



Influence du stochastique sur des problématiques de changements d'échelle

Nathalie Ayi

► To cite this version:

Nathalie Ayi. Influence du stochastique sur des problématiques de changements d'échelle. Mathématiques générales [math.GM]. COMUE Université Côte d'Azur (2015 - 2019), 2016. Français. NNT : 2016AZUR4061 . tel-01439640

HAL Id: tel-01439640

<https://theses.hal.science/tel-01439640>

Submitted on 18 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS - UFR SCIENCES
École Doctorale de Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences
de l' UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS

Discipline : MATHÉMATIQUES

présentée et soutenue par

Nathalie AYI

INFLUENCE DU STOCHASTIQUE
SUR DES PROBLÉMATIQUES DE CHANGEMENTS D'ÉCHELLE

Thèse dirigée par **Florent BERTHELIN** et **Laure SAINT-RAYMOND**

soutenue le 19 Septembre 2016

Jury :

M.	Florent BERTHELIN	<i>Directeur de thèse</i>	Maître de conférences
M.	Arnaud DEBUSSCHE	<i>Rapporteur</i>	Professeur des Universités
M.	François DELARUE	<i>Examineur</i>	Professeur des Universités
M.	Laurent DESVILLETES	<i>Rapporteur</i>	Professeur des Universités
Mme.	Isabelle GALLAGHER	<i>Examinatrice</i>	Professeur des Universités
M.	Thierry GOUDON	<i>Examineur</i>	Directeur de recherche INRIA
Mme.	Laure SAINT-RAYMOND	<i>Directrice de thèse</i>	Professeur des Universités



Cette thèse a été préparée au laboratoire
Jean Alexandre Dieudonné à l'Université
de Nice Sophia-Antipolis, et au sein
de l'équipe Inria COFFEE.



Remerciements

Et voilà ! Trois années de labeur et me voici à présent face à cette feuille, essayant en quelques lignes de trouver les mots justes pour remercier toutes les personnes sans qui je n'en serais pas là aujourd'hui.

Avant toute chose, un grand merci à mes deux directeurs de thèse Florent Berthelin et Laure Saint-Raymond. Je suis consciente de la chance que j'ai d'avoir eu l'opportunité de travailler avec vous. Merci pour votre patience face à mes interrogations souvent nombreuses, pour votre disponibilité et surtout pour votre bienveillance à mon égard. Débuter dans la recherche n'est pas chose aisée tous les jours (euphémisme !) et vous avez sans nul doute contribué à rendre ce chemin plus praticable et plus agréable.

Je tenais également à remercier Arnaud Debussche et Laurent Desvilletes d'avoir accepté de rapporter ma thèse ainsi que François Delarue, Isabelle Gallagher et Thierry Goudon d'avoir accepté de faire partie de mon jury. Je suis très honorée que chacun de vous ait accepté notre invitation.

Un grand merci également à tout le personnel administratif : les secrétaires, le personnel de la bibliothèque, de l'informatique ... Par votre travail, vous nous permettez de faire le notre dans de meilleures conditions et cela mérite d'être souligné. Je tiens particulièrement à remercier Christel Kozinski, ancienne secrétaire de l'équipe Inria COFFEE à laquelle j'ai le plaisir d'appartenir, d'une efficacité redoutable.

Cela m'offre une parfaite transition pour remercier Thierry Goudon, chef de ladite équipe en question. J'ai conscience d'avoir été une privilégiée en faisant partie de l'équipe COFFEE. Un grand merci pour le matériel acheté et les nombreux voyages pris en charge !

Le plus mémorable de tous restent d'ailleurs mes deux séjours à Boston pour lesquels je souhaite remercier la famille Saint-Raymond-Espinasse pour leur accueil chaleureux et généreux.

Merci également à Erwan Faou de m'avoir si chaleureusement accueilli à Rennes. Notre collaboration a été une expérience enrichissante et fort agréable.

En trois années de thèse, j'ai eu l'occasion de croiser et sympathiser avec beaucoup de doctorants ! À vous tous, je quitte Nice mais vous partez avec moi car je ne suis pas près de vous oublier. Nos soirées mémorables, que ce soit avenue Joliette, dans le château de Charles et Luis ou sur la plage, étaient de véritables moments de plaisirs. En tant que cinéphile affirmée et sérieuse avérée, j'ai adoré nos "GDR Got et films" et nos sorties ciné tous ensemble. Ravie d'avoir pu partager tout ça avec vous ! Une dédicace particulière aux

membres plus restreintes des soirées filles Harry Potter, c'était génial ! Pâtes italiennes et formules magiques, pas besoin de la potion Felix Felicis pour se sentir chanceuse . . .

Un mot plus particulier à mes "chauffeurs officiels" , qui sont vraiment bien plus que ça (entre autres, mes "mains officielles et officieuses" en tant que Khaleesi mais aussi accessoirement de véritables amis), merci ! Mélisande et Julien, en acceptant de me raccompagner les soirs, vous m'avez permis d'assister et participer à tellement de choses et ça je n'oublierai pas . . .

À mes co-bureaux Kateryna, Bastien et Vladimir, ce fut un véritable plaisir de partager votre bureau. Pas sûre que toutes ces heures passées à refaire le monde ensemble l'ait changé mais ça n'en était pas moins passionnant !

Depuis maintenant six ans que je suis à Nice, je n'oublie pas que cette aventure je l'ai démarré à vos côtés Marine et Christophe. Nous avons beau être maintenant éloignés géographiquement, vous n'avez jamais cessé d'être à mes côtés. Merci !

Je tiens également à remercier Ludovic Rifford qui m'a offert la bourse qui m'a permis d'arriver à Nice pour y effectuer mon master.

Je souhaite remercier mon exceptionnel famille ! À mes parents, depuis toujours vous êtes mes exemples et tout ce que je fais, je le fais aussi pour que vous soyez fiers de moi. À vous tous qui avez fait le déplacement pour être à mes côtés en ce jour spécial, merci du fond du coeur pour votre soutien. Cela me touche énormément. Une pensée pour tout ceux qui n'ont pas pu être là mais m'ont tout autant soutenu.

Enfin, à Thibaut. Un simple merci n'est pas suffisant pour récompenser ton soutien, ta patience, ton écoute et ta foi indéfectible en moi. Cette thèse, je te la dédie car, par ta présence à mes cotés, tu y as grandement contribué.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Théorie cinétique collisionnelle	10
1.2	Limite de Boltzmann-Grad	14
1.3	Formulations cinétiques de lois de conservation scalaires stochastiques . . .	19
1.4	Lemmes de moyenne à vitesses discrètes aléatoires	24
1.5	Changements d'échelle dans le contexte des modèles à vitesses discrètes . . .	29
	Bibliographie	33
2	From Newton's law to the linear Boltzmann equation without cut-off	39
2.1	Introduction	41
2.2	Main result and General strategy	42
2.3	Expression of the marginals	52
2.4	Terms associated to the long-range part of the potential	58
2.5	Continuity estimates and control of some remainders	69
2.6	Remainders and geometrical control	72
2.7	Asymptotic vanishing of the remainders	79
2.8	Convergence to the Boltzmann with cut-off equation	81
2.9	From Boltzmann with cut-off to Boltzmann without cut-off	84
2.10	Appendix	87
	Bibliography	94
3	High-Field Limit from a Stochastic BGK Model to a Scalar Conservation Law with Stochastic Forcing	97
3.1	Introduction	99
3.2	Settings and Main Results	100
3.3	Study of the stochastic BGK model with a high field scaling	102
3.4	Existence of a solution to the conservation law with stochastic forcing . . .	111
3.5	Appendix. Well posedness of the stochastic kinetic model	118
	Bibliography	124
4	Stochastic Averaging Lemmas and Application to Rosseland Approximations	127
4.1	Introduction	129
4.2	Discrete Velocity Averaging Lemmas	130
4.3	Application to the Rosseland Approximation	141
	Bibliography	149

5 Étude numérique du modèle de Uchiyama	153
5.1 Le modèle de Uchiyama	156
5.2 Une approche numérique	165
5.3 Une étude statistique des limites diffusives	171
Bibliographie	178
Développement	181
Bibliographie	184

Chapitre 1

Introduction

Contents

1.1	Théorie cinétique collisionnelle	10
1.1.1	L'équation de Boltzmann	10
1.1.2	Propriétés formelles de l'équation de Boltzmann	11
1.1.3	Théorie de Cauchy	12
1.1.4	Le modèle BGK	13
1.2	Limite de Boltzmann-Grad	14
1.2.1	Le résultat de Lanford	15
1.2.2	Le cas linéaire	16
1.2.3	Le cas d'un potentiel à portée infinie	17
1.3	Formulations cinétiques de lois de conservation scalaires stochastiques	19
1.3.1	Le cas déterministe	20
1.3.2	Le cas stochastique	21
1.3.3	Le cas stochastique avec un scaling champ fort	23
1.4	Lemmes de moyenne à vitesses discrètes aléatoires	24
1.4.1	Les lemmes de moyenne dans la littérature	25
1.4.2	Lemmes de moyennes et vitesses discrètes	25
1.4.3	Application à l'approximation de Rosseland	27
1.5	Changements d'échelle dans le contexte des modèles à vitesses discrètes	29
1.5.1	L'équation de Broadwell	29
1.5.2	Des modèles particuliers à vitesses discrètes	30
1.5.3	Une investigation numérique du modèle de Uchiyama	32
	Bibliographie	33

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le domaine des équations aux dérivées partielles et plus particulièrement dans le cadre de la dynamique des gaz. Un gaz est un système physique constitué d'un très grand nombre de petites particules dont le libre parcours moyen est grand par rapport à leur taille. Il existe alors plusieurs niveaux de description. L'échelle macroscopique constitue l'échelle accessible facilement expérimentalement et pour laquelle on peut faire des mesures de quantités caractéristiques du gaz telles que le volume, la température, la pression . . . L'échelle microscopique correspond à l'échelle des composants élémentaires de la matière (atomes, molécules). On peut aussi introduire une description intermédiaire correspondant à une description statistique. Il s'agit alors de l'échelle mésoscopique. À ce niveau, on ne s'intéresse plus à l'évolution des particules individuellement mais à l'évolution de la densité de particules f , une fonction qui dépend du temps t , de la position x et de la vitesse v et telle que pour un volume infinitésimal $dx dv$, $f(t, x, v) dx dv$ représente le nombre de particules dans ce volume au temps t .

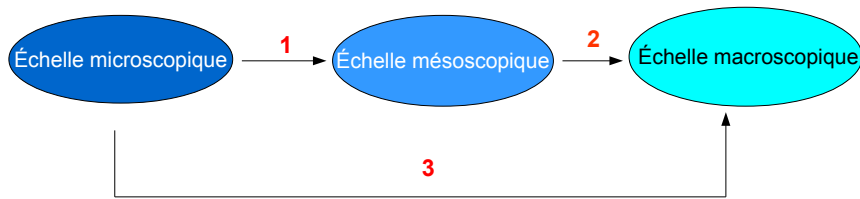


FIGURE 1. Représentation des différentes échelles et différentes transitions possibles.

Une question naturelle est de chercher à relier les différents niveaux de description. En d'autres termes, partant d'un modèle à une échelle, on cherche à trouver le modèle qui décrit de façon satisfaisante ce qui se passe à l'échelle supérieure. Les contributions de cette thèse se place dans le cadre de plusieurs changements d'échelle différents dont l'historique et la description respectifs seront détaillés dans les sections 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5.

Le parti pris dans ce manuscrit est d'étudier ces problématiques dans un contexte où une part d'aléa intervient toujours. Le Hasard est l'impossibilité de prévoir avec certitude un fait quelconque. Cette incapacité peut s'expliquer de plusieurs façons : la méconnaissance de paramètres nécessaires à la prévision ou alors le manque de précision les concernant. Dans la pratique, ces deux situations se présentent souvent. Ainsi, considérer des modèles incluant une part d'aléa apparaît pertinent. Plusieurs types d'aléa peuvent alors être adoptés : en considérant des données initiales aléatoires et/ou en distribuant l'aléa sur tout l'intervalle de temps. Une question intéressante est alors celle d'un éventuel "effet régularisant" du bruit sur la dynamique. Par "effet régularisant", on signifie que la dynamique observée hériterait de propriétés supplémentaires bénéfiques par rapport à un modèle sans ce bruit. Par la suite, les choix retenus quant à la façon de bruite la dynamique dans les différents contextes s'expliquent de plusieurs façons : comme mentionné précédemment, ils correspondent à une description physique dans laquelle certaines informations sont inconnues ou alors ils correspondent à un choix particulier dont l'exploitation amène un gain par rapport au modèle déterministe. Nous développerons ces points plus en détails dans les sections 1.2, 1.3, 1.4 et 1.5 en contextualisant chacun des quatre changements d'échelle étudiés dans le panorama actuel. Avant cela, nous faisons une présentation du contexte général dans lequel les résultats obtenus vont s'inscrire. Il s'agit de celui de la théorie cinétique collisionnelle des gaz.

1.1 Théorie cinétique collisionnelle

Dans le cadre de la théorie cinétique des gaz, un gaz est un système physique constitué d'un très grand nombre de petites particules. Le point de vue adopté est statistique puisque l'on s'intéresse à l'évolution de la densité de particules f . On rappelle que cette fonction dépend du temps t , de la position x et de la vitesse v et que pour un volume infinitésimal $dx dv$ autour du point (x, v) , $f(t, x, v) dx dv$ représente le nombre de particules au temps t dans le volume infinitésimal.

Un exemple fondamental associé à ce cadre est l'équation de Boltzmann (1872) qui caractérise l'évolution de la densité de particules dans le cas d'un gaz suffisamment raréfié.

1.1.1 L'équation de Boltzmann

Dans [18], Boltzmann obtient l'équation suivante

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f), \quad t > 0, x \in \mathbf{R}^d, v \in \mathbf{R}^d. \quad (1.1.1.1)$$

Le membre de gauche correspond à ce qu'on appelle le transport libre tandis que le membre de droite, appelé opérateur de collision, représente les interactions entre particules.

Les hypothèses physiques adoptées sont les suivantes : on considère que les collisions sont binaires, localisées en temps et en espace et que les chocs entre particules sont élastiques. Cette dernière condition a pour conséquence la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique. Ainsi, en notant (v', v'_1) les vitesses précollisionnelles de (v, v_1) , on a

$$\begin{cases} v + v_1 &= v' + v'_1, \\ |v|^2 + |v_1|^2 &= |v'|^2 + |v'_1|^2. \end{cases} \quad (1.1.1.2)$$

Le couple (v, v_1) est déterminé par les positions microscopiques. Le passage de (v', v'_1) à (v, v_1) correspond à ce qu'on appelle le scattering.

Sous ces considérations, l'opérateur de collision s'écrit de la façon suivante

$$Q(f, f) = \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{S}^{d-1}} (f' f'_1 - f f_1) b(v - v_1, \sigma) d\sigma dv_1, \quad (1.1.1.3)$$

où on utilise les notations usuelles

$$f = f(v), \quad f' = f(v'), \quad f'_1 = f(v'_1), \quad f_1 = f(v_1), \quad (1.1.1.4)$$

avec (v', v'_1) paramétré par

$$\begin{cases} v' &= v + \sigma \cdot (v_1 - v) \sigma, \\ v'_1 &= v_1 - \sigma \cdot (v_1 - v) \sigma, \end{cases} \quad (1.1.1.5)$$

et où la section efficace $b = b(v - v_1, \sigma)$ est une fonction mesurable positive représentant la distribution statistique des collisions. Elle ne dépend en fait que de $|v - v_1|$ et $\cos \theta$ avec θ l'angle de déviation.

On fait alors la distinction suivante : on parle de Boltzmann sans cut-off quand la section efficace présente une singularité angulaire non intégrable i.e. quand b n'est pas intégrable par rapport à θ et de Boltzmann avec cut-off dans le cas contraire. Nous reviendrons plus en détails sur l'équation de Boltzmann sans cut-off dans la section 1.2.3.

De nombreuses variantes du modèle de Boltzmann existent dans la littérature : des modèles diffusifs tels que l'équation de Fokker-Planck [28], l'équation de Landau [53] ou encore des modèles linéaires, des modèles à vitesses discrètes [40] ... On pourra consulter [74] pour une revue des modèles les plus classiques.

1.1.2 Propriétés formelles de l'équation de Boltzmann

LOIS DE CONSERVATION LOCALES

En utilisant les propriétés de la section efficace mentionnées plus tôt et le fait que les changements de variables associés à l'interchangeabilité $(v, v_1) \rightarrow (v_1, v)$ et la micro-réversibilité $(v, v_1, \sigma) \rightarrow (v', v'_1, \sigma)$ ont un Jacobien unitaire, on obtient que pour $f = f(t, x, v) \geq 0$ une solution formelle de l'équation de Boltzmann, pour toute fonction $\varphi = \varphi(v)$ continue, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} Q(f, f)(t, x, v) \varphi(v) dv \\ = -\frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{S}^{d-1}} [f f'_1 - f f_1] (\varphi + \varphi_1 - \varphi' - \varphi'_1) b(v - v_1, \sigma) dv dv_1 d\sigma. \end{aligned} \quad (1.1.2.1)$$

Ainsi, pour toute fonction φ satisfaisant

$$\forall (v, v_1, \sigma) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{S}^{d-1}, \quad \varphi(v) + \varphi(v_1) = \varphi(v') + \varphi(v'_1), \quad (1.1.2.2)$$

on a

$$\int_{\mathbf{R}^d} Q(f, f)(t, x, v) \varphi(v) dv = 0. \quad (1.1.2.3)$$

Il a été établi réciproquement que les fonctions satisfaisant (1.1.2.2) sont des combinaisons linéaires des invariants de collision :

$$1, v_1, v_2, \dots, v_d, |v|^2, \quad (1.1.2.4)$$

(voir [26]). Ainsi, on obtient formellement les lois de conservation locales suivantes

$$\begin{aligned} \partial_t \int_{\mathbf{R}^d} f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbf{R}^d} v f dv &= 0 \\ \partial_t \int_{\mathbf{R}^d} v f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbf{R}^d} v \otimes v f dv &= 0 \\ \partial_t \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{2} |v|^2 f dv + \nabla_x \cdot \int_{\mathbf{R}^d} \frac{1}{2} |v|^2 v f dv &= 0 \end{aligned} \quad (1.1.2.5)$$

qui traduisent la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique en moyenne.

LE THÉORÈME H

D'autre part, en prenant $\varphi(v) = \log f(v)$ dans (1.1.2.1), on obtient

$$\int_{\mathbf{R}^d} Q(f, f) \log f dv = -D(f) \quad (1.1.2.6)$$

où

$$D(f) := \frac{1}{4} \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{S}^{d-1}} [f' f'_1 - f f_1] \log \left(\frac{f' f'_1}{f f_1} \right) b(v - v_1, \sigma) d\sigma dv_1 dv \geq 0.$$

Cela signifie que la fonctionnelle H suivante

$$H(f) := \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d} f \log f dx dv \quad (1.1.2.7)$$

est une fonctionnelle de Lyapounov pour la dynamique de Boltzmann. On a

$$\frac{d}{dt} H(f) = - \int_{\mathbf{R}^d} D(f) dx \leq 0 \quad (1.1.2.8)$$

ce qui constitue une formulation quantitative du second principe de la thermodynamique appelée théorème H .

LES MAXWELLIENNES

Enfin, il est possible de montrer que les seules solutions possibles à l'équation

$$Q(f, f) = 0 \quad (1.1.2.9)$$

sont celles que l'on appelle Maxwelliennes $M_{\rho, u, T}$ et définies par

$$M_{\rho, u, T}(v) := \frac{\rho}{(2\pi T)^{d/2}} e^{-\frac{|v-u|^2}{2T}}. \quad (1.1.2.10)$$

1.1.3 Théorie de Cauchy

À ce jour, beaucoup de questions restent ouvertes concernant la théorie de Cauchy pour l'équation de Boltzmann dans son contexte le plus général. Cela est dû au fait, entre autres, que les seules estimations a priori disponibles, la conservation formelle de la masse et l'énergie et la décroissance formelle de l'entropie, ne semblent même pas suffisantes pour donner un sens à l'équation. Plus précisément, avec ces seules estimations, l'opérateur de collision n'est même pas une distribution bien définie par rapport à la variable x . Toutefois, un certain nombre de résultats a été obtenu dans des cadres diverses. Commençons par citer celui concernant l'existence d'une solution inhomogène en temps court.

Théorème 1.1.1. *Soit $f_0 \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ telle que*

$$\|f_0 \exp\left(\frac{\beta}{2}|v|^2\right)\|_{L^\infty} < +\infty$$

pour un certain $\beta > 0$.

Alors, il existe $C_\beta > 0$ (dépendant seulement de β) telle que l'équation de Boltzmann avec donnée initiale f_0 a une unique solution continue sur $[0, T]$ avec

$$T = \frac{C_\beta}{\|f_0 \exp\left(\frac{\beta}{2}|v|^2\right)\|_{L^\infty}}.$$

Le premier résultat d'existence globale dans le cas inhomogène est dû à Ukai [70, 71]. Son contexte est le suivant : il se place dans le cadre d'une perturbation autour de l'équilibre

$$f_0 = M(1 + g_0) \quad (1.1.3.1)$$

avec $M := M_{1,0,1}$ avec la notation (1.1.2.10) et g_0 une perturbation initiale satisfaisant certaines propriétés de régularité et de petitesse. Il obtient alors le résultat suivant :

Théorème 1.1.2. Soit $g_0 \in H_{l,k}$ pour $l > d/2$ et $k > d/2 + 1$ tel que $\|g_0\|_{l,k} \leq a_0$ avec

$$H_{l,k} := \{g \equiv g(\cdot, v) \mid \|g\|_{l,k} := \sup_v (1 + |v|^k) \|M^{1/2} g(\cdot, v)\|_{H_x^l} < +\infty\} \quad (1.1.3.2)$$

pour a_0 suffisamment petit.

Alors il existe une unique solution globale $f = M(1 + g)$ avec $g \in L^\infty(\mathbf{R}_+, H_{l,k}) \cap \mathcal{C}(\mathbf{R}_+, H_{l,k})$ à l'équation de Boltzmann avec données initiales $g|_{t=0} = g_0$.

À ce jour, la théorie la plus complète pour laquelle on obtient des résultats d'existence pour l'équation de Boltzmann sans hypothèse sur la taille des données initiales est celle des solutions renormalisées due à DiPerna-Lions [33].

Définition 1.1.1. On dit que $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[; L^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d))$, fonction positive, est une solution renormalisée de l'équation de Boltzmann si

$$\frac{Q(f, f)}{\sqrt{1 + f}} \in L_{loc}^1([0, +\infty[\times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d) \quad (1.1.3.3)$$

et pour tout $\beta \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$ tel que $|\beta'(Z)| \leq \frac{C}{\sqrt{1 + Z}}$ pour tout $Z \geq 0$, on a

$$\partial_t \beta(f) + v \cdot \nabla_x \beta(f) = \beta'(f) Q(f, f) \quad (1.1.3.4)$$

au sens des distributions sur $]0, +\infty[\times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$.

On note que si $Q(f, f) \in L_{loc}^1([0, +\infty[\times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ alors il y a équivalence entre les notions de solution au sens des distributions et solutions renormalisées. Ainsi, cette notion de solution est plus générale. DiPerna et Lions ont alors établi le résultat suivant :

Théorème 1.1.3. Supposons que la section efficace b satisfasse l'hypothèse suivante

$$\forall R > 0, \quad (1 + |v|^2)^{-1} \int_{|v_1| \leq R} \int_{\mathbf{S}^{d-1}} b(v - v_1, \sigma) d\sigma dv_1 \xrightarrow{|v| \rightarrow +\infty} 0. \quad (1.1.3.5)$$

Soit $f_0 = f_0(x, v)$ telle que

$$f_0 \geq 0, \quad \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathbf{R}^d} f_0(x, v) (1 + |x|^2 + |v|^2 + |\log f_0(x, v)|) dx dv < +\infty. \quad (1.1.3.6)$$

Alors il existe $f \in \mathcal{C}^0([0, +\infty[, L^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d))$ telle que $f(0, \cdot, \cdot) = f_0$ et f est une solution renormalisée de (1.1.1.1).

Pour plus de références concernant la théorie de Cauchy, nous renvoyons à la revue de Villani [74].

1.1.4 Le modèle BGK

Ces modèles ont été introduits en 1954 par Bathnagar, Gross et Krook dans [16]. Afin de justifier leur introduction, revenons un instant à l'équation de Boltzmann. On note que, grâce à la fonction de distribution, en intégrant en v on peut retrouver des quantités macroscopiques. On définit ainsi la densité locale ρ , la vitesse macroscopique locale u et la température locale T par

$$(\rho, \rho u, \rho |u|^2 + d\rho T)(t, x) = \int_{\mathbf{R}^d} (1, v, |v|^2) f(t, x, v) dv. \quad (1.1.4.1)$$

Lorsque l'on considère l'équation

$$\partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\varepsilon} \quad (1.1.4.2)$$

où ε est le libre parcours moyen, on obtient formellement la convergence de f_ε vers une Maxwellienne de paramètre $\rho(t, x), u(t, x), T(t, x)$, des fonctions qui vérifient le système d'Euler suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}_x(\rho u) = 0 \\ \partial_t(\rho u) + \operatorname{div}_x(\rho u \otimes u + \rho T \mathbf{I}) = 0 \\ \partial_t(\rho |u|^2 + d\rho T) + \operatorname{div}_x(\rho |u|^2 u + (d+2)\rho T u) = 0. \end{cases} \quad (1.1.4.3)$$

À ce jour, la preuve rigoureuse de ce problème de relaxation est encore ouverte même si des résultats partiels ont été obtenus comme par exemple dans le cas d'Euler incompressible avec des données initiales “bien préparées” pour les équations asymptotiques ou encore des solutions de l'équation de Boltzmann avec des estimations a priori non uniformes additionnelles (voir [66] pour un état de l'art à ce sujet).

Toutefois, seules certaines propriétés sont indispensables pour pouvoir espérer obtenir la limite hydrodynamique. C'est là l'essence même de l'idée du modèle BGK qui consiste à remplacer l'équation de Boltzmann par un modèle plus simple qui redonne la même configuration d'équilibre. L'équation est la suivante

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = \frac{M_f - f}{\varepsilon} \quad (1.1.4.4)$$

avec $M_f = M_{\rho, u, T}$ où ρ, u, T sont définies dans (1.1.4.1). Ce modèle a ainsi pour caractéristique de posséder les mêmes propriétés de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie et propriété d'entropie. Perthame a par la suite établi l'existence et la stabilité de solutions globales satisfaisant une relation d'entropie pour ce modèle BGK dans [61].

Ces modèles ont ensuite été généralisés et étendus au contexte des lois de conservation scalaires par Lions, Perthame et Tadmor [55] permettant ainsi de construire des équations cinétiques adaptées à d'autres systèmes hydrodynamiques. Nous développerons ce point dans la Section 1.3.

1.2 Limite de Boltzmann-Grad

Le contexte cinétique général dans lequel vont s'inscrire nos résultats étant posé, nous pouvons à présent présenter le cadre du premier changement d'échelle traité. Il s'agit d'un passage de l'échelle microscopique à l'échelle mésoscopique : partant des lois de Newton, on obtient l'équation de Boltzmann.

Ce résultat fait office de référence historique dans cette problématique de changements d'échelle abordée précédemment. En effet, dans son célèbre sixième problème posé lors du Congrès International des Mathématiciens en 1900 à Paris, Hilbert a émis l'idée suivante : dans le contexte de la dynamique des gaz, lorsque l'on cherche à passer de l'échelle microscopique à l'échelle macroscopique, on devrait pouvoir utiliser à l'échelle mésoscopique l'équation de Boltzmann. Le premier à avoir effectivement obtenu un résultat concernant la première transition est Lanford en 1975 [54].

1.2.1 Le résultat de Lanford

Partant d'un système de sphères dures, Lanford a obtenu rigoureusement la dérivation de l'équation de Boltzmann. Le modèle des sphères dures est le suivant : on considère N sphères de rayon ε dans l'espace $\mathbf{R}^d$ ayant pour positions $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ dans $\mathbf{R}^{dN}$ et pour vitesses $(v_1, v_2, \dots, v_N)$ dans $\mathbf{R}^{dN}$. On note $z_i := (x_i, v_i)$ pour tout i et on pose $Z_N := (z_1, \dots, z_N)$. Alors, d'après les lois de Newton on a, $\forall 1 \leq i \leq N$,

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i, \\ \frac{dv_i}{dt} = 0, \end{cases} \quad (1.2.1.1)$$

sur le domaine $\mathcal{D}_\varepsilon^N := \{Z_N \in \mathbf{R}^{2dN} \mid \forall i \neq j, |x_i - x_j| > \varepsilon\}$ et si $|x_i - x_j| = \varepsilon$,

$$\begin{aligned} v_i^{in} &= v_i^{out} - \nu^{i,j} \cdot (v_i^{out} - v_j^{out}) \nu^{i,j}, \\ v_j^{in} &= v_j^{out} + \nu^{i,j} \cdot (v_i^{out} - v_j^{out}) \nu^{i,j} \end{aligned} \quad (1.2.1.2)$$

avec $\nu^{i,j} = \frac{(x_i - x_j)}{|x_i - x_j|}$. Cela correspond à la description suivante : les particules se déplacent librement jusqu'à ce qu'elles se cognent et rebondissent alors selon les lois de la réflexion élastique.

Bien que les idées principales de la preuve soit dûes à Lanford, la preuve a été complétée de façon rigoureuse récemment par Gallagher, Saint-Raymond et Texier [39] et Pulvirenti, Saffirio et Simonella [64] dans le contexte des sphères dures et étendue au cas des potentiels à courte portée. Dans ce dernier cas, les lois de Newton prennent alors la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = v_i, \\ \frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{j \neq i} \nabla \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right), \end{cases} \quad (1.2.1.3)$$

avec le potentiel $\Phi : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ à support compact dans la boule unité de $\mathbf{R}^d$, radial et singulier en 0.

Théorème 1.2.1. *On considère un système de N particules interagissant*

- *comme des sphères dures de diamètre ε ,*
- *ou via un potentiel répulsif Φ_ε à support dans $B(0, \varepsilon)$, radial, singulier en 0.*

Soit $f_0 : \mathbf{R}^{2d} \rightarrow \mathbf{R}^+$ une densité de probabilité continue telle que

$$\|f_0 \exp\left(\frac{\beta}{2}|v|^2\right)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_x^d \times \mathbf{R}_v^d)} < \exp(-\mu) \quad (1.2.1.4)$$

pour $\beta > 0$, $\mu \in \mathbf{R}$.

Supposons que les N particules soient initialement identiquement distribuées selon f_0 et "indépendantes" (i.e. les corrélations disparaissent asymptotiquement). Alors, il existe $T^ > 0$ (dépendant seulement de β et μ) tel que, dans la limite Boltzmann-Grad $N \rightarrow \infty$, $N\varepsilon^{d-1} = 1$, la fonction de distribution à une particule converge uniformément sur $[0, T^*] \times \mathbf{R}^{2d}$ vers la solution de l'équation de Boltzmann (1.1.1.1), où b est une section*

efficace localement bornée dépendant implicitement de Φ , avec f_0 pour donnée initiale. Dans le cas des sphères dures, la section efficace est donnée par

$$b(v - v_1, \nu) = ((v - v_1) \cdot \nu)_+ \quad (1.2.1.5)$$

La preuve de ce résultat étant très technique, nous n'en donnerons pas ici d'idée mais nous renvoyons le lecteur à la Section 2.2.2 pour une esquisse de celle-ci. L'une des limites de ce résultat est qu'il n'est valable qu'en temps court. En effet, dans la preuve, l'une des bornes utilisées devient rapidement divergente car dans la stratégie développée les phénomènes de compensation entre le terme de gain et le terme de perte sont complètement négligés. Toutefois, Bodineau, Gallagher et Saint-Raymond [17] ont su dépasser cette limitation, en se plaçant dans le cadre d'un équilibre perturbé.

1.2.2 Le cas linéaire

Le contexte associé au cas d'un équilibre perturbé est le suivant : dans le cadre des sphères dures, on pose

$$f_N^0(Z_N) := M_{N,\beta}(Z_N)\rho^0(x_1) \quad (1.2.2.1)$$

avec ρ^0 une densité de probabilité continue sur $\mathbf{T}^d$, $M_{N,\beta}$ une mesure de Gibbs définie comme suit : pour $\beta > 0$,

$$M_{N,\beta}(Z_N) := \frac{1}{\mathcal{Z}_N} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{dN/2} \exp(-\beta H_N(V_N)) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_\varepsilon^N}(Z_N) \quad (1.2.2.2)$$

avec $H_N(V_N) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |v_i|^2$ et $\mathcal{Z}_N$ la fonction de partition et facteur de normalisation. Les données initiales sont donc aléatoires. Nous reviendrons sur le choix particulier de (1.2.2.1) en fin de section.

On pose

$$f_N^{(1)}(t, x, v) := \int_{\mathbf{T}^{d(N-1)} \times \mathbf{R}^{d(N-1)}} f_N(t, Z_N) dZ_2 \dots dZ_N$$

où f_N est la fonction de distribution des N particules.

Théorème 1.2.2. *On considère la distribution initiale f_N^0 définie dans (1.2.2.1). Alors la distribution $f_N^{(1)}(t, x, v)$ de la particule marquée converge sous le scaling Boltzmann-Grad $N\varepsilon^{d-1} = 1$ quand $N \rightarrow \infty$ vers $M_\beta(v)\varphi(t, x, v)$ où $\varphi(t, x, v)$ est solution de l'équation de Boltzmann linéaire*

$$\partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x \varphi = -\mathcal{L}\varphi \quad (1.2.2.3)$$

avec

$$\mathcal{L}\varphi := \int \int [\varphi(v) - \varphi(v')] M_\beta(v_1) ((v - v_1) \cdot \nu)_+ dv_1 d\nu$$

et

$$M_\beta(v) := \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{d/2} \exp \left(-\frac{\beta}{2} |v|^2 \right),$$

$\beta > 0$, avec $\rho^0(x_1)$ pour donnée initiale.

La preuve de ce résultat repose certes sur les idées de Lanford mais également sur une étude fine du processus de branchement associé aux arbres de collisions (nous définirons précisément cette notion dans la section 2.2.2) permettant d'obtenir des estimations précises nécessaires au prolongement en temps.

1.2.3 Le cas d'un potentiel à portée infinie

Dans les résultats mentionnés précédemment, au niveau microscopique le champ d'action d'une particule, que ce soit dans le cas des sphères dures ou des potentiels à courte portée, est toujours limité. Ainsi, des particules éloignées n'interagissent pas. Le cas que nous traitons à présent est sensiblement différent car il prend en considération des potentiels à portée infinie. Nous avons ainsi réussi à établir que dans ce cas de figure, on dérive l'équation de Boltzmann sans cut-off.

L'ÉQUATION DE BOLTZMANN SANS CUT-OFF

Comme mentionnée précédemment, la section efficace apparaissant dans l'opérateur de collision est une fonction qui ne dépend que de la vitesse relative $|v - v_1|$ et de $\cos \theta$ où θ est l'angle de déviation. Par abus de notation, on notera $b(v - v_1, \sigma) = b(|v - v_1|, \cos \theta)$. La dénomination est alors la suivante : on parle de Boltzmann sans cut-off quand la section efficace présente une singularité angulaire non intégrable i.e. quand b n'est pas intégrable par rapport à θ et de Boltzmann avec cut-off dans le cas contraire.

Un exemple typique est le cas des inverses de puissance. En effet, Maxwell a établi que le noyau de collision pouvait être calculé en fonction d'un potentiel d'interaction Φ . Ainsi, pour $\Phi(r) = \frac{1}{r^{s-1}}$, $s > 2$,

$$b(|v - v_1|, \cos \theta) = q(\cos \theta)|v - v_1|^\gamma, \quad (1.2.3.1)$$

avec $\gamma = \frac{s - (2d - 1)}{s - 1}$ et q définie de façon implicite, régulière localement et présentant la singularité suivante pour $\theta \rightarrow 0$,

$$(\sin \theta)^{d-2} q(\cos \theta) \sim K \theta^{-1-\nu}, \text{ avec } \nu > 0. \quad (1.2.3.2)$$

De façon générale, la singularité non intégrable dans le noyau de collision angulaire q est un effet du très grand nombre de collisions rasantes, dans les faits ce sont des collisions très peu déviées. Une telle singularité apparaît dès lors que les forces impliquées sont à portée infinie et ce quelle que soit la vitesse de décroissance à l'infini. Une conséquence de ce phénomène est alors que pris séparément les termes de gain et de perte constituent des intégrales divergentes.

Pendant de nombreuses années, l'hypothèse de “cut-off angulaire de Grad”, consistant donc à postuler que le noyau de collision est intégrable par rapport à la variable angulaire, a été nécessaire pour établir une théorie de Cauchy (voir les références de la Section 1.1.3). Pourtant, intuitivement lorsque l'on regarde l'opérateur

$$\int b(v - v_1, \sigma) [f' f'_1 - f f_1] dv_1 d\sigma dv \quad (1.2.3.3)$$

près de la singularité, on a $(v'_1, v') \simeq (v_1, v)$. On peut alors espérer que le terme $[f' f'_1 - f f_1]$ “absorbe” la singularité, en d'autres termes, exploiter ces phénomènes de compensation entre les termes de gain et de perte.

Historiquement, le premier résultat d'existence dans le cas de l'équation de Boltzmann sans cut-off est dû à Arkeryd et al. en 1981 [8] dans le cas homogène en espace. Depuis, un nombre considérable de résultats ont été obtenus. On citera les résultats récents de Alexandre et Villani [7] qui prouvent l'existence de solutions renormalisées avec

“defect measures”, dans le cadre de perturbation autour de l’équilibre la série de travaux de Alexandre, Morimoto, Ukai, Xu et Yang [3, 4, 5, 6] qui établissent une théorie satisfaisante sur le caractère bien posé et la régularité des solutions classiques, des résultats du même type ayant été obtenus de façon indépendantes au même moment par une approche différente, notamment des espaces fonctionnels différents, par Gressman et Strain [44] (pour plus de références voir [5]).

Remarque 1.2.1. *On notera que l’une des propriétés importantes de l’équation de Boltzmann sans cut-off est un effet régularisant des collisions rasantes sur les solutions, effet absent lorsque la section efficace est intégrable (la solution pouvant dans ce cas être au mieux aussi régulière que les données initiales).*

DÉRIVATION DE L’ÉQUATION DE BOLTZMANN SANS CUT-OFF

Le contexte de ce changement d’échelle étant posé, nous pouvons à présent énoncer l’un des principaux résultats obtenus dans cette thèse.

Théorème 1.2.3. *Considérons la donnée initiale*

$$f_N^0(Z_N) := M_{N,\beta}(Z_N)\rho^0(x_1) \quad (1.2.3.4)$$

avec ρ^0 une densité de probabilité continue sur $\mathbf{T}^d$, $M_{N,\beta}$ une mesure de Gibbs définie comme suit : pour $\beta > 0$,

$$M_{N,\beta}(Z_N) := \frac{1}{\bar{Z}_N} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{dN/2} \exp(-\beta H_N(Z_N)) \quad (1.2.3.5)$$

avec $H_N(Z_N) := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N |v_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right)$ et

$$\bar{Z}_N := \int_{\mathbf{T}^{dN} \times \mathbf{R}^{dN}} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{dN/2} \exp(-\beta H_N(Z_N)) dZ_N. \quad (1.2.3.6)$$

Soit Φ un potentiel à forte décroissance satisfaisant les hypothèses 2.2.1 et 2.4.1.

Alors la distribution de la particule marquée $f_N^{(1)}(t, x, v)$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d)$ quand N tend vers l’infini sous le scaling Boltzmann-Grad $N\varepsilon^{d-1} = 1$ vers $M_\beta(v)h(t, x, v)$ où $h(t, x, v)$ est solution de l’équation linéaire de Boltzmann sans cut-off.

L’une des difficultés intrinsèque à notre contexte est que l’usage seul de la stratégie de Lanford ne peut être suffisant. En effet, celle-ci néglige les phénomènes de compensation entre les termes de gain et de perte qui sont cruciaux dans le cas de l’équation de Boltzmann sans cut-off. Ainsi, il semble naturel de se placer dans le cadre d’une perturbation autour de l’équilibre comme dans [17]. L’idée ici est de séparer artificiellement le potentiel en deux parties : une partie “portée modérée” où les techniques usuelles s’appliqueront et une partie longue portée pour laquelle il faudra utiliser de nouveaux arguments (voir section 2.4). L’absence de borne sur b ne permet pas d’obtenir de contrôle sur le processus de branchement par des arguments de type Cauchy-Kowaleski, ce qui est compensé par les estimations a priori venant du principe du maximum et la procédure de pruning introduite dans [17].

Remarque 1.2.2. (i) *Un premier résultat partiel avait été obtenu par Desvillettes et Pulvirenti [31] en 1999 établissant une dérivation de l'équation de Boltzmann sans cut-off dans la limite Boltzmann-Grad en partant d'une particule se déplaçant dans un environnement figé distribué de façon aléatoire selon un processus de Poisson et interagissant via des inverses de puissance. Notons que la portée des interactions était finie à N fixé et infinie asymptotiquement.*

(ii) *Les hypothèses sur notre potentiel ne sont sans doute pas optimales. Il semble que pour obtenir une dérivation pour des potentiels à décroissance plus raisonnables, une approche différente soit nécessaire.*

Ainsi, pour ce problème, l'aléa réside uniquement dans les données initiales dont la distribution est (1.2.3.4). Nous tenons ici à insister sur le point suivant : l'aléa peut parfois permettre de gagner sur certains aspects. En effet, le résultat originel de Lanford utilisait déjà beaucoup l'aléa en exploitant la structure des données initiales aléatoires. Ici, en partant d'un équilibre perturbé, on a encore un gain supplémentaire par rapport à Lanford en établissant des estimations a priori. Celles-ci, combinées à d'autres nouvelles techniques, permettent alors d'étendre la preuve à un intervalle quelconque.

1.3 Formulations cinétiques de lois de conservation scalaires stochastiques

Nous nous tournons à présent vers notre second changement d'échelle. Il peut être vu en un certain sens comme la continuité du résultat précédent. En effet, nous étions finalement arrivés à l'échelle mésoscopique à l'équation de Boltzmann. On rappelle que le premier modèle BGK ayant été introduit était une version simplifiée de l'équation de Boltzmann. On choisit alors cette fois de partir de l'échelle mésoscopique avec un modèle BGK généralisé afin de passer à l'échelle macroscopique. Le choix d'aléa adopté est différent du précédent car, ici, l'équation étudiée comportera également un terme aléatoire. Celui-ci peut alors s'interpréter de la façon suivante : une force extérieure dont on ne connaît pas précisément les effets agit en plus sur les particules. On traduit alors cette méconnaissance en dotant la force agissant sur le système d'une composante aléatoire. On obtient alors à l'échelle macroscopique une loi de conservation avec un terme de forçage. De façon générale, une loi de conservation est, comme son nom l'indique, une équation qui assure la conservation d'une des quantités physiques du système. Notre deuxième transition concerne donc le passage d'un modèle BGK à une loi de conservation. Dans cette partie, après un panorama historique sur ce type de transition, nous énonçons notre résultat.

Remarque 1.3.1. *Une autre question naturelle, en lien avec le premier chapitre, pourrait être, dans le cas de ce modèle BGK stochastique, de se demander s'il l'on est capable de "dériver", même formellement, l'équation aux dérivées partielles stochastiques que l'on va étudier à partir d'un modèle microscopique. En d'autres termes, essayer de faire apparaître ce bruit au niveau mésoscopique. Le point de vue adopté devient alors le suivant : on peut voir cette "force aléatoire" comme une fluctuation de la dynamique microscopique autour de la dynamique déterministe, un peu comme un terme d'erreur qu'on obtiendrait à l'ordre supérieur dans le développement asymptotique qui permet de dériver l'équation déterministe.*

1.3.1 Le cas déterministe

Nous commençons tout d'abord par définir de façon rigoureuse la notion de loi de conservation. Une loi de conservation scalaire est une équation de la forme

$$\partial_t u + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} F_i(u) = 0, u(t, x) \in \mathbf{R}^k, t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^d, \quad (1.3.1.1)$$

où F représente le flux. On parle de loi de conservation scalaire lorsque $k = 1$. Comme mentionné en fin de section 1.1.4, des modèles BGK adaptés à de telles équations ont été introduits par Perthame et Tadmor [63]. On considère la loi de conservation suivante :

$$\partial_t u(t, x) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} A_i(u(t, x)) = 0, t \in \mathbf{R}^+, x \in \mathbf{R}^d, \quad (1.3.1.2)$$

avec $A_i \in \mathcal{C}^1$ et $u(0, x) = u_0(x)$ pour condition initiale. On s'intéresse alors à l'équation cinétique suivante : pour tout $(t, x, v) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}$,

$$[\partial_t + a(v) \cdot \partial_x] f_\varepsilon(t, x, v) = \frac{1}{\varepsilon} [\chi_{u_\varepsilon(t, x)}(v) - f_\varepsilon(t, x, v)], \quad (1.3.1.3)$$

avec $u_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbf{R}} f_\varepsilon(t, x, v) dv$, $a_i = A'_i$ et $\chi_u(v) = \begin{cases} \operatorname{sgn} u & \text{si } (u - v)v \geq 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Perthame et Tadmor établissent le résultat suivant :

Théorème 1.3.1. *Soit $f_\varepsilon(0, x, v) = f_\varepsilon^0(x, v) \in L^1(\mathbf{R}_v; L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}_x^d))$. Alors il existe une solution à l'équation (1.3.1.3) notée $f_\varepsilon \in L^\infty(\mathbf{R}_t^+; L^1(\mathbf{R}_x^d \times \mathbf{R}_v))$.*

Supposons que $f_\varepsilon(0, x, v) \in L^1(\mathbf{R}_v; L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}_x^d))$ est telle que

$$u_\varepsilon(0, x) = \int_{\mathbf{R}_v} f_\varepsilon(0, x, v) \longrightarrow u_0(x) \text{ dans } L^1(\mathbf{R}_x^d). \quad (1.3.1.4)$$

Alors, quitte à extraire, $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge vers l'unique solution entropique de (1.3.1.2) notée u , i.e. on a

$$\int_{\mathbf{R}_v} f_\varepsilon(t, x, v) \longrightarrow u(t, x) \text{ dans } L^\infty([0, T]; L^1(\mathbf{R}_x^d)). \quad (1.3.1.5)$$

De plus, dans le cas de la dimension $d = 1$, pour $f_\varepsilon \in L^\infty(\mathbf{R}_t^+; L^1(\mathbf{R}_v; L^1 \cap L^\infty(\mathbf{R}_x)))$ solution de (1.3.1.3) telle que (1.3.1.4) est satisfait, alors, quitte à extraire, $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ converge fortement dans $L_{loc}^p(\mathbf{R}_x \times \mathbf{R}_t^+)$, $p < \infty$, vers l'unique solution entropique de la loi de conservation (1.3.1.2) avec pour donnée initiale $u(0, x) = u_0(x)$.

Remarque 1.3.2. *Dans le cadre des équations aux dérivées partielles, il existe plusieurs notions de solutions : les solutions fortes, qui correspondent aux solutions classiques, et les solutions faibles, i.e. les solutions au sens des distributions. Or, dans ce dernier cas, il existe parfois plusieurs solutions faibles à un même problème. La condition d'entropie permet ici de sélectionner une unique solution parmi les autres, la "bonne" solution qui correspond à la solution physique.*

La preuve du Théorème 1.3.1 repose sur une utilisation de la compacité BV dans le cas multidimensionnel et de la compacité par compensation dans le cas de la dimension 1.

Il existe des variantes de ce modèle BGK : avec des conditions aux bords [60, 12], avec un flux en la variable d'espace discontinu [15] ou encore avec un scaling champ fort [14],

etc ... C'est ce dernier cas qui va nous intéresser par la suite.

Dans [14], Berthelin, Poupaud et Mauser introduisent le modèle suivant :

$$\partial_t f_\varepsilon + \operatorname{div}_x(a(x, v)f_\varepsilon) + \frac{F(x)}{\varepsilon} \partial_v f_\varepsilon = \frac{\chi_{u_\varepsilon} - f_\varepsilon}{\varepsilon}, (t, x, v) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} \quad (1.3.1.6)$$

avec $a : \mathbf{R}^d \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^d$ et $F : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$. Ils obtiennent alors la relaxation de ce modèle vers la loi de conservation suivante :

$$\partial_t u + \operatorname{div}_x B(x, u) = 0, \quad (1.3.1.7)$$

avec $B(x, u) = \int_0^u \int_0^{+\infty} a(x, v + F(x)\rho) e^{-\rho} d\rho dv$. Plusieurs nouveautés découlent alors de ce modèle. Tout d'abord, c'est le premier modèle avec un flux dépendant de x à établir une convergence vers une loi de conservation. De plus, la loi de conservation obtenue est différente de l'habituelle où B serait remplacé par $A(x, u) = \int_0^u a(x, \rho) d\rho$. Enfin, l'équilibre thermodynamique associé est modifié et f_ε ne converge plus vers une Maxwellienne χ_u mais vers une Maxwellienne modifiée. En effet, on observe qu'en passant formellement à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ dans (1.3.1.6), on obtient

$$F(x) \partial_v f = \chi_u - f.$$

Il faut noter que dans ce contexte une hypothèse additionnelle est alors nécessaire pour établir une convergence. On suppose que

$$\left(\int_{\mathbf{R}} |f_\varepsilon(t, x, v)| dv \right)_{\varepsilon > 0} \text{ est bornée dans } L^\infty([0, +\infty[\times \mathbf{R}^d). \quad (1.3.1.8)$$

1.3.2 Le cas stochastique

Passons à présent au cas stochastique. Comme expliqué précédemment, l'aléa introduit ici peut s'interpréter comme une force méconnue agissant sur les particules. On traduit cette méconnaissance sous la forme de bruit ajouté à l'équation. De nombreuses possibilités existent quant à la forme du bruit adopté. Nous avons ici choisi de présenter le cas d'un bruit pris sous la forme d'un mouvement Brownien. Le mouvement Brownien, ou processus de Wiener, est une description mathématique du mouvement aléatoire d'une "grosse" particule immergée dans un fluide et qui n'est soumise à aucune autre interaction que des chocs avec les "petites" molécules du fluide environnant. Cela a alors pour effet un mouvement très irrégulier, et surtout aléatoire, de la grosse particule. Il est ainsi très souvent utilisé dès lors que l'on veut introduire de l'aléa. Cette définition du Brownien est tout à fait indépendante de la dynamique que l'on considère par la suite.

DES LOIS DE CONSERVATION AVEC FORÇAGE STOCHASTIQUE

On s'intéresse à présent à des équations de la forme

$$du + \operatorname{div}(g(u))dt = h(u)dW_t, \quad (1.3.2.1)$$

où W_t est un mouvement Brownien. L'un des premiers résultats obtenus dans ce cadre concernant le problème de Cauchy est dû à Holden et Risebro [48]. Ils établissent l'existence

presque sûre d'une solution faible à une loi de conservation avec forçage stochastique dans le cas de la dimension 1 :

$$du + \partial_x f(u)dt = h(t, x)dW_t + g(u)dW_t. \quad (1.3.2.2)$$

Plus tard, Kim [51] développe une méthode de compacité par compensation et prouve ainsi, via des méthodes d'approximation par viscosité, l'existence d'une solution entropique stochastique à l'équation

$$du + \partial_x f(u) = h(t, x)dW_t, (t, x) \in (0, t) \times \mathbf{R}. \quad (1.3.2.3)$$

Vallet et Wittbold [72] étendent alors le résultat de Kim valable pour un bruit additif au problème de Dirichlet multidimensionnel, tandis que Feng et Nualart [36], eux, étendent ce résultat au cas d'un bruit multiplicatif

$$du + \operatorname{div} f(u)dt = \int_{z \in Z} \sigma(., u, z)d\tilde{W}(t, z), \quad (1.3.2.4)$$

où $\tilde{W}(t, dz)$ est un bruit blanc gaussien espace temps.

Plus récemment, Debussche et Vovelle [30] en introduisant la notion de formulation cinétique dans le cadre stochastique établissent l'existence et l'unicité d'une solution cinétique. Ils complètent alors le résultat de Feng et Nualart valable uniquement en dimension 1, les notions de solution entropique stochastique et solution cinétique stochastique étant équivalentes. Pour terminer notre panorama, on citera également le papier de Bauzet, Vallet et Wittbold [11] qui prouvent l'existence et l'unicité de solution entropique stochastique pour une loi de conservation scalaire avec un bruit multiplicatif

$$du - \operatorname{div}(f(u))dt = h(u)dW_t \quad (1.3.2.5)$$

sous des hypothèses plus faibles que leurs prédécesseurs.

L'un des points communs dans la plupart des papiers précédents est un recours à une approximation par viscosité pour établir l'existence de solutions. Le premier résultat faisant appel à une approximation BGK est dû à Hofmanova [47].

DÉRIVATION À PARTIR D'UN MODÈLE BGK STOCHASTIQUE

On considère à présent la loi de conservation scalaire avec forçage stochastique

$$du + \operatorname{div}(A(u))dt = \Phi(u)dW_t, t \in]0, T[, x \in \mathbf{T}^d, \quad (1.3.2.6)$$

avec pour donnée initiale $u(0) = u_0$. Le modèle stochastique BGK associé est alors le suivant

$$dF_\varepsilon + a(v) \cdot \nabla F_\varepsilon dt = \frac{\mathbf{1}_{u_\varepsilon > v} - F_\varepsilon}{\varepsilon} dt - \partial_v F_\varepsilon \Phi dW_t - \frac{1}{2} \partial_v (G^2(-\partial_v F_\varepsilon)) dt, \quad (1.3.2.7)$$

avec $F_\varepsilon(0) = F_\varepsilon^0$ et où $F_\varepsilon = f_\varepsilon + \mathbf{1}_{0 > v}$ et $u_\varepsilon(t, x) := \int_{\mathbf{R}} f_\varepsilon(t, x, v) dv$. On fait alors les hypothèses suivantes :

$$A = (A_1, \dots, A_N) : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^d \text{ est de classe } \mathcal{C}^{4,\eta} \text{ et à croissance polynomiale} \quad (1.3.2.8)$$

pour $\eta > 0$ et on note a sa dérivée première $a = (a_1, \dots, a_N)$.
 W est un processus de Wiener de dimension l défini comme suit

$$W(t) = \sum_{i=1}^l \beta_k(t) e_k \quad (1.3.2.9)$$

où $(\beta_k)_{k=1}^l$ sont des mouvements Browniens mutuellement indépendants, $(e_k)_{k=1}^l$ une base orthonormale de H un espace de Hilbert de dimension finie.

Pour chaque $u \in \mathbf{R}$,

$$\Phi(u) : H \rightarrow L^2(\mathbf{T}^d) \text{ est défini par } \Phi(u)e_k = g_k(u) \quad (1.3.2.10)$$

avec

$g_k(\cdot, u)$ régulière sur $\mathbf{T}^d$, de classe $\mathcal{C}^{4,\eta}$ à croissance linéaire et à dérivée de tout ordre bornée. (1.3.2.11)

On suppose que

$$g_k(x, 0) = 0, x \in \mathbf{T}^d, k = 1, \dots, l, \quad (1.3.2.12)$$

$$G^2(x, v) = \sum_{k=1}^l |g_k(x, v)|^2 \leq C, \quad (1.3.2.13)$$

et

$$u_0 \in L^p(\Omega; L^p(\mathbf{T}^d)) \quad (1.3.2.14)$$

avec $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Hofmanová obtient alors le résultat suivant :

Théorème 1.3.2. *Sous les hypothèses (1.3.2.8), (1.3.2.9), (1.3.2.10), (1.3.2.11), (1.3.2.12), (1.3.2.13) et (1.3.2.14), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $F_\varepsilon \in L^\infty(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^d)$ qui est une solution faible du modèle BGK stochastique (1.3.2.7) avec condition initiale $F_0 = \mathbf{1}_{u_0 > v}$. De plus, quitte à extraire, $(f_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge dans $L^p(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^d \times \mathbf{R})$ pour tout $p \in [1, \infty[$ vers la fonction d'équilibre χ_u où u est l'unique solution cinétique de la loi de conservation stochastique (1.3.2.6). Enfin, quitte à extraire, la densité locale $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converge vers la solution cinétique u dans $L^p(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^d)$, pour tout $p \in [1, \infty[$.*

1.3.3 Le cas stochastique avec un scaling champ fort

Ainsi, on peut à présent énoncer le deuxième résultat de ce manuscrit qui se place dans le cadre de la présence à la fois d'un champ fort mais également d'un terme de forçage stochastique. On introduit le modèle suivant

$$dF_\varepsilon + a(x, v) \cdot \nabla F_\varepsilon dt + \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon} \partial_v F_\varepsilon dt = \frac{\mathbf{1}_{u_\varepsilon > v} - F_\varepsilon}{\varepsilon} dt - \partial_v F_\varepsilon \Phi dW_t - \frac{1}{2} \partial_v (G^2(-\partial_v F_\varepsilon)) dt, \quad (1.3.3.1)$$

On considère la fonction

$$a = (a_1, \dots, a_d) : \mathbf{T}^d \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^d \text{ de classe } \mathcal{C}^{3,\mu} \quad (1.3.3.2)$$

satisfaisant pour tout $x \in \mathbf{T}^d, v \in \mathbf{R}$,

$$0 \leq \operatorname{div}(a(x, v)). \quad (1.3.3.3)$$

Supposons également que

$$\Lambda : \mathbf{T}^d \rightarrow \mathbf{R} \text{ est une fonction positive de classe } \mathcal{C}^{4,\mu}. \quad (1.3.3.4)$$

et enfin que

$$a(x, \cdot) \in L^1(\mathbf{R}) \text{ et } \partial_v g_k(x, \cdot) \in L^1(\mathbf{R}). \quad (1.3.3.5)$$

On remarque que dès lors que a et g_k sont à support compact en v , (1.3.3.5) est satisfaite. De façon similaire au cas déterministe, on se placera dans le cas avec l'hypothèse additionnelle :

$$\left(\int_{\mathbf{R}} |f_\varepsilon(\omega, t, x, v)| dv \right)_{\varepsilon > 0} \text{ est bornée dans } L^\infty(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^N) \quad (1.3.3.6)$$

avec $f_\varepsilon := F_\varepsilon - \mathbf{1}_{0 > v}$.

Théorème 1.3.3. *Sous les hypothèses (1.3.2.9), (1.3.2.10), (1.3.2.11), (1.3.2.12), (1.3.3.2), (1.3.3.3), (1.3.3.4), (1.3.3.5), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une solution faible au modèle BGK stochastique avec champ fort (1.3.3.1) notée $F_\varepsilon \in L^\infty(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^d \times \mathbf{R})$ avec condition initiale $F_0 = \mathbf{1}_{u_0 > v}$ pour $u_0 \in L^p(\Omega; L^p(\mathbf{T}^d))$ pour tout $p \in [1, \infty[$.*

De plus, sous l'hypothèse additionnelle (1.3.3.6), F_ε converge faiblement- $$ $L^\infty(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^d \times \mathbf{R})$ vers M_u où M_u est une Maxwellienne modifiée associée à u avec u une solution faible de la loi de conservation scalaire avec forçage stochastique*

$$du + \operatorname{div}(B(x, u))dt = C(x, u)dW_t, \quad (1.3.3.7)$$

avec

$$B(x, u) = \int_{-\infty}^u \int_0^{+\infty} a(x, v + \rho\Lambda(x))e^{-\rho} d\rho dv \quad (1.3.3.8)$$

et

$$C(x, u) = \int_{-\infty}^u \int_0^{+\infty} \partial_v \Phi(v + \rho\Lambda(x))e^{-\rho} d\rho dv. \quad (1.3.3.9)$$

En outre, u satisfait des inégalités d'entropie analogues aux inégalités de Krushkov (3.4.3.1).

Les techniques adoptées pour établir ce résultat seront similaires à celles développées par Debussche et Vovelle [30] et Hofmanová [47]. Ainsi, le cœur de la preuve consistera à prouver la convergence vers une nouvelle formulation cinétique associée à la loi de conservation scalaire (1.3.3.7) faisant apparaître dans notre cas également une Maxwellienne modifiée. On pourra ainsi en déduire, en présence d'une hypothèse additionnelle, l'existence d'une solution faible à la loi de conservation scalaire avec forçage stochastique.

Ainsi, pour ce changement d'échelle étudié, l'aléa est distribué sur tout l'intervalle de temps.

1.4 Lemmes de moyenne à vitesses discrètes aléatoires

Le changement d'échelle qui suit se situe au même niveau que celui présenté dans la section précédente : c'est un passage de l'échelle mésoscopique à l'échelle macroscopique. Toutefois, on part cette fois d'une équation différente associée au domaine des transferts radiatifs. Dans cette partie, le choix de l'aléa considéré se fait dans le but de restaurer une propriété perdue dans un cas particulier. En effet, dans toutes ces problématiques de changement d'échelle, il faut souvent établir certaines propriétés de régularité pour obtenir les transitions. Un outil classique pour ce faire est ce qu'on appelle un lemme de moyenne. Un lemme de moyenne établit la régularité d'une quantité correspondant à une moyenne. Or, dès lors que l'on se place dans un cas où l'espace des vitesses est à cardinal fini, cet outil n'est plus valable. En travaillant avec un ensemble de vitesses fini mais tirées de façon aléatoire selon une certaine loi, nous établissons dans ce manuscrit qu'on retrouve en fait cette propriété de régularité. On l'applique alors au changement d'échelle mentionné.

1.4.1 Les lemmes de moyenne dans la littérature

Commençons par présenter les lemmes de moyenne. Ils sont devenus un outil classique quand il s'agit de s'intéresser à des équations cinétiques. Sous sa forme la plus basique, la formulation est la suivante :

Théorème 1.4.1. *Soit $\mathcal{V} \subset \mathbf{R}^d$ muni de la mesure $d\mu$. On considère une suite de fonctions $f_n : \mathbf{R}^d \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbf{R}^d$. Supposons que*

- a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\mathbf{R}^d \times \mathcal{V})$,
- b) $(v \cdot \nabla_x f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^2(\mathbf{R}^d \times \mathcal{V})$.

Pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^d)$, on pose

$$\rho_n[\psi](x) = \int_{\mathcal{V}} f_n(x, v) \psi(v) d\mu(v).$$

Alors $(\rho_n[\psi])_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans l'espace de Sobolev $H^{1/2}(\mathbf{R}^d)$.

Une conséquence directe de ce lemme est de constater que la suite $(\rho_n[\psi])_{n \in \mathbb{N}}$ est relativement compacte dans $L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^d)$ en appliquant le théorème de Rellich. Le premier résultat de ce type est dû à Bardos, Golse, Perthame et Sentis [10] obtenu dans le cadre de l'étude d'une équation de transfert radiatif (voir également [1]). Depuis, une multitude de résultats de ce type ont été obtenus, généralisant le contexte originel en remplaçant L^2 par L^p avec $p \in]1, +\infty[$ et en relaxant (b) en autorisant des dérivées par rapport à v et une certaine perte de régularité par rapport à x , voir [34, 41, 62] ... Des versions prenant en compte des dérivées en temps ou des termes de force ont également été établies comme par exemple dans [13] ainsi que des versions dans le cadre L^1 [42, 9].

Les intérêts de ces lemmes sont multiples. Par la compacité qu'ils impliquent, ils permettent de faire le lien entre différentes échelles comme par exemple dans le contexte de l'asymptotique de l'équation de Boltzmann vers Navier-Stokes incompressible [43, 66, 73]. Ils servent également d'arguments cruciaux dans la théorie des solutions renormalisées pour l'équation de Boltzmann [33] ou de façon plus générale pour prouver l'existence de solutions à des modèles cinétiques non linéaires comme dans [32] pour le système de Vlasov-Maxwell. Enfin, ils sont parfois utilisés pour étudier les effets régularisants de certaines équations [67]. Nous invitons le lecteur à consulter [50, 9] pour un état de l'art sur les lemmes de moyenne.

1.4.2 Lemmes de moyennes et vitesses discrètes

Un point crucial non mentionné jusqu'à présent est que l'on ne peut pas obtenir ce type de résultat pour n'importe quel ensemble de vitesses muni d'une mesure. En effet, il existe une condition technique nécessaire pour que le résultat soit valable : pour tout $0 < R < \infty$, on peut trouver $C_R > 0$, $\delta_0 > 0$, $\gamma > 0$ tels que pour $0 < \delta < \delta_0$ et $\xi \in \mathbf{S}^{d-1}$, on a

$$\text{mes}\left(\left\{v \in \mathcal{V} \cap B(0, R), |v \cdot \xi| \leq \delta\right\}\right) \leq C_R \delta^\gamma. \quad (1.4.2.1)$$

Cette condition est satisfaite dès lors que la mesure $d\mu$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, i.e. pour $\mathcal{V} = \mathbf{R}^d$ ou $\mathcal{V} = \mathbf{S}^{d-1}$ muni de la mesure de Lebesgue par exemple. Néanmoins, dans le contexte d'ensembles de vitesses discrètes, i.e.

$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $d\mu(v) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{v=v_j}$, cette condition n'est plus satisfaite. En effet, il suffit de prendre $\xi \in \mathbf{S}^{d-1}$ orthogonal à l'un des v_j pour le constater. Ainsi, à N fixé, on ne peut plus espérer obtenir un lemme de moyenne. Toutefois, comme établi par Mischler [59], quand les vitesses discrètes proviennent d'une discrétisation de l'espace, le lemme de moyenne peut être retrouvé asymptotiquement en faisant tendre le pas de la grille vers 0. Une question naturelle est alors de quantifier le défaut de régularité à N fixé. Le résultat suivant, que nous établissons dans ce manuscrit, répond à cette question et complète ainsi le résultat de Mischler.

Proposition 1.4.1. *Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit*

$$A_N = \left(\frac{1}{N} \mathbb{Z} \right)^d \cap [-0.5, 0.5]^d.$$

Soit $f, g \in L^2(\mathbf{R}^d \times A_N)$ satisfaisant pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$v_k \cdot \nabla_x f(x, v_k) = g(x, v_k). \quad (1.4.2.2)$$

Alors, pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^d)$, la quantité macroscopique

$$\rho[\psi](x) = \frac{1}{(N+1)^d} \sum_k f(x, v_k) \psi(v_k)$$

satisfait

$$\rho[\psi](x) = \Theta[\psi](x) + \Delta[\psi](x)$$

avec

$$\|\Theta[\psi]\|_{H^{1/2}(\mathbf{R}^d)} \leq C \quad \text{et} \quad \|\Delta[\psi]\|_{L^2(\mathbf{R}^d)} \leq \frac{C}{\sqrt{N}}$$

où C est une constante indépendante de N .

Remarque 1.4.1. *Si l'on note $\mathcal{N} = (N+1)^d$ le nombre de vitesses dans A_N , le défaut de régularité dans $H^{1/2}(\mathbf{R}^d)$ décroît comme $\mathcal{N}^{1/(2d)}$.*

DES LEMMES DE MOYENNES STOCHASTIQUES

Lorsque l'on travaille à vitesses discrètes, tout se passe comme si on n'avait “pas assez” de vitesses en v lorsque l'on considère les dérivées dans (b). Une façon de pallier ce fait est de tirer les vitesses de façon aléatoire et ensuite de s'intéresser à l'espérance de $\rho[\psi]$, ce qui moralement reviendrait à regarder un très grand nombre de réalisations. C'est cette approche que nous avons adopté afin d'établir dans ce manuscrit les deux lemmes de moyennes stochastiques suivants.

Théorème 1.4.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $V_1, \dots, V_{\mathcal{N}}$ des variables aléatoires i.i.d., distribuées selon la distribution uniforme continue sur $[-0.5, 0.5]^d$. On pose*

$$d\mu = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \delta(v = V_k).$$

Soit $f, g \in L^2(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \Omega, dx d\mu(v) d\mathbb{P})$ satisfaisant pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, p.t. $\omega \in \Omega$, et pour tout $k \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$

$$V_k \cdot \nabla_x f(x, V_k) = g(x, V_k). \quad (1.4.2.3)$$

Alors, pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^d)$, la quantité macroscopique

$$\rho[\psi](x) := \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} f(x, V_k) \psi(V_k) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x, v) \psi(v) d\mu(v)$$

satisfait $\mathbb{E}\rho[\psi] \in H^{1/2}(\mathbf{R}^d)$.

La deuxième version, elle, s'intéresse à des vitesses tirées de façon aléatoires sur la sphère.

Théorème 1.4.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $V_1, \dots, V_{\mathcal{N}}$ des variables aléatoires i.i.d., distribuées selon la distribution uniforme sur $\mathbf{S}^{d-1}$. On pose*

$$d\mu = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \delta(v = V_k).$$

Soit $f, g \in L^2(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \Omega, dx d\mu(v) d\mathbb{P})$ satisfaisant pour tout $x \in \mathbf{R}^d$, p.t. $\omega \in \Omega$, et pour tout $k \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$

$$V_k \cdot \nabla_x f(x, V_k) = g(x, V_k). \quad (1.4.2.4)$$

Alors, pour tout $\psi \in C_c^\infty(\mathbf{S}^{d-1})$, la quantité macroscopique

$$\rho[\psi](x) := \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} f(x, V_k) \psi(V_k) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x, v) \psi(v) d\mu(v)$$

satisfait $\mathbb{E}\rho[\psi] \in H^{1/2}(\mathbf{R}^d)$.

Des extensions de ces résultats au cas L^p , $p \in]1, \infty[$ et au cas L^1 seront également établi dans les corollaires 4.2.4 et 4.2.5.

1.4.3 Application à l'approximation de Rosseland

On applique les lemmes de moyenne stochastiques énoncés précédemment au cas de l'approximation de Rosseland, cadre dans lequel les lemmes de moyenne ont fait leur apparition pour la première fois (voir [10]). Le contexte est le suivant : dans le cadre d'études de transfert radiatif, on s'intéresse à l'évolution de la fonction de distribution de photons $f_\varepsilon(t, x, v)$ avec $t \in [0, T]$, $x \in \mathbf{R}^d$ et $v \in \mathcal{V}$ où $\mathcal{V}$ est un ensemble de vitesses continues, disons $\mathcal{V} = \mathbf{S}^{d-1}$ par exemple, qui satisfait l'équation suivante :

$$\varepsilon \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \sigma(\rho_\varepsilon)(\rho_\varepsilon - f_\varepsilon) \quad (1.4.3.1)$$

avec

$$\rho_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathcal{V}} f_\varepsilon(t, x, v) d\mu(v),$$

et σ une fonction telle que

$$\sigma(\rho) = \rho^\gamma \Sigma(\rho) \text{ avec } |\gamma| < 1 \text{ et } 0 < \sigma_* \leq \Sigma(\rho) \leq \sigma^* < \infty. \quad (1.4.3.2)$$

Le théorème suivant est alors connu (voir [10]).

