



**HAL**  
open science

# Sur la croissance des automorphismes des groupes de Baumslag-Solitar

Margot Bouette

► **To cite this version:**

Margot Bouette. Sur la croissance des automorphismes des groupes de Baumslag-Solitar. Théorie des groupes [math.GR]. Université de Rennes, 2016. Français. NNT : 2016REN1S053 . tel-01435143

**HAL Id: tel-01435143**

**<https://theses.hal.science/tel-01435143v1>**

Submitted on 13 Jan 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANNÉE 2016



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

pour le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques et applications*

**Ecole doctorale Matisse**

présentée par

**Margot BOUETTE**

préparée à l'unité de recherche UMR CNRS 6625 - IRMAR  
Institut de Recherche Mathématique de Rennes  
U.F.R. Mathématiques

---

**Sur la croissance  
des automorphismes  
des groupes de  
Baumslag-Solitar**

**Thèse rapportée par :**

**Arnaud HILION**

Maitre de conférences - Aix-Marseille Université /  
rapporteur

**Armando MARTINO**

Lecturer - University of Southampton / rapporteur

**et soutenue à Rennes le 08 Décembre  
2016**

devant le jury composé de :

**Thierry COULBOIS**

Maitre de conférences - Aix-Marseille Université /  
examineur

**Françoise DAL'BO**

Professeur - ESPE de Bretagne / examineur

**Vincent GUIARDEL**

Professeur - Université de Rennes 1 / Directeur de  
thèse

**Gilbert LEVITT**

Professeur - Université de Caen / examineur

**Armando MARTINO**

Lecturer - University of Southampton / rapporteur



# Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier mon directeur de thèse Vincent Guirardel pour l'opportunité qu'il m'a donné de faire une thèse dans un domaine si riche. Sa disponibilité, sa patience et sa rigueur lors de nos rencontres et de ses nombreuses relectures m'ont beaucoup appris et ont contribué à l'élaboration et à l'aboutissement des résultats présentés ici.

Je tiens également à remercier Arnaud Hilion pour avoir accepté de rapporter cette thèse ainsi que Armando Martino qui a également accepté de rapporter cette thèse et de faire partie du jury. Je remercie également Thierry Coulbois, Françoise Dal'bo et Gilbert Levitt qui ont accepté de faire partie de mon jury.

L'IRMAR fournit un cadre idéal pour effectuer une thèse et j'aimerais remercier toutes les personnes que j'y ai rencontrées : doctorants, chercheurs, personnels administratifs et techniques. J'aimerais également remercier tous les personnels administratifs de la scolarité ainsi que de l'école doctorale MATISSE.

Cette thèse a été également pour moi l'opportunité d'enseigner dans le cadre de plusieurs missions d'enseignements au sein de l'UFR mathématiques. Je tiens donc à remercier toutes les personnes avec qui j'ai partagé de près ou de loin ces enseignements.

J'aimerais également remercier tous les professeurs de mathématiques qui me les ont enseignées du collège au Master. Ils m'ont chacun donné un peu plus le goût pour cette discipline et plus généralement pour l'enseignement. L'un des premiers à me transmettre son amour pour les mathématiques et l'enseignement a été Jean-Michel Le Poulard et il aurait aimé pouvoir parcourir ce manuscrit ...

De nombreuses personnes ont contribué chacune à leur manière à l'élaboration de ce projet et ont beaucoup compté pour moi. En faire une liste exhaustive serait vain alors et je m'excuse auprès de ceux que je n'ai pas cités. Je remercie toutes les connaissances que j'ai pu faire ou amitiés que j'ai pu nouer au cours de ces années passés à Rennes ainsi que Mauricette, Frédéric, Marion, Guillaume, Emilie, Vanessa pour son amitié fidèle depuis les bancs de l'école maternelle, Solen qui m'a précédé de deux mois pour sa soutenance, Lenaig et Marine pour tous

ces bons moments passés à Rennes ou ailleurs depuis le lycée, Mr Vallet qui a été d'une amitié et d'un soutien inestimables et enfin Loulou qui a plus que grandement contribué à cette thèse par son amitié fidèle ainsi que son soutien indéfectible et quasi-quotidien.

En dernier lieu et non des moindres, je tiens à remercier ma famille de toujours me soutenir de manière inconditionnelle dans tout ce que j'entreprends. J'ai une pensée toute particulière pour mon grand-père Rémy qui n'est plus parmi nous mais qui a contribué à sa façon ... Merci à ma grand-mère Jeannine, mes tantes Noëlle, Michelle et Ninie, mes oncles Jean-Luc et Jean-Jacques et mes cousin-(e)-s Maud, Antoine, Pauline et sa petite June, Anaïs, Colas et Malou. Enfin je tiens à accorder une place toute particulière dans ces remerciements à ma mère Marie-Christine qui a fait de moi ce que je suis aujourd'hui et sans qui rien de tout cela n'aurait jamais été possible.

Merci pour tout.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1 Généralités et premiers résultats</b>	<b>21</b>
1.1 Premières définitions . . . . .	21
1.1.1 Arbres et théorie de Bass-Serre . . . . .	21
1.1.2 Mouvements d'écrasement, d'éclatement et espace de déformation . . . . .	25
1.1.3 L'espace de déformation est un espace topologique . . . . .	26
1.1.4 Action du groupe d'automorphismes . . . . .	28
1.1.5 Métrique de Lipschitz . . . . .	28
1.1.6 Application optimale . . . . .	29
1.2 Généralités sur les groupes de Baumslag-Solitar (généralisés) . . . . .	33
1.2.1 Graphe étiqueté . . . . .	33
1.2.2 Groupe élémentaire . . . . .	34
1.2.3 Mouvements entre arbres GBS . . . . .	35
1.2.4 Groupe algébriquement rigide . . . . .	37
<b>2 Tout automorphisme de <math>BS(p, pn)</math> est réductible</b>	<b>41</b>
<b>3 Automorphismes paraboliques</b>	<b>55</b>
3.1 Fonction déplacement . . . . .	55
3.2 Nombre borné d'orbites d'arêtes . . . . .	56
3.3 Nombre non borné d'orbites d'arêtes . . . . .	63
<b>4 Automorphismes réductibles</b>	<b>81</b>
4.1 Notions de croissance . . . . .	81
4.1.1 Croissance polynomiale . . . . .	81
4.1.2 Croissance exponentielle . . . . .	85
4.2 Tout automorphisme réductible est à croissance polynomiale . . . . .	85
4.2.1 Cas $(T, Y)$ de la forme $A$ . . . . .	92
4.2.2 Cas $(T, Y)$ de la forme $B$ . . . . .	97

4.2.3	Cas $(T, Y)$ de la forme $C$ . . . . .	105
<b>5</b>	<b>Automorphismes irréductibles</b>	<b>107</b>
5.1	Automorphismes non paraboliques . . . . .	107
5.1.1	Automorphismes elliptiques . . . . .	107
5.2	Représentant train track . . . . .	109
5.3	Un exemple d'application train track . . . . .	118
	<b>Bibliographie</b>	<b>121</b>

# Introduction

De manière très générale, l'objet de ce manuscrit est la théorie géométrique des groupes. C'est un domaine des mathématiques qui consiste à étudier les propriétés algébriques d'un groupe  $G$  en passant par un espace  $X$  associé à  $G$ . Pour ce faire, il y a deux possibilités : étudier les propriétés topologiques et géométriques de l'espace  $X$  ou étudier les propriétés de l'action de  $G$  sur son espace associé  $X$ .

## Groupes de Baumslag-Solitar (généralisés)

Un groupe  $G$  agissant sur un arbre  $T$  avec des stabilisateurs d'arêtes et de sommets cycliques infinis est appelé groupe de Baumslag-Solitar généralisé, souvent abrégé groupe GBS. L'arbre est appelé arbre GBS. C'est une généralisation des groupes de Baumslag-Solitar.

De manière plus précise, l'objet de notre étude concerne les groupes de Baumslag-Solitar. Pour tous  $p$  et  $q$  entiers non nuls, il y a un groupe de Baumslag-Solitar correspondant dont la présentation est la suivante :

$$BS(p, q) = \langle a, c \mid ca^p c^{-1} = a^q \rangle.$$

Les groupes de Baumslag-Solitar ont été introduits dans [BS62] en 1962 par Gilbert Baumslag et Donald Solitar afin de fournir des exemples de groupes finiment engendrés avec une relation et non hopfien (un groupe hopfien est un groupe pour lequel tout morphisme surjectif est un automorphisme).

Donald J. Collins et Frank Levin ont démontré dans [CL83] que  $BS(p, q)$  est hopfien si et seulement si  $|p| = 1$  ou  $|q| = 1$  ou  $p$  et  $q$  ont les mêmes diviseurs premiers.

**Exemple.**  $BS(2, 4)$  est hopfien tandis que  $BS(2, 3)$  est non hopfien. En effet, le morphisme

$$\begin{aligned} \varphi : BS(2, 3) &\longrightarrow BS(2, 3) \\ a &\longmapsto a \\ b &\longmapsto b^2 \end{aligned}$$



est un morphisme surjectif qui n'est pas un automorphisme. En effet,  $\varphi(a) = a$ ,  $\varphi(b^{-1}aba^{-1}) = b$  et l'élément  $b^{-1}aba^{-1}b^{-1}aba^{-1}b^{-1}$  est un élément non trivial du noyau de ce morphisme.

## Automorphismes des groupes de Baumslag-Solitar

On s'intéressera plus particulièrement aux automorphismes extérieurs des groupes de Baumslag-Solitar (généralisés). Pour un groupe  $G$ , le groupe des automorphismes extérieurs de  $G$  est noté  $Out(G)$  et est défini comme suit :

$$Out(G) = Aut(G)/Inn(G)$$

où  $Aut(G)$  désigne le groupe des automorphismes de  $G$  et  $Inn(G)$  le sous-groupe distingué de  $Aut(G)$  constitué des automorphismes intérieurs de  $G$ .

On peut se référer à [Lev07] pour des résultats plus généraux concernant les automorphismes de groupes GBS. Notamment le Théorème 1.6 qui affirme que  $Out(G)$  contient un groupe libre non abélien ou est virtuellement nilpotent de classe inférieure ou égale à 2.

De nombreux résultats existent concernant les automorphismes des groupes de Baumslag-Solitar.

D'après [Lev07], un groupe GBS est dit élémentaire si l'arbre GBS associé est un point ou une droite et les seules possibilités pour le groupe sont  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}^2$  ou le groupe de la bouteille de Klein  $BS(1, -1)$  dont les groupes d'automorphismes sont respectivement  $Out(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $Out(\mathbb{Z}^2) = Gl_2(\mathbb{Z})$  et  $Out(BS(1, -1)) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . De plus, les groupes  $BS(1, n)$  avec  $|n| \neq 1$ , sont non élémentaires mais leurs groupes d'automorphismes extérieurs sont virtuellement  $\mathbb{Z}^{r-1}$  où  $r$  désigne le nombre de diviseurs premiers de  $n$ . Pour ce qui suit on pourra donc supposer que  $|q| \geq p > 1$ .

Sous certaines conditions de divisibilité entre  $p$  et  $q$ , on peut exhiber une présentation finie pour  $BS(p, q)$ . En effet, en 1978, Donald J. Collins a donné dans [Col78] une présentation finie de  $Aut(BS(p, q))$  lorsque  $p$  et  $q$  sont premiers entre eux puis en 2000 dans [GHMR00], Nick D. Gilbert, James Howie, Vasileios Metaftsis et Evagelos Raptis ont exhibé une présentation finie également pour  $Aut(BS(p, q))$  avec  $p$  et  $q$  ne sont pas multiples l'un de l'autre. Dans ce cas, Gilbert Levitt a démontré en 2005 dans [Lev05] que  $Out(BS(p, q))$  est virtuellement abélien.

Entre temps en 1983 dans [CL83], Donald J. Collins et Frank Levin (Matt Clay l'a également démontré plus tard en 2009 dans [Cla09]) ont démontré que  $Aut(BS(p, pn))$  (où  $|n| \neq 1$ ) n'est pas de type fini.

Par la suite nous nous intéresserons donc plus particulièrement au cas plus

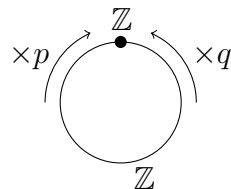
complexe où  $q$  est un multiple de  $p$ . Comme expliqué précédemment les autres cas sont compris et la complexité de cette situation réside, entre autre, dans le fait que le groupe des automorphismes n'est pas de type fini, il contient  $F_2$  et l'espace de déformation qui lui est associé n'est pas cocompact et est de dimension infinie.

### Espaces de déformation (JSJ)

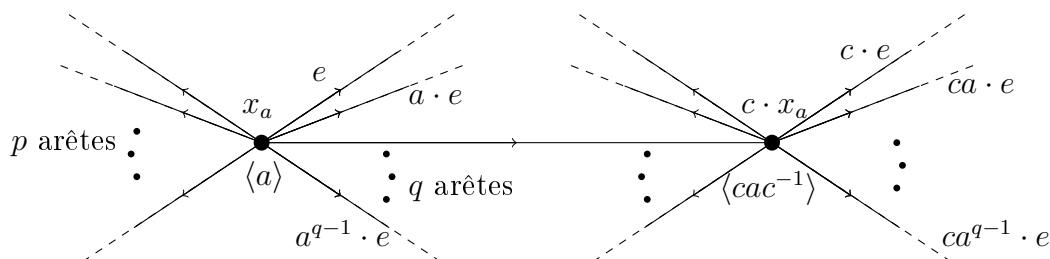
Les espaces de déformation ont été introduits par Max Forester en 2002 dans [For02]. Ils ont également été traités en détails dans [Cla05] ainsi que dans [GL07]. On se place dans le cadre d'un groupe  $G$  finiment engendré. Un  $G$ -arbre (métrique)  $T$  est un arbre simplicial (métrique) sur lequel  $G$  agit par automorphismes simpliciaux (qui sont des isométries dans le cas d'un  $G$ -arbre métrique) qui seront toujours supposés sans inversion d'arêtes. On supposera également que les actions sont minimales i.e. sans sous-arbre invariant.

L'espace de déformation associé à  $T$  est constitué de toutes les classes d'isométries  $G$ -équivariantes de tous les  $G$ -arbres métriques minimaux ayant les mêmes sous-groupes elliptiques. Un sous-groupe de  $G$  est dit elliptique dans  $T$  s'il fixe un point de  $T$ . Il existe différentes caractérisations pour deux arbres  $T$  et  $T'$  dans un même espace de déformation : il existe deux applications  $G$ -équivariantes  $T \rightarrow T'$  et  $T' \rightarrow T$  ou il existe une déformation élémentaire (voir Définition 1.11) reliant  $T$  et  $T'$ .

Pour en revenir à notre situation, un groupe de Baumslag-Solitar  $BS(p, q)$  est une extension HNN associé au graphe suivant



La théorie de Bass-Serre nous permet de faire le lien entre ce graphe ainsi que l'action de  $BS(p, q)$  sur l'arbre suivant, appelé arbre de définition,



Etant donné un arbre GBS (défini page 5) associé à un groupe GBS non élémentaire, ses sous-groupes elliptiques sont caractérisés algébriquement ([For03]) (les éléments elliptiques sont ceux dont le commensurateur est le groupe tout entier) et donc deux tels arbres GBS pour le même groupe GBS  $G$  se trouvent dans le même espace de déformation et l'espace de déformation est  $Out(G)$ -invariant.

Il est possible de munir tout espace de déformation de trois topologies : la topologie de Gromov-Hausdorff équivariante, la topologie des axes et la topologie faible. Ces topologies sont étudiées en détails par Vincent Guirardel et Gilbert Levitt dans [GL07].

On peut également introduire la notion d'espace de déformations JSJ (voir [GL10]). Pour ce faire, on considère  $\mathcal{A}$  une famille de sous-groupes de  $G$  stable par conjugaison et lorsque l'on prend un sous-groupe. Un  $\mathcal{A}$ -arbre  $T$  (on dit parfois que  $T$  est au-dessus de  $\mathcal{A}$ ) est un arbre dont les stabilisateurs d'arêtes sont contenus dans  $\mathcal{A}$ .

$\mathcal{A}_{ell}$  désigne l'ensemble des groupes de  $\mathcal{A}$  qui sont elliptiques dans tout  $\mathcal{A}$ -arbre.

**Définition.** Un espace de déformation  $\mathcal{D}_{JSJ}$  de  $\mathcal{A}_{ell}$ -arbres maximal pour la domination ( $T$  domine  $T'$  s'il existe une application équivariante de  $T$  vers  $T'$ ) est appelé l'espace de déformation JSJ de  $G$  au dessus de  $\mathcal{A}$ .

Afin de faire le lien entre cette notion et  $\mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$ , on peut remarquer que  $\mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$  est l'espace de déformation JSJ de  $BS(p, q)$  au dessus de  $\mathbb{Z}$ . De plus,  $\mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$  est invariant par automorphismes de  $BS(p, q)$  ([Lev05]).

En considérant l'action de  $BS(p, q)$  sur un arbre de  $\mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$ , on obtient un graphe quotient (voir Définition 1.3) qui peut être muni (voir [Bas93] ou [Ser77]) d'une structure de graphe de groupes (définie ci-après) marqué (un marquage est une identification de  $G$  avec le groupe fondamental, Définition 1.5, du graphe de groupes).

**Définition** (Définition 1.4). Un graphe de groupes  $(G, \Gamma)$  se compose :

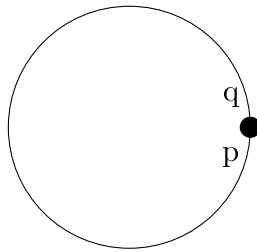
- d'un graphe connexe (voir début du Chapitre 1)  $\Gamma$ ,
- d'un groupe  $G_v$ , pour tout sommet  $v$  de  $\Gamma$ , appelé groupe de sommet,
- d'un groupe  $G_e$ , pour toute arête orientée  $e$  de  $\Gamma$ , appelé groupe d'arête, muni d'un morphisme injectif  $G_e \hookrightarrow G_{o(e)}$  donné par  $a \mapsto a^e$ .

On exige de plus que  $G_e = G_{\bar{e}}$  où  $\bar{e}$  désigne l'arête ayant l'orientation inverse de celle de  $e$  (voir Définition 1.1).

Dans notre cas, les groupes d'arêtes et de sommets étant tous isomorphes à  $\mathbb{Z}$  la donnée du morphisme injectif correspond à la donnée de la multiplication

par un entier non nul que l'on appellera étiquette de l'arête et que l'on indiquera sur le graphe quotient près de l'origine de l'orbite d'arête contenant  $e$ . De cette façon on obtient un graphe étiqueté par des entiers (Définition 1.28). Lors de la construction d'un graphe étiqueté, un choix de générateurs pour les groupes de sommets et d'arêtes est nécessaire et modifier ces générateurs modifie également le signe des étiquettes du graphe étiqueté. Par conséquent, les graphes étiquetés seront considérés à changements de signe acceptables près (pour plus de détails voir la sous-section dédiée dans le Chapitre 1).

Par conséquent, en considérant ce qui précède, on peut dire que  $\mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$  est l'espace de déformation du  $G$ -arbre dont le graphe étiqueté est le suivant



Un graphe étiqueté est dit réduit s'il n'admet pas de mouvement d'écrasement (voir Définition 1.10).

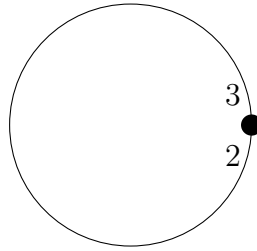
Dans la suite, nous considérerons l'espace de déformation réduit  $\mathcal{D}_{p,q} \subset \mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$ . C'est l'espace de déformation formé des  $BS(p, q)$ -arbres dont tous les stabilisateurs d'arêtes fixent une arête dans l'arbre de définition de  $\mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$ .

Maintenant que ces notions ont été introduites, on peut illustrer la difficulté du cas où  $q$  est un multiple de  $p$  avec l'exemple suivant.

**Exemple.**  $Aut(BS(2, 3))$  est engendré par des automorphismes intérieurs ainsi que l'involution envoyant  $a$  sur  $a^{-1}$  ([Col78]) tandis que  $Aut(BS(2, 4))$  n'est pas de type fini. Par conséquent  $BS(2, 3)$  a peu d'automorphismes tandis que  $BS(2, 4)$  en a un nombre très important.

Cette différence réside dans le fait 2 divise 4 mais pas 3.

En effet,  $\mathcal{D}_{2,3}$  contient un unique graphe étiqueté réduit qui est le suivant

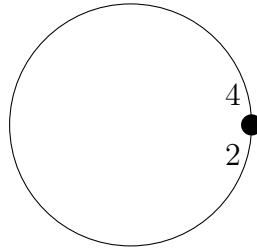


Par conséquent, il est préservé par tout automorphisme de  $BS(2, 3)$  et de cette remarque on peut déduire la structure de  $Out(BS(2, 3))$  ([Lev05]) qui est fini et engendré par l'involution envoyant  $a$  sur  $a^{-1}$ .

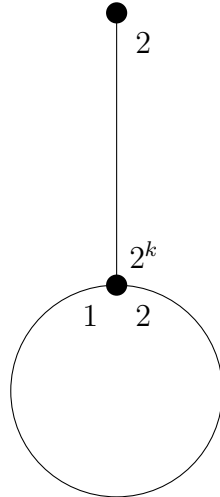
Tandis que dans le cas de  $BS(2, 4)$ , à partir de la présentation standard décrite ci-avant, on peut introduire, pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ , un nouveau générateur  $b = c^{-k}a^2c^k$  et ainsi  $BS(2, 4)$  admet une infinité de présentation

$$\langle a, b, c \mid cbc^{-1} = b^2, b^{2^k} = a^2 \rangle, k \in \mathbb{N}^*$$

et  $\mathcal{D}_{2,4}$  contient le graphe étiqueté réduit standard décrit ci-avant



ainsi qu'un une infinité d'autres graphes étiquetés réduits qui sont les suivants



Cet exemple nous permet également d'illustrer le fait que l'espace de déformation associé à  $Out(BS(2, 4))$  n'est pas cocompact comme évoqué auparavant.

## Outre-espace

L'outre-espace de Culler-Vogtmann constitue un sujet important en théorie géométrique des groupes ainsi qu'un exemple fondamental d'espace de déformation à l'origine de nombreux résultats concernant le groupe  $Out(F_n)$  des automorphismes extérieurs de  $F_n$  où  $F_n$  désigne le groupe libre de rang  $n \geq 2$ .

C'est dans le but d'étudier  $Out(F_n)$  que l'outre-espace a été introduit. La construction de l'outre-espace imite celle de l'espace de Teichmüller d'une surface  $S$  et l'action de  $Out(F_n)$  sur l'outre-espace imite celle du groupe modulaire  $Mod(S)$  sur l'espace de Teichmüller d'une surface  $S$ .

L'outre-espace (voir [Vog08] et surtout [CV86] pour une étude détaillée) est donc l'espace des classes d'isométries  $F_n$ -équivariantes des  $F_n$ -arbres métriques minimaux libres de covolume 1. En considérant l'action de  $F_n$  sur l'un des éléments de l'outre-espace et en la précomposant par un automorphisme de  $F_n$ , on obtient une action de  $Out(F_n)$  sur l'outre-espace.

L'outre-espace (comme  $\mathcal{D}_{p,q}$ ) est un espace de déformation JSJ. C'est donc  $\mathcal{D}_{p,q}$  qui jouera le rôle de l'outre-espace par la suite.

## Résultats obtenus

Comme indiqué précédemment, on se place dans le cadre où  $q$  est un multiple de  $p$  et on considère donc  $BS(p, pn)$  où  $|n| > 1$ .

Le Théorème principal de cette thèse est le théorème suivant

**Théorème** (Théorème 5.15). *Tout automorphisme  $\Phi \in Out(BS(p, pn))$  est soit à croissance exponentielle soit à croissance polynomiale.*

Démontrer ce Théorème nécessite d'établir plusieurs résultats intermédiaires. Afin d'établir le premier résultat de cette thèse, il faut introduire le concept d'automorphisme réductible.

**Définition** (Définition 2.10). Soit  $\mathcal{D}$  un espace de déformation  $Out(G)$ -invariant.  $\Phi \in Out(G)$  est réductible dans  $\mathcal{D}$  s'il existe un  $G$ -arbre  $T \in \mathcal{D}$  et une application  $G$ -équivariante  $f : T \mapsto T \cdot \Phi$  qui laisse invariante une sous-forêt essentielle (voir Définition 2.8), propre et  $G$ -invariante de  $T$ .

Si  $\Phi$  n'est pas réductible dans  $\mathcal{D}$  alors  $\Phi$  est irréductible dans  $\mathcal{D}$ .

La notion d'automorphisme réductible possède également une définition algébrique (Lemmes 2.11 et 2.12) analogue à la définition d'automorphisme réductible

dans le cas de l'outre-espace : si un arbre de l'outre-espace a une sous-forêt invariante essentielle alors on obtient un système de facteurs libres invariant et c'est ce qu'on appelle être réductible pour un automorphisme du groupe libre.

Dans [BH92], Mladen Bestvina et Michael Handel, inspirés par le travail de William P. Thurston ([Thu88]) sur les homéomorphismes de surface, ont introduit un nouvel outil pour les automorphismes du groupe libre. Ce nouvel outil est la notion d'application train track (Définition 5.4) qui va leur permettre de démontrer de nombreux résultats concernant le groupe des automorphismes du groupe libre. Ils vont notamment introduire les automorphismes irréductibles du groupe libre et démontrer que tout automorphisme irréductible du groupe libre est représenté par une application train track. Nous allons adopter une démarche analogue à celle-ci en remplaçant l'outre-espace par un espace de déformation noté  $\mathcal{D}_H$  et construit ci-après à partir de  $\mathcal{D}_{p,pn}$ . En effet, il n'est pas possible de raisonner de façon analogue avec notre espace de déformation  $\mathcal{D}_{p,pn}$  car d'après le résultat suivant, celui-ci ne contient aucun automorphisme irréductible.

**Théorème** (Théorème 2.14). *Tout automorphisme  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  est réductible dans  $\mathcal{D}_{p,pn}$ .*

Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$ , pour démontrer ce résultat l'idée est d'exhiber un sous-groupe

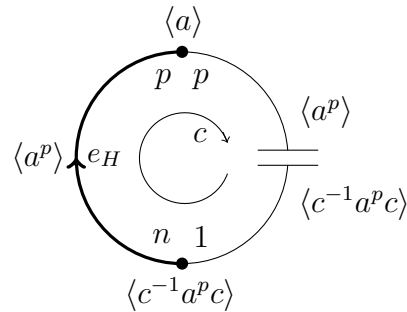
$$H = \langle a, c^{-1}a^p c \rangle \subset BS(p, pn)$$

tel que

$$\Phi([H]) = [H]$$

où  $[H]$  désigne la classe de conjugaison de  $H$ .

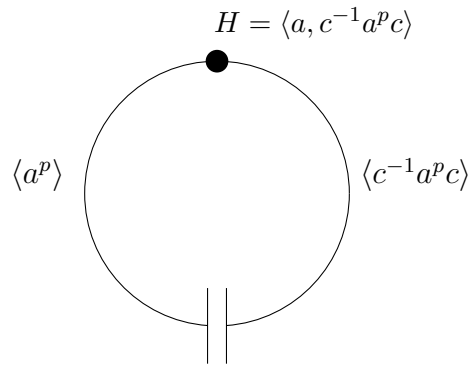
On considère maintenant un autre arbre de  $\mathcal{D}_{p,pn}$  dont le graphe de groupes quotient marqué est le suivant



où la double barre correspond au choix d'un relevé du domaine fondamental. La sous-forêt  $Y_{e_H}$  associée à  $e_H$  correspond à l'orbite de la forêt en gras ci-dessus.

Elle est  $BS(p, pn)$ -invariante, essentielle, propre et invariante par une application que l'on construira dans la démonstration. Par conséquent  $\Phi$  est réductible dans  $\mathcal{D}_{p, pn}$ .

Ce Théorème va nous amener à construire un nouvel espace de déformation que l'on notera  $\mathcal{D}_H^{\mathbb{Z}}$  et qui sera l'espace de déformation du  $BS(p, pn)$ -arbre obtenu en écrasant (voir Définition 1.10) la sous-forêt  $Y_{e_H}$  dont le graphe de groupes quotient marqué est le suivant



Cet espace de déformation est invariant par tout automorphisme  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  puisque d'après ce qui précède,  $\Phi([H]) = [H]$ .

Par la suite, on considèrera l'espace de déformation réduit (Définition 2.3)  $\mathcal{D}_H \subset \mathcal{D}_H^{\mathbb{Z}}$ . C'est l'espace de déformation réduit formé des  $BS(p, pn)$ -arbres dont tous les stabilisateurs d'arêtes fixent une arête dans tout arbre de  $\mathcal{D}_H^{\mathbb{Z}}$ .

Dans [Mei15], Sebastien Meinert a établi plusieurs résultats concernant l'étude des espaces de déformation de  $G$ -arbres métriques d'un point de vue géométrique. Ses résultats concernent la géométrie des espaces de déformations de  $G$ -arbres métriques et sont la généralisation de résultats établis dans le cas particulier de l'Outre-espace par Stefano Francaviglia et Armando Martino dans [FM11], article dans lequel ils ont construit un analogue pour l'Outre-espace de la métrique de Thurston asymétrique sur l'espace de Teichmüller d'une surface (voir [Thu98]) puis au cas de l'Outre-espace d'un produit libre dans [FM15].

La métrique de Lipschitz asymétrique est définie sur  $\mathcal{D}_{H,1}$  qui est l'ensemble des arbres de  $\mathcal{D}_H$  qui sont de covolume 1 (où le covolume désigne la somme des longueurs d'arêtes du graphe quotient d'un arbre  $T$ ).



Pour  $T, T' \in \mathcal{D}_1$ , on définit la métrique de Lipschitz comme suit :

$$d_{Lip}(T, T') = \log(\inf_f Lip(f))$$

où  $f$  parcourt l'ensemble des applications  $G$ -équivariantes lipschitziennes de  $T$  vers  $T'$  et  $Lip(f)$  désigne la constante de Lipschitz de  $f$ .

En général,  $d_{Lip}(T, T') \neq d_{Lip}(T', T)$  et  $d_{Lip}(T, T') = 0$  n'impliquent pas que  $T$  et  $T'$  sont isométriques de manière  $G$ -équivariante (voir Exemple 4.4 de [Mei15] ainsi que différents exemples dans [AKB12] dans le cas de l'outre-espace).

Par la suite, on considère la fonction de déplacement définie comme suit

$$\begin{aligned} \delta_\Phi : \mathcal{D}_{H,1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ T &\longmapsto d_{Lip}(T, T \cdot \Phi) \end{aligned}$$

A la manière de Mladen Bestvina dans [Bes11] et de Sebastian Meinert dans [Mei15], on va distinguer trois catégories d'automorphismes de  $G$ .  $\Phi$  est dit

- elliptique si  $\inf \delta_\Phi$  vaut 0 et est réalisé,
- hyperbolique si  $\inf \delta_\Phi$  est non nul et est réalisé et,
- parabolique si  $\inf \delta_\Phi$  n'est pas réalisé.

Afin de poursuivre le parallèle entre notre situation et l'outre-espace, on peut citer deux résultats : le premier, issu de [Bes11], qui nous donne le fait que tout automorphisme de  $Out(F_n)$  parabolique est réductible et le second qui est la généralisation du premier à un espace de déformation sous certaines conditions, le Corollaire 5.10 de [Mei15] qui nous permet d'affirmer que tout automorphisme parabolique est réductible dans le cas où  $Out(G)$  agit sur  $\mathcal{D}_1$  avec un nombre fini de simplexes, ce qui n'est pas le cas dans notre situation. On peut d'ailleurs remarquer que, même s'il s'appliquait sur  $\mathcal{D}_{p,pn,1}$ , cet énoncé serait vide puisque tout automorphisme de  $BS(p, pn)$  est réductible comme expliqué précédemment.

On se place maintenant dans notre situation à savoir  $\mathcal{D}_H$  sur lequel l'action de  $Out(BS(p, pn))$  est non cocompacte et dans lequel le résultat de Sebastian Meinert ne peut pas s'appliquer directement et qu'on va donc étendre. Pour ce faire, nous distinguerons deux parties : une première traitant le cas des suites minimisantes (Definition 3.4) de  $G$ -arbres ayant un nombre borné d'orbites d'arêtes et la seconde traitant le cas plus complexe des suites minimisantes ayant un nombre non borné d'orbites d'arêtes.

Les résultats obtenus dans ces deux situations nous permettront de démontrer le résultat suivant.

**Théorème** (Théorème 3.3). *Tout automorphisme  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  parabolique dans  $\mathcal{D}_H$  est réductible dans  $\mathcal{D}_H$ .*

Par la suite, nous nous intéresserons aux automorphismes de  $BS(p, pn)$  à travers la croissance de ceux-ci. Pour ce faire, il sera nécessaire d'introduire la notion de longueur d'un élément  $g \in G$  et de sa classe de conjugaison.

$$|g|_S = \min\{n \mid g \text{ s'écrit comme produit de } n \text{ éléments de } S\}$$

et

$$\|g\|_S = \min_{h \in G} |hgh^{-1}|_S.$$

**Définition** (Définition 4.3). Soit  $\Phi \in \text{Out}(G)$ ,  $S$  un système générateur de  $G$  et  $S^\pm = S \cup S^{-1}$ .

On dit que  $\Phi$  est à *croissance polynomiale de degré  $d$*  si

$$\forall g \in G, \exists C_g \geq 0, \forall k \geq 1, \|\Phi^k(g)\|_S \leq C_g k^d.$$

**Définition** (Définition 4.14). Soit  $\Phi \in \text{Out}(G)$ ,  $S$  un système générateur de  $G$  et  $S^\pm = S \cup S^{-1}$ .

On dit que  $\Phi$  est à *croissance exponentielle* s'il existe  $\lambda > 1$  tel que

$$\exists g \in G, \exists C_g \geq 0, \|\Phi^k(g)\|_S \geq C_g \lambda^k.$$

Si on se place dans le cadre d'un groupe de Baumslag-Solitar quelconque  $BS(p, q)$  avec  $p$  et  $q$  non multiples l'un de l'autre alors  $\text{Out}(BS(p, q))$  est fini (d'après [GHMR00]) et en particulier, tout automorphisme est à croissance polynomiale.

On s'intéressera dans un premier temps aux automorphismes réductibles de  $BS(p, pn)$  et nous démontrerons plusieurs résultats (notamment les Lemmes 2.17 et 4.18) permettant de faire le lien entre notre espace de déformations initial  $\mathcal{D}_{p, pn}$  et l'espace de déformation  $\mathcal{D}_H$  construit précédemment et ce afin de démontrer le Théorème suivant.

**Théorème** (Théorème 4.16). *Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  réductible dans  $\mathcal{D}_H$  alors  $\Phi$  est à croissance polynomiale.*

Nous venons donc de traiter le cas de la croissance des automorphismes paraboliques. Nous allons maintenant nous intéresser aux cas des automorphismes irréductibles et donc non paraboliques par le résultat établi précédemment.

Dans le cas de automorphismes non paraboliques alors l'infimum de la fonction

de déplacement de  $\Phi \in \text{Out}(G)$  est atteint. Dans ce cas, nous citerons un résultat s'appliquant au cas général d'un espace de déformation de  $G$ -arbres permettant d'expliquer quelles sont les situations dans lesquelles  $d_{\text{Lip}}(T, T') = 0$  implique que  $T$  et  $T'$  sont isométriques de manière  $G$ -équivariante puis un résultat plus spécifique à notre situation dans le cas où cet infimum est nul alors on montrera qu'il est possible d'exhiber un point fixe.

Pour poursuivre nous avons besoin de nous référer à la définition d'une application optimale (voir Définition 1.20) et d'introduire la définition suivante

**Définition** (Définition 5.4). Soit  $T \in \mathcal{D}$  et  $\Phi \in \text{Out}(G)$ .

Une application optimale  $f : T \longrightarrow T \cdot \Phi$  est une application train track si elle vérifie :

- (i) le facteur d'étirement de toute arête de  $T$  est  $\text{Lip}(f)$  et,
- (ii)  $\forall k \in \mathbb{N}, \forall e \in E(T), f|_e^k$  est injective.

On dit que  $\Phi \in \text{Out}(G)$  est représenté par une application train track optimale s'il existe un  $G$ -arbre  $T \in \mathcal{D}$  et une application optimale  $f : T \longrightarrow T \cdot \Phi$  qui est une application train track.

Dans son article [Mei15], Sebastien Meinert généralise à certains espaces de déformations de  $G$ -arbres un résultat de Mladen Bestvina et Michael Handel démontré dans [BH92] et affirmant que tout automorphisme du groupe libre irréductible est représenté par une application train track sous l'hypothèse que  $\text{Out}(G)$  agisse avec un nombre fini de simplexes. De la même façon, nous démontrerons le Théorème suivant.

**Théorème** (Corollaire 5.12). *Tout automorphisme  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  irréductible dans  $\mathcal{D}_H$  est représenté par une application train track  $T \longrightarrow T \cdot \Phi$  envoyant sommet sur sommet où  $T \in \mathcal{D}_H$  est un  $BS(p, pn)$ -arbre dont le graphe quotient est un cercle.*

A l'aide des résultats obtenus précédemment décrits, nous pourrions obtenir plusieurs résultats concernant la croissance des automorphismes. En particulier, nous avons les résultats suivants.

**Théorème** (Théorème 5.13). *Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  et  $n = n_0^{r_0} \cdots n_q^{r_q}$  désigne la décomposition en nombres premiers de  $n$ .*

*Soit  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré 1 soit il existe  $\lambda$  entier algébrique et  $T \in \mathcal{D}_H$  dont le graphe étiqueté est un cercle tel que*

$$\begin{aligned} \forall g \in BS(p, pn), l_T(\Phi^k(g)) &\leq \lambda^k l_T(g) \\ \exists g \in BS(p, pn), l_T(\Phi^k(g)) &= \lambda^k l_T(g). \end{aligned}$$

De plus, le degré de l'entier algébrique  $\lambda \leq m$  où  $m$  désigne le nombre d'orbites d'arêtes de  $T$  avec  $m \leq r_0 + \dots + r_q$ .

**Théorème** (Théorème 5.14). *Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$ . Si  $\Phi$  n'est pas à croissance polynomiale alors pour tout  $T \in \mathcal{D}_H$ ,*

$$\begin{aligned} \forall g \in BS(p, pn), \exists C_g \geq 0, l_T(\Phi^k(g)) &\leq C_g \lambda^k \\ \exists g \in BS(p, pn), \exists C_g \geq 0, C'_g \lambda^k &\leq l_T(\Phi^k(g)) \end{aligned}$$

où  $l_T(g) = \inf_{x \in T} d_T(x, gx)$ .

Nous démontrerons également un Théorème permettant de décrire la croissance de tout automorphisme.

La différence entre ce Théorème et le suivant réside dans le fait que dans le Théorème ci-avant, on mesure les longueurs dans  $T \in \mathcal{D}_H$  (au lieu de les mesurer dans le graphe de Cayley), et ainsi on gagne une estimation précise de la croissance des éléments avec un unique  $\lambda$  au lieu de  $\lambda$  et  $\lambda'$  dans le Théorème ci-après.

**Théorème** (Théorème 5.15). *Soit  $S$  système de générateurs de  $BS(p, pn)$  et  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  n'étant pas à croissance polynomiale alors il existe  $\lambda, \lambda' > 0$  tels que*

$$\begin{aligned} \forall g \in BS(p, pn), \|\Phi^k(g)\|_S &\leq \lambda^k \\ \exists g \in BS(p, pn), \exists C_g \geq 0, C_g \lambda^k &\leq \|\Phi^k(g)\|_S \end{aligned}$$

En particulier,  $\Phi$  est à croissance exponentielle.

## Structure de cette thèse

Cette thèse comporte cinq chapitres. Le premier chapitre rassemble les généralités et préliminaires techniques nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Le deuxième chapitre, quant à lui, traitera le cas des automorphismes de  $BS(p, pn)$  qui sont tous réductibles. C'est également dans ce deuxième chapitre que nous viendrons introduire l'espace de déformation  $\mathcal{D}_H$  précédemment évoqué. Le troisième chapitre traitera du cas des automorphismes paraboliques dont la croissance sera étudiée dans le quatrième chapitre. Enfin le cinquième et dernier chapitre traitera le cas des automorphismes irréductibles et donc non paraboliques.



# Chapitre 1

## Généralités et premiers résultats

### 1.1 Premières définitions

#### 1.1.1 Arbres et théorie de Bass-Serre

Nous allons commencer par introduire les faits basiques concernant les arbres ainsi que certains éléments de la théorie de Bass-Serre.

Pour plus de détails concernant la théorie de Bass-Serre, on peut se référer à [Ser77] ou [Bas93].

**Définition 1.1** (graphe). Un *graphe*  $\Gamma$  est donné par  $(V(\Gamma), E(\Gamma), o, t, \bar{\cdot})$  où :

- $V(\Gamma)$  est l'ensemble des sommets.
- $E(\Gamma)$  est l'ensemble des arêtes (orientées).
- $o, t: E(\Gamma) \rightarrow V(\Gamma)$  sont deux applications telles que  $o$  (resp.  $t$ ) associe à une arête son sommet initial (resp. son sommet terminal).
- $\bar{\cdot}: E(\Gamma) \rightarrow E(\Gamma)$  est une involution sans point fixe qui inverse l'orientation des arêtes ( $t(\bar{e}) = o(e)$ ).

