



HAL
open science

Stabilité des configurations magnétiques dans les étoiles de masse intermédiaire

Mathieu Gaurat

► **To cite this version:**

Mathieu Gaurat. Stabilité des configurations magnétiques dans les étoiles de masse intermédiaire. Astrophysique stellaire et solaire [astro-ph.SR]. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2016. Français. NNT : 2016TOU30336 . tel-01447190v2

HAL Id: tel-01447190

<https://theses.hal.science/tel-01447190v2>

Submitted on 25 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université
de Toulouse

THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par : *l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (UT3 Paul Sabatier)*

Présentée et soutenue le 08/11/2016 par :

MATHIEU GAURAT

**Stabilité des configurations magnétiques dans les étoiles de
masse intermédiaire**

JURY

MICHEL RIEUTORD	Professeur	Président du Jury
ALLAN SACHA BRUN	Ingénieur-Chercheur CEA	Rapporteur
PAUL CHARBONNEAU	Professeur	Rapporteur
ÉVELYNE ALECIAN	Chargé de Recherche	Examinatrice
THOMAS GASTINE	Chargé de Recherche	Examinateur
FRANÇOIS LIGNIÈRES	Directeur de Recherche	Directeur de thèse
LAURÈNE JOUVE	Maître de Conférences	Directrice de thèse

École doctorale et spécialité :

SDU2E : Astrophysique, Sciences de l'Espace, Planétologie

Unité de Recherche :

Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie (UMR 5277)

Directeur(s) de Thèse :

François LIGNIÈRES et Laurène JOUVE

Rapporteurs :

Allan Sacha BRUN et Paul CHARBONNEAU

Remerciements

Ce manuscrit est l'aboutissement d'un travail de plus de trois ans qui n'aurait pas pu être réalisé sans l'aide d'un bon nombre de personnes. Je tiens donc ici à les remercier et je m'excuse par avance si j'oublie quelqu'un. Tout naturellement, les personnes qui ont le plus contribué à mon travail de thèse sont mes directeurs de thèse, François et Laurène. Je dis "tout naturellement" car cela semble évident, mais je ne suis pas sûr que cela soit si simple d'encadrer sur une si longue période un étudiant qui débarque dans le monde de la recherche, qui plus est un étudiant assez borné et têtu (je me suis assagi depuis). Malgré cela, et comparé à ce que j'ai pu voir et entendre autour de moi, vous avez été des directeurs de thèse exemplaires : toujours présents quand j'en avais besoin, un peu pressants quand il le fallait, mais jamais inutilement. Je me souviens des discussions avec toi François au début de ma thèse. Je ressortais de ton bureau avec le draft de mon premier article noyé sous les corrections rouges, la tête en vrac, le cerveau broyé par de nombreuses heures de réflexion sur des sujets que je ne maîtrisais absolument pas. Pourtant, cette rigueur dont tu fais preuve, ta culture scientifique ainsi que ta grande expertise dans de nombreux domaines astrophysiques m'ont toujours été d'une grande aide. Laurène, tu n'es pas non plus en reste en ce qui concerne la rigueur et l'expertise scientifique, toi pour qui j'étais ton premier étudiant en thèse. Tu as toujours fait preuve d'une grande pédagogie pour m'initier à la magnétohydrodynamique ainsi qu'à la maîtrise des outils numériques dont j'avais besoin. Tu sais rendre les choses simples. J'ai également partagé de très bons moments avec vous sur le plan humain. Je pense notamment à la semaine à Palerme pour le Solarnet Meeting avec toi Laurène et les Workshops PS2E où les membres de l'équipe se réunissent une fois par an pendant 2 jours pour faire une randonnée, jouer à la belote, boire un coup... mais surtout présenter leurs travaux!

Justement, puisque je parle de l'équipe PS2E, je dois dire que l'ambiance y est souvent au beau fixe et que ce fut agréable de travailler en son sein. Alors merci à Torsten, un bol d'air frais dans le groupe pour moi (quoique plus tout jeune!) avec qui j'ai toujours pu parler de tout et de n'importe quoi. Merci aussi à Fred, Boris et Pascal pour leur bonne humeur et leurs délires, merci à Thierry pour le soutien et l'attention dont il a toujours fait preuve envers moi, merci à Arturo d'élargir nos horizons scientifiques (un peu de science fondamentale ne fait pas de mal), merci à Michel pour l'aide qu'il m'a apportée lorsque j'avais des questions à lui poser et pour avoir accepté de présider mon jury de thèse, merci à Sébastien qui m'a également beaucoup aidé lorsque j'avais besoin de réponses sur des sujets exotiques (pour moi) comme l'astérosismologie et merci à Domenico, Bertrand, Jérôme, Clément, Stéphane et Alain. Merci aux collègues de bureau, Giovanni et son

caractère bien trempé, Weikai et Rohit, ainsi qu'aux anciens, Delphine et Antoine.

L'IRAP ce n'est pas que PS2E, et c'est surtout avec des doctorants d'autres groupes que j'ai passé le plus clair de mon temps, au labo et en dehors. Depuis le début de mon stage de M2 jusqu'à la fin de ma thèse, Ilane fut un binôme parfait pour les pauses café-clope et pour bien plus encore. Malgré tes jeux de mots douteux (tu préférerais que je parle d'esprit), nous sommes rapidement devenus amis et je suis certain que nous le serons encore pour longtemps. Le début de mon aventure dans la recherche à l'IRAP a été parsemé d'autres rencontres formidables qui ont donné lieu à de belles amitiés. Je pense bien sûr à Marie-Laure alias ML. Tu es la première personne à qui j'ai vraiment parlé à mon arrivée et celle avec qui j'ai beaucoup partagé pendant ces années. Je pense aussi à Vincent, mon partenaire sportif (je te remets ta branlée au tennis quand tu veux). Tu m'as toujours impressionné par ta nonchalance bienfaisante et par ta capacité à relativiser en toutes circonstances. Merci à tous les trois ! Merci aussi à toute la clique que j'ai beaucoup côtoyé durant mon stage de M2 : certain que je ne vois plus comme Jonas et Nico, et d'autres avec qui je m'éclate encore comme Audrey, Léo, Fanny et Gab.

Par la suite, la bande du labo s'est quelque peu renouvelée. Cela m'a permis de rencontrer Wilhem, pour le meilleur et pour le pire ! Merci mon gars pour tous les délires qu'on a pu avoir, tu me fais rêver. Tu m'as aussi permis de rencontrer... M. Limpy !! Alors merci, grand honneur et fous rires garantis ! Comment alors ne pas parler de Margaux (et oui je t'associe à Wilhem désolé) qui m'as beaucoup apporté malgré elle. Merci à tous les deux, vous m'avez été d'un grand soutien dans une période relativement difficile pour moi. Je vous souhaite tout le bonheur que vous méritez. J'en arrive à Tonio, mon partenaire de castagne (sur console) ! Merci à toi de m'avoir ouvert culturellement et politiquement, ce sera toujours un plaisir de discuter avec toi mon pote. Merci à tous les autres pour qui j'ai également beaucoup de sympathie, Mégane, Ahmed, Victor, Axel, Aurore, Hayley, Thierry C., Jason, Marina, Emmy, Kévin, Damien, Hervé, Patrick et Laurent. Merci aussi à Sophie pour ses bons légumes et sa bonne humeur malgré ses déboires, merci à Élodie qui a dû un bon nombre de fois garder mes paniers, merci à Dolorès, Isabelle, Émilie et Carole pour leur travail rarement gratifié, ainsi qu'à Loïc et Audrey. Mention spéciale pour Christine, notre rayon de Soleil à l'OMP ! Que serait l'accueil sans ton sourire et ta sympathie ?

J'ai encore quelques personnes à remercier. Notamment Vincent D. qui m'a accompagné dans mes soirées geeks. Merci à Yannick également, entre autres pour être venu à ma soutenance de thèse. Merci à Kevin M., et un grand merci à Cathy pour tout tout tout. Merci à mes amis Roméo et Polo, ainsi qu'à toute la clique de l'église, Elie, Iohann, Anna, Lucas et Mehdi. Merci Camille, malgré la distance qui nous sépare, tu es toujours d'un grand soutien pour moi. Gwendo ma biche, un grand merci. Merci Abdel et Georgio, je vous vois peu mais pense souvent à vous. Merci à mes potes de PZ, Thomas, Jos, Kek, Guirou et Michou, toujours un régal de vous voir. Merci Barral, t'es un ouf d'être venu à ma soutenance, je sais à quel point tu as chargé !

Un grand merci à ma famille bien sûr. Maman et Papa, merci à tous les deux pour avoir en partie fait de moi l'homme que je suis. Marion, merci ma sœur. Je n'en dirais pas plus, ce n'est pas l'endroit pour mais vous devinerez tous les trois ce que je pense. Merci Marise, Papi, Tata, Mamie et Tonton, merci également à Cécile et Pierre. Une

pensée pour la grand-mère Gaurat.

Et enfin, merci à toi ma chipounette. Toi qui partages ma vie, mes rires, mes délires mais aussi mes peines. Toi qui, tous les jours, me supporte dans tous les sens du terme. Toi qui, malgré ma tête de mule, me pousse à la réflexion sur bien des sujets qui m'étaient étrangers. Toi qui m'apportes tant et me prends finalement si peu. Toi qui vaux bien plus que tu ne veux le croire. Merci Aurélie.

Résumé

L'origine de certains champs magnétiques stellaires observés et leur impact sur l'évolution des étoiles sont mal compris. C'est particulièrement vrai dans le cas des étoiles de masse intermédiaire de la séquence principale. Des relevés spectropolarimétriques récents ont en effet révélé l'existence d'une dichotomie magnétique inexplicée, de 2 ordres de grandeur en terme de champ longitudinal B_l , entre le fort champ des étoiles Ap/Bp et le faible champ des étoiles *Vega-like*. Le but de cette thèse est de tester la possibilité que cette dichotomie magnétique soit liée, comme proposé par [Aurière et al. \(2007\)](#), au développement d'instabilités magnétohydrodynamiques (MHD) dans la zone radiative des étoiles de masse intermédiaire. Pour cela, j'ai réalisé des simulations numériques MHD 2D et 3D qui permettent de suivre l'évolution d'un champ magnétique axisymétrique soumis initialement à une rotation différentielle dans une zone stratifiée de façon stable puis de considérer le développement d'instabilités MHD non-axisymétriques. L'influence de différents paramètres physiques des simulations, comme l'intensité initiale du champ magnétique poloidal, le profil de rotation différentielle, la valeur des coefficients de diffusion ou encore l'importance de la stratification stable, a été testée. L'analyse des résultats des simulations montre que des instabilités MHD comme l'instabilité magnétorotationnelle et celle de Tayler peuvent se déclencher dans une zone radiative en rotation différentielle. En accord avec le scénario de [Aurière et al. \(2007\)](#), ces instabilités se développent assez pour modifier la structure spatiale à grande échelle d'un champ magnétique si l'intensité initiale du champ poloidal est suffisamment faible par rapport à l'intensité initiale de la rotation différentielle. Le champ longitudinal B_l calculé pour nos simulations les plus instables est diminué de 15% par rapport à un cas stable. Ce travail de thèse montre donc que les instabilités MHD sont des possibles candidats pour expliquer le désert magnétique des étoiles de masse intermédiaire de la séquence principale.

Abstract

The origin of some of the observed stellar magnetic fields and their impact on stellar evolution are not well understood. This is particularly true for the main sequence intermediate-mass stars. Recent spectropolarimetric surveys have indeed exhibited an unexplained magnetic dichotomy, of 2 orders of magnitude in term of the longitudinal field B_l , between the strong field of Ap/Bp stars and the weak field of Vega-like stars. This thesis aims to test the possibility that this magnetic dichotomy is linked to the development of magnetohydrodynamic (MHD) instabilities in the radiative zone of intermediate-mass stars, as proposed by [Aurière et al. \(2007\)](#). To do that, I have performed 2D and 3D MHD numerical simulations that allow to follow the evolution of an axisymmetric magnetic field which is initially submitted to a differential rotation in a stably stratified zone and then to consider the development of non-axisymmetric MHD instabilities. The influence of different physical parameters of the simulations, as the initial strength of the poloidal magnetic field, the differentially rotating profile, the diffusion coefficient values or the effect of the stable stratification, has been tested. The analysis of the simulation results show that MHD instabilities as the magneto-rotational instability or the Tayler instability can be triggered in a differentially rotating radiative zone. In agreement with the scenario of [Aurière et al. \(2007\)](#), these instabilities are enough developed to modify the large scale spatial structure of a magnetic field if the initial strength of the poloidal field is sufficiently weak with respect to the initial strength of the differential rotation. The computed longitudinal field B_l in our most unstable simulations is reduced by 15% with respect to a stable case. Therefore, this thesis work shows that the magnetic instabilities are possible candidates to explain the magnetic desert of the main sequence intermediate-mass stars.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	v
Abstract	vii
Liste des notations principales	xiii
Introduction	1
1 Contexte Astrophysique	5
1.1 Magnétisme des étoiles	6
1.1.1 Méthodes de détection	6
1.1.2 Le Soleil et les étoiles naines	8
1.1.3 Étoiles de masse intermédiaire et étoiles massives	9
1.1.4 Origine du champ magnétique et du désert magnétique des étoiles de masse intermédiaire	15
1.1.5 Le scénario de Aurière et al. (2007)	16
1.2 La rotation interne des étoiles	18
1.2.1 Méthode de détermination de la rotation interne : la sismologie stellaire	19
1.2.2 Le Soleil	19
1.2.3 Les autres étoiles	21
1.2.4 Contraintes sur les processus de transport du moment cinétique	25
1.2.5 Rotation différentielle dans les étoiles de masse intermédiaire de la séquence principale	27
2 Magnétohydrodynamique dans une zone radiative stellaire	29
2.1 Équations de la MHD	30
2.2 Processus MHD dans une zone radiative en rotation différentielle	31
2.2.1 Effet Ω	31
2.2.2 État d'isorotation	32
2.2.3 Ondes d'Alfvén	33
2.2.4 Mélange de phase	34

2.2.5	Couche limite de Hartmann	34
2.2.6	Redistribution du moment cinétique	35
2.2.7	Circulation méridienne	36
2.2.8	Axisymétrisation	36
2.3	Transport du moment cinétique induit par un champ magnétique : le cas du Soleil	37
2.4	Instabilités MHD	39
2.4.1	Instabilité de flottaison magnétique	40
2.4.2	Instabilité magnétorotationnelle	43
2.4.3	Instabilité de Tayler	46
2.4.4	Hierarchisation des instabilités dans une zone radiative en rotation différentielle	52
3	Champs magnétiques axisymétriques induits par la rotation différentielle dans une zone radiative	59
3.1	Une approche numérique	60
3.1.1	Adimensionnement des équations	60
3.1.2	Conditions initiales et aux limites	62
3.1.3	Codes numériques	66
3.2	Résultats en l'absence de circulation méridienne	68
3.2.1	Un cas typique	69
3.2.2	Évolution de B_φ/B_p	71
3.2.3	Résumé de l'étude paramétrique	72
3.3	Des modèles simples pour décrire l'évolution du champ magnétique	74
3.3.1	Un modèle local	75
3.3.2	Un modèle d'ondes d'Alfvén stationnaires	75
3.4	Influence de la circulation méridienne	76
3.4.1	Deux régimes selon la valeur de t_{Ap}/t_Ω	77
3.4.2	Influence de la stratification stable	79
3.4.3	Influence de la diffusivité thermique	80
4	Stabilité d'un champ magnétique dans une zone radiative en rotation différentielle	85
4.1	Configurations magnétiques enroulées par une rotation différentielle cylindrique	87
4.1.1	Caractéristiques de l'instabilité	88
4.1.2	Effet de la stratification stable	89
4.1.3	Effet de la diffusivité thermique	91
4.1.4	Influence de t_{Ap}/t_Ω	94
4.2	Configurations magnétiques enroulées par une rotation différentielle radiale	94
4.2.1	Caractéristiques de l'instabilité	96
4.2.2	Effet de la diffusivité thermique	97
4.2.3	Influence de t_{Ap}/t_Ω	98
4.3	Champ magnétique de surface résultant des instabilités	101

4.3.1	Calcul du champ longitudinal B_l	102
	Discussion, conclusion	107
	Annexes	115
A	Équations de la MHD	117
A.1	Conservation de la masse	118
A.2	Conservation de la quantité de mouvement	118
A.2.1	Forces de volume - Force de Laplace	119
A.2.2	Forces de surface - Tenseur des contraintes	119
A.2.3	Référentiel en rotation	121
A.2.4	Équations de Navier-Stokes	121
A.3	Conservation de l'énergie	121
A.3.1	Loi de comportement thermique	123
A.4	Équation d'induction	123
A.5	L'ensemble complet des équations	124
A.6	L'approximation Boussinesq	125
B	Le modèle d'ondes d'Alfvén stationnaires	129
B.1	Dans un milieu homogène	129
B.1.1	Conditions initiales et aux limites	130
B.2	Dans un milieu hétérogène	133
B.2.1	Conditions initiales et aux limites	134
B.3	Calcul de $\max(B_\varphi/B_p)$ et t_{max}	137
B.3.1	Dans un milieu homogène	137
B.3.2	Dans un milieu hétérogène	138
	Références	141
	Publication	153

Liste des notations principales

Les vecteurs sont notés en gras, \mathbf{A} est par exemple un vecteur.

c	Vitesse de la lumière
k_B	Constante de Boltzmann
r	Rayon en coordonnées sphériques
θ	Colatitude
φ	Angle azimutal
$\varpi = r \sin \theta$	Distance par rapport à l'axe de rotation d'une étoile
s_l	Coordonnée curviligne le long d'une ligne de champ poloïdal
\mathbf{B}	Champ magnétique
\mathbf{B}_p	Champ magnétique poloïdal
B_φ	Composante toroïdale du champ magnétique
B_r	Composante radiale du champ magnétique
B'_r	Fluctuation de la composante radiale du champ magnétique (= composante radiale – composante radiale axisymétrique)
B_θ	Composante latitudinale du champ magnétique
B_l	Champ longitudinal (champ magnétique projeté le long de la ligne de visée intégré sur toute la surface visible d'une étoile)
B_d	Intensité du champ magnétique dipolaire
B_{pc}	Champ magnétique poloïdal critique (donné par Aurière et al. 2007)
B_{crit}	Champ magnétique poloïdal critique (donné par le modèle d'ondes d'Alfvén stationnaires)

E_m	Énergie magnétique
E_{m_p}	Énergie magnétique poloïdale
E_{m_φ}	Énergie magnétique toroïdale
\mathbf{v}	Champ de vitesse
\mathbf{v}_m	Champ de vitesse méridional
v_φ	Composante azimutale du champ de vitesse
v_r	Composante radiale du champ de vitesse
v_θ	Composante latitudinale du champ de vitesse
$E_{cin,pol}$	Énergie cinétique méridionale
$E_{cin,tor}$	Énergie cinétique azimutale
\mathbf{E}	Champ électrique
\mathbf{j}	Courant électrique
$\mathbf{F}_L = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$	Force de Laplace
M_\odot	Masse du Soleil
R_\odot	Rayon du Soleil
R_*	Rayon stellaire
R_c	Rayon interne du domaine de calcul
R	Rayon externe du domaine de calcul
$d = R - R_c$	Épaisseur du domaine de calcul
L	Longueur d'une ligne de champ magnétique poloïdal
Ω	Vitesse angulaire
P	Période de rotation
L_{cin}	Moment cinétique spécifique
g	Accélération de la pesanteur
ρ	Masse volumique
p	Pression thermique
P_{tot}	Pression totale
$\beta = \frac{p}{B^2/8\pi}$	Rapport entre la pression thermique et magnétique
T	Température

$\bar{\rho}, \bar{p}, \bar{T}$	ρ, p et T de l'état de référence à l'équilibre hydrostatique
ρ_1, p_1, T_1	Fluctuations par rapport à $\bar{\rho}, \bar{p}$ et \bar{T}
α	Coefficient de dilatation thermique
e	Énergie interne massique
s	Entropie
c_s	Vitesse du son
n_{poly}	Indice polytropique
σ_{cond}	Conductivité électrique
χ	Conductivité thermique
c_p	Capacité calorifique à pression constante
c_v	Capacité calorifique à volume constant
$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$	Rapport des capacités calorifiques
$\eta = \frac{c^2}{4\pi\sigma_{cond}}$	Coefficient de diffusion magnétique
μ	Coefficient de viscosité dynamique de cisaillement
ζ	Coefficient de viscosité dynamique de volume
$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	Coefficient de viscosité cinématique
$\kappa = \frac{\chi}{c_p \rho}$	Coefficient de diffusion thermique
σ_v	Tenseur des contraintes
C_{visq}	Dissipation visqueuse
Q	Sources locales de chaleur
F	Densité de flux de chaleur
k	Vecteur d'onde
ω	Pulsation d'une onde
n	Nombre d'onde radial
l	Entier positif caractérisant le nombre d'onde latitudinal
m	Entier positif caractérisant le nombre d'onde azimutal (mode azimutal)
σ	Taux de croissance d'une instabilité
$v_{Ap} = \frac{B_p}{\sqrt{4\pi\rho}}$	Vitesse d'Alfvén poloïdale

$v_{A\varphi} = \frac{B_\varphi}{\sqrt{4\pi\rho}}$	Vitesse d'Alfvén toroïdale
$\omega_{Ap} = \frac{v_{Ap}}{r}$	Fréquence d'Alfvén poloïdale
$\omega_{A\varphi} = \frac{v_{A\varphi}}{r}$	Fréquence d'Alfvén toroïdale
$q = -\frac{\partial \ln \Omega}{\partial \ln r}$	Paramètre de cisaillement
$q_m = \frac{\partial \ln B_\varphi}{\partial \ln \varpi}$	Paramètre caractérisant le gradient du champ magnétique toroïdal
ℓ	Échelle de longueur
$\ell_{\nabla\Omega} = \frac{\Omega}{\ \nabla\Omega\ }$	Longueur caractéristique de la rotation différentielle
$\ell_c = \sqrt{\frac{\kappa}{N}}$	Échelle de longueur telle que $\tau_\kappa = t_N$
$t_\nu = \frac{d^2}{\nu}$	Temps caractéristique de la diffusion visqueuse sur l'échelle d
$\tau_\kappa = \frac{\ell^2}{\kappa}$	Temps caractéristique de la diffusion thermique sur l'échelle ℓ
$\tau_A = \frac{\ell_{\nabla\Omega}}{v_{Ap}}$	Temps d'Alfvén poloïdal sur l'échelle $\ell_{\nabla\Omega}$
$\overline{v_{Ap}}$	Vitesse d'Alfvén poloïdale moyennée sur une ligne de champ poloïdal
$\tau(s_l) = \int_0^{s_l} \frac{ds'_l}{v_{Ap}}$	Temps d'Alfvén poloïdal le long d'une ligne de champ poloïdal
$B_0 = B_p(r = R, \theta = \pi/2)$	Champ magnétique poloïdal de surface à l'équateur
$\Omega_0 = \Omega(r = R, \theta = \pi/2)$	Vitesse angulaire de surface à l'équateur
$\Delta\Omega = \Omega(s_l = 0) - \Omega(s_l = L)$	Contraste de vitesse angulaire entre les extrémités d'une ligne de champ poloïdal
$\rho_0 = \rho(r = R)$	Masse volumique de surface
$\rho_c = \rho(r = R_c)$	Masse volumique au rayon interne
$\nu_0 = \frac{\mu}{\rho_0}$	Coefficient de viscosité cinématique de surface
$\kappa_0 = \frac{\chi}{c_p \rho_0}$	Coefficient de diffusion thermique de surface
$T_0 = T(r = R)$	Température de surface
$T_i = T(r = R_c)$	Température au rayon interne
$\Delta T = T_0 - T_i$	Différence de température entre la surface et le rayon interne
$N = \sqrt{\frac{\alpha g \Delta T}{R}}$	Fréquence de Brunt-Väisälä

$t_N = \frac{1}{N}$	Temps caractéristique de la poussée d'Archimède
$V_{Ap} = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho_0}}$	Vitesse d'Alfvén poloïdale de surface à l'équateur
$t_{Ap} = \frac{R}{V_{Ap}}$	Temps d'Alfvén poloïdal de surface à l'équateur
$\Omega_{Ap} = \frac{1}{t_{Ap}}$	Fréquence d'Alfvén poloïdale de surface à l'équateur
$t_\Omega = \frac{1}{\Omega_0}$	Temps caractéristique de la rotation de surface à l'équateur
$t_{\nabla\Omega} = \frac{1}{q\Omega_0}$	Temps caractéristique de la rotation différentielle
\mathbf{e}_i	Vecteur unitaire le long de la ligne de visée
i	Angle d'inclinaison entre l'axe de rotation d'une étoile et la ligne de visée
$\max(B_\varphi/B_p)$	Maximum spatial et temporel de B_φ/B_p
t_{\max}	Temps auquel $\max(B_\varphi/B_p)$ est atteint
r_{\max}, θ_{\max}	Rayon et colatitute auxquels $\max(B_\varphi/B_p)$ est atteint
$\max(E_{m_\varphi}/E_{m_p})$	Maximum temporel de E_{m_φ}/E_{m_p}
τ_{\max}	Temps auquel $\max(E_{m_\varphi}/E_{m_p})$ est atteint
$\max(E_{cin,tor}/E_{cin,pol})$	Maximum temporel de $E_{cin,tor}/E_{cin,pol}$
$Rm = \frac{R^2\Omega_0}{\eta}$	Nombre de Reynolds magnétique
$Lu = \frac{t_\eta}{t_{Ap}}$	Nombre de Lundquist
$Pm = \frac{\nu}{\eta}$	Nombre de Prandtl magnétique
$Pm_0 = \frac{\nu_0}{\eta}$	Nombre de Prandtl magnétique de surface
$Pr = \frac{\nu}{\kappa}$	Nombre de Prandtl
$Pr_0 = \frac{\nu_0}{\kappa_0}$	Nombre de Prandtl de surface
$\frac{t_{Ap}}{t_\Omega} = \frac{R\Omega_0\sqrt{4\pi\rho_0}}{B_0}$	Rapport entre le temps d'Alfvén poloïdal de surface et le temps de rotation de surface
$\frac{N}{\Omega_0}$	Rapport entre la fréquence de Brunt-Väisälä et la vitesse angulaire de surface

Introduction

Les champs magnétiques ont un rôle prépondérant dans la nature. Ils sont tout d'abord l'une des deux composantes, avec le champ électrique, des ondes électromagnétiques. C'est principalement à travers ces ondes électromagnétiques, dont fait partie la lumière, que nous observons, analysons et essayons de mieux comprendre l'Univers. Les champs magnétiques sont aussi impliqués dans de nombreux phénomènes astrophysiques comme par exemple les jets de matière des disques d'accrétion, le rayonnement synchrotron et plus globalement la naissance, la vie et la mort d'un astre comme une étoile. Ils sont même l'un des éléments qui a permis à la vie sur Terre de se développer, grâce au champ magnétique terrestre qui protège notre atmosphère d'un bombardement incessant de rayons cosmiques. Ironiquement, ce sont aussi eux qui sont en partie responsables de l'accélération de ces rayons cosmiques meurtriers. Même si l'on ne s'en rend pas forcément compte, les champs magnétiques ont également sur Terre une place importante dans la vie de tous les jours. Ils permettent à des voyageurs de se repérer grâce à l'aiguille d'une boussole, ils servent à la fabrication de moteurs électriques et le stockage de données sur un disque dur est possible grâce à eux. Enfin, les champs magnétiques sont au cœur de la recherche scientifique où ils sont utilisés dans des accélérateurs de particules pour collimater des faisceaux de particules, dans les tokamaks pour confiner un plasma ou encore révèlent des propriétés étonnantes de la matière au niveau microscopique comme la supraconductivité.

En physique stellaire, l'existence de champs magnétiques dans les étoiles est connue depuis [Hale \(1908\)](#) grâce à la détection d'un champ magnétique à la surface du Soleil. Depuis lors, des champs magnétiques ont été observés à la surface d'étoiles de tous types spectraux et de tous stades évolutifs. Se posent alors plusieurs questions :

- Quelle est l'origine des champs magnétiques stellaires observés? Autrement dit, quelles sont les mécanismes physiques qui permettent de générer et d'entretenir un champ magnétique?
- Quel est l'impact d'un champ magnétique sur l'évolution d'une étoile?

Pour répondre à la première question, il faut tout d'abord savoir que les sources de champ magnétique sont diverses : les aimants permanents, la variation temporelle d'un champ électrique ou encore les courants électriques créés par le mouvement d'un ensemble de particules chargées. C'est cette dernière source de champ magnétique qui nous inté-

resse particulièrement en physique stellaire car les fluides constituant les étoiles peuvent être ionisés, formant un plasma de particules chargées électriquement. Un champ magnétique peut donc être engendré par les mouvements internes d'un plasma stellaire. De plus, certains mécanismes physiques permettant d'entretenir un champ magnétique dans les étoiles sont communément acceptés, on pense notamment au processus de dynamo. Cependant, la mise en œuvre de ces mécanismes dépend de la constitution d'une étoile qui varie suivant sa masse, son stade évolutif ou encore sa composition chimique. Les champs magnétiques observés dans les étoiles sont par ailleurs très variés en intensité comme en géométrie, et tous ne sont pas aussi bien contraints par les observations que celui du Soleil. Dans certains cas, notre méconnaissance des processus de génération et d'entretien des champs magnétiques et le manque d'observations font que la question de l'origine de certains types de magnétismes stellaires reste ouverte.

Nous avons noté que les mouvements internes d'un plasma stellaire peuvent générer un champ magnétique. Un champ magnétique agit quant à lui à travers la force de Lorentz sur les particules chargées électriquement qui sont en mouvement. Il y a donc une interaction mutuelle entre un plasma en mouvement et un champ magnétique, l'un agissant sur l'autre, l'autre rétroagissant sur l'un et ainsi de suite. L'impact de cette interaction sur l'évolution d'une étoile reste cependant mal compris et est souvent négligé dans les modèles d'évolution stellaire. Pourtant, certaines mesures de rotation ou d'abondances chimiques à la surface d'étoiles ne sont pas reproduites par les modèles d'évolution stellaire sans champ magnétique. Le champ magnétique stellaire est alors souvent invoqué pour tenter de réconcilier les observations et les prédictions des modèles sans champ magnétique, notamment par l'effet direct qu'il peut avoir sur le transport du moment cinétique et indirect sur le transport des éléments chimiques. Il est donc très important d'étudier en détail les processus physiques mis en œuvre dans un intérieur stellaire magnétisé afin de mieux quantifier l'impact du champ magnétique sur l'évolution d'une étoile.

Il existe une catégorie d'étoiles pour laquelle les questions de l'origine du champ magnétique stellaire et de son impact sur l'évolution stellaire sont particulièrement pertinentes. Il s'agit des étoiles de masse intermédiaire de type spectral B tardif et A de la séquence principale, l'étape évolutive la plus longue dans la vie d'une étoile. Ces étoiles ont une masse comprise entre 1.5 et 3.5 M_{\odot} et sont constituées d'un cœur convectif entouré par une zone radiative. Environ 5 à 10% d'entre elles présentent des anomalies d'abondance chimique d'un certain type à leur surface, ce sont les étoiles Ap/Bp. Un champ magnétique intense a été détecté à la surface de toutes les étoiles Ap/Bp observées, tandis que jusqu'à ce jour seulement 5 étoiles de masse intermédiaire non-Ap/Bp présentent à leur surface un champ magnétique. Au contraire des étoiles Ap/Bp, le champ magnétique de ces 5 étoiles non-Ap/Bp dites *Vega-like* est de très faible intensité. On suppose que les autres étoiles de masse intermédiaire possèdent également un faible champ magnétique mais que les limites instrumentales actuelles n'ont pas permis leur détection.

Cette dichotomie magnétique entre le fort champ des étoiles Ap/Bp et le faible champ des autres étoiles de masse intermédiaire est un fait observationnel qui n'est pas compris. De plus, au contraire des étoiles de faible masse comme le Soleil, constituées d'un cœur radiatif et d'une enveloppe convective, il est peu probable que le champ magnétique ob-

servé à la surface des étoiles de masse intermédiaire soit engendré par un mécanisme de dynamo. Il existe cependant plusieurs scénarios qui tentent d'expliquer le magnétisme des étoiles de masse intermédiaire. L'un d'entre eux, proposé par [Aurière et al. \(2007\)](#), suppose une origine commune au champ magnétique des étoiles de masse intermédiaire, une origine fossile qui résulterait d'une étape évolutive antérieure à la séquence principale. La dichotomie magnétique apparaîtrait alors durant l'évolution de ces étoiles et serait provoquée par une instabilité magnétohydrodynamique. Ce manuscrit de thèse explore ce scénario en étudiant la stabilité de configurations magnétiques évoluant dans des zones radiatives en rotation différentielle, c'est à dire qui possèdent un gradient de rotation. La rotation différentielle est susceptible d'être engendrée par différents processus durant la vie d'une étoile et est un élément pouvant entraîner la déstabilisation d'un champ magnétique. Nous considérerons le problème aux conditions initiales où une configuration magnétique est soumise à une rotation différentielle donnée. Il sera abordé au moyen de simulations numériques 2D et 3D qui permettent de résoudre les équations de la magnétohydrodynamique qui n'ont pas de solutions analytiques.

Dans un premier chapitre, les observations du champ magnétique de surface et de la rotation interne des étoiles seront répertoriées. Les méthodes de détections ayant permis ces observations seront également présentées. La théorie qui gouverne la physique des intérieurs stellaires magnétisés, la magnétohydrodynamique (MHD), sera décrite dans un second chapitre. Nous nous focaliserons dans un premier temps sur les processus physiques MHD les plus pertinents pour notre problématique, c'est à dire ceux qui peuvent avoir lieu dans une zone radiative stellaire. Les instabilités MHD susceptibles de se déclencher dans une zone radiative en rotation différentielle seront ensuite présentées et leur probabilité d'occurrence dans un tel milieu sera discutée. Le troisième chapitre portera sur l'étude numérique de l'évolution d'un champ magnétique axisymétrique dans une zone radiative en rotation différentielle. Les résultats des simulations numériques 2D que j'ai réalisées seront analysés en détail, avec une étude de l'influence de nombreux ingrédients physiques comme l'intensité du champ magnétique, la géométrie de la rotation différentielle, la valeur des coefficients de diffusion, le profil de densité, la circulation méridienne ou encore la stratification stable. La stabilité des configurations magnétiques sera testée grâce à des simulations numériques 3D dans un quatrième et dernier chapitre à la fin duquel l'impact des instabilités MHD sur le champ magnétique de surface sera quantifié. En conclusion, les résultats seront résumés et discutés dans le contexte du magnétisme des étoiles de masse intermédiaire.

Chapitre 1

Contexte Astrophysique

L'astrophysique, la branche de la physique qui étudie les astres, est une science expérimentale tout comme sa discipline mère. Son laboratoire est l'Univers et les résultats de ses expériences sont les observations astronomiques. Elle est réellement née lorsque les observations du mouvement des corps célestes ont pu être décrites par la théorie de la gravité universelle de Isaac Newton à la fin du XVII^e siècle. C'est l'observation de la précession du périhélie de Mercure, en désaccord avec la gravité universelle, qui a entre autres amené Albert Einstein à développer sa théorie de la relativité générale au début du XX^e siècle. Toute proportion gardée, c'est une des problématiques que les observations soulèvent, le désert magnétique observé dans la distribution du champ magnétique des étoiles de masse intermédiaire, qui est à la base de mon travail de thèse pourtant très théorique.

Ce premier chapitre a pour but de présenter le contexte observationnel dans lequel s'inscrit ma thèse. Les observations de champs magnétiques à la surface des étoiles de la séquence principale seront présentées dans une première section, commençant par celles réalisées sur les étoiles les moins massives pour finir par les étoiles les plus massives. L'origine de ces champs magnétiques sera également discutée. Dans une seconde et dernière section, il sera question des observations de la rotation interne des étoiles et des contraintes qu'elles apportent sur les mécanismes pouvant créer une rotation différentielle ainsi que sur les processus de transport du moment cinétique.

1.1 Magnétisme des étoiles

Depuis la première détection d'un champ magnétique à la surface du Soleil par [Hale \(1908\)](#), les mesures de champs magnétiques stellaires sont de plus en plus précises. La technique de détection reste cependant basée sur le même principe physique, la levée de dégénérescence des niveaux énergétiques des atomes ou des molécules en présence d'un champ magnétique.

1.1.1 Méthodes de détection

Pour des valeurs de champ magnétique inférieures à 50kG, typiques de ce qui est observé à la surface des étoiles magnétiques, la levée de dégénérescence des niveaux énergétiques des atomes est appelé effet Zeeman. Cet effet provoque la séparation des raies spectrales en plusieurs composantes. L'écartement en longueur d'onde de ces composantes, mesurable à partir du spectre d'une étoile, dépend de l'intensité du champ magnétique (que l'on appelle le module du champ magnétique moyen) régnant au niveau de la photosphère de l'étoile. Cet écartement est faible, typiquement de l'ordre de 0.01Å par kG. Il peut donc être masqué par l'élargissement thermique ou rotationnel des raies spectrales, empêchant la détection d'un champ magnétique. Pour cette raison, cette technique n'a permis la détection d'un champ magnétique qu'à la surface du Soleil et de certaines étoiles Ap/Bp tournant très lentement et possédant un champ magnétique d'au moins quelques kG (voir par exemple [Mathys et al. 1997](#)).

Cependant, les composantes d'une raie séparée par effet Zeeman sont polarisées, fournissant un outil de détection supplémentaire. La polarisation des différentes composantes dépend de l'orientation du champ magnétique par rapport à la ligne de visée, ce qui permet de plus d'obtenir des informations sur la topologie du champ magnétique. Cette propriété est mise en œuvre pour la détection de champs magnétiques stellaires grâce à la spectropolarimétrie. Le principe est de placer un polarimètre en amont du spectrographe qui recueille la lumière stellaire. On obtient alors un spectre stellaire pour chaque type de polarisation de la lumière (circulaire droite ou gauche et linéaire), isolant ainsi sur des spectres indépendants les composantes polarisées des raies spectrales. Différentes quantités peuvent être déterminées par spectropolarimétrie, en particulier le champ longitudinal moyen B_l (dans la suite nous utiliserons le terme champ longitudinal pour faire court) sur lequel je vais me focaliser ici. Le champ longitudinal est la composante du champ magnétique projetée le long de la ligne de visée intégrée sur toute la surface visible de l'étoile. Il est dérivé à partir du décalage en longueur d'onde d'une raie entre le spectre de la lumière polarisée circulairement dans le sens horaire et celui de la lumière polarisée circulairement dans le sens anti-horaire. Le champ longitudinal fournit des informations sur l'intensité du champ magnétique mais aussi sur sa structure spatiale. La spectropolarimétrie rend possible la détection de champs magnétiques trop faibles pour être détectés par la mesure de la séparation des composantes Zeeman d'une raie spectrale. La méthode LSD, pour *Least-Square Deconvolution* ([Donati et al. 1997](#)), permet de plus d'augmenter la précision des mesures de champs magnétiques en générant un profil polarisé moyen qui cumule le signal polarimétrique de quelques centaines à quelques milliers de raies spectrales. Elle

est aujourd'hui largement utilisée pour les observations spectropolarimétriques (voir par exemple [Wade et al. 2000](#)).

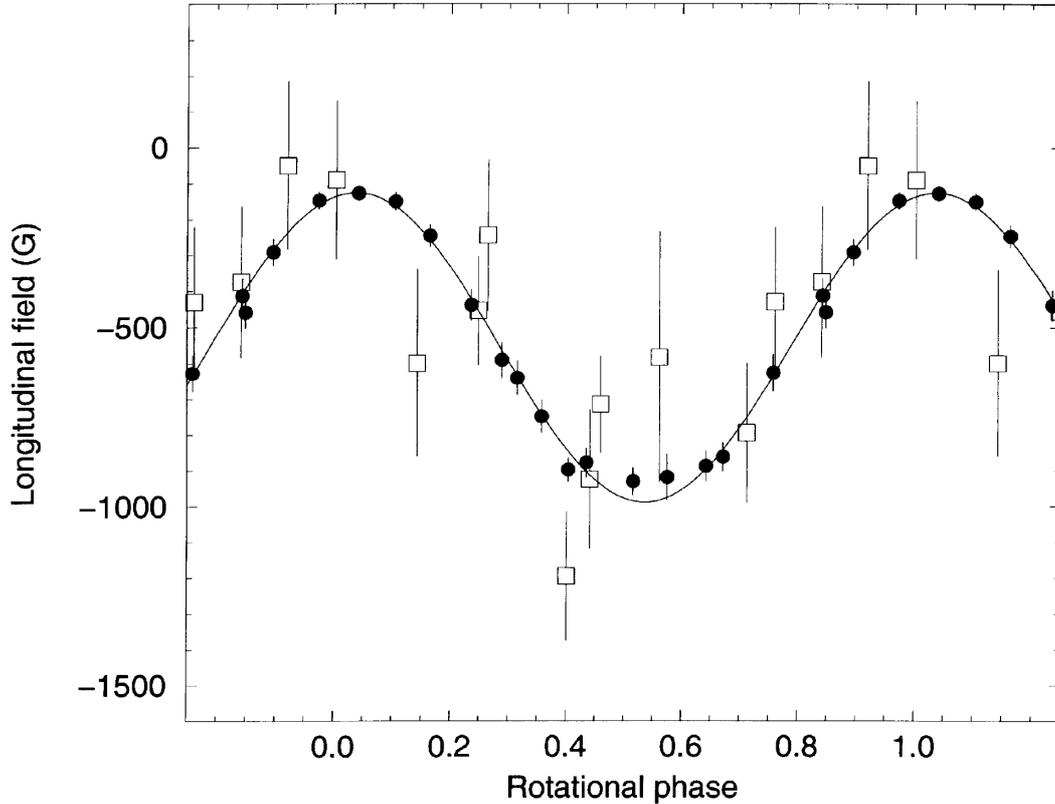


FIGURE 1.1 – Champ longitudinal en fonction de la phase de rotation de l'étoile 78 Vir. En plus des points de mesure indiqués par des ronds noirs et des carrés blancs, la ligne noire représente la meilleure courbe d'ajustement aux données mesurées. Crédit : [Wade et al. \(2000\)](#)

Lorsque la configuration magnétique n'est pas symétrique par rapport à l'axe de rotation, la partie du champ visible par un observateur à un instant donné varie au cours de la rotation de l'étoile. Cela induit une modulation rotationnelle de la signature Zeeman, comme illustrée sur la [FIGURE 1.1](#) tirée de [Wade et al. \(2000\)](#) qui montre la variation dans le temps du champ longitudinal B_l de l'étoile Ap/Bp 78 Vir. Ce champ longitudinal varie sur un cycle correspondant à la période de rotation de l'étoile et sa valeur absolue passe par un maximum noté $|B_l|^{max}$, appelé champ longitudinal maximal. La modulation rotationnelle est à la base des méthodes de reconstruction du vecteur champ magnétique. La plus simple, qui est approximativement valide pour les champs magnétiques structurés à grande échelle des étoiles Ap/Bp, consiste à ajuster les mesures du champ longitudinal aux valeurs produites par un modèle de champ dipolaire B_d dont l'axe est incliné vis à vis de l'axe de rotation. Les paramètres à ajuster de ce modèle de rotateurs obliques sont la période de rotation, l'intensité du dipôle et l'angle d'inclinaison ([Stibbs 1950](#); [Preston](#)

1967). Des structures un peu plus complexes qu'un champ dipolaire sont mises en évidence pour ce type d'étoile (Bagnulo et al. 1996, 2000, 2001). La comparaison avec les mesures d'élargissement Zeeman, lorsqu'elle est possible, indique néanmoins que l'essentiel de l'énergie magnétique des étoiles Ap/Bp est bien contenu aux plus grandes échelles spatiales. Proposée par Semel (1989), l'imagerie Zeeman-Doppler (ZDI) peut quant à elle reconstruire des champs magnétiques complexes mêlant les composantes poloidales et toroidales (correspond respectivement aux composantes dans le plan méridien et azimutales si le champ est axisymétrique) (Brown et al. 1991; Donati 2001; Donati et al. 2006). On trouvera des exemples de cartographie de champs magnétiques d'étoiles froides dans Donati et al. (2008), Morin et al. (2008a) ou encore Morin et al. (2008b).

