



**HAL**  
open science

# Méthode FDTD conforme et d'ordre (2,4) pour le calcul de SER large bande de cibles complexes

Nicolas Bui

► **To cite this version:**

Nicolas Bui. Méthode FDTD conforme et d'ordre (2,4) pour le calcul de SER large bande de cibles complexes. Electromagnétisme. Université de Limoges, 2016. Français. NNT : 2016LIMO0118 . tel-01445102

**HAL Id: tel-01445102**

**<https://theses.hal.science/tel-01445102v1>**

Submitted on 24 Jan 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# UNIVERSITÉ DE LIMOGES

ED n°521 : Sciences et Ingénierie pour l'Information, Mathématiques

FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

Laboratoire XLIM – UMR CNRS n°7252

## Thèse

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE LIMOGES

Spécialité : Electronique des Hautes Fréquences, Photonique et Systèmes

présentée et soutenue par

Nicolas BUI

le 20 Décembre 2016

## Méthode FDTD conforme et d'ordre (2,4) pour le calcul de SER large bande de cibles complexes

Thèse dirigée par Alain REINEIX, Philippe POULIGUEN & Christophe GUIFFAUT

### JURY :

#### Président du jury

Samir ADLY, Professeur, Université de Limoges

#### Rapporteurs

Raphaël GILLARD, Professeur, INSA Rennes

Stéphane LANTERI, Professeur, INRIA Sophia Antipolis

#### Examineurs

Philippe POULIGUEN, HDR, Ingénieur, DGA/DS/MRIS

Alain REINEIX, Directeur de recherche CNRS, Institut de Recherche XLIM

Christophe GUIFFAUT, Chargé de recherche CNRS, Institut de Recherche XLIM

#### Invités

Patrick BREUILH, Ingénieur, Nuclétudes

Jean-Pierre BÉRENGER, Ingénieur



*« The important thing is not to stop questioning; never lose a holy curiosity »*

Albert Einstein

*A mes parents et notre famille,*



## *Remerciements*

Cette thèse a été réalisée dans le cadre d'une bourse cofinancée par la région Limousin et la DGA, au sein de l'institut de recherche XLIM de l'Université de Limoges.

Je tiens tout d'abord à remercier les responsables du laboratoire XLIM de m'avoir permis de réaliser ce travail de doctorat au sein de l'équipe CEM et Diffraction. Je remercie aussi le jury pour avoir accepté de juger et d'apporter des très bonnes critiques à ce travail. En particulier, je remercie les deux rapporteurs qui sont Raphaël Gillard et Stéphane Lanteri, pour leur lecture très attentive de ce manuscrit et des rapports très perspicaces.

Je remercie chaleureusement Guiffaut Guiffaut, Patrick Breuilh, Alain Reineix et Philippe Pouliguen qui m'ont proposé ce sujet de thèse. Plus spécialement, je tiens à remercier Alain et Philippe qui m'ont suivi à différentes étapes de la thèse et bien évidemment Christophe qui m'a encadré parfaitement durant tout ce temps. Un encadrement rapproché – des bureaux voisins, ça aide – et Christophe a toujours été disponible pour toutes mes nombreuses questions sur la physique, notamment, et j'apprécie fortement sa patience pour prendre son temps à donner des réponses très compréhensives.

Je voudrais également remercier l'ensemble de l'équipe CEM et Diffraction pour les échanges courts ou longs mais toujours agréables. En premier lieu, un grand merci très chaleureux à Nadine, qui a toujours été superbement accueillante et souriante; et spécialement à Jorge, Luis et Eden dont leur immense sympathie, connaissances et curiosité dans lesquels j'ai trouvé et apprécié beaucoup d'humanité. Merci à Iannis pour avoir partagé les repas ensemble et le café qui suit, et grâce à qui mon anglais n'a plus de latence! D'autres mercis à Ayoub, Nicolas, Guillaume, Paul, pour les discussions et les entraides; à Luis encore, collègue de bureau, pour sa gaieté, tout en musique, et nos nombreux échanges de tout et rien; à Ibrahim, pour avoir accepté à perdre beaucoup beaucoup de temps à discuter aussi de tout et rien – plutôt de rien – mais qui a été très enrichissants et à permis de me libérer un peu du travail, ne serait-ce que ces simples instants.

Je souhaite également remercier les personnes d'autres équipes du laboratoire XLIM, qui ont contribué à la bonne ambiance ressentie tout au long de ces trois années : Wissam et Houssein, pour les discussions bien informatives qui attisent ma curiosité; Ludovic et spécialement Pascaline, pour les discussions parfois un peu – certes –déprimantes mais qui reflètent des ressentis les plus sincères, et avec qui j'ai beaucoup apprécié les échanges plus

personnelles comme autour des hobbies parfois similaires.

Je remercie également de bons amis Marion, Benjamin et Xavier, pour leur réconfort et encouragement dans mes efforts.

Je remercie tendrement mes parents, mes frères et leurs familles et spécialement ma belle-sœur Myriam, pour leurs soutiens qui se ressentent plus rare mais qui sont sans doute les plus précieux.

# Table des matières

Table des figures	4
Liste des tableaux	10
<b>Introduction générale</b>	<b>11</b>
<b>1 Surface Équivalente Radar</b>	<b>14</b>
1.1 Définition et facteurs	15
1.1.1 Dimensions électriques de la cible	17
1.1.2 Distance radar-cible	17
1.1.3 Polarisation en champ lointain	19
1.1.4 Diffraction et cible complexe	19
1.2 Évaluation de la SER : Méthodes Asymptotiques	20
1.2.1 Optique Géométrique	21
1.2.2 Optique Physique	22
1.2.3 Théorie Géométrique de la Diffraction	23
1.2.4 Théorie Physique de la Diffraction	25
1.2.5 Optique Physique Itérative	25
1.3 Évaluation de la SER : Méthodes à formulation rigoureuses	26
1.3.1 Méthode des éléments finis, volume finis, Galerkin discontinue	26
1.3.2 Méthode des moments (MoM)	27
1.3.3 Fast Multipole Method (FMM)	27
1.3.4 Différences Finies	28
1.4 Conclusion	28
<b>Bibliographie</b>	<b>31</b>
<b>2 La Méthode Différences Finies en Domaine Temporel d'ordre (2,4) pour l'Électromagnétisme</b>	<b>33</b>
2.1 Les Équations de Maxwell	35
2.2 Les Différences Finies (FD)	36
2.3 Application aux équations de Maxwell	38
2.3.1 Discrétisation temporelle	38
2.3.2 Schéma de Yee	39
2.3.3 Schéma de Fang	40
2.4 Dispersion numérique et stabilité	42
2.4.1 Schéma de Yee	42
2.4.2 Schéma de Fang	43
2.5 Optimisation de la dispersion numérique pour les équations de Maxwell	51
2.5.1 Dispersion-Relation-Preserving (DRP) scheme	51

2.5.2	Approche par formulation intégrale . . . . .	61
2.5.3	Non-Standard Finite Difference (NSFD) . . . . .	72
2.6	Conclusion sur l'état de l'art . . . . .	76
2.7	Conservative Modified FDTD(2,4) : CM24 . . . . .	78
2.7.1	Formulation intégrale et différences finies . . . . .	78
2.7.2	Analyse de la Dispersion numérique du schéma CM24 . . . . .	81
2.8	Source de courant . . . . .	87
2.9	Mise en évidence de la dispersion numérique . . . . .	88
2.9.1	Résonances de cavité métallique . . . . .	88
2.9.2	Champ lointain rayonné par un ou plusieurs dipôles . . . . .	92
2.10	Conclusion . . . . .	94
<b>Bibliographie</b>		<b>96</b>
<b>3</b>	<b>Technique conforme pour la FDTD d'ordre 2 et (2,4)</b>	<b>99</b>
3.1	Introduction de la problématique conforme . . . . .	100
3.2	État de l'art de la technique conforme pour la FDTD . . . . .	103
3.2.1	Dey-Mittra . . . . .	104
3.2.2	Benkler . . . . .	105
3.2.3	Extended-Cell-Technique . . . . .	107
3.2.4	Uniformly Stable Conformal et Simplified Conformal . . . . .	110
3.2.5	Résultats numériques : Cavité cylindrique et SER d'une Sphère . . . . .	111
3.3	Technique Conforme pour le schéma CM24 . . . . .	113
3.4	Condition aux frontières sur les arêtes de plaques métalliques . . . . .	115
3.5	Hybridation FDTD d'ordre 2 et 4 . . . . .	118
3.6	Conclusion . . . . .	121
<b>Bibliographie</b>		<b>123</b>
<b>4</b>	<b>Modèles pour le calcul SER avec la méthode FDTD(2,4)</b>	<b>126</b>
4.1	Calcul du Champ Lointain par la FDTD . . . . .	128
4.2	Injecteur d'ondes planes . . . . .	130
4.2.1	Calcul du champ incident via une règle 1D . . . . .	133
4.2.2	Exemple pour une surface de Huygens . . . . .	134
4.2.3	Adaptation parfaite de la dispersion numérique . . . . .	139
4.3	Conditions aux frontières absorbantes . . . . .	147
4.3.1	Huygens Absorbing Boundary Conditions (HABC) . . . . .	148
4.3.2	CPML . . . . .	152
4.4	Modèle de fils obliques pour les plaques métalliques . . . . .	157
4.5	Conclusion . . . . .	162
<b>Bibliographie</b>		<b>164</b>
<b>5</b>	<b>Applications SER</b>	<b>166</b>
5.1	Dièdre droit . . . . .	167
5.2	Sphère . . . . .	170
5.3	Cylindre . . . . .	171
5.4	Cavité Cobra . . . . .	172
5.5	Amande NASA . . . . .	173
5.6	Peau d'un Hélicoptère . . . . .	173
5.7	Conclusion . . . . .	173

<b>Bibliographie</b>	<b>185</b>
<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>186</b>
<b>Appendice</b>	<b>188</b>

# Table des figures

1.1	Illustration de la notion de SER [8]. La SER d'un objet peut-être vu comme l'aire de la section plane d'une sphère équivalente, laquelle réfléchirait la même puissance que l'objet. . . . .	15
1.2	Influence de la SER d'une cible sur la détection radar, la distance "burn-through" radar et la puissance de brouillage radar [8]. la distance "burn-through" radar est la distance de détection du radar avec une cible équipé d'un brouilleur. . . .	17
1.3	Représentation log-log de la SER normalisée d'une sphère parfaitement conductrice en fonction du rapport circonférence/ $\lambda$ [5]. Trois régions fréquentielles remarquables : Zone de Rayleigh, Zone de résonance (Mie) et Zone optique. . . . .	17
1.4	Zone de champ diffracté, par un objet rayonnant, délimité par régions. . . . .	18
1.5	Haut : Plan d'incidence avec (droite) polarisation parallèle ou TE ou verticale; (gauche) polarisation perpendiculaire ou TM ou horizontale. Bas : Plan de rayonnement ( $xz$ , $\phi = 0$ ) Plan E avec polarisation $\theta$ . . . . .	19
1.6	Types de diffraction contribuant à la SER d'un aéronef [6]. Généralement, la SER sera très grande dès lors que la normale à une surface est parallèle à la direction d'observation. . . . .	19
1.7	Géométrie de rayon [22]. rayon de courbure horizontale et verticale. . . . .	22
1.8	Diffraction à un point situé sur l'arête du bord d'un matériau Le rayon incident engendre un cône formé par les rayons de diffraction. . . . .	23
1.9	Les transitions entre les zones lors de la diffraction sur un coin de structure. . .	24
1.10	Représentation des groupes dans la méthode FMM. La distance $d$ doit être suffisante pour que le groupe soit qualifié de groupe lointain. . . . .	28
2.1	Disposition des composantes du champ électromagnétique dans une cellule de Yee. . . . .	40
2.2	Stencil du schéma (2,4) Fang. Seuls les champs électriques dessinés avec une flèche sont impliqués dans le calcul de H. . . . .	41
2.3	Différence entre le terme temporel et spatial de l'équation de dispersion numérique du schéma de Fang en 2D. . . . .	46
2.4	Anisotropie en degrés par longueur d'onde, du schéma de Yee et de Fang en 2D, optimisé à $\frac{\lambda}{10}$ (coupe à cette fréquence). . . . .	47
2.5	CFL $S \leq 6/7$ optimale du schéma de Fang en 2D en fonction de $N_\lambda$ la résolution du maillage (= CPW nombre de cellules par longueur d'onde). . . . .	49
2.6	En 2D, erreur maximale de la dispersion numérique à différentes optimisations du schéma de Fang. L'optimisation est faite pour une fréquence donnée, soit de manière équivalente, pour un certain nombre de cellules pour cette longueur d'onde. CPW = $N_\lambda$ nombre de cellules par longueur d'onde. . . . .	49
2.7	En 2D, borne inférieure de la dispersion numérique du schéma de Fang obtenue par optimisation à chaque $N_\lambda$ . . . . .	50

2.8	En 2D, ordre de convergence de la dispersion numérique. Les courbes de convergence d'ordre 4 et d'ordre 2 sont représentées afin de comparer facilement.	50
2.9	Stencil du schéma (2,4) de Oh. Pondération entre les champs électriques du stencil de Fang et de Yee.	52
2.10	Dispersion numérique de différents schémas. Deux schémas de Oh : isotrope et isotrope+correction. La correction permet de réduire significativement la dispersion numérique sur une bande de fréquence étroite. En contrepartie, la dispersion numérique en basse fréquence est largement augmentée. Par exemple ici, environ 2° d'erreur par longueur d'onde sur toute une région large en basse fréquence.	53
2.11	Dispersion numérique de différents schémas. Schéma de Oh avec optimisation à 10 cellules par longueur d'onde (CPW) pour différentes valeurs de CFL. On remarque la superposition du schéma de Oh avec celui de Fang. Cela signifie que, pour ce type de schéma et à cette CFL, la dispersion numérique est minimale à 10CPW seulement avec les coefficients de Fang.	54
2.12	Dispersion numérique de différents schémas. Schéma de Oh avec optimisation à CFL maximale pour différentes résolutions (CPW).	54
2.13	Dispersion numérique en fonction de la résolution de maillage : schémas optimisés à 5CPW (sauf pour Fang à CFL maximal).	58
2.14	Dispersion numérique 3D en fonction de la résolution de maillage.	59
2.15	Dispersion numérique en fonction de la résolution de maillage : schémas optimisés à 10CPW. Schéma de Oh isotrope avec correction et schéma de Sun avec $w = \frac{27}{26}$ et optimisation à 10CPW avec la technique de modification de coefficient (CM). Le schéma de Sun est moins performant mais est relativement isotrope sur une large bande.	61
2.16	Dispersion numérique 3D à différentes CFL pour le schéma de Chun. Tout comme le schéma de Fang, la CFL optimale du schéma de Chun n'est pas la CFL maximale. Cependant, le pas de temps optimal est supérieur à celui de Yee (environ 1.625 fois supérieur).	65
2.17	Anisotropie (en degré par longueur d'onde) de la dispersion numérique dans le plan (x,y) : CFL égal à celui de Yee pour Chun. Le schéma de Chun à les mêmes défauts d'anisotropie que le schéma de Yee pour les pas de temps indiqués. La dispersion numérique a diminué mais reste tout de même supérieure à 1° par longueur d'onde à 5CPW.	66
2.18	Anisotropie (en degré par longueur d'onde) de la dispersion numérique dans le plan (x,y) : CFL optimale pour Chun. A CFL optimale, la dispersion numérique diminue significativement et équilibre les erreurs maximales commises dans les directions axiales et diagonales. A 5CPW, la dispersion numérique est relativement correcte avec une erreur d'environ 0.6-0.7 degré par longueur d'onde.	67
2.19	Ordre de convergence de la dispersion numérique 3D à différentes CFL pour Chun. Les droites ordre 4 et ordre 2 représentent des convergences de ces ordres.	67
2.20	Stencil du schéma de Kitsunezaki. Schéma des champs impliqués dans le développement de Taylor de E et H dans les intégrales linéiques ou surfaciques.	68
2.21	Stencil du schéma M24.	69
2.22	Dispersion numérique en fonction de la résolution du maillage : schémas optimisés à 5CPW.	71
2.23	Dispersion numérique en fonction de la résolution du maillage : schémas optimisés à 10CPW et schéma de Oh isotrope avec correction.	71
2.24	Anisotropie de la dispersion numérique : schémas optimisés à 10CPW (coupe à cette fréquence) et schéma de Oh isotrope avec ou sans correction.	72

2.25	Dispersion numérique en fonction de la résolution de maillage : schémas optimisés à 10CPW. Schéma de Oh isotrope avec correction et schéma de Yang (NSFD)[32]. . . . .	75
2.26	Stencil du schéma CM24. . . . .	79
2.27	Erreur de phase maximale de certains schémas FDTD avec une optimisation à la résolution de maillage R. Le nombre CFL est maximal pour tous les schémas sauf le schéma S24 ( $\approx 0.275$ ). Le schéma M24 présente une erreur sur un maillage 2D. . . . .	84
2.28	Erreur de phase maximale de différents schémas CM24 avec une optimisation à $R = 10$ . Chaque schéma CM24 sont obtenus avec une CFL fixe différente lors de l'optimisation. Dès lors, les coefficients $K_i$ d'un schéma CM24 différent des autres schémas. . . . .	85
2.29	Source Gaussienne non-transparente d'amplitude 1 pour le schéma de Yee et de Fang (avec ou sans correction). . . . .	87
2.30	Mode TE <sub>101</sub> avec une barre d'erreur de 0.2% et les fréquences de résonances numériques correspondantes. . . . .	90
2.31	Erreur relative (%) sur les fréquences de résonance des trois schémas. Seuls les fréquences de résonance lesquelles ont pu avoir une correspondance visuelle avec celles théoriques sont affichées. D'où la différence de nombre de points entre chaque groupe de données. $R = \lambda_{min}/\Delta$ à 1 GHz si non spécifié. . . . .	91
2.32	Configuration spatiale en "carré" des quatre sources dipolaires. . . . .	92
2.33	Champ lointain d'une source dipolaire à 1 GHz. . . . .	93
2.34	Champ lointain obtenu avec le schéma S22 avec ou sans correction de la dispersion numérique, avec un maillage $R = 10$ , de source dipolaire à 1 GHz. . . . .	94
2.35	Champ lointain obtenu avec le schéma S24 (CFL=0.275) et CM24 avec un maillage $R = 10$ du cas à quatre dipôles à 1 GHz. . . . .	95
3.1	Maillage en escalier d'un cylindre. . . . .	99
3.2	Exemple de maillage structuré (gauche : quadrilatères) et non structuré (droite : triangulaires). . . . .	101
3.3	Structure métallique (PEC en rouge) traversant une cellule de Yee. Deux champs $H_z$ se trouvent alors dans la cellule originale (ou standard) et chacune est mise à jour avec les champs électriques du contour défini par l'équation intégrale de Faraday. Ainsi, l'indice 1 ou 2 permet de faire la correspondance des longueurs pour la mise à jour du champ $H_{z1}$ ou $H_{z2}$ . . . . .	102
3.4	Chemins d'intégration pour l'intégrale de contour dans l'équation intégrale de Faraday sur un exemple 2D pour la CPFDTD avec une paroi PEC [16]. . . . .	104
3.5	Technique conforme DM : métallisation (zone hachurée) de l'aire de $H_{z2}$ si le ratio $\frac{\text{Aire H}}{\text{Aire cellule standard}}$ ou le ratio longueur $\frac{\max(l_x^\pm, l_y^\pm)}{\text{Aire H}}$ est insuffisante. . . . .	105
3.6	Technique conforme BK : agrandissement de l'aire de $H_{z2}$ (zone avec des points) si ratio $\frac{\text{aire H}}{\text{Aire cellule standard}}$ insuffisante. . . . .	106
3.7	ECT : La zone avec des points est l'élargissement (aire $S_{stab} = S_1 + S'_2$ ) d'une cellule instable (d'aire $S_1$ ) dans une cellule stable (d'aire $S_2$ ). . . . .	108
3.8	Les différentes étapes de l'ECT pour une cellule instable. . . . .	109
3.9	Un exemple parmi les cas particuliers : le coin. L'ECT préconise l'utilisation de trois cellules virtuelles. . . . .	110
3.10	Technique conforme SC : métallisation d'une certaine longueur d'arête si cellule instable suivant le critère (3.15). . . . .	111

3.11	Cavité cylindrique : courbes de fréquences pour les trois méthodes conformes(CFL à 0.68 pour DM et BK) et la FDTD classique (ESC) pour le mode $TE_{111}$ . . . . .	112
3.12	SER monostatique d'une sphère de 13cm de rayon, maillage avec cellule cubique de 2mm( $R=\lambda_{10GHz}/\Delta=15$ ) et 1mm( $R=30$ ); Zoom sur la figure du bas. CFL à 0.5 pour les techniques conformes. . . . .	114
3.13	Principe d'image pour une plaque PEC traversant le stencil pour une mise à jour du champ Hz. Le champ E tangent de l'autre côté de plaque PEC est la copie de celui dans la région de H mise à jour, avec un signe contraire. Le champ E normal de l'autre côté de la plaque PEC est la copie de celui dans la région de H mise à jour. Les composantes de champ H de l'autre côté de la plaque PEC ont un traitement similaire, sauf que c'est le champ normal qui a le signe contraire. . . . .	116
3.14	Exemple de bord de plaque métallique où le principe d'image n'est pas utilisable sur les composantes de champ noté avec un "?". Leur stencil ne se retrouve pas dans la même configuration de la figure 3.13 pour le principe d'image. . . . .	116
3.15	Configuration de la plaque 20x20cm et champ mesuré à proche d'un coin (à une cellule près). . . . .	118
3.16	Champ mesuré proche d'un coin d'une plaque métallique, avec une modification locale du schéma via l'opérateur d'ordre 2 lorsque le stencil est tronqué. (Hadi) signifie que les coefficients de cet opérateur sont égaux à 1. Dans le cas contraire, les coefficients sont ceux du schéma d'ordre 4. . . . .	119
3.17	L'hybridation entre l'ordre 2 et 4 délimite une région (entouré en bleu ici), idéalement la plus petite, où sera appliqué le schéma classique de Yee. . . . .	119
4.1	Chaîne de calcul de la SER pour la FDTD incluant l'illumination de la cible par une onde plane (surface de Huygens TFSF) et une transformée champ proche-champ lointain (NTFF). . . . .	127
4.2	Principe d'équivalence de Huygens . . . . .	128
4.3	Transformation champ proche-champ lointain. . . . .	129
4.4	Coupe 2D dans le plan (x,y) de la face $x = i_p = x_{sup}$ de la surface de Huygens pour l'injecteur d'ondes planes. . . . .	131
4.5	Coupe 2D dans le plan (x,y) d'un coin entre les faces $x_{sup}$ et $y_{inf}$ de la surface de Huygens pour l'injecteur d'ondes planes. . . . .	132
4.6	Règle 1D pour l'injecteur d'ondes planes. Les conditions absorbantes à la frontière sont de type Perfectly Matched Layers (PML) et sont situées hors de la boîte de Huygens. . . . .	133
4.7	Correction de la dispersion du schéma 1D avec seulement une contrainte. Adéquation seulement en basse fréquence ( $k \rightarrow 0$ ou de manière équivalente $CPW \rightarrow \infty$ ). Direction de l'onde plane : $\theta = \frac{\pi}{2}, \phi = 30^\circ$ . . . . .	142
4.8	Correction de la dispersion du schéma 1D avec deux contraintes. Direction de l'onde plane : $\theta = 41^\circ, \phi = 37^\circ$ . . . . .	144
4.9	Projection des champs électriques du stencil CM24 sur une règle 1D dirigée suivant la diagonale 2D. . . . .	145
4.10	Différence d'erreur de phase entre le schéma 3D et un schéma soit FDTD(2,4) 1D soit FDTD(2,6) 1D. Propagation de direction $\phi = 70^\circ, \theta = 30^\circ$ . . . . .	146
4.11	Amplitude du champ électrique en zone diffracté, angles magiques : (A) axiale (B) $\phi = 45^\circ, \theta = 125.2643^\circ$ ; Boîte de Huygens (33,33,33) . . . . .	147
4.12	Amplitude du champ électrique en zone diffracté, angle non-magique : $\phi = 30^\circ, \theta = 70^\circ$ ; Boîte de Huygens (99,99,99) . . . . .	148

4.13	Application de l'opérateur élémentaire pour la HABC (en $x_{sup}$ ) pour le schéma de Yee sur le champ H encadré en bleu. Le champ incident $P_e(E)$ est égal au champ E relié par une flèche. . . . .	149
4.14	Application de l'opérateur élémentaire pour la HABC pour le schéma CM24 sur le champ H encadré en bleu. Le champ incident $P_e(P_e((E)))$ est égal au champ E relié par des flèches. . . . .	150
4.15	Application de l'opérateur de Higdon d'ordre 2 pour la HABC pour le schéma CM24 sur le champ H encadré en bleu. Le calcul du champ incident à la position du champ entouré en rouge est égal à la somme des contributions écrites au dessus de chaque champ $E, \tilde{E}$ et $\tilde{\tilde{E}}$ . . . . .	151
4.16	Coin formé par les HABCs et stencil du champ $H_z(i_p - 1)$ dont deux composantes non-axiales (en rouge) sont problématiques pour la technique HABC. . . . .	152
4.17	Coefficient de réflexion pour le modèle HABC avec l'opérateur de Higdon d'ordre 2. Deux angles d'incidences : (A) incidence normale (B) $73^\circ$ . . . . .	153
4.18	Coefficient de réflexion théorique pour l'opérateur de Higdon d'ordre 2. . . . .	153
4.19	Coefficient de réflexion des CPMLs pour les schémas : S22,S24 et CM24. Deux angles d'incidences : (A) incidence normale (B) $73^\circ$ . . . . .	156
4.20	Fil suivant l'axe z traversant une facette (x,y) d'une cellule de Yee. . . . .	157
4.21	Fil positionné au milieu de la cellule de longueur 17 cm. Boîte de Huygens pour l'injecteur d'onde plane et le champ lointain. . . . .	158
4.22	SER monostatique (HH) d'un fil positionné au milieu de la cellule de longueur 17cm avec schéma de Yee et CM24. . . . .	159
4.23	Configuration de l'onde plane pour la SER d'une plaque 20x20cm et aperçu du treillis de fils en rouge avec la grille FDTD en gris. . . . .	159
4.24	SER bistatique (HH) d'une plaque $2\lambda \times 2\lambda$ à 3GHz, avec schéma de Yee et CM24. Pas de prise en compte de la mutuelle de fils par le champ FDTD pour le schéma CM24. . . . .	160
4.25	SER bistatique (HH) d'une plaque $2\lambda \times 2\lambda$ à 3GHz, avec schéma de Yee et CM24. . . . .	161
5.1	Dièdre droit de 24(l)x30(h)cm. . . . .	167
5.2	SER (HH) bistatique d'un dièdre droit de 24(l)x30(h)cm. Incidence de $45^\circ$ . Références : MoM et FDTD (modèle plaque) avec maillage en $\lambda/10$ à 10GHz. . . . .	168
5.3	SER (HH) bistatique d'un dièdre droit de 24(l)x30(h)cm. Incidence de $45^\circ$ . Modèle des fils obliques pour le schéma CM24. Fils de rayon 1mm = $\Delta/3$ . Schéma CM24 optimisé à $\Delta/10$ pour une CFL à 0.5, avec maillage en $\lambda/10$ à 10GHz . . . . .	169
5.4	Sphère de rayon de 13 cm modélisée par un treillis de fils obliques. . . . .	170
5.5	SER monostatique d'une sphère de 13 cm. Le nombre présent pour des schémas FDTD est le nombre CFL. La longueur d'onde minimale est associée à la fréquence de 10 GHz. . . . .	171
5.6	Configuration de la simulation : calcul de SER du cylindre avec une onde plane en incidence TE dirigée suivant $\vec{x}$ . Étude en polarisation HH ( $\phi\phi$ ). . . . .	172
5.7	Maillage conforme puis treillis du cylindre. . . . .	175
5.8	SER monostatique (polarisation HH) d'un cylindre de rayon 21 cm et de hauteur de 30 cm avec un pas de maille de 3 mm pour le schéma de Yee (FDTD). Le pas est de 5 mm pour les autres schémas. . . . .	176
5.9	SER bistatique (polarisation HH) d'un cylindre de rayon 21 cm et de hauteur de 30 cm avec un pas de maille de 3 mm pour le schéma de Yee (FDTD). Le pas est de 5 mm pour les autres schémas. . . . .	176

5.10	Maillage structuré du cobra. Le côté d'un quadrilatère est en moyenne 1 cm. Dimensions : 43.71 (L) x 11 (l) x 8.4 (h) cm . . . . .	177
5.11	Maillage conforme puis treillis du cobra. . . . .	178
5.12	SER monostatique (polarisation HH) du Cobra avec un maillage de 1 cm. . . . .	179
5.13	SER bistatique (polarisation HH) du Cobra avec un maillage de 1 cm. . . . .	179
5.14	Maillage de l'amande NASA avec des triangles ou des quadrangles. . . . .	180
5.15	Maillage conforme de l'amande NASA. . . . .	180
5.16	SER monostatique (polarisation HH) de l'amande NASA avec un maillage de 1,5 mm. . . . .	181
5.17	SER bistatique (polarisation HH) de l'amande NASA avec un maillage de 1,5 mm.	181
5.18	Configuration de l'onde plane et treillis de fils obliques pour la modélisation de l'hélicoptère. Maillage conforme en bas présentant quelques défauts. . . . .	182
5.19	SER monostatique (SER total) de l'hélicoptère avec un maillage de 10 cm pour le schéma CM24 et 13.3 cm pour la FDTD SC. . . . .	183
5.20	SER bistatique (SER total) de l'hélicoptère avec un maillage de 10 cm pour le schéma CM24 et 13.3 cm pour la FDTD SC. . . . .	184

# Liste des tableaux

1.1	Valeurs typiques de la SER monostatique de certaines cibles. [6, 5]	16
1.2	Importance des contributions pour la SER [5]. Niveau situé par rapport à la SER maximale de la cible.	20
1.3	SER de géométries canoniques en région optique [7]	21
1.4	Synthèse de méthodologie de calcul de la SER.	30
2.1	Synthèse de quelques schémas	77
2.2	Coefficients optimaux pour le schéma CM24 pour des maillages à cellules uniformes et la CFL associée	84
2.3	Flops/CFL (FpCFL) pour une mise à jour d'une composante de champ et le temps CPU associé pour quatre cœurs.	89
2.4	Gain sur le temps de calcul en calcul parallèle et normalisé, jusqu'à six cœurs avec Intel(R) Xeon(R) CPU E5-1650 (3.20GHz)	89
2.5	Flops/CFL (FpCFL) pour une mise à jour d'une composante de champ et le temps CPU associé pour un cœur.	90
3.1	Deux critères de stabilité à CFL donnée.	105
3.2	Pourcentage d'erreur des fréquences de résonance d'une cavité cylindrique obtenus des méthodes conformes avec $\frac{\lambda}{10}$ contre celles théoriques.	112
3.3	Résumés des caractéristiques des techniques conformes pour la méthodes FDTD.	113
4.1	Paramètres des simulations de la plaque 20x20cm pour le modèle des fils obliques.	160
4.2	Paramètres recommandés pour la modélisation de plaques PEC avec le modèle des fils obliques.	162
5.1	Paramètres recommandés pour la modélisation de plaques PEC avec le modèle des fils obliques.	166
5.2	Temps de calcul de quelques exemples du chapitre 5. Les calculs sont généralement faits avec 4 cœurs. Résolution du maillage et CFL donné entre parenthèses.	174
5.3	Occupation mémoire (GHz) de quelques exemples du chapitre 5. Résolution du maillage et CFL donné entre parenthèses. Pour la MoM, la mémoire est entre 4 et 6 GHz.	174

# Introduction générale

La détection électromagnétique remonte aux débuts de la théorie électromagnétique de J.C. Maxwell. Les travaux d'Heinrich Hertz, fin du 19<sup>ème</sup> siècle, mettent déjà en évidence la réflexion des ondes électromagnétiques sur des corps métalliques. Cependant, il aura fallu attendre l'année 1904, et l'obtention du premier brevet d'un détecteur d'obstacle métallique par ondes radios, au nom de C. Hülsmeyer. Cette invention est la première connue actuellement sous le nom de radar, acronyme de *RAdio Detection And Ranging*. Cette invention avait pour objectif de prévenir les collisions de navires lors de la navigation. Lors de la guerre mondiale 1914–1918, les premières expériences sont menées pour la détection d'aéronef, une détection principalement dans l'infrarouge, limitant son utilisation en conditions réelles. Depuis, de nombreuses applications ont vu le jour : radar de navigation, radar de surveillance, radar météo, radar à application sous-sol, radar altimètre, etc... Ces applications ont permis le développement de technologies de radar afin de les adapter aux différentes conditions environnementales. Elles ont toutes le même objectif : obtenir de l'information.

Cette information est généralement présente dès lors que l'objet détenant l'information existe. Cependant, contrairement aux données informatiques où les échanges peuvent être cryptées, cette information est a priori difficilement dissimulable. Pour un radar, les informations ne peuvent être recueillies que si l'objet détenant l'information est détecté. Cet objet, souvent nommé cible, fait donc parti des éléments critiques dans la détection radar. Une stratégie possible est d'entraver cette détection à l'aide d'un équipement tel un brouilleur radar par exemple. Mais leur utilisation indique généralement déjà la présence du brouilleur. S'il est possible de modifier la structure de la cible, alors il faudrait idéalement la créer comme une structure de nature indétectable. En effet, certains objets naturels sont plus ou moins détectable et les paramètres de cette détection dépendent seulement de leurs propriétés intrinsèques. L'évaluation de cette détection électromagnétique dépendant seulement des caractéristiques de la cible est liée directement à la notion de Surface Équivalent Radar (SER).

La réduction de la SER est une stratégie de furtivité radar. Les méthodes d'évaluation de la SER jouent donc un rôle important et connaître leurs points forts et points faibles permettent de décider de la meilleure approche pour la réduction de la SER. La pertinence de ces méthodes repose sur la précision de l'évaluation de la SER et des ressources nécessaires pour son utilisation. Le chapitre 1 de cette thèse introduit la notion de SER et un état de l'art sur les méthodologies d'évaluation de la SER.

L'une des approches retenues ici est la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD). Cette approche repose sur la résolution numérique des équations de

Maxwell en régime transitoire. Depuis 1966, le schéma de Yee d'ordre 2 reste le schéma historique pour la simulation de propagation d'ondes électromagnétiques. Pendant des décennies, et encore aujourd'hui, une panoplie de modèles a été développée et approfondie avec le schéma de Yee. Sa simple formulation et sa versatilité sont sans doute ses plus grands atouts. La résolution dans le domaine temporel permet d'obtenir la signature temporelle de la structure.

Le schéma de Yee souffre de deux points faibles cruciaux pour le calcul précis de la SER : l'erreur due à la dispersion numérique et celle due à l'approximation de la géométrie curviligne par un maillage cartésien avec des marches en escalier. En conséquence, la qualité des résultats est grandement détériorée et pour obtenir une précision correcte, les ressources requises dont le temps de calcul, sont beaucoup trop importantes, malgré l'augmentation de la puissance de calcul des processeurs et de la taille mémoire.

Le travail de cette thèse est motivé par la recherche d'une méthode FDTD pouvant évaluer la SER d'une cible de manière plus efficace que le schéma de Yee. Cette recherche passe notamment par la réduction de l'effet de la dispersion numérique du schéma FDTD et par une meilleure approximation de la géométrie de la cible. Les schémas FDTD d'ordre supérieur à 2 ont été investigués dans la littérature, car ces schémas possèdent une dispersion numérique plus faible que le schéma de Yee d'ordre 2. Plusieurs approches existent et les schémas obtenus possèdent chacune leur manière de contrôler la dispersion numérique. Outre ceci, d'autres préoccupations viennent s'ajouter aux contraintes sur le schéma comme ses performances en temps de calcul et sa complexité. L'introduction à la méthode FDTD d'ordre 2 et d'ordre supérieur et l'état de l'art sur ces approches pour la réduction sur la dispersion numérique feront partie du chapitre 2. Ce chapitre 2 se termine sur le schéma original *Conservative Modified FDTD(2,4)* (CM24) développé au cours de cette thèse pour répondre, en plus d'une faible dispersion numérique, à certains critères de performances pour le calcul de SER. Notamment, l'approche choisie est envisagée à être adaptée avec les techniques conformes pour le problème d'approximation de la géométrie curviligne.

Ces techniques conformes développées pour le schéma de Yee permettent d'approximer correctement la géométrie curviligne des structures dans le maillage cartésien. Elles reposent toutes sur une formulation intégrale des équations de Maxwell. Leur adaptation serait alors possible avec le schéma original CM24 de cette thèse puisque celui-ci a été construit sur la base d'une formulation intégrale des équations de Maxwell. Les techniques conformes traitent donc aussi les conditions aux limites du schéma lorsque l'onde rencontre une structure dans le maillage. Les conditions aux limites des schémas FDTD d'ordre supérieur (avec un stencil élargi) sont très difficiles à exprimer. La stabilité du schéma est souvent remise en cause. Un état de l'art sur les techniques conformes et des conditions aux limites de type parfaitement conducteur pour la méthode FDTD d'ordre supérieur est réalisé dans le chapitre 3. Les modèles issus de la littérature sont, à notre connaissance, instables. Des propositions et des tests ont été réalisés pour le schéma original mais en vain. Une alternative à ce problème est proposée dans le chapitre suivant, dont l'idée est de mailler la cible avec un treillis de fils.

Le chapitre 4 concerne les modèles nécessaires pour le calcul de la SER par la méthode

FDTD, comme par exemple les conditions aux limites de structures ou bien les conditions aux frontières du volume de calcul. Ces modèles sont hérités du schéma de Yee mais devront être adaptés aux schémas FDTD d'ordre supérieur si nécessaire. En particulier, l'injecteur d'onde plane a été adapté pour le schéma original. Une étude de la récente technique Huygens Absorbing Boundary Conditions a été réalisée pour les schémas FDTD d'ordre supérieur car le calcul de SER par la FDTD est réalisé dans les conditions idéales pour cette nouvelle technique. Les descriptions et les adaptations le cas échéant des modèles font l'objet du chapitre 4. Ce chapitre 4 montrera aussi l'alternative au problème du chapitre 3, reposant sur le modèle des fils obliques pour la FDTD. Toutefois, l'étude de cette approche est venue très tardivement durant la thèse et le manque de temps n'a pas permis de l'approfondir.

Le dernier chapitre montrera quelques exemples de calcul de SER sur différentes structures. Ceci permettra d'évaluer d'une part, la pertinence des techniques conformes, du schéma original et de l'alternative proposée par le modèle des fils obliques ; et d'autre part, les perspectives offertes par ce travail lesquelles concluront cette thèse.

# Surface Équivalente Radar

Les systèmes radar reposent sur l'émission et de la mesure d'échos électromagnétiques d'obstacles ou de cibles. Cependant, la détection d'un tel écho ne permet d'affirmer que la présence d'un objet. Le radar, tel que nous le connaissons aujourd'hui, permet d'obtenir beaucoup plus d'informations comme la position ou la vitesse d'une cible mobile. Outre la détection, l'identification de la cible est une information capitale. Dans le contexte de guerre électronique, l'accès à ces informations de manière fiable est crucial. Par opposition, rendre difficile l'accès à ces informations est tout aussi avantageux. C'est l'objet de la furtivité radar.

La notion de surface équivalente radar (SER) est primordiale dans le domaine de la furtivité radar. La surface équivalente radar, ou en anglais "Radar Cross Section" (RCS), quantifie la réflectivité électromagnétique d'un corps. Elle est utilisée dans les prédictions de détection de cibles selon la distance entre le radar et cette même cible. Par exemple elle est présente dans l'équation du radar donnant la puissance reçue d'un émetteur par un récepteur dans une liaison radar. On comprendra alors que la SER dépend très fortement des caractéristiques intrinsèques à l'objet (géométrie, matériaux, ...). Sa complexité est tout autant accrue puisque cette SER peut avoir des variations importantes suivant la direction d'observation entre le radar et la cible. Les caractéristiques du radar, comme son spectre d'acquisition en fréquence, sont aussi prises en compte lors de l'étude de la SER. Ainsi, des paramètres extrinsèques à l'objet peuvent rendre la modélisation de l'aéronef difficile. Des compromis sont alors faits afin de simplifier certaines étapes de la modélisation.

Le radar est la technique la plus utilisée dans les tactiques, que ce soit en position défensive ou offensive. La SER reste la métrique utilisée dans ce type d'opération et la réduction de la SER est alors un atout. Dans cette optique, la précision et la robustesse de la méthode d'évaluation de la SER sont des critères de qualification et de performance. Ces méthodes aboutissent généralement au rapport entre la puissance de l'onde diffractée par la cible et incidente sur la cible permettant d'évaluer sa SER. Elles prédisent une SER de la même manière que celle qui serait mesurée expérimentalement suivant une configuration émetteur-cible-récepteur. La distance séparant le radar de la cible est assez grande afin que l'onde incidente puisse être considérée plane. Nous nous plaçons alors dans le cadre d'étude de rayonnement en champ lointain, ce qui permet d'utiliser des simplifications dans les modèles d'estimation.

Des méthodologies de calcul de la SER – principalement classées selon trois catégories nommées : asymptotiques, rigoureuses (ou exactes) et analytiques – ont été développées durant le siècle dernier afin de s’affranchir ou de compléter et valider les mesures expérimentales. La complémentarité spectrale des méthodes rigoureuses et asymptotiques permet de couvrir un large spectre mais montre aussi les limites de chaque méthodologies. Les caractéristiques, avantages et inconvénients de principales méthodes seront détaillés plus loin. Ce chapitre introduit tout d’abord des définitions générales sur la notion de SER afin de savoir apprécier les résultats de SER donnés dans cette thèse. Il présente les différentes méthodologies de calcul de SER et appuie le choix de la méthode des différences finies dans le domaine temporel.

Parmi les références de ce chapitre, la référence [6] est un bon début pour s’initier au contexte de la SER, [5] donne une bonne vue d’ensemble sur l’évaluation et l’interprétation de la SER. La référence [14] parcourt le sujet en détail.

## 1.1 Définition et facteurs

### Image soumise à droit d'auteur

**Figure 1.1** – Illustration de la notion de SER [8]. La SER d’un objet peut-être vu comme l’aire de la section plane d’une sphère équivalente, laquelle réfléchirait la même puissance que l’objet.

**Définition 1.1.1** La Surface Équivalente Radar (SER)  $\sigma_{vu}$  est définie par [12] :

$$\sigma_{vu} := 4\pi R^2 \frac{\|E_s^v \times H_s^{v*}\|}{\|E_i^u \times H_i^{u*}\|} \quad (1.1)$$

où :

- $E$  est le champ électrique,
- $H$  est le champ magnétique,
- $i$  désigne le champ incident,
- $s$  désigne le champ diffracté,
- $u$  et  $v$  désignent respectivement la polarisation de l’émetteur et du récepteur.

Lors de la réflexion sur la structure, il se produit une dépolarisation de l’onde. Les détails sur la polarisation seront expliquées plus loin. La SER est donnée en configuration monostatique si la distance séparant l’émetteur et le récepteur est négligeable. Dans le cas contraire, la configuration est dite bistatique. En théorie, la valeur de  $\sigma$  est recherchée lorsque la distance radar-cible est infiniment grande i.e.  $R \rightarrow \infty$ . Lorsque les ondes incidentes et diffractées sont quasi-planes, la définition (1.1) se réduit à la redéfinition ci-dessous.

**Definition 1.1.2** Si les ondes incidentes et diffractées sont planes, alors :

$$\sigma_{vu} = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{|E_s^v|^2}{|E_i^u|^2} = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \frac{|H_s^v|^2}{|H_i^u|^2} \quad (1.2)$$

C'est notamment cette simplification qui est utilisée lorsque la distance séparant le radar et la cible est assez grande. Dans ce cas le front d'onde peut être considéré localement plan sur la surface de la cible. La cible est dite située en zone de champ lointain (Zone de Fraunhofer).

D'autres définitions de la SER peuvent être trouvées dans la littérature. Trois sont référées dans [9] et une définition IEEE est référée dans [21]. Toutes sont équivalentes et quelques-unes sont citées ci-dessous :

[10] : "Mesure de la puissance de réflectivité d'une cible".

[8] : "Mesure du ratio de puissance réfléchi par stéradian, dans la direction du récepteur, par la densité [surfacique] de puissance de l'onde incidente interceptée par la cible".

[11, 6, 2] : "**Aire** interceptant la même quantité de puissance [incidente que la cible] telle que, si l'onde réfléchi était diffractée de manière isotrope, alors l'écho observé serait **identique** à celui de la cible".

Cette dernière définition propose une justification claire quant à l'appellation de Surface Équivalente Radar.

A titre indicatif, le tableau 1.1 donne des valeurs typiques de SER attribuées à certaines cibles avec l'unité  $db_{m^2}$  ( $db_{sm}$  en anglais), définie par décibel  $m^2$ .

$$\sigma(db_{m^2}) = 10 \log_{10}(\sigma) \quad (1.3)$$

Grossièrement, la furtivité radar est "réussie" si un avion de chasse est confondu avec un

Corps	SER ( $m^2$ )	SER ( $db_{m^2}$ )
Oiseaux	$10^{-2}$	-20
Ondes rampantes, Humain	1	0
Avion de chasse	10	10
Avion de chasse, Voiture	100	20
Avion	1000	30
Bateau	$10^4$	40

**Tableau 1.1 – Valeurs typiques de la SER monostatique de certaines cibles. [6, 5]**

oiseau.

D'autre part, notons l'importance de la réduction de la SER d'une cible. Un exemple d'application de son influence sur des caractéristiques radars, repris ici de la référence [8], est donné sur la figure 1.2. En effet, une réduction de 24% de la SER peut réduire théoriquement la distance de détection radar de 8%. Si un brouilleur embarqué est utilisé (*burn-through*), la distance de détection peut être réduite de 13%. Bien que ce modèle soit simplifié, ceci montre l'avantage certain d'avoir conçu un appareil avec une SER faible.

## Image soumise à droit d'auteur

**Figure 1.2 – Influence de la SER d’une cible sur la détection radar, la distance "burn-through" radar et la puissance de brouillage radar [8]. la distance "burn-through" radar est la distance de détection du radar avec une cible équipé d’un brouilleur.**

Pour parvenir à une réduction importante de la SER, il est nécessaire de comprendre l’influence des différents facteurs et les possibles configurations physiques associées. Les sections suivantes présentent des principaux facteurs utiles à la compréhension des évaluations de SER de cibles.

### 1.1.1 Dimensions électriques de la cible

Il est naturel de comprendre que selon la fréquence de l’onde incidente, l’onde diffractée sera différente provenant de phénomènes physiques sensibles à la fréquence considérée. Une simple expérience de calcul de la SER avec une sphère parfaitement conductrice Fig. 1.3, montre que trois régions fréquentielles peuvent être discernées : la zone de Rayleigh, la zone de Mie ou de résonance, et la zone optique. Elles se distinguent chacune des autres par un comportement de la SER propre à chaque région. Remarquons en particulier la difficulté d’analyse de la SER en zone de résonance due à une variation largement intensifiée par rapport aux autres régions. La SER d’une sphère peut être calculée analytiquement par la série de Mie [14].

## Image soumise à droit d'auteur

**Figure 1.3 – Représentation log-log de la SER normalisée d’une sphère parfaitement conductrice en fonction du rapport circonférence/ $\lambda$  [5]. Trois régions fréquentielles remarquables : Zone de Rayleigh, Zone de résonance (Mie) et Zone optique.**

En général, la règle est la suivante [12] pour la SER d’une structure occupant un volume  $V$  en zone de Rayleigh :

$$\sigma = K \frac{V^2}{\lambda^4}, \quad K \in \mathbb{R} \quad (1.4)$$

Il est possible de ainsi déterminer la région fréquentielle d’étude dès lors que les dimensions de la cible et la fréquence de l’onde incidente sont connus. Par exemple, la zone de Rayleigh est en général la zone d’intérêt pour l’étude de la SER des hydrométéores (particules météorologiques).

### 1.1.2 Distance radar-cible

Précédemment, l’onde incidente a été considérée comme quasi-plane. C’est notamment le cas lorsque la distance radar-cible est assez grande. Le comportement du champ diffracté est différent selon la distance  $R$  à laquelle la cible est observée. Trois régions de disque concentriques sur la cible, peuvent être considérées [13] :

- $R < R_1$  : Champ proche réactif défini comme étant la région proche de l’antenne (ou de la cible) où le champ réactif prédomine.

- $R_1 < R < R_2$  : Champ proche radiatif défini comme étant la région où le champ radiatif prédomine et la distribution angulaire du champ dépend encore de la distance à l'antenne (ou à la cible).
- $R > R_2$  : Champ lointain défini comme étant la région où la distribution angulaire du champ est quasi-indépendante de la distance à l'antenne (ou à la cible).

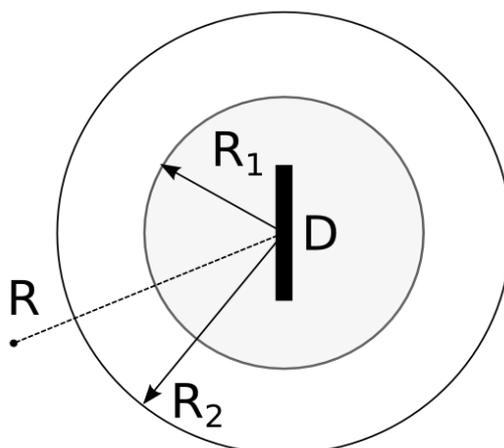


Figure 1.4 – Zone de champ diffracté, par un objet rayonnant, délimité par régions.

Retenons que, selon la région considérée, la SER de la cible peut-être relativement indépendante de la distance radar-cible (champ lointain) ou tout au contraire, fortement sensible au moindre déplacement radial de la position d'observation dans la zone de champ proche (l'onde n'est pas forcément plane). La délimitation des régions n'est pas unique même si quelques critères permettent de les identifier. D'après [13], la définition de  $R_1$  est :

$$R_1 = 0.62 \sqrt{\frac{D^3}{\lambda}} \quad (1.5)$$

pour la zone de champ proche réactif. D'autres définitions de la  $R_1$  sont recueillies dans [12], comme par exemple :

$$R_1 = \frac{D^2}{\lambda} \quad (1.6)$$

Le champ lointain est considéré, habituellement, à partir de la distance, en antenne :

$$R_2 = \frac{2D^2}{\lambda} \quad (1.7)$$

et en radar :

$$R_2 = \frac{4D^2}{\lambda} \quad (1.8)$$

où  $D$  est la dimension caractéristique (diamètre) de la cible (Pour plus d'informations sur ce sujet, consulter le paragraphe §2.2.4 de la référence [13]). Cette thèse est centré sur l'évaluation de la SER en zone de champ lointain.

### 1.1.3 Polarisation en champ lointain

La polarisation d'une onde électromagnétique [25] est décrite par la direction du champ électrique. Celui-ci est toujours normal à la direction de propagation de l'onde. La réflexion d'une onde polarisée peut amener à un changement de l'état de polarisation suivant la géométrie et des caractéristiques physiques de la cible. Lorsque la propagation de l'onde est plane (polarisation linéaire), par exemple en champ lointain, Selon le type de plan, les notations usuelles sont les suivantes, par rapport au :

- Plan d'incidence : Polarisation parallèle (resp. perpendiculaire) ou TE (resp. TM) ou verticale (resp. horizontale),
- Plan de rayonnement : Plan E (resp. Plan H).

Les polarisations suivant les vecteurs  $\vec{\theta}$  et  $\vec{\phi}$  en coordonnées sphériques peuvent aussi être décrites. Elles sont associées au plan incident. Dans le cadre de la SER, l'émetteur et le récepteur ont souvent la même polarisation. Généralement, la SER d'une cible est étudiée suivant les co-polarisations HH,VV et polarisations croisées HV,VH. Les polarisations données commencent par la polarisation du récepteur puis celle de l'émetteur. Les figures 1.5 illustrent pour l'incidence et le rayonnement la direction des champs.

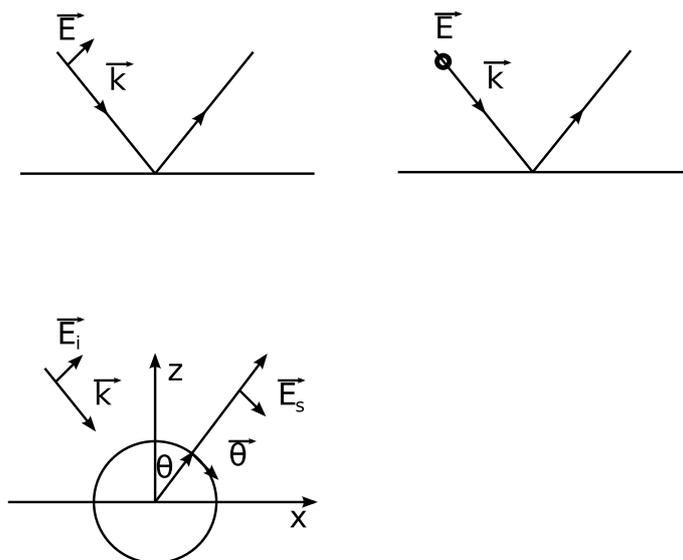


Figure 1.5 – Haut : Plan d'incidence avec (droite) polarisation parallèle ou TE ou verticale; (gauche) polarisation perpendiculaire ou TM ou horizontale. Bas : Plan de rayonnement ( $xz$ ,  $\phi = 0$ ) Plan E avec polarisation  $\theta$ .

### 1.1.4 Diffraction et cible complexe

## Image soumise à droit d'auteur

Figure 1.6 – Types de diffraction contribuant à la SER d'un avion [6]. Généralement, la SER sera très grande dès lors que la normale à une surface est parallèle à la direction d'observation.

La géométrie de la cible est l'un des principaux paramètres contribuant à sa SER. Sur la figure 1.6 plusieurs phénomènes physiques ou géométries contribuant significativement à la SER d'un aéronef sont présentés :

- Onde rampante,
- Réflexion spéculaire sur une surface,
- Discontinuités : ouverture, matériel, bord, pointe,
- Cavité.

Les contributions ne sont pas toutes de même niveau.

Niveau	Elevé	Bas
Contributeurs	Cockpit, fuselage, tuyère, voilure (en incidence normal), entrée d'air, dièdre, emports, dérives, antennes	Radome, voilure (en incidence parallèle), aérations

Tableau 1.2 – Importance des contributions pour la SER [5]. Niveau situé par rapport à la SER maximale de la cible.

Le tableau 1.2 donne un ordre de grandeur de quelques contributeurs. On parle de point *brillant* lorsqu'un contributeur, de grande dimension par rapport à la longueur d'onde, présente une SER significativement grande et localisée. Trouver l'ensemble des points brillants constitue un des objectifs puisqu'il s'agira d'y apporter des modifications afin de réduire les réflexions électromagnétiques. Les géométries étant complexes, les phénomènes de diffraction se superposent et il est difficile de prédire sans effort de calcul, le rayonnement de la structure. La réduction de la SER est possible en :

- ajoutant des structures avec une certaine impédance : le champ diffracté est modifiée de manière à réduire la SER,
- modifiant la géométrie de la cible : éviter les discontinuités, les réflexions multiples, les emports sous voilure...,
- utilisant des matériaux absorbants (Radar Absorbing Materials) : bande de fréquence, polarisation, coût, poids, résistance...

La référence [14] traite exhaustivement de ces techniques de réduction de la SER. Notons récemment l'utilisation, dans ce cadre, de matériaux composites.

## 1.2 Évaluation de la SER : Méthodes Asymptotiques

L'estimation analytique de la SER de certains objets canoniques (sphère, cône ...) rentre dans le cadre des méthodes exactes. Le tableau 1.3 donne quelques valeurs de SER de géométries canoniques en région optique [7]. Mais en règle générale, il est souvent difficile voire impossible d'estimer analytiquement la SER d'un objet complexe quelconque. Outre les moyens de mesure réels, on a souvent recours aux méthodologies de calcul asymptotique ou numérique. Dans cette section, les méthodes asymptotiques sont présentés de manière générale. Celles-ci sont valides en domaine hautes fréquences : zone optique ou limite supérieure de la zone de résonance. Les méthodes rigoureuses résolvant directement les équations de Maxwell nécessitent de larges ressources informatiques et de temps (notamment

en domaine Hautes Fréquences). Cependant l'augmentation croissante de la puissance de calcul et de la mémoire des calculateurs durant ces dernières années ont fait ressurgir l'intérêt des méthodes numériques. Les sections suivantes se sont inspirés de la référence [14].

Géométrie	SER ( $m^2$ )
Plaque rectangulaire $a \times b$	$\frac{4\pi a^2 b^2}{\lambda^2}$
Cylindre de rayon et hauteur $(r, h)$	$\frac{4\pi r h^2}{\lambda^2}$
Sphère de rayon $r$	$\pi r^2$
Dièdre droit formé par deux plaques $a \times b$	$\frac{8\pi a^2 b^2}{\lambda^2}$

Tableau 1.3 – SER de géométries canoniques en région optique [7]

Les méthodes asymptotiques s'appuient sur des hypothèses dites hautes fréquences ( $\lambda \rightarrow 0$ ) et considérations physiques afin de simplifier le problème de diffraction. Les résultats révèlent que les théories développées sont correctes sous ces simplifications. Un avantage de ces méthodes devant les méthodes rigoureuses est la compréhension directe du phénomène physique de diffraction. Il sera *a priori* plus aisé de corréler la SER avec les caractéristiques et les paramètres physiques de l'étude.

### 1.2.1 Optique Géométrique

La théorie de l'Optique Géométrique (GO) s'appuie sur la considération, en région optique, que le comportement de l'onde électromagnétique est similaire à celui d'un rayon. Elle se base sur le développement asymptotique de Luneberg-Kline du champ électromagnétique. L'approximation de Sommerfeld-Runge consiste à ne retenir que le premier terme de la série de Luneberg-Kline. Dans un milieu homogène et isotrope, cette approximation décrit un champ de rayon dont les trajectoires sont rectilignes. En particulier, la trajectoire de l'onde est décrite par le chemin optique. Ce dernier obéit au Principe de Fermat :

**Definition 1.2.1** *Principe de Fermat* : La longueur optique est définie par le produit de la longueur physique et de l'indice de réfraction du milieu. La longueur optique d'un rayon entre deux points  $A$  et  $B$  est un extremum.

Autrement dit, la longueur optique  $\int_A^B n$  est définie telle que :

$$\delta \int_A^B n = 0. \quad (1.9)$$

C'est à partir du principe de Fermat que les lois de réflexion et de réfraction de Snell-Descartes sont obtenues. Elles indiquent aussi que les phénomènes de réflexion sont locaux. Ainsi, cette théorie utilise les rayons réfléchis de la cible pointant vers le récepteur pour le calcul de la SER. En monostatique, les points de la cible appartenant à un élément de surface normal à la direction du récepteur, sont appelés points spéculaires. La figure 1.7 représente la géométrie d'un tube de rayon. Pour qu'un tel tube de rayon existe, il est indispensable d'avoir des surfaces à rayons de courbure non infinies. Ce n'est pas le cas par exemple d'une plaque

plane (génère une caustique à l'infini). Par conservation du transport d'énergie, la puissance du champ électrique est [17] :

$$\|E(x_0 + s)\|^2 = \|E(x_0)\|^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + s)(\rho_2 + s)} \|e^{jks}\| \quad (1.10)$$

avec  $\rho_i$  les rayons de courbure,  $x_0$  un point du front d'onde d'origine,  $s$  la distance au front d'onde d'observation et  $k$  le vecteur d'onde (Fig. 1.7). Il suffit alors de pouvoir exprimer le champ réfléchi en fonction du champ incident. La réflexion se fait sur le plan tangent au point de réflexion. Le champ électrique local est décomposé suivant ses composantes normale et parallèle de polarisation. Les champs incident et réfléchi sont liés via la matrice de réflexion dépendant des conditions d'impédance de la surface considérée.

Sous certaines conditions d'applications, on trouve le résultat suivant pour la SER monostatique (GO) [14] d'un corps parfaitement conducteur à deux rayons de courbure  $\rho_1$  et  $\rho_2$  :

$$\sigma = \pi \rho_1 \rho_2. \quad (1.11)$$

## Image soumise à droit d'auteur

Figure 1.7 – Géométrie de rayon [22]. rayon de courbure horizontale et verticale.

Pour les surfaces moins régulières, [14] donne un résultat plus général. Il suffit alors de calculer la SER pour chaque point spéculaire ; mais la détermination des points spéculaires et des rayons de courbure n'est pas simple. En outre, bien que les résultats soient correctes (on parle de 10% à 15% de précision pour des rayons de courbure de l'ordre de 2 à 3 $\lambda$ ), la théorie n'est plus valide près des caustiques : ce sont les points où convergent une infinité de rayons.

En optique géométrique, la définition du champ (électrique ou magnétique) est basée sur la série asymptotique de Luneberg-Kline et de son approximation (Sommerfeld-Runge). Elle consiste à ne retenir que le premier terme du développement en  $\lambda^{+m}$ , expliquant la restriction de la méthode à la région optique.

Ni les phénomènes de diffraction de bord, de coin ou de pointe, ni les ondes rampantes et de surface non homogènes ou rugueuses ne peuvent être traités par l'optique géométrique. Elle ne prédit que les phénomènes de réflexion spéculaire, ce qui est loin de la réalité. La référence [25] détaille en profondeur la méthode de l'optique géométrique.

### 1.2.2 Optique Physique

Contrairement à l'optique géométrique, l'optique physique (PO) approche le problème par les courants induits sur la surface. Avec comme dépendance temporelle  $e^{j\omega t}$ , elle se base sur les équations intégrales de Stratton-Chu décrivant le champ diffracté à partir d'une surface  $S$  [21] :

$$E_d = \int_S [j\omega\mu(n \times H)\psi + (n \times E) \times \nabla\psi + (n \cdot E)\nabla\psi] dS \quad (1.12)$$

$$H_d = - \int_S [-j\omega\mu(n \times E)\psi - (n \times H) \times \nabla\psi - (n \cdot H)\nabla\psi] dS \quad (1.13)$$

avec la fonction de Green,

$$\psi = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \quad (1.14)$$

où  $r$  est la distance du point d'observation à la surface  $S$ . Remarque : On trouve aussi la convention  $+jkr$  pour la fonction de Green.

Similairement à l'optique géométrique, on simplifie le problème avec les hypothèses ci-dessous :

- zone de champ lointain (optionnel) : la distance du point d'observation à la cible est très grande devant les dimensions de la cible,
- approximation de plan tangent : un plan tangent est utilisé pour approximer le voisinage d'un point sur la surface.

Ces considérations permettent de simplifier les équations (1.12) et (1.13), soit [21] :

$$E_d = jk\psi \int_S [s \times [n \times E - Z_0 s \times (n \times H)] e^{jkr(l-s)} dS \quad (1.15)$$

$$H_d = jk\psi \int_S [s \times [n \times H + Y_0 s \times (n \times E)] e^{jkr(l-s)} dS \quad (1.16)$$

avec  $l$  le vecteur unitaire dans la direction d'incidence et  $s$  un vecteur unitaire dans la direction de l'onde diffractée.

Les résultats de l'optique physique sont nettement meilleurs que l'optique géométrique, particulièrement dans les directions spéculaires et autour. Cependant, l'optique physique ne permet pas de prendre en compte les ondes rampantes, les discontinuités de surface et les diffractions d'arêtes.

### 1.2.3 Théorie Géométrique de la Diffraction

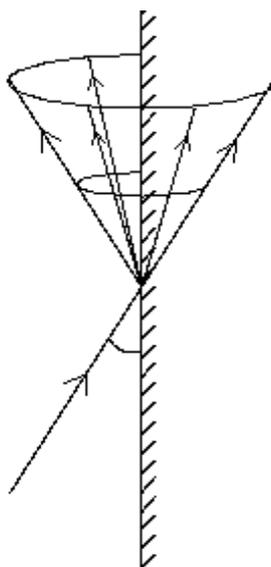


Figure 1.8 – Diffraction à un point situé sur l'arête du bord d'un matériau. Le rayon incident engendre un cône formé par les rayons de diffraction.

En extension de l'optique géométrique, Keller [15] introduit la notion de rayon de diffraction afin de prendre en compte les phénomènes de diffraction ignorés par l'optique géométrique. Il suppose qu'en haute fréquence la diffraction est un phénomène local : elle dépend seulement des propriétés du milieu et du champ électromagnétique dans un voisinage du point de diffraction. Pour une diffraction de bord, les rayons diffractés se situent sur la surface d'un cône dont le demi-angle est l'angle formé par le rayon incident et l'arête du bord comme décrit sur la Fig.1.8. Dans le cas où l'incidence est normale au bord, le cône devient un plan. Quant à une diffraction de pointe, le rayon incident engendre des rayons de diffraction dans toutes les directions. Tous ces rayons obéissent au principe de Fermat généralisé [16] et se propagent dans les zones d'ombre où le champ électromagnétique était ignoré avec l'optique géométrique.

L'expression du champ total est alors la somme des champs provenant de l'optique géométrique et de la théorie géométrique de diffraction. L'expression du champ diffracté [1] dépend principalement d'un coefficient de divergence  $\Gamma$ , de coefficients de diffraction  $X$  et  $Y$ , de l'angle d'incidence  $\beta$  et de la distance d'observation  $s$  :

$$E_d = \frac{\Gamma e^{iks} e^{j\pi/4}}{\sqrt{2\pi ks} \sin \beta} (X \pm Y) \quad (1.17)$$

Le coefficient de divergence traduit la diminution en amplitude lors de la propagation du champ diffracté dans l'espace. Les coefficients de diffraction dépendent d'angles déterminés par les directions d'incidence et d'observation et peuvent présenter des singularités dans certaines directions. C'est à partir de la solution exacte établie par le cas canonique du dièdre infini que ces coefficients sont déterminés [1].

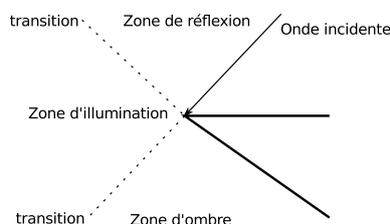


Figure 1.9 – Les transitions entre les zones lors de la diffraction sur un coin de structure.

L'apport de réponses par la Théorie Géométrique de la Diffraction (GTD) n'est pas parfaite. La GTD génère des singularités dans les zones de transitions situées à la frontière d'ombre ou de réflexion (Fig. 1.9) et aussi dans les directions d'observations rasantes ( $0$  ou  $\pi$ ). La théorie uniforme de la diffraction (UTD) [18] permet d'obtenir des coefficients de diffraction finis aux frontières d'ombres. La méthode des courants équivalents est basée sur la réduction à une intégrale linéique de l'expression d'intégrale surfacique du champ diffracté. Cette méthode a été développée pour résoudre les problèmes aux caustiques, mais ne propose pas de solution pour les singularités qui apparaissent dans les coefficients de diffraction. Quelques coefficients de diffraction de cas à géométrie canonique sont données dans [25].

### 1.2.4 Théorie Physique de la Diffraction

La théorie Physique de la Diffraction (PTD), développée par Ufimtsev [31], permet de prendre en compte les phénomènes de diffraction. En extension de l'optique physique, il introduit la notion de courant de surface uniforme et non-uniforme. Le courant de surface uniforme correspond à celui de l'optique physique. Il détermine la contribution du courant de surface non-uniforme par une différence entre la solution PO et la solution GTD. Il introduit ainsi des coefficients de diffraction pour prendre en compte le courant de surface non-uniforme. Cette théorie résout les singularités au niveau des transitions de zone situés à la frontière d'ombre et de réflexion. Mais elle ne permet pas de traiter des cas d'incidence rasante et n'est valable que sur le cône de Keller.

La théorie de Mitzner [33] permet de lever la restriction au cône de Keller, de la validité de la PTD grâce à une méthode similaire à la méthode des courants équivalents (travaux de Michaeli [32]). Pour plus de détails, le lecteur est invité vers [1, 21] et d'autres références de ce chapitre lesquelles parcourent ces différentes méthodes.

### 1.2.5 Optique Physique Itérative

Les méthodes asymptotiques basées sur l'optique physique permettent le calcul de diffraction par des structures de forme plus arbitraire que les méthodes de rayons. Ces méthodes, basées sur la résolution de l'équation intégrale du champ magnétique (MFIE) dans laquelle les courants induits sont donnés par l'approximation du plan tangent, ne souffrent pas des problèmes de divergence sur les parois à fortes courbures, tant que le rayon de courbure est supérieur à la longueur d'onde. D'autre part, la divergence du champ de l'optique géométrique au niveau des caustiques n'existe plus.

La méthode d'Optique Physique itérative (IPO pour Iterative Physical Optics) décrite dans [30, 35] et [34] repose sur le calcul des densités de courants induites sur les parois d'une structure (par exemple la paroi interne d'une cavité) par résolution itérative de l'équation MFIE. Les facettes de la structure se trouvant en visibilité directe rayonnent les unes sur les autres jusqu'à l'obtention d'un résultat convergent.

Dans le cas du calcul du champ EM diffracté par une cavité "ouverte – fermée", les étapes de l'algorithme IPO sont les suivantes [12] :

- Calcul des densités de courants équivalents électrique induites par le champ incident sur une surface fictive placée sur l'ouverture de la cavité
- Calcul du champ magnétique rayonné vers la paroi interne de la cavité par intégration des densités de courants équivalents sur l'ouverture
- Calcul itératif des densités de courants électrique induites sur les facettes de la paroi interne par l'ouverture et par les autres facettes de la paroi interne
- Calcul du champ EM rayonné vers la surface fictive de l'ouverture par les densités de courants de la paroi interne
- Calcul du champ EM rayonné à l'extérieur de la cavité, par intégration des densités de courants équivalents sur l'ouverture.

### 1.3 Évaluation de la SER : Méthodes à formulation rigoureuses

Contrairement aux méthodes asymptotiques précédentes, les méthodes rigoureuses ont une approche directe et discrète du problème. La SER est évaluée en calculant le champ diffracté via la discrétisation des équations de Maxwell, que ce soit dans le domaine temporel ou fréquentiel. Pour les méthodes comme les éléments finis (FEM) ou la méthode des différences finies en domaine temporel (FDTD), le principal point crucial est la détermination de modèles suffisamment précis pour les conditions aux limites adéquates. La plupart des industriels utilise la méthode de l'équation intégrale résolue par la méthode des moments (MoM) et la méthode multipôles rapide (Fast Multipole Method) pour le calcul de la SER.

#### 1.3.1 Méthode des éléments finis, volume finis, Galerkin discontinue

L'idée est de discrétiser un hypothétique espace des solutions en utilisant une base arbitraire d'un sous-espace de celui-ci. Par exemple, une base polynomiale d'ordre quelconque définie sur un élément (un tétraèdre en 3D), partitionnant l'espace de résolution. Dans le cadre de la FEM, la continuité de la solution à l'intérieur de l'espace total est exigé. En particulier, celle située aux frontières entre éléments.

La réécriture du problème dans cet espace montre que sa résolution ne revient qu'à trouver la solution d'un problème linéaire. Il suffit alors de le résoudre avec une méthode directe ou avec un algorithme itératif de résolution d'algèbre linéaire (par exemple GMRES ou BICGSTAB). En général, les fonctions de base sont choisies telles que la matrice du système linéaire soit creuse afin d'obtenir un temps de calcul relativement court. L'un des atouts majeurs de la FEM est la facilité à monter en ordre, et par conséquent, en précision. La formulation locale des équations à résoudre permet d'utiliser des fonctions de base d'ordre élevé sans trop de difficulté aux bords des cellules. Néanmoins, bien qu'il soit possible d'utiliser un maillage plus grossier, le temps de calcul est significativement plus long puisque la taille des matrices augmente considérablement. Les temps de calcul de ces méthodes sont souvent réduits en utilisant les traditionnelles techniques de parallélisation (MPI, OPEN-MP, etc...). La référence [20] est très complète, pour débiter, sur la méthode des éléments finis.

La méthode Galerkin discontinue (DG) autorise la discontinuité de la solution au niveau des interfaces entre les éléments. Cette méthode introduit un terme dans la formulation variationnelle qui est donné par une approximation appelée le flux numérique. Comme pour la FEM, un système linéaire à résoudre est obtenu. La non-imposition de la continuité permet d'avoir des conditions plus faibles sur l'espace de solution et par conséquent, permet a priori d'être plus complet que la FEM sur la modélisation des solutions. Quant à la méthode des volumes finis, elle peut se voir comme la méthode DG en utilisant comme base la fonction constante sur un élément. Ces méthodes peuvent être efficaces dans le cadre des applications SER [28, 29] bien que les schémas sont généralement diffusifs.

### 1.3.2 Méthode des moments (MoM)

Partant des formulations intégrales solutions des équations de Maxwell obtenues après application du théorème de Green, la méthode des moments [23] résout ces équations, fréquence par fréquence, grâce à une méthodologie ressemblant à la FEM. Les équations intégrales sont : EFIE (Electric Field Integral Equation), MFIE (Magnetic Field Integral Equation), CFIE (Combined Field Integral Equation). Chacune de ces équations permet de résoudre les inconnues en courant  $J$  et  $M$ . Via le potentiel vecteur, les formulations intégrales du champ diffracté en fonction du champ incident et total sont obtenues.

Un avantage des équations intégrales résolues ici est le domaine d'intégration réduit à seulement une surface. Il suffit alors de mailler uniquement la surface diffractante. La matrice du système linéaire est, dans la plupart des cas, pleine et parfois mal conditionnée. Comme la FEM, la MoM est souvent utilisée pour l'évaluation de la SER ou du rayonnement des antennes et souvent comme référence dans la validation des méthodes asymptotiques et analytiques.

### 1.3.3 Fast Multipole Method (FMM)

La méthode des multipôles rapide permet de réduire le temps de calcul de certains produits matriciels. Notamment, elle est souvent utilisée pour la MoM. Cette méthode peut se voir comme une factorisation du calcul matriciel, permettant de diminuer le nombre d'opérations à réaliser. Trois principales idées dessinent les grandes lignes de cette méthode : agrégation, transfert et la désagrégation [19].

La frontière de la structure (ex : surface en 3D) peut être partitionné en groupes contenant plusieurs éléments de notre problème. Un groupe rassemble donc des éléments où la fonction d'un élément est connue. Supposons par exemple que ces éléments soient des sources, la fonction de Green peut décrire une telle source. La première idée est de pouvoir écrire une fonction équivalente pour chaque groupe. En général, cette fonction représentative du groupe source n'est valide que si le point d'observation est à une distance suffisamment lointaine.

Ensuite, une fonction de transfert est utilisée pour décrire l'interaction entre ce groupe source et un autre groupe nommé d'observation. Cette fonction de transfert ne dépend que de la distance entre la source et le point d'observation. Elle peut être donc utilisée entre plusieurs sources et un point d'observation, notamment un groupe d'observation.

Enfin, une redistribution et évaluation de l'interaction (des éléments du groupe source) est faite pour chaque élément du groupe d'observation. Le groupe d'observation doit être à une distance suffisante afin que la fonction représentative du groupe source soit valide. Un tel groupe est qualifié de groupe lointain. Dans le cas contraire, on parle de groupe voisin avec qui les contributions sont calculées directement. Généralement, la distance doit être au minimum deux fois plus grand que le rayon moyen des groupes.

Au final, le calcul total comprend les contributions des groupes voisins et des groupes lointains. Ainsi, le calcul de toutes les contributions de chaque élément à chaque élément est évité. Seul le calcul est effectuée pour les groupes voisins. La figure 1.10 illustre cet arrangement fait par la FMM.

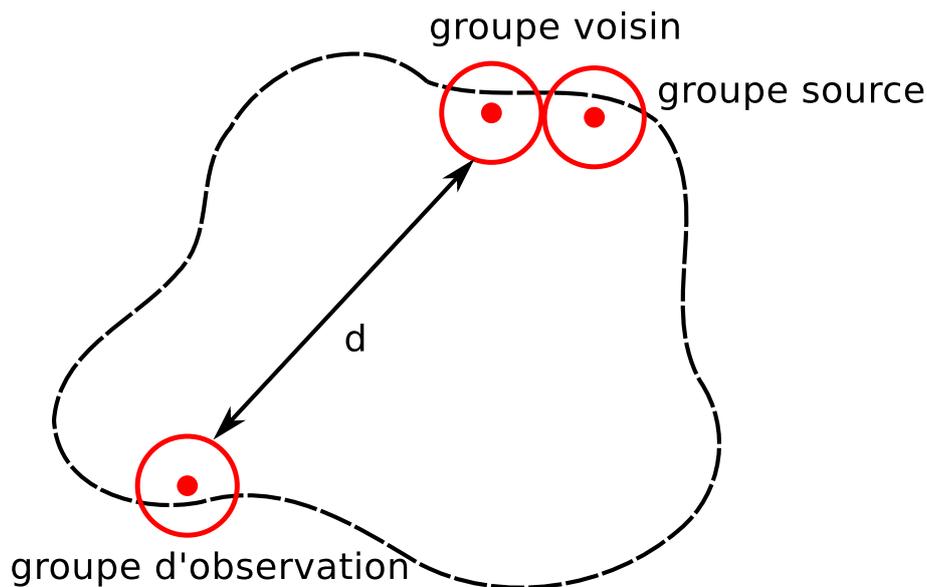


Figure 1.10 – Représentation des groupes dans la méthode FMM. La distance  $d$  doit être suffisante pour que le groupe soit qualifié de groupe lointain.

#### 1.3.4 Différences Finies

Le schéma des Différences Finies dans le Domaine Temporel (FDTD) est obtenu après avoir approximé les dérivées partielles en utilisant un développement en série de Taylor. Le schéma historique en électromagnétisme est le schéma de Yee. Il se caractérise via la disposition "décalée" du champ électrique et magnétique dans la grille cartésienne. Le schéma FDTD est significativement plus rapide que la FEM ou la MoM, car elle nécessite aucun algorithme d'algèbre matriciel. Sa formulation est simple et elle s'implémente facilement. Le schéma de Yee conserve naturellement les propriétés de divergence des champs électromagnétiques, ce qui permet d'éviter certaines solutions non physiques. Pour un calcul de SER, les principaux points faibles de la méthode sont la dispersion numérique et la géométrie approximée en marche d'escalier. Ces deux notions sont les points clés de cette thèse et seront abordées en détails dans leur section respective.

