



HAL
open science

Singularités libres, formes et résidus logarithmiques

Delphine Pol

► **To cite this version:**

Delphine Pol. Singularités libres, formes et résidus logarithmiques. Mathématiques générales [math.GM]. Université d'Angers, 2016. Français. NNT : 2016ANGE0021 . tel-01441450

HAL Id: tel-01441450

<https://theses.hal.science/tel-01441450v1>

Submitted on 19 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de Doctorat

Delphine POL

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du
grade de Docteur de l'Université d'Angers
sous le sceau de l'Université Bretagne Loire*

École doctorale : Sciences et technologies de l'information, et mathématiques

Discipline : Mathématiques et leurs interactions, section CNU 25

Unité de recherche : Laboratoire Angevin de Recherche en Mathématiques (LAREMA)

Soutenue le 8 décembre 2016

Singularités libres, formes et résidus logarithmiques

JURY

Rapporteurs : **M. Ragnar-Olaf BUCHWEITZ**, Professeur, University of Toronto
M. Alexandru DIMCA, Professeur, Université de Nice

Examineurs : **M. Éric DELABAERE**, Professeur, Université d'Angers
M. Felix DELGADO DE LA MATA, Professeur, Universidad de Valladolid
M. Étienne MANN, Professeur, Université d'Angers
M. Mathias SCHULZE, Professeur, T.U. Kaiserslautern

Directeur de thèse : **M. Michel GRANGER**, Professeur, Université d'Angers

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR ÈS MATHÉMATIQUES

présentée à l'Université d'Angers par

Delphine POL

Singularités libres, formes et résidus logarithmiques

soutenue le 8 décembre 2016 devant le jury composé de :

| | | |
|-----------------------------|---|--------------------|
| M. Ragnar-Olaf BUCHWEITZ | Professeur à l'Université de Toronto | Rapporteur |
| M. Alexandru DIMCA | Professeur à l'Université de Nice | Rapporteur |
| M. Éric DELABAERE | Professeur à l'Université d'Angers | Examineur |
| M. Felix DELGADO DE LA MATA | Professeur à l'Université de Valladolid | Examineur |
| M. Étienne MANN | Professeur à l'Université d'Angers | Examineur |
| M. Mathias SCHULZE | Professeur, T.U. Kaiserslautern | Examineur |
| M. Michel GRANGER | Professeur à l'Université d'Angers | Directeur de thèse |

préparée au **LAREMA - UMR CNRS 6093**

Remerciements

La première personne vers laquelle se portent mes remerciements est mon directeur de thèse, Michel Granger. Je le remercie de m'avoir proposé ce sujet de thèse, et de s'être montré toujours disponible pour moi depuis plus de trois ans. Merci pour les après-midi pendant lesquels il m'a fait visiter le monde des singularités et où il a répondu à mes questions avec une grande bienveillance. Son enthousiasme et la confiance qu'il m'a accordés m'ont permis d'avancer et de mener à bien la thèse que vous tenez entre les mains.

Je remercie Ragnar-Olaf Buchweitz et Alexandru Dimca de me faire l'honneur d'être les rapporteurs de ma thèse et de l'intérêt qu'ils portent à mes travaux. Je remercie également Éric Delabaere, Felix Delgado de la Mata, Étienne Mann et Mathias Schulze d'avoir accepté de prendre part à mon jury. Merci aussi à Éric Delabaere et Philippe Maisonobe d'avoir accepté de faire partie de mon comité de suivi de thèse.

Je tiens à remercier Mathias Schulze pour son accueil chaleureux lors de mes visites à Kaiserslautern, pour son invitation, pour nos discussions et pour ses suggestions qui m'ont permis d'avancer sur la résolution de certains problèmes, ainsi que pour ses remarques sur ma thèse.

Merci aussi à Patrick Popescu-Pampu, discuter de mathématiques avec lui est un vrai plaisir. Je le remercie de m'avoir invitée au séminaire de Lille, et de m'avoir fait de nombreuses suggestions utiles sur mon article.

Je remercie particulièrement Mohammed El Amrani pour ses conseils avisés sur la rédaction de ma thèse.

Je remercie aussi dans le désordre, Daniel Barlet, Herwig Hauser, Kyoji Saito, Masahiko Yoshinaga, David Mond, Luis Narváez, Alain Yger, Pierrette Cassou-Noguès, André Galligo, Damien Mégy, Eleonore Faber, Jean Vallès, Jacky Cresson, Enrique Artal, Ignacio Luengo, Bernard Teissier, Monique Lejeune, Mickaël Matusinski, Alain Esnault, Adam Parusinski, Hussein Murtada, Michel Raibaut, Guillaume Rond, Philippe Gimenez pour les discussions que nous avons eues lors de rencontres, et merci en particulier à tous ceux qui m'ont donné la chance d'exposer mes travaux lors de rencontres en singularités ou de séminaires.

La bonne ambiance qui règne au LAREMA m'a permis de réaliser ma thèse dans d'excellentes conditions. Merci à vous tous! Je tiens à remercier Frédéric Mangolte pour avoir encadré mon mémoire de Master 1, pour son enthousiasme et pour m'avoir donné l'opportunité de présenter mes travaux au séminaire de Géométrie Algébrique. Merci aussi à Étienne Mann, pour son dynamisme et pour le groupe de travail sur la symétrie miroir qu'il a mis en place et auquel il m'a invitée à participer. Je remercie aussi Abdallah Assi pour son cours doctoral sur les semigroupes et les échanges que nous avons eus à ce sujet. Mes pensées vont vers Tan Lei qui nous a quittés, je la remercie pour sa gentillesse et pour les cours qu'elle nous a proposés.

Je remercie chaleureusement mes amis doctorants Mohamed Benzerga et Benjamin Couéraud pour les bons moments que nous avons passés ensemble et le groupe de travail estival que nous avons mis en place, et Clément Fromenteau avec lequel j'ai partagé plusieurs enseignements. Dès le lycée j'ai pu compter sur le soutien et l'amitié de Bruno Laurent, en particulier pendant nos années de prépa. J'ai beaucoup apprécié l'accueil que m'ont réservé Laura Tozzo et Philipp Korell lors de ma venue à Kaiserslautern, je les remercie aussi pour leurs précieux commentaires

sur mon article. Merci aussi aux autres doctorants, post-doctorants et ATER du LAREMA, ainsi que ceux que j'ai croisés lors de rencontres, pour toutes nos discussions, mathématiques ou non.

J'ai eu le plaisir d'organiser avec Frédéric Mangolte et Abdallah Assi une conférence en l'honneur de Michel Granger. Je remercie mes co-organisateurs pour la confiance et la liberté qu'ils m'ont accordées pour l'organisation de cette rencontre, et je remercie chaleureusement Alexandra Le Petitcorps pour son aide et son efficacité. Merci aussi à tous les participants qui ont grandement contribué à la réussite de cette rencontre.

Je remercie le LAREMA et son directeur Loïc Chaumont de m'avoir financé plusieurs voyages. Merci aussi aux directeurs de département, François Ducrot et Mohammed El Amrani, pour leur soutien et pour m'avoir permis d'enseigner. Je remercie également Alexandra Le Petitcorps et Caroline Chalumeau pour leur bonne humeur, leur patience et pour leur aide dans les tâches administratives.

Un très grand merci aussi au GDR Singularités dirigé par Adam Parusinski qui a accepté de financer plusieurs de mes séjours, et au GDRI Singularités d'avoir pris en charge ma participation à la quatrième rencontre franco-vietnamienne-japonaise en singularités à Chambéry.

Je remercie l'École Doctorale STIM de m'avoir attribué un prix pour le poster que j'ai présenté lors de la Journée des Doctorants 2015, et qui a permis de financer ma participation à la rencontre *Differential and combinatorial aspects of singularities* à Kaiserslautern en Août 2015.

Je remercie aussi Jenifer Granger d'avoir accepté de corriger mon anglais à plusieurs reprises.

Je remercie mes parents pour leur soutien durant toutes ses années, et leur patience, en particulier lorsque je me mettais à parler de résidus à voix haute... Merci aussi à mes grands parents pour la confiance qu'ils ont en moi. Merci à mon ami de toujours, Morgan, pour son enthousiasme et sa bonne humeur (et aussi pour ses gâteaux!). Et merci à vous tous d'avoir servi de cobayes à mes expériences culinaires!

Je remercie également Angers Loire Métropole d'avoir accepté de financer ma thèse, me permettant ainsi de la réaliser dans de bonnes conditions.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Remerciements | 5 |
| 1 Introduction | 11 |
| 1.1 Motivations et contexte | 11 |
| 1.2 Définitions et notations préliminaires | 13 |
| 1.3 Résultats principaux | 14 |
| 1.3.1 Singularités libres | 14 |
| 1.3.2 Cas des courbes | 16 |
| 1.4 Contenu détaillé de la thèse | 18 |
| 1.4.1 Chapitre 2 | 18 |
| 1.4.2 Chapitre 3 | 18 |
| 1.4.3 Chapitre 4 | 20 |
| 1.4.4 Chapitre 5 | 21 |
| 1.4.5 Chapitre 6 | 23 |
| 1.4.6 Annexe | 24 |
| Conventions et notations | 25 |
| 2 Préliminaires sur les diviseurs libres | 27 |
| 2.1 Champs de vecteurs et formes logarithmiques | 27 |
| 2.1.1 Formes différentielles logarithmiques | 27 |
| 2.1.2 Champs de vecteurs logarithmiques | 30 |
| 2.1.3 Dualité | 31 |
| 2.2 Diviseurs libres | 31 |
| 2.2.1 Définition | 31 |
| 2.2.2 Caractérisations de la liberté | 32 |
| 2.3 Résidus logarithmiques | 36 |
| 2.3.1 Définition et premières propriétés | 36 |
| 2.3.2 Caractérisation des croisements normaux | 38 |
| 2.3.3 Autres interprétations du module des résidus | 40 |
| 3 Liberté d'une intersection complète | 43 |
| 3.1 Formes multi-logarithmiques et multi-résidus | 44 |
| 3.1.1 Définition | 44 |
| 3.1.2 Multi-résidus | 46 |
| 3.1.3 Pôles arbitraires | 49 |
| 3.1.4 Formes logarithmiques du diviseur | 52 |
| 3.2 Champs de vecteurs multi-logarithmiques | 54 |
| 3.2.1 Définition | 54 |
| 3.2.2 Comparaison avec les champs de vecteurs logarithmiques | 55 |
| 3.2.3 Pseudo-dualité avec les formes différentielles multi-logarithmiques | 57 |
| 3.2.4 Dualité entre l'idéal jacobien et les multi-résidus | 59 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.3 | Caractérisations de la liberté | 61 |
| 3.3.1 | Preuve de la proposition 3.3.5 | 63 |
| 3.3.2 | Préliminaires à la preuve du théorème 3.3.7 | 63 |
| 3.3.3 | Fin de la preuve du théorème 3.3.7 | 68 |
| 3.3.4 | Conséquences de la liberté | 70 |
| 4 | Liberté d'un espace de Cohen-Macaulay | 71 |
| 4.1 | Formes logarithmiques d'un espace équidimensionnel | 72 |
| 4.1.1 | Définition | 72 |
| 4.1.2 | Multi-résidus logarithmiques | 74 |
| 4.1.3 | Lien avec les formes régulières méromorphes | 76 |
| 4.2 | Liberté d'un espace réduit de Cohen-Macaulay | 78 |
| 4.2.1 | Forme fondamentale | 79 |
| 4.2.2 | Champs de vecteurs multi-logarithmiques | 82 |
| 4.2.3 | Dualité entre les résidus et l'idéal jacobien restreint | 85 |
| 4.2.4 | Caractérisations de la liberté | 86 |
| 4.2.5 | Comparaison des idéaux jacobiens | 90 |
| 5 | Courbes et multi-valuations | 93 |
| 5.1 | Généralités sur les courbes | 93 |
| 5.1.1 | Multi-valuations | 93 |
| 5.1.2 | Diviseurs de zéros et multi-valuations | 97 |
| 5.1.3 | Symétrie du semigroupe | 97 |
| 5.2 | Symétrie des multi-valuations | 100 |
| 5.2.1 | Enoncé du théorème et commentaires | 100 |
| 5.2.2 | Une implication | 102 |
| 5.2.3 | Multi-valuations et dimension | 102 |
| 5.2.4 | Etapas préliminaires | 104 |
| 5.2.5 | Fin de la preuve | 106 |
| 5.2.6 | Exemples | 108 |
| 5.2.7 | Généralisation | 109 |
| 5.2.8 | Série de Poincaré | 110 |
| 6 | Résidus logarithmiques le long des courbes | 115 |
| 6.1 | Courbes intersections complètes | 115 |
| 6.1.1 | Lien avec les différentielles de Kähler | 115 |
| 6.1.2 | Dimensions | 117 |
| 6.1.3 | Familles génératrices pour les courbes quasi-homogènes | 118 |
| 6.1.4 | Résolution libre | 122 |
| 6.1.5 | Exemples | 127 |
| 6.1.6 | Une caractérisation des arrangements de droites plan | 128 |
| 6.2 | Propriétés du module des résidus des courbes planes | 129 |
| 6.2.1 | Conducteur | 129 |
| 6.2.2 | Diviseurs de zéro | 130 |
| 6.2.3 | Torsion des différentielles de Kähler des courbes planes | 131 |
| 6.2.4 | Calcul des multi-valuations du module des résidus | 131 |
| 6.3 | Résidus et déformations équisingulières | 139 |
| 6.3.1 | Déformations équisingulières de courbes planes | 140 |
| 6.3.2 | Déformations admissibles de courbes planes | 141 |
| 6.3.3 | Lien avec d'autres stratifications | 143 |

| | |
|---|------------|
| A Algorithmes et exemples | 149 |
| A.1 Algorithmes | 149 |
| A.1.1 Intersection complète libre | 149 |
| A.1.2 Calcul des formes multi-logarithmiques d'une intersection complète | 150 |
| A.1.3 Calcul des champs de vecteurs multi-logarithmiques d'une courbe | 153 |
| A.1.4 Variantes pour les espaces équidimensionnels | 153 |
| A.2 Exemples et conjectures | 154 |
| A.2.1 Lieu singulier d'un diviseur à croisements normaux | 154 |
| A.2.2 Surfaces libres | 155 |
| A.2.3 Autres surfaces | 156 |
| A.2.4 Champs de vecteurs multi-logarithmiques des courbes quasi-homogènes | 157 |
| Index | 159 |
| Bibliographie | 161 |

Chapitre 1

Introduction

Nous étudions dans ce travail les formes différentielles logarithmiques d'un espace singulier réduit de codimension quelconque plongé dans une variété lisse, et nous développons une notion de singularités libres qui étend aux codimensions supérieures la notion de diviseurs libres introduite par K. Saito. Les résidus des formes différentielles logarithmiques d'une hypersurface ainsi que leur généralisation aux espaces de codimension supérieure interviennent de façon cruciale dans ce travail de thèse. Notre premier objectif est de donner des caractérisations de la liberté pour les intersections complètes et les espaces de Cohen-Macaulay qui généralisent le cas des hypersurfaces. Nous accordons ensuite une attention particulière à une famille de singularités libres, à savoir les courbes, pour lesquelles nous décrivons le module des résidus logarithmiques en termes de multi-valuations.

1.1 Motivations et contexte

Soit D une hypersurface à croisements normaux d'une variété complexe lisse S , c'est-à-dire une hypersurface localement définie par un produit de fonctions coordonnées de S . Dans [Del70] et [Del71], P. Deligne étudie la théorie de Hodge mixte du complémentaire de D , et met en évidence un complexe de faisceaux constitués de formes différentielles méromorphes à pôles simples le long de D dont la différentielle est aussi à pôles simples. Ces formes différentielles sont appelées *formes différentielles logarithmiques*. Il montre en particulier un résultat de *comparaison logarithmique*, c'est-à-dire que le complexe des formes logarithmiques le long de D permet de calculer la cohomologie du complémentaire de D . La notion de formes différentielles logarithmiques est généralisée aux hypersurfaces réduites singulières quelconques par K. Saito dans [Sai75] et [Sai80]. Cette notion est apparue dans l'étude de la connexion de Gauss-Manin de certaines familles de singularités et de leur déploiement semi-universel. Certaines propriétés des faisceaux de formes logarithmiques d'un diviseur à croisements normaux sont conservées, comme la cohérence ou la stabilité par différentiation. Il est à noter cependant que la propriété de comparaison logarithmique ne s'étend pas toujours.

Une propriété remarquable du faisceau des formes différentielles logarithmiques de degré un montrée dans [Sai80] est qu'il est réflexif, et son dual est le faisceau des champs de vecteurs logarithmiques le long de D . Un champ de vecteurs holomorphe de S est dit *logarithmique* s'il est tangent à D en ses points lisses. En particulier, dans le cas des courbes planes, cette propriété de réflexivité entraîne que les faisceaux de 1-formes différentielles logarithmiques et de champs de vecteurs logarithmiques sont localement libres.

En revanche, pour des hypersurfaces en dimension supérieure, les faisceaux de formes différentielles logarithmiques ne sont pas forcément localement libres. Les hypersurfaces pour lesquelles ils le sont portent le nom de *diviseurs libres*. C'est le cas par exemple des diviseurs à croisements normaux évoqués précédemment. D'autres exemples fondamentaux de diviseurs libres sont le discriminant de la déformation semi-universelle d'une singularité isolée d'hypersurface

(voir [Sai80]), d'une intersection complète (voir [Loo84]) ou d'une courbe gauche (voir [vS95]), ainsi que les discriminants d'actions de groupes de réflexions unitaires ou de groupes de Coxeter (voir [Ter80b] et [Sai80, (3.19)]). Plus récemment, d'autres familles de diviseurs libres venant de la théorie des carquois (voir [BM06]) et des espaces préhomogènes (voir [GMS11]) ont été mises en évidence.

La liberté d'une hypersurface peut être caractérisée de plusieurs façons. Le critère de Saito donné dans [Sai80] permet de déterminer si une famille donnée de 1-formes logarithmiques (respectivement de champs de vecteurs logarithmiques) constitue une base du module des 1-formes différentielles logarithmiques (respectivement du module des champs de vecteurs logarithmiques). Une autre caractérisation donnée par H. Terao dans [Ter80a] pour le cas quasi-homogène et par A. G. Aleksandrov dans [Ale88] pour le cas général fait intervenir le lieu singulier et l'idéal jacobien de l'hypersurface : un diviseur singulier D d'anneau \mathcal{O}_D est libre si et seulement si l'idéal jacobien $\mathcal{J}_D \subseteq \mathcal{O}_D$ est Cohen-Macaulay, ce qui est équivalent au fait que le lieu singulier muni de la structure donnée par $\mathcal{O}_D/\mathcal{J}_D$ est Cohen-Macaulay de codimension un dans D . En particulier, les seuls diviseurs libres à singularités isolées sont les courbes planes.

Généralisant la notion de résidus de Leray des formes méromorphes fermées à pôles simples le long d'un diviseur lisse, K. Saito introduit les *résidus* des formes différentielles logarithmiques d'une hypersurface singulière quelconque, dont on trouvera la définition un peu plus loin. Le module des résidus \mathcal{R}_D des formes logarithmiques de degré un est en particulier constitué de fonctions méromorphes sur D . Il contient toujours l'anneau des fonctions holomorphes sur la normalisée \tilde{D} de D , qui est canoniquement isomorphe à l'anneau des fonctions faiblement holomorphes sur D .

Lorsque les groupes fondamentaux locaux du complémentaire de D sont abéliens, K. Saito montre dans [Sai80] que le diviseur D est à croisements normaux en dehors d'un espace analytique de codimension trois dans S , ce qui implique encore que le module des résidus logarithmiques \mathcal{R}_D est égal à l'anneau de la normalisée. Les réciproques sont vraies et ont été montrées en deux temps : d'abord K. Saito et D. T. Lê prouvent dans [LS84] que la deuxième propriété implique la première, puis M. Granger et M. Schulze démontrent dans [GS14] l'implication manquante, à savoir, si le module des résidus est égal à l'anneau de la normalisée, alors le diviseur est à croisements normaux en codimension un.

La question naturelle qui se pose alors est de décrire le module des résidus dans le cas général.

Nous apportons dans cette thèse une réponse dans le cas des courbes en donnant une description de l'ensemble des multi-valuations du module des résidus, qui fait l'objet des chapitres 5 et 6. Nous relierons le module des résidus au module des différentielles de Kähler, qui sont un ingrédient clef de la classification analytique des branches planes proposée dans [HH11]. Nous proposons un algorithme complet de calcul des multi-valuations du module des résidus pour deux branches, qui repose sur des bases de Gröbner valuatives.

Les faisceaux de résidus logarithmiques présentent aussi un autre intérêt, que nous détaillons ci-dessous.

D. Barlet introduit dans [Bar78] les faisceaux de *formes régulières méromorphes* ω_X^\bullet d'une sous-variété X de dimension pure d'une variété complexe lisse. En particulier, si n est la dimension de X , le faisceau ω_X^n est isomorphe au *module dualisant de Grothendieck*. D'un point de vue analytique, les formes régulières méromorphes peuvent être vues comme des courants $\bar{\partial}$ -fermés (voir [HP99]).

A. G. Aleksandrov montre dans [Ale90] que les faisceaux de résidus des formes différentielles logarithmiques d'une hypersurface D sont isomorphes aux faisceaux de formes régulières méromorphes. Dans le but de généraliser ces résultats à des espaces de codimension plus grande, A. G. Aleksandrov et A. Tsikh développent la théorie des formes différentielles logarithmiques le

long des intersections complètes réduites dans [AT01], puis le long d'espaces de Cohen-Macaulay dans [Ale14]. Ces constructions permettent de donner des formes régulières méromorphes une interprétation en termes de résidus de formes logarithmiques.

Dans [Sch16], M. Schulze s'intéresse à la *condition de croisements normaux de Saito*. Un espace réduit équidimensionnel satisfait la condition de croisements normaux de Saito si le module des formes régulières méromorphes de degré zéro est égal au module des fonctions faiblement holomorphes. M. Schulze montre que cette condition caractérise sous certaines hypothèses les diviseurs à croisements normaux en codimension un, généralisant le résultat de [Sai80] et [GS14] que nous avons mentionné précédemment. Il introduit notamment une notion de *liberté* pour les espaces Gorenstein inspirée par la caractérisation des hypersurfaces libres donnée dans [Ale88]. La définition de la liberté pour les intersections complètes apparaît aussi dans [GS12].

L'un des objectifs principaux de ce travail est d'approfondir la notion de liberté pour les intersections complètes, et de l'étendre aux espaces de Cohen-Macaulay. Nous nous intéressons en particulier aux caractérisations de la liberté qui font l'objet des chapitres 3 et 4. Une hypersurface est libre si et seulement si les modules de 1-formes logarithmiques et de champs de vecteurs logarithmiques sont libres. Nous montrons que la liberté des singularités Cohen-Macaulay de codimension k est caractérisée par le fait que les généralisations de ces modules sont de dimension projective minimale, à savoir $k - 1$. De tels espaces conservent de bonnes propriétés de dualité, notamment entre le module des résidus et l'idéal jacobien.

1.2 Définitions et notations préliminaires

Nous commençons par rappeler les définitions et résultats fondamentaux de [Sai80] concernant les formes différentielles logarithmiques et les champs de vecteurs logarithmiques des hypersurfaces, ainsi que les définitions de leur généralisation au cas des intersections complètes données dans [Ale12] et [GS12]. Plus de détails seront donnés dans les chapitres 2 et 3. Nous énoncerons ensuite dans la partie 1.3 les résultats principaux de ce travail.

Soit D une hypersurface d'une variété complexe lisse S de dimension m . Pour $q \in \mathbb{N}$, on note Ω_S^q le faisceau des formes différentielles holomorphes sur S . Il s'agit d'un faisceau localement libre de \mathcal{O}_S -modules, où \mathcal{O}_S désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur S . On note Θ_S le faisceau des champs de vecteurs holomorphes sur S , qui est un faisceau localement libre de rang m , dont le dual est le faisceau des 1-formes holomorphes.

Une forme différentielle méromorphe ω est dite *logarithmique* le long de D si ω et $d\omega$ sont toutes les deux à pôles simples le long de D . Si h est une équation locale réduite de D au voisinage d'un point p de S , comme $d(h\omega) = dh \wedge \omega + h d\omega$, le faisceau $\Omega^q(\log D)$ est aussi donné au voisinage de p par :

$$\Omega^q(\log D) = \left\{ \omega \in \frac{1}{h} \Omega_S^q ; dh \wedge \omega \in \Omega_S^{q+1} \right\}. \quad (1.1)$$

Le faisceau $\Omega^1(\log D)$ est réflexif, et son dual est le faisceau des champs de vecteurs logarithmiques :

$$\mathrm{Der}(-\log D) = \{ \delta \in \Theta_S ; \delta(h) \in h \mathcal{O}_S \}. \quad (1.2)$$

Lorsque la fibre du faisceau $\mathrm{Der}(-\log D)$ est libre en un point $p \in D$, on dit que D est un diviseur libre en p . Comme les faisceaux $\Omega^1(\log D)$ et $\mathrm{Der}(-\log D)$ sont duaux l'un de l'autre, on voit immédiatement que l'un des modules est libre si et seulement si l'autre l'est aussi.

La notion de formes logarithmiques est généralisée aux intersections complètes réduites dans [AT01] et [Ale12]. Si C est une intersection complète de S définie par un idéal radical \mathcal{I}_C engendré par une suite régulière (h_1, \dots, h_k) , on définit le faisceau des formes multi-logarithmiques

le long de C par :

$$\Omega^q(\log C) = \left\{ \omega \in \frac{1}{h_1 \cdots h_k} \Omega_S^q ; \forall i \in \{1, \dots, k\}, dh_i \wedge \omega \in \frac{1}{h_1 \cdots h_k} \mathcal{I}_C \Omega_S^{q+1} \right\}. \quad (1.3)$$

En particulier, on remarque que $\frac{1}{h_1 \cdots h_k} \mathcal{I}_C \Omega_S^q \subseteq \Omega^q(\log C)$, et si $q \leq k - 1$, on a $\Omega^q(\log C) = \frac{1}{h_1 \cdots h_k} \mathcal{I}_C \Omega_S^q$ (voir corollaire 3.1.16). De plus, les faisceaux $\frac{1}{h_1 \cdots h_k} \Omega^q(\log C)$ ne dépendent que de C , et pas du choix des équations (h_1, \dots, h_k) .

La caractérisation suivante des formes différentielles multi-logarithmiques est établie dans [Sai80] pour les hypersurfaces, et dans [AT08] pour les intersections complètes : une forme $\omega \in \frac{1}{h_1 \cdots h_k} \Omega_S^q$ est multi-logarithmique si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{O}_S$ induisant un non diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_S / \mathcal{I}_C$, une forme holomorphe $\xi \in \Omega_S^{q-k}$ et une forme méromorphe $\eta \in \frac{1}{h_1 \cdots h_k} \mathcal{I}_C \Omega_S^q$ tels que

$$g\omega = \frac{dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_k}{h_1 \cdots h_k} \wedge \xi + \eta. \quad (1.4)$$

On définit alors le *multi-résidu* de ω par $\text{res}_C(\omega) = \frac{\xi}{g} \Big|_C$. On note \mathcal{R}_C le module des multi-résidus des k -formes multi-logarithmiques, qui ne dépend pas du choix de la suite régulière (h_1, \dots, h_k) engendrant \mathcal{I}_C .

En suivant [GS12], on définit le faisceau des k -champs de vecteurs multi-logarithmiques le long de C de la façon suivante :

$$\text{Der}^k(-\log C) = \left\{ \delta \in \bigwedge^k \Theta_S ; dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_k(\delta) \in \mathcal{I}_C \right\}. \quad (1.5)$$

On remarque que l'inclusion $\sum_{i=1}^k (h_i \cdot \bigwedge^k \Theta_S) \subseteq \text{Der}^k(-\log C)$ est satisfaite quelle que soit l'intersection complète C .

Une notion de liberté pour les intersections complètes est suggérée dans [GS12]. On dit qu'une intersection complète singulière est *libre* en un point $p \in C$ si l'idéal jacobien $\mathcal{J}_{C,p}$, c'est-à-dire l'idéal de $\mathcal{O}_{C,p}$ engendré par les mineurs maximaux de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_k) , est Cohen-Macaulay. Cette définition est clairement inspirée par la caractérisation de la liberté de [Ale88] que nous avons déjà mentionnée dans le paragraphe précédent.

1.3 Résultats principaux

Nous présentons ci-dessous les principaux résultats obtenus dans cette thèse.

1.3.1 Singularités libres

Considérons un germe d'intersection complète réduite C de codimension k dans la variété complexe lisse S de dimension m . Nous notons \mathcal{O}_S l'anneau des germes de fonctions holomorphes de S , et \mathcal{I}_C l'idéal radical qui définit C . Soit $(h_1, \dots, h_k) \subseteq \mathcal{I}_C$ une suite régulière qui engendre \mathcal{I}_C .

Le résultat principal du chapitre 3 est le théorème 3.3.7 :

THÉORÈME. *L'intersection complète réduite C est libre si et seulement si le \mathcal{O}_S -module $\Omega^k(\log C)$ est de dimension projective au plus $k - 1$, ce qui équivaut au fait que la dimension projective est exactement $k - 1$.*

La dimension projective d'un \mathcal{O}_S -module M est la longueur minimale d'une résolution de M par des modules projectifs, ou libres vu que l'anneau \mathcal{O}_S est local.

En particulier, dans le cas $k = 1$, on retrouve la définition de K. Saito : une hypersurface est libre si et seulement si son module des 1-formes logarithmiques est libre, c'est-à-dire de dimension projective zéro. Le module des k -formes différentielles multi-logarithmiques d'une intersection complète libre n'est pas libre, en revanche, il est de dimension projective minimale. Cette propriété ainsi que notre volonté de conserver la terminologie habituelle du cas des hypersurfaces expliquent notre choix de qualifier de "libres" de telles intersections complètes.

Dans [GS12], une caractérisation par le module $\text{Der}^k(-\log C)$ est donnée : une intersection complète est libre si et seulement si la dimension projective de $\text{Der}^k(-\log C)$ est inférieure ou égale à $k - 1$.

Nous donnons une preuve plus précise de ce résultat et nous montrons que cela équivaut au fait que la dimension projective de $\text{Der}^k(-\log C)$ est exactement $k - 1$ (voir proposition 3.3.5)

Comme nous le verrons dans le chapitre 3, la démonstration du théorème 1.3.1 pour les intersections complètes est bien plus délicate que dans le cas des hypersurfaces. En effet, rappelons que pour une hypersurface D , la liberté de $\Omega^1(\log D)$ est clairement équivalente à la liberté de $\text{Der}(-\log D)$ par la dualité entre ces deux modules. Si C est une intersection complète réduite de codimension au moins deux, cette dualité n'a plus lieu. En effet, comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe précédent, la forme $\omega = \frac{1}{h_1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k$ est une k -forme multi-logarithmique et $\delta = h_2 \partial_{x_1} \wedge \cdots \wedge \partial_{x_k}$ est un k -champ de vecteurs logarithmiques. On remarque que $\omega(\delta) = \frac{h_2}{h_1} \notin \mathcal{O}_S$.

Les modules $\Omega^k(\log C)$ et $\text{Der}^k(-\log C)$ satisfont une "pseudo-dualité" ("*perfect pairing*") qui prend la forme suivante :

$$\text{Der}^k(-\log C) \times \Omega^k(\log C) \rightarrow \frac{1}{h_1 \cdots h_k} \mathcal{I}_C. \quad (1.6)$$

On remarque que cette propriété ne permet pas de relier directement les dimensions projectives de $\text{Der}^k(-\log C)$ et $\Omega^k(\log C)$. Cependant, outre le fait qu'elle donne le lien précis entre ces deux modules, elle est cruciale pour la preuve que nous proposons du résultat suivant (voir proposition 3.2.17) :

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) = \mathcal{R}_C. \quad (1.7)$$

Cette proposition est une conséquence de [Sch16] et [AT01]. Nous proposons ici une preuve directe qui n'utilise pas l'isomorphisme entre multi-résidus logarithmiques et formes régulières méromorphes, et qui s'inspire de la preuve de la dualité entre jacobien et résidus proposée dans [GS14]. La dualité 1.7 est fondamentale pour la preuve du théorème 1.3.1.

La notion de formes multi-logarithmiques est généralisée aux espaces de Cohen-Macaulay dans [Ale14]. La définition proposée par l'auteur se généralise sans changement à tout espace réduit équidimensionnel X . Notons \mathcal{I}_X l'idéal radical définissant X . Il existe une suite régulière $(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ telle que l'intersection complète qu'elle définit est au moins réduite le long de X (voir lemme 4.1.1). On note \mathcal{I}_C l'idéal engendré par (f_1, \dots, f_k) et $f = f_1 \cdots f_k$. Le module des q -formes différentielles multi-logarithmiques de la paire (X, C) est défini par :

$$\Omega^q(\log X/C) = \left\{ \omega \in \frac{1}{f} \Omega_S^q ; \mathcal{I}_X \omega \subseteq \frac{1}{f} \mathcal{I}_C \Omega_S^q \text{ et } d\mathcal{I}_X \wedge \omega \subseteq \frac{1}{f} \mathcal{I}_C \Omega_S^{q+1} \right\}. \quad (1.8)$$

Tout espace réduit équidimensionnel X peut être inclus dans une intersection complète réduite C définie par un idéal radical \mathcal{I}_C engendré par une suite régulière (f_1, \dots, f_k) (voir proposition 4.2.1). Soit $\beta_f \in \mathcal{O}_{\tilde{C}}$ l'élément défini par $\beta_f|_X = 1$ et $\beta_f|_Y = 0$, où $C = X \cup Y$ est une décomposition de C non redondante.

Nous proposons la définition suivante de k -champs de vecteurs multi-logarithmiques de la paire (X, C) :

$$\mathrm{Der}^k(-\log X/C) = \left\{ \delta \in \bigwedge^k \Theta_S ; \delta(\beta_f df_1 \wedge \cdots \wedge df_k) \in \mathcal{I}_X \right\}. \quad (1.9)$$

Nous montrons ensuite l'existence d'une forme de dualité analogue à (1.6) (voir proposition 4.2.12) :

$$\Omega^k(\log X/C) \times \mathrm{Der}^k(-\log X/C) \rightarrow \frac{1}{f_1 \cdots f_k} I_C. \quad (1.10)$$

On notera en particulier que l'idéal qui apparaît est celui de l'intersection complète.

On pose $\mathcal{I}_{X/C}$ l'idéal jacobien de C restreint à X , qui ne dépend pas de C à isomorphisme près (voir proposition 4.2.21). Il est relié à $\mathrm{Der}^k(-\log X/C)$ par la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \mathrm{Der}^k(-\log X/C) \rightarrow \bigwedge^k \Theta_S \rightarrow \mathcal{I}_{X/C} \rightarrow 0. \quad (1.11)$$

Nous généralisons dans la proposition 4.2.17 la dualité (1.7) de la façon suivante, où $\mathcal{R}_{X/C}$ désigne le module des multi-résidus de la paire (X, C) (voir (1.18)), et ω_X est le module dualisant de X :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{I}_{X/C}, \mathcal{O}_C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}_{X/C}, \omega_X) = \mathcal{R}_{X/C} \quad (1.12)$$

Pour définir la liberté en s'inspirant de la caractérisation par l'idéal jacobien de [Ale88], nous devons d'abord choisir un des idéaux jacobiens associés à un espace réduit X de codimension k , que nous supposons dorénavant Cohen-Macaulay. En effet, plusieurs notions d'idéaux jacobiens apparaissent : si (h_1, \dots, h_r) engendre \mathcal{I}_X , nous pouvons considérer l'idéal jacobien $\mathcal{J}_X \subseteq \mathcal{O}_X$ engendré par les mineurs $k \times k$ de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_r) , ou bien l'idéal jacobien restreint $\mathcal{J}_{X/C}$ que nous venons de définir, ou encore le ω -jacobien \mathcal{J}_X^ω dont on trouvera la définition en 4.2.32. Ces trois notions ne coïncident pas forcément, même à isomorphisme près, comme le montre l'exemple 4.2.35. Si X est Gorenstein, les idéaux $\mathcal{J}_{X/C}$ et \mathcal{J}_X^ω sont isomorphes (voir proposition 4.2.34).

Dans la mesure où l'idéal jacobien restreint $\mathcal{J}_{X/C}$ est naturellement relié à $\mathrm{Der}^k(-\log X/C)$, nous proposons la définition de liberté suivante (voir définition 4.2.19 et proposition 4.2.21) :

Définition. *Soit X un espace réduit de Cohen-Macaulay. Soit C une intersection complète réduite qui le contient, et $\mathcal{J}_{X/C}$ l'idéal jacobien de C restreint à X . On dit que X est libre si l'idéal $\mathcal{J}_{X/C}$ est Cohen-Macaulay. Cette notion ne dépend pas du choix de l'intersection complète C contenant X .*

Nous montrons dans ce travail que les caractérisations de la liberté dont nous disposons dans le cas intersection complète se généralisent aux espaces de Cohen-Macaulay (voir théorème 4.2.22).

Un exemple fondamental de singularités libres est donné par les courbes réduites, qui font l'objet du second axe d'étude de ce travail.

1.3.2 Cas des courbes

Soit C une courbe réduite de normalisation \tilde{C} . Grâce à [Sch16, Proposition 4.11], si l'inclusion $\mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq \mathcal{R}_C$ est une égalité, cela implique que la courbe est à croisements normaux. La question qui se pose est de décrire le module des résidus pour des courbes plus générales.

Le calcul des formes différentielles multi-logarithmiques le long d'une intersection complète ou d'un espace de Cohen-Macaulay n'est pas simple. On peut les calculer par exemple à l'aide de SINGULAR ([DGPS15]), pour lequel nous proposons des algorithmes dans l'annexe A.

Nous donnons un moyen explicite de déterminer les multi-valuations du module des résidus d'une courbe Gorenstein réduite (éventuellement réductible) à partir des multi-valuations de l'idéal jacobien, qui généralise la symétrie du semigroupe des courbes Gorenstein.

L'énoncé de ce théorème demande quelques notations. Si I est un idéal fractionnaire, on note $I^\vee = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(I, \mathcal{O}_C)$. On note $\text{val}(I)$ l'ensemble des multi-valuations de I (voir définition 5.1.1). Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on pose $\Delta_i(v, I) = \{\alpha \in \text{val}(I) ; \alpha_i = v_i \text{ et } \forall j \neq i, \alpha_j > v_j\}$. Notre théorème, qui généralise le théorème de symétrie de [DdlM88], s'énonce de la façon suivante (voir théorème 5.2.1) :

THÉORÈME. *Soit C une courbe Gorenstein réduite à p branches de conducteur γ , et I un idéal fractionnaire. Alors pour tout $v \in \mathbb{Z}^p$, on a :*

$$v \in \text{val}(I^\vee) \iff \bigcup_{i=1}^p \Delta_i(\gamma - v - \underline{1}, I) = \emptyset. \quad (1.13)$$

Grâce à la dualité (1.7), ce théorème permet de relier les multi-valuations du module des résidus et celles de l'idéal jacobien pour les courbes Gorenstein. Ce théorème a inspiré une généralisation que l'on peut trouver dans [KTS15] et qui assure en particulier que si la courbe n'est pas Gorenstein, une propriété de symétrie analogue s'observe entre les multi-valuations d'un idéal fractionnaire et son dual au sens des espaces de Cohen-Macaulay, qui implique le module dualisant (voir théorème 5.2.22).

Dans le cas où C est une intersection complète, nous montrons par l'intermédiaire de notre théorème 5.2.1 que les multi-valuations du module des résidus \mathcal{R}_C et celles des différentielles de Kähler Ω_C^1 (voir définition 6.1.1) se déterminent mutuellement (voir corollaire 6.1.4) :

Proposition. *Soit C une courbe intersection complète réduite à p branches de conducteur γ . Alors pour tout $v \in \mathbb{Z}^p$ on a :*

$$v \in \text{val}(\mathcal{R}_C) \iff \bigcup_{i=1}^p \Delta_i(-v, \Omega_C^1) = \emptyset. \quad (1.14)$$

En utilisant entre autres (1.13) et (1.14), nous déterminons explicitement une résolution libre de $\Omega^{m-1}(\log C)$ pour les courbes intersection complète quasi-homogènes de \mathbb{C}^m (voir théorème 6.1.33 et corollaire 6.1.34) :

THÉORÈME. *Soit C une courbe intersection complète réduite de \mathbb{C}^m . On suppose que C est quasi-homogène et que m est la dimension de plongement de C . Alors les nombres de Betti de $\Omega^{m-1}(\log C)$ sont :*

$$\forall j \in \{0, \dots, m-3\}, b_j = \binom{m-1}{j+1} \binom{m}{m-1} + \binom{m-1}{j} + \binom{m}{j} \text{ et } b_{m-2} = \binom{m-1}{m-2} + \binom{m}{m-2}.$$

Cette propriété des courbes intersections complètes quasi-homogènes ne se généralise pas aux courbes Cohen-Macaulay, comme le montre l'exemple de la courbe gauche irréductible de paramétrage (t^3, t^4, t^5) (voir exemple 5.2.20). De plus, le nombre de générateurs de $\Omega^{m-1}(\log C)$ pour des courbes non quasi-homogènes semble expérimentalement augmenter par rapport au cas quasi-homogène (voir exemple 6.1.36).

Intéressons-nous maintenant aux courbes planes, qui sont, rappelons-le, des diviseurs libres. Cela signifie en particulier que deux résidus suffisent à engendrer le module des résidus.

Pour une courbe irréductible, le calcul des valuations du module des résidus utilise des algorithmes de base standard valuatives (voir [HH07]). Nous proposons un algorithme pour les courbes à deux branches qui repose en partie sur l'algorithme pour une branche. Cet algorithme

est assez technique, la difficulté venant du fait que les multi-valuations ne forment pas un ensemble totalement ordonné pour les courbes à au moins deux branches. Par ailleurs, l'algorithme que nous proposons pour deux branches ne semble pas pouvoir se généraliser à trois branches ou plus, la structure de l'ensemble des multi-valuations semblant alors plus complexe.

Une question naturelle est de déterminer le comportement du module des résidus lorsqu'on déforme une courbe plane.

Dans la mesure où nous nous intéressons en particulier aux multi-valuations de ce module, il est naturel de regarder des déformations *équisingulières*, pour lesquelles on dispose d'une déformation du paramétrage. Cela nous amène à considérer la stratification de la base d'une déformation équisingulière par les multi-valuations du module des résidus (voir définition 6.3.17). Nous montrons qu'elle est finie, constructible et qu'elle raffine la stratification par le nombre de Tjurina (voir propositions 6.3.18 et 6.3.20).

Par le corollaire 6.1.4, la stratification par les multi-valuations du module des résidus coïncide avec la stratification par les différentielles de Kähler. Les valuations des différentielles de Kähler interviennent pour déterminer si deux branches planes avec un paramétrage "normal" sont analytiquement équivalentes (voir [HH11] pour une branche et [HHH15] pour deux branches). En particulier, cela montre que pour les courbes planes, le module des résidus est relié à un module présentant un véritable intérêt en théorie des déformations.

1.4 Contenu détaillé de la thèse

Nous présentons ci-dessous les principaux objectifs des différents chapitres de cette thèse.

1.4.1 Chapitre 2

Nous commençons par rappeler les définitions et propriétés des formes différentielles logarithmiques de [Sai80] que nous utilisons ou généralisons dans les chapitres suivants. On s'intéresse en particulier à la notion de liberté et aux différentes caractérisations dont on dispose. En plus des caractérisations que nous avons déjà mentionnées dans les paragraphes précédents, signalons la caractérisation de [BC13] : un diviseur D défini par une équation réduite h est libre si et seulement si l'idéal engendré par h et ses dérivées partielles est *parfait* (voir définition 2.2.18 et proposition 2.2.20). Dans le cas particulier des surfaces, la liberté se caractérise par la saturation de l'idéal engendré par l'équation h et ses dérivées partielles (voir définition 2.2.21 et proposition 2.2.23). Cette caractérisation de la liberté intervient dans [DS14] pour l'étude des courbes projectives planes.

Les résidus logarithmiques sont au cœur de la caractérisation des diviseurs à croisements normaux donnée dans [GS14] : le module des résidus des 1-formes logarithmiques de D est égal à l'anneau de la normalisée de D si et seulement si D est à croisements normaux en codimension 1. Nous rappelons quelques ingrédients de la preuve de ce résultat qui nous seront utiles dans les chapitres suivants.

Nous terminons ce chapitre en décrivant une autre interprétation des modules de résidus logarithmiques : ils sont isomorphes aux modules des formes régulières méromorphes définis dans [Bar78]. Cet isomorphisme fait l'objet d'un théorème de [Ale90]. Nous reviendrons sur les formes régulières méromorphes dans le chapitre 4.

1.4.2 Chapitre 3

Ce chapitre est consacré à l'étude des formes différentielles multi-logarithmiques d'une intersection complète.

Nous commençons par donner les définitions des formes différentielles multi-logarithmiques et de leurs résidus proposées dans [Ale12]. On précise la dépendance de ces définitions quant au

choix des équations (h_1, \dots, h_k) définissant l'intersection complète C (voir propositions 3.1.10 et 3.1.21), et nous montrons que l'on peut supposer que m est la dimension de plongement de C sans changer les modules des multi-résidus \mathcal{R}_C^q (voir corollaire 3.1.26).

Les modules des multi-résidus \mathcal{R}_C^q ne dépendent que de l'intersection complète C , et pas du choix des équations (voir proposition 3.1.21). En particulier, il est prouvé dans [AT01] que les modules de multi-résidus \mathcal{R}_C^q sont isomorphes aux modules des formes régulières méromorphes ω_C^q (voir définition 2.3.25 et théorème 3.1.40).

La propriété suivante est une conséquence de [Sch16, Proposition 2.1] et de l'isomorphisme entre \mathcal{R}_C et le module ω_C^0 . On note \tilde{C} la normalisation de C . On a (voir proposition 3.1.28) :

$$\mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq \mathcal{R}_C.$$

Nous en proposons une preuve directe qui s'inspire de la preuve de [Sai80] pour les hypersurfaces.

Dans les articles [AT01] et [AT08], une variante de la définition donnée par (1.3) est proposée. Au lieu de considérer des formes différentielles à pôles simples le long de l'hypersurface définie par $h_1 \cdots h_k$, les auteurs autorisent des pôles d'ordre arbitraire. Notons $\Omega^q(\star \widehat{D}_i)$ le faisceau des q -formes méromorphes à pôles d'ordre arbitraire le long du diviseur défini par $\prod_{j \neq i} h_j$. La définition proposée dans [AT01] est :

$$\underline{\Omega}^q(\log C) = \left\{ \omega \in \Omega^q(\star D) ; \forall i \in \{1, \dots, k\}, dh_i \wedge \omega \in \sum_{i=1}^k \Omega^{q+1}(\star \widehat{D}_i) \right\} \quad (1.15)$$

où D est le diviseur défini par $h = \prod_{i=1}^k h_i$.

Le lien entre les modules $\underline{\Omega}^q(\log C)$ et $\Omega^q(\log C)$ est le suivant (voir proposition 3.1.33) :

$$\underline{\Omega}^q(\log C) = \Omega^q(\log C) + \sum_{i=1}^k \Omega_S^q(\star \widehat{D}_i).$$

Chacune des deux définitions a des avantages et des inconvénients. La définition donnée par (1.3) a l'avantage de fournir des modules de type fini, mais il n'y a pas de stabilité par différentiation, contrairement aux modules introduits par (1.15), mais ces derniers ne sont pas de type fini.

Nous montrons que lorsqu'une suite régulière (h_1, \dots, h_k) engendre un idéal radical, le module des 1-formes différentielles logarithmiques satisfait la propriété de décomposition suivante, où D_i est l'hypersurface définie par h_i (voir proposition 3.1.45) :

$$\Omega^1(\log D) = \Omega^1(\log D_1) + \cdots + \Omega^1(\log D_k).$$

En particulier, dans le cas $k = 2$ et D libre, cela implique par [AF13, Theorem 2.12] que le diviseur est *splayed* (voir définition 3.1.47).

Nous nous intéressons ensuite au module des k -champs de vecteurs multi-logarithmiques défini en (1.5). Nous comparons ce module au module $\text{Der}(-\log C) \wedge \wedge^{k-1} \Theta_S$, où $\text{Der}(-\log C)$ est le module des champs de vecteurs tangents à C en ses points lisses (voir définition 3.2.5). Nous montrons que :

$$\text{Der}(-\log C) \wedge \bigwedge^{k-1} \Theta_S \subseteq \text{Der}^k(-\log C) \quad (1.16)$$

et que de plus, cette inclusion peut être stricte (voir proposition 3.2.6 et exemple 3.2.10).

Nous montrons ensuite la proposition 3.2.13 qui relie les modules $\Omega^k(\log C)$ et $\text{Der}^k(-\log C)$, dont la preuve s'inspire de la preuve de [Sai80, (1.6, ii)], puis nous utilisons ce résultat pour proposer une preuve de la dualité (1.7) entre les multi-résidus logarithmiques et l'idéal jacobien qui généralise la preuve de [GS12, Proposition 3.4].

Le reste de ce chapitre est consacré à la démonstration des différentes caractérisations de la liberté (voir propositions 3.3.2, 3.3.4, 3.3.5 et théorème 3.3.7). Soit $J(\underline{h})$ l'idéal de \mathcal{O}_S engendré par h_1, \dots, h_k et les mineurs maximaux de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_k) . Les propositions 3.3.2 et 3.3.4 donnent respectivement une caractérisation de la liberté par la perfection de $J(\underline{h})$, et pour les surfaces par la saturation de l'idéal $J(\underline{h})$. Les preuves sont essentiellement les mêmes que dans le cas des hypersurfaces.

La preuve de la proposition 3.3.5 repose sur le lemme de la profondeur qui relie les profondeurs des modules d'une suite exacte courte, et la formule d'Auslander-Buchsbaum qui relie profondeur et dimension projective. La preuve du résultat principal de ce chapitre, à savoir le théorème 3.3.7, est plus longue et plus complexe que la preuve de la proposition 3.3.5. La preuve du théorème 3.3.7 fait intervenir des suites spectrales et des complexes de Koszul qui permettent d'étudier précisément la suite exacte longue obtenue en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \mathcal{O}_S)$ à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \frac{1}{h_1 \cdots h_k} \mathcal{I}_C \Omega_S^k \rightarrow \Omega^k(\log C) \rightarrow \mathcal{R}_C \rightarrow 0. \quad (1.17)$$

1.4.3 Chapitre 4

Nous généralisons ici les résultats du chapitre 3 aux espaces de Cohen-Macaulay.

Nous commençons par rappeler que tout espace réduit équidimensionnel X est inclus dans une intersection complète de même dimension qui est réduite au moins le long de X (voir lemme 4.1.1). Une version plus forte de cet énoncé est donnée dans la proposition 4.2.1, dans laquelle l'intersection complète est cette fois-ci réduite, et pas seulement le long de X .

Soit une suite régulière $(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ telle que l'intersection complète C définie par l'idéal \mathcal{I}_C engendré par f_1, \dots, f_k est réduite au moins le long de X .

Si $\omega \in \Omega^q(\log X/C)$ (voir définition donnée par (1.8)), il existe $g \in \mathcal{O}_S$ induisant un non diviseur de zéro de $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S/\mathcal{I}_X$, $\xi \in \Omega_S^{q-k}$ et $\eta \in \frac{1}{f} \mathcal{I}_C \Omega_S^q$ tels que :

$$g\omega = \frac{df_1 \wedge \cdots \wedge df_k}{f} \wedge \xi + \eta. \quad (1.18)$$

On définit alors le multi-résidu de ω par $\text{res}_{X/C}(\omega) = \frac{\xi}{g} \Big|_X$. On note $\mathcal{R}_{X/C}^q$ le module des multi-résidus des $(k+q)$ -formes multi-logarithmiques de (X, C) . Les modules $\mathcal{R}_{X/C}^q$ sont isomorphes aux formes régulières méromorphes ω_X^q , et en particulier, ils ne dépendent que de X . Une preuve de ce résultat est esquissée dans [Ale14, Theorem 10.2]. Nous en détaillons ici la preuve, qui utilise la caractérisation de ω_X^q par des symboles résidus proposée dans [Ker84, (1.2)], et le théorème de Wiebe que l'on peut trouver par exemple dans [Kun86].

Considérons maintenant une intersection complète réduite C contenant X . La forme fondamentale α_0 de X (voir notation 4.2.4) nous permet de donner une caractérisation des formes multi-logarithmiques de la paire (X, C) qui généralise la caractérisation (1.4) du cas intersection complète (voir proposition 4.2.6) :

Proposition. *Soit $\omega \in \frac{1}{f_1 \cdots f_k} \Omega_S^q$. Alors $\omega \in \Omega^q(\log X/C)$ si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{O}_S$ induisant un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C , $\xi \in \Omega_S^{q-k}$, et $\eta \in \tilde{\Omega}_f^q$ tels que*

$$g\omega = \frac{\alpha_0}{f} \wedge \xi + \eta. \quad (1.19)$$

De plus, avec cette écriture, $\text{res}_{X/C}(\omega) = \frac{\xi}{g} \Big|_X$.

Nous montrons ensuite la proposition 4.2.12 qui relie les k -formes multi-logarithmiques aux k -champs de vecteurs multi-logarithmiques, ainsi que la proposition 4.2.17 qui donne la dualité entre l'idéal jacobien restreint et le module des multi-résidus. Nous nous intéressons ensuite aux caractérisations de la liberté (voir définition 4.2.19), qui nous donnent finalement le théorème 4.2.22 :

THÉORÈME. *Soit X un espace réduit Cohen-Macaulay de dimension n dans une variété analytique complexe lisse S de dimension m . On note $\mathcal{I}_X = (h_1, \dots, h_r)$ l'idéal radical qui définit X . On note $k = m - n$ la codimension de X dans S . Soit C une intersection complète réduite définie par (f_1, \dots, f_k) qui contient X . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. X est libre (c'est-à-dire $\mathcal{I}_{X/C}$ est Cohen-Macaulay),
2. $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_{X/C}$ est Cohen-Macaulay de dimension $n - 1$,
3. l'idéal $J(\underline{f}, \underline{h})$ engendré par les mineurs $k \times k$ de la matrice jacobienne de (f_1, \dots, f_k) et les équations (h_1, \dots, h_r) est un idéal parfait de codimension $k + 1$ dans \mathcal{O}_S ,
4. $\dim \text{proj} \left(\text{Der}^k(-\log X/C) \right) \leq k - 1$,
5. $\dim \text{proj} \left(\text{Der}^k(-\log X/C) \right) = k - 1$,
6. $\dim \text{proj} \left(\Omega^k(\log X/C) \right) \leq k - 1$,
7. $\dim \text{proj} \left(\Omega^k(\log X/C) \right) = k - 1$,
8. $\dim \text{proj} \left(\Omega^k(\log X/C) \right) \neq \dim \text{proj} \left(\mathcal{R}_{X/C} \right)$,
9. $\mathcal{R}_{X/C}$ est Cohen-Macaulay et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X} \left(\mathcal{R}_{X/C}, \omega_X \right) = \mathcal{I}_{X/C}$.

Si X est une surface, on peut ajouter :

10. $J(\underline{f}, \underline{h})$ est saturé.

Nous montrons dans la proposition 4.2.29 que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1} \left(\Omega^k(\log X/C), \mathcal{O}_S \right)$ est isomorphe à $\text{Der}^k(-\log X/C) / \left(\sum_{i=1}^k f_i \Theta_S^k \right)$, et que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1} \left(\text{Der}^k(-\log X/C), \mathcal{O}_S \right)$ est isomorphe à \mathcal{R}_X .

Nous terminons ce paragraphe en comparant les différentes notions d'idéal jacobien dont on dispose. Dans le cas d'un espace X Gorenstein, nous montrons que l'idéal jacobien restreint $\mathcal{I}_{X/C}$ est isomorphe au ω -jacobien (voir définition 4.2.32 et proposition 4.2.34). On donne un exemple de courbe Cohen-Macaulay non Gorenstein pour laquelle le ω -jacobien, l'idéal jacobien restreint $\mathcal{I}_{X/C}$ et l'idéal engendré par les mineurs $k \times k$ de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_r) sont deux à deux distincts (voir exemple 4.2.35).

1.4.4 Chapitre 5

Nous nous intéressons à présent aux multi-valuations des idéaux fractionnaires des courbes.

Soit $C = C_1 \cup \dots \cup C_p$ une courbe réduite avec p composantes irréductibles. La normalisation de cette courbe fournit une désingularisation de C , d'anneau

$$\mathcal{O}_{\tilde{C}} = \mathbb{C}\{t_1\} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\{t_p\}.$$

On en déduit une application de valuation le long de chacune des branches : si $g \in \mathcal{O}_C$ et $i \in \{1, \dots, p\}$, la valuation $\text{val}_i(g)$ de g le long de la branche C_i est l'ordre en t_i de l'image de g

dans $\mathbb{C}\{t_i\}$ obtenue à partir de l'inclusion $\mathcal{O}_C \hookrightarrow \tilde{\mathcal{O}}_C$. Dans le cas où la restriction de g à C_i est nulle, on pose $\text{val}_i(g) = \infty$. La multi-valuation de g est alors le p -uplet

$$\text{val}(g) = (\text{val}_1(g), \dots, \text{val}_p(g)) \in (\mathbb{Z} \cup \{\infty\})^p.$$

On étend la définition de multi-valuations à l'anneau total des fractions \mathcal{M}_C de \mathcal{O}_C en posant pour $\frac{a}{b} \in \mathcal{M}_C$, $\text{val}(\frac{a}{b}) = \text{val}(a) - \text{val}(b)$. Soit I un idéal fractionnaire de C , c'est-à-dire un sous \mathcal{O}_C -module de type fini de \mathcal{M}_C qui contient un non diviseur de zéro. Les multi-valuations des non diviseurs de zéro de I suffisent à déterminer toutes les multi-valuations de I (voir proposition 5.1.15). On note $\text{val}(I)$ l'ensemble des multi-valuations des non diviseurs de zéro de I .

Notre objectif est de relier les multi-valuations d'un idéal I avec celle de son dual I^\vee .

Dans le cas d'une courbe irréductible, on montre facilement que pour tout idéal fractionnaire I d'une courbe Gorenstein C de conducteur γ , la propriété de symétrie suivante est satisfaite :

$$v \in \text{val}(I^\vee) \iff \gamma - v - 1 \notin \text{val}(I). \quad (1.20)$$

En particulier, pour $I = \mathcal{O}_C$, comme $\mathcal{O}_C^\vee = \mathcal{O}_C$, on retrouve la symétrie du théorème de Kunz 5.1.23. Ce dernier assure que cette symétrie est vérifiée par \mathcal{O}_C si et seulement si la courbe C est Gorenstein.

Dans le cas d'une courbe réductible, on dispose aussi d'une caractérisation des courbes Gorenstein par l'intermédiaire du semigroupe $\text{val}(\mathcal{O}_C)$ de la courbe. Le théorème de Delgado assure qu'une courbe C est Gorenstein si et seulement si la symétrie (1.13) est satisfaite par \mathcal{O}_C (voir théorème 5.1.28).

L'objectif de ce chapitre est de montrer que pour les courbes Gorenstein, la symétrie (1.13) est satisfaite pour tout idéal fractionnaire I de C , ce qui nous donne le théorème 5.2.1.

Pour $v \in \mathbb{Z}$ et I un idéal fractionnaire de C , on pose $\Delta(v, I) = \bigcup_{i=1}^p \Delta_i(v, I)$. L'implication $v \in \text{val}(I^\vee) \Rightarrow \Delta(\gamma - v - \underline{1}, I) = \emptyset$ se montre facilement pour toute courbe réduite non nécessairement Gorenstein, en utilisant l'inclusion $I \cdot I^\vee \subseteq \mathcal{O}_C$ et le fait que $\Delta(\gamma - \underline{1}, \mathcal{O}_C) = \emptyset$ (voir proposition 5.2.7).

La réciproque est quant à elle plus difficile. On pose

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{Z}^p ; \Delta(\gamma - v - \underline{1}, I) = \emptyset\}. \quad (1.21)$$

Grâce à l'implication \Rightarrow , nous savons que cet ensemble \mathcal{V} contient les multi-valuations de I^\vee . Notre objectif est donc de montrer qu'il ne contient pas d'autres éléments. L'ingrédient essentiel de notre preuve est un comptage de la dimension de certains quotients d'idéaux fractionnaires à partir des multi-valuations (voir corollaire 5.2.12). Grâce à ce comptage combinatoire, nous montrons que l'existence d'un élément $w^{(0)} \in \mathcal{V} \setminus \text{val}(I^\vee)$ entraîne des conséquences numériques (voir lemme 5.2.14 et proposition 5.2.15) qui sont incompatibles si la courbe est Gorenstein.

Cette symétrie est illustrée par l'exemple 5.2.19, où nous comparons les multi-valuations de l'idéal jacobien \mathcal{J}_C et du module des résidus \mathcal{R}_C d'une courbe plane. Rappelons que par la proposition 3.2.17, $\mathcal{J}_C^\vee = \mathcal{R}_C$. Nous donnons ensuite un exemple de courbe non Gorenstein pour laquelle le module des multi-résidus défini dans le chapitre 4 vérifie une propriété de symétrie avec son dual, ce qui montre que la symétrie pour le module des résidus ne permet pas de caractériser les courbes Gorenstein. Dans le paragraphe 5.2.7, nous donnons l'énoncé de symétrie de [KTS15] qui fait intervenir le module dualisant et des anneaux dits "*admissibles*".

Nous terminons ce paragraphe par une conséquence de notre théorème 5.2.1 sur les coefficients de séries de Poincaré. Soit C une courbe réduite Gorenstein, et I un idéal fractionnaire. On pose pour $v \in \mathbb{Z}^p$ $c_I(v) = \dim_{\mathbb{C}} I_v / I_{v+\underline{1}}$ où $I_v = \{g \in I ; \text{val}(g) \geq v\}$. La *série de Poincaré*

de I est alors l'élément de l'ensemble des séries de Laurent formelles $\mathbb{Z}[[t_1^{-1}, \dots, t_p^{-1}, t_1, \dots, t_p]]$ défini par :

$$L_I(t_1, \dots, t_p) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^p} c_I(v) \underline{t}^v. \quad (1.22)$$

On considère $P_I(\underline{t}) = L_I(\underline{t}) \prod_{i=1}^p (t_i - 1)$. On montre que P_I est un polynôme (voir proposition 5.2.26). Nous montrons que le théorème de symétrie 5.2.1 implique la propriété suivante (voir proposition 5.2.28) :

$$P_{I^\vee}(\underline{t}) = (-1)^{p+1} \underline{t}^\gamma P_I\left(\frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_p}\right).$$

Nous terminons par un exemple pour lequel nous détaillons le calcul du polynôme $P_{\mathcal{J}_C}$ (voir exemple 5.2.29).

1.4.5 Chapitre 6

Nous étudions en détails le module des multi-résidus des courbes dans ce chapitre.

Dans le paragraphe 6.1, nous montrons la proposition 6.1.3 et le corollaire 6.1.4 qui relie multi-résidus, idéal jacobien et différentielles de Kähler pour les intersections complètes, et nous déterminons explicitement une résolution libre de \mathcal{R}_C et $\Omega^{m-1}(\log C)$ pour les courbes intersections complètes quasi-homogènes (voir théorèmes 6.1.29 et 6.1.33). Nous en déduisons un exemple d'intersection complète pour laquelle les formes différentielles logarithmique du diviseur associé à la suite régulière considérée ne suffisent pas à obtenir tous les multi-résidus de l'intersection complète (voir proposition 6.1.38). Nous donnons ensuite une caractérisation des arrangements de droites plans qui fait intervenir le module des multi-résidus (voir proposition 6.1.40).

Dans les paragraphes suivants, on s'intéresse au module des résidus des courbes planes. Soit C une courbe plane, et p le nombre de composantes irréductibles de C . Nous déterminons le "conducteur" du module des résidus, qui est lié aux multiplicités $m^{(j)}$ des composantes irréductibles C_j de la courbe C (voir proposition 6.2.3) :

$$\nu_{\mathcal{R}_C} = -\left(m^{(1)}, \dots, m^{(p)}\right) + \underline{1}. \quad (1.23)$$

Nous caractérisons ensuite les diviseurs de zéro des idéaux fractionnaires \mathcal{R}_C et \mathcal{J}_C (voir proposition 6.2.4 et 6.2.7).

La dimension de la torsion du module Ω_C^1 est τ , le nombre de Tjurina. Ce résultat est dû à O. Zariski (voir [Zar66]). Nous proposons ici une preuve de ce résultat qui utilise le module des résidus logarithmiques (voir paragraphe 6.2.3).

Dans le paragraphe 6.2.4, nous proposons des algorithmes pour calculer les valuations du module des résidus pour certaines courbes planes. Le premier vient de [BGM88], et concerne la déformation équisingulière de $x^a - y^b$ pour a et b premiers entre eux. Plus généralement, pour les courbes irréductibles, on peut utiliser l'algorithme proposé dans [HH07]. Nous proposons un algorithme de calcul des multi-valuations pour deux branches, qui utilise l'algorithme du cas irréductible. Nous illustrons ensuite le fonctionnement de cet algorithme sur un exemple (voir exemple 6.2.4).

Le dernier paragraphe 6.3 est quant à lui consacré à l'étude du comportement des multi-valuations du module des résidus dans une déformation équisingulière de courbes planes.

L'hypothèse d'équisingularité ne suffit pas à avoir une déformation d'une famille génératrice du module des résidus. Ce problème est résolu en considérant une déformation *admissible* de la courbe plane. Le foncteur de déformation admissible est introduit dans [Tor13] comme le foncteur approprié à l'étude de déformations de diviseurs libres, et dans le cas des courbes planes, les déformations admissibles se caractérisent à l'aide du nombre de Tjurina (voir proposition 6.3.14).

Dans le reste de ce chapitre, nous donnons des propriétés de la stratification par les résidus (voir propositions 6.3.14 et 6.3.20) et nous la comparons à d'autres stratifications. Par l'intermédiaire d'exemples, nous montrons qu'elle ne satisfait pas forcément la condition de frontière (voir exemple 6.3.22), et qu'elle ne semble pas avoir un lien clair avec la b -fonction (voir exemple 6.3.24).

1.4.6 Annexe

Nous proposons des algorithmes à utiliser sous SINGULAR, ainsi que des exemples d'utilisations de ces algorithmes.

L'algorithme A.1.1 permet de déterminer si une suite de fonctions (h_1, \dots, h_k) définit une intersection complète libre, et si tel n'est pas le cas, l'algorithme indique quelle hypothèse n'est pas vérifiée. Les algorithmes A.1.2 et A.1.3 permettent de calculer une résolution projective du module respectivement des $(m - 1)$ -formes multi-logarithmiques et des $(m - 2)$ -formes multi-logarithmiques. En particulier, ils fournissent une famille génératrice de ces modules. Nous en proposons ensuite une variante pour le cas non intersection complète.

Ces algorithmes fonctionnent bien sur des fonctions assez simples, mais les calculs sont rapidement plus difficiles à gérer lorsque les exemples se compliquent.

Nous donnons ensuite quelques exemples, qui soulèvent des questions. On se demande si le lieu singulier d'un diviseur à croisements normaux défini par $h = x_1 \cdots x_m$ est libre au sens des espaces de Cohen-Macaulay. Cette propriété se vérifie expérimentalement pour m allant de 2 à 8.

Nous nous intéressons ensuite à des exemples de surfaces. Nous donnons des exemples de surfaces intersections complètes libres quasi-homogènes de \mathbb{C}^4 pour lesquels les nombres de Betti sont différents. De plus, dans le cas où les équations sont toutes quasi-homogènes, de poids éventuellement différents, on remarque sur tous les exemples considérés que la forme fondamentale fait partie d'une famille génératrice minimale du module des formes différentielles multi-logarithmiques.

Conventions et notations

Nous regroupons ici quelques notations générales dont nous ferons usage dans la suite. Toutes les variétés que nous considérons dans cette thèse sont des variétés complexes.

| | |
|----------------------------------|---|
| S | variété complexe lisse de dimension $m \geq 1$ |
| D | hypersurface (diviseur) de S |
| C | intersection complète de S de codimension k , ou courbe |
| X | espace réduit équidimensionnel de dimension n de S |
| \mathcal{O}_X | anneau des fonctions holomorphes d'un espace X |
| \mathcal{I}_X | idéal des fonctions qui s'annulent le long de X |
| \mathcal{M}_X | faisceau des fonctions méromorphes sur X |
| Ω_S^q | faisceau des q -formes différentielles holomorphes sur S |
| $\Omega^q(\star D)$ | faisceau des q -formes différentielles à pôles d'ordre arbitraires le long de D |
| $\Omega^q(D)$ | faisceau des q -formes différentielles à pôles simples le long de D |
| \wedge | produit extérieur des formes différentielles |
| d | différentielle de de Rham des formes différentielles |
| Θ_S | faisceau des champs de vecteurs holomorphes sur S |
| $i_\delta(\omega)$ | produit intérieur d'une forme différentielle ω par un champ de vecteur δ |
| $\omega(\delta), \delta(\omega)$ | évaluation d'une k -forme différentielle ω sur un k -champ de vecteur δ |
| \tilde{X} | normalisation de X |
| \mathcal{C}_X | idéal conducteur de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ sur \mathcal{O}_X |
| $\text{prof}_I(M)$ | profondeur du module M dans l'idéal I |
| $\text{prof}(M)$ | profondeur du module M dans l'idéal maximal \mathfrak{m} |
| $\text{dimproj}(M)$ | dimension projective de M |
| $ I $ | cardinal de l'ensemble I |
| A^t | transposée de la matrice A |
| $\det(A)$ | déterminant de la matrice A |
| $H^q(\mathcal{I}^\bullet)$ | q -ième groupe de cohomologie du complexe (\mathcal{I}^\bullet) |
| $(I : J)_A$ | transporteur de J dans I relativement à l'anneau A |
| $\text{sgn}(i - j)$ | signe de la différence $i - j$ |

Chapitre 2

Préliminaires sur les diviseurs libres

L'objectif de ce chapitre est de présenter les définitions et résultats concernant les formes différentielles logarithmiques et leurs résidus qui seront utilisés ou généralisés dans les chapitres suivants. On renvoie à [Sai80] pour plus de détails.

Les aspects de la théorie qui nous intéressent sont surtout les caractérisations de la liberté, que nous généralisons pour la plupart dans les chapitres 3 et 4, et les résidus logarithmiques, qui font l'objet du chapitre 6.

Nous donnons aussi le théorème de caractérisation des diviseurs à croisements normaux en codimension un (voir théorème 2.3.14), et nous rappelons quelques éléments de preuve de [GS14] qui nous seront utiles dans la suite. Plusieurs résultats d'algèbre commutative sont rappelés dans ce chapitre.

2.1 Champs de vecteurs logarithmiques et formes logarithmiques

2.1.1 Formes différentielles logarithmiques

Définition 2.1.1. Soit U un domaine de \mathbb{C}^m , et $D \subseteq U$ une hypersurface réduite¹ définie par une équation $h(x) = 0$ avec h holomorphe sur U . Soit ω une q -forme méromorphe sur U à pôles au plus le long de D . On dit que ω est logarithmique si $h\omega$ et hdw sont holomorphes sur U .

Exemple 2.1.2. Considérons par exemple la courbe plane D de \mathbb{C}^2 définie par $h(x, y) = x^3 - y^7$. Cette courbe est *quasi-homogène*² de degré 21 pour les poids $(7, 3)$. La forme différentielle $\frac{dh}{h} = \frac{3x^2 dx - 7y^6 dy}{h}$ est à pôles simples le long de D , et $d\left(\frac{dh}{h}\right) = 0$, donc $d\left(\frac{dh}{h}\right)$ est à pôles simples le long de D . On en déduit que $\frac{dh}{h}$ est logarithmique le long de D .

Considérons à présent la forme $\omega_0 = \frac{7x dy - 3y dx}{h}$. On remarque que la forme ω_0 s'obtient en considérant le produit intérieur de $dx \wedge dy$ par le champ de vecteurs $\chi = 7x\partial_x + 3y\partial_y$. Ce champ de vecteur est appelé *champ d'Euler* de D (voir remarque 2.1.17).

On vérifie que

$$d\omega_0 = \frac{10dx \wedge dy}{h} - \frac{21(x^3 - y^7)dx \wedge dy}{h^2} = \frac{-11dx \wedge dy}{h}.$$

La forme ω_0 est donc logarithmique. Nous reviendrons sur cet exemple dans la suite.

Remarque 2.1.3. On vérifie que quel que soit le diviseur D , les formes différentielles holomorphes et $\frac{dh}{h}$ sont logarithmiques.

¹Dans toute la suite, on dit que X est un espace réduit défini par (h_1, \dots, h_r) si l'idéal engendré par h_1, \dots, h_r est l'idéal radical qui définit X .

²Une équation polynomiale $h(x_1, \dots, x_m) = \sum a_{i_1, \dots, i_m} x_1^{i_1} \cdots x_m^{i_m}$ est dite *quasi-homogène* de degré d pour les poids (w_1, \dots, w_m) si pour tout (i_1, \dots, i_m) tel que $a_{i_1, \dots, i_m} \neq 0$, $\sum_{j=1}^m i_j w_j = d$.

Remarque 2.1.4. La définition 2.1.1 ne dépend pas du choix de l'équation h . En effet, si f est une autre fonction holomorphe réduite sur U définissant D , alors il existe une fonction holomorphe inversible u sur U telle que $f = uh$, et donc $h\omega$ et $hd\omega$ sont holomorphes si et seulement si $f\omega$ et $fd\omega$ sont holomorphes.

La proposition suivante montre que toute forme différentielle logarithmique peut se ramener aux exemples de la remarque 2.1.3 par multiplication par une fonction holomorphe g telle que $\dim D \cap g^{-1}(0) \leq m - 2$.

Proposition 2.1.5 ([Sai80, (1.1)]). *Soit U un domaine de \mathbb{C}^m , et $D \subseteq U$ une hypersurface définie par une équation $h(x) = 0$ avec h holomorphe sur U et réduite. Soit ω une q -forme méromorphe sur U à pôles au plus le long de D . Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. ω est logarithmique,
2. $h\omega$ et $dh \wedge \omega$ sont holomorphes sur U ,
3. il existe une fonction holomorphe g , une $(q-1)$ -forme différentielle holomorphe ξ et une q -forme différentielle holomorphe η sur U telles que $\dim D \cap g^{-1}(0) \leq m - 2$ et

$$g\omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta \quad (2.1)$$

4. il existe un sous ensemble analytique $A \subseteq D$ de dimension $m-2$ tel que pour tout $p \in D \setminus A$, il existe un germe de $(q-1)$ -forme holomorphe ξ et un germe de q -forme holomorphe η en p tels que le germe de ω en p soit égal à $\frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta$.

Remarque 2.1.6. L'élément g apparaissant dans le troisième point de la proposition 2.1.5 peut être choisi dans l'idéal engendré par les dérivées partielles de h (voir [Sai80, Preuve de (1.1)]).

Exemple 2.1.7. Afin d'illustrer le quatrième point de la proposition précédente, nous reprenons l'exemple de la courbe D définie par $h(x, y) = x^3 - y^7$. Nous avons vu dans l'exemple 2.1.2 que les formes $\frac{dh}{h}$ et $\omega_0 = \frac{7xy - 3ydx}{h}$ sont logarithmiques.

Il est clair que la forme $\frac{dh}{h}$ s'écrit sous la forme (2.1), pour $g = 1$, $\xi = 1$ et $\eta = 0$.

Concernant ω_0 , remarquons que :

$$3x^2\omega_0 = -3y \frac{3x^2dx - 7y^6dy}{h} + \frac{-21y^7 + 21x^3dy}{h} = -3y \frac{dh}{h} + 21dy.$$

La forme ω_0 satisfait donc (2.1) pour $g = 3x^2$, $\xi = -3y$ et $\eta = 21dy$.

