{r} - (1-\mu^2) \frac{1}{r} \frac{\partial r_\mu}{\partial \mu} \right) \\
P_{d\Phi'\mu} &= 2(1-\mu^2) \frac{r_\mu r_\zeta}{r^2} g \\
P_{\Phi'\mu} &= \frac{r_\zeta^2}{r^2} g \\
P_{\rho'} &= r_\zeta^2 g
\end{aligned} \tag{A.20}$$

Étant donné les décompositions que nous avons choisies pour les variables :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial d\Phi'_{\ell_1}}{\partial \zeta} &= \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \left\{ \left[ P_{d\Phi'} Y_{\ell_2} + P_{d\Phi'\mu} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] d\Phi'_{\ell_2} \right. \\
&\quad + P_{\Phi'\mu} \ell_2(\ell_2 + 1) Y_{\ell_2} \Phi'_{\ell_2} \\
&\quad \left. + P_{\rho'} \rho'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \right\} Y_{\ell_1}^* d\mu
\end{aligned} \tag{A.21}$$





# Annexe B

## Comportement au centre

### Sommaire

---

<b>B.1</b>	<b>Composante radiale de l'équation de mouvement</b>	<b>173</b>
B.1.1	Cas général : $m = 0$ et $\text{par} = 1$ , ou $m \neq 0$	175
B.1.2	Cas $m = 0$ et $\text{par} = 0 \Rightarrow \ell_1 = 0, 2, 4 \dots$	175
<b>B.2</b>	<b>Divergence horizontale du mouvement</b>	<b>175</b>
B.2.1	Cas général $m = 0$ et $\text{par} = 1$ , ou $m \neq 0$	176
B.2.2	Cas $m = 0$ , et $\text{par} = 0 \Rightarrow \ell_1 = 0, 2, 4 \dots$	176
<b>B.3</b>	<b>Composante radiale du rotationnel de l'équation de mouvement</b>	<b>176</b>
B.3.1	Cas général : $m = 0$ et $\text{par} = 1$ , ou $m \neq 0$	177
B.3.2	Cas $m = 0$ et $\text{par} = 0 \Rightarrow \ell_2 = 0, 2, 4 \dots$ et $\ell_{1p} = 1, 3, 5 \dots$	177
<b>B.4</b>	<b>Relation adiabatique</b>	<b>178</b>
<b>B.5</b>	<b>Équation de continuité</b>	<b>178</b>
B.5.1	Cas général : $m = 0$ et $\text{par} = 1$ , ou $m \neq 0$	179
B.5.2	Cas $m = 0$ , et $\text{par} = 0 \Rightarrow \ell_1 = 0, 2, 4 \dots$	179
<b>B.6</b>	<b>Équation de Poisson</b>	<b>180</b>

---

Dans cette annexe, on étudie le comportement au centre des différents termes des équations d'oscillation. Pour ce faire, on utilise les développements asymptotiques que l'on peut trouver dans le système (4.37) (Rieutord 2004). Puis on prend en compte la limite au centre des grandeurs de structure du modèle d'équilibre.

### B.1 Composante radiale de l'équation de mouvement

Près du centre, en utilisant les développements donnés par (4.37), on obtient :



$$\begin{aligned}
 \zeta^{\ell_1} \frac{\partial \tilde{\pi}'_{\ell_1}}{\partial \zeta} = \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \{ & (m\Omega + \sigma) M_\zeta \tilde{u}'_{\ell_2} \zeta^{\ell_2-1} Y_{\ell_2} \\
 & + m M_\varphi \zeta^{\ell_2-1} \tilde{v}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \\
 & - (m\Omega + \sigma) (1 - \mu^2) M_\mu \zeta^{\ell_2-1} \tilde{v}'_{\ell_2} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \\
 & + m (m\Omega + \sigma) M_\mu \zeta^{\ell_{2p}} \tilde{w}'_{\ell_{2p}} Y_{\ell_{2p}} \\
 & - (1 - \mu^2) M_\varphi \zeta^{\ell_{2p}} \tilde{w}'_{\ell_2} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \\
 & + (M_{\pi'} \zeta^{\ell_2} - \ell_2 \zeta^{\ell_2-1}) \tilde{\pi}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \\
 & + M_{\rho'} \zeta^{\ell_2} \tilde{\rho}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \\
 & - \zeta^{\ell_2+1} d\tilde{\Phi}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} - \ell_2 \zeta^{\ell_2-1} \tilde{\Phi}'_{\ell_2} \} Y_{\ell_1}^* d\mu \quad (B.1)
 \end{aligned}$$

Étant donné la symétrie sphérique des grandeurs d'équilibre au centre de l'étoile, nous pouvons évaluer les coefficients de l'équation :

$$\begin{aligned}
 M_\zeta & \rightarrow r_\zeta \rightarrow (1 - \epsilon) \\
 M_\mu & \rightarrow 0 \\
 M_\varphi & \rightarrow -2\Omega (1 - \epsilon) \\
 M_{\rho'} & \rightarrow \zeta \mathcal{M}_{\rho'} \quad \text{où } \mathcal{M}_{\rho'} \sim \mathcal{O}(1) \\
 M_{\pi'} & \rightarrow \zeta \mathcal{M}_{\pi'} \quad \text{où } \mathcal{M}_{\pi'} \sim \mathcal{O}(1) \quad (B.2)
 \end{aligned}$$

Ainsi, on simplifie l'équation au centre, en exprimant les variables en termes des variables tildées explicitées dans (4.37) :

$$\begin{aligned}
 \zeta^{\ell_1} \frac{\partial \tilde{\pi}'_{\ell_1}}{\partial \zeta} = \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \{ & (m\Omega + \sigma) (1 - \epsilon) \tilde{u}'_{\ell_2} \zeta^{\ell_2-1} Y_{\ell_2} \\
 & - 2m\Omega (1 - \epsilon) \zeta^{\ell_2-1} \tilde{v}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \\
 & + 2\Omega (1 - \epsilon) (1 - \mu^2) \zeta^{\ell_{2p}} \tilde{w}'_{\ell_{2p}} \frac{\partial Y_{\ell_{2p}}}{\partial \mu} \\
 & + \mathcal{M}_{\rho'} \zeta^{\ell_2+1} \tilde{\rho}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} + \mathcal{M}_{\pi'} \zeta^{\ell_2+1} \tilde{\pi}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \\
 & - \zeta^{\ell_2+1} d\tilde{\Phi}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} - \ell_2 \zeta^{\ell_2-1} \tilde{\Phi}'_{\ell_2} - \ell_2 \zeta^{\ell_2-1} \tilde{\pi}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \} Y_{\ell_1}^* d\mu
 \end{aligned}$$

Introduisons les propriétés des harmoniques sphériques :

$$\begin{aligned}
 (1 - \mu^2) \frac{\partial Y_\ell^m}{\partial \mu} & = (\ell + 1) J_\ell^m Y_{\ell-1}^m - \ell J_{\ell+1}^m Y_{\ell+1}^m \\
 \mu Y_\ell^m & = J_{\ell+1}^m Y_{\ell+1}^m + J_\ell^m Y_{\ell-1}^m \quad (B.3)
 \end{aligned}$$

Telles que les  $J_\ell^m$  sont des fonctions de  $(\ell, m)$  :

$$J_\ell^m = \begin{cases} \left[ \frac{\ell^2 - m^2}{4\ell - 1} \right]^2, & \text{si } \ell > |m| \\ 0, & \text{si } \ell \leq |m| \end{cases} \quad (B.4)$$

On obtient alors pour l'équation de mouvement radial au centre :

### B.1.1 Cas général : $m = 0$ et $\text{par} = 1$ , ou $m \neq 0$

$$\begin{aligned} \zeta^{\ell_1} \frac{\partial \tilde{\pi}'_{\ell_1}}{\partial \zeta} = & \left[ (m\Omega + \sigma) (1 - \epsilon) \tilde{u}'_{\ell_1} - 2m\Omega (1 - \epsilon) \tilde{v}'_{\ell_1} \right. \\ & \left. - 2\Omega (1 - \epsilon) (\ell_1 - 1) J_{\ell_1}^m \tilde{w}'_{\ell_1-1} - \ell_1 \tilde{\Phi}'_{\ell_1} - \ell_1 \tilde{\pi}'_{\ell_1} \right] \zeta^{\ell_1-1} \\ & + \left[ \mathcal{M}_{\rho'} \tilde{\rho}'_{\ell_1} + \mathcal{M}_{\pi'} \tilde{\pi}'_{\ell_1} + 2\Omega (1 - \epsilon) (\ell_1 + 2) J_{\ell_1+1}^m \tilde{w}'_{\ell_1+1} - d\tilde{\Phi}'_{\ell_1} \right] \zeta^{\ell_1+1} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

### B.1.2 Cas $m = 0$ et $\text{par} = 0 \Rightarrow \ell_1 = 0, 2, 4, \dots$

$$\frac{\partial \tilde{\pi}'_0}{\partial \zeta} = \left[ \mathcal{M}_{\rho'} \tilde{\rho}'_0 + \mathcal{M}_{\pi'} \tilde{\pi}'_0 + \frac{4}{9} \Omega (1 - \epsilon) \tilde{w}'_1 + \sigma (1 - \epsilon) \tilde{u}'_0 - d\tilde{\Phi}'_0 \right] \zeta^1 \quad (\text{B.6})$$

## B.2 Divergence horizontale du mouvement

De la même manière, pour l'équation de la divergence horizontale de l'équation de mouvement près du centre, on a :

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \left\{ (m\Omega + \sigma) \ell_2 (\ell_2 + 1) \zeta^{\ell_2-1} \tilde{v}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} - D_{\varphi\mu} \ell_{2p} (\ell_{2p} + 1) \zeta^{\ell_{2p}} \tilde{w}'_{\ell_{2p}} Y_{\ell_{2p}} + D_{\zeta} Y_{\ell_2} \zeta^{\ell_2-1} \tilde{u}'_{\ell_2} \right. \\ & + \left[ m D_{\varphi} Y_{\ell_2} + (-m D_{\varphi\mu} - (1 - \mu^2) D_{\mu}) \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] \zeta^{\ell_2-1} \tilde{v}'_{\ell_2} \\ & + \left[ \left( m D_{\mu} + D_{\varphi\mu} \frac{m^2}{(1 - \mu^2)} \right) Y_{\ell_{2p}} - (1 - \mu^2) D_{\varphi} \frac{\partial Y_{\ell_{2p}}}{\partial \mu} \right] \zeta^{\ell_{2p}} \tilde{w}'_{\ell_{2p}} \\ & - \frac{1}{r} \ell_2 (\ell_2 + 1) \zeta^{\ell_2} \tilde{\pi}'_{\ell_2} + D_{\pi} Y_{\ell_2} \zeta^{\ell_2} \tilde{\pi}'_{\ell_2} + D_{\pi\mu} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \zeta^{\ell_2} \tilde{\pi}'_{\ell_2} \\ & - \frac{1}{r} \ell_2 (\ell_2 + 1) \zeta^{\ell_2} \tilde{\Phi}'_{\ell_2} + D_{\Phi\mu} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \zeta^{\ell_2} \tilde{\Phi}'_{\ell_2} \\ & \left. + D_{\rho} Y_{\ell_2} \zeta^{\ell_2} \tilde{\rho}'_{\ell_2} + D_{\rho\mu} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \zeta^{\ell_2} \tilde{\rho}'_{\ell_2} \right\} Y_{\ell_1}^* d\mu \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

La sphéricité au centre induit un certain comportement sur les coefficients des équations :

$$\begin{aligned} D_{\varphi\mu} & \rightarrow 2\mu\Omega \\ D_{\varphi} & \rightarrow -2\Omega \\ D_{\zeta} & \rightarrow -2\Omega m - m \frac{r}{r_{\zeta}} \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} \rightarrow -2\Omega m \\ D_{\mu} & \rightarrow 2m \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} - m \frac{2\mu\Omega}{1 - \mu^2} \rightarrow -m \frac{2\mu\Omega}{1 - \mu^2} \\ D_{\rho} & \rightarrow 0 & D_{\rho\mu} & \rightarrow 0 \\ D_{\pi} & \rightarrow 0 & D_{\pi\mu} & \rightarrow 0 \\ D_{\Phi\mu} & \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation de la divergence du mouvement horizontal devient :

$$\begin{aligned}
 0 = \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \{ & [(m\Omega + \sigma) \ell_2(\ell_2 + 1) - 2m\Omega] Y_{\ell_2} \zeta^{\ell_2-1} \tilde{v}'_{\ell_2} - 2m\Omega \zeta^{\ell_2-1} \tilde{u}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \\
 & + 2\Omega \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial Y_{\ell_{2p}}}{\partial \mu} - \ell_{2p}(\ell_{2p} + 1) \mu Y_{\ell_{2p}} \right] \zeta^{\ell_{2p}} \tilde{w}'_{\ell_{2p}} \\
 & - \frac{1}{r} \ell_2(\ell_2 + 1) \zeta^{\ell_2} \tilde{\pi}'_{\ell_2} - \frac{1}{r} \ell_2(\ell_2 + 1) \zeta^{\ell_2} \tilde{\Phi}'_{\ell_2} \} Y_{\ell_1}^* d\mu \quad (B.8)
 \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des harmoniques sphériques énoncées dans l'équation (B.3), on obtient alors :

### B.2.1 Cas général $m = 0$ et $\text{par} = 1$ , ou $m \neq 0$

$$\begin{aligned}
 0 = -\frac{1}{r} \ell_1(\ell_1 + 1) \zeta^{\ell_1} \tilde{\pi}'_{\ell_1} - \frac{1}{r} \ell_1(\ell_1 + 1) \zeta^{\ell_1} \tilde{\Phi}'_{\ell_1} \\
 + [(m\Omega + \sigma) \ell_1(\ell_1 + 1) - 2m\Omega] \zeta^{\ell_1-1} \tilde{v}'_{\ell_1} - 2m\Omega \zeta^{\ell_1-1} \tilde{u}'_{\ell_1} \\
 - 2\Omega [(\ell_1^2 - 1) J_{\ell_1}^m \zeta^{\ell_1-1} \tilde{w}'_{\ell_1-1} + \ell_1(\ell_1 + 2) \zeta^{\ell_1+1} J_{\ell_1+1}^m \tilde{w}'_{\ell_1+1}] \quad (B.9)
 \end{aligned}$$

### B.2.2 Cas $m = 0$ , et $\text{par} = 0 \Rightarrow \ell_1 = 0, 2, 4 \dots$

Ici, la première composante de l'équation de la divergence est indéterminée. Pour les composantes suivantes, on peut se ramener au cas de l'équation (B.9).