Théorème 1.4.4. Soit σ satisfaisant (1.4.3.2). Soit $(f_\varepsilon^0)_{\varepsilon>0}$ satisfaisant

$$\sup_{\varepsilon>0} \left(\int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathcal{V}} \left(1 + \varphi(x) + |\ln f_\varepsilon^0| f_\varepsilon^0 \right) d\mu(v) dx + \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathcal{V})} \right) = M_0 < +\infty$$

pour une certaine fonction poids telle que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Alors, quitte à extraire, la solution f_ε de (4.1.0.1) et ρ_ε convergent vers $\rho(t, x)$ dans respectivement $L^p((0, T) \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{V})$ et $L^p((0, T) \times \mathbf{R}^d)$, pour tout $1 \leq p < \infty$, $0 < T < \infty$ où ρ est une solution de l'équation suivante :

$$\partial_t \rho - \operatorname{div}_x (A \nabla_x F(\rho)) = 0 \quad (1.4.3.3)$$

où $A := \int_{\mathcal{V}} v \otimes v dv$, $F(z) := \int_0^z \frac{du}{\sigma(u)}$ et avec pour donnée initiale $\rho|_{t=0}$ donnée par la limite faible dans $L^p(\mathbf{R}^d)$ de $\int_{\mathcal{V}} f_\varepsilon^0 d\mu(v)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Le résultat peut être considéré dans un contexte plus général dès lors que $(\mathcal{V}, d\mu)$ est un espace mesuré et

$$\int_{\mathcal{V}} d\mu(v) = 1 \text{ et } \int_{\mathcal{V}} v d\mu(v) = 0. \quad (1.4.3.4)$$

De plus, dans le cas où A est définie positive, la limite asymptotique peut être établie en utilisant de la compacité par compensation, rendant possible un résultat pour des vitesses discrètes dans ce cadre. Toutefois, pour A arbitraire, la preuve repose sur une utilisation des lemmes de moyenne. Ainsi, dans un contexte déterministe, on ne peut espérer adapter directement les mêmes arguments au cadre de vitesses discrètes. Néanmoins, en utilisant le théorème 1.4.3, nous établissons le résultat suivant :

Théorème 1.4.5. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $V_1, \dots, V_{\mathcal{N}}$ des variables aléatoires i.i.d. distribuées selon la loi continue uniforme sur $\mathcal{V}$. Alors, on obtient un ensemble $\mathcal{V}_{\mathcal{N}}$ de $2\mathcal{N}$ vitesses dans $\mathcal{V}$ en posant $V_{\mathcal{N}+j} = -V_j$, pour tout $j \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$. On note la mesure discrète associée

$$d\mu_{\mathcal{N}}(v) = \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{2\mathcal{N}} \delta(v = V_k).$$

Let $f_\varepsilon|_{t=0} = f_\varepsilon^0 \geq 0$ satisfaisant

$$\sup_{\varepsilon>0, \mathcal{N} \in \mathbb{N}} \left(\mathbb{E} \int_{\mathbf{R}^d} \int_{\mathcal{V}} (1 + \varphi(x) + |\ln f_\varepsilon^0|) f_\varepsilon^0 d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx + \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^d \times \mathcal{V})} \right) = M_0 < +\infty. \quad (1.4.3.5)$$

Soit f_ε une solution de l'équation suivante

$$\partial_t f_\varepsilon(t, x, V_j) + \frac{1}{\varepsilon} V_j \cdot \nabla_x f_\varepsilon(t, x, V_i) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) [\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x) - f_\varepsilon(t, x, V_j)], \quad (1.4.3.6)$$

avec $\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x) := \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{2\mathcal{N}} f_\varepsilon(t, x, V_i)$. On suppose que $\rho \in [0, \infty[\mapsto \sigma(\rho)$ est une fonction positive telle que pour tout $0 < R < \infty$, il existe $\sigma_*(R) > 0$ vérifiant $0 < 1/\sigma_*(R) \leq \sigma(\rho) \leq \sigma_*(R)$ and $|\sigma'(\rho)| \leq \sigma_*(R)$ pour tout $0 \leq \rho \leq R$. Alors $\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ converge vers $\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}}$ dans $L^2((0, T) \times \mathbf{R}^d)$ quand ε tend vers 0 avec $0 < T < \infty$ où $\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}}$ est solution de

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}} + \operatorname{div}(\mathcal{J}_{\mathcal{N}}) &= 0, \\ \sigma(\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}}) \mathcal{J}_{\mathcal{N}} &= -\mathbb{E}A_{\mathcal{N}} \nabla_x \mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}}\right), \end{aligned}$$

avec $A_{\mathcal{N}}$ la matrice $d \times d$ à composantes aléatoires définie par

$$A_{\mathcal{N}} := \frac{1}{2^{\mathcal{N}}} \sum_{j=1}^{2^{\mathcal{N}}} V_j \otimes V_j,$$

et où $\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}}|_{t=0}$ est la limite faible de $\int \mathbb{E}f_{\varepsilon, \mathcal{N}}^0 d\mu(v)$.

Un tel résultat peut alors être utilisé dans l'analyse de la consistance de schémas numériques. Dans le cas d'une discrétisation de l'ensemble des vitesses pour une équation de diffusion associée à un modèle continu, il peut être interprété comme une méthode de Monte-Carlo revisitée.

Ainsi, l'aléa introduit ici sous une forme originale a pour conséquence de restaurer une propriété de régularité dans le cas particulier de modèle à vitesses discrètes.

1.5 Changements d'échelle dans le contexte des modèles à vitesses discrètes

Le changement d'échelle présenté dans cette partie a lui aussi lieu dans un cadre à vitesses discrètes. On part cette fois de l'échelle microscopique et on s'intéresse à des systèmes de particules dont les vitesses vivent dans un ensemble de cardinal fini. On se place dans le cas particulier de modèle en dimension deux à quatre vitesses. Au niveau cinétique, on s'attendrait à ce que cela corresponde à l'équation de Broadwell, cas particulier de l'équation de Boltzmann où l'espace de vitesses est à cardinal quatre. Pourtant, Uchiyama établit dans [68] que de façon générale, on ne dérive pas l'équation de Broadwell. La question est alors d'établir les modèles limites associé à ce système de particules. L'approche adoptée dans ce manuscrit a été de questionner les modèles limites en développant et analysant des simulations numériques. Avant d'exposer les conclusions découlant des simulations, présentons de façon générale le cadre des modèles à vitesses discrètes et le cas particulier du modèle de Uchiyama étudié.

Remarque 1.5.1. *Dans la section précédente, le fait de travailler à vitesses discrètes, en déterministe, ne permet pas d'obtenir les propriétés de régularité désirées. En effet, comme mentionné précédemment, tout se passe comme si dans ce cadre, on n'a "pas assez" de vitesses. En d'autres termes, le fait de ne prendre en compte qu'un nombre fini de vitesses a pour conséquence de mener à des situations pathologiques qui sont non négligeables. Dans la partie qui suit, c'est ce même type de problème qui va se poser.*

1.5.1 L'équation de Broadwell

L'équation de Broadwell est un modèle à vitesses discrètes (DVM). Le premier à avoir introduit un tel modèle est Maxwell [58] en étudiant un fluide constitué de particules dont les vitesses vivaient dans un ensemble de cardinal six (les six vitesses étant constantes en modules mais la direction étant définies par un système d'axes orthogonaux). Par la suite, Carleman [25] et Gross [45] apportèrent les premières contributions à ce champ en considérant respectivement un gaz fictif dont les particules ne pouvaient posséder que deux vitesses (celles-ci s'interchangeant au cours des chocs) dans le cas de Carleman ou encore en soulignant l'intérêt de la discrétisation des vitesses qui permet de remplacer le noyau de collisions de l'équation de Boltzmann par un système d'équations aux dérivées partielles

non linéaires et couplées dans le cas de Gross.

Le modèle qui nous intéresse a été introduit peu de temps après les résultats mentionnés précédemment et est depuis devenu un classique dans la littérature des modèles à vitesses discrètes. Ainsi dans [20], Broadwell s'intéresse au modèle suivant : on définit l'ensemble S comme suit

$$S := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad (1.5.1.1)$$

avec $v_1 := (1, 0)$, $v_2 := (-1, 0)$, $v_3 := (0, 1)$, $v_4 := (0, -1)$. On étudie alors l'équation suivante :

$$\begin{cases} \partial_t f_1 + v_1 \cdot \nabla f_1 &= a(f_3 f_4 - f_1 f_2) \\ \partial_t f_2 + v_2 \cdot \nabla f_2 &= a(f_3 f_4 - f_1 f_2) \\ \partial_t f_3 + v_3 \cdot \nabla f_3 &= a(f_1 f_2 - f_3 f_4) \\ \partial_t f_4 + v_4 \cdot \nabla f_4 &= a(f_1 f_2 - f_3 f_4) \end{cases} \quad (1.5.1.2)$$

où on note $f_i(t, x) := f(t, x, v_i)$ pour $i = 1, \dots, 4$ avec $t \in \mathbf{R}^+$, $x \in \mathbf{R}^2$, a une constante positive.

La première question naturelle à se poser concerne évidemment la théorie de Cauchy. Notons tout d'abord un point important : on ne peut pas appliquer directement les techniques développées par DiPerna et Lions pour leur théorème d'existence de solutions renormalisées à l'équation de Boltzmann dans le cadre des DVM. En effet, comme mentionné précédemment, celles-ci reposent sur l'utilisation de lemmes de moyenne. Or, ils ne sont plus valables à vitesses discrètes dans le cas déterministe. Pour autant, il existe tout de même de nombreux résultats : des théorèmes d'existence globale pour des données petites [19], des théorèmes d'existence pour des problèmes à "steady boundary value" [27] ou encore des solutions explicites [29, 22]. Pour un panorama plus complet, nous renvoyons aux revues [40, 21, 49].

La seconde question naturelle concerne la dérivation de tels modèles. Pour quel système microscopique, peut-on espérer retomber sur l'équation de Broadwell au niveau microscopique ?

1.5.2 Des modèles particuliers à vitesses discrètes

Certains modèles peuvent apparaître plus naturels que d'autres pour pouvoir espérer dériver l'équation de Broadwell. C'est le cas notamment du modèle HPP et du modèle de Uchiyama. Le premier est un modèle sur réseau tandis que le second est un modèle continu.

Le modèle HPP a été introduit par Hardy, Pomeau et de Pazzis en 1973 [46]. On considère un réseau carré infini en dimension deux. Sur chaque site du réseau, il y a au plus quatre particules. Chaque particule a une vitesse appartenant à S . On exclut les configurations où au moins deux particules avec la même vitesse occupent le même site. La description de la dynamique est alors la suivante : durant une unité de temps, chaque particule saute dans la direction de sa vitesse. Alors sur chaque site où le nombre de particules est égal à deux, et où deux particules ont des vitesses opposées, il y a collision et on tourne chaque vitesse d'un angle $\pi/2$. Pour tous les autres sites, on ne change rien. Notons que ce modèle est le premier de cette classe depuis élargie qui s'appelle les "lattice gas automaton". Le principe général est le suivant : on considère un réseau et chaque site peut prendre un nombre d'états différents. L'évolution se fait en temps discret via les principes de propagation et collision, les règles de collisions ayant été fixées préalablement de façon à conserver la

masse et le moment total. On citera le modèle FHP [38] de Frisch, Hasslacher et Pomeau qui considère des grilles hexagonales ou encore le modèle de Frisch et al. [37] en dimension trois.

Le modèle de Uchiyama [68] s'intéresse lui à l'évolution de particules carrées dont les diagonales sont respectivement parallèles à l'axe des abscisses et des ordonnées. Les particules se déplacent librement avec une vitesse ne pouvant prendre qu'une des quatre valeurs parmi S jusqu'à ce qu'elles entrent en collision. On distingue alors deux types de collision : les collisions frontales et les collisions latérales (voir Figure 1.1). Les règles de collisions sont alors les suivantes en cas de collision latérale, les particules impliquées échangent leurs vitesses alors qu'en cas de collision frontale, les vitesses subissent une rotation de $\pm\pi/2$.

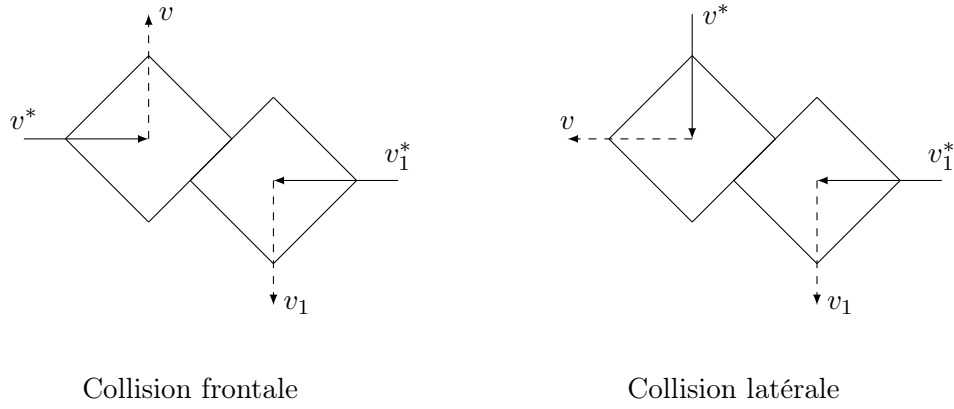


FIGURE 1.1 – Représentation des deux types de collisions où v^* et v_1^* représentent les vitesses précollisionnelles de v et v_1 .

Contrairement à ce à quoi on aurait pu s'attendre, Uchiyama prouve dans [68] que, hormis cas très particuliers, on ne dérive pas l'équation de Broadwell. Dans [69], il va même plus loin en prouvant, dans le cadre d'une particule marquée, que pour son modèle original ou pour une variante de celui-ci pour laquelle on échange les positions des particules impliquées dans des collisions latérales, le modèle limite obtenu n'est même pas Markovien. Ces phénomènes sont à mettre sur le compte de persistance de corrélations entre particules (voir Section 5.1 pour une explication plus détaillée). De façon similaire, il a été prouvé dans [57] que dans le contexte du modèle HPP, on n'obtient également pas l'équation de Broadwell.

Toutefois, il semble important de noter que dès lors que du bruit est ajouté (au transport libre et/ou en rendant les collisions aléatoires), on peut retrouver l'équation de Broadwell. On pourra consulter à cet effet les résultats de De Masi, Esposito et Presutti [57] et Caprino, De Masi, Pressuti et Pulvirenti [24] qui obtiennent de telles dérivations.

La question à laquelle on s'intéresse est la suivante : quel modèle limite obtient-on dans le cadre du modèle de Uchiyama ? Une des difficultés intrinsèque à ce modèle est l'apparition de phénomènes de recollisions difficiles à contrôler. Ainsi, s'il existe une équation cinétique, elle devrait pouvoir être écrite de façon à faire apparaître un terme de mémoire.

Une des pistes envisagées serait de tenter de l'écrire dans un espace de phases étendu, à la Caglioti-Golse [23], permettant ainsi de coder les phénomènes pathologiques directement dans l'équation. Nous avons, en première approche, décidé d'effectuer une étude numérique.

1.5.3 Une investigation numérique du modèle de Uchiyama

Le but est donc dans un premier temps d'obtenir des informations sur le modèle de Uchiyama en le simulant numériquement et en réalisant ensuite des tests statistiques sur les observations. Avant d'expliquer les programmes effectués et les résultats obtenus, revenons un instant au modèle des sphères dures dont les méthodes de simulation ont été adaptées à notre contexte.

On appelle dynamique moléculaire (MD) la méthode de simulation numérique développée pour étudier le mouvement d'atomes ou de molécules dans un problème à N corps. Le premier résultat dans ce domaine est dû à Alder et Wainwright en 1959 [2] où ils effectuent une simulation dans le contexte des sphères dures. Pour ce type de problèmes, deux approches distinctes sont envisageables : la méthode "time-driven" (TDMD) et la méthode "event-driven" (EDMD). La première technique consiste à déplacer simultanément toutes les particules sur un temps Δt et ensuite vérifier si des chevauchements entre des particules ont lieu. Si oui, on retourne en arrière jusqu'au moment approximatif de début de collision et on effectue la collision puis la simulation continue (d'où la dénomination de méthode dirigée par le temps). Dans le deuxième cas, on avance plutôt d'évènement en évènement. On commence en élaborant une suite d'évènements qui se passeront dans le futur, typiquement les collisions qui se dérouleraient si les particules avançaient toujours en ligne droite. On avance alors la simulation à l'évènement qui se passe en premier et on effectue cet évènement, ici cette collision. On met à jour la liste d'évènements si nécessaire et on recommence. Traditionnellement, c'est cette dernière approche que l'on utilise dans le cas des sphères dures. Il faut noter que la méthode "time-driven" est plus facile à implémenter mais la méthode "event-driven" est plus précise et efficace. Depuis [2], de nombreux algorithmes EDMD plus efficaces ont été développés [35, 65, 56, 52].

Dans le corps de ce manuscrit, nous avons adapté ces deux différentes méthodes de simulation au modèle de Uchiyama. Après avoir effectivement constaté numériquement que l'on ne dérive pas l'équation de Broadwell, nous nous sommes intéressés à la limite diffusive vers l'échelle macroscopique. Nous avons simulé un grand nombre de trajectoires sur lesquelles nous avons effectué des tests statistiques. Dans le cas des sphères dures, il est connu que l'on obtient un mouvement Brownien comme processus limite. Ici, à cause des corrélations provenant des phénomènes de recollisions que nous expliquerons dans la section 5.1, il n'est pas raisonnable d'espérer à nouveau obtenir un tel processus. Ainsi, nous avons fait le choix de tester l'appartenance du processus à une classe un peu plus générale, à savoir celle du mouvement Brownien fractionnaire. Par une série de tests statistiques que nous présenterons dans la Section 5.3, nous établissons que le processus limite n'est très probablement pas un mouvement Brownien fractionnaire. Nous nous attacherons également à commenter l'efficacité et la précision des deux différentes méthodes.

Tout comme dans le premier problème, l'aléa adopté ici est uniquement présent dans les données initiales. Deux faits intéressants sont à noter dans ce contexte. Seul un choix très particulier de données initiales, ne correspondant pas au cas général, permet de dériver l'équation de Broadwell. D'autre part, lorsque de l'aléa est ajouté dans le système, dans le

cas de modèles sur réseaux, et distribué sur tout l'intervalle de temps, alors l'équation de Broadwell peut être retrouvée ([57], [24]). Nous faisons le choix ici d'adopter des données initiales pour lequel l'équation de Broadwell n'est pas obtenue et sans ajouter d'aléa dans le système. En effet, à terme, ce qui nous intéresse est d'obtenir le modèle limite associé à ce cas.

Remarque 1.5.2. *On peut à nouveau noter un “effet régularisant” du bruit sur la dynamique. En effet, en bruyant au niveau microscopique, on est capable de dériver rigoureusement l'équation de Broadwell.*

Bibliographie

- [1] V. Agoshkov. Spaces of functions with differential-difference characteristics and the smoothness of solutions of the transport equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 276(6) :1289–1293, 1984.
- [2] B. J. Alder and T. E. Wainwright. Studies in molecular dynamics. i. general method. *The Journal of Chemical Physics*, 31(2) :459–466, 1959.
- [3] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. The boltzmann equation without angular cutoff in the whole space : Qualitative properties of solutions. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 202(2) :599–661, 2011.
- [4] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. The boltzmann equation without angular cutoff in the whole space :ii, global existence for hard potential. *Analysis and Applications*, 09(02) :113–134, 2011.
- [5] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. Global Existence and Full Regularity of the Boltzmann Equation Without Angular Cutoff. *Communications in Mathematical Physics*, 304(2) :513–581, 2011.
- [6] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. The boltzmann equation without angular cutoff in the whole space : I, global existence for soft potential. *Journal of Functional Analysis*, 262(3) :915 – 1010, 2012.
- [7] R. Alexandre and C. Villani. On The Boltzmann Equation For Long-Range Interactions. *Comm. Pure Appl. Math*, 55 :30–70, 2002.
- [8] L. Arkeryd, R. Esposito, and M. Pulvirenti. The Boltzmann equation for weakly inhomogeneous data. *Communications in Mathematical Physics*, 111(3) :393–407, 1987.
- [9] D. Arsénio and L. Saint-Raymond. Compactness in kinetic transport equations and hypoellipticity. *Journal of Functional Analysis*, 261(10) :3044 – 3098, 2011.
- [10] C. Bardos, F. Golse, B. Perthame, and R. Sentis. The nonaccretive radiative transfer equations : existence of solutions and Rosseland approximation. *J. Funct. Anal.*, 77(2) :434–460, 1988.
- [11] C. Bauzet, G. Vallet, and P. Wittbold. The Cauchy problem for conservations laws with a multiplicative Stochastic perturbation. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 09(04) :661–709, 2012.

-
- [12] F. Berthelin and F. Bouchut. Weak entropy boundary conditions for isentropic gas dynamics via kinetic relaxation. *Journal of Differential Equations*, 185(1) :251 – 270, 2002.
 - [13] F. Berthelin and S. Junca. Averaging lemmas with a force term in the transport equation. *J. Math. Pures Appl.*, 93(2) :113–131, 2009.
 - [14] F. Berthelin, N. J. Mauser, and F. Poupaud. High-field limit from a kinetic equation to multidimensional scalar conservation laws. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 04(01) :123–145, 2007.
 - [15] F. Berthelin and J. Vovelle. A Bhatnagar-Gross-Krook approximation to scalar conservation laws with discontinuous flux. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section : A Mathematics*, 140 :953–972, 10 2010.
 - [16] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Phys. Rev.*, 94 :511–525, May 1954.
 - [17] T. Bodineau, I. Gallagher, and L. Saint-Raymond. The Brownian motion as the limit of a deterministic system of hard-spheres. *Inventiones Mathematicae*, page 41, 2015.
 - [18] L. Boltzmann. Weitere studien über das wärme gleichgewicht unter gasmolökuler. *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften* 66, pages 275–370, 1872.
 - [19] J. M. Bony. Existence globale à données de cauchy petites pour les modèles discrets de l’équation de boltzmann,. *Commun. Partial Differential Equations*, pages 889–900, 1991.
 - [20] J. E. Broadwell. Shock Structure in a Simple Discrete Velocity Gas. *Physics of Fluids*, 7(8) :1243–1247, 1964.
 - [21] H. Cabannes. *The discrete Boltzmann equation (theory and applications)*. Lecture Notes, Univ. of California, Berkeley, CA. 1980.
 - [22] H. Cabannes and D. H. Tiem. Exact solutions for some discrete models of boltzmann equation. *Complex Systems*, pages 140–155, 1991.
 - [23] E. Caglioti and F. Golse. On the Boltzmann-Grad Limit for the Two Dimensional Periodic Lorentz Gas. *J. Stat. Phys.*, 2010.
 - [24] S. Caprino, A. DeMasi, E. Presutti, and M. Pulvirenti. A derivation of the Broadwell equation. *Communications in Mathematical Physics*, 135(3) :443–465, 1991.
 - [25] T. Carleman. Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz. *Publ. Scient. Inst. Mittag-Leffle*, pages p104–106, 1957.
 - [26] C. Cercignani. *The Boltzmann equation and its application*. Springer Verlag, 1988.
 - [27] C. Cercignani, R. Illner, and M. Shinbrot. A boundary value problem for discrete-velocity models. *Duke Math. J.*, 55(4) :889–900, 12 1987.
 - [28] S. Chandrasekhar. Stochastic problems in physics and astronomy. *Rev. Mod. Phys.*, 15 :1–89, Jan 1943.

-
- [29] H. Cornille. Exact solutions of the broadwell equations in $1+1$ dimensions. *Z Phys. A : Math. Gen.*, pages 1973–1988, 1987.
 - [30] A. Debussche and J. Vovelle. Scalar conservation laws with stochastic forcing. *Journal of Functional Analysis*, 259(4) :1014 – 1042, 2010.
 - [31] L. Desvillettes and M. Pulvirenti. The linear Boltzmann equation for long-range forces : a derivation from particles system. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 09(08) :1123–1145, 1999.
 - [32] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. Global weak solutions of Vlasov–Maxwell systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(6) :729–757, 1989.
 - [33] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and weak stability. *Ann. of Math. (2)*, 130(2) :321–366, 1989.
 - [34] R. J. DiPerna, P.-L. Lions, and Y. Meyer. L^p regularity of velocity averages. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 8(3-4) :271–287, 1991.
 - [35] J. J. Erpenbeck and W. W. Wood. Statistical mechanics b : Modern theoretical chemistry. *Institute of Physics Publishing*, pages 1–40, 1977.
 - [36] J. Feng and D. Nualart. Stochastic scalar conservation laws. *Journal of Functional Analysis*, 255(2) :313 – 373, 2008.
 - [37] U. Frisch, D. d’Humières, B. Hasslacher, P. Lallemand, Y. Pomeau, and J. P. Rivet. Lattice-gas hydrodynamics in two and three dimensions. *Complex Syst.*, 1987.
 - [38] U. Frisch, B. Hasslacher, and Y. Pomeau. Lattice-gas automata for the navier-stokes equation. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :1505–1508, Apr 1986.
 - [39] I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and B. Texier. *From Newton to Boltzmann : Hard Spheres and Short-range Potentials*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society, 2013.
 - [40] R. Gatignol. *Théorie Cinétique des Gaz à Répartition Discrète de Vitesses*. Lecture Notes in Physics. Springer, 1975.
 - [41] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame, and R. Sentis. Regularity of the moments of the solution of a transport equation. *J. Funct. Anal.*, 76 :110–125, 1988.
 - [42] F. Golse and L. Saint-Raymond. Velocity averaging in L^1 for the transport equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(7) :557–562, 2002.
 - [43] F. Golse and L. Saint-Raymond. The incompressible Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for hard cutoff potentials. *J. Math. Pures Appl.*, pages 508–552, 2009.
 - [44] P. T. Gressman, R. M. Strain, and R. V. Kadison. Global classical solutions of the Boltzmann equation with long-range interactions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 107(13) :5744–5749, 2010.
 - [45] E. P. Gross. Recent Investigations of the Boltzmann Equation, 1960.
 - [46] J. Hardy, Y. Pomeau, and O. de Pazzis. Time evolution of a two-dimensional classical lattice system. *Phys. Rev. Lett.*, 31 :276–279, Jul 1973.

-
- [47] M. Hofmanova. A Bhatnagar-Gross-Krook approximation to stochastic scalar conservation laws. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*, 51(4) :1500–1528, 11 2015.
 - [48] H. Holden and N.H. Risebro. Conservation laws with a random source. *Applied Mathematics and Optimization*, 36(2) :229–241, 1997.
 - [49] R. Illner and T. Platkowski. Discrete Velocity Models of the Boltzmann Equation : A Survey on the Mathematical Aspects of the Theory. *SIAM Review*, 30(2) :213–255, 1988.
 - [50] P. E. Jabin. Averaging lemmas and dispersion estimates for kinetic equations. *Riv. Mat. Univ. Parma*, 8 :71–138, 2009.
 - [51] J.U. Kim. On a stochastic scalar conservation law. *Indiana Univ. Math. J.*, 2003.
 - [52] A. T. Krantz. Analysis of an Efficient Algorithm for the Hard-sphere Problem. *ACM Trans. Model. Comput. Simul.*, 6(3) :185–209, July 1996.
 - [53] L. Landau. Die kinetische gleichung für den fall coulombscher wechselwirkung. *Phys. Z. Sowjet.* 10, page 154, 1936.
 - [54] O. E. Lanford. Time evolution of large classical systems. In J. Moser, editor, *Dynamical Systems, Theory and Applications*, volume 38 of *Lecture Notes in Physics*, pages 1–111. Springer Berlin Heidelberg, 1975.
 - [55] P.-L. Lions, B. Perthame, and E. Tadmor. A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations. *J. Amer. Math. Soc.*, pages 169–191, 1994.
 - [56] B. D. Lubachevsky. How to simulate billiards and similar systems. *J. Comput. Phys.*, 94(2) :255–283, May 1991.
 - [57] A. Masi, R. Esposito, and E. Presutti. Kinetic limits of the HPP cellular automaton. *Journal of Statistical Physics*, 66(1) :403–464, 1991.
 - [58] J. C. Maxwell. *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, volume 2. J. Hermann, 1890.
 - [59] S. Mischler. Convergence of discrete-velocity schemes for the Boltzmann equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 140 :53–77, 1997.
 - [60] A. Nouri, A. Omrane, and J.P. Vila. Boundary Conditions for Scalar Conservation Laws from a Kinetic Point of View. *Journal of Statistical Physics*, 1999.
 - [61] B. Perthame. Global existence to the BGK model of Boltzmann equation. *Journal of Differential Equations*, 82(1) :191 – 205, 1989.
 - [62] B. Perthame and P. E. Souganidis. A limiting case for velocity averaging. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 31(4) :591–598, 1998.
 - [63] B. Perthame and E. Tadmor. A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws. *Communications in Mathematical Physics*, 136(3) :501–517, 1991.

-
- [64] M. Pulvirenti, C. Saffirio, and S. Simonella. On the validity of the Boltzmann equation for short range potentials. *Reviews in Mathematical Physics*, 26(02) :1450001, 2014.
 - [65] D.C. Rapaport. The event scheduling problem in molecular dynamic simulation. *Journal of Computational Physics*, 34(2) :184 – 201, 1980.
 - [66] L. Saint-Raymond. *Hydrodynamic Limits of the Boltzmann Equation*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2009.
 - [67] E. Tadmor and T. Tao. Velocity averaging, kinetic formulations, and regularizing effects in quasi-linear PDEs. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60(10) :1488–1521, 2007.
 - [68] K. Uchiyama. On the Boltzmann-Grad limit for the Broadwell model of the Boltzmann equation. *Journal of Statistical Physics*, 52(1) :331–355, 1988.
 - [69] K. Uchiyama. A tagged particle process in the Boltzmann-Grad limit for the Broadwell model. *Probability Theory and Related Fields*, 82(3) :419–433, 1989.
 - [70] S. Ukai. On the existence of global solutions of mixed problem for non-linear boltzmann equation. *Proc. Japan Acad.*, 50(3) :179–184, 1974.
 - [71] S. Ukai. Les solutions globales de l'équation de boltzmann dans l'espace tout entier et dans le demi-espace. *C.R. Acad. Sci. Paris*,, pages 317–320, 1976.
 - [72] G. Vallet and P. Wittbold. On a stochastic first-order hyperbolic equation in a bounded domain. *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, 12(04) :613–651, 2009.
 - [73] C. Villani. Limites hydrodynamiques de l'équation de Boltzmann (d'après C. Bardos, F. Golse, C. D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond). *Astérisque*, (282) :Exp. No. 893, ix, 365–405, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.
 - [74] C. Villani. A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, 1 :71–307, 2002.

Chapitre 2

From Newton's law to the linear Boltzmann equation without cut-off

On obtient la dérivation de l'équation de Boltzmann linéaire sans cut-off en partant d'un système de particules interagissant via un potentiel à portée infinie quand le nombre de particules N tend vers l'infini sous le scaling Boltzmann-Grad (scaling de faible densité). La principale difficulté dans ce contexte est la suivante : à cause de la portée infinie du potentiel, une singularité non intégrable apparaît dans le noyau de collision angulaire. Ainsi, l'usage seule de la stratégie originelle de Lanford n'est plus valable.

La preuve du résultat repose alors sur une combinaison de la stratégie de Lanford, d'outils développés récemment par Bodineau, Gallagher et Saint-Raymond pour étudier le processus de collision, et de nouveaux arguments de dualité pour étudier les termes associés à la partie longue portée, menant à des estimations faibles explicites.

Ici, la forme particulière adoptée pour les données initiales, aléatoires, permet d'obtenir les estimations a priori nécessaire au contrôle des conditions.

Ce chapitre est le fruit d'un travail autonome. Il a été accepté pour publication sous le titre *From Newton's law to the linear Boltzmann equation without cut-off* dans la revue *Communications in Mathematical Physics* et est actuellement en révision.

Contents

2.1	Introduction	41
2.2	Main result and General strategy	42
2.2.1	Main result	43
2.2.2	Series expansion and general convergence strategy	44
2.2.3	The iteration strategy	49
2.3	Expression of the marginals	52
2.3.1	Elimination of recollisions in the iteration strategy	52
2.3.2	Control of the growth of collision trees in the iteration strategy	56
2.3.3	Final expression of the first marginal	57
2.4	Terms associated to the long-range part of the potential	58
2.4.1	Lipschitz control of the pseudo-trajectory	60
2.4.2	Estimates of the remainders associated to the long-range part of the potential	66
2.5	Continuity estimates and control of some remainders	69
2.5.1	Remainders with a superexponential growth	70
2.5.2	Remainders with clusters	70
2.6	Remainders and geometrical control	72
2.6.1	Some geometrical considerations	72
2.6.2	Estimates of the "geometrical" remainders	76
2.7	Asymptotic vanishing of the remainders	79
2.8	Convergence to the Boltzmann with cut-off equation	81
2.8.1	The Boltzmann with cut-off series	81
2.8.2	Convergence	83
2.9	From Boltzmann with cut-off to Boltzmann without cut-off	84
2.10	Appendix	87
2.10.1	A priori estimates	87
2.10.2	Asymptotical factorisation of the initial data	90
2.10.3	Continuity estimates	93
	Bibliography	94

2.1 Introduction

In kinetic theory, a gas is described as a physical system constituted of a large number of small particles. The point of view adopted is a statistical one. The fundamental model is the evolution equation for the density of particles of a sufficiently rarefied gas first obtained by Boltzmann in 1872. One of its interesting aspects can be found in the fact that Boltzmann's kinetic equation can be used as an intermediate step in the transition between atomistic and continuous models for gas dynamics as it is mentioned in the famous sixth problem of Hilbert. Consequently, the problem of the derivation of kinetic transport equations from systems of particles is an issue which has been widely studied in the literature, especially in the context of the Boltzmann equation. The historical result in this field is due to Lanford [14] in the case of hard-spheres. He proved the convergence in the low density limit (only for short times). His proof has been completed recently by Gallagher, Saint-Raymond and Texier [10] and by Pulvirenti, Saffirio and Simonella [15] in the case of hard-spheres and short-range potentials.

Theorem 2.1.1. *Consider a system of N particles interacting*

- *either as hard-spheres of diameter ε*
- *or via a repulsive potential Φ_ε , with support in $B(0, \varepsilon)$, radial and singular at 0 and such that the scattering of particles can be parametrized by their deflection angle.*

Let $f_0 : \mathbf{R}^{2d} \rightarrow \mathbf{R}^+$ be a continuous density of probability such that

$$\|f_0 \exp(\frac{\beta}{2}|v|^2)\|_{L^\infty(\mathbf{R}_x^d \times \mathbf{R}_v^d)} < \exp(-\mu)$$

for some $\beta > 0$, $\mu \in \mathbf{R}$.

Assume that the N particles are initially identically distributed according to f_0 and “independent” (meaning the correlations vanish asymptotically). Then, there exists some $T^ > 0$ (depending only on β and μ) such that, in the Boltzmann-Grad limit $N \rightarrow \infty$, $N\varepsilon^{d-1} = 1$, the distribution function of the particles converges uniformly on $[0, T^*] \times \mathbf{R}^{2d}$ to the solution of the Boltzmann equation*

$$\begin{aligned} \partial_t f + v \cdot \nabla_x f &= Q(f, f) \\ Q(f, f) &:= \int \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} [f(v^*)f(v_1^*) - f(v)f(v_1)] b(v - v_1, \nu) dv_1 d\nu \\ v^* &= v + \nu \cdot (v_1 - v)\nu, \quad v_1^* = v_1 - \nu \cdot (v_1 - v)\nu, \end{aligned} \tag{2.1.0.1}$$

with a locally bounded cross-section b depending on Φ implicitly, and with initial data f_0 . In the case of a hard-sphere interaction, the cross section is given by

$$b(v - v_1, \nu) = ((v - v_1) \cdot \nu)_+. \tag{2.1.0.2}$$

Remark 2.1.1. *In the case of hard-spheres for example, the notion of “independence” is translated this way*

$$f_{N|t=0} = \frac{1}{Z_N} \prod_{i=1}^N f_0(x_i, v_i) \mathbf{1}_{\mathcal{D}_\varepsilon^N} \tag{2.1.0.3}$$

with $\mathcal{D}_\varepsilon^N := \{(x_1, v_1, \dots, x_N, v_N) \in \mathbf{R}^{2dN} | \forall i \neq j, |x_i - x_j| > \varepsilon\}$, while Z_n normalizes the integral of $f_{N|t=0}$ to 1.

More recently, Bodineau, Gallagher and Saint-Raymond have been able in [7] to extend this result to any time interval $[0, t]$ with $t \ll \log \log N$ and overcome the difficulty of the short time validity in the particular case of a fluctuation around equilibrium. The key point of their proof is to exploit the maximum principle and establish global uniform a priori bounds for the distribution of particles, and more generally for all finite order marginals of the N -particle distribution.

However, so far the question of the convergence in the case of long-range potentials is still open. Indeed, for a long time Grad's cut-off assumption, which consists in postulating that the collision kernel is integrable with respect to the angular variable (see [11]), was crucial to work even at the level of the kinetic equation. The problem is that, in the case of infinite range forces, whatever the decay at infinity the huge amount of grazing collisions produces a non integrable singularity in the "angular collision kernel". However, recently a couple of breakthroughs have been made regarding the Cauchy theory for this singular equation [1, 2, 3, 4, 5, 12] inciting us to reconsider this context.

A first partial result in the direction of a derivation from a system of particles with long-range interactions has been obtained by Desvillettes and Pulvirenti [9]. Nevertheless, in their case the long-range interactions are asymptotic, meaning the range of interaction is finite for any fixed N and tends to ∞ only in the limit $N \rightarrow \infty$. Moreover, the particle moves in a frozen background, the obstacles being distributed according to some Poisson Law.

A huge number of microscopic contexts has been investigated (see the book by Spohn [16] for a survey on this topic). What we intend to do here is to obtain a complete derivation of the linear Boltzmann equation without cut-off. Our framework will be to consider potentials with strong decay (see Assumption 2.4.1). Our result is far from being reached near the limit case of Coulomb interaction for which we obtain the Landau equation (see [6] for a derivation of the Landau equation starting from a particle system). Actually, it appears that with our strategy, we can not hope to obtain a result for much less decreasing potential. We end up quite confident about the fact that a different approach is needed to obtain a similar result for more classical potentials such as power law interaction ones for example. Nevertheless, it is a first step into reaching the linear Boltzmann equation without cut-off starting from an infinite range potential at the microscopic level.

2.2 Main result and General strategy

We are interested in describing at the mesoscopic level the behavior of a gas constituted of N particles. We denote the positions by $X_N = (x_1, \dots, x_N)$ and the velocities by $V_N = (v_1, \dots, v_N)$. We will consider X_N in $(\mathbf{T}^d)^N$ and V_N in $(\mathbf{R}^d)^N$ where $\mathbf{T}^d$ is the d -dimensional torus. We denote $Z_N := (z_1, \dots, z_N)$ where $z_i := (x_i, v_i)$ for $1 \leq i \leq N$. With a slight abuse we say that Z_N belongs to $\mathbf{T}^{dN} \times \mathbf{R}^{dN}$ if X_N belongs to $\mathbf{T}^{dN}$ and V_N to $\mathbf{R}^{dN}$.

The microscopic model is given by : for $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_i}{dt} = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \nabla \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right) \quad (2.2.0.1)$$

with Φ a function satisfying the following assumption:

Assumption 2.2.1. $\Phi : \mathbf{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}_*^+$ is a radial, nonnegative, nonincreasing function which goes to zero at infinity and presents a singularity in 0. Moreover, $\nabla \Phi$ is a Lipschitz function with fast decay (see Assumption 2.4.1 for more precisions).

The Liouville equation satisfied by the N -particle distribution function f_N is

$$\partial_t f_N + \sum_{i=1}^N v_i \cdot \nabla_{x_i} f_N - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \nabla \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla_{v_i} f_N = 0. \quad (2.2.0.2)$$

We denote the marginals of order s of f_N by $f_N^{(s)}(t, Z_s)$ and we define them as follows

$$f_N^{(s)}(t, Z_s) := \int f_N(t, Z_N) dz_{s+1} \dots dz_N. \quad (2.2.0.3)$$

2.2.1 Main result

The framework is the following: we examine a small perturbation around the equilibrium of a fixed number of particles. For the sake of simplicity, we initially perturb only one particle (which will be labeled by 1) with respect to the position x_1 of the tagged particle. In order to do so, we consider initial data of the form

$$f_N^0(Z_N) := M_{N,\beta}(Z_N) \rho^0(x_1) \quad (2.2.1.1)$$

where ρ^0 is a continuous density of probability on $\mathbf{T}^d$ and $M_{N,\beta}$ is the Gibbs measure defined as follows: for $\beta > 0$ given

$$M_{N,\beta}(Z_N) := \frac{1}{\bar{Z}_N} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{dN/2} \exp(-\beta H_N(Z_N)) \quad (2.2.1.2)$$

with $H_N(Z_N) := \sum_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{2} |v_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right)$ and

$$\bar{Z}_N := \int_{\mathbf{T}^{dN} \times \mathbf{R}^{dN}} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{dN/2} \exp(-\beta H_N(Z_N)) dZ_N. \quad (2.2.1.3)$$

Indeed, it is well known that stationary solutions of the Liouville equation (2.2.0.2) provide asymptotically stationary solutions to the Boltzmann hierarchy.

Theorem 2.2.1. *We consider the initial distribution f_N^0 defined in (2.2.1.1) describing the state of a tagged particle in a background of $N - 1$ particles at equilibrium. Under Assumptions 2.2.1 and 2.4.1 on the potential, the distribution $f_N^{(1)}(t, x, v)$ of the tagged particle converges in $\mathcal{D}'(\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d)$ when N goes to ∞ under the Boltzmann-Grad scaling $N\varepsilon^{d-1} = 1$ to $M_\beta(v)h(t, x, v)$ where $h(t, x, v)$ is the solution of the linear Boltzmann equation without cut-off*

$$\partial_t h + v \cdot \nabla_x h = - \int \int [h(v) - h(v^*)] M_\beta(v_1) b(v - v_1, \nu) dv_1 d\nu \quad (2.2.1.4)$$

with initial data $\rho^0(x_1)$ and where $M_\beta(v) := \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{d/2} \exp \left(-\frac{\beta}{2} |v|^2 \right)$, $\beta > 0$. The cross-section b has a non-integrable singularity depending implicitly on Φ .

Remark 2.2.1. *We notice that because of the translation invariance of $\mathbf{T}^d$ and ρ^0 belonging to $L^1(\mathbf{T}^d)$, the distribution f_N^0 is normalized by 1 in $L^1(\mathbf{T}^{dN} \times \mathbf{R}^{dN})$. Let us also point out that, the tagged particle being the number 1, due to this distinction $f_N|_{t=0}$ is symmetric with respect to $z_2, \dots, z_N$ but not to z_1 .*

2.2.2 Series expansion and general convergence strategy

In order to introduce the necessary notions, we briefly recall the case of hard-spheres.

LANFORD'S STRATEGY IN THE HARD-SPHERES CASE

Let us assume in this subsection that the microscopic dynamics is the hard-spheres one. A general strategy consists in using the Green's formula to obtain the following system of equations for $s < N$ which is called the BBGKY hierarchy:

$$(\partial_t + \sum_{i=1}^s v_i \cdot \nabla_{x_i}) f_N^{(s)}(t, Z_s) = (\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1} f_N^{(s+1)})(t, Z_s) \quad (2.2.2.1)$$

on $\mathcal{D}_\varepsilon^s$ with the operator $\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}$ defining the collision term as follows

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1} f_N^{(s+1)})(Z_s) \\ &:= (N-s)\varepsilon^{d-1} \sum_{i=1}^s \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} f_N^{(s+1)}(\dots, x_i, v_i^*, \dots, x_i + \varepsilon\nu, v_{s+1}^*) ((v_{s+1} - v_i) \cdot \nu)_+ d\nu dv_{s+1} \\ & - (N-s)\varepsilon^{d-1} \sum_{i=1}^s \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} f_N^{(s+1)}(\dots, x_i, v_i, \dots, x_i + \varepsilon\nu, v_{s+1}) ((v_{s+1} - v_i) \cdot \nu)_- d\nu dv_{s+1} \end{aligned} \quad (2.2.2.2)$$

where $\mathbf{S}^{d-1}$ denotes the unit sphere in $\mathbf{R}^d$, and v_i^* and v_{s+1}^* stand for the pre-collisional velocities for the particles i and $s+1$. Mild solutions of the hierarchy can then be defined by Duhamel's formula:

$$f_N^{(s)}(t) = \mathcal{T}_s(t) f_N^{(s)}(0) + \int_0^t \mathcal{T}_s(t-t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1} f_N^{(s+1)}(t_1) dt_1 \quad (2.2.2.3)$$

where we denote by $\mathcal{T}_s$ the group associated to free transport in $\mathcal{D}_\varepsilon^s$ with specular reflection on the boundary. The key point of Lanford's proof is the iterated Duhamel formula in order to express solutions of the BBGKY hierarchy in terms of a series of operators applied to the initial marginals:

$$f_N^{(s)}(t) = \sum_{n=0}^{N-s} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{T}_s(t-t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1} \mathcal{T}_{s+1}(t_1-t_2) \tilde{\mathcal{C}}_{s+1,s+2} \dots \mathcal{T}_{s+n}(t_n) f_N^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1. \quad (2.2.2.4)$$

The Boltzmann series expansion is obtained by taking the formal limit. The asymptotic expression for the collision operator is given by

$$\begin{aligned} & (\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^0 g^{(s+1)})(Z_s) \\ &:= \sum_{i=1}^s \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} g^{(s+1)}(\dots, x_i, v_i^*, \dots, x_i, v_{s+1}^*) ((v_{s+1} - v_i) \cdot \nu)_+ d\nu dv_{s+1} \\ & - \sum_{i=1}^s \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} g^{(s+1)}(\dots, x_i, v_i, \dots, x_i, v_{s+1}) ((v_{s+1} - v_i) \cdot \nu)_- d\nu dv_{s+1} \end{aligned} \quad (2.2.2.5)$$

and the iterated Duhamel formula for the Boltzmann equation leads to the following expression

$$g^{(s)}(t) = \sum_{n=0}^s \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{T}_s^0(t-t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^0 \mathcal{T}_{s+1}^0(t_1-t_2) \tilde{\mathcal{C}}_{s+1,s+2}^0 \dots \mathcal{T}_{s+n}^0(t_n) g^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1 \quad (2.2.2.6)$$

where we denote by $\mathcal{T}_s^0$ the free flow of s particles on $\mathbf{R}^{2ds}$.

Two steps are then necessary to prove Lanford's result:

- a uniform short time bound for the series expansion associated to the BBGKY hierarchy and the Boltzmann equation,
- the term by term convergence.

Let us be more precise and introduce the notion of pseudo-trajectory to explain the strategy of convergence. We introduce the following notation

$$\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1} = \sum_{i=1}^s \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{+,i} - \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{-,i} \quad (2.2.2.7)$$

where

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{\pm,i} f_N^{(s+1)} \right) (Z_s) := (N-s) \varepsilon^{d-1} \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} f_N^{(s+1)}(\dots, x_i, v'_i, \dots, x_i + \varepsilon \nu, v'_{s+1}) \\ ((v_{s+1} - v_i) \cdot \nu)_{\pm} d\nu dv_{s+1} \end{aligned} \quad (2.2.2.8)$$

with $v'_i = v_i^*$ and $v'_{s+1} = v_{s+1}^*$ for $\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{+,i}$ and $v'_i = v_i$ and $v'_{s+1} = v_{s+1}$ for $\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{-,i}$. We can do the same for $\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^0$. We call elementary terms in the series the following elements

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{T}_s(t-t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{j_1, m_1} \mathcal{T}_{s+1}(t_1-t_2) \tilde{\mathcal{C}}_{s+1, s+2}^{j_2, m_2} \dots \mathcal{T}_{s+n}(t_n) f_N^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1 \quad (2.2.2.9)$$

with $(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \{+, -\}$ and $m_i \in \{1, 2, \dots, s+i-1\}$. Each elementary term has a geometric interpretation as an integral over some pseudo-trajectory.

Definition 2.2.2. We call pseudo-trajectory associated to the BBGKY hierarchy and the elementary term

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{T}_s(t-t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{j_1, m_1} \mathcal{T}_{s+1}(t_1-t_2) \tilde{\mathcal{C}}_{s+1, s+2}^{j_2, m_2} \dots \mathcal{T}_{s+n}(t_n) f_N^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1 \quad (2.2.2.10)$$

the following description of the evolution of the positions and the velocities:

- We start at time t with s particles with the configuration $Z_s \in \mathbf{T}^{ds} \times \mathbf{R}^{ds}$. We denote by $\hat{\Psi}_s$ the backward s -particle flow. For $u \in [t_1, t]$, $Z_s(u) := \hat{\Psi}_s(u) Z_s$.
- The first collision operator $\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{j_1, m_1}$ is interpreted as the adjunction at time t_1 of a new particle at $x_{m_1}(t_1) + \varepsilon \nu_{s+1}$ for a deflection angle $\nu_{s+1} \in \mathbf{S}^{d-1}$ and a velocity $v_{s+1} \in \mathbf{R}^d$.
- Then Z_{s+1} evolves according to the backward $s+1$ -particles flow $\hat{\Psi}_{s+1}$ during the time interval $[t_2, t_1]$ starting at t_1 from

$$\begin{aligned} Z_{s+1}(t_1) &= (\{z_j(t_1)\}_{j \neq m_1}, (x_{m_1}(t_1), v_{m_1}(t_1)), (x_{m_1}(t_1) + \varepsilon \nu_{s+1}, v_{s+1})) & \text{if } j_1 = - \\ &= (\{z_j(t_1)\}_{j \neq m_1}, (x_{m_1}(t_1), v_{m_1}^*(t_1)), (x_{m_1}(t_1) + \varepsilon \nu_{s+1}, v_{s+1}^*)) & \text{if } j_1 = +. \end{aligned} \quad (2.2.2.11)$$

- We iterate this procedure by adding a particle labeled $s+i$ at time t_i at $x_{m_i}(t_i) + \varepsilon \nu_{s+i}$ for a deflection angle $\nu_{s+i} \in \mathbf{S}^{d-1}$ and a velocity $v_{s+i} \in \mathbf{R}^d$. The evolution of Z_{s+i} follows the flow of the backward $s+i$ -particles flow $\hat{\Psi}_{s+i}$ during the time interval $[t_{i+1}, t_i]$ starting at t_i from

$$\begin{aligned} Z_{s+i}(t_i) &= (\{z_j(t_i)\}_{j \neq m_i}, (x_{m_i}(t_i), v_{m_i}(t_i)), (x_{m_i}(t_i) + \varepsilon \nu_{s+i}, v_{s+i})) & \text{if } j_i = - \\ &= (\{z_j(t_i)\}_{j \neq m_i}, (x_{m_i}(t_i), v_{m_i}^*(t_i)), (x_{m_i}(t_i) + \varepsilon \nu_{s+i}, v_{s+i}^*)) & \text{if } j_i = +. \end{aligned} \quad (2.2.2.12)$$

The elementary term can then be rewritten as follows

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{(d-1)n} (N-s)(N-s-1) \dots (N-s-n+1) \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \dots dt_1 \\ & \int_{(\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d)^n} d\nu_{s+1} \dots \nu_{s+n} dv_{s+1} \dots dv_{s+n} \prod_{i=1}^n ((v_{s+i} - v_{m_i}(t_i)) \cdot \nu_{s+i}) f_N^{0(s+n)}(Z_{s+n}(0)) \end{aligned} \quad (2.2.2.13)$$

where $Z_{s+n}(0)$ is the pseudo-trajectory at time 0.

We then give the definition of the two notions of collision and recollision.

Definition 2.2.3. We call a collision the creation of a particle in the process described above and a recollision the event when two particles collide in the flow $\hat{\Psi}_{s+i}$, with $0 \leq i \leq N-s$.

Note that the pseudo-trajectories do not involve physical particles but are a geometric interpretation of the iterated Duhamel formula in terms of a branching process flowing backward in time and determined by

- the collision times $T := (t_1, \dots, t_n)$ which are interpreted as branching times,
- the labels of the particles involved in the collisions $m := (m_1, \dots, m_n)$ from which branching occurs and such that $1 \leq m_i \leq s+i-1$ for all i ,
- the coordinate of the initial particles Z_s at time t ,
- the velocities $v_{s+1}, \dots, v_{s+n}$ in $\mathbf{R}^d$ and deflection angles $\nu_{s+1}, \dots, \nu_{s+i} \in \mathbf{S}^{d-1}$ for each additional particle.

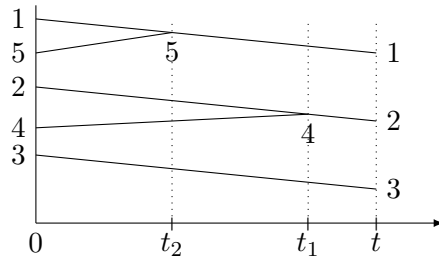


FIGURE 1. Representation of a collision tree associated to the term

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \mathcal{T}_3^0(t-t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{3,4}^{j_1,2} \mathcal{T}_4^0(t_1-t_2) \tilde{\mathcal{C}}_{4,5}^{j_2,1} \mathcal{T}_5^0(t_2) f_N^{(5)}(0) dt_2 dt_1.$$

Definition 2.2.4. We call pseudo-trajectory associated to the Boltzmann hierarchy and the elementary term

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{T}_s^0(t-t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{0,j_1,m_1} \mathcal{T}_{s+1}^0(t_1-t_2) \tilde{\mathcal{C}}_{s+1,s+2}^{0,j_2,m_2} \dots \mathcal{T}_{s+n}^0(t_n) f_N^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1 \quad (2.2.2.14)$$

the following description of the evolution of the positions and the velocities:

we start at time t with s particles with the configuration $Z_s^0 \in \mathbf{T}^{ds} \times \mathbf{R}^{ds}$. The $(s+k)^{th}$ particle is added at $x_{m_k}^0(t_k)$ with a velocity $v_{s+k} \in \mathbf{R}^d$. Then Z_{s+k}^0 evolves according to the backward free flow denoted by $\hat{\Psi}_{s+k}^0$ during the time interval $[t_{k+1}, t_k]$ until the next creation, starting from

$$\begin{aligned} Z_{s+k}^0(t_k) &= \left(\{z_j^0(t_k)\}_{j \neq m_k}, (x_{m_k}^0(t_k), v_{m_k}(t_k)), (x_{m_k}^0(t_k), v_{s+k}) \right) \quad \text{if } j_k = - \\ &= \left(\{z_j^0(t_k)\}_{j \neq m_k}, (x_{m_k}^0(t_k^+), v_{m_k}^*(t_k^+)), (x_{m_k}^0(t_k^+), v_{s+k}^*) \right) \quad \text{if } j_k = +. \end{aligned} \quad (2.2.2.15)$$

The elementary term can then be rewritten as follows

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \dots dt_1 \int_{(\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d)^n} d\nu_{s+1} \dots \nu_{s+n} dv_{s+1} \dots dv_{s+n} \prod_{i=1}^n ((v_{s+i} - v_{m_i}(t_i)) \cdot \nu_{s+i}) g^{0(s+n)}(Z_{s+n}^0(0)) \quad (2.2.2.16)$$

where $Z_{s+n}^0(0)$ is the Boltzmann pseudo-trajectory at time 0.

Remark 2.2.2. The notion of collision is defined similarly as previously as the creation of a particle in the above process. Nevertheless, in the case of the pseudo-trajectory associated to the Boltzmann hierarchy, the particles are points and no recollision occurs in the branching process.

The key point to prove the convergence is actually to prove that the pseudo-trajectories associated to both series can be coupled precisely. Indeed, the differences between the BBGKY series and the Boltzmann series are the prefactors $(N-s)\varepsilon^{d-1}$, the micro-translation $x_i + \varepsilon\nu$ when a particle is created in the BBGKY pseudo-trajectory and most importantly the absence of recollisions in the case of the Boltzmann pseudo-trajectories. The two first points are easily dealt with by passing to the limit. The main concern of the proof is then to deal with the third one and prove that outside a geometrical ensemble of vanishing measure, no recollision occurs either for the BBGKY pseudo-trajectories.

THE LINEAR CASE

In the original method of Lanford, after a short time (depending on the initial data), the bounding series becomes divergent since possible cancellations between gain and loss terms are completely neglected in this strategy. The idea developed in [7] is to take advantage of the control by stationary solutions to remove the short time limitation. Considering particles living in the torus $\mathbf{T}^d$ (and no longer in $\mathbf{R}^d$) with a perturbation of some equilibrium, Bodineau et al proved the convergence to the linear Boltzmann equation using a slightly different iterative strategy that we will adopt in Section 2.3.2. The main idea is to bound the number of collisions by working with the so-called collision trees of “controlled size”.

Definition 2.2.5. *Let us fix a (small) parameter $\tau > 0$ and denote $t := K\tau$ for some large integer K to be fixed later. We split the time interval $[0, t]$ into intervals $\cup_{1 \leq k \leq K} [(k-1)\tau, k\tau]$. We call a collision tree “of controlled size” a collision tree such that it has less than $n_k = 2^k$ branching points on the interval $[t - k\tau, t - (k-1)\tau]$.*

We call a collision tree with super-exponential growth a collision tree which does not satisfy the above property.

The strategy is then to define by iteration what we will call a main term where the collision trees involved are collision trees of “controlled size”, i.e. where the trajectories with at least n_k collisions during the interval time $[t - k\tau, t - (k-1)\tau]$ are truncated, giving birth to some remainders where collision trees with super-exponential growth are involved. The final result is then obtained by proving the convergence of the main term and the vanishing of the remainders (in other words, proving that the contribution of super-exponential trees is negligible).

THE CASE OF A NON CUT-OFF POTENTIAL

Let us go back to the long-range interaction case. The issue is the following, no matter how decreasing the potential is taken, a non-integrable singularity in the angular collision kernel appears due to the huge amount of grazing collisions. By grazing collisions, we mean collisions with a very large impact parameter, the impact parameter being the distance of closest approach if the two particles move freely (so concretely, grazing collisions involve colliding particles which are barely deviated).

Example 2.2.1. *In the model case of inverse-power law potentials*

$$\Phi(r) = \frac{1}{r^{s-1}}, \quad s > 2. \quad (2.2.2.17)$$

the cross-section satisfies

$$b(|v - v^*|, \cos \theta) = q(\cos \theta) |v - v^*|^\gamma, \quad \gamma = \frac{s - (2d - 1)}{s - 1} \quad (2.2.2.18)$$

where q is a function which is only implicitly defined, locally smooth and has a non-integrable singularity for $\theta \rightarrow 0$:

$$(\sin \theta)^{d-2} q(\cos \theta) \sim C \theta^{-1-\alpha}, \quad \alpha > 0 \quad (2.2.2.19)$$

(see [8] for more details).

So the strategy consisting in neglecting the cancellations between the gain and the loss terms no longer works, even for a short time. Indeed, separating the gain and the loss terms no longer makes sense since the two integrals diverge in

$$\int \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} f(v^*) f(v_1^*) b(v - v_1^*, \nu) dv_1 d\nu - \int \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} f(v) f(v_1) b(v - v_1, \nu) dv_1 d\nu$$

So, the key point will be to separate the contribution of the long-range interaction from the one of the “moderate-range” interaction by introducing a truncation parameter R . The “moderate-range” interaction part should be treated using exactly the same strategy as the one explain above in the hard-spheres case introducing some fictitious boundary at distance $R\varepsilon$ (see [13]). The long-range interaction part should be treated as an additional remainder term which will vanish in the limit provided that R goes to ∞ . The main difficulty in that last term (which does not appear in the case of a short-range potential) is due

to the presence of derivatives acting on the marginals. The strategy will be not to iterate on terms involving derivatives and to adopt a weak approach making the derivatives act on test functions. It is actually the core of our proof to develop new duality arguments to study those additional terms and then establish some weak estimates.

Similarly as previously, we will define the notion of pseudo-trajectories associated to the “moderate-range” interaction part the same way as the ones associated to the BBGKY hierarchy in the hard-spheres case except that the new particle created will be added at a distance $R\varepsilon$ instead of ε . Moreover, the scattering not being instantaneous in the case of a potential, when a particle is added in a post-collisional configuration, the two particles perform a backward scattering during the scattering time denoted t_ε . However, in the case of long-range interactions, the notion of recollision needs to be defined since once a particle is created, it actually never stops interacting with its “progenitor” (the particle is added next to).

Definition 2.2.6. *We call a collision the creation of a particle in the process described in the definition of a pseudo-trajectory and a recollision the event where two particles are at a distance $R\varepsilon$ while it is not a creation of a particle.*

Then, as previously, we will conclude by coupling the pseudo-trajectories, proving that they remain close outside a set leading to situations involving recollisions which will be of vanishing measure.

2.2.3 The iteration strategy

Due to the presence of the long-range potential, we artificially truncate the potential by considering truncated marginals $\tilde{f}_{N,R}^{(s)}$ defined as follows

$$\tilde{f}_{N,R}^{(s)}(t, Z_s) := \int_{\mathbf{T}^{d(N-s)} \times \mathbf{R}^{d(N-s)}} f_N(t, Z_s, z_{s+1}, \dots, z_N) \prod_{\substack{1 \leq i \leq s \\ s+1 \leq j \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_i - x_j| > R\varepsilon\}} dZ_{(s+1,N)} \quad (2.2.3.1)$$

where $dZ_{(s+1,N)} := dz_{s+1} dz_{s+2} \dots dz_N$.

We consider Λ^R a smooth function such that

$$\Lambda^R(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } |x| > R, \\ 0 & \text{if } |x| < R - 1. \end{cases}$$

We will denote $\Phi^>(x) := \Phi(x)\Lambda^R(x)$ and $\Phi^<(x) := \Phi(x)(1 - \Lambda^R(x))$.

Applying Green’s formula in a similar way as in [10], we obtain the following BBGKY

hierarchy

$$\begin{aligned}
& \partial_t \tilde{f}_{N,R}^{(s)} + \sum_{i=1}^s v_i \cdot \nabla_{x_i} \tilde{f}_{N,R}^{(s)} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^s \nabla \Phi\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_{v_i} \tilde{f}_{N,R}^{(s)} \\
&= \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^s \nabla \Phi\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_{v_i} \tilde{f}_{N,R}^{(s)} \\
&+ \frac{(N-s)}{\varepsilon} \sum_{i=1}^s \int_{\mathbf{T}^{d(N-s)} \times \mathbf{R}^{d(N-s)}} \nabla \Phi\left(\frac{x_i - x_{s+1}}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_{v_i} f_N(t, Z_N) \prod_{\substack{1 \leq l \leq s \\ s+1 \leq k \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_l - x_k| > R\varepsilon\}} dZ_{(s+1,N)} \\
&\quad + \mathcal{C}_{s,s+1} \tilde{f}_{N,R}^{(s+1)} + \mathcal{C}_{s,s+1} \bar{f}_{N,R}^{(s+1)} \tag{2.2.3.2}
\end{aligned}$$

where for $g_{s+1} : \mathbf{T}^{d(s+1)} \times \mathbf{R}^{d(s+1)} \rightarrow \mathbf{R}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{s,s+1} g_{s+1}(Z_s) &= (N-s) \sum_{i=1}^s \int_{S_{R\varepsilon}(x_i) \times \mathbf{R}^d} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s \mathbf{1}_{|x_j - x_{s+1}| > R\varepsilon} \right) \nu^{s+1,i} \cdot (v_{s+1} - v_i) \\
&\quad g_{s+1}(Z_{s+1}) d\sigma_i(x_{s+1}) dv_{s+1} \tag{2.2.3.3}
\end{aligned}$$

with $\nu^{s+1,i} = \frac{x_{s+1} - x_i}{|x_{s+1} - x_i|}$, $d\sigma_i$ is the surface measure on $S_{R\varepsilon, x_i} := \{x \in \mathbf{T}^d, |x - x_i| = R\varepsilon\}$ and

$$\begin{aligned}
\bar{f}_{N,R}^{(s+1)}(t, Z_{s+1}) &:= \int_{\mathbf{T}^{d(N-(s+1))} \times \mathbf{R}^{d(N-(s+1))}} f_N(t, Z_N) \\
&\quad \left(\prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ s+2 \leq l \leq N}} \mathbf{1}_{|x_k - x_l| > R\varepsilon} \right) \left(1 - \prod_{j=s+2}^N \mathbf{1}_{|x_j - x_{s+1}| > R\varepsilon} \right) dZ_{(s+2,N)}. \tag{2.2.3.4}
\end{aligned}$$

We denote by $H_s^<$ the s-particle Hamiltonian defined as follows

$$H_s^<(Z_s) := \sum_{1 \leq i \leq s} \frac{1}{2} |v_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq s} \Phi^<\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right) \tag{2.2.3.5}$$

and we notice that $H_s^<$ depends on ε and R .

Remark 2.2.3. We notice that if the potential is supported in the ball of radius R , the equation becomes

$$\partial_t \tilde{f}_{N,R}^{(s)} + \sum_{i=1}^s v_i \cdot \nabla_{x_i} \tilde{f}_{N,R}^{(s)} - \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^s \nabla \Phi\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_{v_i} \tilde{f}_{N,R}^{(s)} = \mathcal{C}_{s,s+1} \tilde{f}_{N,R}^{(s+1)} + \mathcal{C}_{s,s+1} \bar{f}_{N,R}^{(s+1)} \tag{2.2.3.6}$$

which is perfectly consistent with the expression found in Section 9.4 of [10], the only difference being the expression of the second term of the right-hand side of (2.2.3.6). Let us investigate it. The situation described is the following: we have a collision between a particle $i \in \{1, \dots, s\}$ and particle $s+1$, both being at a distance $R\varepsilon$. Moreover, the

presence of $\left(1 - \prod_{j=s+2}^N \mathbf{1}_{|x_j - x_{s+1}| > R\varepsilon}\right)$ in $\bar{f}_{N,R}^{(s+1)}$ implies that there exists at least one $j_0 \in \{s+2, \dots, N\}$ such that particle $s+1$ and particle j_0 are at a distance lower or equal to $R\varepsilon$. This means that we are in presence of multiple simultaneous collisions. The strategy in [10] is to decompose this term and write it using clusters (clusters describe all kind of situations that can happen when multiple collisions are involved) and to force the appearance of truncated marginals of higher order. We can then obtain a closed system on which an argument of Cauchy-Kowalewskaya's type can be applied. There is no need to do that in our case because the control on the marginals is obtained directly from the maximum principle thanks to some a priori estimates (see Section 2.4).

Mild solutions of the BBGKY hierarchy are thus defined by Duhamel's formula

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{N,R}^{(s)}(t, Z_s) = & \mathcal{S}_s(t) \tilde{f}_{N,R}^{(s)}(0, Z_s) \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^s \int_0^t \mathcal{S}_s(t-t_1) \left[\nabla \Phi\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_{v_i} \tilde{f}_{N,R}^{(s)} \right] (t_1, Z_s) dt_1 \\
& + \frac{(N-s)}{\varepsilon} \sum_{i=1}^s \int_0^t \mathcal{S}_s(t-t_1) \left[\int_{\mathbf{T}^{d(N-s)} \times \mathbf{R}^{d(N-s)}} \nabla \Phi\left(\frac{x_i - x_{s+1}}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_{v_i} f_N \right. \\
& \quad \left. \prod_{\substack{1 \leq l \leq s \\ s+1 \leq k \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_l - x_k| > R\varepsilon\}} dZ_{(s+1,N)} \right] (t_1, Z_s) dt_1 \\
& + \int_0^t \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \tilde{f}_{N,R}^{(s+1)}(t_1, Z_s) dt_1 \\
& + \int_0^t \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \bar{f}_{N,R}^{(s+1)}(t_1, Z_s) dt_1
\end{aligned} \tag{2.2.3.7}$$

denoting by $\mathcal{S}_s$ the group associated to the solution operator

$$\mathcal{S}_s(t) : f \in \mathcal{C}^0(\mathbf{T}^{ds} \times \mathbf{R}^{ds}; \mathbf{R}) \mapsto f(\Psi_s(-t, \cdot)) \in \mathcal{C}^0(\mathbf{T}^{ds} \times \mathbf{R}^{ds}; \mathbf{R}) \tag{2.2.3.8}$$

where $\Psi_s(t)$ is the s -particle Hamiltonian flow associated to $H_s^<$. We notice that $\mathcal{S}_s$ depends on ε and R .

Before explaining the iteration strategy, let us point out four possible obstacles to the convergence:

- the very long-range interactions,
- clusters (or multiple simultaneous interactions),
- the presence of recollisions,
- a super-exponential collision process.

So the strategy will be to iterate Duhamel's formula on a term where none of those four situations happens. The other terms where at least one those four situations happen will give remainders and we will prove that they vanish in the limit.

Let us go back to (2.2.3.7). It seems then obvious that we will not iterate the Duhamel formula on the second and third terms of the right-hand side or the last one because they

respectively are associated to the long-range interaction part and clusters. Moreover, two of them involve ∇ -derivatives. So those terms will create remainders. The idea will be then to split the fourth term into two terms with one where no recollision happens. Finally on this recollision free term, we will control the number of collisions by again splitting it into two terms, one for which the number of collisions is super-exponential (which will give the last remainder) and another one. On this final term, none of the four obstacles being involved, we will iterate the Duhamel formula and so on.

Structure of the paper. The main theorem will actually be proved by steps: first proving that the difference between the BBGKY first marginal and the solution of the Boltzmann with cut-off hierarchy converges to 0 when passing to the limit on the truncation parameter in Section 2.8, second, passing to the same limit, proving the convergence of the solution of the Boltzmann with cut-off equation to the solution of the Boltzmann without cut-off equation in Section 2.9. The core of our study consists actually in proving that the remainders built in the elaboration of the expression of the first marginal in Section 2.3 vanish asymptotically. It will be done in Section 2.7. The main innovation in this paper is then the treatment of the remainders associated to the long-range part and will be investigated in Section 2.4. Moreover, due to the presence of those terms, the treatment of recollisions has to be slightly different as we will see it in Section 2.6. Other remainders are treated in Section 2.5.

2.3 Expression of the marginals

In this section, our aim is to build the main term and to get an expression for it and for the remainders. As we mentioned in the previous section, since we choose to iterate on the fourth term of the right-hand side of (2.2.3.7) where the event of very long-range interactions and clusters are excluded, the only thing left to do is to get rid technically of the recollisions and control the number of collisions. For the first challenge, the idea is to remove a geometrical ensemble outside of which no recollision occurs. Regarding the second one, the key will be to apply the pruning process developed in [7]. Though those techniques are interlocked in the iteration process, we will first present them separately for more clarity.

2.3.1 Elimination of recollisions in the iteration strategy

It can be proved that outside a geometrical ensemble that we will call $geom(s+k)$, $s+k$ particles will not undergo a recollision (see Section 2.6.1). Though we will construct properly this set by an inductive method later, let us here mention the properties that will be needed in the iteration. We fix the parameters $2^{K+1}R\varepsilon \ll \varepsilon_0 \ll \min(\delta E, 1)$ with K some large integer, $\delta > 0$, $E > 0$ parameters to be fixed later. Let us introduce the notion of good configuration.