## 1.4 Conclusion

Toutes les méthodes décrites ci-dessus permettent d'obtenir le champ diffracté. Chacune a ses particularités lesquelles doivent être prises en compte suivant le problème électromagnétique à résoudre. Le tableau 1.4 synthétise les méthodes qui ont été présentés. Dans le cadre du calcul de la SER, la MoM ou la FEM sont souvent utilisé [12].

Le travail de cette thèse est motivé par la recherche de résultats numériques nécessitant une grande précision lors de simulations de problèmes d'électromagnétisme (notamment, le calcul de SER de cibles) impliquant de larges structures, où le schéma classique de Yee d'ordre 2 rencontre quelques difficultés. La dimension électrique de la structure (taille de la structure par rapport à la longueur d'onde minimale considérée) peut demander un nombre de cellules

très importants du maillage. Classiquement pour augmenter la précision, un maillage raffiné est utilisé lorsque les résultats ne sont pas satisfaisants. Par conséquent, le temps de calcul est souvent considérablement plus long. Par exemple, une division de la taille des cellules cubiques par 2 multiplie par 16 le temps de calcul (multiplication par 2 pour chaque direction spatiale et encore 2 pour la stabilité). La montée en ordre de la méthode est une voie alternative qui sera examinée tout au long de cette thèse pour réduire l'erreur de dispersion numérique. Le choix de travailler dans le domaine temporel est motivé par l'intérêt d'évaluer la SER sur une large bande de fréquence. Une seule simulation permettra d'obtenir la signature temporelle et la réponse sur une large bande de fréquence de la cible. La rapidité des calculs et la simplicité de la méthode font parties de ses atouts. Cependant, cette thèse essaie de répondre aux principaux inconvénients de la méthode afin de la rendre plus efficace surtout pour les problèmes électriquement de grande dimension. C'est l'objet du chapitre 2 consacré aux fondamentaux de la méthode FDTD d'ordre 2 et supérieur.

Quant à l'approximation de la géométrie en marche d'escalier, les techniques dites conformes répondent à cette problématique et ont été développées pour le schéma d'ordre 2 (schéma de Yee). C'est le deuxième point et le chapitre 3 lui sera consacré. Le potentiel des schémas FDTD d'ordre supérieur vis-à-vis de la problématique "conforme" sera un critère dans notre étude.

Afin de ne pas avoir à mailler la distance radar-cible et donc d'éviter un temps de calcul trop coûteux, un modèle est utilisé permettant de calculer à partir du champ électromagnétique situé sur une surface de Huygens, le champ lointain [24]. La modélisation de la cible passe par des modèles numériques pour chaque méthode rigoureuse. La résolution par FDTD selon le schéma de Yee fait l'objet de recherche depuis de nombreuses années, une large panoplie de modèles existe à l'ordre 2. Ces modèles peuvent être hérités ou adaptés à l'ordre 4. Certains de ces modèles seront décrits en détails dans le chapitre 4.

Le dernier chapitre sera consacré aux applications SER avec le schéma original développé au cours de cette thèse. Il donnera une évaluation de ses performances mais aussi des perspectives pour les difficultés restantes en matières d'applications, en vue de le perfectionner.

Méthodes	Rigoureuses			Asymptotiques
Bande de fréquence usuelle	Zone de Rayleigh et de Mie			Zone optique
	FEM-DGTD	MoM-FMM	FDTD	OG-TGD OP-TPD
Avantages	Matrice creuse (FEM) Formulation locale	Surface maillée seulement	Pas d'algèbre matriciel	Simple formulation et d'interprétation
Inconvénients	Difficulté à résoudre les problèmes de grandes dimensions	Matrice pleine, une seule fréquence par simulation	maillage escalier, dispersion numérique	Valide seulement en région optique

**Tableau 1.4 – Synthèse de méthodologie de calcul de la SER.**

# Bibliographie

- [1] M. I. Skolnik, *Radar Handbook*, McGraw-Hill, 1990.
- [2] M. I. Skolnik, *Introduction to Radar Systems*, McGraw-Hill, 1981.
- [3] D. Jenn, *Radar fundamentals*, <http://faculty.nps.edu/jenn/Seminars/RadarFundamentals.pdf>.
- [4] C. Baker, *An Introduction to Radar Systems*, [http://esl.eng.ohio-state.edu/~cbaker/cb\\_files/classes/ece5194/PDFs/1.Intro\\_2013.pdf](http://esl.eng.ohio-state.edu/~cbaker/cb_files/classes/ece5194/PDFs/1.Intro_2013.pdf).
- [5] A. E. Fuhs, *Radar Cross Section Lectures*, <http://www.dtic.mil/dtic/tr/fulltext/u2/a125576.pdf>.
- [6] R. M. O'Donnel, *Radar Systems Engineering*, <http://aess.cs.unh.edu/radarseLecture7B.html>.
- [7] M. A.S. Miacci, M. C. Rezende, *Basics on Radar Cross Section Reduction Measurements of Simple and Complex Targets Using Microwave Absorbers*, [http://cdn.intechopen.com/pdfs/29365/InTech-Basics\\_on\\_radar\\_cross\\_section\\_reduction\\_measurements\\_of\\_simple\\_and\\_complex\\_targets\\_using\\_microwave\\_absorbers.pdf](http://cdn.intechopen.com/pdfs/29365/InTech-Basics_on_radar_cross_section_reduction_measurements_of_simple_and_complex_targets_using_microwave_absorbers.pdf).
- [8] Avionics Department AIR-4.5 Washington, DC 20361, *Electronic Warfare and Radar Systems Engineering Handbook*, [http://www.microwaves101.com/encyclopedia/navy\\_handbook/ew\\_radar\\_handbook.pdf](http://www.microwaves101.com/encyclopedia/navy_handbook/ew_radar_handbook.pdf), 1999.
- [9] I. Harre, *RCS in Radar Range Calculations for Maritime Targets*, [http://www.mar-it.de/Radar/RCS/RCS\\_xx.pdf](http://www.mar-it.de/Radar/RCS/RCS_xx.pdf).
- [10] Barton/Leonov, *Radar Technology Encyclopedia*, Artech House.
- [11] K.M. Siegel, H.A. Alperin, *Studies in Radar Cross-Sections – III Scattering by a Cone*, Willow Research Center, University of Michigan, Nov. 1953.
- [12] R. Hemon, *Calcul de la diffraction électromagnétique par une cavité de type manche à air*, Thèse, 2009.
- [13] C. A. Balanis, *Antenna Theory Analysis and Design*, John Wiley & Sons, 2nd edition, 1997.
- [14] G. T. Ruck, D. E. Barrick, W. D. Stuart, C. K. Krichbaum, *Radar Cross Section Handbook*, Peninsula Publishing, 1970.
- [15] J. B. Keller, *Geometrical Theory of Diffraction*, Journal of the Optical Society of America, Vol. 52, No. 2, Feb. 1962.
- [16] J. B. Keller, *Diffraction by an Aperture*, 1957.
- [17] R. G. Kouyoumjian, "Asymptotic High-Frequency Methods," Proc. IEEE, Vol. 53, pp. 864–876, 1965.
- [18] R. G. Kouyoumjian, P. H. Pathak, "A Uniform Geometrical Theory of Diffraction for an Edge in a Perfectly Conducting Surface," Proc. IEEE, vol. 62, pp. 1448–1461, Nov. 1974.
- [19] W. C. Gibson, *The Method of Moments in Electromagnetics*, Chapman & Hall/CRC, Group2008.

- [20] P. A. Raviart, J. M. Thomas, *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Dunod, 2004.
- [21] E. F. Knott, J. F. Shaeffer, M. T. Tuley, *Radar Cross Section*, Scitech publishing inc., 2004.
- [22] N. Balin, *Etude de méthodes de couplage pour la résolution des équations de Maxwell application au calcul de la signature radar d'aéronefs par hybridation de méthodes exactes et asymptotiques*, <http://eprint.insa-toulouse.fr/archive/00000046/01/Balin-actif.pdf>, 2005.
- [23] R. F. Harrington, *Field Computation by Moments Methods*, Krieger Publishing Co., Inc., 1968.
- [24] C. Guiffaut, Contribution à la méthode FDTD pour l'étude d'antennes et de la diffraction d'objets enfouis, soutenue en 2000 à Rennes.
- [25] F. Comblet, *Détection, localisation et identification de cibles radar par imagerie électromagnétique bistatique*, <http://www.ensta-bretagne.fr/e3i2/images/E3I2/Publi/publi/FComblet.pdf>, 2005.
- [26] A. B. Gorji, B. Zakeri, *An Investigation through the Accuracy of Bistatic RCS by using CAD solvers*.
- [27] A. Tempelis, *Bistatic 3D Electromagnetic Scattering From a Right-Angle Dihedral At Arbitrary Orientation And Position*, AFIT, 2011, <http://www.dtic.mil/get-tr-doc/pdf?AD=ADA539973>
- [28] A. ZDUNEK; W. RACHOWICZ, *Efficient Jet-Engine Inlet Radar Cross-Section Prediction Using Higher-Order Finite-Element Method and Reduced-Order Modeling*. *Electromagnetics*.34, 3/4, 345-362, Apr. 2014. ISSN : 02726343.
- [29] S. GAO, M. LIU, Q. CAO, *Discontinuous Galerkin Time Domain Method for Scattering Analysis of Air-Inlets*, *Applied Computational Electromagnetics Society Journal*. 28, 6, 479-482, June 2013. ISSN : 10544887.
- [30] F. Obelleiro, J.L. Rodriguez and R.J. Burkholder, "An Iterative Physical Optics Approach for Analyzing the Electromagnetic Scattering by Large Open-Ended Cavities", *IEEE Trans. Antennas Propagation*, Vol. 43, n°4, pp. 356-361, April 1995
- [31] P.Ya. Ufimtsev, *Method of Edge Waves in the Physical Theory of Diffraction*, U.S. Air Force, Foreign Technology Division, Technical Report AD 733203, 1971.
- [32] A. Michaeli, "Elimination of infinities in equivalent edge currents- Part I : Fringe current components," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, vol. AP-34, pp. 912-918, July 1986.
- [33] K. M. Mitzner, *Incremental length diffraction coefficients*, Aircraft Division Northrop Corp., Tech. Rep. AFAL-TR-73-296, Apr. 1974
- [34] Masato Tadokoro, Kohei Hongo, "Measurement of RCS from a Dielectric Coated Cylindrical Cavity and Calculation using IPO EIBC," ICEAA, 2001
- [35] F. Obelleiro, M.G. Araujo and J.L. Rodriguez, "Iterative Physical Optics Formulation for Analyzing Large Waveguides with Lossy Walls," *Microwave and Optical Technology Letter*, Vol. 28, no 1, pp. 21-26, January 2001
- [36] P. Vaudon, B. Jecko, *Contribution à l'étude de la théorie géométrique de la diffraction. application à la conception et à l'optimisation d'une base de mesures d'antennes*, Université de Limoges, 1991.

# La Méthode Différences Finies en Domaine Temporel d'ordre (2,4) pour l'Électromagnétisme

Le schéma de Yee [1] est le schéma historique pour la résolution des équations de Maxwell par la Méthode des Différence Finies dans le Domaine Temporel (FDTD). La disposition particulière des inconnues de champ électrique et magnétique lui confère des propriétés intéressantes et une précision des résultats à l'ordre 2. Sa formulation explicite a permis le développement de nombreux modèles de matériaux, d'éléments localisés et subcellulaires. Cette versatilité est un atout pour ce schéma largement utilisé aujourd'hui. Les livres [34] et [50] offrent une très bonne initiation à la méthode des différences finies pour les équations de Maxwell.

Ce chapitre a vocation à présenter la méthode numérique FDTD, introduire la problématique d'erreur de dispersion numérique associée à la méthode et de voir, via un état de l'art, les apports des schémas d'ordre supérieur pour la minimisation de ces erreurs.

L'ordre 4 en espace du schéma ouvre la perspective de relâcher le maillage traditionnel pour des résultats aussi précis. Nous visons particulièrement un maillage en  $\approx \frac{\lambda}{5}$  contre, habituellement, un maillage en  $\frac{\lambda}{20}$ . Ceci permettra de traiter des cibles de grandes dimensions ou de réaliser des calculs précis à haute fréquence. D'autre part, ce relâchement du maillage compensera l'augmentation du temps de calcul car davantage d'opérations sont réalisées à l'ordre 4.

De nombreux schémas d'ordre supérieur ont été développés au cours de ces dernières années, avec l'objectif de minimiser la dispersion numérique. Les schémas d'ordre supérieur possèdent un potentiel mais demandent sans exception des compromis. En contrepartie d'une erreur de dispersion numérique faible, ces schémas imposent souvent l'augmentation du nombre d'inconnues impliquées dans une seule approximation de la dérivée. Bien souvent, le stencil est par conséquent élargi, mais des schémas différences finies compacts ont aussi été investigués, par exemple comme dans [36]. Cependant ces schémas sont généralement implicites en espace. D'autres schémas ont aussi des inconnues supplémentaires situés dans la cellule, comme avec les cellules de Lobatto [41]. Ces schémas sont moins intéressants car

l'adaptation aux techniques conformes n'est pas établi et remettra en cause les fonctions de bases de ces schémas.

Après l'approche standard du schéma de Fang, trois classes de schémas ou approches ressortent pour la méthode FDTD d'ordre 2 en temps et d'ordre 4 en espace (FDTD(2,4))[13] :

- Schéma Dispersion-Relation-Preserving (DRP),
- Approche par formulation intégrale,
- Schéma Non-Standard Finite Difference (NSFD).

Une grande partie des schémas FDTD(2,4) se rapproche des schémas Dispersion-Relation-Preserving (DRP). Ces schémas introduisent des coefficients permettant d'optimiser la dispersion numérique selon les besoins de la simulation. Une méthodologie généralisant cette approche est donnée par [14] et d'autres des mêmes auteurs. On retrouve notamment les schémas FDTD classiques en utilisant des coefficients appropriés.

La deuxième approche part de la formulation intégrale des équations de Maxwell. Elle est intéressante car certaines techniques, comme celles répondant à la problématique conforme, reposent sur cette formulation intégrale du schéma. Rappelons que la problématique conforme pose la question de la qualité de l'approximation du modèle géométrique via un maillage en marche d'escalier. De manière similaire à la méthode DRP, des coefficients peuvent être introduits afin de minimiser la dispersion numérique. De plus, l'écriture du schéma est relativement simple et permet de retrouver une forme différences finies des équations de mise à jour des champs.

Les schémas FD non-standard (Non-Standard Finite Difference (NSFD)) ont une approche différente du problème. Cette méthode a pour objectif d'établir des schémas conservant exactement certaines propriétés des solutions. L'opérateur FD centré exact pour une onde plane donnée est l'exemple typique d'un opérateur NSFD. L'aspect mathématique de cette méthode reste encore à préciser mais semble prometteur.

Une prochaine section présentera des exemples de schémas 2D pour chaque approche dans l'objectif de réaliser une comparaison de méthodologies et de trouver un compromis entre performance et complexité. Cette liste n'a pas de vocation à être exhaustive toutefois d'autres références notables s'inscrivant dans cette démarche de schémas FDTD à faible dispersion numérique sont citées. Dans [40], les schémas reposent sur un opérateur de type laplacien d'ordre supérieur et les performances de ces schémas sont remarquables. Cependant, comme il est dit dans cet article, le schéma n'est pas extensible au domaine 3D. La méthode Finite Integration Technique (FIT) , voisine de l'approche par formulation intégrale, a aussi été examinée pour les ordres supérieurs dans [42]. Celle-ci se base sur la non-modification des propriétés du rotationnel et l'ordre supérieur est réalisé dans les équations avec les variables conservatives ( $D$  et  $B$ , le flux électrique et magnétique).

Notre intérêt réside dans la recherche d'un schéma optimisé sur une large bande de fréquence et dont la complexité (structure du schéma, stencil) reste relativement proche d'un schéma classique. Gardons à l'idée de développer un tel schéma qui doit incorporer la technique conforme FDTD.

Soulignons ici que les schémas présentés dans ce chapitre aident à la compréhension de

l'analyse de la dispersion numérique de schéma FDTD d'ordre supérieur, dans le cadre des équations de Maxwell. J.S. Hesthaven a réalisé une vue d'ensemble très bien détaillée des méthodes FDTD et autres, d'ordre supérieur dans son article [39]. Une autre comparaison entre plusieurs schémas FDTD(2,4) est réalisée dans [12], de plus l'ouvrage [48] présente aussi des schémas FDTD(2,4).

Ce chapitre se terminera sur le schéma original développé durant la thèse. Ce schéma fait suite à l'étude sur l'état de l'art et répond à nos attentes vis-à-vis de la complexité et des performances du schéma. Les caractéristiques principales de ce schéma, outre la dispersion numérique, sont :

- le stencil 2D,
- un pas de temps très peu voire non pénalisé,
- une formulation intégrale du schéma pour utiliser les techniques conformes.

La dispersion numérique sera analysée et la précision des résultats sera présentée via des exemples de propagation en espace libre. Les temps de calcul seront aussi comparés avec le schéma historique. Le schéma original a fait l'objet d'une communication [46] et d'un article dans une revue [52].

## 2.1 Les Équations de Maxwell

Nous nous intéressons à la variation temporelle et spatiale des champs magnétique  $H(t, x, y, z)$  et électrique  $E(t, x, y, z)$  dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Les lois de l'électromagnétisme décrivent la propagation des ondes électromagnétiques dans un milieu donné (de permittivité  $\epsilon$  et de perméabilité  $\mu$ ) en présence de charges décrites par la densité de charge  $\rho$  et la densité de courant  $J$ . En omettant les dépendances en espace et en temps, dans un milieu linéaire homogène isotrope, le système linéaire couplé de Maxwell s'écrit :

$$\begin{cases} \epsilon \partial_t E - \nabla \times H &= -J, & \text{(Maxwell-Ampère)} \\ \mu \partial_t H + \nabla \times E &= 0, & \text{(Maxwell-Faraday)} \\ \nabla \cdot E &= \frac{\rho}{\epsilon}, & \text{(Loi de Gauss)} \\ \nabla \cdot H &= 0. & \text{(Maxwell-Thomson)} \end{cases} \quad (2.1)$$

En prenant la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère, on trouve :

$$\epsilon \partial_t \nabla \cdot E - \nabla \cdot (\nabla \times H) = -\nabla \cdot J,$$

Grâce à l'orthogonalité des opérateurs, soit  $\nabla \cdot (\nabla \times H) = 0$ , on a :

$$\epsilon \partial_t \nabla \cdot E = -\nabla \cdot J.$$

En utilisant l'égalité donnée par la loi de Gauss, on obtient l'équation dite Loi de conservation de la charge :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot J = 0. \quad (2.2)$$

Cette équation lie les termes sources entre eux, et doit être vérifiée à tout temps.

Les constantes en jeu sont la permittivité et la perméabilité du milieu, lesquelles sont notées  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ , dans le vide. En diagonalisant le système hyperbolique formé par les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday, les six valeurs propres associées à l'opérateur spatial de rotationnels du système sont :  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$ ,  $-\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$  et 0, chacune de multiplicité deux. Elles correspondent aux vitesses caractéristiques de l'onde. En particulier, on observe que l'onde électromagnétique se propage à la célérité  $c$  dans le vide. Ainsi, on a la relation suivante :

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0}. \quad (2.3)$$

Dans le cas d'un matériau homogène, les propriétés du matériau sont liées à la vitesse de propagation de l'onde dans ce matériau par :

$$\frac{1}{v^2} = \epsilon\mu. \quad (2.4)$$

Il ne faut pas oublier qu'il est possible d'avoir une permittivité  $\epsilon(x, y, z)$  et une perméabilité  $\mu(x, y, z)$  variables sur l'espace (cas d'un matériau hétérogène). Dans la suite pour l'étude des schémas FDTD, nous nous plaçons dans le cas homogène du vide.

Pour poser complètement le problème, il faut déterminer quelles sont les conditions limites à imposer. En notant la trace de  $E$  sur le bord  $E|_{\partial\Omega}$ , on introduit ici trois conditions aux bords admissibles classiques.

Métal parfait : Elle s'écrit, en notant  $n$  la normale unitaire sortante :

$$n \times E|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.5)$$

Elle traduit la nullité des composantes tangentielles du champ électrique sur le bord.

Parfaitement magnétique : Les conditions s'écrivent :

$$n \times H|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.6)$$

C'est l'analogie de la première condition pour le champ magnétique.

Condition de Silver Müller :

$$n \times E|_{\partial\Omega} + \alpha n \times n \times H|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.7)$$

avec  $\alpha = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} = 1/Z$ , l'inverse de l'impédance caractéristique du vide. Cette condition absorbante peut être utilisée pour simuler la propagation en espace libre. Cette condition n'est exacte que pour les ondes normales au bord considéré.

## 2.2 Les Différences Finies (FD)

Le moyen le plus simple pour construire une approximation d'une dérivée d'une fonction est de revenir à sa définition. Dans  $\mathbb{R}$  en 1D, si la dérivée  $f'$  existe au point  $x_i \in \mathbb{R}$ , alors pour

tout réel  $h$  non nul tel que  $f(x_i + h)$  est défini, la dérivée est :

$$f'(x_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}. \quad (2.8)$$

Ainsi, le schéma suivant peut être écrit, pour un  $h$  donné :

$$F'_i = \frac{f(x_i + h) - f(x_i)}{h}, \quad (2.9)$$

où  $F'_i$  est l'approximation de  $f'(x_i)$ . Ce schéma est appliqué sur une discrétisation de l'espace de définition de  $f$ ; discrétisation déterminée par la valeur  $h$  définissant la résolution du maillage. Il est possible d'obtenir d'autres approximations de la dérivée ou d'autres schémas de même type que ci-dessus en utilisant un développement de Taylor d'ordre plus élevé.

Soit  $m, n$  deux entiers positifs non nuls. Soit  $f : \Omega \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , une fonction de classe  $C^n(\Omega^n)$  sur un ensemble  $\Omega$  de dimension  $n \leq m$ . Soit la famille de vecteurs de taille  $n$ ,  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , une base de  $\Omega$ . Pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$  et  $x \in \Omega$  tel que  $x + h \in \Omega$ , le développement à l'ordre  $n$  de Taylor est :

$$f(x + h) = f(x) + \sum_{|\alpha|=0}^n \sum_{i=1}^n \frac{h_{u_i}^\alpha}{\alpha!} \partial_{u_i}^\alpha f(x) + o(h^{n+1}), \quad (2.10)$$

où  $\alpha$  est un multi-indice tel que :

$$\alpha \in \mathbb{N}^n, \quad |\alpha| = \sum_i \alpha_i \quad (2.11)$$

La notation suivante est utilisée pour alléger les équations :

$$f(x_i + h) = f_{i+h} \quad (2.12)$$

pour un point  $x_i$ . Par exemple, le développement d'ordre 4 (1D) usuel est le suivant :

$$f_{i+h} = f_i + hf'_i + \frac{h^2}{2!} f_i^{(2)} + \frac{h^3}{3!} f_i^{(3)} + \frac{h^4}{4!} f_i^{(4)} + o(h^5). \quad (2.13)$$

Les schémas FD sont dits centrés lorsque ces schémas nécessitent autant de valeurs situées de part et d'autre du point de calcul  $x_i$ . Une combinaison linéaire des développements de Taylor d'ordre 2 aux points  $x_{i+h}$  et  $x_{i-h}$  révèlent un schéma centré d'ordre 2 suivant :

$$f'_i = \frac{f_{i+h} - f_{i-h}}{2h} + o(h^2). \quad (2.14)$$

De même, en ajoutant les points  $x_{i+2h}$  et  $x_{i-2h}$ , un schéma centré d'ordre 4 est obtenu :

$$f'_i = \frac{2}{3h} [f_{i+h} - f_{i-h}] - \frac{1}{12h} [f_{i+2h} - f_{i-2h}] + o(h^4). \quad (2.15)$$

Le stencil est défini comme la molécule formée par les points discrets utilisés par le schéma.

Remarquons déjà que plus l'ordre utilisé est élevé, plus le nombre de points d'évaluation le sera aussi et donc le stencil sera élargi.

## 2.3 Application aux équations de Maxwell

Les développements d'ordre 2 et 4 ci-dessus sont formulés au sens des différences centrées en remplaçant le pas de discrétisation  $h$  par des demi-pas  $h/2 : \frac{3h}{2}, \frac{h}{2}, -\frac{h}{2}, -\frac{3h}{2}$ . Par exemple, les développements suivants peuvent être obtenus :

$$f'_i = \frac{f_{i+\frac{h}{2}} - f_{i-\frac{h}{2}}}{h} + o(h^2), \quad (2.16)$$

et

$$f'_i = \frac{1}{h} \left[ \frac{9}{8} [f_{i+\frac{1}{2}} - f_{i-\frac{1}{2}}] - \frac{1}{24} [f_{i+\frac{3}{2}} - f_{i-\frac{3}{2}}] \right] + \frac{3}{640} h^4 f_i^{(5)} + o(h^5). \quad (2.17)$$

La dynamique temporelle de problèmes d'EDP peut être traitée séparément de celle spatiale. Il est possible d'utiliser les mêmes opérateurs discrets que ceux utilisés pour le schéma spatial. Par la suite, les schémas seront écrits avec une discrétisation des équations de Maxwell sans termes sources.

### 2.3.1 Discrétisation temporelle

Ce schéma correspond à l'application du schéma centré sur deux variables avec une discrétisation "complémentaire". Plus précisément, il s'agit de calculer l'évolution temporelle d'une variable à un certain instant avec les valeurs d'autres variables à un autre instant et vice-versa. Dans le cas où les inconnues ont leurs dérivées spatiales et temporelles séparées en équations, le schéma suivant d'ordre 2 en temps sur une dérivée première en temps est obtenu :

$$\begin{aligned} u^{n+1} &= u^n + \Delta t F(v^{n+1/2}) + o(\Delta t^2), \\ v^{n+1/2} &= v^{n-1/2} + \Delta t G(u^n) + o(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (2.18)$$

où  $F$  et  $G$  sont les opérateurs des dérivées spatiales et  $\Delta t$  le pas temporel. Ce schéma est nommé schéma saute-mouton (Leap-frog). Pour les équations de Maxwell (2.1), le système semi-discret au sens des différences centrées est le suivant :

$$\begin{aligned} E^{n+1} &= E^n + \frac{\Delta t}{\epsilon} \nabla \times H^{n+1/2} + o(\Delta t^2), \\ H^{n+1/2} &= H^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu} \nabla \times E^n + o(\Delta t^2). \end{aligned} \quad (2.19)$$

D'autres schémas temporels sont aussi utilisés, notamment pour les méthodes FEM ou DGTD où il est courant de voir des schémas de type Runge-Kutta (RK) de différents ordres. Le schéma saute-mouton fait partie des schémas dits explicites. Un schéma (temporel ou spatial) est dit explicite si et seulement si la mise à jour des inconnues ne dépend que d'inconnues

exprimées à des instants précédents. La mise à jour de  $E$  à l'instant  $n + 1$  peut aussi dépendre d'inconnues à un instant  $n + 1$ . Dans ce cas, le schéma est dit implicite.

Des schémas d'ordre supérieur en temps peuvent être utiles lorsque les solutions physiques ont de grandes variations temporelles. Dans notre cas, pour la dispersion numérique, la réduction de l'erreur est d'autant plus significative lorsque l'ordre spatial de la méthode FDTD est élevé [15]. L'augmentation des ressources mémoires doit être raisonnable car en général, les données du champ électromagnétique doivent être conservées sur plus d'instant temporels. C'est pourquoi dans la suite de cette thèse, le schéma saute-mouton est retenu comme discrétisation temporelle des équations de Maxwell.

### 2.3.2 Schéma de Yee

Le schéma de Yee, que nous noterons S22, est un schéma explicite utilisant les développements de Taylor à l'ordre 2. Par exemple, en omettant les indices du plan  $z$ , pour la variable de champ magnétique  $H_z((i + 1/2)\Delta x, (j + 1/2)\Delta y, (n + 1/2)\Delta t) = H_{z_{i+1/2,j+1/2}}^{n+1/2}$ , on a :

$$H_{z_{i+1/2,j+1/2}}^{n+1/2} = H_{z_{i+1/2,j+1/2}}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu\Delta y} \left[ E_{x_{i+1/2,j+1}}^n - E_{x_{i+1/2,j}}^n \right] - \frac{\Delta t}{\mu\Delta x} \left[ E_{y_{i+1,j+1/2}}^n - E_{y_{i,j+1/2}}^n \right] \quad (2.20)$$

Bien que les équations soient similaires pour le champ électrique, le schéma de Yee repose sur une disposition particulière du champ électrique et magnétique. En effet, les équations de mise à jour pour le champ électrique s'écrivent sous la forme suivante :

$$E_{z_{i,j}}^{n+1} = E_{z_{i,j}}^n + \frac{\Delta t}{\epsilon\Delta y} \left[ H_{x_{i,j+1/2}}^{n+1/2} - H_{x_{i,j-1/2}}^{n+1/2} \right] - \frac{\Delta t}{\epsilon\Delta x} \left[ H_{y_{i+1/2,j}}^{n+1/2} - H_{y_{i-1/2,j}}^{n+1/2} \right] \quad (2.21)$$

où l'on remarque le décalage d'un demi-pas spatial entre la composante  $E_z$  et celles de  $H$ .

La discrétisation spatiale des champs électrique et magnétique utilise deux maillages en dualité (primal et dual respectivement). Les maillages sont cartésiens et une cellule du maillage primaire est formée par les arêtes où se situe le champ électrique. En 3D, la configuration est décrite sur la figure 2.1. Outre une efficacité accrue par rapport à un maillage où les inconnues sont en collocation, cet entrelacement spatial et temporel permet au schéma d'avoir d'autres propriétés intéressantes. Une cellule du maillage dual possède le champ magnétique au milieu de ses arêtes.

D'une part, les champs ont une nature géométrique définie. Ils peuvent être vus comme des champs suivant une arête de cellule d'un maillage. Par construction, cette même arête est située au centre de la cellule du maillage dual. Les champs sont supposés constants suivant une arête ou une surface, d'où l'idée de les considérer comme la valeur moyenne sur une arête.

D'autre part, avec un tel schéma, si la donnée du champ initial vérifie les propriétés

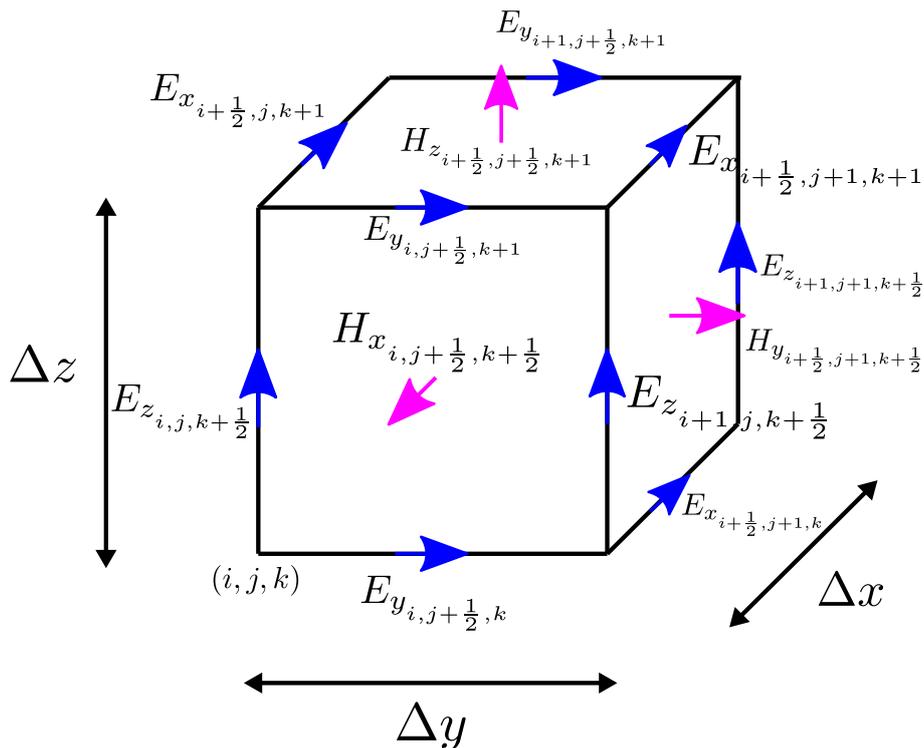


Figure 2.1 – Disposition des composantes du champ électromagnétique dans une cellule de Yee.

de divergence (lois de Gauss) alors celles-ci sont conservées à tout instant ultérieur. C'est l'une des propriétés importantes du schéma de Yee et qui le rend robuste pour les modèles développés. De manière graphique, le calcul de la divergence de  $B$  au centre de la cellule primale avec (2.20) fait intervenir chaque arête de champ  $E$  deux fois et de sens opposé. Finalement, il ne reste que la divergence initiale supposée nulle.

Un maillage non uniforme est un maillage dont les pas spatiaux peuvent varier suivant les directions des axes cartésiennes. Cette approche est précise lorsque les variations du champ électromagnétique sont assez faibles comme par exemple en basse fréquence. Comme ceci dépend de la résolution du maillage, cette dernière est définie comme le rapport entre la plus petite longueur d'onde  $\lambda$  et le nombre de cellules nécessaire pour la décrire. En théorie, le critère de Shannon demande un minimum de deux cellules pour décrire une longueur d'onde. En pratique, on utilise souvent une résolution entre  $\lambda/10$  et  $\lambda/20$  afin d'obtenir des résultats assez précis. La principale source d'erreur est la dispersion numérique laquelle est d'autant plus conséquente lorsque le maillage est grossier.

On reviendra sur la stabilité conditionnelle du schéma limitant le pas de temps à un maximum. Les schémas implicites en temps sont souvent utilisés afin de s'affranchir d'une telle condition sur le pas de temps.

### 2.3.3 Schéma de Fang

Le schéma de Fang [4], qu'on notera  $S_{24}$ , est un schéma FDTD d'ordre (2,4). Seul l'opérateur spatial est d'ordre 4 d'où la terminologie (2,4). Parmi les schémas FDTD(2,4), c'est

le schéma standard puisqu'il s'obtient simplement avec un développement de Taylor centré à l'ordre 4. Le même maillage que le schéma de Yee est utilisé, et le schéma FDTD (2,4) standard est pour la même composante  $H_z$  précédemment définie :

$$\begin{aligned}
 H_{z_{i+1/2,j+1/2}}^{n+1/2} = & H_{z_{i+1/2,j+1/2}}^{n-1/2} + \frac{9\Delta t}{8\mu\Delta y} \left[ E_{x_{i+1/2,j+1}}^n - E_{x_{i+1/2,j}}^n \right] \\
 & - \frac{1\Delta t}{8 \times 3\mu\Delta y} \left[ E_{x_{i+1/2,j+2}}^n - E_{x_{i+1/2,j-1}}^n \right] \\
 & - \frac{9\Delta t}{8\mu\Delta x} \left[ E_{y_{i+1,j+1/2}}^n - E_{y_{i,j+1/2}}^n \right] \\
 & + \frac{1\Delta t}{8 \times 3\mu\Delta x} \left[ E_{y_{i+2,j+1/2}}^n - E_{y_{i-1,j+1/2}}^n \right]
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

Le schéma de Fang élargit le stencil du schéma de Yee à 5 cellules (Fig. 2.2). Le nombre d'opérations double par rapport au schéma de Yee et nous verrons que le pas de temps maximal est réduit. Bien qu'il soit possible d'utiliser un maillage relâché, d'autres schémas ont été établis afin d'avoir un temps de calcul moins pénalisé que le schéma de Fang. De plus, nous verrons que la dispersion numérique du schéma de Fang n'est pas optimale au pas de temps maximal, contrairement au schéma de Yee. L'optimal est défini au sens où l'erreur est globalement minimale (comme dans le schéma de Yee) quelle que soit la fréquence. L'effort mis sur la recherche des schémas FDTD d'ordre supérieur se concentre aussi sur ces points afin d'obtenir un bon compromis entre performance de calcul et précision.

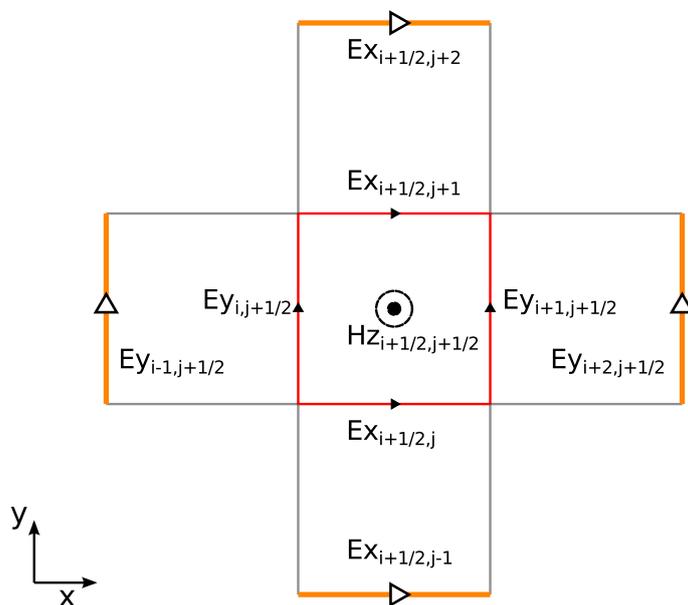


Figure 2.2 – Stencil du schéma (2,4) Fang. Seuls les champs électriques dessinés avec une flèche sont impliqués dans le calcul de  $H_z$ .

## 2.4 Dispersion numérique et stabilité

La relation de dispersion continue est [34] :

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \sum_{u=x,y,z} k_u^2. \quad (2.23)$$

Cette dernière n'est pas forcément vérifiée au niveau discret par les schémas numériques. Elle s'exprime sous une forme différente appelée relation de la dispersion numérique. Dans le cas de la propagation d'ondes, la dispersion numérique peut être vu comme un déphasage incrémental temporel du résultat numérique par rapport à la vitesse physique. L'onde ne se propage pas exactement à la vitesse  $c$ , et cette vitesse de propagation n'est pas nécessairement isotrope. L'équation de la dispersion numérique est déduite via le calcul d'une onde plane par le schéma numérique. C'est la méthode utilisée dans [34]. Les étapes de la méthode pour obtenir l'équation de la dispersion numérique seront présentées pour le schéma de Fang.

### 2.4.1 Schéma de Yee

L'équation de la dispersion numérique du schéma de Yee est donnée par :

$$\left(\frac{1}{c\Delta t}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \sum_{u=x,y,z} \left[\frac{1}{\Delta u} \sin\left(\frac{k_u\Delta u}{2}\right)\right]^2. \quad (2.24)$$

Elle diffère de la relation de dispersion continue (2.23) et l'erreur commise s'évalue en calculant le nombre d'onde numérique  $\tilde{k}$  de cette équation. L'erreur commise sur le nombre d'onde dépend de la direction de propagation de l'onde. Ainsi, une erreur moyenne sur les directions de propagation peut être évaluée de la manière suivante :

$$\Phi_k = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{k - \tilde{k}(\phi, \theta)}{k}\right)^2 \sin\theta d\phi d\theta. \quad (2.25)$$

Cette erreur dépend évidemment de la discrétisation (pas temporel et spatial), mais aussi de la fréquence de l'onde plane simulée. Remarquons que la dispersion numérique (2.24) converge vers l'équation de la dispersion numérique continue (2.23) lorsque les pas de discrétisation tendent vers 0. Cette convergence est cohérente avec l'ordre de la discrétisation, c'est-à-dire l'ordre 2. Dans l'équation de la dispersion numérique, le membre de gauche est le terme temporel et le membre de droite est celui spatial.

On en déduit la condition de stabilité suivante :

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \left(\sum_u \frac{1}{\Delta u^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.26)$$

Cette condition limite le pas de temps à un pas de temps maximal. Elle peut être interprétée comme une limitation de la propagation de l'information. En un pas de temps, la propagation de l'énergie ne peut pas excéder la distance maximale d'une cellule i.e. sa diagonale. Le pas

de temps maximal est ainsi limité par le temps nécessaire à l'onde pour parcourir la diagonale d'une cellule. Pour un cube, ce maximum est  $\Delta t_{max} = \frac{\Delta}{\sqrt{3}c}$ .

### 2.4.2 Schéma de Fang

La méthode pour obtenir l'équation de la dispersion numérique et la condition de stabilité est explicité ici, pour le schéma de Fang. On définit :

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H + iE \quad (2.27)$$

Si  $H$  et  $E$  vérifient les équations de Maxwell, alors  $V$  est solution de l'équation différentielle :

$$\partial_t V = ic \nabla \times V \quad (2.28)$$

Pour  $V$ , où  $u = \{x, y, z\}$  tel que :

$$V(t_n, x, y, z) = V^n = V_0 e^{i\omega n \Delta t} e^{-i \sum_u k_u u}, \quad (2.29)$$

on substitue l'onde plane  $V$  dans les équations discrètes. Avec un tel  $V$ , le schéma de Fang appliqué à (2.28) s'écrit :

$$e^{i\omega \Delta t} V^n = V^n + ic \Delta t e^{i\omega \frac{\Delta t}{2}} \begin{pmatrix} G(x) \\ G(y) \\ G(z) \end{pmatrix} \times V^n, \quad (2.30)$$

où  $G$  est définie par :

$$G(u) = \frac{1}{\Delta u} \left[ \frac{9}{8} \sin\left(\frac{k_u \Delta u}{2}\right) - \frac{1}{24} \sin\left(\frac{3k_u \Delta u}{2}\right) \right]. \quad (2.31)$$

On peut réécrire (2.30) :

$$\begin{pmatrix} G(x) \\ G(y) \\ G(z) \end{pmatrix} \times V^n = -\frac{i}{c \Delta t} V^n \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right), \quad (2.32)$$

et aboutir à :

$$\begin{pmatrix} a & -G(z) & G(y) \\ G(z) & a & -G(x) \\ -G(y) & G(x) & a \end{pmatrix} V^n = 0, \quad (2.33)$$

où :

$$a = \frac{i}{c \Delta t} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right), \quad (2.34)$$

et la matrice multipliant  $V^n$  est nommée matrice d'amplification. Le schéma temporel étant identique à celui du schéma de Yee, l'équation de dispersion numérique du schéma de Fang

conserve le même terme temporel. Puisque  $V$  est arbitraire et peut être choisi comme non triviale, le déterminant de la matrice dans (2.33) doit être nul, i.e. :

$$a^3 + a \left[ \sum_u G^2(u) \right] = 0, \quad (2.35)$$

soit, l'équation de la dispersion numérique :

$$\left( \frac{1}{c\Delta t} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\omega\Delta t}{2} \right) = \sum_{u=x,y,z} \left[ \frac{1}{\Delta u} \left( \frac{9}{8} \sin \left( \frac{k_u\Delta u}{2} \right) - \frac{1}{24} \sin \left( \frac{3k_u\Delta u}{2} \right) \right) \right]^2. \quad (2.36)$$

Remarquons que le stencil élargi ajoute un terme en sinus avec un argument triplé, désignant l'écart entre les deux variables les plus écartées dans le stencil.

La résolution de l'équation (2.36) en  $\omega$  permet de déduire la condition de stabilité. Alors :

$$\omega = \frac{2}{\Delta t} \sin^{-1}(\eta), \quad (2.37)$$

où :

$$\eta = c\Delta t \left( \sum_u G^2(u) \right)^{1/2}. \quad (2.38)$$

La région de stabilité est conditionnée par [34] :

$$\sup_k \eta \leq 1. \quad (2.39)$$

Or :

$$\sup_k \eta = c\Delta t \left( \sum_u \sup_k G^2(u) \right)^{1/2}, \quad (2.40)$$

avec :

$$\sup_k G(u) = \frac{7}{6} \frac{1}{\Delta u^2}, \quad (2.41)$$

atteint pour  $k$  tel que  $\frac{k_u\Delta u}{2} = \frac{\pi}{2}$ , maximisant la somme des deux sinus de  $G$ . D'où il est déduit la condition Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) sur le pas de temps  $\Delta t$  pour le schéma (2,4) :

$$\Delta t \leq \frac{6}{7} \frac{1}{c \left( \sum_u \frac{1}{\Delta u^2} \right)^{1/2}} \quad (2.42)$$

Dans la suite, le nombre CFL d'un schéma est égal au rapport entre le pas de temps maximal et celui pour le schéma de Yee. Par exemple pour le schéma de Fang, le nombre CFL maximal est de  $\frac{6}{7}$ . Remarquons que dans le cas d'un maillage cartésien FDTD, le supremum pour  $G$  en  $k$  et son égal temporel en  $\omega\Delta t$  sont invariablement atteints pour les multiples impairs de  $\pi$  [36].

L'erreur de dispersion numérique est analysée grâce à l'équation de dispersion numérique (2.36). Notamment, on souhaite connaître les erreurs de phase du schéma suivant les angles de

propagation (anisotropie) ou encore en fonction de la résolution du maillage. Suivant le type de problème étudié, on pourra chercher un schéma avec une dispersion numérique isotrope ou anisotrope mais avec une erreur d'un ordre plus faible. La résolution de l'équation de la dispersion numérique par une méthode de Newton permet d'obtenir le nombre d'onde numérique  $\tilde{k}$ . Pour différentes résolutions de maillage, l'erreur de phase donnée par (2.25) peut être définie en 2D. En reprenant [12], l'erreur discrète est donnée par :

$$\psi_{err} = 360 \left( \frac{\lambda}{\tilde{\lambda}} - 1 \right). \quad (2.43)$$

où  $\lambda$  est la longueur d'onde et  $\tilde{\lambda}$  est la longueur d'onde numérique déduite de  $\tilde{k}$ .

Jusqu'à la fin de cette section, le nombre  $S$ , égal au nombre CFL, est défini en 2D comme :

$$\Delta t = S \frac{c}{\sqrt{2}\Delta}, \quad (2.44)$$

pour le cas de cellules uniformes avec  $\Delta x = \Delta y = \Delta$ .  $S$  désigne alors le pas de temps utilisé avec un maximum donné par la condition CFL du schéma. Cette indication permet de comparer rapidement le pas de temps d'autres schémas avec celui du schéma de Yee. Ainsi, si  $S = 1$  alors le pas de temps est celui maximal pour schéma de Yee.

En 2D, bien qu'il soit possible d'utiliser la méthode de Newton pour l'analyse de la dispersion numérique, nous approchons le problème de manière plus directe. Nous observons d'abord les variations de l'équation de dispersion numérique (2.36) sur la figure 2.3, notamment la valeur absolue de la différence entre le terme temporel (à gauche de l'égalité) et spatial (à droite de l'égalité). En d'autres termes, la réécriture de (2.36) est la suivante :

$$f(S) = g(\phi), \quad (2.45)$$

où  $\phi$  est l'angle de propagation dans le plan,  $N_\lambda$  le nombre de cellules par longueur d'onde,  $S$  la CFL, et :

$$\begin{aligned} f(S) &= \frac{1}{S^2} \sin^2 \left( \frac{\pi}{N_\lambda} S \right), \\ g(\phi) &= \left[ \frac{9}{8} \sin^2 \left( \frac{\pi}{N_\lambda} \cos \phi \right) - \frac{1}{24} \sin^2 \left( \frac{3\pi}{N_\lambda} \cos \phi \right) \right]^2 \\ &\quad + \left[ \frac{9}{8} \sin^2 \left( \frac{\pi}{N_\lambda} \sin \phi \right) - \frac{1}{24} \sin^2 \left( \frac{3\pi}{N_\lambda} \sin \phi \right) \right]^2 \end{aligned} \quad (2.46)$$

Sur cette figure 2.3, remarquons qu'il existe un pas de temps optimal où l'erreur de dispersion numérique est minimale pour le schéma de Fang en 2D. Cet optimal n'est pas nécessairement le pas de temps maximal contrairement au schéma de Yee. Sur la figure 2.4, on observe l'erreur de dispersion numérique donnée par (2.43) en degrés par longueur d'onde, à cet optimal  $S \approx 0.235$ . Le schéma de Fang réduit d'un ordre l'amplitude de la dispersion numérique suivant les angles par rapport au schéma de Yee. En outre, contrairement au schéma de Yee où la dispersion numérique est nulle suivant les diagonales du plan en 2D,

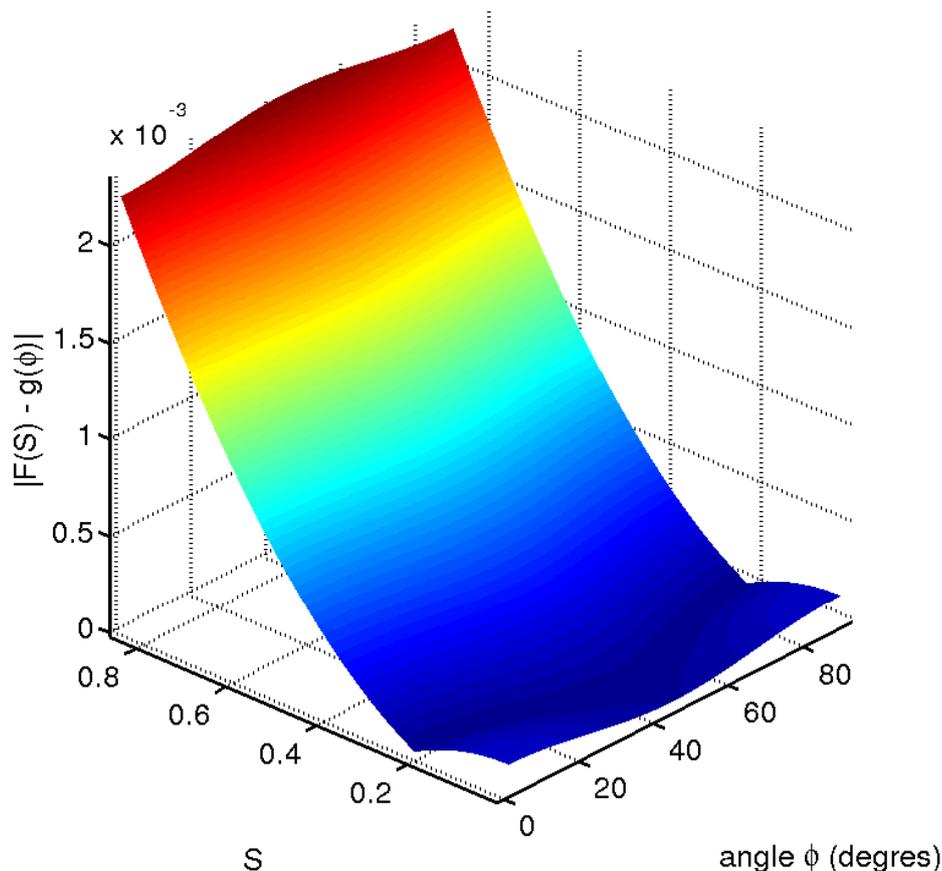


Figure 2.3 – Différence entre le terme temporel et spatial de l'équation de dispersion numérique du schéma de Fang en 2D.

le schéma de Fang a son minimum, à la CFL optimale, à environ  $\frac{\pi}{8} [\frac{\pi}{4}]$  (CFL maximale le long des axes du plan).

Cet exemple montre qu'il ne suffit pas d'établir un schéma avec un pas de temps peu restreint. Il faut dans la mesure du possible, que le pas de temps recommandé pour un tel schéma soit aussi bien optimal que maximal. Autrement dit, le meilleur cas possible est d'avoir un pas de temps optimal égal au maximal. L'analyse de la dispersion numérique inclut ainsi la recherche d'un pas de temps optimal. Cette recherche revient à une optimisation et peut se faire de manière numérique. L'exemple suivant montre que pour le schéma de Fang 2D, on peut utiliser une simple dichotomie pour trouver ce pas de temps optimal.

Dans notre cas,  $S_{opt}$  doit être tel que :

$$\forall S \in [0, 1], \quad \max_{\phi} \|f(S_{opt}) - g(\phi)\| \leq \max_{\phi} \|f(S) - g(\phi)\|. \quad (2.47)$$

Notons que l'on peut restreindre l'étude sur  $\phi$  de 0 à  $\frac{\pi}{2}$  ou  $\frac{\pi}{4}$  puisque  $g$  est  $\frac{\pi}{2}$  périodique et  $\frac{\pi}{4}$  symétrique. De plus, il ne faut pas oublier la condition CFL sur  $S$  liée à la stabilité du schéma

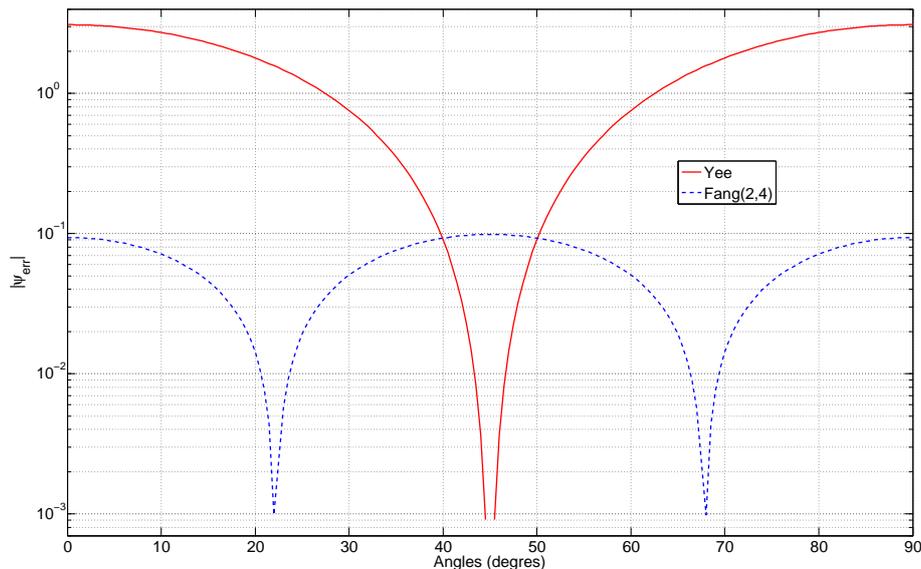


Figure 2.4 – Anisotropie en degrés par longueur d'onde, du schéma de Yee et de Fang en 2D, optimisé à  $\frac{\lambda}{10}$  (coupe à cette fréquence).

(2.42), laquelle est dans le cas de pas spatiaux égaux :

$$S \leq \frac{6}{7}. \quad (2.48)$$

Cette équation donne les pas de temps stables pour le schéma, et il est possible d'avoir un pas de temps optimal  $S_{opt}$  dans la région instable. Reprenant (2.47), il suffit de trouver  $S_{opt}$  tel que :

$$\|f(S_{opt}) - g(\phi)\| = \min_S \left( \max_{\phi} \|f(S) - g(\phi)\| \right). \quad (2.49)$$

Ne connaissant pas le signe de la différence  $f(S) - g(\phi)$ , les extrema en  $\phi$  de la fonction positive  $g$  permettent d'écrire l'encadrement :

$$\max_{\phi} \|f(S) - g(\phi)\| \leq \max \left( \|f(S) - \min_{\phi} g(\phi)\|, \|f(S) - \max_{\phi} g(\phi)\| \right). \quad (2.50)$$

La dérivée  $g'$  donnée par :

$$g'(\phi) = \frac{\pi}{32N_{\lambda}} \left[ \left( 9 \sin \left( \frac{\pi}{N_{\lambda}} \sin \phi \right) - \frac{1}{3} \sin \left( \frac{3\pi}{N_{\lambda}} \sin \phi \right) \right) \left( 9 \cos \left( \frac{\pi}{N_{\lambda}} \sin \phi \right) - \cos \left( \frac{3\pi}{N_{\lambda}} \sin \phi \right) \right) \cos \phi \right. \\ \left. - \left( 9 \sin \left( \frac{\pi}{N_{\lambda}} \cos \phi \right) - \frac{1}{3} \sin \left( \frac{3\pi}{N_{\lambda}} \cos \phi \right) \right) \left( 9 \cos \left( \frac{\pi}{N_{\lambda}} \cos \phi \right) - \cos \left( \frac{3\pi}{N_{\lambda}} \cos \phi \right) \right) \sin \phi \right], \quad (2.51)$$

s'annule sur l'intervalle  $[0, \frac{\pi}{4}]$  en 0 et  $\frac{\pi}{4}$ , et est positive dans l'intervalle. En conséquence,  $g$

atteint un minimum et un maximum à ces valeurs soit :

$$\begin{aligned} g_{min} &= g(0) = \left[ \frac{9}{8} \sin^2 \left( \frac{\pi}{N_\lambda} \right) - \frac{1}{24} \sin^2 \left( \frac{3\pi}{N_\lambda} \right) \right]^2, \\ g_{max} &= g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \left[ \frac{9}{8} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{2}\pi}{2N_\lambda} \right) - \frac{1}{24} \sin^2 \left( \frac{3\sqrt{2}\pi}{2N_\lambda} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

De façon similaire, une simple étude de  $f'(S)$  montre que  $f$  est strictement décroissante sur  $S \in [0, 1]$ . Puisque  $g$  est indépendante de  $S$ , si le signe de  $f - g$  ne change pas sur  $[0, 1]$ , alors le minimum de  $f - g$  sur  $[0, 1]$  est le minimum de  $f$  sur  $[0, 1]$ . Ainsi, si le signe de  $f - g$  est positif ou négatif, alors le minimum est atteint en  $S = 1$  ou  $S = 0$  respectivement. C'est le cas pour le schéma de Yee où le minimum est atteint en  $S = 1$ .

En toute généralité, il faut étudier les autres cas lesquels dépendent des valeurs de  $g$ . D'une part, sachant que  $g$  est positive et croissante entre  $g_{min}$  et  $g_{max}$ , il est suffisant d'étudier ces cas de figures :

- $f(0) - g_{min}$  et  $f(0) - g_{max}$  sont tous deux négatifs,
- $f(0) - g_{min}$  et  $f(0) - g_{max}$  sont tous deux positifs,
- $f(0) - g_{min}$  et  $f(0) - g_{max}$  sont de signes opposés.

Sachant que  $f$  est positive et décroissante, chaque cas permet de conclure. Dans le premier cas, on revient sur le cas où  $f - g$  est négatif d'où  $S_{opt} = 0$ . Pour des raisons pratiques, ce cas de figure ne devrait pas se présenter. Dans le deuxième cas, si  $f(1) > g_{max}$  alors on revient sur le cas où  $f - g$  est positive d'où  $S_{opt} = 1$ . Sinon, on peut montrer qu'il existe un intervalle de  $S$  où  $f - g_{min}$  et  $f - g_{max}$  sont de signes opposés. Dans ce cas, la borne inférieure de cet intervalle est nécessairement supérieure à 0. Le dernier et troisième cas revient à avoir 0 appartenant à cet intervalle.

Dans le cas de signes opposés, on voit que  $S_{opt}$  qui doit minimiser à la fois  $\|f - g_{min}\|$  et  $\|f - g_{max}\|$ . En d'autres termes,  $S_{opt}$  peut vérifier aussi :

$$\|f(S_{opt}) - g_{min}\| = \|f(S_{opt}) - g_{max}\|. \quad (2.53)$$

L'égalité n'a de sens que dans le cas de signes opposés, et  $S_{opt}$  est donc tel que :

$$f(S_{opt}) - g_{min} = -(f(S_{opt}) - g_{max}), \quad (2.54)$$

soit :

$$2f(S_{opt}) - g_{min} - g_{max} = 0. \quad (2.55)$$

Une simple dichotomie permet de trouver  $S_{opt}$ . Cette minimisation peut se voir en partie comme une minimisation de l'anisotropie. N'oublions pas la condition CFL (2.48) pouvant limiter l'utilisation d'un  $S_{opt}$ . C'est d'ailleurs le cas pour  $N_\lambda = 2$ , comme sur la figure 2.5. Il est ainsi possible qu'une valeur de  $S_{opt}$  existe mais se situe en dehors de la région de

stabilité donnée par la condition CFL. La CFL optimale décroît très rapidement entre  $N_\lambda = 2$  et  $N_\lambda = 10$ , laquelle est un large inconvénient du schéma de Fang classique.

On note  $N_\lambda$  ou Cells Per Wavelength (CPW) un nombre de cellules par longueur d'onde et ces deux notations sera utilisé de façon interchangeable. Puisque la résolution d'un maillage est donnée par un nombre de cellules pour la longueur d'onde minimale,  $N_\lambda$  ou CPW peut par extension, désigner une certaine résolution de maillage.

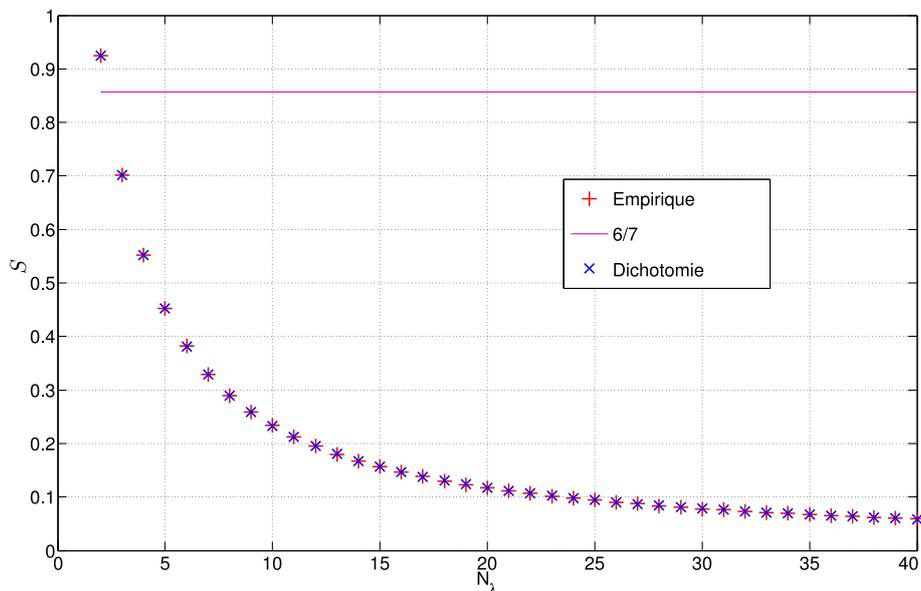


Figure 2.5 – CFL  $S \leq 6/7$  optimale du schéma de Fang en 2D en fonction de  $N_\lambda$  la résolution du maillage (= CPW nombre de cellules par longueur d'onde).

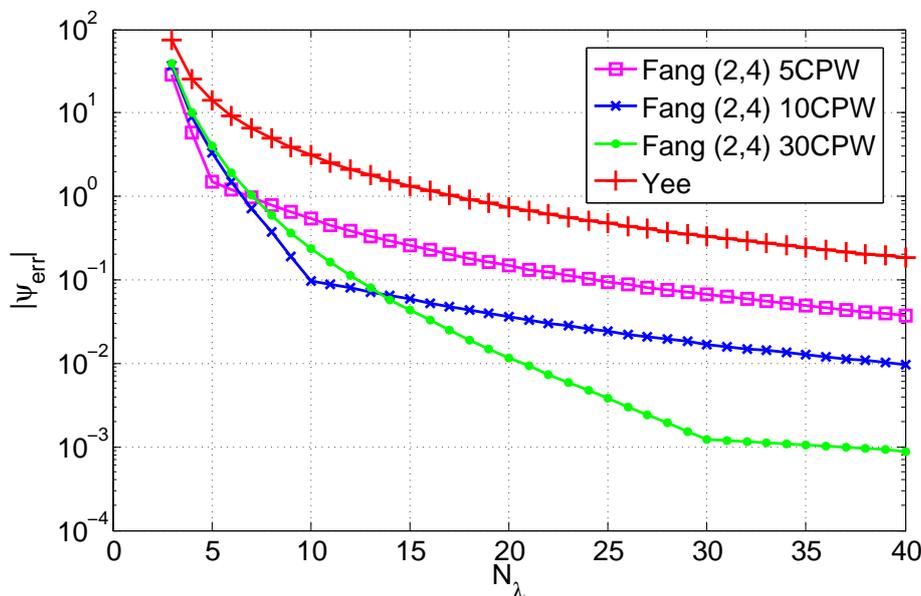


Figure 2.6 – En 2D, erreur maximale de la dispersion numérique à différentes optimisations du schéma de Fang. L'optimisation est faite pour une fréquence donnée, soit de manière équivalente, pour un certain nombre de cellules pour cette longueur d'onde. CPW =  $N_\lambda$  nombre de cellules par longueur d'onde.

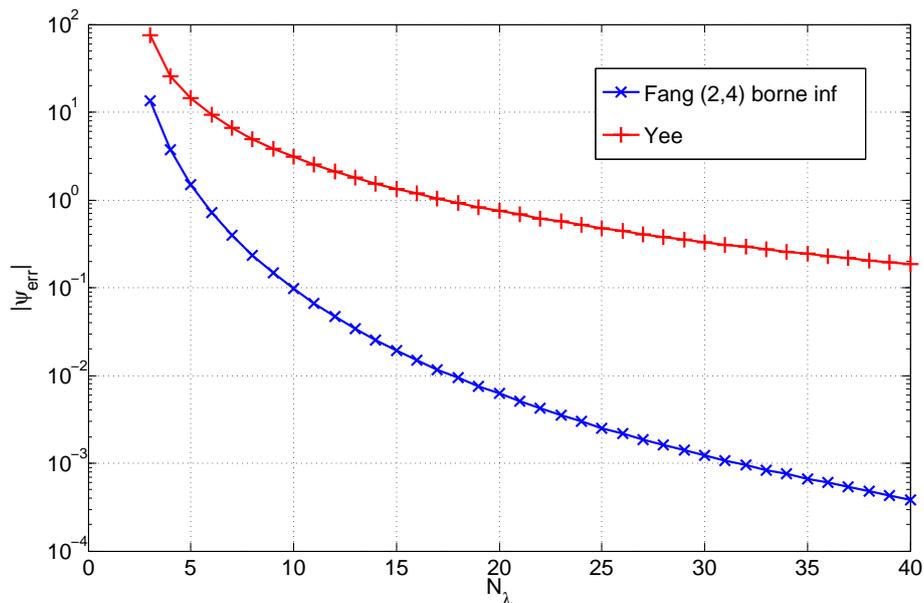


Figure 2.7 – En 2D, borne inférieure de la dispersion numérique du schéma de Fang obtenue par optimisation à chaque  $N_\lambda$ .

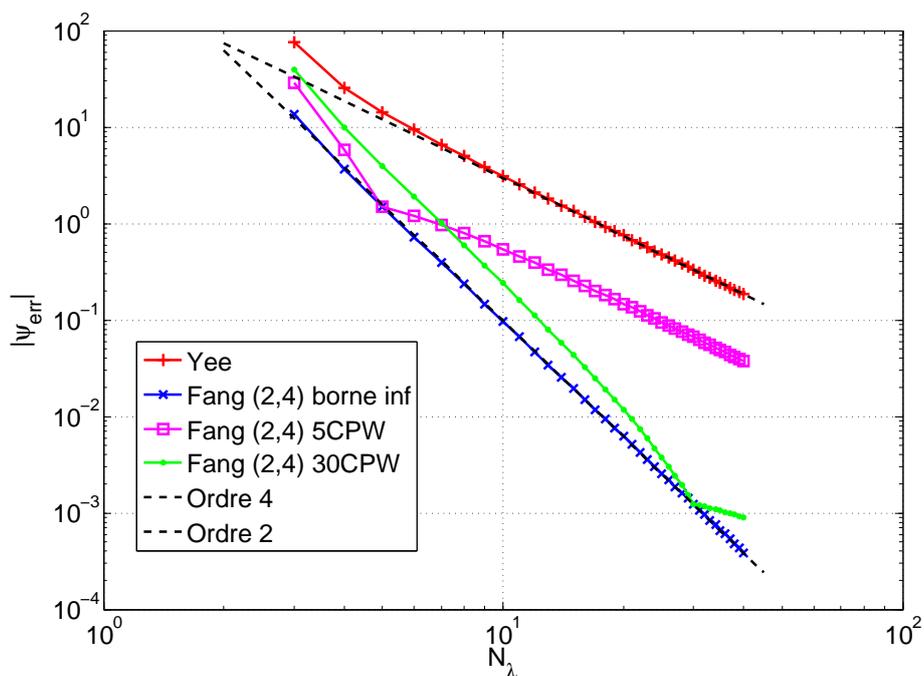


Figure 2.8 – En 2D, ordre de convergence de la dispersion numérique. Les courbes de convergence d'ordre 4 et d'ordre 2 sont représentées afin de comparer facilement.

Les figures 2.6, 2.7 et 2.8 montrent respectivement la dispersion numérique pour différentes optimisations du schéma de Fang en fonction de la résolution du maillage, la borne inférieure de la dispersion numérique du schéma de Fang, et l'ordre de convergence de ces dispersions numériques. La borne inférieure de la dispersion numérique est le minimum de dispersion numérique possiblement atteint par le schéma de Fang, à chaque résolution de maillage  $N_\lambda = \text{CPW}$  (cells per wavelength).

Le point d'inflexion de la courbe, séparant en deux régions la dispersion numérique du schéma de Fang, se situe à la résolution de l'optimisation. Celle-ci montre qu'en région supérieure en fréquence, la convergence est supérieure à 2. Tandis qu'en région inférieure en fréquence, la convergence est limitée à 2. Ceci s'explique par la différence des ordres de discrétisations temporelles et spatiales .

En conclusion, le schéma de Fang permet de gagner un ordre de précision en amplitude par rapport au schéma de Yee. Son principal défaut est l'utilisation d'une CFL optimale minimisant la dispersion numérique, laquelle est très basse devant la CFL maximale. Les temps de calcul peuvent considérablement augmentés (environ 16 en 2D pour une optimisation à  $\lambda/10$ ). D'autre part, l'erreur de dispersion numérique n'est pas assez réduite par rapport à celle de Yee si l'on utilise un pas de temps maximal. Ainsi, l'étude de la dispersion numérique de schémas explicites d'ordre supérieur doit porter une attention particulière sur la condition CFL, l'erreur de dispersion numérique et la bande haute de fréquence où la dispersion numérique sera minimisée. Simultanément, on fera attention aux compromis à réaliser pour obtenir un tel schéma, c'est-à-dire, le stencil du schéma, la difficulté d'implémentation, le nombres d'opérations par itération, la possibilité d'extension à la technique conforme, les conditions aux limites, etc... On garde à l'esprit que l'on souhaite une dispersion numérique minimale en région hautes fréquences i.e. en maillage relâché, pouvant être facilement utilisé avec la technique conforme.

## 2.5 Optimisation de la dispersion numérique pour les équations de Maxwell

Cette section illustre par plusieurs exemples, les trois classes de schémas pour l'optimisation de la dispersion numérique avec la méthode FDTD(2,4), que nous rappelons :

- Schéma Dispersion-Relation-Preserving (DRP),
- Approche par formulation intégrale,
- Schéma Non-Standard Finite Difference (NSFD).

### 2.5.1 Dispersion-Relation-Preserving (DRP) scheme

Le terme DRP a été introduite dans [19] bien que des travaux similaires ont été réalisés auparavant d'après [51]. Une référence récente généralise cette approche dans le cadre des équations de Maxwell [14]. Les exemples donnés dans cette section permettent de comprendre assez simplement cette méthodologie. Les stencils présentés ici sont, pour la plupart, au plus formés de neuf cellules de Yee, afin de pouvoir comparer à "stencil équivalent".

#### Schéma de Oh

L'article [11] utilise la complémentarité des propriétés de dispersion du schéma de Yee (S22) et de Fang (S24). Rappelons que les schémas de Yee et de Fang ont une dispersion numérique minimale le long des bissectrices ou des axes cartésiens, respectivement, pour une

CFL maximale. Une combinaison linéaire (avec une somme de coefficients égale à un) des deux opérateurs différentiels est optimisée via la minimisation de l'anisotropie. Par exemple dans la direction  $y$ , en 2D :

$$\partial_y E_x \approx \alpha D_y^H E_x|_{i,j} + (1 - \alpha) D_y^Y E_x|_{i,j}, \quad (2.56)$$

où  $D^H$  est l'opérateur de Fang (2.22) et  $D^Y$  celui de Yee. L'équation de la dispersion numérique

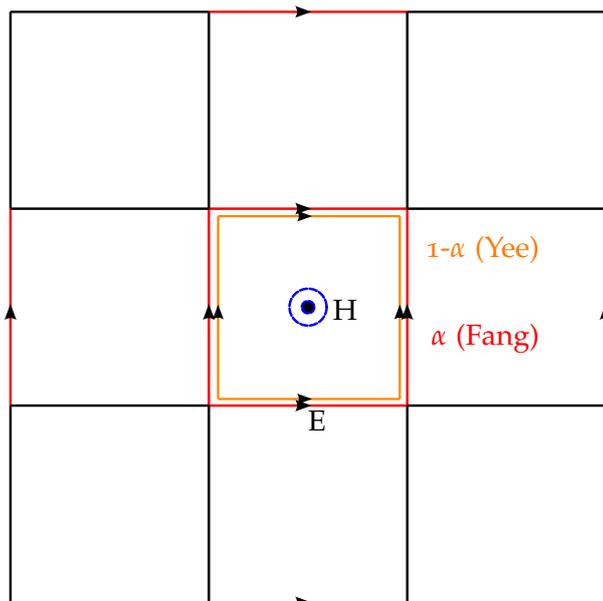


Figure 2.9 – Stencil du schéma (2,4) de Oh. Pondération entre les champs électriques du stencil de Fang et de Yee.

est similaire à (2.36) mais en prenant  $G$  tel que :

$$G(u) = \frac{1}{\Delta u} \left[ \left(1 + \frac{\alpha}{8}\right) \sin\left(\frac{k_u \Delta u}{2}\right) - \frac{\alpha}{24} \sin\left(\frac{3k_u \Delta u}{2}\right) \right]. \quad (2.57)$$

Si  $\alpha > 0$ , la condition CFL est la suivante :

$$\Delta t \leq \left| \frac{6}{6 + \alpha} \right| \frac{1}{c \left( \sum_u \frac{1}{\Delta u^2} \right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.58)$$

Un coefficient optimal  $\alpha_{opt}$  est déterminé via l'équation ((13) de [11]) :

$$f(\phi, \alpha) = \min_{\alpha} \left[ \max_{\phi} [\tilde{k}(\phi, \alpha)] - \min_{\phi} [\tilde{k}(\phi, \alpha)] \right], \quad (2.59)$$

lequel correspond à la minimisation de l'anisotropie de la dispersion numérique, à une fréquence donnée. Pour différentes résolutions de maillage, le coefficient optimal pour l'anisotropie est compris entre environ 1.3 (à  $\frac{1}{5}$ ) et 1. Ceci soutient l'idée que le schéma de Fang est rapidement plus isotrope que le schéma de Yee lorsque le maillage se raffine. Comme les résultats [11] le montrent, la dispersion numérique étant isotrope, elle peut être corrigée

totale à la fréquence correspondante. Il suffit de modifier la vitesse numérique "c" avec  $\frac{c}{m}$  où  $m = \frac{k}{\bar{k}}$ .  $\bar{k}$  est la valeur moyenne des nombres d'ondes numériques  $\tilde{k}$  dans les directions d'angles contenues dans un quart de cercle. La dispersion numérique est alors très réduite sur une bande relativement étroite (Fig. 2.10). Ce schéma facilite l'implémentation puisqu'il ne modifie que les coefficients multiplicatifs de l'opérateur habituel du schéma de Fang.

Il est possible d'utiliser l'équation de la dispersion numérique pour trouver  $\alpha$  afin de minimiser cette erreur pour un  $S$  donné (toujours à une fréquence désignée). Par exemple, sur la figure 2.11, on retrouve quasiment le schéma de Fang lorsque  $S = \frac{0.235}{\sqrt{2}}$ , la CFL optimale pour le schéma de Fang. Avec un tel pas de temps, le schéma de Oh optimal pour la dispersion numérique est le schéma avec les coefficients de Fang.

L'optimisation peut être abordée sous un autre angle. Pour  $\alpha > 0$ , la valeur maximale est connue avec  $S$  contraint par la condition CFL. Cette dernière dépend seulement de  $\alpha$ . Il est possible de rechercher  $\alpha > 0$  tel que la dispersion numérique soit minimale pour une CFL maximale (toujours à une fréquence désignée). Quelques courbes de dispersion sont tracées sur la figure 2.12 pour différentes résolutions de maillage. Remarquons que les courbes présentent peu de différences. En conséquence, pour ce type de schéma, le choix de la fréquence d'optimisation est quasiment inconséquent pour la dispersion numérique à CFL maximale.

Finalement, ce schéma propose une alternative au manque de souplesse sur le pas de temps optimal pour le schéma de Fang. Le schéma est flexible et permet de choisir, en fonction de la simulation à réaliser, un compromis entre le temps de calcul et le niveau d'erreur de dispersion numérique.