## B.3 Composante radiale du rotationnel de l'équation de mouvement

En explicitant les comportements asymptotiques des variables au centre comme proposé par les relations (4.37) :

$$\begin{aligned}
 0 = \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \{ & \left[ R_\zeta Y_{\ell_2} + R_{\zeta\mu} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] \zeta^{\ell_2-1} \tilde{u}'_{\ell_2} + R_\pi Y_{\ell_2} \zeta^{\ell_2} \tilde{\pi}'_{\ell_2} + R_\rho Y_{\ell_2} \zeta^{\ell_2} \tilde{\rho}'_{\ell_2} \\
 & + \left[ ((m\Omega + \sigma) \ell_{2p}(\ell_{2p} + 1) + mR_\mu) Y_{\ell_{2p}} + \left( (1 - \mu^2)(R_\varphi - (m\Omega + \sigma) \frac{r_\mu}{r}) - mR_{\mu\mu} \right) \frac{\partial Y_{\ell_{2p}}}{\partial \mu} \right] \zeta^{\ell_{2p}} \tilde{w}'_{\ell_{2p}} \\
 & + \left[ \left( -R_{\mu\mu} \ell_2(\ell_2 + 1) + m(m\Omega + \sigma) \frac{r_\mu}{r} - mR_\varphi + \frac{m^2}{(1 - \mu^2)} R_{\mu\mu} \right) Y_{\ell_2} \right. \\
 & \left. - (1 - \mu^2) R_\mu \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] \zeta^{\ell_2-1} \tilde{v}'_{\ell_2} \} Y_{\ell_1}^* d\mu \quad (B.10)
 \end{aligned}$$

Les grandeurs de structure du modèle d'équilibre étant sphériques au centre de l'étoile,

on obtient :

$$\begin{aligned}
R_\zeta &\rightarrow 4\mu\Omega + 2\mu \frac{r}{r_\zeta} \frac{\partial\Omega}{\partial\zeta} \rightarrow 4\mu\Omega \\
R_\mu &\rightarrow -\Omega \left( 2 + \mu \frac{\partial\Omega}{\partial\mu} \right) \rightarrow -2\Omega \\
R_{\zeta\mu} &\rightarrow -2\Omega(1 - \mu^2) \\
R_{\mu\mu} &\rightarrow 2\mu\Omega \\
R_\varphi &\rightarrow 2m \frac{\mu\Omega}{1 - \mu^2} \\
R_\pi &\rightarrow 0 \quad R_\rho \rightarrow 0
\end{aligned}$$

Au final :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \{[(m\Omega + \sigma)\ell_{2p}(\ell_{2p} + 1) - 2m\Omega] Y_{\ell_{2p}} \zeta^{\ell_{2p}} \tilde{w}'_{\ell_{2p}} \\
&+ 2\Omega \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial\mu} - \mu \ell_2(\ell_2 + 1) Y_{\ell_2} \right] \zeta^{\ell_2-1} \tilde{v}'_{\ell_2} \\
&+ 2\Omega \left[ 2\mu Y_{\ell_2} - (1 - \mu^2) \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial\mu} \right] \zeta^{\ell_2-1} \tilde{u}'_{\ell_2} \} Y_{\ell_{1p}}^* d\mu \tag{B.11}
\end{aligned}$$

### B.3.1 Cas général : $m = 0$ et $\text{par} = 1$ , ou $m \neq 0$

Lorsque le terme  $\ell_2 = 0$  ne fait pas partie du développement spectral, on peut réécrire l'équation (B.11) :

$$\begin{aligned}
0 &= [(m\Omega + \sigma)\ell_{1p}(\ell_{1p} + 1) - 2m\Omega] \zeta^{\ell_{1p}} \tilde{w}'_{\ell_{1p}} \\
&+ 2\Omega \left[ -\ell_{1p}(\ell_{1p} + 2) J_{\ell_{1p}+1}^m \zeta^{\ell_{1p}} \tilde{v}'_{\ell_{1p}+1} - (\ell_{1p} - 1)(\ell_{1p} + 1) J_{\ell_{1p}}^m \zeta^{\ell_{1p}-2} \tilde{v}'_{\ell_{1p}-1} \right] \\
&+ 2\Omega \left[ (\ell_{1p} + 1) J_{\ell_{1p}}^m \zeta^{\ell_{1p}-2} \tilde{u}'_{\ell_{1p}-1} - \ell_{1p} J_{\ell_{1p}+1}^m \zeta^{\ell_{1p}} \tilde{u}'_{\ell_{1p}+1} \right] \tag{B.12}
\end{aligned}$$

### B.3.2 Cas $m = 0$ et $\text{par} = 0 \Rightarrow \ell_2 = 0, 2, 4, \dots$ et $\ell_{1p} = 1, 3, 5, \dots$

On rappelle que lorsque  $\ell = 0$ ,  $u'_0$  se comporte en  $\zeta \tilde{u}'_0$ , et pour  $\ell = 2$ , le développement est également :  $u'_2 = \zeta \tilde{u}'_2$ . Ainsi, en reprenant (B.11), pour  $m = 0$ , et  $\text{par} = 0$ , et en utilisant les relations de récurrence sur les harmoniques sphériques (B.3) on obtient :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2=2, \ell_{max}} \{ 2\Omega \left[ -\ell_2(\ell_2 + 2) J_{\ell_2+1}^m Y_{\ell_2+1} + (\ell_2 + 1)(1 - \ell_2) J_{\ell_2}^m Y_{\ell_2-1} \right] \zeta^{\ell_2-1} \tilde{v}'_{\ell_2} \\
&+ 2\Omega \left[ (\ell_2 + 2) J_{\ell_2+1}^m Y_{\ell_2+1} + (1 - \ell_2) J_{\ell_2}^m Y_{\ell_2-1} \right] \zeta^{\ell_2-1} \tilde{u}'_{\ell_2} \} Y_{\ell_{1p}}^* d\mu \\
&+ 4\Omega \zeta \tilde{u}'_0 \int_{\mu=-1}^1 J_1^0 Y_1^0 Y_{\ell_{1p}}^* d\mu \tag{B.13}
\end{aligned}$$

Ce qui, pour  $\ell_{1p} = 1$ , donne :

$$2\Omega \left[ 2J_1^0 \tilde{u}'_0 - J_2^0 \tilde{u}'_2 - 3J_2^0 \tilde{v}'_2 \right] \zeta^0 + 2\sigma \tilde{w}'_1 \zeta^1 = 0 \tag{B.14}$$

## B.4 Relation adiabatique

Près du centre, le comportement des variables permet d'écrire :

$$0 = \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \left\{ (m\Omega + \sigma) \frac{1}{\rho_0} \zeta^{\ell_2} \tilde{\rho}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} - (m\Omega + \sigma) \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \zeta^{\ell_2} \tilde{\pi}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} - \tilde{A}_\zeta \zeta^{\ell_2-1} \tilde{u}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \right. \\ \left. - (1 - \mu^2) \tilde{A}_\mu \zeta^{\ell_2-1} \tilde{v}'_{\ell_2} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} + m \tilde{A}_\mu \zeta^{\ell_{2p}} \tilde{w}'_{\ell_{2p}} Y_{\ell_{2p}} \right\} Y_{\ell_1}^* d\mu \quad (\text{B.15})$$

Or  $\tilde{A}_\mu \rightarrow 0$ , et en ce qui concerne  $\tilde{A}_\zeta$ , défini dans l'équation (4.21), on a quand  $\zeta$  tend vers 0 :

$$\tilde{A}_\zeta = \frac{A_\zeta}{r_\zeta} - (1 - \mu^2) r_\mu \frac{\tilde{A}_\mu}{r} = \frac{A_\zeta}{r_\zeta} \\ \text{où } A_\zeta = \frac{1}{\Gamma_1} \left( \frac{\partial \ln p}{\partial \zeta} \right)_\mu - \left( \frac{\partial \ln \rho}{\partial \zeta} \right)_\mu \quad (\text{B.16})$$

Introduisons  $\mathcal{A}_\zeta$  tel que  $A_\zeta = \zeta \mathcal{A}_\zeta$ , ainsi  $\mathcal{A}_\zeta$  est  $\mathcal{O}(1)$ , et nous avons alors :

$$\tilde{A}_\zeta = \frac{\zeta}{r_\zeta} \mathcal{A}_\zeta \quad (\text{B.17})$$

Nous obtenons alors au final :

$$\forall \ell_1, \\ 0 = (m\Omega + \sigma) \frac{1}{\rho_0} \zeta^{\ell_1} \tilde{\rho}'_{\ell_1} - (m\Omega + \sigma) \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \zeta^{\ell_1} \tilde{\pi}'_{\ell_1} - \frac{1}{r_\zeta} \mathcal{A}_\zeta \zeta^{\ell_1} \tilde{u}'_{\ell_1} \quad (\text{B.18})$$

## B.5 Équation de continuité

Le traitement asymptotique des variables au centre permet d'écrire :

$$\forall \ell_1 > 0, \\ \zeta^{\ell_1-1} \frac{\partial \tilde{u}'_{\ell_1}}{\partial \zeta} = \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \left\{ -r_\zeta (m\Omega + \sigma) \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \zeta^{\ell_2} \tilde{\pi}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \right. \\ \left. + \left[ (-(\ell_2 - 1) \zeta^{\ell_2-2} + C_\zeta \zeta^{\ell_2-1}) Y_{\ell_2} + C_{\zeta\mu} \zeta^{\ell_2-1} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] \tilde{u}'_{\ell_2} \right. \\ \left. + \left[ \frac{r_\zeta}{r} \left( g \ell_2 (\ell_2 + 1) + (1 - g) \frac{m^2}{(1 - \mu^2)} \right) Y_{\ell_2} + (1 - \mu^2) C_\mu \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] \zeta^{\ell_2-1} \tilde{v}'_{\ell_2} \right. \\ \left. - \left[ m(1 - g) \frac{r_\zeta}{r} \frac{\partial Y_{\ell_{2p}}}{\partial \mu} + m C_\mu Y_{\ell_{2p}} \right] \zeta^{\ell_{2p}} \tilde{w}'_{\ell_{2p}} \right\} Y_{\ell_1}^* d\mu \quad (\text{B.19})$$

Dans le cas particulier où  $\ell_1 = 0$ , qui n'est satisfait que lorsque  $m = 0$ , et  $\text{par} = 0$  :

$$\begin{aligned} \ell_1 = 0 \Rightarrow \\ \zeta \frac{\partial \tilde{u}'_0}{\partial \zeta} = \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \left\{ -r_\zeta \sigma \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \zeta^{\ell_2} \tilde{\pi}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \right. \\ \left. + \left[ (C_\zeta \zeta^{\ell_2-1} - 1) Y_{\ell_2} + C_{\zeta\mu} \zeta^{\ell_2-1} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] \tilde{u}'_{\ell_2} \right. \\ \left. + \left[ \frac{r_\zeta}{r} g \ell_2 (\ell_2 + 1) Y_{\ell_2} + (1 - \mu^2) C_\mu \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] \zeta^{\ell_2-1} \tilde{v}'_{\ell_2} \right\} Y_0^* d\mu \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Au centre, étant donné la sphéricité des coefficients des équations,  $C_{\zeta\mu}$  et  $C_\mu$  tendent vers 0 tandis que  $r_\zeta / r \sim 1/\zeta$ ,  $g \sim 1$ , et :

$$\begin{aligned} C_\zeta \quad \rightarrow \quad -2 \frac{r_\zeta}{r} - \frac{1}{\Gamma_1 P_0} \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\zeta} \mathcal{C}_\zeta(\zeta) \\ \text{Où, } \quad \mathcal{C}_\zeta(\zeta) = -2 \frac{\zeta r_\zeta}{r} - \frac{\zeta}{\Gamma_1 P_0} \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} \sim -2 - \frac{\zeta}{\Gamma_1 P_0} \frac{\partial P_0}{\partial \zeta} \sim \mathcal{O}(1) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} \forall \ell_1 > 0, \\ \zeta^{\ell_1-1} \frac{\partial \tilde{u}'_{\ell_1}}{\partial \zeta} = \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \left\{ -r_\zeta (m\Omega + \sigma) \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \zeta^{\ell_2} \tilde{\pi}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \right. \\ \left. + [-(\ell_2 - 1) + \mathcal{C}_\zeta] Y_{\ell_2} \zeta^{\ell_2-2} \tilde{u}'_{\ell_2} \right. \\ \left. + \ell_2 (\ell_2 + 1) Y_{\ell_2} \zeta^{\ell_2-2} \tilde{v}'_{\ell_2} \right\} Y_{\ell_1}^* d\mu \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

### B.5.1 Cas général : $m = 0$ et $\text{par} = 1$ , ou $m \neq 0$

$$\begin{aligned} \zeta^{\ell_1-1} \frac{\partial \tilde{u}'_{\ell_1}}{\partial \zeta} = + (\ell_1 - 1) + \mathcal{C}_\zeta \zeta^{\ell_1-2} \tilde{u}'_{\ell_1} + \ell_1 (\ell_1 + 1) \zeta^{\ell_1-2} \tilde{v}'_{\ell_1} \\ - (1 - \epsilon) (m\Omega + \sigma) \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \zeta^{\ell_1} \tilde{\pi}'_{\ell_1} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

### B.5.2 Cas $m = 0$ , et $\text{par} = 0 \Rightarrow \ell_1 = 0, 2, 4 \dots$

En effectuant le passage à la limite de l'équation (B.20) lorsque  $\zeta \rightarrow 0$ , on obtient :

$$\zeta \frac{\partial \tilde{u}'_0}{\partial \zeta} = \left[ -(1 - \epsilon) \sigma \frac{\rho_0}{\Gamma_1 P_0} \tilde{\pi}'_0 + (C_\zeta - 1) \tilde{u}'_0 \right] \zeta^0 \quad (\text{B.24})$$