Definition 2.3.1. *The set of good configuration $\mathcal{G}_k(\varepsilon_0)$ is defined as follows:*

$$\mathcal{G}_k(\varepsilon_0) := \{Z_k \in \mathbf{T}^{dk} \times \mathbf{R}^{dk} | \forall u \in [0, t] \forall i \neq j \ d(x_i - uv_i, x_j - uv_j) \geq \varepsilon_0\}. \quad (2.3.1.1)$$

The set $geom(s+k)$, a subset of $\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d$, satisfies the following property. We consider $s+k$ particles such that all their velocities are bounded by E . Since the construction of $geom(s+k)$ is iterative, we assume that before the creation of the $(s+k)^{th}$ -particle, the $s+k-1$ particles are in a good configuration. Then when we add the $(s+k)^{th}$ -particle.

After a delay δ , outside the ensemble $geom(s+k)$, the $s+k$ particles are in a good configuration. A fortiori, they do not undergo recollisions and the transport Ψ_{s+k} coincides with the free flow.

This property implies that in the iteration strategy, we will need to get rid of large velocities and to separate the collisions by a duration of at least δ to make sure that at each step the particles are in a good configuration. To deal with the large velocities, we use the classical method which consists in cutting off the energy of the system. We consider χ^{E^2} a smooth function such that

$$\chi^{E^2}(y) = \begin{cases} 1 & \text{if } |y| \leq E^2 \\ 0 & \text{if } |y| \geq E^2 + 1. \end{cases} \quad (2.3.1.2)$$

By analogy with the indicator function, we will then abusively denote $\chi^{E^2}(H_k(Z_k))$ by $\chi_{\{H_k(Z_k) \leq E^2\}}$ for all integer k .

We point out that because of the presence of new terms due to the long-range part of the potential, the strategy of iteration will be slightly different from the one developed in the previous papers. Indeed, the truncations mentioned above must be done at each iteration of the Duhamel formula, and as we will see in Section 2.4, we need to introduce an additional truncation on small relative velocities in order to deal more easily with the new terms. Then we consider χ^η a smooth function such that

$$\chi^\eta(y) = \begin{cases} 0 & \text{if } |y| \leq \eta/2 \\ 1 & \text{if } |y| \geq \eta \end{cases} \quad (2.3.1.3)$$

and we define $\chi_{\{\forall i \in \{1, \dots, k\}, |v_i - v_{k+1}| \geq \eta\}} := \prod_{i=1}^k \chi^\eta(v_i - v_{k+1})$.

Finally, we define $\chi_{geom(k)}$ as follows

$$\chi_{geom(k)} := \mathbf{1}_{geom(k)} * \alpha_\varepsilon \quad (2.3.1.4)$$

where α_ε is an approximation of the identity on $\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d$.

Let us make one iteration. We start from (2.2.3.7) and we want to iterate on the fourth term of the right-hand side but first we need to prepare it by separating the collisions by a duration of δ , getting rid of large velocities, remove the recollisions and the small relative

velocities. So we obtain the following expression:

$$\begin{aligned}
& \int_0^t \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \tilde{f}_{N,R}^{(s+1)}(t_1, Z_s) dt_1 \\
&= \int_{t-\delta}^t \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \tilde{f}_{N,R}^{(s+1)}(t_1, Z_s) dt_1 \\
&+ \int_0^{t-\delta} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} (1 - \chi_{\{H_{s+1}(Z_{s+1}) \leq E^2\}}) \tilde{f}_{N,R}^{(s+1)}(t_1, Z_s) dt_1 \\
&+ \int_0^{t-\delta} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \chi_{\{H_{s+1}(Z_{s+1}) \leq E^2\}} \chi_{geom(s+1)} \tilde{f}_{N,R}^{(s+1)}(t_1, Z_s) dt_1 \\
&+ \int_0^{t-\delta} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \chi_{\{H_{s+1}(Z_{s+1}) \leq E^2\}} (1 - \chi_{geom(s+1)}) (1 - \chi_{\{\forall i \in \{1, \dots, s\}, |v_i - v_{s+1}| \geq \eta\}}) \\
&\quad \tilde{f}_{N,R}^{(s+1)}(t_1, Z_s) dt_1 \\
&+ \int_0^{t-\delta} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \chi_{\{H_{s+1}(Z_{s+1}) \leq E^2\}} (1 - \chi_{geom(s+1)}) \chi_{\{\forall i \in \{1, \dots, s\}, |v_i - v_{s+1}| \geq \eta\}} \\
&\quad \tilde{f}_{N,R}^{(s+1)}(t_1, Z_s) dt_1.
\end{aligned} \tag{2.3.1.5}$$

The fifth term is now ready for the next step. We replace $\tilde{f}_{N,R}^{(s+1)}(t_1, Z_s)$ in (2.3.1.5) by its expression given by Duhamel's formula. Then we identify the new term on which we want to iterate which does not involve very-long range interactions or clusters, prepare it the same way and so on.

From now on, for more concision, let us denote $\chi_{\{H_k(Z_k) \leq E^2\}}$ just by χ_{H_k} and $\chi_{\{\forall i \in \{1, \dots, k\}, |v_i - v_{k+1}| \geq \eta\}}$ by $\chi_{\eta_{k+1}}$. We define the following operators:

$$\begin{aligned}
Q_{s,s}(t) &:= \mathcal{S}_s(t) \\
Q_{s,s+n}(t) &:= \int_0^{t-\delta} \int_0^{t_1-\delta} \dots \int_0^{t_{n-1}-\delta} \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \chi_{H_{s+1}} (1 - \chi_{geom(s+1)}) \chi_{\eta_{s+1}} \dots \\
&\dots \mathcal{S}_{s+n-1}(t_{n-1}-t_n) \mathcal{C}_{s+n-1,s+n} \chi_{H_{s+n}} (1 - \chi_{geom(s+n)}) \chi_{\eta_{s+n}} \mathcal{S}_{s+n}(t_n) dt_n \dots dt_1.
\end{aligned} \tag{2.3.1.6}$$

We iterate m times as explained above. Doing the change of variables, for $i = 1, \dots, n$, $t'_i = t_i - t_{n+1}$, $t'_{n+1} = t_{n+1}$ along with a use of Fubini's theorem, we obtain the following expansion:

$$\tilde{f}_{N,R}^{(s)}(t, Z_s) = \sum_{n=0}^m Q_{s,s+n}(t) \tilde{f}_{N,R}^{(s)}(0, Z_s) + r_{s,m+1}(0, t, Z_s) \tag{2.3.1.7}$$

where

$$\begin{aligned}
r_{s,m+1}(0, t, Z_s) &:= r_{s,m+1}^{Pot,a}(0, t, Z_s) + r_{s,m+1}^{Pot,b}(0, t, Z_s) + r_{s,m+1}^{Clu}(0, t, Z_s) + r_{s,m+1}^{Tim}(0, t, Z_s) \\
&+ r_{s,m+1}^{Ener}(0, t, Z_s) + r_{s,m+1}^{Recoll}(0, t, Z_s) + r_{s,m+1}^{Relat.Vel.}(0, t, Z_s) + Q_{s,s+m+1}(t) \tilde{f}_{N,R}^{(s+m+1)}(t_{m+1}, Z_s)
\end{aligned} \tag{2.3.1.8}$$

with the following respective definitions:

- for the remainders associated to the very long-range interaction part

$$r_{s,m+1}^{Pot,a}(0, t, Z_s) := \sum_{n=0}^m \int_0^{t-n\delta} Q_{s,s+n}(t-t_{n+1}) \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{s+n} \left[\nabla \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla_{v_i} \tilde{f}_{N,R}^{(s+n)} \right] (t_{n+1}, Z_s) dt_{n+1} \quad (2.3.1.9)$$

and

$$r_{s,m+1}^{Pot,b}(0, t, Z_s) := \sum_{n=0}^m \int_0^{t-n\delta} Q_{s,s+n}(t-t_{n+1}) \frac{(N-(s+n))}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{s+n} \left[\int_{\mathbf{T}^{d(N-(s+n))} \times \mathbf{R}^{d(N-(s+n))}} \nabla \Phi \left(\frac{x_i - x_{s+n+1}}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla_{v_i} f_N \prod_{\substack{1 \leq l \leq s+n \\ s+n+1 \leq k \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_l - x_k| > R\varepsilon\}} dZ_{(s+n+1,N)} \right] (t_{n+1}, Z_s) dt_{n+1}, \quad (2.3.1.10)$$

- for the remainders associated to clusters

$$r_{s,m+1}^{Clu}(0, t, Z_s) := \sum_{n=0}^m \int_0^{t-n\delta} Q_{s,s+n}(t-t_{n+1}) \mathcal{C}_{s+n,s+n+1} \bar{f}_{N,R}^{(s+n+1)}(t_{n+1}, Z_s) dt_{n+1}. \quad (2.3.1.11)$$

Indeed, the domain of integration for those terms regarding the times is $\{0 \leq t_{n+1} \leq t_n \leq t_{n-1} - \delta \leq t_{n-2} - 2\delta \leq \dots \leq t_1 - (n-1)\delta \leq t - n\delta\}$.

We introduce the following second operator

$$Q_{s,s+n}^\delta(t) := \int_0^{t-\delta} \int_0^{t_1-\delta} \dots \int_0^{t_{n-2}-\delta} \int_0^\delta \mathcal{S}_s(t-t_1) \mathcal{C}_{s,s+1} \chi_{H_{s+1}} (1 - \chi_{geom(s+1)}) \chi_{\eta_{s+1}} \dots \dots \mathcal{S}_{s+n-1}(t_{n-1}-t_n) \mathcal{C}_{s+n-1,s+n} \chi_{H_{s+n}} (1 - \chi_{geom(s+n)}) \chi_{\eta_{s+n}} \mathcal{S}_{s+n}(t_n) dt_n \dots dt_1. \quad (2.3.1.12)$$

The remainders where the two last collisions are separated in time by less than δ is defined as follows

$$r_{s,m+1}^{Tim}(0, t, Z_s) := \sum_{n=0}^m \int_0^{t-n\delta} Q_{s,s+n}^\delta(t-t_{n+1}) \mathcal{C}_{s+n,s+n+1} \tilde{f}_{N,R}^{(s+n+1)}(t_{n+1}, Z_s) dt_{n+1} \quad (2.3.1.13)$$

which is consistent with the domain of integration regarding the times of this term $\{0 \leq t_n - \delta \leq t_{n+1} \leq t_n \text{ and } 0 \leq t_n \leq t_{n-1} - \delta \leq t_{n-2} - 2\delta \leq \dots \leq t_1 - (n-1)\delta \leq t - n\delta\}$.

Finally, we define

- the remainders corresponding to situations where the energy of the system is not bounded

$$r_{s,m+1}^{Ener}(0, t, Z_s) := \sum_{n=0}^m \int_0^{t-(n+1)\delta} Q_{s,s+n}(t-t_{n+1}) \mathcal{C}_{s+n,s+n+1} (1 - \chi_{H_{s+n+1}}) \tilde{f}_{N,R}^{(s+n+1)}(t_{n+1}, Z_s) dt_{n+1}, \quad (2.3.1.14)$$

- the remainders associated to the possible recollisions

$$r_{s,m+1}^{Recoll}(0, t, Z_s) := \sum_{n=0}^m \int_0^{t-(n+1)\delta} Q_{s,s+n}(t-t_{n+1}) \mathcal{C}_{s+n,s+n+1} \chi_{H_{s+n+1}} \chi_{geom(s+n+1)} \tilde{f}_{N,R}^{(s+n+1)}(t_{n+1}, Z_s) dt_{n+1}, \quad (2.3.1.15)$$

- the remainders where the lower bound for all the relative velocities no longer holds

$$r_{s,m+1}^{Relat.Vel.}(0, t, Z_s) := \sum_{n=0}^m \int_0^{t-(n+1)\delta} Q_{s,s+n}(t-t_{n+1}) \mathcal{C}_{s+n,s+n+1} \chi_{H_{s+n+1}} (1 - \chi_{geom(s+n+1)}) (1 - \chi_{\eta_{s+n+1}}) \tilde{f}_{N,R}^{(s+n+1)}(t_{n+1}, Z_s) dt_{n+1}, \quad (2.3.1.16)$$

the domain of integration regarding the times of those terms being $\{0 \leq t_{n+1} \leq t_n - \delta \leq t_{n-1} - 2\delta \leq \dots \leq t_1 - n\delta \leq t - (n+1)\delta\}$.

2.3.2 Control of the growth of collision trees in the iteration strategy

As mentioned previously, one of the key points to get the convergence is to work with collision trees of “controlled size”. We recall that, as mentioned in Definition 2.2.5, a collision tree “of controlled size” is a collision tree such that it has less than $n_k = 2^k$ branch points on the interval $[t - k\tau, t - (k-1)\tau]$.

For the sake of completeness, we will recall the pruning process in the hard-spheres case. As seen in Section 2.2.2, iterating the Duhamel formula $N - s$ times we get

$$f_N^{(s)}(t) = \sum_{n=0}^{N-s} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{T}_s(t-t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1} \mathcal{T}_{s+1}(t_1-t_2) \tilde{\mathcal{C}}_{s+1,s+2} \dots \mathcal{T}_{s+n}(t_n) f_N^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1. \quad (2.3.2.1)$$

As our main result concerns the first marginal, we start by using this formula with $s = 1$ but this time on the time interval $[t - \tau, t]$ instead of $[0, t]$ and by iterating $n_1 - 1$ times instead of $N - s$:

$$f_N^{(1)}(t) = \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \bar{Q}_{1,1+j_1}(\tau) f_N^{(1+j_1)}(t - \tau) + R_{1,n_1}(t - \tau, t) \quad (2.3.2.2)$$

where the term R_{1,n_1} corresponds to pseudo-trajectories with at least n_1 collisions

$$R_{1,n_1}(t', t) := \sum_{p=n_1}^{N-1} \bar{Q}_{1,1+p}(t-t') f_N^{(1+p)}(t') \quad (2.3.2.3)$$

and $\bar{Q}$ is defined in the hard-spheres case in a quite similar way as Q in our case. More generally, $R_{k,n}$ stands for

$$R_{k,n}(t', t) := \sum_{p=n}^{N-k} \bar{Q}_{k,k+p}(t-t') f_N^{(k+p)}(t') \quad (2.3.2.4)$$

and this term describes trajectories originating at k points at time t and involving at least n collisions during the time span $t-t'$.

The idea in the pruning process is that n_k being chosen equal to 2^k the number of collisions involved in the term R_{l,n_k} is super-exponential. Such a behavior should be atypical and it can be proved that those terms vanish when passing to the limit.

Let us go back to our pruning process. We can iterate the Duhamel formula in the first term of the right-hand side of (2.3.2.2) this time on the interval $[t-2\tau, t-\tau]$ and truncating the contributions with more than n_2 collisions. We get

$$\begin{aligned} f_N^{(1)}(t) &= \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \sum_{j_2=0}^{n_2-1} \bar{Q}_{1,1+j_1}(\tau) \bar{Q}_{1+j_1,1+j_1+j_2}(\tau) f_N^{(1+j_1+j_2)}(t-2\tau) \\ &\quad + R_{1,n_1}(t-\tau, t) + \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \bar{Q}_{1,1+j_1}(\tau) R_{1+j_1,n_2}(t-2\tau, t-\tau). \end{aligned} \quad (2.3.2.5)$$

Iterating this procedure K times and truncating the trajectories with at least n_k collisions during the time interval $[t-k\tau, t-(k-1)\tau]$, we finally get

$$f_N^{(1)}(t) = f_N^{(1,K)}(t) + R_N^K(t) \quad (2.3.2.6)$$

where denoting $J_0 := 1$, $J_k := 1 + j_1 + \dots + j_k$,

$$f_N^{(1,K)}(t) := \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_K=0}^{n_K-1} \bar{Q}_{1,J_1}(\tau) \bar{Q}_{J_1,J_2}(\tau) \dots \bar{Q}_{J_{K-1},J_K}(\tau) f_N^{0(J_K)} \quad (2.3.2.7)$$

and

$$R_N^K(t) := \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} \bar{Q}_{1,J_1}(\tau) \dots \bar{Q}_{J_{k-2},J_{k-1}}(\tau) R_{J_{k-1},n_k}(t-k\tau, t-(k-1)\tau). \quad (2.3.2.8)$$

2.3.3 Final expression of the first marginal

Let us go back to our problem. The idea will be to combine these two methods in order to construct the main term and the remainders. Let us explain how specifically.

- First, we start on the time interval $[t-\tau, t]$. We apply Duhamel's formula for the first marginal and get rid of the recollisions by iterating the process explain in Section 2.3.1. In order to apply the pruning process, we iterate this process $n_1 - 1$ times. Then we get

$$\tilde{f}_{N,R}^{(1)}(t) = \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \bar{Q}_{1,1+j_1}(\tau) \tilde{f}_{N,R}^{(1+j_1)}(t-\tau) + r_{1,n_1}(t-\tau, t) \quad (2.3.3.1)$$

with $r_{1,n_1}(t-\tau, t)$ defined in Section 2.3.1.

- Then we work on the time interval $[t - 2\tau, t - \tau]$ with the marginal $\tilde{f}_{N,R}^{(1+j_1)}(t - \tau)$. As previously, we apply Duhamel's formula and get rid of the recollisions by iterating $n_2 - 1$ times the process of Section 2.3.1. We get

$$\tilde{f}_{N,R}^{(1+j_1)}(t - \tau) = \sum_{j_2=0}^{n_2-1} Q_{1+j_1, 1+j_1+j_2}(\tau) \tilde{f}_{N,R}^{(1+j_1+j_2)}(t - 2\tau) + r_{1+j_1, n_2}(t - 2\tau, t - \tau). \quad (2.3.3.2)$$

- Finally, we replace $\tilde{f}_{N,R}^{(1+j_1)}(t - \tau)$ by the above expression in (2.3.3.1) and we get

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{N,R}^{(1)}(t) &= \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \sum_{j_2=0}^{n_2-1} Q_{1, 1+j_1}(\tau) Q_{1+j_1, 1+j_1+j_2}(\tau) \tilde{f}_{N,R}^{(1+j_1+j_2)}(t - 2\tau) \\ &\quad + \sum_{j_1=0}^{n_1-1} Q_{1, 1+j_1}(\tau) r_{1+j_1, n_2}(t - 2\tau, t - \tau) + r_{1, n_1}(t - \tau, t). \end{aligned} \quad (2.3.3.3)$$

- We iterate this procedure K times and we finally obtain the following expression

$$\tilde{f}_{N,R}^{(1)}(t) = \tilde{f}_{N,R}^{(1,K)}(t) + r_N^K(t) \quad (2.3.3.4)$$

where

$$\tilde{f}_{N,R}^{(1,K)}(t) := \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_K=0}^{n_K-1} Q_{1, J_1}(\tau) Q_{J_1, J_2}(\tau) \dots Q_{J_{K-1}, J_K}(\tau) \tilde{f}_{N,R}^{0(J_K)} \quad (2.3.3.5)$$

and

$$r_N^K(t) := \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} Q_{1, J_1}(\tau) \dots Q_{J_{k-2}, J_{k-1}}(\tau) r_{J_{k-1}, n_k}(t - k\tau, t - (k-1)\tau). \quad (2.3.3.6)$$

2.4 Terms associated to the long-range part of the potential

In this section, our aim will be to deal with the new types of terms which appear in the case of a long-range potential. Our context here is particular since we consider potentials that satisfy the following assumptions:

Assumption 2.4.1. $\nabla\Phi$ is a Lipschitz function with fast decay such that

$$\log(\log|\log|\nabla\Phi(x)||) \geq \lambda(1 + |x|^{2(d-1)}) \quad (2.4.0.1)$$

with λ a constant to be chosen later.

Moreover we have

$$x \left(\Phi^{-1} \left(\frac{x}{4} \right) \right)^2 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty \quad (2.4.0.2)$$

and

$$|\Phi' \circ \Phi^{-1}| \geq Id. \quad (2.4.0.3)$$

Remark 2.4.1. *The main restriction in our context is the decay of $\nabla\Phi$. The last hypothesis is technical and should not be difficult to obtain for a class of functions satisfying the imposed decay.*

Let us recall the expression of $r^{Pot,a}$ and $r^{Pot,b}$:

$$r_{s,m+1}^{Pot,a}(0, t, Z_s) := \sum_{n=0}^m \int_0^{t-n\delta} Q_{s,s+n}(t - t_{n+1}) \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{s+n} \left[\nabla\Phi^>\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_{v_i} \tilde{f}_{N,R}^{(s+n)} \right] (t_{n+1}, Z_s) dt_{n+1} \quad (2.4.0.4)$$

and

$$r_{s,m+1}^{Pot,b}(0, t, Z_s) := \sum_{n=0}^m \int_0^{t-n\delta} Q_{s,s+n}(t - t_{n+1}) \frac{(N - (s + n))}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{s+n} \left[\int_{\mathbf{T}^{d(N-(s+n))} \times \mathbf{R}^{d(N-(s+n))}} \nabla\Phi\left(\frac{x_i - x_{s+n+1}}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_{v_i} f_N \prod_{\substack{1 \leq l \leq s+n \\ s+n+1 \leq k \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_l - x_k| > R\varepsilon\}} dZ_{(s+n+1,N)} \right] (t_{n+1}, Z_s) dt_{n+1}, \quad (2.4.0.5)$$

On the previous papers, the classical strategy to deal with the remainders was to use continuity estimates on the collision operator together with some a priori estimates on the marginals.

Let us define $X_{\varepsilon,k,\alpha}$ the space of continuous functions f_k defined on $\mathbf{T}^{dk} \times \mathbf{R}^{dk}$ such that

$$\|f_k\|_{\varepsilon,k,\alpha} := \sup_{Z_k \in \mathbf{T}^{dk} \times \mathbf{R}^{dk}} |f_k(Z_k) \exp(\alpha H_k^<(Z_k))| < \infty \quad (2.4.0.6)$$

where we recall

$$H_k^<(Z_k) := \sum_{1 \leq i \leq k} \frac{1}{2} |v_i|^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \Phi^<\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right). \quad (2.4.0.7)$$

In our context we can also obtain some a priori estimates on the truncated marginals applying the maximum principle for the Liouville equation.

Proposition 2.4.1. *For any fixed N , considering the initial data (2.2.1.1) for any $s \geq 1$, we have the following uniform bound (with respect to time)*

$$\sup_{t \geq 0} \|\tilde{f}_{N,R}^{(s)}(t)\|_{\varepsilon,s,\beta} \leq \|\rho^0\|_{\infty} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{ds/2} (1 - \varepsilon \kappa_d R^d)^{-s} \exp(\beta s^2 \|\Phi^>\|_{\infty}). \quad (2.4.0.8)$$

The proof of Proposition 2.4.1 is quite classical and can be found in Appendix 2.10.1. The problematic is then the following: thanks to our a priori estimates, we have a control on the marginals but not on the derivatives of the marginals. So the classical strategy can not work. The idea is to adopt a weak approach in order to make the derivatives act on a test function $\varphi : \mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$.

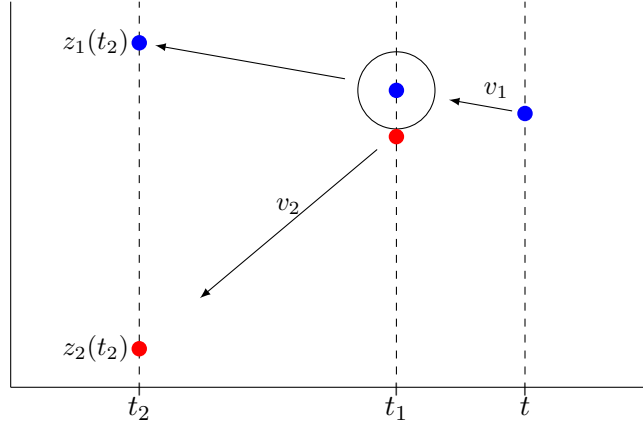


FIGURE 2. Representation of a pseudo-trajectory undergoing one collision in the pre-collisional case. By construction, at time t_1 , we have $z_1(t_1) = (x_1 - v_1(t - t_1), v_1)$ and $z_2(t_1) = (x_1 - v_1(t - t_1) + \varepsilon v_2, v_2)$.

The advantage of the iteration method adopted is that, at this point, we know that there is no recollision in the pseudo-trajectories involved. Then, we can easily pass from the state of particles at t_m to the state of particle 1 at t via changes of variables defined as follows:

$$\begin{aligned} \rho_m : \mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d \times [0, t - \delta] \times \mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d \times \cdots \times [0, t_{m-1} - \delta] \times \mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d &\rightarrow \mathbf{T}^{(m+1)d} \times \mathbf{R}^{(m+1)d} \\ (z, t_1, \nu_2, v_2, \dots, t_m, \nu_{m+1}, v_{m+1}) &\mapsto \tilde{Z}_{m+1} = Z_{m+1}(t_m) \end{aligned} \quad (2.4.0.9)$$

where $Z_{m+1}(t_m)$ is a pseudo-trajectory associated to a collision tree at time t_m . Then, the state of the particle 1 at time t can be expressed in function of $(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{x}_{m+1}, \tilde{v}_{m+1})$, the positions at time t_m .

Remark 2.4.2. *We point out that there is as much changes of variables as pseudo-trajectories and so as much as collision trees.*

2.4.1 Lipschitz control of the pseudo-trajectory

In this section, we establish that the functions which allow to pass from the state of particle 1 at time t to states of particles at other times are Lipschitz. In order to do so, we will have to study the microscopic interaction.

Let us start with the following lemma about the microscopic time of interaction that we denote τ^* .

Proposition 2.4.2. *When the relative velocity has a lower bound equal to η , we have the following bound:*

$$\tau^* \leq C \frac{R^2}{\eta} \quad (2.4.1.1)$$

with $C \geq 0$ a constant.

Proof. We consider two particles z_1 and z_2 which are precollisional at time t_- and study the following rescaled problem

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = w_1, & \frac{dy_2}{d\tau} = w_2 \\ \frac{dw_1}{d\tau} = -\nabla \Phi^<(y_1 - y_2) = -\frac{dw_2}{d\tau}. \end{cases} \quad (2.4.1.2)$$

where

$$\tau := \frac{(t - t_-)}{\varepsilon}, \quad y(\tau) := \frac{x(\tau)}{\varepsilon}, \quad w(\tau) := v(\tau). \quad (2.4.1.3)$$

We recall here the expression of the microscopic time of interaction τ^* obtain after a careful study of the dynamics (see [10] for more details)

$$\tau^* := 2 \int_{\rho^*}^R (\mathcal{E}_0 - \Psi(\rho, \mathcal{E}_0, \mathcal{I}_0))^{-1/2} d\rho$$

where $\mathcal{E}_0 := |\Delta w_0|^2$, $\mathcal{I}_0 := \frac{|\Delta y_0 \wedge \Delta w_0|}{R \Delta w_0} =: \sin \alpha$ and $\Psi := \frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2 R^2}{\rho^3} + 4\Phi^<(\rho)$ and where (ρ, w) are the polar coordinates of the trajectory and $\rho^* := \max\{\rho_0 \in (0, R) \mid \Psi(\rho, \mathcal{E}_0, \mathcal{I}_0) = \mathcal{E}_0\}$ is the minimal radius. Δy_0 and Δw_0 stand respectfully for the initial difference of rescaled positions and the initial difference of rescaled velocities.

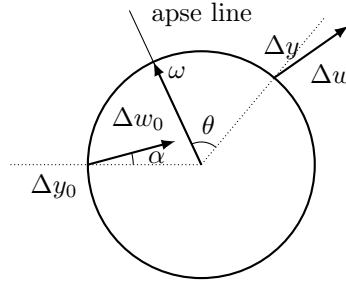


FIGURE 3. Representation of the reduced dynamics.

For the rest of the proof, we will drop the exponent “<” in $\nabla\Phi^<$ for more clarity. After the change of variables $y = \mathcal{E}_0 - \Psi(\rho, \mathcal{E}_0, \mathcal{I}_0)$, using

$$\frac{d}{d\rho}(\mathcal{E}_0 - \Psi(\rho, \mathcal{E}_0, \mathcal{I}_0)) = \frac{2\mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2 R^2}{\rho^3} - 4\Phi'(\rho) \geq \frac{2\mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2 R^2}{\rho^3} \geq \frac{2\mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2}{R}$$

we get the following bound

$$\tau^* \leq \frac{R}{2\mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2} 2 \int_0^{\mathcal{E}_0(1-\mathcal{I}_0^2)} \frac{1}{\sqrt{y}} dy \leq \frac{R}{\mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2} 2\sqrt{\mathcal{E}_0(1-\mathcal{I}_0^2)} = \frac{2R}{\sqrt{\mathcal{E}_0}} \frac{\sqrt{1-\mathcal{I}_0^2}}{\mathcal{I}_0^2}.$$

Moreover, noticing that $\Phi(\rho^*) \leq \frac{\mathcal{E}_0}{4}$, then $\rho^* \geq \Phi^{-1}\left(\frac{\mathcal{E}_0}{4}\right)$ and we define $i_0 \in (0, 1)$ by $i_0 := \frac{1}{2\sqrt{2}R} \Phi^{-1}\left(\frac{\mathcal{E}_0}{4}\right)$. Then we distinguish two cases which are respectively associated to the two different following situations:

- the particle barely get into the sphere during the collision, arriving tangentially (or almost),
- the collision is head-on, which implies that the particle will deeply get into the sphere (but not for long).

Let us deal with these two situations.

- (1) We start with the first one. Then we assume that $\mathcal{I}_0 \geq i_0$. Therefore, we have

$$\tau^* \leq \frac{2R}{\sqrt{\mathcal{E}_0} i_0^2} \leq \frac{16R^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0} (\Phi^{-1}\left(\frac{\mathcal{E}_0}{4}\right))^2}.$$

By the assumption on the potential, we have $\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0} (\Phi^{-1}(\frac{\mathcal{E}_0}{4}))^2} \xrightarrow{\mathcal{E}_0 \rightarrow \infty} 0$ and $\Phi^{-1}(\frac{\mathcal{E}_0}{4}) \xrightarrow{\mathcal{E}_0 \rightarrow 0} \infty$.

Thus, there exists two constant $A_1, A_2 > 0$ such that for all $\mathcal{E}_0 > A_2$

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0} (\Phi^{-1}(\frac{\mathcal{E}_0}{4}))^2} < 1 < \frac{1}{\eta}.$$

for all $\mathcal{E}_0 < A_1$,

$$\frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0} (\Phi^{-1}(\frac{\mathcal{E}_0}{4}))^2} < \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0}} < \frac{1}{\eta}$$

for $\eta^2 < \mathcal{E}_0$. Moreover, $\mathcal{E}_0 \mapsto \frac{1}{\sqrt{\mathcal{E}_0} (\Phi^{-1}(\frac{\mathcal{E}_0}{4}))^2}$ is a continuous function on $[A_1, A_2]$ and is bounded and for $\mathcal{E}_0 \in [A_1, A_2]$. Thus, for all $\mathcal{E}_0$ such that $\eta^2 < \mathcal{E}_0$,

$$\tau^* \leq C \frac{R^2}{\eta} \quad (2.4.1.4)$$

where C is a constant which does not depend on R and η .

- (2) Let us now assume $\mathcal{I}_0 \leq i_0$ to deal with the second situation. We define $\gamma := \Phi^{-1}(\frac{\mathcal{E}_0}{8})$ and we split τ^* into two integrals

$$\tau^* = \tau_1^* + \tau_2^*$$

with $\tau_1^* := 2 \int_{\rho^*}^{\gamma} (\mathcal{E}_0 - \Psi(\rho, \mathcal{E}_0, \mathcal{I}_0))^{-1/2} d\rho$. Indeed, we have the following bound

$$\frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2}{4(\rho^*)^2} R^2 \leq \frac{\mathcal{E}_0 i_0^2}{4(\rho^*)^2} R^2 \leq \frac{\mathcal{E}_0 i_0^2}{4 \times 8 i_0^2} = \frac{\mathcal{E}_0}{32}.$$

Thus, we get that

$$\frac{\mathcal{E}_0}{4} - \frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2}{4(\rho^*)^2} R^2 \geq 7 \frac{\mathcal{E}_0}{32} \geq \frac{\mathcal{E}_0}{8}$$

and then

$$\rho^* = \Phi^{-1} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{4} - \frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2}{4(\rho^*)^2} R^2 \right) \leq \Phi^{-1} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{8} \right) = \gamma.$$

We put $M(\Phi) := \inf_{\rho^* \leq \rho \leq \gamma} |\Phi'(\rho)| > 0$. We notice that because of assumption (2.4.0.3) on the potential, we have on $[\rho^*, \gamma]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} (\mathcal{E}_0 - \Psi) &= \frac{2\mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2 R^2}{\rho^3} - 4\Phi'(\rho) \geq 4M(\Phi) \\ &\geq 4\Phi' \left(\Phi^{-1} \left(\frac{\mathcal{E}_0}{8} \right) \right) \\ &\geq \frac{\mathcal{E}_0}{2}. \end{aligned}$$

Finally, we have

$$\begin{aligned} \tau_1^* &\leq \frac{1}{\mathcal{E}_0/2} 2 \int_0^{\mathcal{E}_0/2 - \mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2 R^2 / \gamma^2} \frac{dy}{\sqrt{y}} \\ &= \frac{\sqrt{\mathcal{E}_0/2 - \mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2 R^2 / \gamma^2}}{\mathcal{E}_0/2} \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mathcal{E}_0}} \leq C \frac{R^2}{\eta}. \end{aligned}$$

Moreover, directly bounding the integrand in τ_2^* , we get

$$\tau_2^* \leq \frac{2R}{\sqrt{\mathcal{E}_0/2 - \mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2 R^2 / \gamma^2}}.$$

Using the fact that $\frac{\mathcal{E}_0 \mathcal{I}_0^2 R^2}{\gamma^2} \leq \frac{\mathcal{E}_0 i_0^2 R^2}{\gamma^2} \leq \frac{\mathcal{E}_0}{8}$, we get

$$\tau_2^* \leq \frac{2R}{\sqrt{\mathcal{E}_0/2 - \mathcal{E}_0/8}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3\mathcal{E}_0}} R \leq C \frac{R^2}{\eta}$$

which completes the proof. □

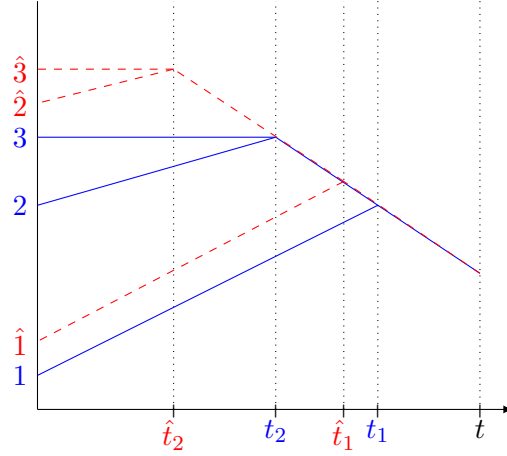


FIGURE 4. Representation of two collision trees with different times of collisions.

Let us go back to our study. In the following, we first deal with the particular case corresponding to observing two different trees with identical times of collisions. We will explain later how to deduce from it the general case with different times of collision for each tree as represented in Figure 4.

Before stating our result, let us prove the following lemma dealing with the case of two particles interacting.

Lemma 2.4.1. *We denote by (x_1^0, v_1^0) , (x_2^0, v_2^0) and $(\hat{x}_1^0, \hat{v}_1^0)$, $(\hat{x}_2^0, \hat{v}_2^0)$ two different initial positions associated to particles 1 and 2, and by (x_1, v_1) , (x_2, v_2) and $(\hat{x}_1, \hat{v}_1)$, $(\hat{x}_2, \hat{v}_2)$ their respective positions after scattering. Then, we have the following inequality:*

$$|x_1 - \hat{x}_1| + |x_2 - \hat{x}_2| + |v_1 - \hat{v}_1| + |v_2 - \hat{v}_2| \leq \frac{e^{C'R^2/\eta}}{\varepsilon} (|x_1^0 - \hat{x}_1^0| + |x_2^0 - \hat{x}_2^0| + |v_1^0 - \hat{v}_1^0| + |v_2^0 - \hat{v}_2^0|) \quad (2.4.1.5)$$

with C' a constant which depends on $\nabla \Phi$.

Proof. Let us go back to the study of the following dynamics

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{d\tau} = w_1, & \frac{dy_2}{d\tau} = w_2 \\ \frac{dw_1}{d\tau} = -\nabla\Phi^<(y_1 - y_2) = -\frac{dw_2}{d\tau}. \end{cases} \quad (2.4.1.6)$$

By hypothesis on $\nabla\Phi^<$, $\hat{\theta} : \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ -\nabla\Phi^<(y_1 - y_2) \\ \nabla\Phi^<(y_1 - y_2) \end{pmatrix}$ is C' -Lipschitz where $C' =$

$\max(1, C_{\nabla\Phi})$ with $C_{\nabla\Phi}$ the Lipschitz constant of $\nabla\Phi$. So by the Cauchy-Lipschitz theorem, given $U := (y_1, y_2, w_1, w_2)$ and $\hat{U} := (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{w}_1, \hat{w}_2)$ with respective initial data $U^0 := (y_1^0, y_2^0, w_1^0, w_2^0)$ and $\hat{U}^0 := (\hat{y}_1^0, \hat{y}_2^0, \hat{w}_1^0, \hat{w}_2^0)$, then

$$|U(\tau) - \hat{U}(\tau)| \leq e^{C'\tau} |U^0 - \hat{U}^0|$$

and so

$$|y_1 - \hat{y}_1| + |y_2 - \hat{y}_2| + |w_1 - \hat{w}_1| + |w_2 - \hat{w}_2| \leq e^{C'\tau_*} (|y_1^0 - \hat{y}_1^0| + |y_2^0 - \hat{y}_2^0| + |w_1^0 - \hat{w}_1^0| + |w_2^0 - \hat{w}_2^0|)$$

and finally

$$\left| \frac{x_1}{\varepsilon} - \frac{\hat{x}_1}{\varepsilon} \right| + \left| \frac{x_2}{\varepsilon} - \frac{\hat{x}_2}{\varepsilon} \right| + |v_1 - \hat{v}_1| + |v_2 - \hat{v}_2| \leq e^{C'\tau_*} \left(\left| \frac{x_1^0}{\varepsilon} - \frac{\hat{x}_1^0}{\varepsilon} \right| + \left| \frac{x_2^0}{\varepsilon} - \frac{\hat{x}_2^0}{\varepsilon} \right| + |v_1^0 - \hat{v}_1^0| + |v_2^0 - \hat{v}_2^0| \right).$$

So using $1 \leq \frac{1}{\varepsilon}$ on both sides, we finally obtain

$$\begin{aligned} |x_1 - \hat{x}_1| + |x_2 - \hat{x}_2| + |v_1 - \hat{v}_1| + |v_2 - \hat{v}_2| &\leq \frac{e^{C'\tau_*}}{\varepsilon} (|x_1^0 - \hat{x}_1^0| + |x_2^0 - \hat{x}_2^0| + |v_1^0 - \hat{v}_1^0| + |v_2^0 - \hat{v}_2^0|) \\ &\leq \frac{e^{C'R^2/\eta}}{\varepsilon} (|x_1^0 - \hat{x}_1^0| + |x_2^0 - \hat{x}_2^0| + |v_1^0 - \hat{v}_1^0| + |v_2^0 - \hat{v}_2^0|). \end{aligned}$$

□

Using this result, we can now go back to the case of several collisions.

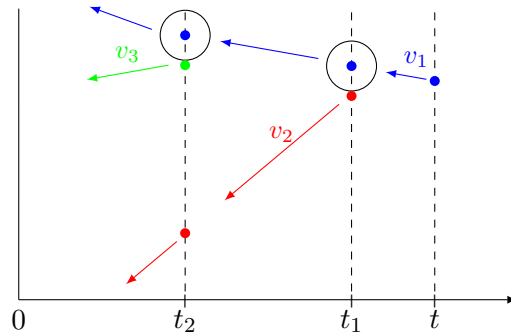


FIGURE 5. Representation of a pseudo-trajectory undergoing two collisions.

We have the following result:

Lemma 2.4.2. *With the assumption of identical times of collisions for two different trees, the function $(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{x}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1}) \mapsto z = z(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{x}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1})$, where $(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{x}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1})$ is the state of the $k+1$ particles after k collisions at time t_{k+1}^+ (i.e. before the $k+1$ -th collision) on a pseudo-trajectory is a $(\tilde{C}_{R,\eta,\varepsilon})^k$ -Lipschitz function with $\tilde{C}_{R,\eta,\varepsilon} = \frac{Ce^{CR^2/\eta}}{\varepsilon}$ and C is a constant which can only depend on $\nabla\Phi$.*

Proof. Let us prove this result by induction.

Initialization: We start with the post-collisional case. By construction of the pseudo-trajectory, particle 1 moves freely on $[t_1, t]$ and starts its scattering at t_1 . Then, we deduce from Lemma 2.4.1 that

$$|z_1(t_1) - \hat{z}_1(t_1)| \leq \frac{e^{C'R^2/\eta}}{\varepsilon} [|z_1(t_1 - t_\varepsilon) - \hat{z}_1(t_1 - t_\varepsilon)| + |z_2(t_1 - t_\varepsilon) - \hat{z}_2(t_1 - t_\varepsilon)|] \quad (2.4.1.7)$$

where t_ε is the scattering time. Moreover, since by construction we know that particle 1 and 2 move freely on $[t_2^+, t_1 - t_\varepsilon]$, we have

$$|z_1(t_1 - t_\varepsilon) - \hat{z}_1(t_1 - t_\varepsilon)| + |z_2(t_1 - t_\varepsilon) - \hat{z}_2(t_1 - t_\varepsilon)| \leq C [|z_1(t_2^+) - \hat{z}_1(t_2^+)| + |z_2(t_2^+) - \hat{z}_2(t_2^+)|]. \quad (2.4.1.8)$$

Thus, we have

$$|z_1(t) - \hat{z}_1(t)| \leq \frac{Ce^{C'R^2/\eta}}{\varepsilon} [|z_1(t_2^+) - \hat{z}_1(t_2^+)| + |z_2(t_2^+) - \hat{z}_2(t_2^+)|] \quad (2.4.1.9)$$

since particle 1 moves freely on $[t_1, t]$. Furthermore, since in the pre-collisional case, there is only free transport, the above inequality holds true for ε small enough.

Induction step: By assumption on the inductive step, we have

$$|z_1(t) - \hat{z}_1(t)| \leq \left(\frac{Ce^{CR^2/\eta}}{\varepsilon} \right)^{k-1} (|z_1(t_k^+) - \hat{z}_1(t_k^+)| + |z_2(t_k^+) - \hat{z}_2(t_k^+)| + \dots \\ \dots + |z_k(t_k^+) - \hat{z}_k(t_k^+)|). \quad (2.4.1.10)$$

Let us denote by m_k the “progenitor” of particle $k+1$ (i.e. m_k is the particle it is added next to). By the initialization applied for particles m_k and $k+1$, we have that

$$|z_{m_k}(t_k) - \hat{z}_{m_k}(t_k)| \leq \left(\frac{Ce^{CR^2/\eta}}{\varepsilon} \right) [|z_{m_k}(t_{k+1}^+) - \hat{z}_{m_k}(t_{k+1}^+)| + |z_{k+1}(t_{k+1}^+) - \hat{z}_{k+1}(t_{k+1}^+)|] \quad (2.4.1.11)$$

Moreover, by construction of the pseudo-trajectories with our iteration strategy, we know that the other particles move via free transport on $[t_{k+1}^+, t_k]$. Then, we deduce that for ε small enough,

$$|z_1(t) - \hat{z}_1(t)| \leq \left(\frac{Ce^{CR^2/\eta}}{\varepsilon} \right)^k [|z_1(t_{k+1}^+) - \hat{z}_1(t_{k+1}^+)| + \dots + |z_{k+1}(t_{k+1}^+) - \hat{z}_{k+1}(t_{k+1}^+)|] \quad (2.4.1.12)$$

which completes the proof. $\square$

Let us go back to the general case. For two different trees, we will denote by t_k and $\hat{t}_k$ the respective times of collisions. Noticing that the scattering does not depend on time, the general case is only different from the one above because of translations in the positions. Indeed, for instance particle 1 starts its scattering at t_1 while particle $\hat{1}$ keeps moving freely on $[\hat{t}_1, t_1]$ in the case $\hat{t}_1 < t_1$. Then, it will imply an error on the positions directly bounded by $E|t_1 - \hat{t}_1|$, the velocities being bounded by E . Thus, if we prove that collision times are also Lipschitz, we will be able to conclude.

Before proving it, we need to make a precision not necessary until now. In our iteration strategy, when we truncate to remove recollisions (we will explain how exactly in Section 2.6.1), the geometrical set observed will be one from which we will also remove grazing collisions by truncating parameters such that the angle between ν^{s+1} and $(v_{s+1} - v_i)$ belongs to $[\pi/2 - \varepsilon, \pi/2]$. The measure of the set associated to possible recollisions and grazing collisions being of the same order as the one of the set only associated to possible recollisions, the corresponding term will vanish exactly the same way as if we would have only removed recollisions.

Lemma 2.4.3. *We denote by t_c a time of collision and by x and v the respective relative positions and relative velocities of the two particles colliding with $\eta \leq |v|$. Then, we have*

$$\left\| \frac{\partial t_c}{\partial x^i} \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial t_c}{\partial v^i} \right\|_\infty \leq \frac{C}{\eta \left| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \right|} \quad (2.4.1.13)$$

with C a constant and where x^i and v^i are the i -th coordinates of respectively x and v .

Proof. Starting from the following equality

$$|x - t_c v| = R\varepsilon \quad (2.4.1.14)$$

which characterizes collision times, we differentiate it and obtain

$$\frac{\partial t_c}{\partial x^i} = \frac{n^i}{n \cdot v} \quad \text{and} \quad \frac{\partial t_c}{\partial v^i} = \frac{t_c n^i}{n \cdot v}, \quad (2.4.1.15)$$

with n the vector of norm 1 associated to the collision and n^i its i -th coordinate. Therefore, using the bound $\eta \leq |v|$ and the construction of the iteration term regarding the grazing collisions leads to the conclusion. $\square$

Finally, using the two above lemmas we can deduce the following result:

Corollary 2.4.3. *The function $(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{x}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1}) \mapsto z = z(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{x}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1})$, where $(\tilde{x}_1, \tilde{v}_1, \dots, \tilde{x}_{k+1}, \tilde{v}_{k+1})$ is the state of the $k+1$ particles after k collisions at time t_{k+1}^+ (i.e. before the $k+1$ -th collision) on a pseudo-trajectory is a $(C_{E,R,\eta,\varepsilon})^k$ -Lipschitz function with $C_{E,R,\eta,\varepsilon} = \frac{CEe^{CR^2/\eta}}{\eta \left| \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon \right) \right| \varepsilon}$ and C is a constant which can only depend on $\nabla \Phi$.*

2.4.2 Estimates of the remainders associated to the long-range part of the potential

From now on, C is a constant which can depend on φ , ρ^0 , β and which can include factors as $(1 - \varepsilon \kappa_d R^d)^{-1}$ or again $\exp(\beta \|\Phi\|_\infty)$. This is not a problem since those two last terms converges to 1 as N goes to ∞ . Moreover, we will assume that $\varepsilon < \eta$. Indeed, the orders

of magnitude adopted in section 2.7 will satisfy this property.

First of all, let us notice that we can rewrite the remainder $r_N^{Pot,a}(t)$ as follows:

$$\begin{aligned} r_N^{Pot,a,K}(t) &:= \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} Q_{1,J_1}(\tau) \dots Q_{J_{k-2},J_{k-1}}(\tau) r_{J_{k-1},n_k}^{Pot,a}(t - k\tau, t - (k-1)\tau) \\ &= \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} F^{Pot,a}(J^{(k)}, z) \end{aligned} \quad (2.4.2.1)$$

where for $J^{(k)} = (1, j_1, \dots, j_k)$ fixed, we denote

$$\begin{aligned} F^{Pot,a}(J^{(k)}, z) &:= Q_{1,J_1}(\tau) \dots Q_{J_{k-2},J_{k-1}}(\tau) \\ &\quad \int_0^{\tau-j_k\delta} Q_{J_{k-1},J_k}(\tau - t_{J_k}) \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{J_k} \left[\nabla \Phi > \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla_{v_i} \tilde{f}_{N,R}^{(J_k)} \right] (t_{J_k}, z) dt_{J_k}. \end{aligned} \quad (2.4.2.2)$$

Proposition 2.4.4. *Let k be an integer, $1 \leq k \leq K$. There exists a constant C such that for any $\tau > 0$, $J^{(k)} = (j_1, \dots, j_k)$ with $j_i \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ for all i ,*

$$\left| \int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) F^{Pot,a}(J^{(k)}, z) dz \right| \leq C \left[\left(\frac{CE e^{C \frac{R^2}{\eta}}}{\eta |\cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)| \varepsilon} \right)^{J_k} + \frac{J_k}{\varepsilon^2} \right] \|\nabla \Phi >\|_{\infty} (k\tau)^{J_k} (R^{d-1} E^{d+1})^{J_k}. \quad (2.4.2.3)$$

Proof. For each collision tree p , we know that the changes of variables associated

$$\rho^p : (z, t_1, \nu_2, v_2, \dots, t_{J_k-1}, \nu_{J_k}, v_{J_k}) \mapsto Z_{J_k}(t_{J_k}), \quad (2.4.2.4)$$

where $Z_{J_k}(t_{J_k})$ is the pseudo-trajectory at time t_{J_k} associated to the tree p , maps the measure

$$\prod_{i=1}^{J_k-1} (R\varepsilon)^{d-1} (v_{i+1} - v_{m_i}(t_i)) \cdot \nu_{i+1} dz dt_1 \dots dt_{J_k-1} d\nu_2 \dots d\nu_{J_k} dv_1 \dots dv_{J_k} \quad (2.4.2.5)$$

on the Lebesgue measure dZ_{J_k} . So applying those ones, we get that

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) F^{Pot,a}(J^{(k)}, z) dz \right| \\ &\leq N^{J_k-1} \sum_p \left| \int_0^{k\tau - (J_k-1)\delta} \int_{Im(\rho^p)} \chi \varphi(z(x_1, v_1, \dots, x_{J_k}, v_{J_k})) \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\varepsilon} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{J_k} \nabla \Phi > \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right) \cdot \nabla_{v_i} \tilde{f}_{N,R}^{(J_k)}(t_{J_k}, Z_{J_k}) dZ_{J_k} dt_{J_k} \right| \end{aligned} \quad (2.4.2.6)$$

where we will denote by χ the product of all the “smooth indicator function” involved in the construction of those terms.

Moreover, since $\chi = \prod_{i=2}^{J_k} [\chi_{H_i} \chi_{geom(i)} \chi_{\eta_i}]$ and for each i ,

$$|\nabla [\chi_{H_i} \chi_{geom(i)} \chi_{\eta_i}]| \leq C \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\eta}\right) \leq \frac{C}{\varepsilon},$$

(see (2.3.1.2), (2.3.1.3), (2.3.1.4)) we have

$$|\nabla \chi| \leq \frac{J_k}{\varepsilon}. \quad (2.4.2.7)$$

In addition, applying Corollary 2.4.3 we have

$$\begin{aligned} |\nabla_{v_i} \varphi(z(x_1, v_1, \dots, x_{J_k}, v_{J_k}))| &\leq \|\nabla \varphi\|_{\infty} |\nabla_{v_i} z(x_1, v_1, \dots, x_{J_k}, v_{J_k})| \\ &\leq \|\nabla \varphi\|_{\infty} \left(\frac{CEe^{CR^2/\eta}}{\eta |\cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)| \varepsilon} \right)^{J_k-1}. \end{aligned} \quad (2.4.2.8)$$

Noticing that integrating the measure (3.3.2.6) on the domain of integration that we consider gives a constant which is $O\left(\left(\prod_{i=1}^{J_k-1} (R\varepsilon)^{d-1} E\right) E^{dJ_k} \frac{(k\tau)^{J_k}}{J_k!}\right)$, then after doing an integration by parts on the right-hand side of inequality (2.4.2.6), we deduce from (2.4.2.7) and (2.4.2.8) that

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) F^{Pot,a}(J^{(k)}, z) dz \right| \\ &\leq N^{J_k-1} (J_k)! \left[\left(\frac{CEe^{CR^2/\eta}}{\eta |\cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)| \varepsilon} \right)^{J_k-1} + \frac{J_k}{\varepsilon} \right] \frac{1}{\varepsilon} \|\nabla \Phi\|_{\infty} \sup_{t \geq 0} \|\tilde{f}_{N,R}^{(J_k)}(t)\|_{\infty} \\ &\quad \left((R\varepsilon)^{d-1} \right)^{J_k-1} E^{(d+1)J_k} \frac{(k\tau)^{J_k}}{J_k!} \\ &\leq C \left[\left(\frac{CEe^{CR^2/\eta}}{\eta |\cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)| \varepsilon} \right)^{J_k} + \frac{J_k}{\varepsilon^2} \right] \|\nabla \Phi\|_{\infty} (R^{d-1} E^{d+1})^{J_k} (k\tau)^{J_k}. \end{aligned} \quad (2.4.2.9)$$

□

Quite similarly, we can rewrite the remainder $r_N^{Pot,b}(t)$ as follows:

$$r_N^{Pot,b,K}(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} F^{Pot,b}(J^{(k)}, z) \quad (2.4.2.10)$$

where for $J^{(k)} = (1, j_1, \dots, j_k)$ fixed, we denote

$$\begin{aligned} F^{Pot,b}(J^{(k)}, z) &:= Q_{1,J_1}(\tau) \dots Q_{J_k-2,J_{k-1}}(\tau) \int_0^{\tau-j_k\delta} Q_{J_k-1,J_k}(\tau-t_{J_k}) \frac{(N-J_k)}{\varepsilon} \\ &\sum_{i=1}^{J_k} \left[\int_{\mathbf{T}^{d(N-J_k)} \times \mathbf{R}^{d(N-J_k)}} \nabla \Phi\left(\frac{x_i - x_{J_k+1}}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_{v_i} f_N \prod_{\substack{1 \leq l \leq J_k \\ J_k+1 \leq j \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_l - x_j| > R\varepsilon\}} dZ_{(J_k+1,N)} \right] (t_{J_k}, z) dt_{J_k}. \end{aligned} \quad (2.4.2.11)$$

Using a quite similar reasoning and the fact that $N\varepsilon^{d-1} = 1$, we get an equivalent proposition for $r_N^{Pot,b}$.

Proposition 2.4.5. *Let k be an integer, $1 \leq k \leq K$. There exists a constant C such that for any $\tau > 0$, $J = (j_1, \dots, j_{k-1})$ with $j_i \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ for all i ,*

$$\left| \int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) F^{Pot, b}(J^{(k)}, z) dz \right| \leq \frac{C}{\varepsilon^{d-1}} \left[\left(\frac{CE e^{C \frac{R^2}{\eta}}}{\eta |\cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)| \varepsilon} \right)^{J_k} + \frac{J_k}{\varepsilon^2} \right] \|\nabla \Phi\|_{\infty} (k\tau)^{J_k} (R^{d-1} E^{d+1})^{J_k}. \quad (2.4.2.12)$$

2.5 Continuity estimates and control of some remainders

In this section, we will use the classical techniques based on some continuity estimates to control the remainders associated to superexponential growth and to clusters.

First of all, let us recall here the general result concerning continuity estimates for the collision operators. In order for the paper to be more self-contained, we recall the proof in Appendix 2.10.3. We denote by $|Q|_{s, s+n}$ the operators obtained by summing the absolute values of all elementary contributions

$$|Q|_{s, s+n}(t) := \int_0^{t-\delta} \int_0^{t_1-\delta} \dots \int_0^{t_{n-1}-\delta} \mathcal{S}_s(t-t_1) |\mathcal{C}_{s, s+1}| \mathcal{S}_{s+1}(t_1-t_2) |\mathcal{C}_{s+1, s+2}| \dots \dots \mathcal{S}_{s+n-1}(t_{n-1}-t_n) |\mathcal{C}_{s+n-1, s+n}| dt_n \dots dt_1. \quad (2.5.0.1)$$

where

$$\begin{aligned} & (|\mathcal{C}_{s, s+1}| f_N^{(s+1)})(Z_s) \\ &:= (N-s)(R\varepsilon)^{d-1} \sum_{i=1}^s \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s \mathbf{1}_{\{|x_j - x_{s+1}| > R\varepsilon\}} \right) (\nu(v_{s+1} - v_i))_+ \\ & \quad f_N^{(s+1)}(\dots, x_i, v_i^*, \dots, x_i + R\varepsilon\nu, v_{s+1}^*) d\nu dv_{s+1} \\ & + (N-s)(R\varepsilon)^{d-1} \sum_{i=1}^s \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s \mathbf{1}_{\{|x_j - x_{s+1}| > R\varepsilon\}} \right) (\nu(v_{s+1} - v_i))_- \\ & \quad f_N^{(s+1)}(\dots, x_i, v_i, \dots, x_i + R\varepsilon\nu, v_{s+1}) d\nu dv_{s+1}. \end{aligned} \quad (2.5.0.2)$$

We deliberately omit some “smooth indicator functions” involved for more concision but the result holds true in their presence.

Lemma 2.5.1. *There is a constant C_d depending only on d such that for all $s, n \in \mathbf{N}$, $t \geq 0$, the operators $|Q|_{s, s+n}(t)$ satisfy the following continuity estimates: for all $f_{s+n} \in X_{\varepsilon, s+n, \alpha}$, $|Q|_{s, s+n}(t) f_{s+n}$ belongs to $X_{\varepsilon, s, \frac{\alpha}{2}}$ and*

$$\| |Q|_{s, s+n}(t) f_{s+n} \|_{\varepsilon, s, \frac{\alpha}{2}} \leq e^{s-1} \left(\frac{C_d R^{d-1} t}{\alpha^{\frac{d+1}{2}}} \right)^n \| f_{s+n} \|_{\varepsilon, s+n, \alpha}. \quad (2.5.0.3)$$

2.5.1 Remainders with a superexponential growth

Proposition 2.5.1. *Let k be an integer, $1 \leq k \leq K$. There exists a constant C such that for any $\tau > 0$, $J = (j_1, \dots, j_{k-1})$ with $j_i \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ for all i ,*

$$\left| \int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) Q_{1,J_1}(\tau) Q_{J_1,J_2}(\tau) \dots Q_{J_{k-2},J_{k-1}}(\tau) r_{J_{k-1},n_k}^{Supexp}(t-k\tau, t-(k-1)\tau, z) dz \right| \leq C \left[(\tilde{C} R^{d-1})^2 t \tau \right]^{2^k} \quad (2.5.1.1)$$

with $\tilde{C} := \frac{C_d}{\sqrt{\beta}} (1 - \varepsilon \kappa_d R^d)^{-1} \exp(\beta \|\Phi\|_\infty)$, $r_{J_{k-1},n_k}^{Supexp}(t-k\tau, t-(k-1)\tau, z) := Q_{J_{k-1},J_{k-1}+n_k}(\tau) \tilde{f}_{N,R}^{(J_{k-1}+n_k)}$.

Proof. Obviously, we have

$$\left| \int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) Q_{1,J_1}(\tau) Q_{J_1,J_2}(\tau) \dots Q_{J_{k-2},J_{k-1}}(\tau) r_{J_{k-1},n_k}^{Supexp}(t-k\tau, t-(k-1)\tau, z) dz \right| \leq C \|\varphi\|_\infty \|Q|_{1,J_{k-1}}((k-1)\tau) r_{J_{k-1},n_k}^{Supexp}(t-k\tau, t-(k-1)\tau)\|_{L^\infty(\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d)}.$$

Indeed, the exact distribution of collisions in the last $k-1$ intervals is not needed. Then, applying Lemma 2.10.2 a first time, we get

$$\begin{aligned} & \|Q|_{1,J_{k-1}}((k-1)\tau) r_{J_{k-1},n_k}^{Supexp}(t-k\tau, t-(k-1)\tau)\|_{L^\infty(\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d)} \\ & \leq \left(\frac{R^{d-1} C_d (k-1)\tau}{\beta^{(d+1)/2}} \right)^{J_{k-1}-1} \|r_{J_{k-1},n_k}^{Supexp}(t-k\tau, t-(k-1)\tau)\|_{\varepsilon, J_{k-1}, \beta/2}. \end{aligned}$$

Observing the expression of $r_{J_{k-1},n_k}^{Supexp}(t-k\tau, t-(k-1)\tau)$, we apply Lemma 2.10.2 a second time and we finally get

$$\begin{aligned} & \|Q|_{1,J_{k-1}}((k-1)\tau) r_{J_{k-1},n_k}^{Supexp}(t-k\tau, t-(k-1)\tau)\|_{L^\infty(\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d)} \\ & \leq \left(\frac{R^{d-1} C_d (k-1)\tau}{\beta^{(d+1)/2}} \right)^{J_{k-1}-1} \left(\frac{R^{d-1} C_d \tau}{\beta^{(d+1)/2}} \right)^{n_k} \left\| \sup_{t \geq 0} \tilde{f}_{N,R}^{(J_{k-1}+n_k)}(t) \right\|_{\varepsilon, J_{k-1}+n_k, \beta}. \end{aligned}$$

Using the a priori estimate on the truncated marginals (2.4.0.8), the fact that $(k-1)\tau \leq t$ and that $J_{k-1} \leq 2^k = n_k$, we get the final result. $\square$

2.5.2 Remainders with clusters

As previously, we notice that we can rewrite the term $r_N^{Clu,K}(t)$ as follows

$$r_N^{Clu,K}(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} F^{Clu}(J^{(k)}, z) \quad (2.5.2.1)$$

where for $J^{(k)} = (1, j_1, \dots, j_k)$ fixed, we denote

$$F^{Clu}(J^{(k)}, z) := Q_{1,J_1}(\tau) \dots Q_{J_{k-2},J_{k-1}}(\tau) \int_0^{\tau-j_k\delta} Q_{J_{k-1},J_k}(\tau-t_{J_k}) \mathcal{C}_{J_k,J_{k+1}} \bar{f}_{N,R}^{(J_k+1)}(t_{J_k}, z) dt_{J_k}. \quad (2.5.2.2)$$

So using the continuity estimates of the collision operators, a control on the cluster part should be enough. Let us recall here its expression

$$\begin{aligned} \bar{f}_{N,R}^{(s+1)}(t, Z_{s+1}) &:= \int_{\mathbf{T}^{d(N-(s+1))} \times \mathbf{R}^{d(N-(s+1))}} f_N(t, Z_N) \\ &\quad \left(\prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ s+2 \leq l \leq N}} \mathbf{1}_{|x_k - x_l| > R\varepsilon} \right) \left(1 - \prod_{j=s+2}^N \mathbf{1}_{|x_j - x_{s+1}| > R\varepsilon} \right) dZ_{(s+2,N)}. \end{aligned} \quad (2.5.2.3)$$

We are actually able to obtain some a priori estimates for it too using again the maximum principle for the Liouville equation. Let us state the result here, the proof could be found in Appendix 2.10.1.

Proposition 2.5.2. *For any fixed N , considering the initial data (2.2.1.1) for any $s \geq 1$, we have the following uniform bound (with respect to time)*

$$\sup_{t \geq 0} \|\bar{f}_{N,R}^{(s)}(t)\|_{\varepsilon,s,\beta} \leq \|\rho^0\|_{\infty} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} (1 - \varepsilon \kappa_d R^d)^{-(s-1)} \exp(\beta s^2 \|\Phi^>\|_{\infty}) R^d \varepsilon. \quad (2.5.2.4)$$

Finally, we get the following estimate for the remainder associated to the cluster part.

Proposition 2.5.3. *Let k be an integer, $1 \leq k \leq K$. There exists a constant C such that for any $\tau > 0$, $J = (j_1, \dots, j_{k-1})$ with $j_i \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ for all i ,*

$$\left| \int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) F^{Clu}(J^{(k)}, z) dz \right| \leq C R^d \varepsilon \left(\tilde{C} R^{d-1} t \right)^{J_k}. \quad (2.5.2.5)$$

Proof. First of all, doing the exact same reasoning as in the proof of Proposition 2.5.1, we get the following bound

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) F^{Clu}(J^{(k)}, z) dz \right| \\ &\leq C \|\varphi\|_{\infty} \left(\frac{R^{d-1} C_d (k-1) \tau}{\beta^{(d+1)/2}} \right)^{J_{k-1}-1} \\ &\quad \left\| \int_0^{\tau-\delta} Q_{J_{k-1}, J_k}(\tau - t_{J_k}) \mathcal{C}_{J_k, J_{k+1}} \bar{f}_{N,R}^{(J_k+1)}(t_{J_k}, z) dt_{J_k} \right\|_{\varepsilon, J_{k-1}, \beta/2}. \end{aligned}$$

Using again the Lemma 2.10.2, we get that

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^{\tau-\delta} Q_{J_{k-1}, J_k}(\tau - t_{J_k}) \mathcal{C}_{J_k, J_{k+1}} \bar{f}_{N,R}^{(J_k+1)}(t_{J_k}, z) dt_{J_k} \right\|_{\varepsilon, J_{k-1}, \beta/2} \\ &\leq \left(\frac{R^{d-1} C_d \tau}{\beta^{(d+1)/2}} \right)^{j_k+1} \sup_{t \geq 0} \|\bar{f}_{N,R}^{(J_k)}(t)\|_{\varepsilon, J_k, \beta}. \end{aligned}$$

So finally, using the control of the cluster part in the above inequality together with the fact that $(k-1)\tau \leq t$ leads to the conclusion. $\square$

2.6 Remainders and geometrical control

2.6.1 Some geometrical considerations

We recall that in order to get the convergence, our aim is to couple the pseudo-trajectories associated to the BBGKY series to the ones of the Boltzmann with cut-off. As we mentioned previously the main difference between those two terms comes from the possible recollisions that can occur in the BBGKY case while they never occur in the Boltzmann case.

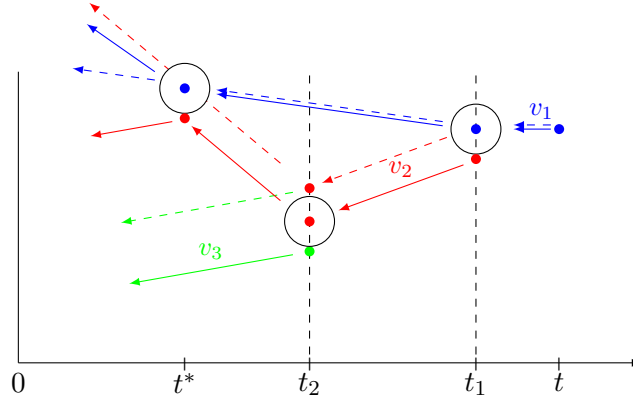


FIGURE 6. An example of a recollision between particles 1 and 2 at time t^* . As it can be observed the distance between the BBGKY trajectories and the Boltzmann ones (i.e. between the plain arrows and the dashed ones) is small until a recollision happens between particles 1 and 2. Then the plain and the dashed arrows do not behave the same way at all and the distance between them increases linearly in time.

ADJUNCTION OF ONE PARTICLE

In the following, we just deal with the pre-collisional case. Let us explain why it is enough. What we do is slightly different from what has been done in the previous papers. Indeed, instead of working with the fact that some sets are small in the measure $d\nu_k dv_k$ for v_{m_k} fixed to prevent recollisions, we use the idea that if we consider all the parameters and not only (ν_k, v_k) , the scattering preserves the measure since it is an involution. In other words, instead of cutting only the last integral in (ν_k, v_k) with v_{m_k} fixed, we cut all the integrals. Therefore, we will always define the pathological sets leading to possible recollisions in function of the pre-collisional parameters. The key point is that if some sets are small in those parameters, thanks to the property of the scattering mentioned above, they remain small in post-collisional parameters.

Let us go back to the study of the pre-collisional case. One of the advantages is that particles move freely in that case, making almost straightforward the study of possible recollisions. The strategy is to construct a set outside of which there will be no recollisions using the notion of good configurations and geometrical arguments. We recall that as mentioned in Definition 2.3.1 for k particles the set of good configurations $\mathcal{G}_k(\varepsilon_0)$ is a set such that the particles remain at a distance ε_0 . We fix the parameters with the following orders of magnitude $2^{K+1}R\varepsilon \ll \bar{a} \ll \varepsilon_0 \ll \min(\delta E, 1)$ with K some large integer, $\delta > 0$,

$E > 0$ parameters to be chosen later. The set $\mathcal{G}_k(\varepsilon_0)$ has the obvious following properties:

Proposition 2.6.1. *For particles in $\mathcal{G}_k(\varepsilon_0)$ the transport Ψ_k coincides with the free flow. Moreover, if at time t the configurations Z_k, Z_k^0 are such that*

$$\forall i \leq k, |x_i - x_i^0| \leq \bar{a}, v_i = v_i^0 \quad (2.6.1.1)$$

and that Z_k^0 belongs to $\mathcal{G}_k(\varepsilon_0)$, then the configurations $\Psi_k(u)Z_k, \Psi_k^0(u)Z_k^0$ will remain at a distance less than $\bar{a}$ for $u \in [0, t]$.

The main concern is to prove that the good configurations are stable by adjunction of the $k + 1$ -th particle by using the following lemma which states a control on free trajectories.

Lemma 2.6.1. *Given $t > 0$, and $\bar{a} > 0$ satisfying $2^{K+1}R\varepsilon \ll \bar{a} \ll \varepsilon_0 \ll \min(\delta E, 1)$, consider two points x_1^0, x_2^0 in $\mathbf{T}^d$ such that $d(x_1^0, x_2^0) \geq \varepsilon_0$ and a velocity $v_1 \in B_E$. Then there exists a subset $K(x_1^0 - x_2^0, \varepsilon_0, \bar{a})$ of $\mathbf{R}^d$ with measure bounded by*

$$|(K(x_1^0 - x_2^0, \varepsilon_0, \bar{a}))| \leq CE^d \left(\left(\frac{\bar{a}}{\varepsilon_0} \right)^{d-1} + (Et)^d \bar{a}^{d-1} \right) \quad (2.6.1.2)$$

and a subset $K_\delta(x_1^0 - x_2^0, \varepsilon_0, \bar{a})$ of $\mathbf{R}^d$, the measure of which satisfies

$$|(K_\delta(x_1^0 - x_2^0, \varepsilon_0, \bar{a}))| \leq CE^d \left(\left(\frac{\varepsilon_0}{\delta} \right)^{d-1} + (Et)^d E^{d-1} \varepsilon_0^{d-1} \right) \quad (2.6.1.3)$$

such that for any $v_2 \in B_E$ and x_1, x_2 such that $|x_1 - x_1^0| \leq \bar{a}, |x_2 - x_2^0| \leq \bar{a}$, the following results hold:

- *If $v_1 - v_2 \notin K(x_1^0 - x_2^0, \varepsilon_0, \bar{a})$, then*

$$\forall u \in [0, t], d(x_1 - uv_1, x_2 - uv_2) > R\varepsilon$$

and a fortiori, there is no recollision.

- *If $v_1 - v_2 \in K_\delta(x_1^0 - x_2^0, \varepsilon_0, \bar{a})$, then*

$$\forall u \in [\delta, t], d(x_1 - uv_1, x_2 - uv_2) > \varepsilon_0,$$

and so after a time δ , they stay in a good configuration.