Considérons à présent une variété complexe lisse S de dimension m . On note \mathcal{O}_S le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur S . Comme la variété S est lisse, pour tout point $p \in S$, il existe un voisinage ouvert U de p dans S et un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_m) sur U centré en p . Cela permet alors d'identifier U à un ouvert de \mathbb{C}^m , et $\mathcal{O}_{S,p}$ à $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_m\}$.

Notations 2.1.8. Soit D une hypersurface de S . Pour tout $p \in S$, on note $h_p \in \mathcal{O}_{S,p}$ une équation réduite de D au voisinage de p .

- Pour $q \in \mathbb{N}$, on note Ω_S^q le faisceau des germes de formes holomorphes sur S de degré q . C'est un faisceau de \mathcal{O}_S -modules localement libre de rang $\binom{m}{q}$.
- On désigne par $\Omega_S^q(\star D)$ le faisceau des germes de formes méromorphes de degré q sur S à pôles d'ordre arbitraire le long de D . Cela signifie que pour tout $p \in S$ et tout $\omega \in \Omega_{S,p}^q(\star D)$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $h_p^k \cdot \omega \in \Omega_{S,p}^q$.

- On note $\Omega_S^q(D)$ le sous-faisceau de $\Omega_S^q(\star D)$ constitué des formes différentielles méromorphes à pôles simples le long de D . Cela signifie que pour tout $p \in S$ et tout $\omega \in \Omega_{S,p}^q(D)$, $h_p \cdot \omega \in \Omega_{S,p}^q$.

Définition 2.1.9. Soit $q \in \mathbb{N}$. Le faisceau des germes de q -formes différentielles logarithmiques le long de D est le faisceau sur S noté $\Omega_S^q(\log D)$ ou $\Omega^q(\log D)$ dont la fibre en un point $p \in S$ est :

$$\Omega_{S,p}^q(\log D) = \left\{ \omega \in \Omega_{S,p}^q(D) ; d\omega \in \Omega_{S,p}^{q+1}(D) \right\}.$$

Proposition 2.1.10 ([Sai80, (1.3)]).

1. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\Omega^q(\log D)$ est un faisceau de \mathcal{O}_S -modules cohérent.
2. Soit $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$, $p \in S$ et $\omega_1 \in \Omega_{S,p}^{q_1}(\log D)$, $\omega_2 \in \Omega_{S,p}^{q_2}(\log D)$. Alors $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Omega_{S,p}^{q_1+q_2}(\log D)$. Autrement dit, $\bigoplus_{q \in \mathbb{N}} \Omega^q(\log D)$ est une algèbre extérieure sur \mathcal{O}_S .
3. Pour tout $q \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega^q(\log D)$, $d\omega \in \Omega^{q+1}(\log D)$. Autrement dit, la \mathcal{O}_S -algèbre $\bigoplus_{q \in \mathbb{N}} \Omega^q(\log D)$ est stable par différentiation.

Preuve.

1. Le faisceau $\Omega^q(\log D)$ est le noyau du morphisme de faisceau

$$dh \wedge : \Omega_S^q(D) \rightarrow \Omega_S^{q+1}(D) / \Omega_S^{q+1}.$$

Comme les faisceaux $\Omega_S^q(D)$ et $\Omega_S^{q+1}(D) / \Omega_S^{q+1}$ sont cohérents, le faisceau $\Omega^q(\log D)$ est aussi cohérent par [Ser55, §13 Théorème 1].

2. Soit h une équation réduite de D au voisinage de p . Soit d'après la proposition 2.1.5 pour $i = 1, 2$ $g_i \in \mathcal{O}_{S,p}$, $\xi_i \in \Omega_{S,p}^{q-1}$ et $\eta_i \in \Omega_{S,p}^q$ tels que

$$g_i \omega_i = \frac{dh}{h} \wedge \xi_i + \eta_i$$

et g_1, g_2 induisent des non diviseurs de zéro³ dans $\mathcal{O}_{D,p} = \mathcal{O}_{S,p}/(h)$. Alors

$$g_1 g_2 \omega_1 \wedge \omega_2 = \frac{dh}{h} \wedge (\xi_1 \wedge \eta_2 - \eta_1 \wedge \xi_2) + \eta_1 \wedge \eta_2$$

et donc $\omega_1 \wedge \omega_2$ est logarithmique.

3. Si ω est logarithmique, alors par définition $hd\omega$ est holomorphe, et de plus $dd\omega = 0$ donc $d\omega$ est logarithmique. \square

Remarque 2.1.11. On a toujours $\Omega^0(\log D) = \mathcal{O}_S$ et $\Omega^m(\log D) = \Omega_S^m(D)$.

Remarque 2.1.12. Soit $\omega_1, \dots, \omega_m \in \Omega_{S,p}^1(\log D)$ et (x_1, \dots, x_m) un système de coordonnées locales centré en p .

La propriété (2) de la proposition 2.1.10 et la remarque précédente impliquent qu'il existe $a \in \mathcal{O}_S$ tel que

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m = a \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m}{h}.$$

³Cette condition est équivalente à $\dim_p D \cap g_i^{-1}(0) \leq m - 2$

2.1.2 Champs de vecteurs logarithmiques

Notation 2.1.13. On note Θ_S le faisceau des germes de champs de vecteurs holomorphes sur S . C'est un faisceau de \mathcal{O}_S -modules localement libre de rang m .

Définition 2.1.14 ([Sai80, (1.4)]). Soit $U \subseteq S$ un ouvert. Un champ de vecteurs $\delta \in \Theta_S(U)$ est dit logarithmique le long de D s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :

1. pour tout point lisse p de D , $\delta(p)$ est tangent à D ,
2. pour tout point $p \in U$ et toute équation réduite h_p de D au voisinage de p , la dérivée $\delta(h_p)$ de h_p selon δ appartient à l'idéal de \mathcal{O}_S engendré par (h_p) .

Notation 2.1.15. On note $\text{Der}(-\log D)$ le faisceau des germes de champs de vecteurs logarithmiques le long de D . En particulier, pour tout $p \in S$,

$$\text{Der}_p(-\log D) = \{\delta \in \Theta_{S,p} ; \delta(h_p) \in (h_p)\}.$$

Exemple 2.1.16. Reprenons la courbe plane D de l'exemple 2.1.2. Une équation réduite de D est $h = x^3 - y^7$. Soit $\chi = 7x\partial_x + 3y\partial_y$. On a $\chi(h) = 21h$, donc $\chi \in \text{Der}(-\log D)$.

Remarque 2.1.17. Plus généralement, si $h \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_m\}$ est quasi-homogène pour les poids (w_1, \dots, w_m) , le champ de vecteur $\chi = \sum_{i=1}^m w_i x_i \partial x_i$ est logarithmique. Ce champ de vecteur est appelé *champ d'Euler*.

Plusieurs propriétés du faisceau $\text{Der}(-\log D)$ s'obtiennent à partir de la définition :

Proposition 2.1.18 ([Sai80, (1.5)]).

1. Le faisceau $\text{Der}(-\log D)$ est un faisceau de \mathcal{O}_S -modules cohérent.
2. $\text{Der}(-\log D)$ est stable par le crochet de Lie $[\cdot, \cdot]$ des champs de vecteurs.
3. Soit (x_1, \dots, x_m) un système de coordonnées locales de S au voisinage de $p \in S$. Si pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, le champ de vecteurs $\delta_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial x_j$ est logarithmique, alors le déterminant $\det((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m})$ appartient à l'idéal de \mathcal{O}_S engendré par h , où h est une équation de D au voisinage de p .

Preuve.

1. Quitte à restreindre S à un ouvert, on peut supposer que h est une équation globale de D . On a la suite exacte de \mathcal{O}_S -modules :

$$0 \rightarrow \text{Der}(-\log D) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_S^{m+1} \xrightarrow{\beta} h\mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^m \frac{\partial h}{\partial x_i} \mathcal{O}_S.$$

où pour $\delta = \sum_{j=1}^m a_j \partial x_j \in \text{Der}(-\log D)$, $\alpha(\delta) = \left(a_1, \dots, a_m, -\frac{\delta(h)}{h}\right)$ et $\beta(b_1, \dots, b_{m+1}) = b_{m+1}h + \sum_{j=1}^m b_j \frac{\partial h}{\partial x_j}$. Comme les faisceaux \mathcal{O}_S^{m+1} et $h\mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^m \frac{\partial h}{\partial x_i} \mathcal{O}_S$ sont cohérents, le faisceau $\text{Der}(-\log D)$ est cohérent par [Ser55, §13 Théorème 1].

2. Soit $\delta_1, \delta_2 \in \text{Der}_p(-\log D)$. Alors $\delta_1(h) \in (h)$ et $\delta_2(h) \in (h)$ donc $[\delta_1, \delta_2](h) \in (h)$.
3. Pour tout point lisse p de D , les champs de vecteurs $\delta_1(p), \dots, \delta_m(p)$ sont tangents à D . Comme D est de dimension $m - 1$, on en déduit que $\det((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m})$ s'annule en p . De plus, D est réduit donc le lieu régulier de D est dense dans D . Cela entraîne que $\det((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m})$ est nul sur D , et est donc dans l'idéal engendré par h . \square

Terminons ce paragraphe par la suite exacte suivante, qui relie champs de vecteurs logarithmiques et idéal jacobien.

Notation 2.1.19. Soit $p \in D$ et h une équation locale réduite de D . On note $\mathcal{J}_{D,p} \subseteq \mathcal{O}_{D,p} = \mathcal{O}_{S,p}/h\mathcal{O}_{S,p}$ l'idéal jacobien de D en p . Il s'agit de l'idéal de $\mathcal{O}_{D,p}$ engendré par les dérivées partielles $\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)_{1 \leq i \leq m}$.

Proposition 2.1.20. Quitte à restreindre S à un ouvert, on suppose que h est une équation de D sur S . On a la suite exacte de faisceaux de \mathcal{O}_S -modules :

$$0 \rightarrow \text{Der}(-\log D) \rightarrow \Theta_S \xrightarrow{\alpha} \mathcal{J}_D \rightarrow 0$$

où pour $\delta \in \Theta_S$, $\alpha(\delta) = \delta(h)$.

2.1.3 Dualité

Notation 2.1.21. Soit ω une q -forme différentielle et δ un champ de vecteurs. On note $i_\delta(\omega)$ le produit intérieur de ω par δ , qui est une $(q-1)$ -forme différentielle. Si ω est une 1-forme, on notera $\omega(\delta) = \delta(\omega) = i_\delta(\omega)$.

Lemme 2.1.22 ([Sai80, (1.6, i)]). Soit $p \in S$ et $\omega \in \Omega_{S,p}^q(\log D)$ et $\delta \in \text{Der}_{S,p}(-\log D)$. Alors $i_\delta(\omega) \in \Omega_{S,p}^{q-1}(\log D)$. En particulier, pour $\omega \in \Omega_{S,p}^1(\log D)$, $\omega(\delta) \in \mathcal{O}_{S,p}$.

Proposition 2.1.23 ([Sai80, (1.6, ii)]). Soit $p \in S$. Les modules $\text{Der}_{S,p}(-\log D)$ et $\Omega_{S,p}^1(\log D)$ sont en dualité sur $\mathcal{O}_{S,p}$ par l'application :

$$\begin{aligned} \text{Der}_{S,p}(-\log D) \times \Omega_{S,p}^1(\log D) &\rightarrow \mathcal{O}_{S,p} \\ (\delta, \omega) &\mapsto \omega(\delta) \end{aligned}$$

En particulier, la proposition précédente assure que les modules $\Omega_{S,p}^1(\log D)$ et $\text{Der}_{S,p}(-\log D)$ sont réflexifs. Cela a la conséquence suivante dans le cas des courbes planes :

Corollaire 2.1.24 ([Sai80, (1.7)]). Si D est une courbe plane alors $\Omega^1(\log D)$ et $\text{Der}(-\log D)$ sont des faisceaux localement libres de \mathcal{O}_S -modules.

Preuve. D'après la proposition 2.1.23, $\text{Der}_{S,p}(-\log D) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_{S,p}}(\Omega^1(\log D), \mathcal{O}_{S,p}) \neq 0$. On a donc (voir par exemple [Mon12, Lemma 4.1] ou [BH93, Exercice 1.4.18])

$$\text{prof}(\text{Der}_{S,p}(-\log D)) \geq 2.$$

Comme $\text{prof}(\mathcal{O}_{S,p}) = 2$, la profondeur de $\text{Der}_{S,p}(-\log D)$ est 2. Par la formule d'Auslander Buchsbaum 2.2.14, le module $\text{Der}_{S,p}(-\log D)$ est un $\mathcal{O}_{S,p}$ -module libre. Par dualité, $\Omega_{S,p}^1(\log D)$ est aussi un $\mathcal{O}_{S,p}$ -module libre. \square

2.2 Diviseurs libres

2.2.1 Définition

Le corollaire 2.1.24 assure que dans le cas des courbes planes, les faisceaux $\Omega^1(\log D)$ et $\text{Der}(-\log D)$ sont localement libres de rang 2. La proposition suivante montre que si le faisceau cohérent $\Omega^1(\log D)$ (ou le faisceau cohérent $\text{Der}(-\log D)$) est localement libre, alors il est de rang m :

Proposition 2.2.1. *Soit D une hypersurface réduite de S . Soit $p \in S$. Si $p \notin D$ ou si p est un point lisse de D , les modules $\text{Der}_p(-\log D)$ et $\Omega^1(\log D)$ sont libres de rang m .*

Preuve. Soit h une équation locale de D au voisinage de p . Si $p \notin D$, h est inversible donc $\text{Der}_p(-\log D) = \Theta_{S,p}$ et $\Omega_{S,p}^1(\log D) = \Omega_{S,p}^1$. Si p est un point lisse de D , on peut considérer un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_m) de S centré en p tel que x_1 est une équation locale de D . Les champs de vecteurs $x_1\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \dots, \partial_{x_m}$ sont alors tangents à D en p , et constituent une base de $\text{Der}_p(-\log D)$. De plus, $\omega = \frac{1}{x_1} \sum_{i=1}^m a_i dx_i$ est logarithmique si et seulement si $dx_1 \wedge \omega \in \Omega_{S,p}^2$, et donc $\frac{dx_1}{x_1}, dx_2, \dots, dx_m$ est une base de $\Omega_{S,p}^1(\log D)$. \square

En revanche, les faisceaux $\Omega^1(\log D)$ et $\text{Der}(-\log D)$ peuvent ne pas être localement libres au voisinage des points singuliers, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 2.2.2. On considère le parapluie de Whitney $D \subseteq \mathbb{C}^3$ dont une équation est $h = x^2 - y^2z$. Un calcul montre que le module $\Omega_{D,0}^1(\log D)$ est engendré par $\frac{dh}{h}, \frac{2yzdx - 2xzd y - xydz}{h}, dy$ et dz , et cette famille est minimale. Le module $\Omega_{S,0}^1(\log D)$ n'est donc pas libre de rang 3, et donc $\Omega^1(\log D)$ n'est pas localement libre.

De même, un calcul montre que $\text{Der}_0(-\log D)$ est engendré par $x\partial_x + 2z\partial_z, y^2\partial_x + 2x\partial_z, yz\partial_x + x\partial_y$ et $y\partial_y - 2z\partial_z$, et cette famille génératrice est minimale. Le faisceau $\text{Der}(-\log D)$ n'est donc pas localement libre.

Les exemples précédents nous amènent à considérer la définition suivante :

Définition 2.2.3. *Soit $p \in S$. On dit que D est un diviseur libre en p si $\text{Der}_{S,p}(-\log D)$ est un $\mathcal{O}_{S,p}$ -module libre. On dit que D est un diviseur libre si D est libre en tout point $p \in S$.*

Remarque 2.2.4. Une conséquence de la proposition 2.2.1 est que l'ensemble des points en lesquels D n'est pas libre est inclus dans le lieu singulier de D .

Exemple 2.2.5. Le corollaire 2.1.24 assure que toutes les courbes planes sont libres.

Exemple 2.2.6. Soit $\ell \in \{1, \dots, m\}$ et D le diviseur de \mathbb{C}^m défini par $h = x_1 \cdots x_\ell$. Ce diviseur est appelé *diviseur à croisements normaux*. Il s'agit de l'exemple fondamental étudié par P. Deligne dans [Del70, II §3]. En particulier, il est montré dans [Del70, Lemme 3.2.1] que $\Omega^1(\log D)$ est libre de base les $\left(\frac{dx_i}{x_i}\right)_{1 \leq i \leq \ell}$ et les $(dx_j)_{\ell+1 \leq j \leq m}$.

L'exemple suivant est dû à K. Saito pour les hypersurfaces (voir [Sai80, (3.19)]), et une généralisation aux intersections complètes est donnée dans [Loo84, Corollary 6.13].

Proposition 2.2.7. *Le discriminant de la déformation semi-universelle d'une singularité isolée d'intersection complète est un diviseur libre.*

2.2.2 Caractérisations de la liberté

L'objectif de ce paragraphe est de donner des caractérisations de la liberté d'un diviseur.

Nous avons déjà vu dans la proposition 2.1.18 que pour toute famille $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ de champs de vecteurs logarithmiques, le déterminant $\det(\delta_1, \dots, \delta_m)$ est un multiple de l'équation h de D .

La remarque 2.1.12 assure aussi que le produit extérieur de m formes logarithmiques de degré un donne un multiple de $\frac{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_m}{h}$.

Le critère suivant, connu sous le nom de critère de Saito, permet de décider si une famille donnée de champs de vecteurs logarithmiques ou de 1-formes logarithmiques est une base du module correspondant.

THÉORÈME 2.2.8 (Critère de Saito, [Sai80, (1.8)]). Soit h une équation réduite de l'hypersurface D au voisinage d'un point $p \in S$.

1. D est libre en p si et seulement si il existe une famille $(\delta_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} \partial x_j)_{1 \leq i \leq m}$ de champs de vecteurs logarithmiques telle qu'il existe une unité $u \in \mathcal{O}_{S,p}$ vérifiant

$$\det \left((a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m} \right) = uh.$$

Dans ce cas, $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ est une base de $\text{Der}_{S,p}(-\log D)$.

2. D est libre en p si et seulement si il existe une famille $\omega_1, \dots, \omega_m$ de 1-formes différentielles logarithmiques et une unité $u \in \mathcal{O}_{S,p}$ telles que

$$\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_m = u \frac{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m}{h}.$$

Dans ce cas, $(\omega_1, \dots, \omega_m)$ est une base de $\Omega_{S,p}^1(\log D)$. Autrement dit, D est libre en p si et seulement si $\bigwedge^m \Omega_{S,p}^1(\log D) = \Omega_{S,p}^m(\log D)$. De plus, dans ce cas, pour tout $q \in \{1, \dots, m\}$,

$$\Omega_{S,p}^q(\log D) = \bigwedge^q \Omega_{S,p}^1(\log D).$$

Exemple 2.2.9. Reprenons l'exemple 2.1.2 de la courbe plane D définie par $h = x^3 - y^7$. On sait que D est libre par le corollaire 2.1.24. On vérifie que le champ d'Euler $\chi = 7x\partial_x + 3y\partial_y$ et $\delta = 7y^6\partial_x + 3x^2\partial_y$ sont des champs de vecteurs logarithmiques. On a alors $\det(\chi, \delta) = 21(x^3 - y^7)$, et donc le critère de Saito assure que (χ, δ) est une base de $\text{Der}(-\log D)$.

Les formes différentielles $\frac{dh}{h} = \frac{3x^2 dx - 7y^6 dy}{h}$ et $\omega_0 = \frac{-3y dx + 7x dy}{h}$ sont logarithmiques, et $\frac{dh}{h} \wedge \omega_0 = 21 \frac{dx \wedge dy}{h}$. Le critère de Saito assure donc que (ω_1, ω_2) est une base de $\Omega^1(\log D)$.

Le théorème suivant a d'abord été montré par H. Terao dans le cas quasi-homogène, puis par A.G. Aleksandrov dans le cas général, et montre en particulier que le lieu singulier d'un diviseur libre est de dimension maximale⁴.

On rappelle que $\mathcal{I}_D \subseteq \mathcal{O}_D$ désigne l'idéal jacobien de D (voir notation 2.1.19).

THÉORÈME 2.2.10 ([Ale88, §1] et [Ter80a, Proposition 2.4]). Soit p un point singulier de l'hypersurface D . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. D est un diviseur libre en p ,
2. $\mathcal{I}_{D,p}$ est un $\mathcal{O}_{D,p}$ -module de Cohen-Macaulay,
3. l'anneau $\mathcal{O}_{D,p}/\mathcal{I}_{D,p}$ est Cohen-Macaulay de dimension $m - 2$.

La preuve que nous proposons ici utilise les résultats suivants, qui sont essentiels dans la suite. Ils sont par exemple énoncés et démontrés dans [dJP00, §6.5].

Notation 2.2.11. Soit A un anneau local noethérien et M un A -module. On note $\dim_{\text{proj}}(M)$, ou $\dim_{\text{proj}}(M)$, la longueur minimale d'une résolution de M par des modules projectifs⁵.

Soit I un idéal de A . On pose $\text{prof}_I(M)$ la profondeur de M dans I , qui est la longueur maximale d'une suite régulière de M contenue dans l'idéal I . Dans le cas où $I = \mathfrak{m}$ est l'idéal maximal de A , on note $\text{prof}(M)$ au lieu de $\text{prof}_{\mathfrak{m}}(M)$.

⁴Rappelons que D est réduit, et donc le lieu singulier est de dimension au plus $\dim D - 1$

⁵Comme A est local, un module est projectif si et seulement si il est libre.

THÉORÈME 2.2.12 (Théorème des Syzygies de Hilbert). *Soit A un anneau local noethérien de dimension m . On suppose A régulier. Alors tout A -module M de type fini est de dimension projective finie, et vérifie $\dim\text{proj}_A(M) \leq m$.*

Lemme 2.2.13 (Lemme de la profondeur). *Soit A un anneau local noethérien, et M_1, M_2 et M_3 trois A -modules tels que la suite suivante est une suite exacte de A -modules :*

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \rightarrow 0.$$

Alors

$$\text{prof}(M_2) \geq \min(\text{prof}(M_1), \text{prof}(M_3)).$$

Si de plus cette inégalité est stricte alors $\text{prof}(M_1) = \text{prof}(M_3) + 1$.

THÉORÈME 2.2.14 (Formule d'Auslander Buchsbaum). *Soit A un anneau local noethérien et M un A -module de type fini et de dimension projective finie. Alors :*

$$\text{prof}(M) + \dim\text{proj}_A(M) = \text{prof}(A).$$

Remarque 2.2.15. En particulier, si A est un anneau local régulier, la formule d'Auslander Buchsbaum s'applique à tout A -module de type fini.

Preuve (du théorème 2.2.10). Montrons l'équivalence entre 2. et 3. On considère la suite exacte de $\mathcal{O}_{D,p}$ -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{D,p} \rightarrow \mathcal{O}_{D,p} \rightarrow \mathcal{O}_{D,p}/\mathcal{I}_{D,p} \rightarrow 0.$$

Comme D est une hypersurface, $\mathcal{O}_{D,p}$ est un anneau de Cohen-Macaulay de dimension $m-1$, donc en particulier de profondeur $m-1$. Comme D est réduit, la dimension de $\mathcal{O}_{D,p}/\mathcal{I}_{D,p}$ est au plus $m-2$ et donc sa profondeur est aussi majorée par $m-2$. On a donc par le lemme de la profondeur 2.2.13,

$$\text{prof}(\mathcal{I}_{D,p}) = m-1 \iff \text{prof}(\mathcal{O}_{D,p}/\mathcal{I}_{D,p}) = m-2.$$

Montrons à présent l'équivalence 1. \iff 2. On considère la suite exacte de la proposition 2.1.20 :

$$0 \rightarrow \text{Der}_{S,p}(-\log D) \rightarrow \Theta_{S,p} \rightarrow \mathcal{I}_{D,p} \rightarrow 0.$$

Comme $\Theta_{S,p}$ est un $\mathcal{O}_{S,p}$ -module libre, et $\mathcal{O}_{S,p}$ est de profondeur m , la profondeur de $\Theta_{S,p}$ est m . Comme la dimension de $\mathcal{I}_{D,p}$ est de dimension $m-1$, on déduit du lemme 2.2.13 que

$$\text{prof}(\text{Der}_{S,p}(-\log D)) = m \iff \text{prof}(\mathcal{I}_{D,p}) = m-1.$$

On conclut en remarquant que par la formule d'Auslander-Buchsbaum, $\text{Der}_{S,p}(-\log D)$ est libre si et seulement s'il est de profondeur m . \square

Remarque 2.2.16. L'idéal $\mathcal{I}_{D,p}$ est un $\mathcal{O}_{D,p}$ -module de dimension $\dim D = m-1$, donc la propriété 2 du théorème 2.2.10 équivaut à dire que $\mathcal{I}_{D,p}$ est un $\mathcal{O}_{D,p}$ -module de Cohen-Macaulay maximal.

Remarque 2.2.17. Une conséquence immédiate de ce théorème est que les seuls diviseurs libres à singularités isolées sont les courbes planes.

La caractérisation suivante de la liberté est une conséquence directe de la caractérisation 2.2.10. Elle repose sur la notion d'idéal parfait.

Définition 2.2.18 ([Mat86, Exercice 16.3]). *Un idéal propre I d'un anneau noethérien A est dit parfait si*

$$\dim_{\text{proj}_A}(A/I) = \inf \left\{ i \in \mathbb{N} ; \text{Ext}_A^i(A/I, A) \right\}.$$

Remarque 2.2.19 ([Mat86, Theorem 17.4]). Le nombre $\inf \left\{ i \in \mathbb{N} ; \text{Ext}_A^i(A/I, A) \right\}$ est appelé le *grade* de I (ou de A/I). En particulier, si A est un anneau local Cohen-Macaulay, on a $\text{ht}(I) = \text{prof}_I(A) = \text{grade}(I)$ où I est la hauteur⁶ de I .

La caractérisation suivante de la liberté est prise comme définition dans [BC13] :

Proposition 2.2.20 ([BC13, Définition 2.2]). *Un diviseur D défini par h est libre en p si et seulement si l'idéal $J(h) = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_m}, h \right) \subseteq \mathcal{O}_{S,p}$ est parfait de codimension deux dans $\mathcal{O}_{S,p}$.*

Preuve. Comme $\mathcal{O}_{S,p}$ est régulier, il est de Cohen-Macaulay et donc $\text{grade}(J(h)) = \text{ht}(J(h)) = m - \dim(\mathcal{O}_{S,p}/J(h))$. D'après la formule d'Auslander-Buchsbaum 2.2.14, on a $\dim_{\text{proj}}(\mathcal{O}_{S,p}/J(h)) = m - \text{prof}(\mathcal{O}_{S,p}/J(h))$. Par conséquent, $J(h)$ est parfait de codimension deux dans $\mathcal{O}_{S,p}$ si et seulement si $\dim(\mathcal{O}_{S,p}/J(h)) = \text{prof}(\mathcal{O}_{S,p}/J(h)) = m - 2$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathcal{O}_{S,p}/J(h)$ est Cohen-Macaulay de dimension $m - 2$, ce qui équivaut à la liberté de D par le théorème 2.2.10. \square

La caractérisation de [DS14, Remark 4.7] est donnée pour les courbes projectives planes, et fait appel à la notion de *saturé* d'un idéal. Après avoir rappelé cette définition, nous donnerons une caractérisation de la liberté qui s'en inspire et qui du point de vue de la géométrie analytique locale correspond à un énoncé sur les germes de surfaces de \mathbb{C}^3 . Nous généralisons cette caractérisation aux surfaces intersections complètes dans le chapitre 3 (voir proposition 3.3.4) et aux surfaces Cohen-Macaulay (voir proposition 4.2.28).

Définition 2.2.21. *Soit (A, \mathfrak{m}) un anneau local noethérien et $I \subseteq A$ un idéal. Le saturé \widehat{I} de l'idéal I est :*

$$\widehat{I} = \left\{ g \in A ; \exists N \in \mathbb{N}, \mathfrak{m}^N g \subseteq I \right\}.$$

Lemme 2.2.22. *Soit $I \subseteq A$ un idéal propre de A . Alors $\text{prof}(A/I) = 0$ si et seulement si $\widehat{I} \neq I$.*

Preuve. On note $\text{Ass}(I)$ les idéaux premiers associés de I . En particulier, $\bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(I)} \mathfrak{p}$ est égal à l'ensemble des diviseurs de zéro de A/I . On a, en utilisant le lemme d'évitement (voir par exemple [dJP00, Lemma 1.1.13]) pour passer de la première à la deuxième ligne :

$$\begin{aligned} \text{prof}(A/I) = 0 &\iff \mathfrak{m}/I \subseteq \bigcup_{\mathfrak{p} \in \text{Ass}(I)} \mathfrak{p} \\ &\iff \mathfrak{m}/I \in \text{Ass}(I) \\ &\iff \exists \bar{u} \in A/I, \text{Ann}_{A/I}(\bar{u}) = \mathfrak{m}/I \\ &\implies \exists u \in \widehat{I} \setminus I. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe $v \in \widehat{I} \setminus I$. Alors par définition il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathfrak{m}^N v \subseteq I$. Par conséquent, \mathfrak{m}/I est constitué de diviseurs de zéro de A/I , ce qui nous donne la réciproque : $\widehat{I} \neq I \implies \text{prof}(A/I) = 0$. \square

Proposition 2.2.23. *Soit $D \subseteq S = (\mathbb{C}^3, 0)$ un germe de surface singulière réduite définie par h . Alors D est libre en 0 si et seulement si l'idéal $J(h)$ engendré par h et les dérivées partielles de h est saturé.*

⁶La hauteur d'un idéal premier \mathfrak{p} est la longueur maximale d'une chaîne d'idéaux premiers inclus dans \mathfrak{p} . La hauteur d'un idéal I est $\text{ht}(I) = \min \{ \text{ht}(\mathfrak{p}) ; \mathfrak{p} \text{ premier associé à } I \}$.

Preuve. On rappelle que d'après le théorème 2.2.10, D est libre si et seulement si $\mathcal{O}_S/J(h)$ est Cohen-Macaulay de dimension 1. Comme D est réduit, la dimension de $\mathcal{O}_{S,p}/J(h)$ est au plus 1. Or, d'après le lemme 2.2.22, $\text{prof}(\mathcal{O}_{S,p}/J(h)) = 0$ si et seulement si $\widehat{J(h)} \neq J(h)$, ce qui nous donne le résultat. \square

2.3 Résidus logarithmiques

2.3.1 Définition et premières propriétés

Soit $\pi : \tilde{D} \rightarrow D$ la normalisation⁷ de l'hypersurface réduite D . On note \mathcal{M}_D (respectivement $\mathcal{M}_{\tilde{D}}$) le faisceau des germes de fonctions méromorphes sur D (respectivement sur \tilde{D}).

Définition 2.3.1. Soit $q \in \mathbb{N}$. Le faisceau des germes de q -formes différentielles sur D , ou faisceau des germes de q -formes différentielles de Kähler, est le faisceau sur D dont la fibre en un point $p \in D$ est :

$$\Omega_{D,p}^q = \frac{\Omega_{S,p}^q}{h\Omega_{S,p}^q + dh \wedge \Omega_{S,p}^{q-1}} \Big|_D.$$

Remarque 2.3.2. En particulier, $\Omega_D^q \otimes_{\mathcal{O}_D} \mathcal{M}_D = \pi_* \left(\Omega_{\tilde{D}}^q \otimes_{\mathcal{O}_{\tilde{D}}} \mathcal{M}_{\tilde{D}} \right)$, où $\Omega_{\tilde{D}}^q$ est le faisceau des germes de formes différentielles sur \tilde{D} .

Définition 2.3.3 ([Sai80, (2.2)]). Soit $q \in \mathbb{N}$. L'application résidu

$$\text{res}_D : \Omega^q(\log D) \rightarrow \Omega_D^{q-1} \otimes_{\mathcal{O}_D} \mathcal{M}_D$$

est définie de la façon suivante. Soit $\omega \in \Omega^q(\log D)$, et g, ξ, η satisfaisant les hypothèses du point 3. de la proposition 2.1.5, de sorte que $g\omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta$. Alors $\text{res}_D(\omega) = \frac{\xi}{g} \Big|_D$.

Le résultat suivant montre que l'application résidu est bien définie.

Proposition 2.3.4 ([Sai80, (2.4)]). Soit $q \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega^q(\log D)$. Soit pour $j = 1, 2$ des éléments g_j, ξ_j, η_j vérifiant (2.1). Alors

$$\frac{\xi_1}{g_1} \Big|_D = \frac{\xi_2}{g_2} \Big|_D.$$

Preuve. La preuve repose sur le lemme de De Rham généralisé, qui est aussi utilisé dans le cas des intersections complètes étudiées dans le chapitre suivant.

Lemme 2.3.5 (Lemme de De Rham généralisé, [Sai76]). Soit h_1, \dots, h_k des germes de fonctions holomorphes en p . On pose $J(\underline{h}) \subseteq \mathcal{O}_{S,p}$ l'idéal engendré par les mineurs de taille $k \times k$ de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_k) . Il existe un entier $e \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $q \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega_{S,p}^q$ vérifiant $\omega \wedge dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k = 0$ on a pour tout $\Delta \in J(\underline{h})$,

$$(\Delta)^e \omega \in \sum_{i=1}^k dh_i \wedge \Omega_{S,p}^{q-1}.$$

⁷On rappelle que la normalisation \tilde{A} d'un anneau commutatif réduit A est l'ensemble des éléments de l'anneau total des fractions \mathcal{M}_A qui sont entiers sur A .

Revenons à $k = 1$. Avec les hypothèses et notations de l'énoncé de la proposition 2.3.4, on a

$$\frac{dh}{h} \wedge (g_2\xi_1 - g_1\xi_2) = g_1\eta_2 - g_2\eta_1.$$

On en déduit que $(g_1\eta_2 - g_2\eta_1) \wedge dh = 0$ et donc par le lemme 2.3.5, il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe $\zeta_i \in \Omega_{S,p}^{q-1}$ tel que $\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)^e (g_1\eta_2 - g_2\eta_1) = dh \wedge \zeta_i$. On a donc

$$dh \wedge \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)^e (g_2\xi_1 - g_1\xi_2) - h\zeta_i \right) = 0.$$

On peut donc de nouveau appliquer le lemme 2.3.5, qui donne l'existence d'un élément $\sigma_i \in \Omega_{S,p}^{q-2}$ tel que

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)^{2e} (g_2\xi_1 - g_1\xi_2) = \left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)^e h\zeta_i + dh \wedge \sigma_i.$$

Par conséquent, $\left(\frac{\partial h}{\partial x_i}\right)^{2e} (g_2\xi_1 - g_1\xi_2) = 0 \in \Omega_{D,p}^{q-1}$. Comme D est réduit, il existe une combinaison linéaire des $\frac{\partial h}{\partial x_i}$ qui n'est pas un diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_{D,p}$. Quitte à changer le système de coordonnées, on peut supposer que $\frac{\partial h}{\partial x_1}$ induit un non diviseur de zéro de $\mathcal{O}_{D,p}$. On en déduit que $\frac{\xi_1}{g_1}$ et $\frac{\xi_2}{g_2}$ induisent le même élément de $\Omega_{D,p}^{q-1} \otimes_{\mathcal{O}_{D,p}} \mathcal{M}_{D,p}$. \square

On remarque en particulier que le module des résidus de $\Omega^0(\log D)$ est nul.

Notation 2.3.6. Pour $q \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{R}_D^q = \text{res}_D(\Omega^{q+1}(\log D))$ le faisceau image de l'application res_D . On note \mathcal{R}_D le faisceau \mathcal{R}_D^0 .

On a alors immédiatement le résultat suivant :

Proposition 2.3.7 ([Sai80, (2.5), (2.6)]). *Pour tout $q \in \mathbb{N}$ on obtient la suite exacte de \mathcal{O}_S -modules suivante :*

$$0 \rightarrow \Omega_S^{q+1} \rightarrow \Omega^{q+1}(\log D) \xrightarrow{\text{res}_D} \mathcal{R}_D^q \rightarrow 0.$$

En particulier, \mathcal{R}_D^q est un faisceau de \mathcal{O}_S -modules cohérents.

De plus, un calcul direct en utilisant (2.1) montre la proposition suivante :

Proposition 2.3.8. *Les modules des résidus forment un complexe $(\mathcal{R}_D^\bullet, d)$ pour la différentielle extérieure. Plus précisément, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $\omega \in \Omega^q(\log D)$,*

$$d(\text{res}_D(\omega)) = -\text{res}_D(d\omega).$$

La propriété suivante est satisfaite :

Proposition 2.3.9 ([Sai80, Lemma 2.8]). *Soit D un diviseur. On a l'inclusion :*

$$\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{D}}) \subseteq \mathcal{R}_D.$$

La preuve de la proposition 3.1.28 que nous proposons s'inspire de la preuve de ce résultat, qui utilise les notions et résultats suivants.

Notation 2.3.10. Soit A un anneau réduit d'anneau total des fractions \mathcal{M}_A , et de normalisation \tilde{A} . On pose $\mathcal{C}_A = \{g \in \mathcal{M}_A ; g \cdot \tilde{A} \subseteq A\}$. L'idéal \mathcal{C}_A est appelé *l'idéal conducteur de \tilde{A} sur A* .

Proposition 2.3.11 ([GLS10, Lemma 4.1]). *Soit $\mathcal{I}_X = (h_1, \dots, h_r)$ un idéal définissant un espace réduit équidimensionnel X de dimension n contenu dans une variété lisse de dimension m . Soit \mathcal{J}_X l'idéal de \mathcal{O}_X engendré par les mineurs $(m-n) \times (m-n)$ de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_r) . Alors \mathcal{J}_X est contenu dans l'idéal conducteur de X et de plus, \mathcal{J}_X contient un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_X .*

Terminons ce paragraphe par une caractérisation des diviseurs libres Euler homogènes par le module des résidus. Nous reviendrons sur ce résultat dans le chapitre 6 (voir remarque 6.1.28 et proposition 6.2.24).

Définition 2.3.12. *Un diviseur D est dit Euler homogène en un point $p \in D$ s'il existe un germe de champ de vecteurs $\chi \in \mathfrak{m}_p \Theta_{S,p}$ et une équation locale réduite $h \in \mathcal{O}_{S,p}$ de D en p tels que $\chi(h) = h$. On dit alors que χ est un champ d'Euler pour D en p .*

Proposition 2.3.13 ([GS14, Proposition 5.2]). *Soit $p \in D$. On suppose que D est un diviseur libre en p , et on note h une équation réduite de D en p . Alors :*

- $\frac{dh}{h}$ fait partie d'une base de $\Omega_{S,p}^1(\log D)$ si et seulement si D est Euler homogène en p ,
- $\frac{dh}{h}$ fait partie d'une base de $\Omega_{S,p}^1(\log D)$ si et seulement si 1 fait partie d'une famille génératrice minimale de $\mathcal{R}_{D,p}$,
- $\mathcal{R}_{D,p}$ est un $\mathcal{O}_{D,p}$ -module cyclique si et seulement si D est lisse en p .

2.3.2 Caractérisation des croisements normaux

Le théorème suivant est une caractérisation des hypersurfaces à croisements normaux en codimension 1 *via* des propriétés des groupes fondamentaux ou du module des résidus.

THÉORÈME 2.3.14 ([Sai80, (2.13)], [LS84], [GS14, Theorem 1.3]). *Soit D une hypersurface réduite de S . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *les groupes fondamentaux locaux de $S \setminus D$ sont abéliens,*
2. *il existe un ensemble analytique $A \subseteq D$ de codimension au moins 2 dans D tel que pour tout $p \in D \setminus A$, D est à croisements normaux au voisinage de p ,*
3. $\mathcal{R}_D = \mathcal{O}_{\tilde{D}}$.

Ce théorème a été montré en plusieurs étapes. En 1980, K. Saito montre les implications 1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3., et s'interroge sur les autres implications (voir [Sai80, (2.13)]). Il montre que dans le cas des courbes planes, l'implication 3. \Rightarrow 2. est vérifiée. En 1984, D.T. Lê et K. Saito montrent l'implication 2. \Rightarrow 1. dans [LS84]. L'implication manquante, à savoir 3. \Rightarrow 2., a été démontrée en 2012 par M. Granger et M. Schulze dans [GS14, Theorem 1.3].

Nous donnons ici quelques ingrédients de la preuve de M. Granger et M. Schulze qui nous seront utiles dans la suite.

Commençons par un rappel sur les idéaux fractionnaires, qui sera utile dans les paragraphes suivants.

Définition 2.3.15. *Soit A un anneau commutatif de corps des fractions \mathcal{M}_A . Un idéal fractionnaire de A est un sous A -module I de \mathcal{M}_A de type fini qui contient un non diviseur de zéro.*

Lemme 2.3.16 ([dJvS90, Lemma 1.6]). *Soit I un idéal fractionnaire de A . Le dual de I est par définition $I^\vee = \text{Hom}_A(I, A)$. Alors I^\vee est un idéal fractionnaire de A et*

$$I^\vee = \{f \in \mathcal{M}_A ; f \cdot I \subseteq A\}.$$

On rappelle que \mathcal{C}_A désigne l'idéal conducteur de \tilde{A} dans A . En particulier, $\mathcal{C}_A = \tilde{A}^\vee$.

La preuve de M. Granger et M. Schulze utilise en particulier la proposition suivante, que nous généralisons dans le chapitre 3. Ce résultat est fondamental dans le chapitre 6. Notons que \mathcal{R}_D est un idéal fractionnaire.

Proposition 2.3.17 ([GS14, Proposition 3.4]). *On a la suite exacte de \mathcal{O}_S -modules :*

$$0 \rightarrow \mathrm{Der}(-\log D) \rightarrow \Theta_S \xrightarrow{\sigma_D} \mathcal{R}_D^\vee \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\Omega^1(\log D), \mathcal{O}_S) \rightarrow 0.$$

De plus, pour tout $\delta \in \Theta_S$, et tout $\rho \in \mathcal{R}_D$, on a $\sigma_D(\delta)(\rho) = \mathrm{dh}(\delta) \cdot \rho$. En particulier, $\sigma_D(\Theta_S) = \mathcal{I}_D$.

De plus, $\mathcal{I}_D^\vee = \mathcal{R}_D$.

La preuve est fondée sur l'étude du complexe double $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega_S^1 \hookrightarrow \Omega^1(\log D), h : \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S)$ d'une part, et du complexe double $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathrm{Der}(-\log D) \hookrightarrow \Theta_S, h : \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S)$ d'autre part. Une chasse au diagramme permet ensuite de calculer explicitement le connectant dans chacun des cas. Une chasse au diagramme analogue dans le cas des intersections complètes est développée dans la preuve de la proposition 3.2.17.

On obtient alors les corollaires suivants, qui seront utiles dans le chapitre 6 :

Corollaire 2.3.18 ([GS14, Corollary 3.5]). *On a la suite d'inclusions suivante :*

$$\mathcal{I}_D \subseteq \mathcal{R}_D^\vee \subseteq \mathcal{C}_D \subseteq \mathcal{O}_D \subseteq \mathcal{O}_{\tilde{D}} \subseteq \mathcal{R}_D.$$

ainsi que

Corollaire 2.3.19. *Si D est libre, $\mathcal{R}_D^\vee = \mathcal{I}_D$.*

Preuve. Si D est libre, $\Omega^1(\log D)$ est libre par définition et donc l'application σ_D de la proposition 2.3.17 est surjective. \square

La preuve précédente ne se généralise pas au cas des intersections complètes étudié dans le chapitre 3. On propose ici une preuve alternative du corollaire, qui utilise le théorème suivant :

THÉORÈME 2.3.20 ([dJvS90, Proposition 1.7]). *Soit A un anneau local Gorenstein⁸. Alors pour tout module M Cohen-Macaulay maximal, $M^\vee = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ est un module de Cohen-Macaulay maximal. De plus, le foncteur $-\vee$ renverse les inclusions et est une involution sur les modules de Cohen-Macaulay maximaux.*

Par le théorème 2.2.10, si D est libre alors \mathcal{I}_D est Cohen-Macaulay maximal, et de plus par la proposition 2.3.17, $\mathcal{I}_D^\vee = \mathcal{R}_D$. Par le théorème 2.3.20, on a donc $\mathcal{R}_D^\vee = (\mathcal{I}_D^\vee)^\vee = \mathcal{I}_D$.

La preuve de l'implication 3. \Rightarrow 2. du théorème 2.3.14 utilise aussi le résultat de R. Piene suivant, que nous utiliserons dans le chapitre 6 pour des intersections complètes.

Définition 2.3.21. *Soit C une intersection complète et $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ la normalisation. L'idéal de ramification $\Pi_C \subseteq \mathcal{O}_{\tilde{C}}$ de π est le 0ième idéal de Fitting du faisceau des formes différentielles relatives $\Omega_{\tilde{C}/C}^1$:*

$$\Pi_C = \mathcal{F}_{\mathcal{O}_{\tilde{C}}}^0(\Omega_{\tilde{C}/C}^1).$$

Dans le cas d'une intersection complète C de S définie par une suite régulière (h_1, \dots, h_k) , l'idéal jacobien \mathcal{I}_C est l'idéal de $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_S/(h_1, \dots, h_k)$ engendré par les mineurs de taille $(k \times k)$ de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_k) . On a alors la relation suivante :

Proposition 2.3.22 ([Pie79, Corollary 1, Proposition 1]). *Soit C une intersection complète. On a*

$$\mathcal{I}_C \mathcal{O}_{\tilde{C}} = \mathcal{C}_C \Pi_C.$$

⁸Un anneau A est dit *Gorenstein* si le module dualisant ω_A est un A -module libre de rang 1. (voir corollaire 2.3.27 pour la notion de module dualisant).

2.3.3 Autres interprétations du module des résidus

Nous terminons ce chapitre en donnant la relation entre les modules des résidus et les formes régulières méromorphes. Dans la mesure où cette relation apparaît aussi dans le cas non hyper-surface, on donne directement les définitions générales.

On suit la présentation des formes régulières méromorphes de [Bar78] proposée dans [Ale90].

Soit X un sous-espace analytique réduit équidimensionnel de dimension n de la variété complexe lisse S . On note m la dimension de S , et k la codimension de X .

Soit $Z \subseteq X$ le lieu singulier⁹ de X . On note $H_Z^\bullet(-)$ le foncteur de cohomologie locale à support dans Z (voir par exemple [Har67]), et $j : X \setminus Z \hookrightarrow Z$ l'inclusion naturelle. On a alors pour tout $q \in \mathbb{N}$ une suite exacte de \mathcal{O}_X -modules :

$$0 \rightarrow H_Z^0(\Omega_X^q) \rightarrow \Omega_X^q \rightarrow j_* j^* \Omega_X^q \xrightarrow{\partial} H_Z^1(\Omega_X^q) \rightarrow 0. \quad (2.2)$$

Définition 2.3.23. Soit C une intersection complète définie sur un ouvert U de S par une suite régulière (h_1, \dots, h_k) . On considère le morphisme

$$c_C^S : \Omega_C^q \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\mathcal{O}_C, \Omega_S^{q+k}) = \check{H}^{k-1}(U \setminus C, \Omega_S^{q+k})$$

tel que pour $\nu \in \Omega_C^q$, c_C^S est le cocycle de Čech de la forme

$$\nu \wedge \frac{dh_1}{h_1} \wedge \dots \wedge \frac{dh_k}{h_k}.$$

Alors c_C^S est appelé la classe fondamentale de C dans S .

Remarque 2.3.24. On peut en fait définir une classe fondamentale pour tout espace équidimensionnel X de S . On la note c_X^S . (voir chapitre 4).

En particulier, ce morphisme induit un morphisme

$$H_Z^1(c_C^S) : H_Z^1(\Omega_C^q) \rightarrow H_Z^1(\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\mathcal{O}_C, \Omega_S^{q+k})).$$

Définition 2.3.25 ([Bar78, Définition fondamentale]). Soit X un sous-espace analytique réduit équidimensionnel de S . Soit $q \in \mathbb{N}$. Le faisceau des q -formes régulières méromorphes sur X est le faisceau ω_X^q défini par :

$$\omega_X^q = \text{Ker} \left(H_Z^1(c_X^S) \circ \partial : j_* j^* \Omega_X^q \rightarrow H_Z^1(\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\mathcal{O}_X, \Omega_S^{q+k})) \right). \quad (2.3)$$

Lemme 2.3.26 ([Bar78, Lemme 4]). Soit C une intersection complète définie par une suite régulière (h_1, \dots, h_k) . On a alors la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \omega_C^q \xrightarrow{c_C^S} \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\mathcal{O}_C, \Omega_S^{q+k}) \xrightarrow{\mathcal{E}} \left(\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\mathcal{O}_C, \Omega_S^{q+k+1}) \right)^k \quad (2.4)$$

où $\mathcal{E}(\zeta) = (\zeta \wedge dh_1, \dots, \zeta \wedge dh_k)$.

Corollaire 2.3.27. Le morphisme c_C^S induit un isomorphisme de ω_C^{m-k} sur le module dualisant de Grothendieck $\omega_C = \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\mathcal{O}_C, \Omega_S^m)$.

Proposition 2.3.28 ([Bar78, Proposition 3]). Soit X un espace réduit équidimensionnel de dimension n . Pour tout $q \in \mathbb{N}$ on a un isomorphisme de faisceaux cohérents sur X :

$$A_q : \omega_X^q \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X^{m-k-q}, \omega_X^n)$$

où pour $\omega \in \omega_X^q$ et $\eta \in \Omega_X^{m-k-q}$ on a $A_q(\omega)(\eta) = \eta \wedge \omega$.

⁹ou un espace analytique contenant le lieu singulier et inclus dans X , voir [Bar78, §1, Remarque].

Revenons enfin au cas d'un diviseur de S .

THÉORÈME 2.3.29 ([Ale90, §4, Theorem]). *Soit D une hypersurface réduite de S . Alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, les modules \mathcal{R}_D^q et ω_D^q sont isomorphes.*

Remarque 2.3.30. Une autre façon de voir les modules ω_X^q consiste à utiliser les *symboles résidus* définis dans [Ker83]. Cette description est détaillée dans le chapitre 4.

Chapitre 3

Formes multi-logarithmiques d'une intersection complète et liberté

Considérons une intersection complète réduite C de codimension k dans une variété lisse S . Soit (h_1, \dots, h_k) une suite régulière définissant C telle que $\mathcal{I}_C = \sum_{i=1}^k h_i \mathcal{O}_S$ est radical. Des généralisations des notions de formes différentielles logarithmiques (voir définition 3.1.4), champs de vecteurs logarithmiques (voir définition 3.2.1) et liberté (voir définition 3.3.1) du chapitre 2 sont proposées dans [Ale12] et [GS12].

Le résultat principal de ce chapitre est la caractérisation de la liberté de C grâce à la dimension projective du module des k -formes différentielles multi-logarithmiques (voir théorème 3.1.15) : C est libre si et seulement si la dimension projective du module des k -formes multi-logarithmiques est $k - 1$, ce qui équivaut au fait que la dimension projective de $\Omega^k(\log C)$ est inférieure ou égale à $k - 1$.

Au début de ce chapitre, nous rappelons les définitions des objets considérés et éclaircissons les dépendances de ces objets quant au choix des équations (h_1, \dots, h_k) (voir propositions 3.1.10, 3.1.24 et 3.1.21). Nous comparons les deux variantes de la définition de formes multi-logarithmiques proposées dans [AT01] et [Ale12] (voir proposition 3.1.33). Nous montrons ensuite que le module des formes différentielles de degré un le long du diviseur D défini par le produit $h = h_1 \cdots h_k$ satisfait une propriété de décomposition (voir proposition 3.1.45). Dans le cas où D est libre et $k = 2$, cela implique en particulier que D est *splayed* (voir définition 3.1.47 et proposition 3.1.49).

Nous rappelons la définition de champs de vecteurs multi-logarithmiques proposée dans [GS12] (voir définition 3.2.5). Nous montrons que les champs de vecteurs logarithmiques de C permettent de construire des champs de vecteurs multi-logarithmiques (voir proposition 3.2.6). En revanche, comme le montre l'exemple 3.2.10, on n'obtient pas nécessairement tous les champs de vecteurs multi-logarithmiques de cette façon.

Nous montrons que les modules de k -champs de vecteurs multi-logarithmiques et de k -formes différentielles multi-logarithmiques vérifient une forme de dualité (voir proposition 3.2.13) qui généralise la dualité entre $\Omega^1(\log D)$ et $\text{Der}(-\log D)$ que nous avons rappelée dans la proposition 2.1.23. Nous proposons ensuite une preuve de la \mathcal{O}_C -dualité entre l'idéal jacobien et le module des résidus qui reprend le principe de la preuve de [GS14, Proposition 3.4] (voir proposition 3.2.17).

Nous nous intéressons ensuite aux caractérisations de la liberté. La définition que nous donnons est celle proposée dans [GS12] : une intersection complète singulière C est libre si le lieu singulier muni de la structure donnée par $\mathcal{O}_C / \mathcal{I}_C$, avec \mathcal{I}_C l'idéal jacobien, est Cohen-Macaulay de codimension un dans C .

Nous montrons que la liberté de C se caractérise par le fait que la dimension projective du module des k -champs de vecteurs multi-logarithmiques est minimale (voir proposition 3.3.5). Nous généralisons aussi la caractérisation de [BC13] que nous avons déjà mentionnée dans le chapitre précédent (voir proposition 3.3.2).

Le reste du chapitre est consacré à la preuve du résultat principal.

Dans le cas d'une intersection complète libre, nous montrons que les $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S)$ et $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\text{Der}^k(-\log C), \mathcal{O}_S)$ sont concentrés en degrés 0 et $k-1$. Nous montrons de plus que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S)$ est isomorphe au module $\text{Der}^k(-\log C)/\mathcal{I}_C \text{Der}^k(-\log C)$, et que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\text{Der}^k(-\log C), \mathcal{O}_S) = \mathcal{R}_C$ (voir corollaire 3.3.21 et proposition 3.3.23).

Ce chapitre suit en grande partie les paragraphes 2, 3 et 4 et l'annexe de l'article [Poll16].

3.1 Formes multi-logarithmiques et multi-résidus

3.1.1 Définition

Soit S une variété complexe lisse de dimension $m \geq 2$ et \mathcal{O}_S le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur S . On fixe $k \in \{1, \dots, m-1\}$.

Soit $p \in S$ et $\underline{h} = (h_1, \dots, h_k) \in \mathcal{O}_{S,p}$. Dans la suite, nous supposons que la suite (h_1, \dots, h_k) satisfait les conditions :

Conditions 3.1.1.

- 1) (h_1, \dots, h_k) est une suite régulière de $\mathcal{O}_{S,p}$,
- 2) l'idéal $\mathcal{I}_C := \sum_{i=1}^k h_i \mathcal{O}_{S,p}$ est radical.

Pour les énoncés portant sur les faisceaux, on pourra considérer un ouvert U de S pour lequel les équations (h_1, \dots, h_k) convergent et définissent une intersection complète réduite.

Les notations suivantes sont fixées pour le reste du chapitre.

Notation 3.1.2. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on note D_i l'hypersurface de S définie par h_i , et $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$ l'hypersurface de S définie par $h := h_1 \cdots h_k$. Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, on note \widehat{D}_j l'hypersurface définie par $\widehat{h}_j := h_1 \cdots h_{j-1} h_{j+1} \cdots h_k$. On pose aussi pour $I = \{i_1, \dots, i_\ell\} \subseteq \{1, \dots, m\}$, $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_\ell}$.

Notation 3.1.3. On note $C = D_1 \cap \dots \cap D_k \subseteq S$ l'intersection complète définie par (h_1, \dots, h_k) . On note $\mathcal{O}_C := \mathcal{O}_S / \mathcal{I}_C$ le faisceau des germes de fonctions sur C . On pose $n := \dim C = m - k$.

Définition 3.1.4. Soit $p \in S$, $q \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega_{S,p}^q(D)$. On dit que ω est une forme différentielle multi-logarithmique le long de C pour les équations (h_1, \dots, h_k) si

$$\forall j \in \{1, \dots, k\}, dh_j \wedge \omega \in \sum_{i=1}^k \Omega_{S,p}^{q+1}(\widehat{D}_i) = \frac{1}{h} \mathcal{I}_C \Omega_S^{q+1}. \quad (3.1)$$

On note $\Omega^q(\log C, \underline{h})$ le faisceau des germes de formes différentielles multi-logarithmiques le long de C pour les équations (h_1, \dots, h_k) .

Exemple 3.1.5. Quelle que soit l'intersection complète C , on a $\frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h} \in \Omega^k(\log C, \underline{h})$ et pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^k \Omega_S^q(\widehat{D}_i) \subseteq \Omega^q(\log C, \underline{h})$.

Remarque 3.1.6. Si $k = 1$, on a pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{h} \mathcal{I}_C \Omega_S^q = \Omega_S^q$ et donc en particulier, le faisceau des formes différentielles multi-logarithmiques de la définition 3.1.4 coïncide avec le faisceau des formes différentielles logarithmiques de la définition 2.1.1.

Exemple 3.1.7. Considérons $S = (\mathbb{C}^3, 0)$ et la courbe quasi-homogène C de paramétrage (t^4, t^6, t^7) . On peut vérifier que l'idéal radical de C est engendré par la suite régulière (h_1, h_2) où $h_1 = x^3 - y^2$ et $h_2 = x^2y - z^2$. En particulier, C est une intersection complète réduite. On a $dh_1 = 3x^2dx - 2ydy$ et $dh_2 = 2xydx + x^2dy - 2zdz$. Considérons la forme différentielle méromorphe

$$\omega_0 = \frac{4xdy \wedge dz - 6ydx \wedge dz + 7zdx \wedge dy}{h_1 h_2}.$$

Cette forme différentielle s'obtient à partir du champ d'Euler $\chi = 4x\partial_x + 6y\partial_y + 7z\partial_z$ en considérant le produit intérieur $\frac{1}{h} i_\chi(dx \wedge dy \wedge dz)$.

On vérifie que $dh_1 \wedge \omega_0 = \frac{12dx \wedge dy \wedge dz}{h_2}$ et $dh_2 \wedge \omega_0 = \frac{14dx \wedge dy \wedge dz}{h_1}$. Donc $\omega_0 \in \Omega^2(\log C, \underline{h})$.

Nous reviendrons sur cet exemple dans la suite de ce chapitre.

Remarque 3.1.8. Dans le cas des courbes quasi-homogènes, on déterminera explicitement dans la partie 6.1 une résolution libre du module $\Omega^{m-1}(\log C, \underline{h})$, et donc en particulier une famille génératrice.

Remarque 3.1.9. Pour toute intersection complète réduite C on a $\Omega^m(\log C, \underline{h}) = \frac{1}{h} \Omega_S^m$.

Proposition 3.1.10. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, le faisceau $\Omega^q(\log C, \underline{h})$ est cohérent. De plus, le faisceau $h \cdot \Omega^q(\log C, \underline{h})$ ne dépend pas du choix des équations (h_1, \dots, h_k) définissant l'intersection complète C .

Preuve. Le faisceau $h \cdot \Omega^q(\log C, \underline{h})$ est le noyau du morphisme de faisceaux cohérents :

$$\begin{aligned} \Omega_S^q &\rightarrow \left(\frac{\Omega_S^{q+1}}{\mathcal{I}_C \Omega_S^{q+1}} \right)^k \\ \omega &\mapsto (dh_1 \wedge \omega, \dots, dh_k \wedge \omega). \end{aligned}$$

De plus, le noyau de cette application ne dépend pas du choix d'équations. En effet, si (f_1, \dots, f_k) est une suite régulière définissant la même intersection complète réduite C , les idéaux $\sum_{i=1}^k h_i \mathcal{O}_S$ et $\sum_{i=1}^k f_i \mathcal{O}_S$ sont égaux. Il existe donc $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_k(\mathcal{O}_S)$ telle que $(f_1, \dots, f_k)^t = A(h_1, \dots, h_k)^t$. Alors pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $df_j = \sum_{i=1}^k (h_i da_{ji} + a_{ji} dh_i)$, donc $h \cdot \Omega^q(\log C, \underline{h}) \subseteq f \cdot \Omega^q(\log C, \underline{f})$. On obtient l'égalité en échangeant les rôles de (h_1, \dots, h_k) et (f_1, \dots, f_k) . \square

Remarque 3.1.11. Les faisceaux $\Omega^q(\log C, \underline{h})$ dépendent du choix des équations de C . Par exemple, considérons $S = \mathbb{C}^3$ et $h_1 = x_1$, $h_2 = x_2$. Alors $f_1 = x_1$, $f_2 = x_1 + x_2$ définissent la même intersection complète C . On a $\frac{1}{x_1+x_2} \in \Omega^0(\log C, \underline{f})$ mais $\frac{1}{x_1+x_2} \notin \Omega^0(\log C, \underline{h})$.

Remarque 3.1.12. Contrairement au cas des hypersurfaces (voir proposition 2.1.10), les modules $\Omega^q(\log C, \underline{h})$ ne sont pas stables par différentiation dès que $k \geq 2$. En effet, on a $\frac{1}{h_1} \in \Omega^0(\log C, \underline{h})$, mais $d\left(\frac{1}{h_1}\right) = -\frac{1}{h_1^2} dh_1$ n'est pas à pôles simples le long de D , et donc $d\left(\frac{1}{h_1}\right) \notin \Omega^1(\log C, \underline{h})$.

Une variante des modules $\Omega^q(\log C, \underline{h})$ qui autorise des pôles d'ordre arbitraire (voir définition 3.1.29) permet d'avoir la stabilité par différentiation, mais les modules considérés ne sont plus de type fini. Les deux définitions sont en fait liées (voir proposition 3.1.33), et en particulier définissent les mêmes modules de résidus (voir définition 3.1.17 et lemme 3.1.38).

Remarque 3.1.13. Les modules de formes différentielles multi-logarithmiques, que ce soit avec la définition 3.1.4 ou la variante 3.1.29, ne sont pas stables par produits extérieurs. Le problème vient du fait que $\frac{1}{h}\mathcal{I}_C$ et $\sum \mathcal{O}_S(\star\widehat{D}_i)$ ne sont pas stables par produit.

Notation 3.1.14. Pour simplifier les notations, on pose pour tout $q \in \mathbb{N}$,

$$\widetilde{\Omega}_{\underline{h}}^q := \sum_{i=1}^k \Omega_S^q(\widehat{D}_i) = \frac{1}{h} \mathcal{I}_C \Omega_S^q.$$

On pose aussi $\Sigma_{\underline{h}} = \widetilde{\Omega}_{\underline{h}}^0 = \sum_{i=1}^k \frac{1}{\widehat{h}_i} \mathcal{O}_S = \frac{1}{h} \mathcal{I}_C$.

Le théorème suivant généralise la caractérisation 3. de la proposition 2.1.5.

THÉORÈME 3.1.15 ([Ale12, §3, Theorem 1]). *Soit $q \in \mathbb{N}$, $p \in S$ et $\omega \in \Omega_{S,p}^q(D)$. Alors $\omega \in \Omega_{S,p}^q(\log C, \underline{h})$ si et seulement s'il existe une fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}_{S,p}$ n'induisant pas un diviseur de zéro dans $\mathcal{O}_{C,p}$, une $(q-k)$ -forme différentielle holomorphe ξ et une q -forme différentielle méromorphe $\eta \in \widetilde{\Omega}_{\underline{h}}^q$ telles que :*

$$g\omega = \frac{dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_k}{h} \wedge \xi + \eta. \quad (3.2)$$

Corollaire 3.1.16. *Pour $q < k$, $\Omega^q(\log C, \underline{h}) = \widetilde{\Omega}_{\underline{h}}^q$.*

3.1.2 Multi-résidus

De même que dans le cas des hypersurfaces, le théorème 3.1.15 permet de définir la notion de multi-résidu.

Pour $q \in \mathbb{N}$, on note $\Omega_{C,p}^q$ le module des différentielles de Kähler le long de C , qui vérifie :

$$\Omega_{C,p}^q = \frac{\Omega_{S,p}^q}{(h_1, \dots, h_k) \Omega_{S,p}^q + dh_1 \wedge \Omega_{S,p}^{q-1} + \cdots + dh_k \wedge \Omega_{S,p}^{q-1}} \Big|_C = \frac{\Omega_{S,p}^q}{d\mathcal{I}_{C,p} \wedge \Omega_{S,p}^{q-1}} \Big|_C.$$

On désigne par \widetilde{C} la normalisation de C , et par $\mathcal{M}_{C,p}$ l'anneau total des fractions de $\mathcal{O}_{C,p}$.

Définition 3.1.17. *Soit $q \in \mathbb{N}$, $p \in S$ et $\omega \in \Omega_{S,p}^q(\log C)$. Soit $g \in \mathcal{O}_{S,p}$, $\xi \in \Omega_{S,p}^{q-k}$ et $\eta \in \widetilde{\Omega}_{\underline{h}}^q$ satisfaisant les propriétés du théorème 3.1.15. Le multi-résidu de ω est défini par :*

$$\text{res}_{C,\underline{h}}(\omega) = \frac{\xi}{g} \Big|_C \in \mathcal{M}_{C,p} \otimes_{\mathcal{O}_{S,p}} \Omega_{C,p}^{q-k} = \left(\pi_* \left(\mathcal{M}_{\widetilde{C}} \otimes_{\mathcal{O}_{\widetilde{C}}} \Omega_{\widetilde{C}}^{q-k} \right) \right)_p.$$

Le résultat suivant se montre de façon tout à fait analogue à la proposition 2.3.4 en utilisant le lemme de de Rham 2.3.5.

Proposition 3.1.18 ([Ale12, §4, Proposition 2]). *Le multi-résidu de $\omega \in \Omega_{S,p}^q(\log C, \underline{h})$ ne dépend pas du choix de g, ξ, η .*

Notation 3.1.19. On pose $\mathcal{R}_{C,\underline{h}}^{q-k} := \text{res}_{C,\underline{h}} \left(\Omega_{S,p}^q(\log C, \underline{h}) \right)$. Dans le cas $q = k$, on note $\mathcal{R}_{C,\underline{h}} := \mathcal{R}_{C,\underline{h}}^0$. En particulier, pour $q < k$, $\mathcal{R}_{C,\underline{h}}^{q-k} = 0$.

Proposition 3.1.20 ([Ale12, §4 Lemma 1]). *Soit $q \in \mathbb{N}$. La suite suivante est une suite exacte de \mathcal{O}_S -modules :*

$$0 \rightarrow \widetilde{\Omega}_{\underline{h}}^q \rightarrow \Omega^q(\log C, \underline{h}) \xrightarrow{\text{res}_{C,\underline{h}}} \mathcal{R}_{C,\underline{h}}^{q-k} \rightarrow 0. \quad (3.3)$$

En particulier, le faisceau $\mathcal{R}_{C,\underline{h}}^{q-k}$ est cohérent.

Preuve. Il suffit de montrer que le noyau de l'application $\text{res}_{C,\underline{h}}$ est $\tilde{\Omega}_{\underline{h}}^q$. Soit $\omega \in \Omega^q(\log C, \underline{h})$ et g, ξ, η vérifiant les conditions du théorème 3.1.15. Si $\text{res}_{C,\underline{h}}(\omega) = 0$, cela implique que $\xi \in \sum_{i=1}^k h_i \Omega_S^{q-k}$, et donc $g\omega \in \tilde{\Omega}_{\underline{h}}^q$, ou encore $gh\omega \in \mathcal{I}_C \Omega_S^q$. Comme g est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C , on a $h\omega \in \mathcal{I}_C \Omega_S^q$, et donc $\omega \in \tilde{\Omega}_{\underline{h}}^q$. \square

Nous avons déjà signalé dans la proposition 3.1.10 que les modules $h \cdot \Omega_{S,p}^q(\log C, \underline{h})$ pour $q \in \mathbb{N}$ ne dépendent pas du choix des équations définissant C . Concernant les modules des multi-résidus, nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.1.21. *Soit $q \geq k$. Le module des multi-résidus $\mathcal{R}_{C,\underline{h}}^{q-k}$ ne dépend pas du choix des équations (h_1, \dots, h_k) définissant le germe d'intersection complète C . Plus précisément, si (f_1, \dots, f_k) est une autre suite régulière définissant C , et $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k} \in \mathcal{M}_k(\mathcal{O}_{S,p})$ telle que $(f_1, \dots, f_k)^t = A(h_1, \dots, h_k)^t$ on a pour tout $\alpha \in f \cdot \Omega^q(\log C, \underline{f})$,*

$$\text{res}_{C,\underline{h}} \left(\frac{\alpha}{h} \right) = \det(A) \text{res}_{C,\underline{f}} \left(\frac{\alpha}{f} \right).$$

Preuve. Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ on a $df_j = \sum_{i=1}^k (h_i da_{ji} + a_{ji} dh_i)$. Il existe donc $\nu \in \mathcal{I}_C \Omega_S^k$ tel que

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_k = \det(A) \cdot dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k + \nu.$$

Soit $\alpha \in f \cdot \Omega^q(\log C, \underline{f})$ et g, ξ, η satisfaisant les conditions du théorème 3.1.15 pour la suite régulière (f_1, \dots, f_k) . On a donc :

$$\begin{aligned} g\alpha &= df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge \xi + f\eta \\ &= dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k \wedge (\det(A)\xi) + \nu \wedge \xi + f\eta. \end{aligned}$$

De plus, vu que $f\eta \in \mathcal{I}_C \Omega_S^q$ et $\nu \in \mathcal{I}_C \Omega_S^k$, on a $\frac{\nu \wedge \xi + f\eta}{h} \in \tilde{\Omega}_{\underline{h}}^q = \frac{1}{h} \mathcal{I}_C \Omega_S^q$. Par conséquent, on en déduit que $\text{res}_{C,\underline{h}} \left(\frac{\alpha}{h} \right) = \frac{\det(A)\xi}{g} = \det(A) \text{res}_{C,\underline{f}} \left(\frac{\alpha}{f} \right)$. \square

Remarque 3.1.22. Une conséquence de la proposition 3.1.21 est qu'on ne peut pas définir de façon intrinsèque une application "multi-résidu" entre les modules intrinsèques $h \cdot \Omega^q(\log C, \underline{h})$ et $\mathcal{R}_{C,\underline{h}}$.

Notation 3.1.23. Au vu des propositions 3.1.10 et 3.1.21, nous utilisons dorénavant les notations $\Omega^q(\log C)$, $\tilde{\Omega}^q$, \mathcal{R}_C^{q-k} et res_C où la suite régulière est implicitement (h_1, \dots, h_k) .

La proposition suivante montre que l'on peut supposer que m est la dimension de plongement de C .

Proposition 3.1.24. *Soit $\ell \in \{1, \dots, k\}$. On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$ on a $h_i = x_i$, et que pour $i \geq \ell + 1$, $h_i \in \mathbb{C}\{x_{\ell+1}, \dots, x_m\}$. On pose $C' = D_{\ell+1} \cap \dots \cap D_k \subseteq \mathbb{C}^{m-\ell}$, de sorte que $C = \{0\} \times C'$. Alors pour tout $q \geq \ell$:*

$$\Omega^q(\log C) = \frac{1}{x_1 \dots x_\ell} \Omega^{q-\ell}(\log C') \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_\ell + \tilde{\Omega}_{(h_1, \dots, h_k)}^q.$$

Remarque 3.1.25. Notons que si (h_1, \dots, h_k) est une suite régulière dans laquelle h_1 définit une hypersurface lisse, il existe un système de coordonnées (x'_1, \dots, x'_m) dans lequel l'équation h_1 devient $h'_1 = x'_1$, et on peut remplacer les équations h'_2, \dots, h'_k par les équations $h'_2(0, x'_2, \dots, x'_m), \dots, h'_k(0, x'_2, \dots, x'_m)$. En recommençant éventuellement si certaines équations définissent encore une hypersurface lisse, on obtient dans un système de coordonnées convenable une suite régulière satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.1.24, avec $\ell = \text{rang}(dh_i(0))$. En particulier, $m - \ell$ est la dimension de plongement de C .

Preuve (de la proposition 3.1.24). Soit $\omega = \frac{1}{h} \sum a_I dx_I$. Alors par définition $\omega \in \Omega^q(\log C)$ si et seulement si pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $dh_i \wedge \omega \in \tilde{\Omega}_{(h_1, \dots, h_k)}^{q+1}$. En particulier, pour tout $i \in \{1, \dots, \ell\}$, on a $dx_i \wedge \omega \in \tilde{\Omega}_{(h_1, \dots, h_k)}^{q+1}$. Cela implique que pour tout I tel que $\{1, \dots, \ell\} \not\subseteq I$, $a_I \in (h_1, \dots, h_k)$. Les termes de la forme $a_{\{1, \dots, \ell\} \cup I'}$ avec $|I'| = q - \ell$ et $I' \subseteq \{\ell + 1, \dots, k\}$ peuvent se décomposer en $a_{\{1, \dots, \ell\} \cup I'} = b_{I'} + \sum_{j=1}^{\ell} x_j c_{I', j}$ avec $b_{I'} \in \mathbb{C}\{x_{\ell+1}, \dots, x_m\}$ et $c_{I', j} \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_m\}$. On peut donc écrire

$$\omega = \frac{1}{x_1 \cdots x_\ell} \omega' \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_\ell + \eta$$

avec $\eta \in \tilde{\Omega}_{(h_1, \dots, h_k)}^q$ et $\omega' = \frac{1}{h_{\ell+1} \cdots h_k} \sum_{\substack{I' \subseteq \{\ell+1, \dots, k\} \\ |I'| = q - \ell}} b_{I'} dx_{I'}$.

Comme $h_{\ell+1}, \dots, h_k \in \mathbb{C}\{x_{\ell+1}, \dots, x_m\}$, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, la condition

$$dh_i \wedge \frac{1}{x_1 \cdots x_k} \omega' \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_\ell \in \tilde{\Omega}_{(h_1, \dots, h_k)}^{q+1}$$

est équivalente à la condition $dh_i \wedge \omega' \in \tilde{\Omega}_{(h_{\ell+1}, \dots, h_k)}^{q-\ell+1}$. Par conséquent, $\omega \in \Omega^q(\log C)$ si et seulement si $\omega' \in \Omega^{q-\ell}(\log C')$. D'où le résultat. \square

Corollaire 3.1.26. *En conservant les mêmes hypothèses et notations, pour tout $q \geq k$, le module \mathcal{R}_C^{q-k} est égal au \mathcal{O}_C -module $\mathcal{R}_{C'}^{q-k}$.*

La proposition suivante généralise la proposition 2.3.9. C'est une conséquence de [Sch16, Proposition 2.1] et du théorème 3.1.40. Nous en proposons ici une preuve directe qui se rapproche de celle de K. Saito dans le cas des hypersurfaces, et qui ne fait pas appel au théorème 3.1.40.

Notation 3.1.27. Soit $p \in S$. On note $\mathcal{J}_{C,p}$ l'idéal jacobien de C en p , qui est l'idéal de $\mathcal{O}_{C,p}$ engendré par les mineurs maximaux de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_k) . Cet idéal est indépendant du choix des équations de C .

Proposition 3.1.28. *Soit $p \in S$. On a :*

$$\left(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{C}}\right)_p \subseteq \mathcal{R}_{C,p}.$$

Preuve. Pour simplifier les notations, on note $\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ au lieu de $(\pi_*(\mathcal{O}_{\tilde{C}}))_p$, \mathcal{O}_C pour $\mathcal{O}_{C,p}$, etc...

Soit $\alpha \in \mathcal{O}_{\tilde{C}}$. D'après la proposition 2.3.11, pour tout $g \in \mathcal{J}_C$, on a $g\alpha \in \mathcal{O}_C$.