1.1.2 Le Soleil et les étoiles naines

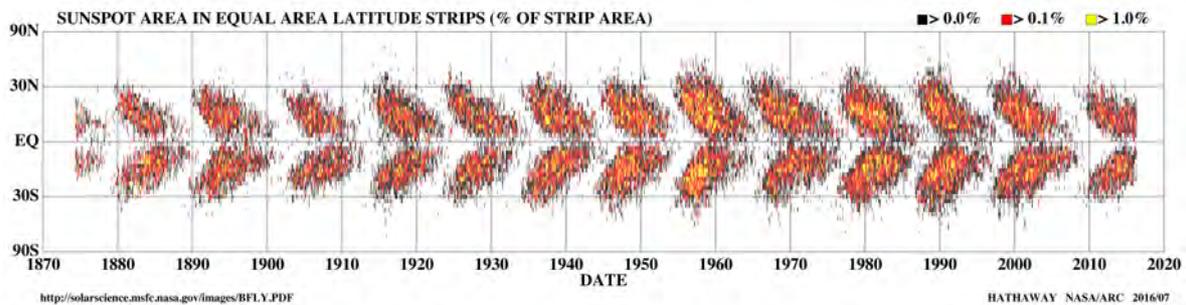


FIGURE 1.2 – Diagramme papillon montrant la position en latitude des taches solaires au cours du temps. Ce diagramme met en évidence un cycle d'environ 11 ans au début duquel les taches solaires apparaissent à moyennes latitudes puis de plus en plus près de l'équateur pour enfin ne quasiment plus apparaître en fin de cycle. Crédit : David HATHAWAY - NASA

La mesure de la séparation d'une raie spectrale attribuée à l'effet Zeeman a permis la première détection d'un champ magnétique d'environ 3kG dans une tache solaire par Hale (1908). Cette détection a été confirmée par l'analyse de la polarisation des composantes de la raie. Les observations qui ont suivi cette découverte ont montré que le champ magnétique est compris entre 2 et 4kG dans les taches solaires, que celles-ci apparaissent par paire de polarité magnétique de signe opposé et que de l'activité éruptive est associée à l'apparition des taches. Le cycle de 11 ans, durant lequel l'apparition des taches solaires commence à moyenne latitude puis se poursuit vers l'équateur dessinant au cours du temps un diagramme en forme de papillon (voir FIGURE 1.2), est de plus associé à une inversion des pôles magnétiques.

Le fait que les autres étoiles froides de la séquence principale puissent abriter un champ magnétique a longtemps été suspecté, notamment parce que des phénomènes d'activité semblables à ceux du Soleil étaient observés à leur surface. Cependant, les premières détections d'un champ magnétique sur des étoiles de ce type ont eu lieu plus

de 70 ans après la détection du champ magnétique solaire (Robinson et al. 1980). Depuis, les progrès en spectropolarimétrie ont permis la détection d'un champ magnétique à la surface de nombreuses étoiles froides, notamment de type spectral M (voir par exemple Donati et al. 2008; Morin et al. 2008a).

1.1.3 Étoiles de masse intermédiaire et étoiles massives

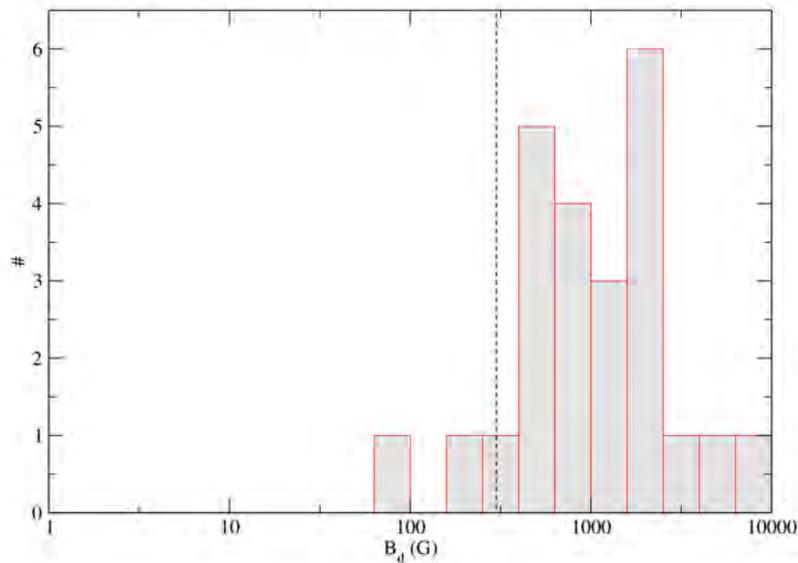


FIGURE 1.3 – Histogramme de l'intensité du champ dipolaire B_d dérivé grâce au modèle de rotateurs obliques pour l'échantillon d'étoiles Ap/Bp étudié par Aurière et al. (2007). Crédit : Aurière et al. (2007)

Bien avant la détection de champs magnétiques sur des étoiles froides autres que le Soleil, des champs magnétiques avaient déjà été observés à la surface d'étoiles plus massives ($M > 1.5 M_{\odot}$). 78 Vir (HD 118022) est la première étoile autre que le Soleil à la surface de laquelle un champ magnétique a été détecté. Cette découverte a été réalisée par Babcock (1947) grâce à la détermination de son champ longitudinal. 78 Vir est une étoile de masse intermédiaire et fait partie d'une classe spectrale d'étoiles chimiquement particulières, les étoiles Ap/Bp. Babcock (1958a) et Babcock (1958b) observent ensuite un échantillon de 69 autres étoiles Ap/Bp et détectent un champ magnétique à la surface de toutes les étoiles de cet échantillon. Par la suite, de nouvelles observations sont menées afin de détecter un champ magnétique sur d'autres étoiles Ap/Bp ou de mieux caractériser celui des étoiles déjà observées (Babcock 1960; Borra & Landstreet 1980; Bohlender et al. 1993; Leroy 1995; Mathys 1995a,b; Mathys & Hubrig 1997; Mathys et al. 1997; Wade et al. 2000; Aurière et al. 2007). Toutes les étoiles Ap/Bp observées jusqu'à aujourd'hui par spectropolarimétrie (quelques centaines dans le catalogue de Bychkov et al. 2003) se sont avérées magnétiques.

Les étoiles Ap/Bp

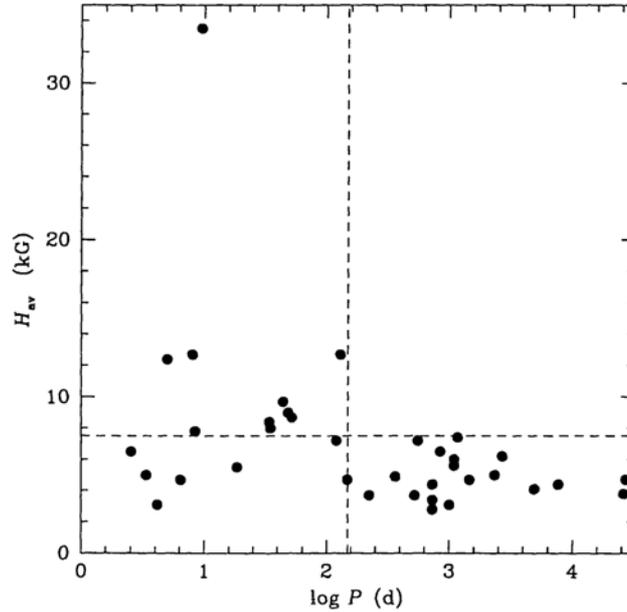


FIGURE 1.4 – Module du champ magnétique moyen en fonction de la période de rotation d’un échantillon d’étoiles Ap/Bp pour lesquelles la mesure de l’écartement de raies séparées par effet Zeeman a été possible. La ligne verticale correspond à une période de rotation de 150 jours, tandis que la ligne horizontale indique un module du champ moyen égal à 7.5kG. Crédit : [Mathys et al. \(1997\)](#)

Les relevés spectroscopiques d’étoiles chimiquement particulières montrent que les étoiles Ap/Bp forment un échantillon d’environ 5 à 10% des étoiles de masse intermédiaire qui ont un même type spectral que les étoiles Ap/Bp (c’est à dire B tardif et A). Elle présentent des anomalies d’abondance d’éléments chimiques par rapport aux abondances observées dans l’atmosphère du Soleil (surabondance de Si, Sr, Ti et d’autres, sous-abondance de He notamment). Ces anomalies sont confinées dans les couches superficielles des étoiles et résultent de la compétition entre la lévitation des éléments chimiques, provoquée par la pression de radiation, et la sédimentation due à la gravitation. On s’attend aussi à ce que le champ magnétique joue un rôle dans la localisation de ces abondances, particulièrement sur le fait qu’elles soient réparties de manière inhomogène autour de l’étoile ([Alecian 2015](#)).

Le champ magnétique des étoiles Ap/Bp a une topologie quasiment dipolaire et est stable sur au moins plusieurs dizaines d’années (voir par exemple [Donati & Landstreet 2009](#)). Leur axe magnétique est généralement incliné par rapport à l’axe de rotation de l’étoile. Leur champ longitudinal peut avoir une valeur allant jusqu’à plusieurs kG pour certaines de ces étoiles, mais aucune d’entre elles ne possède un champ longitudinal maximal inférieur à environ 70G. Il existe donc une limite inférieure au champ magnétique

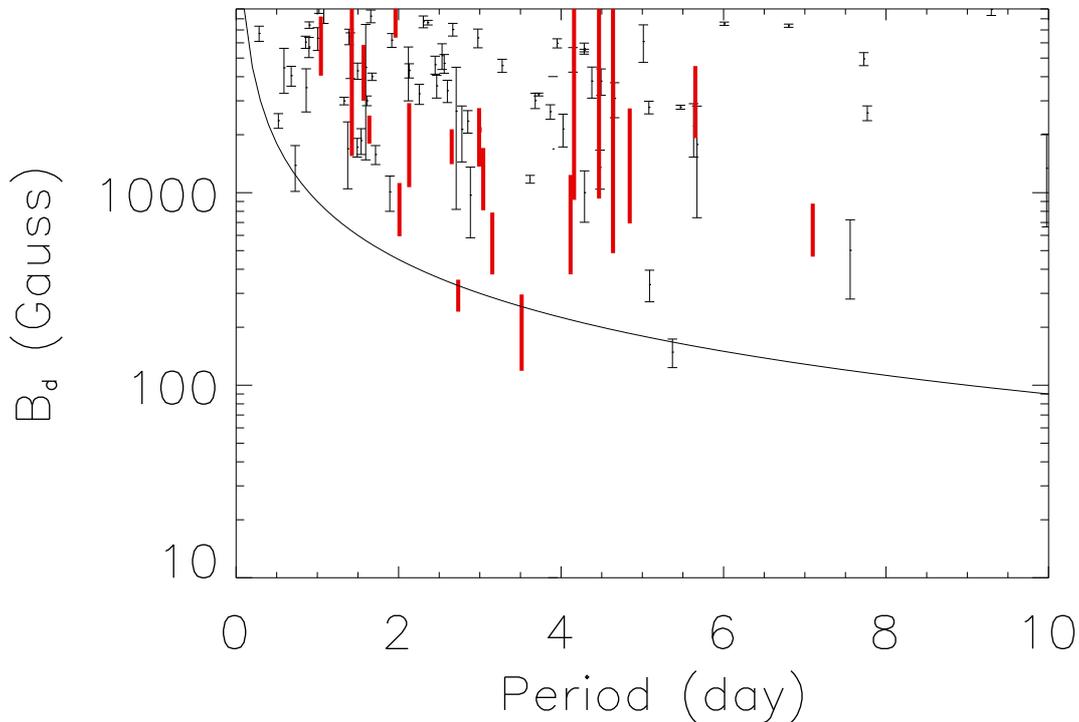


FIGURE 1.5 – Intensité du champ magnétique dipolaire B_d en fonction de la période de rotation d'un échantillon d'étoiles Ap/Bp. Les lignes noires verticales représentent la limite inférieure du champ dipolaire des étoiles du catalogue de [Bychkov et al. \(2005\)](#). Elle est déterminée à partir de la relation $B_d > 3.3 |B_l|^{max}$ ([Aurière et al. 2007](#)) et des mesures de $|B_l|^{max}$ du catalogue. Les lignes rouges représentent les champs dipolaires (avec les barres d'erreur) obtenus à partir du modèle de rotateurs obliques pour les étoiles de l'échantillon de [Aurière et al. \(2007\)](#). Une courbe d'équation $B_d \propto \Omega_0$ est tracée en noire. Crédit : [Lignières et al. \(2014\)](#)

des étoiles Ap/Bp ([Aurière et al. 2007](#)). En terme d'intensité du champ dipolaire B_d dérivée par le modèle de rotateurs obliques, cette limite inférieure est d'environ 300G (voir [FIGURE 1.3](#)).

La gamme des périodes de rotation des étoiles Ap/Bp s'étend sur cinq à six ordres de grandeur, de quelques heures à un siècle, voire même peut-être un millénaire ([Mathys 2015](#)). Grâce à ces données, [Landstreet & Mathys \(2000\)](#) montrent que l'inclinaison de l'axe magnétique avec l'axe de rotation des étoiles semble être anti-corrélée avec leur période de rotation. De plus, sur un échantillon d'étoiles Ap/Bp possédant un champ suffisamment intense et une rotation suffisamment lente pour que l'on puisse mesurer le module du champ magnétique moyen, [Mathys et al. \(1997\)](#) semblent montrer une faible anti-corrélation entre la valeur de ce champ et la période de rotation de ces étoiles (voir

FIGURE 1.4). Ces études sont néanmoins restreintes à des rotateurs lents qui présentent une période de rotation d’au moins quelques jours pour [Mathys et al. \(1997\)](#) et d’au moins 1 mois pour [Landstreet & Mathys \(2000\)](#). Les possibles anti-corrélations relevées par [Mathys et al. \(1997\)](#) et [Landstreet & Mathys \(2000\)](#) ne peuvent pas être généralisées à toutes les étoiles Ap/Bp et ne constituent donc pas une propriété du magnétisme de ces étoiles. En réalité, une caractéristique importante du magnétisme des étoiles Ap/Bp est l’absence de corrélations évidentes entre les propriétés du champ magnétique (intensité, topologie) et les paramètres fondamentaux des étoiles (température effective, rotation, gravité de surface, âge) (voir par exemple [Donati & Landstreet 2009](#)).

Même si dans les étoiles Ap/Bp le champ magnétique n’est pas corrélé à la période de rotation, [Aurière et al. \(2007\)](#) prévoient que la limite inférieure du champ des Ap/Bp est proportionnelle à la vitesse angulaire Ω (le raisonnement sera décrit dans la section 1.1.5). La FIGURE 1.5, issue de [Lignières et al. \(2014\)](#), affiche l’intensité du dipôle magnétique B_d en fonction de la période de rotation d’un échantillon d’étoile Ap/Bp. L’intensité des champs les plus faibles semble en effet suivre la courbe d’équation $B_d \propto \Omega_0$ tracée en noire, où Ω_0 est la vitesse angulaire de surface. L’échantillon d’étoiles étudié est cependant trop petit pour permettre une conclusion définitive à ce sujet et cette propriété de la limite inférieure du champ des Ap/Bp devra être confirmée par de nouvelles observations.

Les autres étoiles de masse intermédiaire et les *Vega-like*

De nombreuses tentatives de détection d’un champ magnétique à la surface des étoiles de masse intermédiaire non-Ap/Bp ont été réalisées. [Babcock \(1958a\)](#) a obtenu plusieurs détections sur ces étoiles, mais les incertitudes de mesure se sont révélées plus grandes qu’estimées initialement. Ces détections n’ont donc pas été confirmées. L’observation d’étoiles Am ([Mathys 1988](#); [Mathys & Lanz 1990](#); [Lanz & Mathys 1993](#); [Bikmaev et al. 1998](#)) et HgMn ([Mathys & Hubrig 1995](#)) semblait indiquer que certaines étoiles chimiquement particulières non-Ap/Bp étaient susceptibles d’abriter un fort champ magnétique présentant une structure spatiale complexe. Mais encore une fois, ces détections ont été réfutées par des mesures plus précises. De même, certaines détections plus récentes effectuées avec le spectrographe FORS1 ([Hubrig et al. 2009a,b](#)) sont globalement réfutées par la communauté astrophysique à cause d’une méthode de traitement des données inappropriée ([Bagnulo et al. 2012](#)). [Shorlin et al. \(2002\)](#), grâce au spectrographe à haute résolution MUSICOS ([Baudrand & Bohm 1992](#)), n’ont quant à eux détecté aucun champ magnétique sur les 63 étoiles de masse intermédiaire non-Ap/Bp qu’ils ont observées. Il n’y a également pas eu de détections à la surface des 31 étoiles normales et des 5 étoiles Am observées par [Landstreet \(1982\)](#) ainsi qu’à la surface des 138 étoiles normales de [Bagnulo et al. \(2006\)](#). Avec un seuil de détection moindre que celui atteint dans [Shorlin et al. \(2002\)](#) (environ 1 G contre quelques dizaines de G), [Aurière et al. \(2010\)](#) observent avec le spectropolarimètre à haute résolution NARVAL (Télescope Bernard Lyot, Observatoire du Pic du Midi, France) 15 étoiles Am et HgMn et ne détectent à nouveau aucun champ magnétique.

Jusqu’à récemment, aucune détection communément admise d’un champ magnétique sur des étoiles de masse intermédiaire non-Ap/Bp n’avait donc été réalisée. Cependant, la

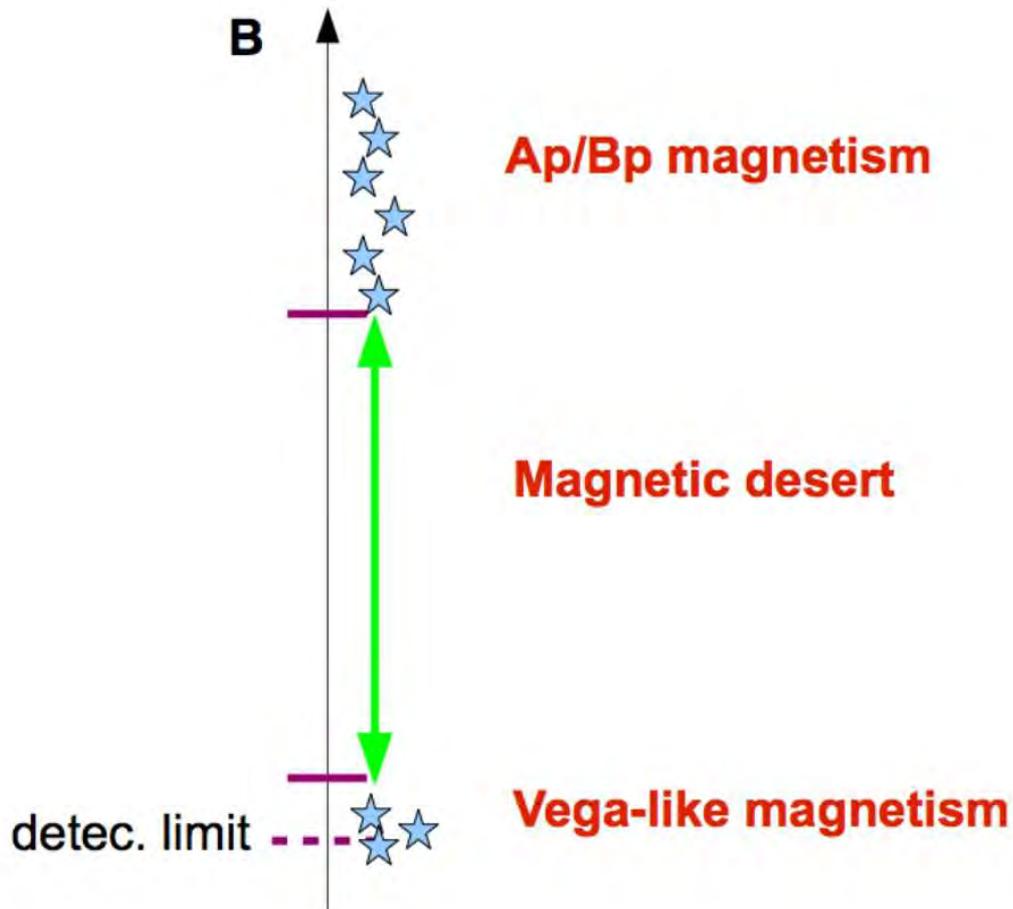


FIGURE 1.6 – Schématisation du désert magnétique des étoiles de masse intermédiaire. Une discontinuité d’environ deux ordres de grandeur dans la distribution du champ magnétique des étoiles de masse intermédiaire est observée entre les champs forts des étoiles Ap/Bp et les champs faibles des étoiles *Vega-like*. Crédit : [Lignières et al. \(2014\)](#)

mise en service des spectropolarimètres à haute résolution ESPaDOnS (Canada-France-Hawaii Telescope, Hawaii) et NARVAL a permis la découverte d’une nouvelle catégorie d’étoiles de masse intermédiaire magnétiques. Un champ magnétique longitudinal d’environ 0.6 G, deux ordres de grandeur de moins que la limite inférieure des étoiles Ap/Bp, a tout d’abord été détecté à la surface de l’étoile Vega ([Lignières et al. 2009](#)). La reconstruction de son champ magnétique par imagerie Zeeman-Doppler montre que celui-ci est structuré à plus petites échelles spatiales que le champ quasiment dipolaire des étoiles Ap/Bp ([Petit et al. 2010](#)). En effet, Vega arbore principalement une tache de champ magnétique radial située au niveau du pôle de rotation visible de l’étoile. Un champ longitudinal inférieur ou environ égal à 1 G est par la suite détecté à la surface de 3 étoiles Am, Sirius A ([Petit et al. 2011](#)), β UMa et θ Leo ([Blazère et al. 2016b](#)). La signature ma-

gnétique dans le spectre polarisé circulairement de ces étoiles est particulière, elle n'est pas celle d'un effet Zeeman classique qui présente pour une raie spectrale deux composantes polarisées circulairement en sens opposé. Des mouvements convectifs verticaux ayant lieu dans une fine enveloppe convective pourraient être à l'origine de cette signature magnétique particulière (López Ariste 2002), qui a d'ailleurs déjà été observée dans des étoiles convectives comme localement sur le Soleil (Viticchié & Sánchez Almeida 2011; Sainz Dalda et al. 2012) ou sur d'autres étoiles froides (Petit et al. 2005; Aurière et al. 2011; Morgenthaler et al. 2012; Tsvetkova et al. 2013). Pour finir, une signature Zeeman classique a été observée sur l'étoile Am Alhena (γ Gem) (Blazère et al. 2016a). Son champ longitudinal est d'environ 5 G, ce qui est bien plus que celui des quatre étoiles citées précédemment mais toujours très faible devant la limite inférieure du champ des Ap/Bp. Il existe donc clairement une dichotomie magnétique, ou désert magnétique, d'environ deux ordres de grandeur entre le champ longitudinal très faible de ces cinq étoiles magnétiques non-Ap/Bp, dites étoiles *Vega-like*, et le champ fort des étoiles Ap/Bp. L'origine de ce désert magnétique sera abordée dans la Section 1.1.4.

Les étoiles massives

La structure interne des étoiles massives ($M > 8 M_{\odot}$) est similaire à celle des étoiles de masse intermédiaire et il ne serait donc pas étonnant de découvrir une dichotomie magnétique également dans ces étoiles. Les observations de champs magnétiques à la surface d'étoiles massives (Henrichs et al. 2000; Neiner et al. 2003; Bouret et al. 2008; Petit et al. 2008; Fossati et al. 2014; Hubrig et al. 2014; Alecian et al. 2014; Fossati et al. 2015a,b; Castro et al. 2015) n'ont donné lieu qu'à quelques dizaines de détections. Leur champ magnétique est généralement similaire à celui des étoiles Ap/Bp, il est structuré à grandes échelles spatiales et a une intensité variant de quelques centaines à quelques milliers de G suivant les étoiles. La proportion d'étoiles magnétiques parmi les étoiles massives est d'environ 7% (Grunhut & Neiner 2015), similaire à la proportion d'étoiles Ap/Bp parmi les étoiles de masse intermédiaire de même type spectral. La présence d'un désert magnétique dans les étoiles massives n'a jusqu'à ce jour pas été clairement démontrée (Fossati et al. 2015a), le champ magnétique le plus faible détecté étant d'intensité comparable à la limite instrumentale des relevées spectropolarimétriques les plus récents (~ 100 G pour le projet MiMeS par exemple Wade et al. 2016).

Des tentatives de recherche de champs magnétiques de type Vega ont été menées sur deux étoiles de type spectral B, ι Her et γ Peg, par Neiner et al. (2014) et Wade et al. (2014). Cependant, en dépit de leur plus forte luminosité, les étoiles massives sont des cibles plus difficiles pour la détection d'un champ magnétique que les étoiles de masse intermédiaire. Le signal polarimétrique sommé sur l'ensemble des raies est en effet inférieur à celui des étoiles plus froides, principalement du fait de la température plus élevée de ces étoiles et donc d'un nombre de raies d'absorption moindre.

Pour finir, notons qu'il existe une catégorie d'étoiles de masse intermédiaire et massives de la pré-séquence principale qui semble posséder des caractéristiques magnétiques similaires aux étoiles de la séquence principale de même masse. Il s'agit des étoiles Herbig Ae/Be. Les récentes recherches d'un champ magnétique à leur surface (Wade et al. 2007;

Catala et al. 2007; Alecian et al. 2008a,b, 2013) ont montré que le pourcentage d'étoiles magnétiques parmi les Herbig Ae/Be est du même ordre que le pourcentage d'étoiles magnétiques parmi les étoiles de masse intermédiaire et massives de la séquence principale. Alecian et al. (2013) ont par exemple trouvé que 5 étoiles parmi les 70 étoiles Herbig Ae/Be de leur échantillon sont magnétiques. Les étoiles Herbig Ae/Be magnétiques possèdent un fort champ magnétique structuré à grande échelle et pourraient donc être, de par leurs similarités, les progéniteurs des étoiles Ap/Bp.

1.1.4 Origine du champ magnétique et du désert magnétique des étoiles de masse intermédiaire

Beaucoup de questions sont soulevées par les observations du champ magnétique des étoiles de masse intermédiaire non évoluées. En effet, alors que l'origine du champ magnétiques des étoiles froides est attribuée à un mécanisme de dynamo ayant lieu dans leur enveloppe convective, l'origine du champ magnétique de surface des étoiles chaudes comme les étoiles de masse intermédiaire et les étoiles massives est incertaine. Au contraire des étoiles froides constituées d'un cœur radiatif et d'une enveloppe convective, les étoiles plus chaudes sont constituées d'un cœur convectif et d'une enveloppe radiative, éventuellement entourée par une très fine couche convective. Un mécanisme de dynamo peut avoir lieu dans le cœur convectif de ces étoiles (Brun et al. 2005; Featherstone et al. 2009; Augustson et al. 2016), mais l'émergence du champ magnétique engendré demande la traversée d'une zone radiative à l'intérieur de laquelle une forte stratification stable limite les mouvements verticaux du plasma stellaire (MacDonald & Mullan 2004, voir Section 2.4.1). Un champ magnétique peut également être engendré par dynamo dans la fine enveloppe convective présente à la surface de certaines étoiles chaudes dont la température effective $T_{eff} < 10^4$ K. Cependant, grâce à la loi d'échelle entre l'énergie magnétique créée par dynamo convective et le flux d'énergie convective utilisé par Christensen et al. (2009), Petit et al. (2011) montrent qu'une dynamo dans une fine enveloppe convective ne peut pas expliquer le faible champ magnétique observé à la surface de Sirius A. Certains scénarios avancent qu'une zone radiative pourrait également abriter un mécanisme de dynamo (Spruit 2002; Braithwaite 2006a). Cette dynamo serait basé, d'une part, sur l'effet Ω qui générerait un champ magnétique toroïdal à partir d'une rotation différentielle qui cisaille un champ poloïdal, et d'autre part sur une instabilité magnétique, l'instabilité de Tayler (voir Section 2.4.3), qui régénérerait le champ poloïdal à partir du champ toroïdal instable. Ces mécanismes dynamos devraient en principe être présents dans toutes les étoiles et leur efficacité devrait dépendre de la rotation. Le désert magnétique et l'absence de corrélation entre la rotation et l'intensité du champ ne sont pas expliqués par ces mécanismes. Ferrario et al. (2009) ainsi que Tutukov & Fedorova (2010) proposent quant à eux que le fort champ magnétique des Ap/Bp et la proportion de ces étoiles parmi les étoiles de masse intermédiaire pourraient résulter de la fusion de deux proto-étoiles. Cet événement violent pourrait engendrer une rotation différentielle suffisamment intense pour déclencher une dynamo dans la zone radiative. Finalement, l'origine du champ la plus communément admise est une origine fossile, c'est à dire qu'il résulterait d'une phase évolutive antérieure à la séquence principale. Lors de la formation d'une étoile,

l'effondrement gravitationnel d'un nuage de gaz amplifie le champ magnétique présent dans le milieu interstellaire et peut ainsi créer un champ magnétique intense structuré à grande échelle. De même, une dynamo lors de la phase de pré-séquence principale alors que l'étoile est entièrement convective pourrait engendrer un champ à grande échelle. Le temps de diffusion d'un champ magnétique créé par ces deux mécanismes est supérieur à la durée de vie d'une étoile chaude, un champ magnétique fossile pourrait donc subsister durant la phase de séquence principale. Cependant, la théorie du champ fossile n'explique pas la proportion d'étoiles à champ fort ni le désert magnétique. Braithwaite & Cantiello (2013) soutiennent par ailleurs que si l'hélicité d'un champ magnétique primordial est suffisamment faible, la configuration magnétique évolue dynamiquement à l'inverse d'un champ fossile jusqu'à devenir un champ faible lors de la séquence principale comme celui des étoiles *Vega-like*.

Dans ce contexte, on peut distinguer deux types de scénario pour expliquer la dichotomie magnétique illustrée sur la FIGURE 1.6 entre les champs forts des Ap/Bp et les champs faibles des *Vega-like*. Dans le premier, les deux magnétismes sont observés car il sont produits par deux mécanismes différents. C'est ce que soutiennent Braithwaite & Cantiello (2013), le champ des étoiles Ap/Bp serait généré par une forte dynamo suite à la fusion de deux proto-étoiles comme expliqué par Ferrario et al. (2009) et Tutukov & Fedorova (2010) tandis qu'un champ primordial aurait évolué dynamiquement vers un champ faible pour les étoiles *Vega-like*. Dans le second type de scénario, les deux magnétismes ont une origine commune mais l'évolution stellaire a provoqué leur séparation en deux catégories distinctes de champ magnétique. D'après Aurière et al. (2007), l'origine commune du champ magnétique des étoiles de masse intermédiaire serait un champ fossile et la séparation en deux types de magnétisme serait provoquée par une instabilité magnétique. C'est ce scénario qui est exploré dans ce manuscrit.

1.1.5 Le scénario de Aurière et al. (2007)

Toutes les étoiles sont susceptibles de posséder, suite à leur formation, un champ magnétique fossile structuré à grande échelle plus ou moins intense et une rotation différentielle. Le scénario est alors que la stabilité et donc la persistance du champ fossile dépend de son intensité. En effet, d'une part le champ magnétique d'une étoile impose une rotation solide, c'est à dire qu'il a tendance à supprimer la rotation différentielle à travers la tension magnétique de la force de Laplace. D'autre part, la topologie du champ magnétique est modifiée par la rotation différentielle. La composante poloïdale \mathbf{B}_p du champ magnétique fossile est enroulée par la rotation différentielle, ce qui a pour effet de créer une composante toroïdale \mathbf{B}_φ , c'est ce que l'on appelle l'effet Ω . Si l'intensité du champ fossile d'une étoile est suffisamment grande, il agit plus rapidement sur la rotation différentielle que celle-ci n'agit sur lui et le champ magnétique de l'étoile est susceptible d'être stable à grande échelle et sur de longues durées comparables à celles de l'évolution stellaire. Au contraire, si le champ fossile n'est pas suffisamment fort, la composante toroïdale du champ peut atteindre une intensité égale voire supérieure à la composante poloïdale. Ceci est susceptible d'entraîner une instabilité du champ fossile et de détruire ainsi sa structure à grande échelle. Si l'instabilité a lieu et que le champ qui en résulte est

structuré à petites échelles horizontales, le champ longitudinal observé peut être diminué d'une manière significative par effet d'annulation entre les polarités de signe opposé distribuées à la surface de l'étoile.

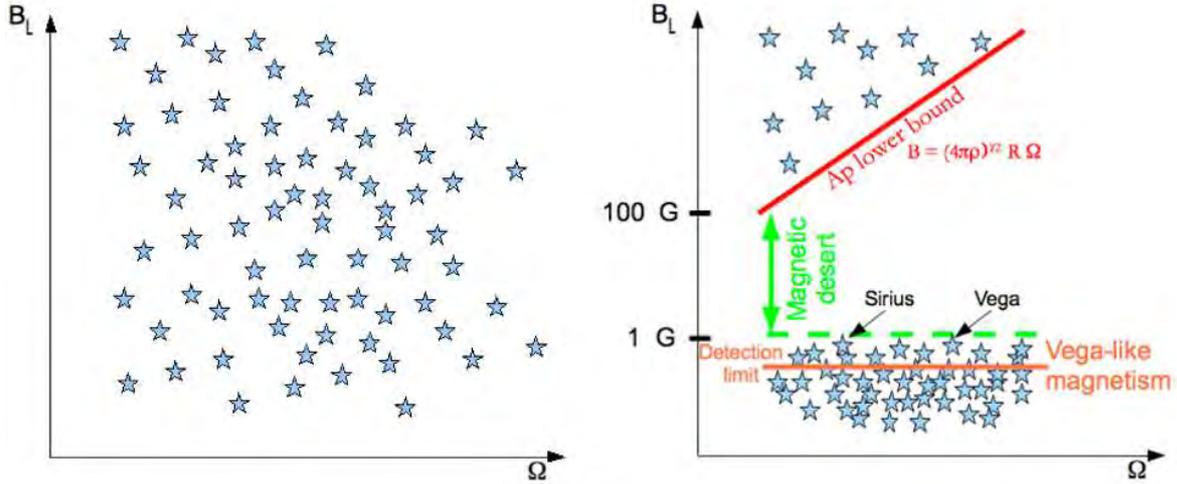


FIGURE 1.7 – Schématisation du scénario de [Aurière et al. \(2007\)](#) pour expliquer le désert magnétique des étoiles de masse intermédiaire. Les étoiles possédant un champ magnétique poloïdal stable, c'est à dire d'intensité supérieure au champ critique, forment les étoiles Ap/Bp tandis que les autres ont un champ instable et deviennent des étoiles de type *Vega-like*.

Par un raisonnement en ordre de grandeur, [Aurière et al. \(2007\)](#) ont estimé le champ poloïdal critique qui sépare les champs stables des champs instables. Ce raisonnement repose sur l'analyse de l'équation d'induction qui régit l'évolution du champ toroïdal axisymétrique $\mathbf{B}_\varphi = B_\varphi \mathbf{e}_\varphi$ (où \mathbf{e}_φ est un vecteur unitaire dans la direction azimutale). À noter que par abus de langage, les termes poloïdal et toroïdal seront parfois employés par la suite pour désigner méridional et azimutal. Si la diffusion magnétique est négligée, l'équation d'induction s'écrit

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = r \sin \theta \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Omega \quad , \quad (1.1)$$

où r est le rayon en coordonnées sphériques et θ est la colatitude. Pour un champ poloïdal \mathbf{B}_p et un gradient de vitesse angulaire $\nabla \Omega$ donnés, l'intensité du champ toroïdal initialement nulle croît linéairement jusqu'à ce que la force de Laplace rétroagisse sur la rotation différentielle. Le temps minimal de cette rétroaction est le temps mis par une onde d'Alfvén pour se propager sur la longueur caractéristique du gradient de vitesse angulaire $\ell_{\nabla \Omega} = \Omega / \|\nabla \Omega\|$

$$\tau_A = \frac{\ell_{\nabla \Omega}}{v_{Ap}} = \frac{\ell_{\nabla \Omega} \sqrt{4\pi\rho}}{B_p} \quad , \quad (1.2)$$

où $v_{Ap} = B_p / \sqrt{4\pi\rho}$ est la vitesse d'Alfvén portée par le champ poloïdal \mathbf{B}_p et ρ est la masse volumique. On estime alors le champ toroïdal maximum à $B_\varphi \simeq r\Omega\sqrt{4\pi\rho}$. Un tel champ purement toroïdal est susceptible d'être instable vis-à-vis de l'instabilité de [Taylor \(1973\)](#). Cependant, le champ poloïdal tend à stabiliser la configuration magnétique. On considère alors que le champ B_φ doit être au moins égal au champ B_p pour qu'il y ait instabilité, et on estime donc le champ poloïdal critique B_{pc} en-deçà duquel une configuration magnétique est instable par

$$B_{pc} = r\Omega\sqrt{4\pi\rho} \quad . \quad (1.3)$$

[Aurière et al. \(2007\)](#) ont constaté que l'estimation du champ critique B_{pc} pour une étoile Ap typique est proche de la limite inférieure de 300 G du champ magnétique des étoiles Ap/Bp. De plus, B_{pc} possède une dépendance linéaire avec Ω tout comme cela semble être le cas pour la limite inférieure (voir [FIGURE 1.5](#)). Ce champ critique B_{pc} semble donc être une modélisation pertinente, qui doit être testée, de la limite inférieure du champ magnétique des étoiles Ap/Bp.

Pour résumer :

- Si $B_p > B_{pc}$, le champ toroïdal induit par la rotation différentielle est dominé par la composante poloïdale et n'est pas assez intense pour qu'une instabilité magnétique se déclenche.
- Si $B_p < B_{pc}$, la composante toroïdale du champ devient dominante avant que la rotation ne devienne solide ce qui peut être à l'origine d'une instabilité du champ et d'une diminution du champ longitudinal observé.

Le schéma de la [FIGURE 1.7](#) résume le contexte observationnel actuel et l'hypothèse du champ critique pour modéliser la limite inférieure du champ magnétique des étoiles Ap/Bp.

1.2 La rotation interne des étoiles

Le scénario présenté dans la section précédente, proposé par [Aurière et al. \(2007\)](#) pour expliquer le désert magnétique des étoiles de masse intermédiaire, requiert l'existence d'une rotation différentielle dans l'intérieur radiatif d'une étoile évoluant vers la séquence principale. Certains processus comme la contraction des étoiles dans leur phase pré-séquence principale tendent à engendrer une rotation différentielle. Néanmoins, comme le transport du moment cinétique dans les intérieurs radiatifs reste mal compris, l'intensité et le temps d'évolution de la rotation différentielle sont peu contraints. Dans ce contexte, la sismologie, qui permet la détermination de la rotation interne du Soleil depuis presque 40 ans et d'autres étoiles comme les géantes rouges depuis quelques années, joue un rôle essentiel.

Nous allons ici répertorier les observations héliosismiques et astérosismiques réalisées jusqu'à aujourd'hui sur des étoiles de tout type évolutif, des étoiles de la séquence principale aux naines blanches. Nous ne nous cantonnons pas aux étoiles de la séquence principale car les observations réalisées sur des étoiles plus évoluées peuvent apporter des indications sur la rotation différentielle pouvant exister dans la zone radiative d'une étoile entrant dans la phase de séquence principale. Les contraintes sur les processus de transport du moment cinétique qu'apportent les observations sismiques sont également discutées à la fin de cette section.

