



HAL
open science

Étude de la pulsation des étoiles de type RR Lyrae et de l'effet Blazhko

Cyrus Zalian-Rahatabad

► **To cite this version:**

Cyrus Zalian-Rahatabad. Étude de la pulsation des étoiles de type RR Lyrae et de l'effet Blazhko. Autre. COMUE Université Côte d'Azur (2015 - 2019), 2016. Français. NNT: 2016AZUR4074 . tel-01445671

HAL Id: tel-01445671

<https://theses.hal.science/tel-01445671>

Submitted on 25 Jan 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS - UFR SCIENCES
Ecole Doctorale en Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de

Docteur en Sciences

de l'UNIVERSITE de Nice-Sophia Antipolis

Discipline : ASTROPHYSIQUE

présentée et soutenue par

Cyrus ZALIAN

ÉTUDE DE LA PULSATION DES ÉTOILES DE TYPE RR LYRAE ET DE L'EFFET BLAZHKO

Avec la contribution de données obtenues par le photomètre PAIX

Thèse dirigée par Merieme CHADID et Richard MONIER
soutenue le 14 octobre 2016

Jury :

Dr. Laurent KOECHLIN	Rapporteur
Dr. Stéphane CHARPINET	Rapporteur
Dr. Christophe GIORDANO	Examineur
Dr. Jean VERNIN	Examineur
Dr. Merieme CHADID	Directrice de thèse
Dr. Richard MONIER	Co-directeur de thèse

Étude de la pulsation des étoiles de type RR Lyrae et de l'effet
Blazhko

Avec la contribution de données obtenues par le photomètre PAIX

A study of RR Lyrae stars pulsation and Blazhko effect

With the contribution of data obtained by the PAIX photometer

Cyrus Zalian

14 octobre 2016

Remerciements

Ce travail conclue de nombreuses années d'études, dont chacune a été ponctuée par l'amour et le soutien de mes parents. S'il n'est qu'une chose à retenir de cette thèse, c'est qu'elle me permet de remercier ma mère et mon père pour tout ce qu'ils ont pu m'offrir.

Tout aussi important, les membres de ma famille, que je tiens également à remercier, en particulier mes tantes et mon oncle, pour leur sollicitude, leurs bons conseils et, surtout, pour avoir été des modèles durant ma jeunesse. Sans eux, je n'aurai sûrement jamais imaginé entamer un doctorat.

Il reste ceux qui m'ont accompagné, soutenu, supporté, secoué ou encore inspiré durant ces années : ces amis qui m'ont permis de traverser les mauvaises passes. Parmi tous, ces remerciements s'adressent tout particulièrement à Thomas.

Je remercie également Mr Frédéric Thévenin, chercheur à l'observatoire de la Côte d'Azur, pour son soutien, et pour avoir été une des rares personnes à avoir fait preuve d'un réel courage, notamment afin de m'aider à boucler cette thèse.

Enfin, je tenais à remercier Anaïs, pour avoir passé tout un après-midi d'été à chercher une explication au phénomène Blazhko – performance remarquable pour une littéraire qui aurait pu profiter, à la place, de la beauté du parc Valrose.

Table des matières

I	Caractéristiques des étoiles de type RR Lyrae et analyse de leur courbe de lumière	1
1	Caractéristiques physiques et observationnelles des étoiles de type RR Lyrae	3
1.1	Généralités sur les étoiles pulsantes	4
1.1.1	Définition	4
1.1.2	Zoologie des étoiles pulsantes	4
1.2	Courbes de lumière et classification des étoiles de type RR Lyrae	4
1.3	Paramètres physiques fondamentaux des étoiles de type RR Lyrae	6
1.3.1	Température, magnitude absolue, masse, rayon, gravité	6
1.3.1.1	Température effective	6
1.3.1.2	Magnitude absolue	6
1.3.1.3	Métallicité	7
1.3.1.4	Masse, rayon et gravité	7
1.3.2	Structure interne et évolution stellaire	7
1.3.2.1	Modèles et hypothèses	7
1.3.2.2	La branche horizontale (HB)	7
1.3.2.3	La bande d'instabilité	13
1.4	Phénomènes singuliers observés dans les étoiles de type RR Lyrae et ondes de choc	14
1.4.1	L'effet Blazhko	14
1.4.2	Ondes de choc	16
1.4.2.1	Analyse photométrique	16
1.4.2.2	Modèles théoriques	17
1.4.2.3	Spectroscopie	17
1.5	Recensement des étoiles RR Lyrae et distribution des paramètres physiques et observationnels	19
1.5.1	RRab, RRc et RRd	19
1.5.2	Période	19
1.5.3	Magnitude apparente	19
1.5.4	Métallicité	22
1.5.5	Effet Blazhko	22
1.6	Conclusion	22
2	Analyse harmonique des courbes de lumière	25
2.1	Définition et existence dans le cas des signaux traités en astéroseismologie	26
2.1.1	Algèbre discrète de la transformée de Fourier	26
2.1.1.1	Définition de la transformée de Fourier pour les groupes abélien fini	26
2.1.1.2	Construction de la transformée de Fourier discrète	27
2.1.1.3	Lien avec la transformée de Fourier sur \mathbb{R}	28
2.1.2	Périodogramme de Lomb et Scargle	28
2.2	Analyse des courbes de lumière avec PDM13	30
2.2.1	Phase dispersion minimization (PDM)	30
2.2.2	Détection des gaps	30
2.2.2.1	L'algorithme de Lee & Heghinian	30
2.2.2.2	Calcul de l'écart-type	32
2.2.3	Degré de signification	32
2.2.4	Autres améliorations de PDM13	33
2.2.4.1	Coefficients de Fourier	33
2.2.4.2	Interface graphique	34

2.2.5	Tests et premiers résultats	34
2.3	Conclusion	34
3	Etude de la courbe de lumière d'une étoile de type RR Lyrae présentant l'effet Blazhko : S Arae	37
3.1	Analyse harmonique de la courbe de lumière de S Arae	37
3.1.1	Protocole d'acquisition et d'analyse des données photométriques	38
3.1.1.1	PAIX	38
3.1.1.2	PDM13 et Period04	38
3.1.2	Asymétrie des lobes	38
3.1.3	Asymétrie de l'enveloppe	38
3.1.4	Décroissance des harmoniques	40
3.1.4.1	Observations	40
3.1.4.2	Explication théorique	41
3.1.5	Modes non-radiaux	43
3.1.6	Caractéristiques physiques de S Arae obtenues <i>via</i> les paramètres de Fourier	43
3.1.7	Ondes de chocs et dynamique du <i>bump</i>	43
3.2	Retour sur l'asymétrie des enveloppes et des lobes secondaires	44
3.2.1	Asymétrie des lobes secondaires dans le cas de l'effet Blazhko	45
3.2.1.1	Spectre d'un signal modulé en amplitude et d'un signal modulé en fréquence	45
3.2.1.1.1	La modulation d'amplitude (AM)	45
3.2.1.1.2	La modulation de fréquence (FM)	46
3.2.1.2	Conséquences du couplage entre la modulation de fréquence et la modulation d'amplitude	46
3.2.1.2.1	Le couplage entre la modulation d'amplitude et la modulation de fréquence	46
3.2.1.2.2	Conséquence sur l'interprétation de l'effet Blazhko	47
3.2.2	Asymétrie des enveloppes dans le cas de l'effet Blazhko	47
3.3	Variation des caractéristiques observationnelles durant un cycle de Blazhko	48
3.3.1	Analyse des données photométriques	48
3.3.1.1	Enveloppe	48
3.3.1.2	Temps caractéristiques	49
3.3.1.3	Ondes de chocs	50
3.3.2	Analyse des données spectrométriques	50
3.3.2.1	Accélération radiale	50
3.3.2.2	Vitesse radiale	50
3.4	Conclusion	51
II	Théories des mécanismes de pulsation et de l'effet Blazhko	53
4	Développement linéaire des équations régissant les pulsations des étoiles RR Lyrae et mécanismes de pulsation	55
4.1	Équations générales	56
4.1.1	Description lagrangienne et eulérienne	56
4.1.2	Equation de continuité	56
4.1.3	Equation de mouvement	56
4.1.4	Equation de Poisson	57
4.1.5	Equation de conservation de l'énergie	57
4.1.6	Equation de transfert	57
4.1.7	Equations d'état	57
4.1.8	Conditions aux limites	58
4.2	Perturbation au premier ordre des équations générales	58
4.2.1	Méthode des perturbations	58
4.2.2	Modes dynamiquement stables et dynamiquement instables	58
4.2.3	Oscillations radiales	59
4.2.3.1	Cas général	59
4.2.3.2	Cas adiabatique	61
4.2.3.3	Etude de la stabilité	63

4.2.3.4	Existence des modes non radiaux au sein des RR Lyrae	63
4.3	Mécanismes de pulsation	64
4.3.1	Aperçu historique	64
4.3.2	Influence de l'excitation nucléaire et des termes de transport	64
4.3.2.1	Le mécanisme ϵ	64
4.3.2.2	Les mécanismes κ et γ	64
4.3.3	Efficacité des mécanismes de pulsation	65
4.3.3.1	Zones adiabatique, non adiabatique et de transition	65
4.3.3.2	Position relative des zones d'ionisation et de transition : conséquence sur l'efficacité des mécanismes κ/γ	66
4.3.3.3	Illustration des mécanismes de pulsation à partir des modèles obtenus par MESA	67
4.4	Conclusion	67
5	Discrétisation spatiale des équations régissant les pulsations des étoiles RR Lyrae : analogie avec un système d'oscillateurs couplés, synchronisation et effet Blazhko	71
5.1	Discrétisation spatiale des équations régissant les pulsations des étoiles RR Lyrae	71
5.1.1	Discrétisation spatiale des équations de mouvement et d'énergie	71
5.1.2	Analogie avec un système d'oscillateurs couplés	75
5.1.2.1	Ce que l'analogie explique : mode de pulsation, effet Blazhko, synchronisation et dédoublement de période	76
5.1.2.2	Limites de l'analogie	78
5.2	Modélisation discrète non linéaire : analogie avec le modèle de Fermi-Pasta-Ulam et explication de l'effet Blazhko	78
5.2.1	Développement non linéaire à l'ordre trois des équations discrétisées	78
5.2.2	Le modèle de Fermi-Pasta-Ulam : analogie et conséquences	80
5.2.2.1	Le modèle de Fermi-Pasta-Ulam : description et principaux résultats	80
5.2.2.2	Explication du paradoxe de Fermi-Pasta-Ulam	81
5.2.2.3	Lien avec l'effet Blazhko	82
5.2.2.4	Chaîne de Todda	85
5.2.3	Analyse temps-fréquence des courbes de lumière : une nouvelle approche permettant de vérifier les hypothèses issues du modèle FPU	85
5.2.3.1	L'analyse temps-fréquence	85
5.2.3.1.1	L'analyse de Fourier à fenêtre glissante	86
5.2.3.1.2	La transformation en ondelettes	86
5.2.3.2	Application à l'étude des courbes de lumière et conséquences	86
5.3	Modélisation de la zone d'ionisation : synchronisation, modes de pulsation et conséquences sur l'analogie avec le système FPU	87
5.3.1	La zone d'ionisation comme oscillateur à relaxation	88
5.3.2	Synchronisation avec la zone d'ionisation	90
5.3.2.1	Le concept de synchronisation et sa modélisation	90
5.3.2.1.1	Oscillateur non linéaire en régime forcé	90
5.3.2.1.2	Oscillateurs couplés non linéaires	94
5.3.2.2	Conséquences pour la sélection du mode de pulsation et pour l'analogie avec le système FPU	95
5.4	Conclusion	95

III Annexes

99

A Glossaire mathématique

101

A.1	Notions de groupes	101
A.1.1	Groupe	101
A.1.2	Homomorphismes	101
A.2	Notion d'espace vectoriel	101
A.2.1	Espace vectoriel	101
A.2.2	Base	102
A.2.3	Produit scalaire	102
A.2.4	Base orthogonale	102

A.3	Espace probabilisé	102
A.3.1	Espace probabilisable	102
A.3.2	Mesure de probabilité	102
A.3.3	Espace probabilisé	102
B	Publication 1 – PDM13 : A new graphical interfaced program for frequency analysis	103
C	Publication 2 – Antarctica photometry of the Blazhko RR Lyrae star S Arae	113
D	Oscillateur harmonique et oscillateurs couplés	131
D.1	Rappel sur l'oscillateur à un degré de liberté	131
D.2	Oscillateurs couplés	131
D.2.1	Oscillateurs couplés avec extrémités fixes	131
D.2.2	Oscillateurs couplés avec une extrémité fixe et une extrémité libre	132
D.2.3	Solution générale	133
D.2.4	Phénomène de battements et oscillation anharmonique	133
D.2.5	Etude du système FPU linéaire	134
	Bibliographie	137

Résumé

Cette thèse propose une nouvelle théorie de l'effet Blazhko. Elle apporte également une justification théorique à certaines observations encore inexplicables : la décroissance des harmoniques de la courbe de lumière ; l'asymétrie des enveloppes et des lobes ainsi que la variation des temps de montée et de descente dans le cas de l'effet Blazhko ; la synchronisation des couches et l'existence des trois types d'étoiles RR Lyrae : RRab, RRc et RRd. La première partie présente une étude extensive d'une étoile RR Lyrae, observée par le photomètre PAIX, présentant l'effet Blazhko : S Arae. Nous débutons par une définition rigoureuse de l'analyse harmonique des courbes de lumière. Cette démarche, encore jamais entreprise en astéroséismologie, permet une meilleure interprétation des habituels résultats des études photométriques. Nous poursuivons avec une présentation du programme d'analyse fréquentielle que nous avons développé : PDM13. Nous établissons ensuite le spectre fréquentiel de la courbe de lumière de S Arae et, à la présentation des résultats de cette étude, nous apportons une démonstration mathématique à deux observations communément effectuées : la décroissance des harmoniques et l'asymétrie de modulation. Dans la deuxième partie, après un rappel des mécanismes d'oscillation, nous présentons une nouvelle modélisation discrète, et non linéaire, des équations de pulsations. Celle-ci nous permettra d'expliquer les phénomènes de synchronisation, mais surtout, conduira à une nouvelle théorie du phénomène Blazhko fondée sur l'existence de solitons, que nous étayerons par des premiers résultats, obtenus grâce à l'utilisation de la transformée en ondelettes.

Mots-clés : RR Lyrae, Etoiles pulsantes, Effet Blazhko, Solitons, Courbe de lumière, Synchronisation.

Abstract

In this thesis, we present a new theory of the Blazhko effect. We also provide a theoretical demonstration of : the light curve harmonics decrease ; the asymmetry of envelopes and sidelobes ; the synchronization of layers and the mode selection. The first part of this thesis is dedicated to the extensive study of a RR Lyrae star, presenting the Blazhko effect, observed with the photometer PAIX : S Arae. Firstly, a rigorous definition of harmonic analysis, applied to light curves, is given. This work, which has never been undertaken, up to now, in the asteroseismology field, allows a better reading of photometric studies. We carry on with the presentation of PDM13, a software that we have developed, dedicated to frequency analysis. Then, we analyze the frequency spectrum of S Arae light curve, and provide two rigorous demonstrations of commonly observed facts : the harmonics decrease and the asymmetry induced by modulation. We complete it with a study of the parameters which vary during a Blazhko cycle, which will help us, later on, to understand this modulation effect. The second part begins with a reminder of the basic perturbed and linearized equations of stellar pulsation, together with the oscillation mechanisms. Then, we present, for those equations, a non linear and discrete formalism that we have developed. This formalism will allow us to underline the importance of synchronization in those stars, but, most of all, will lead us to a new theory of the Blazhko effect, based on solitons, which will be supported by new results obtained with the wavelet transform method.

Keywords : RR Lyrae stars, Pulsating stars, Blazhko effect, Solitons, Light curve, Synchronization.

Introduction

Muses héliconiennes, ce commencement soit le vôtre!

Hésiode, La Théogonie.

C'est un *decennium mirabilis* qu'a vécu le monde de l'astronomie observationnelle, tout particulièrement, celui de l'astéroseismologie. Le succès des missions CoRoT et Kepler, deux satellites d'observations lancés respectivement fin 2006 et début 2009, a fourni pour la première fois aux chercheurs des données photométriques ininterrompues sur plusieurs mois. Les campagnes d'observations terrestres n'ont pas été en reste, avec des projets tel que PAIX – Photometer AntarcIca eXtinction – [16] dont nous présentons ici certains résultats. Installé au Dôme C en Antarctique, ce photomètre bénéficie de conditions d'observations exceptionnelles qui lui permettent également d'acquérir des données de façon quasi continue pendant une longue période. L'absence d'interruption est essentielle quand il s'agit d'observer des étoiles pulsantes, en particulier les RR Lyrae. Si les théories actuelles sont capables de reproduire leurs variations intrinsèques périodiques, aux approximations près, il reste des cas particuliers qui échappent encore à toute explication. C'est le cas de celles présentant l'effet Blazhko : une modulation d'amplitude et de fréquence des oscillations de luminosité. Observé pour la première fois en 1907 par l'astronome Sergey Nikolaevich Blazhko [6], on pense actuellement qu'il pourrait se manifester chez 20% à 50% des étoiles RR Lyrae existantes. Malgré une telle proportion, aucune théorie n'est parvenue à expliquer de façon satisfaisante ce fait. Les données issues des dernières campagnes d'observations nous permettent, pour la première fois, de suivre de façon continue les modifications subies par l'étoile durant un cycle de modulation, éveillant l'espoir de trouver un indice à l'interprétation de ce phénomène.

C'est dans ce cadre que s'inscrit cette thèse. Nous proposons dans ce mémoire, plusieurs démonstrations et modélisations dont nous considérons l'impact comme majeur. Parmi celles-là nous trouvons :

- une explication théorique de l'effet Blazhko, accompagnée de premiers résultats ;
- une explication théorique de la synchronisation des couches ;
- une explication théorique des différents modes de pulsation.

Ces découvertes notables sont accompagnées d'autres résultats, non moins significatifs :

- une interprétation argumentée et mathématique de l'asymétrie des lobes dans le spectre de fréquence des courbes de lumière d'étoiles RR Lyrae présentant l'effet Blazhko ;
- une interprétation argumentée et mathématique de l'asymétrie des enveloppes dans les courbes de lumière d'étoiles RR Lyrae présentant l'effet Blazhko ;
- une explication mathématique de la décroissance des harmoniques dans le spectre de fréquence des courbes de lumière d'étoiles RR Lyrae présentant l'effet Blazhko.

A partir des données photométriques recueillies récemment, notamment par PAIX, nous avons mené nos travaux sur les RR Lyrae en embrassant l'ensemble des domaines de recherches intervenant dans l'étude de ces étoiles. L'évolution stellaire fut notre point de départ. En confrontant nos résultats, à ceux des campagnes d'observations, nous avons établi un état de l'art des principales caractéristiques des étoiles de type RR Lyrae, dont nous rendons compte dans le premier chapitre de ce mémoire. Nous nous attardons tout particulièrement sur le phénomène des ondes de choc et sur l'effet Blazhko, deux sujets d'études lacuneux actuellement. Nous terminons ce premier chapitre par une synthèse statistique portant sur les caractéristiques observationnelles et physiques exposées.

Le second chapitre porte sur l'étude fréquentielle des courbes de lumière. Les méthodes paramétriques et non paramétriques d'analyse de séries temporelles, comme la transformée de Fourier, sont omniprésentes en astéroseismologie. Un tel choix est motivé, entre autre, par le caractère périodique des variations de magnitude apparente des étoiles pulsantes. Cependant, le socle mathématique justifiant l'utilisation de telles méthodes y est mal établi. Dans un premier temps, nous définissons de façon rigoureuses les outils mathématiques utilisés communément et justifions leur utilisation. Nous présentons ensuite le programme

d'analyse fréquentielle que nous avons développé : PDM13. Construit autour d'un algorithme existant, *Phase Dispersion Minimization* (PDM)[88], nous l'avons enrichi de routines complémentaires afin d'en améliorer les performances et d'éviter les écueils habituellement rencontrés par ce type de logiciel.

A l'aune des chapitres précédents, nous abordons, au chapitre trois, l'analyse des données photométriques issues de PAIX pour une étoile de type RR Lyrae : S Arae. Cette étoile a la particularité d'être une étoile présentant l'effet Blazhko. Nous présentons, dans un premier temps, les résultats de l'analyse harmonique. Nous décrivons ensuite, la méthode que nous avons élaborée afin d'obtenir les caractéristiques physiques des étoiles de type Blazhko à partir des résultats de l'analyse fréquentielle. Nous concluons l'étude des données photométriques par une discussion portant sur la morphologie de la courbe de lumière des étoiles de type RR Lyrae présentant une modulation, en particulier les *bumps*, témoins des ondes de chocs présents dans ces étoiles. Nous montrons que ce phénomène est associé à l'effet Blazhko et pourrait être un indice clé dans son interprétation. Nous revenons ensuite sur deux observations communément effectuées lors de l'analyse de fréquence des étoiles RR Lyrae de type Blazhko : l'asymétrie des lobes secondaires dans la représentation fréquentielle et la décroissance des harmoniques. Pour la première, nous proposons une démonstration claire et concise, dont la rigueur, contrairement aux quelques travaux existants sur le sujet, nous permettra de mieux définir l'effet Blazhko. Pour la seconde, nous exploitons le formalisme proposé au chapitre 2 pour expliquer mathématiquement son existence.

La seconde partie de ce mémoire porte sur la modélisation des pulsations des étoiles de type RR Lyrae. Notre quatrième chapitre fait office de rappel et débute par une présentation des équations générales régissant les caractéristiques du plasma stellaire. Celles-ci sont ensuite perturbées et linéarisées. Nous aboutissons alors aux équations simplifiées qui ont permis de comprendre et d'analyser les mécanismes de pulsations de ces étoiles [20][23].

Enfin, c'est au dernier chapitre que nous présentons notre nouvelle théorie de l'effet Blazhko. En partant d'une formulation discrète et non linéaire des équations régissant la physique de l'étoile, nous aboutissons à une modélisation qui nous permet d'expliquer nombre des observations effectuées au chapitre 3 : oscillations et chute libre, asymétrie des lobes secondaires, dynamique du *bump*, asymétrie des enveloppes. Nous verrons qu'au-delà de ces démonstrations, la force de cette modélisation est de fournir une analogie avec les systèmes non linéaires de Fermi-Pasta-Ulam et de Toda, nous permettant d'expliquer l'effet Blazhko à partir de l'existence de solitons. Une fois notre théorie exposée, nous détaillerons les nouveaux outils que nous avons utilisés dans l'analyse harmonique des courbes de lumière afin d'étayer celle-ci. Pour conclure, l'approche non linéaire nous permettra également d'expliquer la synchronisation des couches telle qu'elle fut décrite qualitativement par Cox [23] et l'existence des trois types d'étoiles RR Lyrae que sont les RRab, les RRc et les RRd. Pour cela nous considérerons le couplage entre un système d'oscillateurs couplés et un oscillateur à relaxation, correspondant respectivement aux couches adiabatiques et à la zone d'ionisation.

Première partie

Caractéristiques des étoiles de type RR
Lyrae et analyse de leur courbe de
lumière

Chapitre 1

Caractéristiques physiques et observationnelles des étoiles de type RR Lyrae

Quand Zarathoustra eut atteint l'âge de trente ans, il quitta son pays natal et le lac de son pays et alla dans les montagnes. Là, il se délecta de son esprit et de sa solitude et ne s'en fatigua pas, dix ans durant. Mais enfin son cœur se transforma et un matin il se leva aux premières lueurs du soleil, se présenta devant lui et lui parla ainsi : « Grand astre, que serait ton bonheur si tu n'avais pas ceux que tu éclaires ? »

Nietzsche, Ainsi parlait Zarathoustra.

Les premières observations d'étoiles variables remontent à la moitié du XVI^e siècle. Trois siècles plus tard, on distinguait les étoiles du type RR Lyrae comme une classe à part entière. Ces étoiles sont des étoiles pulsantes dont l'étude a été, jusqu'à maintenant, primordiale pour la compréhension de notre univers. Elles ont apporté des éléments essentiels dans la compréhension de l'évolution stellaire, des mécanismes de pulsations et dans la composition chimique des populations stellaires les plus âgées, dites population II. Elles ont également joué un rôle important dans la mesure des distances grâce à la faible dispersion, dans leur population, de leur magnitude absolue. Cependant, contrairement à ce que laisse croire cet aperçu exhaustif, une part non négligeable des RR Lyrae présente des phénomènes singuliers encore inexpliqués.

Nous allons dans ce chapitre dresser un état de l'art des recherches portant sur les RR Lyrae, que nous complétons par des résultats obtenus au cours de cette thèse. Dans un premier temps, nous définirons le contexte général de l'étude, les étoiles variables et l'intersection entre la branche horizontale et la bande d'instabilité dans le diagramme d'Hertzsprung-Russell (HR). Nous présenterons ensuite, les principales caractéristiques observationnelles, et physiques, des étoiles RR Lyrae. Ces astres étant le siège de phénomènes singuliers, nous brosserons un aperçu, que nous compléterons par la suite, de ces dits phénomènes. Pour conclure ce chapitre, nous recenserons l'ensemble des étoiles RR Lyrae observées jusqu'à ce jour et déterminerons les distributions de période, magnitude, mode d'oscillation, métallicité et phénomènes singuliers.

Type	Période	Amplitude
δ Cephei	0,5 à 250 jours	0,04 à 2,4
Céphéides de type II	1 à 70 jours	0,05 à 1,7
RR Lyrae	0,12 à 1,35 jour	0,05 à 3
δ Scuti	0,04 à 0,4 jour	0,005 à 0,9
SX Phoenicis	1 à 2 heures	$\approx 0,7$
Rapidly oscillating Ap	quelques minutes	$\approx 10^{-2}$
Variables à longue période	2 à 2000 jours	0,01 à 6
Mira	80 à 1000 jours	2,5 à 11
Semi-régulières	20 à 2000 jours	1 à 2
Variables irrégulières lentes	-	-
β Cephei	0,07 à 0,3 jour	0,04 à 0,7
Slowly pulsating B-type stars	0,5 à 5 jours	0,1 à 1
PV Telescopii	0,1 à 1 jour	$\approx 0,1$
α Cygni	0,4 à 42 jours	0,03 à 0,2
γ Doradus	1 jour	$\approx 0,1$
Naines blanches pulsantes	10^2 à 10^3 secondes	0,0001 à 0,2
Solar-like oscillations	Environ 5 minutes	

TABLE 1.1 – Périodes et amplitudes des différents types d'étoiles pulsantes.

1.1 Généralités sur les étoiles pulsantes

1.1.1 Définition

On désigne par *étoiles variables*, l'ensemble des étoiles présentant une variation d'éclat se déroulant sur une échelle de temps considérablement plus courte que le temps caractéristique d'évolution. On les classe en deux catégories :

- *les variables extrinsèques* où les variations de luminosité sont dues à des conditions externes (pulsars, étoiles doubles à éclipses),
- *les variables intrinsèques* pour lesquelles les changements d'éclats sont causés par des modifications physiques de l'étoile.

Parmi les variables intrinsèques on distingue les pulsantes, qui présentent une périodicité dans leurs variations de magnitude, des éruptives – novæ et supernovæ – qui ont des sursauts irréguliers et imprévisibles.

Les étoiles pulsantes sont des étoiles dont la structure d'équilibre est instable. Le développement de ces instabilités se manifeste par une variabilité qui modifie la magnitude apparente. Le temps caractéristique de ces instabilités et la forme sous laquelle elles se manifestent sont l'objet de la présente étude appliquée au cas particulier des étoiles de type RR Lyrae.

1.1.2 Zoologie des étoiles pulsantes

Chaque étoile pulsante est caractérisée par sa *courbe de lumière* qui représente la variation de la magnitude en fonction du temps. Ce classement qualitatif est complété par une caractérisation quantitative fondée sur l'amplitude des variations de luminosité et la période qui leur est associée (Tableau 1.1), ainsi que sur son type spectrale et sa luminosité moyenne (Figure 1.1).

1.2 Courbes de lumière et classification des étoiles de type RR Lyrae

Historiquement [4], les étoiles de type RR Lyrae furent classées en trois catégories selon la morphologie de leur courbe de lumière (Figure 1.2).

- Les RRa présentaient les variations les plus asymétriques sur une période, avec une augmentation rapide de la luminosité jusqu'à leur maximum, suivie d'une diminution rapide mais moins marquée. Les amplitudes observées étaient supérieures à l'unité (magnitude visuelle).

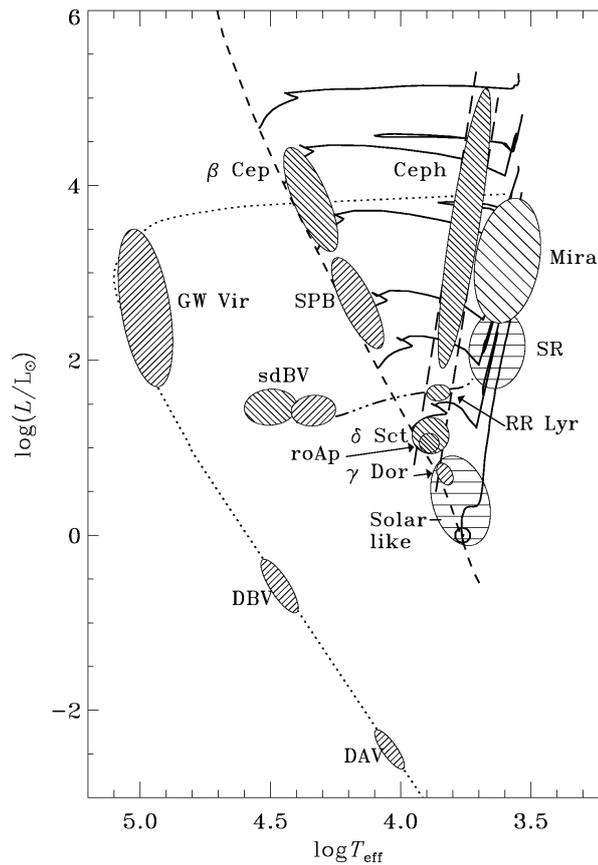


FIGURE 1.1 – Localisation des différents types d'étoiles pulsantes dans le diagramme HR [19].

- Les RRb se situaient à mi-chemin entre les RRa et les RRc avec des variations asymétriques similaires aux RRa mais avec des amplitudes plus faibles.
- Les RRc, dont la courbe de lumière était quasiment sinusoïdale avec des amplitudes de l'ordre de 0.5 mag .

Cette approche semi-qualitative a laissé place à une classification fondée sur les modes de pulsations¹. Aujourd'hui, nous distinguons les étoiles de types RR Lyrae suivant trois catégories :

- Les RRab dont le mode de pulsation dominant est le mode radial de sa fréquence fondamentale.
- Les RRc dont le mode de pulsation dominant est le mode radial de la première harmonique.
- Les RRd qui oscillent simultanément suivant les deux modes précédents.

Les RRab se différencient également des RRc et des RRd par leurs périodes (respectivement comprises entre 0.3 et 1 jour et entre 0.2 et 0.5 jour) et par l'amplitude de leurs magnitudes visuelles (0.9-1.3 pour les premières, environ 0.5 pour les RRc et RRd) (voir Section 1.5).

En 1973, Van Albada & Baker [104] suggérèrent que le mode de pulsation dominant d'une étoile de type RR Lyrae était déterminé par son évolution le long de la branche horizontale. Ainsi toute étoile évoluant selon une température effective croissante dans la bande d'instabilité commencerait à osciller suivant son mode radial fondamental (RRab) pour ensuite passer à des oscillations suivant la 1ère harmonique (RRc). De même, dans le cas d'une étoile évoluant de la frontière bleue de la bande instabilité à la frontière rouge, l'étoile de type RRc deviendrait, à un moment donné de son parcours, une étoile de type RRab. L'existence d'une zone dans le diagramme HR où RRab et RRc co-existent est due à un cycle d'hystérésis dans la sélection du mode de pulsation dominant. Toute étoile entrant cette zone conserve son mode d'oscillation dominant jusqu'à la quitter. Szabó, Kollath & Buchler [98] ont complété cette description en y incluant les RRd et une seconde zone d'hystérésis entre RRab et RRd (voir Figure 1.3).

1. Voir 2^e partie.

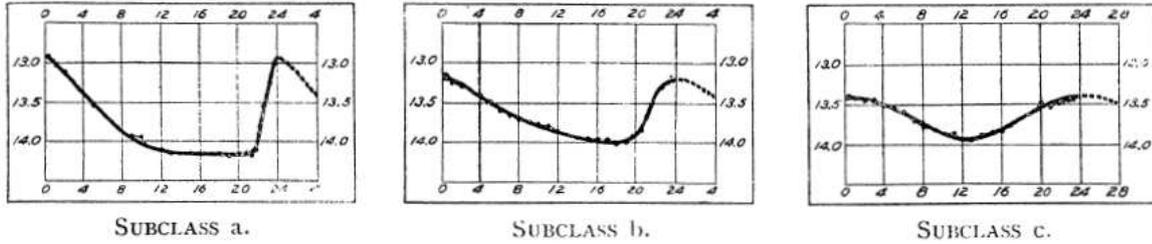


FIGURE 1.2 – Classification des étoiles RR Lyrae suivant la morphologie de leur courbe de lumière, telle qu'elle fut établie par Bailey [4].

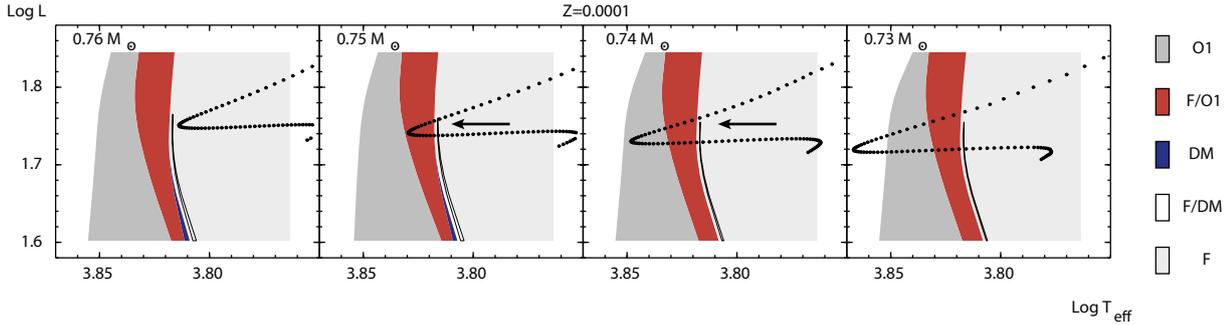


FIGURE 1.3 – Evolution d'une étoile dans le diagramme HR, en fonction de sa masse, pour une métallicité de $Z = 0.0001$, superposée au diagramme représentant les modes de pulsation dominants [98]. La température est exprimée en kelvins. L'axe des ordonnées correspond à $\log(L/L_{\odot})$ et non $\log L$ comme indiqué dans le document original.

1.3 Paramètres physiques fondamentaux des étoiles de type RR Lyrae

1.3.1 Température, magnitude absolue, masse, rayon, gravité

Les paramètres physiques des étoiles pulsantes varient *a fortiori* dans le temps. Nous considérons ici leurs valeurs moyennes [69].

1.3.1.1 Température effective

Les RR Lyrae ont une température moyenne de surface comprise entre 6100 et 7400 K. Elles occupent ainsi une zone limitée dans le diagramme HR (Figure 1.1 et Figure 1.16) appelée la bande d'instabilité (voir 1.3.2.3). Ces valeurs ont été obtenues par spectrométrie ou en confrontant des modèles théoriques aux données photométriques multi-couleurs. Des relations empiriques obtenues par régression permettent également d'évaluer la température de surface à partir de l'analyse harmonique des pulsations (voir Chapitre 3). Il existe un biais non négligeable pour chacune de ces méthodes (voir Section 1.3.2) provoquant des écarts allant jusqu'à 300 K [84].

1.3.1.2 Magnitude absolue

La magnitude absolue des RR Lyrae est primordiale dans la détermination des distances. Il est en effet communément admis que la dispersion de la magnitude absolue est faible : $0.75 \pm 0.25 \text{ mag}$. En confrontant la magnitude absolue et la magnitude visuelle on est alors capable d'estimer l'éloignement. A l'image de la température effective, la magnitude absolue de ces étoiles a été évaluée par différentes méthodes, incluant, entre autre, l'utilisation de modèles théoriques issus de code d'évolution stellaire ou encore des relations empiriques (voir Chapitre 3). Des missions spécifiques tels que *Hipparcos* ont permis de calibrer au mieux ces dernières afin d'obtenir les résultats mentionnés précédemment. La mission *GAIA* lancée récemment permettra de confirmer et d'affiner ces valeurs.

$\langle M_v \rangle$	0.75 ± 0.25 mag
$\langle T_{eff} \rangle$	6100 – 7400 K
$[Fe/H]$	0.0 – -2.5
Masse	0.5 – 0.8 M_\odot
Rayon	4 – 6 R_\odot
$\langle \log g \rangle$	2.5 – 3 cm.s^{-2}

TABLE 1.2 – Paramètres physiques fondamentaux des étoiles de type RR Lyrae

1.3.1.3 Métallicité

On note une dispersion importante des abondances en éléments lourds² (voir Tableau 1.2 et Figure 1.21). Ces valeurs ont été obtenues par spectroscopie ou par analyse harmonique des courbes de lumières (voir Chapitre 3) et correspondent aux valeurs des abondances, non pas au cœur, mais en surface de l'étoile. Ainsi, elles nous permettent de retracer la composition du gaz interstellaire dans lequel elles se sont formées. L'écart important de métallicité relevé entre différentes RR Lyrae s'explique alors par leur localisation. Nous verrons dans la section 1.5.4 que les étoiles appartenant au bulbe galactique ont une métallicité équivalente à celle du Soleil, alors que celles observées dans le halo galactique peuvent avoir une abondance de fer normalisée à celle de l'hydrogène 300 fois inférieur à celle du Soleil.

1.3.1.4 Masse, rayon et gravité

A partir de l'analyse harmonique des courbes de lumière, on peut évaluer la masse, le rayon et la gravité à la surface des étoiles de type RR Lyrae. L'ensemble des formules empiriques existantes seront passées en revue au chapitre 3. Le tableau 1.2 regroupe les valeurs moyennes observées jusqu'à maintenant pour ces différentes caractéristiques³.

1.3.2 Structure interne et évolution stellaire

Nous verrons dans la partie suivante que les mécanismes de pulsation dans une étoile de type RR Lyrae sont conditionnés par la présence d'une zone d'ionisation de l'hélium sous certaines contraintes. Ces conditions sont réunies à l'intersection de la branche horizontale et de la bande d'instabilité, deux zones remarquables du diagramme HR.

1.3.2.1 Modèles et hypothèses

La présentation qui suit repose sur les résultats obtenus à l'aide du code d'évolution stellaire MESA [63] couplé à GYRE [103] pour l'étude des pulsations. Nous avons calculé une quarantaine de modèles pour les données initiales suivantes : $M \in \{0.5 ; 0.55 ; 0.6 ; 0.65 ; 0.7 ; 0.75 ; 0.8\}$ et $Z \in \{0.0001 ; 0.001 ; 0.002 ; 0.004 ; 0.01\}$. Les phénomènes liés à la rotation, au champ magnétique et à la perte de masse ont été négligés. La convection a été traitée en suivant le modèle de longueur de mélange de Henyey et al. [42] avec un paramètre $\alpha = 1.5$ et un critère de stabilité de Schwarzschild. Les phénomènes de diffusion, de semi-convection et d'*overshoot*⁴ ont été négligés. Par conséquent, nous nous limiterons à une étude qualitative qui se montrera suffisante pour la suite de cette thèse. Nous redirigeons le lecteur vers les publications de Michaud et al. [56] et de Constantino et al. [21] pour une discussion de l'impact des phénomènes sus-cités sur la masse, l'âge, les abondances et les zones de convection des modèles d'étoiles situées sur la branche horizontale.

1.3.2.2 La branche horizontale (HB)

La branche horizontale est précédée des flashes d'hélium qui lèvent la dégénérescence du cœur dans le cas des étoiles de faible masse ($M \lesssim 2M_\odot$) (Figure 1.4). Les calculs montrent que les réactions de fusion

2. Nous adopterons dans ce chapitre deux définitions pour la métallicité : la proportion d'éléments plus lourds que l'hélium – représentée par la lettre Z – ou la proportion de fer, que nous noterons [Fe/H]. La première sera utilisée principalement pour les simulations d'évolution stellaire, et la seconde pour les résultats issus des observations.

3. Nous avons établi ce tableau en partant de celui de Smith [84], que nous avons ensuite corrigé en compilant l'ensemble des résultats publiés depuis.

4. Le phénomène d'*overshoot* désigne la pénétration des mouvements convectifs, par inertie, dans des couches stratifiées stables.

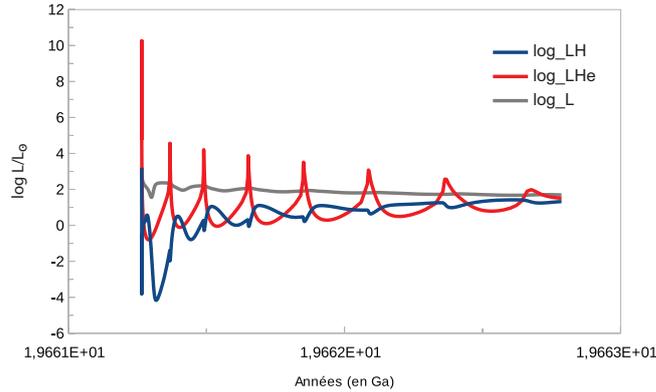


FIGURE 1.4 – Evolution de la luminosité totale L et de ses composantes – luminosité issue de la fusion de l’hydrogène (L_H) et luminosité issue de la fusion de l’hélium (L_{He}) – durant la phase des flashes d’hélium, pour une étoile de masse $M = 0.7M_\odot$ et de métallicité $Z = 0.0001$.

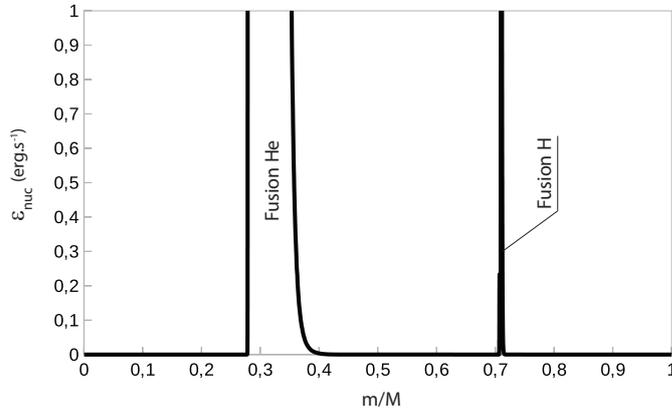
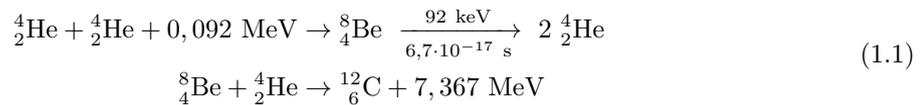


FIGURE 1.5 – Réactions de fusion au sein d’une étoile de masse $M = 0.7M_\odot$ et de métallicité $Z = 0.0001$ durant la phase des flashes d’hélium. m/M correspond au rapport entre la masse comprise entre le point considéré et le centre de l’étoile, et la masse totale de l’étoile. ϵ_{nuc} correspond à la production d’énergie par réaction nucléaire.

de l’hélium, via le processus 3α (1.1), ont lieu dans une couche située à une distance contenant $0.3M$ (Figure 1.5). Le déclenchement excentré de la fusion de l’hélium provient des mécanismes d’interaction faible provoqués par la forte densité et température au cœur de l’étoile [49] qui conduisent à une inversion du gradient de température.



L’évolution de l’étoile sur la branche horizontale débute lorsque la réaction 3α atteint le centre de l’étoile (Figure 1.6). Le cœur n’est alors plus dégénéré et a atteint un équilibre thermodynamique avec, en son centre, une fusion de l’hélium, et, dans une couche supérieure, une fusion de l’hydrogène – *via*, par ordre d’importance, le cycle carbone-azote-oxygène⁵ (1.2) et, la chaîne proton-proton (1.3) (Figure 1.8). Par rapport au premier flash d’hélium, la luminosité et la température ont diminué de plus d’un ordre de grandeur (Figure 1.7) ; le rayon du cœur de l’étoile s’est agrandi tandis que l’enveloppe s’est contractée.

5. Nous présentons ici la principale séquence CNO. Les alternatives reposent sur une production d’oxygène à la place de l’hélium à la dernière étape – la probabilité d’un tel événement étant de 0.04%.

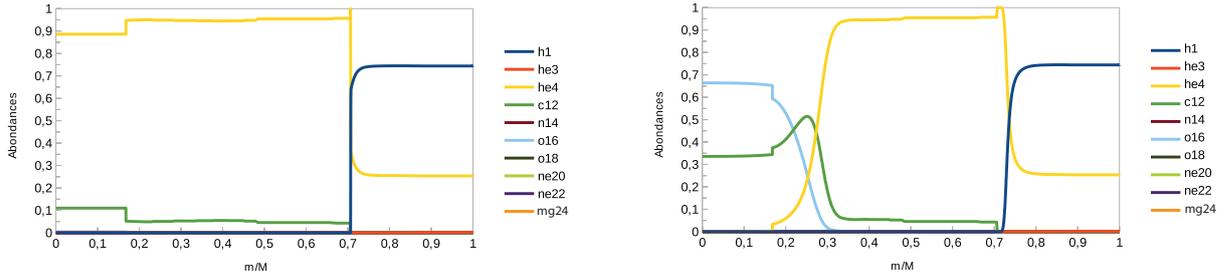


FIGURE 1.6 – Structure interne et abondances (en fraction de masse), pour une étoile de masse $M = 0.7M_{\odot}$ et de métallicité $Z = 0.0001$. *Gauche* : début d'évolution sur la branche horizontale. *Droite* : fin d'évolution sur la branche horizontale.

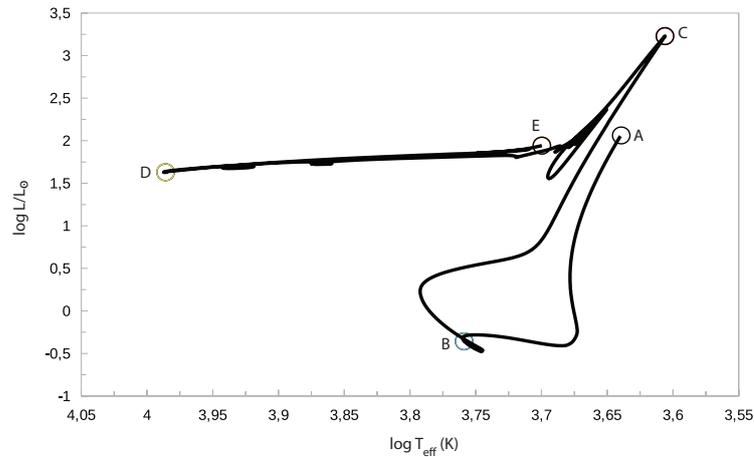
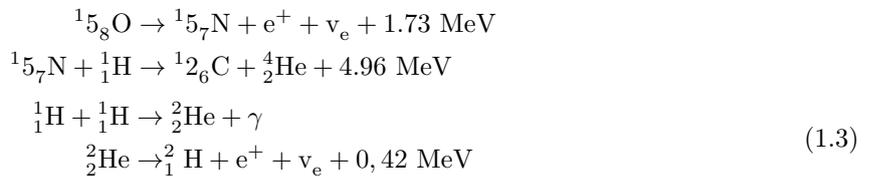
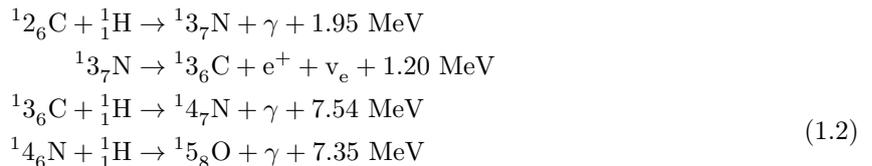


FIGURE 1.7 – Exemple d'évolution stellaire dans le diagramme HR pour une étoile de $M = 0.7M_{\odot}$, $Z = 0.0001$. De A à B : Pré-séquence principale (ligne d'évolution d'Hayashi), B : Séquence principale, de B à C : Branche des géantes rouges, C : 1^{er} flash d'hélium, D : ZAHB, de D à E : Branche horizontale.



Dans le cas des étoiles de masse faible ($M \lesssim 2M_{\odot}$), les étoiles au début de la branche horizontale ont un cœur d'hélium non dégénéré d'une masse $M_c \approx 0.45M_{\odot}$ entouré d'une enveloppe d'hydrogène de masse $M - M_c$. La luminosité totale est issue de trois contributions : la fusion de l'hélium dans le cœur *via* le processus 3α , la fusion de l'hydrogène, *via* la réaction CNO⁶, dans une couche supérieure (Figure 1.8) et la conversion de l'énergie gravitationnelle. Durant son évolution le long de la branche horizontale, la zone de fusion de l'hydrogène va diminuer alors que celle de l'hélium va s'étendre jusqu'à ce que l'hélium en son centre soit épuisé (Figure 1.8). On aura alors atteint le début de la branche asymptotique des géantes rouges (asymptotic giant branch, AGB) (Figure 1.6).

Le temps passé sur la branche horizontale est de l'ordre de 0.6 à 0.9 milliard d'années⁷ (Tableau 1.3). L'évolution d'une étoile durant cette période dépend de sa masse ainsi que de sa métallicité (Figure 1.9).

6. La chaîne pp étant négligeable comparée à celle-ci.

7. Cette valeur est sensible aux modèles de convection et ne vaut que pour ordre de grandeur.

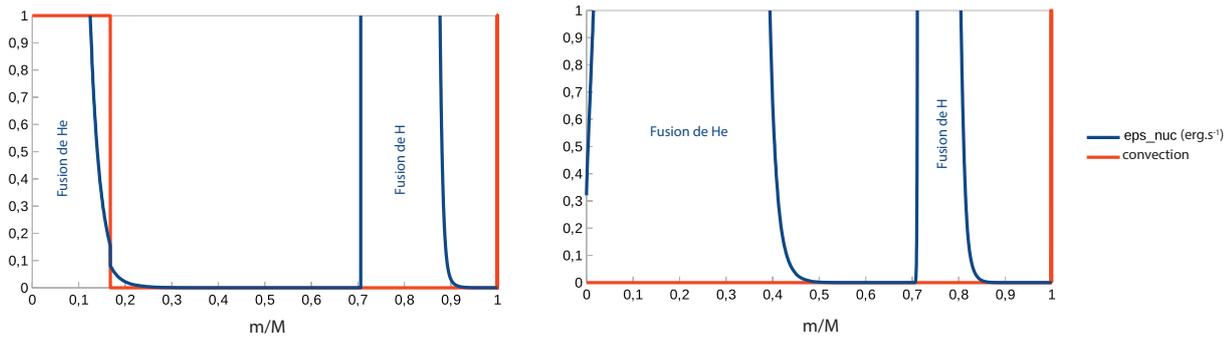


FIGURE 1.8 – Zones de convection (*en orange*) et réactions nucléaires (*en bleu*), en fonction de m/M pour une étoile de masse $M = 0.7M_{\odot}$ et de métallicité $Z = 0.0001$. *Gauche* : début d'évolution sur la branche horizontale. *Droite* : Fin d'évolution sur la branche horizontale. Les zones pour lesquelles la valeur de la convection est à un, correspondent aux régions convectives.

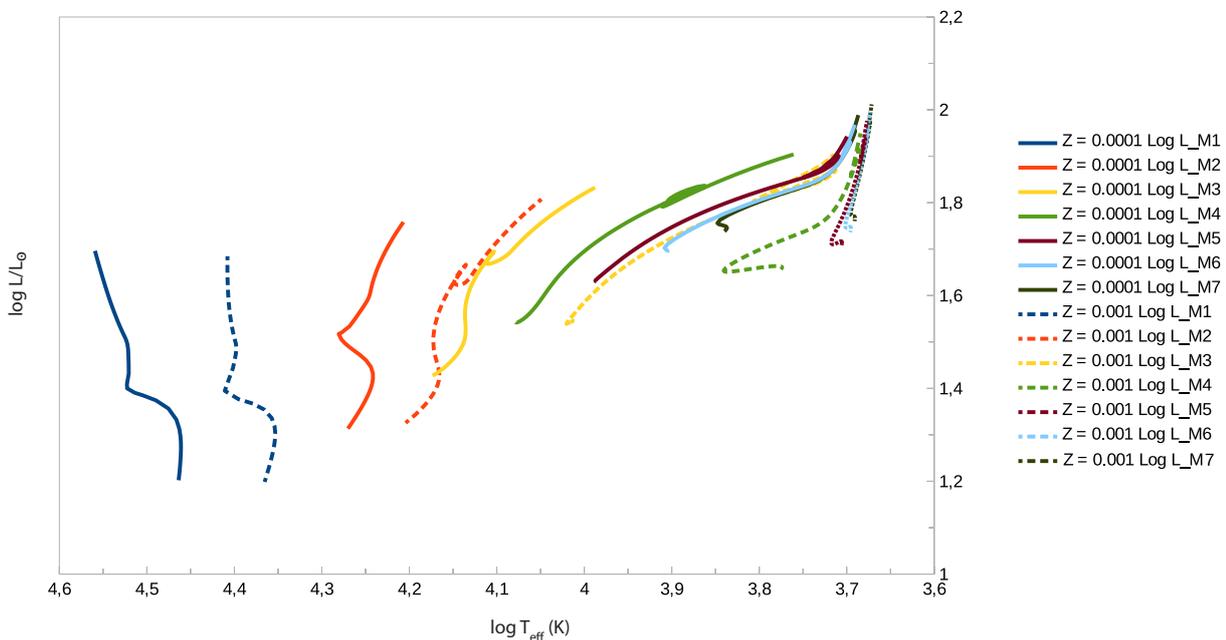


FIGURE 1.9 – Morphologie de la branche horizontale et du *red clump* pour différentes masses et métallicités. $M_1 = 0.5$, $M_2 = 0.55$, $M_3 = 0.6$, $M_4 = 0.65$, $M_5 = 0.7$, $M_6 = 0.75$, $M_7 = 0.8$.

Les étoiles les plus massives se situent du côté rouge de la branche horizontale et ont une température effective qui ne varie que très peu comparée à leur luminosité. En fonction de la métallicité, on voit qu'il existe une *masse critique* à partir de laquelle les étoiles suivent à peu près le même chemin dans le diagramme HR. Plus la métallicité est importante, moins la branche horizontale est étendue; on parle alors de *red clump*. Pour les étoiles moins massives, leur température initiale est plus importante et varie de façon non négligeable durant leur cycle sur la branche horizontale.

Dans l'ensemble des modèles étudiés, l'évolution de la température au centre de l'étoile est identique (voir Figure 1.10). Elle augmente et accélère progressivement, pour ensuite chuter brutalement avant de croître à nouveau. Mis à part pour les étoiles les moins massives, l'enveloppe va se dilater durant la période où la température augmente, tandis que le cœur lui va se contracter. En effet, la figure 1.11 montre, d'une part, une augmentation du rayon de l'étoile et, d'autre part, une augmentation de la température au centre alors que l'abondance d'hélium diminue, argumentant en faveur d'une contraction du cœur. La figure 1.12 appuie cette analyse, puisque l'on y voit une baisse accélérée de la contribution du processus triple alpha à la luminosité totale, s'expliquant par une diminution des quantités d'hélium et une dilatation de l'étoile favorisant la contribution du cycle CNO. Pour les étoiles les moins massives, la contraction de l'étoile débute avant le maximum de température au centre (voir Figure 1.12). En effet, leur zone de fusion de l'hydrogène est plus mince et contribue moins que le processus triple alpha à la

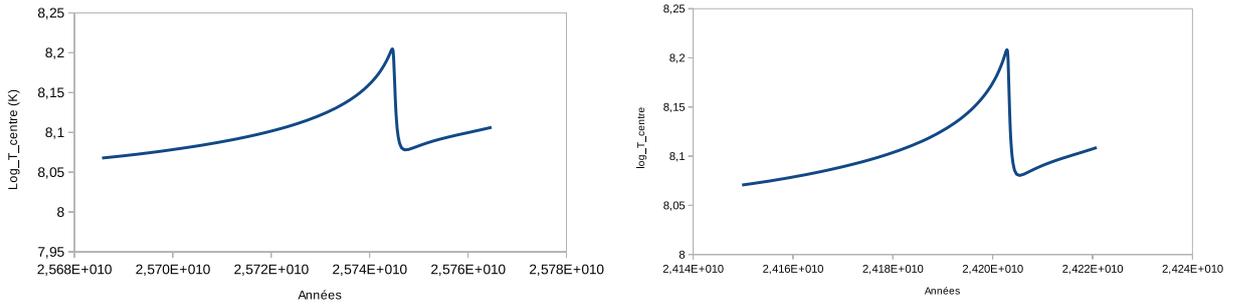


FIGURE 1.10 – Evolution de la température au centre de l'étoile. *Gauche* : $M = 0.8M_{\odot}$ et $Z = 0.01$. *Droite* : $M = 0.7M_{\odot}$ et $Z = 0.002$.

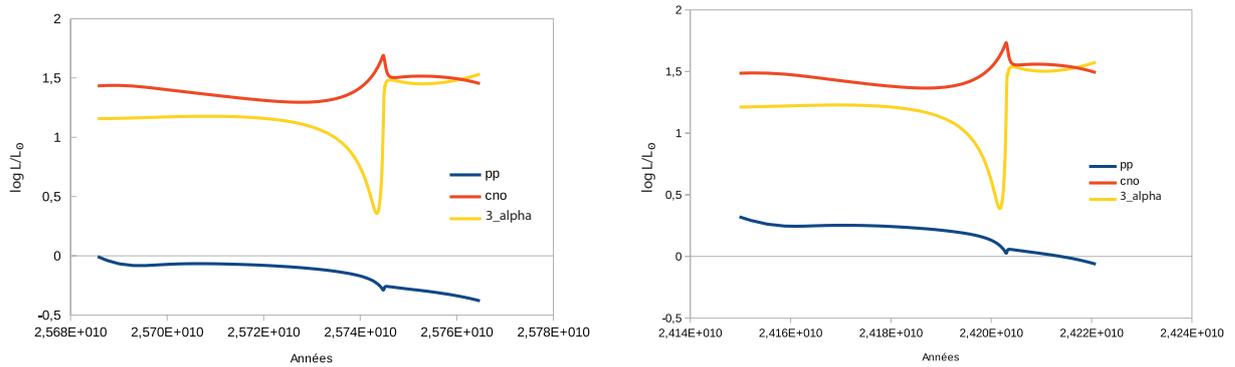


FIGURE 1.11 – Evolution des contributions à la luminosité totale pour chaque réaction nucléaire. *Gauche* : $M = 0.8M_{\odot}$ et $Z = 0.01$. *Droite* : $M = 0.7M_{\odot}$ et $Z = 0.002$.

luminosité totale. Toute expansion de l'étoile va diminuer la température dans cette zone de façon non négligeable entraînant une contraction de l'enveloppe. Ceci explique la morphologie différente des chemins d'évolution suivis dans le diagramme HR comparée aux étoiles plus massives.

La température au centre chute brutalement lorsque la concentration en hélium devient trop faible. Pour les étoiles les plus massives, s'en suit une contraction de l'étoile et une dilatation du cœur qui se traduit, pour certaines d'entre elles, par une boucle dans le diagramme HR (voir Figure 1.9). Le rayon globale de l'étoile recommencera à augmenter lorsque la fusion de l'hélium au centre touchera à sa fin et causera la contraction de la région centrale de l'étoile. Cette expansion entraînera une diminution de la température dans la zone de fusion de l'hydrogène et donc de sa contribution à la luminosité totale. Les étoiles d'environ $0.5M_{\odot}$ ont débuté ce processus d'expansion lorsque la température en leur centre avait atteint son maximum.

La figure 1.13 montre l'évolution du profil convectif dans l'étoile pour différentes masses et métallicités. En début de branche horizontale, le cœur est convectif et s'étend jusqu'à $q \approx 0.2$ ⁸. Plus la masse de l'étoile est faible, plus cette zone est étendue, la métallicité n'influençant que peu ce résultat. Cette partie

8. L'étendue de cette zone peut être plus importante si la semi-convection et l'*overshoot* sont pris en compte.

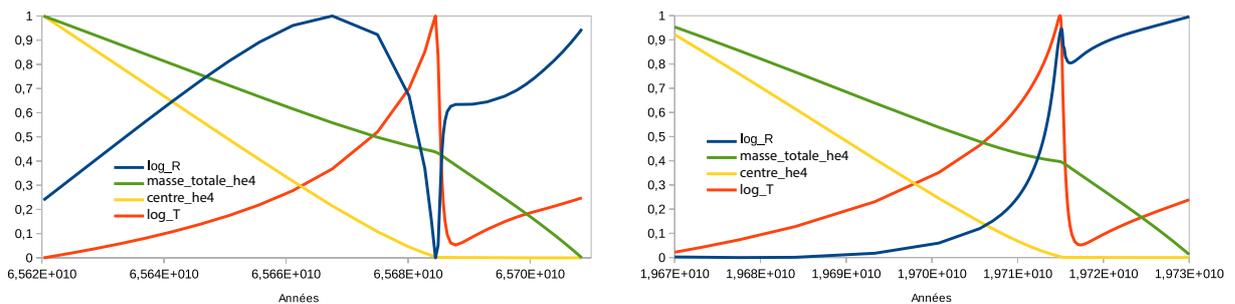


FIGURE 1.12 – Evolutions normalisées du rayon de l'étoile, de la température au centre, de l'abondance d'hélium totale et au centre. *Gauche* : $M = 0.5M_{\odot}$ et $Z = 0.0001$. *Droite* : $M = 0.7M_{\odot}$ et $Z = 0.0001$.

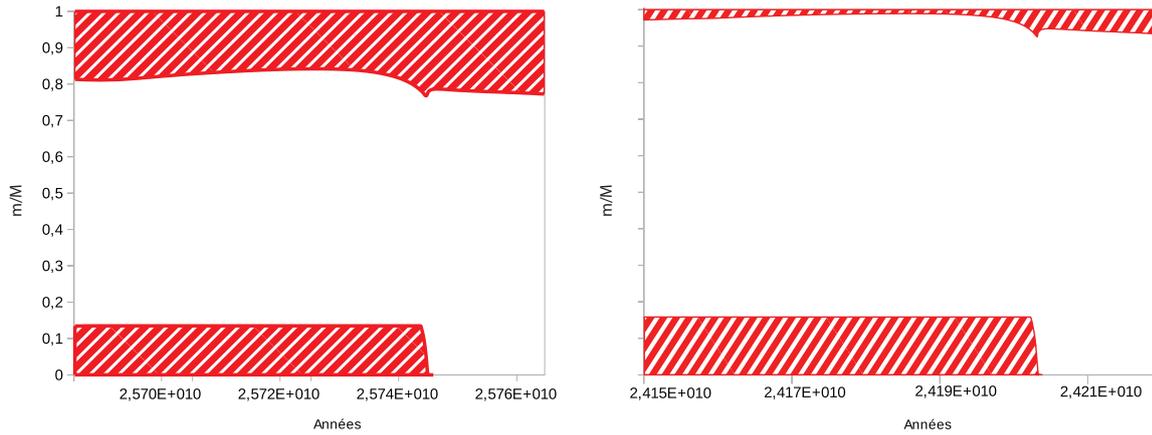


FIGURE 1.13 – Evolution des zones de convection. *Gauche* : $M = 0.8M_{\odot}$ et $Z = 0.01$. *Droite* : $M = 0.7M_{\odot}$ et $Z = 0.002$.

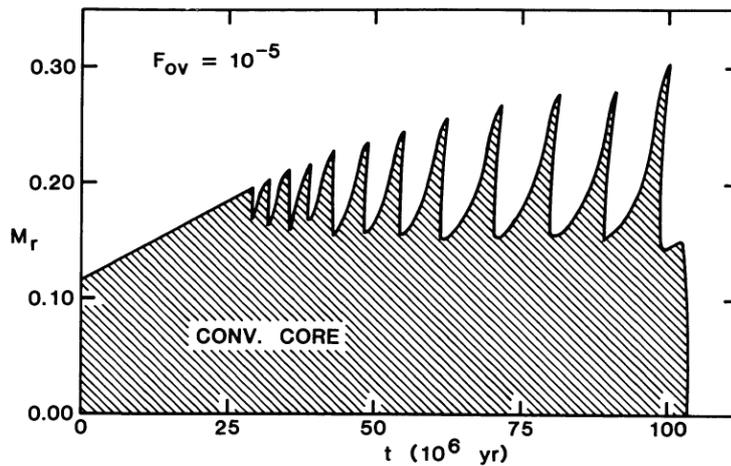


FIGURE 1.14 – Exemple d'oscillation de la zone convective dans le cas de modèle de masse $0.68M_{\odot}$ incluant un paramètre d'*overshoot* $F_{ov} = 10^{-5}$ [95]. M_r sur l'axe des ordonnées est équivalent à m/M .

convective perdure durant les trois-quarts de la vie de l'étoile sur la branche horizontale, pour ensuite disparaître subitement. Le tableau 1.3, montre que cette valeur de ≈ 0.75 s'applique à toutes les étoiles étudiées, quels que soient leurs âges, masse ou métallicité. On note également la présence d'une seconde zone convective qui est d'autant plus importante que la masse et la métallicité de l'étoile le sont, cette dernière ayant une influence plus marquée.

La disparition de la zone de convection est enclenchée au moment où la concentration d'hélium devient négligeable et lorsque la température au centre chute brutalement. Dans les modèles prenant en compte la semi-convection et l'*overshoot*, la limite de la zone de convection au centre est instable jusqu'à présent, en fin de branche horizontale, des pulsations [96] (voir Figure 1.14). Cependant, l'existence de ces oscillations reste encore spéculative puisque aucune observation n'est venu la confirmer [8] [9].

Lorsque la fusion de l'hélium au cœur de l'étoile est achevée (Figure 1.6), l'étoile quitte la branche horizontale (terminal age horizontal branch, TAHB) et entre dans la branche asymptotique des géantes rouges.

Les zones d'ionisation de l'hélium sont représentées à la figure 1.15. Leurs situations évoluent en fonction de l'évolution de l'étoile sur la branche horizontale et influent directement sur l'opacité⁹ au sein de celle-ci. Nous verrons dans la seconde partie de ce mémoire que leurs localisations joue un rôle primordial dans les mécanismes de pulsation.