Pour tout sous-ensemble $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ de cardinal k , on note $\Delta_J \in \mathcal{O}_S$ le mineur maximal de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_k) relatif à J . Alors il existe $a_J \in \mathcal{O}_S$ tel que sa classe dans \mathcal{O}_C vérifie $\Delta_J \alpha = \overline{a_J}$. Soit I, J deux sous-ensembles de cardinal k de $\{1, \dots, m\}$. Alors l'égalité $\Delta_I \Delta_J \alpha - \Delta_J \Delta_I \alpha = 0$ dans \mathcal{O}_C se relève en une égalité :

$$\Delta_I a_J - \Delta_J a_I = h_1 b_1^{IJ} + \cdots + h_k b_k^{IJ} \in \mathcal{O}_S.$$

On pose $\omega = \frac{\sum_{|J|=k} a_J dx_J}{h} \in \Omega_S^k(D)$. L'égalité précédente donne :

$$\begin{aligned} \Delta_I \omega &= \frac{\sum_J \Delta_I a_J dx_J}{h} = \frac{a_I}{h} \sum_J \Delta_J dx_J + \eta \text{ avec } \eta \in \tilde{\Omega}^k \\ &= a_I \frac{dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_k}{h} + \eta. \end{aligned}$$

La proposition 2.3.11 assure l'existence d'une combinaison linéaire $\sum c_I \Delta_I$ qui induit un non diviseur de zéro dans \mathcal{O}_C . On a alors $\text{res}_{C, \underline{h}}(\omega) = \frac{\sum c_I a_I}{\sum c_I \Delta_I} = \alpha \in \mathcal{R}_C$. \square

3.1.3 Pôles arbitraires

La définition de $\Omega^\bullet(\log C)$ que nous avons adoptée est celle proposée par A.G. Aleksandrov dans [Ale12]. Dans les travaux antérieurs de A. Tsikh et A.G. Aleksandrov (voir [AT01], [AT08]), une variante de la définition faisant apparaître des pôles d'ordre arbitraire le long de D est proposée.

Notre choix permet de considérer des \mathcal{O}_S -modules de type fini, ce qui est essentiel pour notre théorème 3.3.7. Cependant, la remarque 3.1.12 montre que les modules $\Omega^\bullet(\log C)$ ne forment pas un complexe pour la différentielle d .

Pourtant, l'isomorphisme 3.1.40 montre que les modules des résidus \mathcal{R}_C^\bullet forment un complexe pour la différentielle d .

L'objectif de ce paragraphe est d'éclaircir le lien entre les deux définitions de formes multi-logarithmiques, et d'en déduire directement que $(\mathcal{R}_C^\bullet, d)$ est un complexe, sans utiliser l'isomorphisme 3.1.40.

Rappelons que pour $q \in \mathbb{N}$, $\Omega^q(\star D)$ désigne le module des q -formes méromorphes à pôles d'ordre arbitraire le long de D .

Définition 3.1.29 ([AT01], [AT08]). *Soit $q \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega^q(\star D)$. On dit que ω est une forme différentielle multi-logarithmique le long de C à pôles d'ordre arbitraire le long de D , ou forme multi-logarithmique à pôles arbitraires, si les conditions suivantes sont satisfaites :*

1. pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $h_j \omega \in \sum_{i=1}^k \Omega^q(\star \widehat{D}_i)$,
2. pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $dh_j \wedge \omega \in \sum_{i=1}^k \Omega^{q+1}(\star \widehat{D}_i)$.

On note $\underline{\Omega}^q(\log C)$ le faisceau des formes multi-logarithmiques à pôles arbitraires.

Pour simplifier les notations, on pose $\widetilde{\underline{\Omega}}^q = \sum_{i=1}^k \Omega^q(\star \widehat{D}_i)$.

Remarque 3.1.30. La définition ci-dessus donne un module différent de $\Omega^\bullet(\log C)$ dès que $k \geq 2$. En effet, on vérifie par exemple que $\frac{1}{h_1^2} \in \underline{\Omega}^0(\log C)$ mais $\frac{1}{h_1^2} \notin \Omega^0(\log C)$.

Avec la définition ci-dessus, on retrouve une propriété proche de la définition 2.1.1 du cas hypersurface, qui de plus permet de montrer la stabilité par d de $\bigoplus_{q \in \mathbb{N}} \underline{\Omega}^q(\log C)$.

Proposition 3.1.31 ([AT08, Proposition 1.1]). *Soit $q \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega^q(\star D)$. Alors $\omega \in \underline{\Omega}^q(\log C)$ si et seulement si pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $h_j \omega \in \widetilde{\underline{\Omega}}^q$ et $h_j d\omega \in \widetilde{\underline{\Omega}}^{q+1}$.*

Preuve. En remarquant que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\underline{\Omega}}^q$ est stable par d , la proposition est une conséquence directe de la règle de Leibniz $d(h_j \omega) = dh_j \wedge \omega + h_j d\omega$. \square

Corollaire 3.1.32. *Soit $q \in \mathbb{N}$. Si $\omega \in \underline{\Omega}^q(\log C)$, alors $d\omega \in \underline{\Omega}^{q+1}(\log C)$.*

Preuve. Par la proposition 3.1.31 on a pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $h_j d\omega \in \widetilde{\underline{\Omega}}^{q+1}$ et $d(d\omega) = 0$. \square

Notre objectif est maintenant de déterminer le lien entre les deux définitions de formes multi-logarithmiques. Nous avons déjà vu que les définitions ne sont pas équivalentes (voir remarque 3.1.30). Le résultat suivant donne une relation simple entre les modules $\Omega^q(\log C)$ et $\underline{\Omega}^q(\log C)$:

Proposition 3.1.33. *Pour tout $q \in \mathbb{N}$ on a l'égalité :*

$$\underline{\Omega}^q(\log C) = \Omega^q(\log C) + \widetilde{\underline{\Omega}}^q.$$

Établissons d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.1.34 ([CMNM02, Lemma 2.3]). *Soit A un anneau local et (a_1, \dots, a_k) une suite régulière de A . Pour $p \in \{1, \dots, k\}$, s'il existe $\alpha \in A$, $(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{N}^k$ et $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ tels que $\alpha a_1^{s_1} \cdots a_k^{s_k} \in \sum_{i=1}^p a_i^{s_i+n_i} A$ alors $\alpha \in \sum_{i=1}^p a_i^{n_i} A$.*

Preuve. On montre le cas $p = k$, qui est celui qui nous intéresse dans la suite. Il existe donc $c_1, \dots, c_k \in A$ tels que :

$$a_1^{s_1} \cdots a_k^{s_k} \alpha = c_1 a_1^{s_1+n_1} + \cdots + c_k a_k^{s_k+n_k}.$$

On a donc :

$$a_1^{s_1} (a_2^{s_2} \cdots a_k^{s_k} \alpha - a_1^{n_1} c_1) \in (a_2^{s_2+n_2}, \dots, a_k^{s_k+n_k}).$$

Comme l'anneau A est local, la suite $(a_2^{s_2+n_2}, \dots, a_k^{s_k+n_k}, a_1^{s_1})$ est une suite régulière, et donc

$$a_2^{s_2} \cdots a_k^{s_k} \alpha \in (a_1^{n_1}, a_2^{s_2+n_2}, \dots, a_k^{s_k+n_k}).$$

En itérant cette méthode en permutant l'ordre des éléments de la suite régulière à chaque fois, on obtient le résultat attendu. \square

Preuve (de la proposition 3.1.33). L'inclusion $\Omega^q(\log C) + \tilde{\Omega}^q \subseteq \underline{\Omega}^q(\log C)$ est claire. Pour l'autre inclusion, nous fixons un point $p \in D$ et on montre l'égalité des fibres des faisceaux. Pour ne pas alourdir les notations, on n'écrit pas l'indice p dans les différents modules impliqués.

Soit $\omega \in \underline{\Omega}^q(\log C)$. Pour tout $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ tel que $|I| = q$, il existe $a_I \in \mathcal{O}_S$ et $n^I \in \mathbb{N}^k$ qui vérifient¹ d'une part la condition $a_I \notin (h_1^{n_1^I}, \dots, h_k^{n_k^I})$ et d'autre part la condition pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $a_I \notin (h_j)$ et tels qu'il existe $\eta \in \tilde{\Omega}^q$ vérifiant :

$$\omega = \sum_I \frac{a_I dx_I}{h_1^{n_1^I} \cdots h_k^{n_k^I}} + \eta.$$

On notera que l'on n'impose pas $a_I \notin (h_1, \dots, h_k)$.

Montrons que l'on peut prendre pour tout I , $n^I = (1, \dots, 1)$.

Comme $\omega \in \underline{\Omega}^q(\log C)$, on a $h_1 \omega \in \tilde{\Omega}^q$. Fixons $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ tel que $|I| = q$. Il existe $(b_1, \dots, b_k) \in \mathcal{O}_S^k$ et pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $m^{(j)} = (m_1^{(j)}, \dots, m_k^{(j)}) \in \mathbb{N}^k$ avec $m_j^{(j)} = 0$, tels que

$$\frac{a_I}{h_1^{n_1^I-1} h_2^{n_2^I} \cdots h_k^{n_k^I}} = \sum_{j=1}^k \frac{b_j}{\underline{h}^{m^{(j)}}} \in \tilde{\Omega}^q.$$

où $\underline{h}^{m^{(j)}} = h_1^{m_1^{(j)}} \cdots h_k^{m_k^{(j)}}$. Pour simplifier les notations, on pose pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$ $n_j = n_j^I$, et $n' = (n_1 - 1, n_2, \dots, n_k)$. On pose pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $p_i = \max_{j \in \{1, \dots, k\}} m_i^{(j)}$. On a :

$$\frac{a_I}{\underline{h}^{n'}} = \frac{\underline{h}^{p-m^{(1)}} b_1 + \cdots + \underline{h}^{p-m^{(k)}} b_k}{\underline{h}^p}.$$

En particulier, $a_I \underline{h}^{p-n'}$ est holomorphe. De plus, par hypothèse, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $a_I \notin (h_i)$, et la suite (h_1, \dots, h_k) est régulière, donc pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $p_i \geq n'_i$. Puisque

¹Si $a_I \in (h_1^{n_1^I}, \dots, h_k^{n_k^I})$, alors $\frac{a_I dx_I}{h_1^{n_1^I} \cdots h_k^{n_k^I}} \in \tilde{\Omega}^q$ et on remplace η par $\eta + \frac{a_I dx_I}{h_1^{n_1^I} \cdots h_k^{n_k^I}}$. Si $a_I \in (h_i)$ on peut simplifier par h_i , ce qui diminue l'exposant de h_i au dénominateur de 1. On recommence si nécessaire pour que les conditions soient satisfaites.

pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $m_j^{(j)} = 0$, on a $\underline{h}^{p-n'} a_I \in (h_1^{p_1}, \dots, h_k^{p_k})$. Le lemme 3.1.34 donne alors $a_I \in (h_1^{n_1-1}, h_2^{n_2}, \dots, h_k^{n_k})$, de sorte que

$$\frac{a_I dx_I}{\underline{h}^n} = \frac{c_I dx_I}{h_1 h_2^{n_2} \dots h_k^{n_k}} + \eta'$$

avec $\eta' \in \tilde{\Omega}^q$ et $c_I \in \mathcal{O}_S$. En itérant le processus, on peut montrer qu'il existe une q -forme $\omega' \in \frac{1}{\underline{h}} \Omega_S^q$ à pôles simples le long de D et $\eta'' \in \tilde{\Omega}^q$ tels que

$$\omega = \omega' + \eta''.$$

Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, $dh_j \wedge \omega \in \tilde{\Omega}^{q+1}$, donc $dh_j \wedge \omega' \in \tilde{\Omega}^{q+1}$. Comme ω' est à pôles simples, il existe $(b_K)_{|K|=k}$ tels que $dh_j \wedge \omega' = \sum_{|K|=q+1} \frac{b_K dx_K}{h_1 \dots h_k}$. Alors pour tout K et tout $j \in \{1, \dots, k\}$, comme $dh_j \wedge \omega'$ appartient au module à pôles d'ordre arbitraire $\tilde{\Omega}^{q+1}$, il existe des exposants $m_j^{(j)}$ vérifiant $m_j^{(j)} = 0$ et des éléments $\beta_j^K \in \mathcal{O}_S$ tels que :

$$\frac{b_K}{h_1 \dots h_k} = \frac{\beta_1^K}{h_2^{m_2^1} \dots h_k^{m_k^1}} + \dots + \frac{\beta_k^K}{h_1^{m_1^k} \dots h_{k-1}^{m_{k-1}^k}} = \sum_{j=1}^k \frac{\beta_j^K}{\underline{h}^{m_j^{(j)}}}.$$

Le lemme 3.1.34 peut être utilisé dans une preuve semblable à la preuve précédente pour montrer que $dh_j \wedge \omega' \in \tilde{\Omega}^q$, et donc $\omega' \in \Omega^q(\log C)$. Cela termine la preuve de la proposition 3.1.33. \square

Le résultat suivant est alors une conséquence directe de la proposition 3.1.33 et du théorème 3.1.15 :

Corollaire 3.1.35 ([AT08, Proposition 1.1]). *Soit $\omega \in \Omega^q(\log C)$. Il existe $g \in \mathcal{O}_S$ induisant un non diviseur de zéro dans \mathcal{O}_C , une $(q-k)$ -forme holomorphe $\xi \in \Omega_S^{q-k}$, et $\eta \in \tilde{\Omega}^q$ tels que*

$$g\omega = \frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h_1 \dots h_k} \wedge \xi + \eta.$$

Remarque 3.1.36. La preuve de [AT08, Proposition 1.1] traite le cas des formes à pôles simples, mais il manque le cas des formes différentielles à pôles d'ordre arbitraire.

Définition 3.1.37. *Le multi-résidu de $\omega \in \Omega^q(\log C)$ est $\underline{\text{res}}_C(\omega) = \frac{\xi}{g} \Big|_C \in \Omega_C^{q-k} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{M}_C$.*

De même que pour res_C , l'application $\underline{\text{res}}_C$ est bien définie (see [AT08, Proposition 1.2]). D'après la proposition 3.1.33, on a l'égalité suivante :

Lemme 3.1.38.

$$\underline{\text{res}}_C(\underline{\Omega}^q(\log C)) = \text{res}_C(\Omega^q(\log C)). \quad (3.4)$$

Nous pouvons à présent donner le résultat annoncé :

Corollaire 3.1.39. *Le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^q(\log C) & \xrightarrow{d} & \Omega^{q+1}(\log C) \\ \downarrow \text{res}_C & & \downarrow \text{res}_C \\ \mathcal{R}_C^{q-k} & \xrightarrow{(-1)^k d} & \mathcal{R}_C^{q+1-k} \end{array}$$

En particulier, \mathcal{R}_C^\bullet est stable par la différentielle d .

Preuve. C'est une conséquence du corollaire 3.1.35. \square

Un des objectifs des articles [AT01] et [AT08] est de donner une interprétation des formes régulières méromorphes en termes de résidus logarithmiques.

De même que dans le cas des hypersurfaces, on a l'isomorphisme suivant (voir définition 2.3.25 et théorème 2.3.29) :

THÉORÈME 3.1.40 ([AT08, Theorem 3.1]). *Soit C une intersection complète réduite de S . Alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, les modules \mathcal{R}_C^q et ω_C^q sont isomorphes.*

Ce théorème est *a priori* prouvé dans [AT08] avec la définition 3.1.29, et le lemme 3.1.38 assure que les modules de multi-résidus de $\underline{\Omega}^q(\log C)$ et $\Omega^q(\log C)$ sont égaux.

3.1.4 Une condition sur les formes différentielles logarithmiques du diviseur associé à une suite régulière

Dans ce paragraphe, nous montrons que la condition que C est une intersection complète réduite implique une propriété de décomposition du module des 1-formes différentielles logarithmiques du diviseur D associé à la suite régulière considérée (voir proposition 3.1.45).

Nous avons d'abord besoin de ce lemme d'algèbre commutative, que nous prouvons faute de référence.

Lemme 3.1.41. *Soit $C \subset S$ un germe d'intersection complète réduite défini par une suite régulière (h_1, \dots, h_k) . Alors l'intersection complète définie par (h_1, \dots, h_{k-1}) est aussi réduite.*

Preuve. Soit $g \in \sqrt{(h_1, \dots, h_{k-1})}$. Comme $\sqrt{(h_1, \dots, h_{k-1})} \subseteq \sqrt{(h_1, \dots, h_k)} = (h_1, \dots, h_k)$, il existe $f_1 \in (h_1, \dots, h_{k-1})$ et $\alpha_1 \in \mathcal{O}_S$ tels que $g = f_1 + \alpha_1 h_k$. On a donc $\alpha_1 h_k \in \sqrt{(h_1, \dots, h_{k-1})}$. La suite (h_1, \dots, h_k) étant régulière on a $\alpha_1 \in \sqrt{(h_1, \dots, h_{k-1})}$. Le même raisonnement appliqué à α_1 donne l'existence d'éléments $f_2 \in (h_1, \dots, h_{k-1})$ et $\alpha_2 \in \mathcal{O}_S$ tels que $g = f_2 + \alpha_2 h_k^2$. Par récurrence, on montre que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_i \in (h_1, \dots, h_{k-1})$ et $\alpha_i \in \mathcal{O}_S$ tels que $g = f_i + \alpha_i h_k^i$. Par conséquent, la classe \bar{g} de g dans l'anneau $\mathcal{O}_S/(h_1, \dots, h_{k-1})$ satisfait

$$\bar{g} \in \bigcap_{i \geq 1} \overline{(h_k^i)} \subseteq \bigcap_{i \geq 1} \overline{(\mathfrak{m}^i)} \subset \mathcal{O}_S/(h_1, \dots, h_{k-1}).$$

D'après le théorème d'intersection de Krull (voir par exemple [dJP00, corollaire 1.3.5]), cela implique que $\bar{g} = 0$, c'est-à-dire que $g \in (h_1, \dots, h_{k-1})$. On a donc $\sqrt{(h_1, \dots, h_{k-1})} = (h_1, \dots, h_{k-1})$. \square

Corollaire 3.1.42. *On conserve les mêmes hypothèses que dans le lemme 3.1.41. Alors pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$ l'intersection complète définie par $(h_1, \dots, h_{i-1}, \prod_{j=i}^k h_j)$ est réduite. En particulier, l'hypersurface D définie par $h = \prod_{j=1}^k h_j$ est réduite.*

Preuve. Il est suffisant de montrer le résultat pour $i = k-1$, la propriété se déduisant de ce cas par récurrence.

Soit $g \in \sqrt{(h_1, \dots, h_{k-2}, h_{k-1}h_k)}$. Alors $g \in (h_1, \dots, h_k)$. Pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, il existe donc $\alpha_j \in \mathcal{O}_S$ tel que $g = \sum_{j=1}^k \alpha_j h_j$. On a donc :

$$\alpha_{k-1} h_{k-1} + \alpha_k h_k \in \sqrt{(h_1, \dots, h_{k-2}, h_{k-1}h_k)}.$$

Soit $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $(\alpha_{k-1} h_{k-1} + \alpha_k h_k)^q \in (h_1, \dots, h_{k-2}, h_{k-1}h_k)$. Comme (h_1, \dots, h_k) est une suite régulière, on a $\alpha_{k-1}^q \in (h_1, \dots, h_{k-2}, h_k)$ et $\alpha_k^q \in (h_1, \dots, h_{k-1})$. D'après le lemme 3.1.41, ces idéaux sont radicaux et donc $\alpha_{k-1} \in (h_1, \dots, h_{k-2}, h_k)$ et $\alpha_k \in (h_1, \dots, h_{k-1})$. Par conséquent, $g = \sum_{j=1}^k \alpha_j h_j \in (h_1, \dots, h_{k-2}, h_{k-1}h_k)$. \square

La proposition suivante donne le lien entre les formes différentielles logarithmiques du diviseur D défini par $h = h_1 \cdots h_k$ et celle de l'intersection complète C définie par (h_1, \dots, h_k) .

Proposition 3.1.43. *Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a*

$$\Omega^q(\log D) \subseteq \Omega^q(\log C).$$

Par conséquent, $\text{res}_C(\Omega^q(\log D)) \subseteq \text{res}_C(\Omega^q(\log C))$, où res_C est l'application résidu de l'intersection complète C .

Preuve. Soit $\omega = \frac{\alpha}{h} \in \Omega^q(\log D)$. Alors $dh \wedge \omega \in \Omega_S^{q+1}$ donc il existe $\theta \in \Omega_S^{q+1}$ tel que

$$\sum_{i=1}^k \widehat{h}_i dh_i \wedge \alpha = h_1 \cdots h_k \theta.$$

Par conséquent, pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$,

$$\widehat{h}_j dh_j \wedge \alpha = h_j \cdot \left(\widehat{h}_j \theta - \sum_{i \neq j} \widehat{h}_i \widehat{h}_j dh_i \wedge \alpha \right)$$

où $\widehat{h}_i \widehat{h}_k = \prod_{\ell \notin \{i, j\}} h_\ell$. On en déduit que h_j divise $\widehat{h}_j dh_j \wedge \alpha$. Comme la suite (h_1, \dots, h_k) est régulière, h_j divise $dh_j \wedge \alpha$, et donc $dh_j \wedge \omega \in \Omega^{q+1}(\widehat{D}_j)$. \square

La proposition 3.1.43 s'obtient aussi directement à partir du résultat plus fort suivant, dont la preuve est plus complexe que la preuve que nous venons de présenter.

Proposition 3.1.44 ([Ale12, §2, Proposition 1]). *Soit $\omega \in \Omega^q(\log D)$ et $i \in \{1, \dots, k\}$. Alors*

$$h_i \omega \in \Omega^q(\log \widehat{D}_i) \text{ et } dh_i \wedge \omega \in \Omega^{q+1}(\log \widehat{D}_i).$$

Nous pouvons à présent énoncer et démontrer le résultat annoncé au début du paragraphe :

Proposition 3.1.45. *Soit C une intersection complète réduite. On conserve les notations 3.1.2. Le module des 1-formes logarithmiques le long de l'hypersurface D vérifie :*

$$\Omega^1(\log D) = \Omega^1(\log D_1) + \cdots + \Omega^1(\log D_k).$$

Preuve. On considère d'abord le cas $k = 2$. Soit $\omega \in \Omega^1(\log D)$. Par le corollaire 3.1.16, il existe $\eta_1, \eta_2 \in \Omega_S^1$ tels que $\omega = \frac{\eta_1}{h_1} + \frac{\eta_2}{h_2}$. Alors :

$$dh \wedge \omega = dh_1 \wedge \eta_2 + dh_2 \wedge \eta_1 + \frac{h_2 dh_1 \wedge \eta_1}{h_1} + \frac{h_1 dh_2 \wedge \eta_2}{h_2} \in \Omega_S^2.$$

Il existe donc $\theta \in \Omega_S^2$ tel que

$$h_2^2 dh_1 \wedge \eta_1 + h_1^2 dh_2 \wedge \eta_2 = h_1 h_2 \theta.$$

Comme la suite (h_1, h_2) est régulière, h_2 divise $dh_2 \wedge \eta_2$ et h_1 divise $dh_1 \wedge \eta_1$. Par conséquent, pour $i = 1, 2$, on a $\frac{\eta_i}{h_i} \in \Omega^1(\log D_i)$.

Le cas général s'obtient par récurrence à partir du cas $k = 2$. En effet, si pour un $i \in \{1, \dots, k-1\}$ on a $\Omega^1(\log D) = \Omega^1(\log D_1) + \cdots + \Omega^1(\log D_i) + \Omega^1(\log D_{i+1} \cup \cdots \cup D_k)$, alors par le lemme 3.1.41, (h_{i+1}, \dots, h_k) est une suite régulière qui engendre un idéal radical, et par le corollaire 3.1.42, l'idéal $(h_{i+1}, h_{i+2} \cdots h_k)$ est radical et la suite est régulière. En utilisant le résultat pour $k = 2$, on en déduit que

$$\Omega^1(\log D_{i+1} \cup \cdots \cup D_k) = \Omega^1(\log D_{i+1}) + \Omega^1(\log D_{i+2} \cup \cdots \cup D_k).$$

D'où le résultat par récurrence. \square

Remarque 3.1.46. La proposition précédente donne en particulier une condition nécessaire sur $\Omega^1(\log D)$ pour que C soit une intersection complète réduite.

La propriété de décomposition de la proposition 3.1.45 est liée dans le cas $k = 2$ à des conditions de diviseurs *splayed*.

Définition 3.1.47 ([Fab13, Definition 2.3]). Soit $p \in S$. On dit que le diviseur D est *splayed* en p (selon (D_1, D_2)) s'il existe un système de coordonnées (x_1, \dots, x_m) centré en p tel qu'il existe une équation h de D en p , un entier $\ell \in \{1, \dots, m-1\}$ et des fonctions holomorphes non constantes $h_1 \in \mathbb{C}\{x_1, \dots, x_\ell\}$ et $h_2 \in \mathbb{C}\{x_{\ell+1}, \dots, x_m\}$ vérifiant :

$$h(x_1, \dots, x_m) = h_1(x_1, \dots, x_\ell) \cdot h_2(x_{\ell+1}, \dots, x_m)$$

et h_1 est une équation de D_1 et h_2 est une équation de D_2 .

La condition d'être *splayed* est liée aux formes différentielles logarithmiques de la façon suivante :

THÉORÈME 3.1.48 ([AF13, Theorem 2.12]). Soit D_1 et D_2 deux germes de diviseurs réduits de S sans composante commune, et $D = D_1 \cup D_2$. On a alors une injection

$$\Omega^1(\log D_1) + \Omega^1(\log D_2) \hookrightarrow \Omega^1(\log D).$$

Si D est *splayed* selon (D_1, D_2) alors cette inclusion est un isomorphisme.

Si de plus $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\Omega^1(\log D), \mathcal{O}_S) = 0$, donc en particulier, si D est libre, alors la réciproque est vraie.

On déduit donc de ce théorème et de notre proposition 3.1.45 le corollaire suivant :

Corollaire 3.1.49. Si C est une intersection complète réduite de codimension 2 et si D vérifie $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\Omega^1(\log D), \mathcal{O}_S) = 0$ alors D est un diviseur *splayed*.

3.2 Champs de vecteurs multi-logarithmiques

La proposition 2.1.23 montre que dans le cas des hypersurfaces considérées dans la théorie de K. Saito dans [Sai80], le module des 1-formes logarithmiques est en dualité avec le module des champs de vecteurs logarithmiques. Le résultat principal que nous prouvons dans ce paragraphe est qu'une sorte de dualité ("perfect pairing") à valeur dans $\frac{1}{h}\mathcal{I}_C$ s'observe encore dans le cas des intersections complètes entre le module des k -formes multi-logarithmiques et le module des k -champs de vecteurs multi-logarithmiques (voir définition 3.2.1 et proposition 3.2.13).

Nous utilisons ensuite cette dualité pour montrer que le dual sur \mathcal{O}_C de l'idéal jacobien est le module des multi-résidus \mathcal{R}_C .

3.2.1 Définition

La définition des k -champs de vecteurs multi-logarithmiques est suggérée dans [GS12].

Définition 3.2.1 ([GS12, (5.1)]). On pose $\Theta_S^k := \wedge^k \Theta_S$ le produit extérieur d'ordre k du module des champs de vecteurs holomorphes Θ_S . Un k -champ de vecteurs $\delta \in \Theta_S^k$ est dit multi-logarithmique le long de C s'il vérifie :

$$dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k(\delta) \in \mathcal{I}_C.$$

On note $\text{Der}^k(-\log C)$ le faisceau des k -champs de vecteurs multi-logarithmiques le long de C .

Exemple 3.2.2. Reprenons la courbe de l'exemple 3.1.7. On a $h_1 = x^3 - y^2$ et $h_2 = x^2y - z^2$ et $dh_1 \wedge dh_2 = 4yzdy \wedge dz - 6x^2zdx \wedge dz + (3x^4 + 4xy^2)dx \wedge dy$. Soit

$$\delta = 2xy\partial_y \wedge \partial_z - x^2\partial_x \wedge \partial_z - 2z\partial_x \wedge \partial_y.$$

Alors $dh_1 \wedge dh_2(\delta) = 8xy^2z + 6x^4z - 2z(3x^4 + 4xy^2) = 0$. Par conséquent, $\delta \in \text{Der}^2(-\log C)$.

Proposition 3.2.3. *Le faisceau $\text{Der}^k(-\log C)$ ne dépend pas du choix des équations (h_1, \dots, h_k) .*

Preuve. On reprend les notations de l'énoncé et de la preuve de la proposition 3.1.21, en particulier, $\nu \in \mathcal{I}_C \Theta_S^k$. Supposons que $\delta \in \Theta_S^k$ vérifie $dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k(\delta) \in \mathcal{I}_C$. Alors

$$df_1 \wedge \dots \wedge df_k(\delta) = \nu(\delta) + \det(A) \cdot dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k(\delta) \in \mathcal{I}_C.$$

D'où le résultat. □

La proposition suivante est une conséquence directe de la définition 3.2.1, où \mathcal{I}_C est l'idéal jacobien défini dans la notation 3.1.27.

Proposition 3.2.4. *La suite suivante est une suite exacte de faisceaux de \mathcal{O}_S -modules :*

$$0 \rightarrow \text{Der}^k(-\log C) \rightarrow \Theta_S^k \xrightarrow{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k} \mathcal{I}_C \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

En particulier, $\text{Der}^k(-\log C)$ est cohérent.

3.2.2 Comparaison avec les champs de vecteurs logarithmiques

Dans [Pik14] est définie la notion de champ de vecteurs logarithmiques d'un espace réduit analytique quelconque. Nous comparons dans ce chapitre ce module avec le module des k -champs de vecteurs multi-logarithmiques que nous venons de définir dans le cas des intersections complètes.

Définition 3.2.5 ([Pik14]). *Le module des champs de vecteurs logarithmiques le long d'un espace réduit analytique X est*

$$\text{Der}(-\log X) = \{\eta \in \Theta_S ; \eta(\mathcal{I}_X) \subseteq \mathcal{I}_X\}$$

où \mathcal{I}_X est l'idéal radical définissant X .

Un champ de vecteur $\eta \in \Theta_S$ vérifie $\eta \in \text{Der}(-\log X)$ si et seulement si η est tangent à X en ses points lisses.

Revenons au cas d'une intersection complète C définie par un idéal radical $\mathcal{I}_C = (h_1, \dots, h_k)$. On peut construire des k -champs de vecteurs multi-logarithmiques à partir des champs de vecteurs logarithmiques, comme le montre la propriété suivante :

Proposition 3.2.6. *On a l'inclusion suivante :*

$$\text{Der}(-\log C) \wedge \Theta_S^{k-1} \subseteq \text{Der}^k(-\log C).$$

Preuve. Soit $\eta \in \text{Der}(-\log C)$, et $\delta_2, \dots, \delta_k \in \Theta_S$. Étant donné que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $dh_i(\eta) \in \mathcal{I}_C$, on a

$$dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k(\eta \wedge \delta_2 \wedge \dots \wedge \delta_k) \in \mathcal{I}_C.$$

On a donc par définition $\eta \wedge \delta_2 \wedge \dots \wedge \delta_k \in \text{Der}^k(-\log C)$. □

Remarque 3.2.7. Soit $\eta \in \text{Der}(-\log D)$. Alors $dh(\eta) = \sum_{i=1}^k \widehat{h}_i dh_i(\eta) \in (h)$. Comme la suite (h_1, \dots, h_k) est une suite régulière, cela implique que pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $dh_i(\eta) \in (h_i)$ de sorte que $\text{Der}(-\log D) \subseteq \text{Der}(-\log C)$. En particulier, on a (voir [GS12, (5.3)]) :

$$\text{Der}(-\log D) \wedge \Theta_S^{k-1} \subseteq \text{Der}^k(-\log C). \quad (3.6)$$

Lemme 3.2.8. Si C est l'intersection complète lisse définie par (x_1, \dots, x_k) dans \mathbb{C}^m alors :

$$\text{Der}(-\log C) \wedge \Theta_S^{k-1} = \text{Der}^k(-\log C).$$

Preuve. Une famille génératrice de $\text{Der}(-\log C)$ est (voir [Pik14, Exemple 2.1])

$$\left(x_i \partial_{x_j}\right)_{1 \leq i, j \leq k} \quad \text{et} \quad (\partial_{x_i})_{k+1 \leq i \leq m}.$$

On pose pour $I = i_1, \dots, i_k \subseteq \{1, \dots, m\}$, $\partial x_I = \partial x_{i_1} \wedge \dots \wedge \partial x_{i_k}$. Déterminons $\text{Der}^k(-\log C)$. Soit $\delta = \sum_{|I|=k} a_I \partial x_I \in \Theta_S^k$. Alors $\delta(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k) = a_{1, \dots, k}$. Par conséquent, $\delta \in \text{Der}^k(-\log C)$ si et seulement si $a_{1, \dots, k} \in (x_1, \dots, x_k)$, c'est-à-dire si et seulement si $\delta \in \text{Der}(-\log C) \wedge \Theta_S^{k-1}$. \square

La question qui se pose alors est de savoir si l'inclusion de la proposition 3.2.6 est toujours une égalité. Avant d'y répondre, nous montrons la proposition suivante.

Proposition 3.2.9. Soit C une intersection complète réduite. L'application suivante est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \Upsilon : \text{Der}(-\log C) &\rightarrow \Omega^{m-1}(\log C) \\ \eta = \sum_{i=1}^m \alpha_i \partial_{x_i} &\mapsto \frac{1}{h} i_\eta(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m) = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} \alpha_i \widehat{dx}_i. \end{aligned}$$

Preuve. L'application $\Psi : \Theta_S \rightarrow \Omega_S^{m-1}, \eta \mapsto i_\eta(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m)$ est un isomorphisme. Soit $\eta = \sum_{i=1}^m \alpha_i \partial_{x_i}$. On vérifie facilement que pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$:

$$\eta(h_j) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m = dh_j \wedge i_\eta(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m).$$

Par conséquent, $\eta \in \text{Der}(-\log C)$ si et seulement si $i_\eta(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m) \in h\Omega^{m-1}(\log C)$. Comme $\text{Der}(-\log C) \subseteq \Theta_S$ et $h\Omega^{m-1}(\log C) \subseteq \Omega_S^{m-1}$, on en déduit que Ψ induit un isomorphisme de $\text{Der}(-\log C)$ sur $h\Omega^{m-1}(\log C)$, et donc Υ est un isomorphisme. \square

L'exemple suivant montre que l'inclusion de la proposition 3.2.6 peut être stricte dans le cas où C est singulière, ce qui répond à une question de Luis Narváez-Macarro.

Exemple 3.2.10. Considérons de nouveau la courbe définie par $h_1 = x^3 - y^2$ et $h_2 = x^2 y - z^2$. Cette courbe est quasi-homogène pour les poids $(4, 6, 7)$. Par la proposition 3.2.9 et le corollaire 6.1.25, le module $\text{Der}(-\log C)$ est engendré par $\eta_1 = 4x\partial_x + 6y\partial_y + 7z\partial_z$, $\eta_2 = 4yz\partial_x + 6x^2z\partial_y + (4xy^2 + 3x^4)\partial_z$, et les champs de vecteurs $h_i\partial_x, h_i\partial_y, h_i\partial_z$ pour $i = 1, 2$.

D'autre part, par [GS12, Proposition 5.5], une famille génératrice de $\text{Der}^2(-\log C)$ dans la base $\partial_y \wedge \partial_z, \partial_x \wedge \partial_z, \partial_x \wedge \partial_y$ est $(24xy, -12x^2, -24z), (-42x^2, -28y, 0), (0, -7z, -6y), (-7z, 0, 4x), (6y, 4x, 0)$. En calculant explicitement $\text{Der}(-\log C) \wedge \Theta_S$, on remarque directement que les deux premiers générateurs de $\text{Der}^2(-\log C)$ ne sont pas dans $\text{Der}(-\log C) \wedge \Theta_S$.

3.2.3 Pseudo-dualité avec les formes différentielles multi-logarithmiques

Dans le cas d'une hypersurface D , l'évaluation d'une 1-forme logarithmique sur un champ de vecteur logarithmique est une fonction holomorphe. Cette propriété n'est pas vérifiée par les intersections complètes de codimension au moins deux. On rappelle que pour $q \in \mathbb{N}$, on a $\tilde{\Omega}^q = \frac{1}{h} \mathcal{I}_C \Omega_S^q$.

Lemme 3.2.11. *Soit $\omega \in \Omega^k(\log C)$ et $\delta \in \text{Der}^k(-\log C)$. Alors $\omega(\delta) \in \Sigma = \frac{1}{h} \mathcal{I}_C$.*

Preuve. Soit g, ξ, η vérifiant les conditions du théorème 3.1.15. On a donc $g\omega = \xi \frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h} + \eta$. Alors, puisque $\delta \in \text{Der}^k(-\log C)$, par définition $\frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h}(\delta) \in \Sigma$ et donc $g\omega(\delta) \in \Sigma$. Comme g induit un non diviseur de zéro dans \mathcal{O}_C , on a $\omega(\delta) \in \Sigma$. \square

Remarque 3.2.12. Pour $k = 1$, comme $\Sigma = \mathcal{O}_S$, on retrouve le lemme 2.1.22.

Grâce au lemme 3.2.11, on obtient une application ("pairing")

$$\text{Der}^k(-\log C) \times \Omega^k(\log C) \rightarrow \Sigma.$$

Cela nous amène à considérer le foncteur exact à gauche $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \Sigma)$ au lieu du foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \mathcal{O}_S)$ considéré dans le cas des hypersurfaces. Nous généralisons la proposition 2.1.23 de la façon suivante.

Proposition 3.2.13. *Supposons $k \geq 2$. Pour $k = 1$, on renvoie à la proposition 2.1.23. Considérons les suites d'inclusions suivantes :*

$$\Omega_S^k \subseteq \tilde{\Omega}^k \subseteq \Omega^k(\log C) \subseteq \frac{1}{h} \Omega_S^k \subseteq \Sigma \otimes_{\mathcal{O}_S} \frac{\Omega_S^k}{h}, \quad (3.7)$$

$$\Sigma \otimes_{\mathcal{O}_S} \Theta_S^k \supseteq \Theta_S^k \supseteq \text{Der}^k(-\log C) \supseteq \sum h_i \Theta_S^k \supseteq h \Theta_S^k. \quad (3.8)$$

a) *Le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \Sigma)$ envoie la suite d'inclusions (3.7) sur la suite d'inclusions (3.8).*

b) *Réciproquement, le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \Sigma)$ appliqué à la suite d'inclusions (3.8) donne la suite d'inclusions (3.7).*

Remarque 3.2.14. On déduit de la proposition 3.2.13 une pseudo-dualité impliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \mathcal{I}_C)$ qui envoie la suite d'inclusions $h \cdot \tilde{\Omega}^k \subseteq h \cdot \Omega^k(\log C) \subseteq \Omega_S^k$ sur la suite d'inclusions $\Theta_S^k \supseteq \text{Der}^k(-\log C) \supseteq \mathcal{I}_C \Theta_S^k$. Cette pseudo-dualité ne fait intervenir que des modules intrinsèques, contrairement à la pseudo-dualité de la proposition 3.2.13.

Cependant, la notion de résidu d'une forme $\omega \in h \cdot \Omega^k(\log C)$ n'est pas bien définie (voir remarque 3.1.22), la présentation de la proposition 3.2.13 est donc plus pertinente en ce qui concerne les multi-résidus.

Preuve. On considère des germes en un point $p \in S$, mais on ne le précise pas dans les notations.

Remarquons que le module Σ est sans torsion et que pour toute inclusion $M_1 \subseteq M_2$ avec M_1, M_2 tous les deux soit dans la suite (3.7) soit dans la suite (3.8), le module M_2/M_1 est un module de torsion de sorte que l'on a $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(M_1, \Sigma) \supseteq \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(M_2, \Sigma)$.

a) Soit $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega_S^k, \Sigma)$. Comme Ω_S^k est libre et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega_S^k, \mathcal{O}_S) = \Theta_S^k$, on a l'isomorphisme suivant de \mathcal{O}_S -modules :

$$\begin{aligned} \xi : \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega_S^k, \Sigma) &\xrightarrow{\sim} \Sigma \otimes_{\mathcal{O}_S} \Theta_S^k \\ \varphi &\mapsto \xi_\varphi = \sum_{|I|=k} \varphi(dx_I) \partial x_I \end{aligned}$$

Grâce à l'isomorphisme ξ , on peut voir chacun des modules $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(M, \Sigma)$ pour M dans (3.7) comme un sous-module de $\widetilde{\Theta}_S^k := \Sigma \otimes_{\mathcal{O}_S} \Theta_S^k$. De plus, cela donne aussi :

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\frac{1}{h} \Omega_S^k, \Sigma \right) = h \cdot \text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\Omega_S^k, \Sigma \right) = h \cdot \left(\Sigma \otimes_{\mathcal{O}_S} \Theta_S^k \right) = \sum_{i=1}^k h_i \Theta_S^k$$

On a clairement l'inclusion $\Theta_S^k \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\widetilde{\Omega}^k, \Sigma \right) \subseteq \widetilde{\Theta}_S^k$. Soit $\delta \in \widetilde{\Theta}_S^k$, $\delta = \sum_I \delta_I \partial x_I$ avec $\delta_I \in \Sigma$. Supposons² qu'il existe I tel que $\delta_I \notin \mathcal{O}_S$. Par exemple δ_I possède des pôles au moins le long de D_1 . Alors $\frac{dx_I}{h_1}(\delta) = \frac{\delta_I}{h_1}$ possède un pôle d'ordre au moins deux le long de D_1 et donc $\delta \notin \text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\widetilde{\Omega}^k, \Sigma \right)$. Par conséquent, $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\widetilde{\Omega}^k, \Sigma \right) \simeq \Theta_S^k$. Comme $\widetilde{\Omega}^k = \Omega_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \Sigma$, cela donne aussi $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\frac{1}{h} \Omega_S^k \otimes \Sigma, \Sigma \right) = h \Theta_S^k$.

On a $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\Omega^k(\log C), \Sigma \right) \subseteq \Theta_S^k$. Grâce au lemme 3.2.11, on a l'inclusion $\text{Der}^k(-\log C) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\Omega^k(\log C), \Sigma \right)$. Réciproquement, soit $\delta \in \Theta_S^k$. Si $\delta \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\Omega^k(\log C), \Sigma \right)$, alors en particulier $\frac{dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_k}{h}(\delta) \in \Sigma$, et donc $\delta \in \text{Der}^k(-\log C)$. D'où $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\Omega^k(\log C), \Sigma \right) = \text{Der}^k(-\log C)$.

- b) Soit $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(h \Theta_S^k, \Sigma \right)$. Comme $h \Theta_S^k$ est libre et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(h \Theta_S^k, \mathcal{O}_S \right) = \frac{1}{h} \Omega_S^k$, on a l'isomorphisme de \mathcal{O}_S -modules suivant :

$$\begin{aligned} \beta : \text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(h \Theta_S^k, \Sigma \right) &\rightarrow \frac{1}{h} \Omega_S^k \otimes \Sigma \\ \psi &\mapsto \omega_\psi = \frac{1}{h} \sum_{|I|=k} \psi(h \partial x_I) dx_I \end{aligned}$$

En particulier $\psi(h \partial x_I) = \omega_\psi(h \partial x_I)$. L'isomorphisme β nous permet de voir chaque module $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(M, \Sigma)$ pour M dans la suite (3.8) comme un sous-module de $\frac{1}{h} \widetilde{\Omega}^k$. On obtient aussi $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\Theta_S^k, \Sigma \right) = \widetilde{\Omega}^k$.

Il est facile de voir que $\frac{1}{h} \Omega_S^k \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\sum h_i \Theta_S^k, \Sigma \right) \subseteq \frac{1}{h} \widetilde{\Omega}^k$. Soit $\omega \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\sum h_i \Theta_S^k, \Sigma \right)$, $\omega = \sum \frac{1}{h} \omega_I dx_I$ avec $\omega_I \in \Sigma$. Soit $I \subset \{1, \dots, m\}$ avec $|I| = k$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a $\omega(h_i \partial x_I) = \frac{1}{h_i} \omega_I \in \Sigma$. Par conséquent, $\omega_I \in \mathcal{O}_S$ et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\sum h_i \Theta_S^k, \Sigma \right) = \frac{1}{h} \Omega_S^k$. Comme $\Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \Sigma = \frac{1}{h} \sum h_i \Theta_S^k$, on a aussi : $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \Sigma, \Sigma \right) = \Omega_S^k$.

Comme $\text{Der}^k(-\log C)$ contient $\sum h_i \Theta_S^k$, on a $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\text{Der}^k(-\log C), \Sigma \right) \subseteq \frac{1}{h} \Omega_S^k$. Grâce au lemme 3.2.11, on a $\Omega^k(\log C) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\text{Der}^k(-\log C), \Sigma \right)$. Par analogie avec la proposition 2.1.23, nous introduisons des k -champs de vecteurs particuliers dans le but de montrer l'inclusion manquante. Remarquons d'abord que si $\omega = \frac{1}{h} \sum_{|I|=k} a_I dx_I$ avec $a_I \in \mathcal{O}_S$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ on a :

$$dh_i \wedge \omega = \sum_j \sum_I \frac{1}{h} \frac{\partial h_i}{\partial x_j} a_I dx_j \wedge dx_I = \sum_{|J|=k+1} \frac{1}{h} \sum_{\ell=1}^{k+1} (-1)^{\ell-1} \frac{\partial h_i}{\partial x_{j_\ell}} a_{J \setminus \{j_\ell\}} dx_J. \quad (3.9)$$

On pose pour tout $J = \{j_1, \dots, j_{k+1}\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ et $i \in \{1, \dots, k\}$:

²C'est ici que nous utilisons l'hypothèse $k \geq 2$

$$\delta_J^i = \sum_{\ell=1}^{k+1} (-1)^{\ell-1} \frac{\partial h_i}{\partial x_{j_\ell}} \partial x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{\partial x_{j_\ell}} \wedge \cdots \wedge \partial x_{j_{k+1}}.$$

Commençons par montrer que $\delta_J^i \in \text{Der}^k(-\log C)$. Pour $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ avec $|I| = k$ on note Δ_I le mineur $k \times k$ de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_k) relativement à l'ensemble I . On a alors $dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_k = \sum \Delta_I dx_I$. D'où :

$$dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_k(\delta_J^i) = \sum_{\ell=1}^{k+1} (-1)^{\ell-1} \frac{\partial h_i}{\partial x_{j_\ell}} \Delta_{j_1 \dots \widehat{j_\ell} \dots j_{k+1}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_i}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial h_i}{\partial x_{j_{k+1}}} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial h_1}{\partial x_{j_{k+1}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_k}{\partial x_{j_1}} & \cdots & \frac{\partial h_k}{\partial x_{j_{k+1}}} \end{vmatrix} = 0.$$

Par conséquent, $\delta_J^i \in \text{Der}^k(-\log C)$. Soit $\omega = \sum \frac{1}{h} a_I dx_I \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\text{Der}^k(-\log C), \Sigma)$, avec $a_I \in \mathcal{O}_S$. Alors pour tout $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ et $i \in \{1, \dots, k\}$ on a :

$$\omega(\delta_J^i) = \sum_I \frac{1}{h} a_I dx_I(\delta_J^i) = \frac{1}{h} \sum_{\ell=1}^{k+1} (-1)^{\ell-1} \frac{\partial h_i}{\partial x_{j_\ell}} a_{J \setminus \{j_\ell\}} \in \Sigma.$$

Par (3.9), pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a $dh_i \wedge \omega = \sum_{|J|=k+1} \omega(\delta_J^i) dx_J \in \widetilde{\Omega}^{k+1}$, et donc $\omega \in \Omega^k(\log C)$. D'où le résultat : $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\text{Der}^k(-\log C), \Sigma) = \Omega^k(\log C)$. \square

3.2.4 Dualité entre l'idéal jacobien et les multi-résidus

Le lemme 5.4 de [Sch16] et le théorème 3.1.40 assurent que le dual de l'idéal jacobien \mathcal{I}_C est le module des multi-résidus \mathcal{R}_C . Nous proposons ici une autre preuve de ce résultat, qui n'utilise pas l'isomorphisme du théorème 3.1.40. La preuve que nous développons est la généralisation d'une partie de la preuve de la proposition 3.4 de [GS14] au cas des intersections complètes.

Nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3.2.15 (Lemme d'Ischebeck, [Mat80, (15.E) Lemma 2]). *Soit A un anneau local noethérien et $M \neq 0$, $N \neq 0$ deux A -modules de type fini. Alors pour tout $i < \text{prof}(M) - \dim(N)$, on a :*

$$\text{Ext}_A^i(N, M) = 0.$$

On peut à présent montrer le résultat suivant :

Lemme 3.2.16. *Supposons $k \geq 2$. Alors $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_S) = 0$ et :*

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{I}_C, \Sigma) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C).$$

Preuve. On applique le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_C, -)$ à la suite exacte :

$$0 \rightarrow \Sigma \xrightarrow{\times h} \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0. \quad (3.10)$$

On obtient :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{I}_C, \Sigma) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_S) \rightarrow \dots$$

La profondeur de \mathcal{O}_S est m et comme \mathcal{I}_C est un idéal fractionnaire (voir définition 2.3.15), la dimension de \mathcal{I}_C est $m - k = \dim \mathcal{O}_C$. D'après le lemme d'Ischebeck (voir lemme 3.2.15), on a $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_S) = 0$. D'où le résultat. \square

Soit $I \subset \mathcal{M}_C$ un idéal fractionnaire. On rappelle que le dual de I vérifie (voir lemme 2.3.16) :

$$I^\vee = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(I, \mathcal{O}_C) = \{f \in \mathcal{M}_C ; f \cdot I \subseteq \mathcal{O}_C\}.$$

Proposition 3.2.17. *Le dual de l'idéal jacobien est $\mathcal{I}_C^\vee = \mathcal{R}_C$.*

Preuve. On suppose $k \geq 2$. Pour $k = 1$, on renvoie à [GS14, Proposition 3.4].

Considérons le complexe double $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\text{Der}^k(-\log C) \hookrightarrow \Theta_S^k, h : \Sigma \rightarrow \mathcal{O}_S)$. On obtient un diagramme semblable au dual du diagramme (3.8) de [GS14]. De plus, par le lemme 3.2.16, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_S) = 0$, et donc on obtient le diagramme commutatif suivant qui est basé sur les suites exactes (3.5) et (3.10) :

$$\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Theta_S^k, \Sigma) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\text{Der}^k(-\log C), \Sigma) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{I}_C, \Sigma) & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow \cdot h & & \downarrow & & \\ & 0 & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Theta_S^k, \mathcal{O}_S) & \xrightarrow{\lambda} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\text{Der}^k(-\log C), \mathcal{O}_S) & \longrightarrow & 0 & & \\ & & & \downarrow \pi & & \downarrow \pi' & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) & \xrightarrow{\sigma} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Theta_S^k, \mathcal{O}_C) & \xrightarrow{\mu} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\text{Der}^k(-\log C), \mathcal{O}_C) & \rightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{I}_C, \Sigma) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\text{Der}^k(-\log C), \Sigma) & \longrightarrow & \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^2(\mathcal{I}_C, \Sigma) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \\ & & 0 & & & & & & 0 & & \end{array}$$

Montrons à l'aide de ce diagramme que $\mathcal{I}_C^\vee = \mathcal{R}_C$.

Soit $\varphi : \text{Der}^k(-\log C) \rightarrow \Sigma$. Par une chasse au diagramme, nous allons lui associer une application $\psi : \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O}_C$. Par l'isomorphisme β de la preuve de la proposition 3.2.13, φ correspond à $\omega_\varphi = \frac{1}{h} \sum_I \varphi(h\partial x_I) dx_I \in \Omega^k(\log C)$. Alors $\varphi(\delta) = \omega_\varphi(\delta)$.

Par l'application verticale, φ est envoyée sur $h\varphi : \text{Der}^k(-\log C) \rightarrow \mathcal{O}_S, \delta \mapsto h\omega_\varphi(\delta)$. Comme l'application horizontale λ est un isomorphisme, il existe $\Phi : \Theta_S^k \rightarrow \mathcal{O}_S$ tel que $\Phi|_{\text{Der}^k(-\log C)} = h\varphi$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $h_i \partial x_I \in \text{Der}^k(-\log C)$ donc $h_i \Phi(\partial x_I) = h\varphi(h_i \partial x_I) = h_i \varphi(h\partial x_I)$ et donc $\Phi(\partial x_I) = \varphi(h\partial x_I) = h\omega_\varphi(\partial x_I)$.

Notons $\bar{\Phi} : \Theta_S^k \rightarrow \mathcal{O}_C$ l'image de Φ par l'application verticale π . L'image de $\bar{\Phi}$ par l'application horizontale μ est zéro donc $\bar{\Phi}$ est l'image par σ d'un élément ψ de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C)$. Calculons-le. Comme $\omega_\varphi \in \Omega^k(\log C)$, on a d'après le théorème 3.1.15, $g\omega_\varphi = \xi \frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h} + \eta$ avec $g \in \mathcal{O}_S$ qui induit un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C , $\xi \in \mathcal{O}_S$ et $\eta \in \tilde{\Omega}^k$. Alors :

$$g\bar{\Phi}(\partial x_I) = \overline{gh\omega_\varphi(\partial x_I)} = \overline{\xi \partial x_I (dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k)} \in \mathcal{O}_C.$$

Comme g est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C , on a

$$\bar{\Phi}(\partial x_I) = \sigma(\psi)(\partial x_I) = \psi(\partial x_I (dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k)) = \overline{\text{res}_C(\omega_\varphi) \partial x_I (dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k)}.$$

L'application ψ s'identifie donc à $\text{res}_C(\omega_\varphi)$ dans \mathcal{I}_C^\vee .

En identifiant les modules $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\text{Der}^k(-\log C), \Sigma)$ et $\Omega^k(\log C)$, on obtient donc l'application

$$\begin{aligned} \text{res}_C : \Omega^k(\log C) &\rightarrow \mathcal{I}_C^\vee \\ \omega &\mapsto \text{res}_C(\omega) \end{aligned}$$

Réciproquement, soit $\psi : \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O}_C$. Son image par σ est une application $\bar{\Phi} : \Theta_S^k \rightarrow \mathcal{O}_C$ définie par $\bar{\Phi}(\delta) = \psi(\delta (dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k))$. La surjectivité de π assure l'existence d'un antécédent $\Phi : \Theta_S^k \rightarrow \mathcal{O}_S$ de $\bar{\Phi}$. Par l'isomorphisme λ , on lui associe une application $\tilde{\varphi} : \text{Der}^k(-\log C) \rightarrow \mathcal{O}_S$.

Comme l'image de $\tilde{\varphi}$ par π' est nulle, elle provient d'une application $\varphi : \text{Der}^k(-\log C) \rightarrow \Sigma$ qui vérifie $h\varphi = \tilde{\varphi}$. On identifie φ à une forme $\omega_\varphi \in \Omega^k(\log C)$. Le raisonnement précédent montre que l'application ψ est donnée pour $\bar{a} \in \mathcal{J}_C$ par $\psi(\bar{a}) = \overline{\text{res}_C(\omega_\varphi)a}$. Par conséquent, $\text{res}_C : \Omega^k(\log C) \rightarrow \mathcal{J}_C^\vee$ est surjective et donc $\mathcal{J}_C^\vee = \mathcal{R}_C$. \square

Remarque 3.2.18. De la même façon que dans [GS14, (3.8)], on peut considérer le complexe double associé à

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\tilde{\Omega}^k \hookrightarrow \Omega^k(\log C), h : \Sigma \rightarrow \mathcal{O}_S \right).$$

On obtient alors la suite exacte longue :

$$0 \rightarrow \text{Der}^k(-\log C) \rightarrow \Theta_S^k \xrightarrow{\sigma} \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{R}_C, \Sigma) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\Omega^k(\log C), \Sigma) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\tilde{\Omega}^k, \Sigma) \rightarrow \dots \quad (3.11)$$

Par une preuve semblable à la preuve du lemme 3.2.16 et de [GS14, Proposition 3.4] on obtient $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{R}_C, \Sigma) = \mathcal{R}_C^\vee$ et $\sigma(\delta) = dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k(\delta)$.

3.3 Caractérisations de la liberté

Nous montrons dans ce paragraphe le résultat principal de ce chapitre, à savoir le théorème 3.3.7.

Nous avons rappelé dans le Chapitre 2 plusieurs caractérisations de la liberté des diviseurs. Nous commençons par donner la définition de liberté proposée par M. Granger et M. Schulze dans [GS12], qui s'inspire clairement du théorème 2.2.10 (voir définition 3.3.1). On montre sans difficultés que cette notion de liberté conduit à une condition sur la dimension projective du module des k -champs de vecteurs multi-logarithmiques qui est alors $k-1$ (voir proposition 3.3.5).

Dans le cas des hypersurfaces, la liberté du module $\text{Der}(-\log D)$ est clairement équivalente à la liberté de $\Omega^1(\log D)$ grâce à la proposition 2.1.23. La situation dans le cas d'une intersection complète se complique, et le fait que la dimension projective de $\text{Der}^k(-\log C)$ est $k-1$ n'indique *a priori* rien sur la dimension projective de $\Omega^k(\log C)$.

L'objectif de ce paragraphe est de montrer que la liberté d'une intersection complète est équivalente au fait que la dimension projective de $\Omega^k(\log C)$ est $k-1$. Pour obtenir ce résultat, nous étudions en détails la suite exacte longue obtenue en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \mathcal{O}_S)$ à la suite exacte courte $0 \rightarrow \tilde{\Omega}^k \rightarrow \Omega^k(\log C) \rightarrow \mathcal{R}_C \rightarrow 0$.

Commençons par définir la notion de liberté pour une intersection complète. Dans tout ce paragraphe, nous ne considérons que des germes d'espaces et de fonctions en un point $p \in D$, que nous ne mentionnons pas.

Définition 3.3.1 ([GS12, Définition 5.1]). *Une intersection complète réduite C est dite libre si elle est lisse ou si le lieu singulier muni de l'anneau $\mathcal{O}_C/\mathcal{J}_C$ est un \mathcal{O}_C -module de Cohen-Macaulay de dimension $m-k-1$.*

Proposition 3.3.2. *Une intersection complète réduite C est libre si et seulement si l'idéal $J(\underline{h})$ de \mathcal{O}_S engendré par les mineurs $k \times k$ de la matrice jacobienne et h_1, \dots, h_k est un idéal parfait de codimension $k+1$ dans \mathcal{O}_S .*

Preuve. La preuve est essentiellement la même que la preuve de la proposition 2.2.20. Comme \mathcal{O}_S est régulier, il est Cohen-Macaulay et donc $\text{grade}(J(\underline{h})) = \text{ht}(J(\underline{h})) = m - \dim(\mathcal{O}_S/J(\underline{h}))$. D'après la formule d'Auslander-Buchsbaum 2.2.14, on a $\dim\text{proj}(\mathcal{O}_S/J(\underline{h})) = m - \text{prof}(\mathcal{O}_S/J(\underline{h}))$. Par conséquent, $J(\underline{h})$ est parfait de codimension $k+1$ dans \mathcal{O}_S si et seulement si $\dim(\mathcal{O}_S/J(\underline{h})) = \text{prof}(\mathcal{O}_S/J(\underline{h})) = m - k - 1$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathcal{O}_S/J(\underline{h})$ est Cohen-Macaulay de dimension $m - k - 1$. \square

Exemple 3.3.3. Soit C une courbe intersection complète réduite. Alors C est libre. En effet, si C est lisse, elle est libre par définition, et dans le cas contraire, comme C est réduite et de dimension 1, son lieu singulier est de dimension 0 et est donc Cohen-Macaulay.

La caractérisation des surfaces libres de \mathbb{C}^3 de la proposition 2.2.23 se généralise aux intersections complètes réduites de dimension deux avec une preuve essentiellement identique.

Proposition 3.3.4. Soit $C \subseteq S$ un germe de surface intersection complète réduite. Soit $J(\underline{h})$ l'idéal de \mathcal{O}_S engendré par les équations h_1, \dots, h_{m-2} et par les mineurs maximaux de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_{m-2}) . Alors C est libre si et seulement si $J(\underline{h})$ est saturé.

Preuve. Par définition, C est libre si et seulement si $\mathcal{O}_S/J(\underline{h})$ est Cohen-Macaulay de dimension 1. Comme C est réduite, la dimension de $\mathcal{O}_S/J(\underline{h})$ est au plus 1. Le lemme 2.2.22 nous donne alors le résultat. \square

Les trois premiers points de la proposition suivante sont mentionnés dans [GS12]. On rappelle que $\dim_{\text{proj}}(M)$ désigne la dimension projective d'un \mathcal{O}_S -module M .

Proposition 3.3.5. Soit C une intersection complète réduite singulière. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. C est libre,
2. l'idéal jacobien \mathcal{J}_C est un \mathcal{O}_C -module de Cohen-Macaulay,
3. $\dim_{\text{proj}}(\text{Der}^k(-\log C)) \leq k - 1$,
4. $\dim_{\text{proj}}(\text{Der}^k(-\log C)) = k - 1$.

Remarque 3.3.6. Comme \mathcal{J}_C est un idéal fractionnaire de \mathcal{O}_C , il est de dimension $m - k$ et donc la condition 2. est équivalente à \mathcal{J}_C est un \mathcal{O}_C -module de Cohen-Macaulay maximal.

Nous ajoutons à la liste précédente les caractérisations suivantes, ce qui nous amène au résultat principal de ce chapitre :

THÉORÈME 3.3.7. On peut ajouter les assertions suivantes à la liste d'équivalences de la proposition 3.3.5 :

5. $\dim_{\text{proj}}(\Omega^k(\log C)) \leq k - 1$,
6. $\dim_{\text{proj}}(\Omega^k(\log C)) = k - 1$.

En particulier, pour $k = 1$, on reconnaît plusieurs des caractérisations de la liberté des hypersurfaces mentionnées dans le Chapitre 2, à savoir la définition 2.2.3 et le théorème 2.2.10.

Nous verrons sur des exemples dans la partie 6.1 que le nombre de générateurs du module $\Omega^k(\log C)$ dépend de l'intersection complète considérée et pas seulement de k et m . En particulier, cela indique qu'il semble plus difficile d'obtenir une généralisation du Critère de Saito 2.2.8.

3.3.1 Preuve de la proposition 3.3.5

La preuve de la proposition 3.3.5 repose essentiellement sur le lemme de la profondeur 2.2.13 et sur la formule d'Auslander-Buchsbaum 2.2.14.

Preuve (de la proposition 3.3.5). L'équivalence 1. \iff 2. est prouvée dans [Sch16, Proposition 5.6]. Rappelons cette démonstration, qui est tout à fait analogue à la preuve de l'équivalence 2. \iff 3. du théorème 2.2.10.

On considère la suite exacte de \mathcal{O}_C -modules :

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C/\mathcal{I}_C \rightarrow 0. \quad (3.12)$$

On pose $n = m - k$ la dimension de C . Comme C est une intersection complète, \mathcal{O}_C est un anneau de Cohen-Macaulay de dimension n . De plus, étant donné que C est réduite, le lieu singulier de C est de dimension au plus $n - 1$, et donc la profondeur de $\mathcal{O}_C/\mathcal{I}_C$ est au plus $n - 1$. Par le lemme de la Profondeur, on a

$$\text{prof}(\mathcal{I}_C) = \text{prof}(\mathcal{O}_C/\mathcal{I}_C) + 1.$$

Par conséquent, $\text{prof}(\mathcal{I}_C) = n \iff \text{prof}(\mathcal{O}_C/\mathcal{I}_C) = n - 1$, d'où 1. \iff 2.

Montrons 2. \implies 4. On rappelle la suite exacte suivante :

$$0 \rightarrow \text{Der}^k(-\log C) \rightarrow \Theta_S^k \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0. \quad (3.13)$$

Par le lemme de la profondeur, comme la profondeur de \mathcal{I}_C est $m - k$ et la profondeur de Θ_S^k est m , on a $\text{prof}(\text{Der}^k(-\log C)) = m - k + 1$. La formule d'Auslander-Buchsbaum donne $\dim\text{proj}(\text{Der}^k(-\log C)) = k - 1$.

L'implication 4 \implies 3. est triviale.

Montrons 3. \implies 2. Cette implication est mentionnée dans [GS12], et nous en donnons ici une preuve. Par la formule d'Auslander-Buchsbaum, $\text{prof}(\text{Der}^k(-\log C)) \geq m - k + 1$. De plus, comme Θ_S^k est libre, $\text{prof}(\Theta_S^k) = m$, et $\text{prof}(\mathcal{I}_C) \leq m - k$. Par conséquent, la suite exacte (3.13) et le lemme de la profondeur assurent que $\text{prof}(\text{Der}^k(-\log C)) = m - k + 1$ et $\text{prof}(\mathcal{I}_C) = m - k$, et donc \mathcal{I}_C est Cohen-Macaulay. \square

3.3.2 Préliminaires à la preuve du théorème 3.3.7

Les méthodes utilisées pour démontrer la proposition 3.3.5 ne sont pas suffisantes pour obtenir le théorème 3.3.7. En effet, si on considère la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \tilde{\Omega}^k \rightarrow \Omega^k(\log C) \rightarrow \mathcal{R}_C \rightarrow 0 \quad (3.14)$$

on obtient avec le lemme de la profondeur et la formule d'Auslander-Buchsbaum la proposition 3.3.19, dont l'énoncé est plus faible mais qui nous sera tout de même utile pour terminer la preuve du théorème 3.3.7.

La preuve du théorème 3.3.7 est fondée sur le calcul explicite de certains modules et morphismes de la suite exacte longue obtenue en appliquant le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \mathcal{O}_S)$ à la suite exacte courte (3.14) :

$$0 \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{R}_C, \mathcal{O}_S) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{R}_C, \mathcal{O}_S) \rightarrow \dots \quad (3.15)$$

Le plan de la preuve est le suivant. Nous commençons par calculer à l'aide du complexe de Koszul les modules $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S)$. Nous déterminons ensuite grâce à la suite spectrale de changement d'anneaux les modules $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\mathcal{R}_C, \mathcal{O}_S)$ pour $q \leq k$. La partie la plus technique est le calcul explicite du morphisme connectant

$$\alpha' : \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\mathcal{R}_C, \mathcal{O}_S).$$

Ce calcul est nécessaire afin d'identifier le noyau et l'image de α' , qui sont tous deux utilisés dans la fin de la preuve.

Calcul des $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S)$

Commençons par calculer les termes de la suite (3.15) impliquant $\tilde{\Omega}^k = \frac{1}{h} \mathcal{I}_C \Omega_S^k$. Nous utilisons le complexe de Koszul associé à la suite régulière (h_1, \dots, h_k) .

Notation 3.3.8. On note $K(\underline{h})$ le complexe de Koszul associé à (h_1, \dots, h_k) dans \mathcal{O}_S :

$$K(\underline{h}) : 0 \rightarrow \bigwedge^k \mathcal{O}_S^k \xrightarrow{d_k} \dots \xrightarrow{d_2} \bigwedge^1 \mathcal{O}_S^k \xrightarrow{d_1} \mathcal{O}_S \rightarrow 0 \quad (3.16)$$

où pour $I \subseteq \{1, \dots, k\}$ de cardinal $p \in \{2, \dots, k\}$, $d_i(e_I) = \sum_{\ell=1}^p (-1)^{\ell-1} h_{i_\ell} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ et $d_1(e_i) = h_i$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$. On pose $\tilde{K}(\underline{h}) : 0 \rightarrow \bigwedge^k \mathcal{O}_S^k \xrightarrow{d_k} \dots \xrightarrow{d_2} \bigwedge^1 \mathcal{O}_S^k \rightarrow 0$ le complexe obtenu à partir de $K(\underline{h})$ en enlevant le dernier \mathcal{O}_S .

Remarque 3.3.9. D'après [Eis95, Corollary 17.5, Proposition 17.15], étant donné que la suite (h_1, \dots, h_k) est régulière, le complexe $K(\underline{h})$ est une résolution libre de \mathcal{O}_C , et le complexe dual $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(K(\underline{h}), \mathcal{O}_S)$ est aussi une résolution libre de \mathcal{O}_C .

Lemme 3.3.10. *Le complexe $\tilde{K}(\underline{h})$ fournit une résolution libre de $\Sigma = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k h_i \mathcal{O}_S = \frac{1}{h} \mathcal{I}_C$. En particulier, la dimension projective de Σ est $k - 1$.*

Preuve. On remarque que $\Sigma \simeq \sum_{i=1}^k h_i \mathcal{O}_S$. Ce dernier est l'image de l'application d_1 du complexe de Koszul, qui est exact par la proposition 3.3.9. \square

Nous pouvons donc utiliser le complexe $\tilde{K}(\underline{h})$ pour calculer les $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^\bullet(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S)$:

Lemme 3.3.11. *La dimension projective de $\tilde{\Omega}^k$ est $k - 1$. De plus, on a :*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S) &= h\Theta_S^k, \\ \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S) &= \Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C, \end{aligned}$$

et pour tout $j \notin \{0, k - 1\}$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^j(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S) = 0$.

Preuve. On a $\tilde{\Omega}^k = \Omega_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \Sigma$. On rappelle que le complexe $\tilde{K}(\underline{h})$ fournit une résolution libre de Σ , on en déduit donc que $\Omega_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \tilde{K}(\underline{h})$ fournit une résolution libre de $\tilde{\Omega}^k$. En particulier, $\dim_{\text{proj}}(\tilde{\Omega}^k) = k - 1$.

De plus, on a $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \Sigma, \mathcal{O}_S) = \Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Sigma, \mathcal{O}_S)$. Soit $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Sigma, \mathcal{O}_S)$. Alors ψ est entièrement déterminée par $\psi(1)$. Comme pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\psi\left(\frac{1}{h_i}\right) = \frac{1}{h_i} \psi(1) \in \mathcal{O}_S$, on a $\psi(1) \in h\mathcal{O}_S$. Réciproquement, il est clair qu'un élément $\alpha \in h\mathcal{O}_S$ définit une application $\psi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Sigma, \mathcal{O}_S)$ en posant $\psi(1) = \alpha$, ce qui nous donne la première égalité.

La deuxième égalité se déduit de la remarque 3.3.9, qui assure que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\Sigma, \mathcal{O}_S) = \mathcal{O}_C$. \square

Calcul des $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\mathcal{R}_C, \mathcal{O}_S)$

Contrairement au cas de $\tilde{\Omega}^k$, nous ne calculerons que les $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\mathcal{R}_C, \mathcal{O}_S)$ pour $q \leq k$.

Nous utilisons la suite spectrale de changement d'anneaux (voir par exemple [CE56, Chapter XV, XVI]). Nous l'énonçons pour un \mathcal{O}_C -module M quelconque, car nous en aurons besoin pour un autre module dans la suite.

$$E_2^{pq} = \text{Ext}_{\mathcal{O}_C}^p(M, \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_S)) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{p+q}(M, \mathcal{O}_S). \quad (3.17)$$

Nous avons besoin du lemme suivant, qui nous permet dans le cas $M = \mathcal{R}_C$ de déterminer les modules recherchés.

Lemme 3.3.12. *Soit C une intersection complète et M un \mathcal{O}_C -module de type fini. Pour tout $q < k$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(M, \mathcal{O}_S) = 0$ et*

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(M, \mathcal{O}_S) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(M, \mathcal{O}_C).$$

Preuve. Comme (h_1, \dots, h_k) est une suite régulière, on a grâce au complexe de Koszul 3.3.8 pour tout $q \neq k$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_S) = 0$ et $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_S) = \mathcal{O}_C$. Par conséquent, les seuls termes éventuellement non nuls de la deuxième feuille de la suite spectrale (3.17) sont les E_2^{pk} pour $p \in \mathbb{N}$, et donc la suite spectrale dégénère au rang 2. En particulier, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(M, \mathcal{O}_S) \simeq E_2^{q-k, k}$, ce qui nous donne le résultat. \square

On déduit des calculs précédents la suite exacte suivante :

Corollaire 3.3.13. *La suite exacte longue (3.15) donne :*

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S) \rightarrow \Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C \xrightarrow{\alpha} \mathcal{R}_C^\vee \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S) \rightarrow 0 \rightarrow \dots \quad (3.18)$$

Calcul du morphisme connectant α

En résumé, on dispose d'isomorphismes β et β' tels que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{R}_C^\vee \\ \uparrow \beta' & & \uparrow \beta \\ \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S) & \xrightarrow{\alpha'} & \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\mathcal{R}_C, \mathcal{O}_S) \end{array}$$

L'objectif de ce paragraphe est de montrer la proposition suivante :

Proposition 3.3.14. *Le morphisme connectant α de la suite exacte du corollaire 3.3.13 est :*

$$\begin{aligned} \alpha : \Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C &\rightarrow \mathcal{R}_C^\vee \\ \delta \otimes \bar{a} &\mapsto a \cdot \delta(\text{dh}_1 \wedge \cdots \wedge \text{dh}_k) \end{aligned}$$

En particulier, l'image de α est \mathcal{I}_C .

Cette proposition permet de comparer \mathcal{I}_C et \mathcal{R}_C^\vee , ce qui est utilisé dans la fin de la preuve du théorème 3.3.7.

Le calcul de α est assez technique. Nous déterminons explicitement les isomorphismes β et β' , ainsi que le morphisme connectant α' .

Nous fixons dans tout ce paragraphe une résolution injective $(\mathcal{I}^\bullet, \varepsilon_\bullet)$ de \mathcal{O}_S .

Lemme 3.3.15. *Soit M un \mathcal{O}_C -module de type fini. L'isomorphisme du lemme 3.3.12 est :*

$$\begin{aligned} \beta : \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(M, \mathcal{O}_S) &= H^k(\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(M, \mathcal{I}^\bullet)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(M, H^k(\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}^\bullet))) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(M, \mathcal{O}_C) \\ [\psi] &\mapsto (\tilde{\psi} : \rho \mapsto [\tilde{\psi}_\rho : a \mapsto a \cdot \psi(\rho)]) \end{aligned}$$

Preuve. Soit $(P_\bullet, \delta_\bullet)$ une résolution projective du \mathcal{O}_C -module M . On obtient ainsi le complexe double $A^{pq} = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(P_p, \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}^q))$. Deux suites spectrales ayant le même aboutissement y sont associées :

$${}^1E_2^{pq} = H^p(\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(P_*, H^q(\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}^\bullet)))) = \text{Ext}_{\mathcal{O}_C}^p(M, \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\mathcal{O}_C, \mathcal{O}_S)) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{p+q}(M, \mathcal{O}_S),$$

$${}''E_2^{pq} = H^q(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(H_p(P_*), \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}^\bullet))) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{p+q}(M, \mathcal{O}_S).$$

Les seuls termes éventuellement non nuls de la première suite spectrale sont les $'E_2^{pk}$ et pour la seconde, ce sont les ${}''E_2^{0q}$. En particulier, les deux suites spectrales dégénèrent au rang deux, et pour tout $j \geq 1$, ${}''E_\infty^{j,k-j}$ et $'E_\infty^{j,k-j}$ sont nuls. On a donc :

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(M, \mathcal{O}_S) = 'E_2^{0k} = 'E_\infty^{0k} = {}''E_\infty^{0k} = {}''E_2^{0k}.$$

À partir des définitions des suites spectrales (voir [CE56, Chapter XV, XVI]) on voit qu'un élément dans $'E_\infty^{0k}$ peut être représenté par un élément $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(P_0, \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}^k))$ qui définit la même classe dans ${}''E_\infty^{0k}$. Dans ${}''E_2^{0k}$, ψ définit un élément $[\psi] \in H^k(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(M, \mathcal{I}^\bullet))$, et dans $'E_2^{0k}$, il définit $\tilde{\psi} : \rho \mapsto [\tilde{\psi}_\rho : a \mapsto a \cdot \psi(\rho)] \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(M, H^k(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}^\bullet)))$. Cela nous donne l'isomorphisme annoncé. \square

Le lemme suivant permet d'exprimer précisément l'isomorphisme du lemme 3.3.11 par l'intermédiaire de la résolution injective $(\mathcal{I}^\bullet, \varepsilon_\bullet)$ de \mathcal{O}_S .

Lemme 3.3.16. *Le deuxième isomorphisme du lemme 3.3.11 est :*

$$\beta' : \underbrace{H^{k-1}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{I}^\bullet))}_{=\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S)} \rightarrow \Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \underbrace{H^{k-1}(\mathcal{I}^\bullet / \mathrm{Ann}_{\mathcal{I}^\bullet}(h_1, \dots, h_k))}_{=\mathcal{O}_C}$$

$$[\varphi] \mapsto \sum_I \partial x_I \otimes [\bar{m}_I]$$

où $m_I \in \mathcal{I}^{k-1}$ vérifie $h \cdot m_I = \varphi(dx_I)$.