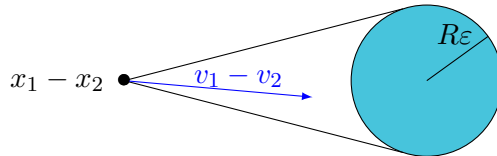


FIGURE 7. The idea in the proof of Lemma 2.6.1 is to exclude sets which will lead to pathological situations as illustrated in this picture. Indeed, for relative velocity taken in the cone, the relative positions after transport will belong to the depicted ball of small size, so the particles will be close.

The proof of this lemma in the context of the torus $\mathbf{T}^d$ can be found in [7]. Finally, it can be deduced from this result the following property of stability of good configurations by adjunction of an additional particle (see [7]). Let us state it here:

Proposition 2.6.2. *Given $Z_k^0 = (X_k^0, V_k^0) \in \mathcal{G}_k(\varepsilon_0)$ and $m_k \leq k$, there is a subset $\mathcal{B}_k^{m_k}(Z_k^0)$ of $\mathbf{S}^{d-1} \times B_E$ of small measure*

$$|\mathcal{B}_k^{m_k}(Z_k^0)| \leq Ck \left(E^d \left(\frac{\bar{a}}{\varepsilon_0} \right)^{d-1} + E^d (Et)^d \varepsilon_0^{d-1} + E \left(\frac{\varepsilon_0}{\delta} \right)^{d-1} \right)$$

such that good configurations close to Z_k^0 are stable by adjunction of a collisional particle close to the particle $x_{m_k}^0$ in the following sense.

Let $Z_k = (X_k, V_k)$ be a configuration of k particles satisfying

$$\forall i \leq k \quad |x_i - x_i^0| \leq \bar{a}, \quad v_i = v_i^0. \quad (2.6.1.4)$$

Given $(\nu_{k+1}, v_{k+1}) \in (\mathbf{S}^{d-1} \times B_E) \setminus \mathcal{B}_k^{m_k}(Z_k^0)$, a new particle with velocity v_{k+1} is added at $x_{m_k} + R\varepsilon\nu_{k+1}$ to Z_k and at $x_{m_k}^0$ to Z_k^0 .

For a pre-collisional configuration $\nu_{k+1} \cdot (v_{k+1} - v_{m_k}) < 0$ then

$$\forall u \in]0, t] \left\{ \begin{array}{l} \forall i \neq j \in \{1, \dots, k\}, \quad d(x_i - uv_i, x_j - uv_j) > R\varepsilon \\ \forall j \in \{1, \dots, k\}, \quad d(x_{m_k} + R\varepsilon\nu_{k+1} - uv_{k+1}, x_j - uv_j) > R\varepsilon. \end{array} \right. \quad (2.6.1.5)$$

Moreover, after the time δ , the $k+1$ particles are in a good configuration

$$\forall u \in [\delta, t] \left\{ \begin{array}{l} (X_k - uV_k, V_k, x_{m_k} + R\varepsilon\nu_{k+1} - uv_{k+1}, v_{k+1}) \in \mathcal{G}_{k+1}(\varepsilon_0/2) \\ (X_k^0 - uV_k, V_k, x_{m_k}^0 + R\varepsilon\nu_{k+1} - uv_{k+1}, v_{k+1}) \in \mathcal{G}_{k+1}(\varepsilon_0). \end{array} \right. \quad (2.6.1.6)$$

We will not recall the proof of Proposition 2.6.2, our concern here will be to rather insist on how we will use it in a slightly different way as usual in the next subsection.

INDUCTIVE CONSTRUCTION OF THE BAD SETS TO REMOVE

In this previous section, Proposition 2.6.2 is actually the elementary step for adding a new particle. Let us now iterate it to obtain the construction of the bad sets to remove. The difference in our strategy with what has been done in the previous papers is that since we want to work only with pre-collisional parameters to remove the bad sets, we need to work at each step with updated parameters. In our construction, at stage k , we will work with the particles at time $t_k - t_\varepsilon$, i.e. the $k+1$ particles in their precollisional state. Therefore, when we will truncate on $v_{k+1}(t_k - t_\varepsilon)$, it will actually be as if we were truncating in all the previous velocities involved since $v_{k+1}(t_k - t_\varepsilon)$ depends on those ones.

We first deal with the initialization of our problem i.e. the construction of $geom(2)$. At this stage, we have one particle, we add a second one and we want to prevent recollisions. We notice here that if the particle lived in $\mathbf{R}^d$ we will have nothing to do, but in the case of the torus, there are no longer dispersion properties. So waiting for a sufficiently long time, we expect trajectories to go back ε -close to their initial positions. Then we need to fix an interval of time $[0, t]$ and use Proposition 2.6.2 to prevent this.

As the construction of the sets $geom$ is interlocked with the iteration strategy, let us recall it here for the first iteration. As explained in Section 2.3.1, after separating the collisions by a time δ and getting rid of large velocities, we want to remove collisions in the term

$$\int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) \int_0^{t-\delta} \mathcal{S}_1(t-t_1) C_{1,2}^{m_1} \chi_{H_2} \tilde{f}_{N,R}^{(2)}(t_1, z) dt_1 dz \quad (2.6.1.7)$$

At this point, we have two possibilities:

- if it is precollisional, we can rewrite the above integral as follows

$$\int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) \int_0^{t-\delta} \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} (N-1)(R\varepsilon)^{d-1}((v_2 - v_{m_1}(t_1) \cdot \nu_2))_- \tilde{f}_{N,R}^{(1)}(t_2, \tilde{Z}_2(t_1)) dv_2 dv_1 dt_1 dx_1 dv_1. \quad (2.6.1.8)$$

Noticing that in the precollisional case $t_\varepsilon = 0$, we actually have $v_1 = v_1(t_1 - t_\varepsilon)$ and $v_2 = v_2(t_1 - t_\varepsilon)$ and idem for ν_2 we can rewrite (2.6.1.8) and obtain

$$\int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) \int_0^{t-\delta} \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} (N-1)(R\varepsilon)^{d-1}((v_2 - v_{m_1}(t_1) \cdot \nu_2))_- \tilde{f}_{N,R}^{(1)}(t_2, \tilde{Z}_2(t_1)) dv_2(t_1 - t_\varepsilon) dv_1(t_1 - t_\varepsilon) dt_1 dx_1(t_1 - t_\varepsilon) dv_1(t_1 - t_\varepsilon). \quad (2.6.1.9)$$

Then for $(\nu_2(t_1 - t_\varepsilon), v_2(t_1 - t_\varepsilon)) \notin B_1^{m_1}(Z_1^0)$, thanks to Proposition 2.6.2 we know that no recollision occurs. We define $geom(2) := B_1^{m_1}(Z_1^0)$ and we split the above integral into two ones using

$$1 = \chi_{geom(2)}(\nu_2(t_1 - t_\varepsilon), v_2(t_1 - t_\varepsilon)) + (1 - \chi_{geom(2)}(\nu_2(t_1 - t_\varepsilon), v_2(t_1 - t_\varepsilon))) \quad (2.6.1.10)$$

where $\chi_{geom(2)}$ is a regularization of the indicator function of $geom(2)$ defined in (2.3.1.4), the ensemble $geom(2)$ being regular enough to allow such a regularization (it is an union of cylinders).

Then, noticing that the free transport maps the measure $(R\varepsilon)^{d-1}((v_2 - v_{m_1}(t_1) \cdot \nu_2))_- dv_2(t_1 - t_\varepsilon) dv_1(t_1 - t_\varepsilon) dt_1 dx_1(t_1 - t_\varepsilon) dv_1(t_1 - t_\varepsilon)$ on $dx_2(t_2^+) dv_2(t_2^+) dx_1(t_2^+) dv_1(t_2^+)$, we keep going on the iteration strategy with the latter updated parameters in the part of the integral associated to $1 - \chi_{geom(2)}$.

- If it is post-collisional, we can rewrite (2.6.1.7) as follows

$$\int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) \int_0^{t-\delta} \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} (N-1)(R\varepsilon)^{d-1}((v_2 - v_{m_1}(t_1) \cdot \nu_2))_+ \tilde{f}_{N,R}^{(1)}(t_2, \tilde{Z}_2(t_1)) dv_2 dv_1 dt_1 dx_1 dv_1. \quad (2.6.1.11)$$

In this case, we actually have $v_1 = v_1(t_1)$, $v_2 = v_2(t_1)$ and idem for ν_2 . Noticing that the scattering being an involution, it preserves the measure. Thus it maps the measure $dv_2(t_1) dv_1(t_1)$ on the measure $dv_2(t_1 - t_\varepsilon) dv_1(t_1 - t_\varepsilon)$. Therefore after doing this change of variables, as previously we can split the integral into two ones using (2.6.1.10), with $t_\varepsilon \neq 0$ this time and we continue as in the pre-collisional case.

We can now deal with the iteration step. Let us assume that we add at time t_k the particle $k+1$ knowing that because of the presence of $(1 - \chi_{geom(2)}) (1 - \chi_{geom(3)}) \dots (1 - \chi_{geom(k)})$ at this stage, before adding the $(k+1)$ -th particle, the k other particles can not undergo recollisions.

- If it is precollisional, we can split the associated integral directly using

$$1 = \chi_{geom(k+1)}(\nu_{k+1}(t_k - t_\varepsilon), v_{k+1}(t_k - t_\varepsilon)) + (1 - \chi_{geom(k+1)}(\nu_{k+1}(t_k - t_\varepsilon), v_{k+1}(t_k - t_\varepsilon))) \quad (2.6.1.12)$$

with $t_\varepsilon = 0$. Then, we update our parameters using the fact that the free transport maps the measure $(R\varepsilon)^{d-1}((v_{k+1} - v_{m_k}(t_k)) \cdot \nu_{k+1})_- dv_{k+1}(t_k - t_\varepsilon) dt_k dv_{k+1}(t_k - t_\varepsilon) dx_1(t_k - t_\varepsilon) dv_1(t_k - t_\varepsilon) \dots dx_k(t_k - t_\varepsilon) dv_k(t_k - t_\varepsilon)$ on $dx_1(t_{k+1}^+) dv_1(t_{k+1}^+) \dots dx_{k+1}(t_{k+1}^+) dv_{k+1}(t_{k+1}^+)$.

- If it is postcollisional, we use the fact that the scattering preserves the measure. Thus, it maps the measure $d\nu_{k+1}(t_k)d\nu_{k+1}(t_k)d\nu_{m_k}(t_k)$ on the measure $d\nu_{k+1}(t_k - t_\varepsilon)d\nu_{k+1}(t_k - t_\varepsilon)d\nu_{m_k}(t_k - t_\varepsilon)$. Then, after doing this change of variables, we conclude as in the precollisional case using (2.6.1.12) with $t_\varepsilon \neq 0$ this time.

2.6.2 Estimates of the “geometrical” remainders

We conclude by giving the four last estimates. From now on, we assume that $R, E \geq 1$. The orders of magnitude adopted in Section 2.7 will satisfy this property.

NEGLECTING THE PATHOLOGICAL TRAJECTORIES

As previously, we notice that we can rewrite the term $r_N^{Recoll,K}(t)$ as follows

$$r_N^{Recoll,K}(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} F^{Recoll}(J^{(k)}, z) \quad (2.6.2.1)$$

where for $J^{(k)} = (1, j_1, \dots, j_k)$ fixed, we denote

$$F^{Recoll}(J^{(k)}, z) := Q_{1,J_1}(\tau) \dots Q_{J_{k-2},J_{k-1}}(\tau) \int_0^{\tau-j_k\delta} Q_{J_{k-1},J_k}(\tau - t_{J_k}) \mathcal{C}_{J_k,J_{k+1}} \chi_{H_{J_{k+1}}} \chi_{geom(J_{k+1})} \tilde{f}_{N,R}^{(J_k+1)}(t_{J_k}, z) dt_{J_k}. \quad (2.6.2.2)$$

Then we get the following bound

Proposition 2.6.3. *Let k be an integer, $1 \leq k \leq K$. There exists a constant C such that for any $\tau > 0$, $J = (j_1, \dots, j_{k-1})$ with $j_i \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ for all i ,*

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) F^{Recoll}(J^{(k)}, z) dz \right| \leq C 2^{K+1} \left(\tilde{C} R^{d-1} t \right)^{2^{K+1}} \left(E^d \left(\frac{\bar{a}}{\varepsilon_0} \right)^{d-1} + E^d (Et)^d \varepsilon_0^{d-1} + E \left(\frac{\varepsilon_0}{\delta} \right)^{d-1} \right). \quad (2.6.2.3)$$

Proof. The proof is quite similar to the ones of the remainders in Section 2.5 and is based on using continuity estimates. Noticing the three following points leads to the conclusion:

- As previously, the exact distribution of collisions in the last k intervals is not needed.
- Concerning the last collision operator involved, $\mathcal{C}_{J_k,J_{k+1}}$, similarly as in the proof of the usual continuity estimates in Appendix 2.10.3, the integration with respect to velocity brings a factor $(2\pi/\beta)^{d/2}$ while the presence of $\chi_{geom(J_{k+1})}$ gives a factor

$$C_{J_k} \left(E^d \left(\frac{\bar{a}}{\varepsilon_0} \right)^{d-1} + E^d (Et)^d \varepsilon_0^{d-1} + E \left(\frac{\varepsilon_0}{\delta} \right)^{d-1} \right) \quad (2.6.2.4)$$

according to Proposition 2.6.2.

- Finally, $J_k = 1 + j_1 + \dots + j_k \leq 1 + n_1 + \dots + n_k = \frac{2^{k+1}-1}{2-1} \leq 2^{k+1} \leq 2^{K+1}$.

Then we have

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) F^{Recoll}(J^{(k)}, z) dz \right| \\
& \leq C \|\varphi\|_\infty \left(\frac{R^{d-1} C_d k \tau}{\beta^{(d+1)/2}} \right)^{J_k} 2^{K+1} \left(E^d \left(\frac{\bar{a}}{\varepsilon_0} \right)^{d-1} + E^d (Et)^d \varepsilon_0^{d-1} + E \left(\frac{\varepsilon_0}{\delta} \right)^{d-1} \right) \\
& \quad \sup_{t \geq 0} \|\tilde{f}_{N,R}^{(J_k+1)}(t)\|_{\varepsilon, J_k, \beta} \\
& \leq C 2^{K+1} (\tilde{C} R^{d-1} t)^{2^{K+1}} \left(E^d \left(\frac{\bar{a}}{\varepsilon_0} \right)^{d-1} + E^d (Et)^d \varepsilon_0^{d-1} + E \left(\frac{\varepsilon_0}{\delta} \right)^{d-1} \right)
\end{aligned} \tag{2.6.2.5}$$

which concludes the proof. $\square$

TIME SEPARATION

We can rewrite the term $r_N^{Tim,K}(t)$ as follows

$$r_N^{Tim,K}(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} F^{Tim}(J^{(k)}, z) \tag{2.6.2.6}$$

where for $J^{(k)} = (1, j_1, \dots, j_k)$ fixed, we denote

$$F^{Tim}(J^{(k)}, z) := Q_{1,J_1}(\tau) \dots Q_{J_{k-2},J_{k-1}}(\tau) \int_0^{\tau-j_k\delta} Q_{J_{k-1},J_k}^\delta(\tau-t_{J_k}) \mathcal{C}_{J_k,J_k+1} \tilde{f}_{N,R}^{(J_k+1)}(t_{J_k}, z) dt_{J_k}. \tag{2.6.2.7}$$

Proposition 2.6.4. *Let k be an integer, $1 \leq k \leq K$. There exists a constant C such that for any $\tau > 0$, $J = (j_1, \dots, j_{k-1})$ with $j_i \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ for all i ,*

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) F^{Tim}(J^{(k)}, z) dz \right| \leq C \left(C R^{d-1} t \right)^{2^{K+1}} 2^{K+1} \frac{\delta}{t}. \tag{2.6.2.8}$$

Proof. The reasoning is exactly the same as the one in the proof of the continuity estimates except that it involves the integration over two consecutive times such that $|t_{J_{k-1}} - t_{J_k}| \leq \delta$.

Consequently, the integration with respect to time provides a factor $\frac{\delta t^{J_k-1}}{(J_k-1)!}$ instead of

$\frac{t^{J_k}}{(J_k)!}$ in the usual proof.

Using the Stirling formula as in the proof of the classical continuity estimates together with the a priori estimates on the truncated marginals and the fact that $J_k + 1 \leq 2^{k+1} \leq 2^{K+1}$ leads to the conclusion. $\square$

ENERGY TRUNCATION

We can rewrite the term $r_N^{Ener,K}(t)$ as follows

$$r_N^{Ener,K}(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} F^{Ener}(J^{(k)}, z) \tag{2.6.2.9}$$

where for $J^{(k)} = (1, j_1, \dots, j_k)$ fixed, we denote

$$F^{Ener}(J^{(k)}, z) := Q_{1, J_1}(\tau) \dots Q_{J_{k-2}, J_{k-1}}(\tau) \int_0^{\tau - j_k \delta} Q_{J_{k-1}, J_k}(\tau - t_{J_k}) \mathcal{C}_{J_k, J_{k+1}} \left(1 - \chi_{H_{J_{k+1}}}\right) \tilde{f}_{N, R}^{(J_k+1)}(t_{J_k}, z) dt_{J_k}. \quad (2.6.2.10)$$

Proposition 2.6.5. *Let k be an integer, $1 \leq k \leq K$. There exists a constant C such that for any $\tau > 0$, $J = (j_1, \dots, j_{k-1})$ with $j_i \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ for all i ,*

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) F^{Ener}(J^{(k)}, z) dz \right| \leq C e^{-\frac{\beta}{4} E^2} \left(C R^{d-1} t \right)^{2^{K+1}}. \quad (2.6.2.11)$$

Proof. Using the obvious following inequality

$$\sup_{t \geq 0} \left\| \left(1 - \chi_{\{H_{J_k+1}(Z_{J_k+1}) \leq E^2\}}\right) \tilde{f}_{N, R}^{(J_k+1)}(t) \right\|_{\varepsilon, J_k+1, \beta} \leq e^{-\frac{\beta}{4} E^2} \left\| \tilde{f}_{N, R}^{(J_k+1)}(t) \right\|_{\varepsilon, J_k+1, \beta} \quad (2.6.2.12)$$

and the same arguments as previously leads to the result. $\square$

SMALL RELATIVE VELOCITIES

We can rewrite the term $r_N^{Relat.vel, K}(t)$ as follows

$$r_N^{Relat.vel, K}(t) = \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \dots \sum_{j_k=0}^{n_k-1} F^{Relat.vel}(J^{(k)}, z) \quad (2.6.2.13)$$

where for $J^{(k)} = (1, j_1, \dots, j_k)$ fixed, we denote

$$F^{Relat.vel}(J^{(k)}, z) := Q_{1, J_1}(\tau) \dots Q_{J_{k-2}, J_{k-1}}(\tau) \int_0^{\tau - j_k \delta} Q_{J_{k-1}, J_k}(\tau - t_{J_k}) \mathcal{C}_{J_k, J_{k+1}} \chi_{H_{J_{k+1}}} \left(1 - \chi_{geom(J_k+1)}\right) \left(1 - \chi_{\eta_{J_k+1}}\right) \tilde{f}_{N, R}^{(J_k+1)}(t_{J_k}, z) dt_{J_k}. \quad (2.6.2.14)$$

Proposition 2.6.6. *Let k be an integer, $1 \leq k \leq K$. There exists a constant C such that for any $\tau > 0$, $J = (j_1, \dots, j_{k-1})$ with $j_i \in \{0, \dots, n_i - 1\}$ for all i ,*

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) F^{Relat.vel}(J^{(k)}, z) dz \right| \leq C \left(C R^{d-1} t \right)^{2^{K+1}} 2^{2(K+1)} \eta^d. \quad (2.6.2.15)$$

Proof. First of all, let us notice that

$$\prod_{i=1}^{J_k} \mathbf{1}_{|v_i - v_{J_k+1}| \geq \eta} \leq \chi_{\eta_{J_k+1}} \quad (2.6.2.16)$$

and so we have the following inequality

$$1 - \chi_{\eta_{J_k+1}} \leq \mathbb{1} - \prod_{i=1}^{J_k} \mathbf{1}_{|v_i - v_{J_k+1}| \geq \eta} \leq \sum_{i=1}^{J_k} \mathbf{1}_{|v_i - v_{J_k+1}| \leq \eta}. \quad (2.6.2.17)$$

The reasoning is then quite similar to the previous ones except that because of the presence of $\sum_{i=1}^{J_k} \mathbf{1}_{|v_i - v_{J_k+1}| \leq \eta}$, the last collision operator will be bounded using the following inequality: for all $i \in \{1, \dots, J_k\}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^d} (|v_{J_k+1}| + |v_i|) \exp \left(-\frac{\beta}{2} \sum_{l=1}^{J_k+1} |v_l|^2 \right) \sum_{j=1}^{J_k} \mathbf{1}_{|v_j - v_{J_k+1}| \leq \eta} dv_{J_k+1} \\ \leq C J_k \eta^d \exp \left(-\frac{\beta}{2} \sum_{l=1}^{J_k+1} |v_l|^2 \right). \end{aligned} \quad (2.6.2.18)$$

Then the same arguments as in the proof of the continuity estimates together with the a priori estimates on $\tilde{f}_{N,R}$ and the fact that $J_k \leq 2^{K+1}$ leads to the conclusion. $\square$

2.7 Asymptotic vanishing of the remainders

It is now time to prove in this section that the remainders will vanish asymptotically provided that the parameters are correctly chosen.

Proposition 2.7.1. *For φ a test function, for $\delta, \varepsilon_0, E, \bar{a}, \eta, K$ and R satisfying the following orders of magnitude:*

$$\delta = \varepsilon^{\frac{d-1}{d+1}}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon^{d/(d+1)}, \quad E = C\sqrt{|\log \varepsilon|}, \quad \bar{a} = 2^{K+1}\varepsilon, \quad \eta = \frac{1}{|\log \varepsilon|}, \quad (2.7.0.1)$$

$$\frac{\log(\log |\log \varepsilon|^{1/4})}{\log 2} \leq \tilde{C}^2 R^{2(d-1)} \quad (2.7.0.2)$$

and

$$2(K+1) \leq \frac{\log(\log |\log \varepsilon|^{1/2})}{\log 2}, \quad (2.7.0.3)$$

then

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) r_N^K(t, z) dz \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (2.7.0.4)$$

Proof. Let us prove that they vanish in the right order. We start with r_N^{Supexp} . We choose $\tau \leq \frac{\gamma}{(\tilde{C}R^{d-1})^2 t}$ with $\gamma \in]0, 1[$. Thanks to Proposition 2.5.1, after summing on k and $j_1, \dots, j_k$, we get the following bound

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) r_N^{Supexp, K}(t, z) dz \right| &\leq C \sum_{k=1}^K 2^{k(k+1)} \left[(\tilde{C}R^{d-1})^2 t \tau \right]^{2^k} \\ &\leq C \sum_{k=1}^K 2^{k(k+1)} \gamma^{2^k} \\ &= C \sum_{k=1}^K \exp(k(k+1) \log 2 + 2^k \log \gamma) \\ &\leq C \sum_{k=1}^K \exp(2k \log \gamma) \\ &= C \sum_{k=1}^K (\gamma^2)^k \\ &\leq c \gamma^2. \end{aligned} \quad (2.7.0.5)$$

This relation being true for any $\gamma \in]0, 1[$ proves that this term vanishes asymptotically. Moreover, by summing on k and $j_1, \dots, j_k$ with the orders of magnitude chosen for the parameters, we get the following bound for $\alpha > 0$ small enough,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) \left(r_N^{Recoll, K}(t, z) + r_N^{Tim, K}(t, z) + r_N^{Ener, K}(t, z) + r_N^{Clu, K}(t, z) \right) dz \right| \\ \leq CK 2^{(K+2)(K+1)} ((CR^{d-1}t)^2)^{2^K} \varepsilon^\alpha \end{aligned} \quad (2.7.0.6)$$

as a direct consequence of Propositions 2.5.3, 2.6.3, 2.6.4, 2.6.5.

Let us take twice the logarithm on the right-hand side of (2.7.0.6). Then, the higher order term in K is $K \log 2$. Using the idea that if $A(a) \underset{a \rightarrow 0}{\sim} B(a)$ then $A(a) \leq 2B(a)$ for a small enough, then for ε small enough, we get the following inequality

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) \left(r_N^{\text{Recoll},K}(t, z) + r_N^{\text{Tim},K}(t, z) + r_N^{\text{Ener},K}(t, z) + r_N^{\text{Clu},K}(t, z) \right) dz \right| \leq C \exp(2^{2K}) \varepsilon^\alpha. \quad (2.7.0.7)$$

Consequently, by assumption (2.7.0.3) we can deduce that

$$2K \leq \frac{\log |\log \varepsilon|^{1/2}}{\log 2} \quad (2.7.0.8)$$

and we get

$$2^{2K} \leq |\log \varepsilon|^{1/2}. \quad (2.7.0.9)$$

Thus finally,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) \left(r_N^{\text{Recoll},K}(t, z) + r_N^{\text{Tim},K}(t, z) + r_N^{\text{Ener},K}(t, z) + r_N^{\text{Clu},K}(t, z) \right) dz \right| \\ \leq C e^{|\log \varepsilon|^{1/2}} \varepsilon^\alpha = C e^{|\log \varepsilon|^{1/2} + \alpha \log \varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (2.7.0.10)$$

Moreover a similar argument shows that, for ε small enough,

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) r_N^{\text{Relat.vel},K}(t, z) dz \right| \leq C \exp(2^{2K}) \eta^d \quad (2.7.0.11)$$

as a consequence of Proposition 2.6.6. Then by assumption, we get

$$2K \leq \frac{\log(\log |\log \varepsilon|^{1/2})}{\log 2}$$

and so

$$2^{2K} \leq \log |\log \varepsilon|^{1/2}. \quad (2.7.0.12)$$

Therefore finally,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) r_N^{\text{Relat.vel},K}(t, z) dz \right| \\ \leq C e^{\log |\log \varepsilon|^{1/2}} \left(\frac{1}{|\log \varepsilon|} \right)^d = C \frac{|\log \varepsilon|^{1/2}}{|\log \varepsilon|^d} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (2.7.0.13)$$

Let us observe the two last terms. As a consequence of Propositions 2.4.4 and 2.4.5, after summing on k and $j_1, \dots, j_k$, we have the following bound:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) \left(r_N^{\text{Pot},a,K}(t, z) + r_N^{\text{Pot},b,K}(t, z) \right) dz \right| \\ \leq CK 2^{(K+1)^2} (R^{d-1} E^{d+1} t)^{2^{K+1}} \frac{1}{\varepsilon^{d-1}} \left[\left(\frac{C R e^{C \frac{R^2}{\eta}}}{\eta |\cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)| \varepsilon} \right)^{2^{K+1}} + \frac{2^{K+1}}{\varepsilon} \right] \|\nabla \Phi\|_\infty \\ \leq CK 2^{(K+1)^2} (R^{d-1} E^{d+1} t)^{2^{K+1}} \frac{1}{\varepsilon^{d-1}} \left(\frac{C E e^{C \frac{R^2}{\eta}}}{\eta |\cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)| \varepsilon} \right)^{2^{K+1}} \|\nabla \Phi\|_\infty. \end{aligned} \quad (2.7.0.14)$$

with the order of magnitude (2.7.0.1), (2.7.0.2) and (2.7.0.3) for ε small enough. By a reasoning quite similar to the previous one, we know that it is enough to conclude to prove the vanishing of the higher order term $\left(e^{C\frac{R^2}{\eta}}\right)^{2^{K+1}}$ against $\|\nabla\Phi\|_\infty$ as ε goes to 0, the order of the other terms not being large enough to change this convergence.

We denote $\Gamma(x) := \exp\left(-\exp\left(12\exp\left(\tilde{C}^2|x|^{2(d-1)}\log 2\right)\right)\right)$. By Assumption 2.4.1, $\nabla\Phi$ decreases at least like Γ for the appropriate choice of λ in (2.4.0.1). Then,

$$\begin{aligned} \left(e^{C\frac{R^2}{\eta}}\right)^{2^{K+1}} \|\nabla\Phi\|_\infty &\leq e^{C2^{K+1}[(\log(\log|\log\varepsilon|^{1/2}))^2|\log\varepsilon|]} \exp\left(-\exp\left(12\exp\left(\tilde{C}^2R^{2(d-1)}\log 2\right)\right)\right) \\ &\leq e^{C\log|\log\varepsilon|^{1/2}(\log(\log|\log\varepsilon|^{1/2}))^2|\log\varepsilon|} \exp\left(-\exp\left(12\exp\left(\log\left(\log|\log\varepsilon|^{1/4}\right)\right)\right)\right) \\ &\leq e^{C(\log|\log\varepsilon|^{1/2})^3|\log\varepsilon|} \exp(-|\log\varepsilon|^3) \\ &\leq e^{C|\log\varepsilon|^{5/2}-|\log\varepsilon|^3} \xrightarrow{\varepsilon\rightarrow 0} 0 \end{aligned} \tag{2.7.0.15}$$

which concludes the proof. $\square$

2.8 Convergence to the Boltzmann with cut-off equation

2.8.1 The Boltzmann with cut-off series

The dynamics associated to the Boltzmann with cut-off hierarchy are governed by the following integral equations

$$g_R^{(s)}(t) = \mathcal{S}_s^0(t)g_R^{(s)}(0) + \int_0^t \mathcal{S}_s^0(t-\tau)\mathcal{C}_{s,s+1}^{0,R}g_R^{(s+1)}(\tau)d\tau \tag{2.8.1.1}$$

where $\mathcal{S}_s^0$ denotes the free flow of s particles on $\mathbf{T}^{ds} \times \mathbf{R}^{ds}$ and $\mathcal{C}_{s,s+1}^{0,R}$ represents the collision operator defined as follows:

$$\begin{aligned} (\mathcal{C}_{s,s+1}^{0,R}f^{(s+1)})(Z_s) &:= R \sum_{i=1}^s \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} \mathbf{1}_{\nu \cdot (v_{s+1}-v_i) > 0} (\nu \cdot (v_{s+1}-v_i)) \\ &\quad [f^{(s+1)}(\dots, x_i, v_i^{*R}, \dots, x_i, v_{s+1}^{*R}) (\nu \cdot (v_{s+1}-v_i)) d\nu dv_{s+1} \\ &\quad - f^{(s+1)}(\dots, x_i, v_i, \dots, x_i, v_{s+1})] d\nu dv_{s+1} \end{aligned} \tag{2.8.1.2}$$

where (v_i^{*R}, v_{s+1}^{*R}) are obtained from (v_i, v_{s+1}) applying the inverse scattering operator corresponding to the Boltzmann with cut-off case. We will denote this scattering operator by σ_R .

We put

$$g^{0(s)}(Z_s) := \rho^0(x_1)M_\beta^{\otimes s}(V_s) \tag{2.8.1.3}$$

where we recall $M_\beta(v) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{d/2} \exp\left(-\frac{\beta}{2}|v|^2\right)$.

The iteration strategy adopted previously can also be applied here. From now on, we will denote $g_R^{(1)}$ by g_R . We obtained then the following expansion for g_R :

$$\int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) g_R(t, z) dz = \int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) g_R^{(1,K)}(t, z) dz + \int_{\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d} \varphi(z) r_R^{0,K}(t, z) dz \quad (2.8.1.4)$$

where

$$g_R^{(1,K)}(t) := \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{j_K=0}^{n_K-1} Q_{1,J_1}^{0,R}(\tau) \cdots Q_{J_{K-1},J_K}^{0,R}(\tau) g_R^{0(J_K)}, \quad (2.8.1.5)$$

$$r_R^{0,K}(t) := \sum_{k=1}^K \sum_{j_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{j_{k-1}=0}^{n_{k-1}-1} Q_{1,J_1}^{0,R}(\tau) \cdots Q_{J_{k-2},J_{k-1}}^{0,R}(\tau) r_{J_{k-1},n_k}^{0,R}(t - k\tau, t - (k-1)\tau) \quad (2.8.1.6)$$

with $Q_{s,s+n}^{0,R}(t)$ and

$$r_{J_{k-1},n_k}^{0,R} := r_{J_{k-1},n_k}^{0,R, Tim} + r_{J_{k-1},n_k}^{0,R, Ener} + r_{J_{k-1},n_k}^{0,R, Recoll} + r_{J_{k-1},n_k}^{0,R, Relat.vel} + r_{J_{k-1},n_k}^{0,R, Supexp} \quad (2.8.1.7)$$

defined similarly as in the case of the BBGKY hierarchy.

Remark 2.8.1. *The notation $r_{J_{k-1},n_k}^{0,R, Recoll}$ is not actually appropriate since there is no recollision in the Boltzmann case. Yet, by this we only mean that we do the truncation χ_{geom} associated to situations where there may be recollisions in the BBGKY case.*

In the following, we will state the results associated to this series without giving the proof, the proof being essentially the same ones as in the case of the BBGKY series. Let us first start with the continuity estimates.

Lemma 2.8.1. *There is a constant C_d depending only on d such that for all $s, n \in \mathbf{N}$, $t \geq 0$, the operators $|Q|_{s,s+n}^{0,R}(t)$ (defined similarly as $|Q|_{s,s+n}(t)$) satisfy the following continuity estimates: for all $f_{s+n} \in X_{\varepsilon, s+n, \alpha}$, $|Q|_{s,s+n}^{0,R}(t) f_{s+n}$ belongs to $X_{\varepsilon, s, \frac{\alpha}{2}}$ and*

$$\| |Q|_{s,s+n}^{0,R}(t) f_{s+n} \|_{\varepsilon, s, \frac{\alpha}{2}} \leq e^{s-1} \left(\frac{C_d R^{d-1} t}{\alpha^{\frac{d+1}{2}}} \right)^n \| f_{s+n} \|_{\varepsilon, s+n, \alpha}. \quad (2.8.1.8)$$

Moreover, applying the maximum principle for the linear Boltzmann equation with cut-off, we obtain the following result:

Proposition 2.8.1. *For any $s \geq 1$, we have the following uniform bound (with respect to time)*

$$\sup_{t \geq 0} g_R^{(s)}(t, Z_s) \leq \|\rho^0\|_{\infty} M_{\beta}^{\otimes s}(V_s). \quad (2.8.1.9)$$

Then, following the same argument as in the previous sections, we can establish the below result:

Proposition 2.8.2. *For φ a test function, for $\delta, \varepsilon_0, E, \bar{a}, \eta, K$ and R satisfying the orders of magnitude stated in (2.7.0.1), (2.7.0.2) and (2.7.0.3), then*

$$\left| \int_{\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^d} \varphi(z) r_R^{0,K}(t, z) dz \right| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \quad (2.8.1.10)$$

2.8.2 Convergence

As mentioned previously, one of our main aim in order to get the convergence is to couple the pseudo-trajectories. Actually, a direct corollary of Proposition 2.6.2 allows us to state the following result:

Proposition 2.8.3. *Fix $J := (j_1, \dots, j_K)$, $m = (m_1, \dots, m_{J_K-1})$ with $m_i \leq i$. We consider the pseudo-trajectories $\tilde{Z}_i, \tilde{Z}_i^{R,0}$ defined inductively by choosing at each collision time t_i a deflection angle ν_{i+1} and a velocity v_{i+1} such that $(\nu_{i+1}, v_{i+1}) \in \mathbf{S}^{d-1} \times B_E \setminus \mathcal{B}_i^{m_i}(Z_i^{R,0}(t_i))$.*

Then, in our context (low energy, collisions being separated by at least δ and a low bound on the relative velocities), the velocities of both pseudo-trajectories coincides as well as the positions $x_1(u) = x_1^{0,R}(u)$ for $u \in [0, t]$. Furthermore, for ε sufficiently small $\forall i \leq J_K - 1, \forall l \leq i + 1$,

$$|x_l(t_{i+1}) - x_l^{0,R}(t_{i+1})| \leq \varepsilon i. \quad (2.8.2.1)$$

The proof is quite straightforward reasoning by induction on i and can be found in [7].

Let us now bring the attention on the fact that, as it can be seen in the expression of the main term, there is a special role played by initial data. Actually, they do not only present the advantage to provide some a priori estimates via the maximum principle as stated in Proposition 2.4.1 but they also lead to an asymptotical factorisation (see Appendix 2.10.2 for the proof).

Proposition 2.8.4. *For the initial data f_N given in (2.2.1.1), the truncated marginal of order s*

$$\tilde{f}_N^{0(s)} := \int f_N^0(Z_N) \prod_{\substack{1 \leq i \leq s \\ s+1 \leq j \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_i - x_j| > R\varepsilon\}} dZ_{(s+1, N)} = \rho^0(x_1) \tilde{M}_{N,\beta}^{(s)}(Z_s) \quad (2.8.2.2)$$

converges as N goes to ∞ , under the Boltzmann-Grad scaling $N\varepsilon^{d-1} = 1$, to the function $g^{0(s)}$ defined in (2.8.1.3).

We finally have all the tools to state the following result:

Proposition 2.8.5. *For φ a test function, for $\delta, \varepsilon_0, E, \bar{a}, \eta, K$ and R satisfying the orders of magnitude stated in (2.7.0.1), (2.7.0.2) and (2.7.0.3), we have*

$$\sup_{t \geq 0} \|\tilde{f}_{N,R}^{(1,K)}(t) - g_R^{(1,K)}(t)\|_{L^\infty(\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (2.8.2.3)$$

Proof. We denote $\mathcal{T}_{J,\delta}(\tau) := \{T = (t_1, \dots, t_{J_K-1}) | t_i < t_{i-1} - \delta, (t_{j_k}, \dots, t_{j_{k-1}+1}) \in [t - k\tau, t - (k-1)\tau]\}$, $\mathcal{M}_J := \{m = (m_1, \dots, m_{J_K-1}), 1 \leq m_i \leq i\}$, $J := (j_1, \dots, j_K)$.

Then, we can rewrite $\tilde{f}_{N,R}^{(1,K)}$ and $g_R^{(1,K)}$ as follows

$$\tilde{f}_{N,R}^{(1,K)}(t, z) = \sum_J (R\varepsilon)^{(d-1)(J_K-1)} \frac{(N-1)!}{(N-J_K)!} \sum_{m \in \mathcal{M}_J} \Xi_{N,R}^{(1,K)}(J, m) \quad (2.8.2.4)$$

and

$$g_R^{(1,K)}(t, z) = \sum_J R^{(d-1)(J_K-1)} \sum_{m \in \mathcal{M}_J} \Upsilon_{N,R}^{(1,K)}(J, m) \quad (2.8.2.5)$$

where denoting by χ the product of all the smooth indicator functions which are involved,

$$\Xi_{N,R}^{(1,K)}(J, m) := \int_{\mathcal{T}_{J,\delta(\tau)}} dT \int_{(\mathbf{S}^{d-1} \times B_E)^{J_K-1}} d\nu_1 \dots d\nu_{J_K} dv_2 \dots dv_{J_K} \chi \prod_{i=1}^{J_K-1} (\nu_{i+1} \cdot (v_{i+1} - v_{m_i}(t_i))) \tilde{f}_{N,R}^{0(J_K)}(Z_{J_K}(0)) \quad (2.8.2.6)$$

and

$$\Upsilon_R^{(1,K)}(J, m) := \int_{\mathcal{T}_{J,\delta(\tau)}} dT \int_{(\mathbf{S}^{d-1} \times B_E)^{J_K-1}} d\nu_1 \dots d\nu_{J_K} dv_2 \dots dv_{J_K} \chi \prod_{i=1}^{J_K-1} (\nu_{i+1} \cdot (v_{i+1} - v_{m_i}(t_i))) g_R^{0(J_K)}(Z_{J_K}^{0,R}(0)). \quad (2.8.2.7)$$

Then the only differences between those two series are the prefactors $\varepsilon^{(d-1)(J_K-1)} \frac{(N-1)!}{(N-J_K)!}$, the small error on the positions $Z_{J_K}(0)$ and $Z_{J_K}^{0,R}(0)$ and the initial data $\tilde{f}_{N,R}^{0(J_K)}$ and $g_R^{0(J_K)}$. Using the identity $N\varepsilon^{d-1} = 1$, we can prove that the prefactors converges to 1 at infinity. Moreover, we have the following identity

$$\begin{aligned} & \left| \tilde{f}_{N,R}^{0(J_K)}(Z_{J_K}(0)) - g_R^{0(J_K)}(Z_{J_K}^{0,R}(0)) \right| \\ & \leq \left| \tilde{f}_{N,R}^{0(J_K)}(Z_{J_K}(0)) - g_R^{0(J_K)}(Z_{J_K}(0)) \right| + \left| g_R^{0(J_K)}(Z_{J_K}(0)) - g_R^{0(J_K)}(Z_{J_K}^{0,R}(0)) \right| \end{aligned} \quad (2.8.2.8)$$

Then using Proposition 2.8.3 and Proposition 2.8.4 together with the continuity of g_R^0 leads to the conclusion. $\square$

Finally, the convergence to 0 of the difference between the truncated marginals and the marginals can be obtained as stated in the following proposition that is proven in Appendix 2.10.2.

Proposition 2.8.6. *For the initial data f_N^0 given in (2.2.1.1), for all $t \geq 0$, the difference between $f_{N,R}^{(s)}(t)$, the marginal of order s , and $\tilde{f}_{N,R}^{(s)}(t)$, the truncated marginals of order s , converges to 0 as N goes to ∞ under the Boltzmann-Grad scaling $N\varepsilon^{d-1} = 1$.*

Thus, we finally have proved one of our main result:

Theorem 2.8.7. *Consider the initial distribution f_N^0 defined in (2.2.1.1), the distribution of the tagged particle $f_N^{(1)}(t, x, v)$ converges in $\mathcal{D}'(\mathbf{T}^d \times \mathbf{R}^d)$ as N goes to ∞ under the Boltzmann-Grad scaling $N\varepsilon^{d-1} = 1$ to $g_R(t, x, v)$ with initial data g_R^0 stated in (2.8.1.3) on a fixed $[0, t]$.*

Finally, in order to prove the main theorem of this paper announced in Theorem 2.2.1, it remains to prove the convergence of Boltzmann with cut-off to Boltzmann without cut-off

2.9 From Boltzmann with cut-off to Boltzmann without cut-off

For h_R satisfying the linear Boltzmann equation with cut-off, with initial data ρ^0 , then the family $(h_R(t, z) M_\beta^{\otimes s}(V_s))_{s \geq 1}$ is a solution to the Boltzmann with cut-off hierarchy.

However by definition, $(g_R^{(s)})_{s \geq 1}$ is already a solution too. Then by uniqueness of the hierarchy, $g_R(t, z) = h_R(t, z)M_\beta(v)$. Then, if we prove that h_R solution of the Boltzmann equation with cut-off converges as R goes to ∞ to h solution of the Boltzmann equation without cut-off, we would have completed the proof of Theorem 2.2.1.

Proposition 2.9.1. *For ρ^0 initial data, the solution h_R of the Boltzmann equation with cut-off converges (up to an extraction of subsequence) in L^∞ weak-* to a solution h of the Boltzmann equation without cut-off.*

Proof. h_R being a solution of the Boltzmann equation with cut-off, for φ a test function, it satisfies:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T \int_{\mathbf{T}^d} \int_{\mathbf{R}^d} h_R(t, x, v) (\partial_t \varphi + v \cdot \nabla_x \varphi) dv dx dt \\ & \quad - \int_{\mathbf{T}^d} \int_{\mathbf{R}^d} \rho^0(x, v) \varphi(0, x, v) dv dx \\ & = \int_0^T \int_{\mathbf{T}^d} \int_{\mathbf{R}^d} h_R(t, x, v) \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} R^{d-1} [\varphi(t, x, v) - \varphi(t, x, v^{*R})] M_\beta(v_1) ((v - v_1) \cdot \nu)_+ dv_1 d\nu dx dt. \end{aligned} \quad (2.9.0.1)$$

Applying the maximum principle, we know that the sequence h_R (up to an extraction of a subsequence) converges weak-* in L^∞ to a function h . So we can pass to the limit on the left-hand side of (2.9.0.1).

Let us now deal with the right-hand side of (2.9.0.1) and study

$$\left(\int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} R^{d-1} [\varphi(t, x, v) - \varphi(t, x, v^{*R})] M_\beta(v_1) ((v - v_1) \cdot \nu)_+ dv_1 d\nu \right)_{R>0} \quad (2.9.0.2)$$

Actually, it is enough to study the difference between the two following terms

$$\int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} R^{d-1} [\varphi(t, x, v) - \varphi(t, x, v^{*R})] M_\beta(v_1) ((v - v_1) \cdot \nu)_+ dv_1 d\nu \quad (2.9.0.3)$$

and

$$\int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} (2R)^{d-1} [\varphi(t, x, v) - \varphi(t, x, v^{*2R})] M_\beta(v_1) ((v - v_1) \cdot \nu)_+ dv_1 d\nu \quad (2.9.0.4)$$

to conclude. Regarding this last term, let us split it in two terms by distinguishing two situations for the trajectories involved in it:

- one where the trajectories get into the sphere of radius $2R$ without getting into the sphere of radius R , implying particles involved to be barely deviated for large R ,
- one where the trajectories get into the sphere of radius R .

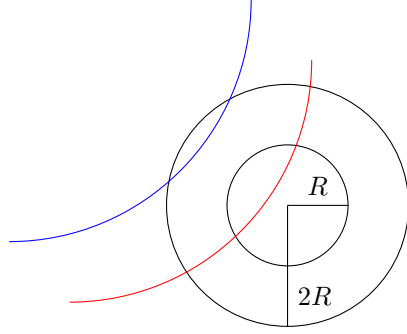


FIGURE 8. Representation of the two types of trajectories involved

Let us start with the first type of trajectories. The situation described is equivalent to work with the potential $\nabla\Phi\chi_{[R,2R]}$ where $\chi_{[R,2R]}$ is a regularization of $\mathbf{1}_{[R,2R]}$ such that it is equal to 1 on $[R, 2R]$. Thus the evolution of the positions and the velocities is the following

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = -\nabla\Phi(x)\chi_{[R,2R]}. \end{cases} \quad (2.9.0.5)$$

Therefore integrating (2.9.0.5) and by assumptions on $\nabla\Phi$, we get

$$|v(t) - v_0| \leq \exp\left(-\exp\left(12 \exp\left(\tilde{C}^2 R^{2(d-1)} \log 2\right)\right)\right) t \quad (2.9.0.6)$$

Moreover, using the bound of the maximal time of interaction stated in Proposition 2.4.2, we obtain that

$$|v(t) - v_0| \leq \exp\left(-\exp\left(12 \exp\left(\tilde{C}^2 R^{2(d-1)} \log 2\right)\right)\right) \frac{R^2}{\eta}. \quad (2.9.0.7)$$

Thus, for $\tilde{\varphi} : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ a regular test function, we deduce from above that

$$|\tilde{\varphi}(v^{*R}) - \tilde{\varphi}(v)| \leq C \|\nabla\tilde{\varphi}\|_{\infty} \exp\left(-\exp\left(12 \exp\left(\tilde{C}^2 R^{2(d-1)} \log 2\right)\right)\right) \frac{R^2}{\eta}. \quad (2.9.0.8)$$

Consequently, for the order of magnitude of our parameters stated in (2.7.0.1), (2.7.0.2) and (2.7.0.3), the part of the integral (2.9.0.3) corresponding to those trajectories converges to 0.

Let us deal with the second type of trajectories. First of all, let us notice that the difference between the trajectory and the free transport in the annulus goes to 0 as R grows. So the trajectory in the annulus can reasonably be approximated by straight lines and together with the inequality (2.9.0.7), we deduce that $v^{*R} - v^{*2R}$ converges to 0 from

$$|v^{*R} - v^{*2R}| \leq C \exp\left(-\exp\left(12 \exp\left(\tilde{C}^2 R^{2(d-1)} \log 2\right)\right)\right) \frac{R^2}{\eta}. \quad (2.9.0.9)$$

Moreover, let us make a change of parametrization in (2.9.0.4) by parametrizing the unit sphere by (θ, ψ) with $\psi \in \mathbf{S}^{d-2}$, we have

$$d\nu = (\sin \theta)^{d-2} d\theta d\psi dv_1. \quad (2.9.0.10)$$

Since the trajectories described in the second situation correspond to $\sin \theta < 1/2$, we do the following change of variable $\sin \theta' = 2 \sin \theta$. Then, we get

$$\begin{aligned} & \int_{(\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d) \cap \{\sin \theta < 1/2\}} (2R)^{d-1} [\varphi(t, x, v) - \varphi(t, x, v^{*2R})] M_\beta(v_1)((v - v_1) \cdot \nu)_+ dv_1 dv \\ &= \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} R^{d-1} [\varphi(t, x, v) - \varphi(t, x, v^{*2R})] M_\beta(v_1)((v - v_1) \cdot \nu)_+ dv_1 dv. \end{aligned} \quad (2.9.0.11)$$

Thus finally,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} R^{d-1} [\varphi(t, x, v) - \varphi(t, x, v^{*R})] M_\beta(v_1)((v - v_1) \cdot \nu)_+ dv_1 dv \\ & - \int_{(\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d) \cap \{\sin \theta < 1/2\}} (2R)^{d-1} [\varphi(t, x, v) - \varphi(t, x, v^{*2R})] M_\beta(v_1)((v - v_1) \cdot \nu)_+ dv_1 dv \\ &= \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} R^{d-1} [\varphi(t, x, v^{*2R}) - \varphi(t, x, v^{*R})] M_\beta(v_1)((v - v_1) \cdot \nu)_+ dv_1 dv. \end{aligned} \quad (2.9.0.12)$$

Using similarly as previously the regularity of φ and the rate of convergence of $v^{*R} - v^{*2R}$ proves the convergence of the above term to 0 which concludes the proof. $\square$

2.10 Appendix

2.10.1 A priori estimates

In order to prove the a priori estimates, let us first establish the following lemma:

Lemma 2.10.1. *For $N > 0$, $s \leq N$, in the Boltzmann-Grad scaling $N\varepsilon^{d-1} = 1$, we have the following bound for $\overline{\mathcal{Z}}_N$ defined in (2.2.1.3)*

$$1 \leq \overline{\mathcal{Z}}_N^{-1} \overline{\mathcal{Z}}_{N-s} \leq (1 - \kappa_d R^d \varepsilon)^{-s} \exp(\beta s^2 \|\Phi_{>}\|_\infty) \quad (2.10.1.1)$$

where κ_d denotes the volume of the unit ball in $\mathbf{R}^d$.

Proof. We have due to the nonnegativity of Φ that

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{Z}}_{s+1} &= \int_{\mathbf{T}^{ds}} \left(\int_{\mathbf{T}^d} \exp \left(-\beta \sum_{1 \leq i \leq s} \Phi \left(\frac{x_i - x_{s+1}}{\varepsilon} \right) dx_{s+1} \right) \right) \exp \left(-\beta \sum_{1 \leq k < l \leq s} \Phi \left(\frac{x_k - x_l}{\varepsilon} \right) \right) dX_s \\ &\leq \int_{\mathbf{T}^{ds}} \exp \left(-\beta \sum_{1 \leq k < l \leq s} \Phi \left(\frac{x_k - x_l}{\varepsilon} \right) \right) dX_s = \overline{\mathcal{Z}}_s. \end{aligned}$$

On the other hand,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{Z}}_{s+1} &\geq \int_{\mathbf{T}^{ds}} \int_{\mathbf{T}^d} \exp \left(-\beta \sum_{1 \leq i \leq s} \Phi \left(\frac{x_i - x_{s+1}}{\varepsilon} \right) \right) \prod_{1 \leq i \leq s} \mathbf{1}_{|x_i - x_{s+1}| > R\varepsilon} dx_{s+1} \\
&\quad \exp \left(-\beta \sum_{1 \leq k < l \leq s} \Phi \left(\frac{x_k - x_l}{\varepsilon} \right) \right) dX_s \\
&= \int_{\mathbf{T}^{ds}} \int_{\mathbf{T}^d} \exp \left(-\beta \sum_{1 \leq i \leq s} \Phi^> \left(\frac{x_i - x_{s+1}}{\varepsilon} \right) \right) \\
&\quad \prod_{1 \leq i \leq s} \mathbf{1}_{|x_i - x_{s+1}| > R\varepsilon} dx_{s+1} \exp \left(-\beta \sum_{1 \leq k < l \leq s} \Phi \left(\frac{x_k - x_l}{\varepsilon} \right) \right) dX_s \\
&\geq \int_{\mathbf{T}^{ds}} \int_{\mathbf{T}^d} \exp (-\beta s \|\Phi^>\|_\infty) \\
&\quad \prod_{1 \leq i \leq s} \mathbf{1}_{|x_i - x_{s+1}| > R\varepsilon} dx_{s+1} \exp \left(-\beta \sum_{1 \leq k < l \leq s} \Phi \left(\frac{x_k - x_l}{\varepsilon} \right) \right) dX_s \\
&\geq \exp (-\beta s \|\Phi^>\|_\infty) \int_{\mathbf{T}^{ds}} \left(\int_{\mathbf{T}^d} \prod_{1 \leq i \leq s} \mathbf{1}_{|x_i - x_{s+1}| > R\varepsilon} dx_{s+1} \right) \exp \left(-\beta \sum_{1 \leq k < l \leq s} \Phi \left(\frac{x_k - x_l}{\varepsilon} \right) \right) dX_s.
\end{aligned}$$

However we know that

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbf{T}^d} \prod_{1 \leq i \leq s} \mathbf{1}_{|x_i - x_{s+1}| > R\varepsilon} dx_{s+1} &\geq \int_{\mathbf{T}^d} \left(1 - \sum_{1 \leq i \leq s} \mathbf{1}_{|x_i - x_{s+1}| \leq R\varepsilon} \right) dx_{s+1} \\
&= 1 - \kappa_d s (R\varepsilon)^d.
\end{aligned}$$

Therefore finally,

$$\begin{aligned}
\overline{\mathcal{Z}}_{s+1} &\geq \exp (-\beta s \|\Phi^>\|_\infty) \overline{\mathcal{Z}}_s (1 - \kappa_d s (R\varepsilon)^d) \\
&\geq \exp (-\beta s \|\Phi^>\|_\infty) \overline{\mathcal{Z}}_s (1 - \kappa_d N (R\varepsilon)^d) \\
&= \exp (-\beta s \|\Phi^>\|_\infty) \overline{\mathcal{Z}}_s (1 - \kappa_d R^d \varepsilon)
\end{aligned}$$

and by induction

$$\overline{\mathcal{Z}}_N \geq \exp (-\beta s^2 \|\Phi^>\|_\infty) \overline{\mathcal{Z}}_{N-s} (1 - \kappa_d R^d \varepsilon)^s$$

which allow us to obtain the expected bounds. $\square$

We recall here the definitions for the truncated marginals $\tilde{f}_{N,R}^{(s)}$ and the term associated to clusters $\tilde{f}_{N,R}^{(s)}$:

$$\tilde{f}_{N,R}^{(s)}(t, Z_s) := \int_{\mathbf{T}^{d(N-s)} \times \mathbf{R}^{d(N-s)}} f_N(t, Z_s, z_{s+1}, \dots, z_N) \prod_{\substack{1 \leq i \leq s \\ s+1 \leq j \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_i - x_j| > R\varepsilon\}} dZ_{(s+1,N)} \quad (2.10.1.2)$$

and

$$\begin{aligned} \bar{f}_{N,R}^{(s+1)}(t, Z_{s+1}) &:= \int_{\mathbf{T}^{d(N-(s+1))} \times \mathbf{R}^{d(N-(s+1))}} f_N(t, Z_N) \\ &\quad \left(\prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ s+2 \leq l \leq N}} \mathbf{1}_{|x_k - x_l| > R\varepsilon} \right) \left(1 - \prod_{j=s+2}^N \mathbf{1}_{|x_j - x_{s+1}| > R\varepsilon} \right) dZ_{(s+2,N)}. \end{aligned} \quad (2.10.1.3)$$

Proposition 2.10.1. *For any fixed N , considering the initial data (2.2.1.1) for any $s \geq 1$, we have the following uniform bound (with respect to time)*

$$\sup_{t \geq 0} \|\tilde{f}_{N,R}^{(s)}(t)\|_{\varepsilon,s,\beta} \leq \|\rho^0\|_{\infty} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} (1 - \varepsilon \kappa_d R^d)^{-s} \exp(\beta s^2 \|\Phi^>\|_{\infty}) \quad (2.10.1.4)$$

and

$$\sup_{t \geq 0} \|\bar{f}_{N,R}^{(s)}(t)\|_{\varepsilon,s,\beta} \leq \|\rho^0\|_{\infty} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} (1 - \varepsilon \kappa_d R^d)^{-(s-1)} \exp(\beta s^2 \|\Phi^>\|_{\infty}) R^d \varepsilon. \quad (2.10.1.5)$$

Proof. We have that

$$f_N^0(Z_N)(t, Z_N) = M_{N,\beta}(Z_N) \rho^0(x_1) \leq M_{N,\beta}(Z_N) \|\rho^0\|_{\infty}. \quad (2.10.1.6)$$

Applying the maximum principle for the Liouville equation, $M_{N,\beta}$ being a stationary solution, we obtain for all $t \in \mathbf{R}$

$$f_N(t, Z_N) \leq M_{N,\beta}(Z_N) \|\rho^0\|_{\infty}. \quad (2.10.1.7)$$

In order to obtain the bounds, we need to multiply (2.10.1.7) by the appropriate terms and integrate.

First, we are interested in the truncated marginals $\tilde{f}_{N,R}^{(s)}$

$$\begin{aligned} |\tilde{f}_{N,R}^{(s)}(t, Z_s)| &= \int_{\mathbf{T}^{d(N-s)} \times \mathbf{R}^{d(N-s)}} f_N(t, Z_N) \prod_{\substack{1 \leq i \leq s \\ s+1 \leq j \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_i - x_j| > R\varepsilon\}} dZ_{(s+1,N)} \\ &\leq \frac{1}{\bar{\mathcal{Z}}_N} \int_{\mathbf{T}^{d(N-s)} \times \mathbf{R}^{d(N-s)}} \|\rho^0\|_{\infty} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{dN/2} \exp(-\beta H_N(Z_N)) \prod_{\substack{1 \leq i \leq s \\ s+1 \leq j \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_i - x_j| > R\varepsilon\}} dZ_{(s+1,N)} \\ &\leq \frac{1}{\bar{\mathcal{Z}}_N} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} \|\rho^0\|_{\infty} \exp(-\beta H_s(Z_s)) \int_{\mathbf{T}^{d(N-s)}} \exp \left(-\beta \sum_{s+1 \leq i < j \leq N} \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right) \right) dX_{(s+1,N)} \\ &\leq \bar{\mathcal{Z}}_N^{-1} \bar{\mathcal{Z}}_{N-s} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} \|\rho^0\|_{\infty} \exp(-\beta H_s^<(Z_s)) \end{aligned}$$

using the fact that $\Phi^< \leq \Phi$ and Φ is nonnegative. Hence

$$|\tilde{f}_{N,R}^{(s)}(t, Z_s) \exp(\beta H_s^<(Z_s))| \leq \|\rho^0\|_{\infty} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} \bar{\mathcal{Z}}_N^{-1} \bar{\mathcal{Z}}_{N-s}$$

and finally

$$\sup_{t \geq 0} \|\tilde{f}_{N,R}^{(s)}(t)\|_{\varepsilon,s,\beta} \leq \|\rho^0\|_{\infty} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} \bar{\mathcal{Z}}_N^{-1} \bar{\mathcal{Z}}_{N-s}.$$

We perform the same computations for $\bar{f}_{N,R}^{(s)}$

$$\begin{aligned}
|\bar{f}_{N,R}^{(s)}(t, Z_s)| &= \int_{\mathbf{T}^{d(N-s)} \times \mathbf{R}^{d(N-s)}} f_N(t, Z_N) \left(\prod_{\substack{1 \leq k \leq s-1 \\ s+1 \leq l \leq N}} \mathbf{1}_{|x_k - x_l| > R\varepsilon} \right) \left(1 - \prod_{j=s+1}^N \mathbf{1}_{|x_j - x_s| > R\varepsilon} \right) dZ_{(s+1,N)} \\
&\leq \frac{1}{\bar{Z}_N} \int_{\mathbf{T}^{d(N-s)} \times \mathbf{R}^{d(N-s)}} \|\rho^0\|_\infty \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{dN/2} \exp(-\beta H_N(Z_N)) \left(1 - \prod_{j=s+1}^N \mathbf{1}_{|x_j - x_s| > R\varepsilon} \right) \\
&\leq \frac{1}{\bar{Z}_N} \|\rho^0\|_\infty \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} \exp(-\beta H_s^<(Z_s)) \\
&\quad \sum_{j=s+1}^N \int_{\mathbf{T}^{d(N-(s+1))}} \left(\int_{\mathbf{T}^d} \left(\mathbf{1}_{|x_j - x_s| \leq R\varepsilon} \right) dx_j \right) \exp \left(-\beta \sum_{\substack{s+1 \leq k < l \leq N \\ k, l \neq j}} \Phi \left(\frac{x_k - x_l}{\varepsilon} \right) \right) \\
&\quad dx_{s+1} dx_{s+2} \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_N \\
&\leq \|\rho^0\|_\infty \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} R^d \varepsilon \bar{Z}_N^{-1} \bar{Z}_{N-(s+1)} \exp(-\beta H_s^<(Z_s)).
\end{aligned}$$

Hence

$$|\bar{f}_{N,R}^{(s)}(t, Z_s) \exp(\beta H_s^<(Z_s))| \leq \|\rho^0\|_\infty \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} R^d \varepsilon \bar{Z}_N^{-1} \bar{Z}_{N-(s+1)}$$

and finally

$$\sup_{t \geq 0} \|\bar{f}_{N,R}^{(s)}(t)\|_{\varepsilon, s, \beta} \leq \|\rho^0\|_\infty \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} R^d \varepsilon \bar{Z}_N^{-1} \bar{Z}_{N-(s+1)}$$

and we get the desired bound using again Lemma 2.10.1. $\square$

2.10.2 Asymptotical factorisation of the initial data

Proposition 2.10.2. *Given $\beta > 0$, $s \geq 1$, the truncated marginal of order s*

$$\tilde{M}_{N,\beta}^{(s)} := \int M_{N,\beta}(Z_N) \prod_{\substack{1 \leq i \leq s \\ s+1 \leq j \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_i - x_j| > R\varepsilon\}} dZ_{(s+1,N)}$$

converges as N goes to ∞ , under the Boltzmann-Grad scaling $N\varepsilon^{d-1} = 1$ to the Maxwell distribution $M_\beta^{\otimes s}$ where $M_\beta^{\otimes s} := \prod_{i=1}^s M_\beta(v_i)$ and $M_\beta(v) := \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{d/2} \exp\left(-\frac{\beta}{2}|v|^2\right)$.

Proof. We have that

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_{N,\beta}^{(s)}(Z_s) &= \frac{1}{\bar{\mathcal{Z}}_N} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{dN/2} \int \exp \left(-\frac{\beta}{2\pi} \sum_{i=1}^N |v_i|^2 - \beta \sum_{1 \leq i < j \leq N} \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right) \right) \\
&\quad \prod_{\substack{1 \leq i \leq s \\ s+1 \leq j \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_i - x_j| > R\varepsilon\}} dZ_{(s+1,N)} \\
&= \frac{1}{\bar{\mathcal{Z}}_N} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} \exp \left(-\frac{\beta}{2\pi} \sum_{i=1}^s |v_i|^2 \right) \exp \left(-\beta \sum_{1 \leq i < j \leq s} \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right) \right) \\
&\quad \int \exp \left(-\beta \sum_{s+1 \leq i < j \leq N} \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right) \right) \exp \left(-\beta \sum_{i' \leq s < j'} \Phi \left(\frac{x'_{i'} - x'_{j'}}{\varepsilon} \right) \right) \\
&\quad \prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ s+1 \leq l \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_k - x_l| > R\varepsilon\}} dX_{(s+1,N)} \\
&= \frac{1}{\bar{\mathcal{Z}}_N} \left(\frac{\beta}{2\pi} \right)^{ds/2} \exp \left(-\frac{\beta}{2\pi} \sum_{i=1}^s |v_i|^2 \right) \exp \left(-\beta \sum_{1 \leq i < j \leq s} \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right) \right) \\
&\quad [\bar{\mathcal{Z}}_{N-s} - \bar{\mathcal{Z}}_{(s+1,N)}^\flat]
\end{aligned}$$

because of the symmetry, with

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{Z}}_{(s+1,N)}^\flat &:= \int \exp \left(-\beta \sum_{s+1 \leq i < j \leq N} \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right) \right) \left(1 - \exp \left(-\beta \sum_{i' \leq s < j'} \Phi \left(\frac{x'_{i'} - x'_{j'}}{\varepsilon} \right) \right) \right) \\
&\quad \prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ s+1 \leq l \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_k - x_l| > R\varepsilon\}} dX_{(s+1,N)}.
\end{aligned}$$

Yet,

$$\begin{aligned}
\frac{\bar{\mathcal{Z}}_{(s+1,N)}^\flat}{\bar{\mathcal{Z}}_N} &\leq \frac{1}{\bar{\mathcal{Z}}_N} \int \exp \left(-\beta \sum_{s+1 \leq i < j \leq N} \Phi \left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon} \right) \right) (1 - \exp(-\beta s^2 \|\Phi\|_\infty)) \\
&\quad \prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ s+1 \leq l \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_k - x_l| > R\varepsilon\}} dX_{(s+1,N)}
\end{aligned}$$

because of the monoticity of Φ in Assumption 2.4.1. Finally,

$$\frac{\bar{\mathcal{Z}}_{(s+1,N)}^\flat}{\bar{\mathcal{Z}}_N} \leq \frac{\bar{\mathcal{Z}}_{N-s}}{\bar{\mathcal{Z}}_N} (1 - \exp(-\beta s^2 \|\Phi\|_\infty))$$

using again the symmetry.

Because of the Assumption 2.4.1, Lemma 2.10.1 allow us to prove that $\frac{\bar{\mathcal{Z}}_{N-s}}{\bar{\mathcal{Z}}_N}$ and $\frac{\bar{\mathcal{Z}}_{N-s-1}}{\bar{\mathcal{Z}}_N}$ both converge to 1 as N goes to ∞ . Using the decreasing assumption on the potential leads to the statement that $\frac{\bar{\mathcal{Z}}_{(s+1,N)}^\flat}{\bar{\mathcal{Z}}_N}$ converges to 0 as N goes to ∞ .

So finally,

$$|\tilde{M}_{N,\beta}^{(s)}(Z_s) - M_{\beta}^{\otimes s}(V_s)| = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{ds/2} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^s |v_i|^2\right) \left(\frac{\bar{Z}_{N-s}}{\bar{Z}_N} \exp\left(-\beta \sum_{1 \leq i < j \leq s} \Phi\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right)\right) - 1 - \frac{\bar{Z}_{(s+1,N)}^b}{\bar{Z}_N} \exp\left(-\beta \sum_{1 \leq i < j \leq s} \Phi\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right)\right)\right)$$

and using that by assumptions Φ vanishes at infinity, and the statements of above about $\frac{\bar{Z}_{N-s}}{\bar{Z}_N}$ and $\frac{\bar{Z}_{(s+1,N)}^b}{\bar{Z}_N}$, we conclude that this difference converges to 0 as N goes to ∞ which is precisely the assertion of the proposition. $\square$

Corollary 2.10.3. *For the initial data f_N given in (2.2.1.1), the truncated marginal of order s*

$$\tilde{f}_N^{(s)} := \int f_N^0(Z_N) \prod_{\substack{1 \leq i \leq s \\ s+1 \leq j \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_i - x_j| > R\varepsilon\}} dZ_{(s+1,N)} = \rho^0(x_1) \tilde{M}_{N,\beta}^{(s)}(Z_s) \quad (2.10.2.1)$$

converges as N goes to ∞ , under the Boltzmann-Grad scaling $N\varepsilon^{d-1} = 1$, to the function $g^{(s)}$ where $g^{(s)}$ is defined by $g^{(s)}(Z_s) := \rho^0(x_1) M_{\beta}^{\otimes s}(V_s)$.

The proof is straightforward using the fact that ρ^0 is bounded.