## B.6 Équation de Poisson

Au centre, l'équation de Poisson peut s'écrire en terme des variables tildées :

$$\begin{aligned}
\zeta^{\ell_1+1} \frac{\partial d\tilde{\Phi}'_{\ell_1}}{\partial \zeta} &= \int_{\mu=-1}^1 \sum_{\ell_2} \{P_{\rho'} \zeta^{\ell_2} \tilde{\rho}'_{\ell_2} Y_{\ell_2} \\
&+ \left[ (-\ell_2(\ell_2 - 1)\zeta^{\ell_2-2} + P_{d\Phi'} \ell_2 \zeta^{\ell_2-1} + P_{\phi'\mu} \ell_2(\ell_2 + 1)\zeta^{\ell_2}) Y_{\ell_2} + P_{d\Phi'\mu} \ell_2 \zeta^{\ell_2-1} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \right] \tilde{\Phi}'_{\ell_2} \\
&+ \left[ -(2\ell_2 + 1)\zeta^{\ell_2} + P_{d\Phi'} \zeta^{\ell_2+1} \right] Y_{\ell_2} + P_{d\phi'\mu} \zeta^{\ell_2+1} \frac{\partial Y_{\ell_2}}{\partial \mu} \left. \vphantom{\int} \right\} Y_{\ell_1}^* d\mu \quad (B.25)
\end{aligned}$$

Or les coefficients de cette équation se comportent comme :

$$\begin{aligned}
P_{d\Phi'} &\rightarrow -\frac{2}{\zeta} & P_{d\Phi'\mu} &\rightarrow 0 \\
P_{\phi'\mu} &\rightarrow \frac{1}{\zeta^2} & P_{\rho'} &\rightarrow (1 - \epsilon)^2 \quad (B.26)
\end{aligned}$$

Au final, on obtient :

$$\zeta^{\ell_1+1} \frac{\partial d\tilde{\Phi}'_{\ell_1}}{\partial \zeta} = (1 - \epsilon)^2 \zeta^{\ell_1} \tilde{\rho}'_{\ell_1} - (2\ell_1 + 3)\zeta^{\ell_1} d\tilde{\Phi}'_{\ell_1} \quad (B.27)$$







# Annexe C

## Communications

### Sommaire

---

C.1	Effect of stellar rotation on oscillation frequencies . . . . .	184
C.2	Domain of validity of a 1D second order perturbative approach for the effects of rotation on stellar oscillations . .	190
C.3	2D non-perturbative modeling of oscillations in rapidly rotating stars . . . . .	193
C.4	2D Pulsations of an evolved distorted rapidly rotating 2 $M_{\odot}$ star . . . . .	199

---

### Journaux à comité de lecture :

1. Effect of stellar rotation on oscillation frequencies, Ouazzani R. M., Goupil M. J., Dupret M. A. et Reese D. 2010 *Astrophysics and Space Science*, 328,285
2. Rotational splitting for fast rotators : Deviation from linear dependence with rotation velocity, Ouazzani R. M., Goupil M. J. 2011, soumis à *Astronomy and Astrophysics* (cet article se trouve dans le corps de la thèse, Chapitre 3, Section 3.5)

### Compte-rendu de conférence :

1. Domain of validity of a 1D second order perturbative approach for the effects of rotation on stellar oscillations, Ouazzani R. M., Goupil M. J., Dupret M. A., Reese D. 2009 *Communications in Asteroseismology*, 158,283
2. 2D non-perturbative modeling of oscillations in rapidly rotating stars, Ouazzani R. M., Dupret M. A., Goupil M. J., Reese D. 2010 *Astronomical Notes*, 331, No.9-10

## **C.1 Effect of stellar rotation on oscillation frequencies**

## Effect of stellar rotation on oscillation frequencies

R.M. Ouazzani · M.J. Goupil · M.A. Dupret · D. Reese

Received: 17 September 2009 / Accepted: 28 January 2010 / Published online: 14 February 2010  
© Springer Science+Business Media B.V. 2010

**Abstract** We investigate whether the rotational splittings of  $\beta$  Cephei stars can give some clue about the existence of a differential rotation in latitude, and if they are contaminated by the cubic order effects of rotation on oscillation frequencies. We also study some properties of splitting asymmetries and axisymmetric mode frequencies which provide seismic constrains on the distortion of the star. We find that only non-perturbative methods are able to reproduce those two seismic characteristics within 0.01% error bars for stars when they rotate faster than  $3.3\%\Omega_k$ . If error bars of 1% are acceptable, the threshold of validity of perturbative methods is extended to  $10\%\Omega_k$ .

**Keywords** Stellar rotation · Perturbative methods · Splitting · Differential rotation · Stellar oscillation · Beta Cephei

### 1 Introduction

$\beta$  Cephei stars are good candidates for seismic inferences, as these main sequence massive stars show low radial or-

der modes which probe the deepest layers, can be identified, and for which rotational splittings are detected. As they are fast rotators, one must investigate what effects stellar rotation has on seismic diagnostic tools, and how it affects the information on stellar interior to which they give access.

For each oscillation frequency,  $\omega_0$ , from a non-rotating star, there corresponds  $2\ell + 1$  frequencies,  $\omega_{n,\ell,m}$  in rotating stars, where  $n$  is the radial order,  $\ell$  the degree and  $m$  the azimuthal order. The basic splitting  $S_m = (\omega_{n,\ell,m} - \omega_{n,\ell,0})$  is contaminated by the effect of asphericity, which introduces an antisymmetric component in the frequency as a function of  $m$ . We choose to remove this second-order contribution using  $S_m^g = (\omega_{n,\ell,m} - \omega_{n,\ell,-m})/2m$ , the (generalised) splitting.

As a first approximation, this splitting is considered to be linear:  $S_m = m\Omega_0\beta$ , where  $\Omega_0$  is the rotation rate,  $\beta = C_\ell - 1$ , and  $C_\ell$  the Ledoux constant (Dziembowski and Goode 1992, hereafter DG92). Departure from linearity arises when the rotation profile depends on the latitude. However, for fast rotators, such a departure could also be due to the cubic-order effects of rotation. What is the relative magnitude of these two effects? Can these two effects be easily disentangled?

Furthermore, in order to constrain stellar distortion, we can use axisymmetric mode frequencies and splitting asymmetries. Since in a perturbative approach, the effect of the centrifugal force arises mostly at the second order in the rotation rate, we neglect higher-order corrections. The second issue we address is whether for rapid rotation it is still reliable to use perturbative modeling, or if it is better to use non-perturbative methods—direct integration of a 2D eigenvalue system.

R.M. Ouazzani (✉) · M.J. Goupil · D. Reese  
LESIA, Observatoire de Paris, 92195 Meudon, France  
e-mail: rhita-maria.ouazzani@obspm.fr

R.M. Ouazzani  
Université Pierre et Marie Curie, 75252 Paris, France

M.A. Dupret  
Inst. d'Astrophysique et de Géophysique, Univ. de Liège,  
4000 Liège, Belgium

D. Reese  
Department of Applied Mathematics, University of Sheffield,  
Sheffield S3 7RH, UK

## 2 Basic theoretical framework

The centrifugal force affects the structure of the star (causing distortion) and the resonant cavity of the modes is modified. The Coriolis force enters the equation of motion and affects the motion of the waves and frequencies of normal modes.

### 2.1 Equilibrium configuration

Following Chandrasekhar (1933), Chandrasekhar and Lebovitz (1962) the stationary equation of motion is solved by expanding the equilibrium quantities in terms of Legendre polynomials up to the second order. For the pressure for instance:  $p(r, \theta) = p_0(r) + p_{22}(r)P_2(\cos(\theta))$ , where  $p_0$  includes the spherically symmetric deformation induced by rotation which is small (spherically symmetric part of centrifugal acceleration neglected here). The non-spherically symmetric part of the equilibrium quantities (such as  $p_{22}$ ) are solved following Dziembowski and Goode (1992) (hereafter DG 92).

### 2.2 Correction of frequencies up to the cubic order

Following Soufi et al. (1998) (hereafter S98), the oscillation system is expanded up to the cubic order (see also Karami et al. 2005). Parts of the Coriolis and non-spherically symmetric distortion effects are included into the *zeroth* order of the oscillation equation. This way, we are able to solve the eigenvalue problem up to cubic order without having to solve the successive equations for the eigenfunctions at each order. Solving the eigensystem yields eigenfrequencies:  $\omega = \omega_0 + \omega_c$ , where  $\omega_0$  contains  $\omega_{\Omega=0}$  and the Coriolis contribution to the first order, and  $\omega_c$  represents the second- and third-order corrections to the eigenfrequencies due to the Coriolis and centrifugal forces. For more details, we refer to S98 and Karami (2008).

## 3 Cubic-order frequency corrections

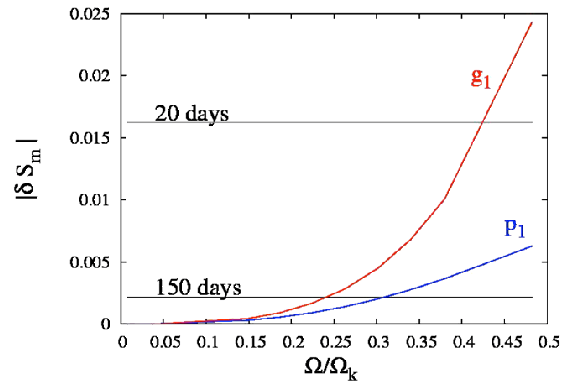
Here we determine if a departure from linearity due to cubic-order effects can be significant and how it could affect the determination of the rotation rate. We compare it to what we consider as observational errors. As the observational error, we take here the resolution of a peak in the Fourier spectrum, for a CoRoT long (150 days) and short (20 days) runs.

### 3.1 Corrections to the generalised splitting

The splitting including frequency correction due to cubic-order effects and assuming a uniform rotation is given by

$$S_m^{\text{cubic}} = \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \beta + \frac{\Omega_0}{\sigma_0} \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \right)^2 T_m \quad (1)$$

Springer



**Fig. 1**  $|\delta S_m|$  due to cubic-order effects, for a  $g_1$  and a  $p_1$  mode as a function of the rotational velocity. The two horizontal lines represent observational errors for CoRoT long and short runs respectively. All quantities are scaled by  $\Omega_k$ . Note that for p modes, this contribution is negative

where  $\sigma_0 = \omega_0/\Omega_k$  is the normalised frequency of the corresponding axisymmetric mode, and  $\Omega_k = \sqrt{GM/R^3}$  is the break-up frequency.  $T_m$  contains third-order contributions due to the Coriolis acceleration and distortion—which are dominant according to Karami et al. (2005)—as well as the coupling of the two. From now on, we define the departure from linear splitting as follows:

$$\delta S_m^{\text{cubic}} \equiv S_m^{\text{cubic}} - \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \beta = \frac{\Omega_0}{\sigma_0} \left( \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \right)^2 T_m \quad (2)$$

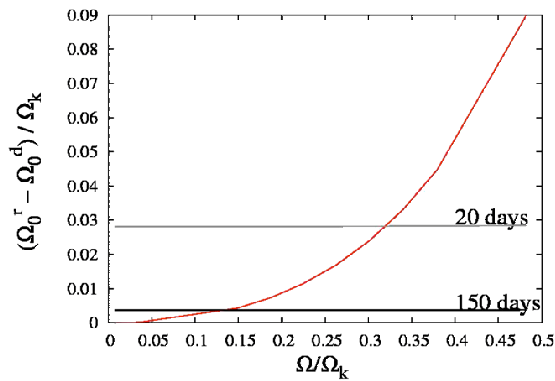
We consider here as a representative model of  $\beta$  Cephei star an  $M_\star = 8.5 M_\odot$ ,  $R_\star = 3.96 R_\odot$  model on the ZAMS. Cesam2k has been used to build the internal structure and oscillations have been computed by the WarM (Warsaw Meudon oscillation) code.

Figure 1 shows that the cubic contribution to the splitting overtakes the observational error for a rotation rate above  $23\% \Omega_k$  (corresponding to a velocity of  $v = R_\star \Omega = 150 \text{ km s}^{-1}$ ) for a long run, and above  $40\% \Omega_k$  ( $260 \text{ km s}^{-1}$ ) for a short run. For  $\beta$  Cephei stars, the mean rotation velocity is around  $110 \text{ km s}^{-1}$  (Stankov and Handler 2005), thus, for the majority of these stars, the cubic contribution does not significantly modify the splitting and one can use the linear splitting.

However, for faster rotators, we may wonder what impact neglecting third-order contributions has on the determination of a rotation rate from the generalised splitting.

### 3.2 Impact on the determination of a rotation rate

We consider that the splitting we measure from a real  $\beta$  Cephei star is contaminated by third-order effects. Then one has



**Fig. 2** Error on the determination of a rotation rate assuming linear splitting—i.e. neglecting third-order effects—as a function of the rotational velocity. The horizontal lines represent observational errors for CoRoT long and short runs. All quantities are scaled by  $\Omega_k$

$$S_m^{\text{obs}} = \frac{\Omega_0^r}{\Omega_k} \beta + \delta S_m^{\text{cubic}} \tag{3}$$

where  $\Omega_0^r$  is the assumed uniform rotation rate of the star, and  $\delta S_m^{\text{cubic}}$  is given by (2). If the seismic analysis disregards cubic-order effects, then the rotation rate is extracted from the linear splitting:

$\Omega_0^d = (S_m^{\text{obs}} / \beta_0) \Omega_k$  where  $\beta_0$  stands for the Ledoux constant calculated neglecting third-order effects. Then  $\Omega_0^d$  departs from the true rotation rate  $\Omega_0^r$  by

$$\frac{\Omega_0^r - \Omega_0^d}{\Omega_k} = \frac{\Omega_0^r}{\Omega_k} \left( 1 - \frac{\beta}{\beta_0} \right) + \frac{1}{\beta_0} \delta S_m^{\text{cubic}} \tag{4}$$

Figure 2 shows that for a long run, the resulting error on the determination of  $\Omega_0$  is larger than the adopted observational error for rotation rates above 15%  $\Omega_k$ . For our stellar model this corresponds to 100 km s<sup>-1</sup>. For a short run, an error of around 10% on determining the rotation rate becomes comparable to the observational error above 32%  $\Omega_k$  (210 km s<sup>-1</sup>).