Preuve. Pour tout $j \in \mathbb{N}$ on a un isomorphisme $\zeta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{I}^j) \rightarrow \Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Sigma, \mathcal{I}^j)$ donné par $\zeta(\varphi) = \sum_I \partial x_I \otimes (a \mapsto \varphi(ax_I))$.

Intéressons-nous maintenant à $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Sigma, \mathcal{I}^j)$. Comme pour tout $j \in \mathbb{N}$, \mathcal{I}^j est un module injectif, le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \mathcal{I}^j)$ est exact. De plus

$$0 \rightarrow \Sigma \xrightarrow{h} \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow 0$$

est exacte donc on en déduit l'isomorphisme :

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathcal{I}^j) / \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}^j) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Sigma, \mathcal{I}^j)$$

$$[\varphi : \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{I}^j] \mapsto (a \mapsto \varphi(h \cdot a))$$

De plus, $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathcal{I}^j) \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^j \\ \varphi \mapsto \varphi(1) \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}^j) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ann}_{\mathcal{I}^j}(h_1, \dots, h_k) \\ \varphi \mapsto \varphi(\bar{1}) \end{array} \right.$ sont des isomorphismes. Par conséquent on a l'isomorphisme :

$$\xi : \mathcal{I}^j / \mathrm{Ann}_{\mathcal{I}^j}(h_1, \dots, h_k) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Sigma, \mathcal{I}^j)$$

$$[\bar{m}] \mapsto (a \mapsto a \cdot hm)$$

En utilisant les isomorphismes ζ et ξ^{-1} , on en déduit l'isomorphisme β' . \square

Comme nous l'avons déjà remarqué dans la preuve du lemme 3.3.11 en utilisant le complexe de Koszul, $H^{k-1}(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Sigma, \mathcal{O}_S)) = \mathcal{O}_C$, et donc il existe un isomorphisme

$$\gamma_1 : H^{k-1}(\mathcal{I}^\bullet / \mathrm{Ann}_{\mathcal{I}^\bullet}(h_1, \dots, h_k)) \rightarrow \mathcal{O}_C.$$

De plus, comme pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\text{Ann}_{\mathcal{S}^j}(h_1, \dots, h_k)$ est isomorphe à $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_C, \mathcal{S}^j)$, en utilisant la remarque 3.3.9 on en déduit un isomorphisme

$$\gamma_2 : H^k(\text{Ann}_{\mathcal{S}^\bullet}(h_1, \dots, h_k)) \rightarrow \mathcal{O}_C.$$

Le lemme suivant explicite l'isomorphisme entre les modules $H^{k-1}(\mathcal{S}^\bullet/\text{Ann}_{\mathcal{S}^\bullet}(h_1, \dots, h_k))$ et $H^k(\text{Ann}_{\mathcal{S}^\bullet}(h_1, \dots, h_k))$.

Lemme 3.3.17. *On a un isomorphisme :*

$$\begin{aligned} \gamma : H^{k-1}(\mathcal{S}^\bullet/\text{Ann}_{\mathcal{S}^\bullet}(h_1, \dots, h_k)) &\rightarrow H^k(\text{Ann}_{\mathcal{S}^\bullet}(h_1, \dots, h_k)) \\ [\overline{m}] &\mapsto [\varepsilon_{k-1}(m)] \end{aligned}$$

Preuve. On note $\overline{\varepsilon_{k-1}} : \mathcal{S}^{k-1}/\text{Ann}_{\mathcal{S}^{k-1}}(h_1, \dots, h_k) \rightarrow \mathcal{S}^k/\text{Ann}_{\mathcal{S}^k}(h_1, \dots, h_k)$. Montrons d'abord que γ est bien définie.

Si $\overline{m} \in \text{Ker}(\overline{\varepsilon_{k-1}})$ alors $\varepsilon_{k-1}(m) \in \text{Ann}_{\mathcal{S}^k}(h_1, \dots, h_k)$. Si $\overline{m} = \overline{\varepsilon_{k-2}(m')}$ pour un $m' \in \mathcal{S}^{k-2}/\text{Ann}_{\mathcal{S}^{k-2}}(h_1, \dots, h_k)$, alors $[\varepsilon_{k-1}(\varepsilon_{k-2}(m'))] = 0$ et donc l'application γ est bien définie.

Supposons que $[\varepsilon_{k-1}(m)] = 0$. Alors il existe $m' \in \text{Ann}_{\mathcal{S}^{k-1}}(h_1, \dots, h_k)$ tel que $\varepsilon_{k-1}(m) = \varepsilon_{k-1}(m')$, et donc $m - m' \in \text{Ker}(\varepsilon_{k-1}) = \text{Im}(\varepsilon_{k-2})$. D'où $[\overline{m}] = 0$, et donc γ est injective.

Considérons $[m] \in H^k(\text{Ann}_{\mathcal{S}^\bullet}(h_1, \dots, h_k))$. Alors $\varepsilon_k(m) = 0$ donc il existe $m' \in \mathcal{S}^{k-1}$ tel que $\varepsilon_{k-1}(m') = m$. Alors $[m] = \gamma([\overline{m'}])$, et donc γ est surjective. \square

Nous disposons à présent de toutes les identifications nécessaires au calcul de α .

Preuve (de la proposition 3.3.14). Nous voulons construire le morphisme connectant :

$$\alpha' : H^{k-1}(\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{S}^\bullet)) \rightarrow H^k(\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{R}_C, \mathcal{S}^\bullet)).$$

On procède par une chasse au diagramme fondée sur le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{S}^{k-1}) & \xleftarrow{i^*} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega^k(\log C), \mathcal{S}^{k-1}) & \xleftarrow{\text{res}_C^*} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{R}_C, \mathcal{S}^{k-1}) & \longleftarrow & 0 \\ & & \downarrow \varepsilon_{k-1} & & \downarrow \varepsilon_{k-1} & & \downarrow \varepsilon_{k-1} & & \\ 0 & \longleftarrow & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{S}^k) & \xleftarrow{i^*} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega^k(\log C), \mathcal{S}^k) & \xleftarrow{\text{res}_C^*} & \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{R}_C, \mathcal{S}^k) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Soit $\delta \otimes [\overline{m}] \in \Theta_S^k \otimes H^{k-1}(\mathcal{S}^\bullet/\text{Ann}_{\mathcal{S}^\bullet}(h_1, \dots, h_k))$. Comme β' est un isomorphisme, il existe

$$\begin{aligned} \varphi : \tilde{\Omega}^k &\rightarrow \mathcal{S}^{k-1} \\ \eta &\mapsto \delta(h\eta) \cdot m \end{aligned}$$

vérifiant la condition $\varepsilon_{k-1}(\varphi) = 0$ et dont la classe dans $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S)$ est un antécédent de $\delta \otimes [\overline{m}]$ par β' .

Il existe $\Phi : \Omega^k(\log C) \rightarrow \mathcal{S}^{k-1}$ tel que $\Phi \circ i = \varphi$. Soit $\omega \in \Omega^k(\log C)$. Par le théorème 3.1.15, il existe g, ξ, η tels que $g\omega = \xi \frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h_1 \dots h_k} + \eta$. Alors

$$g\Phi(\omega) = \xi \Phi\left(\frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h_1 \dots h_k}\right) + \varphi(\eta).$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$h_i \Phi\left(\frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h_1 \dots h_k}\right) = \varphi\left(h_i \frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h_1 \dots h_k}\right) = h_i \delta(dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k) \cdot m.$$

Par conséquent,

$$\Phi\left(\frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h_1 \dots h_k}\right) = \delta(dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k) \cdot m + m'$$

avec $m' \in \text{Ann}_{\mathcal{I}^{k-1}}(h_1, \dots, h_k)$.

L'image par ε_{k-1} de Φ vérifie :

$$g \cdot \varepsilon_{k-1}(\Phi)(\omega) = \xi(\delta(dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k) \cdot \varepsilon_{k-1}(m) + \varepsilon_{k-1}(m')) .$$

Comme $i^* \varepsilon_{k-1}(\Phi) = 0$, il existe $\Psi : \mathcal{R}_C \rightarrow \mathcal{I}^k$ tel que $\varepsilon_{k-1}(\Phi) = \text{res}_C^*(\Psi)$. En particulier, pour tout $\rho \in \mathcal{R}_C$, on a³ :

$$g\Psi(\rho) = g\rho(\delta(dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k) \cdot \varepsilon_{k-1}(m) + \varepsilon_{k-1}(m'))$$

Cela nous donne alors l'expression de $g\alpha'(\beta'^{-1}(\delta \otimes [\bar{m}])) \in \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\mathcal{R}_C, \mathcal{O}_S)$. Nous allons en déduire l'expression de $\alpha(\delta \otimes [\bar{m}]) \in \mathcal{R}_C^\vee$.

Par l'isomorphisme β du lemme 3.3.15, et en utilisant l'identification de $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_C, \mathcal{I}^\bullet)$ avec $\text{Ann}_{\mathcal{I}^\bullet}(h_1, \dots, h_k)$, la classe $[g\Psi] \in H^k(\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{R}_C, \mathcal{I}^\bullet))$ correspond à l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_C &\rightarrow H^k(\text{Ann}_{\mathcal{I}^\bullet}(h_1, \dots, h_k)) \\ \rho &\mapsto [g\rho \cdot (\delta(dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k) \cdot \varepsilon_{k-1}(m) + \varepsilon_{k-1}(m'))] \end{aligned}$$

De plus, comme $m' \in \text{Ann}_{\mathcal{I}^{k-1}}(h_1, \dots, h_k)$, on a pour tout $\rho \in \mathcal{R}_C$:

$$[g\rho \cdot (\delta(dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k) \cdot \varepsilon_{k-1}(m) + \varepsilon_{k-1}(m'))] = [g\rho \cdot (\delta(dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k) \cdot \varepsilon_{k-1}(m))].$$

On a des isomorphismes :

$$\mathcal{O}_C \xleftarrow{\gamma_1} H^{k-1}(\mathcal{I}^\bullet / \text{Ann}_{\mathcal{I}^\bullet}(h_1, \dots, h_k)) \xrightarrow{\gamma} H^k(\text{Ann}_{\mathcal{I}^\bullet}(h_1, \dots, h_k)) \xrightarrow{\gamma_2} \mathcal{O}_C.$$

Soit $\bar{a} = \gamma_1([\bar{m}]) \in \mathcal{O}_C$. Comme $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ sont des isomorphismes, on peut supposer⁴ que $\gamma_2 \circ \gamma \circ \gamma^{-1}(\bar{1}) = \bar{1}$, et donc $\gamma_2([\varepsilon_{k-1}(m)]) = \bar{a} \in \mathcal{O}_C$.

Par conséquent, $[g\Psi]$ s'identifie à l'application $\begin{cases} \mathcal{R}_C \rightarrow \mathcal{O}_C \\ \rho \mapsto \overline{\rho g \delta(dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k) a} \end{cases}$ et comme g est un non diviseur de zéro dans \mathcal{O}_C , on en déduit que $[\Psi]$ s'identifie à

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_C &\rightarrow \mathcal{O}_C \\ \rho &\mapsto \overline{\rho \delta(dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k) a} \end{aligned}$$

D'où le résultat : si $\delta \otimes \bar{a} \in \Theta_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C$, alors $\alpha(\delta \otimes \bar{a}) = \bar{a} \cdot \delta(dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k)$. \square

3.3.3 Fin de la preuve du théorème 3.3.7

Nous avons besoin des résultats suivants, qui s'obtiennent à partir de la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \tilde{\Omega}^k \rightarrow \Omega^k(\log C) \rightarrow \mathcal{R}_C \rightarrow 0 \quad (3.19)$$

en utilisant des techniques analogues à celles de la preuve de la proposition 3.3.5.

On remarque d'abord la propriété suivante :

Lemme 3.3.18. *Si C est une intersection complète singulière libre alors \mathcal{R}_C est un module de Cohen-Macaulay maximal et $\mathcal{R}_C^\vee = \mathcal{I}_C$.*

Preuve. Par définition, comme C est libre, \mathcal{I}_C est un module de Cohen-Macaulay maximal. Par le théorème 2.3.20, on a que \mathcal{I}_C^\vee est aussi un module de Cohen-Macaulay maximal, et $\mathcal{I}_C^{\vee\vee} = \mathcal{I}_C$. De plus, par la proposition 3.2.17, $\mathcal{I}_C^\vee = \mathcal{R}_C$, ce qui nous donne le résultat. \square

³On remarque que $\varepsilon_{k-1}(m)$ et $\varepsilon_{k-1}(m')$ sont annulés par (h_1, \dots, h_k) , et donc les multiplier par $g\rho \in \mathcal{O}_C$ a du sens.

⁴L'image $\gamma_2 \circ \gamma \circ \gamma^{-1}(\bar{1})$ est un élément inversible de \mathcal{O}_C , et donc on peut composer avec un isomorphisme supplémentaire $\tilde{\gamma} : \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_C$ pour que l'image soit $\bar{1}$.

Proposition 3.3.19. *Si $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log C)) \leq k - 1$ alors \mathcal{R}_C est un \mathcal{O}_C -module de Cohen-Macaulay maximal.*

Si C est libre, alors $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log C)) \leq k$.

Preuve. Supposons que $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log C)) \leq k - 1$. Par la formule d'Auslander-Buchsbaum on a $\text{prof}(\Omega^k(\log C)) \geq m - k + 1$. Par la formule d'Auslander-Buchsbaum et le lemme 3.3.11 on a $\text{prof}(\tilde{\Omega}^k) = m - k + 1$. De plus, $\text{prof}(\mathcal{R}_C) \leq m - k$, donc par le lemme de la profondeur appliqué à la suite exacte (3.19) on a $\text{prof}(\mathcal{R}_C) = m - k = \dim(\mathcal{R}_C)$, et donc \mathcal{R}_C est Cohen-Macaulay.

Supposons que C est libre. Par le lemme 3.3.18, on a $\text{prof}(\mathcal{R}_C) = m - k$. De plus, $\text{prof}(\tilde{\Omega}^k) = m - k + 1$ donc le lemme de la profondeur appliqué à la suite exacte (3.19) donne $\text{prof}(\Omega^k(\log C)) \geq m - k$. Par la formule d'Auslander Buchsbaum on obtient $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log C)) \leq k$. \square

Grâce au calcul explicite du morphisme connectant α de la proposition 3.3.14, nous pouvons comparer $\text{Im}(\alpha) = \mathcal{I}_C$ et \mathcal{R}_C^\vee , ce qui nous permet de finir la preuve du théorème 3.3.7, en utilisant la proposition 3.3.19.

Preuve (Fin de la preuve du théorème 3.3.7). Commençons par l'implication 2. \Rightarrow 6. Par la proposition 3.3.19, on a $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log C)) \leq k$ et par le lemme 3.3.18, $\mathcal{R}_C^\vee = \mathcal{I}_C$. L'application α de la proposition 3.3.13 est donc surjective et $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S) = 0$.

Soit

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^{\ell_k} \xrightarrow{d_k} \mathcal{O}_S^{\ell_{k-1}} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{O}_S^{\ell_0} \rightarrow \Omega^k(\log C) \rightarrow 0 \quad (3.20)$$

une résolution libre minimale de $\Omega^k(\log C)$. En particulier, cela signifie que les coefficients de d_k sont dans l'idéal maximal \mathfrak{m} de \mathcal{O}_S . On applique le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \mathcal{O}_S)$ à cette résolution, et on identifie $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S^{\ell_j}, \mathcal{O}_S)$ avec $\mathcal{O}_S^{\ell_j}$. Alors $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S)$ est égal à $\mathcal{O}_S^{\ell_k} / \text{Im}(d_k)$. Comme ce module est nul, on a par le lemme de Nakayama, $\mathcal{O}_S^{\ell_k} = 0$ et donc $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log C)) \leq k - 1$.

De plus, comme il y a des relations entre les mineurs maximaux de la matrice jacobienne, l'application α a un noyau non nul.

Par conséquent, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S) \neq 0$ et $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log C)) = k - 1$.

L'implication 6. \Rightarrow 5. est triviale.

Montrons 5. \Rightarrow 2.

Supposons que $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log C)) \leq k - 1$. La suite exacte (3.18) devient :

$$0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S) \rightarrow \Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C \xrightarrow{\alpha} \mathcal{R}_C^\vee \rightarrow 0$$

Comme par la proposition 3.3.14 l'image de α est \mathcal{I}_C , on a $\mathcal{R}_C^\vee = \mathcal{I}_C$. Par la proposition 3.3.19, \mathcal{R}_C est un \mathcal{O}_C -module de Cohen-Macaulay maximal. On a donc par le théorème 2.3.20 que \mathcal{I}_C est aussi Cohen-Macaulay maximal. \square

Remarque 3.3.20. Toutes les caractérisations de la liberté que nous avons mentionnées dans le chapitre 2 se généralisent aux intersections complètes, sauf une : le critère de Saito 2.2.8. On rappelle que contrairement au cas des hypersurfaces, les formes différentielles multi-logarithmiques d'une intersection complète de codimension au moins deux ne sont pas stables par produit extérieur. Nous donnons de plus dans le chapitre 6 des exemples de courbes gauches pour lesquelles le nombre de générateurs du module des formes multi-logarithmiques est différent (voir proposition 6.1.26 et exemple 6.1.36).

3.3.4 Conséquences de la liberté

Grâce au corollaire 3.3.13 et au théorème 3.3.7, on peut calculer pour les intersections complètes libres les modules $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S)$ pour $q \in \mathbb{N}$, en particulier, on relie le module $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S)$ au module $\text{Der}^k(-\log C)$.

Corollaire 3.3.21. *Soit C une intersection complète libre de codimension au moins deux. Alors :*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S) &= h\Theta_S^k, \\ \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S) &= \frac{\text{Der}^k(-\log C)}{\left(\sum_{i=1}^k h_i \Theta_S^k\right)}, \end{aligned}$$

et pour tout $q \notin \{0, k-1\}$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S) = 0$.

Preuve. Le début de la suite exacte longue 3.15 donne

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S) = h\Theta_S^k.$$

Pour tout $q \leq k-1$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\mathcal{R}_C, \mathcal{O}_S) = 0$ et pour tout $1 \leq q \leq k-2$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\tilde{\Omega}^k, \mathcal{O}_S) = 0$ de sorte que pour tout $1 \leq q \leq k-2$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S) = 0$. De plus, comme C est libre, $\dim \text{proj}(\Omega^k(\log C)) = k-1$ ce qui implique que pour tout $q > k-1$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S) = 0$. Pour le terme restant, la suite exacte longue (3.15) nous donne que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S)$ est le noyau de l'application $\alpha : \Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{I}_C$ calculée dans la proposition 3.3.14. D'où le résultat. \square

Remarque 3.3.22. Si C n'est pas libre, les résultats du corollaire précédent portant sur les modules $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S)$ pour $q \leq k-1$ restent vrais. De plus, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\Omega^k(\log C), \mathcal{O}_S)$ est isomorphe à $\mathcal{R}_C^\vee / \mathcal{I}_C$.

Nous verrons dans le paragraphe 6.1 le calcul explicite d'une résolution projective du module $\Omega^{m-1}(\log C)$ dans le cas d'une courbe intersection complète quasi-homogène (voir théorème 6.1.33).

Proposition 3.3.23. *Soit C une intersection complète réduite de codimension au moins 2. Alors*

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\text{Der}^k(-\log C), \mathcal{O}_S) = \Omega_S^k,$$

$$\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\text{Der}^k(-\log C), \mathcal{O}_S) \simeq \mathcal{R}_C.$$

Et pour tout $1 \leq q \leq k-2$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\text{Der}^k(-\log C), \mathcal{O}_S) = 0$.

Si de plus C est libre, alors pour tout $q \notin \{0, k-1\}$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\text{Der}^k(-\log C), \mathcal{O}_S) = 0$.

Preuve. On applique le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \mathcal{O}_S)$ à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \text{Der}^k(-\log C) \rightarrow \Theta_S^k \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow 0.$$

Comme Θ_S^k est libre, pour tout $q \geq 1$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\Theta_S^k, \mathcal{O}_S) = 0$. De plus, par le lemme 3.3.12, pour tout $q < k$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_S) = 0$, et $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_S) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_C, \mathcal{O}_C) = \mathcal{R}_C$. Cela nous donne les résultats annoncés.

Si C est libre, d'après la proposition 3.3.5, $\dim \text{proj}(\text{Der}^k(-\log C)) = k-1$ et donc pour tout $q \geq k$ on a $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\text{Der}^k(-\log C), \mathcal{O}_S) = 0$. \square

Chapitre 4

Formes multi-logarithmiques d'un espace réduit équidimensionnel et liberté des espaces de Cohen-Macaulay

Dans ce chapitre nous généralisons certains des résultats du paragraphe précédent à un espace réduit équidimensionnel X , que nous supposons pour certains énoncés Cohen-Macaulay. Nous avons choisi de traiter d'abord et séparément le cas des intersections complètes car il présente moins de technicité, et le cas équidimensionnel repose en grande partie sur le cas intersection complète.

Pour définir un module de formes différentielles multi-logarithmiques le long de X à la façon d'A.G. Aleksandrov dans [Ale14, §10], nous devons d'abord inclure l'espace X dans une intersection complète C , qui doit être réduite au moins le long de X . Nous montrons d'abord l'existence d'une telle intersection complète (voir lemme 4.1.1). Dans la section 4.1 nous écrivons en détails les preuves des résultats annoncés dans [Ale14, §10], en particulier, on montre que le module des multi-résidus de X défini en 4.1.7 ne dépend pas du choix de l'intersection complète C , et nous détaillons la preuve du théorème 10.2 de [Ale14] qui relie les multi-résidus logarithmiques aux formes régulières méromorphes par l'intermédiaire des symboles résidus introduits dans [Ker83], et qui apparaissent aussi dans [Sch16].

Dans le paragraphe 4.2.1, nous montrons que tout espace réduit équidimensionnel peut être vu comme une union de composantes irréductibles d'une intersection complète *réduite* (voir proposition 4.2.1). Nous donnons ensuite quelques propriétés de la forme fondamentale de X , en particulier, nous généralisons la caractérisation 3.1.15 grâce à cette forme fondamentale (voir proposition 4.2.6). Nous proposons ensuite une définition des k -champs de vecteurs logarithmiques le long de X , et nous montrons dans la proposition 4.2.12 que les k -formes multi-logarithmiques et les k -champs de vecteurs multi-logarithmiques de X vérifient encore une sorte de dualité impliquant l'idéal de l'intersection complète C contenant X . Nous montrons ensuite que le dual sur \mathcal{O}_C de l'idéal jacobien de C restreint à X est le module des multi-résidus de X .

Nous proposons comme définition de la liberté pour un espace Cohen-Macaulay réduit X le fait que l'idéal jacobien restreint d'une intersection complète C réduite contenant X à X est Cohen-Macaulay. Nous généralisons les caractérisations de la liberté de la proposition 3.3.5 et du théorème 3.3.7 au cas d'un espace Cohen-Macaulay réduit X (voir théorème 4.2.22). Nous terminons ce chapitre en comparant les différentes notions d'idéaux jacobiens dont on dispose.

4.1 Formes différentielles logarithmiques d'un espace réduit équidimensionnel

Dans cette partie, nous donnons la définition de formes différentielles multi-logarithmiques le long d'un espace réduit équidimensionnel telle qu'elle est proposée par A.G. Aleksandrov dans [Ale14, §10], ainsi que la notion de multi-résidus qui en résulte. Nous donnons une preuve détaillée de l'isomorphisme entre les modules des multi-résidus et les formes régulières méromorphes décrites par l'intermédiaire de symboles résidus (voir proposition 4.1.20 et théorème 4.1.22).

4.1.1 Définition

Dans tout ce chapitre, S désigne le germe en un point p d'une variété analytique lisse de dimension m , munie d'un système de coordonnées (x_1, \dots, x_m) .

Soit $X \subset S$ un germe d'espace analytique réduit équidimensionnel. On note \mathcal{I}_X l'idéal radical de \mathcal{O}_S définissant X . On note (h_1, \dots, h_r) une famille génératrice de \mathcal{I}_X .

Soit $\mathcal{I}_X = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_p$ une décomposition primaire minimale de l'idéal \mathcal{I}_X . Étant donné que X est réduit, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, \mathfrak{p}_i est un idéal premier (voir [Eis95, Corollary 2.12]). Pour $i \in \{1, \dots, p\}$ on note X_i la composante irréductible de X définie par \mathfrak{p}_i .

Dans le cas d'une hypersurface, le module des formes différentielles logarithmiques ne dépend que de l'hypersurface. Le module des formes différentielles multi-logarithmiques le long d'une intersection complète dépend quant à lui du choix de la suite régulière la définissant.

Pour un espace réduit équidimensionnel, la définition proposée par A.G. Aleksandrov dans [Ale14, §10] dépend en plus du choix d'une intersection complète contenant X . Avant de donner cette définition, nous introduisons le lemme suivant :

Lemme 4.1.1. *Il existe une suite régulière $(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ telle qu'une décomposition primaire de l'idéal $\mathcal{I}_C := \sum_{i=1}^k f_i \mathcal{O}_S$ soit de la forme $\mathcal{I}_C = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_p \cap \mathfrak{q}_{p+1} \cap \mathfrak{q}_r$. Autrement dit, X est réduit dans C .*

Preuve. Comme la codimension de X dans S est k , on a $\text{prof}_{\mathcal{I}_X}(\mathcal{O}_S) = k$ (voir par exemple [GP02, Corollary 7.7.10]). Il existe donc une suite régulière $(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X$. Notons \mathcal{I}_C l'idéal de \mathcal{O}_S engendré par (f_1, \dots, f_k) . Une décomposition primaire de \mathcal{I}_C est de la forme

$$\mathcal{I}_C = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_p \cap \mathfrak{q}_{p+1} \cap \dots \cap \mathfrak{q}_\ell$$

où $\sqrt{\mathfrak{q}_i} = \mathfrak{p}_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on note $\kappa_i = \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}_i} / \mathfrak{p}_i \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}_i}$ le corps résiduel de \mathcal{O}_X en \mathfrak{p}_i . Pour $h \in \mathcal{I}_X$, on définit le vecteur

$$\overline{\partial h} := \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_m} \right)^t \in (\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}_i} / \mathfrak{p}_i \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}_i})^m.$$

Supposons qu'il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\mathfrak{q}_i \neq \mathfrak{p}_i$. Cela signifie que C n'est pas réduite le long de X_i , et en particulier, X_i est contenu dans le lieu singulier de C donc

$$\dim_{\kappa_i}(\overline{\partial f_1}, \dots, \overline{\partial f_k}) = d < k.$$

Par exemple, $\overline{\partial f_k} \in (\overline{\partial f_1}, \dots, \overline{\partial f_{k-1}})_{\kappa_i}$. Comme X_i n'est pas contenu dans le lieu singulier de X , la dimension du κ_i -espace vectoriel $(\overline{\partial h_1}, \dots, \overline{\partial h_r})$ est k . Il existe donc $h \in \mathcal{I}_X$ tel que :

$$\dim_{\kappa_i}(\overline{\partial f_1}, \dots, \overline{\partial f_{k-1}}, \overline{\partial h}) = d + 1.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ on a :

$$\dim_{\kappa_i}(\overline{\partial f_1}, \dots, \overline{\partial f_k} + \lambda \overline{\partial h}) = d + 1. \quad (4.1)$$

Comme f_k est un non diviseur de zéro de $\mathcal{O}_S/(f_1, \dots, f_{k-1})\mathcal{O}_S$, pour un $\lambda \in \mathbb{C}$ suffisamment général, $f_k + \lambda h$ est aussi un non diviseur de zéro de $\mathcal{O}_S/(f_1, \dots, f_{k-1})\mathcal{O}_S$. En effet, si s est le nombre d'idéaux premiers associés à l'idéal (f_1, \dots, f_k) , alors $f_k + \lambda h$ est un diviseur de zéro pour au plus s valeurs distinctes¹ de λ .

De plus, si $j \in \{1, \dots, p\}$ est différent de i et si $\lambda \in \mathbb{C}$ est assez général², on a :

$$\dim_{\kappa_j}(\overline{\partial f_1}, \dots, \overline{\partial f_k + \lambda \partial h}) \geq \dim_{\kappa_j}(\overline{\partial f_1}, \dots, \overline{\partial f_k}). \quad (4.2)$$

Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que les conditions (4.1) et (4.2) sont vérifiées, et de plus $(f_1, \dots, f_k + \lambda h) \subseteq \mathcal{I}_X$ est une suite régulière. Par récurrence, on construit une suite régulière $(F_1, \dots, F_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ telle que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\dim_{\kappa_i}(\overline{\partial F_1}, \dots, \overline{\partial F_k}) = k$, et donc $(F_1, \dots, F_k) = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_p \cap \mathfrak{q}'_{p+1} \cap \dots \cap \mathfrak{q}'_{\ell'}$. \square

Remarque 4.1.2. On ne demande pas dans l'énoncé du lemme 4.1.1 que les composantes additionnelles de l'intersection complète définie par (f_1, \dots, f_k) soient réduites. Nous montrons dans la proposition 4.2.1 qu'on peut trouver une intersection complète *réduite* contenant X . Néanmoins, pour les résultats de cette partie, nous n'avons pas besoin de ce résultat plus fort.

Nous sommes maintenant en mesure de définir les formes différentielles multi-logarithmiques le long de X relativement à une intersection complète C vérifiant le lemme 4.1.1 et définie par une suite régulière (f_1, \dots, f_k) . On pose $f = f_1 \cdots f_k$.

On rappelle que pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\Omega}_f^q = \sum_{i=1}^k \frac{1}{f_i} \Omega_S^q = \frac{1}{f} \mathcal{I}_C \Omega_S^q$ (voir notation 3.1.14).

Définition 4.1.3 ([Ale14, Définition 10.1]). Soit $(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ une suite régulière vérifiant le lemme 4.1.1. On note C l'intersection complète définie par $\mathcal{I}_C = (f_1, \dots, f_k)$. Soit $q \in \mathbb{N}$. On définit le module des q -formes différentielles multi-logarithmiques relativement à la paire (X, C) par :

$$\begin{aligned} \Omega^q(\log X/C) &= \left\{ \omega \in \frac{1}{f_1 \cdots f_k} \Omega_S^q ; \forall i \in \{1, \dots, r\}, h_i \omega \in \widetilde{\Omega}_f^q \text{ et } dh_i \wedge \omega \in \widetilde{\Omega}_f^{q+1} \right\} \\ &= \left\{ \omega \in \frac{1}{f_1 \cdots f_k} \Omega_S^q ; \mathcal{I}_X \omega \subseteq \widetilde{\Omega}_f^q \text{ et } d\mathcal{I}_X \wedge \omega \in \widetilde{\Omega}_f^{q+1} \right\} \end{aligned}$$

Remarque 4.1.4. Si C est réduit, on a $\Omega^q(\log C/C) = \Omega^q(\log C)$, où $\Omega^q(\log C)$ est donné dans la définition 3.1.4. De plus, pour tout $q \in \mathbb{N}$, on a la suite d'inclusions suivante :

$$\widetilde{\Omega}_f^q \subseteq \Omega^q(\log X/C) \subseteq \Omega^q(\log C).$$

Proposition 4.1.5. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, le faisceau $\Omega^q(\log X/C)$ est cohérent. De plus, le faisceau $f \cdot \Omega^q(\log X/C)$ ne dépend pas du choix des équations (f_1, \dots, f_k) définissant l'intersection complète C , mais dépend du choix de l'intersection complète C contenant X .

Preuve. Soit $q \in \mathbb{N}$ et (h_1, \dots, h_r) une famille génératrice de \mathcal{I}_X . Le module $f \cdot \Omega^q(\log X/C)$ est le noyau du morphisme de faisceaux cohérents :

$$\Omega_S^q \xrightarrow{\beta} (\Omega_S^q / \mathcal{I}_C \Omega_S^q)^r \oplus \left(\Omega_S^{q+1} / \mathcal{I}_C \Omega_S^{q+1} \right)^r$$

défini pour $\omega \in \Omega_S^q$ par $\beta(\omega) = (h_1 \omega, \dots, h_r \omega, dh_1 \wedge \omega, \dots, dh_r \wedge \omega)$. On en déduit que $\Omega^q(\log X/C)$ est cohérent et que $f \cdot \Omega^q(\log X/C)$ ne dépend pas du choix des équations définissant C .

Supposons que C' est une intersection complète vérifiant le lemme 4.1.1 telle que $\mathcal{I}_C \subseteq \mathcal{I}_{C'}$. On vérifie que $\Omega^q(\log X/C) \subseteq \Omega^q(\log X/C')$. On remarque que $\mathcal{I}_{C'} \Omega_S^q \subseteq \Omega^q(\log X/C')$. Si $\mathcal{I}_C \neq \mathcal{I}_{C'}$, on a donc $\Omega^q(\log X/C) \neq \Omega^q(\log X/C')$. \square

¹En effet, si $f_k + \lambda_1 h$ et $f_k + \lambda_2 h$ sont dans un même idéal premier associé $\tilde{\mathfrak{p}}$, alors $(\lambda_2 - \lambda_1)f_k \in \tilde{\mathfrak{p}}$ et donc $\lambda_1 = \lambda_2$ vu que f_k n'est pas un diviseur de zéro.

²Seulement un nombre fini de valeurs de λ peuvent faire baisser la dimension.

4.1.2 Multi-résidus logarithmiques

Nous fixons désormais une suite régulière $(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ vérifiant le lemme 4.1.1. On note C l'intersection complète ainsi définie, munie de la structure peut-être non réduite donnée par $\mathcal{I}_C = (f_1, \dots, f_k)$. On pose $f = f_1 \cdots f_k$ et $\mathcal{I}_C = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_p \cap \mathfrak{q}_{p+1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_\ell$ une décomposition primaire de \mathcal{I}_C .

Proposition 4.1.6. *Soit $q \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega^q(\log X/C)$. Alors il existe $g \in \mathcal{O}_S$ qui induit un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_X , $\xi \in \Omega_S^{q-k}$ et $\eta \in \widetilde{\Omega}_f^q$ tels que :*

$$g\omega = \frac{df_1 \wedge \cdots \wedge df_k}{f_1 \cdots f_k} \wedge \xi + \eta. \quad (4.3)$$

Preuve. Il est démontré dans la preuve de [Ale12, §3, Theorem 1] que pour tout g dans l'idéal $J_C \subseteq \mathcal{O}_S$ engendré par les mineurs maximaux de la matrice jacobienne de (f_1, \dots, f_k) , la forme différentielle $g\omega$ peut s'écrire sous la forme 4.3. L'hypothèse que C est réduite n'est utilisée qu'à la fin de la preuve de [Ale12, §3, Theorem 1] pour assurer l'existence d'un élément $g \in J_C$ qui induit un non diviseur de zéro dans \mathcal{O}_C .

Comme X est réduit dans C , il existe $g \in J_C$ qui induit un non diviseur de zéro dans \mathcal{O}_X , ce qui achève la preuve. \square

$$\text{On pose } \Omega_X^q = \frac{\Omega_S^q}{\mathcal{I}_X \Omega_S^q + d\mathcal{I}_X \wedge \Omega_S^{q-1}}.$$

Définition 4.1.7. *On conserve les notations de la proposition 4.1.6. Le multi-résidu de ω relativement à la paire (X, C) est défini par :*

$$\text{res}_{X/C}(\omega) = \left. \frac{\xi}{g} \right|_X \in \Omega_X^{q-k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X.$$

Proposition 4.1.8. *L'application $\text{res}_{X/C}$ est bien définie.*

Preuve. On suppose que pour $i \in \{1, 2\}$ on a

$$g_i \omega = \frac{df_1 \wedge \cdots \wedge df_k}{f_1 \cdots f_k} \wedge \xi_i + \eta_i$$

où g_i, ξ_i, η_i vérifient les hypothèses de la proposition 4.1.6. De même que dans la preuve de [Ale12, §4, Proposition 2] qui utilise le lemme de De Rham généralisé (voir lemme 2.3.5), il existe $e \in \mathbb{N}$ tel que

$$J_C^e(g_1 \xi_2 - g_2 \xi_1) \subseteq \sum_{i=1}^k df_i \wedge \Omega_S^{q-k-1} + (f_1, \dots, f_k) \Omega_S^{q-k}.$$

Comme X est réduit dans C , on peut choisir $g \in J_C$ tel que g induise un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_X . Comme $\mathcal{I}_C \subseteq \mathcal{I}_X$, la classe de $g^e(g_1 \xi_2 - g_2 \xi_1)$ dans Ω_X^{q-k} est nulle, et donc $\left. \frac{\xi_1}{g_1} \right|_X = \left. \frac{\xi_2}{g_2} \right|_X$. \square

Corollaire 4.1.9. *Le noyau de l'application $\text{res}_{X/C}$ est $\widetilde{\Omega}_f^q$.*

Preuve. Soit $\omega \in \Omega^q(\log X/C)$ telle que $\text{res}_{X/C}(\omega) = 0$. Montrons que $\alpha := f\omega \in \mathcal{I}_C \Omega_S^q$. La condition $\text{res}_{X/C}(\omega) = 0$ et l'écriture (4.3) assurent que $\alpha \in \mathcal{I}_X \Omega_S^q = (\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_p) \Omega_S^q$, vu que g est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_X et $\mathcal{I}_C \subseteq \mathcal{I}_X$. Soit $i \in \{p+1, \dots, \ell\}$. Comme C est une intersection complète, \mathcal{I}_C n'a pas d'idéal premier immergé. Il existe donc $h \in \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_p$ tel que $h \notin \sqrt{\mathfrak{q}_i}$. De plus, $h\alpha \in \mathcal{I}_C \Omega_S^q$. Par conséquent, $\alpha \in \mathfrak{q}_i \Omega_S^q$. On obtient ainsi le résultat voulu : $\alpha \in \mathcal{I}_C \Omega_S^q$. \square

Notation 4.1.10. On pose pour $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}_{X/C}^q := \text{res}_{X/C} \left(\Omega^{q+k}(\log X/C) \right)$.

Nous allons montrer que les modules $\mathcal{R}_{X/C}^q$ ne dépendent pas du choix de l'intersection complète C . Pour cela, les deux résultats suivants sont fondamentaux :

Proposition 4.1.11 ([Kun86, (E.20)]). *Soit $(a_1, \dots, a_k) \subseteq (b_1, \dots, b_k)$ deux suites régulières de \mathcal{O}_S . Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_k(\mathcal{O}_S)$ telle que $(a_1, \dots, a_k)^t = A(b_1, \dots, b_k)^t$, et $\Delta = \det(A)$. Alors $\Delta(b_1, \dots, b_k) \subseteq (a_1, \dots, a_k)$ et de plus l'application*

$$\mu_\Delta : \begin{cases} \mathcal{O}_S/(b_1, \dots, b_k)\mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_S/(a_1, \dots, a_k)\mathcal{O}_S \\ \bar{m} \longmapsto \overline{\Delta m} \end{cases}$$

est injective, et

$$\text{Im}(\mu_\Delta) = \{ \bar{m} \in \mathcal{O}_S/(a_1, \dots, a_k)\mathcal{O}_S ; (b_1, \dots, b_k)\bar{m} = \bar{0} \}.$$

Proposition 4.1.12 (Théorème de Wiebe, [Kun86, (E.21)]). *Avec les mêmes notations, en notant $\bar{\Delta}$ l'image de Δ dans $\bar{A} = \mathcal{O}_S/(a_1, \dots, a_k)\mathcal{O}_S$, on a :*

$$\text{Ann}_{\bar{A}}(\bar{\Delta}) = (b_1, \dots, b_k)/(a_1, \dots, a_k) \text{ et } \text{Ann}_{\bar{A}}((b_1, \dots, b_k)/(a_1, \dots, a_k)) = (\bar{\Delta}).$$

Nous pouvons à présent montrer la proposition suivante :

Proposition 4.1.13. *Pour tout $q \in \mathbb{N}$, le module $\mathcal{R}_{X/C}^q := \text{res}_{X/C}(\Omega^{q+k}(\log X/C))$ ne dépend pas du choix de (f_1, \dots, f_k) .*

Preuve. On commence par considérer le cas d'une suite régulière $(f'_1, \dots, f'_k) \subseteq (f_1, \dots, f_k)$ vérifiant le lemme 4.1.1. On note $\mathcal{I}_{C'} = (f'_1, \dots, f'_k)$. Il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_k(\mathcal{O}_S)$ telle que $(f'_1, \dots, f'_k)^t = A(f_1, \dots, f_k)^t$. On note Δ le déterminant de A . D'après la preuve de la proposition 3.1.21, on a :

$$df'_1 \wedge \dots \wedge df'_k = \Delta df_1 \wedge \dots \wedge df_k + \nu \quad (4.4)$$

avec $\nu \in \mathcal{I}_{C'}\Omega_S^k$.

Soit $\alpha \in f_1 \dots f_k \Omega^{k+q}(\log X/C)$. Montrons que

$$\text{res}_{X/C} \left(\frac{\alpha}{f_1 \dots f_k} \right) = \text{res}_{X/C'} \left(\frac{\Delta \alpha}{f'_1 \dots f'_k} \right) \in \Omega_X^q \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}_X.$$

Soit g, ξ, η vérifiant les conditions de la proposition 4.1.6 tels que

$$g\alpha = df_1 \wedge \dots \wedge df_k \wedge \xi + \eta'$$

avec $\eta' = f\eta$. La relation (4.4) assure que

$$g\Delta\alpha = df'_1 \wedge \dots \wedge df'_k \wedge \xi - \nu \wedge \xi + \Delta\eta'.$$

Comme $\eta' \in \mathcal{I}_{C'}\Omega_S^{q+k}$, d'après la proposition 4.1.11, $\Delta\eta' \in \mathcal{I}_{C'}\Omega_S^{q+k}$. Par conséquent,

$$\text{res}_{X/C'} \left(g \frac{\Delta\alpha}{f'} \right) = \text{res}_{X/C'} \left(\frac{df'_1 \wedge \dots \wedge df'_k}{f'} \wedge \xi - \frac{\nu \wedge \xi}{f'} \right).$$

On écrit $C' = X \cup Y'$, où Y' peut ne pas être réduct, mais ne contient pas de composante irréductible de X . Par le lemme d'évitement, comme Y' ne contient pas de composante irréductible de X , il existe $F \in \mathcal{I}_{Y'}$ tel que $F \notin \bigcup_{i=1}^p \mathfrak{p}_i$, et donc F est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_X . Alors $F\nu \wedge \xi \in \mathcal{I}_{C'}\Omega_S^q = \mathcal{I}_X \cap \mathcal{I}_{Y'}\Omega_S^q$. On a donc :

$$\text{res}_{X/C'} \left(gF \frac{\Delta\alpha}{f'} \right) = \text{res}_{X/C'} \left(\frac{df'_1 \wedge \dots \wedge df'_k}{f'} \wedge F\xi - F \frac{\nu \wedge \xi}{f'} \right) = \text{res}_{X/C'} \left(\frac{df'_1 \wedge \dots \wedge df'_k}{f'} \wedge F\xi \right).$$

Et donc $\text{res}_{X/C'} \left(gF \frac{\Delta\alpha}{f'} \right) = F\xi|_X$. Comme F est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_X , on a donc

$$\text{res}_{X/C'} \left(\frac{\Delta\alpha}{f'} \right) = \frac{\xi}{g} \Big|_X = \text{res}_{X/C} \left(\frac{\alpha}{f} \right). \quad (4.5)$$

Par conséquent, $\mathcal{R}_{X/C}^q \subseteq \mathcal{R}_{X/C'}^q$.

Considérons à présent $\alpha' \in f' \Omega^{k+q}(\log X/C')$. Comme $\mathcal{I}_X \alpha' \subseteq \mathcal{I}_{C'} \Omega^{q+k}$ et $\mathcal{I}_C \subseteq \mathcal{I}_X$, on a $\mathcal{I}_C \overline{\alpha'} = \overline{0} \in \Omega_S^{q+k} / \mathcal{I}_{C'} \Omega_S^{q+k}$. D'après la proposition 4.1.11, il existe $\alpha \in \Omega_S^{q+k}$ et $\beta \in \mathcal{I}_{C'} \Omega_S^{q+k}$ tels que

$$\Delta\alpha = \alpha' + \beta.$$

Montrons que $\frac{\alpha}{f} \in \Omega^{q+k}(\log X/C)$. Soit $h \in \mathcal{I}_X$. On a $\Delta h\alpha = h\alpha' - h\beta \in \mathcal{I}_{C'} \Omega_S^{q+k}$ et $\Delta dh \wedge \alpha \in \mathcal{I}_{C'} \Omega_S^{q+k+1}$. D'après la proposition 4.1.12, on a $h\alpha \in \mathcal{I}_{C'} \Omega_S^{q+k}$ et $dh \wedge \alpha \in \mathcal{I}_C \Omega_S^{q+k+1}$, et donc $\frac{\alpha}{f} \in \Omega^{q+k}(\log X/C)$. De plus, par (4.5), $\text{res}_{X/C} \left(\frac{\alpha}{f} \right) = \text{res}_{X/C'} \left(\frac{\Delta\alpha}{f'} \right)$, ce qui nous donne l'égalité voulue : $\mathcal{R}_{X/C}^q = \mathcal{R}_{X/C'}^q$.

Considérons à présent le cas général. Soit $(f_1'', \dots, f_k'') \subseteq \mathcal{I}_X$ une autre suite régulière vérifiant le lemme 4.1.1. Il existe une suite régulière $(f_1', \dots, f_k') \subseteq (f_1, \dots, f_k) \cap (f_1'', \dots, f_k'')$ vérifiant le lemme 4.1.1. Grâce au cas précédent, on a $\mathcal{R}_{X/C}^q = \mathcal{R}_{X/C'}^q = \mathcal{R}_{X/C''}^q$. \square

Notation 4.1.14. On pose donc pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\mathcal{R}_X^q = \mathcal{R}_{X/C}^q$.

4.1.3 Lien avec les formes régulières méromorphes

Comme dans le cas des hypersurfaces ou des intersections complètes, les modules des résidus \mathcal{R}_X^q pour $q \in \mathbb{N}$ sont isomorphes aux modules ω_X^q des formes régulières méromorphes le long de X . Ce résultat fait l'objet du théorème 10.2 de [Ale14]. Nous nous proposons ici d'en donner une preuve détaillée, qui utilise la description des formes régulières méromorphes en termes de symboles résidus proposée dans [Ker84], qui était déjà utilisée dans un exposé de M. Schulze donné à Oberwolfach en 2012, puis dans [Sch16], dans le but de généraliser les résidus logarithmiques aux espaces réduits équidimensionnels.

Commençons par donner une définition des symboles résidus dans le cas qui nous intéresse, à savoir pour des suites régulières. On renvoie à [Ker83] pour plus de détails, et pour des définitions plus générales faisant intervenir des systèmes de dénominateurs³.

Notation 4.1.15 ([Ker83, §2]). On note \mathcal{S} l'ensemble des suites régulières de \mathcal{O}_S . On pose \mathcal{S}^q l'ensemble des suites régulières de \mathcal{O}_S de longueur q .

Soit $(f_1, \dots, f_k) \in \mathcal{S}^k$ telle que $(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X$. On note $S(f)$ l'ensemble des non diviseurs de zéro de $\mathcal{O}_S / (f_1, \dots, f_k)$. On pose pour $q \in \mathbb{N}$

$$C \left(\mathcal{S}^k, \Omega_S^q / \mathcal{I}_X \Omega_S^q \right) = (\Omega_S^q / \mathcal{I}_X \Omega_S^q)_{S(f)}.$$

Ce module ne dépend pas du choix de la suite régulière $(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ (voir [Ker83, Lemma 2.1]).

Définition 4.1.16. On note $C^k(\mathcal{S}, \Omega_S^q / \mathcal{I}_X \Omega_S^q)$ le quotient de l'ensemble

$$\left\{ (\alpha/s, (f_1, \dots, f_k)) ; \alpha/s \in (\Omega_S^q / (f_1, \dots, f_k) \Omega_S^q)_{S(f)}, (f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X \text{ suite régulière} \right\}$$

par la relation d'équivalence

$$(\alpha/s, (f_1, \dots, f_k)) \sim (\alpha'/s', (f_1', \dots, f_k'))$$

³En particulier, si A est un anneau noethérien et M est un A -module de type fini, l'ensemble des M -suites régulières est un système de dénominateurs (voir [Ker83, (1.7)]).

si et seulement si pour toute suite régulière $(f''_1, \dots, f''_k) \subseteq (f'_1, \dots, f'_k) \cap (f_1, \dots, f_k)$ on a

$$\Delta\alpha/s = \Delta'\alpha'/s' \in (\Omega_S^q/(f''_1, \dots, f''_k)\Omega_S^q)_{S(\underline{f''})}$$

où Δ (respectivement Δ') est le déterminant d'une matrice de transition⁴ de (f_1, \dots, f_k) vers (f''_1, \dots, f''_k) (respectivement de (f'_1, \dots, f'_k) vers (f''_1, \dots, f''_k)).

Remarque 4.1.17. Dans [Ker83] sont définis par récurrence des modules $C^p(\mathcal{S}, \Omega_S^q/\mathcal{I}_X\Omega_S^q)$ de sorte qu'ils forment un complexe satisfaisant certaines propriétés (voir [Ker83, Proposition 2.4]). La définition que nous venons de donner est en fait une conséquence de [Ker83, Proposition 2.5].

Définition 4.1.18. La classe d'un élément $(\alpha/s, (f_1, \dots, f_k))$ dans $C^k(\mathcal{S}, \Omega_S^q/\mathcal{I}_X\Omega_S^q)$ est appelée symbole résidu. On le note :

$$\left[\begin{array}{c} \alpha/s \\ f_1, \dots, f_k \end{array} \right].$$

Remarquons la propriété suivante :

Lemme 4.1.19 ([Sch16, (1.14)]). Le symbole résidu $\left[\begin{array}{c} \alpha/s \\ f_1, \dots, f_k \end{array} \right]$ est nul si et seulement si $\alpha \in (f_1, \dots, f_k)\Omega_S^q$.

Preuve. Par [Ker83, Proposition 2.6], $\left[\begin{array}{c} \alpha/s \\ f_1, \dots, f_k \end{array} \right] = 0$ si et seulement s'il existe $(f'_1, \dots, f'_k) \subseteq (f_1, \dots, f_k)$ telle que $\Delta\alpha/s = 0$ dans $(\Omega_S^q/(f'_1, \dots, f'_k)\Omega_S^q)_{S(\underline{f'})}$, avec Δ le déterminant d'une matrice de transition de (f_1, \dots, f_k) vers (f'_1, \dots, f'_k) . Cela équivaut à $\Delta\alpha \in (f'_1, \dots, f'_k)\Omega_S^q$. On conclut en utilisant la proposition 4.1.12, qui assure que $\Delta\alpha \in (f'_1, \dots, f'_k)\Omega_S^q$ si et seulement si $\alpha \in (f_1, \dots, f_k)\Omega_S^q$. \square

Proposition 4.1.20 ([Ker84, (1.2)]). Soit $q \in \mathbb{N}$. Le module des formes régulières méromorphes ω_X^q satisfait :

$$\omega_X^q = \left\{ \left[\begin{array}{c} \alpha \\ f_1, \dots, f_k \end{array} \right]; \alpha \in \Omega_S^{q+k}, (f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X \text{ une suite régulière,} \right. \\ \left. \mathcal{I}_X\alpha \subseteq (f_1, \dots, f_k)\Omega_S^{k+q}, d\mathcal{I}_X \wedge \alpha \subseteq (f_1, \dots, f_k)\Omega_S^{q+k+1} \right\}$$

Le résultat suivant apparaît dans la preuve de [Sch16, Proposition 1.3] :

Proposition 4.1.21. Soit $(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ une suite régulière. Alors pour tout $\left[\begin{array}{c} \beta \\ f'_1, \dots, f'_k \end{array} \right] \in \omega_X^q$ avec $(f'_1, \dots, f'_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ une suite régulière, il existe $\left[\begin{array}{c} \alpha \\ f_1, \dots, f_k \end{array} \right]$ tel que

$$\left[\begin{array}{c} \alpha \\ f_1, \dots, f_k \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \beta \\ f'_1, \dots, f'_k \end{array} \right].$$

Autrement dit, une seule suite régulière (f_1, \dots, f_k) suffit à décrire ω_X^q .

⁴c'est-à-dire d'une matrice A telle que $(f''_1, \dots, f''_k)^t = A(f_1, \dots, f_k)^t$

Preuve. Soit une suite régulière $(f''_1, \dots, f''_k) \subseteq (f_1, \dots, f_k) \cap (f'_1, \dots, f'_k)$. On note Δ (respectivement Δ') le déterminant d'une matrice de transition de (f_1, \dots, f_k) vers (f''_1, \dots, f''_k) (respectivement de (f'_1, \dots, f'_k) vers (f''_1, \dots, f''_k)). Alors

$$\begin{bmatrix} \beta \\ f'_1, \dots, f'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta' \beta \\ f''_1, \dots, f''_k \end{bmatrix}.$$

Par la proposition 4.1.11, on a bien $\mathcal{I}_X \Delta' \beta \subseteq \mathcal{I}_{C''}$ et $d\mathcal{I}_X \wedge \Delta' \beta \subseteq \mathcal{I}_{C''}$. En particulier, $\mathcal{I}_C \Delta' \beta \subseteq \mathcal{I}_{C''}$ donc par la proposition 4.1.11, il existe $\alpha \in \Omega_S^{q+k}$ telle que $\Delta \alpha = \Delta' \beta \pmod{(f''_1, \dots, f''_k)}$. Par conséquent,

$$\begin{bmatrix} \beta \\ f'_1, \dots, f'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta' \beta \\ f''_1, \dots, f''_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ f''_1, \dots, f''_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ f_1, \dots, f_k \end{bmatrix}.$$

On vérifie grâce à la proposition 4.1.12 que $\mathcal{I}_X \alpha \subseteq \mathcal{I}_C$ et $d\mathcal{I}_X \wedge \alpha \subseteq \mathcal{I}_C$, ce qui achève la preuve de la proposition. \square

Donnons à présent la preuve du théorème suivant :

THÉORÈME 4.1.22 ([Ale14, Theorem 10.2]). *Soit $q \in \mathbb{N}$. Le module \mathcal{R}_X^q est isomorphe au module des formes régulières méromorphes ω_X^q .*

Preuve. On pose

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{R}_X^q &\rightarrow \omega_X^q \\ \rho = \text{res}_{X/C} \left(\frac{\alpha}{f} \right) &\mapsto \begin{bmatrix} \alpha \\ f_1, \dots, f_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Montrons que cette application est bien définie, et est un isomorphisme. On commence par remarquer que par définition, si $\frac{\alpha}{f} \in \Omega^{q+k}(\log X/C)$, alors $\mathcal{I}_X \alpha \subseteq (f_1, \dots, f_k) \Omega_S^{q+k}$ et $d\mathcal{I}_X \wedge \alpha \subseteq \mathcal{I}_C \Omega_S^{q+k+1}$.

Soit $(f'_1, \dots, f'_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ une autre suite régulière vérifiant le lemme 4.1.1, et $\frac{\alpha'}{f'} \in \Omega^q(\log X/C')$ telle que $\text{res}_{X/C'} \left(\frac{\alpha}{f'} \right) = \text{res}_{X/C} \left(\frac{\alpha}{f} \right)$.

Les considérations de la preuve de la proposition 4.1.13 nous permettent de supposer de plus que $(f'_1, \dots, f'_k) \subseteq (f_1, \dots, f_k)$. On a :

$$\text{res}_{X/C} \left(\frac{\alpha}{f} \right) = \text{res}_{X/C'} \left(\frac{\Delta \alpha}{f'} \right) = \text{res}_{X/C'} \left(\frac{\alpha'}{f'} \right)$$

où Δ est le déterminant de la matrice de transition de (f_1, \dots, f_k) vers (f'_1, \dots, f'_k) . Par conséquent, $\alpha' = \Delta \alpha + \eta$ avec $\eta \in \mathcal{I}_{C'} \Omega^{q+k}$, et donc on a bien

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ f_1, \dots, f_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \alpha \\ f'_1, \dots, f'_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha' \\ f'_1, \dots, f'_k \end{bmatrix}.$$

Ainsi l'application ψ est-elle bien définie.

L'injectivité de ψ est une conséquence directe du lemme 4.1.19 et la surjectivité vient de la proposition 4.1.21. \square

4.2 Liberté d'un espace réduit de Cohen-Macaulay

Nous commençons par introduire la forme fondamentale, ou forme trace, de X . Dans le cas d'une intersection complète C définie par une suite régulière (h_1, \dots, h_k) , cette forme fondamentale n'est autre que $\frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h_1 \dots h_k}$ (voir définition 2.3.23). Nous avons vu dans le lemme 4.1.1

que l'on peut inclure X dans une intersection complète *réduite* au moins le long de X . Nous montrons dans ce paragraphe un résultat plus fort, à savoir qu'on peut trouver une intersection complète réduite qui contient X .

L'objectif de cette partie est de généraliser les résultats du chapitre précédent aux espaces réduits équidimensionnels, en particulier, on relie de nouveau les k -formes différentielles multi-logarithmiques à un module de k -champs de vecteurs multi-logarithmiques (voir définition 4.2.8 et proposition 4.2.12), et nous montrons que le dual de l'idéal jacobien de C restreint à X est le module des multi-résidus des k -formes logarithmiques (Proposition 4.2.17). Pour le dernier paragraphe, nous supposons de plus que X est un espace de Cohen-Macaulay. Nous proposons une définition de la liberté qui généralise la notion de liberté des chapitres précédents. Nous donnons ensuite plusieurs caractérisations de la liberté, puis nous comparons différentes notions d'idéaux jacobiens.

4.2.1 Forme fondamentale

Nous aurons besoin de la proposition suivante, qui est une version plus forte du lemme 4.1.1.

Proposition 4.2.1. *Soit X un espace réduit équidimensionnel de codimension k dans S . Il existe une suite régulière $(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X = (h_1, \dots, h_r)$ telle que l'idéal (f_1, \dots, f_k) est radical. Autrement dit, il existe une intersection complète réduite C contenant X .*

Preuve. On considère un ouvert U de S contenant le point p sur lequel h_1, \dots, h_r sont convergentes. Comme l'idéal \mathcal{I}_X est radical, il existe $f_1 \in \mathcal{I}_X$ non nulle et réduite, telle que de plus pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, X_i n'est pas contenu dans le lieu singulier de la variété définie par f_1 . Notons $\mathcal{I}_X = \mathfrak{p}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{p}_p$ une décomposition primaire irréductible de \mathcal{I}_X .

Soit $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Nous allons procéder par récurrence sur j . L'hypothèse de récurrence est la suivante : on suppose qu'il existe une suite régulière (f_1, \dots, f_j) dans \mathcal{I}_X telle que l'idéal $(f_1, \dots, f_j)\mathcal{O}_S$ est radical et telle qu'aucune composante irréductible de X n'est contenue dans le lieu singulier de la variété Y définie par (f_1, \dots, f_j) . Soit $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_t$ une décomposition de Y en composantes irréductibles. La variété Y est de dimension pure $m-j$.

On considère une décomposition primaire $\mathcal{I}_Y = \mathfrak{q}_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}_t$. En particulier, comme \mathcal{I}_Y est radical, pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, \mathfrak{q}_i est premier.

On pose

$$V = \left\{ \mu \in \mathbb{C}^r ; \forall i \in \{1, \dots, t\}, \sum_{\ell=1}^r \mu_\ell h_\ell \notin \mathfrak{q}_i \right\}.$$

Si $\mu \in V$ alors $\sum_{\ell=1}^r \mu_\ell h_\ell$ est un non diviseur de zéro de $\mathcal{O}_S/(f_1, \dots, f_j)$. En particulier, $V \neq \emptyset$ vu que $\text{prof}_{\mathcal{I}_X}(\mathcal{O}_S) = k$.

On considère le lieu singulier $\text{Sing}(Y)$ de Y , qui est défini par l'annulation des mineurs $j \times j$ de la matrice jacobienne de (f_1, \dots, f_j) . Soit $\mathfrak{q}'_1 \cap \dots \cap \mathfrak{q}'_a$ une décomposition primaire de $\mathcal{I}_{\text{Sing}(Y)}$. On pose \mathcal{P} l'ensemble des idéaux premiers associés à $\mathcal{I}_{\text{Sing}(Y)}$ qui définissent une variété de dimension⁵ $m-j-1$. On pose :

$$V' = \left\{ \mu \in \mathbb{C}^r ; \forall \mathfrak{p} \in \mathcal{P}, \sum_{\ell=1}^r \mu_\ell h_\ell \notin \mathfrak{p} \right\}.$$

Si $\mu \in V'$, alors aucune composante du lieu des zéros de $(f_1, \dots, f_j, \sum_{\ell=1}^r \mu_\ell h_\ell)$ n'est contenue dans le lieu singulier de Y . De plus, $V' \neq \emptyset$. En effet, si $j \neq k-1$, comme $\dim X = m-k < m-j-1$, il existe clairement $\ell \in \{1, \dots, r\}$ tel que $h_\ell \notin \mathfrak{p}$. Dans le cas $j = k-1$, notons que si $\mathfrak{p} \in \mathcal{P}$ vérifie pour tout $\ell \in \{1, \dots, r\}$, $h_\ell \in \mathfrak{p}$ alors $\mathcal{I}_X \subseteq \mathfrak{p}$. Il existe donc $\ell' \in \{1, \dots, p\}$ tel

⁵Comme Y est réduite, le lieu singulier de Y est de dimension au plus $m-j-1$. En particulier, \mathcal{P} peut être vide.

que $\mathfrak{p}_{\ell'} \subseteq \mathfrak{p}$, et comme les deux idéaux premiers $\mathfrak{p}_{\ell'}$ et \mathfrak{p} sont de même hauteur, $\mathfrak{p}_{\ell'} = \mathfrak{p}$. Cela contredit l'hypothèse $X_{\ell'} \not\subseteq \text{Sing}(Y)$.

Pour $i \in \{1, \dots, p\}$ on note $\kappa_i = \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}_i} / \mathfrak{p}_i \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}_i}$ le corps résiduel de \mathcal{O}_X en \mathfrak{p}_i . Pour $h \in \mathcal{I}_X$, on pose le vecteur

$$\overline{\partial h} := \left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial h}{\partial x_m} \right)^t \in (\mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}_i} / \mathfrak{p}_i \mathcal{O}_{X, \mathfrak{p}_i})^m.$$

On pose

$$V'' = \left\{ \mu \in \mathbb{C}^r ; \forall i \in \{1, \dots, r\}, \dim_{\kappa_i} \left(\overline{\partial f_1}, \dots, \overline{\partial f_j}, \overline{\sum_{\ell=1}^r \mu_{\ell} \partial h_{\ell}} \right) \geq j+1 \right\}.$$

Comme X est de codimension $k \geq j+1$ et réduite, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, il existe un mineur $(j+1) \times (j+1)$ de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_k) qui n'est pas contenu dans \mathfrak{p}_i . Comme de plus $\dim_{\kappa_i} (\overline{\partial f_1}, \dots, \overline{\partial f_j}) = j$, il existe $h \in \mathcal{I}_X$ tel que $\dim_{\kappa_i} (\overline{\partial f_1}, \dots, \overline{\partial f_j}, \overline{\sum_{\ell=1}^r \mu_{\ell} \partial h_{\ell}}) \geq j+1$, et donc V'' est un ouvert de Zariski non vide. Si $\mu \in V''$, aucune composante irréductible de X n'est contenue dans le lieu singulier de la variété définie par $(f_1, \dots, f_j, \sum_{i=1}^r \mu_i h_i)$.

On considère la sous-variété lisse Y' de Y définie par $Y' = Y \setminus \{\text{Sing}(Y) \cup X\}$. On pose $V_0 = V \cap V' \cap V''$. Alors V_0 est un ouvert de Zariski non vide de \mathbb{C}^r .

Soit

$$\mathcal{Z} = \left\{ (x, \mu) \in Y' \times V_0 ; \sum_{i=1}^r \mu_i h_i(x) = 0 \right\}.$$

Alors \mathcal{Z} est une hypersurface lisse de $Y' \times V_0$. En effet, comme $X \cap Y' = \emptyset$, pour tout $x \in Y'$, il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $h_i(x) \neq 0$, et donc $\frac{\partial}{\partial \mu_i} \left(\sum_{i=1}^r \mu_i h_i(x) \right) = h_i(x) \neq 0$. On considère l'application $\psi : \mathcal{Z} \rightarrow V_0$ définie par $\psi(x, \mu) = \mu$. Par le théorème de Bertini-Sard, l'ensemble des points critiques de ψ est de mesure nulle dans V_0 . Cela implique en particulier qu'il existe $\mu^{(0)} \in V_0$ tel que $\psi^{-1}(\mu^{(0)})$ est une variété lisse, et donc réduite. On pose $f_{j+1} = \sum_{i=1}^r \mu_i^{(0)} h_i$. Les conditions sur V_0 assurent que la suite (f_1, \dots, f_{j+1}) définit une intersection complète réduite dont le lieu singulier ne contient aucune composante irréductible de X .

On obtient donc ainsi par récurrence une suite régulière (f_1, \dots, f_k) de \mathcal{I}_X définissant une intersection complète réduite contenant X . \square

On fixe donc une suite régulière $(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ telle que $\mathcal{I}_C = (f_1, \dots, f_k)$ est un idéal radical de \mathcal{O}_S . On note C l'intersection complète réduite définie par (f_1, \dots, f_k) . On note $C = X_1 \cup \dots \cup X_p \cup Y_1 \cup \dots \cup Y_{\ell}$ une décomposition de C en composantes irréductibles, où $X = X_1 \cup \dots \cup X_p$, et $Y = Y_1 \cup \dots \cup Y_{\ell}$.

La forme différentielle $\frac{df_1 \wedge \dots \wedge df_k}{f_1 \dots f_k}$ joue un rôle fondamental pour l'intersection complète C . Cette forme différentielle n'est en revanche pas logarithmique relativement à la paire (X, C) . Dans ce paragraphe, nous introduisons la "forme trace", ou forme fondamentale (voir notation 4.2.4), dont on peut trouver une définition dans [Ker84, (1.3)].

Notation 4.2.2. On note β_f l'élément de $\mathcal{O}_{\tilde{C}} = \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{O}_{\tilde{X}_i} \oplus \bigoplus_{j=1}^{\ell} \mathcal{O}_{\tilde{Y}_j}$ défini par

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, \dots, p\}, \beta_f|_{\tilde{X}_i} = 1 \in \mathcal{O}_{\tilde{X}_i} \\ \forall j \in \{1, \dots, \ell\}, \beta_f|_{\tilde{Y}_j} = 0 \in \mathcal{O}_{\tilde{Y}_j} \end{cases}$$

Lemme 4.2.3. La forme différentielle $\overline{\beta_f df_1 \wedge \dots \wedge df_k} \in \Omega_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}_C$ vérifie

$$\overline{\beta_f df_1 \wedge \dots \wedge df_k} \in \Omega_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C.$$

Preuve. On a $df_1 \wedge \cdots \wedge df_k = \sum_{|I|=k} J_I dx_I$ où J_I est le mineur de la matrice jacobienne de (f_1, \dots, f_k) relatif à l'ensemble I . D'après la proposition 2.3.11, pour tout $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ tel que $|I| = k$, on a $J_I \mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq \mathcal{O}_C$. D'où le résultat. \square

Notation 4.2.4. On fixe donc $\alpha_0 \in \Omega_S^k$ telle que $\overline{\alpha_0} = \overline{\beta_f df_1 \wedge \cdots \wedge df_k} \in \Omega_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}_C$. Cette forme est la *forme fondamentale* de X dans S . L'application :

$$c_X : \Omega_X^q \rightarrow \omega_X^q \\ \beta \mapsto \begin{bmatrix} \beta \wedge \alpha_0 \\ f_1, \dots, f_k \end{bmatrix}$$

est la *classe fondamentale* de X dans S (voir définition 2.3.23 pour le cas intersection complète).

La propriété suivante est une conséquence de la définition de α_0 et de [Ker84, (1.3)].

Proposition 4.2.5. *On a :*

$$\frac{\alpha_0}{f} \in \Omega^k(\log X/C).$$

De plus, $\text{res}_{X/C} \left(\frac{\alpha_0}{f} \right) = 1 \in \mathcal{M}_X$. En particulier, $\alpha_0 \in \mathcal{I}_Y \Omega_S^k$.

Preuve. Soit $h \in \mathcal{I}_X$. Alors comme β_f est nul sur Y , on a :

$$h\overline{\alpha_0} = \overline{h\beta_f df_1 \wedge \cdots \wedge df_k} = \overline{0} \in \Omega_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}_C.$$

Par conséquent on a $h\alpha_0 \in \mathcal{I}_C \Omega_S^k$. De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, la forme différentielle $dh \wedge df_1 \wedge \cdots \wedge df_k$ est nulle en restriction à X_i , étant donné que $(h, f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ et X est de codimension k dans S . Comme β_f est nul en restriction à Y , on en déduit que

$$\overline{dh \wedge \beta_f df_1 \wedge \cdots \wedge df_k} = \overline{0} \in \Omega_S^{k+1} \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}_C.$$

Par conséquent, $dh \wedge \alpha_0 \in \mathcal{I}_C \Omega_S^{k+1}$, et donc $\frac{\alpha_0}{f} \in \Omega^k(\log X/C)$.

Soit $a, g \in \mathcal{O}_C$ tels que $\beta_f = \frac{a}{g} \in \mathcal{M}_C$. En particulier, g est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C . On a

$$\text{gres}_{X/C} \left(\frac{\alpha_0}{f} \right) = \text{res}_{X/C} \left(\frac{a df_1 \wedge \cdots \wedge df_k}{f} \right) = a \in \mathcal{M}_X.$$

Comme g est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C , il induit un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_X , et donc

$$\text{res}_{X/C} \left(\frac{\alpha_0}{f} \right) = \beta_f = 1 \in \mathcal{M}_X.$$

Etant donné que $\overline{\beta_f df_1 \wedge \cdots \wedge df_k} = \overline{\alpha_0} = \overline{0} \in \Omega_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}_Y$, on en déduit que $\alpha_0 \in \mathcal{I}_Y \Omega_S^k$. \square

Proposition 4.2.6. *Soit $\omega \in \frac{1}{f} \Omega_S^q$. Alors $\omega \in \Omega^q(\log X/C)$ si et seulement s'il existe $g \in \mathcal{O}_S$ induisant un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C , $\xi \in \Omega_S^{q-k}$, et $\eta \in \tilde{\Omega}_f^q$ tels que*

$$g\omega = \frac{\alpha_0}{f} \wedge \xi + \eta. \quad (4.6)$$

De plus, avec cette écriture, $\text{res}_{X/C}(\omega) = \frac{\xi}{g} \Big|_X$.

Preuve. Soit $\omega \in \Omega^q(\log X/C)$. Alors $\omega \in \Omega^q(\log C)$. Soit g, ξ, η satisfaisant les hypothèses du théorème 3.1.15 tels que

$$g\omega = \frac{df_1 \wedge \cdots \wedge df_k}{f} \wedge \xi + \eta.$$

Alors $\text{gres}_{X/C}(\omega) = \xi = \text{res}_{X/C} \left(\frac{\alpha_0}{f} \wedge \xi \right)$ donc d'après le corollaire 4.1.9 il existe $\eta' \in \widetilde{\Omega}_f^q$ tel que

$$g\omega = \frac{\alpha_0}{f} \wedge \xi + \eta'.$$

Réciproquement, soit $\omega \in \frac{1}{f}\Omega_S^q$ tel qu'il existe g, ξ, η vérifiant les conditions de la proposition 4.2.6 et

$$g\omega = \frac{\alpha_0}{f} \wedge \xi + \eta.$$

Soit $h \in \mathcal{I}_X$. Comme $\frac{\alpha_0}{f} \in \Omega^k(\log X/C)$, on a $h\alpha_0 \wedge \xi \in \mathcal{I}_C\Omega_S^q$ et $dh \wedge \alpha_0 \wedge \xi \in \mathcal{I}_C\Omega_S^{q+1}$. Comme $f\eta \in \mathcal{I}_C\Omega_S^q$, et comme g induit un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C , on en déduit que $h\omega \in \widetilde{\Omega}_f^q$ et $dh \wedge \omega \in \widetilde{\Omega}_f^{q+1}$. Par conséquent, $\omega \in \Omega^q(\log X/C)$. \square

On déduit de [Sch16, (2.14)] l'égalité suivante :

$$\mathcal{R}_X = \{\rho|_X ; \rho \in \mathcal{R}_C \text{ tel que } \rho|_Y = 0\}. \quad (4.7)$$

On a donc :

Proposition 4.2.7. *Soit $\omega \in \Omega^k(\log C)$. Alors :*

$$\omega \in \Omega^k(\log X/C) \iff \text{res}_C(\omega)|_Y = 0.$$

En particulier, cela implique que $\mathcal{O}_{\widetilde{X}} \subseteq \mathcal{R}_X$.

Preuve. Soit $\omega \in \Omega^k(\log X/C)$. On a :

$$\begin{aligned} \rho|_Y = 0 &\iff \exists \omega' \in \Omega^k(\log X/C), \rho|_X = \text{res}_{X/C}(\omega') \\ &\iff \exists \omega' \in \Omega^k(\log X/C), \exists \eta \in \widetilde{\Omega}_f^k, \omega = \omega' + \eta \in \Omega^k(\log X/C). \end{aligned}$$

Comme $\widetilde{\Omega}_f^k \subseteq \Omega^k(\log X/C)$, on en déduit le résultat. \square

4.2.2 Champs de vecteurs multi-logarithmiques

Nous conservons les notations du paragraphe précédent, en particulier, α_0 désigne la forme fondamentale de X (voir notation 4.2.4).

Nous proposons la définition suivante :

Définition 4.2.8. *Soit $\delta \in \Theta_S^k$ un k -champ de vecteurs holomorphe. On dit que δ est multi-logarithmique le long de X relativement à C si*

$$\delta(\alpha_0) \in \mathcal{I}_X.$$

On note $\text{Der}^k(-\log X/C)$ le \mathcal{O}_S -module des k -champs de vecteurs multi-logarithmiques le long de X relativement à C .

Remarque 4.2.9. Etant donné que $\alpha_0 \in \mathcal{I}_Y\Omega_S^k$, on en déduit que pour tout $\delta \in \Theta_S^k$, $\delta(\alpha_0) \in \mathcal{I}_Y$. On a donc

$$\text{Der}^k(-\log X/C) = \left\{ \delta \in \Theta_S^k ; \delta(\alpha_0) \in \mathcal{I}_C \right\}.$$

Lemme 4.2.10. *On a l'inclusion suivante :*

$$\mathrm{Der}^k(-\log C) \subseteq \mathrm{Der}^k(-\log X/C). \quad (4.8)$$

Preuve. Soit $a, g \in \mathcal{O}_S$ tel que $\beta_f = \frac{a}{g} \in \mathcal{M}_C$. En particulier, g induit un non diviseur de zéro dans \mathcal{O}_C . Soit $\delta \in \mathrm{Der}^k(-\log C)$. Alors $\delta(\mathrm{ad}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k) \in \mathcal{I}_C$. Comme g est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C , on en déduit que $\delta(\beta_f \mathrm{d}f_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}f_k) = \delta(\alpha_0) = 0 \in \mathcal{M}_C$. Par conséquent, $\delta(\alpha_0) \in \mathcal{I}_C$, donc $\delta \in \mathrm{Der}^k(-\log X/C)$. \square

Lemme 4.2.11. *Soit $\delta \in \mathrm{Der}^k(-\log X/C)$ et $\omega \in \Omega^k(\log X/C)$. Alors*

$$\delta(\omega) \in \Sigma = \sum_{i=1}^k \frac{1}{f_i} \mathcal{O}_S = \frac{1}{f} \mathcal{I}_C.$$

Preuve. D'après la proposition 4.2.6, on a $g\omega = \xi \frac{\alpha_0}{f} + \eta$.

On a donc $g\delta(\omega) = \xi \frac{1}{f} \delta(\alpha_0) + \delta(\eta) \in \frac{1}{f} \mathcal{I}_C$. Comme g induit un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C , on a $\delta(\omega) \in \frac{1}{f} \mathcal{I}_C$. \square

Proposition 4.2.12. *On suppose $k \geq 2$. Le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \Sigma)$ appliqué à la suite d'inclusions*

$$\tilde{\Omega}_f^k \subseteq \Omega^k(\log X/C) \subseteq \Omega^k(\log C) \quad (4.9)$$

donne la suite d'inclusions

$$\Theta_S^k \supseteq \mathrm{Der}^k(-\log X/C) \supseteq \mathrm{Der}^k(-\log C). \quad (4.10)$$

Réciproquement, si on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \Sigma)$ à la suite d'inclusions (4.10), on obtient la suite d'inclusions (4.9).