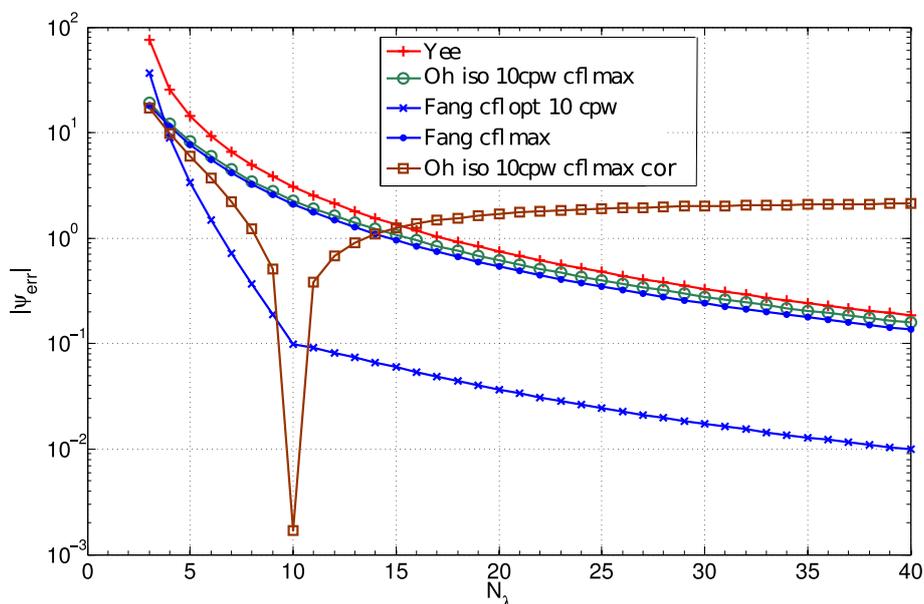


Figure 2.10 – Dispersion numérique de différents schémas. Deux schémas de Oh : isotrope et isotrope+correction. La correction permet de réduire significativement la dispersion numérique sur une bande de fréquence étroite. En contrepartie, la dispersion numérique en basse fréquence est largement augmentée. Par exemple ici, environ 2°d'erreur par longueur d'onde sur toute une région large en basse fréquence.

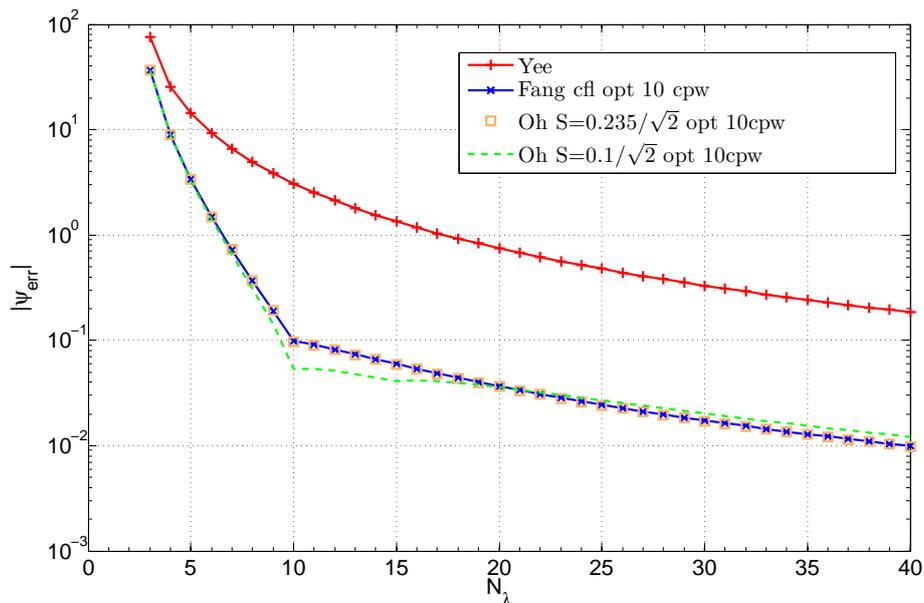


Figure 2.11 – Dispersion numérique de différents schémas. Schéma de Oh avec optimisation à 10 cellules par longueur d’onde (CPW) pour différentes valeurs de CFL. On remarque la superposition du schéma de Oh avec celui de Fang. Cela signifie que, pour ce type de schéma et à cette CFL, la dispersion numérique est minimale à 10CPW seulement avec les coefficients de Fang.

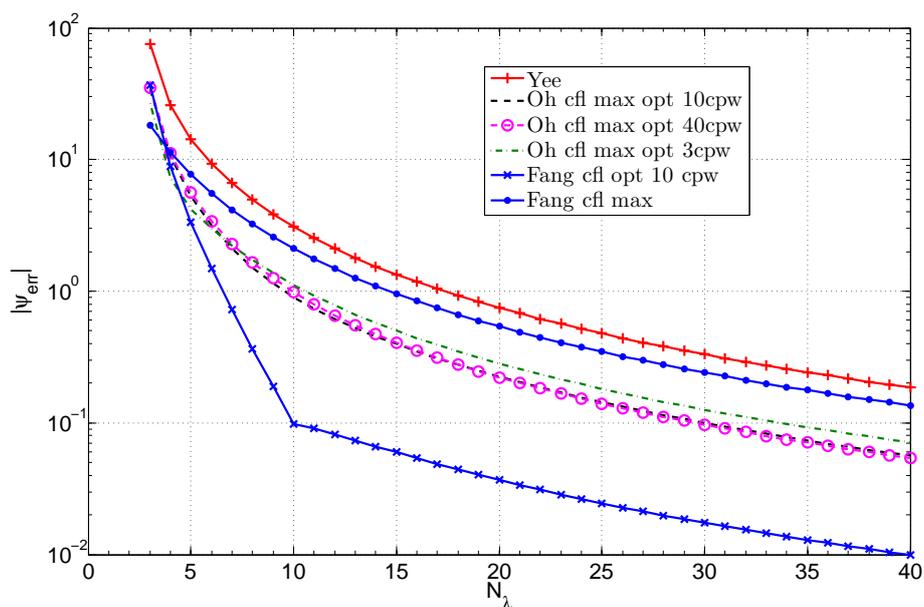


Figure 2.12 – Dispersion numérique de différents schémas. Schéma de Oh avec optimisation à CFL maximale pour différentes résolutions (CPW).

### Schéma de Wang et Teixeira

Dans [18], Miranker approche le problème d'EDP (précisément une classe de systèmes hyperboliques dans l'article) par un problème de minimisations sous contraintes. En effet, l'idée est d'imposer une ou des propriétés, relatives au problème à résoudre, au schéma numérique via des contraintes sur la minimisation d'une certaine erreur (par exemple, l'erreur

point à point) et/ou pour une classe de solution. Dans le cadre de la propagation d'ondes acoustiques, l'article [19] propose un schéma, qualifié de schéma DRP, où les coefficients de l'opérateur différentiel discret sont déterminés par minimisation de l'erreur sur le nombre d'onde ((2.6) dans [19]) via une approche de transformée de Fourier (à l'instar de Miranker).

Les travaux de Wang et Teixeira [6] (et d'autres anciens articles y sont référés) ont abouti à des schémas optimisés DRP (4,4), basés sur le stencil (2,4) et l'utilisation du Laplacien pour obtenir l'ordre 4 temporel. Plus précisément, ils écrivent une formulation générale du schéma FDTD (2,4) avec un opérateur discret  $S$  du rotationnel de la forme suivante :

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Delta x} (C_{1x}S_x^+ + C_{2x}S_x^{++}) \\ \frac{1}{\Delta y} (C_{1y}S_y^+ + C_{2y}S_y^{++}) \\ \frac{1}{\Delta z} (C_{1z}S_z^+ + C_{2z}S_z^{++}) \end{pmatrix}, \quad (2.60)$$

où,  $S_u^+$  et  $S_u^{++}$  avec  $u \in \{x, y, z\}$  sont définis par :

$$S_u^+ E_v^n = E_v^n(u + \frac{\Delta u}{2}) - E_v^n(u - \frac{\Delta u}{2}), \quad (2.61)$$

$$S_u^{++} E_v^n = E_v^n(u + \frac{3\Delta u}{2}) - E_v^n(u - \frac{3\Delta u}{2}). \quad (2.62)$$

En effet, on retrouve le schéma (2,4) avec :

$$C_{1u} = \frac{9}{8}, \quad C_{2u} = -\frac{1}{24}, \quad u \in \{x, y, z\}. \quad (2.63)$$

Ils trouvent facilement l'équation de la dispersion numérique associée à un tel schéma :

$$\left(\frac{1}{c\Delta t}\right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \sum_{u=\{x,y,z\}} \frac{1}{\Delta u^2} \left[ C_{1u} \sin\left(\frac{k_u\Delta u}{2}\right) + C_{2u} \sin\left(\frac{3k_u\Delta u}{2}\right) \right]^2. \quad (2.64)$$

Les coefficients peuvent être déterminés grâce à (2.64), néanmoins ils dépendront de la fréquence et de la direction de la propagation. Les auteurs cherchent des coefficients tels que le schéma soit quasiment isotrope. En caractérisant l'onde plane suivant les angles  $(\theta, \phi)$ , et pour une polarisation  $TE$ , i.e. avec  $H_0 \in \mathbb{R}$  et  $E_0 \in \mathbb{R}$  :

$$V = \left[ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \begin{pmatrix} -H_0 \cos \theta \cos \phi \\ -H_0 \cos \theta \sin \phi \\ H_0 \sin \theta \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -E_0 \sin \phi \\ E_0 \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{i\omega n \Delta t} e^{-i \sum_u k_u u}, \quad (2.65)$$

ils déduisent de (2.30) (partie imaginaire de l'équation dans la dimension  $x$ ), la relation :

$$H_0 \cos \theta \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) = \frac{1}{\mu} \frac{\Delta t}{\Delta z} \left[ C_{1z} \sin\left(\frac{k_z\Delta z}{2}\right) + C_{2z} \sin\left(\frac{3k_z\Delta z}{2}\right) \right] E_0. \quad (2.66)$$

Avec  $E = ZH$ ,  $k_x = k \sin \theta \cos \phi$ ,  $k_y = k \sin \theta \sin \phi$ ,  $k_z = k \cos \theta$ , on a alors (éq.(15) dans [6]) :

$$\frac{\Delta u}{c\Delta t} \sin\left(\frac{c\pi\Delta t}{\lambda}\right) = C_{1u} \sin\left(\frac{\pi\Delta u}{\lambda} \cos \theta\right) + C_{2u} \sin\left(\frac{3\pi\Delta u}{\lambda} \cos \theta\right), \quad (2.67)$$

qui est une relation indépendante de  $\phi$ . Puisque (2.67) est valide dans  $L^2$ , l'équation (2.67) est développée en séries harmoniques sphériques d'où on déduit les coefficients. Ces coefficients doivent être réécrits dans le domaine temporel ( $\omega^2 = \frac{4c^2\pi^2}{\lambda^2} \rightarrow -\partial/\partial t^2$ ) avec un développement de Taylor autour de  $q_s = \frac{\Delta u}{\lambda} = 0$  à l'ordre 3. En ne gardant que les termes d'ordre minime, le calcul des coefficients nécessite la résolution d'une dérivée seconde temporelle. Cette dernière est remplacée par la résolution d'un Laplacien spatial (équation de Helmholtz) et le schéma résultant est un schéma DRP (4,4) avec les coefficients :

$$C_{1u} \approx \frac{9}{8} + \frac{1}{64} \left( \frac{3c^2\Delta t^2}{\Delta u^2} - 1 \right) \Delta u^2 \Delta, \quad (2.68)$$

$$C_{2u} \approx -\frac{1}{24} - \frac{1}{1728} \left( \frac{3c^2\Delta t^2}{\Delta u^2} - 9 \right) \Delta u^2 \Delta \quad (2.69)$$

où  $\Delta$  désigne l'opérateur Laplacien (spatial). Cet opérateur requiert le calcul du Laplacien à la position des composantes de champ du stencil. Ici, les coefficients sont obtenus sans fixer une fréquence d'intérêt pour  $\omega$ . Avec de tels coefficients, l'étude de la stabilité montre que ce schéma admet une CFL maximale de  $\frac{12}{17}$ .

Les auteurs déclinent aussi d'autres schémas, qualifiés de schéma filtré, montrant des performances plus intéressantes en haute fréquence. Le filtre est en fait un choix de fonctions de base lors du développement de Taylor (ou ensuite, par un changement de base) lors de la réécriture en temps des coefficients. Dans [6], l'auteur choisit des filtres de Butterworth ou de type Chebyshev. L'utilisation d'un filtre ajoute un unique calcul matriciel pour la détermination des coefficients. Bien que ces schémas présentent un peu d'anisotropie, la dispersion numérique est plus réduite en HF qu'en BF.

### Schéma de Zygiridis et Tsibouskis

Le schéma décrit par Zygiridis et Tsibouskis [7], utilisant un stencil (2,4), se classe aussi parmi les schémas DRP. Similairement au schéma précédent, on part d'une formulation générale avec deux coefficients à déterminer par dimension spatiale. Cependant, le nombre d'onde numérique est utilisé dans l'équation de la dispersion numérique (2.64), laquelle est ensuite développée en série de Taylor à l'ordre 2 autour de 0 pour les variables  $\Delta t$  et  $\Delta u$  :

$$\sin^2(x) \overset{0}{\sim} x^2 - \frac{1}{3}x^4. \quad (2.70)$$

En 2D, en reprenant les notations de l'article [7], l'équation de dispersion numérique est :

$$\frac{1}{4} \frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{1}{48} \frac{\omega^4}{c_0^2} \Delta t^2 = \frac{k^2}{4} \sum_{u=x,y} (C_{u1} + 3C_{u2})^2 \tau_u^2 - \frac{k^4}{48} \sum_{u=x,y} (C_{u1} + 3C_{u2}) (C_{u1} + 27C_{u2}) \tau_u^4 \Delta u^2 \quad (2.71)$$

où  $\tau_x = \cos \phi$  et  $\tau_y = \sin \phi$  proviennent de la projection du nombre d'onde numérique  $\tilde{k}$ . L'égalité des premiers termes d'ordre 1, valable pour tous les angles, impose une condition sur les deux coefficients :

$$C_{u1} + 3C_{u2} = 1. \quad (2.72)$$

Cette condition, à deux équations, garantit une convergence spatiale d'ordre 2 et la consistance du schéma. Pour les termes d'ordre 2, on impose que l'égalité est vérifiée pour la valeur moyenne sur tous les angles :

$$\sum_{u=x,y} (C_{u1} + 27C_{u2}) \Delta u^2 \int_0^{2\pi} \tau_u^4(\phi) = 2\pi c^2 \Delta t^2. \quad (2.73)$$

Avec  $\int_0^{2\pi} \tau_u^4 = \frac{3}{4}\pi$ , on a :

$$\sum_{u=x,y} (C_{u1} + 27C_{u2}) \Delta u^2 = \frac{8}{3}c^2 \Delta t^2. \quad (2.74)$$

Il reste donc une équation à déterminer afin de définir les quatre coefficients. Les auteurs proposent que l'erreur définie ci-dessus soit également nulle lorsqu'elle est projetée sur une fonction trigonométrique, autrement dit :

$$\sum_{u=x,y} (C_{u1} + 27C_{u2}) \Delta u^2 \int_0^{2\pi} \tau_u^4(\phi) \cos(2\phi) = c^2 \Delta t^2 \int_0^{2\pi} \cos(2\phi). \quad (2.75)$$

Ceci donne alors :

$$\sum_{u=x,y} (C_{u1} + 27C_{u2}) \Delta u^2 \frac{\pi}{2} = 0. \quad (2.76)$$

Pour un maillage uniforme, il est aisé de voir que les coefficients sont la solution du système suivant [7] :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{4}{3}Q^2 \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

où , dans ce cas,  $Q = \frac{q}{\sqrt{2}}$  avec  $q$  valeur admissible pour la condition CFL :  $\Delta t = \frac{q\Delta x}{c\sqrt{2}}$ .

L'extension de ce schéma en 3D utilise un développement en séries d'harmoniques sphériques. Contrairement au schéma précédent, ce développement s'applique sur une équation de la dispersion numérique différente. Les auteurs en déduisent les équations nécessaires pour déterminer tous les coefficients du schéma.

Ils proposent aussi un autre schéma en réalisant une pondération du schéma temporel :

$$\partial_t f(t) \approx \frac{A}{\Delta t} \left( f\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - f\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right) \right) \quad (2.78)$$

En substituant la solution avec une onde plane, on obtient l'erreur commise sur le schéma temporel et une équation de dispersion numérique. De la même manière, on détermine les coefficients en imposant que ceux-ci minimisent ces deux erreurs moyennées suivant tous les angles de propagation.

Remarquons que l'équation de la dispersion numérique (2.64) est équivalente à celle du

schéma de Oh (2.57) avec comme changement de variable :

$$\alpha = -24C_2, \quad \alpha = 8(C_1 - 1) \quad (2.79)$$

Cela revient à imposer la première condition (2.72) et, dans le cas du schéma de Oh, des opérateurs identiques dans toutes les directions spatiales. Pour faire l'analogie avec le schéma de Oh, l'optimisation proposée par Zygiridis est différente de l'optimisation d'anisotropie ou d'erreur de dispersion numérique à une fréquence donnée. Zygiridis propose de minimiser la moyenne (suivant les angles de propagation) d'erreur de dispersion numérique par rapport à l'ordre 4 du développement linéaire de la dispersion numérique d'une onde plane. Puisque  $S = \frac{c\Delta t}{\Delta x} = Q$ , le coefficient  $\alpha$  du schéma de Oh peut être déterminé pour l'optimiser à différentes résolutions de maillage. Parallèlement, le coefficient équivalent  $\alpha$  du schéma de Wang en est déduit. Le coefficient optimal se stabilise et semble converger lorsque  $N_\lambda$  tend vers l'infini. Les observations révèlent que le coefficient optimal de Oh converge vers le coefficient équivalent calculé via le schéma de Wang. Finalement, le schéma de Zygiridis est similaire à celui de Oh optimisé sur une large bande de fréquence pour la réduction de la dispersion numérique moyennée sur les angles (non optimisé pour l'anisotropie).

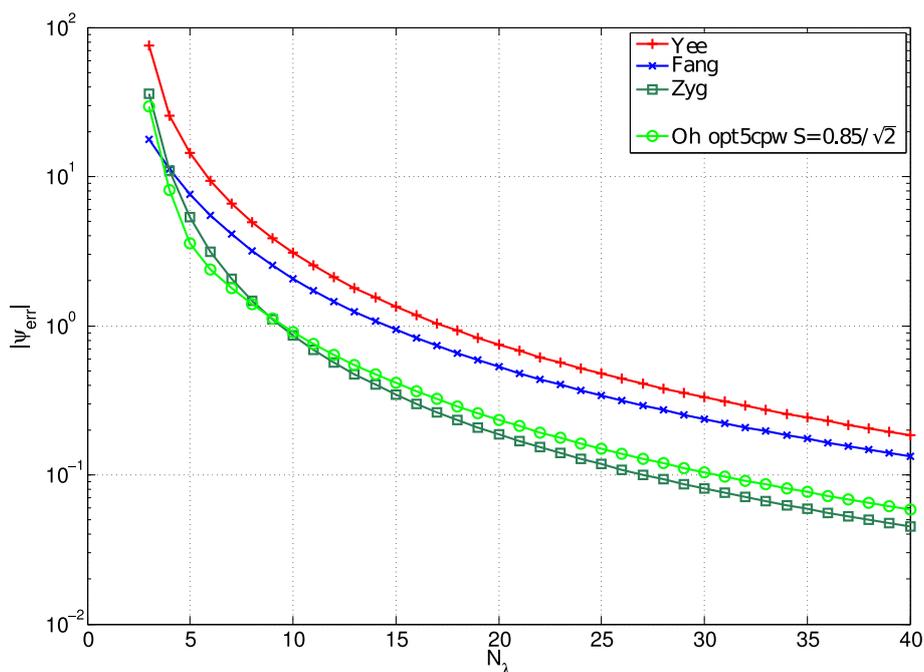


Figure 2.13 – Dispersion numérique en fonction de la résolution de maillage : schémas optimisés à 5CPW (sauf pour Fang à CFL maximal).

Les résultats dans [7] montrent que le premier schéma, ne faisant qu'une modification sur l'opérateur spatial, est performant sur une large bande. Ceci se retrouve sur les figures 2.13 et 2.14.

Les résultats sur la deuxième approche, non montrés ici, révèlent que l'erreur de la dispersion numérique est très minimale mais seulement sur une bande étroite. Cette deuxième approche aboutit à des courbes de dispersion similaires à ceux de Oh sur la figure 2.10,

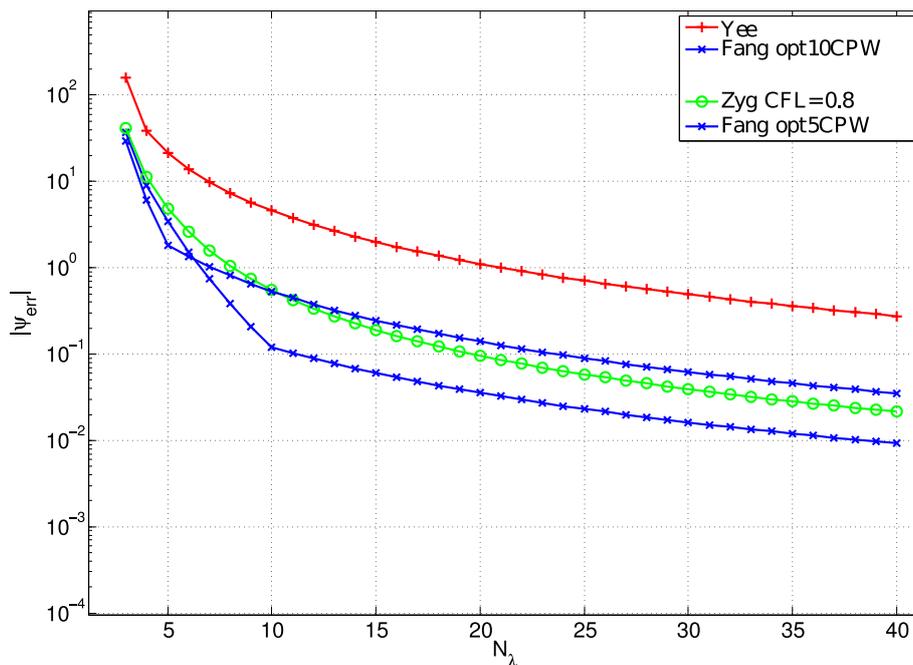


Figure 2.14 – Dispersion numérique 3D en fonction de la résolution de maillage.

lesquelles ne convergent pas vers 0 lorsque  $\Delta x$  tends vers 0. Le schéma de Zygidis pénalise peu la CFL.

### Schéma de Sun

L'article [3] propose un schéma DRP vérifiant l'équation exacte de la dispersion numérique via l'utilisation du stencil de la FDTD (2,4). Cette fois-ci, le schéma utilise deux types de coefficients  $w$  et  $a_1, a_2$ . Par exemple, le schéma sur  $H_z$  s'écrit :

$$H_z^{n+\frac{1}{2}} = H_z^{n-\frac{1}{2}} + wa_2 \left[ \frac{1}{\Delta y} \left[ E_{x_{j+\frac{1}{2}}}^n - E_{x_{j-\frac{1}{2}}}^n \right] - \frac{1}{\Delta x} \left[ E_{y_{i+\frac{1}{2}}}^n - E_{y_{i-\frac{1}{2}}}^n \right] \right] + (1-w)a_2 \left[ \frac{1}{3\Delta y} \left[ E_{x_{j+\frac{3}{2}}}^n - E_{x_{j-\frac{3}{2}}}^n \right] - \frac{1}{3\Delta x} \left[ E_{y_{i+\frac{3}{2}}}^n - E_{y_{i-\frac{3}{2}}}^n \right] \right]. \quad (2.80)$$

Le premier coefficient  $w$  est un paramètre de poids. Il permet de pondérer entre les termes du stencil (2,2) ( $w$ ) et (2,4) ( $1-w$ ) pour chaque équation scalaire. Le deuxième coefficient  $a_i$  s'applique identiquement sur chaque opérateur spatial mais l'un est associé au champ électrique ( $a_1$ ) et l'autre est associé au champ magnétique ( $a_2$ ). Sans technique de modification de coefficient ( $a_i$ ), ces coefficients sont les coefficients classiques :  $a_1 = \frac{\Delta t}{\epsilon}$ ,  $a_2 = \frac{\Delta t}{\mu}$ . Ces coefficients seront aussi à optimiser. A partir d'un tel schéma, on en déduit l'équation de la dispersion numérique associée. Par exemple, en 2D, avec les mêmes notations que l'article [3], l'équation de la dispersion numérique est :

$$\left( \frac{\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)}{c\Delta t} \right)^2 = \sum_{u=x,y} \left( w \frac{\sin\left(\frac{\beta_u\Delta u}{2}\right)}{\Delta u} + (1-w) \frac{\sin\left(\frac{3\beta_u\Delta u}{2}\right)}{3\Delta u} \right)^2 \quad (2.81)$$

où  $\beta_x = \beta \cos \phi$  et  $\beta_y = \beta \sin \phi$  avec  $\beta$ , la constante de phase numérique associée à la propagation de l'onde plane dans la direction d'angle  $\phi$ . La condition CFL est alors :

$$\Delta t \leq \left( \frac{3}{4w - 1} \right) \Delta t_{Yee} \quad (2.82)$$

Les différentes manières de choisir  $w$  aboutissent à différentes optimisations du schéma.

Il est possible de construire aisément un tel schéma avec une dispersion numérique minimale dans la direction des axes ou des diagonales ou dans une direction  $\phi_0$  arbitraire. Pour un maillage avec des pas spatiaux identiques, il suffit de prendre  $\beta$  avec  $\phi = \phi_0$  dans (2.81) afin d'obtenir un schéma optimisé dans la direction  $\phi_0$  de propagation, à une fréquence arbitraire. Plus intéressant, un schéma isotrope peut être construit en imposant l'égalité entre le terme de droite dans (2.81) pour  $\phi = 0$  et  $\phi = \frac{\pi}{4}$ . Le poids est alors le suivant :

$$w_{isotropic} = \frac{\left( \sqrt{2} \frac{\sin\left(\frac{3\beta_d \Delta x}{2}\right)}{3\Delta x} - \frac{\sin\left(\frac{3\beta_d \Delta x}{2}\right)}{3\Delta x} \right)}{\left( \frac{\sin\left(\frac{\beta_d \Delta x}{2}\right)}{\Delta x} - \frac{\sin\left(\frac{3\beta_d \Delta x}{2}\right)}{3\Delta x} \right) - \sqrt{2} \left( \frac{\sin\left(\frac{\beta_d \Delta x}{2}\right)}{\Delta x} - \frac{\sin\left(\frac{3\beta_d \Delta x}{2}\right)}{3\Delta x} \right)} \quad (2.83)$$

Il n'y a pas minimisation de la dispersion numérique mais elle est isotrope pour un maillage uniforme, toujours à une fréquence donnée.

Cette dispersion numérique n'est alors isotrope que sur une bande étroite de fréquence. C'est pourquoi cette fréquence est souvent choisie assez haute où la minimisation de l'erreur est plus pertinente. Pour un schéma isotrope à  $\frac{\lambda}{10}$ , la bande de fréquence optimale se termine à  $\frac{\lambda}{15}$  environ.

La technique de modification de coefficients intervient sur les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  suivant chaque direction spatiale. Les substitutions sont les suivantes :

$$a_1 \rightarrow a_1 a_{xe}, a_1 a_{ye}, \quad \text{et} \quad a_2 \rightarrow a_2 a_{xh}, a_2 a_{yh}. \quad (2.84)$$

De même que pour  $w$ , on peut éliminer la dispersion numérique à une fréquence désirée, possiblement différente de celle choisie pour  $w$ . Cette technique ne modifie pas l'anisotropie. Elle se couple facilement avec le schéma isotrope. Avec un tel choix, la dispersion numérique est réduite sur une bande étroite mais est légèrement plus élevée que le schéma (2,4) en basse fréquence.

Enfin, une valeur constante de  $w$  peut être déduite de l'équation du schéma isotrope par développement de Taylor à l'ordre 3 :  $w = \frac{27}{26}$ . Le schéma résultant a une dispersion numérique isotrope sur une large bande de fréquence 2.15. La CFL associée est  $\frac{39}{41} \approx 0.95$ , ce qui est supérieure au schéma (2,4). Les auteurs proposent aussi une méthode de recherche de  $w$  optimal, empiriquement. Dans la majorité des cas, la CFL est légèrement pénalisée.

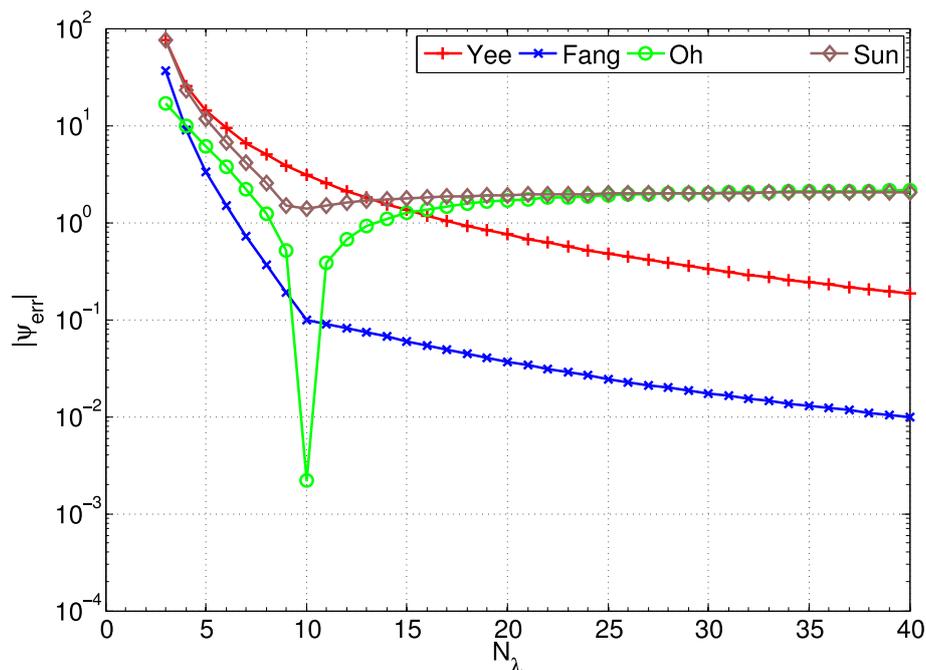


Figure 2.15 – Dispersion numérique en fonction de la résolution de maillage : schémas optimisés à 10CPW. Schéma de Oh isotrope avec correction et schéma de Sun avec  $w = \frac{27}{26}$  et optimisation à 10CPW avec la technique de modification de coefficient (CM). Le schéma de Sun est moins performant mais est relativement isotrope sur une large bande.

### 2.5.2 Approche par formulation intégrale

L'approche par formulation intégrale se base sur les équations de Maxwell sous forme intégrale :

$$\partial_t \int \mu H \cdot ds = - \oint E \cdot dl \quad (2.85)$$

$$\partial_t \int \epsilon E \cdot ds = \oint H \cdot dl \quad (2.86)$$

De tels schémas nous intéressent car cette approche est utilisée par certains schémas FDTD conformes. Bien que les schémas ci-dessous ont des différences avec les précédents, l'analyse et l'optimisation de la dispersion numérique sera similaire à l'approche DRP. Remarquons notamment que certains schémas peuvent s'écrire sous les deux approches, comme on le verra pour le schéma de Fang. Dans la suite, nous ne noterons pas explicitement les variables d'intégration.

#### Schéma de Chun

Dans [10], le schéma est obtenu via un développement à l'ordre 2 des points de champ des intégrales linéaires au niveau du point milieu. Rappelons que la formulation intégrale donne,

pour  $H_z$  sur la surface  $S = S_{xy}$  telle que  $|S| = \Delta x \Delta y$  :

$$\partial_t \mu \int_S H_z = - \int_{\partial S} E. \quad (2.87)$$

Ceci donne alors :

$$\partial_t \frac{\mu}{\Delta x \Delta y} \int_S H_z = \frac{-1}{\Delta x \Delta y} \int_{\partial S} E \quad (2.88)$$

$$= \frac{-1}{\Delta x} \left[ - \int_{\Delta y} \frac{E_y^+}{\Delta y} + \int_{\Delta y} \frac{E_y^-}{\Delta y} \right] - \frac{1}{\Delta y} \left[ \int_{\Delta x} \frac{E_x^+}{\Delta x} - \int_{\Delta x} \frac{E_x^-}{\Delta x} \right]. \quad (2.89)$$

où  $E_y^+$  ou  $E_y^-$  désigne le champ  $E_y$  situé sur une arête de direction  $y$  de la cellule de Yee, laquelle est une arête supérieure ou inférieure par rapport à la direction  $x$  (si comme ici la cellule de Yee est une cellule dans le plan  $(x, y)$ ). En intégrant sur l'intervalle  $(t^n, t^{n+1})$ , avec un pas constant  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x \Delta y} \mu \int_S H_z(t^{n+1}) &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \mu \int_S H_z(t^n) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ - \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{\Delta y} \frac{E_y^+}{\Delta t \Delta y} + \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{\Delta y} \frac{E_y^-}{\Delta t \Delta y} \right] \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[ \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{\Delta x} \frac{E_x^+}{\Delta t \Delta x} - \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{\Delta x} \frac{E_x^-}{\Delta t \Delta x} \right]. \end{aligned} \quad (2.90)$$

L'équation 2.90 est exacte. Le schéma va utiliser cette propriété en travaillant sur des valeurs intégrales de champs  $E$  et  $H$ . Ces équations seules ne permettent pas de calculer le champ EM car il faut une relation entre les intégrales surfaciques ( $\int_S H_u, \int_S E_u$ ) et les intégrales linéiques ( $\int_{\Delta u} H_u, \int_{\Delta u} E_u$ ). Les équations supplémentaires sont obtenues en commençant par approximer les intégrales linéiques.

Pour ce faire, un développement de Taylor du champ électrique le long des arêtes de  $S$  est effectué pour l'évaluation des intégrales :

$$\frac{1}{\Delta t \Delta u} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{\Delta u} E_u^\pm, \quad u \in \{x, y\}. \quad (2.91)$$

Le développement de Taylor de  $E$ , au milieu des sous-intervalles de chaque dimension, donne à l'ordre 2 :

$$E = E_i + (\nabla E)_i h + \frac{1}{2} h^t (\text{Hess} E)_i h + O(h^3), \quad (2.92)$$

où,  $\text{Hess} E$  est la matrice Hessienne de  $E$ , et le vecteur  $h \in \mathbb{R}^4$  est tel que :

$$0 \leq |h_u| \leq \frac{\Delta u}{2}, \quad u \in \{x, y, z, t\}, \quad (2.93)$$

et :

$$E_i = E\left(\frac{x_l + x_{l+1}}{2}, \frac{y_j + y_{j+1}}{2}, \frac{z_k + z_{k+1}}{2}, \frac{t^n + t^{n+1}}{2}\right). \quad (2.94)$$

Comme l'auteur le remarque, si le développement est seulement à l'ordre 0, le schéma de

Yee est obtenu. Avec un développement au point milieu sur seulement les deux variables d'intégration (les deux autres étant fixés), on substitue dans (2.91) :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta t \Delta u} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{\Delta u} E_u^\pm &= \frac{1}{\Delta t \Delta u} E_i^\pm \Delta t \Delta u + \frac{1}{\Delta t \Delta u} (\partial_u E)_i^\pm \int_{\Delta t} \int_{\Delta u} h_u \\
 &+ \frac{1}{\Delta t \Delta u} (\partial_t E)_i^\pm \int_{\Delta t} \int_{\Delta u} h_t + \frac{1}{2 \Delta t \Delta u} (\partial_u^2 E)_i^\pm \int_{\Delta t} \int_{\Delta u} h_u^2 \\
 &+ \frac{1}{2 \Delta t \Delta u} (\partial_t^2 E)_i^\pm \int_{\Delta t} \int_{\Delta u} h_t^2 + \frac{1}{\Delta t \Delta u} (\partial_u E)_i^\pm (\partial_t E)_i^\pm \int_{\Delta t} \int_{\Delta u} h_t h_u \\
 &+ \frac{1}{\Delta t \Delta u} (\partial_t E)_i^\pm (\partial_u E)_i^\pm \int_{\Delta t} \int_{\Delta u} h_u h_t + O(h_u^3) + O(h_t^3).
 \end{aligned} \tag{2.95}$$

Le développement au point milieu permet de réduire l'intégrale (2.91) à :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta t \Delta u} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{\Delta u} E_u^\pm &= E_i^\pm + 0 \\
 &+ 0 + \frac{1}{24} \Delta u^2 (\partial_u^2 E)_i^\pm \\
 &+ \frac{1}{24} \Delta t^2 (\partial_t^2 E)_i^\pm + 0 \\
 &+ 0 + O(h_u^4) + O(h_t^4).
 \end{aligned} \tag{2.96}$$

Remarquons que l'intégration des ordres impairs le long des arêtes donne un résultat nul. En effet, on a :

$$\int_{\Delta u} h_u^k = 0, \quad \text{si } k \in \mathbb{N}^{*+} \text{ impair}, \tag{2.97}$$

$$\int_{\Delta u} h_u^2 = \frac{2}{24} \Delta u^3. \tag{2.98}$$

Notons que (2.96) permet de calculer  $\int_S H_u$  (ce qui est fait dans le schéma de Kitsunezaki [38]). N'oublions pas qu'il nous faut une relation entre  $\int_S H_u$  et  $\int_{\Delta u} H_u$  d'ordre 4 pour l'équation de Maxwell-Faraday (et réciproquement sur  $E$ ). La suite consiste à substituer  $E_i$  par le développement de Taylor sur les deux autres variables, que l'on peut noter  $v$  et  $w$ , dans (2.96). On en déduit que :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta t \Delta u} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{\Delta u} E_u^\pm &= \frac{1}{\Delta v \Delta w} \int_{\Delta v} \int_{\Delta w} E_u^\pm \\
 &+ \frac{1}{24} [\Delta t^2 (\partial_t^2 E)_i^\pm + \Delta u^2 (\partial_u^2 E)_i^\pm - \Delta v^2 (\partial_v^2 E)_i^\pm - \Delta w^2 (\partial_w^2 E)_i^\pm],
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

Dans (2.99), les termes d'ordre supérieur à 4 ont été négligés. L'équation des ondes permet de calculer la dérivée temporelle avec les dérivées spatiales :

$$(\partial_t^2 E)_i^\pm = c^2 ((\partial_u^2 E)_i^\pm + (\partial_v^2 E)_i^\pm + (\partial_w^2 E)_i^\pm - \mu (\partial_t J)_i^\pm). \tag{2.100}$$

Finalement, en utilisant les différences centrées  $\tilde{\partial}^2$  pour chaque dérivée d'ordre 2, on rend

l'équation homogène :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t \Delta u} \int_{t^n}^{t^n + \Delta t} \int_{\Delta u} E_u^\pm &= \frac{1}{\Delta v \Delta w} \int_{\Delta v} \int_{\Delta w} E_u^\pm \\ &+ \frac{1}{24} \left( (c^2 \Delta t^2 + \Delta u^2) \tilde{\partial}_u^2 + (c^2 \Delta t^2 - \Delta v^2) \tilde{\partial}_v^2 + (c^2 \Delta t^2 - \Delta w^2) \tilde{\partial}_w^2 \right) \quad (2.101) \\ &\frac{1}{\Delta v \Delta w} \int_{\Delta v} \int_{\Delta w} E_u^\pm - \frac{c^2 \Delta t^2}{24} \mu (\partial_t J)_i^\pm, \end{aligned}$$

En utilisant (2.101) pour calculer toutes les intégrales de (2.90), ceci aboutit alors à un schéma (4,4). Les auteurs expliquent que les équations (2.101) (à un coefficient  $\epsilon$  ou  $\mu$  près) relient respectivement les champs linéiques  $E$  et  $H$  aux champs (ou flux) surfaciques  $D$  et  $B$ . Comme dans la méthode FIT [42], l'ordre supérieur sur cette relation est aussi effectué. Si l'algorithme commence par l'équation de Maxwell-Ampère, le motif séquentiel est le suivant :

- $D$  calculée avec Maxwell-Ampère en fonction de  $H$ ,
- $E$  calculé avec (2.101) en fonction de  $D$ ,
- $B$  calculée avec Maxwell-Faraday en fonction de  $E$ ,
- $H$  calculé avec (2.101) en fonction de  $B$ .

L'algorithme alterne entre une équation des deux équations de Maxwell et l'équation (2.101) associée au même champ. Le schéma de Chun peut être vu comme similaire à celui de Yee avec la modification de la valeur (représentation) des inconnues (2.91). Le schéma de Yee utilise des valeurs directes sur le noeud tandis que Chun doit résoudre les équations supplémentaires (2.101) entre chaque mise à jour d'un champ. Le temps de calcul et la taille mémoire se retrouvent alors doublés. D'autre part, il est possible de négliger les termes de correction d'ordre supérieur dans les équations (2.101) rendant le schéma équivalent au schéma de Yee. De ce fait, les formulations de conditions limites pour le schéma classique peuvent être réutilisées. Par exemple, les conditions absorbantes (rayonnement à l'infini) de type Perfectly Matched Layer (PML) ont été utilisées pour ce schéma dans [10].

L'équation de la dispersion numérique du schéma est [10] :

$$\frac{1}{c^2 \Delta t^2} \sin^2 \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) = \sum_{(u,v,w)} \frac{\sin^2 \left( \frac{k_u \Delta u}{2} \right)}{\Delta u^2} A_{vv} A_{ww} \quad (2.102)$$

où :

$$\begin{aligned} A_{uu} &= 1 - \frac{1}{6} \left[ \left( 1 + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta u^2} \right) \sin^2 \left( \frac{k_u \Delta u}{2} \right) \right. \\ &\quad - \left( 1 - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta v^2} \right) \sin^2 \left( \frac{k_v \Delta v}{2} \right) \\ &\quad \left. - \left( 1 - \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta w^2} \right) \sin^2 \left( \frac{k_w \Delta w}{2} \right) \right] \quad (2.103) \end{aligned}$$

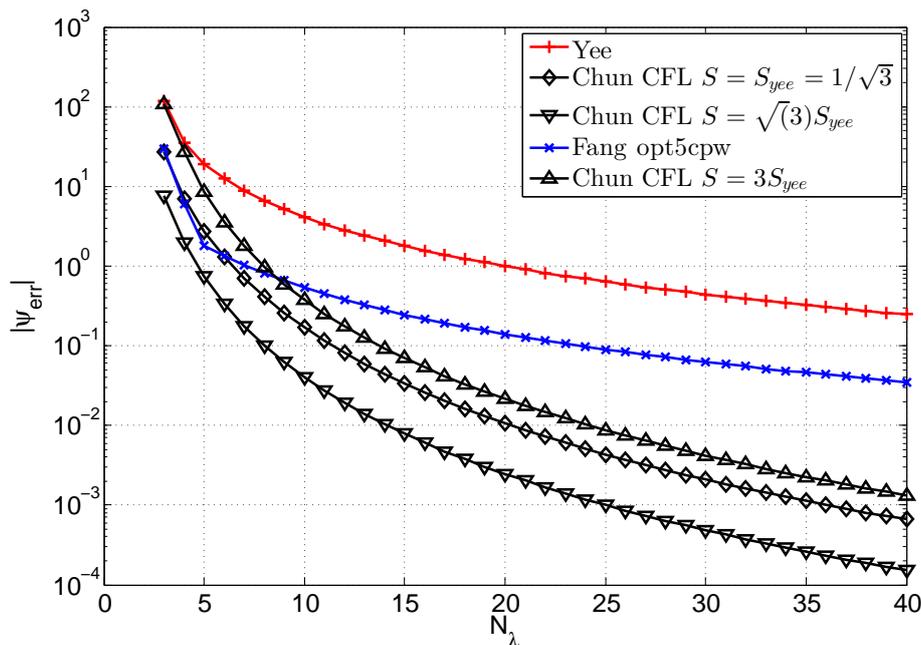


Figure 2.16 – Dispersion numérique 3D à différentes CFL pour le schéma de Chun. Tout comme le schéma de Fang, la CFL optimale du schéma de Chun n'est pas la CFL maximale. Cependant, le pas de temps optimal est supérieur à celui de Yee (environ 1.625 fois supérieur).

Pour un maillage uniforme, la condition CFL suivante est déduite :

$$3 \frac{7^2 c^2 \Delta t^2}{6^2 \Delta x^2} - \frac{7 c^4 \Delta t^4}{2 \Delta x^4} + \frac{3 c^6 \Delta t^6}{4 \Delta x^6} \leq 1 \quad (2.104)$$

La détermination du pas maximal est obtenu en résolvant numériquement l'égalité. En posant  $S = \frac{c\Delta t}{\Delta x}$ , la méthode de Newton donne, pour un maillage uniforme,  $S = \sqrt{3} \approx 1.732$ . C'est d'ailleurs la valeur exacte à l'égalité de (2.104). Autrement dit, la condition CFL est 3 fois moins contraignante. C'est-à-dire un pas de temps triplé par rapport à celui de Yee :

$$\Delta t \leq 3\Delta t_{Yee} \quad (2.105)$$

Remarquons que si les termes d'ordre supérieurs à 2 sont négligés, la CFL du schéma classique (2,4) est retrouvée. D'autre part, la dispersion numérique au pas de temps maximal pour ce schéma (4,4) n'est pas minimale. Ce minimum est autour de  $\sqrt{3}\Delta t_{Yee}$  (plus précisément, près de  $1.625\Delta t_{Yee}$ ).

En 3D, les courbes de dispersion numérique à différentes CFL, sur la figure 2.16, montrent que les niveaux d'erreur sont très bas devant ceux de Fang ou de Yee. En maillage grossier, il est possible d'avoir moins de  $2^\circ$  d'erreur par longueur d'onde à  $N_\lambda = 4$  et moins de  $1^\circ$  à  $N_\lambda = 5$ . C'est respectivement le même niveau d'erreur que le schéma de Yee à  $N_\lambda = 14$  et  $N_\lambda = 23$ .

Sur les figures 2.17 et 2.18, l'anisotropie du schéma est de la même forme que celle de Yee ou de Fang selon la CFL considérée. Remarquons que les maxima de la dispersion numérique

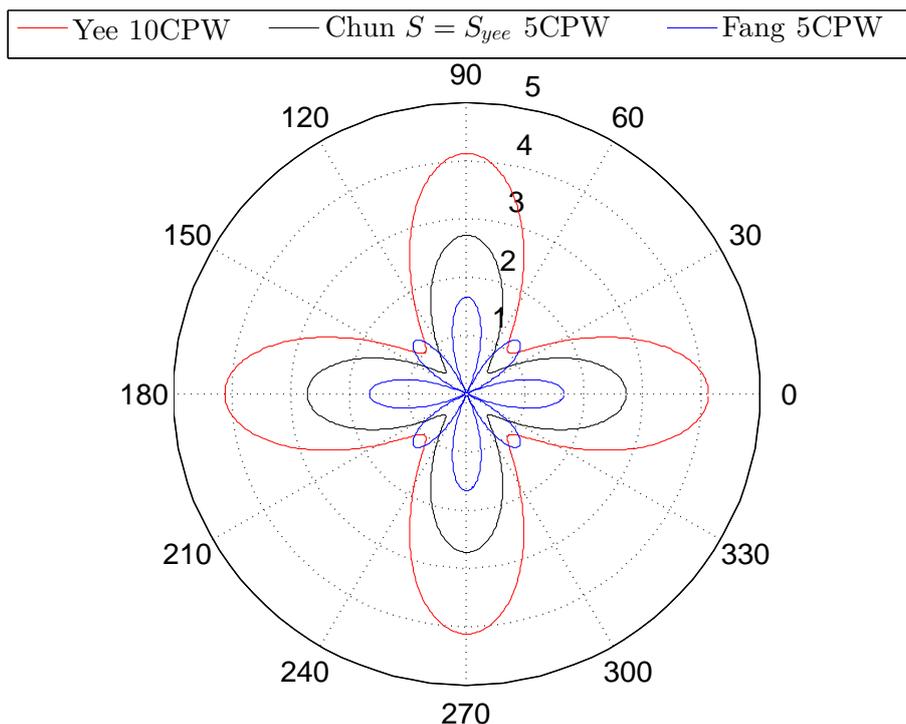


Figure 2.17 – Anisotropie (en degré par longueur d'onde) de la dispersion numérique dans le plan  $(x,y)$  : CFL égal à celui de Yee pour Chun. Le schéma de Chun à les mêmes défauts d'anisotropie que le schéma de Yee pour les pas de temps indiqués. La dispersion numérique a diminué mais reste tout de même supérieure à  $1^\circ$  par longueur d'onde à 5CPW.

sont suivant les angles de propagation axiales ou diagonales. La modification du nombre CFL résulte en l'augmentation ou la diminution des erreurs de dispersion dans ces directions. Un minimum quasiment nul ne peut être obtenu puisque les erreurs "diagonales" ont des variations opposés à celles des erreurs "axiales". Le minimum d'erreur que l'on puisse avoir correspond au schéma numérique avec la CFL optimale.

En outre, l'avantage d'un schéma (4,4) est l'ordre 4 de la convergence de l'erreur de dispersion numérique comparée à un schéma (2,4) où cette erreur reste d'ordre 2. C'est ce qui est observé sur la figure 2.19. En conséquence, ce schéma est adapté pour des calculs large bande. Par ailleurs, la condition CFL d'un schéma (4,4) est généralement moins contraignante que pour le schéma (2,2) comme on l'a vu précédemment. Certes, plus d'opérations sont réalisées au cours d'une itération, mais le nombre total d'itérations est, par exemple ici, réduit à environ 57% du nombre original (pour une dispersion optimale) ou bien divisé par 3 au maximum.

### Schéma de Kitsunezaki

Une récente publication [38] présente un schéma débutant avec un développement similaire à celui de Chun tout en restant à l'ordre 2 en temps. Le schéma obtenu ne nécessite aucune équation supplémentaire à résoudre, malgré que son stencil est différent de celui de Yee (Fig. 2.20). Bien que le schéma final soit relativement simple, celui-ci est un

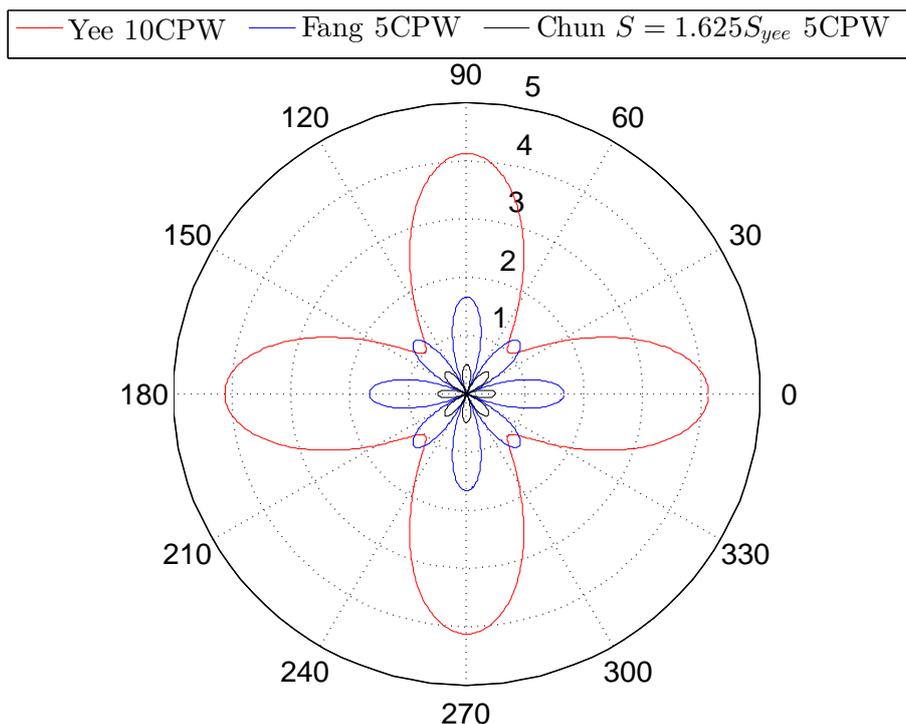


Figure 2.18 – Anisotropie (en degré par longueur d'onde) de la dispersion numérique dans le plan  $(x,y)$  : CFL optimale pour Chun. A CFL optimale, la dispersion numérique diminue significativement et équilibre les erreurs maximales commises dans les directions axiales et diagonales. A 5CPW, la dispersion numérique est relativement correcte avec une erreur d'environ 0.6-0.7 degré par longueur d'onde.

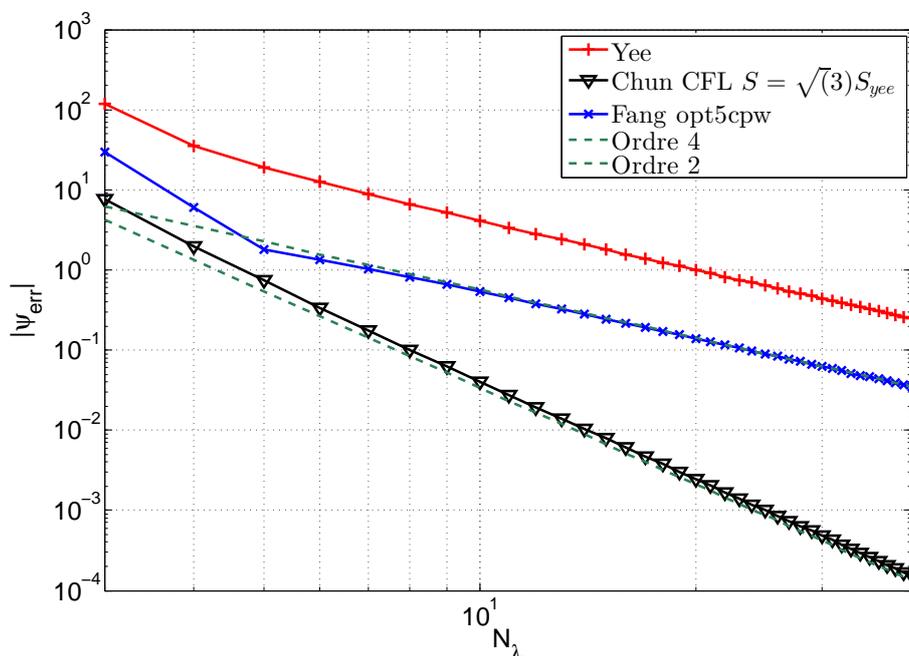


Figure 2.19 – Ordre de convergence de la dispersion numérique 3D à différentes CFL pour Chun. Les droites ordre 4 et ordre 2 représentent des convergences de ces ordres.

schéma semi-implicite en espace et nécessite donc une inversion matricielle. Cette matrice contient les coefficients du développement de Taylor sur chaque plan d'espace, et utilise des

approximations non centrées d'ordre 5 pour les conditions aux frontières. D'après les auteurs, la CFL est réduite à  $\frac{2}{3}$  de celle de Yee. Cela reste toujours supérieur à la CFL optimale de Fang.

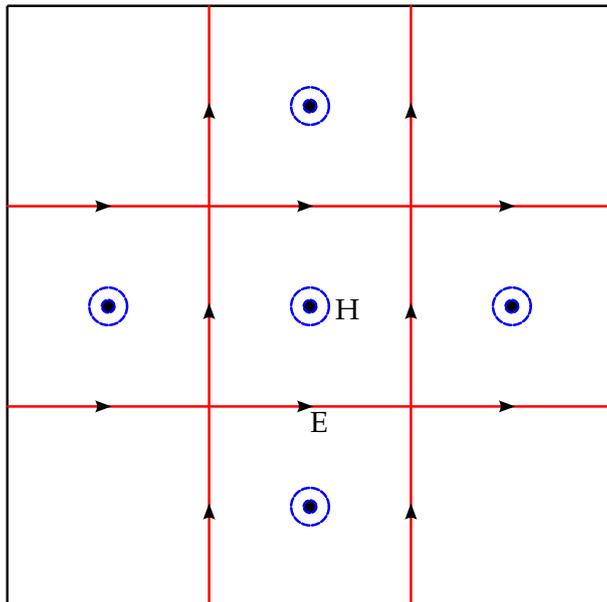


Figure 2.20 – Stencil du schéma de Kitsunezaki. Schéma des champs impliqués dans le développement de Taylor de E et H dans les intégrales linéiques ou surfaciques.

### Schéma de Hadi M24

S'inspirant de la structure du schéma de Fang(2,4) , le schéma M24 [9] est construit à partir de la résolution de Maxwell-Faraday (et de même pour Maxwell-Ampère) (2.87) sur deux surfaces  $S$  différentes. En gardant l'exemple sur l'équation de Maxwell-Faraday, les intégrales linéaires sur le champ électrique  $E$  sont alors situées sur deux boucles distinctes :

- La première, que l'on nomme  $C_1$ , est celle de la cellule où se trouve le champ  $H$  à calculer, i.e., la cellule du stencil (2,2).
- La seconde, que l'on nomme  $C_2$ , entoure les huit cellules autour de la cellule (2,2), comprenant seulement les points du champ  $E$  dans les axes principaux.

La première entoure une surface d'aire  $\Delta u \Delta v$  tandis que la seconde entoure une surface d'aire  $9\Delta u \Delta v$ . Le stencil et les contours sont représentés sur la figure 2.21. En comparant avec le schéma (2,4), le schéma s'écrit donc comme combinaison linéaire de ces deux intégrales :

$$[-\partial_t \mu H_z]_{\text{FDTD}} = \frac{\alpha_1}{|C_1|} \int_{C_1} E + \frac{\alpha_2}{|C_2|} \int_{C_2} E. \quad (2.106)$$

où  $|C_i|$  est l'aire de la surface qu'entoure la boucle  $C_i$ . Pour les cellules cubiques, on fixe  $\Delta u = \Delta v = \Delta$ , on a alors :  $|C_1| = \Delta^2$  et  $|C_2| = 9\Delta^2$ . A l'instar du schéma classique, et pour la consistance du schéma, la somme des poids doit être égale à 1. On retrouve le schéma de Fang(2,4) si on ne choisit seulement que les points du champ  $E$  dans les axes principaux avec les coefficients :

$$\alpha_1 = \frac{9}{8}, \alpha_2 = -\frac{1}{8}. \quad (2.107)$$

Les auteurs proposent une modification de ce schéma en prenant en compte tous les points du champ électrique situés sur la boucle extérieure  $C_2$ , mais ceci en distinguant les champs ajoutés des champs déjà présents.

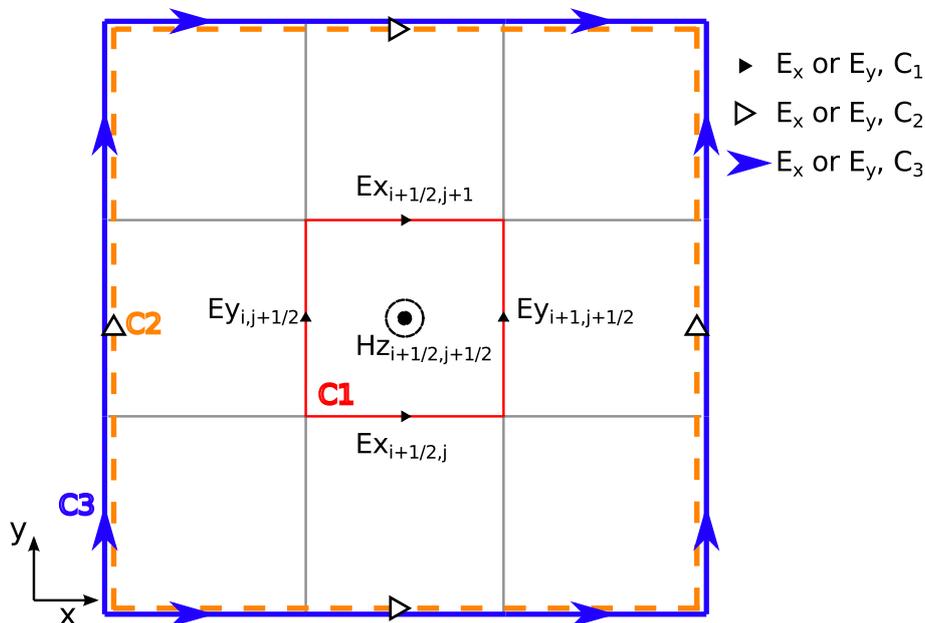


Figure 2.21 – Stencil du schéma M24.

La boucle extérieure  $C_2$  est partagée en deux parties :

- l'une comprenant les points du champ  $E$  dans les axes principaux, comme dans le schéma de Fang(2,4),
- et l'autre partie comprenant les autres points du champ  $E$  restants.

Le schéma se réécrit donc, en reprenant les mêmes notations des poids que [9] :

$$[-\partial_t \mu H_z]_{\text{FDTD}} = \frac{(1 - K_1 - K_2)}{\Delta x^2} \int_{C_1} E + \frac{K_1}{9\Delta x^2} \int_{C_2} E + \frac{K_2}{9\Delta x^2} \int_{C_3} E, \quad (2.108)$$

avec, en effet, les contours classiques (Yee et Fang(2,4)) :

$$\int_{C_1} E = \Delta x \left[ E_{x_{i,j+\frac{1}{2}}} - E_{x_{i,j-\frac{1}{2}}} - E_{y_{i+\frac{1}{2},j}} + E_{y_{i-\frac{1}{2},j}} \right] \quad (2.109)$$

$$\int_{C_2} E = 3\Delta x \left[ E_{x_{i,j+\frac{3}{2}}} - E_{x_{i,j-\frac{3}{2}}} - E_{y_{i+\frac{3}{2},j}} + E_{y_{i-\frac{3}{2},j}} \right] \quad (2.110)$$

et les deux composantes, à chaque coin du contour extérieur ; soit au total :

$$\int_{C_3} E = \frac{3\Delta x}{2} \left[ E_{x_{i-1,j+\frac{3}{2}}} + E_{x_{i+1,j+\frac{3}{2}}} - E_{x_{i-1,j-\frac{3}{2}}} - E_{x_{i+1,j-\frac{3}{2}}} \right. \\ \left. - E_{y_{i+\frac{3}{2},j+1}} - E_{y_{i+\frac{3}{2},j-1}} + E_{y_{i-\frac{3}{2},j+1}} + E_{y_{i-\frac{3}{2},j-1}} \right] \quad (2.111)$$

Il reste donc à déterminer les poids  $K_1$  et  $K_2$  du schéma. Bien qu'il soit possible d'utiliser des

coefficients tels que le schéma reste stable, c'est-à-dire,

$$K_1 < 0, \quad K_2 < \frac{3}{2} - 2K_1, \quad (2.112)$$

les auteurs cherchent des coefficients optimaux pour un schéma ayant une dispersion numérique minimale. L'équation de la dispersion numérique associée au schéma M24 en 2D, donnée par (9) dans [9], dépend de  $K_1$  et de  $K_2$  entre autres. De cette équation, ils calculent le nombre d'onde numérique  $\tilde{k}_i$  (noté  $\tilde{\gamma}_i$  dans [9]) en fonction de  $K_1$  et de  $K_2$ . Les coefficients optimaux sont optimisés en minimisant l'erreur de dispersion sur le nombre d'onde numérique (2.25). En 2D, ceci s'écrit :

$$\Phi_i = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \frac{k_i - \tilde{k}_i(\phi)}{k_i} \right)^2 d\phi. \quad (2.113)$$

C'est une minimisation de l'erreur moyenne suivant tous les angles de propagation. En 2D, les coefficients trouvés par les auteurs sont donnés dans [9], en fonction de la résolution du maillage.

D'autre part, avec  $G$  défini dans la section 2.4, l'équation de la dispersion numérique en 3D du schéma M24 est :

$$G(u, v) = \frac{1}{\Delta u} \left[ (1 - K_1 - K_2) \sin \left( \frac{k_u \Delta u}{2} \right) + \frac{K_1}{3} \sin \left( \frac{3k_u \Delta u}{2} \right) + \frac{K_2}{3} \sin \left( \frac{3k_u \Delta u}{2} \right) \cos(k_v \Delta v) \right], \quad (2.114)$$

où  $G$  ne s'applique pas seulement sur une dimension  $u$  mais sur un couple  $(u, v) \in \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$ , l'ensemble des permutations usuelles. Les coefficients 3D de  $K_1$  et  $K_2$  sont trouvés empiriquement en calculant le nombre d'onde  $\tilde{k}_i$  de l'équation ci-dessus et minimisant  $\Phi_{\gamma_i}$ . Notons que  $G(u, v) \neq G(u, w)$  et ceci ne permet pas la simplification de l'équation de la dispersion numérique en une somme de carré de  $G$ . En outre, l'équation de la dispersion numérique 3D de ce schéma montre que le nombre d'onde est complexe. Par conséquent, le schéma M24 est instable en 3D si appliqué tel quel.

En comparaison avec la dispersion numérique 2D des schémas de Oh, le schéma M24 est nettement plus efficace. Globalement, le schéma a une dispersion numérique légèrement plus faible qu'un schéma de Fang optimisé mais avec une faible pénalité sur la CFL. Que ce soit une optimisation à 5CPW (Fig. 2.22) ou 10CPW (Fig. 2.23), le schéma M24 montre pas moins de 20dB d'écart avec le schéma de Fang à la fréquence d'optimisation. Utilisant un stencil plus "large" que le schéma de Oh, on s'attend naturellement à ce que le schéma M24 soit plus performant. Quant à l'anisotropie (Fig. 2.24), elle est toujours présente mais son amplitude maximale a diminué d'autant que sur les figures précédentes. Le schéma M24 peut se voir comme le schéma de Fang(2,4) fortement optimisé sur une bande de fréquence très étroite.

L'article [9] traite aussi des conditions limites, notamment l'utilisation de cellules de Yee, comme cellules tampons, avant les PML. C'est une hybridation d'ordre 2 et 4 avec une seule cellule. D'après les auteurs, les résultats obtenus ne sont pas significativement dégradés. Cette

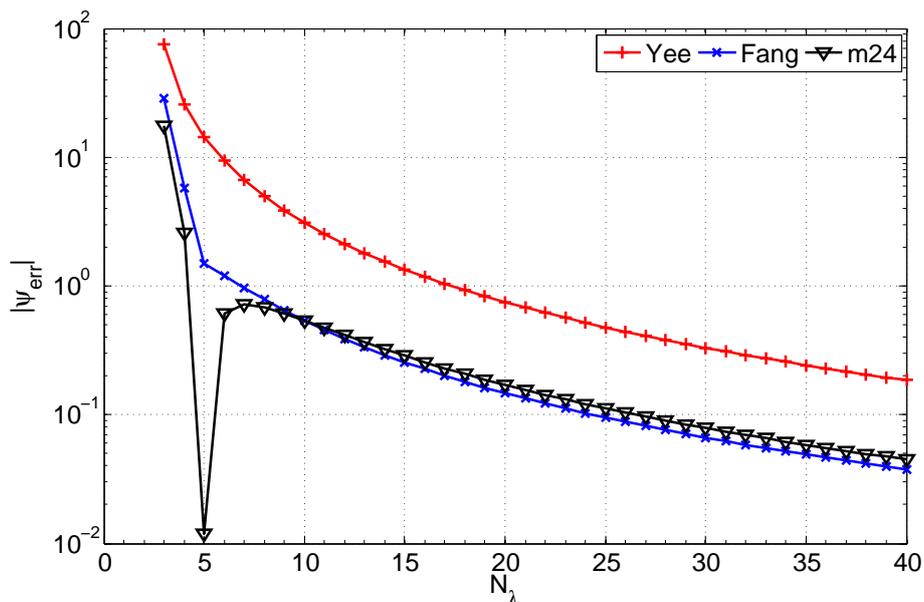


Figure 2.22 – Dispersion numérique en fonction de la résolution du maillage : schémas optimisés à 5CPW.

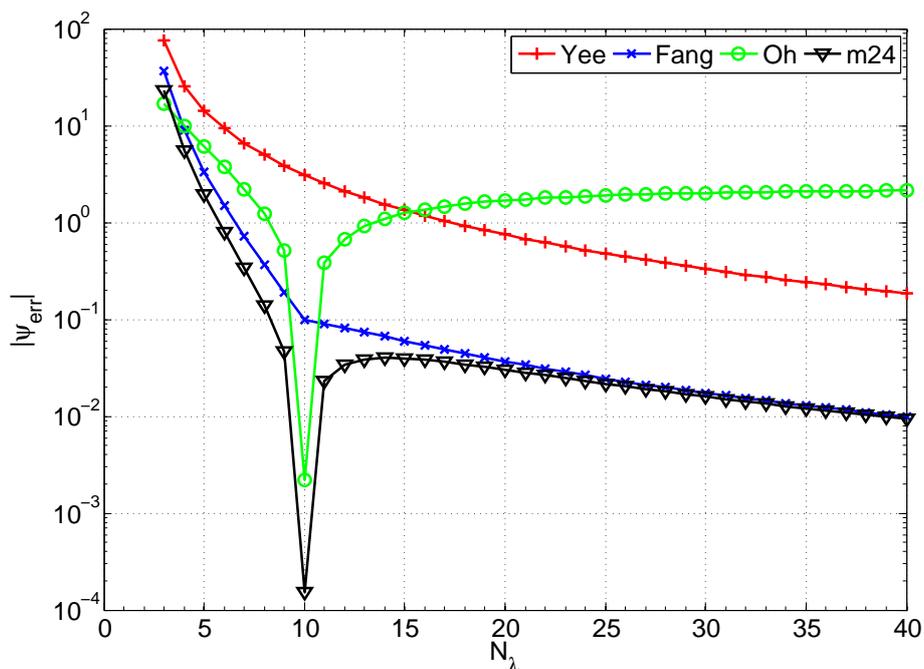


Figure 2.23 – Dispersion numérique en fonction de la résolution du maillage : schémas optimisés à 10CPW et schéma de Oh isotrope avec correction.

même technique est réutilisée aux interfaces avec les diélectriques. En 2D, l'hybridation est suffisamment stable pour les longues simulations. Les auteurs en concluent que leur schéma M24 est fort compatible avec le schéma de Yee sans perte significative de précision. Bien que les résultats ne soient pas significativement dégradés, ils ne sont pas pour autant plus précis. Un modèle d'ordre 4 pour le traitement des conditions limites pourrait mieux assurer une précision de même ordre que le schéma FDTD(2,4). Si ce n'est le premier obstacle, proposer

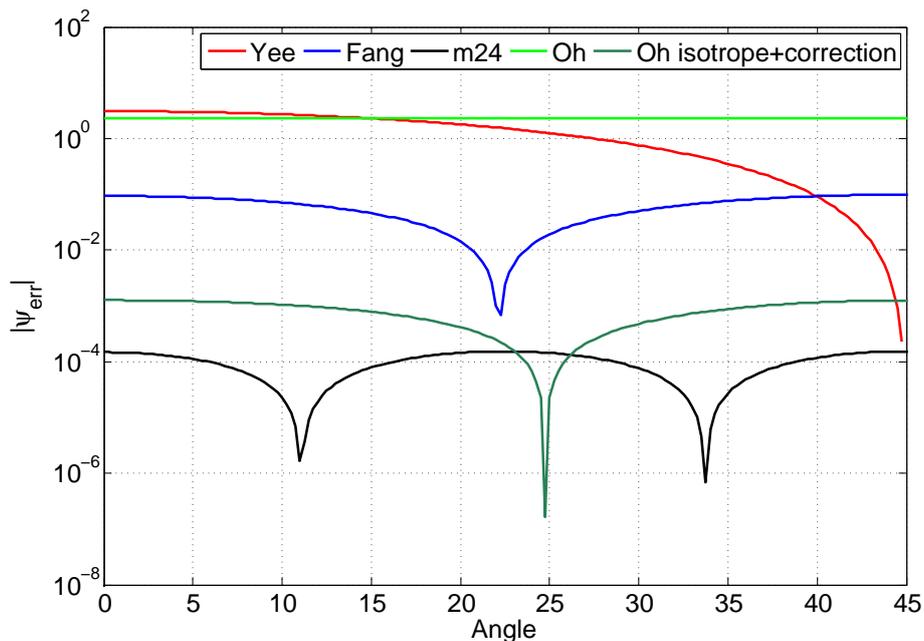


Figure 2.24 – Anisotropie de la dispersion numérique : schémas optimisés à 10CPW (coupe à cette fréquence) et schéma de Oh isotrope avec ou sans correction.

une solution pour ces problèmes est l'une des priorités des schémas d'ordre supérieur.

### 2.5.3 Non-Standard Finite Difference (NSFD)

Après quelques travaux et essais, les premiers principes de la NSFD ont été posés par Mickens [20, 21]. Les concepts mathématiques associés ont été donnés dans [22] puis des applications (advection-réaction, réaction-diffusion) et autres travaux mathématiques (Total Variation Diminishing) sont réalisés dans [23, 24, 25, 26]. Les prémisses de la NSFD proviennent de l'intérêt de la création de schémas numériques possédant une ou des propriétés particulières notamment vérifiées par certaines classes de fonctions (on pense aux ondes planes par exemple) solutions de l'EDP, comme celui du système de Maxwell. La résolution numérique de certains problèmes associés à des EDPs par une approche habituelle via les formules de Taylor, aboutit à des schémas FDTD classiques. Néanmoins, ces schémas ne sont pas nécessairement les plus efficaces vis à vis de l'erreur commise sur la dispersion numérique. Les premiers schémas NSFD ont été développés empiriquement et Mickens pose certaines règles [20] pour qualifier un schéma de schéma NSFD. Reprises dans [22], ce dernier propose une définition de schéma NSFD, que nous rappelons ici (Def. 5 [22]) :

**Definition 2.5.1** La méthode est appelée une méthode de différences finies non-standard, si une de ces conditions est vérifiée :

- Dans le premier ordre de la dérivée discrète  $D_{hyk}$ , le dénominateur traditionnel  $h$  est remplacé par une fonction strictement positive  $\phi(h)$  tel que

$$\phi(h) = h + O(h^2), h \rightarrow 0. \quad (2.115)$$

- Les termes non-linéaires dans  $f(\mathbf{y})$  sont approximés de manière non locale, i.e., en fonction de plusieurs points du maillage.

En particulier, si  $\phi$  est tel que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \phi(h) = 0, \quad (2.116)$$

$$\phi'(0) = 1, \quad (2.117)$$

alors  $\phi$  vérifie la première condition de la définition. Cette définition est donnée dans le cadre de l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante :

$$\begin{cases} Dy = \partial_t y = f(\mathbf{y}), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (2.118)$$

où l'on suppose les hypothèses vérifiées afin que le problème associé à l'EDO soit bien posé. La discrétisation de l'EDO résulte en un schéma de la forme :

$$D_h y_k = F_h(f; y_k), \quad (2.119)$$

où l'indice  $h$  indique la discrétisation de l'opérateur associé et l'indice  $k$  est associé à la discrétisation de l'intervalle temporel. C'est bien le choix d'un  $\phi$  judicieux lequel permettra au schéma NSFD de posséder des propriétés intéressantes, comme par exemple, la longueur d'onde numérique égale à celle physique à une certaine fréquence donnée. La question d'une construction systématique ou rigoureuse de tels schémas est étudiée par les auteurs de [23, 26], dans le cadre de certaines classes d'EDP. L'élaboration d'un schéma NSFD requiert le choix de  $D_h$  et la détermination de  $\phi$  via l'imposition de propriétés sur le schéma en question. Généralement,  $D_h$  est une combinaison linéaire d'opérateurs différentiels discrets habituels, par exemple, les différences finies centrées.

Dans le domaine de l'électromagnétisme, on peut noter les travaux de Cole [8, 27, 28, 29] et d'Ohtani et al.[16, 30, 31]. Cole a écrit un schéma NSFD basé sur un stencil élargi pour le choix de  $D_h$ . Par exemple, pour l'équation des ondes, il choisit une combinaison linéaire des deux opérateurs discrets du Laplacien [27] :

$$D = \gamma D_1 + (1 - \gamma) D_2. \quad (2.120)$$

En 2D, avec une onde plane, il trouve que :

$$D_1(k, \theta) = \cos(k_x) + \cos(k_y) - 2, \quad (2.121)$$

$$D_2(k, \theta) = \cos(k_x) \cos(k_y) - 1, \quad (2.122)$$

avec  $k_x = k \cos \theta$  et  $k_y = k \sin \theta$ . Il remarque que  $D_1(k, 0) = D_2(k, 0) = \cos k - 1$ . Ainsi, il

choisit  $\gamma$  tel que  $D = \cos k - 1$ , soit :

$$\gamma(k, \theta) = \frac{D_2(k, \theta) - (\cos k - 1)}{D_2(k, \theta) - D_1(k, \theta)}. \quad (2.123)$$

Avec un choix de  $\theta = 0.18203\pi$ , il observe que l'anisotropie de  $D$  est symétrique par rapport à 0. En observant aussi la faible dépendance de  $\gamma$  par rapport à  $\theta$ , il pose que  $\gamma$  est seulement une fonction de  $k$ . Ainsi, il pose  $\gamma(k, \theta) = \gamma(k, 0.18203\pi)$ . Dans [8], afin d'écrire le schéma avec l'opérateur  $D$  précédent, sous la forme d'un schéma sur  $E$  et  $H$ , il décompose  $D$  tel que :

$$s_k(h)^2 D^2 = d_x^{(1)} d_x^{(0)} + d_y^{(1)} d_y^{(0)} \quad (2.124)$$

où :

$$d_u^{(1)} = d_u^{yee} \quad (2.125)$$

$$d_u^{(0)} = \alpha d_u^{(1)} + (1 - \alpha) d_u^{(2)} \quad (2.126)$$

Pour avoir l'égalité (2.124), on doit avoir :

$$-4\alpha = -2(\gamma + 1), \quad (2.127)$$

soit :

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 + \gamma). \quad (2.128)$$

Finalement, le schéma s'écrit, par exemple, en 2D sur maillage uniforme  $\Delta$ , pour  $H_x$  en  $TM_z$  [12] :

$$H_x^{n+1/2} = H_x^{n-1/2} - \frac{\Delta t s_\omega(\Delta t)}{\mu s_k(\Delta)} \left[ \alpha (E_{z_{j+1}} - E_z) + (1 - \alpha) (E_{z_{i+1,j+1}} + E_{z_{i-1,j+1}} - E_{z_{i+1}} - E_{z_{i-1,j}}) \right], \quad (2.129)$$

où  $s_u(b) = \frac{2}{u} \sin(\frac{ub}{2})$ . Similairement, Ohtani et al., utilisent un stencil élargi décrite par l'équation (2.129). Cependant, on peut conserver l'opérateur discret usuel comme dans [32].