#### 4 Origin of the departure from linear splitting

Massive stars on the main sequence are fast rotators with a radiative envelope and shallow convection zones. An open issue is whether latitudinal differential rotation can exist in the envelope and if it can be measured. As mentioned before, cubic order and latitudinal differential rotation both induce a departure from the linear splitting. However, the effect of a latitudinal shear on a spectrum must not be mistaken with cubic-order effects. Cubic-order and latitudinal shear corrections are expected to show different behaviours when the rotation rate increases since the latitudinal differential rotation effect is proportional to the gradient of  $\Omega$ , whereas cubic-order effects are proportional to  $\Omega^3$ .

We then are led to investigate which of the two, cubic-order or the latitudinal gradient effect, is the most relevant to be taken into account, and in which rotation velocity range.

#### 4.1 Effect of latitudinal shear on the splitting

We consider the same model as in Sect. 3.1. To compute the frequency in the case of a latitudinal differential rotation for the Sun, Dziembowski and Goode (1989) proposed a development of the rotation rate up the 4<sup>th</sup> power in  $\cos\theta$ :  $\Omega(\theta) = \Omega_0 + \Omega_1 \cos^2\theta + \Omega_2 \cos^4\theta$ , where  $\theta$  is the colatitude. They derived a rotational shear of  $\Delta\Omega = (\Omega_1 + \Omega_2) / \Omega_0 \simeq 28\%$  ( $\Delta\Omega = \Omega_1 / \Omega_0 \simeq 13\%$  if we restrict the development to the 2<sup>nd</sup> power of  $\cos\theta$ ). Here, we assume a simple rotation law:  $\Omega(\theta) = \Omega_0 - \Omega_1 \cos^2\theta$  with  $\Omega_1 = \Delta\Omega$ . Since  $\Delta\Omega$  stands for  $\Omega_{\text{equator}} - \Omega_{\text{pole}}$ , it is positive when the equator rotates faster than the poles. For these main sequence massive stars, we consider values of  $\Delta\Omega / \Omega_0$  ranging from 10% to 20%. The effect of latitudinal differential rotation on frequencies have been derived by Gough and Thompson (1990) and DG92 (for more details we refer to Goupil 2010). One obtains

$$S_m^{\text{latitude}} = \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \beta_0 \left( 1 - \frac{1}{5} \left( \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right) \right) \tag{5}$$

where  $\beta_0$  is  $\beta$  obtained without taking into account third-order effects.

#### 4.2 Latitudinal dependence versus cubic-order effects

The departure from linear splitting due to latitudinal differential rotation for  $\ell = 1$  is

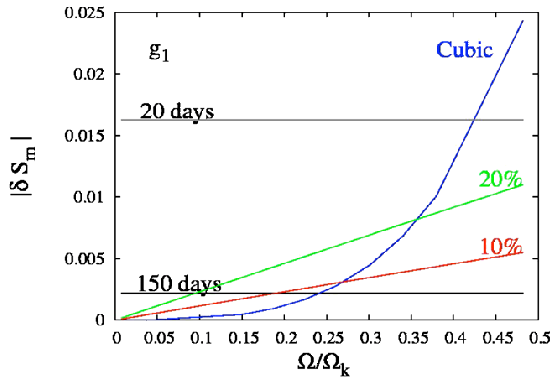
$$\delta S_m^{\text{lat}} = S_m^{\text{lat}} - \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \beta_0 = -\frac{1}{5} \frac{\Omega_0}{\Omega_k} \beta_0 \left( \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \right) \tag{6}$$

Figure 3 compares the effects of latitudinal differential rotation and cubic-order effects. The first one is found to be dominant until 35%  $\Omega_k$  (for this stellar model: 250 km s<sup>-1</sup>). We recall that Stankov and Handler (2005) found a mean rotation velocity for  $\beta$  Cephei stars of 110 km s<sup>-1</sup>. Then for the majority of  $\beta$  Cephei stars, this effect should overtake cubic-order effects.

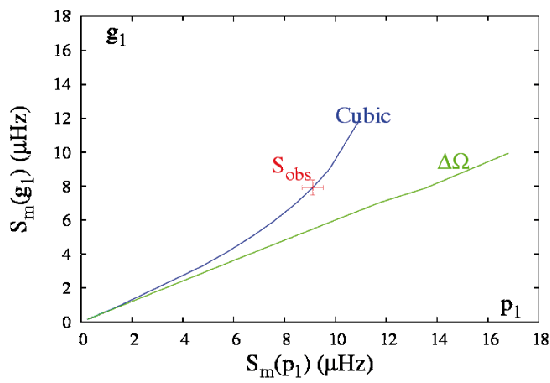
#### 4.3 How do we disentangle the two effects?

The frequency spectrum of a rapidly rotating star is expected to present splittings which show departure from a linear splitting. How can we know that this is due to cubic-order effects or to latitudinal differential rotation?

Let  $S_m^{\text{obs}}$  be the observed splittings for a fast rotator. Let the departure from linear splitting be due to cubic-order effects; then  $S_m^{\text{obs}} = S_m^{\text{cubic}}(\Omega_0^r)$  according to (3). If one misinterprets  $S_m^{\text{obs}}$  as due to a latitudinal shear,  $S_m^{\text{obs}}$  is assumed to



**Fig. 3** Departure from a linear splitting versus the rotational velocity for a  $g_1$  mode due to cubic-order effects (blue), to a 10% latitudinal shear (red) and to one of 20% (green). All quantities are scaled by  $\Omega_k$ . Note that the latitudinal contributions to the splitting are negative (6)



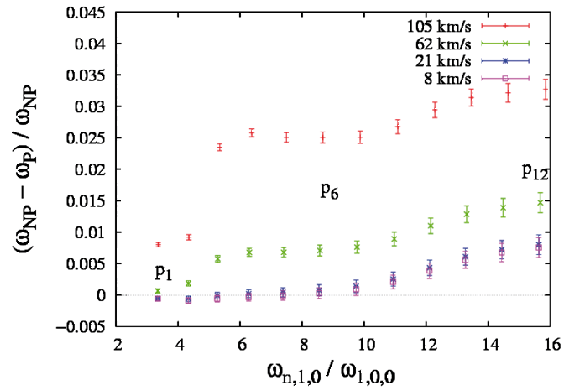
**Fig. 4**  $S_m(g_1)$  versus  $S_m(p_1)$  due to cubic-order effects in blue and to a latitudinal shear in green for an increasing rotation rate (from left to right)

obey (5). Note that for g modes,  $\beta_0$  is roughly equal to 1/2, and for p modes  $\beta_0$  approaches 1.

Accordingly, the ratio between  $S_m^{\text{lat}}(p_1)$  and  $S_m^{\text{lat}}(g_1)$  does not depend on  $\Delta\Omega$  and is approximately equal to 2. In Fig. 4  $S_m(g_1)$  versus  $S_m(p_1)$  is plotted for the two different assumptions (latitudinal shear or cubic-order effects) for different rotation rates ( $\Omega \leq 35\% \Omega_k$ ). On the same plot we placed the two observed splittings of  $g_1$  and  $p_1$ . Then as the observed point is not located on the straight line drawn by  $S_m^{\text{lat}}(p_1) = 2S_m^{\text{lat}}(g_1)$ , the departure is not due to a shear in latitude, but to cubic-order effects.

### 5 Constraining the distortion with axisymmetric modes and splitting asymmetry

The main effect on oscillation frequencies is due to the non-spherical part of the centrifugal distortion, and it is of second



**Fig. 5** Relative error induced on axisymmetric p mode frequencies by using a perturbative method compared with a non-perturbative one, with respect to the frequency which is scaled by  $\omega_{1,1,0}$

order in terms of the rotation rate. To study this contribution, we neglect cubic-order effects and use a second-order perturbation formalism (DG 92). Neglecting near degeneracy, the oscillation frequency of a given mode can be written as in Goupil (2009):

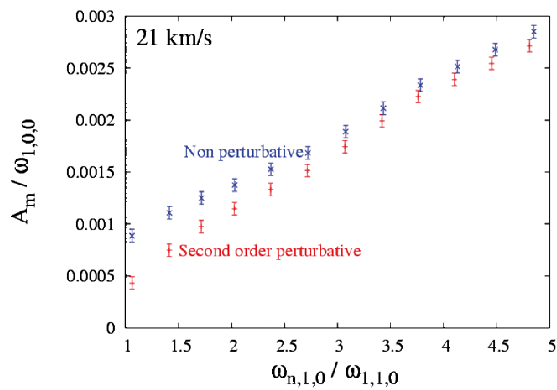
$$\omega_{n,\ell,m} = \omega_0 + m\Omega\beta + \frac{\Omega^2}{\omega_0}(D_0 + m^2D_1) \quad (7)$$

where the second term on the right hand side is the asymmetry due to centrifugal distortion which dominates for high radial order modes. The issue we want to address here is if perturbative techniques are accurate enough to constrain efficiently distortion by seismic tools such as axisymmetric mode frequencies or splitting asymmetries. To do so we compare these two quantities using two different approaches: a second-order perturbative method, and the direct integration of a 2D eigenvalue system. The non-perturbative computations have been carried out following Reese et al. (2006). All the computations are made for an  $M_\star = 8.5 M_\odot$ ,  $R_\star = 3.96 R_\odot$ , model of star, 20 Myrs old.

#### 5.1 Axisymmetric modes frequencies

According to (7), axisymmetric p mode frequencies are given by  $\omega_{n,\ell,0} = \omega_0 + (\Omega^2/\Omega_k\omega_0)D_0$ . Knowing that  $D_0$  behaves like  $(\omega_0/\Omega_k)^2$ , the second term of the right hand side behaves like  $(\Omega/\Omega_k)^2\omega_0/\Omega_k$ .

Figure 5 plots the differences between the two computations of axisymmetric p mode frequencies for different rotation rates. Relative error bars are taken from Jerzykiewicz et al. (2005) and Suárez et al. (2009) for  $\nu$ Eri, and multiplied by ten (0.01%). It shows that as soon as we consider rotation rate higher than  $\Omega_{Th} = 3.3\% \Omega_k$ , 20 km s<sup>-1</sup>, the discrepancies between the two approaches are no longer negligible compared to observational errors (0.01%). In Reese



**Fig. 6** Splitting asymmetry for p modes, scaled by  $\omega_{1,1,0}$ , as based on the perturbative method (in red), and on the non-perturbative methods (in green) for  $21 \text{ km s}^{-1}$

(2006), oscillation frequencies have been computed for an  $N = 3$ ,  $1.9 M_{\odot}$  polytropic model, using a non-perturbative method, and compared to a fit of these frequencies using up to fifth-order polynomials in  $\Omega$ . He found that for second- and third-order polynomials, the differences between the frequencies computed with the two different methods are not negligible compared to the CoRoT short run error bar above  $\Omega_{Th} = 10\% \Omega_k$ , which here represents  $71 \text{ km s}^{-1}$ . This validity threshold is lower when one calculates the polynomials coefficients using a perturbative method rather fitting these coefficients to the non-perturbative frequencies. This is no surprise, as fitting frequencies computed with a non-perturbative method captures several higher-order effects which are not included in a stricto sensu perturbative approach.

### 5.2 Asymmetry

One of the effects of rotation on oscillation frequencies is that the different components of a multiplet are no longer equally spaced. As done in DG 92, Suárez et al. (2009) and references therein, it is then convenient to define  $A_m$  the splitting asymmetry as

$$A_m = \omega_0 - \frac{1}{2}(\omega_m + \omega_{-m}) = \frac{\Omega^2}{\Omega_k \omega_0} D_1 \quad \text{for } \ell = 1 \quad (8)$$

Knowing that  $D_1$  behaves like  $(\omega_0/\Omega_k)^2$ ,  $A_m$  behaves like  $(\Omega/\Omega_k)^2 \omega_0/\Omega_k$ , which means that it linearly increases with  $\omega_{n,\ell,0}$ . This is illustrated in Fig. 6 which presents the asymmetry computations as a function of mode frequency for the two different approaches. The radial order goes from  $n = 1$  to  $n = 12$ . Once again, the error bars have been taken from

Jerzykiewicz et al. (2005), and multiplied by ten (0.01%). In Fig. 6, we notice that for low rotation rates ( $21 \text{ km s}^{-1}$ ), the behavior is quite similar but the discrepancies between the two approaches are still above the observational error bars of 0.01%.

## 6 Summary

We have studied the cubic-order effects of rotation for an  $8.5 M_{\odot}$  ZAMS stellar model of star. We found that for the majority of  $\beta$ Ceph stars, the cubic contribution does not have a significant impact on the splittings. Moreover, at high rotation velocities, it is in competition with the effect of latitudinal differential rotation. But if we dispose of two observed splittings, one for a g mode, and one for a p mode, then we can discriminate between the two hypotheses.

Furthermore, we studied axisymmetric mode frequencies and splitting asymmetries for an  $8.5 M_{\odot}$  stellar model, 20 Myrs old. We find that if we accept a relative error of 1%, then we can use the perturbative approach up to a rotation velocity of around  $10\% \Omega_k$  which here corresponds to  $60 \text{ km s}^{-1}$ .