Une *boucle* est une arête  $e$  de  $\Gamma$  telle que  $o(e) = t(e)$ . Une *arête géométrique* est une paire de la forme  $\{e, \bar{e}\}$  où  $e \in E(\Gamma)$ . Un *chemin d'arêtes*  $\gamma = (e_0, \dots, e_n)$  est une suite d'arêtes de  $\Gamma$  telle que  $t(e_i) = o(e_{i+1})$  pour tout  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ . Un *circuit* est un chemin d'arêtes tel que  $t(e_n) = o(e_0)$ .

Un graphe est dit *connexe* si deux sommets quelconques sont les extrémités d'au moins un chemin d'arêtes. Sinon les sous-graphes maximaux (pour l'inclusion) connexes sont appelées les *composantes connexes* du graphe. On dit que  $\gamma$  contient un *aller retour* s'il existe  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  tel que  $e_{i+1} = \bar{e}_i$ . Un chemin d'arêtes est dit *immergé* s'il ne contient aucun aller retour. Un *arbre* est un graphe connexe, non vide, sans circuit immergé.

Un *sous-graphe*  $\Gamma' \subset \Gamma = (V(\Gamma), E(\Gamma), o, t, \bar{\phantom{e}})$  est donnée par  $(V(\Gamma'), E(\Gamma'), o, t, \bar{\phantom{e}})$  où  $V(\Gamma') \subset V(\Gamma)$  et  $E(\Gamma') \subset E(\Gamma)$  est l'ensemble des arêtes de  $\Gamma$  dont les sommets sont dans  $V(\Gamma')$ . Une *forêt* est un graphe non vide sans circuit. Les composantes connexes d'une sous-forêt sont des arbres. Deux points distincts  $a$  et  $b$  d'un arbre  $T$  borne un unique segment  $[a, b]$ . Un sous-arbre fini de  $T$  est l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points de  $T$ .

**Définition 1.2** ( $G$ -arbre). Soit  $G$  un groupe.

On dit que  $G$  agit sur  $T$  *sans inversion* si  $g \cdot e \neq \bar{e}$  pour  $g \in G$ ,  $e \in E(T)$ .

Un  $G$ -*arbre* est un arbre simplicial  $T$  muni d'une action de  $G$  par automorphismes simpliciaux, sans inversion.

Soit  $T = (V(T), E(T), o, t, \bar{\phantom{e}})$  et  $T' = (V(T'), E(T'), o, t, \bar{\phantom{e}})$  deux arbres. Une application  $f : T \rightarrow T'$  est la donnée d'une application  $f_V : V(T) \rightarrow V(T')$  et d'une application  $f_E$  qui à chaque arête  $e \in E(T)$  associe un chemin d'arêtes joignant  $f_V(o(e))$  à  $f_V(t(e))$  et telle que  $f_E(\bar{e}) = \overline{f_E(e)}$ .

Les applications entre deux  $G$ -arbres seront toujours  $G$ -*équivariantes*.

Une application  $f : T \rightarrow T'$  entre deux arbres est un *morphisme* si et seulement si on peut subdiviser  $T$  de sorte que  $f$  envoie chaque arête de  $T$  sur une arête de  $T'$ ; de manière équivalente, aucune arête n'est écrasée sur un point. De plus, tout stabilisateur d'arêtes de  $T$  est contenu dans le stabilisateur d'une arête de  $T'$ .

Une *application d'écrasement*  $f : T \rightarrow T'$  est une application obtenue en écrasant certaines arêtes sur des points suivi d'un isomorphisme (par équivariance, l'ensemble des arêtes écrasées est  $G$ -invariant). De manière équivalente,  $f$  préserve l'alignement :  $c \in [a, b]$  implique  $f(c) \in [f(a), f(b)]$ . Une autre caractérisation est que l'image réciproque d'un sous-arbre de  $T'$  est un sous-arbre de  $T$  ce qui équivaut, en termes de graphes de groupes, à dire que le graphe quotient de  $T$  est obtenu en écrasant certains arêtes du graphe de  $T$ .

Un *automorphisme simplicial* est une application  $f : T \rightarrow T$  qui est une bijection de l'ensemble des arêtes et des sommets et qui vérifie  $f(o(e)) = o(f(e))$  et  $f(\bar{e}) = \overline{f(e)}$  pour tout  $e \in E(T)$ .

Deux  $G$ -arbres sont équivalents s'il existe un isomorphisme simplicial  $G$ -équivariant entre eux.

Pour  $\Gamma$  un sous-graphe d'un  $G$ -arbre  $T$ , on notera  $Y_\Gamma$  la forêt suivante

$$Y_\Gamma = \bigcup_{\substack{e \in E(\Gamma) \\ g \in G}} g \cdot e$$

et  $T_\Gamma$  la composante connexe de  $Y_\Gamma$  contenant  $\Gamma$ .

**Définition 1.3** (graphe quotient). Soit  $T$  un  $G$ -arbre.

On note  $T/G$  l'ensemble des orbites de l'action de  $G$  sur  $T$ .

Cet espace est naturellement muni d'une structure de graphe de la manière suivante :  $V(T/G) = V(T)/G$ ,  $E(T/G) = E(T)/G$ ,  $o(\langle e \rangle) = \langle o(e) \rangle$ ,  $t(\langle e \rangle) = \langle t(e) \rangle$ ,  $\langle \bar{e} \rangle = \langle \bar{e} \rangle$  où  $\langle e \rangle$  (resp.  $\langle v \rangle$ ) désigne la classe de  $e \in E(T)$  (resp.  $v \in V(T)$ ).

On a une projection (morphisme de graphes)

$$\begin{aligned} \pi : T &\rightarrow T/G \\ e &\mapsto \langle e \rangle \\ v &\mapsto \langle v \rangle \end{aligned}$$

Un  $G$ -arbre est dit *cocompact* si le graphe quotient  $T/G$  est fini.

**Définition 1.4.** Un *graphe de groupes*  $(G, \Gamma)$  se compose :

- d'un graphe connexe  $\Gamma$ ,
- d'un groupe  $G_v$ , pour tout  $v \in V(\Gamma)$ , appelé groupe de sommet,
- d'un groupe  $G_e$ , pour tout  $e \in E(\Gamma)$ , appelé groupe d'arête, muni d'un morphisme injectif  $i_e : G_e \hookrightarrow G_{o(e)}$  donné par  $a \mapsto a^e$ .

On exige de plus que  $G_e = G_{\bar{e}}$ .

Il existe plusieurs manières de définir le *groupe fondamental* d'un graphe de groupes, en voici une, ci-après.

**Définition 1.5.** Si  $\Gamma$  est un graphe non vide. L'ensemble des sous-graphes de  $\Gamma$  qui sont des arbres, ordonné par inclusion, est inductif et possède donc un élément maximal.

Un tel élément noté  $\Gamma_{max}$  s'appelle *arbre maximal* de  $\Gamma$ .

Le *groupe fondamental*  $Q$  du graphe de groupes  $(G, \Gamma)$  peut se définir comme suit par générateurs et relations :

- $Q$  est engendré par les groupes de sommet et un générateur par arête soumis aux relations suivantes :
- $\bar{e} = e^{-1}$  pour toute arête  $e \in E(\Gamma)$ .
- $ex^e e^{-1} = x^{\bar{e}}$  pour  $e \in E(\Gamma)$  et  $x \in G_e$ .
- Toute arête de  $\Gamma_{max}$  est égale au neutre.

On peut démontrer que cette définition ne dépend pas, à isomorphisme près, du choix de l'arbre maximal  $\Gamma_{max}$ .

A chaque graphe de groupes  $(G, \Gamma)$  est associé son arbre de Bass-Serre (ou revêtement universel)  $\tilde{X} = \tilde{X}(G, \Gamma, \Gamma_{max})$ , c'est un arbre sur lequel  $\Pi = \Pi_1(G, \Gamma, \Gamma_{max})$  agit tel que  $\tilde{X}/\pi = (G, \Gamma)$ .

Soit  $T$  un  $G$ -arbre alors le graphe quotient  $T/G$ , décrit précédemment, est muni d'une structure de graphe de groupes marqué (un marquage est une identification



de  $G$  avec le groupe fondamental du graphe de groupes i.e.  $G \cong \pi_1(G, T/G = \Gamma, \Gamma_{max})$ .

En effet,  $G$  agit sur  $T$  sans inversion et on peut prendre  $\Gamma$  le graphe quotient de  $T$ .

Pour  $v \in V(\Gamma)$  (resp.  $e \in E(\Gamma)$ ), on note  $G_v$  (resp.  $G_e$ ) le stabilisateur d'un représentant de la préimage de  $v$  (resp.  $e$ ) par la projection  $T \rightarrow \Gamma$ .

On remarque que, pour  $g \in G$ ,  $\tilde{v} \in V(T)$  et  $\tilde{e} \in E(T)$ ,  $G_{g \cdot \tilde{v}} = gG_{\tilde{v}}d^{-1}$  et  $G_{g \cdot \tilde{e}} = gG_{\tilde{e}}g^{-1}$ .

De plus, comme  $G$  agit sans inversion, on a

$$G_e = G_{o(e)} \cap G_{t(e)} = G_{\bar{e}}$$

et  $i_e$  est donné par l'inclusion  $G_{o(e)} \subset G_e$ .

Un  $G$ -arbre est dit *minimal* s'il ne contient aucun sous-arbre propre  $G$ -invariant et une application  $G$ -équivariante entre deux  $G$ -arbres minimaux est toujours surjective.

Par la suite, sauf mention contraire, les  $G$ -arbres considérés seront tous minimaux.

Un  $G$ -arbre peut être vu comme un objet simplicial ou comme un espace métrique avec une action de  $G$  par isométries. Pour ce faire, il suffit d'attribuer à chaque orbite d'arête (on a un nombre fini d'orbites d'arêtes puisque l'action est supposée minimale) une longueur positive. Modifier les longueurs attribuées à chaque orbite d'arêtes donne un  $G$ -arbre métrique différent mais ayant le même arbre simplicial sous jacent. Il sera parfois utile de distinguer le  $G$ -arbre métrique et son arbre simplicial sous jacent.

Pour  $T$  et  $T'$  deux  $G$ -arbres métriques, une application  $f : T \rightarrow T'$  est appelé un *morphisme* si chaque segment de  $T$  peut être écrit comme une union finie de sous-segments chacun d'entre eux étant envoyé isométriquement dans  $T'$  par  $f$ . Un morphisme injectif est une isométrie sur son image.

Un *pliage* est l'application  $p : T \rightarrow T'$  où  $T'$  est le quotient de  $T$  par la plus petite relation d'équivalence  $G$ -équivariante identifiant 2 arêtes adjacentes  $e$  et  $e'$  avec  $e \notin G \cdot e'$  (ainsi l'action de  $G$  sur  $T'$  est encore sans inversion). Pour plus de détails concernant les pliages on peut consulter [BF91] et [Sta83].

Une application entre deux  $G$ -arbres métriques est *linéaire* sur les arêtes si elle est constante ou si c'est une immersion avec pente constante.

On considère les  $G$ -arbres métriques à isométries équivariantes près.

**Définition 1.6.** Soit  $(T, d)$  un  $G$ -arbre métrique et  $g \in G$ . La longueur de translation de  $g$  dans  $T$ , notée  $l_T(g)$ , est

$$l_T(g) = \inf_{x \in T} d_T(x, g \cdot x).$$

On peut également définir l'ensemble caractéristique de  $g$  dans  $T$ , notée  $C_T(g)$ .

$$\emptyset \neq C_T(g) = \{x \in T \mid d_T(x, g \cdot x) = l_T(g)\}.$$

$g$  est *elliptique* si et seulement si  $l_T(g) = 0$  et l'ensemble caractéristique  $C_T(g)$  est l'ensemble des points fixes de  $g$ . Sinon  $g$  est dit *hyperbolique* si et seulement si  $l_T(g) > 0$  et l'ensemble caractéristique  $C_T(g)$  est alors isométrique à  $\mathbb{R}$ . C'est l'unique ligne  $g$ -invariante dans  $T$  que nous appellerons l'*axe hyperbolique* et  $g$  agit sur cet axe  $C_T(g)$  par translations de longueur  $l_T(g)$ .

Pour plus de détails sur les longueurs de translation, on pourra se référer à [CM87] ou [Pau89].

D'après la Proposition 3.1 de [CM87], tout  $G$ -arbre n'ayant pas de point fixe global contient un sous-arbre minimal  $G$ -invariant. Ce sous-arbre est la réunion de tous les axes hyperboliques.

**Définition 1.7.** Un  $G$ -arbre minimal non trivial est dit *irréductible* s'il existe deux éléments hyperboliques dont les axes sont disjoints. Dans ce cas là,  $G$  contient un groupe libre de rang 2 agissant librement sur  $T$ .

Par la suite, sauf mention contraire, les  $G$ -arbres considérés seront irréductibles. La proposition 7.9 de [Bas93] nous permet d'affirmer que tout  $G$ -arbre minimal est cocompact ce qui nous permet d'introduire le *covolume* d'un  $G$ -arbre minimal.

**Définition 1.8.** Le *covolume* d'un  $G$ -arbre métrique minimal, noté  $\text{covol}(T)$ , est le volume de l'arbre quotient fini i.e. la somme de toutes les longueurs des orbites d'arêtes.

### 1.1.2 Mouvements d'écrasement, d'éclatement et espace de déformation

**Définition 1.9.** Deux  $G$ -arbres  $T$  et  $T'$  sont dans le même *espace de déformation* lorsqu'ils ont les mêmes sous-groupes elliptiques.

On va décrire deux mouvements que l'on peut effectuer sur  $T$  sans changer les sous-groupes elliptiques et donc sans changer d'espace de déformation, appelés mouvements d'éclatement et d'écrasement.

**Définition 1.10.** Soit  $T$  un  $G$ -arbre.

Une arête  $e$  est dite *écrasable* si  $G_e = G_{o(e)}$  et si ses extrémités ne sont pas dans la même orbite sous l'action de  $G$ .

Un *écrasement élémentaire* s'effectue en écrasant  $\{e, \bar{e}\}$  ainsi que tous ses translatés  $g \cdot e$ ,  $g \in G$ . Le  $G$ -arbre résultat de cette opération est dit obtenu par un mouvement d'écrasement.

L'inverse de ce mouvement est appelé *mouvement d'éclatement*.

Un  $G$ -arbre est dit *réduit* s'il n'admet aucun mouvement d'écrasement ou s'il n'a aucune arête écrasable.

Les mouvements d'éclatement et d'écrasement transforment un arbre en un autre arbre dans le même espace de déformation.

**Définition 1.11.** Une *déformation élémentaire* est une suite finie de mouvements d'écrasement et d'éclatement.

Le Théorème suivant nous permet de décrire un espace de déformation à l'aide des déformations élémentaires.

**Théorème 1.12** ([For02]). *Soit  $G$  un groupe et  $T$  et  $T'$  deux  $G$ -arbres cocompacts.*

*$T$  et  $T'$  ont les mêmes sous-groupes elliptiques si et seulement si ils sont reliés par une déformation élémentaire.*

Par conséquent, pour  $T$  un  $G$ -arbre, l'*espace de déformation* de  $T$  est constitué de tous les  $G$ -arbres reliés à  $T$  par une déformation élémentaire. Cet espace est noté  $\mathcal{D}$ .

De plus, si  $\mathcal{D}$  contient un  $G$ -arbre irréductible alors tous les arbres de  $\mathcal{D}$  sont irréductibles et dans ce cas, on dit que  $\mathcal{D}$  est irréductible.

### 1.1.3 L'espace de déformation est un espace topologique

$\mathcal{D}$  est généralement vu comme un ensemble mais on peut également le voir comme un espace topologique. Pour ce faire, on peut munir  $\mathcal{D}$  de trois topologies différentes ([GL07]).

On considère  $\mathcal{T}$  l'ensemble des  $G$ -arbres métriques minimaux non triviaux à isométries équivariantes près.

La *topologie de Gromov-Hausdorff équivariante* sur  $\mathcal{T}$  est définie comme suit. Un système fondamental de voisinages pour  $T \in \mathcal{T}$  est donné par les ensembles  $V_T(X, A, \epsilon)$  avec  $X \subset T$ ,  $A \subset G$  des ensembles finis et  $\epsilon > 0$ . Par définition,  $T'$  est

dans  $V_T(X, A, \epsilon)$  si et seulement si il existe une application  $x \mapsto \tilde{x}$  de  $X$  vers  $T'$  telle que

$$|d(x, g \cdot y) - d(\tilde{x}, g \cdot \tilde{y})| < \epsilon$$

pour tous  $x, y \in X$  et  $g \in A$ .

La *topologie des axes* est la topologie la plus grossière rendant chaque fonction longueur de translation  $T \rightarrow l_T(g)$  continue (elle est plus grossière que la topologie de Gromov-Hausdorff équivariante car chaque fonction longueur de translation est continue dans la topologie de Gromov-Hausdorff).

La dernière topologie possible est la *topologie faible* Cette topologie décrit  $\mathcal{T}$  comme une union de cônes ouverts.

L'ensemble des  $G$ -arbres métriques obtenus en faisant varier la longueur d'un  $G$ -arbre  $T$  sera appelé un cône ouvert, noté  $\mathcal{C}(T)$ , il est de dimension  $p$  ou  $p$  désigne le nombre d'orbites d'arêtes. Si on autorise le fait que certaines longueurs d'arêtes soit nulles alors on obtient le cône fermé  $\mathcal{C}(\bar{T})$  constitué des  $G$ -arbres métriques obtenus de  $T$  en écrasant des arêtes. C'est l'union d'un nombre fini de cônes ouverts.

La topologie faible sur  $\mathcal{T}$  est définie en déclarant un ensemble fermé quand son intersection avec tout cône fermé est fermée.

La topologie faible et la topologie de Gromov-Hausdorff équivariante coïncident sur toute union finie de cônes ouverts ([GL07]).

On peut maintenant restreindre notre définition de ces trois topologies à un espace de déformation donné  $\mathcal{D}$ .

Dans notre cas tous les  $G$ -arbres sont supposés irréductibles et donc par conséquent, les restrictions de la topologie de Gromov-Hausdorff équivariante et de la topologie des axes sont les mêmes ([Pau89]). La topologie induite sera appelée topologie de Gromov sur  $\mathcal{D}$ .

Dans le cas de la topologie faible, il y a une subtilité car si  $\mathcal{D}$  est pensé comme une union de cônes ouverts, il n'est pas nécessairement une union de cônes fermés puisque le cône fermé  $\mathcal{C}$  d'un arbre  $T \in \mathcal{D}$  n'est pas entièrement contenu dans  $\mathcal{D}$  puisque certains écrasements peuvent conduire à un  $G$ -arbre n'appartenant pas à  $\mathcal{D}$ .

L'intersection de  $\mathcal{C}$  avec  $\mathcal{D}$  sera appelée un cône fermé de  $\mathcal{D}$ . Un sous-ensemble de  $\mathcal{D}$  est fermé dans  $\mathcal{D}$  si et seulement si son intersection avec tout cône fermé de  $\mathcal{D}$  est fermé (dans ce cône).

### 1.1.4 Action du groupe d'automorphismes

Le groupe des automorphismes de  $G$ , noté  $Aut(G)$ , agit sur  $T$  en précomposant l'action de  $G$  sur  $T$  par un automorphisme de  $G$ . On peut préciser cette idée comme suit.

**Définition 1.13.** Soit  $T \in \mathcal{D}$  muni d'une action de  $G$  par isométries  $\rho : G \rightarrow Isom(T)$  et  $\Phi \in Aut(G)$ .

On définit  $T \cdot \Phi \in \mathcal{D}$  comme le  $G$ -arbre métrique ayant pour arbre métrique simpliciale  $T$  et muni de l'action isométrique  $\rho \circ \Phi : G \rightarrow Isom(T)$

Le sous-groupe des automorphismes intérieurs de  $G$ , noté  $Inn(G)$ , est distingué dans  $Aut(G)$  et agit trivialement sur  $\mathcal{D}$ . En effet, en considérant  $i_g \in Inn(G)$  l'automorphisme intérieur défini comme suit (cette notation sera conservée par la suite)

$$\begin{aligned} i_g : G &\longrightarrow G \\ x &\longmapsto gxg^{-1} \end{aligned}$$

alors  $T$  et  $T \cdot i_g$  sont  $G$ -équivairement isométriques par l'application

$$\begin{aligned} T &\longrightarrow T \cdot i_g \\ x &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

Par conséquent, l'action de  $Aut(G)$  induit une action de

$$Out(G) = Aut(G)/Inn(G)$$

sur  $\mathcal{D}$ .

### 1.1.5 Métrique de Lipschitz

Pour plus de détails concernant cette section, on pourra consulter [Mei15].

**Définition 1.14.** Le groupe multiplicatif des réels positifs agit sur  $\mathcal{D}$  en modifiant les longueurs d'arêtes des  $G$ -arbres métriques. L'espace de déformation projectivisé, noté  $P\mathcal{D}$ , est le quotient de  $\mathcal{D}$  par cette action

$$P\mathcal{D} = \mathcal{D}/\mathbb{R}^{*+}$$

On considère les  $G$ -arbres à homothétie  $G$ -équivariante près.

**Définition 1.15.** Soit  $T, T' \in \mathcal{D}$ .

$$Lip(T, T') = \inf_f Lip(f)$$

où

- $f$  parcourt l'ensemble des applications  $G$ -équivariantes lipschitziennes de  $T$  vers  $T'$  et,
- $Lip(f)$  désigne la constante de Lipschitz de  $f$ .

A partir de cette définition, on peut introduire la métrique de Lipschitz.

**Définition 1.16.** La fonction

$$d_{Lip} : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(T, T') \longmapsto \log\left(\frac{covol(T')}{covol(T)} Lip(T, T')\right)$$

est une pseudométrie asymétrique i.e.

- (i)  $d_{Lip}(T, T') \geq 0$ ,
- (ii) si  $T$  et  $T'$  sont  $G$ -équivariamment isométriques alors  $d_{Lip}(T, T') = 0$  et,
- (iii)  $d_{Lip}(T, T'') \leq d_{Lip}(T, T') + d_{Lip}(T', T'')$ .

$d_{Lip}$  est appelé *métrique de Lipschitz*.

*Remarque 1.17.* Cette application  $d_{Lip}$  passe au quotient et nous permet de définir la distance entre  $T$  et  $T'$  deux  $G$ -arbres de  $P\mathcal{D}$ .

Deux arbres homothétiques sont à distance 0 l'un de l'autre.

La métrique de Lipschitz, en restriction à l'ensemble  $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$  des  $G$ -arbres de covolume 1, s'écrit

$$d_{Lip} : \mathcal{D}_1 \times \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(T, T') \longmapsto \log(Lip(T, T')).$$

### 1.1.6 Application optimale

**Définition 1.18.** Soit  $\mathcal{D}$  un espace de déformation de  $G$ -arbres et  $T \in \mathcal{D}$ .

On définit une *direction* au point  $x$  de  $T$  comme le germe d'un plongement isométrique  $\gamma : [0, \epsilon) \longrightarrow T$ ,  $\epsilon > 0$  et  $\gamma(0) = x$ .

On note l'ensemble des directions au point  $x$  par  $D_x T$ .

On considère  $T, T' \in \mathcal{D}$  et  $f : T \longrightarrow T'$  une application  $G$ -équivariante, lipschitzienne et linéaire sur les arêtes.

On dit que  $f$  a *deux portails au sommet  $v$  de  $T$*  s'il existe deux directions  $\delta_1, \delta_2 \in D_v T$  telles que  $f(\delta_1) \neq f(\delta_2)$ .

Un chemin d'arête  $\gamma$  dans  $T$  est dit  *$f$ -légal* s'il est immergé par  $f$  i.e.  $f|_\gamma$  est injective.

**Définition 1.19.** Soit  $\mathcal{D}$  un espace de déformation de  $G$ -arbres,  $T, T' \in \mathcal{D}$  et  $f : T \longrightarrow T'$  une application linéaire sur les arêtes,  $G$ -équivariante et lipschitzienne. Le *graphe de tension* de  $f$ , noté  $\Delta(f)$ , désigne

$$\Delta(f) = \{e \in E(T), l(f(e)) = Lip(f)l(e)\} \subset T.$$

De plus,  $\Delta(f)$  est une sous-forêt  $G$ -invariante.

**Définition 1.20.** Une application  $f : T \longrightarrow T'$  lipschitzienne,  $G$ -équivariante et linéaire sur les arêtes est une application *optimale* si elle vérifie les deux conditions suivantes :

1.  $Lip(f) = Lip(T, T')$  et,
2.  $\Delta(f)$  est minimal pour l'inclusion parmi les applications satisfaisant la condition 1.

Une conséquence directe du Théorème 4.6 et de la Proposition 4.12 de [Mei15] nous donne l'existence d'une application optimale pour deux  $G$ -arbres dans un espace de déformations irréductible.

**Proposition 1.21.** *Soit  $\mathcal{D}$  un espace de déformation de  $G$ -arbres irréductibles. Pour tous  $T, T' \in \mathcal{D}$ , il existe une application optimale  $f : T \longrightarrow T'$ .*

Une autre conséquence directe du Théorème 4.6 et de la Proposition 4.12 de [Mei15] est le Lemme suivant.

**Lemme 1.22.** *Toute application optimale  $f : T \longrightarrow T \cdot \Phi$  a deux portails à chaque sommet de son graphe de tension.*

**Définition 1.23.** Soit  $T$  un  $G$ -arbre irréductible.

Un élément hyperbolique  $g \in G$  est appelé *candidat* de  $T$  lorsque tout domaine fondamental pour l'action de  $g$  sur son axe hyperbolique  $C_g$  rencontre chaque  $G$ -orbite d'arêtes de  $T$  au plus deux fois.

On note  $Cand_G(T)$  l'ensemble des candidats de  $T$ . Il est indépendant de la métrique sur  $T$ .

D'après le Théorème 4.14 de [Mei15], on a la proposition suivante

**Proposition 1.24.** *Soit  $\mathcal{D}$  un espace de déformation irréductible de  $G$ -arbres. Pour tout  $T, T' \in \mathcal{D}$ , il existe un élément hyperbolique  $\xi \in Cand_G(T)$  tel que*

$$Lip(T, T') = \frac{l_{T'}(\Phi(\xi))}{l_T(\xi)} = \sup_g \frac{l_{T'}(\Phi(g))}{l_T(g)}$$

où  $g$  parcourt l'ensemble des éléments hyperboliques de  $G$ .

**Lemme 1.25.** *Soit  $f : T \longrightarrow T''$   $G$ -équivariante et isométrique sur les arêtes telle que*

- (i)  $f = f'' \circ f'$  où  $f' : T \longrightarrow T'$  surjective et  $f'' : T' \longrightarrow T''$  sont également isométriques sur les arêtes et,
- (ii)  $f$  a deux portails à chaque sommet de  $T$

alors  $f''$  a deux portails à chaque sommet de  $T'$ .

En particulier,  $T'$  n'a pas de sommet de valence 1.

Si, de plus, on considère  $\Phi \in \text{Out}(G)$  et  $T'' = T \cdot \Phi$  alors

$$d_{Lip}(T', T' \cdot \Phi) \leq d_{Lip}(T, T \cdot \Phi).$$

*Remarque 1.26.* En particulier, ce Lemme est vrai lorsque l'on considère  $f$  optimale avec  $\Delta(f) = T$ .

*Démonstration.*  $f$  est isométrique sur les arêtes et donc  $Lip(f) = 1$  et  $\Delta(f) = T$ . Supposons qu'il existe un sommet  $v \in V(T')$  auquel  $f''$  a unique portail alors pour toutes arêtes  $e, e'$  de  $T'$  telles que  $o(e) = o(e') = v'$  alors  $f''(e) = f''(e')$ .

$f'$  est surjective par hypothèse et donc il existe un sommet  $v$  dans  $T$  telles que  $f'(v) = v'$ . Soit  $e_1$  et  $e_2$  deux arêtes de  $T$  telles que  $o(e_1) = o(e_2) = v$ . Puisque  $f''$  n'a qu'un unique portail au sommet  $v'$  alors  $f'' \circ f'(e_1) = f'' \circ f'(e_2)$  et donc  $f(e_1) = f(e_2)$  ainsi  $f$  n'a qu'un unique portail au sommet  $v$  de  $T$  ce qui est une contradiction à l'hypothèse sur  $f$  indiquant que  $f$  a deux portails à chaque sommet de  $T$ .

On démontre maintenant la deuxième partie du Lemme.

La distance de Lipschitz vérifie l'inégalité triangulaire et donc

$$d_{Lip}(T, T'') \leq d_{Lip}(T, T') + d_{Lip}(T', T'').$$

Montrons qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire ci-dessus. Par définition,

$$d_{Lip}(T, T') = \log\left(\frac{\text{covol}(T')}{\text{covol}(T)} Lip(T, T')\right).$$

De plus,  $Lip(f') = 1$  et donc  $Lip(T, T') \leq 1$  ainsi

$$d_{Lip}(T, T') \leq \log\left(\frac{\text{covol}(T')}{\text{covol}(T)}\right)$$

et, de la même façon,

$$d_{Lip}(T', T'') \leq \log\left(\frac{\text{covol}(T'')}{\text{covol}(T')}\right).$$



Par conséquent,

$$\begin{aligned}
d_{Lip}(T, T'') &\leq d_{Lip}(T, T') + d_{Lip}(T', T'') \\
&\leq \log\left(\frac{covol(T')}{covol(T)}\right) + \log\left(\frac{covol(T'')}{covol(T')}\right) \\
&= \log\left(\frac{covol(T')}{covol(T)} \frac{covol(T'')}{covol(T')}\right) \\
&= \log\left(\frac{covol(T'')}{covol(T)}\right)
\end{aligned}$$

$$Lip(T, T'') \leq Lip(f) = 1.$$

De plus, par la Proposition 1.24, on a

$$Lip(T, T'') = \sup_g \frac{l_{T'}(\Phi(g))}{l_T(g)}$$

où  $g$  parcourt l'ensemble des éléments hyperboliques de  $G$ .

$f$  a deux portails à chacun des sommets de  $T$  et donc par conséquent toute arête  $e$  de  $T$  peut être prolongé en un chemin d'arêtes  $f$ -légal. Par conséquent, il existe un élément hyperbolique  $g \in G$  tel que  $\frac{l_{T'}(\Phi(g))}{l_T(g)} = 1$  et ainsi

$$Lip(T, T'') = \sup_g \frac{l_{T'}(\Phi(g))}{l_T(g)} \geq 1.$$

On peut donc en déduire que

$$Lip(T, T'') = 1$$

et donc

$$d_{Lip}(T, T'') = \log\left(\frac{covol(T'')}{covol(T)}\right).$$

Par conséquent,

$$d_{Lip}(T, T'') \leq d_{Lip}(T, T') + d_{Lip}(T', T'') \leq d_{Lip}(T, T'')$$

et nous sommes dans la situation d'égalité de l'inégalité triangulaire.

Pour  $T'' = T \cdot \Phi$ , on a donc

$$\begin{aligned}
d_{Lip}(T', T' \cdot \Phi) &\leq d_{Lip}(T', T \cdot \Phi) + d_{Lip}(T \cdot \Phi, T' \cdot \Phi) \\
&= d_{Lip}(T', T \cdot \Phi) + d_{Lip}(T, T') = d_{Lip}(T, T \cdot \Phi).
\end{aligned}$$

□

## 1.2 Généralités sur les groupes de Baumslag-Solitar (généralisés)

On suppose maintenant que  $G$  n'est plus un groupe quelconque mais un groupe de Baumslag-Solitar généralisé.

**Définition 1.27.** Un groupe  $G$  agissant sur un arbre  $T$  avec des stabilisateurs d'arêtes cycliques infinis est appelé *groupe de Baumslag-Solitar généralisé*, souvent abrégé groupes GBS. L'arbre est appelé arbre GBS.

On rappelle que le groupe de Baumslag-Solitar  $BS(p, q)$ ,  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  et  $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , a la présentation suivante :

$$BS(p, q) = \langle a, b \mid ab^p a^{-1} = b^q \rangle.$$

$BS(p, q)$  est un groupe GBS. En effet, on a vu lors de l'introduction (page 7) que  $BS(p, q)$  agissait sur l'arbre de définition avec des stabilisateurs d'arêtes et de sommets cycliques infinis.

### 1.2.1 Graphe étiqueté

On a vu précédemment qu'un graphe quotient d'un  $G$ -arbre a une structure de graphe de groupes. Dans le cas des groupes de Baumslag-Solitar (généralisé), chaque groupe de sommet et d'arête est donc isomorphe à  $\mathbb{Z}$  et chaque inclusion  $G_e \hookrightarrow G_{o(e)}$  est donnée par la multiplication par un entier non nul. Ces données peuvent être représentées dans un graphe étiqueté.

**Définition 1.28.** Un *graphe étiqueté* est une paire  $(\Gamma, \lambda)$  où :

- $\Gamma$  est un graphe connexe fini.
- $\lambda: E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  est une fonction appelée étiquetage.

Pour définir  $\lambda$ , on procède de la manière suivante. On choisit simultanément des générateurs pour les groupes d'arêtes  $G_e$  et les groupes de sommets  $G_{o(e)}$ , l'application  $G_e \hookrightarrow G_{o(e)}$  est la multiplication par  $\lambda(e)$ . Remplacer un générateur d'un groupe d'arête  $G_e$  par son inverse change les signes de  $\lambda(e)$  et  $\lambda(\bar{e})$  et remplacer un générateur d'un groupe de sommet  $G_v$  par son inverse change les signes de  $\lambda(e)$  pour toutes les arêtes  $e$  ayant pour origine  $v$ .

Ces opérations sont appelées *changements de signe acceptables*. C'est la seule ambiguïté concernant les étiquettes d'un graphe étiqueté. Les graphes étiquetés seront considérés à changements de signe acceptables près.

Parfois, pour faire référence au graphe étiqueté  $(\Gamma, \lambda)$ , on écrira simplement  $\Gamma$ .

**Définition 1.29.** Soit  $T$  un  $G$ -arbre et  $v$  un sommet du graphe quotient de  $T$ .  $v$  est dit *redondant* si :

- $v$  est de valence 2 et,
- $G_e = G_v = G_{e'}$  où les deux arêtes incidentes sur  $v$  sont notées  $e$  et  $e'$ .

## 1.2.2 Groupe élémentaire

**Définition 1.30.** On dit que  $G$  est *élémentaire* si on peut choisir un  $G$ -arbre  $T$  qui soit un point ou une ligne. Autrement il est dit non élémentaire.

Par [For03], un arbre GBS est élémentaire si et seulement si le groupe GBS est isomorphe à  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  ou au groupe de la bouteille de Klein ( $BS(1, -1) = \{a, b \mid bab = a^{-1}\}$ ) avec  $Out(G)$  respectivement égal à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ,  $GL(2, \mathbb{Z})$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Par la suite, on considère uniquement des  $G$ -arbres non élémentaires.

Dans un groupe GBS non élémentaire, les sous-groupes elliptiques sont caractérisés algébriquement. Deux éléments  $\gamma, \delta \in G$  sont commensurables s'il existe des entiers non nuls  $m$  et  $n$  tels que  $\gamma^m = \delta^n$ . Le commensurateur de  $\gamma$ , noté  $Comm(\gamma)$ , est

$$Comm(\gamma) = \{\delta \in G \mid \gamma \text{ et } \delta\gamma\delta^{-1} \text{ sont commensurables}\}.$$

**Lemme 1.31** ([For03]). *Soit  $G$  un groupe GBS et  $T$  un  $G$ -arbre GBS non élémentaire.*

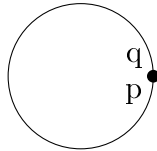
*$\gamma \in G$  est elliptique si et seulement si  $Comm(\gamma) = G$ .*

Ainsi deux tels  $G$ -arbres GBS non élémentaires se trouvent dans le même espace de déformation et l'espace de déformation est  $Out(G)$ -invariant. En particulier, deux graphes étiquetés représentant le même groupe non élémentaire sont reliés par une déformation élémentaire.

On remarque également que les éléments hyperboliques commensurables ont les mêmes axes.

Lorsque l'on parle d'un espace de déformation pour un groupe GBS non élémentaire, nous ferons toujours référence à cet espace de déformation canonique que l'on notera  $\mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$  lorsque  $G = BS(p, q)$ .

$\mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$  est l'espace de déformation du  $BS(p, q)$ -arbre dont le graphe étiqueté est



Tous les  $G$ -arbres de  $\mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$  sont localement finis et  $\mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$  est irréductible sauf si  $p = 1$  et  $q \neq \pm 1$ .

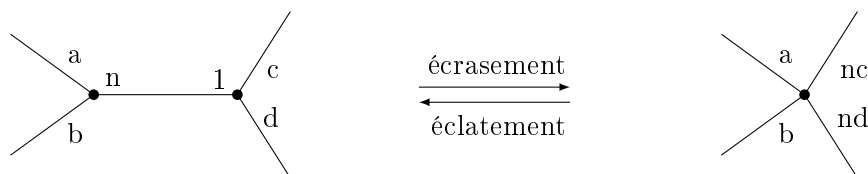
### 1.2.3 Mouvements entre arbres GBS

Maintenant nous allons décrire en terme de graphe étiqueté différents mouvements entre  $G$ -arbres où  $G$  est un groupe de Baumslag-Solitar généralisé, lesquels sont tous des déformations élémentaires. Ces différents mouvement sont discutés de manière plus générale dans [CF08], [CF09], [For02], [For06].

Dans les diagrammes ci-dessous et pour tout ce qui suit, nous suivrons la convention suivante :

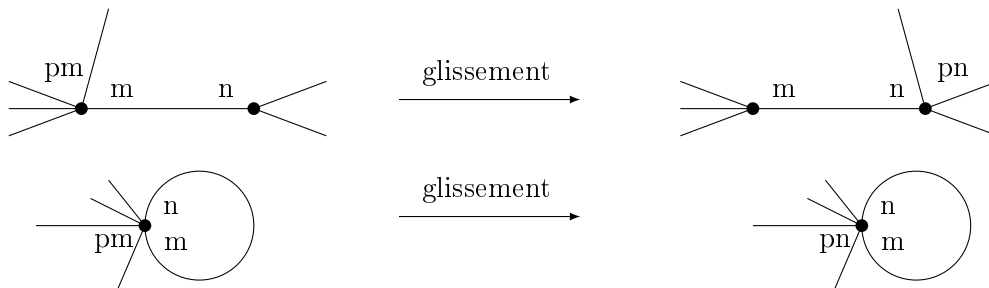
chaque étiquette  $\lambda(e)$  est placée près de l'extrémité  $o(e)$ .

**Définition 1.32.** Les mouvements d'écrasement et d'éclatement prennent la forme suivante :

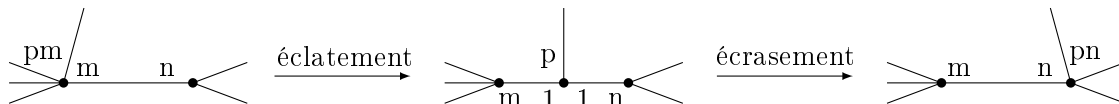


Un arbre GBS est réduit si et seulement si son graphe étiqueté ne contient pas d'arête ayant des extrémités distinctes et une étiquette  $\pm 1$ .

**Définition 1.33.** Un *mouvement de glissement* (ou glissement) entre arbres GBS prend l'une de ces deux formes :

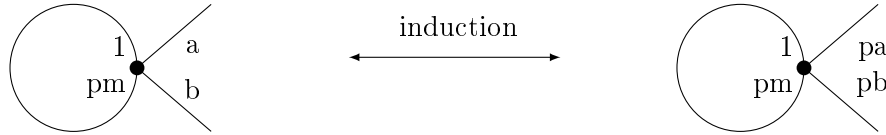


Ce mouvement peut être factorisé par un éclatement suivi d'un écrasement comme décrit ci-dessous pour le premier cas (le deuxième cas se décompose de la même manière) :



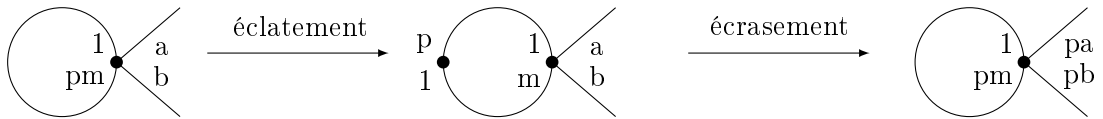
Le deuxième mouvement que l'on peut décrire est le mouvement d'induction.

**Définition 1.34.** Un *mouvement d'induction* prend la forme suivante :



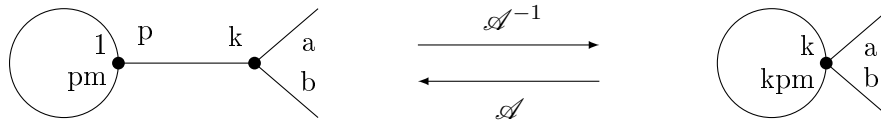
Dans un sens comme dans l'autre, le mouvement est appelé mouvement d'induction.

Ce mouvement se décompose en déformation élémentaire de façon suivante :



Pour terminer, nous pouvons parler des  $\mathcal{A}^{\pm 1}$ -mouvements.

**Définition 1.35.** Un  $\mathcal{A}^{-1}$ -*mouvement* est une induction suivie d'un écrasement. Pour pouvoir effectuer ce mouvement, il faut que  $k, l \neq \pm 1$  et qu'aucune autre arête ne soit incidente au sommet de gauche.



Dans un premier temps, le mouvement d'induction change l'étiquette  $p$  en  $1$  et dans un deuxième temps, l'arête est écrasée.