1.2.1 Méthode de détermination de la rotation interne : la sismologie stellaire

L'héliosismologie et l'astérosismologie désignent respectivement l'étude des oscillations du Soleil et des autres astres (pour des revues sur le sujet, voir par exemple [Aerts et al. 2010](#); [Chaplin & Miglio 2013](#)). Ces techniques permettent de sonder la structure interne des étoiles. Le principe est de déterminer le spectre d'oscillation en fréquence d'une étoile à partir de mesures photométriques ou par imagerie Doppler. Le spectre de fréquences montre alors les signatures en surface des modes propres d'oscillation de l'étoile. Les ondes à l'origine des modes propres sont de différents types : des ondes acoustiques (modes p), et des ondes de gravité qui ne se propagent que dans les zones radiatives (modes g). La propagation de ces ondes dépend des caractéristiques locales du milieu telles que la vitesse du son, la fréquence de Brunt-Väisälä ou encore la rotation. Les fréquences des modes propres permettent ainsi de déterminer des paramètres globaux de l'étoile mais aussi dans certains cas, et en particulier pour le Soleil, le profil interne de différentes quantités physiques. En ce qui concerne la rotation, son effet est de lever la dégénérescence des modes d'oscillations non-radiaux (tout comme un champ magnétique lève la dégénérescence des niveaux énergétiques d'un atome). L'écartement en fréquence des modes ainsi séparés (en anglais le *rotational splitting*) est dépendant de la vitesse angulaire. Par la mesure de cet écartement en fréquence, l'héliosismologie et l'astérosismologie permettent donc de déterminer la rotation interne des étoiles.

1.2.2 Le Soleil

La rotation différentielle latitudinale existant à la surface du Soleil, avec un équateur tournant environ 30% plus vite que les pôles, est connue depuis le XVII^e siècle grâce aux observations des taches solaires. Les premières observations héliosismologiques ont été réalisées bien plus tard par le groupe de Birmingham à Tenerife et au Pic du Midi durant les étés de 1976 à 1978 ([Claverie et al. 1979](#)). Elles ont mis en évidence les oscillations de 5 minutes de fréquence, signatures d'ondes acoustiques se propageant dans l'enveloppe convective du Soleil. Très vite, la nécessité de réaliser des observations plus longues, afin d'obtenir une meilleure résolution fréquentielle, et non-modulées par le cycle jour/nuit s'est imposée. Des observations ont alors été effectuées au Pôle Sud durant l'été austral ([Grec et al. 1980](#); [Duvall & Harvey 1984](#); [Duvall et al. 1984, 1986](#)), en simultanément

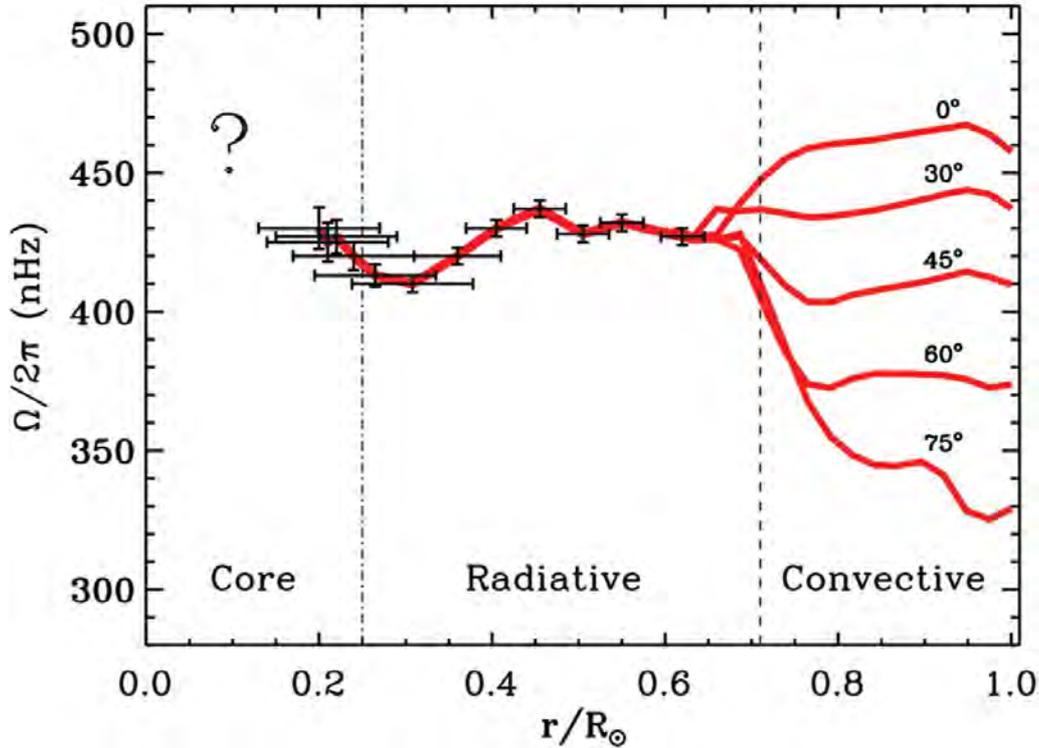


FIGURE 1.8 – Rotation interne du Soleil déterminée par héliosismologie grâce aux instruments GOLF et MDI embarqués sur SOHO. Crédit : [García et al. \(2007\)](#)

sur des sites séparés spatialement ([Claverie et al. 1984](#); [Harvey et al. 1996](#)) et depuis l'espace grâce aux missions Solar Maximum Mission ([Woodard & Noyes 1985, 1988](#)), Solar and Heliospheric Observatory (SOHO) ([Scherrer et al. 1995](#); [Gabriel et al. 1995](#)) ou plus récemment Hinode lancé en 2006 ([Kosugi et al. 2007](#)) et Solar Dynamics Observatory (SDO) en 2010 ([Pesnell et al. 2012](#)).

Toutes ces campagnes d'observation ont permis une détermination précise de la rotation interne du Soleil de sa surface jusqu'à $0.2 R_\odot$ (voir [FIGURE 1.8](#)). Elles ont montré que la zone convective du Soleil abrite une rotation différentielle latitudinale et radiale tandis que la rotation est presque solide (c'est à dire uniforme) dans sa zone radiative ([Couvidat et al. 2003](#)). Or, les modèles standards 1D d'évolution solaire prévoit une rotation dans la zone radiative variant avec le rayon. En effet, ni la trop faible diffusion visqueuse (avec un temps caractéristique $t_\nu \simeq 10^{12}$ ans), ni les mécanismes de transport du moment cinétique induits par la rotation comme la circulation méridienne et les instabilités de cisaillement ne peuvent expliquer cette rotation solide (voir par exemple la revue de [Maeder & Meynet 2000](#)). Le champ magnétique, non pris en compte dans ces modèles standards d'évolution, peut être un des éléments susceptibles de réconcilier les modèles et les observations comme nous en discuterons dans la [Section 2.3](#).

1.2.3 Les autres étoiles

L'astérosismologie fut longtemps supplantée par l'héliosismologie, les instruments n'étant pas assez performants pour par exemple détecter la séparation rotationnelle des modes d'oscillation. Il y eu des observations au sol à la fin du XX^e et au début du XXI^e siècle qui ont notamment permis la première détection d'oscillations de type solaire dans une étoile autre que le Soleil, la sous-géante η Boo (Kjeldsen et al. 1995; Christensen-Dalsgaard et al. 1995). Cependant, l'astérosismologie prend réellement son envol avec le lancement en 2006 du satellite CoRoT (CONvection, ROTation et TRANSITS planétaires), projet mené par le CNES, et en 2009 du satellite Kepler de la NASA. Plusieurs milliers d'étoiles de la séquence principale mais surtout des étoiles plus évoluées comme des sous-géantes, des géantes rouges et des étoiles du *clump* (étoiles brûlant leur hélium au cœur) ont été observées par CoRoT (Michel et al. 2008; De Ridder et al. 2009) et Kepler (Chaplin et al. 2010, 2011; Bedding et al. 2010; Kallinger et al. 2010; Hekker et al. 2011). Ces missions spatiales ont permis dans de nombreux cas de sonder la rotation interne d'étoiles de masse et d'état évolutif variés. Nous allons ici décrire les observations réalisées sur des étoiles de la séquence principale, en commençant par les étoiles les moins massives pour finir par les étoiles les plus massives.

Les étoiles naines

La mesure de la rotation interne de 23 étoiles de type solaire de masse comprise entre 1 et $1.6M_{\odot}$ par Gizon et al. (2013) et Benomar et al. (2015) a dévoilé un intérieur stellaire (à l'exception de la région la plus centrale non sondée) en rotation quasiment solide. Une seule étoile parmi elles, KIC 9139163, semble posséder un intérieur radiatif tournant significativement plus vite que l'enveloppe convective, tandis que les autres ont une différence de vitesse angulaire entre ces deux zones qui n'excède pas un facteur 2 (Benomar et al. 2015). Ces résultats suggèrent, comme dans le cas du Soleil, l'existence d'un mécanisme efficace de transport du moment cinétique non-déterminé ayant lieu pendant ou avant la séquence principale. À noter que KIC 9139163 fait partie des étoiles les plus jeunes de l'échantillon, son moment cinétique n'a peut-être pas encore été redistribué efficacement dans tout l'intérieur stellaire au contraire des autres étoiles.

Le sondage de la rotation interne stellaire n'est pas restreint aux étoiles possédant une enveloppe convective et qui présentent donc des oscillations de type solaire excitées par la convection. En effet, des modes d'oscillations sensibles à la rotation et engendrés par un mécanisme d'opacité sont détectés dans des étoiles plus massives. C'est le cas de certaines étoiles de type A-F, comme les γ Dor qui ont une masse comprise entre 1.4 et $2M_{\odot}$ et sont donc à la frontière entre les étoiles de faible masse possédant une enveloppe convective et les étoiles de masse intermédiaire possédant un cœur convectif. Des oscillations de type γ Dor ont entre autres été observées par Kurtz et al. (2014) et Saio et al. (2015) à la surface de 2 étoiles de type A-F qui ont la particularité de tourner très lentement (période de rotation de plusieurs dizaines à une centaine de jours) pour des étoiles de ce type spectral. Une rotation solide de l'intérieur de ces étoiles est compatible avec les observations, même si KIC 11145123, l'étoile étudiée par Kurtz et al. (2014), pourrait tout de même avoir une enveloppe tournant légèrement plus vite que le cœur.

Plus récemment, la rotation interne du cœur d'étoiles γ Dor qui ne se distinguent pas par une rotation particulièrement lente a pu être déterminée (Van Reeth et al. 2016). Ces premières analyses sont très encourageantes et devraient permettre à terme de contraindre précisément la rotation différentielle des étoiles de type γ Dor et d'autres étoiles de masse intermédiaire.

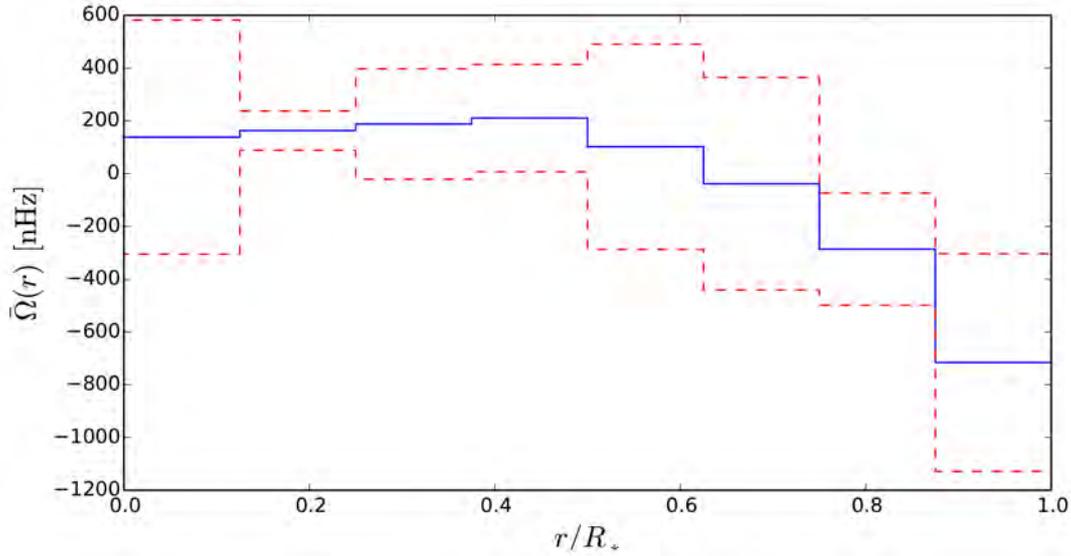


FIGURE 1.9 – Profil de rotation de l'étoile de masse intermédiaire B8 de la séquence principale KIC 10526294. Les lignes en traits pointillés rouges indiquent les barres d'erreur. Crédit : Triana et al. (2015)

La détermination précise de la rotation interne d'une étoile un peu plus massive, KIC 10526294, a été réalisée par Triana et al. (2015). La FIGURE 1.9 montre le profil de rotation dérivé pour cette étoile B8 d'environ $3M_{\odot}$. Une rotation différentielle qui décroît avec le rayon est clairement présente dans l'enveloppe radiative de l'étoile. Plus étonnant, la surface de l'étoile est en rotation inverse par rapport à son cœur, avec une vitesse angulaire Ω qui change de signe à environ $0.7R_*$, où R_* est le rayon de l'étoile. En prenant en compte les incertitudes, le gradient de rotation $|\partial \ln \Omega / \partial \ln r|$ est estimé entre 3 et 8 dans la zone où $r \in [0.5 R_*, R_*]$. C'est une rotation différentielle très intense qui ne semble pas être stable hydrodynamiquement vis-à-vis du critère de Rayleigh (Rayleigh 1883) et qui serait également susceptible de provoquer une instabilité magnétohydrodynamique.

Des oscillations engendrées par un mécanisme d'opacité sont également détectées dans les étoiles massives pulsantes de la séquence principale, dites β Cephei. La première étoile massive à avoir montré une séparation rotationnelle de ces modes d'oscillation est HD 129929, une étoile de type spectral B3 et d'une masse environ égale à $10M_{\odot}$ observée par le photomètre de Genève (Observatoire de La Silla, Chili). Ces observations n'ont pas permis de sonder le cœur convectif de l'étoile mais semblent incompatibles avec une rotation solide de l'enveloppe radiative (Aerts et al. 2003). Dupret et al. (2004) ajoutent que la rotation interne de HD 129929 décroît avec le rayon. D'autres observations au

sol ont montré que le cœur convectif de l'étoile β Cephei ν Eri semblait tourner environ 5 fois plus vite que son enveloppe radiative (Pamyatnykh et al. 2004), tandis qu'une rotation solide dans l'enveloppe de l'étoile B2 θ Oph n'est pas exclue par les observations (Briquet et al. 2007). Cependant, l'interprétation de ces résultats est à nuancer car le profil de rotation dérivé pour ces trois étoiles est très dépendant des modèles utilisés pour le déterminer. Pour finir, il faut noter qu'il n'y a pas eu de détermination de la rotation interne d'étoiles chaudes à fort champ magnétique.

Les étoiles évoluées : sous-géantes, géantes rouges, étoiles du *clump*

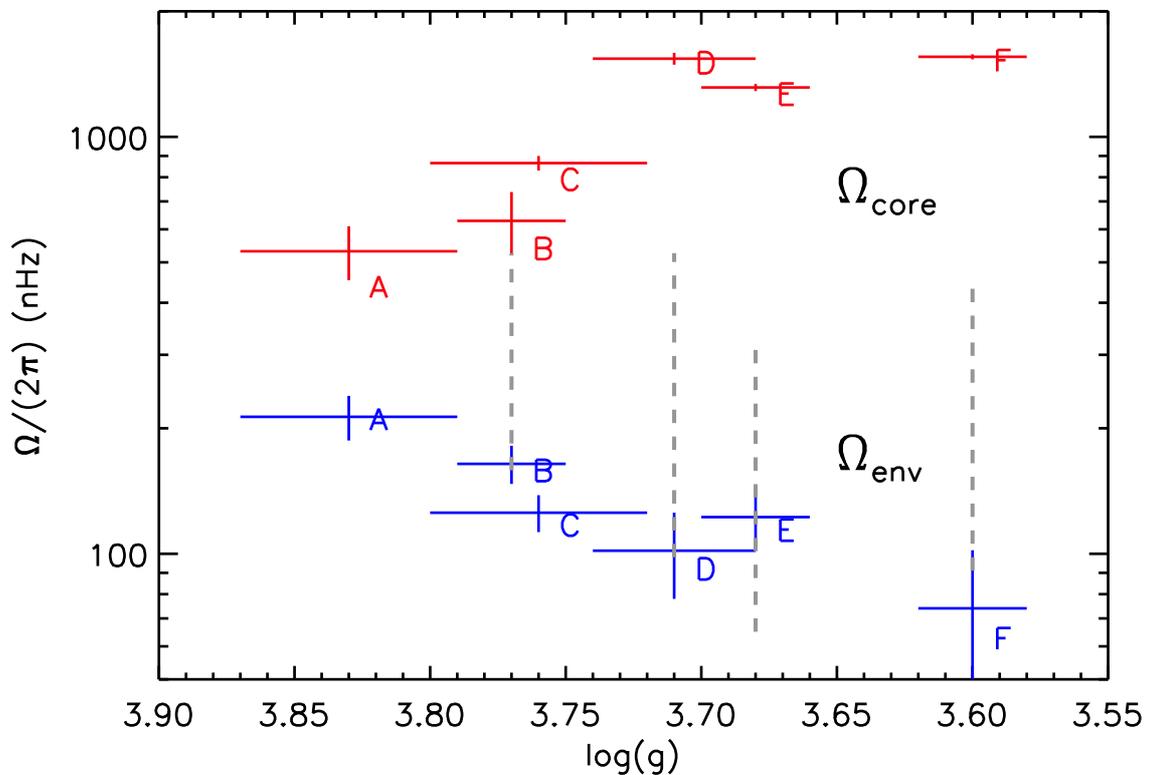


FIGURE 1.10 – Vitesse angulaire du cœur (en rouge) et de l'enveloppe (en bleu) des 6 étoiles étudiées par Deheuvels et al. (2014) en fonction de leur gravité de surface, ainsi que les barres d'erreur à 1σ . Les lignes verticales en traits pointillés représentent la gamme de vitesse angulaire de surface prédite par van Saders & Pinsonneault (2013) en utilisant des modèles d'évolution stellaire qui incluent un transport instantané de moment cinétique. Crédit : Deheuvels et al. (2014)

Au cours de l'évolution stellaire, les gammes de fréquence occupées par les modes p et g se rapprochent, complexifiant ainsi le spectre d'oscillation des étoiles évoluées. Le sondage de la rotation interne de ces étoiles est cependant possible par l'étude des

modos d'oscillation mixtes, des modes se comportant comme des modes p dans les zones convectives et comme des modes g dans les zones radiatives. Grâce à cela, [Deheuvels et al. \(2014\)](#) ont déduit le profil de rotation de 6 étoiles sous-géantes et jeunes géantes rouges ayant une masse comprise entre 1 et $1.5M_{\odot}$. Toutes possèdent une rotation différentielle et au moins 2 d'entre elles semblent montrer un fort gradient de rotation localisé au niveau de la couche d'hydrogène en fusion, la zone qui sépare le cœur se contractant de l'enveloppe qui se dilate. La [FIGURE 1.10](#) montre la vitesse angulaire du cœur (en rouge) et de l'enveloppe (en bleu) des 6 étoiles étudiées par [Deheuvels et al. \(2014\)](#) en fonction de leur gravité de surface qui est une mesure de leur évolution sur la branche des sous-géantes puisqu'elle diminue dans cette phase. Conformément à ce que l'on attend qualitativement, cette figure semble indiquer que les étoiles évoluant le long de la SGB subissent une accélération du cœur (*spin-up* en anglais) et une décélération de l'enveloppe (*spin-down* en anglais).

Concernant les géantes rouges plus évoluées, [Beck et al. \(2012\)](#) montrent que les trois étoiles légères ($M \lesssim 1.5M_{\odot}$) qu'ils ont étudiées possèdent une rotation différentielle et estiment pour l'une d'entre elles (KIC 8366239) que son cœur radiatif tourne au moins dix fois plus vite que sa surface. Le cœur de la géante rouge KIC 7341231 de $\sim 0.8M_{\odot}$ étudiée par [Deheuvels et al. \(2012\)](#) tourne quant à lui au moins cinq fois plus vite que sa surface. Par ailleurs, l'étude d'un échantillon de 300 géantes rouges et d'étoiles du *clump* par [Mosser et al. \(2012\)](#) a montré l'existence d'une décélération du cœur alors que celui-ci se contracte lors de l'ascension de la branche des géantes rouges (RGB). Cela implique la nécessité, lors de cette phase évolutive, d'un mécanisme de transport qui permet d'extraire le moment cinétique du cœur vers l'enveloppe plus rapidement que le temps caractéristique de contraction du cœur.

Parmi l'échantillon étudié par [Mosser et al. \(2012\)](#), certaines étoiles du *clump* sont de masse intermédiaire, avec une masse comprise entre 1.5 et $2.5M_{\odot}$. [Deheuvels et al. \(2015\)](#) ont également étudié 7 étoiles de masse $M > 2.1M_{\odot}$ qui brûlent leur hélium au cœur. Comme démontré par [Mosser et al. \(2012\)](#), ces étoiles très évoluées possèdent une rotation différentielle moins intense que celle des étoiles sous-géantes ou géantes rouges. [Deheuvels et al. \(2015\)](#) montrent en effet que 6 des 7 étoiles étudiées ont un contraste de vitesse angulaire entre le cœur et l'enveloppe compris entre 2 et 3, tandis que la 7^e étoile semble en rotation solide.

Objets compacts : sous-naines de type B et naines blanches

Pour finir ce résumé du sondage de la rotation interne stellaire, des modes p et g ont aussi été détectés dans le spectre d'oscillation d'objets compacts comme les sous-naines de type spectral B (étoiles sdB) ([Kilkenny et al. 1997](#); [Green et al. 2003](#)). Les étoiles sdB sont des étoiles évoluées qui brûlent leur hélium au cœur comme les étoiles du *clump*. Cependant, une grande partie de leurs couches externes a été expulsée mettant quasiment à nu leur cœur d'hélium. Les effets de marée dus à la présence d'une étoile partenaire en orbite très serrée, souvent une naine blanche, pourraient être la cause des pertes de masse importantes qu'ont subies les étoiles sdB (pour une revue sur les sdB, voir [Heber 2009](#)). La détermination du profil de rotation à partir d'observations astérosismologiques

de 2 étoiles sdB, PG 1336-018 et Feige 48, a été réalisée par Charpinet et al. (2008) et Van Grootel et al. (2008). Les résultats montrent que ces étoiles sont en rotation solide jusqu'à $r \sim 0.55 R_*$ pour PG 1336-018 et $r \sim 0.22 R_*$ pour Feige 48. Cependant, la présence d'une rotation différentielle dans l'intérieur de certaines étoiles sdB n'est pas exclue comme le montrent Telting et al. (2014) à propos de l'étoile KIC 7668647 qui pourrait avoir une vitesse angulaire décroissante avec le rayon. Foster et al. (2015) démontrent quant à eux avec quasi certitude que la région centrale de l'étoile sdB KIC 3527751 tourne trois fois moins vite que sa surface.

La rotation interne des naines blanches, produits finals de l'évolution de 95% des étoiles (celles possédant une masse $M \lesssim 8M_\odot$), est également sondée par astérosismologie. Il faut savoir que les modèles d'évolution stellaire prédisent une période de rotation très rapide pour ces étoiles en fin de vie, de l'ordre de quelques secondes. Or, les périodes de rotation observées sont bien plus grandes que cela, elles varient de l'heure à quelques dizaines d'années. Il se pourrait alors qu'une quantité importante de moment cinétique soit dissimulée dans l'intérieur des naines blanches, se traduisant par une région centrale en rotation beaucoup plus rapide que la surface. Néanmoins, nous savons maintenant que les naines blanches peuvent être en rotation solide, comme l'étoile PG 1159-05 étudiée par Charpinet et al. (2009) qui tourne avec une période de rotation environ égale à 34h. La nécessité d'un mécanisme efficace de transport du moment cinétique durant l'évolution stellaire est à nouveau mise en évidence par ces observations. Córscico et al. (2011) montrent cependant que les régions centrales de la naine blanche PG 0122+200 tournent environ 2.4 fois plus vite que la surface de l'étoile. Une rotation différentielle comme celle découverte dans PG 0122+200 n'est pas suffisamment intense pour expliquer la faible rotation des naines blanches.

1.2.4 Contraintes sur les processus de transport du moment cinétique

Au cours de l'évolution stellaire, le cœur d'une étoile subit de nombreuses périodes de contraction tandis que généralement son enveloppe se dilate. Vers la fin de la phase de pré-séquence principale (PMS), le cœur d'une étoile se contracte jusqu'à ce que sa température soit suffisante pour que la fusion de l'hydrogène puisse avoir lieu. Lorsque la combustion de l'hydrogène au cœur arrive à son terme à la fin de la séquence principale, le cœur se contracte à nouveau. Cette contraction se poursuit tout au long de la SGB et de la RGB jusqu'à ce que l'hélium au cœur entame sa fusion. Par principe de conservation, le cœur en contraction d'une étoile en rotation voit son moment cinétique augmenter. Cela engendre une rotation différentielle entre la région centrale et les régions superficielles de l'étoile. Les observations de la rotation interne des étoiles vérifient cette vision qualitative de l'évolution stellaire. En effet, l'astérosismologie a montré que certaines étoiles de la séquence principale possèdent une rotation différentielle ainsi que la plupart des étoiles évoluées observées. Néanmoins, les profils de rotation observés ne sont jamais quantitativement en accord avec ceux prédits par les modèles standards d'évolution stellaire qui ne prennent en compte que la conservation du moment cinétique et son transport par viscosité. La rotation solide de la zone radiative du Soleil, inexpliquée par les modèles

standards d'évolution, est l'exemple le plus marquant mettant en évidence notre manque de connaissance des processus de transport du moment cinétique. La question du transport induit par un champ magnétique dans le cas du Soleil est spécifiquement discutée dans la section 2.3.

La rotation différentielle peut provoquer du transport de moment cinétique à travers la circulation méridienne et les instabilités de cisaillement qu'elle induit. Ces processus ne sont cependant pas suffisants pour reproduire par exemple la vitesse de rotation du cœur de l'étoile géante rouge KIC 8366239 étudiée par Beck et al. (2012) (Eggenberger et al. 2012). Eggenberger et al. (2012) ajoutent qu'une viscosité additionnelle $\nu_{add} = 3 \times 10^4 \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ générée par un mécanisme de transport supplémentaire est nécessaire pour reproduire les observations de la rotation interne de KIC 8366239. De même, Marques et al. (2013) estiment grâce à des modèles incluant le transport induit par rotation que la vitesse du cœur estimée pour une étoile géante rouge de $1.3M_{\odot}$ est supérieure d'au moins 2 ordres de grandeur aux rotations observées pour des géantes rouges de masse similaire. Ceillier et al. (2013) arrivent à la même conclusion à propos de la rotation interne de la géante rouge KIC 7341231 étudiée par Deheuvels et al. (2012). Ils montrent de plus qu'en forçant une rotation solide durant toute la séquence principale, simulant ainsi un transport instantané du moment cinétique durant cette phase évolutive, la rotation du cœur de cette étoile est toujours trop élevée d'1 ordre de grandeur. Cela souligne que, dans ces modèles, le transport induit par rotation est fortement inefficace le long de la SGB. van Saders & Pinsonneault (2013) vont plus loin en forçant une rotation solide durant toute l'évolution stellaire. Pour des étoiles sous-géantes ayant des propriétés physiques similaires à celles étudiées par Deheuvels et al. (2014), van Saders & Pinsonneault (2013) prédisent des vitesses angulaires de surface (représentée par des lignes verticales en traits pointillés sur la FIGURE 1.10) légèrement supérieures aux vitesses déterminées par les observations. Cela traduit la sur-efficacité du transport instantané de moment cinétique employé dans leurs modèles. Ces prédictions sont toutefois du même ordre de grandeur que les observations, ce qui met ainsi en avant la rapidité dont doit réellement faire preuve le processus physique à la base du transport dans ces étoiles.

Le transport de moment cinétique induit par rotation est donc insuffisant pour reproduire les observations de la rotation interne des étoiles. D'autres processus de transport doivent être à l'œuvre dans l'intérieur radiatif des étoiles de la séquence principale, de la SGB et de la RGB. Les meilleurs candidats pourraient être les ondes internes de gravité ou le champ magnétique. Triana et al. (2015) notent à ce sujet que d'après Rogers et al. (2013) le transport induit par des ondes internes de gravité pourrait expliquer le profil de rotation observé sur les étoiles massives de la séquence principale, comme KIC 10526294 (Triana et al. 2015) qui présente une surface en rotation inverse par rapport à la rotation de son cœur. En se basant sur les travaux de Talon & Charbonnel (2008), Marques et al. (2013) ajoutent que ce transport peut également jouer un rôle important durant la SGB jusqu'au début de la RGB mais pas au-delà. Par ailleurs, un transport de moment cinétique dû à un champ magnétique engendré par la dynamo radiative de Tayler-Spruit (Spruit 2002; Braithwaite 2006a) a été ajouté dans les modèles évolutifs utilisés par Cantiello et al. (2014). La rotation prédite au cœur des géantes rouges est diminuée par rapport aux modèles ne prenant pas en compte ce transport, mais reste

encore au moins 10 fois trop grande par rapport aux observations. La question du transport de moment cinétique dans les intérieurs radiatifs est donc encore très ouverte, mais les observations astérosismologiques apportent des contraintes toujours plus précises à ce sujet.

1.2.5 Rotation différentielle dans les étoiles de masse intermédiaire de la séquence principale

Le scénario de [Aurière et al. \(2007\)](#) attribue l'origine du désert magnétique des étoiles de masse intermédiaire à des instabilités magnétohydrodynamiques pouvant être induites par l'interaction dans la zone radiative de ces étoiles entre un champ magnétique et une rotation différentielle. Rappelons que d'après celui-ci, les étoiles possédant un champ magnétique structuré à grandes échelles spatiales, les Ap/Bp, ont vu leur rotation différentielle rapidement annulée par l'action du champ magnétique. Au contraire, les étoiles possédant un champ magnétique structuré à petites échelles spatiales, les *Vega-like*, ont probablement eu une rotation différentielle suffisamment intense pour permettre le développement d'une instabilité magnétohydrodynamique. Dans ce contexte, un point important à noter suite à la description des observations astérosismiques est la présence avérée d'une rotation différentielle dans la zone radiative d'une étoile de masse intermédiaire de la séquence principale, KIC 10526294 ([Triana et al. 2015](#)). La rotation différentielle de cette étoile (voir [FIGURE 1.9](#)) semble suffisamment intense pour être susceptible de déclencher une instabilité magnétohydrodynamique. KIC 10526294 est par ailleurs une étoile B chimiquement normale à la surface de laquelle aucun champ magnétique n'a été détecté, la classant très probablement dans les étoiles de type *Vega-like*. La présence d'une rotation différentielle intense dans cette étoile soutient donc le scénario de [Aurière et al. \(2007\)](#). Il faut néanmoins garder à l'esprit que cette étoile n'est pas typique, car elle est en rotation très lente par rapport à la moyenne des étoiles de masse intermédiaire. L'absence de rotation différentielle dans une étoile *Vega-like* ne serait cependant pas non plus en désaccord avec ce scénario vu qu'une instabilité magnétohydrodynamique peut améliorer le transport du moment cinétique et donc annuler rapidement la rotation différentielle suite au développement de l'instabilité (voir par exemple [Jouve et al. 2015](#)). Quoi qu'il en soit, les observations astérosismiques nous informent qu'un des éléments essentiels au scénario de [Aurière et al. \(2007\)](#), la rotation différentielle, peut être présent dans la zone radiative d'une étoile de masse intermédiaire. Dans les années à venir, l'astérosismologie pourrait déterminer la rotation interne d'autres étoiles de masse intermédiaire, Ap/Bp ou *Vega-like*, apportant ainsi des contraintes plus précises aux scénarios visant à expliquer le désert magnétique observé dans ces étoiles.

Chapitre 2

Magnétohydrodynamique dans une zone radiative stellaire

Au sein d'une étoile, la fusion nucléaire produit une quantité d'énergie rayonnée très importante qui chauffe l'étoile à des températures extrêmes. Les atomes présents dans une zone radiative stellaire, et plus généralement dans un plasma stellaire, sont alors ionisés du fait de la température élevée y régnant. Les particules du plasma stellaire sont donc chargées électriquement et l'ensemble de ces particules peut être décrit comme un fluide conducteur. Les mouvements de ce fluide conducteur génèrent des courants électriques qui induisent un champ magnétique, ce dernier rétroagissant alors sur le mouvement du fluide conducteur à travers une force appelée la force de Laplace.

La théorie qui décrit la dynamique d'un fluide conducteur tel que celui contenu dans une zone radiative stellaire est la magnétohydrodynamique (ci-après MHD), je vais donc dans ce chapitre la présenter. Cette présentation de la MHD se veut très axée autour des problématiques développées lors de ma thèse : l'interaction entre le champ magnétique et la rotation différentielle ainsi que les instabilités MHD dans une zone radiative. Je vais commencer ce chapitre en présentant l'ensemble des équations décrivant la MHD. Je parlerai ensuite de processus physiques MHD dictant l'évolution d'un champ magnétique dans des configurations axisymétriques, c'est à dire quand le champ de vitesse, le champ magnétique et toutes autres grandeurs physiques possèdent une symétrie par rotation autour d'un même axe. L'impact de ces processus sur le transport de moment cinétique sera analysé à travers la problématique de la rotation solide observée dans la zone radiative du Soleil. Cela me permettra d'introduire la dernière section de ce chapitre qui portera sur les différentes instabilités magnétohydrodynamiques pouvant se déclencher dans une zone radiative en rotation différentielle.

2.1 Équations de la MHD

Les équations de la MHD sous une forme générale en coordonnées sphériques dans un référentiel en rotation uniforme à la vitesse angulaire Ω_0 sont

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = & -2\rho \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \rho \nabla \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r})^2 \right) - \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \\ & + \nabla \cdot \left(\mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right) + \nabla \left(\left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad , \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (\chi \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{v} + C_{visq} + Q \quad , \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) \quad . \quad (2.4)$$

où \mathbf{r} est le vecteur position, \mathbf{v} le champ de vitesse, \mathbf{B} le champ magnétique, ρ la masse volumique, \mathbf{g} la gravité, p la pression thermique, T la température, e l'énergie interne massique, C_{visq} la dissipation visqueuse, Q les sources locales de chaleur, μ et ζ sont respectivement les coefficients de viscosité dynamique de cisaillement et de volume, χ la conductivité thermique, η le coefficient de diffusion magnétique et $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ est la dérivée particulaire. Une dérivation complète de ces équations est donnée en Annexe A. Les hypothèses sous-jacentes à cette dérivation y sont également explicitées. La conservation de la masse s'exprime à travers l'équation de continuité (2.1). L'Éq. (2.2) est l'équation de Navier-Stokes, elle traduit la conservation de la quantité de mouvement. L'Éq. (2.3) est l'équation de conservation de l'énergie. Enfin, l'évolution du champ magnétique est donnée par l'équation d'induction (2.4) qui est dérivée à partir des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm. À ces équations il faut ajouter deux relations liant les variables thermodynamiques entre elles, une équation d'état de la forme $p \equiv p(\rho, T)$ et une équation pour l'énergie interne massique $e \equiv e(T)$.

Dans un premier temps le plasma sera considéré comme incompressible, c'est à dire que ρ est homogène et indépendant du temps. L'équation de continuité (2.1) s'écrit alors $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. De plus, les hypothèses suivantes seront adoptées pour tout ce qui va suivre dans ce manuscrit :

- Le plasma sera assimilé à un gaz parfait suivant l'équation d'état $p = \rho k_B T / \langle m_p \rangle$ où k_B est la constante de Boltzmann et $\langle m_p \rangle$ la masse moyenne des particules du plasma. De plus, l'énergie interne massique ne dépend alors que de la température de sorte que $de = c_p dT$ où c_p est la capacité calorifique à pression constante.
- La conductivité thermique χ ainsi que les coefficients de viscosité dynamique μ et de diffusion magnétique η seront supposés uniformes.

- La dissipation visqueuse C_{visq} ainsi que les sources locales de chaleur Q seront négligées.
- Le potentiel centrifuge sera négligé devant la pression hydrostatique, ce qui est généralement le cas pour des systèmes astrophysiques tels que des étoiles de la séquence principale.

Les équations de la MHD prennent alors la forme simplifiée suivante

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (2.5)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -2\rho \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} - \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} + \mu \Delta \mathbf{v} \quad , \quad (2.6)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa \Delta T \quad , \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} \quad . \quad (2.8)$$

où $\kappa = \chi / (c_p \rho)$ est le coefficient de diffusion thermique.

2.2 Processus MHD dans une zone radiative en rotation différentielle

Une zone radiative en rotation différentielle dans laquelle le plasma est soumis à l'action d'un champ magnétique est le siège de nombreux processus MHD. Cette section a pour but de lister les processus qui ont une importance dans l'étude de la stabilité d'un champ magnétique. Commençant par le processus le plus simple, la dynamique du plasma sera complexifiée en ajoutant un à un des éléments physiques.

2.2.1 Effet Ω

Plaçons-nous dans un système de coordonnées sphériques et supposons que le système est axisymétrique, c'est à dire qu'aucune grandeur physique ne dépend de la coordonnée azimutale φ . Le champ magnétique peut être décomposé en une composante poloidale \mathbf{B}_p qui se retrouve alors entièrement dans le plan méridien, et une composante toroïdale B_φ telle que

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_p + B_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad , \quad (2.9)$$

où \mathbf{e}_φ est le vecteur unitaire dans la direction azimutale. Pour mettre en évidence l'effet Ω , la circulation méridienne, c'est à dire le champ de vitesse dans le plan méridien, est considérée comme nulle. Supposons également que le champ de vitesse azimutal v_φ est indépendant du temps et est relié à la vitesse angulaire Ω par

$$\mathbf{v}_\varphi = r \sin \theta \Omega \mathbf{e}_\varphi \quad , \quad (2.10)$$

où r est la coordonnée radiale en symétrie sphérique et θ la colatitute. En négligeant la diffusion magnétique, le système d'équations de la MHD se réduit alors à la composante toroïdale de l'équation d'induction (2.8) qui prend la forme suivante

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = r \sin \theta \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Omega \quad . \quad (2.11)$$

Il est justifié de négliger le terme de diffusion magnétique car, dans une zone radiative, le temps caractéristique de diffusion magnétique est très grand devant les temps caractéristiques d'évolution stellaire. On dit alors que le champ magnétique est gelé dans le plasma. Dans ces conditions, le champ magnétique est soumis à ce qui est appelé l'effet Ω (membre de droite de l'Éq. 2.11), l'enroulement par la rotation différentielle des lignes de champ poloïdal générant ainsi une composante toroïdale du champ magnétique qui croît linéairement avec le temps (voir FIGURE 2.1). La production de B_φ est maximale lorsque les lignes de champ poloïdal sont perpendiculaires aux isocontours de Ω .

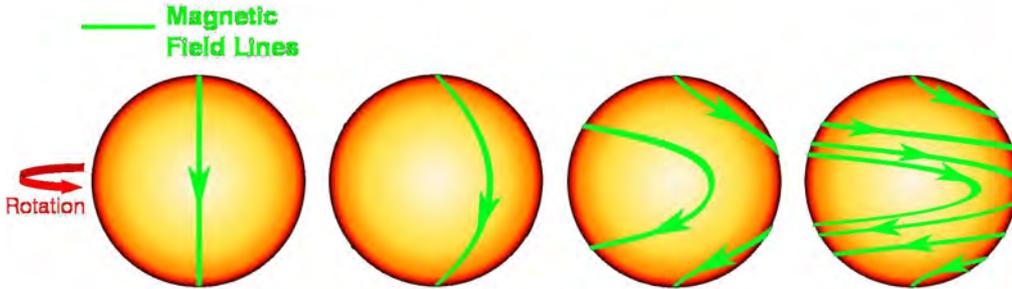


FIGURE 2.1 – Schématisation de l'effet Ω . Une ligne de champ poloïdal gelée dans le plasma (figure de gauche) est déformée par la rotation différentielle créant une composante toroïdale du champ qui croît dans le temps (figures de droite). Crédit : W. T. Ball (2009)

Dans une description très schématisée de la dynamo ayant lieu dans la zone convective du Soleil, dite dynamo à grande échelle, l'effet Ω est l'un des deux processus responsables de cette dynamo solaire, l'autre étant la régénération du champ poloïdal à partir du champ toroïdal. Néanmoins, aucun processus communément admis de régénération du champ poloïdal permettrait à un effet dynamo de prendre place dans une zone radiative.

2.2.2 État d'isorotation

Un des premiers résultats de l'histoire de la MHD est que l'Éq. (2.11) prend en régime stationnaire ($\partial/\partial t = 0$) la forme suivante

$$\mathbf{B}_p \cdot \nabla \Omega = 0 \quad , \quad (2.12)$$

ce qui implique que les isocontours de la vitesse angulaire Ω sont alignés avec les lignes de champ poloïdal. Cet état est connu sous le nom d'isorotation, étudié pour la première

fois par [Ferraro \(1937\)](#). Il découle également de cette loi que si les isocontours de Ω sont alignées avec les lignes de champ poloïdal, aucun champ toroïdal B_φ n'est créé par effet Ω .

2.2.3 Ondes d'Alfvén

Relaxons maintenant l'hypothèse d'une vitesse azimutale constante dans le temps. Son évolution est alors donnée par l'équation de Navier-Stokes (2.6). En négligeant le terme de diffusion visqueuse on a alors

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = r \sin \theta \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Omega \quad , \quad (2.13)$$

$$r \sin \theta \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{1}{4\pi \rho r \sin \theta} \mathbf{B}_p \cdot \nabla (r \sin \theta B_\varphi) \quad . \quad (2.14)$$

Dorénavant, le champ toroïdal B_φ généré par l'effet Ω rétroagit, à travers le terme de tension magnétique de la force de Laplace (membre de droite de l'Éq. 2.14), sur la rotation différentielle. En combinant ces deux équations et en supposant que l'échelle de variation de $r \sin \theta$ et de B_p le long des lignes de champ poloïdal est plus que grande que celle de Ω , on peut montrer que ([Mestel & Weiss 1987](#))

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} - v_{Ap}^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s_l^2} = 0 \quad , \quad (2.15)$$

où s_l est la coordonnée curviligne le long des lignes de champ poloïdal et où

$$v_{Ap} = \frac{B_p}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad , \quad (2.16)$$

est la vitesse d'Alfvén poloïdale. La même équation d'onde que l'Éq. (2.15) peut être obtenue pour B_φ . L'Éq. (2.15) admet des solutions sous la forme d'une onde plane progressive $e^{i(k s_l - \omega t)}$, où k est le nombre d'onde et ω la pulsation de l'onde. En insérant ces solutions dans l'équation d'onde on obtient la relation de dispersion suivante

$$\omega = \pm v_{Ap} k \quad . \quad (2.17)$$

Ces ondes MHD non-dispersives qui se propagent à la vitesse v_{Ap} le long des lignes de champ poloïdal ont été mises en évidence théoriquement pour la première fois par [Alfvén \(1942\)](#). Elles prirent logiquement le nom d'ondes d'Alfvén. Il existe d'autres types d'ondes MHD, les ondes magnétoacoustiques, qui se propagent dans un milieu compressible. Nous ne parlerons donc pas de ces ondes vu que nous considérons le milieu étudié comme incompressible. À noter qu'en régime stationnaire, $r \sin \theta B_\varphi$ est, tout comme Ω , constant le long des lignes de champ poloïdal.

