



**HAL**  
open science

# Méthodes numériques de haute précision et calcul scientifique pour le couplage de modèles hyperboliques

Khalil Haddaoui

► **To cite this version:**

Khalil Haddaoui. Méthodes numériques de haute précision et calcul scientifique pour le couplage de modèles hyperboliques. Mathématiques générales [math.GM]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2016. Français. NNT : 2016PA066176 . tel-01429590

**HAL Id: tel-01429590**

**<https://theses.hal.science/tel-01429590>**

Submitted on 9 Jan 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT**

présentée par

**Khalil HADDAOUI**

Soutenue publiquement le 7 juillet 2016 pour l'obtention du grade de  
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE - PARIS 6**

Spécialité : Mathématiques Appliquées

---

**Méthodes numériques de haute précision et calcul  
scientifique pour le couplage de modèles hyperboliques**

---

Après avis des rapporteurs  
M. Daniele A. DI PIETRO  
M. Jean-Marc HÉRARD

Devant le jury composé de

M. Christophe CHALONS	Examineur
M. Frédéric COQUEL	Co-Directeur de Thèse
M. Bruno DESPRÉS	Président du jury
M <sup>me</sup> Edwige GODLEWSKI	Directrice de Thèse
M. Jean-Marc HÉRARD	Rapporteur
M. Claude MARMIGNON	Co-Encadrant Onera
M. Florent RENAC	Encadrant Onera



Cette thèse a été financée par l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (Onera). Elle a été préparée dans les locaux du département de mécanique des fluides numérique (DMFN), dans l'unité de méthodes numériques pour la mécanique des fluides (NFLU).

Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (Onera)  
Département de mécanique des fluides numérique (DMFN)  
Unité de méthodes numériques pour la mécanique des fluides (NFLU)  
29 avenue de la Division Leclerc  
92 322 Châtillon cedex

UPMC  
Ecole Doctorale de Sciences  
Mathématiques de Paris Centre  
4 place Jussieu  
75252 Paris Cedex 05  
Boite courrier 290

*Cette thèse est dédiée à ma grand-mère M'Barka  
et à mes parents Fatima et Cherkaoui.*



# Résumé

La simulation numérique adaptative d'écoulements présentant des phénomènes multi-échelles s'effectue généralement au moyen d'une hiérarchie de modèles différents selon l'échelle mise en jeu et le niveau de précision requis. Ce type de modélisation numérique entraîne des problèmes de couplage multi-échelles complexes. Cette thèse est ainsi dédiée au développement, à l'analyse et à la mise en œuvre de méthodes performantes permettant de résoudre des problèmes de couplage en espace de modèles décrits par des systèmes d'équations aux dérivées partielles hyperboliques.

Dans une première partie, nous développons et analysons une méthode numérique dédiée au couplage interfacial des équations d'Euler mono-dimensionnelles. Chacun des systèmes de lois de conservation est muni d'une loi de pression distincte et l'interface de couplage séparant ces modèles est supposée fixe et infiniment mince. Les conditions de transmission sont modélisées par un terme source mesure localisé à l'interface de couplage. Le poids associé à cette mesure modélise les pertes de conservation à l'interface (typiquement des pertes de charge) et sa définition permet l'application de plusieurs stratégies de couplage. Notre méthode d'approximation repose sur les techniques d'approximation par relaxation de type Suliciu. La résolution exacte du problème de Riemann pour le système relaxé nous permet de définir un schéma numérique équilibre pour le modèle de couplage. Ce schéma préserve certaines solutions stationnaires du modèle de couplage et est applicable pour des lois de pression générales. L'implémentation de notre méthode permet de mener des expériences numériques illustrant les propriétés de notre schéma. Par exemple, nous montrons qu'il est possible de contrôler l'écoulement à l'interface de couplage en calculant des poids solutions de problèmes d'optimisation sous contraintes.

La deuxième partie de cette thèse est dédiée au développement de deux schémas numériques d'ordre arbitrairement élevé en espace pour l'approximation des solutions stationnaires du problème mixte associé au modèle de Jin et Xin. Nos schémas d'approximation reposent sur la méthode de Galerkin discontinue. L'approximation des solutions du problème mixte par notre premier schéma fait intervenir uniquement des erreurs de discrétisation tandis que notre deuxième schéma est constitué à la fois d'erreurs de modélisation et de discrétisation. L'erreur de modélisation provient du remplacement, dans certaines régions spatiales, de la résolution du modèle de relaxation par celle de l'équation scalaire équilibre associée. Sous l'hypothèse d'une interface de couplage éventuellement caractéristique, la résolution du problème de Riemann associé au modèle couplé nous permet de construire un schéma numérique d'ordre arbitrairement élevé prenant en compte l'éventuelle existence de couches limites à l'interface de couplage. Enfin, la mise en œuvre de ces méthodes nous permet d'analyser quantitativement et qualitativement les erreurs de modélisation et

de discrétisation commises lors de l'utilisation du schéma couplé. Ces erreurs sont fonction du niveau de raffinement de maillage utilisé, du degré de polynôme choisi et de la position de l'interface de couplage.

**Mots-clefs**

Couplage de modèles hyperboliques, terme source mesure, schémas de relaxation, méthode des volumes finis, méthode de Galerkin discontinue, erreurs de modélisation et de discrétisation.

# Abstract

The adaptive numerical simulation of multiscale flows is generally carried out by means of a hierarchy of different models according to the specific scale into play and the level of precision required. This kind of numerical modeling involves complex multiscale coupling problems. This thesis is thus devoted to the development, analysis and implementation of efficient methods for solving coupling problems involving hyperbolic models.

In a first part, we develop and analyze a coupling algorithm for one-dimensional Euler systems. Each system of conservation laws is closed with a different pressure law and the coupling interface separating these models is assumed fix and thin. The transmission conditions linking the systems are modelled thanks to a measure source term concentrated at the coupling interface. The weight associated to this measure models the losses of conservation and its definition allows the application of several coupling strategies. Our method is based on Suliciu's relaxation approach. The exact resolution of the Riemann problem associated to the relaxed system allows us to design an extremely accurate scheme for the coupling model. This scheme preserves equilibrium solutions of the coupled problem and can be used for general pressure laws. Several numerical experiments assess the performances of our scheme. For instance, we show that it is possible to control the flow at the coupling interface when solving constrained optimization problems for the weights.

In the second part of this manuscript we design two high order numerical schemes based on the discontinuous Galerkin method for the approximation of the initial-boundary value problem associated to Jin and Xin's model. Our first scheme involves only discretization errors whereas the second approximation involves both modeling and discretization errors. Indeed in the second approximation, we replace in some regions the resolution of the relaxation model by the resolution of its associated scalar equilibrium equation. Under the assumption of a possible characteristic coupling interface, we exactly solve the Riemann problem associated to the coupled model. This resolution allows us to design a high order numerical scheme which captures the possible boundary layers at the coupling interface. Finally, the implementation of our methods enables us to analyze quantitatively and qualitatively the modeling and discretization errors involved in the coupled scheme. These errors are functions of the mesh size, the degree of the polynomial approximation and the position of the coupling interface.

**Keywords**

Coupling of hyperbolic models, measure source term, relaxation schemes, finite volume methods, discontinuous Galerkin method, modeling and discretization errors.

# Table des matières

<b>Résumé</b>	<b>4</b>
<b>Abstract</b>	<b>7</b>
<b>1 Introduction générale</b>	<b>11</b>
1.1 Motivations physiques et numériques . . . . .	11
1.2 Modélisations mathématiques du couplage interfacial de systèmes hyperboliques . . . . .	14
1.2.1 Position du problème . . . . .	14
1.2.2 Une approche permettant la régularisation . . . . .	19
1.3 Contributions et organisation du mémoire . . . . .	21
1.3.1 Chapitre 2 : Couplage interfacial avec termes sources mesure arbitraires de deux systèmes hyperboliques de lois de conservation de la dynamique des gaz possédant des lois de pression différentes . . . . .	21
1.3.2 Chapitre 3 : Erreurs de modélisation et de discrétisation pour l'approximation d'un problème mixte hyperbolique semi-linéaire de relaxation . . . . .	22
1.3.3 Publications . . . . .	23
<b>2 Couplage interfacial avec termes sources mesure arbitraires de deux systèmes hyperboliques de lois de conservation de la dynamique des gaz possédant des lois de pression différentes</b>	<b>25</b>
2.1 Introduction . . . . .	25
2.2 Coupling with measure source term . . . . .	27
2.2.1 Physical problem and governing equations . . . . .	27
2.2.2 Coupling model . . . . .	29
2.3 Numerical method . . . . .	30
2.3.1 Relaxation approximation . . . . .	30
2.3.2 The main features of the scheme . . . . .	31
2.3.3 Godunov-type scheme . . . . .	33
2.3.4 Details of the time splitting method . . . . .	34
2.3.5 Equilibrium solutions . . . . .	35
2.3.6 Riemann problem associated to the relaxation system . . . . .	36
2.3.7 Preserving equilibria . . . . .	41
2.3.8 Choices of the measure source terms . . . . .	43
2.3.8.1 Flux coupling and state coupling. . . . .	43

2.3.8.2	Dynamic evaluation: constrained optimization problems . . . . .	43
2.4	Numerical experiments . . . . .	44
2.4.1	Flux coupling <i>vs.</i> state coupling . . . . .	44
2.4.2	Optimal source terms . . . . .	45
2.5	Concluding remarks . . . . .	50
2.6	Appendix: Mathematical properties of the cost functions $\mathcal{J}_1$ and $\mathcal{J}_2$ . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Erreurs de modélisation et de discrétisation pour l'approximation d'un problème mixte hyperbolique semi-linéaire de relaxation</b>	<b>61</b>
3.1	Introduction . . . . .	61
3.2	Problèmes fin et couplé . . . . .	63
3.2.1	Problème fin . . . . .	63
3.2.2	Problème couplé : approximation continue du problème fin . . . . .	64
3.2.3	Résolution du problème de Riemann couplé . . . . .	67
3.3	Méthodes numériques fine et couplée . . . . .	70
3.3.1	Discrétisations spatiales d'ordre élevé des problèmes fin et couplé	70
3.3.1.1	Choix des bases locales de polynômes . . . . .	73
3.3.1.2	Approximation fine . . . . .	74
3.3.1.3	Approximation couplée . . . . .	78
3.3.2	Discrétisations temporelles des problèmes fin et couplé . . . . .	81
3.3.2.1	Approximation fine . . . . .	81
3.3.2.2	Approximation couplée . . . . .	82
3.4	Expériences numériques . . . . .	83
3.4.1	Cas linéaire . . . . .	83
3.4.1.1	Approximation du problème fin par la méthode numérique fine . . . . .	84
3.4.1.2	Approximation du problème fin par la méthode numérique couplée . . . . .	84
3.4.2	Cas non-linéaire avec $f' < 0$ . . . . .	93
3.4.3	Cas non-linéaire avec $f' > 0$ , $f' < 0$ ou $f'$ qui change de signe de part et d'autre de l'interface de couplage . . . . .	96
3.5	Conclusions . . . . .	99
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>100</b>
	<b>Table des figures</b>	<b>103</b>
	<b>Liste des tableaux</b>	<b>105</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>107</b>

# Chapitre 1

## Introduction générale

### 1.1 Motivations physiques et numériques

L'utilisation industrielle d'outils de simulation numérique s'est généralisée afin d'éviter la conduite coûteuse d'essais expérimentaux. L'augmentation croissante de la puissance des calculateurs permet de réaliser une modélisation numérique de plus en plus fine des phénomènes physiques et, ainsi, d'accroître la confiance à accorder aux résultats des calculs. Cependant, d'importants progrès restent à accomplir pour la simulation d'écoulements complexes présentant des phénomènes multi physiques et multi échelles. La simulation numérique des différents niveaux de modélisation se fait la plupart du temps par une hiérarchie de modèles physiques ordonnés du plus grossier au plus fin en fonction de la taille des échelles caractéristiques qu'ils sont censés capturer. Dans les applications, le dispositif industriel exhibe le plus souvent des régions bien connues de ses concepteurs où les échelles caractéristiques sont bien séparées ; à savoir des régions où l'on sait a priori quel modèle physique privilégier. Pour ces raisons, de nombreux codes de calculs ont été développés afin de simuler tel sous-composant ou telle région du dispositif étudié. Une approche présentant l'avantage de permettre la réutilisation de codes de calcul ou de modules logiciels spécialisés consiste à subdiviser le domaine d'étude en sous domaines séparés par des interfaces et résolus au moyen de codes de calcul dédiés. Ces différents modules logiciels doivent alors être couplés au travers de ces interfaces pour permettre l'échange d'informations.

Citons, par exemple, dans le cadre de l'aéronautique contemporaine, les écoulements au sein des turbomachines qui peuvent être modélisés par des équations de la dynamique des gaz possédant des lois d'état différentes entre les différents étages du compresseur et de la turbine (cf. figure 1.1). De même, les écoulements diphasiques au sein des systèmes de propulsion des corps de rentrée présentent des échelles caractéristiques fortement hétérogènes entre le bloc de propulsion assurant l'optimisation du mélange comburant-carburant et la zone de sortie où le rayonnement conditionne la signature du missile et dépend de la qualité de ce mélange. Enfin, citons la simulation de l'atomisation primaire du jet d'oxygène liquide dans le cadre de la combustion dans les moteurs à ergols liquides (cf. figures 1.2 et 1.3). La partie de l'écoulement en sortie de l'injecteur au niveau du jet est à phases séparées, tandis que dans une deuxième partie de l'écoulement, l'atomisation primaire du jet

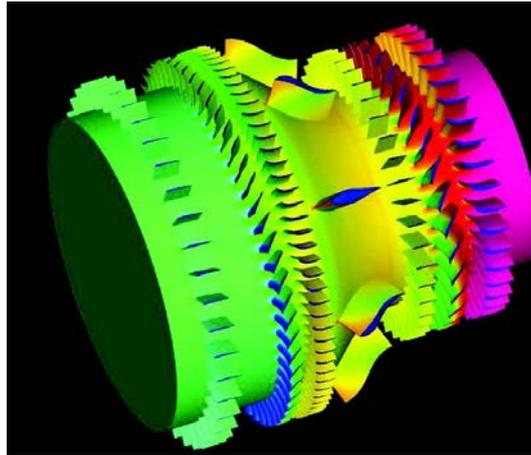


FIGURE 1.1 – Simulation d'écoulement instationnaire dans un compresseur (d'après [29]).

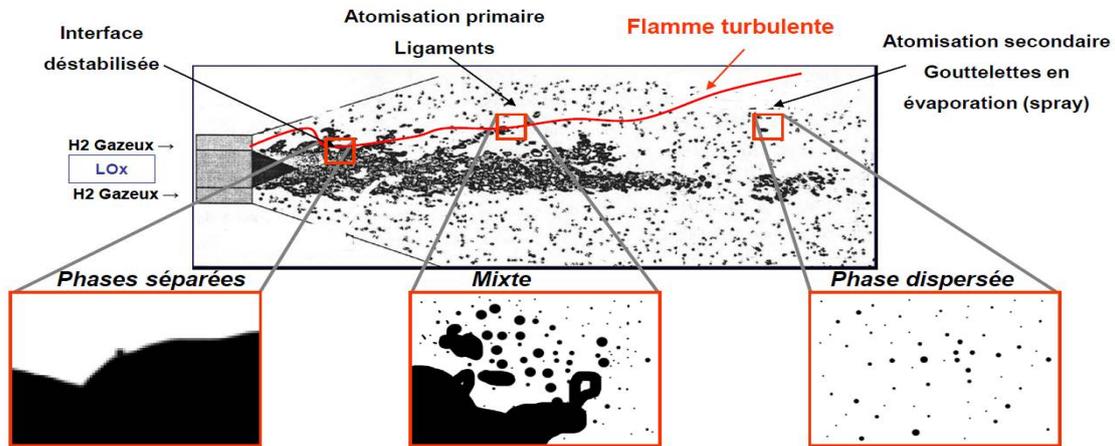


FIGURE 1.2 – Mécanismes physiques en sortie d'un injecteur coaxial cryotechnique (d'après [80]).

et l'atomisation secondaire des ligaments conduisent à la formation de gouttelettes d'oxygène en évaporation qui constituent un écoulement à phases dispersées [88]. La simulation numérique de ce type d'écoulement nécessite donc le couplage de codes résolvant des modèles à phases séparées et à phases dispersées [81, 87, 80]. Plus généralement, les écoulements multiphasiques sont caractérisés par plusieurs régimes. Par exemple, on peut identifier les régimes cinétique, hydrodynamique, laminaire, turbulent, compressible ou incompressible. L'étude du couplage d'équations provient de motivations physiques dans les différentes applications à l'aéronautique discutées ci-avant. Dans ces cas, la définition des conditions de couplage liant les différents modèles résulte d'un choix issu de considérations physiques portant, par exemple, sur la conservation ou la continuité de certaines variables.

Par ailleurs, pour des raisons purement numériques, la résolution du modèle le plus fin sur l'ensemble du domaine d'étude est en pratique difficile et coûteuse. C'est le cas, par exemple, lorsque le modèle est muni de produits non conservatifs et de termes sources (difficulté que nous n'aborderons pas dans ce travail). L'approximation

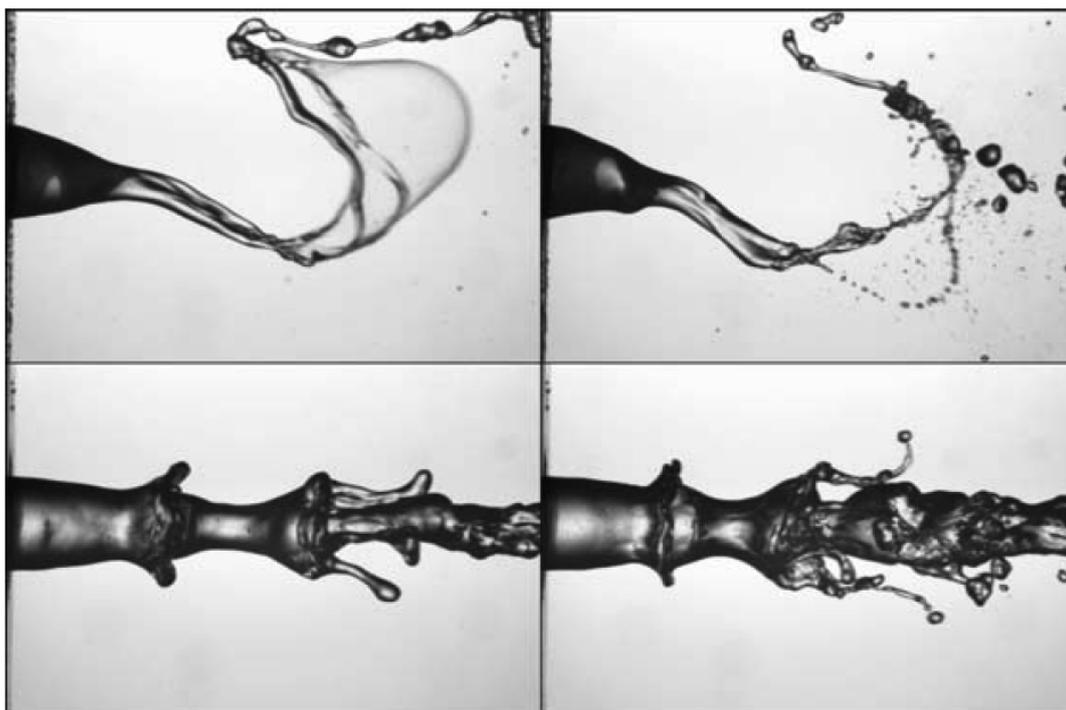


FIGURE 1.3 – Structures d'un jet liquide atomisé (d'après [84]).

mation du modèle fin est alors remplacée par celle d'un modèle plus grossier dans certaines régions du domaine d'étude. Le problème de couplage de modèles apparaît aussi lors de l'utilisation de méthodes d'adaptation de modèles. Ces méthodes consistent à remplacer automatiquement et localement la résolution d'un modèle par celle d'un autre plus facile et moins coûteux à approcher. Dans ces cas, où l'étude du couplage d'équations provient aussi de motivations numériques, les interfaces liant les modèles sont artificielles et les conditions de couplage sont généralement déduites à partir de considérations uniquement mathématiques. Dans le cadre de cette thèse, nous développons et étudions des méthodes numériques pour le couplage de modèles hyperboliques.

## 1.2 Modélisations mathématiques du couplage interfacial de systèmes hyperboliques

### 1.2.1 Position du problème

Dans le cadre d'un contrat de collaboration entre le laboratoire Jacques-Louis Lions et le commissariat à l'énergie atomique, un groupe de travail s'est formé il y a une dizaine d'années pour étudier la problématique du couplage interfacial entre des modèles provenant de la dynamique des fluides multiphasiques. Les articles de revue [60] et [38] présentent les techniques mathématiques et numériques développées pour le couplage interfacial de systèmes hyperboliques. Ce groupe de travail a en particulier contribué à la formulation de différents modèles de couplage. Deux approches ont été proposées. La première consiste à construire un modèle père dégénérant vers les modèles à coupler tandis que la seconde consiste à envisager le couplage comme deux problèmes avec des conditions à la limite couplées. Avant de présenter les différents modèles de couplage, fixons quelques notations.

Les problèmes de couplage considérés sont posés comme suit. Nous supposons pour l'instant que l'interface de couplage est infiniment mince et nous nous plaçons en une dimension d'espace par souci de simplicité et de clarté. Pour des exemples de couplage en dimension d'espace supérieure, nous invitons le lecteur à lire [72, 74, 56, 55, 26, 20]. Par hypothèse, l'interface de couplage est localisée en  $x = 0$ . Comme schématisé sur la figure 1.4, l'écoulement est décrit par un système  $(S_G)$  dans le domaine de gauche  $\mathcal{D}_G = \{x < 0, t > 0\}$  et par un système  $(S_D)$  dans le domaine de droite  $\mathcal{D}_D = \{x > 0, t > 0\}$ . On cherche une fonction

$$\mathbf{u} : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbf{u}(x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad n \geq 1,$$

$\Omega$  ouvert, solution de

$$(S_G) : \quad \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_G(\mathbf{u}) = 0, \quad (x, t) \in \mathcal{D}_G, \quad (1.1a)$$

$$(S_D) : \quad \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_D(\mathbf{u}) = 0, \quad (x, t) \in \mathcal{D}_D, \quad (1.1b)$$

et vérifiant la condition initiale

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Par hypothèse, les flux  $\mathbf{f}_G$  et  $\mathbf{f}_D$  sont des applications régulières respectivement définies sur les ouverts  $\Omega_G \subset \mathbb{R}^n$  et  $\Omega_D \subset \mathbb{R}^n$  tels que  $\Omega = \Omega_G \cup \Omega_D$ . Nous supposons l'existence d'une condition d'entropie pour chaque modèle.

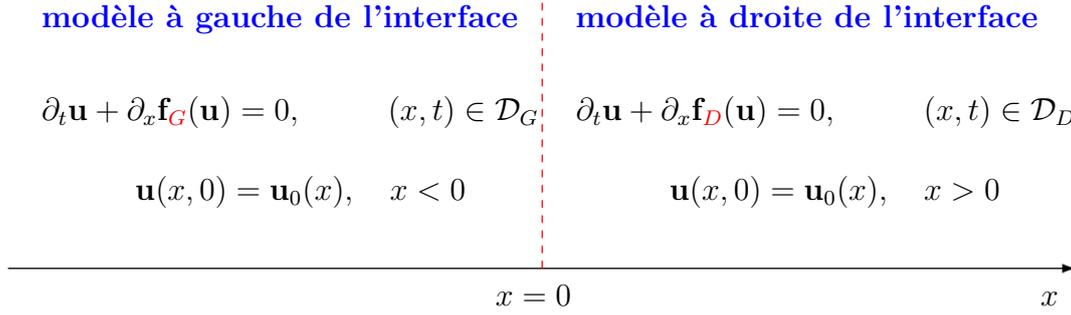


FIGURE 1.4 – Représentation du couplage.

Différentes conditions de transmission ont été proposées et étudiées. Un premier type de couplage est le **couplage par flux** qui permet de garantir la continuité du flux à la traversée de l'interface de couplage :

$$\mathbf{f}_G(\mathbf{u}(0^-, t)) = \mathbf{f}_D(\mathbf{u}(0^+, t)).$$

Cette approche est dite conservative puisque qu'elle permet d'assurer la conservation du vecteur des variables conservatives  $\mathbf{u}$  sur tout le domaine d'étude. Le problème de couplage correspondant s'écrit sous la forme du modèle global suivant :

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.3)$$

avec

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = (1 - H(x))\mathbf{f}_G(\mathbf{u}) + H(x)\mathbf{f}_D(\mathbf{u}), \quad (1.4)$$

où  $H$  est la fonction d'Heaviside, c'est-à-dire

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0. \end{cases}$$

Remarquons que dorénavant le problème est défini sur l'espace entier contrairement au problème (1.1) qui est défini dans les deux demi-espace.

Pour des motivations physiques, nous pouvons être amenés à exiger la continuité d'un jeu de variables au niveau de l'interface de couplage en imposant la condition de **couplage par état** :

$$\varphi_G(\mathbf{u}(0^-, t)) = \varphi_D(\mathbf{u}(0^+, t)), \quad t > 0, \quad (1.5)$$

où  $\mathbf{u}(0^-, t)$  (resp.  $\mathbf{u}(0^+, t)$ ) représente la trace de la solution du problème couplé (1.1)-(1.5)-(1.2) à gauche (resp. à droite) de l'interface de couplage et pour  $\alpha = G, D$ ,  $\varphi_\alpha$  représente un  $\mathcal{C}^1$  difféomorphisme définissant le changement de variable. La relation de couplage (1.5) permet ainsi d'assurer la continuité, au niveau de l'interface de couplage  $x = 0$ , de la variable  $\varphi$  définie par

$$\begin{cases} \varphi(x, t) = \varphi_G(\mathbf{u}(x, t)), & (x, t) \in \mathcal{D}_G, \\ \varphi(x, t) = \varphi_D(\mathbf{u}(x, t)), & (x, t) \in \mathcal{D}_D. \end{cases} \quad (1.6)$$

Par exemple, dans le cas du couplage des équations d'Euler avec différentes lois de pression, on peut souhaiter assurer la continuité des variables primitives  $\rho, u, p$  à l'interface où  $\rho > 0$  est la masse volumique,  $u \in \mathbb{R}$  la vitesse et  $p$  la pression du fluide. Dans ce cas, il suffit de prendre  $\varphi_\alpha(\mathbf{u}) = (\rho, u, p_\alpha)$ ,  $\alpha = G, D$ . Il s'agit d'un couplage par état non conservatif. Le choix  $\varphi_G \equiv \varphi_D \equiv Id$  permet d'assurer la continuité des variables conservatives à l'interface. Cela n'implique pas la continuité du flux : le couplage par état est a priori non conservatif.

Le couplage par état peut donc être envisagé comme deux problèmes avec des conditions à la limite  $x = 0$  couplées. Cependant, la nature hyperbolique des systèmes considérés ne permet pas en général d'imposer la continuité au sens fort des traces de la solution. En effet, on sait que pour les systèmes hyperboliques, les conditions aux limites de types Dirichlet ne peuvent pas toujours être imposées de manière forte. La condition (1.5) est trop restrictive et doit être affaiblie. Pour cela, E. Godlewski et P-A. Raviart [64] puis E. Godlewski *et al.* [61] définissent des conditions de couplage faible en suivant le principe des conditions aux limites faibles proposé par F. Dubois et P. G. LeFloch [46]. La formulation faible de la relation de couplage (1.5) est construite de la manière suivante. Pour  $\alpha = G, D$ , notons  $\mathcal{W}_\alpha(\frac{x}{t}; \mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D)$  la solution entropique autosemblable (i.e. ne dépendant que de  $x/t$ ) du problème de Riemann

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{u}) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{u}_G & x < 0, \\ \mathbf{u}_D & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

et définissons pour les systèmes  $(S_G)$  et  $(S_D)$ , les ensembles des traces admissibles en  $x = 0^-$  et  $x = 0^+$  pour des conditions à la limite  $\mathbf{b}_G \in \Omega_G$  et  $\mathbf{b}_D \in \Omega_D$  données :

$$\mathcal{O}_G(\mathbf{b}_G) = \left\{ \mathcal{W}_G(0^-; \mathbf{w}, \mathbf{b}_G) : \mathbf{w} \in \Omega_G \right\},$$

$$\mathcal{O}_D(\mathbf{b}_D) = \left\{ \mathcal{W}_D(0^+; \mathbf{b}_D, \mathbf{w}) : \mathbf{w} \in \Omega_D \right\}.$$

La formulation faible de la condition (1.5) s'écrit alors

$$\begin{cases} \mathbf{u}(0^-, t) \in \mathcal{O}_G([\varphi_G^{-1} \circ \varphi_D](\mathbf{u}(0^+, t))), & t > 0, \\ \mathbf{u}(0^+, t) \in \mathcal{O}_D([\varphi_D^{-1} \circ \varphi_G](\mathbf{u}(0^-, t))), & t > 0, \end{cases} \quad (1.7)$$

et le problème couplé consiste à chercher le vecteur  $\mathbf{u}$  solution de (1.1)-(1.7)-(1.2). Nous supposons une certaine compatibilité entre les domaines  $\Omega_G$  et  $\Omega_D$  et les fonctions  $\varphi_G$  et  $\varphi_D$  pour que cette formulation ait un sens.

Les conditions de couplage faible peuvent aussi être définies lorsque les systèmes à coupler possèdent un nombre d'équations différent ou lorsqu'ils sont munis de termes sources. Supposons sans restriction que le système de variable  $\mathbf{U} \in \Omega_D$  ayant le plus grand nombre d'équations soit posé sur le domaine  $\mathcal{D}_D$  à droite de l'interface de couplage et que l'autre système de variable  $\mathbf{u} \in \Omega_G$  soit posé sur  $\mathcal{D}_G$ . Les espaces

des états  $\widetilde{\Omega}_G$  et  $\widetilde{\Omega}_D$  sont des ouverts tels que  $\widetilde{\Omega}_G \subset \mathbb{R}^n$  et  $\widetilde{\Omega}_D \subset \mathbb{R}^{n+p}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in \mathbb{N}$ . On suppose l'existence d'un opérateur de projection

$$\mathcal{P} : \mathbf{U} \in \widetilde{\Omega}_D \mapsto \mathcal{P}(\mathbf{U}) \in \widetilde{\Omega}_G,$$

et d'un opérateur de relèvement

$$\mathcal{R} : \mathbf{u} \in \widetilde{\Omega}_G \mapsto \mathcal{R}(\mathbf{u}) \in \widetilde{\Omega}_D,$$

ce qui permet alors d'écrire les conditions de couplage

$$\begin{cases} \mathbf{u}(0^-, t) \in \mathcal{O}_G([\varphi_G^{-1} \circ \mathcal{P} \circ \varphi_D](\mathbf{U}(0^+, t))), & t > 0, \\ \mathbf{U}(0^+, t) \in \mathcal{O}_D([\varphi_D^{-1} \circ \mathcal{R} \circ \varphi_G](\mathbf{u}(0^-, t))), & t > 0. \end{cases}$$

A titre d'exemple illustratif, considérons le couplage entre le modèle de relaxation de S. Jin et Z. Xin [75]

$$\begin{cases} \partial_t u^\lambda + \partial_x v^\lambda = 0, & (x, t) \in \mathcal{D}_D, \\ \partial_t v^\lambda + a^2 \partial_x u^\lambda = \lambda(f(u^\lambda) - v^\lambda), & (x, t) \in \mathcal{D}_D, \end{cases} \quad (1.8)$$

et la loi scalaire équilibre associée

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & (x, t) \in \mathcal{D}_G, \\ v = f(u), & (x, t) \in \mathcal{D}_G, \end{cases} \quad (1.9)$$

avec  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . La constante  $a$  satisfait la condition sous-caractéristique

$$|f'(u)| < a,$$

pour tous les  $u$  concernés et la fréquence de relaxation  $\lambda > 0$  est constante. Si nous choisissons  $\varphi_G \equiv \varphi_D \equiv Id$  et que nous définissons les opérateurs de projection et de relèvement par

$$\mathcal{P} : (u, v)^T \in \mathbb{R}^2 \mapsto u \in \mathbb{R},$$

et

$$\mathcal{R} : u \in \mathbb{R} \mapsto (u, f(u))^T \in \mathbb{R}^2,$$

alors les conditions de couplage s'écrivent

$$\begin{cases} u(0^-, t) \in \mathcal{O}_G(u(0^+, t)), & t > 0, \\ (u, v)^T(0^+, t) \in \mathcal{O}_D((u, f(u))^T(0^-, t)), & t > 0. \end{cases} \quad (1.10)$$

Dans le cas où l'interface de couplage n'est pas caractéristique, c'est-à-dire lorsque la dérivée du flux  $f$  est soit strictement négative soit strictement positive, F. Caetano [28] montre que le problème de Cauchy associé au modèle couplé (1.8)-(1.9)-(1.10) admet une unique solution. Plus récemment, dans le cas où le flux  $f$  est linéaire,

S. Jin, J.-G. Liu et L. Wang obtiennent des conditions de couplage équivalentes à (1.10) à l'aide de méthodes multi-échelles [76]. Ces techniques permettent de prendre en compte l'éventuelle existence de couches limites à l'interface de couplage. Toujours sous l'hypothèse d'une interface de couplage non caractéristique, les auteurs montrent que le problème couplé (1.8)-(1.9)-(1.10) est bien posé. La généralisation au cas où le flux  $f$  est non linéaire a ensuite été développée par F. Coquel, S. Jin, J.-G. Liu et L. Wang [41] qui retrouvent des conditions de couplage équivalentes à (1.10) à l'aide d'autres techniques multi-échelles révélant l'éventuelle existence de couches limites à l'interface de couplage. D'autres exemples de couplage par état de modèles plus complexes de taille différente sont traités dans [28] et [8].

Les conditions de transmission peuvent aussi être modélisées par le biais d'un **terme source mesure** concentré sur l'interface de couplage. Le modèle de couplage correspondant prend alors la forme

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathcal{M}(t) \delta_{x=0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (1.11)$$

où  $\delta_{x=0}$  est la mesure de Dirac en  $x = 0$ , le flux  $f$  discontinu par rapport à la variable d'espace est défini dans (1.4) et l'application  $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathcal{M}(t)$  est donnée. En intégrant le système (1.11) de part et d'autre de l'interface de couplage, nous obtenons la condition de couplage :

$$\mathcal{M}(t) = \mathbf{f}_D(\mathbf{u}(0^+, t)) - \mathbf{f}_G(\mathbf{u}(0^-, t)), \quad t > 0. \quad (1.12)$$

Cette modélisation développée dans la thèse de T. Galié [51] pour le couplage des équations d'Euler possédant des lois de pression différentes présente plusieurs intérêts. Par exemple, elle permet de retrouver les deux conditions de transmission par flux et par état discutées ci-avant. Cette modélisation permet aussi de contrôler les pertes de conservation sur la masse, l'impulsion ou l'énergie. Enfin, des motivations purement physiques peuvent amener l'utilisateur à choisir un poids  $\mathcal{M}$  non nul minimisant une certaine fonction objectif. Cette optimisation peut par exemple permettre d'imposer certaines quantités telles un débit de masse où un écart de température à l'interface de couplage.

La remarque suivante nous sera utile pour la suite de cette introduction. En notant  $\gamma_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}$  pour  $\alpha = G, D$ , nous observons que la variable  $\varphi$  définie dans (1.6) vérifie les équations

$$\begin{cases} \partial_t \gamma_G(\varphi) + \partial_x \mathbf{f}_G(\gamma_G(\varphi)) = 0, & (x, t) \in \mathcal{D}_G, \\ \partial_t \gamma_D(\varphi) + \partial_x \mathbf{f}_D(\gamma_D(\varphi)) = 0, & (x, t) \in \mathcal{D}_D, \end{cases} \quad (1.13)$$

ainsi que les conditions de couplage

$$\begin{cases} \varphi(0^-, t) \in \widetilde{\mathcal{O}}_G(\varphi(0^+, t)), & t > 0, \\ \varphi(0^+, t) \in \widetilde{\mathcal{O}}_D(\varphi(0^-, t)), & t > 0, \end{cases} \quad (1.14)$$

avec

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{O}}_G(\varphi(0^+, t)) = \{ \widetilde{\mathcal{W}}_G(0^-; \mathbf{w}, \varphi(0^+, t)) : \mathbf{w} \in \Omega \}, \\ \widetilde{\mathcal{O}}_D(\varphi(0^-, t)) = \{ \widetilde{\mathcal{W}}_D(0^-; \varphi(0^-, t), \mathbf{w}) : \mathbf{w} \in \Omega \}, \end{cases}$$

où pour  $\alpha = G, D$ ,  $\widetilde{\mathcal{W}}_\alpha \left( \frac{x}{t}; \mathbf{u}_G, \mathbf{u}_D \right)$  représente la solution entropique autosemblable du problème de Riemann

$$\begin{cases} \partial_t \gamma_\alpha(\varphi) + \partial_x \mathbf{f}_\alpha(\gamma_\alpha(\varphi)) &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \varphi(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{u}_G & x < 0, \\ \mathbf{u}_D & x > 0. \end{cases} \end{cases}$$

Le modèle couplé (1.13)-(1.14) est ainsi équivalent (pour les solutions régulières) au modèle (1.1)-(1.7).

Une étape importante pour le développement de schémas numériques approchant une solution du problème de Cauchy associé au modèle couplé (1.13)-(1.14) est l'étude du problème de Riemann (dit couplé) associé au modèle (1.13)-(1.14). La solution de ce dernier problème n'est pas toujours unique. Un comportement résonnant de l'interface de couplage peut expliquer cette multiplicité des solutions. Ce phénomène apparaît typiquement lorsqu'une onde des deux systèmes à coupler interagit avec l'onde stationnaire de couplage, c'est-à-dire lorsqu'une des valeurs propres des systèmes à coupler change de signe à l'interface de couplage. Ce défaut d'unicité a d'abord été observé et étudié dans le cas scalaire mono-dimensionnel [64, 21, 20].

## 1.2.2 Une approche permettant la régularisation

Afin de restaurer l'unicité des solutions du problème de Riemann couplé associé au modèle (1.13)-(1.14), une reformulation du problème de couplage a été proposée et étudiée dans la thèse de B. Boutin [20] et dans les travaux [22, 23, 24, 25, 26]. Dans les paragraphes suivants, nous verrons en effet que cette modélisation permet de supporter deux types de régularisation permettant d'obtenir des critères d'admissibilité pour les solutions. Les auteurs proposent ainsi de remplacer la résolution du modèle (1.13) par celle du système augmenté

$$\begin{cases} A_0(\varphi, v) \partial_t \varphi + A_1(\varphi, v) \partial_x \varphi &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t v &= 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \end{cases} \quad (1.15)$$

où la variable  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . La fonction couleur  $v$  est à valeurs dans  $[-1, 1]$ , si  $v(x, t) = -1$  alors nous nous situons dans le domaine  $\mathcal{D}_G$  à gauche de l'interface de couplage et si  $v(x, t) = 1$  alors nous nous retrouvons dans le domaine  $\mathcal{D}_D$  à droite de l'interface de couplage.  $A_0$  et  $A_1$  sont des matrices carrées de taille  $n \times n$  vérifiant certaines propriétés. Le système non conservatif (1.15) n'est que faiblement hyperbolique au sens où la matrice jacobienne du flux n'est pas diagonalisable. Dans ce cas, le problème de résonance apparaît. La définition des matrices  $A_0$  et  $A_1$  permet de retrouver le problème de couplage (1.13)-(1.14). Ces matrices peuvent par exemple prendre la forme

$$\begin{cases} A_0(\varphi, v) = \frac{(1-v)}{2} \nabla_\varphi \gamma_G(\varphi) + \frac{(1+v)}{2} \nabla_\varphi \gamma_D(\varphi), \\ A_1(\varphi, v) = \frac{(1-v)}{2} \nabla_\varphi \gamma_G(\varphi) \nabla_\varphi \mathbf{f}_G(\gamma_G(\varphi)) + \frac{(1+v)}{2} \nabla_\varphi \gamma_D(\varphi) \nabla_\varphi \mathbf{f}_D(\gamma_D(\varphi)). \end{cases}$$

En suivant l'approche de C. M. Dafermos [43, 44], B. Boutin et ses collaborateurs définissent les solutions du problème de Riemann couplé associé au système augmenté (1.15) comme les limites lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$  des solutions autosemblables du problème de Riemann associé au modèle

$$\begin{cases} A_0(\varphi^\varepsilon, v^\varepsilon) \partial_t \varphi^\varepsilon + A_1(\varphi^\varepsilon, v^\varepsilon) \partial_x \varphi^\varepsilon &= \varepsilon t \partial_x (\mathcal{B}(\varphi^\varepsilon, v^\varepsilon) \partial_x \varphi^\varepsilon), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \partial_t v^\varepsilon &= \varepsilon^2 t \partial_{xx} v^\varepsilon, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

où  $\mathcal{B}$  est une matrice de viscosité de taille  $n \times n$ . Cette régularisation parabolique permet aux auteurs de prouver l'existence d'une solution autosemblable du problème de Riemann associé à (1.15), pour des données initiales gauche et droite suffisamment proches dans le cas système [23], et sans hypothèse de proximité dans le cas scalaire [22]. Cette solution est solution entropique de (1.13) sur chaque demi-espace  $\mathcal{D}_G$  et  $\mathcal{D}_D$ .