Proposition 2.10.4. *For the initial data f_N^0 given in (2.2.1.1), for all $t \geq 0$, the difference between $f_{N,R}^{(s)}(t)$, the marginal of order s , and $\tilde{f}_{N,R}^{(s)}(t)$, the truncated marginals of order s , converges when N goes to ∞ under the Boltzmann-Grad scaling $N\varepsilon^{d-1} = 1$ to 0.*

Proof. We have that

$$\begin{aligned} |f_{N,R}^{(s)}(t, Z_s) - \tilde{f}_{N,R}^{(s)}(t, Z_s)| &= \int f_{N,R}(t, Z_N) \left(1 - \prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ s+1 \leq l \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_k - x_l| > R\varepsilon\}}\right) dZ_{(s+1,N)} \\ &\leq \|\rho^0\|_{\infty} \int M_{N,\beta}(t, Z_N) \left(1 - \prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ s+1 \leq l \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_k - x_l| > R\varepsilon\}}\right) dZ_{(s+1,N)} \\ &\leq \frac{\|\rho^0\|_{\infty}}{\bar{Z}_N} \left(\frac{\beta}{2}\right)^{ds/2} \exp\left(-\frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^s |v_i|^2\right) \exp\left(-\beta \sum_{1 \leq i < j \leq s} \Phi\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right)\right) \\ &\quad \int \left(1 - \prod_{\substack{1 \leq k \leq s \\ s+1 \leq l \leq N}} \mathbf{1}_{\{|x_k - x_l| > R\varepsilon\}}\right) \exp\left(-\beta \sum_{s+1 \leq i < j \leq N} \Phi\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right)\right) \\ &\quad \exp\left(-\beta \sum_{i' \leq s < j'} \Phi\left(\frac{x'_i - x'_j}{\varepsilon}\right)\right) dX_{(s+1,N)} \\ &\leq \frac{\|\rho^0\|_{\infty}}{\bar{Z}_N} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{ds/2} \exp(-\beta H_s(Z_s)) \\ &\quad (N-s) \sum_{i=1}^s \int \mathbf{1}_{|x_k - x_{s+1}| \leq R\varepsilon} \exp\left(-\beta \sum_{s+1 \leq i < j \leq N} \Phi\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right)\right) dX_{(s+1,N)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\|\rho^0\|_\infty}{\bar{\mathcal{Z}}_N} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{ds/2} \exp(-\beta H_s(Z_s)) \\
&\quad (N-s) \sum_{i=1}^s \int \exp\left(-\beta \sum_{s+2 \leq i < j \leq N} \Phi\left(\frac{x_i - x_j}{\varepsilon}\right)\right) \int \mathbf{1}_{|x_k - x_{s+1}| \leq R\varepsilon} dx_{s+1} dX_{(s+2, N)} \\
&\leq \frac{\|\rho^0\|_\infty}{\bar{\mathcal{Z}}_N} \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{ds/2} \exp(-\beta H_s(Z_s)) (N-s) s (R\varepsilon)^d \kappa_d \bar{\mathcal{Z}}_{N-s-1} \\
&\leq \frac{\bar{\mathcal{Z}}_{N-s-1}}{\bar{\mathcal{Z}}_N} \|\rho^0\|_\infty \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^{ds/2} \exp(-\beta H_s(Z_s)) s R^d \varepsilon \kappa_d
\end{aligned}$$

which concludes the proof. $\square$

2.10.3 Continuity estimates

We recall the definition of the weighted norms: for f_k defined on $\mathbf{T}^{dk} \times \mathbf{R}^{dk}$,

$$\|f_k\|_{\varepsilon, k, \alpha} := \sup_{Z_k \in \mathbf{T}^{dk} \times \mathbf{R}^{dk}} |f_k(Z_k) \exp(\alpha H_k^<(Z_k))| < \infty$$

Lemma 2.10.2. *There is a constant C_d depending only on d such that for all $s, n \in \mathbf{N}$, $t \geq 0$, the operators $|Q|_{s, s+n}(t)$ satisfy the following continuity estimates: for all $f_{s+n} \in X_{\varepsilon, s+n, \alpha}$, $|Q|_{s, s+n}(t)f_{s+n}$ belongs to $X_{\varepsilon, s, \frac{\alpha}{2}}$ and*

$$\||Q|_{s, s+n}(t)f_{s+n}\|_{\varepsilon, s, \frac{\alpha}{2}} \leq e^{s-1} \left(\frac{C_d R^{d-1} t}{\alpha^{\frac{d+1}{2}}}\right)^n \|f_{s+n}\|_{\varepsilon, s+n, \alpha}. \quad (2.10.3.1)$$

Proof. First of all, let us notice that the transport operators preserve the weighted norms. Indeed, we have the following identities

$$\|\mathcal{S}_k(t)f_k\|_{\varepsilon, k, \alpha} = \|f_k\|_{\varepsilon, k, \alpha}. \quad (2.10.3.2)$$

Second, let us obtain some bounds for the collision operators in the Boltzmann-Grad scaling $N\varepsilon^{d-1} = 1$. We have

$$\begin{aligned}
|\mathcal{C}_{s, s+1}f_{s+1}(Z_s)| &= |(N-s) \sum_{i=1}^s \int_{S_{R\varepsilon}(x_i) \times \mathbf{R}^d} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s \mathbf{1}_{|x_j - x_{s+1}| > R\varepsilon} \right) \nu^{s+1, i} \cdot (v_{s+1} - v_i) \\
&\quad f_{s+1}(Z_{s+1}) d\sigma_i(x_{s+1}) dv_{s+1}| \\
&\leq (N-s) \sum_{i=1}^s \int_{S_{R\varepsilon}(x_i) \times \mathbf{R}^d} (|v_{s+1}| + |v_i|) f_{s+1}(Z_{s+1}) d\sigma_i(x_{s+1}) dv_{s+1} \\
&\leq R^{d-1} \|f_{s+1}\|_{\varepsilon, s+1, \alpha} \sum_{i=1}^s \int_{\mathbf{R}^d} (|v_{s+1}| + |v_i|) \exp(-\alpha H_{s+1}^<(Z_{s+1})) dv_{s+1} \\
&\leq R^{d-1} \|f_{s+1}\|_{\varepsilon, s+1, \alpha} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} H_s^<(Z_s)\right) \\
&\quad \sum_{i=1}^s \int_{\mathbf{R}^d} (|v_{s+1}| + |v_i|) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} H_{s+1}^<(Z_{s+1})\right) dv_{s+1} \\
&\leq R^{d-1} \|f_{s+1}\|_{\varepsilon, s+1, \alpha} \exp\left(-\frac{\alpha}{2} H_s^<(Z_s)\right) \\
&\quad \sum_{i=1}^s \int_{\mathbf{R}^d} (|v_{s+1}| + |v_i|) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{s+1} |v_k|^2\right) dv_{s+1}.
\end{aligned}$$

We know by a direct calculation that

$$\int_{\mathbf{R}^d} (|v_{s+1}| + |v_i|) \exp \left(-\frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^{s+1} |v_k|^2 \right) dv_{s+1} \leq C_d \alpha^{-d/2} (\alpha^{-1/2} + |v_i|) \exp \left(-\frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^s |v_k|^2 \right).$$

So in the end,

$$|\mathcal{C}_{s,s+1} f_{s+1}(Z_s)| \leq C_d R^{d-1} \alpha^{-d/2} (s \alpha^{-1/2} + \sum_{i=1}^s |v_i|) \exp \left(-\frac{\alpha}{2} \sum_{k=1}^s |v_k|^2 \right) \exp \left(-\frac{\alpha}{2} H_s^<(Z_s) \right) \|f_{s+1}\|_{\varepsilon, s+1, \alpha}. \quad (2.10.3.3)$$

Finally, we pile together those inequalities, dispatching the first exponential above evenly on each occurrence of a collision term. Noticing that by Cauchy-Schwarz inequality, we get that

$$\sum_{1 \leq i \leq k} |v_i| \exp \left(-\frac{\alpha}{4n} \sum_{1 \leq j \leq k} |v_j|^2 \right) \leq \sqrt{\frac{2}{e\alpha}} (s + n - 1) \quad (2.10.3.4)$$

and we are able to establish that each collision operator can be bounded by the term $C_d R^{d-1} \alpha^{(d+1)/2} (s + n - 1)$ with a loss on the exponential weight. By integrating with respect to time, we obtain a factor $t^n/n!$. All together with the Stirling formula, we are able to obtain the following bound

$$t^n \frac{(s + n - 1)^n}{n!} \leq t^n \exp(s + n - 1)$$

which allow us to conclude to the statement. $\square$

Bibliography

- [1] R. Alexandre. Remarks on 3D Boltzmann linear equation without cutoff. *Transport Theory and Statistical Physics*, 28(5):433–473, 1999.
- [2] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. Global Existence and Full Regularity of the Boltzmann Equation Without Angular Cutoff. *Communications in Mathematical Physics*, 304(2):513–581, 2011.
- [3] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: II, Global existence for hard potential. *Analysis and Applications*, 09(02):113–134, 2011.
- [4] R. Alexandre, Y. Morimoto, S. Ukai, C.-J. Xu, and T. Yang. The Boltzmann equation without angular cutoff in the whole space: I, Global existence for soft potential. *Journal of Functional Analysis*, 262(3):915 – 1010, 2012.
- [5] R. Alexandre and C. Villani. On The Boltzmann Equation For Long-Range Interactions. *Comm. Pure Appl. Math*, 55:30–70, 2002.
- [6] A. V. Boblylev, M. Pulvirenti, and C. Saffirio. From Particle Systems to the Landau Equation: A Consistency Result. *Communications in Mathematical Physics*, 319(3):683–702, 2012.

-
- [7] T. Bodineau, I. Gallagher, and L. Saint-Raymond. The Brownian motion as the limit of a deterministic system of hard-spheres. *Inventiones mathematicae*, 203(2):493–553, 2015.
 - [8] C. Cercignani. *The Boltzmann equation and its application*. Springer Verlag, 1988.
 - [9] L. Desvillettes and M. Pulvirenti. The linear Boltzmann equation for long-range forces: a derivation from particles system. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 09(08):1123–1145, 1999.
 - [10] I. Gallagher, L. Saint-Raymond, and B. Texier. *From Newton to Boltzmann: Hard Spheres and Short-range Potentials*. Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society, 2013.
 - [11] H. Grad. Principles of the Kinetic Theory of Gases. *Handbuch der Physik*, 12:205–294, 1958.
 - [12] P. T. Gressman, R. M. Strain, and R. V. Kadison. Global classical solutions of the Boltzmann equation with long-range interactions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 107(13):5744–5749, 2010.
 - [13] F. King. *BBGKY hierarchy for positive potentials*. PhD thesis, Dept. Mathematics, Univ. California, Berkeley, 1975.
 - [14] O. E. Lanford. Time evolution of large classical systems. In J. Moser, editor, *Dynamical Systems, Theory and Applications*, volume 38 of *Lecture Notes in Physics*, pages 1–111. Springer Berlin Heidelberg, 1975.
 - [15] M. Pulvirenti, C. Saffirio, and S. Simonella. On the validity of the Boltzmann equation for short range potentials. *Reviews in Mathematical Physics*, 26(02):1450001, 2014.
 - [16] H. Spohn. *Large scale dynamics of interacting particles*. Springer Science & Business Media, 2012.

Chapitre 3

High-Field Limit from a Stochastic BGK Model to a Scalar Conservation Law with Stochastic Forcing

On établit l'existence d'un modèle BGK stochastique avec champ fort. Sous une hypothèse additionnelle, on obtient la dérivation d'une loi de conservation scalaire avec forçage stochastique. On prouve alors la convergence vers une nouvelle formulation cinétique où apparaît une Maxwellienne modifiée. On déduit de cela l'existence d'une solution faible à une loi de conservation scalaire avec forçage stochastique pour laquelle des inégalités similaires à celles de Krushkov sont établies.

Ici, l'aléa est réparti dans le temps sous la forme d'une force extérieure agissant sur les particules avec une composante aléatoire.

Ce chapitre est le fruit d'un travail autonome. Il a été soumis pour publication sous le titre *High-field limit from a stochastic BGK model to a scalar conservation law with stochastic forcing* et est actuellement en révision.

Contents

3.1	Introduction	99
3.2	Settings and Main Results	100
3.3	Study of the stochastic BGK model with a high field scaling	102
3.3.1	The stochastic kinetic model	102
3.3.2	Convergence of the stochastic kinetic model	103
3.3.3	A kinetic formulation	107
3.4	Existence of a solution to the conservation law with stochastic forcing	111
3.4.1	Formal calculus and modified Maxwellian	111
3.4.2	Existence of a weak solution	113
3.4.3	Krushkov-like entropies	114
3.5	Appendix. Well posedness of the stochastic kinetic model	118
3.5.1	A truncated problem	118
3.5.2	Passage to the non truncated problem	121
	Bibliography	124

3.1 Introduction

In this paper, we are interested in the derivation of a solution to a scalar conservation law with stochastic forcing of the following form:

$$du + \operatorname{div}_x(B(x, u))dt = C(x, u)dW_t, \quad t \in (0, T), \quad x \in \mathbf{T}^N, \quad (3.1.0.1)$$

from a stochastic BGK like model,

$$dF^\varepsilon + \operatorname{div}_x(a(x, \xi)F^\varepsilon)dt + \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon}\partial_\xi F^\varepsilon dt = \frac{\mathbf{1}_{u_\varepsilon > \xi} - F^\varepsilon}{\varepsilon}dt - \partial_\xi F^\varepsilon \Phi dW + \frac{1}{2}\partial_\xi(G^2\partial_\xi F^\varepsilon)dt, \quad (3.1.0.2)$$

when ε goes to 0.

This type of problem belongs to the class of problems of hydrodynamical limits. The historical issue in that field goes back to the kinetic theory, first introduced by Maxwell and Boltzmann in order to model rarefied gas. Indeed, adopting a statistical point of view, a gas can be described by its density of particles f_ε , a function of time, position and velocity, satisfying at the mesoscopic level, the Boltzmann equation

$$\partial_t f_\varepsilon(t, x, \xi) + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon(t, x, \xi) = \frac{Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)}{\varepsilon}, \quad t \in \mathbf{R}_t^+, x \in \mathbf{R}_x^d, \xi \in \mathbf{R}_\xi^n, \quad (3.1.0.3)$$

where $Q(f_\varepsilon, f_\varepsilon)$ is a collision operator. Formally in that case, we obtain the following hydrodynamical limit: f_ε converges to a Maxwellian of parameter $\rho(t, x)$, $u(t, x)$ and $T(t, x)$ such that those three functions satisfy the Euler system. In other words, starting from the Boltzmann equation at the mesoscopic level, we expect to obtain the Euler system at the macroscopic level. However, this derivation is actually still an open question and motivated the introduction of the BGK model in [6], though partial results have been established as for example in the case of the incompressible Euler system for “well prepared initial data” of the asymptotic equations or solution to the scaled Boltzmann equation with additional non uniform a priori estimates (see [18] for a more complete state of the art). The idea of the BGK model is to replace the collision kernel by an easier term which keeps some properties associated to the Boltzmann equation. Those models have been then generalized by Perthame and Tadmor [17] to derive at the macroscopic level some scalar conservation laws. More precisely, the BGK model that they investigate in [17] is the following:

$$(\partial_t + a(\xi) \cdot \nabla_x) f_\varepsilon(t, x, \xi) = \frac{1}{\varepsilon} [\chi_{u_\varepsilon(t, x)}(\xi) - f_\varepsilon(t, x, \xi)], \quad (t, x, \xi) \in \mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x^d \times \mathbf{R}_\xi \quad (3.1.0.4)$$

with $u_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbf{R}} f_\varepsilon(t, x, \xi) d\xi$ and where $\chi_u(\xi) = \begin{cases} \operatorname{sgn} u & \text{if } (u - \xi)\xi \geq 0, \\ 0 & \text{if } (u - \xi)\xi < 0. \end{cases}$

At the macroscopic level, they derive the following multidimensional law

$$\partial_t u(t, x) + \sum_{i=1}^d \partial_{x_i} A_i(u(t, x)) = 0, \quad (t, x) \in \mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x^d, \quad (3.1.0.5)$$

with $A_i \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ and $a_i = A'_i$. Two main approaches are actually possible to get this scalar conservation law from (3.1.0.4). The initial one in [17] is based on a use of BV compactness arguments in the multidimensional case and compensated compactness arguments in the one dimensional case, while the second one introduced later in [15] relies on what is called a kinetic formulation. It consists in obtaining at the macroscopic level a kinetic equation

involving a density-like function whose velocity distribution is the equilibrium density.

Lately, the study of scalar conservation laws starting from BGK models at the mesoscopic level have been pursued in various contexts: with boundary conditions in [16] and [2], with a discontinuous in the space variable flux in [4], with a high-field scaling in [3] or in a stochastic context in [11]. In this paper, we are interested in the last two mentioned contexts. First of all, let us say a word about the stochastic one. Recently, the study of some conservation laws with stochastic forcing has been a subject of growing interest (see [1], [7], [9], [10], [12], [13] or lately [5] for the case of a system). Indeed, the introduction of such terms can be justified in order to translate numerical and empirical uncertainties. Moreover, it often offers the possibility to weaken assumptions and still get results. The first result on a hydrodynamical limit starting from a BGK model in a stochastic context is due to Hofmanova [11]. The idea in this paper is to use the notion of stochastic kinetic formulation developed by Debussche and Vovelle in [7].

What we intend to do here is to extend the above result to a stochastic BGK model containing a force term with a high-field scaling. The deterministic version of this result has been established by Berthelin, Poupaud and Mauser in [3]. However, due to the presence of the white noise terms, the techniques adopted through the paper will be the ones developed by Debussche and Vovelle [7] and Hofmanová [11] by proving the convergence to a kinetic formulation associated to (3.1.0.1). The scaling adopted being different, some new difficulties are introduced and an additional assumption similar to the one of the deterministic version will be adopted. Moreover, a modified Maxwellian will be obtained in the kinetic formulation. Its properties lead to get some Krushkov-like inequalities.

The organization of the paper is the following: in section 3.2 we will present the context and state the main result. Section 3.3 will be dedicated to the study of the stochastic BGK model (3.1.0.2). We will state its existence and prove its convergence to a kinetic formulation. Finally, in section 3.4 we will conclude to the existence of a weak solution to (3.1.0.1) which satisfies some Krushkov-like entropy relations.

3.2 Settings and Main Results

In the following, we will denote by $\mathcal{C}^{k,\mu}$ with $k \in \mathbf{N}$ and $\mu > 0$ the set of k times differentiable μ -Hölder functions. Let $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ be a stochastic basis with a complete, right-continuous filtration. We can assume without loss of generality that the σ -algebra $\mathcal{F}$ is countably generated and $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ is the completed filtration generated by the Wiener process and the initial condition. We denote by $\mathcal{P}$ the predictable σ -algebra on $\Omega \times [0, T]$ associated to $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ and by $\mathcal{P}_s$ the predictable σ -algebra on $\Omega \times [s, T]$ associated to $(\mathcal{F}_t)_{t \geq s}$. We write $L_{\mathcal{P}_s}^\infty(\Omega \times [s, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ to denote

$$L^\infty(\Omega \times [s, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}, \mathcal{P}_s \otimes \mathcal{B}(\mathbf{T}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R}), d\mathbb{P} \otimes dt \otimes dx \otimes d\xi).$$

and idem for $L_{\mathcal{P}}^\infty(\Omega \times [s, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$. The setting of our paper has some similarities with the ones of Debussche and Vovelle [7] and Hofmanová [11]. Indeed, we will assume that we work on a finite-time interval $[0, T]$, $T > 0$ with periodic boundary conditions, x belonging to $\mathbf{T}^N$ where $\mathbf{T}^N$ is the N -dimensional torus. We will consider a function

$$a = (a_1, \dots, a_N) : \mathbf{T}^N \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^N \text{ of class } \mathcal{C}^{3,\mu} \text{ for some } \mu > 0 \quad (3.2.0.1)$$

such that it satisfies for all x, ξ ,

$$0 \leq \operatorname{div}_x(a(x, \xi)). \quad (3.2.0.2)$$

We assume that W is a d -dimensional $(\mathcal{F}_t)$ -Wiener process, defined as follows

$$W(t) = \sum_{i=1}^d \beta_k(t) e_k \quad (3.2.0.3)$$

where $(\beta_k)_{k=1}^d$ are mutually independent Brownian processes, $(e_k)_{k=1}^d$ an orthonormal basis of H a finite dimensional Hilbert space.

For each $u \in \mathbf{R}$,

$$\Phi(u) : H \rightarrow L^2(\mathbf{T}^N) \text{ is defined by } \Phi(u)e_k = g_k(u) \quad (3.2.0.4)$$

where $g_k(\cdot, u)$ is a regular function on $\mathbf{T}^N$. More precisely, the functions

$$g_1, \dots, g_d : \mathbf{T}^N \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ are of class } \mathcal{C}^{4,\mu} \text{ with linear growth and bounded derivatives of all orders.} \quad (3.2.0.5)$$

In that context, the following estimate holds true

$$G^2(x, \xi) = \sum_{k=1}^d |g_k(x, \xi)|^2 \leq C(1 + |\xi|^2), \quad \forall x \in \mathbf{T}^N, \xi \in \mathbf{R}. \quad (3.2.0.6)$$

Moreover, we assume that

$$g_k(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \mathbf{T}^N, k = 1, \dots, d. \quad (3.2.0.7)$$

In addition, we will take

$$\Lambda : \mathbf{T}^N \rightarrow \mathbf{R} \text{ as a nonpositive function of class } \mathcal{C}^{4,\mu}. \quad (3.2.0.8)$$

Furthermore, we will suppose that, for all x ,

$$a(x, \cdot) \in L^1(\mathbf{R}) \text{ and } \partial_\xi g_k(x, \cdot) \in L^1(\mathbf{R}). \quad (3.2.0.9)$$

We notice that as soon as a and g_k are compactly supported in ξ , (3.2.0.9) is satisfied.

Regarding the initial data, we suppose that

$$u_0 \in L^p(\Omega; L^p(\mathbf{T}^N)) \text{ for all } p \in [1, \infty) \quad (3.2.0.10)$$

and we will consider $F_0 = \mathbf{1}_{u_0 > \xi}$.

Finally, similarly to the deterministic case with a high-field scaling [3], we will assume that

$$\left(\int_{\mathbf{R}} |f_\varepsilon(\omega, t, x, \xi)| d\xi \right) \text{ is bounded in } L^\infty(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^N), \quad (3.2.0.11)$$

where $f_\varepsilon := F_\varepsilon - \mathbf{1}_{u_0 > \xi}$. We denote $u_\varepsilon(t, x) := \int_{\mathbf{R}} f_\varepsilon(t, x, \xi) d\xi$.

We finally can state our main result:

Theorem 3.2.1. *Under assumptions (3.2.0.2), (3.2.0.3), (3.2.0.4), (3.2.0.5), (3.2.0.7), (3.2.0.8), (3.2.0.9) and (3.2.0.10), for any $\varepsilon > 0$, there exists a weak solution to the stochastic BGK model with a high field scaling (3.1.0.2) denoted by $F_\varepsilon \in L^\infty_p(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$*

with initial condition $F_0 = \mathbf{1}_{u_0 > \xi}$.

Moreover, under the additional assumption (3.2.0.11), F_ε converges weak-* in $L^\infty(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ to M_u a modified Maxwellian associated to u where u is a weak solution to the conservation law with stochastic forcing (3.1.0.1) with

$$B(x, u) = \int_{-\infty}^u \int_0^{+\infty} a(x, \xi + v\Lambda(x)) e^{-v} dv d\xi \quad (3.2.0.12)$$

and

$$C(x, u) = \int_{-\infty}^u \int_0^{+\infty} \partial_\xi \Phi(x, \xi + v\Lambda(x)) e^{-v} dv d\xi. \quad (3.2.0.13)$$

In addition, u satisfies the Krushkov-like inequalities (3.4.3.1).

Remark 3.2.1. The purpose of assumption (3.2.0.9) is actually to insure the existence of B and C .

3.3 Study of the stochastic BGK model with a high field scaling

3.3.1 The stochastic kinetic model

We are interested in the following stochastic BGK model:

$$\begin{cases} dF^\varepsilon + \operatorname{div}_x(a(x, \xi)F^\varepsilon)dt + \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon} \partial_\xi F^\varepsilon dt = \frac{\mathbf{1}_{u_\varepsilon > \xi} - F^\varepsilon}{\varepsilon} dt - \partial_\xi F^\varepsilon \Phi dW + \frac{1}{2} \partial_\xi (G^2 \partial_\xi F^\varepsilon) dt, \\ F^\varepsilon(0, x, \xi) = \mathbf{1}_{u_0(x) > \xi}(\xi). \end{cases} \quad (3.3.1.1)$$

The definition of a weak solution of this system is the following:

Definition 3.3.1. Let $\varepsilon > 0$, $F_\varepsilon \in L^\infty_{\mathcal{P}}(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ is called a weak solution of (3.3.1.1) if for any test function $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$, we have for a.e. $t \in [0, T]$, $\mathbb{P}$ -a.s.

$$\begin{aligned} \langle F_\varepsilon(t), \phi \rangle &= \langle F_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle F_\varepsilon(s), a \cdot \nabla \phi \rangle ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \langle F_\varepsilon(s), \Lambda(x) \partial_\xi \phi \rangle ds \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \langle \mathbf{1}_{u_\varepsilon(s) > \xi} - F_\varepsilon(s), \phi(s) \rangle ds + \sum_{k=1}^d \int_0^t \langle F_\varepsilon(s), \partial_\xi (g_k \phi) \rangle d\beta_k(s) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \langle F_\varepsilon(s), \partial_\xi (G^2 \partial_\xi \phi) \rangle ds. \end{aligned} \quad (3.3.1.2)$$

Let us state here several results. For Θ a smooth function with a compact support satisfying $0 \leq \Theta \leq 1$ and

$$\Theta(\xi) := \begin{cases} 1 & \text{if } |\xi| \leq 1/2, \\ 0 & \text{if } |\xi| \geq 1, \end{cases} \quad (3.3.1.3)$$

we denote $\Theta_R(\xi) := \Theta(\frac{\xi}{R})$, $g_k^R(x, \xi) := g_k(x, \xi) \Theta_R(\xi)$ for $k = 1, \dots, d$ and $a^R(x, \xi) := a(x, \xi) \Theta_R(\xi)$. The coefficients Φ^R and $G^{R,2}$ are defined similarly as Φ and G^2 replacing g_k by g_k^R . We introduce the intermediate problem,

$$\begin{cases} dX^\varepsilon + \operatorname{div}_x(a(x, \xi)X^\varepsilon)dt + \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon} \partial_\xi X^\varepsilon dt = -\partial_\xi X^\varepsilon \Phi dW + \frac{1}{2} \partial_\xi (G^2 \partial_\xi X^\varepsilon) dt, \\ X^\varepsilon(s) = X_0, \end{cases} \quad (3.3.1.4)$$

and the truncated associated problems

$$\begin{cases} dX^\varepsilon + \operatorname{div}_x(a^R(x, \xi)X^\varepsilon)dt + \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon}\partial_\xi X^\varepsilon dt = -\partial_\xi X^\varepsilon \Phi^R dW + \frac{1}{2}\partial_\xi(G^{R,2}\partial_\xi X^\varepsilon)dt, \\ X^\varepsilon(s) = X_0. \end{cases} \quad (3.3.1.5)$$

Proposition 3.3.2. *If X_0 is a $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{B}(\mathbf{T}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R})$ -measurable initial data belonging to $L^\infty(\Omega \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$, then there exists a weak solution $X^\varepsilon \in L^\infty_{\mathcal{P}_s}(\Omega \times [s, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ to (3.3.1.4). Moreover, it is represented by*

$$\mathcal{S}^\varepsilon(t, s)(\omega, x, \xi) := \lim_{R \rightarrow +\infty} [\mathcal{S}^{\varepsilon, R}(t, s)X_0](\omega, x, \xi), \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \quad (3.3.1.6)$$

with $\mathcal{S}_{\varepsilon, R}$ being a solution operator of (3.3.1.5).

From above, we obtain the following proposition:

Proposition 3.3.3. *For any $\varepsilon > 0$, there exists a weak solution of the stochastic BGK model with high field scaling (3.1.0.2) denoted by F_ε . Moreover, F_ε is represented by*

$$F_\varepsilon(t) = e^{-t/\varepsilon} \mathcal{S}^\varepsilon(t, 0) \mathbf{1}_{u_0 > \xi} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\varepsilon}} \mathcal{S}^\varepsilon(t, s) \mathbf{1}_{u_\varepsilon(s) > \xi} ds. \quad (3.3.1.7)$$

The proof of those two results is quite similar to the ones in [11] and mainly relies on a use of the stochastic characteristics method developed by Kunita in [14]. Nevertheless, there are some additional difficulties due to the presence of the term $\frac{\Lambda(x)}{\varepsilon} \partial_\xi F_\varepsilon$ (which introduce a dependence on ε of the solution operator) and the dependence of a on x . Then, for the sake of completeness, we give a quite detailed sketch of the proof of the existence in Appendix 3.5.

3.3.2 Convergence of the stochastic kinetic model

From now on, let us denote by C a constant which does not depend on any parameter and may change from a line to another. In this section, our purpose is to study the limit of the stochastic kinetic model (3.1.0.2) as ε goes to 0 in the following weak formulation satisfied by F_ε :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle F_\varepsilon(t), \partial_t \varphi(t) \rangle dt + \langle F_0, \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle F_\varepsilon(t), a \cdot \nabla \varphi(t) \rangle dt \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \langle \mathbf{1}_{u_\varepsilon > \xi} - (F_\varepsilon(t) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(t)), \varphi(t) \rangle dt + \int_0^T \langle \partial_\xi F_\varepsilon(t) \Phi dW_t, \varphi(t) \rangle \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^T \langle G^2 \partial_\xi F_\varepsilon(t), \partial_\xi \varphi(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (3.3.2.1)$$

for $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$.

Proposition 3.3.4. *Up to a subsequence, $(F_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ converges weak-* in $L^\infty(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ to F with F satisfying the following: for any test function $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$,*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle F(t), \partial_t \varphi(t) \rangle dt + \langle F_0, \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle F(t), a \cdot \nabla \varphi(t) \rangle dt \\ &= m(\partial_\xi \varphi) + \int_0^T \langle \partial_\xi F(t) \Phi dW_t, \varphi(t) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T \langle G^2 \partial_\xi F(t), \partial_\xi \varphi(t) \rangle dt \end{aligned} \quad (3.3.2.2)$$

with m a random nonnegative bounded Borel measure on $[0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}$ and where $m(\partial_\xi \varphi)$ denotes

$$m(\partial_\xi \varphi) := \int_{\mathbf{T}^N \times [0, T] \times \mathbf{R}} \partial_\xi \varphi dm(x, t, \xi). \quad (3.3.2.3)$$

Proof. From the representation formula of F_ε (3.3.1.7), we deduce that the set of solutions $\{F_\varepsilon; \varepsilon \in (0, 1)\}$ is bounded in $L^\infty_{\mathcal{P}}(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$. Using the Banach-Alaoglu theorem, we know that there exists F in $L^\infty_{\mathcal{P}}(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ such that, up to subsequences, as ε goes to 0,

$$F_\varepsilon \xrightarrow{w^*} F \text{ in } L^\infty_{\mathcal{P}}(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}). \quad (3.3.2.4)$$

Then, we deduce from that the following: for all $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle F_\varepsilon(t), \partial_t \varphi(t) \rangle dt &\xrightarrow{w^*} \int_0^T \langle F(t), \partial_t \varphi(t) \rangle dt \text{ in } L^\infty(\Omega), \\ \int_0^T \langle F_\varepsilon(t), a \cdot \nabla \varphi(t) \rangle dt &\xrightarrow{w^*} \int_0^T \langle F(t), a \cdot \nabla \varphi(t) \rangle dt \text{ in } L^\infty(\Omega), \\ \frac{1}{2} \int_0^T \langle G^2 \partial_\xi F_\varepsilon(t), \partial_\xi \varphi(t) \rangle dt &\xrightarrow{w^*} \frac{1}{2} \int_0^T \langle G^2 \partial_\xi F(t), \partial_\xi \varphi(t) \rangle dt \text{ in } L^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Moreover, we can also deduce from (3.3.2.4) that

$$\langle F_\varepsilon, \partial_\xi (g_k \varphi) \rangle \xrightarrow{w} \langle F, \partial_\xi (g_k \varphi) \rangle \text{ in } L^2(\Omega \times [0, T]).$$

Since the stochastic integral $\Psi \rightarrow \int_0^T \Psi dW_t$ regarded as a bounded operator from $L^2(\Omega \times [0, T])$ to $L^2(\Omega)$ is weakly continuous, it follows

$$\int_0^T \langle \partial_\xi F_\varepsilon(t) \Phi dW_t, \varphi(t) \rangle \xrightarrow{w} \int_0^T \langle \partial_\xi F(t) \Phi dW_t, \varphi(t) \rangle \text{ in } L^2(\Omega).$$

It remains to deal with the first term of the right-hand side of (3.3.2.1). We deduce from the above convergence that

$$\int_0^T \langle \mathbf{1}_{u_\varepsilon(t) > \xi} - F_\varepsilon - \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(t), \varphi(t) \rangle dt \xrightarrow{w} 0 \text{ in } L^2(\Omega). \quad (3.3.2.5)$$

Let us define

$$m_\varepsilon(t, x, \xi) := \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\xi} (\mathbf{1}_{u_\varepsilon(t, x) > \zeta} - F_\varepsilon(t, x, \zeta)) d\zeta + (-\Lambda(x) F_\varepsilon(t, x, \xi)). \quad (3.3.2.6)$$

We can prove similarly as in [11] that the first term of the right-hand side of (3.3.2.6) is a random nonnegative measure over $[0, T] \times T^N \times \mathbf{R}$ and since by assumption (3.2.0.8), $\Lambda(x) \leq 0$ for all x , so does the second term.

Moreover, since $f_\varepsilon = F_\varepsilon - \mathbf{1}_{0 > \xi}$, using the fact that $\partial_\xi \mathbf{1}_{0 > \xi} = -\delta_0$ and assumption (3.2.0.7) implies that f_ε satisfies

$$df^\varepsilon + \operatorname{div}_x(a(x, \xi) f^\varepsilon) dt + \operatorname{div}_x(a(x, \xi) \mathbf{1}_{0 > \xi}) dt = \partial_\xi m_\varepsilon - \partial_\xi f^\varepsilon \Phi dW_t + \frac{1}{2} \partial_\xi (G^2 \partial_\xi f^\varepsilon) dt \quad (3.3.2.7)$$

since $f_\varepsilon = F_\varepsilon - \mathbf{1}_{0 > \xi}$.

Let us prove that for all $t^* \in [0, T]$, we have

$$\mathbb{E} \left| \int_{[0, t^*] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}} dm_\varepsilon(t, x, \xi) \right|^2 + \mathbb{E} \langle f_\varepsilon(t^*), \xi \rangle^2 \leq C \quad (3.3.2.8)$$

with C a constant which does not depend on ε . In order to establish (3.3.2.8), we would like to take

$$\varphi(t, x, \xi) = \xi. \quad (3.3.2.9)$$

Since by assumption $f_\varepsilon \in L^\infty(0, T; L^1(\mathbf{T}^N \times \mathbf{R}))$ a.s., we do not need compactly supported test functions, we could test by constants. Thus, let $\varphi_R \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$ be a bounded approximation of φ defined in (3.3.2.9) which is monotone increasing i.e. $\partial_\xi \varphi_R \geq 0$ and preserve the sign such that $|\partial_\xi \varphi_R|, |\partial_\xi^2 \varphi_R| \leq C$ uniformly in R . Then, we obtain

$$\begin{aligned} \langle f_\varepsilon(t^*), \varphi_R \rangle &= \langle f_\varepsilon(0), \varphi_R \rangle + \int_0^{t^*} \langle m_\varepsilon, \partial_\xi \varphi_R \rangle dt \\ &= - \int_0^{t^*} \langle \partial_\xi f_\varepsilon(t) \Phi dW_t, \varphi_R \rangle + \frac{1}{2} \int_0^{t^*} \langle \partial_\xi (G^2 \partial_\xi f_\varepsilon), \varphi_R \rangle dt \end{aligned} \quad (3.3.2.10)$$

Then, since m_ε is a nonnegative measure and by assumptions on φ_R , the third term of the left-hand side of (3.3.2.10) is a nonnegative one. Besides, we recall that $f_\varepsilon = F_\varepsilon - \mathbf{1}_{0 > \xi}$. Therefore, since we have

$$0 \leq F_\varepsilon \leq 1,$$

f_ε preserves the sign. Thus, by assumption on φ_R , the first term of the left-hand side is nonnegative. Then, we deduce

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \int_0^{t^*} \langle m_\varepsilon, \partial_\xi \varphi_R \rangle dt \right|^2 + \mathbb{E} |\langle f_\varepsilon(t^*), \varphi_R \rangle|^2 \\ \leq C \mathbb{E} |\langle f_\varepsilon(0), \varphi_R \rangle|^2 + C \mathbb{E} \left| \int_0^{t^*} \langle \partial_\xi f_\varepsilon(t) \Phi dW_t, \varphi_R \rangle \right|^2 \\ + C \mathbb{E} \left| \int_0^{t^*} \langle \partial_\xi (G^2 \partial_\xi f_\varepsilon), \varphi_R \rangle dt \right|^2 \\ \leq C \mathbb{E} \|u_0\|_{L_x^1}^2 + C \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \int_0^{t^*} \langle \partial_\xi f_\varepsilon(t) g_k, \varphi_R \rangle^2 dt + C \mathbb{E} \left(\int_0^{t^*} \left(\int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} f_\varepsilon dx d\xi \right) dt \right)^2 \\ \leq C_T + C \sum_{k=1}^d \mathbb{E} \int_0^{t^*} \langle \partial_\xi f_\varepsilon(t) g_k, \varphi_R \rangle^2 dt \end{aligned} \quad (3.3.2.11)$$

using assumptions on g_k and φ_R , with C_T a constant which only depends on T . Besides, for the same reasons we have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_0^{t^*} \langle \partial_\xi f_\varepsilon(t) g_k, \varphi_R \rangle^2 dt \\ \leq C \left(\mathbb{E} \int_0^{t^*} \langle f_\varepsilon, \varphi_R \rangle^2 dt + \mathbb{E} \int_0^{t^*} \langle f_\varepsilon, \partial_\xi \varphi_R \rangle^2 dt \right) \\ \leq C_T + \mathbb{E} \int_0^{t^*} \langle f_\varepsilon, \varphi_R \rangle^2 dt \end{aligned} \quad (3.3.2.12)$$

Therefore, combining the two above inequalities and using Gronwall lemma leads to

$$\mathbb{E} \left| \int_{[0,t^*] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}} \partial_\xi \varphi_R dm_\varepsilon(t, x, \xi) \right|^2 + \mathbb{E} \langle f_\varepsilon(t^*), \varphi_R \rangle^2 \leq C_T \quad (3.3.2.13)$$

with C_T a constant which does not depend on ε and R . Passing to the limit on R yields (3.3.2.8).

It remains to prove that

$$\int_0^T \langle \partial_\xi m_\varepsilon, \varphi(t) \rangle dt \xrightarrow{w} \int_0^T \langle \partial_\xi m, \varphi(t) \rangle dt \text{ in } L^1(\Omega) \quad (3.3.2.14)$$

with m a random nonnegative finite measure. We know from (3.3.2.8) that m_ε is a non-negative finite measure over $[0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}$ almost surely. Moreover, by the convergences established above, we know that the left-hand side of (3.3.2.14) converges weakly in $L^1(\Omega)$ to a certain limit. We denote by $\mathcal{M}_b([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ the space of Borel measures over $[0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}$. We deduce from (3.3.2.8) that (m_ε) is bounded in $L_w^2(\Omega; \mathcal{M}_b([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}))$ i.e. the space of weak-* measurable mappings from Ω to $\mathcal{M}_b([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ with finite $L^2(\Omega; \mathcal{M}_b([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}))$ -norm. Thus, applying the Banach-Alaoglu theorem, we get that there exists $m \in L_w^2(\Omega; \mathcal{M}_b([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}))$ such that, up to a subsequence,

$$m_\varepsilon \xrightarrow{w} m \text{ in } L_w^2(\Omega; \mathcal{M}_b([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})). \quad (3.3.2.15)$$

This last point yields (3.3.2.14) by identifying the limit. Besides, it follows directly that m is a nonnegative bounded measure. For all test functions φ in $\mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$, we denote

$$\Delta_\varepsilon^\varphi := \int_0^T \langle F_\varepsilon(t), \partial_t \varphi(t) \rangle dt + \langle F_0, \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle F_\varepsilon(t), a \cdot \nabla \varphi(t) \rangle dt, \quad (3.3.2.16)$$

$$\begin{aligned} \square_\varepsilon^\varphi := & -\frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \langle \mathbf{1}_{u_\varepsilon > \xi} - (F_\varepsilon(t) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(t)), \varphi(t) \rangle dt + \int_0^T \langle \partial_\xi F_\varepsilon(t) \Phi dW_t, \varphi(t) \rangle \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \langle G^2 \partial_\xi F_\varepsilon(t), \partial_\xi \varphi(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (3.3.2.17)$$

$$\Delta^\varphi := \int_0^T \langle F(t), \partial_t \varphi(t) \rangle dt + \langle F_0, \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle F(t), a \cdot \nabla \varphi(t) \rangle dt \quad (3.3.2.18)$$

and

$$\square^\varphi := m(\partial_\xi \varphi) + \int_0^T \langle \partial_\xi F(t) \Phi dW_t, \varphi(t) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T \langle G^2 \partial_\xi F(t), \partial_\xi \varphi(t) \rangle dt. \quad (3.3.2.19)$$

By (3.3.2.1), we know that $\Delta_\varepsilon^\varphi = \square_\varepsilon^\varphi$. Moreover, we have established above that

$$\Delta_\varepsilon^\varphi \xrightarrow{w} \Delta^\varphi \text{ in } L^1(\Omega) \quad (3.3.2.20)$$

and

$$\square_\varepsilon^\varphi \xrightarrow{w} \square^\varphi \text{ in } L^1(\Omega). \quad (3.3.2.21)$$

Moreover, we have

$$\mathbb{E} [\Delta_\varepsilon^\varphi \Delta^\varphi] - \mathbb{E} [\square_\varepsilon^\varphi \Delta^\varphi] - \mathbb{E} [\Delta_\varepsilon^\varphi \square^\varphi] + \mathbb{E} [\square_\varepsilon^\varphi \square^\varphi] = 0. \quad (3.3.2.22)$$

Therefore, since the left-hand side of (3.3.2.22) converges to

$$\mathbb{E} [(\Delta^\varphi)^2] - \mathbb{E} [\square^\varphi \Delta^\varphi] - \mathbb{E} [\Delta^\varphi \square^\varphi] + \mathbb{E} [\square^\varphi \square^\varphi], \quad (3.3.2.23)$$

we obtain

$$\mathbb{E} [(\Delta^\varphi - \square^\varphi)^2] = 0$$

which yields *a.s.*,

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle F(t), \partial_t \varphi(t) \rangle dt + \langle F_0, \varphi(0) \rangle + \int_0^T \langle F(t), a \cdot \nabla \varphi(t) \rangle dt \\ &= m(\partial_\xi \varphi) + \int_0^T \langle \partial_\xi F(t) \Phi dW_t, \varphi(t) \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T \langle G^2 \partial_\xi F(t), \partial_\xi \varphi(t) \rangle dt. \end{aligned} \quad (3.3.2.24)$$

□

3.3.3 A kinetic formulation

As mentioned previously, a kinetic formulation is a kinetic equation at the macroscopic level satisfied by a density-like function. At this point, we already have obtained (3.3.2.24), the kinetic equation satisfied by F at the macroscopic level. Then, it remains to study the behavior of its velocity distribution.

In order to do so, let us recall here some notions that will be needed to get the kinetic formulation associated to (3.1.0.1).

Definition 3.3.5 (Young measure). *Let (X, λ) be a finite measure space. Let $\mathcal{P}_1(\mathbf{R})$ denote the set of probability measures on $\mathbf{R}$. We say that a map $\nu : X \rightarrow \mathcal{P}_1(\mathbf{R})$ is a Young measure on X if, for all $\phi \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R})$, the map $z \mapsto \nu_z(\phi)$ from X to $\mathbf{R}$ is measurable.*

We have the following compactness result:

Theorem 3.3.6 (Compactness of Young measure). *Let (X, λ) be a finite measure space such that $L^1(X)$ is separable. Let (ν^n) be a sequence of Young measures on X satisfying for some $p \geq 1$,*

$$\sup_n \int_X \int_{\mathbf{R}} |\xi|^p d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) < +\infty.$$

Then, there exists a Young measure ν on X and a subsequence still denoted (ν^n) such that, for all $h \in L^1(X)$, for all $\phi \in \mathcal{C}_b(\mathbf{R})$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X h(z) \int_{\mathbf{R}} \phi(\xi) d\nu_z^n(\xi) d\lambda(z) = \int_X h(z) \int_{\mathbf{R}} \phi(\xi) d\nu_z(\xi) d\lambda(z).$$

The proof, quite classical, can be found in [7].

The purpose of this subsection is then actually to prove the following result:

Proposition 3.3.7. *There exists $u \in L^1(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^N)$ such that for all $t \in [0, T]$ for almost every (x, ξ, ω) , $F = M_u$ where we denote by M_u the modified Maxwellian solution to the equation*

$$M_u + \Lambda(x) \partial_\xi M_u = \mathbf{1}_{u > \xi}. \quad (3.3.3.1)$$

Proof. For all test functions $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$, we deduce from (3.3.2.1) and (3.3.2.4) that

$$\mathbb{E} \int_0^T \langle \mathbf{1}_{u_\varepsilon > \xi} - F_\varepsilon - \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon, \psi(t) \rangle dt \longrightarrow 0 \quad (3.3.3.2)$$

and so that

$$\mathbb{E} \int_0^T \langle \partial_\xi (\mathbf{1}_{u_\varepsilon > \xi} - F_\varepsilon - \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon), \varphi(t) \rangle dt \longrightarrow 0 \quad (3.3.3.3)$$

for all test functions $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$.

We denote $\nu_{t,x}^\varepsilon := \delta_{u_\varepsilon(t,x)=\xi}$ which by Definition 3.3.5 is a Young measure. Then, by assumption (3.2.0.11), we have

$$\begin{aligned} \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} |\xi| d\nu_{t,x}^\varepsilon(\xi) dx &= \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \int_{\mathbf{T}^N} |u_\varepsilon(t, x)| dx \\ &\leq \sup_{\varepsilon > 0} \sup_{t \in [0, T]} \mathbb{E} \int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} |f_\varepsilon(t, x, \xi)| d\xi dx < +\infty. \end{aligned} \quad (3.3.3.4)$$

Using Proposition 3.3.6, we know that there exists a Young measure $\nu_{t,x}$ such that $\nu_{t,x}^\varepsilon \rightarrow \nu_{t,x}$ (up to a subsequence). Then, we deduce from (3.3.3.3) and Proposition 3.3.4 that

$$\partial_\xi F + \Lambda(x) \partial_\xi^2 F = -\nu. \quad (3.3.3.5)$$

Let us prove then that $F + \Lambda(x) \partial_\xi F \in \{0, 1\}$. Let us construct the following mollifier on $[0, T]$:

$$\theta(t) := \begin{cases} \tilde{C} \exp\left(\frac{1}{t^2-1}\right) & \text{if } t \leq 1, \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (3.3.3.6)$$

with $\tilde{C}$ the constant such that $\int_0^T \theta(t) dt = 1$. We denote for $0 \leq \delta \leq 1$,

$$\theta_\delta(t) := \frac{1}{\delta} \theta\left(\frac{t}{\delta}\right). \quad (3.3.3.7)$$

Then we have

$$|\theta_\delta(t)| \leq \frac{C}{\delta} \text{ and } |\theta'_\delta(t)| \leq \frac{C}{\delta^2}, \quad (3.3.3.8)$$

with C a constant which does not depend on δ . We set for $s \in [0, T]$,

$$\varphi_1(t, x, \xi) = \theta_\delta(s-t) \Psi_1(x, \xi) \text{ and } \varphi_2(t, y, \zeta) = \theta_\delta(s-t) \Psi_2(y, \zeta)$$

with $\Psi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{T}_x^N \times \mathbf{R}_\xi)$, $\Psi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{T}_y^N \times \mathbf{R}_\zeta)$.

By (3.3.2.1), we have that

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \langle F_\varepsilon(t) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(t), \varphi_1(t) \rangle dt \times \int_0^T \langle 1 - (F_\varepsilon(t) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(t)), \varphi_2(t) \rangle dt \\
&= \left[\int_0^T \langle \mathbf{1}_{u_\varepsilon(t) > \xi}, \varphi_1(t) \rangle dt \right. \\
&\quad \left. + \varepsilon \left(\int_0^T \langle F_\varepsilon(t), \partial_t \varphi_1(t) \rangle dt + \langle F_0, \varphi_1(0) \rangle + \int_0^T \langle F_\varepsilon(t), a \cdot \nabla \varphi_1(t) \rangle dt \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^T \langle \partial_\xi F_\varepsilon(t) \Phi dW_t, \varphi_1(t) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T \langle G^2 \partial_\xi F_\varepsilon(t), \partial_\xi \varphi_1(t) \rangle dt \right) \right] \\
&\times \left[\int_0^T \langle 1 - \mathbf{1}_{u_\varepsilon(t) > \zeta}, \varphi_2(t) \rangle dt \right. \\
&\quad \left. - \varepsilon \left(\int_0^T \langle F_\varepsilon(t), \partial_t \varphi_2(t) \rangle dt + \langle F_0, \varphi_2(0) \rangle + \int_0^T \langle F_\varepsilon(t), a \cdot \nabla \varphi_2(t) \rangle dt \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^T \langle \partial_\xi F_\varepsilon(t) \Phi dW_t, \varphi_2(t) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T \langle G^2 \partial_\xi F_\varepsilon(t), \partial_\xi \varphi_2(t) \rangle dt \right) \right] \\
&\leq \left(\int_0^T \langle \mathbf{1}_{u_\varepsilon(t) > \xi}, \varphi_1(t) \rangle dt \right) \times \left(\int_0^T \langle 1 - \mathbf{1}_{u_\varepsilon(t) > \zeta}, \varphi_2(t) \rangle dt \right) \\
&\quad + \varepsilon \left(1 + \frac{C}{\delta} \int_0^T \langle 1, |\Psi_2| \rangle dt \right) \left(\left| \int_0^T \langle F(t), \partial_t \varphi_1(t) \rangle dt \right| + |\Xi_1 + r_1(\varepsilon)| \right) \\
&\quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} \int_0^T \langle 1, |\Psi_1| \rangle dt \left(\left| \int_0^T \langle F(t), \partial_t \varphi_2(t) \rangle dt \right| + |\Xi_2 + r_2(\varepsilon)| \right) \\
&\quad + \varepsilon^2 \prod_{i=1}^2 \left(\left| \int_0^T \langle F(t), \partial_t \varphi_i(t) \rangle dt \right| + |\Xi_i + r_i(\varepsilon)| \right),
\end{aligned}$$

where for $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned}
\Xi_i := & \langle F_0, \varphi_i(0) \rangle + \int_0^T \langle F(t), a \cdot \nabla \varphi_i(t) \rangle dt \\
& - \int_0^T \langle \partial_\xi F(t) \Phi dW_t, \varphi_i(t) \rangle - \frac{1}{2} \int_0^T \langle G^2 \partial_\xi F(t), \partial_\xi \varphi_i(t) \rangle dt,
\end{aligned}$$

$r_i(\varepsilon)$ exists and is a function such that $\mathbb{E}r_i(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$ by Proposition 3.3.4. Then, we deduce from (3.3.3.8) that

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \langle F_\varepsilon(t) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(t), \varphi_1(t) \rangle dt \times \int_0^T \langle 1 - (F_\varepsilon(t) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(t)), \varphi_2(t) \rangle dt \\
&\leq \left(\int_0^T \langle \mathbf{1}_{u_\varepsilon(t) > \xi}, \varphi_1(t) \rangle dt \right) \times \left(\int_0^T \langle 1 - \mathbf{1}_{u_\varepsilon(t) > \zeta}, \varphi_2(t) \rangle dt \right) \\
&\quad + \varepsilon \left(1 + \frac{C}{\delta} \int_0^T \langle 1, |\Psi_2| \rangle dt \right) \left(\frac{C}{\delta^2} \int_0^T \langle F(t), |\Psi_1(t)| \rangle dt + \Xi_1 + r_1(\varepsilon) \right) \\
&\quad + \varepsilon \frac{C}{\delta} \int_0^T \langle 1, |\Psi_1| \rangle dt \left(\frac{C}{\delta^2} \int_0^T \langle F(t), |\Psi_2(t)| \rangle dt + \Xi_2 + r_2(\varepsilon) \right) \\
&\quad + \varepsilon^2 \prod_{i=1}^2 \frac{C}{\delta^2} \left(\int_0^T \langle F(t), |\Psi_i(t)| \rangle dt + |\Xi_i + r_i(\varepsilon)| \right).
\end{aligned}$$

Moreover, since

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \langle F_\varepsilon(t) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(t), \varphi_1(t) \rangle dt \times \int_0^T \langle 1 - (F_\varepsilon(t) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(t)), \varphi_2(t) \rangle dt \right] \\ \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} [\langle F_\varepsilon(s) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(s), \Psi_1(s) \rangle \langle 1 - (F_\varepsilon(s) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(s)), \Psi_2(s) \rangle] \quad (3.3.3.9)$$

and

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T \langle \mathbf{1}_{u_\varepsilon(t) > \xi}, \varphi_1(t) \rangle dt \times \int_0^T \langle 1 - \mathbf{1}_{u_\varepsilon(t) > \zeta}, \varphi_2(t) \rangle dt \right] \\ \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \mathbb{E} [\langle \mathbf{1}_{u_\varepsilon(s) > \xi}, \Psi_1(s) \rangle \langle 1 - \mathbf{1}_{u_\varepsilon(s) > \zeta}, \Psi_2(s) \rangle], \quad (3.3.3.10)$$

we deduce that

$$\mathbb{E} [\langle F_\varepsilon(s) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(s), \Psi_1(s) \rangle \langle 1 - (F_\varepsilon(s) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(s)), \Psi_2(s) \rangle + r_3(\delta)] \\ \leq \mathbb{E} [\langle \mathbf{1}_{u_\varepsilon(s) > \xi}, \Psi_1(s) \rangle \langle 1 - \mathbf{1}_{u_\varepsilon(s) > \zeta}, \Psi_2(s) \rangle + r_4(\delta) \\ + C \frac{\varepsilon}{\delta^3} (1 + |r_1(\varepsilon)| + |r_2(\varepsilon)|) + C \frac{\varepsilon^2}{\delta^4} \prod_{i=1}^2 (1 + |r_i(\varepsilon)|)]$$

where by (3.3.3.9) and (3.3.3.10), $r_3(\delta)$ and $r_4(\delta)$ exist and are functions such that $\mathbb{E} r_3(\delta), \mathbb{E} r_4(\delta) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0$.

We denote $\alpha(x, \xi, y, \zeta) = \psi_1(x, \xi) \Psi_2(y, \zeta)$ and $\ll \cdot, \cdot \gg$ the duality between distributions and test functions on $\mathbf{T}_x^N \times \mathbf{R}_\xi \times \mathbf{T}_y^N \times \mathbf{R}_\zeta$. Then we can rewrite the above inequality as follows

$$\mathbb{E} [\ll (F_\varepsilon(s) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(s)) (1 - (F_\varepsilon(s) + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon(s))), \alpha \gg + r_3(\delta)] \\ \leq \mathbb{E} [\ll \mathbf{1}_{u_\varepsilon(s) > \xi} (1 - \mathbf{1}_{u_\varepsilon(s) > \zeta}), \alpha \gg + r_4(\delta) \\ + C \frac{\varepsilon}{\delta^3} (1 + |r_1(\varepsilon)| + |r_2(\varepsilon)|) + C \frac{\varepsilon^2}{\delta^4} \prod_{i=1}^2 (1 + |r_i(\varepsilon)|)].$$

By a density argument, it remains true for any test function $\alpha \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{T}_x^N \times \mathbf{R}_\xi \times \mathbf{T}_y^N \times \mathbf{R}_\zeta)$. We consider ϱ_{η_1} and ρ_{η_2} some mollifiers on respectively $\mathbf{T}^N$ and $\mathbf{R}$. For any $R > 0$, we take

$$\alpha(x, \xi, y, \zeta) = \varrho_{\eta_1}(x - y) \rho_{\eta_2}(\xi - \zeta) \Theta_R(|x|) \Theta_R(\xi).$$

Passing to the limit $\eta_1, \eta_2 \rightarrow 0$, and $\varepsilon \rightarrow 0$ with $\delta = \varepsilon^{1/4}$, we finally get

$$\mathbb{E} \langle F(s) + \Lambda(x) \partial_\xi F(s), (1 - (F(s) + \Lambda(x) \partial_\xi F(s))) \Theta_R(|x|) \Theta_R(\xi) \rangle \leq 0.$$

Moreover, by (3.3.3.2) there exists a distribution r_6 such that

$$F_\varepsilon + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon = \mathbf{1}_{u_\varepsilon > \xi} + r_6(\varepsilon)$$

with $\mathbb{E} r_6(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$.

Then

$$r_6(\varepsilon) \leq F_\varepsilon + \Lambda(x) \partial_\xi F_\varepsilon \leq 1 + r_6(\varepsilon)$$

and passing to the limit, we get

$$0 \leq F + \Lambda(x) \partial_\xi F \leq 1.$$

Finally,

$$\mathbb{E} \langle F(s) + \Lambda(x) \partial_\xi F(s), (1 - (F(s) + \Lambda(x) \partial_\xi F(s))) \Theta_R(|x|) \Theta_R(\xi) \rangle = 0.$$

Thus for almost every x, ξ, ω , $\forall s \in [0, T]$, we deduce from above that

$$F(s, x, \xi, \omega) + \Lambda(x) \partial_\xi F(s, x, \xi, \omega) \in \{0, 1\}.$$

Since we have

$$\begin{aligned} F + \Lambda(x) \partial_\xi F &= - \int_0^\xi -\partial_\xi (F + \Lambda(x) \partial_\xi F) d\zeta \\ &= - \int_0^\xi \nu d\zeta \end{aligned}$$

with ν a Young measure, there exists $u(x, t, \omega) \in \mathbf{R}$ such that

$$F + \Lambda(x) \partial_\xi F = \mathbf{1}_{u(t) > \xi}. \quad (3.3.3.11)$$

Moreover, we can deduce from (3.3.3.5) that

$$\partial_\xi \mathbf{1}_{u(t) > \xi} = -\nu$$

i.e.

$$\nu = \delta_{u=\xi}. \quad (3.3.3.12)$$

Therefore because of (3.3.3.4), we have

$$\int_{\mathbf{T}^N} |u(t, x)| dx = \int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} |\xi| d\nu_{t,x}(\xi) dx dt < +\infty \quad (3.3.3.13)$$

which concludes the proof. $\square$

3.4 Existence of a solution to the conservation law with stochastic forcing

3.4.1 Formal calculus and modified Maxwellian

In this section, we will show in a formal way the passage from the kinetic formulation to the conservation law with stochastic forcing (3.1.0.1). Indeed, by Proposition 3.3.7 we know that $F = M_u$ and so satisfies

$$\Lambda(x) \partial_\xi F = \mathbf{1}_{u > \xi} - F. \quad (3.4.1.1)$$

For any function $b(x, \xi)$, we have

$$\int_{\mathbf{R}} b(x, \xi) \Lambda(x) \partial_\xi F(x, \xi) d\xi = \int_{-\infty}^u b(x, \xi) d\xi - \int_{\mathbf{R}} b(x, \xi) F(x, \xi) d\xi.$$

We denote

$$B(x, v) := \int_{-\infty}^v b(x, \xi) d\xi. \quad (3.4.1.2)$$

Then we get

$$\begin{aligned} B(x, u) &= \int_{\mathbf{R}} b(x, \xi) \Lambda(x) \partial_\xi F(x, \xi) d\xi + \int_{\mathbf{R}} b(x, \xi) F(x, \xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}} [b(x, \xi) - \partial_\xi b(x, \xi) \Lambda(x)] F(x, \xi) d\xi. \end{aligned}$$

For $b(x, \xi)$ solution of the equation

$$b(x, \xi) - \partial_\xi b(x, \xi) \Lambda(x) = a(x, \xi), \quad (3.4.1.3)$$

we have

$$B(x, u) = \int_{\mathbf{R}} a(x, \xi) F(x, \xi) d\xi.$$

By computation of the solution of (3.4.1.3), we get

$$B(x, u) = \int_{-\infty}^u b(x, \xi) d\xi = \int_{-\infty}^u \int_0^{+\infty} a(x, \xi + v\Lambda(x)) e^{-v} dv d\xi. \quad (3.4.1.4)$$

Quite similarly, for $c(x, \xi)$ solution of the equation

$$c(x, \xi) - \partial_\xi c(x, \xi) \Lambda(x) = \partial_\xi \Phi(x, \xi), \quad (3.4.1.5)$$

we have

$$C(x, u) = \int_{\mathbf{R}} \partial_\xi \Phi(x, \xi) F(x, \xi) d\xi$$

where

$$C(x, u) := \int_{-\infty}^u c(x, \xi) d\xi = \int_{-\infty}^u \int_0^{+\infty} \partial_\xi \Phi(x, \xi + v\Lambda(x)) e^{-v} dv d\xi. \quad (3.4.1.6)$$

Let us start from the kinetic formulation

$$dM_u + \operatorname{div}_x(a(x, \xi)M_u)dt = \partial_\xi m - \partial_\xi M_u \Phi dW_t + \frac{1}{2} \partial_\xi (G^2 \partial_\xi M_u) dt. \quad (3.4.1.7)$$

Since because of (3.4.1.1), we have

$$\int_{\mathbf{R}} (M_u - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi = u,$$

by integrating (3.4.1.7), we get

$$du + \operatorname{div}_x B(x, u) dt = C(x, u) dW_t.$$

In addition, the modified Maxwellian being the solution of the equation (3.4.1.1), we actually have an explicit expression for it:

$$M_k(x, \xi) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{k > \xi} (\xi - \Lambda(x)u) e^{-u} du. \quad (3.4.1.8)$$

By easy computations and Fubini's Theorem, we get the following proposition:

Proposition 3.4.1. *We get, for any $k, k' \in \mathbf{R}$,*

- (i) $\int_{\mathbf{R}} (M_k(x, \xi) - \mathbf{1}_{0 > \xi}(\xi)) d\xi = k,$
- (ii) $\operatorname{sgn}(M_k(x, \xi) - M_{k'}(x, \xi)) = \operatorname{sgn}(k - k'),$
- (iii) $\int_{\mathbf{R}} |M_k(x, \xi) - M_{k'}(x, \xi)| d\xi = |k - k'|,$

$$(iv) \quad \begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} a(x, \xi) M_k(x, \xi) d\xi &= B(x, k), \\ \int_{\mathbf{R}} \partial_\xi \Phi(x, \xi) M_k(x, \xi) d\xi &= C(x, k). \end{aligned}$$

where

$$B(x, k) = \int_{-\infty}^k \int_0^{+\infty} a(x, \xi + v\Lambda(x)) e^{-v} dv d\xi, \quad (3.4.1.9)$$

$$C(x, k) = \int_{-\infty}^k \int_0^{+\infty} \partial_\xi \Phi(x, \xi + v\Lambda(x)) e^{-v} dv d\xi, \quad (3.4.1.10)$$

and

$$M_k(x, \xi) = \int_0^{+\infty} \mathbf{1}_{k > \xi}(\xi - \Lambda(x)u) e^{-u} du. \quad (3.4.1.11)$$

3.4.2 Existence of a weak solution

We are now in position to prove the following result:

Proposition 3.4.2. *There exists a weak solution $u \in L^1(\Omega \times [0, T] \times \mathbf{T}^N)$ to the conservation law with stochastic forcing (3.1.0.1).*

Proof. Let us consider the following test function

$$\varphi(t, x, \xi) = \Theta_R(\xi) \Psi(t, x) \quad (3.4.2.1)$$

with Θ_R defined in section 3.3.1, $\Psi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbf{T}^N)$. Then, applying the kinetic formulation, we get $\mathbb{P} - a.s.$,

$$\begin{aligned} \int_0^T < M_u(t) \Theta_R, \partial_t \Psi > dt + < F(0), \varphi(0) > + \int_0^T < M_u(t) \Theta_R, a \cdot \nabla \Psi > dt \\ &= m(\partial_\xi \Theta_R \Psi) - \int_0^T < M_u(t) \partial_\xi \Phi dW_t, \Theta_R \Psi(t) > dt \\ &\quad - \int_0^T < M_u(t) \Phi dW_t, \partial_\xi \Theta_R \Psi(t) > + \frac{1}{2} \int_0^T < G^2 \partial_\xi M_u(t), \partial_\xi \Theta_R \Psi(t) > dt. \end{aligned} \quad (3.4.2.2)$$

We denote $< \cdot, \cdot >_x$ the duality between distributions and test functions on $\mathbf{T}_x^N$. Since, we have

$$0 = < \partial_t \mathbf{1}_{0 > \xi}, \varphi > = - < \mathbf{1}_{0 > \xi}, \partial_t \varphi > + < \mathbf{1}_{0 > \xi}, \varphi(0) >, \quad (3.4.2.3)$$

using the same arguments as previously, we can rewrite (3.4.2.2) as follows

$$\begin{aligned} \int_0^T < \int_{\mathbf{R}} (M_u(t) - \mathbf{1}_{0 > \xi}) \Theta_R d\xi, \partial_t \Psi >_x dt + < \int_{\mathbf{R}} (F(0) - \mathbf{1}_{0 > \xi}) \Theta_R(\xi) d\xi, \Psi(0, x) >_x \\ &\quad + \int_0^T < \int_{\mathbf{R}} M_u(t) \Theta_R(\xi) a(\xi) d\xi \cdot \nabla \Psi, 1 >_x dt \\ &= m(\partial_\xi \Theta_R \Psi) - \int_0^T < \int_{\mathbf{R}} M_u(t) \partial_\xi \Phi \Theta_R(\xi) d\xi dW_t, \Psi(t) >_x \\ &\quad - \int_0^T < M_u(t) \Phi dW_t, \partial_\xi \Theta_R \Psi(t) > + \frac{1}{2} \int_0^T < G^2 \partial_\xi M_u(t), \partial_\xi \Theta_R \Psi(t) > dt. \end{aligned} \quad (3.4.2.4)$$

Then, using again the dominated convergence for deterministic and stochastic integrals and the properties of the modified Maxwellian stated in Proposition 3.4.1, we get when $R \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle u, \partial_t \Psi \rangle_x dt + \langle u_0, \Psi(0) \rangle_x + \int_0^T \langle B(x, u) \cdot \nabla \Psi, 1 \rangle_x dt \\ = \int_0^T \langle -C(x, u) dW_t, \Psi \rangle_x \quad (3.4.2.5) \end{aligned}$$

which concludes the proof. $\square$

3.4.3 Krushkov-like entropies

In this section, though we are not able to obtain the exact Krushkov entropy relations using the deterministic techniques because of the presence of the stochastic term, we still are able to establish some Krushkov-like inequalities.

Proposition 3.4.3. *For all $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$, we have*

$$\begin{aligned} \int_{[0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}} |u(t, x) - k| \partial_t \varphi(t, x, \xi) dt dx d\xi \\ + \int_{[0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}} [\text{sgn}(u(t, x) - k)(B(x, u(t, x)) - B(x, k)) \text{div}_x \varphi(t, x, \xi)] dt dx d\xi \\ + \int_{[0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}} \text{div}_x(B(x, k)) \text{sgn}(u(t, x) - k) \varphi(t, x, \xi) dt dx d\xi \\ - \int_{[0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}} \text{sgn}(u(t, x) - k) C(x, u(t, x)) dW_t dx d\xi \leq C_\varphi \quad \mathbb{P}\text{-a.s.} \quad (3.4.3.1) \end{aligned}$$

where C_φ is a constant which depends only on φ .

Proof. Previously, we have established that

$$dM_u + \text{div}_x(aM_u)dt = \partial_\xi m - \partial_\xi M_u \Phi dW_t + \frac{1}{2} \partial_\xi(G^2 \partial_\xi M_u)dt \quad (3.4.3.2)$$

in the sense of distributions $\mathbb{P}$ -a.s.. We deduce from above that we have

$$d(M_u - M_k) + \text{div}_x(a(M_u - M_k))dt = \partial_\xi m - \partial_\xi M_u \Phi dW_t + \frac{1}{2} \partial_\xi(G^2 \partial_\xi M_u)dt - \text{div}_x(aM_k)dt \quad (3.4.3.3)$$

in the sense of distributions $\mathbb{P}$ -a.s.

By a similar reasoning, we actually can extend (3.3.2.24) to the following test function

$$\tilde{\varphi}(\omega, t, x, \xi) = \frac{1}{\delta^{N+1}} \eta \left(\frac{y - x}{\delta}, \frac{\zeta - \xi}{\delta} \right) P'((M_u - M_k)^\delta(t, y, \zeta)) \Psi(t) \quad (3.4.3.4)$$

where P is a $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$ function such that $P' \in L^\infty(\mathbf{R})$, $(M_u - M_k)^\delta := (M_u - M_k) * \eta^\delta$ with η, η^δ defined similarly on $\mathbf{T}^N \times \mathbf{R}$ as θ, θ^δ on $[0, T]$ defined on (3.3.3.6) and (3.3.3.7). So we obtain that for all (y, ζ) in $\mathbf{T}^N \times \mathbf{R}$, we have

$$\begin{aligned} d(M_u - M_k)^\delta P'((M_u - M_k)^\delta) + \text{div}_x(a(M_u - M_k)^\delta) P'((M_u - M_k)^\delta) dt \\ = \partial_\xi m * \eta^\delta P'((M_u - M_k)^\delta) - (\partial_\xi M_u \Phi) * \eta^\delta P'((M_u - M_k)^\delta) dW_t + \frac{1}{2} \partial_\xi(G^2 \partial_\xi M_u) * \eta^\delta P'((M_u - M_k)^\delta) dt \\ - \text{div}_x(aM_k) * \eta^\delta P'((M_u - M_k)^\delta) dt - r^\delta P'((M_u - M_k)^\delta) dt \quad (3.4.3.5) \end{aligned}$$

where $r^\delta := \operatorname{div}_x(a(M_u - M_k)) * \eta^\delta - \operatorname{div}_x(a(M_u - M_k)^\delta)$ in the sense of distributions over $(0, T)$ $\mathbb{P}$ -a.s. In order to get the result, we need to consider the above equality against a test function depending on (y, ζ) . Then, though we have the above equality for all (y, ζ) $\mathbb{P}$ -a.s., we need to establish it $\mathbb{P}$ -a.s. for all (y, ζ) . It is first easy to deduce from above that the result holds true $\mathbb{P}$ -a.s. for all $(y, \zeta) \in (\mathbf{T} \cap \mathbf{Q})^N \times \mathbf{Q}$. Extending this to all $(y, \zeta) \in \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}$ is direct by continuity in all the terms except $(\partial_\xi M_u \Phi) * \eta^\delta P'((M_u - M_k)^\delta) dW_t$. Let us now deal with this last term. We consider a test function $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{T}_y^N \times \mathbf{R}_\zeta)$, and are interested in the following terms:

$$\int_0^T (M_u \partial_\xi g_k)^\delta(t, y, \zeta) \Psi(t) P'((M_u - M_k)^\delta(t, y, \zeta)) d\beta_k(t) \varphi(y, \zeta) \quad (3.4.3.6)$$

and

$$\int_0^T (M_u g_k) * \partial_\xi \eta^\delta(y, \zeta) \Psi(t) P'((M_u - M_k)^\delta(t, y, \zeta)) d\beta_k(t) \varphi(y, \zeta), \quad (3.4.3.7)$$

for $k = 1, \dots, d$. Let us deal with the first one. In order to use a well known result stating that we can find a continuous modification of a stochastic process, we must satisfy in our case the following assumption, for all $0 \leq s \leq t \leq T$, (y, ζ) , (x, ξ) in $\mathbf{T}^N \times \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left| \int_0^t (M_u \partial_\xi g_k)^\delta(r, y, \zeta) \Psi(r) P'((M_u - M_k)^\delta(r, y, \zeta)) d\beta_k(r) \varphi(y, \zeta) \right. \\ \left. - \int_0^s (M_u \partial_\xi g_k)^\delta(r, x, \xi) \Psi(r) P'((M_u - M_k)^\delta(r, x, \xi)) d\beta_k(r) \varphi(x, \xi) \right|^\lambda \\ \leq C(|t - s| + |x - y|)^{N+2+\epsilon} \end{aligned} \quad (3.4.3.8)$$

with $\lambda > 1$, $\epsilon > 0$. Actually, we have the following inequalities for $n > 1$:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left| \int_0^t (M_u \partial_\xi g_k)^\delta(r, y, \zeta) \Psi(r) P'((M_u - M_k)^\delta(r, y, \zeta)) d\beta_k(r) \varphi(y, \zeta) \right. \\ & \quad \left. - \int_0^s (M_u \partial_\xi g_k)^\delta(r, x, \xi) \Psi(r) P'((M_u - M_k)^\delta(r, x, \xi)) d\beta_k(r) \varphi(x, \xi) \right|^n \\ & \leq C \mathbb{E} \left| \int_s^t (M_u \partial_\xi g_k)^\delta(r, y, \zeta) \Psi(r) P'((M_u - M_k)^\delta(r, y, \zeta)) d\beta_k(r) \varphi(y, \zeta) \right|^n \\ & \quad + C \mathbb{E} \left| \int_0^s \Psi(r) \left[(M_u \partial_\xi g_k)^\delta(r, y, \zeta) P'((M_u - M_k)^\delta(r, y, \zeta)) \varphi(y, \zeta) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (M_u \partial_\xi g_k)^\delta(r, x, \xi) P'((M_u - M_k)^\delta(r, x, \xi)) \varphi(x, \xi) \right] d\beta_k(r) \right|^n \\ & \leq C \mathbb{E} \left(\int_s^t |(M_u \partial_\xi g_k)^\delta(r, y, \zeta) \Psi(r) P'((M_u - M_k)^\delta(r, y, \zeta)) \varphi(y, \zeta)|^2 dr \right)^{n/2} \\ & \quad + C \mathbb{E} \left(\int_0^s \left| \Psi(r) \left[(M_u \partial_\xi g_k)^\delta(r, y, \zeta) P'((M_u - M_k)^\delta(r, y, \zeta)) \varphi(y, \zeta) \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - (M_u \partial_\xi g_k)^\delta(r, x, \xi) P'((M_u - M_k)^\delta(r, x, \xi)) \varphi(x, \xi) \right] \right|^2 dr \right)^{n/2} \\ & \leq C|t - s|^{n/2} + C \left(\int_0^s |\varphi(y, \zeta) - \varphi(x, \xi)|^2 dr \right)^{n/2} \\ & \leq C(|t - s| + |(y, \zeta) - (x, \xi)|)^n \end{aligned} \quad (3.4.3.9)$$

by assumptions on g_k , P and φ and using the fact that M_u is bounded. For $n = N + 3$, the assumption is satisfied. The reasoning is the same for the second term. So finally, we can conclude that (3.4.3.5) holds true $\mathbb{P}$ -a.s. for all $(y, \zeta) \in \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}$.