Preuve. Les seules égalités à prouver sont $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega^k(\log X/C), \Sigma) = \mathrm{Der}^k(-\log X/C)$ ainsi que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathrm{Der}^k(-\log X/C), \Sigma) = \Omega^k(\log X/C)$, les autres étant données par la proposition 3.2.13.

On a :

$$\Theta_S^k \supseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega^k(\log X/C), \Sigma) \supseteq \mathrm{Der}^k(-\log C).$$

Le lemme 4.2.11 nous assure que $\mathrm{Der}^k(-\log X/C) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega^k(\log X/C), \Sigma)$.

Soit $\delta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega^k(\log X/C), \Sigma)$. Comme $\frac{\alpha_0}{f} \in \Omega^k(\log X/C)$, on a en particulier $\delta(\alpha_0) \in \mathcal{I}_C$, donc $\delta \in \mathrm{Der}^k(-\log X/C)$. On a donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega^k(\log X/C), \Sigma) = \mathrm{Der}^k(-\log X/C).$$

Réciproquement, on a

$$\tilde{\Omega}_f^k \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathrm{Der}^k(-\log X/C), \Sigma) \subseteq \Omega^k(\log C).$$

Le lemme 4.2.11 nous assure que $\Omega^k(\log X/C) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathrm{Der}^k(-\log X/C), \Sigma)$.

Soit $\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathrm{Der}^k(-\log X/C), \Sigma)$. Montrons que $\omega \in \Omega^k(\log X/C)$. Nous devons donc montrer que $\mathcal{I}_X \omega \in \tilde{\Omega}_f^k$ et $\mathrm{d}\mathcal{I}_X \wedge \omega \in \widetilde{\Omega}_f^{k+1}$. On écrit $\omega = \sum_{|I|=k} \frac{1}{f} \omega_I \mathrm{d}x_I$.

Soit $h \in \mathcal{I}_X$. Pour tout $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ tel que $|I| = k$, on a $h\partial x_I \in \mathrm{Der}^k(-\log X/C)$, vu que $h\partial x_I(\alpha_0) \in \mathcal{I}_X$. Cela implique que $h\partial x_I(\omega) = h \frac{1}{f} \omega_I \in \Sigma$, et donc finalement $h\omega \in \tilde{\Omega}_f^k$.

Comme dans la preuve de la proposition 3.2.13, on remarque que

$$dh \wedge \omega = \frac{1}{f} \sum_{|J|=k+1} \sum_{\ell=1}^{k+1} (-1)^{\ell-1} \frac{\partial h}{\partial x_{j_\ell}} \omega_{J \setminus j_\ell} dx_J.$$

On pose pour $J \subseteq \{1, \dots, m\}$ avec $|J| = k + 1$:

$$\delta_J = \sum_{\ell=1}^{k+1} (-1)^{\ell-1} \frac{\partial h}{\partial x_{j_\ell}} \partial x_{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\partial x_{j_\ell}} \wedge \dots \wedge \partial x_{j_{k+1}}.$$

On a donc

$$\delta_J(\omega) = \partial x_J(dh \wedge \omega). \quad (4.11)$$

Montrons que $\delta_J \in \text{Der}^k(-\log X/C)$. Montrer que $\delta_J(\alpha_0) \in \mathcal{I}_C$ revient à prouver que

$$\overline{\delta_J(\beta_f df_1 \wedge \dots \wedge df_k)} = \bar{0} \in \mathcal{M}_C.$$

On a :

$$\delta_J(\beta_f df_1 \wedge \dots \wedge df_k) = \beta_f \sum_{\ell=1}^{k+1} (-1)^{\ell-1} \frac{\partial h}{\partial x_{j_\ell}} \Delta_{j_1 \dots \widehat{j_\ell} \dots j_{k+1}} = \beta_f \begin{vmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_{j_1}} & \dots & \frac{\partial h}{\partial x_{j_{k+1}}} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_{j_{k+1}}} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_{j_1}} & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_{j_{k+1}}} \end{vmatrix}.$$

On obtient donc un mineur $(k+1) \times (k+1)$ d'une matrice jacobienne associée à X . Or, X est de codimension k dans S donc ce mineur est nul le long de chacune des composantes irréductibles de X . Comme de plus β_f est nul le long de Y , on en déduit que

$$\overline{\beta_f df_1 \wedge \dots \wedge df_k(\delta_J)} = \bar{0} \in \mathcal{M}_C.$$

Par conséquent, $\delta_J \in \text{Der}^k(-\log X/C)$. D'après (4.11), cela implique que $dh \wedge \omega \in \widetilde{\Omega_f^{k+1}}$, et donc $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\text{Der}^k(-\log X/C), \Sigma) = \Omega^k(\log X/C)$. \square

De même que dans le cas intersection complète, les champs de vecteurs logarithmiques de la définition 3.2.5 permettent de construire des k -champs de vecteurs multi-logarithmiques le long de X :

Proposition 4.2.13. *On a l'inclusion*

$$\text{Der}(-\log X) \wedge \Theta_S^{k-1} \subseteq \text{Der}^k(-\log X/C).$$

Preuve. Soit $\eta \in \text{Der}(-\log X)$ et $\delta_2, \dots, \delta_k \in \Theta_S$. Alors par définition $\eta(\mathcal{I}_X) \subseteq \mathcal{I}_X$, donc en particulier, $\eta(\mathcal{I}_C) \subseteq \mathcal{I}_X$. On a donc :

$$\beta_f df_1 \wedge \dots \wedge df_k(\eta \wedge \delta_2 \wedge \dots \wedge \delta_k) \in \mathcal{I}_X.$$

et donc $\eta \wedge \delta_2 \wedge \dots \wedge \delta_k \in \text{Der}^k(-\log X/C)$. \square

4.2.3 Dualité entre les résidus et l'idéal jacobien restreint

Notation 4.2.14. On note $\mathcal{J}_{X/C} = \{\overline{\delta(\alpha_0)} \in \mathcal{O}_X ; \delta \in \Theta_S^k\} \subseteq \mathcal{O}_X$.

Remarque 4.2.15. Etant donné que la restriction de β_f à X est identiquement égal à 1, l'idéal $\mathcal{J}_{X/C}$ est en fait l'image de l'idéal jacobien \mathcal{J}_C de C par l'application de passage au quotient $\mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_X$, c'est-à-dire l'idéal jacobien de C restreint à X .

Proposition 4.2.16. *On a la suite exacte de \mathcal{O}_S -modules :*

$$0 \rightarrow \mathrm{Der}^k(-\log X/C) \rightarrow \Theta_S^k \rightarrow \mathcal{J}_{X/C} \rightarrow 0.$$

Preuve. La surjectivité vient de la définition de $\mathcal{J}_{X/C}$. De plus, $\overline{\delta(\alpha_0)} = \bar{0}$ équivaut à $\delta(\alpha_0) \in \mathcal{J}_X$, ce qui est la définition de $\mathrm{Der}^k(-\log X/C)$. \square

Nous allons montrer l'analogie de la proposition 3.2.17 :

Proposition 4.2.17. *On a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{J}_{X/C}, \mathcal{O}_C) = \mathcal{R}_X$.*

Preuve. On suppose $k \geq 2$. D'après le lemme 3.3.10, la dimension projective de Σ est $k-1$, et donc sa profondeur est $m-k+1$ par la formule d'Auslander-Buchsbaum.

D'après le lemme d'Ischebeck 3.2.15 on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{J}_{X/C}, \mathcal{O}_S) = 0$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{J}_{X/C}, \Sigma) = 0$ et $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{J}_{X/C}, \mathcal{O}_S) = 0$.

On considère le complexe double $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathrm{Der}^k(-\log X/C) \hookrightarrow \Theta_S^k, f : \Sigma \rightarrow \mathcal{O}_S)$. On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
& & & & 0 & & 0 & & & & \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Theta_S^k, \Sigma) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathrm{Der}^k(-\log X/C), \Sigma) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{J}_{X/C}, \Sigma) & \longrightarrow & 0 & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Theta_S^k, \mathcal{O}_S) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathrm{Der}^k(-\log X/C), \mathcal{O}_S) & \longrightarrow & 0 & & & & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 \rightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{J}_{X/C}, \mathcal{O}_C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Theta_S^k, \mathcal{O}_C) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathrm{Der}^k(-\log X/C), \mathcal{O}_C) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{J}_{X/C}, \mathcal{O}_C) & \longrightarrow & 0 & \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathcal{J}_{X/C}, \Sigma) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^1(\mathrm{Der}^k(-\log X/C), \Sigma) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^2(\mathcal{J}_{X/C}, \Sigma) & \longrightarrow & 0 \\
& & \downarrow & & & & & & \downarrow & & \\
& & 0 & & & & & & 0 & &
\end{array}$$

Par une chasse au diagramme tout à fait semblable à celle de la preuve de la proposition 3.2.17, on associe à un morphisme $\varphi : \mathrm{Der}^k(-\log X/C) \rightarrow \Sigma$ une application $\overline{\Phi} : \Theta_S^k \rightarrow \mathcal{O}_C$ qui provient d'une application $\psi : \mathcal{J}_{X/C} \rightarrow \mathcal{O}_C$. Déterminons-la explicitement. Par l'isomorphisme de la proposition 4.2.12, φ correspond à $\omega_\varphi = \frac{1}{f} \sum_I \varphi(f \partial x_I) dx_I$. Comme $\omega_\varphi \in \Omega^k(\log X/C)$, on a d'après la proposition 4.2.6

$$g\omega_\varphi = \xi \frac{\alpha_0}{f} + \eta$$

avec $g \in \mathcal{O}_S$ qui induit un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C , $\xi \in \mathcal{O}_S$ et $\eta \in \tilde{\Omega}_f^k$. Alors :

$$g\overline{\Phi}(\partial x_I) = \overline{gf\omega_\varphi(\partial x_I)} = \overline{\xi \partial x_I(\alpha_0)} \in \mathcal{O}_C.$$

Comme de plus g est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C , on a $\overline{\Phi}(\partial x_I) = \overline{\text{res}_C(\omega_\varphi) \partial x_I(\alpha_0)}$. On obtient donc, en identifiant $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\text{Der}^k(-\log X/C), \Sigma)$ avec $\Omega^k(\log X/C)$, l'application

$$\begin{aligned} \Omega^k(\log X/C) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_{X/C}, \mathcal{O}_C) \\ \omega &\mapsto (\bar{a} \mapsto \overline{\text{res}_C(\omega)a}) \end{aligned}$$

On remarque que l'application $\bar{a} \mapsto \overline{\text{res}_C(\omega)a} \in \mathcal{O}_C$ est bien définie vu que $\text{res}_C(\omega)|_Y = 0$ par la proposition 4.2.7, donc si $a + b$ est un autre représentant de \bar{a} avec $b \in \mathcal{I}_X$, $\text{res}_C(\omega)b = 0 \in \mathcal{M}_C$.

Réciproquement, par une chasse au diagramme analogue à celle de la preuve de la proposition 3.2.17 on montre que :

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_{X/C}, \mathcal{O}_C) = \left\{ \bar{a} \in \mathcal{I}_{X/C} \mapsto \overline{\rho a}; \rho \in \text{res}_C(\Omega^k(\log X/C)) \right\}.$$

Soit

$$\theta : \begin{cases} \mathcal{R}_X \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_{X/C}, \mathcal{O}_C) \\ \rho = \text{res}_{X/C}(\omega) \mapsto \theta_\rho : (\bar{a} \mapsto \overline{\text{res}_C(\omega)a}) \end{cases}$$

Vérifions que θ est bien définie et est un isomorphisme de \mathcal{O}_C -modules. Si $\omega' \in \Omega^k(\log X/C)$ vérifie $\text{res}_{X/C}(\omega') = \text{res}_{X/C}(\omega)$ alors $\omega' = \omega + \eta$ avec $\eta \in \widetilde{\Omega}_f^k$ et donc $\text{res}_C(\omega) = \text{res}_C(\omega')$. L'application θ est donc bien définie. Si $\theta_\rho = 0$, comme $\mathcal{I}_{X/C}$ est un idéal fractionnaire de \mathcal{O}_X , cela implique que $\text{res}_C(\omega)|_X = 0 \in \mathcal{M}_X$, donc $\text{res}_{X/C}(\omega) = 0$. D'où l'injectivité de θ . La surjectivité est claire. On a donc bien un isomorphisme entre $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{I}_{X/C}, \mathcal{O}_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{I}_{X/C}, \mathcal{O}_C)$ et \mathcal{R}_X . \square

La proposition 4.2.17 met en évidence une dualité entre \mathcal{R}_X et $\mathcal{I}_{X/C}$ à valeurs dans \mathcal{O}_C . Le lemme suivant montre qu'en fait cette dualité est aussi à valeur dans le module dualisant $\omega_X = \omega_X^n$ de X .

Lemme 4.2.18. *Soit I un idéal fractionnaire de \mathcal{O}_X . Alors $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(I, \mathcal{O}_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(I, \omega_X)$.*

Preuve. On rappelle que ω_X est isomorphe à $\mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_C$. Soit $\varphi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(I, \mathcal{O}_C)$, et $g \in I$. Alors $\mathcal{I}_X \cdot \varphi(g) = 0 \in \mathcal{O}_C$ donc $\varphi(g) \in (\mathcal{I}_C : \mathcal{I}_X)_{\mathcal{O}_C}$, donc $\varphi(g) \in \mathcal{I}_Y/\mathcal{I}_C$. \square

4.2.4 Caractérisations de la liberté

Nous proposons dans ce paragraphe une notion de liberté pour les espaces de Cohen-Macaulay : on dit que X est libre si l'idéal jacobien restreint $\mathcal{I}_{X/C}$ est Cohen-Macaulay. Cette notion ne dépend pas du choix de l'intersection complète réduite contenant X (voir proposition 4.2.21). Nous généralisons ensuite les différentes caractérisations de la liberté données dans le chapitre 3 aux espaces de Cohen-Macaulay (voir proposition 4.2.6 et théorème 4.2.22).

Grâce aux précédents résultats de ce chapitre, les preuves des énoncés de ce paragraphe sont analogues aux preuves du paragraphe 3.3.3.

On suppose dorénavant que \mathcal{O}_X est un anneau de Cohen-Macaulay. Cette hypothèse est nécessaire pour la proposition 4.2.6. On fixe une suite régulière $(f_1, \dots, f_k) \subseteq \mathcal{I}_X$ telle que l'idéal $\mathcal{I}_C = (f_1, \dots, f_k)$ est radical. On note C l'intersection complète correspondante.

Définition 4.2.19. *On dit que X est libre si $\mathcal{I}_{X/C}$ est un \mathcal{O}_X -module de Cohen-Macaulay. Il est alors Cohen-Macaulay maximal.*

Remarque 4.2.20. On rappelle que $\mathcal{I}_{X/C}$ est un idéal fractionnaire de \mathcal{O}_X , donc de dimension $m - k$. Vu que la profondeur (respectivement la dimension) de $\mathcal{I}_{X/C}$ vu comme \mathcal{O}_X -module est égale à sa profondeur (respectivement sa dimension) comme \mathcal{O}_C -module, on en déduit que X est libre dans C si et seulement si $\mathcal{I}_{X/C}$ est Cohen-Macaulay maximal vu comme \mathcal{O}_C -module ou comme \mathcal{O}_X -module.

Proposition 4.2.21. *La notion de liberté de la définition 4.2.19 ne dépend pas du choix de l'intersection complète contenant X . Autrement dit, s'il existe une intersection complète réduite réduite C contenant X telle que $\mathcal{I}_{X/C}$ est Cohen-Macaulay, alors pour toute intersection complète réduite C' contenant X , $\mathcal{I}_{X/C'}$ est aussi Cohen-Macaulay.*

Preuve. Soit C et C' deux intersections complètes réduites contenant X . Par le lemme 4.2.1 appliqué à l'espace équidimensionnel réduit défini par $C \cup C'$, il existe une intersection complète réduite C'' contenant C et C' . On peut donc se ramener au cas $C \subseteq C'$.

Soit A une matrice de passage de (f_1, \dots, f_k) vers (f'_1, \dots, f'_k) . Alors il existe $\nu \in \mathcal{I}_C \Omega_S^k$ tel que

$$df'_1 \wedge \dots \wedge df'_k = \det(A) df_1 \wedge \dots \wedge df_k + \nu.$$

Par conséquent, on a : $\mathcal{I}_{X/C'} = \det(A) \mathcal{I}_{X/C} \subseteq \mathcal{O}_X$. De plus, $\det(A)$ est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_X , vu que X est contenu dans C et C' et qu'aucune composante irréductible de X n'est contenue dans le lieu singulier de C ou C' . On en déduit que les \mathcal{O}_X -modules $\mathcal{I}_{X/C'}$ et $\mathcal{I}_{X/C}$ sont isomorphes, d'où le résultat. \square

THÉORÈME 4.2.22. *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. X est libre.
2. le \mathcal{O}_X -module $\mathcal{O}_X / \mathcal{I}_{X/C}$ est Cohen-Macaulay de dimension $m - k - 1$.
3. l'idéal $J(\underline{f}, \underline{h})$ engendré par les mineurs $k \times k$ de la matrice jacobienne de (f_1, \dots, f_k) et par les équations (h_1, \dots, h_r) est un idéal parfait de codimension $k + 1$ dans \mathcal{O}_S .
4. $\dim \text{proj}(\text{Der}^k(-\log X/C)) \leq k - 1$
5. $\dim \text{proj}(\text{Der}^k(-\log X/C)) = k - 1$
6. $\dim \text{proj}(\Omega^k(\log X/C)) \leq k - 1$
7. $\dim \text{proj}(\Omega^k(\log X/C)) = k - 1$

Preuve des équivalences 1. à 5. Les preuves sont essentiellement les mêmes que les preuves des propositions 3.3.5 et 3.3.2.

L'équivalence 1. \iff 2. vient de la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_{X/C} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_{X/C} \rightarrow 0.$$

Comme on suppose que X est Cohen-Macaulay, la profondeur de \mathcal{O}_X est n . Comme $\mathcal{I}_{X/C}$ contient des non diviseurs de zéro de \mathcal{O}_X , $\dim(\mathcal{O}_X / \mathcal{I}_{X/C}) \leq n - 1$. Le lemme de la profondeur 2.2.13 donne alors l'équivalence voulue.

L'équivalence 2. \iff 3. se montre de la même façon que la proposition 3.3.2.

Pour les équivalences restantes, on considère la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{Der}^k(-\log X/C) \rightarrow \Theta_S^k \rightarrow \mathcal{I}_{X/C} \rightarrow 0.$$

La profondeur de Θ_S^k est $m > n \geq \text{prof}(\mathcal{I}_{X/C})$, donc $\text{prof}(\text{Der}^k(-\log X/C)) = \text{prof}(\mathcal{I}_{X/C}) + 1$. On conclut en utilisant la formule d'Auslander-Buchsbaum pour relier la dimension projective de $\text{Der}^k(-\log X/C)$ à sa profondeur.

La preuve des équivalences 1. \iff 6. \iff 7. est analogue à la preuve du théorème 3.3.7, comme nous allons le voir.

Le lemme suivant généralise la proposition 3.3.19.

Lemme 4.2.23. *Si $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log X/C)) \leq k-1$ alors \mathcal{R}_X est un \mathcal{O}_X -module (et \mathcal{O}_C -module) de Cohen-Macaulay maximal. Si X est libre, alors $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log X/C)) \leq k$.*

Preuve. On considère la suite exacte $0 \rightarrow \tilde{\Omega}_f^k \rightarrow \Omega^k(\log X/C) \rightarrow \mathcal{R}_X \rightarrow 0$.

On montre de même que dans la preuve de la proposition 3.3.19 que si $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log X/C)) \leq k-1$ alors $\text{prof}(\mathcal{R}_X) = m-k$, et donc \mathcal{R}_X est Cohen-Macaulay maximal.

Si X est libre, alors $\mathcal{I}_{X/C}$ est un \mathcal{O}_C -module de Cohen-Macaulay maximal. On déduit du théorème 2.3.20 et de la proposition 4.2.17 que $\text{prof}(\mathcal{R}_X) = m-k$. La fin de la preuve est identique à la preuve de la proposition 3.3.19. \square

On applique le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(-, \mathcal{O}_S)$ à la suite exacte courte

$$0 \rightarrow \tilde{\Omega}_f^k \rightarrow \Omega^k(\log X/C) \rightarrow \mathcal{R}_X \rightarrow 0.$$

On obtient une suite exacte longue dans laquelle les termes impliquant $\tilde{\Omega}_f^k$ ont déjà été calculés dans le lemme 3.3.11. De plus, le lemme 3.3.12 est valable pour tout \mathcal{O}_C -module, donc en particulier pour \mathcal{R}_X .

Remarque 4.2.24. On rappelle que le module dualisant de X est $\omega_X = \omega_X^{m-k} = \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\mathcal{O}_X, \Omega_S^m)$ (voir corollaire 2.3.27). Dans le cas d'un espace X de Cohen-Macaulay, le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \omega_X)$ est dualisant sur les \mathcal{O}_X -modules Cohen-Macaulay maximaux (voir [Eis95, Theorem 21.21]).

Nous avons déjà vu dans le lemme 4.2.18 que pour les idéaux fractionnaires I de X , $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(I, \mathcal{O}_C) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(I, \omega_X)$. En particulier, vu que $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(I, \mathcal{O}_S) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(I, \mathcal{O}_C)$, on a aussi $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(I, \mathcal{O}_S) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(I, \omega_X)$.

Proposition 4.2.25. *On obtient la suite exacte de \mathcal{O}_S -modules :*

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\Omega^k(\log X/C), \mathcal{O}_S) \rightarrow \Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C \xrightarrow{\alpha} \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{R}_X, \mathcal{O}_C) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\Omega^k(\log X/C), \mathcal{O}_S) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

De plus, le morphisme α est défini pour $\delta \otimes \bar{a} \in \Theta_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C$ par

$$\alpha(\delta \otimes \bar{a}) = \left(\rho \mapsto \overline{a\delta(\alpha_0)\rho} \right).$$

Preuve. Le seul point à montrer est l'expression de α , qui se montre exactement de la même manière que la proposition 3.3.14, en remplaçant $\Omega^k(\log C)$ par $\Omega^k(\log X/C)$ et \mathcal{R}_C par \mathcal{R}_X et en utilisant la caractérisation 4.2.6 des formes multi-logarithmiques, c'est-à-dire que α_0 remplace $dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_k$. \square

Nous sommes maintenant en mesure de terminer la preuve du théorème 4.2.22.

Preuve (des équivalences 1. \iff 6. \iff 7.). Supposons que $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log X/C)) \leq k-1$. Cela implique que l'application α de la proposition 4.2.25 est surjective, et donc le module $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{R}_X, \mathcal{O}_C)$ est isomorphe à $\mathcal{I}_{X/C}$. D'après le lemme 4.2.23, \mathcal{R}_X est un \mathcal{O}_C -module de Cohen-Macaulay maximal. On déduit du théorème 2.3.20 que $\mathcal{I}_{X/C}$ est un \mathcal{O}_C -module de Cohen-Macaulay maximal, et donc X est libre dans C .

Supposons maintenant que X est libre dans C . Alors d'après le théorème 2.3.20 et la proposition 4.2.17 on a $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{R}_X, \mathcal{O}_C) = \mathcal{I}_{X/C}$. Par conséquent, l'application α est surjective, et donc $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^k(\Omega^k(\log X/C), \mathcal{O}_S) = 0$. Comme d'après le lemme 4.2.23, $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log X/C)) \leq k$, on en déduit de même que dans le paragraphe 3.3.3 que $\dim\text{proj}(\Omega^k(\log X/C)) = k-1$. \square

Le corollaire suivant donne d'autres caractérisations de la liberté faisant intervenir le module des résidus.

Corollaire 4.2.26. *Soit X un espace réduit de Cohen-Macaulay. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. X est libre.
2. $\dim\text{proj}(\mathcal{R}_X) \neq \dim\text{proj}(\Omega^k(\log X/C))$.
3. \mathcal{R}_X est Cohen-Macaulay et $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{R}_X, \mathcal{O}_C) = \mathcal{I}_{X/C}$.

Preuve. On considère la suite exacte $0 \rightarrow \tilde{\Omega}_f^k \rightarrow \Omega^k(\log X/C) \rightarrow \mathcal{R}_X \rightarrow 0$. La profondeur de $\tilde{\Omega}_f^k$ est $m - k + 1$. Comme $\text{prof}(\mathcal{R}_X) \leq m - k$, le lemme de la profondeur assure que $\text{prof}(\Omega^k(\log X/C)) \neq \text{prof}(\mathcal{R}_X)$ si et seulement si \mathcal{R}_X est de profondeur $m - k$ et $\Omega^k(\log X/C)$ est de profondeur au moins $m - k + 1$, ce qui équivaut à la liberté de X par la Formule d'Auslander-Buchsbaum et le théorème 4.2.22.

L'implication 1. \Rightarrow 3. est donnée par le théorème 2.3.20 et le lemme 4.2.23. Réciproquement, si $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{R}_X, \mathcal{O}_C) = \mathcal{I}_{X/C}$, et \mathcal{R}_X est Cohen-Macaulay, alors par le théorème 2.3.20, $\mathcal{I}_{X/C}$ est Cohen-Macaulay et donc X est libre. \square

Remarque 4.2.27. La condition que \mathcal{R}_X est Cohen-Macaulay n'est pas forcément vérifiée. Un exemple d'hypersurface est donné dans [OT95, Example 5.6]. Il s'agit de la réunion D de 15 hyperplans de \mathbb{C}^4 , définie par le produit des 15 formes linéaires $a_1x + a_2y + a_3z + a_4t$ où $a_i \in \{0, 1\}$, et tous les a_i ne sont pas simultanément nuls. Un calcul avec SINGULAR donne comme résolution projective minimale de $\Omega^1(\log D)$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^1 \rightarrow \mathcal{O}_S^4 \rightarrow \mathcal{O}_S^7 \rightarrow \Omega^1(\log D) \rightarrow 0.$$

En particulier, on en déduit que $\text{prof}(\Omega^1(\log D)) = 2$, et donc $\text{prof}(\mathcal{R}_D) = 2$.

La proposition 2.2.23 se généralise de la façon suivante :

Proposition 4.2.28. *Soit $X \subseteq S$ un germe de surface Cohen-Macaulay réduite défini par des équations (h_1, \dots, h_r) , et C une surface intersection complète réduite contenant X définie par des équations (f_1, \dots, f_{m-2}) .*

Soit $J(\underline{f}, \underline{h})$ l'idéal de \mathcal{O}_S engendré par les mineurs maximaux de la matrice jacobienne de (f_1, \dots, f_{m-2}) et h_1, \dots, h_r . Alors X est libre si et seulement si $J(\underline{f}, \underline{h})$ est saturé.

Preuve. Par le théorème 4.2.22, C est libre si et seulement si $\mathcal{O}_S/J(\underline{f}, \underline{h})$ est Cohen-Macaulay de dimension 1. Comme C est réduite, la dimension de $\mathcal{O}_S/J(\underline{f}, \underline{h})$ est au plus 1. Le lemme 2.2.22 nous donne alors le résultat. \square

Les conséquences de la liberté que nous avons indiquées dans le chapitre 3 s'étendent aux espaces de Cohen-Macaulay libres, avec une preuve analogue.

Proposition 4.2.29. *Soit X un espace de Cohen-Macaulay libre de codimension au moins deux. Alors :*

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\Omega^k(\log X/C), \mathcal{O}_S) &= f\Theta_S^k, \\ \text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1}(\Omega^k(\log X/C), \mathcal{O}_S) &= \frac{\text{Der}^k(-\log X/C)}{\left(\sum_{i=1}^k f_i \Theta_S^k\right)}, \end{aligned}$$

et pour tout $q \notin \{0, k-1\}$, $\text{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q(\Omega^k(\log X/C), \mathcal{O}_S) = 0$.

De plus,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S} \left(\mathrm{Der}^k(-\log X/C), \mathcal{O}_S \right) = \Omega_S^k,$$

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^{k-1} \left(\mathrm{Der}^k(-\log X/C), \mathcal{O}_S \right) \simeq \mathcal{R}_X,$$

et pour tout $q \notin \{0, k-1\}$, $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q \left(\mathrm{Der}^k(-\log X/C), \mathcal{O}_S \right) = 0$.

Remarque 4.2.30. De même que dans le cas des intersections complètes, si X n'est pas libre, les énoncés portant sur les modules $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q \left(\Omega^k(\log X/C), \mathcal{O}_S \right)$ et $\mathrm{Ext}_{\mathcal{O}_S}^q \left(\mathrm{Der}^k(-\log X/C), \mathcal{O}_S \right)$ pour $q \leq k-1$ restent vrais.

4.2.5 Comparaison des idéaux jacobiens

Nous avons choisi comme définition de la liberté de X le fait que l'idéal jacobien restreint $\mathcal{J}_{X/C}$ est Cohen-Macaulay. D'autres idéaux jacobiens sont liés à un espace de Cohen-Macaulay X : on peut considérer l'idéal $\mathcal{J}_X \subseteq \mathcal{O}_X$ engendré par les mineurs $k \times k$ de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_r) , où $\mathcal{I}_X = \sum_{i=1}^r h_i \mathcal{O}_S$, ou encore le ω -jacobien \mathcal{J}_X^ω (voir définition 4.2.32). La définition de la liberté pour les espaces Gorenstein proposée par M. Schulze dans [Sch16] est que l'idéal \mathcal{J}_X^ω est Cohen-Macaulay. Nous montrons que cette définition coïncide avec celle que nous proposons pour les espaces Gorenstein.

On termine en donnant un exemple montrant que l'idéal $\mathcal{J}_{X/C}$ peut ne pas être isomorphe au ω -jacobien \mathcal{J}_X^ω si X n'est pas Gorenstein (voir définition 4.2.32), ni à l'idéal jacobien \mathcal{J}_X de X .

On commence par remarquer le résultat suivant, qui est une conséquence de la proposition 4.1.20 :

Lemme 4.2.31. *On a l'isomorphisme suivant :*

$$\omega_X^n \simeq \overline{\mathcal{I}_Y}$$

où $\overline{\mathcal{I}_Y}$ désigne l'image de \mathcal{I}_Y dans \mathcal{O}_X .

Preuve. On remarque que $\omega_X^n = \left\{ \left[\begin{array}{c} \alpha \\ f_1, \dots, f_k \end{array} \right]; \alpha \in \Omega_S^m, \mathcal{I}_X \alpha \subseteq (f_1, \dots, f_k) \Omega_S^m \right\}$. Grâce à la proposition 4.1.21, une seule suite régulière suffit pour décrire ω_X^n .

Par conséquent, on a un isomorphisme :

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_C : \mathcal{I}_X)_{\mathcal{O}_S} / \mathcal{I}_C &\rightarrow \omega_X^n \\ a &\mapsto \left[\begin{array}{c} a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m \\ f_1, \dots, f_k \end{array} \right] \end{aligned}$$

De plus, $(\mathcal{I}_C : \mathcal{I}_X)_{\mathcal{O}_S} = \mathcal{I}_Y$. On a donc un isomorphisme entre ω_X^n et $\mathcal{I}_Y / \mathcal{I}_C \simeq \overline{\mathcal{I}_Y}$. \square

On considère la classe fondamentale de X :

$$\begin{aligned} c_X : \Omega_X^n &\rightarrow \omega_X^n \\ \beta &\mapsto \left[\begin{array}{c} \beta \wedge \alpha_0 \\ f_1, \dots, f_k \end{array} \right] \end{aligned}$$

Définition 4.2.32. *Le ω -jacobien de X est $\mathcal{J}_X^\omega = \mathrm{Ann}_{\mathcal{O}_X}(\mathrm{Coker}(c_X))$.*

Déterminons l'image de c_X . On note $\alpha_0 = \sum_{|I|=k} a_I dx_I$. On rappelle que dans $\Omega_S^k \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{M}_C$, $\sum_{|I|=k} \beta_f J_I dx_I = \alpha_0$, où J_I est le mineur de la matrice jacobienne de (f_1, \dots, f_k) relatif à I . Comme $\beta_f|_X = 1$ et $\beta_f|_Y = 0$, on en déduit que $a_I = J_I + b_I$ avec $b_I \in \mathcal{I}_X$. L'image de c_X s'identifie donc à l'idéal de \mathcal{O}_X engendré par les $(J_I + b_I)$, c'est-à-dire l'idéal $\mathcal{I}_{X/C}$. D'où finalement :

Proposition 4.2.33.

$$\mathcal{I}_X^\omega = \text{Ann}_{\mathcal{O}_X} \left(\frac{\overline{\mathcal{I}_Y}}{\mathcal{I}_{X/C}} \right) = (\mathcal{I}_{X/C} : \overline{\mathcal{I}_Y})_{\mathcal{O}_X}.$$

En particulier, $\mathcal{I}_{X/C} \subseteq \mathcal{I}_X^\omega$.

La question qui se pose est de déterminer s'ils sont isomorphes.

Proposition 4.2.34. *Si X est Gorenstein, alors \mathcal{I}_X^ω est isomorphe à $\mathcal{I}_{X/C}$.*

Preuve. Comme X est Gorenstein, $\omega_X^n = \mathcal{I}_Y|_X$ est libre de rang 1. Soit $a \in \mathcal{O}_X$ tel que $\mathcal{I}_Y|_X = a\mathcal{O}_X$. En particulier, a est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_X . On a donc $\mathcal{I}_X^\omega = \frac{1}{a} \mathcal{I}_{X/C}$, et donc \mathcal{I}_X^ω et $\mathcal{I}_{X/C}$ sont isomorphes. \square

Si X n'est pas Gorenstein, l'idéal $\mathcal{I}_{X/C}$ n'est pas forcément isomorphe à l'idéal \mathcal{I}_X^ω , comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 4.2.35. On considère la courbe irréductible X de \mathbb{C}^3 définie par $h_1 = y^3 - x^2z$, $h_2 = x^3y - z^2$ et $h_3 = x^5 - y^2z$. Cette courbe est paramétrée par $x = t^5$, $y = t^7$, $z = t^{11}$. Cette courbe n'est pas Gorenstein⁶.

La courbe C définie par $f_1 = x^7 - y^5$ et $f_2 = x^3y - z^2$ est une intersection complète réduite dont une composante est X . L'autre composante Y de C est la courbe irréductible de paramétrage $x = s^5$, $y = s^7$ et $z = -s^{11}$. La courbe Y est définie par $\mathcal{I}_Y = (x^3y - z^2, x^2z + y^3, y^2z + x^5)$.

L'idéal jacobien de C est engendré par $J_1 = 7x^9 + 15x^2y^5$, $J_2 = 10y^4z$, $J_3 = -14x^6z$. En restriction à X , on obtient donc le sous- $\mathbb{C}\{t^5, t^7, t^{11}\}$ -module de $\mathbb{C}\{t\}$ engendré par t^{45}, t^{39}, t^{41} . Si on représente sur un axe l'ensemble des valuations de $\mathcal{I}_{X/C}$ on obtient :

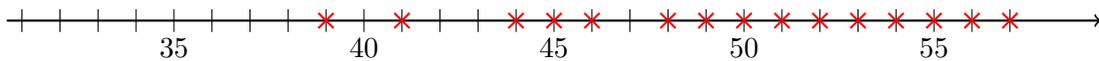


FIGURE 4.1 – Valuations de $\mathcal{I}_{X/C}$

Par le lemme 4.2.31, le module ω_X^n s'identifie à l'idéal \mathcal{I}_Y restreint à X , c'est-à-dire au sous- $\mathbb{C}\{t^5, t^7, t^{11}\}$ -module de $\mathbb{C}\{t\}$ engendré par t^{21} et t^{25} . Ses valuations sont donc :

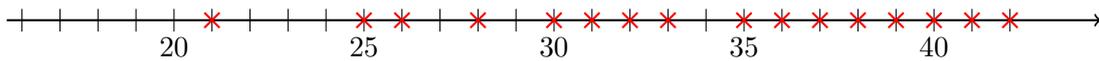
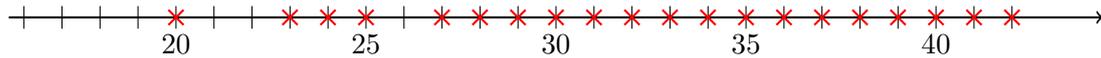


FIGURE 4.2 – Valuations de $\mathcal{I}_Y|_X$

On rappelle que $\mathcal{I}_X^\omega = \text{Ann}_{\mathcal{O}_X} \left(\omega_X^n / c_X(\Omega_X^n) \right)$, que l'on peut identifier à $\text{Ann}_{\mathcal{O}_X} \left(\mathcal{I}_Y|_X / \mathcal{I}_{X/C} \right)$. On vérifie que \mathcal{I}_X^ω est l'idéal de \mathcal{O}_X engendré par x^4 , xyz et x^2y^2 , de valuations respectives 20, 23 et 24. Les valuations de \mathcal{I}_X^ω sont :

⁶On peut le voir par exemple en utilisant la caractérisation du théorème 5.1.23.

FIGURE 4.3 – Valuations de \mathcal{I}_X^ω

Les valuations de \mathcal{I}_X^ω ne se déduisent pas par translation des valuations de $\mathcal{I}_{X/C}$, ces deux \mathcal{O}_X -modules ne sont donc pas isomorphes.

On remarque que l'idéal jacobien \mathcal{I}_X de X , c'est-à-dire l'idéal de \mathcal{O}_X engendré par les valuations des mineurs 2×2 de la matrice jacobienne de (h_1, h_2, h_3) a pour ensemble de valuations $27 + \mathbb{N}$ et n'est donc isomorphe ni à $\mathcal{I}_{X/C}$ ni à \mathcal{I}_X^ω . On dispose donc de trois notions d'idéaux jacobiens différentes pour X .

Chapitre 5

Courbes et multi-valuations

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème 5.2.1, qui permet de relier les multi-valuations d'un idéal fractionnaire et de son dual.

On considère une courbe réduite $C = C_1 \cup \dots \cup C_p$ où les C_i sont irréductibles. La normalisation de C induit une application de multi-valuation qui associe à une fraction le p -uplet des valuations le long de chaque branche.

Dans la première partie, nous donnons quelques propriétés des multi-valuations, et nous nous intéressons à l'ensemble des multi-valuations des non diviseurs de zéro d'un idéal fractionnaire. Nous montrons dans le paragraphe 5.1.2 que les multi-valuations des non diviseurs de zéro d'un idéal déterminent aussi les multi-valuations des diviseurs de zéro.

Dans le paragraphe 5.1.3 nous rappelons les énoncés de symétrie du semigroupe de la courbe, qui est l'ensemble $\text{val}(\mathcal{O}_C)$ des multi-valuations des non diviseurs de zéro de \mathcal{O}_C . Dans le cas d'une courbe irréductible, la symétrie s'énonce facilement (voir le théorème de Kunz 5.1.23) : une courbe irréductible C est Gorenstein si et seulement si pour tout $v \in \mathbb{Z}$, $v \in \text{val}(\mathcal{O}_C)$ si et seulement si $\gamma - v - 1 \notin \text{val}(\mathcal{O}_C)$, où γ est le conducteur de la courbe. F. Delgado généralise cette symétrie au cas des courbes réductibles (voir théorème 5.1.28).

La partie 5.2 est consacrée au théorème 5.2.1 qui généralise le théorème de Delgado, et à sa preuve, qui se fait en plusieurs étapes. Elle repose en partie sur la détermination de la dimension de certains quotients d'idéaux fractionnaires à partir des multi-valuations.

Nous terminons ce chapitre avec une conséquence de notre théorème de symétrie sur les coefficients de la série de Poincaré P_I associée à un idéal fractionnaire I (voir proposition 5.2.28).

Ce chapitre suit [Pol14, §4], [Pol15b, §2] ainsi que [Pol15a]. Il est indépendant des précédents.

5.1 Généralités sur les courbes

5.1.1 Multi-valuations

Soit C un germe de courbe analytique réduit, et \mathcal{O}_C son anneau des fonctions. Comme C est réduit et de dimension 1, l'anneau \mathcal{O}_C est de Cohen-Macaulay. On note C_1, \dots, C_p les composantes irréductibles de C . Comme C est de dimension un, la normalisation \tilde{C} de C est en fait une désingularisation de C et on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_C &\hookrightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}} = \mathbb{C}\{t_1\} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\{t_p\} \\ g &\mapsto (g_1(t_1), \dots, g_p(t_p))\end{aligned}$$

Définition 5.1.1. Soit $g \in \mathcal{O}_C$ d'image (g_1, \dots, g_p) dans $\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ et $i \in \{1, \dots, p\}$. La valuation de g le long de C_i est l'ordre en t_i de $g_i(t_i)$. On la note $\text{val}_i(g)$. Si g est identiquement nulle le long de C_i on pose $\text{val}_i(g) = \infty$.

La multi-valuation¹ de g est

$$\text{val}(g) = (\text{val}_1(g), \dots, \text{val}_p(g)) \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\})^p.$$

De plus, $\mathcal{M}_C = \mathcal{M}_{\tilde{C}}$. On pose pour $g = \frac{a}{b} \in \mathcal{M}_C$, $\text{val}(g) = \text{val}(a) - \text{val}(b) \in (\mathbb{Z} \cup \{\infty\})^p$.

Exemple 5.1.2. Soit $h(x, y) = (x^3 - y^2)(x^6 - y^7)$. Un paramétrage de cette courbe est donné par $x_1(t_1) = t_1^2, y_1(t_1) = t_1^3$ pour la première branche, et $x_2(t_2) = t_2^7, y_2(t_2) = t_2^6$ pour la deuxième branche. On le note aussi :

$$x = (t_1^2, t_2^7), y = (t_1^3, t_2^6).$$

La multi-valuation de $x^i y^j$ pour $i, j \in \mathbb{N}$ est donc $\text{val}(x^i y^j) = (2i + 3j, 7i + 6j)$. Par ailleurs, la multi-valuation de $x^3 - y^2$ est $\text{val}(x^3 - y^2) = (\infty, 12)$.

Notation 5.1.3. Soit $I \subseteq \mathcal{M}_C$ un idéal fractionnaire. On pose

$$\begin{aligned} \text{val}(I) &= \{\text{val}(g) ; g \in I \text{ non diviseur de zéro}\} \subseteq \mathbb{Z}^p, \\ \overline{\text{val}(I)} &= \{\text{val}(g) ; g \in I\} \subseteq (\mathbb{Z} \cup \{\infty\})^p. \end{aligned}$$

Remarque 5.1.4. Nous verrons dans le paragraphe 5.1.2 que l'ensemble $\text{val}(I)$ détermine l'ensemble $\overline{\text{val}(I)}$. De plus, on a $\text{val}(I) = \overline{\text{val}(I)} \cap \mathbb{Z}^p$.

Exemple 5.1.5. Considérons la courbe plane C définie par $h(x, y) = (x^3 - y^2)(x^3 - y^4)$. Un paramétrage est donné par $x = (t_1^2, t_2^4)$ et $y = (t_1^3, t_2^3)$. La figure 5.1 représente l'ensemble $\text{val}(\mathcal{O}_C)$. Nous ferons dans la suite plusieurs fois référence à cet exemple. Comme il s'agit d'un exemple simple, on peut déterminer facilement $\text{val}(\mathcal{O}_C)$ de la façon suivante. On commence par indiquer les croix correspondant aux éléments de la forme $x^i y^j$ pour $i, j \in \mathbb{N}$. On complète ensuite en utilisant la proposition 5.1.12. On remarque que $x^3 - y^2 = (0, t_2^{12} - t_2^6)$ et $x^3 - y^4 = (t_1^6 - t_1^{12}, 0)$. En utilisant de nouveau la proposition 5.1.12, on en déduit respectivement les points dont l'ordonnée est 6, respectivement les points dont l'abscisse est 6. On peut alors compléter en suivant le même principe en considérant les $x^i y^j (x^3 - y^2)$ et $x^i y^j (x^3 - y^4)$.

Un algorithme de calcul basé sur l'article [CDGZ99] est implémenté sous SINGULAR qui permet le calcul de $\text{val}(\mathcal{O}_C)$ pour les courbes planes. Il s'agit de la procédure *semigroup* de la librairie *alexpoly.lib*, développée par Fernando Hernando Carrillo et Thomas Keilen.

Définition 5.1.6. On définit l'idéal conducteur de \mathcal{O}_C par $\mathcal{C}_C = \mathcal{O}_{\tilde{C}}^\vee$, où $-\vee$ désigne le foncteur $\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(-, \mathcal{O}_C)$.

Pour $\alpha \in \mathbb{Z}^p$ on pose $t^\alpha = (t_1^{\alpha_1}, \dots, t_p^{\alpha_p}) \in \mathcal{M}_C$.

Lemme 5.1.7. L'idéal conducteur \mathcal{C}_C est aussi un idéal de $\mathcal{O}_{\tilde{C}}$. Il existe donc $\gamma \in \mathbb{N}^p$ tel que $\mathcal{C}_C = t^\gamma \mathcal{O}_{\tilde{C}}$. On appelle γ le conducteur de la courbe C .

Preuve. On a par la proposition 2.3.16 $\mathcal{C}_C = \{f \in \mathcal{M}_C ; f \mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq \mathcal{O}_C\}$. Par conséquent, si $f \in \mathcal{C}_C$, pour tout $g \in \mathcal{O}_{\tilde{C}}$, $fg \mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq f \mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq \mathcal{O}_C$ donc $fg \in \mathcal{C}_C$. Nous pouvons en conclure que \mathcal{C}_C est un idéal de $\mathcal{O}_{\tilde{C}}$. Comme de plus $\mathcal{O}_{\tilde{C}} = \bigoplus_{i=1}^p \mathbb{C}\{t_i\}$ et chacun des $\mathbb{C}\{t_i\}$ est principal, on en déduit l'existence d'un élément $\gamma \in \mathbb{N}^p$ tel que $\mathcal{C}_C = t^\gamma \mathcal{O}_{\tilde{C}}$. \square

On considère l'ordre produit² sur \mathbb{Z}^p , c'est-à-dire que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^p$, $\alpha \leq \beta$ signifie pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\alpha_i \leq \beta_i$. On définit $\inf(\alpha, \beta) = (\min(\alpha_1, \beta_1), \dots, \min(\alpha_p, \beta_p))$.

On a donc :

$$\gamma = \inf \{\alpha \in \mathbb{N}^p ; \alpha + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(\mathcal{O}_C)\}. \quad (5.1)$$

¹ "value" en anglais

² qui est un ordre partiel

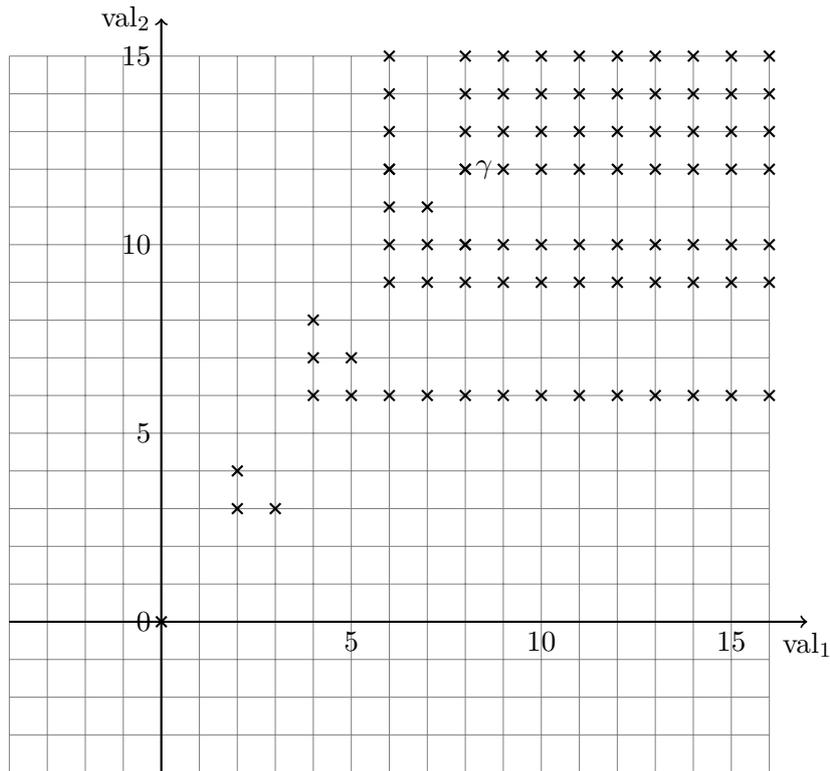


FIGURE 5.1 – Multi-valuations de \mathcal{O}_C

Exemple 5.1.8. Revenons à l'exemple 5.1.5. La figure 5.1 permet de déterminer le conducteur de C , qui est $\gamma = (8, 12)$.

Le lemme suivant nous sera utile dans le paragraphe 5.2, et vient directement de la définition d'idéal fractionnaire.

Lemme 5.1.9. Soit I un idéal fractionnaire. Alors il existe ν et λ dans \mathbb{Z}^p tels que

$$t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq I \subseteq t^\lambda \mathcal{O}_{\tilde{C}}. \tag{5.2}$$

En particulier, cela implique que $\nu + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(I) \subseteq \lambda + \mathbb{N}^p$. De plus, si $\lambda' \leq \lambda$ et $\nu' \geq \nu$, on peut remplacer λ par λ' et ν par ν' dans la suite d'inclusion (5.2).

Preuve. Pour la première inclusion, il suffit de remarquer que si $v \in \text{val}(I)$, $v + \gamma + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(I)$ puisque I est un sous- \mathcal{O}_C -module de \mathcal{M}_C et $\gamma + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(\mathcal{O}_C)$. Pour la deuxième inclusion, comme I est de type fini, il suffit de prendre le minimum des multi-valuations d'une famille génératrice de I . □

Définition 5.1.10. Soit I un idéal fractionnaire. On appelle

$$\nu_I = \inf \{ \alpha \in \mathbb{Z}^p ; \alpha + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(I) \}$$

le conducteur de l'idéal I . On appelle l'idéal $t^{\nu_I} \mathcal{O}_{\tilde{C}}$ l'idéal conducteur de I .

Remarque 5.1.11. Un idéal fractionnaire I d'une courbe est Cohen-Macaulay maximal³, donc le théorème 2.3.20 s'applique, et les inclusions sont renversées par dualité.

³car il est de même dimension que \mathcal{O}_C , c'est-à-dire 1, et de plus un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C est aussi un non diviseur de zéro de I



FIGURE 5.2 – Illustration des propositions 5.1.12 et 5.1.13

En dualisant la suite d'inclusions du lemme 5.1.9, on obtient donc, vu que $\mathcal{O}_{\tilde{C}}^{\vee} = \mathcal{C}_C = t^{\gamma} \mathcal{O}_{\tilde{C}}$,

$$t^{\gamma-\lambda} \mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq I^{\vee} \subseteq t^{\gamma-\nu} \mathcal{O}_{\tilde{C}}.$$

Nous aurons par ailleurs besoin des propriétés suivantes, qui généralisent [DdlM88, 1.1.2, 1.1.3] à un idéal fractionnaire quelconque I . Elles sont illustrées par la figure 5.2.

Proposition 5.1.12. *Soit I un idéal fractionnaire de C . Si $\alpha, \beta \in \overline{\text{val}(I)}$ alors $\inf(\alpha, \beta) \in \overline{\text{val}(I)}$. De plus, si par exemple $\alpha \in \text{val}(I)$, alors $\inf(\alpha, \beta) \in \text{val}(I)$.*

Preuve. Soit $\alpha \in \overline{\text{val}(I)}$ et $\beta \in \overline{\text{val}(I)}$, et $f, g \in I$ tels que $\text{val}(f) = \alpha$ et $\text{val}(g) = \beta$. Alors pour une combinaison linéaire $c_1 f + c_2 g$ générale, la multi-valuation est $\text{val}(c_1 f + c_2 g) = \inf(\alpha, \beta) \in \overline{\text{val}(I)}$. Si de plus $\alpha \in \text{val}(I)$ alors le minimum est clairement dans \mathbb{Z}^p . \square

Proposition 5.1.13. *Soit $\alpha \neq \beta \in \text{val}(I)$. S'il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\alpha_i = \beta_i$ alors il existe $v \in \text{val}(I)$ tel que :*

1. $v_i > \alpha_i$
2. $\forall j \in \{1, \dots, p\}, j \neq i, v_j \geq \min(\alpha_j, \beta_j)$
3. Si de plus $\alpha_j \neq \beta_j$, alors $v_j = \min(\alpha_j, \beta_j)$.

Preuve. Soit f_1, f_2 des éléments de I de multi-valuations respectives α, β . Pour $\ell \in \{1, 2\}$, l'image de f_{ℓ} dans $\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ est de la forme $f_{\ell} = \left(\sum_{j \geq \text{val}_k(f_{\ell})} a_{kj} t_k^j \right)_{k \in \{1, \dots, p\}}$, avec pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$ et $\ell \in \{1, 2\}$, $a_{k, \text{val}_k(f_{\ell}), \ell} \neq 0$, et $\text{val}_i(f_1) = \text{val}_i(f_2) = \alpha_i$. Soit

$$g = a_{i, \text{val}_i(f_1), 1} f_2 - a_{i, \text{val}_i(f_2), 2} f_1.$$

Alors $\text{val}(g)$ vérifie les trois propriétés. Si $\text{val}(g) \notin \mathbb{N}^p$, ce qui pourrait arriver si les restrictions de f_1 et f_2 à une ou plusieurs branches sont égales, il suffit d'utiliser la proposition 5.1.12 avec $\text{val}(g)$ et un élément $w \geq \nu_I$ assez grand, où ν_I est le conducteur de I . \square

Proposition 5.1.14. *Soit $I \subseteq J$ deux idéaux fractionnaires. Si $\text{val}(I) = \text{val}(J)$ alors $I = J$.*

Preuve. Supposons que $I \neq J$ et $\text{val}(I) = \text{val}(J)$. On note ν_I le conducteur de I . Soit alors $g \in J \setminus I$. Alors $g \notin t^{\nu_I} \mathcal{O}_{\tilde{C}}$ vu que $t^{\nu_I} \mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq I$. Il existe donc $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\text{val}_i(g) < \nu_{I, i}$. Comme $\text{val}(g) \in \text{val}(I)$, il existe $f_1 \in I$ tel que $\text{val}(f_1) = \text{val}(g)$. Par conséquent, une combinaison linéaire convenable $g + \lambda f_1$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie⁴ $\text{val}(g + \lambda f_1) \in \text{val}(I) = \text{val}(J)$, $\text{val}(g + \lambda f_1) \geq \text{val}(g)$ et $\text{val}_i(g + \lambda f_1) > \text{val}_i(g)$. En recommençant autant de fois que nécessaire, on obtient de cette façon un élément $g - f$ avec $f \in I$ et $\text{val}(g - f) \geq \nu$. Par conséquent, $g - f \in I$ et donc $g \in I$, ce qui est contradictoire. D'où le résultat. \square

⁴En ajoutant éventuellement un élément de l'idéal conducteur de I de multi-valuation assez grande si $g + \lambda f_1$ est un diviseur de zéro

5.1.2 Diviseurs de zéros et multi-valuations

Soit I un idéal fractionnaire. La proposition suivante montre que la donnée de $\text{val}(I)$ est équivalente à la donnée de $\overline{\text{val}(I)}$.

Proposition 5.1.15. *Soit $\nu \in \mathbb{Z}^p$ tel que $t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq I$. Soit $\alpha \in (\mathbb{Z} \cup \{\infty\})^p$. Alors $\alpha \in \overline{\text{val}(I)}$ si et seulement si ou bien $\alpha \in \text{val}(I)$, ou bien l'élément w défini par $w_i = \alpha_i$ si $\alpha_i \in \mathbb{N}$ et $w_i = \nu_i$ si $\alpha_i = \infty$ est dans $\text{val}(I)$.*

Preuve. Soit $\alpha \in \overline{\text{val}(I)}$ tel que $\alpha \notin \text{val}(I)$. Soit $\alpha' \in \nu + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(I)$ tel que si $\alpha_i \in \mathbb{N}$, alors $\alpha'_i \geq \alpha_i$, et si $\alpha_i = \infty$, $\alpha'_i = \nu_i$. Alors par la proposition 5.1.12, $\inf(\alpha, \alpha') = w \in \text{val}(I)$ avec $w_i = \alpha_i$ si $\alpha_i \in \mathbb{N}$ et $w_i = \nu_i$ si $\alpha_i = \infty$.

Réciproquement, soit $w \in \text{val}(I)$. Supposons qu'il existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que $w_j = \nu_j$. Soit J un ensemble d'indices⁵ tel que pour tout $j \in J$, $w_j = \nu_j$. Montrons qu'alors le p -uplet α tel que $\alpha_i = w_i$ si $i \notin J$ et $\alpha_i = \infty$ si $i \in J$ vérifie $\alpha \in \overline{\text{val}(I)}$. Soit $f \in I$ tel que $\text{val}(f) = w$. Comme $t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq I$, il existe $g \in I$ tel que pour tout $j \in J$, $g|_{C_j} = f|_{C_j}$ et pour tout $j \notin J$, $\text{val}_j(g) > w_j$. Alors $f - g$ est un diviseur de zéro de I dont la multi-valuation α vérifie pour tout $j \in J$, $\alpha_j = \infty$ et pour tout $j \notin J$, $\alpha_j = w_j$. \square

Remarque 5.1.16. On conserve les hypothèses de la proposition 5.1.15. Soit $\alpha \in \text{val}(I)$, et J l'ensemble des indices $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\alpha_i = \nu_i$. Cet ensemble peut être vide. On pose (e_1, \dots, e_p) la base canonique de \mathbb{Z}^p . Comme pour tout $\nu' \geq \nu$, on a $\nu' + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(I)$, la proposition précédente implique que :

$$\left\{ \alpha + \sum_{j \in J} \mathbb{N} \cdot e_j \right\} \subseteq \text{val}(I).$$

Corollaire 5.1.17. *Soit I un idéal fractionnaire et $\nu \in \mathbb{Z}^p$ tel que $\nu + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(I)$. Soit $w \in \mathbb{Z}^p$. Alors :*

$$w \in \text{val}(I) \iff \inf(w, \nu) \in \text{val}(I).$$

En particulier, cela signifie que l'ensemble

$$\text{val}(I) \cap \{w \in \mathbb{Z}^p ; w \leq \nu\}$$

détermine l'ensemble $\text{val}(I)$.

Preuve. L'implication \Rightarrow vient de la proposition 5.1.12. Pour l'implication \Leftarrow , considérons $w \in \mathbb{Z}^p$ tel que $\inf(w, \nu) \in \text{val}(I)$. Si $w \leq \nu$, alors $w = \inf(w, \nu) \in \text{val}(I)$. Supposons qu'il existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que $w_j > \nu_j$. Alors par la proposition 5.1.15, il existe $\alpha \in \overline{\text{val}(I)}$ tel que pour $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\nu_i \leq w_i$, $\alpha_i = \infty$ et pour $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $w_i < \nu_i$, $\alpha_i = w_i$. On pose $\alpha' = \max(w, \nu) \geq \nu$. Comme $t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq I$, on a $\alpha' \in \text{val}(I)$ et par la proposition 5.1.12, $w = \inf(\alpha', \alpha) \in \text{val}(I)$. \square

Remarque 5.1.18. La proposition 5.1.15 et le corollaire 5.1.17 assurent aussi que l'ensemble $\text{val}(I) \cap \{w \in \mathbb{Z}^p ; w \leq \nu\}$ détermine aussi $\overline{\text{val}(I)}$.

5.1.3 Symétrie du semigroupe

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la caractérisation des courbes Gorenstein par la propriété de symétrie de l'ensemble des multi-valuations de l'anneau \mathcal{O}_C (voir théorèmes 5.1.23 et 5.1.28).

⁵On notera que pour $j \notin J$, w_j peut être aussi égal à ν_j

Définition 5.1.19. On appelle semigroupe de la courbe C l'ensemble $\text{val}(\mathcal{O}_C) \subseteq \mathbb{N}^p$.

Remarque 5.1.20. L'ensemble $\text{val}(\mathcal{O}_C)$ est un semigroupe pour la loi d'addition. En effet, pour tout $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_C$ non diviseurs de zéro, on a $\text{val}(f_1 \cdot f_2) = \text{val}(f_1) + \text{val}(f_2)$. On remarque aussi que $0 \in \text{val}(\mathcal{O}_C)$ car $0 = \text{val}(1)$.

La propriété suivante est satisfaite par les courbes Gorenstein.

Proposition 5.1.21 ([dJP00, Lemma 5.2.8]). Soit $J \subseteq I$ deux idéaux fractionnaires d'une courbe Gorenstein C . Alors :

$$\dim_{\mathbb{C}} I/J = \dim_{\mathbb{C}} J^{\vee}/I^{\vee}.$$

Cas irréductible

Commençons par considérer une courbe irréductible C . On dit aussi que C est une *branche*. Dans ce cas, le semigroupe $\text{val}(\mathcal{O}_C)$ de la courbe est un semigroupe *numérique*, c'est-à-dire un sous-ensemble de \mathbb{N} stable par addition, contenant 0 et possédant un conducteur c .

Définition 5.1.22. Un semigroupe numérique Γ de conducteur c est dit *symétrique* si pour tout $v \in \mathbb{N}$, on a

$$v \in \Gamma \iff c - v - 1 \notin \Gamma.$$

La propriété suivante caractérise les courbes dont le semigroupe est symétrique :

THÉORÈME 5.1.23 ([Kun70]). Soit C une courbe réduite irréductible d'anneau local \mathcal{O}_C . La courbe C est Gorenstein si et seulement si le semigroupe $\text{val}(\mathcal{O}_C)$ est symétrique.

La preuve de ce théorème utilise le lemme suivant qui permet de déterminer des dimensions à partir des valuations pour les courbes irréductibles. Il sera utilisé dans la suite dans la preuve d'un énoncé plus général (voir proposition 5.2.4).

Lemme 5.1.24. Soit C une courbe irréductible, et $I \subseteq J$ deux idéaux fractionnaires. On a alors :

$$\dim_{\mathbb{C}} J/I = \text{Card} \{v \in \text{val}(J) ; v \notin \text{val}(I)\}.$$

Preuve. Le lemme 5.1.9 assure que l'ensemble $\{v \in \text{val}(J) ; v \notin \text{val}(I)\}$ est fini, vu qu'il existe $\lambda, \nu \in \mathbb{Z}$ tels que $\nu + \mathbb{N} \subseteq \text{val}(I) \subseteq \lambda + \mathbb{N}$.

Soit $v_1, \dots, v_q = \{v \in \text{val}(J) ; v \notin \text{val}(I)\}$. Il existe donc $g_1, \dots, g_q \in I$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, $\text{val}(g_i) = v_i$. Notons \bar{g}_i la classe de g_i dans J/I . La famille $(\bar{g}_i)_{1 \leq i \leq q}$ est clairement libre sur \mathbb{C} vu que les valuations sont deux à deux distinctes. Par conséquent, $\dim_{\mathbb{C}} J/I \geq q$. Soit $\bar{g} \in J/I$. Comme $\text{val}(g) \in \text{val}(J)$, par des combinaisons linéaires à coefficients complexes convenables de g , des g_i et des éléments de I on obtient un élément $g' \in J$ tel que $\text{val}(g') \geq \nu$, et donc $g' \in I$ induit zéro dans J/I . Par conséquent, on en déduit que \bar{g} est dans le sous-espace vectoriel de J/I engendré par $\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_q$, ce qui montre que $\dim_{\mathbb{C}} J/I = q$. \square

Exemple 5.1.25. Considérons la courbe plane C d'équation $h(x, y) = x^3 - y^7$. Comme C est une courbe plane, elle est Gorenstein. La symétrie du théorème 5.1.23 s'observe sur le dessin suivant, où les croix représentent les valuations de \mathcal{O}_C . On remarque que "regarder" les croix de la gauche vers la droite revient au même que de regarder les "trous" (en anglais "gaps") de la droite vers la gauche. On vérifie aussi qu'on a

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_C/\mathcal{C}_C = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\tilde{C}}/\mathcal{O}_C = 6.$$



Cas réductible

Dans le cas des courbes réductibles, la symétrie $v \in \text{val}(\mathcal{O}_C) \iff \gamma - v - \underline{1} \notin \text{val}(\mathcal{O}_C)$ n'est clairement pas vérifiée (voir figure 5.1). Néanmoins, une symétrie qui généralise la symétrie du théorème 5.1.23 a été mise en évidence et démontrée par Félix Delgado de la Mata (voir [DdlM88, Theorem 2.8]).

Afin de l'énoncer, nous introduisons un certain nombre de notations, inspirées par les notations de F. Delgado.

Notation 5.1.26. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}^p$ un ensemble, et $v \in \mathbb{Z}^p$. Pour $i \in \{1, \dots, p\}$, on pose

$$\Delta_i(v, \mathcal{E}) = \{\alpha \in \mathcal{E} ; \alpha_i = v_i \text{ et } \forall j \neq i, \alpha_j > v_j\}$$

et $\Delta(v, \mathcal{E}) = \bigcup_{i=1}^p \Delta_i(v, \mathcal{E})$.

Afin d'alléger les notations, dans le cas d'un idéal fractionnaire I , on note $\Delta(v, I)$ au lieu de $\Delta(v, \text{val}(I))$.

Décrivons ces ensembles dans le cas des courbes avec une, deux ou trois branches.

- Une branche : $\Delta(v, \mathcal{M}) = \begin{cases} \{v\} & \text{si } v \in \mathcal{M} \\ \emptyset & \text{si } v \notin \mathcal{M} \end{cases}$
- Deux branches : les croix rouges représentent les éléments de $\Delta(v, \mathcal{M})$:

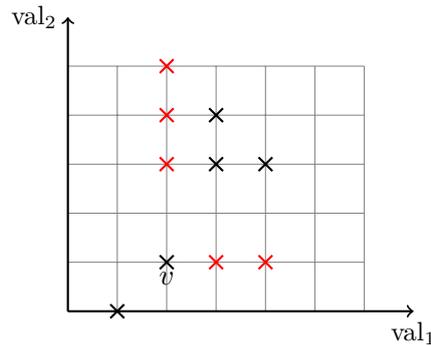
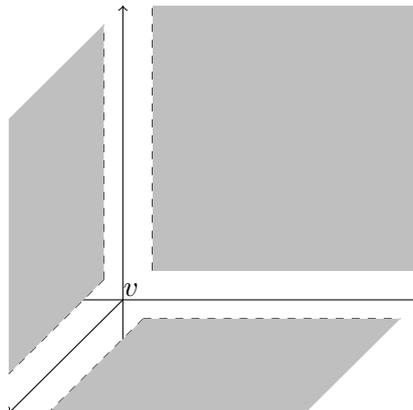
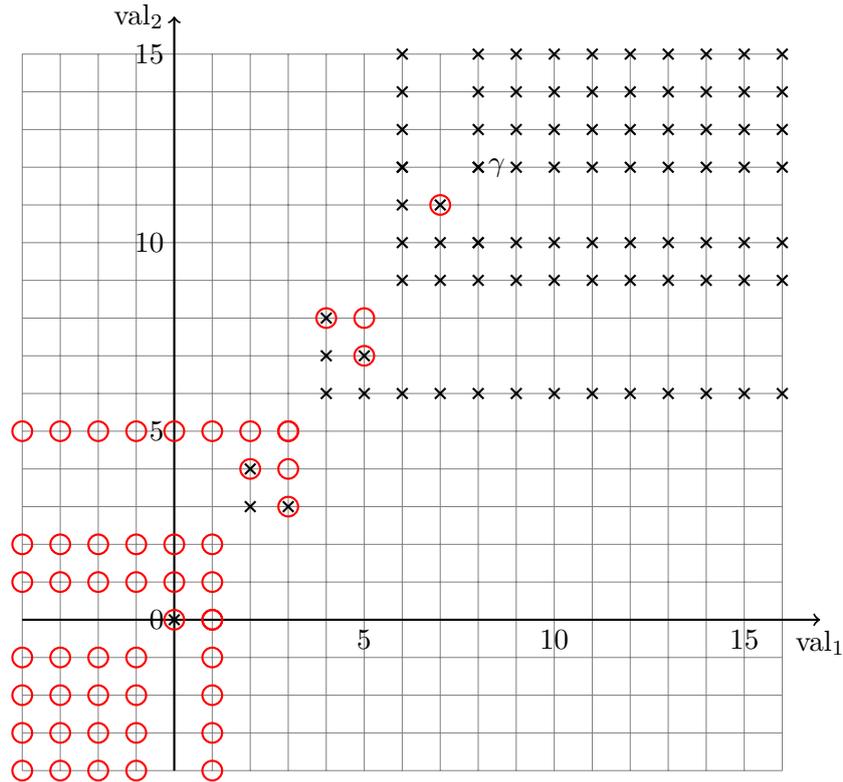


FIGURE 5.3 – $\Delta(v, \mathcal{M})$ pour $p = 2$

- Trois branches : l'ensemble $\Delta(v, \mathcal{M})$ est l'intersection de \mathcal{M} avec la partie grisée sur le dessin suivant :



FIGURE 5.4 – Symétrie du semigroupe de C

Notation 5.1.27. On note $\underline{1} = (1, \dots, 1)$.

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le théorème de Delgado :

THÉORÈME 5.1.28. Une courbe réduite C avec p composantes irréductible est Gorenstein si et seulement si

$$\forall v \in \mathbb{Z}^p, v \in \text{val}(\mathcal{O}_C) \iff \Delta(\gamma - v - \underline{1}, \mathcal{O}_C) = \emptyset. \quad (5.3)$$

En particulier, pour $p = 1$, on retrouve le théorème 5.1.23.

Si $\text{val}(\mathcal{O}_C)$ vérifie (5.3), on dit que le semigroupe $\text{val}(\mathcal{O}_C)$ est *symétrique*.

Exemple 5.1.29. Reprenons l'exemple 5.1 de la courbe plane définie par l'équation $h(x, y) = (x^3 - y^2)(x^3 - y^4)$. On entoure les points v vérifiant $\Delta(v, \mathcal{O}_C) = \emptyset$. La symétrie de Delgado s'observe alors sur la figure 5.4.

5.2 Symétrie des multi-valuations

L'objectif de cette partie est d'étendre la symétrie du semigroupe à tous les idéaux fractionnaires de \mathcal{M}_C . Nous l'appliquerons ensuite dans le chapitre 6 au cas qui nous intéresse, à savoir le module des résidus, et son dual, l'idéal jacobien.

5.2.1 Énoncé du théorème et commentaires

Nous généralisons le théorème de Delgado dans [Pol14] et [Pol15a] de la façon suivante :

THÉORÈME 5.2.1. Soit C un germe de courbe réduite avec p composantes irréductibles. Alors C est Gorenstein si et seulement si pour tout idéal fractionnaire $I \subset \mathcal{M}_C$, on a

$$\forall v \in \mathbb{Z}^p, v \in \text{val}(I^\vee) \iff \Delta(\gamma - v - \underline{1}, I) = \emptyset. \quad (5.4)$$

Ce résultat est bien une généralisation du théorème de Delgado 5.1.28 dans la mesure où $\mathcal{O}_C^\vee = \mathcal{O}_C$. Une des implications du théorème 5.2.1 est d'ailleurs une conséquence immédiate du théorème 5.1.28 :

Lemme 5.2.2. *Soit C une courbe réduite. Si la propriété (5.4) est satisfaite pour tout idéal fractionnaire $I \subset \mathcal{M}_C$, alors C est Gorenstein.*

Preuve. Puisque la symétrie (5.4) est satisfaite pour tout idéal fractionnaire, elle l'est en particulier pour \mathcal{O}_C , et d'après le théorème 5.1.28, C est Gorenstein. \square

Remarque 5.2.3. Il n'est pas suffisant de vérifier que la propriété (5.4) est satisfaite par un idéal fractionnaire I pour montrer qu'une courbe est Gorenstein. En effet, par définition, quelle que soit la courbe C , la symétrie (5.4) est satisfaite pour $I = \mathcal{O}_C^\vee$ et $I^\vee = \mathcal{O}_C$. Nous verrons un autre exemple pour lequel la symétrie est vérifiée par le module des multi-résidus et son dual alors que la courbe n'est pas Gorenstein (voir exemple 5.2.20).

Dans le cas d'une courbe irréductible, on peut reformuler la symétrie de la façon suivante :

Proposition 5.2.4 (Cas irréductible). *Soit C une courbe réduite irréductible, de conducteur c . La courbe C est Gorenstein si et seulement si on a :*

$$\forall v \in \mathbb{Z}, v \in \text{val}(I^\vee) \iff c - v - 1 \notin \text{val}(I).$$

La symétrie dans le cas d'une courbe irréductible se montre de la même façon que pour le semigroupe. Le point clef est le lemme 5.1.24, qui permet de déterminer des dimensions directement à partir des valuations.

Preuve (Cas d'une courbe irréductible). Soit C une courbe Gorenstein irréductible, et I un idéal fractionnaire. Soit $v \in \text{val}(I^\vee)$, et $f \in I^\vee$ tel que $\text{val}(f) = v$. Supposons que $c - v - 1 \in \text{val}(I)$. Soit alors $g \in I$ tel que $\text{val}(g) = c - v - 1$. Alors $fg \in \mathcal{O}_C$ donc $c - 1 \in \text{val}(\mathcal{O}_C)$ ce qui contredit la définition du conducteur. D'où

$$v \in \text{val}(I^\vee) \Rightarrow c - v - 1 \notin \text{val}(I). \quad (5.5)$$

Intéressons-nous maintenant à la réciproque. Par le lemme 5.1.9, il existe $\lambda \in \mathbb{Z}$ tel que $I \subseteq t^\lambda \mathbb{C}\{t\}$. Alors par dualité, $t^{-\lambda} \mathcal{O}_C \subseteq I^\vee$. Notons que $\text{val}(t^{-\lambda} \mathcal{O}_C) = -\lambda + c + \mathbb{N}$ et $\text{val}(t^\lambda \mathbb{C}\{t\}) = \lambda + \mathbb{N}$. Nous allons se faire correspondre les décompositions suivantes de $\text{val}(I^\vee)$ et $(\text{val}(I))^c$:

$$\begin{aligned} \text{val}(I^\vee) &= \{v \in \text{val}(I^\vee) ; v < -\lambda + c\} \sqcup \{v \in \mathbb{N} ; v \geq -\lambda + c\} \\ (\text{val}(I))^c &= \{v \notin \text{val}(I) ; v \geq \lambda\} \sqcup \{v \in \mathbb{N} ; v < \lambda\} \end{aligned}$$

L'équivalence suivante est claire :

$$w \in \{v \in \mathbb{N} ; v \geq -\lambda + c\} \iff c - w - 1 \in \{v \in \mathbb{N} ; v < \lambda\}.$$

De plus, par l'implication (5.5) :

$$w \in \{v \in \text{val}(I^\vee) ; v < -\lambda + c\} \Rightarrow c - w - 1 \in \{v \notin \text{val}(I) ; v \geq \lambda\}. \quad (5.6)$$

La proposition 5.1.21 donne : $\dim_{\mathbb{C}} t^\alpha \mathbb{C}\{t\}/I = \dim_{\mathbb{C}} I^\vee/t^{-\alpha} \mathcal{O}_D$. Comme la courbe considérée est irréductible, ces dimensions sont égales par le lemme 5.1.24 respectivement aux cardinaux des ensembles $\{v \in \text{val}(I^\vee) ; v < -\lambda + c\}$ et $\{v \notin \text{val}(I) ; v \geq \lambda\}$, qui sont donc égaux. Par conséquent, l'implication (5.6) est en fait une équivalence, ce qui nous donne le résultat attendu. \square

Dans le cas des courbes réductibles, on peut encore déterminer des dimensions à partir des multi-valuations, mais d'une façon un peu plus technique. Néanmoins, la preuve suit le même principe que dans le cas irréductible.