2.2.4 Mélange de phase

Une conséquence de la présence d'ondes d'Alfvén est la redistribution de Ω et de B_φ le long des lignes de champ poloidal. Les lignes de champ poloidal peuvent également coupler différents milieux, par exemple une zone convective et une zone radiative. Les ondes d'Alfvén sont réfléchies et/ou transmises lorsqu'elles arrivent au niveau des interfaces séparant ces différents milieux. Les réflexions d'ondes d'Alfvén vont donner lieu à des oscillations de B_φ , le signe de B_φ pouvant changer lors de ces réflexions. Ajouter à cela le fait que la vitesse de propagation des ondes d'Alfvén v_{Ap} n'est pas forcément homogène (si B_p ne l'est pas par exemple), le décalage de phase existant entre les ondes se propageant sur des lignes de champ adjacentes mène à l'apparition de petites échelles spatiales de B_φ et de Ω . Même si les coefficients de diffusion magnétique et visqueuse sont très faibles dans les intérieurs stellaires, les temps caractéristiques de diffusion ℓ^2/η et ℓ^2/ν (où $\nu = \mu/\rho$ est le coefficient de viscosité cinématique) sur ces petites échelles ℓ peuvent devenir de l'ordre de, voire plus courts, que les temps qui caractérisent la dynamique du système (typiquement les temps caractéristiques de la rotation $1/\Omega$ et de la propagation des ondes d'Alfvén sur ces petites échelles ℓ/v_{Ap}). Il n'est donc plus réaliste de négliger les termes de diffusion dans les équations de la MHD. Prenant alors en compte les diffusions magnétique et visqueuse, la diffusion rapide de ces petites échelles de B_φ et de Ω est une conséquence du mécanisme décrit précédemment dit de mélange de phase. Ce mécanisme a été étudié par de nombreux auteurs dans le contexte de la couronne solaire ([Ionson 1978](#); [Heyvaerts & Priest 1983](#); [Parker 1991](#)) ainsi que par [Spruit \(1999\)](#) à propos des intérieurs radiatifs stellaires.

2.2.5 Couche limite de Hartmann

Nous avons vu que sans résistivité ni viscosité, les ondes d'Alfvén atteignant une interface entre différents milieux sont réfléchies et/ou transmises. Cependant, la diffusion permet leur dissipation dans une couche limite de Hartmann ([Hartmann & Lazarus 1937](#)). Les propriétés de réflexion et de dissipation des ondes sont déterminées par le couple de conditions sur B_φ et Ω régnant aux interfaces. L'épaisseur δ_H de la couche limite de Hartmann est ([Dormy et al. 1998](#))

$$\delta_H = \frac{\sqrt{4\pi\rho\nu\eta}}{\mathbf{B}_p \cdot \mathbf{n}} \quad , \quad (2.18)$$

où \mathbf{n} est le vecteur unitaire normal à l'interface. Cette couche limite est d'autant plus fine que les coefficients de diffusion sont faibles mais dépend également de la géométrie du champ poloidal (angle que font les lignes de champ avec l'interface).

[Schaeffer et al. \(2012\)](#) ont étudié la réflexion des ondes d'Alfvén dans un cadre de modélisation du noyau liquide de la Terre dans lequel de telles ondes se propagent. Ils dérivent analytiquement en géométrie cartésienne l'expression des coefficients de réflexion et de dissipation dans la couche d'Hartmann des ondes d'Alfvén pour différents couples de conditions aux limites sur B_φ et Ω . Au niveau d'une interface où une condition fixe sur l'un des champ (B_φ ou Ω fixé à une valeur constante dans le temps) est associée à une condition

libre sur l'autre champ (dérivée nulle), les ondes d'Alfvén sont totalement réfléchies. Dans le cas où les conditions aux limites sur B_φ et Ω sont toutes les deux fixes ou libres, les coefficients de réflexion et de dissipation dépendent du nombre de Prandtl magnétique $Pm = \nu/\eta$. Si $Pm \rightarrow \pm\infty$, les ondes d'Alfvén sont totalement réfléchies, tandis qu'elles sont entièrement dissipées dans la couche d'Hartmann si $Pm = 1$. [Schaeffer et al. \(2012\)](#) ont confirmé numériquement ces résultats analytiques.

2.2.6 Redistribution du moment cinétique

Récapitulons les mécanismes MHD qui viennent d'être décrits. L'enroulement des lignes de champ poloïdal par la rotation différentielle génère un champ toroïdal par effet Ω . Celui-ci rétroagit alors sur la rotation différentielle, ce qui a pour effet par principe d'action-réaction de créer des ondes d'Alfvén qui se propagent le long des lignes de champ poloïdal à la vitesse v_{Ap} . Ces ondes d'Alfvén redistribuent le long des lignes de champ poloïdal le champ magnétique toroïdal ainsi que le moment cinétique, défini dans ce manuscrit comme $L_{cin} = r^2 \sin^2 \theta \Omega$ (le moment cinétique spécifique projeté sur l'axe de rotation de l'étoile). Elles sont réfléchies, transmises ou dissipées dans des couches limites au niveau des interfaces entre différents milieux, puis occasionnent par le mécanisme de mélange de phase un transport efficace par diffusion de la vitesse angulaire et du champ toroïdal. L'ensemble de ces processus se met en place sur des temps courts, de l'ordre de quelques temps $\tau_{Ap} = d/v_{Ap}$ de traversée par des ondes d'Alfvén de la zone radiative d'épaisseur d . Pour donner une indication de la rapidité de ces processus, dans le cas du Soleil considérant un champ magnétique de 1G et une masse volumique d' 1g.cm^{-3} , le temps d'Alfvén τ_{Ap} peut être estimé à quelques milliers d'années. À comparer avec un temps de diffusion visqueuse $t_\nu = d^2/\nu$ un milliard de fois plus long, soit $t_\nu \simeq 10^{12}$ ans. On comprend alors que le champ magnétique peut être un excellent vecteur et catalyseur de la redistribution du moment cinétique dans les intérieurs radiatifs.

[Charbonneau & MacGregor \(1992\)](#) ont étudié l'évolution du moment cinétique dans une enveloppe radiative contenant un champ magnétique poloïdal et étant soumis à un *spin-up* (une accélération instantanée de la rotation du cœur de l'étoile modélisant par exemple une contraction de celui-ci). Ils ont réalisé de nombreuses simulations numériques variant la géométrie et l'intensité du champ poloïdal, le gradient de densité et la valeur des diffusivités visqueuse et magnétique. Leur principal résultat est que pour des configurations où les lignes de champ poloïdal sont toutes ancrées au cœur au niveau duquel une rotation constante est fixée, leur système évolue toujours vers un état de rotation solide où la vitesse angulaire est constante partout dans le domaine de calcul. Le temps d'atteinte de cet état de rotation solide est toujours très inférieur aux échelles de temps nucléaires et de diffusion et généralement plus long que le temps d'Alfvén poloïdal τ_{Ap} . Il dépend néanmoins de la géométrie du champ poloïdal, de la valeur des coefficients de diffusion et du gradient de densité qui influe sur la vitesse de propagation des ondes d'Alfvén (Éq. 2.16). Au contraire, les configurations où aucune ligne de champ poloïdal n'est ancrée au cœur n'atteignent pas l'état de rotation solide sur des échelles de temps plus courtes que les temps diffusifs. En effet, le moment cinétique amené par le *spin-up* ne peut pas être redistribué par les ondes d'Alfvén et le mélange de phase ne peut donc

pas se mettre en place. L'évolution du système vers un état de rotation solide ou non est donc très dépendante du comportement du champ poloïdal au niveau des bords du domaine de calcul.

2.2.7 Circulation méridienne

Considérons maintenant que le champ de vitesse n'est plus seulement azimutal mais aussi méridional. Pour prendre en compte la circulation méridienne, il faut résoudre le système d'équation complet (2.5-2.6-2.7-2.8). En effet, la composante radiale des équations de Navier-Stokes donnant l'évolution de la vitesse radiale fait intervenir la pression qui est reliée par une équation d'état à la température. L'évolution de la température est quant à elle donnée par l'équation de conservation de l'énergie (Éq. 2.7). Les premières études de l'influence de la circulation méridienne sur un champ magnétique axisymétrique dans une zone radiative ont été menées avec une circulation méridienne prescrite indépendante du temps. Avec cette circulation méridienne prescrite, Tassoul & Tassoul (1986) ont alors montré analytiquement qu'il n'était pas possible qu'un état de rotation solide soit atteint sur des temps inférieurs aux temps diffusifs. Cependant, Mestel et al. (1988) étudièrent le même problème et relevèrent une erreur dans les calculs analytiques de Tassoul & Tassoul (1986) remettant en cause leurs conclusions. Les solutions stationnaires que Mestel et al. (1988) ont dérivées sont très dépendantes du rapport entre v_p la vitesse caractéristique de la circulation méridienne et v_{Ap} la vitesse d'Alfvén poloïdale. Avec $v_p/v_{Ap} = 10^{-2}$, valeur réaliste pour une zone radiative, leurs simulations numériques montrent que la circulation méridienne a peu d'influence sur l'évolution du système. Ils trouvent ainsi que, de la même manière que sans circulation méridienne, un état de rotation solide peut être atteint sur des temps inférieurs aux temps d'évolution stellaire, la géométrie du champ poloïdal étant toujours l'élément le plus influent dans l'atteinte de cet état ou non.

2.2.8 Axisymétrisation

Moss et al. (1990) ont réalisé des simulations numériques similaires à Mestel et al. (1988) mais en relaxant l'hypothèse d'axisymétrie considérant cette fois-ci un champ poloïdal dipolaire incliné par rapport à l'axe de rotation de l'étoile. Sans prendre en compte la diffusion magnétique et donc le processus de mélange de phase, le moment cinétique n'est plus seulement transporté le long des lignes de champ poloïdal contrairement au cas axisymétrique, mais aussi entre ces lignes de champ. L'efficacité de ce transport est montrée comme dépendante de l'intensité de la rotation différentielle, caractérisée par un temps $t_{\nabla\Omega} = (q\Omega_0)^{-1}$ équivalent à un temps de rotation $t_\Omega = 1/\Omega_0$ pour un paramètre de cisaillement $q = -\partial \ln \Omega / \partial \ln r \sim 1$, par rapport à l'intensité du champ magnétique poloïdal, caractérisée par un temps d'Alfvén poloïdal $t_{Ap} = R\sqrt{4\pi\rho_0}/B_0$ (avec R le rayon externe de leur domaine de calcul et ρ_0 et B_0 la masse volumique et le champ magnétique poloïdal de surface). Moss et al. (1990) trouvent alors que le transport de moment cinétique entre les lignes de champ poloïdal est efficace et permet l'atteinte d'un état proche de la rotation solide sur une échelle de temps de l'ordre de quelques temps d'Alfvén t_{Ap} ,

quelque soit la géométrie du champ poloïdal, pour t_{Ap}/t_{Ω} inférieur à une valeur critique $(t_{Ap}/t_{\Omega})_{crit} \simeq 13$. Au contraire, pour $t_{Ap}/t_{\Omega} > (t_{Ap}/t_{\Omega})_{crit}$, le transport de moment cinétique entre les lignes de champ est inefficace et le champ magnétique est axisymétrisé par la forte rotation différentielle. En effet, la rotation différentielle amène rapidement de forts gradients à se former entre les polarités de signe opposé du champ magnétique non-axisymétrique, améliorant ainsi la diffusion magnétique. C'est ce que [Spruit \(1999\)](#) appelle le lissage rotationnel.

Grâce à un modèle de MHD cinématique (pas de rétroaction du champ magnétique sur la rotation différentielle), [Raedler \(1986\)](#) a montré que la valeur critique $(t_{Ap}/t_{\Omega})_{crit}$ qui sépare les configurations axisymétrisées des configurations non-axisymétrisées est proportionnelle à $Rm^{1/3}$, où $Rm = R^2\Omega_0/\eta$ est le nombre de Reynolds magnétique. Il concluait sur ce sujet que les objets astrophysiques qui présentent un fort champ magnétique non-axisymétrique ne doivent certainement pas posséder une forte rotation différentielle. [Wei & Goodman \(2015\)](#) ont par la suite montré, grâce à des simulations numériques utilisant un modèle de MHD prenant en compte la rétroaction du champ magnétique sur la rotation différentielle, qu'avec un degré d'obliquité de 45° , $(t_{Ap}/t_{\Omega})_{crit}$ suit plutôt une loi de puissance en $Rm^{0.2}$. Il n'ont pas fait d'étude détaillée de la dépendance de $(t_{Ap}/t_{\Omega})_{crit}$ avec le degré d'obliquité mais ils montrent que plus le dipôle est incliné, plus la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse est forte (tension magnétique plus importante), plus l'axisymétrisation va être difficile. $(t_{Ap}/t_{\Omega})_{crit}$ doit donc certainement augmenter avec le degré d'obliquité.

2.3 Transport du moment cinétique induit par un champ magnétique : le cas du Soleil

Comme nous l'avons vu dans la Section [1.2.2](#), les observations héliosismologiques ont montré que la rotation de la zone radiative du Soleil est presque uniforme. Or, les modèles standards d'évolution solaire sont incapables de reproduire ce fait observationnel. Le champ magnétique et les mécanismes d'amélioration de l'efficacité de la diffusion qu'il peut engendrer, comme le mélange de phase par exemple, ont alors été invoqués pour expliquer la rotation solide de la zone radiative du Soleil ([Spruit 1987](#)). De nombreuses études analytiques et numériques ont alors été menées afin d'explorer ce scénario. Quelques unes de ces études, où un champ magnétique axisymétrique est considéré et où la circulation méridienne est négligée, sont listées ici, autant pour les réponses qu'elles donnent sur la cause de la rotation solide de la zone radiative du Soleil que pour l'importance qu'elles ont dans la compréhension que l'on a de l'influence d'un champ magnétique dans une zone radiative en rotation différentielle.

[Charbonneau & MacGregor \(1993\)](#) ont étudié numériquement l'impact sur la rotation interne du Soleil d'un *spin-down* qui modélise la perte de moment cinétique par vent solaire. Leur domaine de calcul représente la totalité de l'étoile, avec une zone radiative entourée par une enveloppe convective où la viscosité microscopique est multipliée par 10^9 par rapport à celle de la zone radiative. Cela assure à l'enveloppe convective d'être en rotation solide et de transférer rapidement son moment cinétique vers la zone radiative par

diffusion visqueuse. Par ailleurs, la zone radiative abrite un champ poloïdal indépendant du temps qui traverse ou non la frontière entre la zone radiative et l'enveloppe convective suivant le profil utilisé. Leurs simulations numériques montrent alors que l'évolution du moment cinétique peut être décomposée en trois étapes successives. La première est une étape de génération d'une composante toroïdale du champ magnétique par effet Ω suite au *spin-down*, sans que celle-ci soit suffisamment forte pour rétroagir significativement sur le moment cinétique. Cette étape dure de plusieurs milliers à plusieurs millions d'années suivant la géométrie et surtout l'intensité du champ poloïdal initial. La deuxième étape est une étape de redistribution du moment cinétique par la propagation d'ondes d'Alfvén créées par la rétroaction du champ magnétique sur la rotation différentielle. Ces ondes sont ensuite dissipées par le mécanisme de mélange de phase. La troisième et dernière étape, durant plusieurs dizaines de millions d'années, est alors celle d'une évolution dite "quasi-statique" car étant uniquement sujette à la diffusion visqueuse qui permet de redistribuer le moment cinétique contenu dans ce qui est appelé les "zones mortes" (zones où aucune ligne de champ ne connecte la zone radiative et l'enveloppe convective). La rotation de l'étoile décroît alors de manière rigide. Le résultat important de leurs simulations est que la rotation solide est atteinte dans quasiment tous les cas simulés sur un temps égal ou inférieur à l'âge du soleil, indépendamment de l'intensité du champ poloïdal. Le paramètre faisant varier ce temps est la géométrie du champ poloïdal, il est plus court lorsque le couplage entre la zone radiative et l'enveloppe convective par les lignes de champ est efficace.

Une étude similaire à celle de [Charbonneau & MacGregor \(1993\)](#) a été réalisée par [Rüdiger & Kitchatinov \(1996\)](#). Cependant, voulant reproduire le profil de rotation différentielle dans tout le Soleil, ils n'ont pas arbitrairement forcé une rotation solide dans l'enveloppe convective mais ont utilisé un modèle de rotation différentielle dans la zone convective ([Kitchatinov & Rudiger 1993](#); [Kueker et al. 1993](#)). Leurs résultats montrent que pour atteindre un état de rotation solide dans la zone radiative du Soleil et une rotation variant essentiellement avec la latitude dans l'enveloppe convective, la viscosité doit être augmentée d'un facteur 10^4 par rapport à la valeur moléculaire. Ils confirment que le temps d'atteinte de la rotation solide dans la zone radiative ne dépend pas de l'intensité du champ magnétique tant que celle-ci est supérieure à $10^{-3}G$. Dans le cas contraire, le temps de traversée de la zone radiative par une onde d'Alfvén devient comparable à l'âge du Soleil. [Spada et al. \(2010\)](#) ont confirmé les résultats de [Rüdiger & Kitchatinov \(1996\)](#) avec un code numérique spectral qui permet d'atteindre des valeurs de coefficients de diffusion bien plus faibles que précédemment.

Par ailleurs, [Gough & McIntyre \(1998\)](#) ont soulevé le fait qu'un champ magnétique est inévitablement présent dans le cœur radiatif du Soleil. Sans lui, la tachocline, la région qui fait office d'interface entre le cœur radiatif et l'enveloppe convective, serait positionnée plus profondément qu'observée dans l'intérieur solaire. [Brun & Zahn \(2006\)](#) ont donné des conclusions complètement opposées à celles de [Gough & McIntyre \(1998\)](#) en réalisant des simulations MHD 3D. Ils affirment qu'un champ magnétique poloïdal est incapable de maintenir la tachocline à sa position observée et de forcer la rotation solide dans la zone radiative. Cependant, [Garaud & Garaud \(2008\)](#) et [Acevedo-Arreguin et al. \(2013\)](#) ont trouvé une solution de leurs simulations numériques en accord avec le modèle

de Gough & McIntyre (1998). Ils attribuent les résultats contradictoires de Brun & Zahn (2006) à l'utilisation de conditions aux limites non-appropriées entre le cœur radiatif et l'enveloppe convective.

D'autres mécanismes de transport du moment cinétique, comme les ondes internes de gravité (Zahn et al. 1997; Ringot 1998; Mathis et al. 2008), ont été invoqués pour expliquer la rotation solide de la zone radiative du Soleil. La turbulence associée à des instabilités MHD est également un excellent candidat (Menou et al. 2004; Rüdiger et al. 2015) et Menou & Le Mer (2006) affirment que si le Soleil a possédé dans le passé une rotation supérieure à sa rotation actuelle, une instabilité MHD a pu profondément affecter le transport du moment cinétique dans sa zone radiative.

2.4 Instabilités MHD

Les processus MHD listés dans la section précédente peuvent changer la géométrie d'un champ magnétique se trouvant dans une zone radiative en rotation différentielle (par lissage rotationnel par exemple) mais aussi redistribuer efficacement le moment cinétique. Les temps caractéristiques de ces phénomènes dynamiques peuvent être bien plus courts que les échelles de temps nucléaires. Des phénomènes encore plus rapides peuvent avoir lieu au sein d'une zone radiative, les instabilités magnétohydrodynamiques. Celles-ci peuvent profondément modifier la structure du champ magnétique ainsi que provoquer un transport efficace du moment cinétique grâce à la turbulence qu'elles engendrent.

Différents types d'instabilités MHD sont susceptibles de se déclencher dans une zone radiative en rotation différentielle. Celles qui nous intéressent sont linéaires, c'est à dire que les perturbations à leur origine croissent exponentiellement avec le temps. Cette phase linéaire de croissance exponentielle a lieu tant que l'amplitude des perturbations est faible devant l'amplitude des champs de référence non-perturbés. Lorsque ce n'est plus cas, on entre dans une phase non-linéaire qui peut engendrer de la turbulence si les diffusivités sont suffisamment faibles. Les effets des instabilités dans leur développement non-linéaire, malgré leur importante influence sur le transport du moment cinétique, peuvent faire l'objet d'une thèse à part entière et ne seront pas étudiés dans ce manuscrit.

Pour étudier les caractéristiques des instabilités linéaires, il est d'usage, si l'instabilité est basée sur les propriétés locales d'un système, d'utiliser une analyse locale linéaire qui recherche des solutions du système d'équations de la MHD linéarisées sous la forme de modes propres

$$\xi(\mathbf{r}, t) = \tilde{\xi}(\mathbf{r})e^{-i\omega t} \quad , \quad (2.19)$$

où \mathbf{r} est le vecteur position en coordonnées sphériques, ω est la fréquence de la perturbation et $\tilde{\xi}(\mathbf{r})$ donne la dépendance spatiale de la perturbation qui peut être celle d'une onde plane

$$\tilde{\xi}(\mathbf{r}) = \hat{\xi} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \hat{\xi} e^{i(nr+l\theta+m\varphi)} \quad , \quad (2.20)$$

où $\hat{\xi}$ est l'amplitude la perturbation, \mathbf{k} est son vecteur d'onde, n est le nombre d'onde radial et l et m sont respectivement des entiers positifs qui caractérisent le nombre d'onde dans la direction latitudinale et azimutale. En réinjectant ces solutions dans le système

d'équations linéarisées, on obtient une relation de dispersion dont la résolution fournit alors ω . Si ω possède une partie imaginaire, il existe une solution qui croît exponentiellement correspondant à une instabilité linéaire dont le taux de croissance est la partie imaginaire de ω

$$\sigma = \Im(\omega) \quad . \quad (2.21)$$

Cette approche a été utilisée pour étudier la stabilité d'un champ magnétique toroïdal dans une étoile en rotation différentielle par [Acheson \(1978\)](#) qui fait office de référence grâce à une étude complète et détaillée. À partir de la relation de dispersion dérivée par [Acheson \(1978\)](#), [Spruit \(1999\)](#) a répertorié dans le contexte particulier d'une zone radiative trois types d'instabilités MHD susceptibles de s'y développer : l'instabilité de flottaison magnétique dite instabilité de [Parker \(1966\)](#) qui tire son énergie de l'énergie gravitationnelle, des instabilités de type magnétorotationnelle ([Balbus & Hawley 1991](#)) dues à la rotation différentielle et supportées par un champ magnétique et des instabilités purement magnétiques dites de pincement comme l'instabilité de [Taylor \(1973\)](#). Je vais me focaliser dans cette section sur les caractéristiques de ces trois instabilités durant leur phase de développement linéaire.

2.4.1 Instabilité de flottaison magnétique

L'équilibre hydrostatique d'un fluide soumis à un champ gravitationnel est dû au fait que la force de gravité s'exerçant sur ce fluide est compensée par le gradient de pression du fluide. Dans un champ gravitationnel orienté vers le bas, considérons alors un système composé de deux fluides de densités différentes. Si le fluide le plus dense se trouve au-dessus du moins dense, le système se trouve dans un équilibre instable. La moindre perturbation provoque alors une instabilité de Rayleigh-Taylor ([Rayleigh 1883](#); [Taylor 1950](#)). Cela mène à la formation de filaments qui grandissent dans la direction du champ gravitationnel. Cette instabilité est par exemple responsable de la forme d'un reste de supernova durant les premières phases de son évolution, l'accélération du gaz faisant suite à la supernova pouvant être traitée mathématiquement de la même manière qu'un champ gravitationnel.

En présence d'un champ magnétique, la pression du fluide n'est plus seulement thermique mais aussi magnétique telle que $P_{tot} = p + B^2/8\pi$, où P_{tot} est la pression totale du fluide, p la pression thermique et $B^2/8\pi$ la pression magnétique. À pression totale équivalente, un fluide magnétisé est plus léger qu'un fluide non magnétisé. Un fluide non magnétisé se trouvant au-dessus d'un fluide magnétisé se comporte alors comme un fluide dense au-dessus d'un fluide moins dense, il est instable vis-à-vis d'une instabilité de type Rayleigh-Taylor. Cette instabilité de flottaison, version magnétique de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, fut mise en évidence par [Parker \(1966\)](#) dans le cadre galactique. [Parker \(1966\)](#) est parti du constat que le champ magnétique galactique est en moyenne parallèle au plan de la Galaxie. Il montra alors que, si l'on considère une distribution du gaz galactique uniforme, une instabilité de flottaison magnétique se développe menant à la déformation des lignes de champ magnétique qui s'éloignent du plan de la Galaxie et à la formation de nuages de gaz régulièrement espacés ([FIGURE 2.2](#)). La distance prédite

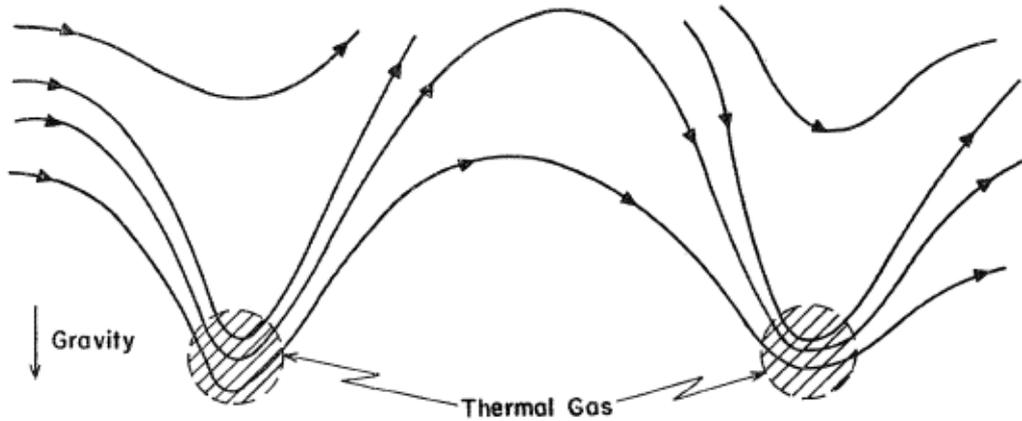


FIGURE 2.2 – État des lignes de champ magnétique galactique et de la configuration des nuages de gaz galactique résultant d'une instabilité de Parker. Les lignes de champ forment des "vagues" au creux desquelles les nuages de gaz régulièrement espacés se forment. Crédit : [Parker \(1966\)](#)

par la théorie linéaire séparant ces nuages est compatible avec les observations réalisées sur des galaxies spirales similaires à la nôtre.

Dans un intérieur stellaire, une couche de plasma magnétisé est soumise de la même façon à une instabilité de flottaison magnétique, le plasma magnétisé étant plus léger que le plasma environnant (considéré non magnétisé). Concrètement, en coordonnées cartésiennes, avec un champ magnétique horizontal $\mathbf{B} = B(z)\mathbf{e}_x$ et un champ de pesanteur constant $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, l'instabilité se déclenche si ([Acheson 1978](#))

$$\frac{v_A^2}{c_s^2} \frac{d}{dz} \left[\ln \left(\frac{B}{\rho} \right) \right] < -\frac{1}{c_p} \frac{ds}{dz} \quad , \quad (2.22)$$

où c_s est la vitesse du son et ds/dz le gradient d'entropie. La [FIGURE 2.3](#) montre les résultats de simulations numériques réalisées par [Favier et al. \(2012\)](#) d'une couche de plasma magnétisé qui devient instable. L'instabilité de flottaison magnétique se développe et des tubes de flux magnétique se forment alors au-dessus de la couche de plasma. Ces tubes de flux magnétique sont susceptibles de s'élever, toujours par instabilité de flottaison magnétique, dans l'intérieur stellaire jusqu'à leur émergence en surface. Cette instabilité est invoquée pour expliquer l'apparition des taches magnétiques observées à la surface du Soleil, taches qui sont en réalité les empreintes des pieds de boucles magnétiques formées par l'émergence des tubes de flux.

Au contraire des étoiles de faible masse comme le Soleil qui sont constituées d'un cœur radiatif entouré par une enveloppe convective, les étoiles plus massives comme les étoiles de masse intermédiaire sont constituées d'un cœur convectif entouré par une enveloppe radiative. L'émergence de tubes de flux à la surface de telles étoiles par instabilité de flottaison magnétique demande donc la traversée d'une zone radiative à l'intérieur de laquelle la forte stratification stable limite grandement les mouvements verticaux. Le

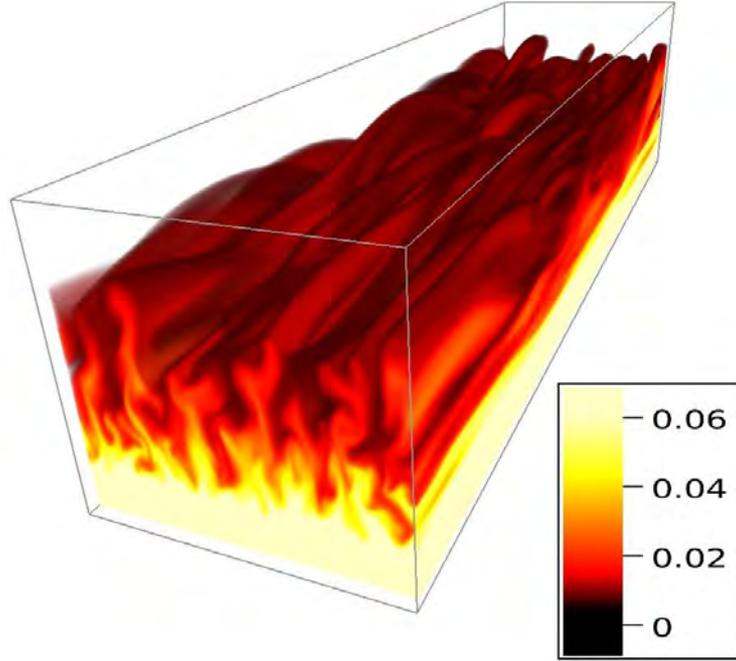


FIGURE 2.3 – Isosurfaces du champ magnétique dans une couche de plasma magnétisé instable vis-à-vis de l’instabilité de flottaison magnétique. Des tubes de flux s’élèvent au-dessus de la couche de plasma. Crédit : Favier et al. (2012)

critère d’instabilité de ces tubes de flux magnétique dans une zone stratifiée est donné par (Spruit & van Ballegoijen 1982)

$$\beta \delta > -\frac{1}{\gamma} \quad , \quad (2.23)$$

où $\beta = p/(B^2/8\pi)$ est le rapport des pressions thermique et magnétique, $\gamma = c_p/c_v$ est le rapport des capacités calorifiques à pression et à volume constant et $\delta = \nabla - \nabla_{ad}$ avec $\nabla = d \ln T / d \ln p$ le gradient de température et ∇_{ad} le gradient de température adiabatique. Dans une zone convective le gradient thermique est superadiabatique ce qui implique $\delta > 0$, et donc une condition d’instabilité (2.23) automatiquement respectée quelque soit l’intensité du champ magnétique. Au contraire, $\delta < 0$ dans une zone radiative car le gradient thermique est subadiabatique. Reformulons alors la condition (2.23) dans une zone radiative qui est donc stratifiée stablement

$$B > \sqrt{8\pi p \gamma |\delta|} \quad . \quad (2.24)$$

Cette condition fait intervenir la valeur absolue de δ , une quantité qui augmente avec la fréquence de Brunt-Väisälä N (grandeur physique qui quantifie l’importance de la stratification). Plus la stratification stable est forte, plus le champ magnétique du tube de flux doit être intense pour que l’instabilité se déclenche. MacGregor & Cassinelli (2003)

montre grâce à une étude numérique qu'il est tout de même possible, pour des valeurs réalistes de champ magnétique, qu'un tube de flux traverse la zone radiative d'une étoile de masse intermédiaire par instabilité de flottaison magnétique en un temps qui n'excède pas la durée de vie d'une étoile sur la séquence principale. Cependant, ces résultats sont contredits par [MacDonald & Mullan \(2004\)](#) qui incluent à leur étude numérique un gradient de composition chimique absent des simulations de [MacGregor & Cassinelli \(2003\)](#). De plus, dans une zone radiative stellaire réaliste en rotation différentielle, le champ magnétique nécessaire au déclenchement de l'instabilité de flottaison magnétique est bien plus intense que celui nécessaire au déclenchement de l'instabilité magnétorotationnelle ou de l'instabilité de Tayler ([Spruit 1999](#)). Une instabilité de flottaison magnétique est donc peu susceptible de se développer dans un tel milieu.

2.4.2 Instabilité magnétorotationnelle

Un système en rotation différentielle possédant un champ magnétique est susceptible d'être instable vis-à-vis d'une instabilité de cisaillement magnétique dite magnétorotationnelle. Cette instabilité linéaire a été évoquée pour la première fois dans un cadre purement théorique par [Velikhov \(1959\)](#) puis par [Chandrasekhar \(1960\)](#). Elle nécessite pour se déclencher une vitesse angulaire qui décroît avec la distance par rapport à l'axe de rotation du système.

Dans les disques d'accrétion

L'instabilité magnétorotationnelle a été principalement étudiée dans le contexte des disques d'accrétion astrophysiques (voir pour une revue complète [Fromang 2013](#)). Le problème est qu'au début des années 1990 aucun processus physique ne permettait d'expliquer le phénomène d'accrétion observé dans les disques astrophysiques. Ce phénomène d'accrétion nécessite une évacuation efficace du moment cinétique du disque afin de permettre l'effondrement gravitationnel de la matière sur l'astre central. L'instabilité magnétorotationnelle, de par sa capacité à induire un transport efficace de moment cinétique, est alors considérée comme un excellent candidat au phénomène d'accrétion dans les disques ([Balbus & Hawley 1991](#)). Expliquons de manière schématique le principe de fonctionnement de l'instabilité magnétorotationnelle. Supposons qu'un disque en rotation différentielle telle que la vitesse angulaire décroît dans la direction radiale abrite un champ magnétique vertical, c'est à dire parallèle à l'axe de rotation ([FIGURE 2.4](#)). Supposons également que la diffusion magnétique est très faible de sorte que le champ magnétique soit gelé dans le disque. Imaginons alors qu'une perturbation radiale amène une particule fluide du disque sur une orbite plus élevée (moins élevée) que celle à laquelle elle se trouvait ([FIGURE 2.4](#), gauche). Cette particule tourne alors moins vite (respectivement plus vite) que précédemment car la vitesse angulaire décroît avec la distance par rapport à l'axe de rotation ([FIGURE 2.4](#), milieu-gauche). Puisque le champ magnétique est gelé dans le plasma, la ligne de champ magnétique sur laquelle se trouvait initialement la particule est déformée de manière à suivre la trajectoire de cette particule. La tension magnétique qui s'exerce alors sur la particule, due à la déformation de la ligne de champ,

tend à ramener celle-ci à sa position initiale par un transfert de moment cinétique de l'intérieur vers l'extérieur du disque (FIGURE 2.4, milieu-droit). Ceci implique une accélération (respectivement une décélération) de la particule dans la direction azimutale et donc un passage vers une orbite encore plus élevée (respectivement moins élevée). La perturbation initiale se retrouve alors amplifiée, donnant lieu à une instabilité (FIGURE 2.4, droit). Cependant, si l'intensité du champ magnétique est trop élevée par rapport

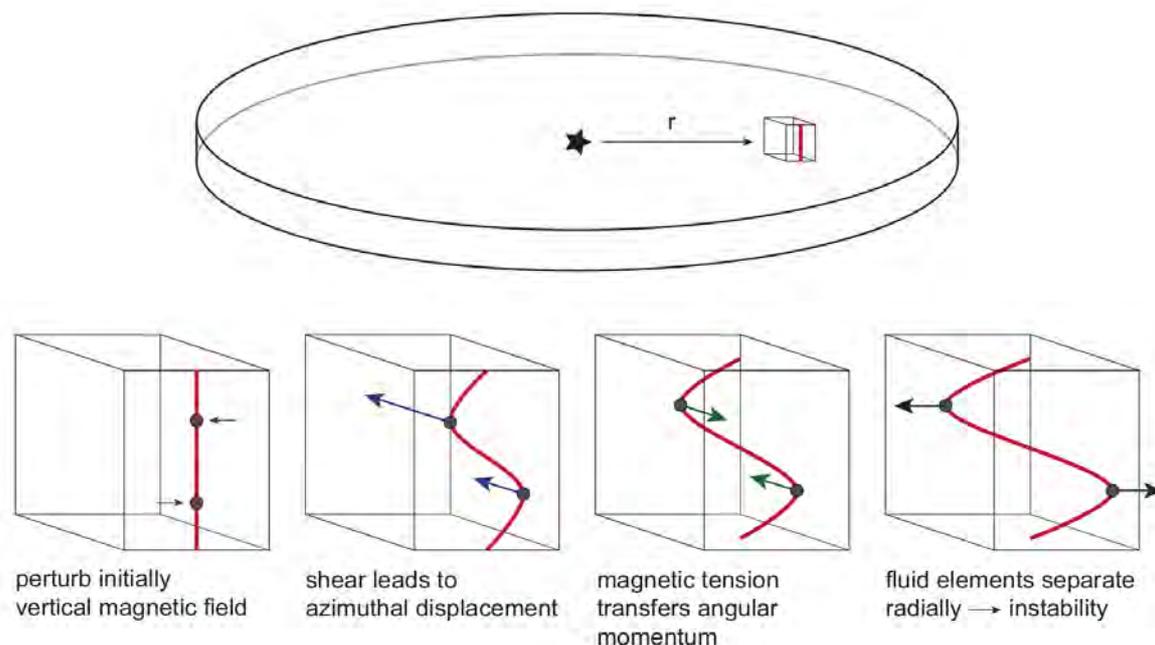


FIGURE 2.4 – Principe de l'instabilité magnétorotationnelle dans un disque d'accrétion dont la vitesse angulaire décroît avec le rayon r et qui abrite un champ magnétique vertical. Crédit : [Armitage \(2015\)](#)

à l'intensité de la rotation différentielle, la tension magnétique aura un effet trop rigidifiant qui ne permettra pas le développement de l'instabilité. À l'inverse, la diffusion magnétique restreindra la déformation de la ligne de champ, diminuant la tension magnétique. Ceci implique alors une limite inférieure à l'intensité du champ magnétique, dépendante du coefficient de diffusion magnétique, pour que l'instabilité se développe. Le champ magnétique doit donc être ni trop faible ni trop fort pour permettre à une instabilité magnétorotationnelle de se développer.

Dans la première étude de l'instabilité magnétorotationnelle dans le cadre des disques d'accrétion, [Balbus & Hawley \(1991\)](#) ont montré que le développement de l'instabilité est indépendant de la présence ou non d'une composante radiale du champ magnétique. Ils ont également montré que l'instabilité peut être déclenchée par une perturbation axisymétrique dans le cas où le champ magnétique possède une composante verticale comme sur la FIGURE 2.4. Néanmoins, avec un champ magnétique purement azimutal, seules les perturbations non-axisymétriques sont susceptibles de déclencher l'instabilité

magnétorotationnelle (Balbus & Hawley 1992). Le taux de croissance σ_{MRI} de l'instabilité dans sa phase linéaire ne dépend pas de l'intensité du champ magnétique et a l'expression suivante

$$\sigma_{MRI} = \frac{q\Omega}{2} \quad , \quad (2.25)$$

où $q = -\partial \ln \Omega / \partial \ln r$ est le paramètre de cisaillement. Considérant par exemple un paramètre de cisaillement $q \sim 1$, on comprend que l'instabilité magnétorotationnelle est très vigoureuse car elle se développe sur des temps dynamiques qui sont bien plus courts que les temps caractéristiques de l'évolution stellaire.

Dans les zones radiatives stellaires

En physique stellaire, l'instabilité magnétorotationnelle d'un champ purement poloidal ou purement toroidal a été étudiée en utilisant une analyse locale linéaire (Menou et al. 2004; Masada et al. 2006) ou en utilisant une analyse globale en coordonnées sphériques (Arlt et al. 2003; Jouve et al. 2015) ou cylindriques (Ogilvie & Pringle 1996; Rüdiger et al. 2014; Rüdiger et al. 2015), avec une attention particulière portée sur le transport du moment cinétique en ce qui concerne les deux derniers articles cités. L'instabilité magnétorotationnelle a également été étudiée en géophysique car elle est susceptible de se déclencher dans le noyau liquide de la Terre (Petitdemange et al. 2008). Des configurations magnétiques mixtes, comportant une composante poloidale et toroidale, ont notamment été étudiées dans ce contexte par Petitdemange et al. (2013) grâce à une analyse globale en coordonnées sphériques. Ils ont trouvé qu'il n'y a pas d'effet stabilisant d'une composante du champ sur l'autre et que l'instabilité se développe de la même manière que dans le cas d'un champ purement poloidal ou purement toroidal, avec un taux de croissance similaire et une composante toroidale dont l'intensité détermine les modes azimutaux les plus instables. Revenons aux zones radiatives stellaires pour lesquelles la stratification stable joue un rôle important contrairement aux disques d'accrétion. La stratification a un effet stabilisant important sur l'instabilité magnétorotationnelle comme le montre la condition d'instabilité suivante dérivée par Acheson (1978)

$$q > \frac{N^2}{2\Omega^2} \frac{\eta}{\kappa} \quad , \quad (2.26)$$

où N est la fréquence de Brunt-Väisälä. Cependant, sur de petites échelles spatiales la diffusivité thermique peut fortement réduire les effets de la stratification. Cet effet a été pris en compte par Acheson (1978) et apparaît dans la condition (2.26) où l'on voit que la diffusion thermique favorise l'instabilité.