*Remarque 1.36.* Sur les 3 mouvements que l'on vient de décrire, seuls les  $\mathcal{A}^{\pm 1}$ -mouvements préservent la propriété d'être réduit.

Les deux théorèmes suivants sont issus de [CF09] et nous permettent de faire le lien entre les espaces de déformations et les mouvements décrits ci-avant.

**Théorème 1.37.** Soit  $\mathcal{D}$  un espace de déformation de  $G$ -arbres cocompacts. Deux arbres réduits de  $\mathcal{D}$  sont reliés par une suite finie de glissements, de mouvements d'induction et de  $\mathcal{A}^{\pm 1}$ -mouvements avec les arbres intermédiaires réduits.

### 1.2.4 Groupe algébriquement rigide

Pour plus de détails concernant la rigidité, on peut se référer à [Lev05] et [For02].

**Définition 1.38.** Un  $BS(p, q)$ -arbre  $T \in \mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$  est dit *rigide* s'il est réduit et si c'est le seul  $BS(p, q)$ -arbre réduit dans son espace de déformation (à isomorphisme  $BS(p, q)$ -équivariant près).

Dans ce cas, on dit que  $G$  est algébriquement rigide.

Le graphe de groupes  $\Gamma$  de  $T$  est alors l'unique graphe étiqueté réduit représentant  $G$  et tout  $G$ -arbre  $T' \in \mathcal{D}_{p,q}^{\mathbb{Z}}$  peut être envoyé sur  $T$  via une suite d'écrasements. En particulier,  $\Gamma$  n'a qu'une arête.

Il est possible de donner plus de détails concernant le groupe d'automorphismes d'un groupe algébriquement rigide.

En effet, lorsqu'un  $BS(p, q)$ -arbre  $T$  est rigide alors

$$Out(G) = Out^T(G)$$

où  $Out^T(G) \subset Out(G)$  désigne le stabilisateur de  $T$  dans  $Out(G)$ .

Dans ce qui suit, on va décrire  $Out^T(G)$  de la même manière que Gilbert Levitt dans [Lev07].

On note  $\Gamma$  le graphe de groupes de  $T$ . Il y a un morphisme naturel

$$Out^T(G) \longrightarrow \mathcal{S}(\Gamma)$$

où  $\mathcal{S}(\Gamma)$  désigne le groupe des automorphismes de  $\Gamma$  où  $\Gamma$  est vu comme graphe (sans structure additionnelle).

Le noyau de ce morphisme est noté  $Out_0^T(G)$  et est d'indice fini dans  $Out^T(G) = Out(G)$ .

Il y a un morphisme

$$\rho : Out_0^T(G) \longrightarrow \prod_{v \in V(T)} Out(G_v)$$

dont le noyau est engendré par des automorphismes appelés bitwists.

On utilise par la suite la présentation du graphe de groupes de la Définition 1.4.

**Définition 1.39** (Bitwist). Soit  $G = A *_C B$  une décomposition en produit amalgamé et  $z \in A$  (resp.  $z' \in B$ ) normalisant l'image de  $C$  dans  $A$  (resp. dans  $B$ ) tels que

$$\forall g \in C, ad_z(g) = ad_{z'}(g).$$

L'automorphisme  $D_{z,z'}$  défini par

$$D_{z,z'}(g_A) = zg_Az^{-1}, \forall g_A \in A,$$

et

$$D_{z,z'}(g_B) = z'g_Bz'^{-1}, \forall g_B \in B$$

est appelé *bitwist* associé à la décomposition en produit amalgamé.

Soit  $G = A *_C$  une extension HNN. Il y a deux plongements de  $C$  dans  $A$  notés  $i_1$  et  $i_2$ .

Soit  $C_1 = i_1(C)$ ,  $C_2 = i_2(C)$ ,  $z \in A$  normalisant  $C_1$  et  $z' \in A$  normalisant  $C_2$  tels que

$$\forall g \in C, ad_z(i_1(g)) = ad_{z'}(i_2(g)).$$

L'automorphisme  $D_{z,z'}$  défini par

$$D_{z,z'}(g_A) = g_A, \forall g_A \in A$$

et

$$D_{z,z'}(t) = ztz'$$

où  $t$  désigne la lettre stable, est appelé *bitwist* associé à l'extension HNN.

Un *bitwist* d'une décomposition de  $G$  en graphe de groupes  $\Gamma$  est un *bitwist* associé à l'une des décompositions de  $G$  en produit amalgamé ou extension HNN associée à l'une des arêtes de  $\Gamma$ . Le groupe des *bitwists* de  $\Gamma$  est le groupe engendré par ces *bitwists*.

**Définition 1.40** (Twist de Dehn). Soit  $G = A *_C B$  une décomposition en produit amalgamé et  $z \in A$  centralisant  $C$ . L'automorphisme  $\delta_z$  défini par

$$\delta_z(g_A) = zg_Az^{-1}, \forall g_A \in A$$

et

$$\delta_z(g_B) = g_B, \forall g_B \in B$$

est appelé *twist de Dehn* associé à la décomposition en produit amalgamé.

Soit  $G = A *_C$  une extension HNN. Il y a deux plongements de  $C$  dans  $A$  notés  $i_1$  et  $i_2$ .

Soit  $C_1 = i_1(C)$ ,  $C_2 = i_2(C)$  et  $z \in A$  centralisant  $C_1$ .

L'automorphisme  $\delta_z$  défini par

$$\delta_z(g_A) = g_A, \forall g_A \in A$$

et

$$\delta_z(t) = zt$$

où  $t$  désigne la lettre stable, est appelé *twist de Dehn* associé à l'extension HNN. Le groupe des twists est noté  $\mathcal{T}(T)$  et c'est le groupe engendré par les twists de Dehn.

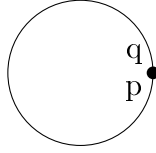
Un twist de Dehn d'une décomposition de  $G$  en graphe de groupes  $\Gamma$  est un twist de Dehn associé à l'une des décompositions de  $G$  en produit amalgamé ou extension HNN associée à l'une des arêtes de  $\Gamma$ . Le groupe des twists de  $\Gamma$  est le groupe engendré par ces twists de Dehn.

*Remarque 1.41.* Un twist de Dehn est un bitwist avec  $z' = 1$ .

**Proposition 1.42.** *Si  $BS(p, q)$  est un groupe de Baumslag-Solitar algébriquement rigide alors*

$$\forall \Phi \in \text{Out}(BS(p, q)), \exists k \in \mathbb{N}^*, \Phi^k \in \mathcal{T}(T).$$

*Démonstration.* Si  $BS(p, q)$  est algébriquement rigide on peut donc considérer  $T$  l'arbre de définition de  $BS(p, q)$  dont le graphe étiqueté est le suivant



Les groupes d'arêtes et de sommets sont isomorphes à  $\mathbb{Z}$  et donc tout bitwist est un twist.

Par conséquent, on obtient

$$\text{Ker}(\rho) = \mathcal{T}(T) \longrightarrow \text{Out}_0^T(G) \xrightarrow{\rho} \text{Out}(G_v) = \text{Out}(\mathbb{Z}).$$

Puisque  $\text{Out}(\mathbb{Z})$  est fini et  $\text{Out}_0^T(G)$  est d'indice fini dans  $\text{Out}^T(G) = \text{Out}(G)$ , on en déduit qu'il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\Phi^k \in \mathcal{T}(T)$ .  $\square$

On peut également introduire le concept plus faible d'arbre strongly-slide-free.

**Définition 1.43.** Un  $G$ -arbre est strongly-slide-free si il vérifie la condition suivante : si deux arêtes  $e_1$  et  $e_2$  ayant un sommet commun  $v$  sont telles que  $G_{e_1} \subset G_{e_2}$  alors  $e_1$  et  $e_2$  sont dans la même orbite sous l'action de  $G_v$ .

Les  $G$ -arbres strongly-slide-free sont rigides ([For02]).





## Chapitre 2

# Tout automorphisme de $BS(p, pn)$ est réductible

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, on se place dans le cadre correspondant à notre étude i.e.  $G = BS(p, pn)$  où  $|n| > 1$  muni de la présentation suivante

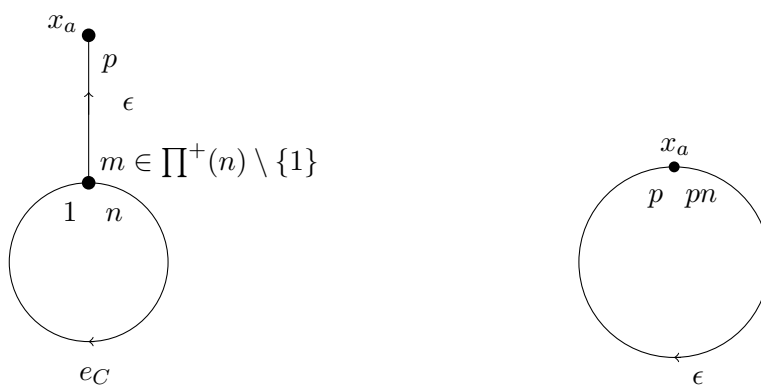
$$BS(p, pn) = \langle a, c \mid ca^p c^{-1} = a^{pn} \rangle.$$

**Définition 2.1.**  $\prod^+(n) \subset \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  désigne le monoïde multiplicatif engendré par  $-1$  et l'ensemble des diviseurs premiers de  $n$  (en particulier  $1 \in \prod^+(n)$ ).

On rappelle ci-après le Lemme 3.1 de [Cla09].

**Lemme 2.2.** Soit  $T \in \mathcal{D}_{p, pn}^{\mathbb{Z}}$  un arbre réduct.

Le graphe étiqueté de  $T$  est, à changement de signe acceptable près, de l'une des deux formes suivantes,



où  $x_a$  est l'image dans le graphe quotient de l'unique point de  $T$  fixé par  $\langle a \rangle$ .

Pour poursuivre il est nécessaire d'introduire le concept d'espace de déformations réduct.

**Définition 2.3.** Soit  $\mathcal{D}$  un espace de déformation de  $BS(p, pn)$ -arbres.

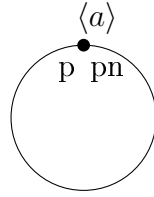
L'espace de déformation réduit  $\mathcal{D}_r$  est formé des  $BS(p, pn)$ -arbres dont tous les stabilisateurs d'arêtes fixent une arête dans tout arbre de  $\mathcal{D}$ .

Par [GL07] et [GL16], on obtient la Proposition suivante.

**Proposition 2.4.** Soit  $\mathcal{D}$  un espace de déformation de  $BS(p, pn)$ -arbres et  $\mathcal{D}_r$  l'espace de déformation réduit qui lui est associé.

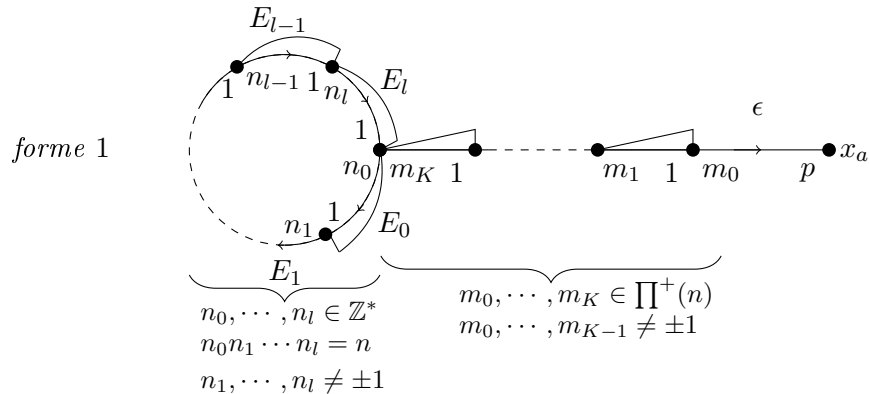
- $\mathcal{D}_r$  est stable par écrasement i.e. si  $T \in \mathcal{D}$  est obtenu par un écrasement d'un  $BS(p, pn)$ -arbre de  $\mathcal{D}_r$  alors  $T \in \mathcal{D}_r$ ,
- si  $T \in \mathcal{D}$  est un  $BS(p, pn)$ -arbre réduit alors  $T \in \mathcal{D}_r$  et,
- si  $T$  et  $T'$  sont deux  $BS(p, pn)$ -arbres de  $\mathcal{D}_r$  et  $f : T \rightarrow T'$  une application n'écrasant aucune arête et s'il existe  $T'' \in \mathcal{D}$ ,  $f' : T \rightarrow T''$  et  $f'' : T'' \rightarrow T'$  telles que  $f = f'' \circ f'$  alors  $T'' \in \mathcal{D}_r$ .

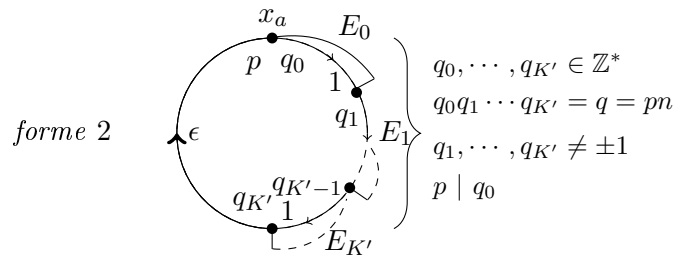
On considèrera l'espace de déformation réduit  $\mathcal{D}_{p, pn} \subset \mathcal{D}_{p, pn}^{\mathbb{Z}}$ . Par définition, les stabilisateurs d'arêtes de tout arbre de  $\mathcal{D}_{p, pn}$  fixent une arête dans tout arbre de  $\mathcal{D}_{p, pn}^{\mathbb{Z}}$  et donc en particulier dans l'arbre, appelé arbre de définition, de  $\mathcal{D}_{p, pn}^{\mathbb{Z}}$  dont le graphe quotient marqué, appelé graphe de définition, est



**Lemme 2.5.** Soit  $T \in \mathcal{D}_{p, pn}$ .

A subdivisions près, le graphe étiqueté (Définition 1.28) de  $T$  est de l'une des deux formes suivantes.





où  $x_a$  est l'image dans le graphe quotient de l'unique sommet fixé par  $\langle a \rangle$ .

*Remarque 2.6.* Dans la figure ci-dessus et dans les suivantes, la présence d'un triangle dans un graphe étiqueté comme ci-dessus, permettra de représenter de façon visuelle la relation d'inclusion des groupes de sommets d'une même arête  $e = uv$  telle que

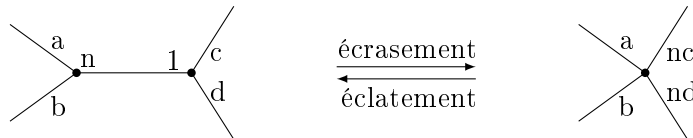
$$G_u = G_e \subset G_v.$$

**Définition 2.7.** L'unique cycle du graphe quotient d'un  $BS(p, pn)$ -arbre  $T$  est appelé le cercle et les arêtes du complémentaire constituent le bâton. Le bâton contient au moins une arête dans le cas de la forme 1.

*Démonstration du Lemme 2.5.* Les deux formes du Lemme 2.2 sont dans  $\mathcal{D}_{p,pn}$  et de la forme 1 avec  $K = l = 0$  ou de la forme 2 avec  $K' = 0$ .

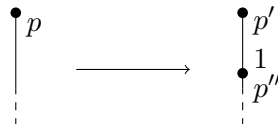
Tout arbre  $T \in \mathcal{D}_{p,pn}$  s'écrase sur un arbre réduit. Il suffit donc de montrer que si on procède à un éclatement sur un arbre de la forme 1 ou 2 (tout en restant dans  $\mathcal{D}_{p,pn}$ ) alors on obtient un arbre de la forme 1 ou 2.

On rappelle ci-après la définition d'un éclatement en considérant les graphes étiquetés.

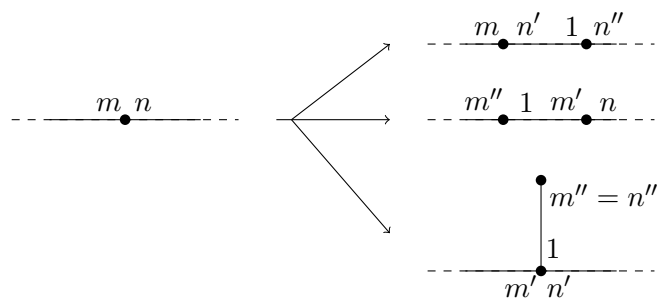


Sur les formes 1 et 2, on distingue 3 types de sommets : un sommet de valence 1, un sommet de valence 2 et un sommet de valence 3. Nous allons commencer par détailler les différents éclatements possibles à chacun de ces types de sommets dans  $\mathcal{D}_{p,pn}^{\mathbb{Z}}$ .

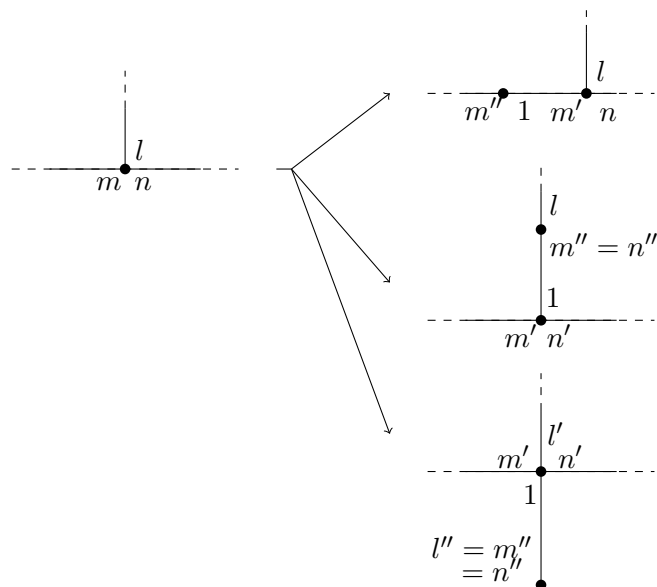
Dans  $\mathcal{D}_{p,pn}^{\mathbb{Z}}$ , un éclatement à un sommet de valence 1 prend la forme suivante avec  $p'p'' = p$  :



Dans  $\mathcal{D}_{p,pn}^{\mathbb{Z}}$ , un éclatement à un sommet de valence 2 peut prendre l'une des 3 formes suivantes avec  $n'n'' = n$  et  $m'm'' = m$  :



Dans  $\mathcal{D}_{p,pn}^{\mathbb{Z}}$ , quitte à échanger les rôles des différentes étiquettes, on peut supposer que si l'éclatement implique une étiquette (resp. deux étiquettes) au sommet de valence 3 il s'agit de  $m$  (resp.  $m$  et  $n$ ). Par conséquent, un éclatement au sommet de valence 3 peut prendre l'une des 3 formes suivantes avec  $n'n'' = n$ ,  $m'm'' = m$  et  $l'l'' = l$  :



On va identifier parmi ces différents éclatements lesquels amènent à des arbres n'appartenant pas à l'espace de déformation réduit  $\mathcal{D}_{p,pn}$ . On va également montrer que les autres éclatements amènent à des arbres de la forme 1 ou 2.

— Dans la forme 1 :

— Le sommet de valence 1 est  $x_a$  et donc un éclatement à ce sommet crée une arête ayant un sommet fixé par  $\langle a \rangle$ , de nouveau noté  $x_a$ , et l'étiquette à ce sommet est un diviseur de  $p$  noté  $p'$ . Dans ce nouvel arbre  $a^{p'}$  fixe une arête et donc si  $p' \neq p$  alors l'arbre obtenu n'appartient pas à  $\mathcal{D}_{p,pn}$  car  $a^{p'}$  ne fixe aucune arête dans le graphe de définition.

Par conséquent un tel éclatement conduit de nouveau à un arbre de la forme 1.

- De même, à chaque sommet de valence 2, la dernière des situations ne peut pas se produire car l'une des étiquettes est 1 et donc  $m'' = n'' = 1$  lors de l'éclatement et ainsi un tel éclatement crée une arête ayant ses deux étiquettes égales à 1.

Pour ce qui est des autres situations, on a une des étiquettes égale à 1. On peut donc supposer que  $m = 1$  alors  $m' = m'' = 1$  et ainsi l'arbre obtenu après un tel éclatement est de nouveau de la forme 1.

- Il y a un unique sommet de valence 3 et parmi les situations décrites précédemment la dernière ne peut pas se produire. En effet, au sommet de valence 3, l'une des étiquettes est 1 et donc  $l''' = m''' = n''' = 1$  et ainsi la dernière situation crée une arête ayant ses deux étiquettes égales à 1.

Pour ce qui est des autres situations, on a une des étiquettes égale à 1.

On peut donc supposer que  $m = 1$  alors  $m' = m'' = 1$  et ainsi l'arbre obtenu après un tel écrasement est de nouveau de la forme 1.

- Dans la forme 2, l'un des sommets de valence 2 est  $x_a$  et donc un éclatement crée une arête ayant un sommet fixé par  $\langle a \rangle$ , de nouveau noté  $x_a$ , et l'étiquette à ce sommet est un diviseur de  $p$  ou de  $q_0$  noté  $p'$ . Comme précédemment, par définition de l'espace de déformation réduit  $\mathcal{D}_{p,pn}$ , on a  $p' = p$  et donc l'arbre obtenu est de la forme 1.

Aux autres sommets de valence 2, la dernière des situations ne peut pas se produire car l'une des étiquettes est 1 et donc  $k = 1$  lors de l'éclatement et ainsi on crée une arête ayant ses extrémités égale à 1.

Pour ce qui est des autres situations alors l'une des étiquettes est égale à 1 et on peut supposer que  $m = 1$  et donc  $m' = m'' = 1$  et ainsi l'arbre obtenu est encore de la forme 2.

On peut donc en déduire que tout éclatement d'un arbre de  $\mathcal{D}_{p,pn}$  de la forme 1 ou 2 donne lieu à un arbre de  $\mathcal{D}_{p,pn}$  de la forme 1 ou 2.

De plus, par construction,  $\langle a \rangle$  fixe un unique point dans chacune des formes.  $\square$

**Définition 2.8.** Soit  $T$  un  $G$ -arbre.

Une sous-forêt  $Y$  de  $T$  est dite *propre* si  $Y \subsetneq T$ .

Une sous-forêt  $G$ -invariante sans sommet isolé est dite *essentielle* (resp. *principale*) si chacun de ses composantes connexes contient l'axe d'un élément hyperbolique (resp. si elle est non vide et ne contient pas de sommet de valence 1).

Toute sous-forêt principale est essentielle.

Les  $G$ -arbres métriques considérés ont tous, par définition, un arbre simplicial sous-jacent. Soit  $Y$  un sous-espace de l'espace métrique  $T$ . Si, quitte à subdiviser la structure simpliciale de  $T$ , l'espace sous-jacent à  $Y$  est une sous-forêt essentielle

de l'arbre simplicial  $T$  alors on dit que  $Y$  est une sous-forêt essentielle du  $G$ -arbre métrique  $T$ .

Toute sous-forêt  $G$ -invariante  $Y \subset T$  contient une unique sous-forêt maximale principale  $G$ -invariante  $core(Y) \subset Y \subset T$  obtenue en enlevant successivement toutes les  $G$ -orbites d'arêtes dont le sommet initial ou terminal est de valence 1. La cocompacité de  $T$  assure que ce procédé n'est répété qu'un nombre fini de fois. Pour chaque composante  $Y_i$  de  $Y$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$  on considère  $G_{Y_i}$  son stabilisateur et  $Y'_i$  le sous-arbre minimal de  $G_{Y_i}$  ainsi

$$core(Y) = \bigcup_{i=1}^n Y'_i.$$

On va construire une application  $p : T \longrightarrow T$  telle que  $p(Y) = core(Y)$ .

On commence par décrire les images des sommets.

Si  $v \in V(T) \setminus Y$  alors on pose  $p(v) = v$ .

Si  $v \in Y$  alors il existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $v \in Y_i$  et on définit  $p(v)$  comme le projeté de  $v$  sur  $Y'_i$

Par la suite, on étend  $p$  par linéarité sur les arêtes et ainsi on obtient une application  $G$ -équivariante telle que  $p(Y) = core(Y)$  ce qui démontre le Lemme suivant.

**Lemme 2.9.** *Soit  $T$  un  $G$ -arbre et  $Y \subset T$  une sous-forêt essentielle de  $T$ .*

*Il existe une application  $p : T \longrightarrow T$  telle que*

$$p(Y) = core(Y).$$

**Définition 2.10.**  $\Phi \in Out(G)$  est réductible dans  $\mathcal{D}$  s'il existe un  $G$ -arbre  $T \in PD$  (vu comme arbre métrique) et une application  $G$ -équivariante lipschitzienne  $f : T \longmapsto T \cdot \Phi$  qui laisse invariante une sous-forêt essentielle, propre et  $G$ -invariante de  $T$ .

Si  $\Phi$  n'est pas réductible dans  $\mathcal{D}$  alors on dit que  $\Phi$  est irréductible dans  $\mathcal{D}$ .

Par la suite,  $[H]$  désignera la classe de conjugaison d'un sous-groupe  $H$  de  $G$  et on introduit la notation

$$[H] < [K]$$

lorsque  $H$  est contenu dans un conjugué d'un sous-groupe  $K$  de  $G$ .

**Lemme 2.11.** *Soit  $\Phi \in Out(G)$ ,  $T$  un  $G$ -arbre et  $f : T \longrightarrow T \cdot \Phi$  une application laissant invariante une sous-forêt  $Y \subset T$ , propre, essentielle et  $G$ -invariante.*

*On suppose, de plus, que  $Y$  a  $m$  orbites de composantes connexes pour lesquelles on peut considérer  $m$  représentants notés  $Y_1, \dots, Y_m$  et  $K_i = Stab(Y_i)$  i.e.*

$$Y = \prod_{i=1}^m G \cdot Y_i.$$

Sous ces hypothèses,  $\forall i \in \{1, \dots, m\}, \exists j \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$\Phi([K_i]) \subset [K_j].$$

*Démonstration.* On considère  $\alpha$  un représentant de  $\Phi$  dans  $\text{Aut}(G)$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Par hypothèse,  $f(Y) \subset Y$  et donc il existe  $j \in \{1, \dots, m\}$  tel qu'il existe  $g_0 \in G$  tel que

$$f(Y_i) \subset g_0 \cdot Y_j.$$

Soit  $\alpha' = i_{g_0} \circ \alpha$ , où  $i_{g_0}$  désigne l'automorphisme intérieur par  $g_0$  et  $f' = g_0 \cdot f$  qui est  $\alpha'$ -équivariante alors

$$f'(Y_i) \subset Y_j.$$

Montrons que  $\alpha'(K_i) \subset K_j$ . Pour ce faire, on considère  $g \in K_i$ .

Puisque  $K_i = \text{Stab}(Y_i)$ ,

$$gY_i = Y_i$$

d'où

$$\alpha'(g)f'(Y_i) = f'(gY_i) = f'(Y_i) \subset Y_j.$$

Par conséquent,

$$\alpha'(g)f'(Y_i) \subset Y_j$$

et donc

$$\emptyset \neq \alpha'(g)f'(Y_i) \subset \alpha'(g)Y_j \cap Y_j.$$

$Y_j$  est l'unique composante connexe de  $Y$  contenant n'importe quel point de  $Y_j$  ainsi

$$\alpha'(g)Y_j = Y_j.$$

D'après ce qui précède,

$$K_j = \text{Stab}(Y_j)$$

d'où

$$\alpha'(g) \in K_j$$

et

$$\alpha'(K_i) \subset K_j.$$

□

**Lemme 2.12.** Soit  $\Phi \in \text{Out}(G)$ ,  $T \in \mathcal{D}$  un espace de déformation  $\text{Out}(G)$ -invariant..

Soit  $Y \subset T$  une sous-forêt propre, essentielle et  $G$ -invariante ayant  $m$  orbites de



composantes connexes pour lesquelles on peut considérer  $m$  représentants notés  $Y_1, \dots, Y_m$  et  $K_i = \text{Stab}(Y_i)$  i.e.

$$Y = \coprod_{i=1}^m G \cdot Y_i.$$

Si  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\exists j \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $\Phi([K_i]) < [K_j]$  alors  $\Phi$  est réductible dans  $\mathcal{D}$ .

*Démonstration.* Afin de prouver que  $\Phi$  est réductible, il faut montrer qu'il existe une application  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  qui laisse  $\text{core}(Y)$  invariante. On va construire cette application  $f$ .

On considère  $\alpha \in \text{Aut}(G)$  un représentant de  $\Phi$  pour lequel  $\forall i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $\exists j_i \in \{1, \dots, m\}$  et  $g_i \in G$  tel que  $\alpha(K_i) \subset g_i K_{j_i} g_i^{-1}$ .

Pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ , on note  $T_{K_i}$  le sous-arbre minimal de  $K_i$  (qui est une composante connexe de  $\text{core}(Y)$ ) de sorte que

$$\text{core}(Y) = \coprod_{i=1}^n G \cdot T_{K_i}.$$

En particulier, pour  $g \in G$ , si  $g \cdot T_{K_i} \cap T_{K_i} \neq \emptyset$  alors  $g \in K_i$ .

Pour définir  $f$ , on considère  $v_1, \dots, v_n$  des représentants des  $G$ -orbites de sommets de  $T$ .

Soit  $k \in \{1, \dots, n\}$ .

S'il existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $v_k \in G \cdot T_{K_i}$  alors en changeant de représentant on peut supposer que  $v_i \in T_{K_i}$ .

Si  $v_k \in T_{K_i}$  alors  $G_{v_k} \subset K_i$  car pour tout  $g \in G_{v_k}$ , on a  $v_k \in g \cdot T_{K_i}$  et donc  $g \cdot T_{K_i} \cap T_{K_i} \neq \emptyset$  d'où  $g \in K_i$ .

On a donc  $\alpha(G_{v_k}) \subset g_i K_{j_i} g_i^{-1}$  et donc  $\alpha(G_{v_k})$  fixe un point  $w_k \in g_i T_{K_{j_i}}$  puisque  $\alpha(G_{v_k})$  est elliptique dans  $T$  ( $T \cdot \Phi \in \mathcal{D}$  car  $\mathcal{D}$  est  $\text{Out}(G)$ -invariant).

On choisit  $f(v_k) = w_k$  puis on étend aux autres sommets de l'orbite de  $v_k$  par  $\alpha$ -équivalence.

On remarque que si  $v' = g \cdot v_k \in T_{K_i}$  alors  $f(v') \in g_i T_{K_{j_i}}$ . En effet, dans ce cas,  $v' \in g \cdot T_{K_i} \cap T_{K_i}$  et donc l'intersection est non vide ainsi  $g \in K_i$  et  $\alpha(g) \in g_i K_{j_i} g_i^{-1}$ . Par conséquent,

$$f(v') = \alpha(g)f(v_k) = \alpha(g) \cdot w_k \in g_i T_{K_{j_i}}.$$

Si  $v_k$  n'est pas dans l'orbite d'une composante connexe de  $\text{core}(Y)$  on prend  $w_k$  fixé par  $\alpha(G_{v_k})$  de manière arbitraire (un tel sommet existe car  $\alpha(G_{v_k})$  est elliptique) puis on étend à tous les sommets de l'orbite de  $v_k$  par  $\alpha$ -équivalence.

Par la suite, on étend aux arêtes par linéarité,  $f$  est  $\alpha$ -équivariante et  $f(T_{K_i}) \subset g_i T_{K_{j_i}}$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  car on a démontré précédemment que c'est vrai

pour les sommets de  $T_{K_i}$  et donc également sur les arêtes

Finalement  $f(\text{core}(Y)) \subset \text{core}(Y)$  et donc  $\Phi$  est réductible dans  $\mathcal{D}$ .  $\square$

**Lemme 2.13.** *Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  et  $H = \langle a, c^{-1}a^pc \rangle$  alors*

$$\Phi([H]) = [H].$$

Plus précisément, il existe un représentant  $\alpha \in \text{Aut}(BS(p, pn))$  de  $\Phi$  tel que  $\alpha|_H$

$$\text{soit l'identité ou l'involution } \begin{array}{l} a \mapsto a^{-1} \\ c^{-1}a^pc \mapsto c^{-1}a^{-p}c. \end{array}$$

*Démonstration.* Afin de démontrer ce Lemme, on rappelle la présentation pour  $BS(p, pn)$

$$BS(p, pn) = \langle a, c \mid ca^pc^{-1} = a^{pn} \rangle.$$

D'après [Cla09],  $\text{Aut}(BS(p, pn))$  est engendré par les automorphismes  $i_a, i_c, \Psi, j$  et  $\Phi_k, k \geq 1$  où

$$\begin{array}{l} \Psi : a \mapsto a \quad j : a \mapsto a^{-1} \quad \Phi_k : a \mapsto a \\ c \mapsto ac \quad c \mapsto c \quad c \mapsto c^{-k}a^pc^{k+1} \end{array}$$

et  $i_a$  et  $i_c$  désignent respectivement les automorphismes intérieurs par  $a$  et par  $c$ . On constate que

$$\Psi(a) = a$$

et

$$\Psi(c^{-1}a^pc) = c^{-1}a^pc$$

d'où

$$\Psi([H]) = [H].$$

De même pour  $\Phi_k$ , on a

$$\Phi_k(a) = a$$

et

$$\begin{aligned} \Phi_k(c^{-1}a^pc) &= c^{-k-1}a^{-p}c^ka^pc^{-k}a^pc^{k+1} \\ &= c^{-k-1}a^{-p}a^{pn^k}a^pc^{k+1} \\ &= c^{-k-1}a^{pn^k}c^{k+1} \\ &= c^{-1}a^pc \end{aligned}$$

d'où

$$\Phi_k([H]) = [H].$$

De plus,  $j$ ,  $i_a$  et  $i_c$  préservent également  $[H]$ .

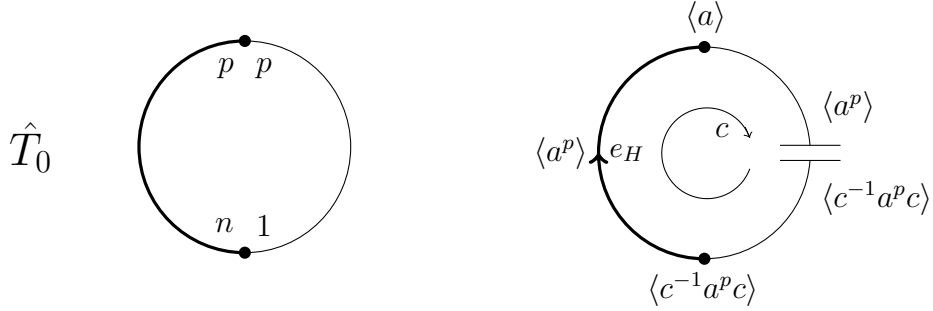
Par conséquent

$$\Phi([H]) = [H].$$

La deuxième assertion se déduit immédiatement de ce que l'on vient de démontrer.  $\square$

**Théorème 2.14.** *Tout automorphisme  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  est réductible dans  $\mathcal{D}_{p, pn}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  et  $\hat{T}_0$  le  $BS(p, pn)$ -arbre de  $\mathcal{D}_{p, pn}$  dont le graphe étiqueté (à gauche) et le graphe de groupes quotient marqué (à droite) sont



*Remarque 2.15.* La double barre présente sur l'arête de droite du graphe étiqueté correspond au choix d'un relevé du domaine fondamental

Comme précédemment, on note  $H$  le groupe  $H = \langle a, c^{-1}a^pc \rangle$  et  $Y_{e_H}$  la sous-forêt principale associée à  $e_H$  (en gras sur la figure ci-avant) pour laquelle les stabilisateurs de ses composantes connexes sont des conjugués de  $H$ .

$Y_{e_H}$  correspond à l'orbite de la forêt en gras ci-dessus. C'est une sous-forêt propre, essentielle et  $G$ -invariante.

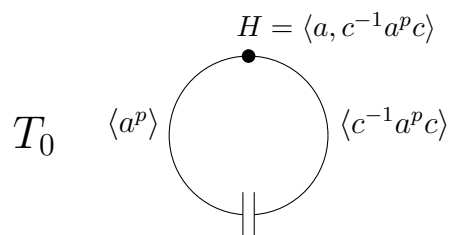
D'après le Lemme 2.13,

$$\Phi([H]) = [H]$$

et on peut appliquer le Lemme 2.12 ainsi  $\Phi$  est réductible dans  $\mathcal{D}_{p, pn}$ .  $\square$

On sait que  $\mathcal{D}_{p, pn}$  est l'espace de déformation du  $G$ -arbre, noté  $\hat{T}_0$ , dont le graphe de groupes quotient marqué est comme ci-dessus dans la démonstration.

Soit  $T_0$  le  $G$ -arbre obtenu en écrasant  $Y_{e_H}$  dans  $\hat{T}_0$  dont le graphe de groupes quotient marqué est le suivant



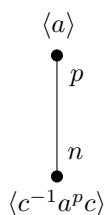
On considère maintenant l'espace de déformation de  $T_0$  noté  $\mathcal{D}_H^{\mathbb{Z}}$ . Cet espace de déformation est invariant par tout automorphisme  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  puisque d'après ce qui précède,  $\Phi([H]) = [H]$ .

**Définition 2.16.**  $\mathcal{D}_H$  désigne l'espace de déformation réduit inclus dans  $\mathcal{D}_H^{\mathbb{Z}}$ .

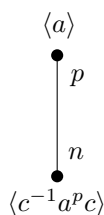
**Lemme 2.17.** Soit  $T \in \mathcal{D}_H$ . Il existe  $\hat{T} \in \mathcal{D}_{p, pn}$  et un écrasement  $\hat{T} \xrightarrow{\pi} T$  tel que, en notant  $Y$  la sous-forêt constituée des arêtes écrasées par  $\pi$ , chaque composante connexe de  $Y$  est un translaté du sous-arbre minimal de  $H$  dans  $T$  noté  $\text{min}_H(T)$  i.e.

$$Y = \bigcup_{g \in G} g \cdot \text{min}_H(T)$$

et  $\text{min}_H(T) \simeq \text{min}_H(\hat{T}_0)$  a le graphe de groupes quotient marqué suivant



*Démonstration.* On considère  $T \in \mathcal{D}_H$ ,  $\text{min}_H(\hat{T}_0)$  le sous-arbre minimal de  $H$  dans  $\hat{T}_0$  dont le graphe de groupes quotient marqué est le suivant



On démontre ce Lemme de la même façon que le Lemme 3.2 de [GL10].

$H$  est elliptique dans  $T$ , on note  $v_H$  le sommet fixé par  $H$  (il est unique car les groupes d'arêtes sont tous cycliques) et  $E_{v_H}$  l'ensemble des arêtes orientées de  $T$  incidentes sur  $v_H$ .

Le point clé de cette démonstration est le suivant : pour toute arête  $e$  de de  $T$

(et donc en particulier de  $E_{v_H}$ ),  $G_e$  fixe une arête dans tout arbre de  $D_H$  et donc en particulier dans  $T_0$  et par suite dans  $\hat{T}_0 \in \mathcal{D}_{p, pn}$  ainsi  $G_e$  est elliptique dans  $\min_H(\hat{T}_0) \subset \hat{T}_0$ .

A chaque sommet  $v \in V(T)$  tel qu'il existe  $g \in G$ ,  $v = g \cdot v_H$  on associe le sous-arbre  $T_v = g \cdot \min_H(\hat{T}_0)$ .

Pour chaque arête orientée  $e = v_H w \in E_{v_H}$ , on choisit un sommet  $p_e \in \min_H(\hat{T}_0)$  fixé par  $G_e$  (c'est possible d'après le point clé précédemment indiqué) puis on étend ces choix par équivariance.

On définit  $T_v = \{v\}$  si  $v \notin G \cdot v_H$ .

On peut maintenant définir  $\hat{T}$  comme étant la réunion disjointe

$$\left( \coprod E(T) \right) \coprod \left( \coprod_{v \in V(T)} T_v \right)$$

où on attache les arêtes de  $T$  en utilisant les points  $p_e$  précédemment définis. Par construction,  $\hat{T} \in \mathcal{D}_{p, pn}$  et il existe un écrasement  $\hat{T} \xrightarrow{\pi} T$  tel que

$$Y = \bigcup_{g \in G} g \cdot \min_H(\hat{T}_0).$$

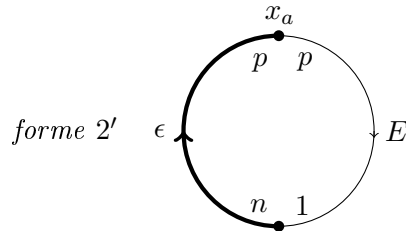
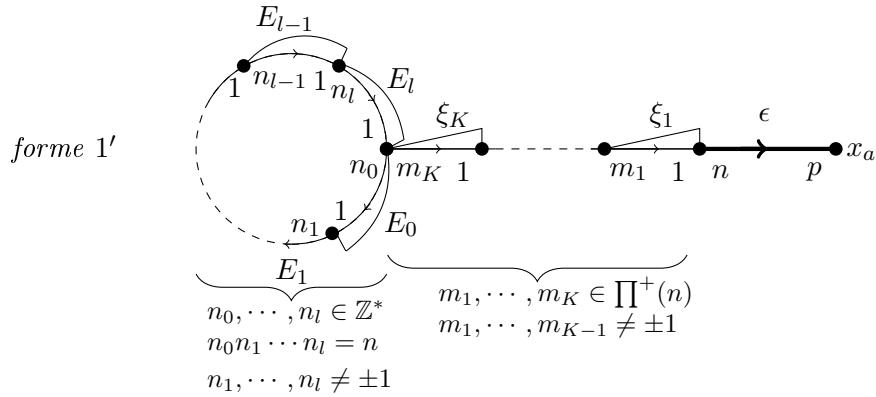
□

A l'aide du Lemme 2.5 et du résultat précédent, on déduit ce qui suit.