Dans le cas scalaire, lorsque  $\varphi_G \equiv \varphi_D \equiv Id$ , B. Boutin et ses collaborateurs [24] analysent la structure interne de l'interface de couplage afin de déterminer les conditions de couplage liant les modèles (1.1). A l'aide d'un principe de renormalisation de la solution de (1.16), les auteurs obtiennent une équation caractérisant un profil de couche limite décrivant la transition à l'interface et la possible présence de chocs stationnaires entropiques à l'interface.

Dans [25] et [26], les auteurs proposent un deuxième mécanisme de régularisation basé sur un modèle d'interface épaisse où la fonction couleur  $v$  est choisie régulière. Le modèle construit est un système hyperbolique quasi-linéaire avec des termes sources réguliers ayant la propriété d'être bien posé. Dans le cas scalaire, la reformulation du problème de couplage se fait comme suit. Tout d'abord, en posant

$$A_0(\varphi, v) = \partial_\varphi \mathcal{C}_0(\varphi, v), \quad A_1(\varphi, v) = \partial_\varphi \mathcal{C}_1(\varphi, v), \quad u \in \mathbb{R}, \quad v \in [-1, 1],$$

on réécrit le système augmenté (1.15) sous la forme formellement équivalente

$$\begin{cases} \partial_t \mathcal{C}_0(\varphi, v) + \partial_x \mathcal{C}_1(\varphi, v) &= \partial_v \mathcal{C}_1(\varphi, v) \partial_x v, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ \partial_t v &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \end{cases}$$

En posant

$$\begin{cases} u(x, t) &= \mathcal{C}_0(\varphi(x, t), v(x)), & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ f(u, v) &= \mathcal{C}_1(\varphi(u, v), v), & u \in \mathbb{R}, \quad v \in [-1, 1], \\ l(u, v) &= \partial_v \mathcal{C}_1(\varphi(u, v), v), & u \in \mathbb{R}, \quad v \in [-1, 1], \end{cases}$$

on obtient finalement le modèle régularisé

$$\partial_t u + \partial_x f(u, v) = l(u, v) \partial_x v, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0.$$

Ceci n'est qu'une esquisse de ce qui est développé dans [20, 22, 23, 24, 25, 26]. L'objet du présent travail n'était pas de suivre cette approche.

## 1.3 Contributions et organisation du mémoire

Ce mémoire est constitué de deux parties, chacune faisant l'objet d'un chapitre.

### 1.3.1 Chapitre 2 : Couplage interfacial avec termes sources mesure arbitraires de deux systèmes hyperboliques de lois de conservation de la dynamique des gaz possédant des lois de pression différentes

Dans ce chapitre, nous développons, analysons et implémentons une méthode numérique dédiée au couplage interfacial des équations non linéaires et instationnaires de la dynamique des gaz compressibles (équations d'Euler) en une dimension d'espace. Chacun des systèmes de lois de conservation est muni d'une loi de pression distincte. Cette hypothèse est justifiée par les trois exemples suivants. D'une part, elle permet d'envisager des calculs d'écoulements diphasiques de type liquide-gaz où une phase se comporterait comme un gaz parfait et le liquide comme un gaz raidi. D'autre part, l'étude du couplage de deux systèmes de lois de conservation possédant des flux différents peut permettre de comprendre comment coupler des modèles diphasiques complexes munis de lois de fermetures incompatibles. En effet, pour des raisons intrinsèques à la modélisation physique des écoulements multi-échelles complexes, la hiérarchie de modèles de relaxation utilisés dans la pratique n'est pas toujours en parfaite correspondance : un modèle grossier ne se déduit pas exactement d'un modèle fin par la relaxation d'équations aux dérivées partielles traduisant des déséquilibres associés aux petites échelles. En conséquence, les relations de fermeture algébriques nécessaires à la description des équilibres ne sont pas exactement celles attendues. Notons enfin que cette modélisation est représentative, par exemple, des conditions de température et de pression fortement hétérogènes au sein des turbines multi-étagées des turboréacteurs.

En s'inspirant d'une partie des travaux de thèse de T. Galié [51] (voir aussi l'article [5]), nous modélisons les conditions de transmission par un terme source mesure localisé à l'interface de couplage. Notons que ce type de modélisation avait été utilisé dans le cas scalaire par S. Diehl pour un problème de sédimentation de particules solides dans un liquide [45]. Le poids associé à cette mesure modélise les pertes de conservation localisées sur l'interface de couplage et sa définition permet l'application de plusieurs stratégies de couplage. Le principal objectif de ce chapitre est d'étendre les études menées dans [51, 4, 5] au cas du couplage des équations d'Euler complètes avec énergie en traitant le cas général où tous les termes sources peuvent être non nuls. Cette généralisation permet d'étendre les champs d'applications physiques offerts par cette méthode de couplage.

Nous avons remarqué dans le paragraphe 1.2 que le modèle de couplage avec terme source mesure est constitué d'un flux discontinu par rapport à la variable d'espace (cf. équations (1.11)-(1.4)). A l'heure actuelle, il n'existe pas de théorie montrant le caractère bien posé de ce type de système non linéaire. En revanche, dans le cas scalaire, la nature bien posée de ce type d'équations a été montrée dans [11]. La deuxième particularité du modèle de couplage (1.11)-(1.12) est qu'il est muni d'un terme source géométrique, c'est-à-dire un terme dépendant de la variable d'espace.

L'étude théorique de lois de conservation muni de termes sources non conservatifs modélisant par exemple un écoulement dans une tuyère à section variable a fait l'objet de plusieurs travaux. Sans être exhaustif, nous invitons le lecteur intéressé à lire les articles [13, 45, 59, 70]. Cette présence des termes sources dans les équations de type hyperbolique nécessite des traitements numériques particuliers. Toujours sans être exhaustif, citons les articles [33, 65, 66, 67, 69] et les ouvrages [18] et [68] présentant des techniques numériques permettant de préserver certaines solutions stationnaires.

Nous approchons les solutions du modèle de couplage à l'aide d'une méthode volumes finis de type Godunov. Notre schéma repose sur la considération d'un modèle de relaxation en pression approchant le modèle de couplage (1.11)-(1.12). Ce système de relaxation possède deux propriétés rendant sa résolution aisée. D'une part le flux associé à sa partie convective n'est pas discontinu par rapport à la variable d'espace et d'autre part il est constitué uniquement de champs linéairement dégénérés. Nous profitons de ces avantages pour résoudre exactement le problème de Riemann associé à ce modèle de relaxation. Cette résolution nous permet de construire un schéma numérique précis, robuste, applicable pour des lois de pression générales et préservant les solutions stationnaires du type

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_G & \text{si } (x, t) \in \mathcal{D}_G, \\ \mathbf{u}_D & \text{si } (x, t) \in \mathcal{D}_D, \end{cases}$$

avec

$$\mathcal{M} = \mathbf{f}_D(\mathbf{u}_D) - \mathbf{f}_G(\mathbf{u}_G),$$

et où  $\mathbf{u}_G$  et  $\mathbf{u}_D$  sont des états constants de  $\Omega$ .

Nous proposons trois types de cas tests pour illustrer les propriétés de notre schéma. Dans un premier temps, nous considérons un poids  $\mathcal{M}$  identiquement nul et nous montrons que le vecteur inconnu discret est bien conservé (au zéro machine près) sur tout le domaine spatial d'étude. Ensuite, nous choisissons une définition de  $\mathcal{M}$  permettant d'assurer la continuité des masse volumique, vitesse et pression à l'interface de couplage. En prenant comme condition initiale un profil uniforme en ces variables, nous montrons que notre schéma est bien équilibré au sens où il préserve cette condition initiale. Cela montre en particulier que la condition de couplage (1.12) est très précisément approchée. Enfin, nous résolvons numériquement trois problèmes d'optimisation sous contraintes pour trouver des poids optimaux permettant d'imposer certaines quantités physiques à l'interface de couplage.

### 1.3.2 Chapitre 3 : Erreurs de modélisation et de discrétisation pour l'approximation d'un problème mixte hyperbolique semi-linéaire de relaxation

Des algorithmes d'adaptation pour l'estimation de quantités d'intérêts sont en développement depuis une vingtaine d'années. Ces méthodes permettent de produire des simulations numériques à encombrement mémoire et temps CPU minimaux tout en respectant la tolérance désirée par l'utilisateur. Les fonctions objectifs

représentant par exemple une force ou un moment dépendent des solutions de modèles multi-échelles décrivant l'évolution d'écoulements complexes. Ces écoulements peuvent aussi être modélisés par une hiérarchie de systèmes à coupler. Les méthodes d'adaptation les plus récentes permettent de créer automatiquement une partition du domaine spatial d'étude telle que le modèle optimal et le degré d'approximation numérique sont déterminés localement.

Pour créer de tels algorithmes, il faut savoir développer des schémas numériques où les modèles sont couplés à des ordres de précision arbitrairement élevés. Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à cette problématique dans le cas où les modèles sont liés par un mécanisme de relaxation. Plus précisément, nous avons développé, analysé et implémenté deux schémas numériques pour l'approximation des solutions stationnaires du problème mixte associé au modèle de relaxation de S. Jin et Z. Xin (1.8). Nos discrétisations spatiales sont basées sur la méthode de Galerkin discontinue. Ce type de méthode compacte regroupe plusieurs avantages permettant le développement relativement aisé de stratégies d'adaptation de maillage et d'ordre d'approximation. L'approximation des solutions du problème mixte associé à (1.8) par notre premier schéma numérique fait intervenir uniquement des erreurs de discrétisation tandis que le deuxième schéma est constitué à la fois d'erreurs de modélisation et de discrétisation. L'erreur de modélisation provient du remplacement, dans certaines régions spatiales, de la résolution du modèle de relaxation par celle de l'équation scalaire équilibre associée (1.9). Nous résolvons exactement un problème de Riemann couplé, y compris dans le cas où l'interface de couplage est caractéristique. Cette résolution nous permet de construire un schéma couplé extrêmement précis capturant les éventuelles couches limites formées à l'interface de couplage.

La mise en œuvre de ces schémas nous permet de proposer trois cas tests. Pour apprécier les erreurs de modélisation et de discrétisation, les calculs couplés sont réalisés en faisant varier trois degrés de liberté : le niveau de raffinement de maillage, le degré du polynôme et la position de l'interface de couplage. Dans le premier cas test, le flux  $f$  est linéaire et sa dérivée est strictement négative. Dans le second cas test, le flux est toujours de dérivée strictement négative, mais est non-linéaire. Et enfin dans le dernier cas test, il est non-linéaire avec une dérivée soit strictement négative soit strictement positive ou soit nulle.

### 1.3.3 Publications

Les travaux présentés dans ce manuscrit ont fait l'objet de publications.

- Les travaux du chapitre 2 ont fait l'objet d'un article paru en février 2016 dans la revue *Mathematics of Computation* : F. Coquel, E. Godlewski, K. Haddaoui, C. Marmignon, F. Renac, *Choice of measure source terms in interface coupling for a model problem in gas dynamics*.

Par ailleurs, ils ont fait l'objet d'un poster présenté à la conférence *Model Adaptation and Coupling days* à Paris en décembre 2013 : F. Coquel, E. Godlewski, K. Haddaoui, C. Marmignon, F. Renac, *Interface coupling with measure source terms for gas dynamics conservation laws*.

- Les travaux du chapitre 3 font l'objet d'un article en cours de préparation :

F. Coquel, E. Godlewski, K. Haddaoui, C. Marmignon, F. Renac, *Modeling and discretization errors in the approximation of an initial-boundary value problem associated to a semilinear hyperbolic relaxation system.*

# Chapter 2

## Couplage interfacial avec termes sources mesure arbitraires de deux systèmes hyperboliques de lois de conservation de la dynamique des gaz possédant des lois de pression différentes

### 2.1 Introduction

The study of large-scale and complex problems exhibiting a wide range of physical space and time scales (see for instance [97, 53, 14]), usually requires separate solvers adapted to the resolution of specific scales. This is the case of many industrial flows. Let us quote, for example, the numerical simulation of two-phase flows applied to the burning liquid oxygen-hydrogen gas in rocket engines [88]. This kind of flow contains both separated and dispersed two-phase flows, due to atomization and evaporation phenomena. This requires appropriate models and solvers for separated and dispersed phases that have to be appropriately coupled. Another example concerns turbomachine flows which can be modeled by the Euler equations of gas dynamics with different closure laws between the stages of the turbine, where the conditions of temperature and pressure are strongly heterogeneous. The coupling of these different systems is thus necessary to give a complete description of the flow inside the whole turbine.

The method of interface coupling allows to represent the evolution of such flows, where different models are separated by fixed interfaces. First, coupling conditions are specified at the interface to exchange information between the systems. The definition of transmission conditions generally results from physical consideration, *e.g.* the conservation or the continuity of given variables. Then, the transmission conditions are represented at the discrete level. The study of interface coupling for nonlinear hyperbolic systems has received attention for several years. In [64], the authors study the scalar case from both mathematical and numerical points of view.

They couple two different one-dimensional conservation laws at a fixed interface. The case of system has been considered in [61], where admissible coupling conditions are defined at the interface. Indeed, since the systems we consider are hyperbolic, the boundary conditions must be imposed in a weak sense [46].

From previous studies, coupling conditions [64, 61, 10, 6, 71, 72, 7, 4, 60, 8, 73, 35, 20, 51, 85] can be classified in three categories: flux coupling, state coupling and coupling with measure source term. The flux coupling method is a conservative approach which ensures the continuity of the physical flux through the coupling interface. Conversely, the state coupling method is a non-conservative approach which imposes (at least weakly) the continuity property of either the (conservative) variables or a nonlinear transformation of them (say, primitive variables). Finally, the coupling condition can be modelled thanks to a bounded vector-valued Dirac measure concentrated at the coupling interface [61, 4, 5, 51]. The coupling condition is then prescribed from the definition of the mass of the measure. This modelling presents several advantages. It allows the consideration of both conservative and state couplings. Moreover, it enables the control of the coupling conditions by taking into account the mass, momentum or energy losses located through the discontinuity.

In this study, we focus on a model case which concerns the coupling of gas dynamics equations with different closure laws for the pressure. We propose an extension of the works [4, 51, 5] to the full Euler system (with energy) in the general case where all the source terms may be non zero. Indeed, in these previous contributions, the authors assumed the strict conservation of the density. The motivation of this present study is to extend the panel of applications, and the computations we present do involve test cases involving the energy equation which could not be covered in the previous work. These test cases are motivated by the applications among which the modeling of some sophisticated control devices meant to protect instruments from damages due to overheating. A few references on discharge relationships and component head losses for hydraulic structures or the modeling of pressure drop are already given in [5](see references [31, 51, 57, 58] therein). Some devices for the flow control involve the momentum and impact the energy conservation, note however that the topic of flow control is much broader and the simple models we are considering are but a small step in this direction for improving the simulation (see [49, 50] concerning aerospace for instance). One may also mention in the context of oil recovery the possibility of drawing out and reinjecting elsewhere a certain amount of gas (which is referred to as gas-lift and active bypass, see [47]), in order to prevent severe slugging, and this may be modeled as point losses in the mass conservation equation.

Indeed, an important remark is that the above mentioned devices are localized and small with respect to some characteristic length of the flow. Hence, in the modeling of the situation by a system of PDE, a natural scaling of the equations yields a point source at the interface, which means a multiple of a Dirac measure, classically placed at the origin. Following [58, 57], this can be interpreted as a scattering problem, with nonlinear waves interacting on a scale large compared to the scale of the interface which is then considered as infinitely thin.

Then, as explained in [58], the solution of the Riemann problem for the let us say simplified scaled model gives to the leading order the large time behavior of the full

system with unscaled source. Thus, the study of Riemann problems comes naturally from the study of the interaction of nonlinear localized waves, and following this scattering setting, the Riemann solution represents the outgoing wave operator.

We show that the present framework is fairly flexible. In particular, it allows to handle coupling problems constrained by the property that the Riemann solutions should keep their values in a given set while minimizing some convex nonlinear cost functions built on the source terms at the interface. These cost functions are defined by physical motivations.

Before we conclude this introduction, let us mention some very interesting works which, by some aspects, are strongly related to the present one. Interface coupling is clearly related to the study of conservation laws with discontinuous fluxes. In the scalar case, it is possible to give a rigorous framework in which existence and uniqueness results hold [11]. Then, singular source terms appear in different contexts which may correspond either to some (more or less) physical modelling as in [45] or [12, 13] or to numerical devices. Indeed, measure source terms are naturally introduced in many approaches for the construction of well balanced schemes for hyperbolic systems with geometric source terms [66] and, in turn, there is a natural link with the analysis of resonant systems [59] (and references therein). If general theoretical existence and uniqueness results may be obtained in the scalar case, for instance  $L^1$  stability results in the non resonant case [70] or partial results in the resonant case [2], also for the existence of traces [98, 77], it is beyond the scope of the present work to give a rigorous notion of solution and well-posedness for the general coupling Cauchy problem in the case of systems. We rather focus on the solution of Riemann problems with coupling, which as mentioned above do represent at some scale wave the result of nonlinear wave interactions and moreover are naturally involved in the numerical approach, and on the optimization of source terms. Last, even if the link is not yet as close with interfacial coupling as the above subjects are, we should however mention the control of nonlinear hyperbolic systems [31] a subject appearing naturally with flow in networks [3].

The paper is organized as follows. The coupling problem is introduced in §2.2. The numerical approach to solve this coupling problem is described in §2.3. The method we consider relies on a relaxation approximation which is presented before the associated Riemann problem is solved. Then the source terms are chosen in order to preserve steady solutions of the coupled problem. Strategies for the dynamic evaluation of the source terms satisfying various criteria are then given. Several numerical experiments based on Riemann problems associated to the coupling model are then described in §2.4. Finally, the last section summarizes the conclusions of this study.

## 2.2 Coupling with measure source term

### 2.2.1 Physical problem and governing equations

We focus on the one-dimensional problem of interface coupling between two hyperbolic systems of conservation laws. More precisely, we consider the systems of Euler equations that model the flow of a compressible polytropic ideal gas. Both

models are separated in space by a thin interface localized at  $x = 0$  and differ from their definition of the pressure. The flow is described by a system  $\mathcal{S}_L$  in the left domain  $\mathcal{D}_L = \{x < 0, t > 0\}$  and by a system  $\mathcal{S}_R$  in the right domain  $\mathcal{D}_R = \{x > 0, t > 0\}$ . We look for a function  $\mathbf{u} : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbf{u}(x, t) \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ , solution of:

$$\mathcal{S}_L : \quad \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_L(\mathbf{u}) = 0, \quad (x, t) \in \mathcal{D}_L, \quad (2.1a)$$

$$\mathcal{S}_R : \quad \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}_R(\mathbf{u}) = 0, \quad (x, t) \in \mathcal{D}_R, \quad (2.1b)$$

with initial condition

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

The conservative variable vector and smooth flux functions are defined by:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \mathbf{f}_\alpha(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p_\alpha(\tau, \varepsilon) \\ \rho E u + p_\alpha(\tau, \varepsilon) u \end{pmatrix}, \quad \alpha = L, R.$$

The variables  $\rho$ ,  $\tau = 1/\rho$  and  $\varepsilon = \varepsilon(\tau, s)$  stand for the density, the specific volume and the specific internal energy of the gas, respectively, where  $s$  denotes the physical entropy. The variable  $u$  denotes the velocity and  $E = \varepsilon + u^2/2$  the specific total energy.

The thermodynamic variables are related by two ideal gas equations of state

$$p_\alpha(\tau, \varepsilon) = \frac{(\gamma_\alpha - 1)\varepsilon}{\tau}, \quad \alpha = L, R, \quad (2.2)$$

where  $\gamma_L$  and  $\gamma_R$  denote the respective ratio of specific heats (satisfying  $\gamma_\alpha > 1$ ). Introducing the sound speed in the fluid

$$c_\alpha = c_\alpha(\tau, s) = \sqrt{\frac{\gamma_\alpha p_\alpha}{\rho}}, \quad \alpha = L, R, \quad (2.3)$$

the pressure laws are assumed to verify the following inequalities

$$p_\alpha > 0, \quad \left( \frac{\partial p_\alpha}{\partial \tau} \right)_s = -\rho^2 c_\alpha^2 < 0, \quad \left( \frac{\partial^2 p_\alpha}{\partial \tau^2} \right)_s > 0, \quad \alpha = L, R, \quad (2.4)$$

for all  $\rho > 0$  and all  $s$  in  $\mathbb{R}$ .

The systems  $\mathcal{S}_L$  and  $\mathcal{S}_R$  are strictly hyperbolic over the following set of states

$$\Omega = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0, u \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0 \}.$$

More precisely, for  $\alpha = L, R$ , the system  $\mathcal{S}_\alpha$  admits the three following eigenvalues

$$\lambda_1^\alpha(\mathbf{u}) = u - c_\alpha, \quad \lambda_2^\alpha(\mathbf{u}) = u, \quad \lambda_3^\alpha(\mathbf{u}) = u + c_\alpha,$$

which are real and distinct. The characteristic field associated with  $\lambda_2^\alpha$  is linearly degenerate, while the characteristic fields associated with  $\lambda_1^\alpha$  and  $\lambda_3^\alpha$  are genuinely nonlinear.

### 2.2.2 Coupling model

Following [4, 5], and [51], we propose here to model the coupling between systems (2.1) thanks to a bounded vector-valued Dirac measure concentrated at the coupling interface  $x = 0$ . Let us consider an application of the form  $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathcal{M}(t) = (\mathcal{M}_\rho(t), \mathcal{M}_{\rho u}(t), \mathcal{M}_{\rho E}(t))^T \in \mathbb{R}^3$ ; we then look for a solution to the following initial value problem

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \mathcal{M}(t) \delta_{x=0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.5b)$$

where  $\delta_{x=0}$  denotes the Dirac delta function. The components of  $\mathcal{M}$  represent respectively the losses of mass, momentum and energy through the coupling interface. The discontinuous flux function introduced in (2.5a) is defined by:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}, x) = \begin{cases} \mathbf{f}_L(\mathbf{u}), & x < 0, \\ \mathbf{f}_R(\mathbf{u}), & x > 0, \end{cases}$$

where the flux depends on  $x$  through the pressure law

$$p(\tau, \varepsilon, x) = \begin{cases} p_L(\tau, \varepsilon), & x < 0, \\ p_R(\tau, \varepsilon), & x > 0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Using standard arguments (see for instance [62]), any solution to the coupling problem (2.5) is subject to the following coupling conditions through the interface:

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}(0^+, t)) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}(0^-, t)) = \mathcal{M}(t), \quad t > 0, \quad (2.7)$$

where  $\mathbf{u}(0^-, t)$  and  $\mathbf{u}(0^+, t)$  denote the left and right traces of the solution  $\mathbf{u}$  at time  $t$ . This model allows the application of various coupling strategies. Indeed, the weight  $\mathcal{M}(t)$  can be seen as a user parameter, whose definition results generally from physical motivations. For instance, the definition of a weight  $\mathcal{M} \equiv 0$  allows to ensure the conservation of  $\mathbf{u}$  over the whole space domain. Conversely, a state coupling method with transmission of a set of variables may lead to the definition of a non zero weight. Given an admissible change of variables  $\mathbf{v} = \varphi_\alpha(\mathbf{u})$ ,  $\alpha = L, R$ , the state  $\mathbf{v}$  can be transmitted through the coupling interface by setting  $\varphi_L(\mathbf{u}(0^-, t)) = \varphi_R(\mathbf{u}(0^+, t))$ ,  $t > 0$  (see [8] for more details). For example, the transmission of primitive variables  $\rho$ ,  $u$  and  $p$  through this interface results from  $\varphi_\alpha(\rho, \rho u, \rho E) := (\rho, u, p_\alpha(\tau, \varepsilon))$ ,  $\alpha = L, R$ . The present contribution investigates the general case where all the weights may be non zero.

Note that (2.5a) can be written equivalently

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}, H) - \mathcal{M}(t) \partial_x H = \mathbf{0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \partial_t H = 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

where  $H = H_{x=0}$  is the Heaviside function and  $\mathbf{F}(\mathbf{u}, H) = (1 - H)\mathbf{f}_L(\mathbf{u}) + H\mathbf{f}_R(\mathbf{u})$ . Thus we get a non conservative system in variables  $(\mathbf{u}, H)$ , for which the initial data is (2.5b) for  $\mathbf{u}$  augmented by  $H(x, 0) = H(x)$ . The matrix of (2.8) writes

$$M(\mathbf{u}, H) = \begin{pmatrix} \partial_{\mathbf{u}} \mathbf{F} & \mathbf{f}_R - \mathbf{f}_L - \mathcal{M}(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

with  $\partial_{\mathbf{u}}\mathbf{F}(\mathbf{u}, H) = (1 - H)\mathbf{f}'_L(\mathbf{u}) + H\mathbf{f}'_R(\mathbf{u})$ . This shows clearly that the presence of the measure source terms adds to the initial waves, associated to the eigenvalues of  $\mathbf{f}'_{L/R}(\mathbf{u})$ , a stationary discontinuity at  $x = 0$ . The system is resonant if a genuinely nonlinear field (thus associated to an acoustic wave) superimposes this discontinuity, we will thus restrict ourselves to the study of subsonic flows; this assumption prevents this resonance phenomenon which brings non uniqueness.

## 2.3 Numerical method

The numerical method we present will eventually result in a classical algorithm which can be implemented as section 2.4 proves. It is however interesting to understand the main elements which guided us to its derivation, since the scheme properties are obviously inherited from this construction.

### 2.3.1 Relaxation approximation

We are interested in solving numerically (2.5). In the context of finite volume methods, the Godunov method requires the exact solution of Riemann problems associated to (2.5) and may be expensive because of the presence of nonlinearities due to the pressure law. The relaxation approach we will follow is an attempt to reduce the computational cost, still involving the Godunov method but on a simpler system approximating (2.5). It consists in the construction of a linear or quasilinear enlarged system, with only linearly degenerate fields, involving a source term which ensures that, in the regime of large values of a relaxation parameter  $\lambda > 0$ , the solution of this system converges to the solution of the original system. We refer the reader to [82, 36, 19] for discussions on the relaxation approach in the approximation of hyperbolic systems of conservation laws, [75, 18] for relaxation numerical methods in a general setting, or [32, 34, 39, 40, 42, 96, 94, 9] for precise examples in the context of fluid flows.

Let us introduce the following system

$$\partial_t \mathbf{U}_\lambda + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}_\lambda) = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{U}_\lambda, x) + \widetilde{\mathcal{M}}(t) \delta_{x=0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2.9)$$

with

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \pi \\ \rho E u + \pi u \\ \rho \pi u + a^2 u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}(\mathbf{U}, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \rho(p(\tau, \varepsilon, x) - \pi) \end{pmatrix}, \quad \widetilde{\mathcal{M}}(t) = \begin{pmatrix} \mathcal{M}(t) \\ \mathcal{M}_{\rho\pi}(t) \end{pmatrix},$$

where  $a > 0$  is a given constant which will be specified below. We have introduced a new variable  $\pi$  which can be seen as a linearization of the original pressure  $p$  and is called the relaxed pressure; in the source term  $\mathcal{R}$ , the pressure  $p$  is defined by (2.6). With some abuse of notation, we note  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}, \rho\pi)$  (the rigorous notation should be  $\mathbf{U} = (\mathbf{u}^T, \rho\pi)^T$ ), the vector of variables  $\mathbf{U}$  is assumed to be defined on the set of states  $\Omega^r = \Omega \times \mathbb{R}$  and we introduce  $\Pi$  the projection operator  $\Pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  such that  $\Pi \mathbf{U} = \mathbf{u}$ . Formally, we can observe that the projection  $\Pi \mathbf{U}_\lambda$  of the solution of

the relaxation system (2.9) converges to a solution of the original system (2.5) (this last system is thus called the *equilibrium* system) when the relaxation parameter  $\lambda$  goes to infinity since the fourth equation in (2.9) imposes

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \pi_\lambda = p,$$

(at least formally).

The time dependent weight  $\mathcal{M}_{\rho\pi}(t) \in \mathbb{R}$  corresponds to a new degree of freedom and will be defined later on.

For ease of notation, we now omit the subscript  $\lambda$ . The homogeneous system (2.9) with  $\lambda = 0$  and  $\widetilde{\mathcal{M}} \equiv 0$  is hyperbolic on  $\Omega^r$  and possesses the eigenvalues

$$\lambda_1^r(\mathbf{U}) = u - a\tau, \quad \lambda_2^r(\mathbf{U}) = u, \quad \lambda_3^r(\mathbf{U}) = u + a\tau,$$

where the eigenvalue  $\lambda_2^r$  is double. All the characteristic fields associated with these eigenvalues are linearly degenerate. As seen when writing system (2.8), the presence of the source term in (2.9) results in an additional stationary discontinuity, which, with some abuse, we also call a contact wave with speed  $\lambda_0^r(\mathbf{U}) = 0$  located at the coupling interface. The coefficient  $a$  has the dimension of a Lagrangian sound speed, and appears as a linearization of  $\rho c$ . In order to prevent system (2.9) from instabilities in the regime of large values of  $\lambda$ , this coefficient  $a$  must verify the so-called subcharacteristic condition

$$a > \max(\rho c_\alpha), \quad \alpha = L, R, \quad (2.10)$$

for all the states under consideration. This condition expresses the interlacing of the eigenvalues of the relaxation and equilibrium systems  $u - \tau a < u - c_\alpha < u < u + c_\alpha < u + \tau a$ . We refer the reader to [19] for a rigorous study of stability conditions.

Any solution to (2.9) with initial condition (and a finite relaxation rate  $\lambda > 0$ ), is subject to the following coupling condition through the coupling interface

$$\mathbf{F}(\mathbf{U}(0^+, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(0^-, t)) = \widetilde{\mathcal{M}}(t), \quad t > 0. \quad (2.11)$$

Finally, note that the flux  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  in (2.9) is now globally defined and does not depend on the space variable, contrary to the flux  $\mathbf{f}(\mathbf{u}, x)$  in (2.5).

### 2.3.2 The main features of the scheme

The approach we follow involves an enlarged system (2.9) with two different source terms. The first one corresponds to relaxation and the second one to the original point source term. The items are linked in that the relaxation procedure is introduced as a practical mean to ensure the well balanced property, i.e., to preserve the stationary solutions associated to the point source. However, the two source terms are not treated in the same way in the time discretization which involves a time splitting technique.

Let  $\Delta t$  be a time step, and set  $t^{(n)} = n\Delta t$ ,  $n \geq 0$ . Using a time splitting technique, the first step concerns an enlarged system, one solves (2.9) with  $\lambda = 0$  on an interval of length  $\Delta t$ , say  $]t^{(n)}, t^{(n+1)}]$ , which allows solutions away from equilibrium but

ensures the well balanced property. Relaxation towards equilibrium is performed instantaneously in a second step, which amounts to solve

$$\partial_t \mathbf{U}_\lambda = \lambda \mathcal{R}(\mathbf{U}_\lambda, x) \quad (2.12)$$

on  $]t^{(n)}, t^{(n+1)}]$ , starting with the data, noted  $\mathbf{U}_\lambda(t^{(n+1)-})$ , given by the solution of the first step at time  $t^{(n+1)}$ , and let  $\lambda \rightarrow \infty$ . In the time discretization of this step, we use a simple implicit Euler method, so that  $\mathbf{u}_\lambda(t^{(n+1)}) = \mathbf{u}_\lambda(t^{(n+1)-})$  and as  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\rho(p - \pi)(t^{(n+1)}, x) \rightarrow 0$ .

For our fully discrete scheme, in which well balanced and time stepping techniques complete each other, several ingredients are needed, they are described precisely in the following subsections. Let us make first two comments ((i) and (ii) below) because the similarity between the two source terms, similarity pointed out in [66], may however introduce some confusion. Indeed, the treatment of the relaxation source term (in the limit  $\lambda \rightarrow \infty$ ) is responsible for discontinuity in the approximate solution at each time  $t^{(n+1)-}$ . While the well balanced property is achieved on the ground of a geometric source term taking the form of a Dirac measure in space. We detail these points in paragraph (ii). Moreover, both relaxation and point source terms involve some notions of *equilibria*. We must however distinguish the underlying notions which we do in the following lines.

- (i) Concerning relaxation, the first notion of equilibrium refers to instantaneous relaxation. The formal limit, letting the relaxation time  $\lambda^{-1}$  goes to 0 in (2.9), yields the *equilibrium system* (2.5). Associated to this latter system are the equilibria states  $\mathbf{U}^{eq} = (\mathbf{u}, \rho p)$ . This naturally defines an operator  $\mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}^{eq}$  which we note  $\mathcal{E}$ . This operator is involved in the second step of the splitting method and precised in section 2.3.4.

The second notion of equilibrium refers to the well balanced property, which is often defined as *preserving equilibria*. In this context, equilibria are thus stationary solutions of the PDE with point source (cf. Definition 2.3.1 below). They are analyzed in section 2.3.5.

- (ii) The treatment of the relaxation source term by a time splitting procedure is responsible for a discontinuity wrt. the time variable, for all  $x \in \mathbb{R}$ . Indeed, following L. Gosse in [67] (who refers to a prior work by F. Bouchut [17]), the classical time-splitting discretization of (2.9) leads to write

$$\partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \sum_{n>0} \left( \mathcal{E}(\mathbf{U}^{(n)-}) - \mathbf{U}^{(n)-} \right) \delta_{t=t_n} + \widetilde{\mathcal{M}}(t) \delta_{x=0}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (2.13)$$

where  $\delta_{t=t^{(n)}}$  denotes the Dirac measure at point  $t^{(n)}$ , acting on functions of the time variable. We have noted  $\mathbf{U}^{(n)-} = \mathbf{U}(\cdot, t^{(n)-})$  the limit of  $\mathbf{U}(\cdot, t)$  as  $t \rightarrow t^{(n)}$ , with  $t < t^{(n)}$ . The added delta measure terms may be seen as coming from the discretization of the time variable, approximating  $t$  by a step function equal to  $t^{(n)}$  on  $]t^{(n)}, t^{(n+1)}]$ . This amounts to approximate  $1 = \partial_t t$  by a sum  $\Delta t \sum_n \delta_{t=t^{(n)}}$  of Dirac measures at points  $t^{(n)}$  with weight  $\Delta t$ . This approximation mimicks the pioneering approach of [69] for the derivation of well balanced schemes. Note that the approach in [69] considered an equation with geometric source term, which thus concerned the space variable. Then, the discretization of the singular relaxation source term  $\lambda \mathcal{R}(\mathbf{U})$  in the limit  $\lambda \rightarrow \infty$  takes the form  $\sum_{n>0} \left( \mathcal{E}(\mathbf{U}^{(n)-}) - \mathbf{U}^{(n)-} \right) \delta_{t=t_n}$ . Formally,

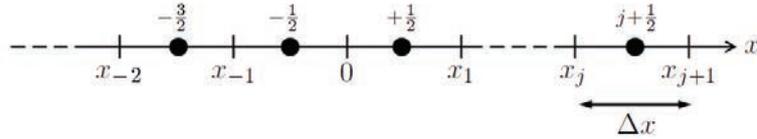


Figure 2.1 – Space mesh.

in the numerical treatment of (2.12), the relaxation time  $\frac{1}{\lambda}$  is replaced by a time step  $\Delta t$ .

We now give the great lines of our fully discretized numerical method. In the above described time splitting algorithm, only the first step needs a space discretization. We use a Godunov type scheme with an exact Riemann solver for the enlarged system ((2.9) with  $\lambda = 0$ ) which is introduced in section 2.3.3. Thus we need to solve the Riemann problem, which is performed in section 2.3.6 (uniqueness requires we are away from resonance, a condition which is fulfilled by assuming that the flow is subsonic). We will see that adding the energy equation, while assuming non zero weights, renders the computations trickier than in [5]. The relaxation procedure adds a weight  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$  which may be chosen (see section 2.3.7) in order to preserve stationary solutions (defined in section 2.3.5).

### 2.3.3 Godunov-type scheme

We aim at solving numerically the coupling problem (2.5) by a finite volume method, and first introduce some notations. Let  $\Delta x$  be the space step which we take uniform for simplicity. The nodes of the spatial mesh are defined by  $x_{j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})$ ,  $j \in \mathbb{Z}$  where the points  $x_j = j\Delta x$  correspond to the interfaces between elements  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}} = (x_j, x_{j+1})$ . The coupling interface is located in  $x_0 = 0$  and the points  $x_j$  are in the left (resp. right) domain if  $j < 0$  (resp.  $j > 0$ ) (see figure 2.1).

At each time step  $t^{(n)}$ , we look for a piecewise constant numerical solution  $\mathbf{u}_\Delta(x, t^{(n)})$  of the form:

$$\mathbf{u}_\Delta(x, t^{(n)}) = \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^{(n)}, \quad \forall x \in \mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}.$$

For  $t = 0$ , the initial condition reads

$$\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^{(0)} = \frac{1}{\Delta x} \int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{u}_0(x) dx, \quad \forall j \in \mathbb{Z}.$$

For simplicity, we consider a three point finite volume scheme of the form:

$$\mathbf{u}_{j-\frac{1}{2}}^{(n+1)} = \mathbf{u}_{j-\frac{1}{2}}^{(n)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (\mathbf{g}_L)_j^n - (\mathbf{g}_L)_{j-1}^n \right), \quad j \leq 0, \quad (2.14)$$

$$\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^{(n+1)} = \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^{(n)} - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( (\mathbf{g}_R)_{j+1}^n - (\mathbf{g}_R)_j^n \right), \quad j \geq 0, \quad (2.15)$$

where the numerical flux

$$(\mathbf{g}_\alpha)_j^n = \mathbf{g}_\alpha \left( \mathbf{u}_{j-\frac{1}{2}}^{(n)}, \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^{(n)} \right), \quad \alpha = L, R,$$

corresponds to a consistent approximation of the exact flux  $\mathbf{f}_\alpha$  and is obtained by an approximate Riemann solver. In order to construct this solver, we use the relaxation approach and consider system (2.9). At each time iteration, Riemann problems must be considered:

— a Riemann problem defined at any internal interface  $x_j$ ,  $j \neq 0$ :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0, & \forall x \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}), \quad t \in (t^{(n)}, t^{(n+1)}], \\ \mathbf{U}(x, t^{(n)}) = \begin{cases} \mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{(n)}, & x < x_j, \\ \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{(n)}, & x > x_j, \end{cases} \end{cases}$$

— a Riemann problem with source term at the coupling interface  $x_0 = 0$ :

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \widetilde{\mathcal{M}}^{(n)} \delta_{x=0}, & \forall x \in (x_{-\frac{1}{2}}, x_{+\frac{1}{2}}), \quad t \in (t^{(n)}, t^{(n+1)}], \\ \mathbf{U}(x, t^{(n)}) = \begin{cases} \mathbf{U}_{-\frac{1}{2}}^{(n)}, & x < 0, \\ \mathbf{U}_{+\frac{1}{2}}^{(n)}, & x > 0, \end{cases} \end{cases}$$

where  $\widetilde{\mathcal{M}}^{(n)}$  denotes some consistent discretization of  $\frac{1}{\Delta t} \int_{t^{(n)}}^{t^{(n+1)}} \widetilde{\mathcal{M}}(s) ds$ , the average weight on  $(t^{(n)}, t^{(n+1)})$ . In the above Riemann problems, for both cases we have defined the data  $\mathbf{U}_{j\pm\frac{1}{2}}^{(n)}$  as:

$$\mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{(n)} = \left( \mathbf{u}_{j-\frac{1}{2}}^{(n)}, \rho_{j-\frac{1}{2}}^{(n)} p_L \left( \tau_{j-\frac{1}{2}}^{(n)}, \varepsilon_{j-\frac{1}{2}}^{(n)} \right) \right) \quad \text{if } j \leq 0, \quad (2.16)$$

$$\mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{(n)} = \left( \mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^{(n)}, \rho_{j+\frac{1}{2}}^{(n)} p_R \left( \tau_{j+\frac{1}{2}}^{(n)}, \varepsilon_{j+\frac{1}{2}}^{(n)} \right) \right) \quad \text{if } j \geq 0, \quad (2.17)$$

which means we have completed the state  $\mathbf{u}_{j\pm\frac{1}{2}}^{(n)}$  by a relaxed pressure at equilibrium, so that all the data  $\mathbf{U}_{k+\frac{1}{2}}^{(n)}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  are at equilibrium.