Pour  $D_h$ , la détermination de la combinaison linéaire réside dans la minimisation de l'erreur de la dispersion numérique ou de l'anisotropie. Généralement, les poids (coefficients de la combinaison linéaire) sont dépendants de la fréquence ou de l'angle associé à la position spatiale. En conséquence, les schémas obtenus sont optimisés sur une bande de fréquence étroite. Dans [31], un schéma NSFD sur une bande de fréquence large est donné mais utilise un stencil plus large que celui du schéma FDTD(2,4) standard.

A titre d'exemple, on donne  $\phi(h)$  ou  $s(h)$  pour reprendre les notations dans [8, 32]. Avec le choix des différences centrées pour l'opérateur différentiel 1D, on a :

$$\partial_x y = D_h y_i = \frac{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}}{\phi(h)}. \quad (2.130)$$

On impose que le schéma est exact pour les fonctions de la forme  $y(x) = e^{-ikx}$ , représentant

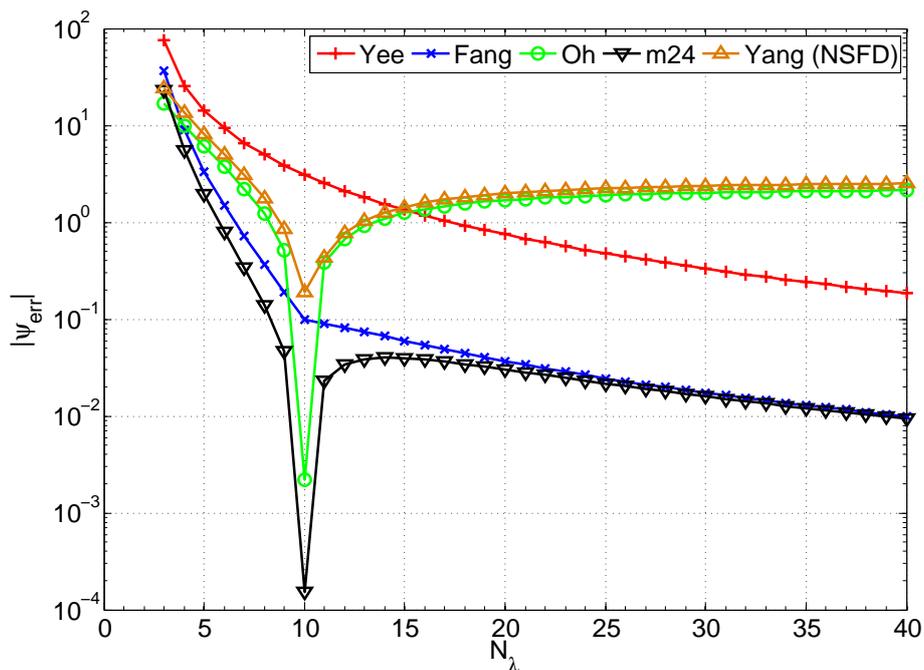


Figure 2.25 – Dispersion numérique en fonction de la résolution de maillage : schémas optimisés à 10CPW. Schéma de Oh isotrope avec correction et schéma de Yang (NSFD)[32].

les ondes planes monochromatiques, soit :

$$D_h e^{-ikx} = \frac{e^{-ik(j+\frac{h}{2})} - e^{-ik(j-\frac{h}{2})}}{\phi(h)}, \quad (2.131)$$

$$= -\frac{2}{\phi(h)} j \sin\left(\frac{kh}{2}\right) \frac{k}{k} e^{-ikj}, \quad (2.132)$$

$$= \frac{2}{k\phi(h)} \sin\left(\frac{kh}{2}\right) \partial_x e^{-ikx}. \quad (2.133)$$

D'où :

$$\phi(k, h) = \frac{2}{k} \sin\left(\frac{kh}{2}\right) = s(k, h). \quad (2.134)$$

Dans ce cas, pour une fréquence donnée, le schéma NSFD ci-dessus est, par construction, exact pour l'onde plane  $y(x) = e^{-ikx}$  associée. De même, l'utilisation d'une classe de fonction arbitraire est également faite afin de déterminer le ou les coefficients de la combinaison linéaire dans l'opérateur  $D_h$  des articles cités auparavant. Comme il est expliqué dans [16], ces derniers coefficients permettent d'obtenir un schéma beaucoup plus isotrope et la fonction  $\phi$  ou  $s$  correspond à une correction de la vitesse de phase numérique.

En reprenant le calcul ci-dessus avec l'opérateur spatial et temporel du schéma de Fang(2,4), les calculs donnent :

$$s_k(h) = \frac{2}{k} \left[ \frac{9}{8} \sin\left(\frac{k\Delta x}{2}\right) - \frac{1}{24} \sin\left(\frac{3k\Delta x}{2}\right) \right]. \quad (2.135)$$

Ainsi, l'équation de la dispersion numérique associé à ce schéma NSFD est :

$$\left( \frac{\omega_0}{2c \sin\left(\frac{\omega_0 \Delta t}{2}\right)} \right)^2 \sin^2\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right) = \sum_{u=x,y,z} \left[ \frac{1}{s_{k_0}(\Delta u)} \left( \frac{9}{8} \sin\left(\frac{k_u \Delta u}{2}\right) - \frac{1}{24} \sin\left(\frac{3k_u \Delta u}{2}\right) \right) \right]^2. \quad (2.136)$$

où l'optimisation est portée par le choix de  $\omega_0$  et  $k_0$ . La condition CFL est alors :

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_0} \sin^{-1} \left( \frac{6 \omega_0}{7 \cdot 2c} \frac{\sqrt{\sum_u s_{k_0}^2(\Delta u)}}{\sqrt{3}} \right) \quad (2.137)$$

La courbe de dispersion numérique d'un exemple d'optimisation à 10CPW pour un schéma NSFD de Yang est représentée sur la figure 2.25. L'erreur de dispersion numérique se rapproche du schéma de Oh et similairement ne converge pas vers 0 quand le pas spatial tend vers 0.

## 2.6 Conclusion sur l'état de l'art

Nous avons vu que le schéma standard de Fang (S24) n'est pas le plus avantageux pour minimiser la dispersion numérique tout en conservant un temps de calcul raisonnable. Bien que le temps de calcul puisse être diminué en utilisant un maillage grossier, nous recherchons à avoir un schéma performant en temps de calcul et en dispersion numérique. De même, la complexité ou la simplicité des approches définit notre choix du schéma à développer ou à utiliser.

Un des points communs des méthodologies pour obtenir un schéma FDTD(2,4) est l'optimisation de coefficients ajoutés dans les équations de mise à jour des composantes de champ. La taille du stencil et l'approche utilisée pour optimiser les coefficients depuis l'équation de dispersion numérique influe significativement sur cette erreur de dispersion numérique.

L'approche DRP montre une méthodologie basée généralement sur le choix d'un stencil et dont l'on dérive l'équation de la dispersion numérique après avoir choisi les propriétés de dispersion à optimiser selon des règles que l'on se donne. Le développement de Taylor est souvent utilisé par exemple pour dériver ces propriétés sous forme d'équations. Cette approche nous permet de voir les possibilités de contrôler la dispersion numérique, ses limitations, et de choisir le schéma qui nous convient le mieux dans l'objectif d'évaluation de la SER.

L'approche intégrale est sans aucun doute l'une des approches à retenir. Sa formulation en contour peut rendre le schéma plus "habilité" à la technique conforme. La méthode est relativement simple et les performances des schémas comme le M24 sont très significatives. De plus, certains schémas s'expriment sous une "forme différentielle" bien que l'approche soit intégrale.

L'approche NSFD est intéressante mais reste tout de même fort complexe. Bien que la

méthode permette d'écrire des schémas simples et relativement efficaces sur une bande de fréquence étroite, des schémas, comme ceux cités dans cette section, sont plus performants mais nécessitent un stencil relativement large ou 3D. Le potentiel de ces schémas réside dans cet esprit d'établir un schéma "sur-mesure" conservant les propriétés importantes de certaines solutions exactes au problème étudié.

Finalement, le problème de la dispersion numérique peut-être abordé sous un angle différent ou complémentaire de l'ordre de l'opérateur différentiel. Certes, des approximations d'ordre plus élevé sont utilisées mais également des degrés de liberté peuvent être ajoutés afin d'optimiser cette erreur de dispersion numérique. Le contrôle de son comportement dépend de nos choix lors de la construction du schéma et est souvent lié aux applications. Ainsi, les qualités de schémas sont variées comme l'isotropie ou une erreur de dispersion numérique faible dans des directions spécifiques, sur une bande de fréquence. Un dernier point crucial est la complexité du schéma auquel on aboutit et qui peut vite devenir un inconvénient. Une synthèse de certains schémas est proposée dans le tableau 2.1.

Schéma		Avantages	Inconvénients
Standard	Fang	performance large bande	CFL optimal petit ; quelque peu anisotrope
Intégrale	Chun	performance excellente large bande ; convergence d'ordre 4 ; CFL large	Deux équations intermédiaires supplémentaires à résoudre à chaque itération ; Double le stockage mémoire (D et B) ; Stencil en 3D
	M24	performance large bande ; performance excellente en bande étroite	stencil large ; CFL légèrement diminué Dissipatif en 3D
	Kitsunezaki	performance large bande	CFL diminué à 2/3 ; une inversion de matrice creuse
DRP	Oh	isotrope sur bande étroite ; ou bien performance large bande optimisé à CFL donné	CFL diminué ; détérioration en BF (en bande étroite), voire inférieure à Yee
	Zyg. & Tsi.	performance large bande possible	-
	Sun	performance large bande possible ; isotrope	détérioration en BF (en bande étroite)
NSFD	Yang	-	détérioration en BF (en bande étroite), voire inférieure à Yee ; Mise en œuvre plus complexe

Tableau 2.1 – Synthèse de quelques schémas

## 2.7 Conservative Modified FDTD(2,4) : CM24

Parmi les schémas précédents, nous avons retenu l'approche intégrale et la faible dispersion numérique du schéma M24. Cependant les qualités du schéma M24 ne peuvent être reproduites en 3D en laissant le schéma tel quel. Une telle approche aboutirait à un schéma non conservatif puisque le nombre d'onde sera imaginaire. Dans l'idée de reproduire ses qualités en 3D, nous allons apporter des modifications au schéma.

De plus, nous avons montré beaucoup d'intérêt à obtenir un schéma ayant les caractéristiques suivantes :

- le stencil 2D,
- un pas de temps très peu voire non pénalisé,
- une formulation intégrale du schéma pour utiliser les techniques conformes.

Les modifications doivent, au mieux, aboutir à un tel schéma.

Nous pourrions modifier le schéma M24 en ajoutant des termes supplémentaires comme dans [37] ou [47]. Dans [47], deux contours supplémentaires sont ajoutés dans la direction normale au stencil M24 aboutissant à un stencil 3D. Dans [37], une approche de type volume finis montre que leur schéma FV24 conserve bien les performances de leur schéma 2D M24. Cependant, le stencil est devenu 3D et est assez large.

Dans notre nouveau schéma, nous optons pour l'ajout des composantes non utilisées du stencil M24 du schéma original. Les huit composantes ajoutées se retrouvent sur un nouveau contour permettant ainsi de conserver la formulation intégrale. Le stencil d'un tel schéma est alors celui représenté par la figure 2.26.

Ce schéma doit être construit afin d'être non dissipatif. Ceci impliquera très probablement des conditions sur les coefficients du schéma. Ce schéma a été nommé Conservative Modified FDTD(2,4), soit CM24.

### 2.7.1 Formulation intégrale et différences finies

Le schéma CM24 peut s'écrire sous la forme, par exemple pour la composante de champ  $H_z$  :

$$-\partial_t \mu H_z = \frac{K'_3}{\Delta x \Delta y} \int_{C_y} E + \frac{K'_1}{9 \Delta x \Delta y} \int_{C_f} E + \frac{K'_2}{9 \Delta x \Delta y} \int_{C_{ext}} E + \frac{K'_4}{5 \Delta x \Delta y} \int_{C_{int}} E, \quad (2.138)$$

où les coefficients  $K'_i$  sont à déterminer. Comme pour le schéma M24, nous aurons la condition de consistance :

$$\sum_{i=1}^4 K'_i = 1. \quad (2.139)$$

Nous introduisons la notation suivante : Pour  $(u, v, w) \in \{(x, y, z), (y, z, x), (z, x, y)\}$ , par rapport au champ  $H_w(u + \Delta u/2, v + \Delta v/2, w)$ , on a :

$$E_{u, u_{offset}}^{v_{offset}} = E_u \left( u + \frac{\Delta u}{2} + u_{offset} \Delta u, v + \frac{(1 + v_{offset}) \Delta v}{2}, w \right), \quad (2.140)$$

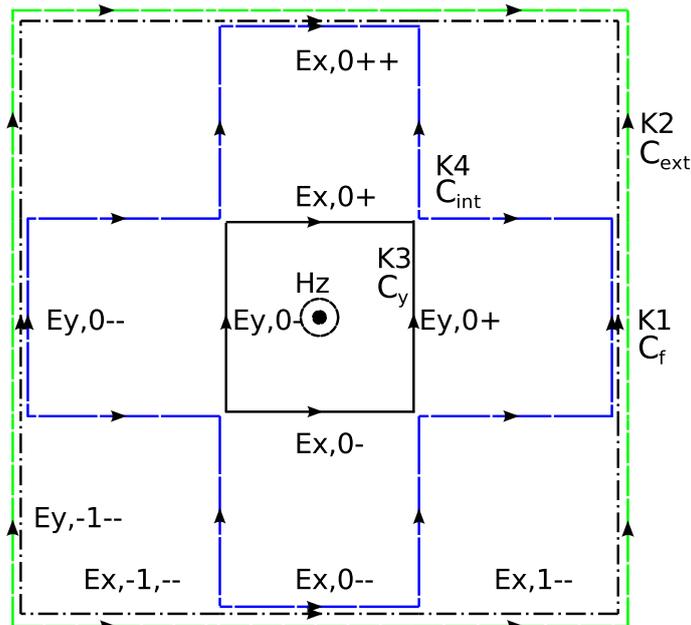


Figure 2.26 – Stencil du schéma CM24.

$$E_{v,v_{\text{offset}}}^{u_{\text{offset}}} = E_v \left( u + \frac{(1 + u_{\text{offset}})\Delta u}{2}, v + \frac{\Delta v}{2} + v_{\text{offset}}\Delta v, w \right). \quad (2.141)$$

Dans la notation, les exposants + et ++ (– et -- respectivement) désignent des valeurs (offsets) impairs seulement, par exemple 1 et 3 (–1 et –3 respectivement). Des exemples sont notés sur le stencil représenté par la figure 2.26.

L'intégrale  $C_{int}$  contient les composantes de champ du contour de Fang  $C_f$  et celles non utilisées du schéma CM24  $C_{ext}$ . Comme pour le schéma M24, notons que les deux contours  $C_f$  et  $C_{ext}$  parcourent le même chemin mais n'utilisent pas la même approximation. En effet, on a :

$$-\int_{C_f} E = 3\Delta x [E_{x,0}^{++} - E_{x,0}^{--}] + 3\Delta y [-E_{y,0}^{++} + E_{y,0}^{--}], \quad (2.142)$$

tandis que :

$$-\int_{C_{ext}} E = \frac{3\Delta x}{2} [E_{x,1}^{++} - E_{x,1}^{--} + E_{x,-1}^{++} - E_{x,-1}^{--}] + \frac{3\Delta y}{2} [-E_{y,1}^{++} + E_{y,1}^{--} - E_{y,-1}^{++} + E_{y,-1}^{--}]. \quad (2.143)$$

En développant (2.138) dans le cas de cellules uniformes, une formulation de type

différences finies du schéma CM24 peut être écrite :

$$\partial_t \mu H_z = K_3 \left( \frac{E_{x,0}^+ - E_{x,0}^-}{\Delta y} - \frac{E_{y,0}^+ - E_{y,0}^-}{\Delta x} \right) + K_1 \left( \frac{E_{x,0}^{++} - E_{x,0}^{--}}{\Delta y} - \frac{E_{y,0}^{++} - E_{y,0}^{--}}{\Delta x} \right) + K_4 \left( \frac{E_{x,1}^+ - E_{x,1}^- + E_{x,-1}^+ - E_{x,-1}^-}{\Delta y} - \frac{E_{y,1}^+ - E_{y,1}^- + E_{y,-1}^+ - E_{y,-1}^-}{\Delta x} \right) + K_2 \left( \frac{E_{x,1}^{++} - E_{x,1}^{--} + E_{x,-1}^{++} - E_{x,-1}^{--}}{\Delta y} - \frac{E_{y,1}^{++} - E_{y,1}^{--} + E_{y,-1}^{++} - E_{y,-1}^{--}}{\Delta x} \right). \quad (2.144)$$

Les coefficients de chaque formulation  $K'_i$  et  $K_i$  sont liés par les relations suivantes :

$$K'_1 = 3K_1 - 3K_4, \quad K'_2 = 6K_2, \quad K'_4 = 5K_4, \quad K'_3 = K_3 \quad (2.145)$$

On retrouve facilement les coefficients  $K_i$  avec les formules ci-dessus. Par exemple, devant le champ  $E_{x,0}^{++}$ , on a la contribution du contour intérieur et celui de Fang (S24), soit :

$$K'_1 \frac{3\Delta x}{9\Delta x \Delta y} E_{x,0}^{++} + K'_4 \frac{\Delta x}{5\Delta x \Delta y} E_{x,0}^{++} = (K_1 - K_4) \frac{1}{\Delta y} E_{x,0}^{++} + K_4 \frac{1}{\Delta y} E_{x,0}^{++}, \quad (2.146)$$

$$= K_1 \frac{E_{x,0}^{++}}{\Delta y}.$$

La formulation différences finies du schéma CM24 peut s'écrire de la manière suivante afin de faire apparaître les distances originales des opérateurs spatiaux :

$$\partial_t \mu H_z = \kappa_3 \left( \frac{E_{x,0}^+ - E_{x,0}^-}{\Delta y} - \frac{E_{y,0}^+ - E_{y,0}^-}{\Delta x} \right) + \kappa_1 \left( \frac{E_{x,0}^{++} - E_{x,0}^{--}}{3\Delta y} - \frac{E_{y,0}^{++} - E_{y,0}^{--}}{3\Delta x} \right) + \kappa_4 \left( \frac{E_{x,1}^+ - E_{x,1}^- + E_{x,-1}^+ - E_{x,-1}^-}{\Delta y} - \frac{E_{y,1}^+ - E_{y,1}^- + E_{y,-1}^+ - E_{y,-1}^-}{\Delta x} \right) + \kappa_2 \left( \frac{\frac{1}{2} (E_{x,1}^{++} - E_{x,1}^{--} + E_{x,-1}^{++} - E_{x,-1}^{--})}{3\Delta y} - \frac{\frac{1}{2} (E_{y,1}^{++} - E_{y,1}^{--} + E_{y,-1}^{++} - E_{y,-1}^{--})}{3\Delta x} \right). \quad (2.147)$$

Sans perte de généralité, nous conservons la première forme 2.144 car elle simplifie l'écriture des équations.

Le membre de droite de (2.144) ne dépend pas de la direction  $z$ . Par conséquent, le schéma CM24 reste sur un stencil 2D. D'autre part, on retrouve le schéma de Fang (S24) en utilisant les coefficients  $K_2 = K_4 = 0, K_3 = 9/8$  et  $K_1 = -1/24$ .

La formulation différences finies est plus pratique pour l'implémentation car ses coefficients  $K_i$  sont distribués sans recouvrement avec les champs du stencil. De plus, l'algorithme implémenté est basé sur une telle formulation. La formulation intégrale aura son intérêt lorsqu'on abordera les problèmes aux interfaces, notamment avec la technique conforme.

Il est possible d'écrire la formulation intégrale avec un seul contour extérieur. C'est un cas particulier du schéma CM24, ou bien une version simple de celui-ci. Dans ce cas, il est nécessaire d'avoir :

$$K_1 = K_2 + K_4. \quad (2.148)$$

On aura alors la formulation intégrale suivante :

$$-\partial_t \mu H_z = \frac{K_3}{\Delta x \Delta y} \int_{C_y} E + \frac{K'_2}{9\Delta x \Delta y} \int_{C_{EXT}} E + \frac{K'_4}{5\Delta x \Delta y} \int_{C_{int}} E, \quad (2.149)$$

où les coefficients sont :

$$K'_2 = 9K_2, \quad K'_4 = 5K_4, \quad (2.150)$$

et le contour  $C_{EXT}$  est tel que :

$$\begin{aligned} \int_{C_{EXT}} E = & \Delta x [E_{x,0}^{++} - E_{x,0}^{--}] + \Delta y [-E_{y,0}^{++} + E_{y,0}^{--}] \\ & + \Delta x [E_{x,1}^{++} - E_{x,1}^{--} + E_{x,-1}^{++} - E_{x,-1}^{--}] \\ & + \Delta y [-E_{y,1}^{++} + E_{y,1}^{--} - E_{y,-1}^{++} + E_{y,-1}^{--}]. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Nous verrons que ce schéma sera moins performant en terme de dispersion numérique comme il a été noté pour le schéma M24 [9].

### 2.7.2 Analyse de la Dispersion numérique du schéma CM24

L'analyse de la dispersion numérique nous permet de vérifier si le schéma est non dissipatif. Reprenons le même développement de la première section sur la dispersion numérique, pour obtenir :

$$\begin{pmatrix} a & -G(z, y) & G(y, z) \\ G(z, x) & a & -G(x, z) \\ -G(y, x) & G(x, y) & a \end{pmatrix} V^n = 0, \quad (2.152)$$

où la partie temporelle n'a pas changée :

$$a = \frac{i}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right), \quad (2.153)$$

et la partie spatiale comprenant les quatre coefficients :

$$G(u, v) = \frac{1}{\Delta u} \left[ (K_3 + 2K_4 \cos(k_v \Delta v)) \sin\left(\frac{k_u \Delta u}{2}\right) + (K_1 + 2K_2 \cos(k_v \Delta v)) \sin\left(\frac{3k_u \Delta u}{2}\right) \right]. \quad (2.154)$$

Une notation simplifiée sera utilisée :

$$G(u, v) = \frac{1}{\Delta u} [(K_3 + 2K_4 C_v) S_{u1} + (K_1 + 2K_2 C_v) S_{u3}]. \quad (2.155)$$

Donc, avec :

$$\boxed{C_v = \cos(k_v \Delta v), \quad S_{u1} = \sin\left(\frac{k_u \Delta u}{2}\right), \quad S_{u3} = \sin\left(\frac{3k_u \Delta u}{2}\right).} \quad (2.156)$$

Le déterminant de la matrice doit être nul, soit :

$$a^3 + a \left[ \sum_{(u,v,w)} G(u,v)G(u,w) \right] + G(z,x)G(x,y)G(y,z) - G(y,x)G(z,y)G(x,z) = 0, \quad (2.157)$$

ou encore, avec les permutations régulières du triplet de direction  $(u, v, w)$  :

$$a^3 + a \left[ \sum_{(u,v,w)} G(u,v)G(u,w) \right] + \prod_{(u,v)} G(u,v) - \prod_{(u,w)} G(u,w) = 0. \quad (2.158)$$

Le nombre d'onde ne sera pas complexe si les coefficients  $K_i$  vérifient :

$$\prod_{(u,v)} G(u,v) - \prod_{(u,w)} G(u,w) = 0. \quad (2.159)$$

Remarquons que si  $G(u, v) = g(u)f(v)$  alors la condition ci-dessus sera vérifiée.

Une manière de séparer les variables est de séparer les fonctions trigonométriques sinus et cosinus dans l'équation de la dispersion numérique. Une condition similaire a été utilisée, comme dans [47], laquelle est :

$$\boxed{\frac{K_2}{K_1} = \frac{K_4}{K_3} = \alpha.} \quad (2.160)$$

Pour obtenir :

$$\boxed{G(u, v) = \frac{1}{\Delta u} (1 + 2\alpha C_v)(K_3 S_{u1} + K_1 S_{u3}).} \quad (2.161)$$

Dans le cas de [47], la dispersion numérique du schéma s'écrit en substituant  $G(u, v)$  par  $G(u, w)$ .

L'équation de la dispersion numérique d'un tel schéma s'écrit alors :

$$a^3 + a \left[ \sum_{(u,v,w)} G(u,v)G(u,w) \right] = 0, \quad (2.162)$$

soit :

$$\boxed{\frac{1}{c^2 \Delta t^2} \sin\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)^2 = \sum_{(u,v,w)} \frac{1}{\Delta u^2} [K_3 S_{u1} + K_1 S_{u3}]^2 [1 + 2\alpha C_v] [1 + 2\alpha C_w].} \quad (2.163)$$

Il nous reste à déterminer les coefficients optimaux  $K_i$  minimisant la dispersion numérique. Ici, nous choisissons de minimiser la dispersion numérique quand la résolution du maillage est grossière, comme pour le schéma M24.

Tout d'abord, en développant à l'ordre 1 les sinus et cosinus dans l'équation de la

dispersion numérique, la contrainte suivante est obtenue :

$$(K_3 + 3K_1)^2(1 + 2\alpha)^2 = 1. \quad (2.164)$$

La condition ci-dessus est vérifiée si :

$$\boxed{(K_3 + 3K_1)(1 + 2\alpha) = 1.} \quad (2.165)$$

En utilisant les relations (2.145), l'équation (2.165) est égale à (2.139). Ceci signifie que la consistance de la pondération est liée à la consistance du schéma. En d'autres termes, si la condition est vérifiée, alors le schéma est consistant et l'ordre 2 du schéma est au moins assuré. Si cette contrainte est négligée, on observe que la dispersion numérique n'est pas d'ordre 2 lorsque le pas spatial tend vers 0. C'est, par exemple, ce que l'on observait pour le schéma de Oh.

Cette contrainte sera notre deuxième contrainte sur le schéma. La première étant celle permettant de rendre le schéma conservatif. En utilisant (2.160), et isolant  $K_3$  dans (2.165), on optimise les deux dernières inconnues  $K_1$  et  $\alpha$  afin de minimiser l'erreur de dispersion numérique (2.25) suivant tous les angles de propagation à une fréquence donnée. On rappelle cette erreur ici :

$$\boxed{\Phi_{k_i} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left( \frac{k_i - \tilde{k}_i(\phi, \theta)}{k_i} \right)^2 \sin \theta d\phi d\theta.} \quad (2.166)$$

Pour ce processus d'optimisation, on utilise la routine *DMNFB* de la bibliothèque *PORT* [43] pouvant traiter des fonctions coûts non-linéaires. En effet, le calcul de l'erreur ci-dessus nécessite le calcul du nombre d'onde numérique  $\tilde{k}$  du schéma CM24. Le nombre d'onde numérique  $\tilde{k}$  est déduit de l'équation de dispersion numérique (2.163) avec une méthode itérative de type Newton pour chaque angle de propagation. L'algorithme boucle pour trouver  $K_1, \alpha$  et par conséquent  $K_3$  optimal pour le schéma CM24. De simples contraintes interviennent dans l'optimisation comme  $K_1 < 0, K_3 > 0, \alpha > 0$ . Pour le choix du pas de temps  $\Delta t$  que l'on fixe pour l'optimisation, la CFL maximale du schéma est utilisée.

La contrainte CFL peut être calculée avec :

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sup_k \sqrt{\sum_{(u,v,w)} G(u,v)G(u,w)}}. \quad (2.167)$$

Une formule analytique a été validée après avoir été vérifiée numériquement avec le calcul de l'inégalité précédente pour des cellules uniformes :

$$\boxed{\Delta t \leq \frac{\Delta t_{yee}}{(K_3 - K_1)(1 - 2\alpha)}.} \quad (2.168)$$

où  $\Delta t_{yee}$  est le pas de temps usuel du schéma de Yee (S22). Le pas de temps du schéma CM24 est légèrement supérieur à 1 pour plusieurs résolutions de maillage  $R = \lambda_{min}/\Delta$  à cellules uniformes.  $\lambda_{min}$  désigne la longueur d'onde minimale d'une onde dans la simulation.

Le tableau 2.2 donne les coefficients du schéma CM24 pour certaines résolutions de maillage mais aussi le nombre CFL associé. Entre  $R = 5$  et  $R = 30$ , les coefficients ne varient pas significativement. Néanmoins, il est nécessaire d'utiliser une précision de l'ordre de 9 chiffres significatifs comme dans le schéma M24 pour garantir l'erreur de dispersion numérique théorique du schéma optimisé. C'est pourquoi on utilise la double-précision dans nos futurs calculs. Pour la suite de l'étude, on se place sur des maillages à cellules uniformes de pas spatiaux égaux à  $\Delta$ .

$R$	$K_3$	$K_1$	$\alpha$	CFL
5	1.01894399428983	-8.839492874446850E-002	3.731718026815735E-002	1.03075607342850
10	1.01917962322351	-7.969804023015593E-002	3.220841052244418E-002	1.02209553575490
15	1.01920747543600	-7.817379615333665E-002	3.133061122864549E-002	1.02064999559446
20	1.01921623989716	-7.764643576425516E-002	3.102807439800206E-002	1.02015457755374
25	1.01922013144624	-7.740340721389906E-002	3.088885250741669E-002	1.01992707864288
30	1.01922221152484	-7.727165368293572E-002	3.081342310104391E-002	1.01980393688560

Tableau 2.2 – Coefficients optimaux pour le schéma CM24 pour des maillages à cellules uniformes et la CFL associée

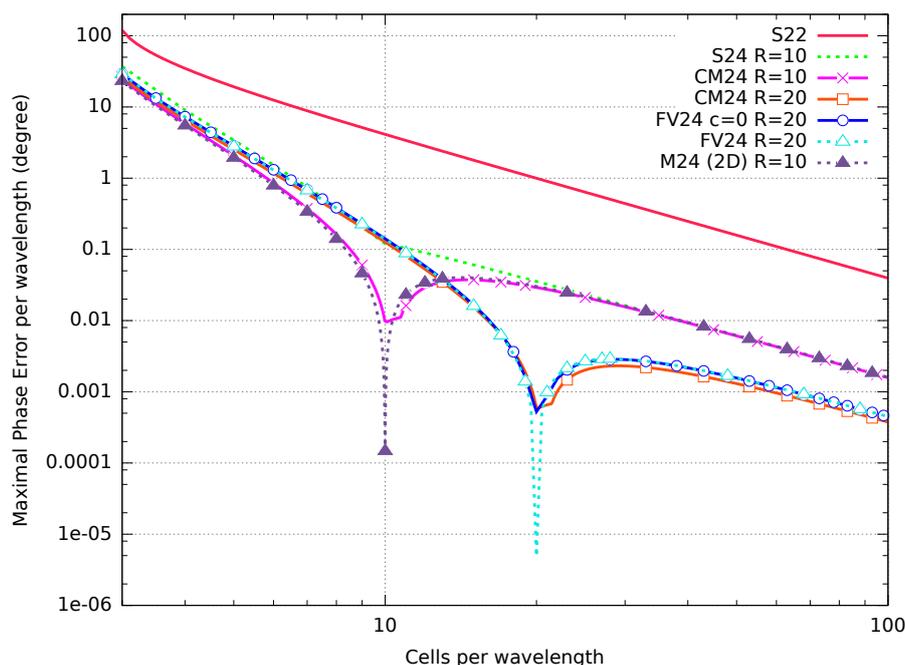


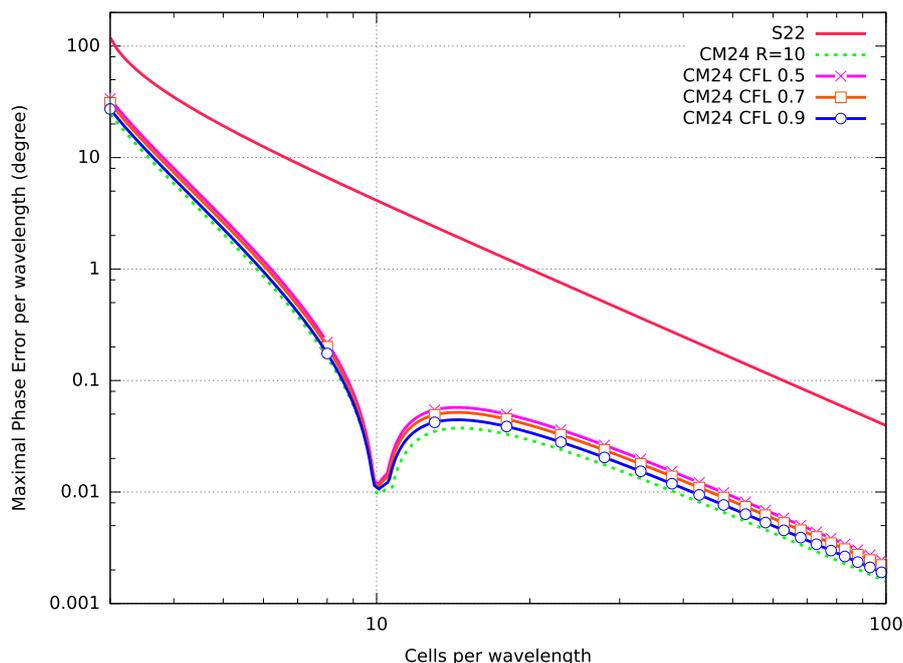
Figure 2.27 – Erreur de phase maximale de certains schémas FDTD avec une optimisation à la résolution de maillage  $R$ . Le nombre CFL est maximal pour tous les schémas sauf le schéma S24 ( $\approx 0.275$ ). Le schéma M24 présente une erreur sur un maillage 2D.

Sur la figure 2.27, les erreurs de phase théorique de plusieurs schémas FDTD sont tracées. La résolution  $R$  choisie pour l'optimisation des schémas, si nécessaire, est égale à 10 ou 20. Les résultats du schéma FV24 sont obtenus avec les coefficients de [37], lesquels sont seulement donnés pour une optimisation à  $R = 20$ . Le schéma FV24 utilisé ici est celui efficace (FV24<sub>c=0</sub> [37]) dans le sens où il permet d'avoir un bon compromis entre les coûts en calcul et l'erreur

de phase.

A la fréquence d'optimisation, les schémas FDTD(2,4) ont une erreur très faible, notamment pour le schéma FV24. Ce dernier a une dispersion numérique comparable au schéma 2D M24. Le schéma CM24 ne conserve pas une telle diminution, comme le schéma M24, de l'erreur de phase à la fréquence d'optimisation. Cependant, elle y présente un minimum local plus intéressant que le schéma de Fang (S24). Il semble clair que le schéma sera optimisé à la fréquence d'intérêt de la simulation afin de profiter pleinement de ce minimum local.

Plusieurs essais ont montré que le choix d'un autre pas temporel que celui du pas d'optimisation change clairement la courbe d'erreur de phase maximale. Ce comportement a été noté pour le schéma S24, où l'erreur optimale à une résolution est obtenue avec un pas temporel judicieux [12, 37]. C'est par exemple le cas pour l'optimisation à  $R = 10$  pour la courbe de ce schéma sur la figure 2.27. Le pas de temps utilisé est d'environ 0.275. C'est pourquoi le schéma CM24 optimisé donne des coefficients  $K_i$  optimaux mais aussi un pas de temps optimal associé. Le tableau 2.2 donne par exemple le pas de temps optimal mais aussi maximal. Pour une raison similaire de précision, le nombre CFL doit avoir au minimum 9 chiffres significatifs.



**Figure 2.28 – Erreur de phase maximale de différents schémas CM24 avec une optimisation à  $R = 10$ . Chaque schéma CM24 sont obtenus avec une CFL fixe différente lors de l'optimisation. Dès lors, les coefficients  $K_i$  d'un schéma CM24 diffèrent des autres schémas.**

D'autre part, si un nombre CFL non maximal est utilisé pendant l'optimisation alors ceci aboutit à des schémas CM24 optimisés pour ce nombre CFL particulier. Sur la figure 2.28 est représenté l'erreur de phase maximale de schémas CM24 optimisés avec un nombre CFL différent pour chaque schéma. La légère augmentation de cette erreur sur toute la bande de fréquence est négligeable. Ceci permet d'obtenir des schémas CM24 optimisés à

un nombre CFL arbitraire si la simulation le nécessite, sans pour autant altérer l'erreur de phase maximale.

Les performances du schéma CM24 et FV24<sub>c=0</sub> sont comparables. Cependant, le schéma FV24 est basé sur un stencil 3D tandis que le schéma CM24 reste sur un stencil 2D. Cette attention particulière portée sur la taille du stencil permettra au schéma d'avoir moins de complication lors de sa modification pour établir des modèles comme par exemple, les conditions aux frontières absorbantes.

Le nombre CFL du schéma CM24 est supérieur à celui du schéma FV24. A  $R = 20$ , le nombre CFL du schéma FV24<sub>c=0</sub> est 0.89. Ce n'est pas pour autant que le schéma CM24 est beaucoup plus efficace. Il faut prendre en compte aussi le nombre d'opérations effectuées pour mettre à jour une composante de champ électromagnétique. Bien qu'ils utilisent le même nombre de composantes de champ (24), le nombre d'opérations est plus avantageux pour le schéma FV24<sub>c=0</sub> (32 contre 30). En divisant ce nombre d'opérations par le nombre CFL correspondant, et le normalisant par rapport au S22, on remarque que le schéma CM24 est légèrement plus rapide que le schéma FV24<sub>c=0</sub>. En effet, ce nombre est de 5.228 pour le schéma FV24<sub>c=0</sub> contre 5.430 pour le schéma CM24.

Pour conclure, le schéma CM24 possède des performances comparables au schéma FV24<sub>c=0</sub> en terme de précision ou coût de calcul. Le schéma CM24 offre une alternative intéressante, notamment par son stencil 2D, pour établir des modèles aux interfaces.

Cette section se termine avec un paragraphe sur la possibilité d'écrire le schéma CM24 en formulation intégrale avec des contours "propres". Rappelons que le schéma CM24 aurait pu s'écrire sous la forme :

$$-\partial_t \mu H_z = \frac{K_3}{\Delta^2} \int_{C_y} E + \frac{K'_2}{9\Delta^2} \int_{C_{EXT}} E + \frac{K'_4}{5\Delta^2} \int_{C_{int}} E \quad (2.169)$$

Comme il a été écrit, ceci impose la contrainte :  $K_1 = K_2 + K_4$ . Sous cette contrainte, il faut d'abord vérifier, ou bien trouver la contrainte supplémentaire sur les coefficients telle que le nombre d'onde ne soit pas complexe, i.e. :

$$G(z, x)G(x, y)G(y, z) - G(y, x)G(z, y)G(x, z) = 0. \quad (2.170)$$

En utilisant un logiciel de calcul formel, nous remarquons que la contrainte  $K_1 = K_2 + K_4$  donne un ensemble de coefficients qui est solution de l'équation ci-dessus. Les schémas issus de cette deuxième piste n'améliorent pas significativement la dispersion numérique, même à une fréquence optimale.

L'intérêt d'une telle approche est importante car elle permettrait d'avoir des performances similaire à un schéma FDTD(2,4) en utilisant seulement des combinaisons de forces électromotrices calculées à partir du schéma de Yee. L'implémentation aurait été largement plus simple puisque cette méthode serait ad-hoc et l'étude de conditions limites sur les interfaces de matériaux serait donc *a priori* simplifiés. L'extension FDTD conforme serait aussi simplifiée.

## 2.8 Source de courant

L'insertion d'une source de courant dans la méthode FDTD se fait via le terme  $J$  dans les équations de Maxwell. Ce terme intervient dans l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\partial_t E = \nabla \times H - J. \quad (2.171)$$

La source de courant donnée par  $I$  est liée à la densité de courant  $J$  par la relation :

$$I = J \cdot dS. \quad (2.172)$$

Par exemple, si la source de courant est orientée suivant l'axe  $z$ , alors :

$$J = I \Delta x \Delta y \quad (2.173)$$

Une source est dite transparente (*soft source*) si l'implémentation se fait comme ci-dessus. Dans le cas contraire, on parle de *hard source* si l'implémentation est :

$$\partial_t E = -J. \quad (2.174)$$

Pour les schémas FDTD(2,4), l'implémentation d'une source transparente est identique à celle du schéma de Yee. Cependant, si une telle approche est utilisée pour une source non-transparente, alors une amplitude augmentée pourra être observée. Un simple cas 1D d'une Gaussienne d'amplitude 1 suffit pour le constater comme sur la figure 2.29.

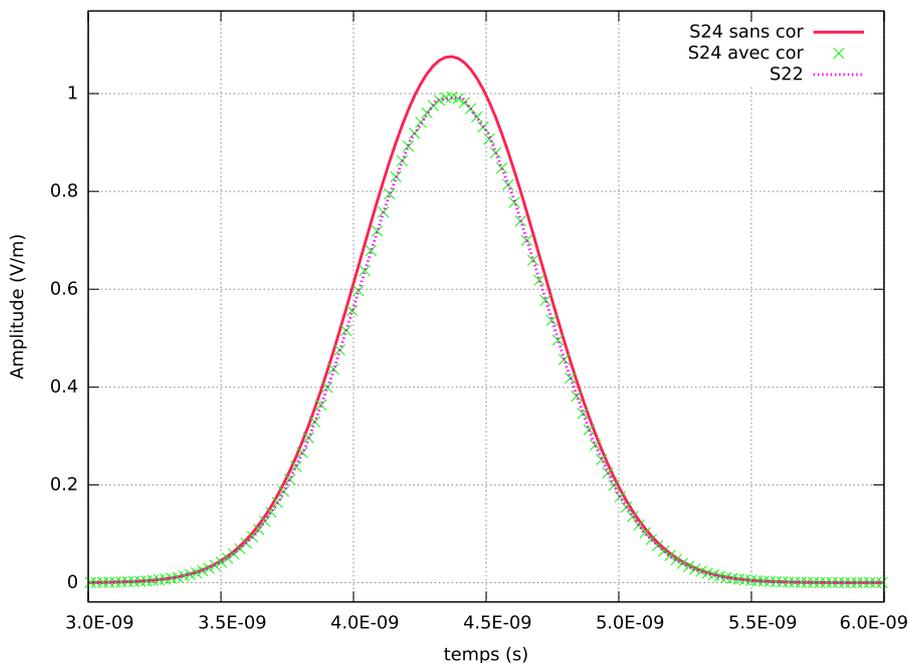


Figure 2.29 – Source Gaussienne non-transparente d'amplitude 1 pour le schéma de Yee et de Fang (avec ou sans correction).

Une correction peut-être apportée sur la source non-transparente avec :

$$J_{cor} = \frac{J}{\sum_i K_i} \quad (2.175)$$

où  $K_i$  sont les coefficients du schéma. Par exemple, pour le schéma de Fang, ceci donne  $K_3 + K_1 = 9/8 - 1/24 = 13/12$ . L'effet des stencils élargis sur les termes sources a été étudié dans [49] et une estimation sur l'erreur est fournie aussi. En général, les sources de courant transparentes sont utilisées.

## 2.9 Mise en évidence de la dispersion numérique

Dans cette section, on présente deux exemples de propagation en espace libre afin de mettre en évidence les erreurs de dispersion numérique : les résonances d'une cavité métallique rectangulaire et le champ lointain rayonné par un et quatre dipôles. Nous noterons aussi les temps de calcul afin de comparer avec les schémas de Yee et de Fang. Le schéma CM24 et les deux exemples suivants ont fait l'objet d'un papier de conférence [46] et d'un article [52].

### 2.9.1 Résonances de cavité métallique

La cavité rectangulaire est de dimension 90x60x75 centimètres. L'espace libre est maillé uniformément avec des cellules cubiques de taille 3 centimètres. Le maillage a environ ainsi une résolution de  $R = \lambda_{min} / \Delta = 10$  à 1 GHz. Le temps simulé est de 10 $\mu$ s.

Pour les conditions aux frontières, le stencil élargi introduit des points de champ électromagnétique en dehors du maillage de Yee (S22) initial. L'annulation des points de champ à l'extérieur de la cavité métallique ne modélise pas assez précisément les conditions sur les parois métalliques. Dans notre cas, la théorie des images est utilisée. Les valeurs (numériques) situées hors de la cavité sont alors connues à partir des valeurs situées à l'intérieur.

Une source transparente de type Gaussienne est utilisée afin de générer les résonances de la cavité. Cette source est située dans la cellule (9, 9, 3) et orientée suivant la direction  $y$ .

Trois schémas sont comparés : le schéma de Yee (S22), le schéma de Fang (S24) et le schéma CM24. Les schémas utilisent le même maillage mais pas le même pas de temps puisque les nombres CFL sont différents. Le schéma S24 utilise une CFL de 0.275 pour une dispersion optimale à  $R = 10$ . Tandis que le schéma CM24 utilise une CFL de 1.02209553575490 et 0.98 pour le S22. Les calculs sont réalisés en double précision pour tous les schémas. Remarquons que ceci aura pour effet d'augmenter le temps de calcul du schéma S22, puisque ses calculs sont habituellement réalisés en simple précision.

Deux paramètres sont comparés dans le tableau 2.3. D'une part, le nombre d'opérations effectuées dans la mise à jour d'une composante de champ (membre de droite de (2.144) avec l'addition venant du schéma saute-mouton) divisés par le nombre CFL. D'autre part, le temps de calcul CPU de la simulation en calcul parallèle avec quatre cœurs du processeur.

La méthode Différences Finies en Domaine Temporel (FDTD) d'ordre (2,4) pour l'électromagnétisme

Schéma	$R=\lambda/\Delta$	FpCFL(/S22)	Temps CPU (s)	Temps CPU (/S22)
S22	10	1	10	1
S24	10	7.273	104	10.4
CM24	10	5.218	51	5.1
S22	20	1	137	13.7
FV24 <sub>c=0</sub>	20	5.430	—	—

Tableau 2.3 – Flops/CFL (FpCFL) pour une mise à jour d'une composante de champ et le temps CPU associé pour quatre cœurs.

Schéma/# Cœurs	1	2	3	4	5	6
S22	1	1.82	2.58	3.1	3.44	3.87
S24	1	1.56	1.88	2.10	2.19	2.28
CM24	1	1.78	2.31	2.76	3.20	3.35

Tableau 2.4 – Gain sur le temps de calcul en calcul parallèle et normalisé, jusqu'à six cœurs avec Intel(R) Xeon(R) CPU E5-1650 (3.20GHz)

Des directives OPEN-MP sont utilisées pour le calcul parallèle. Le processeur est un Intel(R) Xeon(R) CPU E5-1650 (3.20 GHz). Le premier paramètre indique le nombre d'opérations effectuées durant un pas de temps S22 à CFL maximal. Ceci donne une idée du temps CPU requis pour le calcul d'autres schémas comparé au S22 à CFL maximal. Ces paramètres sont aussi normalisés par rapport au S22. L'implémentation combine les coefficients  $K_i$  et  $\Delta$  afin d'économiser des opérations. Remarquons sur le tableau 2.3 que le schéma CM24 est deux fois plus rapide que le S24 (à  $R = 10$ ). Malgré un nombre d'opérations supérieur, le pas de temps plus grand pour le CM24 explique cette observation. Notons que cette rapidité est plus optimiste que la comparaison directe entre les Flops/CFL de ces deux schémas (colonne 1 du tableau 2.3), laquelle est d'environ 30%. Ceci est expliqué par un meilleur profil (Tab. 2.4) du schéma CM24.

Le tableau 2.4 décrit le profil des trois schémas pour le calcul parallèle, jusqu'à 6 cœurs avec le même processeur. L'implémentation du schéma CM24 est similaire au schéma de Yee, en FORTRAN, avec une optimisation -O3 de la compilation et la vectorisation intel AVX. Ce tableau montre que le schéma S22 a un profil correct jusqu'à 6 cœurs. D'une part, le profil S24 est le moins performant des trois et l'optimal se trouve à 4 cœurs. D'autre part, le profil CM24 est performant jusqu'à 5 cœurs, au-delà duquel le gain devient moins significatif. Avec un seul cœur et à résolution de maillage identique, le schéma de Yee est le plus rapide des trois comme le montre le tableau 2.5.

Puisque la résolution du maillage est semblable pour tous les schémas, les résultats des schémas FDTD(2,4) devraient être plus précis. Afin de comparer avec des résultats du schéma de Yee à une plus haute précision, la simulation a été réalisée avec un maillage deux fois plus fin. Pour un tel maillage, le tableau 2.5 et la figure 2.27 montre que le schéma CM24 est plus performant en termes de temps de calcul et de précision lorsque le même nombre de cœurs

est utilisé.

Schéma	$R=\lambda/\Delta$	FpCFL(/S22)	Temps CPU (s)	Temps CPU (/S22)
S22	10	1	31	1
S24	10	7.273	219	7.06
CM24	10	5.218	141	4.54
S22	20	1	482	15.54

Tableau 2.5 – Flops/CFL (FpCFL) pour une mise à jour d'une composante de champ et le temps CPU associé pour un cœur.

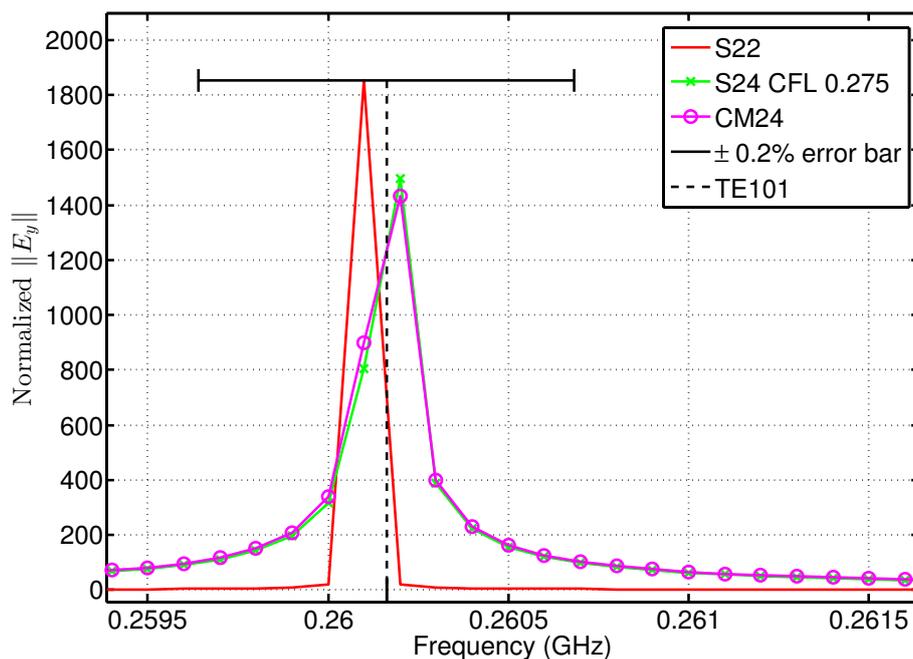


Figure 2.30 – Mode TE<sub>101</sub> avec une barre d'erreur de 0.2% et les fréquences de résonances numériques correspondantes.

Le seuil que nous nous donnons pour estimer une qualité correcte des résultats est de  $\pm 0.2\%$  de la valeur théorique. Une telle précision peut-être requise dans des applications comme la SER. Sur la figure 2.30, l'amplitude normalisée du champ  $E_y$  est donnée pour la résonance TE<sub>101</sub>. Dans la région basse fréquence ( $\frac{\lambda}{\Delta} \approx 40$ ), les schémas FDTD(2,4) et le schéma S22 ont des performances équivalentes comme le montre cette résonance TE<sub>101</sub>.

La zone la plus intéressante se situe dans la région haute fréquence qui correspond à une faible résolution spatiale. Puisque de nombreuses résonances sont simulées, en particulier en hautes fréquences, on se focalise sur les erreurs relatives des trois schémas. La figure 2.31 donne ces erreurs relatives en pourcentage sur une large bande de fréquences. La qualité supérieure des résultats des schémas CM24 est clairement visible avec une séparation nette des erreurs relatives. Sur la figure 2.27, les schémas CM24 et S24 ont théoriquement et quasiment la même erreur de phase maximale. Néanmoins, le schéma CM24 est plus performant car son erreur de phase moyenne suivant les angles de propagation est plus faible.

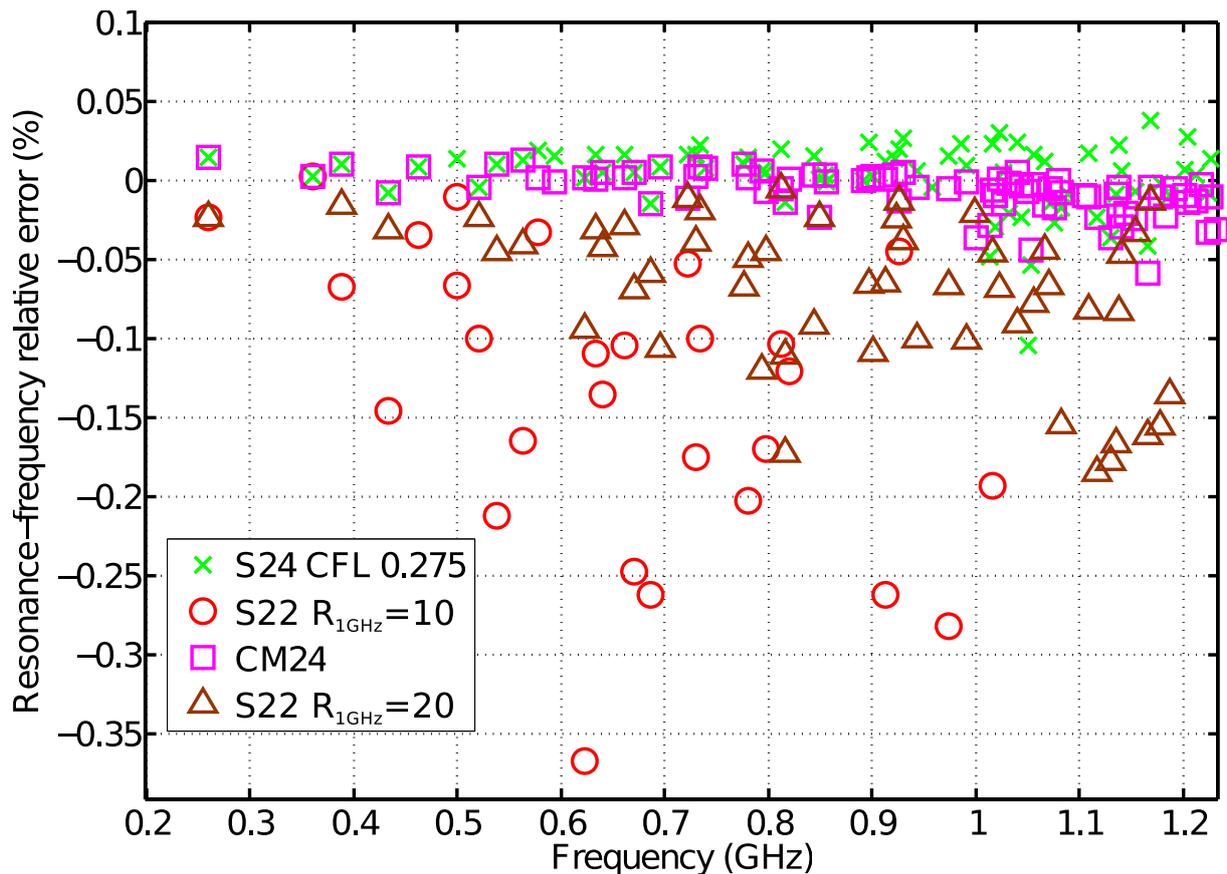


Figure 2.31 – Erreur relative (%) sur les fréquences de résonance des trois schémas. Seuls les fréquences de résonance lesquelles ont pu avoir une correspondance visuelle avec celles théoriques sont affichées. D'où la différence de nombre de points entre chaque groupe de données.  $R = \lambda_{min} / \Delta$  à 1 GHz si non spécifié.

La différence des nombres de points entre chaque schéma provient du fait de la difficulté à faire correspondre les fréquences de résonances numériques et théoriques. En effet, ces résonances sont déterminées seulement avec leur fréquence de résonance. Par exemple, cette difficulté apparaît lorsque certains modes ont la même fréquence de résonance ou des fréquences de résonance très proches. Une projection du signal sur les cartographies des modes de la cavité permettrait de tous les discerner.

Le schéma CM24 offre une plus large bande de fréquence, au moins deux fois plus large, dans laquelle les résultats sont qualité correcte par rapport au critère fixé. Cependant, c'est au prix de temps de calcul et dans notre cas, 5 fois plus lent (tableau 2.3) lorsque les maillages sont identiques.

Nous comparons alors les résultats du schéma S22 avec un maillage doublement raffiné où  $R = 20$  à 1 GHz. Les résultats sont 4 fois plus précis, mais restent moins bon que les schémas FDTD(2,4). Ceci est cohérent avec le fait qu'à  $R = 20$ , l'erreur de phase maximale est plus faible qu'à  $R = 10$  mais reste supérieure à celui du CM24 à  $R = 10$ .

## 2.9.2 Champ lointain rayonné par un ou plusieurs dipôles

Dans ce second exemple, deux cas de calcul de champ lointain rayonné par un ou quatre sources dipolaires sont simulés. Ces sources dipolaires élémentaires sont des sources de courant calculées à partir de la densité de courant  $J$  avec  $I.dl = J.dS$ . Le champ lointain est calculé avec la transformation champ proche-champ lointain [45] sur la surface d'une boîte de Huygens entourant ces sources et les résultats sont comparés avec la référence analytique. Les ondes électromagnétiques se propageant à travers de nombreuses cellules sont assujetties à des erreurs de dispersion numérique importantes. Ainsi, les résultats de champ lointain mettent en évidence l'apport des schémas FDTD(2,4).

La transformation champ proche-champ lointain de la méthode FDTD(2,2) ne nécessite aucune modification pour l'utiliser avec les schémas FDTD(2,4). Cependant une adaptation des conditions aux frontières absorbantes a été nécessaire. Les CPMLs [44] ont été adaptées pour l'ordre supérieur dans notre cas. L'adaptation est très directe en profitant de la formulation différences finis du schéma S24 ou CM24. Pour le schéma S22, deux résultats sont obtenus : avec ou sans correction de la dispersion numérique sur la transformée champ proche-champ lointain [45]. Cette correction peut-être nécessaire pour des maillages à faible résolution ou des boîtes de Huygens relativement larges.

La source de type dérivée Gaussienne est utilisée identiquement avec une fréquence maximale de 1 GHz suivant l'axe  $z$ . Le maillage est uniforme avec des cellules cubiques  $\Delta = 0.03$  mètres soit une résolution de  $R = 10$ .

Le premier cas est le calcul du champ lointain transverse d'une source dipolaire suivant l'axe  $z$ . La boîte de Huygens est de taille  $10\lambda \times 10\lambda \times \lambda$ , centrée sur le dipôle.

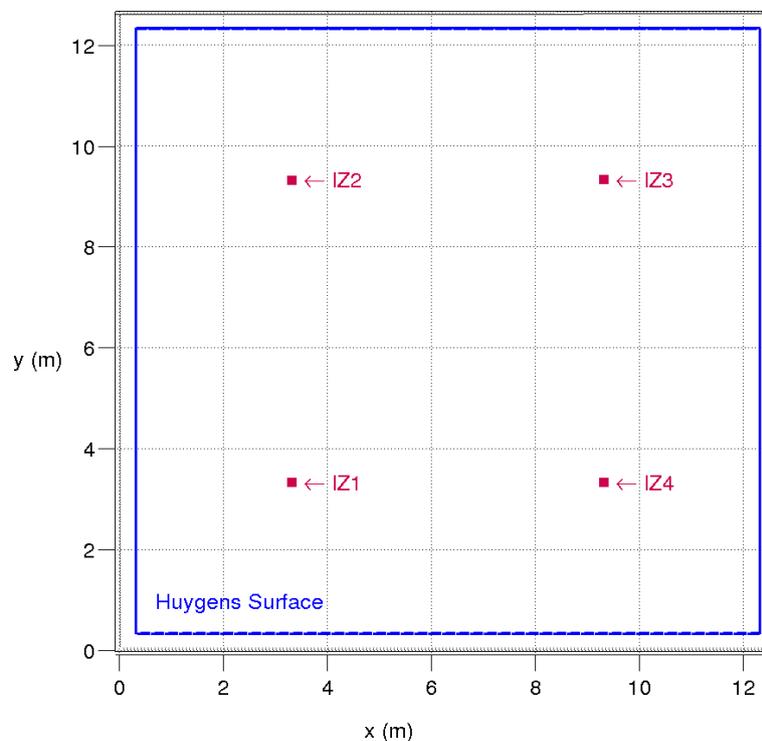


Figure 2.32 – Configuration spatiale en "carré" des quatre sources dipolaires.

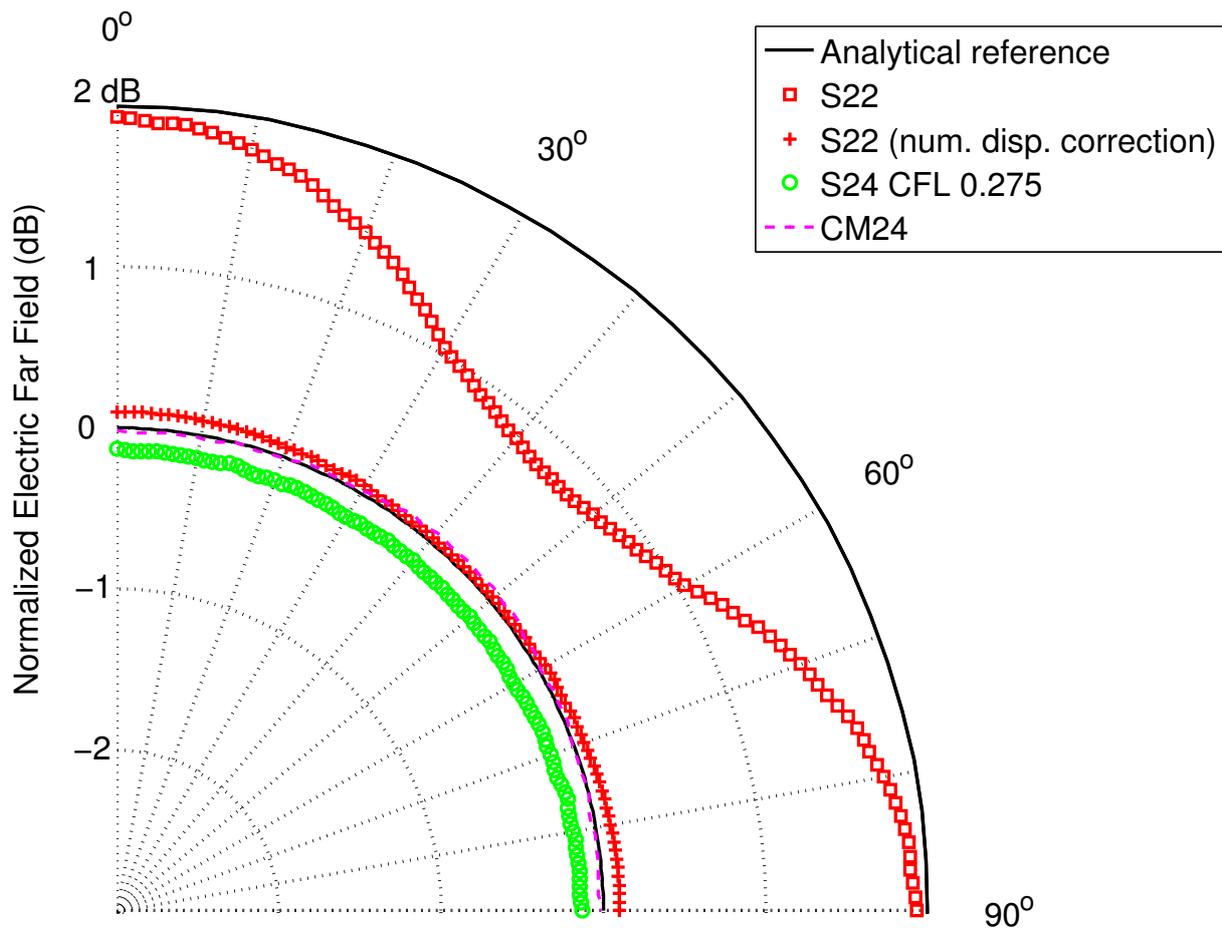


Figure 2.33 – Champ lointain d'une source dipolaire à 1 GHz.

Le second cas est le calcul du champ lointain transverse de quatre sources dipolaires suivant l'axe z formant un carré de taille  $20\lambda \times 20\lambda$ , comme vu sur la figure 2.32. Similairement, la boîte de Huygens est de taille  $40\lambda \times 40\lambda \times \lambda$ , centrée sur le centre du carré formé par les dipôles.

La figure 2.33 montre le champ lointain dans le premier quart de plan transverse au dipôle. Nous observons bien un cas de dispersion numérique non isotrope qui est d'autant plus apparent lorsqu'il n'y a pas de correction de dispersion numérique pour le schéma S22. Les deux schémas FDTD(2,4) donnent des résultats comparables avec la référence analytique mais le schéma CM24 est plus performant. Ces résultats nous confortent bien dans l'idée que les schémas d'ordre supérieur peuvent apporter beaucoup à la qualité des résultats. De plus, aucune correction sur la dispersion numérique n'est nécessaire pour le champ lointain calculé par des schémas d'ordre supérieur dans notre cas.

Le second cas est une comparaison du champ lointain rayonnés par 4 dipôles en phase, avec deux symétries orthogonales. Sur la figure 2.34, les deux résultats du schéma S22 sont de mauvaises qualités comparés à la référence analytique. Curieusement, la correction de la dispersion numérique n'apporte peu dans ce cas particulier. Toutefois, une différence allant jusqu'à 10 dB est observée pour ces deux résultats.

Quant aux résultats des schémas S24 et CM24, ils se confondent parfaitement avec la

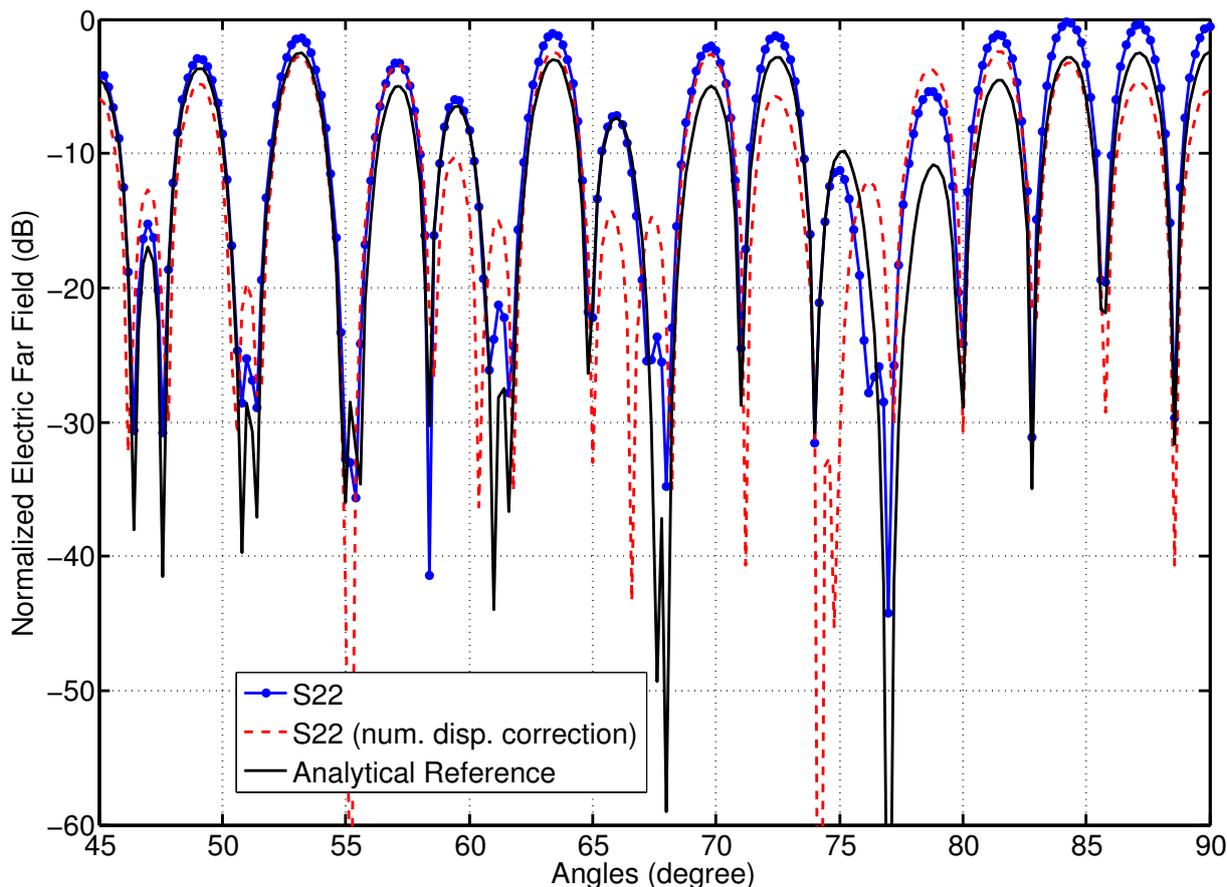


Figure 2.34 – Champ lointain obtenu avec le schéma S22 avec ou sans correction de la dispersion numérique, avec un maillage  $R = 10$ , de source dipolaire à 1 GHz.

référence 2.35. La très bonne correspondance avec la référence analytique est tout aussi remarquable aussi bien au niveau des lobes que des creux du rayonnement. Ce second exemple montre encore la faible dispersion numérique des schémas FDTD(2,4). Cette caractéristique est loin d'être négligeable, surtout pour la simulation de structures de grande dimension.

## 2.10 Conclusion

Après un rappel de la méthode des différences finies dans le domaine temporel pour les équations de Maxwell et en particulier le schéma de Yee, schéma historique d'ordre 2, nous avons présenté un état de l'art de schémas FDTD(2,4). Plusieurs schémas ont été présentés permettant de saisir la notion de dispersion numérique et l'importance de son optimisation via diverses approches. La caractéristique principale commune aux approches est l'optimisation de coefficients introduites dans les schémas. Les approches DRP et NSFD sont intéressantes mais la complexité ou les performances sont moins pertinentes qu'une approche par formulation intégrale. Nous avons retenu l'approche par formulation intégrale de part ses performances, sa relative simplicité et elle semble être la plus adaptée aux techniques conformes. Parmi les schémas s'inscrivant dans cette approche, le schéma M24 a montré

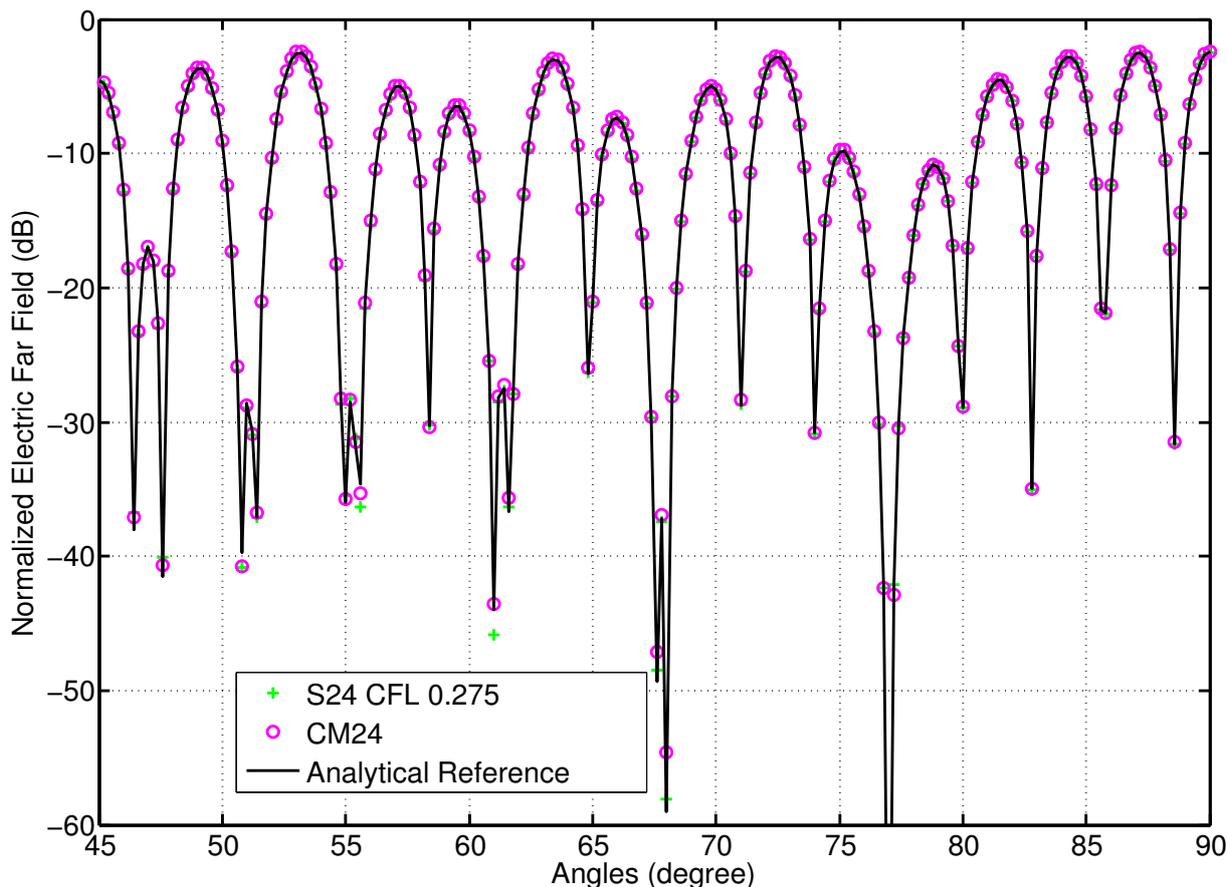


Figure 2.35 – Champ lointain obtenu avec le schéma S24 (CFL=0.275) et CM24 avec un maillage  $R = 10$  du cas à quatre dipôles à 1 GHz.

des qualités et performances intéressantes mais ne pouvait être appliqué en 3D. Ainsi, en s'inspirant du schéma M24 2D, nous avons construit le schéma original CM24 et reproduit ses performances en 3D. Deux exemples avec le schéma CM24 ont révélé une erreur faible de dispersion numérique sur les résultats et mettent en évidence l'apport des schémas d'ordre supérieur. De plus, ce schéma conserve un stencil 2D, sa construction et son implémentation sont relativement aisées grâce à sa formulation aux différences finies. Le schéma CM24 fait donc partie des schémas FDTD(2,4) à formulation intégrale très performants, offrant, avec une approche relativement simple, un excellent compromis entre la précision et le temps de calcul. La validation a été réalisée avec succès sur des cas simples.

# Bibliographie

- [1] K. S. Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 14, pp. 302–307, 1966.
- [2] T. Deveze, *Contribution à l'analyse, par Différences Finies, des équations de Maxwell dans le domaine temps*, Thèse, 22 Mai 1992.
- [3] G. Sun, C.W. Trueman, "Optimized Finite-Difference Time-Domain Methods Based on the (2,4) Stencil," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 53, No. 3, Mars 2005.
- [4] J. Fang, *Time domain finite difference computation for Maxwell's equations*, Thèse, Univ. Californie, Berkeley, CA, 1989.
- [5] Z. Xie, C-H Chan, B. Zhang, "An explicit fourth-order staggered finite-difference time-domain method for Maxwell's equations," *JCAM*, 2002.
- [6] S. Wang, F. L. Teixeira, "Dispersion-Relation-Preserving FDTD Algorithms for Large-Scale Three-Dimensional Problems," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2003.
- [7] T. T. Zygiridis, T. D. Tsiboukis, "Low-Dispersion Algorithms Based on the Higher Order (2,4) FDTD Method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2004.
- [8] J. B. Cole, "A High-Accuracy Realization of the Yee Algorithm Using Non-Standard Finite Differences," *IEEE TMTT*, 1997.
- [9] M. F. Hadi, M. Piket-May, "A Modified FDTD(2,4) Scheme for Modeling Electrically Large Structures with High-Phase Accuracy," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1997.
- [10] S-T Chun, J. Y. Choe, "A Higher Order FDTD Method in Integral Formulation," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2005.
- [11] I-Y Oh, Y. Hong, J-G Yook, "Optimization Method of Higher Order (2,4) FDTD Method for Low Dispersion Error," 7th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP), 2013.
- [12] K. L. Shlager, J.B. Schneider, "Comparison of the Dispersion Properties of Several Low-Dispersion Finite-Difference Time-Domain Algorithms," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2003.
- [13] B. Finkelstein, R. Kastner, "Finite difference time domain dispersion reduction schemes," *JCP*, 2006.
- [14] B. Finkelstein, R. Kastner, "The spectral order of accuracy : A new unified tool in the design methodology of excitation-adaptive wave equation FDTD schemes ," *Journal of Computational Physics*, 2009
- [15] S. Wang, Z. Shao, G. Wen, "A Modified High Order FDTD Method Based on Wave Equation," *IEEE MWCL*, 2007.
- [16] T. Ohtani, Y. Kanai, "Coefficients of Finite Difference Operator for Rectangular Cell NS-FDTD Method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2011.