**Lemme 2.18.** *Soit  $\hat{T} \in \mathcal{D}_{p, pn}$  obtenu par le Lemme 2.17 où  $T \in \mathcal{D}_H$ .*

*A subdivisions près, le graphe quotient marqué de  $\hat{T}$  est de la forme 1' ou 2'.*

*De plus,  $T$  s'obtient en écrasant l'arête  $\epsilon$ .*



où  $x_a$  est l'image dans le graphe quotient de l'unique sommet fixé par  $\langle a \rangle$  dans  $\hat{T}$ .

*Remarque 2.19.* La différence entre la forme 1 et la forme 1' est l'étiquette  $m_0$  de  $\epsilon$  qui est égale  $n$  dans le cas de la forme 1'.

*Démonstration.* On considère donc  $\hat{T} \in \mathcal{D}_{p,pn}$  obtenu par le Lemme 2.17 à partir de  $T \in \mathcal{D}_H$ .

$\hat{T} \in \mathcal{D}_{p,pn}$  et ainsi par le Lemme 2.5,  $\hat{T}$  est de la forme 1 ou 2.

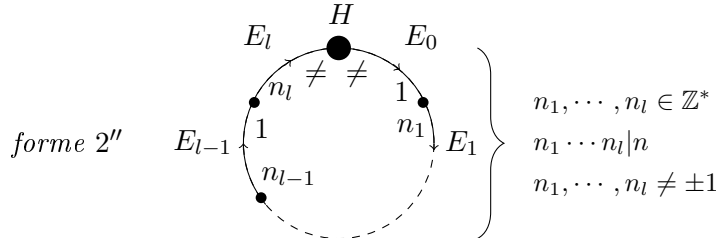
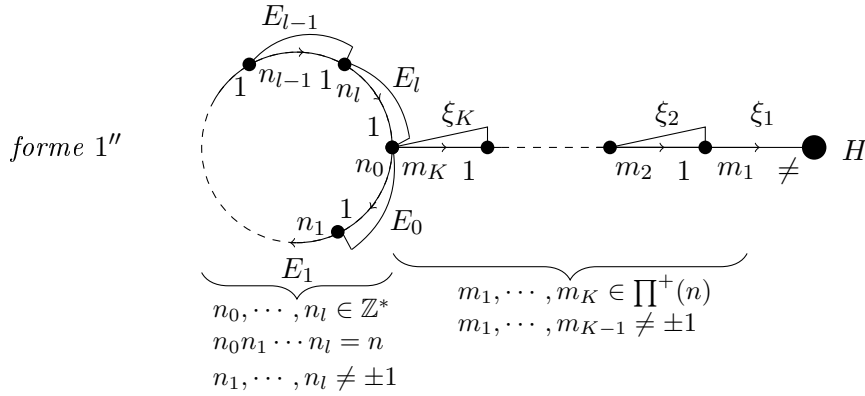
Le Lemme 2.17 impose une contrainte supplémentaire au niveau des étiquettes du graphe étiqueté de  $\hat{T}$ . En effet, par construction de  $\hat{T}$ , le graphe étiqueté de  $\hat{T}$  doit contenir une arête étiquetée  $p$  et  $n$  contenant le sommet  $x_a$ .

On a donc

- si  $\hat{T}$  est de la forme 1 alors la seule possibilité pour cette arête est l'arête  $\epsilon$  avec  $m_0 = n$  et,
- si  $\hat{T}$  est de la forme 2 alors la seule possibilité pour cette arête est l'arête  $\epsilon$  qui doit contenir  $x_a$  ainsi  $q_{K'} = n$  et donc  $q_0 = p$  car  $p \mid q_0$  et  $q_0 \cdots q_{K'} = pn$ .  $\square$

**Corollaire 2.20.** Soit  $T \in \mathcal{D}_H$ .

A subdivisions près, le graphe de groupes quotient marqué de  $T$  est de la forme 1'' ou 2''.



où  $G_{\xi_1}$  et  $G_{f_i}$  sont des sous-groupes maximaux cycliques dans  $H$ .

*Remarque 2.21.* Si le graphe quotient d'un  $BS(p, pn)$ -arbre de  $\mathcal{D}_H$  est un cercle alors le nombre  $m$  d'orbites d'arêtes vérifie  $m \leq r_0 + \dots + r_q$  où  $n = n_0^{r_0} \dots n_q^{r_q}$  est la décomposition en nombres premiers de  $n$ .

*Démonstration.* Il s'agit ici d'un corollaire immédiat du Lemme 2.18.

En effet, si on considère un  $G$ -arbre  $T \in \mathcal{D}_H$  alors par le Lemme 2.17, il existe  $\hat{T} \in \mathcal{D}_{p, pn}$  dont le graphe étiqueté est de la forme 1' ou 2' par le Lemme 2.18.

Par conséquent, en écrasant le sous-arbre minimal de  $H$  dans le graphe étiqueté de  $\hat{T}$  on obtient le graphe quotient de  $T$ .

Ainsi, en écrasant l'orbite du sous-arbre minimal de  $H$  dans chacune des formes possibles pour le graphe étiqueté de  $\hat{T}$ , on obtient les formes 1'' ou 2''.

On remarque qu'il est possible d'obtenir la forme 2'' soit par un écrasement de la forme 2' et dans ce cas la forme 2'' ne contient qu'une unique orbite d'arêtes soit par un écrasement de la forme 1' lorsque le bâton n'est formé que de l'arête  $\epsilon$  et dans ce cas la forme 2'' peut posséder plusieurs orbites d'arêtes.  $\square$

# Chapitre 3

## Automorphismes paraboliques

### 3.1 Fonction déplacement

A partir de la définition de la métrique de Lipschitz  $d_{Lip}$ , il est possible de définir une fonction déplacement

**Définition 3.1.** Soit  $\mathcal{D}$  un espace de déformations  $Out(G)$ -invariant et  $\Phi \in Out(G)$ .

La fonction définie comme suit

$$\begin{aligned} \delta_\Phi : PD &\longrightarrow \mathbb{R}^{+*} \\ T &\longmapsto d_{Lip}(T, T \cdot \Phi) \end{aligned}$$

est appelée *fonction déplacement*.

**Définition 3.2.** Soit  $\mathcal{D}$  un espace de déformation quelconque et  $\Phi \in Out(G)$ . On distinguera les 3 cas suivants :

- $\Phi$  est *elliptique* dans  $\mathcal{D}$  si  $\inf \delta_\Phi$  est réalisé et  $\inf \delta_\Phi = 0$ ,
- $\Phi$  est *hyperbolique* dans  $\mathcal{D}$  si  $\inf \delta_\Phi$  est réalisé et est non nul et,
- $\Phi$  est *parabolique* dans  $\mathcal{D}$  si  $\inf \delta_\Phi$  n'est pas réalisé dans  $\mathcal{D}$ .

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant

**Théorème 3.3.** *Tout automorphisme  $\Phi \in Out(G)$  parabolique dans  $\mathcal{D}_H$  est réductible dans  $\mathcal{D}_H$  (Définition 2.10).*

Pour ce faire, il est nécessaire d'introduire la notion de suite minimisante.

**Définition 3.4.** Soit  $\Phi \in Out(G)$  parabolique. Une suite de  $G$ -arbres de  $PD$   $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est dite *minimisante* si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d_{Lip}(T_k, T_k \cdot \Phi) = \inf \delta_\Phi.$$



Par la suite, on distinguera deux situations : la première dans laquelle on considèrera une suite minimisante ayant un nombre borné d'orbites d'arêtes et la seconde où on considèrera une suite minimisante ayant un nombre non borné d'orbites d'arêtes et on démontrera plusieurs résultats permettant d'étudier ces deux cas.

## 3.2 Nombre borné d'orbites d'arêtes

Par la suite on considèrera l'ensemble suivant

$$\mathcal{D}_{H,1} = \{T \in \mathcal{D}_H \mid \text{covol}(T) = 1\} \subset \mathcal{D}_H.$$

**Définition 3.5.** Soit  $\theta > 0$ ,  $\mathcal{D}_{H,1}(\theta)$  est le sous-espace de  $\mathcal{D}_{H,1}$   $\text{Out}(BS(p, pn))$ -invariant constitué des  $G$ -arbres  $T \in \mathcal{D}_{H,1}$  tels que  $l_T(g) \geq \theta$  pour tout élément hyperbolique  $g \in G$ .

On l'appelle la *partie  $\theta$ -épaisse*.

Il est possible de caractériser plus précisément les  $G$ -arbres de la partie épaisse.

**Lemme 3.6.** Soit  $T \in \mathcal{D}_{H,1}$  de la forme  $1''$  ou  $2''$  (voir page 53) sans sommet redondant. L'image de l'axe d'un élément hyperbolique de  $BS(p, pn)$  dans le graphe quotient de  $T$  contient soit  $F$  soit  $\gamma$ .

En particulier,

$$T \in \mathcal{D}_{H,1}(\theta) \iff 2L_F \geq \theta \text{ ou } L_\gamma \geq \theta$$

où  $L_F$  désigne la longueur de l'unique arête du graphe quotient ayant deux symboles  $\neq$  à chacune des extrémités et  $L_\gamma$  la somme des longueurs des arêtes du cercle du graphe quotient de  $T$ .

*Remarque 3.7.* Tout  $BS(p, pn)$ -arbre de  $\mathcal{D}_{H,1}$  est de la forme  $1''$  ou  $2''$ .

Tout  $BS(p, pn)$ -arbre de  $\mathcal{D}_{H,1}$  sans sommet redondant de la forme  $1''$  possède une unique arête ayant deux symboles  $\neq$  à chacune de ses extrémités dans son graphe quotient, on note cette arête  $F$ , de longueur notée  $L_F$ , et il s'agit de  $\xi_1$  dans le cas de la forme  $1''$  et de  $E_l$  dans le cas de la forme  $2''$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{C}_g$  l'axe d'un élément hyperbolique  $g$  et  $p : T \rightarrow \Gamma = T/BS(p, pn)$  la projection de  $T$  sur son graphe quotient.

Soit  $e$  une arête du cercle  $\gamma$ .

Si  $p(\mathcal{C}_g) \cap F = \emptyset$  et  $p(\mathcal{C}_g) \cap e = \emptyset$  alors on considère le segment  $\Gamma' = \Gamma \setminus \{F, e\}$ .

On peut identifier ce segment avec  $[0, 1]$  de sorte que chaque arête de  $\Gamma'$  a un indice 1 à son sommet minimum (pour l'ordre de  $[0, 1]$ ).

Soit  $v \in \Gamma'$  le sommet correspond à la valeur minimale de  $p(\mathcal{C}_g)$  et  $v_0 \in \mathcal{C}_g$  un antécédent.

$\mathcal{C}_g$  es l'axe d'un élément hyperbolique et donc il y a deux arêtes incidentes sur

chaque sommet de  $\mathcal{C}_g$ . On note  $e_1, e_2$  deux arêtes de  $\mathcal{C}_g$  incidentes sur  $v_0$ .  $e_1$  et  $e_2$  sont dans la même orbite mais leur image commune par  $p$  a un indice 1 en  $v$  ce qui implique  $e_1 = e_2$  et ainsi on obtient une contradiction. Par conséquent, l'image de  $\mathcal{C}_g$  contient soit  $F$  soit  $\gamma$ .

Par la suite, on suppose  $T \in \mathcal{D}_{H,1}(\theta)$  i.e. tout élément hyperbolique a une longueur de translation  $l_T(g) \geq \theta$ .

On considère  $\tilde{F}$  un relevé de  $F$  dans  $T$ ,  $h_1 \in BS(p, pn)$  (resp.  $h_2 \in BS(p, pn)$ ) élément du stabilisateur de l'origine (resp. du sommet terminal) de  $\tilde{F}$  n'appartenant pas au stabilisateur de  $\tilde{F}$ , ces choix sont possibles en raison des symboles  $\neq$  présents à chaque extrémité de  $F$ . L'axe de l'élément hyperbolique  $g = h_2 h_1$  a pour domaine fondamental  $\tilde{F} \cup h_2 \tilde{F}$  et donc on a  $2L_F = l_T(h_2 h_1) \geq \theta$ .

On considère également l'axe d'un élément hyperbolique dont un domaine fondamental a pour image dans le graphe quotient le cercle. On a donc  $L_\gamma = l_T(g) \geq \theta$ . On démontre maintenant l'implication réciproque.

Par ce qui précède, l'image dans le graphe quotient de l'axe  $\mathcal{C}_g$  de l'élément hyperbolique  $g$  contient soit  $F$  soit  $\gamma$ . S'il contient  $F$  alors notons  $\tilde{F}$  un relevé de  $F$  dans  $\mathcal{C}_g$ . A chaque sommet de  $\tilde{F}$ , il y a deux arêtes dans l'axe hyperbolique de  $g$  (car celui-ci est isométrique à  $\mathbb{R}$ ). Cependant toutes les arêtes incidentes sur l'un des deux sommets de  $\tilde{F}$  sont dans l'orbite de  $F$  et donc tout domaine fondamental de  $\mathcal{C}_g$  contient deux arêtes dans l'orbite de  $F$  (chacune ayant une orientation différente) et ainsi

$$l_T(g) \geq 2L_F \geq \theta$$

ou

$$l_T(g) \geq L_\gamma \geq \theta.$$

□

La Proposition 5.9 de [Mei15] ne peut pas s'appliquer directement ici car  $Out(BS(p, pn))$  n'agit pas sur  $\mathcal{D}_{H,1}$  avec un nombre fini d'orbites de simplexes. Par conséquent, nous redémontrons cette Proposition de manière adaptée à notre situation.

**Proposition 3.8.** *Soit  $\Phi \in Out(BS(p, pn))$  parabolique et  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de  $BS(p, pn)$ -arbres dans  $\mathcal{D}_{H,1}$  minimisante dont chaque  $BS(p, pn)$ -arbre a un nombre borné d'orbites d'arêtes alors pour tout  $\theta > 0$ ,  $\{k \in \mathbb{N}, T_k \in \mathcal{D}_{H,1}(\theta)\}$  est fini.*

*Démonstration.* On considère  $\Phi \in Out(BS(p, pn))$  parabolique et une suite minimisante  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $BS(p, pn)$ -arbres dans  $\mathcal{D}_{H,1}$  ayant un nombre borné d'orbites d'arêtes.

On raisonne par l'absurde. Ainsi, quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que

$$\exists \theta > 0, \forall k \in \mathbb{N}, T_k \in \mathcal{D}_{H,1}(\theta).$$

On note  $\Sigma_k$  le simplexe de  $\mathcal{D}_{H,1}$  obtenu en faisant varier la longueur des arêtes de  $T_k$  (que l'on peut supposer ne contenant aucun sommet redondant).

On considère

$$\Sigma_{\theta,k} = \Sigma_k \cap \mathcal{D}_{H,1}(\theta)$$

ainsi qu'une suite  $(T'_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $BS(p, pn)$ -arbres dans  $\mathcal{D}_{H,1}$  définie comme suit

$$Lip(T'_k, T'_k \cdot \Phi) = \inf_{T \in \Sigma_{\theta}(T_k)} Lip(T, T \cdot \Phi).$$

$(T'_k)_{k \in \mathbb{N}}$  existe car  $\Sigma_{\theta,k}$  est compact et la fonction  $T \rightarrow Lip(T, T \cdot \Phi)$  est continue (Lemme 31 de [Mei15]) pour la topologie des axes de translation qui coïncide, en restriction au simplexe  $\Sigma_k$ , avec les deux autres topologies dont on peut munir l'espace de déformation  $\mathcal{D}_{H,1}$ .

On peut supposer ces  $G$ -arbres sans sommet redondant comme précédemment.

On remarque également que

$$Lip(T_k, T_k \cdot \Phi) \geq Lip(T'_k, T'_k \cdot \Phi)$$

ainsi la suite  $(T'_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite minimisante.

Les  $BS(p, pn)$ -arbres de  $\Sigma_{\theta,k}$  ont, par hypothèse, un nombre borné d'orbites d'arêtes que l'on peut supposer constant, il sera noté  $l$ . On choisit maintenant de numéroter les  $l$  orbites d'arêtes non orientées  $f_1, \dots, f_l$ .

On considère l'application suivante

$$\begin{aligned} Num_k : \quad \Sigma_{\theta,k} \subset \mathbb{R}^l &\longrightarrow \Sigma_{\theta,k} \subset \mathcal{D}_{H,1} \\ \vec{L} = (L_1, \dots, L_l) &\longmapsto T_k(\vec{L}) \end{aligned}$$

où  $\Sigma_{\theta,k}$  désigne le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^l$  dont les  $l$ -uplets correspondant à des longueurs d'orbites d'arêtes d'éléments de  $\Sigma_{\theta,k}$  et ainsi  $T_k(\vec{L})$  désigne l'élément de  $\Sigma_{\theta,k}$  tel que, pour tout  $i \in \{1, \dots, l\}$ , la longueur des arêtes de l'orbite  $f_i$  est  $L_i$ .

On rappelle que  $F$  est l'unique arête du graphe quotient de tout élément de la forme  $1''$  ou  $2''$  de  $\Sigma_{\theta,k}$ ,  $L_F$  la longueur correspondante, ayant deux sommets ayant des étiquettes  $\neq$  et  $\gamma$  est le cercle du graphe quotient de tout élément de  $\Sigma_{\theta,k}$ ,  $L_\gamma$  la longueur correspondante. D'après le Lemme 3.6,

$$\begin{aligned} \Sigma_{\theta,k} = \{ \vec{L} = (L_1, \dots, L_l) \in \mathbb{R}^l \mid \sum_{i=1}^l L_i = 1, L_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, l\}, \\ L_F \geq \frac{\theta}{2} \text{ ou } L_\gamma \geq \theta \}. \end{aligned}$$

En particulier, quitte à extraire,  $\tilde{\Sigma}_{\theta,k}$  est indépendant de  $k$ .

En utilisant la Proposition 1.24, on obtient les égalités suivantes

$$\begin{aligned} Lip(T'_k, T'_k \cdot \Phi) &= \inf_{\tilde{L} \in \tilde{\Sigma}_{\theta,k}} \sup_{g \in \text{Cand}(T_k)} \frac{l_{T_k(\tilde{L}) \cdot \Phi}(g)}{l_{T_k(\tilde{L})}(g)} \\ &= \inf_{\tilde{L} \in \tilde{\Sigma}_{\theta,k}} \sup_{g \in \text{Cand}(T_k)} \frac{l_{T_k(\tilde{L})}(\Phi(g))}{l_{T_k(\tilde{L})}(g)}. \end{aligned}$$

Pour  $g \in \text{Cand}(T_k)$ , on considère un chemin d'arêtes domaine fondamental pour l'axe hyperbolique  $C_g$  de  $g$  dans  $T_k$  dont l'image dans le graphe quotient de  $T_k$  est notée  $\gamma_g$ . On notera, pour  $i \in \{0, \dots, l\}$ ,  $b_{k,i,g}$  le nombre d'occurrences de  $f_i$  dans  $\gamma_g$  ainsi

$$l_{T_k(\tilde{L})}(g) = b_{k,1,g}L_1 + \dots + b_{k,l,g}L_l.$$

De la même façon pour  $\Phi(g)$ , on considère un chemin d'arêtes domaine fondamental pour l'axe hyperbolique  $C_{\Phi(g)}$  de  $\Phi(g)$  dans  $T_k$  dont l'image dans le graphe quotient de  $T_k$  est notée  $\gamma_{\Phi(g)}$ . On notera, pour  $i \in \{0, \dots, l\}$ ,  $a_{k,i,g}$  le nombre d'occurrences de  $f_i$  dans  $\gamma_{\Phi(g)}$  ainsi

$$l_{T_k(\tilde{L})}(\Phi(g)) = a_{k,1,g}L_1 + \dots + a_{k,l,g}L_l.$$

On a donc

$$Lip(T'_k, T'_k \cdot \Phi) = \inf_{\tilde{L} \in \tilde{\Sigma}_{\theta,k}} \sup_{g \in \text{Cand}(T_k)} \frac{a_{k,1,g}L_1 + \dots + a_{k,l,g}L_l}{b_{k,1,g}L_1 + \dots + b_{k,l,g}L_l}.$$

La suite du raisonnement va consister à démontrer que

$$\exists C \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, l\}, \forall k \in \mathbb{N}, \forall g \in \text{Cand}_G(T_k), a_{k,i,g} \leq C, b_{k,i,g} \leq C$$

et ce malgré le fait que l'ensemble des candidats peut être infini.

D'après la Définition d'un candidat (Définition 1.23), pour tout  $i \in \{1, \dots, l\}$  et tout  $g \in \text{Cand}(T_k)$ ,

$$0 \leq b_{k,i,g} \leq 2.$$

On considère maintenant  $a_{k,i,g}$  et  $f_i$  l'orbite d'arêtes correspondante ainsi qu'un domaine fondamental pour l'axe de  $\Phi(g)$  que l'on subdivise en  $\lceil \frac{a_{k,i,g}}{5} \rceil \leq \frac{a_{k,i,g}}{5} + 1$  intervalles.

Le nombre d'arêtes dans l'orbite de  $f_i$  qui chevauchent un des points de subdivision est majoré par  $\lceil \frac{a_{k,i,g}}{5} \rceil - 1$ . Si aucun de ces intervalles ne contient 3 arêtes dans

l'orbite de  $f_i$  alors le nombre d'arêtes dans l'orbite de  $f_i$  qui ne chevauchent aucun point de subdivision est majoré par  $2\lceil \frac{a_{k,i,g}}{5} \rceil$ .

Dans ce cas, on obtient la majoration suivante du nombre d'arêtes dans l'orbite de  $f_i$  dans le domaine fondamental de  $\Phi(g)$ .

$$a_{k,i,g} \leq \lceil \frac{a_{k,i,g}}{5} \rceil - 1 + 2\lceil \frac{a_{k,i,g}}{5} \rceil = 3\lceil \frac{a_{k,i,g}}{5} \rceil - 1 \leq 3\frac{a_{k,i,g}}{5} + 2$$

et donc

$$a_{k,i,g} \leq 5.$$

On peut donc supposer maintenant qu'il existe un intervalle contenant 3 arêtes dans l'orbite de  $f_i$  et donc en particulier 2 occurrences d'arêtes dans l'orbite de  $f_i$  orientées dans la même direction notées  $f$  et  $f' \in G \cdot f$ . Par conséquent, il existe  $h \in G$  élément hyperbolique envoyant  $f$  et sur  $f'$  et puisque  $T'_k$  appartient à la partie  $\theta$ -épaisse, on a

$$l_{T'_k}(h) \geq \theta.$$

On a subdivisé un domaine fondamental de  $\Phi(g)$  en  $\lceil \frac{a_{i,k,g}}{5} \rceil$  intervalles ainsi

$$\frac{a_{i,k,g}}{5} \leq \lceil \frac{a_{i,k,g}}{5} \rceil$$

et donc

$$\frac{5l_{T'_k}(\Phi(g))}{a_{k,i,g}} \geq l_{T'_k}(h) \geq \theta$$

i.e.

$$a_{k,i,g} \leq \frac{5l_{T'_k}(\Phi(g))}{\theta}.$$

Pour conclure, il reste à voir que  $l_{T'_k}(\Phi(g))$  est bornée indépendamment de  $k$  car il existe  $L_{1,k}, \dots, L_{l,k} \in [0, 1]$  tel que

$$T'_k = T_k(L_{1,k}, \dots, L_{l,k})$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} \forall g \in G, l_{T'_k}(\Phi(g)) &\leq Lip(T'_k, T'_k \cdot \Phi) l_{T'_k}(g) \\ &\leq Lip(T'_k, T'_k \cdot \Phi) (b_{k,1,g} L_{1,k} + \dots + b_{k,l,g} L_{l,k}) \\ &\leq 2Lip(T'_k, T'_k \cdot \Phi) (L_{1,k} + \dots + L_{l,k}). \end{aligned}$$

$T'_k$  est de covolume 1 et donc  $L_{1,k} + \dots + L_{l,k} = 1$  ainsi

$$l_{T'_k}(\Phi(g)) \leq 2Lip(T'_k, T'_k \cdot \Phi).$$

De plus,  $Lip(T'_k, T'_k \cdot \Phi)$  est bornée indépendamment de  $k$  car  $(T'_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite minimisante.

On vient donc de démontrer qu'il existe  $C \geq 0$  tel que  $a_{k,i,g} \leq C$  et  $b_{k,i,g} \leq C$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, l\}$ , tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $g \in Cand_G(T_k)$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et tout  $g \in Cand(T_k)$ , on introduit la fonction  $H_{g,k}$  qui est une fraction rationnelle en les variables  $x_0, \dots, x_l$ ,

$$H_{g,k}(x_1, \dots, x_l) = \frac{a_{k,1,g}x_1 + \dots + a_{k,l,g}x_l}{b_{k,1,g}x_1 + \dots + b_{k,l,g}x_l}.$$

On a donc

$$Lip(T'_k, T'_k \cdot \Phi) = \inf_{\vec{L} \in \Sigma_{\theta,k}} \sup_{g \in Cand(T_k)} H_{g,k}(\vec{L})$$

On note  $\mathcal{H}^{\leq C}$  l'ensemble fini de toutes les homographies en  $l$  variables à coefficients entiers  $\leq C$  et on considère  $\mathcal{H}_k = \{H_{g,k} \mid g \in Cand_G(T_k)\} \subset \mathcal{H}^{\leq C}$ .

$\mathcal{H}^{\leq C}$  n'a qu'un nombre fini de sous-ensembles et donc, quitte à extraire, on peut supposer que  $\mathcal{H}_k$  ne dépend pas de  $k$  et est un de ces sous-ensembles, noté  $\mathcal{H}_0$ .

$$Lip(T'_k, T'_k \cdot \Phi) = \inf_{\vec{L} \in \Sigma_{\theta,k}} \sup_{H \in \mathcal{H}_0} H(\vec{L}).$$

De plus, comme démontré précédemment,  $\Sigma_{\theta,k}$  est indépendant de  $k$ .

Par conséquent,  $Lip(T'_k, T'_k \cdot \Phi)$  est indépendant de  $k$  et donc  $\inf \delta_\Phi$  est atteint ce qui est une contradiction car  $(T'_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite minimisante alors que  $\Phi$  est parabolique.  $\square$

**Corollaire 3.9.** *Sous les mêmes hypothèses que la Proposition 3.8, il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $f_k : T_k \rightarrow T_k \cdot \Phi$  préserve une sous-forêt de  $T_k$  principale  $G$ -invariante essentielle propre.*

*En particulier,  $\Phi$  est réductible dans  $\mathcal{D}_H$ .*

*Démonstration.* La démonstration est similaire à celle de de [Mei15].

Pour  $T \in \mathcal{D}_{H,1}$  et  $\epsilon > 0$ , on note  $Y^\epsilon \subset T$  la réunion de tous les sous-ensembles de la forme  $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k [x, gx]$ , où  $g$  est hyperbolique et  $x \in T$  tel que  $d(x, gx) \leq \epsilon$ .

$Y^\epsilon$  est  $BS(p, pn)$ -invariant car  $BS(p, pn)$  agit sur  $T$  par isométries et donc pour  $h \in BS(p, pn)$ ,

$$h\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} g^k [x, gx]\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (hgh^{-1})^k [hx, hgx] \subset Y^\epsilon.$$

Puisque les hypothèses de ce Corollaire sont les même que celles de la Proposition 3.8, le nombre de  $BS(p, pn)$ -orbites d'arêtes est majoré par  $K$  et ainsi dans

tout  $BS(p, pn)$ -arbre de  $\mathcal{D}_{H,1}$ , il existe une orbite d'arêtes dont les arêtes sont de longueur  $\geq \frac{1}{K}$  et donc pour  $\epsilon < \frac{1}{K}$ ,

$$Y^\epsilon \subsetneq T.$$

De plus,  $K$  constitue également une borne sur la longueur d'une chaîne de sous-forêts sans sommet de valence 1,  $BS(p, pn)$ -invariantes et propres de tout  $BS(p, pn)$ -arbre de  $\mathcal{D}_{H,1}$ .

On pose  $D = \inf \delta_\Phi$ ,  $\epsilon < \frac{1}{K}$ ,  $\Theta = \frac{\epsilon}{e^{K(D+1)}}$  et  $\delta_i = \frac{\epsilon}{e^{i(D+1)}}$ .

Par la Proposition 3.8, il existe  $k$ ,  $T_k \notin \mathcal{D}_{H,1}(\Theta)$  et donc il existe un élément hyperbolique  $g \in BS(p, pn)$  tel que  $l_{T_k}(g) < \Theta$  et  $A_g \subset Y_k^{\delta_K} \subset Y_k^{\delta_i}$ . Par conséquent, pour tout  $i \in \{0, \dots, K\}$ ,  $Y_k^{\delta_i}$  est essentielle (et donc non vide) et donc la sous-forêt  $core(Y_k^{\delta_i})$  est également essentielle. On obtient ainsi une chaîne de sous-forêts non vides

$$Y_k^{\delta_K} \subset Y_k^{\delta_{K-1}} \subset \dots \subset Y_k^{\delta_2} \subset Y_k^{\delta_1} \subset Y_k^\epsilon = Y_k^{\delta_0}$$

et la chaîne de sous-forêts principales (sans sommet de valence 1) associée

$$core(Y_k^{\delta_K}) \subset core(Y_k^{\delta_{K-1}}) \subset \dots \subset core(Y_k^{\delta_2}) \subset core(Y_k^{\delta_1}) \subset Y_k^\epsilon = Y_k^{\delta_0}.$$

Par ce qui précède, il existe donc  $i \in \{0, \dots, K\}$  tel que

$$core(Y_k^{\delta_{i+1}}) = core(Y_k^{\delta_i}).$$

De plus, en notant  $f_k : T_k \rightarrow T_k \cdot \Phi$  une application optimale, puisque  $D = \inf \delta_\Phi$  alors  $Lip(f) \leq e^{D+1}$  et donc

$$f_k(core(Y_k^{\delta_{i+1}})) \subset f_k(Y_k^{\delta_{i+1}}) \subset Y_k^{\delta_i}.$$

En effet, si  $x \in Y_k^{\delta_{i+1}}$  alors, pour  $g$  hyperbolique,

$$d(x, gx) \leq \delta_{i+1}$$

et donc

$$d(f_k(x), gf_k(x)) \leq Lip(f_k)d(x, gx) \leq e^{D+1}\delta_{i+1} = e^{D+1}\frac{\epsilon}{e^{(i+1)(D+1)}} = \frac{\epsilon}{e^{i(D+1)}}$$

ainsi

$$f_k(x) \in Y_k^{\delta_i}.$$

D'après le Lemme 2.9, il existe une application  $BS(p, pn)$ -équivariante

$$p_k : T_k \rightarrow T_k$$

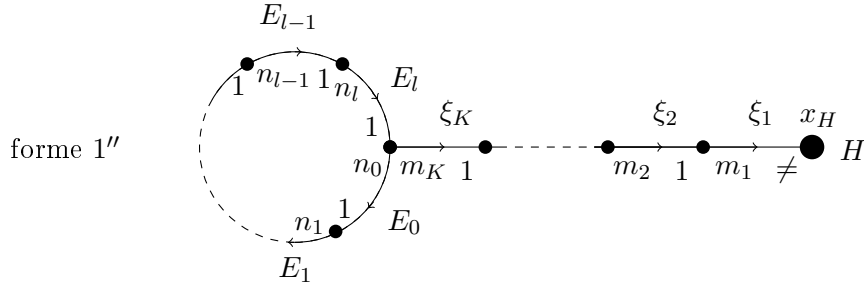
envoyant  $Y_k^{\delta_i}$  sur  $Core(Y_k^{\delta_i})$ .

Par conséquent, l'application  $f'_k = f_k \circ p_k$  laisse invariante la sous-forêt propre  $BS(p, pn)$ -invariante essentielle  $core(Y_k^{\delta_i}) = core(Y_k^{\delta_{i+1}})$  invariante et donc on obtient la conclusion du Corollaire ainsi que  $\Phi$  réductible par définition d'une application réductible.  $\square$

### 3.3 Nombre non borné d'orbites d'arêtes

On traite maintenant le cas des suites minimisantes ayant un nombre non borné d'orbites d'arêtes et on va montrer que soit  $\phi$  est réductible soit  $\Phi$  est irréductible et toute application  $T \in \mathcal{D}_H \rightarrow T \cdot \Phi$  factorise par un arbre dans le graphe quotient est un cercle.

On rappelle ici qu'un  $BS(p, pn)$ -arbre de  $\mathcal{D}_H$  est de la forme  $1''$  si son graphe de groupes quotient marqué est de la forme suivante



$T$  de la forme  $1''$  et on rappelle que l'unique cycle du graphe quotient de  $T$  est appelé cercle et que les arêtes du complémentaire forment le bâton.

On démontrera la Proposition suivante :

**Proposition 3.10.** *Si on considère  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  une application optimale et  $T \in \mathcal{D}_H$  alors soit  $\Phi$  est réductible dans  $\mathcal{D}_H$  soit il existe  $T' \in \mathcal{D}_H$  dont le graphe quotient est un cercle (i.e. de la forme  $2''$ ) et vérifie*

$$Lip(T', T' \cdot \Phi) \leq Lip(T, T \cdot \Phi).$$

Cette Proposition permet de démontrer le Théorème 3.3.

*Démonstration du Théorème 3.3.*  $\Phi$  est parabolique et donc on peut considérer une suite  $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de  $BS(p, pn)$ -arbres dans  $\mathcal{PD}_H$  telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \lim_{k \rightarrow \infty} d_{Lip}(T_k, T_k \cdot \Phi) = \inf \delta_\Phi.$$

D'après la Proposition 3.10, on peut supposer que le graphe quotient de  $T_k$  est un cercle et donc a un nombre borné d'orbites d'arêtes et ainsi on peut conclure par le Corollaire 3.9.

Par conséquent,  $\Phi$  est réductible dans  $\mathcal{D}_H$ . □

Afin de pouvoir démontrer la Proposition 3.10, il faut démontrer un Lemme intermédiaire.



**Lemme 3.11.** *Soit  $T \in \mathcal{D}_H$ ,  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  et  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  une application optimale alors soit  $\Phi$  réductible dans  $\mathcal{D}_H$  soit il existe  $T' \in \mathcal{D}_H$  tel que*

$$\text{Lip}(T' \rightarrow T' \cdot \Phi) \leq \text{Lip}(T \rightarrow T \cdot \Phi)$$

et  $f' : T' \rightarrow T' \cdot \Phi$  optimale telle que  $\Delta(f') = T'$ .

*Démonstration.* On note  $\Delta(f)$  le graphe de tension de  $f$  et  $\Sigma$  le simplexe de  $\bar{\mathcal{D}}_H$  obtenu en faisant varier les longueurs de  $T$ .

On considère la fonction

$$\begin{aligned} \delta_{\Phi, \Sigma} : \Sigma \cap \mathcal{D}_H &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ T_\Sigma &\longmapsto \delta_{\Phi, \Sigma}(T_\Sigma) = d_{\text{Lip}}(T_\Sigma \rightarrow T_\Sigma \cdot \Phi) \end{aligned}$$

- a) On suppose qu'il existe une suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'arbres de  $\Sigma \cap \mathcal{D}_H$  convergeant vers  $T_\infty \notin \mathcal{D}_H$  (pour la topologie de Gromov-Hausdorff équivariante qui coïncide avec la topologie faible sur  $\Sigma$ ) et  $\delta_{\Phi, \Sigma}(T_n)$  est bornée indépendamment de  $n \in \mathbb{N}$ .

Par conséquent, on peut considérer une application  $G$ -équivariante et  $M$ -lipschitzienne  $f_n : T_n \rightarrow T_n \cdot \Phi$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Ainsi, par [Hor16], il existe  $f : T_\infty \rightarrow T_\infty \cdot \Phi$   $G$ -équivariante et  $M$ -lipschitzienne.

$T_\infty \in \Sigma$  et donc on l'obtient en modifiant les longueurs des arêtes de  $T$ . Certaines de ces nouvelles longueurs d'arêtes pourront s'annuler. On note alors  $Y \subset T$  la sous-forêt constituée des arêtes de  $T$  de longueur nulle dans  $T_\infty$ .

On considère maintenant  $Y_{\text{ess}}$  la sous-forêt essentielle qui lui est associée i.e.  $Y_{\text{ess}}$  est formée de la réunion des composantes connexes de  $Y$  contenant l'axe d'un élément hyperbolique.  $Y_{\text{ess}}$  est non vide car  $T_\infty \notin \mathcal{D}_H$  et donc il existe une composante connexe de  $Y$  contenant l'axe d'un élément hyperbolique.

$$Y_{\text{ess}} = \bigcup_{i=1}^n Y_{\text{ess}, i} \subset Y \subset T \xrightarrow{\pi} T_\infty$$

où, pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $Y_{\text{ess}, i}$  est une composante connexe de  $Y_{\text{ess}}$  dont le stabilisateur est noté  $K_i$ .

Soit  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $K_i$  fixe un point dans  $T_\infty$  et donc  $\Phi(K_i)$  fixe également un point dans  $T_\infty$ , on le note  $w_i \in T_\infty$ .

$\pi^{-1}(w_i)$  est une composante connexe de  $Y$  qui est  $\Phi(K_i)$ -invariante. De plus,  $\Phi(K_i)$  contient un élément hyperbolique dans  $T$  dont l'axe est contenu dans  $\pi^{-1}(w_i)$ .

On en déduit que  $\pi^{-1}(w_i) \subset Y_{\text{ess}}$  et donc il existe  $j_i \in \{1, \dots, n\}$  tel que

$$\Phi([K_i]) < [K_{j_i}].$$

Par le Lemme 2.12,  $\Phi$  est donc réductible.

- b) Sinon  $\delta_{\Phi, \Sigma}$  est propre et atteint son minimum *min* sur  $\Sigma \cap \mathcal{D}_H$ . Parmi les couples  $(T_\Sigma, f)$  tel que  $\delta_{\Phi, \Sigma}(T_\Sigma) = \sigma(f) = \text{min}$ , on choisit un couple pour lequel le graphe de tension  $\Delta$  est minimal alors on a

$$\delta_{\Phi, \Sigma}(T_\Sigma) \leq \delta_{\Phi, \Sigma}(T)$$

et

$$f(\Delta) \subset \Delta.$$

En effet, si  $f(\Delta) \not\subset \Delta$  alors il existe une arête  $e$  de  $\Delta$  dont l'image par  $f$  n'est pas contenue dans le graphe de tension. On modifie légèrement les longueurs des arêtes de  $T_\Sigma$  en diminuant la longueur des arêtes de  $T_\Sigma \setminus \Delta$  et en augmentant la longueur des arêtes de  $\Delta$  de sorte à maintenir le covolume égal à 1. Cette démarche n'augmente pas la constante de Lipschitz et produit un nouveau graphe de tension  $\Delta'$  strictement contenu dans le graphe de tension initial  $\Delta$  ce qui est impossible car le graphe de tension est supposé minimal.

On a donc  $f(\Delta) \subset \Delta$  et donc soit  $\Delta = T_\Sigma$  soit  $\Phi$  est réductible. En effet,  $\Delta$  est essentielle car  $f$  a deux portails à chaque sommet de son graphe de tension et donc pour toute arête  $e$  de  $\Delta$ ,  $f$  a deux portails à chaque sommet et peut donc être prolongée en un chemin  $f$ -légal contenant nécessairement une arête dans l'orbite de  $e$  (le nombre d'orbites d'arêtes est fini) noté  $g \cdot e$  où  $g \in G$  ainsi  $\Delta$  contient l'axe de l'élément hyperbolique  $g$ .

□

**Définition 3.12.** Soit  $T \in \mathcal{D}_H$  de la forme 1''.

On définit  $C(T)$  à l'aide des étiquettes des arêtes en adoptant la convention suivante : Soit  $e \in E(\text{baton})$  tel que  $G_{o(e)} \neq \mathbb{Z}$  alors on pose  $\lambda(e) = 1$ .

$$C(T) = \prod_{e \in E(\text{baton})} |\lambda(e)|.$$

On peut passer maintenant à la démonstration de la Proposition 3.10.

*Démonstration de la Proposition 3.10.* On considère donc  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  optimale et  $T \in \mathcal{D}_H$  de la forme 1''.

Par le Lemme 3.11, soit  $\Phi$  est réductible soit on peut supposer que  $\Delta(f) = T$ .

Afin de poursuivre, on peut donc supposer que  $\Delta(f) = T$  ainsi toutes les images des arêtes de  $T$  sont multipliées par le même facteur. Notons  $T_f = T \cdot \Phi$ . En rééchelonnant la métrique sur  $T$  (mais pas sur  $T_f$ ) on peut supposer que  $f$  est isométrique sur les arêtes et ainsi le Lemme 1.25 s'applique.

On subdivise les arêtes de  $T_f = T \cdot \Phi$  (mais pas de  $T$ ) de sorte que

$$f : T \longrightarrow T_f$$

envoie sommet sur sommet et on subdivise également les arêtes de  $T$  (mais pas de  $T_f$ ) de sorte que

$$f : T \longrightarrow T_f$$

envoie arête sur arête.

Par la suite, on conservera les notations de  $T$  et  $T \cdot \Phi$  pour les arbres obtenus après subdivision.

$f$  peut donc s'écrire comme une composition de pliages que l'on construira ci-après en plusieurs étapes.

$T$  est de la forme  $1''$  et donc le graphe quotient de  $T$  possède un unique cycle appelé le cercle tandis que les arêtes du complémentaire formeront le bâton.

Le Lemme suivant va nous permettre de démontrer la Proposition.