### 2.3.4 Details of the time splitting method

In order to define the piecewise constant  $\mathbf{u}_\Delta(x, t^{(n)}) = (\rho_\Delta, \rho u_\Delta, \rho E_\Delta)^T$  approximating the solution of (2.5) at time  $t^{(n+1)}$ , we proceed in two steps.

— *First step: evolution in time* ( $t^{(n)} \rightarrow t^{(n+1)-}$ ). We solve numerically the system (2.9) with  $\lambda = 0$ . In this first step, we consider the Cauchy problem

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \widetilde{\mathcal{M}}^{(n)} \delta_{x=0}, & x \in \mathbb{R}, \quad t \in (t^{(n)}, t^{(n+1)}], \\ \mathbf{U}(x, t^{(n)}) = \mathbf{U}_\Delta(x, t^{(n)}), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.18)$$

with

$$\mathbf{U}_\Delta(x, t^{(n)}) = (\mathbf{u}_\Delta(x, t^{(n)}), (\rho\pi)_\Delta(x, t^{(n)})), \quad (2.19)$$

and where  $\rho\pi$  verifies the equilibrium condition

$$(\rho\pi)_\Delta(x, t^{(n)}) = \rho_\Delta(x, t^{(n)}) p(\tau_\Delta(x, t^{(n)}), \varepsilon_\Delta(x, t^{(n)}), x).$$

The exact solution to (2.18) is obtained by juxtaposition of the solutions of the local Riemann problems set at each interface separating two adjacent

elements. These solutions do not interact during the period  $\Delta t$  if the space and time steps are linked by the usual Courant-Friedrich-Lewy condition:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{\mathbf{U}} |\lambda_i^r(\mathbf{U})| < \frac{1}{2}, \quad i = 0, 1, 2, 3, \quad (2.20)$$

where the maximum is taken over all the states  $\mathbf{U}$  under consideration. We note  $\mathbf{U}(x, t^{(n+1)-})$  the solution obtained at the end of this step.

- *Second step: instantaneous relaxation* ( $t^{(n+1)-} \rightarrow t^{(n+1)}$ ). In this step, we solve the following initial value problem:

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} &= \lambda \mathcal{R}(\mathbf{U}, x), & x \in \mathbb{R}, \quad t \in (t^{(n)}, t^{(n+1)}], \\ \mathbf{U}(x, t^{(n)}) &= \mathbf{U}_\Delta(x, t^{(n+1)-}), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.21)$$

in the asymptotic regime  $\lambda \rightarrow \infty$ . This amounts to impose that the function

$$\mathbf{U}_\Delta(x, t^{(n+1)}) = (\mathbf{u}_\Delta(x, t^{(n+1)}), (\rho\pi)_\Delta(x, t^{(n+1)})), \quad (2.22)$$

has the following components

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\Delta(x, t^{(n+1)}) &= \mathbf{u}_\Delta(x, t^{(n+1)-}), \\ (\rho\pi)_\Delta(x, t^{(n+1)}) &= \rho_\Delta(x, t^{(n+1)-}) p(\tau_\Delta(x, t^{(n+1)-}), \varepsilon_\Delta(x, t^{(n+1)-}), x). \end{aligned}$$

As usual these two steps are followed by a projection of  $\mathbf{u}_\Delta(x, t^{(n+1)})$  on piecewise constant functions in order to define  $\mathbf{u}_{j+\frac{1}{2}}^{(n+1)}$ .

### 2.3.5 Equilibrium solutions

Following [51], given a weight  $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho E})^T$ , we look for a definition of the weight  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$  such that the above relaxation approach preserves the stationary solutions of the original coupling problem (2.5) in the sense of the following definition.

**Definition 2.3.1.** *Let  $\mathcal{M} = (\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho E})^T$  be a constant weight and  $\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R$  two constant states belonging to the space of states  $\Omega$  such that*

$$\mathbf{f}_R(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}_L(\mathbf{u}_L) = \mathcal{M}. \quad (2.23)$$

*Then, the function defined by*

$$\mathbf{u}(x, t) = \begin{cases} \mathbf{u}_L, & x < 0, t > 0, \\ \mathbf{u}_R, & x > 0, t > 0, \end{cases}$$

*is called an equilibrium solution for the original coupling problem (2.5).*

Let us note that the stationary solutions of the coupled Riemann problem are an important tool in the study of solutions to conservation laws with discontinuous flux since they play the role of constants in the classical situation of a smooth flux (see [11] and references therein) and can thus be used in Kruzhkov type entropies; they are called *elementary solutions* and the set of such states gives birth to the

notion of *germs*. The theory for systems with discontinuous flux is not as complete. However, the above definition is a natural extension to systems with source term (hence to the non-conservative problem (2.5)). We will require our scheme to be *well balanced* in the sense that it should preserve these equilibria (we refer to [33] for some general considerations on well balanced simple scheme). For a conservative system with a continuous flux, constants are elementary solutions, a conservative scheme with consistent flux preserves constant states. One simply imposes that there is only one numerical flux at each interface, and that this flux coincides with the exact flux if the states on each side are equal.

### 2.3.6 Riemann problem associated to the relaxation system

The first step of the splitting procedure in §2.3.4 requires the solution to the Riemann problem associated to the system (2.9) with  $\lambda = 0$ . In this paper, we restrict ourselves to the study of subsonic flows. Given two subsonic constant states  $\mathbf{U}_L$  and  $\mathbf{U}_R$  in  $\Omega^r$ , we solve the following initial value problem

$$\begin{cases} \partial_t \mathbf{U} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{U}) &= \widetilde{\mathcal{M}} \delta_{x=0}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \mathbf{U}(x, 0) &= \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0, \\ \mathbf{U}_R, & x > 0, \end{cases} \end{cases} \quad (2.24)$$

together with the coupling condition (2.11), where  $\widetilde{\mathcal{M}}$  does not depend on time to ensure self similarity in the solution.

The solution to (2.24) contains only contact discontinuities since all the fields associated with the eigenvalues of the system (2.9) (with  $\lambda = 0$ ) are linearly degenerate. Moreover, the Whitham condition (2.10) associated to the subsonic flow hypothesis lead us to consider two wave structures for the solution to (2.24). As shown in figure 2.2, the intermediate states are denoted  $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_-, \mathbf{U}_+, \mathbf{U}_R$  when  $\lambda_2^r < 0$  and  $\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_-, \mathbf{U}_+, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_R$  when  $\lambda_2^r > 0$ . In particular, we note  $\mathbf{U}_\pm$  the traces  $\mathcal{W}(0\pm; \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R, \widetilde{\mathcal{M}})$  at the interface  $x = \lambda_0^r = 0$ . In order to respect these structures, the weights  $\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho E}$  and  $\mathcal{M}_{\rho \pi}$  must be defined in an admissibility domain  $\mathcal{D}_{adm}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \mathcal{D}_{adm}^-(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \cup \mathcal{D}_{adm}^+(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ . The definition of this domain is linked to the fact that, on the one hand, these weights must respect the subsonic structure of the solution and, on the other hand, the states are constrained to remain in the space of states  $\Omega^r$ . More precisely, using obvious notations for the components of the intermediate states, we define implicitly the admissible sets by

$$\mathcal{D}_{adm}^- = \left\{ \widetilde{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^4 : (\lambda_1^r, -\tau_1, u_-, -\tau_-, -\tau_+, -\lambda_3^r, -\varepsilon_1, -\varepsilon_-, -\varepsilon_+) (\widetilde{\mathcal{M}}) < 0 \right\}, \quad (2.25)$$

$$\mathcal{D}_{adm}^+ = \left\{ \widetilde{\mathcal{M}} \in \mathbb{R}^4 : (\lambda_1^r, -\tau_3, -u_+, -\tau_-, -\tau_+, -\lambda_3^r, -\varepsilon_3, -\varepsilon_-, -\varepsilon_+) (\widetilde{\mathcal{M}}) < 0 \right\}. \quad (2.26)$$

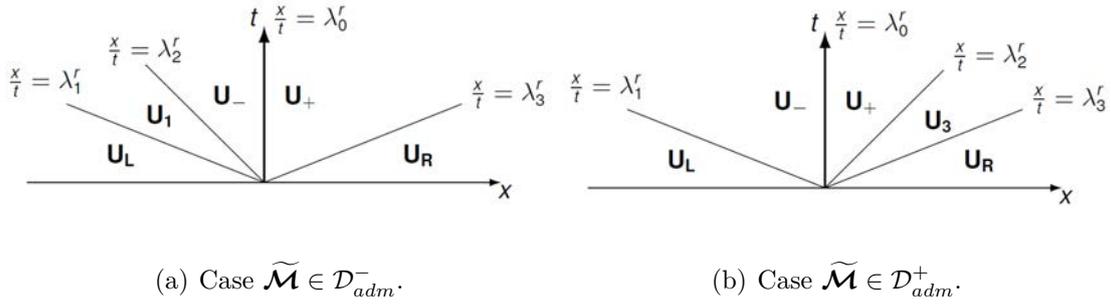


Figure 2.2 – The two possible wave structures of the solution of the Riemann problem (2.24).

Let us introduce the following intermediate states:

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{1}{2}(u_L + u_R) - \frac{1}{2a}(\pi_R - \pi_L), & \tau_L^* &= \frac{1}{a}(u^* - \lambda_1^r(\mathbf{U}_L)), & \rho_L^* &= \frac{1}{\tau_L^*}, \\ \pi^* &= \frac{1}{2}(\pi_L + \pi_R) - \frac{a}{2}(u_R - u_L), & \tau_R^* &= \frac{1}{a}(\lambda_3^r(\mathbf{U}_R) - u^*), & \rho_R^* &= \frac{1}{\tau_R^*}, \end{aligned}$$

and define the mass flows  $m_{\pm} := \rho_{\pm} u_{\pm}$  through the coupling interface. We also adopt the notation  $w_1 = u + \frac{\pi}{a}$  (resp.  $w_3 = u - \frac{\pi}{a}$ ), which is a 1- (resp. 3-) Riemann invariant in the case without measure (see [33]). Then, the following proposition gives the weak entropy self-similar solution to the Riemann problem (2.24).

**Proposition 2.3.2.** *Let  $\mathbf{U}_L$  and  $\mathbf{U}_R$  in  $\Omega^r$  be two subsonic constant states, and let  $\mathcal{M}_{\rho}, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho E}, \mathcal{M}_{\rho \pi}$  be given source terms in  $\mathcal{D}_{adm}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ . Then, the Riemann problem (2.24) has a unique subsonic self-similar solution which we denote by  $\mathcal{W}\left(\frac{x}{t}; \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R, \widetilde{\mathcal{M}}\right)$ . This function is defined by*

$$\mathcal{W}\left(\frac{x}{t}; \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R, \widetilde{\mathcal{M}}\right) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & \frac{x}{t} < \lambda_1^r(\mathbf{U}_L), \\ \mathbf{U}_1, & \lambda_1^r(\mathbf{U}_L) < \frac{x}{t} < \lambda_2^r(\mathbf{U}_1), \\ \mathbf{U}_-, & \lambda_2^r(\mathbf{U}_1) < \frac{x}{t} < \lambda_0^r, \\ \mathbf{U}_+, & \lambda_0^r < \frac{x}{t} < \lambda_3^r(\mathbf{U}_R), \\ \mathbf{U}_R, & \frac{x}{t} > \lambda_3^r(\mathbf{U}_R), \end{cases}$$

if  $\widetilde{\mathcal{M}} \in \mathcal{D}_{adm}^-$ , and respectively by

$$\mathcal{W}\left(\frac{x}{t}; \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R, \widetilde{\mathcal{M}}\right) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & \frac{x}{t} < \lambda_1^r(\mathbf{U}_L), \\ \mathbf{U}_-, & \lambda_1^r(\mathbf{U}_L) < \frac{x}{t} < \lambda_0^r, \\ \mathbf{U}_+, & \lambda_0^r < \frac{x}{t} < \lambda_2^r(\mathbf{U}_3), \\ \mathbf{U}_3, & \lambda_2^r(\mathbf{U}_3) < \frac{x}{t} < \lambda_3^r(\mathbf{U}_R), \\ \mathbf{U}_R, & \frac{x}{t} > \lambda_3^r(\mathbf{U}_R), \end{cases}$$

if  $\widetilde{\mathcal{M}} \in \mathcal{D}_{adm}^+$ . Moreover, in the case where  $\widetilde{\mathcal{M}} \in \mathcal{D}_{adm}^-$ , we have:

$$\begin{aligned} m_- &= \frac{2au^* + \mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi}/a - (w_{1L} + 2a\tau_R^*)\mathcal{M}_\rho}{2a\tau_R^*}, & (u, \pi)_1 &= (u, \pi)_-, \tau_1 = \tau_L + \frac{u_1 - u_L}{a}, \\ m_+ &= \frac{2au^* + \mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi}/a - w_{1L}\mathcal{M}_\rho}{2a\tau_R^*}, & E_1 &= \frac{aE_L + \pi_L u_L - \pi_- u_-}{a}, \\ E_- &= \frac{m_+ E_+ + \pi_+ u_+ - \pi_- u_- - \mathcal{M}_{\rho E}}{m_-}, & E_+ &= \frac{aE_R + \pi_+ u_+ - \pi_R u_R}{a}, \end{aligned}$$

and in the case where  $\widetilde{\mathcal{M}} \in \mathcal{D}_{adm}^+$ :

$$\begin{aligned} m_- &= \frac{2au^* + \mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi}/a - w_{3R}\mathcal{M}_\rho}{2a\tau_L^*}, & E_3 &= \frac{aE_R + \pi_+ u_+ - \pi_R u_R}{a}, \\ m_+ &= \frac{2au^* + \mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi}/a - (w_{3R} - 2a\tau_L^*)\mathcal{M}_\rho}{2a\tau_L^*}, & (u, \pi)_3 &= (u, \pi)_+, \tau_3 = \tau_R + \frac{u_R - u_3}{a}, \\ E_+ &= \frac{m_- E_- + \pi_- u_- - \pi_+ u_+ + \mathcal{M}_{\rho E}}{m_+}, & E_- &= \frac{aE_L + \pi_L u_L - \pi_- u_-}{a}. \end{aligned}$$

Finally, the traces of the solution are given by the following relations:

$$\begin{aligned} u_- &= u^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi} - (au_R - \pi_R)\mathcal{M}_\rho}{2a(a - m_-)}, & u_+ &= u^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} - (\pi_L + au_L)\mathcal{M}_\rho}{2a(a + m_+)}, \\ \pi_- &= \pi^* - \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} - \mathcal{M}_{\rho\pi} + (\pi_R - au_R)\mathcal{M}_\rho}{2(a - m_-)}, & \pi_+ &= \pi^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} - (\pi_L + au_L)\mathcal{M}_\rho}{2(a + m_+)}, \\ \text{together with } \rho_- &= \frac{m_-}{u_-}, & \rho_+ &= \frac{m_+}{u_+}. \end{aligned}$$

*Proof.* We only consider the case  $\widetilde{\mathcal{M}} \in \mathcal{D}_{adm}^-$ , the case  $\widetilde{\mathcal{M}} \in \mathcal{D}_{adm}^+$  being symmetric. Recall that all characteristic fields are linearly degenerate so that only contact discontinuities are involved.

The continuity of the wave speeds for the  $\lambda_1^r$ ,  $\lambda_2^r$  and  $\lambda_3^r$ - waves reads:

$$\tau_1 = \tau_L + \frac{u_1 - u_L}{a}, \quad (2.27a)$$

$$u_1 = u_-, \quad (2.27b)$$

$$u_R + \frac{a}{\rho_R} = u_+ + \frac{a}{\rho_+}. \quad (2.27c)$$

Through the steady interface  $\lambda_0^r = 0$ , the relations (2.11) read

$$\mathcal{M}_\rho = m_+ - m_-, \quad (2.28a)$$

$$\mathcal{M}_{\rho u} = m_+ u_+ + \pi_+ - m_- u_- - \pi_-, \quad (2.28b)$$

$$\mathcal{M}_{\rho E} = m_+ E_+ + \pi_+ u_+ - m_- E_- - \pi_- u_-, \quad (2.28c)$$

$$\mathcal{M}_{\rho\pi} = m_+ \pi_+ + a^2 u_+ - m_- \pi_- - a^2 u_-. \quad (2.28d)$$

Across the  $\lambda_1^r$ -wave, the Rankine-Hugoniot relations on the momentum and energy balance equations read

$$\begin{cases} \lambda_1^r(\mathbf{U}_L)(\rho_1 u_1 - \rho_L u_L) &= \rho_1 u_1^2 + \pi_1 - \rho_L u_L^2 - \pi_L, \\ \lambda_1^r(\mathbf{U}_L)(\rho_1 E_1 - \rho_L E_L) &= \rho_1 E_1 u_1 + \pi_1 u_1 - \rho_L E_L u_L - \pi_L u_L, \end{cases}$$

which implies

$$\pi_1 - \pi_L - au_L + au_1 = 0, \quad (2.29a)$$

$$E_1 - E_L - \frac{1}{a}(\pi_L u_L - \pi_1 u_1) = 0. \quad (2.29b)$$

Considering now the  $\lambda_2^r$ -wave and the Rankine-Hugoniot relations applied to the energy balance equation, we have:

$$\lambda_2^r(\mathbf{U}_1)(\rho_- E_- - \rho_1 E_1) = \rho_- E_- u_- + \pi_- u_- - \rho_1 E_1 u_1 - \pi_1 u_1,$$

and using (2.27b), we obtain:

$$\pi_1 = \pi_-. \quad (2.30)$$

From (2.27b) and (2.30), we obtain that the equation (2.29a) is equivalent to:

$$\pi_- - \pi_L - au_L + au_- = 0, \quad (2.31)$$

which means  $w_{1L} = w_{1-}$ . Next, through the  $\lambda_3^r$ -contact, the Rankine-Hugoniot relations on the momentum and energy balance equations read

$$\begin{cases} \lambda_3^r(\mathbf{U}_+)(\rho_R u_R - \rho_+ u_+) = \rho_R u_R^2 + \pi_R - \rho_+ u_+^2 - \pi_+, \\ \lambda_3^r(\mathbf{U}_+)(\rho_R E_R - \rho_+ E_+) = \rho_R E_R u_R + \pi_R u_R - \rho_+ E_+ u_+ - \pi_+ u_+, \end{cases}$$

and it follows:

$$au_R - au_+ = \pi_R - \pi_+, \text{ or } w_{3+} = w_{3R}, \quad (2.32a)$$

$$aE_R - aE_+ = \pi_R u_R - \pi_+ u_+. \quad (2.32b)$$

The traces  $u_-$ ,  $u_+$ ,  $\pi_-$ ,  $\pi_+$  are then obtained by solving the linear system of equations (2.28b), (2.28d), (2.31) and (2.32a), which is left to the reader.

From relations (2.32b) and (2.28c), we get:

$$E_+ = \frac{aE_R + \pi_+ u_+ - \pi_R u_R}{a}, \quad (2.33)$$

and

$$E_- = \frac{m_+ E_+ + \pi_+ u_+ - \pi_- u_- - \mathcal{M}_{\rho E}}{m_-}. \quad (2.34)$$

Next, we determine the expressions of  $m_+$  and  $m_-$ . The expression of the state  $u_+$  gives

$$2a(a + m_+)(u_+ - u^*) = a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} - (au^* + \pi^*)\mathcal{M}_{\rho}, \quad (2.35)$$

then, multiplying the relation (2.27c) by  $\rho_+$ , we have

$$m_+ + a = \rho_+ \left( u_R + \frac{a}{\rho_R} \right),$$

so that

$$(a + m_+)u_+ = m_+ \left( u_R + \frac{a}{\rho_R} \right),$$

and

$$\begin{aligned} 2a(a + m_+)(u_+ - u^*) &= 2am_+(u_R + \frac{a}{\rho_R}) - 2a^2u^* - 2am_+u^* \\ &= \frac{2a^2}{\rho_R^*}m_+ - 2a^2u^*. \end{aligned}$$

Moreover, from (2.35), we obtain:

$$m_+ = \frac{2a^2u^* + a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} - (\pi_L + au_L)\mathcal{M}_\rho}{2a^2\tau_R^*}, \quad (2.36)$$

and from (2.28a) we finally get

$$m_- = \frac{2a^2u^* + a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi} - (\pi_L + au_L + 2a^2\tau_R^*)\mathcal{M}_\rho}{2a^2\tau_R^*}, \quad (2.37)$$

which ends the proof of the case under consideration.  $\square$

We check that we do recover the formulas of [5] in the case  $\mathcal{M}_\rho = 0$ . Now, we can define the numerical fluxes (2.14)(2.15) introduced in §2.3.3. Recall that we have noted  $\Pi$  the projection operator defined as  $\Pi : (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ . Then, the numerical fluxes  $(\mathbf{g}_L)_j^n$  and  $(\mathbf{g}_R)_j^n$  are given by the following Godunov type numerical fluxes:

$$\begin{aligned} (\mathbf{g}_L)_j^n &= \Pi \mathbf{F} \left( \mathcal{W} \left( 0^-; \mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{(n)}, \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{M}}_j^{(n)} \right) \right), \quad j \leq 0, \\ (\mathbf{g}_R)_j^n &= \Pi \mathbf{F} \left( \mathcal{W} \left( 0^+; \mathbf{U}_{j-\frac{1}{2}}^{(n)}, \mathbf{U}_{j+\frac{1}{2}}^{(n)}, \widetilde{\mathcal{M}}_j^{(n)} \right) \right), \quad j \geq 0, \end{aligned}$$

where the weights  $\widetilde{\mathcal{M}}_j^{(n)}$  are defined by

$$\widetilde{\mathcal{M}}_j^{(n)} = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{if } j \neq 0, \\ \mathcal{M}^{(n)}, & \text{if } j = 0. \end{cases}$$

Note that for  $j \neq 0$ , the solution  $\mathcal{W}$  of the Riemann problem may be discontinuous at 0 but the flux  $\mathbf{F}$  is continuous (see indeed (2.11)) so that the choice to take the value of  $\mathcal{W}(0^\pm)$  is not important; the numerical flux is just the projection of the exact Godunov flux for the relaxation system. While, for  $j = 0$ , there are two fluxes linked by the discrete coupling condition (discrete version of (2.7))

$$(\mathbf{g}_R)_0^n - (\mathbf{g}_L)_0^n = \mathcal{M}^{(n)}.$$

This situation with two fluxes at an interface is now classical for finite volume schemes approximating a system with geometric source term.

### 2.3.7 Preserving equilibria

Next, it remains to determine the additional weight  $\mathcal{M}_{\rho\pi}$  such that the relaxation approach preserves the equilibrium solutions of the original coupled problem (2.5) (see definition 3.1). The following proposition gives this weight.

**Proposition 2.3.3.** *Let  $\mathbf{u}_L$  and  $\mathbf{u}_R$  be two subsonic constant states belonging to  $\Omega$  and a weight  $\mathbf{M} = (\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho E})^T$  such that the relation (2.23) holds true. Let us define the mass flows through the interface  $m_\pm^e = m_\pm^e(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R, \mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u})$  as*

$$m_+^e := \frac{\mathcal{M}_{\rho u} + 2au^* + (a\tau_L^* - u^*)\mathcal{M}_\rho}{a(\tau_L^* + \tau_R^*)}, \quad (2.38)$$

$$m_-^e := m_+^e - \mathcal{M}_\rho, \quad (2.39)$$

together with the weight  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e = \mathcal{M}_{\rho\pi}^e(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R, \mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u})$ , given by

$$\mathcal{M}_{\rho\pi}^e := \mathcal{P}_R m_+^e - \mathcal{P}_L m_-^e, \quad (2.40)$$

where  $\mathcal{P}_\alpha = p_\alpha(\tau_\alpha, \varepsilon_\alpha) + a^2\tau_\alpha$ , with  $\alpha = L, R$ . Then, the relaxation method in Proposition 2.3.2 with the weight  $\widetilde{\mathbf{M}}^e = (\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}, \mathcal{M}_{\rho E}, \mathcal{M}_{\rho\pi}^e)^T$  preserves the equilibrium solutions of the coupled problem (2.5).

*Proof.* Let  $\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R$  in  $\Omega$  be such that the relation (2.23) holds true and assume that  $m_+^e, m_-^e, \mathcal{P}_R, \mathcal{P}_L$ , and  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$  satisfy relations (2.38) to (2.40). Let us show that

$$\mathbf{W}\left(\frac{x}{t}; \mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R, \widetilde{\mathbf{M}}^e\right) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0, \\ \mathbf{U}_R, & x > 0, \end{cases} \quad (2.41)$$

where  $\mathbf{U}_\alpha = (\mathbf{u}_\alpha, \rho_\alpha p_\alpha)$ ,  $\alpha = L, R$  and where  $\mathbf{W}$  is the solution to the Riemann problem (2.24) solved explicitly in Proposition 2.3.2. Therefore, we must prove that

$$\begin{cases} \mathbf{U}_- = \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_L & \text{and} & \mathbf{U}_+ = \mathbf{U}_R & \text{if} & \widetilde{\mathbf{M}}^e \in \mathcal{D}_{adm}^-, \\ \mathbf{U}_+ = \mathbf{U}_3 = \mathbf{U}_R & \text{and} & \mathbf{U}_- = \mathbf{U}_L & \text{if} & \widetilde{\mathbf{M}}^e \in \mathcal{D}_{adm}^+. \end{cases}$$

Here we present only the evaluation of the trace state  $\mathbf{U}_+$  since the approach is similar for the other states.

By Proposition 2.3.2, note that the mass flows  $m_\pm^e$  are identical for the two considered wave structures. Let  $m_\alpha = \rho_\alpha u_\alpha$ ,  $\alpha = L, R$ . From (2.23), we have:

$$\mathcal{M}_\rho = m_R - m_L, \quad (2.42a)$$

$$\mathcal{M}_{\rho u} = m_R u_R + p_R - m_L u_L - p_L, \quad (2.42b)$$

$$\mathcal{M}_{\rho E} = m_R E_R + p_R u_R - m_L E_L - p_L u_L. \quad (2.42c)$$

By plugging the weights  $\mathcal{M}_\rho$  and  $\mathcal{M}_{\rho u}$  into (2.38), and using the relations  $a\tau_L^* - u^* = a\tau_L - u_L$  and  $\pi_\alpha = p_\alpha$  with  $\alpha = L, R$ , we obtain

$$m_+^e = \frac{m_R (a(\tau_L + \tau_R) + u_R - u_L)}{a(\tau_L^* + \tau_R^*)}.$$

From the definition of the intermediate states  $\tau_L^*$  and  $\tau_R^*$ , we have:

$$a(\tau_L^* + \tau_R^*) = \lambda_3(\mathbf{U}_R) - \lambda_1(\mathbf{U}_L) = a(\tau_L + \tau_R) + u_R - u_L,$$

and

$$m_+^e = m_R. \quad (2.43)$$

Using relation (2.42a), it follows that

$$m_-^e = m_+^e - \mathcal{M}_\rho = m_R - (m_R - m_L) = m_L. \quad (2.44)$$

Let us consider now the state  $u_+$ . From Proposition 2.3.2, the equalities  $\pi_\alpha = p_\alpha$  with  $\alpha = L, R$ , the definitions of the intermediate state  $u^*$  and the weight  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$  (2.40), together with the relations (2.42a), (2.42b), (2.43) and (2.44), we get

$$\begin{aligned} u_+ &= u^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi}^e - (\pi_L + au_L)\mathcal{M}_\rho}{2a(a + m_+^e)} \\ &= \frac{u_R + u_L}{2} + \frac{p_L - p_R}{2a} + \frac{a(m_R u_R + p_R - m_L u_L - p_L) + (p_R + a^2 \tau_R)m_R}{2a(a + m_R)} \\ &\quad - \frac{(p_L + a^2 \tau_L)m_L}{2a(a + m_R)} - \frac{(p_L + au_L)(m_R - m_L)}{2a(a + m_R)} \\ &= \frac{u_R + u_L}{2} + \frac{p_L - p_R}{2a} + \frac{au_R(m_R + a) + p_R(a + m_R) - (p_L + au_L)(a + m_R)}{2a(a + m_R)} \\ &= u_R, \end{aligned}$$

and it follows immediately that  $\rho_+ = m_+^e/u_+ = m_R/u_R = \rho_R$ . Next, using similar arguments together with the definition of the state  $\pi^*$ , we obtain

$$\begin{aligned} \pi_+ &= \pi^* + \frac{a\mathcal{M}_{\rho u} + \mathcal{M}_{\rho\pi}^e - (\pi_L + au_L)\mathcal{M}_\rho}{2(a + m_+^e)} \\ &= \frac{\pi_L + \pi_R}{2} + \frac{a(u_L - u_R)}{2} + \frac{(a + m_R)(au_R + p_R - p_L - au_L)}{2(a + m_R)} \\ &= \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{a(u_L - u_R)}{2} + \frac{p_R - p_L + a(u_R - u_L)}{2} \\ &= p_R. \end{aligned}$$

Now, for the evaluation of  $E_+$ , two cases must be considered. If  $\widetilde{\mathcal{M}}^e \in \mathcal{D}_{adm}^-$ , we use the Proposition 2.3.2 and the equality  $\pi_+ u_+ = \pi_R u_R$ , and immediately get

$$E_+ = \frac{aE_R + \pi_+ u_+ - \pi_R u_R}{a} = E_R.$$

On the other hand, if  $\widetilde{\mathcal{M}}^e \in \mathcal{D}_{adm}^+$ , the energy is given by:

$$E_+ = \frac{m_- E_- + \pi_- u_- - \pi_+ u_+ + \mathcal{M}_{\rho E}}{m_+}.$$

Moreover, a computation similar to those made for the states  $u_+$  and  $\pi_+$  gives  $\pi_- u_- = \pi_L u_L$  so that  $E_- = E_L$  (cf. Proposition 2.3.2). Using these two last relations with equation (2.42c), we finally obtain

$$E_+ = \frac{m_L E_L + p_L u_L - p_R u_R + m_R E_R + p_R u_R - m_L E_L - p_L u_L}{m_R} = E_R,$$

which ends the proof.  $\square$

### 2.3.8 Choices of the measure source terms

The measure source terms can be determined in a dynamic way, at each time step of a discrete time algorithm. We present different choices according to the chosen objective.

#### 2.3.8.1 Flux coupling and state coupling.

In model adaptation, one couples two different models at an interface which is fixed during a time interval of length the time step, but may vary at each time step. The position of the interface is optimized in such a way that in the region where one computes the coarse model, the model error between the fine and coarse models (evaluated by some indicator) is less than some given tolerance. Then, the coupling condition should not have a great impact, and one chooses at each time step the same, either a conservative (flux coupling) or a non conservative (state coupling) approach [85].

At time  $t^{(n)}$ , the coupling condition (2.7) at the discrete level reads

$$\mathcal{M}^{(n)} = (\mathbf{g}_R)_0^n - (\mathbf{g}_L)_0^n. \quad (2.45)$$

The choice of a flux coupling leads to  $\mathcal{M}^{(n)} = \mathbf{0}$  for all  $n$  in  $\mathbb{N}$ . In order to ensure the state coupling we use an approach based on the introduction of reconstructed states. This procedure was proposed in [6], formalized in [8] and then adapted in the context of coupling with source terms [51]. The method allows to impose continuity (at the coupling interface) of a given set of variables. This can be related to other non-conservative approaches as the single fluid algorithm introduced in [1] and also to well balanced schemes in the spirit of [69, 65], see [68].

The numerical fluxes  $(\mathbf{g}_L)_0^n$  and  $(\mathbf{g}_R)_0^n$  are given by:

$$(\mathbf{g}_L)_0^n = \mathbf{g}_L \left( \mathbf{u}_{-\frac{1}{2}}^{(n)}, \bar{\mathbf{u}}_{+\frac{1}{2}}^{(n)} \right), \quad (\mathbf{g}_R)_0^n = \mathbf{g}_R \left( \bar{\mathbf{u}}_{-\frac{1}{2}}^{(n)}, \mathbf{u}_{+\frac{1}{2}}^{(n)} \right),$$

where (using the notations introduced in section 2.2.2), the reconstructed states  $\bar{\mathbf{u}}_{-\frac{1}{2}}^{(n)}$  and  $\bar{\mathbf{u}}_{+\frac{1}{2}}^{(n)}$  are defined as

$$\bar{\mathbf{u}}_{-\frac{1}{2}}^{(n)} := \varphi_R^{-1} \circ \varphi_L \left( \mathbf{u}_{-\frac{1}{2}}^{(n)} \right), \quad \bar{\mathbf{u}}_{+\frac{1}{2}}^{(n)} := \varphi_L^{-1} \circ \varphi_R \left( \mathbf{u}_{+\frac{1}{2}}^{(n)} \right).$$

We refer the reader to [6, 51] for examples of changes of variables.

#### 2.3.8.2 Dynamic evaluation: constrained optimization problems.

The aim of this section is the evaluation of an optimal source term relative to some cost function. At each time step, given a convex cost function  $\mathcal{J}$  and a non-empty convex subset  $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_{adm}$ , the problem consists in finding an optimal mass  $\widetilde{\mathcal{M}}_{opt}^e$  in  $\mathcal{D}$  such that

$$\mathcal{J}(\widetilde{\mathcal{M}}_{opt}^e) \leq \mathcal{J}(\widetilde{\mathcal{M}}^e), \quad \forall \widetilde{\mathcal{M}}^e \in \mathcal{D}. \quad (2.46)$$

The objective function and the space of constraints are defined by physical motivations, for instance in order to impose a mass flow on one side of the interface, or else to impose a cooling; the cost function is then constructed in relation with the objective (see §2.4.2 for several examples). At each time step, when this optimization problem is solved, we set  $\mathcal{M}^{(n)} = \Pi \widetilde{\mathcal{M}}_{opt}^e$ , where  $\Pi$  is the projection operator introduced in §2.3.6.

## 2.4 Numerical experiments.

We use a computational domain  $(-0.5, 0.5)$  with 200 elements. The coupling interface is at  $x = 0$ . Moreover, the final time of the simulation is  $T = 0.12$  and the ratios of specific heats are  $\gamma_L = 1.4$  and  $\gamma_R = 1.28$ . In order to preserve equilibrium solutions of the problem, we impose  $\mathcal{M}_{\rho\pi} = \mathcal{M}_{\rho\pi}^e$ , where  $\mathcal{M}_{\rho\pi}^e$  is defined by (2.40). The following test cases are based on Riemann problems where the discontinuity is located at  $x = 0$  and the different initial data are given in table 2.1. Numerical experiments using state coupling are based on the continuity of primitive variables  $\varphi_\alpha(\mathbf{u}) = (\rho, u, p_\alpha)$ ,  $\alpha = L, R$ .

Test case	$\rho_L$	$u_L$	$p_L$	$\rho_R$	$u_R$	$p_R$
1	1.6	0.4	2.35	1.6	0.4	2.35
2, 3, 4, 5	1.6	0.4	2.35	1.4	0.4	1.9

Table 2.1 – Initial conditions for different test cases.

### 2.4.1 Flux coupling vs. state coupling

**Test case 1.** In this first test case, we consider uniform initial data given in table 2.1. The density, velocity, pressure and internal energy profiles are displayed in figure 2.3 when applying flux coupling and state coupling in primitive variables  $(\rho, u, p)$ . Figure 2.4 displays the relative conservation losses in mass, momentum and total energy, obtained by integrating the conservation laws over space and time.

Results show that the uniform profile is not respected for the flux coupling. Nevertheless, the method is strictly conservative with zero conservation losses. In contrast, the uniform profiles of  $\rho$ ,  $u$  and  $p$  are preserved when using state coupling as expected. Note also that the total energy is not conserved [10, 51]. Finally, we remark that the internal energy  $\varepsilon$  is necessarily discontinuous at the coupling interface due to the different pressure laws (see equation (2.2)).

**Test case 2.** In the second test case, we still compare the various profiles based on conservative coupling or state coupling in primitive variables for a shock tube problem (see table 2.1). The density, velocity, pressure, internal energy and mass flow rates are shown in figure 2.5, while figure 2.6 displays the relative conservation losses.

Results are similar to test case 1: the flux coupling method is strictly conservative and the state coupling method ensures continuity of primitive variables through the coupling interface.

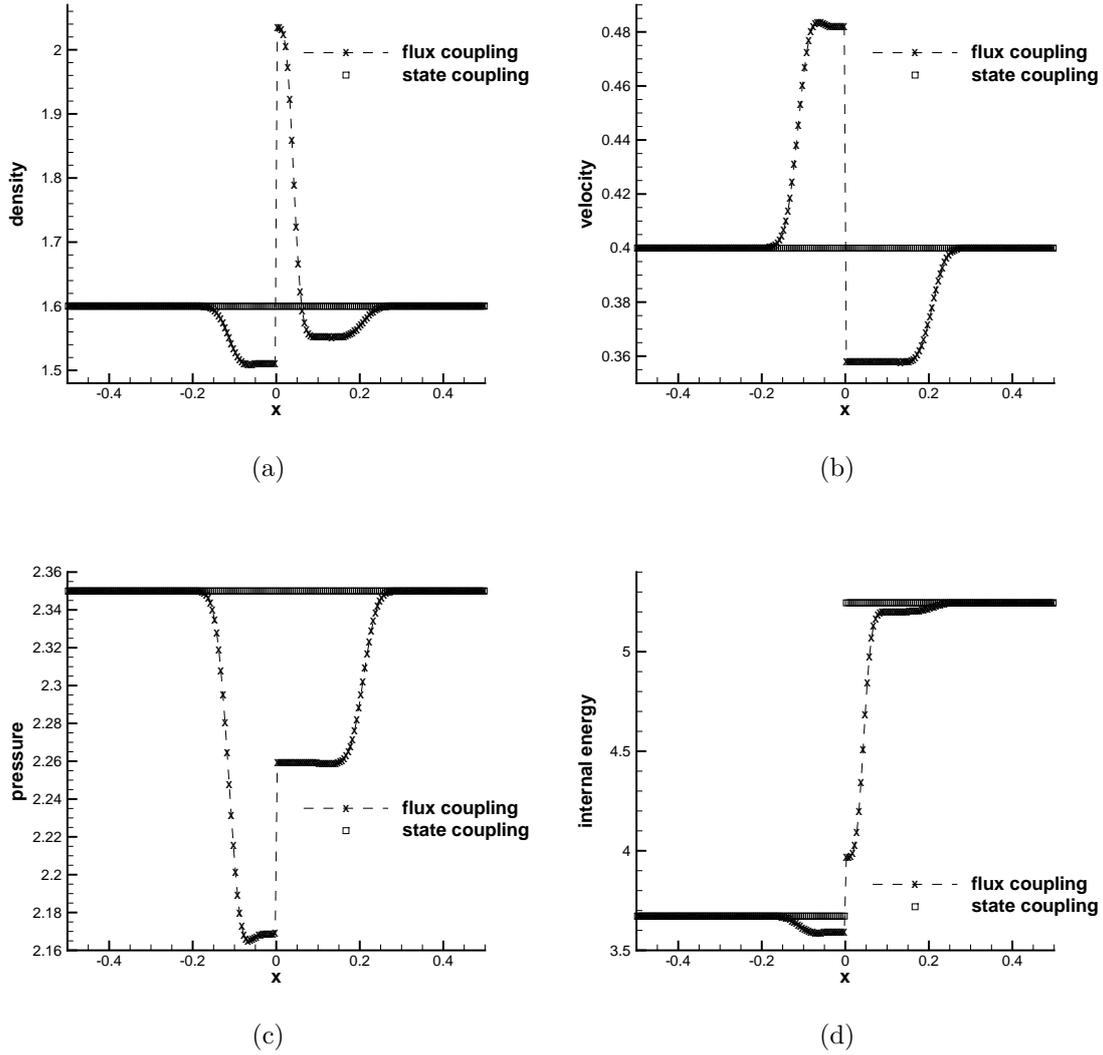


Figure 2.3 – Conservative coupling *vs.* state coupling for test case 1: profiles of primitive variables  $(\rho, u, p)$  and internal energy.