5.2.2 Une implication

Considérons une courbe réduite C , pas forcément Gorenstein. On fixe un idéal fractionnaire I . On a besoin du résultat suivant pour montrer l'implication \Rightarrow de l'équivalence (5.4).

Proposition 5.2.5 ([DdlM88, Corollary 1.9]). *On a $\Delta(\gamma - \underline{1}, \mathcal{O}_C) = \emptyset$.*

Preuve. Supposons que $\Delta(\gamma - \underline{1}, \mathcal{O}_C) \neq \emptyset$. Alors par exemple il existe $w \in \Delta_1(\gamma - \underline{1}, \mathcal{O}_C)$. Alors par la proposition 5.1.12, $(\gamma_1 - 1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) \in \text{val}(\mathcal{O}_C)$. En utilisant ensuite conjointement les propositions 5.1.13 et 5.1.12 et l'inclusion $\gamma + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(\mathcal{O}_C)$, on montre que pour tout $w \in \mathbb{N}^p$ tel que $w_1 = \gamma_1 - 1$ et pour tout $j \neq 1$, $w_j \geq \gamma_j$, on a $w \in \text{val}(\mathcal{O}_C)$, et donc $(\gamma_1 - 1, \gamma_2, \dots, \gamma_p) + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(\mathcal{O}_C)$, ce qui contredit la propriété (5.1) satisfaite par le conducteur. \square

Remarque 5.2.6. Nous n'utilisons pas le théorème 5.1.28 pour montrer la proposition 5.2.5 pour deux raisons. La première est que le théorème 5.1.28 s'applique à des courbes Gorenstein, or, la proposition 5.2.5 est satisfaite par toutes les courbes réduites. La seconde raison est que la proposition 5.2.5 est utilisée dans la preuve du théorème 5.1.28. En particulier, nous n'utilisons pas le théorème 5.1.28 pour montrer notre théorème 5.2.1.

Proposition 5.2.7. *Soit I un idéal fractionnaire de C et $v \in \mathbb{Z}^p$. Alors :*

$$v \in \text{val}(I^\vee) \Rightarrow \Delta(\gamma - v - \underline{1}, I) = \emptyset.$$

Remarque 5.2.8. La proposition 5.2.7 est vraie pour toutes les courbes réduites et pas seulement les courbes Gorenstein.

Preuve. Soit $(v_1, \dots, v_p) \in \text{val}(I^\vee)$. Supposons que $\Delta(\gamma - v - \underline{1}, I) \neq \emptyset$. Quitte à changer la numérotation, on peut supposer que $\Delta_1(\gamma - v - \underline{1}, I) \neq \emptyset$, ce qui signifie qu'il existe un élément de la forme $(\gamma_1 - v_1 - 1, w_2, \dots, w_p) \in \text{val}(I)$, avec $w_j > \gamma_j - v_j - 1$ pour $j \geq 2$. Par dualité, on a $\text{val}(I) + \text{val}(I^\vee) \subseteq \text{val}(\mathcal{O}_C)$, donc $(\gamma_1 - 1, w_2 + v_2, \dots, w_p + v_p) \in \text{val}(\mathcal{O}_C)$. Comme pour tout $j \in \{2, \dots, p\}$, $w_j + v_j \geq \gamma_j$, on a $(\gamma_1 - 1, w_2 + v_2, \dots, w_p + v_p) \in \Delta_1(\gamma - 1, \mathcal{O}_C)$.

Or, d'après la proposition 5.2.5, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\Delta_i(\gamma - 1, \mathcal{O}_C) = \emptyset$, ce qui nous donne une contradiction, et donc $\Delta(\gamma - v - \underline{1}, I) = \emptyset$. \square

Notation 5.2.9. On pose $\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{Z}^p ; \Delta(\gamma - v - \underline{1}, I) = \emptyset\} \subseteq \mathbb{Z}^p$.

L'ensemble \mathcal{V} contient les multi-valuations de I^\vee , mais pourrait *a priori* être plus gros. En particulier, il n'est pas clair que \mathcal{V} soit l'ensemble des multi-valuations d'un module. Dans la suite, nous allons montrer qu'aucun "intrus" (i.e. élément de $\mathcal{V} \setminus \text{val}(I^\vee)$) ne peut se glisser parmi les p -uplets de \mathcal{V} dans le cas d'une courbe Gorenstein.

5.2.3 Multi-valuations et dimension

L'objectif de ce paragraphe est de donner une méthode combinatoire pour déterminer la dimension de certains quotients à partir des multi-valuations.

Notation 5.2.10. Soit $v \in \mathbb{Z}^p$. On pose $I_v = \{g \in I ; \text{val}(g) \geq v\}$ et $\ell(v, I) = \dim_{\mathbb{C}} I/I_v$. Comme \mathcal{O}_C est de dimension 1, on a $\ell(v, I) < \infty$.

On note (e_1, \dots, e_p) la base canonique de \mathbb{Z}^p . Pour $\mathcal{E} \subseteq \mathbb{Z}^p$ et $v \in \mathbb{Z}^p$ on pose :

$$\forall i \in \{1, \dots, p\}, \Lambda_i(v, \mathcal{E}) = \{\alpha \in \mathcal{E} ; \alpha_i = v_i \text{ et } \alpha \geq v\}.$$

On a alors (voir [DdlM88, Proposition 1.11] où le cas $I = \mathcal{O}_C$ est traité) :

Proposition 5.2.11. *Pour tout $v \in \mathbb{Z}^p$ et tout $i \in \{1, \dots, p\}$ on a*

$$\ell(v + e_i, I) - \ell(v, I) = \dim_{\mathbb{C}} I_v / I_{v+e_i} \in \{0, 1\}.$$

De plus, $\ell(v + e_i, I) = \ell(v, I) + 1$ si et seulement si $\Lambda_i(v, \text{val}(I)) \neq \emptyset$.

Preuve. Le cas d'un idéal fractionnaire quelconque I se traite de la même manière que le cas de \mathcal{O}_C . On a $I_{v+e_i} \subseteq I_v$ et donc

$$\dim_{\mathbb{C}} I / I_v + \dim_{\mathbb{C}} I_v / I_{v+e_i} = \dim_{\mathbb{C}} I / I_{v+e_i}.$$

On a donc bien $\ell(v + e_i, I) - \ell(v, I) = \dim_{\mathbb{C}} I_v / I_{v+e_i}$. Montrons que cette dimension est au plus 1. Supposons qu'il existe $f, g \in I_v \setminus I_{v+e_i}$. Alors $\text{val}_i(f) = \text{val}_i(g) = v_i$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\text{val}_i(f + \lambda g) > v_i$ et $\text{val}(f + \lambda g) \geq v$. Par conséquent, $f + \lambda g \in I_{v+e_i}$ et donc f et g sont liés dans le quotient I_v / I_{v+e_i} . Par conséquent, $\dim_{\mathbb{C}} I_v / I_{v+e_i} \leq 1$. Pour que $\dim_{\mathbb{C}} I_v / I_{v+e_i} = 1$ il faut et il suffit que $I_v \neq I_{v+e_i}$, ce qui équivaut d'après la proposition 5.1.14 à l'existence d'un élément $w \in \text{val}(I_v)$ tel que $w \notin \text{val}(I_{v+e_i})$, c'est-à-dire $w \in \Lambda_i(v, I)$. \square

La proposition précédente nous permet de déterminer la dimension de certains quotients à partir des multi-valuations d'un idéal :

Corollaire 5.2.12. *Soit $\nu, \lambda \in \mathbb{Z}^p$ tels que $\nu + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(I) \subseteq \lambda + \mathbb{N}^p$ (voir lemme 5.1.9). Soit $(\alpha^{(j)})_{0 \leq j \leq M+1}$ une suite finie d'éléments de \mathbb{Z}^p vérifiant :*

- $\alpha^{(0)} = \lambda$ et $\alpha^{(M+1)} = \nu$
- Pour tout $j \in \{0, \dots, M\}$, il existe $i(j) \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\alpha^{(j+1)} = \alpha^{(j)} + e_{i(j)}$

Alors :

$$\dim_{\mathbb{C}} I / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{C}} = \ell(\nu, I) = \text{Card} \left\{ j \in \{0, \dots, M\}; \Lambda_{i(j)}(\alpha^{(j)}, \text{val}(I)) \neq \emptyset \right\}. \quad (5.7)$$

Le dessin suivant illustre le corollaire 5.2.12 pour $p = 2$. On représente par des croix les éléments de $\text{val}(I)$ et par des cercles rouges les éléments de la suite α . Les ensembles $\Lambda_{i(j)}(\alpha^{(j)}, \text{val}(I))$ correspondent aux croix qui se trouvent sur les lignes rouges.

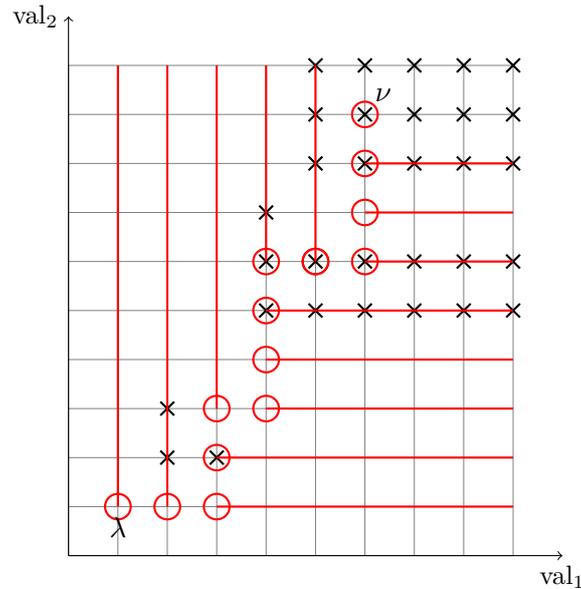


FIGURE 5.5 – Illustration du corollaire 5.2.12

Sur cet exemple, le corollaire 5.2.12 donne $\dim_{\mathbb{C}} I / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{C}} = 7$.

5.2.4 Étapes préliminaires

On rappelle que $\mathcal{V} = \{v \in \mathbb{Z}^p ; \Delta(\gamma - v - \underline{1}, I) = \emptyset\}$, et que cet ensemble contient $\text{val}(I^\vee)$. L'objectif de cette partie est de montrer que si on suppose l'inclusion $\text{val}(I^\vee) \subseteq \mathcal{V}$ stricte, cela entraîne certaines propriétés combinatoires et numériques (voir lemme 5.2.14 et proposition 5.2.15). On prouve ensuite dans le paragraphe 5.2.5 que cela conduit à une contradiction dans le cas d'une courbe Gorenstein, ce qui achève la preuve du théorème 5.2.1.

Première étape

On commence par montrer que si $\mathcal{V} \neq \text{val}(I^\vee)$, alors il existe un élément $w \in \mathcal{V} \setminus \text{val}(I^\vee)$ qui satisfait certaines propriétés qui seront utiles dans la suite.

On suppose donc dorénavant que $\mathcal{V} \neq \text{val}(I^\vee)$. Il existe donc un "intrus" $w^{(0)} \in \mathcal{V} \setminus \text{val}(I^\vee)$. Le lemme 5.1.9 assure l'existence d'éléments $\lambda, \nu \in \mathbb{Z}^p$ tels que $\nu + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(I) \subseteq \lambda + \mathbb{N}^p$ et $\gamma - \nu \leq w^{(0)} \leq \gamma - \lambda$. Nous fixons désormais de tels éléments λ et ν .

La proposition suivante nous donne une propriété essentielle de $w^{(0)}$:

Proposition 5.2.13. *Il existe $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\Lambda_j(w^{(0)}, \text{val}(I^\vee)) = \emptyset$. De plus, la coordonnée correspondante satisfait $w_j^{(0)} < \gamma_j - \lambda_j$.*

Preuve. Si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\Lambda_i(w^{(0)}, \text{val}(I^\vee)) \neq \emptyset$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$ il existe $\alpha^{(i)} \in \text{val}(I^\vee)$ tel que $\alpha_i^{(i)} = w_i^{(0)}$ et $\alpha^{(i)} \geq w^{(0)}$. Par conséquent, par la proposition 5.1.12, $\inf(\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(p)}) = w^{(0)} \in \text{val}(I^\vee)$, ce qui contredit l'hypothèse sur $w^{(0)}$.

Il existe donc $j \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\Lambda_j(w^{(0)}, \text{val}(I^\vee)) = \emptyset$. Si $w_j^{(0)} = \gamma_j - \lambda_j$ alors $\gamma - \lambda \in \Lambda_j(w^{(0)}, \text{val}(I^\vee))$, ce qui est contradictoire. Donc $w_j^{(0)} < \gamma_j - \lambda_j$. \square

Deuxième étape

Sans nuire à la généralité, on peut supposer que $\Lambda_p(w^{(0)}, \text{val}(I^\vee)) = \emptyset$. Nous allons utiliser le corollaire 5.2.12 avec une suite α bien choisie pour déterminer la dimension de $I^\vee / t^{\gamma - \lambda} \mathcal{O}_{\tilde{C}}$. Nous comparerons cette dimension avec le nombre ℓ' défini en (5.9), qui peut *a priori* dépendre de la suite α choisie.

Afin de déterminer $\dim_{\mathbb{C}} I^\vee / t^{\gamma - \lambda} \mathcal{O}_{\tilde{D}}$, on fixe une suite $(\alpha^{(j)})_{0 \leq j \leq n_0}$ où $n_0 = \sum_{i=1}^p \nu_i - \lambda_i$ qui satisfait :

- $\alpha^{(0)} = \gamma - \nu$ et $\alpha^{(n_0)} = \gamma - \lambda$
- pour tout $j \in \{0, \dots, n_0 - 1\}$, il existe $i(j) \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\alpha^{(j+1)} = \alpha^{(j)} + e_{i(j)}$
- il existe $j_0 \in \{0, \dots, n_0 - 1\}$ tel que $\alpha^{(j_0)} = w^{(0)}$ et $\alpha^{(j_0+1)} = w^{(0)} + e_p$

L'existence d'une telle suite vient de la proposition 5.2.13, et cette suite satisfait les hypothèses requises par le corollaire 5.2.12.

Par exemple, pour $p = 2$, on peut choisir la suite α représentée par les cercles sur la figure suivante, où les croix représentent \mathcal{V} . En particulier, comme $w^{(0)} \notin \text{val}(I^\vee)$, on a $\Lambda_2(w^{(0)}, \text{val}(I^\vee)) = \emptyset$.

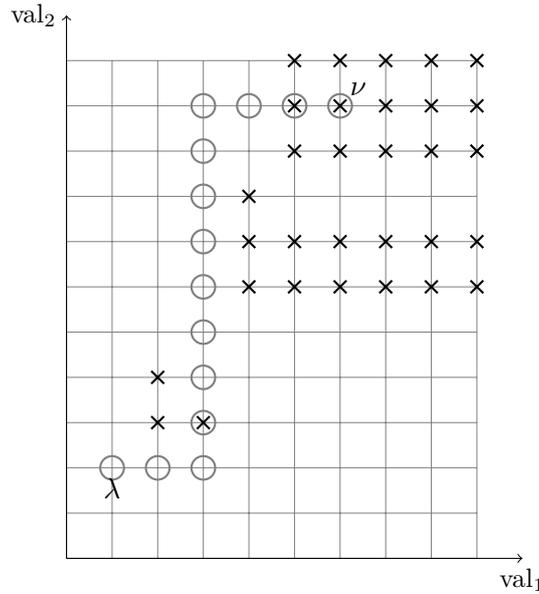


FIGURE 5.7

La proposition suivante donne la relation entre ℓ' et $\dim_{\mathbb{C}} I/t^{\nu} \mathcal{O}_{\tilde{C}}$:

Proposition 5.2.15. *On a :*

$$\dim_{\mathbb{C}} I/t^{\nu} \mathcal{O}_{\tilde{C}} \leq \sum_{i=1}^p (\nu_i - \lambda_i) - \ell'.$$

Afin de démontrer cette proposition, nous introduisons le lemme suivant, qui ne dépend pas de l'hypothèse $\mathcal{V} \neq \text{val}(I^{\vee})$:

Lemme 5.2.16. *Soit $w \in \mathbb{Z}^p$ et $i \in \{1, \dots, p\}$. Alors :*

$$\Lambda_i(w, \mathcal{V}) \neq \emptyset \Rightarrow \Lambda_i(\gamma - w - e_i, \text{val}(I)) = \emptyset.$$

Preuve. Soit $w' \in \Lambda_i(w, \mathcal{V})$. Par définition, on a $\Delta(\gamma - w' - \underline{1}, \text{val}(I)) = \emptyset$. De plus, $(\gamma - w' - \underline{1})_i = \gamma_i - w'_i - 1$ et pour $j \neq i$, $(\gamma - w' - \underline{1})_j = \gamma_j - w'_j - 1 < \gamma_j - w_j$. On a donc $\Lambda_i(\gamma - w - e_i, \text{val}(I)) = \Delta_i(\gamma - w' - \underline{1}, \text{val}(I)) = \emptyset$, vu que $w' \in \mathcal{V}$. \square

Preuve (de la proposition 5.2.15). On commence par remarquer que les suites α et β ont le même nombre de termes, à savoir $n_0 + 1 = 1 + \sum_{i=1}^p (\nu_i - \lambda_i)$.

Le corollaire 5.2.12 assure que :

$$\dim_{\mathbb{C}} I/t^{\nu} \mathcal{O}_{\tilde{D}} = \text{Card} \left\{ j \in \{0, \dots, n_0 - 1\} ; \Lambda_{i(j)}(\beta^{(n_0-j-1)}, \text{val}(I)) \neq \emptyset \right\}. \quad (5.11)$$

On remarque que pour tout $j \in \{0, \dots, n_0 - 1\}$, $\gamma - \alpha^{(j)} - e_{i(j)} = \gamma - \alpha^{(j+1)} = \beta^{(n_0-(j+1))}$. Par conséquent, d'après le lemme 5.2.16, si $\Lambda_{i(j)}(\alpha^{(j)}, \mathcal{V}) \neq \emptyset$ alors $\Lambda_{i(j)}(\beta^{(n_0-(j+1))}, \text{val}(I)) = \emptyset$. On obtient ensuite le résultat en comparant (5.11) et (5.9). \square

5.2.5 Fin de la preuve

Nous pouvons à présent terminer la preuve du théorème 5.2.1.

Preuve (Fin de la preuve du théorème 5.2.1). On suppose dorénavant que la courbe C est Gorenstein. L'inclusion $\text{val}(I^\vee) \subseteq \mathcal{V}$ est donnée par la proposition 5.2.7. Il nous reste donc à prouver que cette inclusion ne peut pas être stricte.

Comme $\sum_{i=1}^p (\nu_i - \lambda_i) = \dim_{\mathbb{C}} t^\lambda \mathcal{O}_{\tilde{D}} / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{D}} = \dim_{\mathbb{C}} t^\lambda \mathcal{O}_{\tilde{D}} / I + \dim_{\mathbb{C}} I / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{D}}$, on a par le théorème 2.3.20 :

$$\dim_{\mathbb{C}} I^\vee / t^{\gamma-\lambda} \mathcal{O}_{\tilde{D}} = \sum_{i=1}^p (\nu_i - \lambda_i) - \dim_{\mathbb{C}} I / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{D}}.$$

D'après la proposition 5.2.15, on a :

$$\ell' \leq \dim_{\mathbb{C}} I^\vee / t^{\gamma-\lambda} \mathcal{O}_{\tilde{D}}. \quad (5.12)$$

Cependant, par le lemme 5.2.14, si $\mathcal{V} \neq \text{val}(I^\vee)$, alors $\ell' \geq 1 + \dim_{\mathbb{C}} I^\vee / t^{\gamma-\lambda} \mathcal{O}_{\tilde{D}}$, ce qui contredit (5.12). Par conséquent, on a $\mathcal{V} = \text{val}(I^\vee)$. \square

Une autre conséquence de l'égalité $\mathcal{V} = \text{val}(I^\vee)$ est que le nombre ℓ' est égal à la dimension de $I^\vee / t^{\gamma-\lambda} \mathcal{O}_{\tilde{D}}$. En particulier, l'inégalité de la proposition 5.2.15 est en fait une égalité. De plus, comme pour tout $w \in \mathbb{Z}^p$ il existe $\lambda', \nu' \in \mathbb{Z}^p$ tels que $\gamma - \lambda' + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(I^\vee) \subseteq \gamma - \nu' + \mathbb{N}^p$ et $\gamma - \nu' \leq w \leq \gamma - \lambda'$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 5.2.17. *Soit C une courbe Gorenstein réduite, $I \subset \mathcal{M}_C$ un idéal fractionnaire et $w \in \mathbb{Z}^p$. Alors :*

$$\Lambda_i(w, \text{val}(I^\vee)) \neq \emptyset \iff \Lambda_i(\gamma - w - e_i, \text{val}(I)) = \emptyset. \quad (5.13)$$

Preuve. Soit $w \in \mathbb{Z}^p$ and $i \in \{1, \dots, p\}$. Soit $\lambda', \nu' \in \mathbb{Z}^p$ tels que $\gamma - \lambda' + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(I^\vee) \subseteq \gamma - \nu' + \mathbb{N}^p$ et $\gamma - \nu' \leq w \leq \gamma - \lambda'$.

On choisit une suite α vérifiant les conditions de la proposition 5.2.12 telle qu'il existe $j_0 \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\alpha^{(j_0)} = w$ et $\alpha^{(j_0+1)} = w + e_i$. On pose $\beta^{(j)} = \gamma - \alpha^{(n_0-j)}$. Comme C est Gorenstein, $\mathcal{V} = \text{val}(I^\vee)$ et donc on a par le lemme 5.2.16

$$\Lambda_{i(j)}(w, \text{val}(I^\vee)) \neq \emptyset \Rightarrow \Lambda_{i(j)}(\beta^{(n_0-j-1)}, \text{val}(I)) = \emptyset. \quad (5.14)$$

De plus, on a :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} t^\lambda \mathcal{O}_{\tilde{D}} / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{D}} &= \sum (\nu_i - \lambda_i) = n_0 \\ &= \dim_{\mathbb{C}} t^\lambda \mathcal{O}_{\tilde{D}} / I + \dim_{\mathbb{C}} I / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{D}} \\ &= \dim_{\mathbb{C}} I^\vee / t^{\gamma-\lambda} \mathcal{O}_{\tilde{D}} + \dim_{\mathbb{C}} I / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{D}} \end{aligned}$$

Les dimensions qui apparaissent peuvent être calculées à l'aide du corollaire 5.2.12 :

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} I^\vee / t^{\gamma-\lambda} \mathcal{O}_{\tilde{D}} &= \text{Card} \left\{ j ; \Lambda_{i(j)}(w, \text{val}(I^\vee)) \neq \emptyset \right\} \\ \dim_{\mathbb{C}} I / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{D}} &= n_0 - \text{Card} \left\{ j ; \Lambda_{i(j)}(\beta^{(n_0-j-1)}, \text{val}(I)) = \emptyset \right\} \end{aligned}$$

En utilisant l'implication (5.14) et en comparant les cardinaux, on obtient le résultat. \square

Nous avons déjà vu dans la proposition 5.1.14 que si deux idéaux fractionnaires emboîtés ont mêmes ensembles de multi-valuations, alors ils sont égaux. Le lemme suivant donne une condition pour l'égalité des ensembles de multi-valuations.

Lemme 5.2.18. *Soit I, J deux idéaux fractionnaires et $\nu \in \mathbb{N}^p$ tels que $\nu + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(J)$. On suppose que $\text{val}(J) \subseteq \text{val}(I)$. Si $\dim_{\mathbb{C}} I / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{D}} = \dim_{\mathbb{C}} J / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{D}}$ alors $\text{val}(J) = \text{val}(I)$.*

Preuve. Supposons que $\text{val}(I) \neq \text{val}(J)$. Soit $w \in \text{val}(I) \setminus \text{val}(J)$. Comme dans la proposition 5.2.13, il existe $j \in \{1, \dots, p\}$ vérifiant $\Lambda_j(w, \text{val}(J)) = \emptyset$. Le même argument que dans la deuxième étape de la preuve du théorème 5.2.1 montre que $\dim_{\mathbb{C}} I / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{D}} > \dim_{\mathbb{C}} J / t^\nu \mathcal{O}_{\tilde{D}}$. D'où le résultat. \square

5.2.6 Exemples

Commençons par un exemple de courbe plane à deux branches.

Exemple 5.2.19. On considère de nouveau la courbe plane définie par $h = (x^3 - y^2)(x^3 - y^4)$. On rappelle qu'un paramétrage est donné par $x = (t_1^2, t_2^4)$ et $y = (t_1^3, t_2^3)$. L'idéal jacobien est l'idéal de \mathcal{O}_C engendré par

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= 3x^2(x^3 - y^4) + 3x^2(x^3 - y^2) = (3t_1^{10} - 3t_1^{16}, 3t_2^{20} - 3t_2^{14}) \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= -2y(x^3 - y^4) - 4y^3(x^3 - y^2) = (-2t_1^9 - 2t_1^{15}, -4t_2^{21} - 4t_2^{15}) \end{aligned}$$

On représente sur la figure 5.8 les multi-valuations de \mathcal{I}_C , que l'on calcule de façon analogue à l'exemple 5.1.5 vu que la courbe est assez simple. Les cercles rouges représentant les éléments $v \in \mathbb{Z}^P$ tel que $\Delta(v, \mathcal{I}_C) = \emptyset$. On rappelle que d'après la proposition 2.3.17, le dual de l'idéal jacobien est le module des résidus \mathcal{R}_C . Le théorème de symétrie 5.2.1 permet donc de déterminer les multi-valuations de \mathcal{R}_C sans calculer explicitement le module \mathcal{R}_C . La figure 5.9 représente les multi-valuations de \mathcal{R}_C .

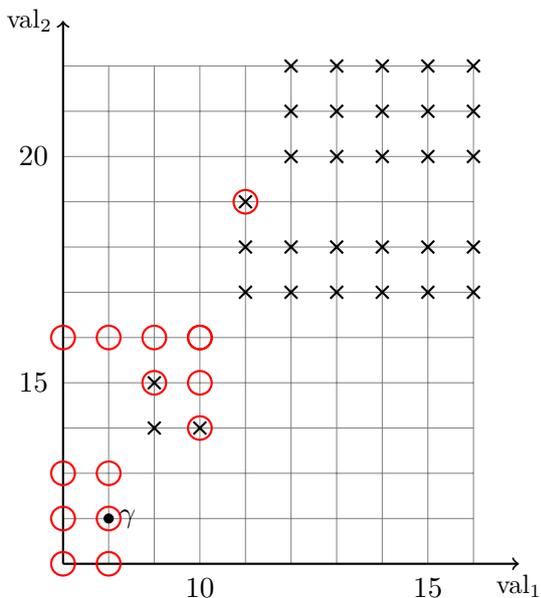


FIGURE 5.8 – Multi-valuations de \mathcal{I}_C

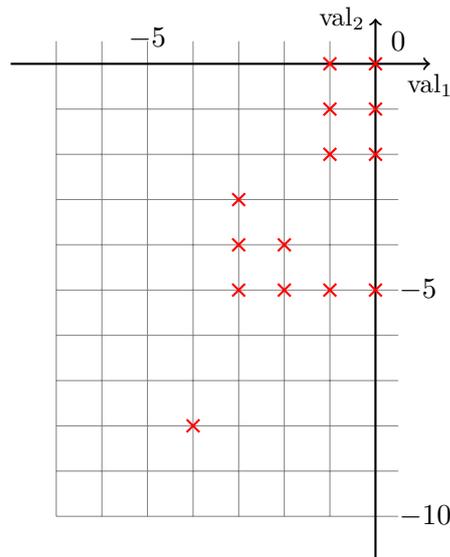
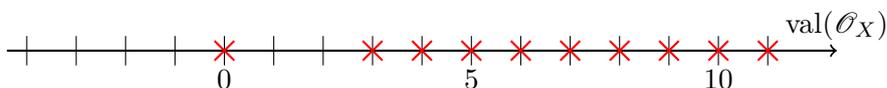


FIGURE 5.9 – Multi-valuations de \mathcal{R}_C

L'exemple suivant montre que le fait que la propriété de symétrie soit satisfaite par le module des résidus ne caractérise pas les courbes Gorenstein, ce qui répond à une question de Philippe Gimenez.

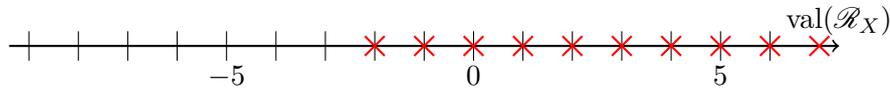
Exemple 5.2.20. Soit la courbe X de \mathbb{C}^3 définie par l'idéal (h_1, h_2, h_3) où $h_1 = xz - y^2$, $h_2 = x^3 - yz$ et $h_3 = x^2y - z^2$. Il s'agit d'une courbe irréductible que l'on peut paramétrer par $x = t^3$, $y = t^4$, $z = t^5$. Pour vérifier que cette courbe n'est pas Gorenstein, on peut par exemple vérifier que son semigrpue n'est pas symétrique :



Intéressons-nous maintenant au module des multi-résidus \mathcal{R}_X . Pour le définir, considérons l'intersection complète réduite définie par (h_1, h_2) . Cette intersection complète a deux composantes, X et $Y = \{(0, 0, z) ; z \in \mathbb{C}\}$. Un calcul réalisé sous SINGULAR donne comme famille génératrice de $\Omega^2(\log X/C)$ une famille génératrice de $\tilde{\Omega}_{(h_1, h_2)}^2$ et les formes :

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \frac{3x^2 dy \wedge dz - 4xy dx \wedge dz + 5xz dx \wedge dy}{h_1 h_2} \\ \omega_2 &= \frac{3xy dy \wedge dz - 4xz dx \wedge dz + 5yz dx \wedge dy}{h_1 h_2} \\ \omega_3 &= \frac{3xz dy \wedge dz - 4x^3 dx \wedge dz + 5x^2 y dx \wedge dy}{h_1 h_2}\end{aligned}$$

On vérifie que $J = 6x^2 y - z^2 \in \mathcal{J}_C$ est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C et que le module des résidus \mathcal{R}_X est engendré par $\left(\frac{1}{t^2}, \frac{1}{t}, 1\right)$. Son ensemble des multi-valuations est donc :



On en déduit que $\text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{R}_X, \mathcal{O}_X) = t^5 \mathbb{C} \{t\}$. En particulier, la condition $v \in \text{val}(\mathcal{R}_X) \iff c - v - 1 \notin \text{val}(\mathcal{R}_X^\vee)$ est vérifiée, bien que la courbe C ne soit pas Gorenstein. On ne peut donc pas caractériser les courbes Gorenstein grâce à la symétrie des multi-valuations de l'idéal jacobien ou du module des résidus.

5.2.7 Généralisation

Une généralisation de notre théorème 5.2.1 est proposée dans [KTS15]. Les auteurs se placent dans un cadre plus large : ils considèrent un anneau R semi-local, Cohen-Macaulay de dimension un et de normalisation \tilde{R} tel que :

1. pour tout idéaux maximaux \mathfrak{m} de R et \mathfrak{n} de \tilde{R} tel que $\mathfrak{n} \cap \tilde{R} = \mathfrak{m}$ on a $R/\mathfrak{m} = \tilde{R}/\mathfrak{n}$
2. pour tout idéal maximal \mathfrak{m} de R , le cardinal de R/\mathfrak{m} est supérieur ou égal au cardinal de l'ensemble des anneaux de valuations⁶ de l'anneau total des fractions \mathcal{M}_R sur R (voir [KTS15, Définition 2.2.1]).

Un tel anneau R est dit *admissible*.

Définition 5.2.21. Un idéal canonique d'un anneau admissible R est un idéal fractionnaire \mathcal{K} tel que pour tout idéal fractionnaire I , $\text{Hom}_R(\text{Hom}_R(I, \mathcal{K}), \mathcal{K}) = I$.

THÉORÈME 5.2.22 ([KTS15, Theorem 5.3.5, Lemma 5.2.11]). Soit \mathcal{K}^0 un idéal canonique d'un anneau admissible R tel que $\text{val}(\mathcal{K}^0) = \{v \in \mathbb{Z}^p ; \Delta(v, R) = \emptyset\}$. Alors

$$\text{val}\left(\text{Hom}_R\left(I, \mathcal{K}^0\right)\right) = \{v \in \mathbb{Z}^p ; \Delta(\gamma - v - \underline{1}, I) = \emptyset\}.$$

La preuve proposée par les auteurs de [KTS15] utilise aussi un argument de dimension, basé sur la notion de *distance* entre deux semigroupes emboîtés $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_2$, généralisant le corollaire 5.2.12.

⁶Un anneau de valuation de \mathcal{M}_R est un sous-anneau V tel que $R \subseteq V \subset \mathcal{M}_R$ tel que $\mathcal{M}_R \setminus V$ est fermé multiplicativement

5.2.8 Série de Poincaré

Ce paragraphe fait suite à une suggestion d'Antonio Campillo. Soit $C = C_1 \cup \dots \cup C_p$ un germe de courbe réduite Gorenstein, et $I \subset \mathcal{M}_C$ un idéal fractionnaire.

La définition suivante est inspirée par [CDGZ03]. On rappelle que $I_v = \{g \in I; \text{val}(g) \geq v\}$.

On considère l'ensemble des séries de Laurent formelles $\mathcal{L} = \mathbb{Z}[[t_1^{-1}, \dots, t_p^{-1}, t_1, \dots, t_p]]$. Cet ensemble n'est pas un anneau, mais il s'agit d'un $\mathbb{Z}[t_1^{-1}, \dots, t_p^{-1}, t_1, \dots, t_p]$ -module.

On pose :

$$L_I(t_1, \dots, t_p) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^p} c_I(v) \underline{t}^v \quad (5.15)$$

avec $c_I(v) = \dim_{\mathbb{C}} I_v/I_{v+\underline{1}}$ et on définit

$$P_I(\underline{t}) = L_I(\underline{t}) \prod_{i=1}^p (t_i - 1). \quad (5.16)$$

Remarque 5.2.23. Le cas $I = \mathcal{O}_C$ pour C une courbe plane est étudié dans [CDGZ03]. Les auteurs montrent que $P_{\mathcal{O}_C}$ est en fait un polynôme, et que pour les courbes planes à au moins deux composantes, le polynôme $\frac{P_{\mathcal{O}_C}(\underline{t})}{t_1 \cdots t_p - 1}$ est le polynôme d'Alexander de la courbe (voir [CDGZ03, Theorem 1]).

Remarque 5.2.24. Par la proposition 5.2.11 on a pour tout idéal fractionnaire I et tout $v \in \mathbb{Z}^p$, $c_I(v) \in \{0, \dots, p\}$.

Notre objectif ici est de déduire du théorème 5.2.1 une relation entre $P_I(\underline{t})$ et $P_{I^\vee}(\underline{t})$.

Le lemme suivant est une conséquence directe de la définition (5.16) de P_I :

Lemme 5.2.25. On pose pour $v \in \mathbb{Z}^p$,

$$a_I(v) = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, p\}} (-1)^{\text{Card}(J^c)} c_I(v - e_J) \quad (5.17)$$

où on pose pour $J = \{j_1, \dots, j_k\}$, $e_J = e_{j_1} + \dots + e_{j_k}$. Alors

$$P_I(\underline{t}) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^p} a_I(v) \underline{t}^v.$$

On utilise le lemme précédent pour montrer la propriété suivante :

Lemme 5.2.26. La série de Laurent formelle $P_I(\underline{t})$ est un polynôme.

Preuve. Soit $\lambda, \nu \in \mathbb{Z}^p$ tels que $\nu + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(I) \subseteq \lambda + \mathbb{N}^p$. Les seules valeurs $a_I(v)$ éventuellement non nulles sont celles pour lesquelles $\lambda \leq v \leq \nu$. En effet, supposons par exemple que $v_p < \lambda_p$ ou $v_p > \nu_p$. On peut ensuite montrer grâce au corollaire 5.2.12, et à la proposition 5.1.13 dans le cas $v_p > \nu_p$, que pour tout $J \subset \{1, \dots, p\}$ tel que $p \notin J$, $c_I(v - e_{J \cup \{p\}}) = c_I(v - e_J)$. Par la définition donnée par (5.17), cela nous donne le résultat. \square

Lemme 5.2.27. Soit $v \in \mathbb{Z}^p$. On a

$$c_I(v) = \text{Card} \left(i \in \{1, \dots, p\} ; \Lambda_i(v + e_1 + \dots + e_{i-1}, \text{val}(I^\vee)) \neq \emptyset \right).$$

Preuve. Par définition, $c_I(v) = \dim_{\mathbb{C}} I_v/I_{v+\underline{1}}$. On a donc

$$c_I(v) = \dim_{\mathbb{C}} I_v/I_{v+e_1} + \dim_{\mathbb{C}} I_{v+e_1}/I_{v+e_1+e_2} + \dots + \dim_{\mathbb{C}} I_{v+e_1+\dots+e_{p-1}}/I_{v+\underline{1}}.$$

On utilise la proposition 5.2.11 pour conclure. \square

La symétrie du théorème 5.2.1 a la conséquence suivante :

Proposition 5.2.28. *Avec les mêmes notations,*

$$P_{I^\vee}(\underline{t}) = (-1)^{p+1} \underline{t}^\gamma P_I\left(\frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_p}\right). \quad (5.18)$$

Preuve. Il suffit de comparer les coefficients de P_{I^\vee} et P_I . Soit $v \in \mathbb{Z}$. Le coefficient de t^v dans $P_I\left(\frac{1}{t_1}, \dots, \frac{1}{t_p}\right)$ est $a_I(-v)$. Nous allons donc montrer que

$$\forall v \in \mathbb{Z}^p, a_{I^\vee}(v) = (-1)^{p+1} a_I(\gamma - v). \quad (5.19)$$

Soit $v \in \mathbb{Z}^p$. On a par définition

$$a_{I^\vee}(v) = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, p\}} (-1)^{p + \text{Card}(J)} c_{I^\vee}(v - e_J).$$

Montrons que $c_{I^\vee}(v) = p - c_I(\gamma - v - \underline{1})$.

Par le lemme 5.2.27 on a :

$$\begin{aligned} c_{I^\vee}(v) &= \text{Card} \{i \in \{1, \dots, p\} ; \Lambda_i(v + e_1 + \dots + e_{i-1}, \text{val}(I^\vee)) \neq \emptyset\} \\ c_I(\gamma - v - \underline{1}) &= \text{Card} \{i \in \{1, \dots, p\} ; \Lambda_i(\gamma - v - e_1 - \dots - e_i, \text{val}(I)) \neq \emptyset\} \end{aligned}$$

Or, par l'équivalence (5.13),

$$\Lambda_i(v + e_1 + \dots + e_{i-1}, \text{val}(I^\vee)) \neq \emptyset \iff \Lambda_i(\gamma - v - e_1 - \dots - e_i, \text{val}(I)) = \emptyset.$$

Cela nous donne donc $c_{I^\vee}(v) = p - c_I(\gamma - v - \underline{1})$. On a donc

$$a_{I^\vee}(v) = \sum_{J \subseteq \{1, \dots, p\}} (-1)^{p + \text{Card}(J)} (p - c_I(\gamma - (v - e_J) - \underline{1})).$$

En remarquant que $\sum_{J \subseteq \{1, \dots, p\}} (-1)^{\text{Card}(J)} = 0$ on obtient :

$$\begin{aligned} a_{I^\vee}(v) &= (-1)^{p+1} \sum_{J \subseteq \{1, \dots, p\}} (-1)^{\text{Card}(J)} c_I(\gamma - v - e_{J^c}) \\ &= (-1)^{p+1} a_I(\gamma - v) \end{aligned}$$

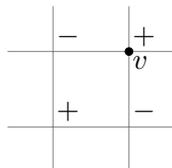
Cela achève la preuve de la proposition 5.2.28. \square

Exemple 5.2.29. Déterminons explicitement le polynôme $P_{\mathcal{J}_C}$ pour la courbe de l'exemple 5.2.19. On indique sur la figure 5.10 les valeurs des $c_{\mathcal{J}_C}(v)$. Pour un point $v \in \mathbb{Z}^2$, on lit sur le dessin la valeur de $c_I(v)$ dans la case dont le sommet en bas à gauche est v . Les cases en bleu correspondent à la valeur 0, en vert à la valeur 1 et en mauve à la valeur 2.

On commence par remarquer que pour tout idéal fractionnaire I d'une courbe à deux branches,

$$a_I(v) = c_I(v) - c_I(v - e_1) - c_I(v - e_2) + c_I(v - \underline{1}).$$

On représente les signes de la formule précédente sur le dessin suivant :



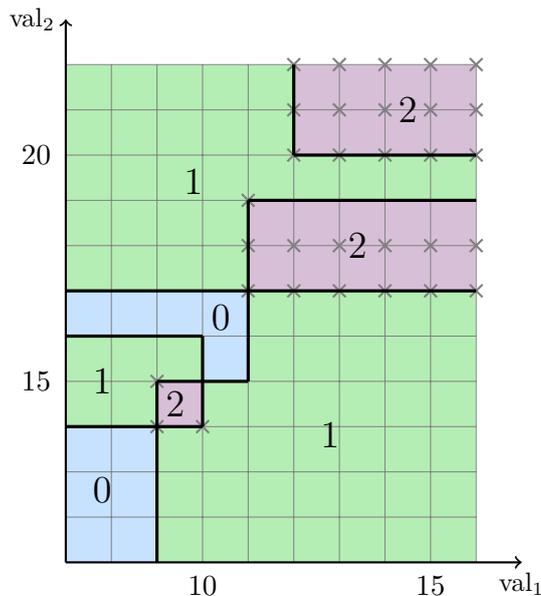


FIGURE 5.10 – Valeurs des $c_{J_C}(v)$

Lemme 5.2.30. Soit $C = C_1 \cup C_2$ une courbe à deux branches, et I un idéal fractionnaire de C . Alors pour tout $v \in \mathbb{Z}^2$, $a_I(v) \in \{-1, 0, 1\}$. De plus, si $a_I(v) \neq 0$, alors les valeurs de $c_I(v), c_I(v - e_1), c_I(v - e_2)$ et $c_I(v - \underline{1})$ sont toutes égales sauf exactement une⁷.

Preuve. Soit $v \in \mathbb{Z}^2$. Montrons que $c_I(v) - c_I(v - e_1) \in \{-1, 0, 1\}$. On a

$$c_I(v) - c_I(v - e_1) = (\dim_{\mathbb{C}} I_v/I_{v+e_2} + \dim_{\mathbb{C}} I_{v+e_2}/I_{v+\underline{1}}) - (\dim_{\mathbb{C}} I_{v-e_1}/I_v + \dim_{\mathbb{C}} I_v/I_{v+e_2}) \tag{5.20}$$

$$= \dim_{\mathbb{C}} I_{v+e_2}/I_{v+\underline{1}} - \dim_{\mathbb{C}} I_{v-e_1}/I_v \tag{5.21}$$

Comme par la proposition 5.2.11 $\dim_{\mathbb{C}} I_{v+e_2}/I_{v+\underline{1}} \in \{0, 1\}$ et $\dim_{\mathbb{C}} I_{v-e_1}/I_v \in \{0, 1\}$, on a $c_I(v) - c_I(v - e_1) \in \{-1, 0, 1\}$.

Par conséquent, $a_I(v) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Il reste donc à montrer que $c_I(v) - c_I(v - e_1)$ et $c_I(v - \underline{1}) - c_I(v - e_2)$ ne peuvent pas être simultanément égaux à 1 ou simultanément égaux à -1. Supposons par exemple que $c_I(v) - c_I(v - e_1) = c_I(v - \underline{1}) - c_I(v - e_2) = 1$. Posons $c_I(v) = b$ et $c_I(v - \underline{1}) = b'$. Alors $c_I(v - e_1) = b - 1$ et $c_I(v - e_2) = b' - 1$. Comme pour tout $v \in \mathbb{Z}^2$, $c_I(v) - c_I(v - e_i) \in \{-1, 0, 1\}$ alors on a $b' \in \{b - 2, b - 1, b\} \cap \{b, b + 1, b + 2\}$ et donc $b' = b$. Il y a donc deux cas possibles :



Dans chacun des deux cas, on aboutit à une contradiction. En effet, si $c_I(v) = 1$, cela signifie que $\Lambda_1(v, \text{val}(I)) \neq \emptyset$ ou $\Lambda_2(v, \text{val}(I)) \neq \emptyset$, et donc ou bien $c_I(v - e_2) \geq 1$ ou bien $c_I(v - e_1) \geq 1$, et donc le premier cas ne peut pas être réalisé. On vérifie de même que si $c_I(v) = c_I(v - \underline{1}) = 2$ alors $c_I(v - e_1) = c_I(v - e_2) = 2$, et donc le deuxième cas ne peut pas être réalisé non plus, et donc $a_I(v) \neq 2$. Une preuve analogue montre que $a_I(v) \neq -2$, ce qui nous donne le résultat.

La deuxième assertion se montre en regardant les différents cas possibles. □

⁷Sur la figure 5.10 cela correspond aux "coins" de la figure formée des lignes noires

Nous pouvons déterminer $P_{\mathcal{J}_C}$ à l'aide de la figure 5.10.

On trouve :

$$P_{\mathcal{J}_C}(t_1, t_2) = t_1^9 t_2^{14} \left(-t_2 - t_1 + t_1 t_2^2 + t_1^2 t_2 - t_1^2 t_2^5 + t_1^3 t_2^6 \right).$$

Par la symétrie de la proposition 5.2.28, on a, vu que $\gamma = (8, 12)$,

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{R}_C}(t_1, t_2) &= -t_1^{-1} t_2^{-2} \left(-t_2^{-1} - t_1^{-1} + t_1^{-1} t_2^{-2} + t_1^{-2} t_2^{-1} - t_1^{-2} t_2^{-5} + t_1^{-3} t_2^{-6} \right) \\ &= -t_1^{-4} t_2^{-8} \left(-t_2^5 - t_1^2 + t_1^2 t_2^4 + t_1 t_2^5 - t_1 t_2 + 1 \right). \end{aligned}$$

Chapitre 6

Résidus logarithmiques le long des courbes

Nous nous intéressons dans ce chapitre à une famille de singularités libres : les courbes. Dans le paragraphe 6.1, nous considérons des courbes intersections complètes. Nous relierons l'idéal jacobien \mathcal{J}_C au module des différentielles de Kähler (voir proposition 6.1.3), puis, en utilisant les résultats des chapitres précédents, nous déduisons la relation précise entre les multi-résidus et les différentielles de Kähler.

Les courbes étant libres, par le théorème 3.3.7, la dimension projective comme \mathcal{O}_S -module du module $\Omega^{m-1}(\log C)$ est $m-2$ et celle du module \mathcal{R}_C est $m-1$. Nous donnons ici une résolution libre explicite de ces modules pour les courbes intersections complètes quasi-homogènes (voir théorèmes 6.1.29 et 6.1.33). Nous donnons ensuite une caractérisation des arrangements de droites plan qui utilise les multi-valuations du module des multi-résidus (voir proposition 6.1.40).

Le reste du chapitre est consacré aux courbes planes. Nous calculons le conducteur du module des résidus (voir proposition 6.2.3), et montrons comment retrouver les multi-valuations des branches ou d'une union de branches de C à partir des multi-valuations de \mathcal{R}_C . Nous déduisons de [BGM88] et [HH07] des algorithmes pour une branche (voir paragraphe 6.2.4) et nous proposons un algorithme de calcul des multi-valuations de \mathcal{R}_C pour une courbe à deux branches.

Dans le dernier paragraphe 6.3, nous étudions le comportement du module des résidus dans une déformation équisingulière de courbe plane. En particulier, nous la comparons à d'autres stratifications. On termine en présentant le lien entre le module des résidus et le résultat de [HH11] et [HHH15] sur la classification analytique des courbes planes à une ou deux branches.

Ce chapitre suit en grande partie [Pol14], [Pol15a], [Pol15b] et [Pol16].

6.1 Courbes intersections complètes

Dans cette partie, nous commençons par relier le module des multi-résidus d'une courbe intersection complète au module des différentielles de Kähler. Nous donnons ensuite une résolution libre explicite du module des multi-résidus et du module des formes multi-logarithmiques dans le cas d'une courbe intersection complète quasi-homogène.

6.1.1 Lien avec les différentielles de Kähler

Soit $C = C_1 \cup \dots \cup C_p$ une courbe réduite intersection complète avec p composantes irréductibles, définie par une suite régulière (h_1, \dots, h_{m-1}) .

On note $\varphi_i(t_i) = (x_{i,1}(t_i), \dots, x_{i,m}(t_i))$ un paramétrage de la branche C_i .

Définition 6.1.1. Soit $\omega = \left[\sum_{j=1}^m a_j dx_j \right] \in \Omega_C^1$. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. On considère la forme $\varphi_i^*(\omega) = \left(\sum_{j=1}^m a_j \circ \varphi_i(t_i) x'_{i,j}(t_i) \right) dt_i$. On définit la valuation de ω le long de C_i par

$$\text{val}_i(\omega) = \text{val}_i(\varphi_i^*(\omega)) = 1 + \text{val}_i \left(\sum_{j=1}^m (a_j \circ \varphi_i)(t_i) \cdot x'_{i,j}(t_i) \right).$$

On rappelle que \mathcal{C}_C désigne l'idéal conducteur de C . On pose $\frac{\varphi^*(\Omega_C^1)}{dt} \subset \mathcal{O}_{\tilde{C}} = \bigoplus_{i=1}^p \mathbb{C}\{t_i\}$ l'idéal fractionnaire¹ engendré par $\left((x'_{i,1}, \dots, x'_{p,1}), \dots, (x'_{1,m}, \dots, x'_{p,m}) \right)$. On a alors

$$\text{val}(\Omega_C^1) = \text{val} \left(\frac{\varphi^*(\Omega_C^1)}{dt} \right) + \underline{1}.$$

Notation 6.1.2. Soit $i \in \{1, \dots, p\}$. On note J_i le mineur de taille $(m-1) \times (m-1)$ de la matrice jacobienne $\text{Jac}(h_1, \dots, h_{m-1})$ obtenu en enlevant la colonne i .

Proposition 6.1.3. Soit $C = C_1 \cup \dots \cup C_p \subset \mathbb{C}^m$ une courbe intersection complète réduite définie par une suite régulière (h_1, \dots, h_{m-1}) . Alors il existe $g \in \mathcal{C}_C$ tel que $\text{val}(g) = \gamma$ vérifiant $\mathcal{J}_C = g \cdot \frac{\varphi^*(\Omega_C^1)}{dt}$. En particulier,

$$\text{val}(\mathcal{J}_C) = \gamma + \text{val}(\Omega_C^1) - \underline{1}. \quad (6.1)$$

De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$,

$$\text{val}(J_i) = \gamma + \text{val}(x_i) - \underline{1}. \quad (6.2)$$

Preuve. Pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$ on a $h_j \circ \varphi_i(t_i) = 0$. D'où :

$$\left(\text{Jac}(h_1, \dots, h_k) \circ \varphi_i(t_i) \right) (x'_{i,1}(t_i), \dots, x'_{i,m}(t_i))^t = (0, \dots, 0)^t.$$

On multiplie à gauche par la matrice adjointe à la matrice obtenue en enlevant la dernière colonne de $\text{Jac}(h_1, \dots, h_k) \circ \varphi_i(t_i)$. On obtient pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$,

$$(J_m \circ \varphi_i(t_i)) \cdot x'_{i,j}(t_i) + (-1)^{m-(j-1)} (J_j \circ \varphi_i(t_i)) \cdot x'_{i,m}(t_i) = 0.$$

Supposons par exemple que $x'_{i,m}(t_i) \neq 0$.

En posant $g_i(t_i) = \frac{J_m \circ \varphi_i(t_i)}{x'_{i,m}(t_i)}$ on obtient pour tout $\ell \in \{1, \dots, m\}$,

$$g_i(t_i) \cdot x'_{i,\ell}(t_i) = (-1)^{m-\ell} J_\ell \circ \varphi_i(t_i). \quad (6.3)$$

Il reste à prouver que $\text{val}_i(g) = \gamma_i$.

Par la proposition 2.3.22 on a :

$$\mathcal{C}_C \Pi_C = \mathcal{J}_C \mathcal{O}_{\tilde{C}}. \quad (6.4)$$

L'idéal de ramification Π_C de C est le $\mathcal{O}_{\tilde{C}}$ -module engendré par $\left(x'_{1,j}(t_1), \dots, x'_{p,j}(t_p) \right)_{1 \leq j \leq m}$.

La relation (6.4) donne l'égalité $\inf(\text{val}(\Pi_C)) + \gamma = \inf(\text{val}(\mathcal{J}_C))$.

Les égalités (6.3) impliquent que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, et $j \in \{1, \dots, m\}$ on a $\text{val}_i(J_j) = \inf(\text{val}_i(\mathcal{J}_C))$ si et seulement si $\text{val}_i(x'_{i,j}(t_i)) = \inf(\text{val}_i(\Pi_C))$.

Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, si $j(i)$ est tel que $\text{val}_i(J_{j(i)}) = \inf(\text{val}_i(\mathcal{J}_C))$, alors $\text{val}_i(J_{j(i)}) = \gamma_i + \text{val}_i(x'_{i,j(i)}(t_i))$, ce qui nous donne $\text{val}_i(g_i) = \gamma_i$. \square

¹Cet idéal est l'idéal de ramification Π_C de la courbe C .

Corollaire 6.1.4. Soit $C \subset \mathbb{C}^m$ une courbe intersection complète réduite. Avec les notations du chapitre 5, on a pour tout $v \in \mathbb{Z}^P$ l'équivalence suivante :

$$v \in \text{val}(\mathcal{R}_C) \iff \Delta(-v, \text{val}(\Omega_C^1)) = \emptyset$$

et $\mathcal{R}_C = \frac{1}{g} \cdot \left(\frac{\varphi^*(\Omega_C^1)}{\underline{dt}} \right)^\vee$, où g est donné par la proposition 6.1.3.

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème de symétrie 5.2.1 et des propositions 3.2.17 et 6.1.3 \square

Remarque 6.1.5. Ce dernier corollaire donne aussi la relation entre les formes régulières méromorphes définies en 2.3.25 et les différentielles de Kähler. En effet, par le théorème 3.1.40, le module \mathcal{R}_C est isomorphe au module ω_C^0 , et on a donc $\omega_C^0 \simeq \frac{1}{g} \cdot \left(\frac{\varphi^*(\Omega_C^1)}{\underline{dt}} \right)^\vee$.

Remarque 6.1.6. Une autre conséquence de la proposition 6.1.3 est l'inclusion suivante :

$$\gamma + (\text{val}(\mathcal{O}_C) \setminus \{0\}) - \underline{1} \subseteq \text{val}(\mathcal{J}_C).$$

En effet, si $h \in \mathfrak{m}$, avec \mathfrak{m} l'idéal maximal de \mathcal{O}_C , alors $\text{val}(dh) = \text{val}(h)$, ce qui nous donne l'inclusion $\text{val}(\mathcal{O}_C) \setminus \{0\} \subseteq \text{val}(\Omega_C^1)$.

Remarque 6.1.7. Dans le cas d'une courbe plane à une ou deux branches, l'ensemble des multi-valuations des différentielles de Kähler est un ingrédient clef utilisé par A. Hefez, M.E. Hernandez et M.E.R. Hernandez dans leur étude du problème de la classification analytique des courbes planes. (voir théorème 6.3.26 pour plus de détails)

6.1.2 Dimensions

Nous relierons dans ce paragraphe le module des multi-résidus d'une courbe intersection complète à certains invariants classiques des courbes. Ces invariants seront de nouveau utilisés dans le paragraphe 6.3.

On commence par rappeler leur définition, que l'on peut trouver dans [BG80].

Définition 6.1.8 ([BG80, Définitions 1.1.1, 6.1.1]). Soit $C \subseteq (\mathbb{C}^m, 0)$ un germe de courbe réduite. On considère l'application :

$$D : \mathcal{O}_C \xrightarrow{d} \Omega_C^1 \xrightarrow{c_C} \omega_C^1$$

où c_C est la classe fondamentale de C (voir définition 2.3.23).

Le nombre de Milnor de C est :

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \left(\omega_C^1 / D(\mathcal{O}_C) \right).$$

Le nombre de Tjurina de C est :

$$\tau = \dim_{\mathbb{C}} \text{Tors} \left(\Omega_C^1 \right).$$

Remarque 6.1.9. Dans le cas des courbes planes, on définit le nombre de Tjurina de h par $\tau = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\} / (h'_x, h'_y, h)$. Nous verrons que les deux définitions coïncident. En particulier, l'égalité entre $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\} / (h'_x, h'_y, h)$ et $\dim_{\mathbb{C}} \text{Tors} (\Omega_C^1)$ est un résultat de O. Zariski sur lequel nous reviendrons dans le paragraphe 6.2.3.

Proposition 6.1.10 ([BG80, Lemma 1.1.2]). *On suppose que C est une courbe intersection complète. Alors :*

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \Omega_C^1 / d\mathcal{O}_C.$$

Proposition 6.1.11 ([BG80, Fin de la preuve du lemme 1.1.2]). *Soit C une courbe intersection complète réduite définie par (h_1, \dots, h_{m-1}) . Alors :*

$$\tau = \dim_{\mathbb{C}} \left(\Omega_{\mathbb{C}^m}^m \otimes_{\mathbb{C}\{x\}} \mathcal{O}_C \right) / dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{m-1} \wedge \Omega_C^1.$$

Cette proposition montre que le nombre de Tjurina est bien le nombre auquel on s'attend :

Corollaire 6.1.12. *Soit C une courbe intersection complète réduite définie par (h_1, \dots, h_{m-1}) . Alors :*

$$\tau = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_C / \mathcal{I}_C.$$

Introduisons encore un autre invariant classique des courbes :

Définition 6.1.13. *Le delta-invariant d'un germe réduit de courbe C est :*

$$\delta = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\tilde{C}} / \mathcal{O}_C.$$

La proposition suivante relie δ et μ . Elle généralise le résultat de J. Milnor qui porte sur les courbes planes (voir [Mil68]).

Proposition 6.1.14 ([BG80, Proposition 1.2.1]). *On pose p le nombre de branches de C . Alors*

$$\mu = 2\delta - p + 1.$$

Nous pouvons à présent relier la dimension de $\mathcal{R}_C / \mathcal{O}_{\tilde{C}}$ à ces invariants pour les courbes intersections complètes.

Proposition 6.1.15. *Soit C une courbe intersection complète réduite. Alors*

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_C / \mathcal{O}_{\tilde{C}} = \tau - \delta.$$

Preuve. Comme C est une intersection complète, elle est en particulier Gorenstein. Rappelons que l'on a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{I}_C \subseteq \mathcal{C}_C \subseteq \mathcal{O}_C \subseteq \mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq \mathcal{R}_C.$$

Les propositions 3.2.17 et 5.1.21 assurent que :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_C / \mathcal{O}_{\tilde{C}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_C / \mathcal{O}_C - \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\tilde{C}} / \mathcal{O}_C = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_C^{\vee} / \mathcal{R}_C^{\vee} - \delta = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_C / \mathcal{I}_C - \delta.$$

Ce qui nous donne donc $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_C / \mathcal{O}_{\tilde{C}} = \tau - \delta$. □

6.1.3 Familles génératrices pour les courbes quasi-homogènes

Soit $C = C_1 \cup \dots \cup C_p$ une courbe réduite intersection complète avec p composantes irréductibles définie par une suite régulière (h_1, \dots, h_{m-1}) .

On rappelle qu'une telle courbe est libre (voir exemple 3.3.3). Par conséquent, le théorème 3.3.7 assure que la dimension projective de $\Omega^{m-1}(\log C)$ est $m - 2$. Notre objectif est de décrire entièrement la résolution projective de \mathcal{R}_C et $\Omega^{m-1}(\log C)$ dans le cas d'une courbe intersection complète quasi-homogène, ce qui nous donne les théorèmes 6.1.29 et 6.1.33.

Nous commençons par déterminer une famille génératrice minimale de \mathcal{R}_C et $\Omega^k(\log C)$. Nous calculons ensuite toutes les syzygies dans le paragraphe 6.1.4.

Conditions 6.1.16. On considère les conditions suivantes :

- a) Il existe $(w_1, \dots, w_m) \in (\mathbb{N}^*)^m$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, h_i est quasi-homogène de degré d_i pour les poids (w_1, \dots, w_m) .
- b) $m \geq 3$
- c) m est la dimension de plongement. Autrement dit, pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, $h_i \in \mathfrak{m}^2$ où \mathfrak{m} est l'idéal maximal de \mathcal{O}_S (voir proposition 3.1.24 et remarque 3.1.25).

Lemme 6.1.17. Soit C une courbe intersection complète satisfaisant la condition a). Alors

$$\omega_0 = \frac{\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} w_i x_i \widehat{dx}_i}{h} \in \Omega^{m-1}(\log D).$$

Preuve. Soit $i \in \{1, \dots, m-1\}$. On a $\sum_{i=1}^m w_i x_i \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = d_i h_i$ et donc $dh_i \wedge \omega_0 = \frac{d_i}{h_i} dx_i$. Comme $dh = \sum_{i=1}^{m-1} \widehat{h}_i dh_i$, on a $dh \wedge \omega_0 \in \Omega_S^m$. Donc $\omega_0 \in \Omega^{m-1}(\log D)$. \square

Remarque 6.1.18. Par la proposition 3.1.43, on a aussi $\omega_0 \in \Omega^{m-1}(\log C)$.

Notation 6.1.19. On fixe $p \in \{1, \dots, m\}$. Soit $\{i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ et $\{j_1, \dots, j_{p-1}\} \subseteq \{1, \dots, m-1\}$. On note $J_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_{p-1}}$ le mineur $(m-p) \times (m-p)$ de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_{m-1}) obtenu en enlevant les lignes j_1, \dots, j_{p-1} et les colonnes i_1, \dots, i_p . Par convention, le déterminant vide est égal à 1. De plus, on ne prend pas en compte l'ordre des éléments i_1, \dots, i_p et j_1, \dots, j_{p-1} , c'est-à-dire par exemple que $J_{i_1, i_2}^{j_1} = J_{i_2, i_1}^{j_1}$.

Nous aurons besoin à plusieurs reprises du lemme suivant dans les preuves du lemme 6.1.21 et des théorèmes 6.1.29 et 6.1.33. Pour $i \neq j \in \mathbb{N}$ on pose $\text{sgn}(i-j)$ le signe de la différence $i-j$.

Lemme 6.1.20. On fixe $p \in \{2, \dots, m\}$. Soit $\{i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ et $\{j_1, \dots, j_{p-2}\} \subseteq \{1, \dots, m-1\}$. Pour tout $r \notin \{i_1, \dots, i_p\}$, on a :

$$\sum_{\substack{q=1 \\ q \notin \{j_1, \dots, j_{p-2}\}}}^{m-1} (-1)^{q-1} \text{sgn}(j_1 - q) \cdots \text{sgn}(j_{p-2} - q) \frac{\partial h_q}{\partial x_r} J_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_{p-2}, q} = 0. \quad (6.5)$$

Preuve. L'expression (6.5) est obtenue en développant le déterminant de taille $(m-p+1) \times (m-p+1)$ dont la première colonne est $\left(\frac{\partial h_q}{\partial x_r}\right)_{q \notin \{j_1, \dots, j_{p-2}\}}$ et les autres colonnes sont constituées de la matrice jacobienne de (h_1, \dots, h_{m-1}) privée des colonnes relatives à $(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})$ et des lignes relatives à $(h_{j_1}, \dots, h_{j_{p-2}})$. La colonne $\left(\frac{\partial h_q}{\partial x_r}\right)_{q \notin \{j_1, \dots, j_{p-2}\}}$ apparaît donc deux fois dans ce déterminant. \square

Lemme 6.1.21. Soit $g = \sum_{i=1}^m c_i J_i$ avec $c_1, \dots, c_m \in \mathbb{C}$ tels que g induit un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C . On a

$$\text{res}_C(\omega_0) = \frac{\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} c_i w_i x_i}{\sum_{i=1}^m c_i J_i}.$$

Preuve. Soit $i_0 \in \{1, \dots, m\}$. Calculons $J_{i_0} \omega_0$. On rappelle que $dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_{m-1} = \sum_{i=1}^m J_i \widehat{dx}_i$. On a :

$$J_{i_0} \omega_0 = (-1)^{i_0-1} w_{i_0} x_{i_0} \frac{dh_1 \wedge \cdots \wedge dh_{m-1}}{h} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m \underbrace{\left((-1)^{i-1} w_i x_i J_{i_0} - (-1)^{i_0-1} w_{i_0} x_{i_0} J_i \right)}_{=: \lambda_i} \frac{\widehat{dx}_i}{h}. \quad (6.6)$$

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$, $i \neq i_0$. On développe J_i par rapport à la colonne i_0 , et J_{i_0} par rapport à la colonne i . On pose $\text{sgn}(i_0 - i)$ le signe de $i_0 - i$. On obtient :

$$\begin{aligned} \lambda_i &= (-1)^{i-1} w_i x_i \text{sgn}(i_0 - i) (-1)^{i-1} \left(\sum_{\ell=1}^{m-1} (-1)^{\ell-1} \frac{\partial h_\ell}{\partial x_i} J_{i_0, i}^\ell \right) \\ &\quad - (-1)^{i_0-1} w_{i_0} x_{i_0} \text{sgn}(i - i_0) (-1)^{i_0-1} \left(\sum_{\ell=1}^{m-1} (-1)^{\ell-1} \frac{\partial h_\ell}{\partial x_{i_0}} J_{i_0, i}^\ell \right) \\ &= \text{sgn}(i_0 - i) \sum_{\ell=1}^{m-1} (-1)^{\ell-1} \left(w_i x_i \frac{\partial h_\ell}{\partial x_i} + w_{i_0} x_{i_0} \frac{\partial h_\ell}{\partial x_{i_0}} \right) \cdot J_{i_0, i}^\ell \end{aligned}$$

De plus, le lemme 6.1.20 assure que pour tout $p \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i, i_0\}$:

$$w_p x_p \sum_{\ell=1}^{m-1} (-1)^{\ell-1} \frac{\partial h_\ell}{\partial x_p} J_{i_0, i}^\ell = 0. \quad (6.7)$$

On obtient donc :

$$\lambda_i = \text{sgn}(i_0 - i) \sum_{\ell=1}^{m-1} (-1)^{\ell-1} \left(\sum_{p=1}^m w_p x_p \frac{\partial h_\ell}{\partial x_p} \right) J_{i_0, i}^\ell = \text{sgn}(i_0 - i) \sum_{\ell=1}^{m-1} (-1)^{\ell-1} d_\ell h_\ell J_{i_0, i}^\ell.$$

Il existe donc $\eta \in \tilde{\Omega}^{m-1}$ tel que

$$J_{i_0} \omega_0 = (-1)^{i_0-1} w_{i_0} x_{i_0} \frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h_1 \dots h_k} + \eta. \quad (6.8)$$

En considérant la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^m c_i J_i \omega_0$, on trouve l'expression du multi-résidu de ω_0 annoncé dans le lemme. \square

Montrons le lemme suivant :

Lemme 6.1.22. *Avec les notations du lemme 6.1.17, on a :*

$$\inf(\text{val}(\mathcal{R}_C)) = \text{val}(\text{res}_C(\omega_0)) = -\gamma + \underline{1}.$$

Preuve. D'après l'égalité (6.2), $\text{val}(J_i) = \gamma + \text{val}(x_i) - \underline{1}$. De plus, par le lemme 6.1.21, $\text{res}_C(\omega_0) = \frac{\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} c_i w_i x_i}{\sum_{i=1}^m c_i J_i}$. On a donc $\text{val}(\text{res}(\omega_0)) = -\gamma + \underline{1}$.

Montrons que $\inf(\text{val}(\mathcal{R}_C)) = \text{val}(\text{res}_C(\omega_0))$.

Par la remarque 6.1.6,

$$\gamma + (\text{val}(\mathcal{O}_C) \setminus \{0\}) - \underline{1} \subseteq \text{val}(\mathcal{I}_C). \quad (6.9)$$

Étant donné que $\gamma + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(\mathcal{O}_C)$, on a $2\gamma - \underline{1} + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(\mathcal{I}_C)$. D'où :

$$\max\{v \in \mathbb{Z}^p ; \Delta(v, \mathcal{I}_C) = \emptyset\} \leq 2\gamma - \underline{2}.$$

Le théorème 5.2.1 implique que $\inf(\text{val}(\mathcal{R}_C)) \geq \gamma - (2\gamma - \underline{2}) - \underline{1} = -\gamma + \underline{1}$.

D'où le résultat : $\inf(\text{val}(\mathcal{R}_C)) = \text{val}(\text{res}_C(\omega_0))$. \square

Nous aurons aussi besoin du résultat suivant :

Lemme 6.1.23. *Soit $g \in \mathcal{O}_C$. S'il existe $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que $\text{val}_i(g) = 0$ alors $\text{val}(g) = 0$. En particulier, g est inversible.*

Proposition 6.1.24. *Soit C une courbe intersection complète réduite satisfaisant la condition a). Alors \mathcal{R}_C est engendré par $\text{res}_C\left(\frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h}\right) = 1$ et $\text{res}_C(\omega_0)$, où ω_0 est défini dans le lemme 6.1.17. Si de plus C n'est pas lisse, cette famille génératrice est minimale.*

Preuve. On pose $Z = \text{Sing}(C)$ le lieu singulier de C . Il est de dimension 0 donc \mathcal{O}_Z est de Cohen-Macaulay. Par [Eis95, Theorem 21.15], comme $\omega_C = \mathcal{O}_C$, le module dualisant de Z est $\omega_Z = \text{Ext}_{\mathcal{O}_C}^1(\mathcal{O}_Z, \mathcal{O}_C)$. En dualisant sur \mathcal{O}_C la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{I}_C \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{O}_Z \rightarrow 0$$

on obtient :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \rightarrow \mathcal{R}_C \rightarrow \omega_Z \rightarrow 0. \quad (6.10)$$

De plus, le lieu singulier d'une courbe quasi-homogène est Gorenstein (voir [KW84, Satz 2]), de sorte que $\omega_Z = \mathcal{O}_Z$. La suite exacte (6.10) implique que \mathcal{R}_C est engendré par deux éléments, l'image de $1 \in \mathcal{O}_C$, qui est $1 \in \mathcal{R}_C$, et un antécédent de $1 \in \mathcal{O}_Z$. Il existe donc $\rho_0 \in \mathcal{R}_C$ tel que $(1, \rho_0)$ engendre \mathcal{R}_C .

Il reste à prouver qu'on peut prendre $\rho_0 = \text{res}_C(\omega_0)$.

Par le lemme 6.1.22, on a $\text{val}(\text{res}_C(\omega_0)) = -\gamma + \underline{1}$.

Supposons d'abord que $-\gamma + \underline{1} \notin \mathbb{N}^p$. Par exemple, $-\gamma_1 + 1 < 0$. Il existe $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathcal{O}_C$ tel que $\text{res}_C(\omega_0) = \alpha_0 \rho_0 + \alpha_1$. Comme $\text{val}(\alpha_1) \geq 0$, et $\inf(\text{val}(\mathcal{R}_C)) = \text{val}(\text{res}_C(\omega_0))$, on a $\text{val}_1(\rho_0) = \text{val}_1(\omega_0)$ et donc $\text{val}_1(\alpha_0) = 0$. Par le lemme 6.1.23, cela implique que $\text{val}(\alpha_0) = 0$ et donc α_0 est inversible. Par conséquent, $(\text{res}_C(\omega_0), 1)$ engendre \mathcal{R}_C .

Supposons maintenant que $-\gamma + \underline{1} \in \mathbb{N}^p$. Comme $\gamma \geq 0$, par le lemme 6.1.23, on a nécessairement $\gamma = \underline{1}$ ou $\gamma = \underline{0}$. Cependant, si $\gamma = \underline{0}$, on a $\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_{\tilde{C}}$ et donc C est lisse, et $\mathcal{R}_C = \mathcal{O}_{\tilde{C}} = \mathcal{O}_C$. Supposons que $\gamma = \underline{1}$, c'est-à-dire que $\text{val}(\mathcal{O}_C) = \{0\} \cup \{1 + \mathbb{N}^p\}$. D'après la remarque 6.1.6, on a donc $1 + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(\mathcal{I}_C)$ et comme $\mathcal{I}_C \subseteq \mathcal{O}_C$ on a l'égalité

$$\text{val}(\mathcal{I}_C) = \text{val}(\mathcal{O}_C) = \underline{1} + \mathbb{N}^p.$$

Cela implique que $\mathcal{I}_C = \mathcal{O}_C$, et par la dualité de la proposition 3.2.17, $\mathcal{R}_C = \mathcal{O}_C^\vee = \mathcal{O}_{\tilde{C}}$. Par [Sch16, Propositions 4.11], cela implique que C est une courbe à croisements normaux. Vu que C est Gorenstein, par [Sch16, Proposition 4.4], elle est même plane. Par le critère de Saito 2.2.8, si $h = xy$ définit une courbe plane C , alors $(\omega_0 = \frac{xdy - ydx}{h}, \frac{dh}{h})$ est une base de $\Omega^1(\log C)$, dont les résidus engendrent \mathcal{R}_C . \square

Comme la famille $\left\{ \frac{h_i \widehat{dx}_j}{h}; i \in \{1, \dots, m-1\}, j \in \{1, \dots, m\} \right\}$ engendrent $\tilde{\Omega}^{m-1}$, la proposition 6.1.24 donne :

Corollaire 6.1.25. *Soit C une courbe intersection complète singulière satisfaisant la condition a). Alors $\Omega^{m-1}(\log C)$ est engendré par la forme ω_0 du lemme 6.1.17, $\frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h}$, et la famille $\left\{ \frac{h_i \widehat{dx}_j}{h}; i \in \{1, \dots, m-1\}, j \in \{1, \dots, m\} \right\}$.*

Avec des hypothèses supplémentaires, la famille génératrice du corollaire 6.1.25 est minimale :

Proposition 6.1.26. *Soit C une courbe intersection complète singulière vérifiant les conditions a), b), c). La famille génératrice du corollaire 6.1.25 est une famille génératrice minimale de $\Omega^{m-1}(\log C)$.*

Preuve. Soit $\alpha_0, \alpha_1, (\beta_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq m-1}}$ tels que :

$$\alpha_0 \omega_0 = \alpha_1 \frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{m-1}}{h} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{ij} h_j \frac{\widehat{dx}_i}{h}. \quad (6.11)$$

Comme $(\text{res}_C(\omega_0), 1)$ est une famille génératrice minimale de \mathcal{R}_C , on a $\alpha_0 \in \mathfrak{m}$ et $\alpha_1 \in \mathfrak{m}$, où \mathfrak{m} l'idéal maximal de \mathcal{O}_S .

Montrons que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, m-1\}$, $\beta_{ij} \in \mathfrak{m}$.

On remarque que la classe $\overline{\alpha_0} \in \mathcal{O}_C$ vérifie $\overline{\alpha_0} \cdot \text{res}_C(\omega_0) = \overline{\alpha_1} \in \mathcal{O}_C$ et $\overline{\alpha_0} \in \mathcal{O}_C$. Par conséquent, $\overline{\alpha_0} \in \mathcal{R}_C^\vee$. Comme C est libre, $\mathcal{R}_C^\vee = \mathcal{I}_C$. Alors $\alpha_0 \in (J_1, \dots, J_m, h_1, \dots, h_{m-1}) \subseteq \mathcal{O}_S$. Soit $i_0 \in \{1, \dots, m\}$. D'après la preuve du lemme 6.1.21, on a :

$$J_{i_0}\omega_0 - (-1)^{i_0-1}w_{i_0}x_{i_0} \frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{m-1}}{h} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^m \text{sgn}(i_0 - i) \left(\sum_{\ell=1}^{m-1} (-1)^{\ell-1} d_\ell h_\ell J_{i_0, i}^\ell \right) \frac{\widehat{dx}_i}{h} =: \eta.$$

La condition c) assure que $J_{i_0, i}^\ell \in \mathfrak{m}$, et donc $\eta \in \mathfrak{m} \mathcal{I}_C \frac{1}{h} \Omega_S^{m-1}$.

De plus, pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$, $h_j \omega_0 \in \mathfrak{m}(h_1, \dots, h_{m-1}) \cdot \frac{1}{h} \Omega_S^{m-1}$.