**Lemme 3.13.** *Si  $\Phi$  est irréductible dans  $\mathcal{D}_H$  alors il existe (Lemme 3.11)  $f : T \longrightarrow T \cdot \Phi$  optimale telle que  $\Delta(f) = T$  qui factorise par un arbre dont le graphe étiqueté est un cercle.*

Si  $\Phi$  est irréductible dans  $\mathcal{D}_H$ , alors  $f$  est la composition d'une suite de pliages (comme expliqué avant l'énoncé de ce Lemme) et donc isométriques sur les arêtes. Par conséquent, en notant  $T_C$  l'arbre dont le graphe étiqueté est un cercle, d'après le Lemme 1.25 on a

$$d_{Lip}(T_C, T_C \cdot \Phi) \leq d_{Lip}(T, T \cdot \Phi)$$

et ainsi on obtient le résultat de la Proposition. □

*Démonstration du Lemme 3.13.*  $f : T \longrightarrow T \cdot \Phi$  est optimale telle que  $\Delta(f) = T$ . D'après ce qui précède  $f$  s'écrit comme la composition d'une suite de pliages que l'on va construire en plusieurs étapes.

Par la suite on va distinguer deux cas : le cas  $A$  où le bâton est une forêt essentielle et le cas  $B$  où le bâton est une forêt non essentielle.

### Cas A

On commencera par traiter le cas  $A$  i.e. le bâton est une forêt essentielle. On colorie les arêtes du bâton en jaune et on laisse les autres sans coloriage ainsi  $T$  est muni d'un coloriage.

On note  $Y_{Couleur}(T)$  la sous-forêt de  $T$  (ou  $Y_{Couleur}$  s'il n'y a pas d'ambiguïté) constituée des arêtes d'une certaine couleur de  $T$ .

Lorsqu'on effectue un pliage entre deux arêtes d'une même couleur, l'arbre quotient obtenu hérite du coloriage induit.

### Etape 1

**Lemme 3.14.** *Il existe  $T' \in \mathcal{D}_H$ ,  $P_J, Q_J : T \longrightarrow T'$  et  $f' : T' \longrightarrow T \cdot \Phi$  tels que :*

- *$T'$  est obtenu de  $T$  par une succession de pliages impliquant uniquement des arêtes jaunes. L'application associée est notée  $P_J$  et  $T'$  hérite du coloriage induit,*
- *$Y_{\text{jaune}}(T') = \text{baton}(T')$ ,*
- *$C(T') = C(T)$ ,*
- *$Q_J(Y_{\text{jaune}}(T))$  est principale et  $Q_J(Y_{\text{jaune}}(T)) = \text{core}(P_J(Y_{\text{jaune}}(T)))$ ,*
- *$f = f' \circ P_J$  et,*
- *$f'$  est injective en restriction à chaque composante jaune.*

*Démonstration.* Si  $f$  est injective en restriction à chaque composante jaune alors le Lemme est évident avec  $Q_J = P_J$  l'application identité et  $f' = f$ .

Sinon  $f$  n'étant pas injective en restriction à chaque composante d'arêtes jaunes alors  $f$  identifie deux arêtes jaunes adjacentes.

On note  $T^1$  l'arbre obtenu en identifiant ces 2 arêtes que l'on munit du coloriage induit et  $p^0$  le pliage  $T = T^0 \longrightarrow T^1$ .

De plus, on vérifie que  $Y_{\text{jaune}}(T^1) = \text{baton}(T^1)$  et  $C(T^1) = C(T^0) = C(T)$ .

On peut répéter cette construction. Cette démarche s'arrête. En effet, le nombre d'orbites d'arêtes de  $T^i$  est majoré par le nombre d'orbites de  $T$  et si on répète cette démarche une infinité de fois alors il existe  $e \subset T$  et une infinité d'indices  $i$  pour lesquels  $f_i$  identifie l'image  $e_i$  de  $e \in T_i$  avec une sous-arête de son orbite et ainsi, pour tout  $i$ ,

$$\text{Stab}(e_i) \subsetneq \text{Stab}(e_{i+1}).$$

On obtient donc une chaîne infinie de sous-groupes de type fini or pour toute arête  $e$  de tout arbre de  $\mathcal{D}_H$ , tout sous-groupe  $H \subset G_e$  est de type fini ainsi

$$\bigcup_i \text{Stab}(e_i)$$

est de type fini et donc la chaîne est stationnaire et la démarche s'arrête.

Ainsi de proche en proche, on peut écrire  $f = f' \circ p_J^k \circ \dots \circ p_J^0$  où les applications  $p_J^i : T^i \longrightarrow T^{i+1}$ ,  $i \in \{0, \dots, k\}$  sont des pliages qui impliquent des sous-arêtes jaunes,  $f' : T^{k+1} = T' \longrightarrow T \cdot \Phi$  est injective en restriction à chaque composante jaune,  $C(T') = C(T)$  et  $Y_{\text{jaune}}(T') = \text{baton}(T')$ .

On note  $P_J$  la composition de tous ces pliages jaunes  $f = f' \circ p_J^k \circ \dots \circ p_J^0 = f' \circ P_J$ . Il reste maintenant à construire  $Q_J$ .

Si  $P_J(Y_{\text{jaune}}(T))$  est principale alors on peut choisir  $Q_J = P_J$ .

Sinon on vérifie que  $P_J(Y_{Jaune}(T))$  est essentielle. En effet,  $Y_{Jaune}(T) = \text{baton}(T)$  est essentielle (par hypothèse, on est dans le cas  $A$ ). On peut considérer  $g \in BS(p, pn)$  un élément hyperbolique dont l'axe  $\gamma$  est contenu dans  $Y_{Jaune}(T)$ .  $T$  et  $T'$  sont dans le même espace de déformation et donc  $g$  est un élément hyperbolique dans  $T'$  dont l'axe est  $P_J(\gamma) \subset P_J(Y_{Jaune}(T))$ . Par conséquent,  $P_J(Y_{Jaune}(T))$  est essentielle.

On peut donc considérer l'application  $p : T' \rightarrow T'$  (voir Lemme 2.9) qui envoie  $P_J(Y_{Jaune}(T))$  sur  $\text{Core}(P_J(Y_{Jaune}(T)))$  et on définit  $Q_J = p \circ P_J$  ainsi

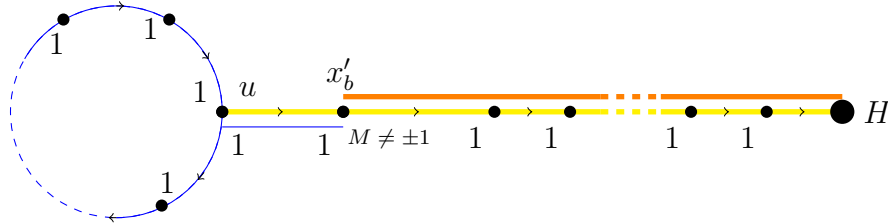
$$Q_J(Y_{Jaune}(T)) = \text{Core}(P_J(Y_{Jaune}(T)))$$

et  $Q_J(Y_{Jaune}(T))$  est principale.  $\square$

*Remarque 3.15.* Contrairement à  $P_J$ ,  $Q_J$  n'envoie pas forcément arête sur arête.

## Etape 2

Par la suite on va modifier le coloriage précédemment défini et on colorie en orange la sous-forêt  $Q_J(Y_{Jaune}(T))$  de  $T'$  et en bleu les arêtes qui n'ont pas été coloriées en orange. Ainsi le graphe de groupes quotient marqué de  $T'$  est muni d'un coloriage bleu et orange et est de la forme suivante



On appellera *étiquette de jonction* l'étiquette de l'arête orange adjacente à une arête bleue. Le sommet commun aux deux arêtes sera appelé *sommet de jonction*. Dans notre cas, le sommet de jonction est  $x'_b$  et l'étiquette de jonction  $M$  est différente de 1.

La complexité orange  $C_{Orange}(T)$  est le produit des étiquettes du sous-segment orange (de la même façon que dans la définition 3.12).

Pour le moment  $C_{Orange}(T) = C(T)$  mais dans la suite du raisonnement on considèrera des arbres pour lesquels la complexité sera différente de la complexité orange.

**Lemme 3.16.** *Il existe  $T'' \in \mathcal{D}_H$ ,  $P_B : T' \rightarrow T''$ ,  $f'' : T'' \rightarrow T \cdot \Phi$  et  $d \in \Pi^+(n)$  tels que*

- $T''$  est obtenu de  $T'$  par une succession de pliages impliquant uniquement des arêtes bleues. L'application associée est notée  $P_B$ ,
- $T''$  hérite donc d'un coloriage orange et bleu,
- $Y_{Orange}(T'') \subset \text{baton}(T'')$ ,

- l'étiquette de jonction dans  $T''$  est  $Md$  et  $C_{Orange}(T'') = dC_{Orange}(T')$  et,
- $f' = f'' \circ P_B$ .

*Démonstration.* Si  $f'$  est injective en restriction à chaque composante bleue alors le Lemme est évident avec  $P_B$  désignant l'application identité et  $f' = f''$ .

Sinon, comme précédemment on réalise des pliages entre arêtes bleues tant que ces pliages sont possibles et ainsi on obtient  $f' = f'' \circ P_B$  où

- $P_B : T' \rightarrow T''$  désigne la composition des pliages bleus effectués.

$$p_B = p_{m-1} \circ \cdots \circ p_0$$

où  $p_i : T'_i \rightarrow T'_{i+1}$  est un pliage impliquant uniquement des arêtes bleues avec  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ ,  $T'_0 = T'$  et  $T'_m = T''$  et,

- $f'' : T'' \rightarrow T \cdot \Phi$  est injective en restriction à chaque composante bleue.

Par récurrence sur le nombre de pliages, nous allons démontrer que  $T''$  est également de la forme  $1''$  et est muni d'un coloriage orange et bleu pour lequel l'étiquette de jonction est  $Md$  où  $d \in \Pi^+(n)$ ,  $C_{Orange}(T'') = dC_{Orange}(T')$  et  $Y_{Orange}(T'') \subset \text{baton}(T'')$ .

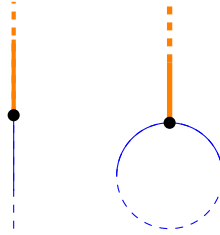
De plus, si on note  $x_b$  le point de jonction dans  $T$ ,  $\text{Stab}_{T'}(x_b) = \langle b \rangle$  et  $\text{Stab}_{T''}(p_B(x_b)) = \langle h \rangle$  alors  $h^{\pm d} = b$ .

Si ce résultat est vrai pour un pliage alors on pourra conclure par récurrence sur le nombre de pliages.

On note  $\text{Stab}_{T_i}(p_{i-1} \circ \cdots \circ p_0(x_b)) = \langle h_i \rangle$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

Si le pliage implique deux arêtes non adjacentes à une arête orange alors le résultat est évident et  $d = 1$ .

Il n'y a que 2 configurations différentes qui donnent lieu à des arêtes bleues adjacentes à des arêtes oranges et ce sont les suivantes :



- Configuration 1 : Le bâton dans  $T_i$ ,  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ , contient au moins une arête bleue. Le pliage a lieu entre une arête bleu du bâton et une arête bleue du cercle ou entre deux arêtes bleues du bâton de la même orbite (car le Lemme 1.25 s'applique ici et plier deux arêtes de deux orbites différentes dans le bâton conduirait à un arbre non minimal). Par conséquent, l'étiquette de jonction est multipliée par  $D$ ,  $h_{i+1}^D = h_i$  où  $D \in \Pi^+(n)$  et dans ce cas l'étiquette de jonction est de la forme  $MdD$  avec  $dD \in \Pi^+(n)$ .

- Configuration 2 : Le bâton dans  $T_i$ ,  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ , ne contient aucune arête bleue et le pliage a lieu entre deux arêtes bleues au sommet de valence 3. Si les arêtes sont dans la même orbite alors, comme précédemment, l'étiquette de jonction est multipliée par  $D$ ,  $h_{i+1}^D = h_i$  où  $D \in \Pi^+(n)$  et dans ce cas l'étiquette de jonction est de la forme  $MdD$  avec  $dD \in \Pi^+(n)$ .  
Si les arêtes ne sont pas dans la même orbite alors  $d = 1$  et  $h_{i+1} = h_i$ .

De plus,  $Y_{Orange}(T'_{i+1}) \subset \text{baton}(T_{i+1})$ .

On peut donc conclure par récurrence sur le nombre de pliages.  $\square$

### Etape 3

- Lemme 3.17.** *Il existe  $T''' \in \mathcal{D}_H$ ,  $P_O : T'' \rightarrow T'''$  et  $f''' : T''' \rightarrow T \cdot \Phi$  tels que*
- *$T'''$  est obtenu de  $T''$  par une succession de pliages impliquant uniquement des arêtes oranges. L'application associée est notée  $P_O$ ,*
  - *$T'''$  hérite d'un coloriage orange et bleu,*
  - *$Y_{Orange}(T''') \subset \text{baton}(T''')$ ,*
  - *l'étiquette de jonction dans  $T'''$  est  $Md'$  où  $d = d'd''$  et  $M \wedge d'' = 1$ ,*
  - *$C_{Orange}(T''') = C_{Orange}(T'')$  et,*
  - *$f'' = f''' \circ P_O$  et  $f'''$  est injective en restriction à chaque composante bleue et à chaque composante orange.*

*Remarque 3.18.*  $f'$  est injective en restriction à chaque composante jaune (et donc à chaque composante orange) mais cette condition n'est pas forcément vérifiée par  $f''$ . En effet, deux composantes d'arêtes oranges disjointes dans  $T'$  peuvent être amenées à se rencontrer lors d'un pliage entre deux arêtes bleues et ainsi créer une possibilité de pliages entre deux arêtes oranges.

*Démonstration.* Si  $f''$  n'identifie aucune paire d'arêtes oranges alors le Lemme est clair en prenant l'identité comme application  $P_O$ .

Si  $f''$  n'est pas injective en restriction à chaque composante d'arêtes oranges et on va montrer qu'on peut avoir un premier pliage entre arêtes oranges adjacentes au sommet de jonction puis que les suivants impliquent des arêtes non adjacentes au sommet de jonction.

On note  $x''_b$  un représentant du sommet de jonction dans  $T''$  et  $e''$  une arête orange adjacente à  $x''_b$ .

On considère également

$$\langle h'' \rangle = \text{Stab}_{T''}(x''_b) \cap \text{Stab}_{T \cdot \Phi}(f''(e'')).$$

$T''_1$  est l'arbre obtenu en identifiant  $e''$  et  $h'' \cdot e''$ ,  $P_{O,1}$  le pliage correspondant et  $f''_1 : T''_1 \rightarrow T \cdot \Phi$  telle que  $f'' = f''_1 \circ P_{O,1}$ . Par construction,  $Y_{Orange}(T''_1) \subset \text{baton}(T''_1)$  et  $f''_1$  n'identifie aucune arête orange adjacente à l'image du sommet  $x_b$  dans  $T''_1$ .

Si  $f_1''$  est injective en restriction aux composantes oranges alors on peut passer à la suite du raisonnement. Sinon, comme précédemment, on réalise des pliages entre arêtes oranges tant que ces pliages sont possibles et ainsi en obtient un arbre  $T'''$  et  $f_1'' = f''' \circ P_{O,2}$  où  $P_{O,2} : T_1'' \rightarrow T'''$  désigne l'application associée pliages oranges effectués et par construction,  $f''' : T''' \rightarrow T \cdot \Phi$  est injective en restriction à chaque composante orange,  $Y_{Orange}(T''') \subset \text{baton}(T''')$  et  $C_{Orange}(T''') = C_{Orange}(T'')$ .

$P_{O,2} = p_{O,2,m} \circ \dots \circ p_{O,2,1}$  où pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $p_{O,2,i} : T_{1,i}'' \rightarrow T_{1,i+1}''$  désigne un pliage entre deux arêtes oranges avec  $T_{1,1}'' = T_1''$  et  $T_{1,m}'' = T'''$ .

Montrons que parmi tous les pliages ayant lieu entre des arêtes oranges seul le pliage  $P_{O,1}$  peut modifier l'étiquette de jonction. En effet, les pliages qui constituent  $P_{O,2}$  ont tous lieu entre des arêtes oranges de même orbite (car sinon on crée un sommet de valence 1 ce qui est impossible par le Lemme 1.25). Plier de telles arêtes non adjacentes à l'étiquette de jonction ne modifie par l'arbre au voisinage du sommet de jonction et en particulier l'étiquette de jonction n'est pas modifiée. Il reste donc à détailler le cas où les arêtes pliées sont oranges et adjacentes au sommet de jonction. On considère  $p_{O,2,i}$  ( $i \in \{1, \dots, m\}$ ) un tel pliage et note  $e_1$  et  $e_2$  deux telles arêtes et  $v$  leur sommet commun, on a donc  $e_2 = ge_1$  avec  $g \in G_v$ .  $v$  ne peut être le sommet de jonction car, par construction de  $P_{O,1}$ , chacun des pliages  $p_{O,2,i}$  est injectif en restriction aux composantes oranges au voisinage de l'image de  $x_b$  dans le graphe quotient de  $T_{1,i}''$ . On a  $v \neq x_H$  car sinon il n'y a qu'une orbite d'arêtes oranges et aucun pliage ne peut avoir lieu sans changer d'espace de déformation. De plus, dans le graphe quotient de  $T_{1,i}''$ , l'étiquette de l'image du sommet  $v$  est 1 et ainsi  $G_{e_1} = G_v$  et  $e_2 = ge_1 = e_1$ . Par conséquent, aucun pliage n'a lieu, l'étiquette de jonction n'est pas modifiée et deux composantes bleues disjointes ne peuvent se rencontrer lors d'un tel pliage.

Par conséquent, le seul pliage entre des arêtes oranges pouvant modifier le voisinage du sommet de jonction (et donc l'étiquette de jonction) est  $P_{O,1}$ .

On va maintenant démontrer que  $k = Md'$  avec  $d'd'' = d$  et  $M \wedge d'' = 1$  en utilisant que  $f' : T' \rightarrow T \cdot \Phi$  est injective en restriction à chaque composante jaune (et donc orange).

On rappelle qu'au sommet  $x'_b$  dans  $T'$  pour lequel  $\text{Stab}_{T'}(x'_b) = \langle b \rangle$ , on a  $M$  arêtes oranges avec  $M \neq 1$  dont le stabilisateur est  $\langle b^M \rangle$ .

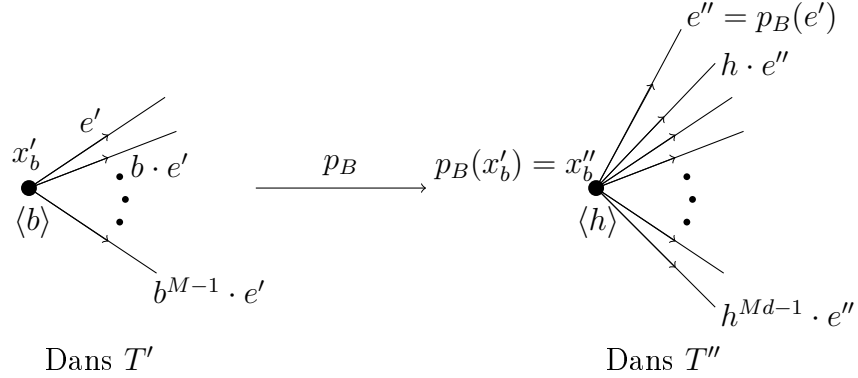
Au sommet image de  $x'_b$ , noté  $x''_b$ , dans  $T''$  pour lequel  $\text{Stab}_{T''}(x''_b) = \langle h \rangle$  avec  $h^d = b$ , on a  $Md$  arêtes oranges dont le stabilisateur est  $\langle h^{Md} \rangle$ . Lors du pliage  $P_{O,1}$ , il existe  $k \in \mathbb{Z}$  avec  $k|Md$  tel que l'identification suivante soit effectuée

$$e \sim (h^k)^n e, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

En effet, en notant  $x''_{b,1}$  le sommet image de  $x'_b$  dans  $T_1''$  alors  $\text{Stab}_{T_1''}(x''_{b,1}) = \langle h \rangle$  et ainsi en notant  $\langle h' \rangle$  le stabilisateur de l'image de  $e$  dans  $T_1''$  alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $h' = h^k$ . De plus,  $\langle h^{Md} \rangle = \text{Stab}_{T''}(e)$  et donc  $\langle h^{Md} \rangle \subset \langle h' \rangle$  et donc  $k|Md$ .



On remarque que  $k$  est la nouvelle étiquette de jonction et on va montrer que  $k = Md'$  avec  $d'd'' = d$  et  $M \wedge d'' = 1$ .



On note  $E_0(x'_b)$  (resp.  $E_0(x''_b)$ ) l'ensemble des arêtes de  $T'$  (resp.  $T''$ ) ayant pour sommet initial  $x'_b$  (resp.  $x''_b$ ) ainsi

$$E_0(x'_b) = \langle b \rangle \cdot e' \text{ et } E_0(x''_b) = \langle h \rangle \cdot e''.$$

$f'$  est injective sur  $\langle b \rangle \cdot e'$  car  $f'$  est injective en restriction à chaque composante orange et donc  $f''$  est injective sur  $p_B(E_0(x'_b)) = \langle b \rangle \cdot e''$ .

Il faut donc vérifier que lors du pliage  $P_{O,1}$

$$\langle k^k \rangle e'' \cap \langle b \rangle \cdot e'' = e''$$

i.e. dans  $\langle h \rangle / \langle h^{Md} \rangle$ ,

$$\langle \bar{h}^k \rangle \cap \langle \bar{b} \rangle = \langle 1 \rangle.$$

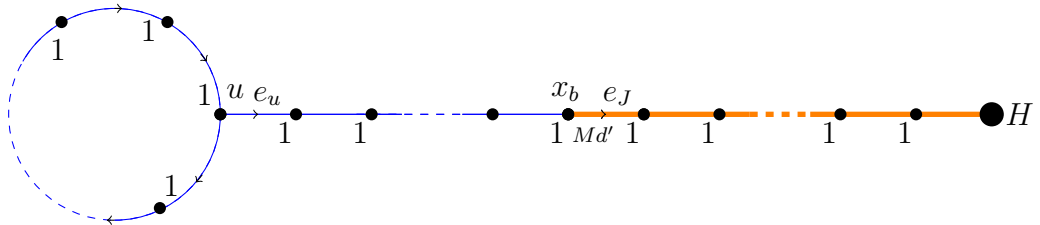
L'ordre de la classe de  $b$  est  $M$  et l'ordre de la classe de  $h^k$  est  $\frac{Md}{k}$  et donc, en notant  $d'' = \frac{Md}{k}$ , on a

$$M \wedge \frac{Md}{k} = M \wedge d'' = 1.$$

Comme  $M \wedge \frac{Md}{k} = 1$ ,  $k$  est un multiple de  $M$  et ainsi il existe  $d' \in \mathbb{N}$  tel que

$$k = Md' \text{ et } d = d'd''.$$

Finalement, le graphe de groupes quotient marqué de  $T'''$  après les pliages oranges est de la forme suivante, à subdivisions près,



où

- $C_{Orange}(T''') = C_{Orange}(T'')$ ,
- $d'd'' = d$  et,
- $d'' \wedge M = 1$ .

et  $Y_{Orange}(T'')$  reste principale.

Il reste à démontrer que  $f'''$  est injective en restriction à chaque composante bleue. Par le point précédent,  $f''$  est injective en restriction à chaque composante bleue mais lors des pliages oranges, deux composantes bleues  $Y_1$  et  $Y_2$  précédemment disjointes ont pu se rencontrer et on va chercher à comprendre lors de quel pliage cette éventuelle identification aurait pu être faite. Ce pliage implique deux arêtes oranges, notées  $e_1$  et  $e_2$ . Ces deux arêtes sont adjacentes à une arête bleue et dans la même orbite (sinon on crée un sommet de valence 1 ce qui est impossible par le Lemme 1.25) ainsi  $e_2 = g_0 \cdot e_1$ ,  $g_0 \in BS(p, pn)$ .

C'est donc lors du pliage  $P_{0,1}$  qu'une telle identification pourrait avoir lieu.

On doit maintenant montrer que si  $x$  et  $y$  sont 2 points distincts dans 2 composantes distinctes de la forêt bleue alors ils ne sont pas identifiés.

C'est clair si  $e_1$  et  $e_2$  ne sont pas adjacentes à la forêt bleue (en effet deux points distincts identifiés sont dans l'orbite de l'extrémité d'une extrémité de  $e_1$  ou de  $e_2$ ).

On va démontrer ci-dessous l'affirmation suivante : si deux sommets  $x$  et  $y$  sont distincts et ont la même image par le pliage  $P_{0,1}$ , alors ils sont à distance 2. En particulier  $x$  et  $y$  ne sont pas dans la forêt bleue.

Ainsi deux composantes bleues disjointes le restent après le pliage  $P_{0,1}$  et  $f''$  est injective en restriction à chaque composante orange et à chaque composante bleue. Démontrons maintenant l'affirmation.

$P_{0,1}$  est un pliage défini à partir des 2 arêtes  $e_1 = uv_1$  et  $e_2 = g_0e_1 = uv_2$  avec  $g_0$  fixant le sommet commun  $u$ .

Par définition, ce pliage est le quotient par  $\sim$ , qui est la plus petite relation d'équivalence équivariante telle que  $e_1 \sim e_2$ .

Pour les sommets cela signifie que  $\sim$  est la clôture transitive de la relation  $\sim_0$  définie par  $x \sim_0 y$  si et seulement si il existe  $g$  et  $\epsilon = \pm 1$  tel que  $x = g \cdot v_1$  et  $y = gg_0^\epsilon \cdot v_1$ .

Par conséquent,  $x \sim y$  si et seulement si il existe une chaîne

$$x = x_0 \sim_0 x_1 \sim_0 x_2 \cdots \sim_0 x_n = y.$$

Si  $x \neq y$  alors  $x$  est dans l'orbite de  $v_1$  ainsi on peut supposer que  $x = v_1$ .

On va montrer, par récurrence, que

$$x_i = g_0^{\epsilon_1 + \cdots + \epsilon_{i-1}} \cdot v_1.$$

C'est vrai pour  $i = 0$  car  $x_0 = v_1$ .

On suppose maintenant que c'est pour  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  et montrons que ça reste vrai pour  $x_{i+1}$ .

On a donc  $x_i = g_0^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{i-1}} \cdot v_1$  et  $x_i \sim_0 x_{i+1}$ . Par conséquent, il existe  $g \in G$  tel que

$$x_i = g_0^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{i-1}} \cdot v_1 = g \cdot v_1 \text{ et } x_{i+1} = g g_0^{\epsilon_i} \cdot v_1$$

d'où

$$g_0^{-\epsilon_i} g^{-1} x_{i+1} = v_1 = g^{-1} g_0^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{i-1}} \cdot v_1.$$

De plus,  $g_0^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{i-1}} \cdot e_1$  et  $g \cdot e_1$  sont toutes deux adjacentes à  $g_0^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{i-1}} \cdot v_1 = g \cdot v_1$ . Cependant  $G_{e_1} = G_{v_1}$  et donc il y a une unique arête dans l'orbite de  $g \cdot e_1$  adjacente à  $g \cdot v_1$  et il s'agit de  $g \cdot v_1$  elle-même. On a donc  $g_0^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{i-1}} \cdot e_1 = g \cdot e_1$  et  $u = g_0^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{i-1}} \cdot u = g \cdot u$  ainsi  $g \in G_u$  et donc  $g$  et  $g_0$  commutent.

On en déduit que

$$g^{-1} g_0^{-\epsilon_i} x_{i+1} = g_0^{-\epsilon_i} g^{-1} x_{i+1} = v_1 = g^{-1} g_0^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{i-1}} \cdot v_1$$

et donc

$$x_{i+1} = g_0^{\epsilon_1 + \dots + \epsilon_{i-1} + \epsilon_i} \cdot v_1.$$

Ainsi, par récurrence, on obtient le résultat souhaité. Ceci démontre l'affirmation et conclut la démonstration du Lemme 3.17.  $\square$

Avant de passer au dernier résultat à démontrer pour conclure la preuve de la Proposition 3.10, on récapitule les différentes applications obtenues ci-dessous.

$$T \xrightarrow{P_J} T' \xrightarrow{P_B} T'' \xrightarrow{P_O} T''' \xrightarrow{f'''} T \cdot \Phi$$

$\curvearrowright$   
 $Q_J$

où  $f'''$  est injective en restriction à chaque composante bleue et à chaque composante orange.

#### Étape 4

**Lemme 3.19.** *Il y a deux possibilités : la première est que  $T''' = T \cdot \Phi$  et donc dans ce cas  $\Phi$  est réductible et la seconde c'est que toutes les arêtes du bâton de  $T'''$  sont oranges et  $f'''$  (et donc  $f$ ) factorise par un arbre dont le graphe étiqueté est un cercle.*

*Démonstration.* Dans ce qui suit, on note  $\text{baton}(T)$  afin d'indiquer qu'il s'agit du bâton dans l'arbre  $T$ .

Si  $f'''$  est injective alors  $T''' = T \cdot \phi$  et donc  $f'''(\text{baton}(T''')) = \text{baton}(T \cdot \Phi)$ .  
De plus, d'après l'étape 1,

$$Q_J(\text{baton}(T)) \subset Y_{\text{Orange}}(T')$$

et par construction

$$P_B(Y_{\text{Orange}}(T')) \subset Y_{\text{Orange}}(T'')$$

et

$$P_O(Y_{\text{Orange}}(T'')) \subset Y_{\text{Orange}}(T''') \subset \text{baton}(T''')$$

d'où

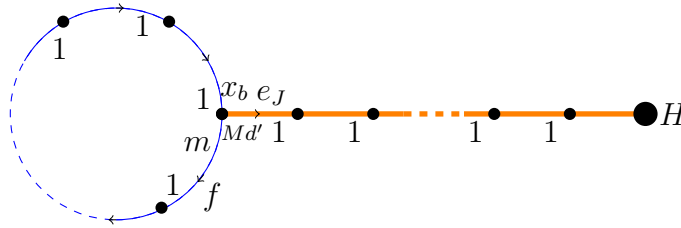
$$f(\text{baton}(T)) = f''' \circ P_O \circ P_B \circ Q_J(\text{baton}(T)) \subset Y_{\text{Orange}}(T''') \subset \text{baton}(T \cdot \Phi).$$

Nous sommes dans le cas *A* i.e.  $\text{baton}(T)$  est une forêt essentielle et donc  $\Phi$  est réductible.

Sinon  $f'''$  identifie deux arêtes et puisque  $f'''$  est injective en restriction à chaque composante orange et à chaque composante bleue, ce premier pliage a lieu entre une arête orange et une arête bleue.

Si le bâton contient au moins une arête bleue alors un pliage entre une arête bleue et une arête orange crée un sommet de valence 1 ce qui est impossible par le Lemme 1.25.

Par conséquent le bâton ne contient aucune arête bleue et seul le cercle du graphe de groupes quotient marqué de  $T'''$  est bleu et donc est de la forme suivante, à subdivisions près,



où

- $C(T''') = C_{\text{Orange}}(T''') = C(T)d$ ,
- $d'd'' = d$  et,
- $d'' \wedge M = 1$ .

Aucun pliage ne peut avoir lieu entre une arête bleue et une arête orange si  $Md' \neq m$  (où  $m$  désigne l'étiquette différente de 1 de l'arête bleue adjacente à une arête orange, voir figure ci-dessus) car un tel pliage entraînerait un pliage

entre deux arêtes bleues ou deux arêtes oranges de  $T'''$  ce qui est impossible.

Nous sommes donc dans la situation suivante :  $Md' = m$  et le bâton ne contient aucune arête bleue donc  $C(T''') = C_{Orange}(T') = dC(T)$ .

Dans la suite de la démonstration, nous allons donc effectuer un pliage entre une arête bleue et une arête orange entraînant ainsi l'apparition d'arêtes bicolores et une éventuelle confusion dans le raisonnement c'est pourquoi nous allons oublier les coloriage sur les arbres et considérer les bâtons et les cercles dans les différents arbres.

On va donc montrer que  $f'''$  factorise par un arbre dont le graphe étiqueté est un cercle.

$f'''$  est injective en restriction à chaque composante de la forêt correspondant au bâton de  $T'''$  et à chaque composante de la forêt correspondante au cercle dans  $T'''$ . Par conséquent, la seule possibilité pour effectuer un pliage est de le réaliser entre une arête du cercle et une arête du bâton. L'arbre obtenu en effectuant ce pliage est noté  $T_1'''$ .

Si la graphe quotient de  $T_1'''$  est un cercle et on obtient le résultat voulu.

Sinon on va montrer que l'application induite  $f_1''' : T_1''' \rightarrow T \cdot \Phi$  est encore injective en restriction à chaque composante de la préimage du bâton et à chaque composante de la préimage du cercle.

On note  $Y_C(T)$  (resp.  $Y_B(T)$ ) la sous-forêt de  $T$  correspond au cercle de  $T$  (resp. au bâton de  $T$ ).

**Lemme 3.20.** *Soit  $f : S \rightarrow T$  une application entre deux  $BS(p, pn)$ -arbres  $S, T \in \mathcal{D}_H$  dont les graphes étiquetés sont de la forme  $1''$ .*

*On suppose de plus que  $f$  est injective en restriction à chaque composante de  $Y_C(S)$  et à chaque composante de  $Y_B(S)$  et que  $f = f' \circ p$  où  $p : S \rightarrow S'$  est un pliage entre une arête de  $Y_B(S)$  et une arête de  $Y_C(S)$  et  $f' : S' \rightarrow T$ .*

*Si  $S'$  est de la forme  $1''$  alors  $f'$  est injective en restriction à chaque composante de  $Y_C(S')$  et à chaque composante de  $Y_B(S')$ .*

*Démonstration.*  $S'$  est de la forme  $1''$  et donc  $baton(S')$  contient au moins 1 arête et  $baton(S)$  en contient au moins 2.

On considère  $e_1 \in Y_B(S)$  et  $e_2 \in Y_C(S)$  les deux arêtes identifiées par le pliage  $p$ . Comme à la fin de l'étape 3,  $p$  est un pliage défini à partir des 2 arêtes  $e_1 = uv_1$  et  $e_2 = uv_2$ .

On notera que  $G_{e_1} = G_{v_1}$  et  $G_{e_2} = G_{v_2}$  mais qu'ici les arêtes  $e_1$  et  $e_2$  ne sont pas dans la même orbite.

Par définition, ce pliage est le quotient par  $\sim$ , qui est la plus petite relation d'équivalence équivariante telle que  $e_1 \sim e_2$ .

Pour les sommets cela signifie que  $\sim$  est la clôture transitive de la relation  $\sim_0$  définie par  $x \sim_0 y$  si et seulement si il existe  $g$  tel que  $x = g \cdot v_1$  et  $y = g \cdot v_2$ , notée

alors  $x \sim_1 y$ , ou il existe  $g'$  tel que  $x = g' \cdot v_2$  et  $y = g' \cdot v_1$ , notée alors  $x \sim_2 y$ . Par conséquent, et puisque  $v_1$  et  $v_2$  ne sont pas dans la même orbite,  $x \sim y$  si et seulement si il existe une chaîne

$$x = x_0 \sim_1 x_1 \sim_2 x_2 \sim_1 x_3 \cdots \sim_* x_n = y$$

où  $\sim_* = \sim_1$  si  $n$  est impair et  $\sim_* = \sim_2$  si  $n$  est pair.

Si  $x \neq y$  alors  $x$  est dans l'orbite de  $v_1$  ainsi on peut supposer que  $x = x_0 = v_1$ .

On va montrer, par récurrence, que les seules paires de points identifiés sont les translatés de  $(v_1, v_2)$ .

$x = x_0 = v_1 \sim_1 x_1 \sim_2 x_2$  et donc il existe  $g_1, g_2 \in G$  tel que

$$x_0 = v_1 = g_1 \cdot v_1, g_1 \cdot v_2 = x_1 = g_2 \cdot v_2, x_2 = g_2 \cdot v_1.$$

$g_1 \cdot v_1 = v_1$  ainsi  $g_1 \in G_{v_1} = G_{v_2}$  (les étiquettes aux arêtes  $e_1$  et  $e_2$  sont égales).

On en déduit que  $g_2 \cdot v_2 = g_1 \cdot v_2 = v_2$  ainsi  $g_2 \in G_{v_2} = G_{v_1}$  et donc  $x_2 = g_2 \cdot v_1 = v_1$ .

De proche en proche, on obtient le résultat souhaité i.e. les seuls paires de points identifiés par  $p$  sont les translatés de  $(v_1 \in Y_B(S), v_2 \in Y_C(S))$ .

Finalement, on en déduit que deux composantes de  $Y_B(S)$  (resp.  $Y_C(S)$ ) ne sont pas identifiées lors du pliage et donc  $f'$  est injective en restriction à chaque composante de  $Y_B(S')$  et à chaque composante de  $Y_C(S')$ .  $\square$

Si  $T_1'''$  est de la forme  $2''$  alors le résultat est démontré.

Sinon  $T_1'''$  est encore de la forme  $1''$  et alors l'invariant est

$$C(T_1''') = \frac{C(T)d}{Md'} = d'' \frac{C(T)}{M} \neq C(T)$$

car  $d'' \wedge M = 1$ . Ainsi  $T_1''' \neq T \cdot \Phi$  et donc il faut effectuer un pliage entre une arête de  $Y_B(T_1''')$  et une arête de  $Y_C(T_1''')$  puisque  $f_1'''$  est injective en restriction à chaque composante de  $Y_B(T_1''')$  et à chaque composante de  $Y_C(T_1''')$  par le Lemme 3.20.

En répétant ce raisonnement on obtient une suite d'arbres  $(T_i''')_{i \in \mathbb{N}}$  où  $T_{i+1}'''$  est obtenu par un pliage entre une arête de  $Y_B(T_i''')$  et une arête de  $Y_C(T_i''')$  ( $T_0''' = T''''$ ) car  $f_i''' : T_i''' \rightarrow T \cdot \Phi$  est injective en restriction à chaque composante de  $Y_C(T_i''')$  et à chaque composante de  $Y_B(T_i''')$  par le Lemme 3.20.

De plus, lors du pliage dans  $T_i'''$  on divise la complexité par  $d_i | n$  ( $d_0 = Md'$ ) et donc en notant  $D_i = d_1 \cdots d_{i-1}$ , on a

$$C(T_i''') = \frac{C(T)d}{Md'D_i} = d'' \frac{C(T)}{MD_i} \neq C(T)$$

car  $d'' \wedge M = 1$ .

Le nombre d'arêtes de  $baton(T_i''')$  est fini et après le pliage le nombre d'arêtes de  $baton(T_{i+1}''')$  a strictement diminué. Par conséquent, il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $T_i'''$  est un cercle.  $\square$

**Cas B**

On traite maintenant le cas *B* i.e.  $\text{baton}(T)$  n'est pas une forêt essentielle. On peut donc supposer que  $\text{baton}(T)$  est constitué d'une unique orbite d'arêtes ayant pour sommet d'une part  $x_H$  et d'autre part un sommet ayant pour étiquette 1 ainsi  $C(T) = 1$ . Par conséquent aucun pliage n'est possible dans le bâton sans changer d'espace de déformation car  $G_{\xi_1}$  est maximal cyclique dans  $H$ . On colorie les arêtes du bâton en orange et les autres arêtes en bleu.

De la même façon que dans l'étape 2, il existe  $T' \in \mathcal{D}_H$ ,  $P_B : T \longrightarrow T'$ ,  $f' : T' \longrightarrow T \cdot \Phi$  tels que

- $T'$  est obtenu de  $T$  par une succession de pliages impliquant uniquement des arêtes bleues. L'application associée est notée  $P_B$ ,
- $T'$  hérite donc d'un coloriage orange et bleu et,
- $f = f' \circ P_B$ .

Par construction,  $f'$  est injective en restriction aux composantes bleues et puisque  $G_{\xi_1}$  est maximal cyclique dans  $H$  alors  $f'$  est également injective en restriction à chaque composante orange.

Dans ce qui suit, nous allons adapter la démonstration du Lemme de l'étape 4 à notre situation et on note  $\text{cercle}(T)$  afin d'indiquer qu'il s'agit du cercle dans l'arbre  $T$ .

Si  $f'$  est injective alors  $T' = T \cdot \phi$ , on note  $Y_{\text{Bleu}}(T)$  (resp.  $Y_{\text{Bleu}}(T \cdot \Phi)$ ) la forêt bleue dans  $T$  (resp.  $T \cdot \Phi$ ).

On montre que  $\text{core}(Y_{\text{Bleu}}(T')) = \text{cercle}(T')$ .

En effet,  $\text{cercle}(T') \subset Y_{\text{Bleu}}(T')$  et il existe une orientation  $G$ -équivariante des arêtes bleues de  $\text{baton}(T')$  pour laquelle les arêtes bleues ont toutes une étiquette égale à 1 à leurs sommets terminaux. Par conséquent,  $Y_{\text{bleu}}(T')$  n'est pas principale et on peut successivement enlever toutes les arêtes bleues de  $\text{baton}(T')$  afin d'obtenir  $\text{core}(Y_{\text{Bleu}}(T')) = \text{cercle}(T')$ .

En considérant  $p$  l'application construite dans le Lemme 2.9, on a

$$p(Y_{\text{Bleu}}) = \text{cercle}(T \cdot \Phi)$$

et

$$p \circ f(\text{cercle}(T)) = p \circ f' \circ P_B(Y_{\text{Bleu}}(T)) \subset p(Y_{\text{Bleu}}(T \cdot \Phi)) \subset \text{cercle}(T \cdot \Phi)$$

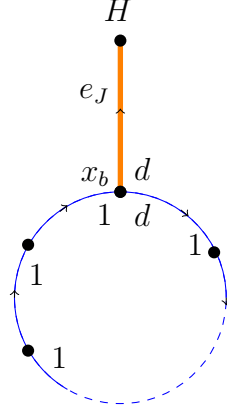
et donc  $\Phi$  est réductible.