Donnons-nous un ordre d'idée de la rotation différentielle nécessaire au développement d'une instabilité magnétorotationnelle dans une zone radiative. Prenons par exemple le cas de la zone radiative du Soleil où $N/\Omega \sim 300$ et $\eta/\kappa \sim 5.10^{-5}$. D'après la condition (2.26), le paramètre de cisaillement nécessaire à l'instabilité est $q \gtrsim 2.5$. C'est une rotation différentielle très intense, elle n'est d'ailleurs pas stable hydrodynamiquement d'après le critère de Rayleigh qui dit qu'un écoulement est instable si $q > 2$. Cependant, les conditions en terme de stratification et de rotation différentielle ont pu être tout

autres durant l'histoire de l'évolution du Soleil, et il est possible qu'une instabilité magnéto-rotationnelle ait pu se développer dans la zone radiative du Soleil (Menou & Le Mer 2006). Prenons cette fois-ci le cas d'une étoile de masse intermédiaire où l'importance de la stratification stable est moindre que dans le Soleil avec $N/\Omega \sim 50$, et toujours avec $\eta/\kappa \sim 5.10^{-5}$. Dans ce milieu, une rotation différentielle bien plus concevable est requise par l'instabilité, avec comme condition $q \gtrsim 6.10^{-2}$. Malgré le fort pouvoir stabilisateur de la stratification stable, l'instabilité magnéto-rotationnelle peut probablement jouer un rôle important dans l'évolution du champ magnétique d'une zone radiative.

2.4.3 Instabilité de Tayler

La stabilité d'un champ magnétique purement toroïdal vis-à-vis de perturbations adiabatiques (qui ignorent la viscosité ainsi que la diffusion thermique et magnétique) a été étudiée en coordonnées cylindriques par Tayler (1973) grâce au principe d'énergie de Bernstein et al. (1958). Cette méthode calcule la variation d'énergie potentielle introduite par une perturbation quelconque. Si cette variation d'énergie est positive, le système est stable, et inversement. Grâce à cette méthode qui prend en compte les propriétés locales du système (mais pas la rotation ni les diffusivités), Tayler (1973) découvre une instabilité linéaire qui n'avait jamais été décrite jusque là par des méthodes plus conventionnelles qui impliquent une intégration sur tout le volume du système. La création d'énergie lors de l'échange de deux tubes de flux magnétique est à l'origine de cette instabilité qui tire intégralement son énergie du champ magnétique. Tayler (1973) donne alors les conditions nécessaires et suffisantes à la stabilité d'un champ purement toroïdal. En coordonnées sphériques cela donne (Goossens et al. 1981, Tayler a dérivé ces conditions en coordonnées cylindriques)

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln(B_\varphi^2 \sin \theta \cos \theta) > 0 \quad (m = 1) \quad , \quad (2.27)$$

$$\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \ln(B_\varphi^2 / \sin^2 \theta) > 0 \quad (m = 0) \quad . \quad (2.28)$$

Ces conditions font intervenir la géométrie du champ magnétique mais pas son intensité.

Tayler (1973) note qu'au niveau de l'axe de rotation de l'étoile l'instabilité du mode axisymétrique $m = 0$ demande un échange vertical de tubes de flux (voir FIGURE 2.5 au milieu, les lignes de champ peuvent être vues comme des tubes de flux infinitésimaux), ce qui est difficilement réalisable dans une étoile à cause de la gravité. Le mode non-axisymétrique $m = 1$ autorise quant à lui un échange horizontal de tubes de flux (voir FIGURE 2.5 sur la droite), qui n'est pas contraint par la gravité et est donc favorisé par rapport au mode $m = 0$. En adoptant un système de coordonnées cylindriques où l'axe de rotation est aligné avec l'axe vertical z , les conditions d'instabilité (2.27) et (2.28) peuvent être généralisées près de l'axe de rotation à tous les modes azimutaux m

$$q_m \equiv \frac{\partial \ln B_\varphi}{\partial \ln \varpi} > \frac{m^2}{2} - 1 \quad (m \neq 0) \quad \text{et} \quad q_m > 1 \quad (m = 0) \quad , \quad (2.29)$$

où ϖ est la distance par rapport à l'axe de rotation. Si l'on considère un champ toroïdal généré par effet Ω , on peut montrer que $q_m = 1$ près de l'axe de rotation (en adoptant par

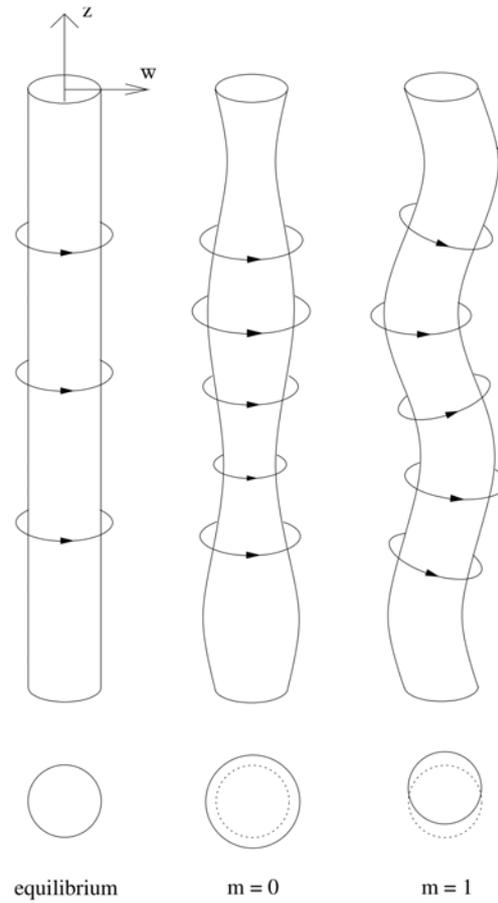


FIGURE 2.5 – Forme de l’instabilité de Taylor au niveau de l’axe de rotation d’une étoile suivant différents modes azimutaux m . L’axe de rotation est aligné avec l’axe vertical z et la gravité agit le long de cet axe. Sur le dessus de la figure est montrée la surface au voisinage de laquelle le champ magnétique toroïdal est concentré, les lignes avec des flèches représentant les lignes de champ magnétique. Sur le dessous, une section de la surface du fluide est tracée tandis que le cercle en pointillés représente l’état d’équilibre. Crédit : Braithwaite (2006b)

exemple un champ poloïdal dipolaire et une rotation différentielle radiale en $1/r$). Dans ce cas et d’après l’Éq. (2.29), le seul mode azimutal instable est $m = 1$, les modes $m = 0$ et $m = 2$ demandant une valeur de q_m supérieure à 1.

Le taux de croissance local σ_{TI} de l’instabilité est indépendant du mode azimutal m et vaut en l’absence de rotation (Goossens et al. 1981)

$$\sigma_{TI} = \omega_{A\varphi} \quad , \quad (2.30)$$

où $\omega_{A\varphi} = v_{A\varphi}/r = B_\varphi/r\sqrt{4\pi\rho}$ est la fréquence d’Alfvén toroïdale. Le temps de croissance de l’instabilité de Taylor est approximativement le temps que met une onde d’Alfvén à faire le tour de l’étoile le long d’une ligne de champ toroïdal. Ce temps de croissance

est bien plus court que les temps caractéristiques d'évolution stellaire, quelques dizaines d'années pour une étoile de rayon R_\odot qui possède un champ toroïdal de 1kG et une masse volumique d' 1g.cm^{-3} .

Effet de la rotation

L'effet de la rotation sur la stabilité d'un champ purement toroïdal est étudié par [Pitts & Tayler \(1985\)](#). Une rotation uniforme est utilisée afin que des instabilités autres que celle de Tayler, comme une instabilité magnétorotationnelle par exemple, ne se déclenchent pas. Si l'axe de rotation de l'étoile est aligné avec l'axe magnétique, la rotation modifie la condition (2.29) d'instabilité près de l'axe de rotation de la manière suivante ([Pitts & Tayler 1985](#))

$$q_m \equiv \frac{\partial \ln B_\varphi}{\partial \ln \varpi} > \frac{m^2}{2} + 1 \quad (m \neq 0) \quad \text{et} \quad q_m > 1 \quad (m = 0) \quad . \quad (2.31)$$

Avec $q_m = 1$, tous les modes m sont stables contrairement au cas sans rotation. La rotation a donc un effet stabilisant sur la configuration magnétique. De plus, le taux de croissance de l'instabilité est réduit si la vitesse angulaire Ω est bien plus grande que la fréquence d'Alfvén toroïdale ω_{A_φ} ([Pitts & Tayler 1985](#))

$$\sigma_{TI} = \frac{\omega_{A_\varphi}^2}{\Omega} \quad (\Omega \gg \omega_{A_\varphi}) \quad . \quad (2.32)$$

Malgré cela, le temps de croissance de l'instabilité reste inférieur aux temps caractéristiques d'évolution stellaire pour des valeurs réalistes de Ω . Ces caractéristiques sont valables pour des perturbations adiabatiques pour lesquelles on ne considère ni viscosité ni diffusion magnétique ou thermique.

Effet de la stratification et des diffusivités

L'instabilité de Tayler est une instabilité globale dans la direction azimutale de par les faibles modes azimutaux susceptibles d'être instables. Elle est néanmoins locale dans le plan méridien (ce qui a permis une analyse locale de l'instabilité) car la gravité limite les mouvements verticaux. Cela fixe une limite inférieure au nombre d'onde vertical n possible d'un mode instable. Au contraire, les petites échelles sont grandement affectées par la diffusion magnétique. Le temps de croissance de l'instabilité $1/\sigma_{TI}$ doit donc être inférieur au temps de diffusion magnétique ℓ^2/η de ces petites échelles $\ell \sim 1/n$, ce qui instaure une limite supérieure à n . Pour le mode azimutal le plus instable $m = 1$ et dans le cas d'une faible rotation telle que $\Omega \ll \omega_{A_\varphi}$, cela se traduit par la gamme de nombres d'onde verticaux instables suivante ([Acheson 1978](#); [Spruit 1999](#))

$$\frac{\sigma_{TI}}{\eta} > n^2 > \frac{N^2}{\omega_{A_\varphi}^2 r_\theta^2} \quad (\Omega \ll \omega_{A_\varphi}) \quad , \quad (2.33)$$

où r_θ est l'échelle spatiale du champ magnétique dans la direction latitudinale. En remplaçant le taux de croissance de l'instabilité donné par l'Éq. (2.30) dans la condition

(2.33), on obtient

$$\omega_{A_\varphi}^3 > \frac{\eta N^2}{r_\theta^2} \quad (\Omega \ll \omega_{A_\varphi}) \quad . \quad (2.34)$$

La diffusion magnétique introduit donc une valeur minimale au champ magnétique pour que celui-ci soit instable. Spruit (1999) prévoit par ailleurs qu'elle réduit le taux de croissance de l'instabilité.

La diffusion thermique quant à elle réduit le potentiel stabilisant que peut avoir la stratification. Cet effet peut être pris en compte en remplaçant la fréquence de Brunt-Väisälä N par une valeur \tilde{N} donnée par (Braithwaite 2006b)

$$\tilde{N}^2 = \frac{N^2}{1 + \kappa n^2 / \sigma_{TI}} \quad . \quad (2.35)$$

D'après l'Éq. (2.33), la diffusion thermique permet alors à une instabilité de se développer sur de plus grandes échelles verticales. En incluant la rotation, étudier analytiquement les effets de la diffusion magnétique et thermique n'est pas aisé et les seuls résultats sont obtenus pour des cas très particuliers qui ne seront pas détaillés ici (voir Annexe de Spruit 1999).

Des travaux numériques ont confirmé les résultats analytiques présentés ci-dessus à propos de l'instabilité de Tayler. Citons par exemple Braithwaite (2006b) qui retrouve presque toutes les caractéristiques prévues de l'instabilité près de l'axe de rotation d'une étoile pour un champ magnétique purement toroïdal dont l'intensité croît avec la distance par rapport à l'axe de rotation. L'effet stabilisant de la diffusion magnétique n'est cependant pas confirmé, avec des configurations magnétiques trouvées instables alors même qu'elles ne vérifient pas la relation (2.34). Kitchatinov & Rüdiger (2008) vérifient ces résultats en utilisant différentes géométries du champ toroïdal. Bonanno & Urpin (2013) confirment quant à eux également l'effet attendu de la rotation sur l'instabilité, tandis que Bonanno & Urpin (2012) montrent que la stratification stable réduit le taux de croissance des modes instables.

Champs magnétiques purement poloïdaux et champs mixtes

Un champ magnétique purement poloïdal est également instable vis-à-vis d'une instabilité de pincement (Wright 1973; Markey & Tayler 1973; Flowers & Ruderman 1977). Son taux de croissance est similaire à celui de l'instabilité de Tayler, il est égal à la fréquence d'Alfvén poloïdale $\omega_{A_p} = B_p / r \sqrt{4\pi\rho}$. Cependant, l'instabilité du champ purement poloïdal n'est pas affectée par la rotation comme le montre numériquement Braithwaite (2007).

Puisqu'un champ magnétique purement toroïdal ou purement poloïdal est instable, un champ magnétique stable doit être composé d'une partie poloïdale et d'une partie toroïdale (Prendergast 1956; Wright 1973; Tayler 1980). Cependant, la complexité d'une étude analytique détaillée de la stabilité d'une configuration magnétique mixte dans une zone stratifiée de façon stable fait qu'il fallut attendre pour avancer sur ce sujet des progrès informatiques permettant une étude numérique à l'aide de simulations.

Braithwaite & Spruit (2004) puis Braithwaite & Nordlund (2006) furent alors les premiers à trouver une configuration magnétique mixte stable sur des temps dynamiques (de l'ordre de quelques temps d'Alfvén) grâce à des simulations numériques d'une étoile qui n'est pas en rotation. Ce champ magnétique stable a la forme d'un tore torsadé axisymétrique dont la composante toroïdale du champ est d'intensité comparable à la composante poloïdale (FIGURE 2.6). Une configuration magnétique stable similaire mais non-axisymétrique a été trouvée par Braithwaite (2008) en partant de conditions initiales différentes. La gamme de stabilité en terme de rapport entre énergie magnétique toroï-

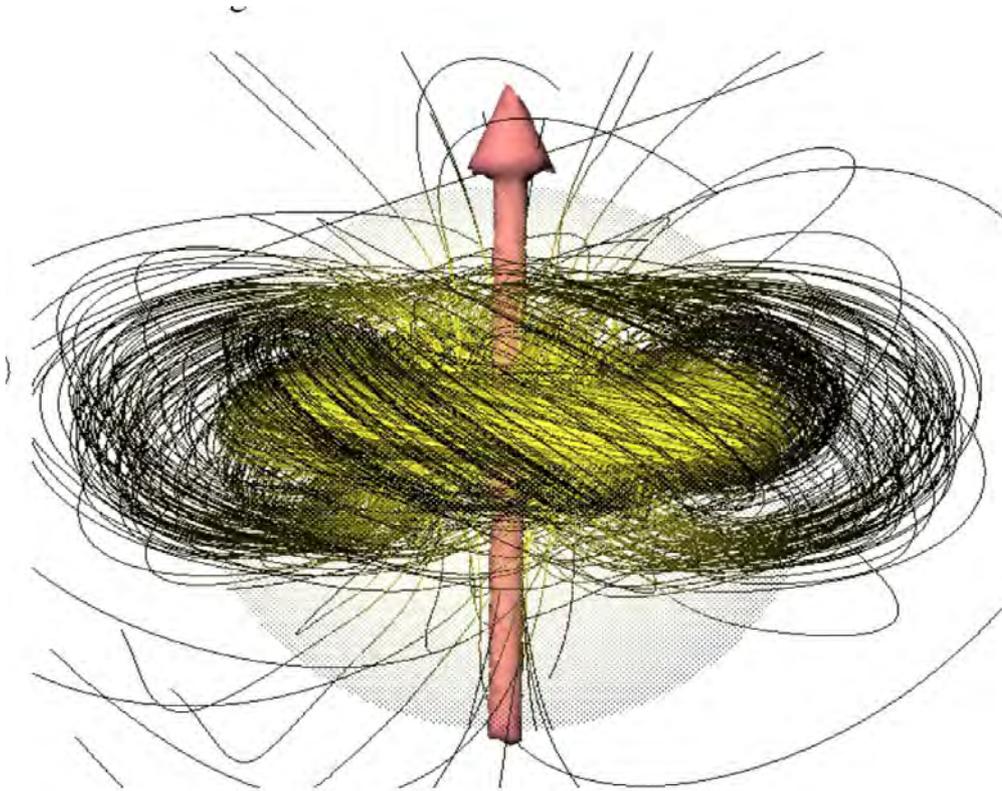


FIGURE 2.6 – Géométrie d'un champ magnétique stable provenant de la relaxation d'un champ initial mixte instable. Il adopte la forme d'un tore torsadé dont les composantes poloïdale et toroïdale sont d'intensité équivalente. Crédit : Braithwaite & Nordlund (2006)

dale E_φ et poloïdale E_p est précisée dans le cas des configurations axisymétriques par Braithwaite (2009)

$$0.25 \lesssim \frac{E_\varphi}{E_p} \lesssim 0.1 \frac{U}{E_m} \quad , \quad (2.36)$$

où U et E_m sont respectivement l'énergie thermique et magnétique totale. D'après (2.36), le champ poloïdal ne peut pas être significativement plus grand que le champ toroïdal pour que la configuration soit stable, mais le champ toroïdal peut être beaucoup plus grand que le champ poloïdal puisque $U \gg E_m$ dans une étoile ($U/E_m > 10^6$ d'après une

estimation de [Braithwaite 2009](#)). Des solutions stables d'un état d'équilibre magnétohydrostatique dans une zone stratifiée de façon stable qui n'est pas en rotation ont de plus été récemment trouvées par [Duez & Mathis \(2010\)](#) grâce à une méthode semi-analytique. Ces solutions sont similaires aux configurations magnétiques axisymétriques stables obtenues numériquement par [Braithwaite & Nordlund \(2006\)](#) et elles vérifient la condition de stabilité (2.36). Leur stabilité a été confirmée numériquement par [Duez et al. \(2010a\)](#). Ces configurations magnétiques mixtes stables peuvent être utilisées comme conditions initiales de simulations MHD ([Duez et al. 2010b](#)).

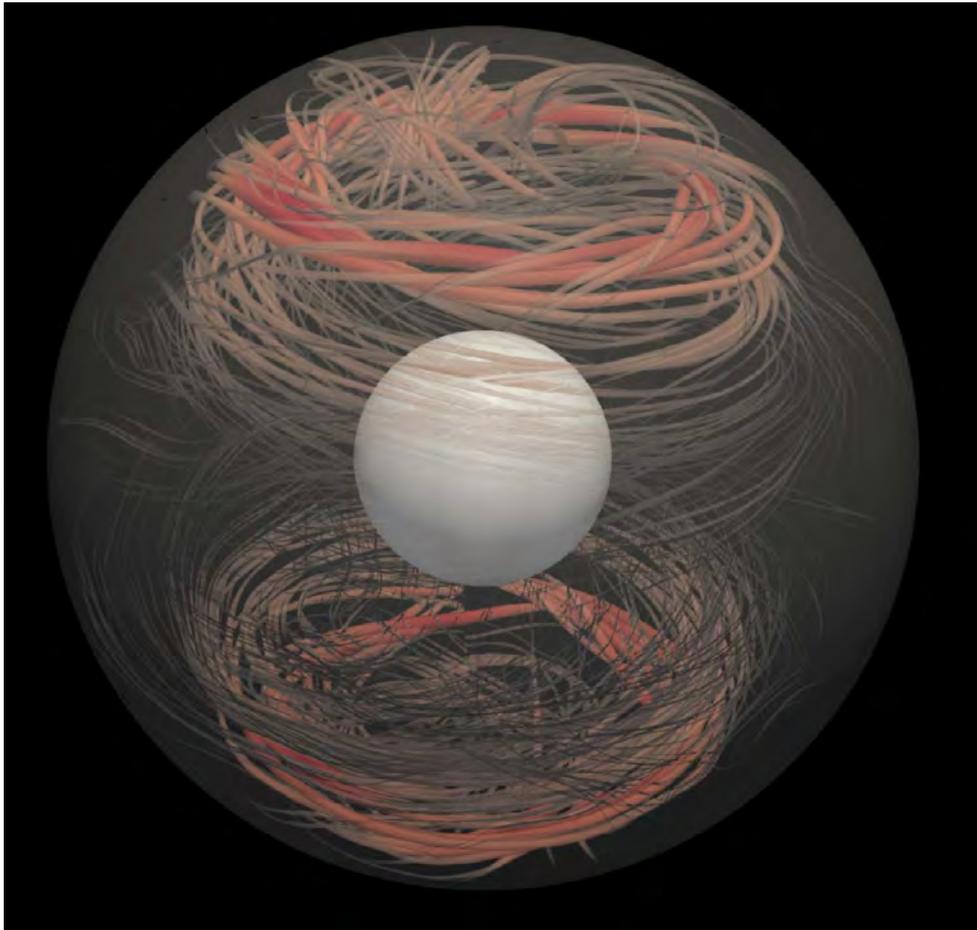


FIGURE 2.7 – Géométrie d'un champ magnétique stable provenant de la relaxation d'un champ mixte produit par la rotation différentielle et ayant subi une instabilité magnéto-rotationnelle. Il est formé de tores torsadés situés au niveau des pôles. Le diamètre des lignes de champ est proportionnel à l'énergie magnétique. Crédit : [Jouve et al. \(2015\)](#)

La question de la stabilité d'une configuration magnétique mixte reste cependant ouverte dans des cas plus réalistes où l'étoile est en rotation et où le champ toroïdal est créé par effet Ω . Il est important de considérer ce type de cas car une étoile est confrontée durant son évolution à des périodes où une rotation différentielle peut être créée, lors de

phases de contraction du cœur ou d'expulsion de moment cinétique par des vents stellaires par exemple. Cependant, une rotation différentielle dont la vitesse angulaire décroît avec le rayon complexifie le problème car elle peut permettre à une instabilité magnéto-rotationnelle de se développer. Arlt & Rüdiger (2011a) et Arlt & Rüdiger (2011b) ont dans ce contexte réalisé des simulations numériques d'une coquille sphérique en rotation différentielle contenant initialement un champ magnétique purement poloïdal. Une instabilité qu'ils interprètent comme étant une instabilité de Tayler se développe dans leurs simulations. Néanmoins, les perturbations qu'ils utilisent pour déclencher l'instabilité sont toujours de mode azimutal $m = 1$, biaisant possiblement leur interprétation. Szklarski & Arlt (2013) ont par la suite réalisé des simulations compressibles dans lesquelles les champs toroïdaux créés par effet Ω ne semblent pas suffisamment intenses pour déclencher une instabilité de Tayler. Malgré l'utilisation de fortes rotations différentielles ($q = 2$) à la limite de la stabilité hydrodynamique donnée par le critère de Rayleigh, la rotation est toujours dominante par rapport à la fréquence d'Alfvén toroïdale ce qui réduit considérablement le taux de croissance de l'instabilité de Tayler (Éq. 2.32). Jouve et al. (2015) confirment cela avec des simulations similaires mais dans des cas non-stratifiés. Une instabilité magnétique identifiée comme étant une instabilité magnéto-rotationnelle se déclenche néanmoins dans leurs simulations contrairement à Szklarski & Arlt (2013), possiblement dû à l'absence d'une stratification stable dans Jouve et al. (2015). Leurs configurations magnétiques instables se relaxent alors vers une configuration stable similaire à celle obtenue par Braithwaite & Nordlund (2006), avec des tores de champ magnétique torsadés (voir FIGURE 2.7), dans les cas où le paramètre $t_{Ap}/t_{\Omega} \lesssim 2 \times 10^2$. Dans les cas contraires, les conséquences de l'instabilité sont que le champ magnétique se structure à plus petites échelles spatiales et que le transport du moment cinétique devient plus efficace.

2.4.4 Hiérarchisation des instabilités dans une zone radiative en rotation différentielle

Il est temps de hiérarchiser les trois instabilités qui viennent d'être décrites par le possible impact qu'elles peuvent avoir sur l'évolution d'un champ magnétique dans une zone radiative en rotation différentielle. La FIGURE 2.8, tirée de Spruit (1999), montre pour des valeurs de paramètres stellaires réalistes les zones de l'espace des paramètres $(\omega_{A\varphi}, \Omega)$ instables vis-à-vis de l'instabilité de Tayler, de l'instabilité magnéto-rotationnelle ou de l'instabilité de flottaison magnétique. En augmentant l'intensité du champ magnétique, c'est à dire $\omega_{A\varphi}$, la première instabilité à se manifester est l'instabilité de Tayler. L'effet stabilisant d'un gradient moléculaire ∇_{μ} sur l'instabilité de Tayler a été pris en compte par Spruit (1999), mais c'est un élément que je n'ai pas considéré dans mes simulations et je n'en parlerai pas. Comme on a pu le signaler, une intensité du champ magnétique bien supérieure est nécessaire au déclenchement d'une instabilité de flottaison magnétique, la gravité limitant les mouvements verticaux qui sont les seuls autorisés par cette instabilité. Sans parler d'instabilité magnéto-rotationnelle, un champ toroïdal produit par effet Ω subira donc tout d'abord une instabilité de Tayler. Si l'instabilité limite la croissance du champ toroïdal, par diffusion des petites échelles créées dans le plan méridien

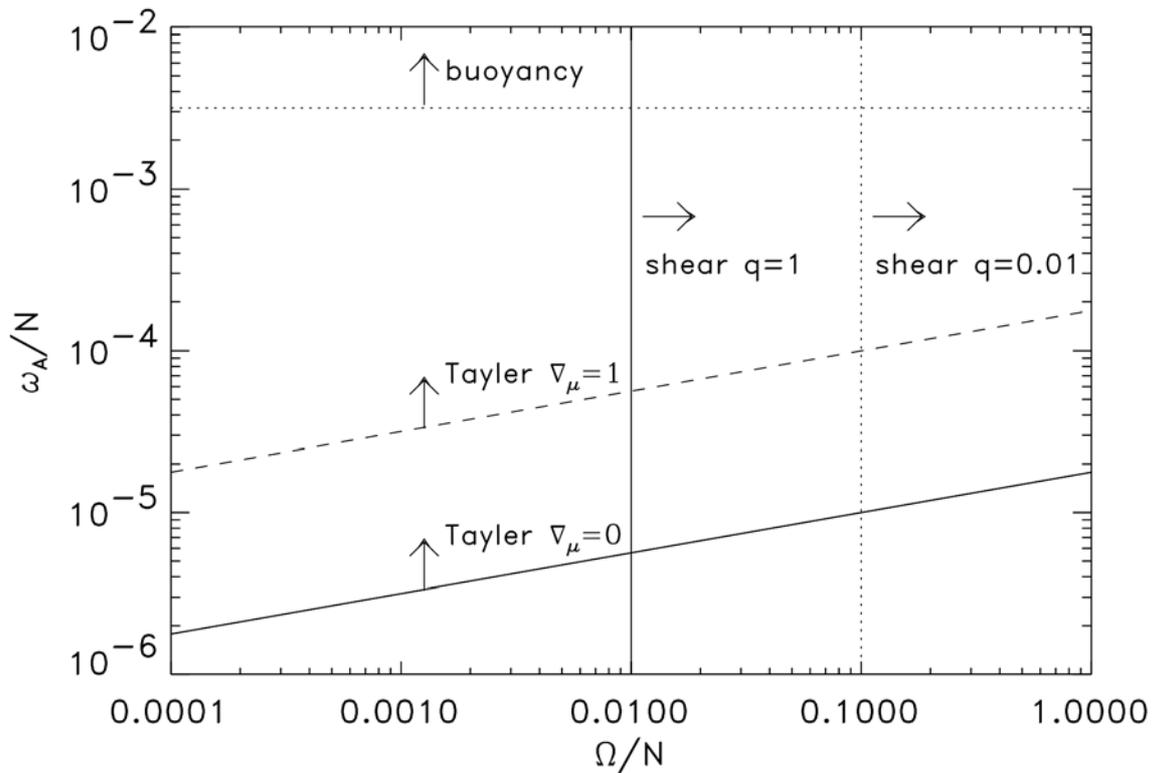


FIGURE 2.8 – Instabilité dominante pour un champ magnétique purement toroïdal suivant la fréquence d’Alfvén $\omega_A = v_{A\varphi}/r = \omega_{A\varphi}$ et la vitesse angulaire Ω . N est la fréquence de Brunt-Väisälä et q le paramètre de cisaillement. Les paramètres utilisés pour tracer cette figure sont $\eta/\kappa = 10^{-4}$ et $r^2 N/\eta = 10^{15}$. Les flèches indiquent les zones de l’espace des paramètres (ω_A, Ω) instables vis-à-vis de l’instabilité de Taylor, de l’instabilité magnétorotationnelle (shear) ou de l’instabilité de flottaison magnétique (buoyancy). Crédit : Spruit (1999)

par exemple, il est fort peu probable que l’intensité du champ toroïdal atteigne la valeur critique nécessaire à l’instabilité de flottaison magnétique. Par ailleurs, on remarque une augmentation du champ magnétique nécessaire au déclenchement de l’instabilité de Taylor avec la vitesse angulaire Ω . Cela traduit l’effet stabilisant de la rotation sur l’instabilité dont le taux de croissance décroît avec la vitesse angulaire (voir Éq. 2.32). Au contraire, l’instabilité magnétorotationnelle est favorisée par une forte rotation (voir Éq. 2.25) et peut prendre le pas sur l’instabilité de Taylor à partir d’une certaine vitesse angulaire dépendante du paramètre de cisaillement q . Dans ce contexte, deux instabilités restent pertinentes par leur probabilité d’occurrence, l’instabilité de Taylor et l’instabilité magnétorotationnelle. L’instabilité de flottaison magnétique ne sera désormais plus évoquée dans ce manuscrit.

Une analyse locale de la stabilité d’un champ magnétique purement toroïdal dans

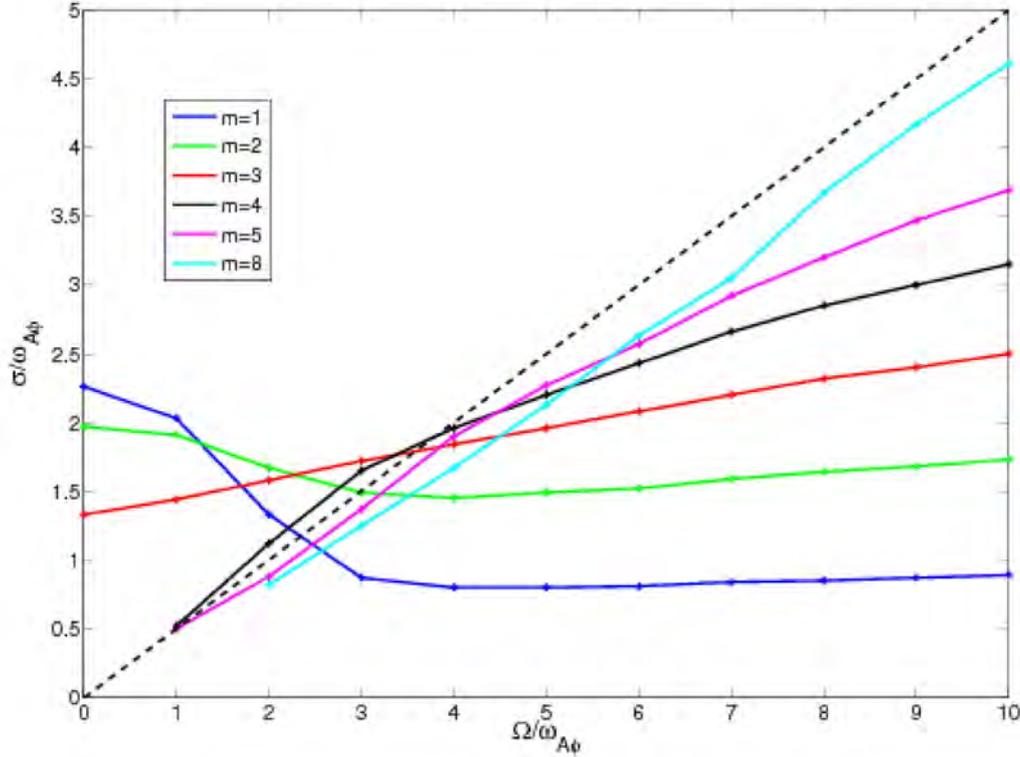


FIGURE 2.9 – Taux de croissance $\sigma/\omega_{A\varphi}$ d’une instabilité en fonction de $\Omega/\omega_{A\varphi}$ pour différents modes azimutaux m . La ligne en traits pointillés est la droite d’équation $\sigma = q\Omega/2$ avec $q = 1$, correspondant à l’expression du taux de croissance de l’instabilité magnétorotationnelle pour le mode m le plus instable (Éq. 2.25). Crédit : Jouve et al. (2015)

une zone stratifiée de façon stable en rotation différentielle a permis à Ogilvie (2007) de dériver une relation de dispersion. Si on considère une perturbation telle que le vecteur déplacement associé à la perturbation est dirigé selon le vecteur unitaire \mathbf{e} , cette relation de dispersion adopte la forme suivante

$$\left[\omega^2 - \frac{m^2 v_{A\varphi}^2}{\varpi^2} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_r)^2 N^2 - 2\varpi \Omega \mathbf{e} \cdot \nabla \Omega + \frac{2v_{A\varphi}}{\sqrt{4\pi\rho}} \mathbf{e} \cdot \nabla \left(\frac{B_\varphi}{\varpi} \right) \right] \times \left[\omega^2 - \frac{m^2 v_{A\varphi}^2}{\varpi^2} \right] = \left[2\Omega\omega + \frac{2m v_{A\varphi}^2}{\varpi^2} \right]^2, \quad (2.37)$$

où $\varpi = r \sin \theta$, ω est la fréquence de la perturbation, m est le mode azimutal, $v_{A\varphi} = B_\varphi/\sqrt{4\pi\rho}$ est la vitesse Alfvén toroïdale, et N la fréquence de Brunt-Väisälä. Elle fournit un critère de stabilité local qui ne prend pas en compte le champ poloïdal et les effets diffusifs. Elle a néanmoins l’avantage de pouvoir s’appliquer simplement à des configura-

tions axisymétriques complexes de champ magnétique azimutal, de rotation différentielle et de fréquence de Brunt-Väisälä. La forme assez particulière des perturbations utilisées dans cette analyse locale est celle d'un paquet d'ondes de nombre d'onde k modulé dans une enveloppe d'échelle spatiale ℓ_{env} telle que $k^{-1} \ll \ell_{env} \ll L_{ref}$, où L_{ref} est l'échelle de longueur de l'état de référence. À noter que ces perturbations sont transverses, c'est à dire qu'elles sont telles que le vecteur d'onde \mathbf{k} est perpendiculaire au vecteur déplacement de sorte que $\mathbf{e} \cdot \mathbf{k} = 0$. Jouve et al. (2015) ont montré que cette relation de dispersion fournit des résultats en très bon accord, en terme de localisation de l'instabilité, de taux de croissance et de modes m les plus instables, avec les résultats de leurs simulations numériques globales non-stratifiées. Dans ces simulations, leur rapport d'énergie $E_\varphi/E_p \simeq 10^3$ semble donc suffisant pour éviter les effets stabilisants que peut occasionner le champ poloidal. Les résultats de Jouve et al. (2015) autorisent alors l'utilisation de la relation de dispersion dérivée dans Ogilvie (2007) afin d'identifier les gammes de paramètres qui favorisent plutôt l'instabilité magnétorotationnelle ou l'instabilité de Tayler, et ce dans le contexte d'une configuration magnétique mixte dont le champ toroïdal est créé par effet Ω . La FIGURE 2.9, tirée de Jouve et al. (2015), montre pour une simulation typique de leur étude le taux de croissance σ de l'instabilité en fonction du rapport $\Omega/\omega_{A\varphi}$ pour différents modes azimutaux m . Leur configuration magnétique est instable quelque soit la valeur de $\Omega/\omega_{A\varphi}$. Cependant, cette figure montre que la nature de l'instabilité est dépendante de $\Omega/\omega_{A\varphi}$. Pour de faibles rotations telles que $\Omega/\omega_{A\varphi} < 1$, le mode azimutal favorisé est $m = 1$, σ étant d'autant plus faible que m est grand. Ces caractéristiques correspondent à une instabilité de Tayler, avec un taux de croissance du mode $m = 1$ relativement en accord avec la théorie (Éq. 2.30). Pour de fortes rotations telles que $\Omega/\omega_{A\varphi} > 4$, c'est une instabilité magnétorotationnelle qui se manifeste. Le mode le plus instable est environ égal à $\Omega/\omega_{A\varphi}$, ce qui a été prédit pour l'instabilité magnétorotationnelle par l'analyse locale linéaire de Masada et al. (2006) avec $m_{max} = \sqrt{-q^2 + 4q} \Omega / (2\omega_{A\varphi})$ (si l'on prend la valeur du paramètre de cisaillement $q = 1$ utilisée dans les simulations de Jouve et al. 2015). Le taux de croissance de ce mode le plus instable semble suivre l'expression théorique donnée par l'Éq. (2.25) qui est tracée en traits pointillés sur la FIGURE 2.9 pour $q = 1$. Dans le régime intermédiaire où $1 \leq \Omega/\omega_{A\varphi} \leq 4$, les deux instabilités coexistent.

Une instabilité se déclenche lorsque $\Omega/\omega_{A\varphi} \simeq 5$ dans les simulations de Jouve et al. (2015), et c'est en effet une instabilité magnétorotationnelle. Comme on a pu le constater avec l'étude de Szklarski & Arlt (2013), il semble difficile d'atteindre des valeurs de $\Omega/\omega_{A\varphi}$ telles que l'instabilité de Tayler soit favorisée lorsque le champ toroïdal est créé par effet Ω . Cependant, la stratification stable, non prise en compte dans Jouve et al. (2015), a un impact beaucoup plus limitant sur l'instabilité magnétorotationnelle que sur l'instabilité de Tayler (Spruit 1999). Ceci est directement visible sur les critères d'instabilité (2.26) et (2.34). Le paramètre de cisaillement q minimal nécessaire au déclenchement de l'instabilité magnétorotationnelle est en effet proportionnel à N^2 (Éq. 2.26) tandis que la fréquence d'Alfvén toroïdale $\omega_{A\varphi}$ minimale nécessaire au déclenchement de l'instabilité de Tayler est proportionnelle à $N^{2/3}$ (Éq. 2.34). La FIGURE 2.8 montre de plus qu'avec des diffusivités réalistes pour une zone radiative, l'instabilité de Tayler serait favorisée au détriment de l'instabilité magnétorotationnelle à partir d'une intensité de la stratification stable telle que $N/\Omega = 10^2$ pour des $\Omega/\omega_{A\varphi}$ compris entre 3 et 2×10^3 . Le régime

de l'instabilité de Tayler pourrait donc être exploré dans le contexte d'une zone radiative en rotation différentielle en ajoutant la stratification stable à des simulations similaires à celles réalisées dans [Jouve et al. \(2015\)](#).

Pour finir ce chapitre, notons l'existence d'une instabilité MHD qui n'a pas été citée jusqu'ici. Il s'agit de l'instabilité de cisaillement magnétique (en anglais *magnetoshear*) ([Gilman & Fox 1997](#)), à ne pas confondre avec l'instabilité magnétorotationnelle. Elle est aussi appelée instabilité mixte car elle tire autant son énergie de la rotation différentielle que du champ magnétique. C'est une instabilité MHD non-axisymétrique 2D, c'est à dire qu'elle se développe sur une sphère de rayon r . Elle requiert pour se déclencher la présence d'une rotation différentielle latitudinale et d'un champ magnétique toroïdal structuré à grande échelle. Les modes azimutaux les plus instables vis-à-vis de cette instabilité sont les modes $m = 1$ et 2 , et le taux de croissance maximal de ces modes est égal ω_{A_φ} tout comme l'instabilité de Tayler dans le cas sans rotation. Dans le contexte solaire, cette instabilité peut se développer au niveau de la tachocline, qui est une zone stratifiée de façon stable, et pourrait avoir une influence sur la durée des cycles solaires ([Gilman & Fox 1997](#); [Dikpati & Gilman 1999](#); [Dikpati et al. 2003](#); [Gilman et al. 2007](#); [Lawson et al. 2015](#)). J'ai choisi de ne pas présenter plus en détail cette instabilité dans ce manuscrit, mais il faut garder à l'esprit que les caractéristiques de cette instabilité ne semblent pas incompatibles avec son déclenchement dans une zone radiative stratifiée de façon stable en rotation différentielle.

Chapitre 3

Champs magnétiques axisymétriques induits par la rotation différentielle dans une zone radiative

La stabilité d'un champ magnétique dans une zone radiative en rotation différentielle dépend en premier lieu de la géométrie, de l'intensité du champ magnétique et de la rotation différentielle. C'est pourquoi, avant de passer à l'étude de stabilité proprement dite dans le chapitre suivant, il est important d'avoir une bonne idée des configurations magnétiques possibles. Ici, nous étudions les configurations axisymétriques engendrées par induction lorsqu'un champ poloïdal est en présence d'une rotation différentielle. J'ai pour cela utilisé une approche numérique permettant une étude complète de l'influence de divers paramètres tels que l'intensité du champ magnétique poloïdal, le profil de rotation différentielle, les coefficients de diffusion, la circulation méridienne ou encore la stratification stable.

Dans une première section, la formulation mathématique nécessaire à la résolution numérique du problème sera présentée. L'adimensionnement des équations de la MHD permettant une réduction du nombre de paramètres libres du problème ainsi que les différents ingrédients physiques inclus dans les simulations numériques seront exposés. Les codes numériques utilisés seront présentés. La seconde section de ce chapitre décrira les résultats des simulations numériques réalisées sans circulation méridienne. Des modèles analytiques de l'évolution d'un champ magnétique dans une zone radiative en rotation différentielle seront développés et comparés aux résultats numériques dans une troisième section. Les sections 3.2 et 3.3 feront en quelque sorte office de résumé de [Gaurat et al. \(2015\)](#) auquel je ferai souvent référence. La dernière section décrira les résultats des simulations numériques obtenus avec l'ajout de la circulation méridienne.