9. Coefficient caractérisant le transport de la lumière à travers un milieu.

Z = 0.0001							
	$0.5M_{\odot}$	$0.55M_{\odot}$	$0.6M_{\odot}$	$0.65M_{\odot}$	$0.7M_{\odot}$	$0.75M_{\odot}$	$0.8M_{\odot}$
$t_{fc} - t_{zahb}$	64967067	55840654	52548752	49021893	49003495	47930939	48892443
t_{hb}	88218908	73707447	68226903	63999358	64126355	62657085	62932435
Rapport	0,74	0,76	0,77	0,77	0,76	0,76	0,78
Z = 0.001							
	$0.5M_{\odot}$	$0.55M_{\odot}$	$0.6M_{\odot}$	$0.65M_{\odot}$	$0.7M_{\odot}$	$0.75M_{\odot}$	$0.8M_{\odot}$
$t_{fc} - t_{zahb}$	65148331	59163518	54291566	53799051	52005397	52889275	51709797
t_{hb}	88951214	77648495	71514554	70358888	68689926	69399803	68010614
Rapport	0,73	0,76	0,76	0,76	0,76	0,76	0,76
Z = 0.002							
	$0.5M_{\odot}$	$0.55M_{\odot}$	$0.6M_{\odot}$	$0.65M_{\odot}$	$0.7M_{\odot}$	$0.75M_{\odot}$	$0.8M_{\odot}$
$t_{fc} - t_{zahb}$	66710225	59663436	56427820	54079197	53503919	53999160	53226256
t_{hb}	90633681	78500928	73959819	71822722	71033642	71350773	70387203
Rapport	0,74	0,76	0,76	0,75	0,75	0,76	0,76
Z = 0.004							
	$0.5M_{\odot}$	$0.55M_{\odot}$	$0.6M_{\odot}$	$0.65M_{\odot}$	$0.7M_{\odot}$	$0.75M_{\odot}$	$0.8M_{\odot}$
$t_{fc} - t_{zahb}$	67678881	59876234	56884010	55647295	55135485	54976455	55426278
t_{hb}	91710829	79316563	75434144	74189475	73653219	73192695	73472095
Rapport	0,74	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75	0,75
Z = 0.01							
	$0.5M_{\odot}$	$0.55M_{\odot}$	$0.6M_{\odot}$	$0.65M_{\odot}$	$0.7M_{\odot}$	$0.75M_{\odot}$	$0.8M_{\odot}$
$t_{fc} - t_{zahb}$	68559170	62929154	61679604	60160210	59399335	58636246	59521052
t_{hb}	93455050	84110311	81509347	80014644	79520621	78456777	79166363
Rapport	0,73	0,75	0,76	0,75	0,75	0,75	0,75

TABLE 1.3 – Rapport entre le temps d’existence de la zone convective ($t_{fc} - t_{zahb}$) et le temps d’évolution sur la branche horizontale (t_{hb}) pour différentes masses et métallicités.

1.3.2.3 La bande d’instabilité

En 1940, Schwarzschild [79] établit clairement que les RR Lyrae sont confinées d’un point de vue spectral à magnitude quasi constante. Qui plus est, il affirma que toute étoile qui appartenait à cette zone était une étoile pulsante. L’existence de cette bande d’instabilité fut ensuite étendue à d’autres étoiles variables.

La délimitation précise de cette zone reste encore en suspens. Les modèles théoriques arrivent à approcher de façon satisfaisante les résultats observationnels pour la limite bleue de cette région. Pour ce qui est de la limite rouge, des divergences existent. En partant des modèles que nous avons obtenus par évolution stellaire en utilisant MESA, nous avons sondé cette bande d’instabilité en cherchant, pour chacun d’entre eux, les modes d’oscillations instables qui témoigneraient de l’existence de variation périodique au sein de l’étoile. La figure 1.16 montre tout d’abord que la limite bleue de cette zone est peuplée d’étoiles de type RRc. En suivant le parcours de l’étoile le long de la branche horizontale, on voit apparaître le mode fondamental, qu’il coexiste, ou non, avec la première harmonique. Les résultats obtenus ne nous permettent pas de définir de limite rouge à notre bande d’instabilité. Si les périodes obtenues ne correspondent plus à celles attendues pour les RR Lyrae, les calculs montrent que ces étoiles sont le siège d’oscillations instables en contradiction avec les données observationnelles.

En 1977, Deupree [25] suggéra que les effets dynamiques et thermodynamiques de la convection ne pouvaient être négligés et qu’ils étaient à l’origine de la disparition des oscillations à la seconde extrémité de la bande d’instabilité. Le couplage non linéaire entre convection et pulsation fut implémenté par Stellingwerf [89] et confirma l’hypothèse de Deupree. Ainsi, la difficulté à définir précisément la bande d’instabilité provient de la complexité à reproduire correctement la convection. Les interactions – couplage, viscosité, etc. – et les phénomènes tels que la turbulence ou la dynamique supersonique induisent une modélisation hautement non linéaire impossible à traiter avec les moyens de calculs actuels.

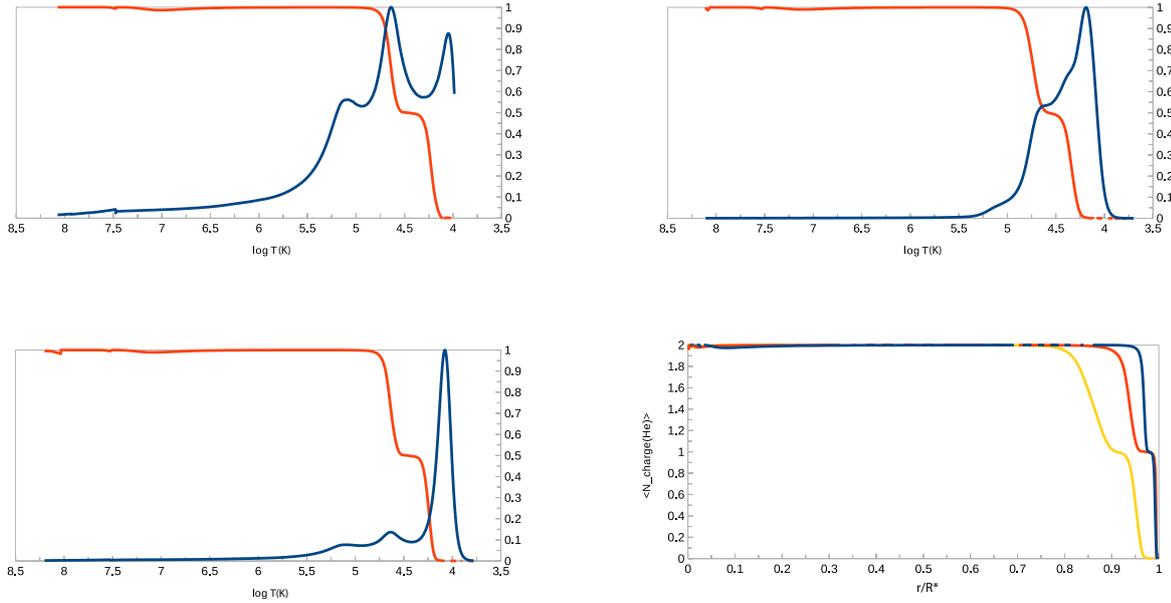


FIGURE 1.15 – Zone d’ionisation pour une étoile $M = 0.7M_{\odot}$ et $Z = 0.001$. *En haut à gauche* : Opacité (en bleu) et charge moyenne de l’atome d’hélium (en orange) normalisées, en début de branche horizontale. *En bas à gauche* : Opacité (en bleu) et charge moyenne de l’atome d’hélium (en orange) normalisés, dans la bande d’instabilité. *En haut à droite* : Opacité (en bleu) et charge moyenne de l’atome d’hélium (en orange) normalisées, en fin de branche horizontale. *En bas à droite* : Représentation des charges moyennes de l’atome d’hélium en fonction du rayon de l’étoile normalisé, en début de branche horizontale (bleu), dans la bande d’instabilité (orange), en fin de branche horizontale (jaune). r/R^* correspond à la distance normalisée par le rayon de l’étoile.

Si la convection a peu d’effet sur les pulsations, sa capacité d’amortissement de ces dernières est importante. Ainsi, les modèles purement radiatifs décrivent bien l’extrémité bleue de la bande d’instabilité, car à ces températures l’effet d’amortissement de la convection est négligeable. Il en est autrement à l’extrémité rouge où l’amortissement dû à la convection est bien moins négligeable.

A ce jour, GYRE n’implémente pas ce couplage, mais nous pouvons cependant voir à la figure 1.16 que la limite bleue, et en extrapolant, la limite rouge également, ne sont pas absolues mais dépendent de la métallicité. Ce constat fut celui de Sandage (voir Chapitre 3 et [75]) qui établit une formule empirique pour la pente de chacune de ces extrémités en fonction de la métallicité.

1.4 Phénomènes singuliers observés dans les étoiles de type RR Lyrae et ondes de choc

1.4.1 L’effet Blazhko

Les courbes de lumière de certaines étoiles de type RR Lyrae présentent des phénomènes de modulation. L’astronome Sergey Nikolaevich Blazhko fut le premier à observer un tel phénomène en 1907 [6]. Aujourd’hui, plus de 20% des étoiles RRab connues présentent un effet Blazhko avec des ratio pouvant aller jusqu’à 50% pour certaines populations (voir Section 1.5.5). L’effet Blazhko a aussi été observé chez les RRc et récemment chez les RRd. Initialement limité à une modulation d’amplitude, il peut également se manifester par une modulation de fréquence et/ou de phase. On compte plus d’une douzaine de théories tentant d’expliquer ce phénomène. Parmi elles, trois sont considérées comme les plus pertinentes, mais échouent à résoudre certaines problématiques :

- Le modèle magnétique de Shibahashi [82] : il s’inspire du modèle que Kurtz avait appliqué aux étoiles roAp pour expliquer les variations d’amplitude des modes non radiaux [52]. Leur raisonnement suppose un champ magnétique qui transformerait tous les modes en modes non-radiaux. Ainsi, la fonction propre associée à un mode radial, pourrait, dans un certain cas précis, être dé-

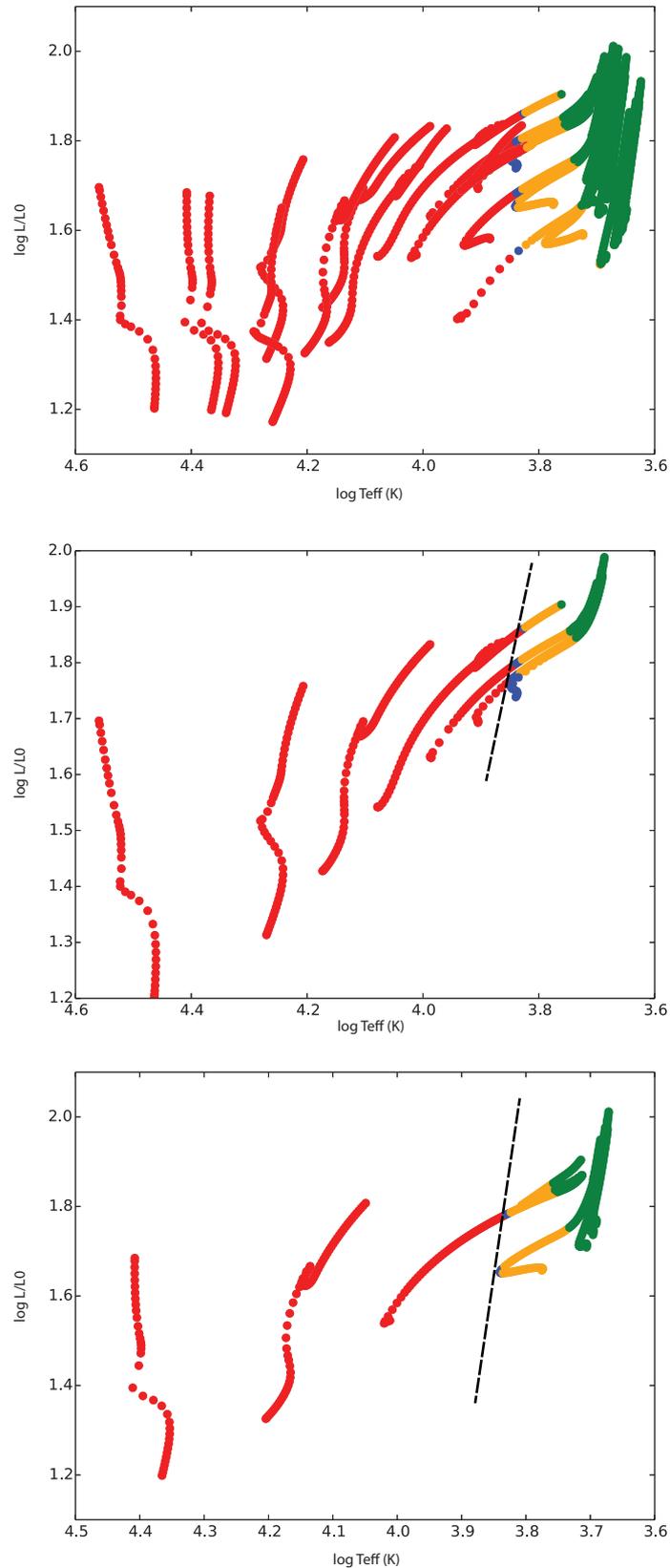


FIGURE 1.16 – Bande d’instabilité dans le diagramme HR. La limite bleue est représentée par la ligne hachurée dans les diagrammes du centre et du bas. Les étoiles ne présentant pas d’oscillations sont représentées en rouge ; celles ne pulsant que suivant la première harmonique sont représentées en bleu ; celles présentant une instabilité pour le mode fondamental (avec ou sans première harmonique) sont représentées en orange. *Haut* : Ensemble des modèles étudiés. *Milieu* : Modèles de métallicité $Z = 0.0001$. *Bas* : Modèles de métallicité $Z = 0.001$.

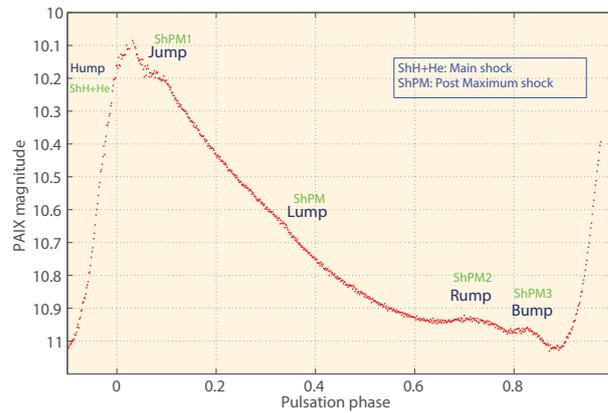


FIGURE 1.17 – Illustration des différentes « bosses » observées sur la courbe de lumière d’une étoile RRAb : S Arae [17].

formée par une harmonique sphérique de degré $l = 2$ engendrant alors une structure en quintuplet autour de la fréquence radiale dans l’analyse harmonique (voir Chapitre 3) et la rotation engendrerait la modulation observée. Cependant, ce modèle se heurte à deux problèmes : un champ magnétique de l’ordre de 1 kG qui est d’un ordre plus important que celui observé [18] ; la nécessité d’une structure harmonique symétrique, tant en fréquence qu’en amplitude, autour de la fréquence radiale et qui n’est pas observé dans la pratique.

- La résonance non linéaire de Nowakowski et Dziembowski [62] : comme son nom l’indique, ce modèle suppose une résonance 1:1 entre le mode radial principal (fondamental ou harmonique) et un des modes non-radiaux peu fortement amorti. Les étoiles à un stade avancé d’évolution sont caractérisées par un grand nombre de ces modes non-radiaux qui sont des modes de gravité d’ordre élevés très similaires à des modes de pression présents dans les couches supérieures, ce qui favorise leur couplage¹⁰. Le principal écueil rencontré par ce modèle est, de nouveau, la symétrie induite, dans l’analyse harmonique, des lobes autour de la fréquence principale et de ses harmoniques.
- Le modèle convectif de Stothers [93] : il repose sur l’idée d’un cycle des turbulences dans la couche convective supérieure de l’étoile (voir 1.3.2.2) corrélé avec l’intensité du champ magnétique (variable *a fortiori*). Comme nous avons pu le voir, lors de la partie sur la bande d’instabilité, la convection joue un rôle primordial lorsqu’il s’agit de définir la limite rouge de cette zone. Cependant, Stothers n’étaye que pauvrement son hypothèse. Le modèle théorique employé par Molnár [57] montre que le mécanisme ne marcherait que pour les périodes de modulations importantes (supérieures à 100 jours) dû aux temps de réponses très longs des mécanismes de pulsations par rapport aux modifications de l’enveloppe stellaire.

1.4.2 Ondes de choc

Pour un milieu donné, on désigne par onde de choc, une onde dont la vitesse de propagation est supérieure à la vitesse du son dans ce milieu. Elle correspond à une modification abrupte, quasi discontinue, de la pression, de la température et de la densité. L’investigation des ondes de choc, au sein des RR Lyrae, peut suivre différentes pistes : l’analyse photométrique *via* les courbes de lumières, l’analyse spectroscopique et les modèles théoriques.

1.4.2.1 Analyse photométrique

Les courbes de lumières sont ponctuées de « bosses ». Dans la nomenclature qu’il propose en 1966, Christy en retient deux : la *hump* présent sur la branche ascendante de la courbe de lumière vers $\phi \approx 0.92$, juste avant le maximum de luminosité, et la *bump* précédant son minimum $\phi \approx 0.7$ [20]. En 2013, Chadid et Preston complètent cette description avec le *lump* [15] situé à $\phi = 0.35$ puis, récemment, par le *jump* et le *rump* [17]. L’ensemble de ces « bosses » est visible à la figure 1.17.

¹⁰. On désigne par modes de gravité, les oscillations dont la force de rappel est la poussée d’Archimède, et par modes de pressions, les oscillations dont la force de rappel est la pression du plasma.

Les Céphéides classiques présentent elles aussi un *bump*. La localisation de celui-ci dans le diagramme de phase¹¹ dépend de la période de l'étoile [43]. Dans le cas des RR Lyrae cependant, une telle corrélation ne peut être obtenue, car certaines présentent un *bump* dont le moment d'apparition varie d'une période à l'autre (voir Chapitre 3 et [108]).

Chacune de ces « bosses » sont les manifestations d'ondes de choc. Le lien entre ce fait observationnel et ce phénomène physique est complexe, et c'est en partie grâce aux modèles théoriques qu'il a pu être établi.

1.4.2.2 Modèles théoriques

Les simulations conduites par Hill [44] montrent l'existence de deux ondes de chocs par période de pulsation. La collision entre la photosphère en expansion et les résidus en chute libre, laissés par la précédente pulsation, forment le premier choc correspondant au *bump*. Le second choc correspondant au *hump* est issu des mécanismes γ et κ à l'origine des pulsations (voir 2^e partie).

Le modèle de Fokin étaye cette description [36] avec la présence de non plus deux, mais cinq ondes de chocs. Leurs évolutions sont représentées à la figure 1.18. Le premier choc à apparaître, en prenant comme origine le maximum d'expansion, est nommé *s4*. Il est créé par l'accumulation d'ondes de compression faibles au début de la contraction de l'atmosphère de l'étoile. Suit le choc *s3* correspondant à l'arrêt du front de recombinaison de l'hydrogène. Le *bump* ne peut-être produit par *s4* ou *s3* qui sont trop faibles. Par contre, lorsque ceux-ci se rejoignent, on obtient un choc d'une intensité suffisante pour produire celui-ci. Un troisième choc, *s3'* semblerait être généré par la perturbation du mode fondamental par la première harmonique. Cette explication, tout comme la présence exclusive de *s3'* chez les étoiles de type Blazhko, restent encore une hypothèse. *s4*, *s3* et *s3'* sont toutes dirigées vers l'intérieur de l'étoile, contrairement à *s1* et *s2* qui sont dirigées vers l'extérieur. Ces deux chocs sont les plus importants. Ils sont produit respectivement dans les zones d'ionisations de l'hydrogène et de l'hélium, par les mécanismes κ et γ à l'origine des pulsations de l'astre. La fusion de l'ensemble de ces chocs (excepté *s3'* dans le cas des étoiles non-Blazhko) correspond au *hump*.

Le choc *s3* émerge en même temps qu'une onde *w3* qui va entrer dans les couches subphotosphériques en produisant une augmentation locale de la température qui, à son tour, va libérer une partie du flux radiatif confinée à cause la valeur élevée de l'opacité. Ceci conduit à l'observation d'une nouvelle « bosse » vers $\phi = 0.5$ qui, d'après Gillet, serait associé au *lump*, alors que ce dernier est observé à $\phi = 0.35$ [15].

Les résultats obtenus par Fokin ne font pas l'unanimité. S'ils sont cités à de nombreuses reprises (voir par exemple [71]) et ce encore aujourd'hui, certains pointent les faiblesses du modèle numérique, notamment au niveau de sa résolution spatiale [13]. D'autres programmes ont ainsi été développés afin de palier aux carences de celui de Fokin. Nous citerons ainsi les travaux de Feuchtinger et Dorfi [34] ainsi que ceux de Stellingwerf [91]. Les premiers ont développé un algorithme incluant une résolution spatiale adaptative, de sorte que celle-ci soit plus fine dans les zones les plus importantes, comme les zones d'ionisation. Le second utilise la méthode *Smooth Particle Hydrodynamics* qui s'affranchit des contraintes de maillage de ses prédécesseurs et qui est tout particulièrement indiquée pour les oscillations impliquant des grandes amplitudes et incluant des phénomènes brusques type ondes de choc. Malheureusement, la littérature existante sur ces modèles se réduit à leur description et à des résultats préliminaires. Bien qu'encourageant, ces derniers n'expliquent pas, pour le moment, l'ensemble des « bosses » observées sur les courbes de lumière des étoiles de type RR Lyrae.

1.4.2.3 Spectroscopie

Il est communément admis que les raies d'émission sont une manifestation des ondes de choc. S'ajoute également le doublement de raies d'absorption tel que décrit par Schwarzschild [80] dans son modèle d'atmosphère à trois couches.

Les première raies d'émission $H\alpha$ furent découvertes par Struve & Blaauw [94]¹². Leurs intensités élevées expliquent qu'elles aient été les premières observées. Leur décalage vers le bleu correspond à un mouvement s'éloignant du centre de l'étoile. Du fait de leur apparition vers $\phi \approx 0.92$, on les associe au *hump* sur la courbe de lumière. Gillet & Crowe ont observé sur X Ari une seconde raie d'émission décalée vers le rouge [40] conformément aux observations faites sur les étoiles de type Mira, W Virginis ou RV Tauri et confirmé plus tard, par certains modèles théoriques [31]. Cependant, dans ses publications

11. Le diagramme de phase correspond au graphique représentant la magnitude en fonction du temps modulo la période d'oscillation.

12. Et complétées par les illustrations graphiques de Sanford [77].

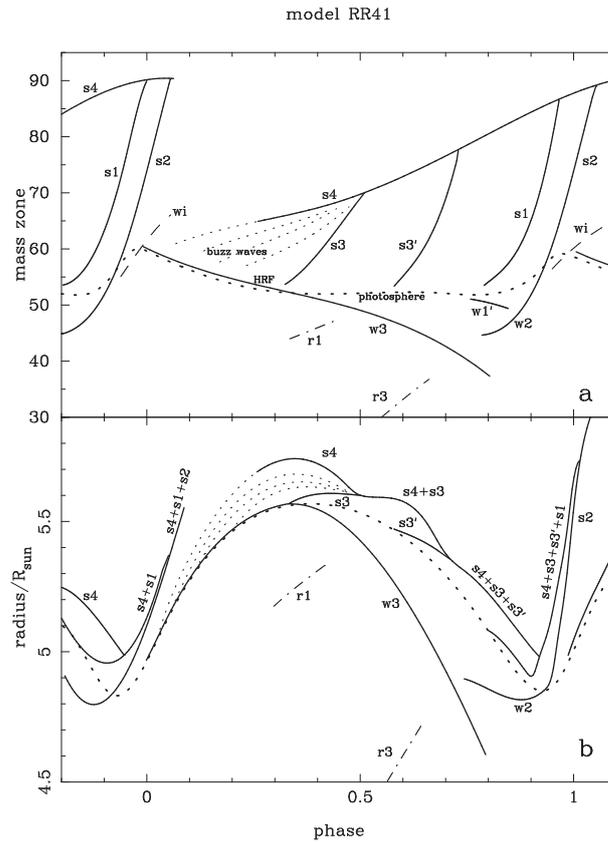


FIGURE 1.18 – Evolution des ondes de chocs et de compression tels qu’obtenus par Fokin pour l’un de ses modèles. *Haut* : repère de masse. *Bas* : repère de longueur [37].

ultérieures, la mention d’un tel phénomène est éludé. Struve & Blaauw observent également un dédoublement des raies d’absorption d’hydrogène peu après les raies d’émission. Schwarzschild [80] explique ce phénomène par une inversion du déplacement des couches atmosphériques lorsqu’elles rencontrent le front d’onde. Partant du maximum d’expansion de l’étoile, l’ensemble des couches atmosphériques entament une chute vers le centre de l’étoile. La première couche à rencontrer le front d’onde montant est la couche la plus basse de l’atmosphère. Elle entame alors une phase d’expansion, correspondant au décalage vers le bleu, alors que les autres continuent leur mouvement de contraction associé au décalage vers le rouge. L’existence d’un phénomène de dédoublement pour les raies d’absorption métalliques [12] prouve, comme le montrait le modèle théorique de Fokin, que les ondes associées à cette « première apparition » ne sont pas restreintes à la haute atmosphère, mais se propagent depuis des zones subphotosphériques. Ainsi, il est possible d’associer ces premières raies d’émission d’hydrogène au choc principal issu des mécanismes de pulsation. Cette émission est produite sous la photosphère, au moment où le rayon de l’étoile est à son minimum, dans la mince zone se situant derrière le choc, où a lieu la recombinaison de l’hydrogène. Cette zone va, durant sa propagation vers l’atmosphère, s’agrandir, pour devenir relativement large à son arrivée dans la haute atmosphère. L’observation récente par Preston de raies d’émission d’hélium HeI et HeII¹³[70], conforte l’hypothèse des mécanismes de pulsation comme origine de ces raies d’émission et appuie les résultats de Fokin où s1 et s2 intervenaient de façon prépondérante dans le choc observé à proximité du maximum de luminosité.

Des raies d’émission H α , moins intenses et décalées vers le bleu, apparaissent une seconde fois, vers $\phi = 0.72$ avant le minimum de luminosité [40]. Contrairement aux premières, elles ne sont pas suivies de dédoublement des lignes d’absorption. On associe ces raies au *bump* correspondant au *early shock* de Hill [44] et aux chocs s3 + s4 décrits plus haut.

Récemment, Preston [71] a détecté des raies d’émission d’hydrogène décalées vers le rouge au début de la phase de compression. Chadid et Preston [15] les associent au *lump* apparaissant sur la courbe de lumière, mais d’après Gillet, ils semblent apparaître plus tard que la troisième émission d’hydrogène [41].

13. Ces dernières n’étant observées que pour les étoiles Blazhko.

	RRab	RRc	RRd
Galaxies du champ [67] [97] [60]	1505 (66,24%)	765 (4,54%)	2 (0,01%)
Bulbe galactique [85]	11756 (69,83%)	4989 (29,63%)	91 (0,54%)
LMC [87]	17693 (74,85%)	4958 (20,98%)	986 (4,17%)
SMC [86]	1933 (81,7%)	175 (7,4%)	258 (10,9%)

TABLE 1.4 – Recensement suivant la classification de Bailey des étoiles de type RR Lyrae dans les galaxies du champ, le bulbe galactique, le grand nuage de Magellan (LMC) et le petit nuage de Magellan (SMC).

Leurs deux points de vue s’opposent aussi sur les causes de l’émission. Gillet l’associerait à l’arrêt du front de recombinaison de l’hydrogène, lorsque l’étoile commence à se contracter, à cause de la densité croissante. A ce moment là, la discontinuité de vitesse se transforme en deux ondes de sens opposés. Celle se dirigeant vers le centre réchauffe la surface photosphérique ce qui induirait une hausse de luminosité. Pour Chadid et Preston, cette émission serait causée par une onde de choc qu’ils nomment Sh_{PM} ¹⁴ qui serait une superposition de l’onde de compression due à la recombinaison de l’hydrogène et de l’accumulation de faibles ondes de compression.

1.5 Recensement des étoiles RR Lyrae et distribution des paramètres physiques et observationnels

Nous fermons ce chapitre par une étude statistique ayant pour population l’ensemble des étoiles RR Lyrae recensées à ce jour, et pour caractères les paramètres physiques et observationnels abordés aux paragraphes précédents. Nous nous intéresserons tout d’abord à la répartition des étoiles RR Lyrae suivant les catégories de Bailey telles qu’elles existent aujourd’hui : RRab, RRc et RRd (voir Section 1.2). Nous poursuivrons ensuite par l’étude des distributions de période, de magnitude et de métallicité. Nous concluons ensuite cette étude statistique par l’occurrence de l’effet Blazhko parmi les étoiles recensées.

1.5.1 RRab, RRc et RRd

Un recensement exhaustif¹⁵ des étoiles de type RR Lyrae est donné au tableau 1.4. Que ce soit dans les nuages de Magellan, le champ et le bulbe galactique, on note une large prédominance des étoiles de type RRab (de l’ordre de 75 % des RR Lyrae observées). Cependant, cette proportion s’explique en partie par les limitations observationnelles, étant donné que l’amplitude des RRc est bien moins importante que celle des RRab, les rendant par conséquent moins faciles à détecter. Enfin, la présence des RRd, bien que faible, est non négligeable, comme leur occurrence le montre dans les nuages de Magellan. Nonobstant les limites techniques mentionnées ci-dessus, ces résultats sont en accord, en première estimation, avec la discussion de la section 1.2 où l’on peut voir que les zones correspondant aux étoiles de RRab couvre une large étendue dans le diagramme HR.

1.5.2 Période

La figure 1.19 montre la distribution des périodes pour chaque catégorie de RR Lyrae. Chaque figure est complétée par une distribution normale fondée sur la moyenne et l’écart-type de chaque échantillon. Les RRab ont une période et une dispersion de période plus importante que les RRc et RRd. Le tableau 1.5 regroupe la période moyenne et l’écart-type correspondant pour chacune des catégories étudiées.

1.5.3 Magnitude apparente

La figure 1.20 montre la distribution de magnitude apparente pour chaque catégorie de RR Lyrae. Tout comme pour les périodes, chaque figure est complétée par une distribution normale fondée sur la moyenne et l’écart-type de chaque échantillon. Le tableau 1.5 regroupe la magnitude apparente moyenne et l’écart-type correspondant pour chacune des catégories étudiées.

14. L’acronyme PM voulant dire *Post Maximum shock*.

15. Jusqu’à une magnitude apparente de 23 mag.

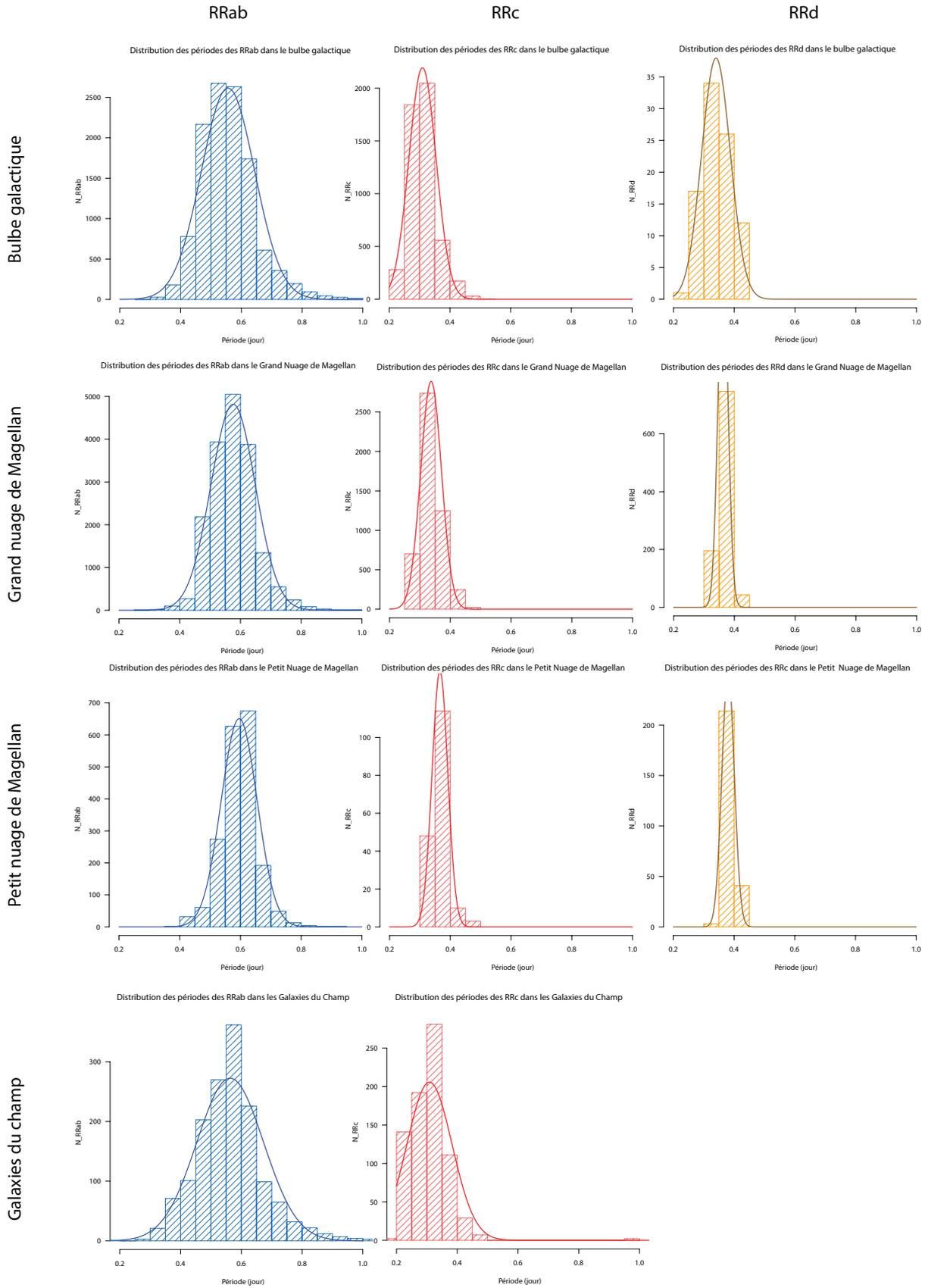


FIGURE 1.19 – Distribution des périodes des RR Lyrae. *De haut en bas* : pour le bulbe galactique [85], le Grand Nuage de Magellan [87], le Petit Nuage de Magellan [86] et pour les galaxies du champ. *De gauche à droite* : pour les RRab, RRc, RRd.

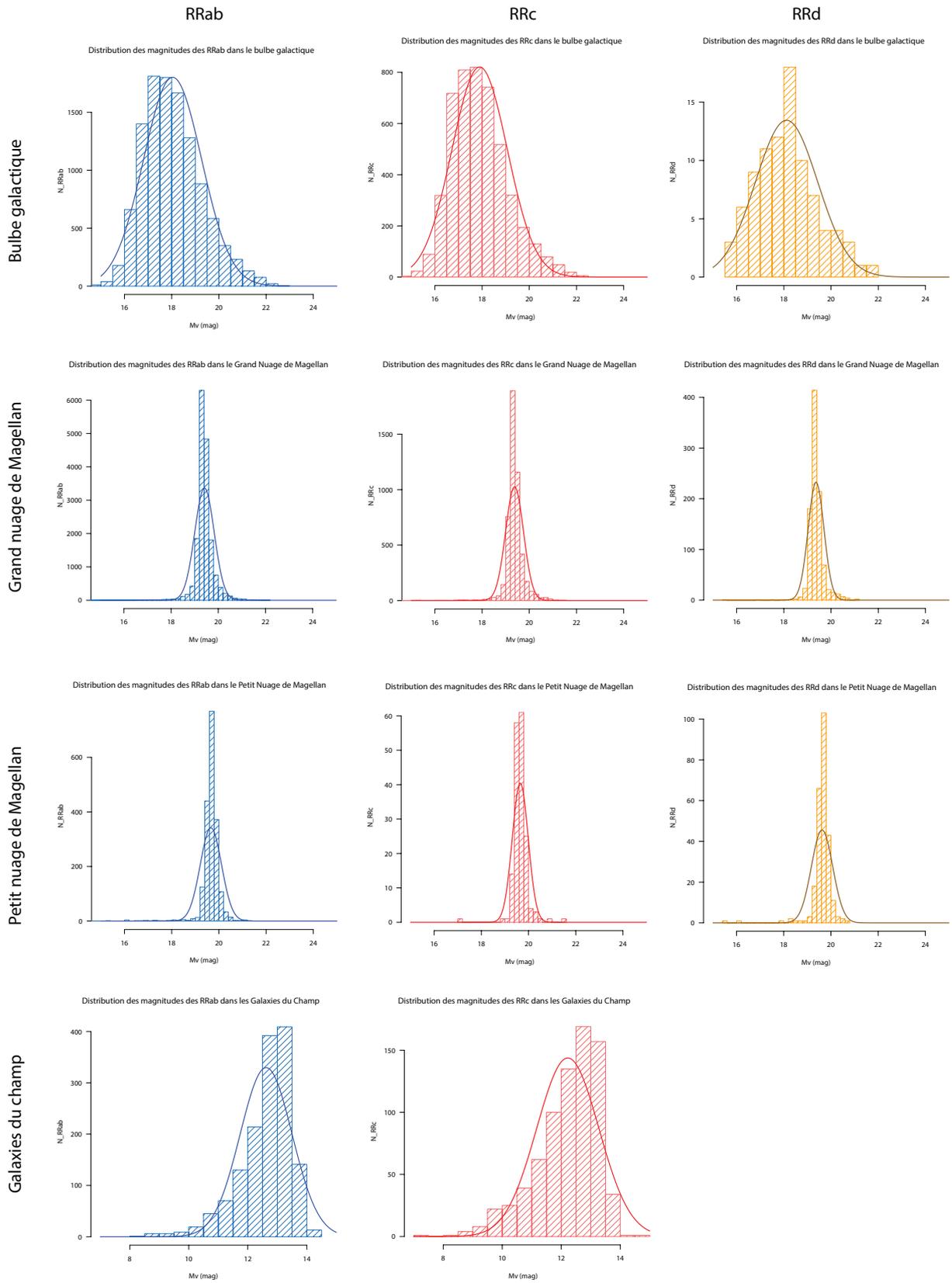


FIGURE 1.20 – Distribution des magnitudes des RR Lyrae. *De haut en bas* : pour le bulbe galactique [85], le Grand Nuage de Magellan [87], le Petit Nuage de Magellan [86] et pour les galaxies du champ [67] [97] [60]. *De gauche à droite* : pour les RRab, RRC, RRd.

		$\langle P \rangle$	σ_P	$\langle \text{Mag} \rangle$	σ_{Mag}	$\langle [\text{Fe}/\text{H}] \rangle$	$\sigma_{[\text{Fe}/\text{H}]}$
Bulbe Galactique	RRab	0,56	0,088	18,04	1,231	-0,98	0,333
	RRc	0,31	0,045	17,90	1,176	-0,60	0,384
	RRd	0,34	0,047	18,12	1,320	•	•
LMC	RRab	0,58	0,073	19,41	0,412	-1,23	0,300
	RRc	0,34	0,034	19,38	0,379	-1,56	0,383
	RRd	0,36	0,016	19,36	0,335	•	•
SMC	RRab	0,60	0,059	19,66	0,449	-1,41	0,327
	RRc	0,37	0,026	19,65	0,337	-2,01	0,378
	RRd	0,38	0,020	19,62	0,452	•	•
Galaxies du champ	RRab	0,56	0,110	12,62	0,881	-1,44	0,606
	RRc	0,31	0,074	12,22	1,053	•	•

TABLE 1.5 – Période, magnitude et métallicité moyenne, ainsi que les écarts-types correspondant, pour chacun des types d'étoile RR Lyrae dans le champ galactique [67] [97] [60], le Grand Nuage de Magellan [87], le Petit Nuage de Magellan [86] et pour le bulbe galactique [85].

Galaxies du champ [67] [97] [60]	6%
Bulbe galactique[85]	29%
LMC [87]	18%
SMC [86]	22%

TABLE 1.6 – Recensement des étoiles de type RRab présentant l'effet Blazhko dans les galaxies du champ, le bulbe galactique, le grand nuage de Magellan (LMC) et le petit nuage de Magellan (SMC).

1.5.4 Métallicité

L'étude de la métallicité des étoiles RR Lyrae peut se faire par voie directe *via* la spectroscopie ou de manière indirecte *via* les données photométriques. Cette dernière souffre de l'approximation inhérente aux régressions qui ont permis d'établir un lien entre les paramètres de Fourier, extraits de l'étude fréquentielle des courbes de lumière, et l'abondance en éléments lourds¹⁶. Qui plus est, elle se limite aux étoiles de type RRab et RRc. Cependant, elle nous permet d'accéder à plus d'étoiles. Voilà pourquoi nous avons, dans une approche statistique, opté pour cette méthode.

La figure 1.21 montre la distribution de métallicité complétée par une distribution normale fondée sur la moyenne et l'écart-type de chaque échantillon. Le tableau 1.5 regroupe la métallicité moyenne et l'écart-type correspondant pour chacune des catégories étudiées.

1.5.5 Effet Blazhko

Nous reprenons ici les résultats Kovacs [50] dans le tableau 1.6. En pondérant par le nombre de RRab découvertes dans chacun de ces systèmes, on obtient un taux d'incidence de 21%. Ce taux peut monter jusqu'à 50% dans le cas de M3 [47].

La figure 1.22 montre la distribution des périodes de Blazhko pour les étoiles de types RRab et RRc dans les galaxies du champ, complétées par une distribution normale ayant pour paramètre la moyenne et l'écart-type de l'échantillon concerné. L'absence de données significatives pour les nuages de Magellan et le bulbe galactique nous empêche d'élargir notre étude à ces cas.

Enfin, nous avons essayé d'établir une corrélation entre période de Blazhko et période d'oscillation, sans succès.

1.6 Conclusion

Après cet état de l'art, nous sommes en mesure d'identifier les principales problématiques auxquelles nous allons être confrontés. Afin de les traiter, nous disposerons de données photométriques, qui dans certains cas seront parcellaires. Il est donc nécessaire de définir précisément les outils nous permettant

¹⁶. Nous reviendrons au chapitre 3 sur l'ensemble de ces équations pour les étoiles de type RRab. Pour les RRc nous avons utilisé les équations de Kapakos et al. [48].

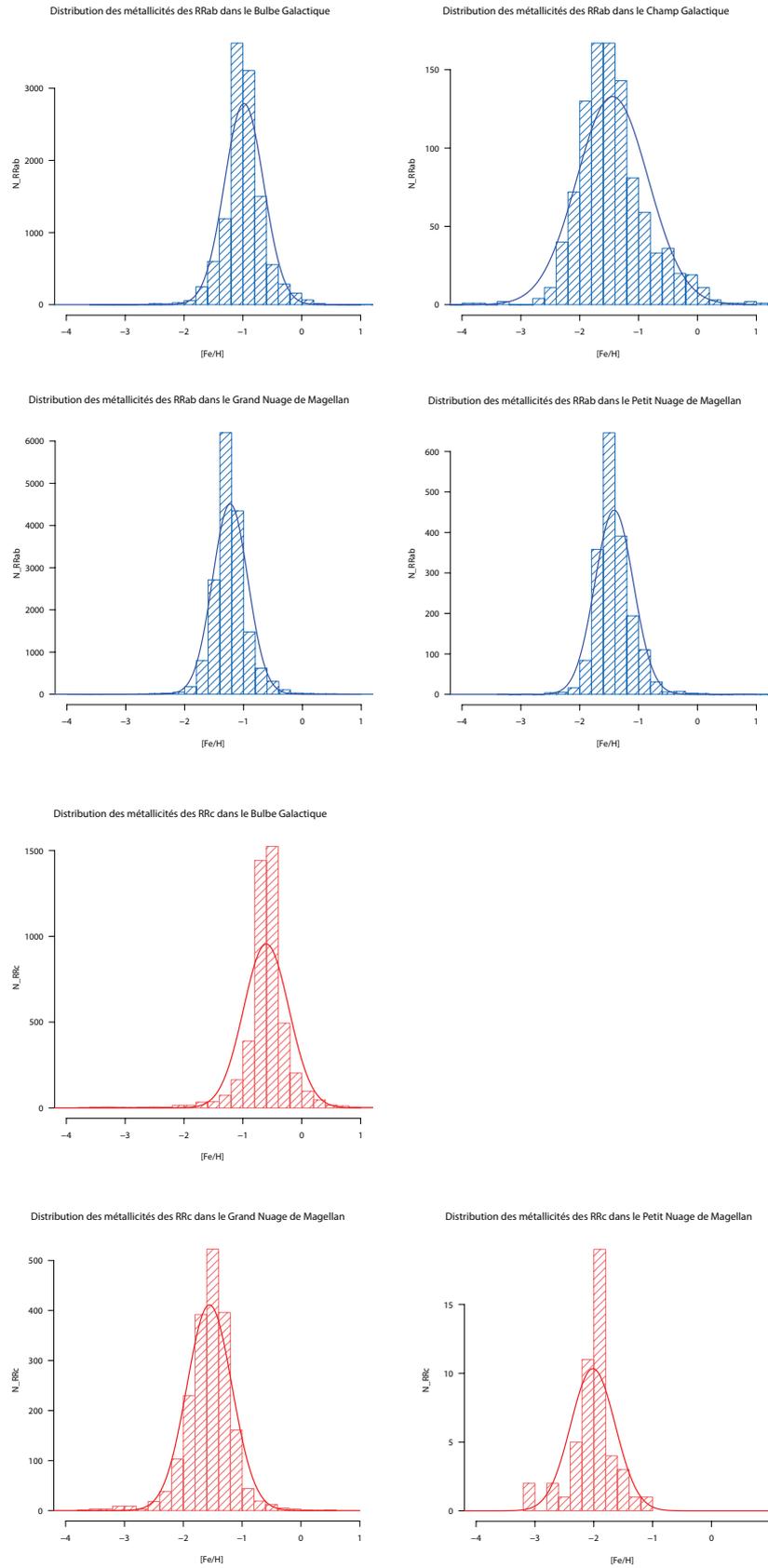


FIGURE 1.21 – Distribution des métallicités des RR Lyrae. *En bleu* : pour les RRab ; *en rouge* : RRc. *Par ordre d'apparition* : pour le bulbe galactique [85], les galaxies du champ [67] [97] [60], le Grand Nuage de Magellan [87] et pour le Petit Nuage de Magellan [86].

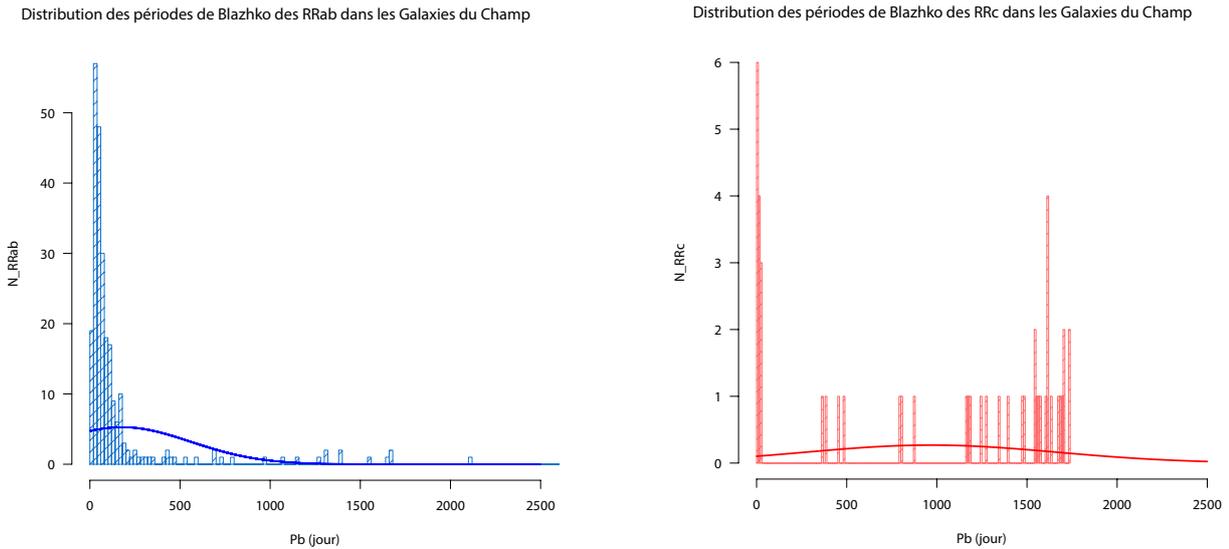


FIGURE 1.22 – Distribution de la période de Blazhko des RRab (à gauche) et RRC (à droite) pour les galaxies du champ [83].

de traiter ces données et, pour cela, d'établir un formalisme mathématique clair afin, avant tout, de prévenir toute aberration dans les résultats obtenus, et aussi, de mieux expliquer ces derniers (chapitres 2 et 3). La qualité des courbes de lumière, notamment leur résolution temporelle, sera primordiale afin d'en tirer les indices et contraintes nécessaires pour mieux comprendre l'effet Blazhko. Une analyse de cette courbe et de ses modifications durant un cycle de modulation nous permettrait de définir un ensemble de pistes à suivre pour sa compréhension (chapitre 3). Cette étude observationnelle devra être complétée par une approche théorique. La complexité des phénomènes physiques en jeu nous empêche de trouver une solution analytique au problème des pulsations. Une première formulation simplifiée de ce problème devra être élaborée afin de comprendre au moins les mécanismes à l'origine des oscillations observées. Une modélisation des petites perturbations par des équations linéarisées serait une première étape (chapitre 4). Cependant, celle-ci sera insuffisante dans la mesure où la présence d'ondes de choc témoignent de l'existence de non-linéarités qui devront être incluses dans notre système d'équations (chapitre 5). Il nous sera alors peut-être nécessaire d'adopter un nouveau formalisme, différent de celui existant, afin d'aboutir à des solutions interprétables. Enfin, il sera nécessaire de revenir sur les données observationnelles, et de les confronter aux confirmations et assertions de ce nouveau modèle théorique. Ceci nous conduira éventuellement à élaborer une nouvelle méthodologie ainsi que de nouveaux outils, pour l'examen de ces données.

Chapitre 2

Analyse harmonique des courbes de lumière

La richesse des sociétés dans lesquelles règne le mode de production capitaliste s'annonce comme une « immense accumulation de marchandises ». L'analyse de la marchandise, forme élémentaire de cette richesse, sera par conséquent le point de départ de nos recherches.

Marx, Le Capital (livre I).

L'étude des étoiles variables repose sur deux types d'observations : celles acquises par photométrie et celles issues de la spectrométrie. La décomposition harmonique est la méthode d'analyse quantitative la plus répandue pour les premières données. Le caractère périodique des courbes de lumière¹ justifie l'utilisation d'une telle méthode. Qui plus est, nous verrons dans la seconde partie de ce mémoire, que la résolution des équations linéarisées régissant les oscillations observées repose également sur une projection harmonique. L'existence d'un possible lien entre les modes de pulsation et le spectre des courbes de lumière plaide donc également pour une analyse de ces dernières fondée sur la transformée de Fourier.

Cette méthode de projection, telle qu'elle fut proposée par Joseph Fourier en 1807, repose maintenant sur un socle mathématique rigoureux légitimant son application à de nombreux domaines, notamment celui de l'étude des signaux aléatoires discrets.

Cependant, deux problématiques s'opposent à l'utilisation systématique d'une telle méthode. La première est la présence de *gaps* dans les données récoltées. Ceux-ci correspondent à une interruption d'acquisition de données, pendant une période bien supérieure à la période d'échantillonnage, qui entraînent la détection d'*alias*, ou *fréquences fantômes*, biaisant les résultats de l'analyse fréquentielle. La deuxième est qu'une telle approche réduit l'analyse phénoménologique des variations de magnitude à une superposition d'oscillations et aux interférences qu'elle provoque.

Ce chapitre débute par une définition rigoureuse de la transformée de Fourier dans le cadre de l'étude des courbes de lumière. Suit une présentation du programme que nous avons développé, PDM13, et de l'algorithme non paramétrique *phase dispersion minimization* (PDM) [88], à partir duquel il a été construit. Comme nous le verrons, les méthodes d'analyse fréquentielle de ce type, nous permettent, entre autre, de nous affranchir de la deuxième problématique présentée au paragraphe précédent. Enfin nous présenterons les deux routines que nous avons élaborées afin de réduire les problèmes liés aux *alias* et nous conclurons avec deux études de cas montrant l'efficacité de PDM13.

1. Nous parlons ici de caractère périodique dans la mesure où le signal étudié n'est pas rigoureusement périodique au sens mathématique du terme.

2.1 Définition et existence de l'analyse harmonique dans le cas des signaux traités en astéroseismologie

L'expression « méthodes paramétriques » désigne les techniques d'analyse spectrale fondées sur un modèle défini *a priori*. Habituellement utilisée pour désigner les modèles autorégressifs (AR), à moyenne mobile (MA) ou ARMA, nous y avons inclus les méthodes issues de la transformée de Fourier. En effet, comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe, l'analyse de Fourier consiste en une approximation du signal étudié par une somme de fonctions trigonométriques, d'où l'idée de modèle *a priori*. Nous ne nous intéresserons qu'à la définition de la transformée de Fourier dans le domaine discret et sa généralisation aux signaux aléatoires. Dans un souci de rigueur, nous débuterons par une définition de la transformation de Fourier dans le cas d'un groupe abélien que nous étendrons ensuite aux espaces (Ω, A, P) avec le périodogramme. Les définitions de la transformée de Fourier dans le cas des signaux déterministes non échantillonnés ainsi que pour les distributions ne seront pas abordées dans ce mémoire.

2.1.1 Algèbre discrète de la transformée de Fourier

2.1.1.1 Définition de la transformée de Fourier pour les groupes abélien fini

Nous allons formaliser de manière algébrique la transformée de Fourier en utilisant la structure de groupe de l'ensemble de départ. Une telle approche nous permet de nous affranchir de la régularité des fonctions étudiées et de la convergence des séries manipulées.

Définition 1 Soit G un groupe fini. Un caractère de G est un homomorphisme $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}^*$.

Propriété 2 L'ensemble \widehat{G} des caractères de G est un groupe pour la multiplication. C'est le dual de G .

Définition 3 Soit G un groupe fini de cardinal $|G| = n$. Les éléments de \widehat{G} sont les morphismes de G dans le groupe des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité,

$$\mathbb{U}_n = \left\{ \exp\left(\frac{2ik\pi}{n}\right) \mid 0 \leq k < n \right\}$$

Notation 4 On note $\mathbb{C}[G]$ l'ensemble des fonctions $f : G \rightarrow \mathbb{C}$.

Propriété 5 Les caractères de G constituent une base de $\mathbb{C}[G]$.

Définition 6 $\forall f_1, f_2 \in \mathbb{C}[G]$

$$\langle f_1, f_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f_1(x) \overline{f_2(x)} \quad (2.1)$$

définit un produit hermitien sur $\mathbb{C}[G]$.

Propriété 7 $\{\chi_k\}_{k \in [0, n-1]}$ forme une base orthogonale dans le cas où G est un groupe abélien associé au produit hermitien défini ci-dessus.

Nous pouvons alors définir la transformée de Fourier dans le cadre d'un groupe abélien fini en exploitant la propriété de base orthogonale que nous venons de démontrer.

Définition 8 Pour $f \in \mathbb{C}[G]$, on définit, pour $\chi \in \widehat{G}$, le coefficient de Fourier $c_f(\chi)$ par :

$$\forall \chi \in \widehat{G}, c_f(\chi) = \langle f, \chi \rangle \quad (2.2)$$

Avant de donner la décomposition de $f \in \mathbb{C}[G]$ sur la base des caractères, on définit la transformée de Fourier comme une notation alternative à celle des coefficients de Fourier :

Définition 9 On appelle transformée de Fourier de f , notée \widehat{f} , l'élément de $\mathbb{C}[\widehat{G}]$ définie par :

$$\forall \chi \in \widehat{G}, \widehat{f}(\chi) = \sum_{x \in G} f(x) \chi(x) \quad (2.3)$$

L'application « transformée de Fourier » notée \mathcal{F} est définie par :

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \mathbb{C}[G] & \rightarrow & \mathbb{C}[\widehat{G}] \\ f & \mapsto & \widehat{f} \end{cases} \quad (2.4)$$

Proposition 10 Pour $f \in \mathbb{C}[G]$, on a la formule d'inversion

$$f = \sum_{\chi \in \widehat{G}} c_f(\chi) \chi = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(\chi) \chi^{-1} \quad (2.5)$$

Proposition 11 c et \mathcal{F} sont des isomorphismes d'espaces vectoriels de $\mathbb{C}[G]$ dans $\mathbb{C}[\widehat{G}]$.

Remarque 12 Si on définit une structure d'algèbre via le produit de convolution, alors \mathcal{F} est un isomorphisme d'algèbre de $(\mathbb{C}[G], *)$ dans $(\mathbb{C}[\widehat{G}], \cdot)$.

Remarque 13 La formule de Plancherel existe aussi pour la transformée de Fourier sur un groupe abélien fini :

$$\sum_{s \in G} f(s) \overline{g(s)} = |G| \sum_{\chi \in \widehat{G}} c_f(\chi) \overline{c_g(\chi)} = \frac{1}{|G|} \sum_{\chi \in \widehat{G}} \widehat{f}(s) \overline{\widehat{g}(s)} \quad (2.6)$$

2.1.1.2 Construction de la transformée de Fourier discrète

Dans ce paragraphe, nous allons traduire les propriétés algébriques de la transformée de Fourier dans le langage de la théorie des signaux discrets. Nous considérerons les variations de la magnitude apparente comme des signaux temporels à valeurs complexes. Soit $\tilde{f} : t \in \mathbb{R} \rightarrow \tilde{f}(t) \in \mathbb{C}$ une telle fonction. Le signal étudié sera une version échantillonnée de \tilde{f} . Notons $f = \{f[n]\}_{n=0}^{N-1}$ le vecteur correspondant à l'échantillon de taille N du signal \tilde{f} où $f[n] = \tilde{f}(t_n)$. On supposera que les t_n sont espacés régulièrement dans un intervalle $[a; b]$, i.e. $t_n = a + \frac{b-a}{N}n$.

Définition 14 On définit la transformée de Fourier discrète (TFD) de $f = \{f[n]\}_{n=0}^{N-1}$ comme étant le vecteur $\widehat{f} = \{\widehat{f}[k]\}_{k=0}^{N-1} \in \mathbb{C}^N$ avec

$$\widehat{f}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[n] \omega_N^{-nk} \quad (2.7)$$

pour $k = 0, \dots, N-1$, où $\omega_N = e^{\frac{2i\pi}{N}}$ une racine $N^{\text{ième}}$ primitive de l'unité. De façon identique à la transformée de Fourier sur un groupe abélien fini, on notera $\mathcal{F}(f) = \widehat{f}$ définissant l'application

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \mathbb{C}^N & \rightarrow \mathbb{C}^N \\ f & \mapsto \mathcal{F}(f) = \widehat{f} \end{cases} \quad (2.8)$$

On retrouve alors la définition de la transformée de Fourier en considérant la fonction $f_T : \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ définie à partir du vecteur $f \in \mathbb{C}^N$. En effet, les caractères $(\chi_k)_{k=0}^{N-1}$ sur le groupe cyclique $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ étant définis par

$$\forall s \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, \chi_k(s) = \omega_N^{-ks} \quad (2.9)$$

on a alors,

$$\widehat{f}[k] = \widehat{f_T}(\chi_k). \quad (2.10)$$

Proposition 15 La transformée de Fourier inverse est donnée par

$$\forall n = 0, \dots, N-1, f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \widehat{f}[k] \omega^{nk} \quad (2.11)$$

Remarque 16 L'isomorphisme d'espace vectoriel par \mathcal{F} et la formule de Plancherel sont toujours valables dans le cas de la TFD.

La transformée de Fourier discrète est particulièrement adaptée à l'analyse de grands échantillons dont les données sont équi-espacées. En effet, l'algorithme de transformation rapide *Fast Fourier Transform* (FFT) permet de réduire le coût du calcul de N coefficients de Fourier de $O(N^2)$, pour une approche simpliste, à $O(N \log(N))$. Cependant, l'hypothèse d'équidistance temporelle n'est pas vérifiée dans le cas des données photométriques, en particulier lorsqu'il s'agit de captures issues de bases terrestres où l'acquisition ne peut avoir lieu que pendant la nuit. Nous verrons, dans la prochaine section, comment l'estimation de la densité spectrale de puissance nous permet de répondre à cette problématique. Avant, nous allons examiner au paragraphe suivant le lien entre la transformée de Fourier telle qu'elle a été formulée dans le cas discret et sa définition sur \mathbb{R} .

2.1.1.3 Lien avec la transformée de Fourier sur \mathbb{R}

Dans ce paragraphe nous allons expliciter le lien entre les transformées de Fourier discrète et continue en terme de calculs approchés. Cependant, il est nécessaire de souligner que la force de la TFD tient plus à sa définition algébrique et en la transposition des propriétés de la transformée continue dans le cas des groupes cycliques, qu'en sa capacité à approcher précisément cette dernière.

Définition 17 On définit la transformée de Fourier sur \mathbb{R} , pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$, par :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \quad (2.12)$$

Propriété 18 Soit f une fonction définie sur $[0, N\Delta]$ et nulle ou à décroissance rapide en dehors de cette intervalle. En utilisant la méthode des rectangles à gauche, une approximation de la transformée de Fourier continue \widehat{f} de f est donnée par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}(\xi) \approx \Delta \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-i\xi x_n} \quad (2.13)$$

Conséquence 19 Pour $\xi_k = \frac{2k\pi}{N\Delta}$, on obtient l'écriture suivante

$$\widehat{f}(\xi_k) \approx \Delta \sum_{n=0}^{N-1} f[n] e^{-\frac{2i\pi}{N} kn} \quad (2.14)$$

On suppose que notre échantillon est constitué de N valeurs – afin de simplifier notre démonstration, nous supposons que N est pair. Il est logique de ne calculer la transformée de Fourier définie ci-dessus que pour N valeurs ξ_k pour $k \in \{-N/2 + 1, \dots, N/2\}$.

On obtient alors

$$\forall k \in 0, \dots, N-1, \widehat{f}[\xi_k] = \Delta \widehat{f}[k] \quad (2.15)$$

où $\widehat{f}[k]$ est la $k^{\text{ième}}$ entrée de la transformée de Fourier discrète.

L'égalité précédente nous dit que la TFD représente une approximation de la transformée de Fourier continue à un facteur Δ près pour les ξ_k définis ci-dessus.

2.1.2 Périodogramme de Lomb et Scargle

Afin de nous affranchir des difficultés présentées dans la précédente partie, nous allons aborder le problème de l'analyse harmonique d'un point de vue probabiliste. Les N données photométriques constitueront alors un échantillon statistique que nous traiterons *via* des estimateurs.

Définition 20 On considère :

- un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$,
- un ensemble d'indices \mathcal{T} appelé espace temps,
- un espace mesurable (E, \mathcal{E}) appelé espace d'états.
- une fonction aléatoire $X = (X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ de Ω dans E , telle que pour tout $t \in \mathcal{T}$, X_t soit une application mesurable de (Ω, \mathcal{A}) dans (E, \mathcal{E}) .

On suppose que les variables aléatoires sont centrées à valeurs complexes. Nous nous placerons dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ muni du produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \mathbb{E}[XY^*]$ et de la norme correspondante.

Définition 21 On définit la moyenne du processus X par

$$m_X(t) = \mathbb{E}[X_t] = \int_{\mathbb{R}} x P_{X_t}(dx) \quad (2.16)$$

où P_{X_t} est la mesure de probabilité de X_t .

Définition 22 La fonction de covariance de X est donnée par

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E}[(X(t_1) - m_x(t_1))(X(t_2) - m_x(t_2))^*] \quad (2.17)$$

Définition 23 Un processus est dit stationnaire au sens strict si $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t_1, \dots, t_n \in T$, la loi du vecteur $\mathbf{X}_t = (X_{t+t_1}, \dots, X_{t+t_n})$ ne dépend pas de t .

Un processus est dit stationnaire au sens large (SSL) ou stationnaire au second ordre si les fonctions de moyenne et de covariance de X ne dépendent pas de t :

$$\forall t, \tau \in T, m_X(t + \tau) = m_X(t) \quad (2.18)$$

$$\forall t_1, t_2, \tau \in T, R_X(t_1 + \tau, t_2 + \tau) = R_X(t_1, t_2) \quad (2.19)$$

Définition 24 Un processus stationnaire au sens large $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est ergodique au second ordre si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N X_{n+n_1} = \mathbb{E}[X_{n_1}] \quad (2.20)$$

$$\text{et } \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{-N}^N X_{n+n_1} X_{n+n_2} = \mathbb{E}[X_{n_1} X_{n_2}]$$

Propriété 25 D'après le théorème de Wiener-Khinchine, la densité spectrale de puissance (DSP) d'un processus aléatoire stationnaire au sens large est égale à la transformée de Fourier de la fonction d'auto-covariance correspondante. Dans le cas discret on obtient l'égalité suivante

$$S_X(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N/2}^{N/2} x(n) e^{-2\pi i n f} \right] = \sum_{N \in \mathbb{Z}} R_X(n) e^{-2\pi i n f} \quad (2.21)$$

si la suite de covariance est sommable².

Définition 26 Le périodogramme est l'estimateur de la DSP défini par

$$\widehat{S}_{X,n}(f) = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^N X_k e^{-2\pi i k f} \right|^2 \quad (2.22)$$

Propriété 27 Le périodogramme est un estimateur biaisé mais sans biais asymptotiquement.

Propriété 28 La variance du périodogramme est donnée par

$$\text{var} \left[\widehat{S}_{X,n}(f) \right] = S_{X,n}^2(f) \left[1 + \left(\frac{\sin(2\pi f N)}{N \sin(2\pi f)} \right)^2 \right] \quad (2.23)$$

Outre sa variance importante, le périodogramme reste une technique d'analyse spectrale définie pour des données uniformément espacées dans le temps.

Définition 29 Le périodogramme de Lomb et Scargle est défini par

$$\widehat{S}_{X,n}(f) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left(\sum_{k=1}^N X_k \cos(2\pi f(t_j - \tau)) \right)^2}{\sum_{k=1}^N \cos^2(2\pi f(t_j - \tau))} + \frac{\left(\sum_{k=1}^N X_k \sin(2\pi f(t_j - \tau)) \right)^2}{\sum_{k=1}^N \sin^2(2\pi f(t_j - \tau))} \right\} \quad (2.24)$$

où τ est défini par

$$\tau = \frac{1}{4\pi f} \arctan \left(\frac{\sum_{j=1}^N \sin(4\pi f t_j)}{\sum_{j=1}^N \cos(4\pi f t_j)} \right) \quad (2.25)$$

Propriété 30 Le périodogramme de Lomb et Scargle est équivalent à l'approximation par la méthode des moindres carrés de fonctions sinusoïdales.

Ainsi, si le périodogramme de Lomb et Scargle est adapté à l'analyse harmonique des courbes de lumière, il reste fondé sur un modèle défini *a priori*. Nous allons voir dans la partie suivante comment l'algorithme *phase dispersion minimisation* s'affranchit de cette formalisation *a priori* tout en ayant des performances équivalentes au périodogramme LS.

2. Le processus étant supposé stationnaire au second ordre, on a $R_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2, 0)$. On a donc substitué la notation $R_X(t_1, t_2)$ par $R_x(t_1 - t_2)$.

2.2 Analyse des courbes de lumière avec PDM13

Le programme PDM13 a été développé afin de répondre aux problématiques posées dans l'introduction de ce chapitre : présence d'*alias* et projection sur une base harmonique. Nous synthétisons ici les résultats que nous avons publiés dans : « *PDM13 : a new graphical interfaced program for frequency analysis* » (voir annexe B). Nous allons présenter l'algorithme d'analyse spectrale non paramétrique *phase dispersion minimization* [88] qui est au cœur de ce programme (voir Section 2.1 de la publication en annexe B). Nous verrons ensuite comment nous avons réduit le nombre d'*alias* en développant un algorithme complémentaire de détection de *gaps* dans les données photométriques. Enfin nous présenterons deux études de cas illustrant les capacités de PDM13.