**Acknowledgements** This work was supported by the Centre National d’Etudes Spatiales (CNES).

## References

Chandrasekhar, S.: Mon. Not. R. Astron. Soc. **93**, 390 (1933)  
 Chandrasekhar, S., Lebovitz, N.R.: Astrophys. J. **136**, 1082 (1962)  
 Dziembowski, W.A., Goode, P.R.: Astrophys. J. **540**, 347 (1989)  
 Dziembowski, W.A., Goode, P.R.: Astrophys. J. **670**, 394 (1992)  
 Gough, D.O., Thompson, M.J.: Mon. Not. R. Astron. Soc. **25**, 242 (1990)  
 Goupil, M.J.: Lecture Notes in Physics, vol. 45, p. 765. Springer, Berlin (2009)  
 Goupil, M.J.: Lecture Notes in Physics. Springer, Berlin (2010, in press)  
 Jerzykiewicz, M., Handler, G., Shobbrook, R.R., Pigulski, A., Medupe, R., Mokgwetsi, T., Tlhagwane, P., Rodríguez, E.: Mon. Not. R. Astron. Soc. **619**, 360 (2005)  
 Karami, K.: Chin. J. Astron. Astrophys. **8**, 285 (2008)  
 Karami, K., Christensen-Dalsgaard, J., Pijpers, F.P., Goupil, M.J., Dziembowski, W.A.: arXiv:astro-ph/0502194 (2005)  
 Reese, D.: Ph.D. Thesis (2006)  
 Reese, D., Lignières, F., Rieutord, M.: Astron. Astrophys. **621**, 455 (2006)  
 Soufi, F., Goupil, M.J., Dziembowski, W.A.: Astron. Astrophys. **911**, 334 (1998)  
 Stankov, A., Handler, G.: VizieR Online Data Catalog **215**, 80193 (2005)  
 Suárez, J.C., Moya, A., Amado, P.J., Martín-Ruiz, S., Rodríguez-López, C., Garrido, R.: Astrophys. J. **690**, 1401 (2009)



## **C.2 Domain of validity of a 1D second order perturbative approach for the effects of rotation on stellar oscillations**

*Comm. in Asteroseismology*  
 Vol. 158, 2009, 38<sup>th</sup> LIAC/HELAS-ESTA/BAG, 2008  
 A. Noels, C. Aerts, J. Montalbán, A. Miglio and M. Briquet., eds.

## Domain of validity of a 1D second order perturbative approach for the effects of rotation on stellar oscillations

R-M. Ouazzani<sup>1</sup>, M-J. Goupil<sup>1</sup>, M-A. Dupret<sup>1</sup>, and D. Reese<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Observatoire de Paris, LESIA, CNRS UMR 8109, 92195 Meudon, France

<sup>2</sup>Department of Applied Mathematics, University Of Sheffield, Sheffield S3 7RH, United Kingdom

### Abstract

At rotational velocities such as that of upper Main Sequence stars – between 50 to 200 km/s – the effects of rotation on oscillation frequencies must be included. Considering the accuracy reached by available ground-based and space observations, the aim of this study is to determine the limits – in terms of rotational velocity – of a perturbative approach to model the effects of rotation on oscillation frequencies. We thus compare the oscillation frequencies computed by 1D second order perturbative methods to the ones obtained in Reese et al. (2006) – direct integration of a 2D eigenvalue system. To do so, we use polytropic models ( $N=3$ ) in uniform rotation, and we discuss the results for a  $\beta$  Cephei star ( $8.2 M_{\odot}$ ,  $5.04 R_{\odot}$ ).

### Equilibrium state of a 1D uniformly rotating polytrope

The 1D polytropic model is computed by solving the Lane-Emden equation in which the spherical part of the centrifugal acceleration is included in an effective gravity:

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left( x^2 \frac{dy}{dx} \right) + y^N = \Omega'^2 \quad (1)$$

Where  $y$  is defined by  $\tilde{\rho} = \rho_c y^N$  and  $\tilde{p} = \rho_c y^{N+1}$ ,  $x$  is the radius normalised to the critical radius of the polytrope, and  $\Omega'^2 = \Omega^2 / 2\pi G \rho_c$ ,  $\Omega$  the rotational angular velocity. The resolution of the Lane-Emden equation yields the spherically symmetric equilibrium quantities –  $\tilde{\rho}(r)$ ,  $\tilde{p}(r)$ , and  $\tilde{\Phi}(r)$ . Their second order non-spherically symmetric parts are computed as perturbations of the spherical case to the second order, such that for a quantity  $f$ :  $f(r, \theta) = \tilde{f}(r) + \tilde{f}_{22}(r) P_2(\cos\theta)$ ,  $P_2$  being the second order Legendre polynomial. In the nonperturbative case, structure variables are expanded on around 50 spherical harmonics using a code developed by M. Rieutord.

### Computation of oscillation frequencies

In Reese et al. (2006) the nonperturbative oscillation frequencies are calculated by direct integration of a 2D eigenvalue system. In the perturbative approach, we apply a perturbation about an axisymmetric steady configuration. After ignoring the resonant interaction due to near degeneracy, we derive the perturbed oscillation frequency by obtaining an additional correction of the order of  $O(\Omega^2)$  to the frequency without rotation.

Implicit assumptions made in the perturbative method are no longer valid when two or three modes are close to each other in terms of frequencies. Those modes are then coupled according to selection rules, and the frequencies are then modified (Dziembowski & Goode 1992, Soufi et al. 1998, Suarez et al. 2006, and references therein).

Results for a  $\beta$  Cephei star ( $8.2 M_{\odot}$ ,  $5.04 R_{\odot}$ )

We treated the 2D nonperturbative frequencies like observation results, and calculated the discrepancies due to the perturbative approach. We present in Figure 1 the discrepancies on the splittings between the two models, where the error is defined as:

$$\delta = \frac{1}{2\ell} [(\omega_{n,\ell,-m} - \omega_{n,\ell,m})_{Npert} - (\omega_{n,\ell,-m} - \omega_{n,\ell,m})_{Pert}] \quad (2)$$

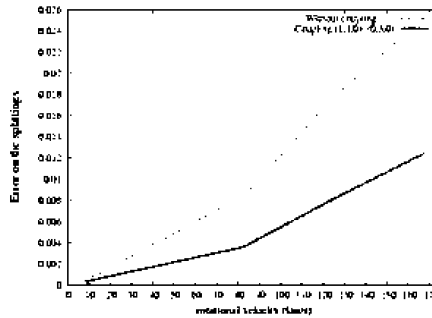


Figure 1: Comparison of the splitting computed by the perturbative and nonperturbative approach for the pressure mode  $P_1$ ,  $\ell = 1$ ,  $m = \pm 1$ .

Coupling due to near degeneracy clearly improves the accuracy of the perturbative method: if one accepts an observational relative error of  $1.310^{-3}$ , which corresponds to 20 days of observation, the discrepancies are above this limit around  $15 \text{ km s}^{-1}$ . When coupling is included, this limit is pushed up to about  $20 \text{ km s}^{-1}$ . Considering the splittings, the discrepancy is much lower, and is under the error bars until around  $40 \text{ km/s}$ . Moreover, we studied the impact of these discrepancies on, for example, the measurement of a rotational angular velocity. We found that if we accept an accuracy of 1%, on the splittings, the error made by the perturbative approach on the rotational velocity is around 0.5%.

**Acknowledgments.** I would especially like to thank Juan-Carlos Suarez for discussions.

References

Monaghan, J., & Roxburgh, I.W., 1964, MNRAS, 131,13  
 Dziembowski, W.A., & Goode, P. 1992, ApJ, 394, 670  
 Reese, D., Lignières, F., & Rieutord, M. 2006, A&A, 455, 621  
 Soufi, F., Goupil, M.J., & Dziembowski, W.A. 1998, A&A, 334, 911  
 Suarez, J.C., Goupil, M.J., & Morel, P. 2006, A&A, 449,673

### **C.3 2D non-perturbative modeling of oscillations in rapidly rotating stars**



## 2D non-perturbative modeling of oscillations in rapidly rotating stars

R.-M. Ouazzani<sup>1,\*</sup>, M.-A. Dupret<sup>2</sup>, M.J. Goupil<sup>1</sup>, D.R. Reese<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LESIA, UMR8109, Université Pierre et Marie Curie, Université Denis Diderot, Observatoire de Paris, 92195 Meudon Cedex, France

<sup>2</sup> Institut d'Astrophysique et de Géophysique, Fac. Sc., Université de Liège

**Key words** stars: oscillations (including pulsations), rotation, variables: Cepheids, delta Scuti stars

We present and discuss results of a recently developed two dimensional non-perturbative method to compute accurate adiabatic oscillation modes of rapidly rotating stars. The 2D calculations fully take into account the centrifugal distortion of the star while the non-perturbative method includes the full influence of the Coriolis acceleration. These characteristics allows us to compute oscillation modes of rapid rotators - from high order p-modes in  $\delta$ Scuti stars, to low order p- and g-modes in  $\beta$  Cephei or Be stars.

© 2010 WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim

### 1 Introduction

It is a well known fact that rotation plays a key role in stellar evolution. From early stages of stellar formation to the final steps of evolution, rotation generates various dynamical processes such as meridional circulation and rotationally induced turbulence which drive chemical element mixing and transport of angular momentum (for example Maeder 2009). These processes are not fully understood and are still poorly modeled, but asteroseismology can provide important constraints provided the effects of rotation on stellar pulsation are better understood. In rotating stars, the centrifugal acceleration breaks the spherical symmetry – causing distortion – and the resonant cavity of the modes is modified. The Coriolis acceleration enters the equation of motion and affects the motion of the waves and the frequencies of the normal modes. For slow rotators, the effects of rotation on oscillation frequencies have been extensively investigated with perturbative methods (see Dziembowski & Goode 1992, Gough & Thompson 1990, Saio 1981, Soufi et al. 1998, and references therein). In this approach, the angular rotation velocity  $\Omega$  is considered as small compared to the oscillation frequencies, thereby allowing their expansion as a power series in  $\Omega$ . Perturbation methods cease to be valid whenever the rotation frequency is no longer negligible in front of the break-up frequency ( $\sqrt{GM/R^3}$ ) or the oscillation frequency. Then for moderate to rapid rotators a non-perturbative treatment is necessary. In the non-perturbative approach, the pulsation equations are projected onto the spherical harmonic basis. The effects of the Coriolis acceleration and the stellar distortion cause a coupling between the different spectral components, and the eigenvalue problem must be solved directly by a two-dimensional method. Such an approach has been applied to

g and r-modes for uniformly rotating stars under the Cowling approximation (Lee & Saio 1987), for acoustic modes in uniformly rotating polytropes (Lignières et al. 2006, Reese et al. 2006), in uniformly rotating ZAMS models (Lovekin & Deupree 2008), and in differentially rotating ZAMS models with a conservative rotation law (Lovekin et al. 2009, Reese et al. 2009). We present here a 2D non-perturbative code which allows us to calculate adiabatic oscillations for the whole frequency range from high order g-modes to high order p-modes. Particular care has been taken so as to be able to compute pulsations for all types of stellar models. In the oscillation code, no hypotheses have been made on the fluid microphysics – non polytropic, non barotropic – the rotation profile is free – not necessarily conservative – it can be differential in radius and in latitude. The paper is organised as follows: in the next section, the formalism is explained. In section 3, we describe the numerical method used to solve the eigenfunction problem. A conclusion and perspectives follow.

### 2 The formalism

For the computation of pulsations, the stellar structure is reduced to its dynamical behavior. We compute oscillation modes as the adiabatic response of the structure to small perturbations – i.e. of the density, pressure, gravitational potential and velocity field – using the eulerian formalism. The velocity field of the equilibrium structure is only due to solenoidal rotation:

$$\mathbf{v}_0 = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} \quad (1)$$

$$\text{where } \boldsymbol{\Omega} = \Omega(r, \theta) \cos(\theta) \mathbf{e}_r - \Omega(r, \theta) \sin(\theta) \mathbf{e}_\theta \quad (2)$$

$\mathbf{e}_r$  and  $\mathbf{e}_\theta$  being the classical spherical basis vectors. Then the equations describing the oscillations of a self rotating

\* Corresponding author: e-mail: rhita-maria.ouazzani@obspm.fr

fluid are the perturbed equations of motion:

$$\rho_0 \left( \frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}' + (\mathbf{v}' \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 \right) + \rho' (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\nabla p' - \rho' \nabla \Phi_0 - \rho_0 \nabla \Phi' \quad (3)$$

The linearised continuity equation:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \rho' + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}') = 0 \quad (4)$$

The Poisson equation for the perturbed gravitational potential:

$$\nabla^2 \Phi' = 4\pi G \rho' \quad (5)$$

and the perturbed adiabatic relation:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \Omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left( \frac{\rho'}{\rho_0} - \frac{p'}{\Gamma_1 p_0} \right) + \mathbf{v}' \cdot \left( \nabla \ln \rho_0 - \frac{1}{\Gamma_1} \nabla \ln p_0 \right) = 0 \quad (6)$$

By adding an auxiliary equation for the derivative of the gravitational potential  $d\Phi' = \partial\Phi'/\partial\zeta$ , the problem is reduced to a set of first order differential and algebraic equations. Together with specific boundary conditions, we get an eigenvalue problem, the eigenvalues of which are the oscillation frequencies, and the eigenfunctions of which are the eulerian perturbations of density, pressure, gravitational potential, its radial derivative, and the three spatial components of the perturbed velocity field.

## 2.1 Spheroidal geometry

Due to the distorted shape caused by rotation, we chose to use a spheroidal coordinate system. This system (found by Bonazzola et al. 1998) is convenient for setting up proper boundary conditions. As done in Reese et al. (2006),  $\zeta$  is defined as the radial coordinate, and is related to the spherical  $r$  coordinate by:

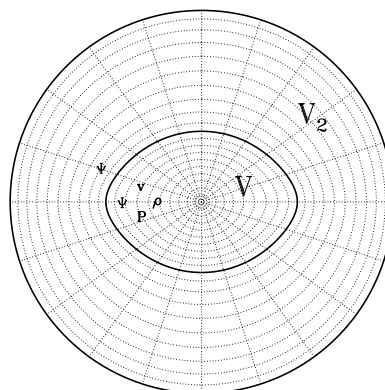
- In the stellar interior  $\zeta \in [0; 1]$ , domain V:

$$r(\zeta, \theta) = (1 - \epsilon)\zeta + \frac{5\zeta^3 - 3\zeta^5}{2} (R_s(\theta) - 1 + \epsilon) \quad (7)$$

- In the outer domain  $V_2$ ,  $\zeta \in [1; 2]$ :

$$r(\zeta, \theta) = 2\epsilon + (1 - \epsilon)\zeta + (2\zeta^3 - 9\zeta^2 + 12\zeta - 4) (R_s(\theta) - 1 + \epsilon) \quad (8)$$

where  $\theta$  is the colatitude,  $\epsilon = 1 - R_{pol}/R_{eq}$  the flatness and  $R_s(\theta)$  the radius at the surface. With this mapping, the surface of the star is given by  $\zeta = 1$ , which is very convenient for avoiding discontinuities at the stellar surface. At the center, surfaces of constant  $\zeta$  tend to be spherical, so that central regularity conditions are simplified. In the outer region, iso- $\zeta$  surfaces regain a spherical shape at  $\zeta = 2$ .