### 2.4.2 Optimal source terms

Hereafter,  $m_{ref} \in \mathbb{R}^*$  and  $\varepsilon_{ref} > 0$  will denote target values. At each time  $t^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , we consider the discrete states  $\mathbf{U}_L = \mathbf{U}_{-\frac{1}{2}}^{(n)}$ , and  $\mathbf{U}_R = \mathbf{U}_{+\frac{1}{2}}^{(n)}$  at the coupling interface to define objective functions.

For the numerical resolution of constrained optimization problems (2.46), we use the gradient projection algorithm defined by the sequence

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{M}}_0^e & \text{given} \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{k+1}^e = \mathcal{P}_{\mathcal{D}} \left( \widetilde{\mathcal{M}}_k^e - \mu_{\mathcal{J}} \nabla \mathcal{J}(\widetilde{\mathcal{M}}_k^e) \right), & k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2.47)$$

where  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$  is the projection operator onto the set of constraints  $\mathcal{D}$ . In our numerical examples,  $\mathcal{P}_{\mathcal{D}}$  is known explicitly and thus motivates the use of this algorithm.

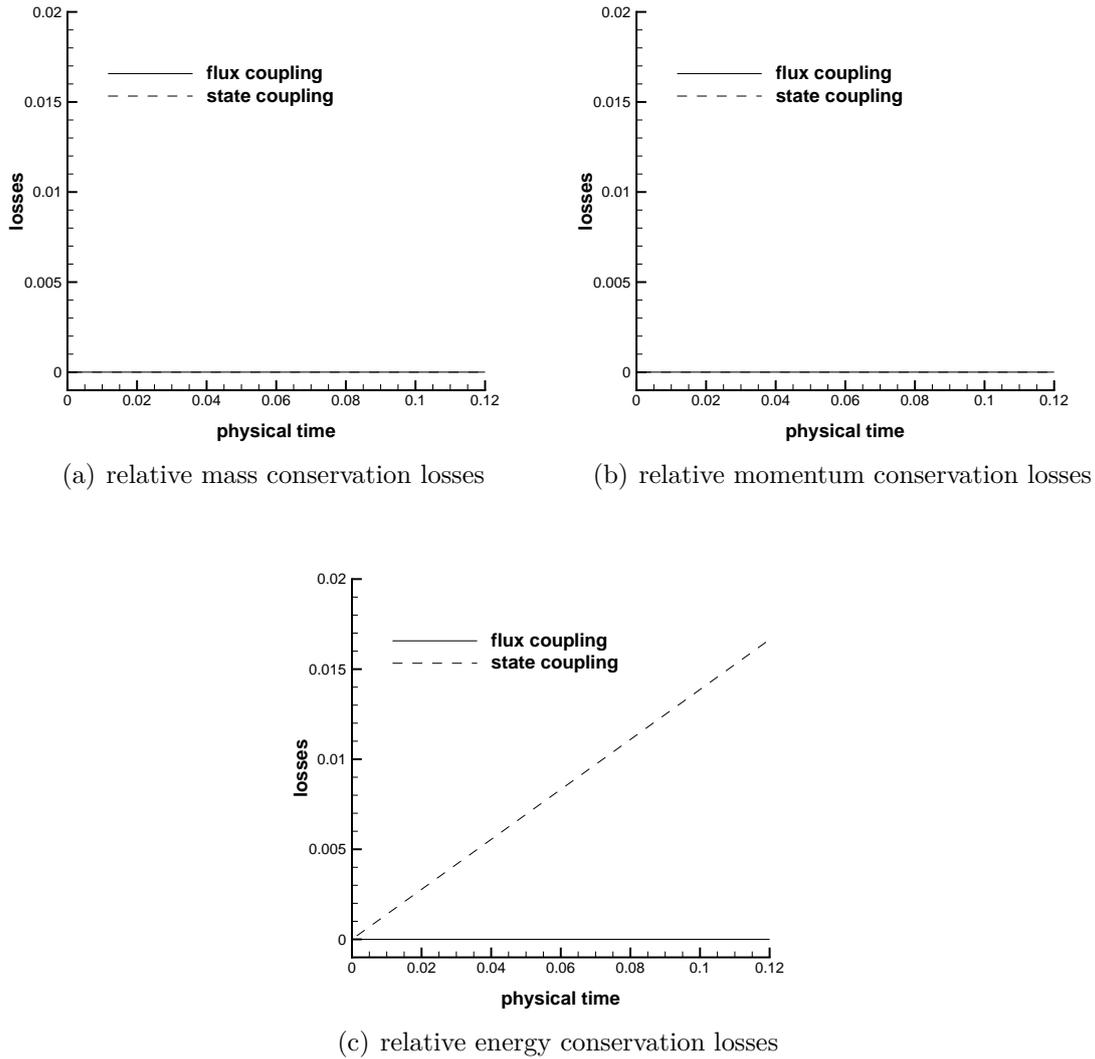


Figure 2.4 – Relative conservation losses for test case 1.

For a given tolerance  $\eta > 0$ , the stopping condition of the algorithm will be  $\|\widetilde{\mathcal{M}}_{k+1}^e - \widetilde{\mathcal{M}}_k^e\| < \eta \|\widetilde{\mathcal{M}}_0^e\|$ , where  $\|\cdot\|$  denotes the usual Euclidean norm and  $\eta = 10^{-12}$ .

**Test case 3.** In this test case, we focus on an optimization problem that imposes the mass flow at the right hand side of the coupling interface, while controlling the conservation losses in mass and momentum. The applications we have in mind here concern unsteady flow control techniques. Among the most widely used techniques, one can quote the experimental methods of fluid blowing or suction which have a strong influence on the flow features such as lift improvement, drag reduction, vortex breakdown delay, flow separation control [50, 49, 86]. In the experimental studies, a typical objective may be to optimize the blowing position for maximizing control and minimizing the blowing mass flow rate. A simplified representation of these flow control problems would consider the minimization of the objective function

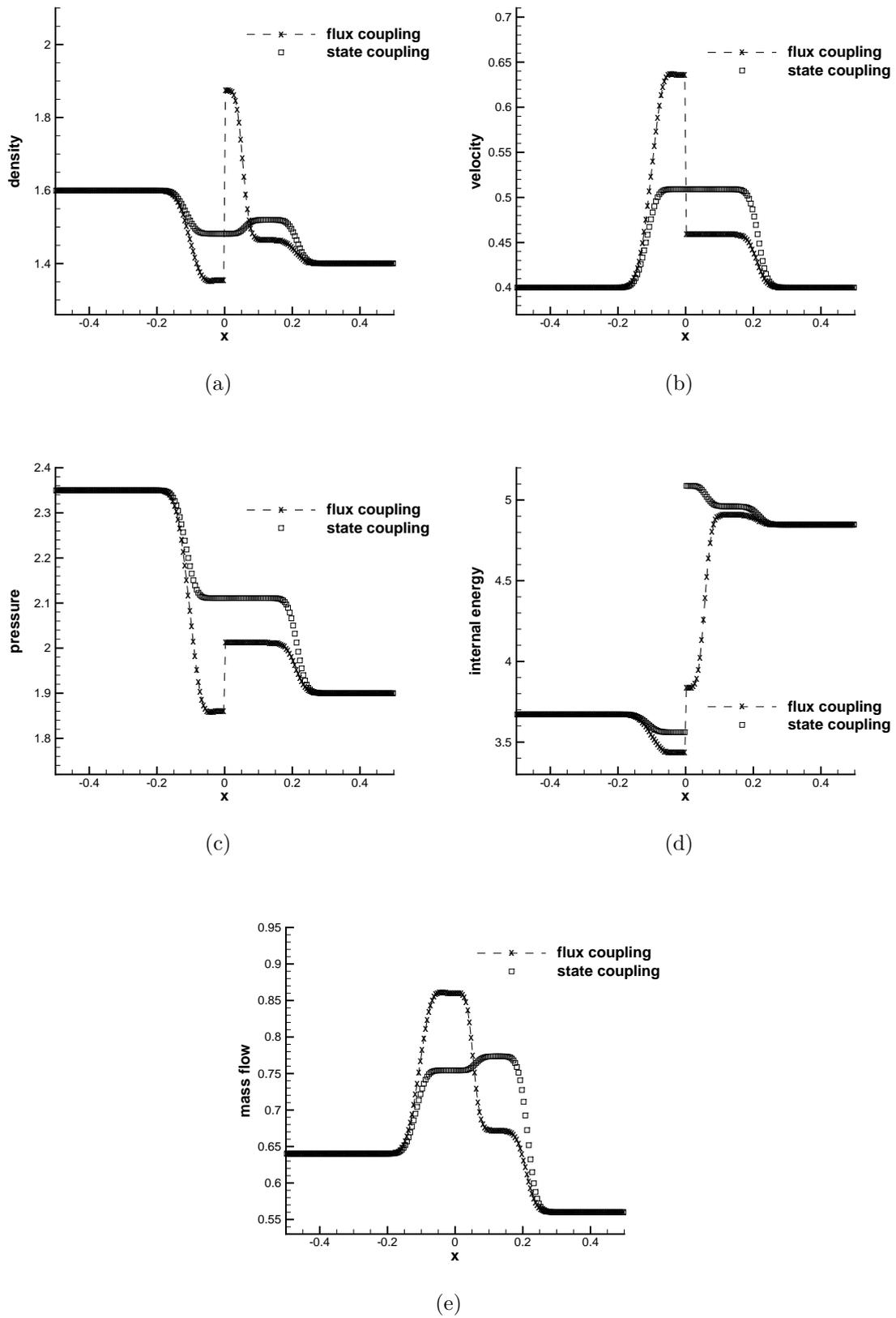


Figure 2.5 – Conservative coupling *vs.* state coupling for test case 2: profiles of primitive variables ( $\rho, u, p$ ), mass flow and internal energy.

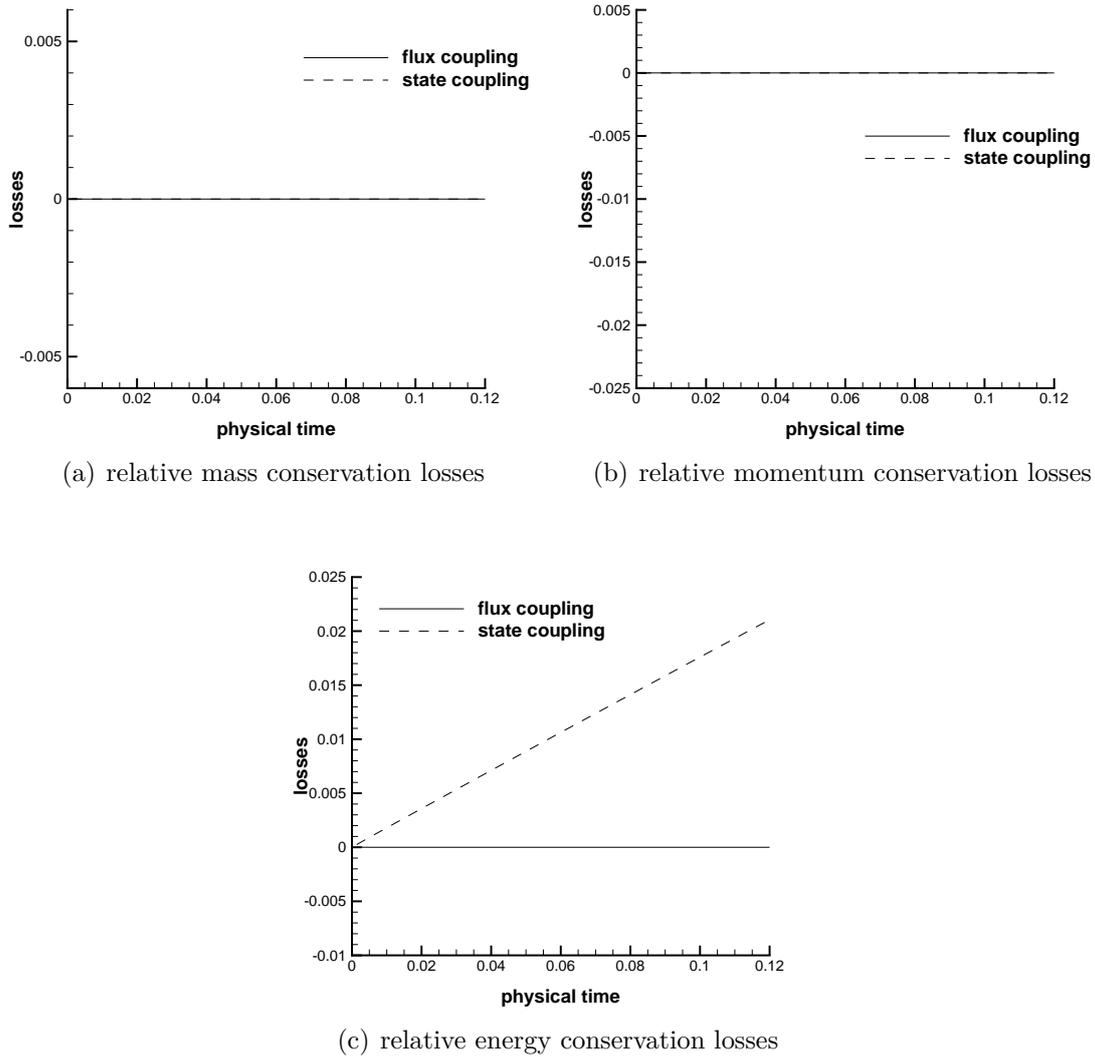


Figure 2.6 – Relative conservation losses for test case 2.

$(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathcal{J}_1(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}) \in \mathbb{R}$  defined by

$$\mathcal{J}_1(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}) := \left( \frac{m_+^e(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R, \mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}) - m_{ref}}{m_{ref}} \right)^2 + \kappa^2 \left[ \left( \frac{\mathcal{M}_{\rho u}}{a^2 \tau_R} \right)^2 + \left( \frac{\mathcal{M}_\rho}{a} \right)^2 \right], \quad (2.48)$$

over the set  $\mathcal{D}_1 = [-0.5, 0.5]^2$ ,  $\mathcal{J}_1$  is strictly convex (see the Appendix in section 2.6). We further assume  $\mathcal{M}_{\rho E}^{(n)} = 0$ , for all  $n$  in  $\mathbb{N}$ . The parameter  $\kappa > 0$  quantifies the cost of the control. Minimizing  $\mathcal{J}_1$  over  $\mathbb{R}^2$  with  $\kappa = 0$  imposes  $m_+^e = m_{ref}$ , while conservation losses  $\mathcal{M}_\rho$  and  $\mathcal{M}_{\rho u}$  are set to zero when  $\kappa$  tends to infinity. In this example, we take  $m_{ref} = 0.75$ .

Figure 2.7 represents the density, velocity, pressure, internal energy and mass flow profiles for three values of the control parameter:  $\kappa = 0.01$ ,  $\kappa = 1$  and  $\kappa = 100$  with respective parameter value  $\mu_{\mathcal{J}} = 0.1$ ,  $10^{-2}$  and  $10^{-4}$  in algorithm (2.47). These parameters were chosen experimentally to obtain a good convergence of the

algorithm. Figure 2.8 displays the relative conservation losses in mass, momentum and total energy.

The total energy is conserved for all values of  $\kappa$  as expected. Comparing figures 2.5 and 2.7, we observe that the profiles of density, velocity, pressure, internal energy and mass flow obtained from the minimization of the cost function  $\mathcal{J}_1$  with  $\kappa = 100$  are similar to those obtained by the flux coupling method. In contrast, the right trace of the mass flow tends to the value imposed  $m_{ref} = 0.75$  when  $\kappa$  tends to zero. Finally, we observe that the amplitudes of the conservation losses in mass and momentum increase when the control parameter  $\kappa$  decreases.

**Test case 4.** Now, for this test case, we set  $\mathcal{M}_\rho^{(n)} = \mathcal{M}_{\rho u}^{(n)} = 0$  at each time step and try to minimize the function  $\mathcal{M}_{\rho E} \in \mathbb{R} \mapsto \mathcal{J}_2(\mathcal{M}_{\rho E}) \in \mathbb{R}$  defined by

$$\mathcal{J}_2(\mathcal{M}_{\rho E}) := \left( \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \right)^2 + \kappa^2 \left( \frac{\mathcal{M}_{\rho E}}{a^3 \tau_R^2} \right)^2, \quad (2.49)$$

with  $\varepsilon_{ref} = 3.5$  over the set  $\mathcal{D}_2 = [-1.5, 1.5]$ . This function is a strictly convex function of its argument (see the Appendix in section 2.6). It allows to impose the temperature through the value of  $\varepsilon_+$  and thus imposes cooling ( $\mathcal{M}_{\rho E} < 0$ ) or heating ( $\mathcal{M}_{\rho E} > 0$ ) at the right of the interface  $x = 0$ , while controlling the conservative losses. Film cooling constitutes an example of such minimization problem. The efficiency of gas turbines may be improved and fuel consumption reduced with higher combustor exit flow temperatures. However, higher temperatures may induce turbine components damages. To insure their thermal protection, a protective coat of cool air separates the turbine wall from the hot gases [48]. The boundary between the film and the gases can be modelled as an interface through which the intake air mass and energy losses must be considered. In figure 2.9, we present the density, velocity, pressure, internal energy and mass flow profiles for different values of the control parameter. Figure 2.10 displays the relative conservation losses for these values of  $\kappa$ . Here again, the conclusions are similar to those of the previous test case.

**Test case 5.** Finally, in this last test case, we assume that  $\mathcal{M}_{\rho u}^{(n)} = 0$  for all  $n$  in  $\mathbb{N}$  and minimize the function  $(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho E}) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \mathcal{J}_3(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho E}) \in \mathbb{R}$  defined by

$$\mathcal{J}_3(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho E}) := \left( \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_{ref}}{\varepsilon_{ref}} \right)^2 + \kappa^2 \left[ \left( \frac{\mathcal{M}_\rho}{a} \right)^2 + \left( \frac{\mathcal{M}_{\rho E}}{a^3 \tau_R^2} \right)^2 \right],$$

over the set  $\mathcal{D}_3 = [0, 0.5] \times [-0.5, 0]$ . We set  $\varepsilon_{ref} = 3.5$ , this function imposes the temperature while controlling the conservative losses. The main difference consists in film cooling by injection of mass ( $\mathcal{M}_\rho > 0$ ) and loss of energy ( $\mathcal{M}_{\rho E} < 0$ ). Figure 2.11 presents the density, velocity, pressure, internal energy and mass flow profiles as a function of the control parameter. Figure 2.12 displays the relative conservation losses for these three values of  $\kappa$ . Here again, the conclusions are similar to the other optimization problems.

## 2.5 Concluding remarks

We have extended the study of interface coupling with local measure source term [4, 51, 5] to the general case where all the source terms are non zero. An approximate Riemann solver preserving equilibrium solutions has been proposed for the numerical approximation of the coupled model in the context of the gas dynamics equations with different closure laws for the pressure, as a model example. The construction of this solver relies on a relaxation approximation where the associated Riemann problem has been solved analytically. This relaxation method has been used for the evaluation of optimal source terms satisfying physical criteria at the coupling interface. In the context of constrained optimization problems, numerical experiments have shown that it is possible to impose physical quantities such as mass flow or temperature at the coupling interface while controlling conservation losses. Future investigations should include an extension to several space dimensions and adaptive procedures, together with the coupling of more realistic models (even if we cannot expect explicit theoretical results for general models, at least it is interesting to extend the numerical approach to less academic cases).

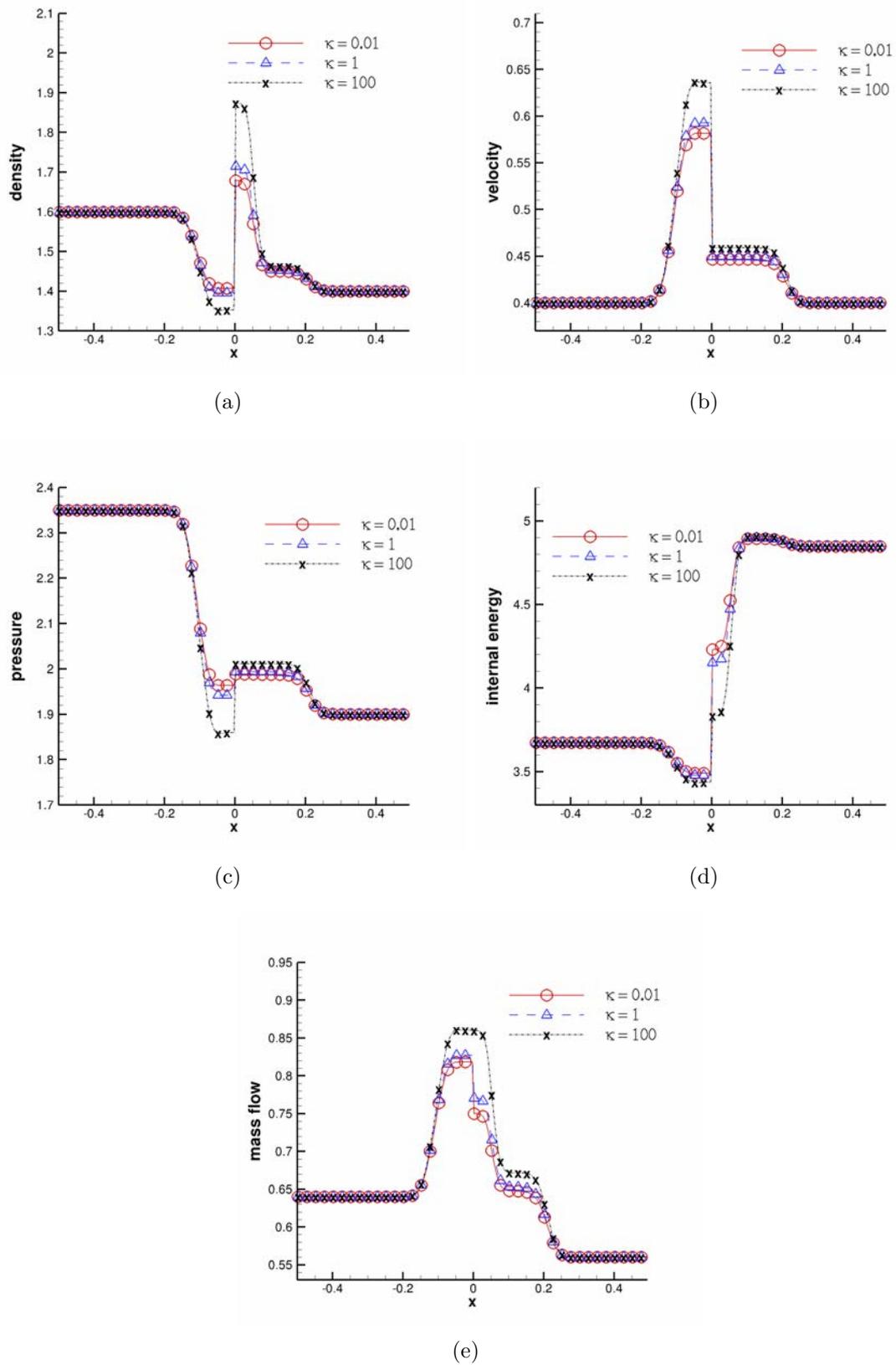
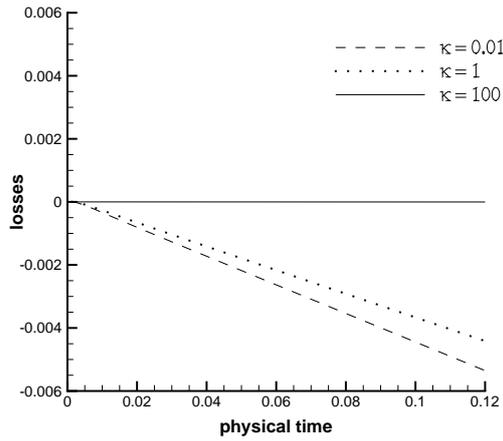
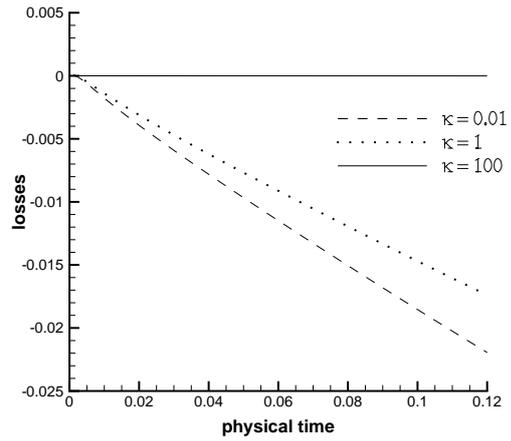


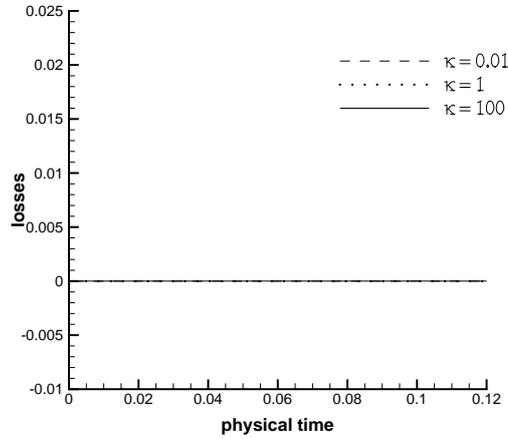
Figure 2.7 – Constrained optimization for test case 3: profiles of primitive variables ( $\rho, u, p$ ), mass flow and internal energy.



(a) relative mass conservation losses



(b) relative momentum conservation losses



(c) relative energy conservation losses

Figure 2.8 – Relative conservation losses for test case 3.

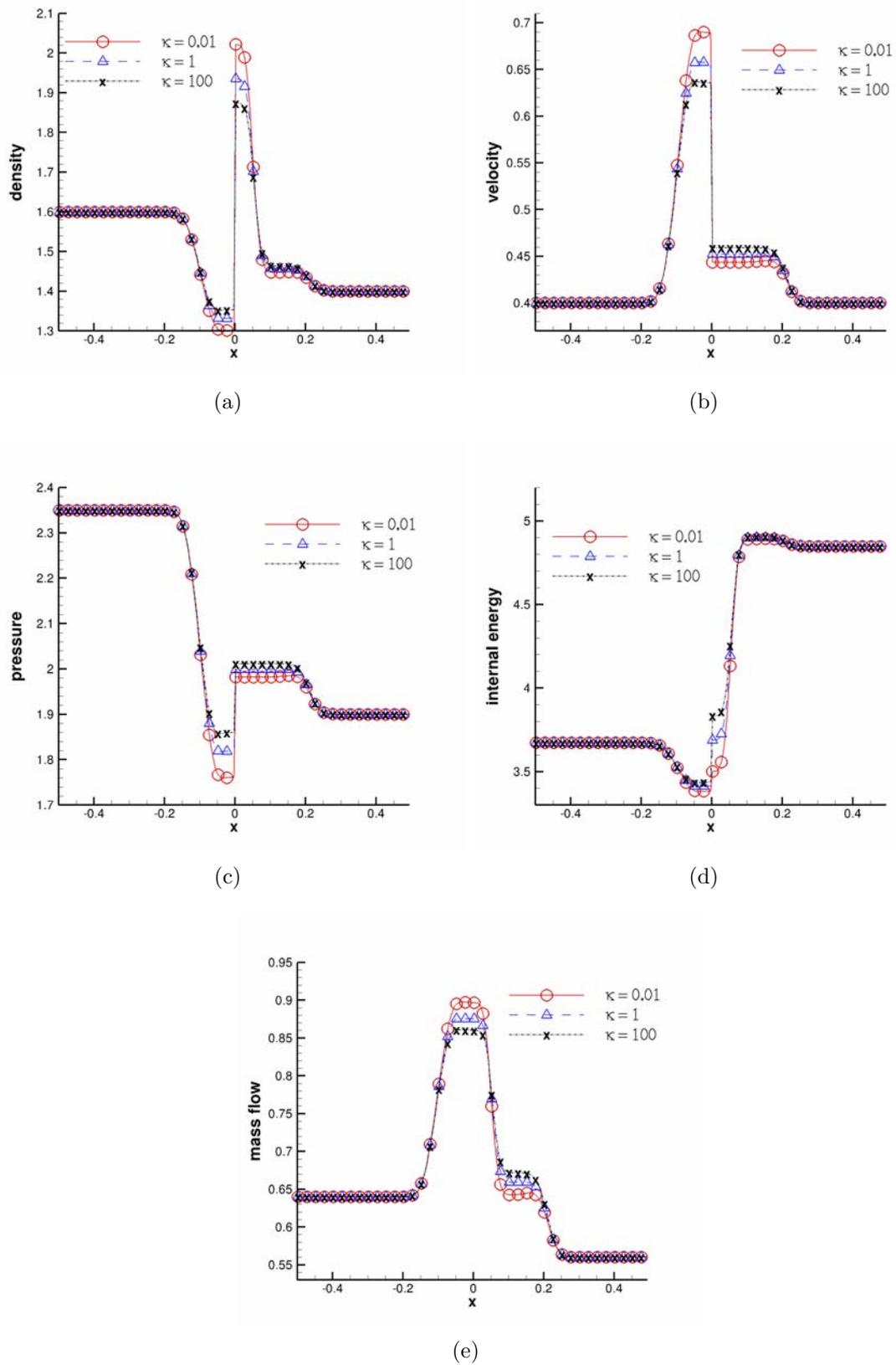
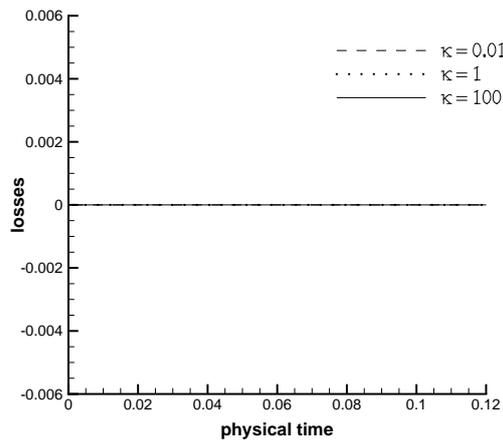
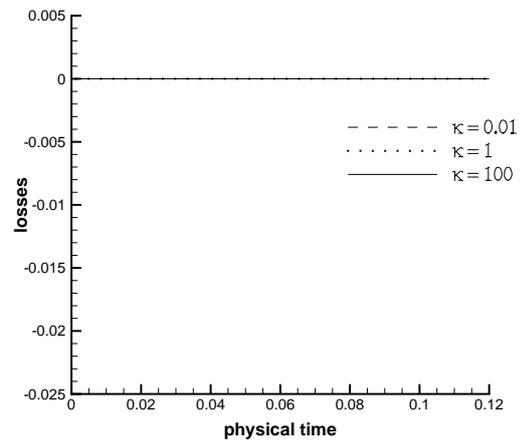


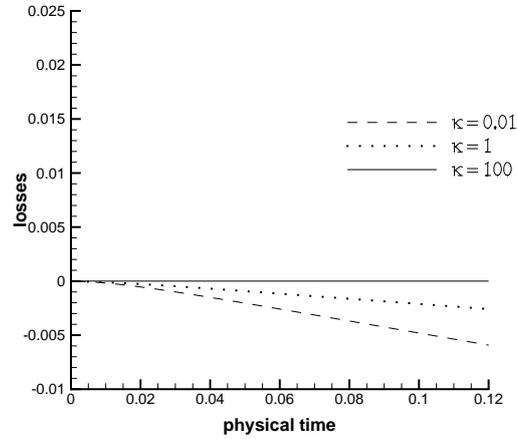
Figure 2.9 – Constrained optimization for test case 4: profiles of primitive variables ( $\rho, u, p$ ), mass flow and internal energy.



(a) relative mass conservation losses



(b) relative momentum conservation losses



(c) relative energy conservation losses

Figure 2.10 – Relative conservation losses for test case 4.

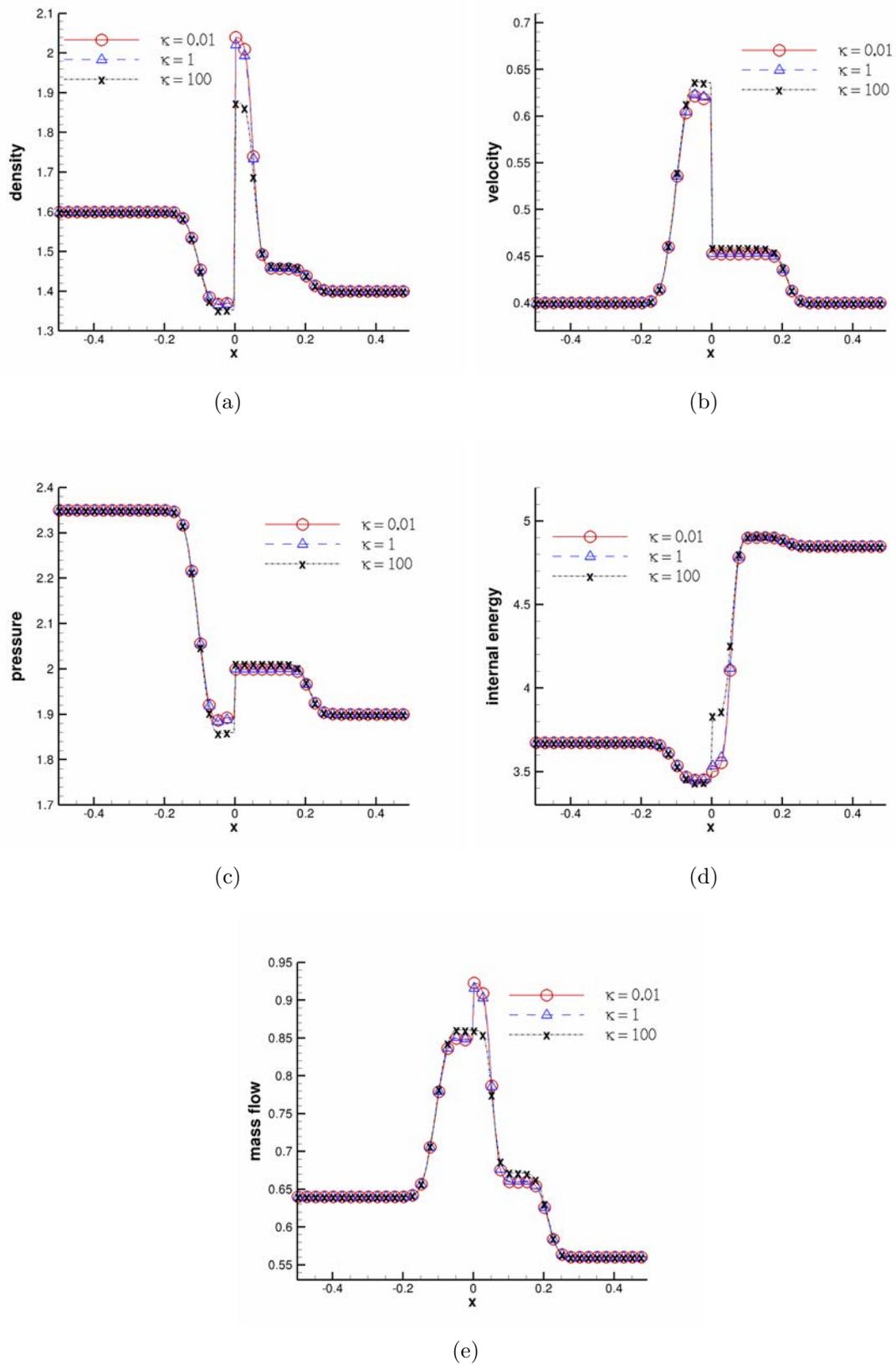
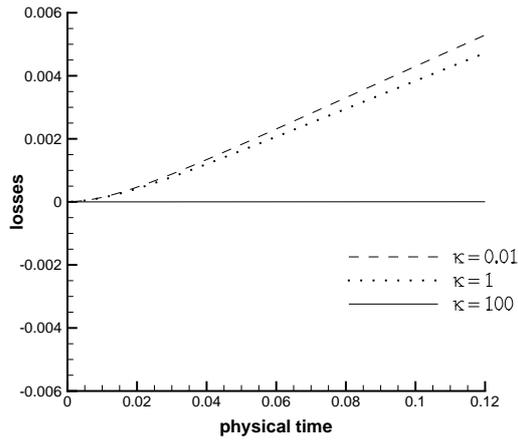
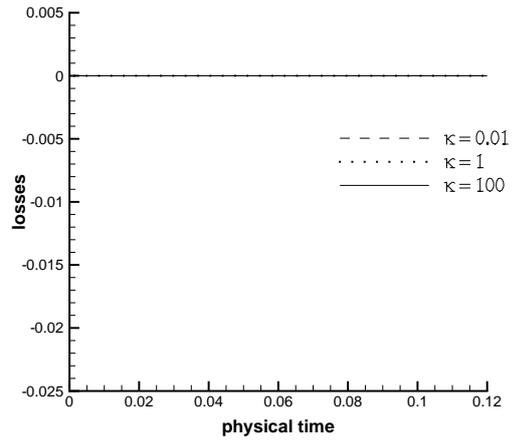


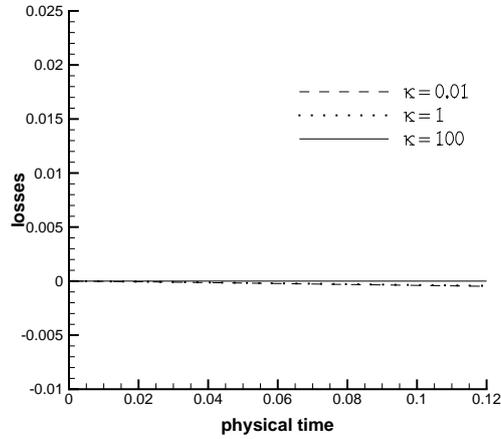
Figure 2.11 – Constrained optimization for test case 5: profiles of primitive variables ( $\rho, u, p$ ), mass flow and internal energy.



(a) relative mass conservation losses



(b) relative momentum conservation losses



(c) relative energy conservation losses

Figure 2.12 – Relative conservation losses for test case 5.