2.2.1 Phase dispersion minimization (PDM)

Le principe général de PDM, tel que développé par R. F. Stellingwerf, est similaire à celui de l'approximation par la méthode des moindres carrés de Lomb. La différence tient dans la fonction approchée qui n'est plus une sinusoïde, mais le signal moyenné.

Algorithme 31

Pour chaque fréquence test f_i :

- Générer le diagramme de phase pour une fréquence f_i .
- Regrouper les données en B intervalles.
- Calculer le signal moyen.
- Calculer :

$$\Theta_{PDM} \equiv \frac{\left(\sum_{j=1}^B (N_j - 1) s_j^2 \right) / \left(\sum_{j=1}^B N_j - B \right)}{\left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right) / (N - 1)} \quad (2.26)$$

$$\text{où} \quad s_j^2 \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{N_j - 1} \quad (2.27)$$

avec B le nombre d'intervalles, N_j le nombre de données dans l'intervalle j , x_{ij} la donnée $x(t_i)$ située dans l'intervalle j , \bar{x}_j la moyenne des données dans l'intervalle j , N et \bar{x} le nombre total de données et la moyenne correspondante.

La fonction Θ_{PDM} est une mesure de la dispersion des données autour de la courbe moyenne définie à partir de ces mêmes données (voir Figure 2.1). Si la fréquence testée n'est pas pertinente, nous obtiendrons une valeur de 1 pour Θ_{PDM} . Une fréquence caractéristique des oscillations de l'étoile sera repérée par un minimum de la fonction en question (voir Figure 2.2). Si dans certains cas ce minimum sera bien inférieur à 1, dans d'autres cas, le degré de signification de cette valeur devra être évalué *via* un test statistique (voir *infra*).

2.2.2 Détection des gaps

Afin d'améliorer l'efficacité de l'algorithme, PDM détecte les longues interruptions d'acquisitions du signal photométrique afin de traiter chaque segment de données séparément. Dans le programme initial, la détection se faisait manuellement. Nous avons inclus dans PDM13 deux algorithmes pouvant repérer ces *gaps*. Considérons un échantillon de N points $n_i(t_i ; m_i)$ où t_i et m_i représentent respectivement le temps et la magnitude. Nous allons nous intéresser à la durée séparant chacun de ces points, c'est-à-dire $\Delta t = t_{i+1} - t_i$. Nous présentons ici une synthèse de la Section 2.2 de la publication en annexe B.

2.2.2.1 L'algorithme de Lee & Heghinian

Cet algorithme permet de détecter une discontinuité dans une série de données, en l'occurrence ici $\{\Delta t_k\}_{k=1}^N$. C'est un test bayésien dont l'hypothèse nulle est l'absence de discontinuité. On considère le modèle suivant :

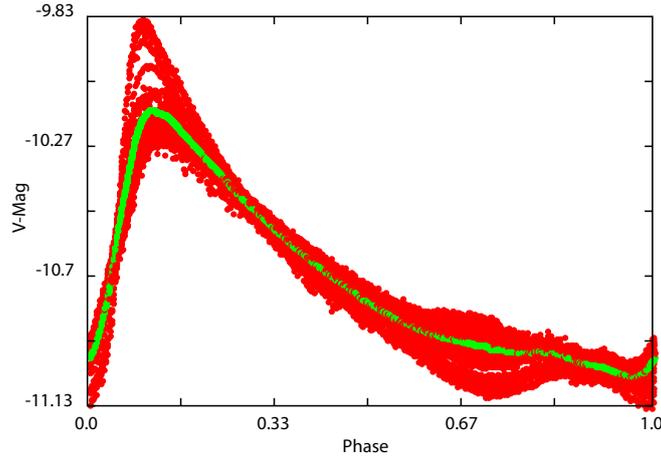


FIGURE 2.1 – Exemple d’une courbe de lumière représentée sur un diagramme de phase pour sa fréquence principale (en rouge) et la courbe moyenne correspondante (en vert)⁴.

Segment	Départ	Nombre de points	$T_{\text{départ}}$	ΔT
1	0	251	0	2.5
2	251	501	5	5
3	752	864	16.27	8.63
4	1616	1480	29.04	14.79
5	3096	1135	52.54	11.34

TABLE 2.1 – Résultat de l’auto-segmentation des données présentées à la figure 2.3.

$$X_j = \begin{cases} \mu + \epsilon_j & j = 1, 2, \dots, \tau \\ \mu + \delta + \epsilon_j & j = \tau + 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.28)$$

où les ϵ_j sont des variables aléatoires, indépendantes et suivant une loi normale de moyenne nulle et de variance constante, les inconnus étant τ , le temps pour lequel il y a une discontinuité, ainsi que les paramètres μ et δ . La distribution de probabilité de τ *a posteriori* est alors donnée par :

$$P(\tau|x) \propto \frac{\sqrt{\frac{n}{\tau(n-\tau)}}}{R(\tau)^{n-2}} \quad (2.29)$$

$$\text{où } R(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{\tau} (x_i - \bar{x}_{\tau})^2 + \sum_{i=\tau+1}^n (x_i - \bar{x}_{n-\tau})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2} \quad (2.30)$$

$$\text{avec } \bar{x}_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} x_i \text{ et } \bar{x}_{n-\tau} = \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=\tau+1}^n x_i \quad (2.31)$$

A partir de cette distribution, nous pouvons déterminer la probabilité qu’une discontinuité ait eu lieu au temps τ (voir Figure 2.3 et Tableau 2.1). Nous avons diminué la complexité de cet algorithme à $O(n)$ grâce à une méthode récursive. Cependant les temps de traitement restent long lorsque le nombre de données est important.

4. La courbe de lumière présentée, est celle de l’étoile RR Lyrae S Arae. Nous présenterons ces données, ainsi qu’une étude de cette étoile, au chapitre 3.

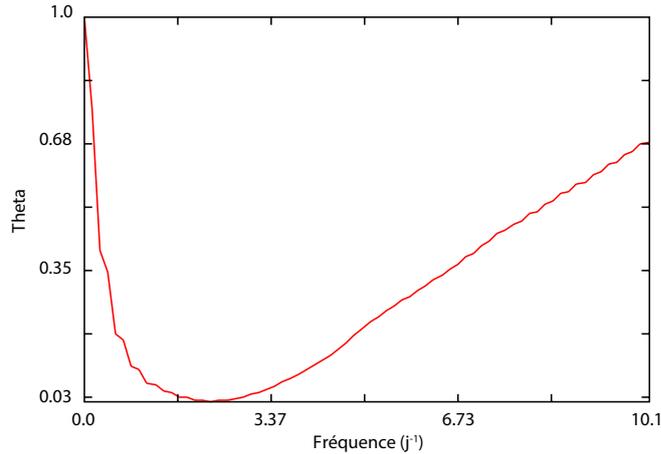


FIGURE 2.2 – Fonction Θ_{PDM} obtenue pour la même courbe de lumière étudiée à la figure 2.1. Le minimum est atteint pour une fréquence de 2.21 jour^{-1} correspondant à la fréquence principale de pulsation de l'étoile considérée.

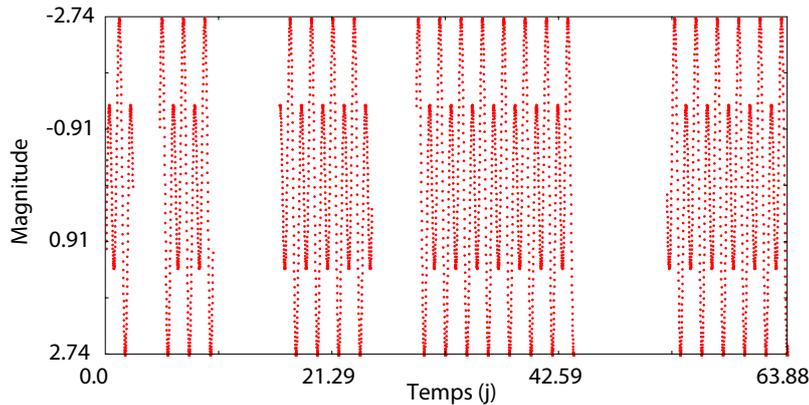


FIGURE 2.3 – Signal quelconque présentant des *gaps* afin de tester l'efficacité de l'algorithme de Lee et Heghinian.

2.2.2.2 Calcul de l'écart-type

Afin d'accélérer la détection des *gaps*, PDM13 propose un second algorithme. Après avoir calculé la moyenne $\overline{\Delta t}$ et l'écart-type σ correspondant à l'échantillon $\{\Delta t_k\}_{k=1}^N$, toute valeur Δ_i n'appartenant pas à l'intervalle $[\overline{\Delta t} - i\sigma; \overline{\Delta t} + i\sigma]$ sera considéré comme un *gap*. L'intervalle défini ci-dessus correspond à l'intervalle de confiance à 68% ou 95%, pour respectivement $i = 1$ et $i = 2$. Cette méthode est bien plus rapide que la précédente et est particulièrement efficace à partir du moment où le nombre de données récoltées est supérieur au nombre de *gaps* (soit la majorité des cas).

2.2.3 Degré de signification

PDM13 inclut deux tests statistiques capables de donner le degré de signification, c'est-à-dire la pertinence, des minima de la fonction Θ_{PDM} . Le premier repose sur une méthode Monte-Carlo développée par Nemeč et Nemeč [55]. L'algorithme désordonne les données de façon aléatoire et calcule la fonction Θ_{PDM} correspondante. Le processus est répété un certain nombre de fois afin de déterminer le minimum atteint pour un signal bruité.

On peut aussi déterminer une distribution des valeurs prises par la fonction Θ_{PDM} par une fonction β incomplète normalisée définie par :

$$I_x(a, b) = \frac{\beta(x; a, b)}{\beta(a, b)} \quad (2.32)$$

avec :

$$\beta(x; a, b) = \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \quad (2.33)$$

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad (2.34)$$

On calcule alors [78] :

$$\beta\left(\frac{N-M}{N-1}\Theta; \frac{N-M}{2}, \frac{M-1}{2}\right) \quad (2.35)$$

où les N données ont été découpées en M intervalles. Cette distribution doit ensuite être réévaluée [68] :

$$\beta_2 = 1 - (1 - \beta)^m \quad (2.36)$$

où m est le nombre de fréquences pour lesquelles la fonction Θ_{PDM} a été calculée.

2.2.4 Autres améliorations de PDM13

Outre l'amélioration de la détection des *gaps*, les deux autres principales additions au programme original PDM sont l'interface graphique et le module *LS* (pour *Least-Square fit*, approximation par la méthode des moindres carrés).

2.2.4.1 Coefficients de Fourier

Comme nous avons pu le souligner, Period04 et PDM sont deux programmes d'analyse fréquentielle aux approches fondamentalement différentes. Là où Period04 cherche à décomposer⁵ un signal en une somme de fonctions trigonométriques, PDM travaille sur un signal moyenné périodique⁶. En conséquence, PDM n'inclut pas de calcul des coefficients de Fourier – amplitude et phase de la fonction trigonométrique à la fréquence extraite – ni de calcul du signal résiduelle correspondant à « l'extraction » de la fréquence trouvée du signal original.

Nous avons rajouté cette option, au cas où l'utilisateur souhaiterait comparer les résultats obtenus avec Period04 ou étudier la courbe moyenne du signal résiduel. Les coefficients de Fourier sont obtenus par l'algorithme de Gauss-Newton. Considérons $f(t)$ une somme de fonction trigonométrique dépendant du temps. Notons A_i et ϕ_i , les amplitudes et phases de chacune de ces fonctions, et $\beta = (A_1, \phi_1, A_2, \phi_2, \dots)$. On peut réécrire f sous la forme $f(t, \beta)$. L'algorithme cherche alors à trouver la somme des carrés :

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^N r_i(\beta)^2 \quad (2.37)$$

avec $r_i(\beta) = y_i - f(t_i, \beta)$ et où les (t_i, y_i) correspondent aux coordonnées des données recueillies. Partant d'un vecteur initial $\beta^{(0)} = (A^{(0)}, \phi^{(0)}, \dots)$, on procède par itération de sorte que :

$$\beta^{(s+1)} = \beta^{(s-1)} - \beta^{(s)} - (J_r^T J_r)^{-1} \beta^{(s)} \quad (2.38)$$

où $J_r = \frac{\partial r_i}{\partial \beta_j}(\beta^{(s)})$ est la matrice jacobienne de r .

Une fois les coefficients de Fourier obtenus, le signal résiduel est calculé en utilisant la méthode de Stobie [92].

5. projeter.

6. Avec, éventuellement, un changement de période.

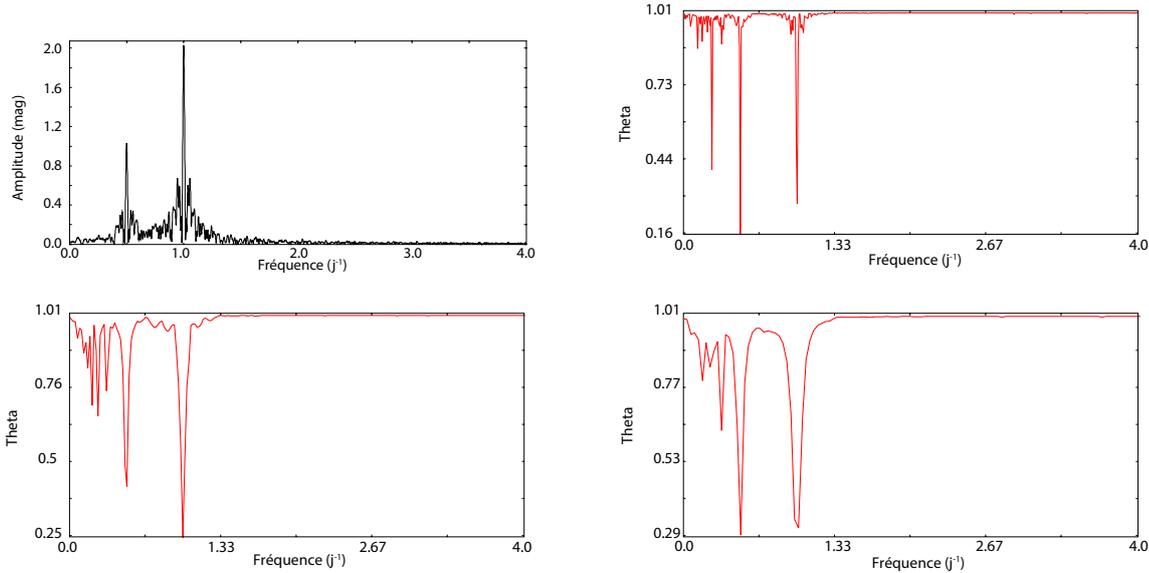


FIGURE 2.4 – *En haut* : Spectre obtenu avec Period04 (à gauche) ; Fonction Θ de PDM13 sans segmentation (à droite). *En bas* : Fonction Θ de PDM13 avec une segmentation manuelle (à gauche) ; Fonction Θ de PDM13 avec les algorithmes de segmentation implantés (à droite).

2.2.4.2 Interface graphique

L'interface graphique de PDM13 est proche de celle de Period04 [53]. Trois modules, identifiables par leurs onglets, permettent :

- d'importer des données et de les manipuler ;
- de calculer la fonction Θ_{PDM} et de procéder aux tests statistiques de degré de signification ;
- d'obtenir les coefficients de Fourier pour la fréquence extraite.

Chaque liste de données (courbe de lumière, fonction Θ_{PDM} , distributions, spectres) peut être visualisée, sous forme de tableau ou de graphique, et sauvegardée. Les options, comme la méthode d'interpolation pour la courbe moyenne ou le découpage de la courbe de lumière, peuvent être modifiées *via* le menu correspondant.

2.2.5 Tests et premiers résultats

Nous verrons dans le chapitre suivant, les résultats obtenus par PDM13 pour S Arae, une étoile RR Lyrae présentant l'effet Blazhko. Nous présentons ici deux études de cas notables. La première porte sur des données artificielles (voir Figure 2.3) connues pour conduire à des résultats erronés si une méthode du type Lomb-Scargle est utilisée. Nous voyons à la figure 2.4 que non seulement Period04 donne un résultat faux de 1 jour^{-1} , mais que la méthode de segmentation utilisée par PDM échoue également. Seul la non segmentation et les algorithmes de segmentation implantés dans PDM13 permettent d'obtenir des résultats corrects (la seconde méthode étant plus performante en terme de temps de calcul).

Le second cas montre que PDM13 permet également d'analyser d'autres types de phénomènes périodiques. 000202-6653.3 est un système stellaire binaire dont la courbe de lumière est représentée à la figure 2.5 [67]. En utilisant la segmentation manuelle nous obtenons une fréquence erronée de $3.56205 \text{ jour}^{-1} \pm 2.5 \times 10^{-5}$ alors que nos algorithmes de segmentation automatique nous donnent une fréquence exacte de $3.06208 \text{ jour}^{-1} \pm 2.5 \times 10^{-5}$ (voir Figure 2.6).

2.3 Conclusion

L'analyse des données photométriques issues d'étoiles pulsantes, comme les RR Lyrae, comprend systématiquement une étude harmonique. Nous avons défini dans ce chapitre les principes théoriques sur

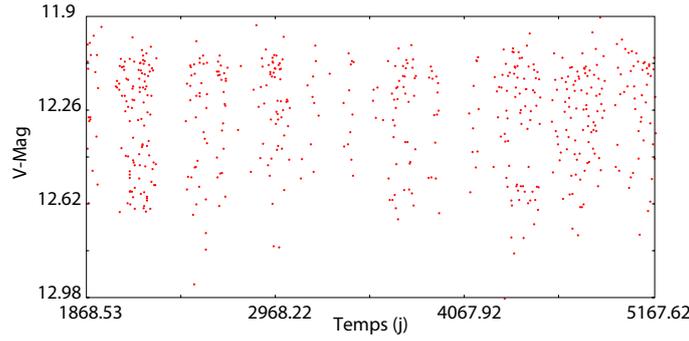
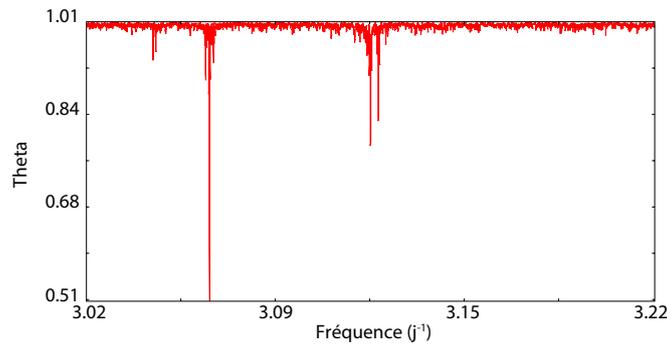


FIGURE 2.5 – Courbe de lumière de 000202-6653.3 [67].

FIGURE 2.6 – Fonction Θ de PDM13 pour 000202-6653.3.

lesquels se fonde cette analyse. Cette étape est nécessaire car, comme nous le verrons au prochain chapitre, certains résultats communément observés s'expliquent par la méthode utilisée pour les obtenir. Ainsi, nous verrons, par exemple, que la décroissance des harmoniques, telle qu'elle a été à des maintes reprises rapportée (voir par exemple [11]) n'est qu'une conséquence de la régularité⁷ de la variation de la luminosité/magnitude de l'étoile. Nous avons également jugé nécessaire d'analyser la courbe de lumière *via* une méthode non paramétrique, c'est-à-dire évitant l'écueil d'un modèle défini *a priori*. Nous proposons, ainsi, une alternative à l'étude de la courbe de lumière fondée sur l'analyse des fréquences. Cette alternative sera exploitée au chapitre suivant, lors de l'étude de S Arae, une étoile de type RR Lyrae présentant l'effet Blazhko. La méthode non paramétrique utilisée se nomme *phase dispersion minimization* et a été développée par R. F. Stellingwerf. Nous avons construit un logiciel incluant une version améliorée de cet algorithme, notamment au niveau de la gestion des *gaps*. Ces interruptions d'acquisition de données sont systématiques pour les campagnes d'observations terrestres. Les améliorations que nous avons apportées, permettent de diminuer de façon automatisée et optimisée, les effets négatifs de ces *gaps* – comme l'apparition de fausses fréquences ou *alias*. Au chapitre suivant, nous verrons que les campagnes d'observations de PAIX, dont nous présenterons les données, bénéficient de conditions d'observations permettant déjà de réduire grandement le nombre de ces discontinuités.

7. Nous définirons ce terme de façon plus précise au prochain chapitre.

Chapitre 3

Etude de la courbe de lumière d'une étoile de type RR Lyrae présentant l'effet Blazhko : S Arae

In noua fert animus mutatas
dicere formas
Corpora

Ovide, Les Métamorphoses.

Comme nous l'avons déjà mentionné, l'analyse fréquentielle des données photométriques est systématique dans les études portant sur les courbes de lumière de RR Lyrae. Certains résultats, comme la décroissance des harmoniques, ou l'asymétrie des lobes et des enveloppes dans le cas d'un signal modulé, sont communément observés mais aucune explication concrète et théoriquement entièrement valable n'a été donnée. Or l'enjeu est de taille car ces observations sont celles qui infirment les modèles théoriques proposant d'expliquer le phénomène Blazhko. L'obtention des caractéristiques physiques des étoiles de type RR Lyrae pose également problème lorsque la courbe de lumière est modulée. Si les paramètres de Fourier issus de l'analyse harmonique permettent d'obtenir ces caractéristiques grâce à des formules empiriques¹, celles-ci se restreignent aux étoiles ne présentant pas d'effet Blazhko.

Nous présentons dans ce chapitre l'étude de la courbe de lumière de S Arae, une étoile de type RR Lyrae présentant l'effet Blazhko. Nous débutons ce chapitre en détaillant le protocole d'acquisition et de gestion des données photométriques. Nous procéderons ensuite à l'analyse des fréquences de la courbe de lumière de S Arae en utilisant les outils développés au chapitre précédent. Nous serons ainsi capable d'expliquer certains des résultats fréquemment observés et nous pourrions construire un ensemble de pistes nécessaires à la compréhension du phénomène Blazhko. Ensuite, nous présenterons la méthode que nous avons élaborée afin d'obtenir les paramètres physiques fondamentaux – métallicité, température, masse, luminosité, etc. – de S Arae. Nous concluons ce chapitre en recensant l'ensemble des paramètres observationnels variant durant un cycle de Blazhko. Nous nous intéresserons dans un premier temps aux caractéristiques de la courbe de lumière, comme le *bump* secondaire, les temps de montée et de descente et l'asymétrie des enveloppes. Enfin, nous compléterons ces données par celles issues de la spectrométrie. Nous serons ainsi capable de mieux comprendre le comportement de l'étoile durant un cycle de modulation.

3.1 Analyse harmonique de la courbe de lumière de S Arae

Nous synthétisons ici la section 3 de la publication figurant en annexe C : *Antarctica photometry of the Blazhko RR Lyrae star S Arae*. Nous détaillerons dans un premier temps le protocole expérimental, regroupant la collecte des données photométriques et leur traitement. Nous présenterons ensuite les principaux résultats issus de l'analyse harmonique de la courbe de lumière de S Arae et les problématiques soulevées par ces observations. Nous discuterons également de l'existence des modes non-radiaux et nous expliquerons la décroissance des harmoniques par une approche théorique. Nous terminerons avec les

1. Un résumé exhaustif de ces équations est disponible dans [61].

$\langle V \rangle$ (mag)	l (°)	b (°)	E(B-V) (mag)	A_V (mag)	$(B - V)_0$ [46] [51]		d (kpc)
10.70	343.3792	-12.4479	0.15 (0.003)	0.46	0.310	0.304	1.2

TABLE 3.1 – Caractéristiques observationnelles de S Arae

valeurs des principales caractéristiques physiques de S Arae en détaillant la méthode que nous avons élaborée afin de les obtenir.

3.1.1 Protocole d'acquisition et d'analyse des données photométriques

3.1.1.1 PAIX

Les données présentées ont été recueillies par PAIX – Photometer Antarctica eXtinction – un photomètre localisée sur le plateau Antarctique, plus précisément au Dôme C situé à une altitude de 3300m [106]. Le site bénéficie de conditions d'observations exceptionnelles : l'atmosphère y est stable, sèche, transparente et le fond de ciel émet peu de rayonnement infrarouge [2]. Mais surtout, relativement aux autres campagnes d'observations terrestres, la nuit polaire permet d'optimiser la durée et la continuité de l'acquisition des données. PAIX est attaché à un télescope Ritchey-Chrétien 400 mm, avec un rapport focale sur diamètre f/d de 10. Il utilise une caméra SBIG ST10-XME ayant une matrice de 728×490 pixels, avec un *binning* 3×3 et un champ de vision de $12.4' \times 8.3'$. Le photomètre dispose également d'un module de refroidissement Peltier. L'efficacité quantique est de 60%, 85%, 80% et 55% à des longueurs d'ondes respectives de 400, 550, 700 et 800 nm.

Les données présentées ont été recueillies pendant 150 nuits, entre le 18 avril et le 20 septembre 2009, couvrant ainsi quasiment trois cycles de Blazhko. La magnitude visuelle de S Arae varia entre 9.79 et 11.14 mag durant cette campagne d'observation. L'ensemble des caractéristiques observationnelles de S Arae sont rassemblées dans le tableau 3.1.

3.1.1.2 PDM13 et Period04

L'analyse de la courbe de lumière consista en une étude harmonique à l'aide de Period04 et PDM13. En utilisant ces deux logiciels, présentés au chapitre précédent, nous avons réussi à extraire du signal observé 85 fréquences². Pour cela, les fréquences obtenues avec Period04 ont été confrontées à celles obtenues avec PDM13. Pour chacune, le degré de signification a également été calculé (voir Chapitre 2). Seuls les résultats communs aux deux logiciels ont été gardés. Nous avons ainsi obtenu une fréquence principale de variation de la magnitude apparente de $2.21302 j^{-1}$ associée à une fréquence de modulation de $0.0211 j^{-1}$. Nous détaillons les résultats de cette analyse dans la suite de ce chapitre. Les spectres, aux différentes étapes d'extraction, sont représentés à la figure 3.1. Les raies secondaires, caractéristiques d'un signal modulé, ont été détectées jusqu'à l'ordre 6 pour certaines harmoniques. Comme nous allons le voir, le plus souvent, seul un des deux lobes attendus était détecté (voir Figure 3.2).

3.1.2 Asymétrie des lobes

Les étoiles RR Lyrae de type RRab ne présentant pas une variation sinusoïdale de leur luminosité, l'analyse de Fourier conduit à un signal présentant des harmoniques, et, dans le cas d'un signal modulé, à la présence de raies supplémentaires autour de ces harmoniques. Cependant, que ce soit pour la fréquence principale, ou les harmoniques, les lobes secondaires sont sujets à une asymétrie d'amplitude (voir Figures 3.2 et 3.3), qui invalident les modèles théoriques fondés sur l'interférence de modes. Ainsi, toute théorie tentant d'expliquer le phénomène Blazhko doit pouvoir reproduire cette asymétrie. Dans la suite de ce chapitre nous proposerons une interprétation à ce phénomène. Au chapitre 5, nous confirmerons les assertions effectuées en traitant les termes non linéaires des équations régissant les pulsations.

3.1.3 Asymétrie de l'enveloppe

La variation des maxima à chaque période de la courbe de lumière est plus marquée durant un cycle de Blazhko que celle des minima (voir Figure 3.10). L'étude de ces enveloppes montre qu'elles suivent

2. Dans le cas des courbes de lumière, plus le nombre de fréquences extraites est important, plus le signal reconstruit à partir de ces fréquences reproduira fidèlement le signal original.

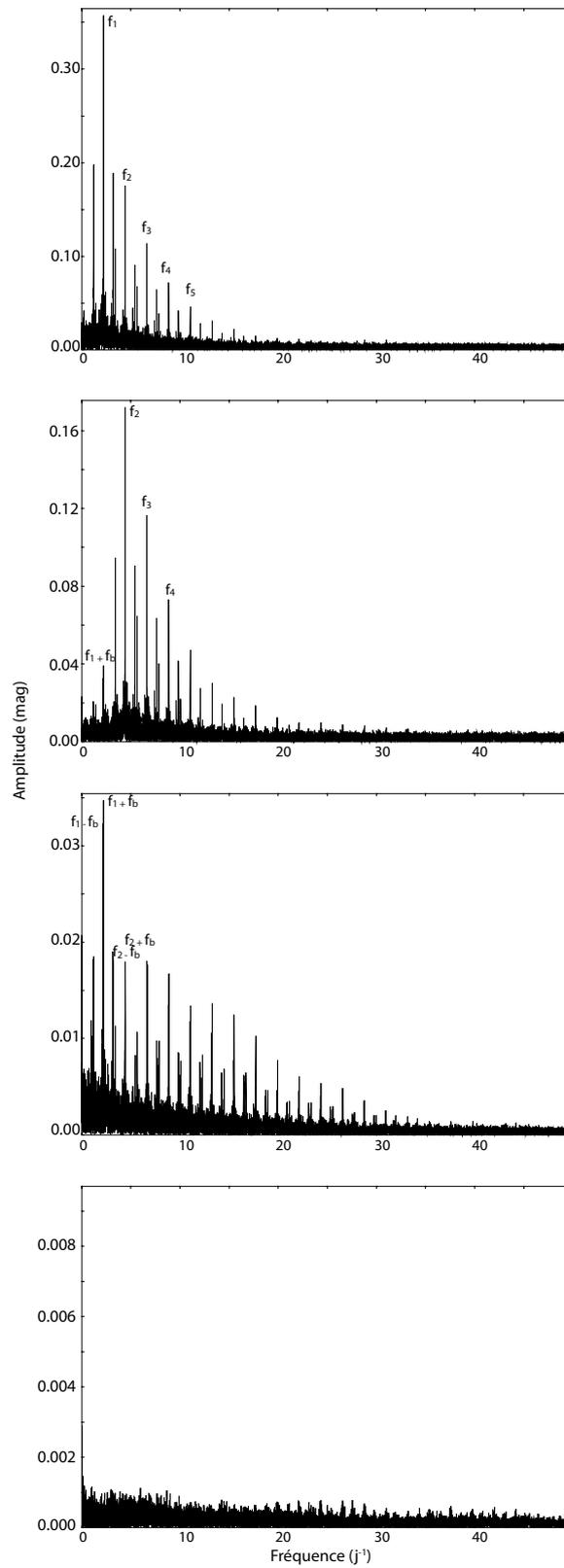


FIGURE 3.1 – Spectre de fréquences de S Arae pour différentes étapes de l'analyse harmonique. *De haut en bas* : spectre initial; spectre après extraction de la fréquence fondamentale; spectre après extraction de la fréquence fondamentale ainsi que ses multiples; spectre après extraction des 85 fréquences.

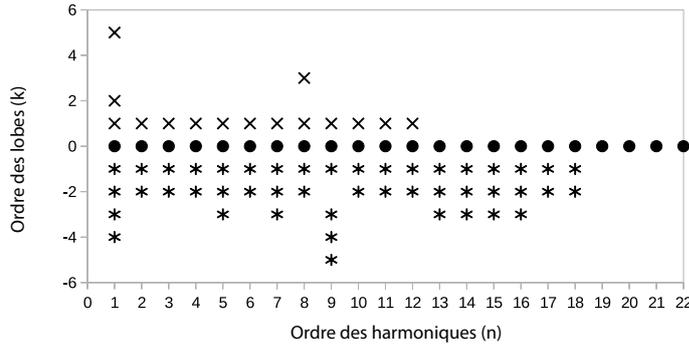


FIGURE 3.2 – Ensemble des harmoniques et des lobes secondaires extraits. On voit qu'il y a clairement une asymétrie qui s'explique, principalement, par l'asymétrie d'amplitude qui rend une partie des lobes difficilement détectable.

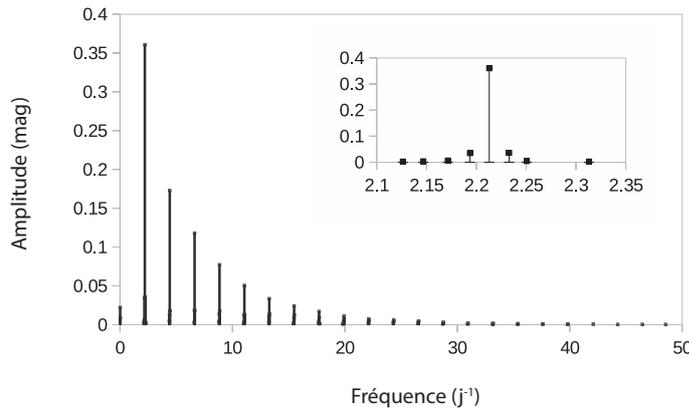


FIGURE 3.3 – Spectre de fréquence de S Arae. L'encart montre les lobes secondaires associés à la fréquence principale.

une variation quasi sinusoïdale : l'analyse harmonique de l'enveloppe supérieure donne deux fréquences $f_1 = 0.0196 j^{-1}$ et $f_2 = 0.0437 j^{-1}$ avec des amplitudes respectives de 0.11 et 0.02 mag ; une seule fréquence a pu être extraite pour l'enveloppe inférieure : $f'_1 = 0.0207 j^{-1}$ associée à une amplitude de 0.03 mag³. Qui plus est, il y a un déphasage entre ces deux enveloppes qui est non négligeable.

Nous verrons, plus loin dans ce chapitre, que cette asymétrie peut-être utile pour déterminer un point d'équilibre pour l'étude d'une étoile présentant l'effet Blazhko.

3.1.4 Décroissance des harmoniques

3.1.4.1 Observations

Nous avons également étudié la décroissance du rapport d'amplitude entre les harmoniques de la fréquence fondamentale et celle-ci. On utilise le plus souvent une exponentielle comme approximation de cette relation [5]. Nous avons, pour notre part, préféré une approche hyperbolique. En effet, si la régression exponentielle donne de bons résultats pour les premières harmoniques, celle-ci échoue à approcher convenablement celles d'ordre plus élevés (voir Figure 3.5). La fonction utilisée est donnée par :

$$A(f) = a_1 \times f + a_0 + \frac{a_{-1}}{f} + \frac{a_{-2}}{f^2} \quad (3.1)$$

avec $a_1 = 0.7 \text{ mmag} \cdot j$, $a_0 = -0.059 \text{ mag}$, $a_{-1} = 1.16 \text{ mag} \cdot j^{-1}$ and $a_{-2} = -0.54 \text{ mag} \cdot j^{-2}$. Nous obtenons ainsi une meilleure approximation avec un écart-type de $\sigma_y = 0.003$.

3. La différence observée par rapport à la fréquence de modulation de $0.0211 j^{-1}$ peut provenir du caractère non sinusoïdal du signal modulant, ou plus simplement de l'incertitude de mesure dans l'analyse de fréquence.

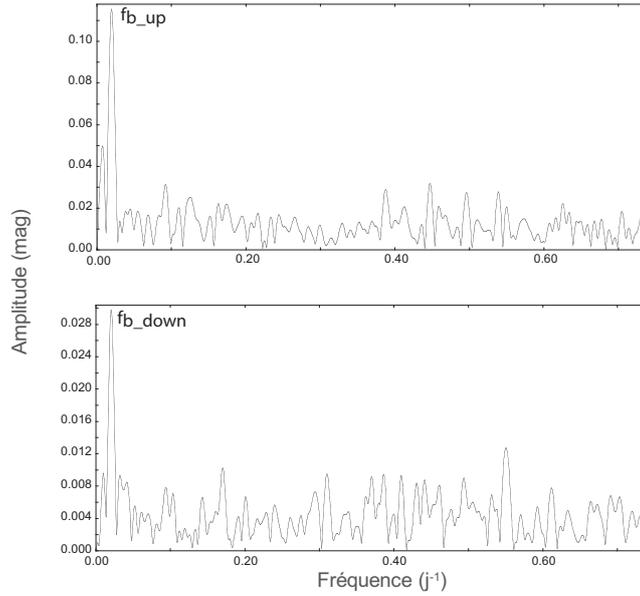


FIGURE 3.4 – *Haut* : Spectre de l’enveloppe supérieure. *Bas* : Spectre de l’enveloppe inférieure.

3.1.4.2 Explication théorique

Nous avons vu que l’extraction de fréquence telle qu’elle est appliquée pour l’étude de la courbe de lumière des étoiles pulsantes, correspond à une projection sur une base trigonométrique que nous avons définie grâce à la transformation de Fourier. Or une de ses propriétés fondamentales est d’échanger la régularité⁴ et la décroissance à l’infini, c’est-à-dire que plus une fonction est régulière, plus ses coefficients de Fourier décroissent rapidement vers zéro.

Nous travaillerons ici avec une courbe de lumière non discrétisée et la définition de la transformée de Fourier sur \mathbb{R} (voir Définition 17 au chapitre 2).

Propriété 32 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors la transformée de Fourier de f sur \mathbb{R} , notée \widehat{f} , est une fonction continue, bornée sur \mathbb{R} et telle que $\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Propriété 33 Si $f \in C^k(\mathbb{R})$, avec $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R})$ pour $|\alpha| \leq k$, alors :

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) \quad (3.2)$$

Nous renvoyons le lecteur vers [73] pour les démonstrations de ces deux propriétés.

Ainsi, si $f \in C^k(\mathbb{R})$, et $\partial^\alpha f \in L^1(\mathbb{R})$ pour $|\alpha| \leq k$, alors :

$$\forall |n| \leq k, \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} |\xi|^n \widehat{f}(\xi) = 0 \quad (3.3)$$

En particulier, si f est indéfiniment dérivable, $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} |\xi|^n \widehat{f}(\xi) = 0 \quad (3.4)$$

ce qui est équivalent à une décroissance exponentielle.

En conclusion, la décroissance des harmoniques est liée à la régularité de la courbe au sens topologique.

4. Soit $f \in C^k(\mathbb{R})$, c’est-à-dire, une fonction k fois dérivable et $\partial^k f$ est continue. f est d’autant plus régulière que k est importante.

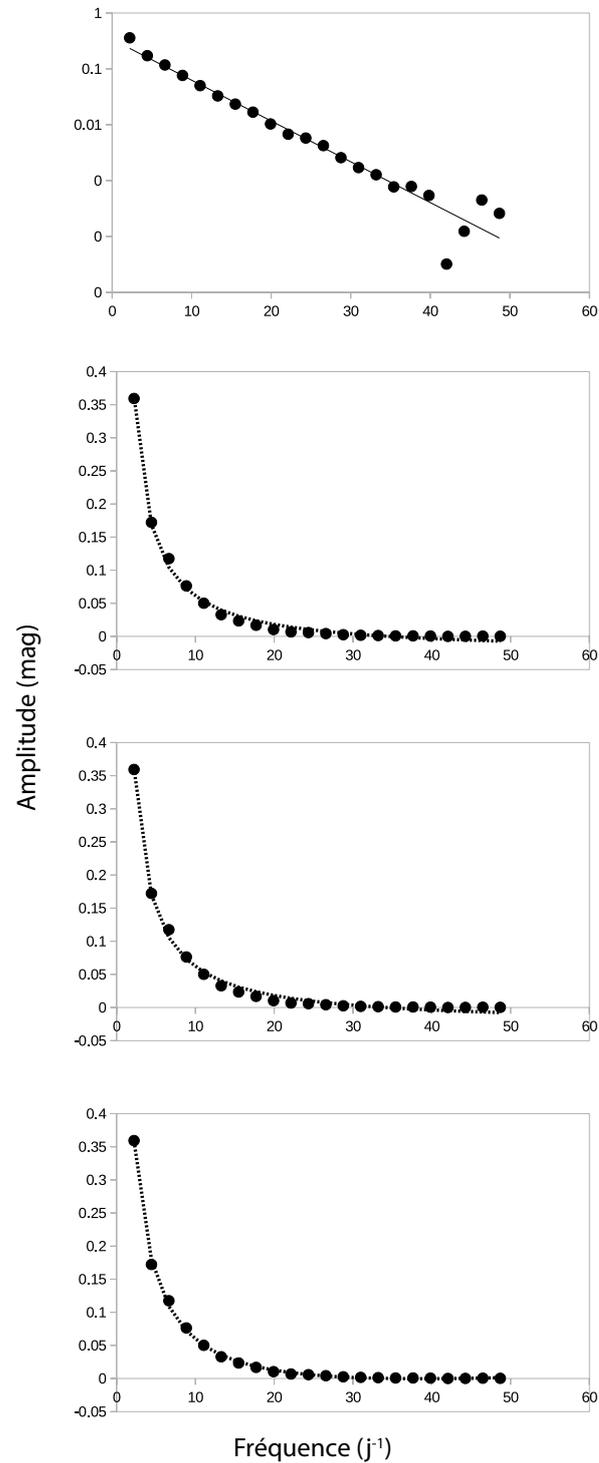


FIGURE 3.5 – Spectre comprenant la fréquence principale et ses harmoniques. *De haut en bas* : Régression exponentielle représentée sur une échelle logarithmique pour l'axe des ordonnés ; régression par une fonction du type $\frac{a_{-1}}{f}$; régression par une fonction du type $\frac{a_{-1}}{f} + \frac{a_{-2}}{f^2}$; régression par une fonction du type $a_1 \times f + a_0 + \frac{a_{-1}}{f} + \frac{a_{-2}}{f^2}$.

$\Delta\Phi$	A_{tot}	$[Fe/H]_{A_{tot}}$	ϕ_{31}	$[Fe/H]_{\phi_{31}}$	RT	$[Fe/H]_{RT}$	$\langle [Fe/H] \rangle$
0.0 – 0.1	1,31	-1,30	4,12	-2,23	0,13	-0,43	-1,32
0.1 – 0.2	1,22	-1,16	2,74	-4,17	0,16	-0,45	-1,93
0.2 – 0.3	1,07	-0,95	1,58	-5,81	0,17	-0,37	-2,38
0.3 – 0.4	0,98	-0,81	0,77	-6,96	0,17	-0,35	-2,71
0.4 – 0.5	0,93	-0,74	3,70	-2,83	0,17	-0,37	-1,31
0.5 – 0.6	1,02	-0,87	3,64	-2,91	0,16	-0,43	-1,40
0.6 – 0.7	1,07	-0,94	4,85	-1,21	0,14	-0,55	-0,90
0.7 – 0.8	1,21	-1,15	2,82	-4,06	0,12	-0,69	-1,97
0.8 – 0.9	1,31	-1,30	5,12	-0,82	0,11	-0,76	-0,96
0.9 – 1.0	1,33	-1,32	5,88	0,26	0,11	-0,76	-0,61

TABLE 3.2 – Comparaison des métallicités obtenues pour différentes phases de Blazhko et différentes formules. $[Fe/H]_{A_{tot}}$, $[Fe/H]_{\phi_{31}}$ et $[Fe/H]_{RT}$ correspondent à la métallicité calculée à l’aide, respectivement, de l’amplitude de la magnitude visuelle, A_{tot} , du coefficient de Fourier ϕ_{31} et du temps de montée RT.

3.1.5 Modes non-radiaux

Nous verrons dans la seconde partie de ce mémoire que les pulsations des étoiles variables peuvent être décomposées en modes radiaux et non-radiaux. La question de l’existence de ces derniers dans les étoiles de type RR Lyrae reste en suspens (voir 4.2.3.4). L’analyse fréquentielle révèle des fréquences semblables à des harmoniques de la fréquence radiale principale. Pour étayer notre observation, nous confrontons nos résultats à des modèles théoriques. Pour obtenir des fréquences d’oscillations équivalentes, les modèles doivent présenter une métallicité bien supérieure à celle obtenue pour S Arae. Il se pourrait donc que ces fréquences additionnelles ne correspondent pas à des harmoniques de la fréquence radiale principale, mais à des modes non-radiaux.

3.1.6 Caractéristiques physiques de S Arae obtenues *via* les paramètres de Fourier

A défaut de données spectroscopiques, il est possible d’accéder aux paramètres physiques fondamentaux de l’étoile à partir des acquisitions photométriques et des paramètres de Fourier issus de l’analyse harmoniques de celles-ci (voir par exemple [46]). Ces équations souffrent des approximations inhérentes à la régression dont elles sont issues, mais nous permettent d’obtenir des résultats tout à fait acceptables dans la grande majorité des cas (voir par exemple [48]). Cependant, ces équations ne fonctionnent pas pour les étoiles présentant l’effet Blazhko.

Nous proposons une nouvelle approche se fondant sur les équations existantes. Différentes formules permettent de trouver la métallicité d’une étoile de type RR Lyrae. Elles reposent soit sur la période de l’étoile, soit sur son amplitude, soit sur le temps de montée; et elles sont censées donner des résultats similaires. Ceci n’est pas le cas pour les étoiles RR Lyrae présentant une modulation de leur courbe de lumière. Or, nous avons remarqué que l’écart entre les résultats obtenus pour ces différentes formules variait en fonction du moment où elles étaient évaluées durant un cycle de modulation. Nous en sommes arrivés à la conclusion que les formules étaient valides à la condition de sélectionner les bonnes données, c’est-à-dire, celles comprises dans un certain intervalle de modulation. Pour repérer cette phase, nous avons découpé chaque cycle de modulation en dix intervalles, et nous avons calculé la métallicité à partir des trois formules à notre disposition, pour chacun de ces intervalles. Celui présentant les résultats les plus proches et les plus cohérents était considéré comme l’intervalle d’étude auquel serait appliqué l’ensemble des formules empiriques permettant d’obtenir les caractéristiques physiques de l’étoile (voir Tableaux 3.2 et 3.3). Dans le cas de S Arae, c’est l’intervalle $\phi \in [0,6; 0,7]$ qui a été utilisé. L’analyse nous a permis d’obtenir une valeur de métallicité cohérente, que nous avons ensuite utilisée pour obtenir les caractéristiques physiques de S Arae (voir Tableaux 3.4 et 3.5).

3.1.7 Ondes de chocs et dynamique du *bump*

Nous avons vu au chapitre 1, que la courbe de lumière de S Arae présente des « bosses » associées aux ondes de chocs (voir Figure 1.17). La courbe de lumière résiduelle, obtenue après extraction de

$\Delta\Phi$	$\Delta_{A-\phi_{31}}$	Δ_{A-RT}	$\Delta_{RT-\phi_{31}}$	$\sigma_{[Fe/H]}$
0.0 – 0.1	0,87	1,81	0,74	0,94
0.1 – 0.2	0,71	3,73	1,62	3,02
0.2 – 0.3	0,58	5,45	2,44	4,87
0.3 – 0.4	0,46	6,61	3,01	6,14
0.4 – 0.5	0,37	2,46	1,08	2,09
0.5 – 0.6	0,45	2,48	1,08	2,04
0.6 – 0.7	0,39	0,66	0,27	0,27
0.7 – 0.8	0,46	3,37	1,49	2,91
0.8 – 0.9	0,54	0,06	0,24	0,24
0.9 – 1.0	0,56	1,02	0,66	1,59

TABLE 3.3 – Suite du tableau 3.2, contenant, pour chaque phase, les écarts entre les métallicités obtenues par chacune des méthodes, et en dernière colonne l'écart-type globale. On voit que la phase 0.6 – 0.7 semble la plus cohérente.

$(B - V)_0$		M_V				T_{eff}	log g	
[46]	[51]	[46]	[33]	[7]	[10]	[51]	[46]	[51]
0.310	0.304	0.91	0.93	0.81	0.78	6743	2.896	2.872

TABLE 3.4 – Caractéristiques physiques de S Arae. Pour chacune des caractéristiques, différentes équations existent. En haut de chacune d'entre elle figure la référence correspondante.

l'ensemble des 85 fréquences, confirme l'existence d'un tel phénomène autour de $\phi = 0.9$ (voir Figure 3.6) – correspondant au *bump* ou choc S_{H+He} .

L'analyse du signal moyenné sur plusieurs périodes d'oscillations, montre l'existence d'un *bump* secondaire dont la position varie pendant une période de modulation (voir Figure 3.7). Nous reviendrons sur cette observation à la fin de ce chapitre, lorsque nous examinerons les caractéristiques de la courbe de lumière qui varient durant un cycle Blazhko.

3.2 Retour sur l'asymétrie des enveloppes et des lobes secondaires

Nous présentons ici, et dans la section suivante, des résultats complémentaires à ceux figurant dans la publication présentée en annexe C. Nous avons vu qu'il existait une asymétrie d'amplitude des lobes secondaires dans le spectre des étoiles RR Lyrae présentant l'effet Blazhko. Cette asymétrie est communément observée chez ce type d'étoile (voir par exemple [1]). Szeidl et Jurcsik ont proposé un modèle permettant de reproduire cette asymétrie [100]. Cependant, bien qu'exacte, leur démonstration fait appel à de lourds artifices mathématiques et élude la justification de certains aspects de leur formalisme. Nous

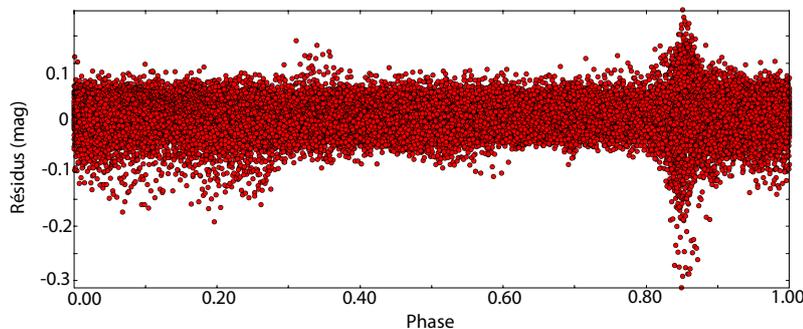


FIGURE 3.6 – Courbe de lumière de S Arae, après extraction de la fréquence fondamentale, des harmoniques et des lobes secondaires.

L(puls)		L(evol)			M(puls)		M(evol)	
[46]	[46]	[76]	[76]	[76]	[46]	[46]	[76]	[7]
34.3	32.95	37.35	38.72	43.35	0.51	0.52	0.60	0.62

TABLE 3.5 – Suite du tableau 3.4.

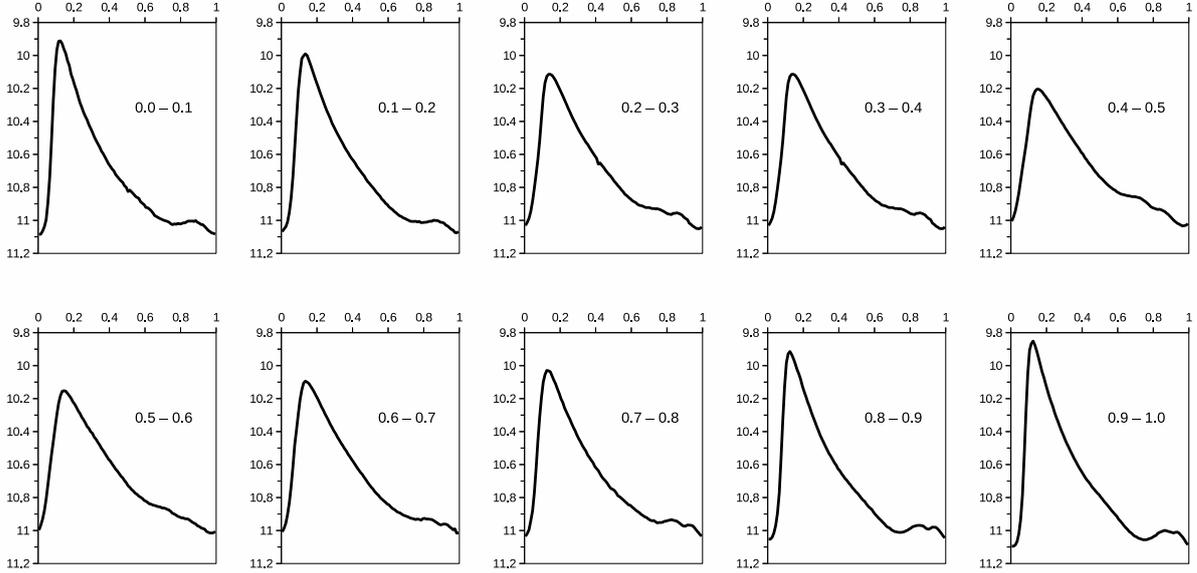


FIGURE 3.7 – Evolution du *bump* secondaire durant un cycle de Blazhko (les intervalles indiqués dans chaque fenêtre correspondent aux phases d'un cycle de modulation ; en abscisse figure le temps normalisé à une période de pulsation ; en ordonnée figure la magnitude visuelle).

alors, dans cette section, proposer une démonstration simplifiée et mettre l'emphase sur les fréquences de modulation, paramètres essentiels à l'obtention de l'asymétrie des lobes. Nous en tirerons ensuite les contraintes nécessaires pour la modélisation de l'effet Blazhko.

3.2.1 Asymétrie des lobes secondaires dans le cas de l'effet Blazhko

3.2.1.1 Spectre d'un signal modulé en amplitude et d'un signal modulé en fréquence

La courbe de lumière de S Arae présente une modulation d'amplitude et de fréquence. Avant d'étudier les signaux présentant ces deux types de modulation simultanément, il est nécessaire, pour notre démonstration, de revenir sur le spectre de chacune de ces modulations prises séparément.

3.2.1.1.1 La modulation d'amplitude (AM) L'archétype du signal modulé en amplitude est donné par la fonction (3.5).

$$y(t) = A_p \cos(\omega_p t) \cdot (1 + A_m \cos(\omega_m t)) \quad (3.5)$$

On désigne par l'indice p les grandeurs associées à la porteuse – qui correspond dans notre cas à la courbe de lumière non modulée – et par l'indice m les grandeurs associées au signal modulant – ce que nous nommons jusqu'à maintenant l'enveloppe. Son spectre est constitué de trois composantes : la fréquence de la porteuse d'amplitude A_p ainsi que deux raies secondaires $f_p \pm f_m$ (voir Figure 3.8). En effet, à partir des formules trigonométriques, on obtient :

$$y(t) = A_p \cos(\omega_p t) + A_p A_m \cos(\omega_p t) \cos(\omega_m t) \quad (3.6)$$

$$= A_p \cos(\omega_p t) + \frac{A_p A_m}{2} \cos((\omega_p + \omega_m) t) + \frac{A_p A_m}{2} \cos((\omega_p - \omega_m) t) \quad (3.7)$$

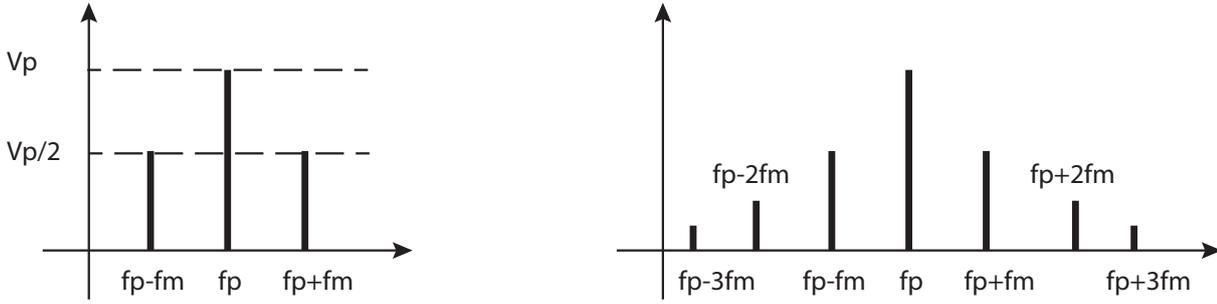


FIGURE 3.8 – *Gauche* : Spectre d'un signal modulé en amplitude. *Droite* : Spectre d'un signal modulé en fréquence.

3.2.1.1.2 La modulation de fréquence (FM) De façon équivalente, nous pouvons définir un signal modulé en fréquence par (3.8).

$$y(t) = A \cos(\omega_p t + \beta \sin(\omega_m t)) \quad (3.8)$$

où β est appelé l'indice de modulation et permet de varier l'intensité de celle-ci. Le calcul du spectre de Fourier conduit à des fonctions intégrales, appelées fonctions de Bessel, de sorte que le signal modulé en fréquence puisse être écrit sous la forme :

$$y(t) = A \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos((\omega_p + n\omega_m)t) \quad (3.9)$$

où :

$$J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta) \quad (3.10)$$

Ainsi, son spectre, représenté à la figure 3.8, montre une raie principale, entouré de raies secondaires symétriques en fréquence et amplitude. Cependant, comme ce spectre est représenté en module, il élude l'amplitude négative des raies secondaires gauches d'ordre impair.

3.2.1.2 Conséquences du couplage entre la modulation de fréquence et la modulation d'amplitude

3.2.1.2.1 Le couplage entre la modulation d'amplitude et la modulation de fréquence A partir des propriétés vues à la section précédente, on peut déduire qu'il y aura une asymétrie des raies secondaires à partir du moment où celles-ci interféreraient. La condition nécessaire pour obtenir une telle interférence est que la fréquence de modulation en amplitude soit égale à la fréquence de modulation en fréquence. En théorie, si cette condition est vérifiée, les raies secondaires situées à gauche auront une amplitude moins importante que celles de droite. Les observations corroborent à une très grande majorité cette approche théorique [108]. Un déphasage entre les deux modulations pourrait cependant conduire à une plus grande amplitude pour les raies secondaires situées à droite.

De plus, la plus grande amplitude pour les raies secondaires situées à droite s'expliquerait aussi, éventuellement, par les *alias* issus du fenêtrage dans le traitement de la transformée de Fourier discrète. En effet, notre signal étant limité dans le temps, il est traité comme le produit de la fonction étudié par une fonction de fenêtrage, comme la fonction rectangulaire définie par (3.11)⁵ :

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [T_1, T_2] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.11)$$

Le produit de deux fonctions dans le domaine temporel correspondant au produit de convolution de leurs transformées de Fourier respectives dans le domaine fréquentiel, cette dernière sera modifiée par le fenêtrage. En effet, l'allure spectrale de ces fenêtres présente une succession de lobes, avec un lobe principal qui doit être le plus étroit possible, et des lobes secondaires que l'on doit réduire au maximum (voir Figure 3.9). Ces derniers pourront donc également interférer avec ceux de la fonction étudiée et conduire à une asymétrie.

5. Nous renvoyons le lecteur, qui souhaiterait avoir plus de détails sur les fonctions de fenêtrage et leurs conséquences sur le spectre de la fonction étudiée, à l'excellent ouvrage de Peyré [64].

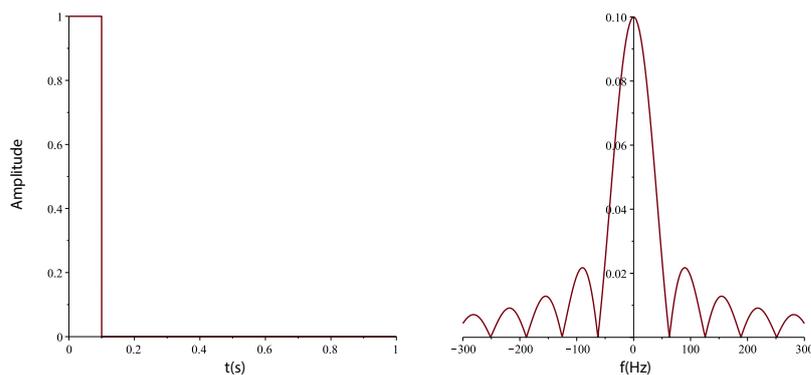


FIGURE 3.9 – *A gauche* : Fonction rectangulaire. *A droite* : Module de la transformée de Fourier d'une fenêtre rectangulaire. Les unités pour l'amplitude sont arbitraires.

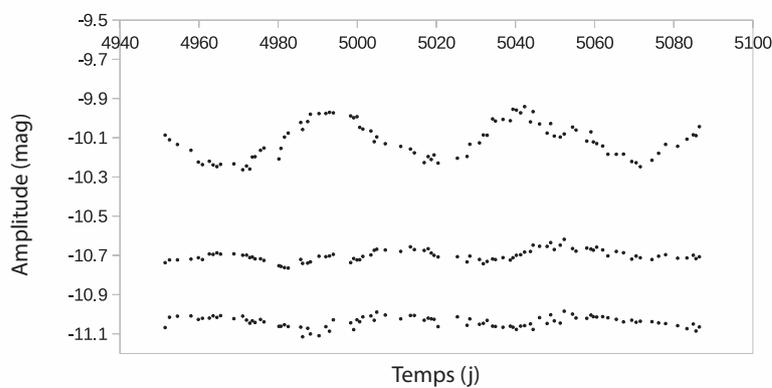


FIGURE 3.10 – Enveloppe supérieure (*en haut*), inférieure (*en bas*) et moyenne (*au milieu*) de la courbe de lumière de S Arae [108].

3.2.1.2.2 Conséquence sur l'interprétation de l'effet Blazhko Comme nous avons pu le souligner, une telle asymétrie dans le spectre de la courbe de lumière, ne peut exister que si la modulation de fréquence et d'amplitude possèdent la même fréquence. Cela contraint tout modèle théorique du phénomène à une corrélation parfaite entre ces deux types de modulation, voire mieux, à ce qu'elles aient la même cause.

3.2.2 Asymétrie des enveloppes dans le cas de l'effet Blazhko

Comme nous avons pu le voir au début de ce chapitre, l'enveloppe de la courbe de lumière est asymétrique. La variation, au cours du temps, des maxima, pour chaque période, a une amplitude plus importante que la variation des minima (voir Figure 3.10). Cette caractéristique de l'enveloppe s'étend à l'ensemble des étoiles RR Lyrae de type Blazhko (voir par exemple [14]).

Dans le cas de l'archétype de la modulation d'amplitude présenté précédemment, les enveloppes supérieures et inférieures avaient la même amplitude (voir Figure 3.11). Pour obtenir l'asymétrie voulue, il faut que la porteuse ait une valeur minimale négative plus petite en valeur absolue que la valeur maximale qui, elle, doit être positive (voir Figure 3.12).

Nous pouvons utiliser cette propriété pour déterminer le « niveau zéro » ou « niveau d'équilibre » du signal étudié. En effet, ce niveau sera le seul qui ne sera pas influencé par la modulation. Il suffit donc, pour exploiter cette propriété, de représenter la courbe de lumière, ou la vitesse radiale, dans un diagramme de phase pour la période de la porteuse (voir figure 3.13). Le point d'intersection des courbes correspondra au niveau en question. Cependant, la modulation FM biaise ce résultat, comme nous pouvons le voir sur la figure 3.13. Il est toutefois possible de négliger cette contribution si l'indice de modulation est faible.

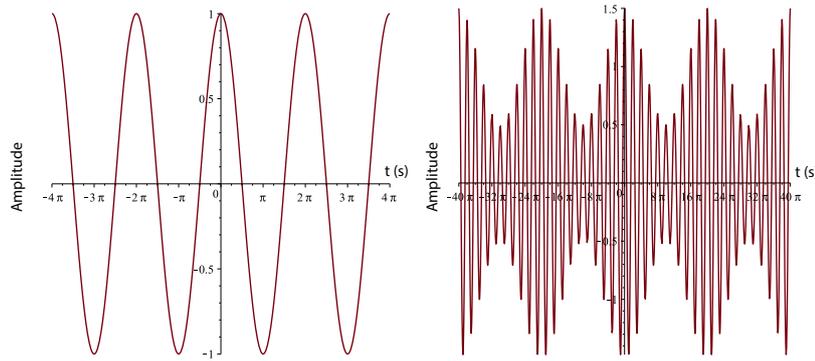


FIGURE 3.11 – Porteuse sinusoïdale (à gauche), et signal modulé en amplitude par une fonction sinusoïdale correspondant (à droite). *Axe des abscisses* : temps. *Axe des ordonnées* : amplitude du signal. Les unités pour l'amplitude sont arbitraires.

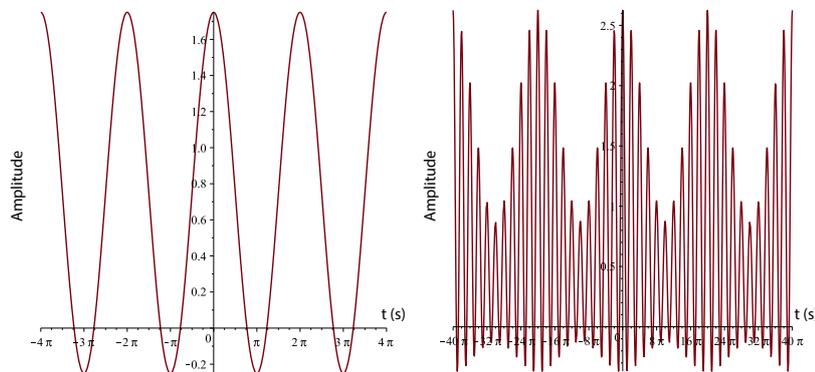


FIGURE 3.12 – Porteuse sinusoïdale traduite verticalement de sorte que sa valeur minimale soit négative et plus petite en valeur absolue que la valeur maximale positive (à gauche), et signal modulé en amplitude par une fonction sinusoïdale correspondant (à droite). *Axe des abscisses* : temps. *Axe des ordonnées* : amplitude du signal. Les unités pour l'amplitude sont arbitraires.

3.3 Variation des caractéristiques observationnelles durant un cycle de Blazhko

Nous concluons ce chapitre en listant l'ensemble des caractéristiques observationnelles présentant une variation durant un cycle de modulation. Nous analyserons dans un premier temps les données photométriques pour ensuite les confronter à celles issues de la spectrométrie⁶. Ainsi, nous nous intéresserons aux temps de montée et de descente de la luminosité et de la vitesse radiale, aux variations de l'accélération radiale et à l'apparition des « bosses » présentées au chapitre 1. Nous présenterons et étayerons l'hypothèse selon laquelle l'effet Blazhko est un phénomène mécanique et nous verrons qu'à chaque période d'oscillation est associée deux temps : un temps de quasi-chute libre et un temps d'oscillation.

3.3.1 Analyse des données photométriques

3.3.1.1 Enveloppe

Comme nous avons pu le voir, la modulation d'amplitude implique une variation des maxima et minima de la courbe de lumière. Cependant, les enveloppes supérieures et inférieures du signal modulé ne sont pas identiques, la première ayant une amplitude plus importante. D'un point de vue théorique, cela signifie que les variations de magnitude sont asymétriques. Concrètement, la position d'équilibre n'est pas à mi-hauteur entre le maximum et le minimum de la courbe de lumière. Comme expliqué dans la section précédente, pour trouver la position d'équilibre, il suffit de représenter la courbe de lumière dans un diagramme de phase. Le point d'intersection des courbes donnera la valeur de la magnitude à

6. Nous utiliserons pour cela d'autres publications que celle portant sur S Arae.

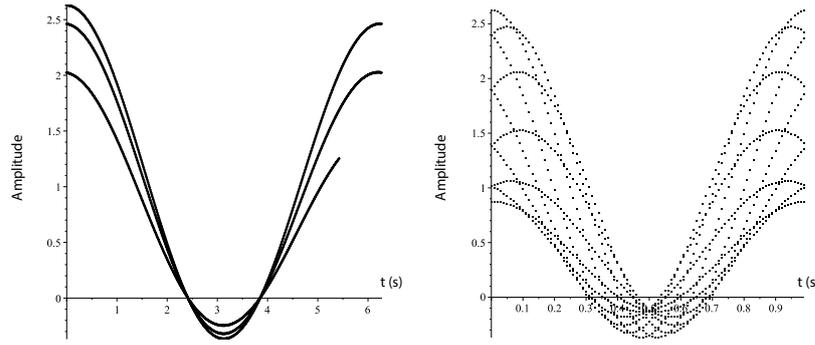


FIGURE 3.13 – Diagramme de phase d'un signal AM (à gauche) et AM+FM (à droite). Axe des abscisses : Phase (temps modulo la période de modulation). Axe des ordonnées : amplitude du signal. Les unités pour l'amplitude sont arbitraires.