- [17] W. S. Smith, A. Razmadze, X-M Shao, J. L. Drewniak, "A Hierarchy of Explicit Low-Dispersion FDTD Methods for Electrically Large Problems," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2012.
- [18] W. L. Miranker, "Difference Schemes with Best Possible Truncation Error," *Numer. Math.*, 1971.
- [19] C.K.W. Tam, J.C. Webb, *Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics*, Journal of Computational Physics, 1993
- [20] R. E. Mickens, *Nonstandard finite difference models of differential equations*, World Scientific, Singapore, 1994.
- [21] R. E. Mickens, *Applications of nonstandard finite difference schemes*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [22] R. Anguelov, J. M.-S. Lubuma, "Contributions to the mathematics of the nonstandard finite difference method and applications," *Numerical Methods for Partial Differential Equations* 17 (2001), 518–543.
- [23] R. Anguelov, J. M.-S. Lubuma, S. K. Mahadu, "Qualitatively stable finite difference schemes for advection–reaction equations," *JCAM*, 2003.
- [24] R. Anguelov, J. M.-S. Lubuma, F. Minami, "Total variation diminishing nonstandard finite difference schemes for conservation laws," *MCM*, 2010.
- [25] R. Anguelov, J. M.-S. Lubuma, "Nonstandard finite difference method by nonlocal approximation," *MCS*, 2003.
- [26] R. Anguelov, J. M.-S. Lubuma, P. Kama, "On non-standard finite difference models of reaction–diffusion equations," *JCAM*, 2005.
- [27] J.B. Cole, "A High Accuracy FDTD Algorithm to Solve Microwave Propagation and Scattering Problems on a Coarse Grid," *IEEE TMTT*, 1995.
- [28] J.B. Cole, "High-Accuracy Yee Algorithm Based on Nonstandard Finite Differences : New Developments and Verifications," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2002.
- [29] J.B. Cole, "High-Accuracy FDTD Solution of the Absorbing Wave Equation, and Conducting Maxwell's Equations Based on a Nonstandard Finite-Difference Model," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2004.
- [30] T. Ohtani, K. Taguchi, T. Kashiwa, Y. Kanai, J.B. Cole, "Nonstandard FDTD Method for Multifrequency Analysis," *IEEE TM*, 2008.
- [31] T. Ohtani, K. Taguchi, T. Kashiwa, Y. Kanai, J.B. Cole, "Nonstandard FDTD Method for Wideband Analysis," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2009.
- [32] B. Yang, C.A. Balanis, "An Isotropy-Improved Nonstandard Finite-Difference Time-Domain Method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2006.
- [33] M.A. Kourah, M.F. Hadi, A.S. Al-Zayed, "Extending the enlarged cell and uniformly stable conformal techniques to modeling curved conductors in two-dimensional high-order finite-difference time-domain algorithms," *Int. J. Numer. Model.*, 2013.
- [34] A. Taflove, S. Hagness, *Computational Electrodynamics : The Finite-Difference Time-Domain Method*, Third Edition, Boston, MA : Artech House, 2005.
- [35] B. Yang, C.A. Balanis, "Divergence Properties of the Nonstandard Finite Difference Methods," *MWCL*, 2007.
- [36] M. Hadi, S. Mahmoud, "A High-Order Compact-FDTD Algorithm for Electrically Large Waveguide Analysis," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 2008.

- [37] M. F. Hadi, "A finite volumes-based 3-D low dispersion FDTD algorithm," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 55, No. 8, pp. 2287–2293, Aug. 2007.
- [38] N. Kitsunezaki, A. Okabe, *Higher-order correction to the FDTD method based on the integral form of Maxwell's equations*, Computer Physics Communications (2014), <http://dx.doi.org/10.1016/j.cpc.2014.02.022>
- [39] J.S. Hesthaven, *High-order accurate methods in time-domain computational electromagnetics : a review*, Adv. Imag. Elect. Phys. 127 (2003) 59–123.
- [40] A. H. Paragnetos, J. T. Aberle, R. E. Diaz, *The effect of the 2-D Laplacian operator approximation on the performance of finite-difference time-domain schemes for Maxwell's equations*, Journal of Computational Physics, 2007
- [41] R. A. Chilton, R. Lee, *The Lobatto Cell : Robust, Explicit, Higher Order FDTD That Handles Inhomogeneous Media*, IEEE Trans. Antennas and Propag., Vol. 56, No. 8, August 2008.
- [42] H. Spachmann, R. Schuhmann, T. Weiland, *Higher Order Spatial Operators for the Finite Integration Theory*, ACES Journal, Vol. 17, No. 1, March 2002.
- [43] P. A. Fox, A. P. Hall, and N. L. Schryer, "The PORT mathematical subroutine library," *ACM Trans. Math. Software*, vol. 4, no. 2, pp. 104–126, June 1978.
- [44] J. P. Bérenger, *Perfectly Matched Layer (PML) for Computational Electromagnetics*, 1st ed., M&C Publishers, 2007.
- [45] T. Martin, "An Improved Near-to Far-Zone Transformation for the Finite-Difference Time-Domain Method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. 46, no. 9, pp. 1263–1271, Sept. 1998.
- [46] N. Bui, C. Guiffaut, A. Reineix and P. Pouliguen, "A conservative FDTD M(2,4) scheme in 3D without time step reduction for reducing dispersion," *IEEE Antennas Propag. Symp.*, Vancouver, July 2015.
- [47] H. E. Abd El-Raouf, E. A. El-Diwani, A. Ammar, and F. El-Hefnawi, "A low-dispersion 3-D second-order in time fourth-order in space FDTD scheme (  $M3d_{24}$  )," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, Vol. 52, No. 7, pp. 1638–1646, July 2004.
- [48] N. V. Kantartzis, T. D. Tsiboukis, *High Order FDTD Schemes for Waveguide and Antenna Structures*, 1st ed. USA : Morgan & Claypool, 2006.
- [49] H. Vicenti, J-L Vay, *Detailed analysis of the effects of stencil spatial variations with arbitrary high-order finite-difference Maxwell solver*, Computer Physics Communications, Vol. 200, pp. 147–167, Mar. 2016
- [50] S. D. Gedney, *Introduction to the Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Method for Electromagnetics*, Morgan & Claypool, 2011.
- [51] E. J. Brambley, *Optimized finite-difference (DRP) schemes perform poorly for decaying or growing oscillations*, Journal of Computational Physics, 2016.
- [52] N. Bui, C. Guiffaut, A. Reineix and P. Pouliguen, "A New Conservative High-Order Modified FDTD(2,4) Scheme," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, accepted

## Technique conforme pour la FDTD d'ordre 2 et (2,4)

Si les schémas FDTD(2,4) permettent d'avoir une dispersion numérique plus faible que le schéma de Yee, l'erreur commise lors de l'approximation de la géométrie avec la grille cartésienne reste tout autant significative. En effet, avec le schéma de Yee, des maillages en escalier, comme sur la figure 3.1, sont utilisés pour approximer les géométries courbes. Cette approximation détériore la qualité des résultats, notamment en région haute fréquence.

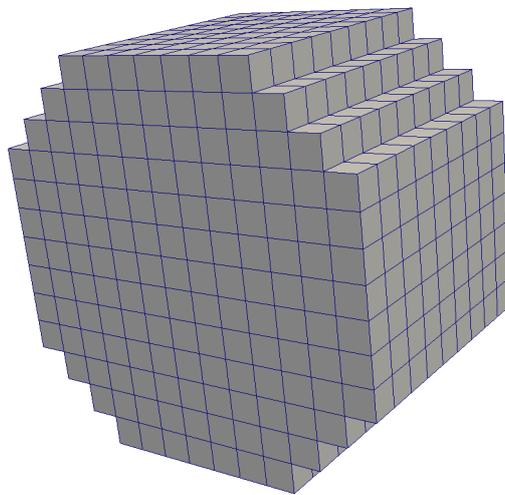


Figure 3.1 – Maillage en escalier d'un cylindre.

Ce chapitre introduit cette problématique et les techniques permettant de prendre en compte les géométries courbes. Elles sont nommées techniques conformes, pour signifier qu'elles permettent aux schémas d'être conforme à la géométrie. Un état de l'art sur ces techniques permettra de proposer une extension de la technique au schéma CM24.

Puis nous présenterons la problématique du traitement des conditions aux frontières métalliques. Cet aspect est l'un des points durs pour les schémas d'ordre supérieur à

stencil élargi d'établir de telles conditions, stables et précises. Il peut être résolu avec une hybridation entre les schémas FDTD d'ordre 2 et d'ordre 4. Cependant, la réalisation d'une telle hybridation pose aussi des problèmes de stabilité. Les différentes pistes permettant de résoudre le problème aux bords des plaques métalliques sont décrites dans ce chapitre.

### 3.1 Introduction de la problématique conforme

La FDTD conforme désigne les méthodologies développées à partir de la FDTD classique, destinées à obtenir des résultats numériques de précision meilleur que le schéma de Yee lors du traitement de géométries courbes. En effet, la méthode FDTD classique utilise un maillage cartésien et la modélisation de géométries courbes par une approximation en marche d'escalier à pour conséquence de dégrader la qualité des résultats [2]. Ceci oblige à utiliser un maillage très fin rendant les temps de calcul beaucoup trop importants. De plus, cette modélisation en escalier réduit localement la méthode à l'ordre 1. C'est pourquoi il a été nécessaire de développer de nouveaux formalismes capable de modéliser précisément de tels détails géométriques.

Divers modèles de complexité différente sont apparus sous l'appellation FDTD conforme [5, 3, 4, 11, 9, 10, 7, 8]. Ces méthodes ou techniques conformes appartiennent à la première catégorie de deux catégories : Les schémas basés sur un maillage orthogonal et cartésien, lesquels se rapprochent du schéma FDTD classique de Yee ; ou bien les schémas basés sur un maillage totalement ou partiellement curviligne, non-uniforme, non-orthogonal (parallélépipède) ou encore déstructuré (hexaèdre) [1].

Bien évidemment, les schémas de la deuxième catégorie ont potentiellement perdu l'immense simplicité du schéma de Yee malgré l'altération seulement locale du schéma. Il en est de même pour les méthodes à plusieurs maillages [1, 15] (superposition de maillages) nécessitant la transmission des données entre les différents maillages par interpolation. Il reste d'autres méthodes Conformal FDTD (CFDTD) traitant différemment le problème comme celle-ci [20] où l'auteur propose d'utiliser un pas de temps local pour les cellules instables. La prise en compte de la géométrie au sein d'une cellule peut rendre cette cellule plus petite. En conséquence, si le pas de temps n'est pas diminué, cette cellule sera instable. Avant de donner les raisons pour lesquelles on choisit de se pencher sur les modèles cartésiens, on souhaite couvrir quelques caractéristiques à propos des autres modèles.

Nous cherchons plutôt un modèle modifiant le schéma localement pour les zones devant être conformes. En d'autres termes, la technique devrait s'apparenter au schéma usuel pour les zones régulières. Les méthodes à coordonnées curvilignes [1] utilisent une métrique de l'espace augmentant grandement la complexité par rapport au maillage orthogonal cartésien. En particulier, la génération du maillage, l'adaptation des modèles subcellulaires ou encore la montée en ordre en sont des exemples. Pour ces multiples raisons et principalement, pour la simplicité, nous restons sur un maillage cartésien.

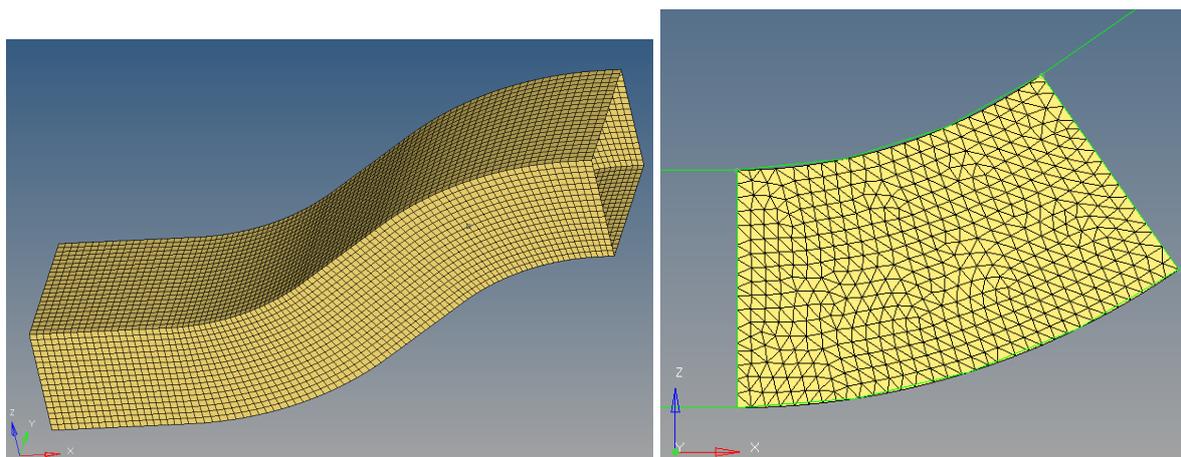


Figure 3.2 – Exemple de maillage structuré (gauche : quadrilatères) et non structuré (droite : triangulaires).

Pour les modèles non-orthogonaux et/ou déstructurés, l'objet est maillé avec des parallélépipèdes plus ou moins déformés (angle intérieur très aigu/obtus), de manière régulière (structuré) ou irrégulière (déstructuré). La figure 3.2 donne un exemple de maillage surfacique structuré et déstructuré. Madsen [17] établit un schéma sur un maillage hexaédrique où, outre la discrétisation sur un tel espace d'une formulation intégrale des équations de Maxwell, il introduit des projections de normale "primale" sur le maillage dual. Dans le contexte du maillage de Yee, le maillage dual est constitué des cellules duales dont les arêtes représentent le champ magnétique. Cette procédure est aussi utilisée avec les maillages non-orthogonaux. En effet, la discrétisation des intégrales de surface révèle la présence de normales unitaires sortantes à chaque face de cellule. Pour un maillage déstructuré, cette normale "primale" n'est plus nécessairement parallèle à l'arête de la cellule duale traversant cette face. Une projection est utilisée pour se ramener alors sur cette cellule duale et vice-versa. Le choix du projecteur est important pour la précision et la stabilité du schéma. Celui-ci doit notamment préserver la loi de Gauss en l'absence de source. Rappelons nous que cette condition est une restriction sur la divergence des champs. Plusieurs schémas ont été écrits [17, 18, 19] pour les maillages déstructurés, révélant que ceux-ci pouvaient être vus comme une généralisation du schéma de Yee. Avec un maillage déstructuré, il est possible de mailler précisément la quasi-totalité des géométries mais au prix de temps de calcul en raison des calculs de projection (normales, vecteurs d'arête, aires...).

A l'opposé de ces méthodes, les méthodes ou techniques conformes sont préférées puisqu'elles sont basées sur un maillage cartésien. La principale raison est sans aucun doute la simplicité des formulations et de l'implémentation de ces méthodes, tant au niveau de la compréhension que de l'étude. De plus, les modèles pour traiter des environnements physiques, écrits souvent avec le schéma de Yee sur un maillage cartésien, pourront être conservés. Par exemple, nous pourrions conserver le contrôle de la dispersion numérique, une taille mémoire réduite comparée à la plupart des autres méthodes et une efficacité de calcul.

L'adaptation de la conformité à ces modèles sera probablement plus aisée en conservant un tel maillage.

Dans les sections suivantes, les méthodes conformes sont décrites dans le cadre de matériau électriquement parfaitement conducteur (Perfectly Electric Conducting PEC). La plupart des méthodes conformes, sur maillage cartésien ou non, reposent sur la résolution de l'équation intégrale de Faraday :

$$\partial_t \int \mu H \cdot ds = - \oint E \cdot dl \quad (3.1)$$

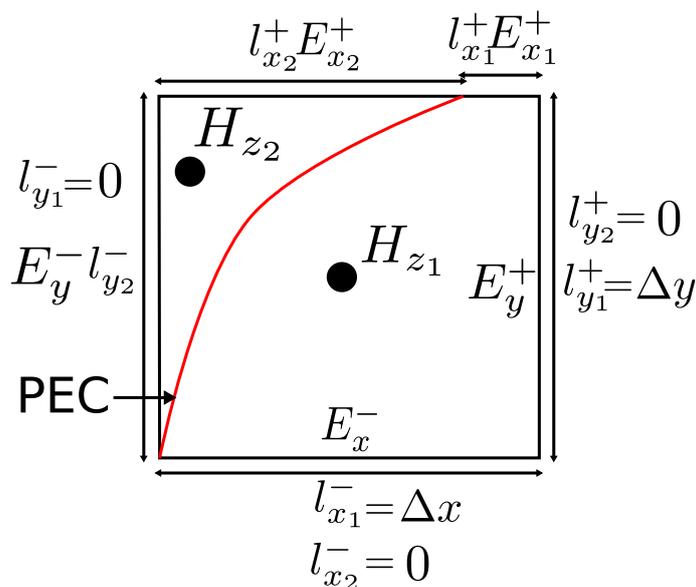


Figure 3.3 – Structure métallique (PEC en rouge) traversant une cellule de Yee. Deux champs  $H_z$  se trouvent alors dans la cellule originale (ou standard) et chacune est mise à jour avec les champs électriques du contour défini par l'équation intégrale de Faraday. Ainsi, l'indice 1 ou 2 permet de faire la correspondance des longueurs pour la mise à jour du champ  $H_{z1}$  ou  $H_{z2}$ .

Pour une interface PEC, traversant par exemple une facette de cellule de Yee comme sur la figure 3.3, au niveau du schéma numérique FDTD classique d'ordre 2, résoudre cette équation revient principalement à multiplier les valeurs de champ E par les longueurs des arêtes  $l_x, l_y, l_z$  des faces du cube de Yee et de les diviser par l'aire de la facette. La figure 3.3 représente le cas le plus courant lorsqu'une facette est traversée par une paroi PEC. Cette structure divise la facette en deux régions, avec chacune une valeur de champ magnétique  $H_z$ . Chaque champ magnétique est alors mis à jour par l'équation intégrale de Faraday. Sur la figure 3.3, les indices 1 et 2 désignent les correspondances entre les longueurs de champ électrique et le champ magnétique de même indice.

Plus généralement, par exemple, pour  $H_z$ , en omettant les indices de parcours de dimension  $x, y, z$ , le schéma classique peut s'écrire :

$$H_z^{n+1/2} = H_z^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} ((E_x^n)^+ - (E_x^n)^-) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} ((E_y^n)^+ - (E_y^n)^-). \quad (3.2)$$

et que l'on peut comparer avec la version conforme, sachant que le champ électrique tangent à la paroi PEC est nul :

$$H_z^{n+1/2} = H_z^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu S_{xy}} (l_x^+ (E_x^n)^+ - l_x^- (E_x^n)^- - (l_y^+ (E_y^n)^+ - l_y^- (E_y^n)^-)). \quad (3.3)$$

où  $S_{xy}$  est l'aire "libre" (non-PEC) d'une facette de la cellule en question. Davantage d'explications prouvant notamment l'équivalence entre le schéma de Yee et la formulation intégrale des équations de Maxwell sont présentées dans [1] (§3.6.8-3.6.9). D'autre part, le schéma de Yee est retrouvé dans le cas d'une cellule non-tronquée : la simplicité du schéma classique n'est pas perdue. Ainsi, l'étude se concentre sur les cellules situées à l'interface de milieux différents ou traversées par une paroi PEC ; de telles cellules sont qualifiées de cellules conformes. Grâce à cette formulation, les cellules tronquées par un matériau PEC peuvent être prises en compte via les longueurs d'arêtes.

Notons que l'équation d'Ampère n'est pas modifiée. Ceci signifie que la position ou la représentation du champ H n'est pas modifiée, notamment par rapport au matériau PEC [5]. Bien que cette proposition sur l'équation d'Ampère reste à prouver dans le cadre général de schéma FDTD, il est démontré que suivant la méthode, celle-ci est d'ordre 2 si la CFL est suffisamment réduite [21] ou avec une autre technique conforme [9, 7].

La plupart de ces méthodes traite avec des matériaux PEC. Des études ont été menées aussi afin d'adapter quelques unes de ces techniques pour traiter les cas des matériaux diélectriques et/ou anisotropes [1, 6].

Pour des schémas explicites en temps, l'un des problèmes majeurs de cette modélisation est à priori la stabilité. Rappelons que la condition CFL est inversement proportionnel au pas spatial. La réduction nécessaire du pas de temps induit par la réduction de l'aire au niveau des cellules tronquées peut rendre le temps de simulation irréaliste. C'est dans ce sens que les méthodes conformes ont été approfondis [5, 11, 9, 10, 7, 8] afin de trouver des schémas robustes et performants *i.e.* ayant un bon compromis entre précision et temps de calcul.

### 3.2 État de l'art de la technique conforme pour la FDTD

Outre les modèles assez approfondis, comme le modèle de sous-cellule triangulaire [1, 23, 24], l'un des premiers modèles intéressants de FDTD conforme est la Contour Path FDTD (CPFDTD) [3, 4].

Ce schéma propose, pour simplifier, d'intégrer la cellule tronquée dans la cellule non-tronquée voisine. En région stable, *i.e.* pour les cellules non tronquées, le schéma est celui de la FDTD classique. L'équation intégrale de Faraday est résolue sur cette cellule élargie pour calculer le nouveau champ H situé dans la cellule habituelle, comme illustrée par la figure 3.4. Ceci implique l'utilisation du champ E voisin ce qui a montré l'instabilité de la méthode en temps long (non réciprocity, non conformité du maillage) mais auxquelles de nouveaux schémas plus complexes ont été proposés pour pallier ce problème [12, 14, 13]. Le

champ magnétique n'est pas calculé dans les cellules intersectées par le matériau PEC, ce qui n'est pas fait dans les autres méthodes suivantes. L'équation de Maxwell-Ampère n'est pas modifiée. Une composante électrique sur une cellule duale laquelle est intersectée par une paroi PEC n'est pas utilisée. Cette "règle" décide quelle cellule sera élargie, expliquant notamment que la cellule A2 n'est pas élargie sur la figure 3.4.

Bien que les résultats soient plus précis, cette première idée ne permet pas d'obtenir des résultats de haute précision puisque l'ordre est de 1 tout comme dans le cas d'un maillage en escalier.

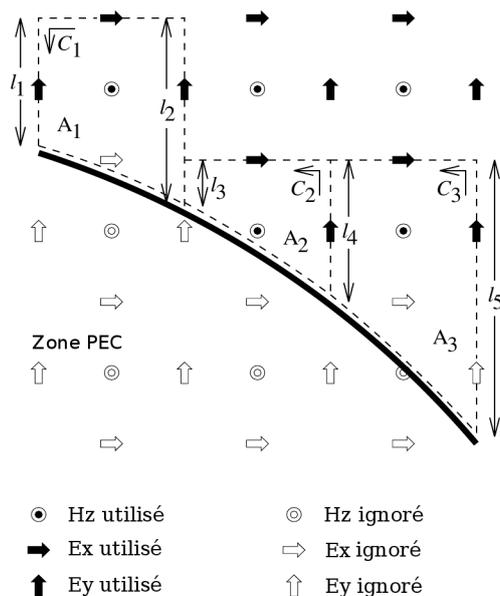


Figure 3.4 – Chemins d'intégration pour l'intégrale de contour dans l'équation intégrale de Faraday sur un exemple 2D pour la CPFDTD avec une paroi PEC [16].

### 3.2.1 Dey-Mitra

L'approche de Dey-Mitra (DM) [5] conserve la localité des formulations au niveau de chaque cellule et néglige l'aire libre des cellules instables par rapport au pas de temps choisi. (La CPFDTD peut toujours être utilisée en complément). Ce traitement des cellules instables, où elles deviennent métallisées, est représenté sur la figure 3.5, où aire H désigne la surface d'aire délimitée par le contour d'intégrale de Maxwell-Faraday. Contrairement à la CPFDTD, le champ magnétique des cellules traversées par la paroi PEC est présent, permettant ainsi de garder une formulation locale et ne requiert pas l'emprunt des valeurs voisines pour le champ électrique. Finalement, le nouveau schéma peut s'implémenter aisément à partir d'un code FDTD classique, ne nécessitant, outre les données d'un maillage conforme (aires et longueurs principalement), que la modification de l'équation de Faraday (3.1).

Concernant la stabilité du schéma, le pas de temps va être réduit selon la cellule ayant la plus petite aire. La CPFDTD peut être utilisée pour prendre en compte ces cellules. Mais les auteurs donnent deux critères (trouvés expérimentalement) selon lesquels la stabilité du schéma est assurée : un critère d'aire minimale et un critère de ratio entre la longueur

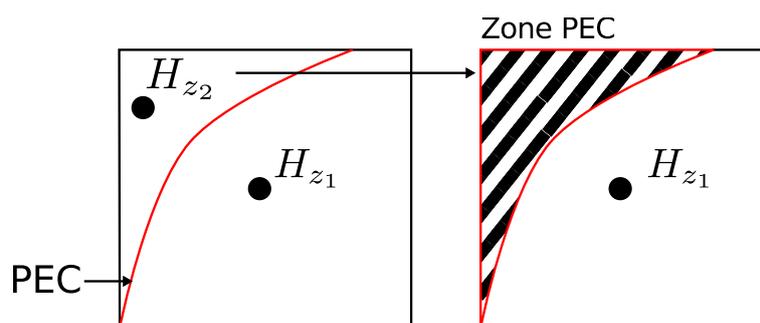


Figure 3.5 – Technique conforme DM : métallisation (zone hachurée) de l'aire de  $H_{z_2}$  si le ratio  $\frac{\text{Aire H}}{\text{Aire cellule standard}}$  ou le ratio longueur  $\frac{\max(l_x^\pm, l_y^\pm)}{\text{Aire H}}$  est insuffisante.

maximale de la cellule et celle d'une cellule de Yee "traditionnelle". Le ratio  $\frac{A}{\Delta x \Delta y}$  entre l'aire  $A$  de la cellule tronquée et l'aire totale d'une cellule  $\Delta x \Delta y$  est assujetti au critère d'aire tandis que le ratio longueur  $\max(\frac{l_x^\pm}{A}, \frac{l_y^\pm}{A})$  est assujetti au critère ratio longueur. Pour une CFL donnée, ces deux critères permettront d'identifier les cellules instables, dont l'aire sera négligée c'est-à-dire que l'on maille en escalier à cet endroit. Plus la CFL sera large, plus les critères seront contraignants, ce qui entraînera une prise en compte de la géométrie plus grossière. Par exemple, les cellules sont stables si elles satisfont les conditions du tableau 3.1.

CFL	Ratio Aire $\frac{\text{Aire H}}{\text{Aire cellule standard}}$	Ratio longueur $\frac{\max(l_x^\pm, l_y^\pm)}{\text{Aire H}}$
50%	> 1.5%	< 15
70%	> 2.5%	< 10

Tableau 3.1 – Deux critères de stabilité à CFL donnée.

Une étude très complète du schéma DM, notamment de sa stabilité et d'une écriture explicite de la CFL via les valeurs propres de la matrice de discrétisation spatiale, et une application en 3D se trouvent dans l'article [21]. Dans ce même article, il est montré que la méthode DM est d'ordre 2 sur deux exemples : une cavité sphérique et une cavité rectangulaire non-alignée à la grille cartésienne. Une remarque très importante apportée par ces auteurs est que, pour une CFL donnée, cette convergence d'ordre 2 est limitée à une certaine finesse de maillage. Sinon elle est d'ordre 1. Ceci s'explique par le fait que la contrainte CFL négligera plus ou moins un certain nombre de cellules, et ceci d'autant plus que le maillage est fin.

### 3.2.2 Benkler

Benkler [11] donne un moyen efficace de paramétrer le schéma, par une condition entre la CFL et le ratio de chacune des aires des cellules, afin d'obtenir des schémas laissant l'utilisateur libre de choisir entre rapidité ou précision. Autrement dit, si la méthode DM a trouvé ses critères pour les cellules instables de manière expérimentale, alors la méthode de Benkler s'adapte par rapport à la CFL, via une formule analytique. Pour cela, la réécriture du schéma de Dey-Mitra, sous formulation du schéma FDTD classique, permet d'écrire naturellement une condition CFL par rapport à celles des schémas classiques ou conformes. Pour les cellules instables ayant une aire trop petite, cette aire est agrandie afin de rendre la

cellule stable, comme représenté sur la figure 3.6.

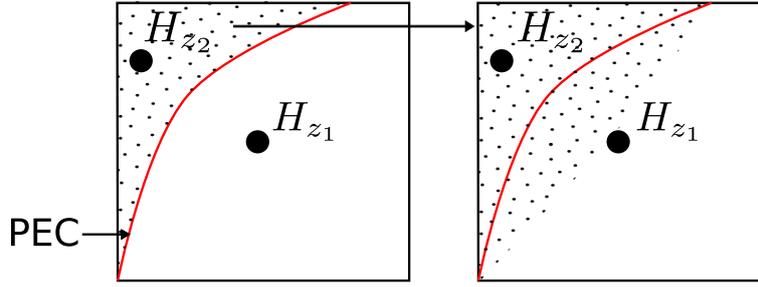


Figure 3.6 – Technique conforme BK : agrandissement de l'aire de  $H_{z_2}$  (zone avec des points) si ratio  $\frac{\text{aire H}}{\text{Aire cellule standard}}$  insuffisante.

En passant par des notions de ratio, une normalisation de l'aire et des longueurs est définie :

$$A_z^{ratio}|_{i,j,k} := \frac{A_z|_{i,j,k}}{\Delta x_i \Delta y_j}, \quad \Delta_x^{ratio}|_{i,j,k} := \frac{l_x|_{i,j,k}}{\Delta x_i}. \quad (3.4)$$

La forme discrète de l'équation de Maxwell-Faraday (3.3) se réécrit :

$$H_z|_{i,j,k}^{n+1/2} = H_z|_{i,j,k}^{n-1/2} + \frac{\Delta t}{\mu A_z^{ratio}|_{i,j,k}} \left( \frac{E_x|_{i,j+1,k}^n \Delta_x^{ratio}|_{i,j+1,k} - E_x|_{i,j,k}^n \Delta_x^{ratio}|_{i,j,k}}{\Delta y_j} - \frac{E_y|_{i+1,j,k}^n \Delta_y^{ratio}|_{i+1,j,k} - E_y|_{i,j,k}^n \Delta_y^{ratio}|_{i,j,k}}{\Delta x_i} \right). \quad (3.5)$$

Il suffit enfin de poser  $\tilde{E} = \Delta^{ratio} E$  pour retrouver les notations du schéma FDTD classique, mais avec des coefficients différents devant les opérateurs différentiels discrétisés dépendant du ratio d'aire pour l'équation de Maxwell-Faraday et du ratio de longueur pour celle de Maxwell-Ampère. En conséquence, une modification de l'équation de Maxwell-Ampère, par exemple pour  $E_x$  donne :

$$\tilde{E}_x^{n+1/2} = \tilde{E}_x^n + (\Delta_x^{ratio} \frac{\Delta t}{\epsilon}) \left( \frac{H_z|_{i,j+1,k}^n - H_z|_{i,j,k}^n}{\Delta y_j} - \frac{H_y|_{i,j,k+1}^n - H_y|_{i,j,k}^n}{\Delta z_k} \right). \quad (3.6)$$

La formulation précédente (3.6) permet de conserver la forme des équations implémentées. Ainsi, à partir du pas de temps classique associé au schéma de Yee, il est possible de calculer le pas de temps de chaque cellule, dépendant principalement du ratio entre l'aire restante et l'aire totale de la cellule (3.4). Pour chaque cellule  $M$ , le pas de temps local est le suivant [11] :

$$\Delta t_M^{conforme} = \sqrt{\frac{A_M^{ratio}}{\max_{\text{arête} \in M} \Delta_{\text{arête}}^{ratio}}} \Delta t_M^{Yee} \quad (3.7)$$

Finalement, connaissant à priori le pas de temps associé à chaque cellule, le ratio d'aire  $A_M^{ratio}$  des cellules instables peut être augmenté afin d'obtenir des pas temporels équivalents au pas de temps prescrit par la CFL. Pour une CFL donnée, le pas de temps associé impose un ratio d'aire minimal, différent pour chaque cellule du maillage (dépendant des longueurs non-PEC

sur les côtés de la cellule). En d'autres termes, la valeur de la CFL, devenue notre paramètre, impose un ratio d'aire minimal pour modéliser la géométrie. Malgré les cas où l'aire serait plus petite que cette aire minimale, cette cellule est considérée stable avec une aire agrandie (au lieu de rendre cette cellule totalement PEC comme dans la méthode DM). L'aire locale et minimale de stabilité déduite de l'équation (3.7) est différente de celle du critère d'aire de la méthode DM :

$$A_{M,stab} = CFL^2 |M| \max_{\text{arête} \in M} \Delta_{\text{arête}}^{ratio} \quad (3.8)$$

Plus précisément, c'est un critère moins contraignant que celui de DM et plus précise. Il est aisé de voir que cette méthode a une rapidité du calcul évoluant inversement par rapport à la précision du schéma. Il laisse le choix à l'utilisateur de faire un compromis entre ces deux qualités via la CFL.

### 3.2.3 Extended-Cell-Technique

L'Extended-Cell-Technique (ECT) [9, 10] repose sur l'élargissement de la cellule instable à l'intérieur du domaine libre (non-PEC) et sur la conservation de la force électromotrice définie ci-dessous. Cette approche permet de ne pas modifier la CFL sans déformer la géométrie. La cellule instable est élargie sous la contrainte de la conservation de la force électromotrice dans les cellules impliquées (et donc sur tout le domaine). Le choix de l'élargissement de la cellule instable est arbitraire, sauf entre cellules instables. Il faut voir qu'avec l'ECT, l'élargissement de la cellule instable est virtuel.

Les étapes de l'ECT sont décrites ci-dessous. La force électromotrice d'une cellule est définie comme étant :

$$\int_S \nabla \times E = \oint_{\partial S} E, \quad (3.9)$$

où  $S$  est une surface, notamment une face du cube de Yee. Dans le cadre des méthodes conformes, la force électromotrice  $V$  est donc, par exemple pour  $H_z$  :

$$V^n = -l_x^+ (E_x^n)^+ + l_x^- (E_x^n)^- + l_y^+ (E_y^n)^+ - l_y^- (E_y^n)^-. \quad (3.10)$$

La densité de force électromotrice est égale à la force électromotrice divisée par l'aire  $S$  de la cellule :

$$\rho = \frac{\oint_{\partial S} E}{S} = \frac{V}{S} \quad (3.11)$$

Cette densité va intervenir dans nos calculs afin d'avoir la conservation des forces électromotrices dans la cellule élargie ou "virtuelle" (figure 3.7).

La figure 3.8 représente sous forme de schémas, les étapes de l'ECT. Le calcul des forces électromotrices  $\rho$  de chaque cellule est la première étape (1ère figure de 3.8). Ensuite, le principe est le suivant : après élargissement de la cellule instable à une cellule virtuelle dont l'aire prédéfinie est stable, chaque force électromotrice contribue en partie (2ème figure de 3.8) à la force électromotrice de la cellule virtuelle (3ème figure de 3.8). Il suffit ensuite de pondérer linéairement la densité de force électromotrice de chaque cellule avec celle de la cellule virtuelle (4ème figure de 3.8). Cette pondération se traduit par : d'une part, l'ajout,

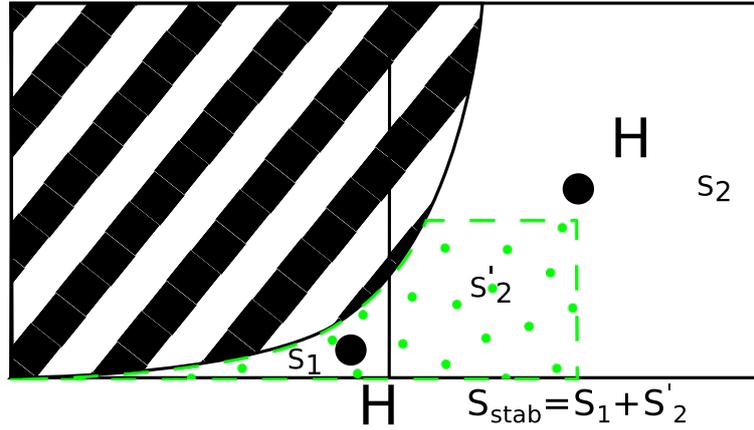


Figure 3.7 – ECT : La zone avec des points est l'élargissement (aire  $S_{stab} = S_1 + S'_2$ ) d'une cellule instable (d'aire  $S_1$ ) dans une cellule stable (d'aire  $S_2$ ).

proportionnel à l'aire intrusive, de la densité de force électromotrice de la cellule virtuelle; d'autre part, le retranchement, en contrepartie, de même proportion, de la densité de force électromotrice de la cellule introduite. Les auteurs prouvent aisément qu'avec cette méthode, la somme des nouvelles forces électromotrices est bien égale à celle initialement présente et est consistant avec le principe de conservation de la force électromotrice.

Ci-dessous sont écrites les équations de l'ECT pour un élargissement seulement d'une cellule instable d'aire  $S_1$  dans une cellule voisine stable d'aire  $S_2$ . Notons  $S'_2$  l'aire partagée par la cellule stable et  $S^{stb}$  l'aire de la cellule virtuelle. Donc  $S^{stb} = S'_2 + S_1$ .  $S^{stb}$  est définie comme l'aire minimale d'une cellule afin que celle-ci soit stable. Elle est donc liée au critère de stabilité. Comme les auteurs de l'ECT, l'aire stable est choisie telle que  $S^{stb} = 0.5\Delta_x\Delta_y$ . La détermination d'un critère de stabilité peut améliorer l'efficacité de l'ECT.

Comme écrit précédemment, la méthode commence tout d'abord par calculer la densité de force électromotrice de la cellule virtuelle :

$$\rho_{eng}^n = \frac{\rho_1^n S_1 + \rho_2^n S'_2}{S^{stb}} \quad (3.12)$$

Ainsi, les nouvelles forces électromotrices sont déterminées en répartissant cette dernière. Pour la cellule instable, on obtient :

$$H_1^{n+1/2} = H_1^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu} \rho_{eng}^n \quad (3.13)$$

et pour la cellule stable introduite :

$$H_2^{n+1/2} = H_2^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu} \frac{\rho_{eng}^n S'_2 + \rho_2^n (S_2 - S'_2)}{S_2} \quad (3.14)$$

Pour les cas particuliers où, par exemple, l'élargissement n'est pas possible puisque la cellule voisine est instable aussi, il semble naturel de ne pas élargir des cellules instables entre elles (aire à partager insuffisante). Ainsi, l'ECT permet d'élargir une ou plusieurs cellules instables dans plusieurs cellules. A titre d'exemple, les étapes de l'élargissement de cellules

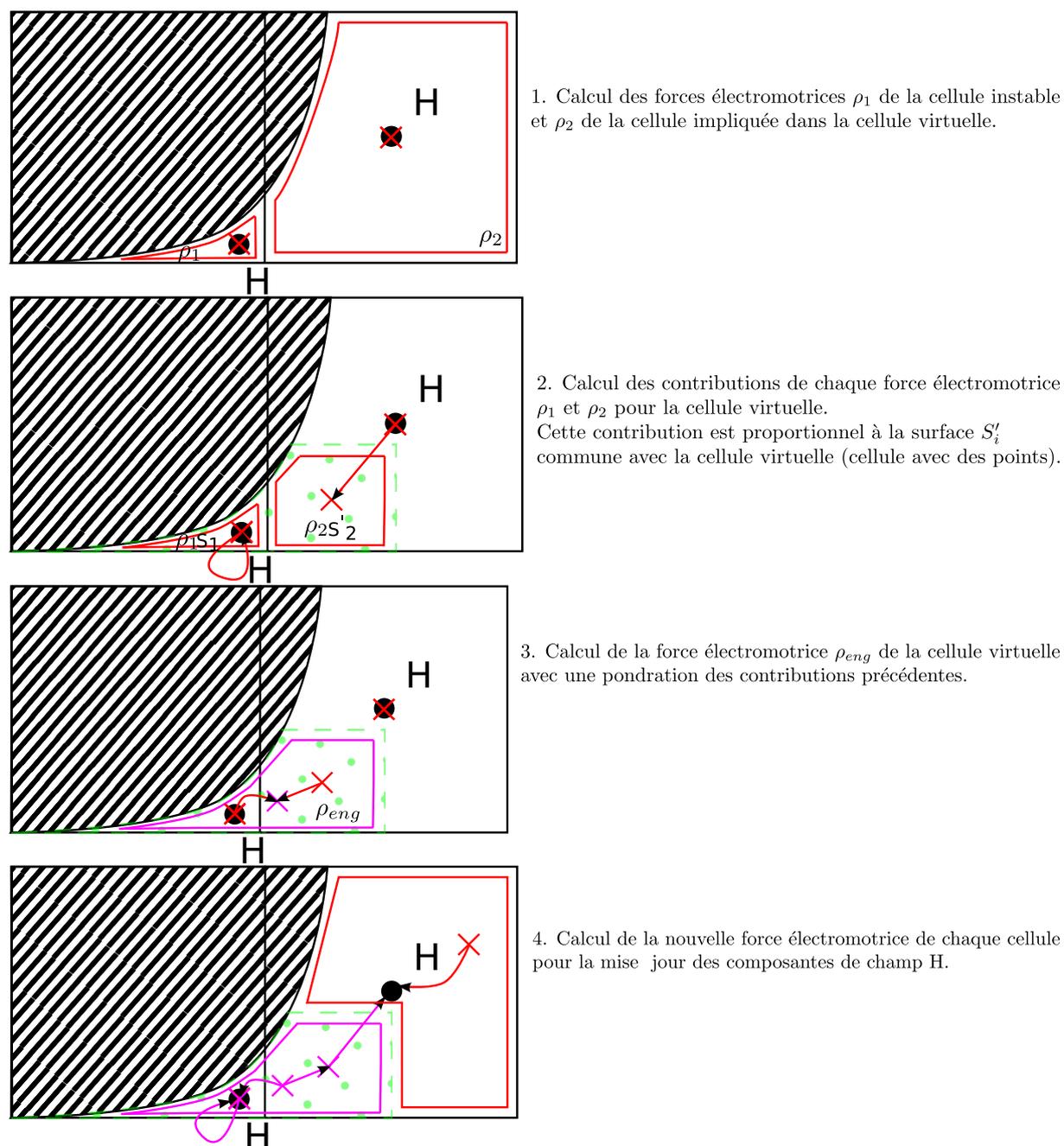


Figure 3.8 – Les différentes étapes de l'ECT pour une cellule instable.

instables voisines sont indiquées sur le schéma 3.9 représentant un coin d'une structure PEC. En suivant la règle précédente, l'élargissement de chaque cellule instable se fait sur la cellule stable. Trois cellules virtuelles sont utilisés, en supposant que la cellule stable ait une aire supérieure à la somme des aires à partager.

En ignorant cette règle, l'utilisation seulement d'une seule cellule virtuelle pour les trois cellules instables a été testée. La principale différence porte sur la répartition des forces électromotrices. En se basant sur nos exemples canoniques présentés plus loin, la méthode reste stable. Quant à la qualité des champs, l'expérience montre que l'écart d'amplitude des solutions numériques dans les zones hors paroi est négligeable. Cela conforte l'idée que dans

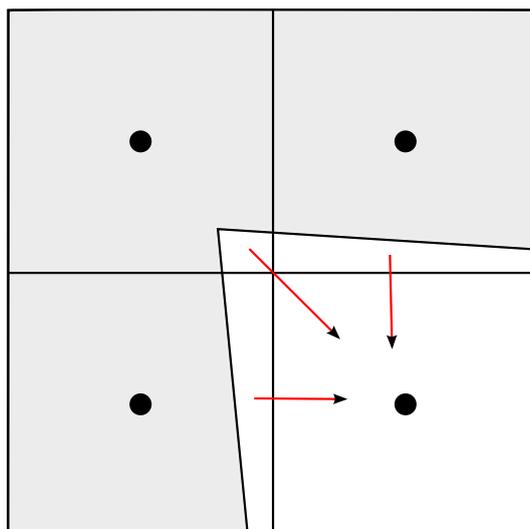


Figure 3.9 – Un exemple parmi les cas particuliers : le coin. L'ECT préconise l'utilisation de trois cellules virtuelles.

les petites cellules instables et voisines, le champ ne varie que très peu. La règle suivante est appliquée dans nos exemples : une cellule instable est toujours élargit vers au moins une cellule stable.

### 3.2.4 Uniformly Stable Conformal et Simplified Conformal

L'Uniformly Stable Conformal (USC) [7] est basée sur la méthode Finite Integration Technique (FIT) [25]. Bien évidemment, au même titre que la FDTD, plusieurs techniques ont été développées dans le contexte de la FIT. En particulier, l'approche PFC (Partially Filled Cells) est l'équivalent FIT du schéma DM. L'USC et l'Extended-Cell-Technique (ECT) de la section précédente sont très proches au niveau de la modélisation. Toutes deux se basent sur le même principe de moyenniser les flux magnétiques (forces électromotrices pour l'ECT). Les auteurs différencient leurs travaux au niveau de la construction de la méthode et de sa flexibilité. En particulier, l'USC ne fait aucune distinction entre les cellules intrusives et introduites en appliquant toujours cette moyenne des cellules conformes (en respectant aussi la règle de ne pas élargir vers les cellules dont l'aire n'excède pas un certain taux, notamment 50%). Cependant, la matrice de matériau n'étant plus diagonale, l'USC nécessite l'inversion d'une matrice pour la mise à jour des champs. L'article [22], traitant de l'ECT et de l'USC pour un schéma FDTD(2,4), montre que les deux méthodes donnent des résultats quasiment équivalents. La condition pour l'aire minimale de stabilité est la suivante :

$$\bar{s} \geq 0.5 \max_{\gamma} (\bar{l}_{\gamma}) . \quad (3.15)$$

où  $\bar{l}_{\gamma}$  sont les longueurs d'arêtes normalisés de la surface normalisée  $\bar{s}$  (donc sans unité). Cependant, l'ECT est favorisée pour sa moindre complexité par rapport à celle de l'USC.

Les auteurs de l'USC ont aussi proposé une version simplifiée de leur méthode : le schéma SC (Simplified Conformal). Beaucoup plus simple, il repose sur la conformité apportée par la

seule modification des longueurs et non de l'aire pour les cellules instables, comme représenté sur la figure 3.10 Ceci signifie que la modélisation géométrique est modifiée de telle manière que les arêtes métalliques soient raccourcies ou bien rallongées. Bien que cette méthode soit légèrement moins précise que l'ECT ou l'USC, elle semble être la plus préférable aux autres méthodes [8].

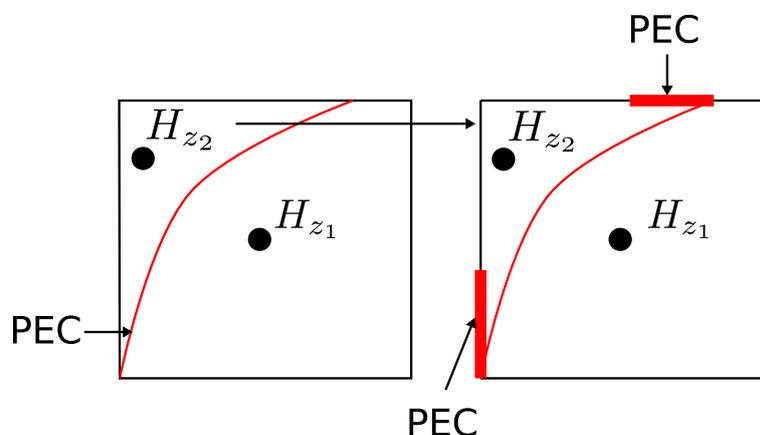


Figure 3.10 – Technique conforme SC : métallisation d'une certaine longueur d'arête si cellule instable suivant le critère (3.15).

### 3.2.5 Résultats numériques : Cavité cylindrique et SER d'une Sphère

Les résonances d'une cavité cylindrique en 2D ont été simulées pour comparer les différentes techniques conformes. La résolution du maillage est en  $\Delta = \frac{\lambda}{10}$  pour une fréquence maximale à 1 GHz. Les méthodes précédentes ont été testées dans le cas d'une cavité cylindrique haute de  $10\Delta$  et de rayon  $7\Delta$ . La source est une sino-gaussienne permettant d'exciter une bande de fréquence arbitraire et d'obtenir une transformée de Fourier discrète (TFD) avec un bruit négligeable. Ceci servira à mieux observer les fréquences de résonance de la cavité cylindrique. Elle se situe en un point du maillage  $(13\Delta, 8\Delta, 10\Delta)$ , sur les composantes  $E_z$  et  $H_z$  afin de pouvoir observer les modes TM et TE au point  $(11\Delta, 13\Delta, 9\Delta)$ . Pour des raisons de simplicité, nous ne traitons que l'intérieur du cylindre. De plus, la courbure du cylindre n'est pas prise en compte : c'est-à-dire que les cellules du maillage sont tronquées suivant un plan ou une droite. Par exemple, la courbe PEC de la cellule conforme 3.3 est prise en compte comme une droite. Dans le tableau 3.2 sont indiquées les fréquences de résonance calculées par chaque schéma accompagné des fréquences théoriques pour les deux types de mode. A cette résolution en  $\frac{\lambda}{10}$ , les erreurs de dispersion sont assez élevées (de l'ordre de 3-4%). Notamment, des erreurs importantes peuvent être observées si le nombre d'itérations temporelles est élevé. Ici, la CFL pour les schémas DM et BK est de 0.68 et pour l'ECT de 0.98. Le nombre total d'itérations est environ respectivement de 11200 et 7770 (pour un temps de simulation de  $4,39 \cdot 10^{-7}$  s). Le choix de 0.68 correspond à un des critères donnés par le schéma DM. D'autre part, pour le schéma DM, le critère d'aire est de 0.015 et celui de longueur de 0.1.

Les courbes de fréquence pour le mode  $TE_{111}$  sont tracées sur la figure 3.11. Sur cet

exemple, la méthode ECT est la méthode conforme la plus performante. Elle réalise une erreur maximale de 0.50% contre 3.36% (escalier). Pour ce cas-ci, la méthode DM donne des résultats assez proche de l'ECT mais néglige toujours une partie de la géométrie (par métallisation des cellules instables). Même remarque que pour l'exemple 2D, la prise en compte rigoureuse de la géométrie permet d'améliorer grandement les résultats par rapport à la FDTD classique.

Modes	$TM_{010}$	$TE_{111}$	$TM_{011}$	$TE_{211}$	$TM_{110}$	écart max (%)
Théorique (GHz)	0.5468	0.6521	0.7409	0.8557	0.8713	0
FDTD (escalier) %	+3.36	-1.20	+1.83	+0.77	+2.80	+3.36
DM ( $\Delta t_{DM} = 0.68$ ) %	+0.23	+0.13	-0.21	-0.09	-0.70	-0.70
BK ( $\Delta t_{DM} = 0.68$ ) %	-0.47	-0.59	-0.45	-0.75	-1.03	-1.03
ECT ( $\Delta t_{FDTD} = 0.98$ ) %	<b>-0.16</b>	<b>-0.03</b>	<b>-0.07</b>	+0.10	<b>-0.50</b>	-0.50

Tableau 3.2 – Pourcentage d'erreur des fréquences de résonance d'une cavité cylindrique obtenus des méthodes conformes avec  $\frac{\lambda}{10}$  contre celles théoriques.

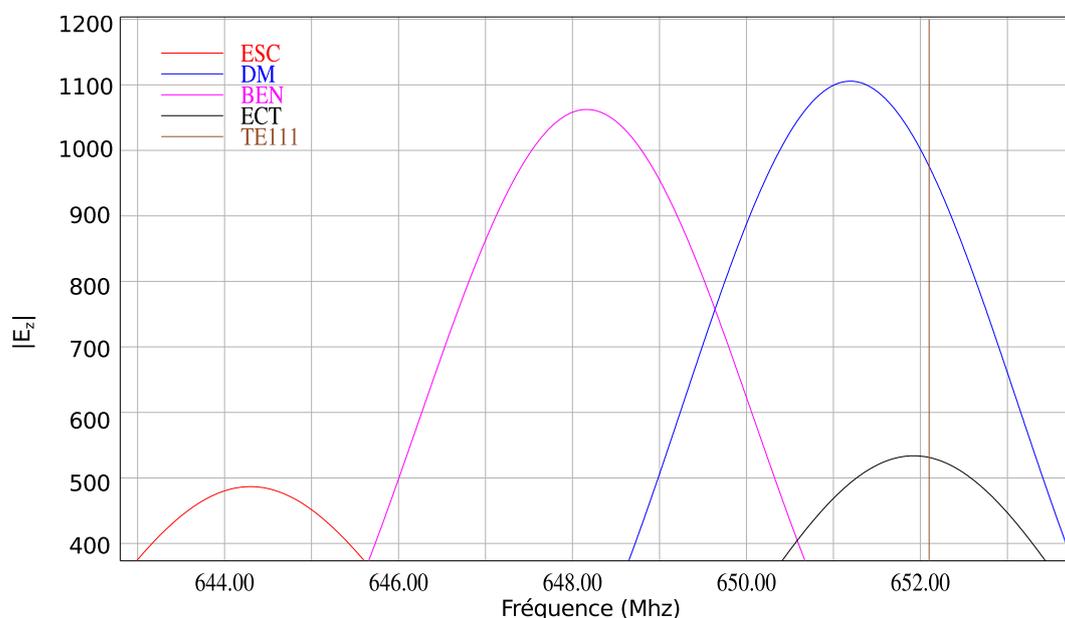


Figure 3.11 – Cavité cylindrique : courbes de fréquences pour les trois méthodes conformes (CFL à 0.68 pour DM et BK) et la FDTD classique (ESC) pour le mode  $TE_{111}$ .

Sur la figure 3.12, les SER monostatiques d'une sphère de 13cm de rayon obtenues avec la technique conforme SC et DM sont comparées. L'approximation de la géométrie avec la technique conforme est meilleure. De meilleurs résultats sont obtenus par rapport à la FDTD en marche d'escalier, à résolution de maillage égales  $R = \lambda_{10GHz} / \Delta = 15$ . Les techniques SC et DM s'équivalent en qualité dans le cas de cette sphère, avec un pas de temps divisé par deux. L'apport des techniques conformes est significatif comme le montre ce cas. Les écarts de résultats restants entre les courbes SC et analytiques sont causés par la forte dispersion numérique du schéma de Yee. En effet, le résultat FDTD à  $R=30$  a une dispersion numérique plus petite et une approximation de la géométrie en escalier plus fine. Mais la division de la résolution du maillage par 2 implique une multiplication du temps de calcul par 16 (entre

Méthode	Traitement des cellules instables		
SC, DM, Benkler	La géométrie est modifiée en augmentant ou diminuant la zone PEC (aire ou arête)		
ECT, USC	La géométrie n'est pas modifiée		
Méthode	SC	DM	Benkler
Cell. instable	Diminution de longueurs PEC	PEC	Diminution d'aire de PEC
Défauts géom.	CFL limite la géométrie	CFL limite la géométrie	CFL limite la géométrie
Commentaires	précision ajustée à la CFL; temps de calcul augmenté	temps de calcul augmenté	précision ajustée à la CFL; temps de calcul augmenté
Méthode	ECT	USC	
Cell. instable	Moyenne des forces EM	Moyenne du flux magnétique	
Défauts géom.	singularités	singularités	
Commentaires	Distinction Intrus/Introduit	Pas de distinction Intrus/Introduit; Implémentation assez complexe	

**Tableau 3.3 – Résumés des caractéristiques des techniques conformes pour la méthodes FDTD.**

FDTD  $R=15$  et  $R=30$ ). Les techniques SC et DM n'augmentent pas le temps de calcul. Ce cas expose clairement les deux types d'erreurs au cœur de la problématique de cette thèse.

Nous avons donc vu les différentes techniques conformes, basées sur des principes relativement simples. Leur implémentation est simple mais la production des données de maillages conformes peut s'avérer délicate. Notamment, si une cellule est découpée en plusieurs régions libres, alors la composante de champ magnétique  $H$  doit être dédoublée. De plus, l'association du champ  $H$  doit être connue avec les composantes de champs électriques de la cellule conforme. Le logiciel TEMSI-FD du laboratoire est opérationnel sur la partie algorithme des calculs conformes et nous avons utilisé un logiciel de maillage conforme afin de produire les résultats de la figure 3.12.

Le tableau 3.3 résume les principales différences entre les méthodes vues précédemment. Les singularités présentes dans toutes les méthodes conformes sont par exemple un bord de plaque métallique lequel s'arrête à l'intérieur d'une cellule. L'effet du bord ou du coin dans la cellule n'est pas pris en compte par la technique conforme. La technique conforme va plutôt arrondir la géométrie des structures au sein d'une cellule conforme.

### 3.3 Technique Conforme pour le schéma CM<sub>24</sub>

Pour les schémas FDTD(2,4), des articles récents [27, 22, 26, 33] montrent que la technique conforme peut être adaptée ou étendue à de tels schémas (M<sub>24</sub> et Fang). Particulièrement, en 2D, le schéma M<sub>24</sub> a été adapté avec la technique conforme USC, SC et ECT [27, 22, 33]. Avec le même objectif, on propose ici une formulation pour un schéma CM<sub>24</sub> conforme. La technique adoptée est la technique SC, performante parmi celles les moins complexes à implémenter.

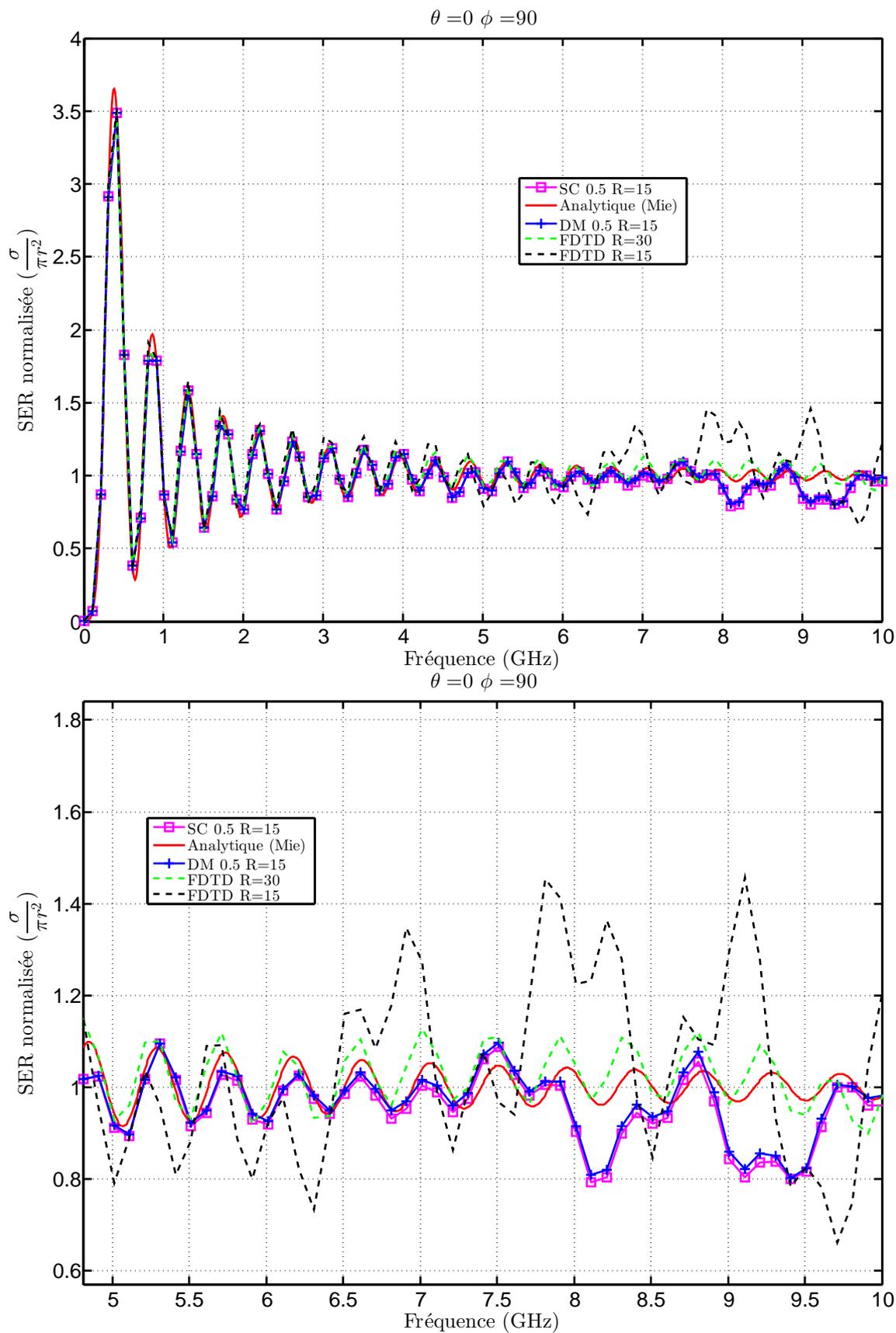


Figure 3.12 – SER monostatique d’une sphère de 13cm de rayon, maillage avec cellule cubique de 2mm( $R=\lambda_{10GHz}/\Delta=15$ ) et 1mm( $R=30$ ); Zoom sur la figure du bas. CFL à 0.5 pour les techniques conformes.

Si le maillage est uniforme avec des cellules cubiques de côté  $\Delta$ , alors le schéma CM24 conforme SC peut s'exprimer :

$$\begin{aligned}
\partial_t \mu H &= \frac{K'_3}{S_3 \Delta^2} \int_{C_y} E + \frac{K'_1}{S_1 9 \Delta^2} \int_{C_f} E + \frac{K'_2}{S_2 9 \Delta^2} \int_{C_{ext}} E + \frac{K'_4}{S_4 5 \Delta^2} \int_{C_{int}} E, \\
&= \frac{K'_3}{S_3} \left[ \frac{\sum_i \bar{l}_i E_i}{\Delta} \right] + \frac{K'_1}{S_1} \left[ \frac{\sum_i l_1 \bar{l}_i E_i}{9 \Delta} \right] + \frac{K'_2}{S_2} \left[ \frac{\sum_i l_2 \bar{l}_i E_i}{9 \Delta} \right] + \frac{K'_4}{S_4} \left[ \frac{\sum_i \bar{l}_i E_i}{5 \Delta} \right], \\
\partial_t \epsilon E &= \bar{l} \left( K'_3 \int_{C_3} H + K'_1 \int_{C_1} H + K'_2 \int_{C_2} H + K'_4 \int_{C_4} H \right), \\
&= \bar{l} \left( K'_3 \left[ \frac{\sum_i H_i}{\Delta} \right] + K'_1 \left[ \frac{\sum_i H_i}{\Delta} \right] + K'_2 \left[ \frac{\sum_i H_i}{\Delta} \right] + K'_4 \left[ \frac{\sum_i H_i}{\Delta} \right] \right)
\end{aligned} \tag{3.16}$$

où l'astuce de Benkler a été reprise afin de conserver la forme traditionnelle des équations comme dans les cellules standards. Les longueurs  $\bar{l}_i$  sont les longueurs normalisées de  $l_i$  soit :

$$\bar{l}_i = \frac{l_i}{\Delta} \tag{3.17}$$

Bien que l'implémentation et des tests aient été menés, le schéma est instable en raison de problème aux bords des plaques métalliques.

### 3.4 Condition aux frontières sur les arêtes de plaques métalliques

Cette section présente les différentes approches pour répondre au problème qui se pose aux frontières des bords de plaques métalliques. Que ce soit pour la FDTD en marche d'escalier ou conforme, i.e. le bord (arête vive) est situé sur une arête de cellule ou la coupe, ce problème est présent dans les deux cas. La formulation stable et précise de ces conditions, de manière générale, n'est pas établie.

Le principe d'image est appliqué à l'exclusion des bords métalliques (arêtes vives). Lorsque le stencil est totalement traversé par une structure métallique, le principe d'image est appliqué comme indiqué sur la figure 3.13. Les courants  $J$  de part et d'autre de la plaque métallique sont de signes opposés. Ainsi, les champs indéterminés sur un stencil traversé par une plaque métallique sont égaux en amplitude à ceux situés dans la région opposé, au signe près. Pour les bords, dont un exemple est représenté sur la figure 3.14, l'application du principe d'image rend le schéma instable.

L'utilisation de différences finies décentrées peut rendre le schéma moins précis (perte de l'ordre) voire instable. Cependant, certains schémas [35, 34] en font l'usage et les coefficients doivent être adaptés pour que le schéma soit stable et conservatif globalement. Mais cette stabilité n'a seulement été démontré qu'en 1D et 2D.

Une approche du problème via la correspondance des dérivées partielles au niveau des interfaces a été étudiée en 1D et 2D dans [32]. La méthode utilise des conditions de sauts (Eq. (8)-(10) dans [32]) afin d'adapter les dérivées au niveau des interfaces. Elle nécessite l'usage de points spatiaux fictifs de part et d'autre de la discontinuité. Ceci complexifie significativement

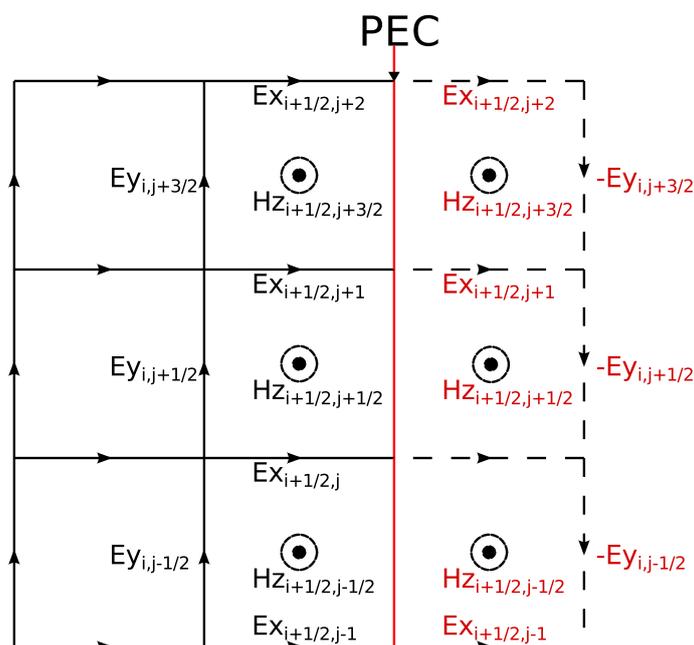


Figure 3.13 – Principe d’image pour une plaque PEC traversant le stencil pour une mise à jour du champ  $H_z$ . Le champ  $E$  tangent de l’autre côté de plaque PEC est la copie de celui dans la région de  $H$  mise à jour, avec un signe contraire. Le champ  $E$  normal de l’autre côté de la plaque PEC est la copie de celui dans la région de  $H$  mise à jour. Les composantes de champ  $H$  de l’autre côté de la plaque PEC ont un traitement similaire, sauf que c’est le champ normal qui a le signe contraire.

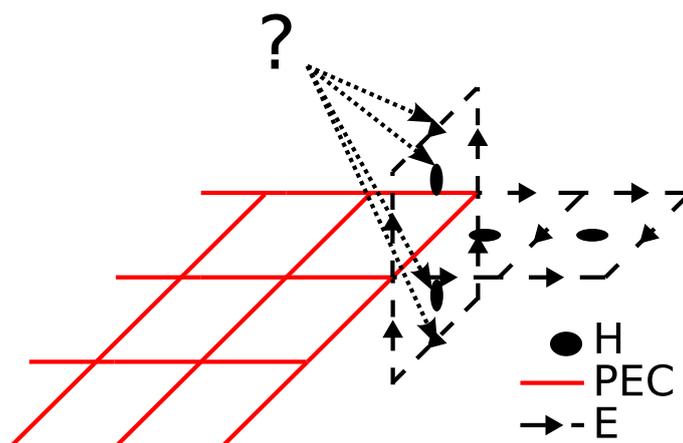


Figure 3.14 – Exemple de bord de plaque métallique où le principe d’image n’est pas utilisable sur les composantes de champ noté avec un "?". Leur stencil ne se retrouve pas dans la même configuration de la figure 3.13 pour le principe d’image.

l'algorithme et cette méthode paraît difficilement adaptable avec la méthode conforme.

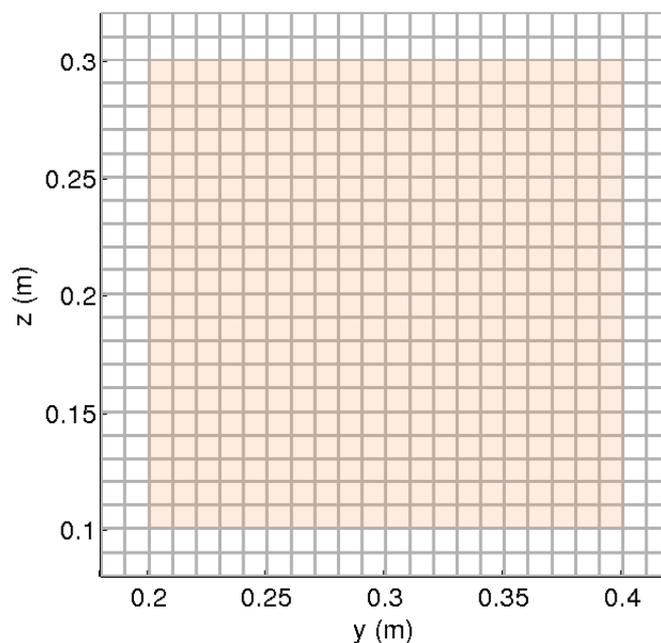
Les méthodes de pénalisation, où l'on introduit et "résout" la condition aux limites (ici PEC) dans les équations est aussi une possibilité, comme il a été fait par exemple dans [31]. Une fonction de pénalisation est introduite dans les équations, laquelle est construite afin que la solution des nouvelles équations converge assez rapidement à la solution exacte du problème initial. Cependant, nous avons choisi de les éviter car elles peuvent allonger significativement les temps de calcul et être délicats à traiter, notamment avec la méthode conforme.

L'approche par formulation intégrale indique que les contours s'adaptent à la paroi. Les contours standards sont alors modifiés via les valeurs des longueurs et surfaces. Dans le cas de maillage en escalier, la déformation de ces contours est simple à imaginer. Cependant, il est difficile de déformer et d'adapter le schéma avec certaines géométries. Par exemple, un bord de plaque traversant partiellement (perpendiculaire) le stencil est délicat à traiter. De nombreux tests, utilisant la théorie des images ou une déformation intuitive des contours, a montré que ces approches sont infructueuses. Les observations indiquent que les instabilités apparaissent tout d'abord au niveau des bords. Cette configuration, où le stencil n'est pas totalement traversé, est probablement la plus délicate à traiter. Afin d'éviter la discontinuité, une extrapolation de champ ont permis de retarder de l'instabilité [26, 33] pour le schéma de Fang en conforme. Une analyse des valeurs propres de la matrice d'amplification (2.33) dans l'équation de dispersion numérique montre que ces valeurs propres sont supérieures à 1 dès que les longueurs ou aires sont légèrement modifiées. Ces derniers articles proposent seulement un modèle lequel est un compromis entre précision et durée de stabilité.

Les auteurs du schéma M24 [37] ont utilisé une troncature du stencil en 2D. Ils n'ont observé aucune instabilité pour un nombre d'itérations relativement grand. Cependant, en 3D, outre les réflexions au niveau de l'interface entre les différents ordres, cette méthode est généralement instable. Pour le M24, une technique permettant de réduire les réflexions sur une bande de fréquence étroite a été validée [28]. Elle se base sur la correspondance des dispersions numériques tangentiels à l'interface. Un opérateur différentiel d'ordre 2 dans la direction normale à la paroi est utilisé, avec des coefficients appropriés dans la direction tangentielle à cette paroi. De plus, la modification locale du schéma change la condition CFL, laquelle peut restreindre le pas de temps. Cette même technique a été adaptée pour le schéma FV24 [29], avec la conclusion de l'inévitabilité de l'instabilité laquelle est simplement retardée [30]. Les auteurs émettent l'hypothèse que cette instabilité provient du fait que les stencils des deux schémas sont de taille différente.

Cette approche a été adaptée pour le schéma CM24, pour le cas de la figure 3.15 Sur le cas d'une plaque métallique, nous avons remarqué qu'en conservant les coefficients du schéma d'ordre 4 pour l'opérateur différentiel d'ordre 2 dans la direction normale à la paroi, l'instabilité est un peu plus retardée. La figure 3.16 montre les résultats obtenus dans le cas d'une plaque métallique de 20x20cm, maillée avec des cellules de 1cm. Les champs mesurés en temps sur cette figure sont situés proche d'un coin de la plaque et une impulsion ponctuelle Gaussienne de 1 Ghz a été utilisée. Notre approche montre que la divergence exponentielle

des champs a été retardée d'environ d'un facteur 10 dans ce cas de plaque métallique.



**Figure 3.15 – Configuration de la plaque 20x20cm et champ mesuré à proche d'un coin (à une cellule près).**

Afin d'éviter des discontinuités, nous avons établi un modèle de fil au bord des plaques métalliques. La discontinuité du champ électrique sur les bords ne permet pas d'utiliser l'équation, en espace libre, de la mise à jour du champ magnétique. Le modèle permet d'introduire un courant lequel se propage sur les fils afin d'avoir une composante électrique pour le champ magnétique situé aux abords de la plaque. Cette composante électrique est mise à jour avec un schéma d'ordre 2 et permet de rétablir une continuité pour la mise à jour du champ magnétique. Les résultats de tests montrent que la stabilité n'est pas améliorée.

S'il est possible de modéliser des plaques métalliques avec des fils (avec le modèle des fils obliques) alors une telle modélisation pourra probablement être stable car le modèle des fils obliques est stable (tests expérimentaux) avec la FDTD(2,4) (présenté dans le prochain chapitre). Ce modèle pourra ouvrir des perspectives et donnera une autre approche pour résoudre le problème présenté ici. Cette approche alternative sera décrit dans le prochain chapitre.

### 3.5 Hybridation FDTD d'ordre 2 et 4

L'objectif principal de l'hybridation de la méthode FDTD d'ordre 2 et 4 est de revenir à un environnement plus familier et dont on est relativement certain de la stabilité des modèles associés. De manière idéale, l'hybridation serait seulement appliquée dans une région entourant la structure avec peu de cellules d'ordre 2 (figure 3.17). Ceci pourrait donc servir à se dispenser de conditions aux frontières PEC pour un schéma FDTD d'ordre 4.

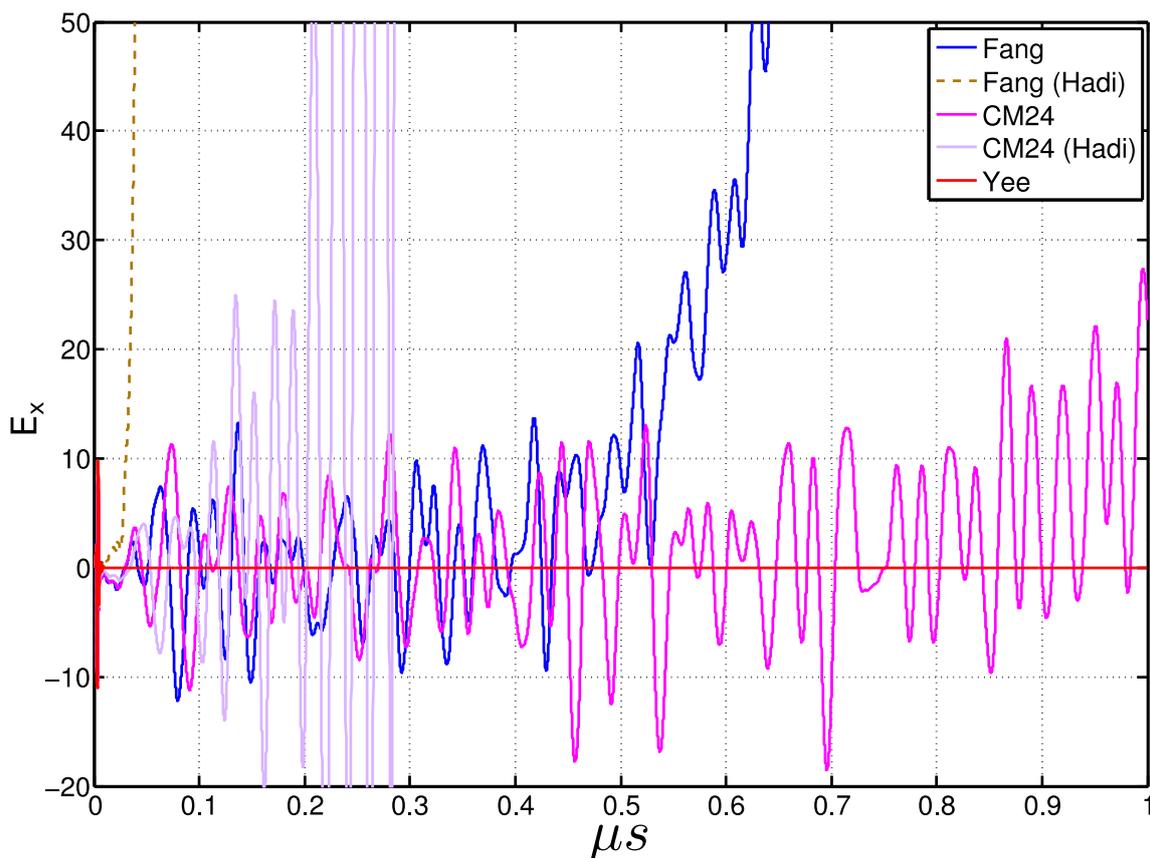


Figure 3.16 – Champ mesuré proche d'un coin d'une plaque métallique, avec une modification locale du schéma via l'opérateur d'ordre 2 lorsque le stencil est tronqué. (Hadi) signifie que les coefficients de cet opérateur sont égaux à 1. Dans le cas contraire, les coefficients sont ceux du schéma d'ordre 4.

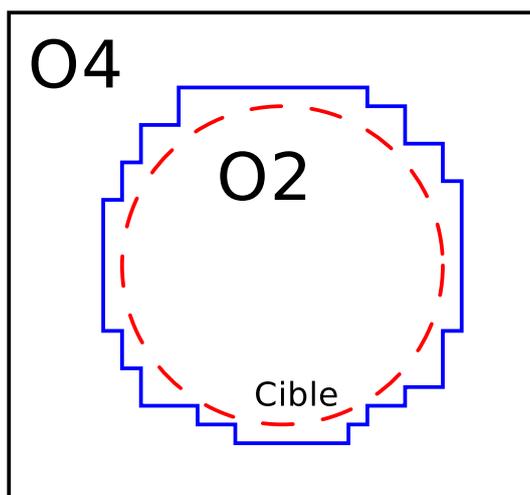


Figure 3.17 – L'hybridation entre l'ordre 2 et 4 délimite une région (entouré en bleu ici), idéalement la plus petite, où sera appliqué le schéma classique de Yee.