## 2.6 Appendix: Mathematical properties of the cost functions $\mathcal{J}_1$ and $\mathcal{J}_2$

First, recall that the sequence of the gradient projection algorithm converges to the optimum if the objective function  $\mathcal{J}$  is  $\alpha_{\mathcal{J}}$ -convex differentiable and  $\nabla\mathcal{J}$  is  $\mathcal{C}_{\nabla\mathcal{J}}$ -Lipschitz continuous. More precisely, if the algorithm parameter  $\mu_{\mathcal{J}}$  is chosen such that the following inequality holds

$$0 < \mu_{\mathcal{J}} < \frac{2\alpha_{\mathcal{J}}}{\mathcal{C}_{\nabla\mathcal{J}}^2},$$

then the algorithm converges.

Here, we give some properties of the cost functions  $\mathcal{J}_1$  and  $\mathcal{J}_2$  respectively defined in (2.48) and (2.49).

**Proposition 2.6.1.** *For all control parameter  $\kappa > 0$ , the functions  $\mathcal{J}_1$  and  $\mathcal{J}_2$  are strictly convex. For each  $\kappa > 0$ , set:*

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \left[ \text{Tr}(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)) - \sqrt{\text{Tr}(\text{Hess}(\mathcal{J}_1))^2 - 4 \det(\text{Hess}(\mathcal{J}_1))} \right] > 0,$$

$$\mathcal{C}_{\nabla\mathcal{J}_1} = \text{rspec}(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)) > 0,$$

$$\alpha_2 = \frac{2\kappa^2}{a^6\tau_R^4} > 0, \quad \mathcal{C}_{\nabla\mathcal{J}_2} = \frac{2}{(\varepsilon_{ref}m_+)^2} + \alpha_2 > 0,$$

where for a matrix  $A$ ,  $\text{Tr}(A)$  denotes its trace,  $\det(A)$  its determinant and  $\text{rspec}(A)$  its spectral radius.  $\text{Hess}(\mathcal{J}_1)$  denotes the Hessian matrix of the cost function  $\mathcal{J}_1$ . Then, for  $i = 1, 2$ , there exists  $\alpha_{\mathcal{J}_i}$  strictly positive and strictly smaller than  $\alpha_i$  such that the function  $\mathcal{J}_i$  is  $\alpha_{\mathcal{J}_i}$ -convex differentiable and  $\nabla\mathcal{J}_i$  is  $\mathcal{C}_{\nabla\mathcal{J}_i}$ -Lipschitz. Finally, for  $i = 1, 2$ , the gradient projection algorithm converges for all parameter  $\mu_{\mathcal{J}_i}$  verifying:

$$0 < \mu_{\mathcal{J}_i} < \frac{2\alpha_{\mathcal{J}_i}}{\mathcal{C}_{\nabla\mathcal{J}_i}^2}.$$

*Proof.* First of all, one can check that  $\text{Tr}(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)) > 0$  and  $\det(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)) > 0$  for all  $\kappa > 0$ , since after easy calculations we get:

$$\text{Tr}(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)) = \frac{2(a\tau_L^* - u^*)^2}{[am_{ref}(\tau_L^* + \tau_R^*)]^2} + \frac{2\kappa^2}{a^2} + \frac{2}{[am_{ref}(\tau_L^* + \tau_R^*)]^2} + \frac{2\kappa^2}{a^4\tau_R^2} > 0,$$

and

$$\det(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)) = \frac{4\kappa^2}{a^4} \left[ \frac{(a\tau_L^* - u^*)^2}{[am_{ref}\tau_R(\tau_L^* + \tau_R^*)]^2} + \frac{1}{[m_{ref}(\tau_L^* + \tau_R^*)]^2} + \frac{\kappa^2}{a^2\tau_R^2} \right] > 0.$$

This implies in particular the strict convexity of  $\mathcal{J}_1$  since its Hessian matrix is positive definite. Let

$$\Delta = \text{Tr}(\text{Hess}(\mathcal{J}_1))^2 - 4 \det(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)). \quad (2.50)$$

First, remark that:

$$\begin{aligned}\Delta &= \left[ \partial_{\mathcal{M}_\rho^2}^2 \mathcal{J}_1 + \partial_{\mathcal{M}_{\rho u}^2}^2 \mathcal{J}_1 \right]^2 - 4 \left[ \partial_{\mathcal{M}_\rho^2}^2 \mathcal{J}_1 \partial_{\mathcal{M}_{\rho u}^2}^2 \mathcal{J}_1 - \left( \partial_{\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}}^2 \mathcal{J}_1 \right)^2 \right] \\ &= \left[ \partial_{\mathcal{M}_\rho^2}^2 \mathcal{J}_1 - \partial_{\mathcal{M}_{\rho u}^2}^2 \mathcal{J}_1 \right]^2 + 4 \left( \partial_{\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}}^2 \mathcal{J}_1 \right)^2 > 0,\end{aligned}$$

since

$$\partial_{\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}}^2 \mathcal{J}_1 = \frac{2(a\tau_L^* - u^*)}{[am_{ref}(\tau_L^* + \tau_R^*)]^2} \neq 0 \quad (\text{because } \lambda_1^r < 0),$$

and then observe that:

$$\Delta - \text{Tr}(\text{Hess}(\mathcal{J}_1))^2 = -4 \det(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)) < 0.$$

From  $\Delta > 0$ ,  $\text{Tr}(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)) > 0$  and the previous inequality, we deduce that the term  $\alpha_1$  defined in the present proposition is strictly positive. So, there exists  $\alpha_{\mathcal{J}_1}$  such that  $0 < \alpha_{\mathcal{J}_1} < \alpha_1$ . Now, in order to show that  $\mathcal{J}_1$  is  $\alpha_{\mathcal{J}_1}$ -convex, let us define the function

$$f_1 : (\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathcal{J}_1(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u}) - \frac{\alpha_{\mathcal{J}_1}}{2} \|(\mathcal{M}_\rho, \mathcal{M}_{\rho u})\|^2 \in \mathbb{R},$$

where  $\|\cdot\|$  denotes the usual Euclidean norm on  $\mathbb{R}^2$ . After easy calculations, we obtain

$$\text{Tr}(\text{Hess}(f_1)) = \text{Tr}(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)) - 2\alpha_{\mathcal{J}_1},$$

and

$$\det(\text{Hess}(f_1)) = \det(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)) - \alpha_{\mathcal{J}_1} \text{Tr}(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)) + \alpha_{\mathcal{J}_1}^2.$$

Since  $\alpha_{\mathcal{J}_1} < \alpha_1 < \text{Tr}(\text{Hess}(\mathcal{J}_1))/2$ , it is clear that the trace of the Hessian matrix of the function  $f_1$  is strictly positive. Moreover, considering the following polynomial of degree 2 in  $X$ :

$$\mathcal{P}(X) = X^2 - \text{Tr}(\text{Hess}(\mathcal{J}_1))X + \det(\text{Hess}(\mathcal{J}_1)),$$

one can see that its discriminant is given by  $\Delta > 0$  in (2.50) and  $\alpha_1$  is its smallest root. Since  $\alpha_{\mathcal{J}_1} < \alpha_1$ , the determinant of the Hessian matrix of the function  $f_1$  is strictly positive and we deduce that  $f_1$  is in particular convex that is to say that  $\mathcal{J}_1$  is  $\alpha_{\mathcal{J}_1}$ -convex. For all  $\kappa > 0$ , the gradient  $\nabla \mathcal{J}_1$  of the function  $\mathcal{J}_1$  is Lipschitz-continuous with constant  $\mathcal{C}_{\nabla \mathcal{J}_1}$  since the eigenvalues of the Hessian of  $\mathcal{J}_1$  are bounded above by  $\mathcal{C}_{\nabla \mathcal{J}_1}$ . The constant  $\mathcal{C}_{\nabla \mathcal{J}_1}$  is strictly positive because  $\mathcal{J}_1$  is strictly convex and is independent of the variables  $\mathcal{M}_\rho$  and  $\mathcal{M}_{\rho u}$  because the Hessian is independent of these variables.

Now, let us introduce  $0 < \alpha_{\mathcal{J}_2} < \alpha_2$  and the function

$$f_2 : \mathcal{M}_{\rho E} \in \mathbb{R} \longmapsto \mathcal{J}_2(\mathcal{M}_{\rho E}) - \frac{\alpha_{\mathcal{J}_2}}{2} \mathcal{M}_{\rho E}^2 \in \mathbb{R}.$$

Then, the second order derivative of  $\mathcal{J}_2$  is given by

$$\mathcal{J}_2''(\mathcal{M}_{\rho E}) = \begin{cases} \frac{2\kappa^2}{a^6 \tau_R^4} & \text{if } \mathcal{M}_{\rho E} \in \mathcal{D}_{adm}^-, \\ \frac{2\kappa^2}{a^6 \tau_R^4} + \frac{2}{\varepsilon_{ref}^2 m_+^2} & \text{if } \mathcal{M}_{\rho E} \in \mathcal{D}_{adm}^+, \end{cases}$$

which implies  $f_2''(\mathcal{M}_{\rho E}) = \mathcal{J}_2''(\mathcal{M}_{\rho E}) - \alpha_{\mathcal{J}_2} > 0$ , that is to say that the function  $\mathcal{J}_2$  is  $\alpha_{\mathcal{J}_2}$ -convex. Moreover, given the above relations, we directly obtain

$$\sup |\mathcal{J}_2''(\mathcal{M}_{\rho E})| \leq \mathcal{C}_{\nabla \mathcal{J}_2},$$

and applying a corollary of the mean value theorem, we deduce that for all  $\kappa > 0$ , the gradient  $\nabla \mathcal{J}_2$  is Lipschitz-continuous with constant  $\mathcal{C}_{\nabla \mathcal{J}_2}$ . This concludes the proof. □



# Chapitre 3

## Erreurs de modélisation et de discrétisation pour l'approximation d'un problème mixte hyperbolique semi-linéaire de relaxation

### 3.1 Introduction

Le développement de méthodes numériques performantes permettant de mieux modéliser des écoulements complexes avec relaxation continue de faire l'objet de travaux de recherche car ces écoulements sont rencontrés dans de nombreuses applications d'intérêt industriel. Par exemple, les industries chimique, nucléaire et pétrolière sont concernées par les phénomènes de transition de phase liquide-vapeur. Citons aussi, dans le cadre de l'aéronautique, les écoulements compressibles, diphasiques, réactifs et turbulents au sein des systèmes de propulsion des corps de rentrée ou des moteurs fusée cryotechniques.

La simulation numérique de ces écoulements s'effectue au moyen d'une hiérarchie de modèles ordonnés en fonction des phénomènes physiques qu'ils sont censés capturer. Recourir au modèle le plus « fin » dans l'ensemble du domaine d'étude conduirait à des coûts de calculs prohibitifs. Les régions de l'écoulement correspondant aux différents modèles sont alors séparées par des interfaces sur lesquelles on applique des conditions de couplage modélisant le transfert d'informations.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un cadre simplifié, et nous étudions en particulier le problème de couplage entre le modèle de relaxation de S. Jin et Z. Xin [75] et la loi de conservation scalaire qui lui est associée.

Dans le cadre de sa thèse, F. Caetano a étudié cette problématique de couplage [28]. Dans le cas où la dérivée du flux associé à la loi de conservation scalaire est soit strictement négative soit strictement positive, l'auteur a montré que le problème de Cauchy couplé admet une unique solution. Dans ce cas où l'interface de couplage n'est pas caractéristique, elle a développé un schéma numérique de type volumes finis d'ordre un, approchant la solution du problème couplé. Ce schéma numérique

est basé sur la méthode de double flux [64, 61], idée déjà proposée par R. Abgrall et S. Karni [1] pour les écoulements bifluïdes. Dans le cas particulier où la dérivée du flux est strictement positive, une preuve de convergence du schéma numérique est donnée.

Plus récemment, S. Jin, J-G. Liu et L. Wang se sont confrontés à cette problématique de couplage [76]. Toujours en supposant que l'interface de couplage n'est pas caractéristique, ces auteurs construisent les conditions de couplage liant les deux modèles, à l'aide de méthodes multi-échelles. En utilisant ces techniques, les auteurs prennent en compte les éventuelles couches limites se formant à l'interface de couplage. Les conditions de couplage liant les deux modèles dépendent du signe de la dérivée du flux associé à l'équation scalaire d'équilibre. De plus, dans leur analyse, ces auteurs prennent en compte les conditions aux limites aux deux bords du domaine spatial. Enfin, ils proposent un schéma numérique de type différences finies d'ordre un pour approcher les solutions du problème mixte. Par la suite, F. Coquel, S. Jin, J-G. Liu et L. Wang ont proposé des conditions de couplage plus générales [41]. En effet, dans leur étude, les conditions de couplage liant le modèle de relaxation à l'équation scalaire d'équilibre associée, sont indépendantes du signe de la dérivée du flux. Sous l'hypothèse d'une interface de couplage non caractéristique, ils prouvent que le problème de Cauchy couplé admet une unique solution.

Dans notre étude, nous nous intéressons à l'approximation des solutions de deux problèmes mixtes que nous supposons stationnaires par souci de simplicité. Pour cela, nous adoptons une procédure de marche en temps. Le problème fin est le premier problème. Dans ce problème, nous considérons le modèle de relaxation de S. Jin et Z. Xin, muni de conditions initiales et aux limites. Dans le second problème, nous considérons le couplage entre le modèle de relaxation et la loi scalaire d'équilibre associée. À ce couplage de modèles, nous associons des conditions initiales et aux limites. Nous supposons que l'interface de couplage est localisée en une position arbitraire de l'espace. Cette hypothèse permet d'envisager, à plus long terme, des calculs adaptés pour l'estimation de fonctions d'intérêt. En effet, ce type de calcul repose sur la construction d'indicateurs conduisant à résoudre le modèle d'équilibre dans des régions de l'espace où les solutions des deux modèles sont très différentes. De plus, contrairement aux études précédentes, nous supposons que l'interface de couplage peut être caractéristique.

Pour approcher les solutions stationnaires des deux problèmes mixtes, nous développons deux méthodes numériques d'ordre arbitrairement élevé en espace. C'est la première fois, à notre connaissance, que la solution d'un problème couplé est approchée par une méthode numérique d'ordre élevé. Nous adoptons une approche de type Galerkin discontinu. Cette méthode, introduite par W. H. Reed et T. R. Hill pour la discrétisation de l'équation modélisant le transport de neutron en régime stationnaire [91], puis analysée par P. Lesaint et P. -A. Raviart [79], regroupe plusieurs avantages intéressants. En particulier, il s'agit d'une méthode compacte permettant l'obtention d'un ordre élevé avec une taille de stencil indépendante de l'ordre de précision. Cette propriété de la méthode permet une adaptation relativement aisée aux architectures de codes parallèles. Nous invitons le lecteur à consulter l'article de revue [37] pour plus de précisions sur cette méthode.

Le reste de ce chapitre est constitué de trois parties, et est terminé par une brève

conclusion. Dans la première partie, nous décrivons les problèmes fin et couplé et présentons notre choix des conditions aux limites. Afin de construire notre schéma numérique couplé, nous résolvons un problème de Riemann couplé. Ce problème est résolu sous l'hypothèse d'une interface de couplage éventuellement caractéristique. L'éventuelle existence d'une couche limite à l'interface de couplage est aussi prise en compte. Dans la deuxième partie, en utilisant la méthode de Galerkin discontinue, nous développons deux méthodes numériques d'ordre arbitrairement élevé en espace pour l'approximation des problèmes fin et couplé. La troisième partie est dédiée à l'analyse quantitative et qualitative des résultats numériques obtenus après notre mise en œuvre des deux schémas numériques. Nous proposons plusieurs cas tests où le flux associé à l'équation scalaire équilibre est soit linéaire, soit non-linéaire de dérivée strictement négative ou positive. Le cas d'une interface de couplage caractéristique est aussi proposé. Dans ces cas tests, nous faisons varier trois degrés de liberté : le niveau de raffinement de maillage, le degré du polynôme et la position de l'interface de couplage.

## 3.2 Problèmes fin et couplé

### 3.2.1 Problème fin

On s'intéresse à la solution stationnaire du modèle de S. Jin et Z. Xin [75] sur le domaine spatial ouvert  $\Omega = ]0, L[$ ,  $L > 0$ . Il s'agit d'un modèle strictement hyperbolique, linéaire à coefficient constant, et muni d'un terme source de relaxation. Pour cela, nous adoptons une procédure de marche en temps, qui consiste à chercher la fonction vectorielle  $\mathbf{u}^\lambda : (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^* \mapsto \mathbf{u}^\lambda(x, t) \in \mathbb{R}^2$ , solution du système

$$\partial_t \mathbf{u}^\lambda + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}^\lambda) = \mathcal{S}(\mathbf{u}^\lambda), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.1)$$

muni de la condition initiale

$$\mathbf{u}^\lambda(x, 0) = \mathbf{u}_0^\lambda(x) \in L^\infty(\Omega). \quad (3.2)$$

Le vecteur des variables inconnues ainsi que les fonctions vectorielles flux et source sont respectivement définis par :

$$\mathbf{u}^\lambda = \begin{pmatrix} u^\lambda \\ v^\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{u}^\lambda) = \begin{pmatrix} v^\lambda \\ a^2 u^\lambda \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}(\mathbf{u}^\lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda(f(u^\lambda) - v^\lambda) \end{pmatrix}.$$

Le flux  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est supposé strictement convexe. Il existe donc  $\eta > 0$  avec

$$f''(u) > \eta$$

pour tout  $u$  dans  $\mathbb{R}$ , et

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La constante  $a$  satisfait la condition sous-caractéristique

$$|f'(u)| < a, \quad (3.3)$$

pour tous les  $u$  concernés et la fréquence de relaxation  $\lambda > 0$  est supposée arbitraire et constante.

**Choix des conditions aux limites.** Il est bien connu que le système homogène associé à (3.1), c'est-à-dire le système linéaire

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \quad (3.4)$$

est hyperbolique. Les variables caractéristiques associées à (3.4) sont  $au \pm v$  et les valeurs propres associées sont  $\pm a$ . Le nombre de caractéristiques entrantes aux bords gauche  $x = 0^+$  et droit  $x = L^-$  est le même, et vaut 1. Par conséquent, nous devons imposer des conditions aux limites sur une seule variable à chaque bord du domaine  $\Omega$ . Soient  $\mathcal{B}_G$  et  $\mathcal{B}_D$  deux fonctions données bornées sur  $\mathbb{R}^+$ . Introduisons, pour tout temps  $t$  strictement positif, les valeurs au temps  $t$  de la seconde variable, aux bords gauche et droit du domaine spatial d'étude :

$$v^\lambda(0^+, t) = \mathcal{B}_G(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^+), \quad v^\lambda(L^-, t) = \mathcal{B}_D(t) \in L^\infty(\mathbb{R}^+). \quad (3.5)$$

Sachant que la deuxième composante de la solution stationnaire associée au modèle (3.1) est nécessairement constante en espace :

$$\frac{dv^\lambda}{dx} = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

nous choisissons de munir (3.1)-(3.2) de conditions aux limites de type Dirichlet sur la seconde variable, en imposant l'égalité

$$v^\lambda(0^+, t) = v^\lambda(L^-, t) = \mathcal{B}(t), \quad \forall t > 0, \quad (3.6)$$

où  $\mathcal{B}$  est une fonction donnée indépendante de  $\lambda$  et bornée sur  $\mathbb{R}^+$ . Notre problème fin consiste ainsi à chercher  $\mathbf{u}^\lambda$  solution du problème mixte (3.1)-(3.2)-(3.6).

**Remarque 3.2.1.** *En s'inspirant des techniques utilisées par Z. Xin et W-Q. Xu [99], S. Jin, J.-G. Liu et L. Wang [76] ont montré que le problème mixte (3.1)-(3.2)-(3.5) est bien posé au sens où la norme  $L^2$  de la solution est bornée par les normes  $L^2$  des conditions initiales et aux limites. Dans leur analyse, le flux  $f$  est linéaire, la fréquence de relaxation  $\lambda = \lambda(x)$  est une fonction discontinue de la variable d'espace et par ailleurs les conditions aux limites de type Dirichlet sont imposées sur la première variable.*

### 3.2.2 Problème couplé : approximation continue du problème fin

Le problème (3.1)-(3.2)-(3.6) est académique mais il est représentatif de situations réalistes complexes pour lesquelles l'approximation du terme source est difficile et coûteuse. D'une part, pour chaque temps  $t > 0$ , l'obtention d'une approximation stable et précise du système (3.1) à l'aide de méthodes numériques usuelles explicites en temps, nécessite de choisir des pas de temps et d'espace dépendants de la valeur de la fréquence de relaxation  $\lambda$ . Pour des grandes valeurs de  $\lambda$ , même en augmentant le degré d'approximation en espace, les contraintes sur la discrétisation en temps et en

espace sont coûteuses, en terme de temps CPU et encombrement mémoire. D'autre part, les techniques classiques de traitement numérique des termes sources ne sont pas optimales pour approcher efficacement les solutions stationnaires de (3.1).

Par ailleurs, une partie non négligeable des simulations numériques réalisées dans les bureaux d'études vise, outre l'analyse de la solution du problème fin (3.1)-(3.2)-(3.6), à estimer des quantités d'intérêts. Ces fonctions objectifs, dépendantes de la solution du problème fin, sont généralement des forces, des moments ou des valeurs ponctuelles. Par exemple, dans le domaine de l'aéronautique, la fonction objectif peut représenter les coefficients de portance ou de traînée d'une aile. Tout en respectant une certaine tolérance désirée sur l'estimation de la fonction objectif, il est possible de produire des simulations numériques à encombrement mémoire et temps CPU minimaux. Ces calculs sont réalisés à l'aide d'algorithmes d'adaptation où le modèle et l'ordre de discrétisation sont localement déterminés grâce à l'utilisation d'estimateurs locaux a posteriori. Il est possible de construire ces indicateurs en appliquant la méthodologie générale développée par M. Braack et A. Ern dans [27] et J. T. Oden *et al.* dans [89, 90]. Cette approche est une extension de celle de R. Becker et R. Rannacher [16], initialement développée pour l'estimation a posteriori d'erreurs de discrétisation. Ainsi, il est possible de construire des indicateurs conduisant à résoudre le modèle équilibre

$$\begin{cases} \partial_t u_m + \partial_x f(u_m) = 0, & x \in \Omega, \quad t > 0, \\ v_m = f(u_m), & x \in \Omega, \quad t > 0, \end{cases} \quad (3.7)$$

associé au système (3.1) (obtenu comme modèle limite quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ ), dans des régions de l'espace où les variables  $u$  et  $v$  sont hors équilibre ( $v \neq f(u)$ ). C'est le cas, lorsque le modèle équilibre suffit à décrire les mécanismes physiques quantifiés par la fonction d'intérêt dans les zones hors équilibre, sous une tolérance donnée par l'utilisateur. C'est la raison pour laquelle nous souhaitons coupler les modèles fin (3.1) et équilibre (3.7) à travers une interface de couplage localisée en une position  $x_c \in ]0, L[$  prédéfinie (mais arbitraire).

**Le modèle couplé : choix des conditions de couplage.** Bien que la motivation initiale soit différente de la nôtre, après l'étude de F. Caetano [28], S. Jin, J.-G. Liu et L. Wang [76] puis F. Coquel, S. Jin, J.-G. Liu et L. Wang [41] se sont récemment confrontés à la même problématique de couplage. En particulier, F. Coquel, S. Jin, J.-G. Liu et L. Wang, ont construit les conditions de couplage de sorte que le problème de Cauchy couplé posé sur la droite réelle soit bien posé. Ces derniers auteurs ont en effet montré qu'une couche limite sur la variable  $u$  se forme au voisinage de l'interface de couplage lorsque la dérivée du flux  $f$  y est strictement négative. Concernant la variable  $v$ , aucune couche limite ne se forme. Ils en déduisent alors qu'il faut assurer la continuité de la variable  $v$  à travers l'interface de couplage. Dans leur analyse, l'interface de couplage est localisée au centre de l'intervalle et les conditions initiales sont à l'équilibre. Notons aussi que les auteurs supposent que l'interface de couplage n'est pas caractéristique (à chaque temps  $t$  fixé,  $f'(u)$  ne change pas de signe entre  $u_m^\lambda(x_c^-, t)$  et  $u_m(x_c^+, t)$ ). En suivant [41], nous considérons le modèle couplé :

$$\partial_t \mathbf{u}_m^\lambda + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}_m^\lambda) = \mathcal{S}(\mathbf{u}_m^\lambda), \quad x \in ]0, x_c[, \quad t > 0, \quad (3.8a)$$

$$v_m^\lambda(x_c^-, t) = f(u_m(x_c^+, t)) = v_m(x_c^+, t), \quad t > 0, \quad (3.8b)$$

$$\partial_t u_m + \partial_x f(u_m) = 0, \quad x \in ]x_c, L[, \quad t > 0, \quad (3.8c)$$

$$v_m(x, t) = f(u_m(x, t)), \quad x \in ]x_c, L[, \quad t > 0, \quad (3.8d)$$

$$u_m(x_c^+, t) \stackrel{\text{BLN}}{=} u_m^\lambda(x_c^-, t), \quad t > 0. \quad (3.8e)$$

La condition à la limite (3.8e) est imposée au sens de C. Bardos, A. Le Roux et J. Nédélec [15] :

$$(f(u_m(x_c^+, t)) - f(k)) \operatorname{sgn}(u_m(x_c^+, t) - u_m^\lambda(x_c^-, t)) \leq 0, \quad \forall k \in [u_m^\lambda(x_c^-, t), u_m(x_c^+, t)], \quad (3.9)$$

avec la notation

$$[a, b] = [\min(a, b), \max(a, b)],$$

pour  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$ . L'inégalité (3.9) peut s'écrire de façon équivalente

$$\frac{f(u_m(x_c^+, t)) - f(k)}{u_m(x_c^+, t) - u_m^\lambda(x_c^-, t)} \leq 0, \quad \forall k \in [u_m^\lambda(x_c^-, t), u_m(x_c^+, t)]$$

pour presque tout  $t > 0$ , ce qui signifie que la pente de la corde joignant le point  $(u_m(x_c^+, t), f(u_m(x_c^+, t)))$  au point  $(u_m^\lambda(x_c^-, t), f(k))$  est négative, pour les valeurs de  $k$  concernées.

Nous associons au modèle couplé (3.8a)-(3.8b)- (3.8c)- (3.8d)- (3.8e) les conditions initiales

$$\mathbf{u}_m^\lambda(x, 0) = \tilde{\mathbf{u}}_m^\lambda(x), \quad x \in ]0, x_c[, \quad (3.10a)$$

$$u_m(x, 0) = \tilde{u}_m(x), \quad x \in ]x_c, L[, \quad (3.10b)$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}_m^\lambda$  et  $\tilde{u}_m$  sont deux fonctions données. Notons que nous ne supposons pas qu'elles soient à l'équilibre sur tout le domaine spatial d'étude. En effet, dans un contexte d'adaptation dynamique de modèle, lors du passage d'une boucle d'adaptation à la suivante, les variables ne sont pas toujours en équilibre sur tout le domaine spatial.

**Le modèle couplé : choix des conditions aux limites.** En régime stationnaire, sur l'intervalle ouvert  $]0, x_c[$  nous avons  $dv_m^\lambda/dx = 0$  par la relation (3.8a). De même, en utilisant (3.8c) et (3.8d), nous avons  $dv_m^\lambda/dx = df(u_m^\lambda)/dx = 0$  sur  $]x_c, L[$ . La condition de couplage (3.8b) entraîne alors que la seconde composante de la solution stationnaire du modèle couplé (3.8a)-(3.8b)- (3.8c)- (3.8d)- (3.8e) est nécessairement constante sur tout le domaine spatial. Nous choisissons de retrouver la même constante que pour le modèle fin, ce qui nous amène à imposer :

$$v_m^\lambda(0^+, t) = \mathcal{B}(t), \quad u_m(L^-, t) \stackrel{\text{BLN}}{=} f^{-1}(\mathcal{B}(t)), \quad \forall t > 0. \quad (3.11)$$

Dans les applications numériques que nous proposons, la dérivée du flux  $f$  est strictement négative dans la région  $]x_c, L[$  donc les égalités (3.11) sont vérifiées au sens fort. Notre problème couplé consiste ainsi à chercher  $\mathbf{u}_m^\lambda : (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbf{u}_m^\lambda(x, t) \in \mathbb{R}^2$ , solution du problème mixte (3.8a)-(3.8b)- (3.8c)- (3.8d)- (3.8e)- (3.10a)- (3.10b)- (3.11).

**Remarque 3.2.2.** Dans le cas où le flux  $f$  est linéaire, les conditions aux limites sont imposées sur la première variable et la fréquence de relaxation est une fonction discontinue de la variable d'espace, S. Jin, J-G. Liu et L. Wang [76] ont montré que le problème mixte (3.8a)-(3.8b)- (3.8c)-(3.8d)-(3.8e)-(3.10a)-(3.10b)-(3.11) admet une unique solution.

### 3.2.3 Résolution du problème de Riemann couplé

Dans ce paragraphe, nous résolvons le problème de Riemann couplé. Cette résolution nous sera utile pour la construction du schéma numérique couplé pour lequel ce problème de Riemann couplé sera posé à l'interface  $x = x_c$ . Plus précisément, étant donnés les états constant  $(u_G, v_G)^T$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $u_D$  dans  $\mathbb{R}$ , nous cherchons la solution autosemblable  $\mathcal{W}_c\left(\frac{x}{t}; (u_G, v_G)^T, u_D\right)$  du problème de Riemann couplé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathbf{u}_m + \partial_x \mathbf{F}(\mathbf{u}_m) & = 0, & x < 0, t > 0, \\ v_m(0^-, t) = f(u_m(0^+, t)) & = v_m(0^+, t), & t > 0, \\ \\ \partial_t u_m + \partial_x f(u_m) & = 0, & x > 0, t > 0, \\ v_m(x, t) & = f(u_m(x, t)), & x > 0, t > 0, \\ u_m(0^+, t) & \stackrel{\text{BLN}}{=} u_m(0^-, t), & t > 0, \\ \\ \mathbf{u}_m(x, 0) & = (u_G, v_G)^T, & x < 0, \\ u_m(x, 0) & = u_D, & x > 0. \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Nous construisons la solution dans le cas général.

Pour la suite, nous introduisons des notations pour les traces de la solution du problème (3.12) à droite et à gauche de l'interface de couplage  $x = 0$  :

$$\begin{aligned} u^+ &= \mathcal{W}_c\left(0^+; (u_G, v_G)^T, u_D\right), \\ u^- &= \Pi_1 \mathcal{W}_c\left(0^-; (u_G, v_G)^T, u_D\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Les opérateurs de projection  $\Pi_i$  sont naturellement définis par  $\Pi_i : (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ . Si on pose  $v^- = \Pi_2 \mathcal{W}_c\left(0^-; (u_G, v_G)^T, u_D\right)$ , avec ces notations, la condition aux limites imposée pour le problème à gauche s'écrit  $v^- = f(u^+)$ , et on ne s'intéresse donc qu'à  $u^\pm$ .

La structure générale de la solution du problème (3.12) est la suivante. Des ondes séparent les quatre états constants  $(u_G, v_G)^T$ ,  $(u^-, v^-)^T = (u^-, f(u^+))^T \in \mathbb{R}^2$ ,  $u^+ \in \mathbb{R}$  et  $u_D$ . Il y a toujours (sauf dans le cas exceptionnel où  $u_G = u^-, v_G = f(u^+)$ ) une onde à gauche de l'interface de couplage, de vitesse  $-a$ , séparant les états  $(u_G, v_G)^T$  et  $(u^-, f(u^+))^T$ . A travers cette onde, l'invariant de Riemann  $au + v$  est constant, ce qui se traduit par

$$au_G + v_G = au^- + f(u^+). \quad (3.14)$$

De plus, soit la solution à droite est l'état constant  $u_D$ , soit nous avons une onde à droite de l'interface de couplage séparant les états  $u^+$  et  $u_D$ . Cette onde, associée au flux  $f$  strictement convexe, est alors soit un choc se propageant à la vitesse donnée par la relation de Rankine-Hugoniot

$$\sigma = \frac{f(u_D) - f(u^+)}{u_D - u^+}, \quad (3.15)$$

qui doit être positive dans le cas  $f'(u^+) \geq f'(u_D)$ , soit une raréfaction si  $0 \leq f'(u^+) \leq f'(u_D)$ .

Enfin, nous avons possiblement une discontinuité à l'interface, qui peut être un choc de vitesse nulle si  $f(u^-) = f(u_D)$ , ou bien une discontinuité que nous qualifierons de *couche limite* à l'interface de couplage séparants les états  $u^-$  et  $u^+$ . On impose à ces états  $u^+$  et  $u^-$  de vérifier la condition de C. Bardos, A. Le Roux et J. Nédélec

$$(f(u^+) - f(k)) \operatorname{sgn}(u^+ - u^-) \leq 0, \forall k \in [u^-, u^+]. \quad (3.16)$$

Nous utiliserons encore les notations suivantes :

- $u^*$  pour le point sonique de  $f$ , c'est-à-dire l'état tel que  $f'(u^*) = 0$ ,
- $\bar{u}$  l'unique valeur telle que (3.14) soit vérifié quand  $u^- = u^+$ . En effet, sous la condition sous-caractéristique (3.3), l'application  $H$  définie par  $H : w \in I \mapsto aw + f(w) \in \operatorname{Im}(H) \subset \mathbb{R}$  avec  $I = \{w \in \mathbb{R}, |f'(w)| < a\}$  est inversible, on pose donc

$$\bar{u} = H^{-1}(au_G + v_G), \quad (3.17)$$

état qui ne dépend que des données. Nous poserons  $\bar{v} = f(\bar{u})$ .

- $u_D^-$ , l'état gauche donné par (3.14) correspondant à  $u^+ = u_D$

$$u_D^- = u_G + \frac{1}{a}(v_G - f(u_D)) \quad (3.18)$$

et de façon analogue celui correspondant à  $u^+ = u^*$

$$u_*^- = u_G + \frac{1}{a}(v_G - f(u^*)). \quad (3.19)$$

Les trois lemmes suivants nous seront utiles pour la démonstration du résultat qui est l'objet principal de cette partie, à savoir l'existence de la solution du problème de Riemann couplé.

Le premier est une simple réécriture de (3.17).

**Lemme 3.2.3.** *Avec les notations (3.13), si la solution du problème de Riemann couplé (3.12) est telle que  $u^- = u^+$ , alors cette valeur commune est donnée par (3.17) :  $u^- = u^+ = \bar{u}$ .*

**Lemme 3.2.4.** *Considérons un demi problème de Riemann associé à une fonction  $f$  strictement convexe*

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x f(u) = 0, & x > 0, t > 0, \\ u(x, 0) = u_D, \\ u(0, t) \stackrel{\text{BLN}}{=} b, \end{cases} \quad (3.20)$$

dont la solution est notée  $\mathcal{W}_D\left(\frac{x}{t}; b, u_D\right)$ . La trace  $u^+ = \mathcal{W}_D(0^+; b, u_D)$  peut prendre uniquement l'une des trois valeurs  $b, u_D, u^*$ .

*Démonstration.* C'est un résultat classique, lié à la façon faible (voir (3.16)) d'imposer une condition aux limites pour une loi de conservation, qui pour le cas scalaire est équivalent à l'approche de Dubois-LeFloch. On est amené à regarder la solution du problème de Riemann entre  $b$  et  $u^+$  pour  $f$ , c'est soit un choc entropique, soit une détente, soit un état constant  $u^+ = u_D$ . Pour le demi problème de Riemann, on ne peut conserver que les ondes qui se propagent à droite. Il faut alors regarder précisément suivant les signes de  $f'(u_D)$  et de  $f'(b)$  :

- (i) lorsque  $f'(b) > 0$ , si  $f'(u_D) > 0$  ou si  $f'(u_D) \leq 0$  et  $f(u_D) < f(b) : u^+ = b$ ,
- (ii) lorsque  $f'(b) > 0$ , si  $f'(u_D) \leq 0$  et  $f(u_D) \geq f(b) : u^+ = u_D$ ,
- (iii) lorsque  $f'(b) \leq 0$ , si  $f'(u_D) \geq 0 : u^+ = u^*$ ,
- (iv) lorsque  $f'(b) \leq 0$ , si  $f'(u_D) < 0 : u^+ = u_D$ .

On peut avoir une raréfaction à droite entre les états  $u^+ = u^*$  et  $u_D$  (cas (iii)). On peut avoir un choc stationnaire si  $f'(b) > 0$ ,  $f'(u_D) < 0$ , et  $f(b) = f(u_D)$ , c'est un cas particulier de (ii).  $\square$

**Lemme 3.2.5.** *On suppose vérifiée la condition sous-caractéristique (3.3). Avec les notations (3.13), si la solution du problème de Riemann couplé (3.12) est telle que  $u^+ \neq u^-$ , alors*

- soit  $u^+ = u_D$ ,  $u^- = u_D^-$  défini par (3.18),
- soit  $f'(u^+) = 0$ , et  $u^+ = u^*$ ,  $u^- = u_*^-$  défini par (3.19).

*Démonstration.* C'est une conséquence du lemme précédent appliqué avec  $b = u^-$ , et de la définition des états gauche  $u_D^-$  et  $u_*^-$  (respectivement associés aux traces à droite possibles  $u_D$  et  $u^*$ ) faite précédemment.  $\square$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat d'existence de la solution du problème de Riemann dans le cas général. Par souci de clarté, l'énoncé détaille tous les cas suivant le signe de quantités qui ne dépendent que des valeurs initiales données. Les différents cas sont regroupés différemment dans les figures 3.1 (cas sans couche limite) et 3.2 (cas avec couche limite) et ces figures illustrent parfaitement le résultat (notons que les notations de la figure, par exemple  $u, v$ , ne sont pas exactement celles utilisées dans l'énoncé, comme  $\bar{u}, \bar{v}$ , etc, mais il n'y a pas d'ambiguïté).

**Théorème 3.2.6.** *Pour tout  $(u_G, v_G)$  et  $u_D$  états initiaux constants donnés, le problème de Riemann (3.12) associé possède une solution constituée d'au plus deux ondes séparant trois états constants et éventuellement d'une couche limite à l'interface. Ces ondes sont : une onde linéaire se propageant dans  $x < 0$  à la vitesse  $-a$ , séparant  $(u_G, v_G)$  et un état noté  $(u^-, v^-)$ , et au plus une onde se propageant à droite séparant un état noté  $u^+$  et  $u_D$ ; cette onde peut éventuellement être stationnaire. Les états intermédiaires  $(u^-, v^-)$  et  $u^+$  sont donnés par :*

*Cas 1 :  $f'(u_D) \geq 0$ .*

*cas 1.1 :  $f'(\bar{u}) > 0$ .*

*On a  $u^+ = u^- = \bar{u}$ ,  $v^- = \bar{v}$ . La solution dans  $x > 0$  est constituée d'un choc (si  $f'(\bar{u}) > f'(u_D)$ ) se propageant à la vitesse  $\sigma$  donnée par (3.15) ou d'une raréfaction si  $f'(\bar{u}) \leq f'(u_D)$ .*

*cas 1.2 :  $f'(\bar{u}) \leq 0$ .*

On a  $u^+ = u^*$ ,  $u^- = u_*^-$ ,  $v^- = f(u^*)$ . La solution dans  $x > 0$  est constituée d'une raréfaction ( $0 \leq \frac{x}{t} \leq f'(u_D)$  dans le plan  $(x, t)$ ). Il y a une couche limite à l'interface.

Cas 2 :  $f'(u_D) < 0$ .

cas 2.1 :  $f'(\bar{u}) > 0$ .

- Si  $f(u_D) < f(\bar{u})$ , on a  $u^+ = u^- = \bar{u}$ ,  $v^- = \bar{v}$ . La solution dans  $x > 0$  est constituée d'un choc. Si  $f(\bar{u}) = f(u_D)$ , ce choc est stationnaire.

- Si  $f(u_D) > f(\bar{u})$ . On a  $u^+ = u_D$ ,  $u^- = u_D^-$ ,  $v^- = f(u_D)$ . Il y a une couche limite à l'interface.

cas 2.2 :  $f'(\bar{u}) \leq 0$ .