The next step consists in using the chain rule. Thus in order to do so, we must reformulate the problem in a Stratonovich version. We have $\mathbb{P}$ -a.s. for all $(y, \zeta) \in \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} & d(M_u - M_k)^\delta P'((M_u - M_k)^\delta) + \operatorname{div}_x(a(M_u - M_k)^\delta)P'((M_u - M_k)^\delta)dt \\ &= \partial_\xi m * \eta^\delta P'((M_u - M_k)^\delta) - (\partial_\xi M_u \Phi) * \eta^\delta P'(M_u - M_k) \circ dW_t + \frac{1}{2} \partial_\xi (G^2 \partial_\xi M_u) * \eta^\delta P'(M_u - M_k)dt \\ &\quad - \operatorname{div}_x(aM_k) * \eta^\delta P'(M_u - M_k)dt - r^\delta P'(M_u - M_k)dt + \tau^\delta. \end{aligned} \quad (3.4.3.10)$$

in the sense of distributions over $(0, T)$, with τ^δ the corrective terms associated to the passage from $(\partial_\xi M_u \Phi) * \eta^\delta P'(M_u - M_k) dW_t$ to $(\partial_\xi M_u \Phi) * \eta^\delta P'(M_u - M_k) \circ dW_t$. We first deal with the case $m = 0$. We integrate (3.4.3.10) against $\varphi(y, \zeta)$. Using in a similar way as previously the dominated convergence theorem for deterministic and stochastic integrals as well as the commutation lemma of Di Perna-Lions [8] to prove the disappearance of r^δ , we obtain

$$\begin{aligned} & dP(M_u - M_k) + \operatorname{div}_x(aP(M_u - M_k))dt - \operatorname{div}_x(a)(P(M_u - M_k) - P'(M_u - M_k)(M_u - M_k))dt \\ &= \partial_\xi M_u \Phi P'(M_u - M_k) \circ dW_t + \frac{1}{2} \partial_\xi (G^2 \partial_\xi M_u) P'(M_u - M_k)dt \\ &\quad - \operatorname{div}_x(aM_k) P'(M_u - M_k)dt + \lim_{\delta \rightarrow 0} \tau^\delta. \end{aligned} \quad (3.4.3.11)$$

in the sense of distributions against test functions of the form $\Psi(t)\varphi(y, \zeta)$ $\mathbb{P}$ -a.s. Noticing that the limit of the corrective terms of $(\partial_\xi M_u \Phi) * \eta^\delta P'(M_u - M_k) \circ dW_t$ is actually the corrective terms of $\partial_\xi M_u \Phi P'(M_u - M_k) \circ dW_t$, we finally have

$$\begin{aligned} & dP(M_u - M_k) + \operatorname{div}_x(aP(M_u - M_k))dt - \operatorname{div}_x(a)(P(M_u - M_k) - P'(M_u - M_k)(M_u - M_k))dt \\ &= \partial_\xi M_u \Phi P'(M_u - M_k) dW_t + \frac{1}{2} \partial_\xi (G^2 \partial_\xi M_u) P'(M_u - M_k)dt \\ &\quad - \operatorname{div}_x(aM_k) P'(M_u - M_k)dt \end{aligned} \quad (3.4.3.12)$$

in the sense of distributions against test functions of the form $\Psi(t)\varphi(y, \zeta)$ $\mathbb{P}$ -a.s. As previously, by density we can extend it to any test function in $\mathcal{C}_c^\infty([0, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$.

We conclude as in the deterministic case by taking $P' = \operatorname{sgn}^\alpha$ and $P(\lambda) = \int_0^\lambda \operatorname{sgn}^\alpha(s) ds$ where $\operatorname{sgn}^\alpha$ is a smooth regularization of the sign function. By a quite similar reasoning, letting α goes to 0, we finally get

$$\begin{aligned} & d|M_u - M_k| + \operatorname{div}_x(a|M_u - M_k|)dt + \operatorname{div}_x(aM_k) \operatorname{sgn}(M_u - M_k)dt \\ &+ (\partial_\xi M_u \Phi) \operatorname{sgn}(M_u - M_k) dW_t - \frac{1}{2} \partial_\xi (G^2 \partial_\xi M_u) \operatorname{sgn}(M_u - M_k)dt \\ &\quad - \operatorname{div}_x(aM_k) \operatorname{sgn}(M_u - M_k)dt = 0 \end{aligned} \quad (3.4.3.13)$$

in the sense of distributions over $(0, T) \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R}$ $\mathbb{P}$ -a.s.

Let us finally go back to the case $m \neq 0$. Then we have the following inequality

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbf{T}_y^N \times \mathbf{R}_\zeta} \int_{[0,T] \times \mathbf{T}_x^N \times \mathbf{R}_\xi} \frac{1}{\delta^{N+1}} \partial_\xi \eta\left(\frac{y-x}{\delta}, \frac{\zeta-\xi}{\delta}\right) P'(M_u - M_k)(t, y, \zeta) dm(t, x, \xi) \varphi(t, y, \zeta) dy d\zeta \\
 & \leq \|P'\|_\infty \int_{[0,T] \times \mathbf{T}_x^N \times \mathbf{R}_\xi} \partial_\xi \varphi * \eta^\delta(x, \xi) dm(t, x, \xi) \\
 & \leq C \|P'\|_\infty m(K),
 \end{aligned} \tag{3.4.3.14}$$

where K is a compact containing the support of φ .

Finally, integrating the above inequality against a test function of the form $\varphi(t, x, \xi) = \Theta_R(\xi) \psi(t, x)$ and using the properties associated to the modified Maxwellian stated in Proposition 3.4.1 together again with the use of dominated convergence theorem for $R \rightarrow +\infty$ leads to the conclusion. $\square$

Remark 3.4.1. *Because of the presence of C_φ which is not necessary equal to 0 in (3.4.3.1), at this stage, we are not able to conclude to the uniqueness of the solution.*

Appendix

3.5 Appendix. Well posedness of the stochastic kinetic model

Our purpose is to establish the existence of a solution to the stochastic BGK model

$$\begin{cases} dF^\varepsilon + \operatorname{div}_x(a(x, \xi)F^\varepsilon)dt + \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon}\partial_\xi F^\varepsilon dt = \frac{\mathbf{1}_{u_\varepsilon > \xi} - F^\varepsilon}{\varepsilon}dt - \partial_\xi F^\varepsilon \Phi dW + \frac{1}{2}\partial_\xi(G^2\partial_\xi F^\varepsilon)dt, \\ F^\varepsilon(0) = \mathbf{1}_{u_0 > \xi}, \end{cases} \quad (3.5.0.1)$$

where we recall $u_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathbf{R}} f_\varepsilon(t, x, \xi)d\xi$ and $f_\varepsilon = F_\varepsilon - \mathbf{1}_{0 > \xi}$.

The proof being quite similar to the one in the case of a classical stochastic BGK model, we will not investigate all the details in the following and we will invite the reader to consult [11] for more technical details.

In order to use Duhamel's formula, let us first show an interest in the following auxiliary problem

$$\begin{cases} dX^\varepsilon + \operatorname{div}_x(a(x, \xi)X^\varepsilon)dt + \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon}\partial_\xi X^\varepsilon dt = -\partial_\xi X^\varepsilon \Phi dW + \frac{1}{2}\partial_\xi(G^2\partial_\xi X^\varepsilon)dt, \\ X^\varepsilon(s) = X_0. \end{cases} \quad (3.5.0.2)$$

In order to apply the stochastic characteristic method of Kunita [14], we introduce a truncated problem. Of course, we will then pass to the limit on the truncation parameter to get our original problem.

3.5.1 A truncated problem

We are interested in the truncated problem described in section 3.3.1,

$$\begin{cases} dX^\varepsilon + \operatorname{div}_x(a^R(x, \xi)X^\varepsilon)dt + \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon}\partial_\xi X^\varepsilon dt = -\partial_\xi X^\varepsilon \Phi^R dW + \frac{1}{2}\partial_\xi(G^{R,2}\partial_\xi X^\varepsilon)dt, \\ X^\varepsilon(s) = X_0. \end{cases} \quad (3.5.1.1)$$

To apply the method of stochastic characteristics, we must reformulate the problem in Stratonovich form. Using the formula which links Itô and Stratonovich integrals, we are able to prove that if X is a $\mathcal{C}^1(\mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ -valued continuous $(\mathcal{F}_t)$ -semimartingale whose martingale part is given by $-\int_0^t \partial_\xi X^\varepsilon \Phi^R dW$ then

$$-\int_0^t \partial_\xi \Phi dW + \frac{1}{2}\int_0^t \partial_\xi(G^{R,2}\partial_\xi X)dr = -\int_0^t \partial_\xi X \Phi^R \circ dW + \frac{1}{4}\int_0^t \partial_\xi X \partial_\xi G^{R,2} dr \quad (3.5.1.2)$$

and for X being only a $\mathcal{D}'(\mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ -valued continuous $(\mathcal{F}_t)$ -semimartingale, the result is still valid in the sense of distributions (see [11] for more details). The truncated problem can then be reformulated as follows

$$\begin{cases} dX^\varepsilon + \operatorname{div}_x(a^R(x, \xi)X^\varepsilon)dt + \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon}\partial_\xi X^\varepsilon dt = -\partial_\xi X^\varepsilon \Phi^R \circ dW + \frac{1}{4}\partial_\xi X^\varepsilon \partial_\xi G^{R,2} dt, \\ X^\varepsilon(s) = X_0. \end{cases} \quad (3.5.1.3)$$

and applying the method, we obtain the following proposition:

Proposition 3.5.1. *Let $R > 0$. If $X_0 \in \mathcal{C}^{3,\mu}(\mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ almost surely, there exists a unique strong solution to (3.5.1.3) that we will denote $X^\varepsilon(t, x, \xi; s)$.*

In addition, $X^\varepsilon(t, x, \xi; s)$ is a continuous $\mathcal{C}^{3,\nu}$ -semimartingale for some $\nu > 0$ and is represented by

$$X^\varepsilon(t, x, \xi; s) = \exp \left(\int_s^t -\operatorname{div}_x(a^R(\Psi_{\theta,t}^{\varepsilon,R}(x, \xi)))d\theta \right) X_0(\Psi_{s,t}^{\varepsilon,R}(x, \xi)), \quad (3.5.1.4)$$

where Ψ^R is the inverse flow of the stochastic flow associated to the stochastic characteristic system coming from (3.5.1.3).

Remark 3.5.1. *The stochastic characteristic system associated to (3.5.1.3) is the following*

$$\begin{cases} d\varphi_t^{\varepsilon,R,0} = \frac{\Lambda(\varphi_t^{\varepsilon,R,1}, \dots, \varphi_t^{\varepsilon,R,N})}{\varepsilon} dt - \frac{1}{4} \partial_\xi G^{R,2}(\varphi_t^{\varepsilon,R}) dt + \sum_{k=1}^d g_k^R(\varphi_t^{\varepsilon,R}) \circ d\beta_k(t), \\ d\varphi_t^{\varepsilon,R,i} = a_i^R(\varphi_t^{\varepsilon,R}) dt \text{ pour } i = 1, \dots, N, \\ d\eta_t^{\varepsilon,R} = \eta_t^{\varepsilon,R} (-\operatorname{div}_x(a^R(\varphi_t^{\varepsilon,R}))) dt. \end{cases} \quad (3.5.1.5)$$

We notice that in our case, it still presents a dependence on ε .

We denote by $\mathcal{S}^{\varepsilon,R}$ the solution operator of (3.5.1.3). We have

$$\mathcal{S}^{\varepsilon,R}(t, s) = \exp \left(\int_s^t -\operatorname{div}_x(a^R(\Psi_{\theta,t}^{\varepsilon,R}(x, \xi)))d\theta \right) X_0(\Psi_{s,t}^{\varepsilon,R}(x, \xi)). \quad (3.5.1.6)$$

The domain of definition of the solution operator can be extended to X_0 only defined almost everywhere since diffeomorphisms preserve sets of measure zero. Nevertheless, the resulting process will no longer be a strong solution. We obtain the following properties for the operator $\mathcal{S}^{\varepsilon,R}$.

Proposition 3.5.2. *Let $R > 0$, $\varepsilon > 0$ and $\mathcal{S}^{\varepsilon,R} = \{\mathcal{S}^{\varepsilon,R}(t, s), 0 \leq s \leq t \leq T\}$ be defined as previously. Then*

- (i) $\mathcal{S}^{\varepsilon,R}$ is a family of bounded linear operators on $L^1(\Omega \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ such that the operator norm is bounded by 1, meaning for any $X_0 \in L^1(\Omega \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$, $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|\mathcal{S}^{\varepsilon,R}(t, s)X_0\|_{L^1(\Omega \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})} \leq \|X_0\|_{L^1(\Omega \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})}. \quad (3.5.1.7)$$

- (ii) $\mathcal{S}^{\varepsilon,R}$ verifies the semi-group law

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\varepsilon,R}(t, s) &= \mathcal{S}^{\varepsilon,R}(t, r) \circ \mathcal{S}^{\varepsilon,R}(r, s), & 0 \leq s \leq r \leq t \leq T, \\ \mathcal{S}^{\varepsilon,R}(s, s) &= Id, & 0 \leq s \leq T. \end{aligned} \quad (3.5.1.8)$$

Sketch of the proof. The proof being essentially the same as the one in [11], let us only recall here the main ideas and insist on what is a bit different in our case. The idea is the following: we first work with a regularized initial data X_0^δ defined as follows $X_0^\delta(\omega) = (X_0(\omega) * h_\delta)k_\delta$ where (k_δ) is a smooth truncation on $\mathbf{R}$ and (h_δ) is an approximation to the identity on $\mathbf{T}^N \times \mathbf{R}$ in order to build a unique strong solution $X^{\varepsilon,\delta} = \mathcal{S}^{\varepsilon,R}(t, s)X_0^\delta$ to the following system

$$\begin{cases} dX^{\varepsilon,\delta} + \operatorname{div}_x(a^R(x, \xi)X^{\varepsilon,\delta})dt + \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon} \partial_\xi X^{\varepsilon,\delta}dt = -\partial_\xi X^{\varepsilon,\delta} \Phi^R dW + \frac{1}{2} \partial_\xi (G^{R,2} \partial_\xi X^{\varepsilon,\delta})dt, \\ X^{\varepsilon,\delta}(s) = X_0^\delta. \end{cases} \quad (3.5.1.9)$$

The aim is the following: we integrate the equation (3.5.1.9) with respect to the variables ω, x, ξ and get

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} X^{\varepsilon, \delta}(t, x, \xi) d\xi dx + \mathbb{E} \int_s^t \int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} \operatorname{div}_x(a^R(x, \xi) X^{\varepsilon, \delta}(r, x, \xi)) d\xi dx dr \\ & \quad + \mathbb{E} \int_s^t \int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon} \partial_\xi X^{\varepsilon, \delta}(r, x, \xi) d\xi dx dr \\ & = \mathbb{E} \int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} X_0^\delta(x, \xi) d\xi dx - \mathbb{E} \int_s^t \int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} \partial_\xi X^{\varepsilon, \delta}(r, x, \xi) \Phi^R dW_r d\xi dx \\ & \quad + \mathbb{E} \int_s^t \int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2} \partial_\xi (G^{R, 2}(x, \xi) \partial_\xi X^{\varepsilon, \delta}(r, x, \xi)) d\xi dx dr. \end{aligned} \quad (3.5.1.10)$$

Then, we want to show that all the terms disappear except for the first term of the left-hand side and the first term of the right-hand side. Let us first focus on the stochastic integral. All we need to do is:

- (1) Prove that for all $x \in T^N$, $\xi \in \mathbf{R}$, $\int_s^t \partial_\xi X^{\varepsilon, \delta}(r, x, \xi) \Phi^R dW_r$ is a well defined martingale with zero expected value.
- (2) Use the stochastic Fubini theorem to interchange integrals with respect to x, ξ and the stochastic one.

Then we will have proven the disappearance of the second term of the right-hand side.

In order to do (1), we must prove that $\mathbb{E} \int_s^t |\partial_\xi X^{\varepsilon, \delta}(r, x, \xi) g_k^R|^2 dr < +\infty$. The expression of $X^{\varepsilon, \delta}$ being slightly more complicated in our case, we must claim that not only $\partial_\xi \Psi_{s,r}^{\varepsilon, R}(x, \xi)$ but also $\partial_{x_i} \Psi_{s,r}^{\varepsilon, R}$ and $\partial_\xi \partial_{x_i} \Psi_{s,r}^{\varepsilon, R}$ for $i = 1, \dots, N$ solves a backward stochastic differential equations with bounded coefficients (see [14, Theorem 4.6.5 and Corollary 4.6.6]) since g_k^R , X_0^δ and all the partial derivatives of all order of a_i^R for $i = 1, \dots, N$ are bounded. Thus, those solutions possess moments of any order which are bounded in $0 \leq s \leq t \leq T$, $x \in \mathbf{T}^N$, $\xi \in \mathbf{R}$. By assumption (3.2.0.2), we have $\operatorname{div}_x(a(x, \xi)) \geq 0$ for all x, ξ which leads to the statement (1).

To prove (2), we must establish that

$$\int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} \left(\mathbb{E} \int_s^T (|\partial_\xi X^{\varepsilon, \delta} g_k^R(x, \xi)|^2) dr \right)^{1/2} d\xi dx < +\infty. \quad (3.5.1.11)$$

By the expression (3.5.1.4) of $X^{\varepsilon, \delta}$, we know that $\partial_\xi X^{\varepsilon, \delta}$ only contains terms, mentioned previously, which all are bounded or possess moments of any order which are bounded. Then it is enough to prove that $X_0^\delta(\Psi_{s,r}^{\varepsilon, R}(x, \xi))$ and $\nabla_{x, \xi} X_0^\delta(\Psi_{s,r}^{\varepsilon, R}(x, \xi))$ are compactly supported in ξ for all $s, r, x, \mathbb{P}$ - a.s. thanks to some growth control on the stochastic flow to conclude (for more details see [11]).

Finally, the second term of the left-hand side disappears thanks to periodic boundary conditions and the third terms of the left-hand side and the right-hand side disappears because of the support compact in ξ of respectfully $X^{\varepsilon, \delta}$ and $G^{R, 2}$. Therefore at the end, we obtain

$$\mathbb{E} \int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} X^{\varepsilon, \delta}(t, x, \xi) d\xi dx = \mathbb{E} \int_{\mathbf{T}^N} \int_{\mathbf{R}} X_0^\delta(x, \xi) d\xi dx. \quad (3.5.1.12)$$

The statement (i) of Proposition 3.5.2 is then obtained by passing to the limit in δ and a use of the Fatou lemma. The statement (ii) of Proposition 3.5.2 is straightforward using the flow property of Ψ . $\square$

Remark 3.5.2. *Actually, the assumption (3.2.0.2) could be lighten in $\text{div}_x(a)$ has a low bound and the proof would still work, the only difference being that the operator norm would no longer be bounded by 1.*

Moreover, a use of the regularization X_0^δ together with the dominated convergence theorem and the dominated convergence theorem for stochastic integrals directly leads to the following result:

Corollary 3.5.3. *Let $R > 0$. If X_0 is a $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{B}(\mathbf{T}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R})$ -measurable initial data belonging to $L^\infty(\Omega \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$, then there exists a weak solution $X^\varepsilon \in L^\infty_{\mathcal{P}_s}(\Omega \times [s, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ to (3.5.1.3) meaning for any $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$, a.e. $t \in [s, T]$, $\mathbb{P}$ a.s.,*

$$\begin{aligned} \langle X^\varepsilon(t), \phi \rangle = & \langle X^\varepsilon(0), \phi \rangle + \int_s^t \langle X^\varepsilon(r), a^R \cdot \nabla \phi \rangle dr + \frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \langle X^\varepsilon(r), \Lambda(x) \partial_\xi \phi \rangle dr \\ & + \sum_{k=1}^d \int_s^t \langle X^\varepsilon(r), \partial_\xi(g_k^R \phi) \rangle d\beta_k(r) + \frac{1}{2} \int_s^t \langle X^\varepsilon(r), \partial_\xi(G^{R,2} \partial_\xi \phi) \rangle dr. \end{aligned} \quad (3.5.1.13)$$

Moreover, X^ε is represented by $X^\varepsilon = \mathcal{S}^{\varepsilon,R}(t, s)X_0$. In particular, $t \mapsto \langle \mathcal{S}^{\varepsilon,R}(t, s)X_0, \phi \rangle$ is a continuous $(\mathcal{F}_t)_{t \geq s}$ -semimartingale.

Remark 3.5.3. *We point out that in our situation, with the presence of the term $\text{div}_x(a^R(x, \xi))$ which is not necessary equal to zero, the use of the commutation lemma of Di Perna-Lions ([8, Lemma II.1]) proves that the uniqueness of a weak solution no longer holds precisely in the case where $\text{div}_x(a^R(x, \xi))$ is not equal to zero.*

3.5.2 Passage to the non truncated problem

Our aim is to derive the existence of a weak solution to

$$\begin{cases} dX^\varepsilon + \text{div}_x(a(x, \xi)X^\varepsilon)dt + \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon} \partial_\xi X^\varepsilon dt = -\partial_\xi X^\varepsilon \Phi dW + \frac{1}{2} \partial_\xi(G^2 \partial_\xi X^\varepsilon)dt, \\ X^\varepsilon(s) = X_0. \end{cases} \quad (3.5.2.1)$$

Proposition 3.5.4. *If X_0 is a $\mathcal{F}_s \otimes \mathcal{B}(\mathbf{T}^N) \otimes \mathcal{B}(\mathbf{R})$ -measurable initial data belonging to $L^\infty(\Omega \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$, then there exists a weak solution $X^\varepsilon \in L^\infty_{\mathcal{P}_s}(\Omega \times [s, T] \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ to (3.5.2.1). Moreover, it is represented by*

$$\mathcal{S}^\varepsilon(t, s)(\omega, x, \xi) := \lim_{R \rightarrow +\infty} [\mathcal{S}^{\varepsilon,R}(t, s)X_0](\omega, x, \xi), \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \quad (3.5.2.2)$$

Proof. We denote $\tau^R(s, x, \xi) = \inf\{t \geq s, |\varphi_{s,t}^{\varepsilon,R,0}(x, \xi)| > \frac{R}{2}\}$ with the convention $\inf \emptyset = T$. $\tau^R(s, x, \xi)$ is a stopping time with respect to the filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq s}$ for any $s \in [0, t]$, $x \in \mathbf{T}^N$, $\xi \in \mathbf{R}$. For more clarity, we do not write the dependence on s, x, ξ of τ^R in the following.

Let us first prove that $(\tau^R)_{R \in \mathbf{N}}$ is a non decreasing sequence such that $\tau_\infty := \lim_{R \rightarrow \infty} \tau^R$ is equal to T almost surely. We know that for any $R > 0$, the process $\varphi^{\varepsilon,R,0}$ satisfies the equation

$$d\varphi_t^{\varepsilon,R,0} = \frac{\Lambda(\varphi_t^{\varepsilon,R,1}, \dots, \varphi_t^{\varepsilon,R,N})}{\varepsilon} dt + \sum_{k=1}^d g_k^R(\varphi_t^{\varepsilon,R}) d\beta_k(t). \quad (3.5.2.3)$$

We denote $\tilde{\tau}_R := \inf\{\tau^R, \tau^{R+1}\}$. The equations satisfy by $\varphi_t^{\varepsilon,R,0}$ and $\varphi_t^{\varepsilon,R+1,0}$ being exactly the same on $[0, \tilde{\tau}_R]$, then the coefficients being at least Lipschitz we know that $\varphi_{s,t}^{\varepsilon,R,0}(x, \xi) = \varphi_{s,t}^{\varepsilon,R+1,0}(x, \xi)$ for $t \in [0, \tilde{\tau}_R]$. So, we get that $\tau^R \leq \tau^{R+1}$. Indeed, let us reason by contradiction and suppose that $\tau^R > \tau^{R+1}$. Then for $t \in [\tau^{R+1}, \tau^R]$, we have

$$|\varphi_{s,t}^{\varepsilon,R,0}(x, \xi)| = |\varphi_{s,t}^{\varepsilon,R+1,0}(x, \xi)| > \frac{R+1}{2} > \frac{R}{2}$$

which is a contradiction with the fact that τ^R is the infimum of the times realizing this condition. So the sequence $(\tau^R)_{R \in \mathbf{N}}$ is a non decreasing and we can define the almost sure limit

$$\tau_\infty := \lim_{R \rightarrow \infty} \tau^R. \quad (3.5.2.4)$$

We know that τ_∞ is still a stopping time. We denote $\varphi_{s,t}^{\varepsilon,0}(x, \xi) = \varphi_{s,t}^{\varepsilon,R,0}(x, \xi)$ for $t \in [0, \tau^R]$. The process is defined on $[0, \tau_\infty]$ and it is a solution of

$$d\varphi_t^{\varepsilon,0} = \frac{\Lambda(\varphi_t^{\varepsilon,1}, \dots, \varphi_t^{\varepsilon,N})}{\varepsilon} dt + \sum_{k=1}^d g_k(\varphi_t^{\varepsilon}) d\beta_k(t). \quad (3.5.2.5)$$

Let us now establish some useful estimates to conclude. Denoting $\varphi_{s,t}^{\varepsilon,R,0}(s) = \varphi_{in}^{\varepsilon,R,0}$, we have

$$\begin{aligned} \varphi_{s,t}^{\varepsilon,R,0} &= \varphi_{in}^{\varepsilon,R,0} + \int_s^t \frac{\Lambda(\varphi_r^{\varepsilon,R,1}, \dots, \varphi_r^{\varepsilon,R,N})}{\varepsilon} dr + \int_s^t \sum_{k=1}^d g_k^R(\varphi_r^{\varepsilon,R}) d\beta_k(r) \\ |\varphi_{s,t}^{\varepsilon,R,0}|^2 &\leq C \left(|\varphi_{in}^{\varepsilon,R,0}|^2 + \left(\int_s^t \left| \frac{\Lambda(\varphi_{s,r}^{\varepsilon,R,1}, \dots, \varphi_{s,r}^{\varepsilon,R,N})}{\varepsilon} \right| dr \right)^2 + \left| \int_s^t \sum_{k=1}^d g_k^R(\varphi_{s,r}^{\varepsilon,R}) d\beta_k(r) \right|^2 \right). \end{aligned}$$

Thus by taking the expectation, using well-known results on martingales and assumption (3.2.0.6), we get

$$\begin{aligned} \mathbb{E}|\varphi_{s,t}^{\varepsilon,R,0}|^2 &\leq C \left(\mathbb{E}|\varphi_{in}^{\varepsilon,R,0}|^2 + \frac{M^2 T^2}{\varepsilon^2} + \mathbb{E} \int_s^t \sum_{k=1}^d |g_k^R(\varphi_{s,r}^{\varepsilon,R})|^2 dr \right) \\ &\leq C \left(\mathbb{E}|\varphi_{in}^{\varepsilon,R,0}|^2 + \frac{M^2 T^2}{\varepsilon^2} + \mathbb{E} \int_s^t (1 + |\varphi_{s,r}^{\varepsilon,R,0}|^2) dr \right) \\ &\leq C \left(\mathbb{E}|\varphi_{in}^{\varepsilon,R,0}|^2 + \frac{M^2 T^2}{\varepsilon^2} + T + \mathbb{E} \int_s^t |\varphi_{s,r}^{\varepsilon,R,0}|^2 dr \right). \end{aligned}$$

Indeed, Λ being continuous on $\mathbf{T}^N$ compact, there exists a constant M such that for all $x \in \mathbf{T}^N$, $|\Lambda(x)| \leq M$. By Gronwall lemma, we obtain

$$\mathbb{E}|\varphi_{s,t}^{\varepsilon,R,0}|^2 \leq C \left(\mathbb{E}|\varphi_{in}^{\varepsilon,R,0}|^2 + \frac{M^2 T^2}{\varepsilon^2} + T \right) \exp(CT) =: \mathcal{C}^1(\varphi_{in}^{\varepsilon,R,0}, T, \varepsilon). \quad (3.5.2.6)$$

Moreover, we also have the following

$$\begin{aligned} \sup_{t \in [s, T]} |\varphi_{s,t}^{\varepsilon,R,0}|^2 &\leq C \left(|\varphi_{in}^{\varepsilon,R,0}|^2 + \sup_{t \in [s, T]} \left| \int_s^t \frac{\Lambda(\varphi_{s,r}^{\varepsilon,R,1}, \dots, \varphi_{s,r}^{\varepsilon,R,N})}{\varepsilon} dr \right|^2 \right. \\ &\quad \left. + \sup_{t \in [s, T]} \left| \int_s^t \sum_{k=1}^d g_k^R(\varphi_{s,r}^{\varepsilon,R}) d\beta_k(r) \right|^2 \right). \end{aligned} \quad (3.5.2.7)$$

By the same arguments as previously, we deduce that

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \sup_{t \in [s, T]} |\varphi_{s,t}^{\varepsilon, R, 0}|^2 &\leq C \left(\mathbb{E} |\varphi_{in}^{\varepsilon, R, 0}|^2 + \frac{M^2 T^2}{\varepsilon^2} + \mathbb{E} \sup_{t \in [s, T]} \left| \int_s^t \sum_{k=1}^d g_k^R(\varphi_{s,r}^{\varepsilon, R}) d\beta_k(r) \right|^2 \right) \\
 &\leq C \left(\mathbb{E} |\varphi_{in}^{\varepsilon, R, 0}|^2 + \frac{M^2 T^2}{\varepsilon^2} + 4 \int_s^T \mathbb{E} \sum_{k=1}^d |g_k^R(\varphi_{s,r}^{\varepsilon, R})|^2 dr \right) \\
 &\leq C \left(\mathbb{E} |\varphi_{in}^{\varepsilon, R, 0}|^2 + \frac{M^2 T^2}{\varepsilon^2} + \int_s^T \mathbb{E} (1 + |\varphi_{s,r}^{\varepsilon, R, 0}|^2) dr \right) \\
 &\leq C \left(\mathbb{E} |\varphi_{in}^{\varepsilon, R, 0}|^2 + \frac{M^2 T^2}{\varepsilon^2} + T + \int_s^T \mathbb{E} |\varphi_{s,r}^{\varepsilon, R, 0}|^2 dr \right) \\
 &\leq C \left(\mathbb{E} |\varphi_{in}^{\varepsilon, R, 0}|^2 + \frac{M^2 T^2}{\varepsilon^2} + T + \int_0^T \mathcal{C}^1(\varphi_{in}^{\varepsilon, R, 0}, T, \varepsilon) dr \right) =: \mathcal{C}^2(\varphi_{in}^{\varepsilon, R, 0}, T, \varepsilon).
 \end{aligned} \tag{3.5.2.8}$$

Finally, applying the Markov inequality, we get

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [s, T]} |\varphi_{s,t}^{\varepsilon, R, 0}| \geq \frac{R}{2} \right) &\leq \frac{4}{R^2} \mathbb{E} \left(\sup_{t \in [s, T]} |\varphi_{s,t}^{\varepsilon, R, 0}|^2 \right) \\
 &\leq \frac{4 \mathcal{C}^2(\varphi_{in}^{\varepsilon, R, 0}, T, \varepsilon)}{R^2}
 \end{aligned} \tag{3.5.2.9}$$

and then

$$\mathbb{P} \left(\sup_{t \in [s, T]} |\varphi_{s,t}^{\varepsilon, R, 0}| < \frac{R}{2} \right) \geq 1 - \frac{4 \mathcal{C}^2(\varphi_{in}^{\varepsilon, R, 0}, T, \varepsilon)}{R^2}. \tag{3.5.2.10}$$

$(\tau^R)_{R \in \mathbf{N}}$ being a non decreasing sequence, we finally obtain that $\mathbb{P}(\tau_\infty = T) = 1$ passing to the limit in R .

Still because of uniqueness we have $\mathcal{S}^{\varepsilon, R+1}(t, s)X_0 = \mathcal{S}^{\varepsilon, R}(t, s)X_0$ on $[0, \tau^R(s, x, \xi)]$. So, we define

$$\mathcal{S}^\varepsilon(t, s)X_0(\omega, x, \xi) := \lim_{R \rightarrow +\infty} [\mathcal{S}^{\varepsilon, R}(t, s)X_0](\omega, x, \xi), \quad 0 \leq s \leq t \leq T. \tag{3.5.2.11}$$

which is a solution to (3.5.2.1). □

Corollary 3.5.5. *We have the following properties:*

- (i) $\mathcal{S}^\varepsilon = \{\mathcal{S}^\varepsilon(t, s), 0 \leq s \leq t \leq T\}$ is a family of bounded operators on $L^1(\Omega \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$ such that the operator norm is bounded by 1 meaning for any $X_0 \in L^1(\Omega \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$, $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$\|\mathcal{S}^\varepsilon(t, s)X_0\|_{L^1(\Omega \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})} \leq \|X_0\|_{L^1(\Omega \times \mathbf{T}^N \times \mathbf{R})}. \tag{3.5.2.12}$$

- (ii) $\mathcal{S}^{\varepsilon, R}$ verifies the semi-group law

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}^\varepsilon(t, s) &= \mathcal{S}^\varepsilon(t, r) \circ \mathcal{S}^\varepsilon(r, s), \quad 0 \leq s \leq r \leq t \leq T, \\
 \mathcal{S}^\varepsilon(s, s) &= Id, \quad 0 \leq s \leq T.
 \end{aligned} \tag{3.5.2.13}$$

The proof is straightforward using the definition of $\mathcal{S}^\varepsilon$ and Proposition 3.5.2. We can conclude to the existence of a solution for the stochastic kinetic equation.

Proposition 3.5.6. *For any $\varepsilon > 0$, there exists a weak solution of the stochastic BGK equation with a high field scaling denoted by F_ε . Moreover, F_ε is represented by*

$$F_\varepsilon(t) = e^{-t/\varepsilon} \mathcal{S}^\varepsilon(t, 0) \mathbf{1}_{u_0 > \xi} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\varepsilon}} \mathcal{S}^\varepsilon(t, s) \mathbf{1}_{u_\varepsilon(s) > \xi} ds. \quad (3.5.2.14)$$

Sketch of the proof. Noticing that F_ε is not integrable with respect to ξ , we introduce the process $h_\varepsilon(t) := F_\varepsilon - \mathcal{S}^\varepsilon(t, 0) \mathbf{1}_{0 > \xi}$. Then, by Proposition 3.5.4, we get that h_ε solves the following system

$$\begin{cases} dh^\varepsilon + \operatorname{div}_x(a(x, \xi)h^\varepsilon)dt + \frac{\Lambda(x)}{\varepsilon} \partial_\xi h^\varepsilon dt = \frac{(\mathbf{1}_{u_\varepsilon > \xi} - \mathcal{S}^\varepsilon(t, 0) \mathbf{1}_{0 > \xi}) - h^\varepsilon}{\varepsilon} dt - \partial_\xi h^\varepsilon \Phi dW_t \\ \quad + \frac{1}{2} \partial_\xi (G^2 \partial_\xi h^\varepsilon) dt, \\ h_\varepsilon(0) = \chi_{u_0}. \end{cases} \quad (3.5.2.15)$$

The proof is then quite classical. Indeed, using Duhamel's formula, the problem (3.5.2.15) can be rewritten as follows

$$h_\varepsilon(t) = e^{-t/\varepsilon} \mathcal{S}^\varepsilon(t, 0) \chi_{u_0} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\varepsilon}} \mathcal{S}^\varepsilon(t, s) [\mathbf{1}_{u_\varepsilon(s) > \xi} - \mathcal{S}^\varepsilon(s, 0) \mathbf{1}_{0 > \xi}] ds \quad (3.5.2.16)$$

and it is then reduced to a fixed point method. We define the mapping $\mathcal{L}$:

$$(\mathcal{L}g)(t) = e^{-t/\varepsilon} \mathcal{S}^\varepsilon(t, 0) \chi_{u_0} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\varepsilon}} \mathcal{S}^\varepsilon(t, s) [\mathbf{1}_{v(s) > \xi} - \mathcal{S}^\varepsilon(s, 0) \mathbf{1}_{0 > \xi}] ds \quad (3.5.2.17)$$

where $v(s) = \int_{\mathbf{R}} (g(s, \xi) + \mathcal{S}^\varepsilon(s, 0) \mathbf{1}_{0 > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi}) d\xi$. We show that the mapping $\mathcal{L}$ is a contraction on $L^\infty(0, T; L^1(\Omega \times \mathbf{T}^N))$ using Corollary 3.5.5 and assumptions on the initial data (see [11] for more details). Then we can conclude to the existence of a unique fixed point h_ε in $L^\infty(0, T; L^1(\Omega \times \mathbf{T}^N))$. Moreover, using the properties of the solution operator of Corollary 3.5.5 and using the fact that $\chi_{u_0} = \mathbf{1}_{u_0 > \xi} - \mathbf{1}_{0 > \xi}$, we finally obtain

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(t) &= h_\varepsilon(t) + \mathcal{S}^\varepsilon(t, 0) \mathbf{1}_{0 > \xi} \\ &= e^{-t/\varepsilon} \mathcal{S}^\varepsilon(t, 0) \mathbf{1}_{u_0 > \xi} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-\frac{t-s}{\varepsilon}} \mathcal{S}^\varepsilon(t, s) \mathbf{1}_{u_\varepsilon(s) > \xi} ds \end{aligned} \quad (3.5.2.18)$$

which concludes the proof. $\square$

Remark 3.5.4. *As a consequence of Corollary 3.5.3, $F_\varepsilon(t)$ satisfies the following : $t \mapsto \langle F_\varepsilon(t), \phi \rangle$ is a continuous $(\mathcal{F}_t)$ - semimartingale for any $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{T}^N \times \mathbf{R})$.*

Bibliography

- [1] C. Bauzet, G. Vallet, and P. Wittbold. The Cauchy problem for conservations laws with a multiplicative Stochastic perturbation. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 09(04):661–709, 2012.
- [2] F. Berthelin and F. Bouchut. Weak entropy boundary conditions for isentropic gas dynamics via kinetic relaxation. *Journal of Differential Equations*, 185(1):251 – 270, 2002.
- [3] F. Berthelin, N. J. Mauser, and F. Poupaud. High-field limit from a kinetic equation to multidimensional scalar conservation laws. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 04(01):123–145, 2007.

-
- [4] F. Berthelin and J. Vovelle. A Bhatnagar-Gross-Krook approximation to scalar conservation laws with discontinuous flux. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section: A Mathematics*, 140:953–972, 10 2010.
 - [5] F. Berthelin and J. Vovelle. Stochastic isentropic Euler equations. *ArXiv e-prints*, October 2013.
 - [6] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Phys. Rev.*, 94:511–525, May 1954.
 - [7] A. Debussche and J. Vovelle. Scalar conservation laws with stochastic forcing. *Journal of Functional Analysis*, 259(4):1014 – 1042, 2010.
 - [8] R.J. DiPerna and P.L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Inventiones mathematicae*, 98(3):511–547, 1989.
 - [9] Weinan E, K. Khanin, A. Mazel, and Ya. Sinai. Invariant Measures for Burgers Equation with Stochastic Forcing. *Annals of Mathematics*, 151(3):877–960, 2000.
 - [10] J. Feng and D. Nualart. Stochastic scalar conservation laws. *Journal of Functional Analysis*, 255(2):313 – 373, 2008.
 - [11] M. Hofmanova. A Bhatnagar-Gross-Krook approximation to stochastic scalar conservation laws. *Annales de l’Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*, 51(4):1500–1528, 11 2015.
 - [12] H. Holden and N.H. Risebro. Conservation laws with a random source. *Applied Mathematics and Optimization*, 36(2):229–241, 1997.
 - [13] J.U. Kim. On a stochastic scalar conservation law. *Indiana Univ. Math. J.*, 2003.
 - [14] H. Kunita. *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 1997.
 - [15] P.-L. Lions, B. Perthame, and E. Tadmor. A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations. *J. Amer. Math. Soc.*, pages 169–191, 1994.
 - [16] A. Nouri, A. Omrane, and J.P. Vila. Boundary Conditions for Scalar Conservation Laws from a Kinetic Point of View. *Journal of Statistical Physics*, 1999.
 - [17] B. Perthame and E. Tadmor. A kinetic equation with kinetic entropy functions for scalar conservation laws. *Communications in Mathematical Physics*, 136(3):501–517, 1991.
 - [18] L. Saint-Raymond. *Hydrodynamic Limits of the Boltzmann Equation*. Lecture Notes in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

Chapitre 4

Stochastic Averaging Lemmas and Application to Rosseland Approximations

On s'intéresse à la question de la régularité de moyennes en vitesse $\int f(x, v)\psi(v) d\mu(v)$ quand f et $v \cdot \nabla_x f$ appartiennent tous deux à un espace L^p , $1 \leq p < \infty$, et que la variable v vit dans un sous-ensemble discret de $\mathbb{R}^D$.

On établit un taux, dépendant du nombre de vitesses, qui mesure le défaut de régularité $H^{1/2}$. Puis, on prouve que la régularité $H^{1/2}$ est valable en espérance quand l'ensemble des vitesses est choisi aléatoirement.

On applique alors ce résultat pour le changement d'échelle mésoscopique vers macroscopique dans le cadre de l'approximation de Rosseland, modèle associé aux phénomènes de transferts radiatifs. On peut alors utiliser les résultats de régularité en moyenne pour établir la consistance d'un schéma numérique à vitesses discrètes aléatoires.

Ici, l'aléa provient donc du choix des vitesses tirées selon une loi uniforme continue dans le cube d'arête 1 ou sur la sphère unité.

Ce chapitre est le fruit d'une collaboration avec Thierry Goudon ¹. Il a été soumis pour publication sous le titre *A Stochastic Averaging Lemma for Random Discrete Velocity Grids. Application to the Consistency Analysis of the Diffusion Asymptotics with a Monte-Carlo Discretization of the Velocities*.

Contents

4.1 Introduction	129
4.2 Discrete Velocity Averaging Lemmas	130
4.2.1 Deterministic case: evaluation of the defect	130
4.2.2 A stochastic discrete velocity averaging lemma	135
4.3 Application to the Rosseland Approximation	141
4.3.1 Entropy estimates	143
4.3.2 Diffusive limit	146
Bibliography	149

¹Project COFFEE, INRIA Sophia Antipolis Méditerranée, LJAD Université de Nice Sophia Antipolis

4.1 Introduction

Averaging lemma is now a classical tool for the analysis of kinetic equations. Roughly speaking it can be explained as follows. Let $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^D$, endowed with a measure $d\mu$. We consider a sequence of functions $f_n : \mathbb{R}^D \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$. We assume that

- a) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in $L^2(\mathbb{R}^D \times \mathcal{V})$,
- b) $(v \cdot \nabla_x f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in $L^2(\mathbb{R}^D \times \mathcal{V})$.

Given $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^D)$, we are interested in the *velocity average*

$$\rho_n[\psi](x) = \int_{\mathcal{V}} f_n(x, v) \psi(v) d\mu(v).$$

Of course, a) already tells us that $(\rho_n[\psi])_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in $L^2(\mathbb{R}^D)$. We wish to obtain further regularity or compactness properties, as a consequence of the additional assumption b), and the fact that we are averaging with respect to the variable v . The first result in that direction dates back to [3] (see also [1]); it asserts that $(\rho_n[\psi])_{n \in \mathbb{N}}$ is bounded in the Sobolev space $H^{1/2}(\mathbb{R}^D)$ and it is thus relatively compact in $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^D)$, by virtue of the standard Rellich's theorem. This basic result has been improved in many directions: L^2 can be replaced by the L^p framework, at least with $1 < p < \infty$, and we can relax b) by allowing derivatives with respect to v and certain loss of regularity with respect to x ; see, among others, [13, 16, 26]. Time derivative or force terms can be considered as well, see, additionally to the above-mentioned references, [5]. Such an argument plays a crucial role in the stunning theory of “renormalized solutions” of the Boltzmann equation [12], and more generally for proving the existence of solutions to non linear kinetic models like in [11]. It is equally a crucial ingredient for the analysis of hydrodynamic regimes, which establish the connection between microscopic models and fluid mechanics systems; for the asymptotic of the Boltzmann equation to the incompressible Navier–Stokes system, which needs a suitable L^1 version of the average lemma [17], we refer the reader to [18, 27, 29]. Finally, it is worth pointing that averaging lemma can be used to investigate the regularizing effects of certain PDE (convection-diffusion and elliptic equations, nonlinear conservation laws, etc) [28].

In order to illustrate our purpose, let us consider the following simple model which can be motivated from radiative transfer theory:

$$\varepsilon \partial_t f_\varepsilon + v \cdot \nabla_x f_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} \sigma(\rho_\varepsilon)(\rho_\varepsilon - f_\varepsilon) \quad (4.1.0.1)$$

where

$$\rho_\varepsilon(t, x) = \int_{\mathcal{V}} f_\varepsilon(t, x, v) d\mu(v),$$

and $\sigma : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ is a given smooth function. The parameter $0 < \varepsilon \ll 1$ is defined from physical quantities. As it tends to 0, both $f_\varepsilon(t, x, v)$ and $\rho_\varepsilon(t, x)$ converge to $\rho(t, x)$, which satisfies the non linear diffusion equation

$$\partial_t \rho = \nabla_x \cdot \left(A \nabla_x F(\rho) \right), \quad A = \int_{\mathcal{V}} v \otimes v d\mu(v), \quad F(\rho) = \int_0^\rho \frac{dz}{\sigma(z)}. \quad (4.1.0.2)$$

The averaging lemma is an efficient tool to deal with the nonlinearity of such a problem, as discussed in [3].

However the discussion above hides the fact that we need some assumptions on the measured set of velocities $(\mathcal{V}, d\mu)$ in order to obtain the regularization property of the velocity averaging. Roughly speaking, we need “enough” directions v when we consider the derivatives in b). More technically, the compactness statement holds provided for any $0 < R < \infty$ we can find $C_R > 0$, $\delta_0 > 0$, $\gamma > 0$ such that for $0 < \delta < \delta_0$ and $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$, we have

$$\text{meas}\left(\left\{v \in \mathcal{V} \cap B(0, R), |v \cdot \xi| \leq \delta\right\}\right) \leq C_R \delta^\gamma.$$

This assumption appears in many statements about regularity of the velocity averages; as far as we are only interested in compactness issue, it can be replaced by the more intuitive assumption (see e. g. [14, Th. 1 in Lect. 3]): for any $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ we have

$$\text{meas}\left(\left\{v \in \mathcal{V} \cap B(0, R), v \cdot \xi = 0\right\}\right) = 0. \quad (4.1.0.3)$$

Clearly these assumptions are satisfied when the measure $d\mu$ is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure (with, for the sake of concreteness, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^D$ or $\mathcal{V} = \mathbb{S}^{D-1}$). However, they fail for models based on a discrete set of velocities. For instance let $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$, with $v_j \in \mathbb{R}^D$, and $d\mu(v) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(v = v_j)$; it suffices to pick $\xi \in \mathbb{S}^{N-1}$ orthogonal to one of the v_j 's to contradict (4.1.0.3). (Note that alternative proofs based on compensated compactness techniques have been proposed to justify the asymptotic regime from (4.1.0.1) to (4.1.0.2), that apply to certain discrete velocity models, see [10, 20, 23].) Nevertheless, when the discrete velocities come from a discretization grid of the whole space, the averaging lemma can be recovered asymptotically letting the mesh step go to 0, as shown in [25], motivated by the convergence analysis of numerical schemes for the Boltzmann equation.

This paper aims at investigating further these issues. To be more specific, in Section 4.2 we revisit the averaging lemma for discrete velocities in two directions. First of all, we make more precise the analysis of [25], obtaining a rate on the defect to the $H^{1/2}$ regularity of the velocity average, depending on the mesh size. Second of all, we establish a stochastic version of the averaging lemma. We are still working with a finite number of velocities on bounded sets; however, choosing the velocities randomly, the “compactifying” property of assumption b) can be restored by dealing with the expectation of $\rho_n[\psi]$. This is a natural way to involve “enough velocities”, by looking at a large set of realization of the discrete velocity grid. The analysis is completed in Section 4.3 by going back to the asymptotic problem $\varepsilon \rightarrow 0$ in (4.1.0.1), with a random discretization of the velocity variable, in the spirit of the Monte–Carlo approach.

4.2 Discrete Velocity Averaging Lemmas

4.2.1 Deterministic case: evaluation of the defect

As mentioned above, it is a well known fact that, in the deterministic context, the averaging lemma fails for discrete velocity models. However, as mentioned by S. Mischler in [25], the compactness of velocity averages is recovered asymptotically when we refine a velocity grid in order to recover a continuous velocity model. Here, we wish to quantify the defect of compactness when the number of velocities is finite and fixed. This is the aim of the following claim.

Proposition 4.2.1. *Let $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ and define*

$$A_N = \left(\frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)^D \cap [-0.5, 0.5]^D.$$

Let $f, g \in L^2(\mathbb{R}^D \times A_N)$ satisfy for all $k \in \mathbb{Z}$,

$$v_k \cdot \nabla_x f(x, v_k) = g(x, v_k). \quad (4.2.1.1)$$

Then, for all $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^D)$, the macroscopic quantity

$$\rho[\psi](x) = \frac{1}{(N+1)^D} \sum_k f(x, v_k) \psi(v_k)$$

satisfy $\rho[\psi](x) = \Theta[\psi](x) + \Delta[\psi](x)$ with

$$\|\Theta[\psi]\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)} \leq C \quad \text{and} \quad \|\Delta[\psi]\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{C}{\sqrt{N}}$$

where C is constant which is independent of N .

Remark 4.2.1. Note that in this statement N is the number of grid points per axis. Accordingly, there are $\mathcal{N} = (N+1)^D$ velocities in the set A_N . Therefore the defect of $H^{1/2}$ regularity decays like $\mathcal{N}^{1/2D}$, depending on the dimension.

Proof. As usual, we start by applying the Fourier transform to (4.2.1.1). Then for all $k \in \mathbb{Z}$ and $\xi \in \mathbb{R}^D$, we get

$$\xi \cdot v_k \hat{f}(\xi, v_k) = (-i) \hat{g}(\xi, v_k).$$

Let us set

$$F(\xi) := \left(\frac{1}{(N+1)^D} \sum_k |\hat{f}(\xi, v_k)|^2 \right)^{1/2}, \quad G(\xi) := \left(\frac{1}{(N+1)^D} \sum_k |\hat{g}(\xi, v_k)|^2 \right)^{1/2}.$$

By assumption, we have $F, G \in L_\xi^2$. Still following the standard arguments, we pick $\delta > 0$ and we split

$$\begin{aligned} \hat{\rho}[\psi](\xi) &= \frac{1}{(N+1)^D} \sum_k \hat{f}(\xi, v_k) \psi(v_k) \\ &= \frac{1}{(N+1)^D} \sum_{|\xi \cdot v_k| < \delta |\xi|} \hat{f}(\xi, v_k) \psi(v_k) + \frac{1}{(N+1)^D} \sum_{|\xi \cdot v_k| \geq \delta |\xi|} \hat{f}(\xi, v_k) \psi(v_k). \end{aligned}$$

The Cauchy–Schwarz inequality permits us to dominate the first term as follows

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{(N+1)^D} \sum_{|\xi \cdot v_k| < \delta |\xi|} \hat{f}(\xi, v_k) \psi(v_k) \right| \\ &\leq \|\psi\|_\infty \left(\frac{1}{(N+1)^D} \sum_k |\hat{f}(\xi, v_k)|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{(N+1)^D} \sum_{|\xi \cdot v_k| < \delta |\xi|} 1 \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.2.1.2)$$

For the second term, we use the information in (4.2.1.1); it yields

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{(N+1)^D} \sum_{|\xi \cdot v_k| \geq \delta |\xi|} \hat{f}(\xi, v_k) \psi(v_k) \right| = \left| \frac{1}{(N+1)^D} \sum_{|\xi \cdot v_k| \geq \delta |\xi|} \frac{(-i) \hat{g}(\xi, v_k)}{\xi \cdot v_k} \psi(v_k) \right| \\ &\leq \|\psi\|_\infty \left(\frac{1}{(N+1)^D} \sum_k |\hat{g}(\xi, v_k)|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{(N+1)^D} \sum_{|\xi \cdot v_k| \geq \delta |\xi|} \frac{1}{|\xi \cdot v_k|^2} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.2.1.3)$$

From now on we assume $\xi \neq 0$. Let $(e_1, \dots, e_D)$ stand for the canonical basis of $\mathbb{R}^D$ so that $\xi = \sum_{j=1}^D \alpha_j e_j$ with $\alpha_j \in \mathbb{R}$. We distinguish the following two cases:

- i) either ξ is aligned with an axis: all α_j 's vanish but one,
- ii) or ξ is generated by at least two vectors of the basis.

We start with the case i) assuming for instance $\xi = \alpha e_1$. Then $\xi \cdot v_k = \alpha v_k^1$, where v_k^1 is the first component of the vector v_k .

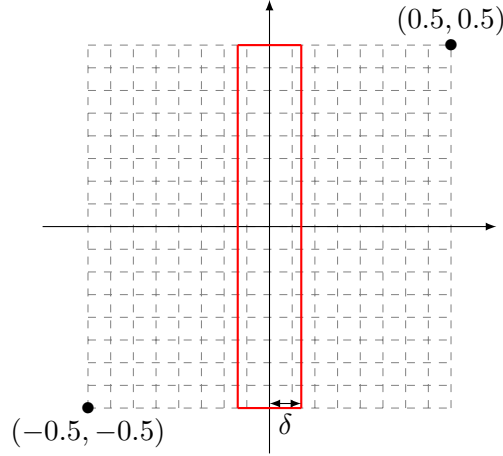


Figure 4.1 – The delimited area corresponds to $|\xi \cdot v_k| < \delta|\xi|$ for ξ colinear to e_1 .

We refer the reader to Fig. 4.1 for completing the discussion. On each horizontal line we find $2\lfloor \delta N \rfloor + 1$ velocities such that $|\xi \cdot v_k| < \delta|\xi|$, where $\lfloor s \rfloor$ stands for the integer part of s . Thus, since there is $(N+1)^{D-1}$ such lines on the domain A_N , we obtain

$$\sum_{|\xi \cdot v_k| < \delta|\xi|} 1 = (2\lfloor \delta N \rfloor + 1)(N+1)^{D-1} = 2 \left(\delta + \frac{1}{N} \right) (N+1)^D.$$

Coming back to (4.2.1.2), we arrive at

$$\left| \frac{1}{(N+1)^D} \sum_{|\xi \cdot v_k| < \delta|\xi|} \hat{f}(\xi, v_k) \psi(v_k) \right| \leq C F(\xi) \sqrt{\delta + \frac{1}{N}}.$$

where $C > 0$ is a generic constant which does not depend on N and ξ .

Next, we cover the set of velocities such that $|v_k \cdot \xi| \geq \delta|\xi|$ by strips of width δ , see Fig. 4.2 in dimension $D = 2$. We denote by S_p the p -th strip delimited by the straight lines $x = p\delta$ and $x = (p+1)\delta$. Each velocity on the strip S_p satisfies $p\delta \leq v_k^1 \leq (p+1)\delta$. Moreover, given a strip S_p , we cannot find more than $\lfloor \delta N \rfloor + 1$ abscissae in the strip and there is $(N+1)^{D-1}$ lines in the domain.

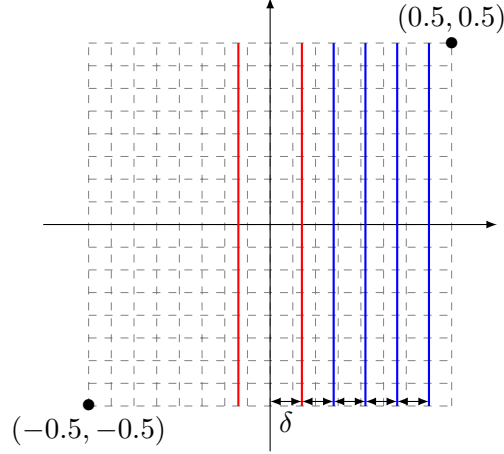


Figure 4.2 – Splitting of the velocity space in strips of width δ . This space being symmetric, we only deal with the part corresponding to positive abscissae.

It follows that

$$\begin{aligned}
 \sum_{|\xi \cdot v_k| \geq \delta |\xi|} \frac{1}{|\xi \cdot v_k|^2} &= \sum_{|\xi \cdot v_k| \geq \delta |\xi|} \frac{1}{|\xi|^2} \frac{1}{|\frac{\xi}{|\xi|} \cdot v_k|^2} \\
 &\leq \frac{1}{|\xi|^2} 2 \left(\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(p\delta)^2} \right) (\delta N + 1)(N + 1)^{D-1} \\
 &\leq \frac{1}{|\xi|^2} 2 \left(\sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \right) \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{\delta N} \right) (N + 1)^D.
 \end{aligned}$$

Thus, we deduce from (4.2.1.3) that

$$\left| \frac{1}{(N + 1)^D} \sum_{|\xi \cdot v_k| \geq \delta |\xi|} \hat{f}(\xi, v_k) \psi(v_k) \right| \leq C G(\xi) \frac{1}{|\xi| \sqrt{\delta}} \left(1 + \frac{1}{\delta N} \right)^{1/2}.$$

We conclude that

$$|\hat{\rho}[\psi](\xi)| \leq C \left(F(\xi) \sqrt{\delta + \frac{1}{N}} + G(\xi) \frac{1}{|\xi| \sqrt{\delta}} \left(1 + \frac{1}{\delta N} \right)^{1/2} \right). \quad (4.2.1.4)$$

holds when ξ is aligned to the axis.

We turn to the general case ii). As illustrated in Fig. 4.3, we can assume that the angle θ between ξ and one of the axis (say e_1) lies in $]0, \pi/4[$, the other cases follow by a symmetry argument.

The reasoning still consists in counting velocities in strips appropriately defined. As said above, without loss of generality we can assume that $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}]$, where we have set $\cos(\theta)|\xi| = \xi \cdot e_1$. We set $\ell_1 := \frac{\delta}{\cos \theta}$. On a given strip, we can find at most $(\lfloor \ell_1 N \rfloor + 1) \times (N + 1)^{D-1}$ velocities, see Fig. 4.5.

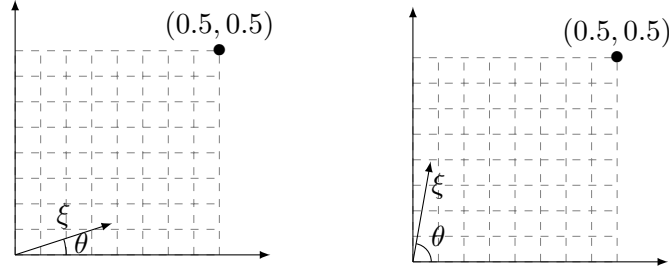


Figure 4.3 – Representation of $\xi \in \mathbb{R}^2$ with $\theta \in]0, \frac{\pi}{4}]$ and $\theta \in]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ with $\cos(\theta)|\xi| = \xi \cdot e_1$.

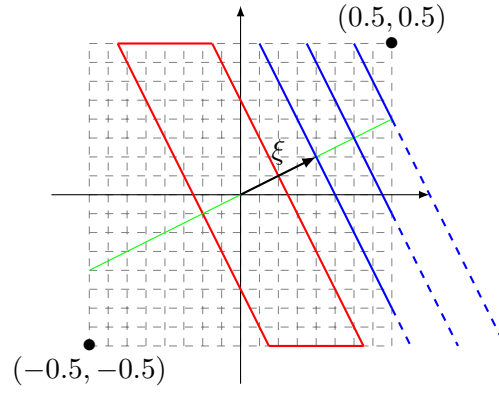


Figure 4.4 – The area corresponding to $|\xi \cdot v_k| \leq \delta|\xi|$ is delimited as previously. The complementary set is split into strips of width δ .

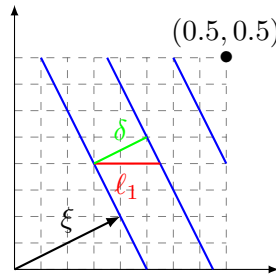


Figure 4.5 – Representation of the parameter ℓ_1 .

Therefore, bearing in mind that $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$, we obtain

$$\begin{aligned}
 \sum_{|\xi \cdot v_k| \geq \delta|\xi|} \frac{1}{|\xi \cdot v_k|^2} &= \sum_{|\xi \cdot v_k| \geq \delta|\xi|} \frac{1}{|\xi|^2} \frac{1}{|\frac{\xi}{|\xi|} \cdot v_k|^2} \\
 &\leq \frac{1}{|\xi|^2} \times 2 \sum_{p \geq 1} \frac{1}{(p\delta)^2} \left(\frac{\delta}{\cos \theta} N + 1 \right) (N+1)^{D-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{|\xi|^2} \times 2 \sum_{p \geq 1} \frac{1}{(p\delta)^2} \frac{1}{\delta \cos \theta} \left(1 + \frac{1}{\delta N}\right) (N+1)^D \\
&\leq 2\sqrt{2} \frac{1}{|\xi|^2} \frac{1}{\delta} \left(1 + \frac{1}{\delta N}\right) (N+1)^D
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\sum_{|\xi \cdot v_k| < \delta |\xi|} 1 &= (2\lfloor \ell_1 N \rfloor + 1)(N+1)^{D-1} \\
&\leq 2 \left(\frac{\delta}{\cos \theta} N + 1 \right) (N+1)^{D-1} \\
&\leq 2\sqrt{2} \left(\delta + \frac{1}{N} \right) (N+1)^D.
\end{aligned}$$

Thus, we deduce exactly like in case i) that (4.2.1.4) holds for any $\xi \neq 0$.

Therefore, we have established that for all $\xi \neq 0$, we get (4.2.1.4) for all $\delta > 0$. We take

$$\delta = \frac{1}{|\xi|} \mathbf{1}_{\{N \geq |\xi|\}} + \frac{1}{N} \mathbf{1}_{\{N < |\xi|\}}$$

and we denote

$$\Theta_N(\xi) := \hat{\rho}[\psi](\xi) \mathbf{1}_{\{N \geq |\xi|\}}, \quad \Delta_N(\xi) := \hat{\rho}[\psi](\xi) \mathbf{1}_{\{N < |\xi|\}}.$$

Then, we have

$$\begin{aligned}
\Theta_N(\xi) &\leq C \left(F(\xi) \sqrt{\frac{1}{|\xi|} + \frac{1}{N}} + G(\xi) \frac{1}{|\xi| \sqrt{\frac{1}{|\xi|}}} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{N}|\xi|}\right)^{1/2} \right) \mathbf{1}_{\{N \geq |\xi|\}} \\
&\leq C (F(\xi) + G(\xi)) \frac{1}{\sqrt{|\xi|}}.
\end{aligned}$$

It implies that

$$|\xi| \Theta_N(\xi)^2 \leq C (G^2(\xi) + F^2(\xi)),$$

which equally holds true for $\xi = 0$. Then by assumption on f and g , we deduce that $\Theta_N \in H^{1/2}(\mathbb{R}^D)$. Finally, we evaluate the remainder as follows

$$\begin{aligned}
\Delta_N(\xi) &\leq C \left(F(\xi) \sqrt{\frac{2}{N}} + G(\xi) \frac{1}{|\xi| \sqrt{\frac{1}{N}}} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{N}N}\right) \right) \mathbf{1}_{\{N < |\xi|\}} \\
&\leq \frac{C}{\sqrt{N}} (F(\xi) + G(\xi)).
\end{aligned}$$

We conclude that

$$\Delta_N^2(\xi) \leq \frac{C}{N} (F^2(\xi) + G^2(\xi)),$$

which is also satisfied when $\xi = 0$. Thus, by assumption on f and g , $\|\Delta_N\|_{L^2}$ is dominated by $\frac{1}{\sqrt{N}}$ an observation which finishes the proof. $\square$

4.2.2 A stochastic discrete velocity averaging lemma

Dealing with random discrete velocities we can expect to make the defect vanish when taking the expectation of the velocity averages. This is indeed the case as shown in the following statement.

Theorem 4.2.2. *Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ be a probability space. Let $V_1, \dots, V_{\mathcal{N}}$ be i.i.d. random variables, distributed according to the continuous uniform distribution on $[-0.5, 0.5]^D$. We set*

$$d\mu = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \delta(v = V_k).$$

Let $f, g \in L^2(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D \times \Omega, dx d\mu(v) d\mathbb{P})$ satisfy for all $x \in \mathbb{R}^D$, $\omega \in \Omega$, and $k \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$

$$V_k \cdot \nabla_x f(x, V_k) = g(x, V_k). \quad (4.2.2.1)$$

Then, for all $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^D)$, the macroscopic quantity

$$\rho[\psi](x) := \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} f(x, V_k) \psi(V_k) = \int_{\mathbb{R}^D} f(x, v) \psi(v) d\mu(v)$$

satisfies $\mathbb{E}\rho[\psi] \in H^{1/2}(\mathbb{R}^D)$.

Remark 4.2.2. *We point out that this statement has a different nature from the stochastic averaging lemma devised in [8, 9], where the velocity set still satisfies an assumption like (4.1.0.3) but the equation for $v \nabla_x f_n$ involves a stochastic term. Our analysis is closer in spirit to the results in [22] where the velocity variable is deterministic but is multiplied by a Brownian motion.*

Proof. We apply the Fourier transform to (4.2.2.1). Then, for all k , we get

$$\xi \cdot V_k \hat{f}(\xi, V_k) = (-i) \hat{g}(\xi, V_k).$$

We set

$$F(\xi) := \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \mathbb{E} \sum_k |\hat{f}(\xi, V_k)|^2 \right)^{1/2}, \quad G(\xi) := \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \mathbb{E} \sum_k |\hat{g}(\xi, V_k)|^2 \right)^{1/2}.$$

Let us split

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \hat{\rho}[\psi](\xi) &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_k \hat{f}(\xi, V_k) \psi(V_k) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{|\xi \cdot V_k| < \delta |\xi|} \hat{f}(\xi, V_k) \psi(V_k) \right] + \mathbb{E} \left[\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{|\xi \cdot V_k| \geq \delta |\xi|} \hat{f}(\xi, V_k) \psi(V_k) \right]. \end{aligned}$$

for $\delta > 0$. The Cauchy–Schwarz inequality leads to the following estimate: on the one hand

$$\left| \mathbb{E} \left[\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{|\xi \cdot V_k| < \delta |\xi|} \hat{f}(\xi, V_k) \psi(V_k) \right] \right| \leq \|\psi\|_\infty \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \mathbb{E} \sum_k |\hat{f}(\xi, V_k)|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \mathbb{E} \sum_{|\xi \cdot V_k| < \delta |\xi|} 1 \right)^{1/2},$$

and, on the other hand

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left[\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{|\xi \cdot v_k| \geq \delta |\xi|} \hat{f}(\xi, V_k) \psi(V_k) \right] \right| &= \left| \mathbb{E} \left[\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{|\xi \cdot V_k| \geq \delta |\xi|} \frac{(-i) \hat{g}(\xi, V_k)}{\xi \cdot V_k} \psi(V_k) \right] \right| \\ &\leq \|\psi\|_\infty \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \mathbb{E} \sum_k |\hat{g}(\xi, V_k)|^2 \right)^{1/2} \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \mathbb{E} \sum_{|\xi \cdot v_k| \geq \delta |\xi|} \frac{1}{|\xi \cdot V_k|^2} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

We only detail the case where $\xi = \alpha e_1$, $\alpha \in \mathbb{R}$, the other cases being deduced by adapting the reasoning of the proof of Proposition 4.2.1. We have

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{|\xi \cdot V_k| \geq \delta |\xi|} \frac{1}{|\xi \cdot V_k|^2} \right] &= \mathbb{E} \left[\sum_{|\xi \cdot V_k| \geq \delta |\xi|} \frac{1}{|\xi|^2} \frac{1}{|\frac{\xi}{|\xi|} \cdot V_k|^2} \right] \\ &\leq \mathbb{E} \left[\frac{1}{|\xi|^2} 2 \left(\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(p\delta)^2} \right) M_p \right] \end{aligned}$$

where M_p is the number of velocities in the p -th strip (see Fig. 4.2). We bear in mind that M_p is a random variable: since the V_i 's are distributed according to the uniform law, we have

$$\mathbb{P}(V_i \in S_p) = \delta$$

and, the variables $V_1, \dots, V_{\mathcal{N}}$ being independent, M_p follows a binomial distribution of parameters $\mathcal{N}$ and δ . Therefore, we are led to

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sum_{|\xi \cdot V_k| \geq \delta |\xi|} \frac{1}{|\xi \cdot V_k|^2} \right] &\leq \frac{1}{|\xi|^2} 2 \left(\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(p\delta)^2} \right) \mathbb{E}[M_p] \\ &\leq C \frac{1}{|\xi|^2 \delta} \mathcal{N}, \end{aligned} \tag{4.2.2.2}$$

which yields

$$\left| \mathbb{E} \left[\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{|\xi \cdot V_k| \geq \delta |\xi|} \hat{f}(\xi, V_k) \psi(V_k) \right] \right| \leq C G(\xi) \frac{1}{|\xi| \sqrt{\delta}}.$$

On the same token, we get

$$\mathbb{E} \left[\sum_{|\xi \cdot V_k| < \delta |\xi|} 1 \right] = 2\delta \mathcal{N} \tag{4.2.2.3}$$

so that

$$\left| \mathbb{E} \left[\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{|\xi \cdot V_k| < \delta |\xi|} \hat{f}(\xi, V_k) \psi(V_k) \right] \right| \leq C F(\xi) \sqrt{\delta}.$$

Finally, we arrive at

$$|\mathbb{E} \hat{\rho}[\psi](\xi)| \leq C \left(F(\xi) \sqrt{\delta} + \frac{G(\xi)}{|\xi| \sqrt{\delta}} \right).$$

We apply this inequality with $\delta = \frac{G(\xi)}{|\xi| F(\xi)}$, which leads to

$$|\mathbb{E} \hat{\rho}[\psi](\xi)| \leq C \sqrt{F(\xi) G(\xi)} \frac{1}{\sqrt{|\xi|}}.$$

It concludes the proof by using the assumptions on f and g . □

For certain applications, the variable v lies on the sphere. This is the case for the kinetic models arising in radiative transfer theory where v represents the *direction* of flight of photons, which, of course, all travel with the speed of light. We can adapt the stochastic averaging lemma to this situation.