3.1 Une approche numérique

La zone radiative est modélisée, dans une coquille sphérique de rayon externe R et interne $R_c = 0.3 R$, par un fluide conducteur pour lequel les effets de la gravité peuvent être décrit par l'approximation de Boussinesq. Les équations de la MHD sont résolues numériquement dans ce domaine de calcul pour des conditions initiales et aux limites données.

3.1.1 Adimensionnement des équations

Avant de procéder à l'adimensionnement du système d'équation de la MHD, les variables thermodynamiques sont décomposées en

$$\rho(r, \theta, t) = \bar{\rho}(r, \theta) + \rho_1(r, \theta, t) \quad , \quad (3.1)$$

$$T(r, \theta, t) = \bar{T}(r, \theta) + T_1(r, \theta, t) \quad , \quad (3.2)$$

$$p(r, \theta, t) = \bar{p}(r, \theta) + p_1(r, \theta, t) \quad , \quad (3.3)$$

où $\bar{\rho}$, \bar{T} et \bar{p} sont respectivement la masse volumique, la température et la pression thermique à l'équilibre hydrostatique et ρ_1 , T_1 et p_1 sont leur fluctuation temporelle. À l'équilibre stationnaire ($\partial/\partial t = 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ et $\mathbf{v} = \mathbf{0}$), le système d'équations de la MHD (2.5-2.6-2.7-2.8) se réduit à

$$\bar{\rho} \mathbf{g} - \nabla \bar{p} = 0 \quad , \quad (3.4)$$

$$\Delta \bar{T} = 0 \quad . \quad (3.5)$$

Dans le cadre de l'approximation Boussinesq (voir détail en Annexe A.6), les fluctuations de masse volumique ρ_1 ne sont prises en compte que dans le terme de gravité et ne dépendent que des fluctuations de température T_1 à travers l'expression suivante

$$\rho_1 = -\bar{\rho} \alpha T_1 \quad , \quad (3.6)$$

où α est le coefficient de dilatation thermique. Sous cette approximation et en utilisant les équations de l'équilibre stationnaire (3.4) et (3.5), le système d'équations de la MHD (2.5-2.6-2.7-2.8) devient

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad , \quad (3.7)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v} - \alpha T_1 \mathbf{g} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \left(p_1 + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi\bar{\rho}} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} + \bar{\nu} \Delta \mathbf{v} \quad , \quad (3.8)$$

$$\frac{DT_1}{Dt} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{T} = \bar{\kappa} \Delta T_1 \quad , \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} \quad , \quad (3.10)$$

où $\bar{\nu} = \mu/\bar{\rho}$ et $\bar{\kappa} = \chi/(c_p \bar{\rho})$, que l'on notera toujours par la suite ν et κ .

Nous pouvons maintenant adimensionner le système d'équations précédent en utilisant le rayon externe R comme unité de longueur, le temps d'Alfvén poloïdal $t_{Ap} = R\sqrt{4\pi\rho_0}/B_0$ comme unité de temps où B_0 est l'unité de champ magnétique poloïdal et ρ_0 l'unité de masse volumique, $R\Omega_0\sqrt{4\pi\rho_0}$ comme unité de champ magnétique toroïdal, $V_{Ap} = R/t_{Ap}$ comme une unité de la circulation méridienne, $R\Omega_0$ comme unité de vitesse azimutale, $\Delta T = T_o - T_i$ comme unité de température où T_i et T_o sont respectivement les températures au rayon interne et externe du domaine de calcul et $R^2\Omega_0^2\rho_0$ comme unité de pression. Cet adimensionnement s'avère judicieux dans l'interprétation des résultats des simulations numériques comme cela est montré dans la Section 2.2 de [Gaurat et al. \(2015\)](#). Le système d'équations de la MHD prend alors la forme suivante

$$\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}} = 0 \quad , \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{v}_r - \frac{\tilde{v}_\theta^2}{\tilde{r}} - \left(\frac{t_{Ap}}{t_\Omega}\right)^2 \frac{\tilde{v}_\varphi^2}{\tilde{r}} &= 2 \left(\frac{t_{Ap}}{t_\Omega}\right)^2 \sin \theta \tilde{v}_\varphi + \left(\frac{t_{Ap}}{t_\Omega}\right)^2 \left(\frac{N}{\Omega_0}\right)^2 \tilde{T}_1 \\ &- \left(\frac{t_{Ap}}{t_\Omega}\right)^2 \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{B}_\theta}{\tilde{\rho} \tilde{r}} \left(\frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial \theta} - \frac{\partial (\tilde{r} \tilde{B}_\theta)}{\partial \tilde{r}}\right) \\ &- \left(\frac{t_{Ap}}{t_\Omega}\right)^2 \frac{\tilde{B}_\varphi}{\tilde{\rho} \tilde{r}} \frac{\partial (\tilde{r} \tilde{B}_\varphi)}{\partial \tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{Pm_0}{Lu} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}} \Big|_r \quad , \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_\theta}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{v}_\theta + \frac{\tilde{v}_\theta \tilde{v}_r}{\tilde{r}} - \left(\frac{t_{Ap}}{t_\Omega}\right)^2 \cot \theta \frac{\tilde{v}_\varphi^2}{\tilde{r}} &= 2 \left(\frac{t_{Ap}}{t_\Omega}\right)^2 \cos \theta \tilde{v}_\varphi - \left(\frac{t_{Ap}}{t_\Omega}\right)^2 \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \theta} \\ &+ \frac{\tilde{B}_r}{\tilde{\rho} \tilde{r}} \left(\frac{\partial (\tilde{r} \tilde{B}_\theta)}{\partial \tilde{r}} - \frac{\partial \tilde{B}_r}{\partial \theta}\right) - \left(\frac{t_{Ap}}{t_\Omega}\right)^2 \frac{\tilde{B}_\varphi}{\tilde{\rho} \tilde{r} \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta \tilde{B}_\varphi)}{\partial \theta} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{Pm_0}{Lu} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}} \Big|_\theta \quad , \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_\varphi}{\partial \tilde{t}} + \frac{1}{\tilde{r} \sin \theta} \left(\tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}} \cdot \tilde{\nabla}\right) (\tilde{r} \sin \theta \tilde{v}_\varphi) &= -2 (\sin \theta \tilde{v}_r + \cos \theta \tilde{v}_\theta) \\ &+ \frac{1}{\tilde{\rho} \tilde{r} \sin \theta} \left(\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\nabla}\right) (\tilde{r} \sin \theta \tilde{B}_\varphi) + \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{Pm_0}{Lu} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}} \Big|_\varphi \quad , \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\frac{D \tilde{T}_1}{D \tilde{t}} + \tilde{\mathbf{v}}_{\mathbf{m}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{T}_1 = \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{Pm_0}{Lu Pr_0} \tilde{\Delta} \tilde{T}_1 \quad , \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial \tilde{t}} = \tilde{\nabla} \times (\tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}}) + \frac{1}{Lu} \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{B}} \quad , \quad (3.16)$$

où $\mathbf{v}_{\mathbf{m}} = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta$ est le champ de vitesse méridional, $\mathbf{B}_{\mathbf{p}} = B_r \mathbf{e}_r + B_\theta \mathbf{e}_\theta$ est le champ magnétique poloïdal et où l'on a considéré que $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_r$ et $\Omega_0 = \Omega_0 \mathbf{e}_z$ sont uniformes avec \mathbf{e}_z le vecteur unitaire dans la direction parallèle à l'axe de rotation du système. Les tildes indiquent les quantités adimensionnées. L'adimensionnement des équations fait

apparaître cinq nombres sans dimension

$$\frac{t_{Ap}}{t_{\Omega}} = \frac{R\Omega_0\sqrt{4\pi\rho_0}}{B_0} , \quad (3.17)$$

$$\frac{N}{\Omega_0} = \frac{1}{\Omega_0} \sqrt{\frac{\alpha g \Delta T}{R}} , \quad (3.18)$$

$$Lu = \frac{t_{\eta}}{t_{Ap}} = \frac{RB_0}{\eta\sqrt{4\pi\rho_0}} , \quad (3.19)$$

$$Pr_0 = \frac{t_{\kappa_0}}{t_{\nu_0}} = \frac{\nu_0}{\kappa_0} , \quad (3.20)$$

$$Pm_0 = \frac{t_{\eta}}{t_{\nu_0}} = \frac{\nu_0}{\eta} , \quad (3.21)$$

où N , la fréquence de Brunt-Väisälä, est uniforme et $\nu_0 = \mu/\rho_0$ et $\kappa_0 = \chi/(c_p \rho_0)$ sont respectivement les coefficients de viscosité cinématique et de diffusion thermique de surface. À noter que dans mes simulations κ_0 est toujours égal à κ car on a $\bar{\rho} = \rho_0$ lorsque la stratification stable est considérée. Ces nombres sans dimension sont des paramètres de contrôle importants des simulations numériques car ils quantifient l'importance d'un paramètre physique par rapport à un autre. Par exemple, t_{Ap}/t_{Ω} mesure l'importance de la rotation par rapport à l'intensité champ magnétique. N/Ω_0 quantifie la stratification stable par rapport à la rotation. Le nombre de Lundquist Lu est le rapport entre un temps diffusif, t_{η} , et un temps dynamique, t_{Ap} . Il compare les effets de la diffusion magnétique aux effets dynamiques. Enfin, le nombre de Prandtl Pr_0 et le nombre de Prandtl magnétique Pm_0 sont des rapports de coefficients de diffusion.

3.1.2 Conditions initiales et aux limites

Pour résoudre le système d'équations (3.11-3.12-3.13-3.14-3.15-3.16), des conditions initiales et aux limites sont nécessaires. Celles-ci ont été variées afin de tester leur influence sur l'évolution d'un champ magnétique axisymétrique.

Sur le champ magnétique

Le champ magnétique toroïdal initial est toujours choisi nul, tandis que le champ poloidal initial adopte suivant les cas une géométrie dipolaire ou une géométrie proche d'un dipôle mais avec une distribution radiale différente

$$\mathbf{B}_p(r, \theta, t = 0) = \frac{2 \cos \theta B_0 R^3}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\sin \theta B_0 R^3}{r^3} \mathbf{e}_{\theta} , \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_p(r, \theta, t = 0) = & 3 \cos \theta B_0 \frac{r - 4R/3 + R_c^4/3r^3}{R(1 - (R_c/R)^4)} \mathbf{e}_r \\ & - \frac{3 \sin \theta}{2} B_0 \frac{3r - 8R/3 - R_c^4/3r^3}{R(1 - (R_c/R)^4)} \mathbf{e}_{\theta} . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ces deux configurations de champ poloïdal sont montrées sur la FIGURE 3.1 où les lignes de champ poloïdal sont représentées en traits pointillés noirs (Éq. 3.22 à gauche et Éq. 3.23 à droite).

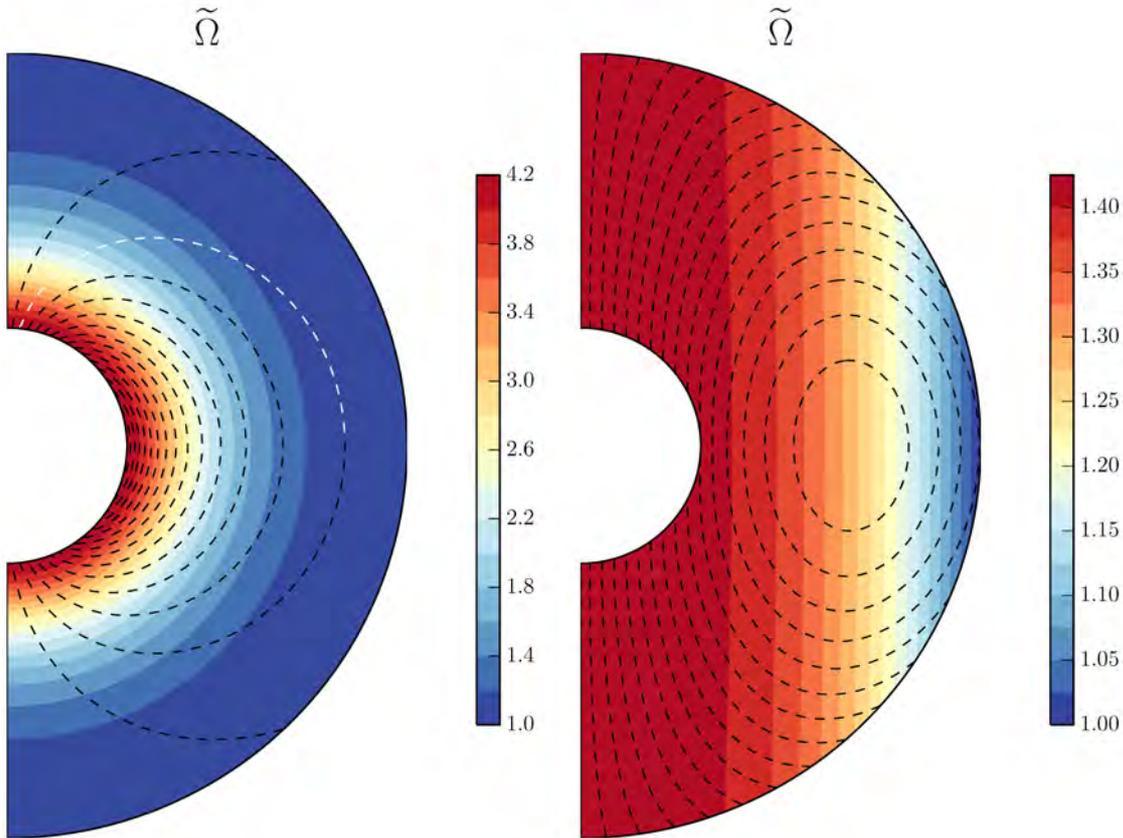


FIGURE 3.1 – Coupes méridiennes montrant en couleur les isocontours de la vitesse angulaire $\tilde{\Omega}$ pour le profil radial défini par l'Éq. 3.36 (à gauche) et pour le profil cylindrique défini par l'Éq. 3.37 (à droite). Les lignes noires en traits pointillés représentent les lignes de champ magnétique poloïdal pour les configurations définies par l'Éq. 3.22 (à gauche) et l'Éq. 3.23 (à droite). La ligne blanche indique quant à elle sur la figure de gauche la ligne de champ sur laquelle les ondes d'Alfvén se propagent le plus lentement dans le cas du profil de masse volumique correspondant à $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$.

Concernant les conditions aux limites, suivant les cas simulés le milieu qui délimite le domaine de calcul a été considéré comme un isolant ou un conducteur parfait.

L'isolant Pour un milieu délimitant isolant, le courant électrique \mathbf{j} doit être nul à l'extérieur du domaine

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad , \quad (3.24)$$

que l'on peut aussi exprimer, toujours dans le cas axisymétrique, par

$$\frac{\partial (\sin \theta B_\varphi)}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} = 0 \quad , \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} = 0 \quad . \quad (3.27)$$

Un champ magnétique qui respecte ces conditions est appelé un champ potentiel car celui-ci dérive d'un potentiel scalaire Φ tel que $\mathbf{B} = \nabla \Phi$. Afin d'assurer sa continuité entre le domaine de calcul et l'extérieur, le champ magnétique interne doit être raccordé à un champ potentiel. Pour le champ toroïdal B_φ , les conditions isolantes (3.25) et (3.26) impliquent que

$$B_\varphi = \frac{cste}{r \sin \theta} \quad , \quad (3.28)$$

où la constante sera choisie comme nulle afin de respecter la condition initiale. Le dipôle donné par l'expression (3.22) est un champ potentiel, il respecte la condition isolante (3.27). Ce n'est pas le cas pour la configuration magnétique donné par l'expression (3.23) qui a un courant azimutal j_φ non-nul. j_φ ne dépend néanmoins pas du rayon r , le désaccord entre cette condition initiale et la condition aux limites isolante ne crée alors pas de forts gradients de courant qui pourraient poser des problèmes numériques.

Le conducteur parfait Un conducteur parfait est un milieu idéal dans lequel la conductivité électrique σ_{cond} tend vers l'infini. Or d'après la loi d'Ohm, le courant électrique \mathbf{j} s'exprime

$$\mathbf{j} = \sigma_{cond} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) \quad , \quad (3.29)$$

où c est la vitesse de la lumière et \mathbf{E} est le champ électrique. Afin que \mathbf{j} reste une grandeur physique finie, il faut que les trois composantes de $\mathbf{E} + \mathbf{v}/c \times \mathbf{B}$ tendent vers 0. De plus, la continuité entre le domaine de calcul et un conducteur parfait de la composante normale du champ magnétique et des composantes tangentielles du champ électrique imposent que ces composantes soient nulles. Dans nos simulations numériques où le domaine de calcul est une coquille sphérique, les conditions aux bords sont donc $B_r = 0$ ainsi que $E_\theta = E_\varphi = 0$. En considérant que les bords du domaine de calcul sont impénétrables, c'est à dire que $v_r = 0$, on a alors d'après la loi d'Ohm que les composantes tangentielles du courant électrique j_θ et j_φ sont nulles, soit les conditions (3.26) et (3.27). Pour résumer, les conditions aux bords d'un conducteur parfait sur le champ magnétique sont

$$B_r = 0 \quad , \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} = 0 \quad , \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial B_r}{\partial \theta} = 0 \quad . \quad (3.32)$$

Un désaccord existe à nouveau entre les conditions aux limites (3.30) et (3.32) et les conditions initiales (3.22) et (3.23). Cela ne pose cependant pas de problèmes numériques et le champ poloïdal initial s'accorde rapidement, au bout de quelques pas de temps numériques, à la condition aux limites.

Sur le champ de vitesse

La circulation méridienne est toujours considérée nulle initialement. Le champ de vitesse azimutal v_φ quant à lui est relié à la vitesse angulaire Ω par

$$v_\varphi = r \sin \theta \Omega \quad . \quad (3.33)$$

Différents champs de vitesse azimutaux initiaux ont été testés

$$\Omega(r, t = 0) = \Omega_0 \frac{R}{r} \quad , \quad (3.34)$$

$$\Omega(r, t = 0) = \Omega_0 \frac{R^2}{r^2} \quad , \quad (3.35)$$

$$\Omega(r, t = 0) = \Omega_0 \frac{1 - c_1 (r - R_c)^2 R/r^3 - c_2 (r - R_c)^2/(r R)}{1 - (c_1 + c_2)(1 - R_c/R)^2} \quad , \quad (3.36)$$

$$\Omega(\varpi, t = 0) = \Omega_0 \sqrt{\frac{2}{1 + (\varpi/R)^4}} \quad , \quad (3.37)$$

$$\Omega(\varpi, t = 0) = \Omega_0 \sqrt{\frac{12}{1 + 11(\varpi/R)^4}} \quad , \quad (3.38)$$

où $\varpi = r \sin \theta$ est la distance par rapport à l'axe de rotation et avec $c_1 = 1.4$ et $c_2 = 0.15$. Les trois premiers profils ne dépendent que du rayon r , ils sont dit radiaux, tandis que les deux derniers ne dépendent que de la coordonnée cylindrique ϖ et sont donc appelés cylindriques. Les isocontours de la vitesse angulaire Ω sont représentés sur la FIGURE 3.1 pour un profil initial de rotation différentielle radial (Éq. 3.36) à gauche et pour un profil cylindrique (Éq. 3.37) à droite.

En ce qui concerne les conditions aux limites, le domaine de calcul est toujours considéré comme une coquille sphérique rigide et impénétrable, de sorte que la vitesse radiale v_r est nulle aux bords du domaine. Avec cette coquille sphérique impénétrable, deux types de conditions aux limites pour les composantes horizontales du champ de vitesse ont été utilisées. La première est une condition aux limites fixe où les bords du domaine sont en corotation avec l'intérieur du domaine. Cela se traduit par $v_\theta = 0$ et v_φ égal à une certaine valeur imposée, constante dans le temps. Pour un bon accord entre les conditions initiales et aux limites, la valeur fixée de v_φ sera celle donnée par la condition initiale au niveau des bords du domaine de calcul. La seconde est une condition aux limites libre de contraintes visqueuses (*stress-free* en anglais), qui impose des contraintes de cisaillement

nulles au niveau des bords du domaine de calcul. Cela se traduit par

$$\frac{\partial v_\theta/r}{\partial r} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial v_\varphi/r}{\partial r} = 0 \quad . \quad (3.39)$$

La condition initiale (3.36) respecte la conditions aux limites *stress-free* en $r = R_c$.

Sur le champ de température de référence

La condition initiale est donnée par la solution de l'équilibre thermodynamique (voir Éq. 3.5) accompagnée des conditions aux limites de température fixées à T_i en $r = R_c$ et T_o en $r = R$. En considérant que le profil initial de température est radial, on obtient

$$\bar{T}(r) = \Delta T \frac{1 - R_c/r}{1 - R_c/R} + T_i \quad . \quad (3.40)$$

Puisque le domaine de calcul modélise une zone radiative, il faut assurer la stabilité du fluide vis-à-vis de la convection en imposant une stratification stable en température. Pour cela, la fréquence de Brunt-Väisälä N doit être réelle, c'est à dire $\Delta T = T_o - T_i > 0$ (voir Éq. 3.18).

Sur le profil de masse volumique de référence

Dans toutes les simulations réalisées durant ma thèse, la conservation de la masse est assurée par $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Cela inclut des simulations incompressibles, où le profil de masse volumique de référence $\bar{\rho}$ est alors uniforme. Cependant, dans le cas particulier d'un champ de vitesse purement azimutal, un profil de masse volumique possédant une dépendance radiale peut être utilisé tout en respectant $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ car alors $\mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\rho} = 0$ (voir Éq. 2.1).

Dans les simulations réalisées sans circulation méridienne dont les résultats seront présentés à la prochaine section, différents profils de masse volumique basés sur celui d'un modèle polytropique d'étoile d'indice polytropique $n_{poly} = 3$ (Horedt 2004) ont été utilisés. En coupant ce profil polytropique à différents rayons puis en dilatant les profils obtenus sur tout le domaine de calcul, j'ai créé des profils possédant un rapport ρ_c/ρ_0 entre la masse volumique au rayon interne ρ_c et au rayon externe ρ_0 allant de 1 à 10^6 . Les variations radiales de masse volumique s'accompagnent d'une variation de la vitesse de propagation des ondes d'Alfvén. Pour illustrer cela, les profils de $\tilde{v}_{Ap} = \tilde{B}_p/\sqrt{\tilde{\rho}}$ à l'équateur correspondant à différents profils de masse volumique pour le champ magnétique poloïdal défini par l'Éq. (3.22) sont tracés sur la FIGURE 3.2. Le temps mis par une onde d'Alfvén pour traverser la zone radiative le long de l'équateur varie de $0.25 t_{Ap}$ pour $\rho_c/\rho_0 = 1$ à $22 t_{Ap}$ pour $\rho_c/\rho_0 = 10^6$.

3.1.3 Codes numériques

Deux codes numériques ont été utilisés durant ma thèse. Le premier est le code à deux dimensions STELEM (Charbonneau & MacGregor 1992; Jouve et al. 2008) qui résout les

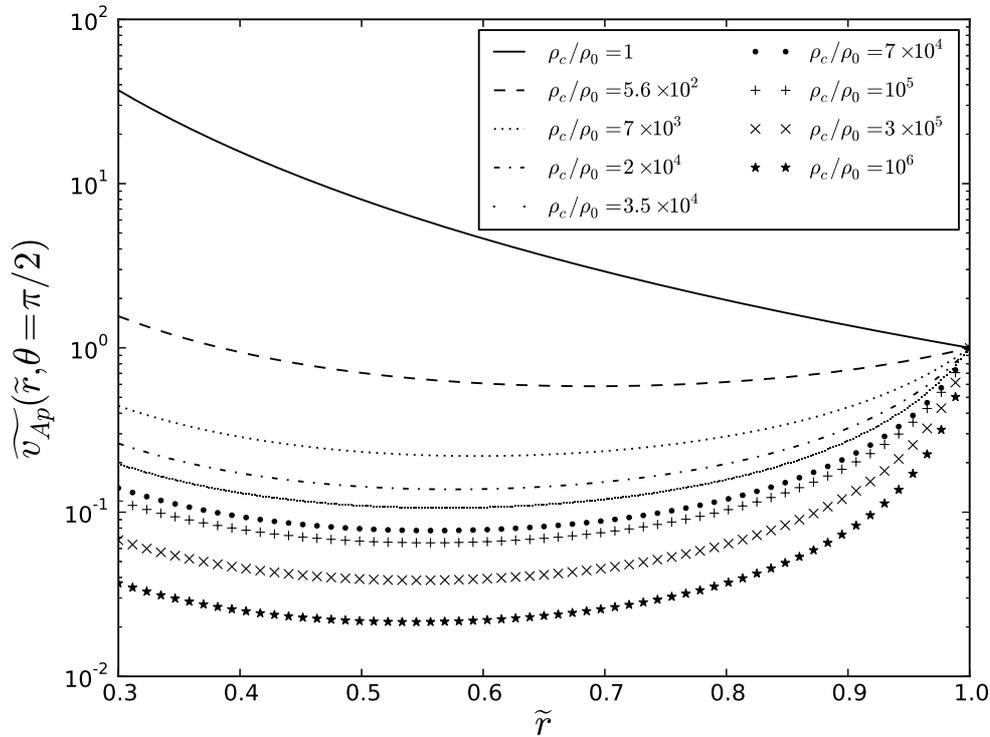


FIGURE 3.2 – \tilde{v}_{Ap} à l'équateur en fonction du rayon \tilde{r} pour le champ magnétique poloidal défini par l'Éq. (3.22) et pour différents contrastes de masse volumique entre le rayon interne et le rayon externe du domaine de calcul. Chaque contraste correspond à un profil de masse volumique créé à partir de celui d'un modèle polytropique d'étoile d'indice $n_{poly} = 3$ coupé à un certain rayon.

équations de la MHD grâce à une méthode d'éléments finis en espace et un schéma de Runge-Kutta d'ordre 3 en temps. Le domaine de calcul est limité à la coupe méridienne d'une coquille sphérique où $r \in [R_c, R]$ et $\theta \in [0, \pi]$, avec $R_c = 0.3R$ (voir FIGURE 3.1). Suivant les valeurs des nombres sans dimension et les conditions initiales et aux limites, différentes résolutions spatiales et temporelles ont été requises. J'ai utilisé des grilles spatiales allant de $N_r \times N_\theta = 128 \times 128$ à 512×512 éléments. Le pas de temps est ajusté pour satisfaire le critère de Courant-Friedrichs-Lewy. Il varie de $dt = 10^{-3}$ à $10^{-8} t_{Ap}$ selon les simulations effectuées. L'avantage de ce code à deux dimensions est qu'il est peu coûteux en temps de calcul ce qui permet d'explorer rapidement une large gamme de paramètres. J'ai par exemple pu faire varier Lu de 10 à 10^5 , chose irréalisable avec un code à trois dimensions qui demande plus de ressources numériques. Les résultats des simulations faites avec STELEM, présentés dans la section suivante, m'ont permis de réaliser une étude approfondie de l'évolution d'un champ magnétique axisymétrique dans une zone radiative sans circulation méridienne.

Le code open source (<https://github.com/magic-sph/magic>) à trois dimensions MagIC (Wicht 2002) a été utilisé pour étudier l'effet de la stratification stable et les instabilités magnétiques non-axisymétriques. MagIC résout les équations de la MHD en employant une décomposition poloïdale/toroïdale du flux de masse $\bar{\rho} \mathbf{v}$ et du champ magnétique \mathbf{B}

$$\bar{\rho} \mathbf{v} = \nabla \times \nabla \times (W \mathbf{e}_r) + \nabla \times (Z \mathbf{e}_r) \quad , \quad (3.41)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \nabla \times (C \mathbf{e}_r) + \nabla \times (D \mathbf{e}_r) \quad , \quad (3.42)$$

où W (C) et Z (D) sont les potentiels scalaires poloïdaux et toroïdaux. Cette décomposition est possible car \mathbf{v} et \mathbf{B} sont des champs dit solénoïdaux, c'est à dire à divergence nulle. Elle réduit le nombre de variables indépendantes du problème en passant de huit variables (les trois composantes de \mathbf{v} et \mathbf{B} ainsi que les fluctuations de pression p_1 et de température T_1) à six (W , Z , C , D , p_1 et T_1). La résolution numérique des équations de la MHD est facilitée car leur nombre est également réduit de deux. W , Z , C , D , p_1 et T_1 sont ensuite décomposés sur la base des harmoniques sphériques jusqu'à un degré l_{max} en colatitude θ et longitude φ et en polynômes de Chebyshev jusqu'à un degré n_{max} dans la direction radiale. Une description complète de la méthode numérique utilisée dans MagIC peut être trouvée dans Gilman & Glatzmaier (1981). Le domaine de calcul est celui d'une coquille sphérique telle que $r \in [R_c, R]$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. J'ai utilisé le code MagIC pour les simulations axisymétriques avec circulation méridienne ainsi que pour les simulations non-axisymétriques qui seront présentées dans le Chapitre 4. La résolution spatiale et le pas de temps d'intégration ont respectivement été variés suivant les cas de $N_r \times N_\theta \times N_\varphi = 96 \times 48 \times 96$ à $144 \times 288 \times 576$ points et de $dt = 10^{-4}$ à $10^{-8} t_{Ap}$.

3.2 Résultats en l'absence de circulation méridienne

L'évolution du champ magnétique et de la vitesse angulaire dans des cas axisymétriques où la circulation méridienne est négligée est présentée dans cette section. Les cas avec circulation méridienne seront analysés dans la Section 3.4. En négligeant la circulation méridienne, le système d'équations de la MHD formé par les Éqs. (3.11-3.12-3.13-3.14-3.15-3.16) devient

$$\tilde{\rho} \tilde{r} \sin \theta \frac{\partial \tilde{\Omega}}{\partial \tilde{t}} = \frac{1}{\tilde{r} \sin \theta} (\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\nabla}) (\tilde{r} \sin \theta \tilde{B}_\varphi) + \frac{Pm_0}{Lu} \left(\tilde{\Delta} - \frac{1}{\tilde{r}^2 \sin^2 \theta} \right) (\tilde{r} \sin \theta \tilde{\Omega}) \quad , \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial \tilde{B}_\varphi}{\partial \tilde{t}} = \tilde{r} \sin \theta (\tilde{\mathbf{B}}_{\mathbf{p}} \cdot \tilde{\nabla}) \tilde{\Omega} + \frac{1}{Lu} \left(\tilde{\Delta} - \frac{1}{\tilde{r}^2 \sin^2 \theta} \right) \tilde{B}_\varphi \quad . \quad (3.44)$$

Il se réduit à un simple système de deux équations à deux inconnus, la composante toroïdale du champ magnétique B_φ et la vitesse angulaire Ω . Sans circulation méridienne, l'évolution temporelle du champ poloïdal est uniquement dictée par la diffusion magnétique. Or, comme indiqué dans le Chapitre 2, je m'intéresse ici à des processus prenant place sur des temps caractéristiques beaucoup plus courts que le temps de diffusion d'un

champ magnétique stellaire structuré à grande échelle. Le champ poloïdal est donc considéré comme indépendant du temps. On peut noter que ce système d'équations avec l'adimensionnement réalisé dans la Section 3.1.1 ne fait intervenir que deux nombres sans dimension, le nombre de Lundquist Lu et le nombre de Prandtl magnétique Pm_0 . C'est ici que notre adimensionnement se révèle judicieux. Comme montré dans la Section 2.2 de Gaurat et al. (2015), un adimensionnement plus classique avec $1/\Omega_0$ comme échelle de temps ferait apparaître trois nombres sans dimensions. Notre adimensionnement simplifie donc grandement l'étude paramétrique du problème sans circulation méridienne présentée ici. Notons que seule l'influence du nombre de Lundquist Lu est testée dans cette section, Pm_0 étant toujours égal à 1. Le champ magnétique poloïdal adopté est celui du dipôle donné par l'Éq. (3.22), les conditions aux limites concernant le champ magnétique sont celles d'un isolant en $r = R$ et d'un conducteur parfait en $r = R_c$ et une condition aux limites *stress-free* en $r = R$ pour le champ de vitesse est utilisée. En $r = R_c$, la condition aux limites sur le champ de vitesse est variée.

L'évolution du système va dans un premier temps être décrite qualitativement, mettant en avant les différentes phases de l'évolution d'un champ magnétique axisymétrique et les mécanismes associés. Une attention particulière sera ensuite portée sur le rapport entre B_φ et B_p qui peut être un paramètre clé de l'étude de la stabilité d'un champ magnétique comme on a pu le voir dans la Section 2.4. L'influence du nombre de Lundquist, du profil de masse volumique ainsi que des conditions initiales et aux limites sera enfin analysée. Le détail des résultats qui vont être présentés est disponible dans Gaurat et al. (2015), cette section faisant office de résumé.

3.2.1 Un cas typique

La FIGURE 3.3 montre l'évolution de B_φ , de B_φ/B_p et de Ω pour un cas typique (ci-après nommé cas de référence). Les paramètres de la simulation sont $Lu = 10^2$, un contraste de densité $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$, le profil initial radial de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.36) et une condition aux limites fixe en $r = R_c$ sur le champ de vitesse. Différentes phases de l'évolution de B_φ et Ω peuvent être distinguées. La première est une phase dite cinématique où B_φ est créé par effet Ω sans que celui-ci ne soit suffisamment intense pour rétroagir significativement sur la rotation différentielle (panel *a*). Après cette phase, des ondes d'Alfvén excitées par la rétroaction du champ magnétique se propagent le long des lignes de champ poloïdal, vers l'extérieur dans un premier temps (panel *b*) puisque la perturbation initiale de Ω est principalement concentrée au rayon interne.

Sur le panel *d*, on peut remarquer près du rayon interne au niveau de l'équateur une région de signe opposé sur B_φ . Ceci est dû à la réflexion d'ondes d'Alfvén sur l'équateur qui se comporte comme une interface où $B_\varphi = 0$ (condition isolante) et $\partial\Omega/\partial\theta = 0$ (condition *stress-free*), un couple de conditions qui permet ces réflexions (voir Section 2.2.5). L'évolution du système est par la suite caractérisée par la propagation et la réflexion d'ondes d'Alfvén sur les limites externe et interne du domaine de calcul mais aussi sur l'équateur.

S'en suit une période où le mélange de phase décrit dans la Section 2.2.4 devient actif. Les forts gradients de B_φ et de Ω créés par la propagation et la réflexion des ondes

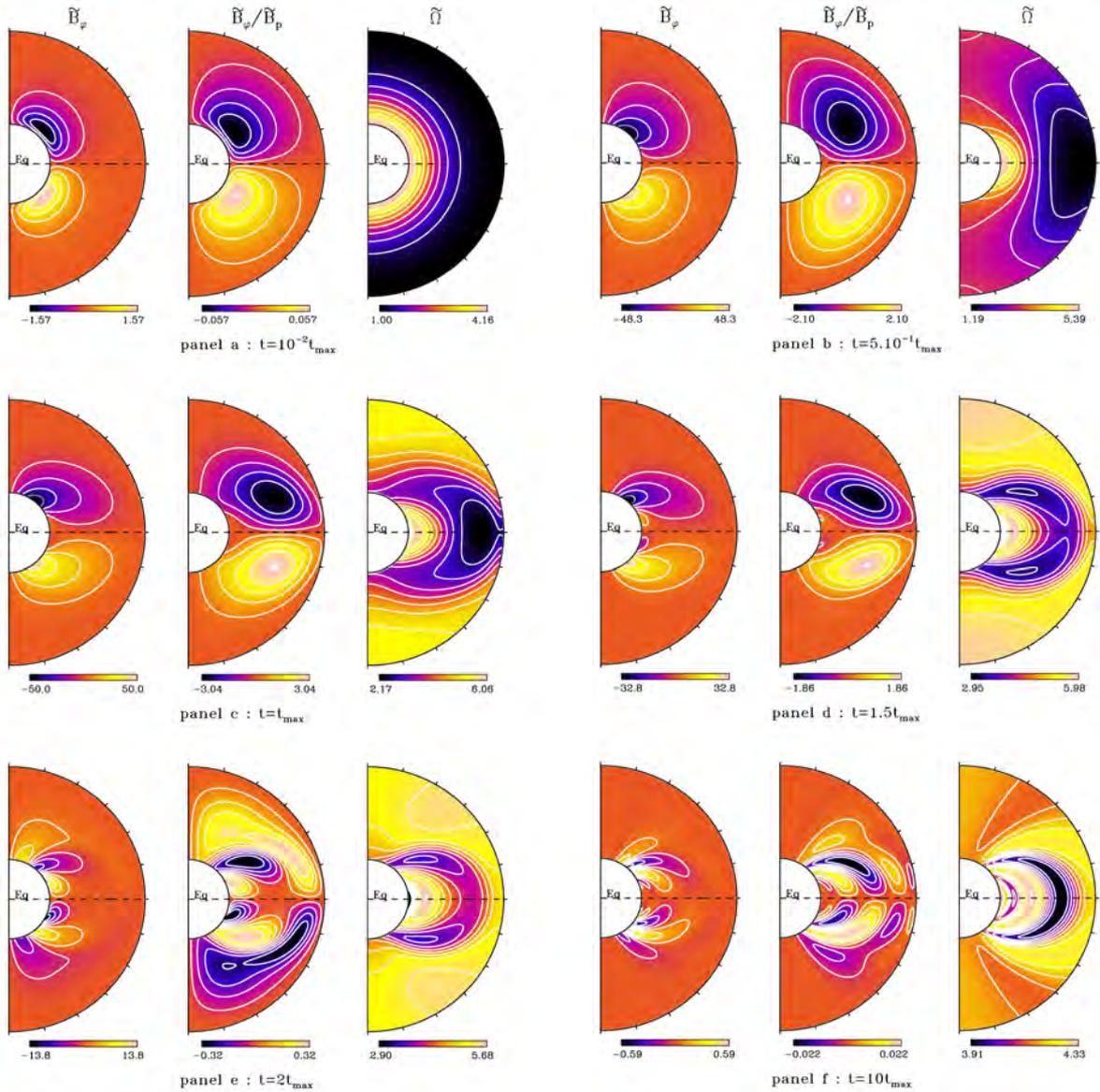


FIGURE 3.3 – Coupes méridiennes à différents temps de \tilde{B}_φ , $\tilde{B}_\varphi/\tilde{B}_p$ et $\tilde{\Omega}$ pour le cas de référence. t_{max} , le temps auquel est atteint $max(B_\varphi/B_p)$, est égal à $1.85 t_{Ap}$. La barre de couleur au bas des coupes méridiennes indique les valeurs minimales et maximales de chaque variable. Les paramètres de la simulation sont $Lu = 10^2$, un contraste de densité $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$, le profil initial radial de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.36) et une condition aux limites fixe en $r = R_c$ sur le champ de vitesse.

d'Alfvén (panel e) sont alors rapidement diffusés. L'intensité de B_φ diminue et le système évolue finalement vers un état stationnaire d'isrotation où Ω est constant le long des lignes de champ poloidal (visible sur le panel f). Le seul état stationnaire compatible avec les conditions aux limites adoptées dans cette simulation et la loi d'isrotation de

Ferraro (1937) est la rotation solide. Elle est atteinte sur des temps de l'ordre de quelques temps caractéristiques de diffusion et n'est pas montrée sur la FIGURE 3.3.

3.2.2 Évolution de B_φ/B_p

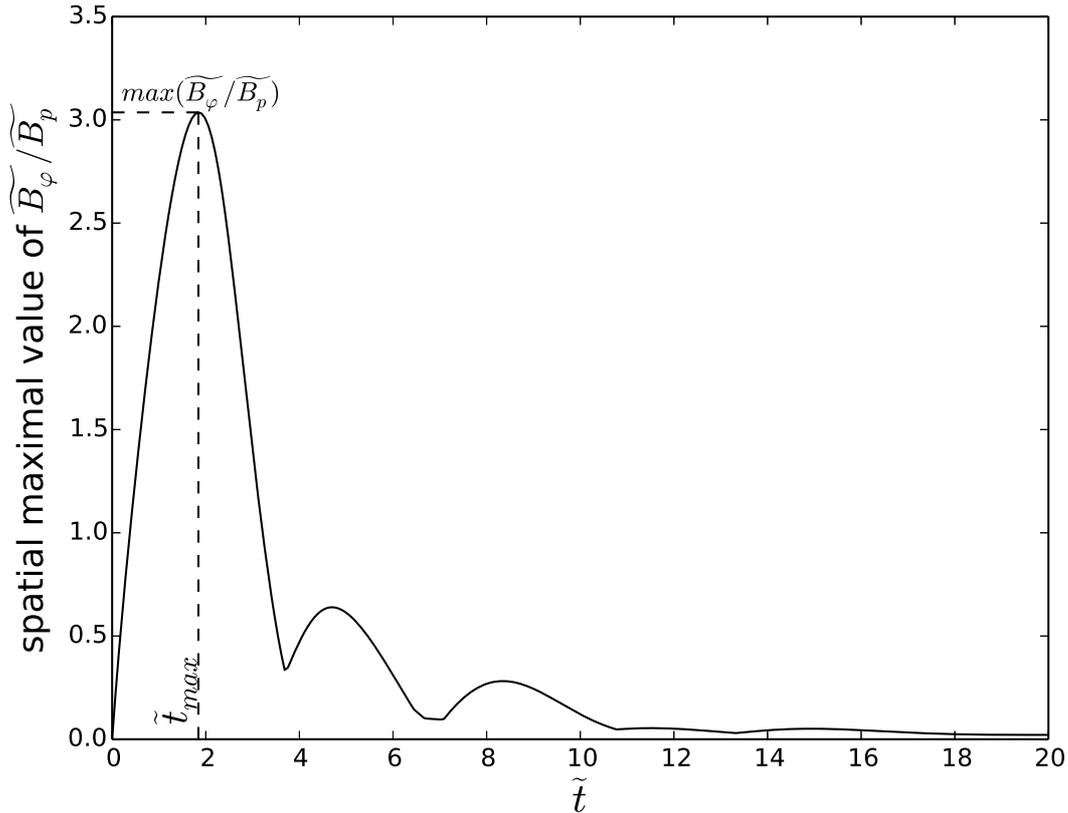


FIGURE 3.4 – Évolution du maximum spatial de $\tilde{B}_\varphi/\tilde{B}_p$ pour le cas de référence. La ligne en tirets horizontale indique $\max(\tilde{B}_\varphi/\tilde{B}_p)$ et la verticale indique \tilde{t}_{max}

Puisque le rapport B_φ/B_p est un paramètre important de la stabilité d'un champ magnétique d'après ce que l'on a dit au chapitre précédent, je me focalise ici sur l'évolution de ce rapport. La FIGURE 3.4 montre l'évolution du maximum spatial de B_φ/B_p , c'est à dire la valeur maximale atteinte dans tout le domaine de calcul. Dans un premier temps, le maximum spatial de B_φ/B_p croît linéairement. Comme on peut le voir sur les panels *a*, *b* et *c* de la FIGURE 3.3, ce maximum spatial se propage comme une onde d'Alfvén le long d'une ligne de champ poloidal. Il atteint alors un maximum temporelle, noté $\max(B_\varphi/B_p)$, au temps t_{max} . Le maximum spatial de B_φ/B_p oscille ensuite à cause des réflexions des ondes d'Alfvén sur les interfaces avec une période environ égale à $2t_{max}$. Il décroît finalement rapidement vers 0 tandis que le système tend vers un état stationnaire

du fait de la diffusion efficace provoquée par le mélange de phase. Cette évolution montrée sur la FIGURE 3.4 est typique de la plupart des simulations que j'ai réalisées.