On a  $u^+ = u_D$ ,  $u^- = u_D^-$ ,  $v^- = f(u_D)$ . Il y a une couche limite à l'interface.

*Démonstration.* Les cas en absence de couche limite sont faciles à traiter. Lorsqu'il y a une couche limite, c'est un peu plus délicat, la trace droite semble naturellement donnée, et donc la valeur de la trace gauche. Il faut néanmoins vérifier suivant la valeur de ces traces que la solution construite convient, c'est à dire qu'on est bien dans un des cas du Lemme 3.2.4, ce qui suppose de regarder le signe de  $f(u_*^-)$  ou  $f'(u_D^-)$ .

Par exemple, dans le cas 1.2, on construit une solution en supposant que ses traces sont naturellement  $u_*^-$  et  $u^*$ . Par définition des états  $u_*^-$ ,  $\bar{u}$  on a la relation  $u_*^- = \bar{u} + \frac{1}{a}(f(\bar{u}) - f(u^*))$  et on utilise la condition sous caractéristique pour vérifier que  $u_*^- \leq u^*$  donc  $f(u_*^-) \leq 0$ . Ainsi on est bien dans le cas (iii) du Lemme 3.2.4.

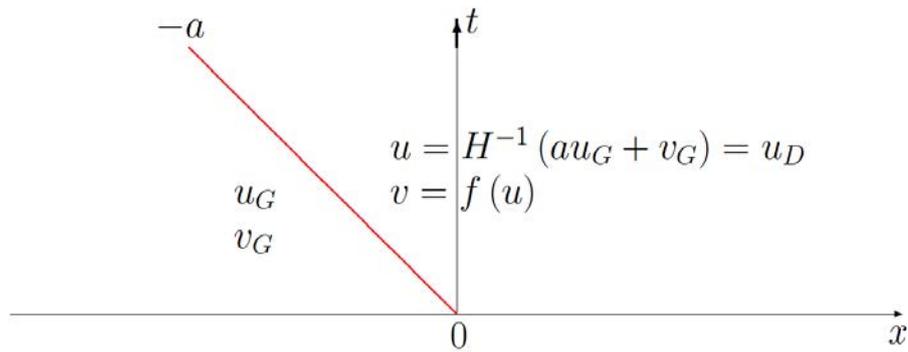
Dans le cas 2.1, on a  $u_D < u^* < \bar{u}$  avec  $f(u_D) > f(\bar{u})$ , il n'y a priori pas d'onde à droite, on suppose naturellement  $u^+ = u_D$ . On a, par définition des états  $u_D^-$ ,  $\bar{u}$ , la relation  $u_D^- = \bar{u} + \frac{1}{a}(f(\bar{u}) - f(u_D))$ . La condition sous caractéristique implique alors que  $u_D^- < u^*$  et  $f'(u_D^-) < 0$ . On est bien dans le cas (iv) du Lemme 3.2.4. De même dans le dernier cas.  $\square$

### 3.3 Méthodes numériques fine et couplée

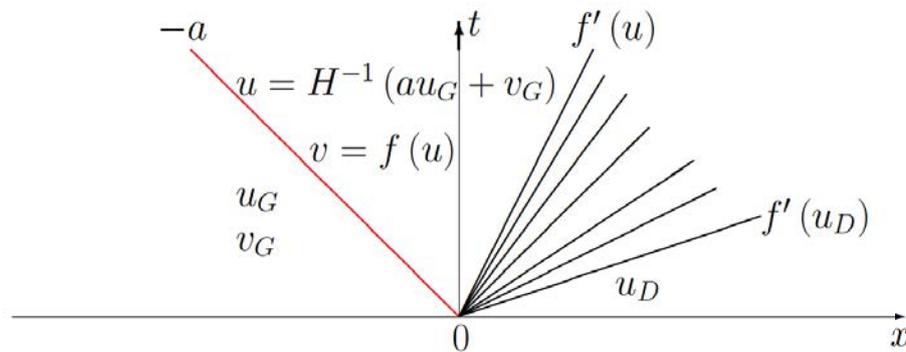
#### 3.3.1 Discrétisations spatiales d'ordre élevé des problèmes fin et couplé

Dans cette partie, nous développons deux méthodes numériques d'ordre arbitrairement élevé en espace, pour l'approximation des solutions stationnaires du problème fin (3.1)-(3.2)-(3.6). Pour cela, nous adoptons une approche de type Galerkin discontinu.

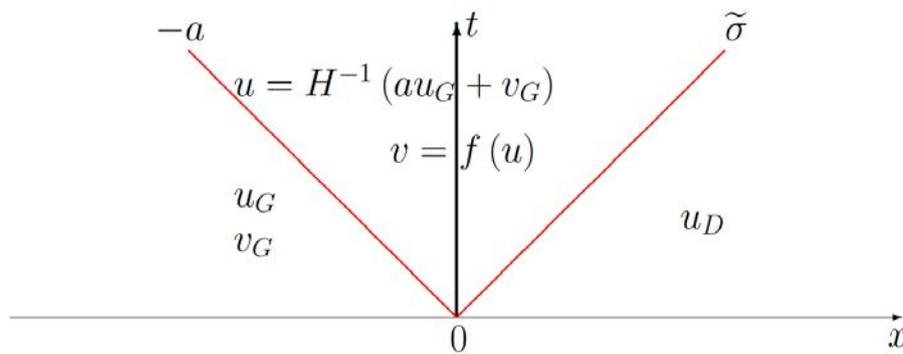
Discrétisons le domaine spatial  $\Omega$  par un maillage uniforme  $\Omega_h$  composé de  $N$  cellules  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}} = ]x_j, x_{j+1}[$  de centre  $x_{j+\frac{1}{2}} = (x_j + x_{j+1})/2$ , avec  $j$  dans  $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$ ,  $x_j = jh$  et  $h = L/N > 0$  le pas d'espace. Dans un contexte d'adaptation de modèle, le modèle fin est utilisé dans certaines cellules du maillage et le modèle grossier dans le reste des cellules. L'interface de couplage est alors localisée en une interface de cellule. Soient  $x_c \in ]0, L[$  la position (arbitraire) de l'interface de couplage et  $j_c$  dans



(a) Cas  $f'(u_D) < 0$



(b) Cas  $f'(u_D) \geq 0$



(c) Cas  $f'(u_D) < 0$  ou  $f'(u_D) \geq 0$ ,  $\tilde{\sigma} = \frac{f(u_D) - f(u)}{u_D - u}$

FIGURE 3.1 – Structures d’ondes possibles de la solution du problème de Riemann couplé (3.12) en absence de couche limite (cf. théorème 3.2.6). Le cas d’un choc stationnaire à l’interface de couplage n’est pas représenté ici.

$\llbracket 1, N - 1 \rrbracket$  tel que  $x_{j_c} = x_c$ . Comme schématisé sur la figure 3.3, l’ensemble  $\Omega_h$  est

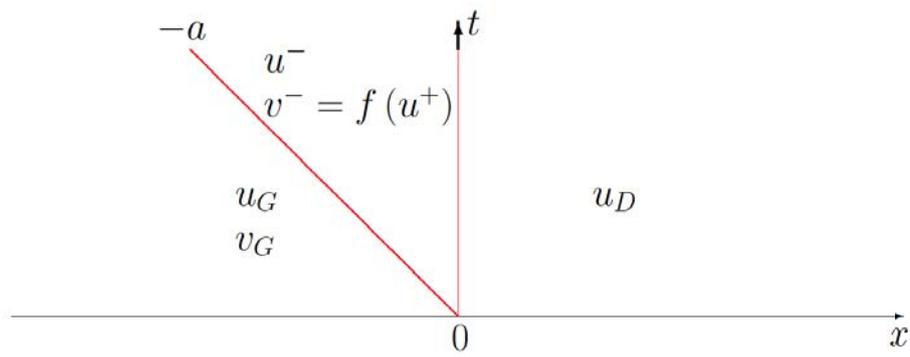
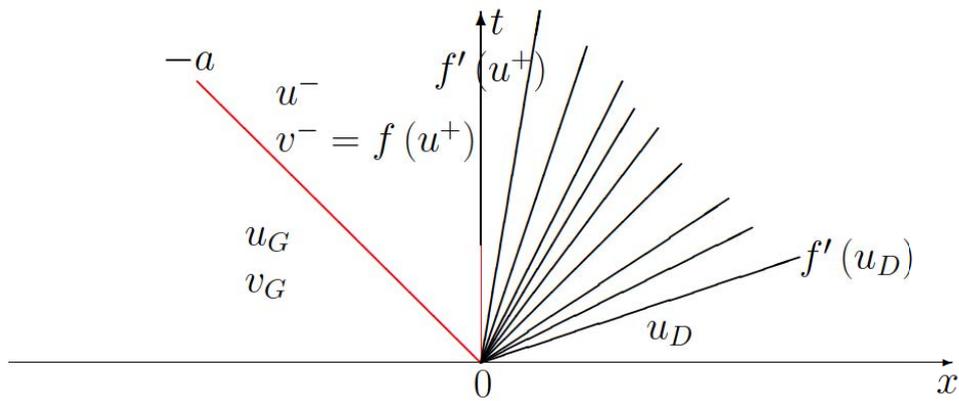
(a) Cas  $f'(u_D) < 0$ (b) Cas  $f'(u_D) \geq 0$ 

FIGURE 3.2 – Structures d'ondes possibles de la solution du problème de Riemann couplé (3.12) en présence de couche limite (cf. théorème 3.2.6).

la réunion des deux ouverts disjoints

$$\Omega_h^r = \bigcup_{j=0}^{j_c-1} \mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \Omega_h^e = \bigcup_{j=j_c}^{N-1} \mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}.$$

La résolution numérique du problème couplé consiste à approcher le modèle fin dans le maillage  $\Omega_h^r$  et à résoudre le modèle équilibre dans  $\Omega_h^e$ . À l'interface de couplage  $x_{j_c}$ , dans les cellules  $\mathcal{C}_{j_c-\frac{1}{2}}$  et  $\mathcal{C}_{j_c+\frac{1}{2}}$ , nous appliquons des conditions de couplage numériques en utilisant les résultats du paragraphe 3.2.3.

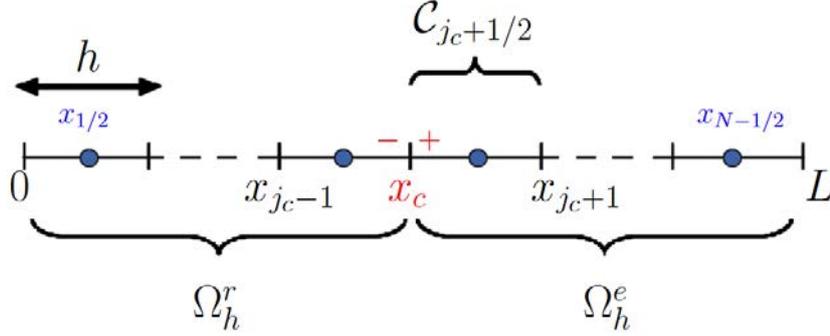


FIGURE 3.3 – Maillage  $\Omega_h = \Omega_h^r \cup \Omega_h^e$ .

Les notations suivantes nous seront utiles dans les paragraphes 3.3.1.2 et 3.3.1.3. Introduisons l'espace des fonctions polynomiales par morceaux :

$$\mathcal{V}_h^p(\omega) = \{\psi_h \in L^2(\omega) : \psi_h|_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \in \mathcal{P}^p(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}), \mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}} \subset \omega\},$$

où  $\mathcal{P}^p(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}})$  représente l'ensemble des polynômes de degré maximal  $p \geq 0$  définis sur la cellule  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$  et  $\omega$  est un ouvert donné. Notons que les fonctions définies dans l'espace de dimension fini  $\mathcal{V}_h^p(\omega)$  peuvent présenter des discontinuités à travers les interfaces des cellules de discrétisation. Pour toute fonction  $\Phi_\beta$ , vectorielle ou scalaire, dépendant de l'espace et du temps, nous notons :

$$\Phi_{\beta,j}^\pm = \Phi_{\beta,j}^\pm(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0, \delta > 0} \Phi_\beta(x_j \pm \delta, t), \quad \forall t > 0,$$

ses traces à gauche et à droite des interfaces  $x_j$  des cellules  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$  du maillage  $\Omega_h$ . De même, pour toute fonction  $\phi_\beta$  scalaire, dépendant uniquement de l'espace, nous introduisons :

$$\phi_{\beta,j}^\pm = \lim_{\delta \rightarrow 0, \delta > 0} \phi_\beta(x_j \pm \delta),$$

ses traces à gauche et à droite d'une interface  $x_j$ .

### 3.3.1.1 Choix des bases locales de polynômes

Pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , l'espace des fonctions tests  $\mathcal{P}^p(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}})$  étant de dimension fini, nous pouvons définir les bases locales  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^p = (\phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k)_{k \in \llbracket 1, N_p \rrbracket}$  de dimension  $N_p = p+1$  engendrant cet espace. Pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et tout  $k$  dans  $\llbracket 1, N_p \rrbracket$ , les fonctions de bases  $\phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k$  sont définies sur l'ensemble  $\Omega_h$  et de support restreint à l'élément  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$ .

Comme dans les travaux [54] et [92], nous considérons des bases locales orthonormales et hiérarchiques. En effet, dans chaque élément de discrétisation  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$ , nous définissons :

$$\phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k(x) = L^{k-1} \left( \frac{2(x - x_{j+1/2})}{h} \right), \quad \forall k \in \llbracket 1, N_p \rrbracket,$$

où  $(L^k)_{k \in \llbracket 0, p \rrbracket}$  représente la suite des polynômes de Legendre de degré  $k$  définis sur le segment  $[-1, 1]$ .

La propriété d'orthogonalité des polynômes de Legendre dans l'espace  $L^2(-1, 1[)$  entraîne que dans chaque cellule de discrétisation  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$ , la base locale  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^p$  est orthonormale vis-à-vis du produit scalaire :

$$\int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^l dx = \frac{h}{2k-1} \delta_{k,l}, \quad k, l \in \llbracket 1, N_p \rrbracket, \quad (3.21)$$

où  $\delta_{k,l}$  est le symbole de Kronecker. Nous verrons dans les paragraphes 3.3.1.2 et 3.3.1.3 que le choix de l'orthogonalité des bases locales conduit à des matrices de masse diagonales par cellule de discrétisation. Ainsi, à chaque pas de temps, la complexité de leur inversion pour le calcul des degrés de liberté sera considérablement réduite.

D'autre part, la relation de récurrence liant les polynômes de Legendre entraîne que dans chaque cellule de discrétisation  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$ , la base locale  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^p$  est hiérarchique :

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^1(x) &= 1, \\ \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^2(x) &= \frac{2(x - x_{j+1/2})}{h}, \\ \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^{k+2}(x) &= \left( \frac{2k+1}{k+1} \right) \left( \frac{2(x - x_{j+1/2})}{h} \right) \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^{k+1}(x) - \frac{k}{k+1} \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k(x), \quad \forall k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket. \end{aligned}$$

Ce choix de bases locales hiérarchiques permet d'envisager une adaptation locale sur le degré du polynôme  $p$ , à encombrement mémoire et temps CPU raisonnables, visant à optimiser la résolution numérique des calculs. En effet, dans chaque cellule de discrétisation, pour passer d'une approximation polynomiale de degré maximal  $p$  à une approximation polynomiale de degré maximal  $p+1$ , il suffit d'ajouter  $N_{p+1} - N_p$  fonctions de base supplémentaires.

### 3.3.1.2 Approximation fine

Rappelons que pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$ ,  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^p$  forme une base de l'espace  $\mathcal{P}^p(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}})$ . Dans chaque cellule de discrétisation  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$ , nous pouvons alors écrire la solution numérique du problème fin (3.1)-(3.2)-(3.6) comme une combinaison linéaire des fonctions de base  $(\phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^l)_{l \in \llbracket 1, N_p \rrbracket}$ . Ainsi, pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , le vecteur des variables inconnues discrètes du modèle fin (3.1) s'écrit :

$$\mathbf{u}_{\text{hp}}(x, t) = \sum_{l=1}^{N_p} \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^l(x) \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^l(t), \quad \forall x \in \mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.23)$$

où  $(\mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^l)_{l \in \llbracket 1, N_p \rrbracket}$  représente le vecteur des degrés de liberté dans la cellule  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$ .

Pour  $t = 0$ , nous appliquons des projections  $L^2$  de la condition initiale (3.2) sur l'espace  $\mathcal{V}_h^p(\Omega_h)$ . Pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , nous avons :

$$\int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \psi_h(x) \mathbf{u}_{\text{hp}}(x, 0) dx = \int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \psi_h(x) \mathbf{u}_0^\lambda(x) dx, \quad \forall \psi_h \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^p. \quad (3.24)$$

L'obtention du schéma semi-discret se fait de la manière suivante. Nous multiplions chaque équation du système (3.1) par une fonction test  $\psi_h \in \mathcal{V}_h^p(\Omega_h)$ , puis réalisons une intégration par parties de l'intégrale faisant intervenir le terme de convection sur la cellule  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$ . Ainsi, le schéma semi-discret associé au problème mixte (3.1)-(3.2)-(3.6), consiste à trouver  $\mathbf{u}_{\text{hp}}$  dans l'espace  $(\mathcal{V}_h^p(\Omega_h))^2$  tel que :

$$\int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \psi_h \partial_t \mathbf{u}_{\text{hp}} dx + \mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}})(\mathbf{u}_{\text{hp}}, \psi_h) = 0, \quad \forall t > 0, \forall \psi_h \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^p, \mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}} \in \Omega_h. \quad (3.25)$$

La discrétisation du terme de convection et du terme source dans la première cellule de discrétisation s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{\frac{1}{2}})(\mathbf{u}_{\text{hp}}, \psi_h) &= - \int_{\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(\mathbf{u}_{\text{hp}}) \psi_h'(x) dx \\ &\quad + \psi_{h,1}^- \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\text{hp},1}^-, \mathbf{u}_{\text{hp},1}^+) \\ &\quad - \psi_{h,0}^+ \mathbf{F}(\mathbf{u}_0^*(\mathbf{u}_{\text{hp},0}^+, \mathcal{B}(t))) \\ &\quad - \int_{\mathcal{C}_{\frac{1}{2}}} \psi_h(x) \mathcal{S}(\mathbf{u}_{\text{hp}}) dx, \end{aligned} \quad (3.26)$$

avec  $\mathbf{u}_0^*(\mathbf{u}_{\text{hp},0}^+, \mathcal{B}(t)) = (u_{\text{hp},0}^*, \mathcal{B}(t))^T$  et des notations que nous allons progressivement définir. En considérant la première équation du système 3.4, et en appliquant la relation de Rankine-Hugoniot liant l'état  $(u_{\text{hp},0}^*, \mathcal{B}(t))^T$  à l'état  $\mathbf{u}_{\text{hp},0}^+$ , par la 2-  
onde de vitesse  $a$ , entrante dans le domaine de calcul, on a :

$$a(u_{\text{hp},0}^+ - u_{\text{hp},0}^*) = v_{\text{hp},0}^+ - \mathcal{B}(t),$$

soit :

$$u_{\text{hp},0}^* = u_{\text{hp},0}^+ + \frac{\mathcal{B}(t) - v_{\text{hp},0}^+}{a}.$$

De plus, comme dans la méthode des volumes finis, le flux numérique  $\mathbf{h}$  correspond à une approximation consistante du flux exact  $\mathbf{F}$ . Par soucis de simplicité, dans les applications numériques, nous utiliserons le flux numérique de Rusanov défini par :

$$\mathbf{h}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{a}) + \mathbf{F}(\mathbf{b}) - \alpha(\mathbf{b} - \mathbf{a})),$$

avec  $\alpha = \max(\text{rspec}((\mathbf{A}(\mathbf{u}))|_{\mathbf{u}=\mathbf{a}}), \text{rspec}((\mathbf{A}(\mathbf{u}))|_{\mathbf{u}=\mathbf{b}})) = a$ , où pour une matrice  $A$ ,  $\text{rspec}(A)$  désigne son rayon spectral, et  $\mathbf{A}(\mathbf{u})$  désigne la matrice jacobienne  $\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}'(\mathbf{u})$ .

Ensuite, dans les éléments internes  $(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}})_{j \in \llbracket 1, N-2 \rrbracket}$ , la discrétisation prend la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}})(\mathbf{u}_{\text{hp}}, \psi_h) &= - \int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(\mathbf{u}_{\text{hp}}) \psi_h'(x) dx \\ &\quad + \psi_{h,j+1}^- \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\text{hp},j+1}^-, \mathbf{u}_{\text{hp},j+1}^+) \\ &\quad - \psi_{h,j}^+ \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\text{hp},j}^-, \mathbf{u}_{\text{hp},j}^+) \\ &\quad - \int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \psi_h(x) \mathcal{S}(\mathbf{u}_{\text{hp}}) dx. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Enfin dans la dernière cellule de discrétisation, elle se note :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{N-\frac{1}{2}})(\mathbf{u}_{\text{hp}}, \psi_h) &= - \int_{\mathcal{C}_{N-\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(\mathbf{u}_{\text{hp}}) \psi_h'(x) dx \\ &\quad + \psi_{h,N}^- \mathbf{F}(\mathbf{u}_N^*(\mathbf{u}_{\text{hp},N}^-, \mathcal{B}(t))) \\ &\quad - \psi_{h,N-1}^+ \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\text{hp},N-1}^-, \mathbf{u}_{\text{hp},N-1}^+) \\ &\quad - \int_{\mathcal{C}_{N-\frac{1}{2}}} \psi_h(x) \mathcal{S}(\mathbf{u}_{\text{hp}}) dx, \end{aligned} \quad (3.28)$$

avec  $\mathbf{u}_N^*(\mathbf{u}_{\text{hp},N}^-, \mathcal{B}(t)) = (u_{\text{hp},N}^*, \mathcal{B}(t))^T$ . En considérant la première équation du système (3.4), et en appliquant la relation de Rankine-Hugoniot liant l'état  $(u_{\text{hp},N}^*, \mathcal{B}(t))^T$  à l'état  $\mathbf{u}_{\text{hp},N}^-$ , par la 1- onde de vitesse  $-a$ , entrante dans le domaine de calcul, on a :

$$-a(u_{\text{hp},N}^* - u_{\text{hp},N}^-) = \mathcal{B}(t) - v_{\text{hp},N}^-,$$

soit :

$$u_{\text{hp},N}^* = u_{\text{hp},N}^- + \frac{v_{\text{hp},N}^- - \mathcal{B}(t)}{a}.$$

Les intégrales intervenant dans le schéma semi-discret (3.25) sont approchées au moyen d'une quadrature de Gauss-Legendre. Pour une approximation polynomiale de degré  $p$ ,  $p+1$  points de quadrature sont utilisés qui permettent d'intégrer exactement des polynômes de degré maximal  $2p+1$ . Lorsque les fonctions flux  $\mathbf{F}$  et source  $\mathcal{S}$  du système (3.1) sont linéaires, les intégrales sont calculées exactement.

Détaillons à présent les étapes permettant d'aboutir aux systèmes locaux d'équations différentielles ordinaires (EDO), où les fonctions inconnues sont les degrés de libertés.

Pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et tout  $k$  dans  $\llbracket 1, N_p \rrbracket$ , nous avons :

$$\int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k \partial_t \mathbf{u}_{\text{hp}} dx = \sum_{l=1}^{N_p} \left( \int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^l dx \right) \frac{d\mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^l}{dt} = \frac{h}{2k-1} \frac{d\mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k}{dt}.$$

La première égalité découle de la relation (3.23) tandis que la seconde résulte de la propriété d'orthogonalité (3.21). Ainsi, en appliquant l'équation (3.25) pour toutes les fonctions de la base locale  $\mathcal{B}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^p$ , nous obtenons les relations :

$$\frac{h}{2k-1} \frac{d\mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k}{dt} + \mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}) \left( \mathbf{u}_{\text{hp}}, \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k \right) = 0, \quad \forall k \in \llbracket 1, N_p \rrbracket, \quad (3.29)$$

vérifiées dans chaque cellule de discrétisation  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$  du maillage  $\Omega_h$ . Pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , notons

$$\mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} = \left[ \left( \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^1 \right)^T, \dots, \left( \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^{N_p} \right)^T \right]^T$$

le vecteur des degrés de liberté dans la cellule  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$ ,

$$\mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}) (\mathbf{u}_{\text{hp}}) = \left( \left[ \mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}) \left( \mathbf{u}_{\text{hp}}, \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^1 \right) \right]^T, \dots, \left[ \mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}) \left( \mathbf{u}_{\text{hp}}, \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^{N_p} \right) \right]^T \right)^T$$

le vecteur résidu local formé à partir des contributions des termes convectifs et sources. Introduisons enfin

$$M_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} = \text{diag} \left( M_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^1, \dots, M_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^{N_p} \right), \quad \forall j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad (3.30)$$

les matrices de masse diagonales de taille  $2N_p \times 2N_p$ , avec :

$$M_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k = \frac{h}{2k-1} I_2, \quad \forall k \in \llbracket 1, N_p \rrbracket. \quad (3.31)$$

Des relations (3.29), il résulte alors les problèmes locaux consistant à trouver les vecteurs  $\mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}$  tels que :

$$M_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \frac{d\mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}}{dt} = -\mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}) (\mathbf{u}_{\text{hp}}), \quad \forall j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad \forall t > 0,$$

soit les systèmes d'EDO :

$$\frac{d\mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}}{dt} = - \left( M_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}) (\mathbf{u}_{\text{hp}}), \quad \forall j \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket, \quad \forall t > 0. \quad (3.32)$$

Il nous reste à construire les conditions initiales associées aux systèmes d'EDO (3.32). Pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$  et tout  $k$  dans  $\llbracket 1, N_p \rrbracket$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k(x) \mathbf{u}_0^\lambda(x) dx &= \int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k(x) \mathbf{u}_{\text{hp}}(x, 0) dx \\ &= \sum_{l=1}^{N_p} \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^l(0) \int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k(x) \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^l(x) dx \\ &= \frac{h}{2k-1} \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k(0), \end{aligned}$$

dans l'élément de discrétisation  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$ . La première égalité résulte de la discrétisation de la condition initiale (équation (3.24)). La seconde découle de la relation (3.23) et enfin la dernière se déduit de la propriété d'orthogonalité (3.21). Ainsi, pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , nous obtenons :

$$\mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k(0) = \frac{2k-1}{h} \int_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \phi_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}^k(x) \mathbf{u}_0^\lambda(x) dx, \quad \forall k \in \llbracket 1, N_p \rrbracket. \quad (3.33)$$

### 3.3.1.3 Approximation couplée

La solution numérique du problème couplé (3.8a)-(3.8b)- (3.8c)-(3.8d)-(3.8e)-(3.10a)-(3.10b)-(3.11) s'écrit :

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{\text{hpm}}(x, t) = \sum_{l=1}^{N_p} \phi_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^l(x) \mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^l(t), \forall t \geq 0, \forall x \in \mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}, \mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}} \in \Omega_h^r, \\ u_{\text{hpm}}(x, t) = \sum_{l=1}^{N_p} \phi_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^l(x) u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^l(t), \forall t \geq 0, \forall x \in \mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}, \mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}} \in \Omega_h^e, \end{cases}$$

où  $(\mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^l)_{l \in \llbracket 1, N_p \rrbracket}$  représente le vecteur des degrés de liberté dans les cellules  $(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}})_{i \in \llbracket 0, j_c-1 \rrbracket}$  et  $(u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^l)_{l \in \llbracket 1, N_p \rrbracket}$  désigne les inconnues numériques dans les cellules  $(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}})_{i \in \llbracket j_c, N-1 \rrbracket}$ .

Pour  $t = 0$ , nous avons :

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} \psi_h(x) \mathbf{u}_{\text{hpm}}(x, 0) dx = \int_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} \psi_h(x) \tilde{\mathbf{u}}_m^\lambda(x) dx, \forall \psi_h \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^p, \mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}} \in \Omega_h^r, \\ \int_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} \psi_h(x) u_{\text{hpm}}(x, 0) dx = \int_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} \psi_h(x) \tilde{u}_m(x) dx, \forall \psi_h \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^p, \mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}} \in \Omega_h^e. \end{cases}$$

Le schéma semi-discret associé au problème couplé (3.8a)-(3.8b)- (3.8c)-(3.8d)-(3.8e)-(3.10a)-(3.10b)-(3.11) consiste à trouver  $\mathbf{u}_{\text{hpm}}$  dans l'espace  $(\mathcal{V}_h^p(\Omega_h^r))^2$ , et  $u_{\text{hpm}}$  dans  $\mathcal{V}_h^p(\Omega_h^e)$  tels que :

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} \psi_h \partial_t \mathbf{u}_{\text{hpm}} dx + R_{\text{hm}}(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}})(\mathbf{u}_{\text{hpm}}, \psi_h) = 0, \forall t > 0, \forall \psi_h \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^p, \mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}} \in \Omega_h^r, \\ \int_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} \psi_h \partial_t u_{\text{hpm}} dx + r_{\text{hm}}(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}})(u_{\text{hpm}}, \psi_h) = 0, \forall t > 0, \forall \psi_h \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^p, \mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}} \in \Omega_h^e. \end{cases}$$

Dans les cellules de discrétisation  $(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}})_{i \in \llbracket 0, j_c-2 \rrbracket}$ , nous approchons le terme de convection ainsi que le terme source associé au modèle fin (3.1), ce qui entraîne :

$$R_{\text{hm}}(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}})(\mathbf{u}_{\text{hpm}}, \psi_h) = \mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}})(\mathbf{u}_{\text{hpm}}, \psi_h), \quad \forall i \in \llbracket 0, j_c-2 \rrbracket,$$

où  $\mathcal{R}_h$  est défini en (3.26)-(3.27)-(3.28).

Dans la cellule  $\mathcal{C}_{j_c-\frac{1}{2}}$ , nous approchons toujours les termes convectif et source associés au modèle fin (3.1), mais ici, en prenant en compte les conditions de couplage (3.8b) et (3.8e) :

$$\begin{aligned} R_{\text{hm}} \left( \mathcal{C}_{j_c-\frac{1}{2}} \right) (\mathbf{u}_{\text{hpm}}, \psi_h) &= - \int_{\mathcal{C}_{j_c-\frac{1}{2}}} \mathbf{F}(\mathbf{u}_{\text{hpm}}) \psi'_h(x) dx \\ &\quad + \psi_{h,j_c}^- \mathbf{h}_{\text{couplage}}(\mathbf{u}_{\text{hpm},j_c}^-, u_{\text{hpm},j_c}^+) \\ &\quad - \psi_{h,j_c-1}^+ \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\text{hpm},j_c-1}^-, \mathbf{u}_{\text{hpm},j_c-1}^+) \\ &\quad - \int_{\mathcal{C}_{j_c-\frac{1}{2}}} \psi_h(x) \mathcal{S}(\mathbf{u}_{\text{hpm}}) dx. \end{aligned}$$

Le flux numérique  $\mathbf{h}_{\text{couplage}}$  est défini par :

$$\mathbf{h}_{\text{couplage}}(\mathbf{u}_{\text{hpm},j_c}^-, u_{\text{hpm},j_c}^+) = \mathbf{F} \left( \mathcal{W}_c \left( 0^-; \mathbf{u}_{\text{hpm},j_c}^-, u_{\text{hpm},j_c}^+ \right) \right),$$

où  $\mathcal{W}_c(0^-; \cdot, \cdot)$  a été calculé au paragraphe 3.2.3.

Dans la cellule  $\mathcal{C}_{j_c+\frac{1}{2}}$ , nous approchons le terme de convection associé au modèle équilibre en prenant en compte les conditions de couplage (3.8b) et (3.8e) :

$$\begin{aligned} r_{\text{hm}} \left( \mathcal{C}_{j_c+\frac{1}{2}} \right) (u_{\text{hpm}}, \psi_h) &= - \int_{\mathcal{C}_{j_c+\frac{1}{2}}} f(u_{\text{hpm}}) \psi'_h(x) dx \\ &\quad + \psi_{h,j_c+1}^- h_{\text{couplage}}(\mathbf{u}_{\text{hpm},j_c+1}^-, u_{\text{hpm},j_c+1}^+) \\ &\quad - \psi_{h,j_c}^+ h(u_{\text{hpm},j_c}^-, u_{\text{hpm},j_c}^+), \end{aligned}$$

où le flux numérique  $h_{\text{couplage}}$  est défini par :

$$h_{\text{couplage}}(\mathbf{u}_{\text{hpm},j_c+1}^-, u_{\text{hpm},j_c+1}^+) = f \left( \mathcal{W}_c \left( 0^+; \mathbf{u}_{\text{hpm},j_c+1}^-, u_{\text{hpm},j_c+1}^+ \right) \right),$$

et  $h$  est le flux numérique de Rusanov défini par :

$$h(u, v) = \frac{1}{2} \left( f(u) + f(v) - \max\{|f'(u)|, |f'(v)|\} (v - u) \right).$$

Dans les éléments  $\left( \mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}} \right)_{i \in \llbracket j_c+1, N-2 \rrbracket}$ , nous approchons toujours le terme de convection associé au modèle équilibre :

$$\begin{aligned} r_{\text{hm}} \left( \mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}} \right) (u_{\text{hpm}}, \psi_h) &= - \int_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} f(u_{\text{hpm}}) \psi'_h(x) dx \\ &\quad + \psi_{h,i+1}^- h(u_{\text{hpm},i+1}^-, u_{\text{hpm},i+1}^+) \\ &\quad - \psi_{h,i}^+ h(u_{\text{hpm},i}^-, u_{\text{hpm},i}^+), \quad \forall i \in \llbracket j_c+1, N-2 \rrbracket. \end{aligned}$$

Enfin dans la dernière cellule, nous avons :

$$\begin{aligned} r_{\text{hm}}\left(\mathcal{C}_{N-\frac{1}{2}}\right)(u_{\text{hpm}}, \psi_h) &= - \int_{\mathcal{C}_{N-\frac{1}{2}}} f(u_{\text{hpm}}) \psi'_h(x) dx \\ &\quad + \psi_{h,N}^- f(f^{-1}(\mathcal{B}(t))) \\ &\quad - \psi_{h,N-1}^+ h(u_{\text{hpm},N-1}^-, u_{\text{hpm},N-1}^+), \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} r_{\text{hm}}\left(\mathcal{C}_{N-\frac{1}{2}}\right)(u_{\text{hpm}}, \psi_h) &= - \int_{\mathcal{C}_{N-\frac{1}{2}}} f(u_{\text{hpm}}) \psi'_h(x) dx \\ &\quad + \psi_{h,N}^- \mathcal{B}(t) \\ &\quad - \psi_{h,N-1}^+ h(u_{\text{hpm},N-1}^-, u_{\text{hpm},N-1}^+), \end{aligned}$$

où  $\mathcal{B}(t)$  à été introduit aux paragraphes 3.2.1 et 3.2.2.

Pour tout  $i$  dans  $\llbracket 0, j_c - 1 \rrbracket$ , on note

$$\mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} = \left[ \left( \mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^1 \right)^T, \dots, \left( \mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^{N_p} \right)^T \right]^T$$

le vecteur des degrés de liberté dans la cellule  $\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}$ ,

$$R_{\text{hm}}\left(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}\right)(\mathbf{u}_{\text{hpm}}) = \left( \left[ R_{\text{hm}}\left(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbf{u}_{\text{hpm}}, \phi_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^1\right) \right]^T, \dots, \left[ R_{\text{hm}}\left(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbf{u}_{\text{hpm}}, \phi_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^{N_p}\right) \right]^T \right)^T$$

le vecteur résidu local correspondant. Dans la partie du maillage  $\Omega_h$  où le modèle fin est approché, nous devons résoudre les systèmes d'EDO

$$\frac{d\mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}}{dt} = - \left( M_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{-1} R_{\text{hm}}\left(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}\right)(\mathbf{u}_{\text{hpm}}), \quad \forall i \in \llbracket 0, j_c - 1 \rrbracket, \quad \forall t > 0,$$

munis des conditions initiales

$$\mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^k(0) = \frac{2k-1}{h} \int_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} \phi_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^k(x) \tilde{\mathbf{u}}_m^\lambda(x) dx, \quad \forall k \in \llbracket 1, N_p \rrbracket,$$

où les matrices de masse diagonales  $M_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}$  ont été définies dans (3.30)-(3.31).

Ensuite, pour tout  $i$  dans  $\llbracket j_c, N - 1 \rrbracket$ , nous notons

$$u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} = \left[ u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^1, \dots, u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^{N_p} \right]^T$$

le vecteur des degrés de liberté dans la cellule  $\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}$ ,

$$r_{\text{hm}}(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}})(u_{\text{hpm}}) = \left[ r_{\text{hm}}(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}})(u_{\text{hpm}}, \phi_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^1), \dots, r_{\text{hm}}(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}})(u_{\text{hpm}}, \phi_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^{N_p}) \right]^T$$

le vecteur résidu local correspondant. Dans la partie du maillage  $\Omega_h$  où le modèle équilibre est approché, nous devons résoudre les systèmes d'EDO

$$\frac{du_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}}{dt} = - \left( m_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{-1} r_{\text{hm}}(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}})(u_{\text{hpm}}), \quad \forall i \in \llbracket j_c, N-1 \rrbracket, \quad \forall t > 0,$$

où les matrices de masse diagonales  $m_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}$  de taille  $N_p \times N_p$  sont définies par

$$m_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} = \text{diag} \left( m_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^1, \dots, m_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^{N_p} \right), \quad m_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^k = \frac{h}{2k-1}.$$

Pour tout  $i$  dans  $\llbracket j_c, N-1 \rrbracket$ , les conditions initiales associées aux systèmes d'EDO (3.3.1.3) sont

$$u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^k(0) = \frac{2k-1}{h} \int_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}} \phi_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}^k(x) \tilde{u}_m(x) dx, \quad \forall k \in \llbracket 1, N_p \rrbracket.$$

### 3.3.2 Discrétisations temporelles des problèmes fin et couplé

#### 3.3.2.1 Approximation fine

Pour résoudre les systèmes d'EDO (3.32) munis des conditions initiales (3.33), nous appliquons une discrétisation temporelle explicite utilisant un schéma de Runge-Kutta à trois pas. Il s'agit du schéma d'ordre trois de C.-W. Shu et S. Osher [95]. Soit  $n \in \mathbb{N}$  le nombre d'itérations en temps du schéma numérique et soit  $\Delta t > 0$  le pas de temps entre les instants  $t^{(n)}$  et  $t^{(n+1)}$ , avec  $t^{(n)} = n\Delta t$ . Pour tout  $j$  dans  $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$ , notons  $(\mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}})^n = \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}}(t^{(n)})$ , la valeur au temps  $t^{(n)}$  du vecteur des inconnues numériques dans la cellule  $\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}$ . Posons ensuite  $\mathbf{u}_{\text{hp}}^n(\cdot) = \mathbf{u}_{\text{hp}}(\cdot, t^{(n)})$  la solution numérique semi-discrète du schéma (3.25). Partant de  $\mathbf{u}_{\text{hp}}^n$ , pour obtenir une approximation de  $\mathbf{u}_{\text{hp}}^{n+1}$ , nous calculons :

$$\begin{aligned} \left( \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \right)^{(1)} &= \left( \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \right)^n - \Delta t \left( M_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}) \left( \mathbf{u}_{\text{hp}}^n \right), \\ \left( \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \right)^{(2)} &= \frac{3}{4} \left( \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \right)^n + \frac{1}{4} \left( \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \right)^{(1)} - \frac{\Delta t}{4} \left( M_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}) \left( (\mathbf{u}_{\text{hp}})^{(1)} \right), \\ \left( \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \right)^{n+1} &= \frac{1}{3} \left( \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \right)^n + \frac{2}{3} \left( \mathbf{u}_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \right)^{(2)} - \frac{2\Delta t}{3} \left( M_{\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \mathcal{R}_h(\mathcal{C}_{j+\frac{1}{2}}) \left( (\mathbf{u}_{\text{hp}})^{(2)} \right), \end{aligned}$$

dans chaque cellule du maillage.