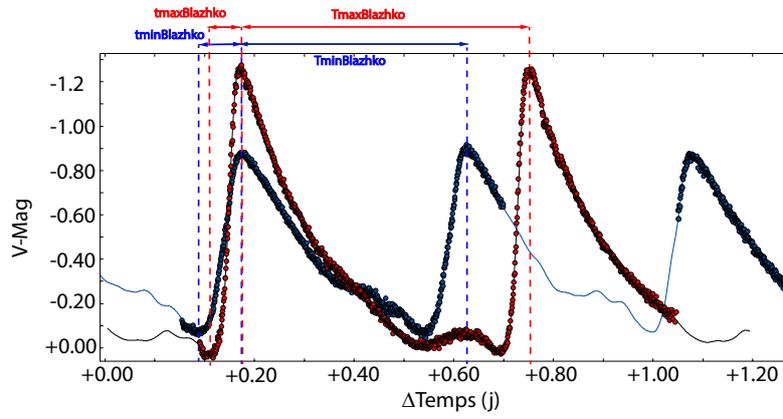


FIGURE 3.14 – Temps caractéristiques de la courbe de lumière de S Arae [108].

l'équilibre. Au chapitre 5, nous présenterons une modélisation du comportement de la zone d'ionisation $\text{He}^{++}/\text{He}^+$ durant un cycle de pulsation qui reproduira et expliquera cette asymétrie.

3.3.1.2 Temps caractéristiques

Nous pouvons définir trois temps caractéristiques dans la courbe de lumière :

- Le temps de montée entre le minimum et le maximum de luminosité. On le notera t .
- Le temps de descente entre le maximum et le minimum de luminosité. On le notera τ .
- La période de pulsation que l'on notera T .

Nous venons de voir qu'une étoile présentant l'effet Blazhko était modulée en fréquence. On a donc une variation de la période de pulsation durant un cycle de Blazhko, de sorte que (voir Figure 3.14) :

$$T_{maxBlazhko} > T_{minBlazhko} \quad (3.12)$$

Or, nous avons pour le temps de montée :

$$t_{maxBlazhko} < t_{minBlazhko} \quad (3.13)$$

Et, *a fortiori* :

$$\tau_{maxBlazhko} > \tau_{minBlazhko} \quad (3.14)$$

Il est donc nécessaire, afin de comprendre le phénomène Blazhko, de distinguer deux temps différents durant une période d'oscillation. Nous allons définir ces deux moments, en étudiant les temps d'apparition des ondes de chocs et les variations de la vitesse et de l'accélération radiale.

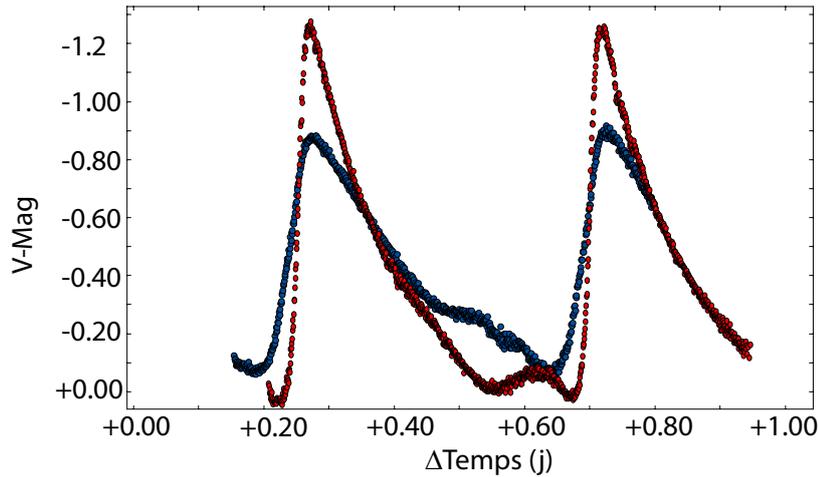


FIGURE 3.15 – Courbes de lumière de S Arae au maximum (*en rouge*) et au minimum (*en bleu*) du cycle Blazhko [108]. Les courbes ont été modifiées afin de pouvoir les comparer sur une échelle de temps identique (la modulation de fréquence a été supprimée).

3.3.1.3 Ondes de chocs

Un des résultats importants présenté dans notre publication sur S Arae est la dynamique du *bump* secondaire. Cette « bosse » présente un peu avant le minimum de la courbe de lumière, a été décrite au chapitre 1 comme la conséquence de l'onde de choc issue de la rencontre entre une couche supérieure, dans un mouvement de chute, et une couche inférieure en expansion. Nous avons montré que sa localisation sur la courbe de lumière variait durant un cycle de Blazhko. Depuis cette étude, les données photométriques issues d'autres étoiles ont confirmé cette observation et nous ont même permis de l'enrichir. Nous savons maintenant que le *bump* se produit d'autant plus tard que l'amplitude des oscillations est élevée (voir Figure 3.15 où le biais induit par la modulation de fréquence a été supprimé).

On en déduit que la collision entre la couche supérieure descendante et la couche inférieure ascendante se produit plus tard durant la phase de contraction, lorsque le cycle de Blazhko s'approche de son maximum. La modulation des variations de luminosité est donc aussi une modulation des variations du rayon de l'étoile. D'où notre hypothèse, selon laquelle le phénomène Blazhko est un phénomène mécanique.

3.3.2 Analyse des données spectrométriques

L'étude spectroscopique est plus riche en renseignements que son homologue photométrique. Cependant, rares sont les campagnes d'observations embrassant un cycle Blazhko [72]. Nous utiliserons ici les données récoltées par For et al. [38] afin d'appuyer notre argumentaire.

3.3.2.1 Accélération radiale

L'analyse de l'accélération radiale est possible en étudiant la pente de la courbe de la vitesse radiale (voir Figure 3.16). Deux temps peuvent de nouveau être définis durant une période de pulsation : le premier où la vitesse radiale suit une variation sinusoïdale, qui peut donc être associé à un mouvement d'oscillateur harmonique ; le second, où l'accélération radiale est quasiment constante, est similaire à un mouvement de chute libre. Au final, les variations de vitesses radiales sont analogues à celles d'une masse rebondissant sur un ressort. Tout comme pour l'asymétrie des enveloppes, nous verrons au chapitre 5, comment la zone d'ionisation $\text{He}^{++}/\text{He}^+$ explique ce comportement.

3.3.2.2 Vitesse radiale

Nous voyons clairement, à la figure 3.16, que la vitesse radiale est elle aussi modulée pendant un cycle de Blazhko. Ainsi la vitesse d'expansion maximale, au maximum du cycle Blazhko, est plus importante qu'au minimum de ce même cycle. Il est en de même pour la vitesse de contraction maximale. Cette dernière s'explique par un temps de chute plus important. A accélération constante, on a donc une vitesse finale plus importante. Par contre, en l'état, les données à notre disposition ne nous permettent

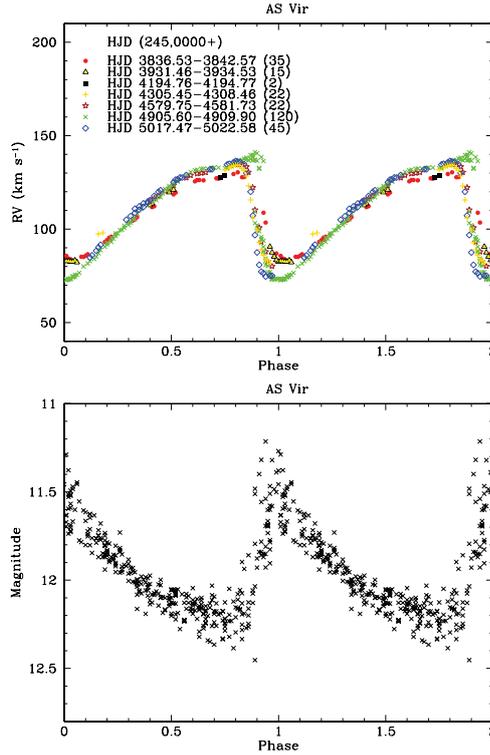


FIGURE 3.16 – Vitesse radiale et courbe de lumière de As Vir présentant un effet Blazhko [38] (la phase représentée sur l’axe des abscisses, est la phase de Blazhko).

pas d’expliquer la variation du maximum de la vitesse d’expansion. La théorie que nous présenterons au chapitre 5, nous permettra d’apporter une interprétation à ce phénomène.

Tout comme pour la courbe de lumière, les maxima et minima n’évoluent pas symétriquement. La variation des minima est plus importante que celle des maxima. Cela est en accord avec les résultats vus précédemment, puisque le minimum de la vitesse radiale correspond au maximum de luminosité. Cette propriété nous est utile, puisqu’elle nous permet de définir le niveau correspondant à une vitesse radiale nulle : en ramenant l’ensemble des courbes sur une échelle de temps modulo la période de pulsation, ces dernières se croisent en deux points qui correspondent au niveau en question.

3.4 Conclusion

Après avoir posé, au chapitre précédent, les fondements théoriques nécessaires à l’analyse harmonique des courbes de lumière, nous avons mis ceux-ci en pratique afin d’étudier le comportement oscillatoire de S Arae, une étoile de type RR Lyrae présentant l’effet Blazhko. Les données de PAIX, par leur qualité, nous ont permis de scruter le comportement de l’étoile durant trois cycles de modulation. Le caractère quasi continu des données a été primordiale, en particulier pour cerner les changements de morphologie de la courbe de lumière durant une période de Blazhko⁷. Le premier paramètre variant durant ce temps est le moment d’apparition du *bump* secondaire. Comme nous l’avons vu au chapitre 1, cette « bosse » située avant le minimum de la courbe de lumière, correspondrait à un choc. Ainsi, celui-ci se produirait d’autant plus tard que l’amplitude de la magnitude apparente serait importante. Nous avons interprété cette observation comme une preuve de l’augmentation du rayon de l’étoile, liant ainsi l’effet Blazhko et la modulation de la luminosité à un phénomène purement mécanique. L’étude des temps caractéristiques de montée et de descente des courbes de vitesse radiale et de lumière a démontré l’existence de deux temps durant une pulsation. L’analyse de l’accélération radiale nous a permis de définir un temps correspondant à un mouvement de quasi-chute libre et un autre lié à un mouvement d’oscillation harmonique. Nous avons ensuite confirmé cette modélisation grâce aux variations de la vitesse de contraction maximale durant un cycle de modulation.

L’inspection des vitesses radiales pour différentes couches de l’atmosphère d’une étoile de type RR

7. période de modulation

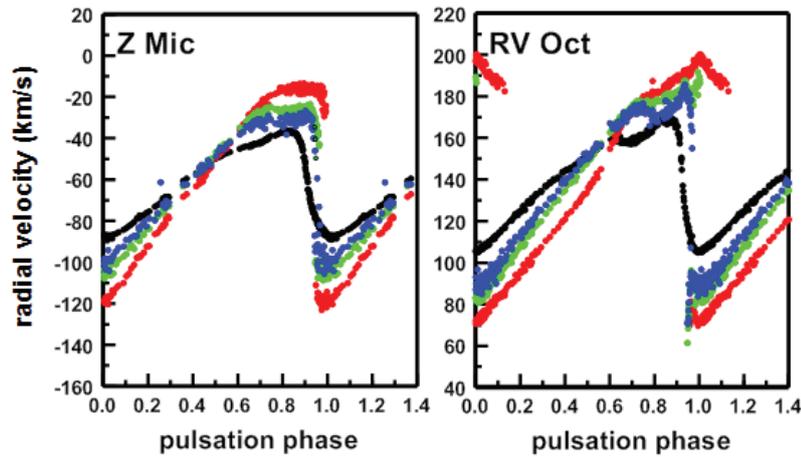


FIGURE 3.17 – Vitesse radiale de Z Mic (*gauche*) et RV Oct (*droite*), deux étoiles de type RRab. Les points noirs, bleus, verts et rouges représentent respectivement les vitesses radiales des métaux, de $H\gamma$, $H\beta$ et $H\alpha$ [71].

Lyrae corrobore un peu plus notre hypothèse. En effet, nous pouvons voir sur la figure 3.17, que l'évolution de la morphologie en fonction de la hauteur de la couche considérée est similaire à celle durant un cycle de Blazhko, confirmant que le phénomène de modulation est avant tout mécanique.

Nous avons expliqué, dans ce chapitre, plusieurs observations communément effectuées lors des études fréquentielles des courbes de lumière d'autres étoiles, comme par exemple, la décroissance exponentielle des harmoniques de la fréquence fondamentale, l'asymétrie des enveloppes ou l'asymétrie des lobes. Pour ces deux dernières, nous avons proposé une interprétation qui trouvera son explication au chapitre 5, lorsque nous aborderons la modélisation discrète et non linéaire des pulsations d'une étoile de type RR Lyrae. Mais avant cela, nous allons rappeler les équations de bases nécessaires à la modélisation de ces oscillations ainsi que les mécanismes à l'origine de celles-ci.

Deuxième partie

Théories des mécanismes de pulsation et de l'effet Blazhko

Chapitre 4

Développement linéaire des équations régissant les pulsations des étoiles RR Lyrae et mécanismes de pulsation

En entreprenant de raconter les récents et si étranges événements survenus dans notre ville qui jusqu'alors ne s'était distinguée en rien, je suis obligé, faute de savoir-faire, de remonter un peu en arrière, c'est-à-dire de commencer par quelques détails biographiques sur le talentueux et très honoré Stepan Trofimovitch Verkhovski. Que ces détails servent seulement d'introduction à la présente chronique ; l'histoire proprement dite que j'ai l'intention de raconter ici est encore à venir.

Dostoïevski, Les Possédés.

Dans le premier chapitre de cette seconde partie, portant sur la modélisation théorique des pulsations d'une étoile de type RR Lyrae, nous allons rappeler les mécanismes à l'origine des variations de luminosité. Pour cela nous partirons des équations de base : continuité, mouvement, énergie et état. Nous adopterons une méthode perturbative et ne considérerons que la partie linéaire de celles-ci. Celle-ci est largement suffisante pour comprendre les mécanismes d'excitation ou d'amortissement qui ont lieu au sein de l'étoile. Nous ne manquerons pas d'explorer dans le second chapitre de cette partie les effets non linéaires, dans la mesure où nous proposerons notamment, grâce à ceux-ci, une explication à « l'accrochage » entre modulation de fréquence et modulation d'amplitude pour le phénomène Blazhko. Nous limiterons cependant notre étude au cas des oscillations radiales. Comme nous avons pu le voir dans la première partie de ce mémoire, l'existence des modes non-radiaux au sein des RR Lyrae reste spéculative. Qui plus est, nous ne nous y référerons pas dans les différentes problématiques auxquelles nous nous confronterons. Nous renvoyons donc le lecteur vers l'ouvrage de Christensen-Dalsgaard [19] pour plus de détails sur les modes non-radiaux.

Après avoir posé les équations de bases et avoir linéarisé les formules perturbées, nous définirons les modes *dynamiquement stables et instables* à partir du cas adiabatique. Nous verrons que dans ce cas, la modélisation des pulsations peut être ramenée à un problème aux valeurs propres et utiliserons le caractère hermitien de l'opérateur étudié pour définir ces deux modes. Une fois que nous aurons limité notre étude au cas des oscillations *dynamiquement stables*, nous verrons que le cas général des oscillations radiales nous permet de procéder à une séparation des variables spatiales et temporelle nous conduisant à un problème de Sturm-Liouville pour la première dans le cas adiabatique. Nous poursuivrons ensuite par une étude de la stabilité en considérant le cas quasi adiabatique et conclurons en inspectant les conditions

nécessaires pour que l'instabilité conduise aux oscillations observées.

4.1 Équations générales

4.1.1 Description lagrangienne et eulérienne

Les équations régissant la physique des étoiles pulsantes peuvent être exprimées en suivant deux formalismes différents : le formalisme lagrangien et le formalisme eulérien. Dans la description lagrangienne, chaque particule est suivie durant son mouvement. Dans la description eulérienne, on n'individualise plus les particules de fluide ; on s'intéresse aux grandeurs caractéristiques du fluide en chaque point repéré par le vecteur \vec{r} .

Si, dans le cas général, la méthode eulérienne est celle qui conduit à la modélisation la plus simple, nous verrons que l'approche lagrangienne, dans le cas des oscillations radiales, sera la plus appropriée. Nous justifierons l'hypothèse des oscillations radiales à la section 4.2.3.4 et nous n'aborderons pas le cas des modes non-radiaux.

Par la suite, $\delta/\delta t$ désignera la dérivée temporelle en suivant le mouvement dans le formalisme lagrangien tandis que dans le formalisme eulérien, ce symbole désignera la dérivée temporelle en un point. On aura donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} &= \vec{v} && \text{dans le formalisme de Lagrange,} \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} &= 0 && \text{dans le formalisme d'Euler.} \end{aligned}$$

On appelle dérivée de Stokes, l'opérateur différentiel noté $\frac{d}{dt}$ défini par :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\delta X}{\delta t} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} X \quad (4.1)$$

On a alors :

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t} \right)_{Lagrange} = \frac{dx}{dt}$$

Ainsi, on notera $\frac{d}{dt}$ pour l'opérateur $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{Lagrange}$ et $\frac{\partial}{\partial t}$ pour $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{Euler}$.

Les formalismes lagrangien et eulérien étant décrits, nous allons maintenant passer en revue l'ensemble des équations qui nous permettront de modéliser les oscillations des étoiles pulsantes. Nous exprimerons chacune de ces formules dans les deux formalismes que nous venons de décrire.

4.1.2 Equation de continuité

La première équation correspond à la conservation de la masse et se traduit par l'équation de continuité suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.2)$$

où ρ est la densité. Dans le formalisme lagrangien, cette équation devient :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (4.3)$$

4.1.3 Equation de mouvement

Nous considérons ensuite l'équation de mouvement. Dans le cas des étoiles pulsantes, elle prend la forme :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} = -\text{grad} \Phi - \frac{1}{\rho} \text{grad} P \quad (4.4)$$

$$\text{ou} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad} \Phi - \frac{1}{\rho} \text{grad} P \quad (4.5)$$

Nous notons P la pression, définie par l'état thermodynamique de l'élément considéré, et Φ le potentiel gravitationnel que nous définirons juste après, à l'aide de l'équation de Poisson. Nous limiterons les forces volumiques aux simples effets de la gravité. Nous considérerons le fluide comme parfait et négligerons, ainsi, les forces de viscosité et de conductivité thermique. De façon similaire, nous n'inclurons pas l'influence de la convection *via* des termes supplémentaires de pression et de viscosité *ad hoc*. En effet, bien que non négligeables, nous ne disposons pas encore de théorie satisfaisante permettant de traiter la convection non stationnaire. Ainsi, nous nous limiterons uniquement au cas radiatif.

4.1.4 Equation de Poisson

Comme mentionné ci-dessus, la force gravitationnel s'exprime à l'aide du potentiel gravitationnel Φ qui obéit à la loi de Poisson :

$$\Delta \Phi = 4\pi G\rho \quad (4.6)$$

4.1.5 Equation de conservation de l'énergie

L'équation de conservation de l'énergie s'écrit :

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} S \right) = \epsilon - \frac{1}{\rho} \text{div} \vec{F} \quad (4.7)$$

$$\text{ou} \quad T \frac{dS}{dt} = \epsilon - \frac{1}{\rho} \text{div} \vec{F} \quad (4.8)$$

où S est l'entropie par unité de masse, ϵ le taux de génération d'énergie par unité de masse¹ et \vec{F} la densité de flux d'énergie. Ce dernier est donné par le flux radiatif.

4.1.6 Equation de transfert

Le flux radiatif, intervenant dans l'équation d'énergie, peut être approximé, de façon satisfaisante, par l'équation de diffusion :

$$\vec{F}_R = -\lambda \text{grad} T \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \quad (4.9)$$

où κ représente l'opacité², c la vitesse la lumière dans le vide et a la constante de radiation. Le flux convectif est plus difficile à modéliser et à traiter conduisant à des approximations du type *théorie de la longueur de mélange*. Comme nous avons pu le mentionner précédemment, nous n'inclurons donc pas l'influence de la convection dans le transport d'énergie.

4.1.7 Equations d'état

Afin de clore notre système d'équations, il est nécessaire d'y inclure les équations d'état au sens large : les équations d'état proprement dites, l'opacité et la génération d'énergie nucléaire. En prenant ρ et T comme variables thermodynamiques indépendantes, les propriétés de la matière sont alors décrites par des relations de la forme :

$$P = P(\rho, T, \chi), U = U(\rho, T, \chi), \kappa = \kappa(\rho, T, \chi), \epsilon = \epsilon(\rho, T, \chi) \quad (4.10)$$

où χ désigne la composition chimique, U l'énergie interne, ϵ le taux de génération d'énergie nucléaire et κ l'opacité.

1. Qu'il corresponde à un taux de génération nucléaire, gravitationnel ou qu'il prenne en compte la contribution des neutrinos.

2. Prise au sens d'opacité moyenne de Rosseland.

4.1.8 Conditions aux limites

Enfin, il sera nécessaire d'imposer des conditions limites cohérentes à la surface de l'étoile. Ainsi, on peut, dans une approche grossière, annuler la pression et la température à la surface de l'étoile. Nous préférons imposer des conditions de raccord, pour ces mêmes paramètres, entre l'intérieur de l'étoile et son atmosphère. On fixera la frontière entre ces deux milieux au niveau de la photosphère.

4.2 Perturbation au premier ordre des équations générales

4.2.1 Méthode des perturbations

Afin de simplifier les équations générales vues précédemment, dont la résolution n'est pas envisageable en l'état, nous allons appliquer la méthode des petites perturbations. Elle consiste à approximer les variables décrivant le mouvement X en la somme de la valeur qu'elles prennent dans la configuration d'équilibre – que l'on supposera stationnaire – X_0 et d'une perturbation δX :

$$X = X_0 + \delta X \quad (4.11)$$

Tout comme pour la dérivée temporelle, il sera nécessaire de définir deux types de perturbations, selon que l'on adopte une approche lagrangienne ou eulérienne.

$$X = X_0 + \delta X \quad \text{dans le formalisme lagrangien} \quad (4.12)$$

$$X = X_0 + X' \quad \text{dans le formalisme eulérien} \quad (4.13)$$

On aura la relation suivante entre les deux types de perturbations pour une même grandeur X :

$$\delta X = X' + \overrightarrow{\delta r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} X_0 \quad (4.14)$$

Par la suite, nous omettrons l'indice 0 pour désigner l'état non perturbé.

4.2.2 Modes dynamiquement stables et dynamiquement instables

Nous allons, dans un premier temps, nous restreindre au cas adiabatique, c'est-à-dire au cas où aucun transfert thermique n'intervient entre le système étudié et le milieu extérieur. *In fine*, cette étude nous mènera à discriminer deux types de modes : les modes *dynamiquement instables* et les modes *dynamiquement stables*. L'approximation adiabatique convient particulièrement à l'étude des couches internes de l'étoile, là où le temps caractéristique des transferts d'énergie est beaucoup plus long que le temps caractéristique dynamique. Cette condition est équivalente à l'approximation suivante : $\Delta S = 0$. Ceci conduit à³ :

$$\frac{\delta P}{P} = \Gamma_1 \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (4.15)$$

On peut écrire l'ensemble des équations précédentes – à l'exception de l'équation de transfert qui devient inutile – en fonction de $\overrightarrow{\delta r}$:

$$\rho' = -\text{div}(\rho \overrightarrow{\delta r}) \quad \text{ou} \quad \delta \rho = -\rho \text{div} \overrightarrow{\delta r} \quad (4.16)$$

$$\delta P = -\Gamma_1 P \text{div} \overrightarrow{\delta r} \quad \text{ou} \quad P' = -\Gamma_1 P \text{div} \overrightarrow{\delta r} - \overrightarrow{\delta r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (4.17)$$

L'équation de Poisson $\Delta \Phi' = 4\pi G \rho'$ devient :

$$\Phi'(B) = -G \int \frac{\rho'_A dV_A}{|BA|} = G \int \frac{\text{div}(\rho \overrightarrow{\delta r})_A dV_A}{|BA|} \quad (4.18)$$

Nous obtenons alors l'équation de mouvement :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{\delta r}}{dt^2} = -\overrightarrow{\text{grad}} \Phi' + \frac{\rho'}{\rho^2} \overrightarrow{\text{grad}} P - \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} P' \quad (4.19)$$

3. Voir (4.44).

qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2 \vec{\delta r}}{dt^2} = \mathcal{L} \vec{\delta r} \quad (4.20)$$

où \mathcal{L} est l'opérateur linéaire défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \vec{\delta r} = & -G \overrightarrow{\text{grad}}_B \left(\int \frac{\text{div}(\rho \vec{\delta r})_A dV_A}{|BA|} \right) - \frac{1}{\rho^2} \text{div}(\rho \vec{\delta r}) \overrightarrow{\text{grad}} P \\ & + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\Gamma_1 P \text{div}(\vec{\delta r}) \right) + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\vec{\delta r} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} P \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Nous admettons que \mathcal{L} est un opérateur symétrique pour le produit scalaire :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_V \rho \vec{u} \cdot \vec{v} dV = \overline{(\vec{v}, \vec{u})} \quad (4.22)$$

En incluant des conditions aux limites linéaires, homogènes et indépendantes du temps, le problème admet des solutions de la forme $\xi(\vec{r}) e^{st}$. On obtient alors l'équation suivante pour les $\xi(\vec{r})$ appelés *modes normaux* :

$$\mathcal{L} \xi = s^2 \xi \quad (4.23)$$

Le caractère hermitien de \mathcal{L} implique que les valeurs propres s^2 sont réelles. On aura alors deux cas de figures :

- $s^2 > 0$: le mode sera *dynamiquement instable*, les oscillations augmentent en amplitude, du fait de l'exponentielle à exposant réel positif.
- $s^2 < 0$: le mode sera *dynamiquement stable*.

Une configuration stellaire sera stable si tous ses modes normaux sont stables, et instable si au moins un mode est instable. Dans le cas où $s^2 = 0$ pour certains modes, alors que les autres sont stables, l'analyse linéaire sera insuffisante pour déterminer la nature vibrationnelle du modèle. Nous nous limiterons, par la suite, à l'étude des configurations dynamiquement stables, et poseront dans un premier temps $s = -i\sigma$.

4.2.3 Oscillations radiales

Nous allons examiner le cas des oscillations radiales, en commençant par le cas général, que nous simplifierons ensuite avec l'approximation adiabatique. Nous élargirons ensuite les hypothèses en considérant le cas quasi adiabatique, afin d'étudier la stabilité des pulsations. On pourra alors déterminer dans quelle zone le mode considéré est éventuellement excité ou amorti. Nous obtiendrons des formulations intégrales, des équations posées précédemment, qui nous permettront d'établir les mécanismes à l'origine des pulsations des étoiles RR Lyrae.

4.2.3.1 Cas général

Alors que l'approche eulérienne permet généralement de simplifier efficacement la modélisation des pulsations, le formalisme lagrangien convient particulièrement bien au traitement des oscillations radiales, notamment en utilisant m , la masse, plutôt que r comme coordonnée, l'opérateur $\partial/\partial m$ commutant avec l'opérateur de perturbation lagrangienne. Nous allons simplifier notre système d'équations aux dérivées partielles en exploitant la symétrie sphérique et en la réécrivant également dans le nouveau système de coordonnées. Nous reprenons ici, dans les grandes lignes, le développement proposé par Cox [22]. Notons tout d'abord que $\partial/\partial m$ et $\partial/\partial r$ sont reliés par la relation :

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r} \quad (4.24)$$

On peut ainsi réécrire les équation de continuité, de mouvement, de conservation de l'énergie et de transfert radiatif :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 v) = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + 4\pi\rho \frac{\partial}{\partial m}(r^2 v) = 0 \quad (4.25)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{Gm}{r^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{Gm}{r^2} - 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial m} \quad (4.26)$$

$$T \frac{dS}{dt} = \epsilon - \frac{1}{\rho r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 F) \quad \text{ou} \quad T \frac{dS}{dt} = \epsilon - \frac{\partial L}{\partial m} \quad (4.27)$$

$$F = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{\partial T}{\partial r} \quad \text{ou} \quad L = -\frac{64\pi^2 r^4 acT^3}{3\kappa} \frac{\partial T}{\partial m} \quad (4.28)$$

L'équation de Poisson donne :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{Gm}{r^2} \quad (4.29)$$

En substituant (4.11) dans les équations précédentes, et en négligeant les termes d'ordre supérieur à un en les perturbations, on obtient un système d'équations linéaires :

$$\frac{\delta\rho}{\rho} + 4\pi\rho \frac{\partial}{\partial m}(r^2 \delta r) = 0 \quad (4.30)$$

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} = 2 \frac{Gm}{r^2} \frac{\delta r}{r} - 8\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial m} \frac{\delta r}{r} - 4\pi r^2 \frac{\partial \delta P}{\partial m} \quad (4.31)$$

$$T \frac{d\delta S}{dt} = \delta\epsilon - \frac{\partial \delta L}{\partial m} \quad (4.32)$$

$$\delta L = -\frac{64\pi^2 r^4 acT^3}{3\kappa} \left\{ \frac{\partial T}{\partial m} \left(4 \frac{\delta r}{r} + 3 \frac{\delta T}{T} - \frac{\delta\kappa}{\kappa} \right) + \frac{\partial \delta T}{\partial m} \right\} \quad (4.33)$$

On peut ensuite revenir à l'opérateur $\partial/\partial r$ afin d'obtenir :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta r}{r} \right) = -\frac{1}{r} \left(3 \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta\rho}{\rho} \right) \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta P}{P} \right) = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \left\{ \frac{\delta P}{P} + 4 \frac{\delta r}{r} - \frac{r^3}{Gm} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\delta r}{r} \right) \right\} \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta L}{L} \right) = -\frac{1}{L} \frac{dL}{dr} \left(\frac{\delta L}{L} - \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} \right) - \frac{4\pi r^2 \rho T}{L} \frac{d\delta S}{dt} \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\delta T}{T} \right) = -\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \left(4 \frac{\delta r}{r} + 4 \frac{\delta T}{T} - \frac{\delta L}{L} - \frac{\delta\kappa}{\kappa} \right) \quad (4.37)$$

On peut séparer les variables temporelle et spatiale dans les solutions, puisque les coefficients des équations linéaires sont indépendants du temps. Ces solutions peuvent alors s'écrire sous la forme :

$$\frac{\delta X}{X}(r, t) = \frac{\delta X}{X}(r) e^{st} \quad (4.38)$$

où s est la fréquence d'oscillation de $\frac{\delta X}{X}$.

En injectant (4.38) dans les équations précédentes, on obtient :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta r}{r} \right) = -\frac{1}{r} \left(3 \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta\rho}{\rho} \right) \quad (4.39)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta P}{P} \right) = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \left\{ \frac{\delta P}{P} + \left(4 - \frac{r^3 s^2}{Gm} \right) \frac{\delta r}{r} \right\} \quad (4.40)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta L}{L} \right) = -\frac{1}{L} \frac{dL}{dr} \left(\frac{\delta L}{L} - \frac{\delta\epsilon}{\epsilon} \right) - \frac{4\pi r^2 c_v \rho T}{L} s \frac{\delta S}{c_v} \quad (4.41)$$

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta T}{T} \right) = -\frac{1}{T} \frac{dT}{dr} \left(4 \frac{\delta r}{r} + 4 \frac{\delta T}{T} - \frac{\delta L}{L} - \frac{\delta\kappa}{\kappa} \right) \quad (4.42)$$

En ce qui concerne les équations d'état, nous admettrons que les relations $P = P(\rho, T)$ et $\kappa = \kappa(\rho, T)$ définies dans le cas stationnaire, restent valides au cours de la pulsation. Nous aurons alors :

$$\frac{\delta P}{P} = \left[\Gamma_1 - \frac{(\Gamma_3 - 1)^2 c_v \rho T}{P} \right] \frac{\delta \rho}{\rho} + \frac{(\Gamma_3 - 1) c_v \rho T}{P} \frac{\delta T}{T} \quad (4.43)$$

où $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sont les coefficients adiabatiques définis par :

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_S, \quad \frac{\Gamma_2 - 1}{\Gamma_2} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_S, \quad \Gamma_3 - 1 = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_S \quad (4.44)$$

Pour ce qui est de la perturbation du taux de génération d'énergie nucléaire, le temps de vie des réactifs n'étant pas négligeable, comparé au temps caractéristique de pulsation, nous aurons :

$$\frac{\delta \epsilon}{\epsilon} = \mu \frac{\delta \rho}{\rho} + \nu \frac{\delta T}{T} \quad (4.45)$$

où les termes μ et ν seront des fonctions de la fréquence de pulsation.

Enfin, nous devons définir les conditions limites afin de clore notre système. Tout d'abord, nous imposerons à nos solutions d'être régulières au centre, ce qui se traduit par les conditions suivantes :

$$3 \frac{\delta r}{r} + \frac{\delta \rho}{\rho} = 0 \quad (4.46)$$

$$\epsilon \left(\frac{\delta L}{L} - \frac{\delta \epsilon}{\epsilon} \right) + s T \delta S = 0 \quad (4.47)$$

Pour ce qui est des conditions en surface, deux approches sont possibles. La première consiste à considérer une pression nulle en surface, ce qui se traduit par les conditions aux limites suivantes :

$$\frac{\delta P}{P} + \left(4 - \frac{R^3 s^2}{GM} \right) \frac{\delta r}{r} = 0 \quad (4.48)$$

$$4 \frac{\delta r}{r} + 4 \frac{\delta T}{T} - \frac{\delta L}{L} - \frac{\delta \kappa}{\kappa} = 0 \quad (4.49)$$

Si le modèle est raccordé à une atmosphère, on gardera la condition mécanique inchangée, mais on améliorera la condition radiative en utilisant l'approximation d'Eddington pour la structure thermique de l'atmosphère :

$$T^4(\tau) = \frac{3}{4} T_{eff}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \approx \frac{3L}{16\pi r^2 \sigma} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (4.50)$$

où T_{eff} correspond à la température effective, σ la constante de Boltzmann et τ à l'épaisseur optique :

$$\tau = \int_r^\infty \kappa \rho dr \approx \frac{\kappa \Delta m}{4\pi r^2} \quad (4.51)$$

$$4 \frac{\delta T}{T} + 2 \frac{\delta r}{r} - \frac{\delta L}{L} - \frac{\tau}{\tau + 2/3} \left(\frac{\delta \kappa}{\kappa} - 2 \frac{\delta r}{r} \right) = 0 \quad (4.52)$$

4.2.3.2 Cas adiabatique

Nous avons déjà pu voir que dans les couches internes de l'étoile, la période des modes dynamiques d'ordre peu élevés, sont beaucoup plus courtes que le temps caractéristique dit de Kevin-Helmholtz, correspondant au temps de transfert thermique⁴. Dans ces régions, l'approximation adiabatique est donc justifiée et donne des résultats relativement précis. Les équations vues précédemment, ainsi que leurs conditions limites, se réduisent alors à :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta r}{r} \right) = -\frac{1}{r} \left(3 \frac{\delta r}{r} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta P}{P} \right) \quad (4.53)$$

4. Le temps caractéristique de Kevin-Helmholtz correspond au temps mis par l'étoile pour rayonner l'ensemble de son énergie jusqu'à épuisement, dans le cas où elle serait subitement privée de sa source d'énergie nucléaire. C'est ainsi, un temps caractéristique des phénomènes thermiques dans l'étoile. Une bonne approximation de sa valeur est donnée par $\tau_{KH} = \frac{GM^2}{LR}$.

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{\delta P}{P} \right) = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} \left\{ \frac{\delta P}{P} + \left(4 - \frac{r^3 s^2}{Gm} \right) \frac{\delta r}{r} \right\} \quad (4.54)$$

$$3 \frac{\delta r}{r} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{\delta P}{P} = 0 \quad \text{en } r = 0 \quad (4.55)$$

$$\frac{\delta P}{P} + \left(4 - \frac{R^3 s^2}{GM} \right) \frac{\delta r}{r} = 0 \quad \text{en } r = R \quad (4.56)$$

On introduit alors les variables sans dimension suivantes :

$$x = \frac{r}{R}, \quad q = \frac{m}{M}, \quad \xi = \frac{\delta r}{r}, \quad \eta = \frac{\delta P}{P} \quad \text{et } s = -i\sigma \quad \text{avec } \sigma = \sqrt{\frac{GM}{R^3}} \omega \quad (4.57)$$

Nous pouvons alors réécrire les formules précédentes :

$$\frac{d\xi}{dx} = -\frac{1}{x} \left(3\xi + \frac{\eta}{\Gamma_1} \right) \quad (4.58)$$

$$\frac{d\eta}{dx} = -\frac{d \ln P}{dx} \left\{ \eta + \left(4 + \frac{x^3 \omega^2}{q} \right) \xi \right\} \quad (4.59)$$

et leurs conditions limites :

$$3\xi + \frac{\eta}{\Gamma_1} = 0 \quad \text{en } x = 0 \quad (4.60)$$

$$\eta + (4 + \omega^2) \xi = 0 \quad \text{en } x = 1 \quad (4.61)$$

En éliminant η , on obtient l'équation :

$$\frac{d}{dr} \left(\Gamma_1 P r^4 \frac{d\xi}{dr} \right) + \left\{ r^3 \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] + \sigma^2 \rho r^4 \right\} \xi = 0 \quad (4.62)$$

et les conditions aux limites :

$$\frac{d\xi}{dr} = 0 \quad \text{en } r = 0 \quad (4.63)$$

$$\Gamma_1 R \frac{d\xi}{dr} + \left(3\Gamma_1 - 4 - \frac{R^3 \sigma^2}{GM} \right) \xi = 0 \quad \text{en } r = R \quad (4.64)$$

On obtient une équation différentielle scalaire, d'ordre deux, du type Sturm-Liouville. Les solutions de ce problème sont les valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur autoadjoint :

$$\mathcal{L}\xi = -\frac{1}{\rho r^4} \frac{d}{dr} \left(\Gamma_1 P r^4 \frac{d\xi}{dr} \right) - \frac{1}{\rho r} \frac{d}{dr} [(3\Gamma_1 - 4)P] \xi \quad (4.65)$$

défini pour le produit scalaire :

$$(u, v) = \int \rho r^4 u \bar{v} dr \quad (4.66)$$

Nous retrouvons alors l'équation :

$$\mathcal{L}\xi = \sigma^2 \xi \quad (4.67)$$

Nous savons alors qu'il existe une base hilbertienne de vecteurs propres, que l'on a appelés modes normaux, associés à des valeurs propres formant une suite strictement croissante : $\sigma_0^2 < \sigma_1^2 < \dots < \sigma_k^2 < \dots$ avec $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k^2 = +\infty$.

4.2.3.3 Etude de la stabilité

Comme nous avons pu le voir précédemment, l'approximation adiabatique ne convient pas à la description des couches externes de l'étoile. Qui plus est, elle ne nous permet pas de savoir si un mode est excité ou amorti par les phénomènes thermiques. Il est donc utile de prendre en compte les termes non conservatifs. Pour cela, on considérera ces derniers comme de petites perturbations au problème adiabatique.

Posons cette fois-ci $s = \theta' - i\theta$, où nous appellerons θ' le coefficient d'amplification. Nous allons montrer que :

$$\sigma' = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{\int \frac{\delta T}{T} \left(\delta\epsilon - \frac{d\delta L}{dm} \right) dm}{\int |\delta r|^2 dm} \quad (4.68)$$

Pour cela nous allons établir les expressions intégrales des équations perturbées. Ecrivons, à nouveau, ces dernières sous la forme suivante :

$$\frac{d}{dr} (r^2 \delta r) = -r^2 \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (4.69)$$

$$\frac{d\delta P}{dr} + \left(\rho s^2 + \frac{4}{r} \frac{dP}{dr} \right) \delta r = 0 \quad (4.70)$$

$$s c_v T \frac{\delta S}{c_v} = \delta\epsilon - \frac{d\delta L}{dm} \quad (4.71)$$

En multipliant l'équation de mouvement par $4\pi r^2 \overline{\delta r}$ et en intégrant sur le rayon de l'étoile, on obtient :

$$s^2 \int 4\pi r^2 \rho |\delta r|^2 dr + \int 4\pi r^2 \overline{\delta r} \left(\frac{d\delta P}{dr} + \frac{4}{r} \frac{dP}{dr} \delta r \right) dr = 0 \quad (4.72)$$

En utilisant l'équation de continuité et en intégrant par parties, on peut mettre cette équation sous la forme :

$$s^2 \int |\delta r|^2 dm + \int \left\{ \frac{\delta P}{\rho} \frac{\overline{\delta \rho}}{\rho} + \frac{4r}{\rho} \frac{dP}{dr} \left| \frac{\delta r}{r} \right|^2 \right\} dm = 0 \quad (4.73)$$

En prenant la partie imaginaire de la relation précédente, nous obtenons :

$$2 \operatorname{Re} s \operatorname{Im} s = - \frac{\operatorname{Im} \int \frac{\delta P}{\rho} \frac{\overline{\delta \rho}}{\rho} dm}{\int |\delta r|^2 dm} \quad (4.74)$$

En portant dans le second membre, les solutions adiabatiques, on obtient l'égalité voulue en utilisant :

$$W = \frac{\sigma}{2} \operatorname{Im} \int \frac{\delta P}{\rho} \frac{\overline{\delta \rho}}{\rho} dm = \frac{1}{2} \int \frac{\delta T}{T} \left(\delta\epsilon - \frac{d\delta L}{dm} \right) dm \quad (4.75)$$

où W est la puissance moyenne développée par toute l'étoile (correspondant au travail effectué pendant un cycle divisé par la durée de ce cycle). Ainsi, à partir de cette expression intégrale, nous pouvons, non seulement déterminer la contribution de chaque couche de l'étoile, mais aussi préciser les mécanismes excitateurs ou inhibiteurs.

L'approximation quasi adiabatique nous permet d'obtenir d'excellentes approximations des fonctions et valeurs propres de notre système, lorsque le phénomène d'excitation réside à l'intérieur de l'étoile. Dans le cas contraire, on intégrera de préférence les équations présentées dans le cas général.

4.2.3.4 Existence des modes non radiaux au sein des RR Lyrae

Nous limitons notre étude au cas particulier des oscillations radiales étant donné que l'influence des modes non radiaux au sein des étoiles de type RR Lyrae reste encore spéculative [58]. Nous renvoyons le lecteur vers l'ouvrage de Christensen-Dalsgaard [19], où le problème des pulsations est modélisé, toujours à partir des équations perturbées au premier degré, dans le cas général des oscillations quelconques. La solution présentée ici correspond aux harmoniques sphériques présentées dans l'ouvrage cité, pour $l = 0$.

4.3 Mécanismes de pulsation

4.3.1 Aperçu historique

La compréhension des mécanismes de pulsation des étoiles débute en 1914 avec Shapley [81] et les premiers travaux d'Eddington en 1918 [26]. Le premier attribue les variations de luminosité à des variations de volume de l'étoile. Le second pose les fondements mathématiques à la théorie des pulsations que nous avons présentés au début de ce chapitre. L'étude de la stabilité de ces oscillations, c'est-à-dire la possibilité que celles-ci se maintiennent dans le temps, sera traitée par Eddington en 1926 [27]. Il décrit la nécessité d'un mécanisme similaire à celui d'une machine thermique, capable d'emmagasiner de l'énergie durant la compression et de libérer celle-ci à l'expansion. Il propose, au début des années quarante [28][29], un mécanisme de pulsation reposant sur le couplage entre l'énergie nucléaire produit au sein de l'étoile et la zone d'ionisation de l'hydrogène. Les travaux menés ultérieurement par Epstein [30] ont montré que toute source d'instabilité ne pouvait exister en dessous de 0.85 fois le rayon de l'étoile. Zhevakin fut le premier à proposer un mécanisme similaire à celui de la machine thermique d'Eddington, mais fondé sur l'interaction entre les pulsations et la zone d'ionisation $\text{He}^{++}/\text{He}^+$ [109] [110] [111]. Enfin, Cox définit en 1980, une zone de transition, limite entre la zone adiabatique et la zone non-adiabatique, et démontre que l'efficacité des mécanismes d'excitation des pulsations repose sur la position relative de cette zone par rapport à la zone d'ionisation.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons voir comment nous pouvons retrouver les résultats de Zhevakin et Cox à partir de la formule du coefficient d'amplification (4.68).

4.3.2 Influence de l'excitation nucléaire et des termes de transport

4.3.2.1 Le mécanisme ϵ

La contribution de la génération d'énergie nucléaire dans le numérateur du coefficient d'amplification (4.68) est toujours positive. Par conséquent, c'est un mécanisme d'excitation des oscillations. On nomme cet effet « mécanisme ϵ ». Comme nous pouvons le voir à la figure 1.8, les zones de fusion se situent dans l'intervalle de masse $[0 ; 0.9]$, qui correspond à une distance de moins de $0.2R$ où R est le rayon de l'étoile. Dans ces régions où les fonctions propres sont petites, comme le montre les travaux d'Epstein, son influence est limitée, notamment par l'effet inhibiteur des termes de transfert. Il est donc nécessaire de considérer la seconde variable comprise dans le numérateur du coefficient d'amplification.

4.3.2.2 Les mécanismes κ et γ

On peut écrire la contribution du terme de transfert au coefficient d'amplification sous la forme :

$$- \int \frac{\delta T}{T} \frac{d\delta L}{dm} dm = - \int \frac{\delta T}{T} \frac{d\delta L}{dr} dr \quad (4.76)$$

On voit que cette contribution sera positive si ∂L décroît lorsque $\partial T > 0$, c'est-à-dire si la matière absorbe de la chaleur à haute température et la restitue à basse température. Dans le cas où l'approximation adiabatique est valable, nous pouvons estimer la contribution des termes de transfert. A partir des équations d'état et de transfert, et en ne considérant que les modes d'ordre peu élevés, pour lesquels la dérivée de $\partial T/T$ et le terme en $\delta r/r$ sont négligeables, on peut écrire :

$$\frac{\delta L}{L} \approx [(4 - \kappa_T)(\Gamma_3 - 1) - \kappa_\rho] \frac{\delta \rho}{\rho} \quad (4.77)$$

où $\kappa_\rho = \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln \rho} \right)_T$ et $\kappa_T = \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T} \right)_\rho$.

En utilisant les approximations suivantes⁵ : $\Gamma_3 \approx 5/3$, $\kappa_\rho \approx 1$, $\kappa_T \approx -3.5$, on obtient :

$$[(4 - \kappa_T)(\Gamma_3 - 1) - \kappa_\rho] \approx 4 > 0 \quad (4.78)$$

Par conséquent, pour que le terme de transfert ait une contribution positive, il faut que l'une des conditions suivantes soit satisfaite :

5. Ces approximations correspondent au cas d'un gaz monoatomique où la pression de radiation est négligeable et dont l'opacité suit assez fidèlement la loi d'opacité de Kramer.

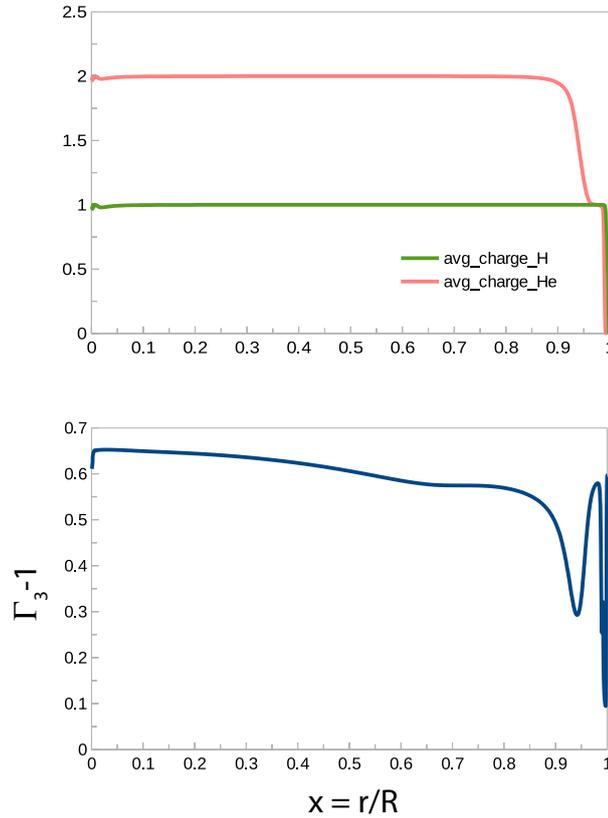


FIGURE 4.1 – Etoile de masse $M = 0.7M_{\odot}$ et de métallicité $Z = 0.0001$ dans la bande d’instabilité. *En haut* : charge moyenne des atomes d’hydrogène et d’hélium en fonction du rayon normalisé. *En bas* : évolution du coefficient adiabatique $\Gamma_3 - 1$ en fonction du rayon normalisé.

- Qu’un élément assez abondant soit partiellement ionisé. Cela aurait pour conséquence d’abaisser $\Gamma_3 - 1$ de manière significative.
- Que κ_T soit positif

Les mécanismes associés à chacune de ces conditions sont appelés, respectivement, mécanismes γ et mécanisme κ . Chacune des conditions présentées est vérifiée dans la zone d’ionisation $\text{He}^{++}/\text{He}^+$, comme cela fut suggéré par Zhevakin (voir Figure 1.15 et 4.1). Nous retrouvons ses conclusions à partir de l’approximation quasi adiabatique et du coefficient d’amplification (4.68).

Il reste, cependant, encore à expliquer l’existence de frontières pour la bande d’instabilité – les résultats présentés jusqu’à maintenant induisent l’existence d’oscillations pour l’ensemble des étoiles ayant une zone d’ionisation située à une distance supérieure à $0.85R$ du centre. Pour cela nous allons nous intéresser à la position relative de la zone de transition par rapport à la zone d’ionisation $\text{He}^{++}/\text{He}^+$.

4.3.3 Efficacité des mécanismes de pulsation

4.3.3.1 Zones adiabatique, non adiabatique et de transition

La zone de transition se situe entre la zone adiabatique et la zone non adiabatique. On la définit comme la zone vérifiant la relation :

$$c_v T \Delta m \approx L \tau \quad (4.79)$$

où τ est la période de pulsation pour le mode considéré et Δm la masse située au-dessus du niveau considéré. $c_v T \Delta m$ correspond à l’ordre de grandeur de l’énergie interne des couches surmontant le niveau considéré. $L \tau$ est l’énergie rayonnée sur une période. Ainsi, le temps mis par une onde acoustique pour atteindre cette zone est équivalent au temps caractéristique de Kelvin-Helmholtz.

On peut alors distinguer les trois régions mentionnées de la façon suivante :

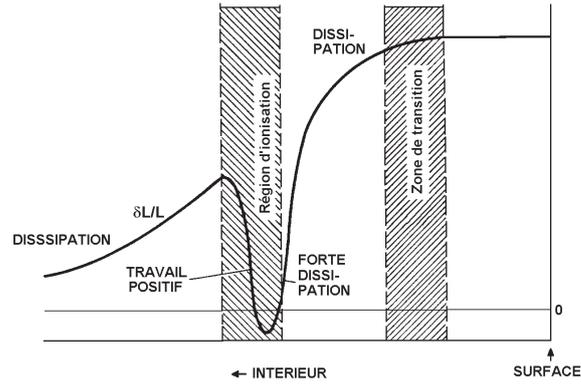


FIGURE 4.2 – Evolution de $\delta L/L$ au sein de l'étoile : zone d'ionisation dans la zone adiabatique [22].

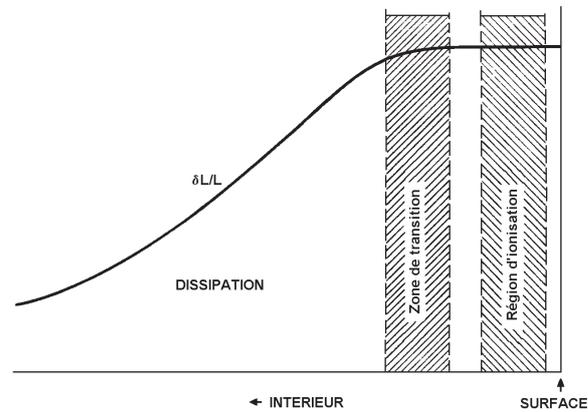


FIGURE 4.3 – Evolution de $\delta L/L$ au sein de l'étoile : zone d'ionisation dans la zone non adiabatique [22].

- La zone adiabatique où $c_v T \Delta m \gg L \tau$
- La zone de transition
- La zone non adiabatique où $c_v T \Delta m \ll L \tau$

Dans cette dernière zone, la variation de $\partial L/L$ est donnée par :

$$\Delta \frac{\delta L}{L} = - \frac{s c_v T \Delta m}{L} \frac{\delta S}{c_v} \quad (4.80)$$

Le second membre étant très petit, on en déduit que la luminosité y est quasi constante. Etant donné sa faible capacité calorifique, cette zone n'a que peu d'influence sur l'excitation ou l'inhibition des oscillations.

4.3.3.2 Position relative des zones d'ionisation et de transition : conséquence sur l'efficacité des mécanismes κ/γ

L'explication de l'efficacité des mécanismes κ/γ dans la bande d'instabilité est due à Cox[22]. Lorsque la zone d'ionisation se situe dans la zone adiabatique, son effet déstabilisant est compensé dans sa partie externe (voir Figure 4.2). Lorsqu'elle se situe dans la zone non adiabatique, δL y étant constant, son influence est limitée (voir Figure 4.3). Il faut donc, pour que l'instabilité vibrationnelle se développe, que la zone d'ionisation se situe au niveau de la zone de transition (voir Figure 4.4). Ainsi, la bande d'instabilité observée dans le diagramme HR correspond à la coïncidence de ces deux zones. A sa gauche, les températures effectives étant plus importantes, la zone d'ionisation se trouve dans la région non adiabatique; à sa droite, les températures plus basses favorisent les phénomènes de convection, qui à terme inhibent les mécanismes κ/γ .

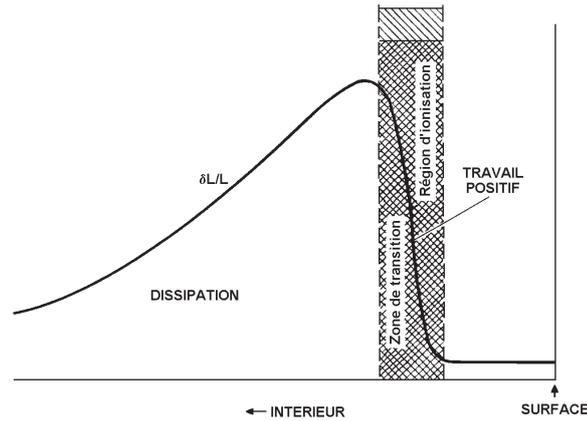


FIGURE 4.4 – Evolution de $\delta L/L$ au sein de l'étoile : zone d'ionisation dans la zone de transition [22].

4.3.3.3 Illustration des mécanismes de pulsation à partir des modèles obtenus par MESA

Afin d'illustrer les mécanismes que nous avons détaillés, nous avons repris les modèles obtenus par MESA que nous avons présentés au premier chapitre. Nous avons repéré les zones d'ionisation grâce aux charges moyennes des atomes d'hélium et d'hydrogène. Toute modification dans celles-ci correspondait à une zone d'ionisation. De même, nous avons déduit la position de la zone de transition en utilisant les temps caractéristiques (voir Figures 4.5 et 4.6). Dans le cas où ces courbes s'intersecteraient, leur point d'intersection donnerait une approximation de la position de la zone de transition. Le travail par cycle, à partir du centre de l'étoile, ainsi que sa dérivée spatiale sont représentés pour chacun de ces cas.

4.4 Conclusion

Après avoir exposé les principales caractéristiques observationnelles des étoiles pulsantes de type RR Lyrae, dans la première partie de ce mémoire, nous consacrons la seconde partie à l'étude théorique des mécanismes de pulsations. L'objectif était pour nous de démontrer l'existence d'oscillations, d'étudier leurs évolutions dans le temps en analysant les termes d'amortissement et d'excitation, et enfin, de pousser plus loin l'étude de la stabilité de ces pulsations en établissant l'existence d'un cycle limite, de variation de la fréquence, d'échange d'énergie entre les différents modes de pulsations. Dans ce premier chapitre, nous avons appliqué la méthode des perturbations aux équations régissant la physique de l'étoile, et nous n'avons gardé que les termes du premier degré. Nous avons vu que ces équations, sous leur forme la plus simple, conduisaient à l'existence d'oscillations. Le cas adiabatique nous a permis de distinguer deux cas de figures : les configurations *dynamiquement stables* et *dynamiquement instables*. En ne considérant que les premières, nous avons restreint notre champ d'étude aux cas des oscillations radiales adiabatiques, et nous avons montré que, dans ce cas, le problème se ramenait à un problème de Sturm-Liouville. Les valeurs propres de l'opérateur correspondant nous donne les fréquences d'oscillations, et les fonctions propres sont associées aux variations spatiales des variables considérées – rayon, température, luminosité, etc. Si cette approche nous permet de justifier l'existence théorique d'oscillations, elle ne permet pas d'analyser leur stabilité. Il a alors été nécessaire d'appliquer aux équations établies une nouvelle perturbation correspondant au cas quasi adiabatique. Nous avons alors établi une expression du travail durant un cycle donnant les conditions nécessaires à l'excitation des oscillations. Trois mécanismes ressortent : le mécanisme ϵ correspondant à l'excitation nucléaire, le mécanisme γ qui favorise les oscillations dans les zones où le coefficient adiabatique $\Gamma_3 - 1$ est significativement bas, et le mécanisme κ correspondant à une variation positive de l'opacité avec la température. Dans le cas des étoiles de type RR Lyrae, le premier est négligé. Nous avons montré, que les deux suivants sont liés à l'existence d'une zone d'ionisation $\text{He}^{++}/\text{He}^+$ et ne peuvent être efficace que si celle-ci est située au niveau de la zone de transition entre les zones adiabatique et non adiabatique.

Ainsi, l'origine des pulsations provient de l'inertie de la force gravitationnelle par rapport aux forces de pression. Le retard de ces dernières pour contrebalancer la première explique les oscillations observées. Ce retard est dû à la présence d'une zone d'ionisation au niveau de la zone de transition. L'augmentation de l'énergie gravitationnelle sert à ioniser les éléments présents dans cette zone. La diminution de pression résultante, lorsque l'étoile se contracte, ne contrebalance alors plus la force de gravitation. De façon

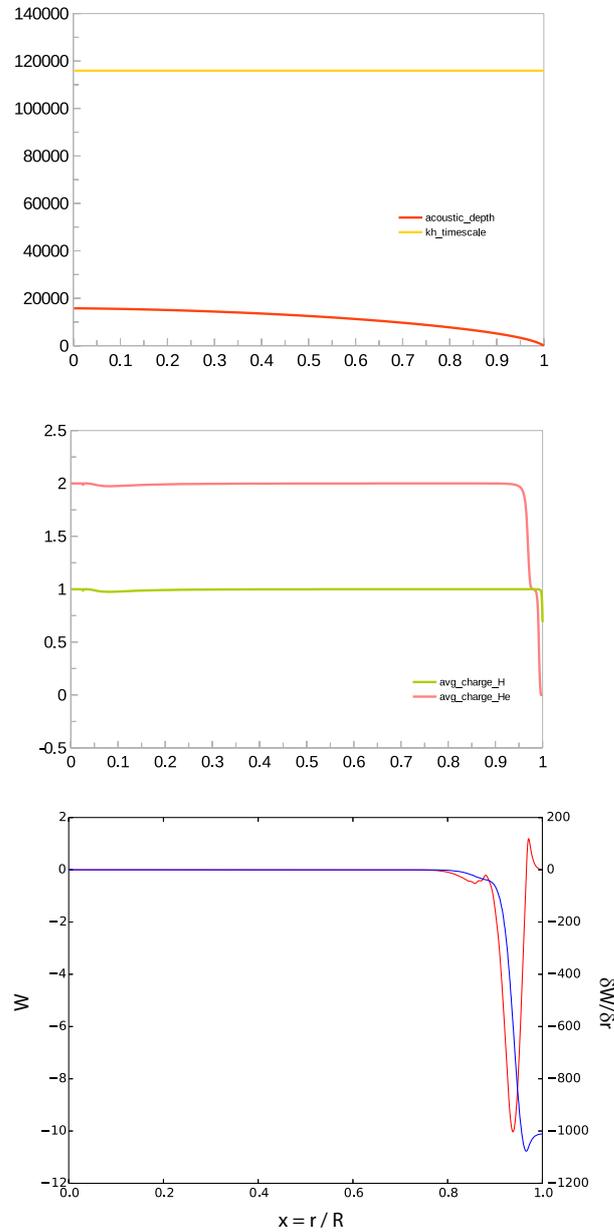


FIGURE 4.5 – Étoile de masse $M = 0.7M_{\odot}$ et de métallicité $Z = 0.0001$, au début de la branche horizontale et hors de la bande d’instabilité. *En haut* : Temps caractéristiques (en secondes). L’intersection entre les courbes correspond à la zone de transition. *Au milieu* : Evolution de la charge moyenne des atomes d’hélium et d’hydrogène. Toute variation significative correspond à une zone d’ionisation. *En bas* : travail total par cycle à partir du centre de l’étoile (bleu) et dérivée spatiale du travail par cycle (rouge) en fonction de la position (rayon normalisé). Les valeurs des puissances et leur variation sont données à titre indicatif.

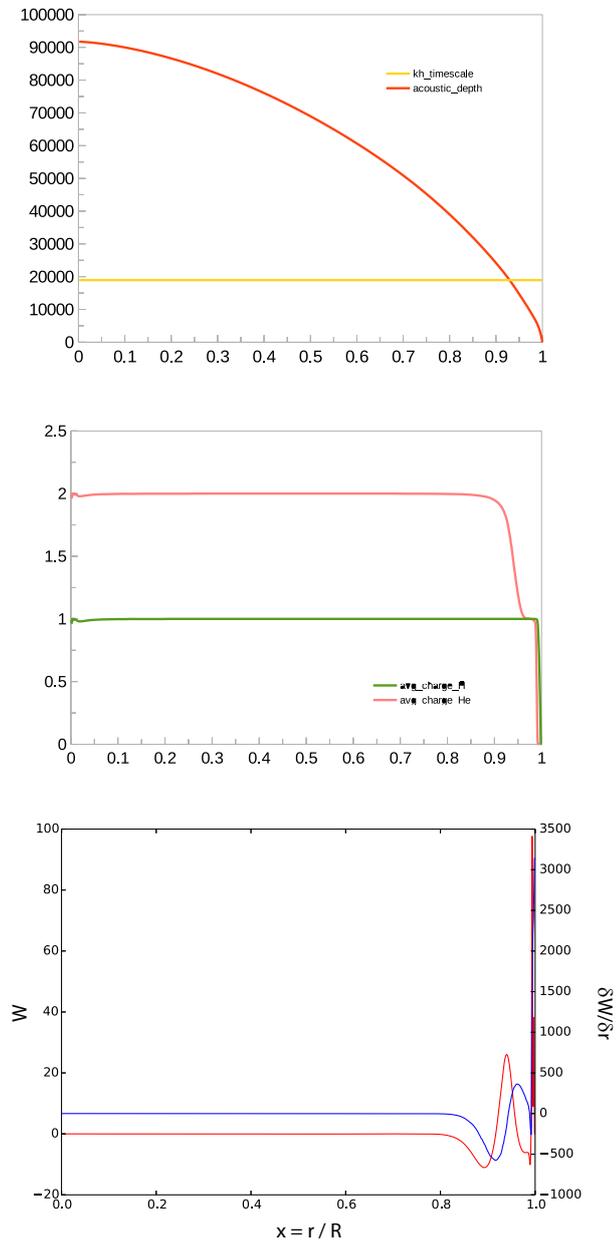


FIGURE 4.6 – Même figure que 4.5 pour une étoile dans la bande d'instabilité.

similaire, lors de la contraction, l'ionisation entraîne une augmentation de l'opacité qui empêche les forces de pression de contrer la force responsable de la contraction⁶. Les deux phénomènes sont intimement liés, c'est pour cela, qu'on les regroupe usuellement sous le terme de mécanisme κ/γ .

Bien que la modélisation exposée contienne de nombreuses hypothèses simplificatrices (oscillations radiales, quasi adiabatique, développement linéaire), elle nous a permis d'établir les mécanismes de pulsation et les conditions nécessaires à leur observation. Cependant certaines problématiques posées au début et durant ce chapitre restent encore en suspens. L'existence d'un cycle limite n'a pas été démontré. Par conséquent, cela veut dire que le coefficient d'amplification conduirait à une dynamique instable, ce que l'on a rejeté. Les modulations d'amplitude et de fréquence elles aussi n'ont pas pu être expliquées par l'approche linéaire. Il est donc nécessaire de pousser plus loin l'analyse des équations exposées, en incluant des termes d'ordre supérieurs à un. Or, ceci va nous conduire à une formulation plus complexe que l'on ne pourra résoudre sans simplification. Nous verrons ainsi, dans le chapitre suivant, comment, en discrétisant spatialement les équations perturbées d'ordre supérieur à deux, nous avons réussi à ramener le problème des oscillations à un système analysable et connu. Nous répondrons grâce à cette nouvelle modélisation, aux problématiques laissées en suspens.

6. On retrouve le temps de quasi chute libre défini au chapitre 3. Lorsque l'effet du mécanisme κ/γ s'estompe, le comportement d'oscillateur harmonique réapparaît, comme nous le verrons au chapitre suivant.

Chapitre 5

Discrétisation spatiale des équations régissant les pulsations des étoiles RR Lyrae : analogie avec un système d'oscillateurs couplés, synchronisation et effet Blazhko

« Tout ce qui est extérieur est aussi intérieur », pourrait-on dire avec Goethe.

Jung, L'âme et la vie.

L'approximation linéaire nous a permis d'expliquer l'existence des oscillations au sein des étoiles RR Lyrae. L'approche quasi adiabatique quant à elle, nous a conduit plus loin en établissant un critère de stabilité expliquant les mécanismes à l'origine des pulsations. Cependant, en négligeant les termes non linéaires, nous nous gardons de toutes solutions aux problèmes les plus complexes que sont l'existence d'un cycle limite, l'origine de l'effet Blazhko et les phénomènes de synchronisation (entre les couches d'une part, et entre la modulation de phase et la modulation d'amplitude d'autre part). Un nouveau formalisme qui incorporerait ces termes, tout en restant exploitable, est donc nécessaire. Nous proposons dans ce dernier chapitre une telle modélisation. Nous procédons pour cela à une discrétisation spatiale¹ du problème non linéaire. L'analogie avec un système d'oscillateurs couplés est alors établie, nous permettant d'exploiter les résultats existants dans ce domaine. Nous proposerons ainsi une nouvelle théorie pour l'effet Blazhko, que nous étayerons par des premiers résultats. Ces derniers seront obtenus par une analyse par transformée en ondelettes [39], outil dont nous préconiserons l'utilisation systématique pour l'étude des courbes de lumière. Nous serons également en mesure d'expliquer l'*accrochage* de fréquence entre la modulation d'amplitude et de phase présentée au chapitre 3. Enfin, nous démontrerons l'existence d'une synchronisation des couches, telle qu'elle fut proposée par Cox [23], en considérant l'analogie entre un oscillateur à relaxation et le comportement de la couche d'ionisation.

5.1 Discrétisation spatiale des équations régissant les pulsations des étoiles RR Lyrae

5.1.1 Discrétisation spatiale des équations de mouvement et d'énergie

Discrétisons le volume de l'étoile, supposé sphérique, en J zones sphériques et concentriques, de telle sorte que chacune de ces zones ait une masse constante dans le temps. Nous obtenons un ensemble,

1. La modélisation discrète de la physique stellaire n'est pas nouvelle. Elle est commune dans le traitement numérique de ce type de problème, par exemple dans les codes d'évolution stellaire [103]. On retrouve cette approche également dans les travaux de Takahashi et Morikawa [101].