Sinon  $f'$  identifie deux arêtes et puisque  $f'$  est injective en restriction à chaque composante orange et à chaque composante bleue, ce premier pliage a lieu entre une arête orange et une arête bleue.

De la même façon que dans la démonstration de l'étape 4, le bâton ne contient

aucune arête bleue et seul le cercle du graphe de groupes quotient marqué de  $T'$  est bleu. De plus, aucun pliage ne peut avoir lieu entre une arête bleue et une arête orange si les étiquettes de ces arêtes ne coïncident pas car un tel pliage entraînerait un pliage entre deux arêtes bleues ou deux arêtes oranges de  $T'$  ce qui est impossible.

Par conséquent, pour qu'un tel pliage puisse avoir lieu, il faut que le graphe quotient marqué de  $T'$  soit le suivant (où  $d \in \prod^+(n)$ )



Dans la suite de la démonstration, nous allons donc effectuer un pliage entre une arête bleue et une arête orange entraînant ainsi l'apparition d'arêtes bicolores et une éventuelle confusion dans le raisonnement c'est pourquoi nous allons oublier les coloriage sur les arbres et considérer les bâtons et les cercles dans les différents arbres.

Pour  $T$  un  $G$ -arbre de  $\mathcal{D}_H$ , on notera (comme dans le cas  $A$ )  $Y_B(T)$  (resp.  $Y_C(T)$ ) la sous-forêt de  $T$  correspondant à *baton*( $T$ ) (resp. *cercle*( $T$ )).

$f'$  est injective en restriction à chaque composante de  $Y_C(T')$  et à chaque composante de  $Y_B(T')$ . Par conséquent, la seule possibilité pour effectuer un pliage est de le réaliser entre une arête du cercle de  $T'$  et une arête du bâton de  $T'$ . L'arbre obtenu en effectuant ce pliage est noté  $T'_1$ .

Par conséquent,

- soit  $T'_1$  est de la forme  $2''$  et on obtient le résultat voulu,
- soit  $T'_1 = T \cdot \Phi$  et comme précédemment  $\Phi$  est réductible puisque *cercle*( $T'$ ) est envoyé dans *cercle*( $T'_1$ ) par le pliage,
- soit on obtient une application  $f'_1 : T'_1 \rightarrow T \cdot \Phi$  encore injective en restriction à chaque composante de  $Y_C(T'_1)$  et à chaque composante de  $Y_B(T'_1)$  par le Lemme 3.20 donc il faut effectuer un pliage entre une arête de  $Y_B(T'_1)$  et une arête de  $Y_C(T'_1)$ .

En répétant cette démarche, on obtient une suite d'arbres  $(T'_i)_{i \in \mathbb{N}}$  où  $T'_{i+1}$  est obtenu par un pliage entre une arête de  $Y_B(T'_i)$  et une arête de  $Y_C(T'_i)$



( $T'_0 = T'$ ) car, par le Lemme 3.20,  $f'_i : T'_i \rightarrow T \cdot \Phi$  est injective en restriction à chaque composante de  $Y_C(T'_i)$  et à chaque composante de  $Y_B(T'_i)$ .

Le nombre d'arêtes de  $\text{baton}(T'_i)$  est fini et après le pliage le nombre d'arêtes de  $\text{baton}(T'_{i+1})$  est strictement inférieur.

On en déduit qu'il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que soit le graphe quotient de  $T'_i$  est un cercle soit  $T'_i = T \cdot \Phi$  et ainsi  $\Phi$  est réductible.

□

# Chapitre 4

## Automorphismes réductibles

### 4.1 Notions de croissance

**Définition 4.1.** Soit  $G$  un groupe quelconque et  $S$  un système générateur de  $G$ ,  $S^\pm = S \cup S^{-1}$ .

La *longueur* de  $g$  est notée  $|g|_S$  et est définie comme suit.

$$|g|_S = \min\{n \mid g \text{ s'écrit comme produit de } n \text{ éléments de } S\}.$$

On peut également introduire  $\|g\|_S$ , la *longueur de la classe de conjugaison* de  $g$ , que l'on définit de la manière suivante

$$\|g\|_S = \min_{h \in G} |hgh^{-1}|_S.$$

*Remarque 4.2.* Pour faire le lien entre ces deux notions, on peut remarquer que

$$\|g\|_S \leq |g|_S.$$

#### 4.1.1 Croissance polynomiale

**Définition 4.3.** Soit  $\Phi \in \text{Out}(G)$ ,  $S$  un système générateur de  $G$  et  $S^\pm = S \cup S^{-1}$ . On dit que  $\Phi$  est à *croissance polynomiale de degré*  $d$  si

$$\forall g \in G, \exists C_g \geq 0, \forall k \geq 1, \|\Phi^k(g)\|_S \leq C_g k^d.$$

*Remarque 4.4.*  $\Phi(g)$  est un abus de notation car  $\Phi$  est un automorphisme extérieur. Cependant  $\|\Phi(g)\|_S$  est bien défini puisque  $\|\Phi(g)\|_S$  signifie  $\|\alpha(g)\|_S$  pour n'importe quel représentant  $\alpha$  de  $\Phi$ .

**Lemme 4.5.** Soit  $\Phi \in \text{Out}(G)$  et  $l \geq 1$ .

$\Phi$  est à croissance polynomiale de degré  $d$  si et seulement si  $\Phi^l$  est à croissance polynomiale de degré  $d$ .

*Démonstration.* Soit  $\Phi \in \text{Out}(G)$  à croissance polynomiale de degré  $d$  et  $l \geq 1$ . On a

$$\forall g \in G, \exists C_g \geq 0, \forall k \geq 1, \|\Phi^k(g)\|_S \leq C_g k^d$$

et donc

$$\|\Phi^{kl}(g)\|_S \leq |\alpha^{kl}(g)|_S \leq C_g (kl)^d.$$

et donc  $\Phi^l$  est à croissance polynomiale de degré  $d$ .

On démontre maintenant l'implication réciproque. On suppose donc que  $\Phi^l$  est à croissance polynomiale de degré  $d$  i.e

$$\forall g \in G, \exists C_g \geq 0, \forall k \geq 1, \|\Phi^{lk}(g)\|_S \leq C_g k^d.$$

Soit  $g \in G$  et  $k' \geq 1$ . On effectue la division euclidienne de  $k'$  par  $l$  i.e.  $k' = lq + r$  où  $r < l$  ainsi

$$\begin{aligned} \|\Phi^{k'}(g)\|_S &= \|\Phi^{lq+r}(g)\|_S = \|\Phi^{lq}(\Phi^r(g))\|_S \\ &\leq C_{\Phi^r(g)} q^d \\ &\leq \max_{i < r} C_{\Phi^i(g)} k'^d \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\forall g \in G, \exists C'_g \geq 0, \forall k' \geq 1, \|\Phi^{k'}(g)\|_S \leq C'_g k'^d$$

ainsi  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré  $d$ . □

**Définition 4.6.** Soit  $\alpha \in \text{Aut}(G)$ ,  $S$  un système générateur de  $G$  et  $S^\pm = S \cup S^{-1}$ . On dit que  $\alpha$  est à croissance polynomiale de degré  $d$  au sens fort si

$$\forall g \in G, \exists C_g \geq 0, \forall k \geq 1, |\alpha^k(g)|_S \leq C_g k^d.$$

Dans la suite, grâce au Lemme suivant, lorsqu'il sera question de démontrer que  $\Phi \in \text{Out}(G)$  est à croissance polynomiale de degré  $d$  alors nous pourrons démontrer qu'un représentant  $\alpha \in \text{Aut}(G)$  est à croissance polynomiale de degré  $d$  au sens fort.

**Lemme 4.7.** Soit  $\Phi \in \text{Out}(G)$  et  $\alpha \in \text{Aut}(G)$  un représentant de  $\Phi$ .

Si  $\alpha$  est à croissance polynomiale de degré  $d$  au sens fort alors  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré  $d$ .

*Démonstration.* Si  $\Phi$  a un représentant  $\alpha$  à croissance polynomiale de degré  $d$  alors pour  $k \geq 1$  et  $g \in G$ , on a

$$\|\Phi^k(g)\|_S \leq |\alpha^k(g)|_S \leq C_g k^d$$

et donc  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré  $d$ .  $\square$

*Remarque 4.8.* Soit  $\alpha \in \text{Aut}(G)$  et  $g_0 \in G$ .

On peut montrer que  $\alpha$  est à croissance polynomiale au sens fort si et seulement si  $i_{g_0} \circ \alpha$  est à croissance polynomiale au sens fort où  $i_{g_0}$  désigne l'automorphisme intérieur par  $g_0$ .

**Lemme 4.9.** *Soit  $\alpha \in \text{Aut}(G)$ ,  $S$  un système générateur de  $G$ .*

*Si il existe  $d \in \mathbb{N}$  tel que*

$$\forall s \in S, \exists C_s \geq 0, \forall k \geq 1, |\alpha^k(s)|_S \leq C_s k^d$$

*alors  $\alpha$  est à croissance polynomiale de degré  $d$  au sens fort.*

*Démonstration.* Soit  $k \geq 1$  et  $g = g_0 \cdots g_m \in G$  où  $g_i \in S, \forall i \in \{0, \dots, m\}$ .

$$\alpha^k(g) = \alpha^k(g_0 \cdots g_m) = \alpha^k(g_0) \cdots \alpha^k(g_m)$$

ainsi

$$\begin{aligned} |\alpha^k(g)|_S &= |\alpha^k(g_0) \cdots \alpha^k(g_m)|_S \\ &\leq |\alpha^k(g_0)|_S + \cdots + |\alpha^k(g_m)|_S \\ &\leq C_{g_0} k^d + \cdots + C_{g_m} k^d \\ &\leq C_g k^d \end{aligned}$$

et donc  $\alpha$  est à croissance polynomiale de degré  $d$ .  $\square$

On va illustrer cette définition à l'aide des résultats suivants qui seront des exemples d'automorphismes à croissance polynomiale.

**Lemme 4.10.** *Un bitwist est à croissance polynomiale de degré 1.*

*Remarque 4.11.* De ce Lemme, on peut déduire que tout twist de Dehn est à croissance polynomiale de degré 1 puisque un twist de Dehn est un bitwist.

*Démonstration.* D'après la définition 1.39, on a

- Si  $G = A *_C B$  alors on considère  $z \in A$  (resp.  $z' \in B$ ) normalisant l'image de  $C$  dans  $A$  (resp. dans  $B$ ) tels que

$$\forall g \in C, \text{ad}_z(g) = \text{ad}_{z'}(g).$$

Le bitwist  $D_{z,z'}$  est défini par  $D_{z,z'}(g_A) = zg_Az^{-1}, \forall g_A \in A$ , et  $D_{z,z'}(g_B) = z'g_Bz'^{-1}, \forall g_B \in B$  ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$|D_{z,z'}^k(g_A)|_S = |z^k g_A z^{-k}|_S \leq 2k|z|_S + |g_A|_S \leq \max(2|z|_S, |g_A|_S)k, \forall g_A \in A$$

et

$$|D_{z,z'}^k(g_B)|_S = |z'^k g_B z'^{-k}|_S \leq 2k|z'|_S + |g_B|_S \leq \max(2|z'|_S, |g_B|_S)k, \forall g_B \in B.$$

- Si  $G = A *_C$  alors il y a deux plongements de  $C$  dans  $A$  notés  $i_1$  et  $i_2$ . Soit  $C_1 = i_1(C)$ ,  $C_2 = i_2(C)$ ,  $z \in A$  normalisant  $C_1$  et  $z' \in A$  normalisant  $C_2$  tels que

$$\forall g \in C, \text{ad}_z(i_1(g)) = \text{ad}_{z'}(i_2(g)).$$

Le bitwist  $D_{z,z'}$  est défini par  $D_{z,z'}(g_A) = g_A, \forall g_A \in A$  et  $D_{z,z'}(t) = ztz'$ , où  $t$  désigne la lettre stable, ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$|D_{z,z'}^k(g_A)| = |g_A|_S, \forall g_A \in G_A$$

et

$$|D_{z,z'}^k(t)|_S = |z^k t z'^k|_S \leq k|z|_S + |t|_S + k|z'|_S \leq \max(|z|_S, |t|_S, |z'|_S)k.$$

On peut donc en déduire, dans les deux cas, en utilisant le Lemme 4.9, que le bitwist  $D_{z,z'}$  est à croissance polynomiale de degré 1 (linéaire).  $\square$

**Lemme 4.12.** *Soit  $BS(p, q)$  algébriquement rigide.*

*Tout automorphisme  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, q))$  est à croissance polynomiale de degré 1.*

*Remarque 4.13.*  $BS(p, q)$  est algébriquement rigide si  $p$  et  $q$  ne se divisent pas l'un l'autre.

*Démonstration.* Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, q))$ , d'après la Proposition 1.42, il existe  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\Phi^k$  soit un twist de Dehn et donc  $\Phi^k$  est à croissance polynomiale d'après le résultat précédent (Lemme 4.10) et donc  $\Phi$  est à croissance polynomiale par le Lemme 4.5.  $\square$

### 4.1.2 Croissance exponentielle

**Définition 4.14.** Soit  $\Phi \in \text{Out}(G)$ ,  $S$  un système générateur de  $G$  et  $S^\pm = S \cup S^{-1}$ . On dit que  $\Phi$  est à *croissance exponentielle* s'il existe  $\lambda > 1$  tel que

$$\exists g \in G, \exists C_g \geq 0, \|\Phi^k(g)\|_S \geq C_g \lambda^k.$$

*Remarque 4.15.* La croissance exponentielle de  $\Phi$  (et en particulier  $\lambda$ ) est indépendante du système de générateurs de  $G$ .

En effet, pour  $S'$  un autre système de générateurs de  $G$ ,

$$\exists C \geq 0, C \|\Phi^k(g)\|_{S'} \geq \|\Phi^k(g)\|_S \geq C_g \lambda^k$$

et ainsi

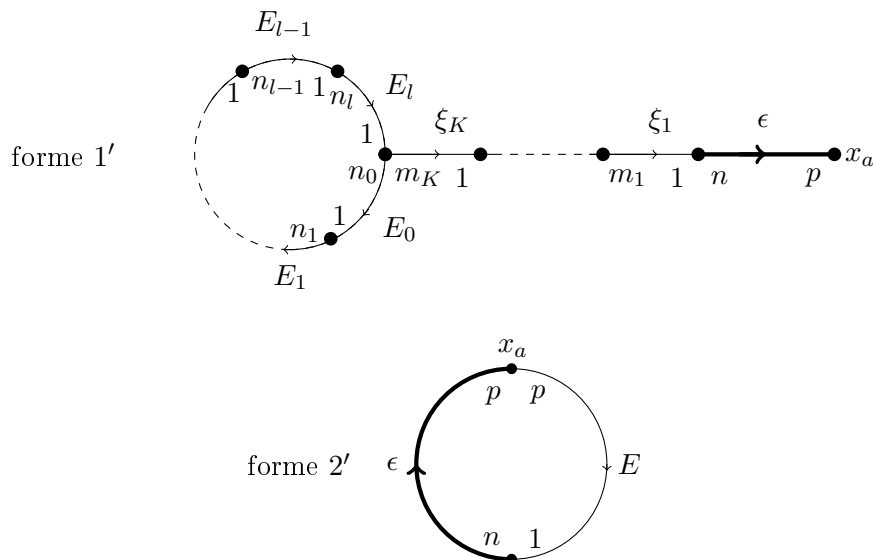
$$\exists C'_g = \frac{C_g}{C} \geq 0, \|\Phi^k(g)\|_{S'} \geq C'_g \lambda^k.$$

## 4.2 Tout automorphisme réductible est à croissance polynomiale

On rappelle ici que  $H = \langle a, c^{-1}a^p c \rangle$  est le sous-groupe introduit dans le Chapitre 2 dont la classe de conjugaison est préservée par tout automorphisme de  $BS(p, pn)$ .

**Théorème 4.16.** Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  réductible dans  $\mathcal{D}_H$  alors  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré 1.

On rappelle, ci-après, quels sont les graphes étiquetés des formes 1' et 2' des  $G$ -arbres obtenus par les Lemmes 2.17 et 2.18.



Les résultats suivants nous permettront de passer de l'étude de ces 2 formes générales à l'étude de 3 formes simplifiées. Pour ce faire, on commence par introduire une nouvelle notion, la notion de forêt  $H$ -essentielle.

**Définition 4.17.** Soit  $T \in PD_{p,pn}$ . Une sous-forêt  $BS(p,pn)$ -invariante  $Y$  est dite  $H$ -essentielle si chacune de ses composantes connexes contient l'axe  $C_g$  d'un élément hyperbolique  $g$  n'appartenant pas à un conjugué de  $H$ .

Afin de poursuivre, on doit démontrer plusieurs résultats intermédiaires permettant de décrire plus précisément les relations qui existent entre  $\mathcal{D}_{p,pn}$  et  $\mathcal{D}_H$ .

**Lemme 4.18.** Soit  $\Phi \in Out(BS(p,pn))$  réductible dans  $\mathcal{D}_H$  alors il existe un  $BS(p,pn)$ -arbre  $T$  dans  $\mathcal{D}_{p,pn}$  obtenu par le Lemme 2.17, une application  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  ainsi que  $Y \subset T$  une sous-forêt propre,  $BS(p,pn)$ -invariante et  $H$ -essentielle telle que  $f(Y) \subset Y$ .

De plus,  $T$  est de la forme 1' ou 2', par le Lemme 2.18.

*Démonstration.*  $\Phi \in Out(BS(p,pn))$  réductible dans  $\mathcal{D}_H$  et donc il existe  $T \in \mathcal{D}_H$ , un représentant  $\alpha \in Aut(G)$  de  $\Phi$  et  $f : T \rightarrow T \cdot \alpha$  laissant invariante une sous-forêt  $Y$  essentielle, propre et  $G$ -invariante de  $T$ .

Par le Lemme 2.17, il existe  $\hat{T} \in \mathcal{D}_{p,pn}$  et  $\pi : \hat{T} \rightarrow T$  une application d'écrasement. On va montrer qu'il existe  $f' : T \rightarrow T \cdot \alpha$  et  $\hat{f} : \hat{T} \rightarrow \hat{T} \cdot \alpha$  vérifiant les conditions suivantes :

- $f'(Y) \subset Y$ ,
- $f'_{|V(T)} = f_{|V(T)}$  et,
- $f'$  monotone sur les arêtes. En particulier pour toute arête  $e = uv$  de  $T$  alors

$$f'(e) \subset [f'(u), f'(v)].$$

- $\pi \circ \hat{f} = f' \circ \pi$ ,
- $\hat{f}(\pi^{-1}(Y)) \subset \pi^{-1}(Y)$  et,
- $\pi^{-1}(Y)$  est propre,  $BS(p,pn)$ -invariante et  $H$ -essentielle.

ce qui démontrera le Lemme.

On va relever l'application  $f : T \rightarrow T \cdot \alpha$  en une application

$$\hat{f} : \hat{T} \rightarrow \hat{T} \cdot \alpha.$$

On a vu lors de la démonstration du Lemme 2.17 que, pour obtenir  $\hat{T}$ , on éclate  $v_H$  en un arbre  $T_H = \min_H(\hat{T}_0)$  et on attache, de manière bien choisie, chaque arête incidente sur  $v_H$  sur un point de  $T_H$ .

On considère  $\hat{T} \cdot \alpha$  et on définit  $\hat{f}$  de la manière suivante :

- Pour  $x \in V(\hat{T})$ , on considère  $\pi^{-1}(f \circ \pi(x))$  qui est un sous-arbre  $G_x$ -invariant ( $\pi$  est un écrasement et donc préserve l'alignement).  $G_x$  est elliptique dans  $\hat{T} \cdot \alpha$  car  $\hat{T}$  et  $\hat{T} \cdot \alpha$  sont dans le même espace de déformation donc on peut choisir  $\hat{f}(x)$  comme un point de  $\pi^{-1}(f \circ \pi(x))$  fixé par  $G_x$  puis on étend  $\hat{f}$  à tous les sommets par  $G$ -équivalence.
- Pour  $e \in E(\hat{T})$ , on définit l'image de cette arête comme le chemin d'arêtes dans  $\hat{T} \cdot \alpha$  reliant  $\hat{f}(o(e))$  à  $\hat{f}(t(e))$ .

On considère  $f' : T \rightarrow T \cdot \alpha$  telle que  $f'_{|V(T)} = f_{|V(T)}$  et telle que pour toute arête  $e \in E(T)$  alors  $f'(e) = \pi \circ \hat{f} \circ (\pi|_{\hat{e}})^{-1}(e)$  où  $\hat{e}$  désigne une arête de  $\hat{T}$  telle que  $\pi(\hat{e}) = e$ . On peut utiliser la notation  $(\pi|_{\hat{e}})^{-1}$  car la restriction d'un écrasement à une arête non écrasée est un isomorphisme.

Par construction,  $\pi \circ \hat{f} = f' \circ \pi$ ,  $f'$  est monotone sur les arêtes.

Puisque  $f'_{|V(T)} = f_{|V(T)}$  et  $f'$  monotone sur les arêtes alors  $f'(Y) \subset Y$ .

On sait que  $\pi \circ \hat{f} = f' \circ \pi$ . Par conséquent,  $\pi^{-1}(Y)$  est une sous-forêt  $G$ -invariante, propre et laissée invariante par  $\hat{f}$ .

Il reste à vérifier que cette sous-forêt est  $H$ -essentielle.

$Y$  étant essentielle, il existe  $g$  un élément hyperbolique dont l'axe  $\mathcal{C}_g$  est contenu dans  $Y$ . On considère  $\hat{\mathcal{C}}_g \subset \hat{T}$ , l'axe de l'élément hyperbolique  $g$  dans  $\hat{T}$ , alors  $\pi(\hat{\mathcal{C}}_g) = \mathcal{C}_g$  car  $\pi$  préserve l'alignement.

Par conséquent,

$$\hat{\mathcal{C}}_g \subset \pi^{-1}(\mathcal{C}_g) \subset \pi^{-1}(Y)$$

d'où  $\pi^{-1}(Y)$  est essentielle.

De plus,  $g$  n'appartient à aucun conjugué de  $H$  car  $H$  fixe un point dans  $T$  alors que  $g$  est hyperbolique dans  $T$  ainsi  $\pi^{-1}(Y)$  est  $H$ -essentielle.  $\square$

Il est également nécessaire d'introduire le concept d'arêtes  $Y$ -écrasables.

**Définition 4.19.**  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$ .

On considère une arête écrasable  $e$  de  $T \in \mathcal{D}_{p, pn}$  et  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  telle que  $f(Y) \subset Y$  où  $Y$  désigne une sous-forêt de  $T$ .

$e$  est dite  $Y$ -écrasable si  $e \subset Y$  ou si 2 composantes connexes de  $Y$  disjointes dans  $T$  restent disjointes dans l'arbre obtenu après avoir écrasé l'arête  $e$ .

**Lemme 4.20.** Soit  $T \in \mathcal{D}_{p, pn}$ ,  $Y$  une sous-forêt propre,  $H$ -essentielle, invariante par  $BS(p, pn)$  et par  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  et  $e$  une arête  $Y$ -écrasable.

Si  $G_e \neq G_{o(e)}$  et  $t(e) \in Y$  alors  $e \subset Y$ .

*Démonstration.* On suppose que  $e \not\subset Y$  et on note  $T_e$  la composante connexe de  $Y$  contenant  $t(e)$  ( $t(e) \in Y$  par hypothèse) et on considère  $g \in G_{o(e)} \setminus G_e$  (ensemble non vide car  $G_e \subset G_{o(e)}$  et  $G_e \neq G_{o(e)}$  par hypothèse). Alors, puisque  $e \not\subset Y$ ,



$g \cdot T_e \neq T_e$  et ainsi en écrasant  $e$  ces 2 composantes auront un point commun ce qui est impossible car  $e$  est  $Y$ -écrasable.

Par conséquent,  $e \subset Y$ . □

**Lemme 4.21.** *Soit  $T \in \mathcal{D}_{p,pn}$  et  $F : T \rightarrow T \cdot \Phi$  laissant invariante  $Y$  une sous-forêt  $H$ -essentielle de  $T$  alors il existe  $T' \in \mathcal{D}_{p,pn}$  un écrasé de  $T$  et une application  $F' : T' \rightarrow T' \cdot \Phi$  telle que*

- $Y' = p(Y)$  est une sous-forêt de  $T'$   $H$ -essentielle, propre et  $G$ -invariante,
- $F'(Y') \subset Y'$  et,
- $T'$  ne contient aucune arête  $Y'$ -écrasable.

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur le nombre d'orbites d'arêtes et on considère donc  $F : T \rightarrow T \cdot \Phi$  telle que  $F(Y) \subset Y$ .

Si  $T$  ne contient aucune arête  $Y$ -écrasable alors le résultat est trivial.

Sinon il existe  $e$  une arête  $Y$ -écrasable. On note  $T_1$  l'arbre obtenu en écrasant  $e$  (de manière  $G$ -équivariante) et  $p_1 : T \rightarrow T_1$  l'application d'écrasement,  $w = p_1(e) \in T_1$ .

On va définir maintenant une application  $q_1 : T_1 \rightarrow T$ . On va définir cette application sur les sommets et les milieux d'arêtes puis éteindre par linéarité sur les demi-arêtes.

$e = uv$  étant écrasable, on a  $G_u = G_e$  ou  $G_v = G_e$  ainsi quitte à échanger les rôles de  $u$  et  $v$  alors on peut supposer que  $G_v = G_e$ .

On définit  $q_1$  sur les représentants des orbites de sommets,

$$\begin{cases} q_1(x) \text{ est l'unique sommet de } p_1^{-1}(x) \text{ si } x \notin G \cdot w, \\ q_1(w) = v \text{ si } G_v = G_e = G_u \text{ et } Y \cap e = \{v\}, \\ q_1(w) = u \text{ sinon} \end{cases}$$

puis on étend cette définition par  $G$ -équivariance à tous les sommets de  $T_1$ . Pour ce faire, dans le cas où le sommet est dans l'orbite de  $w$ , on vérifie que  $G_w = G_u$ . Si  $m$  désigne le milieu d'une arête quelconque  $f$  de  $T_1$  alors  $m \notin G \cdot w$  et  $q_1(m)$  est l'unique sommet de  $p_1^{-1}(m)$ .

Pour une demi-arête  $f_1 = [o(f_1), m_1]$  de  $T_1$  alors  $m_1 \notin G \cdot w$  et on définit  $q_1(f_1)$  comme le chemin d'arêtes entre  $q_1(o(f_1))$  et  $q_1(m_1)$ .

On note  $Y_1 = p_1(Y)$  et on considère une demi-arête  $f_1 = [o(f_1), m_1] \subset Y_1$ , il existe une unique demi-arête  $f = [o(f), m] \subset Y$  telle que  $p_1(o(f)) = o(f_1)$  et  $p_1(m) = m_1$ .

On distingue maintenant les cas suivants :

- si  $f$  n'est adjacente à aucune arête de l'orbite de  $e$  alors  $q_1(f_1) = f \subset Y$ ,
- si  $e$  (ou un translaté de  $e$ ) et  $f$  sont adjacentes alors quitte à remplacer  $e$  par  $ge$  ( $g \in BS(p, pn)$ ), on peut supposer que  $e$  et  $f$  sont adjacentes ( $e$  et  $f$  ne peuvent être égales car  $p_1(f)$  est une arête de  $T_1$  et non uniquement un sommet) et on peut donc supposer que  $o(f_1) = w$ .

On a donc les possibilités suivantes :

1. Si  $q_1(w) = v$  alors  $f \cap e = \{v\}$  car si  $f \cap e = \{u\}$  alors  $Y \cap e = \{u, v\}$  ce qui est une contradiction à l'hypothèse  $Y \cap e = \{v\}$  de la définition de  $q_1$ . De plus, on sait que  $q_1(m_1) = m$  d'où

$$q_1(f_1) = [q_1(o(f_1)), q_1(m_1)] = [q_1(w), m] = [v, m] = f \subset Y.$$

2. Sinon  $q_1(w) = u$  et, comme précédemment,  $q_1(m_1) = m$  et donc :
  - a) Si  $f \cap e = u$  alors  $q_1(f_1) = f \subset Y$  ou,
  - b) Si  $f \cap e = v$  alors  $q_1(f_1) = f \cup e$ . D'après le Lemme 4.20,  $e \subset Y$  et donc  $q_1(f_1) = f \cup e \subset Y$ .

On peut donc définir  $F_1 = p_1 \circ F \circ q_1 : T_1 \longrightarrow T_1 \cdot \alpha$  d'où

$$F_1(Y_1) = p_1 \circ f \circ q_1(Y_1) \subset p_1 \circ f(Y) \subset p_1(Y) = Y_1.$$

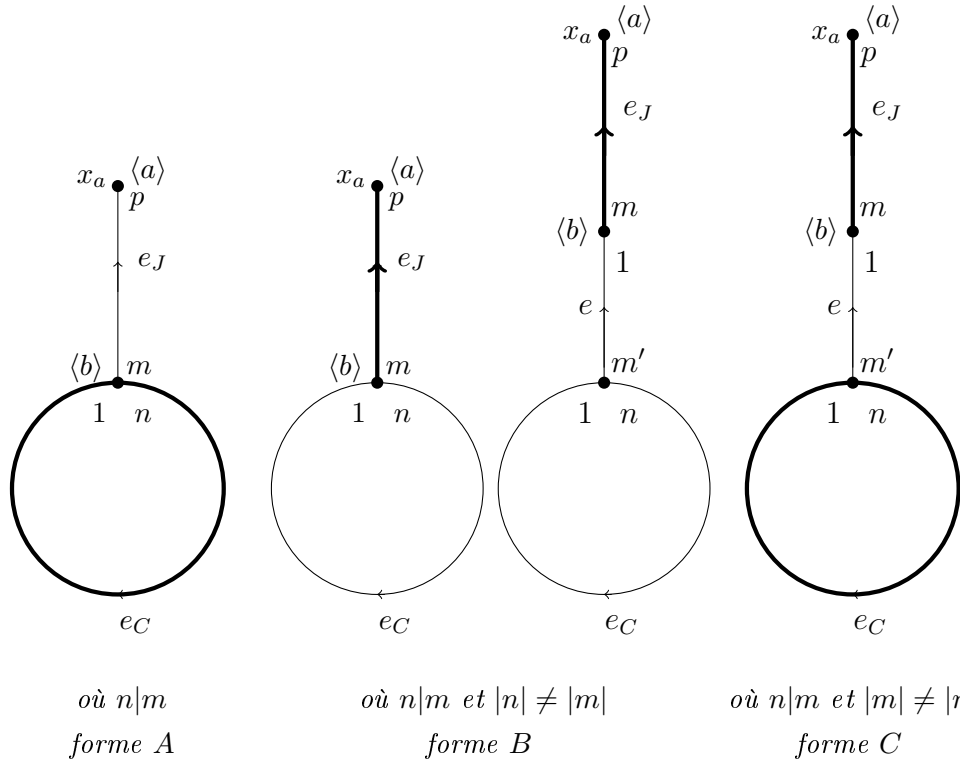
On suppose maintenant que  $Y$  est  $H$ -essentielle et donc il existe un élément hyperbolique  $g \in BS(p, pn)$  n'appartenant pas à un conjugué de  $H$  dont l'axe  $C_g$  est contenu dans  $Y$ .

$g$  agit par translation sur son axe et  $p_1(C_g)$  n'est pas réduit à un point sinon on crée un nouvel élément elliptique ainsi l'axe de  $g$  dans  $T$  s'envoie sur l'axe de  $g$  dans  $T_1$  qui est donc contenu dans  $Y_1$  et donc  $Y_1$  est essentielle. De plus,  $g$  n'appartient pas à un conjugué de  $H$  et donc  $Y_1$  est  $H$ -essentielle.

De plus, le nombre d'orbites d'arêtes dans  $T_1$  est strictement inférieur au nombre d'orbites d'arêtes dans  $T$  ce qui nous permet de conclure par récurrence sur le nombre d'orbites d'arêtes.  $\square$

On peut maintenant passer à la démonstration de la Proposition qui permet de ramener l'étude de nos 2 formes générales à l'étude de 3 formes simplifiées.

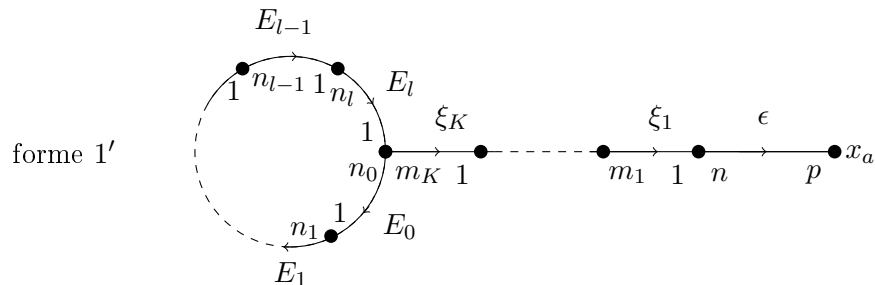
**Proposition 4.22.** *Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  réductible dans  $\mathcal{D}_H$  alors il existe  $T' \in \mathcal{D}_{p, pn}$  et une application  $f : T' \longrightarrow T' \cdot \Phi$  laissant invariante une sous-forêt propre,  $BS(p, pn)$ -invariante et essentielle telle que le graphe de groupes quotient marqué de  $T'$ , associé à la sous-forêt invariante représentée en gras ci-après, est de l'une des formes suivantes*

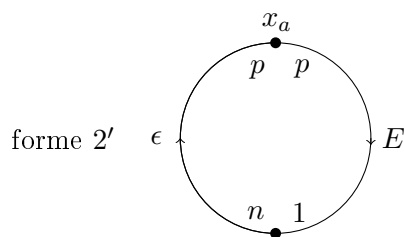


*Remarque 4.23.* Deux graphes étiquetés sont rassemblés sous l'appellation forme B car les deux cas de ces graphes étiquetés seront traités simultanément.

*Démonstration.*  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  est réductible dans  $\mathcal{D}_H$  donc par le Lemme 4.18, il existe un  $BS(p, pn)$ -arbre  $T$  dans  $\mathcal{D}_{p, pn}$  obtenu par le Lemme 2.17, une application  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  ainsi que  $Y \subset T$  une sous-forêt propre,  $BS(p, pn)$ -invariante et  $H$ -essentielle telle que  $f(Y) \subset Y$ .

Par conséquent, d'après le Lemme 2.18, le graphe étiqueté de  $T$  est de la forme 1' ou 2'.





On commence par remarquer  $T$  ne peut être de la forme  $2'$ . En effet, un tel arbre ne contient pas de sous-forêt  $H$ -essentielle propre.

On peut donc supposer que  $T$  est de la forme  $1'$ .

D'après le Lemme 4.21, il existe une application  $F' : T' \rightarrow T' \cdot \Phi$  telle que

- $T' \in \mathcal{D}_{p,pm}$  est un écrasé de  $T$  de la forme  $1'$ ,
- $Y' = p(Y)$  est une sous-forêt de  $T'$   $H$ -essentielle, propre et  $G$ -invariante,
- $F'(Y') \subset Y'$  et,
- $T'$  ne contient aucune arête  $Y'$ -écrasable.

On va identifier quelles sont les couples  $(T', Y')$  ne contenant aucune arête  $Y'$ -écrasable.

Par le Lemme 3.6, chaque composante de l'image de  $Y$  dans le graphe quotient de  $T$  contient soit le cercle soit  $\epsilon$ .

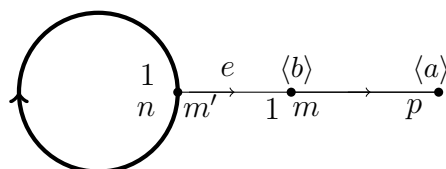
Si, de plus, elle contient une arête ayant 1 pour étiquette et n'étant pas une boucle alors cette arête est  $Y$ -écrasable (c'est une arête écrasable de  $Y$ ).

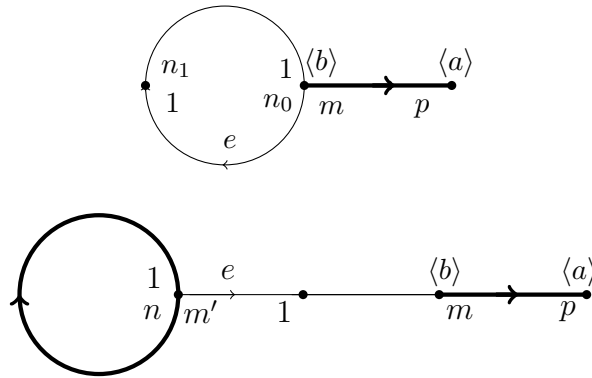
Par conséquent, l'image de  $Y'$  dans le graphe quotient de  $T'$  est formée soit du cercle (cas 1) constitué alors d'une unique arête soit de  $\epsilon'$ , image de  $\epsilon$  par l'application d'écrasement (cas 2) soit des deux (cas 3).

Dans les cas 2 et 3, l'image de  $Y$  dans le graphe quotient de  $T$  contient également au moins une orbite d'arêtes adjacente à  $\epsilon$  car sinon  $Y$  n'est pas  $H$ -essentielle. Cette orbite d'arêtes est, d'après ce qui précède,  $Y$ -écrasable. Par conséquent, après écrasement, l'étiquette de  $\epsilon'$  est noté  $m$  et vérifie  $n|m$  avec  $|n| \neq |m|$ .

On considère maintenant les arêtes de  $T \setminus Y$  et on remarque que  $T' \setminus Y'$  ne contient aucune arête écrasable non adjacente à  $Y'$ . En effet, écraser une telle arête  $e$  dans  $T$  n'amène pas deux composantes disjointes à se rencontrer et  $e$  est donc  $Y$ -écrasable.

Par conséquent, on obtient les 4 formes décrites dans l'énoncé ainsi que les 3 formes supplémentaires ci-dessous





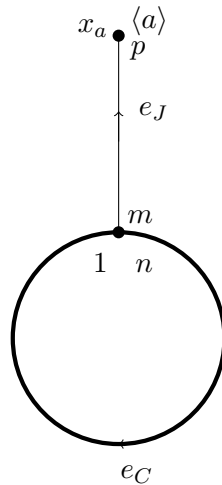
Dans les trois cas, écraser  $e$  n'amène pas deux composantes de la forêt (représentée en gras sur le dessin) à se rencontrer ainsi  $e$  est  $Y$ -écrasable.

Finalement, on obtient les formes  $A$ ,  $B$  et  $C$ . □

Pour démontrer le Théorème 4.16, on considère  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  réductible dans  $D_H$  alors par les Lemmes 4.18 et 4.22, il existe une application  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  laissant invariante une sous-forêt propre  $BS(p, pn)$ -invariante et essentielle notée  $Y \subset T \in \mathcal{D}_{p, pn}$  où  $(T, Y)$  est de la forme  $A$ ,  $B$  ou  $C$ .

On va donc traiter séparément les cas où  $(T, Y)$  est de la forme  $A$ ,  $B$  ou  $C$ .

### 4.2.1 Cas $(T, Y)$ de la forme $A$



où  $n|m$   
forme  $A$

## 4.2. TOUT AUTOMORPHISME RÉDUCTIBLE EST À CROISSANCE POLYNOMIALE 93

On considère  $\tilde{e}_C$  un relevé de  $e_C$  dans  $T$  et  $\tilde{e}_J$  un relevé de  $e_J$  dans  $T$  tel que

$$o(\tilde{e}_C) = o(\tilde{e}_J).$$

$b$  désignera le générateur du groupe du sommet initial de  $\tilde{e}_C$  noté  $\tilde{x}_b$ .

**Proposition 4.24.** *Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  et*

$$f : T \longrightarrow T \cdot \phi$$

*une application laissant invariante une sous-forêt  $Y$  propre,  $BS(p, pn)$ -invariante et essentielle.*

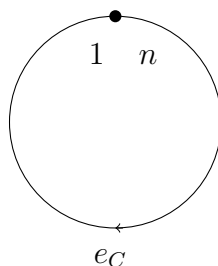
*On suppose de plus que  $(T, Y)$  est de la forme  $A$  et donc que la sous-forêt  $Y$  est  $Y_{\tilde{e}_C}$ .*

*Sous ces hypothèses,  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré 1.*

*Démonstration.* On considère  $T_{\tilde{e}_C}$  la composante connexe de  $Y_{\tilde{e}_C}$  contenant  $\tilde{e}_C$ .

On notera  $K$  le stabilisateur de  $T_{\tilde{e}_C}$  et on remarquera que l'action de  $K$  sur  $T_{\tilde{e}_C}$  est minimale (pas de sous-arbre invariant).

Le graphe quotient étiqueté  $T_{\tilde{e}_C}/K$  est le suivant



**Lemme 4.25.**

$$\Phi([K]) = [K]$$

*Démonstration.* On considère  $\alpha$  un représentant de  $\Phi$ .

D'après le Lemme 2.11, il existe  $g_0 \in G$  tel que, en posant  $\alpha' = i_{g_0} \circ \alpha$ , où  $i_{g_0}$  désigne l'automorphisme intérieur par  $g_0$ , on a

$$\alpha'(K) \subset K$$

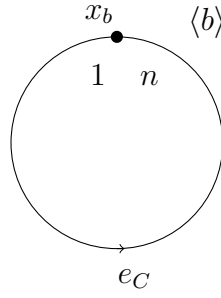
donc

$$K \subset \alpha'^{-1}(K).$$

On note  $T_{\alpha'^{-1}(K)}$  le sous-arbre principal de  $\alpha'^{-1}(K)$  dans  $T$ .