### 3.3.2.2 Approximation couplée

Nous utilisons le même schéma temporel. Pour tout  $i$  dans  $\llbracket 0, j_c - 1 \rrbracket$ , c'est-à-dire dans la partie du maillage où le modèle fin est approché, nous calculons :

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{(1)} &= \left(\mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^n - \Delta t \left(M_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{-1} R_{\text{hm}} \left(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}\right) \left(\mathbf{u}_{\text{hpm}}^n\right), \\ \left(\mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{(2)} &= \frac{3}{4} \left(\mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^n + \frac{1}{4} \left(\mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{(1)} - \frac{\Delta t}{4} \left(M_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{-1} R_{\text{hm}} \left(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}\right) \left(\left(\mathbf{u}_{\text{hpm}}\right)^{(1)}\right), \\ \left(\mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{n+1} &= \frac{1}{3} \left(\mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^n + \frac{2}{3} \left(\mathbf{U}_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{(2)} - \frac{2\Delta t}{3} \left(M_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{-1} R_{\text{hm}} \left(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}\right) \left(\left(\mathbf{u}_{\text{hpm}}\right)^{(2)}\right), \end{aligned}$$

et dans le reste des cellules du maillage où le modèle équilibre est approché, il vient :

$$\begin{aligned} \left(u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{(1)} &= \left(u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^n - \Delta t \left(m_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{-1} r_{\text{hm}} \left(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}\right) \left(u_{\text{hpm}}^n\right), \\ \left(u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{(2)} &= \frac{3}{4} \left(u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^n + \frac{1}{4} \left(u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{(1)} - \frac{\Delta t}{4} \left(m_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{-1} r_{\text{hm}} \left(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}\right) \left(\left(u_{\text{hpm}}\right)^{(1)}\right), \\ \left(u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{n+1} &= \frac{1}{3} \left(u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^n + \frac{2}{3} \left(u_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{(2)} - \frac{2\Delta t}{3} \left(m_{\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}}\right)^{-1} r_{\text{hm}} \left(\mathcal{C}_{i+\frac{1}{2}}\right) \left(\left(u_{\text{hpm}}\right)^{(2)}\right). \end{aligned}$$

Remarquons que le pas de temps utilisé pour les discrétisations temporelles fine et couplée est le même. Pour une approximation polynomiale par morceaux de degré  $p$  (constant) en espace, si nous considérons le schéma fin, nous choisissons :

$$\Delta t = \frac{\text{CFL} \times h}{\text{rspec}(\mathbf{A}(\mathbf{u})) (2p + 1)} = \frac{\text{CFL} \times h}{a(2p + 1)},$$

où CFL désigne la valeur de la condition de stabilité de type CFL du schéma numérique. D'autre part pour le schéma couplé, nous prenons :

$$\Delta t = \min \left( \frac{\text{CFL} \times h}{|f'(u)| (2p + 1)}, \frac{\text{CFL} \times h}{a(2p + 1)} \right),$$

soit en utilisant la condition sous-caractéristique (3.3) :

$$\Delta t = \frac{\text{CFL} \times h}{a(2p + 1)}. \quad (3.37)$$

Pour la simulation d'écoulements à convection dominante, B. Cockburn et C.-W. Shu [37] montrent que la condition de stabilité du schéma numérique se comporte en loi de décroissance linéaire en  $p$  (il s'agit d'appliquer la relation (3.37) avec CFL = 1). En étudiant la stabilité linéaire du schéma approchant une loi de conservation scalaire linéaire, les auteurs montrent que la condition de stabilité (3.37) avec CFL = 1 est exacte lorsque  $p = 0$  et  $p = 1$  et empirique pour  $p \geq 2$ . Pour la simulation d'écoulements à diffusion dominante, la condition de stabilité du schéma numérique se comporte en loi de décroissance quadratique en  $p$  [83, 52] (cf. relation (3.37) avec CFL = 1/(2p + 1)). Les auteurs ont établi cette loi à partir d'expérimentations numériques. A cause de la présence de termes sources dans les équations que nous

études, dans les applications numériques nous choisirons des CFL semblables à celles utilisées lors de l'approximation de modèles de diffusion. Avant de terminer ce paragraphe, rappelons que les discrétisations temporelles sont utilisées pour approcher une solution stationnaire (procédure de marche en temps) et que nous cherchons uniquement à valider nos méthodes de discrétisation spatiale. Par conséquent, nous n'avons pas étudié rigoureusement la stabilité (linéaire et non linéaire) des méthodes numériques fine et couplée.

## 3.4 Expériences numériques

Nous présentons dans ce paragraphe les résultats obtenus, après avoir mis en œuvre les schémas numériques fin et couplé d'ordre élevé, décrits dans la partie 3.3. Les calculs couplés ont été réalisés avec différentes positions d'interface de couplage.

Nous proposons trois cas tests. Dans le premier cas test, le flux  $f$  est linéaire et sa dérivée est strictement négative. Dans le second cas test,  $f$  est toujours de dérivée strictement négative, mais est non-linéaire. Dans le dernier cas test,  $f$  est non-linéaire et l'interface de couplage peut être caractéristique.

Le critère d'arrêt de nos simulations numériques est basé sur la norme  $L^1$  du résidu. Dès que cette norme est inférieure à la valeur  $10^{-10}$ , nous considérons que l'état stationnaire est atteint.

### 3.4.1 Cas linéaire

**Description du cas test.** Dans ce premier cas test, nous prenons un flux linéaire, de dérivée strictement négative, défini par  $f(u) = -u$ . La vitesse de relaxation vaut  $a = 2$ . Le temps de relaxation est  $1/\lambda = 0,2$ . La longueur du domaine d'étude est  $L = 10$  et nous posons  $\mathcal{B}(t) = 43,47808475$  pour tout temps  $t > 0$ .

**Remarque 3.4.1.** *La valeur de  $\mathcal{B}$  a été calculée. En fait, au début de notre étude nous étions intéressés par le cas linéaire et nous avons choisi d'imposer (au niveau des conditions limites) la première variable (au lieu de la seconde). Pour chaque temps  $t > 0$ , nous avons imposé  $u(0^+, t) = 500$  et  $u(L^-, t) = -v^+$ , où  $v^+ = \lim_{t \rightarrow \infty} v^\lambda(0^+, t)$ . Le calcul fin réalisé avec  $p = 4$  et  $h = 5 \cdot 10^{-3}$  a fourni la valeur  $v^+ = 43,47808475$ .*

En résolvant une équation différentielle ordinaire linéaire du premier ordre avec second membre, nous obtenons la solution stationnaire du problème fin :

$$\begin{cases} u^\lambda = (u^+ + v^+) \exp\left(\frac{-5x}{4}\right) - v^+, \\ v^\lambda = v^+, \end{cases} \quad (3.38)$$

où  $u^+ = \lim_{t \rightarrow \infty} u^\lambda(0^+, t)$  représente la valeur de  $u^\lambda$  au bord  $x = 0^+$  lorsque l'état stationnaire est atteint. Les conditions aux limites (3.11) et la condition de couplage

(3.8b) entraînent que la solution stationnaire du problème couplé est :

$$\begin{cases} u_m^\lambda = \left( (u_{x_c}^+ + v^+) \exp\left(\frac{-5x}{4}\right) \right) \mathbb{1}_{\{0 < x < x_c\}} - v^+, \\ v_m^\lambda = v^+, \end{cases} \quad (3.39)$$

où  $u_{x_c}^+ = \lim_{t \rightarrow \infty} u_m^\lambda(0^+, t)$ .

La condition initiale du problème fin n'est pas compatible avec les conditions aux limites, et est à l'équilibre :  $u_0^\lambda(x) = \sin(\pi x)$ ,  $v_0^\lambda(x) = -\sin(\pi x)$ . Celle associée au problème couplé vaut :  $\tilde{u}_m^\lambda(x) = \sin(\pi x)$ ,  $\tilde{v}_m^\lambda(x) = -\sin(\pi x)$  et  $\tilde{u}_m(x) = \sin(\pi x)$ . Les calculs fin et couplé sont réalisés avec quatre maillages de pas  $h \in \{0,5; 0,25; 0,125; 0,0625\}$  et cinq degrés de polynôme  $p \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ . Les valeurs de la condition de CFL, dépendantes de  $p$ , sont données dans le tableau 3.1. Pour assurer la robustesse des calculs, nous avons déterminé ces valeurs à partir d'expérimentations numériques. Pour les calculs couplés, nous choisissons trois positions de l'interface de couplage  $x_c \in \{1; 3; 9\}$ .

$p$	0	1	2	3	4
CFL	0,50	0,30	0,20	0,12	0,10

TABLE 3.1 – CFL en fonction du degré de polynôme  $p$ .

### 3.4.1.1 Approximation du problème fin par la méthode numérique fine

**Analyse de convergence en maillage.** Sur la figure 3.4, nous représentons les erreurs relatives

$$\frac{\|u^\lambda - u_{\text{hp}}\|_{L^1(\Omega_h)}}{\|u^\lambda\|_{L^1(\Omega)}}, \quad \frac{\|v^\lambda - v_{\text{hp}}\|_{L^1(\Omega_h)}}{\|v^\lambda\|_{L^1(\Omega)}},$$

en fonction de  $h$  pour  $p \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$ . Dans la suite, ces quantités seront appelées *erreurs fines*. Pour la seconde variable, sur la figure 3.4b, nous observons que nous obtenons la précision optimale attendue (cf. par exemple [93]), en loi de puissance telle que

$$\frac{\|v^\lambda - v_{\text{hp}}\|_{L^1(\Omega_h)}}{\|v^\lambda\|_{L^1(\Omega)}} \approx h^{p+1}.$$

Sur la figure 3.4a, pour la première variable avec  $p = 0$ , la remarque est identique. Cependant, pour  $p \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , nous observons une super convergence, les pentes étant approximativement égales à  $p + 2$  au lieu de  $p + 1$ .

### 3.4.1.2 Approximation du problème fin par la méthode numérique couplée

**Erreurs de modélisation et de discrétisation en fonction de trois paramètres : niveau de raffinement de maillage ( $h$ ), degré du polynôme ( $p$ ) et**

**position de l'interface de couplage** ( $x_c$ ). Le tableau 3.2 récapitule les valeurs numériques des *erreurs fines* (dépendantes de  $p$ ) et *couplées*

$$\frac{\|u^\lambda - u_{\text{hpm}}\|_{L^1(\Omega_h)}}{\|u^\lambda\|_{L^1(\Omega)}}, \quad \frac{\|v^\lambda - v_{\text{hpm}}\|_{L^1(\Omega_h)}}{\|v^\lambda\|_{L^1(\Omega)}},$$

(dépendantes de  $p$  et aussi de  $x_c$ ) pour un maillage de pas  $h = 0,5$ . Les valeurs de ces erreurs pour des maillages de pas respectifs  $h = 0,25$ ;  $h = 0,125$  et  $h = 0,0625$  sont représentées dans les tableaux 3.3, 3.4 et 3.5.

— *Erreurs couplées* sur la seconde variable.

1. Pour chaque  $h$  et  $p$  fixé, l'*erreur couplée* est constante, indépendamment de  $x_c$ . Comme attendu, elle est constituée uniquement d'erreurs de discrétisation. En effet les solutions (3.38) et (3.39) montrent que l'erreur de modélisation

$$\frac{\|v^\lambda - v_m^\lambda\|_{L^1(\Omega_h)}}{\|v^\lambda\|_{L^1(\Omega)}}$$

est nulle.

2. Les *erreurs couplées* décroissent naturellement lorsque l'ordre d'approximation est élevé, c'est-à-dire quand  $p$  augmente ou  $h$  décroît.

— *Erreurs couplées* sur la première variable.

1. Quand la solution numérique couplée est calculée avec un ordre d'approximation très faible (cf. par exemple tableau 3.2 avec  $p = 0$ ), l'*erreur couplée* ne décroît pas lorsque  $x_c$  augmente. Nous sommes dans le cas où l'*erreur couplée* est largement dominée par l'erreur de discrétisation.
2. Lorsque l'ordre d'approximation est très élevé (cf. par exemple tableau 3.5 avec  $p = 4$ ), l'*erreur couplée* décroît lorsque  $x_c$  augmente. Ici, l'*erreur couplée* est largement dominée par l'erreur de modélisation.
3. Pour chaque position d'interface de couplage  $x_c$  fixée, il est possible de trouver des couples  $(h; p)$  tels que l'*erreur couplée* est largement dominée par les erreurs de modélisation.
  - (a) Si  $x_c = 1$ , l'ensemble des couples possibles est  $\{(h = 0,5; p = 1), (h = 0,25; p = 1), (h = 0,125; p = 0), (h = 0,0625; p = 0)\}$ . Les valeurs numériques (non exactement identiques) des erreurs de modélisation associées, sont affichées en rouge dans les tableaux 3.2, 3.3, 3.4, 3.5.
  - (b) Si  $x_c = 3$ , l'ensemble des couples possibles est  $\{(h = 0,5; p = 1), (h = 0,25; p = 1), (h = 0,125; p = 1), (h = 0,0625; p = 1)\}$ . Les valeurs numériques des erreurs de modélisation associées, sont affichées en bleu dans les tableaux 3.2, 3.3, 3.4, 3.5.
  - (c) Si  $x_c = 9$ , l'ensemble des couples possibles est  $\{(h = 0,5; p = 3), (h = 0,25; p = 2), (h = 0,125; p = 2), (h = 0,0625; p = 2)\}$ . Les valeurs numériques des erreurs de modélisation associées, sont affichées en magenta dans les tableaux 3.2, 3.3, 3.4, 3.5.

4. Pour chaque position d'interface de couplage  $x_c$  fixée, il est possible de trouver le couple  $(\tilde{h}; \tilde{p})$  optimal tel que l'*erreur couplée* est largement dominée par les erreurs de modélisation. Ce couple est optimal si le nombre de degrés de liberté utilisés dans la discrétisation spatiale de la méthode numérique couplée associée est minimal. En effet, dans ce cas, les encombrements mémoire et le temps CPU d'une simulation numérique adaptée seront minimaux.

(a) Si  $x_c = 1$ , le couple optimal est  $(\tilde{h} = 0, 5; \tilde{p} = 1)$ .

(b) Si  $x_c = 3$ , le couple optimal est  $(\tilde{h} = 0, 5; \tilde{p} = 1)$ .

(c) Si  $x_c = 9$ , le couple optimal est  $(\tilde{h} = 0, 5; \tilde{p} = 3)$ .

Ces couples optimaux peuvent aussi être identifiés à l'aide de la figure 3.5, où nous avons représenté les *erreurs fines* et *couplées* en fonction de la position de l'interface de couplage, pour les deux maillages de pas  $h = 0, 5$  et  $h = 0, 0625$ ; avec  $p \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$ .

Sur les figures 3.6 et 3.7, nous comparons la solution exacte fine avec les solutions numériques fine et couplée. En particulier, ces solutions numériques ont été obtenues à l'aide d'un maillage de pas  $h = 0, 125$ ; et de deux discrétisations spatiales DG avec  $p \in \{0, 2\}$ . Les trois positions de l'interface de couplage  $x_c \in \{1, 3, 9\}$  ont été prises en compte pour les calculs couplés.

Notre schéma numérique fin n'est pas équilibré. En effet, sur la figure 3.7, lorsque  $p = 0$ , au voisinage du bord  $x = 0$ , nous observons une couche limite numérique sur la seconde variable. L'amplitude de cette couche limite s'atténue lorsque le degré du polynôme  $p$  augmente. De plus, comme attendu, quand l'ordre d'approximation est faible (ici on considère le calcul  $p = 0$ ), la solution numérique couplée tend vers la solution numérique fine lorsque la valeur de  $x_c$  croît. Par ailleurs, lorsque  $p = 2$ , nous remarquons sans surprise, que la solution exacte fine se confond avec les solutions numériques fine et couplée, indépendamment de la valeur de  $x_c$ .

Précédemment, lors de l'analyse des tableaux 3.2, 3.3, 3.4 et 3.5, nous avons remarqué que lorsque l'ordre d'approximation spatiale est faible, l'*erreur couplée* ne décroît pas quand la valeur de  $x_c$  augmente. En revanche, pour le calcul  $p = 0$ , sur la figure 3.6, on observe que la solution numérique couplée tend vers la solution numérique fine quand  $x_c$  croît.

		$x_c$	$\frac{\ u^\lambda - u_{\text{hp}}\ _{L^1}}{\ u^\lambda\ _{L^1}}$	$\frac{\ u^\lambda - u_{\text{hpm}}\ _{L^1}}{\ u^\lambda\ _{L^1}}$	$\frac{\ v^\lambda - v_{\text{hp}}\ _{L^1}}{\ v^\lambda\ _{L^1}}$	$\frac{\ v^\lambda - v_{\text{hpm}}\ _{L^1}}{\ v^\lambda\ _{L^1}}$
$p=0$	1		$2,36E-01$	$3,93E-01$	$3,78E-01$	$3,78E-01$
	3		-	$1,89E-01$	-	$3,78E-01$
	9		-	$2,36E-01$	-	$3,78E-01$
$p=1$	1		$3,05E-03$	$3,99E-01$	$3,11E-02$	$3,11E-02$
	3		-	$3,28E-02$	-	$3,11E-02$
	9		-	$3,06E-03$	-	$3,11E-02$
$p=2$	1		$9,37E-05$	$3,99E-01$	$1,60E-03$	$1,60E-03$
	3		-	$3,28E-02$	-	$1,60E-03$
	9		-	$9,83E-05$	-	$1,60E-03$
$p=3$	1		$2,27E-06$	$3,99E-01$	$6,19E-05$	$6,19E-05$
	3		-	$3,28E-02$	-	$6,19E-05$
	9		-	$1,29E-05$	-	$6,19E-05$
$p=4$	1		$5,80E-08$	$3,99E-01$	$1,92E-06$	$1,92E-06$
	3		-	$3,28E-02$	-	$1,92E-06$
	9		-	$1,29E-05$	-	$1,92E-06$

TABLE 3.2 – Erreurs fines et couplées pour  $h = 0, 5$ .

		$x_c$	$\frac{\ u^\lambda - u_{\text{hp}}\ _{L^1}}{\ u^\lambda\ _{L^1}}$	$\frac{\ u^\lambda - u_{\text{hpm}}\ _{L^1}}{\ u^\lambda\ _{L^1}}$	$\frac{\ v^\lambda - v_{\text{hp}}\ _{L^1}}{\ v^\lambda\ _{L^1}}$	$\frac{\ v^\lambda - v_{\text{hpm}}\ _{L^1}}{\ v^\lambda\ _{L^1}}$
$p=0$	1		$1,35E-01$	$3,97E-01$	$2,37E-01$	$2,37E-01$
	3		-	$1,24E-01$	-	$2,37E-01$
	9		-	$1,35E-01$	-	$2,37E-01$
$p=1$	1		$4,10E-04$	$3,99E-01$	$8,51E-03$	$8,51E-03$
	3		-	$3,28E-02$	-	$8,51E-03$
	9		-	$4,18E-04$	-	$8,51E-03$
$p=2$	1		$6,08E-06$	$3,99E-01$	$2,12E-04$	$2,12E-04$
	3		-	$3,28E-02$	-	$2,12E-04$
	9		-	$1,29E-05$	-	$2,12E-04$
$p=3$	1		$7,13E-08$	$3,99E-01$	$4,06E-06$	$4,06E-06$
	3		-	$3,28E-02$	-	$4,06E-06$
	9		-	$1,29E-05$	-	$4,06E-06$
$p=4$	1		$9,31E-10$	$3,99E-01$	$6,27E-08$	$6,27E-08$
	3		-	$3,28E-02$	-	$6,27E-08$
	9		-	$1,29E-05$	-	$6,27E-08$

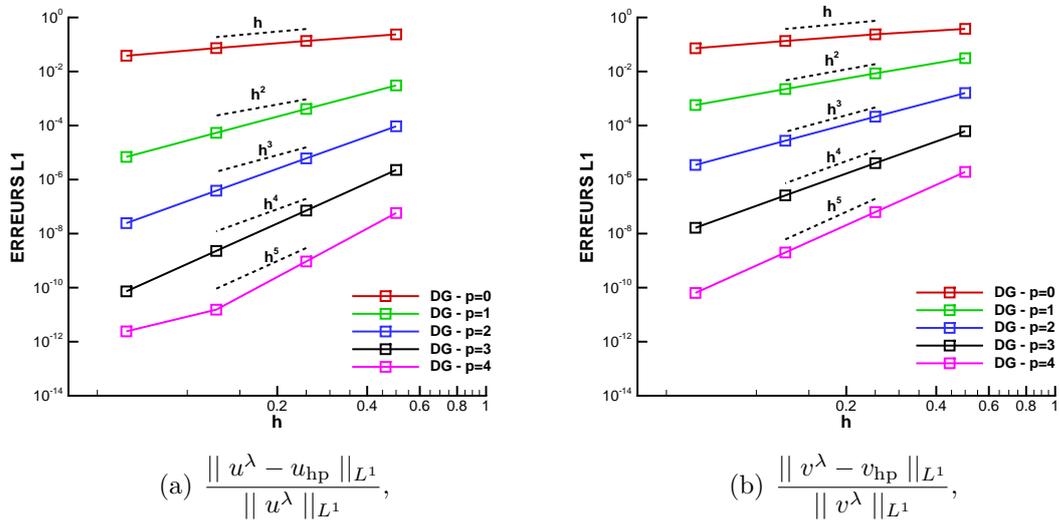
TABLE 3.3 – Erreurs fines et couplées pour  $h = 0, 25$ .

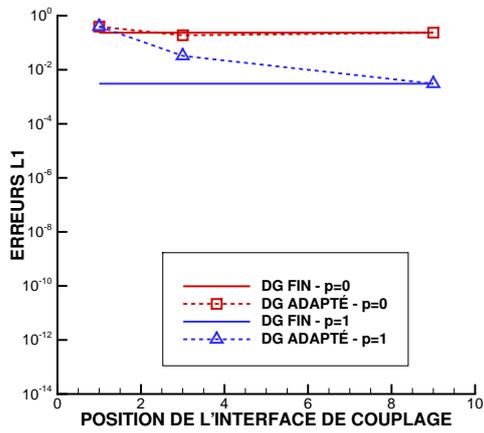
		$x_c$	$\ u^\lambda - u_{\text{hp}}\ _{L^1}$	$\ u^\lambda - u_{\text{hpm}}\ _{L^1}$	$\ v^\lambda - v_{\text{hp}}\ _{L^1}$	$\ v^\lambda - v_{\text{hpm}}\ _{L^1}$
			$\ u^\lambda\ _{L^1}$	$\ u^\lambda\ _{L^1}$	$\ v^\lambda\ _{L^1}$	$\ v^\lambda\ _{L^1}$
$p=0$	1		$7,34E-02$	$3,99E-01$	$1,35E-01$	$1,35E-01$
	3		-	$7,53E-02$	-	$1,35E-01$
	9		-	$7,34E-02$	-	$1,35E-01$
$p=1$	1		$5,37E-05$	$3,99E-01$	$2,23E-03$	$2,23E-03$
	3		-	$3,28E-02$	-	$2,23E-03$
	9		-	$6,19E-05$	-	$2,23E-03$
$p=2$	1		$3,87E-07$	$3,99E-01$	$2,74E-05$	$2,74E-05$
	3		-	$3,28E-02$	-	$2,74E-05$
	9		-	$1,29E-05$	-	$2,74E-05$
$p=3$	1		$2,29E-09$	$3,99E-01$	$2,60E-07$	$2,60E-07$
	3		-	$3,28E-02$	-	$2,60E-07$
	9		-	$1,29E-05$	-	$2,60E-07$
$p=4$	1		$1,53E-11$	$3,99E-01$	$2,00E-09$	$2,00E-09$
	3		-	$3,28E-02$	-	$2,00E-09$
	9		-	$1,29E-05$	-	$2,00E-09$

TABLE 3.4 – Erreurs fines et couplées pour  $h = 0, 125$ .

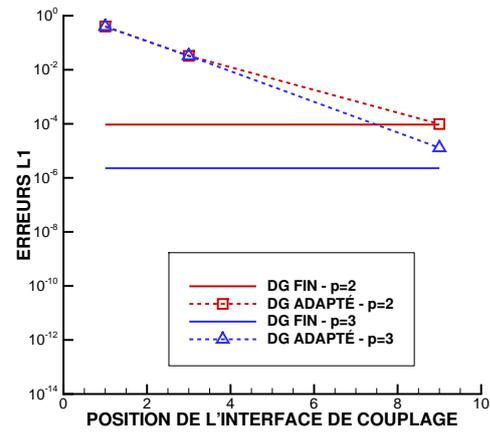
		$x_c$	$\ u^\lambda - u_{\text{hp}}\ _{L^1}$	$\ u^\lambda - u_{\text{hpm}}\ _{L^1}$	$\ v^\lambda - v_{\text{hp}}\ _{L^1}$	$\ v^\lambda - v_{\text{hpm}}\ _{L^1}$
			$\ u^\lambda\ _{L^1}$	$\ u^\lambda\ _{L^1}$	$\ v^\lambda\ _{L^1}$	$\ v^\lambda\ _{L^1}$
$p=0$	1		$3,83E-02$	$3,99E-01$	$7,24E-02$	$7,24E-02$
	3		-	$4,76E-02$	-	$7,24E-02$
	9		-	$3,83E-02$	-	$7,24E-02$
$p=1$	1		$6,88E-06$	$3,99E-01$	$5,72E-04$	$5,72E-04$
	3		-	$3,28E-02$	-	$5,72E-04$
	9		-	$1,63E-05$	-	$5,72E-04$
$p=2$	1		$2,44E-08$	$3,99E-01$	$3,48E-06$	$3,48E-06$
	3		-	$3,28E-02$	-	$3,48E-06$
	9		-	$1,29E-05$	-	$3,48E-06$
$p=3$	1		$7,29E-11$	$3,99E-01$	$1,64E-08$	$1,64E-08$
	3		-	$3,28E-02$	-	$1,64E-08$
	9		-	$1,29E-05$	-	$1,64E-08$
$p=4$	1		$2,40E-12$	$3,99E-01$	$6,37E-11$	$6,37E-11$
	3		-	$3,28E-02$	-	$6,34E-11$
	9		-	$1,29E-05$	-	$6,35E-11$

TABLE 3.5 – Erreurs fines et couplées pour  $h = 0, 0625$ .

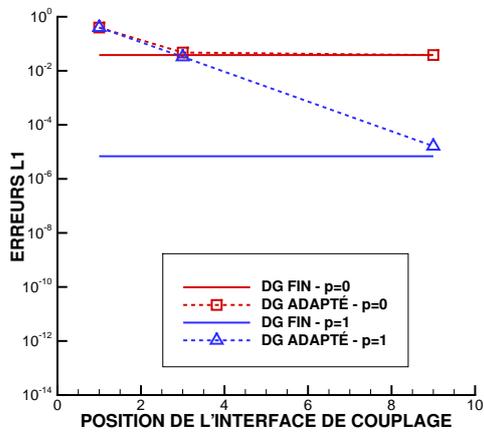
FIGURE 3.4 – Erreurs  $L^1$  relatives pour l'approximation du problème fin.



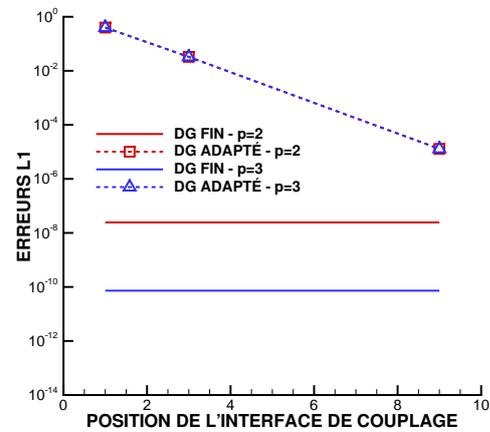
(a) première variable



(b) première variable



(c) première variable



(d) première variable

FIGURE 3.5 – Erreurs  $L^1$  sur  $u$  (fin et couplé). 20 mailles en haut et 160 mailles en bas.

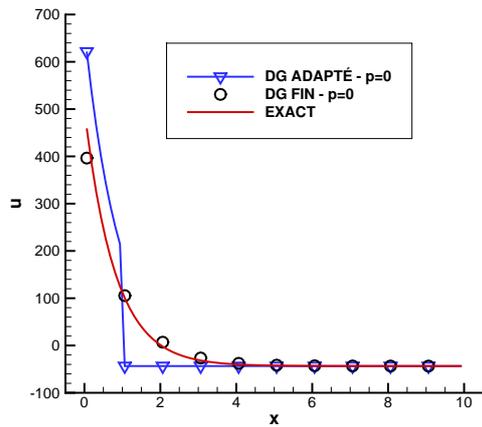
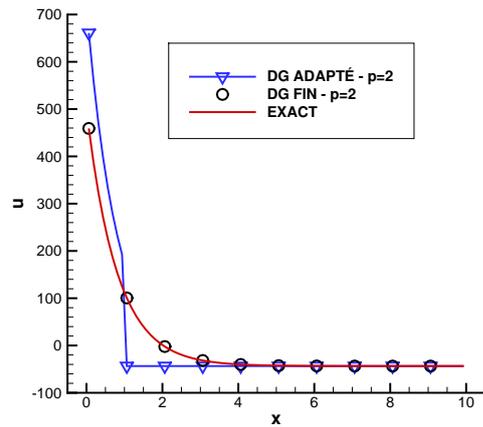
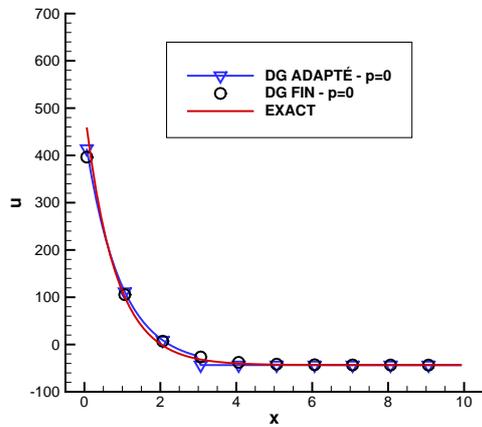
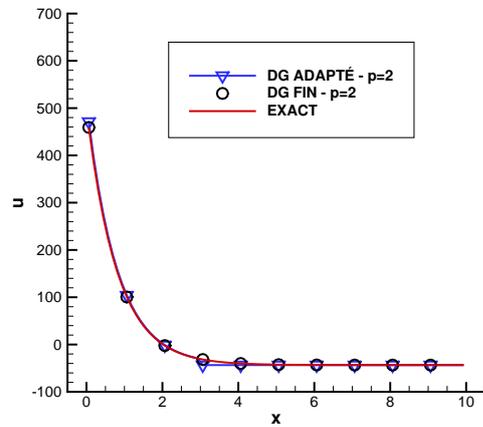
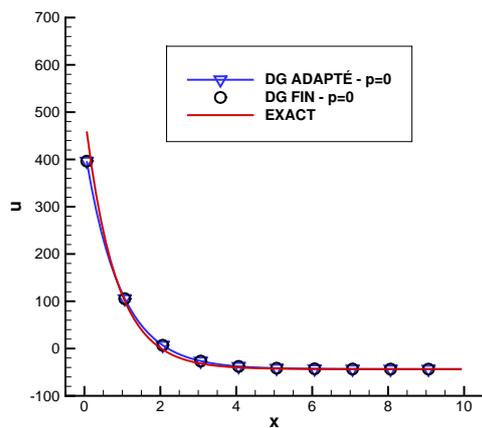
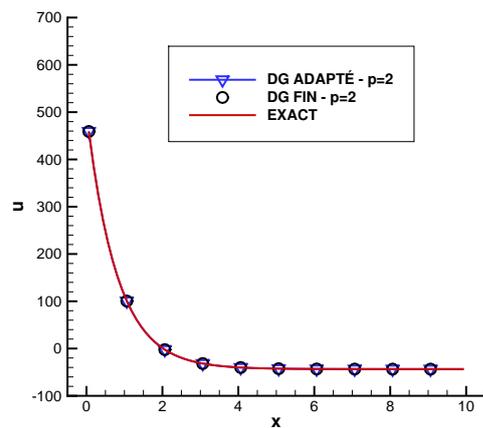
(a)  $x_c = 1$ (b)  $x_c = 1$ (c)  $x_c = 3$ (d)  $x_c = 3$ (e)  $x_c = 9$ (f)  $x_c = 9$ 

FIGURE 3.6 – Solutions exacte, fine et couplée pour la première variable (à gauche  $p = 0$  et à droite  $p = 2$ ). Calculs à 80 mailles. Pour plus de lisibilité, on affiche 10 points au lieu de 80 points

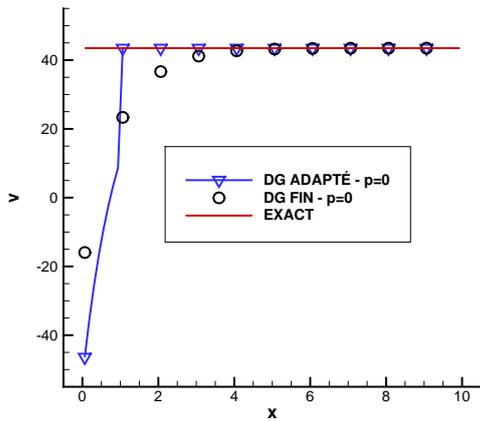
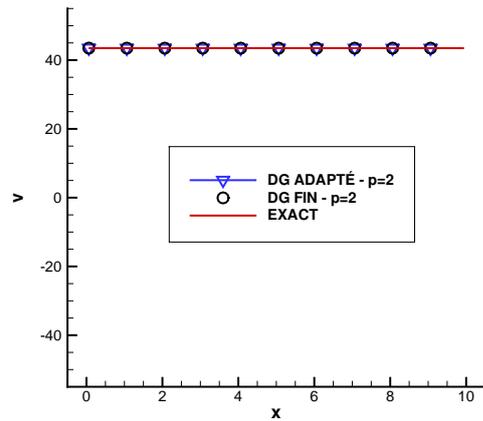
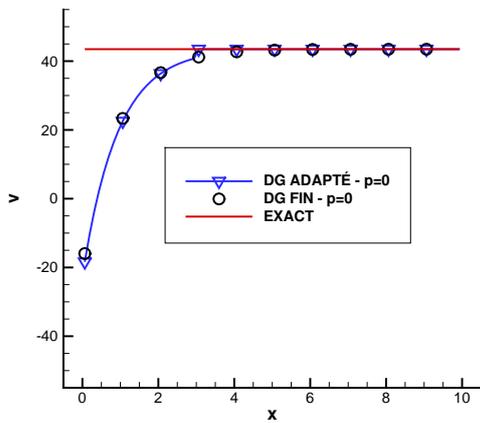
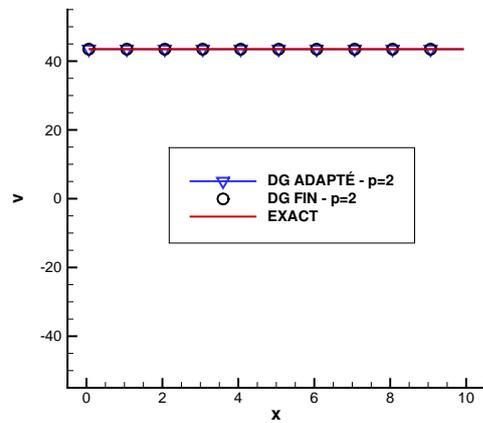
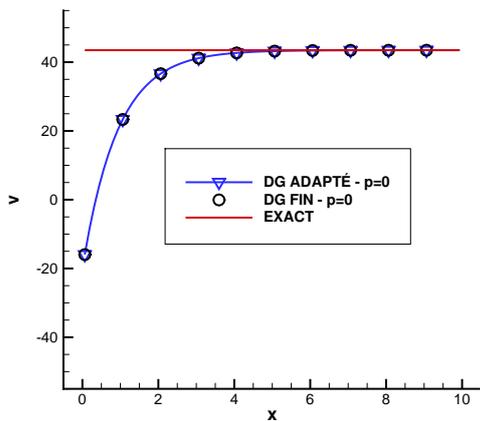
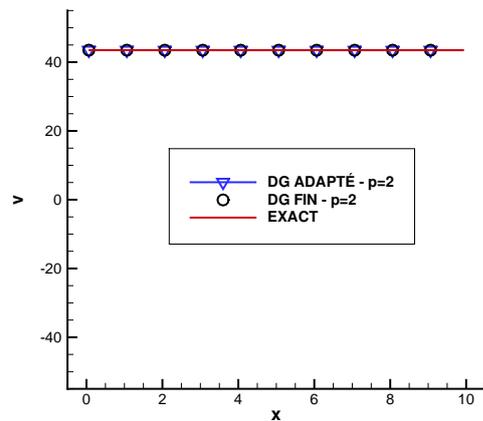
(a)  $x_c = 1$ (b)  $x_c = 1$ (c)  $x_c = 3$ (d)  $x_c = 3$ (e)  $x_c = 9$ (f)  $x_c = 9$ 

FIGURE 3.7 – Solutions exacte, fine et couplée pour la seconde variable (à gauche  $p = 0$  et à droite  $p = 2$ ). Calculs à 80 mailles. Pour plus de lisibilité, on affiche 10 points au lieu de 80 points

### 3.4.2 Cas non-linéaire avec $f' < 0$

**Description du cas test.** Dans ce second cas test, nous prenons un flux non-linéaire, de dérivée strictement négative, défini par  $f(u) = \exp(-u) - 1$ . La vitesse de relaxation est  $a = 0,9$ . Le temps de relaxation vaut  $1/\lambda = 1$ . La longueur du domaine d'étude est  $L = 10$  et nous imposons  $\mathcal{B}(t) = 0$  pour tout temps  $t > 0$ . La valeur de la condition de CFL utilisée pour tous les calculs vaut  $0,05$ .

La condition initiale du problème fin est compatible avec les conditions aux limites, mais n'est pas à l'équilibre :  $u_0^\lambda(x) = v_0^\lambda(x) = \sin^2(\pi x)$ . Afin de nous placer dans le cas où l'erreur couplée est largement dominée par les erreurs de modélisation, les calculs fin et couplé ont été réalisés avec un maillage de pas  $h = 0,05$  et un degré de polynôme  $p = 4$ . Pour les calculs couplés, nous choisissons quatre positions de l'interface de couplage  $x_c \in \{1; 2; 3; 9\}$ . Pour construire la condition initiale associée au problème couplé, nous utilisons les degrés de liberté obtenus lorsque la solution numérique fine est convergée en temps.

**Analyses qualitatives.** Sur la figure 3.9, nous représentons la deuxième composante des solutions numériques fine et couplée. A l'instar du précédent cas test, nous remarquons sans surprise, que lorsque l'ordre d'approximation est élevé, les solutions numériques fine et couplée sont en excellent accord, indépendamment de la position de l'interface de couplage. De plus, nous avons bien la constance en espace des solutions numériques. Ces observations impliquent, en particulier, que les conditions aux limites (3.6) et (3.11) sont vérifiées précisément.

Sur la figure 3.8, nous représentons la première composante des solutions numériques fine et couplée. Nous observons clairement que la solution numérique fine décroît rapidement jusqu'à atteindre l'équilibre  $v_{\text{hp}} = f(u_{\text{hp}})$ , soit en utilisant la définition du flux  $f$  et les conditions aux limites (3.6),  $v_{\text{hp}} = u_{\text{hp}} = 0$ . Par exemple, nous pouvons observer que les deux composantes de la solution numérique sont à l'équilibre pour tout  $x$  dans  $\Omega_h \setminus ]0, 8[$ . C'est la raison pour laquelle nous pouvons apprécier un excellent accord entre la solution numérique fine et la solution numérique couplée lorsque  $x_c = 9$  : l'erreur de modélisation est invisible. De plus, quelque soit la position de l'interface de couplage  $x_c$ , nous observons sans surprise que l'équilibre est atteint à partir de la première cellule située à droite de  $x_c$ . Enfin, comme attendu, le graphe de la solution numérique couplée s'éloigne de celui de la solution numérique fine lorsque la valeur de  $x_c$  décroît.