Si $J_{i_0}\omega_0 = \alpha_{1, i_0} \frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{m-1}}{h} + \eta'$ avec $\eta' \in \widetilde{\Omega_S^{m-1}}$, alors $\alpha_{1, i_0} = (-1)^{i_0-1}w_{i_0}x_{i_0} + \alpha'$, avec $\alpha' \in (h_1, \dots, h_{m-1})$. D'où, vu que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $J_i \in \mathfrak{m}$:

$$\eta' = \eta - \alpha' \sum_{i=1}^m J_i \frac{\widehat{dx}_i}{h} \in \mathfrak{m}(h_1, \dots, h_{m-1}) \cdot \frac{1}{h} \Omega_S^{m-1}.$$

On rappelle que α_0 est une combinaison linéaire de $J_1, \dots, J_m, h_1, \dots, h_{m-1}$. On a donc

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{m-1} \beta_{ij} h_j \frac{\widehat{dx}_i}{h} \in \mathfrak{m}(h_1, \dots, h_{m-1}) \cdot \frac{1}{h} \Omega_S^{m-1}.$$

Comme la suite (h_1, \dots, h_{m-1}) est régulière, toute relation $\sum_j \mu_j h_j = 0$ vérifie pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$, $\mu_j \in (h_1, \dots, h_{m-1}) \subseteq \mathfrak{m}$. Par conséquent, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, m-1\}$, $\beta_{ij} \in \mathfrak{m}$. \square

Remarque 6.1.27. Pour les courbes planes quasi-homogènes, l'énoncé de la proposition 6.1.26 n'est pas vérifié. En effet, une courbe plane C définie par une équation réduite h est toujours un diviseur libre (voir exemple 2.2.5) et donc le module $\Omega^1(\log C)$ est libre de rang 2. Une base de $\Omega^1(\log C)$ est donnée par ω_0 et $\frac{dh}{h}$. En particulier, dx et dy sont dans le module engendré par ω_0 et $\frac{dh}{h}$.

L'énoncé de la proposition 6.1.26 reste vrai si on affaiblit la condition c) de la façon suivante : au moins deux équations sont dans \mathfrak{m}^2 .

Remarque 6.1.28. Si C est une courbe intersection complète quasi-homogène, on a donc en particulier que 1 et $\frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{m-1}}{h}$ font partie respectivement d'une famille génératrice minimale de \mathcal{R}_C et de $\Omega^{m-1}(\log C)$.

6.1.4 Résolution libre

Comme \mathcal{R}_C est un idéal fractionnaire de la courbe C , on a $\text{prof}(\mathcal{R}_C) = 1$. Par la formule d'Auslander-Buchsbaum, la dimension projective du \mathcal{O}_S -module \mathcal{R}_C est $m-1$. De plus, par le théorème 3.3.7, la dimension projective de $\Omega^{m-1}(\log C)$ est $m-2$.

La proposition 6.1.26 donne une famille génératrice minimale de $\Omega^{m-1}(\log C)$. Des méthodes similaires permettent d'aller plus loin et de calculer explicitement une résolution libre des \mathcal{O}_S -modules \mathcal{R}_C et $\Omega^{m-1}(\log C)$ pour les courbes quasi-homogènes.

THÉORÈME 6.1.29. Soit C une courbe intersection complète satisfaisant les conditions 6.1.16. On pose pour $p \in \{0, \dots, m-2\}$

$$F_p = \bigwedge^p \mathcal{O}_S^{m-1} \oplus \bigwedge^p \mathcal{O}_S^m$$

et $F_{m-1} = \bigwedge^{m-1} \mathcal{O}_S^m$. Alors il existe² $\delta_\bullet : F_\bullet \rightarrow F_{\bullet-1}$ tels que $(F_\bullet, \delta_\bullet)$ est une résolution libre minimale de \mathcal{R}_C comme \mathcal{O}_S -module.

Corollaire 6.1.30. En particulier, les nombres de Betti de \mathcal{R}_C vu comme \mathcal{O}_S -module sont :

$$\forall p \in \{0, \dots, m-2\}, b_j(\mathcal{R}_C) = \binom{m-1}{p} + \binom{m}{p} \text{ et } b_{m-1} = m.$$

Remarque 6.1.31. Afin de ne pas alourdir les notations³, on suppose que x_1 est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C . Par la relation 6.2, J_1 est aussi un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C . Vu que C est quasi-homogène, la proposition 6.1.24 assure que \mathcal{R}_C est engendré par $\text{res}_C(\omega_0) = \frac{w_1 x_1}{J_1}$ et $1 = \frac{J_1}{J_1}$. Une résolution libre de $(x_1, J_1)\mathcal{O}_C$ fournit une résolution libre de \mathcal{R}_C vu que ces deux modules sont isomorphes par division par le non diviseur de zéro J_1 .

Afin de montrer le théorème, on introduit la suite exacte suivante, dont le terme du milieu est isomorphe à \mathcal{R}_C et pour laquelle une résolution libre des termes de gauche et de droite est fournie par des complexes de Koszul.

Lemme 6.1.32. On conserve les hypothèses du théorème 6.1.29 et de la remarque 6.1.31. La suite suivante est exacte :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{w_1 x_1} w_1 x_1 \mathcal{O}_C + J_1 \mathcal{O}_C \rightarrow \frac{(J_1 \mathcal{O}_S + w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S)}{w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S} \rightarrow 0. \quad (6.12)$$

De plus, une résolution libre de $\frac{(J_1 \mathcal{O}_S + w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S)}{w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S}$ est fournie par le complexe de Koszul associé à la suite régulière $(w_1 x_1, \dots, w_m x_m)$.

Preuve. Comme x_1 est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C , l'application $\mathcal{O}_C \xrightarrow{w_1 x_1} w_1 x_1 \mathcal{O}_C + J_1 \mathcal{O}_C$ est injective. Le module $\frac{(J_1 \mathcal{O}_S + w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S)}{w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S}$ est alors le conoyau de cette application.

Déterminons une résolution libre de $\frac{(J_1 \mathcal{O}_S + w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S)}{w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S}$. On a⁴ :

$$0 \rightarrow ((w_1 x_1, h_1, \dots, h_{m-1}) : J_1)_{\mathcal{O}_S} \rightarrow \mathcal{O}_S \xrightarrow{J_1} \frac{(J_1 \mathcal{O}_S + w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S)}{w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S} \rightarrow 0.$$

D'après (6.8), $J_1 \omega_0 = w_1 x_1 \frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{m-1}}{h_1 \dots h_k} + \eta$ avec $\eta \in \tilde{\Omega}^{m-1}$. Par conséquent, comme $\omega_0 = \frac{\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} w_i x_i \widehat{dx}_i}{h}$ et $\frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_{m-1}}{h} = \frac{\sum_{i=1}^m J_i \widehat{dx}_i}{h}$ on a pour tout $i \in \{2, \dots, m\}$:

$$(-1)^{i-1} w_i x_i J_i = w_1 x_1 J_i \pmod{(h_1, \dots, h_{m-1})}. \quad (6.13)$$

²Voir (6.14) pour l'expression de δ_\bullet .

³Si x_1 est un diviseur de zéro, il suffit de considérer une somme $y = \sum (-1)^{i-1} c_i x_i$ telle que y est un non diviseur de zéro dans \mathcal{O}_C à la place de x_1 , et $J = \sum c_i J_i$ à la place de J_1 .

⁴Soit A un anneau et $I, J \subseteq A$. On note $(I : J)_A = \{a \in A ; aJ \subseteq I\}$.

On en déduit que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $w_i x_i J_1 = 0 \pmod{(w_1 x_1, h_1, \dots, h_m)}$, et donc $(w_1 x_1, \dots, w_m x_m) \subseteq ((w_1 x_1, h_1, \dots, h_{m-2}) : J_1)_{\mathcal{O}_S}$. De plus, d'après la proposition 6.1.24, $(1, \frac{w_1 x_1}{J_1})$ est une famille génératrice minimale de \mathcal{R}_C , donc $J_1 \notin (w_1 x_1, h_1, \dots, h_{m-1})$, et donc

$$\mathfrak{m} = (w_1 x_1, \dots, w_m x_m) = ((w_1 x_1, h_1, \dots, h_{m-2}) : J_1)_{\mathcal{O}_S}.$$

Étant donné que la suite $(w_1 x_1, \dots, w_m x_m)$ est une suite régulière, le complexe de Koszul associé fournit une résolution libre minimale, et on en déduit une résolution libre du module $(w_1 x_1 \mathcal{O}_S + J_1 \mathcal{O}_S) / (w_1 x_1, h_1, \dots, h_{m-1})$. \square

Preuve (du théorème 6.1.29). On considère la suite exacte (6.12). Une résolution libre minimale de \mathcal{O}_C est fournie par le complexe de Koszul associé à (h_1, \dots, h_{m-1}) et une résolution libre minimale de $\frac{(J_1 \mathcal{O}_S + w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S)}{w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S}$ est fournie par le complexe de Koszul associé à $(w_1 x_1, \dots, w_m x_m)$. On déduit de ces deux résolutions libres une résolution libre du terme du milieu, à savoir $w_1 x_1 \mathcal{O}_C + J_1 \mathcal{O}_C$. La résolution libre qu'on obtient est de longueur m , or, on a vu que la dimension projective de \mathcal{R}_C est $m - 1$.

Afin de déduire de cette résolution une résolution libre minimale, on calcule explicitement les différentielles de la résolution libre de \mathcal{R}_C obtenue.

Une résolution libre de \mathcal{O}_C est fournie par le complexe de Koszul associé à la suite régulière (h_1, \dots, h_{m-1}) . On pose (e_1, \dots, e_{m-1}) la base canonique de \mathcal{O}_S^{m-1} . Pour tout $p \in \{2, \dots, m-1\}$, la différentielle $d_p : \Lambda^p \mathcal{O}_S^{m-1} \rightarrow \Lambda^{p-1} \mathcal{O}_S^{m-1}$ du complexe de Koszul est

$$d_p(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = \sum_{\ell=1}^p (-1)^{\ell-1} h_{i_\ell} e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$$

et on a $d_1(e_i) = h_i$, et $d_0 : \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_C$ est l'application de passage au quotient.

Concernant $\frac{(J_1 \mathcal{O}_S + w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S)}{w_1 x_1 \mathcal{O}_S + \sum_{i=1}^{m-1} h_i \mathcal{O}_S}$, d'après le lemme 6.1.32, une résolution libre de ce module est fournie par le complexe de Koszul associé à $(w_1 x_1, \dots, w_m x_m)$. On pose $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)$ la base canonique de \mathcal{O}_S^m . Pour tout $p \in \{2, \dots, m\}$, la différentielle $d'_p : \Lambda^p \mathcal{O}_S^m \rightarrow \Lambda^{p-1} \mathcal{O}_S^m$ du complexe de Koszul est

$$d'_p(\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}) = \sum_{\ell=1}^p (-1)^{\ell-1} w_{i_\ell} x_{i_\ell} \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\varepsilon_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}$$

et on a $d'_1(\varepsilon_i) = w_i x_i$, et $d'_0 : \mathcal{O}_S \rightarrow (w_1 x_1 \mathcal{O}_S + J_1 \mathcal{O}_S) / (w_1 x_1, h_1, \dots, h_{m-1})$ est la composée de la multiplication par J_1 et du passage au quotient.

Nous déduisons de ces deux résolutions libres une résolution libre de $J_1 \mathcal{O}_C + w_1 x_1 \mathcal{O}_C$:

$$0 \rightarrow \bigwedge^m \mathcal{O}_S^m \xrightarrow{\delta_m} \bigwedge^{m-1} \mathcal{O}_S^{m-1} \oplus \bigwedge^{m-1} \mathcal{O}_S^m \xrightarrow{\delta_{m-1}} \dots \xrightarrow{\delta_1} \bigwedge^0 \mathcal{O}_S^{m-1} \oplus \bigwedge^0 \mathcal{O}_S^m \xrightarrow{\delta_0} (J_1 \mathcal{O}_C + w_1 x_1 \mathcal{O}_C) \rightarrow 0.$$

Cette résolution est de longueur m , mais on sait que la dimension projective de \mathcal{R}_C est $m - 1$. Déterminons les expressions des différentielles δ_\bullet .

Pour $(a, b) \in \Lambda^0 \mathcal{O}_S^{m-1} \oplus \Lambda^0 \mathcal{O}_S^m$, on a

$$\delta_0(a, b) = a w_1 x_1 + b J_1 \in \mathcal{O}_C.$$

Pour tout $p \in \{1, \dots, m-1\}$, on a $\delta_p(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = d_p(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})$. De plus, pour tout $p \in \{1, \dots, m\}$, pour tout $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ tel que $|I| = p$, il existe⁵ $A_I \in \Lambda^{p-1} \mathcal{O}_S^{m-1}$ tel que $\delta_p(\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}) = A_I + d'_p(\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p})$.

⁵L'élément A_I n'est pas unique.

Déterminons δ_p par récurrence sur p .

Pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\delta_1(\varepsilon_i) = (A_i, w_i x_i)$. De plus, $\delta_0 \circ \delta_1 = 0$ donc $A_i w_i x_i + J_1 w_i x_i = 0 \in \mathcal{O}_C$. Par (6.13), on peut donc prendre $A_i = (-1)^i J_i$.

Soit $p \in \{2, \dots, m\}$. Supposons que pour tout $\{i_1, \dots, i_{p-1}\} \subseteq \{1, \dots, m\}$:

$$\begin{aligned} \delta_{p-1}(\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_{p-1}}) &= (-1)^{i_1 + \dots + i_{p-1}} (-1)^{p-2} \sum_{j_1 < \dots < j_{p-2}} (-1)^{j_1 + \dots + j_{p-2}} d_{j_1} \dots d_{j_{p-2}} J_{i_1 \dots i_{p-1}}^{j_1 \dots j_{p-2}} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{p-2}} \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{p-1} (-1)^{\ell-1} w_{i_\ell} x_{i_\ell} \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{\varepsilon_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_{p-1}}. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Soit $\{i_1, \dots, i_p\} \subseteq \{1, \dots, m\}$. On cherche à déterminer un élément $A_I \in \bigwedge^{p-1} \mathcal{O}_S^{m-1}$ tel que $\delta_p(\varepsilon_I) = A_I + d'_p(\varepsilon_I)$, où $\varepsilon_I = \varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}$.

On sait que $\delta_{p-1} \circ \delta_p(\varepsilon_I) = 0$.

Après calculs, en développant les termes de la forme $J_{i_1 \dots \widehat{i_\ell} \dots i_p}^{j_1 \dots j_{p-2}}$ selon la colonne i_ℓ pour $\ell \in \{1, \dots, p\}$ on obtient :

$$\begin{aligned} \delta_{p-1}(A_I) &+ \left(\sum_{\ell=1}^p (-1)^{\ell-1} w_{i_\ell} x_{i_\ell} (-1)^{i_1 + \dots + i_p} (-1)^{i_\ell} (-1)^{p-2} \sum_{\{j_1 < \dots < j_{p-2}\}} (-1)^{j_1 + \dots + j_{p-2}} d_{j_1} \dots d_{j_{p-2}} \right. \\ &\quad \left. \times \sum_{q \notin \{j_1, \dots, j_{p-2}\}} (-1)^{i_\ell-1} (-1)^{\ell-1} \text{sgn}(j_1 - q) \dots \text{sgn}(j_{p-2} - q) \frac{\partial h_q}{\partial x_{i_\ell}} J_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_{p-2}, q} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{p-2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

Par le lemme 6.1.20, pour tout $r \notin \{i_1, \dots, i_p\}$,

$$d_{j_1} \dots d_{j_{p-2}} w_r x_r \sum_{q \notin \{j_1, \dots, j_{p-2}\}} \text{sgn}(j_1 - q) \dots \text{sgn}(j_{p-2} - q) \frac{\partial h_q}{\partial x_r} J_{i_1, \dots, i_p}^{j_1, \dots, j_{p-2}, q} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{p-2}} = 0.$$

On a donc, en utilisant cette égalité et en réordonnant les termes j_1, \dots, j_{p-2}, q :

$$\begin{aligned} \delta_{p-1}(A_I) &= \sum_{\{j_1 < \dots < j_{p-1}\} \subseteq \{1, \dots, m-1\}} (-1)^{i_1 + \dots + i_p} (-1)^{p-1} (-1)^{j_1 + \dots + j_{p-1}} \\ &\quad \times d_{j_1} \dots d_{j_{p-1}} J_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{p-1}} \sum_{q=1}^{p-1} (-1)^{q-1} h_{j_q} e_{j_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{j_q}} \wedge \dots \wedge e_{j_{p-1}} \end{aligned}$$

Et donc $A_I = \sum_{j_1 < \dots < j_{p-1}} (-1)^{i_1 + \dots + i_p} (-1)^{p-1} (-1)^{j_1 + \dots + j_{p-1}} d_{j_1} \dots d_{j_{p-1}} J_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_{p-1}} e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_{p-1}}$ convient.

On remarque que

$$\begin{aligned} \delta_m(\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \varepsilon_m) &= -d_1 \dots d_{m-1} e_1 \wedge \dots \wedge e_{m-1} \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^m w_\ell x_\ell \varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\varepsilon_\ell} \wedge \dots \wedge \varepsilon_m \end{aligned}$$

Grâce à la condition c), le seul coefficient inversible de la résolution qui apparaît dans les δ_p est le coefficient de $e_1 \wedge \dots \wedge e_{m-1}$ dans δ_m . On en déduit la résolution minimale annoncée dans le théorème. \square

THÉORÈME 6.1.33. *On conserve les hypothèses et notations du théorème 6.1.29. On pose pour $j \in \{0, \dots, m-3\}$,*

$$P_j = \left(\bigwedge^{j+1} \mathcal{O}_S^{m-1} \otimes \Omega_S^{m-1} \right) \oplus F_j$$

et $P_{m-2} = F_{m-2}$. Alors il existe⁶ $\alpha_\bullet : P_\bullet \rightarrow P_{\bullet-1}$ tels que $(P_\bullet, \alpha_\bullet)$ est une résolution libre

⁶Voir (6.15) pour l'expression de α_\bullet .

minimale de $\Omega^{m-1}(\log C)$.

Corollaire 6.1.34. *En particulier, les nombres de Betti de $\Omega^{m-1}(\log C)$ sont :*

$$\forall j \in \{0, \dots, m-3\}, b_j = \binom{m-1}{j+1} \binom{m}{m-1} + \binom{m-1}{j} + \binom{m}{j} \text{ et } b_{m-2} = \binom{m-1}{m-2} + \binom{m}{m-2}.$$

Preuve (du théorème 6.1.33). On note $(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{j+1}} \widehat{dx}_\ell)_{(i_1 < \dots < i_{j+1}) \subseteq \{1, \dots, m-1\}, 1 \leq j \leq m}$ une base du module $\bigwedge^{j+1} \mathcal{O}_S^{m-1} \otimes \Omega_S^{m-1}$. On considère la suite exacte

$$0 \rightarrow \widetilde{\Omega}^{m-1} \rightarrow \Omega^{m-1}(\log C) \rightarrow \mathcal{R}_C \rightarrow 0.$$

Les résolutions libres de $\widetilde{\Omega}^{m-1}$ et de \mathcal{R}_C déterminées précédemment (voir lemme 3.3.10 et théorème 6.1.29) permettent de même de calculer explicitement une résolution libre $(P'_\bullet, \alpha_\bullet)$ du module $\Omega^{m-1}(\log C)$ telle que pour tout $p \in \{1, \dots, m-3\}$, $P'_p = P_p$,

$$P'_{m-2} = \left(\bigwedge^{m-1} \mathcal{O}_S^{m-1} \otimes \Omega_S^{m-1} \right) \oplus F_{m-2}$$

et $P'_{m-1} = \bigwedge^{m-1} \mathcal{O}_S^m$. D'après le théorème 3.3.7, comme C est libre, la dimension projective de $\Omega^{m-1}(\log C)$ est $m-2$, donc la résolution précédente n'est pas minimale.

On a $\alpha_0(v_i \widehat{dx}_j, a, b) = \frac{h_i \widehat{dx}_j}{h} + a\omega_0 + b \frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h}$.

De la même façon que dans la preuve du théorème 6.1.29, en utilisant le lemme 6.1.20, on montre que les différentielles sont données pour $p \in \{1, \dots, m-2\}$ par

$$\begin{aligned} \alpha_p(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p+1}} \widehat{dx}_j) &= \left(\sum_{\ell=1}^{p+1} (-1)^{\ell-1} h_{i_\ell} v_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{v_{i_\ell}} \wedge \dots \wedge v_{i_{p+1}} \right) \widehat{dx}_j \\ \alpha_p(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) &= (-1)^p \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell-1} w_\ell x_\ell v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_p} \widehat{dx}_\ell + \delta_p(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) \\ \alpha_p(\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}) &= \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin \{i_1, \dots, i_p\}}}^m \sum_{j_1 < \dots < j_p} (-1)^{i_1 + \dots + i_p} (-1)^{j_1 + \dots + j_p} d_{j_1} \dots d_{j_p} \\ &\quad \times \operatorname{sgn}(i_1 - \ell) \dots \operatorname{sgn}(i_p - \ell) J_{i_1 \dots i_p, \ell}^{j_1 \dots j_p} v_{j_1} \wedge \dots \wedge v_{j_p} \widehat{dx}_\ell \\ &\quad + \delta_p(\varepsilon_{i_1} \wedge \dots \wedge \varepsilon_{i_p}). \end{aligned} \tag{6.15}$$

et pour tout $u \in \{1, \dots, m\}$,

$$\alpha_{m-1}(\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\varepsilon_u} \wedge \dots \wedge \varepsilon_m) = (-1)^{m-1} d_1 \dots d_{m-1} v_1 \wedge \dots \wedge v_{m-1} \widehat{dx}_u + \delta_{m-1}(\varepsilon_1 \wedge \dots \wedge \widehat{\varepsilon_u} \wedge \dots \wedge \varepsilon_m).$$

Le seul coefficient inversible qui apparaît est le coefficient $(-1)^{m-1} d_1 \dots d_{m-1}$ de α_{m-1} . On obtient donc le résultat attendu. \square

Remarque 6.1.35. Soit $C \subseteq \mathbb{C}^3$ une courbe gauche intersection complète quasi-homogène de poids (w_1, w_2, w_3) définie par une suite régulière (h_1, h_2) . On pose d_i le degré de h_i . Par le théorème 6.1.33, une résolution libre de $\Omega^2(\log C)$ est

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^5 \rightarrow \mathcal{O}_S^8 \rightarrow \Omega^2(\log C) \rightarrow 0.$$

Une résolution libre de $\operatorname{Der}^2(-\log C)$ est aussi connue (voir [GS12, Proposition 5.5]) :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^2 \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}_S^5 \xrightarrow{\phi} \operatorname{Der}^2(-\log C) \rightarrow 0. \tag{6.16}$$

On considère la base $(\partial_y \wedge \partial_z, \partial_z \wedge \partial_x, \partial_x \wedge \partial_y)$ de $\Theta_{\mathbb{C}^3}^3$. Les matrices des applications sont :

$$\phi = \begin{pmatrix} d_1 \frac{\partial h_2}{\partial x} & -d_2 \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & -w_3 z & w_2 y \\ d_1 \frac{\partial h_2}{\partial y} & -d_2 \frac{\partial h_1}{\partial y} & w_3 z & 0 & -w_1 x \\ d_1 \frac{\partial h_2}{\partial z} & -d_2 \frac{\partial h_1}{\partial z} & -w_2 y & w_1 x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial z} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial z} & \frac{\partial h_2}{\partial z} \\ \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial x} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial x} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{vmatrix} \\ 0 & 0 & w_1 x & w_2 y & w_3 z \end{pmatrix}^t$$

6.1.5 Exemples

Si la courbe n'est pas quasi-homogène, le nombre de générateurs peut être strictement plus grand. Donnons un exemple.

Exemple 6.1.36. Soit $h_1 = x^7 - y^5 + x^5 y^3$ et $h_2 = x^3 y - z^2$. La suite (h_1, h_2) définit une courbe gauche intersection complète. En utilisant l'algorithme A.1.2 avec SINGULAR on calcule une résolution libre minimale de $\Omega^2(\log C)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^6 \rightarrow \mathcal{O}_S^9 \rightarrow \Omega^2(\log C) \rightarrow 0.$$

Le nombre minimal de générateurs de $\Omega^2(\log C)$ est donc 9. De plus, parmi ces neuf générateurs, on a besoin des multi-résidus de cinq d'entre eux pour engendrer \mathcal{R}_C .

Le théorème 6.1.33 ne peut pas se généraliser aux courbes quasi-homogènes Cohen-Macaulay comme le montre l'exemple suivant, pour lequel \mathcal{R}_C est engendré de façon minimale par trois éléments.

Exemple 6.1.37. On considère la courbe X de \mathbb{C}^3 paramétrée par (t^3, t^4, t^5) . Cette courbe est Cohen-Macaulay mais pas Gorenstein. Elle est définie par les équations $h_1 = xz - y^2$, $h_2 = x^3 - yz$ et $h_3 = x^2 y - z^2$. On pose C l'intersection complète définie par $(xz - y^2, x^3 - yz)$. Cette intersection complète est réduite. Un calcul avec SINGULAR donne pour résolution projective de $\Omega^2(\log X/C)$:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^6 \rightarrow \mathcal{O}_S^9 \rightarrow \Omega^2(\log X/C) \rightarrow 0.$$

En particulier, le nombre de générateurs de \mathcal{R}_X est 3, il s'agit de $\frac{1}{t^2}$, $\frac{1}{t}$ et 1.

On termine cette partie avec la propriété suivante, qui donne un contre-exemple à la surjectivité de l'application de [Ale12, §6, Theorem 2].

On note $w\text{-deg}(f)$ le degré pondéré d'un élément quasi-homogène $f \in \mathcal{O}_C$ par rapport aux poids (w_1, \dots, w_m) .

Proposition 6.1.38. Soit C une courbe réduite intersection complète définie par une suite régulière (h_1, \dots, h_{m-1}) satisfaisant les conditions a), b), c) de 6.1.16.

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m-1} \in \mathcal{M}_{m-1}(\mathbb{C})$ une matrice inversible à coefficients constants. On pose $(f_1, \dots, f_{m-1})^t = A \cdot (h_1, \dots, h_{m-1})^t$. En particulier, (f_1, \dots, f_{m-1}) définit la même intersection complète C . Soit D_f l'hypersurface définie par $f = f_1 \cdots f_{m-1}$.

S'il existe $\ell, i, j \in \{1, \dots, m-1\}$ tels que $f_\ell = \sum_{q=1}^{m-1} a_{\ell, q} h_q$ avec $w\text{-deg}(h_i) \neq w\text{-deg}(h_j)$ et $a_{\ell, i} a_{\ell, j} \neq 0$ alors :

$$\text{res}_C(\Omega^{m-1}(\log D_f)) \neq \text{res}_C(\Omega^{m-1}(\log C)).$$

Preuve. Pour ne pas alourdir les notations, on suppose que $a_{11} \cdot a_{12} \neq 0$ et $\text{w-deg}(h_1) \neq \text{w-deg}(h_2)$.

Par le lemme 6.1.17 et le corollaire 3.1.10, $\omega = \frac{\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} w_i x_i \widehat{dx}_i}{f_1 \dots f_{m-1}} \in \Omega^{m-1}(\log C, \underline{f})$.

Montrons que $\text{res}_C(\omega) \notin \text{res}_C(\Omega^{m-1}(\log D_f))$. Étant donné que le noyau de l'application résidu res_C est $\widetilde{\Omega}_f^{m-1}$, on doit montrer que pour tout $\eta \in \widetilde{\Omega}_f^{m-1}$, on a $\omega + \eta \notin \Omega^{m-1}(\log D_f)$.

Soit $\eta \in \widetilde{\Omega}_f^{m-1}$. Alors $\eta = \sum_{j=1}^{m-1} \frac{f_j \eta_j}{f}$ avec $\eta_j \in \Omega_S^{m-1}$. On a $df_i = \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij} dh_j$ et :

$$df \wedge (\omega + \eta) = \sum_{i=1}^{m-1} \widehat{f}_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{m-1} (a_{ij} d_j h_j) \frac{dx}{f} + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{df_i \wedge f_j \eta_j}{f} \right) \right).$$

Si $\omega + \eta \in \Omega^{m-1}(\log D_f)$ alors $df \wedge (\omega + \eta)$ est holomorphe. Comme la suite (f_1, \dots, f_{m-1}) est régulière, cela implique que f_1 divise $\sum_{j=1}^{m-1} (a_{1j} d_j h_j + f_j \theta_{1,j})$, où $\theta_{1,j} dx = df_1 \wedge \eta_j$. En particulier, comme pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, $h_i \in \mathfrak{m}^2$, on a aussi $f_i \in \mathfrak{m}^2$ et donc $\theta_{1,j} \in \mathfrak{m}$. Il existe $q \in \mathcal{O}_S$ tel que, en remplaçant f_j par $\sum_{\ell} a_{j\ell} h_{\ell}$:

$$\sum_{\ell=1}^{m-1} \left(a_{1\ell} d_{\ell} + \sum_{j=1}^{m-1} (a_{j,\ell} \theta_{1,j}) - q a_{1,\ell} \right) \cdot h_{\ell} = 0.$$

Comme (h_1, \dots, h_{m-1}) est une suite régulière, on a pour tout $\ell \in \{1, \dots, m-1\}$,

$$a_{1\ell} d_{\ell} + \sum_{j=1}^{m-1} (a_{j,\ell} \theta_{1,j}) - q a_{1,\ell} \in (h_1, \dots, h_{m-1}).$$

Étant donné que pour tout $j \in \{1, \dots, m-1\}$, $\theta_{1,j} \in \mathfrak{m}$, et $h_i \in \mathfrak{m}$ cela implique que pour tout $\ell \in \{1, \dots, m-1\}$, $a_{1\ell}(d_{\ell} - q(0, \dots, 0)) = 0$. En particulier, comme par hypothèse $a_{11} \neq 0$ et $a_{12} \neq 0$, on a $d_1 - q(0, \dots, 0) = d_2 - q(0, \dots, 0) = 0$. Or, par hypothèse, $d_1 \neq d_2$ donc on arrive à une contradiction. Par conséquent $df \wedge (\omega + \eta) \notin \Omega_S^m$ et $\omega + \eta \notin \Omega^{m-1}(\log D_f)$. \square

6.1.6 Une caractérisation des arrangements de droites plan

On commence par décrire l'ensemble des multi-valuations d'un arrangement de droites du plan.

Proposition 6.1.39. *Soit $C \subseteq (\mathbb{C}^2, 0)$ une courbe plane définie par une équation homogène réduite h de degré $p \geq 2$. Alors C est la réunion de p droites et*

$$\inf(\text{val}(\mathcal{R}_C)) = (-p + 2, \dots, -p + 2).$$

De plus, $\text{val}(\mathcal{R}_C) = ((-p + 2, \dots, -p + 2) + \text{val}(\mathcal{O}_C)) \cup \mathbb{N}^p$.

Preuve. Une base de $\Omega^1(\log C)$ est donnée par $\omega_1 = \frac{dh}{h}$ et $\omega_2 = \frac{-ydx + xdy}{h}$. Une famille génératrice de \mathcal{R}_C est donc $\text{res}_C(\omega_1) = 1$ et $\text{res}_C(\omega_2) = \frac{-ay + bx}{ah'_x + bh'_y}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $ah'_x + bh'_y$ est un non diviseur de zéro dans \mathcal{O}_C . Le dénominateur est homogène de degré $p-1$, ce qui nous donne le résultat. \square

La proposition suivante caractérise les arrangements de droites plans.

Proposition 6.1.40. *Soit (h_1, \dots, h_{m-1}) une suite régulière définissant une intersection complète réduite C telle que pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, h_i est homogène de degré d_i . On pose $C = C_1 \cup \dots \cup C_p$ la décomposition en composantes irréductibles de l'intersection complète définie par (h_1, \dots, h_{m-1}) . En particulier, chaque C_i est une droite*

On suppose $p \geq 2$. Alors

$$\inf(\text{val}(\mathcal{R}_C)) = (-p + 2, \dots, -p + 2) \iff C \text{ est plane. } ^7$$

Preuve. L'implication \Leftarrow est donnée par la proposition précédente.

Le lemme 6.1.17 donne un élément ω_0 de $\Omega^{m-1}(\log C)$ tel que $\text{val}(\text{res}_C(\omega_0)) = 1 - \sum_{i=1}^{m-1} (d_i - 1)$. De plus, par le lemme 6.1.22, ce multi-résidu vérifie $\inf(\text{val}(\mathcal{R}_C)) = \text{val}(\text{res}_C(\omega_0))$.

Comme la courbe C est réduite, et les h_i sont homogènes de degré d_i , par le théorème de Bezout, le nombre de lignes est égal au produit des degrés : $p = d_1 \cdots d_{m-1}$.

S'il existe $i \in \{1, \dots, m-1\}$ tel que $d_i = 1$, cette équation peut être enlevée, et on considère l'intersection complète correspondante dans \mathbb{C}^{m-1} au lieu de \mathbb{C}^m (voir remarque 3.1.25 et proposition 3.1.24). On peut donc supposer que pour tout $i \in \{1, \dots, m-1\}$, $d_i \geq 2$.

Supposons que $\inf(\text{val}(\mathcal{R}_C)) = (-p + 2, \dots, -p + 2)$ et $m \geq 3$. Cela signifie que

$$1 - \sum_{i=1}^{m-1} (d_i - 1) = -d_1 \cdots d_{m-1} + 2$$

ce qui équivaut à $d_1 \cdots d_{m-1} = \left(\sum_{i=1}^{m-1} d_i\right) - m + 2$. Quitte à changer la numérotation, on suppose que $d_1 = \max(d_i)$. Alors $d_1 \cdots d_{m-1} \geq 2^{m-2} d_1$, et $\left(\sum_{i=1}^{m-1} d_i\right) - m + 2 < (m-1)d_1$. Par conséquent, l'égalité ne peut pas être vérifiée si $m \geq 3$, ce qui nous donne le résultat. \square

6.2 Propriétés du module des résidus des courbes planes

On suppose que C est une courbe plane définie par une équation réduite $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Nous commençons par déterminer le conducteur de \mathcal{R}_C , puis nous décrivons explicitement les diviseurs de zéro de \mathcal{R}_C et de \mathcal{J}_C . Nous retrouvons le résultat de O. Zariski montrant que la dimension du module de torsion de Ω_C^1 est égale au nombre de Tjurina τ , par une méthode impliquant le module des résidus. On termine ce paragraphe en donnant des algorithmes permettant de déterminer les multi-valuations du module des résidus des courbes planes à une ou deux branches.

6.2.1 Conducteur

Déterminons le conducteur de \mathcal{R}_C , c'est-à-dire l'élément $\nu \in \mathbb{Z}^p$ minimal tel que $\nu + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(\mathcal{R}_C)$.

On a besoin des résultats suivants :

Proposition 6.2.1 ([DdlM87, Theorem 2.7]). *Soit $h = h_1 \cdots h_p$ une équation réduite du germe de courbe plane C . On suppose que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, h_i est irréductible. On note c_i le conducteur de la branche définie par f_i . Alors le conducteur de C est donné par*

$$\gamma = \left(c_1 + \sum_{i=2}^p \text{val}_1(h_i), \dots, c_p + \sum_{i=1}^{p-1} \text{val}_p(h_i) \right).$$

On a alors :

Lemme 6.2.2. *Soit $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$ une équation réduite d'un germe de courbe plane. Alors :*

$$\begin{aligned} \text{val}(h'_x) &= \gamma + \text{val}(y) - \underline{1} \\ \text{val}(h'_y) &= \gamma + \text{val}(x) - \underline{1} \end{aligned}$$

⁷éventuellement après avoir simplifié la suite (h_1, \dots, h_{m-1}) comme dans la remarque 3.1.25 pour que $m-1$ soit la dimension de plongement.

Preuve. Le cas h irréductible est donné par le lemme de Teissier (voir [CNP11, Lemma 2.3]). Si h est réductible, on montre le résultat pour h'_x . On a l'égalité suivante :

$$\text{val}_j(h'_x) = \sum_{i \neq j} \text{val}_j(h_i) + \text{val}_j\left(\frac{\partial h_j}{\partial x}\right).$$

Par le lemme de Teissier, $\text{val}_j\left(\frac{\partial h_j}{\partial x}\right) = c_j + \text{val}_j(y) - 1$. La proposition 6.2.1 donne alors le résultat. \square

Proposition 6.2.3. *Le conducteur de \mathcal{R}_C est*

$$\nu_{\mathcal{R}_C} = -(m^{(1)}, \dots, m^{(p)}) + \underline{1}$$

où $m^{(j)} = \inf(\text{val}_j(x), \text{val}_j(y))$ est la multiplicité de la composant C_j de C .

Preuve. Par le théorème 5.2.1,

$$v \in \text{val}(\mathcal{R}_C) \iff \Delta(\gamma - v - \underline{1}, \mathcal{I}_C) = \emptyset.$$

Par conséquent, $\nu + \mathbb{N}^p \subseteq \text{val}(\mathcal{R}_C) \iff \forall \beta \leq \gamma - \nu - \underline{1}, \Delta(\beta, \mathcal{I}_C) = \emptyset$.

Or, par le lemme 6.2.2, $\inf(\text{val}(\mathcal{I}_C)) = \gamma + \inf(\text{val}(x), \text{val}(y)) - \underline{1}$. Par conséquent,

$$\sup\{\alpha \in \mathbb{Z}^p ; \forall \beta \leq \alpha, \Delta(\beta, \mathcal{I}_C) = \emptyset\} = \gamma + \inf(\text{val}(x), \text{val}(y)) - \underline{2}.$$

On en déduit que le conducteur de \mathcal{R}_C est $\nu_{\mathcal{R}_C} = -\inf(\text{val}(x), \text{val}(y)) + \underline{1}$. \square

6.2.2 Diviseurs de zéro

Nous décrivons dans ce paragraphe les diviseurs de zéro de \mathcal{R}_C et \mathcal{I}_C .

Proposition 6.2.4. *Soit $\emptyset \neq J \subseteq (1, \dots, p)$ et $C' = \bigcup_{j \in J} C_j$. Alors*

$$\Omega^1(\log C') \subseteq \Omega^1(\log C).$$

Quitte à changer la numérotation des branches, on suppose que $J = \{1, \dots, q\}$. Alors

$$\mathcal{R}_C \cap (\mathcal{M}_{C_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{M}_{C_q} \oplus \{0\}^{p-q}) = \mathcal{R}_{C'}.$$

Preuve. Soit f une équation réduite de C' et $\omega \in \Omega^1(\log C')$. En particulier, f divise l'équation h de C . Alors $f\omega$ et $fd\omega$ sont holomorphes, donc $h\omega$ et $hd\omega$ sont holomorphes, donc $\omega \in \Omega^1(\log C)$.

Remarquons la propriété suivante. Soit $\omega \in \Omega^1(\log C)$. Alors $\omega \in \Omega^1(\log C')$ si et seulement si pour tout $j \notin J$, h_j divise ω , ce qui équivaut à $\text{res}_{C_j}(\omega) = 0$. \square

On a en particulier la propriété suivante :

Corollaire 6.2.5. *On a l'inclusion suivante :*

$$\mathcal{R}_{C_1} \oplus \dots \oplus \mathcal{R}_{C_p} \hookrightarrow \mathcal{R}_C.$$

Par conséquent, $\text{val}_1(\mathcal{R}_{C_1}) \times \dots \times \text{val}_p(\mathcal{R}_{C_p}) \subseteq \text{val}(\mathcal{R}_C)$.

Remarque 6.2.6. Si $C = C_1 \cup C_2$ est une courbe plane à deux branches telle que $\mathcal{R}_C = \mathcal{R}_{C_1} \oplus \mathcal{R}_{C_2}$ alors par [Sch16, Proposition 6.6] C est un diviseur *splayed* (voir définition 3.1.47), et même une courbe à croisements normaux.

Proposition 6.2.7. *Soit $\emptyset \neq J \subseteq (1, \dots, p)$ et $C' = \bigcup_{j \in J} C_j$. Quitte à changer la numérotation des branches, on suppose que $J = \{1, \dots, q\}$. Alors :*

$$\mathcal{I}_C \cap (\{0\}^q \oplus \mathbb{C}\{t_{q+1}\} \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\{t_p\}) = \{\delta(h) ; \delta \in \text{Der}(-\log C')\}.$$

Preuve. On vérifie que $\text{Der}(-\log C') = \bigcap_{j \in J} \text{Der}(-\log C_j) \subseteq \text{Der}(-\log D)$ (voir [Ale12, §2 Claim 1]). Remarquons que pour tout $g \in \mathcal{I}_C$ il existe $\delta \in \Theta_S$ tel que $\delta(h) = g$ dans \mathcal{O}_C . De plus, $\delta(h)$ induit dans $\mathcal{O}_{\tilde{C}} = \bigoplus_{i=1}^p \mathcal{O}_{\tilde{C}_i}$ l'élément

$$\delta(h) = (h_2 \cdots h_p \delta(h_1), \dots, h_1 \cdots h_{p-1} \delta(h_p)).$$

De plus, $\delta \in \text{Der}(-\log C')$ si et seulement si pour tout $j \in J$, $\delta(h_j) = 0$, ce qui nous donne le résultat annoncé. \square

6.2.3 Torsion des différentielles de Kähler des courbes planes

Soit $D \subseteq (\mathbb{C}^m, 0)$ un germe d'hypersurface défini par une équation réduite h .

On s'intéresse au module de torsion $\text{Tors}(\Omega_D^{m-1})$. On se propose ici de donner le lien entre les formes logarithmiques et la torsion, afin de retrouver dans le cas des courbes planes le résultat de O. Zariski sur la dimension de $\text{Tors}(\Omega_D^1)$ (voir [Zar66]), par une méthode différente de celle proposée par R. Michler (voir [Mic95]). La propriété suivante est prouvée par A.G. Aleksandrov :

Proposition 6.2.8 ([Ale05, Proposition 3.1]). *Pour tout $1 \leq q \leq m$, on a l'isomorphisme de \mathcal{O}_D -modules suivant :*

$$\frac{\Omega^q(\log D)}{\frac{df}{f} \wedge \Omega_{\mathbb{C}^n}^{q-1} + \Omega_{\mathbb{C}^n}^q} \simeq \text{Tors}(\Omega_D^q)$$

donné par $[\omega] \mapsto [h\omega]$.

Preuve. C'est une conséquence de la caractérisation 3. de la proposition 2.1.5. \square

Corollaire 6.2.9. *L'application res_D induit un isomorphisme de \mathcal{O}_D -modules :*

$$\frac{\mathcal{R}_D^{q-1}}{\Omega_D^{q-1}} \simeq \text{Tors}(\Omega_D^q).$$

Preuve. C'est une conséquence de l'isomorphisme $\frac{\Omega^q(\log D)}{\Omega_{\mathbb{C}^n}^q} \simeq \mathcal{R}_D^{q-1}$. \square

Corollaire 6.2.10. *Soit $C \subseteq (\mathbb{C}^2, 0)$ un germe de courbe plane. Alors $\frac{\mathcal{R}_C}{\mathcal{O}_C} \simeq \text{Tors}(\Omega_C^1)$, et donc $\dim_{\mathbb{C}} \text{Tors}(\Omega_C^1) = \tau$, où τ est le nombre de Tjurina.*

Preuve. Par la dualité 2.3.17 et la proposition 5.1.21 on a $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_C / \mathcal{O}_C = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_C / \mathcal{I}_C = \tau$. \square

6.2.4 Calcul des multi-valuations du module des résidus

Nous suggérons dans cette partie différentes méthodes pour déterminer les multi-valuations du module des résidus d'une courbe plane.

Escaliers et valuations

Ce paragraphe reprend le paragraphe 5.2 de [Pol14].

La première méthode que nous proposons est inspirée par [BGM88]. On s'intéresse à la déformation équisingulière d'une courbe plane définie par $h = x^a - y^b$ avec a et b premiers entre eux. Par la symétrie du théorème 5.2.1, déterminer les valuations de \mathcal{R}_C revient à déterminer les valuations de \mathcal{I}_C .

Le semigroupe de C est $\Gamma = \mathbb{N}a + \mathbb{N}b$, et son conducteur est $\gamma = \mu = (a-1)(b-1)$.

Considérons la fonction⁸ H définie ci-dessous, où les s_{ij} sont des constantes complexes.

⁸Il s'agit d'une déformation équisingulière de h , voir définition 6.3.5

$$H_s(x, y) = x^a - y^b + \sum_{\substack{1 \leq i < a-1 \\ 1 \leq j < b-1 \\ ib+ja > ab}} s_{ij} x^i y^j. \quad (6.17)$$

Pour tout s , le semigroupe de la courbe C_s définie par H_s est encore Γ (voir théorème 6.3.7).

Remarque 6.2.11. On pose $\mathcal{J}_s = \mathcal{J}_{C_s}$. On rappelle que d'après la proposition 6.1.3, on a pour tout $s \in B$, $\gamma + (\text{val}(\mathcal{O}_C) \setminus \{0\}) - 1 \subseteq \mathcal{J}_s$. En particulier, le conducteur ν_s de \mathcal{J}_s vérifie $\nu_s \leq 2\gamma - 1$.

Cette partie utilise les résultats de [BGM88].

Notation 6.2.12. Le poids de $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ est $\rho(i, j) = ib + ja$. On définit un ordre monomial sur \mathbb{N}^2 en posant $(i, j) < (i', j')$ si et seulement si $\rho(i, j) < \rho(i', j')$ ou $(\rho(i, j) = \rho(i', j')$ et $i < i')$. De plus, si $F = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j \in \mathbb{C}\{x, y\}$ est non nulle, on note $\exp(F) = \min((i, j), a_{i,j} \neq 0)$ son exposant privilégié, et $\rho(F) := \rho(\exp(F))$.

Définition 6.2.13. On définit pour tout $s \in S$ l'ensemble

$$E(s) = \left\{ \exp(g), g \in \left(H_s, \frac{\partial H_s}{\partial x}, \frac{\partial H_s}{\partial y} \right) \subseteq \mathbb{C}\{x, y\} \right\}$$

des exposants privilégiés pour l'ordre défini ci-dessus. L'escalier de $I_s := \left(H_s, \frac{\partial H_s}{\partial x}, \frac{\partial H_s}{\partial y} \right)$ est alors $\Delta(s) = \mathbb{N}^2 \setminus E(s)$.

On pose $A_{-1}^s = (0, b-1)$ et $A_0^s = (a-1, 0)$. On renvoie à [BGM88] pour les détails de l'algorithme qui permet d'obtenir une suite finie de points $(A_j^s)_{-1 \leq j \leq K_s}$ telle que les A_j^s soient les "sommets" de l'escalier, c'est-à-dire que $E = \bigcup A_j^s + \mathbb{N}^2$, et aucun des A_j^s ne peut être enlevé.

En particulier, $A_j^s \in \{1, \dots, a-1\} \times \{1, \dots, b-1\}$ pour tout $j \in \{1, \dots, K_s\}$.

On définit $\Delta_j^s = \mathbb{N}^2 \setminus \left(\bigcup_{i=-1}^j A_i^s + \mathbb{N}^2 \right)$, et $E_j^s = \Delta_{j-1}^s \setminus \Delta_j^s$. On représente ces ensembles sur le dessin suivant :

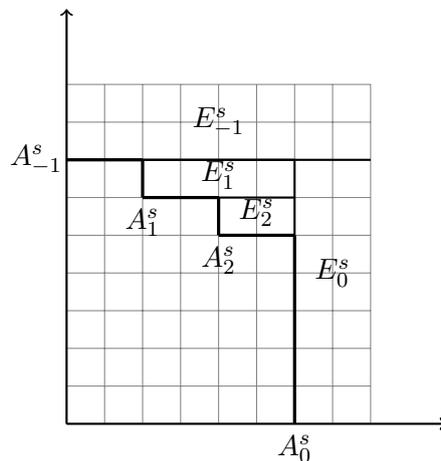


FIGURE 6.1 – Escalier

Dans [BGM88] est donné explicitement l'escalier générique d'une telle fonction $H_s(x, y)$. La figure 6.1 est en fait l'escalier générique de la déformation à μ constant de $x^7 - y^8$.

Pour déterminer les valuations de l'idéal jacobien à partir de l'escalier, nous allons avoir besoin du lemme suivant :

Lemme 6.2.14. Soient $0 \leq i \leq a-1$ et $0 \leq j \leq b-1$ et $(i', j') \in \mathbb{N}^2$ tels que $\rho(i, j) = \rho(i', j')$. Alors $(i, j) = (i', j')$.

Preuve. On a :

$$ib + ja = i'b + j'a \iff (i - i')b = (j' - j)a.$$

Et comme $\text{pgcd}(a, b) = 1$, et $0 \leq i \leq a-1$ et $0 \leq j \leq b-1$, on vérifie qu'on a bien l'égalité. \square

Pour une fonction de la forme (6.17), ce lemme va nous permettre de déterminer entièrement les valuations de \mathcal{J}_s , et donc par symétrie celles du module des résidus.

Proposition 6.2.15. On a l'égalité suivante :

$$\text{val}(\mathcal{J}_s) = \bigcup_{i=-1}^{K_s} (\rho(A_j^s) + \Gamma).$$

Preuve. Commençons par l'inclusion $\bigcup_{i=-1}^{K_s} (\rho(A_j^s) + \Gamma) \subseteq \text{val}(\mathcal{J}_s)$.

Il suffit de montrer que $\rho(A_j^s) \in \text{val}(\mathcal{J}_s)$. Par définition des A_j^s , il existe $F_j \in I_s$, $F_j = a_1H(s) + a_2H'_x(s) + a_3H'_y(s)$ tel que $\exp(F_j) = A_j^s$. Le lemme précédent assure que $\text{val}(\overline{F_j}) = \rho(A_j^s)$, où $\overline{F_j}$ est l'image de F_j dans \mathcal{O}_C . On a donc $\rho(A_j^s) \in \text{val}(\mathcal{J}_s)$.

Réciproquement, soit $F \in I_s$ non nulle et $\overline{F} \in \mathcal{J}_s$ sa classe dans \mathcal{O}_C . Montrons que $\text{val}(F) \in \bigcup_{i=-1}^{K_s} (\rho(A_j^s) + \Gamma)$.

Si $\text{val}(F) = \rho(\exp(F))$, alors comme par définition $\exp(F) \in E$ et $E = \cup A_j^s + \mathbb{N}^2$, on a $\text{val}(F) \in \bigcup_{i=-1}^{K_s} (\rho(A_j^s) + \Gamma)$.

Supposons que $\text{val}(F) > \rho(\exp(F))$. Alors il existe $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ et $(i', j') \in \mathbb{N}^2$ tels que les monômes $x^i y^j$ et $x^{i'} y^{j'}$ apparaissent dans F et ont pour poids $\rho(\exp(F))$.

Notons que $(\rho(A_{-1}^s) + \Gamma) \cup (\rho(A_0^s) + \Gamma) = \gamma + \Gamma^* - 1$, donc si $\text{val}(F) \geq 2\gamma - 1$, $\text{val}(F) \in (\rho(A_{-1}^s) + \Gamma) \cup (\rho(A_0^s) + \Gamma)$. On suppose donc de plus que $\rho(F) < 2\gamma - 1 < 2ab$.

Si $ib + ja = i'b + j'a < 2ab$ avec $i > i'$ alors en particulier $i, i' < 2a$ et $j, j' < 2b$. On a $i = i' + ma$ et $j + mb = j'$ pour un $m \in \mathbb{Z}$. La condition que l'on vient d'énoncer implique que $0 \leq m < 2$. Si $m = 0$ cela signifie que $(i, j) = (i', j')$, et si $m = 1$, $i = i' + a$ et $j' = j + b$, et ce sont les deux seuls monômes de poids $\rho(H)$.

Si ces monômes se compensent dans F , on voit apparaître $\lambda(x^{i'} y^j x^a - x^i y^j y^b)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

$$F = \lambda x^{i'} y^j H + F^{(1)}$$

où $\rho(\exp(F^{(1)})) > \rho(\exp(F))$ et $F^{(1)} \in I_s$, $\text{val}(F) = \text{val}(F^{(1)})$.

On continue jusqu'à trouver ou bien un $F^{(k)}$ tel que $\rho(F^{(k)}) = \text{val}(F^{(k)})$ ou $\rho(F^{(k)}) \geq 2\gamma - 1$.

Ce qui prouve que $\text{val}(F) = \rho(g)$ pour un $g \in I_s$ et donc $\text{val}(F) \in \bigcup_{i=-1}^{K_s} (\rho(A_j^s) + \Gamma)$. \square

Cette propriété combinée à l'algorithme décrit dans [BGM88] permet de calculer les valuations de l'idéal jacobien d'une telle courbe, et par symétrie, les valuations du module des résidus.

Courbe irréductible

On suppose que C est une courbe plane irréductible. Par le théorème 5.2.1 et le corollaire 6.1.4, déterminer les valuations de \mathcal{R}_C revient à déterminer les valuations de \mathcal{J}_C ou de Ω_C^1 .

L'algorithme [HH07, Algorithm 4.10] permet de calculer une base standard du module des différentielles de Kähler de C . Nous nous intéressons au calcul d'une base standard d'un idéal, qui peut être réalisé grâce à l'algorithme de [HH07, Theorem 2.4].

Rappelons le fonctionnement de cet algorithme, que nous utiliserons dans le calcul 6.2.29 des multi-valuations pour deux branches.

On commence par donner quelques définitions.

Définition 6.2.16. Soit $G \subseteq \mathcal{O}_{\tilde{C}}$. Un G -produit est un élément de la forme $\prod_{i=1}^s g_i^{\alpha_i}$ avec $s \in \mathbb{N}$, $\alpha_j \in \mathbb{N}$ et $g_i \in G$.

Définition 6.2.17. Soit $G = \{g_1, \dots, g_s\} \subseteq \mathcal{O}_C$. On dit que G est une base standard de \mathcal{O}_C si pour tout $f \in \mathcal{O}_C$, il existe un G -produit $g = g_1^{\alpha_1} \cdots g_s^{\alpha_s}$ tel que $\text{val}(f) = \text{val}(g)$.

Autrement dit, G est une base standard de \mathcal{O}_C si et seulement si

$$\text{val}(g_1)\mathbb{N} + \cdots + \text{val}(g_s)\mathbb{N} = \text{val}(\mathcal{O}_C).$$

Cette notion se généralise à un idéal fractionnaire $I \subseteq \mathcal{O}_C$:

Définition 6.2.18. Soit $H \subseteq I$, et $G \subseteq \mathcal{O}_C$. On dit que (H, G) est une base standard de I si G est une base standard de \mathcal{O}_C et si pour tout $f \in I$, il existe $\lambda \in H$ et un G -produit g tels que $\text{val}(f) = \text{val}(g) + \text{val}(\lambda)$.

L'algorithme de calcul d'une base standard repose sur les notions suivantes :

Définition 6.2.19 ([HH07, Définition 2.2]). Soit $G \subseteq \mathcal{O}_{\tilde{C}}$. Un S -processus d'un couple $f, f' \in \mathcal{O}_{\tilde{C}}$ au-dessus de G est un élément de la forme $aPf + bQf'$ avec $a, b \in \mathbb{C}$, P et Q des G -produits et si $aPf + bQf' \neq 0$,

$$\text{val}(aPf + bQf') > \min(\text{val}(aPf), \text{val}(bQf')).$$

Remarque 6.2.20. On suppose que $G = \{g_1, \dots, g_s\}$. Déterminer un S -processus au-dessus de G de f et f' revient à résoudre l'équation diophantienne

$$\sum_{i=1}^s \text{val}(g_i) + \text{val}(f) = \sum_{i=1}^s \text{val}(g_i) + \text{val}(f'). \quad (6.18)$$

Un S -processus est dit *minimal* si (α, β) est une solution minimale de l'équation homogène associée à (6.18).

Définition 6.2.21. Soit $f \in \mathcal{O}_{\tilde{C}}$, G une base standard de \mathcal{O}_C , et $H \subseteq \mathcal{O}_{\tilde{C}}$. Une réduction de f modulo (H, G) est un élément $r \in \mathcal{O}_{\tilde{C}}$ tel qu'il existe $a \in \mathbb{C}$, un G -produit g et $\lambda \in H$ tels que $r = f - ag\lambda$ et tel que $\text{val}(r) > \text{val}(f)$ ou $r = 0$.

La réduction est dite finale si la réduction de r modulo (H, G) donne r .

Une réduction finale de $f \in \mathcal{O}_{\tilde{C}}$ modulo (H, G) s'obtient en réduisant successivement les réductions que l'on obtient. Il peut y avoir un nombre infini de réductions.

Soit maintenant I un idéal fractionnaire. L'algorithme de [HH07, Theorem 2.4] fonctionne sous des hypothèses plus générales, mais le cas des idéaux fractionnaires nous suffit. De plus, si c est un majorant du conducteur de I , seuls les S -processus de valuation inférieure sont pertinents (voir [HH01, Section 5.2]). L'algorithme fonctionne de la façon suivante :

Algorithme 6.2.22.

- Soit G une base standard de \mathcal{O}_C , et H_0 une famille génératrice de I . On pose $H_{-1} = \emptyset$.

- Tant que $H_i \neq H_{i-1}$
 - Soit c_i un majorant de $\bigcup_{\lambda \in H_i} \text{val}(\lambda) + \text{val}(\mathcal{O}_C)$.
 - Soit \mathcal{S} l'ensemble des S -processus s minimaux de H_i au-dessus de G non calculés à l'étape précédente, et ne faisant intervenir que des éléments de H_i de valuations inférieures ou égales à $c_i - 2$.
 - Soit \mathcal{R} l'ensemble des réductions finales non nulles modulo (G, H_i) des éléments de \mathcal{S} .
 - On pose $H_{i+1} = H_i \cup \mathcal{R}$ et $i = i + 1$.

On obtient en sortie une base standard (H, G) de I .

Remarque 6.2.23. Le calcul d'une base standard de \mathcal{O}_C repose sur le même principe (voir [HH07, Algorithm 3.2] ou [HH01, Section 5.2]).

Dans le cas d'une courbe plane irréductible, on peut choisir une famille génératrice particulière de \mathcal{R}_C :

Proposition 6.2.24. *Soit C une courbe plane singulière. On pose $v_1 = \inf(\text{val}(\mathcal{R}_C))$ et $v_2 = \inf(\text{val}(\mathcal{R}_C \setminus (v_1 + \text{val}(\mathcal{O}_C)))$. Il existe une famille génératrice minimale (ρ_1, ρ_2) de \mathcal{R}_C telle que pour $i = 1, 2$:*

$$\rho_i = t^{v_i} + \sum_{\substack{j > v_i \\ j \notin \text{val}(\mathcal{R}_C)}} a_j^{(i)} t^j \quad a_j^{(i)} \in \mathbb{C}.$$

Preuve. Comme C est singulière, par la proposition 2.3.13, le nombre minimal de générateurs est au moins deux. Comme C est plane, $\Omega^1(\log C)$ est libre de rang deux donc une famille génératrice minimale de \mathcal{R}_C a deux éléments $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2$. Comme $v_1 = \inf(\text{val}(\mathcal{R}_C))$, il s'agit de la valuation de $\tilde{\rho}_1$ ou de $\tilde{\rho}_2$. On suppose par exemple que $\text{val}(\tilde{\rho}_1) = v_1$. Quitte à remplacer $\tilde{\rho}_2$ par un élément de la forme $\tilde{\rho}_2 - \alpha \rho_1$, on peut supposer que $\text{val}(\tilde{\rho}_2) \notin v_1 + \text{val}(\mathcal{O}_C)$, ce qui implique $\text{val}(\tilde{\rho}_2) = v_2$. Grâce à des combinaisons linéaires convenables de $\tilde{\rho}_1$ et $\tilde{\rho}_2$, et en utilisant l'inclusion $\mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq \mathcal{R}_C$, on construit une famille génératrice de la forme voulue. \square

Courbe à deux branches

Soit $C = C_1 \cup C_2$ une courbe plane à deux branches définie par une équation réduite $h = h_1 h_2$. L'algorithme de [HH07] fonctionne pour les courbes irréductibles, pour lesquelles les ensembles de valuations sont totalement ordonnés. Il ne se généralise pas tel quel aux courbes réductibles, pour lesquelles les multi-valuations ne sont pas totalement ordonnées.

Notation 6.2.25. On note $\mathbb{Z}_- = \{v \in \mathbb{Z} ; v \leq 0\}$, et $\mathbb{Z}_-^2 = \{v \in \mathbb{Z}^2 ; v \leq 0\}$.

On propose un algorithme qui permet de déterminer les multi-valuations du module des résidus d'une courbe plane à deux branches, et qui est nettement plus technique que dans le cas irréductible. De plus, cet algorithme ne semble pas pouvoir se généraliser à des courbes à trois branches ou plus.

Un exemple illustrant cet algorithme est développé dans le paragraphe 6.2.4. La proposition 5.1.15 et l'inclusion $\mathcal{O}_{\tilde{C}} \subseteq \mathcal{R}_C$ nous assurent que l'ensemble des multi-valuations de \mathcal{R}_C est déterminé par $\text{val}(\mathcal{R}_C) \cap \mathbb{Z}_-^2$.

Le but de notre algorithme est de calculer $\text{val}(\mathcal{R}_C) \cap \mathbb{Z}_-^2$.

On note $\varphi_i = (x_i(t_i), y_i(t_i))$ un paramétrage de la branche C_i .

Remarque 6.2.26. Soit $I = (g_1, \dots, g_q)$ est un idéal de \mathcal{O}_C . On lui associe le $\mathbb{C}\{x_1(t_1), y_1(t_1)\}$ -module $\bar{I} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_q) \subseteq \mathbb{C}\{t_1\}$, où $\bar{g}_i = g_i \circ \varphi_1$. L'algorithme 6.2.22 appliqué à \bar{I} donne une base standard (\bar{H}_1, \bar{G}_1) de \bar{I} . Cet algorithme est basé sur la notion de S -processus (voir définition 6.2.19), de sorte que l'on peut simultanément calculer une famille (H_1, G_1) dans \mathcal{O}_C telle que l'image de G_1 (respectivement H_1) dans $\mathbb{C}\{t_1\}$ est \bar{G}_1 (respectivement \bar{H}_1).

Notation 6.2.27. On note $\mathbb{Z}_- = \{v \in \mathbb{Z} ; v \leq 0\}$, et $\mathbb{Z}_-^2 = \{v \in \mathbb{Z}^2 ; v \leq 0\}$.

Remarque 6.2.28. Pour les calculs nécessitant de considérer un idéal de \mathcal{O}_C , on peut multiplier l'ensemble des résidus de C_1, C_2 et C par le même élément $g \in (h'_x, h'_y)$ induisant un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C .

Algorithme 6.2.29.

Première étape

Pour cette première étape, on utilise plusieurs fois l'algorithme 6.2.22 et la remarque 6.2.26 qui permettent de réaliser les calculs le long d'une branche, tout en considérant des éléments de \mathcal{M}_C .

- On détermine des familles $G_1, R_1 \subseteq \mathcal{M}_C$ telles que (R_1, G_1) est une base standard de \mathcal{R}_{C_1} .
- On détermine des familles $G_2, R_2 \subseteq \mathcal{M}_C$ telles que (R_2, G_2) est une base standard de \mathcal{R}_{C_2} .
- On détermine une famille $R \subseteq \mathcal{R}_C$ telle que (R, G_1) est une base standard de $\mathcal{R}_C|_{C_1}$.
- On pose $q = \inf(\text{val}_1(\mathcal{R}_C))$.

Deuxième étape

Initialisation : On définit $\mathcal{E}_0 = \{(0, v_2) ; v_2 \in \text{val}_2(\mathcal{R}_{C_2}) \cap \mathbb{Z}_-\}$, $H_0 = R_2$ et $k = 0$.

Réurrence : Tant que $k \leq q$:

- si $-k \notin \text{val}_1(\mathcal{R}_C)$ on définit :
 - $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k-1}$
 - $H_k = H_{k-1}$
- si $-k \in \text{val}_1(\mathcal{R}_C) \cap \text{val}_1(\mathcal{R}_{C_1})$, on définit :
 - $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k-1} \cup \{(-k, v_2) ; v_2 \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1})\}$
 - $H_k = H_{k-1}$
- si $-k \in \text{val}_1(\mathcal{R}_C)$ mais $-k \notin \text{val}_1(\mathcal{R}_{C_1})$, il existe un G_1 -produit g_1 et $\rho \in R$ tels que $\text{val}_1(g_1\rho) = -k$. On pose $w_2 = \text{val}_2(g_1\rho)$.
 - si $w_2 \notin \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1})$, on définit :
 - * $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k-1} \cup \{(-k, w_2)\} \cup \{(-k, v_2) ; v_2 \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1}) \text{ et } v_2 \leq w_2\}$
 - * $H_k = H_{k-1} \cup \{g_1\rho\}$
 - si $w_2 \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1})$, on considère un G_2 -produit g_2 et $\rho' \in H_{k-1}$ tels que $\text{val}_2(g_1\rho - g_2\rho') = (-k, w'_2)$ avec $w'_2 \notin \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1})$.
 - * $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}_{k-1} \cup \{(-k, w'_2)\} \cup \{(-k, v_2) ; v_2 \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1}) \text{ et } v_2 \leq w'_2\}$
 - * $H_k = H_{k-1} \cup \{g_1\rho - g_2\rho'\}$

Alors $\text{val}(\mathcal{R}_C) = \mathcal{E}_q \cup \{v \in \mathbb{Z}^2 ; \inf(v, 0) \in \mathcal{E}_q\}$ et pour tout $v \in \mathcal{E}_q$, il existe un G_1 -produit $g_1, \rho_1 \in R$, un G_2 -produit g_2 et $\rho_2 \in H_q$ tels que $\text{val}(g_1\rho_1 + g_2\rho_2) = v$.

Preuve. On commence par remarquer qu'étant donné que (R, G_1) est une base standard de $\mathcal{R}_C|_{C_1}$, pour tout $v_1 \in \text{val}_1(\mathcal{R}_C)$, il existe un G_1 -produit g_1 et un élément $\rho \in R$ tels que $\text{val}_1(g_1\rho) = v_1$.

D'après le corollaire 6.2.5, $\mathcal{E}_0 = \text{val}(\mathcal{R}_C) \cap (\{0\} \times \mathbb{Z}_-)$.

Supposons que pour $k \in \mathbb{N}^*$ on a construit des ensembles \mathcal{E}_{k-1} et $H_{k-1} \subseteq \mathcal{R}_C$ tels que

$$\mathcal{E}_{k-1} = \{(v_1, v_2) \in \text{val}(\mathcal{R}_C) ; -k + 1 \leq v_1 \leq 0 \text{ et } v_2 \leq 0\}$$

et tels que pour tout $v \in \mathcal{E}_{k-1}$, il existe un G_1 -produit $g_1, \rho_1 \in R$, un G_2 -produit g_2 et $\rho_2 \in H_{k-1}$ tels que $v = \text{val}(g_1\rho_1 + g_2\rho_2)$.

- Si $-k \notin \text{val}_1(\mathcal{R}_C)$, $\{v \in \text{val}(\mathcal{R}_C) ; v_1 = -k\} = \emptyset$
- Si $-k \in \text{val}_1(\mathcal{R}_C) \cap \text{val}_1(\mathcal{R}_{C_1})$, cela signifie que $(-k, \infty) \in \overline{\text{val}(\mathcal{R}_C)}$, ce qui est équivalent à $(-k, 0) \in \text{val}(\mathcal{R}_C)$ par la proposition 5.1.15. Par la proposition 5.1.12, on a

$$\mathcal{E}_k \supseteq \mathcal{E}_{k-1} \cup \{(-k, v_2) ; v_2 \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1})\}. \quad (6.19)$$

De plus, par la proposition 5.1.13, si $(-k, v_2) \in \text{val}(\mathcal{R}_C)$ avec $v_2 < 0$, alors il existe $v_1 > -k$ tel que $(v_1, v_2) \in \text{val}(\mathcal{R}_C)$. Grâce à la proposition 5.1.12, comme $(0, 0) \in \text{val}(\mathcal{R}_C)$, on peut de plus supposer que $v_1 \leq 0$. On a donc $v_2 \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1})$. Par conséquent, l'inclusion (6.19) est une égalité.

- Supposons que $-k \in \text{val}_1(\mathcal{R}_C)$ mais $-k \notin \text{val}_1(\mathcal{R}_{C_1})$. Cela signifie qu'il existe un élément ρ dans \mathcal{R}_C tel que $\text{val}_1(\rho) = -k$. De plus, d'après la proposition 6.2.4, $\text{val}_2(\rho) < 0$. Vu que (R, G_1) est une base standard de $\mathcal{R}_C|_{C_1}$, il existe un G_1 -produit g_1 et ρ_1 tels que $\text{val}(g_1\rho_1) = \text{val}(\rho) = (-k, w_2)$.

– Supposons que $w_2 \notin \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1})$. Alors

$$\mathcal{E}_k \supseteq \mathcal{E}_{k-1} \cup \{(-k, w_2)\} \cup \{(-k, v_2) ; v_2 \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1}) \text{ et } v_2 \leq w_2\}. \quad (6.20)$$

Supposons qu'il existe $w'_2 < 0$ tel que $(-k, w'_2) \in \text{val}(\mathcal{R}_C)$ et $w_2 \neq w'_2$. Alors par la proposition 5.1.13, il existe un élément $\alpha \in \text{val}(\mathcal{R}_C)$ avec $\alpha_1 > -k$ et $\alpha_2 = \inf(w_2, w'_2)$. Par conséquent, $\alpha_2 \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1})$, et donc $\inf(w_2, w'_2) = w'_2 \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1})$. On en déduit que l'inclusion (6.20) est une égalité.

- Supposons que $w_2 \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1})$. Il existe donc $\alpha \in \text{val}(\mathcal{R}_C)$ avec $\alpha_1 > -k$ et $\alpha_2 = w_2$. Comme $-k \notin \text{val}_1(\mathcal{R}_{C_1})$, cela implique par la proposition 6.2.4 que pour tout $w' \geq 0$, $(-k, w') \notin \text{val}(\mathcal{R}_C)$. Par la proposition 5.1.13 appliquée à α et $(-k, w_2)$, on en déduit l'existence d'un élément $(-k, w)$ avec $0 > w > w_2$. Si $w \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{k-1})$, on utilise de nouveau et autant de fois que nécessaire la proposition 5.1.13, jusqu'à obtenir un élément $(-k, w'_2) \in \text{val}(\mathcal{R}_C)$ tel que $w'_2 \notin \mathcal{E}_{k-1}$, et $w'_2 < 0$. On se ramène alors au cas précédent.

La conclusion finale sur $\text{val}(\mathcal{R}_C)$ vient de la proposition 5.1.15. □

Exemple

On considère la courbe plane à deux branches définie par $h(x, y) = (y^a - x^b)(y^b - x^a)$ avec a et b premiers entre eux, et $b > a$. On vérifie à l'aide du critère de Saito 2.2.8 qu'une base de $\Omega^1(\log C)$ est :

$$\omega_1 = \frac{(-a^2 y^a + b^2 x^{b-a} y^b - (b^2 - a^2) x^b) dx - (ab(x^{b-a+1} y^{b-1} - xy^{a-1})) dy}{h}$$

$$\omega_2 = \frac{- (ab(x^{b-1} y^{b-a+1} - x^{a-1} y)) dx + (-a^2 x^a + b^2 x^b y^{b-a} - (b^2 - a^2) y^b) dy}{h}$$

On remarque que $h'_y = ay^{a-1}(y^b - x^a) + by^{b-1}(y^a - x^b)$ est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_C . Une famille génératrice du module des résidus est donc :

$$\rho_1 = \text{res}_C(\omega_1) = -\frac{ab(x^{b-a+1} y^{b-1} - xy^{a-1})}{h'_y}$$

$$\rho_2 = \text{res}_C(\omega_2) = \frac{-a^2 x^a + b^2 x^b y^{b-a} - (b^2 - a^2) y^b}{h'_y}$$

Un paramétrage de la courbe est donné par $x = (t_1^a, t_2^b)$, $y = (t_1^b, t_2^a)$, le conducteur de chacune des branches est $c_1 = c_2 = (a-1)(b-1)$.

Afin d'utiliser l'algorithme 6.2.29, nous fixons $a = 3$ et $b = 5$. On pose $h_1 = y^3 - x^5$ et $h_2 = y^5 - x^3$.

Première étape

- Comme $h'_y|_{C_1} = h_2 \frac{\partial h_1}{\partial y}$, on vérifie que \mathcal{R}_{C_1} est engendré par $\rho_{11} = 1$ et $\rho_{12} = \frac{h_2(-3x)}{h'_y}$. On vérifie que $((\rho_{11}, \rho_{12}), (x, y))$ est une base standard de \mathcal{R}_{C_1} . En particulier, $\text{val}_1(\mathcal{R}_{C_1}) = \{-7, -4, -2, -1\} \cup \mathbb{N}$.
- De même, en posant $\rho_{21} = 1$ et $\rho_{22} = \frac{h_1(-5x)}{h'_y}$, on vérifie que $((\rho_{21}, \rho_{22}), (x, y))$ est une base standard de \mathcal{R}_{C_2} . En particulier, $\text{val}_2(\mathcal{R}_{C_2}) = \{-7, -4, -2, -1\} \cup \mathbb{N}$.
- Les restrictions de ρ_1 et ρ_2 à la première branche donnent :

$$\rho_1|_{C_1} = -\frac{15t_1^{13}(t_1^{16} - 1)}{3t_1^{10}(t_1^{25} - t_1^9)} = -\frac{5}{t_1^6}$$

$$\rho_2|_{C_2} = \frac{9(t_1^{25} - t_1^9)}{3t_1^{10}(t_1^{25} - t_1^9)} = \frac{3}{t_1^{10}}$$

Comme $(x = t^3, y = t^5)$ est une base standard de \mathcal{O}_{C_1} , on en déduit que

$$\text{val}_1(\mathcal{R}_C) = \{-10, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1\} \cup \mathbb{N}.$$

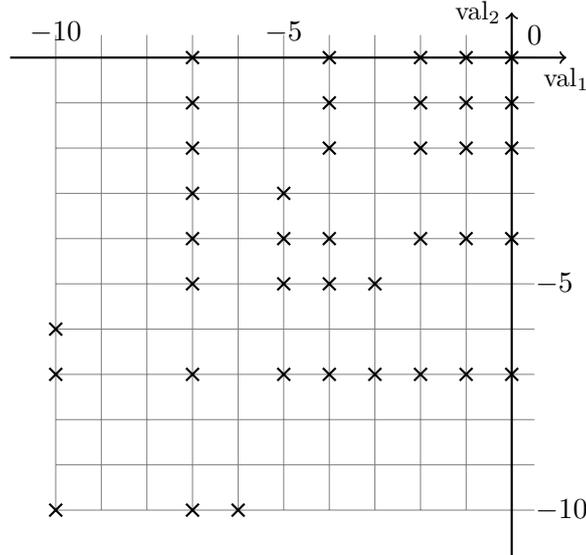
En particulier, $((x, y), (\rho_1, \rho_2))$ est une base standard de $\mathcal{R}_C|_{C_1}$.

Remarque 6.2.30. Nous aurons aussi besoin des restrictions de ρ_1 et ρ_2 le long de la deuxième branche. Dans $\mathcal{M}_C = \mathcal{M}_{C_1} \oplus \mathcal{M}_{C_2}$, on a : $\rho_1 = \left(\frac{-5}{t_1^6}, \frac{3}{t_2^{10}}\right)$ et $\rho_2 = \left(\frac{3}{t_1^{10}}, \frac{-5}{t_2^6}\right)$.

Deuxième étape

On pose $\mathcal{E}_0 = \{(0, -7), (0, -4), (0, -2), (0, -1), (0, 0)\}$ et $H_0 = (\rho_{21}, \rho_{22})$.

- Comme $-1 \in \text{val}_1(\mathcal{R}_{C_1})$, on a $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 \cup \{(-1, v) ; v \in \text{val}_2(\mathcal{E}_0)\}$ et $H_1 = H_0$.
- De même, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \cup \{(-2, v) ; v \in \text{val}_2(\mathcal{E}_1)\}$ et $H_2 = H_1$.