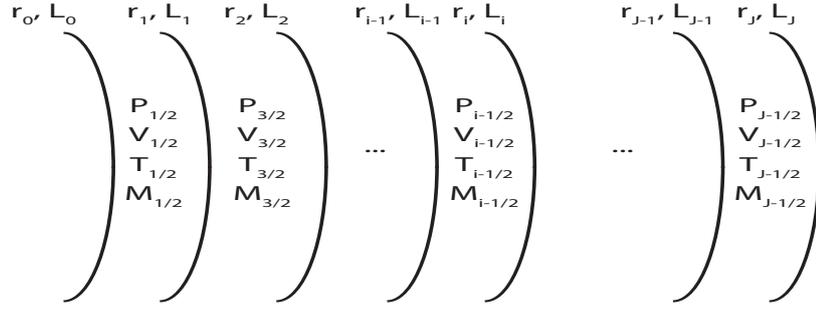


FIGURE 5.1 – Discrétisation spatiale de l'étoile : $P_{i-1/2}$, $V_{i-1/2}$, $M_{i-1/2}$, $T_{i-1/2}$ représentent respectivement la pression, le volume spécifique, la masse et la température au centre de la zone et r_i , L_i , respectivement, la distance au centre et la luminosité émanant de l'intérieur.

représenté à la figure 5.1, de $J + 1$ interfaces, caractérisées par les variables extrinsèques r_i et L_i (respectivement la distance au centre et la luminosité émanant de l'intérieur) et J zones, caractérisées par les variables intrinsèques $P_{i-1/2}$, $V_{i-1/2}$, $M_{i-1/2}$, $T_{i-1/2}$ (respectivement la pression, le volume spécifique, la masse et la température au centre de la zone).

En ne considérant que le cas adiabatique, nous pouvons alors écrire l'équation de mouvement pour chaque interface, en supposant qu'elles sont soumises à leur propre poids et aux pressions extérieures :

$$\frac{d^2 r_i}{dt^2} = \frac{Gm_i}{r_i^2} + \frac{4\pi r_i^2 (P_{i+1/2} - P_{i-1/2})}{\mathcal{D}M_i} \quad (5.1)$$

où $m_i \equiv M_{r_i}$ est la masse contenu dans la sphère de rayon r , et où :

$$\mathcal{D}M_i \equiv \frac{1}{2} (M_{i-1/2} + M_{i+1/2}) \quad (5.2)$$

En incluant les perturbations au premier degré, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (r_{i,0} + \delta r_i)}{dt^2} &= \frac{Gm_i}{(r_{i,0} + \delta r_i)^2} + 4\pi (r_{i,0} + \delta r_i)^2 \frac{(P_0 + \delta P)_{i+1/2} - (P_0 + \delta P)_{i-1/2}}{\mathcal{D}M_i} \\ &= \frac{Gm_i}{r_{i,0}^2 \left(1 + \frac{\delta r_i}{r_{i,0}}\right)^2} + 4\pi r_{i,0}^2 \left(1 + \frac{\delta r_i}{r_{i,0}}\right)^2 \frac{P_{i+1/2,0} \left(1 + \frac{\delta P_{i+1/2}}{P_{i+1/2,0}}\right) - P_{i-1/2,0} \left(1 + \frac{\delta P_{i-1/2}}{P_{i-1/2,0}}\right)}{\mathcal{D}M_i} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Nous pouvons alors développer cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 (r_{i,0} + \delta r_i)}{dt^2} &= \frac{Gm_i}{r_{i,0}^2} - \frac{2Gm_i \delta r_i}{r_{i,0}^3} + \frac{4\pi r_{i,0}^2}{\mathcal{D}M_i} \left(1 + 2\frac{\delta r_i}{r_{i,0}}\right) \left\{ P_{i+1/2,0} \left(1 + \frac{\delta P_{i+1/2}}{P_{i+1/2,0}}\right) \right. \\ &\quad \left. - P_{i-1/2,0} \left(1 + \frac{\delta P_{i-1/2}}{P_{i-1/2,0}}\right) \right\} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dans le cas adiabatique, nous avons également l'équation perturbée au premier ordre :

$$\left(\frac{\delta P}{P}\right)_{i-1/2} = \Gamma_{1,i-1/2} \left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)_{i-1/2} \quad (5.5)$$

En injectant (5.5) dans (5.4), nous obtenons l'équation suivante :

$$\frac{d^2(r_{i,0} + \delta r_i)}{dt^2} = \frac{Gm_i}{r_{i,0}^2} - \frac{2Gm_i \delta r_i}{r_{i,0}^3} + \frac{4\pi r_{i,0}^2}{\mathcal{D}M_i} \left(1 + 2\frac{\delta r_i}{r_{i,0}}\right) \times \left\{ P_{i+1/2,0} \left(1 + \Gamma_{1,i+1/2,0} \frac{\delta \rho_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2,0}}\right) - P_{i-1/2,0} \left(1 + \Gamma_{1,i-1/2,0} \frac{\delta \rho_{i-1/2}}{\rho_{i-1/2,0}}\right) \right\} \quad (5.6)$$

Nous devons alors exprimer la perturbation de densité en fonction de la perturbation radiale. Pour cela, en rappelant que la masse reste fixe entre r_{i-1} et r_i , nous écrivons dans un premier temps :

$$\begin{aligned} \rho_{i-1/2,0} + \delta \rho_{i-1/2} &= \frac{M_{i-1/2,0}}{V_{i-1/2,0} + \delta V_{i-1/2}} \\ \rho_{i-1/2,0} \left(1 + \frac{\delta \rho_{i-1/2}}{\rho_{i-1/2,0}}\right) &= \frac{M_{i-1/2,0}}{V_{i-1/2,0} \left(1 + \frac{\delta V_{i-1/2}}{V_{i-1/2,0}}\right)} \\ \rho_{i-1/2,0} \left(1 + \frac{\delta \rho_{i-1/2}}{\rho_{i-1/2,0}}\right) &= \frac{M_{i-1/2,0}}{V_{i-1/2,0}} \left(1 - \frac{\delta V_{i-1/2}}{V_{i-1/2,0}}\right) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Il est facilement démontrable que :

$$\delta V_{i-1/2} = 4\pi (r_{i,0}^2 \delta r_i - r_{i-1,0}^2 \delta r_{i-1}) \quad (5.8)$$

En injectant l'équation précédente dans (5.7) et en utilisant l'égalité statique, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\delta \rho_{i-1/2}}{\rho_{i-1/2,0}} &= -\frac{M_{i-1/2,0}}{\rho_{i-1/2,0} V_{i-1/2,0}^2} 4\pi (r_{i,0}^2 \delta r_i - r_{i-1,0}^2 \delta r_{i-1}) \\ &= -\frac{\rho_{i-1/2,0}}{M_{i-1/2,0}} 4\pi (r_{i,0}^2 \delta r_i - r_{i-1,0}^2 \delta r_{i-1}) \end{aligned} \quad (5.9)$$

En reprenant l'équation (5.6), et en enlevant les termes correspondant à l'égalité statique, nous arrivons alors à :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta r_i}{dt^2} &= -\frac{2Gm_i \delta r_i}{r_{i,0}^3} + \frac{8\pi r_{i,0} \delta r_i}{\mathcal{D}M_i} (P_{i+1/2,0} - P_{i-1/2,0}) + \frac{4\pi r_{i,0}^2}{\mathcal{D}M_i} \times \\ &\quad \left\{ P_{i+1/2,0} \Gamma_{1,i+1/2,0} \frac{\delta \rho_{i+1/2}}{\rho_{i+1/2,0}} - P_{i-1/2,0} \Gamma_{1,i-1/2,0} \frac{\delta \rho_{i-1/2}}{\rho_{i-1/2,0}} \right\} \\ &= -\frac{2Gm_i \delta r_i}{r_{i,0}^3} + \frac{8\pi r_{i,0} \delta r_i}{\mathcal{D}M_i} (P_{i+1/2,0} - P_{i-1/2,0}) - \frac{16\pi^2 r_{i,0}^2}{\mathcal{D}M_i} \times \\ &\quad \left\{ \left(\frac{P_0 \Gamma_{1,0} \rho_0}{M_0}\right)_{i+1/2} (r_{i+1,0}^2 \delta r_{i+1} - r_{i,0}^2 \delta r_i) - \left(\frac{P_0 \Gamma_{1,0} \rho_0}{M_0}\right)_{i-1/2} (r_{i,0}^2 \delta r_i - r_{i-1,0}^2 \delta r_{i-1}) \right\} \end{aligned} \quad (5.10)$$

En posant comme conditions initiales $\delta r_0 = 0$, nous n'avons plus que J inconnues : les $\delta r_i \in \llbracket 1 ; J \rrbracket$. On suppose également la pression nulle à l'extérieur de la dernière interface : $P_{J+1/2} = 0$. En abandonnant les indices 0 pour les valeurs à l'équilibre, nous pouvons réécrire l'équation de mouvement sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \delta r_i}{dt^2} &= -\frac{2Gm_i}{r_i^3} \delta r_i + \frac{8\pi r_i \delta r_i}{\mathcal{D}M_i} (P_{i+1/2} - P_{i-1/2}) - \frac{16\pi^2 r_i^2}{\mathcal{D}M_i} \left\{ \left(\frac{\Gamma_1 P \rho}{M}\right)_{i+1/2} \times [r_{i+1}^2 \delta r_{i+1} - r_i^2 \delta r_i] \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\Gamma_1 P \rho}{M}\right)_{i-1/2} \times [r_i^2 \delta r_i - r_{i-1}^2 \delta r_{i-1}] \right\} \\ &= -\frac{k_{i-1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_{i-1} - \frac{\lambda_i}{\mathcal{D}M_i} \delta r_i - \frac{k_{i+1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_{i+1} \end{aligned} \quad (5.11)$$

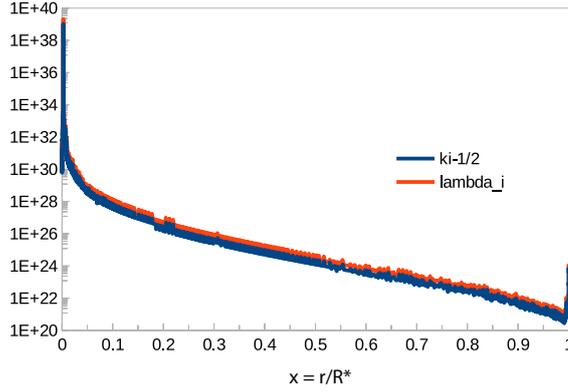


FIGURE 5.2 – Evolution des coefficients $k_{i-1/2}$ et λ_i en fonction de la distance au centre de l'étoile r/R . Les coefficients sont donnés en unités CGS.

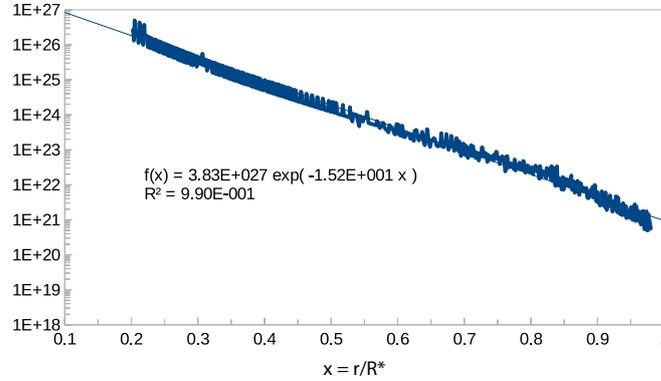


FIGURE 5.3 – Approximation du coefficient $k_{i-1/2}$ par une exponentielle décroissante. La fonction correspondante est $3.83 \cdot 10^{27} e^{-15.2 \cdot r}$. Son coefficient de détermination est de : $R^2 = 0.99$. L'échelle est logarithmique en ordonnée.

avec, pour $i \in \llbracket 1 ; J \rrbracket$:

$$k_{i-1/2} = 16\pi^2 (r_i r_{i-1})^2 \left(\frac{\Gamma_1 P \rho}{M} \right)_{i-1/2} \quad (5.12)$$

$$\lambda_i = \frac{2Gm_i \mathcal{D}M_i}{r_i^3} - 8\pi r_i (P_{i+1/2} - P_{i-1/2}) - 16\pi^2 r_i^4 \left[\left(\frac{\Gamma_1 P \rho}{M} \right)_{i-1/2} + \left(\frac{\Gamma_1 P \rho}{M} \right)_{i+1/2} \right] \quad (5.13)$$

et

$$k_{J+1/2} = 0 \quad (5.14)$$

$$\lambda_J = \frac{2Gm_i \mathcal{D}M_i}{r_J^3} + 8\pi r_i P_{i+1/2} - 16\pi^2 r_J^4 \left(\frac{\Gamma_1 P \rho}{M} \right)_{J-1/2} \quad (5.15)$$

L'évolution des coefficients $k_{i-1/2}$ et λ_i en fonction de la distance au centre de l'étoile est représentée à la figure 5.2. A partir d'une distance de $0.1R$ du centre et jusqu'au début de la photosphère, l'évolution des coefficients suit une décroissance exponentielle comme montrée à la figure 5.3. L'interpolation donnée conduit à un résultat pour lequel le coefficient de détermination est très proche de 1 – correspondant à une très bonne estimation.

Nous pouvons réécrire (5.11) sous la forme matricielle suivante :

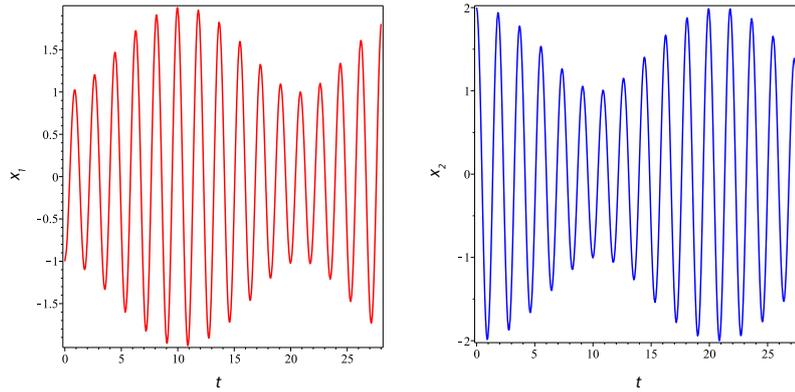


FIGURE 5.4 – Phénomènes de battements observés pour les déplacements x_1 et x_2 des masses m_1 et m_2 avec des conditions initiales quelconques – ne correspondant pas à celles associées aux fréquences propres. Les unités sont arbitraires.

appliquer, dans une approche naïve, les résultats connus pour un système de J oscillateurs couplés, aux étoiles pulsantes. Cependant, si cette analogie est riche en enseignements, elle repose sur une approximation linéaire et adiabatique. Ainsi, par exemple, l'influence de la zone d'ionisation n'est pas modélisée. Dans un premier temps, nous montrerons en quoi cette analogie nous permet de mieux comprendre les pulsations des RR Lyrae, que cela soit vis-à-vis du mode de pulsation principal ou de l'effet Blazhko, et, également, de mieux sonder l'intérieur de ce type d'étoile. Ensuite, nous confronterons les résultats théoriques aux observations, afin de comprendre les limitations de notre modèle. Ceci fait, nous améliorons en conséquence notre modélisation dans la section suivante.

5.1.2.1 Ce que l'analogie explique : mode de pulsation, effet Blazhko, synchronisation et dédoublement de période

Nous avons vu que la matrice A posée précédemment est diagonalisable. Nous pouvons alors obtenir J pulsations propres qui correspondent aux valeurs propres de la matrice³, associées à J vecteurs propres qui correspondent aux conditions initiales nécessaires pour que chacune des masses oscillent à la même fréquence propre.

Dans le cas où $J = 2$, le système admet deux valeurs propres liées à deux vecteurs propres. A chacun de ces vecteurs correspond un mouvement symétrique ou anti-symétrique des deux masses. Ainsi, si les masses sont dans une configuration initiale donnée par un vecteur propre, elles oscilleront à la même fréquence, en phase, ou en opposition de phase, suivant le vecteur propre associé. Dans les autres cas, la solution du système d'équations différentielles est une combinaison linéaire des modes propres :

$$\begin{cases} x_1 = u_1 \cos(\omega_1 t + \phi_{u_1}) + v_1 \cos(\omega_2 t + \phi_{v_1}) \\ x_2 = u_2 \cos(\omega_1 t + \phi_{u_2}) + v_2 \cos(\omega_2 t + \phi_{v_2}) \end{cases} \quad (5.22)$$

où u_i , v_i , ϕ_{u_i} , ϕ_{v_i} sont définis par les conditions initiales. En fonction des valeurs de ω_1 et ω_2 , deux types de comportement peuvent être observés. Si $\omega_1 \approx \omega_2$, on observe un phénomène de battements (voir Figure 5.4). Cela se produit en présence d'un couplage faible, c'est-à-dire que lorsqu'il existe un coefficient k_0 et un coefficient k tel que $k_0 \ll k$. Dans le cas contraire, on a un signal anharmonique.

Nous pouvons déjà faire le lien avec deux phénomènes observés chez les RR Lyrae : la classification de Bailey et le phénomène Blazhko (voir Tableau 5.1). Pour ce dernier, l'interprétation issue du système d'oscillateurs couplés est, comme nous le verrons par la suite, intéressante : la modulation des oscillations est une conséquence d'un transfert d'énergie périodique.

Bien que présentant des premiers résultats satisfaisants, cette analogie entre un système de deux oscillateurs couplés et la pulsation des RR Lyrae présente trois principaux défauts⁴ :

- un phénomène Blazhko uniquement présent chez les RRc : les mouvements des deux masses seront forcément en opposition de phase dans notre modélisation ;

3. Plus précisément les valeurs propres sont associées au carré des pulsations propres.

4. Nous verrons juste après que cette analogie présente plus que trois défauts, mais nous nous concentrons ici sur ceux spécifiques à un système à deux oscillateurs couplés.

Oscillateurs couplés	RR Lyrae
Mode symétrique	RRab
Mode antisymétrique	RRc
Mode quelconque + pas de couplage faible	RRd
Mode quelconque + couplage faible	Blazhko

TABLE 5.1 – Analogie entre un système d’oscillateurs couplés et les modes de pulsation d’une étoile de type RR Lyrae.

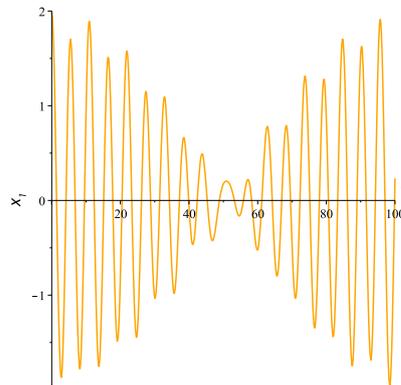


FIGURE 5.5 – Illustration du phénomène de *period doubling* dans le cas de trois masses égales à l’unité, associées à des ressorts de raideurs $1 N \cdot m^{-1}$ aux extrémités et $0.25 N \cdot m^{-1}$ au centre. Les unités sont arbitraires.

- la probabilité de tomber sur une étoile RR Lyrae présentant le phénomène Blazhko ou sur une RRd semble plus importante que celle de tomber sur une RRab ou une RRc : les conditions initiales pour obtenir ces dernières sont assez restrictives comparées à celles demandées pour obtenir les premières ;
- la faible résolution spatiale induite par une discrétisation à deux masses et par conséquent une simplification trop importante pouvant conduire à des erreurs d’interprétation.

Toujours est-il que ces premiers résultats montrent que le système d’oscillateurs couplés semble pouvoir expliquer de façon satisfaisante les principaux phénomènes de pulsation. La simplification induite est à double tranchant, puisque, si elle nous permet de mieux comprendre la physique des oscillations au sein d’une étoile de type RR Lyrae, elle élude *a fortiori* certains détails primordiaux.

Afin de palier à ces défauts, nous allons complexifier progressivement notre modélisation. Pour cela nous allons tout d’abord augmenter le nombre d’oscillateurs couplés. Ensuite, nous verrons quelles sont les limites intrinsèques à cette analogie afin de s’en affranchir avec une nouvelle modélisation.

Continuons donc, en nous intéressant au cas où $J = 3$. Nous aurons trois fréquences propres, associées à trois vecteurs propres. Le premier mode correspond au mode symétrique où chacun des déplacements des masses sont en phase ; le second mode correspond au mode antisymétrique pour les masses aux extrémités, celle au centre restant immobile ; le troisième correspond à un mode où les masses adjacentes sont en opposition de phase (les masses aux extrémités sont donc en phase). On retrouve les mêmes résultats concernant le phénomène de battements, à deux différences près. La première est l’existence du phénomène Blazhko pour les étoiles du type RRd. En effet, il suffit que deux fréquences soient assez éloignées pour obtenir un oscillateur anharmonique, sous les bonnes conditions initiales, et que la troisième fréquence propre soit proche de l’une des deux autres, pour observer le phénomène de battements. Le phénomène de *period doubling* [99] représenté à la figure 5.5, constitue le cas intermédiaire entre les étoiles du type RRd présentant l’effet Blazhko et les étoiles RRc ou RRab présentant ce même effet. Ce phénomène correspond à une monotonie aléatoire des maxima durant une phase de modulation : par exemple, durant la phase croissante de l’effet Blazhko, les maxima devraient croître, or on remarque une alternance entre croissance et décroissance. La seconde est que l’on peut observer une modulation dans le cas où les masses aux extrémités sont en phase, c’est-à-dire similaire aux pulsations des RRab.

5.1.2.2 Limites de l'analogie

Si l'analogie avec le système d'oscillateurs couplés nous permet de mieux comprendre les pulsations des RR Lyrae, il échoue à reproduire certains phénomènes observés. Nous avons vu au chapitre 3 que la courbe de vitesse radiale pouvait être découpée en deux parties : une partie correspondant à un mouvement de type *chute libre*, et une autre correspondant à celui d'un *oscillateur harmonique*. Or, notre modélisation ne reproduit de façon satisfaisante que le mouvement harmonique. Nous verrons que pour corriger ce point, il est nécessaire de prendre en compte le comportement de la zone d'ionisation $\text{He}^{++}/\text{He}^+$.

Qui plus est, nous avons également vu au chapitre 3 que durant un cycle de modulation, les temps caractéristiques et les pentes des courbes variaient, que ce soit pour la vitesse radiale ou la courbe de lumière. Or ce n'est pas le cas pour notre système de J oscillateurs couplés. Dans le cas où les conditions initiales permettent d'observer des battements, la fréquence d'oscillation reste la même. Nous verrons que la linéarisation des équations perturbées est responsable de ce défaut, défaut que nous corrigerons en prenant en compte les termes non linéaires d'ordre supérieurs à un.

Enfin, la modélisation proposée ne permet pas de répondre à une dernière problématique qui est la synchronisation des couches. Cox souleva ce point dans [23]. Il explique que le mouvement de chacune des couches est synchronisé, c'est-à-dire qu'elles oscillent à la même fréquence. Nous avons vu que cela était le cas si elles suivaient un mode propre. Dans le cas du système linéaire considéré, cela implique que le mouvement oscillant débute avec les conditions initiales précises que sont celles des modes propres. Si ce n'est pas le cas, nous verrons apparaître au mieux un signal modulé, au pire des pulsations chaotiques. Ainsi, d'après notre modélisation, nous avons plus de chance de tomber sur ce type de comportement que sur un mode propre. Ceci est contraire aux observations et pointe une nouvelle limite de notre analogie. Cox donne une explication qualitative reposant sur la dissipation de l'énergie dans le cas de mouvement chaotique qui, *in fine*, conduirait à un mouvement synchronisé des couches. Pour notre part, nous proposerons une modélisation non linéaire des oscillations de la zone d'ionisation et des couches inférieures, qui nous permettra d'étudier les conditions nécessaires à l'apparition de ce phénomène.

Mais surtout, cette modélisation non linéaire nous mènera à une explication précise et quantitative de l'effet Blazhko.

5.2 Modélisation discrète non linéaire : analogie avec le modèle de Fermi-Pasta-Ulam et explication de l'effet Blazhko

Nous allons reprendre les équations posées au début de ce chapitre et les développer jusqu'au troisième ordre. Nous obtiendrons ainsi une formulation non linéaire qui va nous permettre d'obtenir de plus amples détails sur les oscillations au sein des étoiles RR Lyrae. Nous exploiterons l'analogie de notre formalisme avec le modèle de Fermi-Pasta-Ulam et la chaîne de Todda pour expliquer l'accrochage de fréquence entre la modulation d'amplitude et la modulation de fréquence (voir Chapitre 3). Mais surtout, ceci nous mènera à un ensemble d'hypothèses, encore jamais formulées, vis-à-vis de l'effet Blazhko. Nous proposerons enfin une première vérification de ces hypothèses en procédant à une analyse temps-fréquence des courbes de lumières d'étoiles de type RR Lyrae.

5.2.1 Développement non linéaire à l'ordre trois des équations discrétisées

Nous souhaitons donner un développement de l'équation (5.4) à l'ordre 3. Pour cela, nous devons reconsidérer l'expression de r_i . En incluant des termes d'ordre supérieur à un, il faut prendre en compte ceux-ci dans l'expression du rayon de la $i^{\text{ème}}$ masse. Ainsi, nous écrivons :

$$r_i = r_{i,0} + \epsilon \delta r_{i,0} + \epsilon^2 \delta r_{i,1} + \epsilon^3 \delta r_{i,2} + o(\epsilon^3) \quad (5.23)$$

Nous réécrivons l'expression précédente sous la forme :

$$\begin{aligned} r_i &= r_{i,0} + \epsilon (\delta r_{i,0} + \epsilon \delta r_{i,1} + \epsilon^2 \delta r_{i,2} + o(\epsilon^2)) \\ &= r_0 + \epsilon \delta r_i \end{aligned} \quad (5.24)$$

avec $\delta r_i = \delta r_{i,0} + \epsilon \delta r_{i,1} + \epsilon^2 \delta r_{i,2} + o(\epsilon^2)$.

Après calcul, en éliminant les termes correspondant au cas statique, et en divisant par ϵ chacun des membres de l'équation 5.4 développée à l'ordre 3, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 \delta r_i}{dt^2} = & -\frac{k_{i-1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_{i-1} - \frac{\lambda_i}{\mathcal{D}M_i} \delta r_i - \frac{k_{i+1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_{i+1} + \epsilon \left[\frac{\alpha_{i-1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_{i-1}^2 + \frac{A_i}{\mathcal{D}M_i} \delta r_i^2 + \frac{\alpha_{i+1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_{i+1}^2 \right. \\
& + \frac{c_{i-1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_i \delta r_{i-1} + \frac{c_{i+1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_{i+1} \delta r_i \left. \right] + \epsilon^2 \left[\frac{\beta_{i-1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_{i-1}^3 + \frac{B_i}{\mathcal{D}M_i} \delta r_i^3 + \frac{\beta_{i+1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_{i+1}^3 \right. \\
& + \frac{\xi_{i-1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_i \delta r_{i-1}^2 + \frac{\xi_{i+1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_i \delta r_{i+1}^2 + \frac{\Xi_{i-1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_i^2 \delta r_{i-1} + \frac{\Xi_{i+1/2}}{\mathcal{D}M_i} \delta r_i^2 \delta r_{i+1} \left. \right]
\end{aligned} \quad (5.25)$$

Les coefficients λ_i et $k_{i-1/2}$ sont les mêmes que ceux du développement linéaire. En notant $r_+ = r_{i\pm 1/2+1/2}$ et $r_- = r_{i\pm 1/2-1/2}$, les autres coefficients sont donnés par :

$$\alpha_{i\pm 1/2} = - \left[16\pi^2 r_+^2 r_- \left(\frac{P \Gamma_1 \rho}{M} \right)_{i\pm 1/2} \pm 64\pi^3 r_+^2 r_-^4 \left(\frac{P \Gamma_1 \rho^2}{M^2} \right)_{i\pm 1/2} \right] \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned}
A_i = & 3 \frac{Gmi}{r_i^4} + 4\pi (P_{i+1/2} - P_{i-1/2}) \\
& + 48\pi^2 r_i^3 \left[\left(\frac{P \Gamma_1 \rho}{M} \right)_{i+1/2} + \left(\frac{P \Gamma_1 \rho}{M} \right)_{i-1/2} \right] \\
& + 64\pi^3 r_i^6 \left[\left(\frac{P \Gamma_1 \rho^2}{M^2} \right)_{i+1/2} - \left(\frac{P \Gamma_1 \rho^2}{M^2} \right)_{i-1/2} \right]
\end{aligned} \quad (5.27)$$

$$c_{i\pm 1/2} = \mp 128\pi^3 r_+^4 r_-^2 \left(\frac{P \Gamma_1 \rho^2}{M^2} \right)_{i\pm 1/2} - 32\pi^2 r_+ r_-^2 \left(\frac{P \Gamma_1 \rho}{M} \right)_{i\pm 1/2} \quad (5.28)$$

$$\begin{aligned}
\beta_{i\pm 1/2} = & -\frac{16}{3}\pi^2 r_+^2 \left(\frac{P \Gamma_1 \rho}{M} \right)_{i\pm 1/2} \pm 64\pi^3 r_+ r_-^4 \left(\frac{P \Gamma_1 \rho^2}{M^2} \right)_{i\pm 1/2} \\
& - \frac{256}{3}\pi^4 (r_+^5 r_-^3 + 2r_+^2 r_-^6) \left(\frac{P \Gamma_1 \rho^3}{M^3} \right)_{i\pm 1/2}
\end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned}
B_i = & -4 \frac{Gmi}{r_i^5} + \frac{160}{3}\pi^2 r_i^2 \left[\left(\frac{P \Gamma_1 \rho}{M} \right)_{i+1/2} + \left(\frac{P \Gamma_1 \rho}{M} \right)_{i-1/2} \right] \\
& + 192\pi^3 r_i^5 \left[\left(\frac{P \Gamma_1 \rho^2}{M^2} \right)_{i+1/2} - \left(\frac{P \Gamma_1 \rho^2}{M^2} \right)_{i-1/2} \right] \\
& + \frac{256}{3}\pi^4 \left\{ 2r_i^8 \left[\left(\frac{P \Gamma_1 \rho^3}{M^3} \right)_{i+1/2} + \left(\frac{P \Gamma_1 \rho^3}{M^3} \right)_{i-1/2} \right] \right. \\
& \left. + r_i^5 \left[\left(\frac{P \Gamma_1 \rho^3 r^3}{M^3} \right)_{i+1/2} + \left(\frac{P \Gamma_1 \rho^3 r^3}{M^3} \right)_{i-1/2} \right] \right\}
\end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned}
\xi_{i\pm 1/2} = & -32\pi^2 r_+ r_- \left(\frac{P \Gamma_1 \rho}{M} \right)_{i\pm 1/2} \pm 64\pi^3 (2r_+ r_-^4 - r_+^4 r_-) \left(\frac{P \Gamma_1 \rho^2}{M^2} \right)_{i\pm 1/2} \\
& + \frac{256}{3}\pi^4 \left(r_+ r_-^7 + \frac{8}{3} r_+^4 r_-^4 \right) \left(\frac{P \Gamma_1 \rho^3}{M^3} \right)_{i\pm 1/2}
\end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} \Xi_{i\pm 1/2} = & -16\pi^2 r_-^2 \left(\frac{P\Gamma_1\rho}{M} \right)_{i\pm 1/2} \mp 320\pi^3 r_+^3 r_-^2 \left(\frac{P\Gamma_1\rho^2}{M^2} \right)_{i\pm 1/2} \\ & - \frac{256}{3}\pi^4 (8r_+^6 r_-^2 + r_+^3 r_-^5) \left(\frac{P\Gamma_1\rho^3}{M^3} \right)_{i\pm 1/2} \end{aligned} \quad (5.32)$$

5.2.2 Le modèle de Fermi-Pasta-Ulam : analogie et conséquences

5.2.2.1 Le modèle de Fermi-Pasta-Ulam : description et principaux résultats

Nous supposons dans un premier temps que l'ensemble des coefficients de couplage sont égaux dans notre modélisation discrète, ce qui revient à dire, dans notre analogie avec les oscillateurs couplés masse-ressort, que l'on a des masses identiques et des ressorts de même raideur⁵. On suppose que : $\forall i, m_i = 1, k_i = 1$. On peut alors réécrire notre système sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \forall i, \quad \frac{d^2\delta r_i}{dt^2} = & (\delta r_{j+1} - 2\delta r_j + \delta r_{j-1}) + \alpha \left[(\delta r_{j+1} - \delta r_j)^2 - (\delta r_j - \delta r_{j-1})^2 \right] \\ & + \beta \left[(\delta r_{j+1} - \delta r_j)^3 - (\delta r_j - \delta r_{j-1})^3 \right] \end{aligned} \quad (5.33)$$

où les paramètres α et β sont des paramètres de contrôle des effets non linéaires, respectivement quadratiques et cubiques.

Les termes non linéaires vont introduire un couplage entre les modes de vibrations générant des modes à des fréquences plus élevés. Le postulat fondamental de la physique statistique nous dit que chacun des modes propres du système sera excité à égale mesure⁶.

Ce système fut l'objet de la première simulation numérique, menée par Fermi, Pasta et Ulam [32], en 1953⁷. Ils considérèrent le système non linéaire présenté précédemment, avec des extrémités fixes et en traitant séparément les termes quadratiques (modèle α) et cubiques (modèle β) :

$$\text{Modèle } \alpha : \quad \frac{d^2\delta r_i}{dt^2} = (\delta r_{j+1} - 2\delta r_j + \delta r_{j-1}) + \alpha \left[(\delta r_{j+1} - \delta r_j)^2 - (\delta r_j - \delta r_{j-1})^2 \right] \quad (5.34)$$

$$\text{Modèle } \beta : \quad \frac{d^2\delta r_i}{dt^2} = (\delta r_{j+1} - 2\delta r_j + \delta r_{j-1}) + \beta \left[(\delta r_{j+1} - \delta r_j)^3 - (\delta r_j - \delta r_{j-1})^3 \right] \quad (5.35)$$

La figure 5.6 reproduit les résultats publiés à l'époque, où le système, dans sa configuration α , oscille initialement dans le mode fondamental. Si, dans un premier temps, l'hypothèse ergodique de Boltzmann semble vérifiée, dans la mesure où on note bien un flux du mode fondamental vers les premières et secondes harmoniques, le mécanisme se renverse, jusqu'à obtenir un niveau d'énergie pour le mode fondamental proche, à 2%, de celui initial. Ce schéma se reproduit alors pour les cycles suivants. Les auteurs remarquent que la période de ce phénomène est d'autant plus courte que le coefficient de non-linéarité est important. Une approximation de la période de récurrence fut donnée par Todda [102] :

$$T_R \approx 0.76 \frac{N^{5/2}}{\sqrt{a\alpha}} \quad (5.36)$$

où N est le nombre de masses considérées, a l'amplitude du signal initial et α le coefficient de non-linéarité.

Plus tard, une seconde périodicité fut découverte pour laquelle le mode fondamental retrouvait son énergie initiale.

Nous observons le même phénomène dans le cas où la première harmonique constituerait le mode initial. Dans ce cas, un transfert vers la seconde harmonique est observé (voir Figure 5.7).

De plus, en diminuant la valeur du coefficient de non-linéarité et l'amplitude du signal initial, on observe un échange d'énergie moins marqué, de sorte que le mode fondamental reste toujours prépondérant

5. Nous reviendrons sur l'hypothèse d'homogénéité à la fin de ce chapitre.

6. Après un régime transitoire.

7. Une étude analytique de ce cas particulier d'oscillateurs couplés, dans le cas linéaire, est donnée à l'annexe D.

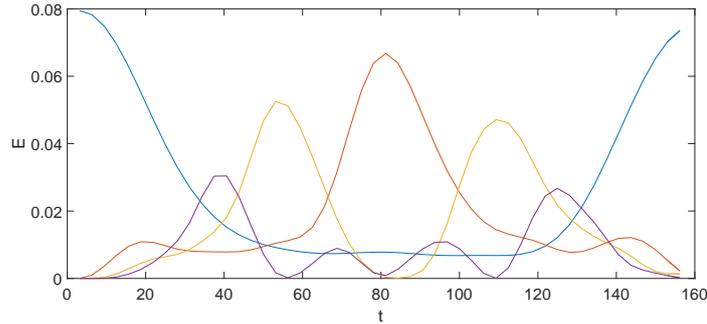


FIGURE 5.6 – Evolution de l'énergie (cinétique et potentielle) des différents modes pour le système FPU α , avec $J = 32$ et $\alpha = 0.25$. Le mode initial est le mode fondamental avec une amplitude égale à l'unité. *En bleu* : mode fondamental ; *en rouge* : première harmonique ; *en violet* : seconde harmonique ; *en orange* : troisième harmonique. L'unité de l'énergie est arbitraire. L'évolution temporelle est donnée en nombre de cycles.

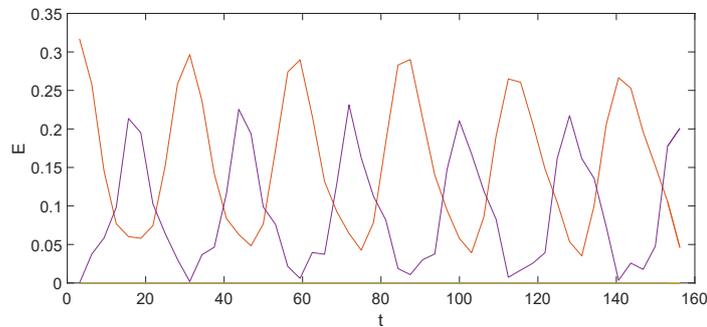


FIGURE 5.7 – Evolution de l'énergie (cinétique et potentielle) des différents modes pour le système FPU α , avec $J = 32$ et $\alpha = 0.25$. Le mode initial est la première harmonique avec une amplitude égale à l'unité. *En rouge* : première harmonique ; *en violet* : seconde harmonique ; *en orange* : troisième harmonique. L'unité de l'énergie est arbitraire. L'évolution temporelle est donnée en nombre de cycles.

(voir Figure 5.8). Les différentes études montrent (voir par exemple [24]) que pour un coefficient de non-linéarité et/ou une énergie initiale faible, le phénomène de modulation est négligeable. Dans l'autre sens, à partir d'une certaine valeur pour ce coefficient de non-linéarité et pour l'énergie du signal initial, on atteint l'équi-répartition attendue (dans le cas où le nombre d'oscillateur J serait grand, une approximation de l'amplitude critique est donnée par : $a_c = \frac{\pi}{6J} + O\left(\frac{1}{J^3}\right)$).

Enfin, si on augmente la résolution temporelle, on s'aperçoit que les courbes d'énergie subissent des variations minimales constantes⁸ (voir Figures 5.8 et 5.9).

5.2.2.2 Explication du paradoxe de Fermi-Pasta-Ulam

Zabusky et Kruskal [107] ont montré que, par passage à la limite, le cas continu du système FPU, après quelques approximations, correspond à l'équation de Korteweg-de Vries :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} + \delta^2 \frac{\partial^3 u}{\partial \xi^3} = 0 \quad (5.37)$$

où u , τ et ξ correspondent, respectivement, à la dérivée spatiale du champ de déplacement δr_i , au temps, et à la coordonnée spatiale rééchelonnés.

Cette équation, aux dérivées partielles non linéaires, admet des solutions analytiques dont font partie les solitons. Ces derniers sont des ondes solitaires qui se propagent sans se déformer et à vitesse constante dans un milieu (voir Figure 5.10).

⁸. Ce phénomène n'avait pas été observé lors de la première expérience en 1953 où un pas temporel trop important avait été utilisé du fait de la puissance limitée de ordinateurs.

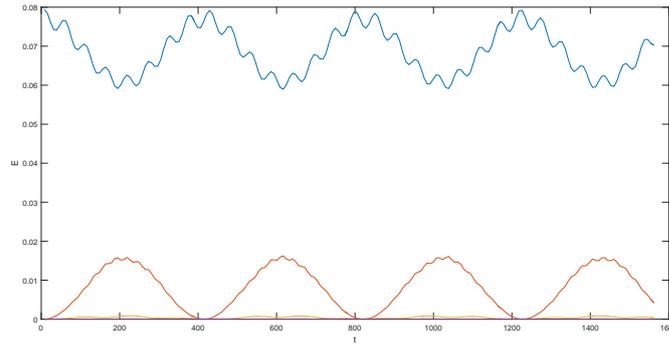
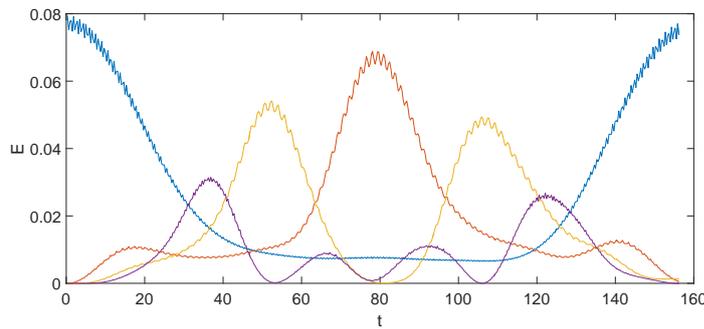
FIGURE 5.8 – Même figure que 5.6 avec $\alpha = 0.025$.

FIGURE 5.9 – Même figure que 5.6 avec un pas plus précis.

Zabusky et Kruskal relièrent l'existence de la périodicité aux solitons. Ainsi, si l'amplitude du signal initiale était assez importante, le signal sinusoïdal développerait un front similaire à celui d'une onde de choc, jusqu'à se morceler en plusieurs solitons (voir Figure 5.11). La périodicité sera obtenue à partir du moment où ces solitons regagneraient leurs positions initiales. Ces structures solitaires, se propageant à vitesse constante, sont clairement visibles dans la représentation spatiale des mouvements de la chaîne d'oscillateurs, sous la forme de diagonales zébrant la figure (voir Figure 5.12 à 5.15).

5.2.2.3 Lien avec l'effet Blazhko

A partir de la discrétisation spatiale des équations régissant les pulsations des étoiles, nous avons obtenu un système similaire à celui décrit par Fermi, Pasta et Ulam. L'existence, dans ce type de système, d'une périodicité pour l'énergie du mode initial, dû à un transfert vers les autres modes, nous conduit à supposer l'existence d'un tel phénomène chez les étoiles de type RR Lyrae. Comme nous avons pu le voir aux figures 5.6 et 5.7, ce phénomène s'applique au cas des RRab et des RRC, et peut, par extension, s'appliquer également à celui des RRd.

Cette théorie semble confortée par le comportement de la « bosse » secondaire observée sur la courbe

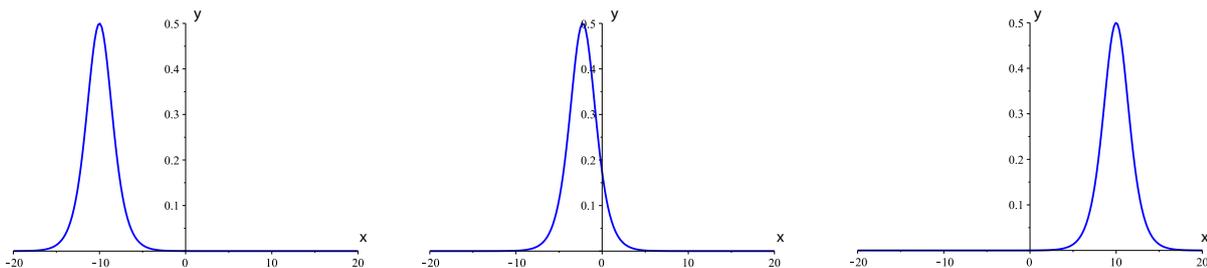


FIGURE 5.10 – Exemple de propagation d'un soliton. Les unités sont arbitraires.

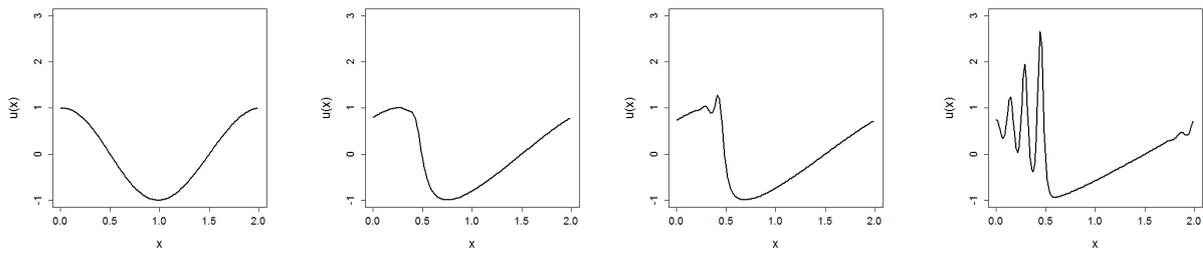
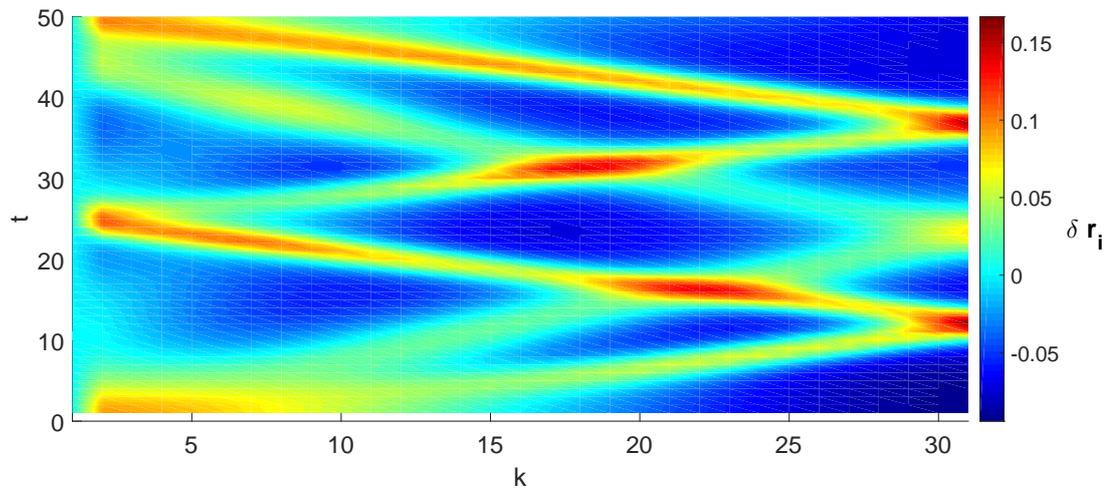
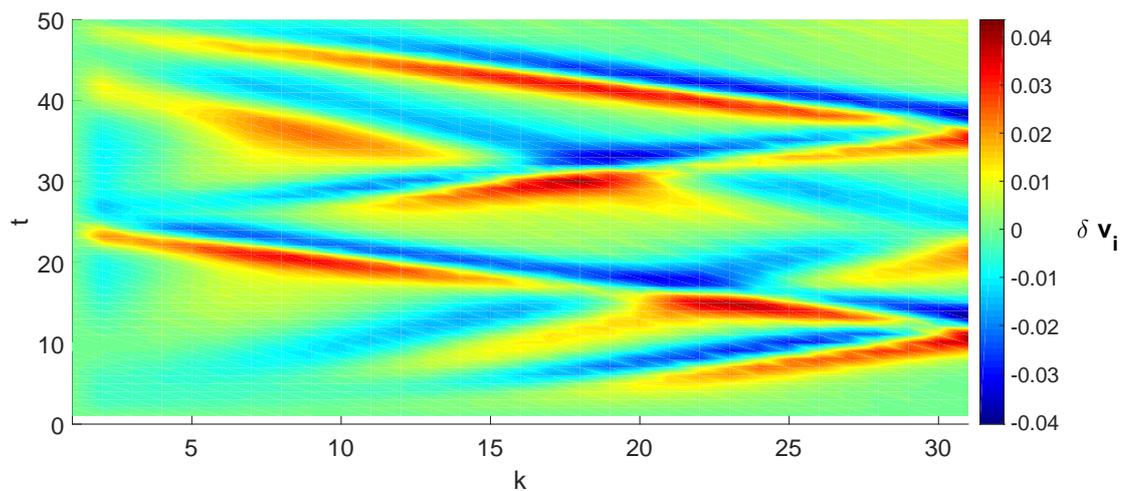


FIGURE 5.11 – Illustration du passage d’une onde régulière à un train de soliton.

FIGURE 5.12 – Représentation spatiale des déplacements pour une chaîne de 32 oscillateurs non linéaires, $\alpha = 0.25$. Le mode fondamental est le mode initial, avec une amplitude égale à l’unité. L’évolution temporelle est donnée en nombre de cycles. Les unités de déplacement sont arbitraires.FIGURE 5.13 – Représentation spatiale des vitesses de déplacement pour une chaîne de 32 oscillateurs non linéaires, $\alpha = 0.25$. Le mode fondamental est le mode initial, avec une amplitude égale à l’unité. L’évolution temporelle est donnée en nombre de cycles. Les unités de vitesse sont arbitraires.

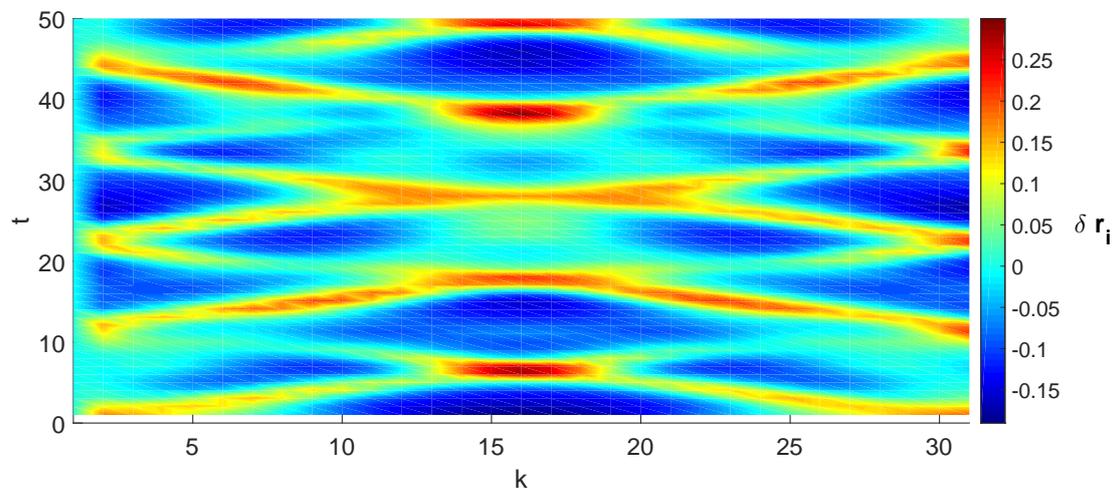


FIGURE 5.14 – Représentation spatiale des déplacements pour une chaîne de 32 oscillateurs non linéaires, $\alpha = 0.25$. La première harmonique est le mode initial, avec une amplitude égale à l'unité. L'évolution temporelle est donnée en nombre de cycles. Les unités de déplacement sont arbitraires.

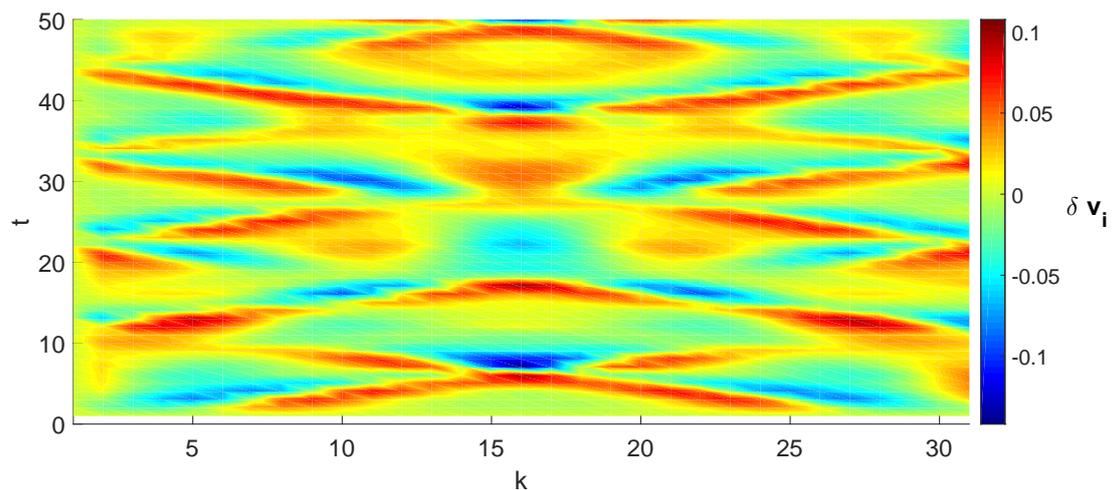


FIGURE 5.15 – Représentation spatiale des vitesses de déplacement pour une chaîne de 32 oscillateurs non linéaires, $\alpha = 0.25$. La première harmonique est le mode initial, avec une amplitude égale à l'unité. L'évolution temporelle est donnée en nombre de cycles. Les unités de vitesse sont arbitraires.

de lumière de S Arae (voir Chapitre 3, « Dynamique du *bump* »), en cela qu'elle présente une dynamique singulière, similaire à celle d'une onde solitaire (stabilité, vitesse, synchronisation entre sa disparition et le maximum de Blazhko). Cependant une étude plus minutieuse est nécessaire et nous nous garderons d'associer chacune des « bosses » observées sur la courbe de lumière à une onde solitaire.

Qui plus est, le passage d'un mode à un autre, durant le cycle de Blazhko, compléterait notre démonstration du lien entre modulation d'amplitude et de fréquence. Le minimum de Blazhko correspondant à un transfert d'énergie vers les modes de fréquences supérieures, nous devrions noter une augmentation de la fréquence de l'oscillateur considéré, ce qui est effectivement observé dans la réalité. La modulation d'amplitude est parfaitement liée au changement de fréquence, comme nous l'avions conjecturé au chapitre 3, en analysant l'asymétrie des lobes secondaires dans le spectre fréquentiel de la courbe de lumière de S Arae. La variation des temps caractéristiques, que nous avons défini au troisième chapitre, est également expliquée par l'analogie avec l'expérience FPU. Lorsque l'on s'approche du minimum du cycle de Blazhko, la transition vers un mode de pulsation caractéristique des RRc implique une morphologie de la courbe de lumière plus proche de la sinusoïde. On a alors une pente associée au temps de montée qui sera moins marquée que dans le cas des RRab. *A fortiori*, le temps de descente sera plus long, et ce pour deux raisons : arithmétique tout d'abord, puisque la période des RRc est moins importante que celle des RRab alors que leur temps de montée est, toute proportion gardée, plus important ; phénoménologique ensuite, au maximum de Blazhko, l'énergie transmise à la fin du temps d'oscillation harmonique est plus importante, ce qui implique un temps de chute plus important.

Enfin, l'analogie avec le système FPU répond également aux questions soulevées par le phénomène de *period doubling*. Nous avons vu, à la figure 5.9, que la variation d'énergie du mode fondamental subissait des fluctuations minimales et constantes. Dans le cas des étoiles RR Lyrae, ces fluctuations correspondraient au phénomène de *period doubling* [99].

5.2.2.4 Chaîne de Todda

La chaîne de Todda est également un système d'oscillateurs couplés non linéaires [102]. La différence avec le système FPU est que cette non-linéarité est exprimée sous forme d'une exponentielle. En fait, la modélisation FPU est un développement à l'ordre 2 ou 3 de la chaîne de Todda :

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta r_i = e^{-(\delta r_i - \delta r_{i-1})} - e^{-(\delta r_{i+1} - \delta r_i)} \quad (5.38)$$

Une des particularités de la chaîne de Todda est qu'elle ne présente aucun cas d'équi-répartition de l'énergie, contrairement au système FPU. De plus, contrairement à celle-ci, c'est un système complètement intégrable, dont les solutions sont les solitons.

On remarquera que le comportement spatial des coefficients linéaires $k_{i\pm 1/2}$ suit une décroissance similaire à celle induite par la modélisation de Todda. De plus, la modélisation de la zone d'ionisation, telle que nous la proposerons à la suite de cette section, est équivalente à celle de la chaîne de Todda. Ainsi, la dernière piste que nous souhaiterions exploiter consisterait à assimiler l'étoile pulsante à une chaîne de Todda de deux ou trois masses correspondant aux frontières des zones d'ionisation. Cependant, faute de temps, nous ne pouvons que reporter à plus tard cette étude.

5.2.3 Analyse temps-fréquence des courbes de lumière : une nouvelle approche permettant de vérifier les hypothèses issues du modèle FPU

L'analyse de la courbe de lumière de S Arae, telle qu'elle a été présentée au chapitre 3, ne nous permet pas de vérifier les résultats issus de l'analogie avec le système FPU. Il est donc nécessaire de proposer un nouvel outil permettant d'observer l'évolution du spectre fréquentiel en fonction du temps. Nous allons, tout d'abord, présenter deux techniques d'analyse temps-fréquence. Nous les exploiterons ensuite afin d'apporter de nouveaux résultats à l'analyse de la courbe de lumière de S Arae.

5.2.3.1 L'analyse temps-fréquence

Les méthodes d'analyse fréquentielle, telles qu'elles ont été décrites au chapitre 2 de ce mémoire, permettent de passer d'une représentation temporelle du signal – c'est-à-dire représenté dans un repère temps-amplitude – à une représentation fréquentielle – c'est-à-dire représenté dans un repère fréquence-amplitude. Ainsi, ces méthodes ont pour principale limitation de considérer le signal dans sa globalité. Par conséquent, elles ne peuvent pas donner l'évolution temporelle du spectre fréquentiel. Or, l'analogie de l'effet Blazhko avec le système FPU, afin d'être vérifiée, nous oblige à une telle représentation du signal.

L'analyse des courbes de lumière, telle qu'elle a été présentée au chapitre 3, doit donc être complétée par une nouvelle méthode. Nous en proposons deux : l'analyse de Fourier à fenêtre glissante et l'analyse par ondelettes [39]. Afin de simplifier la présentation, nous ne reviendrons pas sur les détails considérés au chapitre 2 et nous supposons à chaque fois que le signal est intégrable sur \mathbb{R} ⁹.

5.2.3.1.1 L'analyse de Fourier à fenêtre glissante L'analyse de Fourier à fenêtre glissante est la plus intuitive : elle consiste à découper le signal étudié en plusieurs morceaux et à calculer la transformée de Fourier pour chacun d'entre eux. On multiplie ainsi le signal $f(t)$ par une fenêtre glissante réelle $h(t-b)$ où b détermine sa position sur l'axe temporel. On obtient ainsi l'expression suivante pour la transformée de Fourier à fenêtre glissante :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \widehat{f}(b, \xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) h(t-b) e^{-i\xi t} dt \quad (5.39)$$

Le principal défaut de cette analyse est le compromis entre résolution temporelle et résolution fréquentielle¹⁰. En effet, si on considère le cas de la fenêtre rectangulaire, une réduction de la taille de la fenêtre glissante afin d'avoir une meilleure résolution temporelle, notamment pour repérer les phénomènes transitoires brefs, conduirait à la création de lobes secondaires dans l'espace fréquentiel, comme nous avons pu le montrer au chapitre 3 (voir Figure 3.9)¹¹. Ainsi, si la méthode des fenêtres glissantes constitue une première approche à l'analyse temps-fréquence, elle n'est pas adaptée à l'étude de phénomènes de très courte durée.

5.2.3.1.2 La transformation en ondelettes L'analyse en ondelettes a pour avantage d'avoir une fenêtre dont la taille varie avec la fréquence. Elle pallie ainsi le principal défaut de l'analyse de Fourier à fenêtre glissante. Elle est par conséquent la méthode d'analyse temps-fréquence que nous utiliserons par la suite.

On définit la transformée en ondelettes, pour une fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$, par :

$$g(s, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi_{s, \tau}^*(t) dt \quad (5.40)$$

où les fonctions analysantes $\psi_{s, \tau}$, ou ondelettes, sont définies à partir d'une ondelette mère $\Psi \in L^2(\mathbb{R})$ par¹² :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi_{s, \tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right) \quad (5.41)$$

où $(s, \tau) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.

Les dérivées de la gaussienne $\Psi_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} e^{-\pi x^2}$ avec $n \geq 1$ sont un exemple d'ondelette, tout comme l'ondelette de Morlet définie par : $\Psi(x) = e^{-\pi x^2} e^{10i\pi x}$.

Les figures 5.16 et 5.17 donnent deux exemples de signaux et de leur transformée en ondelettes à partir de l'ondelette de Morlet. Pour cette dernière, l'évolution temporelle est représentée sur l'axe des abscisses, la fréquence sur l'axe des ordonnées, et l'amplitude de ces fréquences est donnée par le code couleur.

Nous laissons de côté l'étude de la reconstruction du signal temporel à partir de la transformée en ondelette inverse¹³, pour nous intéresser à l'application de l'étude temps-fréquence, *via* l'analyse en ondelettes, aux courbes de lumière d'étoiles RR Lyrae présentant l'effet Blazhko.

5.2.3.2 Application à l'étude des courbes de lumière et conséquences

La figure 5.18 correspond à la transformée en ondelettes de la courbe de lumière de S Arae. Le signal brut présentant un échantillonnage irrégulier, nous avons utilisé le signal reconstruit à partir de l'analyse de fréquence présentée au chapitre 3. Nous pouvons voir qu'au maximum de la modulation, la fréquence fondamentale ainsi que ses harmoniques sont présentes, la première étant la plus intense. Ensuite, plus

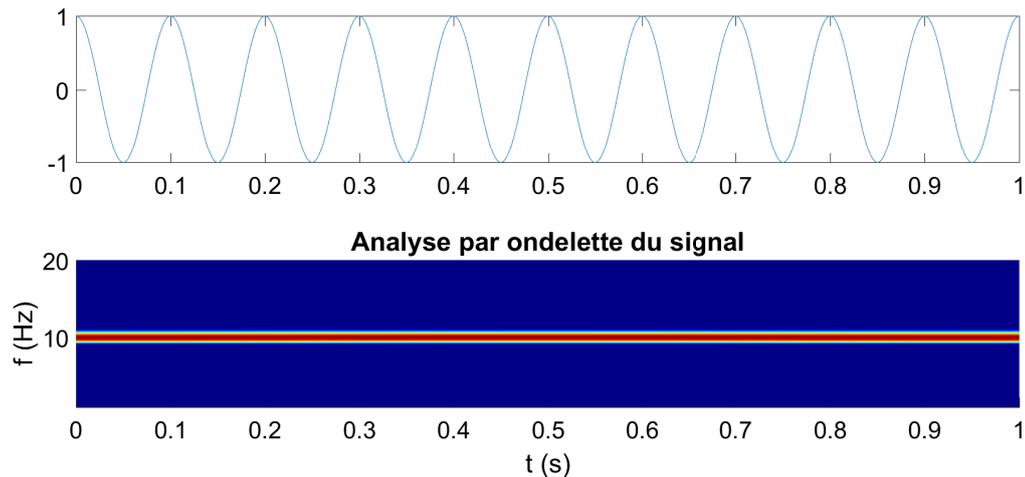
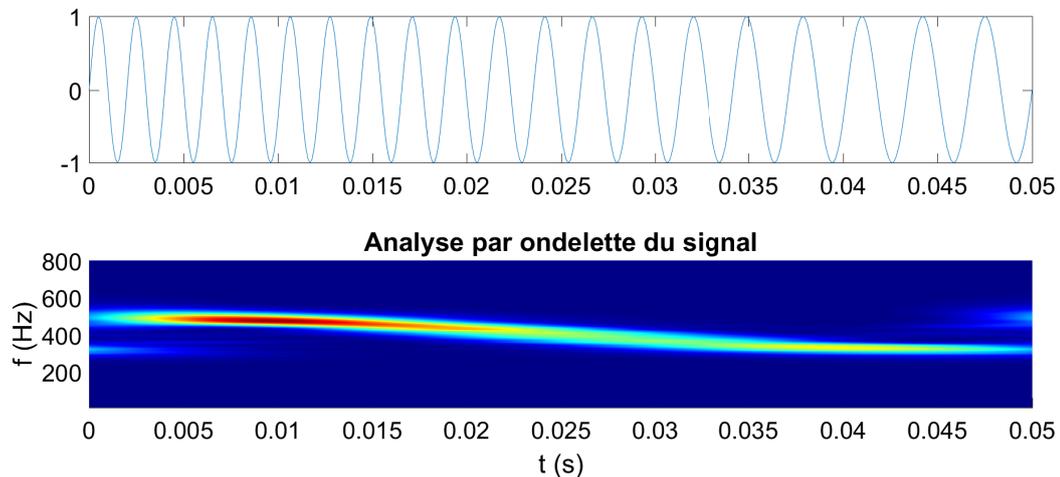
9. Nous renvoyons le lecteur vers [35] pour plus de détails concernant la transformée discrète en ondelettes.

10. On retrouve ici le principe d'Heisenberg.

11. Il est bien évidemment possible d'utiliser d'autres types de fenêtres, comme dans le cas de la transformée de Gabor où la fenêtre est gaussienne, mais les mêmes défauts de résolution seront observables.

12. On définit alors une famille d'ondelette par une ondelette mère et l'ensemble de ses images par les éléments d'un sous-groupe A du groupe des transformations affines de \mathbb{R}^n .

13. Nous renvoyons ici aussi le lecteur intéressé vers l'ouvrage précédemment cité.

FIGURE 5.16 – Signal sinusoïdal (*en haut*) et sa transformée en ondelettes (*en bas*).FIGURE 5.17 – Signal sinusoïdal modulé en fréquence (*en haut*) et sa transformée en ondelettes (*en bas*).

l'amplitude des oscillations diminue, plus les harmoniques et la fondamentale s'affaiblissent à l'exception de la première harmonique. Celle-ci reste quasiment constante, alors même que l'ensemble du signal est plus faible. On retrouve bien l'oscillation entre modes que nous avons identifié avec l'expérience FPU.