Afin de prouver que  $\alpha'(K) = K$ , on va utiliser l'action de  $\alpha'^{-1}(K)$  sur  $T_{\alpha'^{-1}(K)}$ .

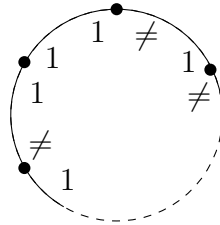
Le graphe quotient étiqueté  $T_{\tilde{e}_C}/K$  est le suivant



$K$  est résoluble et donc  $\alpha'^{-1}(K)$  aussi.  
 Puisque  $K \subset \alpha'^{-1}(K)$ , on a inclusion des sous-arbres

$$T_{\tilde{e}_C} \subset T_{\alpha'^{-1}(K)}.$$

Comme  $T_{\tilde{e}_C}$  n'est pas une droite ( $n \neq 1$ ) alors  $T_{\alpha'^{-1}(K)}$  non plus.  
 Par conséquent,  $\alpha'^{-1}(K)$  fixe un bout et  $T_{\alpha'^{-1}(K)}/\alpha'^{-1}(K)$  est de la forme suivante :



mais les deux extrémités de  $e_C$  sont dans la même  $K$ -orbite donc dans la même  $\alpha'^{-1}(K)$ -orbite et ainsi  $T_{\alpha'^{-1}(K)}$  n'a qu'une seule orbite d'arête  $e$  d'où

$$T_{\alpha'^{-1}(K)} = \alpha'^{-1}(K) \cdot \tilde{e}_C$$

et donc

$$T_{\alpha'^{-1}(K)} \subset T_{\tilde{e}_C}.$$

En notant  $k$  l'élément hyperbolique tel que  $t(e_C) = k \cdot x_b$  alors  $\alpha'^{-1}(K)$  est engendré par  $k$  et  $Stab_{\alpha'^{-1}(K)}(x_b) = Stab_K(x_b)$  et donc

$$\alpha'^{-1}(K) \subset K.$$

Finalement, on obtient

$$\alpha'(K) = K.$$

□

On écrase  $Y_{\tilde{e}_C}$  dans  $T$  et on note  $S$  l'arbre obtenu. Son graphe de groupes quotient marqué est le suivant

$$\langle b, c \rangle = K \simeq BS(1, n) \bullet \xrightarrow[\langle b^m \rangle]{x_a} \xrightarrow[p]{\bullet} \langle a \rangle$$

Soit  $\alpha$  un représentant de  $\Phi$  tel que  $\alpha(K) = K$ .

Sachant que  $\alpha(K) = K$ , l'espace de déformation de  $S$  est invariant.

$S$  est strongly-slide-free (Définition 1.43) car au quotient il n'y a qu'une unique orbite d'arêtes (ayant deux orbites de sommet distinctes) et c'est donc l'unique réduit dans son espace de déformation. Par conséquent, il est fixé par  $\Phi$  et donc il existe un isomorphisme équivariant  $f : S \rightarrow S \cdot \alpha$ .

Soit  $k_0 \in K$  tel que

$$f(\epsilon) = k_0 \epsilon.$$

Ainsi, en remplaçant  $\alpha$  par  $i_{k_0} \circ \alpha = \alpha'$ , on a

$$f'(\epsilon) = \epsilon$$

où  $f' = k_0 \cdot f$  est  $\alpha'$ -équivariante et ainsi

$$\alpha'(\langle a \rangle) = \langle a \rangle$$

$$\alpha'(\langle b^m \rangle) = \langle b^m \rangle$$

Quitte à remplacer  $\alpha'$  par  $\alpha'^2$  (ce qui ne modifie pas le résultat sur la croissance polynomiale au sens de la Définition 4.6), on a

$$\alpha'(a) = a,$$

$$\alpha'(b^m) = b^m.$$

De plus, par ce qui précède,

$$\alpha'(K) = K$$

ainsi  $\alpha'$  en restriction à  $K$  est un automorphisme de  $BS(1, n)$ . On rappelle la Proposition A de [Col78].

**Proposition 4.26.** *Soit  $BS(1, n) = \langle b, c | cbc^{-1} = b^n \rangle$  où  $|n| \neq 1$  et  $n = \delta p_1^{e_1} \cdots p_f^{e_f}$  où  $\delta = \pm 1$  et  $p_1, \dots, p_f$  sont des premiers distincts alors  $Aut(BS(1, n))$  est engendré par*

$$C, Q_1, \dots, Q_f, T$$

soumis aux relations

$$Q_i C Q_i^{-1} = C^{p_i}, Q_i Q_j = Q_j Q_i$$

$$T^2 = 1, T Q_i = Q_i T, T^{-1} C T = C^{-1}$$



où  $i, j \in \{1, \dots, f\}$  et les automorphismes sont définis comme suit

$$\begin{aligned} Q_i &: b \longmapsto b^{p_i} \\ & \quad c \longmapsto c, \quad i = 1, \dots, f \\ C &: b \longmapsto b \\ & \quad c \longmapsto b^{-1}c \\ T &: b \longmapsto b^{-1} \\ & \quad c \longmapsto c \end{aligned}$$

On cherche à déterminer quels sont les automorphismes de  $BS(1, n)$  qui fixent  $b^{m_0}$ .

On note  $\beta$  la restriction de  $\alpha'$  à  $K$ .

Au vu des relations auxquelles sont soumises les générateurs, l'automorphisme  $\beta$  de  $BS(1, n)$  s'écrit

$$Q_1^{n_1} \cdots Q_f^{n_f} \beta = C^k Q_1^{m_1} \cdots Q_f^{m_f} T^\epsilon$$

où  $\epsilon = 0$  ou  $1$  et  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $n_i, m_i \in \mathbb{Z}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, f\}$ . Cependant, on sait que

$$\beta(b^{m_0}) = b^{m_0}.$$

Ainsi

$$Q_1^{n_1} \cdots Q_f^{n_f} \beta(b^{m_0}) = C^k Q_1^{m_1} \cdots Q_f^{m_f} T^\epsilon(b^{m_0}) = b^{(-1)^\epsilon m_0 p_1^{m_1} \cdots p_f^{m_f}}$$

et donc

$$b^{m_0 p_1^{n_1} \cdots p_f^{n_f}} = b^{(-1)^\epsilon m_0 p_1^{m_1} \cdots p_f^{m_f}}$$

d'où

$$m_0 p_1^{n_1} \cdots p_f^{n_f} = (-1)^\epsilon m_0 p_1^{m_1} \cdots p_f^{m_f}$$

et donc, pour tout  $i \in \{1, \dots, f\}$ ,

$$n_i = m_i$$

et

$$\epsilon = 0$$

d'où

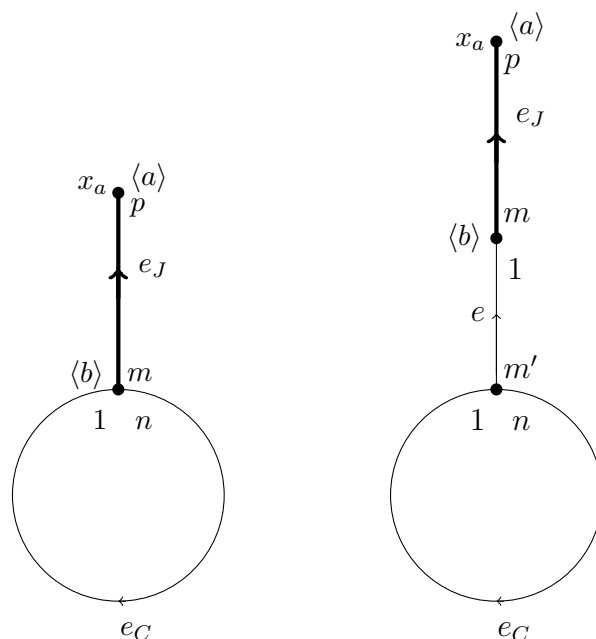
$$\beta = (Q_1^{n_1} \cdots Q_f^{n_f})^{-1} C^k (Q_1^{n_1} \cdots Q_f^{n_f})$$

et donc  $\beta$  est conjugué à  $C^k$  qui est à croissance polynomiale de degré 1 et ainsi  $\beta$  est à croissance polynomiale de degré 1.

Par conséquent, et puisque  $\alpha'(a) = a$  et  $\alpha'(b^{m_0}) = b^{m_0}$ , on en déduit que  $\alpha'$  est à croissance polynomiale de degré 1 au sens de la Définition 4.6 et donc  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré 1 par le Lemme 4.7.

□

### 4.2.2 Cas $(T, Y)$ de la forme $B$



où  $n|m$  et  $|n| \neq |m|$

forme  $B$

On considère  $\tilde{e}_C$  un relevé de  $e_C$  dans  $T$ ,  $\tilde{e}$  un relevé de  $e$  dans  $T$  et  $\tilde{e}_J$  un relevé de  $e_J$  dans  $T$  tels que dans le premier cas  $o(\tilde{e}_C) = o(\tilde{e}_J)$  et dans le second cas,  $o(\tilde{e}_C) = o(\tilde{e})$  ainsi que  $t(\tilde{e}) = o(\tilde{e}_J)$ .

On définit  $a$  et  $b$  comme suit, en notant  $\tilde{x}_b = o(\tilde{e}_J)$  et  $\tilde{x}_a = t(\tilde{e}_J)$  :

$$G_{\tilde{x}_a} = \langle a \rangle$$

et

$$G_{\tilde{x}_b} = \langle b \rangle.$$

**Proposition 4.27.** Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  et

$$f : T \longrightarrow T \cdot \phi$$

une application laissant invariante une sous-forêt  $Y$  propre,  $BS(p, pn)$ -invariante et essentielle.

On suppose de plus que  $(T, Y)$  est de la forme  $B$  et donc la sous-forêt  $Y$  est  $Y_{\tilde{e}_J}$ .

Sous ces hypothèses,  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré 1.

*Remarque 4.28.* Afin de démontrer cette Proposition, on va prouver que dans le cas où  $(T, Y)$  est de la forme  $B$  il est toujours possible de se ramener au cas de la forme  $A$  et ainsi on pourra conclure en utilisant les résultats démontrés précédemment.

La sous-forêt invariante est  $Y_{\tilde{e}_J}$  et  $T_{\tilde{e}_J}$  la composante connexe de  $Y_{\tilde{e}_J}$  contenant  $\tilde{e}_J$ . On notera  $K$  le stabilisateur de  $T_{\tilde{e}_J}$  et on remarque que l'action de  $K$  sur  $T_{\tilde{e}_J}$  est minimale (aucun sous-arbre invariant).

Le graphe de groupes quotient marqué  $T_{\tilde{e}_J}/K$  est donc le suivant

$$\langle b \rangle \xrightarrow[m]{x_b} \xrightarrow[e_J]{} \xrightarrow[p]{x_a} \langle a \rangle$$

*Remarque 4.29.* On rappelle pour les besoins des démonstrations à venir que  $m \neq n$  et  $n|m$ .

De plus, on remarque que si  $m = n$  alors  $Y = Y_H$  et donc l'hypothèse de la Proposition est vide.

**Lemme 4.30.**

$$\Phi([K]) = [K]$$

*Démonstration.* On considère  $\alpha$  un représentant de  $\Phi$ .

D'après le Lemme 2.11, il existe  $g_0 \in G$  tel que, en posant  $\alpha' = i_{g_0} \circ \alpha$ , où  $i_{g_0}$  désigne l'automorphisme intérieur par  $g_0$ , on a

$$\alpha'(K) \subset K$$

et donc

$$K \subset \alpha'^{-1}(K).$$

On note  $T_{\alpha'^{-1}(K)}$  le sous-arbre minimal de  $\alpha'^{-1}(K)$ .

Afin de prouver que  $\alpha'(K) = K$ , on va utiliser l'action de  $\alpha'^{-1}(K)$  sur  $T_{\alpha'^{-1}(K)}$ .

Le graphe de groupes quotient marqué de  $T_{\tilde{e}_J}/K$  est le suivant :

$$\langle b \rangle \xrightarrow[m]{x_b} \xrightarrow[e_J]{} \xrightarrow[p]{x_a} \langle a \rangle$$

$T_{\tilde{e}_J}$  est strongly-slide-free (voir Définition 1.43) car il y a une unique orbite d'arêtes ayant deux extrémités disjointes donc c'est l'unique réduit dans son espace de déformation. Par conséquent, tout arbre dans son espace de déformation est obtenu en effectuant des éclatements (voir Définition 1.10) dans  $T_{\tilde{e}_J}$  et donc le graphe étiqueté de  $T_{\alpha'^{-1}(K)}/\alpha'^{-1}(K)$  est le suivant :

$$\bullet \xrightarrow{m_t} \bullet \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{m_{t-1}} \cdots \xrightarrow{m_0} \bullet \xrightarrow{p_s} \bullet \xrightarrow{1} \cdots \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{p_1} \bullet \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{p_0} \bullet$$

## 4.2. TOUT AUTOMORPHISME RÉDUCTIBLE EST À CROISSANCE POLYNOMIALE 99

où  $p_0 \cdots p_s = p$  et  $m_0 \cdots m_t = m$ .

On sait que

$$\langle a \rangle = \text{Stab}_K(x_a) \subset \text{Stab}_{\alpha'^{-1}(K)}(x_a) \subset \text{Stab}_G(x_a) = \langle a \rangle$$

d'où

$$\text{Stab}_K(x_a) = \text{Stab}_{\alpha'^{-1}(K)}(x_a)$$

On peut effectuer le même raisonnement pour  $x_b$  et pour  $e_J$  ainsi

$$\text{Stab}_K(x_b) = \text{Stab}_{\alpha'^{-1}(K)}(x_b)$$

et

$$\text{Stab}_K(e_J) = \text{Stab}_{\alpha'^{-1}(K)}(e_J).$$

De plus,  $T_K \subset Y_{\alpha'^{-1}(K)}$  et donc  $e_J \in Y_{\alpha'^{-1}(K)}/\alpha'^{-1}(K)$ .

On en déduit donc qu'il existe  $i \in \{0, \dots, s\}$  et  $j \in \{0, \dots, t\}$ ,  $p_i = m$  et  $m_j = m$ . Par minimalité de  $T_{\alpha'^{-1}(K)}$ ,  $T_{\alpha'^{-1}(K)}$  n'est constitué que d'une seule orbite d'arête d'où  $T_{\alpha'^{-1}(K)} = \alpha'^{-1}(K) \cdot \tilde{e}_J$  et donc

$$T_{\alpha'^{-1}(K)} \subset T_{\tilde{e}_J}.$$

$\alpha'^{-1}(K)$  est donc engendré par  $\text{Stab}_{\alpha'^{-1}(K)}(x_b) = \text{Stab}_K(x_b)$  et  $\text{Stab}_{\alpha'^{-1}(K)}(x_a) = \text{Stab}_K(x_a)$ . Par conséquent,

$$\alpha'^{-1}(K) \subset K.$$

Finalement, on obtient

$$\alpha'(K) = K.$$

□

**Lemme 4.31.**  $f|_{T_{\tilde{e}_J}}$  est injective.

De plus, quitte à remplacer  $\alpha$  par  $i_{g_0} \circ \alpha$ , on peut supposer que

- $\alpha(\langle a \rangle) = \langle a \rangle$  et  $\alpha(\langle b \rangle) = \langle b \rangle$  et,
- $f|_{T_{\tilde{e}_J}}$  envoie sommet sur sommet et arête sur arête.

*Démonstration.* On peut supposer que  $f$  est linéaire sur les arêtes.

D'après ce qui précède,  $\alpha([K]) = [K]$  or  $Y_K$  est strongly-slide-free et donc c'est l'unique réduct dans son espace de déformation d'où, quitte à remplacer  $\alpha$  par  $i_{h_0} \circ \alpha$  pour  $h_0 \in K$ ,

$$\alpha(\langle a \rangle) = \langle a \rangle \text{ et } \alpha(\langle b \rangle) = \langle b \rangle$$

ou, uniquement dans le cas  $m = p$ ,

$$\alpha(\langle a \rangle) = \langle b \rangle \text{ et } \alpha(\langle b \rangle) = \langle a \rangle.$$

Ce dernier cas ne peut pas se produire. En effet,  $a$  et  $b$  ne sont pas conjugués car  $a$  fixe un unique point  $x_a$  alors que  $b$  fixe un point hors de l'orbite de  $x_a$ . De plus, dans la démonstration du Lemme 2.13 nous avons donné la liste des générateurs de  $BS(p, pn)$  qui préservent tous, à conjugaison près, le groupe  $\langle a \rangle$ .

Par conséquent, on a, quitte à remplacer  $\alpha$  par  $i_{h_0} \circ \alpha$  pour  $h_0 \in K$ ,

$$\alpha(\langle a \rangle) = \langle a \rangle \text{ et } \alpha(\langle b \rangle) = \langle b \rangle.$$

$f(x_a) \in T_{\tilde{e}_J}$  est fixé par  $\alpha(a) = a$  et l'unique point de  $T_{\tilde{e}_J}$  fixé par  $a$  est  $x_a$  et donc

$$f(x_a) = x_a.$$

On peut effectuer un raisonnement similaire pour  $f(x_b)$  et on a donc

$$\begin{cases} \alpha(\langle a \rangle) = \langle a \rangle & \text{et} & \alpha(\langle b \rangle) = \langle b \rangle \\ f(x_a) = x_a & \text{et} & f(x_b) = x_b. \end{cases}$$

Par conséquent,  $f(e_J)$  est un chemin d'arêtes reliant  $x_a$  à  $x_b$ , ne contenant aucun aller-retour par linéarité sur les arêtes de  $f$  et donc  $f(e_J) = e_J$ .

Afin de terminer la démonstration, il reste à prouver que  $f$  ne plie aucune paire d'arêtes issues de  $x_a$  ou  $x_b$ .

Au sommet  $x_b$ ,  $\alpha(b) = b^{\pm 1}$  alors  $f(e_J) = f(b^i e_J) = \alpha(b^i) f(e_J) = b^{\pm i} e_J$  ( $i \in \{1, \dots, m-1\}$ ) alors  $f(e_J)$  est fixée par  $\langle b^{\pm i} \rangle$  ce qui est une contradiction puisque

$$G_{f(e_J)} = G_{e_J} = \langle b^m \rangle.$$

De même pour le sommet  $x_a$ . □

**Lemme 4.32.**  $f|_{Y_{\tilde{e}_J}}$  est injective.

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde et on suppose que  $f|_{Y_{\tilde{e}_J}}$  n'est pas injective. On sait que  $f|_{T_{\tilde{e}_J}}$  envoie arête sur arête et sommet sur sommet d'après le Lemme 4.31.

Ainsi il existe  $u$  et  $v$  deux sommets de  $Y_{\tilde{e}_J}$  tels que  $f(u) = f(v)$ . Puisque d'après le lemme précédent  $f|_{T_{\tilde{e}_J}}$  est injective alors  $u$  et  $v$  appartiennent à deux composantes connexes de  $Y_{\tilde{e}_J}$  disjointes.

Si  $u \in BS(p, pn) \cdot x_a$  et  $v \in G \cdot x_b$  alors  $f(u)$  et  $f(v)$  ne sont pas dans la même orbite ce qui est une contradiction à  $f(u) = f(v)$ .

On a donc deux possibilités :  $u, v \in G \cdot x_a$  ou  $u, v \in G \cdot x_b$ .

— On se place dans le premier cas et on peut supposer que  $u = x_a$  et  $v = hx_a$ .

Par conséquent,

$$f(x_a) = f(hx_a) \iff \alpha(h)f(x_a) = f(x_a) \iff \alpha(h) \in \text{Stab}(f(x_a))$$

or, d'après le lemme précédent,

$$f(x_a) = x_a$$

ainsi

$$\alpha(h) \in \text{Stab}(x_a) = \langle a \rangle.$$

En utilisant de nouveau, le lemme précédent, on a

$$\alpha(\langle a \rangle) = \langle a \rangle$$

d'où

$$h \in \langle a \rangle.$$

Finalemment,  $v = hx_a = x_a = u$  ce qui est une contradiction à l'hypothèse de départ.

- On se place dans le second cas et on peut supposer que  $u = x_b$  et  $v = hx_b$  alors par un raisonnement similaire au précédent on obtient la même contradiction  $u = v$ .

□

On munit  $T$  du coloriage initial suivant :  $e_J$  est jaune et  $e_C$  ainsi que  $e$  (si le graphe étiqueté possède une arête  $e$ ) sont bleues.

Lorsqu'on effectue un pliage entre deux arêtes d'une même couleur, l'arbre quotient obtenu hérite d'un coloriage. Dans ce qui suit, les raisonnements ne feront appel qu'à des pliages entre arêtes de même couleur sauf à la fin de certains raisonnements lorsque des pliages seront effectués entre une arête bleue et une arête jaune.

*Démonstration de la Proposition 4.27.* On considère donc  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$ ,  $\alpha \in \text{Aut}(BS(p, pn))$  un représentant de  $\Phi$ ,  $(T, Y)$  est de la forme  $B$  et  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$ .

On rappelle que  $T$  est muni du coloriage initial suivant :  $e_J$  est jaune et  $e_C$  ainsi que  $e$  (si le graphe étiqueté possède une arête  $e$ ) sont bleues. L'étiquette de jonction pour ce coloriage est alors  $m$ .

$T$  et  $T \cdot \Phi$  sont dans le même espace de déformation et sachant que  $(T, Y)$  est de la forme  $B$  alors si  $f$  écrase une arête, il s'agit de l'arête  $e$  dans le second cas de la forme  $B$ . On obtient ainsi une application d'écrasement  $\pi : T \rightarrow T'$  avec  $(T', Y' = \pi(Y))$  dans le premier cas de la forme  $B$ . De plus,  $f$  passe au quotient ainsi on obtient  $\tilde{f} : T' \rightarrow T' \cdot \Phi$  avec  $(T', Y')$  dans le premier cas de la forme  $B$  et donc on se ramène à l'étude du premier cas de la forme  $B$ .

On peut donc supposer que  $f$  n'écrase aucune arête.

On subdivise indépendamment les arêtes de  $T$  et de  $T \cdot \Phi$  de sorte que

$$f : T \rightarrow T \cdot \Phi$$

envoie sommet sur sommet puis arête sur arête ainsi on peut ainsi écrire  $f$  comme la composition d'une suite de pliages.

On réalise des pliages entre arêtes bleues tant que ces pliages sont possibles (cette démarche s'arrête de la même façon que dans l'étape 1 de la Démonstration du Lemme 3.10) et ainsi en obtient  $f = f' \circ P_B$  où

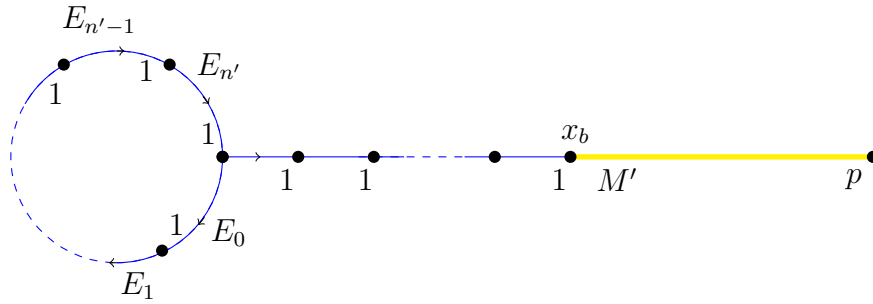
- $P_B : T \rightarrow T'$  désigne la composition des pliages bleus effectués.

$$p_B = p_{r-1} \circ \cdots \circ p_0$$

où  $p_i : T_i \rightarrow T_{i+1}$  est un pliage impliquant uniquement des arêtes bleues avec  $i \in \{0, \dots, r-1\}$ ,  $T_0 = T$  et  $T_r = T'$  et,

- $f' : T' \rightarrow T \cdot \Phi$  est injective en restriction à chaque composante bleue.

Dans ce qui va suivre, on va montrer que le graphe étiqueté du sous-arbre minimal de  $T'$  est de la forme suivante



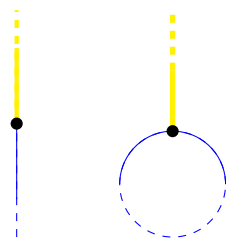
La démonstration va suivre ce qui a été fait à l'étape 2 du chapitre 3. La différence réside dans le fait que  $f$  n'est pas optimale ainsi le Lemme 1.25 ne peut pas s'appliquer et les arbres intermédiaires peuvent ne pas être minimaux.

On va montrer par récurrence que, pour tout  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ , le sous-arbre minimal de  $T_i$ , noté  $S_i$ , est de la forme  $1'$  et que  $m|M_i$  où  $M_i$  désigne l'étiquette de jonction de  $S_i$  ( $M_0 = m$  car  $S_0 = T$  et  $m$  est l'étiquette de jonction de  $T$ ).

On suppose donc  $S_i$  vérifie ces 2 conditions et on va montrer que  $S_{i+1}$  vérifie également ces 2 conditions.

Si le pliage  $p_i$  implique deux arêtes non adjacentes à une arête jaune alors  $T_{i+1}$  est encore de la forme  $1'$  sauf si le pliage a lieu en un sommet de valence 2 entre deux arêtes de deux orbites différentes. Dans un tel cas,  $S_{i+1}$  est de la forme  $1'$  et l'étiquette de jonction n'a pas été modifiée et donc  $m|M_{i+1} = M_i$ .

On se concentre maintenant sur le cas où  $p_i$  implique deux arêtes adjacentes à une arête jaune. Il n'y a que 2 configurations différentes qui peuvent donner lieu à un tel pliage et ce sont les suivantes :



- Configuration 1 : Le bâton dans  $T_i$ ,  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ , contient au moins une arête bleue.

Le pliage a lieu soit entre deux arêtes du bâton (dans la même orbite ou non) ou alors entre une arête du bâton et une arête du cercle.

Dans ces deux cas,  $S_{i+1}$  reste de la forme 1'. La seule modification est au niveau de l'étiquette de jonction qui peut être multipliée par un entier non nul et ainsi on a toujours  $m|M_{i+1}$ .

- Configuration 2 : Le bâton dans  $T_i$ ,  $i \in \{0, \dots, m-1\}$ , ne contient aucune arête bleue et le pliage  $p_i$  a lieu entre deux arêtes bleues au sommet de valence 3. Dans un tel cas,  $S_{i+1}$  reste de la forme 1'. La seule modification est au niveau de l'étiquette de jonction qui peut être multipliée par un entier non nul et ainsi on a toujours  $m|M_{i+1}$ .

Par suite le sous-arbre minimal de  $T'$ , noté  $S'$  est également de la forme 1' et l'étiquette de jonction, notée  $M'$ , vérifie  $m|M'$ .

On considère  $q_i$  la projection de  $T_i$  sur son sous-arbre minimal  $S_i$  ( $q_i$  est l'identité si  $T_i$  est minimal i.e.  $T_i = S_i$ ).

Sachant que  $T_i$  est obtenu par un pliage bleu alors la projection  $q_i$  envoie toujours une composante bleue de  $T_i$  dans une composante bleue de  $S_i$ . Par conséquent,  $q_i \circ p_i$  envoie une composante bleue de  $T_{i-1}$  dans une composante bleue de  $S_i$ .

On note  $q_B$  l'application suivante

$$q_B = q_{m-1} \circ p_{m-1} \circ \dots \circ q_1 \circ p_1 \circ q_0 \circ p_0 : T \longrightarrow S'$$

et on note  $f'_{min}$  la restriction de  $f'$  à  $S'$  i.e.  $f'_{min} : S' \longrightarrow T \cdot \Phi$ .

Pour récapituler nous avons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{f} & T \cdot \Phi \\
 \searrow^{p_B} & & \nearrow^{f'} \\
 & T' & \\
 \swarrow^{q_B} & \cup & \nearrow^{f'_{min}} \\
 & S' & 
 \end{array}$$

avec

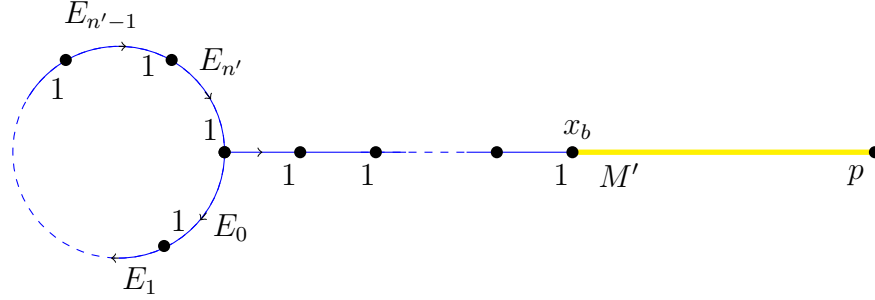
- $f = f' \circ p_B = f'_{min} \circ q_B$  et,



- $q_B$  envoie la forêt bleue dans la forêt bleue ainsi que la forêt jaune dans la forêt jaune.

On notera que ce diagramme n'est pas commutatif sauf si on ne prend pas en considération  $q_B$ .

D'après ce qui précède, le graphe étiqueté de  $S'$  est, à subdivisions près,



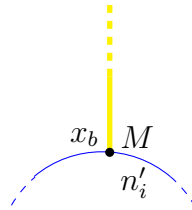
On rappelle que  $Y_{\tilde{e}_J(T)}$  est la forêt jaune de  $T$ . De plus, on a  $f$  est injective sur la forêt jaune de  $T$  (Lemme 4.32) et donc  $f'$  est injective sur  $p_B(Y_{\tilde{e}_J}) = Y_{\tilde{e}_J}(T')$  et donc  $f'_{min}$  est injective sur la forêt jaune de  $S'$ .

On a également  $f'_{min}$  injective en restriction à chaque composante de la forêt bleue de  $S'$ .

Par conséquent, soit  $S' = T \cdot \Phi$  (et nous verrons ci après qu'il est alors possible de se ramener à la forme  $A$  déjà étudiée) soit le pliage suivant a lieu entre une arête bleue et une arête jaune.

Si le bâton de  $S'$  contient au moins une arête bleue alors le bâton n'est pas entièrement jaune et un pliage entre une arête bleue et une arête jaune entraîne un pliage entre des arêtes jaunes (car  $m > 1$  et donc  $M' > 1$ ) ce qui est impossible car  $f'_{min}$  est injective en restriction à la forêt jaune de  $S'$ .

Par conséquent, toutes les arêtes du bâton de  $S'$  sont jaunes.



On a  $M = n'_i$  car sinon un pliage entre une arête bleue et une arête jaune impliquerait un pliage entre des arêtes bleues ou des arêtes jaunes ce qui est impossible car, d'après ce qui précède,  $f'_{min,|Y_{\tilde{e}_J}}$  injective et  $f'_{min}$  injective en restriction au sous-arbre bleu de  $S'$ .

Cependant cette situation ne peut se produire car  $|m| \neq |n|$  et  $n'_i \mid n \mid m$  d'où  $S' = T \cdot \Phi$  et donc  $f'_{min}$  est un isomorphisme.

Par conséquent, puisque  $S' = T \cdot \Phi$ , le graphe quotient de  $(T, Y)$  est à la fois

comme décrit ci-dessus et de la forme  $B$ . On peut donc distinguer deux cas.

Si  $(T, Y)$  est dans le cas 1 de la forme  $B$  alors, d'après ce qui précède, le bâton est constitué d'une seule arête jaune et le cycle bleu contient une unique arête.

Dans un tel cas,  $f$  envoie alors le cercle de  $T$  dans le bleu de  $S'$ . Le cercle est donc une forêt invariante et on se ramène au cas de la forme  $A$  précédemment étudiée et ainsi  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré 1.

Si  $(T, Y)$  est dans le cas 2 de la forme  $B$  alors on sait que le bâton a 2 arêtes et que la forêt jaune n'en a qu'une, donc la forêt bleue de  $S'$  est la forêt  $Z' \subset S'$  définie comme la préimage du cercle et de la première arête du bâton.

Puisque  $S' = T \cdot \Phi$ , on peut voir  $Z'$  comme une sous-forêt  $Z$  de  $T$ , qui coïncide avec la sous-forêt bleue dans le coloriage initial de  $T$ .

De plus,  $f$  envoie le bleu dans le bleu, cette forêt est donc invariante par  $f$ .

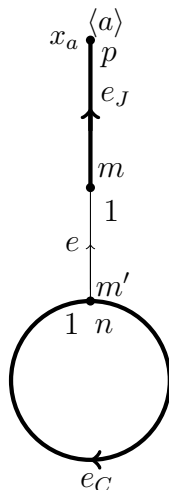
$e$  est donc une arête  $Z$ -écrasable et en appliquant le Lemme 4.22, on a  $T'' \in \mathcal{D}_{p,pm}$  obtenu en écrasant  $e$  ainsi qu'une application  $F : T'' \rightarrow T'' \cdot \Phi$  telle que

$$F(Y_{\tilde{e}_C}) \subset Y_{\tilde{e}_C}.$$

Par conséquent, on se ramène de nouveau à la forme  $A$  et on peut utiliser la Proposition 4.24 et ainsi conclure que  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré 1. □

Il reste à démontrer ce théorème dans le cas de la dernière forme.

### 4.2.3 Cas $(T, Y)$ de la forme $C$



où  $n|m$  et  $|n| \neq |m|$   
forme  $C$

On considère  $\tilde{e}_C$  un relevé de  $e_C$  dans  $T$ ,  $\tilde{e}$  un relèvements de  $e$  dans  $T$  et  $\tilde{e}_J$  un relevé de  $e_J$  dans  $T$  tels que  $o(\tilde{e}_C) = o(\tilde{e})$  et  $t(\tilde{e}) = o(\tilde{e}_J)$ .

**Proposition 4.33.** *Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  et*

$$f : T \longrightarrow T \cdot \phi$$

*une application laissant invariante une sous-forêt  $Y$  propre,  $BS(p, pn)$ -invariante et essentielle.*

*On suppose de plus que  $(T, Y)$  est de la forme  $C$  et donc la sous-forêt  $Y$  est  $Y_{\tilde{e}_J} \amalg Y_{\tilde{e}_C}$ .*

*Sous ces hypothèses,  $\Phi$  est à croissance polynomiale.*

*Démonstration.* Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  et

$$f : T \longrightarrow T \cdot \phi$$

une application laissant invariante une sous-forêt  $Y$  propre,  $G$ -invariante et essentielle.

On suppose de plus que  $(T, Y)$  est de la forme  $C$  et donc la sous-forêt  $Y$  est  $Y_{\tilde{e}_J} \amalg Y_{\tilde{e}_C}$ .

$Y_{\tilde{e}_J}$  et  $Y_{\tilde{e}_C}$  sont deux sous-forêts ayant chacune une unique orbite d'arêtes. Par conséquent, sachant que  $f(Y_{\tilde{e}_J} \amalg Y_{\tilde{e}_C}) \subset Y_{\tilde{e}_J} \amalg Y_{\tilde{e}_C}$ , on a donc

$$\begin{cases} f(Y_{\tilde{e}_J}) \subset Y_{\tilde{e}_J} \\ \text{ou} \\ f(Y_{\tilde{e}_J}) \subset Y_{\tilde{e}_C} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} f(Y_{\tilde{e}_C}) \subset Y_{\tilde{e}_C} \\ \text{ou} \\ f(Y_{\tilde{e}_C}) \subset Y_{\tilde{e}_J}. \end{cases}$$

Si  $f(Y_{\tilde{e}_C}) \subset Y_{\tilde{e}_C}$  alors on se trouve dans le cas où  $(T, Y)$  est de la forme  $A$  et ainsi  $\Phi$  est à croissance polynomiale. De même, si  $f(Y_{\tilde{e}_J}) \subset Y_{\tilde{e}_J}$  alors on se trouve dans le cas où  $(T, Y)$  est de la forme  $B$  et ainsi  $\Phi$  est à croissance polynomiale.

Il reste donc à traiter le cas où

$$\begin{cases} f(Y_{\tilde{e}_J}) \subset Y_{\tilde{e}_C} \\ \text{et} \\ f(Y_{\tilde{e}_C}) \subset Y_{\tilde{e}_J}. \end{cases}$$

Ce dernier cas ne peut pas se produire. En effet, dans la démonstration du Lemme 2.13 on a exhibé une liste de générateurs de  $\text{Aut}(BS(p, pn))$  et on peut constater que chacun de ses générateurs préserve  $\langle a \rangle$ .

Par conséquent,  $\Phi$  est à croissance polynomiale.  $\square$

# Chapitre 5

## Automorphismes irréductibles

D'après le Théorème 3.3, tout automorphisme  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  irréductible est non parabolique i.e.  $\inf \delta_\Phi$  est réalisé où  $\delta_\Phi$  désigne la fonction déplacement (voir Définition 3.1).

### 5.1 Automorphismes non paraboliques

Les automorphismes irréductibles sont donc soit elliptiques si  $\inf \delta_\Phi = 0$  soit hyperboliques si  $\inf \delta_\Phi > 0$ .

#### 5.1.1 Automorphismes elliptiques

On peut commencer par donner quelques précisions au sujet des automorphismes elliptiques avant de traiter la croissance dans le cas plus général des automorphismes non paraboliques.

En se plaçant dans le cadre plus général d'un espace de déformation quelconque, d'après le chapitre 1 section 2, on sait que pour  $T$  et  $T'$  dans  $\mathcal{PD}$  alors  $d_{Lip}(T, T') = 0$  n'implique pas, en général, que  $T$  et  $T'$  sont  $BS(p, pn)$ -équivairement isométriques (voir Exemple 4.4 de [Mei15]) sauf dans le cas particulier d'un espace de déformation sans module entier non trivial ([Mei15], Proposition 5.1).

**Définition 5.1.** Soit  $\mathcal{D}$  est un espace de déformation de  $G$ -arbres localement finis et tous les stabilisateurs d'arêtes et de sommets de tous les  $G$ -arbres de  $\mathcal{D}$  sont commensurables en tant que sous-groupes de  $G$ .

On peut définir le *morphisme modulaire*

$$\begin{aligned} \mu = \mu(\mathcal{D}) : G &\longrightarrow (\mathbb{Q}_{>0}, \times) \\ g &\longmapsto \mu(g) = \frac{[H : (H \cap g H g^{-1})]}{[g H g^{-1} : (H \cap g H g^{-1})]} \end{aligned}$$

où  $H$  désigne un sous-groupe de  $G$  commensurable avec un stabilisateur d'arête ou de sommet d'un  $G$ -arbre  $T \in \mathcal{D}$ .  $\mu$  ne dépend pas du choix de  $H$ .  $\mathcal{D}$  est sans module entier non trivial si  $im(\mu) \cap \mathbb{Z} = \{1\}$ .

Ce résultat ne s'applique pas dans notre cas car  $im(\mu) \cap \mathbb{Z} \neq \{1\}$  mais on a le résultat suivant.

**Proposition 5.2.** *Soit  $\Phi \in Out(BS(p, pn))$  elliptique.*

*Il existe  $T \in \mathcal{D}_H$  tel que  $T = T \cdot \Phi$ .*

*En particulier,  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré 1.*

*Démonstration.* Si  $\Phi \in Out(BS(p, pn))$  est elliptique alors par définition, il existe un  $BS(p, pn)$ -arbre métrique  $T \in PD_H$  tel que  $d_{Lip}(T, T \cdot \Phi) = 0$  i.e.  $Lip(T, T \cdot \Phi) = 1$  avec  $T$  et  $T \cdot \Phi$  de covolume 1.

D'après la Proposition 3.10, il existe  $T' \in \mathcal{D}_H$  tel que

$$d_{Lip}(T', T' \cdot \Phi) = 0$$

et le graphe de groupes quotient marqué est un cercle et donc de la forme  $2''$ .

On considère donc une application optimale de  $T'$  vers  $T' \cdot \Phi$ .

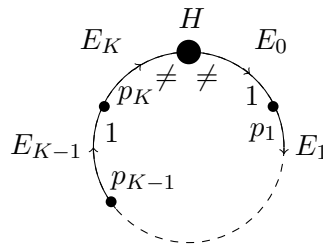
Quitte à subdiviser indépendamment les arêtes de  $T'$  et  $T' \cdot \Phi$  alors on peut supposer que  $f$  envoie arête sur arête et sommet sur sommet.

$Lip(f) = 1$  et donc on peut écrire  $f$  comme la composition d'une application d'écrasement et de pliages

$$f = f' \circ \pi$$

où  $\pi : T' \rightarrow T''$  désigne l'application d'écrasement et  $f' : T'' \rightarrow T' \cdot \Phi$  l'application correspondant à la suite de pliages.

$\pi$  ne peut écraser d'arête adjacente au sommet fixé par  $H$  car sinon le covolume diminuerait. Le graphe étiqueté de  $T''$  est donc de la forme  $2''$



forme  $2''$

Les pliages ont lieu entre des arêtes de la même orbite car sinon le covolume diminue ( $T'$  et  $T' \cdot \Phi$  sont de covolume 1).

Par la suite, on va supposer que  $f'$  n'est pas injective et aboutir à une contradiction.

On considère le plus petit  $i \in \{0, \dots, K-1\}$  tel qu'il a un pliage entre  $E_i$  et une arête de son orbite.

On note  $T''_{i+1}$  l'arbre ainsi obtenu ( $T''_i = T''$ ) et  $p_i : T''_i \longrightarrow T''_{i+1}$  le pliage correspondant et  $f''_{i+1} : T''_{i+1} \longrightarrow T \cdot \Phi$  telle que  $f''_{i+1} \circ p_i = f''$ .