FIGURE 6.2 – Multi-valuations de \mathcal{R}_C

- On a $-3 \in \text{val}_1(\mathcal{R}_C)$ mais $-3 \notin \text{val}_1(\mathcal{R}_{C_1})$. On a $\text{val}(x\rho_1) = (-3, -5)$. Comme $-5 \notin \text{val}_2(\mathcal{E}_2)$, on a : $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_{-2} \cup \{(-3, -5)\} \cup \{(-3, -7)\}$ et $H_3 = H_2 \cup \{x\rho_1\}$.

En continuant de la même manière, on obtient :

- $\mathcal{E}_{-4} = \mathcal{E}_{-3} \cup \{(-4, v_2) ; v_2 \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{-3})\}$ et $H_4 = H_3$
- $\mathcal{E}_{-5} = \mathcal{E}_{-4} \cup \{(-5, -3)\} \cup \{(-5, -4)\} \cup \{(-5, -5)\} \cup \{(-5, -7)\}$ et $H_5 = H_4 \cup \{y\rho_2\}$
- $\mathcal{E}_{-6} = \mathcal{E}_{-5} \cup \{(-6, -10)\}$ et $H_6 = H_5 \cup \{\rho_1\}$
- $\mathcal{E}_{-7} = \mathcal{E}_{-6} \cup \{(-7, v_2) ; v_2 \in \text{val}_2(\mathcal{E}_{-6})\}$ et $H_7 = H_6$
- $\mathcal{E}_{-8} = \mathcal{E}_{-7}$ et $H_8 = H_7$
- $\mathcal{E}_{-9} = \mathcal{E}_{-8}$ et $H_9 = H_8$
- $\mathcal{E}_{-10} = \mathcal{E}_{-9} \cup \{(-10, -6)\} \cup \{(-10, -7)\} \cup \{(-10, -10)\}$ et $H_{10} = H_9 \cup \{\rho_2\}$.

Cela nous donne la figure 6.2.

6.3 Résidus logarithmiques des courbes planes et déformations équisingulières

Notre objectif est d'étudier le comportement des multi-valuations du module des résidus logarithmiques dans le cadre d'une déformation équisingulière de courbe plane. On commence par rappeler des résultats concernant les déformations équisingulières et les déformations "admissibles". Ce paragraphe reprend les résultats de [Pol15b, §4].

Définition 6.3.1 ([dJP00, Définition 10.1.1]). *Soit C une courbe plane définie dans un voisinage U de l'origine de \mathbb{C}^2 par une équation réduite $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(U)$. Soit $q \in \mathbb{N}$ et $(B, 0) = (\mathbb{C}^q, 0)$. Une déformation H de h de base B est une fonction $H(x, y, s) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \hat{\otimes} \mathcal{O}_B$ qui satisfait $H(x, y, 0) = h(x, y)$.*

Notation 6.3.2. Soit $X = U \times B$, $\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} \hat{\otimes} \mathcal{O}_B$, $W = H^{-1}(0) \subseteq U \times B$. On suppose que pour tout $s \in B$, $H(0, 0, s) = 0$. Pour $s \in B$, on pose $C_s = W \cap (\mathbb{C}^2 \times \{s\})$ and $\mathfrak{m}_{B,s}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{B,s}$, et $H_s = H(\cdot, \cdot, s)$. En particulier, $C_0 = C$ et $H_0 = h$.

6.3.1 Déformations équisingulières de courbes planes

Les invariants du paragraphe 6.1.2 s'expriment de la façon suivante dans le cas des courbes planes.

Définition 6.3.3. Soit C une courbe plane définie par une équation réduite $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$.

- Le nombre de Milnor de h est $\mu(h) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\}/(h'_x, h'_y)$.
- Le nombre de Tjurina de h est $\tau(h) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\}/(h'_x, h'_y, h)$.
- Le delta-invariant de h est $\delta(h) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\tilde{C}}/\mathcal{O}_C$.

L'égalité entre $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}\{x, y\}/(h'_x, h'_y)$ et $\dim_{\mathbb{C}} \Omega_C^1/d\mathcal{O}_C$ est prouvée dans [Gre75, Proposition 5.1], en utilisant le fait que $\mu = \dim_{\mathbb{C}} H^1(C_t, \mathbb{C})$ où C_t est la fibre de Milnor de C (voir [Mil68]).

Remarque 6.3.4. Les inégalités $\tau(h) \leq \mu(h)$ et $\delta(h) \leq \mu(h)$ sont toujours satisfaites. De plus, l'égalité $\tau(h) = \mu(h)$ caractérise les courbes quasi-homogènes. En effet, si $\tau(h) = \mu(h)$, cela signifie que $h \in (h'_x, h'_y)$, et donc par [Sai71], cela implique que C est quasi-homogène.

Définition 6.3.5. Soit H une déformation de h de base B . On dit que H est une déformation équisingulière de h si pour tout $s \in B$, les courbes C_s et C sont homéomorphes.

Notation 6.3.6. Si C_1 et C_2 sont deux courbes irréductibles de \mathbb{C}^2 , on note $(C_1.C_2)$ la multiplicité d'intersection de C_1 avec C_2 . Si val_1 désigne la valuation le long de C_1 et si h_2 est une équation réduite de C_2 , on a $(C_1.C_2) = \text{val}_1(h_2)$ (voir [dJP00, Lemma 5.1.5]).

On rappelle ici quelques résultats concernant les déformations équisingulières.

THÉORÈME 6.3.7 (Théorème d'équisingularité pour les courbes planes, [Tei77, §3.7]).

On conserve les notations de la définition 6.3.1 et de la notation 6.3.2. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. La déformation H est équisingulière.
2. Toutes les fibres $(C_s, 0)$ ont le même nombre de Milnor.
3. Le delta-invariant de $(C_s, 0)$ est égal au delta-invariant de $(C, 0)$, et le nombre de branches de C_s est indépendant de s .
4. Soit $n : \tilde{W} \rightarrow W$ une normalisation de W . La composée $q : \tilde{W} \xrightarrow{n} W \rightarrow B$ est une submersion d'espaces non singuliers dans un voisinage de $n^{-1}(0)$, n induit la normalisation $\tilde{W}_s = \tilde{C}_s \rightarrow C_s$ pour tout s , et $q : (n^{-1}(0 \times B))_{\text{red}} \rightarrow B$ est un revêtement de degré p de B .
5. Pour tout s_1, s_2 dans un voisinage de zéro, il existe une bijection b entre l'ensemble des branches de C_{s_1} et celles de C_{s_2} telle que si $C_{s_1, i}$ est une branche de C_{s_1} alors $b(C_{s_1, i})$ a le même semigroupe que $C_{s_1, i}$, et les multiplicités d'intersection en 0 ($b(C_{s_1, i}).b(C_{s_1, j})$) et $(C_{s_1, i}.C_{s_1, j})$ sont égales.

En particulier, pour une déformation à μ constant, le troisième point du Théorème 6.3.7 assure que le paramétrage se déforme, ce qui nous permet de regarder comment évoluent les multi-valuations de l'idéal jacobien dans la déformation, et par symétrie, l'évolution des multi-valuations du module des résidus. On note $\text{val}_{C_s}(g)$ la multi-valuation d'un élément $g \in \mathcal{M}_{C_s}$ le long de C_s , ou simplement $\text{val}(g)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Une caractérisation de l'équivalence topologique est aussi donnée par l'intermédiaire du semigroupe de la courbe.

THÉORÈME 6.3.8 ([Zar86] et [Wal72]). *Deux courbes planes réduites et éventuellement réductibles sont homéomorphes si et seulement si elles ont même semigroupe.*

Ce théorème a en particulier les conséquences suivantes :

Corollaire 6.3.9. *Si H_s est une déformation équisingulière de h , alors toutes les fibres C_s ont même conducteur.*

Soit $x(t, s) = (x_1(t_1, s), \dots, x_p(t_p, s))$, $y(t, s) = (y_1(t_1, s), \dots, y_p(t_p, s))$ un paramétrage de C_s . On rappelle que pour $v, w \in \mathbb{Z}^p$, on note $\inf(v, w) = (\min(v_1, w_1), \dots, \min(v_p, w_p))$.

Pour tout $s \in B$,

$$\inf(\text{val}_{C_s}(x(t, s)), \text{val}_{C_s}(y(t, s))) = \inf(\text{val}_C(x(t, 0)), \text{val}_C(y(t, 0))) = (m^{(1)}, \dots, m^{(p)})$$

où $m^{(j)}$ est la multiplicité de la composante C_j de C .

La proposition suivante nous fournit un dénominateur pour les résidus dont la multi-valuation ne dépend pas de s , ce qui nous sera utile dans la suite.

Proposition 6.3.10. *Il existe des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ telles que pour tout s dans un voisinage de 0, $\text{val}(\alpha H'_x(s) + \beta H'_y(s)) = \gamma + (m^{(1)}, \dots, m^{(p)}) - 1$. En particulier, $\alpha H'_x(s) + \beta H'_y(s)$ est un non diviseur de zéro de \mathcal{O}_{C_s} dont la multi-valuation ne dépend pas de s .*

Preuve. Soit $(L, 0) \subseteq (\mathbb{C}^2, 0)$ une droite tangente à aucune des composantes de C .

On considère le changement de coordonnées suivant, où $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2$ sont des constantes complexes telles que $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$:

$$\begin{cases} x = \alpha_1 u + \alpha_2 v \\ y = \beta_1 u + \beta_2 v \end{cases}$$

et tel que de plus L soit définie par $u = 0$ dans le système de coordonnées (u, v) . Comme L est transverse à chacune des composantes de C , la multiplicité $m^{(j)}$ de la courbe C_j est donnée par la multiplicité d'intersection (C_j, L) . De plus, la déformation étant à μ constant, le corollaire 6.3.9 implique que la multiplicité de $C_{s,j}$ pour s voisin de 0 est indépendante de s . Alors pour s voisin de 0, la droite L reste transverse à $C_{s,j}$. En effet, comme $u = 0$ est transverse à toutes les composantes de C_0 , par le Théorème de préparation de Weierstrass, il existe une unité $g(u, v, s)$ telle que $H(u, v, s) = g(u, v, s)(v^n + a_1(u, s)v^{n-1} + \dots + a_n(u, s))$ avec $a_i(0, 0) = 0$ pour tout i , et $n = m^{(1)} + \dots + m^{(p)}$. Par conséquent, pour s assez petit, la valuation en v de $H(0, v, s)$ est inférieure ou égale à n , mais comme les multiplicités des branches restent inchangées, elle ne peut pas diminuer, et est donc égale à n .

En particulier, la multiplicité d'intersection de $C_{s,j}$ avec L donne $m^{(j)}$. On en déduit que pour tout s , $\text{val}_{C_s}(u) = (m^{(1)}, \dots, m^{(p)})$. De plus, d'après le corollaire 6.3.9, le conducteur de C_s ne dépend pas de s et donc par le lemme 6.2.2, la multi-valuation de $\frac{\partial H_s}{\partial v}$ est $\gamma + (m^{(1)}, \dots, m^{(p)}) - 1$ qui ne dépend pas de s . En revenant aux coordonnées initiales cela signifie que $\text{val}\left(\alpha_2 \frac{\partial H_s}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial H_s}{\partial y}\right) = \gamma + (m^{(1)}, \dots, m^{(p)}) - 1$ est indépendante de s , et en particulier ce n'est pas un diviseur de zéro de \mathcal{O}_{C_s} pour tout s . \square

6.3.2 Déformations admissibles de courbes planes

La condition d'équisingularité permet d'avoir une déformation du paramétrage de la courbe par le théorème 6.3.7, mais elle ne suffit pas à obtenir une déformation $(\rho_1(s), \rho_2(s))$ d'une famille génératrice de \mathcal{R}_C telle que pour tout $s \in B$, $(\rho_1(s), \rho_2(s))$ engendre \mathcal{R}_{C_s} . Cela traduit le fait que l'équisingularité n'est pas le "bon" foncteur de déformation pour les diviseurs libres. Un foncteur de déformation adapté aux diviseurs libres est proposé par M. Torielli dans [Tor13].

Avant de donner la définition de M. Torielli, on introduit la notation suivante :

Notation 6.3.11 ([[Tor13](#), [Definitions 2.21, 2.22](#)]). Soit B un espace analytique complexe. On note $\Theta_{\mathbb{C}^m \times B/B}$ le module des champs de vecteurs holomorphes sur $\mathbb{C}^m \times B$ qui n'ont pas de composantes dans la direction de B . Autrement dit, un élément $\delta \in \Theta_{\mathbb{C}^m \times B/B}$ s'écrit sous la forme $\delta = \sum_{i=1}^m a_i(x, s) \partial_{x_i}$, avec $x \in \mathbb{C}^m$ et $s \in B$.

Soit $D \subset \mathbb{C}^m \times B$ une hypersurface. On pose :

$$\text{Der}(-\log D/B) = \left\{ \delta \in \text{Der}(-\log D) ; \delta \in \Theta_{\mathbb{C}^m \times B/B} \right\}.$$

Définition 6.3.12 ([[Tor13](#), [Definition 3.1](#)]). Soit $D \subseteq (\mathbb{C}^m, 0)$ un germe de diviseur libre, et (B, s_0) un germe d'espace complexe. Une déformation admissible de D est la donnée d'un espace complexe $(W, x_0) \subseteq (\mathbb{C}^m \times B, (0, s_0))$, d'un morphisme plat $\varphi : (W, x_0) \rightarrow (B, s_0)$ tels que D est isomorphe à $W_{s_0} = \varphi^{-1}(s_0)$, et

$$\text{Der}(-\log W/B) / \mathfrak{m}_{B, s_0} \text{Der}(-\log W/B) = \text{Der}(-\log D)$$

où \mathfrak{m}_{B, s_0} est l'idéal maximal de \mathcal{O}_{B, s_0} .

Proposition 6.3.13. Soit $D \subseteq (\mathbb{C}^m, 0)$ un diviseur libre d'équation réduite h . Une déformation H de h de base (B, s_0) est une déformation admissible de D si et seulement si le \mathcal{O}_{B, s_0} -module $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^m \times B, (0, s_0)}$ est plat.

Preuve. D'après [[Tor13](#), [Proposition 3.7](#)], une déformation admissible induit une déformation plate du lieu singulier, ce qui nous donne un des sens de l'équivalence. Il reste donc à montrer que si on a une déformation plate du lieu singulier, alors cette déformation est admissible. On utilise le théorème 1.91 de [[GLS07](#)], qui assure que les relations entre h, h'_x, h'_y se relèvent en des relations entre H, H'_x, H'_y . \square

La proposition suivante donne une déformation admissible en terme de nombre de Tjurina pour les courbes planes. On reprend les notations de la définition [6.3.1](#) et de la notation [6.3.2](#). Pour un point $p = (q, s) \in W_s$ on note τ_p le nombre de Tjurina de la courbe C_s définie par H_s au point p . On pose τ_0 le nombre de Tjurina de C à l'origine.

Proposition 6.3.14. Soit H une déformation de $h \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(U)$ de base B telle que pour tout $s \in B$, $\sum_{p \in \text{Sing}(C_s)} \tau_p = \tau_0$. Alors H est une déformation admissible de h .

Preuve. On pose π la restriction de la surjection canonique $\mathbb{C}^2 \times B \rightarrow B$ au lieu singulier relatif⁹ de W sur B , qui est un morphisme fini. On pose $\mathcal{F} = \pi_* \left(\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2 \times S} / (H, H'_x, H'_y) \right)$. Alors $\mathcal{F}_s / \mathfrak{m}_{B, s} \mathcal{F}_s = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2} / \left(H_s, \frac{\partial H_s}{\partial x}, \frac{\partial H_s}{\partial y} \right)$, qui est par hypothèse un espace vectoriel de dimension τ_0 . La proposition est alors une conséquence directe de [[GLS07](#), [Theorem 1.81](#)]. \square

Proposition 6.3.15 ([[Tor13](#), [Lemma 3.22](#)]). Soit $H(x, y, s)$ une déformation équisingulière et admissible de base B de la courbe plane C définie par h . Soit (δ_1, δ_2) une base du module des champs de vecteurs logarithmiques le long de C . Alors on peut les étendre en des champs de vecteurs logarithmiques relatifs $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2 \in \left(\Theta_{U \times B/B} \right) / \left(\mathfrak{m}_B \Theta_{U \times B/B} \right)$ de H . Alors pour s dans un voisinage de $s_0 \in B$, $(\tilde{\delta}_1(s), \tilde{\delta}_2(s))$ est une base de $\text{Der}(-\log C_s)$.

Preuve. Les champs de vecteur δ_1, δ_2 induisent des relations entre h, h'_x et h'_y . On les relève donc par platitude en des relations entre H, H'_x et H'_y .

Comme $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$ sont des champs de vecteurs logarithmiques relatifs, ils sont tangents aux fibres C_s et donc leur déterminant relatif s'annule sur C_s . Par conséquent, H divise $\det(\tilde{\delta}_1(s), \tilde{\delta}_2(s))$, vue comme fonction de (x, y, s) . Il existe donc une fonction $U(x, y, s)$ tel que sur un voisinage de $(s_0, 0, 0) \in B \times \mathbb{C}^2$, $\det(\tilde{\delta}_1(s), \tilde{\delta}_2(s)) = U(x, y, s)H(x, y, s)$ et $U(x, y, s_0)$ est inversible. Donc U est inversible sur un voisinage de $(s_0, 0, 0)$, ce qui donne le résultat. \square

⁹Il s'agit des points pour lesquels les dérivées H'_x et H'_y sont nuls.

Corollaire 6.3.16. *Soit pour $i \in \{1, 2\}$, $\tilde{\delta}_i = A_i(x, y, s)\partial_x + B_i(x, y, s)\partial_y$ comme dans la proposition 6.3.15. Grâce à la dualité entre $\text{Der}(-\log C_s)$ et $\Omega^1(\log C_s)$, on en déduit que les résidus :*

$$\begin{cases} \text{res}(\tilde{\omega}_1)(s) = \frac{-\beta A_2(s) + \alpha B_2(s)}{\alpha F'_x(s) + \beta F'_y(s)} \\ \text{res}(\tilde{\omega}_2)(s) = \frac{\beta A_1(s) - \alpha B_1(s)}{\alpha F'_x(s) + \beta F'_y(s)} \end{cases}$$

engendrent le module des résidus \mathcal{R}_{C_s} pour tout s au voisinage de 0, où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont données par la proposition 6.3.10.

6.3.3 Lien avec d'autres stratifications

Considérons une déformation équisingulière H de h de base $(B, 0) \simeq (\mathbb{C}^k, 0)$ pour un $k \in \mathbb{N}$. On note \mathcal{R}_s le module des résidus de C_s . L'objectif de ce paragraphe est d'étudier les propriétés la stratification de B par les multi-valuations du module des résidus donnée dans la définition 6.3.17, et de la comparer avec d'autres stratifications, à savoir les stratifications par le nombre de Tjurina τ , par les multi-valuations de l'idéal jacobien, les différentielles de Kähler et par la b -fonction.

Nous montrons dans ce paragraphe que la stratification par le module des résidus raffine la stratification par τ et peut être différente de cette dernière (voir exemple 6.3.19). De plus, la stratification par les résidus est finie et constructible (voir propositions 6.3.18 et 6.3.20). En revanche, elle peut ne pas satisfaire la condition de frontière (voir exemple 6.3.22). Dans l'exemple 6.3.24, on compare la stratification par le module des résidus avec la stratification par la b -fonction. On termine avec le lien entre la stratification par les résidus et la stratification par les différentielles de Kähler, cette dernière intervenant dans le problème de la classification analytique des branches planes.

Définition 6.3.17. *Soit $H(x, y, s)$ une déformation équisingulière de base B d'une courbe plane C définie par $h \in \mathbb{C}\{x, y\}$. Soit pour tout $s \in B$ un idéal fractionnaire $I_s \subseteq \mathcal{M}_{C_s}$. La stratification par les multi-valuations de (I_s) est la partition*

$$B = \bigcup_{\mathcal{V} \subseteq \mathbb{Z}^p} S_{\mathcal{V}}^{(I_s)}$$

où $s \in S_{\mathcal{V}}^{(I_s)}$ si et seulement si $\text{val}(I_s) = \mathcal{V}$.

Nous allons comparer la stratification $S^{(I_s)}$ avec la stratification S^τ par le nombre de Tjurina. La stratification par le nombre de Tjurina est la partition $S^\tau = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^\tau$ où $s \in S_n^\tau$ si et seulement si le nombre de Tjurina en $(s, 0, 0)$ de la fibre en s est $\tau(H_s) = n$. Cette stratification est finie puisque le nombre de Tjurina est majoré par le nombre de Milnor, qui est constant par la condition d'équisingularité.

Proposition 6.3.18. *On a les propriétés suivantes :*

1. *La stratification par le module des résidus est plus fine que la stratification par le nombre de Tjurina.*
2. *La stratification par le module des résidus est finie.*

Preuve. La première propriété est une conséquence directe de la proposition 6.1.15. En effet, la condition d'équisingularité assure que $\delta(H_s)$ ne dépend pas de $s \in B$, et la dimension du quotient $\mathcal{R}_s/\mathcal{O}_{\tilde{C}_s}$ se lit sur les multi-valuations de \mathcal{R}_s grâce au corollaire 5.2.12.

Pour la deuxième propriété, comme pour tout $s \in B$, $\mathcal{O}_{\tilde{C}_s} \subseteq \mathcal{R}_s$, le corollaire 5.1.17 assure que pour tout $s \in B$, les multi-valuations de \mathcal{R}_s sont entièrement déterminées par les multi-valuations

du cadran $\{v \in \mathbb{Z}^p, v \leq 0\}$. De plus, par la proposition 6.3.10, il existe des constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ telles que pour tout s dans un voisinage de 0, la multi-valuation de $\alpha H'_x(s) + \beta H'_y(s)$ ne dépend pas de s et est dans \mathbb{N}^p . L'élément $\alpha H'_x(s) + \beta H'_y(s)$ peut donc être choisi comme dénominateur pour tous les résidus de \mathcal{R}_s , et donc pour tout $\rho \in \mathcal{R}_s$, $\text{val}(\rho) \geq \text{val}(\alpha H'_x(s) + \beta H'_y(s))$. Cela signifie que les multi-valuations du module des multi-résidus sont entièrement déterminées par le pavé $\{v \in \mathbb{Z}^p ; \text{val}(\alpha H'_x(s) + \beta H'_y(s)) \leq v \leq 0\}$, ce qui nous donne un nombre fini d'ensembles de multi-valuations possibles¹⁰ pour \mathcal{R}_s . \square

L'exemple suivant montre que la stratification par les résidus peut être strictement plus fine que la stratification par τ .

Exemple 6.3.19. On considère $h(x, y) = x^5 - y^6$ et la déformation équisingulière de h donnée par

$$H(x, y, s_1, s_2, s_3) = x^5 - y^6 + s_1 x^2 y^4 + s_2 x^3 y^3 + s_3 x^3 y^4.$$

La stratification par τ est constituée de trois strates, $S_{20} = \{0\}$, $S_{19} = \{(0, 0, s_3), s_3 \neq 0\}$ and $S_{18} = \{(s_1, s_2, s_3), (s_1, s_2) \neq (0, 0)\}$. Le calcul des valuations de \mathcal{J}_s est facile dans ce cas et fait apparaître quatre strates. On obtient grâce au théorème 5.2.1, en posant $S'_{18} = \{(s_1, s_2, s_3), s_1 \neq 0\}$ and $S''_{18} = \{(0, s_2, s_3), s_2 \neq 0\}$:

| Strate | $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{R}_s / \widetilde{\mathcal{O}}_{C_s}$ | valuations négatives de \mathcal{R}_s |
|------------|---|---|
| S_{20} | 10 | -1, -2, -3, -4, -7, -8, -9, -13, -14, -19 |
| S_{19} | 9 | -1, -2, -3, -4, -7, -8, -9, -13, -14 |
| S'_{18} | 8 | -1, -2, -3, -4, -7, -8, -9, -14 |
| S''_{18} | 8 | -1, -2, -3, -4, -7, -8, -9, -13 |

La strate S_{18} se divise en deux strates pour les valuations de \mathcal{R}_s . Cela montre que dans ce cas la stratification par le module des résidus est strictement plus fine que la stratification par τ .

Proposition 6.3.20. *Chacune des strates $S_{\mathcal{V}}^{(\mathcal{R}_s)}$ de la stratification par les résidus est constructible. Si de plus C est irréductible alors chaque strate est localement fermée.*

Preuve. Faute de référence, on suggère ici une preuve. Par [Zar86, Annexe de B. Teissier], les strates de la stratification par le nombre de Tjurina sont localement analytiques et localement fermées. Il est donc suffisant de regarder le comportement de la stratification par les résidus dans une strate à τ constant S_n^τ , ce qui assure par la proposition 6.3.14 que la déformation au-dessus de S_n^τ est admissible. Pour ne pas alourdir les notations, on note $B = S_n^\tau$.

Par le corollaire 6.3.16, le module \mathcal{R}_s est engendré sur \mathcal{O}_{C_s} par

$$\begin{cases} \rho_1(s) = \frac{-\beta A_2(s) + \alpha B_2(s)}{\alpha F'_x(s) + \beta F'_y(s)} \\ \rho_2(s) = \frac{\beta A_1(s) - \alpha B_1(s)}{\alpha F'_x(s) + \beta F'_y(s)} \end{cases}$$

où α et β sont donnés par la proposition 6.3.10. Comme la multi-valuation u du dénominateur ne dépend pas de s , il est suffisant de considérer les multi-valuations des numérateurs.

On pose N_1 et N_2 les numérateurs de $\rho_1(s)$ et $\rho_2(s)$. On rappelle que les multi-valuations v de \mathcal{R}_s vérifiant $v \leq 0$ suffisent à déterminer $\text{val}(\mathcal{R}_s)$. On considère donc l'ensemble fini

$$\{X_1, \dots, X_q\} := \{x^i y^j N_k ; \text{val}(x^i y^j N_k) \leq u\}.$$

¹⁰Toutes ces possibilités ne sont pas réalisées

Pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, il existe $a_{i,j,k} \in \mathcal{O}_B$ tel que $X_i = \left(\sum_{j \geq 0} a_{i,j,1}(s)t_1^j, \dots, \sum_{j \geq 0} a_{i,j,p}(s)t_p^j \right) \in \mathcal{O}_{\widetilde{C}_s}$.

Pour $v \in \mathbb{Z}^p$ et $k \in \{1, \dots, p\}$, on pose $X_{i,k}^v(s) = (a_{i,0,k}(s), \dots, a_{i,v_k,k}(s)) \in \mathcal{O}_B^{v_k+1}$. Pour $v \in \mathbb{Z}^p$ on définit la matrice $A_v(s) \in \mathcal{M}_{q,\ell_v}(\mathcal{O}_B)$ où $\ell_v = \sum_{j=1}^p (v_j + 1)$:

$$A_v(s) = \begin{pmatrix} (X_{1,1}^v(s)) & \dots & (X_{1,p}^v(s)) \\ \vdots & & \vdots \\ (X_{q,1}^v(s)) & \dots & (X_{q,p}^v(s)) \end{pmatrix}$$

La i ème ligne de cette matrice correspond au développement de Taylor de X_i le long de la branche C_k pour $k = 1, \dots, p$ jusqu'à l'ordre v_k .

On utilise le rang des matrices $A_v(s)$ pour caractériser la propriété $v \in \text{val}(\mathcal{R}_s)$ pour $s \in B$:

$$v \in \text{val}(\mathcal{R}_s) \iff \forall k \in \{1, \dots, p\}, \text{rang}(A_{v-\underline{1}}(s)) < \text{rang}(A_{v-\underline{1}+e_k}(s)).$$

En effet, si les conditions $\forall k \in \{1, \dots, p\}, \text{rang}(A_{v-\underline{1}}(s)) < \text{rang}(A_{v-\underline{1}+e_k}(s))$ sont vérifiées, alors pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, il existe une combinaison linéaire $M_k = \sum_{i=1}^q \lambda_{i,k} X_i(s)$ avec $\lambda_{i,k} \in \mathbb{C}$ telle que $\text{val}(M_k) \geq v$ et $\text{val}_k(M_k) = v_k$. On utilise la proposition 5.1.12 pour conclure.

Par conséquent, pour un ensemble $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{Z}^p$ tel que $S_{\mathcal{V}}^{(\mathcal{R}_s)} \cap B \neq \emptyset$ et

$$\overline{\mathcal{V}} := (\mathcal{V} + u) \cap \{w \in \mathbb{Z}^p; 0 \leq w \leq u\}$$

on a :

$$s \in S_{\mathcal{V}}^{(\mathcal{R}_s)} \iff s \in \bigcap_{v \in \overline{\mathcal{V}}} \left(\bigcup_{1 \leq r \leq M} \left(V(\mathcal{F}_r(A_{v-\underline{1}}(s))) \cap \bigcap_{1 \leq k \leq p} (V(\mathcal{F}_r(A_{v-\underline{1}+e_k}(s)))^c) \right) \right)$$

où $\mathcal{F}_r(A)$ désigne l'idéal engendré par les mineurs $r \times r$ de la matrice A et $M = \min(q, \ell_v + 1)$ et pour tout idéal I , $V(I)$ désigne le lieu des zéro de I . On remarque¹¹ que les éléments $v \notin \mathcal{V}$ ne peuvent pas être atteints car autrement, par le lemme 5.2.18, la dimension de $\mathcal{R}_s/\mathcal{O}_{\widetilde{C}_s}$ serait strictement plus grande que $\tau - \delta$. Cela nous donne le résultat pour les courbes réductibles.

Supposons maintenant que C est irréductible. Dans ce cas, le rang de la matrice $A_v(s)$ augmente exactement de 1 quand une valuation est atteinte. On pose $\overline{\mathcal{V}} = \{v_1 < \dots < v_L\} = (\mathcal{V} + u) \cap \{0, \dots, u\}$. Alors :

$$s \in S_{\mathcal{V}}^{(\mathcal{R}_s)} \iff s \in \bigcap_{\ell=1}^{L-1} \bigcap_{j=v_\ell+1}^{v_{\ell+1}-1} (V(\mathcal{F}_\ell(A_j(s))) \cap (V(\mathcal{F}_\ell(A_{v_\ell}))^c).$$

Cela montre que $S_{\mathcal{V}}^{(\mathcal{R}_s)}$ est localement fermée. □

Intéressons-nous maintenant à la condition de frontière.

Définition 6.3.21. Une stratification $B = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}$ satisfait la condition de frontière si pour $\alpha \neq \beta$, la condition $S_{\alpha} \cap \overline{S_{\beta}} \neq \emptyset$ implique que $S_{\alpha} \subseteq \overline{S_{\beta}}$, où $\overline{S_{\beta}}$ est l'adhérence de S_{β} .

Exemple 6.3.22. Considérons la déformation de $h(x, y) = x^{10} + y^8$ donnée par :

$$H(x, y, s_1, s_2) = x^{10} + y^8 + s_1 x^5 y^4 + s_2 x^3 y^6$$

for s_1, s_2 pour s_1, s_2 dans un voisinage de 0 de sorte que la déformation est équisingulière. Cet exemple est donné dans [BGM92] comme un exemple dans lequel la stratification par la b -fonction ne satisfait pas la condition de frontière.

Contrairement à l'exemple 6.3.19, cette courbe n'est pas irréductible. Commençons par donner une propriété générale des courbes quasi-homogènes :

¹¹En utilisant la condition $S_{\mathcal{V}}^{(\mathcal{R}_s)} \cap B \neq \emptyset$ qui assure que \mathcal{V} est bien l'ensemble des multi-valuations de \mathcal{R}_s en un point $s \in B$.

Où les strates sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} S_1 &= \{s_1 \neq 0, 56s_1s_3 - 20s_1^3 - 63s_2^2 \neq 0\} ; S_2 = \{s_1 \neq 0, 56s_1s_3 - 20s_1^3 - 63s_2^2 \neq 0 = 0\} ; \\ S_3 &= \{s_1 = 0, s_2 \neq 0\} ; S_4 = \{s_1 = s_2 = 0, s_3 \neq 0\} ; S_5 = \{s_1 = s_2 = s_3 = 0, s_4 \neq 0\} ; \\ S_6 &= \{s_1 = \dots = s_4 = 0, s_5 \neq 0\} ; S_7 = \{s_1 = \dots = s_5 = 0, s_6 \neq 0\} ; \\ S_8 &= \{s_1 = \dots = s_6 = 0\} \end{aligned}$$

En comparant avec les strates données par P. Cassou-Noguès, on remarque que la strate générique pour le polynôme de Bernstein $E_0 = \{s_1 \neq 0\} \cap \{s_2 \neq 0\} \cap \{s_3 \neq \frac{2}{7}s_1^2\}$, ainsi que la strate $E_1 = \{s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, s_3 = \frac{2}{7}s_1^2\}$ intersectent les strates S_1 et S_2 de la stratification par les résidus. Les autres strates de la stratification par le polynôme de Bernstein sont égales ou incluses dans une des strates ci-dessus. En particulier, cela signifie qu'aucune des deux stratifications ne raffine l'autre.

Proposition 6.3.25. *Les stratifications $S^{(\mathcal{R}_s)}$, $S^{(\mathcal{I}_{C_s})}$ et $S^{(\Omega_C^1)}$ coïncident.*

Preuve. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème 5.2.1 et de la proposition 6.1.3. \square

L'ensemble des multi-valuations des différentielles de Kähler est un ingrédient clef de la classification analytique des courbes planes à une ou deux branches étudiée dans [HH11] et [HHH15]. Le problème de la classification topologique des courbes planes se traduit en termes de semigroupe de la courbe, comme nous l'avons vu avec le théorème 6.3.8.

En revanche, le problème de la classification analytique des courbes posé par O. Zariski dans [Zar86] est bien plus difficile. Il est clair que pour que deux courbes soient analytiquement équivalentes elles doivent avoir même semigroupe et même ensemble de multi-valuations des différentielles de Kähler, mais cela ne suffit pas. Néanmoins, ces deux ensembles de multi-valuations sont essentiels dans la réponse au problème de la classification analytique des courbes planes irréductibles à une ou deux branches proposée par A. Hefez, M.E. Hernandez et M.E.R. Hernandez dans [HH11] et [HHH15].

En effet, dans le cas irréductible, ils montrent le théorème suivant :

THÉORÈME 6.3.26 ([HH11, Theorem 2.1]). *Soit C une courbe plane irréductible de paramétrage φ et de semigroupe $\text{val}(\mathcal{O}_C)$ engendré sur \mathbb{N} par (v_0, \dots, v_q) . Alors ou bien φ est analytiquement équivalente au paramétrage (t^{v_0}, t^{v_1}) , ou bien elle est analytiquement équivalente à un paramétrage*

$$\left(t^{v_0}, t^{v_1} + t^\lambda + \sum_{\substack{j > \lambda \\ j - a \notin \text{val}(\Omega_C^1)}} a_{ij} t^j \right) \quad (6.21)$$

où $\lambda = \min \{ \text{val}(\Omega_{C_i}^1) \setminus \text{val}(\mathcal{O}_{C_i}) \}$ est l'invariant de Zariski.

De plus, si C et C' sont deux courbes dont les paramétrages sont de la forme (6.21) (avec a'_i à la place de a_i pour C') et telles que $\text{val}(\mathcal{O}_{C_1}) = \text{val}(\mathcal{O}_{C_2})$ et $\text{val}(\Omega_{C_1}^1) = \text{val}(\Omega_{C_2}^1)$ alors elles sont analytiquement équivalentes si et seulement s'il existe $r \in \mathbb{C}^*$ tel que pour tout i , $r^{\lambda - v_1} = 1$ et $a_i = r^{i - v_1} a'_i$.

Par conséquent, par la proposition 6.3.25, les multi-valuations du module des résidus \mathcal{R}_C fournit la même information que les multi-valuations des différentielles de Kähler, et sont donc liées au problème de la classification analytique des courbes planes.

Annexe A

Algorithmes et exemples

Nous regroupons dans cette annexe les algorithmes utilisés sous SINGULAR pour certains des exemples étudiés. Le premier algorithme proposé permet de tester si une suite donnée définit une intersection complète réduite libre. Les algorithmes suivants permettent de calculer le module des formes différentielles multi-logarithmiques, ainsi que les formes dont les multi-résidus engendrent le module des multi-résidus.

Ces algorithmes sont disponibles à l'adresse <http://www.math.univ-angers.fr/~pol/>

A.1 Algorithmes

Les bibliothèques utilisées sont :

```
LIB "sing.lib";
LIB "homolog.lib";
LIB "primdec.lib";
LIB "general.lib";
```

A.1.1 Intersection complète libre

La procédure suivante permet de tester si une suite donnée définit une intersection complète libre. Si ce n'est pas le cas, l'algorithme précise quelle condition n'est pas vérifiée. Avant de lancer la procédure, on définit l'anneau R dans lequel on travaille, les polynômes h_1, \dots, h_k , et l'idéal I qu'ils engendrent. Cet algorithme fonctionne pour des intersections complètes singulières, si I définit une intersection complète réduite lisse, l'algorithme renvoie "It is a reduced complete intersection with a non Cohen-Macaulay singular locus".

Algorithme A.1.1.

```
proc is_freeci (ideal I)
{
  int m=dim(std(0));
  intvec ci=is_ci(I);
  int k=size(I);
  int q=size(ci);
  int n=ci[q];
  int p=(m-k)-n;
  if (p<>0)
    {"//not a regular sequence"};
  if (p==0)
```

```

{
  ideal pr=radical(I);
  int q=size(pr);
  int pp=0;
  for (int i=1; i<=q; i=i+1)
  {
    list S(i)=division(pr[i],I);
    poly R(i)=S(i)[2][1];
    if (R(i)<>0)
      {pp=1;};
  };
  if (pp<>0)
    {"//non reduced complete intersection";};
  if (pp==0)
  {
    matrix Jac=jacob(I);
    ideal mi=minor(Jac,k);
    ideal J=I,mi;
    int u=isCM(J);
    if (u==0)
      {"// It is a reduced complete intersection
        with a non Cohen-Macaulay singular locus";};
    if (u==1)
      {
        int ss=dim(std(J))+1;
        if (ss<>n)
          {"// It is a reduced complete intersection
            with a Cohen-Macaulay singular locus
            of codimension at least 2";};
        if (ss==n)
          {"//It is a free complete intersection";};
      };
  };
};
}

```

A.1.2 Calcul des formes multi-logarithmiques d'une intersection complète

Nous proposons dans ce chapitre des algorithmes qui permettent de déterminer une résolution libre de $\Omega^{m-1}(\log C)$ et de $\Omega^{m-2}(\log C)$ pour une intersection complète réduite.

L'idéal I est l'idéal engendré par les équations (h_1, \dots, h_k) . On suppose que I définit une intersection complète réduite C , ce que l'algorithme ne vérifie pas. On considère la base $(\widehat{dx}_i)_{1 \leq i \leq m}$ de Ω_S^{m-1} , et la base $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m$ de Ω_S^m .

Au lieu de déterminer $\Omega^{m-1}(\log C)$, on détermine $h\Omega^{m-1}(\log C)$ dans la base de Ω_S^{m-1} mentionnée précédemment. Soit $\omega \in \Omega_S^{m-1}$, $\omega = \sum_{i=1}^m a_i \widehat{dx}_i$. Alors $\omega \in h\Omega^{m-1}(\log C)$ si et seulement si pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, il existe $b_1, \dots, b_k \in \mathcal{O}_S$ tels que

$$\sum_{i=1}^m (-1)^{i-1} a_i \frac{\partial h_j}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{m-1} b_i h_i = 0.$$

On commence dans l'algorithme suivant par construire la matrice A correspondante, on détermine son noyau (qui est dans $\Omega_S^{m-1} \oplus \mathcal{O}_S^k$) puis la projection de ce noyau sur Ω_S^{m-1} , ce qui nous

donne une famille génératrice de $\Omega^{m-1}(\log C)$.

Selon la valeur de l'entier a , le programme calcule :

- $a = -1$ on détermine une famille génératrice pas forcément minimale de $\Omega^{m-1}(\log C)$
- $a = 0$ on détermine une résolution libre de $\Omega^{m-1}(\log C)$.
- $a \in \mathbb{N}^*$ on détermine le début d'une résolution libre de $\Omega^{m-1}(\log C)$, jusqu'à l'ordre a .

Le calcul d'une résolution libre peut prendre un temps assez long.

Algorithme A.1.2.

```

proc log_forms_ci_m-1 (ideal I, int a)
{
  int m=dim(std(0));
  int k=size(I);
  for (int i=1; i<=k; i=i+1)
    {ideal J(i)=jacob(I[i]);};
  int q=m+k*k;
  matrix A[k][q];
  for (int i=1; i<=k; i=i+1)
    {
      for (int j=1; j<=m; j=j+1)
        {A[i,j]=(-1)^(j-1)*J(i)[j];};
      for (int j=1; j<=k; j=j+1)
        {A[i,m+k*(i-1)+j]=I[j];};
    };
  module K=syz(A);
  int qK=size(K);
  for (int i=1; i<=qK; i=i+1)
    {
      for (int j=1; j<=m; j=j+1)
        { vector kk(j)=K[i][j]*gen(j);};
      vector v(i)=sum(kk(1..m));
    };
  module om=v(1..qK);
  if (a==-1)
    {return(om);};
  if (a>-1)
    {
      list L=mres(om,a);
      return(L);
    };
}

```

L'algorithme ci-dessous fonctionne sur le même principe que l'algorithme A.1.2. Selon la valeur du paramètre a , il calcule une famille génératrice de $h\Omega^{m-2}(\log C)$ (pour $a = -1$), ou une résolution libre minimale jusqu'à l'ordre a (pour $a \in \mathbb{N}^*$), ou une résolution libre minimale (pour $a = 0$). On pose pour $1 \leq i < j \leq m$:

$$\widehat{dx_i \wedge dx_j} = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \cdots \wedge dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \cdots \wedge dx_m.$$

On considère la base $\widehat{dx_1 \wedge dx_2}, \widehat{dx_1 \wedge dx_3}, \dots, \widehat{dx_1 \wedge dx_m}, \widehat{dx_2 \wedge dx_3}, \dots, \widehat{dx_{m-1} \wedge dx_m}$ de Ω_S^{m-2} , et la base $\widehat{dx_1}, \dots, \widehat{dx_m}$ de Ω_S^{m-1} .

Soit $\omega = \sum_{i < j} a_{ij} \widehat{dx_i} \wedge \widehat{dx_j}$. Alors pour tout $\ell \in \{1, \dots, k\}$,

$$dh_\ell \wedge \omega = \sum_{i < j} \left(a_{ij} \frac{\partial h_\ell}{\partial x_i} (-1)^{i-1} \widehat{dx_j} + a_{ij} \frac{\partial h_\ell}{\partial x_j} (-1)^j \widehat{dx_i} \right).$$

Alors $\omega \in h\Omega^{m-2}(\log C)$ si et seulement si pour tout $\ell \in \{1, \dots, k\}$, pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, il existe $b_1, \dots, b_k \in \mathcal{O}_S$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{j-1} \frac{\partial h_\ell}{\partial x_j} a_{ji} + \sum_{j=i+1}^m (-1)^j \frac{\partial h_\ell}{\partial x_j} a_{ij} + \sum_{j=1}^k b_j h_j = 0.$$

On commence dans l'algorithme suivant par écrire la matrice A correspondant à ce système d'équations, relativement aux bases données précédemment. On détermine ensuite le noyau de la matrice A , et la projection sur les coordonnées qui nous intéressent.

Algorithme A.1.3. `proc log_forms_ci_m-2 (ideal I, int a)`

```
{
  int m=dim(std(0));
  int k=size(I);
  for (int i=1; i<=k; i=i+1) {ideal J(i)=jacob(I[i]);};
  int p=m*(m-1) div 2;
  matrix A[k*m][p+k*k*m];
  int c(0)=0;
  for (int l=1; l<=m; l=l+1) {int c(l)=c(l-1)+(m-1);};
  for (int j=1; j<=k; j=j+1)
  {
    for (int l=1; l<=m-1; l=l+1)
    {
      for (int i=l+1; i<=m; i=i+1)
      {
        A[(j-1)*m+i, c(l-1)+i-1]=(-1)^{l-1}*J(j)[l];
        A[(j-1)*m+l, c(l-1)+i-1]=(-1)^i*J(j)[i];
      };
    };
  };
  for (int l=1; l<=k*m; l=l+1)
  {
    for (int j=1; j<=k; j=j+1) {A[l,p+(l-1)*k+j]=I[j];};
  };
  module K=syz(A);
  int q=size(K);
  for (int i=1; i<=q; i=i+1)
  {
    for (int jj=1; jj<=p; jj=jj+1)
    {
      vector k(jj)=K[i][jj]*gen(jj);
    };
    vector w(i)=sum(k(1..p));
  };
  module om=w(1..q);
  if (a==-1){return(om);};
  if (a>-1)
```

```

{
  list L=mres(om,a);
  return(L);
};
}

```

A.1.3 Calcul des champs de vecteurs multi-logarithmiques d'une courbe

La procédure suivante permet de calculer les $(m-1)$ -champs de vecteurs multi-logarithmiques le long d'une courbe intersection complète. La base de Θ_S^{m-1} considérée est la base $(\widehat{\partial}_{x_m}, \dots, \widehat{\partial}_{x_1})$. Il s'agit de déterminer $(a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{O}_S^m$ tels que $\delta = \sum_{i=1}^m a_i \widehat{\partial}_{x_i}$ est multi-logarithmique, c'est-à-dire tel qu'il existe b_1, \dots, b_k tels que :

$$\sum_{i=1}^m J_i a_i + \sum_{i=1}^k b_i h_i = 0.$$

Algorithme A.1.4. `proc champs_curves (ideal I, int a)`

```

{
  int m=dim(std(0));
  int k=size(I);
  if (m-k<>1)
    {"//not a curve";};
  if (m-k==1)
    {
      matrix Jac=jacob(I);
      ideal mi=minor(Jac,k,-m);
      ideal A=mi,I;
      module K=syz(A);
      int qK=size(K);
      for (int i=1; i<=qK; i=i+1)
        {
          for (int j=1; j<=m; j=j+1)
            { vector kk(j)=K[i][j]*gen(j);};
          vector v(i)=sum(kk(1..m));
        };
      module derk=v(1..qK);
      if (a==-1) {return(derk);};
      if (a>-1)
        {
          list L=mres(derk,a);
          return(L);
        };
    }
}

```

A.1.4 Variantes pour les espaces équidimensionnels

Cet algorithme est une variante de l'algorithme A.1.2 qui calcule $\Omega^{m-1}(\log X/C)$ pour une variété générale non nécessairement intersection complète. L'idéal I est l'idéal radical de X , et l'idéal J est l'idéal d'une intersection complète C réduite contenant X . L'entier a joue le même rôle que dans l'algorithme A.1.2. La matrice A est plus compliquée car la condition $I \cdot \omega \subseteq J\Omega_S^{m-1}$ n'est plus nécessairement satisfaite. On peut adapter de même l'algorithme A.1.3 au cas des espaces de Cohen-Macaulay.

```

Algorithme A.1.5. proc log_forms_cur (ideal I, ideal J, int a)
{
  int m=dim(std(0)); int k=size(J); int r=size(I);
  for (int i=1; i<=r; i=i+1)
    {ideal J(i)=jacob(I[i]);};
  matrix A[r*(m+1)][m+k*r*(m+1)];
  for (int i=1; i<=r; i=i+1)
    {
      for (int j=1; j<=m; j=j+1)
        {A[i,j]=(-1)^(j-1)*J(i)[j];};
      for (int j=1; j<=k; j=j+1)
        {A[i,m+k*(i-1)+j]=J[j];};
    };
  for (int i=1; i<=r; i=i+1)
    {
      for (int j=1; j<=m; j=j+1)
        {
          A[r+j+(i-1)*m,j]=I[i];
          for (int u=1; u<=k; u=u+1)
            {A[r+j+(i-1)*m, k*r+m+u+(j+(i-1)*m-1)*k]=J[u];};
        };
    };
  module K=syz(A);
  int qK=size(K);
  for (int i=1; i<=qK; i=i+1)
    {
      for (int j=1; j<=m; j=j+1)
        { vector kk(j)=K[i][j]*gen(j);};
      vector v(i)=sum(kk(1..m));
    };
  module om=v(1..qK);
  if (a==-1)
    {return(om);};
  if (a>-1)
    {
      list L=mres(om,a);
      return(L);
    };
}

```

A.2 Exemples et conjectures

Nous regroupons dans cette partie plusieurs exemples obtenus à l'aide des algorithmes précédents. Tous les calculs ont été réalisés avec SINGULAR.

A.2.1 Lieu singulier d'un diviseur à croisements normaux

Question 1 Soit $m \geq 2$ et D le diviseur à croisements normaux défini par $h = x_1 \cdots x_m$. Comme D est libre, le lieu singulier X est Cohen-Macaulay et de dimension $m - 2$, défini par l'idéal $\mathcal{I}_X = \sum_{i=1}^m h_i \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}$ où $h_i = \hat{x}_i$.

L'espace X est-il toujours libre ?

Pour $m \in \{2, \dots, 8\}$, on vérifie avec SINGULAR que $f_1 = \sum_{i=1}^{m-1} h_i$ et $f_2 = \sum_{i=1}^{m-1} i h_{m-i+1}$ forment une suite régulière telle que l'idéal $\mathcal{I}_C = (f_1, f_2)$ est radical. Notons $J(\underline{f}, \underline{h})$ l'idéal engendré par les mineurs maximaux de la matrice jacobienne de (f_1, f_2) et par h_1, \dots, h_m .

On vérifie alors que le module $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_m\}/J(\underline{f}, \underline{h})$ est Cohen-Macaulay de dimension $m - 3$, et donc X est libre.

A.2.2 Surfaces libres

Nous commençons par des exemples de surfaces quasi-homogènes. Les calculs sont réalisés avec l'algorithme A.1.3.

Exemple A.2.1. Soit $h_1 = xz(x + z)$ et $h_2 = y(x + t)$. L'intersection complète définie par (h_1, h_2) est libre. Une résolution projective de $\Omega^2(\log C)$ est :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^{10} \rightarrow \mathcal{O}_S^{16} \rightarrow \Omega^2(\log C) \rightarrow 0.$$

De plus, une résolution projective de $\Omega^3(\log C)$ est :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^4 \rightarrow \mathcal{O}_S^8 \rightarrow \Omega^3(\log C) \rightarrow 0.$$

Exemple A.2.2. Soit $h_1 = y(x + z + t)$ et $h_2 = x(y + t)$. Cette intersection complète est libre et les modules de formes différentielles multi-logarithmiques présentent les mêmes nombres de Betti que dans le cas précédent.

Exemple A.2.3. Soit $h_1 = (x^2 + z)t$ et $h_2 = y(t^2 + z)$. Cette intersection complète est libre et quasi-homogène. Des résolutions projectives des modules de formes logarithmiques sont :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^{10} \rightarrow \mathcal{O}_S^{16} \rightarrow \Omega^2(\log C) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^5 \rightarrow \mathcal{O}_S^9 \rightarrow \Omega^3(\log C) \rightarrow 0.$$

Remarque A.2.4. On pourrait se demander si les nombres de Betti d'une surface intersection complète quasi-homogène libre de \mathbb{C}^4 sont toujours $b_0 = 16$ et $b_1 = 10$. La réponse est non, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple A.2.5. Soit $h_1 = (x + 2t + z)(y - z)(y + t)$ et $h_2 = t(z + 3t)(x + t)$. Cette intersection complète est libre et homogène. Des résolutions projectives des modules de formes logarithmiques sont :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^{11} \rightarrow \mathcal{O}_S^{17} \rightarrow \Omega^2(\log C) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^7 \rightarrow \mathcal{O}_S^{11} \rightarrow \Omega^3(\log C) \rightarrow 0.$$

Remarque A.2.6. Pour chacun des trois exemples précédents, on vérifie que $\frac{dh_1 \wedge dh_2}{h_1 h_2}$ fait partie d'une famille génératrice minimale de $\Omega^2(\log C)$.

Donnons encore deux autres exemples de surfaces libres, qui ne sont pas quasi-homogènes¹.

Exemple A.2.7. Soit $h_1 = (x^2 + z)t$ et $h_2 = y(x + z)$. Cette intersection complète est libre. Des résolutions projectives des modules de formes logarithmiques sont :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^{10} \rightarrow \mathcal{O}_S^{16} \rightarrow \Omega^2(\log C) \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S^4 \rightarrow \mathcal{O}_S^8 \rightarrow \Omega^3(\log C) \rightarrow 0.$$

En particulier, on vérifie que $\frac{dh_1 \wedge dh_2}{h}$ fait partie d'une famille génératrice minimale de $\Omega^2(\log C)$.

¹c'est-à-dire qu'il n'existe pas $(w_1, \dots, w_m) \in \mathbb{N}^m$ tels que pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, h_j est quasi-homogène de poids (w_1, \dots, w_m) .

Exemple A.2.8. Soit $h_1 = x(y^2 + z^3)$ et $h_2 = t(x^2 + yz)$. Cette intersection complète est libre. Des résolutions projectives des modules de formes logarithmiques sont :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_S^{11} \rightarrow \mathcal{O}_S^{17} \rightarrow \Omega^2(\log C) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_S^8 \rightarrow \mathcal{O}_S^{12} \rightarrow \Omega^3(\log C) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

De nouveau, $\frac{dh_1 \wedge dh_2}{h_1 h_2}$ fait partie d'une famille génératrice minimale. On remarque que pour cet exemple, les nombres de Betti qui apparaissent sont différents des précédents.

Exemple A.2.9. Reprenons l'exemple 6.1.36. Alors $h_1 = x^7 - y^5 + x^5 y^3$ n'est pas quasi-homogène. On vérifie que dans ce cas, la forme $\frac{dh_1 \wedge dh_2}{h_1 h_2}$ ne fait pas partie d'une famille génératrice minimale.

On rappelle que d'après la proposition 2.3.13, si D est un diviseur libre, $\frac{dh}{h}$ fait partie d'une base de $\Omega^1(\log D)$ si et seulement si D est Euler homogène.

Question 2 Soit C une intersection complète réduite². La forme différentielle $\frac{dh_1 \wedge \dots \wedge dh_k}{h_1 \dots h_k}$ fait-elle partie d'une famille génératrice minimale si et seulement si chaque équation est quasi-homogène, pour des poids éventuellement différents d'une équation à l'autre ?

Nous terminons ce paragraphe avec une question sur la dimension projective des modules $\Omega^q(\log C)$ lorsque C est une intersection complète libre.

Soit D un diviseur libre. Alors pour tout $q \in \mathbb{N}$, le module $\Omega^q(\log D)$ est libre (voir théorème 2.2.8). La question qui se pose est de déterminer si ce résultat possède une généralisation dans le cas des intersections complètes libres.

L'égalité $\dim \text{proj}(\Omega^q(\log C)) = k - 1$ pour $q \in \{0, \dots, k - 1\}$ est vérifiée par toutes les intersections complètes réduites, vu que $\Omega^q(\log C) = \tilde{\Omega}^q = \Omega_S^q \otimes_{\mathcal{O}_S} \Sigma$ pour $q \leq k - 1$ par le corollaire 3.1.16, et $\dim \text{proj}(\Sigma) = k - 1$ par le lemme 3.3.10. De plus, par le théorème 3.3.7, C est libre si et seulement si $\dim \text{proj}(\Omega^k(\log C)) = k - 1$.

Les exemples précédents soulèvent la question suivante :

Question 3 Si C est une intersection complète libre, l'égalité $\dim \text{proj}(\Omega^q(\log C)) = k - 1$ est-elle vérifiée pour tout $q \in \{0, \dots, m - 1\}$?

Remarque A.2.10. Quelle que soit l'intersection complète C considérée, on a $\Omega^m(\log C) = \frac{1}{h} \Omega_S^m$, qui est donc libre.

A.2.3 Autres surfaces

Nous regroupons ici quelques exemples de surfaces qui ne sont pas libres.

Exemple A.2.11. Soit $h_1 = xyzt$ et $h_2 = (x + y + z + t)(x - y + z - t)$. L'intersection complète définie par (h_1, h_2) n'est pas libre. Des résolutions projectives de $\Omega^2(\log C)$ et $\Omega^3(\log C)$ sont :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S^{11} \rightarrow \mathcal{O}_S^{16} \rightarrow \Omega^2(\log C) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S^7 \rightarrow \mathcal{O}_S^{10} \rightarrow \Omega^3(\log C) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Exemple A.2.12. Soit $h_1 = x^3 t + y^3 + t^2$ et $h_2 = x^2 + z^3$. Cette intersection complète n'est pas libre. On a :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \mathcal{O}_S^2 \rightarrow \mathcal{O}_S^{10} \rightarrow \mathcal{O}_S^{14} \rightarrow \Omega^2(\log C) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_S^2 \rightarrow \mathcal{O}_S^{10} \rightarrow \mathcal{O}_S^{12} \rightarrow \Omega^3(\log C) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Remarque A.2.13. Pour chacun des deux exemples précédents, la forme différentielle $\frac{dh_1 \wedge dh_2}{h_1 h_2}$ fait partie d'une famille génératrice minimale de $\Omega^2(\log C)$.

²Les exemples du paragraphe A.2.3 laissent à penser que l'hypothèse de liberté n'est pas nécessaire.

A.2.4 Champs de vecteurs multi-logarithmiques des courbes quasi-homogènes

Nous avons déjà vu que si $C \subseteq (\mathbb{C}^3, 0)$ est une courbe intersection complète quasi-homogène, le module $\text{Der}^2(-\log C)$ est engendré par les 2-champs de vecteurs $\left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \widehat{\partial}_{x_i}\right)_{j=1,2}$ et par la famille $\left(w_i x_i \widehat{\partial}_{x_j} - w_j x_j \widehat{\partial}_{x_i}\right)_{1 \leq i < j \leq 3}$.

Question 4 Soit $C \subseteq (\mathbb{C}^m, 0)$ une courbe intersection complète quasi-homogène. Le module des $(m-1)$ -champs de vecteurs multi-logarithmiques de C est-il engendré par $\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \widehat{\partial}_{x_i}\right)_{1 \leq j \leq m-1}$ et $\left(w_i x_i \widehat{\partial}_{x_j} - w_j x_j \widehat{\partial}_{x_i}\right)_{1 \leq i < j \leq m}$?

Exemple A.2.14. En utilisant l'algorithme A.1.4, on vérifie que cette propriété est vérifiée par les courbes intersections complètes réduites suivantes :

- $h_1 = x^3 - z^2, h_2 = y^3 - t^2, h_3 = x^2 z - yt$
- $h_1 = (x+y)(t+z), h_2 = y(x+t), h_3 = (x+y+z)(x-y+z-t)$

Remarque A.2.15. Par le corollaire 3.3.21 et le théorème 6.1.33, le nombre minimal de générateurs de $\text{Der}^{m-1}(\log C)$ pour une courbe intersection complète quasi-homogène C est bien $m + \frac{m(m-1)}{2}$.

Index

- G -produit, 134
- S -processus, 134
- ω -jacobien, 90
- k -champ de vecteurs multi-logarithmique, 54, 82

- base standard, 134
- branche, 98

- champ d'Euler, 30, 39
- champ de vecteurs logarithmique, 30, 55
- classe fondamentale, 41, 81
- condition de frontière, 145
- conducteur, 38, 94, 95
- critère de Saito, 33

- déformation, 139
- déformation admissible, 142
- déformation équisingulière, 140
- delta-invariant, 118, 140
- diviseur à croisements normaux, 33
- diviseur Euler homogène, 39
- dual, 40

- forme différentielle logarithmique, 27
- forme différentielle multi-logarithmique, 44, 73
- forme différentielle multi-logarithmique à pôles arbitraires, 49
- forme fondamentale, 80, 81
- formes différentielles de Kähler, 37
- formes régulières méromorphes, 41
- formule d'Auslander Buchsbaum, 35

- Gorenstein, 40

- grade, 35

- hauteur d'un idéal, 35

- idéal jacobien, 31, 48
- idéal de ramification, 41, 116
- idéal fractionnaire, 40
- idéal parfait, 35
- invariant de Zariski, 147

- lemme de la profondeur, 34
- liberté, 33, 61, 86

- module dualisant, 42
- multi-résidu, 46, 51
- multi-valuation, 94

- nombre de Milnor, 117, 140
- nombre de Tjurina, 117, 140
- normalisation, 36

- produit intérieur, 31

- quasi-homogène, 27

- résidus logarithmiques, 37

- saturé, 36
- semigroupe, 98
- semigroupe symétrique, 98, 100
- splayed, 54
- stratification par les multi-valuations, 143
- symbole résidu, 77

- valuation, 93

Bibliographie

- [AF13] Paolo ALUFFI et Eleonore FABER : Splayed divisors and their Chern classes. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 88(2):563–579, 2013.
- [Ale88] Alexandr G. ALEKSANDROV : Nonisolated Saito singularities. *Mat. Sb. (N.S.)*, 137(179)(4):554–567, 576, 1988.
- [Ale90] Alexandr G. ALEKSANDROV : Nonisolated hypersurface singularities. *In Theory of singularities and its applications*, volume 1 de *Adv. Soviet Math.*, pages 211–246. 1990.
- [Ale05] Aleksandr G. ALEKSANDROV : Logarithmic differential forms, torsion differentials and residue. *Complex Var. Theory Appl.*, 50(7-11):777–802, 2005.
- [Ale12] Alexandr G. ALEKSANDROV : Multidimensional residue theory and the logarithmic de Rham complex. *J. Singul.*, 5:1–18, 2012.
- [Ale14] Alexandr G. ALEKSANDROV : Residues of logarithmic differential forms in complex analysis and geometry. *Anal. Theory Appl.*, 30(1):34–50, 2014.
- [AT01] Aleksandr G. ALEKSANDROV et Avgust K. TSIKH : Théorie des résidus de Leray et formes de Barlet sur une intersection complète singulière. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 333(11):973–978, 2001.
- [AT08] Aleksandr G. ALEKSANDROV et Avgust K. TSIKH : Multi-logarithmic differential forms on complete intersections. *J. Siberian Federal University*, 2:105–124, 2008.
- [Bar78] Daniel BARLET : Le faisceau ω_X sur un espace analytique X de dimension pure. *In Fonctions de plusieurs variables complexes, III (Sém. François Norguet, 1975–1977)*, volume 670 de *Lecture Notes in Math.*, pages 187–204. Springer, Berlin, 1978.
- [BC13] Ragnar-Olaf BUCHWEITZ et Aldo CONCA : New free divisors from old. *J. Commut. Algebra*, 5(1):17–47, 2013.
- [BG80] Ragnar-Olaf BUCHWEITZ et Gert-Martin GREUEL : The Milnor number and deformations of complex curve singularities. *Invent. Math.*, 58(3):241–281, 1980.
- [BGM88] Joël BRIANÇON, Michel GRANGER et Philippe MAISONOBE : Le nombre de modules du germe de courbe plane $x^a + y^b = 0$. *Math. Ann.*, 279(3):535–551, 1988.
- [BGM92] Joël BRIANÇON, Françoise GEANDIER et Philippe MAISONOBE : Déformation d’une singularité isolée d’hypersurface et polynômes de Bernstein. *Bull. Soc. Math. France*, 120(1):15–49, 1992.
- [BH93] Winfried BRUNS et Jürgen HERZOG : *Cohen-Macaulay rings*, volume 39 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

- [BM06] Ragnar-Olaf BUCHWEITZ et David MOND : Linear free divisors and quiver representations. *In Singularities and computer algebra*, volume 324 de *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 41–77. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.
- [CDGZ99] Antonio CAMPILLO, Félix DELGADO et Sabir M GUSEIN-ZADE : On generators of the semigroup of a plane curve singularity. *J. London Math. Soc. (2)*, 60(2):420–430, 1999.
- [CDGZ03] Antonio CAMPILLO, Félix DELGADO et Sabir M. GUSEIN-ZADE : The Alexander polynomial of a plane curve singularity via the ring of functions on it. *Duke Math. J.*, 117(1):125–156, 2003.
- [CE56] Henri CARTAN et Samuel EILENBERG : *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [CMNM02] Francisco CALDERÓN-MORENO et Luis NARVÁEZ-MACARRO : The module $\mathcal{D}f^s$ for locally quasi-homogeneous free divisors. *Compositio Math.*, 134(1):59–74, 2002.
- [CN87] Pierrette CASSOU-NOGUÈS : Étude du comportement du polynôme de Bernstein lors d’une déformation à μ -constant de $X^a + Y^b$ avec $(a, b) = 1$. *Compositio Math.*, 63(3):291–313, 1987.
- [CNP11] Pierrette CASSOU-NOGUÈS et Arkadiusz PŁOSKI : Invariants of plane curve singularities and Newton diagrams. *Univ. Iagel. Acta Math.*, (49):9–34, 2011.
- [DdlM87] Félix Delgado de la MATA : The semigroup of values of a curve singularity with several branches. *Manuscripta Math.*, 59(3):347–374, 1987.
- [DdlM88] Félix Delgado de la MATA : Gorenstein curves and symmetry of the semigroup of values. *Manuscripta Math.*, 61(3):285–296, 1988.
- [Del70] Pierre DELIGNE : *Équations différentielles à points singuliers réguliers*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.
- [Del71] Pierre DELIGNE : Théorie de Hodge. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (40):5–57, 1971.
- [DGPS15] Wolfram DECKER, Gert-Martin GREUEL, Gerhard PFISTER et Hans SCHÖNEMANN : SINGULAR 4-0-2 — A computer algebra system for polynomial computations. <http://www.singular.uni-kl.de>, 2015.
- [dJP00] Theo de JONG et Gerhard PFISTER : *Local analytic geometry*. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2000. Basic theory and applications.
- [dJvS90] Theo de JONG et Duco van STRATEN : Deformations of the normalization of hypersurfaces. *Math. Ann.*, 288(3):527–547, 1990.
- [DS14] Alexandru DIMCA et Edoardo SERNESI : Syzygies and logarithmic vector fields along plane curves. *J. Éc. polytech. Math.*, 1:247–267, 2014.
- [Eis95] David EISENBUD : *Commutative algebra, With a view toward algebraic geometry*, volume 150 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Fab13] Eleonore FABER : Towards transversality of singular varieties : splayed divisors. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 49(3):393–412, 2013.

- [GLS07] Gert-Martin GREUEL, Cristoph LOSSEN et Eugenii SHUSTIN : *Introduction to singularities and deformations*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.
- [GLS10] Gert-Martin GREUEL, Santiago LAPLAGNE et Frank SEELISCH : Normalization of rings. *J. Symbolic Comput.*, 45(9):887–901, 2010.
- [GMS11] Michel GRANGER, David MOND et Mathias SCHULZE : Free divisors in prehomogeneous vector spaces. *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 102(5):923–950, 2011.
- [GP02] Gert-Martin GREUEL et Gerhard PFISTER : *A Singular introduction to commutative algebra*. Springer-Verlag, Berlin, 2002. With contributions by Olaf Bachmann, Christoph Lossen and Hans Schönemann, With 1 CD-ROM (Windows, Macintosh, and UNIX).
- [Gre75] Gert-Martin GREUEL : Der Gauss-Manin-Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten. *Math. Ann.*, 214:235–266, 1975.
- [GS12] Michel GRANGER et Mathias SCHULZE : Dual logarithmic residues and free complete intersections. *ArXiv.org*, (1109.2612v4), 2012.
- [GS14] Michel GRANGER et Mathias SCHULZE : Normal crossing properties of complex hypersurfaces via logarithmic residues. *Compos. Math.*, 150(9):1607–1622, 2014.
- [Har67] Robin HARTSHORNE : *Local cohomology*, volume 1961 de *A seminar given by A. Grothendieck, Harvard University, Fall*. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1967.
- [HH01] Abramo HEFEZ et Marcelo Escudeiro HERNANDES : *Computational methods in the local theory of curves*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001. 23o Colóquio Brasileiro de Matemática. [23rd Brazilian Mathematics Colloquium].
- [HH07] Abramo HEFEZ et Marcelo E. HERNANDES : Standard bases for local rings of branches and their modules of differentials. *J. Symbolic Comput.*, 42(1-2):178–191, 2007.
- [HH11] Abramo HEFEZ et Marcelo E. HERNANDES : The analytic classification of plane branches. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 43(2):289–298, 2011.
- [HHH15] Abramo HEFEZ, Marcelo E. HERNANDES et Maria E. Rodrigues HERNANDES : The analytic classification of plane curves with two branches. *Math. Z.*, 279(1-2):509–520, 2015.
- [HP99] Gennadi HENKIN et Mikael PASSARE : Abelian differentials on singular varieties and variations on a theorem of Lie-Griffiths. *Invent. Math.*, 135(2):297–328, 1999.
- [Ker83] Masumi KERSKEN : Cousin-komplex und Nennersysteme. *Math. Z.*, 182(3):389–402, 1983.
- [Ker84] Masumi KERSKEN : Reguläre Differentialformen. *Manuscripta Math.*, 46(1-3):1–25, 1984.
- [KTS15] Philipp KORELL, Laura TOZZO et Mathias SCHULZE : Duality of value semigroups. *ArXiv.org*, (1510.04072), 2015.
- [Kun70] Ernst KUNZ : The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 25:748–751, 1970.

- [Kun86] Ernst KUNZ : *Kähler differentials*. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1986.
- [KW84] Ernst KUNZ et Rolf WALDI : Über den Derivationenmodul und das Jacobi-Ideal von Kurvensingularitäten. *Math. Z.*, 187(1):105–123, 1984.
- [Loo84] Eduard J. N. LOOIJENGA : *Isolated singular points on complete intersections*, volume 77 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.
- [LS84] Dũng Tráng LÊ et Kyoji SAITO : The local π_1 of the complement of a hypersurface with normal crossings in codimension 1 is abelian. *Ark. Mat.*, 22(1):1–24, 1984.
- [Mat80] Hideyuki MATSUMURA : *Commutative algebra*, volume 56 de *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co., Inc., Reading, Mass., second édition, 1980.
- [Mat86] Hideyuki MATSUMURA : *Commutative ring theory*, volume 8 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Translated from the Japanese by M. Reid.
- [Mic95] Ruth MICHLER : Torsion of differentials of hypersurfaces with isolated singularities. *J. Pure Appl. Algebra*, 104(1):81–88, 1995.
- [Mil68] John MILNOR : *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press. Tokyo, 1968.
- [Mon12] David MOND : Notes on logarithmic vector fields, logarithmic differential forms and free divisors. *lecture notes*, 2012.
- [OT95] Peter ORLIK et Hiroaki TERAOKA : Arrangements and Milnor fibers. *Math. Ann.*, 301(2):211–235, 1995.
- [Pie79] Ragni PIENE : Ideals associated to a desingularization. In *Algebraic geometry (Proc. Summer Meeting, Univ. Copenhagen, Copenhagen, 1978)*, volume 732 de *Lecture Notes in Math.*, pages 503–517. 1979.
- [Pik14] Brian PIKE : On fitting ideals of logarithmic vector fields and Saito’s criterion. *ArXiv.org*, (1309.3769v2), 2014.
- [Pol14] Delphine POL : Module des résidus logarithmiques des courbes planes. *ArXiv.org*, (1410.2126v1), 2014.
- [Pol15a] Delphine POL : Logarithmic residues along plane curves. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 353(4):345–349, 2015.
- [Pol15b] Delphine POL : On the values of logarithmic residues along curves. *ArXiv.org*, (1410.2126v3), 2015.
- [Pol16] Delphine POL : Characterizations of freeness for Cohen-Macaulay spaces. *ArXiv.org*, (1512.06778v2), 2016.
- [Sai71] Kyoji SAITO : Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen. *Invent. Math.*, 14:123–142, 1971.
- [Sai75] Kyoji SAITO : On the uniformization of complements of discriminant loci. *Symp. in Pure Math.*, Williams College, 1975.

- [Sai76] Kyoji SAITO : On a generalization of de-Rham lemma. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 26(2):vii, 165–170, 1976.
- [Sai80] Kyoji SAITO : Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 27(2):265–291, 1980.
- [Sch16] Mathias SCHULZE : Saito’s normal crossing condition. *ArXiv.org, to appear in Journal of Singularities*, (1311.3795v2), 2016.
- [Ser55] Jean-Pierre SERRE : Faisceaux algébriques cohérents. *Ann. of Math. (2)*, 61:197–278, 1955.
- [Tei77] Bernard TEISSIER : The hunting of invariants in the geometry of discriminants. *In Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976)*, pages 565–678. Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977.
- [Ter80a] Hiroaki TERAO : Arrangements of hyperplanes and their freeness. I. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 27(2):293–312, 1980.
- [Ter80b] Hiroaki TERAO : Free arrangements of hyperplanes and unitary reflection groups. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 56(8):389–392, 1980.
- [Tor13] Michele TORIELLI : Deformations of free and linear free divisors. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 63(6):2097–2136, 2013.
- [vS95] Duco van STRATEN : A note on the discriminant of a space curve. *Manuscripta Math.*, 87(2):167–177, 1995.
- [Wal72] Rolf WALDI : Wertehalbgruppe und singularität einer ebenen algebraischen kurve. *Ph. D. dissertation, University of Regensburg, Regensburg*, 1972.
- [Zar66] Oscar ZARISKI : Characterization of plane algebroid curves whose module of differentials has maximum torsion. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 56:781–786, 1966.
- [Zar86] Oscar ZARISKI : *Le problème des modules pour les branches planes*. Hermann, Paris, second édition, 1986. Course given at the Centre de Mathématiques de l’École Polytechnique, Paris, October–November 1973, With an appendix by Bernard Teissier.

Thèse de Doctorat

Delphine POL

Singularités libres, formes et résidus logarithmiques

Free singularities, logarithmic forms and residues

Résumé

La théorie des champs de vecteurs logarithmiques et des formes différentielles logarithmiques d'une hypersurface singulière réduite est développée par K. Saito. Ces notions apparaissent dans l'étude de la connexion de Gauss-Manin de certaines familles de singularités et de leur déploiement semi-universel. Lorsque le module des champs de vecteurs logarithmiques est libre, l'hypersurface est appelée diviseur libre. A.G. Aleksandrov et A. Tsikh généralisent les notions de formes différentielles logarithmiques et de résidus logarithmiques aux intersections complètes et aux espaces de Cohen-Macaulay réduits.

Nous étudions dans ce travail les formes différentielles logarithmiques d'un espace singulier réduit de codimension quelconque plongé dans une variété lisse, et nous développons une notion de singularités libres qui étend la notion de diviseurs libres. Les résidus des formes différentielles logarithmiques d'une hypersurface ainsi que leur généralisation aux espaces de codimension supérieure interviennent de façon cruciale dans ce travail de thèse. Notre premier objectif est de donner des caractérisations de la liberté pour les intersections complètes et les espaces de Cohen-Macaulay qui généralisent le cas des hypersurfaces. Nous accordons ensuite une attention particulière à une famille de singularités libres, à savoir les courbes, pour lesquelles nous décrivons le module des résidus logarithmiques en termes de multi-valuations.

Mots clés

formes logarithmiques, résidus logarithmiques, liberté, dualité, intersections complètes, espaces de Cohen-Macaulay, courbes.

Abstract

The theory of logarithmic vector fields and logarithmic differential forms along a reduced singular hypersurface is developed by K. Saito. These notions appear in the study of the Gauss-Manin connection of some families of singularities and their semi-universal unfolding. If the module of logarithmic vector fields is free, the hypersurface is called a free divisor. A.G. Aleksandrov and A. Tsikh generalize the notions of logarithmic differential forms and logarithmic residues to reduced complete intersections and Cohen-Macaulay spaces. In this work, we study the logarithmic differential forms of a reduced singular space of any codimension embedded in a smooth manifold, and we develop a notion of free singularity which extend the notion of free divisor. The residues of logarithmic differential forms as well as their generalization to higher codimension spaces are crucial in this thesis. Our first purpose is to give characterizations of freeness for complete intersections and Cohen-Macaulay spaces which generalize the case of hypersurfaces. We then give a particular attention to a family of free singularities, namely the curves, for which we describe the module of logarithmic residues thanks to their set of values.

Key Words

logarithmic forms, logarithmic residues, freeness, duality, complete intersections, Cohen-Macaulay spaces, curves.