Une tentative d'hybridation a été réalisée dans [36] où une technique de sous-maillage a été utilisée. Le maillage a été modifié, notamment une division des cellules par 3 a été utilisée dans cet article. De plus, des états intermédiaires en temps sont aussi nécessaires dans leur méthode. Cependant, bien que la stabilité ait été améliorée grâce à des pondérations linéaires, la méthode est instable au bout d'un certain temps.

La Finite Integration Technique (FIT) est une méthode concurrente à la FDTD, laquelle utilise une formulation intégrale des équations de Maxwell. Dans l'article [38], les auteurs démontrent que des schémas FIT d'ordre supérieur peuvent être établis. L'exemple de l'article est un schéma d'ordre 4 en espace et en temps, avec une erreur de dispersion numérique d'ordre 2 (mais plus faible que le schéma de Yee). Cependant, l'approche utilisée pour la montée en ordre est un peu différente comparée à la FDTD. L'idée repose sur la conservation de la consistance dans la formulation FIT, des opérateurs discrets que sont le rotationnel  $C, \tilde{C}$  et la divergence  $S, \tilde{S}$  pour les champs électrique et magnétique, respectivement. Plus précisément, les schémas FIT d'ordre supérieur conservent les propriétés :

$$SC \equiv 0, \quad \tilde{S}\tilde{C} \equiv 0, \quad C = \tilde{C}^t. \quad (3.18)$$

Ainsi, l'opérateur différentiel n'est pas modifié. Le gain en précision est réalisé dans les équations constitutives :

$$\int_{\Delta l} E = M_{\epsilon^{-1}} \int_{\Delta A} D, \quad (3.19)$$

$$\int_{\Delta l} H = M_{\mu^{-1}} \int_{\Delta A} B, \quad (3.20)$$

$$\int_{\Delta l} E = M_{k^{-1}} \int_{\Delta A} J. \quad (3.21)$$

Les matrices  $M$  sont appelées matrices de matériau discrètes. L'ordre supérieur du schéma est obtenu via ces matrices. La matrice de matériau se décompose en un produit de matrices, définissant les relations entre les différentes entités physiques. L'équation de mise à jour de  $D$ , sans terme source, s'écrit :

$$\partial_t \int_{\Delta A} D = C \int_{\Delta l} H = CM_{\Delta l/\mu} M_{\mu} M_{\Delta A\mu^{-1}} \int_{\Delta A} B. \quad (3.22)$$

Si  $A$  est une surface dans le plan  $(u, v)$ , alors les entités physiques sont :

- $\int_{\Delta A} B$  le flux de surface dans le plan  $(u, v)$ ,
- $C$  le rotationnel standard,
- $M_{\Delta A\mu^{-1}}$  la transformation en champ de surface dans le plan  $(u, v)$ ,
- $M_{\mu}$  la transformation du milieu : c'est la matrice diagonale  $\frac{1}{\mu}$ ,
- $M_{\Delta l/\mu}$  la transformation en champ d'arête dans la direction  $w$ .

Le choix de la base décrivant les inconnues dans les équations constitutives modifient les matrices  $M_{\Delta A\mu^{-1}}, M_{\mu}$  et  $M_{\Delta l/\mu}$ . Par exemple, la matrice  $M_{\Delta A\mu^{-1}}$  représente la relation entre  $H$  et  $\int_{\Delta A} B$ . Ils postulent :

$$B = \int_{\Delta A} H\mu. \quad (3.23)$$

En développant  $H$  sur une base de fonctions biquadratiques, soit :

$$H(u, v) = a_1 + a_2u + a_3v + a_4u^2 + a_5v^2, \quad (3.24)$$

l'intégrale  $\int_{\Delta A} H \mu$  peut être calculée sur le support de la base et aboutit à une relation matricielle :

$$H = M_{\Delta A \mu^{-1}} \int_{\Delta A} B. \quad (3.25)$$

Avec la méthode FIT, l'hybridation de l'ordre 2 et 4 repose sur la non-modification du rotationnel  $C$  défini dans, par exemple :

$$\partial_t \int_{\Delta A} D = C \int_{\Delta I} H. \quad (3.26)$$

Le rotationnel  $C$  dans la méthode FIT est identique à celui du schéma de Yee. Le schéma CM24 utilise un rotationnel différent. Il est possible d'écrire le schéma CM24 ou de Fang avec la méthode FIT. Le rotationnel est différent et il existe une base permettant de déterminer la matrice de matériau. Cependant, l'hybridation implique que le rotationnel devra être égal à celui du schéma de Yee. Ainsi, la nouvelle base doit être choisie afin d'obtenir ce rotationnel standard.

Ceci signifie qu'une condition nécessaire à l'hybridation est l'existence d'une transformation linéaire entre le rotationnel standard et celui du schéma de Fang ou CM24. Avec les équations issues de la méthode FIT et de l'inversion de matrice (pseudo-inverse), nous n'avons pas obtenu une telle relation entre les rotationnels.

Un argument par l'absurde montre qu'une telle matrice ne peut exister. Supposons que cette matrice existe. Il existe donc une relation linéaire entre les rotationnels du schéma CM24 (ou de Fang) et du schéma de Yee. Ceci signifierait que le schéma CM24 peut s'écrire comme combinaison d'intégrale de contour "propre" (notion introduite dans le chapitre FDTD). Or, par construction, ni le schéma CM24 ni celui de Fang ne peuvent s'écrire sous une telle forme. La supposée matrice n'existe donc pas et il n'est pas possible d'hybrider le schéma CM24 avec celui de Yee via la méthode FIT. Cependant, cette méthode montre qu'il est possible d'hybrider des schémas de type CM24 avec des coefficients différents, mais toujours avec un stencil de même taille. La méthode FIT ne permet donc pas de résoudre le problème d'instabilité du schéma CM24 mais a pu définir les relations constitutives entre le champ  $E$  et  $D$  ou  $H$  et  $B$ .

### 3.6 Conclusion

L'approximation de la géométrie avec un maillage en marche d'escalier détériore la qualité des résultats. Avec le schéma de Yee, des techniques conformes apportent chacune un moyen d'éviter, au mieux, toute approximation de la géométrie. L'approche par formulation intégrale est commune à ces techniques conformes, montrant ainsi que ces techniques nécessitent une telle formulation du schéma. La diminution de la taille des cellules entraîne une réduction du pas de temps. Chaque technique repose sur un compromis entre ce pas de temps réduit et

le nombre de cellules en marche d'escalier restant. Seul la technique conforme ECT permet d'utiliser le pas de temps maximal du schéma et d'éliminer toute approximation en marche d'escalier. Cette technique se base sur la force électromotrice d'une cellule fictive laquelle redistribue les forces électromotrices des cellules qui la compose. Parmi les autres techniques, donc à pas de temps réduit, la technique conforme SC est la plus performante.

A l'exemple du schéma M24 conforme, nous avons proposé une formulation conforme pour le schéma CM24, basée sur sa formulation intégrale. Cependant, l'instabilité de notre approche de la modélisation des plaques métalliques est retrouvée dans cette formulation conforme. Diverses approches dans la littérature ont été menées afin d'obtenir des conditions aux limites de bords de plaques PEC stables, mais aucune n'a aboutit. L'hybridation entre la FDTD d'ordre 2 et d'ordre 4 n'étant pas stable non plus, elle ne permet pas de revenir à l'ordre 2 pour modéliser des plaques métalliques. Bien que la problématique reste encore ouverte, ce chapitre a permis d'explorer quelques pistes suivies dans la littérature et le modèle des fils obliques sera présenté dans le prochain chapitre comme une approche alternative à ce problème.

# Bibliographie

- [1] A. Taflove, S. Hagness, *Computational Electrodynamics : The Finite-Difference Time-Domain Method*, Third Edition, Boston, MA : Artech House, 2005.
- [2] A.C. Cangellaris, D.B. Wright, *Analysis of the Numerical Error Caused by the Stair-Stepped Approximation of a Conducting Boundary in FDTD Simulations of Electromagnetic Phenomena*, IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 39, pp. 1518-1528, Oct. 1991
- [3] A. Taflove, T.G. Jurgens, K.R. Umashankar, T.G. Moore, *Finite-difference time-domain modelling of curved surfaces*, IEEE Trans. Antennas Propagation, vol.40, pp.357-366, April 1992
- [4] A. Taflove, T.G. Jurgens, *Three-dimensional contour FDTD modeling of scattering from single and multiple bodies*, IEEE Trans. Antennas Propagation, vol.41, pp.1703-1708, 1993
- [5] S. Dey, R. Mittra, *A locally Conformal Finite-Difference Time-Domain (FDTD) Algorithm for Modeling Three-Dimensional Perfectly Conducting Objects*, IEEE Microwave Guided Wave Lett., vol.7, pp. 279-275, Sept. 1997
- [6] W. Yu, R. Mittra, *A conformal finite difference time domain technique for modeling curved dielectric surfaces*, IEEE Microwave Wireless Components Lett., vol. 11, pp. 25-27, 2001
- [7] I.A. Zagorodnov, R. Schuhmann, T. Weiland, *A uniformly stable conformal FDTD-method in Cartesian grids*, Int. J. Numer. Model. 2003 ; 16 :127-141, 2002
- [8] I.A. Zagorodnov, R. Schuhmann, T. Weiland, *Conformal FDTD-methods to avoid time step reduction with and without cell enlargement*, Journal of Computational Physics 225, 1493-1507, 2007
- [9] T. Xiao, Q.H. Liu, *Enlarged Cells for the Conformal FDTD Method to Avoid the Time Step Reduction*, IEEE Microwave and Wireless Components Lett., vol. 14, pp. 551-553, Dec. 2004
- [10] T. Xiao, Q.H. Liu, *A 3-D Enlarged cell Technique (ECT) for the Conformal FDTD Method*, IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 56, pp. 765-773, Mar. 2008
- [11] S. Benkler, N. Chavannes, N. Kuster, *A new 3-D conformal PEC FDTD scheme with user-defined geometric precision and derived stability*, IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 54, pp. 1843-1849, June 2006
- [12] C.J. Railton, I.J. Craddock, *Analysis of general 3-d PEC structure using improved CPFDTD algortihm*, Electron. Lett., vol. 31, pp. 1753-1755, Sept. 1995
- [13] C.J. Railton, I.J. Craddock, *Stabilised CPFDTD algorithm for the analysis of arbitrary 3D PEC structures*, Proc. Inst. Elect. Eng., vol. 143, pt. H, pp. 367-372, Oct. 1996

- [14] J. Anderson, M. Okoniewski, S.S. Stuchly, *Practical 3-D contour/staircase treatment of metal in FDTD*, IEEE Microwave Guided Wave Lett., vol. 6, pp. 146-148, Mar. 1996
- [15] K.S. Yee, J.S. Chen, A.H. Chang, *Conformal finite-Difference Time-domain (FDTD) with Overlapping Grids*, IEEE Trans. Antennas Propagation, vol. 40, pp. 1068-1075, Sept. 1992
- [16] M.W. Steeds, S.L. Broschat, J.B. Schneider, *A comparison of two conformal methods for FDTD modeling*, IEEE Trans. Electromagnetic compatibility, vol. 38, May 1996
- [17] N. Madsen, *"Divergence preserving discrete surface integral methods for Maxwell's equations using nonorthogonal unstructured grids"*, Tech. Rpt. UCRL-JC-109787, LLNL, Feb. 1992
- [18] S. Gedney, F. Lansing, *"Full wave analysis of printed microstrip devices using a generalized Yee algorithm"*, IEEE Ant. Prop. Symp. Dig., Ann Arbor, MI, 1993
- [19] S. Gednet, F. Lansing, D. Rascoe, *"A generalized Yee-algorithm for the analysis of microwave circuits devices"*, IEEE Trans. Microwave theory Tech, vol. 44, pp. 1393-1400, 1996
- [20] C.M Kuo, C.W Kuo, *A New Scheme for the Conformal FDTD Method to Calculate the Radar Cross Section of Perfect Conducting Curved Objects*, IEEE Ant. Wireless Prop. Lett., vol. 9, pp. 16-19, 2010
- [21] C. Nieter et al., *Application of Dey-Mittra conformal boundary algorithm to 3D electromagnetic modeling*, Journal of Computational Physics 228, 7902-7916, 2009
- [22] M.A. Kourah, M.F. Hadi, A.S. Al-Zayed, *Extending the enlarged cell and uniformly stable conformal techniques to modeling curved conductors in two-dimensional high-order finite-difference time-domain algorithms*, Int. J. Numer. Model, 26 :238-250
- [23] P. Mezzanote, L. Rosetti, R. Sorrentino, *A Simple Way to Model Curved Metal Boundaries in FDTD Algorithm Avoiding Staircase Approximation*, IEEE Microwave and Guided Wave Lett., vol.5, No 8, pp. 267-269, Aug. 1995
- [24] T. Weiland, *Erratum : Comment on [23]*, IEEE Microwave and Guided Wave Lett., vol.6, No 4, pp. 183-184, Apr. 1996
- [25] T. Weiland, *"A Discretization Method for the Solution of Maxwell's Equations for Six-Component Fields"*, Electronics and Communication, Vol. 31, p. 116-120, 1977
- [26] J. Wang et W.-Y. Yin, *"Development of a Novel FDTD (2, 4)-Compatible Conformal Scheme for Electromagnetic Computations of Complex Curved PEC Objects,"* IEEE Trans. on Antennas and Propag., VOL. 61, NO. 1, JAN. 2013
- [27] B.A. Al-Zohouri et M.F. Hadi, *"Conformal modelling of perfect conductors in the high-order M24 finite-difference time-domain algorithm,"* IET Microw. Antennas Propag., 2011, Vol. 5, Iss. 5, pp. 583-587
- [28] M. F. Hadi et R. K. Dib, *"Phase-Matching the Hybrid M24/S22 FDTD Algorithm,"* 23rd Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, March 2007.
- [29] M. F. Hadi, *"A Super-Phase Coherent 3D High-Order FDTD Algorithm,"* 23rd Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics, March 2007.

- [30] M. F. Hadi, "PHASE-MATCHING THE HYBRID FV<sub>24</sub>/S<sub>22</sub> FDTD ALGORITHM," Progress In Electromagnetics Research, PIER 72, 307–323, 2007.
- [31] R. Galagusz, D. Shirokoff, J.-C. Nave, "A Fourier penalty method for solving the time dependent Maxwell's equations in domains with curved boundaries, arXiv :1503.03914v1 [math.NA] 13 Mar. 15.
- [32] S. Zhao, G. W. Wei, "High-order FDTD methods via derivative matching for Maxwell's equations with material interfaces," JCP, 2004.
- [33] X. Yuan, W. Yin, X. Wang et al., "Optimized Conformal FDTD (2, 4) Method for Calculating Reflected and Diffracted Electromagnetic Fields of Perfectly Conducting Wedges," IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 56, No. 2, April 2014.
- [34] A. Yefet et P. G. Petropoulos, "A Staggered Fourth-Order Accurate Explicit Finite Difference Scheme for the Time-Domain Maxwell's Equations," Journal of Computational Physics 168, 286–315, 2001.
- [35] Z. Xie, C-H Chan, B. Zhang, "An explicit fourth-order staggered finite-difference time-domain method for Maxwell's equations," JCAM, 2002.
- [36] S. V. Georgakopoulos, , R. A. Renaut, C. A. Balanis, and C. R. Birtcher, "A hybrid forth-order FDTD utilizing a second-order FDTD subgrid," IEEE Microwave and Wireless Components Letters, Vol. 11, 462–464, 2001.
- [37] M. F. Hadi, M. Picket-May, "A Modified FDTD(2,4) Scheme for Modeling Electrically Large Structures with High-Phase Accuracy, " *IEEE Trans. Antennas Propag.*, 1997.
- [38] H. Spachmann, R. Schuhmann, T. Weiland, *Higher Order Spatial Operators for the Finite Integration Theory, ACES Journal, Vol. 17, No. 1, March 2002.*

## Modèles pour le calcul SER avec la méthode FDTD(2,4)

Les nombreux modèles développés pour le schéma de Yee [1] peuvent ne pas être applicables directement avec le schéma CM24. Par exemple, les modélisations d'une onde plane, des conditions aux frontières absorbantes, des structures, des câbles ou bien les modèles subcellulaires, doivent être réévaluées et adaptés pour la FDTD(2,4). Parmi tous les modèles, certains sont nécessaires afin de pouvoir calculer la SER d'une cible avec la méthode FDTD.

L'illumination de la cible par une onde plane et l'évaluation du champ lointain diffracté par cette cible constituent les étapes nécessaires dans la simulation FDTD pour le calcul de SER. Ce calcul nécessite les modèles énumérés ci-après. Chacun représente une étape dans la chaîne de calcul SER avec la méthode FDTD, comme indiqué sur la figure 4.1.

- Modélisation de la cible (informations de maillage et modèles d'équations pour le traitement des matériaux ou autres : modèles subcellulaires, conditions aux limites (Boundary Conditions (BC))...),
- Injection d'ondes planes et propagation à l'intérieur d'une surface de Huygens par la méthode dite de champ total (Total Field–Scattered Field : TFSF),
- Diffraction de l'onde par la cible,
- Absorption des ondes sortantes du volume de calcul par des conditions aux frontières absorbantes (ABC),
- Calcul du champ lointain par la transformation champ proche-champ lointain (Near to Far Field : NTFF) réalisée au niveau d'une deuxième surface de Huygens, extérieure à la première, c'est-à-dire dans la zone de champ diffracté.
- Calcul de la SER de la cible.

La problématique sur la modélisation de la cible par la méthode FDTD(2,4) a été abordée dans le chapitre précédent. Dans ce chapitre, nous allons évaluer la possibilité d'utiliser le modèle de fils obliques afin de modéliser une cible PEC. L'idée de cette approche alternative est d'obtenir le rayonnement d'une structure PEC illuminée par une onde via le modèle des fils obliques. Ce modèle n'introduit pas de discontinuités de champ et offre une possibilité d'obtenir un modèle stable pour la modélisation de structure PEC. L'approche avec le modèle des fils obliques est une alternative étudiée vers la fin de cette thèse et ce manuscrit ne contient

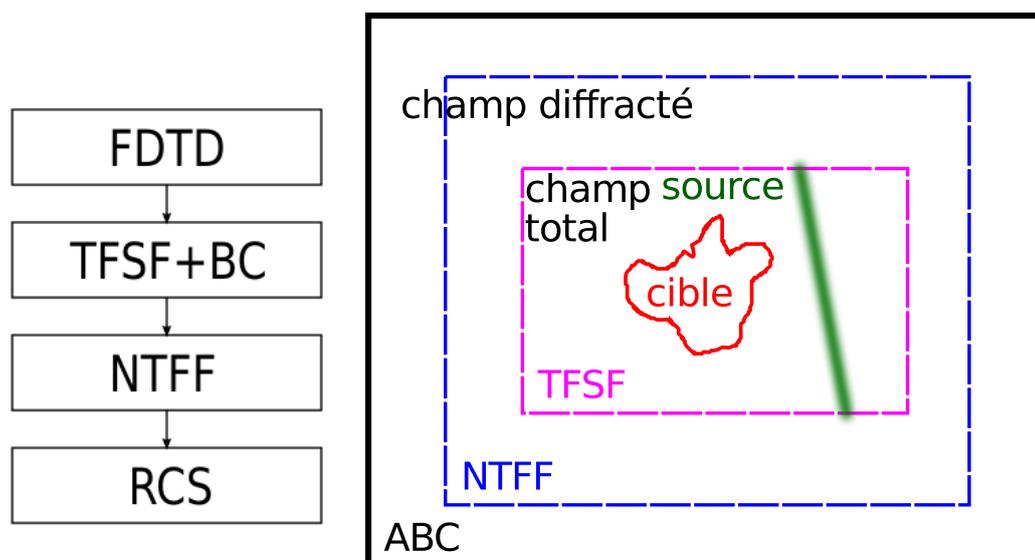


Figure 4.1 – Chaîne de calcul de la SER pour la FDTD incluant l'illumination de la cible par une onde plane (surface de Huygens TFSF) et une transformée champ proche–champ lointain (NTFF).

alors que les premières analyses d'une telle approche.

Les autres modèles listés ci-dessus doivent être adaptés si besoin pour la FDTD(2,4). Les sections de ce chapitre décrivent chacun de ces modèles pour le schéma CM24.

Ce chapitre débute par la présentation de la technique de calcul du champ lointain par la FDTD [15]; ce modèle ne nécessitant aucune adaptation pour être utilisé dans la FDTD(2,4). La section suivante concerne les développements de l'injecteur d'ondes planes pour le schéma CM24 [1]. Cette section décrit aussi l'adaptation de la dispersion numérique entre l'injecteur d'ondes planes et le schéma CM24, suivant l'exemple pour le schéma de Yee [15]. L'adaptation de la dispersion numérique permet de réduire le niveau du bruit du champ résiduel sortant de la surface de Huygens de l'injecteur d'ondes planes. Les conditions aux frontières de type Huygens ABC (HABC) [9] puis de type Perfectly Matched Layers (PML) [16] adaptées pour le schéma CM24 seront ensuite proposées.

La technique HABC offre la possibilité d'utiliser les opérateurs de conditions aux frontières sous une autre forme, elle facilite l'implémentation de ces opérateurs. De plus, cette approche offre la possibilité de coupler la technique HABC avec d'autres conditions aux frontières. Cette technique est très adaptée pour les ondes propagatives en espace libre et peut aussi traiter les ondes évanescentes à l'aide d'une autre couche HABC, ou bien en laissant un espace vide entre les HABCs et la frontière du domaine de calcul.

Enfin, la section analysant la modélisation des structures via le modèle de fils obliques termine ce chapitre.

L'implémentation du schéma CM24 et des modèles requis pour le calcul de SER, ont été réalisés au sein du solveur TEMSI-FD de l'équipe CEM & Diffraction de l'institut XLIM. Le schéma CM24 a été intégré au solveur TEMSI-FD afin de bénéficier des fonctionnalités de ce dernier, lorsqu'elles sont applicables pour le schéma CM24. Les définitions des données

de modélisation (entrées, sorties, post-traitement...) et certains modèles présentés dans ce chapitre font partis des fonctionnalités utilisables par le schéma CM24. En ce qui concerne les fonctionnalités non extensibles, des modules remplacent ceux existants et leur l'utilisation passe simplement par un nouveau mot clé. Un exemple de fichier de données d'entrées pour un calcul de SER est joint en annexe 5.7.

## 4.1 Calcul du Champ Lointain par la FDTD

Le calcul du champ lointain pour les schémas FDTD(2,4) et du schéma de Yee est identique. Ce calcul repose sur le rayonnement de sources de courants électriques  $J_s$  et magnétiques  $M_s$  réparties sur une surface de Huygens entourant la cible [7, 8] et les sources de rayonnement. Avec ce principe, le champ électromagnétique contenu dans une surface fermée est remplacé par des courants équivalents situés sur cette surface, comme indiqué sur la figure 4.2. Ainsi, à

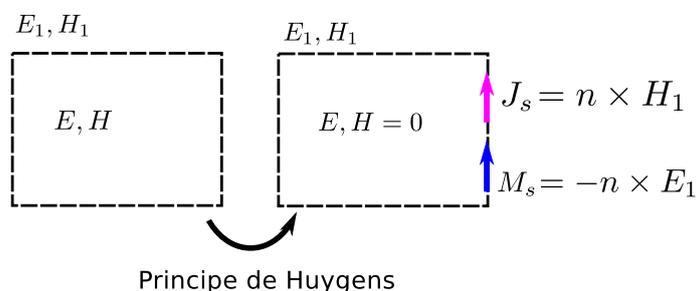


Figure 4.2 – Principe d'équivalence de Huygens

l'intérieur de cette zone, le champ est nul et à l'extérieur, le champ diffracté est celui provenant des sources équivalentes. Les sources de courants équivalents électriques  $J_s$  et magnétiques  $M_s$ , indiquées sur la figure 4.2, sont définies par :

$$J_s = n \times H_1, \quad M_s = -n \times E_1. \quad (4.1)$$

où  $n$  est la normale unitaire sortante à la surface de Huygens.

Les potentiels vecteurs  $A$  et  $G$  sont calculés à partir de ces courants équivalents, puis permettent de déduire le champ lointain dans une direction de rayonnement  $(\theta, \phi)$ . Avec une distance  $r$  assez grande, ces potentiels sont donnés par :

$$\begin{aligned} A(r, f) &= \frac{\mu_0 e^{-jkr}}{4\pi r} \int_S J_s e^{jkr' \cos \psi} dS, \\ G(r, f) &= \frac{\epsilon_0 e^{-jkr}}{4\pi r} \int_S M_s e^{jkr' \cos \psi} dS. \end{aligned} \quad (4.2)$$

où l'angle  $\psi$  et les vecteurs  $r, r'$  sont ceux indiqués par la figure 4.3. En coordonnées

sphériques, le champ lointain est alors :

$$\begin{aligned} E_\theta &= -j\omega\left(A_\theta + \frac{\mu_0}{\epsilon_0}G_\phi\right) \\ E_\phi &= -j\omega\left(A_\phi - \frac{\mu_0}{\epsilon_0}G_\theta\right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

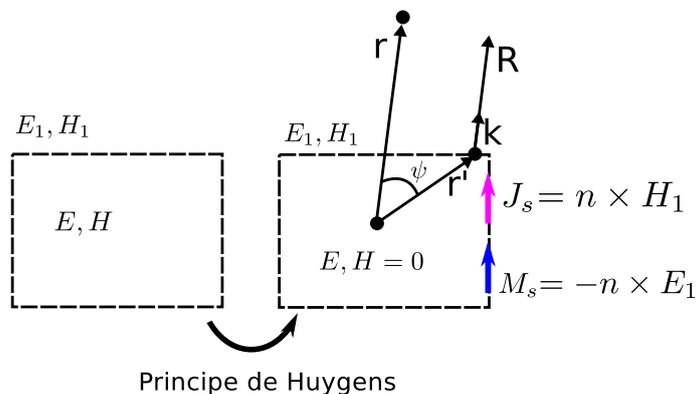


Figure 4.3 – Transformation champ proche-champ lointain.

Le calcul du rayonnement de sources de courant est indépendant de l'ordre de la méthode FDTD [15]. Par conséquent, aucune adaptation n'est nécessaire pour le calcul du champ lointain.

Cependant, deux approches de calcul du champ lointain existent : l'approche fréquentielle et l'approche temporelle. Leurs efficacités, étudiées dans [15], en terme de temps de calcul, dépendent du nombre de fréquences et de directions de rayonnement  $(\theta, \phi)$ . Il sera par exemple préférable d'utiliser l'approche temporelle lorsque le nombre de fréquences est important.

Le solveur TEMSI-FD peut évaluer le champ lointain normalisé par rapport au spectre de la fonction source. Ce calcul est basé sur la méthode [13]. Plus précisément, il donne la fonction caractéristique de rayonnement  $F(f, \theta, \phi)$  reliée au champ électrique par :

$$\begin{pmatrix} E_\theta \\ E_\phi \end{pmatrix} = E(f, r, \theta, \phi) = \frac{e^{-j2\pi fr/c}}{r} F(f, \theta, \phi). \quad (4.4)$$

Ensuite, la SER en champ lointain, avant réception (avec donc les deux polarisations  $\theta$  et  $\phi$ ), revient à :

$$\sigma = 4\pi \frac{|F_\theta|^2 + |F_\phi|^2}{|E_i|^2} \quad (4.5)$$

où  $E_i$  est le champ électrique incident (une onde plane). Il est aussi possible de calculer la SER suivants les co-polarisations HH, VV et polarisations croisées HV, VH (Chap. 2 : section 1.1.3) à partir des fonctions  $F_\theta$  et  $F_\phi$ .

## 4.2 Injecteur d'ondes planes

L'injecteur d'ondes planes pour la FDTD utilise aussi une surface de Huygens. Contrairement à la problématique en rayonnement, la surface de Huygens sert à illuminer la zone interne avec un champ incident qui sera en théorie nul à l'extérieur de celle-ci.

La technique de champ total–champ diffracté (Total Field–Scattered Field TFSS) est reprise pour l'injecteur d'ondes planes pour le schéma CM24. Cette technique partage l'espace en deux régions : la zone de champ total et de champ diffracté, comme indiqué sur la figure 4.1. Cette zone est définie dans la grille cartésienne 3D par un parallélépipède rectangle composé de six faces de Huygens. Le champ total est la somme du champ incident (l'onde plane) et de celui diffracté par la cible. Par exemple sur le champ  $E$ , ceci se traduit par l'égalité suivante :

$$E^t = E^d + E^{inc}, \quad (4.6)$$

où  $E^{inc}$  désigne le champ incident,  $E^d$  le champ diffracté et  $E^t$  le champ total. Cette décomposition se retrouve dans les équations du schéma FDTD et l'idée est de garder la cohérence du type de champ dans ces équations.

Rappelons que le stencil du schéma CM24 est élargi (figure 2.26), et que l'équation de mise à jour d'une composante de champ  $E$  ou  $H$  nécessite la contribution de 24 composantes de champ  $H$  ou  $E$ , respectivement. Par exemple, pour la composante  $H_y$ , notée ici sans indice de position  $(i, j, k)$  :

$$\begin{aligned} H_y^{n+1} = & H_y^n + \frac{\Delta t}{\mu} \\ & \left[ K_3 \left( \frac{E_{z,0}^+ - E_{z,0}^-}{\Delta x} - \frac{E_{x,0}^+ - E_{x,0}^-}{\Delta z} \right) \right. \\ & + K_1 \left( \frac{E_{z,0}^{++} - E_{z,0}^{--}}{\Delta x} - \frac{E_{x,0}^{t,++} - E_{x,0}^{t,--}}{\Delta z} \right) \\ & + K_4 \left( \frac{E_{z,1}^+ - E_{z,1}^- + E_{z,-1}^+ - E_{z,-1}^-}{\Delta x} - \frac{E_{x,1}^+ - E_{x,1}^- + E_{x,-1}^+ - E_{x,-1}^-}{\Delta z} \right) \\ & \left. + K_2 \left( \frac{E_{z,1}^{++} - E_{z,1}^{--} + E_{z,-1}^{++} - E_{z,-1}^{--}}{\Delta x} - \frac{E_{x,1}^{++} - E_{x,1}^{--} + E_{x,-1}^{++} - E_{x,-1}^{--}}{\Delta z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Avant d'écrire les modifications sur cette équation, notons que les composantes de champs concernées par ces modifications sont celles qui sont tangentes à une face de Huygens. Parce que le stencil du schéma CM24 est élargi, le nombre de champs à modifier est trois fois plus important que dans le schéma de Yee. L'exemple ci-dessous illustre et sert de base pour les développements effectués dans cette section.

Supposons que l'on a une surface  $x = i_p$ , la surface en  $x_{sup}$  de la boîte de Huygens. Les champs à modifier sont, avec des indices de cellules  $i_p$  :

- $H_y^t : x \in \{i_p - 1\}$ ;  $H_y^d : x \in \{i_p, i_p + 1\}$ ,

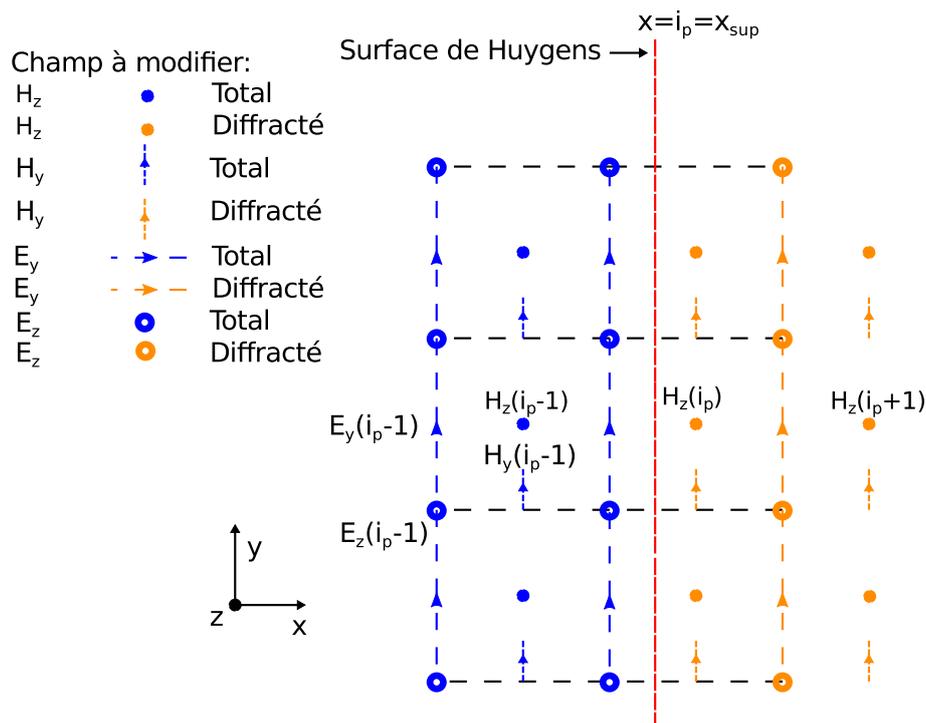


Figure 4.4 – Coupe 2D dans le plan  $(x,y)$  de la face  $x = i_p = x_{sup}$  de la surface de Huygens pour l'injecteur d'ondes planes.

- $H_z^t : x \in \{i_p - 1\}$ ;  $H_z^d : x \in \{i_p, i_p + 1\}$ ,
- $E_y^t : x \in \{i_p - 1, i_p\}$ ;  $E_y^d : x \in \{i_p + 1\}$ ,
- $E_z^t : x \in \{i_p - 1, i_p\}$ ;  $E_z^d : x \in \{i_p + 1\}$ .

Comme indiqué sur la figure 4.4, la surface de Huygens fait intervenir six plans  $(y,z)$  de champs parallèles à cette surface.

Notons que la mise à jour d'un champ dans une cellule par le schéma CM24 nécessite des champs dans des cellules diagonales à celle-ci. Ces champs sont aussi concernés par les modifications introduites par l'injecteur d'ondes planes. Ces champs sont indiqués sur la figure 4.5.

Maintenant que les champs à modifier sont connus, les équations du schéma FDTD pour ces champs montrent que différents types de champs sont utilisés. Par exemple, pour le cas de la figure 4.4, la mise à jour du champ  $H_y^t$  en  $i_p - 1$  s'écrit :

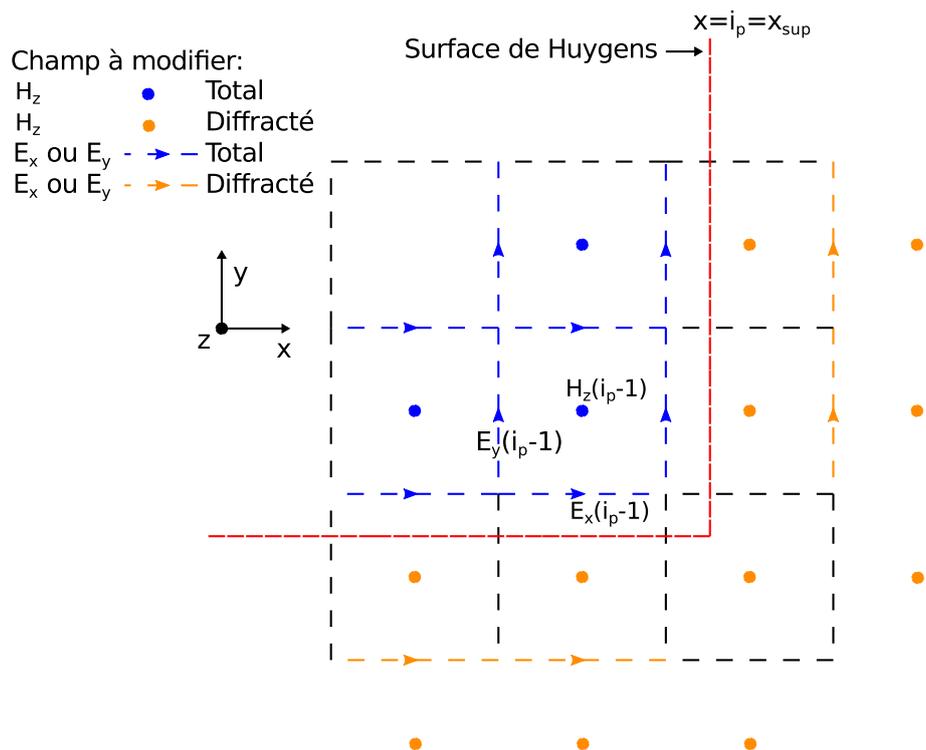


Figure 4.5 – Coupe 2D dans le plan  $(x,y)$  d'un coin entre les faces  $x_{sup}$  et  $y_{inf}$  de la surface de Huygens pour l'injecteur d'ondes planes.

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_y^{t,n+1} = & H_y^{t,n} + \frac{\Delta t}{\mu} \\
 & \left[ K_3 \left( \frac{E_{z,0}^{t,+} - E_{z,0}^{t,-}}{\Delta x} - \frac{E_{x,0}^{t,+} - E_{x,0}^{t,-}}{\Delta z} \right) \right. \\
 & + K_1 \left( \frac{E_{z,0}^{d,++} - E_{z,0}^{d,--}}{\Delta x} - \frac{E_{x,0}^{d,++} - E_{x,0}^{d,--}}{\Delta z} \right) \\
 & + K_4 \left( \frac{E_{z,1}^{t,+} - E_{z,1}^{t,-} + E_{z,-1}^{t,+,-} - E_{z,-1}^{t,-,-}}{\Delta x} - \frac{E_{x,1}^{d,+} - E_{x,1}^{d,-} + E_{x,-1}^{t,+} - E_{x,-1}^{t,-}}{\Delta z} \right) \\
 & \left. + K_2 \left( \frac{E_{z,1}^{d,++} - E_{z,1}^{d,--} + E_{z,-1}^{d,++} - E_{z,-1}^{d,--}}{\Delta x} - \frac{E_{x,1}^{d,++} - E_{x,1}^{d,--} + E_{x,-1}^{t,++} - E_{x,-1}^{t,-,-}}{\Delta z} \right) \right], \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

La technique TFSF consiste alors à corriger cette équation en ajoutant ou en retranchant des termes de champ incident pour ne réaliser que des opérations sur des champs de même type. Nous reviendrons sur les termes additionnels pour cette correction après avoir défini la méthode de calcul du champ incident.

Le calcul du champ incident peut être effectué analytiquement ou bien numériquement via un calcul 1D. Le champ incident à un point d'espace  $M$  est défini par :

$$E^{inc}(M, t) = E_0(t - r/c) \quad (4.9)$$

où  $r$  est la distance entre le point M et le point d'origine de la fonction source. Le premier choix implique un calcul d'une fonction source impulsionnelle définie le plus souvent par une fonction exponentielle, pour chaque modification des champs cités précédemment. Une telle implémentation augmente significativement les temps de calcul par rapport à l'approche via une règle 1D. Outre l'accélération du calcul avec la technique de propagation sur une règle 1D, cette technique permet d'adapter la dispersion numérique du schéma FDTD 1D à celle du schéma FDTD 3D. Cette adaptation de la dispersion numérique réduit significativement le niveau de bruit de champ sortant de la boîte de Huygens. Moins ce niveau de bruit sera important, moins le champ diffracté sera pollué ce qui rendra le calcul de la SER plus précis (en terme de dynamique en amplitude de champ).

#### 4.2.1 Calcul du champ incident via une règle 1D

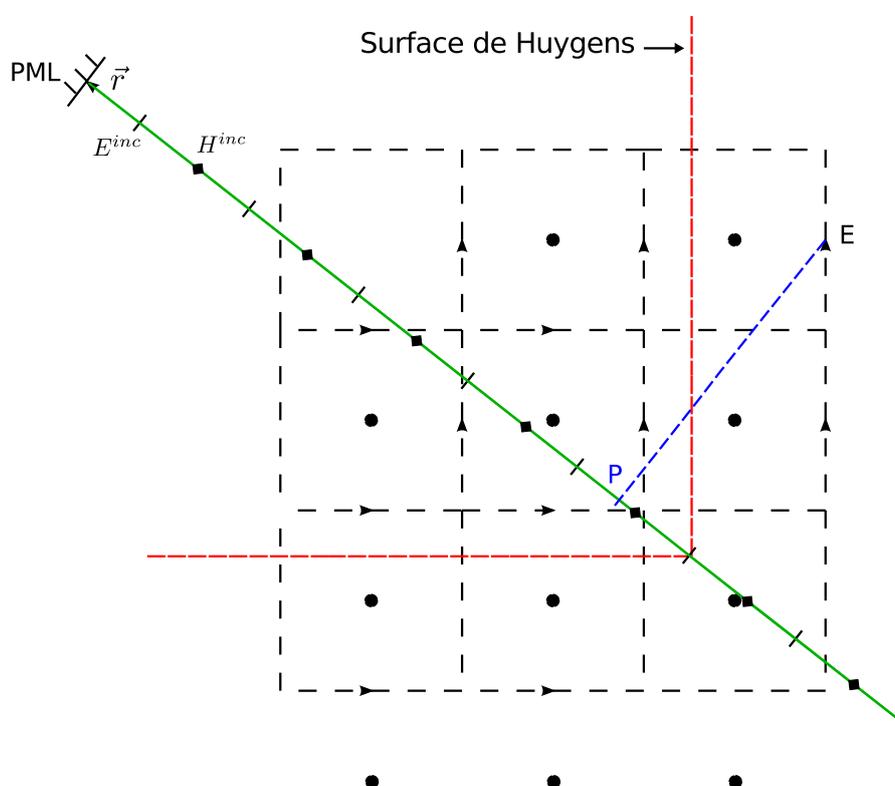


Figure 4.6 – Règle 1D pour l'injecteur d'ondes planes. Les conditions absorbantes à la frontière sont de type Perfectly Matched Layers (PML) et sont situées hors de la boîte de Huygens.

Le calcul du champ de l'onde plane incidente est réalisé à l'aide d'un schéma 1D s'appliquant sur une règle 1D de direction  $\vec{r}$ , et des projections des champs de la règle 1D sur la frontière TFSE, comme décrit sur la figure 4.6. Comme pour le calcul analytique du champ incident, il est nécessaire de connaître la projection  $P$  sur la règle 1D de chaque champ 3D à mettre à jour. Cependant, le point  $P$  peut ne pas correspondre à un point de calcul 1D de champ incident  $E^{inc}$  si la discrétisation spatiale de la règle 1D n'est pas adaptée. Une interpolation est alors nécessaire afin d'approximer le champ incident à ce point  $P$  (Fig. 4.6). De plus, celle-ci doit être d'ordre suffisant, par exemple d'ordre 4 pour notre cas. En effet,

l'erreur commise via cette interpolation contribue au niveau de bruit de champ de l'onde plane sortant de la zone de champ total.

La règle 1D est terminée avec une condition ABC permettant d'éviter des réflexions dans la zone de champ total. Pour ce faire, des couches de cellules de types Perfectly Matched Layers (PML) sont employées pour absorber l'onde plane sortante de la règle 1D. Ce type de condition ABC sera présenté dans une prochaine section pour le schéma CM24. Cette absorption est bien évidemment réalisée hors de la boîte de Huygens (4.6).

D'autre part, la dispersion numérique du schéma 1D est souvent différente du schéma 3D. Le pas spatial 1D pour la règle 1D peut être choisi judicieusement afin de minimiser l'erreur commise par la différence de vitesse de propagation entre le schéma 1D et 3D. Cette adaptation requiert que le schéma 1D puisse reproduire, aussi bien que possible, la dispersion numérique du schéma 3D dans la direction de l'onde plane. Habituellement, la version 1D du schéma 3D est utilisée mais il est possible d'utiliser un schéma différent pour le schéma 1D. L'analyse concernant ce choix du schéma 1D et la description de l'adaptation de la dispersion numérique sera faite plus loin, dans leurs sections respectives. Auparavant, un exemple portant sur les équations de la méthode TFSF sur une seule face de Huygens est présenté pour l'injecteur d'onde plane.

#### 4.2.2 Exemple pour une surface de Huygens

Cette section donne un exemple de surface de Huygens pour la méthode TFSF. Les différentes expressions intervenant sur les champs à modifier sont explicitées. Rappelons les étapes :

- Détermination des champs 3D à modifier sur la surface de Huygens,
- Détermination des points de projection sur la règle 1D qui nécessitent une interpolation d'ordre suffisant,
- Calcul du champ incident, des coefficients d'interpolation et projection sur les composantes cartésiennes de champ,
- Mise à jour des champs 3D à modifier proche de la surface de Huygens.

Considérons la face  $x_{sup}$  de la boîte, comme décrit précédemment (Figure 4.4), les champs à modifier sont :

- $H_y^t(i_p - 1, j_{min} - 1 : j_{max} + 1, k_{min} - 1 : k_{max} + 1)$
- $H_y^d(i_p : i_p + 1, j_{min} - 1 : j_{max} + 1, k_{min} - 1 : k_{max} + 1),$
- $H_z^t(i_p - 1, j_{min} - 1 : j_{max} + 1, k_{min} - 1 : k_{max} + 1)$
- $H_z^d(i_p : i_p + 1, j_{min} - 1 : j_{max} + 1, k_{min} - 1 : k_{max} + 1),$
- $E_y^t(i_p - 1 : i_p, j_{min} - 1 : j_{max} + 1, k_{min} - 1 : k_{max} + 1)$
- $E_y^d(i_p + 1, j_{min} - 1 : j_{max} + 1, k_{min} - 1 : k_{max} + 1),$
- $E_z^t(i_p - 1 : i_p, j_{min} - 1 : j_{max} + 1, k_{min} - 1 : k_{max} + 1)$
- $E_z^d(i_p + 1, j_{min} - 1 : j_{max} + 1, k_{min} - 1 : k_{max} + 1).$

où le symbole : désigne l'ensemble d'indices dans la direction donnée. Par exemple :  $j_{min} - 1 : j_{max} + 1$  désigne l'ensemble des indices  $j_{min} - 1 \leq j \leq j_{max} + 1$  dans la direction axiale  $y$ .

La direction de l'onde plane injectée est donnée en coordonnées sphériques, par un vecteur  $\vec{r}$  ou par des angles  $(\theta, \phi)$ . Les projections sur la droite 1D de direction  $\vec{r}$  s'écrivent, de manière générale pour un point  $M \in \mathbb{R}^3$  de la surface de Huygens :

$$P_{\vec{r}}(\overrightarrow{OM}) = M' = \begin{pmatrix} O_x + r_x \overrightarrow{OM}_x \\ O_y + r_y \overrightarrow{OM}_y \\ O_z + r_z \overrightarrow{OM}_z \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

où  $O$  est l'origine de l'onde plane, i.e. l'un des huit coins de la boîte de Huygens. Le vecteur unitaire  $\vec{r}$  est défini par :

$$r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Ensuite, une interpolation de Lagrange d'ordre 4, comme proposé par Ogur et Gürel [2], est utilisée pour approximer le champ incident au point  $M'$  correspondant à un point  $P \in \mathbb{R}$  de la droite 1D, par exemple pour le champ  $E$  :

$$E^{inc}|_P = -\frac{p(p-1)(p-2)}{6} E^{inc}|_{i-1} + \frac{(p^2-1)(p-2)}{6} E^{inc}|_i - \frac{p(p+1)(p-2)}{6} E^{inc}|_{i+1} + \frac{p(p^2-1)}{6} E^{inc}|_{i+2}, \quad (4.12)$$

où  $i$  appartient à l'ensemble des indices des points de discrétisation de la droite 1D et tel que :

$$i \leq P \leq i+1, \quad (4.13)$$

et  $p = \frac{r \cdot \overrightarrow{OM}}{\Delta r}$ . Une interpolation de Lagrange d'ordre 6 a aussi été testée :

$$E^{inc}|_P = \frac{p(p^2-1)(p-3)}{120} E^{inc}|_{i-2} - \frac{(p+2)p(p-1)(p-2)(p-3)}{24} E^{inc}|_{i-1} + \frac{(p+2)(p^2-1)(p-2)(p-3)}{12} E^{inc}|_i - \frac{(p+2)(p+1)p(p-2)(p-3)}{12} E^{inc}|_{i+1} + \frac{(p+2)p(p^2-1)(p-3)}{24} E^{inc}|_{i+2} - \frac{(p+2)p(p^2-1)(p-2)}{120} E^{inc}|_{i+3}. \quad (4.14)$$

Le champ incident est introduit hors de la boîte de Huygens et se propage dans la direction souhaitée avec le schéma 1D, aboutissant aux valeurs  $E^{inc}$  et  $H^{inc}$ . Cependant, selon la polarisation de l'onde plane, il faut écrire les relations entre les champs cartésiens et le champ incident, en utilisant la matrice de changement de base des coordonnées sphériques

vers celles cartésiennes, par exemple pour le champ  $E$  :

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi & \cos \theta \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \sin \phi & \cos \phi \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r \\ E_\theta \\ E_\phi \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Le champ incident polarisé aux composantes de champ en coordonnées sphériques :

$$E_\theta = E^{inc} \cos \psi, \quad E_\phi = E^{inc} \sin \psi, \quad H_\theta = -H^{inc} \sin \psi, \quad H_\phi = H^{inc} \cos \psi \quad (4.16)$$

La mise à jour partielle des champs s'écrit alors, en commençant par le champ total  $\tilde{H}_y^{t,n+1}$  sur le plan  $x = i_p - 1$ , pour le schéma CM24 :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_y^{t,n+1} = & H_y^{t,n} + \frac{\Delta t}{\mu} \\ & \left[ K_3 \left( \frac{E_{z,0}^{t,+} - E_{z,0}^{t,-}}{\Delta x} - \frac{E_{x,0}^{t,+} - E_{x,0}^{t,-}}{\Delta z} \right) \right. \\ & + K_1 \left( \frac{E_{z,0}^{d,++} - E_{z,0}^{d,--}}{\Delta x} - \frac{E_{x,0}^{d,++} - E_{x,0}^{d,--}}{\Delta z} \right) \\ & + K_4 \left( \frac{E_{z,1}^{t,+} - E_{z,1}^{t,-} + E_{z,-1}^{t,+,-} - E_{z,-1}^{t,-,-}}{\Delta x} - \frac{E_{x,1}^{d,+} - E_{x,1}^{d,-} + E_{x,-1}^{t,+} - E_{x,-1}^{t,-}}{\Delta z} \right) \\ & \left. + K_2 \left( \frac{E_{z,1}^{d,++} - E_{z,1}^{d,--} + E_{z,-1}^{d,++} - E_{z,-1}^{d,--}}{\Delta x} - \frac{E_{x,1}^{d,++} - E_{x,1}^{d,--} + E_{x,-1}^{t,++} - E_{x,-1}^{t,--}}{\Delta z} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.17)$$

où quatre champs  $E_x$  et trois champs  $E_z$  sont situés dans le domaine de champ diffracté. Il faut donc compléter ces champs avec le champ incident afin d'avoir des champs de même "nature". Dans la suite, les termes correctifs sont donnés pour le cas le plus courant d'un champ à corriger. Les exceptions se trouvant aux bords de la face de Huygens, auxquels cas certains termes additionnels sont à ôter.

Sur la surface en  $x = i_p - 1$ , sauf pour les bords de la face de Huygens :

$$\begin{aligned} H_y^{t,n+1} = & \tilde{H}_y^{t,n} + \frac{\Delta t}{\mu} \\ & \left[ K_1 \frac{E_{z,0}^{inc,++}}{\Delta x} - K_4 \frac{E_{x,1}^{inc,+} - E_{x,1}^{inc,-}}{\Delta z} \right. \\ & \left. + K_2 \left( \frac{E_{z,1}^{inc,++} + E_{z,-1}^{inc,++}}{\Delta x} - \frac{E_{x,1}^{inc,++} - E_{x,1}^{inc,--}}{\Delta z} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Sur la surface en  $x = i_p$  :

$$\begin{aligned}
 H_y^{d,n+1} = & \tilde{H}_y^{d,n} - \frac{\Delta t}{\mu} \\
 & \left[ -K_3 \frac{E_{z,0}^{inc,-}}{\Delta x} - K_1 \frac{E_{z,0}^{inc,--}}{\Delta x} \right. \\
 & - K_4 \left( \frac{E_{z,1}^{inc,-} + E_{z,-1}^{inc,-}}{\Delta x} + \frac{E_{x,-1}^{inc,+} - E_{x,-1}^{inc,-}}{\Delta z} \right) \\
 & \left. - K_2 \left( \frac{E_{z,1}^{inc,--} + E_{z,-1}^{inc,--}}{\Delta x} + \frac{E_{x,-1}^{inc,++} - E_{x,-1}^{inc,--}}{\Delta z} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

et sur l'autre surface en  $x = i_p + 1$  :

$$\begin{aligned}
 H_y^{d,n+1} = & \tilde{H}_y^{d,n} - \frac{\Delta t}{\mu} \\
 & \left[ -K_1 \frac{E_{z,0}^{inc,--}}{\Delta x} - K_2 \left( \frac{E_{z,1}^{inc,--} + E_{z,-1}^{inc,--,-}}{\Delta x} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

Pour les autres champs, les équations s'écrivent similairement. Pour  $H_z$ , dans l'ordre croissant suivant  $x$ , sur la surface en  $x = i_p - 1$  :

$$\begin{aligned}
 H_z^{t,n+1} = & \tilde{H}_z^{t,n} + \frac{\Delta t}{\mu} \\
 & \left[ -K_1 \frac{E_{y,0}^{inc,++}}{\Delta x} + K_4 \frac{E_{x,1}^{inc,+} - E_{x,1}^{inc,-}}{\Delta y} \right. \\
 & \left. - K_2 \left( \frac{E_{y,1}^{inc,++} + E_{y,-1}^{inc,++}}{\Delta x} - \frac{E_{x,1}^{inc,++} - E_{x,1}^{inc,--}}{\Delta y} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

puis, sur la surface en  $x = i_p$  :

$$\begin{aligned}
 H_z^{d,n+1} = & \tilde{H}_z^{d,n} - \frac{\Delta t}{\mu} \\
 & \left[ K_3 \frac{E_{y,0}^{inc,-}}{\Delta x} + K_1 \frac{E_{y,0}^{inc,--}}{\Delta x} \right. \\
 & + K_4 \left( \frac{E_{y,1}^{inc,-} + E_{y,-1}^{inc,-}}{\Delta x} + \frac{E_{x,-1}^{inc,+} - E_{x,-1}^{inc,-}}{\Delta y} \right) \\
 & \left. + K_2 \left( \frac{E_{y,1}^{inc,--} + E_{y,-1}^{inc,--}}{\Delta x} + \frac{E_{x,-1}^{inc,++} - E_{x,-1}^{inc,--}}{\Delta y} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

et enfin sur la surface en  $x = i_p + 1$  :

$$H_z^{d,n+1} = \tilde{H}_z^{d,n} - \frac{\Delta t}{\mu} \left[ K_1 \frac{E_{y,0}^{inc,-,-}}{\Delta x} + K_2 \left( \frac{E_{y,1}^{inc,-,-} + E_{y,-1}^{inc,-,-}}{\Delta x} \right) \right]. \quad (4.23)$$

Pour  $E_z$ , sur la surface en  $x = i_p - 1$  :

$$E_z^{t,n+1} = \tilde{E}_z^{t,n} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ K_1 \frac{H_y^{inc,++}}{\Delta x} + K_2 \left( \frac{H_y^{inc,++,+} + H_y^{inc,++,-}}{\Delta x} \right) \right], \quad (4.24)$$

puis, sur la surface en  $x = i_p$  :

$$E_z^{t,n+1} = \tilde{E}_z^{t,n} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ K_3 \frac{H_{y,0}^{inc,+}}{\Delta x} + K_1 \frac{H_{y,0}^{inc,++}}{\Delta x} + K_4 \left( \frac{H_{y,1}^{inc,+} + H_{y,-1}^{inc,+}}{\Delta x} - \frac{H_{x,1}^{inc,+} - H_{x,1}^{inc,-}}{\Delta y} \right) + K_2 \left( \frac{H_{y,1}^{inc,++} + H_{y,-1}^{inc,++}}{\Delta x} - \frac{H_{x,1}^{inc,++} - H_{x,1}^{inc,-,-}}{\Delta y} \right) \right], \quad (4.25)$$

et enfin sur la surface en  $x = i_p + 1$  :

$$E_z^{d,n+1} = \tilde{E}_z^{d,n} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ -K_1 \frac{H_{y,0}^{inc,-,-}}{\Delta x} - K_4 \frac{H_{x,-1}^{inc,+} - H_{x,-1}^{inc,-}}{\Delta y} - K_2 \left( \frac{H_{y,1}^{inc,-,-} + H_{y,-1}^{inc,-,-}}{\Delta x} + \frac{H_{x,-1}^{inc,++} - H_{x,-1}^{inc,-,-,-}}{\Delta y} \right) \right]. \quad (4.26)$$

Pour  $E_y$ , sur la surface en  $x = i_p - 1$  :

$$E_y^{t,n+1} = \tilde{E}_y^{t,n} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \left[ -K_1 \frac{H_{z,0}^{inc,++}}{\Delta x} - K_2 \left( \frac{H_{z,1}^{inc,++} + H_{z,-1}^{inc,++,-}}{\Delta x} \right) \right], \quad (4.27)$$

puis, sur la surface en  $x = i_p$  :

$$\begin{aligned}
 E_y^{t,n+1} = & \tilde{E}_y^{t,n} + \frac{\Delta t}{\epsilon} \\
 & \left[ -K_3 \frac{H_{z,0}^{inc,+}}{\Delta x} - K_1 \frac{H_{z,0}^{inc,++}}{\Delta z} \right. \\
 & - K_4 \left( \frac{H_{z,1}^{inc,+} + H_{z,-1}^{inc,+}}{\Delta x} - \frac{H_{x,1}^{inc,+} - H_{x,1}^{inc,-}}{\Delta z} \right) \\
 & \left. - K_2 \left( \frac{H_{z,1}^{inc,++} + H_{z,-1}^{inc,++}}{\Delta x} - \frac{H_{x,1}^{inc,++} - H_{x,1}^{inc,--}}{\Delta z} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

et enfin sur la surface en  $x = i_p + 1$  :

$$\begin{aligned}
 E_y^{d,n+1} = & \tilde{E}_y^{d,n} - \frac{\Delta t}{\epsilon} \\
 & \left[ K_1 \frac{H_{z,0}^{inc,--}}{\Delta x} + K_4 \frac{H_{x,-1}^{inc,+} - H_{x,-1}^{inc,-}}{\Delta z} \right. \\
 & \left. + K_2 \left( \frac{H_{z,1}^{inc,--} + H_{z,-1}^{inc,--}}{\Delta x} + \frac{H_{x,-1}^{inc,++} - H_{x,-1}^{inc,--}}{\Delta z} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Si l'implémentation traduit un traitement par plan indépendamment de la direction de la normale au plan, alors des recouvrements auront lieu aux coins. Par exemple, le champ  $H_z(i_p - 1)$  de la figure 4.5 est concerné par ce cas (son stencil est dessiné en pointillé). En effet, il faudra faire attention aux contributions de chacun des plans formant le coin.

### 4.2.3 Adaptation parfaite de la dispersion numérique

A l'instar de la technique Perfectly Matched Plane Wave Injector (PMPWI) [15], on recherche analytiquement le pas spatial  $\Delta r$  de la règle 1D permettant de l'adapter à la dispersion numérique du schéma 3D. L'adaptation optimale suggère de faire en sorte que la dispersion numérique des deux schémas 1D et 3D soit presque égale, à une erreur près inférieure à celle donnée par l'ordre du schéma 3D. Originellement pour le schéma de Yee, seul le pas spatial  $\Delta r$  permet l'adaptation de la dispersion numérique. Ici, en complément de  $\Delta r$ , les autres paramètres de l'adaptation sont les coefficients du schéma FDTD 1D d'ordre supérieur. Sans perte de généralité, un schéma FDTD d'ordre 4 1D est utilisé dans cette section.

L'approche PMPWI cherche donc à égaliser la dispersion numérique du schéma FDTD 1D et du schéma FDTD 3D (2.163). Ceci se traduit donc par le système suivant, muni de ces deux équations de dispersion numérique :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2 \Delta t^2} \sin^2 \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) = \sum_{(u,v,w)} \frac{1}{\Delta n^2} [K_3 S_{u1} + K_1 S_{u3}]^2 [1 + 2\alpha C_v] [1 + 2\alpha C_w], \\ \frac{1}{c^2 \Delta t^2} \sin^2 \left( \frac{\omega \Delta t}{2} \right) = \frac{1}{\Delta r^2} [K'_3 S_{r1} + K'_1 S_{r3}]^2, \end{cases} \tag{4.30}$$

où le schéma 1D est dérivé du schéma 3D avec des coefficients différents (noté comme  $K'_i$ ) et

le pas spatial de la règle 1D est  $\Delta r$ . Remarquons que le nombre d'onde du schéma 1D est un scalaire égal à  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ . Le système (4.30) prend la forme de l'égalité suivante :

$$\frac{1}{\Delta r^2} [K'_3 S_{r1} + K'_1 S_{r3}]^2 = \sum_{(u,v,w)} \frac{1}{\Delta u^2} [K_3 S_{u1} + K_1 S_{u3}]^2 [1 + 2\alpha C_v] [1 + 2\alpha C_w]. \quad (4.31)$$

Une première possibilité est de résoudre l'équation numériquement, par une procédure itérative, par exemple l'algorithme de Newton. Cependant, une expression analytique sera privilégiée si elle existe.

Tout comme dans l'approche PMPWI, un développement limité de Taylor d'ordre suffisant est effectué pour chaque fonction sinus et cosinus de l'équation. Pour le membre de gauche de (4.31) :

$$\frac{1}{\Delta r^2} [K'_3 S_{r1} + K'_1 S_{r3}]^2 = \frac{k^2}{4} (K'_3 + 3K'_1)^2 - \frac{k^4 \Delta r^2}{48} (K'_3 + 3K'_1)(K'_3 + 27K'_1) + O(k^5), \quad (4.32)$$

et pour le membre de droite :

$$\begin{aligned} \sum_{(u,v,w)} \frac{1}{\Delta u^2} [K_3 S_{u1} + K_1 S_{u3}]^2 [1 + 2\alpha C_v] [1 + 2\alpha C_w] &= \sum_{(u,v,w)} \frac{k_u^2}{4} (K_3 + 3K_1)^2 (1 + 2\alpha)^2 \\ &- \frac{(1 + 2\alpha)(K_3 + 3K_1)}{48} \sum_{(u,v,w)} \left[ (1 + 2\alpha)(K_3 + 27K_1) k_u^4 \Delta u^2 + 12\alpha(K_3 + 3K_1)(k_v^2 + k_w^2) \Delta u^2 k_u^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Les composantes du vecteur  $k$  sont introduites avec les angles  $\theta$  et  $\phi$  :

$$k_x = k \sin \theta \cos \phi, \quad k_y = k \sin \theta \sin \phi, \quad k_z = k \cos \theta. \quad (4.34)$$

Ces angles  $\theta$  et  $\phi$  sont donc donnés par la direction de l'onde plane. D'autre part, les coefficients du schéma 3D vérifient la condition au premier ordre sur le nombre d'onde physique ((2.165)). En conséquence :

$$\begin{aligned} \sum_{(u,v,w)} \frac{1}{\Delta u^2} [K_3 S_{u1} + K_1 S_{u3}]^2 [1 + 2\alpha C_v] [1 + 2\alpha C_w] &= \frac{k^2}{4} \\ &- \frac{(1 + 2\alpha)(K_3 + 3K_1)}{48} \sum_{(u,v,w)} \left[ (1 + 2\alpha)(K_3 + 27K_1) k_u^4 \Delta u^2 + 12\alpha(K_3 + 3K_1)(k_v^2 + k_w^2) \Delta u^2 k_u^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Finalement :

$$\begin{aligned} \frac{k^2}{4} (K'_3 + 3K'_1)^2 - \frac{k^4 \Delta r^2}{48} (K'_3 + 3K'_1)(K'_3 + 27K'_1) + O(k^5) &= \frac{k^2}{4} \\ &- \frac{(1 + 2\alpha)(K_3 + 3K_1)}{48} \sum_{(u,v,w)} \left[ (1 + 2\alpha)(K_3 + 27K_1) k_u^4 \Delta u^2 + 12\alpha(K_3 + 3K_1)(k_v^2 + k_w^2) \Delta u^2 k_u^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Les coefficients doivent alors vérifier :

$$(K'_3 + 3K'_1)^2 = 1, \quad (4.37)$$

et :

$$\begin{aligned} \Delta r^2 = \frac{(1 + 2\alpha)(K_3 + 3K_1)}{(K'_3 + 3K'_1)(K'_3 + 27K'_1)} & [(1 + 2\alpha)(K_3 + 27K_1) \\ & (\sin^4 \theta \cos^4 \phi \Delta x^2 + \sin^4 \theta \sin^4 \phi \Delta y^2 + \cos^4 \theta \Delta z^2) \\ & + 12\alpha(K_3 + 3K_1) \\ & [\Delta x^2 (\sin^4 \theta \cos^2 \phi \sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \\ & + \Delta y^2 (\sin^4 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \theta) \\ & + \Delta z^2 (\cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^2 \phi)] \end{aligned} \quad (4.38)$$

La première égalité (4.37) représente la condition d'ordre 2 du schéma 1D. En pratique, la condition d'ordre 2 est simplifiée en prenant le nombre positif sous le carré. Avec cette simplification pour les deux schémas, l'équation précédente se réécrit :

$$\begin{aligned} \Delta r^2 = \frac{1}{(K'_3 + 27K'_1)} & [(1 + 2\alpha)(K_3 + 27K_1) \\ & (\sin^4 \theta \cos^4 \phi \Delta x^2 + \sin^4 \theta \sin^4 \phi \Delta y^2 + \cos^4 \theta \Delta z^2) \\ & + 12\alpha(K_3 + 3K_1) \\ & [\Delta x^2 (\sin^4 \theta \cos^2 \phi \sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \\ & + \Delta y^2 (\sin^4 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \theta) \\ & + \Delta z^2 (\cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^2 \phi)] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Les coefficients  $K'_3$  et  $K'_1$  sont trouvés par optimisation à la fréquence considérée pour le schéma 3D, avec la condition d'ordre 2 du schéma 1D (4.37). C'est-à-dire, on optimise la dispersion numérique du schéma 1D à, par exemple 10CPW, via les coefficients  $K'_3$  et  $K'_1$ . Si ceci suffit afin que la dispersion numérique du schéma 1D soit adaptée, alors seul le  $\Delta r$  de l'équation (4.39) est nécessaire pour cette adaptation. Cependant, ce n'est pas le cas.

Une telle approche directe ne permet pas d'avoir la même dispersion pour les deux schémas sur toute la bande de fréquence, comme indiqué sur la figure 4.7. En effet, un développement de Taylor à un faible ordre, n'est pertinent que lorsque  $k \rightarrow 0$  ou de manière équivalente  $CPW \rightarrow \infty$ . Aucun contrôle n'est encore fait sur la bande haute fréquence, et en particulier, la bande d'intérêt autour de la fréquence d'optimisation.

Il est aussi possible de choisir  $K'_3 = (1 + 2\alpha)K_3$  et  $K'_1 = (1 + 2\alpha)K_1$ . Cependant, un tel choix se limite à des résultats comme celui de la figure 4.7, où l'optimisation n'est seulement réalisée qu'à basses fréquences.

Il suffit alors de contraindre un des deux coefficients  $K'_3$  ou  $K'_1$  à vérifier l'égalité entre la

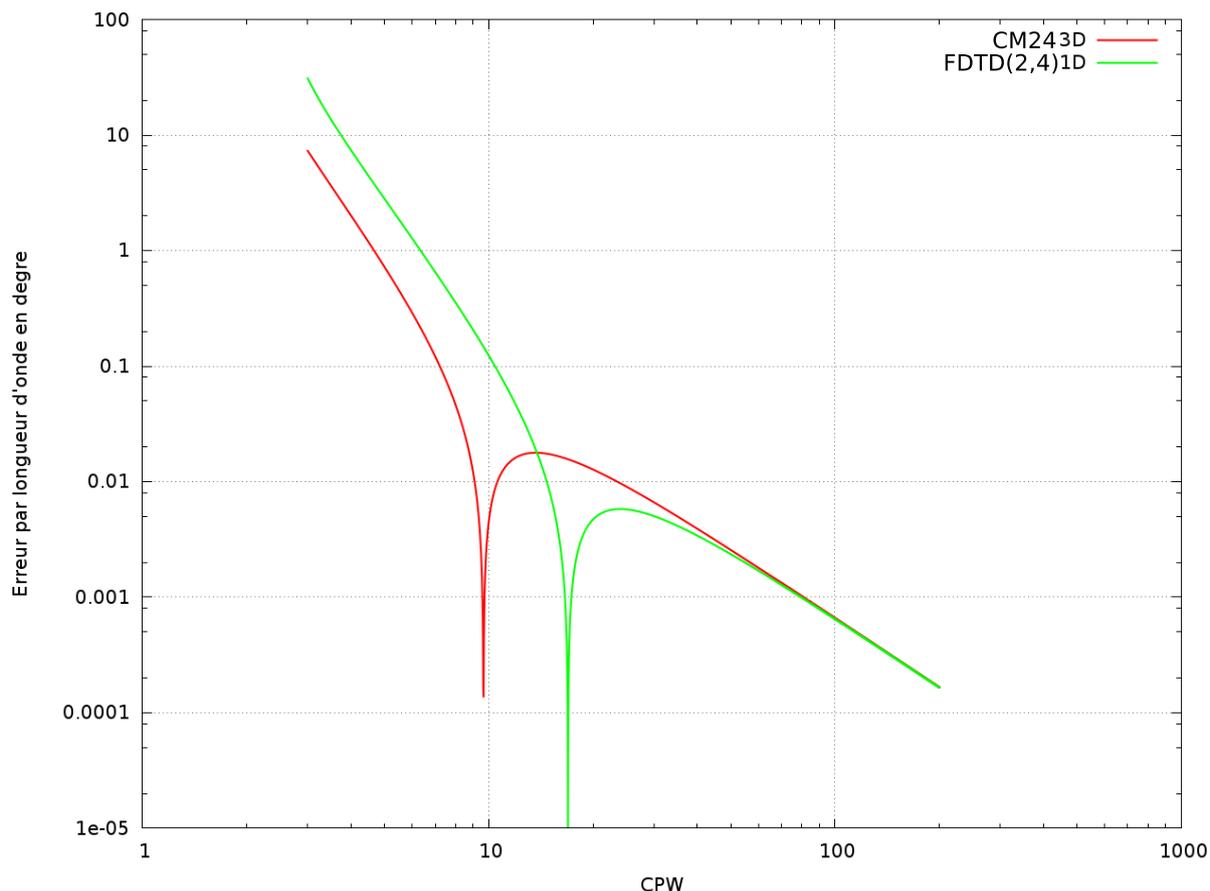


Figure 4.7 – Correction de la dispersion du schéma 1D avec seulement une contrainte. Adéquation seulement en basse fréquence ( $k \rightarrow 0$  ou de manière équivalente  $CPW \rightarrow \infty$ ). Direction de l'onde plane :  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\phi = 30^\circ$ .

dispersion numérique du schéma 3D et 1D, à la fréquence optimisée pour le schéma 3D. La condition d'ordre 2 du schéma 1D (4.37) contraint l'autre coefficient. Le problème se reformule alors : Trouver les coefficients réels  $K'_3$ ,  $K'_1$  et  $\Delta r$  tels qu'ils soient solution ou minimisent le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} K'_3 + 3K'_1 = 1, \\ (K'_3 + 27K'_1)\Delta r^2 = [(1 + 2\alpha)(K_3 + 27K_1) \\ (\sin^4 \theta \cos^4 \phi \Delta x^2 + \sin^4 \theta \sin^4 \phi \Delta y^2 + \cos^4 \theta \Delta z^2) \\ + 12\alpha(K_3 + 3K_1) \\ [\Delta x^2 (\sin^4 \theta \cos^2 \phi \sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \\ + \Delta y^2 (\sin^4 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \theta) \\ + \Delta z^2 (\cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^2 \phi)]], \\ [K'_3 S_{r1} + K'_1 S_{r3}]^2 = \sum_{(u,v,w)} [K_3 S_{u1} + K_1 S_{u3}]^2 [1 + 2\alpha C_v] [1 + 2\alpha C_w] \text{ avec } k = k_{opt}. \end{array} \right. \quad (4.40)$$

où  $k_{opt}$  est le nombre d'onde à la fréquence optimisée.

Remarquons que la réécriture du schéma 1D par un schéma de Oh (Chapitre 2, section 2.5.1), permet de vérifier automatiquement la première équation du système. Les coefficients

$K'_3$  et  $K'_1$  sont reliés à  $\alpha_{Oh}$  par :

$$\alpha_{Oh} = -24K'_1, \quad \alpha_{Oh} = 8(K'_3 - 1). \quad (4.41)$$

Un système à deux inconnues avec les contraintes du schéma de Oh est alors obtenu. Ces contraintes sont l'intervalle  $[0, 1]$  pour  $\alpha_{Oh}$  et la condition CFL donnant une contrainte linéaire au système. De plus, des équations supplémentaires sont ajoutées au système précédent pour minimiser l'erreur entre les dispersions numériques autour du nombre d'onde  $k_{opt}$ . Finalement, le système précédent devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (1 - \alpha_{Oh})\Delta r^2 = [(1 + 2\alpha)(K_3 + 27K_1) \\ \quad (\sin^4 \theta \cos^4 \phi \Delta x^2 + \sin^4 \theta \sin^4 \phi \Delta y^2 + \cos^4 \theta \Delta z^2) \\ \quad + 12\alpha(K_3 + 3K_1) \\ \quad [\Delta x^2 (\sin^4 \theta \cos^2 \phi \sin^2 \phi + \sin^2 \theta \cos^2 \phi \cos^2 \theta) \\ \quad + \Delta y^2 (\sin^4 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \phi + \sin^2 \theta \sin^2 \phi \cos^2 \theta) \\ \quad + \Delta z^2 (\cos^2 \theta \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cos^2 \theta \sin^2 \theta \sin^2 \phi)]] , \\ [(1 + \frac{\alpha_{Oh}}{8})S_{r1} - \frac{\alpha_{Oh}}{24}S_{r3}]^2 = \sum_{(u,v,w)} [K_3 S_{u1} + K_1 S_{u3}]^2 [1 + 2\alpha C_v] [1 + 2\alpha C_w], \forall k \in \{k_{opt}, k_1, \dots, k_p\}, \\ \alpha_{Oh} \in [0, 1], \\ \Delta t \leq \left\| \frac{6}{6 + \alpha_{Oh}} \right\| \frac{\Delta r}{c\sqrt{2}}. \end{array} \right. \quad (4.42)$$

où  $p$  équations supplémentaires sont ajoutées.

L'algorithme de Newton a été choisi pour résoudre ce problème numériquement. Le problème d'optimisation à résoudre est un problème de moindre carré avec une fonction  $f$  non linéaire. Ce problème peut s'écrire donc sous la forme :

$$f(x) - y = 0 \quad (4.43)$$

où la taille des vecteurs dépend du nombre de points d'observation, soit ici les points CPW (équivalent à des nombres d'ondes  $k$  pour le système (4.42)). Ces points peuvent être vus comme différentes valeurs des nombre d'ondes (de manière équivalente, CPW) où l'on souhaite obtenir l'égalité des dispersions numériques. L'algorithme de Newton ou de Gauss-Newton peut être utilisé pour résoudre ce problème. Il est possible de calculer analytiquement la Jacobienne et la Hessienne de  $f$ ,  $J_f$  et  $H_f$  respectivement, sans trop de difficultés sur les variables  $r, K'_3, K'_1$ . L'algorithme de Levenberg–Marquardt (LM) [3] apporte une modification à l'algorithme de Gauss-Newton afin d'accélérer sa convergence. Il introduit un pas  $l$  spécifique de descente lequel revient à l'algorithme suivant. L'algorithme de Gauss-Newton utilise l'équation :

$$x_{k+1} = x_k - H_f^{-1} J_f x_k \quad (4.44)$$

avec l'approximation :

$$H_f \approx J_f^t J \quad (4.45)$$

L'algorithme LM combine cette méthode avec la méthode de descente du gradient, avec un

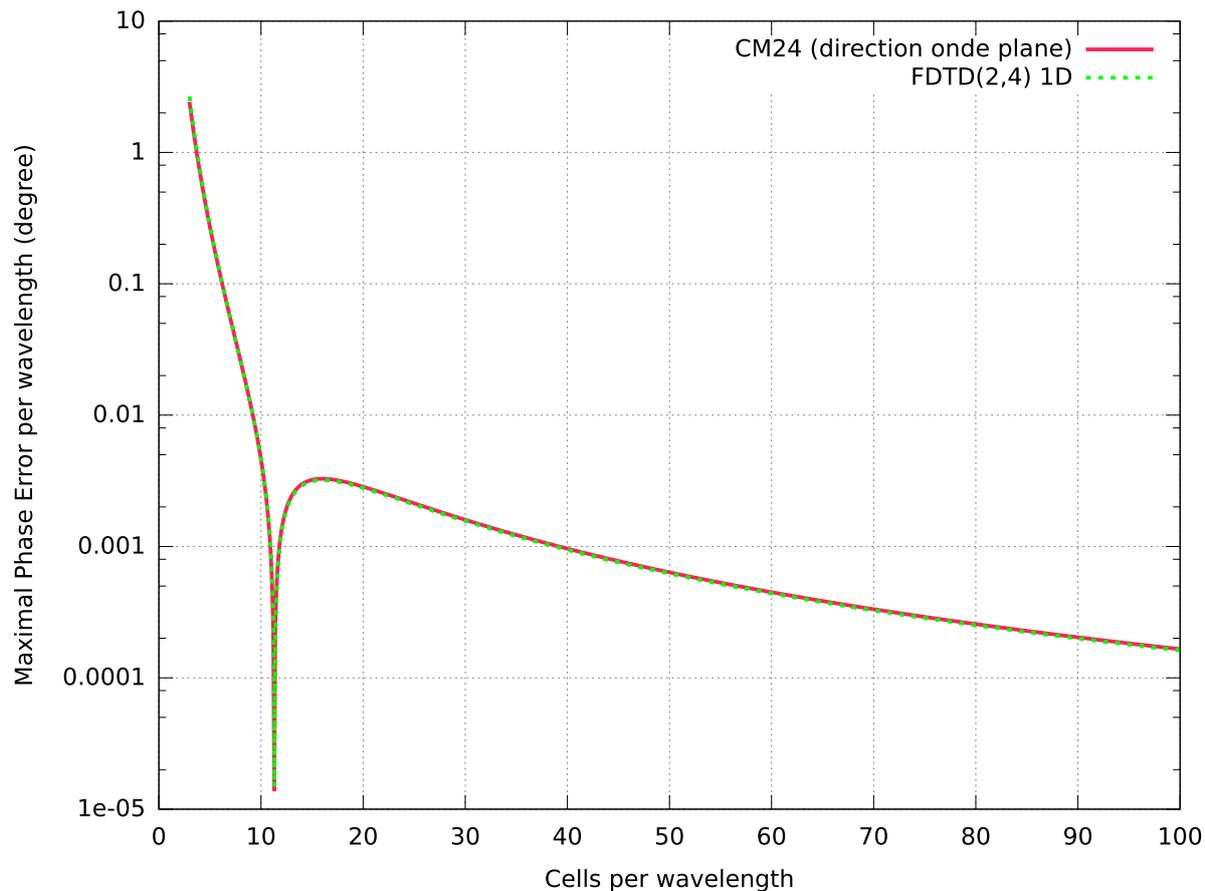


Figure 4.8 – Correction de la dispersion du schéma 1D avec deux contraintes. Direction de l'onde plane :  $\theta = 41^\circ$ ,  $\phi = 37^\circ$ .

pas  $l$  spécifique :

$$x_{k+1} = x_k - (H_f(x_k) + l \cdot \text{diag}(H_f))^{-1} J_f x_k \quad (4.46)$$

Le paramètre  $l$  s'adapte à chaque itération afin d'éviter une augmentation de l'erreur : si l'erreur a augmenté,  $l$  est multiplié par un facteur d'environ 10 sinon la division de  $l$  par un facteur d'ordre de grandeur similaire doit être fait. Dans le premier cas, l'algorithme aura plutôt tendance à suivre celui du gradient alors que dans l'autre cas, ce sera la méthode de Gauss-Newton.