Un résultat intéressant pour la suite dont le détail est donné dans la Section 3.2 de Gaurat et al. (2015) est que Ω et B_φ se comportent comme des ondes stationnaires plutôt que comme des ondes progressives d'Alfvén. Cela est dû aux conditions aux limites utilisées et à l'échelle spatiale de la rotation différentielle initiale qui est comparable à la longueur des lignes de champ poloidal.

3.2.3 Résumé de l'étude paramétrique

La quantité $\max(B_\varphi/B_p)$ définie dans la sous-section précédente indique si la configuration magnétique est localement dominée par sa composante toroïdale ou poloïdale. Le temps auquel cette quantité $\max(B_\varphi/B_p)$ est atteinte est donné par t_{max} qui est alors un bon indicateur du temps caractéristique d'évolution de la configuration axisymétrique. L'influence sur ces quantités du nombre de Lundquist Lu , du contraste de masse volumique ρ_c/ρ_0 ainsi que des conditions initiales et aux limites va maintenant être analysée. Les résultats permettant ces analyses sont répertoriés dans les TABLES 1, 2 et 4 de Gaurat et al. (2015) et dans la TABLE 3.1.

Influence des diffusivités magnétique et visqueuse

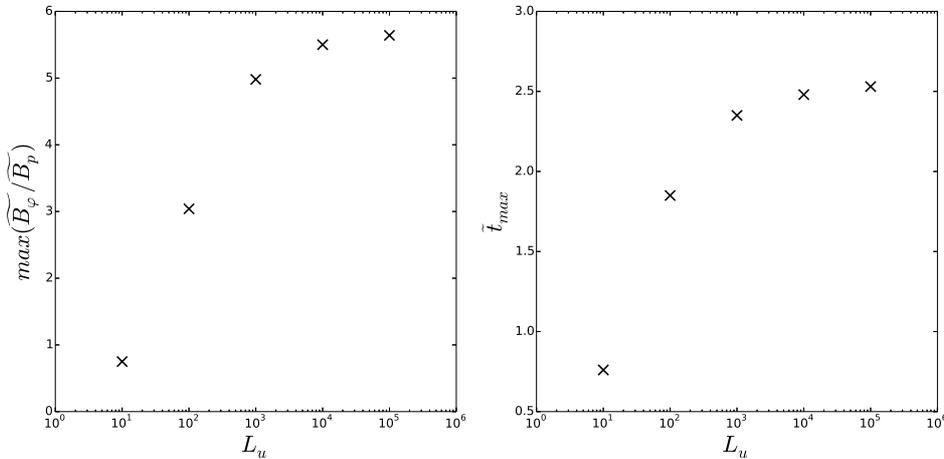


FIGURE 3.5 – $\max(\tilde{B}_\varphi/\tilde{B}_p)$ (à gauche) et \tilde{t}_{max} (à droite) en fonction de Lu . Les paramètres des simulations sont les mêmes que pour le cas de référence.

La FIGURE 3.5 montre $\max(\tilde{B}_\varphi/\tilde{B}_p)$ et \tilde{t}_{max} en fonction de Lu pour les mêmes paramètres de simulation que le cas de référence. $\max(\tilde{B}_\varphi/\tilde{B}_p)$ et \tilde{t}_{max} augmentent avec Lu et tendent vers une valeur asymptotique atteinte pour $Lu \gtrsim 10^4$. Le fait que les diffusions magnétique et visqueuse n'affectent plus le maximum de B_φ/B_p au-dessus d'une certaine valeur de Lu n'est pas surprenant vu que ce maximum est atteint sur une échelle

de temps de l'ordre d'un temps d'Alfvén, ce temps caractéristique devenant plus court par rapport au temps caractéristique de diffusion quand Lu augmente. Ce comportement asymptotique est un résultat très intéressant dans l'optique d'une application à des zones radiatives stellaires réalistes dans lesquelles les valeurs des coefficients de diffusion sont inatteignables par des simulations numériques.

Influence du profil de masse volumique

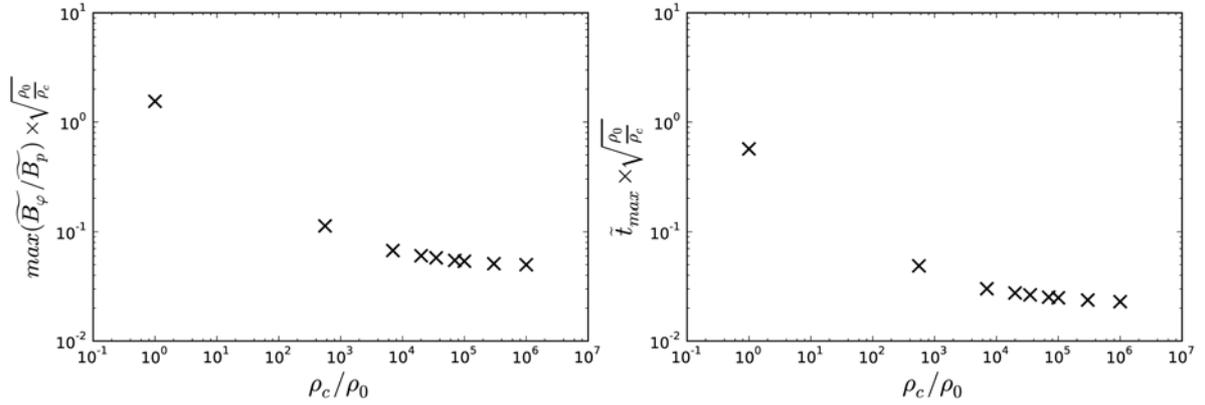


FIGURE 3.6 – $\max(\tilde{B}_\varphi/\tilde{B}_p) \times \sqrt{\rho_c/\rho_0}$ et $\tilde{t}_{max} \times \sqrt{\rho_c/\rho_0}$ en fonction de ρ_c/ρ_0 . Les paramètres des simulations sont $Lu = 10^5$, la rotation différentielle radiale initiale donnée par l'Éq. (3.36) et Ω fixé au rayon interne.

Les effets d'un contraste de masse volumique ont été étudiés en variant ρ_c/ρ_0 entre 1 et 10^6 . Pour une configuration donnée ($Lu = 10^5$, la rotation différentielle radiale initiale donnée par l'Éq. 3.36 et Ω fixé au rayon interne), la FIGURE 3.6 montre que $\max(\tilde{B}_\varphi/\tilde{B}_p) \times \sqrt{\rho_c/\rho_0}$ et $\tilde{t}_{max} \times \sqrt{\rho_c/\rho_0}$ tendent vers une limite asymptotique lorsque ρ_c/ρ_0 augmente. Ce comportement asymptotique est attendu si le mécanisme physique responsable de l'atteinte d'un maximum de B_φ/B_p est confiné dans l'intérieur stellaire vu qu'au-dessus d'un certain ρ_c/ρ_0 le profil de masse volumique n'est plus modifié dans les couches internes de la coquille sphérique. Il est expliqué dans la Section 3.5 de Gaurat et al. (2015) que c'est bien le cas car $\max(B_\varphi/B_p)$ est atteint sur une ligne de champ poloïdal confinée dans ces couches internes. Tout comme pour le régime asymptotique atteint pour de faibles diffusivités, ce résultat permet une extrapolation à des contrastes de masse volumique réalistes inatteignables par des simulations numériques.

Influence des conditions initiales et aux limites

La rotation différentielle initiale peut avoir une influence importante sur $\max(B_\varphi/B_p)$. La TABLE 3.1 résume les résultats des simulations obtenus suivant les profils de rotation utilisés. Elle répertorie également les prédictions de modèles analytiques qui seront présentés dans la section suivante. On voit que $\max(B_\varphi/B_p)$ varie entre $18.5 t_{Ap}/t_\Omega$ pour le

Condition initiale pour Ω	\tilde{t}_{max} (simulation)	\tilde{t}_{max} (modèle SW)	$max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (simulation)	$max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (modèle local)	$max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (modèle SW)
Eq. 3.34 (profil radial)	2.48	2.55	3.63	4.58	2.93
Eq. 3.35 (profil radial)	2.50	2.55	18.5	8.85	13.1
Eq. 3.36 (profil radial)	2.48	2.55	5.50	4.86	4.16
Eq. 3.37 (profil cylindrique)	0.96	2.55	0.31	3.82	0.39
Eq. 3.38 (profil cylindrique)	1.35	2.55	2.19	6.13	2.91

TABLE 3.1 – Influence de la rotation différentielle initiale sur \tilde{t}_{max} et $max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$. Les paramètres des simulations sont $Lu = 10^4$, $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$ et Ω fixé au rayon interne.

profile en $1/r^2$ (Éq. 3.35), qui provoque le plus fort cisaillement hydrodynamiquement stable, et $0.31 t_{Ap}/t_\Omega$ pour le profil cylindrique défini par l'Éq. (3.37). Généralement, plus le cisaillement est intense, plus $max(B_\varphi/B_p)$ est grand. Cependant, mes simulations montrent également qu'un profil cylindrique de rotation différentielle génère moins de B_φ qu'un profil radial car les isocontours de Ω sont plus alignés avec les lignes de champ poloidal dans le cas cylindrique, impliquant un effet Ω moins efficace. t_{max} est quasiment indépendant du profil radial de rotation différentielle utilisé, signifiant qu'il ne dépend pas de l'intensité du cisaillement dans ces cas-là. Il varie cependant de $0.96 t_{Ap}$ à $1.35 t_{Ap}$ pour les deux profils cylindriques considérés.

Le profil initial de rotation différentielle a aussi une influence sur la valeur du nombre sans dimension $\Omega/\omega_{A_\varphi}$. Comme nous l'avons souligné dans la Section 2.4.4, la valeur de cette quantité détermine quelle instabilité est favorisée, si les conditions sont réunies pour qu'elle se déclenche, entre l'instabilité magnétorotationnelle et celle de Tayler. La valeur minimale que peut atteindre $\Omega/\omega_{A_\varphi}$ dans tout le domaine de calcul varie entre environ 5 pour le profil cylindrique défini par l'Éq. (3.37), favorisant l'instabilité magnétorotationnelle comme le montrent Jouve et al. (2015), et 2 pour le profil en $1/r^2$. Les autres paramètres de mes simulations n'influent pas ou très peu la valeur de $\Omega/\omega_{A_\varphi}$, seule la façon dont le champ poloidal est enroulé par la rotation différentielle, c'est à dire le gradient de rotation projeté le long des lignes de champ poloidal, a de l'importance.

$max(B_\varphi/B_p)$ et t_{max} sont moins impactés par les conditions aux limites sur Ω que par les autres paramètres physiques testés dans mon étude. Je ne rentre donc pas ici dans les détails (voir TABLE 4 et Section 3.6 de Gaurat et al. 2015), leur influence étant trop peu significative. Si des échelles de temps plus longues étaient considérées et que l'état final de nos configurations nous importait, les conditions aux limites auraient un rôle prépondérant car elles déterminent les propriétés de réflexion des ondes d'Alfvén aux interfaces.

3.3 Des modèles simples pour décrire l'évolution du champ magnétique

Dans cette section, deux modèles qui fournissent une prédiction de $max(B_\varphi/B_p)$ et t_{max} sont présentés. Leurs prédictions sont comparées aux résultats des simulations. Le premier est un modèle local qui utilise les mêmes hypothèses phénoménologiques que dans

Aurière et al. (2007). Le second modèle consiste en une estimation de la ligne de champ poloïdal sur laquelle $\max(B_\varphi/B_p)$ est atteint afin de résoudre sur cette ligne de champ l'équation de propagation des ondes d'Alfvén.

3.3.1 Un modèle local

Comme nous l'avons vu dans la Section 1.1.5, partant de l'équation d'induction (1.1) du champ magnétique toroïdal pour laquelle le terme de diffusion est négligé, Aurière et al. (2007) supposent que le champ toroïdal est d'intensité maximale et rétroagit sur la rotation différentielle après un temps $\tau_A = \ell_{\nabla\Omega}/v_{Ap}$ correspondant à la période d'une onde d'Alfvén de longueur d'onde $\ell_{\nabla\Omega} = \Omega/\|\nabla\Omega\|$, l'échelle de longueur de la rotation différentielle initiale. En intégrant ensuite l'équation (1.1) de $t = 0$ à $t = \tau_A$ tout en supposant que la rotation différentielle est constante jusqu'au temps τ_A et que $\mathbf{B}_p \cdot \nabla\Omega \simeq B_p \|\nabla\Omega\|$, on obtient

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(r, \theta, t = \tau_A) = \frac{r \sin \theta \Omega(r, \theta, t = 0)}{v_{Ap}(r, \theta)} . \quad (3.45)$$

$\max(B_\varphi/B_p)$, r_{max} et θ_{max} , respectivement le rayon et la colatitude où $\max(B_\varphi/B_p)$ est atteint, et τ_A peuvent être déterminés en calculant le maximum spatial de l'Éq. (3.45).

Parmi les hypothèses de ce modèle, négliger la diffusion magnétique est justifié puisque les résultats numériques ont montré que $\max(B_\varphi/B_p)$ devient indépendant de Lu quand $Lu \gtrsim 10^4 - 10^5$. Relier τ_A à l'échelle de longueur de la rotation différentielle initiale $\ell_{\nabla\Omega}$ mène à une expression simple de $\max(B_\varphi/B_p)$. Cependant, B_φ/B_p pris à $t = \tau_A$ ne dépend pas du gradient initial de Ω et en particulier de sa projection sur les lignes de champ poloïdal. Si la loi d'isrotation de Ferraro est initialement vérifiée, il n'y a pas d'effet Ω et B_φ devrait rester égal à zéro. Le modèle local prédit de manière incorrecte le contraire. Un autre problème est qu'avec un modèle local, les effets des conditions aux limites ne sont pas pris en compte.

3.3.2 Un modèle d'ondes d'Alfvén stationnaires

Puisque les perturbations initiales de Ω et B_φ se propagent comme des ondes d'Alfvén le long des lignes de champ poloïdal, un modèle plus précis serait de résoudre une équation d'onde unidimensionnelle le long de la ligne de champ sur laquelle $\max(B_\varphi/B_p)$ est atteint. On peut s'attendre à ce que cette ligne de champ soit celle pour laquelle l'effet Ω dure le plus longtemps et contribue donc le plus à un B_φ intense. Partant de ce principe, supposons alors que $\max(B_\varphi/B_p)$ est atteint sur la ligne de champ dont le temps de propagation $\tau(L) = \int_0^L ds_l/v_{Ap}$ d'une onde d'Alfvén le long de cette ligne de longueur L (du rayon interne à l'équateur ou au rayon externe) est le plus long. La ligne de champ obtenue avec cette condition dans le cas d'un contraste de masse volumique $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$ et du champ poloïdal défini par l'Éq. (3.22) est indiquée en blanc sur la FIGURE 3.1.

Comme on l'a vu dans la Section 2.2.3, l'équation d'onde 1D à résoudre le long de la ligne de champ choisie est donnée par l'Éq. (2.15). Mes résultats ont montré que Ω

se comporte approximativement comme une onde stationnaire avec les rotations différentielles initiales utilisées. Nous cherchons donc des solutions harmoniques de la forme $f(s_l) \exp(i\omega t)$. On va de plus considérer le mode fondamental comme une solution approximée du problème puisque la perturbation initiale est dominée par sa composante à grande échelle. En utilisant l'approximation de Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB), on obtient les solutions de l'équation d'onde. $B_\varphi/B_p(s_l, t = t_{max})$ est finalement calculé en intégrant l'équation d'induction de $t = 0$ à t_{max}

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(s_l, t = t_{max}) = \Delta\Omega \frac{g(s_l)}{\sqrt{v_{Ap}(s_l) v_{Ap}(L)}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau(s_l)}{\tau(L)}\right) , \quad (3.46)$$

pour des conditions aux limites sur Ω fixe en $s_l = 0$ et *stress-free* en $s_l = L$, avec $\Delta\Omega = \Omega(s_l = 0, t = 0) - \Omega(s_l = L, t = 0)$, $g(s_l) = r(s_l) \sin\theta(s_l)$, $t_{max} = \tau(L)$ et $\tau(s_l) = \int_0^{s_l} \frac{ds'_l}{v_{Ap}}$.

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(s_l, t = t_{max}) = \frac{\Delta\Omega}{2} \frac{g(s_l)}{\sqrt{v_{Ap}(s_l) v_{Ap}(L)}} \sin\left(\pi \frac{\tau(s_l)}{\tau(L)}\right) , \quad (3.47)$$

pour des conditions aux limites *stress-free* en $s_l = 0$ et en $s_l = L$ et avec $t_{max} = \frac{\tau(L)}{2}$. Une présentation exhaustive du modèle d'ondes d'Alfvén stationnaires ainsi que la dérivation complète des Éqs. (3.46) et (3.47) sont données dans l'Annexe B.

Généralement, le modèle d'ondes d'Alfvén stationnaires est en très bon accord avec les simulations. En particulier, t_{max} est estimé par ce modèle avec une très bonne précision, de l'ordre de quelques pourcents dans les cas où l'échelle de longueur de la rotation différentielle initiale n'est pas trop petite par rapport à l'épaisseur de la coquille sphérique. L'influence des conditions initiales et aux limites est bien mieux prise en compte avec le modèle d'onde d'Alfvén que le modèle local comme on peut le voir dans la TABLE 3.1 qui donne, pour les différents profils de rotation différentielle utilisés, les prédictions de $\max(B_\varphi/B_p)$ et t_{max} du modèle local et du modèle d'ondes d'Alfvén stationnaires (SW pour *Standing Wave* en anglais). Les prédictions des modèles lorsque les autres paramètres de simulation sont variés sont disponibles dans les TABLES 1, 2 et 4 de Gaurat et al. (2015) et plus de détails sur la comparaison entre modèles et simulations sont fournis dans la Section 4.3 de cet article.

3.4 Influence de la circulation méridienne

Inclure la circulation méridienne complexifie le problème comme on a pu le noter dans la Section 2.2.7 car il faut alors résoudre le système complet des équations de la MHD (3.11-3.12-3.13-3.14-3.15-3.16). Il est alors notamment nécessaire de prendre en compte les effets de la stratification stable, quantifiés par le nombre sans dimension N/Ω_0 , ce qui a demandé l'utilisation du code numérique MagIC. L'évolution du système devient également dépendante de la diffusion thermique à travers le nombre de Prandtl $Pr_0 = \nu_0/\kappa_0$. L'intensité de la rotation différentielle par rapport à l'intensité du champ poloidal initial, quantifiée par le nombre sans dimension $t_{Ap}/t_\Omega = R\Omega_0\sqrt{4\pi\rho_0}/B_0$, influence l'évolution

t_{Ap}/t_Ω	$max(E_{m_\varphi}/E_{m_p})$	τ_{max}/t_{Ap}	$max(E_{cin,tor}/E_{cin,pol})$
10^{-3}	2.41×10^{-9}	2.60×10^{-1}	4.11×10^{-5}
10^{-2}	2.41×10^{-7}	2.60×10^{-1}	4.11×10^{-3}
10^{-1}	2.40×10^{-5}	2.60×10^{-1}	4.11×10^{-1}
1	2.43×10^{-3}	2.70×10^{-1}	4.86×10^1
10	6.40×10^{-1}	4.68×10^{-1}	4.29×10^2
10^2	3.49×10^1	3.96×10^{-1}	5.29×10^3

TABLE 3.2 – Influence de t_{Ap}/t_Ω sur $max(E_{m_\varphi}/E_{m_p})$, τ_{max}/t_{Ap} et $max(E_{cin,tor}/E_{cin,pol})$. Les paramètres des simulations sont $Lu = 100$, $N/\Omega_0 = 0$ et le profil cylindrique de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.37.)

du champ magnétique axisymétrique simplement du fait que $B_\varphi/B_p \propto t_{Ap}/t_\Omega$ lorsque la circulation méridienne est négligée. Désormais, t_{Ap}/t_Ω intervient directement dans le système d'équations de la MHD. Certains ingrédients physiques des simulations sont de plus modifiés par rapport aux simulations présentées dans la Section 3.2. Le champ magnétique poloïdal n'est plus considéré comme indépendant du temps car il est diffusé mais aussi advecté par la circulation méridienne. De plus, la géométrie du champ magnétique poloïdal est dorénavant donné par l'Éq. (3.23). Les conditions aux limites sont pour ces simulations : des conditions *stress-free* sur le champ de vitesse et isolantes sur le champ magnétique en $r = R_c$ et $r = R$. Le nombre de Prandtl magnétique Pm_0 reste égal à 1 comme précédemment. Le système d'équations de la MHD est résolu dans le cadre de l'approximation Boussinesq, c'est à dire que les fluctuations de masse volumique ne sont prises en compte que dans le terme de gravité de l'équation de Navier-Stokes (3.12) tandis que le profil initial de masse volumique est uniforme.

Pour étudier l'influence de la circulation méridienne sur la configuration magnétique, nous allons suivre ici l'évolution du rapport entre l'énergie magnétique toroïdale totale (intégrée sur tout le domaine de calcul) E_{m_φ} et poloïdale E_{m_p} . Par commodité, il est préférable de suivre avec MagIC l'évolution de E_{m_φ}/E_{m_p} plutôt que l'évolution du maximum spatial de B_φ/B_p . L'évolution de E_{m_φ}/E_{m_p} est similaire à celle du maximum spatial de B_φ/B_p présentée sur la FIGURE 3.4. Comme précédemment, $max(E_{m_\varphi}/E_{m_p})$ définit le maximum de E_{m_φ}/E_{m_p} au cours du temps et τ_{max} le temps auquel ce maximum est atteint.

3.4.1 Deux régimes selon la valeur de t_{Ap}/t_Ω

Dans des cas non-stratifiés, c'est à dire avec $N/\Omega_0 = 0$, et avec le profil cylindrique de rotation différentielle défini par l'Éq. (3.37), la TABLE 3.2 présente les valeurs de $max(E_{m_\varphi}/E_{m_p})$, τ_{max}/t_{Ap} et $max(E_{cin,tor}/E_{cin,pol})$, le maximum temporel du rapport entre l'énergie cinétique azimutale $E_{cin,tor}$ et l'énergie cinétique méridionale $E_{cin,pol}$, obtenues pour des t_{Ap}/t_Ω compris entre 10^{-3} à 10^2 . La FIGURE 3.7 donne une représentation gra-

phique de ces résultats. Les deux figures de gauche comparent les résultats des simulations avec circulation méridienne avec les résultats présentés dans la Section 3.2 des simulations sans circulation méridienne. Deux régimes peuvent être identifiés suivant la valeur de t_{Ap}/t_{Ω} . Pour des configurations où le champ magnétique a une importance prépondérante, c'est à dire pour $t_{Ap}/t_{\Omega} \lesssim 1$, les résultats avec ou sans circulation méridienne concordent fortement, avec $\max(E_{m_{\varphi}}/E_{m_p})$ proportionnel à $(t_{Ap}/t_{\Omega})^2$ et τ_{max}/t_{Ap} constant. La circulation méridienne a donc peu d'influence sur l'évolution de $E_{m_{\varphi}}/E_{m_p}$, au moins sur des temps courts de l'ordre de τ_{max} , lorsque $t_{Ap}/t_{\Omega} \lesssim 1$. Elle est pourtant dans ces cas-ci dominante par rapport à la rotation différentielle comme le montre le graphique de droite de la FIGURE 3.7. Des écarts plus importants entre les résultats avec ou sans circulation méridienne apparaissent lorsque $t_{Ap}/t_{\Omega} > 1$. Les valeurs de $\max(E_{m_{\varphi}}/E_{m_p})/(t_{Ap}/t_{\Omega})^2$ et de τ_{max}/t_{Ap} restent cependant du même ordre de grandeur quelque soit t_{Ap}/t_{Ω} . De plus, l'advection du champ poloïdal par la circulation méridienne n'est pas assez efficace pour modifier significativement le géométrie initiale du champ poloïdal.

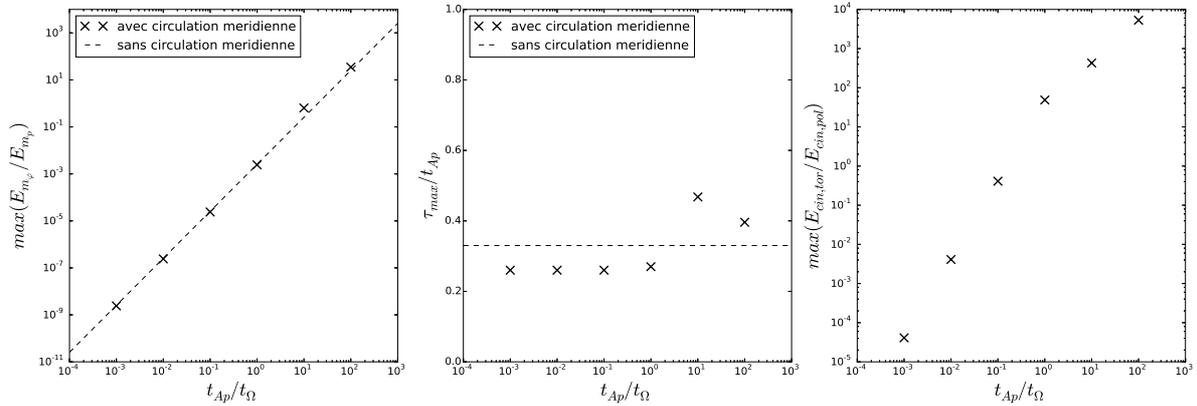


FIGURE 3.7 – $\max(E_{m_{\varphi}}/E_{m_p})$ (à gauche), τ_{max}/t_{Ap} (au milieu) et $\max(E_{cin,tor}/E_{cin,pol})$ (à droite) obtenus grâce aux simulations avec circulation méridienne en fonction de t_{Ap}/t_{Ω} . Les lignes en traits pointillés noirs sont les solutions des simulations sans circulation méridienne, des droites d'équation $\max(E_{m_{\varphi}}/E_{m_p}) = 2.55 \times 10^{-3} (t_{Ap}/t_{\Omega})^2$ (à gauche) et $\tau_{max}/t_{Ap} = 3.3 \times 10^{-1}$ (au milieu). Les paramètres des simulations sont $Lu = 100$, $N/\Omega_0 = 0$ et le profil cylindrique de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.37).

Lorsque le profil radial de rotation différentielle défini par l'Éq. (3.36) est utilisé au lieu du profil cylindrique, l'amplitude de la circulation méridienne devient plus importante. Dans ce cas, la géométrie initiale du champ poloïdal est susceptible d'être modifiée significativement par l'advection due à la circulation méridienne. Les deux premières coupes méridiennes de la FIGURE 3.8 montrent les configurations magnétiques (potentiel magnétique toroïdal \tilde{A}_{φ} en couleurs, dont les isocontours indiquent les lignes de champ poloïdal, et circulation méridienne en traits noirs) obtenues au temps $t = 0.5 t_{Ap}$ pour t_{Ap}/t_{Ω} égal à 2.02 (à gauche) et 202 (au milieu). Les autres paramètres de simulation sont les mêmes que précédemment à l'exception du profil de rotation différentielle qui est donc radial au lieu de cylindrique. Dans le cas où $t_{Ap}/t_{\Omega} = 2.02$, le champ magnétique poloïdal est

similaire à sa configuration initiale (voir FIGURE 3.1) tandis qu'il est grandement modifié et structuré à plus petites échelles spatiales dans le cas où $t_{Ap}/t_{\Omega} = 202$. La géométrie du champ magnétique toroïdal résultant de l'enroulement des lignes de champ poloïdal par la rotation différentielle est également drastiquement modifiée (non visible sur cette figure). L'advection du champ poloïdal par la circulation méridienne est efficace dans le cas où $t_{Ap}/t_{\Omega} = 202$ alors qu'elle a un effet peu significatif lorsque $t_{Ap}/t_{\Omega} = 2.02$, confirmant l'influence négligeable de la circulation méridienne lorsque $t_{Ap}/t_{\Omega} \lesssim 1$.

3.4.2 Influence de la stratification stable

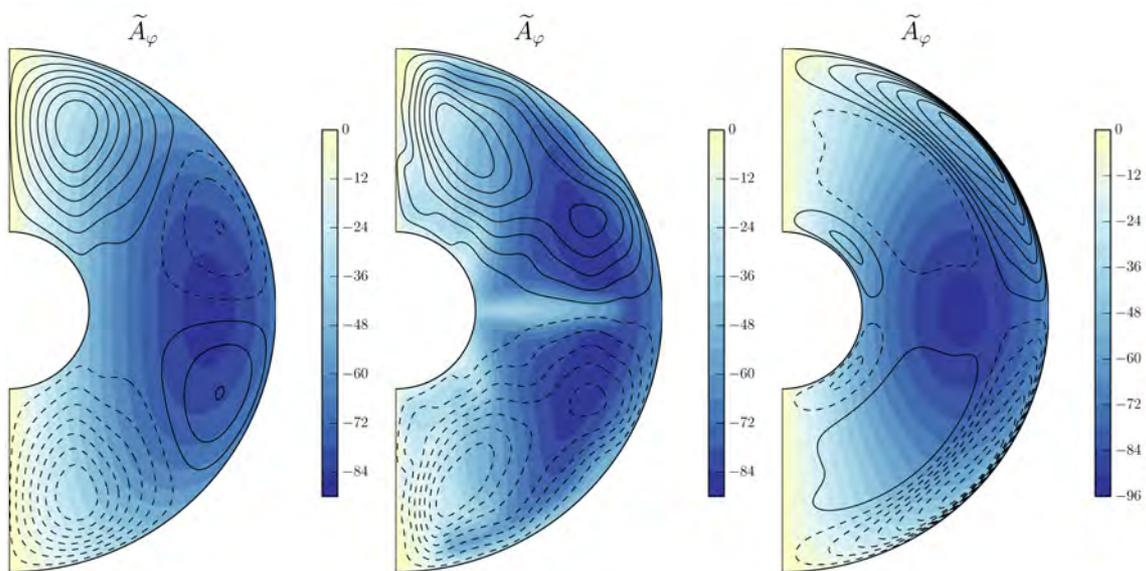


FIGURE 3.8 – Potentiel magnétique toroïdal en couleurs et isocontours de la circulation méridienne en traits noirs au temps $t = 0.5 t_{Ap}$. Les paramètres des simulations sont $Pr_0 = 1$, $Lu = 71$, le profil radial de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.36), t_{Ap}/t_{Ω} égal à 2.02 pour la figure de gauche et 202 pour les deux figures de droite et N/Ω_0 égal à 0 pour les deux figures de gauche et 10 pour la figure de droite.

La stratification stable est maintenant introduite en rendant non-nulle la fréquence de Brunt-Väisälä N . L'importance de la stratification stable dans mes simulations est d'autant plus grande que N/Ω_0 est grand. Lorsqu'un fluide est stratifié de façon stable, la poussée d'Archimède s'oppose aux mouvements verticaux et est à l'origine d'ondes internes de gravité de fréquence inférieure à N . L'amplitude de la composante radiale de la circulation méridienne est ainsi diminuée par la stratification stable ce qui limite l'advection du champ poloïdal par la circulation méridienne.

La TABLE 3.3 montre l'effet de N/Ω_0 sur $\max(E_{m_{\varphi}}/E_{m_p})$ et τ_{max}/t_{Ap} dans le cas où $t_{Ap}/t_{\Omega} = 808$ et où le profil de rotation radial défini par l'Éq. (3.36) est utilisé. Le paramètre N/Ω_0 a été varié de 0 à 20 dans ces simulations tandis qu'il est compris entre

N/Ω_0	$\max(E_{m_\varphi}/E_{m_p})$	τ_{\max}/t_{Ap}
2	7.70×10^2	2.61×10^{-1}
3	9.86×10^2	2.52×10^{-1}
4	1.12×10^3	2.53×10^{-1}
5	1.20×10^3	2.58×10^{-1}
7	1.29×10^3	2.59×10^{-1}
10	1.36×10^3	2.61×10^{-1}
20	1.42×10^3	2.64×10^{-1}

TABLE 3.3 – Influence de N/Ω_0 sur $\max(E_{m_\varphi}/E_{m_p})$ et τ_{\max}/t_{Ap} . Les paramètres des simulations sont $Pr_0 = 1$, $Lu = 35.5$, $t_{Ap}/t_\Omega = 808$ et le profil radial de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.36).

environ 50 et 300 dans la zone radiative d'une étoile de masse intermédiaire de la séquence principale (estimations de N/Ω_0 provenant d'une valeur moyenne de N calculée pour un modèle d'étoile polytropic d'indice $n_{poly} = 3$ et de valeurs typiques observées de Ω_0 pour des étoiles de masse intermédiaire). La table montre que $\max(E_{m_\varphi}/E_{m_p})$ augmente d'un facteur environ égal à 2 lorsque N/Ω_0 augmente de 2 à 20 tandis que τ_{\max}/t_{Ap} ne varie quasiment pas. Avec d'autres paramètres de simulation, la dépendance de $\max(E_{m_\varphi}/E_{m_p})$ avec la stratification stable peut être qualitativement différente. Par exemple, $\max(E_{m_\varphi}/E_{m_p})$ diminue lorsque N/Ω_0 augmente quand le profil cylindrique de rotation différentielle défini par l'Éq. (3.37) est utilisé au lieu du profil radial. La valeur de $\max(E_{m_\varphi}/E_{m_p})$ reste néanmoins toujours du même ordre de grandeur, la stratification stable n'a donc pas une influence très significative sur la valeur que peut atteindre le rapport E_{m_φ}/E_{m_p} . La géométrie de la configuration magnétique est par contre drastiquement modifiée par l'ajout de la stratification stable comme le montre la coupe méridienne de droite de la FIGURE 3.8 en comparaison avec celle du milieu. La circulation méridienne est structurée à plus petite échelle dans la direction radiale dans ce cas stratifié tel que $N/\Omega_0 = 10$, l'amplitude de la composante radiale de la circulation méridienne étant diminuée par la stratification stable. Le champ poloïdal reste alors structuré à grande échelle indiquant que l'advection du champ poloïdal par la circulation méridienne est réduite par rapport au cas non-stratifié.

3.4.3 Influence de la diffusivité thermique

La diffusion thermique permet aux mouvements réalisés sur des échelles verticales suffisamment petites de ne pas ressentir l'effet de la stratification stable. En effet, les échelles verticales ℓ plus petites que l'échelle critique $\ell_c = \sqrt{\kappa/N}$ sont telles que le temps caractéristique de la diffusion thermique $\tau_\kappa = \ell^2/\kappa$ est inférieur au temps caractéristique de la poussée d'Archimède $t_N = 1/N$ de telle sorte que les écarts de densité provoqués par les mouvements verticaux sont fortement réduits par diffusion thermique. ℓ_c est donc obtenu en égalisant $\tau_\kappa = \ell^2/\kappa$ avec $t_N = 1/N$. Dans la zone radiative du Soleil par

exemple, où $N = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ et $\kappa = 10^7 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, l'échelle critique $\ell_c = 1 \text{ km} \simeq 1.4 \times 10^{-6} R_\odot$. La gamme d'échelles dynamiques inférieures à ℓ_c , et donc non affectées par la stratification stable, est importante dans une zone radiative stellaire puisque $Pr = \nu/\kappa$ est très inférieur à 1. Jusqu'à maintenant, le nombre de Prandtl Pr_0 a été fixé à 1 dans nos simulations, ce qui nous donne par exemple une échelle critique $\ell_c \simeq 2.6 \times 10^{-3} R$ dans le cas présenté sur la coupe méridienne de droite de la FIGURE 3.8 (avec $N/\Omega_0 = 10$). Les échelles non affectées par la stratification stable sont donc très petites, inférieures à la résolution spatiale de la simulation. Pour étudier l'effet des échelles dynamiques inférieures à ℓ_c , Pr_0 a alors été varié de 1 à 10^{-5} de sorte que ℓ_c/R varie entre 2.6×10^{-3} et 8.4×10^{-1} pour l'exemple cité ci-dessus.

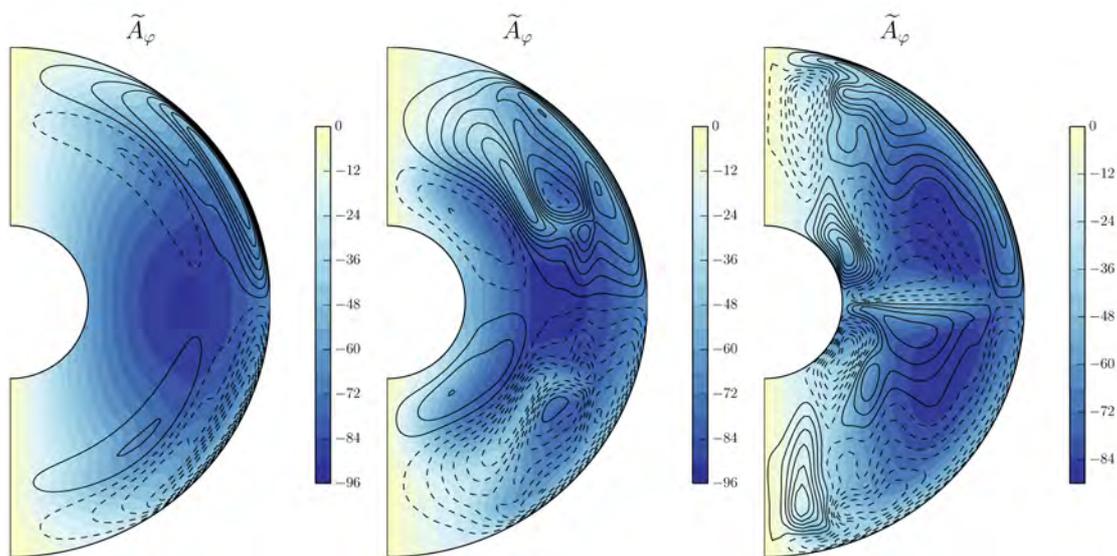


FIGURE 3.9 – Potentiel magnétique toroïdal en couleurs et isocontours de la circulation méridienne en traits noirs au temps $t = 0.5 t_{Ap}$. Les paramètres des simulations sont $Lu = 71$, $t_{Ap}/t_\Omega = 202$, le profil radial de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.36), $N/\Omega_0 = 10$ et Pr_0 égal à 10^{-1} (gauche), 10^{-3} (milieu) et 10^{-5} (droite).

La FIGURE 3.9 montre les lignes de champ polôïdal ainsi que les isocontours de la circulation méridienne pour Pr_0 égal à 10^{-1} (figure de gauche), 10^{-3} (figure du milieu) et 10^{-5} (figure de droite), que l'on peut aussi comparer avec le cas $Pr_0 = 1$ de la FIGURE 3.8 (à droite). L'échelle critique ℓ_c pour les cas $Pr_0 = 10^{-1}$, 10^{-3} et 10^{-5} est respectivement égale à $8.4 \times 10^{-3} R$, $8.4 \times 10^{-2} R$ et $8.4 \times 10^{-1} R$. Plus Pr_0 diminue, plus les mouvements sont permis sur des échelles verticales grandes et plus le champ polôïdal est advecté et déstructuré par la circulation méridienne. Pour la figure de droite, où l'échelle des mouvements verticaux autorisés est comparable à la taille de la coquille sphérique, on retrouve quasiment la même configuration magnétique que celle obtenue sans stratification stable (voir coupe méridienne du milieu de la FIGURE 3.8). Cela signifie clairement que la stratification stable n'affecte plus les mouvements ayant lieu dans l'ensemble de la coquille sphérique.

Effets combinés de la stratification stable et de la diffusivité thermique

Dans une étude purement hydrodynamique sur la tachocline du Soleil, Spiegel & Zahn (1992) ont montré que sous certaines hypothèses (modèle géostrophique axisymétrique à $Pr_0 \ll 1$) l'amplitude de la circulation méridienne en régime stationnaire est inversement proportionnelle à $Pr_0 \times (N/\Omega_0)^2$. Ainsi, plutôt que Pr_0 et N/Ω_0 pris indépendamment, c'est le produit $Pr_0 \times (N/\Omega_0)^2$ qui a de l'importance. Cette propriété est à rapprocher de l'analyse asymptotique des équations de la dynamique à petits Péclets (Lignières 1999) (rapport entre τ_κ et le temps caractéristique de l'écoulement) qui montre que dans ce régime les effets de la stratification stable et de la diffusivité thermique se combinent en un seul effet dont le temps caractéristique est t_N^2/τ_κ .