$T''_{i+1} \neq T \cdot \Phi$  puisque l'étiquette de  $E_{i+1}$  est multipliée par un entier strictement supérieur à 1.  $f''_{i+1}$  n'est pas injective au voisinage de l'origine de l'arête  $E_{i+1}$  et donc on peut répéter la même démarche avec  $f''_{i+1}$  et  $E_{i+1}$ .

Ainsi de proche en proche, pour  $j \in \{i, \dots, K-1\}$ , on a un arbre  $T''_{j+1}$  obtenu à partir de  $T''_j$  par le pliage d'arêtes dans l'orbite de  $E_j$ .

On obtient également  $f''_{j+1} : T''_{j+1} \longrightarrow T \cdot \Phi$  injective en restriction aux orbites d'arêtes  $E_0, \dots, E_j$ . On remarque que  $T''_{j+1} \neq T \cdot \Phi$  car l'étiquette de  $E_{j+1}$  est multipliée par un entier strictement supérieur à 1.

Finalement,  $T''_K \neq T \cdot \Phi$  et  $f''_K$  est injective en restriction aux orbites d'arêtes  $E_0, \dots, E_{K-}$  ainsi le seul pliage possible est entre deux arêtes de l'orbite de  $E_K$ . Cependant un tel pliage ne peut avoir lieu car il entraînerait un changement d'espace de déformation ainsi on aboutit à une contradiction et donc  $f'$  est injective. Par conséquent  $T = T \cdot \Phi$ .

Quitte à remplacer  $\Phi$  par une puissance de  $\Phi$ ,  $\Phi$  agit comme l'identité sur le graphe quotient. Par conséquent, tout écrasé de  $T$  est  $\Phi$ -invariant et en écrasant toutes les arêtes écrasables, on obtient  $T'$  dans le même espace de déformation,  $\Phi$ -invariant et dont le graphe quotient n'a qu'une arête.

On considère le morphisme  $\rho$  décrit à la page 37,

$$\rho : \text{Out}_0^T(G) \longrightarrow \text{Out}(H)$$

dont le noyau est engendré par les bitwists.

Afin de prouver que  $\Phi$  est un bitwist, on va montrer que son image dans  $\text{Out}(H)$  est triviale.

Par la précision du Lemme 2.13,  $\rho$  est d'image finie (de cardinal au plus 2).

Par conséquent, quitte à remplacer  $\Phi$  par  $\Phi^2$ , alors  $\Phi$  est dans le noyau de  $\rho$  i.e.  $\Phi$  est un bitwist.

On en déduit par le Lemme 4.10, que  $\Phi$  est à croissance polynomiale.  $\square$

## 5.2 Représentant train track

**Définition 5.3.** Soit  $\Phi \in \text{Out}(G)$ ,  $\mathcal{D}$  désigne un espace de déformation de  $G$ -arbres,  $T \in \mathcal{D}$  et  $f : T \longrightarrow T \cdot \Phi$  une application linéaire sur les arêtes,  $G$ -équivariante et lipschitzienne.

On notera que l'application  $G$ -équivariante  $f : T \longrightarrow T \cdot \Phi$  peut être vue comme

une application  $\Phi$ -équivariante  $f : T \rightarrow T$ .

Un segment  $I \subset T$  est  $f^*$ -légal si pour tout  $k \geq 1$ , la restriction de  $f^k$  à  $I$  est injective.

**Définition 5.4** (Application optimale train track). Soit  $T \in \mathcal{D}_{p,pn}$ ,  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  et  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  une application optimale.

$f$  est une application *train track* si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- (i)  $\Delta(f) = T$  et,
- (ii) les arêtes de  $T$  sont  $f^*$ -légales.

*Remarque 5.5.* Par définition de la structure légale associée à  $f$ , si  $f$  envoie un sommet  $v \in V(T)$  sur un sommet  $f(v) \in V(T \cdot \Phi)$  alors il envoie des tournants  $f$ -légaux au sommet  $v$  sur des tournants légaux au sommet  $f(v)$ .

On dit que  $\Phi \in \text{Out}(G)$  est représenté par une application train track optimale s'il existe un  $G$ -arbre  $T \in \mathcal{D}$  et une application optimale  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  qui est une application train track.

**Théorème 5.6.** *Tout automorphisme  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  irréductible dans  $\mathcal{D}_H$  est représenté par une application train track optimale dans  $\mathcal{D}_H$ .*

*Plus précisément, toute application optimale  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$ , où  $T \in \mathcal{D}_H$  vérifie  $d_{Lip}(T, T \cdot \Phi) = \inf \delta_\Phi$ , est train track.*

*Démonstration.*  $\Phi$  est irréductible et donc, par le Théorème 3.3,  $\Phi$  est non parabolique et donc  $\inf \delta_\Phi$  est réalisé.

A partir de ce point, la démonstration est identique à celle du Théorème 5.13 de [Mei15].

On peut donc considérer  $T \in \mathcal{D}_H$  tel que  $d_{Lip}(T, T \cdot \Phi) = \inf \delta_\Phi$  et  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  optimale.

Par le Lemme qui suit,  $f$  vérifie le point (i) de la définition.

**Lemme 5.7.** *Soit  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  une application optimale, où  $T \in \mathcal{D}_H$  avec  $d_{Lip}(T, T \cdot \Phi) = \inf \delta_\Phi$ , alors*

$$\Delta(f) = T.$$

*Démonstration.* On suppose que  $f(\Delta(f)) \not\subset \Delta(f)$  et on considère  $e \in \Delta(f)$  telle que  $f(e) \not\subset \Delta(f)$ . On peut augmenter la métrique sur  $\Delta(f)$  et la diminuer sur  $T \setminus \Delta(f)$ . On note  $T'$  l'arbre métrique ainsi obtenu et  $f'_1$  l'application  $f$  vue comme application de  $T'$  dans  $T' \cdot \Phi$ .

On considère maintenant  $f' : T' \rightarrow T' \cdot \Phi$  l'application optimale telle que

$$\Delta(f') \subset \Delta(f'_1) \subsetneq \Delta(f).$$

Le facteur d'étirement sur  $e$  est donc diminué et on obtient un nouveau graphe de tension  $\Delta(f')$  tel que

$$\Delta(f') \subset \Delta(f).$$

Puisque  $d_{Lip}(T, T \cdot \Phi) = \inf \delta_\Phi$ , toutes les arêtes de  $\Delta(f)$  n'ont pas été enlevées et on peut répéter cette démarche avec  $\Delta(f')$  jusqu'à ce que

$$f'(\Delta(f')) \subset \Delta(f').$$

Par conséquent,  $\Delta(f) = T$  car sinon on obtient une contradiction à l'irréductibilité de  $\Phi$ .  $\square$

Par le Lemme qui suit,  $f$  vérifie le point (ii) de la Définition.

**Lemme 5.8.** *Toute application optimale  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$ , où  $T \in \mathcal{D}_H$  avec  $d_{Lip}(T, T \cdot \Phi) = \inf \delta_\Phi$ , envoie les arêtes sur des chemins  $f$ -légaux.*

*Démonstration.* On considère  $\lambda = Lip(f)$ . Par le résultat qui précède toutes les arêtes de  $T$  sont dilatées par le facteur  $\lambda$ .

On raisonne par l'absurde et on suppose que  $f$  ne vérifie pas le point (ii) de la définition 5.4 alors il existe  $e$  une arête de  $T$  envoyé sur un chemin contenant un tournant non  $f^*$ -légal au sommet  $v$  noté  $\{\delta_1, \delta_2\} \subset T$ .

Par conséquent, on note  $k_0$  le plus petit indice  $k \in \mathbb{N}$

$$D_v(f^k(\delta_1)) = D_v(f^k(\delta_2)).$$

Notons que pour  $k < k_0$ , ces tournants sont tous dans des orbites différentes.

Soit  $\epsilon > 0$ , dans  $T$ , pour tout  $i \in \{1, \dots, k-1\}$ , on plie sur la longueur  $\frac{\epsilon}{\lambda^i}$  le tournant non  $f^*$ -légal  $\{f^i(\delta_1), f^i(\delta_2)\}$  de manière  $\Phi$ -équivariante et ainsi on obtient un  $G$ -arbre noté  $T'$ , une application  $\pi : T \rightarrow T'$  et l'application  $f$  passe au quotient (puisque chacun des tournants est envoyé sur un tournant précédemment identifié et en particulier  $T' \in \mathcal{D}_H$ ) i.e. il existe  $\bar{f} : T' \rightarrow T \cdot \Phi$  telle que  $f = \bar{f} \circ \pi$  qui induit une application  $f' : T' \rightarrow T \cdot \Phi$ -équivariante que l'on peut rendre linéaire sur les arêtes et vérifiant

$$d_{Lip}(T', T') \leq d_{Lip}(T, T)$$

et ainsi

$$d_{Lip}(T', T') = \inf \delta_\Phi.$$

Pour cette application le facteur d'étirement de l'image induite de  $e$  a strictement diminué et donc  $e$  n'est plus dans le graphe de tension ainsi

$$\Delta(f') \subsetneq T'.$$

On obtient donc une contradiction au Lemme précédent.  $\square$



□

**Corollaire 5.9.** Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  irréductible dans  $\mathcal{D}_H$  et représenté par une application train track optimale  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  où  $T \in \mathcal{D}_H$ .

Il existe  $T'$  appartenant au simplexe de  $T$  ainsi que  $f' : T' \rightarrow T' \cdot \Phi$  application train track optimale telle que

$$\forall v \in V(T), f(v) \in V(T \cdot \Phi).$$

*Démonstration.* Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  représenté par une application train track optimale  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$ , avec  $T \in \mathcal{D}_H$ , une application train track optimale. On considère un choix d'orientation  $G$ -équivariante des arêtes de  $T$  et  $F : T \rightarrow T \cdot \Phi$  qui déplace chaque sommet  $f(v)$  qui n'est pas un sommet vers le sommet terminal de l'arête le contenant. L'application  $F$  est donc définie comme suit

$$\begin{aligned} F : T &\longrightarrow T \cdot \Phi \\ v &\mapsto F(v) = \begin{cases} f(v) & \text{si } f(v) \in V(T) \text{ et} \\ t(e) & \text{si } f(v) \text{ est intérieur à } e. \end{cases} \\ e &\mapsto [F(o(e)); F(t(e))] \end{aligned}$$

Soit  $\gamma$  un axe  $f$ -légal (pour la structure légale définie par  $f$  sur  $\Delta(f) = T$ ), par définition de  $F$  et par légalité,  $F(\gamma) \subset f(\gamma)$ . De plus,  $F(\gamma)$  est invariant par  $\Phi(g)$  et donc ne peut pas être une sous-droite d'où  $F(\gamma) = f(\gamma)$ .

$F$  peut être constante sur certaines orbites d'arêtes. On considère  $G \cdot e$  une de ces orbites d'arêtes que l'on écrase et on note  $T^1$  l'arbre obtenu ainsi  $T$  domine  $T^1$  (on note  $\pi^1$  l'application d'écrasement).

On note  $\bar{F}$  l'application  $T^1 \rightarrow T \cdot \Phi$  telle que  $F = \bar{F} \circ \pi^1$ . Il existe une application  $G : T \cdot \Phi \rightarrow T$  tel que  $G \circ \bar{F} : T^1 \rightarrow T$  ainsi  $T^1$  domine  $T$  et donc  $T^1 \in \mathcal{D}_H$ . On considère l'application  $f^1 : T^1 \rightarrow T^1 \cdot \phi$  définie par  $f^1 = \pi \circ \bar{F}$  et ainsi on peut répéter cette démarche avec  $f^1$ . Cette démarche se termine par cocompacité de  $T$  et on obtient  $T' \in \mathcal{D}_H$ , une application d'écrasement  $\pi : T \rightarrow T'$  et l'application induite  $f' : T' \rightarrow T' \cdot \Phi$ .

On note  $M$  la matrice d'incidence de  $f'$  définie de la façon suivante : le coefficient  $M_{ij}$  de  $M$  est le nombre de fois où la  $f'$ -image de la  $j$ -ème arête croise la  $i$ -ème arête indépendamment de l'orientation.

**Lemme 5.10.** Il existe  $T'' \in \mathcal{D}_H$ , une application d'écrasement  $\pi' : T' \rightarrow T''$  et  $f'' : T'' \rightarrow T'' \cdot \Phi$  dont la matrice d'incidence est irréductible.

*Démonstration.* Si  $M$  n'est pas irréductible, il existe une partition de  $\{1, \dots, n\}$  en 2 parties non vides  $I$  et  $J$  telles que

$$\forall i \in I, \forall j \in J, M_{ij} = 0.$$

Par conséquent, il existe un ensemble  $E$  tel que  $f'(E) \subset E$  et donc on obtient une sous-forêt de  $T'$  notée  $Y_E$  telle que

$$f'(Y_E) \subset Y_E.$$

$Y_E$  est donc une sous-forêt propre  $G$ -invariante et invariante par  $f$  qui n'est pas essentielle puisque  $\Phi$  est irréductible. Ainsi on peut écraser  $Y_E$  tout en restant dans  $\mathcal{D}_H$  et obtenir  $T'_1 \in \mathcal{D}_H$ ,  $\pi_1 : T' \rightarrow T'_1$  et l'application induite  $f'_1 : T'_1 \rightarrow T'_1 \cdot \Phi$ . Si la matrice d'incidence de  $f'_1$  est irréductible alors on obtient le résultat voulu et sinon on peut réitérer la démarche (qui se termine par cocompacité de  $T'$ ) et obtenir  $T'' \in \mathcal{D}_H$ , une application d'écrasement  $\pi' : T' \rightarrow T''$  et  $f'' : T'' \rightarrow T'' \cdot \Phi$  donc la matrice d'incidence est irréductible.  $\square$

Le Lemme ainsi démontré nous permet de supposer que  $M$  est irréductible et de conserver l'hypothèse affirmant que  $f'$  n'écrase aucune arête.

D'après le Lemme 4.15 de [Mei15], il existe un élément hyperbolique dont l'axe est  $f^*$ -légal par rapport à la structure légale dynamique.

Soit  $\gamma$  un tel axe dans  $T$  et

$$\gamma' = \pi(\gamma).$$

$\gamma'$  est soit réduit à un point soit une droite.  $\pi(\gamma)$  ne peut être réduit à un point car sinon on crée un nouvel elliptique ce qui est impossible car  $T' \in \mathcal{D}_H$ . De plus, l'ordre des sommets est conservé lors des écrasements et des déplacements d'images de sommets et donc  $\gamma'$  est l'axe  $f'^*$ -légal d'un élément hyperbolique dans  $T'$  (pour la structure légale définie par  $f'$  sur  $\Delta(f') = T'$ ).

On démontre maintenant que les arêtes sont envoyées sur des chemins  $f'^*$ -légaux. En effet, pour toute arête  $e \in E(\Gamma)$ , il existe un axe  $f^*$ -légal  $\gamma$  contenant  $e$  car

$$Y = \{e \in E(T') \mid \exists \gamma \text{ telle que } e \subset \gamma\}$$

est une sous-forêt  $G$ -invariante, invariante par  $f$  et essentielle. De plus,  $Y \neq \emptyset$  car, comme précédemment, d'après le Lemme 4.15 de [Mei15], il existe un élément hyperbolique dont l'axe est  $f^*$ -légal et ainsi  $Y = T'$  car  $\Phi$  est irréductible.

Montrons que  $Lip(T', T' \cdot \Phi) = Lip(f') = \inf \delta_\Phi$ . D'après le résultat qui précède, quitter à écraser certaines arêtes de  $T'$  tout en restant dans  $\mathcal{D}_H$ , on peut supposer que  $M$  est irréductible.

Afin de munir  $T'$  d'une métrique on utilise le Théorème de Perron-Frobenius.

**Théorème 5.11** (Perron-Frobenius). *Soit  $M$  une matrice d'entiers positifs irréductible et  $\lambda$  son rayon spectral.*

*Alors  $\lambda > 0$ ,  $\lambda$  est une valeur propre simple de  $M$  et il existe un unique vecteur propre  $\vec{w}$  de norme 1 strictement positif pour  $M$  de valeur propre associée  $\lambda$ .*

On considère donc le vecteur propre  $\vec{w}$  (et la valeur propre associée  $\lambda$ ) donné par le théorème de Perron-Frobenius et on munit chaque arête  $e_i$  de la longueur  $w_i > 0$ . On commence par montrer que

$$Lip(T', T' \cdot \Phi^k) = \lambda^k.$$

Par le Lemme 4.15 de [Mei15], il existe un élément hyperbolique  $\xi \in G$  dont l'axe  $C_\xi$  est contenu dans le graphe de tension  $\Delta(f)$  et est  $f$ -légal par rapport à la structure légale dynamique. Puisque  $f$  est une application train track, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f^k(C_\xi) \subset T \cdot \Phi^k$  est une ligne  $\xi$ -invariante et donc  $f^k(C_\xi)$  est l'axe hyperbolique de  $\xi$  dans  $T \cdot \Phi^k$  et donc en particulier est contenu dans  $\Delta(f)$  et est  $f^*$ -légal. On a donc

$$\begin{aligned} Lip(T, T \cdot \Phi^k) &\geq \frac{l_{T \cdot \Phi^k}(\xi)}{l_T(\xi)} = \frac{l_{T \cdot \Phi}(\xi)}{l_T(\xi)} \cdots \frac{l_{T \cdot \Phi^k}(\xi)}{l_{T \cdot \Phi^{k-1}}(\xi)} = \lambda^k \\ &= Lip(T, T \cdot \Phi)^k \end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout  $T_0 \in \mathcal{D}_H$ , on a

$$\begin{aligned} kd_{Lip}(T', T' \cdot \Phi) &\leq d_{Lip}(T', T' \cdot \Phi^k) \\ &\leq d_{Lip}(T', T_0) + d_{Lip}(T_0, T_0 \cdot \Phi^k) + d_{Lip}(T_0 \cdot \Phi^k, T' \cdot \Phi^k) \\ &\leq d_{Lip}(T', T_0) + kd_{Lip}(T_0, T_0 \cdot \Phi) + d_{Lip}(T_0, T') \end{aligned}$$

d'où

$$d_{Lip}(T', T' \cdot \Phi) \leq \frac{1}{k}d_{Lip}(T', T_0) + d_{Lip}(T_0, T_0 \cdot \Phi) + \frac{1}{k}d_{Lip}(T_0, T')$$

ainsi, en faisant tendre  $k$  vers l'infini, on obtient

$$d_{Lip}(T', T' \cdot \Phi) \leq d_{Lip}(T_0, T_0 \cdot \Phi)$$

et donc

$$Lip(T', T' \cdot \Phi) = Lip(f') = \inf \delta_\Phi.$$

On en déduit que  $f'$  est une application train track optimale envoyant sommet sur sommet.  $\square$

**Corollaire 5.12.** *Tout automorphisme  $\Phi \in Out(BS(p, pn))$  irréductible dans  $\mathcal{D}_H$  est représenté par une application train track optimale  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  telle que*

- *le graphe étiqueté de  $T$  est un cercle et,*
- *$\forall v \in V(T)$ ,  $f(v) \in V(T)$ .*

*Démonstration.* Ce résultat est issu du Corollaire 5.9 et de la Proposition 3.10. Le graphe étiqueté de  $T$  est de la forme  $1''$  ou  $2''$ . Si le graphe étiqueté de  $T$  est de la forme  $1''$ ,  $\Phi$  étant irréductible, alors par la Proposition 3.10, il existe  $T' \in \mathcal{D}_H$  dont le graphe étiqueté est un cercle et tel que  $Lip(T', T' \cdot \Phi) \leq Lip(T, T \cdot \Phi)$ . Ainsi, par le Corollaire 5.9,  $\Phi$  est représenté par une application train track optimale  $f : T'' \rightarrow T'' \cdot \Phi$  où le graphe étiqueté de  $T''$  est de la forme  $2''$  et est un écrasé de  $T'$  et pour tout  $v \in V(T)$ ,  $f(v) \in V(T)$ .  $\square$

On peut terminer ce chapitre par plusieurs résultats concernant la croissance de tout automorphisme.

**Théorème 5.13.** *Soit  $\Phi \in Out(BS(p, pn))$  et  $n = n_0^{r_0} \cdots n_q^{r_q}$  désigne la décomposition en nombres premiers de  $n$ .*

*Soit  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré 1 soit il existe  $\lambda$  entier algébrique et  $T \in \mathcal{D}_H$  dont le graphe étiqueté est un cercle tel que*

$$\begin{aligned} \forall g \in BS(p, pn), l_T(\Phi^k(g)) &\leq \lambda^k l_T(g) \\ \exists g \in BS(p, pn), l_T(\Phi^k(g)) &= \lambda^k l_T(g). \end{aligned}$$

*De plus, le degré de l'entier algébrique  $\lambda \leq m$  où  $m$  désigne le nombre d'orbites d'arêtes de  $T$  avec  $m \leq r_0 + \cdots + r_q$ .*

*Démonstration.* Soit  $\Phi \in Out(BS(p, pn))$ .

D'après le Théorème 4.16, si  $\Phi$  est réductible alors  $\Phi$  est à croissance polynomiale de degré 1.

Si  $\Phi$  est irréductible alors, comme précédemment,  $\Phi$  est non parabolique et est représenté par une application train track optimale par le Corollaire 5.12. On peut donc considérer  $T$  un  $G$ -arbre de  $\mathcal{D}_H$  dont le graphe étiqueté est un cercle (de la forme  $2''$ ) et  $f : T \rightarrow T \cdot \Phi$  une application optimale qui est une application train track.

$\Phi$  étant irréductible, on peut supposer que  $\Delta(f) = T$ .

Si  $\Phi$  est elliptique alors par le Lemme 5.2, la croissance de  $\Phi$  est polynomiale de degré 1.

On se place maintenant dans le cas où  $\Phi$  est hyperbolique et on note

$$\lambda = Lip(T, T \cdot \Phi) = Lip(f).$$

Par conséquent, pour tout  $g' \in BS(p, pn)$ ,

$$l_{T \cdot \Phi^k}(g') \leq \lambda^k l_T(g').$$

Par le Lemme 4.15 de [Mei15], Il existe un élément hyperbolique  $g \in BS(p, pn)$

dont l'axe  $\gamma$  est contenu dans le graphe de tension de  $f$  et est  $f$ -légal par rapport à la structure légale définie par  $f$  ainsi

$$\lambda = Lip(T, T \cdot \Phi) = \frac{l_{T \cdot \Phi}(g)}{l_T(g)}.$$

de plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $f|_{\gamma}^k$  est injective car  $\gamma$  est  $f$ -légal et donc  $f^k(\gamma)$  est une ligne  $g$ -invariante et donc est égale à l'axe hyperbolique de  $g$  dans  $T \cdot \Phi^k$ . Il est en particulier  $f$ -légal d'où

$$l_T(\Phi^k(g)) = l_{T \cdot \Phi^k}(g) = \lambda^k l_T(g).$$

Soit  $M = (M_{i,j})_{i,j \in \{0, \dots, k\}}$  la matrice d'indice de  $f$ . D'après ce qui précède, on peut considérer le vecteur propre  $\vec{l}$  (et la valeur propre associée  $\lambda$ ) donné par le théorème de Perron-Frobenius et on munit chaque arête  $e_i$  de la longueur  $l_i$ .

$\lambda$  est valeur propre de la matrice  $M$  et donc racine du polynôme caractéristique de  $M$  qui est unitaire à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  et ainsi  $\lambda$  est un entier algébrique.

De plus,  $M$  est une matrice carré d'ordre  $m$  (où  $m$  désigne le nombre d'orbites d'arêtes) de  $T$  et ainsi  $\lambda$  est un entier algébrique de degré  $m \leq r_0 + \dots + r_q$ .  $\square$

On énonce maintenant un Théorème qui s'applique pour tout arbre de  $\mathcal{D}_H$ .

**Théorème 5.14.** *Soit  $\Phi \in Out(BS(p, pn))$ .*

*Si  $\Phi$  n'est pas à croissance polynomiale alors pour tout  $T \in \mathcal{D}_H$ ,*

$$\begin{aligned} \forall g \in BS(p, pn), \exists C_g \geq 0, l_T(\Phi^k(g)) &\leq C_g \lambda^k \\ \exists g \in BS(p, pn), \exists C_g \geq 0, C_g' \lambda^k &\leq l_T(\Phi^k(g)) \end{aligned}$$

*Démonstration.* Si  $\Phi$  n'est pas à croissance polynomiale alors, par le Théorème 4.16,  $\Phi$  est irréductible dans  $\mathcal{D}_H$ . Soit  $T' \in \mathcal{D}_H$  dont le graphe étiqueté est un cercle et  $\lambda$  donnés par le Théorème 5.13. On a donc

$$C_1 l_{T'}(g) \leq l_T(g) \leq C_2 l_{T'}(g)$$

où  $C_1 = Lip(T, T')$  et  $C_2 = Lip(T', T)$ .

Par conséquent, pour tout  $g \in G$ ,

$$C_1 l_{T'}(\Phi^k(g)) \leq l_T(\Phi^k(g)) \leq C_2 l_{T'}(\Phi^k(g))$$

et donc, d'après le Théorème précédent,

$$l_T(\Phi^k(g)) \leq C_2 \lambda^k l_{T'}(g).$$

De plus, le Théorème précédent nous donne également l'existence d'un  $g \in G$  tel que

$$l_{T'}(\Phi^k(g)) = \lambda^k l_T(g)$$

et ainsi, pour un tel  $g$ , on a

$$C_1 \lambda^k l_{T'}(g) \leq l_T(\Phi^k(g)).$$

□

**Théorème 5.15.** *Soit  $S$  système de générateurs de  $BS(p, pn)$  et  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  n'étant pas à croissance polynomiale alors il existe  $\lambda, \lambda' > 0$  tels que*

$$\begin{aligned} \forall g \in BS(p, pn), \|\Phi^k(g)\|_S &\leq \lambda^k \\ \exists g \in BS(p, pn), \exists C_g \geq 0, C_g \lambda^k &\leq \|\Phi^k(g)\|_S \end{aligned}$$

*En particulier,  $\Phi$  est à croissance exponentielle.*

*Démonstration.* Soit  $\Phi \in \text{Out}(BS(p, pn))$  et  $\alpha \in \text{Aut}(BS(p, pn))$  un représentant de  $\Phi$ . En posant,

$$\lambda' = \max_{s_i \in S} |\alpha(s_i)|_S,$$

on obtient

$$\forall g \in BS(p, pn), \|\Phi^k(g)\|_S \leq \lambda'^k.$$

Soit  $T \in \mathcal{D}_H$  dont le graphe étiqueté est un cercle et  $*$  un point base dans  $T$ . On considère

$$C = \max_{s_i \in S} d_T(*, s_i *).$$

On a alors, pour tout  $g \in G$ ,

$$d_T(*, g*) \leq C|g|_S.$$

On choisit maintenant  $g' \in G$  conjugué à  $g$  tel que  $|g'|_S = \|g\|_S$  alors

$$l_T(g) = l_T(g') \leq d_T(*, g'*) \leq C|g'|_S = C\|g\|_S.$$

Finalement pour tout  $g \in G$ , on a

$$l_T(g) \leq C\|g\|_S$$

et donc

$$l_T(\Phi^k(g)) \leq C\|\Phi^k(g)\|_S$$

De plus, d'après le Théorème précédent, il existe  $g \in G$ , il existe  $C_g \geq 0$  tels que

$$l_T(\Phi^k(g)) = C_g \lambda^k$$

d'où

$$\frac{C_g}{C} \lambda^k \leq \|\Phi^k(g)\|_S.$$

On en déduit donc que  $\Phi$  est à croissance exponentielle. □

### 5.3 Un exemple d'application train track

On considère le groupe

$$BS(2, 4) = \langle a, c \mid ca^2c^{-1} = a^4 \rangle$$

ainsi que les automorphismes suivants (figurant dans [Cla09] parmi des générateurs du groupe des automorphismes de  $BS(2, 4)$ )

$$\begin{aligned} \Psi : BS(2, 4) &\longrightarrow BS(2, 4) \\ a &\longmapsto a \\ c &\longmapsto ca \end{aligned}$$

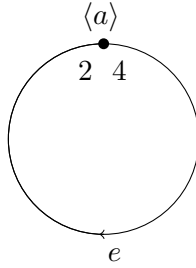
et, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \Phi_k : BS(2, 4) &\longrightarrow BS(2, 4) \\ a &\longmapsto a \\ c &\longmapsto c^{-k+1}a^2c^k. \end{aligned}$$

On note  $\varphi$  l'automorphisme suivant

$$\begin{aligned} \varphi = \Phi_1\Psi^2\Phi_3\Psi : BS(2, 4) &\longrightarrow BS(2, 4) \\ a &\longmapsto a \\ c &\longmapsto a^{-2}c^{-1}a^{-4}c^{-1}a^2ca^4ca^4ca^3. \end{aligned}$$

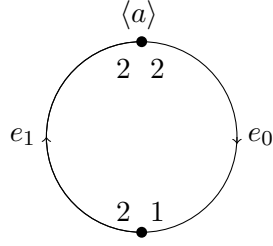
On associe à cet automorphisme l'application  $F$  entre les arbres  $T \in \mathcal{D}_{2,4}$  et  $T \cdot \Phi$  dont le graphe de groupes étiqueté est le suivant (les graphes de groupes pour  $T$  et  $T \cdot \Phi$  sont les mêmes)



Pour toute arête  $e$ ,  $E$  représente l'arête ayant l'orientation inverse de  $e$ .

$$\begin{aligned} F : T &\longrightarrow T \cdot \Phi \\ e &\longmapsto a^{-2}c^{-1}(E \cdot a^{-4}c^{-1}(E \cdot a^2(e \cdot ca^4(e \cdot ca^4e)))) \end{aligned}$$

On plie le tournant illégal entre  $E$  et  $a^2 \cdot E$  et pour ce faire on subdivise  $e$  en deux arêtes  $e_0$  et  $e_1$  de sorte que  $o(e_0) = o(e)$  et  $t(e_1) = t(e)$  et on identifie  $E_1$  avec  $a^2 \cdot E_1$  ainsi on obtient un arbre noté  $T' \in \mathcal{D}_{2,4}$  dont le graphe étiqueté est le suivant



On modifie  $F$  en fonction de cette identification et ainsi on obtient une application

$$\begin{aligned}
 F' : T' &\longrightarrow T' \cdot \Phi \\
 e_0 &\longmapsto a^{-2}c^{-1}(E_1 \cdot E_0 \cdot a^{-4}c^{-1}(E_1 \cdot a^2(e_1 \cdot ca^4(e_0 \cdot e_1 \cdot ce_0)))) \\
 e_1 &\longmapsto a^{-2}c^{-1}a^{-4}c^{-1}a^2ca^4ca^4e_1.
 \end{aligned}$$

On liste maintenant quelles sont les différentes orbites de tournants aux deux points de branchement afin d'identifier quels sont les éventuels tournants illégaux.

- Au sommet  $o(e_0)$ , il a y 4 arêtes  $e_0$ ,  $ae_0$ ,  $c^{-1}E_1$  et  $ac^{-1}E_1$  qui forment 6 tournants qui sont dans 4 orbites de tournants :
  - $\{e_0, ae_0\}$  dont l'image par  $F'$  est le tournant  $\{a^{-2}c^{-1}E_1, a^{-1}c^{-1}E_1\}$  qui est dans l'orbite de  $\{c^{-1}E_1, ac^{-1}E_1\}$ .
  - $\{c^{-1} \cdot E_1, ac^{-1} \cdot E_1\}$  dont l'image par  $F'$  est le tournant  $\{a^{-3}c^{-1}E_1, a^{-2}c^{-1}E_1\}$  qui est dans l'orbite de  $\{c^{-1}E_1, ac^{-1}E_1\}$ .
  - $\{e_0, c^{-1}E_1\}$  dont l'image par  $F'$  est le tournant  $\{a^{-2}c^{-1}E_1, a^{-3}c^{-1}E_1\}$  qui est dans l'orbite de  $\{c^{-1}E_1, ac^{-1}E_1\}$ .
  - $\{ae_0, c^{-1}E_1\}$  dont l'image par  $F'$  est le tournant  $\{a^{-1}c^{-1}E_1, a^{-3}c^{-1}E_1\}$  qui est donc illégal mais ni  $F'(e_0)$  ni  $F'(e_1)$  ne traverse ce tournant.
- Au sommet  $t(e_0)$ , il a y 3 arêtes  $E_0$ ,  $e_1$  et  $a^2e_1$  qui forment 3 tournants qui sont dans 2 orbites de tournants :
  - $\{E_0, e_1\}$  dont l'image par  $F'$  est le tournant

$$\{a^{-2}c^{-1}a^{-4}c^{-1}a^2ca^4cE_0, a^{-2}c^{-1}a^{-4}c^{-1}a^2ca^4ca^4e_1\}$$

qui est dans l'orbite de  $\{E_0, e_1\}$ .

- $\{e_1, a^2e_1\}$  dont l'image par  $F'$  est le tournant

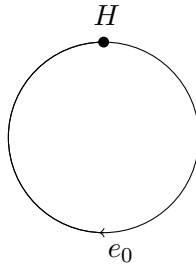
$$\{a^{-2}c^{-1}a^{-4}c^{-1}a^2ca^4ca^4e_1, c^{-1}a^{-4}c^{-1}a^2ca^4ca^4e_1\}$$

qui est dans l'orbite de  $\{e_1, ga^2g^{-1}e_1\}$  et donc dans l'orbite de  $\{e_1, a^2e_1\}$ .

Par conséquent, on vérifie immédiatement que  $F'$  est train track.

On peut maintenant passer à notre espace de déformation  $\mathcal{D}_H$  dans lequel  $e_1$  est écrasée ainsi on obtient  $T'' \in \mathcal{D}_H$  dont le graphe étiqueté est le suivant





On modifie  $F'$  en fonction de cet écrasement et ainsi on obtient une application  $F''$  définie comme suit

$$\begin{aligned} F'' & : T'' \longrightarrow T'' \cdot \Phi \\ e_0 & \longmapsto a^{-2}c^{-1}(E_0 \cdot a^{-4}c^{-1}a^2ca^4(e_0 \cdot ce_0)) \end{aligned}$$

De la même façon que dans la démonstration du Corollaire 5.9,  $F''$  est une application train track.

# Bibliographie

- [AKB12] Y. Algom-Kfir and M. Bestvina, *Asymmetry of outer space*, Geometriae Dedicata **156** (2012), 81–92.
- [Bas93] H. Bass, *Covering theory for graphs of groups*, Journal of Pure and Applied Algebra **89** (1993), no. 1-2, 3–47.
- [Bes11] M. Bestvina, *A Bers-like proof of the existence of train tracks for free group automorphisms*, Fundamenta Mathematicae **214** (2011), no. 1, 1–12.
- [BF91] M. Bestvina and M. Feighn, *Bounding the complexity of simplicial group actions on trees*, Inventiones Mathematicae **103** (1991), no. 3, 449–469.
- [BH92] M. Bestvina and M. Handel, *Train tracks and automorphisms of free groups*, Annals of Mathematics. Second Series **135** (1992), no. 1, 1–51.
- [BS62] G. Baumslag and D. Solitar, *Some two-generator one-relator non-Hopfian groups*, Bulletin of the American Mathematical Society **68** (1962), 199–201.
- [CF08] M. Clay and M. Forester, *On the isomorphism problem for generalized Baumslag-Solitar groups*, Algebraic & Geometric Topology **8** (2008), no. 4, 2289–2322.
- [CF09] ———, *Whitehead moves for  $G$ -trees*, Bulletin of the London Mathematical Society **41** (2009), no. 2, 205–212.
- [CL83] D.J. Collins and F. Levin, *Automorphisms and Hopficity of certain Baumslag-Solitar groups*, Archiv der Mathematik **40** (1983), no. 5, 385–400.
- [Cla05] M. Clay, *Contractibility of deformation spaces of  $G$ -trees*, Algebraic & Geometric Topology **5** (2005), 1481–1503.
- [Cla09] ———, *Deformation spaces of  $G$ -trees and automorphisms of Baumslag-Solitar groups*, Groups, Geometry, and Dynamics **3** (2009), no. 1, 39–69.

- [CM87] M. Culler and J.W. Morgan, *Group actions on  $\mathbf{R}$ -trees*, Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series **55** (1987), no. 3, 571–604.
- [Col78] D.J. Collins, *The automorphism towers of some one-relator groups*, Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series **36** (1978), no. 3, 480–493.
- [CV86] M. Culler and K. Vogtmann, *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Inventiones Mathematicae **84** (1986), no. 1, 91–119.
- [FM11] S. Francaviglia and A. Martino, *Metric properties of outer space*, Pubblicazioni Matematiche **55** (2011), no. 2, 433–473.
- [FM15] M. Francaviglia and A. Martino, *Stretching factors, metrics and train tracks for free products*, arXiv :1312.4172 (2015).
- [For02] M. Forester, *Deformation and rigidity of simplicial group actions on trees*, Geometry and Topology **6** (2002), 219–267.
- [For03] ———, *On uniqueness of JSJ decompositions of finitely generated groups*, Commentarii Mathematici Helvetici **78** (2003), no. 4, 740–751.
- [For06] ———, *Splittings of generalized Baumslag-Solitar groups*, Geometriae Dedicata **121** (2006), 43–59.
- [GHMR00] N.D. Gilbert, J. Howie, V. Metaftsis, and E. Raptis, *Tree actions of automorphism groups*, Journal of Group Theory **3** (2000), no. 2, 213–223.
- [GL07] V. Guirardel and G. Levitt, *Deformation spaces of trees*, Groups, Geometry, and Dynamics **1** (2007), no. 2, 135–181.
- [GL10] ———, *Jsj decompositions : definitions, existence, uniqueness. ii : Compatibility and acylindricity*, arXiv :1002.4564 (2010).
- [GL16] ———, *Jsj decompositions of groups*, arXiv :1602.05139v1 (2016).
- [Hor16] C. Horbez, *Spectral rigidity for primitive elements of  $F_N$* , Journal of Group Theory **19** (2016), no. 1, 55–123.
- [Lev05] G. Levitt, *Automorphisms of hyperbolic groups and graphs of groups*, Geometriae Dedicata **114** (2005), 49–70.
- [Lev07] ———, *On the automorphism group of generalized Baumslag-Solitar groups*, Geometry & Topology **11** (2007), 473–515.
- [Mei15] S. Meinert, *The Lipschitz metric on deformation spaces of  $G$ -trees*, Algebraic & Geometric Topology **15** (2015), no. 2, 987–1029.
- [Pau89] F. Paulin, *The Gromov topology on  $\mathbf{R}$ -trees*, Topology and its Applications **32** (1989), no. 3, 197–221.

- [Ser77] J.-P. Serre, *Arbres, amalgames,  $SL_2$* , Société Mathématique de France, Paris, 1977.
- [Sta83] John R. Stallings, *Topology of finite graphs*, *Inventiones Mathematicae* **71** (1983), no. 3, 551–565.
- [Thu88] W. P. Thurston, *On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces*, *American Mathematical Society. Bulletin. New Series* **19** (1988), no. 2, 0273–0979.
- [Thu98] ———, *Minimal stretch maps between hyperbolic surfaces*, arXiv :math/9801039 (1998).
- [Vog08] K. Vogtmann, *What is... outer space?*, *Notices of the American Mathematical Society* **55** (2008), no. 7, 784–786.





## RÉSUMÉ

Un groupe de Baumslag-Solitar est un groupe dont la présentation est, pour  $p$  et  $q$  entiers non nuls,  $BS(p, q) = \langle a, b \mid ab^p a^{-1} = b^q \rangle$ . A chaque groupe de Baumslag-Solitar est associé un espace de déformation  $\mathcal{D}_{p,q}$  d'actions sur des arbres analogue à l'outre espace.  $Aut(BS(p, q))$  agit sur cet espace ce qui induit une action du groupe des automorphismes extérieurs  $Out(BS(p, q))$ . Nous nous intéresserons au cas plus complexe où  $q$  est un multiple de  $p$  et dans un premier temps, nous démontrerons que tout automorphisme de  $BS(p, pn)$  est réductible ce qui signifie qu'il existe un  $BS(p, pn)$ -arbre  $T$  et une application  $T \rightarrow T \cdot \Phi$  laissant invariante un certain type de forêt. Ce résultat nous amènera à introduire un nouvel espace de déformation et une classification des automorphismes de  $BS(p, pn)$  en trois catégories : elliptique, parabolique ou hyperbolique. A l'aide de cette classification, nous démontrons que tout automorphisme est à croissance soit polynomiale soit exponentielle.

## ABSTRACT

A Baumslag-Solitar group is a group given by the group presentation, for  $p$  and  $q$  non-zero integers,  $BS(p, q) = \langle a, b \mid ab^p a^{-1} = b^q \rangle$ . For each Baumslag-Solitar group we consider a deformation space  $\mathcal{D}_{p,q}$  which is analogue of Culler-Vogtmann's Outer Space. The action of  $Aut(BS(p, q))$  on  $\mathcal{D}_{p,q}$  induces an action of the outer automorphism group  $Out(BS(pq))$ . We will focus on the case where  $p$  divides  $q$ . Firstly, we will show that every automorphism of  $BS(p, pn)$  is reducible which means that we can find a  $BS(p, pn)$ -tree  $T$  and a map  $T \rightarrow T \cdot \Phi$  that leaves a certain type of subforest invariant. This result leads us to introduce a new deformation space and a classification of the automorphisms of  $BS(p, pn)$  in three types : elliptic, parabolic or hyperbolic. Using this classification, we will show that the growth of every automorphism of  $BS(p, pn)$  is exponential or polynomial.