5.3 Modélisation de la zone d'ionisation : synchronisation, modes de pulsation et conséquences sur l'analogie avec le système FPU

Au chapitre précédent nous avons vu que l'approche adiabatique était incapable d'expliquer les mécanismes à l'origine des oscillations. Cela nous a amené à considérer le cas quasi adiabatique qui a révélé l'importance de la zone d'ionisation. Il nous semble donc nécessaire de compléter notre analogie avec l'oscillateur de Fermi-Pasta-Ulam en incluant l'influence de cette zone. Nous verrons que les résultats présentés précédemment restent valables, mais surtout que nous sommes capable d'expliquer certaines des problématiques restées en suspens à la suite de notre modélisation discrète linéaire : la synchronisation des couches et la distribution des étoiles RR Lyrae suivant leur mode de pulsation. Dans un premier temps, nous présenterons une modélisation de la zone d'ionisation en tant qu'oscillateur à relaxation. Ensuite, nous étudierons la synchronisation mutuelle entre cette zone et ses couches inférieures. Enfin, nous nous référerons aux études existantes sur le système FPU dans le cas d'un régime forcé afin de

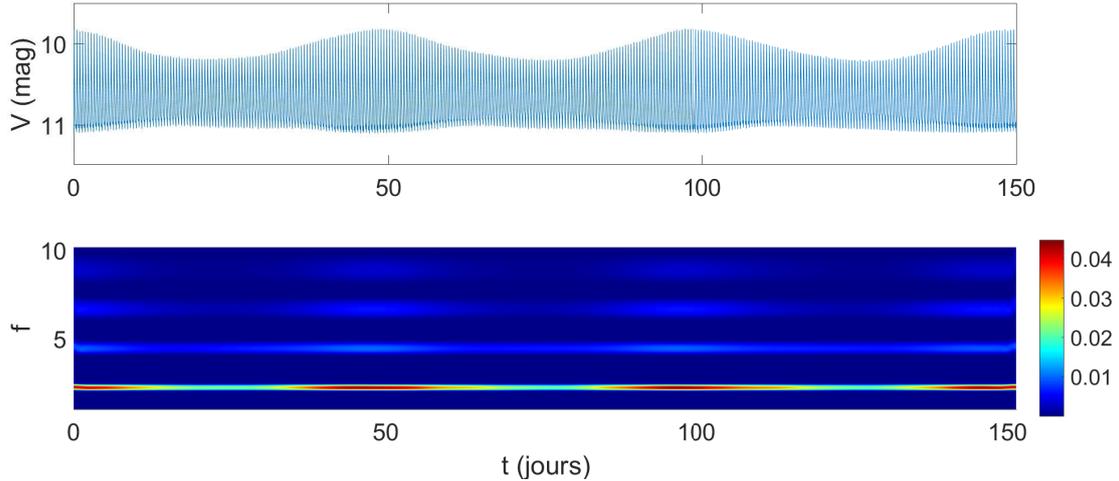


FIGURE 5.18 – Transformée en ondelettes de la courbe de lumière de S Arae.

démontrer que l'explication du phénomène Blazhko, tel qu'elle a été présentée dans la section précédente, reste toujours valable.

5.3.1 La zone d'ionisation comme oscillateur à relaxation

Au chapitre 3, nous avons distingué deux moments durant chaque cycle de pulsation : celui de quasi-chute libre et celui d'oscillation harmonique. Nous avons ensuite expliqué, au chapitre 4, le rôle de la zone d'ionisation dans chacun de ces temps. En reprenant l'analogie d'Eddington avec la machine thermique, l'évolution des caractéristiques thermodynamiques de l'étoile est équivalente à celle donnée par le cycle de Carnot (voir Figure 5.19).

Ainsi, le comportement de la zone d'ionisation est similaire à celui d'un oscillateur à relaxation. Ces oscillateurs sont des oscillateurs non linéaires – comme par exemple l'oscillateur de van der Pol. Cependant, il doit présenter une double asymétrie dans l'espace des phases¹⁴. En effet, au troisième chapitre, nous avons vu que l'asymétrie des enveloppes impliquait une asymétrie des vitesses radiales et des positions aux extremums. Concrètement, la vitesse d'expansion maximale est plus importante, en valeur absolue, que la vitesse de contraction maximale¹⁵. De même, le rayon à l'équilibre n'est pas à mi-chemin entre le rayon maximal et minimal.

Afin de modéliser ce comportement, dans un premier temps, nous avons considéré la raideur associée à la zone d'ionisation comme non constante dans l'espace. En utilisant l'interpolation présentée à la figure 5.3 qui nous donnait l'expression suivante pour le coefficient de raideur en fonction de la distance au centre :

$$k(r) = 3.83 \cdot 10^{27} e^{-15.2 \cdot r} \quad (5.42)$$

nous avons établi une expression du type exponentielle décroissante pour le coefficient de raideur de la zone d'ionisation (voir Figure 5.20).

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \alpha e^{-\beta x(t)} \end{cases} \quad (5.43)$$

où α et β sont deux paramètres à fixer, x le déplacement de la zone par rapport à sa position d'équilibre et y sa vitesse. Dans le cas de l'oscillateur avec une seule masse¹⁶, les résultats obtenus pour la vitesse radiale montrent bien le phénomène de relaxation (voir Figure 5.21¹⁷). On observe bien les deux temps dans l'évolution de la vitesse, celui correspondant à la chute et celui associé à l'oscillation.

14. Espace dont les coordonnées sont les variables dynamiques du système étudié, ici la position et la vitesse.

15. Dans la terminologie de la physique des plasmas, on parle de phénomène superélastique.

16. Nous reviendrons par la suite au cas des oscillateurs couplés comprenant la modélisation de la zone d'ionisation.

17. Avec $\alpha = 1$ et $\beta = 1$

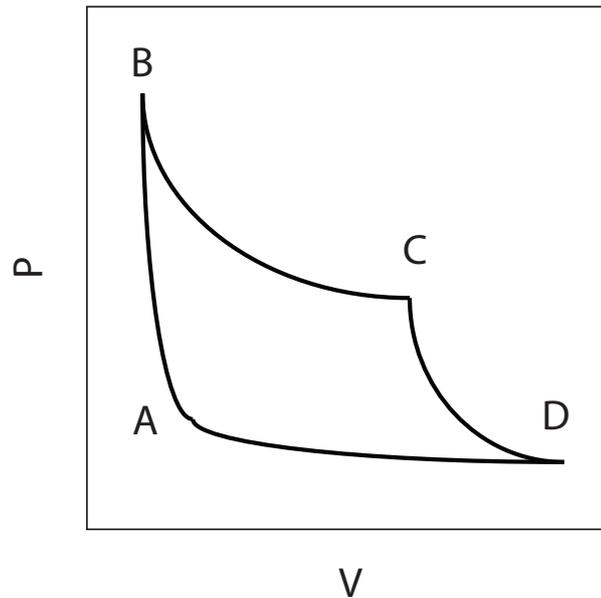


FIGURE 5.19 – Représentation schématique d'un cycle de Carnot. *De A vers B* : compression adiabatique ; *De B vers C* : détente isotherme ; *De C vers D* : détente adiabatique ; *De D vers A* : compression isotherme. Le temps de quasi-chute libre correspond au chemin $C \rightarrow A$; le temps d'oscillation harmonique est donné par le chemin $A \rightarrow C$.

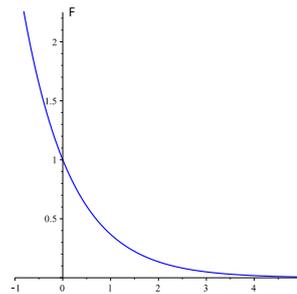


FIGURE 5.20 – Evolution de la force subie par la masse en fonction de sa position dans le cas de l'oscillateur à relaxation proposé (voir Equation (5.43)). Les valeurs données sont à titre indicatif.

On voit également, dans l'espace des phases, l'asymétrie des positions par rapport à l'équilibre, et ce pour différentes conditions initiales (voir Figure 5.22). Cependant, l'asymétrie des vitesses n'est pas reproduite par notre modélisation.

Afin d'améliorer notre modélisation de la zone d'ionisation, il est nécessaire que l'asymétrie selon l'axe des ordonnées dans l'espace des phases, soit reproduite pour l'axe des abscisses. Nous incluons à l'équation (5.43) un terme similaire au terme non linéaire de Van der Pol :

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \alpha e^{-\beta x(t)} - \epsilon x(t)y(t) \end{cases} \quad (5.44)$$

La figure 5.23 montre la solution dans l'espace des phases. Outre la présence des asymétries suivant les deux axes, on note la présence d'un cycle limite. L'existence de ce dernier provient du terme de Van der Pol. Le développement linéaire du chapitre précédent, dans le cas quasi adiabatique, mène à une solution oscillante amplifiée (voir entre autre l'équation (4.68)). Stellingwerf a montré que la convection était responsable de l'existence d'un cycle limite [90]. Or, ici, nous voyons que la nécessité de reproduire l'asymétrie observée pour les vitesses radiales nous mène également à l'existence d'un tel cycle. Même si l'hypothèse de Stellingwerf reste pour nous la plus plausible, une étude plus poussée de notre modèle – notamment une quantification de ses différents paramètres accompagnée d'une caractérisation du temps

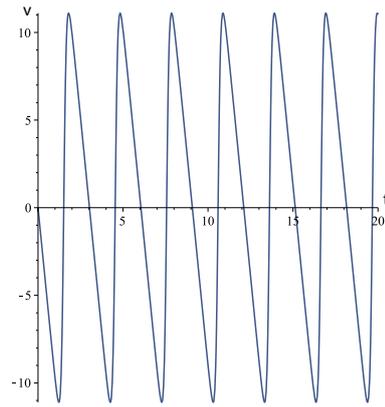


FIGURE 5.21 – Evolution de la vitesse en fonction du temps dans le cas de l'oscillateur à relaxation proposé (voir Equation (5.43)). Les valeurs données sont à titre indicatif.

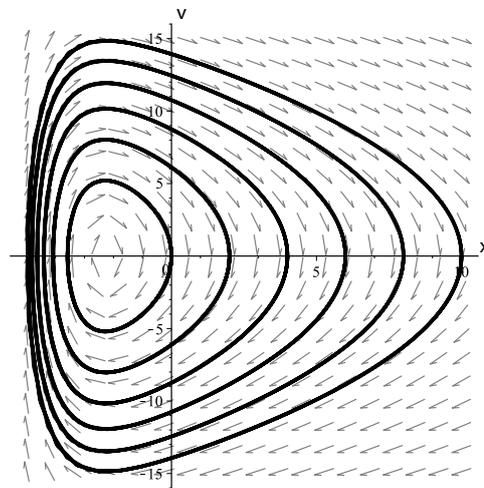


FIGURE 5.22 – Evolution du système dans l'espace des phases pour différentes conditions initiales dans le cas de l'oscillateur à relaxation proposé (voir Equation (5.43)). Les valeurs données sont à titre indicatif.

d'ionisation – pourrait confirmer le fait que la zone d'ionisation soit le facteur limitant dans l'amplification des oscillations. Cette hypothèse est renforcée par le fait que cette zone pourrait aussi expliquer la limite rouge de la bande d'instabilité comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe.

5.3.2 Synchronisation avec la zone d'ionisation

Ainsi présenté, en ne considérant que la zone adiabatique et la zone d'ionisation, nous sommes en présence de deux oscillateurs : un système d'oscillateurs couplés et un oscillateur à relaxation. Nous allons voir comment, en considérant l'influence réciproque de chacun de ces oscillateurs, nous parvenons à un phénomène de synchronisation mais aussi, dans certains cas, à l'annihilation des pulsations.

5.3.2.1 Le concept de synchronisation et sa modélisation

5.3.2.1.1 Oscillateur non linéaire en régime forcé Considérons l'oscillateur non linéaire en régime forcé :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = f(\dot{x}, x) + \epsilon p(t) \quad (5.45)$$

où ω_0 est la fréquence naturelle de l'oscillateur, $f(\dot{x}, x)$ la partie non linéaire, $p(t)$ le terme correspondant à l'excitation paramétrée par ϵ et de fréquence ω . On considère que la contribution de la partie non linéaire est petite, tout comme ϵ . Nous allons chercher des solutions de la forme :

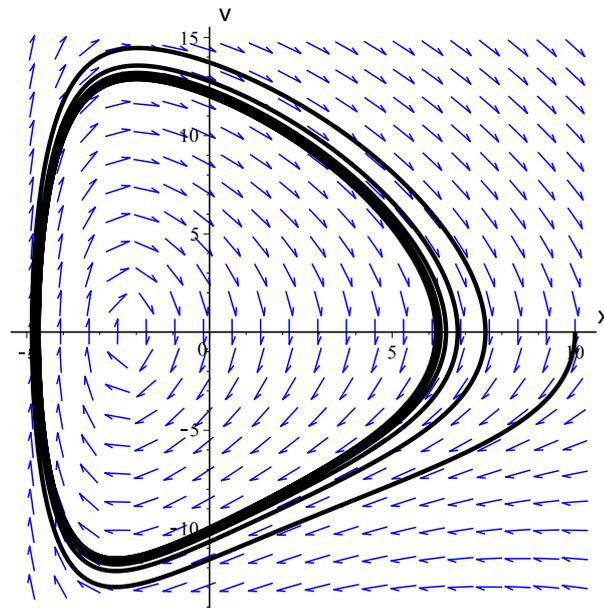


FIGURE 5.23 – Evolution du système dans l'espace des phases pour $x_0 = 10$, $y_0 = 0$, $\alpha = \beta = 1$ et $\epsilon = 0.1$ dans le cas de l'oscillateur à relaxation modifié (voir Equation (5.44)). Les valeurs données sont à titre indicatif.

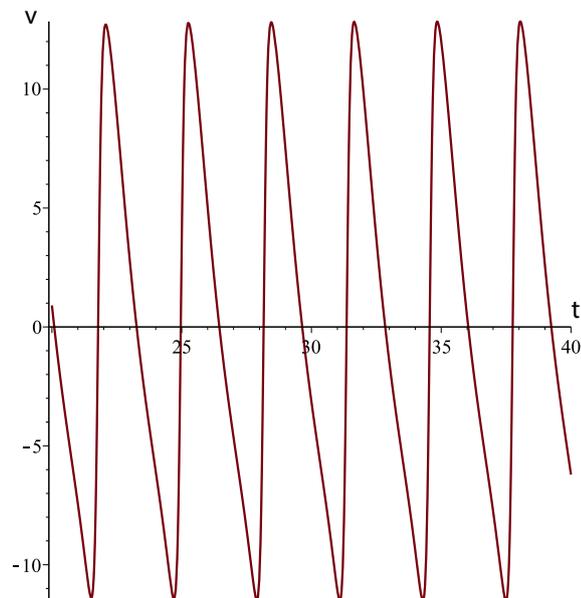


FIGURE 5.24 – Evolution de la vitesse en fonction du temps dans le cas de l'oscillateur à relaxation modifié en régime permanent (voir Equation (5.44)). Les valeurs données sont à titre indicatif.

$$x(t) = \frac{1}{2} (A(t)e^{i\omega t} + c.c.) \quad (5.46)$$

où $A(t)$ est l'amplitude complexe et où c.c. désigne le terme complexe conjugué. On peut réécrire l'équation (5.45) sous la forme :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = (\omega^2 - \omega_0^2) x + f(\dot{x}, x) + \epsilon p(t) \quad (5.47)$$

Nous pouvons mettre l'équation précédente sous forme d'un système :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x + (\omega^2 - \omega_0^2) x + f(\dot{x}, x) + \epsilon p(t) \end{cases} \quad (5.48)$$

On peut alors exprimer $y(t)$ sous la forme :

$$y(t) = \frac{1}{2} (i\omega A(t)e^{i\omega t} + c.c.) \quad (5.49)$$

On obtient alors l'équation suivante pour l'amplitude complexe :

$$\dot{A} = \frac{e^{-i\omega t}}{i\omega} \cdot [(\omega^2 - \omega_0^2) x + f(\dot{x}, x) + \epsilon p(t)] \quad (5.50)$$

Dans le cas où la fréquence de forçage est proche de la fréquence naturelle, le membre de droite dans l'équation précédente est petit. On en déduit que les variations de l'amplitude complexe seront soit lentes (si elles sont importantes) soit faibles (si elles sont rapides). Nous nous limiterons au cas des variations importantes et lentes. Nous négligerons ainsi les termes en puissances de $e^{i\omega t}$. Ceci peut-être fait en moyennant le signal sur une période de $T = 2\pi/\omega$. Cette méthode, connue sous le nom de *method of averaging*, ou méthode des moyennes, fut développée par Nayfeh et Mook [59] et permet d'obtenir une équation donnant une solution analytique. En l'appliquant, l'équation précédente devient :

$$\dot{A} = -i \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega} A + \mu A - (\gamma + i\kappa) |A|^2 A - i\epsilon E \quad (5.51)$$

où μ , qui est un réel, et γ correspondent aux termes linéaire et non linéaire de croissance ou de décroissance des oscillations. La variable κ correspond au lien d'origine non linéaire entre la fréquence et l'amplitude. Enfin la moyenne $\frac{e^{-i\omega t} \epsilon p(t)}{i\omega}$, correspond à la première harmonique du signal périodique $p(t)$, qui est non nulle en général, et qui donne le terme complexe constant $-i\epsilon E$.

En effectuant certains changements de variables, nous pouvons réduire le nombre de paramètres dans l'équation précédente :

$$A = \sqrt{\frac{\mu}{\gamma}} a \quad , \quad t = \frac{t}{\mu} \quad (5.52)$$

On obtient alors :

$$\dot{a} = -i\nu a + a - |a|^2 a - i\alpha |a|^2 a - ie \quad (5.53)$$

où :

$$\nu = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\omega\mu} \approx (\omega - \omega_0)/\mu \quad (5.54)$$

$$\alpha = \frac{\kappa}{\gamma} \quad (5.55)$$

$$e = \epsilon E \gamma^{1/2} \mu^{-3/2} \quad (5.56)$$

Nous allons alors considérer les deux cas de figures suivants :

- $\alpha = 0$ correspondant au cas isochrone, c'est-à-dire où amplitude et fréquence sont indépendantes ;
- $\alpha \neq 0$ correspondant au cas non isochrone.

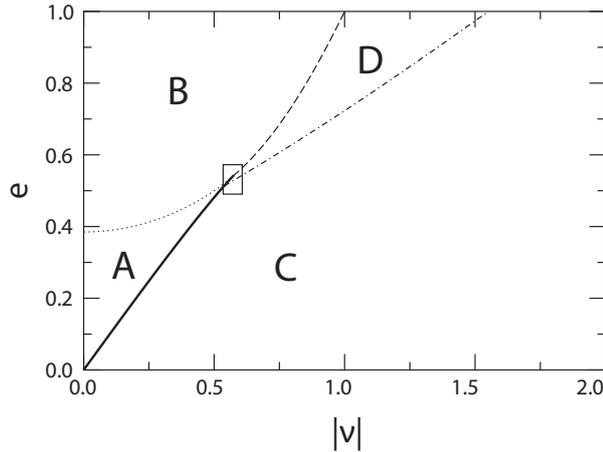


FIGURE 5.25 – Diagramme de bifurcation pour le cas isochrone de l'oscillateur en régime forcé représenté pour les paramètres ν et e , correspondant respectivement à la différence de fréquence entre l'excitation et la fréquence naturelle de l'oscillateur et à l'amplitude du signal excitant [65].

Dans le cas isochrone, l'équation (5.53) devient :

$$\dot{a} = -i\nu a + a - |a|^2 a - ie \quad (5.57)$$

Avant de considérer les détails de l'analyse de cette équation, il est nécessaire de donner une interprétation des solutions pour les variables d'origine $x \propto \text{Re}(a(t)e^{i\omega t})$ et $y \propto \text{Im}(a(t)e^{i\omega t})$. S'il existe une solution stationnaire pour a (c'est-à-dire un point fixe), alors les variables x et y seront synchronisées à la fréquence d'excitation ω . On parle alors d'*accrochage de phase*. S'il existe une solution périodique pour a , les variables d'origines suivront un mouvement oscillant quasi périodique composé de deux fréquences indépendantes correspondant à celui d'un oscillateur anharmonique. La première période sera celle d'excitation, la seconde sera celle de la solution périodique.

Une étude exhaustive de l'équation (5.57) est disponible dans [45]. Nous en exposons ici les principales lignes.

La recherche des points fixes, nous conduit à l'équation :

$$R^2(1 - R^2)^2 + \nu^2 R^2 = e^2 \quad (5.58)$$

qui possède trois racines, du moment que :

$$9\nu^2 + 1 - (1 - 3\nu^2)^{3/2} < \frac{27e^2}{2} < 9\nu^2 + 1 + (1 - 3\nu^2)^{3/2} \quad (5.59)$$

et une racine dans le cas contraire. Par conséquent, l'équation (5.57) a un ou trois points fixes. La zone avec trois points fixes est repérée par un A à la figure 5.25. Dans les régions B, C et D il n'y a qu'un seul point fixe. Pour étudier la stabilité de ces points, il est nécessaire de linéariser l'équation (5.57). On obtient l'équation caractéristique suivante pour le carré de l'amplitude $|a|^2 = R^2$:

$$\lambda^2 + (4R^2 - 2)\lambda + (1 - 3R^2)(1 - R^2) + \nu^2 = 0 \quad (5.60)$$

Le comportement des solutions au voisinage d'un point fixe sera donc déterminé par les valeurs prises par R , elles-mêmes dépendantes des paramètres ν et e . Le diagramme de bifurcation de l'équation (5.57) est représenté à la figure 5.25. Dans les zones A et B, la seule solution stable est un puit (ou nœud asymptotiquement stable). Elle correspond à la parfaite synchronisation de l'oscillateur et de l'excitation. Dans les régions C et D, l'attracteur est un cycle limite correspondant au cas quasi périodique. Nous laissons de côté l'étude des bifurcations et redirigeons le lecteur vers [66] pour plus de détails.

Le traitement du cas asynchrone est plus complexe. Une étude exhaustive a été effectuée par Levina et Nepomnyaschiy [54]. D'après leurs résultats, le diagramme de bifurcation reste qualitativement le même que celui du cas isochrone pour de faibles valeurs de α : $\alpha^2 < 1/3$. Dans le cas contraire, de nouvelles bifurcations apparaissent.

5.3.2.1.2 Oscillateurs couplés non linéaires En suivant la même approche que celle que nous venons d'exposer, nous pouvons démontrer l'existence de la synchronisation dans le cas de deux oscillateurs couplés.

Considérons l'équation générale :

$$\begin{aligned}\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 &= f_1(\dot{x}_1, x_1) + D_1(x_2 - x_1) + B_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 &= f_2(\dot{x}_2, x_2) + D_2(x_1 - x_2) + B_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)\end{aligned}\quad (5.61)$$

où les $\omega_{1,2}$ sont les fréquences naturelles des oscillateurs. Nous ne considérons que les termes de couplage linéaire en x_i et \dot{x}_i .

Tout comme pour le cas de l'oscillateur forcé, nous recherchons des solutions de la forme :

$$x_{1,2}(t) = \frac{1}{2} (A_{1,2}(t)e^{i\omega t} + c.c.) \quad , \quad y_{1,2}(t) = \frac{1}{2} (i\omega A_{1,2}(t)e^{i\omega t} + c.c.) \quad (5.62)$$

On obtient alors le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= -i\Delta_1 A_1 + \mu_1 A_1 - (\gamma_1 + i\alpha_1)|A_1|^2 A_1 + (\beta_1 + i\delta_1)(A_2 - A_1) \\ \dot{A}_2 &= -i\Delta_2 A_2 + \mu_2 A_2 - (\gamma_2 + i\alpha_2)|A_2|^2 A_2 + (\beta_2 + i\delta_2)(A_1 - A_2)\end{aligned}\quad (5.63)$$

où $\Delta_{1,2} = \omega_{1,2} - \omega$. Les termes de couplage β et δ sont proportionnels à B et D . En écrivant l'amplitude complexe sous la forme : $A_{1,2} = R_{1,2}e^{i\phi_{1,2}}$, nous obtenons un système de quatre équations réelles :

$$\begin{aligned}\dot{R}_1 &= \mu_1 R_1 (1 - \gamma_1 R_1^2) + \beta_1 (R_2 \cos(\phi_2 - \phi_1) - R_1) - \delta_1 R_2 \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ \dot{\phi}_1 &= -\Delta_1 - \mu_1 \alpha_1 R_1^2 + \delta_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \cos(\phi_2 - \phi_1) - 1 \right) + \beta_1 \frac{R_2}{R_1} \sin(\phi_2 - \phi_1) \\ R_2 &= \mu_2 R_2 (1 - \gamma_2 R_2^2) + \beta_2 (R_1 \cos(\phi_1 - \phi_2) - R_2) - \delta_2 R_1 \sin(\phi_1 - \phi_2) \\ \dot{\phi}_2 &= -\Delta_2 - \mu_2 \alpha_2 R_2^2 + \delta_2 \left(\frac{R_1}{R_2} \cos(\phi_1 - \phi_2) - 1 \right) + \beta_2 \frac{R_1}{R_2} \sin(\phi_1 - \phi_2)\end{aligned}\quad (5.64)$$

Dans la mesure où les termes de couplage ne dépendent que de la différence de phase, nous pouvons réduire le nombre d'équations à trois en posant $\psi = \phi_1 - \phi_2$:

$$\begin{aligned}\dot{R}_1 &= \mu_1 R_1 (1 - \gamma_1 R_1^2) + \beta_1 (R_2 \cos \psi - R_1) - \delta_1 R_2 \sin \psi \\ \dot{R}_2 &= \mu_2 R_2 (1 - \gamma_2 R_2^2) + \beta_2 (R_1 \cos \psi - R_2) + \delta_2 R_1 \sin \psi \\ \dot{\psi} &= -\nu + \mu_1 \alpha_1 R_1^2 - \mu_2 \alpha_2 R_2^2 + \left(-\delta_1 \frac{R_2}{R_1} + \delta_2 \frac{R_1}{R_2} \right) \cos \psi + \delta_1 - \delta_2 \\ &\quad - \left(\beta_1 \frac{R_2}{R_1} + \beta_2 \frac{R_1}{R_2} \right) \sin \psi\end{aligned}\quad (5.65)$$

où $\mu = \omega_2 - \omega_1$. Le cas général présenté peut être simplifié en supposant que leur comportement est identique excepté pour leur fréquence naturelle, c'est-à-dire que $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ etc. Nous pouvons également effectuer les mêmes changements de variables que dans le cas du régime forcé, pour l'amplitude et le temps. Enfin, en divisant les coefficients de couplage par μ et en divisant α par μ/γ , mais en gardant les mêmes notations, on obtient :

$$\dot{R}_1 = R_1(1 - R_1^2) + \beta(R_2 \cos \psi - R_1) - \delta R_2 \sin \psi \quad (5.66)$$

$$\dot{R}_2 = R_2(1 - R_2^2) + \beta(R_1 \cos \psi - R_2) + \delta R_1 \sin \psi \quad (5.67)$$

$$\dot{\psi} = -\nu + \alpha(R_1^2 - R_2^2) + \delta \left(-\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2} \right) \cos \psi - \beta \left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2} \right) \sin \psi \quad (5.68)$$

Une étude détaillée de ces équations a été effectuée par Aronson et al. [3]. Nous nous concentrerons ici sur ses principaux résultats.

Tout d'abord, pour une constante de couplage β et de différence de fréquence naturelle ν assez importante, l'origine $R_1 = R_2 = 0$ devient un nœud asymptotiquement stable entraînant une annihilation des oscillations. La démonstration de l'existence de ce phénomène, qui n'a pas d'équivalent dans le cas de l'oscillateur libre ou en régime forcé, peut s'effectuer de la façon suivante. Supposons que tous les paramètres soient égaux et que $\delta = 0$. En choisissant la fréquence $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ on peut fixer $\Delta_1 = -\Delta_2 = \Delta$ et on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{A}_1 &= (i\Delta + \mu)A_1 + \beta(A_2 - A_1) \\ \dot{A}_2 &= (-i\Delta + \mu)A_2 + \beta(A_1 - A_2)\end{aligned}\tag{5.69}$$

L'étude de la stabilité nous donne les valeurs propres :

$$\lambda = \mu - \beta \pm \sqrt{\beta^2 - \Delta^2}.\tag{5.70}$$

L'état $A_1 = A_2 = 0$ est donc stable si : $\mu < \beta < (\mu^2 + \Delta^2)/2\mu$.

Ensuite, Aronson et al. montrent que le système étudié présente deux points fixes stables pour la différence de phase, $\psi = 0$ ou $\psi = \pi$, à partir des équations (5.66)–(5.68).

5.3.2.2 Conséquences pour la sélection du mode de pulsation et pour l'analogie avec le système FPU

La première question que nous sommes en droit de nous poser est : « la modulation observée dans le cas du système FPU est-elle encore valide en prenant compte de la zone d'ionisation comme force d'excitation ? ». La réponse donnée par Dauxois et al. est oui [24]. En examinant le modèle β de Fermi, Pasta et Ulam, ils montrent que sous certaines conditions d'amplitude et de fréquence n'entraînant pas l'équi-répartition d'énergie (voir plus haut) on observe toujours le phénomène de modulation.

Ainsi, l'inclusion de la zone d'ionisation dans notre modélisation, non seulement, nous permet d'expliquer de façon plus rigoureuse l'existence de la modulation, mais surtout, nous fournit une explication au phénomène de synchronisation et de sélection du mode de pulsation qui n'avaient jusqu'à maintenant qu'une explication qualitative (voir par exemple [23]). Le cas de deux oscillateurs non linéaires couplés, nous a montré que sous certaines conditions, nous pouvions avoir une synchronisation de fréquence entre les oscillations de la zone d'ionisation et les couches inférieures adiabatiques. Qui plus est, cette synchronisation disposait de deux points fixes pour le déphasage entre les deux systèmes : 0 et π . Si la configuration des oscillateurs ne permettait pas d'obtenir une synchronisation, alors une pulsation de type quasi périodique, à deux fréquences, était visible. Au-delà de l'explication de la synchronisation des couches, cette étude nous a donc permis d'expliquer l'existence et la sélection des modes de pulsation au sein des étoiles de type RR Lyrae. Dans le cas synchronisé, les points fixes 0 et π pour le déphasage correspondent, respectivement, aux RRab et RRc. La non-synchronisation quant à elle est associée à deux fréquences de pulsation, ce qui est le cas des RRd.

5.4 Conclusion

Ce chapitre, qui conclue notre mémoire, nous a permis de montrer l'importance des termes non linéaires dans les oscillations des étoiles de type RR Lyrae. Comme nous avons pu le voir au chapitre précédent, la complexité des équations régissant les pulsations, nous oblige à une simplification qui nous a conduit à un système différentiel linéaire décrivant les petites pulsations. La prise en compte des termes non linéaires complique à nouveau l'ensemble des équations, et nous oblige à imposer de nouvelles hypothèses simplificatrices, ou à considérer une nouvelle approche. La discrétisation spatiale que nous avons proposée suit la seconde alternative. Nous avons ainsi vu que notre problème, dans le cas adiabatique, était semblable à un ensemble d'oscillateurs couplés. Son traitement non linéaire nous a permis d'établir une analogie avec l'expérience de Fermi, Pasta et Ulam et ainsi proposer une nouvelle théorie de Blazhko fondée sur l'échange d'énergie périodique entre les différents modes. Cette théorie nous a permis d'expliquer la modulation de la courbe de lumière, observée chez certaines étoiles de type RR Lyrae, et aussi l'accrochage de fréquence entre la modulation d'amplitude et de phase que nous avons présenté au chapitre 2. Dans le but de confirmer ces premiers résultats par les données observationnelles, nous avons dû utiliser de nouveaux outils afin d'observer l'évolution du spectre fréquentiel des courbes de lumière au cours du temps. Nous avons alors choisi d'analyser ces courbes grâce à la transformée en ondelettes, ce qui nous a fourni des premiers résultats encourageants. Enfin, toujours à partir du formalisme non linéaire, nous avons réussi à expliquer le phénomène de synchronisation des couches, ainsi que l'existence des trois types de RR Lyrae, nommément les RRab, RRc et RRd.

Il reste cependant un important travail à effectuer afin de confirmer cette théorie, et ce dans de nombreux domaines. Tout d'abord, il va être nécessaire de proposer systématiquement une analyse temps-fréquence des courbes de lumière d'étoile RR Lyrae présentant l'effet Blazhko. Les résultats des campagnes d'observations de Kepler et de CoRoT, par leur résolution temporelle exceptionnelle, sont tout particulièrement indiqués pour ce genre d'étude. L'analogie entre la physique des étoiles et le système FPU

devra être affinée. En effet, nous avons utilisé les hypothèses simplificatrices utilisées initialement par Fermi, Pasta et Ulam. Or, comme nous avons pu le voir, nous avons une hétérogénéité des coefficients dans le cas des étoiles pulsantes qui ne correspond pas au modèle α et β ¹⁸. De même, le phénomène de synchronisation a été exposé dans ses grandes lignes. Faute de temps, nous n'avons pu mener une étude minutieuse de l'influence des coefficients sur le mode de pulsation. Cependant, au vue des résultats existants dans ce domaine, et du développement détaillé des termes non linéaires, celle-ci pourrait être rapidement effectuée et confirmer nos résultats.

18. Verhulst et al. ont proposé récemment une étude portant sur le cas d'un système FPU hétérogène [105].

Conclusion

Tout d'abord, il ne faut pas penser que la connaissance des réalités célestes, qu'on les examine en relation à autre chose, ou pour elles-mêmes, ait une autre fin que l'ataraxie et la certitude ferme, ainsi qu'il en est pour tout le reste.

Epicure, Lettre à Pythoclès.

Le principal objectif de cette thèse était d'illustrer les améliorations induites par les campagnes d'observations du photomètre PAIX en Antarctique. Notre but était de démontrer les qualités des données acquises par l'analyse de la courbe de lumière d'une étoile de type RR Lyrae présentant l'effet Blazhko. Les résultats présentés vont bien au-delà de cet objectif. Rappelons les plus importants :

1. **Une définition rigoureuse de l'analyse harmonique :** Nous avons tout d'abord fourni les outils mathématiques nécessaires justifiant l'utilisation de l'analyse fréquentielle pour l'étude des courbes de lumières des étoiles RR Lyrae. En partant d'une construction de la transformée de Fourier sur un groupe abélien, nous avons abouti à une définition de celle-ci pour les signaux discrets. Nous avons ensuite étendu cette définition au cas des signaux aléatoires avec le périodogramme de Lomb et Scargle.
2. **Un nouvel outil d'analyse fréquentiel, PDM13 :** Nous avons poursuivi notre présentation par l'étude d'un cas particulier de méthode d'analyse fréquentielle non paramétrique : *phase dispersion minimization*. Celle-ci constitue le cœur du programme que nous avons développé : PDM13. Nous l'avons enrichi d'un algorithme capable de détecter les *gaps*, des absences de données sur un temps non négligeable, défaut caractéristique des missions d'observations terrestre.
3. **Des nouvelles contraintes et de nouveaux indices pour comprendre l'effet Blazhko :** Fort d'un formalisme clair et rigoureux, nous avons alors étudié la courbe de lumière de S Arae, une étoile de type RR Lyrae présentant l'effet Blazhko, en suivant le protocole généralement admis. Nous avons complété notre analyse par une étude des caractéristiques de la courbe de lumière pouvant varier durant un cycle de Blazhko : les temps de montée et de descente, et la position du *bump* secondaire. Les premiers nous ont permis de définir deux moments durant la période d'oscillation de l'étoile : le temps d'oscillation et le temps de quasi-chute libre. Le second sera une des découvertes majeures de cette analyse, mais n'a pris tout son sens qu'à la fin de ce mémoire, lorsque nous avons établi une nouvelle théorie du phénomène Blazhko.
4. **L'explication de deux résultats communément observés, les asymétries issues de la modulation et la décroissance des harmoniques :** Nous avons apporté une explication mathématique à deux phénomènes communément présentés dans les analyses d'étoiles de type RR Lyrae. La première porte sur la décroissance des harmoniques. Le formalisme détaillé au chapitre 2 nous a permis d'expliciter la fonction associée à cette décroissance à partir des propriétés de la transformée de Fourier. La seconde explique l'asymétrie des lobes secondaires dans le spectre fréquentiel de la courbe de lumière. Cette démonstration explique cette observation par une synchronisation de la modulation d'amplitude et de fréquence. Cependant, si elle nous éclaire un peu plus sur le mécanisme de modulation, elle soulève une nouvelle question : quelle est l'origine de cette synchronisation ?
5. **Un formalisme non linéaire discret nous permettant de comprendre la synchronisation entre modulation d'amplitude et de fréquence :** Le développement linéaire des équations

de pulsation est trop restrictif, et ne nous permet uniquement de comprendre l'existence des oscillations et leurs mécanismes. Nous avons considéré l'influence des termes non linéaires et les avons inclus dans une modélisation discrète afin de simplifier le problème. Les premiers résultats obtenus nous ont permis d'établir le lien que nous avons démontré entre modulation de fréquence et modulation d'amplitude.

6. **Une nouvelle théorie de l'effet Blazhko** : Mais surtout, nous avons établi une analogie avec le système de Fermi, Pasta et Ulam puis avec celui de Todda. Ces systèmes expliquent l'existence d'une modulation du mode fondamental par le transfert d'énergie périodique entre les différents modes, expliquant ainsi le phénomène Blazhko. Une étude plus détaillée nous montre que cette théorie reproduit également le phénomène de *period doubling* et explique le caractère singulier du *bump* secondaire que nous assimilons à un soliton.
7. **La préconisation de l'utilisation systématique de la transformée en ondelettes pour l'analyse des courbes de lumière** : La nécessité de confirmer cette théorie nous a poussé à redéfinir le protocole d'analyse des courbes de lumière des étoiles présentant l'effet Blazhko, en y incluant une analyse par transformée en ondelettes. En nous permettant de suivre l'évolution du spectre fréquentiel de la courbe de lumière de S Arae, nous avons été en mesure de confirmer notre théorie fondée sur un transfert d'énergie entre les différents modes *via* les solitons.
8. **La synchronisation, en tant que concept majeur des étoiles pulsantes** : nous avons étudié l'influence réciproque des couches adiabatiques, assimilées à un système d'oscillateurs couplés, et de la couche d'ionisation $\text{He}^{++}/\text{He}^+$, assimilée à un oscillateur à relaxation. Cette étude repose sur un concept fondamental de la dynamique non linéaire : la synchronisation. Nous avons pu expliquer alors la conjecture de Cox concernant le mouvement synchronisé des couches de l'étoile, ainsi que l'existence des différents types d'étoiles RR Lyrae existantes, nommément les RRab, RRc et RRd.

Ce travail aussi complet qu'il ait été, reste inachevé. Toute nouvelle hypothèse nécessite d'être étayée et développée. Nous proposons plusieurs pistes, certaines évidentes, d'autres moins, afin de compléter au mieux les résultats présentés dans ce mémoire :

- le nouveau paradigme proposé pour l'analyse des courbes de lumières des RR Lyrae présentant l'effet Blazhko, doit être mis en place et appliqué au plus grand nombre d'étoiles possible présentant ce phénomène.
- L'analogie entre les systèmes FPU / Todda et les étoiles pulsantes doit être affinée afin de quantifier l'influence des différents facteurs dans notre développement non linéaire.
- Le modèle d'oscillateur à relaxation proposé gagnerait à être exploré de façon plus quantitative.
- Enfin, il sera nécessaire de développer un programme d'oscillations stellaires incluant l'influence des termes non linéaires, dans la mesure où, à ce jour, les codes existants se limitent au cas linéaire.

Outre la théorie de Blazhko présentée dans ce mémoire, d'autres points n'ont été qu'effleurés et gagneraient à être développés.

- Nous espérons, à un moment, expliquer nombre de phénomènes grâce à la convection. Comme nous avons pu le mentionner dans ce mémoire, sa modélisation est complexe, et la première étape consisterait à mieux comprendre et intégrer cet effet dans les simulations numériques et les équations.
- Si notre analogie avec les oscillateurs couplés nous a permis de nombreuses avancées conséquentes, nous n'avons pu établir les distributions quantitatives de RRab, RRc, RRd et d'étoiles présentant l'effet Blazhko.

Nous le disions au tout début de ce mémoire : l'étude des étoiles pulsantes est complexe car à l'intersection de nombreux domaines d'études physiques. De la physique du plasma, à la thermodynamique, en passant par le magnétisme ou la dynamique des fluides, nous avons montré que l'analyse de ces phénomènes nous oblige à élargir notre champ d'étude afin d'aboutir à un formalisme rigoureux, permettant d'expliquer les nombreux mécanismes en jeu. Aussi difficile soit-il, un tel travail n'en reste pas moins passionnant.

Nous sommes heureux de voir que le travail que nous avons accompli nous a permis de dépasser les objectifs que nous nous étions fixés. Mais nous sommes encore plus heureux de voir que celui-ci ouvre de nombreuses pistes de recherches.

Troisième partie

Annexes

Annexe A

Glossaire mathématique

A.1 Notions de groupes

A.1.1 Groupe

Définition 34 Soit G un ensemble non-vide. On appelle loi de composition interne dans G toute application $\star : G \times G \rightarrow G$.

Définition 35 On appelle groupe tout ensemble non-vide G muni d'une loi de composition interne \star , vérifiant les 3 propriétés suivantes :

- la loi \star est associative dans G , c'est-à-dire $x\star(y\star z) = (x\star y)\star z$ pour tous $x, y, z \in G$,
- la loi \star admet un élément neutre dans G , c'est-à-dire qu'il existe $e \in G$ tel que $x\star e = e\star x = x$ pour tout $x \in G$,
- tout élément de G admet un symétrique dans G pour la loi \star , c'est-à-dire que, pour tout $x \in G$, il existe $x_0 \in G$ tel que $x\star x_0 = x_0\star x = e$.

Définition 36 On appelle groupe commutatif, ou groupe abélien, tout groupe G dont la loi \star vérifie de plus la condition supplémentaire de commutativité : $x\star y = y\star x$ pour tous $x, y \in G$.

A.1.2 Homomorphismes

Définition 37 Un morphisme est une application $f : (G, \star) \rightarrow (G', \star)$, entre deux groupes (G, \star) et (G', \star) , qui vérifie :

$$\forall (g, h) \in G^2, f(g \star h) = f(g) \star f(h).$$

A.2 Notion d'espace vectoriel

A.2.1 Espace vectoriel

Définition 38 Soit \mathbb{K} un corps. Un espace vectoriel sur \mathbb{K} , ou \mathbb{K} -espace vectoriel, est un ensemble E , dont les éléments sont appelés vecteurs, muni de deux lois :

- une loi de composition interne $+$: $E^2 \rightarrow E$, appelée addition,
- une loi de composition à gauche \bullet : $\mathbb{K} \times E \rightarrow E$, appelée multiplication par un scalaire,

telles que les propriétés suivantes soient vérifiées.

1. $(E, +)$ est un groupe abélien.
2. La loi « \bullet » vérifie les propriétés suivantes :
 - elle est distributive à gauche par rapport à la loi « $+$ » de E et à droite par rapport à l'addition du corps \mathbb{K} ,
 - elle vérifie une associativité mixte (par rapport à la multiplication dans \mathbb{K}),
 - l'élément neutre multiplicatif du corps \mathbb{K} , noté 1, est neutre à gauche pour \bullet .

A.2.2 Base

Définition 39 Une famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite libre (sur \mathbb{K}) si la seule combinaison linéaire des v_i égale au vecteur nul est celle dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 40 Le sous-espace vectoriel engendré par une famille $(v_i)_{i \in I}$ de vecteurs, noté $\text{Vect}((v_i)_{i \in I})$, est le plus petit sous-espace (au sens de l'inclusion) contenant tous les vecteurs de cette famille. De manière équivalente, c'est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs v_i . La famille engendre E , ou encore est génératrice, si le sous-espace qu'elle engendre est E tout entier.

Définition 41 Une famille B de vecteurs de E est une base de E si elle est libre et génératrice ou, ce qui est équivalent, si tout vecteur de E s'exprime de manière unique comme combinaison linéaire des éléments de B .

A.2.3 Produit scalaire

Définition 42 Soit E un espace vectoriel réel. On dit qu'une application

$$\begin{aligned} \phi : E \times E &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (x|y) \end{aligned}$$

est un produit scalaire si elle est :

- bilinéaire : ϕ est linéaire relativement à chaque argument (l'autre étant fixé).
- symétrique : $\forall (x, y) \in E^2 \quad (y|x) = (x|y)$
- positive : $\forall x \in E \quad (x|x) \geq 0$
- définie : $(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$.

A.2.4 Base orthogonale

Définition 43 Soit $(v_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E , muni du produit scalaire ϕ . La base est dite orthogonale si : $\forall (i, j) \in I^2, i \neq j, \phi(v_i, v_j) = 0$.

A.3 Espace probabilisé

A.3.1 Espace probabilisable

Définition 44 Un espace probabilisable est un couple (Ω, \mathcal{B}) constitué d'un ensemble Ω et d'une tribu ou θ -algèbre \mathcal{B} sur Ω . L'ensemble Ω est appelé l'univers lié à l'expérience et les éléments de \mathcal{B} sont appelés les événements liés à l'expérience.

A.3.2 Mesure de probabilité

Définition 45 Soit un espace probabilisable (Ω, \mathcal{B}) . Une mesure de probabilité \mathbb{P} est une application qui à un événement B quelconque associe un nombre réel (noté $\mathbb{P}(B)$). Une mesure de probabilité doit satisfaire les axiomes de Kolmogorov :

- Pour tout événement B : $0 \leq \mathbb{P}(B) \leq 1$.
- Ω désignant l'univers associé à l'expérience aléatoire considérée, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- Toute famille dénombrable d'événements deux à deux disjoints, B_1, B_2, \dots satisfait :

$$\mathbb{P}(B_1 \cup B_2 \cup \dots) = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{P}(B_i).$$

A.3.3 Espace probabilisé

Définition 46 Un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ est un un espace probabilisable (Ω, \mathcal{B}) complété par une mesure de probabilité \mathbb{P}

Annexe B

Publication 1 – PDM13 : A new graphical interfaced program for frequency analysis

PDM13: a new graphical interfaced program for frequency analysis

C. Zalian,¹★ M. Chadid¹ and R. F. Stellingwerf²

¹Observatoire de la Côte d'Azur, Université de Nice Sophia-Antipolis Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 02, France

²Stellingwerf Consulting, 11033 Mathis Mountain Rd SE, Huntsville, AL 35803, USA

Accepted 2014 February 7. Received 2014 February 7; in original form 2013 September 6

ABSTRACT

Frequency analysis of pulsating stars can be performed via several algorithms. Still, each of these methods has its own specific flaws which advocates for the use of as many tools as possible. However, the lack of simple programs with straightforward interface impedes such a goal. PDM13 is a new software dedicated to spectral analysis based on the phase dispersion minimization technique. Its graphical environment, combined with complementary tools, such as auto-segmentation, makes it a simple and powerful mean for frequency extraction. In this paper, a detailed description of the mathematical algorithms is presented. Then, we introduce the options and interface of PDM13. Finally, we compare the results from different case study using PDM13 and other programs.

Key words: methods: data analysis – techniques: photometric – stars: oscillations – stars: variables: RR Lyrae.

1 INTRODUCTION

As a fundamental tool to study the internal structure of stars, asteroseismology has proven to be particularly relevant. Still, progress is limited by the data accuracy and by inherent discontinuities of ground-based observations. The improvements of investigation methods are essential to overcome such obstacles, even if these issues tend to vanish with space missions such as *CoRoT* and *Kepler*.

Frequencies and mode identification constitute an important part of the main data of asteroseismology. They can be obtained by performing a projection of a discrete photometric signal on a trigonometric basis. There are two different approaches to frequency extraction: the parametric and the non-parametric method. The first one is the most commonly used and referred to as a Fourier-based analysis as one fits a harmonic model function to the data. The second does not assume an a priori model for the photometric function. Period04 (Lenz & Breger 2005) is an example of the available instrument for such purpose based on parametric method. Stellingwerf's phase dispersion minimization (PDM) technique (Stellingwerf 1978) is an alternative to Fourier transform algorithms for frequency extraction. As underlined by its author (Stellingwerf 2011), this non-parametric method outmatches existing ones for specific cases, urging for complementary investigation via different algorithms. Unfortunately, the lack of graphical interface and simplicity prevents a widespread usage of PDM.

In this paper, we present a new graphical interfaced program based on the PDM method, PDM13. This application also includes new features such as auto-segmentation, Gauss–Newton least-

squares fitting and cyclostationary modulation detection together with the usual set of tools provided by such programs like phase, residuals or significance plots. The current 1.0 version and sources are available at forge.oca.eu/trac/PDM13.

2 THEORY AND METHOD

2.1 PDM

PDM is a non-parametric approach for frequency extraction based on statistic methods and data folding. For each frequency, the phase diagram is computed and a mean curve is calculated. After dividing the diagram into bins, data spread around a mean curve is measured as

$$\Theta_{\text{PDM}} \equiv \frac{\left(\sum_{j=1}^B (N_j - 1) s_j^2 \right) / \left(\sum_{j=1}^B N_j - B \right)}{\left(\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \right) / (N - 1)}, \quad (1)$$

where

$$s_j^2 \equiv \frac{\sum_{i=1}^{N_j} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2}{N_j - 1} \quad (2)$$

with B the number of bins, N_j the number of data sets in bin j , x_{ij} the observation $x(t_i)$ with bin index j , \bar{x}_j the average over a bin, N and \bar{x} the overall number of data and average.

For frequency that is not present in the data, we will find $\Theta_{\text{PDM}} \approx 1$.

★ E-mail: cyruszalian@gmail.com

2.2 Auto-segmentation

As underlined by Stellingwerf (2011), the computation time is greatly reduced when performing a first frequency search using a small segment rather than over the whole data sets. Besides, aliases due to gaps can also be diminished by such an approach. Nevertheless, the previous version of PDM relied on a threshold value defined by the user to determine if the time span between two points was a significant gap. The auto-segmentation algorithm is able to detect automatically each segment allowing a more simple and precise process.

For a given set of N data points $n_i(t_i; m_i)$, where t_i and m_i are the respective time and magnitude, the idea is to compute the delay between two following data points $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ and to detect any discontinuities using the Lee & Heghinian test (Lee & Heghinian 1977).

This test is a Bayesian procedure applied to normally distributed series with a null hypothesis being the absence of discontinuities. We consider the following model:

$$X_j = \begin{cases} \mu + \epsilon_j & j = 1, 2, \dots, \tau \\ \mu + \delta + \epsilon_j & j = \tau + 1, \dots, n \end{cases}, \quad (3)$$

where ϵ_j are random variables, independent and normally distributed, with null expectance value and a constant variance. The break point τ and the parameters μ and δ are unknown.

The method determines the a posteriori probability distribution function of the parameters τ and δ , considering their a priori distributions and supposing that the break time follows a uniform distribution. τ a posteriori distribution is computed as

$$P(\tau|x) \propto \frac{\sqrt{\frac{n}{\tau(n-\tau)}}}{R(\tau)^{n-2}}, \quad (4)$$

$$R(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{\tau} (x_i - \bar{x}_{\tau})^2 + \sum_{i=\tau+1}^n (x_i - \bar{x}_{n-\tau})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}_n)^2}, \quad (5)$$

$$\text{with } \bar{x}_{\tau} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=1}^{\tau} x_i \quad \text{and} \quad \bar{x}_{n-\tau} = \frac{1}{n-\tau} \sum_{i=\tau+1}^n x_i. \quad (6)$$

Therefore, we can estimate the probability that a discontinuity occurs at time τ . However, the Lee & Heghinian algorithm's computation time increases rapidly for rich data sets. Thus, we have implemented a recursive method reducing the complexity to $\mathcal{O}(n)$.

As this method broadens the spectral features from $1/T$ to $1/T_j$, where T is the total time base and T_j the total time of the longest segment, we need to perform a second scan including gaps near the best candidate given by the first step.

2.3 Gauss–Newton algorithm

In former version of PDM, the amplitude associated to the best candidate frequency was the one of the mean curve. We have added a least-squares fitting algorithm which allows further investigation and comparison of the obtained value.

Considering the N -residuals function r_i , of two variables A and ϕ (the amplitude and the phase of the fitting curve, respectively) ($N \geq 2$), the aim is to find iteratively the minimum of the sum of squares as

$$S(\mathbf{B}) = \sum_{i=1}^N r_i(\mathbf{B})^2 \quad (7)$$

starting with an initial guess $\mathbf{B}^{(0)} = (A^{(0)}, \phi^{(0)})$ for A and ϕ , $\mathbf{B}^{(s+1)}$ is given by

$$\mathbf{B}^{(s+1)} = \mathbf{B}^{(s)} - (\mathbf{J}_r^T \mathbf{J}_r)^{-1} \mathbf{B}^{(s)}, \quad (8)$$

where $\mathbf{J}_r = \frac{\partial r_i}{\partial B_j}(\mathbf{B}^{(s)})$ is the Jacobian matrix of r . (9)

After a first scan, the residuals are calculated using the Stobie method (Stobie 1970). One can choose to remove only the extracted frequency from the signal or the signal mean curve.

2.4 Modulation detection and Blazhko effect

PDM13 can search directly for modulation frequency, which is extremely interesting for detecting the Blazhko effect (Blazhko 1907). A modulated signal is a cyclostationary process which means that its statistical properties present a periodicity as shown by equation (10):

$$E[Y(t)] = m_y(t) = m_y(t + T), \quad (10)$$

where Y represents the magnitude and T the modulation period. While existing methods use specific functional forms to describe modulation (Szeidl & Jurcsik 2009; Benkő, Szabó & Papp 2011), cyclostationarity does not impose an a priori model.

Based on this property, the program will divide the data in sub-segments and compute mean values for each of them. Then, the PDM algorithm will look for periodicity in the resulting file giving a best candidate for modulation frequency.

3 PDM13 INTERFACE

The graphical interface is divided in three parts.

- (i) Light curve module: within this module, the user can import, export, edit and plot the time string data.
- (ii) PDM module: this module is dedicated to the extraction of frequencies – including multiple period and Blazhko modulation. As we have already mentioned, the PDM algorithm is used for this purpose. The user can also obtain a significance plot related to the extracted frequency – using the Beta function test or the Monte Carlo test.
- (iii) Gauss–Newton module: in the third part, the Gauss–Newton algorithm performs a least-squares fit to obtain the amplitude and phase related to each selected frequency.

Besides, the *Configuration* menu allows more control on the automated parameters.

3.1 Light Curve tab

In this tab (Fig. 1), time series can be imported, exported, appended and edited. Furthermore, data points can be plotted using the *Display Graph* button.

Each plot can be manipulated using directly the mouse to zoom on a specific area or by choosing the *Select ViewPort* or *View all* in the *Zoom* menu. Likewise, each graph can be printed or exported in PNG/EPS format using the *Graph* menu.

3.2 PDM tab

This tab is divided into two parts: a panel which contains the available settings and a list box where PDM results are displayed (see Fig. 2).

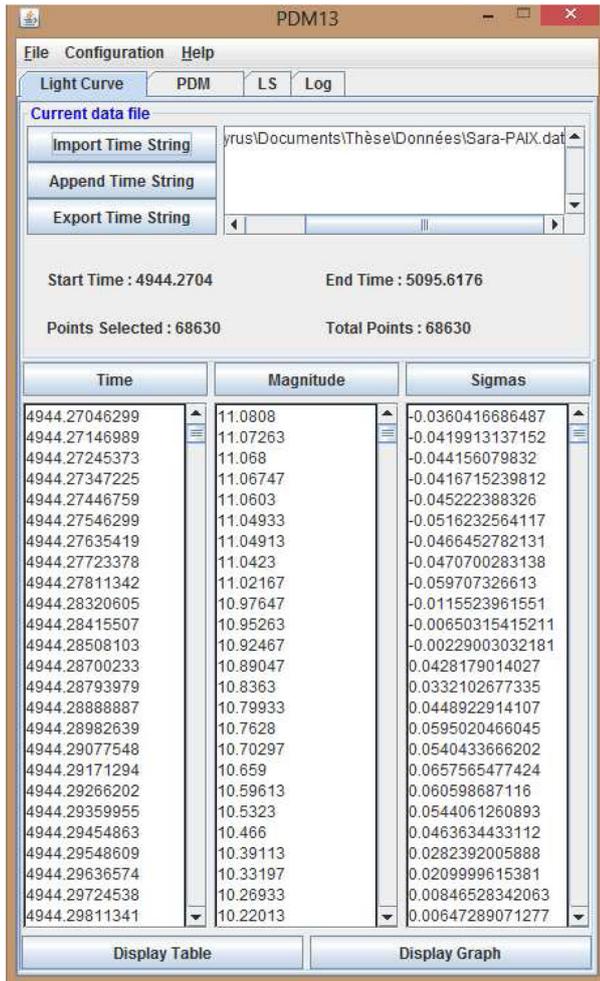


Figure 1. Light curve module.

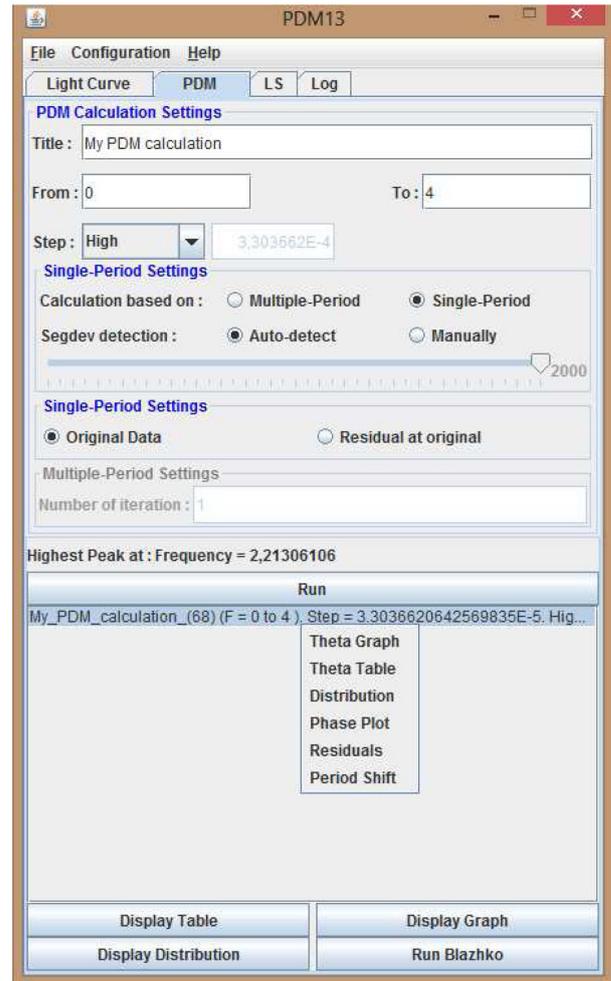


Figure 2. PDM module.

In the first part called *PDM Calculation Settings*, the frequency range and step can be edited as well as the title of the theta plot. The step between each investigated frequency is automatically fixed according to the given data. A *Custom* option is available to set this option manually.

The panel on the one hand permits to program numerous loops in order to look for multiple periods. The number of loops has to be specified in the *Multiple-Period Settings* block. On the other hand, it enables the user to set his own parameters for the segment detection or to let the program work on its own as already discussed. In manual mode, the program will look for gaps greater than a specified multiple – defined by *segdev* – of the average time between each of the data points. Using this mode is particularly interesting when a single segment is needed to avoid important bias due to small time coverage.

After the first run, the corresponding residuals are calculated. By switching the *Single-Period Settings* to *Residual at original*, the algorithm looks for a significant period in the pre-whitened data from the selected tab in the list box. Moreover, the user can choose to add the extracted frequency with a given number of harmonics to the *LS* tab after each calculation.

For each analysis, a line is added to the list box. This line contains the name and the parameters used for the calculation. Different options are available when right clicking on one of the tabs. First, the *Theta Graph* and *Theta Table* can be displayed. Equivalent to

the Fourier spectrum, their minimum shows an a priori significant frequency. The pop-up menu also gives access to the *Distribution Plot* and table as well as the *Period-Shift* graph – if these options have been activated in the *Configuration* menu.

The residuals obtained after the selected analysis can also be plotted using this menu. Finally, the phase plot of the light curve at the best candidate frequency can be represented using the *Phase plot* option as well as the fit curve by selecting *Fit Curve* in the *Curves* menu.

At the bottom of the panel, different buttons give direct access to some of the plot and table already mentioned. The *Run Blazhko* button starts a direct scan for modulation frequency. The resulting file will have a '[Blazhko]' prefix in the list box.

3.3 LS tab

Each frequency extracted, along with their harmonics, ends up in this part (Fig. 3). Frequencies, amplitudes and phases are imported or exported using the corresponding button. The *Calculate* button launches the least-squares fitting for all the selected items according to the formula specified in the upper panel. New frequencies can be added manually. Mathematical operations are accepted as long as they start with an = sign. For instance, in f_2 , the following line ' $= 2 * f_1$ ' will be replaced by the double of the first frequency.

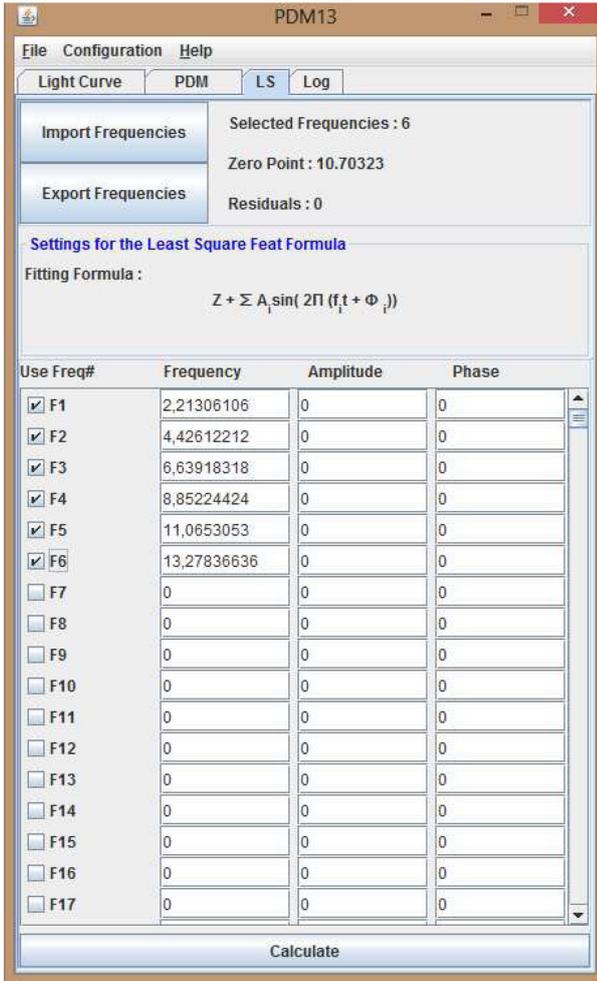


Figure 3. Gauss–Newton module.

Also, some information about the current fit are displayed such as *Zero-Point*, *Selected Frequencies*, *Residuals*.

3.4 Menu bar

Along with the usual possibilities found in a menu bar – save, load, new project, import, export – the *Configuration* menu allows the user to have more control on the PDM process (Fig. 4).

The *Set Bin Type* offers three possibilities: *10/1*, *5/2*, *auto*. The *auto* option will let the program choose by itself which type of bin should be used. If the *10/1* option is selected, 10 or a 100 bins will

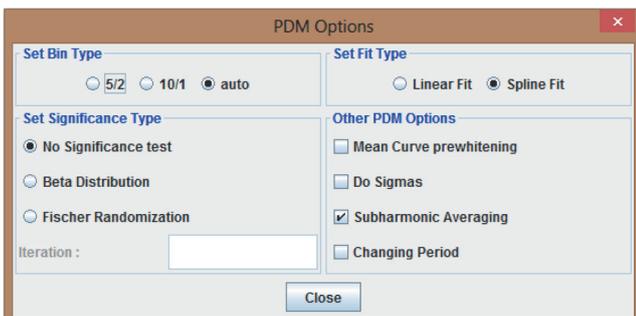


Figure 4. Option window.

be used – depending on the number of data points – to cover a period with no overlap between each of the data points. The *5/2* option is similar except that there is a half coverage between each of the bins which is more convenient for data sets with less than 100 points and produces less noise.

The *Set Fit Type* can be set to *Linear Fit* or *Spline Fit*. The latter gives a smoother fit of the bin means.

Set Significance Type can be used in order to obtain a significance distribution for each theta value, the significance being a probability that a pure signal noise has produced a theta value as low or lower than the observed one. The *Beta function test* is based on Schwarzenberg-Czerny (Schwarzenberg-Czerny 1997) incomplete beta function given by equation (11) – where N is the total number of data points, M is the number of bins and Θ is the value of the PDM theta statistic – combined with a bandwidth correction (equation 12), as suggested by Press et al. (1992):

$$\beta \left(\frac{N - M}{2}, \frac{M - 1}{2}; \frac{N - M}{N - 1} \Theta \right), \quad (11)$$

$$\beta_2 = 1 - (1 - \beta)^m, \quad (12)$$

where $m = \frac{n_f}{l_{points}}$, with n_f the number of frequency points and l_{points} the number of points per spectral line. Still, the bandwidth correction is not fully determined by equation (12) as it depends on numerous details of the analysis. Thus, an alternative approach is the Monte Carlo test by Nemeč & Nemeč (Linnell Nemeč & Nemeč 1985) where the data order is randomized and the theta minimum obtained is an estimate of ‘pure noise’. Repeating this process many times gives a distribution of the noise-generated theta-mins.

In the *Other PDM Options* part, the data quality can be taken into account using the sigma values by selecting the *Do Sigmas* option. To avoid the sub-harmonic issue due to the detection of n -period periodic signal, the *Subharmonic Averaging* option performs a simplified significance test at each frequency and eventually replace the theta value by the average of the actual theta and the theta at half frequency. Finally, to detect slow period changes in the given data set, the *Changing Period* option can be activated. When a calculation is launched, the software opens dialog boxes where the period shift range and precision has to be defined according to equation (13), where β is a quantity given the dimension of d Myr^{-1} which is a unit of $1/365.25e6$, P_0 is the period obtained without the period shift change and the time t is zero at the middle of the current data sets:

$$P = P_0 + \beta t. \quad (13)$$

4 CASE STUDY AND DISCUSSION

Stellingwerf presented two case studies of artificial data strings where the PDM algorithm outperforms the Lomb–Scargle technique (Stellingwerf 2011). We carry on this study by showing the effect of accurate segmentation on the outcome of the computation.

The first one is a series of narrow pulses with unevenly distributed gaps (Fig. 5). The following curves correspond, respectively, to the frequency analysis for a Fourier-type method, PDM with no segmentation, PDM with manual segmentation and PDM13 with auto-segmentation. The details of the auto-segmentation are shown in Table 1. It is clear, as already stated, that PDM curve is more precise with narrower spectral lines and less prominent side lobes. What is even more noticeable is that aliases are smaller when considering the auto-segmentation result.

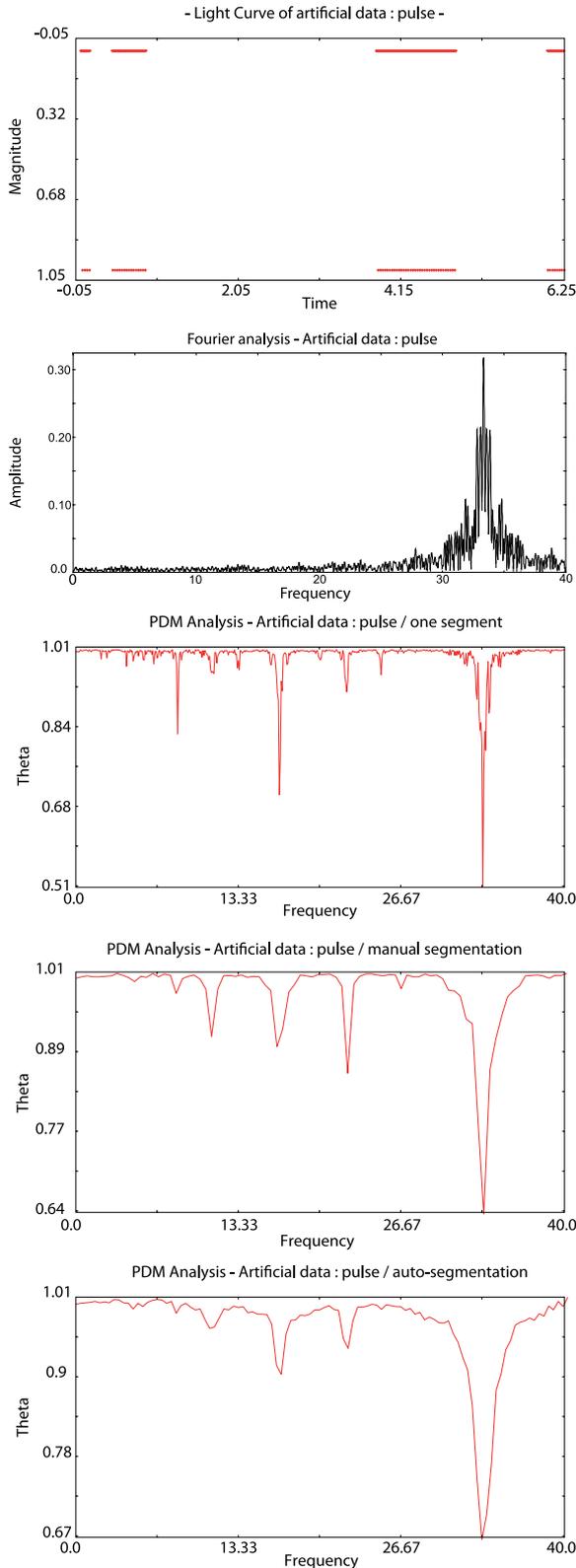


Figure 5. From top to bottom: Artificial data of several narrow pulses periodically spaced ($T = 0.03$ d) with unevenly distributed gaps; Fourier spectrum; PDM13 plot with no segmentation; PDM13 plot with manual segmentation; PDM13 plot with auto-segmentation.