**Fig.1** Coordinate system used in computing the pulsation modes. The domain V corresponds to the star itself.  $V_2$  encompasses the star, its outer limit being a sphere of radius  $r = 2$  (twice the equatorial radius).

## 2.2 Boundary conditions

In order to complete the eigenvalue problem defined by the four equations Eq.(3), Eq.(4), Eq.(5), Eq.(6), it is necessary to specify a number of boundary conditions.

At the center of the star, where the mapping is almost spherical, the requirement is that the velocity field components are regular. This condition is easily expressed for functions expanded over the spherical harmonic basis. Concerning the scalar quantities, we ensure that the radial component associated with the spherical harmonic  $Y_l^m$  behaves like  $r^l$  (see Sect.3.2).

At the surface of the star, the boundary condition is satisfied by means of the stressless condition  $\delta p' = 0$ , which is easily expressed on the iso- $\zeta$  surface  $\zeta = 1$ .

It is also necessary to impose a condition on the gravitational potential so as to ensure that it goes to zero at infinity. With the mapping described in the former section, we can safely impose the classical condition on the different harmonic components of  $\Phi'$  on the outer border of  $V_2$ , at  $\zeta = 2$ .

## 2.3 Change of variable

In order to have solutions with a good behavior at the surface of the star, we choose to use  $\pi' = p'/\rho_0$  rather than the pressure perturbation directly.

## 3 Numerical method

In order to isolate the radial, spheroidal and toroidal components of the fluid's motion, we take the radial component of the equation of motion (Eq.3), its divergence and the radial part of its curl. We then get a set of 7 equations and 7 unknowns which are: the perturbed velocity vector, ( $\pi'$ ), the density perturbation ( $\rho'$ ), the perturbation of the gravitational potential ( $\Phi'$ ) and its derivative ( $d\Phi'/d\zeta$ ), along with the related boundary conditions.

### 3.1 Projection onto the spherical harmonics

To solve this eigenvalue problem, we develop all the variables onto a serie of spherical harmonics, following Rieutord (1987):

For the velocity field perturbation:

$$v'_\zeta(\zeta, \theta, \phi) = i \sum_{\ell_2 \geq |m|}^{+\infty} u_{\ell_2}(\zeta) Y_{\ell_2}^m(\theta, \phi) \quad (9)$$

$$v'_\theta(\zeta, \theta, \phi) = i \sum_{\ell_2 \geq |m|}^{+\infty} \left( v'_{\ell_2}(\zeta) \frac{\partial Y_{\ell_2}^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} + w'_{\ell_{2p}}(\zeta) \frac{m}{\sin \theta} Y_{\ell_{2p}}^m(\theta, \phi) \right)$$

$$v'_\phi(\zeta, \theta, \phi) = - \sum_{\ell_2 \geq |m|}^{+\infty} \left( v'_\ell(\zeta) \frac{m}{\sin \theta} Y_{\ell_2}^m(\theta, \phi) + w'_{\ell_{2p}}(\zeta) \frac{\partial Y_{\ell_{2p}}^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right)$$

where  $\ell_{2p} = \ell_2 + (-1)^p$ . For any scalar variable ( $\pi'$ ,  $\rho'$ ,  $\Phi'$ ,  $d\Phi'$ ):

$$f'(\zeta, \theta, \phi) = \sum_{\ell_2 \geq |m|}^{+\infty} f'_{\ell_2}(\zeta) Y_{\ell_2}^m(\theta, \phi) \quad (10)$$

where  $Y_\ell^m$  is the spherical harmonic of degree  $\ell$  and azimuthal order  $m$ , and  $f'_\ell(\zeta)$  the radial functions that are to be determined. We include these spectral developments Eq.(9) and Eq.(10) into the equations system Eq.(3) to Eq.(6). We get a linear partial differential equations system in terms of the variables  $u'_\ell$ ,  $v'_\ell$ ,  $w'_\ell$ ,  $\pi'_\ell$ ,  $d\Phi'_\ell$ ,  $\Phi'_\ell$  and  $\rho'_\ell$  which can formally be written as:

$$\sum_{\ell_2 \geq |m|} E(Y_{\ell_2}^m(\theta, \phi)) = 0 \quad (11)$$

In the general case – where rotation breaks the spherical symmetry – the problem is not separable in  $\zeta$  and  $\theta$ . As a result, a coupled equations system is obtained by projecting Eq.(11) onto the spherical harmonics basis:

$$\forall \ell_1 \geq |m|, \sum_{\ell_2 \geq |m|}^{+\infty} \int \frac{\sin \theta d\theta d\phi}{4\pi} E(Y_{\ell_2}^m) Y_{\ell_1}^{m*} = 0 \quad (12)$$

where  $Y_{\ell_1}^{m*}$  is the complex conjugate of  $Y_{\ell_1}^m$ . Finally, to get a finite and equal number of equations and variables, we truncate the series at the  $2M^{th}$  term. Given that the equilibrium model is symmetrical with respect to the equator, half of the terms are dropped in the projection, and the system only couples terms with the same symmetry, i.e. parity. The selection rules operating here are:

$$\ell = |m| + 2(j - 1) + p, \quad j \in [1 : M] \quad (13)$$

$p = 0$  if  $m$  and  $\ell$  are of the same parity,  
 $p = 1$  otherwise.

We then are able to solve the eigenvalue problem separately for the even and odd eigenfunctions, and for a given azimuthal order.

### 3.2 Radial behavior

In order to ensure a proper regular behavior at the center of the star, and to avoid numerical convergence problems, we scale the radial components of the spectral decomposition by the appropriate powers of  $\zeta$ . If we suppose a priori the regularity of the scalar variables  $f_\ell$  ( $\pi'_\ell$ ,  $\rho'_\ell$  and  $\Phi'_\ell$ ), following Nikiforov and Uvarov (1983), these radial functions satisfy:

$$f_\ell(\zeta) \sim \zeta^\ell \quad \text{when } \zeta \rightarrow 0 \quad (14)$$

For the velocity field, the same treatment gives:

$$u'_\ell \sim \zeta^{\ell-1}, \quad v'_\ell \sim \zeta^{\ell-1} \quad \text{and} \quad w'_\ell \sim \zeta^\ell \quad (15)$$

This leads to the following scaling:

$$\begin{aligned} u'_\ell &= \zeta^\ell \tilde{u}'_\ell & \Phi'_\ell &= \zeta^\ell \tilde{\Phi}'_\ell & \rho'_\ell &= \zeta^\ell \tilde{\rho}'_\ell & d\Phi'_\ell &= \zeta^{\ell-1} d\tilde{\Phi}'_\ell \\ u'_\ell &= \zeta^{\ell-1} \tilde{u}'_\ell & v'_\ell &= \zeta^{\ell-1} \tilde{v}'_\ell & w'_\ell &= \zeta^\ell \tilde{w}'_\ell \end{aligned} \quad (16)$$

### 3.3 Final eigenvalue system

In the set of equations, 4 are differential equations for the variables  $u'$ ,  $\pi'$ ,  $\Phi'$  and  $d\Phi'$ , with respect to the radial coordinate  $\zeta$ , and 3 are not:

$$\frac{dy_1}{d\zeta} = (A_{11} + \delta\sigma A_{12})y_1 + (A_{21} + \delta\sigma A_{22})y_2 \quad (17)$$

$$0 = (B_{11} + \delta\sigma B_{12})y_1 + (B_{21} + \delta\sigma B_{22})y_2 \quad (18)$$

where  $\sigma = \sigma_0 + \delta\sigma$ ,  $y_1$  and  $y_2$  are the column vectors – with 4 M and 3 M components respectively – containing the unknown coefficients of the spectral decomposition:

$$y_1 = (\pi'_{\ell_1}, \dots, \pi'_{\ell_M}, d\Phi'_{\ell_1}, \dots, d\Phi'_{\ell_M}, \Phi'_{\ell_1}, \dots, \Phi'_{\ell_M}, \tilde{u}'_{\ell_1}, \dots, \tilde{u}'_{\ell_M})$$

$$y_2 = (\tilde{v}'_{\ell_1}, \dots, \tilde{v}'_{\ell_M}, \tilde{w}'_{\ell_1}, \dots, \tilde{w}'_{\ell_M}, \tilde{\rho}'_{\ell_1}, \dots, \tilde{\rho}'_{\ell_M})$$

where

$$\ell_1 = |m| + p \quad \text{and} \quad \ell_M = |m| + 2(M - 1) + p \quad (19)$$

Using (18), a matrix inversion allows to express  $y_2$  as a linear function of  $y_1$ . The system is then reduced to a differential system of 4 independent variables:

$$\Rightarrow \frac{dy_1}{d\zeta} \simeq (A + \delta\sigma A_{\delta\sigma})y_1 \quad (20)$$

### 3.4 Radial resolution: finite differences

Considering two consecutive layers  $i$  and  $i+1$ , such that  $\zeta(i+1) - \zeta(i) = h$ , a Taylor development of any function  $y$  gives (Scufflaire et al. 2008):

$$\begin{aligned} y(i) + \frac{h}{2} \frac{dy}{d\zeta}(i) + \frac{h^2}{12} \frac{d^2y}{d\zeta^2}(i) &= \\ y(i+1) - \frac{h}{2} \frac{dy}{d\zeta}(i+1) + \frac{h^2}{12} \frac{d^2y}{d\zeta^2}(i+1) + o(h^5) \end{aligned} \quad (21)$$

We can develop a 5<sup>th</sup> order finite differences scheme that only involves two consecutive layers ( $\zeta_i$  and  $\zeta_{i+1}$ ).

We then obtain a global eigenvalue system:

$$AA Y = \delta\sigma AA_{\delta\sigma} Y \quad (22)$$



Where  $AA$  and  $AA_{\delta\sigma}$  are block diagonal matrices. The block  $i$  couples the layers  $i$  and  $i+1$  and:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1(1) \\ \vdots \\ y_1(N) \end{pmatrix} \quad (\text{layers } 1, \dots, N) \quad (23)$$

### 3.5 Inverse iteration algorithm

In order to solve Eq.(22) we use a generalization of the inverse iteration method (see Dupret 2001). Starting from a first estimate of the eigenvector  $Y_0$  and eigenfrequency correction  $\delta\sigma_0$  (we take  $\delta\sigma_0 = 0$ , i.e.  $\sigma = \sigma_0$ ), we compute the next step in the iteration using the formula:

$$Y_{k+1} = AA^{-1} AA_{\delta\sigma} Y_k \quad (24)$$

provided  $AA^{-1} AA_{\delta\sigma}$  is diagonalizable. Solving the eigenvalue problem is then equivalent to solving the linear system:

$$AA Y_{k+1} = AA_{\delta\sigma} Y_k \quad (25)$$

To do so, we perform a LU factorization of the matrix  $AA = LU$ , where  $L$  is a lower triangular matrix and  $U$  an upper triangular one. Therefore, the LU factorization needs to be made only once, and the only thing to be done afterwards is to solve at each step of the inverse iteration the two triangular systems:

$$\begin{aligned} LX &= AA_{\delta\sigma} Y_k \\ UY_{k+1} &= X \end{aligned} \quad (26)$$

To avoid ill-conditioning problems, we adopt a special kind of pivoting strategy where the pivoting is done alternatively on the columns and on the lines of the matrix. Thanks to the chosen finite difference resolution (Sect. 3.4),  $AA$  and  $AA_{\delta\sigma}$  are block diagonal matrices, therefore,  $L$  and  $U$  are also block diagonal matrices, where the blocks are triangular. The non-zero elements are all located inside the blocks and, during the algorithm, the permutations between lines and the permutations between columns will keep the non-zero elements in the same block. This allows us to keep the narrow band shape for the system, and reduces the memory needed and the computational time. Once the eigenvector  $Y$  is computed with sufficiently high precision, the eigenvalue can be calculated using a generalization of the Rayleigh ratio:

$$\delta\sigma = \frac{Y^* AA_{\delta\sigma}^* AA Y}{Y^* AA_{\delta\sigma}^* AA_{\delta\sigma} Y} \quad (27)$$

where  $Y^*$  and  $AA_{\delta\sigma}^*$  are the hermitian conjugate of  $Y$  and  $AA_{\delta\sigma}$ . The value of  $\delta\sigma$  given by Eq. (27) minimizes:

$$S^2 = \|(AA - \delta\sigma AA_{\delta\sigma})Y\|^2 \quad (28)$$

The solution is then obtained when a certain iteration criterion is reached, which depends on the precision we want on the oscillation frequency.

## 4 Conclusion and perspectives

We presented here a new code that performs 2D non-perturbative calculations of adiabatic oscillations for all kinds of stellar structures – stratified, differentially rotating. We used a numerical method which efficiently saves computational time and memory, and would make the code available for seismic interpretation. It is now under a series of tests – comparison with perturbative methods for evolved stellar models, and comparison with non-perturbative computations for polytropic models. With this new tools, we aim at modeling oscillations of 2D stratified models of stars. A first step will be to take as the equilibrium model a 1D evolved stellar model where the whole effect of rotation on the microphysics have been taken into account, and use a self-consistent method (used in Roxburgh 2006, for example) in order to compute the distortion due centrifugal acceleration.

*Acknowledgements.* DRR is supported by the CNES (“Centre National d’Etudes Spatiales”) through a postdoctoral fellowship.