Theorem 4.2.3. *Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ be a probability space. Let $V_1, \dots, V_{\mathcal{N}}$ be i.i.d. random variables, distributed according to the continuous uniform distribution on $\mathbb{S}^{D-1}$. We set*

$$d\mu = \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \delta(v = V_k).$$

Let $f, g \in L^2(\mathbb{R}^D \times \mathbb{R}^D \times \Omega, dx d\mu(v) d\mathbb{P})$ satisfy for all $x \in \mathbb{R}^D$, $\omega \in \Omega$, and $k \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$

$$V_k \cdot \nabla_x f(x, V_k) = g(x, V_k).$$

Then, for all $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{S}^{D-1})$, the macroscopic quantity

$$\rho[\psi](x) := \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} f(x, V_k) \psi(V_k) = \int_{\mathbb{R}^D} f(x, v) \psi(v) d\mu(v)$$

satisfies $\mathbb{E}\rho[\psi] \in H^{1/2}(\mathbb{R}^D)$.

Proof. The proof follows the same arguments as for Theorem 4.2.2; we only indicate the main changes. The proof still relies in counting the velocities produced by the random sampling in the domain

$$S_p = \{v \in \mathbb{S}^{D-1}, \delta p |\xi| \leq |v \cdot \xi| \leq \delta(p+1) |\xi|\},$$

for given $\xi \in \mathbb{R}^D \setminus \{0\}$, $\delta > 0$ and $p \in \mathbb{Z}$. We define $\theta \in [0, 2\pi]$ such that

$$v \cdot \frac{\xi}{|\xi|} = \cos(\theta) \in [-1, +1].$$

Considering the random vectors V_k , the associated variable θ_k is randomly distributed on $[0, 2\pi]$. For symmetry reasons, $\mathbb{P}(V_k \in S_p)$ is thus proportional to

$$\mathbb{P}(\delta|p| \leq \cos(\theta_k) \leq \delta(|p|+1)).$$

We start with the specific case of dimension $D = 2$, and we refer the reader to Fig. 4.6. In this case, θ is uniformly distributed on $[0, 2\pi]$. Therefore, for any $p \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(\delta p \leq \cos(\theta) \leq \delta(p+1))$ is proportional to

$$\Pi_{\delta,p} = \int_{\arccos(\delta(p+1))}^{\arccos(\delta p)} d\theta = \arccos(\delta p) - \arccos(\delta(p+1))$$

and $M_p = \#\{V_k \in S_p\}$ is driven by the binomial law with parameters $\mathcal{N}$ and $\alpha \Pi_{\delta,p}$ for a certain constant $\alpha > 0$. Hence, the analog of (4.2.2.3) is dominated, up to some constant, by

$$\mathcal{N} \Pi_{\delta,0} = \mathcal{N} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos(\delta) \right) = \mathcal{N} \int_0^\delta \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \leq C \mathcal{N} \delta$$

as far as $0 < \delta \leq \delta_0 < 1$. Similarly, the analog of (4.2.2.2) involves the sum

$$\sum_{p \geq 1} \frac{\mathcal{N}}{\delta^2 p^2} \Pi_{\delta,p}$$

that we split into

$$I = \sum_{1 \leq p \leq 1/2\delta} \dots, \quad II = \sum_{1/2\delta < p \leq 1/\delta} \dots$$

For I, we can still use the fact that $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ is non increasing and bounded far away from $x = 1$ and we are led to the estimate

$$\begin{aligned} I &= \sum_{1 \leq p \leq 1/2\delta} \frac{\mathcal{N}}{\delta^2 p^2} \int_{\delta(p+1)}^{\delta p} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\leq \sum_{1 \leq p \leq 1/2\delta} \frac{\mathcal{N}}{\delta^2 p^2} \frac{\delta}{\sqrt{1-\delta^2(p+1)^2}} \leq C \frac{\mathcal{N}}{\delta}. \end{aligned}$$

For II, we use a summation by parts which yields

$$\begin{aligned} II &= \sum_{1/2\delta < p \leq 1/\delta} \frac{\mathcal{N} \arccos(\delta p)}{\delta^2} \left(\frac{1}{(p-1)^2} - \frac{1}{p^2} \right) \\ &\leq \sum_{1/2\delta < p \leq 1/\delta} \frac{\mathcal{N} \arccos(\delta p)}{\delta^2} \frac{2}{p(p-1)^2} \leq \frac{4\delta}{\delta^2} \pi \mathcal{N} \sum_{p \geq 1} \frac{1}{p^2} \leq C \frac{\mathcal{N}}{\delta}. \end{aligned}$$

Having these estimates at hand, we can repeat the same arguments as in the proof of Theorem 4.2.2.

For higher dimension, the situation is actually simpler since θ is now distributed on $[0, \pi/2]$ according to the law with density $\sin(\theta)^{D-2} d\theta$. Thus (with the simple estimate $0 \leq \sin(\theta)^{D-2} \leq \sin(\theta)$) we obtain directly the analog of estimates (4.2.2.2) and (4.2.2.3). $\square$

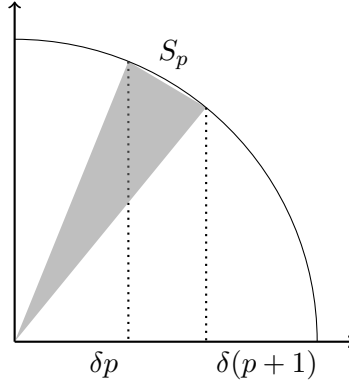


Figure 4.6 – Velocities on the sphere $\mathbb{S}^1$, domain S_p .

The result can be extended to the L^p cases for $1 < p < \infty$ by using an interpolation argument as in [16, Theorem 2].

Corollary 4.2.4. *In Theorems 4.2.2 and 4.2.3, we assume that f and g belong to $L^p(\mathbb{R}^D \times \mathcal{V} \times \Omega, dx d\mu(v) d\mathbb{P})$ for some $1 < p < \infty$, with $\mathcal{V}$ either $\mathbb{R}^D$ or $\mathbb{S}^{D-1}$. Then $\mathbb{E}\rho[\psi]$ lies in the Sobolev space $W^{s,p}(\mathbb{R}^D)$ with $0 < s < \min(1/p, 1 - 1/p) < 1$.*

Proof. We readily adapt the interpolation argument in [16]. Let $\mathcal{T}$ be the operator

$$\mathcal{T} : h \mapsto \mathbb{E} \int f(x, v) \psi(v) d\mu(v),$$

where

$$f(x, V_k) + V_k \cdot \nabla_x f(x, V_k) = h(x, V_k).$$

Clearly $\mathcal{T}$ maps continuously $L^r(\mathbb{R}^D \times \mathcal{V} \times \Omega, dx d\mu(v) d\mathbb{P})$ into $L^r(\mathbb{R}^D)$, for any $1 < r < \infty$. Moreover, Theorems 4.2.2 and 4.2.3 tell us that $\mathcal{T}$ is a continuous operator from $L^2(\mathbb{R}^D \times \mathcal{V} \times \Omega, dx d\mu(v) d\mathbb{P})$ to $H^{1/2}(\mathbb{R}^D)$. We conclude by interpreting the Sobolev space $W^{s,p}$ by interpolation, as being an intermediate space between $L^r = W^{0,r}$ and $H^{1/2} = W^{1/2,2}$ [4, Theorem 6.4.5, relation (7)], and L^p as being interpolated between L^r and L^2 . $\square$

We can equally extend the compactness statement to the L^1 framework, by following [17].

Corollary 4.2.5. *We consider a random set of velocities defined as in Theorem 4.2.2 or 4.2.3. Let $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ and $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ be two sequences of functions defined on $\mathbb{R}^D \times \mathcal{V} \times \Omega$ such that*

- i) $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ is a relatively weakly compact set in $L^1(\mathbb{R}^D \times \mathcal{V} \times \Omega, dx d\mu(v) d\mathbb{P})$,
- ii) $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ is bounded in $L^1(\mathbb{R}^D \times \mathcal{V} \times \Omega, dx d\mu(v) d\mathbb{P})$,
- iii) we have $V_k \cdot \nabla_x f_n(x, V_k) = g_n(x, V_k)$.

Then $\mathbb{E} \rho_n[\psi](x) = \mathbb{E} \int f_n(x, v) \psi(v) d\mu(v)$ lies in a relatively compact set of $L^1(B(0, R))$, for any $0 < R < \infty$ (for the strong topology).

Proof. The proof follows closely [17]; we sketch the arguments for the sake of completeness. For $\psi \in C_c^\infty(\mathcal{V})$, we denote by $\mathcal{A}$ the operator

$$\mathcal{A} : f \longmapsto \mathbb{E} \int f(x, v) \psi(v) d\mu(v).$$

For $\lambda > 0$, we also introduce the operator

$$R_\lambda : h \longmapsto \int_0^\infty e^{-\lambda t} h(x - vt, v) dt$$

which returns the solution $f = R_\lambda h$ of $(\lambda + v \cdot \nabla_x) f = h$. It is a continuous operator on $L^p(\mathbb{R}^D \times \mathcal{V}, dx d\mu(v))$ spaces and we have

$$\|R_\lambda h\|_{L^p} \leq \frac{\|h\|_{L^p}}{\lambda}. \quad (4.2.2.4)$$

Let us temporarily assume that the compactness statement holds for $\mathcal{A} R_\lambda g_n$, for any $\lambda > 0$, when i)-ii) is strengthened into

- ii') $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ is a relatively weakly compact set in $L^1(\mathbb{R}^D \times \mathcal{V} \times \Omega, dx d\mu(v) d\mathbb{P})$.

Therefore, writing $(\lambda + v \cdot \nabla_x) R_\lambda f_n = f_n$, we deduce from i) that $(\mathcal{A} R_\lambda f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is relatively compact in $L^1(B(0, R))$ for any $\lambda > 0$ and $0 < R < \infty$. Next, we write $f_n = \lambda R_\lambda f_n + R_\lambda(v \cdot \nabla_x f_n)$ so that, owing to (4.2.2.4), $\mathcal{A} f_n = \lambda \mathcal{A} R_\lambda f_n + \mathcal{A} R_\lambda(v \cdot \nabla_x f_n)$ appears as the sum of a sequence which is compact in $L^1(B(0, R))$ and a sequence the norm of which is dominated by $1/\lambda$, uniformly with respect to n . Consequently, $(\mathcal{A} f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is relatively compact in $L^1(B(0, R))$.

We are thus left with the task of justifying the gain of compactness for $\mathcal{A}R_\lambda g_n$ when i)-ii) is replaced by ii'), see [16, Proposition 3]. To this end, for $\lambda, M > 0$ we set $R_\lambda g_n = \gamma_n$ and we split

$$\gamma_n = \gamma_{n,M} + \gamma_n^M$$

where

$$\begin{aligned} (\lambda + V_k \cdot \nabla_x) \gamma_{n,M}(x, V_k) &= g_n(x, V_k) \mathbf{1}_{g_n(x, V_k) \leq M}, \\ (\lambda + V_k \cdot \nabla_x) \gamma_n^{M,\omega}(x, V_k) &= g_n(x, V_k) \mathbf{1}_{g_n(x, V_k) > M}. \end{aligned}$$

Since for any fixed $M > 0$, the set $\{g_n \mathbf{1}_{h_n \leq M}, n \in \mathbb{N}\}$ is bounded in $L^1 \cap L^\infty \subset L^2$, we can apply Theorems 4.2.2 or 4.2.3 which imply that $(\mathcal{A} \gamma_{n,M})_{n \in \mathbb{N}}$ is compact in $L^1(B(0, R))$ for any finite R . We can conclude by showing that γ_n^M can be made arbitrarily small, in L^1 norm, uniformly with respect to $n \in \mathbb{N}$, for a suitable choice of $M > 0$. This is indeed the case because ii') implies

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left\{ \sup_n \int |g_n| \mathbf{1}_{g_n > M} d\mu(v) dx d\mathbb{P}(\omega) \right\} = 0.$$

by virtue of the Dunford-Pettis theorem, see [19, Sect. 7.3.2]. Going back to (4.2.2.4) finishes the proof. $\square$

4.3 Application to the Rosseland Approximation

Let us go back to the asymptotic behavior of the solutions of (4.1.0.1). The problem (4.1.0.1) is completed with the initial condition

$$f_\varepsilon \Big|_{t=0} = f_\varepsilon^0.$$

It satisfies $f_\varepsilon^0 \geq 0$ and $f_\varepsilon^0 \in L^1(\mathbb{R}^D \times \mathcal{V})$, as it is physically relevant, f_ε being a particle density. For the set $(\mathcal{V}, d\mu)$, in what follows we suppose at least that $\mathcal{V}$ is a bounded subset in $\mathbb{R}^D$ and

$$\int_{\mathcal{V}} d\mu(v) = 1, \quad \int_{\mathcal{V}} v d\mu(v) = 0.$$

These assumptions are crucial for the analysis of the diffusion regime. Then, the connection to (4.1.0.2) can be established as follows.

Theorem 4.3.1. *We assume that (4.1.0.3) is fulfilled. Let σ be a function such that $\sigma(\rho) = \rho^\gamma \Sigma(\rho)$ with $|\gamma| < 1$ and $0 < \sigma_* \leq \Sigma(\rho) \leq \sigma^* < \infty$. Let $(f_\varepsilon^0)_{\varepsilon > 0}$ satisfy*

$$\sup_{\varepsilon > 0} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathcal{V}} \left(1 + \varphi(x) + |\ln f_\varepsilon^0| f_\varepsilon^0 \right) d\mu(v) dx + \|f_\varepsilon^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathcal{V})} \right) = M_0 < +\infty$$

for a certain weight function such that $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$. Then (up to a subsequence) the solution f_ε of (4.1.0.1) and ρ_ε converge to $\rho(t, x)$ in $L^p((0, T) \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{V})$ and $L^p((0, T) \times \mathbb{R}^d)$ respectively, for any $1 \leq p < \infty$, $0 < T < \infty$ where ρ is a solution to (4.1.0.2) with the initial data $\rho|_{t=0}$ given by the weak limit in $L^p(\mathbb{R}^d)$ of $\int_{\mathcal{V}} f_\varepsilon^0 d\mu(v)$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

For instance this statement holds with $\mathcal{V} = \mathbb{S}^{D-1}$ endowed with the Lebesgue measure. We refer the reader to [3] for a detailed proof, where the velocity averaging lemma is used to manage the passage to the limit in the nonlinearity. Assumption (4.1.0.3) can be replaced by

$$\text{for any } \xi \neq 0, \text{ meas} \left(\left\{ v \in \mathcal{V} \cap B(0, R), v \cdot \xi \neq 0 \right\} \right) > 0$$

which allows us to deal with certain discrete velocity models. Then, the asymptotic regime can be analyzed with a *compensated compactness* argument, that relies on the structure of the system satisfied by the zeroth and first moments of f_ϵ , as pointed out in [10, 20, 23], see also [24]. The question can be addressed of the relation between the diffusion equation that correspond to a discretization of the velocity set (discrete ordinate equation) and the diffusion equation that corresponds to the continuous model. For the simple collision operator in (4.1.0.1), velocity grids, which differ from the simplest uniform mesh, can be constructed that lead to the *exact* diffusion coefficient (namely $\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} v_k \otimes v_k = \int_{\mathbb{S}^{D-1}} v \otimes v \, dv = \frac{1}{D} \mathbb{I}$); we refer the reader to [7, 15, 21] for further discussion on this issue. However, for more general collision operators, it might happen that the equilibrium functions that make the collision operator vanish or the diffusion coefficient are not explicitly known, see [6, 10].

We wish to revisit this question by means of a Monte–Carlo approach: instead of the discrete ordinate viewpoint where a discrete velocity grid is adopted once for all, we deal with a random set of velocities and we wonder whether it can provide, in expectation, a consistent approximation of the diffusion regime. The consistency analysis we propose uses Theorem 4.2.2 or Theorem 4.2.3 to justify the following claim.

Theorem 4.3.2. *Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ be a probability space. Let $V_1, \dots, V_{\mathcal{N}}$ be i.i.d. random variables distributed according to the continuous uniform law on $\mathcal{V}$. Then, we obtain a set $\mathcal{V}_{\mathcal{N}}$ of $2\mathcal{N}$ velocities in $\mathcal{V}$ by setting $V_{\mathcal{N}+j} = -V_j$, for all $j \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$. We denote the associated discrete measure on $\mathcal{V}$ by*

$$d\mu_{\mathcal{N}}(v) = \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{2\mathcal{N}} \delta(v = V_k).$$

Let $f_{\epsilon, \mathcal{N}}|_{t=0} = f_{\epsilon, \mathcal{N}}^0 \geq 0$ satisfy

$$\sup_{\epsilon > 0, \mathcal{N} \in \mathbb{N}} \left(\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathcal{V}} (1 + \varphi(x) + |\ln f_{\epsilon, \mathcal{N}}^0|) f_{\epsilon, \mathcal{N}}^0 \, d\mu_{\mathcal{N}}(v) \, dx + \|f_{\epsilon, \mathcal{N}}^0\|_{L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^d \times \mathcal{V})} \right) = M_0 < +\infty. \quad (4.3.0.1)$$

Let $f_{\epsilon, \mathcal{N}}$ be a solution of the following equation

$$\partial_t f_{\epsilon, \mathcal{N}}(t, x, V_j) + \frac{1}{\epsilon} V_j \cdot \nabla_x f_{\epsilon, \mathcal{N}}(t, x, V_j) = \frac{1}{\epsilon^2} \sigma(\rho_{\epsilon, \mathcal{N}}) [\rho_{\epsilon, \mathcal{N}}(t, x) - f_{\epsilon, \mathcal{N}}(t, x, V_j)], \quad (4.3.0.2)$$

with $\rho_{\epsilon, \mathcal{N}}(t, x) := \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{2\mathcal{N}} f_{\epsilon, \mathcal{N}}(t, x, V_i)$. We suppose that $\rho \in [0, \infty) \mapsto \sigma(\rho)$ is a nonnegative function such that for any $0 < R < \infty$, there exists $\sigma_*(R) > 0$ verifying $0 < 1/\sigma_*(R) \leq \sigma(\rho) \leq \sigma_*(R)$ and $|\sigma'(\rho)| \leq \sigma_*(R)$ for any $0 \leq \rho \leq R$. Then $\mathbb{E}\rho_{\epsilon, \mathcal{N}}$ converges to $\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}}$ in $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^D)$ as ϵ goes to 0 with $0 < T < \infty$ where $\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}}$ is solution of

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}} + \operatorname{div}(\mathcal{J}_{\mathcal{N}}) &= 0, \\ \sigma(\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}}) \mathcal{J}_{\mathcal{N}} &= -\mathbb{E}A_{\mathcal{N}} \nabla_x \mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}}\right), \end{aligned}$$

with $A_{\mathcal{N}}$ the $D \times D$ matrix with random components defined by

$$A_{\mathcal{N}} := \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{2\mathcal{N}} V_j \otimes V_j,$$

and $\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}}|_{t=0}$ is the weak limit of $\int \mathbb{E}f_{\epsilon, \mathcal{N}}^0 \, d\mu(v)$.

Note that the construction of the set $\mathcal{V}_{\mathcal{N}}$ ensures that the null flux condition $\int v \, d\mu_{\mathcal{N}}(v) = 0$ is fulfilled, but the elements of $\mathcal{V}_{\mathcal{N}}$ are not independent. Nevertheless, the stochastic averaging lemma still applies to this situation, with a straightforward adaptation of the proof. It is likely that the assumptions on σ can be substantially weakened, but this not our aim here to seek refinements in this direction. We will make precise in the proof in which sense the consistency error $O\left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}}\right)$ should be understood.

4.3.1 Entropy estimates

In order to prove Theorem 4.3.2, the first step consists in establishing some a priori estimates, uniform with respect to the parameters ε and $\mathcal{N}$. We will then deduce the compactness needed to obtain the result. These estimates are quite classical; the proof that we sketch for the sake of completeness follows directly from [3, 20, 23].

Proposition 4.3.3. *Let $f_{\varepsilon, \mathcal{N}}^0$ satisfy (4.3.0.1) with $\varphi(x) = (1 + x^2)^\beta$, $0 < \beta < 1$. Let $0 < T < \infty$. There exists a constant $C(T)$ which only depends on T such that*

$$\sup_{\varepsilon > 0, \mathcal{N} \in \mathbb{N}} \left\{ \sup_{0 \leq t \leq T} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathcal{V}} (1 + \varphi(x) + |\ln f_{\varepsilon, \mathcal{N}}|) f_{\varepsilon, \mathcal{N}} \, d\mu_{\mathcal{N}}(v) \, dx + \|f_{\varepsilon, \mathcal{N}}\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T) \times \mathbb{R}^D \times \mathcal{V})} \right\} = C(T) < +\infty \quad (4.3.1.1)$$

and, furthermore,

$$\sup_{\varepsilon > 0, \mathcal{N} \in \mathbb{N}} \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathcal{V}} \frac{\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})}{\varepsilon^2} (f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) \ln \left(\frac{f_{\varepsilon, \mathcal{N}}}{\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}} \right) \, d\mu_{\mathcal{N}}(v) \, dx \, dt \leq C(T). \quad (4.3.1.2)$$

Proof. As said above we crucially use the fact that

$$\int_{\mathcal{V}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) = 1, \quad \int_{\mathcal{V}} v \, d\mu_{\mathcal{N}}(v) = 0.$$

As a matter of fact, the collision operator is mass-conserving in the sense that

$$\int_{\mathcal{V}} \sigma(\rho)(f - \rho) \, d\mu_{\mathcal{N}}(v) = 0.$$

Accordingly, integrating immediately leads to

$$\frac{d}{dt} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathcal{V}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}} \, d\mu_{\mathcal{N}}(v) \, dx = 0. \quad (4.3.1.3)$$

More generally, let $G : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ be a convex function. We get

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} G(f_{\varepsilon, \mathcal{N}}) \, d\mu_{\mathcal{N}}(v) \, dx \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} - f_{\varepsilon, \mathcal{N}})(G'(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) - G'(f_{\varepsilon, \mathcal{N}})) \, d\mu_{\mathcal{N}}(v) \, dx \leq 0. \end{aligned}$$

With $G(z) = z^p$, $p \geq 1$, it gives an estimate on the L^p norm of the solution. Similarly, with $G(z) = [z - \|f_{\varepsilon, \mathcal{N}}^0\|_\infty]_+^2$, we conclude that

$$\|f_{\varepsilon, \mathcal{N}}\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T) \times \mathbb{R}^D \times \mathcal{V})} \leq \|f_{\varepsilon, \mathcal{N}}^0\|_\infty.$$

Finally, with $G(z) = z \ln(z)$ we have

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}} \ln f_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \\ = -\frac{1}{\varepsilon^2} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) [\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} - f_{\varepsilon, \mathcal{N}}] \ln(f_{\varepsilon, \mathcal{N}} / \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \leq 0. \end{aligned} \quad (4.3.1.4)$$

Let us focus on the following quantity obtained by multiplying (4.3.0.2) by φ and integrating

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \varphi(x) f_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx &= -\frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \varphi(x) v \cdot \nabla_x f_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}} v \cdot \nabla_x \varphi(x) d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \\ &= \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} v \cdot \nabla_x \varphi(x) \frac{f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}}{\varepsilon} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx. \end{aligned}$$

Note that we have used $\int v d\mu_{\mathcal{N}}(v) = 0$. By Cauchy-Schwarz inequality, we know that

$$|\sqrt{b} - \sqrt{a}|^2 = \left| \int_a^b \frac{ds}{2\sqrt{s}} \right|^2 \leq \left| \int_a^b \frac{ds}{4s} \right| \left| \int_a^b ds \right| = \frac{1}{4}(b-a) \ln(b-a).$$

Thus, we get

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{V}} |f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}| d\mu_{\mathcal{N}}(v) &= \int_{\mathcal{V}} (\sqrt{f_{\varepsilon, \mathcal{N}}} + \sqrt{\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}}) |\sqrt{f_{\varepsilon, \mathcal{N}}} - \sqrt{\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}}| d\mu_{\mathcal{N}}(v) \\ &\leq \left(\int_{\mathcal{V}} (\sqrt{f_{\varepsilon, \mathcal{N}}} + \sqrt{\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}})^2 d\mu_{\mathcal{N}}(v) \right)^{1/2} \left(\int_{\mathcal{V}} (\sqrt{f_{\varepsilon, \mathcal{N}}} - \sqrt{\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}})^2 d\mu_{\mathcal{N}}(v) \right)^{1/2} \\ &\leq C \sqrt{\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}} \left(\int_{\mathcal{V}} (f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) \ln(f_{\varepsilon, \mathcal{N}} / \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) d\mu_{\mathcal{N}}(v) \right)^{1/2} \end{aligned}$$

and we finally obtain the following bound

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \varphi f_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx &\leq \|v\|_{L^\infty(\Omega \times S)} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} |\nabla_x \varphi| \frac{|f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}|}{\varepsilon} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \\ &\leq C \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla_x \varphi| \sqrt{\frac{\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}}{\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})}} \left(\int_{\mathcal{V}} \frac{\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})}{\varepsilon^2} (f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) \ln(f_{\varepsilon, \mathcal{N}} / \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) d\mu_{\mathcal{N}}(v) \right)^{1/2} dx \\ &\leq C \mathbb{E} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla_x \varphi|^2 \frac{\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}}{\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})} dx \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \frac{\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})}{\varepsilon^2} (f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) \ln(f_{\varepsilon, \mathcal{N}} / \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

By assumption $1/\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})$ is uniformly bounded. It follows that

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla_x \varphi|^2 \frac{\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}}{\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})} dx &\leq C \left(\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^D} |\nabla_x \varphi|^{2q} dx \right)^{1/q} \left(\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^D} \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq C \left(\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^D} |\nabla_x \varphi|^{2q} dx \right)^{1/q} \left(\mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^D} \int_{\mathcal{V}} |f_{\varepsilon, \mathcal{N}}|^p d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \right)^{1/p} \\ &\leq C \end{aligned}$$

holds provided the Hölder conjugate q of $p \geq 1$ satisfies $\beta \leq 1/2 - D/4q$.

The Young inequality $ab \leq \frac{a^2}{4\theta} + \theta b^2$ yields

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \varphi(x) f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x, v) d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \\ \leq C + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \frac{\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})}{\varepsilon^2} (f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) \ln(f_{\varepsilon, \mathcal{N}} / \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx. \end{aligned}$$

Let us set

$$D_\varepsilon := \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \frac{\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})}{\varepsilon^2} (f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) \ln(f_{\varepsilon, \mathcal{N}} / \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \geq 0.$$

Coming back to (4.3.1.4), we get

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x, v) \ln f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x, v) d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \\ & \quad + \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \varphi(x) f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x, v) d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx + \frac{1}{2} \int_0^t D_\varepsilon(s) ds \\ & \leq Ct + \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}}^{\omega, 0}(x, v) \ln f_{\varepsilon, \mathcal{N}}^{\omega, 0}(x, v) d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx + \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \varphi(x) f_{\varepsilon, \mathcal{N}}^{\omega, 0}(x, v) d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx. \end{aligned}$$

Since $z|\ln z| = z \ln z - 2z \ln z \mathbf{1}_{\{0 \leq z \leq 1\}}$, we have

$$\begin{aligned} 0 & \leq - \int_{0 \leq f \leq 1} f \ln f dy = - \int_{0 \leq f \leq e^{-\varphi}} f \ln f dy - \int_{e^{-\varphi} \leq f \leq 1} f \ln f dy \\ & \leq \int \varphi f dy + \int e^{-\varphi/2} dy. \end{aligned}$$

Then, we are led to

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}} |\ln f_{\varepsilon, \mathcal{N}}| d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx + \frac{1}{2} \int_0^t D_\varepsilon(s) ds + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \varphi f_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \\ & = \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}} \ln f_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx - 2 \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}} \ln f_{\varepsilon, \mathcal{N}} \mathbf{1}_{\{0 \leq f_{\varepsilon, \mathcal{N}} \leq 1\}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_0^t D_\varepsilon(s) ds + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \varphi f_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \\ & \leq \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}} \ln f_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx + 2 \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \frac{\varphi}{4} f_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \\ & \quad + 2 \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} e^{-\varphi/8} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx + \frac{1}{2} \int_0^t D_\varepsilon(s) ds + \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathcal{V}} \varphi f_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx \\ & \leq C(T) \end{aligned}$$

which ends the proof. $\square$

Moreover, we can deduce from above that $f_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ behaves like its macroscopic part $\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ for small ε 's.

Corollary 4.3.4. *We set $g_{\varepsilon, \mathcal{N}} := \frac{f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}}{\varepsilon}$. Then, we have*

$$\sup_{\varepsilon > 0, \mathcal{N}} \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \left| \int_{\mathcal{V}} g_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) \right|^2 dx dt \leq C(T).$$

Proof. We write

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_{\mathcal{V}} g_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) \right|^2 dx dt = \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\mathcal{V}} \frac{|f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}|}{\varepsilon} d\mu_{\mathcal{N}}(v) \right)^2 dx dt \\ & \leq C \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \int_{\mathcal{V}} (f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) \ln(f_{\varepsilon, \mathcal{N}} / \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx dt \\ & \leq C \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}}{\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})} \int_{\mathcal{V}} \sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) (f_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) \ln(f_{\varepsilon, \mathcal{N}} / \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) d\mu_{\mathcal{N}}(v) dx dt. \end{aligned}$$

Since by assumption on σ we know that $z \mapsto \frac{z}{\sigma(z)}$ is bounded on bounded sets and since $\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ is bounded in $L^\infty(\Omega \times (0, T) \times \mathbb{R}^D)$, we can conclude by using (4.3.1.2). $\square$

4.3.2 Diffusive limit

We can now discuss how to pass to the limit $\varepsilon \rightarrow 0$.

Proof of Theorem 4.3.2. Applying Dunford-Pettis' theorem, see [19, Sect. 7.3.2] we deduce from Proposition 4.3.3 that, possibly at the price of extracting a subsequence,

$$f_{\varepsilon, \mathcal{N}} \rightharpoonup f_{\mathcal{N}} \text{ weakly in } L^1(\Omega \times (0, T) \times \mathbb{R}^D \times \mathcal{V}_{\mathcal{N}}).$$

Consequently, we also have

$$\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} = \int_{\mathcal{V}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) \rightharpoonup \rho_{\mathcal{N}} = \int_{\mathcal{V}} f_{\mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v) \text{ weakly in } L^1(\Omega \times (0, T) \times \mathbb{R}^D)$$

and

$$\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \rightharpoonup \mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}} \text{ weakly in } L^1((0, T) \times \mathbb{R}^D).$$

Next, we consider the equations satisfied by the moments of $f_{\varepsilon, \mathcal{N}}$. To this end, let us set

$$J_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x) := \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{2\mathcal{N}} \frac{V_i}{\varepsilon} f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x, V_i), \quad \mathbb{P}_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x) := \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{2\mathcal{N}} V_i \otimes V_i f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x, V_i).$$

Integrating (4.3.0.2) with respect to the velocity variable v yields

$$\partial_t \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} + \operatorname{div}(J_{\varepsilon, \mathcal{N}}) = 0. \quad (4.3.2.1)$$

Similarly, multiplying (4.3.0.2) by v and integrating leads to

$$\varepsilon^2 \partial_t J_{\varepsilon, \mathcal{N}} + \operatorname{div}(\mathbb{P}_{\varepsilon, \mathcal{N}}) = -\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) J_{\varepsilon, \mathcal{N}}. \quad (4.3.2.2)$$

Lemma 4.3.1. *The sequence $(J_{\varepsilon, \mathcal{N}})_{\varepsilon > 0}$ is bounded in $L^2(\Omega \times (0, T) \times \mathbb{R}^D)$ and we can write $\mathbb{P}_{\varepsilon, \mathcal{N}} = A_{\mathcal{N}} \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} + \varepsilon \mathbb{K}_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ with $A_{\mathcal{N}} = \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{2\mathcal{N}} V_j \otimes V_j$ and the components of $(\mathbb{K}_{\varepsilon, \mathcal{N}})_{\varepsilon > 0}$ are bounded in $L^2(\Omega \times (0, T) \times \mathbb{R}^D)$.*

Proof. The proof is based on the fact that $f_{\varepsilon, \mathcal{N}} = \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} + \varepsilon g_{\varepsilon, \mathcal{N}}$. Since $\sum_{j=1}^{2\mathcal{N}} V_j = 0$, it allows us to write

$$J_{\varepsilon, \mathcal{N}} = \int v g_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v),$$

and we deduce the bound on $J_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ from Corollary 4.3.4 since $\|v\|_{L^\infty(\Omega \times S)} \leq C$. In addition, we have

$$\mathbb{P}_{\varepsilon, \mathcal{N}} = \int v \otimes v d\mu_{\mathcal{N}}(v) \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} + \varepsilon \int v \otimes v g_{\varepsilon, \mathcal{N}} d\mu_{\mathcal{N}}(v).$$

We set

$$\mathbb{K}_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x) := \int v \otimes v g_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x, v) d\mu_{\mathcal{N}}(v).$$

We conclude by using the estimates in Corollary 4.3.4 again. $\square$

Owing to Lemma 4.3.1, (4.3.2.2) can be recast as

$$\varepsilon (\varepsilon \partial_t J_{\varepsilon, \mathcal{N}} + \operatorname{div}(\mathbb{K}_{\varepsilon, \mathcal{N}})) + A_{\mathcal{N}} \nabla_x \rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} = -\nu_{\varepsilon, \mathcal{N}}$$

with $\nu_{\varepsilon, \mathcal{N}} := \sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}) J_{\varepsilon, \mathcal{N}}$. Passing to the limit, up to subsequences, we are led to

$$\begin{cases} \partial_t \rho_{\mathcal{N}} + \operatorname{div}(J_{\mathcal{N}}) &= 0, \\ A_{\mathcal{N}} \nabla \rho_{\mathcal{N}} &= -\nu_{\mathcal{N}} \end{cases} \quad (4.3.2.3)$$

where $\nu_{\mathcal{N}}$ is the weak limit as $\varepsilon \rightarrow 0$ of $\nu_{\varepsilon, \mathcal{N}}$, which is a bounded sequence in $L^2(\Omega \times (0, T) \times \mathbb{R}^D)$. It remains to establish a relation between $\nu_{\mathcal{N}}$, $\rho_{\mathcal{N}}$ and $J_{\mathcal{N}}$, or more precisely the expectation of these quantities. To this end, we are going to use the strong compactness of $\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ by using the averaging lemma. Indeed, we know that $\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ belongs to a bounded set in $L^2(0, T; H^{1/2}(\mathbb{R}^D))$; the proof follows exactly the same argument as for Theorem 4.2.2 taking the Fourier transform with respect to both the time and space variables t, x . However, because of the ε in front of the time derivative, we can not expect a gain of regularity with respect to the time variable. Then, we need to combine this estimate with another argument as follows:

- (i) by using the Weil-Kolmogorov-Fréchet theorem, see [19, Th. 7.56], we deduce from the averaging lemma that

$$\lim_{|h| \rightarrow 0} \left(\sup_{\varepsilon} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x+h) - \mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}(t, x)|^2 dx dt \right) = 0,$$

- (ii) Going back to (4.3.2.1), Lemma 4.3.1 tells us that $\partial_t \mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} = -\operatorname{div}(\mathbb{E}J_{\varepsilon, \mathcal{N}})$ is bounded, uniformly with respect to ε , in $L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^D))$.

Then, this is enough to deduce that $\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ strongly converges to $\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}}$ in $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^D)$ (see e.g. [2, Appendix B] for a detailed proof).

Then, we rewrite

$$\begin{aligned} \mathbb{E}J_{\varepsilon, \mathcal{N}} &= \mathbb{E} \left(\frac{\nu_{\varepsilon, \mathcal{N}}}{\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})} \right) = \frac{\mathbb{E}\nu_{\varepsilon, \mathcal{N}}}{\sigma(\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})} + \mathbb{E}r_{\varepsilon, \mathcal{N}}, \\ r_{\varepsilon, \mathcal{N}} &= \left[\nu_{\varepsilon, \mathcal{N}} \left(\frac{1}{\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})} - \frac{1}{\sigma(\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.2.4)$$

From the previous discussion, extracting further subsequences if necessary, we know that $\mathbb{E}\nu_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ converges weakly to $\mathbb{E}\nu_{\mathcal{N}}$ in $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^D)$ while $\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ converges strongly in $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^D)$ and a.e. to $\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}}$. Since σ is continuous and bounded from below, $1/\sigma(\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})$ converges to $1/\sigma(\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}})$ a.e. too, and it is bounded in $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^D)$. We deduce that

$$\frac{\mathbb{E}\nu_{\varepsilon, \mathcal{N}}}{\sigma(\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})} \rightharpoonup \frac{\mathbb{E}\nu_{\mathcal{N}}}{\sigma(\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}})} \quad \text{weakly in } L^2((0, T) \times \mathbb{R}^D).$$

We are left with the task of proving that the last term in the right hand side of (4.3.2.4) tends to 0 as $\mathcal{N} \rightarrow \infty$, uniformly with respect to ε . The Cauchy-Schwarz inequality yields

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}r_{\varepsilon, \mathcal{N}}| &\leq (\mathbb{E}[(\nu_{\varepsilon, \mathcal{N}})^2])^{1/2} \left(\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{\sigma(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})} - \frac{1}{\sigma(\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})} \right)^2 \right] \right)^{1/2} \\ &\leq (\mathbb{E}[(\nu_{\varepsilon, \mathcal{N}})^2])^{1/2} \left(\mathbb{E} \left[\left(\int_{\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}}^{\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\sigma(z)} \right] dz \right)^2 \right] \right)^{1/2} \\ &\leq (\mathbb{E}[(\nu_{\varepsilon, \mathcal{N}})^2])^{1/2} \left(\mathbb{E}[(\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} - \mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}})^2] \right)^{1/2} \\ &\leq (\mathbb{E}[(\nu_{\varepsilon, \mathcal{N}})^2])^{1/2} \left(\mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{2^{\mathcal{N}}} \sum_{i=1}^{2^{\mathcal{N}}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_i) - \mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right)^2 \right] \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.3.2.5)$$

We remind the reader that the $2\mathcal{N}$ velocities are constructed by symmetry from $V_1, \dots, V_{\mathcal{N}}$ which are i.i.d. velocities in $[-0.5, 0.5]^D$ and we write

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{2\mathcal{N}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_i) - \mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right]^2 \\ &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{4\mathcal{N}^2} \sum_{i,j=1}^{\mathcal{N}} \left\{ \left(f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_i) + f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(-V_i) - 2\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right) \left(f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_j) + f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(-V_j) - 2\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (4.3.2.6)$$

When $i \neq j$, V_i and V_j are independent, which implies

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\left(f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_i) + f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(-V_i) - 2\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right) \left(f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_j) + f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(-V_j) - 2\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right) \right] \\ &= \mathbb{E} \left[f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_i) + f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(-V_i) - 2\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right] \mathbb{E} \left[f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_j) + f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(-V_j) - 2\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right]. \end{aligned}$$

Now, we use the fact that the V_i 's are identically distributed so that

$$\begin{aligned} 2\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} &= 2\mathbb{E} \left(\frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{2\mathcal{N}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_k) \right) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \left(f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_k) + f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(-V_k) \right) \right) \\ &= \frac{1}{\mathcal{N}} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \left(\mathbb{E}f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_k) + \mathbb{E}f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(-V_k) \right) = \mathbb{E}f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_j) + \mathbb{E}f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(-V_j) \end{aligned}$$

for any $j \in \{1, \dots, \mathcal{N}\}$. It follows that

$$\mathbb{E} \left[\left(f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_i) + f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(-V_i) - 2\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right) \left(f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_j) + f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(-V_j) - 2\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right) \right] = 0 \quad \text{when } i \neq j.$$

Going back to (4.3.2.6), we obtain

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{2\mathcal{N}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_i) - \mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right]^2 = \mathbb{E} \left[\frac{1}{4\mathcal{N}^2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \left(f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_i) + f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(-V_i) - 2\mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right)^2 \right].$$

Since $f_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ and $\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}}$ are uniformly bounded, we conclude that the estimate

$$\mathbb{E} \left[\frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{i=1}^{2\mathcal{N}} f_{\varepsilon, \mathcal{N}}(V_i) - \mathbb{E}\rho_{\varepsilon, \mathcal{N}} \right]^2 \leq \frac{C}{\mathcal{N}}$$

holds. Inserting this information in (4.3.2.5), we arrive at

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} |\mathbb{E}r_{\varepsilon, \mathcal{N}}|^2 dx dt \leq \frac{C}{\mathcal{N}} \mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \nu_{\varepsilon, \mathcal{N}}^2 dx dt,$$

which is thus of order $O(1/\mathcal{N})$, uniformly with respect to ε .

Therefore, we can let ε run to 0 in (4.3.2.4) and, for a suitable subsequence, we are led to

$$\mathbb{E}J_{\varepsilon, \mathcal{N}} \rightharpoonup \mathbb{E}J_{\mathcal{N}} = \frac{\mathbb{E}\nu_{\mathcal{N}}}{\sigma(\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}})} + r_{\mathcal{N}} \quad \text{weakly in } L^2((0, T) \times \mathbb{R}^D) \text{ with } \|r_{\mathcal{N}}\|_{L^2((0, T) \times \mathbb{R}^D)} \leq \frac{C}{\sqrt{\mathcal{N}}}.$$

Finally, we take the expectation in (4.3.2.3) and we get

$$\mathbb{E}(A_{\mathcal{N}} \nabla_x \rho_{\mathcal{N}}) = -\mathbb{E}\nu_{\mathcal{N}} = -\sigma(\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}}) \mathbb{E}J_{\mathcal{N}} + \sigma(\mathbb{E}\rho_{\mathcal{N}}) r_{\mathcal{N}}.$$

Note that the last term is still of order $O(1/\sqrt{\mathcal{N}})$ in the $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^D)$ norm. By a reasoning similar as above, we check that, for any $i, j \in \{1, \dots, D\}$,

$$\sqrt{\mathbb{E} \left[\left([A_{\mathcal{N}}]_{ij} - \mathbb{E}[A_{\mathcal{N}}]_{ij} \right)^2 \right]} = O \left(\frac{1}{\sqrt{\mathcal{N}}} \right)$$

(this is the standard result about Monte–Carlo integration). It implies that we can find a constant $C > 0$, which only depends on the dimension D , such that for any $\xi \in \mathbb{R}^D$,

$$\mathbb{E} \left[\left| (A_{\mathcal{N}} \xi - \mathbb{E}[A_{\mathcal{N}} \xi]) \right|^2 \right] \leq \frac{C |\xi|^2}{\mathcal{N}}.$$

Then we get

$$\mathbb{E} (A_{\mathcal{N}} \nabla_x \rho_{\mathcal{N}}) = \mathbb{E} A_{\mathcal{N}} \nabla_x \mathbb{E} \rho_{\mathcal{N}} + s_{\mathcal{N}},$$

$$s_{\mathcal{N}} = \mathbb{E} [(A_{\mathcal{N}} - \mathbb{E} A_{\mathcal{N}}) \nabla_x \rho_{\mathcal{N}}].$$

The remainder term should be analyzed in a weak sense, due to a lack of a priori regularity of $\nabla_x \rho_{\mathcal{N}}$ (we only know that the product $A_{\mathcal{N}} \nabla_x \rho_{\mathcal{N}}$ lies in L^2 , but the invertibility of $A_{\mathcal{N}}$ is not guaranteed). We have, for any $\varphi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^D)$,

$$\begin{aligned} |\langle \mathbb{E} s_{\mathcal{N}} | \varphi \rangle| &= \left| -\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \rho_{\mathcal{N}} (A_{\mathcal{N}} - \mathbb{E} A_{\mathcal{N}}) \nabla_x \varphi \, dx \, dt \right| \\ &\leq \left(\mathbb{E} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} \rho_{\mathcal{N}}^2 \, dx \, dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}^D} |\nabla_x \varphi|^2 \, dx \, dt \right)^{1/2} \frac{C}{\sqrt{\mathcal{N}}}. \end{aligned}$$

Owing to the estimates (4.3.1.1) in Proposition 4.3.3, it means that $s_{\mathcal{N}}$ is therefore of order $O(1/\sqrt{\mathcal{N}})$ in the $L^2(0, T; H^{-1}(\mathbb{R}^D))$ -norm. $\square$

Remark 4.3.1. *The random matrix $A_{\mathcal{N}}$ might be singular. However $\mathbb{E} A_{\mathcal{N}}$ is invertible. Indeed for any $\xi \neq 0$, we have $\mathbb{E} A_{\mathcal{N}} \xi \cdot \xi = \frac{1}{2\mathcal{N}} \sum_{j=1}^{2\mathcal{N}} \mathbb{E} [|V_j \cdot \xi|^2] \geq 0$. This quantity is actually positive since $\mathbb{P}(v \cdot \xi = 0) = 0$ for the continuous laws we are dealing with.*

Bibliography

- [1] V Agoshkov. Spaces of functions with differential-difference characteristics and the smoothness of solutions of the transport equation. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 276(6):1289–1293, 1984.
- [2] A. Alonso, T. Goudon, and A. Vasseur. Damping of particles interacting with a vibrating medium. Technical report, Inria, 2016.
- [3] C. Bardos, F. Golse, B. Perthame, and R. Sentis. The nonaccretive radiative transfer equations: existence of solutions and Rosseland approximation. *J. Funct. Anal.*, 77(2):434–460, 1988.
- [4] J. Bergh and J. Löfström. *Interpolation spaces*, volume 223 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer, 1976.
- [5] F. Berthelin and S. Junca. Averaging lemmas with a force term in the transport equation. *J. Math. Pures Appl.*, 93(2):113–131, 2009.

-
- [6] V. Bonnaillie-Noël, J. A. Carillo, T. Goudon, and G. A. Pavliotis. Efficient numerical calculation of drift and diffusion coefficients in the diffusion approximation of kinetic equations. *IMA J. Numer. Anal.*, 2016. To appear.
 - [7] C. Buet, S. Cordier, B. Lucquin-Desreux, and S. Mancini. Diffusion limit of the Lorentz model: Asymptotic preserving schemes. *ESAIM: M2AN*, 36(4):631–655, 2002.
 - [8] A. Debussche, S. De Moor, and J. Vovelle. Diffusion limit for the radiative transfer equation perturbed by a Wiener process. *Kinetic and Related Models*, 8(3):467–492, 2015.
 - [9] A. Debussche, S. De Moor, and J. Vovelle. Diffusion limit for the radiative transfer equation perturbed by a Markov process. *As. Anal.*, 2016. To appear.
 - [10] P. Degond, T. Goudon, and F. Poupaud. Diffusion limit for nonhomogeneous and non-micro-reversible processes. *Indiana Univ. Math. J.*, 49(3):1175–1198, 2000.
 - [11] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. Global weak solutions of Vlasov–Maxwell systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(6):729–757, 1989.
 - [12] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability. *Ann. of Math. (2)*, 130(2):321–366, 1989.
 - [13] R. J. DiPerna, P.-L. Lions, and Y. Meyer. L^p regularity of velocity averages. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 8(3-4):271–287, 1991.
 - [14] F. Golse. From kinetic to macroscopic models. In B. Perthame and L. Desvillettes, editors, *Kinetic equations and asymptotic theory*, volume 4 of *Series in Appl. Math.*, pages 41–121. Gauthier-Villars, 2000.
 - [15] F. Golse, S. Jin, and D. Levermore. The convergence of numerical transfer schemes in diffusive regimes I: Discrete-ordinate method. *SIAM J. Numer. Anal.*, 36(5):1333–1369, 1999.
 - [16] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame, and R. Sentis. Regularity of the moments of the solution of a transport equation. *J. Funct. Anal.*, 76:110–125, 1988.
 - [17] F. Golse and L. Saint-Raymond. Velocity averaging in L^1 for the transport equation. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 334(7):557–562, 2002.
 - [18] F. Golse and L. Saint-Raymond. The Navier-Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels. *Invent. Math.*, 155(1):81–161, 2004.
 - [19] T. Goudon. *Intégration. Intégrale de Lebesgue et introduction à l’analyse fonctionnelle*. Références Sciences. Ellipses, 2011.
 - [20] T. Goudon and F. Poupaud. Approximation by homogenization and diffusion of kinetic equations. *Comm. Partial Differential Equations*, 26(3-4):537–569, 2001.
 - [21] S. Jin and D. Levermore. The discrete-ordinate method in diffusive regimes. *Tranp. Th. Stat. Phys.*, 20(5-6):413–439, 1991.
 - [22] P.-L. Lions, B. Perthame, and P. E. Souganidis. Stochastic averaging lemmas for kinetic equations. In *Séminaire Laurent Schwartz—Équations aux dérivées partielles et applications. Année 2011–2012*, Sémin. Équ. Dériv. Partielles, pages Exp. No. XXVI, 17. École Polytech., Palaiseau, 2013.

-
- [23] P.-L. Lions and G. Toscani. Diffuse limit for finite velocity Boltzmann kinetic models. *Rev. Mat. Ib.*, 13:473–513, 1997.
 - [24] P. Marcati and A. Milani. The one-dimensional Darcy’s law as the limit of a compressible Euler flow. *J. Differential Eq.*, 84(1):129–147, 1990.
 - [25] S. Mischler. Convergence of discrete-velocity schemes for the Boltzmann equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 140:53–77, 1997.
 - [26] B. Perthame and P. E. Souganidis. A limiting case for velocity averaging. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 31(4):591–598, 1998.
 - [27] L. Saint Raymond. *Hydrodynamic limits of the Boltzmann equation*, volume 1971 of *Lect. Notes in Math.* Springer, 2009.
 - [28] E. Tadmor and T. Tao. Velocity averaging, kinetic formulations, and regularizing effects in quasi-linear PDEs. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60(10):1488–1521, 2007.
 - [29] C. Villani. Limites hydrodynamiques de l’équation de Boltzmann (d’après C. Bardos, F. Golse, C. D. Levermore, P.-L. Lions, N. Masmoudi, L. Saint-Raymond). *Astérisque*, (282):Exp. No. 893, ix, 365–405, 2002. Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.

Chapitre 5

Étude numérique du modèle de Uchiyama

On étudie par une approche numérique les limites à l'échelle mésoscopique et macroscopique du Modèle de Uchiyama de particules carrées à vitesses discrètes en dimension deux. Les méthodes de simulations adoptées sont celles développées dans le cas des sphères dures, adaptées au Modèle de Uchiyama. Après avoir décrit de façon précise les enjeux et difficultés nouvelles attachés à ce modèle et les pistes de réflexion pour une étude théorique, on effectue une étude statistique des processus limites à partir des simulations numériques.

Ce chapitre concerne un travail en cours avec Erwan Faou ¹ et Laure Saint-Raymond ².

Contents

5.1 Le modèle de Uchiyama	156
5.2 Une approche numérique	165
5.2.1 Deux types d'algorithmes différents	165
5.2.2 Étude de la limite Boltzmann-Grad	168
5.3 Une étude statistique des limites diffusives	171
5.3.1 Caractère gaussien du processus	173
5.3.2 Stationnarité des incréments	175
5.3.3 Similarité des incréments	176
Bibliographie	178

¹Project IPSO, INRIA Bretagne Atlantique, IRMAR Université de Rennes

²ENS ULM

Les modèles à vitesses discrètes (DVM) sont des modèles impliquant des particules ne pouvant prendre qu'un nombre fini de vitesses. L'un des premiers résultats dans cette catégorie est dû à Maxwell [15] s'intéressant à un fluide constitué de particules dont les vitesses vivaient dans un ensemble de cardinal six (les six vitesses étant constantes en modules mais la direction étant définie par un système d'axes orthogonaux). Depuis, de nombreux modèles ont été étudiés [7, 10, 9, 4, 12] ... Le modèle qui nous intéresse est celui de Broadwell [3] : on définit l'ensemble S comme suit

$$S := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad (5.0.2.1)$$

avec $v_1 := (1, 0)$, $v_2 := (-1, 0)$, $v_3 := (0, 1)$, $v_4 := (0, -1)$ et on étudie alors l'équation

$$\begin{cases} \partial_t f_1 + v_1 \cdot \nabla f_1 &= a(f_3 f_4 - f_1 f_2) \\ \partial_t f_2 + v_2 \cdot \nabla f_2 &= a(f_3 f_4 - f_1 f_2) \\ \partial_t f_3 + v_3 \cdot \nabla f_3 &= a(f_1 f_2 - f_3 f_4) \\ \partial_t f_4 + v_4 \cdot \nabla f_4 &= a(f_1 f_2 - f_3 f_4) \end{cases} \quad (5.0.2.2)$$

où on note $f_i(t, x) := f(t, x, v_i)$ pour $i = 1, \dots, 4$ avec $t \in \mathbf{R}^+$, $x \in \mathbf{R}^2$, a une constante positive.

La question naturelle dans le cadre de ce manuscrit est alors de savoir si l'on peut dériver de tels modèles à partir de systèmes microscopiques. Certains systèmes peuvent alors apparaître plus naturels que d'autres pour pouvoir espérer obtenir une telle dérivation. C'est le cas du modèle HPP [11] de Hardy, Pomeau et de Pazzis et du modèle de Uchiyama [16]. Le premier est un modèle sur réseau tandis que le second est un modèle continu.

Le modèle HPP s'intéresse à l'évolution de particules sur un réseau carré en dimension deux avec des particules dont les vitesses évoluent dans S . La description de la dynamique est la suivante : durant une unité de temps, chaque particule saute dans la direction de sa vitesse. Alors sur chaque site où le nombre de particules est égal à deux et où deux particules ont des vitesses opposées, il y a collision et on tourne chaque vitesse d'un angle $\pi/2$. Pour tous les autres sites, on ne change rien.

Le modèle de Uchiyama [16] s'intéresse lui à l'évolution de particules carrés dont les diagonales sont respectivement parallèles à l'axe des abscisses et des ordonnées. Les particules se déplacent librement avec une vitesse ne pouvant prendre que des valeurs parmi S jusqu'à ce qu'elles entrent en collision. On distingue alors deux types de collisions : les collisions frontales et les collisions latérales (voir Figure 5.1). Les règles de collisions sont alors les suivantes : en cas de collision latérale, les particules impliquées échangent leurs vitesses alors qu'en cas de collision frontale, les vitesses subissent une rotation de $\pm\pi/2$.

Contrairement à ce à quoi on aurait pu s'attendre, Uchiyama prouve dans [16] que, hormis cas très particuliers, on ne dérive pas l'équation de Broadwell. Il en est de même pour le modèle HPP. Il faut tout de même noter que, pour les modèles sur réseau, lorsque du bruit est ajouté (au transport libre et/ou en rendant les collisions aléatoires par exemple), on arrive à dériver l'équation de Broadwell (voir [14, 6]). La question du modèle limite associé à celui de Uchiyama est alors ouverte. En effet, une des difficultés intrinsèques à ce modèle est l'apparition de phénomènes de recollisions difficiles à contrôler (voir Section 5.1 pour plus de détails). Ainsi, s'il existe une équation cinétique, elle devrait contenir un terme de mémoire associé à ces phénomènes. Toutefois, à ce jour une réponse à ce problème est très incertaine et c'est pourquoi le choix s'est porté sur une approche numérique.

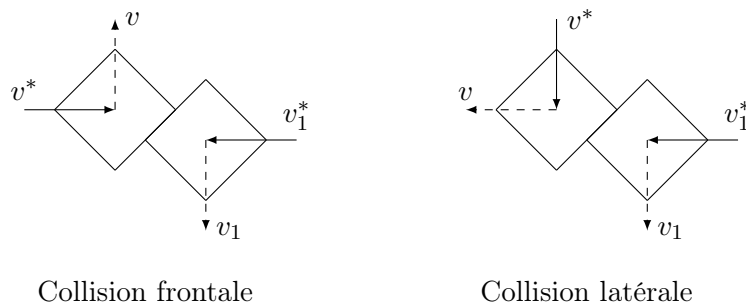


FIGURE 5.1 – Représentation des deux types de collisions où v^* et v_1^* représentent les vitesses précollisionnelles de v et v_1 . Il s'agit en fait de réflexion spéculaire.

Le but est donc de simuler numériquement le modèle de Uchiyama afin d'obtenir des informations sur le modèle limite en réalisant une étude statistique sur les observations. Les méthodes de simulations adoptées sont celles développées dans le contexte des sphères dures. On appelle dynamique moléculaire (MD) la méthode de simulation numérique développée pour étudier le mouvement d'atomes ou de molécules dans un problème à N corps. La première simulation de ce type est due à Alder et Wainwright en 1959 [1] dans le contexte des sphères dures. Comme nous l'expliquerons par la suite, deux approches différentes sont possibles donnant lieu à des algorithmes différents à la précision et l'efficacité toutes aussi différentes.

5.1 Le modèle de Uchiyama

On note Λ le carré dans $\mathbf{R}^2$ dont les diagonales sont les droites (AB) et (CD) où A, B, C et D sont les points de coordonnées respectives $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, et $(0, -1)$. Une particule dans $\mathbf{R}^2$ est modélisée par le carré rétréci $\frac{1}{2}\varepsilon\Lambda$, ($\varepsilon > 0$) tel que la longueur des diagonales soit ε . La position d'une particule est représentée par le point d'intersection de ces diagonales et est notée $x \in \mathbf{R}^2$. La vitesse d'une particule vit dans l'espace S , on la note v . On pose $z := (x, v)$.

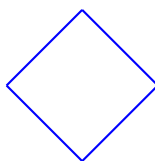


FIGURE 5.2 – Représentation d'une particule.

La description de la dynamique est alors la suivante : les particules se déplacent à vitesse constante entre chaque collision. Une collision entre deux particules se déroule

quand elles se touchent i.e. quand les positions respectives x et x_1 satisfont

$$l := \frac{1}{\varepsilon}(x_1 - x) \in \partial\Lambda \setminus \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}, \quad (5.1.0.1)$$

où $\partial\Lambda$ est la frontière de Λ . Pour le cas extrême $l \in \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$, le système entier est arrêté. Soit v et v_1 les vitesses respectives de ces deux particules. Une collision est possible si $(v - v_1) \cdot n > 0$ avec n la normale, ou de façon équivalente

$$l \cdot v > 0 \text{ et } l \cdot v_1 < 0. \quad (5.1.0.2)$$

On note i l'opérateur de rotation qui fait pivoter un vecteur en dimension deux de $\pi/2$ dans le sens trigonométrique. En notant v' et v'_1 les vitesses postcollisionnelles associées, la règle de collision est la suivante

$$v' = \sigma i v, \quad v'_1 = \sigma i v_1 \text{ si } v \cdot v_1 = -1 \quad (5.1.0.3)$$

$$v' = v_1, \quad v'_1 = v \text{ si } v \cdot v_1 = 0 \quad (5.1.0.4)$$

où $\sigma = 1$ ou $\sigma = -1$ selon que $(iv) \cdot l < 0$ ou $(iv) \cdot l > 0$ de façon à ce que

$$l \cdot v' < 0 \text{ et } l \cdot v'_1 > 0. \quad (5.1.0.5)$$

Les collisions du type (5.1.0.3) sont appelées collisions frontales tandis que celles du type (5.1.0.4) sont appelées collisions latérales (voir Figure 5.1).

On note

$$\Omega_N := \{(z_1, \dots, z_N) \in \mathbf{R}^{2N} \times S^N \mid \varepsilon^{-1}(x_i - x_j) \notin \Lambda \text{ pour tous } i \neq j\},$$

$$\begin{aligned} \partial\Omega_N := \{(z_1, \dots, z_N) \in \mathbf{R}^{2N} \times S^N \mid & \text{il existe } (k, l) \text{ tel que } \varepsilon^{-1}(x_k - x_l) \in \partial\Lambda \\ & \text{et pour tout } (i, j) \neq (k, l), \varepsilon^{-1}(x_i - x_j) \notin \Lambda\}, \end{aligned}$$

et f_N la fonction de distribution des N particules.

Uchiyama se place dans le contexte suivant : les données initiales sont asymptotiquement "chaotiques". Cela se traduit de la façon suivante : on pose

$$f_N(0, x_1, v_1, \dots, x_N, v_N) := f_N^0(x_1, v_1, \dots, x_N, v_N) \quad (5.1.0.6)$$

où

f_N^0 est une fonction mesurable symétrique sur Ω_N , continue en presque tous points de Ω_N . (5.1.0.7)

On note $f_N^{0(m)}$ la marginale d'ordre m de f_N^0 . Il existe C et M des constantes et f une fonction continue sur $\mathbf{R}^2 \times S$ tels que pour $m \leq N$,

$$\|f_N^{0(m)}\|_\infty \leq CM^m \quad (5.1.0.8)$$

et

$$f_N^{0(m)} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} f^{m \otimes} \text{ uniformément sur chaque compact de } (\mathbf{R}^2 \times S) \setminus \vartheta_m. \quad (5.1.0.9)$$

avec

$$\vartheta_m := \{(z_1, \dots, z_m) \in \mathbf{R}^{2m} \times S^m \mid \text{il existe } i \neq j \text{ tel que } x_i = x_j\}$$

Uchiyama établit alors le résultat suivant :

Théorème 5.1.1. *Pour tout $t \leq t_0$, avec t_0 une constante dépendant de M , sous les hypothèses (5.1.0.6), (5.1.0.7), (5.1.0.8) et (5.1.0.9) pour la donnée initiale, la fonction de distribution de la particule 1 $f_N^{(1)}(t, x, v)$ converge vers une fonction notée $u^{(1)}(t, x, v)$ sous le scaling Boltzmann-Grad $N\varepsilon = 1$ quand $N \rightarrow \infty$ pour tout $(x, v) \in \mathbf{R}^2 \times S$. La convergence est uniforme sur chaque ensemble compact de l'ensemble $\mathbf{R}^2 \times S$, i.e. pour tout compact $K \subset \mathbf{R}^2 \times S$,*

$$\text{ess sup}_{z \in K} |f_N^{(1)}(t, x, v) - u^{(1)}(t, x, v)| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

De plus, $u^{(1)}(t, x, v)$ dépend seulement de f mais n'est pas solution de l'équation de Broadwell à moins que f ne satisfasse

$$f(x - tv, v)f(x + tv, -v) = f(x - tiv, iv)f(x + tiv, -iv) \quad (5.1.0.10)$$

pour tout (x, v) et $0 \leq t \leq t_0$.

Sans rentrer dans les détails de la preuve, donnons ici brièvement l'intuition de l'absence de dérivation de l'équation de Broadwell pour ce modèle. Revenons un instant au cas des sphères dures afin de rappeler la démarche générale pour obtenir la convergence vers l'équation de Boltzmann. Cela nous permettra alors de mettre en relief ce qui fait défaut dans notre cas et entraîne l'invalidité de la convergence.

LE CAS DES SPHÈRES DURES

Le départ pour ce type de résultat est toujours le même : on écrit la hiérarchie BBGKY. C'est un système d'équations portant sur les marginales obtenu en partant de l'équation de Liouville associée au système de particules. On peut alors appliquer la formule de Duhamel pour obtenir une représentation intégrale des marginales.

$$f_N^{(s)}(t) = \mathcal{T}_s(t) f_N^{(s)}(0) + \int_0^t \mathcal{T}_s(t - t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1} f_N^{(s+1)}(t_1) dt_1 \quad (5.1.0.11)$$

où on note $\mathcal{T}_s$ le groupe associé au transport libre pour les sphères dures avec réflexion spéculaire et $\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}$ est l'opérateur de collision associé aux sphères dures. L'idée de Lanford, premier à avoir obtenu une dérivation de l'équation de Boltzmann en partant des sphères dures, est alors d'itérer la formule de Duhamel afin d'obtenir une expression des marginales sous la forme de série dépendant des données initiales.

$$f_N^{(s)}(t) = \sum_{n=0}^{N-s} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{T}_s(t - t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1} \mathcal{T}_{s+1}(t_1 - t_2) \tilde{\mathcal{C}}_{s+1,s+2} \dots \mathcal{T}_{s+n}(t_n) f_N^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1. \quad (5.1.0.12)$$

En passant à la limite formelle dans la formule de Duhamel itérée, on obtient également la série associée à la hiérarchie de Boltzmann.

$$g^{(s)}(t) = \sum_{n \geq 0} \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{T}_s^0(t - t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^0 \mathcal{T}_{s+1}^0(t_1 - t_2) \tilde{\mathcal{C}}_{s+1,s+2}^0 \dots \mathcal{T}_{s+n}^0(t_n) g^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1 \quad (5.1.0.13)$$

où on note $\mathcal{T}_s^0$ le transport libre de s particules dans $\mathbf{R}^{2ds}$ et $\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^0$ est l'opérateur de collision associé à Boltzmann. On est alors capable de montrer qu'il suffit de prouver la

convergence terme par terme. Pour ce faire, il s'agit alors de réinterpréter chacun des termes de la série en termes de processus de branchement "backward" en faisant appel à la notion de pseudo-trajectoire. On introduit la notation suivante

$$\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1} = \sum_{i=1}^s \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{+,i} - \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{-,i} \quad (5.1.0.14)$$

où

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{\pm,i} f_N^{(s+1)} \right) (Z_s) &:= (N-s) \varepsilon^{d-1} \int_{\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d} f_N^{(s+1)}(\dots, x_i, v'_i, \dots, x_i + \varepsilon \nu, v'_{s+1}) \\ &\quad ((v_{s+1} - v_i) \cdot \nu)_{\pm} d\nu dv_{s+1} \end{aligned} \quad (5.1.0.15)$$

avec $v'_i = v_i^*$ et $v'_{s+1} = v_{s+1}^*$ pour $\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{+,i}$ et $v'_i = v_i$ et $v'_{s+1} = v_{s+1}$ pour $\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{-,i}$. On fait de même pour $\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^0$. On appelle termes élémentaires dans la série les termes suivants :

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{T}_s(t-t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{j_1, m_1} \mathcal{T}_{s+1}(t_1-t_2) \tilde{\mathcal{C}}_{s+1, s+2}^{j_2, m_2} \dots \mathcal{T}_{s+n}(t_n) f_N^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1 \quad (5.1.0.16)$$

avec $(j_1, j_2, \dots, j_n) \in \{+, -\}$ and $m_i \in \{1, 2, \dots, s+i-1\}$. Chaque terme élémentaire a alors une interprétation géométrique en tant que intégrale sur une pseudo-trajectoire.

Définition 5.1.1. On appelle pseudo-trajectoire associé à la hiérarchie BBGKY et au terme élémentaire

$$\int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \mathcal{T}_s(t-t_1) \tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{j_1, m_1} \mathcal{T}_{s+1}(t_1-t_2) \tilde{\mathcal{C}}_{s+1, s+2}^{j_2, m_2} \dots \mathcal{T}_{s+n}(t_n) f_N^{(s+n)}(0) dt_n \dots dt_1 \quad (5.1.0.17)$$

la description suivante de l'évolution des positions et des vitesses :

- On commence au temps t avec s particules dans la configuration Z_s sans overlaps dans $\mathbf{T}^{ds} \times \mathbf{R}^{ds}$. On note $\hat{\Psi}_s$ le transport "backward" des s particules. Pour $u \in [t_1, t]$, $Z_s(u) := \hat{\Psi}_s(u) Z_s$.
- Le premier opérateur de collision $\tilde{\mathcal{C}}_{s,s+1}^{j_1, m_1}$ est interprété comme l'ajout au temps t_1 d'une nouvelle particule à $x_{m_1}(t_1) + \varepsilon \nu_{s+1}$ avec un angle de déflexion $\nu_{s+1} \in \mathbf{S}^{d-1}$ et une vitesse $v_{s+1} \in \mathbf{R}^d$.
- Alors Z_{s+1} évolue selon le transport backward" de $s+1$ particules $\hat{\Psi}_{s+1}$ durant l'intervalle de temps $[t_2, t_1]$ commençant à t_1 de

$$\begin{aligned} Z_{s+1}(t_1) &= (\{z_j(t_1)\}_{j \neq m_1}, (x_{m_1}(t_1), v_{m_1}(t_1)), (x_{m_1}(t_1) + \varepsilon \nu_{s+1}, v_{s+1})) & \text{if } j_1 = - \\ &= (\{z_j(t_1)\}_{j \neq m_1}, (x_{m_1}(t_1), v_{m_1}^*(t_1)), (x_{m_1}(t_1) + \varepsilon \nu_{s+1}, v_{s+1}^*)) & \text{if } j_1 = +. \end{aligned} \quad (5.1.0.18)$$

- On itère cette procédure en ajoutant une particule notée $s+i$ au temps t_i à $x_{m_i}(t_i) + \varepsilon \nu_{s+i}$ avec un angle de déflexion $\nu_{s+i} \in \mathbf{S}^{d-1}$ et une vitesse $v_{s+i} \in \mathbf{R}^d$. L'évolution de Z_{s+i} suit le transport "backward" de $s+i$ particules $\hat{\Psi}_{s+i}$ durant l'intervalle de temps $[t_{i+1}, t_i]$ commençant à t_i de

$$\begin{aligned} Z_{s+i}(t_i) &= (\{z_j(t_i)\}_{j \neq m_i}, (x_{m_i}(t_i), v_{m_i}(t_i)), (x_{m_i}(t_i) + \varepsilon \nu_{s+i}, v_{s+i})) & \text{if } j_i = - \\ &= (\{z_j(t_i)\}_{j \neq m_i}, (x_{m_i}(t_i), v_{m_i}^*(t_i)), (x_{m_i}(t_i) + \varepsilon \nu_{s+i}, v_{s+i}^*)) & \text{if } j_i = +. \end{aligned} \quad (5.1.0.19)$$

Les termes élémentaires peuvent alors être réécrits comme suit

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{(d-1)n} (N-s)(N-s-1) \dots (N-s-n+1) \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \dots dt_1 \\ & \int_{(\mathbf{S}^{d-1} \times \mathbf{R}^d)^n} d\nu_{s+1} \dots \nu_{s+n} dv_{s+1} \dots dv_{s+n} \prod_{i=1}^n ((v_{s+i} - v_{m_i}(t_i)) \cdot \nu_{s+i}) f_N^{0(s+n)}(Z_{s+n}(0)) \end{aligned} \quad (5.1.0.20)$$

où $Z_{s+n}(0)$ est la pseudo-trajectoire au temps 0.

On définit alors les deux notions de collision et recollision dans ce cadre.

Définition 5.1.2. On appelle *collision* la création d'une particule dans le processus décrit au-dessus et *recollision* la situation où deux particules se cognent en suivant le flot $\hat{\Psi}_{s+i}$, avec $0 \leq i \leq N-s$.

De façon similaire, on définit la notion de pseudo-trajectoire associée à la série de Boltzmann, la différence étant que les particules sont des points et sont ajoutés au même endroit, et non à une distance ε . Dans ce cas, le transport est un transport libre sans exclusion. La preuve de ce problème ainsi reformulé consiste alors à coupler les deux pseudo-trajectoires. Plus précisément, on est capable de prouver, qu'en dehors du cas où une recollision se déroule, les deux pseudo-trajectoires peuvent être couplées de façon précise. Ainsi, grâce à ce couplage, on est capable de prouver que la différence des deux séries tend vers 0 sur l'ensemble où il n'y a pas de recollision. De plus, on est capable de prouver que l'ensemble qui mène à des recollisions est de mesure asymptotiquement nulle quand on passe à la limite, ce qui permet de conclure. C'est précisément ce dernier fait qui est mis en défaut dans notre cas comme nous allons l'illustrer par la suite.