Le calcul de l'inverse dans (4.46) peut rendre l'algorithme long en temps de calcul, si la taille du système est important. Ici, la taille est très petite (nombre de points (CPW) utilisés pour l'optimisation) et ainsi l'algorithme converge rapidement. Cet inverse est calculé grâce à une méthode de gradient, notamment le gradient conjugué. Malgré l'existence de contraintes, leur omission aboutit à une résolution laquelle converge vers une solution admissible. L'adaptation de la dispersion numérique via l'algorithme LM a été implémentée dans un module, sans avoir besoin d'utiliser une librairie externe d'algèbre.

La figure 4.8 montre que la correction est quasi-parfaite. L'optimisation minimise l'écart entre les deux courbes via un point vers l'infini et les autres autour de  $k_{opt}$  (environ 30 points).

Pour revenir sur le choix du schéma 1D, avec un simple dessin comme 4.9, il est facile de

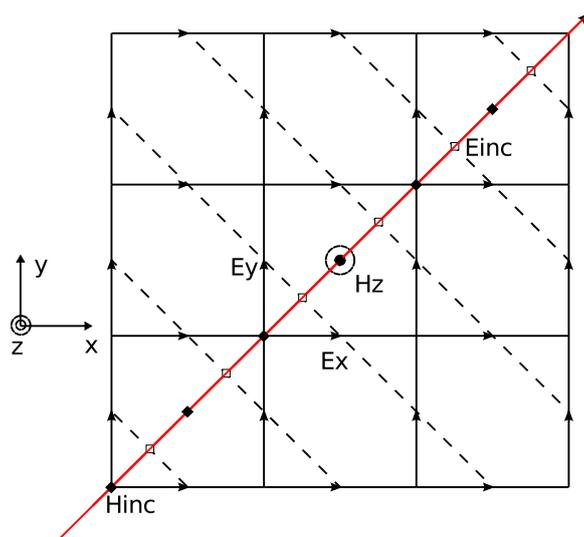


Figure 4.9 – Projection des champs électriques du stencil CM24 sur une règle 1D dirigée suivant la diagonale 2D.

remarquer que la projection des champs du stencil CM24 sur une diagonale (d'angle  $\pi/4$ ) résulte en un stencil 1D FDTD(2,6). C'est-à-dire que le nombre de champs projetés est égal à 6. Ainsi, il est naturel de se demander s'il ne serait pas plus pertinent d'utiliser un schéma FDTD(2,6) pour la propagation 1D.

La figure 4.10 montre les différences entre le choix d'un schéma FDTD(2,4) ou FDTD(2,6) en 1D. L'erreur mesurée est la différence entre l'erreur de phase entre le 3D et le 1D dans la direction de propagation. Dans cette direction, le schéma FDTD(2,6) a une dispersion plus proche du schéma 3D tandis que le schéma FDTD(2,4) est plus éloigné. Un niveau de champ plus faible est attendu avec un schéma FDTD(2,6) qu'un schéma FDTD(2,4) pour la propagation 1D.

### Niveau du champ résiduel

Sur le cas test suivant, le champ résiduel est mesuré pour deux directions de propagation. Le premier sera sur un angle "magique". Un angle magique est un angle où les positions des champs sur la règle 1D coïncide avec celles des projections des champs 3D. Sur de tels angles, le niveau du champ résiduel doit être équivalent à celui mesuré dans la direction axiale. En d'autres termes, un niveau de champ très faible est attendu à la limite de l'erreur double précision machine.

Les figures 4.11 et 4.12 montrent le niveau de bruit obtenu d'une onde plane avec les schémas S24 et CM24, sur un angle magique et non-magique, respectivement. La configuration de la simulation est, respectivement :

- Boîte de Huygens : 33x33x33 cellules et 99x99x99 cellules,
- Direction de l'onde plane (angle magique) :  $\phi = 45^\circ, \theta = \arctan(\sqrt{2}) - \pi \approx 125.264\ 389\ 68^\circ$ ,
- Direction de l'onde plane (angle non-magique) :  $\phi = 30^\circ, \theta = 70^\circ$

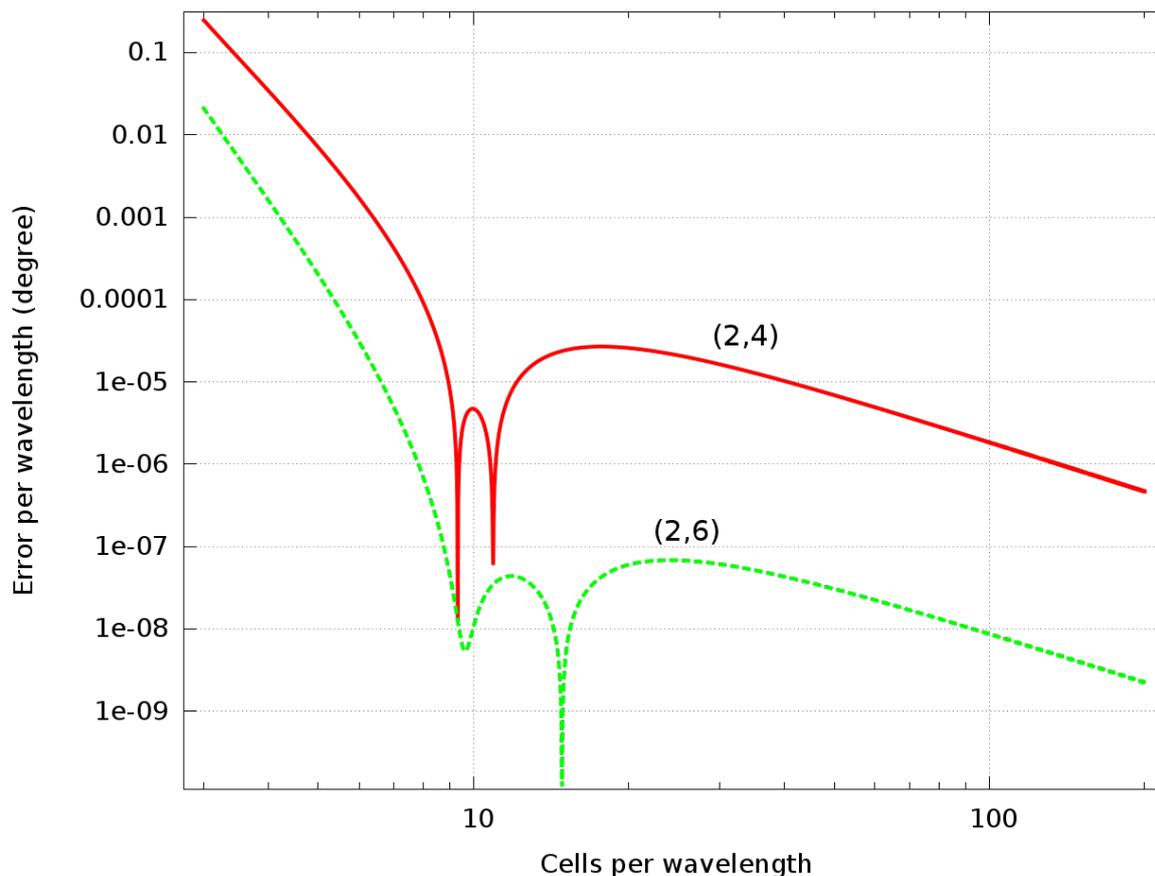


Figure 4.10 – Différence d'erreur de phase entre le schéma 3D et un schéma soit FDTD(2,4) 1D soit FDTD(2,6) 1D. Propagation de direction  $\phi = 70^\circ, \theta = 30^\circ$ .

- Onde plane Gaussienne avec une fréquence maximale de 20 GHz ( $E_z$ ),

Le schéma CM24 est optimisé pour  $R = 10$  à 20 GHz. Le point de mesure de champ est situé près du coin opposé au coin "d'injection". La CFL est de 0.85 pour le schéma S24.

Le niveau de champ mesuré avec un angle magique est en-dessous de -180dB, ce qui est négligeable. Sur le cas 4.12, l'onde plane se propage à travers un grand nombre de cellules (171 cellules) afin de tester le modèle d'adaptation de la dispersion numérique. Si l'adaptation est imparfaite, ce grand nombre de cellules amplifie l'écart entre les dispersions numériques. Sur un angle non-magique, l'adaptation de la dispersion numérique aboutit à des niveaux en-dessous de -50dB, ce qui est relativement acceptable. Remarquons que cette adaptation est moins efficace sur le schéma CM24 que le schéma S24. Ceci peut résulter du nombre d'interpolations plus grand pour le schéma CM24 que le schéma S24.

Des tests avec une interpolation d'ordre 6 montrent que le bruit n'est réduit que très faiblement.

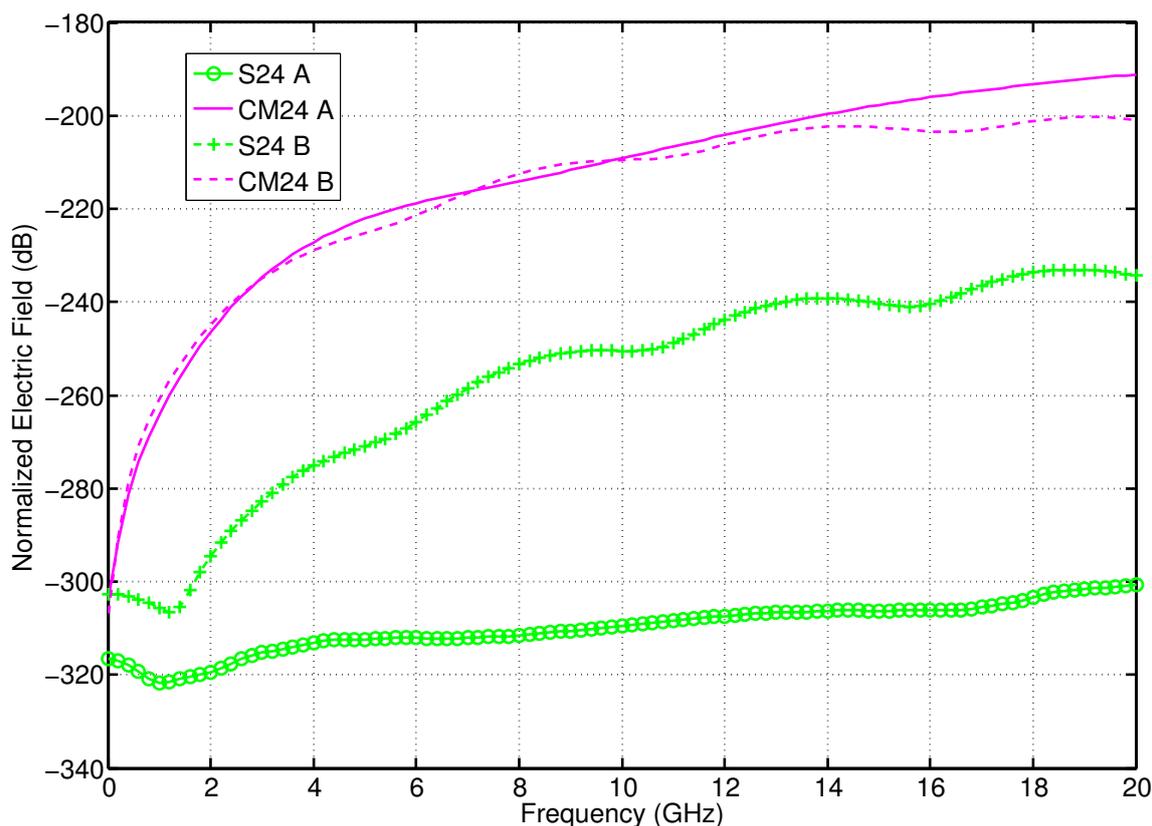


Figure 4.11 – Amplitude du champ électrique en zone diffracté, angles magiques : (A) axiale (B)  $\phi = 45^\circ, \theta = 125.2643^\circ$ ; Boîte de Huygens (33,33,33)

### 4.3 Conditions aux frontières absorbantes

Aux frontières du domaine de calcul, il est possible de modéliser et simuler le rayonnement à l'infini grâce à l'utilisation de conditions absorbantes aux frontières (Absorbing Boundary Conditions ABC). Ces modèles ont pour caractéristiques de ne pas renvoyer de champ électromagnétique vers l'intérieur du domaine de calcul, et d'absorber ou d'atténuer le champ à travers les cellules utilisées dans ces modèles.

Les ABCs de Mur [4] sont l'exemple historique de frontière ABC. Cependant, des réflexions importantes à des angles d'incidences rasantes ne donnaient guère des conditions optimales de simulation. D'autres types de conditions aux frontières absorbantes comme celle de Higdon [5, 6] offrent de meilleures performances mais la technique la plus avancée dans ce domaine est la condition Perfectly Matched Layer (PML) [16]. Parmi les variantes de cette technique, le schéma CM24 a été adapté avec la technique Convolution PML (CPML) [17].

D'autre part, le modèle Huygens ABC a été investigué afin d'être adapté pour la FDTD(2,4). Ce modèle suscite plusieurs intérêts comme : sa facilité d'implémentation à l'ordre 2 et sa possibilité de coupler avec d'autres ABC comme les PMLs. Le calcul de SER en espace libre présente des conditions idéales pour l'emploi de HABC. La technique HABC a été réalisée pour le schéma de Fang FDTD(2,4).

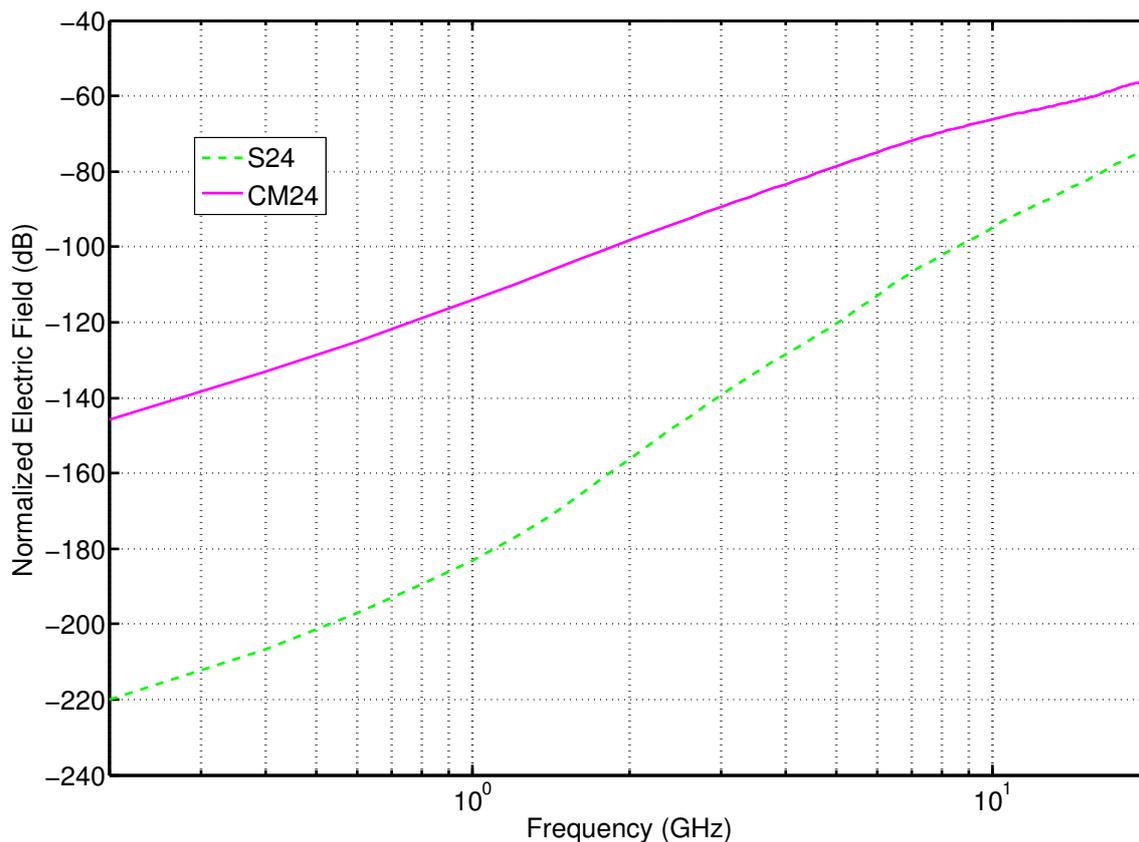


Figure 4.12 – Amplitude du champ électrique en zone diffracté, angle non-magique :  $\phi = 30^\circ, \theta = 70^\circ$ ; Boîte de Huygens (99,99,99)

#### 4.3.1 Huygens Absorbing Boundary Conditions (HABC)

La technique HABC [9] repose sur le principe de Huygens. L'idée est d'utiliser une surface de Huygens pour injecter un champ en "opposition" au champ incident, lequel est le champ sortant du volume de calcul. Théoriquement, cette absorption est parfaite, dans le domaine continu [9]. Mais avec les surfaces de Huygens dans la FDTD, l'absorption ne peut pas être parfaite [9].

Les conditions ABC existantes comme l'opérateur de Higdon peuvent être utilisées pour l'approximation des champs. Il est montré dans [9] que le coefficient de réflexion est identique et qu'en conclusion, les HABC peuvent être vus comme forme alternative à des ABC existantes. Le modèle ressemble fortement à une formulation Total Field–Scattered Field (TFSF), avec un calcul du champ incident dépendant de l'opérateur ABC choisi. La zone de champ total, résultat de la somme du champ diffracté (onde sortante du volume de calcul) et du champ incident (dépendant de l'opérateur ABC), correspond à la région d'absorption. L'exemple suivant en 1D détaille la technique HABC.

En 1D, soit  $U$  l'onde sortante du volume de calcul. De manière générale, pour des pas non constants spatiaux  $\Delta x_k$  et temporels  $\Delta t_k$ , avec un entier  $N$ , l'opérateur  $P$  [9] est défini par :

$$P = \sum_{k=1}^N a_k K(-\Delta x_k) Z(-\Delta t_k), \quad (4.47)$$

tel que  $\sum_{k=1}^N a_k = 1$  et :

$$PU(x, t) = \tilde{U}(x, t) = \sum_{k=1}^N a_k U(x - \Delta x_k, t - \Delta t_k). \quad (4.48)$$

$K$  et  $Z$  sont respectivement des opérateurs de translation spatial et temporel, définis comme :

$$K(-\Delta x_k)U(x, t) = U(x - \Delta x_k, t), \quad Z(-\Delta t_k)U(x, t) = U(x, t - \Delta t_k). \quad (4.49)$$

Supposons maintenant que les pas sont constants. Le pas spatial est  $\Delta x$  et le pas temporel est  $\Delta t$ . L'opérateur suivant est appelée opérateur élémentaire [9] :

$$P_e = K(-\Delta x)Z(-\Delta t). \quad (4.50)$$

Cet opérateur élémentaire prédit sur un maillage 1D, le champ situé à un endroit  $x_i$  et un instant  $t_n$  comme égal au champ situé à  $x_i - \Delta x$  et  $t_n - \Delta t$ . Les champs prédits avec l'opérateur  $P$  sont utilisés comme champ incident dans la formulation TFSF. Pour le schéma de Yee, la figure 4.13 représente la technique HABC en  $x_{sup}$  avec l'opérateur élémentaire pour le calcul du champ incident, avec un axe des temps. Ainsi, dans l'équation FDTD de la mise à jour du champ  $H$  encadré en bleu situé en zone de champ diffracté, le champ incident  $P(E)$  sera ôté du champ total  $E$ .

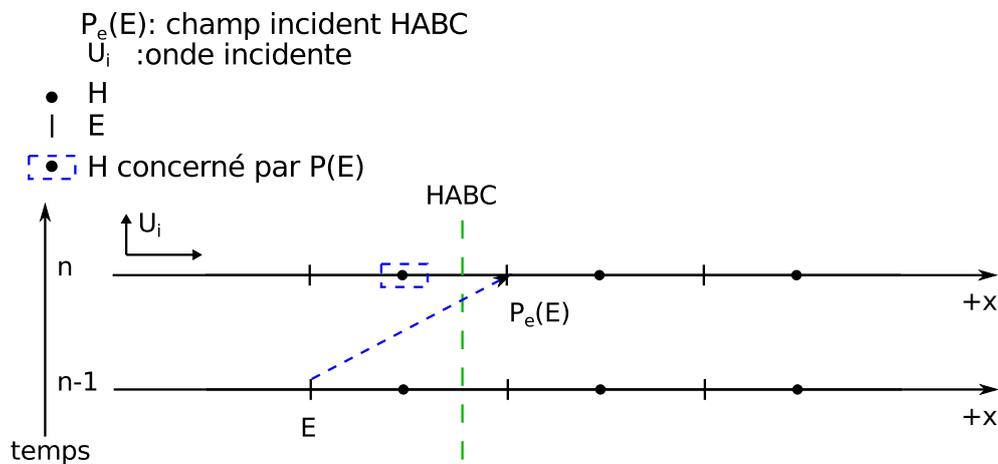


Figure 4.13 – Application de l'opérateur élémentaire pour la HABC (en  $x_{sup}$ ) pour le schéma de Yee sur le champ  $H$  encadré en bleu. Le champ incident  $P_e(E)$  est égal au champ  $E$  relié par une flèche.

La technique HABC pour la FDTD se résume à une TFSF avec un opérateur ABC pour le calcul du champ incident qui qualifie l'HABC. La technique HABC permet d'implémenter un opérateur ABC sous le formalisme d'une TFSF. Une HABC peut être combinée avec d'autres HABCs ou conditions aux frontières ABC, comme par exemple les PMLs [9]. La TFSF étant réalisable pour le schéma CM24, il est possible d'envisager l'extension de la technique HABC à ce type de schéma.

Rappelons que la TFSF pour le schéma CM24 modifie un plus grand nombre de

composantes de champ près de la surface de Huygens. Sur le même exemple précédent en 1D, la figure 4.14 ne montre que les champs impliqués par la TFSF pour le schéma CM24. En prenant l'opérateur élémentaire, une attention particulière doit être portée sur le calcul du champ incident à la position du champ  $\tilde{\tilde{E}}$  entouré en rouge sur la figure 4.14. L'application directe de  $P$  sur le champ  $\tilde{E}$  signifie que le champ incident est calculé à partir d'un champ déjà absorbé  $\tilde{E}$  par l'HABC. Or la technique HABC requiert que  $P$  soit appliqué sur un champ  $E$  FDTD non absorbé par l'HABC. Afin d'éviter le stockage d'un tel champ, il est possible d'utiliser l'approximation donnée par  $P$  puisque celui-ci prédit la propagation du champ. A l'instar de l'extension de l'opérateur lorsque  $\Delta x_k = 0$ , l'opérateur ABC est appliqué sur un champ prédit [9]. Le coefficient de réflexion de l'opérateur n'est pas modifié lorsqu'on utilise des champs prédits pour évaluer un champ incident [9]. Ainsi, les champs prédits sont réutilisés par l'opérateur ABC pour déterminer le champ incident à des cellules éloignées de la surface. Le calcul du champ incident à la position du champ  $\tilde{\tilde{E}}$  est alors donné par  $P_e(P_e(E))$ , comme représenté sur la figure 4.14. Le résultat équivaut alors à utiliser le champ incident à deux pas de temps précédents et deux pas spatiaux d'écart.

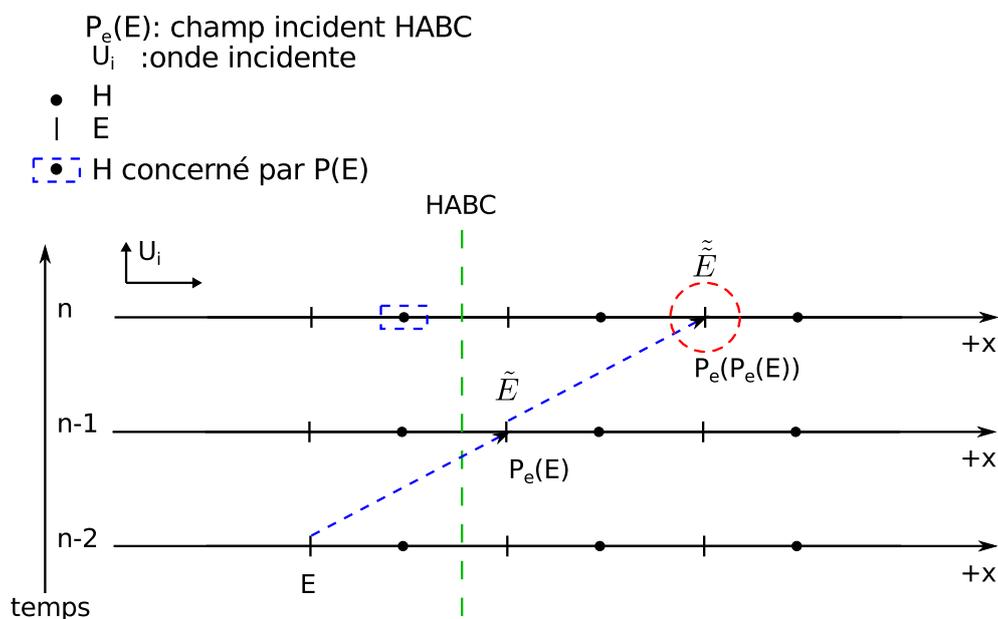


Figure 4.14 – Application de l'opérateur élémentaire pour la HABC pour le schéma CM24 sur le champ H encadré en bleu. Le champ incident  $P_e(P_e(E))$  est égal au champ  $E$  relié par des flèches.

En suivant l'exemple précédent, la technique HABC pour le schéma CM24 avec un opérateur de Higdon est donnée ci-dessous. L'opérateur de Higdon d'ordre 2 [9] est défini par :

$$\begin{aligned}
 P_{H2} = & (\omega_1 + \omega_2)K(-\Delta x) - \omega_1\omega_2K(-2\Delta x) - (\omega_1 + \omega_2)Z(-\Delta t) \\
 & + 2(1 + \omega_1\omega_2)K(-\Delta x)Z(-\Delta t) - (\omega_1 + \omega_2)K(-2\Delta x)Z(-\Delta t) \\
 & - \omega_1\omega_2Z(-2\Delta t) + (\omega_1 + \omega_2)K(-\Delta x)Z(-2\Delta t) - K(-2\Delta x)Z(-2\Delta t),
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

avec  $\theta_i$  un angle où la réflexion est nulle et  $\omega_i$  est défini par :

$$\omega_i = \frac{c\Delta t - \cos \theta_i \Delta x}{c\Delta t + \cos \theta_i \Delta x}. \quad (4.52)$$

Le calcul du champ incident pour cet opérateur est représenté par la figure 4.15. Remarquons que trois types de champ sont utilisés pour ce calcul :

- le champ électrique incident  $E$ ,
- le champ électrique  $\tilde{E} = P(E)$  prédit à un pas spatial de la surface TFSF,
- le champ électrique  $\tilde{\tilde{E}} = P(P(E))$  prédit à deux pas spatiaux de la surface TFSF .

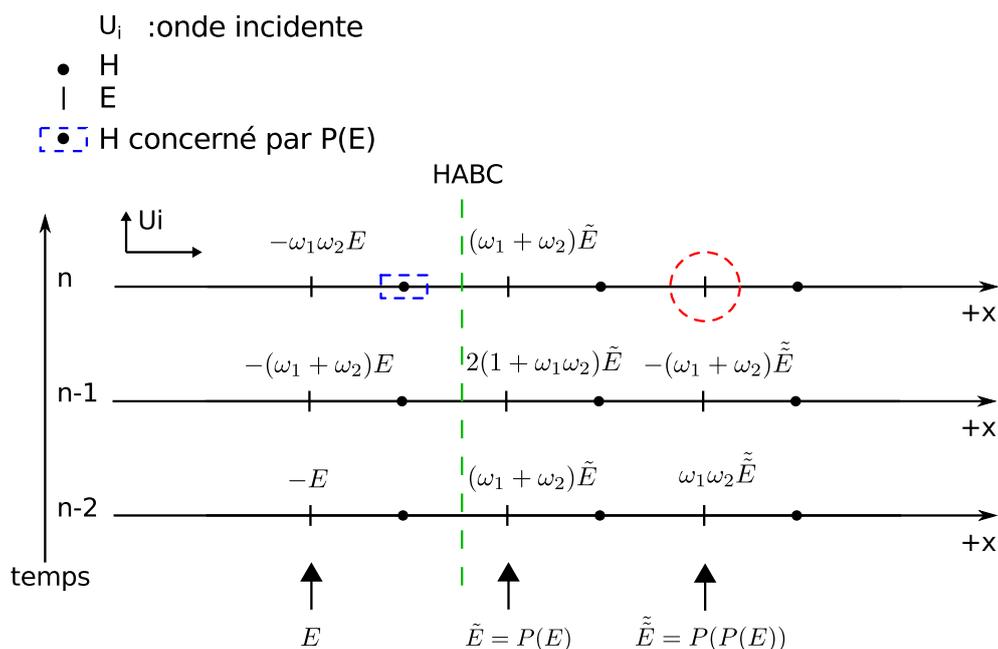


Figure 4.15 – Application de l’opérateur de Higdon d’ordre 2 pour la HABC pour le schéma CM24 sur le champ H encadré en bleu. Le calcul du champ incident à la position du champ entouré en rouge est égal à la somme des contributions écrites au dessus de chaque champ  $E$ ,  $\tilde{E}$  et  $\tilde{\tilde{E}}$ .

Les surfaces de Huygens pour la technique HABC ne forment pas seulement une boîte de Huygens mais doivent être étendues jusqu’aux frontières du domaine de calcul [10]. Ceci est nécessaire pour retrouver rigoureusement les coefficients de réflexion de l’opérateur utilisé pour la technique HABC. Comme pour les PMLs, les coins formés par les HABCs sont des zones où l’onde traverse deux ou trois surfaces (PMLs ou Huygens ABC). Ces régions aux coins posent problème au schéma CM24.

Le schéma CM24 utilise des composantes non-axiales lors de la mise à jour d’une composante de champ, comme indiqué sur la figure 4.16. Les composantes concernées sont situées sur les cellules diagonales dans le stencil. Le coin de la boîte de Huygens pour la technique HABC délimite donc une région où le champ à prédire a traversé deux ou trois surfaces de Huygens. Dans le cas de la figure 4.16, la prédiction des champs pour la technique HABC n’est pas évidente car l’onde peut suivre deux chemins : L’onde peut traverser la surface  $y_{inf}$  puis  $x_{sup}$  ou inversement. Une divergence est observée dans les coins de la boîte



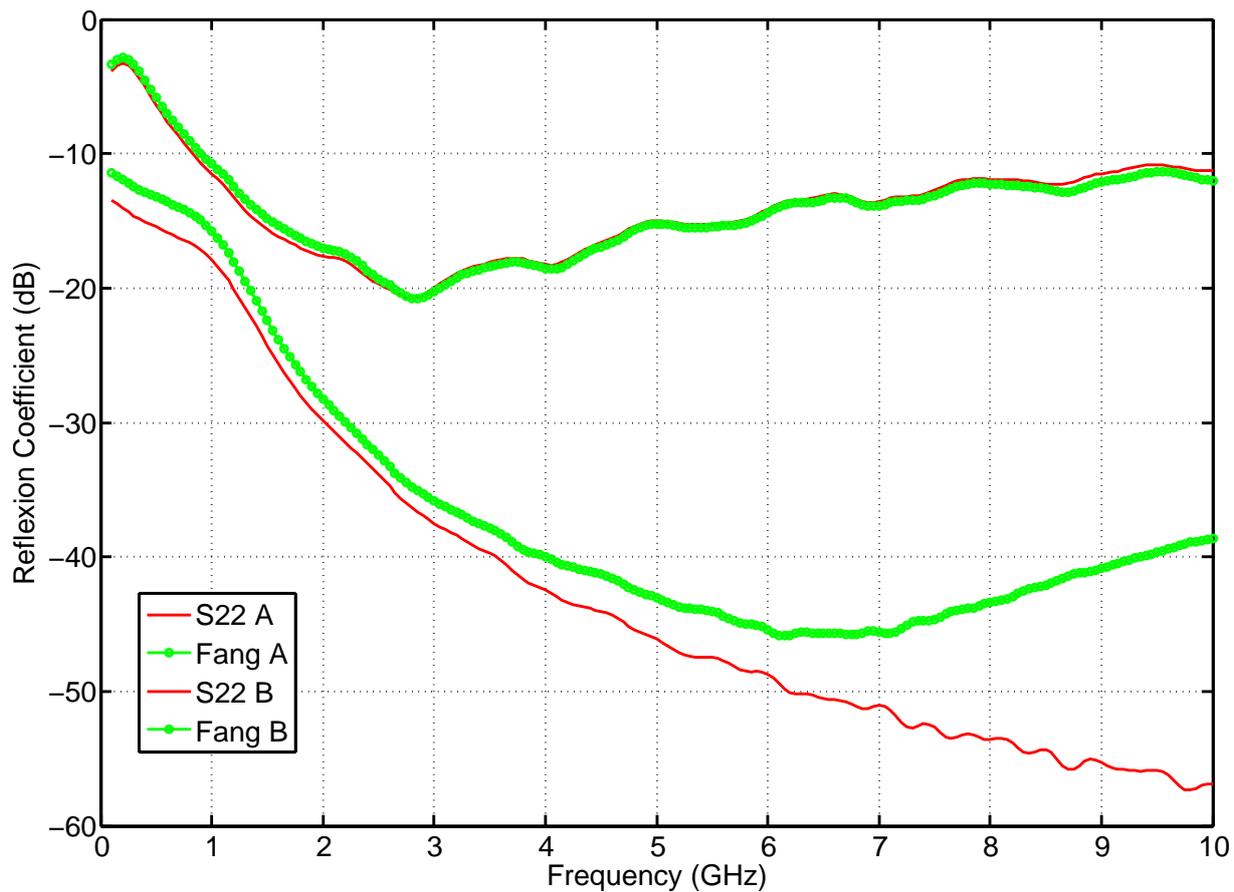


Figure 4.17 – Coefficient de réflexion pour le modèle HABC avec l’opérateur de Higdon d’ordre 2. Deux angles d’incidences : (A) incidence normale (B) 73°.

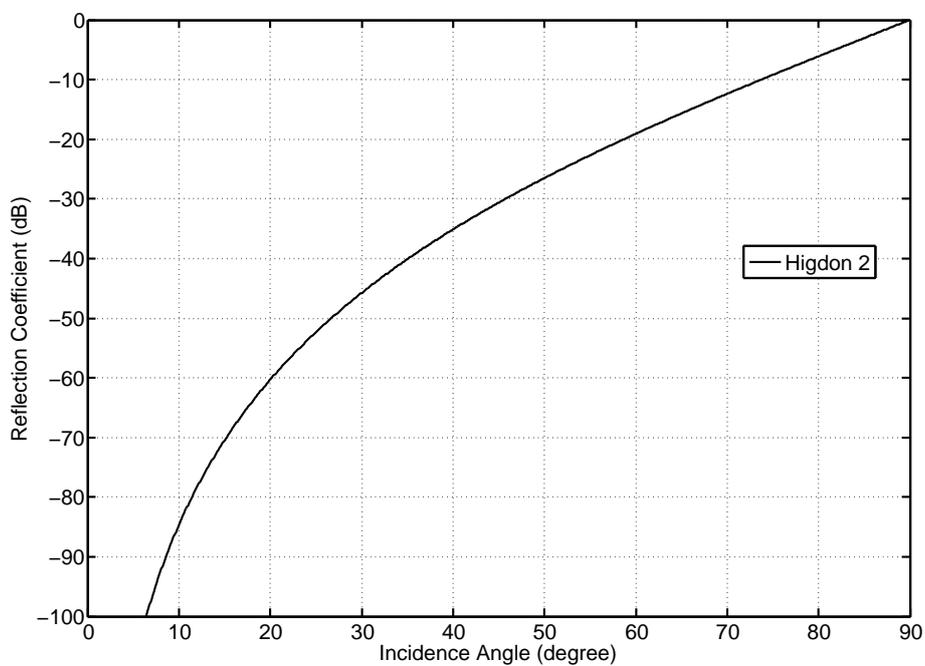


Figure 4.18 – Coefficient de réflexion théorique pour l’opérateur de Higdon d’ordre 2.

l'équation de Maxwell-Faraday notée  $\sigma^*$ . Cette méthode réside en partie sur l'adaptation de l'impédance au niveau des interfaces :

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (4.53)$$

Cette adaptation permet d'atténuer les ondes se propageant dans la direction normale à la couche.

Suivant la direction de la différentiation, la conductivité va dépendre de cette direction :  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . Ainsi, si l'adaptation de l'impédance se fait sur  $\sigma_x$ , pour une condition en  $x_{inf}$  ou  $x_{sup}$  alors le modèle requiert aussi que les conductivités  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  soient constants dans la direction tangentielle à la couche. Finalement, peu de modifications sur les équations FDTD sont nécessaires dans les couches PMLs.

La notion de profil de conductivité est importante puisqu'il détermine la qualité des couches PMLs *i.e.* le coefficient de réflexion. Le profil décrit la variation de la conductivité à travers chaque couche, suivant la direction normale à la couche. Cette variation est croissante et les couches PMLs se terminent avec des conditions aux frontières de type parfaitement conducteur. Généralement, le profil dépend de paramètres, lesquels peuvent être optimisés afin réduire les réflexions parasites sur les couches PMLs. Les paramètres optimaux d'un profil dépendent du schéma FDTD utilisé en espace libre.

Nous avons choisi d'adapter la technique CPML [17] avec le schéma CM24 car son extension est assez directe. Dans le domaine fréquentiel, la technique CPML se base sur la formulation suivante :

$$\begin{aligned} \epsilon j\omega E + \sigma E &= \nabla_s \times H - J, \\ \mu j\omega H &= -\nabla_s \times E, \end{aligned} \quad (4.54)$$

où l'opérateur  $\nabla_s$  est défini par :

$$\nabla_s = \frac{1}{s_x} \partial_x + \frac{1}{s_y} \partial_y + \frac{1}{s_z} \partial_z, \quad (4.55)$$

avec :

$$s_u = 1 + \frac{\sigma_u}{\alpha_u + j\omega\epsilon_0}, \quad u \in \{x, y, z\}. \quad (4.56)$$

Seules les composantes tangentielles à la couche de cellules PMLs sont concernées par les équations précédentes. Par exemple, pour des PMLs suivant (x,y), soit en  $z_{sup}$  ou en  $z_{inf}$  du volume de calcul, les composantes tangentielles  $E_x, E_y, H_x$  et  $H_y$  sont concernées. Sans terme source  $J$ , l'équation (4.54) pour  $E_x$  devient alors :

$$\epsilon j\omega E_x + \sigma E_x = \frac{1}{s_y} \partial_y H_z - \frac{1}{s_z} \partial_z H_y. \quad (4.57)$$

Remarquons que l'on peut exprimer l'inverse de  $s_u$  par l'expression suivante :

$$\frac{1}{s_u} = 1 - \frac{\sigma_u}{\alpha_u + j\omega\epsilon_0 + \sigma_u} = 1 - \chi_u. \quad (4.58)$$

En posant  $Y_u$  tel que :

$$Y_{uv} = -\chi_u H_v, \quad (4.59)$$

alors dans le domaine temporel,  $Y_u$  s'écrit :

$$\epsilon_0 \partial_t Y_{uv} + (\alpha_u + \sigma_u) Y_{uv} = -\sigma_u \partial_u H_v. \quad (4.60)$$

Ainsi, l'équation (4.57) s'écrit dans le domaine temporel comme :

$$\epsilon \partial_t E_x + \sigma E_x = \partial_y H_z - \partial_z H_y + Y_{yz} - Y_{zy}. \quad (4.61)$$

La discrétisation de la dérivée temporelle de l'équation (4.60) est proposée ici avec un schéma exponentiel :

$$Y_{uv}^{n+1} = e^{-\frac{\alpha_u + \sigma_u}{\epsilon_0} t} Y_{uv}^n + (e^{-\frac{\alpha_u + \sigma_u}{\epsilon_0} t} - 1) \partial_u H_v^{n+1/2}. \quad (4.62)$$

Tandis que l'équation (4.61) a les mêmes opérateurs (spatial et temporel) que le schéma FDTD en espace libre. La formulation CPML du schéma CM24 s'obtient donc en utilisant la formulation différences finies du schéma CM24 (2.144) avec les termes additionnels  $Y_{uv}$  et  $Y_{vu}$ .

Afin de valider l'implémentation des CPMLs pour le schéma CM24, une source transparente Gaussienne est placée près de la frontière et l'amplitude du champ réfléchi est mesurée. Les niveaux de réflexion dépendant généralement de l'angle d'incidence, plusieurs points de mesure sont placés le long de la direction tangentielle aux CPMLs. Le volume du maillage est de 200x100x100 cellules. La source (dérivée Gaussienne) est placée à 15 cellules de la frontière supérieure suivant l'axe  $x$ . Les mesures sont comparées avec une simulation de référence sur un maillage agrandi de 400x400x400 cellules. Les cellules sont cubiques de longueur  $\Delta = \lambda/10$  pour une longueur d'onde  $\lambda$  à 10 GHz.

Pour ce cas, le profil de conductivité est un profil de puissance [16]. Les paramètres optimaux de ce profil pour le schéma CM24 peuvent ne pas correspondre avec ceux du schéma de Yee. Néanmoins, plusieurs tests montrent les bonnes performances des CPMLs en conservant les mêmes valeurs des paramètres du profil. La figure 4.19 montre le coefficient de réflexion de trois schémas, avec un profil de puissance identique dont les paramètres sont optimisés pour le schéma S22. Le profil de puissance s'écrit :

$$\sigma_n = \sigma_f \left( \frac{n}{2N} \right)^p; \quad n = 1, \dots, N; \quad N : \text{nombre de couches} \quad (4.63)$$

Pour  $N = 10$  couches, les paramètres optimaux pour le schéma de Yee sont :  $p = 4$ ,  $\sigma_f \Delta = 0.016$ , où  $\Delta$  est le pas spatial dans la direction normale à la couche.

L'absorption est plus faible d'environ 10dB pour les schémas FDTD(2,4) de la figure 4.19. Il est possible que de meilleurs paramètres puissent être plus optimaux pour les schémas FDTD(2,4). Cependant, la simple réutilisation du profil de puissance pour le schéma S22 donne déjà de bons résultats et valide la formulation CPML pour le schéma CM24.

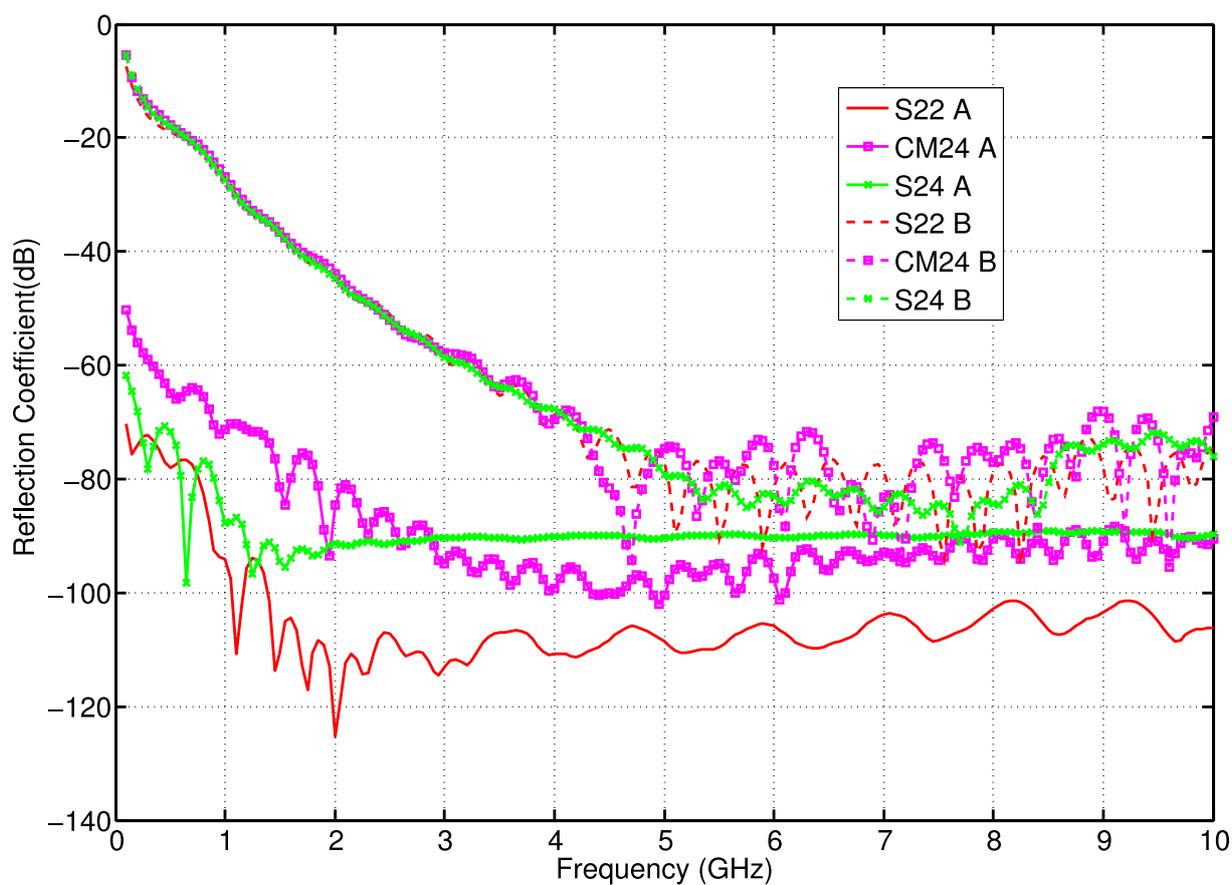


Figure 4.19 – Coefficient de réflexion des CPMLs pour les schémas : S22,S24 et CM24. Deux angles d’incidences : (A) incidence normale (B) 73°.

#### 4.4 Modèle de fils obliques pour les plaques métalliques

L'idée est de modéliser des plaques ou structures PEC avec seulement des fils sous le formalisme des fils obliques. Cette approche évite toute discontinuité de champ dans le maillage et conserve la stabilité du schéma comme si la propagation se faisait dans le vide. Nous nommons treillis, l'assemblage de fils modélisant la structure PEC. Le treillis fait apparaître des trous, puisqu'il ne recouvre pas totalement la surface de la structure. Nous nommons maille du treillis, le plus petit ensemble de fils entourant un tel trou. Chaque segment du treillis représente un fil oblique dans le formalisme suivant.

La modélisation des fils, dont la direction est arbitraire dans le maillage FDTD, a été introduite par le formalisme des fils obliques [11]. La discontinuité n'est plus présente et seuls des courants sont introduits dans la grille FDTD via le formalisme des fils obliques.

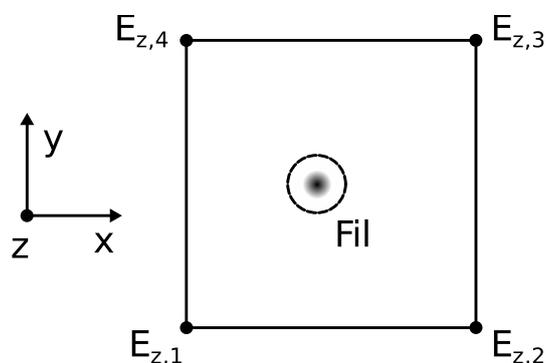


Figure 4.20 – Fil suivant l'axe  $z$  traversant une facette  $(x,y)$  d'une cellule de Yee.

Les équations additionnelles de ce formalisme des fils obliques sont, dans le cas d'un fil parallèle à l'axe  $z$  :

$$\begin{aligned} L\partial_t I + c^2\partial_z V &= \langle E_z \rangle, \\ \partial_t V + \partial_z I &= 0, \end{aligned} \quad (4.64)$$

où  $I$  est le courant sur le fil,  $V$  la tension,  $L$  une inductance et  $\langle E_z \rangle$  est une pondération entre les quatre composantes de champs électriques FDTD de la figure 4.20. L'inductance  $L$  est calculée à partir des inductances équivalentes locales à chaque composantes  $E_{z,i}$  (Équation (14) dans [12]). La valeur de  $L$  est proportionnellement inverse au rayon du fil. Enfin, le courant  $I$  est introduit dans le schéma FDTD via la densité de courant  $J$  pour les équations de Maxwell (Équation (20) dans [12]).

La discrétisation du système (4.64) segmente le fil suivant un pas constant ou variable. Ce pas influe sur la dispersion numérique du schéma 1D (sur le fil) mais aussi sur le couplage entre le fil et le champ électrique environnant. Des tests ont montré que son influence est négligeable et un seul pas est utilisé dans un fil, soit un segment du treillis.

Le modèle actuellement utilisé dans cette thèse ne prend pas en compte le couplage des fils (mutuelles) trop rapprochés. Ce couplage peut être bien représenté si la distance entre deux fils est supérieure à au moins une cellule FDTD. Plusieurs paramètres seront analysés pour la

modélisation de plaques PEC sous le formalisme des fils obliques : rayon du fil, longueur des fils, et mutuelles entre fils traitées par le champ de la méthode FDTD.

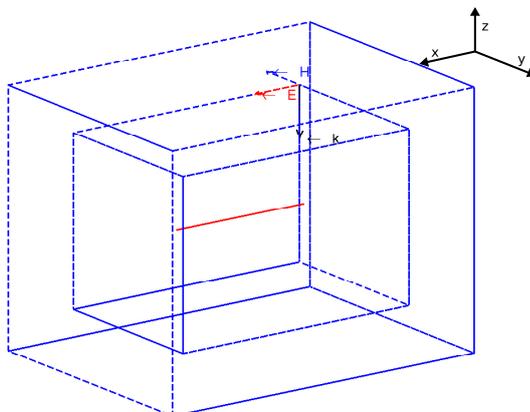


Figure 4.21 – Fil positionné au milieu de la cellule de longueur 17 cm. Boîte de Huygens pour l'injecteur d'onde plane et le champ lointain.

Dans un premier temps, nous validons le modèle des fils obliques (du schéma de Yee) pour le schéma CM24. L'exemple d'un fil oblique positionné au milieu d'une cellule, montre déjà que le modèle des fils obliques est utilisable avec la FDTD(2,4). Cet exemple est identique au cas du dipôle dans [14]. Le fil est dirigé suivant l'axe  $x$ , de longueur 17 cm et de rayon 1 mm. Le pas de discrétisation spatial (le pas FDTD) est de 1 cm, ce qui correspond à un maillage en  $\lambda/10$  pour une étude à la fréquence de 3 GHz. La SER monostatique du fil est évaluée avec une source Gaussienne. La figure 4.21 représente cette configuration avec les surfaces de Huygens nécessaires pour l'injecteur d'ondes planes et le champ lointain.

Sur la figure 4.22, les SER monostatiques évaluées par le schéma de Yee et CM24 sont cohérentes et montrent que le modèle des fils obliques peut être appliqué avec la FDTD(2,4).

Dans un second temps, la modélisation d'une plaque PEC dans le plan  $(y,z)$  avec le modèle des fils obliques permet d'analyser les paramètres de ce modèle dans un cas simple. La configuration pour l'évaluation de la SER d'une plaque de 20x20cm est représentée sur la figure 4.23. Sur cette figure, le treillis est en rouge et le maillage FDTD est en gris. Les trous du treillis sont observables sur cette figure. L'onde incidente est normale à la plaque. La SER observée est  $\sigma_{hh}$ , la polarisation horizontale. La résolution du maillage uniforme est en  $\Delta = \lambda/10 = 1$  cm à une fréquence de 3GHz.

Pour le modèle de fils obliques, la plaque métallique est décalée dans le plan  $(y,z)$  de  $\Delta/5$  pour être dans un cas général de fils qui ne coïncident pas avec les arêtes de cellules FDTD. Les différentes simulations pour le modèle de fils obliques sont résumées dans le tableau 4.1. La longueur des fils est constante et égale à 1 cm sauf pour la simulation D où elle est de 2 cm. Ainsi, le treillis de fils est identique pour toutes les simulations sauf celle de D. La CFL est réduite à 0.5 pour toutes ces simulations. Le schéma CM24 utilisé est optimisé à cette CFL de 0.5.

Les courbes de SER sont regroupées selon la prise en compte ou non de l'effet des

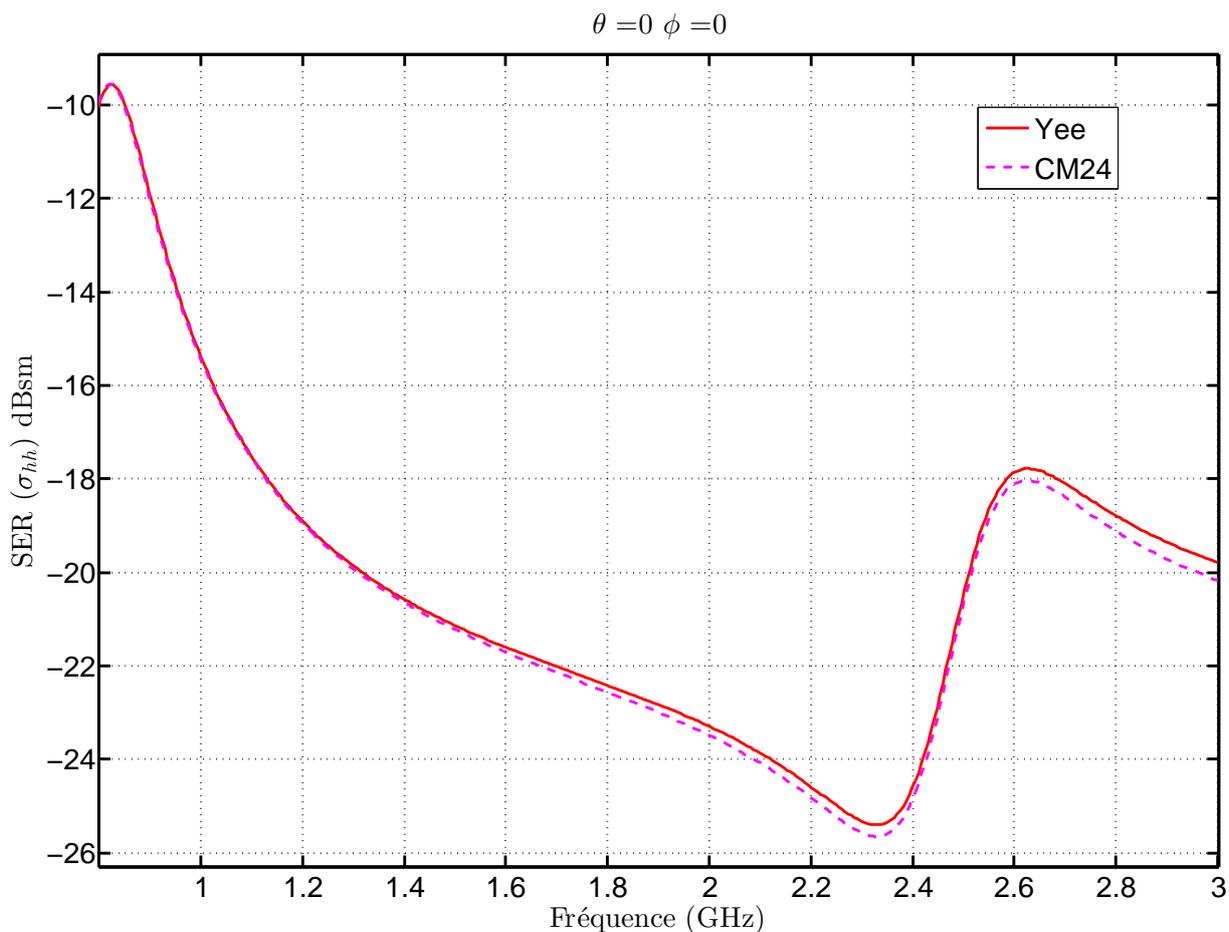


Figure 4.22 – SER monostatique (HH) d’un fil positionné au milieu de la cellule de longueur 17cm avec schéma de Yee et CM24.

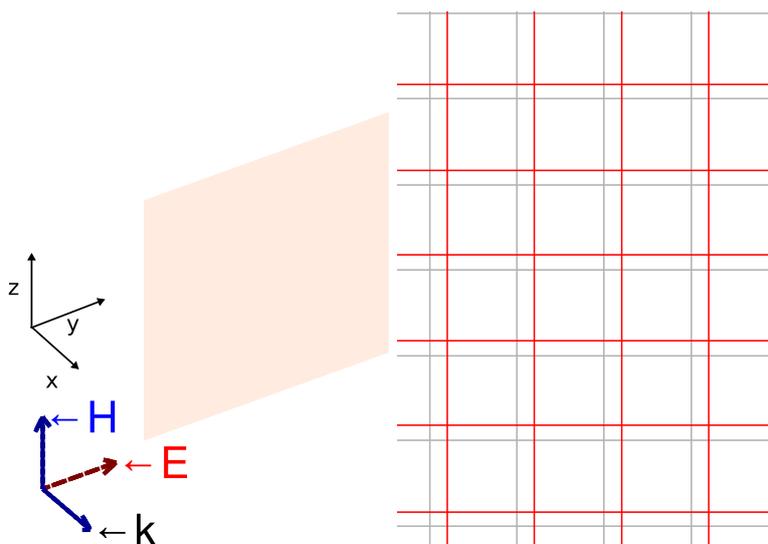
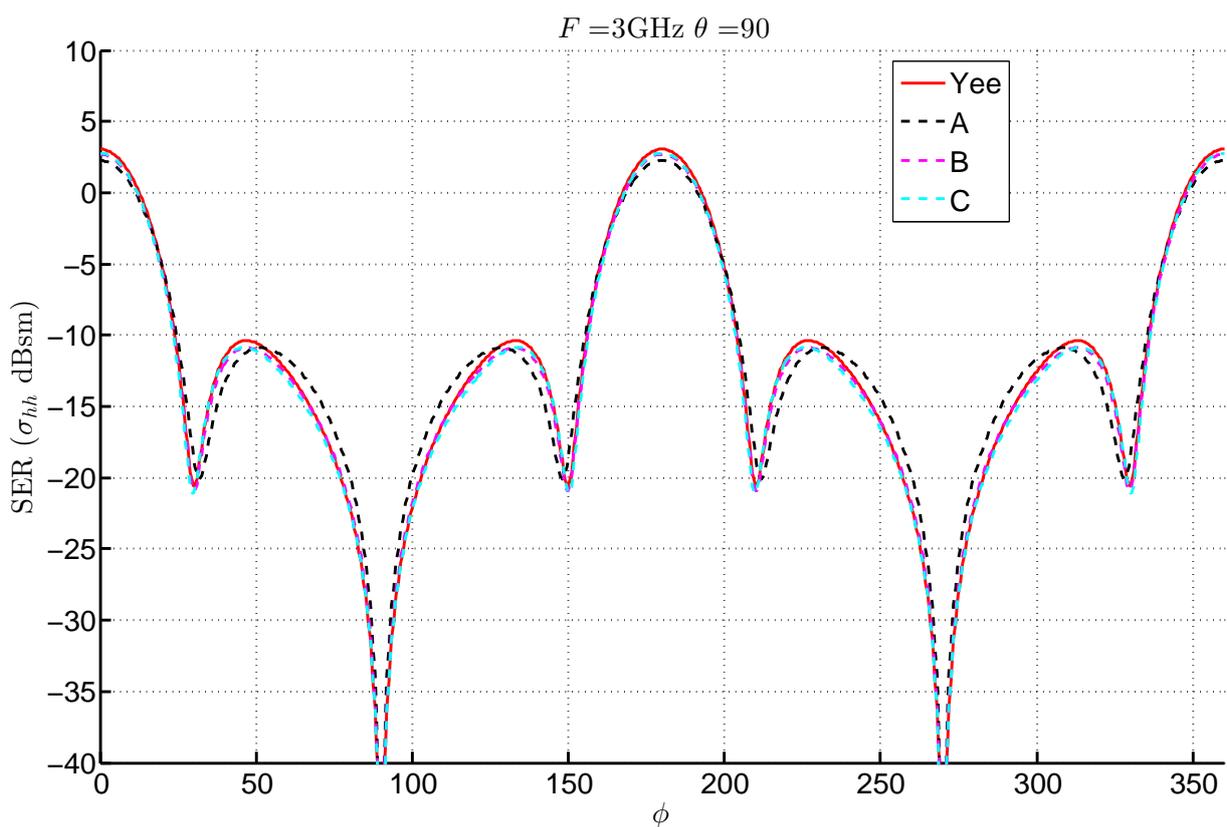


Figure 4.23 – Configuration de l’onde plane pour la SER d’une plaque 20x20cm et aperçu du treillis de fils en rouge avec la grille FDTD en gris.

Simulation	A	B	C	D	E	F	G	H
$\Delta$ (cm)	1	1	1	1	1/2	1/3	1/4	1/2
Longueur des fils	$\Delta$	$\Delta$	$\Delta$	$2\Delta$	$2\Delta$	$3\Delta$	$4\Delta$	$2\Delta$
Rayon des fils	$\Delta/10$	$\Delta/3$	$\Delta/2$	$\Delta/3$	$\Delta/2$	$\Delta/3$	$\Delta/3$	$\Delta/3$

Tableau 4.1 – Paramètres des simulations de la plaque 20x20cm pour le modèle des fils obliques.


 Figure 4.24 – SER bistatique (HH) d'une plaque  $2\lambda \times 2\lambda$  à 3GHz, avec schéma de Yee et CM24. Pas de prise en compte de la mutuelle de fils par le champ FDTD pour le schéma CM24.

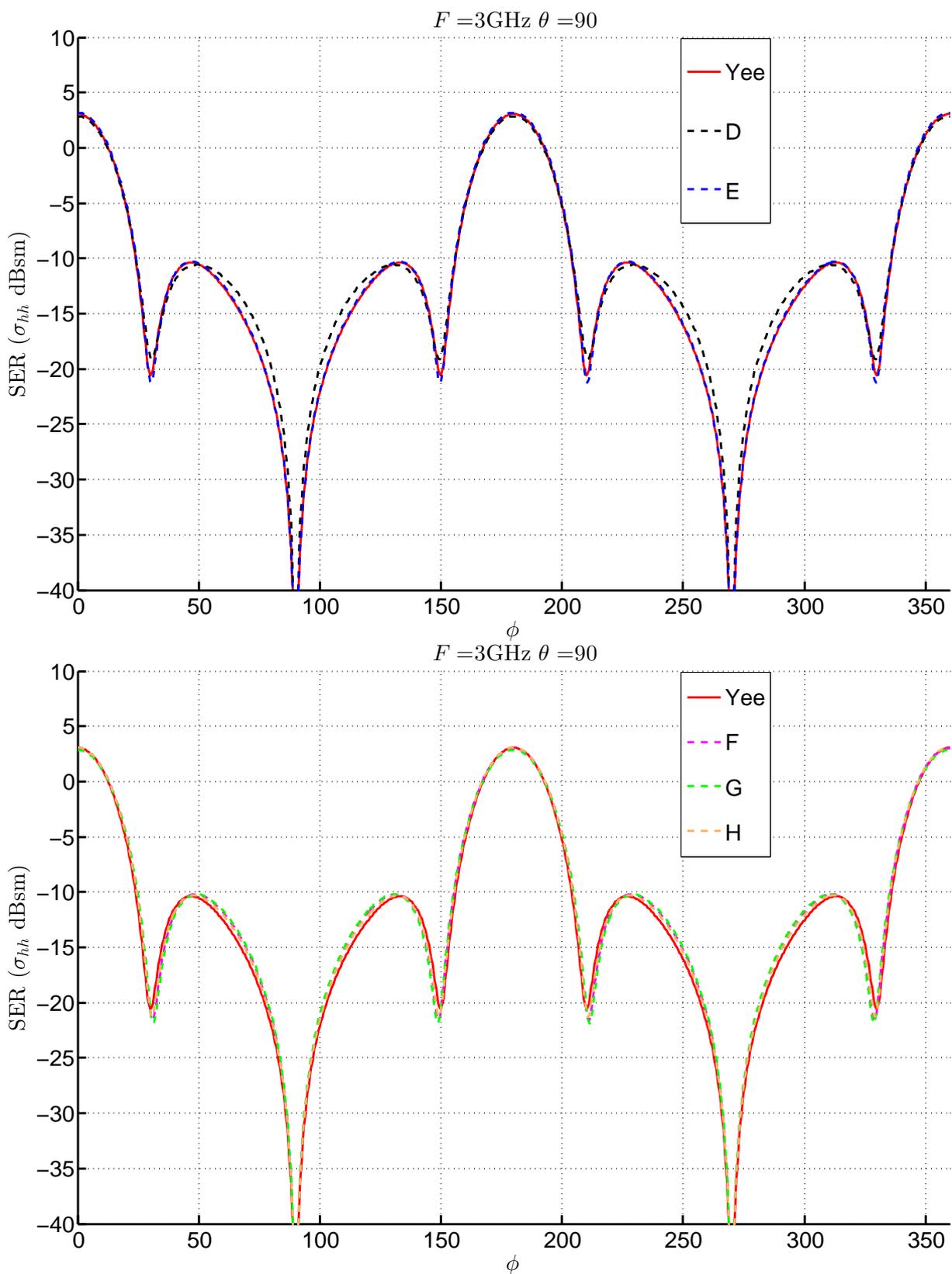


Figure 4.25 – SER bistatique (HH) d’une plaque  $2\lambda \times 2\lambda$  à 3GHz, avec schéma de Yee et CM24.

mutuelles entre fils dans respectivement la figure 4.25 et 4.24. Les meilleures courbes sont données par la figure 4.25, celles des simulations prenant en compte l'effet des mutuelles entre fils, soit ayant au moins une cellule entre les fils. La simulation E donne le meilleur résultat et est cohérent avec les observations suivantes.

Pour le rayon des fils, un rayon minimum semble être nécessaire pour avoir une bonne modélisation de la structure, que ce soit avec ou sans effet des mutuelles. Si les fils ne sont pas assez épais alors la qualité des résultats peut être dégradée rapidement. L'ordre de grandeur du rayon des fils afin de le considérer assez épais est d'environ  $\Delta/3$ . Cependant, des fils très épais peuvent nécessiter une réduction importante de la CFL et donc une augmentation significative du temps de calcul.

Enfin, en comparant les courbes F,G et H sur la figure 4.25, le meilleur résultat H correspond au cas où le treillis possède le moins de cellules FDTD vides (sans fils) dans chaque maille du treillis. Ceci signifie qu'il faut avoir le moins de "trous" possibles. La simulation D possède un nombre important de gros trous et en conséquence, le champ électromagnétique traverse la plaque PEC à hautes fréquences.

Les paramètres recommandés pour modéliser des plaques PEC avec le modèle des fils obliques sont résumés dans le tableau 4.2. Ces paramètres sont donnés pour une simulation avec un maillage en  $\lambda/20$  à la fréquence maximale d'étude et dans le cas d'effet de mutuelle entre fils prise en compte via la présence d'une cellule FDTD entre les fils. Si le modèle des fils obliques prend en compte l'effet des mutuelles sans nécessiter de cellules FDTD entre ceux-ci, alors il serait possible d'obtenir les mêmes résultats qu'ici sans avoir à raffiner le maillage. Notons que le rayon recommandé des fils de  $\Delta/3$  peut réduire déjà significativement la CFL (environ entre 0.3–0.7).

$\Delta =$	$\lambda/20$
Longueur des fils	$2\Delta$
Rayon des fils	$\Delta/3$

**Tableau 4.2 – Paramètres recommandés pour la modélisation de plaques PEC avec le modèle des fils obliques.**

## 4.5 Conclusion

Certains modèles nécessaires pour le calcul de SER avec la FDTD ont été adaptés pour le schéma CM24. Ces modèles ont été validés et leurs performances évaluées pour le schéma CM24. La technique HABC est adaptable pour la FDTD(2,4) mais n'a pas été concluante pour le schéma CM24. Les CPMLs et en particulier, l'adaptation de la dispersion numérique pour l'injecteur d'onde plane, ont des performances intéressantes vis-à-vis du champ résiduel. Ceci permettrait d'avoir une dynamique en amplitude de champ intéressante pour le calcul de la SER. Le modèle des fils obliques donne une alternative intéressante au problème d'instabilité aux bords des plaques métalliques. Les performances de ce modèle ont montré la possibilité d'obtenir des résultats aussi précis qu'avec les conditions aux limites PEC habituelles, sur le

cas simple d'une plaque métallique. De plus, cette approche évite le problème des maillages en marche d'escalier et ainsi offre une alternative aux techniques conformes qui n'ont pu être adaptés à l'ordre 4. Le modèle des fils obliques pour les structures PEC reste à être validé et perfectionné pour des structures PEC à géométrie complexe. Le chapitre suivant consacré aux applications plus complexes permettra d'évaluer le calcul de SER avec le schéma CM24 et le modèle des fils obliques.

# Bibliographie

- [1] A. Taflove, S. Hagness, *Computational Electrodynamics : The Finite-Difference Time-Domain Method*, Third Edition, Boston, MA : Artech House, 2005.
- [2] U. Ogur, L. Gürel, *Interpolation techniques to improve the accuracy of the plane wave excitations in the finite difference time domain method*, Radio Science, Vol. 32, N°6, pp. 2189-2199, Nov-Dec 1997.
- [3] A. Ranganathan, The Levenberg-Marquardt Algorithm, [http ://anath.in/docs/lmtut.pdf](http://anath.in/docs/lmtut.pdf), June 2014.
- [4] G. Mur, "Absorbing boundary-conditions for the finite-difference approximation of the time-domain electromagnetic-field equations," IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility," vol. 23, pp. 377-382, 1981
- [5] R. L. Higdon, "Absorbing boundary-conditions for difference approximations to the multi-dimensional wave-equation " Mathematics of Computation, vol. 47," pp. 437-459, Oct 1986.
- [6] R. L. Higdon, "Numerical absorbing boundary-conditions for the wave-equation," Mathematics of Computation, vol. 49, pp. 65-90, Jul 1987.
- [7] D. E. Merewether, R. Fisher, F. W. Smith, "on implementing a numeric Huygen's source scheme in a finite difference program to illuminate scattering bodies, " IEEE Transactions on Nuclear Science, Vol.NS-27, No.6, December 1980.
- [8] S. A. Schelkunoff, "Some equivalence theorems of electromagnetics and their application to radiation problems," Bell System Tech. J ., vol. 15, pp. 92-112, 1936.
- [9] J. P. Bérenger, "On the Huygens absorbing boundary conditions for electromagnetics," Journal of Computational Physics, 354-378, 2007
- [10] F. Costen, J. P. Bérenger, "Implementation of the Huygens Absorbign Boundary Condition in Corner Regions," IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility, Vol. 54 No. 2, Avril 2012.
- [11] C. Guiffaut, A. Reineix, B. Pecqueux, "New Oblique Thin Wire Formalism in the FDTD Method With Multiwire Junctions", IEEE Trans. on Antennas and Propag., Vol. 60, No. 3, March 2012.
- [12] C. Guiffaut, A. Reineix, "Cartesian Shift Thin Wire Formalism in the FDTD Method With Multiwire Junctions", IEEE Trans. on Antennas and Propag., Vol. 58, No. 8, Aug. 2010.
- [13] T. Martin, "An Improved Near-to Far-Zone Transformation for the Finite-Difference Time-Domain Method," IEEE Trans. Antennas Propag., vol. 46, no. 9, pp. 1263-1271, Sept. 1998.
- [14] T. Martin and L. Pettersson, "Dispersion Compensation for Huygens' Sources and Far-Zone Transformation in FDTD," IEEE Trans. on Antennas and Propag., Vol.48, No. 4, April 2000.
- [15] C. Guiffaut, Contribution à la méthode FDTD pour l'étude d'antennes et de la diffraction d'objets enfouis, soutenue en 2000 à Rennes.
- [16] J. P. Bérenger, *Perfectly Matched Layer (PML) for Computational Electromagnetics*, 1st ed., M&C Publishers, 2007.

- [17] J. A. Roden and S. D. Gedney, "Convolutional PML (CPML) : An efficient FDTD implementation of the CFS-PML for arbitrary media, "Microw. Opt. Technol. Lett., vol. 27, pp. 334–339, Dec. 2000.

## Applications SER

Ce chapitre est consacré à l'évaluation des modèles et du schéma CM24 dans le cadre d'applications de calcul de SER de cibles. En particulier, les apports de l'approche conforme et du schéma d'ordre supérieur seront observés sur les exemples suivants :

- Dièdre droit,
- Cylindre,
- Sphère,
- Amande NASA,
- Cavité Cobra,
- Hélicoptère.

Rappelons deux techniques conformes utilisées pour ces applications qui sont :

- Dey-Mittra (DM),
- Simplified Conformal (SC).

Les maillages utilisés pour réaliser les treillis peuvent être à des maillages surfaciques avec des triangles ou bien des quadrangles. Les modèles des fils obliques pour les applications de ce chapitre suivent généralement les recommandations du chapitre précédent, que nous rappelons dans le tableau 5.1. Un maillage triangulaire ou quadrangulaire de la structure est utilisé pour générer le treillis de fils. Rappelons qu'il est nécessaire de modéliser le couplage entre les fils voisins par un maillage FDTD au moins deux fois plus fin que le maillage du treillis. Pour les schémas dont le nombre CFL a été réduit, leur nombre CFL est donné sur les figures. Le schéma CM24 est optimisé à une CFL de 0.5 pour les applications de ce chapitre. Le type de source utilisé pour l'onde plane est une Gaussienne.

Les angles d'incidence de l'onde plane sont les coordonnées polaires du vecteur unitaire  $k$  dirigeant l'onde plane.

$\Delta =$	$\lambda/20$
Longueur des fils	$2\Delta$
Rayon des fils	$\Delta/3$

Tableau 5.1 – Paramètres recommandés pour la modélisation de plaques PEC avec le modèle des fils obliques.

## 5.1 Dièdre droit

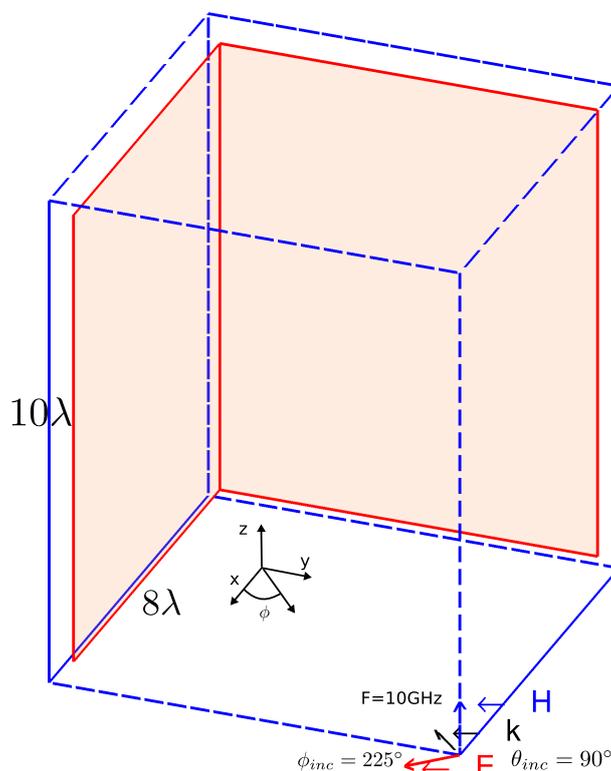


Figure 5.1 – Dièdre droit de  $24(l) \times 30(h)$ cm.

L'exemple présenté ici est le calcul de SER bistatique d'un dièdre droit dont la hauteur est de 30 cm et de longueur de plaque de 24 cm, représenté sur la figure 5.1. La fréquence maximale d'étude est de 10 GHz et la structure est maillée en  $\lambda/10$  à cette fréquence. L'onde plane est dirigée avec un angle de  $45^\circ$  suivant  $\phi$  et polarisée horizontalement, comme indiqué sur la figure 5.1.