## References

- Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., & Marck, J.-A. 1998, Phys. Rev. D, 58, 104020
- Dupret, M. A. 2001, Astron. Astrophys., 366, 166
- Dziembowski, W. A., & Goode, P. R. 1992, ApJ, 394, 670
- Gough, D. O., & Thompson, M. J. 1990, MNRAS, 242, 25
- Lee, U., & Saio, H. 1987, MNRAS, 225, 643
- Lignières, F., Rieutord, M., & Reese, D. 2006, Astron. Astrophys., 455, 677
- Lovekin, C. C., Deupree, R. G., & Clement, M. J. 2009, ApJ, 693, 677
- Lovekin, C. C., & Deupree, R. G. 2008, ApJ, 679, 1499
- Maeder, A. 2009, Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars: , Astronomy and Astrophysics Library. Volume . ISBN 978-3-540-76948-4. Springer Berlin Heidelberg, 2009,
- Ouazzani, R. M., Goupil, M. J., Dupret, M. A., & Reese, D. 2010, Ap&SS, 64
- Ouazzani, R.-M., Goupil, M.-J., Dupret, M.-A., & Reese, D. 2009, Communications in Asteroseismology, 158, 283
- Reese, D., Lignières, F., & Rieutord, M. 2006, Astron. Astrophys., 455, 621
- Reese, D. 2006, Ph.D. Thesis
- Reese, D. R., MacGregor, K. B., Jackson, S., Skumanich, A., & Metcalfe, T. S. 2009, Astron. Astrophys., 506, 189
- Soufi, F., Goupil, M. J., & Dziembowski, W. A. 1998, Astron. Astrophys., 334, 911
- Rieutord, M. 1987, Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics, 39, 163
- Roxburgh, I. W. 2006, Astron. Astrophys., 454, 883
- Saio, H. 1981, ApJ, 244, 299
- Scufflaire, R., Montalbán, J., Théado, S., Bourge, P.-O., Miglio, A., Godart, M., Thoul, A., & Noels, A. 2008, Ap&SS, 316, 149
- Soufi, F., Goupil, M. J., & Dziembowski, W. A. 1998, Astron. Astrophys., 334, 911
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, Nonradial oscillations of stars, Tokyo: University of Tokyo Press, 1989, 2nd ed.,

## C.4 2D Pulsations of an evolved distorted rapidly rotating $2 M_{\odot}$ star











# Bibliographie

- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, *Asteroseismology*, ed. Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W.
- Balachandran, S. C. 2002, *Highlights of Astronomy*, 12, 276
- Ballot, J., Lignières, F., Reese, D. R., & Rieutord, M. 2010, *A&A*, 518, A30+
- Barban, C., Deheuvels, S., Baudin, F., et al. 2009, *A&A*, 506, 51
- Belkacem, K., Samadi, R., Goupil, M., et al. 2009, *Science*, 324, 1540
- Benomar, O., Baudin, F., Campante, T. L., et al. 2009, *A&A*, 507, L13
- Bonazzola, S., Gourgoulhon, E., & Marck, J.-A. 1998, *Phys. Rev. D*, 58, 104020
- Brun, A. S., Turck-Chièze, S., & Zahn, J. P. 1999, *ApJ*, 525, 1032
- Burke, K. D., Reese, D. R., & Thompson, M. J. 2011, *ArXiv e-prints*
- Chandrasekhar, S. & Lebovitz, N. R. 1962, *ApJ*, 136, 1105
- Chlebowski, T. 1978, *Acta Astron.*, 28, 441
- Christensen-Dalsgaard, J. 2003, *Lecture Notes on Stellar Oscillations*, ed. Christensen-Dalsgaard, J.
- Clement, M. J. 1981, *ApJ*, 249, 746
- Clement, M. J. 1984, *ApJ*, 276, 724
- Clement, M. J. 1986, *ApJ*, 301, 185
- Clement, M. J. 1989, *ApJ*, 339, 1022
- Clement, M. J. 1998, *ApJ Supplement*, 116, 57
- Cohen-Tannoudji, C., Dui, B., & Laloe, F. 1973, *Mecanique quantique*, ed. Cohen-Tannoudji, C., Dui, B., & Laloe, F.
- Collier Cameron, A. 2002, *Astronomische Nachrichten*, 323, 336
- Cowling, T. G. 1941, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 101, 367
- Cowling, T. G. & Newing, R. A. 1949, *ApJ*, 109, 149



- Cunha, M. S., Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2007, *A&A Reviews*, 14, 217
- Degroote, P., Briquet, M., Auvergne, M., et al. 2010, *A&A*, 519, A38+
- Deheuvels, S., Bruntt, H., Michel, E., et al. 2010, *A&A*, 515, A87+
- Desmet, M., Briquet, M., Thoul, A., et al. 2009, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 396, 1460
- Deupree, R. G. 1990, *ApJ*, 357, 175
- Deupree, R. G. 1995, *ApJ*, 439, 357
- Dintrans, B. & Rieutord, M. 1999, *Journal of Fluid Mechanics*, 398, 271
- Dintrans, B. & Rieutord, M. 2000, *A&A*, 354, 86
- Donati, J., Skelly, M. B., Bouvier, J., et al. 2010, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 409, 1347
- Dupret, M., Thoul, A., Scuflaire, R., et al. 2004, *A&A*, 415, 251
- Dupret, M. A. 2001, *A&A*, 366, 166
- Dziembowski, W. A. 1971, *Acta Astronomica*, 21, 289
- Dziembowski, W. A. & Goode, P. R. 1992, *ApJ*, 394, 670
- Eddington, A. S. 1926, *The Internal Constitution of the Stars*, ed. Eddington, A. S.
- Espinosa, F., Pérez Hernández, F., & Roca Cortés, T. 2004, in *ESA Special Publication*, Vol. 559, *SOHO 14 Helio- and Asteroseismology : Towards a Golden Future*, ed. D. Danesy, 424–+
- Faulkner, J., Roxburgh, I. W., & Strittmatter, P. A. 1968, *ApJ*, 151, 203
- Gabriel, A. H., Grec, G., Charra, J., et al. 1995, *Sol. Phys.*, 162, 61
- Gies, D. R. & Lambert, D. L. 1992, *ApJ*, 387, 673
- Gough, D. O. & Thompson, M. J. 1990, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 242, 25
- Goupil, M., Dziembowski, W. A., Pamyatnykh, A. A., & Talon, S. 2000, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 210, *Delta Scuti and Related Stars*, ed. M. Breger & M. Montgomery, 267–+
- Goupil, M. J., Lebreton, Y., Marques, J. P., Samadi, R., & Baudin, F. 2011, *ArXiv e-prints*
- Goupil, M. J. & Talon, S. 2002, in *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Vol. 259, *IAU Colloq. 185 : Radial and Nonradial Pulsations as Probes of Stellar Physics*, ed. C. Aerts, T. R. Bedding, & J. Christensen-Dalsgaard, 306–+

- Grevesse, N. & Sauval, A. J. 1998, *Space Sci. Rev.*, 85, 161
- Hansen, C. J., Cox, J. P., & Carroll, B. W. 1978, *ApJ*, 226, 210
- Jackson, S., MacGregor, K. B., & Skumanich, A. 2005, *ApJ Supplement*, 156, 245
- Karami, K., Christensen-Dalsgaard, J., Pijpers, F. P., Goupil, M., & Dziembowski, W. A. 2005, *ArXiv Astrophysics e-prints*
- Kippenhahn, R. & Thomas, H. 1970, in *IAU Colloq. 4 : Stellar Rotation*, 20–+
- Kippenhahn, R. & Weigert, A. 1994, *Stellar Structure and Evolution*, ed. Kippenhahn, R. & Weigert, A.
- Kosovichev, A. G., Schou, J., Scherrer, P. H., et al. 1997, *Sol. Phys.*, 170, 43
- Ledoux, P. 1951, *ApJ*, 114, 373
- Ledoux, P. & Walraven, T. 1958, *Handbuch der Physik*, 51, 353
- Lee, U. & Baraffe, I. 1995, *A&A*, 301, 419
- Lee, U. & Saio, H. 1987, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 224, 513
- Lignières, F. & Georgeot, B. 2009, *A&A*, 500, 1173
- Lignières, F. & Rieutord, M. 2004, in *IAU Symposium, Vol. 215, Stellar Rotation*, ed. A. Maeder & P. Eenens, 414–+
- Lignières, F., Rieutord, M., & Reese, D. 2006a, *A&A*, 455, 607
- Lignières, F., Vidal, S., Georgeot, B., & Reese, D. 2006b, in *SF2A-2006 : Semaine de l’Astrophysique Francaise*, ed. D. Barret, F. Casoli, G. Lagache, A. Lecavelier, & L. Pagani , 479–+
- Lovekin, C. C. & Deupree, R. G. 2008, *ApJ*, 679, 1499
- Lovekin, C. C., Deupree, R. G., & Clement, M. J. 2009, *ApJ*, 693, 677
- Maeder, A. 1999, *A&A*, 347, 185
- Maeder, A. 2009, *Physics, Formation and Evolution of Rotating Stars*, ed. Maeder, A.
- Maeder, A. & Zahn, J. 1998, *A&A*, 334, 1000
- Mathis, S. 2009, *A&A*, 506, 811
- Mathis, S. & Zahn, J. 2004, *A&A*, 425, 229
- Mathis, S. & Zahn, J. 2005, *A&A*, 440, 653
- Meynet, G. & Maeder, A. 1997, *A&A*, 321, 465
- Meynet, G. & Maeder, A. 2000, *A&A*, 361, 101

- Morel, P. & Lebreton, Y. 2008, *Astrophysics and Space Science*, 316, 61
- Mosser, B., Baudin, F., Lanza, A. F., et al. 2009, *A&A*, 506, 245
- Neiner, C., Gutiérrez-Soto, J., Baudin, F., et al. 2009, *A&A*, 506, 143
- Ostriker, J. P. & Mark, J. 1968, *ApJ*, 151, 1075
- Ouazzani, R., Goupil, M., Dupret, M., & Reese, D. 2009, *Communications in Asteroseismology*, 158, 283
- Ouazzani, R. M., Goupil, M. J., Dupret, M. A., & Reese, D. 2010, *Astrophysics and Space Science*, 328, 285
- Palacios, A., Talon, S., Charbonnel, C., & Forestini, M. 2003, *A&A*, 399, 603
- Pamyatnykh, A. A., Handler, G., & Dziembowski, W. A. 2004, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 350, 1022
- Peterson, D. M., Hummel, C. A., Pauls, T. A., et al. 2006, *ApJ*, 636, 1087
- Reese, D., Lignières, F., & Rieutord, M. 2006, *A&A*, 455, 621
- Reese, D., Lignières, F., & Rieutord, M. 2008, *A&A*, 481, 449
- Reese, D. R., MacGregor, K. B., Jackson, S., Skumanich, A., & Metcalfe, T. S. 2009a, *A&A*, 506, 189
- Reese, D. R., Thompson, M. J., MacGregor, K. B., et al. 2009b, *A&A*, 506, 183
- Richer, J., Michaud, G., & Turcotte, S. 2000, *ApJ*, 529, 338
- Rieutord, M. 1987, *Geophysical and Astrophysical Fluid Dynamics*, 39, 163
- Rieutord, M. 2004, *Le manuel du plombier des astres*, ed.
- Rieutord, M., Corbard, T., Pichon, B., Dintrans, B., & Lignières, F. 2005, in *SF2A-2005 : Semaine de l'Astrophysique Française*, ed. F. Casoli, T. Contini, J. M. Hameury, & L. Pagani, 759–+
- Rieutord, M. & Espinosa Lara, F. 2009, *Communications in Asteroseismology*, 158, 99
- Rieutord, M., Georgeot, B., & Valdetaro, L. 2001, *Journal of Fluid Mechanics*, 435, 103
- Rieutord, M. & Valdetaro, L. 1997, *Journal of Fluid Mechanics*, 341, 77
- Rieutord, M., Valdetaro, L., & Georgeot, B. 2002, *Journal of Fluid Mechanics*, 463, 345
- Roxburgh, I. W. 1964, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 128, 157
- Roxburgh, I. W. 2004, *A&A*, 428, 171

- Roxburgh, I. W. 2006, *A&A*, 454, 883
- Roxburgh, I. W. 2008, *Astrophysics and Space Science*, 316, 75
- Saio, H. 1981, *ApJ*, 244, 299
- Scufflaire, R., Montalbán, J., Théado, S., et al. 2008, *Astrophysics and Space Science*, 316, 149
- Simon, R. 1969, *A&A*, 2, 390
- Smeyers, P. & Denis, J. 1971, *A&A*, 14, 311
- Soufi, F., Goupil, M. J., & Dziembowski, W. A. 1998, *A&A*, 334, 911
- Spiegel, E. A. & Zahn, J. 1992, *A&A*, 265, 106
- Stankov, A. & Handler, G. 2005, *VizieR Online Data Catalog*, 215, 80193
- Suárez, J. C., Goupil, M. J., & Morel, P. 2006, *A&A*, 449, 673
- Suárez, J. C., Goupil, M. J., Reese, D. R., et al. 2010, *ApJ*, 721, 537
- Talon, S. & Charbonnel, C. 1998, *A&A*, 335, 959
- Talon, S., Zahn, J., Maeder, A., & Meynet, G. 1997, *A&A*, 322, 209
- Turck-Chièze, S., Couvidat, S., Piau, L., et al. 2004, *Physical Review Letters*, 93, 211102
- Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H. 1989, *Nonradial oscillations of stars*, ed. Unno, W., Osaki, Y., Ando, H., Saio, H., & Shibahashi, H.
- Wilkinson, J. H. 1965, *The algebraic eigenvalue problem*, ed. Wilkinson, J. H.
- Zahn, J. 1992, *A&A*, 265, 115



# Table des figures

1.1	Histogram of radial velocity for the known $\beta$ Cephei stars, measured by spectroscopy (Stankov & Handler 2005). . . . .	6
1.2	Temperature diagram of the visible surface of Atair with values ranging from 8740 K at the pole to 6890 K at the equator. This picture shows both the rotationally induced flattening and the gravitational darkening of the star measured by interferometry (Peterson et al. 2006). . . . .	6
1.3	Meridional circulation in a $1.5 M_{\odot}$ stellar model <b>left</b> : at the beginning and <b>right</b> : on the middle of the main sequence. J.P. Marques private communication. . . . .	10
1.4	The first three oscillation modes for an organ pipe with one end (on the left) closed, and one end open (on the right). On the left is the fundamental mode, in the centre the first overtone, and on the right the second overtone. . . . .	13
1.5	Three stellar pulsation modes, the first on the left is the first dipolar axisymmetric mode $\{\ell = 1, m = 0\}$ . . . . .	14
1.6	Spatial representation for spherical harmonics with angular degree ranging from $\ell = 1$ (top) to $\ell = 4$ (bottom), and for azimuthal number ranging from $m = 0$ (left) to $m = \ell$ (right). Credit : Sébastien Deheuvels PhD thesis. . . . .	15
1.7	Diagram of the indicator of the impact of centrifugal flattening $\epsilon$ , versus the parameter $\mu$ , indicator of the Coriolis force impact, for different types of stars ( $\delta$ Scuti, $\gamma$ Doradus, $\beta$ Cephei and Slowly Pulsating B stars). Credit : Goupil & Talon (2002). . . . .	18
1.8	Schematic view of the degeneracy which is lifted as the star rotates ( $\Omega \neq 0$ ), the splitting being no longer symmetric with respect of the central mode ( $m = 0$ ) when distortion effects are accounted for by second order perturbative methods. . . . .	21
2.1	Propagation rays of sound waves in a cross-section of a Sun-like star. The acoustic ray paths are bent by the increase in sound speed with depth until they reach the inner turning point where they undergo total internal refraction. At the surface, the acoustic waves are reflected by the rapid decrease of density. Credit : Cunha et al. (2007). . . . .	38