Table 1. Auto-segmentation of artificial data: pulse.

Segment number	Start point	Number of points	T_{start}	T_{range}
1	0	126	0.001	0.125
2	126	440	0.407	0.439
3	566	1033	3.811	1.032
4	1599	221	6.019	0.22

The second example was originally meant to show flaws in the Lomb–Scargle results in the case of a complex signal while PDM managed to obtain the accurate main frequency. We will push further this example by showing that adding gap in such case may lead to similar imprecise value unless the auto-segmentation option is used. The curve is shown in Fig. 6 along with the corresponding Fourier and PDM13 spectrum, without and with the auto-segmentation option. The results of the segment auto-detection are available in Table 2. As indicated, the manual segmentation and the Lomb–Scargle show an erroneous main period of 1 per day. Such an issue can be overcome by not performing segmentation but this will increase the calculation time.

Our last test cases are the Blazhko RR Lyrae star S Arae ($\alpha = 17^{\text{h}}59^{\text{m}}10^{\text{s}}.73$, $\delta = -49^{\circ}26'00''.45$, J2000; Chadid et al. 2010) observed from Antarctica using the Photometer Antarctica eXtinction (PAIX) telescope and the eclipsing binary star 000202–6653.3 ($\alpha = 0^{\text{h}}02^{\text{m}}02^{\text{s}}.0$, $\delta = -66^{\circ}53'17''.9$, J2000 with $V_{\text{max}} = 12.16$ mag) from the ASAS Catalogue (Pojmanski 2002). These case studies focuses on PDM13 auto-segmentation ability (Tables 3 and 4). Even with a very high duty cycle for a ground-based observation site, S Arae light curve shows numerous gaps (Fig. 7). Running the algorithm using manual segmentation and a segdev value of about 500 leads to irrelevant results such as $f_1 = 1.1065 \text{ d}^{-1} \pm 3.303 662E - 4$ or $f_1 = 0.4426 \text{ d}^{-1} \pm 3.303 662E - 4$ showing the importance of this parameter in the PDM analysis. By performing an accurate and automated segmentation with the auto-segmentation option, we avoid such obstacle. Indeed, the algorithm was able to isolate 23 clusters ending up with $f_1 = 2.2129 \text{ d}^{-1} \pm 3.303 662E - 4$ (Fig. 8) as obtained by Chadid et al. with Period04. The Blazhko behaviour is clear in the phase plot folded with the main frequency (Fig. 9). The investigation for a modulation frequency leads to a value of $f_m = 0.1999 \pm 3.303 662E - 4$. Similarly, running PDM13 on 000202–6653.3 (Fig. 10) using one segment ends up with a main frequency $f_1 = 3.562 051 683 \text{ d}^{-1} \pm 2.537 101E - 5$ while the correct period of $3.062 081 498 \text{ d}^{-1} \pm 2.537 101E - 5$ is obtained using the auto-segmentation option (Figs 11 and 12).

5 CONCLUSION

The different examples presented in this paper show that a spectral analysis based solely on the Fourier-type method can lead to incorrect conclusions. Such assessment advocates for complementary frequency extraction tools. To achieve such a goal, these tools need to be simple and powerful to allow a widespread use. PDM13 reaches this aim by combining a graphical interface with automated processes. We have showed how these can outperform existing software on specific cases.

One of the main feature, the auto-segmentation based on the Lee & Heghinian’s technique, is originally intended to detect one major change in the data sets. Still our recursive approach, which was first meant to reduce computation time, permits to detect multiple discontinuities. Consequently, we were able to obtain an

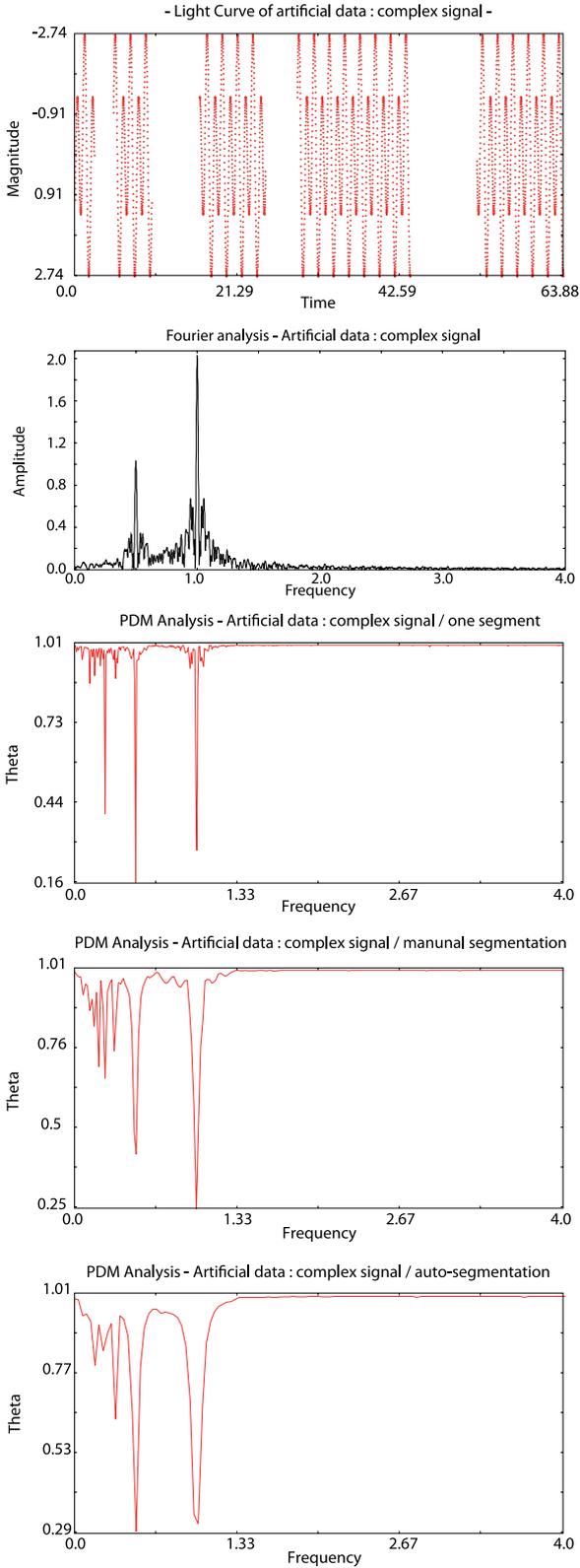


Figure 6. From top to bottom: Artificial data of complex signal made of two sinusoids ($T_1 = 1$ d and $T_2 = \frac{1}{2}$ d) with unevenly distributed gaps; Fourier spectrum; PDM13 plot with no segmentation; PDM13 plot with manual segmentation; PDM13 plot with auto-segmentation.

Table 2. Auto-segmentation of artificial data: complex signal.

Segment number	Start point	Number of points	T_{start}	T_{range}
1	0	251	0	2.5
2	251	501	5	5
3	752	864	16.27	8.63
4	1616	1480	29.04	14.79
5	3096	1135	52.54	11.34

Table 3. Auto-segmentation of S Arae data.

Segment number	Start point	Number of points	T_{start}	T_{range}
1	0	525	4944.270 463	0.478 773
2	525	510	4945.264 85	0.486 643
3	1035	501	4946.283 692	0.466 146
4	1536	375	4947.396 019	0.363 356
5	1911	357	4949.333 16	0.340 74
6	2268	548	4951.238 519	0.522 152
7	2816	480	4952.233 16	0.451 782
8	3296	573	4953.223 125	0.553 935
9	3869	267	4955.306 25	0.256 285
10	4136	492	4956.313 623	0.466 666
11	4628	711	4957.198 09	0.589 966
12	5339	678	4958.208 241	0.585 671
13	6017	294	4959.203 38	0.165 532
14	6311	391	4959.440 66	0.373 692
15	6702	174	4961.188 785	0.158 981
16	6876	405	4962.178 079	0.286 84
17	7281	468	4964.443 495	0.346 366
18	7749	681	4966.213 634	0.562 13
19	8430	860	4967.196 979	0.612 361
20	9290	907	4968.155 139	0.644 363
21	10 197	900	4969.150 035	0.638 946
22	11 097	987	4970.134 78	0.702 176
23	12 084	861	4971.1496 41	0.614 896

Table 4. Auto-segmentation of 000202–6653.3.

Segment number	Start point	Number of points	T_{start}	T_{range}
1	0	19	1868.525 78	80.990 11
2	19	105	2033.890 15	237.643 88
3	124	38	2439.899 22	124.752 79
4	162	24	2620.545 11	60.973 82
5	186	2	2744.919 71	14.003 48
6	188	58	2818.923 83	225.600 01
7	246	2	3107.919 24	8.002 65
8	248	9	3146.915 75	65.000 62
9	257	1	3276.728 05	0
10	258	2	3356.578 37	3.0075
11	260	10	3382.574 44	32.940 71
12	270	4	3526.901 36	28.008 03
13	274	1	3584.860 65	0
14	275	20	3615.824 22	61.895 43
15	295	24	3700.5908	75.930 75
16	319	15	3849.922 97	63.015 05
17	334	12	4084.586 56	55.936 76
18	346	80	4228.930 63	269.614 14
19	426	93	4564.919 18	307.606 38
20	519	51	4933.9213	233.700 66

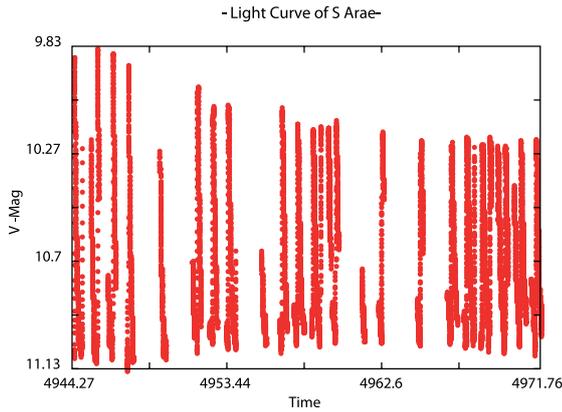


Figure 7. PAIX light curve of S Arae.

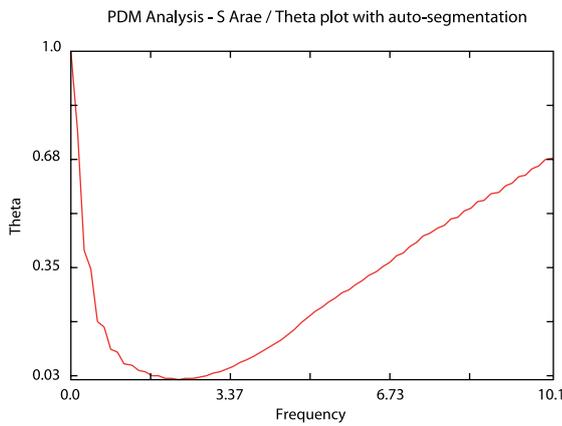


Figure 8. Theta plot of S Arae using auto-segmentation.

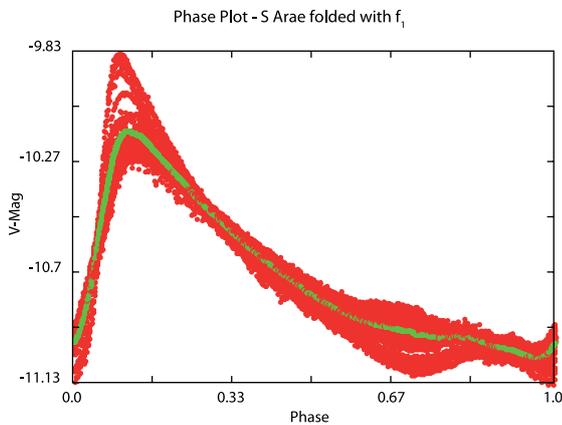


Figure 9. Folded PAIX light curve with main pulsation P_1 (in red) and mean curve (in green).

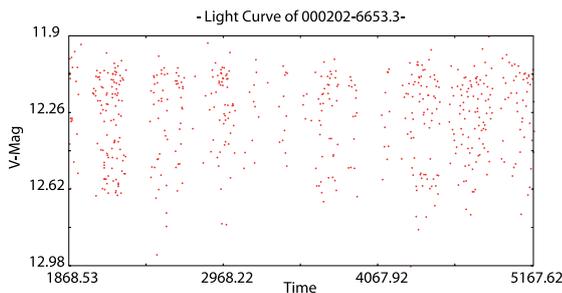


Figure 10. Light curve of 000202–6653.3.

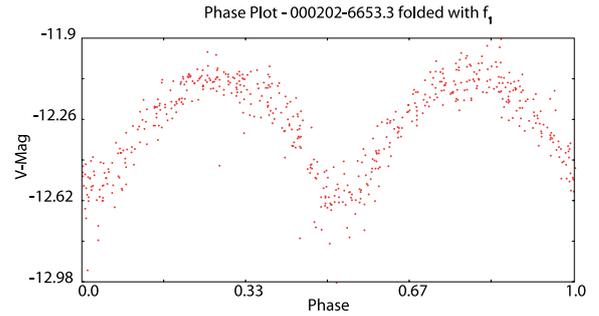


Figure 11. Folded 000202–6653.3 light curve with main pulsation P_1 .

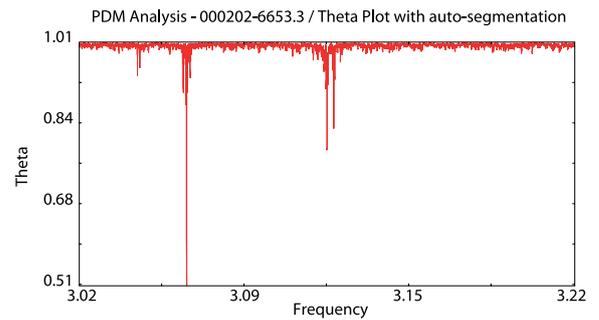


Figure 12. Theta plot of 000202–6653.3 using auto-segmentation.

accurate segmentation greatly reducing aliases and enhancing the result curve.

REFERENCES

- Benkő J. M., Szabó R., Paparó M., 2011, *MNRAS*, 417, 974
 Blazko S., 1907, *Astron. Nachr.*, 175, 327
 Chadid M., Vernin J., Mekarnia D., Chapellier E., Trinquet H., Bono G., 2010, *A&A*, 516, L15
 Lee A. F. S., Heghinian M., 1977, *Technometrics*, 19, 503
 Lenz P., Breger M., 2005, *Commun. Asteroseismol.*, 146, 53
 Linnell Nemeč A. F., Nemeč J. M., 1985, *AJ*, 90, 2317
 Press W. H., Teukolsky S. A., Vetterling W. T., Flannery B. P., 1992, *Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing*. Cambridge Univ. Press, Cambridge
 Pojmanski G., 2002, *Acta Astronomica*, 52, 397
 Schwarzenberg-Czerny A., 1997, *ApJ*, 489, 941
 Stellingwerf R. F., 1978, *ApJ*, 224, 953
 Stellingwerf R. F., 2011, in McWilliam A., ed., *RR Lyrae Stars, Metal-Poor Stars, and the Galaxy. The Observatories of the Carnegie Institution of Washington, Pasadena, CA*, p. 47
 Stobie R. S., 1970, *Observatory*, 90, 20
 Szeidl B., Jurcsik J., 2009, *Commun. Asteroseismol.*, 160, 17

This paper has been typeset from a $\text{\TeX}/\text{\LaTeX}$ file prepared by the author.

Annexe C

Publication 2 – Antarctica photometry of the Blazhko RR Lyrae star S Arae

Antarctica photometry of the Blazhko RR Lyrae star S Arae

C. Zalian,[★] M. Chadid, J. Vernin, L. Abe and A. Agabi

Université Nice Sophia-Antipolis, Observatoire de la Côte d'Azur, UMR 7293, Parc Valrose, F-06108 Nice Cedex 02, France

Accepted 2015 November 3. Received 2015 November 3; in original form 2015 May 3

ABSTRACT

We pursue the study of S Arae, an RRab Lyrae Blazhko star, using unique, uninterrupted and accurate optical photometric data acquired from Antarctica at Dome C by PAIX – Photometer Antarctica eXtraction – during 150 d. The PAIX data were analysed using both Period04 and PDM13. Besides a main pulsation period of 0.452 d and a modulation period of 47.264 d, three other significant frequencies were found. Multiplet patterns, up to the ninth order, were also extracted, showing a clear asymmetric structure. Following these results, a new approximation of the main-frequency harmonics amplitude decrease is suggested, replacing the usual exponential fit by a hyperbolic one. The physical properties of the Blazhko star, namely metallicity, temperature, mass, were obtained using a new approach based on the study of these parameters for each Blazhko phase. Finally, the PAIX data reveal a residual scatter that occurs during a small phase interval, 10 per cent of the pulsation period, corresponding to the phase of the main shock passage across the atmosphere. The position of the so-called main bump, corresponding to the shock resulting from the infalling atmosphere and the expanding photosphere, varies from one cycle to another and, moreover, around this main bump, two other bumps appear and vanish at different phases during a Blazhko cycle. Following these observations, we discuss the relation between the bump topology and the Blazhko period and give new insights for future Blazhko theoretical investigations.

Key words: shock waves – methods: observational – techniques: photometric – stars: atmospheres – stars: oscillations – stars: variables: RR Lyrae.

1 INTRODUCTION

Since their discovery at the end of the 19th century, RR Lyrae stars have contributed to almost every branch of astronomy, from chemical and dynamical properties of old stellar populations to distance measurements. These pulsating horizontal branch A-F stars, with period ranging from 0.2 to 1.2 d are relatively low-mass, metal poor Population II stars with an average absolute magnitude of 0.75 and commonly found in globular clusters.

In 1907, Russian astronomer Sergey Nikolaevich Blazhko observed an amplitude modulation of the periodic pulsation of a RR Lyrae-type star, RW Dra (Blazhko 1907). This phenomenon, now known as the Blazhko effect, has been since observed in many others: RRab, RRc and recently in RRd-type star. However, none of the dozens of existing models managed to describe fully the why and wherefores of this amplitude and period modulation. Amongst these, three are considered as the most cogent: Shibahashi magnetic model (Shibahashi 2000), Nowakowski and Dziembowski resonance mechanism (Nowakowski & Dziembowski 2001) and Stothers' convective model (Stothers 2006). Still, none are entirely satisfactory. The magnetic oblique rotator mechanism proposed by

Shibahashi has been ruled out by Chadid et al. (2004) due to the absence of the required 1-kG strong magnetic field. The asymmetric structured spectrum observed in Blazhko stars (Chadid & Chapellier 2006) undermines the resonance models, based on a non-linear resonant coupling between the dominant radial mode, and non-radial models. Finally, the model suggested by Stothers, based on a periodic change in the turbulent convective properties of the star, has also been dismissed by Molnár, Kolláth & Szabó (2012) due to its incapability to explain strong modulation in short time-scale. Recently, the possibility of an unstable resonant interaction between the fundamental and the ninth radial overtone has been suggested as a new paradigm for the Blazhko effect (Buchler & Kolláth 2011; Szabó 2014).

Another ongoing matter of study on RRab-type stars is the presence of shock waves in their atmosphere. Hill (1972) showed that the so-called bump and hump in the light curve of these stars are a consequence of two shock waves propagating through their atmosphere. The κ and γ mechanisms are responsible for the main shock occurring just before the maximum of the light curve, while the one occurring just before the minimum would be caused by the collision of the infalling upper atmosphere with the expanding photosphere. Chadid et al. (2014) have shown that this description was incomplete as other bumps can be observed in the light curve of S Arae, and would be, thus, evidence of other shocks. They have also

[★] E-mail: cyruszalian@gmail.com

proposed a new explanation for the Blazhko effect based on the idea that the multishock structure develops a stationary coronal structure that drives an outflowing wind (Stellingwerf 2013) which could possibly explain the observed modulation. The bump phenomenon is indubitably linked to the Blazhko effect, whether as a cause or as a consequence of the mechanism. Following Hertzsprung's work on the link between the bump phase and the pulsation period of Cepheid stars (Hertzsprung 1926), Guggenberger & Kolenberg (2006) have suggested that a similar result could be computed for RR Lyrae stars. Unlike Cepheids stars where the bump position does not vary from one period to another for a given star, RR Lyrae bumps do move from one pulsational cycle to another. This phase variation can be linked to the Blazhko cycle and thus may explain the modulation observed or be a consequence of it.

Frequency analysis of RR Lyrae light curve, based on Fourier decomposition, is of primary importance when it comes to understand the oscillatory behaviour of the star. Empirical surveys and theoretical studies have shown that the physical characteristics of RR Lyrae stars can be deduced from their Fourier analysis. Indeed, metallicity, absolute magnitude, distance, temperature, luminosity, surface gravity and mass can be computed using as few parameters as the visual amplitude, the rise time, the main period and the Fourier parameter A_1 , A_3 and ϕ_{31} (Nemec 2011). However, these equations do not apply well to Blazhko-type stars, due to the continuous variation of their input parameters. Different approaches have been considered to tackle such an issue. The most widespread one consists in taking the averaged value as in Feast et al. (2008). Unfortunately, this method leads to unreliable results as shown by Nemec et al. (2013). The latter suggested that the overall averaged values should be replaced by an average of instant values. However, this implies, first, that the equations for physical properties work for each Blazhko phase and, moreover, have a high-resolution coverage on the total time span with few gaps as, for instance, in the data acquired by *CoRoT* and *Kepler*.

This paper follows the first 49-d photometric study of the RR Lyrae Blazhko star *S Arae* (Chadid et al. 2010b). New observations include three Blazhko periods of *S Arae* with a time span of over 150 d. Section 2 will present the observation protocol together with the frequency extraction process. The following section features the

computation results, including the light-curve modulation multiplet and the study of its asymmetric structure, the analysis of the harmonic amplitude decrease, the possibility of period-doubling and the presence of non-radial mode and overtones. In this same section, the evolution of parameters such as the rise time, the Fourier coefficients, the maximum amplitude-phase during a Blazhko cycle is also investigated together with an Observed-minus-Calculated (O–C) analysis. In Section 4, we use the results obtained in the previous paragraph to compute the physical characteristics of *S Arae*, namely, its metallicity, temperature, absolute magnitude, mass, luminosity, etc. To obtain such results, we follow a new approach avoiding the hurdle of averaged input parameters which leads to unreliable results in the case of Blazhko stars. Finally, we close our discussion with an analysis of bumps topology, and thus shock waves, in *S Arae*.

2 OBSERVATIONS AND TOOLS

2.1 PAIX photometry

The photometric data were acquired at Dome C on the Antarctica plateau using PAIX – Photometer Antarctica eXtraction – attached to a 40-cm Ritchey–Chretien f/10 telescope. More details on the setup and design of PAIX can be found in Chadid et al. (2010b). An almost continuous acquisition of photometric observations during 150 nights – from 2009 April 18 until September 20, with a 65 per cent duty cycle – is presented (Fig. 1) covering almost three Blazhko period. *S Arae* V-magnitude varies from 9.79 to 11.14 mag (1.35 mag amplitude) with a 0.452 d period. A strong amplitude modulation of a 48.544 d period is also observable.

2.2 Frequency analysis via PDM13 and Period04

A frequency analysis of the photometric data was performed using Period04 (Lenz & Breger 2005) and PDM13 (Zalian, Chadid & Stellingwerf 2014, <https://forge.oca.eu/trac/PDM13>). While Period04 relies on a Fourier-based analysis, as it fits an harmonic model function to the data, PDM13 does not assume an a priori model for the photometric function.

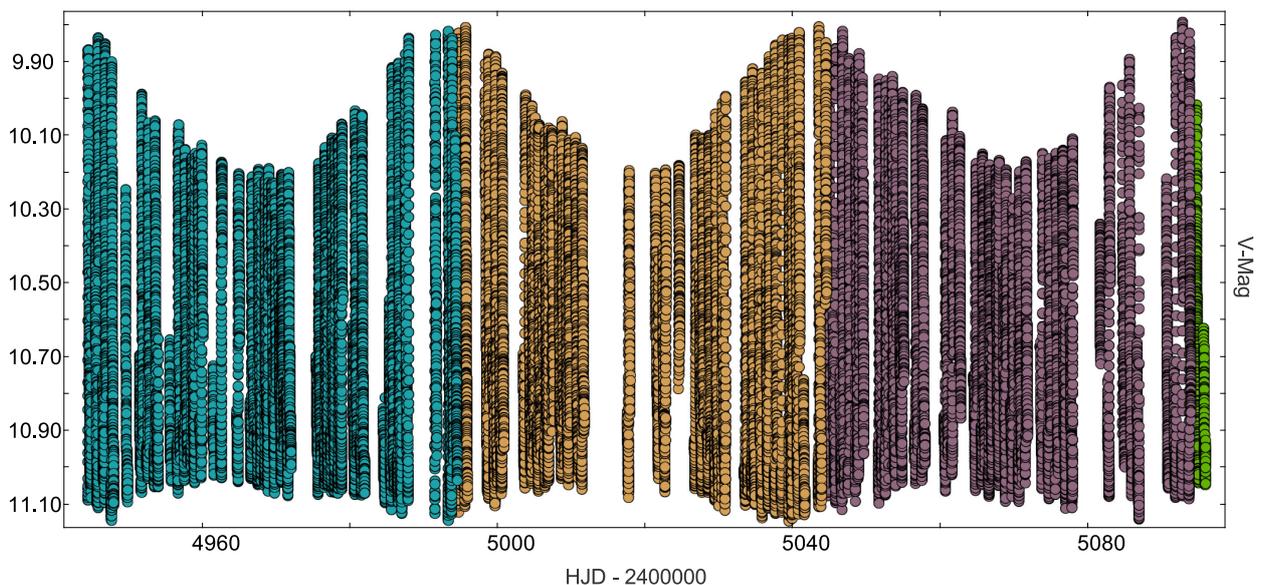


Figure 1. PAIX light curve of the Blazhko star *S Arae* over one polar night (150 d).

PDM13 is based on Stellingwerf’s phase dispersion minimization (PDM) technique (Stellingwerf 1978). As shown by its author (Stellingwerf 2011), PDM outmatches existing algorithms in several cases and is particularly efficient for poor long spanned data – i.e. few data with large gaps for extended time-scale.

Besides, numerous significance test studies were conceived for the PDM technique. Amongst these, the β function test (Schwarzenberg-Czerny 1997) and the Monte Carlo test by Linnell Nemeč & Nemeč (1985) were implemented in PDM13 allowing more reliable extractions of frequencies.

Unlike existing programs where residuals are calculated by pre-whitening a prominent frequency, PDM performs a mean curve pre-whitening, allowing a different approach to the light-curve frequency analysis. This is particularly interesting when it comes to the study of transitory effect as we will see in the discussion below.

Finally, combining these two tools, Period04 and PDM13, allows us to obtain more reliable results. Indeed, as the data structure presents several gaps, bias frequencies – aliases – can emerge. One of PDM13 main features is the ability to dodge such an issue using the *Auto-segmentation* feature. This option, originally based on the Lee and Heghinian test (Lee & Heghinian 1977), was lately improved to give faster and more accurate results. It computes the average time difference \bar{dt} between each photometric point as well as the standard deviation σ . The 50 or 95 per cent confidence level is then given by

$$[\bar{dt} - i\sigma; \bar{dt} + i\sigma], \quad (1)$$

with $i = 1$ or 2 for, respectively, the 50 and 95 per cent confidence level. A time span between two points larger than the one included in this confidence interval can then be considered as a gap.

3 ANALYSIS AND RESULTS

3.1 Fourier analysis of the full data set

First, we performed a Fourier analysis of the complete data set. The goal was to obtain a first overall picture of S Arae with its main and modulation period in term of mean values. Indeed, as we will see in Section 3.2, those parameters, along with others, vary over time. Still, these mean coefficients, and those derived from them, are necessary to compute the fundamental characteristics of the star.

A significance test was performed using the signal-to-noise ratio criteria with Period04 and the Monte Carlo test with PDM13 for each frequency extracted. Only those showing positive results for each test were kept (see Fig. 2).

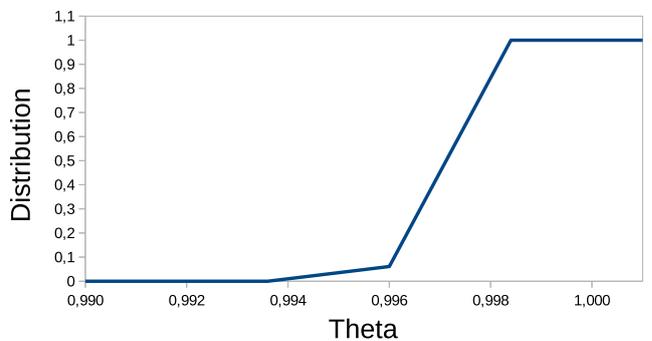
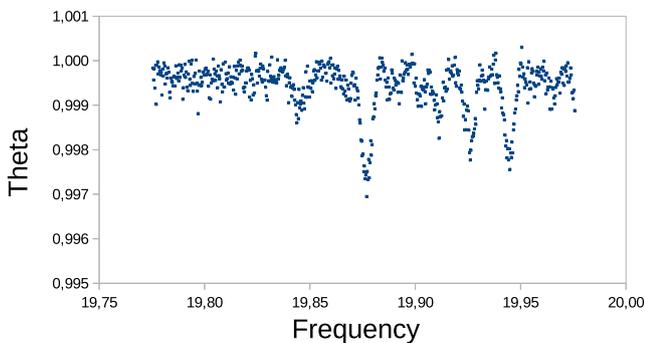


Figure 2. Significance test using the Monte Carlo method from PDM13 for $9f_0 - 2f_b$. The left figure represents the result of the frequency analysis. The minimum value of theta, 0.9968, is reached for a frequency corresponding to $9f_0 - 2f_b$. The right figure represents the theta distribution. For theta = 0.9968 the distribution is above the 0.1 value, hence the result was disregarded.

Fig. 3 shows the evolution of the frequency spectrum along the extraction process. We were able to extract 85 significant frequencies. We found a main frequency of $2.213\,02\text{ d}^{-1}$ with a $\sigma_f = 1.485 \times 10^{-6}\text{ d}^{-1}$ and its harmonics up to the 22th order; a modulation frequency of 0.0211 d^{-1} with a $\sigma_{f_b} = 2.405 \times 10^{-5}\text{ d}^{-1}$ and its second harmonic together with Blazhko multiplet structure. Additional frequencies will be addressed later on in this paper (Section 3.1.5).

The Fourier parameters needed to compute physical characteristics are presented in Table 1. Epoch-independent phase differences and amplitude ratios are, respectively, given by the following formulae: $\phi_{i1} = \phi_i - i\phi_1$ and $R_{i1} = A_k/A_1$ (Simon & Lee 1981).

3.1.1 Multiplet structure

The frequency spectrum S Arae includes Blazhko triplet to undecaplet structure, suggesting a non-linear modulation. The map of harmonics, Fig. 4, shows an irregular pattern. Components were detected up to the undecaplet order on the left-hand side, while on the right-hand side, in most cases, only one side peak could be found. For each harmonic, the positive side peak shows lower amplitude than negative one, resulting in a clear asymmetry in the map of harmonics. Fig. 5 corroborates our assessment as negative sides are more prominent than the positive one in this close-up look of the original spectrum around the ninth harmonic. This is particularly interesting as three-fourths of the known Blazhko stars show the opposite behaviour (Alcock 2003). Still, focusing on the triplet structure, the positive frequency side have, indeed, a higher amplitude than the negative for almost all harmonics.

3.1.2 Harmonics deviation

Theoretically, sidelobes in the Fourier spectrum of a modulated signal will be equidistant to the carrier main frequency and harmonics. However, a non-negligible proportion of Blazhko stars present a sidelobe frequency offset (Alcock 2003). For each multiplet order, we have computed the average harmonic deviation δf as given by equation (2) (the results are summarized in Table 2):

$$\delta f_i = \frac{\sum_{n=1}^k f_{n+ib} + f_{n-ib} - 2 \times f_n}{k}. \quad (2)$$

Due to the limitation of our results, we can only draw conclusions for the triplet and quintuplet structures. The first one shows a negligible frequency offset of $0.000\,11\text{ d}^{-1}$ falling in the $\pm 0.0002\text{ d}^{-1}$ interval observed by Alcock in all Blazhko stars. The latter one however shows a stronger asymmetry. Still, this has to be balanced by

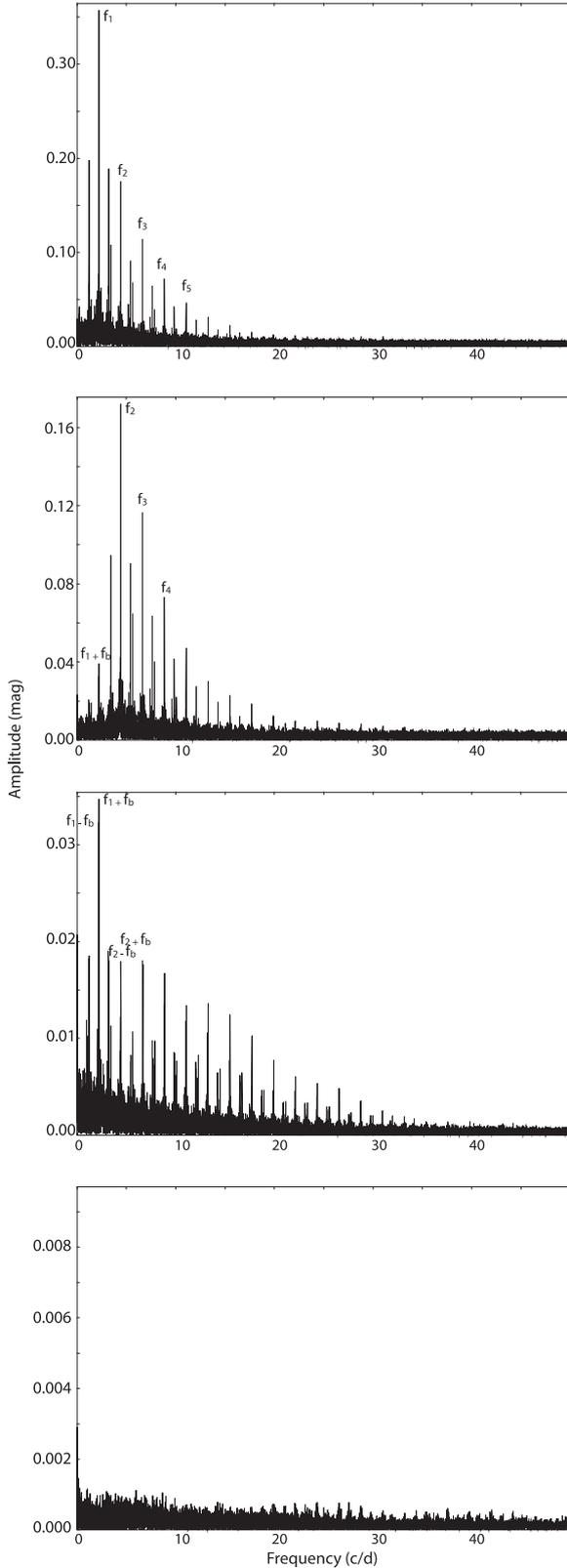


Figure 3. Frequency spectrum of S Arae for different pre-whitening steps. From top to bottom: original data spectrum; spectrum after pre-whitening with the main frequency; spectrum from the signal pre-whitened with the main frequency and its harmonics; spectrum after all significant frequencies have been pre-whitened.

Table 1. Epoch-independent Fourier parameters for S Arae.

A_1 (mag)	R_{21}	R_{31}	ϕ_{21} (rad)	ϕ_{31} (rad)
0.36	0.479	0.327	2.084	4.065

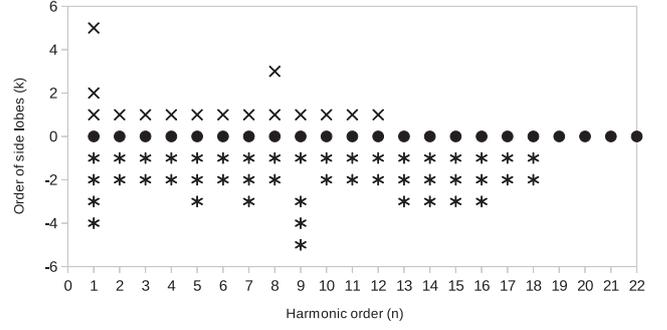


Figure 4. Map of harmonics and side peaks in the frequency spectrum of S Arae.

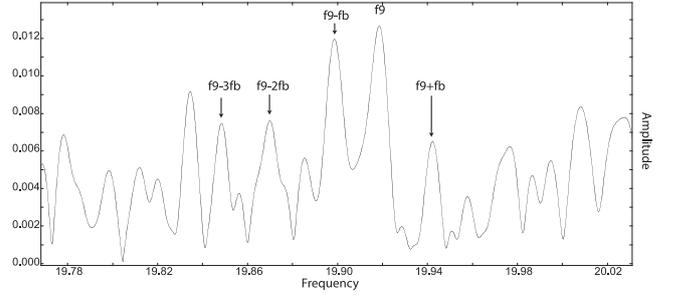


Figure 5. Original Fourier spectrum around the ninth harmonic.

Table 2. Multiplet structures, degree of deviation and degree of asymmetry.

Multiplet	No. of freq.	δf (d^{-1})	$Q - \bar{Q}$
Triplet	30	0.000 11	0.002 29
Quintuplet	18	-0.004 04	0.017 93

the unequilibrated distribution of the sidelobes (17 right sidelobes for one left sidelobe).

To verify this observation, we have fixed all sidelobes to their theoretical value, namely $kf_0 \pm nf_b$, and then ran a least-squares fitting algorithm where all frequencies, amplitudes and phases were defined as degrees of liberty. No differences were observed with the results already computed with the frequency extraction algorithm.

The reason for such discrepancy is still unknown. It can be caused by the omission of frequencies or by cycle to cycle changes as we will see in Section 3.2. However, as shown by Alcock, this offset cannot be explained only by noise or measurement uncertainty.

3.1.3 Amplitude of the harmonics

It is generally admitted that the harmonic/main-frequency amplitude ratio follows an exponential variation along the harmonic order. However, when it comes to high orders, the corresponding point fails to comply with this scenario (Chadid et al. 2010a). A hyperbolic fit

seems more appropriate (Fig. 6). Fitting these amplitudes with the function given in equation (3) gave the best approximation of the spectrum shape for the main frequency and its harmonics – standard deviation of $\sigma_y = 0.003$:

$$A(f) = a_1 \times f + a_0 + \frac{a_{-1}}{f} + \frac{a_{-2}}{f^2}, \quad (3)$$

with $a_1 = 0.7$ mmag d, $a_0 = -0.059$ mag, $a_{-1} = 1.16$ mag d⁻¹ and $a_{-2} = -0.54$ mag d⁻². The fit is represented in Fig. 7.

The other amplitude ratio corresponding to higher harmonics multiplets are presented in Fig. 6. As underlined by Jurcsik et al. (2005), these ratios tend to decrease less rapidly than the main component one. Left sidelobes follow a quasi-exponential decrease, except for the second harmonic which presents an unexpected low value. Right sidelobes do not follow a similar clear path as two standstills precede the exponential decrease – which vanishes for the higher orders.

3.1.4 Multiplet amplitude asymmetry

The degree of asymmetry in the modulation amplitudes $Q - \bar{Q}$ computes the average amplitude offset:

$$Q - \bar{Q}_i = \frac{\sum_{n=1}^k \frac{A_{ni+} - A_{ni-}}{A_{ni+} + A_{ni-}}}{k}. \quad (4)$$

Fig. 6 shows that the modulation amplitude of the higher frequency side of the quintuplet structure is larger than its lower frequency counterpart ($Q - \bar{Q} = 0.0179$). This indicates a higher than average asymmetry to the right. While the triplet structure demonstrates that the modulation amplitude of the higher and lower frequencies is almost equal ($Q - \bar{Q} = 0.0023$).

These results, combined with those seen in Section 3.1.1, where negative multiplet components are more prominent than positive one, go against what is normally expected (see for instance Chadid et al. 2010a). However, as shown by Benkő, Szabó & Paparó (2011), the asymmetry depends on the relative phase of the amplitude and phase modulation; hence, both left and right asymmetries can be expected a priori.

3.1.5 Additional frequencies: radial overtones and non-radial pulsation

Besides the main frequency, its harmonics and the Blazhko multiplet, other frequencies were detected. After withdrawing those corresponding to aliases, we found a first one at 3.1308 d⁻¹ with a 2.40 mmag amplitude corresponding to a possible first overtone. Combination with the main frequency $f_0 + f_N$ (see Table 3) confirms that the additional signal is not introduced by a possible background star. Still, its frequency ratio with the fundamental $f_N/f_0 = 0.707$ comes as very low compared to the canonical value of 0.74–0.75. Moreover, Guggenberger et al. (2012) and Chadid et al. (2010a) have found similar value, respectively, 0.703 and 0.696 in V445 Lyr and V1127 Aql and both argued for a non-radial pulsation frequency. Indeed, extremely high metallicity value would be needed according to models (Popielski, Dziembowski & Cassisi 2000; Szabó, Kolláth & Buchler 2004; Smolec & Moskalik 2008) to reach such a low ratio. Section 4 will show that the required abundance was not found. All in all, f_N is most likely to be a non-radial mode as suggested by the non-adiabatic non-radial calculations presented by Van Hoolst, Dziembowski & Kawaler (1998) and in Dziembowski & Cassisi (1999) model.

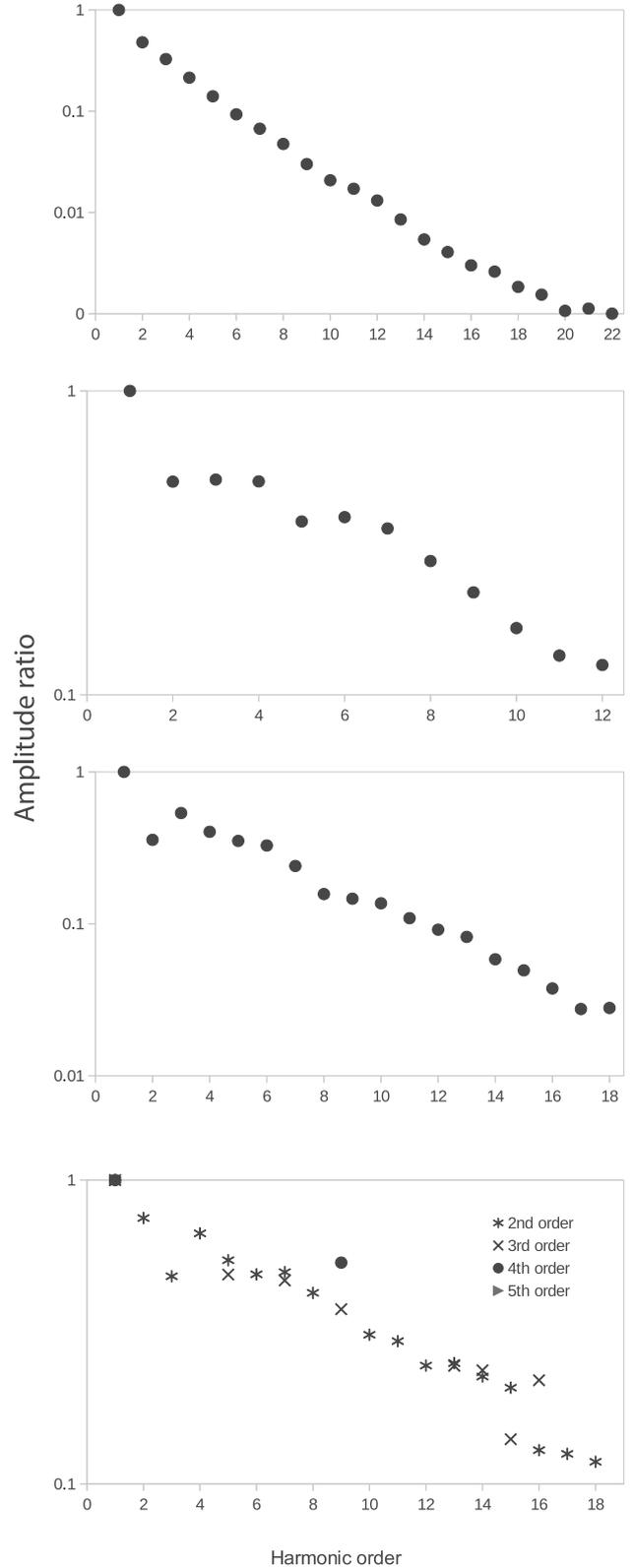


Figure 6. From top to bottom: amplitude ratio of the harmonic components A_{nf_0}/A_{f_0} ; amplitude ratio of the right modulation component $A_{nf_0+f_b}/A_{f_0+f_b}$; amplitude ratio of the left modulation component $A_{nf_0-f_b}/A_{f_0-f_b}$; amplitude ratio of the harmonic components $A_{nf_0-kf_b}/A_{f_0-kf_b}$ with k being the multiplet order.

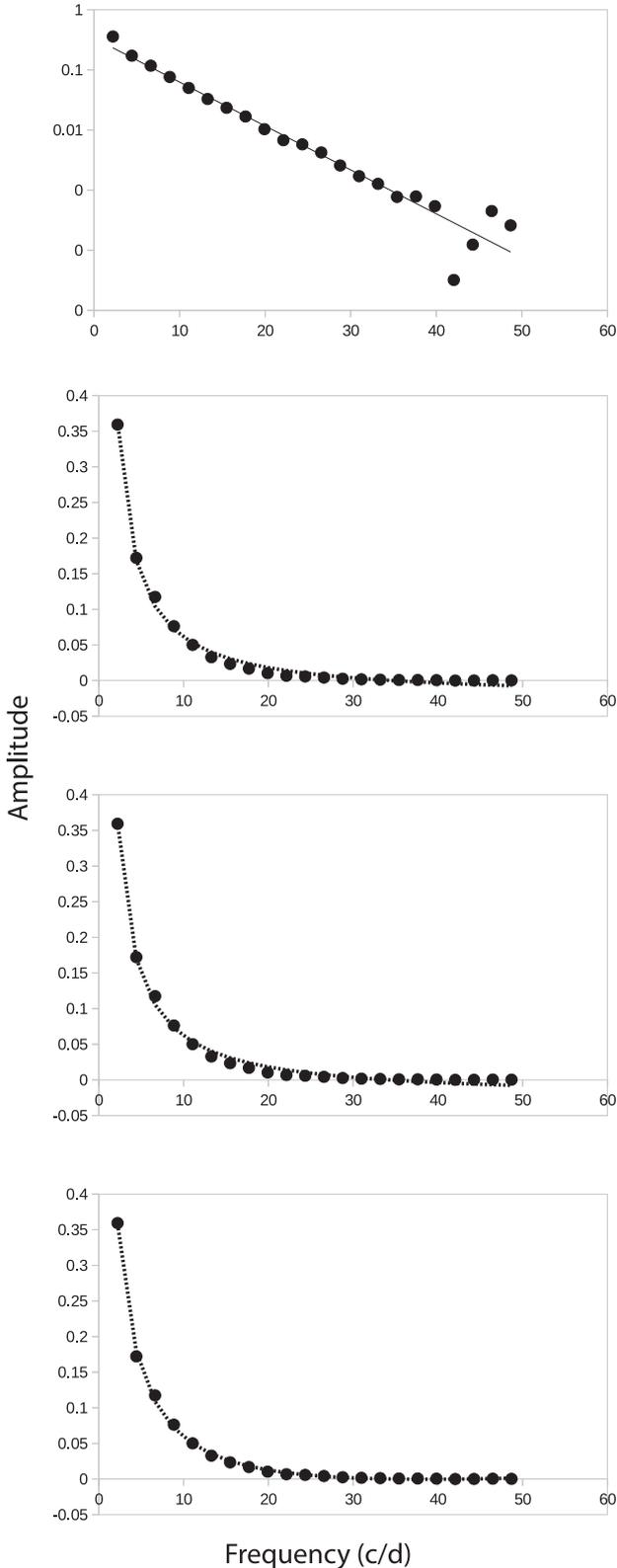


Figure 7. Fourier spectrum for the main period and its harmonics (dots) and fitting function. From top to bottom: exponential fit in a log scale; $\frac{a_{-1}}{f}$ fit; $\frac{a_{-1}}{f} + \frac{a_{-2}}{f^2}$ fit; $a_1 \times f + a_0 + \frac{a_{-1}}{f} + \frac{a_{-2}}{f^2}$ fit.

Table 3. Additional frequencies and combinations.

	Frequency (d^{-1})	Amplitude (mmag)
f_N	3.1309	2.48
$f_N + f_0$	5.3516	1.41
$f_N - f_0$	0.9134	3.78
$f_{N'}$	2.9571	2.09
$f_{N'} - f_0$	0.7479	3.26
f_2	3.8018	2.40
$f_2 + f_0$	6.0077	1.55
$f_2 + f_0 + f_b$	6.0308	1.47
$f_2 - f_0$	1.5904	1.69

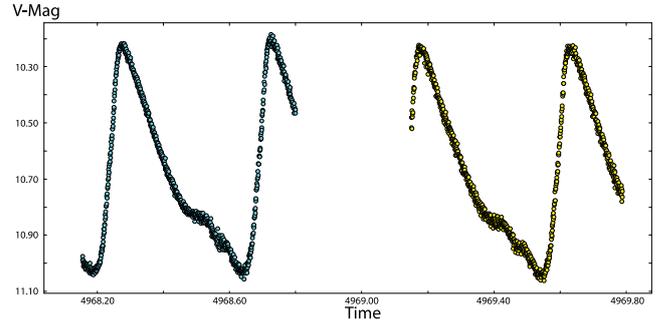


Figure 8. Four consecutive periods of S Arae light curve showing possible evidence of period doubling.

Similarly, we have found a 2.10-mmag amplitude peak at $2.9571 d^{-1}$, which, with a frequency ratio $f_0/f_{N'} = 0.748$ does fall in the usual first overtone interval. However, once again, this would imply a metallicity $Z = 10^{-4}$ that does not match the one found in Section 4.

The third remaining peak in the Fourier spectrum is at $3.8018 d^{-1}$ with a 2.40 mmag amplitude. Its frequency ratio with f_0 , $f_0/f_2 = 0.582$, suggests a second overtone period. Similar ratios were reported for several RR Lyrae stars (Jurcsik et al. 2008; Chadid et al. 2010a; Poretti et al. 2010). Combinations with the fundamental and its triplet structure were also found (Table 3).

The light curve of S Arae shows apparent evidence of period doubling (Fig. 8). Still, none of the expected half-integer multiples of the fundamental mode (Szabó 2010) were extracted, thus preventing us from any conclusion on this mechanism.

All in all, nine additional frequencies and their combination with the fundamental period were found (Table 3). Together with the initial 85 frequencies corresponding to the main frequency, its harmonics and their multiplet structure, we obtained 94 significant frequencies along this extraction process (Tables 4–7).

3.2 Blazhko modulation and cycle-to-cycle variation

The amplitude and phase modulation behaviour can be clearly seen in the folded light curve with the main pulsation period (Fig. 9). The Blazhko effect appears also in the frequency spectrum as sidelobes to the main frequency and its harmonics, as shown in Fig. 10 inner panel and in Table 6. The multiplet structure goes from triplet to nonuplet, suggesting a non-linear modulation. Finally, it is interesting to observe that not only the amplitude but also the shape and the period vary during the Blazhko cycle (Fig. 11).

Table 4. Fourier amplitudes, phases and identification(s) for the PAIX data of the star S Arae.

ID	Frequency ($c d^{-1}$)	Amplitude (mag)	Phase (cycles)
Main frequency and harmonics			
f_1	2.213 027 1687	0.360 500 5238	0.724 230 5549
$2f_1$	4.426 062 7971	0.172 758 7355	0.780 228 0473
$3f_1$	6.639 109 7894	0.117 885 2429	0.819 898 4413
$4f_1$	8.852 175 6243	0.077 234 6143	0.777 843 7932
$5f_1$	11.065 220 1741	0.050 612 3324	0.840 764 3425
$6f_1$	13.278 315 6948	0.033 568 1872	0.639 492 9331
$7f_1$	15.491 367 8143	0.024 217 2065	0.657 329 851
$8f_1$	17.704 399 0995	0.017 129 7428	0.788 505 6269
$9f_1$	19.917 569 1613	0.010 841 2851	0.209 208 6861
$10f_1$	22.130 840 637	0.007 490 495	0.113 848 5242
$11f_1$	24.343 808 5216	0.006 181 2056	0.543 557 3695
$12f_1$	26.556 856 2969	0.004 733 343	0.588 446 7506
$13f_1$	28.769 821 2115	0.003 074 8479	0.073 781 1655
$14f_1$	30.982 911 9028	0.001 952 8045	0.883 086 0946
$15f_1$	33.194 618 5192	0.001 466 0497	0.600 535 7479
$16f_1$	35.408 820 9889	0.001 083 3996	0.854 055 2134
$17f_1$	37.621 329 8894	0.000 940 1252	0.573 421 4576
$18f_1$	39.839 414 3299	0.000 664 0706	0.550 726 6563
$19f_1$	42.080 795 4777	0.000 556 7757	0.438 506 6574
$20f_1$	44.264 425 7766	0.000 385 1475	0.987 536 2732
$21f_1$	46.455 085 0014	0.000 405 492	0.878 810 4214
$22f_1$	48.525 817 5994	0.000 361 4866	0.657 530 5593

Table 5. Fourier amplitudes, phases and identification(s) for the PAIX data of the star S Arae.

ID	Frequency ($c d^{-1}$)	Amplitude (mag)	Phase (cycles)
Blazhko modulation frequency			
f_b	0.021 159 4008	0.022 255 0213	0.706 543 2622
$2f_b$	0.037 047 6041	0.008 540 1675	0.348 732 3083

3.2.1 Frequency analysis of the extracted envelope

The maximum–minimum representation of the envelope (Fig. 12) shows a weak non-sinusoidal shape. This observation is confirmed by the frequency analysis. For the upper part of the modulation we obtained two significant values $f_{m_{up1}} = 0.0196 d^{-1}$ and $f_{m_{up2}} = 0.0437 d^{-1}$ with respective amplitude of 0.11 mag and 0.02 mag. For the lower part of the modulation we obtained one significant value $f_{m_{low}} = 0.0207 d^{-1}$ with a 0.03 mag amplitude (Fig. 13). The maximum pulsation amplitude is 1.13 mag, while the minimum pulsation amplitude is 0.75 mag, hence a 0.38-mag modulation amplitude. It is interesting to see that there is also a phase lag in the maximum–minimum envelope (Fig. 12) and a significant difference in amplitude between these two.

3.2.2 Loop diagrams

The maximum magnitude–maximum phase diagram, also known as the loop diagram, is represented in Fig. 14 (standard deviation: $\langle \theta_{Maxmag} \rangle = 0.011$, $\langle \theta_{Maxphase} \rangle = 0.002$). We can clearly see the amplitude and phase modulation occurring in S Arae and the phasing between each contribution. The three cycles present a similar behaviour, following a very similar path every time with a phase offset between each. For each Blazhko cycle, when reaching maximum magnitude, the phase at maximum magnitude tends to

Table 6. Fourier amplitudes, phases and identification(s) for the PAIX data of the star S Arae.

ID	Frequency ($c d^{-1}$)	Amplitude (mag)	Phase (cycles)
Modulation multiplet frequencies			
$f_1 + f_b$	2.232 900 4771	0.035 780 2844	0.586 231 4704
$f_1 - f_b$	2.193 564 3836	0.034 766 2369	0.986 598 6112
$f_1 + 2f_b$	2.250 646 6871	0.004 442 1198	0.295 167 1724
$f_1 - 2f_b$	2.171 367 393	0.006 321 2977	0.575 509 4678
$f_1 - 3f_b$	2.1467 896 249	0.003 464 9381	0.776 320 6172
$f_1 - 4f_b$	2.126 246 6078	0.002 429 1243	0.344 384 9401
$f_1 + 5f_b$	2.313 140 4601	0.002 554 967	0.351 485 4465
$2f_1 + f_b$	4.445 727 4109	0.017 991 809	0.739 445 1549
$2f_1 - f_b$	4.407 738 446	0.012 416 2054	0.356 866 9901
$2f_1 - 2f_b$	4.383 723 4551	0.004 740 2109	0.186 254 9455
$3f_1 + f_b$	6.659 184 0836	0.018 272 736	0.571 740 0266
$3f_1 - f_b$	6.619 189 0799	0.018 635 6428	0.240 481 496
$3f_1 - 2f_b$	6.598 002 5466	0.003 050 3398	0.994 056 0718
$4f_1 + f_b$	8.872 081 84	0.018 025 8166	0.404 747 1838
$4f_1 - f_b$	8.832 591 227	0.014 022 5865	0.566 383 2269
$4f_1 - 2f_b$	8.810 145 1307	0.004 221 3581	0.581 067 5732
$5f_1 + f_b$	11.085 130 2619	0.013 304 5542	0.432 170 3268
$5f_1 - f_b$	11.045 433 7957	0.012 212 7944	0.607 787 4899
$5f_1 - 2f_b$	11.0239 124 098	0.003 445 0476	0.043 133 9187
$5f_1 - 3f_b$	11.003 258 3123	0.001 693 8707	0.200 360 0678
$6f_1 + f_b$	13.298 000 8263	0.013 749 8553	0.342 912 8454
$6f_1 - f_b$	13.258 558 2541	0.011 394 0786	0.299 638 8463
$6f_1 - 2f_b$	13.237 241 3466	0.003 095 8103	0.634 467 9856
$7f_1 + f_b$	15.511 044 3739	0.012 620 2208	0.431 299 286
$7f_1 - f_b$	15.471 977 248	0.008 352 3707	0.507 557 9617
$7f_1 - 2f_b$	15.450 788 8674	0.003 146 9833	0.201 363 2312
$7f_1 - 3f_b$	15.431 824 2127	0.001 620 0099	0.873 562 4247
$8f_1 + f_b$	17.724 310 7807	0.009 855 297	0.395 407 6652
$8f_1 - f_b$	17.685 077 6469	0.005 460 6614	0.256 147 9434
$8f_1 - 2f_b$	17.664 517 5543	0.002 690 2524	0.859 722 1007
$8f_1 + 3f_b$	17.765 642 4013	0.001 124 0333	0.643 795 7477
$9f_1 + f_b$	19.937 273 6521	0.007 773 3786	0.875 191 8044
$9f_1 - f_b$	19.897 996 7913	0.005 088 9469	0.921 781 0191
$9f_1 - 3f_b$	19.856 537 2434	0.001 302 6213	0.897 864 4052
$9f_1 - 4f_b$	19.836 079 4681	0.001 299 7758	0.117 014 5476
$9f_1 - 5f_b$	19.815 191 4123	0.000 904 4227	0.351 395 988

stop varying for a couple of pulsation period. This phenomenon is represented by a small loop, in the upper-right part of each path.

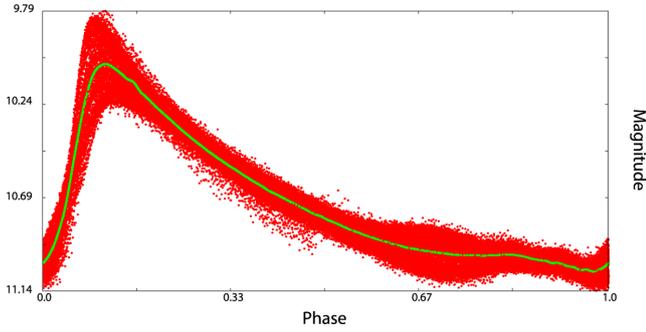
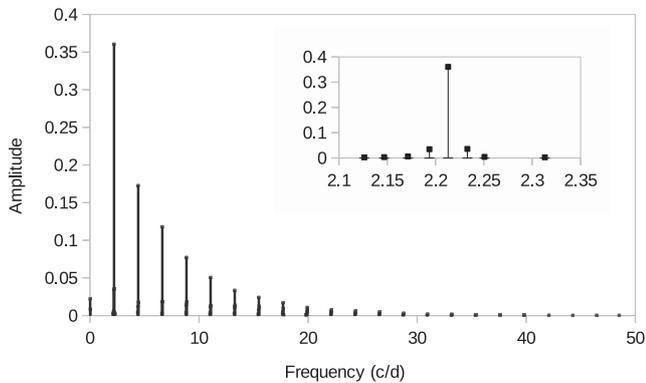
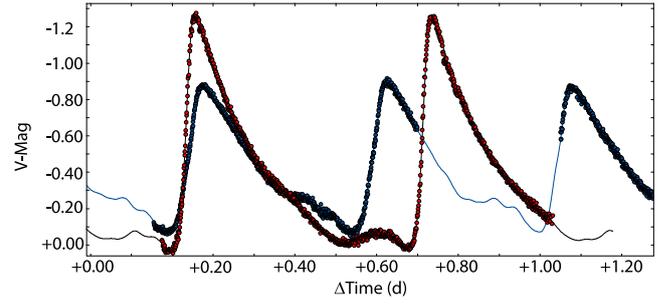
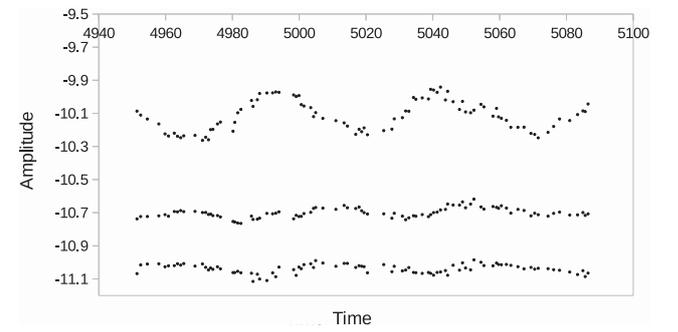
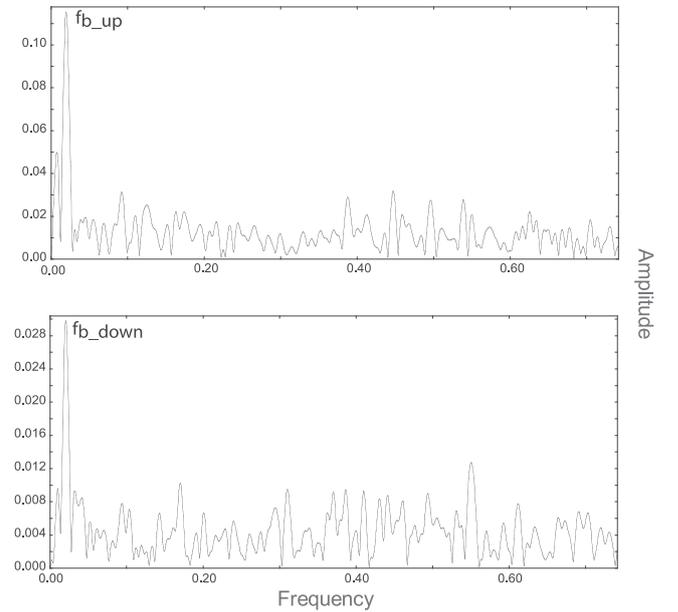
3.2.3 Fourier parameters

The variation of Fourier parameters describes the pulsation properties changes along the modulation cycle. As presented in Section 3.1, these are the amplitude ration $R_{k1} = A_k/A_1$ and the epoch-independent phase difference $\phi_{k1} = \phi_k - k\phi_1$. To compute these parameters, the artificial signal, created from the original one, was subdivided in 166 bins of 0.9 d, therefore containing two pulsation periods per bin. Using a short time-scale minimizes the influence of the Blazhko effect on our results. For each bin, a fit including the fundamental frequency and two harmonics was calculated. The results are displayed in Fig. 15. Average values of the parameters are given in Table 8 (phases are in radians).

First, the amplitude of the fundamental frequency presents a smooth sine variation with a perturbation at each cycle similar to the bump phenomenon observed in the light curve of S Arae (Chadid et al. 2014). Moreover, the perturbation position varies from one

Table 7. Fourier amplitudes, phases and identification(s) for the PAIX data of the star *S Arae* – part 2.

ID	Frequency ($c d^{-1}$)	Amplitude (mag)	Phase (cycles)
Modulation multiplet frequencies part 2			
$10f_1 + f_b$	22.150 108 1925	0.005 930 5667	0.966 207 2898
$10f_1 - f_b$	22.110 734 3971	0.004 747 8656	0.525 927 1477
$10f_1 - 2f_b$	22.089 427 3552	0.001 958 3553	0.836 457 5368
$11f_1 + f_b$	24.363 564 2973	0.004 815 2042	0.957 838 1881
$11f_1 - f_b$	24.323 560 0367	0.003 789 2257	0.688 013 1141
$11f_1 - 2f_b$	24.302 656 6797	0.001 865 5965	0.999 617 6804
$12f_1 + f_b$	26.576 523 3862	0.004 484 0993	0.431 858 7972
$12f_1 - f_b$	26.536 576 2776	0.003 182 427	0.877 414 8929
$12f_1 - 2f_b$	26.514 975 9827	0.001 549 9824	0.708 301 9867
$13f_1 - f_b$	28.748 484 6058	0.002 851 4518	0.662 702 8182
$13f_1 - 2f_b$	28.727 252 9558	0.001 579 0377	0.611 603 0758
$13f_1 - 3f_b$	28.708 701 6077	0.000 848 7763	0.244 276 3763
$14f_1 - f_b$	30.962 020 3472	0.002 031 6767	0.252 104 7258
$14f_1 - 2f_b$	30.941 192 6478	0.001 426 4304	0.193 394 8853
$14f_1 - 3f_b$	30.922 345 0601	0.000 819 9416	0.271 623 1518
$15f_1 - f_b$	33.175 458 8328	0.001 717 7029	0.336 527 4907
$15f_1 - 2f_b$	33.155 140 4299	0.001 310 3587	0.730 918 6119
$15f_1 - 3f_b$	33.134 526 543	0.000 486 5219	0.636 986 6012
$16f_1 - f_b$	35.388 504 6425	0.001 305 3503	0.387 480 2719
$16f_1 - 2f_b$	35.366 042 2034	0.000 816 7886	0.488 909 4373
$16f_1 - 3f_b$	35.348 652 8823	0.000 760 1409	0.290 285 7298
$17f_1 - f_b$	37.601 712 0341	0.000 956 0414	0.661 809 7441
$17f_1 - 2f_b$	37.582 719 6786	0.000 794 0197	0.445 059 0258
$18f_1 - f_b$	39.815 878 4185	0.000 971 0316	0.149 495 683
$18f_1 - 2f_b$	39.795 046 2168	0.000 747 7844	0.094 751 1938


Figure 9. Folded light curve with main pulsation $f_1 = 2.213\,027\,17\,d^{-1}$ (in red); PDM mean curve (in green).

Figure 10. Frequency spectrum of *S Arae*. The insert panel shows the multiplet structure around the main frequency.