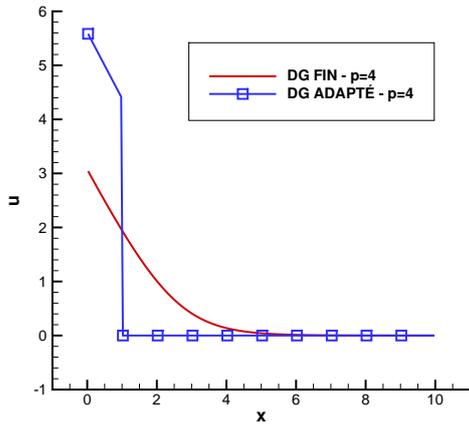
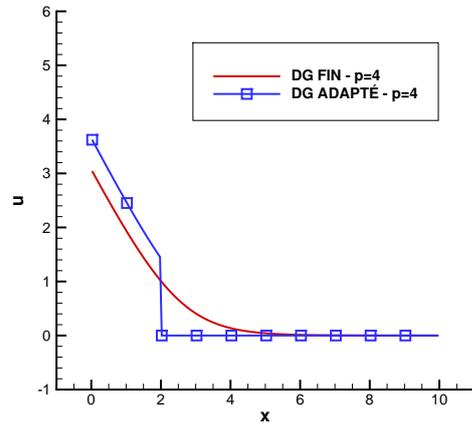
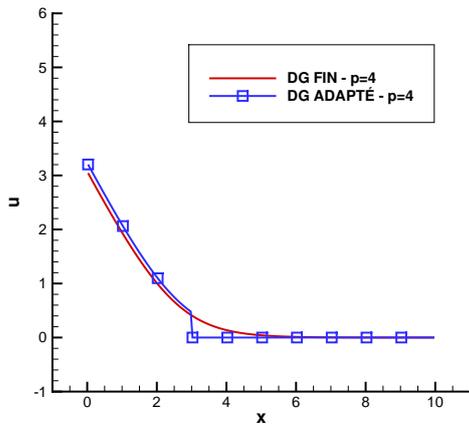
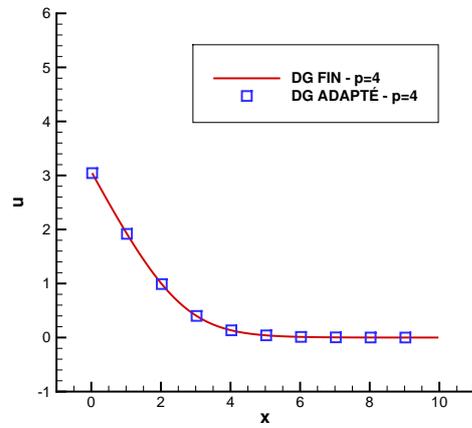
(a)  $x_c = 1$ (b)  $x_c = 2$ (c)  $x_c = 3$ (d)  $x_c = 9$ 

FIGURE 3.8 – Solutions DG fine et couplée pour  $u$ . Calculs à 200 mailles. Pour plus de lisibilité, on affiche 10 points au lieu de 200 points

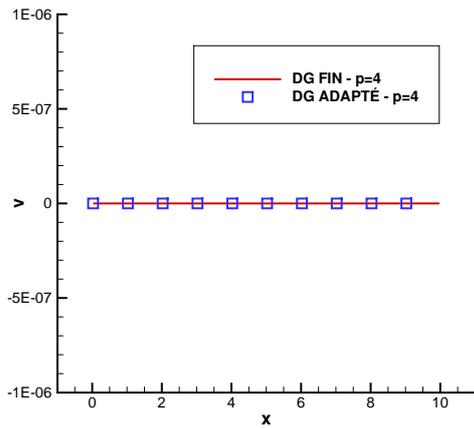
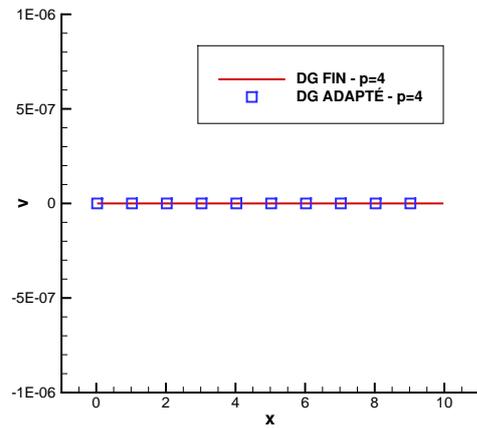
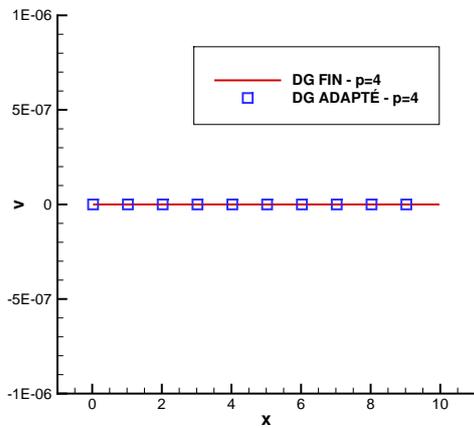
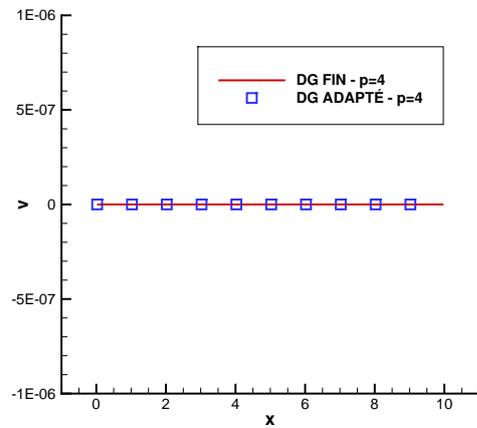
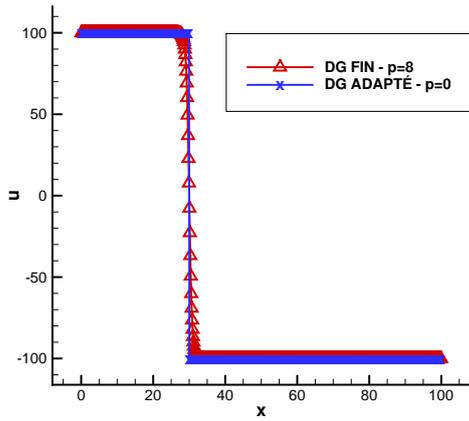
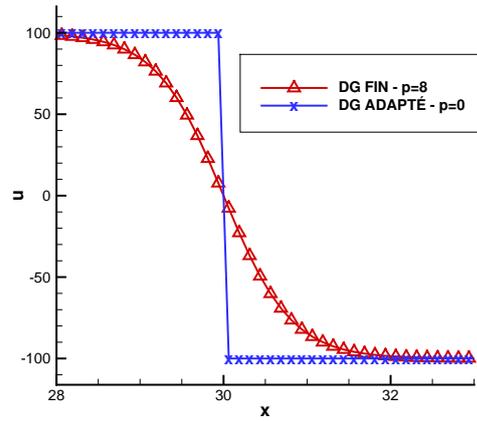
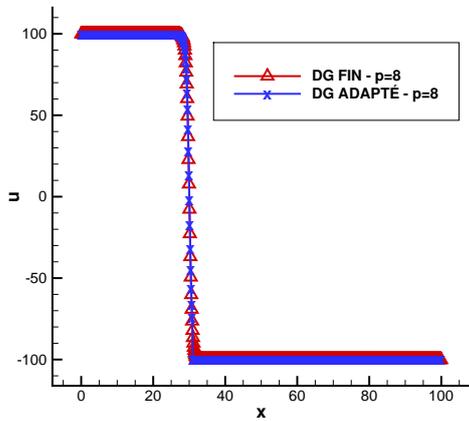
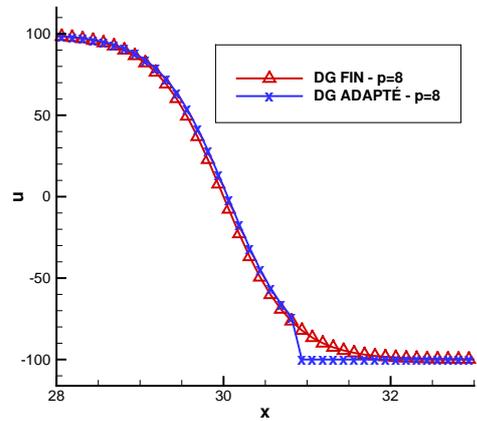
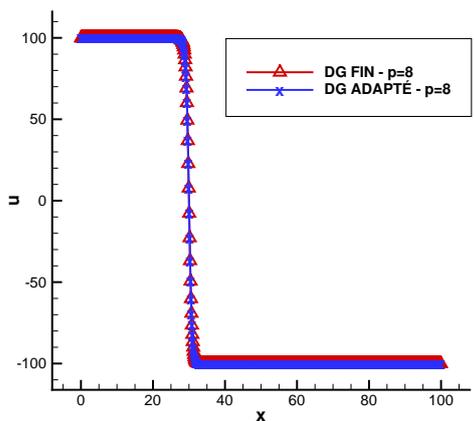
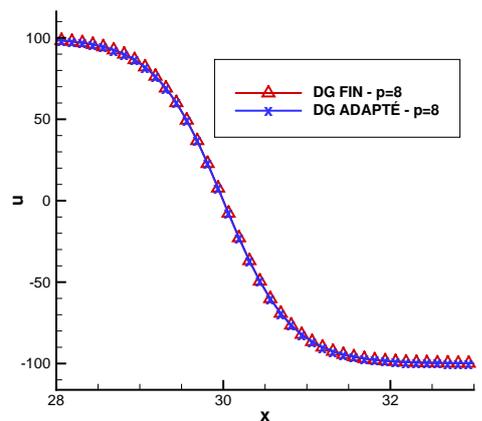
(a)  $x_c = 1$ (b)  $x_c = 2$ (c)  $x_c = 3$ (d)  $x_c = 9$ 

FIGURE 3.9 – Solutions DG fine et couplée pour  $v$ . Calculs à 200 mailles. Pour plus de lisibilité, on affiche 10 points au lieu de 200 points

### 3.4.3 Cas non-linéaire avec $f' > 0$ , $f' < 0$ ou $f'$ qui change de signe de part et d'autre de l'interface de couplage

**Description du cas test.** Nous prenons un flux non-linéaire défini par  $f(u) = u^2/100$ . La vitesse de relaxation est  $a = 2,01$ ; le temps de relaxation vaut  $1/\lambda = 0,2$ ; la longueur du domaine d'étude est  $L = 100$  et nous imposons  $\mathcal{B}(t) = \text{constante} = b_0 = 100$  pour tout temps  $t > 0$ . Soit  $u_0(x)$  la fonction créneau :  $u_0(x) = b_0 \mathbb{1}_{\{0 < x < 30\}} - b_0 \mathbb{1}_{\{30 < x < L\}}$ . La condition initiale du problème fin est  $u_0^\lambda(x) = u_0(x)$ ,  $v_0^\lambda(x) = b_0$ . Pour celle associée au problème couplé, on prend la restriction ou la même condition initiale  $u_0(x)$  à gauche et à droite de l'interface de couplage, le résultat dépend donc de la position de l'interface :  $\tilde{u}_m^\lambda(x) = u_0(x)$  pour  $x < x_c$  et  $\tilde{u}_m(x) = u_0(x)$  pour  $x > x_c$ . Les calculs couplés ont été réalisés avec un maillage de pas  $h = 0,125$  et quatre positions d'interface de couplage  $x_c \in \{29,125; 30; 30,875; 45\}$ . La valeur de la condition de CFL utilisée pour tous les calculs vaut  $0,01$ .

**Analyses qualitatives.** Sur les figures 3.10 et 3.11, nous représentons les solutions numériques fine et couplée. La solution numérique fine est un profil de choc de relaxation. Si  $x_c = 29,125$ , nous sommes dans la région spatiale où  $f' > 0$ . Dans ce cas la condition initiale associée au problème couplé est solution stationnaire exacte du problème couplé. On peut observer que le schéma numérique couplé avec  $p = 0$  a préservé cette solution exacte. Lorsque  $x_c = 30,875$  ou  $x_c = 45$ , nous sommes dans la région où  $f' < 0$ . Pour obtenir des résultats de calculs où l'erreur de modélisation domine, nous avons effectué des calculs DG à l'ordre élevé avec  $p = 8$ . Nous remarquons que la solution numérique couplée tend vers la solution numérique fine quand la valeur de  $x_c$  croît. Enfin, lorsque  $x_c = 30$ ,  $f'$  change de signe de part et d'autre de l'interface de couplage et la condition initiale est solution exacte stationnaire du problème couplé. On peut remarquer que le schéma numérique couplé avec  $p = 0$  a préservé la solution exacte du problème couplé.

(a)  $x_c = 29,125$ (b)  $x_c = 29,125$ (c)  $x_c = 30,875$ (d)  $x_c = 30,875$ (e)  $x_c = 45$ (f)  $x_c = 45$ FIGURE 3.10 – Solutions DG fine et couplée pour  $u$ . Calculs à 800 mailles.

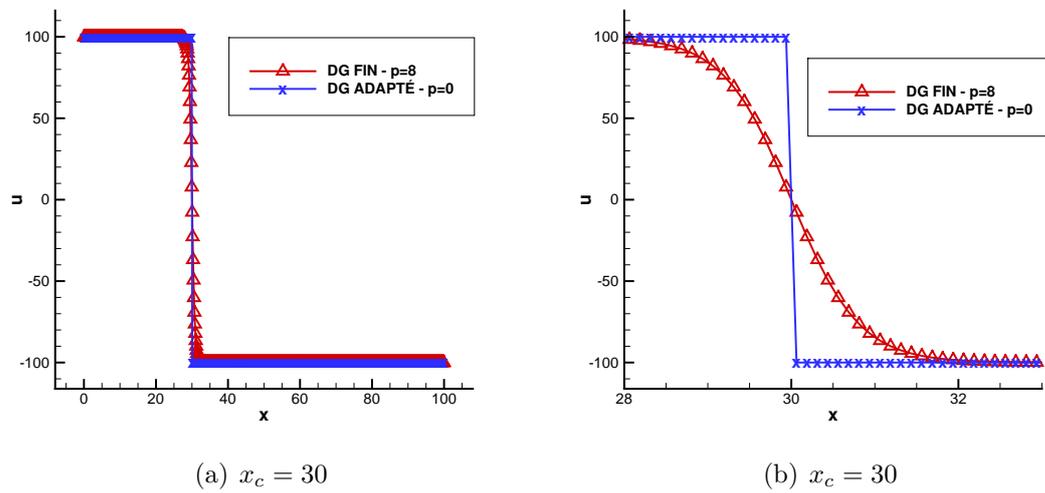


FIGURE 3.11 – Solutions DG fine et couplée pour  $u$ . Calculs à 800 mailles.

## 3.5 Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons développé deux méthodes numériques d'ordre arbitrairement élevé pour l'approximation des solutions stationnaires de deux problèmes mixtes. Ces approximations numériques sont basées sur une méthode de Galerkin discontinue. Nous avons d'abord considéré le modèle de relaxation de S. Jin et Z. Xin, muni de conditions initiales et aux limites. Ensuite, nous avons étudié le problème de couplage entre ce modèle de relaxation et la loi scalaire équilibre qui lui est associée. Des conditions initiales et aux limites ont été associées à ce couplage de modèles. Nous avons supposé que l'interface de couplage séparant ces deux modèles pouvait être caractéristique. De plus, la position de cette interface a été supposée arbitraire. Afin de construire la méthode numérique couplée, nous avons résolu le problème de Riemann couplé. Enfin, après la mise en œuvre de nos schémas numériques, nous avons proposé différents cas tests éprouvant ces méthodes.



# Conclusion générale et perspectives

Les travaux de ce mémoire, développés dans les deux chapitres précédents, constituent des approches préliminaires de la problématique de couplage interfacial de modèles décrits par des systèmes de lois de conservation.

Dans le chapitre 2, nous avons étendu le couplage de deux systèmes d'Euler (compressible) en une dimension d'espace avec un terme mesure, localisé sur l'interface, dont les trois composantes peuvent être non nulles. L'approximation numérique utilise une méthode volumes finis de type relaxation que l'on peut qualifier d'équilibre (« well balanced ») car elle préserve certaines solutions stationnaires. L'introduction de ces termes source permet de contrôler l'écoulement à l'interface, et nous avons donné des exemples numériques où ils sont choisis en calculant des solutions de problèmes de minimisation sous contrainte. Ce travail peut servir de base au couplage de modèles plus complexes et aussi à une méthode d'adaptation de modèles (par exemple en suivant l'approche de procédure adaptative développée dans [30]).

Dans le chapitre 3, nous avons considéré le couplage du système de relaxation de Jin-Xin avec l'équation scalaire équilibre associée (en supposant le flux strictement convexe). Nous avons développé deux méthodes numériques d'ordre arbitrairement élevé pour l'approximation des solutions stationnaires de deux problèmes mixtes, le problème fin modélisé par le système de relaxation et le modèle couplé. Deux principales pistes d'approfondissement sont possibles. En suivant l'approche de M. Braack et A. Ern [27], on pourrait développer des méthodes d'adaptation de modèles associées à une adaptation du schéma numérique afin d'équilibrer les erreurs de discrétisation et de modélisation. Maintenant que le résidu explicite associé au problème couplé a été défini, il faudra linéariser le schéma numérique couplé. Cette linéarisation est nécessaire pour construire des algorithmes d'adaptation pour le calcul de fonctions d'intérêts. Enfin, il serait intéressant d'étendre notre étude au cas où le flux associé à la loi scalaire équilibre n'est ni convexe ni concave. Dans la perspective de l'extension aux systèmes, cela nous permettra de nous confronter à des problèmes liés à l'étude de certains modèles diphasiques (qui ne sont pas convexe au sens de Lax) dont les solutions entropiques peuvent être non classiques. Nous invitons le lecteur à consulter l'ouvrage [78] pour plus de précisions sur ce type de solutions. Les analyses développées portent sur des problèmes modèles. Les problèmes à coupler sont complexes et les travaux à poursuivre devront tenir compte du caractère non stationnaire des écoulements d'intérêt de la mécanique des fluides compressibles, tels que ceux mentionnés dans l'introduction.



# Table des figures

1.1	Simulation d'écoulement instationnaire dans un compresseur (d'après [29]). . . . .	12
1.2	Mécanismes physiques en sortie d'un injecteur coaxial cryotechnique (d'après [80]). . . . .	12
1.3	Structures d'un jet liquide atomisé (d'après [84]). . . . .	13
1.4	Représentation du couplage. . . . .	15
2.1	Space mesh. . . . .	33
2.2	The two possible wave structures of the solution of the Riemann problem (2.24). . . . .	37
2.3	Conservative coupling <i>vs.</i> state coupling for test case 1: profiles of primitive variables $(\rho, u, p)$ and internal energy. . . . .	45
2.4	Relative conservation losses for test case 1. . . . .	46
2.5	Conservative coupling <i>vs.</i> state coupling for test case 2: profiles of primitive variables $(\rho, u, p)$ , mass flow and internal energy. . . . .	47
2.6	Relative conservation losses for test case 2. . . . .	48
2.7	Constrained optimization for test case 3: profiles of primitive variables $(\rho, u, p)$ , mass flow and internal energy. . . . .	51
2.8	Relative conservation losses for test case 3. . . . .	52
2.9	Constrained optimization for test case 4: profiles of primitive variables $(\rho, u, p)$ , mass flow and internal energy. . . . .	53
2.10	Relative conservation losses for test case 4. . . . .	54
2.11	Constrained optimization for test case 5: profiles of primitive variables $(\rho, u, p)$ , mass flow and internal energy. . . . .	55
2.12	Relative conservation losses for test case 5. . . . .	56
3.1	Structures d'ondes possibles de la solution du problème de Riemann couplé (3.12) en absence de couche limite (cf. théorème 3.2.6). Le cas d'un choc stationnaire à l'interface de couplage n'est pas représenté ici. . . . .	71
3.2	Structures d'ondes possibles de la solution du problème de Riemann couplé (3.12) en présence de couche limite (cf. théorème 3.2.6). . . . .	72
3.3	Maillage $\Omega_h = \Omega_h^r \cup \Omega_h^e$ . . . . .	73
3.4	Erreurs $L^1$ relatives pour l'approximation du problème fin. . . . .	89
3.5	Erreurs $L^1$ sur $u$ (fin et couplé). 20 mailles en haut et 160 mailles en bas. . . . .	90

---

3.6	Solutions exacte, fine et couplée pour la première variable (à gauche $p = 0$ et à droite $p = 2$ ). Calculs à 80 mailles. Pour plus de lisibilité, on affiche 10 points au lieu de 80 points . . . . .	91
3.7	Solutions exacte, fine et couplée pour la seconde variable (à gauche $p = 0$ et à droite $p = 2$ ). Calculs à 80 mailles. Pour plus de lisibilité, on affiche 10 points au lieu de 80 points . . . . .	92
3.8	Solutions DG fine et couplée pour $u$ . Calculs à 200 mailles. Pour plus de lisibilité, on affiche 10 points au lieu de 200 points . . . . .	94
3.9	Solutions DG fine et couplée pour $v$ . Calculs à 200 mailles. Pour plus de lisibilité, on affiche 10 points au lieu de 200 points . . . . .	95
3.10	Solutions DG fine et couplée pour $u$ . Calculs à 800 mailles. . . . .	97
3.11	Solutions DG fine et couplée pour $u$ . Calculs à 800 mailles. . . . .	98

# Liste des tableaux

2.1	Initial conditions for different test cases. . . . .	44
3.1	CFL en fonction du degré de polynôme $p$ . . . . .	84
3.2	Erreurs fines et couplées pour $h = 0,5$ . . . . .	87
3.3	Erreurs fines et couplées pour $h = 0,25$ . . . . .	87
3.4	Erreurs fines et couplées pour $h = 0,125$ . . . . .	88
3.5	Erreurs fines et couplées pour $h = 0,0625$ . . . . .	88



# Bibliographie

- [1] R. Abgrall, S. Karni, *Computations of compressible multifluids*, J. Comput. Phys., 169, 594–623, 2001.
- [2] D. Amadori, L. Gosse, G. Guerra, *Godunov-type approximation for a general resonant balance law with large data*, J. Differential Equations 198 no. 2, 233–274, 2004.
- [3] L. Ambrosio, A. Bressan, D. Helbing, A. Klar, E. Zuazua, *Modelling and optimisation of flows on networks*. Lectures from the Centro Internazionale Matematico Estivo (C.I.M.E.) Summer School held in Cetraro, June 15–19, 2009. Edited by Benedetto Piccoli and Michel Rascle. Lecture Notes in Mathematics, 2062. Fondazione CIME/CIME Foundation Subseries. Springer, Heidelberg ; Fondazione C.I.M.E., Florence, 2013.
- [4] A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, T. Galié, *Interface model coupling via prescribed local flux balance*, 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA paper 2007–3822, 2007.
- [5] A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, T. Galié, *Interface model coupling via prescribed local flux balance* ESAIM Math. Model. Numer. Anal. 48, no. 3, 895–918, 2014.
- [6] A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, T. Galié, E. Godlewski, F. Lagoutière, P-A. Raviart, N. Seguin, *Numerical coupling of two-phase flows*, Recent progress in scientific computing (SCPDE, Hong Kong), 168–178, 2005.
- [7] A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P-A. Raviart, N. Seguin, *The coupling of homogeneous models for two-phase flows*, Int. J. Finite Volumes, 4, 1–39, 2007.
- [8] A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P-A. Raviart, N. Seguin, *Coupling of general Lagrangian systems*, Math. Comput., 77, 909–941, 2008.
- [9] A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P-A. Raviart, N. Seguin, *Relaxation methods and coupling procedures*, Int. J. Numer. Meth. Fl., 56, 1123–1129, 2008.
- [10] A. Ambroso, C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, F. Lagoutière, P-A. Raviart, N. Seguin, J-M. Hérard, *Coupling of multiphase flow models*, Proceedings of the Eleventh International Meeting on Nuclear Thermal-Hydraulics (NURETH), 2005.

- [11] B. Andreianov, K. H. Karlsen, N. H. Risebro, *A Theory of  $L^1$ -Dissipative Solvers for Scalar Conservation Laws with Discontinuous Flux*, Arch. Rational Mech. Anal. 201, 27–86, 2011.
- [12] B. Andreianov, F. Lagoutière, N. Seguin, T. Takahashi, *Small solids in an inviscid fluid.*, Netw. Heterog. Media 5, no. 3, 385–404, 2010.
- [13] B. Andreianov, N. Seguin, *Analysis of a Burgers equation with singular resonant source term and convergence of well-balanced schemes*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 32, no. 6, 1939–1964, 2012.
- [14] M. Arienti, P. Hung, E. Morano, J. E. Shepherd, *A level set approach to Eulerian–Lagrangian coupling*, J. Comput. Phys., 185, 213–251, 2003.
- [15] C. Bardos, A. Le Roux, J. Nédélec, *First order quasilinear equations with boundary conditions*, Comm. Partial Differential Equations, 4(9), 1017–1034, 1979.
- [16] R. Becker, R. Rannacher, *An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods*, Acta Numerica, 10, 1–102, 2001.
- [17] F. Bouchut, *Construction of BGK models with a family of kinetic entropies for a given system of conservation laws*, J. Stat. Phys., 95(1/2), 113–170, 1999.
- [18] F. Bouchut, *Nonlinear stability of finite volume methods for hyperbolic conservation laws, and well-balanced schemes for sources*, Frontiers in Mathematics series, Birkhäuser, 2004
- [19] F. Bouchut, *A reduced stability condition for nonlinear relaxation to conservation laws*, J. Hyperbol. Differ. Eq., 1, 149–170, 2004.
- [20] B. Boutin, *Étude mathématique et numérique d'équations hyperboliques non-linéaires : couplage de modèles et chocs non classiques*, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, France, 2009.
- [21] B. Boutin, C. Chalons, P-A. Raviart, *Existence result for the coupling problem of two scalar conservation laws with Riemann initial data*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 20(10), 1859–1898, 2010.
- [22] B. Boutin, F. Coquel, E. Godlewski, *Dafermos regularization for interface coupling of conservation laws*, In Hyperbolic problems : theory, numerics, applications (pp. 567-575). Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [23] B. Boutin, F. Coquel, P. G. LeFloch, *Coupling techniques for nonlinear hyperbolic equations. I Self-similar diffusion for thin interfaces*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh : Section A Mathematics, 141(05), 921-956, 2011.
- [24] B. Boutin, F. Coquel, P. G. LeFloch, *Coupling techniques for nonlinear hyperbolic equations (II). Resonant interfaces with internal structure*, In preparation.
- [25] B. Boutin, F. Coquel, P. G. LeFloch, *Coupling techniques for nonlinear hyperbolic equations. III. The well-balanced approximation of thick interfaces*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 51(2), 1108-1133, 2013.
- [26] B. Boutin, F. Coquel, P. G. LeFloch, *Coupling techniques for nonlinear hyperbolic equations. IV. Well-balanced schemes for scalar multi-dimensional and multi-component laws*, Mathematics of Computation, 84(294), 1663-1702, 2010.
- [27] M. Braack, A. Ern, *A posteriori control of modeling errors and discretization errors*, Multiscale Modeling & Simulation, 1(2), 221-238. 2003.

- [28] F. Caetano, *Sur certains problèmes de linéarisation et de couplage pour les systèmes hyperboliques non linéaires*, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, France, 2006.
- [29] L. Cambier, S. Heib, S. Plot, *The Onera elsA CFD software : input from research and feedback from industry*, *Mechanics & Industry*, 14(3), 159-174, 2013.
- [30] C. Cancès, F. Coquel, E. Godlewski, H. Mathis, N. Seguin, *Error analysis of a dynamic model adaptation procedure for nonlinear hyperbolic equations*, *Communications in Mathematical Sciences*, Volume 14(1), pages 1-30, 2016.
- [31] C. Castro, F. Palacios, E. Zuazua, *An alternating descent method for the optimal control of the inviscid Burgers equation in the presence of shocks*, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 18, no. 3, 369-416, 2008.
- [32] C. Chalons, F. Coquel, *Navier-Stokes equations with several independent pressure laws and explicit predictor-corrector schemes*, *Numer. Math.*, 101, 451–478, 2005.
- [33] C. Chalons, F. Coquel, E. Godlewski, P-A. Raviart, N. Seguin, *Godunov-Type schemes for hyperbolic systems with parameter dependent source. The case of Euler system with friction*, *Math. Models Methods Appl. Sci.* 20, no. 11, 2109-2166, 2010.
- [34] C. Chalons, J-F. Coulombel, *Relaxation approximation of the Euler equations*, *J. Math. Anal. Appl.*, 348, 872–893, 2008.
- [35] C. Chalons, P-A. Raviart, N. Seguin, *The interface coupling of the gas dynamics equations*, *Quart. Appl. Math.*, 66, 659–705, 2008.
- [36] G. Q. Chen, C. D. Levermore, T. P. Liu, *Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 47, no.6, 787–830, 1994.
- [37] B. Cockburn, C.-W. Shu, *Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems*, *J. Sci. Computing*, 16, 173-261, 2001.
- [38] F. Coquel, *Coupling of nonlinear hyperbolic systems : A journey from mathematical to numerical issues*, *Numerical Methods for Hyperbolic Equations*, 21, 2012.
- [39] F. Coquel, E. Godlewski, B. Perthame, A. In, P. Rascle, *Some new Godunov and relaxation methods for two-phase flow problems*, *Godunov methods*, Springer, 179–188, 2001.
- [40] F. Coquel, E. Godlewski, N. Seguin, *Relaxation of fluid systems*, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences (M3AS)*, 22, 2012.
- [41] F. Coquel, S. Jin, J.-G. Liu, L. Wang, *Well-posedness and singular limit of a semilinear hyperbolic relaxation system with a two-scale discontinuous relaxation rate*, *Arch. Rat. mech. Anal.*, 214, 2014.
- [42] F. Coquel, B. Perthame, *Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 35, 2223–2249, 1998.
- [43] C. M. Dafermos, *Solution of the Riemann problem for a class of hyperbolic systems of conservation laws by the viscosity method*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 52(1), 1-9, 1973.

- [44] C. M. Dafermos, *Structure of solutions of the Riemann problem for hyperbolic systems of conservation laws*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, 53(3), 203-217, 1974.
- [45] S. Diehl, *A conservation law with point source and discontinuous flux function modelling continuous sedimentation*, SIAM J. Appl. Math. 56, no. 2, 388-419, 1996.
- [46] F. Dubois, P. G. LeFloch, *Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, J. Differ. Equations, 71, 93-122, 1988.
- [47] E. Duret, Y. Peysson, Q. H. Tran, P. Rouchon, *Active bypass to eliminate severe-slugging in multiphase production*, Proceedings of the 4th North American Conference on Multiphase Technology, Ban, June 2004, J. Brill, ed., Cranfield, 2004, BHR Group Limited, 205-223.
- [48] M-P. Errera, S. Chemin, *A fluid-solid thermal coupling applied to an effusion cooling system*, 34th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA paper 2004-2140, 2004.
- [49] M. Gad-el-Hak, *Flow Control*, Appl. Mech. Rev., 42, 261-293, 1989.
- [50] M. Gad-el-Hak, D.M. Bushnell, *Separation Control : Review*, J. Fluids Eng., 113, 5-30, 1991.
- [51] T. Galié, *Couplage interfacial de modèles en dynamique des fluides. Application aux écoulements diphasiques*, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, France, 2009.
- [52] G. Gassner, F. Lörcher, C.-D. Munz, *A discontinuous Galerkin scheme based on a space time expansion II. Viscous flow equations in multi dimensions*, J. Sci. Comput., 34(3), 260-286, 2008.
- [53] S. Gavriluk, R. Saurel, *Mathematical and numerical modeling of two-phase compressible flows with micro-inertia*, J. Comput. Phys., 175, 326-360, 2002.
- [54] S. Gérald, *Méthode de Galerkin Discontinue et intégrations explicites-implicites en temps basées sur un découplage des degrés de liberté. Applications au système des équations de Navier-Stokes.*, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris VI, France, 2013.
- [55] L. Girault, *Contribution à la modélisation des écoulements diphasiques en milieu poreux et au couplage interfacial*, PhD thesis, Université Aix-Marseille I, France, 2010.
- [56] L. Girault, J. M. Hérard, *Multidimensional computations of a two-fluid hyperbolic model in a porous medium*, AIAA paper, 3888, 2009.
- [57] J. Glimm, *The interaction of nonlinear hyperbolic waves*, Comm. Pure Appl. Math. 41, 569-590, 1988.
- [58] J. Glimm, D. H. Sharp, *An S-matrix theory for classical nonlinear physics*. Found. Phys. 16, 125-141, 1986.
- [59] P. Goatin, P.G. LeFloch, *The Riemann problem for a class of resonant hyperbolic systems of balance laws*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 21, no. 6, 881-902, 2004.

- [60] E. Godlewski, *Coupling fluid models, Exploring some features of interfacial coupling*, in Finite Volumes for Complex Applications Vâ (eds. R. Eymard and J-M. Hérard), ISTE-Wiley, 87–102, 2008.
- [61] E. Godlewski, K-C. Le Thanh, P-A. Raviart, *The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws : II. The case of systems*, Math. Model. Numer. Anal., 39, 649–692, 2005.
- [62] E. Godlewski, P-A. Raviart, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Ellipses, 1991.
- [63] E. Godlewski, P-A. Raviart, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, Applied Mathematical Sciences 118, Springer, 1996.
- [64] E. Godlewski, P-A. Raviart, *The numerical interface coupling of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws : I. The scalar case*, Numer. Math., 97, 81–130, 2004.
- [65] L. Gosse, *A well-balanced scheme using non-conservative products designed for hyperbolic systems of conservation laws with source terms*, Math. Models Methods Appl. Sci. 11, no. 2, 339–365, 2001.
- [66] L. Gosse, *Localization effects and measure source terms in numerical schemes for balance laws*, Math. Comp. 71, no. 238, 553–582, 2002.
- [67] L. Gosse, *Time-splitting schemes and measure source terms for a quasilinear relaxing system*, Math. Models Methods Appl. Sci. 13, no. 8, 1081–1101, 2003.
- [68] L. Gosse, *Computing Qualitatively Correct Approximations of Balance Laws : Exponential-Fit, Well-Balanced and Asymptotic-Preserving*. SIMAI Springer Series 2, Springer, 2013.
- [69] J.-M. Greenberg, A-Y. Leroux, *A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations*, SIAM J. Numer. Anal., 33, 1–16, 1996.
- [70] G. Guerra, *Well-posedness for a scalar conservation law with singular nonconservative source*, J. Differential Equations 206, 438–469, 2004.
- [71] J-M. Hérard, *A rough scheme to couple free and porous media*, Int. J. Finite Volumes, 3, 1–28, 2006.
- [72] J-M. Hérard, O. Hurisse, *Coupling two and one-dimensional unsteady Euler equations through a thin interface*, Computers & Fluids, 36(4), 651–666, 2007.
- [73] J-M. Hérard, O. Hurisse, *The Numerical Coupling of a Two-Fluid Model with an Homogeneous Relaxation Model*, Finite Volumes for Complex Applications V, Editions Hermès, Paris, 2008.
- [74] O. Hurisse, *Couplage interfacial instationnaire de modèles diphasiques*, PhD thesis, Université Aix-Marseille I, France, 2006.
- [75] S. Jin, Z. Xin, *The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimensions*, Commun. Pur. Appl. Math., 48, 235–276, 1995.
- [76] S. Jin, J.-G. Liu, L. Wang, *A domain decomposition method for semilinear hyperbolic systems with two-scale relaxations*, Math. Comput., 82(282), 749–779, 2013.

- [77] Y.-S. Kwon, A. Vasseur, *Strong traces for solutions to scalar conservation laws with general flux*, Arch. Ration. Mech. Anal. 185, no. 3, 495–513, 2007.
- [78] P. G. LeFloch, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws : The theory of classical and nonclassical shock waves*, Springer Science & Business Media, 2002.
- [79] P. Lesaint, P. -A. Raviart, *On a finite element method for solving the neutron transport equation*, Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations, (33), 89-123, 1974.
- [80] C. Le Touze, *Couplage entre modèles diphasiques à « phases séparées » et à « phase dispersée » pour la simulation de l'atomisation primaire en combustion cryotechnique*, PhD thesis, Université Nice Sophia Antipolis, France, 2015.
- [81] C. Le Touze, A. Murrone, E. Montreuil, *Numerical coupling strategies for the "separated-to-dispersed" transition within the liquid phase of cryogenic rocket engines*, 5th European Conference for Aeronautics and Space Science, Munich, Germany, 2013.
- [82] T-P. Liu, *Hyperbolic conservation laws with relaxation*, Commun. Math. Phys., 108, 153–175, 1987.
- [83] F. Lörcher, G. Gassner, C.-D. Munz, *An explicit discontinuous Galerkin scheme with local time-stepping for general unsteady diffusion equations*, J. Comput. Phys., 227(11), 5649-5670, 2008.
- [84] P. Marmottant, E. Villermaux, *On spray formation*, Journal of Fluid Mechanics, 498, 73-111, 2004.
- [85] H. Mathis, C. Cancès, E. Godlewski, N. Seguin, *Dynamic model adaptation for multiscale simulation of hyperbolic systems with relaxation*, Journal of Scientific Computing, 2014 (DOI) 10.1007/S10915-014-9915-0
- [86] A.M. Mitchell, J. Delery, *Research into Vortex Breakdown Control*, Progress in Aerospace Sciences, 37, 385–418, 2001.
- [87] A. Murrone, N. Fdida, C. Le Touze, L. Vingert, *Atomization of cryogenic rocket engines coaxial injectors. Modeling aspects and experimental investigations*, Space Propulsion, Cologne, Germany, 2014.
- [88] A. Murrone, P. Villedieu, *Numerical modeling of dispersed two-phase flows*, AerospaceLab Journal 2, 34-46, 2011.
- [89] J. T. Oden, S. Prudhomme, *Estimation of modeling error in computational mechanics*, Journal of Computational Physics, 182(2), 496-515, 2002.
- [90] J. T. Oden, S. Prudhomme, A. Romkes, P. T. Bauman, *Multiscale modeling of physical phenomena : Adaptive control of models*, SIAM Journal on Scientific Computing, 28(6), 2359-2389, 2006.
- [91] W. H. Reed, T. R. Hill, *Triangular mesh methods for the neutron transport equations*, Los Alamos Scientific Laboratory, Technical Report (LA-UR-73-479), 1973.
- [92] F. Renac, *Stationary discrete shock profiles for scalar conservation laws with a discontinuous Galerkin method*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 53(4), 1690-1715, 2015.

- 
- [93] G. R. Richter, *An optimal-order error estimate for the discontinuous Galerkin method*, Math. Comp., 50, 75-88, 1988.
- [94] K. Saleh, *Analyse et simulation numérique par relaxation d'écoulements diphasiques compressibles. Contribution au traitement des phases évanescentes*, PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, France, 2012.
- [95] C.-W. Shu, S. Osher, *Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes*, J. Comput. Phys., 77, 439-471, 1988.
- [96] I. Suliciu, *On the thermodynamics of rate-type fluids and phase transitions. I. Rate-type fluids*, Int. J. Eng. Sci., 36, 921-947, 1998.
- [97] S. Tiwari, A. Klar, *An adaptive domain decomposition procedure for Boltzmann and Euler equations*, J. Comput. Appl. Math., 90, 223-237, 1998.
- [98] A. Vasseur, *Well-posedness of scalar conservation laws with singular sources*, Methods Appl. Anal. 9, no. 2, 291-312, 2002.
- [99] Z. Xin, W-Q. Xu, *Stiff well-posedness and asymptotic convergence for a class of linear relaxation systems in a quarter plane*, J. Differ. Equations, 167(2), 388-437, 2000.