2.2	<b>Left :</b> The frequency of modes versus their degree $\ell$ for a solar model. <b>Right :</b> Buoyancy frequency $N$ (in solid line) and Lamb frequency $S_\ell$ (in dashed lines), against fractional radius $r/R$ for a solar model. The heavy horizontal lines indicate trapping regions for a g mode with frequency $\nu = \omega/2\pi = 100\mu\text{Hz}$ , and for a p mode with degree 20 and $\nu = 2000\mu\text{Hz}$ . Credit : Christensen-Dalsgaard (2003). . . . .	39
3.1	Logarithmic pressure map in the stellar interior, for the spherical model computed by the evolution code (on the left), and for the distorted model including second order perturbation of the structure caused by a uniform rotation of $\Omega = 38\% \Omega_k$ (on the right). . . . .	50
3.2	Frequency discrepancies between perturbative computations (with WarM) and non perturbative ones (with TOP) without rotation for $\ell = 0$ and 1 modes. . . . .	51
3.3	Validity domains of the second order perturbative approach with (on the right) and without (on the left) near degeneracy corrections for acoustic modes with $\ell = 0$ (top) and for triplets $\ell = 1, m = -1, 0, +1$ (bottom). Radial orders range from $n = 1$ to 12. . . . .	51
4.1	Coordinate system used in ACOR. $V_1$ extends from the center to the stellar surface, and $V_2$ encompasses the star. . . . .	75
4.2	Scheme of the basis vectors : $\vec{a}_\theta$ is tangential to iso- $\zeta$ surfaces, whereas $\vec{a}_\zeta$ is directly orthogonal to $\vec{a}_\theta$ . . . . .	76
5.1	Block representation of the first lines and columns of the matrix $\mathcal{A}$ , containing the boundary conditions at the center of the star (in the first block top left in red). The oblique green dashed line corresponds to the diagonal of $\mathcal{A}$ and the indexes of the layers are given on the top, for the blocks the indexes are indicated both top and left. The black small blocks represent the non zero elements of the matrix. . . . .	101
5.2	Block representation of the lines and columns located in the middle of the matrix $\mathcal{A}$ , containing the boundary condition at the stellar surface (in the block $N_1$ in red). The oblique green dashed line corresponds to the diagonal of $\mathcal{A}$ and the indexes of the layers are given on the top, for the block the indexes are indicated both top and left. The black small blocks represent the non zero elements of the matrix. . . . .	102
5.3	Block representation of the last lines and columns of the matrix $\mathcal{A}$ , containing the boundary condition at the outer surface of $V_2$ (see Chap.4 Fig.4.1) (in the last block bottom right). The oblique green dashed line corresponds to the diagonal of $\mathcal{A}$ and the indexes of the layers are given on the top, for the block the indexes are indicated both top and left. The black small blocks represent the non zero elements of the matrix. . . . .	103
5.4	Convergence as a function of the number of spherical harmonics included in the spectral expansion, taken as the difference between frequency resulting from computations with $M-1$ spherical harmonics and computations using $M$ spherical harmonics, for an $n = 3$ mode dominated by an $\ell = 1, m = 0$ component, and for three different rotational velocities : $18.5\% \Omega_k$ in blue, $38\% \Omega_k$ in orange and $59\% \Omega_k$ in red. . . . .	105

5.5	Convergence as a function of the radial resolution, taken as the differences between frequency resulting from computations with $r$ points in the radial grid and computations using $(r+1)$ points. For example, at the abscissa corresponding to 1000 points is plotted the difference between the frequency obtained with 2000 points and the one obtained with 1000 points. These plots have been performed for modes dominated by an $\ell = 2, m = 0$ component with an $n = 3$ on the left pannel, and $n = 9$ on the right pannel, both at three different rotational velocities : 18.5% $\Omega_k$ in green, 37.9% $\Omega_k$ in light blue and 58.9% $\Omega_k$ in dark blue. . . . .	106
6.1	Scheme of the comparison process between the two computations : the $N=3$ polytropic spectral equilibrium models used for TOP calculations are interpolated on a denser radial grid in order to be given in input to ACOR. The eigenfrequency computed by TOP is then taken as the target eigenvalue for frequency determination with ACOR. . . . .	111
6.2	Scaled radial behavior of ACOR eigenfunctions (green dots) and of TOP ones (red dots) close to the center of the star, compared to the expected behavior in $\zeta^{ \ell-1 }$ (in blue dashed lines), for three components corresponding to three different cases of parity and azimuthal orders : $u'_0$ for an $m = 0, par = 0$ mode, $u'_1$ for an $m = 0, par = 1$ mode, and $u'_2$ for an $m = 1, par = 1$ one. . . . .	113
6.3	Radial parts of the eigenfunction $\pi'_\ell$ for a low frequency mode dominated by an $\ell = 1, m = 0$ component, for an $N=3$ polytropic model uniformly rotating at 18.5%, 46%, 63.5% and 83.7% of the Keplerian break up velocity. . . . .	114
6.4	Radial parts of the eigenfunction $\pi'_\ell$ for a low frequency mode dominated by an $\ell = 2, m = 0$ component, for an $N=3$ polytropic model uniformly rotating at 3.7%, 18.5%, 46% and 64.5% of the Keplerian break up velocity. . . . .	115
6.5	Spatial distribution in a meridional plane of a low frequency mode dominated by an $\ell = 1, m = 0$ component (corresponding to a frequency of $100 \mu Hz$ for a $10 M_\odot$ star, and to a frequency of $250 \mu Hz$ for a $1.9 M_\odot$ star), <b>left</b> : computed with ACOR, <b>right</b> : computed with TOP. . . .	116
6.6	Spatial distribution in a meridional plane of a high frequency mode dominated by an $\ell = 1, m = 0$ component (corresponding to a frequency of $270 \mu Hz$ for a $10 M_\odot$ star, and to a frequency of $600 \mu Hz$ for a $1.9 M_\odot$ star), <b>left</b> : computed with ACOR, <b>right</b> : computed with TOP. . . .	117
6.7	Spatial distribution in a meridional plane of a low frequency mode dominated by an $\ell = 2, m = 0$ component (corresponding to a frequency of $70 \mu Hz$ for a $10 M_\odot$ star, and to a frequency of $160 \mu Hz$ for a $1.9 M_\odot$ star), <b>left</b> : computed with ACOR, <b>right</b> : computed with TOP. . . .	118
6.8	Spatial distribution in a meridional plane of a high frequency mode dominated by an $\ell = 2, m = 0$ component (corresponding to a frequency of $270 \mu Hz$ for a $10 M_\odot$ star, and to a frequency of $600 \mu Hz$ for a $1.9 M_\odot$ star), <b>left</b> : computed with ACOR, <b>right</b> : computed with TOP. . . .	119



6.9	Relative discrepancies between eigenfrequencies computed by ACOR and by TOP ( $\delta\sigma/\sigma = (\sigma_{\text{TOP}} - \sigma_{\text{ACOR}})/\sigma_{\text{TOP}}$ ) as a function of the rotation angular velocity scaled by the Keplerian break up frequency $\Omega/\Omega_k$ . For four axisymmetric modes : low frequency modes, one dominated by an $m = 0, \ell = 1$ component (light blue) and another by an $m = 0, \ell = 2$ component (orange) on the left panel, and high frequency modes, one dominated by an $m = 0, \ell = 1$ component (dark blue) and another by an $m = 0, \ell = 2$ component (red) on the left panel. . . . .	120
6.10	Behavior of eigenfrequencies with respect of the rotational angular velocity $\Omega/\Omega_k$ : <b>Left</b> : for low frequency centroid modes with dominant component $\ell = 1, m = 0$ , and $\ell = 2, m = 0$ computed with ACOR (green) and with TOP (grey). <b>Right</b> : frequency differences between sectorial modes $m = \pm\ell$ and their relative centroid ones, dominated by components $\ell = 1, m = \pm 1$ and $\ell = 2, m = \pm 2$ respectively, as a function of rotation angular velocity. . . . .	121
6.11	Frequency behavior of two modes in avoided crossing as a function of rotation velocity scaled by $\Omega_k$ . The avoided crossing seems to occur around $40\% \Omega_k$ between two axisymmetric $n = 3$ modes : one dominated by an $\ell = 1$ component, and another one dominated by an $\ell = 5$ component, computed with ACOR (in green) and TOP (in red). Their spatial geometry is illustrated on Fig. 6.12. . . . .	122
6.12	Spatial distribution in a meridional plane of two low frequency modes (radial order $n = 3$ , azimuthal order $m = 0$ ) in avoided crossing occurring around $\Omega = 40\% \Omega_k$ modelled by ACOR. <b>Left</b> : at low rotation velocity, the mode is dominated by an $\ell = 1$ component and change nature when the velocity increases to become $\ell = 5$ . <b>Right</b> : at low rotation velocity, the mode is dominated by an $\ell = 5$ component and change nature when the velocity increases to become $\ell = 1$ . . . . .	124
7.1	Characteristics curves computed for a $M = 2 M_{\odot}, R_{\text{eq}} = 2.4 R_{\odot}$ stellar model with initial hydrogen abundance of $X = 0.72$ , metallicity of $Y = 0.02$ , (for further details on the evolution model one should refer to Roxburgh 2008), differentially rotating with a surface equatorial velocity of $282 \text{ km.s}^{-1}$ . . . . .	131
7.2	<b>Left</b> : Transformation $\zeta \mapsto r(\zeta, \theta)$ as a function of $\zeta$ , for co-latitudes ranging from 0 (pole) to $\pi/2$ (equator). <b>Right</b> : $r(\zeta, \theta) - r(\zeta, \theta_{\text{eq}})$ as a function of $\zeta$ , for co-latitudes ranging from 0 (pole) to $\pi/2$ (equator). . . . .	135
7.3	Transformation $\zeta \mapsto r(\zeta, \theta)$ as a function of $\zeta$ for co-latitudes ranging from 0 (pole) to $\pi/2$ (equator). . . . .	136
7.4	Coordinate system used in ACOR. $V_0$ corresponds to a region inside the convective core, $V_1$ extends from a boundary inside the convective core to the stellar surface, and $V_2$ encompasses the star. . . . .	137
7.5	Radial profile of the rotation angular velocity scaled by the equatorial angular velocity at the surface. $\Omega$ is constant on isobares but differential in the normal direction. Therefore, the model is not barotropic. . . . .	139

7.6	2D map of the logarithm of the Brunt-Vaissala frequency square in a meridional plane ( $N^2 = g_r ((\Gamma_1 p_0)^{-1} \partial p_0 / \partial \zeta - (\rho_0)^{-1} \partial \rho_0 / \partial \zeta)$ ), for the $M = 2 M_\odot$ , $R_{\text{eq}} = 2.4 R_\odot$ model . . . . .	140
7.7	Radial profile of the Brunt-Vaissala frequency square $N^2 = g_r ((\Gamma_1 p_0)^{-1} \partial p_0 / \partial \zeta - (\rho_0)^{-1} \partial \rho_0 / \partial \zeta)$ of the model, close to the pole ( $10^\circ$ in red) and close to the equator ( $80^\circ$ in blue). . . . .	140
7.8	Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of $\omega = 7.19\Omega_k$ , trapped in the stellar core, in the $\mu$ gradient region, with a very high angular degree, which amplitude is higher along the rotation axis than along the equator. Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points. . . . .	144
7.9	Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of $\omega = 7.63\Omega_k$ , showing a mixed nature, i.e. it has amplitude both in the core and in the envelop, probably in avoided crossing between a mode trapped in the core with amplitude along the rotation axis, and a mode trapped in the envelop with higher amplitude along the equator. Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points. . . . .	144
7.10	Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of $\omega = 8.37\Omega_k$ , showing a mixed nature p-g, i.e. it has amplitude both in the core and in the envelop, probably in avoided crossing between a mode trapped in the core with amplitude along the rotation axis, and an island mode trapped in the envelop with higher amplitude along the equator. Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points. . . . .	145
7.11	Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of $\omega = 11.43\Omega_k$ , trapped in the envelop, showing a clear island mode geometry with $\ell = 1$ (approximately number of nodes along an isobare) and $\tilde{n} = 13$ (number of nodes along the equatorial cavity). Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points. . . . .	145
7.12	Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of $\omega = 11.58\Omega_k$ , trapped in the local maximum following the $\mu$ gradient in the Brunt-Väisälä frequency profile, showing a higher amplitude along the rotation axis. Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points. . . . .	146
7.13	Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of $\omega = 11.86\Omega_k$ , showing a mixed nature p-g, with an angular geometry very different in the core than in the envelop, where we observe probably an island mode. Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points. . . . .	146
7.14	Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of $\omega = 13.01\Omega_k$ , with amplitude only in regions very close to the surface. It shows the very typical geometry of a whispering gallery mode. Computations have been performed for 34 spectral terms and 2500 radial grid points. . . . .	147

7.15	Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of $\omega = 14.57\Omega_k$ , trapped in the envelop, showing the geometry typical of an island mode with $\tilde{\ell} = 1$ and $\tilde{n} = 17$ . Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points. . . . .	147
7.16	Spatial distribution in a meridional plane of an axisymmetric odd mode associated with the eigenfrequency of $\omega = 17.73\Omega_k$ , trapped in the envelop, showing the geometry typical of an island mode with $\tilde{\ell} = 1$ and $\tilde{n} = 21$ . Computations have been performed for 40 spectral terms and 2500 radial grid points. . . . .	148