Figure 11. *S Arae* light curve at minimum – blue – and maximum – red – Blazhko cycle. The two parts were superposed to compare the amplitude, period and shape change of the light curve between the minimum and maximum Blazhko phase.

Figure 12. Maximum (top), mean (middle) and minimum (bottom) representation of the light-curve envelope.

Figure 13. Top: original spectrum of the upper part of the modulation envelope. Bottom: original spectrum of the lower part of the modulation envelope.

Blazhko cycle to another – occurring earlier in the second one. More observations, including several Blazhko cycle is necessary to infer our hypothesis. R_{21} amplitude ratio also presents an oscillatory behaviour, although less obvious than A_1 , with constant subset when A_1 reaches its maximum value. These two oscillations have an

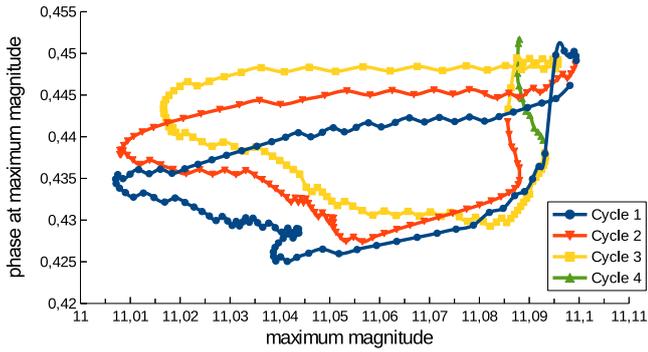


Figure 14. Maximum magnitude phase against maximum magnitude for each pulsation period along three Blazhko cycles of S Arae.

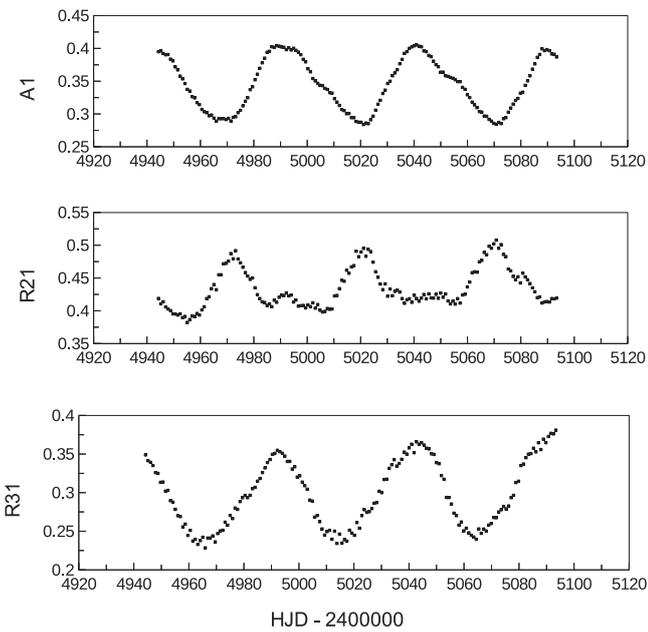


Figure 15. Evolution of the amplitude Fourier parameters during the three Blazhko cycles, calculated for two periods bins. From top to bottom: fundamental frequency Fourier amplitude A_1 , amplitude ratio R_{21} and R_{31} .

Table 8. Average epoch-independent Fourier parameters of S Arae.

Parameter	Value	Parameter	Value
A_1	0.345	ϕ_1	3.016
R_{21}	0.434	ϕ_{21}	3.890
R_{31}	0.298	ϕ_{31}	6.723

approximate π radians phase difference, while A_1 and R_{31} can be considered in phase.

Other binning – modification of the time span and/or overlap – gave similar results leading to the conclusion that the influence of the bin structure was limited.

3.2.4 Rise time

Fig. 16 presents the evolution of the rise time along the total time span of three modulation cycles. The overall evolution is very similar to A_1 variation that we commented in last paragraph. We can clearly see that the Blazhko effect affects also the dynamic of the star as the rise time decreases when reaching maximum magni-

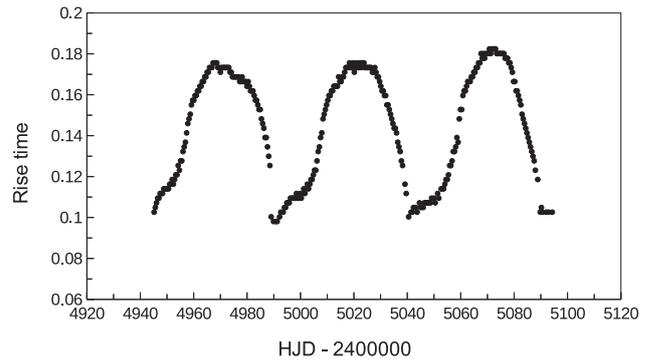


Figure 16. Variation of the rise time during the three Blazhko cycles.

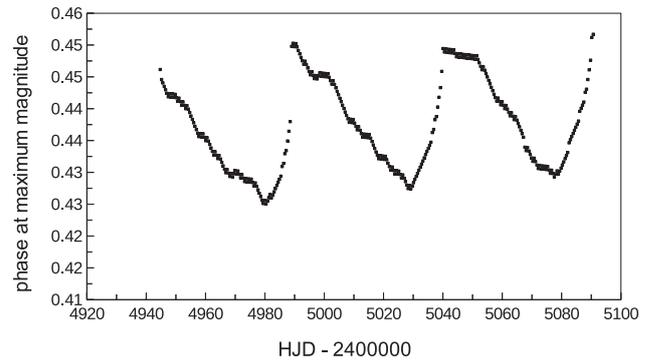


Figure 17. Variation of the maximum magnitude phase for each pulsation period.

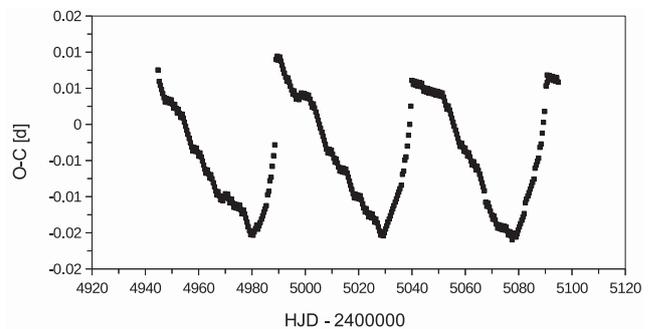


Figure 18. O–C diagram of the total data set for S Arae.

tude in the Blazhko cycle. Besides the moving bump perturbation observed precedently repeats here near the minimums.

3.2.5 O–C diagram

In addition to the maximum magnitude–maximum phase plot (Fig. 17), the O–C diagram is a complementary tool to investigate phase modulation. Indeed, the O–C diagram is primarily intended for the investigation of period changes by comparing, the timing of an event with the expected time of occurrence, according to a constant periodicity. In the case of Blazhko stars, we use it to detect period changes which are seemingly caused by phase modulation.

We worked with an epoch value $T_0 = 245039.1498$ HJD and a pulsation period $P_0 = 0.4519$ d. The plot obtained (Fig. 18) is, as expected, very similar to the maximum magnitude–maximum phase, exhibiting a clear periodic period change due to the phase modulation.

Table 9. Comparison of metallicities obtained for different Blazhko phase, according to, respectively, equations (7), (5) and (8).

$\Delta\Phi$	A_{tot}	$[\text{Fe}/\text{H}]_{A_{\text{tot}}}$	ϕ_{31}	$[\text{Fe}/\text{H}]_{\phi_{31}}$	RT	$[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{RT}}$	$\langle[\text{Fe}/\text{H}]\rangle$	$\Delta_{A-\phi_{31}}$	$\Delta_{A-\text{RT}}$	$\Delta_{\text{RT}-\phi_{31}}$	$\sigma_{[\text{Fe}/\text{H}]}$
0.0–0.1	1.31	−1.30	4.12	−2.23	0.13	−0.43	−1.32	0.94	0.87	1.81	0.74
0.1–0.2	1.22	−1.16	2.74	−4.17	0.16	−0.45	−1.93	3.02	0.71	3.73	1.62
0.2–0.3	1.07	−0.95	1.58	−5.81	0.17	−0.37	−2.38	4.87	0.58	5.45	2.44
0.3–0.4	0.98	−0.81	0.77	−6.96	0.17	−0.35	−2.71	6.14	0.46	6.61	3.01
0.4–0.5	0.93	−0.74	3.70	−2.83	0.17	−0.37	−1.31	2.09	0.37	2.46	1.08
0.5–0.6	1.02	−0.87	3.64	−2.91	0.16	−0.43	−1.40	2.04	0.45	2.48	1.08
0.6–0.7	1.07	−0.94	4.85	−1.21	0.14	−0.55	−0.90	0.27	0.39	0.66	0.27
0.7–0.8	1.21	−1.15	2.82	−4.06	0.12	−0.69	−1.97	2.91	0.46	3.37	1.49
0.8–0.9	1.31	−1.30	5.12	−0.82	0.11	−0.76	−0.96	0.48	0.54	0.06	0.24
0.9–1.0	1.33	−1.32	5.88	0.26	0.11	−0.76	−0.61	1.59	0.56	1.02	0.66

4 FUNDAMENTAL PARAMETERS AND DISCUSSION

4.1 Physical characteristics

A good synthesis of the available formulae to compute physical characteristics of RRab stars can be found in Nemeč (2011). However, these equations do not suit well to amplitude and phase-modulated stars (Nemeč et al. 2013) because the input parameters (ϕ_{31} , A_V , etc.), as we saw in the previous section, vary over a Blazhko period. Different approaches have been considered to resolve this issue. The first one consisted in taking the values obtained from the analysis of the whole data set. This led to values of metallicity $[\text{Fe}/\text{H}]$ ranging from -2.31 to -0.5 , which made this method inconsistent. The second approach relied on the parameters derived from the unmodulated signal. After gathering all significant frequencies from the analysis of the whole survey, we removed the multiplet structure, Blazhko period and harmonics, and fitted the remaining frequencies with the original data. The values obtained were similar to those of the modulated signal, hence leading to the same conclusion. The third approach averaged the Fourier parameters extracted from 10 phase bins, i.e. 0–0.1, 0.1–0.2, etc. The results, once again led to similar discrepancies. Finally, we considered that the equations intended for non-Blazhko stars could be applied to Blazhko stars but only when the latter were in a specific phase. Thus we computed the metallicity, for which we have four different equations, involving three varying parameters (ϕ_{31} , A_V and rise time) for each of the 10 bins described above, and look for results with low discrepancy and plausible values. More details on the formulae can be found in the next paragraph. The results confirmed our intuition, with one bin (0.6–0.7) showing consistent values for $[\text{Fe}/\text{H}]$.¹ Table 9 sums up all the values obtained for $[\text{Fe}/\text{H}]$ regarding the different method exposed.

4.1.1 Metal abundances

Four methods have been used to estimate metal abundances. Each of these are based on, or derived from, Oosterhoff (1939), Arp (1955) and Preston (1959) period–amplitude diagram. The additional equations come from Kovács & Walker (2001) and Sandage (2004) work using the correlation between ϕ_{31} , rise time and amplitude. All results are summarized in Tables 9 and 10.

Two $[\text{Fe}/\text{H}]$ scales are used in the following discussion: the Zinn and West metallicity scale (Zinn & West 1984), noted $[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}}$

hereafter; the Butler–Blanco (Sandage 2004) and Carretta and Gratton (Carretta & Gratton 1997) scales which are similar, noted $[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{BB}}$ or $[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{CG}}$. These scales are linked by the equation $[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}} = 1.05[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{CG}} - 0.20$ giving the CG-scale a metallicity of ≈ 0.2 dex more than the ZW-scale (Jurcsik 1995).

Metal abundance based on $\log P-\phi_{31}-[\text{Fe}/\text{H}]$ relations: the lines of constant $[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{CG}}$ in the period– ϕ_{31} diagram are given by (Jurcsik 1998)

$$[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{CG}} = -5.038 - 5.394P + 1.345\phi_{31}. \quad (5)$$

Sandage (2004) gave a second estimate of $[\text{Fe}/\text{H}]$ based on an $[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}}-\log P-\phi_{31}$ relation:

$$[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}} = 1.411\phi_{31} - 7.012 \log P - 6.025, \quad (6)$$

where ϕ_{31} is the Fourier phase parameter for a cosine fit, which differs by π radians with the one derived from a sine fit: $\phi_{31}^s = \phi_{31}^c - 3.14159$ (using ‘s’ and ‘c’ superscripts for phase parameters computed with, respectively, sine and cosine series). The ϕ_{31}^s and the $\log P$ coefficients have, respectively, uncertainties of ± 0.014 and ± 0.071 . Metallicities derived from equations (5) and (6) are listed in Table 10 under, respectively, ϕ_{31}^s and ϕ_{31}^c .

Metal abundance based on $\log P-A_{\text{tot}}-[\text{Fe}/\text{H}]$ relations: metallicity can also be evaluated using the period–amplitude relation given by Sandage 2004

$$[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}} = -1.453A_{\text{tot}} - 7.990 \log P - 2.145, \quad (7)$$

where the error for each coefficient is ± 0.027 , ± 0.091 and ± 0.043 dex, respectively. The result is listed in Table 10 under A_{tot} . This equation was the one used in Feast et al. (2008) to compute the existing value of $[\text{Fe}/\text{H}]$ for S Arae. The value used for A_{tot} was based on an average of A_{tot} obtained for each period of the available observations. As we have seen in the beginning of this section, this approach leads to biased results, and therefore needs to be reconsidered.

Metal abundance based on $\log P-\text{RT}-[\text{Fe}/\text{H}]$ relations: finally, the last estimate of $[\text{Fe}/\text{H}]$ can be obtained from the period–rise time diagram using the Sandage (2004) relation

$$[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}} = 6.33\text{RT} - 9.11 \log P - 4.60. \quad (8)$$

The result is listed in Table 10 under RT.

Table 10. Metal abundances derived from the pulsation period relation with Fourier phase parameter, amplitude and rise time.

ϕ_{31}^s	ϕ_{31}^c	$[\text{Fe}/\text{H}]_{A_{\text{tot}}}$	RT	Adopted	$\log Z$ ($\alpha = 0$)
−1.21	−1.20	−0.94	−0.55	−0.90 (0.27)	−2.67

¹ To support our argument, Appendix A presents another example of Blazhko star, MW Lyr, for which this method was applied successfully.

Table 11. Physical characteristics of S Arae.

$(B - V)_0$		M_V				T_{eff}	$\log g$		$L(\text{puls})$		$L(\text{evol})$			$M(\text{puls})$		$M(\text{evol})$	
J98	KW01	J98	F98	B07	C08	KW01	J98	KW99	J98	J98	S06	S06	S06	J98	J98	S06	B07
0.310	0.304	0.91	0.93	0.81	0.78	6743	2.896	2.872	34.3	32.95	37.35	38.72	43.35	0.51	0.52	0.60	0.62

Adopted metallicity: as discussed by Nemeč (2011), systematic discrepancies are seen between each of these four methods. Usually, the methods based on ϕ_{31} give similar results while the one based on the rise time gives higher metallicity than the others. Therefore, we averaged the values obtained with equations (5), (7) and (8) for the 0.6–0.7 phase, to compute the adopted metallicity. Table 10 gives the averaged estimate with its standard deviation in parentheses. The uncertainty on [Fe/H] is slightly higher (0.27 dex) than the averaged 0.17 standard deviation observed by Nemeč over 19 RRab stars. The 0.8–0.9 would have also been a good candidate considering its standard deviation. However, the small standard deviation comes mostly from the quasi-similar values obtain with the methods based on rise time and ϕ_{31} while the discrepancies between the other methods are larger than the one obtained with the 0.6–0.7 phase. Hence our choice for this latter interval. Finally, the fourth column of Table 10 gives $\log Z$, which differs from [Fe/H] by $\log Z_{\odot}$ where $Z_{\odot} = 0.01716$ (Sweigart & Catelan 1998), assuming $[\alpha/\text{Fe}] = 0$.

4.1.2 Reddenings and Mean Colours

Dereddened colours: the dereddened mean $B - V$ colour can be calculated using period P and Fourier A_1 coefficient (Jurcsik 1998) –

$$(B - V)_0 = 0.308 + 0.163P - 0.187A_1. \quad (9)$$

Another equation is given by Kovács & Walker (2001) which includes the A_3 Fourier coefficient:

$$(B - V)_0 = 0.189 \log P - 0.313A_1 + 0.293A_3 + 0.460. \quad (10)$$

Both results are listed in column 1 of Table 11 under, respectively, J98 and KW01. As both are very similar, we will adopt the average of the two colour estimates 0.307 in the following analysis.

Reddenings and extinctions: $E(B - V)$ reddenings derived from the large-scale reddening maps of Schlegel, Finkbeiner and Davis (Schlegel, Finkbeiner & Davis 1998) can be found in Table 12 column 4. The results were obtained using DUST and the galactic coordinates given in Table 12 columns 2 and 3. Assuming an extinction to reddening ratio $A_V/E(B - V) = 3.1$, the total extinction in the V passband, A_V , was calculated and given in column 5 of Table 12.

4.1.3 Effective temperatures

Considering the $(B - V)_0$ found in last paragraph, effective temperature was estimated using the Kovács & Walker (2001) formulae

supposing $[\alpha/\text{H}] = 0$:

$$\log T_{\text{eff}} = 3.8840 - 0.3219(B - V)_0 + 0.0167 \log g + 0.0070[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{CG}}. \quad (11)$$

Estimate is available in column 3 of Table 11 under KW01.

4.1.4 Absolute magnitudes

Jurcsik (1998) gave a first equation for absolute magnitude based on A_1 and ϕ_{31} :

$$M_V = 1.221 - 1.396P - 0.477A_1 + 0.103\phi_{31}. \quad (12)$$

The result is listed in column 3 of Table 11 under J98. A second estimate of M_V is the Fernley et al. (1998) equation:

$$M_V = 0.18[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{CG}} + 1.05, \quad (13)$$

assuming that RR Lyr has $M_V = 0.78(\pm 0.29)$ at $[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{CG}} = -1.39$ dex. The uncertainties are ± 0.03 on the [Fe/H] coefficient and ± 0.2 on the other coefficient. The result is in column 2 of Table 11 under F98. In general these M_V values are similar, with a mean difference of only $0.01(\pm 0.01)$ mag.

According to Bono, Caputo & Di Criscienzo (2007), for galactic field variables with metallicities included in the -2.5 to 0 dex range, the absolute magnitude can be obtained using

$$M_V = 1.19 + 0.5[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}} + 0.09[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}}^2. \quad (14)$$

The result is listed in column 3 of Table 11 under B07.

Finally, a fourth estimate of M_V was given recently by Catelan & Cortés (2008):

$$M_V = 0.23[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}} + 0.984. \quad (15)$$

The result is listed in column 3 of Table 11 under C08. On average, absolute magnitude obtained with this last equation are ≈ 0.15 mag brighter than the F98 and B07 values (Nemeč 2011) and those in turn are ≈ 0.05 mag brighter than the J98 value. Still, M_V standard deviation of 0.07 mag for these four values correspond to the 0.20 mag uncertainty in the individual estimate. The average absolute magnitude obtained over these four results is 0.86 mag.

4.1.5 Distance

Table 12 column 8 contains the approximate distance of S Arae, computed using M_V , $\langle V \rangle$ and the visual extinction given in column 5 of the same table.

Table 12. Observational characteristics of S Arae.

$\langle V \rangle$ (mag)	l ($^{\circ}$)	b ($^{\circ}$)	$E(B - V)$ (mag)	A_V (mag)	$(B - V)_0$		d (kpc)
					J98	KW01	
10.70	343.3792	-12.4479	0.15 (0.003)	0.46	0.310	0.304	1.2

Considering an uncertainty of ≈ 0.01 mag for m_V , of ≈ 0.07 mag for M_V and of ≈ 0.01 mag for A_V , the distance calculated is given with a precision of about 100 pc.

4.1.6 Surface gravities

To calculate the mean surface gravity we used equation 15 from Jurcsik (1998) and equation 12 from Kovács & Walker (2001). The first one depends only on the period and is given by

$$\log g = 2.473 - 1.226 \log P. \quad (16)$$

The second one depends on mass, period and effective temperature:

$$\log g = 2.938 + 0.230 \log M - 0.110 \log T_{\text{eff}} - 1.219 \log P. \quad (17)$$

Estimates are given in column 4 of Table 11 under J98 and KW99.

4.1.7 Luminosities and masses

To derive luminosity and mass, two methods can be applied: the pulsational method and the evolutionary method. The first one is derived from Albada and Baker equations (van Albada & Baker 1971, 1973) which links the pulsation period to mass, luminosity and T_{eff} – this being also derived from the basic von Ritter equation of stellar pulsation $P\sqrt{\rho} = Q$, where ρ is the mean density in cgs and Q is the pulsation constant. The second method is based on stellar evolutionary models which describes the evolution of luminosity and effective temperature of a zero-age horizontal branch star with a given input mass M and chemical composition (X, Y, Z). Existing models are those by Dorman (1992), Bono et al. (1997) and VandenBerg et al. (2000).

Pulsational L and M: pulsational luminosity can be computed using two equations. Both are given by Jurcsik (1998). The first one depends only on the metallicity and the result is given in column 5 of Table 11:

$$\log L = 1.464 - 0.106[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{CG}}. \quad (18)$$

The second depends on metallicity and effective temperature:

$$\log L = 10.260 - 0.062[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{CG}} - 2.294 \log T_{\text{eff}}. \quad (19)$$

Similarly, pulsational mass can be calculated *via* two formulae (Jurcsik 1998):

$$\log M = 1.477 \log L - 1.754 \log P + 0.037[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{CG}} - 6.272 \log T_{\text{eff}} + 20.884 \quad (20)$$

$$\log M = -0.328 - 0.062[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{CG}}. \quad (21)$$

Results are displayed in column 8 of Table 11.

L and M from stellar evolution models: following the Caputo et al. (2000) stellar evolution models, Sandage (2006) gave a first equation for $L_{(\text{evol})}$ as a function of $[\text{Fe}/\text{H}]$ –

$$\log L = 1.245 - 0.451[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}} - 0.097[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}}^2. \quad (22)$$

The second equation is based on Catelan, Pritzl & Smith (2004) alpha-enhanced zero-age horizontal branch model:

$$\log L = 1.404 - 0.243[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}} - 0.043[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}}^2. \quad (23)$$

The third one, derived from Clementini et al. (2003), differs from the previous one as it does not assume a quadratic dependence on $[\text{Fe}/\text{H}]$:

$$\log L = 1.538 - 0.110[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}}. \quad (24)$$

Results are displayed in column 7 of Table 11. As pointed out by Nemeč in his study of several ab-type RR Lyrae star observed by the Kepler telescope (Nemeč 2011), $L_{(\text{evol})}$ are systematically larger than $L_{(\text{puls})}$. Besides, the results are also consistent with the fact that stars with high metallicity are less luminous than metal-poor stars.

Mass can be obtained using the Bono et al. (1997) model as shown by Sandage (2006):

$$\log M = -0.283 - 0.066[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}}. \quad (25)$$

Another way to compute it was given by Bono et al. (2007) based on the Pietrinferni et al. horizontal branch model (Pietrinferni et al. 2004, 2006):

$$\log M = -0.2675 - 0.063[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{ZW}}. \quad (26)$$

Results are available in column 9 of Table 11. Similarly to what we observed for the luminosity, $M_{(\text{evol})}$ values are larger than $M_{(\text{puls})}$.

4.2 Shock waves and bump dynamics

As described by Chadid et al. (2014), the light curve is noticeably distorted by shock waves. The bump, occurring before the light-curve minimum, is associated with the shock wave Sh_{PM3} resulting from the collision of the infalling atmosphere with the expanding photosphere. According to their study and following the Stellingwerf work (Stellingwerf 2013), the multishock structure could be responsible for the Blazhko effect as it develops a stationary coronal structure that drives an outflowing wind.

4.2.1 Residual light curve and shock waves

Fig. 19 shows the residual light curve after pre-whitening the main pulsation, the Blazhko period and the sidelobes of each multiplet, in an attempt to remove the Blazhko modulation from the data set. The most striking feature of the residual light curve is the intense variation that appears around phase 0.9 in a narrow 10 per cent phase interval of the pulsation cycle. Chadid et al. (2014) have pointed out that this variation is a consequence of a strong shock wave, named $\text{Sh}_{\text{H+He}}$, traversing the photosphere of *S Arae* and created by the κ and γ mechanisms during the rise time of the light curve. Such strong shock wave is at the origin of the ‘hump’ observed just before the light-curve maximum (Chadid 2000; Chadid & Preston 2013). A similar residual scatter was observed in near the light-curve maxima of the Blazhko star DR Andromeda (Lee & Schmidt 2001) and the Blazhko star RR Gem (Jurcsik et al. 2005) occurring in a phase interval of 20 per cent of the pulsation cycle, twice larger than the case of *S Arae* – meaning that the main shock is stronger in *S Arae* than in those stars.

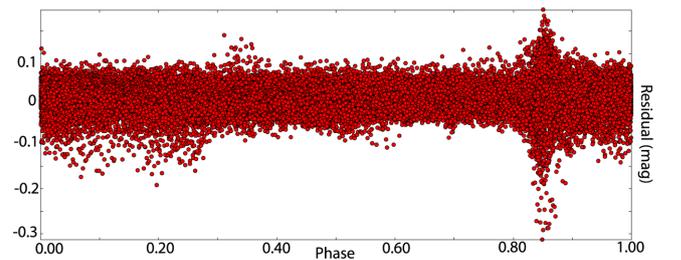


Figure 19. Residual light curve after pre-whitening with the main pulsation, the Blazhko period and sidelobe frequencies.

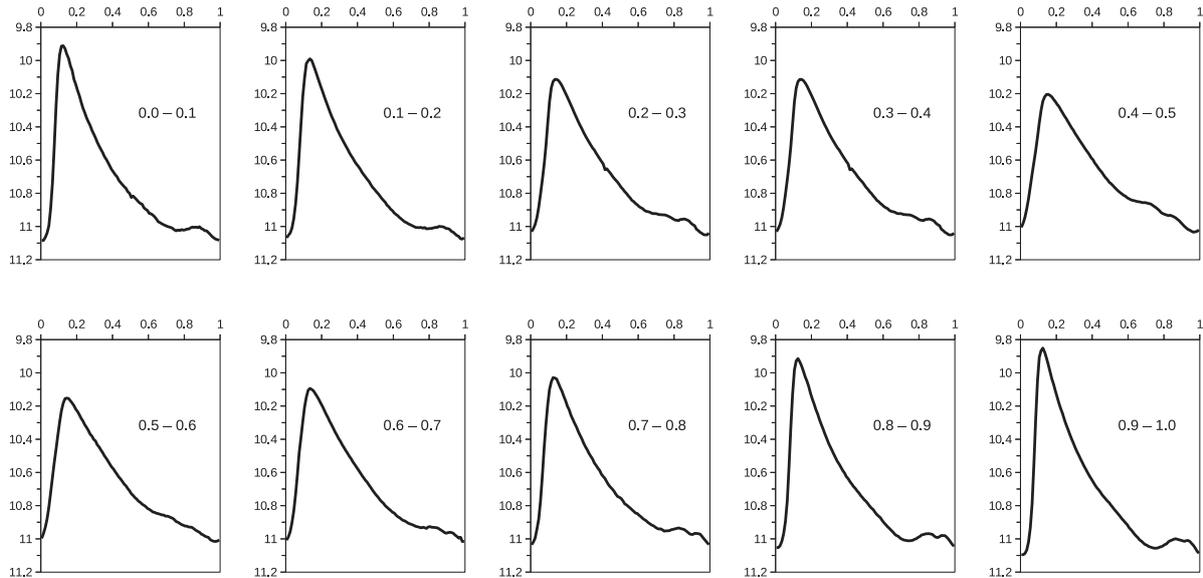


Figure 20. Bump evolution during the Blazhko cycle.

4.2.2 Bump dynamics

The bump position in a given RR Lyrae can change from one Blazhko phase to another (Chadid et al. 2011). PDM mean curve (Fig. 9, green curve) is particularly interesting in that regard. The bump is not as clear as it can be seen in Fig. 20 at phase $\psi = 0$ for instance. On the contrary, we have a quasi-smooth line, confirming the idea of a non-stationary process. After subdividing the data in 10 bins according to the Blazhko period–phase diagram, we have plotted the mean light curve folded with the mean period for each of these 10 bins (Fig. 20).

First, the topology of the bump is quite unusual. In fact, there is not a single bump but one main bump surrounded by two others which appear and vanish depending on the Blazhko phase. Indeed, from phase $\psi = 0.20$ to 0.50 a second bump appears before the main one, but soon vanishes to let a new second bump appear after the initial peak from phase $\psi = 0.60$ to 0.90 .

Moreover, it appears that the central peak, which is the only one visible at $\psi = 0.10$, has a 0.05 phase span, varying from 0.81 to 0.86 and therefore, suggests a possible link between the Blazhko phenomenon and the dynamics of the bump.

Knowing that the main bump undergoes a phase variation, it could be possible that the two surrounding bumps are in fact just one bump which also presents a phase variation. Indeed, as described above, the surrounding bumps are not both visible at a given phase. Hence, the secondary peak observed after the main bump between $\psi = 0.60$ and 0.90 , may just be the one observed from $\psi = 0.20$ to 0.50 which underwent a phase translation. This means that the main bump would have a 5 per cent phase variation and the secondary one a 20 per cent phase variation.

5 CONCLUSIONS

The unique Antarctica PAIX data, with its high time sampling, high optical photometric precision and long time base of 150 d, allowed us to disclose new results about the RR ab Blazhko star S Arae. The frequency analysis was performed using both Period04 and PDM13; three significant frequencies corresponding to two non-radial modes

and a plausible radial overtone were extracted. The main pulsation exhibits an asymmetric multiplet structure, amplitude and frequency wise, and we also suggested that the main pulsation harmonics follow a hyperbolic decrease rather than an exponential one. We were able to compute the physical parameters of the star, using a new approach to avoid the difficulties faced when studying properties of Blazhko-type star and finding a medium metallicity for S Arae. Finally, we studied the multishock structure before the light-curve minimum, and show that the bump distortion was in fact composed of one quasi-static main bump, which undergoes a 5 per cent phase variation, and a more peculiar secondary bump which had a 20 per cent phase variation, moving from one side of the main bump to another during a Blazhko cycle.

ACKNOWLEDGEMENTS

We thank the US Air Force Research Laboratory, Agence Nationale de la Recherche (ANR-OS-BLAN-0033-01), Conseil des Programmes Scientifiques et Technologiques (CPST) for their great support. We would also like to thank the Polar Institut Paul Emile Victor (IPEV) for the precious infrastructure and friendly help. M. Chadid is indebted to all the people who participated in the Antarctica expeditions within the PAIX framework.

REFERENCES

- Alcock C. et al., 2003, *ApJ*, 598, 597
- Arp H. C., 1955, *AJ*, 60, 317
- Benkő J. M., Szabó R., Paparó M., 2011, *MNRAS*, 417, 974
- Blazko S., 1907, *Astron. Nachr.*, 175, 327
- Bono G., Caputo F., Cassisi S., Incerpi R., Marconi M., 1997, *ApJ*, 483, 811
- Bono G., Caputo F., Di Criscienzo M., 2007, *A&A*, 476, 779
- Buchler J. R., Kolláth Z., 2011, *ApJ*, 731, 24
- Caputo F., Castellani V., Marconi M., Ripepi V., 2000, *MNRAS*, 316, 819
- Carretta E., Gratton R. G., 1997, *A&AS*, 121, 95
- Catelan M., Cortés C., 2008, *ApJ*, 676, L135
- Catelan M., Pritzl B. J., Smith H. A., 2004, *ApJS*, 154, 633

- Chadid M., 2000, *A&A*, 359, 991
 Chadid M., Chapellier E., 2006, *A&A*, 456, 305
 Chadid M., Preston G. W., 2013, *MNRAS*, 434, 552
 Chadid M., Wade G. A., Shorlin S. L. S., Landstreet J. D., 2004, *A&A*, 413, 1087
 Chadid M. et al., 2010a, *A&A*, 510, A39
 Chadid M., Vernin J., Mekarnia D., Chapellier E., Trinquet H., Bono G., 2010b, *A&A*, 516, L15
 Chadid M., Perini C., Bono G., Auvergne M., Baglin A., Weiss W. W., Deboscher J., 2011, *A&A*, 527, A146
 Chadid M. et al., 2014, *AJ*, 148, 88
 Clementini G., Gratton R., Bragaglia A., Carretta E., Di Fabrizio L., Maio M., 2003, *AJ*, 125, 1309
 Dorman B., 1992, *ApJS*, 81, 221
 Dziembowski W. A., Cassisi S., 1999, *Acta Astron.*, 49, 371
 Feast M. W., Laney C. D., Kinman T. D., van Leeuwen F., Whitelock P. A., 2008, *MNRAS*, 386, 2115
 Fernley J., Barnes T. G., Skillen I., Hawley S. L., Hanley C. J., Evans D. W., Solano E., Garrido R., 1998, *A&A*, 330, 515
 Guggenberger E., Kolenberg K., 2006, *Commun. Asteroseismology*, 148, 21
 Guggenberger E. et al., 2012, *MNRAS*, 424, 649
 Hertzprung E., 1926, *Bull. Astron. Inst. Neth.*, 3, 115
 Hill S. J., 1972, *ApJ*, 178, 793
 Jurcsik J., 1995, *Acta Astron.*, 45, 653
 Jurcsik J., 1998, *A&A*, 333, 571
 Jurcsik J. et al., 2005, *A&A*, 430, 1049
 Jurcsik J. et al., 2008, *MNRAS*, 391, 164
 Jurcsik J. et al., 2009, *MNRAS*, 393, 1553
 Kovács G., Walker A. R., 2001, *A&A*, 374, 264
 Lee A. F. S., Heghinian M., 1977, *Technometrics*, 19, 503
 Lee K. M., Schmidt E. G., 2001, *PASP*, 113, 1140
 Lenz P., Breger M., 2005, *Commun. Asteroseismology*, 146, 53
 Linnell Nemeč A. F., Nemeč J. M., 1985, *AJ*, 90, 2317
 Molnár L., Kolláth Z., Szabó R., 2012, *MNRAS*, 424, 31
 Nemeč J. M. et al., 2011, *MNRAS*, 417, 1022
 Nemeč J. M., Cohen J. G., Ripepi V., Derekas A., Moskalik P., Sesar B., Chadid M., Bruntt H., 2013, *ApJ*, 773, 181
 Nowakowski R. M., Dziembowski W. A., 2001, *Acta Astron.*, 51, 5
 Oosterhoff P. T., 1939, *Observatory*, 62, 104
 Pietrinferni A., Cassisi S., Salaris M., Castelli F., 2004, *ApJ*, 612, 168
 Pietrinferni A., Cassisi S., Salaris M., Castelli F., 2006, *ApJ*, 642, 797
 Popielski B. L., Dziembowski W. A., Cassisi S., 2000, *Acta Astron.*, 50, 491
 Poretti E. et al., 2010, *A&A*, 520, A108
 Preston G. W., 1959, *ApJ*, 130, 507
 Sandage A., 2004, *AJ*, 128, 858
 Sandage A., 2006, *AJ*, 131, 1750
 Schlegel D. J., Finkbeiner D. P., Davis M., 1998, *ApJ*, 500, 525
 Schwarzenberg-Czerny A., 1997, *ApJ*, 489, 941
 Shibahashi H., 2000, in Szabados L., Kurtz D., eds, *ASP Conf. Ser. Vol. 203, IAU Colloq. 176: The Impact of Large-Scale Surveys on Pulsating Star Research*. Astron. Soc. Pac., San Francisco, p. 299
 Simon N. R., Lee A. S., 1981, *ApJ*, 248, 291
 Smolec R., Moskalik P., 2008, *Acta Astron.*, 58, 193
 Sódor Á., Jurcsik J., Szeidl B., 2009, *MNRAS*, 394, 261
 Stellingwerf R. F., 1978, *ApJ*, 224, 953
 Stellingwerf R. F., 2011, in McWilliam A., ed., *RR Lyrae Stars, Metal-Poor Stars, and the Galaxy*. The Observatories of the Carnegie Institution of Washington, Pasadena, CA, p. 47
 Stellingwerf R. F., 2013, preprint (arXiv:1310.0535)
 Stothers R. B., 2006, *ApJ*, 652, 643
 Sweigart A. V., Catelan M., 1998, *ApJ*, 501, L63
 Szabó R., 2014, in Guzik J. A., Chaplin W. J., Handler G., Pigulski A., eds, *Proc. IAU Symp. 301, Precision Asteroseismology*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, p. 241
 Szabó R., Kolláth Z., Buchler J. R., 2004, *A&A*, 425, 627
 Szabó R. et al., 2010, *MNRAS*, 409, 1244
 van Albada T. S., Baker N., 1971, *ApJ*, 169, 311
 van Albada T. S., Baker N., 1973, *ApJ*, 185, 477
 Van Hoolst T., Dziembowski W. A., Kawaler S. D., 1998, *MNRAS*, 297, 536
 VandenBerg D. A., Swenson F. J., Rogers F. J., Iglesias C. A., Alexander D. R., 2000, *ApJ*, 532, 430
 Zalian C., Chadid M., Stellingwerf R. F., 2014, *MNRAS*, 440, 68
 Zinn R., West M. J., 1984, *ApJS*, 55, 45

APPENDIX A: MW LYRAE METALLICITY USING THE PHASE METHOD

MW Lyrae is a Blazhko RR Lyrae-type star with a 0.3976 d period and a 16.5462 d modulation period. An exhaustive study of MW Lyr is available in Jurcsik et al. (2008) and Jurcsik et al. (2009). They have found an $[Fe/H]$ value ranging between -0.4 and -0.6 . Fixing its value to -0.5 , they then computed the physical parameters of the star using the IP method (Sódor, Jurcsik & Szeidl 2009). We applied the method described in Section 4 to compute MW Lyr metallicity. Table A1 presents the results computed for each of the 10 bins using equations (5), (7) and (8). The best candidate is the 0.5–0.6 phase with a $\sigma_{[Fe/H]}$ value of 0.36. The amplitude and ϕ_{31} equations give a metallicity which corresponds to the range given by Jurcsik et al. The one obtained with the rise time equation shows a noticeable discrepancy which cause $\langle [Fe/H] \rangle$ to deviate from the $[-0.4; -0.6]$ interval expected. However, Table A1 shows clearly that none of the bins, except the one selected, lead to relevant results, confirming our method.

Table A1. Comparison of metallicities obtained for different Blazhko phase, according to, respectively, equations (7), (5) and (8) for MW Lyrae.

$\Delta\Phi$	A_V	$[\text{Fe}/\text{H}]_{A_V}$	ϕ_{31}	$[\text{Fe}/\text{H}]_{\phi_{31}}$	RT	$[\text{Fe}/\text{H}]_{\text{RT}}$	$\langle[\text{Fe}/\text{H}]\rangle$	$\Delta_{A-\phi_{31}}$	$\Delta_{A-\text{RT}}$	$\Delta_{\text{RT}-\phi_{31}}$	$\sigma_{[\text{Fe}/\text{H}]}$
0.0–0.1	1.39	−1.41	3.32	−3.35	0.17	0.27	−1.50	1.94	1.69	3.63	1.48
0.1–0.2	1.39	−1.41	3.82	−2.66	0.18	−0.33	−1.47	1.25	1.07	2.32	0.95
0.2–0.3	1.24	−1.20	4.06	−2.32	0.22	−0.09	−1.20	1.12	1.11	2.23	0.91
0.3–0.4	1.00	−0.85	2.59	−4.39	0.25	0.16	−1.69	3.54	1.00	4.55	1.95
0.4–0.5	0.89	−0.68	3.92	−2.51	0.27	0.24	−0.98	1.83	0.91	2.74	1.14
0.5–0.6	0.81	−0.57	5.43	−0.38	0.27	0.27	−0.22	0.18	0.84	0.65	0.36
0.6–0.7	0.78	−0.52	1.94	−5.31	0.30	0.42	−1.80	4.79	0.94	5.72	2.51
0.7–0.8	0.91	−0.70	0.98	−6.66	0.28	0.30	−2.36	5.96	1.00	6.96	3.07
0.8–0.9	1.13	−1.03	3.95	−2.47	0.22	−0.09	−1.20	1.44	0.94	2.37	0.98
0.9–1.0	1.31	−1.29	0.60	−7.21	0.17	−0.38	−2.96	5.92	0.91	6.83	3.03

This paper has been typeset from a \LaTeX file prepared by the author.

Annexe D

Oscillateur harmonique et oscillateurs couplés

D.1 Rappel sur l'oscillateur à un degré de liberté

Considérons le système constitué d'un ressort vertical, de raideur k et de longueur l_0 , posé sur un support, avec, à son sommet, une masse M (voir Figure D.1). Nous nous plaçons dans un référentiel terrestre et considérons l'attraction gravitationnel terrestre g constante.

A l'équilibre nous avons :

$$0 = -k(z_{eq} - l_0) - mg \quad (\text{D.1})$$

D'où $z_{eq} = -\frac{mg}{k} + l_0$. Le principe fondamental de la dynamique nous donne :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{dt^2} &= -k(z - l_0) - mg \\ &= -k(z - z_{eq}) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

On obtient alors une solution harmonique $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \phi) + l_0$ où :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} ; x_0 = \sqrt{x(0)^2 + \frac{\dot{x}(0)^2}{\omega^2}} ; \tan(\phi) = -\frac{\dot{x}(0)}{\omega x(0)} \quad (\text{D.3})$$

Ainsi, la période d'oscillation sera d'autant plus importante que la constante de raideur sera faible. De même, plus la distance à la position d'équilibre sera grande initialement, plus l'amplitude des oscillations sera conséquente. Il en est de même pour la vitesse initiale : plus elle sera conséquente, plus les amplitudes le seront aussi.

D.2 Oscillateurs couplés

D.2.1 Oscillateurs couplés avec extrémités fixes

Considérons un système de J masses alignées horizontalement et reliées à leurs plus proches voisines par un ressort (voir Figure D.2). La masse \mathcal{M}_i est reliée à sa voisine de gauche par un ressort de raideur

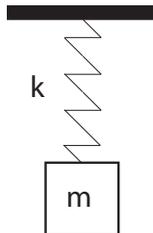


FIGURE D.1 – Oscillateur harmonique.

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \quad (\text{D.15})$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2} \quad (\text{D.16})$$

on arrive à démontrer que l'équation (D.14) est équivalente à :

$$x_i = A \cos(\omega_1 t + \phi_1) + A \cos(\omega_2 t + \phi_1) \quad (\text{D.17})$$

avec $\omega_1 \approx \omega_2$. En effet, dans ce cas, on obtiendra un produit de cosinus de fréquence $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ et $\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ respectant les conditions données pour (D.14).

Dans le cas général, on arrive à démontrer que l'existence de deux oscillations à des fréquences proches, dans le système d'équations différentielles, permet d'observer un phénomène de battements.

Si l'on revient à notre système d'oscillateurs couplés, l'expression des variations de position de chacune des masses est une combinaison linéaire de J fonctions sinusoïdales ayant pour fréquences les valeurs propres de la matrice définie précédemment. Si aucune de ces fréquences n'est proche, on observera des oscillations anharmoniques, c'est-à-dire la combinaison linéaire de plusieurs oscillations à des fréquences différentes. Mais si deux fréquences, au moins, présentent des valeurs proches, on pourra observer un phénomène de battements.

D.2.5 Étude du système FPU linéaire

Nous terminons cette annexe par la présentation du cas particulier d'oscillateurs couplés qu'est le système FPU dans le cas linéaire. Dans cette modélisation, l'ensemble des masses sont égales à m et les ressorts ont une raideur identique, notée a . On note la fréquence propre d'oscillation $\omega_0 = \sqrt{\frac{a}{m}}$, la position de la masse k , q_k , et sa vitesse, p_k . Comme nous avons pu le voir, dans ce cas, l'équation de mouvement s'écrit :

$$\frac{d^2 q_k}{dt^2} = -\omega_0^2 (2q_k - q_{k-1} - q_{k+1}) \quad (\text{D.18})$$

En supposant les extrémités fixes, le système peut s'exprimer sous la forme matricielle habituelle où A sera une matrice tridiagonale avec pour coefficients :

$$\forall i \in \llbracket 1; J \rrbracket, \quad A_{i,i} = 2 \quad ; \quad \forall i \in \llbracket 1; J-1 \rrbracket, \quad A_{i+1,i} = A_{i,i+1} = -1 \quad (\text{D.19})$$

La matrice est donc diagonalisable et possède J valeurs propres qui sont données par $\lambda = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}$. Pour trouver ω_m , on recherche les vecteurs propres sous la forme : $a_k = \sin(\alpha k)$. En reportant cette solution dans le système d'équations différentielles, on obtient :

$$(2 - 2 \cos(\alpha) - \lambda) \sin(\alpha k) = 0 \quad , \quad 1 \leq k \leq J-1 \quad (\text{D.20})$$

$$(2 - 2 \cos(\alpha) - \lambda) \sin(N\alpha) = -\sin((N+1)\alpha) \quad , \quad 1 \leq k \leq J-1 \quad (\text{D.21})$$

On pose alors :

$$(N+1)\alpha = m\pi \quad , \quad 1 \leq k \leq J-1 \quad (\text{D.22})$$

$$\lambda = 2(1 - \cos \alpha) = 4 \sin^2 \left(\frac{\alpha}{2} \right) \quad (\text{D.23})$$

Ce qui nous donne les J valeurs propres distinctes :

$$\lambda_m = 4 \sin^2 \left(\frac{m\pi}{2(N+1)} \right) \quad (\text{D.24})$$

associées aux J vecteurs propres :

$$a_{k,m} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \left(\frac{\pi m k}{N+1} \right) \quad (\text{D.25})$$

La constante multiplicative a été ajoutée pour obtenir des vecteurs propres normés.

Les J pulsations propres sont alors données par :

$$\omega_m = 2\omega_0 \sin\left(\frac{m\pi}{2(N+1)}\right) \quad (\text{D.26})$$

Bibliographie

- [1] C. et al. Alcock. The MACHO Project Large Magellanic Cloud Variable Star Inventory. XI. Frequency Analysis of the Fundamental-Mode RR Lyrae Stars. *Astrophysical Journal*, 598 :597–609, November 2003.
- [2] E. Aristidi, E. Fossat, A. Agabi, D. Mékarnia, F. Jeanneaux, E. Bondoux, Z. Challita, A. Ziad, J. Vernin, and H. Trinquet. Dome C site testing : surface layer, free atmosphere seeing, and isoplanatic angle statistics. *A&A*, 499 :955–965, June 2009.
- [3] D. G. Aronson, G. B. Ermentrout, and N. Koppel. Amplitude response of coupled oscillators. *Physica D*, 41 :403–449, 1990.
- [4] S. I. Bailey. A discussion of variable stars in the cluster ω Centauri. *Annals of Harvard College Observatory*, 38, 1902.
- [5] J. M. Benkő, R. Szabó, A. Derekas, and Á. Sódor. Finest light curve details, physical parameters, and period fluctuations of CoRoT RR Lyrae stars. *MNRAS*, 463 :1769–1779, December 2016.
- [6] S. Blazhko. Mitteilung über veränderliche Sterne. *Astronomische Nachrichten*, 175 :327, August 1907.
- [7] G. Bono, F. Caputo, and M. Di Criscienzo. RR Lyrae stars in Galactic globular clusters. VI. The period-amplitude relation. *A&A*, 476 :779–790, December 2007.
- [8] F. Caputo, A. Chieffi, A. Tornambe, V. Castellani, and L. Pulone. The 'Red Giant Clock' as an indicator for the efficiency of central mixing in horizontal-branch stars. *ApJ*, 340 :241–248, May 1989.
- [9] S. Cassisi, V. Castellani, S. Degl'Innocenti, G. Piotto, and M. Salaris. Asymptotic Giant Branch predictions : Theoretical uncertainties. *A&A*, 366 :578–584, February 2001.
- [10] M. Catelan and C. Cortés. Evidence for an Overluminosity of the Variable Star RR Lyrae, and a Revised Distance to the LMC. *ApJ*, 676 :L135–L138, April 2008.
- [11] M. Chadid, J. M. Benkő, R. Szabó, M. Páparó, E. Chapellier, K. Kolenberg, E. Poretti, G. Bono, J.-F. Le Borgne, H. Trinquet, S. Artemenko, M. Auvergne, A. Baglin, J. Debosscher, K. N. Grankin, E. Guggenberger, and W. W. Weiss. First CoRoT light curves of RR Lyrae stars. Complex multiplet structure and non-radial pulsation detections in V1127 Aquilae. *A&A*, 510 :A39, February 2010.
- [12] M. Chadid and D. Gillet. Observation of the metallic line doubling phenomenon in the variable star RR Lyrae. *A&A*, 308 :481–488, April 1996.
- [13] M. Chadid, D. Gillet, and A. B. Fokin. Van Hoof effect between metallic lines in RR Lyrae. II. Comparison with purely radiative models. *A&A*, 363 :568–574, November 2000.
- [14] M. Chadid, C. Perini, G. Bono, M. Auvergne, A. Baglin, W. W. Weiss, and J. Debosscher. CoRoT light curves of Blazhko RR Lyrae stars. Evidence of a strong correlation between phase and amplitude modulations of CoRoT ID 0105288363. *A&A*, 527 :A146, March 2011.
- [15] M. Chadid and G. W. Preston. Atmospheric dynamics in RR Lyrae stars : a high-resolution spectroscopic survey. *MNRAS*, 434 :552–573, September 2013.
- [16] M. Chadid, J. Vernin, D. Mékarnia, E. Chapellier, H. Trinquet, and G. Bono. First Antarctica light curve. PAIX monitoring of the Blazhko RR Lyrae star : S Arae. *A&A*, 516 :L15, June 2010.
- [17] M. Chadid, J. Vernin, G. Preston, C. Zalian, C. Pouzenc, L. Abe, A. Agabi, E. Aristidi, L. Y. Liu, D. Mékarnia, and H. Trinquet. First Detection of Multi-shocks in RR Lyrae Stars from Antarctica : A Possible Explanation of the Blazhko Effect. *AJ*, 148 :88, November 2014.
- [18] M. Chadid, G. A. Wade, S. L. S. Shorlin, and J. D. Landstreet. No evidence of a strong magnetic field in the Blazhko star RR Lyrae. *A&A*, 413 :1087–1093, January 2004.

- [19] J. Christensen-Dalsgaard. *Lecture notes on stellar oscillations*. May 2003.
- [20] R. F. Christy. A Study of Pulsation in RR Lyrae Models. *ApJ*, 144 :108, April 1966.
- [21] T. Constantino, S. W. Campbell, J. Christensen-Dalsgaard, J. C. Lattanzio, and D. Stello. The treatment of mixing in core helium burning models - I. Implications for asteroseismology. *MNRAS*, 452 :123–145, September 2015.
- [22] J. P. Cox. The Linear Theory : Initiation of Pulsational Instability in Stars. In R. N. Thomas, editor, *Aerodynamic Phenomena in Stellar Atmospheres*, volume 28 of *IAU Symposium*, page 3, 1967.
- [23] J. P. Cox. *Theory of stellar pulsation*. 1980.
- [24] T. Dauxois, R. Khomeriki, and S. Ruffo. Modulational instability in isolated and driven Fermi Pasta Ulam lattices. *European Physical Journal Special Topics*, 147 :3–23, August 2007.
- [25] R. G. Deupree. The theoretical red edge of the RR Lyrae gap. I - Dependence of convection on pulsation phase. *ApJ*, 211 :509–526, January 1977.
- [26] A. S. Eddington. Stars, Gaseous, On the pulsations of a gaseous star. *MNRAS*, 79 :2–22, November 1918.
- [27] A. S. Eddington. *The Internal Constitution of the Stars*. 1926.
- [28] A. S. Eddington, Sir. On the cause of Cepheid pulsation. *MNRAS*, 101 :182, 1941.
- [29] A. S. Eddington, Sir. Conditions in the hydrogen convection zone. *MNRAS*, 102 :154, 1942.
- [30] I. Epstein. Pulsation Properties of Giant-Star Models. *ApJ*, 112 :6, July 1950.
- [31] Y. A. Fadeyev and D. Gillet. The structure of radiative shock waves. V. Hydrogen emission lines. *A&A*, 420 :423–435, June 2004.
- [32] E. Fermi, J. Pasta, and S. Ulam. Studies of nonlinear problems. *Document Los Alamos*, 266 :977, 1955.
- [33] J. Fernley, T. G. Barnes, I. Skillen, S. L. Hawley, C. J. Hanley, D. W. Evans, E. Solano, and R. Garrido. The absolute magnitudes of RR Lyraes from HIPPARCOS parallaxes and proper motions. *A&A*, 330 :515–520, February 1998.
- [34] M. U. Feuchtinger and E. A. Dorfi. Nonlinear stellar pulsation. 2 : Radiative models of RR-Lyrae stars. *A&A*, 291 :209–225, November 1994.
- [35] Patrick Fleet. *Discrete wavelet transformations an elementary approach with applications*. Wiley-Interscience, Hoboken, N.J, 2008.
- [36] A. B. Fokin. Shock waves and H-alpha profiles in the hydrodynamical model for RR Lyrae. *MNRAS*, 256 :26–36, May 1992.
- [37] A. B. Fokin and D. Gillet. Theoretical interpretation of the metallic line doubling phenomenon in the variable star RR Lyrae. *A&A*, 325 :1013–1024, September 1997.
- [38] B.-Q. For, G. W. Preston, and C. Sneden. VizieR Online Data Catalog : Radial velocities of 11 field RR Lyrae (For+, 2011). *VizieR Online Data Catalog*, 219, August 2011.
- [39] D. Gabor. Theory of communication : Part 1 : The analysis of information. *Journal of the Institute of Electrical Engineering*, 93 :429–457, 1946.
- [40] D. Gillet and R. A. Crowe. Bump, hump and shock waves in the RR Lyrae stars - X Ari and RR LYR. *A&A*, 199 :242–254, June 1988.
- [41] D. Gillet and A. B. Fokin. Emission lines and shock waves in RR Lyrae stars. *A&A*, 565 :A73, May 2014.
- [42] L. Henyey, M. S. Vardya, and P. Bodenheimer. Studies in Stellar Evolution. III. The Calculation of Model Envelopes. *ApJ*, 142 :841, October 1965.
- [43] E. Hertzsprung. On the relation between period and form of the light-curve of variable stars of the δ Cephei type. *Bull. Astron. Inst. Netherlands*, 3 :115, June 1926.
- [44] S. J. Hill. Hydrodynamic and Radiative-Transfer Effects on an RR Lyrae Atmosphere. *ApJ*, 178 :793–808, December 1972.
- [45] P. Holmes and D. R. Rand. Bifurcations of the forced van der Pol oscillator. *Quart. Appl. Math.*, 35 :495–509, 1978.
- [46] J. Jurcsik. Fundamental physical parameters of RRab stars. *A&A*, 333 :571–582, May 1998.

-
- [47] J. Jurcsik, P. Smitola, G. Hajdu, and J. Nuspl. On the Modulation of RR Lyrae Stars in the Globular Cluster M3. *ApJ*, 797 :L3, December 2014.
- [48] E. Kapakos, D. Hatzidimitriou, and I. Soszyński. RR Lyrae variables in the Small Magellanic Cloud - I. The central region. *MNRAS*, 415 :1366–1380, August 2011.
- [49] R. Kippenhahn and A. Weigert. *Stellar Structure and Evolution*. 1994.
- [50] G. Kovacs. The Blazhko phenomenon. *ArXiv e-prints*, December 2015.
- [51] G. Kovács and A. R. Walker. Empirical relations for cluster RR Lyrae stars revisited. *A&A*, 374 :264, July 2001.
- [52] D. W. Kurtz. The frequency analysis of low amplitude delta Scuti stars - VII. HD 208664. *MNRAS*, 200 :497–501, August 1982.
- [53] P. Lenz and M. Breger. Period04 User Guide. *Communications in Asteroseismology*, 146 :53–136, June 2005.
- [54] G. V. Levina and A. A. Nepomnyaschiy. Analysis of an amplitude equation for autovibrational flow regimes at resonance external forces. *Math. Mech.*, 66 :241–246, 1986.
- [55] A. F. Linnell Nemeč and J. M. Nemeč. A test of significance for periods derived using phase-dispersion-minimization techniques. *Aj*, 90 :2317–2320, November 1985.
- [56] G. Michaud, J. Richer, and O. Richard. Horizontal Branch Evolution and Atomic Diffusion. *ApJ*, 670 :1178–1187, December 2007.
- [57] L. Molnár, Z. Kolláth, and R. Szabó. Can turbulent convective variations drive the Blazhko cycle? Dynamical investigation of the Stothers idea. *MNRAS*, 424 :31–37, July 2012.
- [58] P. Moskalik. Multi-mode oscillations in classical Cepheids and RR Lyrae-type stars. In J. A. Guzik, W. J. Chaplin, G. Handler, and A. Pigulski, editors, *Precision Asteroseismology*, volume 301 of *IAU Symposium*, pages 249–256, February 2014.
- [59] Ali Nayfeh. *Nonlinear oscillations*. Wiley, New York, 1979.
- [60] J. M. Nemeč, J. G. Cohen, V. Ripepi, A. Derekas, P. Moskalik, B. Sesar, M. Chadid, and H. Bruntt. Metal Abundances, Radial Velocities, and Other Physical Characteristics for the RR Lyrae Stars in The Kepler Field. *ApJ*, 773 :181, August 2013.
- [61] J. M. Nemeč, R. Smolec, J. M. Benkő, P. Moskalik, K. Kolenberg, R. Szabó, D. W. Kurtz, S. Bryson, E. Guggenberger, M. Chadid, Y.-B. Jeon, A. Kunder, A. C. Layden, K. Kinemuchi, L. L. Kiss, E. Poretti, J. Christensen-Dalsgaard, H. Kjeldsen, D. Caldwell, V. Ripepi, A. Derekas, J. Nuspl, F. Mullally, S. E. Thompson, and W. J. Borucki. Fourier analysis of non-Blazhko ab-type RR Lyrae stars observed with the Kepler space telescope. *MNRAS*, 417 :1022–1053, October 2011.
- [62] R. M. Nowakowski and W. A. Dziembowski. Resonant Excitation of Nonradial Modes in RR Lyr Stars. *actaa*, 51 :5–47, March 2001.
- [63] B. Paxton, L. Bildsten, A. Dotter, F. Herwig, P. Lesaffre, and F. Timmes. Modules for Experiments in Stellar Astrophysics (MESA). *ApJS*, 192 :3, January 2011.
- [64] G. Peyré. *L’algèbre discrète de la transformée de Fourier : niveau M1*. Mathématiques à l’université : cours et exercices corrigés. Ellipses, 2004.
- [65] A. S. Pikovsky, M. G. Rosenblum, and J. Kurths. Phase synchronization in regular and chaotic systems. *Int. J. Bifurc. Chaos*, 10 :2291–2306, 2000.
- [66] Arkady Pikovsky. *Synchronization : a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [67] G. Pojmanski. The All Sky Automated Survey. *Acta Astron.*, 47 :467–481, October 1997.
- [68] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*. 1992.
- [69] G. Preston. The Calculation of Pulsation Constants for the RR Lyrae Stars in M3. *ApJ*, 133 :29, January 1961.
- [70] G. W. Preston. Helium lines in RR Lyrae spectra. *A&A*, 507 :1621–1624, December 2009.
- [71] G. W. Preston. RR Lyrae Atmospheres : Wrinkles Old and New. In *American Astronomical Society Meeting Abstracts #215*, volume 42 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, page 308, January 2010.

- [72] G. W. Preston, I. B. Thompson, C. Sneden, G. Stachowski, and S. A. Shectman. TY Gruis : A Metal-Poor Carbon and Neutron-Capture-Rich RR Lyrae Star. *AJ*, 132 :1714–1724, October 2006.
- [73] C. Queffelec, H. et Zuily. *Analyse pour l'agrégation cours et exercices corrigés*. Dunod, Paris, 2013.
- [74] J. E. Rombaldi. *Analyse matricielle, cours et exercices résolus : deuxième cycle universitaire, agrégation*. EDP Sciences, Les Ulis, 1999.
- [75] A. Sandage. The Oosterhoff period-metallicity relation for RR Lyrae stars at the blue fundamental edge of the instability strip. *AJ*, 106 :687–702, August 1993.
- [76] A. Sandage. On the Predicted and Observed Color Boundaries of the RR Lyrae Instability Strip as a Function of Metallicity. *AJ*, 131 :1750–1765, March 2006.
- [77] R. F. Sanford. Radial Velocities of RR Lyrae from COUDÉ Spectrograms. *ApJ*, 109 :208, March 1949.
- [78] A. Schwarzenberg-Czerny. The Correct Probability Distribution for the Phase Dispersion Minimization Periodogram. *ApJ*, 489 :941, November 1997.
- [79] M. Schwarzschild. On the variables in Messier 3. *Harvard College Observatory Circular*, 437 :1–12, March 1940.
- [80] M. Schwarzschild. In *Transactions of the IAU Vol. VIII B*, Proceedings of the International Astronomical Union, page 811. Cambridge University Press, 9 1952.
- [81] H. Shapley. On the Nature and Cause of Cepheid Variation. *ApJ*, 40 :448, December 1914.
- [82] H. Shibahashi. The Oblique Pulsator Model for the Blazhko Effect in RR Lyrae Stars. Theory of Amplitude Modulation I. In L. Szabados and D. Kurtz, editors, *IAU Colloq. 176 : The Impact of Large-Scale Surveys on Pulsating Star Research*, volume 203 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 299–306, 2000.
- [83] M. Skarka. Known Galactic field Blazhko stars. *A&A*, 549 :A101, January 2013.
- [84] H. A. Smith. *RR Lyrae Stars*. 1994.
- [85] I. Soszyński, W. A. Dziembowski, A. Udalski, R. Poleski, M. K. Szymański, M. Kubiak, G. Pietrzyński, Ł. Wyrzykowski, K. Ulaczyk, S. Kozłowski, and P. Pietrukowicz. The Optical Gravitational Lensing Experiment. The OGLE-III Catalog of Variable Stars. XI. RR Lyrae Stars in the Galactic Bulge. *Acta Astron.*, 61 :1–23, March 2011.
- [86] I. Soszyński, A. Udalski, M. K. Szymański, J. Kubiak, G. Pietrzyński, Ł. Wyrzykowski, K. Ulaczyk, and R. Poleski. The Optical Gravitational Lensing Experiment. The OGLE-III Catalog of Variable Stars. IX. RR Lyr Stars in the Small Magellanic Cloud. *Acta Astron.*, 60 :165–178, September 2010.
- [87] I. Soszyński, A. Udalski, M. K. Szymański, M. Kubiak, G. Pietrzyński, Ł. Wyrzykowski, O. Szewczyk, K. Ulaczyk, and R. Poleski. The Optical Gravitational Lensing Experiment. The OGLE-III Catalog of Variable Stars. III. RR Lyrae Stars in the Large Magellanic Cloud. *Acta Astron.*, 59 :1–18, March 2009.
- [88] R. F. Stellingwerf. Period determination using phase dispersion minimization. *ApJ*, 224 :953–960, September 1978.
- [89] R. F. Stellingwerf. Convection in pulsating stars. I - Nonlinear hydrodynamics. II - RR Lyrae convection and stability. *ApJ*, 262 :330–343, November 1982.
- [90] R. F. Stellingwerf. Convection in pulsating stars. V - Limit cycle characteristics. *ApJ*, 284 :712–718, September 1984.
- [91] R. F. Stellingwerf. Three Dimensional Models of RR Lyrae Pulsation. *ArXiv e-prints*, October 2013.
- [92] R. S. Stobie. The beat period of VX Puppis. *The Observatory*, 90 :20–23, February 1970.
- [93] R. B. Stothers. A New Explanation of the Blazhko Effect in RR Lyrae Stars. *Astrophysical Journal*, 652 :643–649, November 2006.
- [94] O. Struve. Peculiar Hydrogen Lines in the Spectrum of RR Lyrae. *PASP*, 59 :192, August 1947.
- [95] A. V. Sweigart. Horizontal-branch evolution with time-dependent convective overshooting. In K. Janes, editor, *The Formation and Evolution of Star Clusters*, volume 13 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, pages 299–301, 1991.

-
- [96] A. V. Sweigart and P. Demarque. Semiconvection and the RR Lyrae Variables. In J. D. Fernie, editor, *IAU Colloq. 21 : Variable Stars in Globular Clusters and in Related Systems*, volume 36 of *Astrophysics and Space Science Library*, page 221, 1973.
- [97] R. Szabó, J. M. Benkő, M. Páparó, E. Chapellier, E. Poretti, A. Baglin, W. W. Weiss, K. Kolenberg, E. Guggenberger, and J.-F. Le Borgne. Revisiting CoRoT RR Lyrae stars : detection of period doubling and temporal variation of additional frequencies. *A&A*, 570 :A100, October 2014.
- [98] R. Szabó, Z. Kolláth, and J. R. Buchler. Automated nonlinear stellar pulsation calculations : Applications to RR Lyrae stars. The slope of the fundamental blue edge and the first RRd model survey. *A&A*, 425 :627–639, October 2004.
- [99] R. Szabó, Z. Kolláth, L. Molnár, K. Kolenberg, and D. W. Kurtz. Period Doubling in Kepler RR Lyrae Stars. In J. C. Suárez, R. Garrido, L. A. Balona, and J. Christensen-Dalsgaard, editors, *Stellar Pulsations : Impact of New Instrumentation and New Insights*, volume 31 of *Astrophysics and Space Science Proceedings*, page 81, 2013.
- [100] B. Szeidl and J. Jurcsik. The frequency spectrum of periodically modulated sinusoidal oscillation. *Communications in Asteroseismology*, 160 :17, August 2009.
- [101] S. Takahashi and M. Morikawa. Synchronization Model for Pulsating Variables. In H. Shibahashi and A. E. Lynas-Gray, editors, *Progress in Physics of the Sun and Stars : A New Era in Helio- and Asteroseismology*, volume 479 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, page 567, December 2013.
- [102] M. Todda. Vibration of a Chain with Nonlinear Interaction. *J. Phys. Soc. Jpn.*, 22 :431–436, September 1966.
- [103] R. H. D. Townsend and S. A. Teitler. GYRE : an open-source stellar oscillation code based on a new Magnus Multiple Shooting scheme. *MNRAS*, 435 :3406–3418, November 2013.
- [104] T. S. van Albada and N. Baker. On the Two Oosterhoff Groups of Globular Clusters. *ApJ*, 185 :477–498, October 1973.
- [105] F. Verhulst and R. W. Bruggeman. The inhomogeneous Fermi-Pasta-Ulam chain. *ArXiv e-prints*, October 2015.
- [106] J. Vernin, A. Agabi, E. Aristidi, M. Azouit, M. Chadid, E. Fossat, T. Sadibekova, H. Trinquet, and A. Ziad. Site testing at Dome C : history and present status. *Highlights of Astronomy*, 14 :693–694, August 2007.
- [107] N. J. Zabusky and M. D. Kruskal. Interaction of "solitons" in a collisionless plasma and the recurrence of initial states. *Phys. Rev. Lett.*, 15 :240–243, Aug 1965.
- [108] C. Zalian, M. Chadid, J. Vernin, L. Abe, and A. Agabi. Antarctica photometry of the Blazhko RR Lyrae star S Arae. *MNRAS*, 456 :192–206, February 2016.
- [109] S. A. Zhevakin. *Russian A. J.*, 30 :161, 1953.
- [110] S. A. Zhevakin. *Russian A. J.*, 31 :141, 1954.
- [111] S. A. Zhevakin. *Russian A. J.*, 31 :335, 1954.