LE CAS DU MODÈLE DE UCHIYAMA

De façon similaire au cas des sphères dures, le départ pour obtenir de tels résultats est de s'intéresser à la hiérarchie BBGKY. Pour la première marginale, en appliquant la formule de Duhamel, on obtient alors :

$$f_N^{(1)}(t) = \mathcal{S}_1(t) f_N^{0(1)} + 4\varepsilon(N-1) \int_0^t \mathcal{S}_1(t-s) \mathcal{C}_{1,2} f_N^{(2)}(s) ds \quad (5.1.0.21)$$

avec

$$\mathcal{C}_{1,2} f_N^{(2)}(s) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_{\substack{l \cdot v > 0 \\ l \cdot v_1 < 0}} (f_N^{(2)}(t, x, v^*, x - \varepsilon l, v_1^*) - f_N^{(2)}(t, x, v, x + \varepsilon l, v_1)) dl dv_1, \quad (5.1.0.22)$$

où dl est un élément infinitésimal de $\partial\Lambda$, dv_1 une mesure discrète sur S , $\mathcal{S}_m$ est l'opérateur de transport de m particules et (v^*, v_1^*) sont les vitesses précollisionnelles de (v, v_1) . La notion de pseudo-trajectoire est alors définie de façon similaire au cas des sphères dures. Or, dans le cas du modèle de Uchiyama, lorsqu'il est non vide, l'ensemble des vitesses qui mène à une recollision pour une pseudo-trajectoire est de mesure strictement positive quand on passe à la limite. En effet, illustrons cette assertion par l'exemple donné par Cercignani, Illner et Pulvirenti [8] en construisant une pseudo-trajectoire particulière.

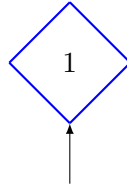


FIGURE 5.3 – Étape 1 : on part de la particule 1 avec vitesse v_3 .

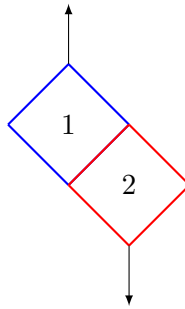


FIGURE 5.4 – Étape 2 : on ajoute la particule 2 à t_1 avec vitesse v_4 en position postcollisionnelle.

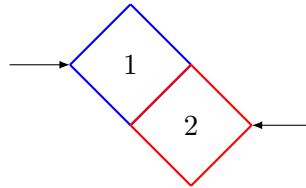


FIGURE 5.5 – À t_1^- , les particules sont dans cette configuration.

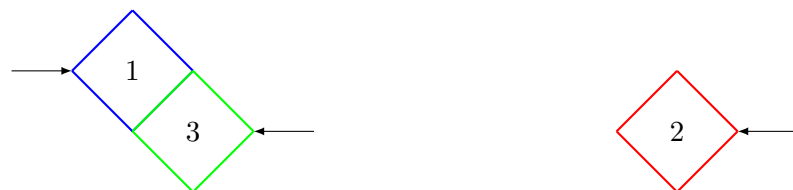


FIGURE 5.6 – Étape 3 : on ajoute la particule 3 à t_2 avec vitesse v_2 en position précollisionnelle.



FIGURE 5.7 – Étape 4 : on ajoute la particule 4 à t_3 avec vitesse v_1 en position précollisionnelle.

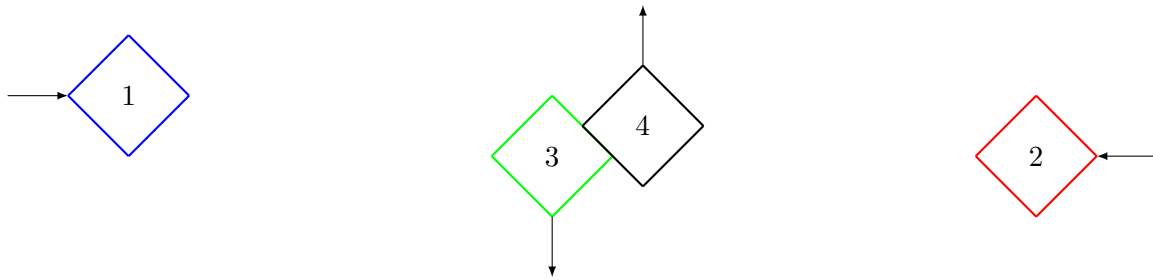


FIGURE 5.8 – Une recollision entre les particules 3 et 4 se déroule.

Ainsi, par le caractère discret du problème, l'ensemble des paramètres qui mène à une recollision n'est pas de mesure nulle, contrairement au cas des sphères dures présentés dans la Section 2.2.2. Les pseudo-trajectoires associées à la hiérarchie BBGKY et celles associées à Broadwell ne peuvent donc pas toujours être couplées avec une probabilité strictement positive et la stratégie développée dans le cas des sphères dures n'est plus valable.

Ainsi, si $f_N^{(2)}(t, x_1, v_1, x_2, v_2)$ se factorisait en un produit $\tilde{f}(t, x_1, v_1) \tilde{f}(t, x_2, v_2)$, on dériverait bien l'équation de Broadwell dans la limite Boltzmann-Grad. Or c'est précisément cette prétendue factorisation pour les configurations apparaissant dans (5.1.0.22) qui fait défaut. Ceci est alors à mettre sur le compte de corrélations persistantes entre particules dues à ces phénomènes de recollisions dans les pseudo-trajectoires expliqués précédemment mais également à des phénomènes de recollisions physiques.

En effet, Uchiyama remarque que lorsque l'on s'intéresse aux trajectoires physiques cette fois, des phénomènes de recollisions physiques entre les mêmes particules ont également lieu avec une probabilité positive.

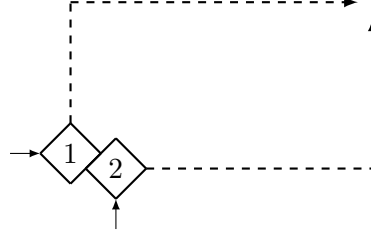


FIGURE 5.9 – Situation de recollision physique entre les particules 1 et 2 après qu’elles aient chacune subi une collision avec une autre particule.

Toutefois, ces situations impliquent des collisions latérales qui ont pour effet d’échanger les vitesses. Dans le cas de particules indistinguables, à la limite ces collisions ne changent rien. Cependant, dès lors que l’on se met à distinguer les particules, ce n’est plus le cas. Dans [17], Uchiyama s’intéresse alors au cas de particules distinguables et suit la particule 1 pour le système de particules décrit précédemment appelé Modèle 1 et pour une alternative de celui-ci que l’on appellera Modèle 2 où tout se passe comme dans le Modèle 1 à l’exception du fait que lors d’une collision latérale de la particule i avec la particule j , les indices des particules sont échangés (voir Figure 5.10).

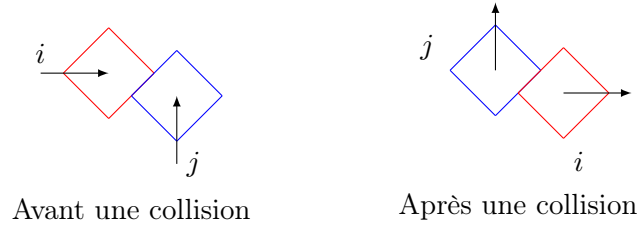


FIGURE 5.10 – Représentation d’une collision pour le modèle 2.

Uchiyama établit alors que dès lors que la condition initiale satisfait les mêmes hypothèses que celles du Modèle 1, i.e. (5.1.0.6), (5.1.0.7), (5.1.0.8) et (5.1.0.9), et

$$f(x, v)f(x, -v) \neq f(x, iv)f(x, -iv)$$

alors pour les deux modèles, le processus limite n’est pas Markovien.

On peut dans un premier temps envisager obtenir une équation de façon heuristique pour le processus limite. Sachant que les difficultés associées à ce modèle proviennent en partie des phénomènes de recollisions, une première approche naïve serait d’écrire une équation prenant en compte les phénomènes décrits dans la Figure 5.9. Pour ce faire, de façon similaire à Caglioti et Golse dans [5], on va chercher à travailler dans un espace de phase étendu. Soit $(t, x, v, w, \tau, \sigma)$ avec $t \in \mathbf{R}_+$, $x \in \mathbf{R}^2$, $v \in S$, $w \in S$, $\tau \in \mathbf{R}_+$, $\sigma \in \mathbf{R}_+$ où t est le temps, x la position, v la vitesse, w la vitesse antérieure, τ est l’âge de v et σ est l’âge que w avait quand elle s’est changée en v . Le mécanisme de mise à jour après une

collision est alors le suivant :

$$(t, x, v, w, \tau, \sigma)(t, x, v_1, w_1, \tau_1, \sigma_1) \longrightarrow (t, x, v', v, 0, \tau)(t, x, v'_1, v_1, 0, \tau_1) \quad (5.1.0.23)$$

Ainsi, on s'intéresse à l'équation suivante dans cet espace de phase étendu :

$$\begin{aligned} & (\partial_t + v \cdot \nabla_x + \partial_\tau) f(t, x, v, w, \tau, \sigma) \\ &= - \int f(t, x, v, w, \tau, \sigma) f(t, x, v_1, w_1, \tau_1, \sigma_1) b(v - v_1, n) dv_1 dw_1 d\tau_1 d\sigma_1 dn \\ & \quad - \int f(t, x, v, w, \tau, \sigma) f(t, x, w, v, \tau_1, \tau + \sigma - \tau_1) d\tau_1 \end{aligned} \quad (5.1.0.24)$$

avec

$$\begin{aligned} f(t, x, v, v^*, 0, \sigma) &= \int f(t, x, v^*, u, \sigma, s) f(t, x, v_1^*, u_1, \sigma_1, s_1) b(v - v_1, n) dv_1 du_1 d\sigma_1 ds_1 ds du dn \\ & \quad + \int f(t, x, v^*, v, \sigma, s) f(t, x, v, v^*, \sigma + s - \sigma_1) d\sigma_1 ds. \end{aligned} \quad (5.1.0.25)$$

Le premier terme du membre de droite dans (5.1.0.24) correspond au traditionnel terme de perte (des particules à vitesse v collisionnent des particules à vitesse v_1) tandis que celui de (5.1.0.25) correspond au terme de gain. En effet, en notant v^* et v_1^* les vitesses précollisionnelles, d'après la procédure de mise à jour (5.1.0.23), on a bien :

$$(t, x, v^*, u, \sigma, s)(t, x, v_1^*, u_1, \sigma_1, s_1) \longrightarrow (t, x, v, v^*, 0, \sigma)(t, x, v_1, v_1^*, 0, \sigma_1) \quad (5.1.0.26)$$

Comme illustré dans la Figure 5.11, les seconds termes des membres de droite dans (5.1.0.24) et (5.1.0.25) correspondent à des recollisions.

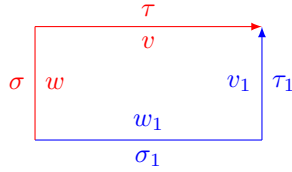


FIGURE 5.11 – Représentation d'une recollision. On constate que pour obtenir une telle configuration, il faut que $\tau + \sigma = \tau_1 + \sigma_1$ et $(v_1, w_1) = (w, v)$.

Toutefois, bien que pouvant constituer une première étape, cette approche n'est pas satisfaisante car les corrélations créées par les recollisions physiques peuvent naître de situations plus complexes que celle présentée précédemment (voir Figure 5.12). Pour autant, cela permet de mettre en lumière le fait que l'équation limite associée au modèle de Uchiyama, si elle existe, devra probablement être écrite dans un espace de phase étendu permettant de "coder" les phénomènes créant les corrélations.

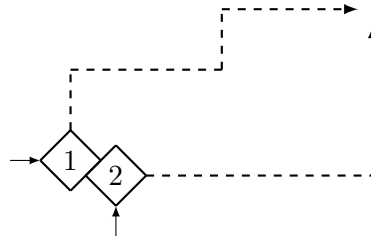


FIGURE 5.12 – Situation de recollision physique entre les particules 1 et 2 après que la particule 1 ait subi trois collisions et la particule 2 une collision avec d'autres particules.

5.2 Une approche numérique

On se tourne dans un premier temps vers une investigation numérique du modèle de Uchiyama. Pour ce faire, les méthodes développées dans le cadre des sphères dures sont adoptées.

5.2.1 Deux types d'algorithmes différents

Pour ce type de problèmes, deux approches distinctes existent : la méthode "Time-Driven" (TDMD) et "Event-Driven" (EDMD).

LA MÉTHODE TIME-DRIVEN

L'algorithme est le suivant : on déplace simultanément toutes les particules sur un temps dt . On vérifie alors si des chevauchements entre particules ont lieu. Si oui, on retourne en arrière jusqu'au moment approximatif de début de collision et on effectue alors la collision. Puis on recommence la procédure décrite et ainsi de suite ...

Dans les simulations de type TD que nous présenterons, une version légèrement différente de cet algorithme sera adoptée, pour laquelle lorsque des chevauchements ont lieu, le retour en arrière n'est pas effectué. Ainsi, nous autorisons une erreur plus ou moins grande selon la taille du pas de temps.

LA MÉTHODE EVENT-DRIVEN

La méthode Event-Driven, elle, s'intéresse aux temps auxquels les événements, ici les collisions, ont lieu. L'algorithme est alors le suivant : on constitue une liste des collisions à venir si les particules se déplaçaient uniquement en lignes droites. Cette liste est ordonnée selon le temps auquel les collisions auront lieu, le premier élément étant la collision la plus proche en temps. On déplace alors les particules jusqu'à ce temps et on effectue la collision. On met alors à jour la liste des collisions à venir. En effet, certaines peuvent être invalidées par la collision venant de se dérouler puisque les vitesses et donc la direction des deux particules impliquées a changé, de nouvelles peuvent également devenir possibles pour les mêmes raisons. Et à nouveau, on se déplace jusqu'à la collision la plus proche en temps et ainsi de suite ...

L'une des difficultés attachée à ce modèle est de calculer les futurs temps de collisions. Pour ce faire, il suffit en fait de résoudre l'équation suivante : en notant x_1, x_2 les coordonnées de départ des deux particules et v_1^*, v_2^* les vitesses précollisionnelles

$$|x_1 + v_1^* \Delta t - (x_2 + v_2^* \Delta t)|_1 = \varepsilon \quad (5.2.1.1)$$

où $|\cdot|_1$ est la norme 1 dans $\mathbf{R}^2$ et Δt est la donnée recherchée correspondant à la durée jusqu'à la prochaine collision entre les deux particules impliquées. Bien sûr, avant de calculer un éventuel temps de collision par cette formule, il faut s'assurer que les particules ont des positions et vitesses compatibles. Par exemple, pour $v_1 = (1, 0)$ et $v_2 = (-1, 0)$, la condition de compatibilité (5.1.0.2) impose que

$$\frac{(x_1 - x_2)}{\varepsilon} \cdot v_2^* > 0 \text{ et } \frac{(x_1 - x_2)}{\varepsilon} \cdot v_1^* < 0 \quad (5.2.1.2)$$

pour qu'une collision soit possible. Dans les faits, il faut également que la différence des ordonnées des deux particules soit inférieure strictement à ε pour que la collision ait réellement lieu.

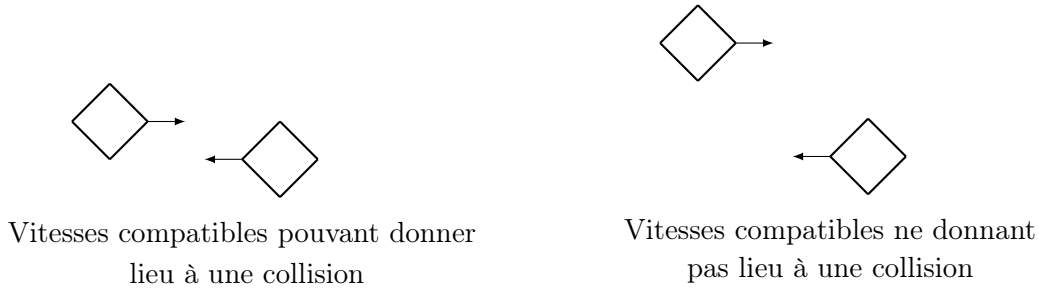


FIGURE 5.13 – Illustration des deux situations menant ou non à une collision.

COMPARAISON DES DEUX ALGORITHMES

Il faut en tout premier lieu noté que le second algorithme est à la fois plus efficace et plus précis que le premier. En effet, en terme de coût, pour la méthode TDMD, à chaque pas de temps il faut faire $O(N^2)$ opérations lorsque l'on vérifie si des collisions n'ont pas lieu. Il faut calculer pour chaque particule la distance avec toutes les autres particules. Pour la méthode EDMD, une fois le système initialisé, il n'y a plus que $O(N)$ opérations à effectuer qui consiste à calculer les futurs temps de collisions seulement pour les deux dernières particules ayant collisionnées. Ainsi, dès lors que le nombre de particules est important, le gain est considérable comme illustré dans le tableau suivant qui récapitule la durée de calcul pour simuler une trajectoire jusqu'à un temps final $T_f = 2$ avec les paramètres suivants, on tire $N = 100$ particules selon une loi uniforme avec exclusion (pour éviter les superpositions) et on adopte la densité suivante $\varepsilon = 2/N$.

	TDMD, $dt = \varepsilon/4$	TDMD, $dt = \varepsilon/10$	TDMD, $dt = \varepsilon/100$	EDMD
Durée du calcul en secondes	42.85	76.78	712.58	75.80

où dt représente les différents pas de temps pour les simulations faites par TDMD.

Ainsi, dès lors que le pas de temps est inférieur ou égal à $\varepsilon/10$, la méthode EDMD est plus rapide. Or, pour gagner en précision dans la méthode TDMD, le pas de temps doit être pris le plus petit possible. La méthode EDMD semble donc préférable car précise (voir Figure 5.14) et plus rapide. Par la suite, pour des raisons pratiques dans le cas de la méthode TDMD, on s'intéressera tout de même à des échantillons de trajectoires simulées avec $dt = \varepsilon/4$. Malgré les erreurs qu'il entraîne pour le modèle de Uchiyama, ce choix de pas est intéressant car il nous permet en fait de comparer un modèle avec overlaps et un modèle sans. On commentera plus précisément en fin de chapitre ce choix de pas de temps.

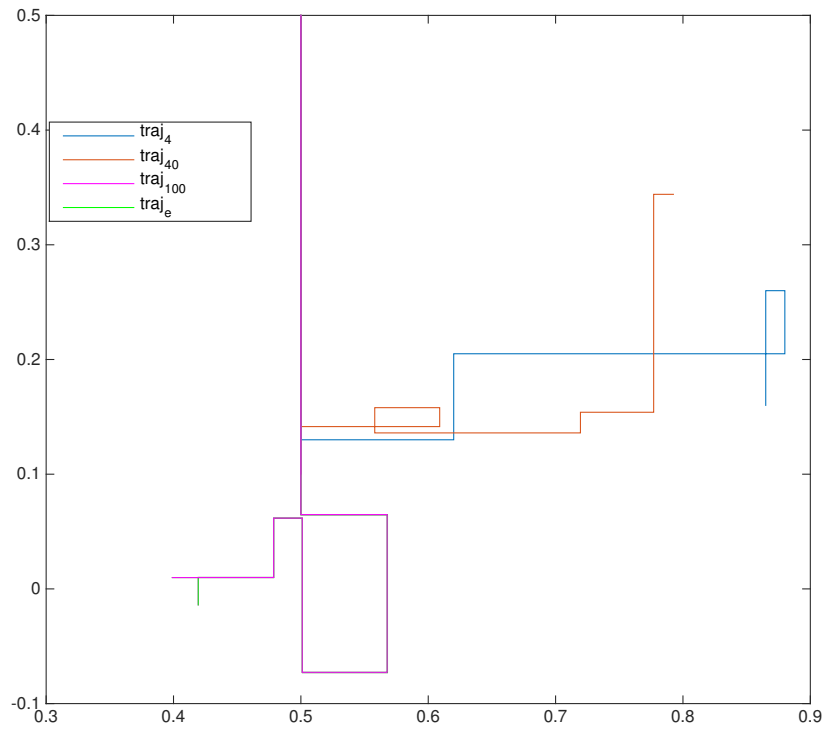


FIGURE 5.14 – Comparaisons de trajectoires simulées avec la même donnée initiale. Ici, traj_4 est obtenue par TDMD avec $dt = \varepsilon/4$, traj_{40} avec $dt = \varepsilon/40$, traj_{100} avec $dt = \varepsilon/100$ et traj_e par EDMD. Les trajectoires apparaissent toutes être différentes. Il faut aller jusqu'à un pas de temps $dt = \varepsilon/100$ pour que la méthode TDMD reste proche de la trajectoire réelle obtenue par EDMD. Les deux trajectoires divergent tout de même au bout d'un temps de l'ordre de 1 aux alentours du point de coordonnées $(0.4, 0)$.

Comme mentionné précédemment, dans le cadre de ce manuscrit, on va s'intéresser particulièrement aux modèles que l'on peut dériver à partir de ce système de particules à l'échelle mésoscopique et à l'échelle macroscopique. Ainsi, il va falloir jouer sur les paramètres pour se placer à un niveau d'observation associé à l'une ou l'autre des échelles. En effet, d'un point de vue théorique, la limite Boltzmann-Grad $N \rightarrow \infty$ avec $N\varepsilon^{d-1} = 1$ correspond à ce qu'on appelle la limite de densité faible. Une façon de l'interpréter peut être la suivante : quand on considère N particules, elles occupent un volume $N\varepsilon^d$. Alors, $N\varepsilon^d$ petit correspond à l'hypothèse de gaz parfait et $N\varepsilon^{d-1} = 1$ implique que le libre parcours moyen est de l'ordre de 1. En d'autres termes, dans ce scaling, les collisions sont à la même échelle que le transport. Toutefois, pour pouvoir se placer à l'échelle macroscopique, il faut cette fois que les particules aient subi suffisamment de collisions. Ainsi, le volume occupé doit rester petit tout en permettant d'observer assez de collisions. Cela correspond alors à $N\varepsilon^d \ll 1$ et $N\varepsilon^{d-1} \gg 1$. Les paramètres pour les deux parties suivantes seront donc adoptés en accord avec les ordres de grandeurs mentionnés ci-dessus.

5.2.2 Étude de la limite Boltzmann-Grad

Dans cette sous-section, nous présentons les résultats des simulations effectuées pour les paramètres suivant :

- $N = 100$ est le nombre de particules,
- $\varepsilon = 1/N$ est la densité,
- $dt = \varepsilon/4$ est le pas de temps,
- $M = 100$ est le nombre de trajectoires simulées,
- $T_f = 6$ est le temps final.

On se place dans le tore. Les données initiales sont les suivantes : la particule 1 est centrée et les positions initiales des autres particules sont tirées uniformément de façon à éviter les overlaps. Pour la simulation 1, les vitesses sont tirées aléatoirement selon la distribution $g(v) = 0.5\delta_{v_1} + 0.25\delta_{v_2} + 0.15\delta_{v_3} + 0.1\delta_{v_4}$ tandis que pour la simulation 2, on prend $g(v) = 10/21\delta_{v_1} + 2/21\delta_{v_2} + 5/21\delta_{v_3} + 4/21\delta_{v_4}$.

Pour chaque trajectoire, on calcule les distributions associées aux quatre vitesses à chaque pas de temps. En considérant les 100 trajectoires, on obtient alors la distribution empirique pour chaque vitesse à chaque pas de temps. On représente alors l'évolution de l'erreur relative $\mathcal{E}$ de ces distributions empiriques par rapport aux distributions pour chaque vitesse obtenues dans le cas de la solution exacte explicite de l'équation de Broadwell dans le cas homogène (voir Figure 5.15). Ainsi, en accord avec les résultats de Uchiyama, dès lors que la condition (5.1.0.10) n'est pas satisfaite (Simulation 1), on ne dérive pas Broadwell. En effet, l'erreur relative est beaucoup plus conséquente que lorsque (5.1.0.10) est satisfaite (Simulation 2).

On notera dans la Figure 5.15 la présence d'une couche limite pour les temps approximativement dans l'intervalle $[0, 1]$. Elle correspond à la période durant laquelle les particules n'ont pas subi assez de collisions pour atteindre le régime de la limite Boltzmann-Grad.

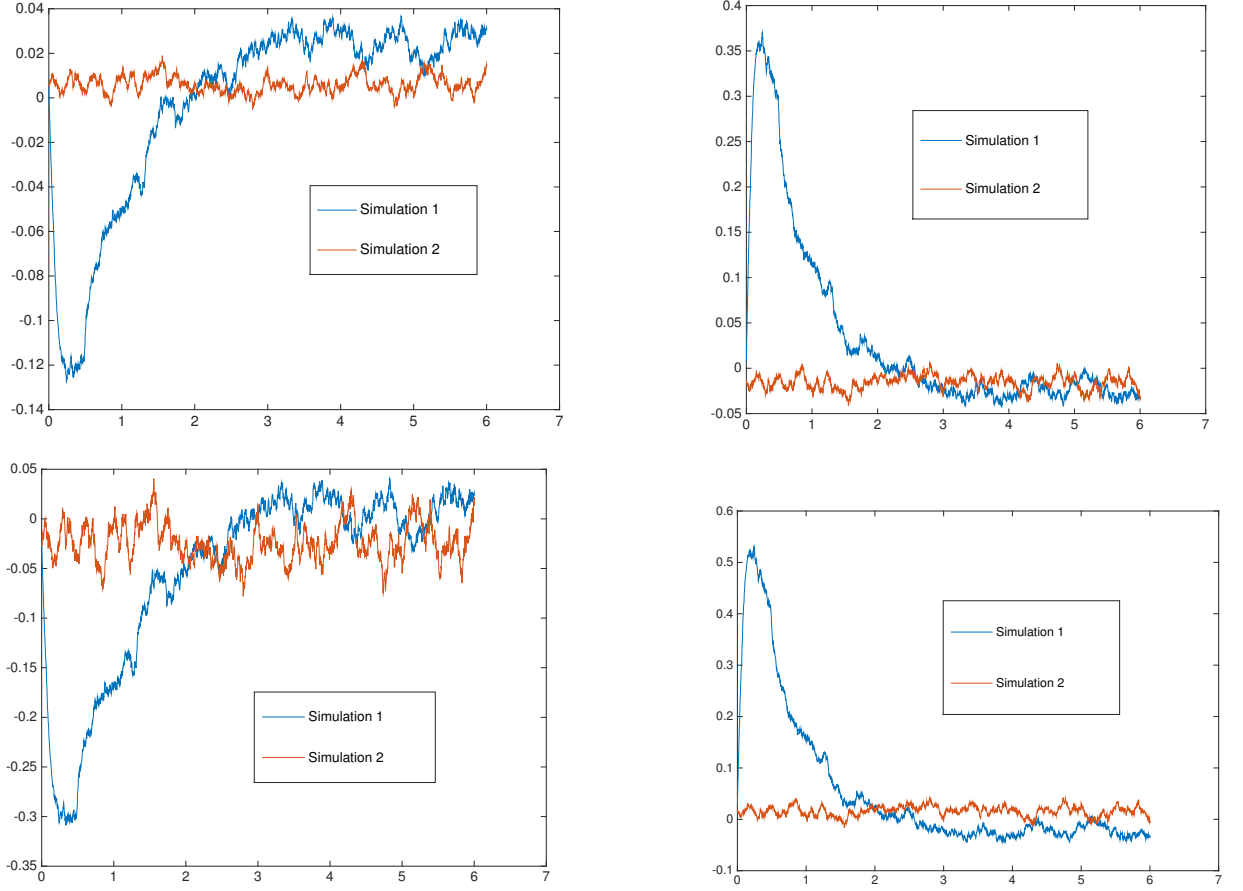


FIGURE 5.15 – Comparaison de l'évolution des erreurs relatives $\mathcal{E}_i$ pour $i = 1, \dots, 4$ associées aux densités de particules f_1, f_2, f_3 et f_4 en fonction du temps pour les simulations 1 et 2.

ÉTUDE DES RECOLLISIONS

On s'intéresse à présent aux phénomènes de recollisions. Les résultats qui suivent sont obtenus pour des simulations faites avec les mêmes paramètres N, ε, M et T_f que ceux mentionnés au-dessus mais cette fois avec la méthode EDMD et pour des vitesses tirées au départ de façon uniforme i.e. avec probabilité $1/4$ de tirer chaque vitesse. À nouveau au départ, la particule 1 est centrée et les positions initiales des autres particules sont tirées uniformément de façon à éviter les overlaps.

Pour chaque particule, on construit son arbre "backward" i.e. on part d'une particule à l'instant $T_f = 6$ et on retrace son arbre généalogique comprenant les particules avec lesquelles elle a collisionné dans le passé qu'on appellera "géniteurs" et les géniteurs de ses géniteurs jusqu'à l'instant 0. On obtient un arbre similaire aux arbres associés aux pseudo-trajectoires. On fait ceci pour chaque particule et ce pour chaque trajectoire simulée. On remarque alors que des recollisions, définies pour ces arbres "backward" de la même façon que pour les arbres associés aux pseudo-trajectoires, apparaissent.

nbre de recollisions dans l'arbre	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
pourcentage d'arbres concernés	0.01	0.1	0.7	2.5	6.1	11.9	18.9	19.9	17.1	12.2	6.5	2.7

12	13	14
1.1	0.4	0.1

Il apparaît que 55,9% des arbres subissent entre 6 et 8 recollisions et 80% entre 5 et 9. Ainsi, on observe effectivement un phénomène de recollisions dont l'importance est grande par deux aspects. Le premier est la fréquence avec laquelle il se déroule : tous les arbres sont concernés. Le second est le nombre moyen de recollisions par arbres, environ 7, qui est conséquent. De plus, la grande majorité des arbres subissent au moins 5 recollisions. En comparaison, dans le cas des sphères dures, le pourcentage d'arbres touchés par des recollisions est petit, de l'ordre de $O(\varepsilon)$.

On s'intéresse également à des phénomènes de corrélations d'une autre nature en étudiant les données suivantes : on part à l'instant $T_f = 6$ avec deux particules, la particule 1 et une autre. On cherche alors à connaître le nombre de géniteurs communs aux deux arbres générés i.e. à savoir combien de particules apparaissent dans les deux arbres. On traite cette donnée pour toutes les trajectoires et pour tous les couples de particules $(1, i)$ avec $i \in \{2, \dots, 99\}$. On obtient alors le résultat suivant : en moyenne, les deux particules étudiées présentent 20 géniteurs communs.

Ainsi, les corrélations empêchant la dérivation de l'équation de Broadwell semblent avoir plusieurs sources possibles. Elles peuvent venir des recollisions dans le même arbre systématiques, mais également des connections existant entre deux arbres différents.

DISTRIBUTION DES TEMPS DE COLLISIONS

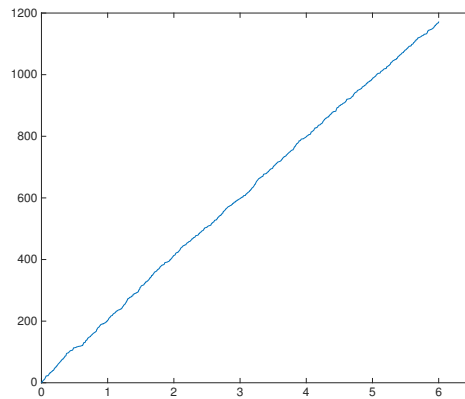


FIGURE 5.16 – Évolution du nombre de collisions en fonction du temps pour la trajectoire 1.

On observe que pour un temps final $T_f = 6$, on a en moyenne 1228 collisions. Sur les 100 trajectoires simulées, le minimum de collisions observés est de 1094 tandis que le maximum est de 1365. Les temps de collisions apparaissent alors être réparties de façon régulière comme illustré dans la Figure 5.16.

5.3 Une étude statistique des limites diffusives

Le résultat classique connu est l'obtention d'un mouvement Brownien en passant à la limite diffusive pour les sphères dures [2]. Dans notre cas de figure, à cause des phénomènes de recollisions décrits précédemment, il n'est pas raisonnable d'espérer obtenir un mouvement Brownien. La question du processus limite étant incertaine, une première approche est de comparer le processus limite avec une classe un peu plus générale que le mouvement Brownien, à savoir le mouvement Brownien fractionnaire. Le mouvement Brownien fractionnaire (fbm) est un processus qui est caractérisé par la propriété suivante :

Proposition 5.3.1. *Le mouvement Brownien fractionnaire $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$ d'indice de Hurst $H \in (0, 1)$ est le seul processus à vérifier :*

- 1- *Le processus est gaussien avec $\mathbb{E}(\mathcal{B}_1) = 0$ et $\mathbb{E}(\mathcal{B}_1^2) = 1$,*
- 2- *les accroissements sont stationnaires : $\forall h > 0$, $(\mathcal{B}_{t+h} - \mathcal{B}_h)_{t \geq 0}$ a même loi que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$,*
- 3- *le processus vérifie la propriété d'auto-similarité : $\forall a > 0$, $(a^{-H} \mathcal{B}_{at})_{t \geq 0}$ a même loi que $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$.*

On rappelle qu'un processus est dit gaussien si $\forall t_1 \leq \dots \leq t_n$, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien i.e. toute combinaison linéaire des coordonnées de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est une variable aléatoire gaussienne réelle.

Dans la suite de cette section, les résultats et tests effectués sont largement inspirés de l'article [13] qui s'attache à comparer plusieurs de méthodes de synthèse du mouvement Brownien fractionnaire. Bien sûr, notre but n'est pas ici de mener une réelle étude statistique complète mais de s'inspirer de celle-ci pour questionner de façon pertinente des propriétés de notre processus limite. Faisons d'abord un bref rappel sur la méthodologie des tests statistiques paramétriques :

Définition 5.3.2. *Un modèle statistique paramétrique est la donnée de*

$$(E, \mathcal{E}, \{P_\theta, \theta \in \Theta\})$$

où E est l'espace où vivent les observations, $\mathcal{E}$ est une tribu sur E , P_θ une famille de lois sur $(E, \mathcal{E})$ indexée par θ le paramètre et Θ est l'espace des paramètres possibles.

En notant H_0 l'hypothèse nulle " $\theta \in \Theta_0$ " et H_1 l'hypothèse alternative " $\theta \in \Theta_1$ " avec Θ_0 et Θ_1 disjoints et inclus dans Θ , on dit qu'on teste H_0 contre H_1 au niveau α si on a une statistique (i.e. une fonction des observations) Δ à valeurs dans $\{0, 1\}$ telle que pour tout $\theta \in \Theta_0$, $P_\theta(\Delta = 1) \leq \alpha$. Quand $\Delta = 0$, on dit qu'on accepte H_0 au niveau α , dans le cas contraire on rejette H_0 au niveau α .

Remarque 5.3.1. *Dans la pratique, un test n'a de réelle valeur que quand il rejette. En effet, par construction du test, dans le doute on accepte avec probabilité $1 - \alpha$, alors qu'on*

rejette avec probabilité α , α étant choisi petit. On adopte alors en général comme hypothèse H_0 celle que l'on veut réfuter. Dans le cas où l'on accepte, on ne peut pas conclure car la construction du test privilégie ce cas avec grande probabilité. Par contre, si malgré cette construction on rejette, on est alors en droit de conclure raisonnablement que, effectivement, l'hypothèse H_0 rejetée est fausse.

Dans la suite, on s'intéressera à deux types de tests : le test du chi deux d'adéquation et le test de Student. Le test du chi deux d'adéquation permet de vérifier si un échantillon d'une variable aléatoire donne des observations comparables à celles d'une loi de probabilité P_θ dont on pense a priori qu'elle devrait être la loi de la variable aléatoire. Soit $(X_i^j)_{\substack{1 \leq i \leq K \\ 1 \leq j \leq M}}$ où K est le nombre d'instants auxquels une trajectoire est simulée et M est le nombre de trajectoires simulées. On regroupe les observations en C classes équiprobables. Ainsi, sous l'hypothèse H_0 , le nombre de réalisations par classe doit théoriquement être de M/C à chaque instant i .

La statistique associée est alors la suivante

$$\chi_i^2 = \sum_{j=1}^C \frac{(R_{i,j} - M/C)^2}{M/C} \quad (5.3.0.1)$$

où $R_{i,j}$ est le nombre d'échantillons observés à l'instant i pour la classe j . Dans le cadre d'un test de normalité, on cherche à tester l'adéquation avec une loi normale. Ainsi, les limites entre les classes, calculées de façon à ce que les classes soient équiprobables, le sont à partir de la moyenne et la variance estimées sur les données. On définit alors la loi de probabilité suivante :

Définition 5.3.3. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables indépendantes identiquement distribuées selon la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Alors $X_1^2 + \dots + X_n^2$ a pour loi celle d'un chi-deux à n degrés de liberté notée $\chi(n)$.

Par la théorie, sous H_0 , χ_i^2 est alors approximativement une variable du chi-deux à $C - c_0$ degrés de liberté si $M/C \leq 5$ où c_0 est le nombre de contraintes sur les données. Dans notre cas, il y a trois contraintes : la première venant du fait que $\sum_j R_{i,j} = K$ et les deux autres venant du fait que la moyenne et la variance sont estimées à partir des observations. Dans le cadre de ce test, on accepte H_0 au niveau α si

$$\chi_i^2 \leq d_{C-3,\alpha} \quad (5.3.0.2)$$

où $d_{C-3,\alpha}$ est le quantile d'ordre α associé à la loi du chi-deux à $C - 3$ degrés de liberté.

Le test de Student que nous appliquerons par la suite s'attache, lui, à déterminer si l'espérance μ d'un échantillon de distribution normale et d'écart type σ non connu est égale à une valeur déterminée μ_0 . La statistique est alors la suivante :

$$T = \sqrt{M} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\hat{\sigma}} \quad (5.3.0.3)$$

où $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ représentent respectivement les estimations de la moyenne et de l'écart-type. À nouveau par la théorie, sous H_0 , on sait que T suit approximativement une loi de Student dont la définition est la suivante :

Définition 5.3.4. Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée et réduite et soit U une variable aléatoire indépendante de Z et distribuée selon la loi du chi-deux à m degrés de liberté.

Alors $Z/\sqrt{U/m}$ suit une loi de Student à m degrés de liberté.

Dans ce contexte, on accepte H_0 au niveau α si

$$t_{\alpha/2} \leq \sqrt{M} \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\hat{\sigma}} \leq t_{1-\alpha/2} \quad (5.3.0.4)$$

où t_γ est le quantile d'ordre γ associé à la loi de Student.

Dans la suite de cette section, pour des raisons de biais numérique apparaissant lorsque le nombre de trajectoires n'est pas assez important, on se placera dans le cas $M = 2000$. Pour le test de normalité, il existe alors un nombre optimal de classes à choisir en fonction du nombre de trajectoires (voir [13]). Pour $M = 2000$, il faut prendre $C = 68$. Dans ce qui suit, on comparera le modèle 1 avec le modèle 2 ainsi que les deux méthodes de simulations TDMD et EDMD pour les paramètres suivants :

- $N = 100$,
- $\varepsilon = 2/N$,
- $M = 2000$,
- $T_f = 6$,
- $dt = \varepsilon/4$ où dt est le pas de temps choisi pour TDMD.

À nouveau au départ, la particule 1 est centrée et les positions initiales des autres particules sont tirées uniformément de façon à éviter les overlaps. Les vitesses sont tirées au départ de façon uniforme i.e. avec probabilité $1/4$ de tirer chaque vitesse.

Pour des raisons pratiques, les simulations sont effectuées dans le tore. Toutefois, puisque l'on cherche à étudier le phénomène de diffusion, on veut travailler dans tout l'espace. Ainsi, on travaille dans le tore déplié i.e. on simule en périodique mais on garde en mémoire le nombre de fois où une particule est sortie et entrée dans le tore pour reconstruire la trajectoire dans $\mathbf{R}^2$. Il semble important de noter que dans le cas de EDMD, l'erreur numérique dans les simulations vient du fait que la limite diffusive est normalement obtenue pour N tendant vers l'infini. Or ici, on a $N = 100 \neq \infty$. Pour TDMD, en plus de cette erreur, il y a également celle qui vient du fait que les collisions ne sont pas exactement faites au temps de collision réelle, mais approximativement à ce temps.

Remarque 5.3.2. De façon pratique, cela implique de travailler avec des “collisions fantômes”, i.e. de créer à chaque fois huit fantômes de particules pour chacune des N particules en ajoutant à leurs positions un des vecteurs appartenant à $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1), (\pm 1, \pm 1)\}$, puis on s'intéresse aux collisions des N particules originelles avec toutes les particules (originelles et fantômes).

5.3.1 Caractère gaussien du processus

Nous allons tester le caractère gaussien des modèles 1 et 2 par le test de normalité décrit précédemment. Commençons par tester la normalité pour chaque instant.

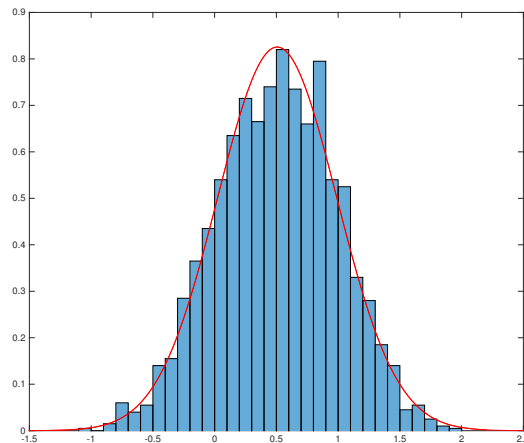


FIGURE 5.17 – Comparaison de l’histogramme associé à l’instant $i=400$ (i.e. $T=2$) avec la loi normale $\mathcal{N}(\hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i^2)$ où $\hat{\mu}_i$ et $\hat{\sigma}_i$ représentent respectivement les estimations de la moyenne et de l’écart-type à l’instant i . Ici $i = 400$ correspond à un instant où le test accepte.

Les résultats suivants concernent des instants i qui caractérisent des temps appartenant à l’intervalle $[1, 6]$. En effet, on observe un phénomène de couche limite pour t entre 0 et 1 déjà observable dans la Figure 5.15. Dans la suite, tous les résultats présentés sont obtenus pour des tests de niveau 5%.

	Modèle 1	Modèle 2
Pourcentage d’instant non gaussiens pour l’abscisse (TDMD)	40,5	6
Pourcentage d’instant non gaussiens pour l’ordonnée (TDMD)	34.9	11.5

Bien sûr, la définition d’un processus gaussien implique qu’il ne suffit pas de vérifier la normalité à chaque instant. Toutefois, ce stade d’observations est déjà suffisant pour statuer sur le probable caractère non gaussien du Modèle 1.

On effectue les mêmes tests pour EDMD. On note d’un point de vue numérique que les données obtenues lors d’une simulation EDMD ne permettent pas de les exploiter directement. En effet, avec cet algorithme, pour chaque trajectoire on obtient les temps de collisions ainsi que les positions et les vitesses associées à chacun de ces temps de collision. Or, ces temps n’ont pas de raison d’être les mêmes d’une trajectoire à l’autre. Le test présenté impose que l’on compare les trajectoires aux mêmes instants. Il faut donc au préalable reconstruire les trajectoires de façon à obtenir des positions et des vitesses pour chaque trajectoire exprimées aux mêmes instants. On obtient alors les résultats suivants :

	Modèle 1	Modèle 2
Pourcentage d'instants non gaussiens pour l'abscisse (EDMD)	13.8	12.6
Pourcentage d'instants non gaussiens pour l'ordonnée (EDMD)	7.6	19.1

Ainsi, à ce stade on constate déjà des différences de comportement entre les simulations EDMD et TDMD. Nous expliquerons l'origine de ces différences en fin de chapitre.

5.3.2 Stationnarité des incréments

CAS DES SIMULATIONS TDMD

On peut à ce stade déjà conclure que le processus limite associé au Modèle 1 n'est probablement pas un mouvement Brownien fractionnaire. En ce qui concerne le Modèle 2, le premier test ne permet pas de conclure. Ainsi, en gardant à l'esprit qu'un test n'a de valeurs que quand il rejette, on choisit de faire des tests supplémentaires en supposant pour quelques temps que les premières caractéristiques testées sont satisfaites. Si tous les tests acceptent, à nouveau on ne sera pas en mesure de conclure. Toutefois, si l'un des tests supplémentaires rejette, ce sera suffisant pour conclure que le Modèle 2, lui non plus, n'est probablement pas un mouvement Brownien fractionnaire. Un processus gaussien étant entièrement caractérisé par ses moments jusqu'à l'ordre deux, pour questionner la stationnarité d'un tel processus il suffirait de tester la stationnarité de la moyenne et la variance. Nous nous limiterons ici à questionner la stationnarité de la moyenne par un test (celui de Student) pour le Modèle 2. En effet, on rappelle que le test de Student n'est valable que sous l'hypothèse de distribution gaussienne de la variable testée. Ainsi, cela n'aurait pas de sens de l'utiliser pour le Modèle 1 dont on a conclu qu'il n'était probablement pas gaussien.

On pose $(G_m)_i^j = X_{i+m}^j - X_i^j$. On se place dans le cas d'incrément de taille 1 et 2, correspondant respectivement à $m = 200$ et $m = 400$ et on cherche à vérifier la stationnarité de la moyenne de ces incréments en testant l'hypothèse $\mu = 0$. Travailler avec des incréments de tailles plus petites ne serait, ici, pas pertinents car, comme constaté précédemment, il faut une durée supérieure à 1 pour que le modèle ait subi suffisamment de collisions. On parle d'incrément à moyenne non nulle lorsque le test rejette. On obtient alors les résultats suivants :

- pour des incréments de taille 1, on a

	Modèle 2
Pourcentage d'incrément à moyenne non nulle pour l'abscisse (TDMD)	6
Pourcentage d'incrément à moyenne non nulle pour l'ordonnée (TDMD)	42,3

- pour des incréments de taille 2, on a

	Modèle 2
Pourcentage d'incrément à moyenne non nulle pour l'abscisse (TDMD)	0
Pourcentage d'incrément à moyenne non nulle pour l'ordonnée (TDMD)	43,2

Malgré la présence d'une dissymétrie entre l'abscisse et l'ordonnée quant au comportement stationnaire des incréments, il semble que la moyenne ne soit pas stationnaire (car non stationnaire pour l'ordonnée). Toutefois, en raison du comportement singulier de l'abscisse, on choisit alors dans le cas des simulations TDMD de faire un test supplémentaire pour achever de rejeter le fait que le Modèle 2 soit un mouvement Brownien fractionnaire.

Remarque 5.3.3. *La dissymétrie observée est surprenante et n'a pas lieu d'être. Nous n'excluons pas qu'elle puisse être due à un bug dans le code. Toutefois, nous avons vérifié et notre code est bien "symétrique" dans le sens où il ne privilégie pas de directions. Pour les mêmes données initiales pivotées de $k\pi/2$, on trouve bien les mêmes trajectoires pivotées de $k\pi/2$, $k \in \mathbf{Z}$. De plus, comme nous le voyons par la suite, pour le second code, il n'y a pas de dissymétrie. Ainsi, nous ne sommes, pour l'instant, pas en mesure de l'expliquer.*

CAS DES SIMULATIONS EDMD

Le test précédent ne permet pas d'affirmer que les processus ne sont pas gaussiens pour les deux modèles. On choisit donc de faire le test supplémentaire de stationnarité de la moyenne. On obtient cette fois les résultats suivants :

- pour des incréments de taille 1, on a

	Modèle 1	Modèle 2
Pourcentage d'incréments à moyenne non nulle pour l'abscisse (EDMD)	63.9	52.2
Pourcentage d'incréments à moyenne non nulle pour l'ordonnée (EDMD)	57.6	50.1

- pour des incréments de taille 2, on a

	Modèle 1	Modèle 2
Pourcentage d'incréments à moyenne non nulle pour l'abscisse (EDMD)	80.6	25.2
Pourcentage d'incréments à moyenne non nulle pour l'ordonnée (EDMD)	33.8	27.2

Ici, aucune dissymétrie n'apparaît et on peut d'ores et déjà conclure à la non stationnarité de la moyenne.

5.3.3 Similarité des incréments

CAS DES SIMULATIONS TDMD

La propriété de similarité s'écrit

$$(G_m)_i = \frac{1}{k^H} (G_{km})_i$$

avec H le paramètre de Hurst associé $H \in (0,1)$. La première chose à faire est alors d'estimer le paramètre H . On utilise directement la commande dans le logiciel Matlab qui y donne accès. On obtient le résultat suivant :

	Modèle 1	Modèle 2
Moyenne du paramètre estimé H pour l'abscisse (TDMD)	1.2632	0.5389
Moyenne du paramètre estimé H pour l'ordonnée (TDMD)	1.2617	0.5408

On vérifie donc l'autosimilarité seulement dans le cas du Modèle 2. On note que les paramètres moyens sont supérieurs à 1 pour le Modèle 1. On utilise à nouveau un test du chi deux. Plus précisément, on vérifie la normalité de la variable aléatoire $\frac{1}{k^H}(G_k)_i$ avec la moyenne et la variance calculée sur $(G_1)_i$. On appelle instant à incréments non similaires les instants où le test rejette. On obtient finalement le résultat suivant :

	Modèle 2
Pourcentage d'instant à incréments non similaires pour l'abscisse (TDMD)	43,8
Pourcentage d'instant à incréments non similaires pour l'ordonnée (TDMD)	42,3

Il semble alors raisonnable à ce stade de statuer sur la probable non similarité du processus.

CAS DES SIMULATIONS EDMD

On obtient cette fois les estimations suivantes concernant le paramètre H :

	Modèle 1	Modèle 2
Moyenne du paramètre estimé H pour l'abscisse (EDMD)	0.2638	0.1898
Moyenne du paramètre estimé H pour l'ordonnée (EDMD)	0.2669	0.1887

CONCLUSION

Les simulations présentées précédemment nous permettent de statuer sur plusieurs points. Tout d'abord, que ce soit avec les simulations TDMD ou EDMD, nous sommes en mesure d'affirmer de façon raisonnable que ni le Modèle 1 ni le Modèle 2 n'ont pour limite un mouvement Brownien fractionnaire.

D'autre part, on a constaté des comportements différents pour les modèles selon qu'ils aient été simulés par TDMD ou EDMD. Cela est probablement dû au choix du paramètre dt adopté. En effet, l'ordre de grandeur de ce paramètre est élevé par rapport à la taille des particules. Ainsi, par ce choix et par l'algorithme adopté, on se place dans un cadre où les overlaps sont pris en compte. Or le fait d'autoriser ou non les overlaps influe totalement sur la limite diffusive. En effet, dans [18], Wood et Lado se placent dans le cas du modèle simplifié d'une particule se déplaçant dans un environnement figé d'obstacles carrés en dimension deux orientés comme dans le modèle de Uchiyama. Il observe alors numériquement que selon que l'environnement autorise ou non les overlaps, la limite diffusive est différente. Ceci explique alors la grande différence observable entre les estimations des paramètres de Hurst pour les simulations TDMD et EDMD que nous obtenons.

Les objectifs à venir sont les suivants : à long terme, on cherche à obtenir les modèles limites associés au modèle de Uchiyama mais à court terme, on pourrait déjà établir à l'échelle mésoscopique un "modèle test" prenant en compte les premiers éléments identifiés comme entraînant des corrélations et obtenir de façon rigoureuse la limite diffusive associée dans un espace de phase étendu, pour l'équation (5.1.0.24) par exemple. D'autres perspectives s'ouvrent également. D'un point de vue numérique, il serait intéressant d'utiliser les récents algorithmes développés dans le cas des sphères dures améliorant l'efficacité de l'algorithme originel. Il faudrait également paralléliser le code. Il s'agirait alors de trouver des nouveaux éléments pertinents à tester avec ce nouveau code optimisé. Enfin, il serait intéressant de prouver de façon rigoureuse la dérivation de l'équation de Broadwell à partir d'un modèle de Uchiyama où on aurait rajouté de l'aléa en plus des données initiales.

Bibliographie

- [1] B. J. Alder and T. E. Wainwright. Studies in molecular dynamics. i. general method. *The Journal of Chemical Physics*, 31(2) :459–466, 1959.
- [2] T. Bodineau, I. Gallagher, and L. Saint-Raymond. The Brownian motion as the limit of a deterministic system of hard-spheres. *Inventiones Mathematicae*, page 41, 2015.
- [3] J. E. Broadwell. Shock Structure in a Simple Discrete Velocity Gas. *Physics of Fluids*, 7(8) :1243–1247, 1964.
- [4] H. Cabannes. *The discrete Boltzmann equation (theory and applications)*. Lecture Notes, Univ. of California, Berkeley, CA. 1980.
- [5] E. Caglioti and F. Golse. On the Boltzmann-Grad Limit for the Two Dimensional Periodic Lorentz Gas. *J. Stat. Phys.*, 2010.
- [6] S. Caprino, A. DeMasi, E. Presutti, and M. Pulvirenti. A derivation of the Broadwell equation. *Communications in Mathematical Physics*, 135(3) :443–465, 1991.
- [7] T. Carleman. Problèmes mathématiques dans la théorie cinétique des gaz. *Publ. Scient. Inst. Mittag-Leffle*, pages p104–106, 1957.
- [8] C. Cercignani, R. Illner, and M. Pulvirenti. *The Mathematical Theory of dilute gases*, volume 106. 1994.
- [9] R. Gatignol. *Théorie Cinétique des Gaz à Répartition Discrète de Vitesses*. Lecture Lectures Notes in Physics. Springer, 1975.
- [10] E. P. Gross. Recent Investigations of the Boltzmann Equation, 1960.
- [11] J. Hardy, Y. Pomeau, and O. de Pazzis. Time evolution of a two-dimensional classical lattice system. *Phys. Rev. Lett.*, 31 :276–279, Jul 1973.
- [12] R. Illner and T. Platkowski. Discrete Velocity Models of the Boltzmann Equation : A Survey on the Mathematical Aspects of the Theory. *SIAM Review*, 30(2) :213–255, 1988.
- [13] R. Jennane, R. Harba, and G. Jacquet. Estimation de la qualité des méthodes de synthèse du mouvement brownien fractionnaire. [http ://documents.irevues.inist.fr](http://documents.irevues.inist.fr), 1996.

-
- [14] A. Masi, R. Esposito, and E. Presutti. Kinetic limits of the HPP cellular automaton. *Journal of Statistical Physics*, 66(1) :403–464, 1991.
 - [15] J. C. Maxwell. *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, volume 2. J. Hermann, 1890.
 - [16] K. Uchiyama. On the Boltzmann-Grad limit for the Broadwell model of the Boltzmann equation. *Journal of Statistical Physics*, 52(1) :331–355, 1988.
 - [17] K. Uchiyama. A tagged particle process in the Boltzmann-Grad limit for the Broadwell model. *Probability Theory and Related Fields*, 82(3) :419–433, 1989.
 - [18] W. W. Wood and F. Lado. Monte-Carlo Calculation of Normal and Abnormal Diffusion in Ehrenfest’s Wind-Tree Model. *Journal of Computational Physics*, 7 :528–546, 1971.

Développement

Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le domaine des équations aux dérivées partielles et plus particulièrement dans le cadre de la dynamique des gaz. Un gaz est un système physique constitué d'un très grand nombre de petites particules dont le libre parcours moyen est grand par rapport à leur taille. Il existe alors plusieurs niveaux de description. L'échelle macroscopique constitue l'échelle accessible facilement expérimentalement et pour laquelle on peut faire des mesures de quantités caractéristiques du gaz telles que le volume, la température, la pression . . . L'échelle microscopique correspond à l'échelle des composants élémentaires de la matière (atomes, molécules). On peut aussi introduire une description intermédiaire correspondant à une description statistique. Il s'agit alors de l'échelle mésoscopique. À ce niveau, on ne s'intéresse plus à l'évolution des particules individuellement mais à l'évolution de la densité de particules f , une fonction qui dépend du temps t , de la position x et de la vitesse v et telle que pour un volume infinitésimal $dx dv$, $f(t, x, v) dx dv$ représente le nombre de particules dans ce volume au temps t .



FIGURE 1. Représentation des différentes échelles et différentes transitions possibles.

Une question naturelle est de chercher à relier les différents niveaux de description. En d'autres termes, partant d'un modèle à une échelle, on cherche à trouver le modèle qui décrit de façon satisfaisante ce qui se passe à l'échelle supérieure. Les contributions de cette thèse se placent dans le cadre de plusieurs changements d'échelle différents.

Le parti pris dans ce manuscrit est d'étudier ces problématiques dans un contexte où une part d'aléa intervient toujours. Le Hasard est l'impossibilité de prévoir avec certitude un fait quelconque. Cette incapacité peut s'expliquer de plusieurs façons : la méconnaissance de paramètres nécessaires à la prévision ou alors le manque de précision les concernant. Dans la pratique, ces deux situations se présentent souvent. Ainsi, considérer des modèles incluant une part d'aléa apparaît pertinent. Plusieurs types d'aléa peuvent alors être adoptés : en considérant des données initiales aléatoires et/ou en distribuant l'aléa sur tout l'intervalle de temps.

Le premier changement d'échelle étudié concerne le passage des lois de Newton à l'équation de Boltzmann linéaire sans cut-off. Ce type de problématique se place dans le cadre des limites de Boltzmann-Grad. On part à l'échelle microscopique d'un système de

N particules sphériques de rayon ε qui occupent donc un volume $N\varepsilon^d$. Les particules se déplacent librement et, lorsqu'elles se rencontrent, rebondissent selon les lois de la réflexion spéculaire. Dans le cadre de la limite Boltzmann-Grad, on impose que le volume occupé soit faible, i.e. $N\varepsilon^d \ll 1$, et que les collisions soient à la même échelle que le transport, ce qui se traduit par $N\varepsilon^{d-1} = 1$. Le résultat historique associé est alors le suivant : dans [7], Lanford a établi que, partant du système de sphères dures décrit ci-dessus, en passant à la limite Boltzmann-Grad, on dérive l'équation de Boltzmann. Ce résultat étant uniquement valable en temps court, une extension a été établie récemment par Bodineau, Gallagher et Saint-Raymond [5]. Partant d'un équilibre perturbé dans le cas des sphères dures, ils ont obtenu la dérivation de l'équation de Boltzmann linéaire sur un intervalle quelconque fixé. Leur preuve repose, entre autres, sur une étude fine du processus de branchement associé aux collisions.

Le cadre dans lequel on travaille est légèrement différent car on ne s'intéresse plus à un système de sphères dures à l'échelle microscopique mais à un système de particules interagissant cette fois via un potentiel à portée infinie. Un tel contexte fait alors apparaître une singularité non intégrable dans le noyau de collision angulaire de l'équation de Boltzmann. Ceci a alors pour conséquence le fait que le seul usage de la stratégie originelle de Lanford n'est plus valable. En effet, celle-ci utilise en fait l'hypothèse de "cut-off angulaire". L'astuce consiste alors à séparer artificiellement le potentiel en deux parties : une partie "portée modérée" pour laquelle on développe et utilise les outils habituels de Lanford et les outils récents développés par Bodineau, Gallagher et Saint-Raymond et une partie longue portée pour laquelle grâce à des arguments de dualité, on obtient des estimations faibles explicites. Tout comme dans [5], on se place dans le cadre d'un équilibre perturbé et pour un potentiel avec de fortes hypothèses de décroissance, on obtient la dérivation rigoureuse de l'équation de Boltzmann linéaire sans cut-off.

Le deuxième changement d'échelle étudié traite du passage d'un modèle BGK stochastique à une loi de conservation scalaire avec forçage stochastique. Le premier modèle BGK a été introduit par Bathnagar, Gross et Krook [4]. Il s'agit d'une version simplifiée de l'équation de Boltzmann (le noyau étant remplacé par un terme plus simple) qui possède les mêmes propriétés de conservation de la masse, de quantité de mouvement et d'énergie et propriété d'entropie. Dans ce contexte, on est alors capable de prouver la convergence vers le système d'Euler en passant à la limite hydrodynamique (cette question étant toujours ouverte dans le cas de l'équation de Boltzmann). Ces modèles ont ensuite été généralisés et étendus au contexte des lois de conservation scalaires par Lions, Perthame et Tadmor [8]. C'est ce type de BGK généralisé que nous allons étudier. En effet, par la suite, de nombreuses variantes de ce modèle ont été étudiées : avec des conditions aux bords [1], avec un flux discontinu en la variable d'espace [3], avec un scaling champ fort [2] ou encore dans un contexte stochastique [6].

Dans cette partie, on s'intéresse aux deux derniers contextes cités en partant d'un modèle BGK stochastique avec champ fort. Physiquement, cela peut alors se traduire de la façon suivante : on s'intéresse à l'évolution de la densité de particules pour des particules soumises à une force extérieure à composante déterministe et stochastique (cette dernière traduisant qu'une partie de la force est méconnue), la composante déterministe étant un champ fort. Dans un premier temps, on établit l'existence d'une solution au modèle BGK considéré. Sous une hypothèse additionnelle, partant de ce modèle et en passant à la limite hydrodynamique, on obtient alors une loi de conservation avec forçage stochastique. Pour ce faire, la démarche développée consiste à établir la convergence vers une formulation cinétique associée à la loi de conservation avec forçage. Tout comme dans le cas déterministe,

on note l'apparition d'une Maxwellienne modifiée et ainsi d'un équilibre différent de celui obtenu dans le cas déterministe.

Dans la troisième partie, on s'intéresse à ce qu'on appelle les lemmes de moyenne. Les lemmes de moyenne constituent des outils très prisés et très efficaces en théorie cinétique, notamment lorsqu'il s'agit d'établir des changements d'échelle par passage à la limite. En effet, ils établissent une propriété de régularité pour une moyenne spécifique. Plus précisément, ils établissent l'appartenance de cette moyenne à $H^{1/2}(\mathbf{R}^d)$, $d \geq 1$. Ainsi, par le théorème de Rellich, on en déduit de la compacité dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^d)$, utile pour les passages à la limite associés aux changements d'échelle. Un résultat bien connu est que, dès lors que l'on travaille avec $\mathcal{V}_N := \{v_1, \dots, v_N\}$, un ensemble de N vitesses muni de la mesure discrète $d\mu(v) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta_{v=v_j}$, alors la propriété de régularité établie par les lemmes de moyenne devient fausse. Toutefois, comme prouvé par Mischler [9], dès lors que les vitesses discrètes proviennent d'une discrétisation de l'espace, les lemmes de moyenne peuvent être retrouvés asymptotiquement en faisant tendre le pas de la grille vers 0. Dans cette partie, dans un premier temps, on complète donc le résultat de Mischler en quantifiant le défaut de régularité à N fixé. D'autre part, on établit que dès lors que les vitesses discrètes sont tirées de façon aléatoires, on peut alors établir des lemmes de moyenne stochastiques. On s'intéressera particulièrement au cas de vitesses tirées selon une loi uniforme continue dans le cube d'arête 1 ou sur la sphère unité. Des extensions de ce résultat au cas L^p , $p \in]1, +\infty[$ et au cas L^1 sont obtenues de façon similaire au cas déterministe en utilisant, entre autres, des outils d'interpolation.

On applique alors ces résultats de lemmes de moyenne stochastiques au cadre de l'approximation de Rosseland, une équation associée au domaine des transferts radiatifs, et on établit la limite diffusive associée dans le contexte de vitesses finies aléatoires.

Enfin, dans la quatrième et dernière partie, on se place dans le cadre du modèle de Uchiyama. Ce modèle s'intéresse à l'évolution de particules carrés dont les diagonales sont respectivement parallèles à l'axe des abscisses et des ordonnées. Les particules se déplacent librement avec une vitesse ne pouvant prendre que des valeurs parmi

$$S := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}, \quad (5.3.3.1)$$

avec $v_1 := (1, 0)$, $v_2 := (-1, 0)$, $v_3 := (0, 1)$, $v_4 := (0, -1)$ jusqu'à ce qu'elles entrent en collision. On distingue alors deux types de collisions : les collisions frontales et les collisions latérales. Les règles de collisions sont alors les suivantes : en cas de collision latérale, les particules impliquées échangent leurs vitesses alors qu'en cas de collision frontale, les vitesses subissent une rotation de $\pm\pi/2$.

Dans ce contexte, Uchiyama établit que, contrairement à ce à quoi on aurait pu s'attendre, en passant à la limite de Boltzmann-Grad, on ne dérive pas l'équation de Broadwell, cas particulier de l'équation de Boltzmann où l'espace des vitesses est S . Ceci est alors à mettre sur le compte de phénomènes de recollisions, qui contrairement au cas des sphères dures, ne sont pas négligeables. Dans un premier temps, après avoir discuté les probables sources de cette absence de dérivation, on propose une équation issue d'une première approche naïve, écrite dans un espace de phase étendu comprenant comme paramètres supplémentaire l'âge de la vitesse, la vitesse antérieure et l'âge de la vitesse antérieure lorsqu'elle s'est changée en la vitesse actuelle. On précise tout de même que cette équation n'est pas satisfaisante car ne prend pas en compte des mécanismes complexes pouvant mener à des recollisions. On décide alors de recourir à une étude numérique pour obtenir des informations quant aux limites associées à ce modèle. On adapte les simulations développées dans le cas des sphères

dures au modèle de Uchiyama. Deux approches distinctes sont possibles : l'algorithme "Time-Driven" où essentiellement on avance en pas de temps et on vérifie à chaque pas de temps si des collisions ont lieu avant de les effectuer, et l'algorithme "Event-Driven" où on avance de collision en collision. On effectue alors une étude statistique sur les résultats obtenus par les simulations. Celle-ci nous permet finalement de rejeter l'hypothèse selon laquelle la limite diffusive serait un mouvement Brownien fractionnaire.

Bibliographie

- [1] F. Berthelin and F. Bouchut. Weak entropy boundary conditions for isentropic gas dynamics via kinetic relaxation. *Journal of Differential Equations*, 185(1) :251 – 270, 2002.
- [2] F. Berthelin, N. J. Mauser, and F. Poupaud. High-field limit from a kinetic equation to multidimensional scalar conservation laws. *Journal of Hyperbolic Differential Equations*, 04(01) :123–145, 2007.
- [3] F. Berthelin and J. Vovelle. A Bhatnagar-Gross-Krook approximation to scalar conservation laws with discontinuous flux. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section : A Mathematics*, 140 :953–972, 10 2010.
- [4] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, and M. Krook. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. *Phys. Rev.*, 94 :511–525, May 1954.
- [5] T. Bodineau, I. Gallagher, and L. Saint-Raymond. The Brownian motion as the limit of a deterministic system of hard-spheres. *Inventiones Mathematicae*, page 41, 2015.
- [6] M. Hofmanova. A Bhatnagar-Gross-Krook approximation to stochastic scalar conservation laws. *Annales de l'Institut Henri Poincaré Probabilités et Statistiques*, 51(4) :1500–1528, 11 2015.
- [7] O. E. Lanford. Time evolution of large classical systems. In J. Moser, editor, *Dynamical Systems, Theory and Applications*, volume 38 of *Lecture Notes in Physics*, pages 1–111. Springer Berlin Heidelberg, 1975.
- [8] P.-L. Lions, B. Perthame, and E. Tadmor. A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations. *J. Amer. Math. Soc.*, pages 169–191, 1994.
- [9] S. Mischler. Convergence of discrete-velocity schemes for the Boltzmann equation. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 140 :53–77, 1997.

Résumé. Les travaux de cette thèse s'inscrivent dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Plus particulièrement, ils sont liés à la problématique des changements d'échelle dans le contexte de la cinétique des gaz. En effet, sachant qu'il existe plusieurs niveaux de description pour un gaz (échelles microscopique, mésoscopique et macroscopique), on cherche à relier les différentes échelles associées dans un cadre où une part d'aléa intervient, dans les données initiales et/ou réparti sur tout l'intervalle de temps.

Dans une première partie, on établit la dérivation rigoureuse de l'équation de Boltzmann linéaire sans cut-off en partant d'un système de particules interagissant via un potentiel à portée infinie, sous des hypothèses particulières de décroissance, en partant d'un équilibre perturbé.

La deuxième partie traite du passage d'un modèle BGK stochastique avec champ fort à une loi de conservation scalaire avec forçage stochastique. D'abord, on établit l'existence d'une solution au modèle BGK considéré. Sous une hypothèse additionnelle, on prouve alors la convergence vers une formulation cinétique associée à la loi de conservation avec forçage stochastique.

Au cours de la troisième partie, dans un premier temps, on quantifie dans le cas à vitesses discrètes le défaut de régularité associé aux traditionnelles moyennes considérées dans les lemmes de moyenne. Par la suite, on établit un lemme de moyenne stochastique dans ce même cas. On applique alors le résultat au cadre de l'approximation de Rosseland pour établir la limite diffusive associée à ce modèle.

Enfin, dans la quatrième et dernière partie, on s'intéresse à l'étude numérique du modèle de Uchiyama de particules carrées à quatre vitesses en dimension deux. Après avoir adapté les méthodes de simulation développées dans le cas des sphères dures, on effectue une étude statistique des limites à différentes échelles de ce modèle. On rejette alors l'hypothèse d'un mouvement Brownien fractionnaire comme limite diffusive.

Mots-clés : cinétique des gaz, équations aux dérivées partielles, équations aux dérivées partielles stochastiques, équation de Boltzmann, loi de conservation, modèle BGK stochastique, lemme de moyenne, approximation de Rosseland, modèle de Uchiyama, limite Boltzmann-Grad, limite hydrodynamique, limite diffusive.

Abstract. The work of this thesis belongs to the field of partial differential equations. More specifically, it is linked to the problematic of scale changes in the context of kinetic of gas. Indeed, knowing that there exists different scales of description for a gas (microscopic, mesoscopic and macroscopic scale), we want to link these different associated scales in a context where some randomness acts, in initial data and/or distributed on all the time interval.

In a first part, we establish the rigorous derivation of the linear Boltzmann equation without cut-off starting from a particle system interacting via a potential of infinite range, under particular assumptions of decay, starting from a perturbed equilibrium.

The second part deals with the passage from a stochastic BGK model with high-field scaling to a scalar conservation law with stochastic forcing. First, we establish the existence of a solution to the considered BGK model. Under an additional assumption, we prove then the convergence to a kinetic formulation associated to the conservation law with stochastic forcing.

In the third part, in a first place, we quantify in the case of discrete velocities the defect of regularity associated to the traditional averaging which are considered in the averaging lemmas. Then, we establish a stochastic averaging lemma in that same case. We apply then the result to the context of Rosseland approximation to establish the diffusive limit associated to this model.

Finally, in the last part, we are interested into the numerical study of Uchiyama's model of square particles with four velocities in dimension two. After adapting the methods of simulation which were developed in the case of hard spheres, we carry out a statistical study of the limits at different scales of this model. We reject the hypothesis of a fractional Brownian motion as diffusive limit.

Key words : kinetic theory of gas, partial differential equations, stochastic partial differential equation, Boltzmann equation, conservation law, stochastic BGK model, averaging lemma, Rosseland approximation, Uchiyama's model, Boltzmann-Grad limit, hydrodynamical limit, diffusive limit.