Sur la figure 5.2, des résultats de référence ont été obtenus avec la méthode des moments, le schéma de Yee et CM24 avec un modèle PEC décrit comme dans le chapitre conforme (troncature du stencil). Le schéma CM24 est stable suffisamment longtemps pour que le signal ait convergé. Ce cas d'exemple montre peu de différences entre le schéma de Yee et CM24, mais le schéma CM24 est légèrement plus précis à certains angles (ex : vers  $18^\circ$ ; Zoom sur la figure 5.2).

Pour le modèle des fils obliques avec le schéma CM24, celui-ci a été optimisé à une CFL de 0,5, CFL réduite pour la stabilité du schéma avec le modèle des fils obliques. Plusieurs paramètres ont été investigués afin de trouver la meilleure qualité de résultat comme dans le chapitre précédent. Les conclusions des tests réalisés sur ce dièdre sont cohérentes avec celles faites sur la plaque métallique du chapitre précédent. Les paramètres recommandés donnent le résultat présenté sur la figure 5.3. Il est donc possible d'obtenir quasiment le même rayonnement du dièdre droit avec le modèle des fils obliques.

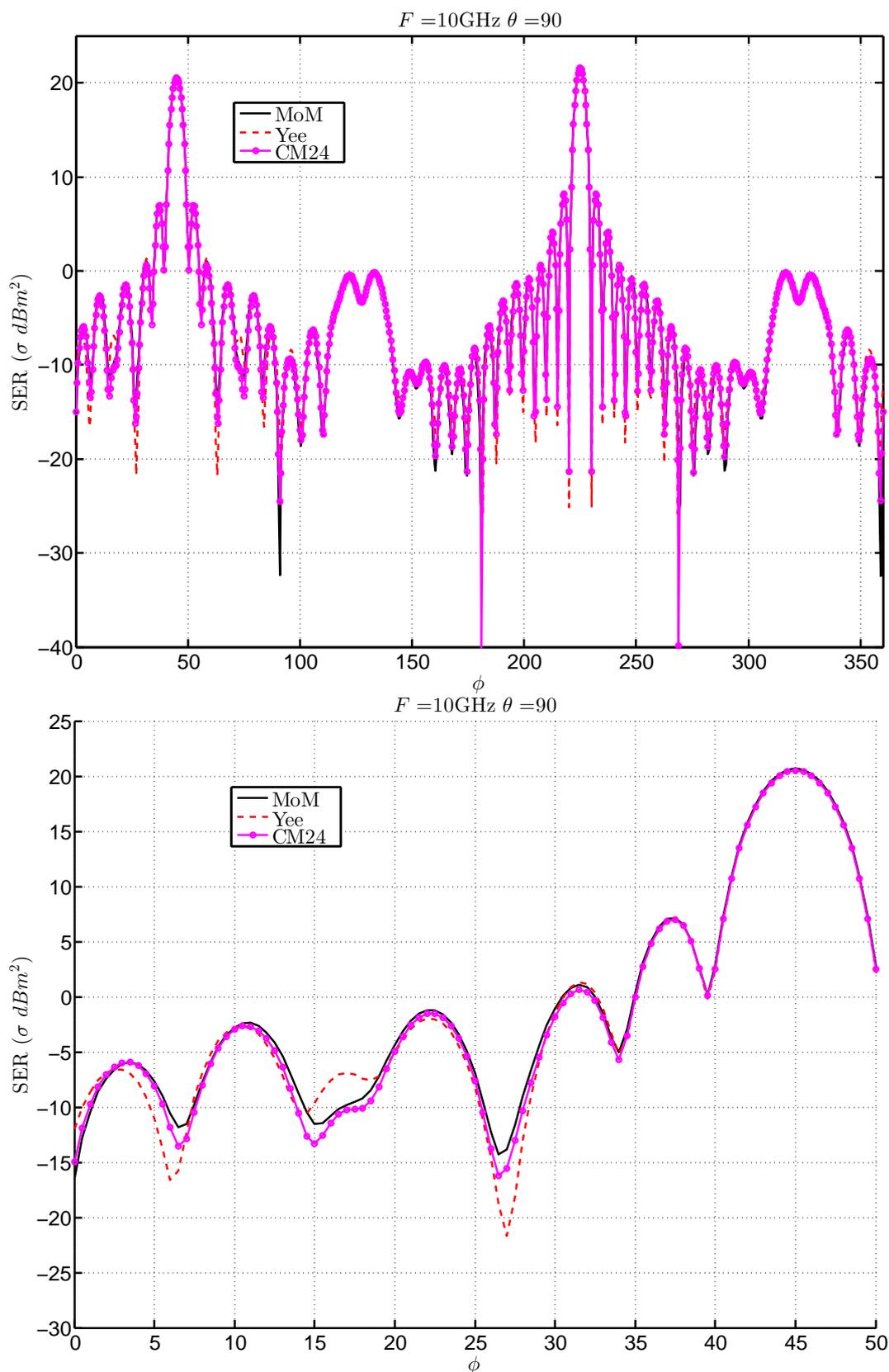


Figure 5.2 – SER (HH) bistatique d'un dièdre droit de  $24(l) \times 30(h)$  cm. Incidence de  $45^\circ$ . Références : MoM et FDTD (modèle plaque) avec maillage en  $\lambda/10$  à 10GHz.

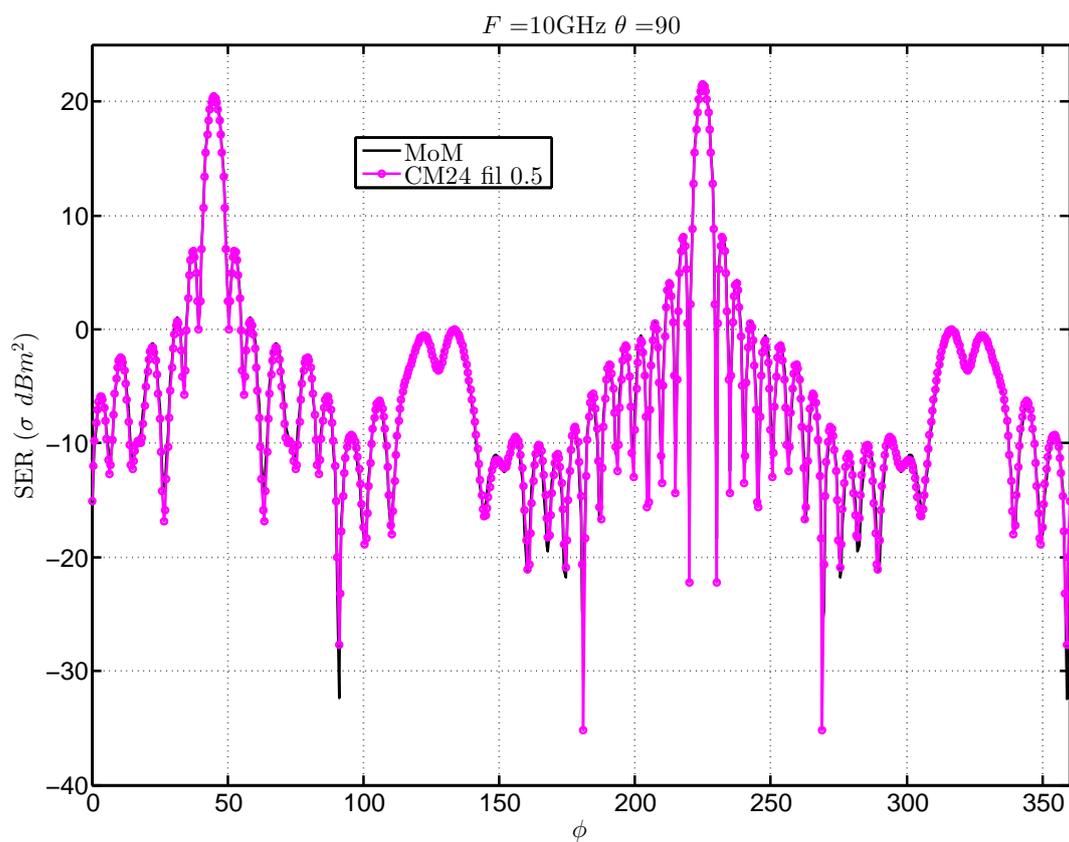


Figure 5.3 – SER (HH) bistatique d'un dièdre droit de  $24(l) \times 30(h)$  cm. Incidence de  $45^\circ$ . Modèle des fils obliques pour le schéma CM24. Fils de rayon  $1\text{mm} = \Delta/3$ . Schéma CM24 optimisé à  $\Delta/10$  pour une CFL à 0.5, avec maillage en  $\lambda/10$  à 10GHz

## 5.2 Sphère

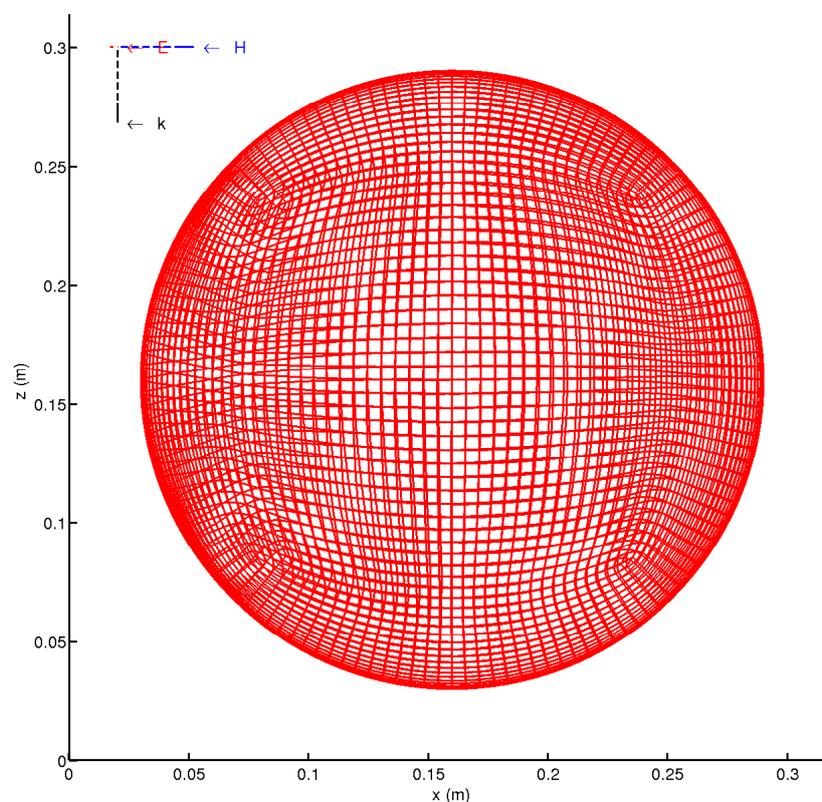


Figure 5.4 – Sphère de rayon de 13 cm modélisée par un treillis de fils obliques.

Les SER monostatiques d'une sphère de rayon de 13 cm sont calculées avec la FDTD classique, la technique conforme SC, et le modèle des fils obliques pour le schéma CM24. Elles sont représentées sur la figure 5.5. La technique conforme DM avec une CFL de 0.5 donne les mêmes résultats pour cette sphère. Elle n'est donc pas représentée ici. Les cellules uniformes du maillage sont des cubes de 2 mm de côté. Le treillis est adapté d'un maillage quadrangulaire avec des côtés de longueur moyenne de 4 mm, dont une représentation est donnée sur la figure 5.4. La solution analytique est calculée avec la série de Mie [3].

L'approximation de la géométrie avec des marches d'escalier pour la FDTD classique montre de grandes erreurs. La technique conforme et le modèle des fils obliques modélisent mieux la géométrie curviligne de la sphère. Leurs résultats sont beaucoup plus précis qu'avec la méthode FDTD classique. Dans la zone proche de 10 GHz, des erreurs apparaissent sur ces deux courbes. Les erreurs sur la courbe FDTD SC sont liées en majeure partie à la dispersion numérique sur les ondes rampantes. Tandis que ceux du modèle des fils obliques sont liés aux trous du treillis. Cependant, ces deux modèles montrent une précision supérieure vis-à-vis de la prise en compte de la géométrie.

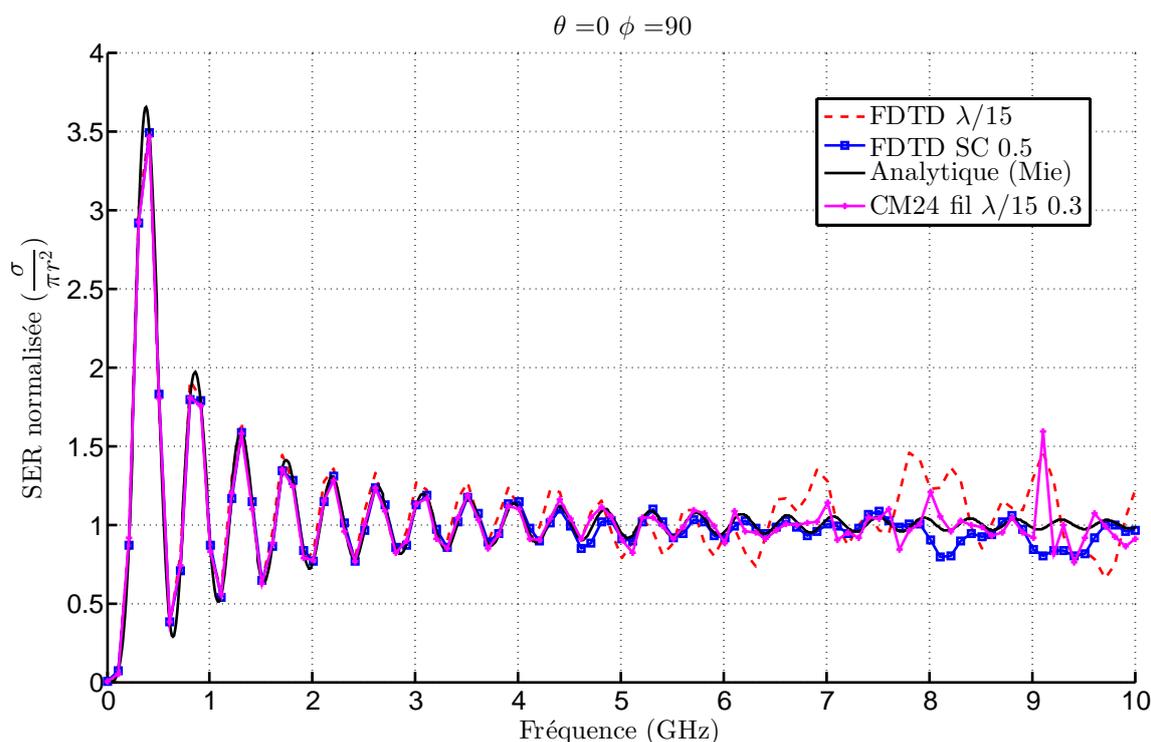


Figure 5.5 – SER monostatique d’une sphère de 13 cm. Le nombre présent pour des schémas FDTD est le nombre CFL. La longueur d’onde minimale est associée à la fréquence de 10 GHz.

### 5.3 Cylindre

Les dimensions du cylindre sont : un rayon  $a = 21$  cm et une hauteur  $l = 30$  cm. Pour la FDTD d’ordre 2 avec une géométrie en marche d’escalier, la résolution du maillage est de  $\frac{\lambda}{10}$  à 10 GHz soit 3 mm. Pour celles avec les techniques conformes et le modèle des fils obliques, la résolution du maillage est de 5 mm. La longueur des fils est en moyenne de 6 mm. Le maillage conforme et le treillis sont donnés sur la figure 5.7. La SER bistatique est calculée sur un plan horizontal pour un seul tir, comme indiqué sur la figure 5.6. Les résultats de la simulation seront comparés, à hautes fréquences, avec une formule analytique approximant la SER (en polarisation TE) d’un cylindre en zone optique [1] :

$$\sigma_{TE} = \frac{4l^2}{\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(2)}(ka)} e^{jn\phi} \right|^2 \quad (5.1)$$

où  $J_n(ka)$  est la fonction de Bessel de première espèce d’ordre  $n$ ,  $H_n^{(2)}(ka)$  la fonction de Hankel de seconde espèce d’ordre  $n$  et  $k = 2\pi f/c$  le nombre d’onde. Cette formule est valide lorsque la hauteur du cylindre est supérieure à son rayon mais imprécise en zone de Rayleigh (basses fréquences).

La figure 5.8 donne la SER monostatique en fonction de la fréquence pour différents schémas. Les mêmes observations que sur la sphère précédente peuvent être faites pour ce cylindre. Avec les techniques conformes DM et SC, les résultats sont beaucoup plus précis. Remarquons qu’une CFL de 0.5 permet aussi d’obtenir de bons résultats dans le cas

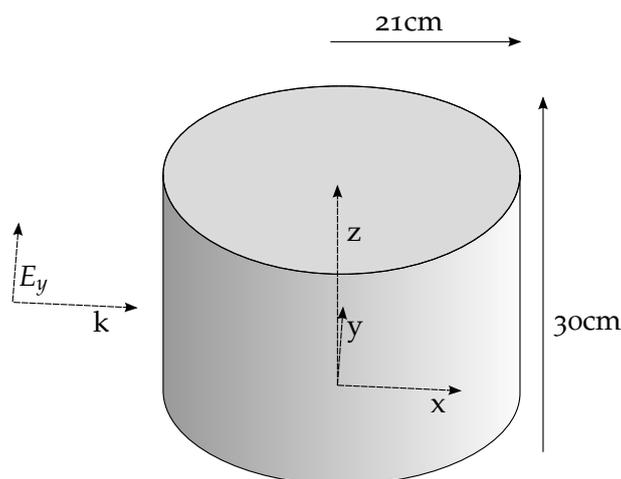


Figure 5.6 – Configuration de la simulation : calcul de SER du cylindre avec une onde plane en incidence TE dirigée suivant  $\vec{x}$ . Étude en polarisation HH ( $\phi\phi$ ).

du cylindre. La méthode SC donne remarquablement de meilleurs résultats comparée à la méthode DM. Comme pour la sphère, la technique filaire décroche à partir de 5 GHz.

La SER bistatique est observée sur la figure 5.9 vers 5.4 GHz. Les techniques conformes et le modèle de fils obliques correspondent mieux au résultat de référence en comparaison avec le schéma de Yee. Après ces quelques exemples, l'approximation avec des marches d'escalier n'est pas comparable en précision avec les autres schémas. Une meilleure prise en compte de la géométrie est indispensable pour réaliser des calculs de grande précision.

## 5.4 Cavité Cobra

La cavité cobra (DGA) est une cavité rectangulaire ouverte avec une courbure sur sa longueur dont la configuration de calcul est représentée sur la figure 5.10. La taille de la structure est de : 43.71 (L) x 11 (l) x 8.4 (h) cm. Pour la FDTD d'ordre 2 conforme (Fig. 5.11), la résolution du maillage est de 1 cm soit  $\lambda/10$  à 3 GHz. Pour le modèle des fils obliques (Fig. 5.11), la résolution du maillage est de 5 mm soit environ  $\lambda/20$  à 3 GHz. La longueur des fils est en moyenne de 1 cm.

Les résultats en monostatique et bistatique sont donnés respectivement par les figures 5.12 et 5.13. Ces résultats sont comparés au résultat de référence donné par la méthode des moments. En monostatique, les schémas FDTD SC et CM24 donnent les meilleurs résultats. Le traitement des cellules conformes instables par la technique DM est moins performante que celle de la technique SC. Cette imprécision de la technique DM se retrouve aussi sur le résultat en bistatique de la figure 5.13. Le schéma CM24 donne de bons résultats avec le modèle des fils obliques. Sur la SER monostatique, remarquons que la forte variation vers 1.8 GHz est la fréquence de résonance pour le premier mode suivant la hauteur de la section transverse de la cavité qui est de 8.4 cm, soit une résonance à la fréquence de 1.78 GHz.

## 5.5 Amande NASA

La structure a la forme d'une amande (Fig. 5.14, 5.15) et sa longueur est de 22.86 cm [4]. Le maillage est fin avec des cubes de 1,5 mm de côté, soit environ  $\lambda/28$  à 7 GHz. Le treillis est composé de fils de longueur entre 3 et 4 mm en moyenne.

Les résultats avec la FDTD SC et le schéma CM24 sont proches de la référence MoM, en monostatique (Fig. 5.16) et en bistatique (Fig. 5.17). L'écart entre les courbes est d'environ 1 dB seulement en monostatique. En bistatique, les mêmes différences sont observées entre chaque méthode. Le maillage plus fin dans cet exemple montre que les résultats sont cohérents.

## 5.6 Peau d'un Hélicoptère

Ce dernier exemple avec une géométrie plus complexe que celles des précédentes est la peau d'un hélicoptère de longueur 22 m et largeur 18 m [2]. Pour le schéma CM24, le maillage est composé de cubes de 10 cm de côté, correspondant à  $\lambda/10$  à 300 MHz. Les fils du treillis ont pour longueur moyenne 20 cm. Le pas du maillage pour la FDTD conforme est de 13,3 cm. La configuration de l'onde plane est représentée sur la figure 5.18 et aussi le maillage conforme et le treillis y sont représentés. Le maillage conforme est un prototype et peut donc donner des maillages avec quelques défauts comme ici.

Sur les figures 5.19 et 5.20, les résultats avec le modèle des fils obliques du schéma CM24 sont cohérents avec ceux du schéma FDTD conforme et de la MoM. Les défauts du maillage conforme détériore légèrement la qualité du résultat par la méthode FDTD SC à une CFL de 0.5.

## 5.7 Conclusion

Quelques cas tests ont été réalisés avec la FDTD conforme d'ordre 2 et le schéma CM24 avec les modèles des fils obliques. Les tests ont montré l'apport significatif des techniques conformes pour la bonne prise en compte de la géométrie des structures. Pour le schéma CM24, le modèle des fils obliques offre une autre approche à l'approximation de la géométrie et a montré une bonne efficacité. Cependant, le modèle que nous avons utilisé a nécessité un maillage plus raffiné que le maillage du treillis, et donc ne permet pas de profiter de tous les avantages du schéma CM24 : notamment la CFL maximale et une meilleure dispersion numérique sur la bande haute fréquence. En conséquence, les temps de calcul sont considérables et non optimales pour le CM24, comme indiqué par le tableau 5.2. Un autre tableau donne l'occupation mémoire de ces mêmes exemples 5.3. Néanmoins, le modèle des fils obliques est stable pour la modélisation de structures PEC avec le schéma CM24. Ce modèle pourra donner de nouvelles perspectives et être amélioré afin de tirer parti, au mieux, des performances du schéma FDTD.

Exemple	FDTD SC (0.5)	CM24	MoM
Amande NASA	40 min. ( $\lambda/27$ )	7 H 41 min ( $\lambda/27;0.3$ )	4 H 54 min (201 fréq.)
Cobra	6 min. ( $\lambda/10$ )	2 H 27 min ( $\lambda/20;0.3$ )	20 H 4 min (251 fréq.; 2 cœurs).
Hélicoptère	6 min. ( $\lambda/7.5$ )	6 H 31 min ( $\lambda/10;0.1$ )	8 h 6 min (FEKO 81 fréq.; 20-100 MHz)   7 h 57 min (CST 201 fréq.; 100-300 MHz)

Tableau 5.2 – Temps de calcul de quelques exemples du chapitre 5. Les calculs sont généralement faits avec 4 cœurs. Résolution du maillage et CFL donné entre parenthèses.

Exemple	FDTD SC (0.5)	CM24	MoM
Amande NASA	3.66 ( $\lambda/27$ )	7.68 ( $\lambda/27;0.3$ )	7000 triangles
Cobra	0.83 ( $\lambda/10$ )	7.94 ( $\lambda/20;0.3$ )	7564 triangles
Hélicoptère	1.64 ( $\lambda/7.5$ )	5.95 ( $\lambda/10;0.1$ )	FEKO 11K triangles; 20-100 MHz   CST 53750 triangles; 100-300 MHz

Tableau 5.3 – Occupation mémoire (GHz) de quelques exemples du chapitre 5. Résolution du maillage et CFL donné entre parenthèses. Pour la MoM, la mémoire est entre 4 et 6 GHz.

R=21cm  
H=30cm

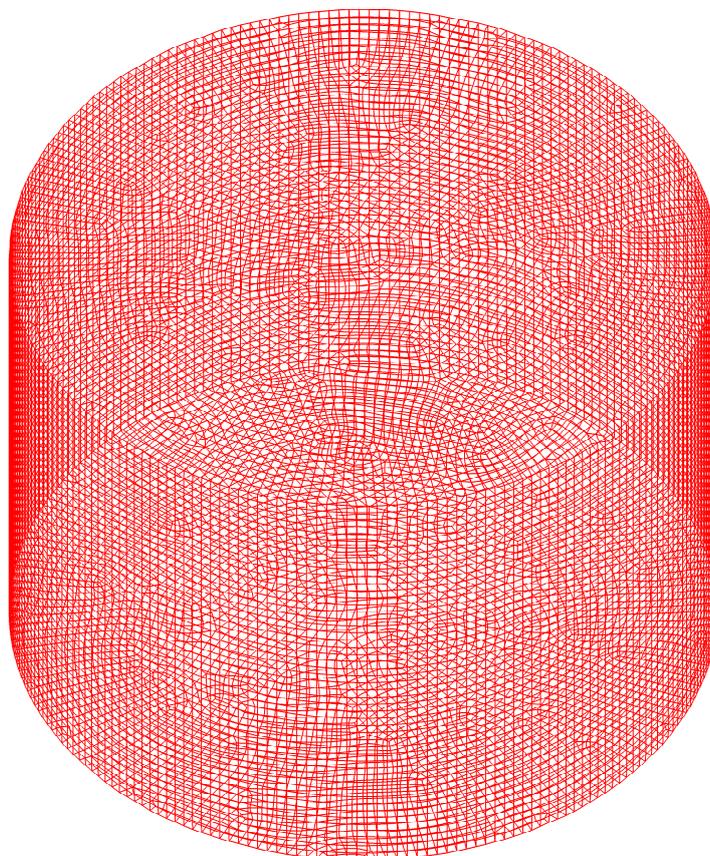
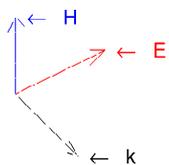
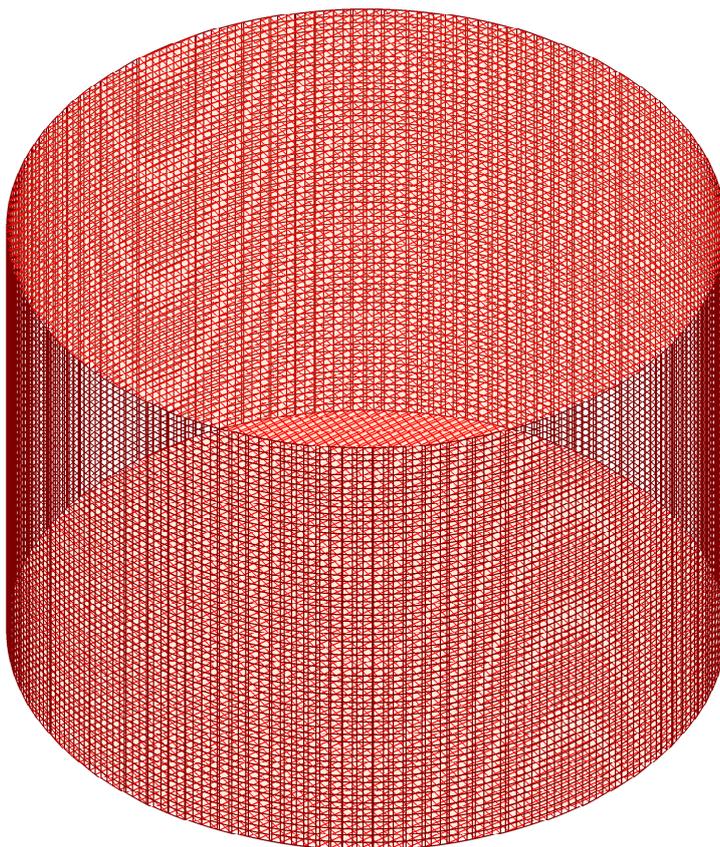
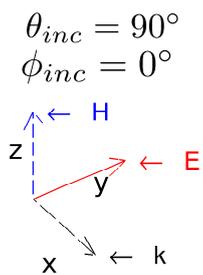


Figure 5.7 – Maillage conforme puis treillis du cylindre.

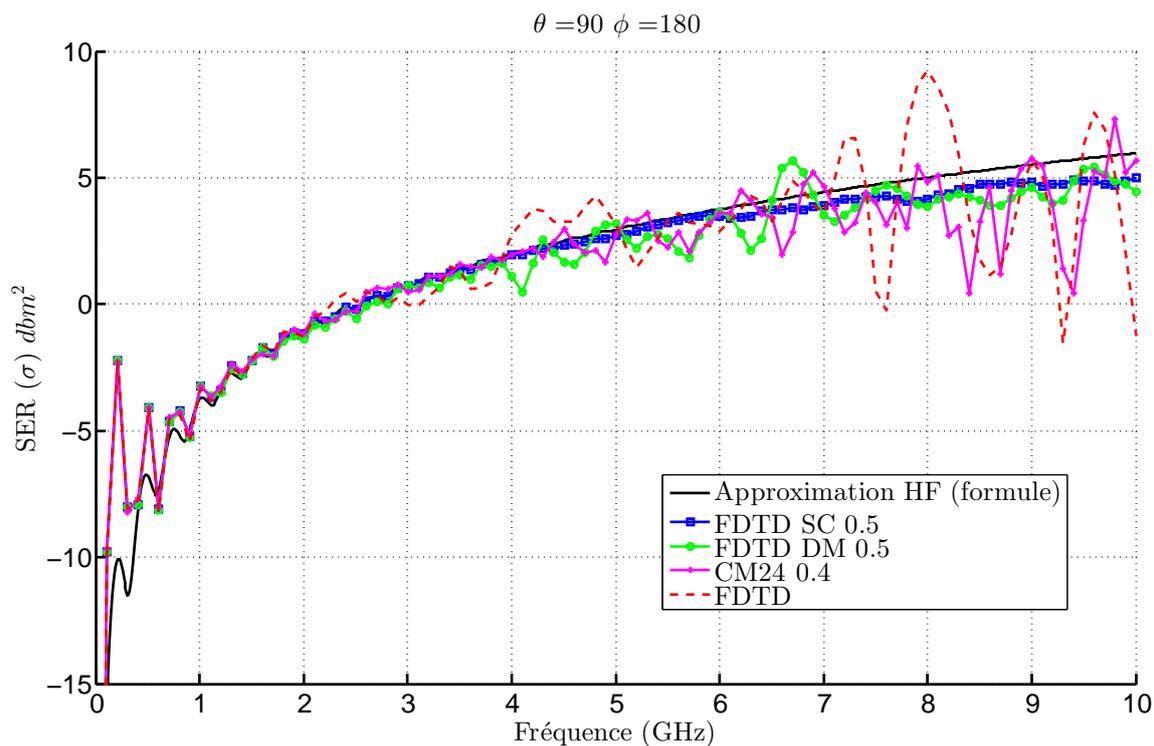


Figure 5.8 – SER monostatique (polarisation HH) d’un cylindre de rayon 21 cm et de hauteur de 30 cm avec un pas de maille de 3 mm pour le schéma de Yee (FDTD). Le pas est de 5 mm pour les autres schémas.

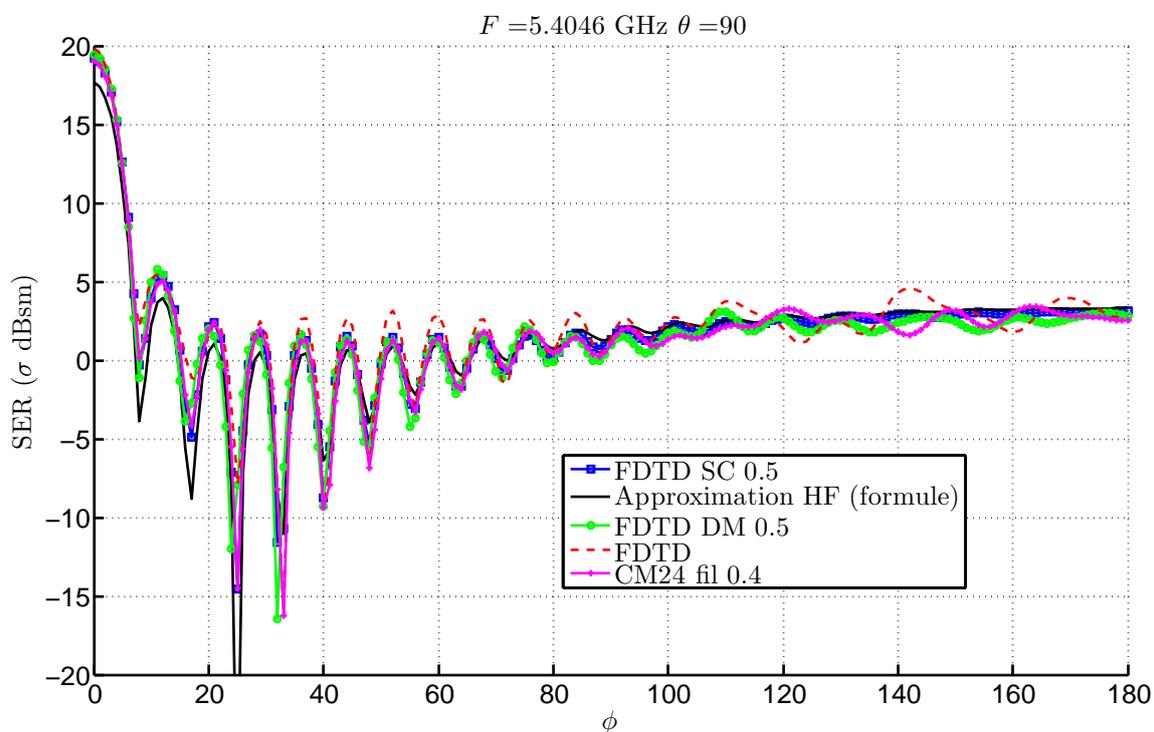


Figure 5.9 – SER bistatique (polarisation HH) d’un cylindre de rayon 21 cm et de hauteur de 30 cm avec un pas de maille de 3 mm pour le schéma de Yee (FDTD). Le pas est de 5 mm pour les autres schémas.

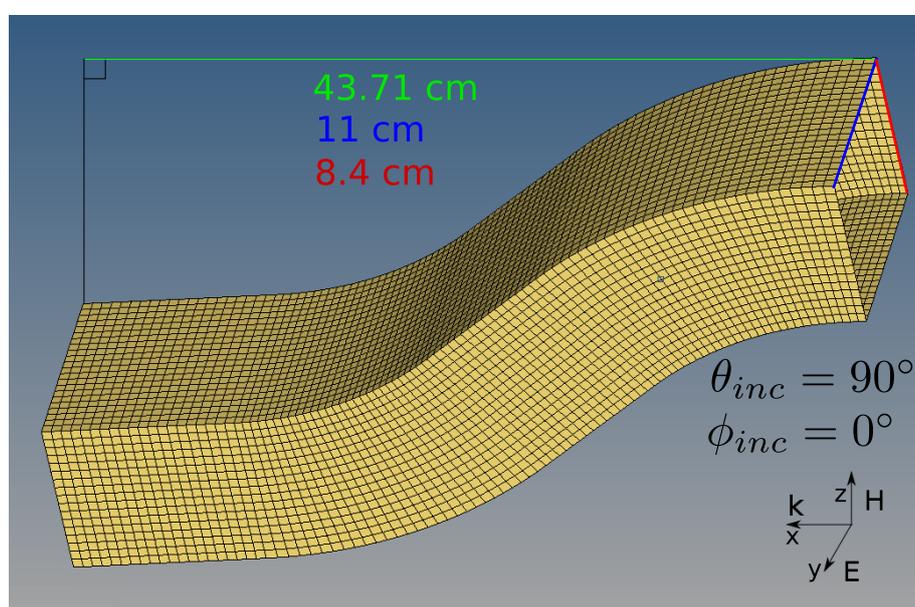


Figure 5.10 – Maillage structuré du cobra. Le côté d'un quadrilatère est en moyenne 1 cm.  
Dimensions : 43.71 (L) x 11 (l) x 8.4 (h) cm

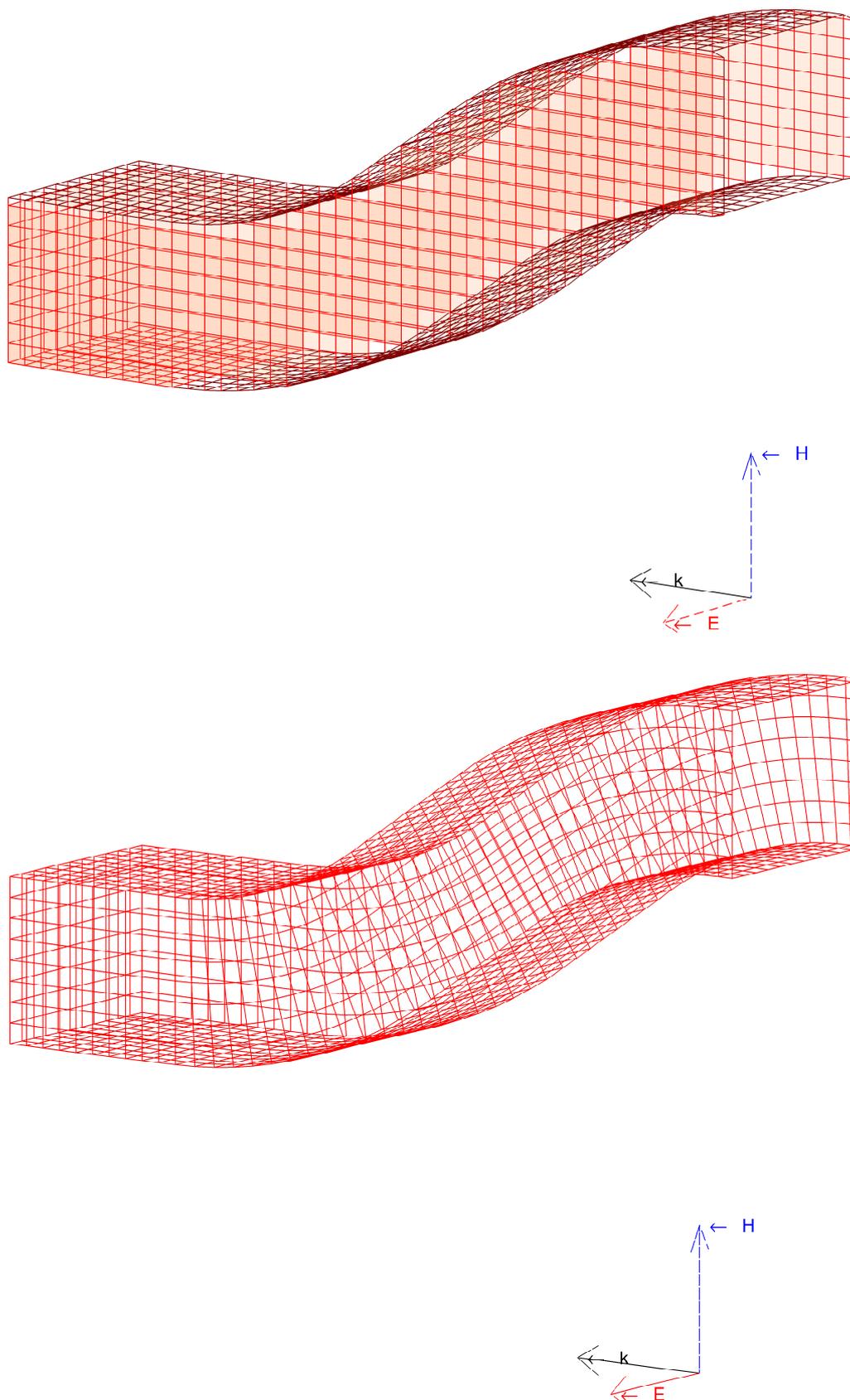


Figure 5.11 – Maillage conforme puis treillis du cobra.

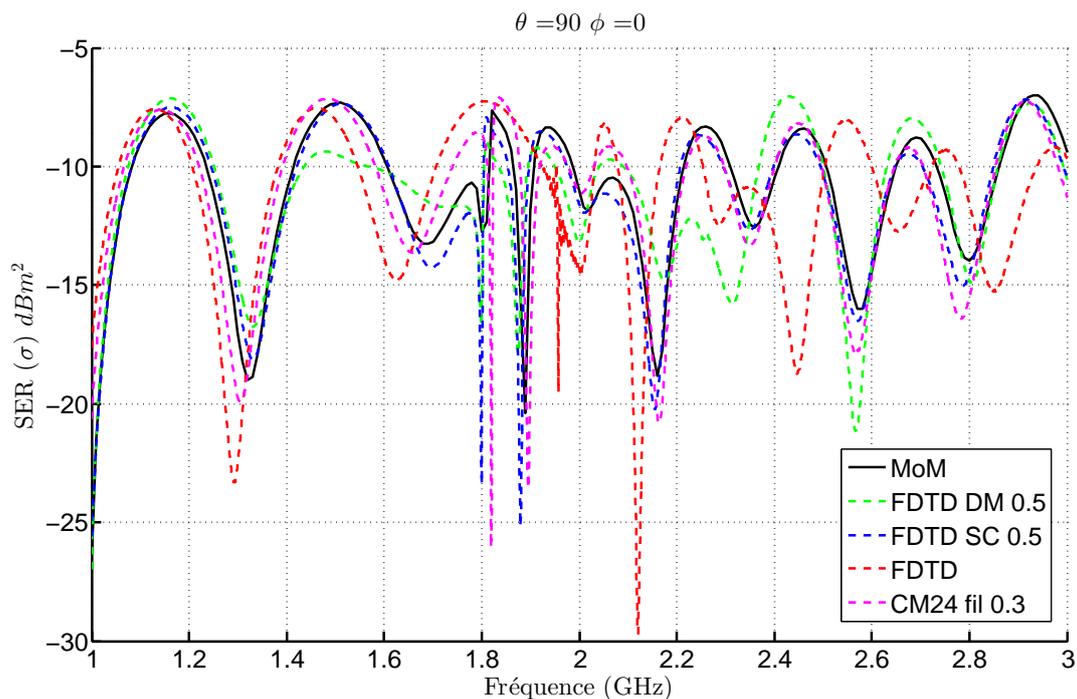


Figure 5.12 – SER monostatique (polarisation HH) du Cobra avec un maillage de 1 cm.

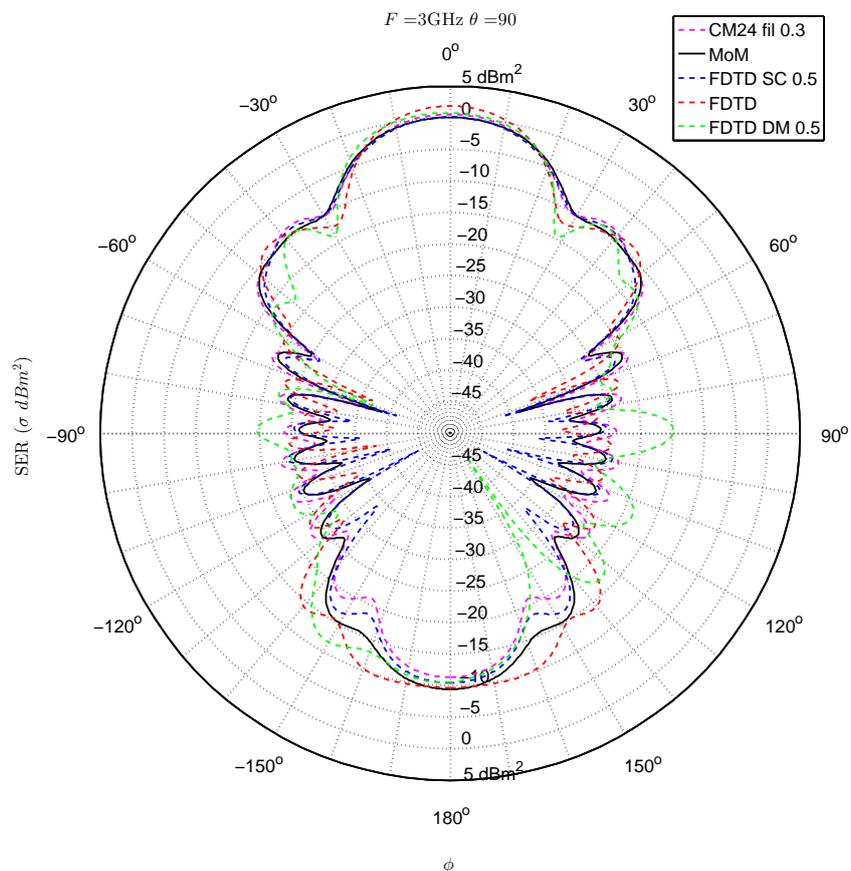


Figure 5.13 – SER bistatique (polarisation HH) du Cobra avec un maillage de 1 cm.

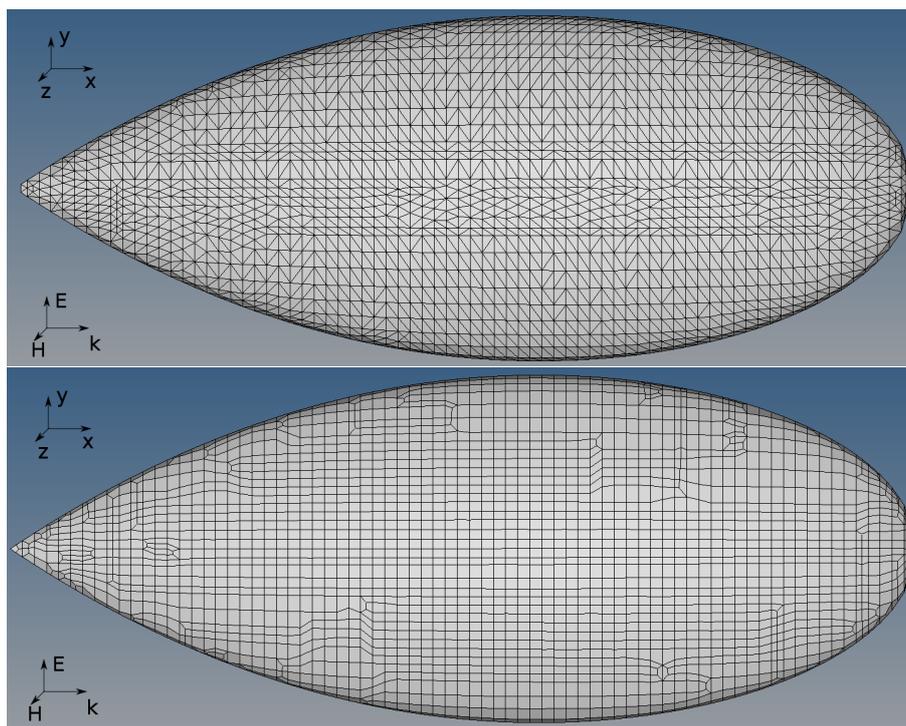


Figure 5.14 – Maillage de l’amande NASA avec des triangles ou des quadrangles.

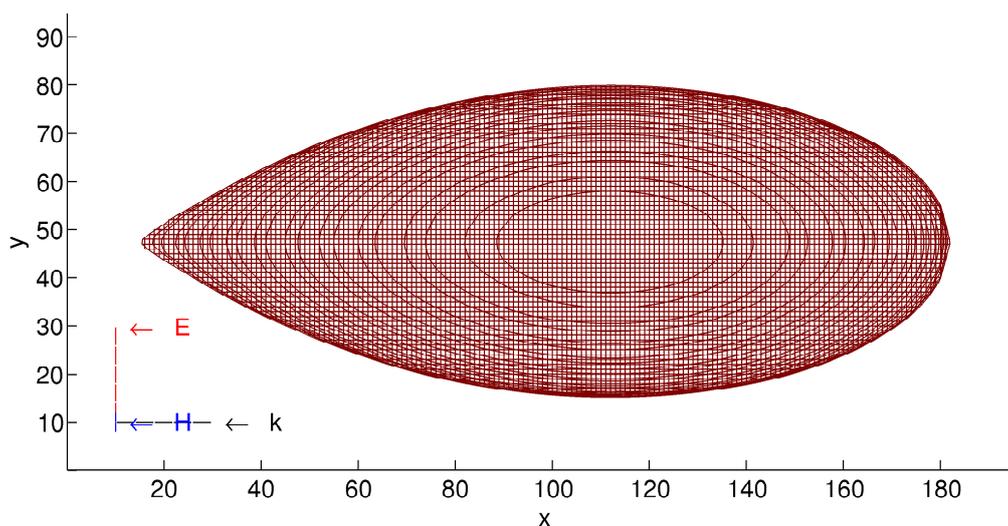


Figure 5.15 – Maillage conforme de l’amande NASA.

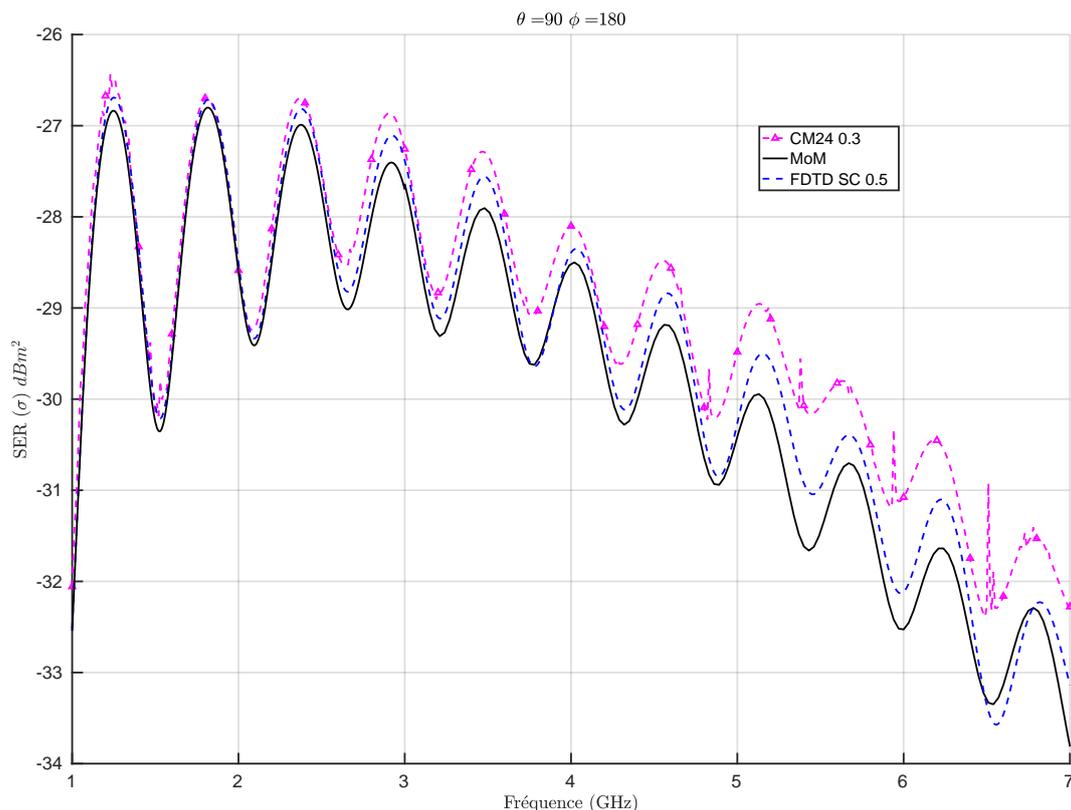


Figure 5.16 – SER monostatique (polarisation HH) de l’amande NASA avec un maillage de 1,5 mm.

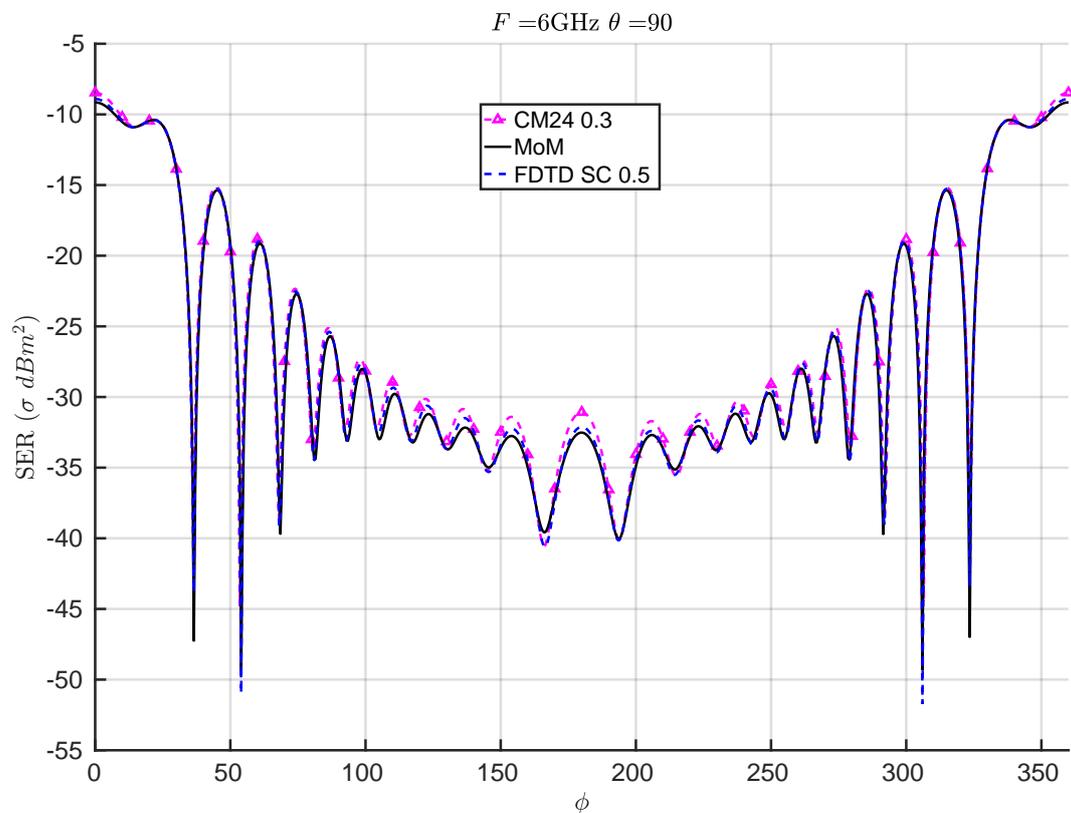


Figure 5.17 – SER bistatique (polarisation HH) de l’amande NASA avec un maillage de 1,5 mm.

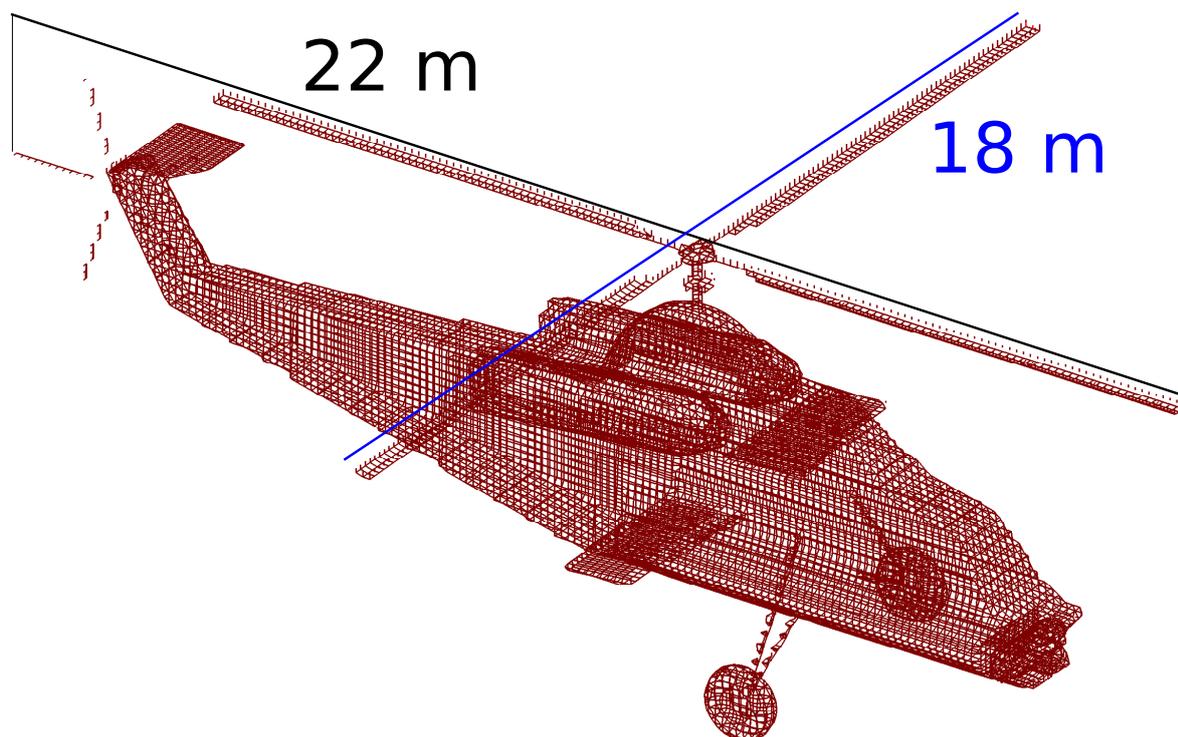
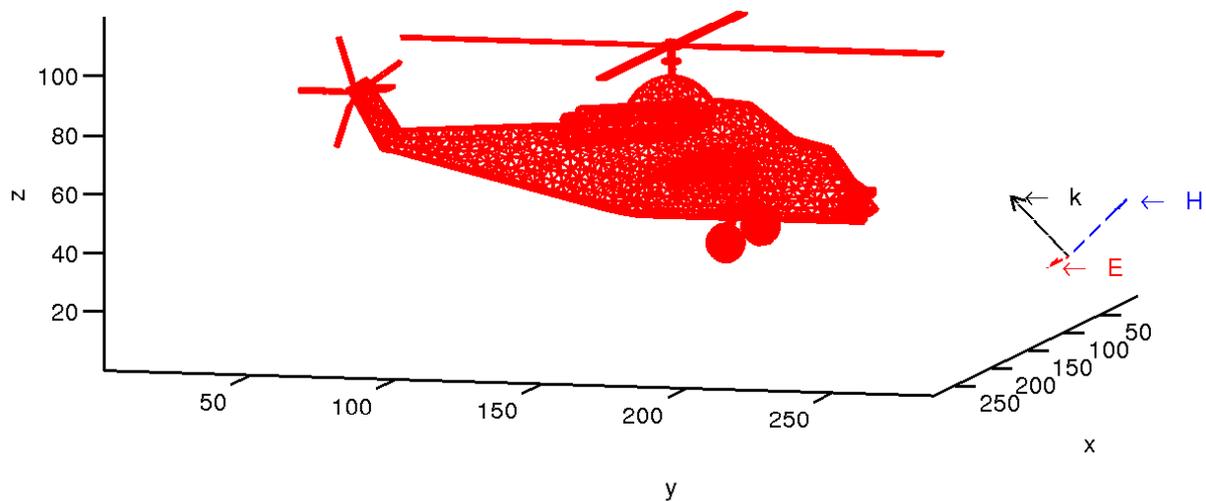


Figure 5.18 – Configuration de l'onde plane et treillis de fils obliques pour la modélisation de l'hélicoptère. Maillage conforme en bas présentant quelques défauts.

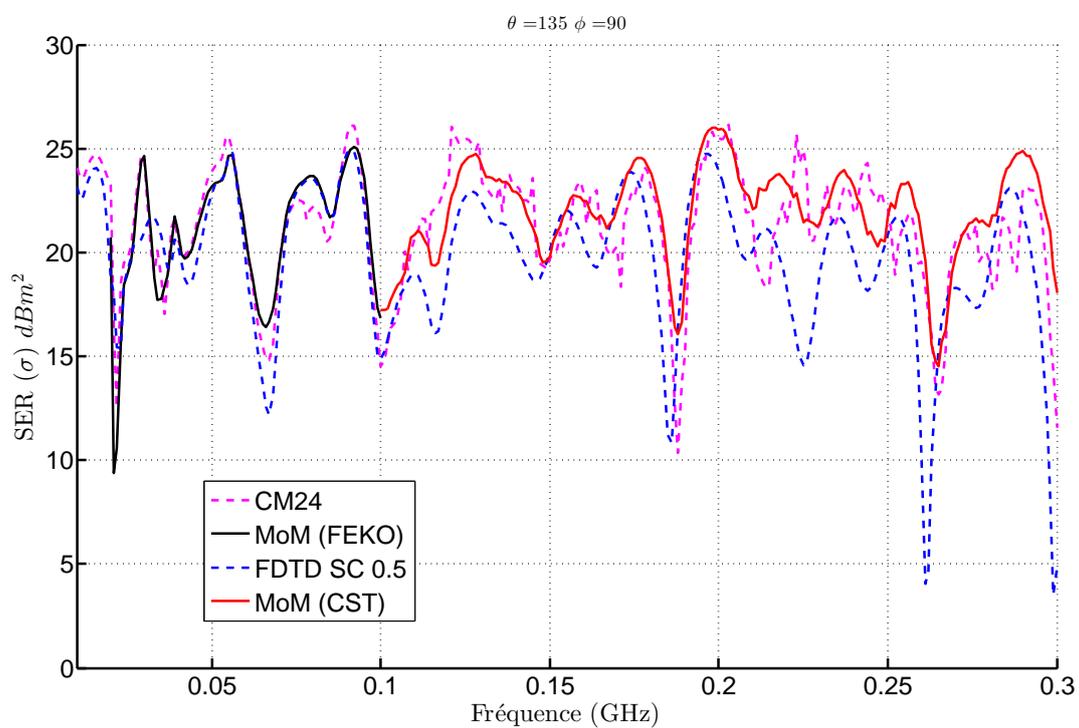


Figure 5.19 – SER monostatique (SER total) de l'hélicoptère avec un maillage de 10 cm pour le schéma CM24 et 13.3 cm pour la FDTD SC.

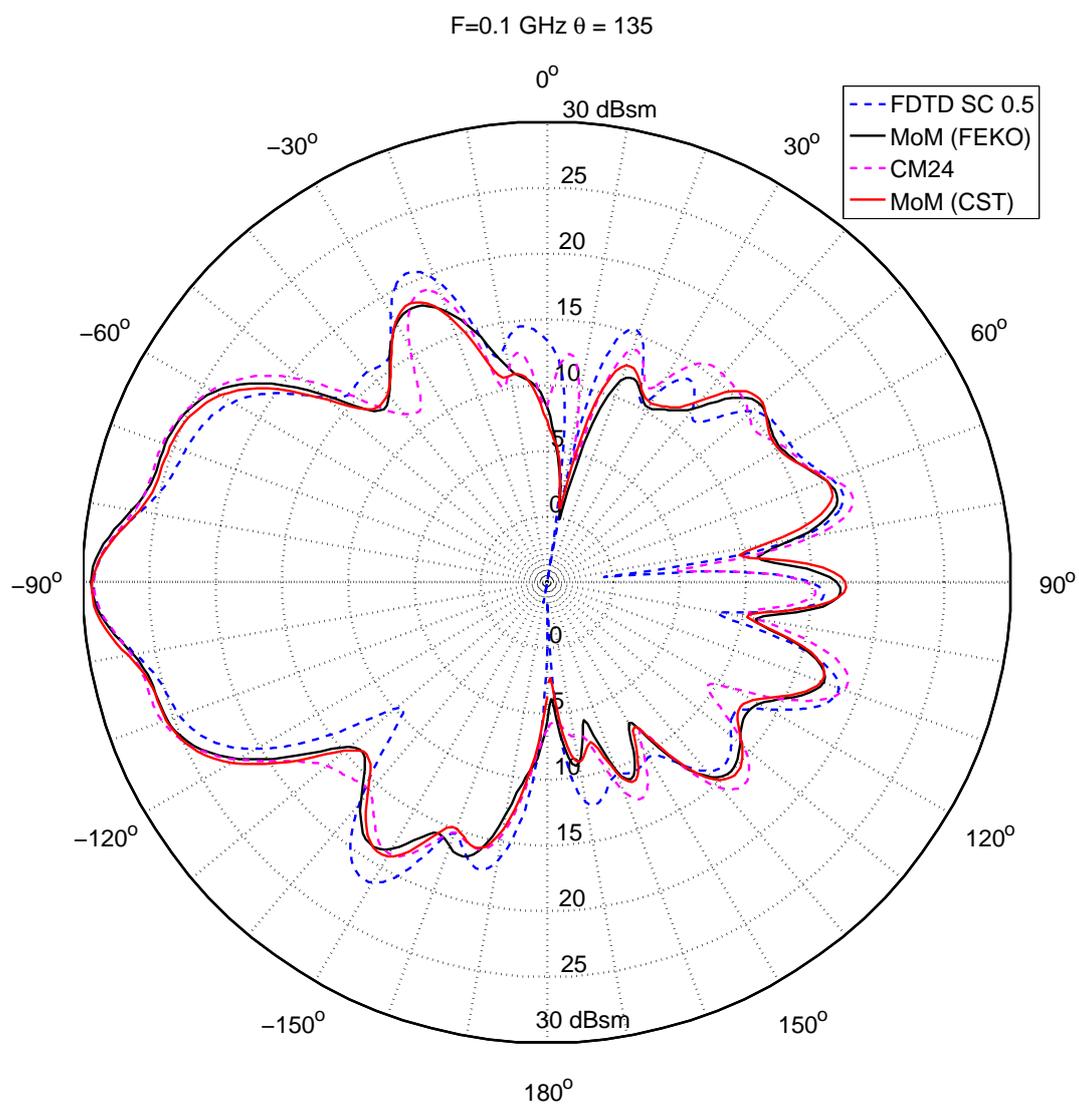


Figure 5.20 – SER bistatique (SER total) de l’hélicoptère avec un maillage de 10 cm pour le schéma CM24 et 13.3 cm pour la FDTD SC.

# Bibliographie

- [1] Amin B. Gorji, Bijan Zakeri, "An Investigation through the Accuracy of Bistatic RCS by using CAD Solvers", Proceedings of the "2013 International Symposium on Electromagnetic Theory", IEICE, 2013.
- [2] FEKO Altair Hyperworks, modèles FEKO sur <https://www.feko.info/support>.
- [3] G. T. Ruck, D. E. Barrick, W. D. Stuart, C. K. Krichbaum, *Radar Cross Section Handbook*, Peninsula Publishing, 1970.
- [4] A. C. Woo, H. T. G. Wang, and M. J. Schuh, "Benchmark Radar Targets for the Validation of Computational Electromagnetics Programs," *IEEE Antennas and Propag.* , vol. 35, no. 1, Feb. 1993, pp. 84 – 89.

## Conclusion et perspectives

La SER est un paramètre très dépendant des caractéristiques de la cible et son évaluation peut s'avérer être difficile lorsque la cible est structurellement très complexe. Nous avons vu plusieurs méthodes pour évaluer la SER et avons retenu la méthode FDTD pour son efficacité, son approche temporelle offrant la perspective de calcul large bande. Les défauts principaux de la méthode FDTD sont la dispersion numérique et la modélisation de la géométrie curviligne par un maillage avec des marches d'escalier. Cette thèse a suivi deux pistes pour trouver des solutions à ces deux problèmes : les schémas FDTD(2,4) d'ordre supérieur en espace et l'approche des techniques conformes données pour le schéma de Yee.

L'étude de plusieurs approches des schémas FDTD(2,4) pour l'optimisation de la dispersion numérique a montré leurs différences en termes de précision, d'efficacité et de complexité. Pour le calcul de SER, nous souhaitons idéalement que le schéma FDTD(2,4) soit efficace autant en précision qu'en temps de calcul, et qu'il puisse s'adapter aux techniques conformes. Pour satisfaire ces critères, nous avons développé un schéma original nommé CM24 reposant sur le schéma M24 de la littérature ; ce dernier étant opérationnel seulement dans un espace 2D. Les validations de ses performances et de sa précision ont été réalisées sur des exemples de propagation en espace libre. Notamment, l'exemple de rayonnement de dipôles élémentaires a mis en évidence l'apport du schéma CM24 sur l'erreur de dispersion numérique. Sa comparaison au schéma de Yee et d'autres schémas FDTD(2,4) ont montré que le schéma CM24 est un bon candidat pour atteindre notre objectif de précision et d'efficacité de calcul. Ce schéma se prête bien aux techniques conformes de par sa formulation intégrale.

L'état de l'art des techniques conformes pour le schéma de Yee montre que ceux-ci reposent sur la formulation intégrale des équations de Maxwell. La pertinence de ces techniques a été vue sur des exemples où la qualité des résultats est nettement supérieure à celle obtenue avec un maillage avec des marches d'escalier. Ces techniques conformes sont liées aux conditions aux limites du schéma FDTD. Pour les schémas FDTD d'ordre supérieur avec un stencil élargi, l'expression de conditions aux limites stables sur les bords de plaques est un problème non résolu. Un état de l'art sur ce problème pour les schémas FDTD(2,4) montre que tous les modèles trouvés, à notre connaissance, sont instables. L'hybridation d'un schéma FDTD d'ordre 2 et d'ordre 4 est tout autant instable. Après plusieurs essais avec nos propres approches, nos tests n'ont pas été concluants. Nous avons vu qu'une alternative possible peut être apportée par le modèle des fils obliques.

Le modèle de fils obliques a été validé pour le schéma CM24 et ne pose aucun problème de stabilité. Nous avons montré qu'il était possible de modéliser des structures surfaciques avec

des fils obliques et de retrouver le rayonnement correct en champ lointain. Ce modèle peut être une alternative à la modélisation de structures, étape nécessaire dans la chaîne de calcul SER. Ce calcul de SER nécessite d'autres modèles dont certains ont du être adaptés pour le schéma CM24.

Parmi ceux-ci, l'injecteur d'onde plane et son adaptation de la dispersion numérique ont du être développés pour le schéma CM24. Cette adaptation permet d'obtenir un niveau de bruit assez faible afin d'avoir une meilleure dynamique en amplitude de champ diffracté par la cible. Le calcul de SER par la méthode FDTD nécessite l'absorption du champ diffracté par la cible, aux frontières du domaine de calcul. Avec la méthode FDTD, ce calcul pose des conditions idéales de rayonnement pour la récente technique HABC pour simuler cette absorption. Celle-ci possède des caractéristiques intéressantes et nous avons pu l'étendre au schéma de Fang. Devant la difficulté pour l'adapter au schéma CM24, nous nous sommes réorientés vers les conditions aux frontières de type CPMLs. L'adaptation des CPMLs au schéma CM24 est relativement directe et montre de très bonnes performances.

Après les évaluations individuelles des modèles, des calculs de SER ont été réalisés sur des structures avec le schéma CM24 et le schéma de Yee muni d'une technique conforme. Les résultats ont montré qu'une bonne prise en compte de la géométrie permet de ne pas détériorer la précision du calcul. Cette modélisation de la géométrie peut passer par une technique conforme ou par le modèle des fils obliques. Nous avons observé que le modèle des fils obliques donne de bons résultats dans le cas de structures moins régulières. De plus, une telle approche permet la modélisation des structures PEC et de bien prendre en compte leur géométrie. Soulignons que ce modèle est stable et requiert de faibles ressources. Quant à l'erreur de dispersion numérique, significative dans le schéma de Yee, le modèle actuel des fils obliques ne nous permet pas de tirer parti des meilleures performances du schéma CM24. Ainsi, l'approche actuelle ne permet pas de mettre en évidence sa faible dispersion numérique car le maillage FDTD doit être plus raffiné que le maillage du treillis.

Le perfectionnement de ce modèle est l'une des perspectives de ces travaux. Notamment, une première étape serait de prendre en compte les mutuelles entre fils sans l'aide de mailles FDTD entre les fils du treillis. Ces mailles sont présentes actuellement pour bien prendre en compte les effets de couplage entre les fils par le champ. Cette étape permettrait de relâcher la contrainte actuelle sur la résolution du maillage FDTD par rapport au maillage du treillis. Ensuite, à plus long terme, grâce à ce modèle, il serait envisageable de pouvoir traiter des matériaux diélectriques ou à pertes, et prendre en compte les pertes sur les éléments conducteurs de surface car les modèles existent déjà au sein du solveur FDTD pour les fils.

Il serait aussi intéressant d'étudier la convergence de ce modèle par rapport à la résolution du maillage. Actuellement, ce modèle repose sur un schéma d'ordre 2 pour les fils et le schéma FDTD en espace libre est d'ordre (2,4). Cette évaluation permettrait de savoir si le schéma du modèle actuel est d'ordre suffisant pour réaliser des calculs précis de SER. Enfin, de futures investigations peuvent être considérées pour continuer d'examiner le problème des bords de plaque, en vue de le résoudre.

# Appendice

## exemple de fichier de données d'entrées pour le dièdre

Le symbole pour commenter est #.

# définition du volume de calcul : nb cellules, pas spatiaux, cfl, durée de la simulation , début index des cellules, ordre 4

```
<volume_calcul
  nxnynz 100 100 120
  dxdydz 0.003 0.003 0.003
  cdtmax 1.02209563575490 #0.98
  duree_totale 1.2e-6
  origine_cell 0 0 0
  ordre_4 #fang
volume_calcul>
```

# définition des frontières du domaine de calcul : cpml, habc

```
<frontiere
  cpml_1 0.5 1.0
  #habc xinf xsup yinf ysup zinf zsup
frontiere>
```

# définition des structures : nom d'une structure, type de matériau et occupation spatiale

```
<structure
  FAMILLE diedre
  metal 10 10 10 90 10 110
  metal 10 90 10 10 10 110
structure>
```

# définition des sources : type de source et paramètres

```
<fonction_source
  gaussienne g1
  fmax 10e9
  att_pied 10000
```

```
att_fmax 10
fonction_source>
```

```
# définition des intervalles de temps ou fréquence
```

```
<temps_frequence
  IT1 # Tmin Tmax Tpas
  IF2 9e9 10e9 10e6 # Fmin Fmax Fpas
temps_frequence>
```

```
# définition des intervalles de direction suivant les angles en coordonnées polaires
```

```
<zone_angulaire
  IPH 0 360 0.5 90
zone_angulaire>
```

```
# définition des surfaces de huygens
```

```
<surface_huygens
  SURF1 3 96 3 96 3 117
surface_huygens>
```

```
# définition des ondes planes : dimensions de la boîte, source, direction, polarisation et amplitude
```

```
<onde_plane
  dim_huygens 6 93 6 93 6 114
  injecteur g1 90 225 90 1.0
onde_plane>
```

```
<fichier_sortie
```

```
  extension dtcm_demideg
  statut remplace
fichier_sortie>
```

```
# définition des capteurs ponctuels, normalisation possible
```

```
<resultat_champ_point
  normalisation_freq g1 1.0
  pt1 IT1 70 70 50
resultat_champ_point>
```

```
# définition du calcul de champ lointain : normalisation, boîte de huygens, zone angulaire, composantes du champ en coordonnées polaires
```

```
<champ_lointain_frequence
  normalisation_freq g1 1.0
```

CHL1 SURF1 IF2  
ETH EPH IPH  
champ\_lointain\_frequence>



## Méthode FDTD conforme et d'ordre (2,4) pour le calcul de SER large bande de cibles complexes

**Résumé :** L'évaluation précise de la surface équivalente radar (SER) large bande de cibles complexes et de grande dimension est réalisée par des méthodes numériques rigoureuses. Parmi celles-ci, la méthode des différences finies dans le domaine temporel (FDTD) est bien adaptée pour effectuer ce calcul de SER sur une large bande de fréquence et obtenir une signature temporelle de la cible. Le schéma de Yee, schéma FDTD historique pour la simulation de propagation d'ondes électromagnétiques en régime transitoire, souffre de deux points faibles cruciaux : la dispersion numérique imposant une finesse de maillage ; et l'approximation de la géométrie curviligne par un maillage cartésien avec des marches d'escalier détériorant la qualité des résultats. Les schémas FDTD d'ordre supérieur en espace ont été investigués pour la réduction de l'effet de la dispersion numérique. Dans cette thèse, le schéma Conservative Modified FDTD(2,4) a été développé dont les performances, en précision et en ressources, sont très intéressantes pour le calcul de SER. Liés au problème de l'approximation de la géométrie curviligne, le traitement des bords de plaques métalliques reste une difficulté non résolue pour les schémas FDTD(2,4) à stencil élargi. Les techniques conformes sont des approches développées pour le schéma de Yee, lesquelles ont été étudiées pour les schémas FDTD(2,4) afin de prendre en compte correctement la géométrie curviligne. Nous proposons une nouvelle approche reposant sur le modèle des fils obliques pour la modélisation des éléments surfaciques métalliques. Des applications SER de cibles montrent que celle-ci est prometteuse.

**Mots clés :** FDTD, dispersion numérique, conforme, SER, ordre supérieur.

## Conformal FDTD(2,4) Method for wideband RCS computation of complex targets

**Abstract :** Rigorous numerical methods are used to compute an accurate wideband radar cross section (RCS) evaluation of large complex targets. Among these, finite differences in time domain method is appropriated for the wideband characteristic and also to obtain a transient responses of the target. The Yee scheme, known historically as an FDTD scheme for Maxwell equations, is hindered by two crucial weak points : numerical dispersion which imposes a high mesh resolution ; and staircase approximation of curve geometry which deteriorates results quality. High-order space differential operator for FDTD schemes have been investigated to limit numerical dispersion errors. In this thesis, the Conservative Modified FDTD(2,4) scheme has been developed and its performance has shown very accurate results with reasonable workload for RCS computation. Relating to curve geometry modeling problem, metallic edges modeling is still an unsolved problem for FDTD(2,4) schemes with enlarged stencil. Conformal techniques have been developed for the Yee scheme and has been studied for FDTD(2,4) to accurately model curve geometry. We propose a new approach based on oblique thin wire model to model metallic surfaces. RCS computations of several targets have shown that this method is promising.

**Keywords :** FDTD, numerical dispersion, conformal, RCS, high-order.

LABORATOIRE XLIM - UMR CNRS n°7252  
123, Avenue Albert Thomas - 87060 LIMOGES