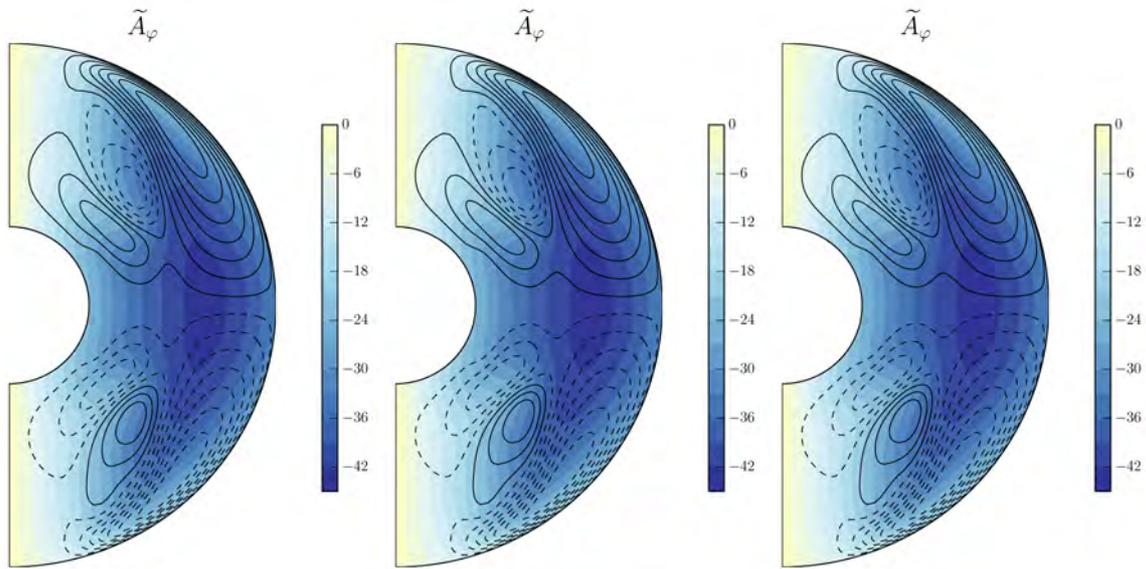


FIGURE 3.10 – Potentiel magnétique toroïdal en couleurs et isocontours de la circulation méridienne en traits noirs au temps $t = 0.5 t_{Ap}$. Les paramètres des simulations sont $Lu = 35.5$, $t_{Ap}/t_\Omega = 808$, le profil radial de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.36), N/Ω_0 et Pr_0 respectivement égaux à 5 et 10^{-3} (gauche), 15.8 et 10^{-4} (milieu) et 50 et 10^{-5} (droite) de sorte que $Pr_0 \times (N/\Omega_0)^2 = 2.5 \times 10^{-2}$ dans les trois cas.

En abaissant le nombre de Prandtl dans nos simulations MHD, nous retrouvons cette propriété. En effet, la FIGURE 3.10 présente trois configurations identiques obtenues pas des simulations numériques pour lesquelles N/Ω_0 et Pr_0 sont respectivement variés entre 5 et 50 et entre 10^{-3} et 10^{-5} mais toujours de sorte que $Pr_0 \times (N/\Omega_0)^2 = 2.5 \times 10^{-2}$. Le champ de vitesse méridien, la rotation ainsi que la configuration magnétique restent alors identiques. Cette propriété est vérifiée pourvu que Pr_0 soit suffisamment petit devant 1. Nous l'avons confirmée avec d'autres simulations et d'autres valeurs de $Pr_0 \times (N/\Omega_0)^2$. Dans l'exemple des simulations présentées sur la FIGURE 3.10, les trois configurations deviennent identiques au bout d'un temps très court de l'ordre de quelques centièmes d'un temps d'Alfvén t_{Ap} . En pratique, cette propriété nous permettra d'extrapoler nos

résultats à d'autres valeurs de Pr_0 et N/Ω_0 .

Chapitre 4

Stabilité d'un champ magnétique dans une zone radiative en rotation différentielle

L'étude préliminaire présentée dans le chapitre précédent nous a permis de caractériser l'influence de paramètres comme l'intensité du champ poloïdal initial ou la géométrie de la rotation différentielle sur l'évolution d'un champ magnétique axisymétrique dans une zone radiative en rotation différentielle. Les études existantes sur la stabilité des configurations magnétiques en rotation différentielle (présentées dans la Section 2.4) suggèrent que les configurations fortement dominées par le champ toroïdal sont susceptibles d'être instables. Ces configurations sont obtenues lorsqu'une rotation différentielle intense agit sur un champ poloïdal faible, ce que l'on peut traduire par $t_{Ap}/t_{\Omega} = R\Omega_0\sqrt{4\pi\rho_0}/B_0 \gg 1$. Les résultats des simulations axisymétriques ont révélé une dépendance quasi linéaire (voire même linéaire lorsque la circulation méridienne est négligée) de B_{φ}/B_p avec le nombre sans dimension t_{Ap}/t_{Ω} (voir FIGURE 3.7), confirmant l'importance de ce paramètre. La stabilité de ce type de configurations magnétiques a été étudiée numériquement par Jouve et al. (2015) dans le cas simplifié d'un fluide de densité uniforme. Lorsque le champ toroïdal est dominant, une instabilité magnétorotationnelle se déclenche dans leurs simulations. Cependant, comme l'état de référence axisymétrique évolue dans un temps environ égal à t_{Ap} , l'instabilité n'a pas toujours le temps de se développer suffisamment pour modifier la structure à grande échelle du champ magnétique. Or, dans le cadre du scénario de Aurière et al. (2007), nous recherchons justement ces situations où l'instabilité modifie la structure globale du champ. Les résultats de Jouve et al. (2015) montrent que cela arrive lorsque $t_{Ap}/t_{\Omega} \gtrsim 7 \times 10^2$, c'est-à-dire lorsque le taux de croissance σ de l'instabilité devient suffisamment grand vis-à-vis de l'inverse du temps d'évolution de l'état de référence axisymétrique : $\sigma \gtrsim 70 \Omega_{Ap}$, où $\Omega_{Ap} = 1/t_{Ap}$.

Un paramètre important dans l'étude de la stabilité d'un champ mixte est le rapport entre Ω et la fréquence d'Alfvén toroïdale $\omega_{A\varphi}$. Il détermine essentiellement quel type d'instabilité est favorisé entre l'instabilité magnétorotationnelle et celle de Tayler (voir Section 2.4.4). Rappelons que Jouve et al. (2015) ont montré, en appliquant la relation de dispersion de Ogilvie (2007) à une simulation typique non-stratifiée de leur étude,

que le déclenchement de l'instabilité de Tayler est favorisé lorsque $\Omega/\omega_{A_\varphi} \lesssim 1$ tandis que l'instabilité magnétorotationnelle se déclencherait plutôt lorsque $\Omega/\omega_{A_\varphi} > 1$. Ils ont de plus confirmé numériquement qu'une instabilité magnétorotationnelle se déclenche dans leurs configurations magnétiques qui sont toutes telles que $\Omega/\omega_{A_\varphi} \simeq 5$. Nos simulations axisymétriques montrent que la valeur minimale atteinte dans tout le domaine de calcul de $\Omega/\omega_{A_\varphi}$ peut varier entre environ 2 et 5 suivant le profil de rotation différentielle utilisé (voir Section 3.2.3). Il semble donc difficile d'obtenir des configurations magnétiques générées par effet Ω qui sont telles que l'instabilité de Tayler soit favorisée au détriment de l'instabilité magnétorotationnelle. La stratification stable, qui est absente de l'étude de Jouve et al. (2015), a néanmoins un effet stabilisant plus important sur l'instabilité magnétorotationnelle que sur l'instabilité de Tayler comme nous l'avons noté dans la Section 2.4.4. Il se pourrait alors que le régime de Tayler soit atteignable dans nos simulations stratifiées.

Dans ce chapitre, la stabilité d'un champ magnétique dans une zone radiative en rotation différentielle stratifiée de façon stable est étudiée. L'influence de l'intensité du champ poloïdal initial, à travers le nombre sans dimension t_{Ap}/t_Ω , et du profil de rotation différentielle sur le type d'instabilité qui peut se déclencher et sur son taux de croissance est testée. À l'instar de Jouve et al. (2015) pour des cas non-stratifiés, l'objectif est de trouver la valeur critique de t_{Ap}/t_Ω à partir de laquelle un champ magnétique est suffisamment instable pour modifier la structure globale du champ axisymétrique ainsi que de caractériser le champ magnétique de surface qui résulte des instabilités qui se développent. Les ingrédients physiques utilisés dans les simulations non-axisymétriques que j'ai réalisées pour cette étude de stabilité sont les mêmes que pour les simulations axisymétriques présentées dans la Section 3.4 : un champ magnétique poloïdal initial donné par l'Éq. (3.23), des conditions *stress-free* sur le champ de vitesse et isolantes sur le champ magnétique en $r = R_c$ et $r = R$, un profil de masse volumique de référence uniforme et un nombre de Prandtl magnétique $Pm_0 = 1$. À cause du coût important en temps de calcul des simulations 3D, les valeurs utilisées des nombres sans dimension sont par contre moins réalistes que dans les simulations axisymétriques. Lu et t_{Ap}/t_Ω sont par exemple respectivement variés de 30 à 200 et de 202 à 1717. Le nombre de Prandtl Pr_0 ainsi que le rapport entre la fréquence de Brunt-Väisälä N et Ω_0 sont quant à eux respectivement variés de 1 à 10^{-6} et de 0 à 50. Enfin, trois profils de rotation différentielle ont été testés, le profil cylindrique défini par l'Éq. (3.37) et les profils radiaux définis par les Éqs. (3.36) et (3.35). Cependant, l'étude de la stabilité magnétique des configurations utilisant le profil en $1/r^2$ (Éq. 3.35) est très limitée par le fait qu'elles sont parfois sujettes à des instabilités hydrodynamiques. La redistribution du moment cinétique par la circulation méridienne et le champ magnétique crée en effet localement dans certains cas des gradients de rotation instables vis-à-vis du critère de Rayleigh (avec un paramètre de cisaillement $q = -\partial \ln \Omega / \partial \ln r > 2$). Ces cas ne seront pas décrits plus en détail dans la suite du manuscrit.

Dans une première section, la stabilité des configurations magnétiques enroulées par la rotation différentielle cylindrique définie par l'Éq. (3.37) sera étudiée. L'influence de la stratification stable, de la diffusivité thermique et de l'intensité initiale du champ poloïdal sera testée. Le même cheminement sera adopté dans la seconde section à propos de la

stabilité des configurations magnétiques enroulées par la rotation différentielle radiale définie par l'Éq. (3.36). Enfin, l'impact sur le champ magnétique de surface des instabilités se développant dans les simulations présentées dans les deux premières sections sera discuté dans une troisième et dernière section.

4.1 Configurations magnétiques enroulées par une rotation différentielle cylindrique

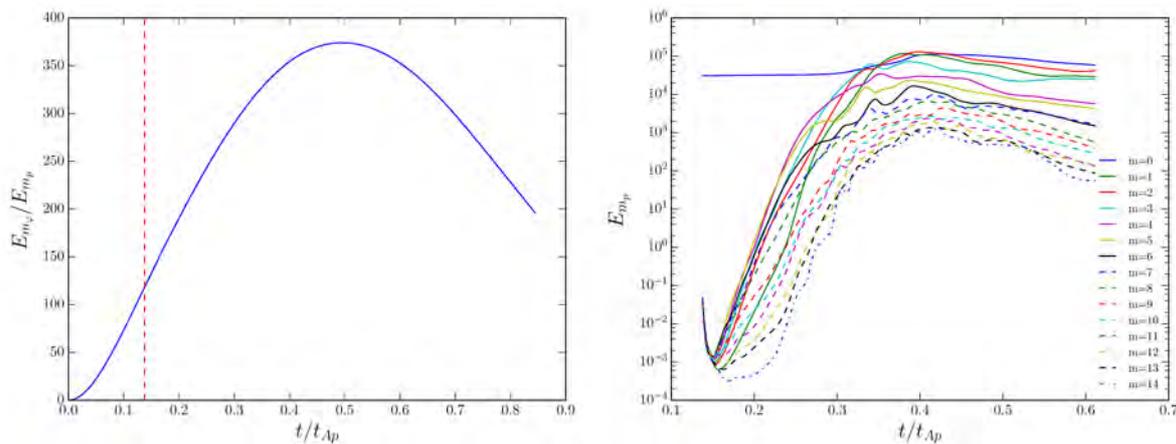


FIGURE 4.1 – À gauche : Évolution de E_{m_φ}/E_{m_p} de l'état de référence non perturbé. La ligne verticale rouge en traits pointillés indique le temps $t \simeq 1.38 \times 10^{-1} t_{Ap}$ auquel cet état de référence est perturbé. À droite : Évolution de l'énergie magnétique poloïdale E_{m_p} pour les modes azimutaux de $m = 0$ à 14 à partir du temps auquel l'état de référence est perturbé. Les paramètres des simulations sont $Pr_0 = 1$, $Lu = 35.5$, $t_{Ap}/t_\Omega = 808$, le profil cylindrique de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.37) et $N/\Omega_0 = 0$.

Dans cette section, la stabilité des configurations magnétiques enroulées par la rotation différentielle cylindrique définie par l'Éq. (3.37) est testée. Dans un premier temps, un cas non-stratifié similaire à ceux réalisés par Jouve et al. (2015) est présenté dans le but d'être comparé à des cas où la stratification stable est introduite. La FIGURE 4.1 montre les résultats de cette simulation non-stratifiée. L'évolution de la configuration magnétique de référence est telle que décrite dans le Chapitre 3, le champ poloïdal initial est enroulé par une rotation différentielle cylindrique (Éq. 3.37) ce qui génère une composante toroïdale du champ dont l'intensité croît dans un premier temps linéairement jusqu'à ce que le champ magnétique rétroagisse sur la rotation différentielle (voir figure de gauche). Durant la phase de croissance linéaire du champ toroïdal, alors que $\Omega/\omega_{A_\varphi} \simeq 5 - 6$ au minimum dans tout le domaine de calcul, une perturbation d'amplitude environ cinq ordres de grandeur plus faible que l'amplitude de l'état de référence est injectée dans tous les modes latitudinaux l et azimutaux m résolus numériquement sous la forme d'un bruit blanc (même perturbation à toutes les échelles spatiales). Le temps auquel l'état de

référence est perturbé est indiqué par la ligne verticale rouge en traits pointillés sur la figure de gauche. L'évolution de l'énergie magnétique poloïdale E_p pour plusieurs modes m (de 0 à 14) ainsi perturbés est visible sur la figure de droite. L'amplitude de ces modes augmente dans un premier temps de manière exponentielle, indiquant la présence d'une instabilité linéaire, puis sature.

4.1.1 Caractéristiques de l'instabilité

Comme montré par [Jouve et al. \(2015\)](#), l'instabilité responsable de la croissance de ces modes est identifiée comme magnétorotationnelle. Tout d'abord, inverser le profil initial de rotation annule totalement le développement de l'instabilité. La condition sine qua non au déclenchement de l'instabilité magnétorotationnelle, une vitesse angulaire qui doit décroître vers l'extérieur, n'est en effet plus respectée. Les modes les plus instables sont de plus ceux attendus pour une instabilité magnétorotationnelle, c'est à dire les modes telles que $m \approx \Omega/\omega_{A\varphi}$ (initialement $m = 4$ et 5), et le taux de croissance de ces modes est approximativement égal au taux de croissance théorique $q\Omega/2$ donné par l'Éq. (2.25). Le graphique de gauche de la FIGURE 4.2 montre par ailleurs que les zones les plus instables, celles où le champ magnétique radial fluctuant B_r' (champ radial total pour lequel la composante axisymétrique a été retirée) est le plus intense, sont localisées là où le champ toroïdal B_φ est le plus intense, ce qui est caractéristique de l'instabilité magnétorotationnelle.

La relation de dispersion de [Ogilvie \(2007\)](#) présentée dans la Section 2.4.4 permet, pour une configuration donnée à un instant donné et pour une perturbation dont la direction du vecteur d'onde \mathbf{k} est spécifiée, de calculer les taux de croissance des différents modes azimutaux. Rappelons que cette relation de dispersion n'est jamais strictement applicable car elle est basée sur des hypothèses simplificatrices, comme par exemple le fait que les perturbations utilisées pour l'analyse locale aient la forme d'un paquet d'onde modulé ou encore que les effets diffusifs ne soient pas pris en compte. Néanmoins, [Jouve et al. \(2015\)](#) ont montré que cette relation de dispersion reproduit bien les caractéristiques de l'instabilité magnétorotationnelle qui se développe dans des configurations similaires à celle présentée dans cette section. Elle peut donc être utilisée dans une certaine mesure comme un outil prédictif et de diagnostic. Appliquée au cas non-stratifié étudié ici à $t = 1.38 \times 10^{-1} t_{Ap}$, le temps auquel l'état de référence est perturbé, cette relation de dispersion prévoit que les perturbations les plus instables sont telles que leur vecteur d'onde \mathbf{k} est parallèle à l'axe de rotation de l'étoile. Une instabilité dominée par les modes $m = 4, 5$ et 6 est alors prédite, ce qui est en accord avec les simulations ($m = 4, 5$ et 3 à cet instant, voir FIGURE 4.1). De plus, le taux de croissance des modes dominants calculé à partir de la relation de dispersion est généralement en bon accord avec les simulations. Enfin, le graphique de droite de la FIGURE 4.2 affiche en lignes noires les isocontours du taux de croissance théorique pour le mode $m = 4$ calculé par la relation de dispersion de [Ogilvie \(2007\)](#). On voit sur cette figure que les zones les plus instables prédites par la relation de dispersion sont bien celles où l'instabilité est localisée dans la simulation.

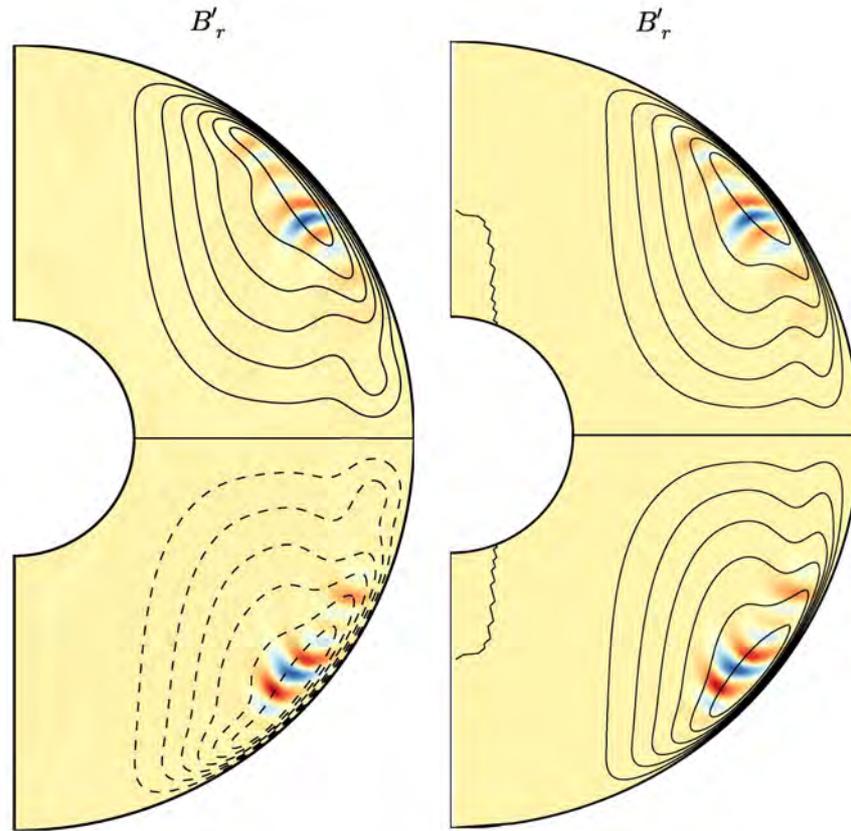


FIGURE 4.2 – Coupes méridiennes du champ magnétique radial fluctuant B'_r (c'est à dire le champ radial total pour lequel la composante axisymétrique a été retirée) au temps $t \simeq 0.27 t_{Ap}$. Les lignes noires indiquent respectivement les isocontours du champ toroïdal sur la figure de gauche et les isocontours du taux de croissance du mode azimutal $m = 4$ calculé à partir de la relation de dispersion de [Ogilvie \(2007\)](#) sur la figure de droite. Les paramètres de la simulation sont $Lu = 35.5$, $t_{Ap}/t_\Omega = 808$, $N/\Omega_0 = 0$, $Pr_0 = 1$ et le profil initial de rotation différentielle cylindrique donné par l'Éq. (3.37).

4.1.2 Effet de la stratification stable

La FIGURE 4.3 montre la même simulation mais dans laquelle une stratification stable telle que $N/\Omega_0 = 5$ et $Pr_0 = 1$ est introduite. La valeur maximale que peut atteindre le rapport E_{m_φ}/E_{m_p} de l'état de référence non-perturbé passe d'environ 350 dans le cas non-stratifié à 250 et le temps τ_{max} auquel ce maximum est atteint diminue également, étant environ égal à $0.5 t_{Ap}$ dans le cas non-stratifié et à $0.35 t_{Ap}$ dans le cas stratifié (voir figure de gauche). L'état de référence n'est pas significativement modifié par l'ajout de la stratification stable. Pourtant, après perturbation de cet état au même temps que dans le cas non-stratifié, l'amplitude des modes m non-axisymétriques ne fait que décroître (voir figure de droite). L'instabilité magnétorotationnelle, clairement présente dans le cas non-stratifié, est donc complètement inhibée par une stratification stable telle que $N/\Omega_0 = 5$

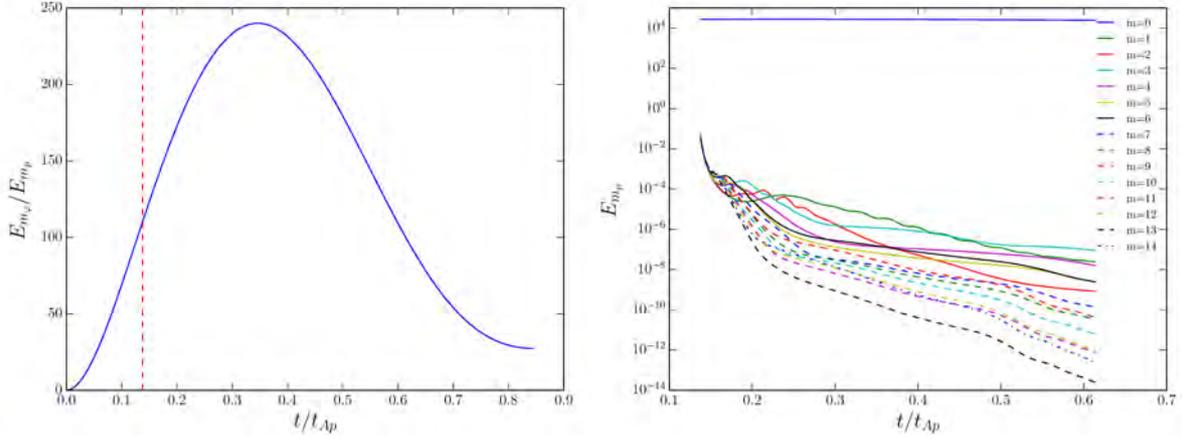


FIGURE 4.3 – À gauche : Évolution de E_{m_φ}/E_{m_p} de l'état de référence non perturbé. La ligne verticale rouge en traits pointillés indique le temps $t \simeq 1.38 \times 10^{-1} t_{Ap}$ auquel cet état de référence est perturbé. À droite : Évolution de l'énergie magnétique poloidale E_{m_p} pour les modes azimutaux de $m = 0$ à 14 à partir du temps auquel l'état de référence est perturbé. Les paramètres des simulations sont $Pr_0 = 1$, $Lu = 35.5$, $t_{Ap}/t_\Omega = 808$, le profil cylindrique de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.37) et $N/\Omega_0 = 5$.

et $Pr_0 = 1$. Ce résultat est conforme au critère d'instabilité (2.26), $q > (N/\Omega)^2 \eta / (2\kappa)$, qui donne dans notre cas $q > 12.5$ alors que le paramètre de cisaillement q est ici de l'ordre de 1 avec le profil de rotation différentielle utilisé.

La relation de dispersion de Ogilvie (2007) est à nouveau appliquée, cette fois-ci dans un cas qui est donc stratifié. Les perturbations les plus instables dans le cas non-stratifié (celles telles que \mathbf{k} est parallèle à l'axe de rotation) sont ici stables, en accord avec les simulations. En revanche, pour des perturbations qui sont le moins possible affectées par la stratification stable, c'est à dire qui sont telles que les échelles radiales des perturbations k_r^{-1} sont très petites devant les échelles latitudinales k_θ^{-1} , une instabilité magnétorotationnelle est prédite avec des modes $m = 4$ et 5 dominants comme dans le cas non-stratifié. Le désaccord entre cette prédiction et la stabilité observée dans nos simulations pourrait être dû aux effets diffusifs absents de l'analyse de Ogilvie (2007). Une instabilité MHD avec un taux de croissance σ est en effet significativement affectée par la diffusion magnétique sur les échelles spatiales $\ell < \sqrt{\eta/\sigma}$. Par exemple, pour la simulation non-stratifiée présentée sur les FIGURES 4.1 et 4.2, c'est le cas pour les échelles $\ell \lesssim 3 \times 10^{-2} R$. Or, d'après le formalisme de Ogilvie (2007), les échelles spatiales des perturbations dans une direction doivent être très petites devant les échelles de variation de l'état de référence dans cette même direction (voir Section 2.4.4). Pour des perturbations peu affectées par la stratification stable, les échelles radiales des perturbations k_r^{-1} sont très petites devant les échelles latitudinales k_θ^{-1} qui doivent donc elles-mêmes être très inférieures aux échelles de variation de l'état de référence dans la direction latitudinale. Cela conduit probablement à considérer des échelles radiales très inférieures à $\sqrt{\eta/\sigma}$ qui dans nos simulations seront fortement amorties par les effets diffusifs et qui seront donc stables.

4.1.3 Effet de la diffusivité thermique

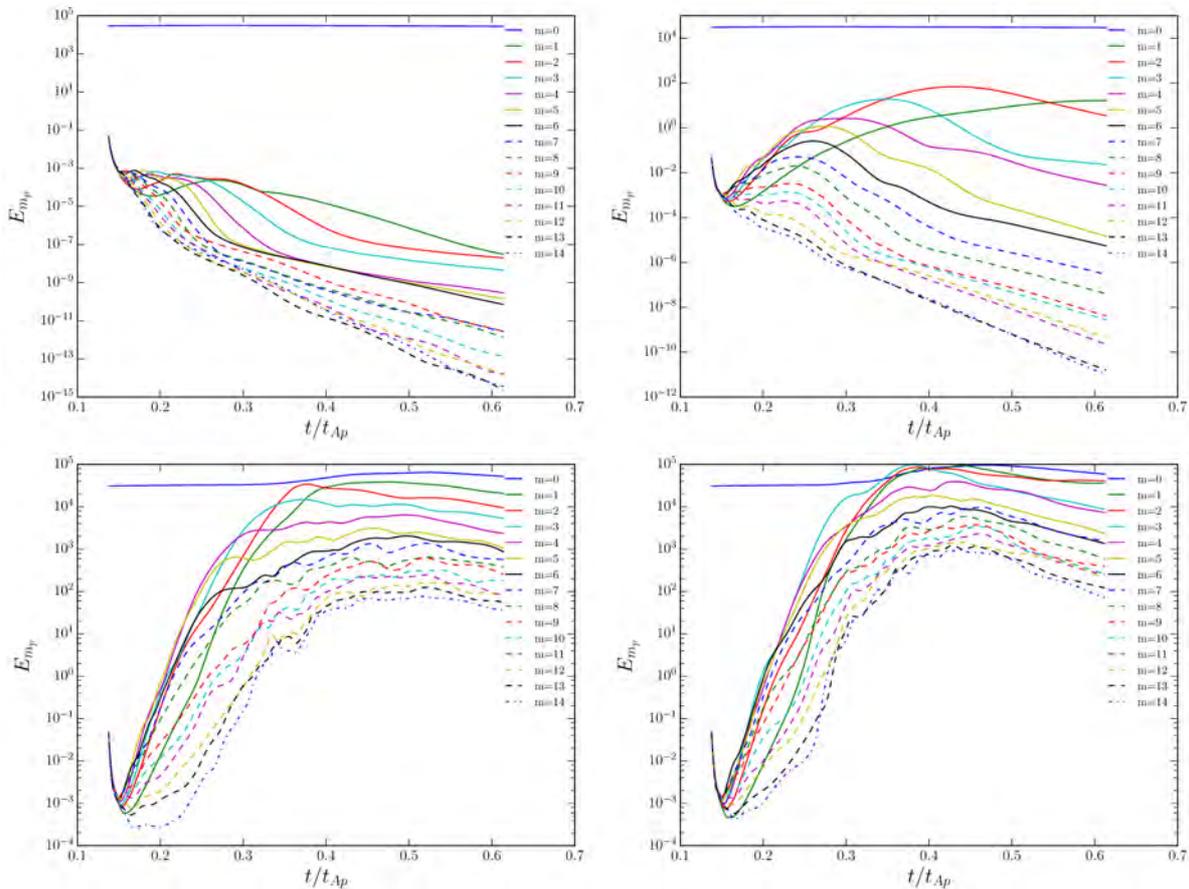


FIGURE 4.4 – Évolution de l'énergie magnétique polôidale E_{mp} pour les modes azimutaux de $m = 0$ à 14 à partir du temps $t \simeq 1.38 \times 10^{-1} t_{Ap}$ auquel l'état de référence est perturbé. Les paramètres des simulations sont $Lu = 35.5$, $t_{Ap}/t_{\Omega} = 808$, le profil cylindrique de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.37), $N/\Omega_0 = 5$ et Pr_0 égal à 10^{-1} (en haut à gauche), 10^{-2} (en haut à droite), 10^{-3} (en bas à gauche) et 10^{-5} (en bas à droite).

La diffusivité thermique a un impact important sur la stabilité d'une configuration magnétique. Elle permet à certaines échelles spatiales de ne pas ressentir le potentiel stabilisant de la stratification stable. L'effet combiné de la diffusivité thermique et de la stratification stable sur le déclenchement de l'instabilité magnétorotationnelle est directement pris en compte dans le critère d'instabilité (2.26). Simuler des cas où $Pr_0 \ll 1$ rend, d'après ce critère, les configurations magnétiques plus instables vis-à-vis de l'instabilité magnétorotationnelle.

La FIGURE 4.4 montre l'évolution de E_{mp} pour différents modes azimutaux dans le cas stratifié précédent mais avec Pr_0 variant de 10^{-1} à 10^{-5} (à comparer également avec le graphique à droite de la FIGURE 4.3 où $Pr_0 = 1$). Pour $Pr_0 = 10^{-1}$ (en haut à gauche), pas de changement notable à signaler par rapport au cas où $Pr_0 = 1$, aucune instabilité

ne se déclenche. À partir de $Pr_0 = 10^{-2}$ (en haut à droite), une instabilité se développe comme dans le cas non-stratifié. L'échelle critique $\ell_c = \sqrt{\kappa/N}$ en deçà de laquelle les mouvements verticaux ne sont plus limités par la stratification stable est environ égale à $2.6 \times 10^{-2} R$ dans ce cas-ci. Les taux de croissance de l'instabilité pour les différents modes m ne sont cependant pas aussi grands que dans le cas non-stratifié, la stratification stable a donc un impact sur leurs valeurs. Plus Pr_0 diminue, plus les taux de croissance augmentent (voir les deux figures du bas). Il sont d'une valeur équivalente au cas non-stratifié à partir de $Pr_0 = 10^{-5}$ (figure en bas à droite).

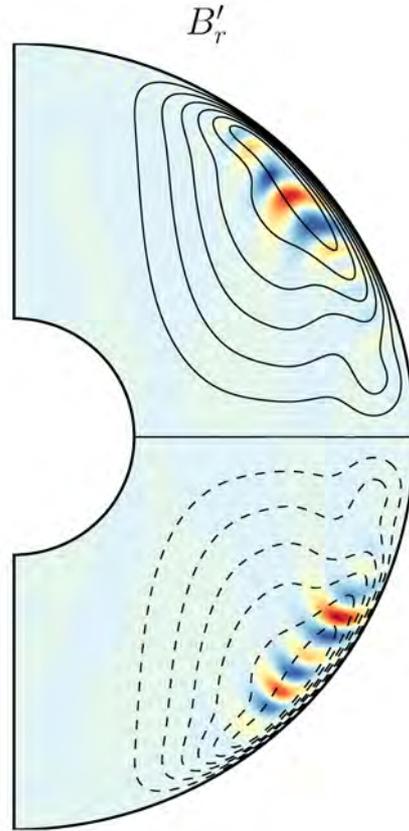


FIGURE 4.5 – Coupe méridienne du champ magnétique radial fluctuant B'_r (c'est à dire le champ radial total pour lequel la composante axisymétrique a été retirée) au temps $t \simeq 0.27 t_{Ap}$. Les lignes noires indiquent les isocontours du champ toroïdal B_ϕ . Les paramètres de la simulation sont $Lu = 35.5$, $t_{Ap}/t_\Omega = 808$, $N/\Omega_0 = 5$, $Pr_0 = 10^{-5}$ et le profil initial de rotation différentielle cylindrique donné par l'Éq. (3.37).

La relation de dispersion de [Ogilvie \(2007\)](#) ne peut pas être utilisée dans ces cas où la diffusivité thermique est variée car elle ne prend pas en compte les effets diffusifs. L'instabilité à l'origine de la croissance des modes azimutaux est néanmoins identifiée comme étant la même que dans le cas non-stratifié, c'est à dire une instabilité magnétorotationnelle. Tout d'abord, en augmentant la diffusivité thermique, l'instabilité est rétablie lorsque le critère local d'instabilité magnétorotationnelle (2.26) devient satisfait. En effet,

l'instabilité magnétorotationnelle doit théoriquement se déclencher pour $Pr_0 = 10^{-2}$ si $q > 0.125$, ce qui est bien le cas avec un paramètre de cisaillement q compris entre 0.5 et 1 dans notre domaine de calcul. En revanche, elle ne se déclenche pas lorsque $Pr_0 = 10^{-1}$ et que le critère d'instabilité (2.26) requiert $q > 1.25$. Les taux de croissance des modes les plus instables lors de la phase de développement linéaire de l'instabilité, les modes $m = 4, 5$ et 6 , sont en accord avec le taux de croissance maximal théorique de l'instabilité magnétorotationnelle donnée par l'Éq. (2.25). Les modes les plus instables sont de plus ceux favorisés par l'instabilité magnétorotationnelle dans une configuration où $\Omega/\omega_{A_p} \simeq 5 - 6$. Enfin, la FIGURE 4.5 montre que l'instabilité est localisée dans les zones où le champ toroïdal est le plus intense, tout comme dans les cas non-stratifiés.

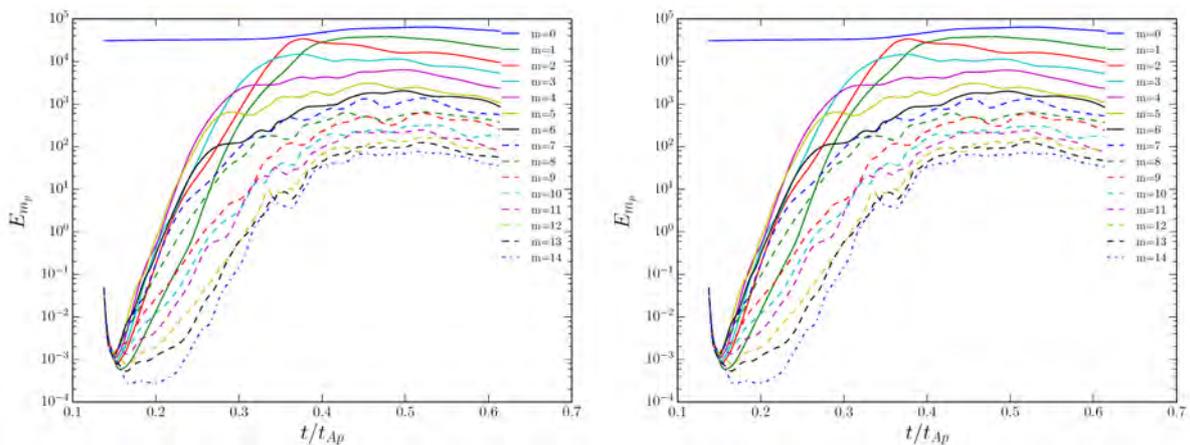


FIGURE 4.6 – Évolution de l'énergie magnétique poléoïdale E_{m_p} pour les modes azimutaux de $m = 0$ à 14 à partir du temps $t \simeq 1.38 \times 10^{-1} t_{Ap}$ auquel l'état de référence est perturbé. Les paramètres des simulations sont $Lu = 35.5$, $t_{Ap}/t_\Omega = 808$, le profil cylindrique de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.37) et N/Ω_0 et Pr_0 respectivement égaux à 5 et 10^{-3} (à gauche) et à 50 et 10^{-5} (à droite) de sorte que $Pr_0 \times (N/\Omega_0)^2 = 2.5 \times 10^{-2}$ dans les deux cas.

Nous avons vu dans la Section 3.4.3 que, pourvu que $Pr_0 \ll 1$, des configurations magnétiques avec un même $Pr_0 \times (N/\Omega_0)^2$ évoluent de la même manière. C'est le cas pour des configurations axisymétriques, mais aussi pour des configurations dans lesquelles une instabilité magnétorotationnelle se développe comme le montre la FIGURE 4.6. L'évolution de l'énergie magnétique poléoïdale des différents modes azimutaux est quasiment identique (quelques différences peu significatives dans l'évolution des très petites échelles) entre la configuration où $N/\Omega_0 = 5$ et $Pr_0 = 10^{-3}$ (figure de gauche) et celle où $N/\Omega_0 = 50$ et $Pr_0 = 10^{-5}$ (figure de droite), $Pr_0 \times (N/\Omega_0)^2$ étant égal à 2.5×10^{-2} dans les deux cas. Les résultats des simulations non-axisymétriques peuvent donc aussi être extrapolés pour d'autres valeurs de Pr_0 et N/Ω_0 .

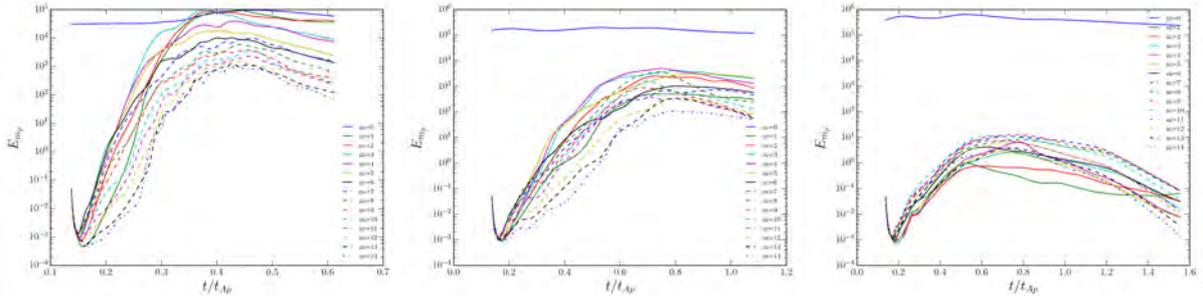


FIGURE 4.7 – Évolution de l'énergie magnétique poloïdale E_{m_p} pour les modes azimutaux de $m = 0$ à 14 à partir du temps $t \simeq 1.38 \times 10^{-1} t_{Ap}$ auquel l'état de référence est perturbé. Les paramètres des simulations sont $N/\Omega_0 = 5$, $Pr_0 = 10^{-5}$, le profil cylindrique de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.37) et Lu et t_{Ap}/t_{Ω} respectivement égaux à 35.5 et 808 (à gauche), 71 et 404 (au milieu) et 106.5 et 269 (à droite).

4.1.4 Influence de t_{Ap}/t_{Ω}

La FIGURE 4.7 montre l'impact de t_{Ap}/t_{Ω} sur l'évolution de l'instabilité magnétorotationnelle dans le cas stratifié tel que $N/\Omega_0 = 5$ et $Pr_0 = 10^{-5}$. t_{Ap}/t_{Ω} a été diminué de 808 (figure de gauche) à 269 (figure de droite) en passant par 404 (figure du milieu), correspondant à des valeurs de Lu respectivement égales à 35.5, 106.5 et 71. Alors que l'amplitude des modes azimutaux non-axisymétriques les plus instables et du mode axisymétrique $m = 0$ sont du même ordre de grandeur au temps $t \sim 0.5 t_{Ap}$ dans le cas où $t_{Ap}/t_{\Omega} = 808$, l'amplitude des modes non-axisymétriques est inférieure d'un peu moins de 2 ordres de grandeur dans le cas où $t_{Ap}/t_{\Omega} = 404$ et d'un peu plus de 4 ordres de grandeur lorsque $t_{Ap}/t_{\Omega} = 269$. Dans ces deux derniers cas, l'instabilité ne se développe pas assez vite pour que la configuration magnétique axisymétrique soit déstructurée. Dans les cas où $t_{Ap}/t_{\Omega} \gtrsim 8 \times 10^2$ (comme sur la figure de gauche), cette déstructuration a par contre bien lieu et les conséquences sur le champ magnétique de surface peuvent être importantes. Cette valeur critique de t_{Ap}/t_{Ω} correspond à un taux de croissance maximal pour les modes dominants compris entre 70 et $100 \Omega_{Ap}$. Ce résultat est similaire à celui de Jouve et al. (2015) qui ont montré dans des cas non-stratifiés que le champ magnétique axisymétrique est déstructuré lorsque $\sigma \gtrsim 70 \Omega_{Ap}$.

4.2 Configurations magnétiques enroulées par une rotation différentielle radiale

Nous venons de voir qu'une instabilité magnétorotationnelle peut se développer dans une zone radiative en rotation différentielle stratifiée de façon stable. Le profil de rotation différentielle utilisé jusqu'à maintenant était le profil cylindrique défini par l'Éq. (3.37). Les configurations axisymétriques résultantes de l'évolution du champ magnétique sous l'action de cette rotation différentielle étaient telles que $\Omega/\omega_{A\varphi} \simeq 6$ au minimum,

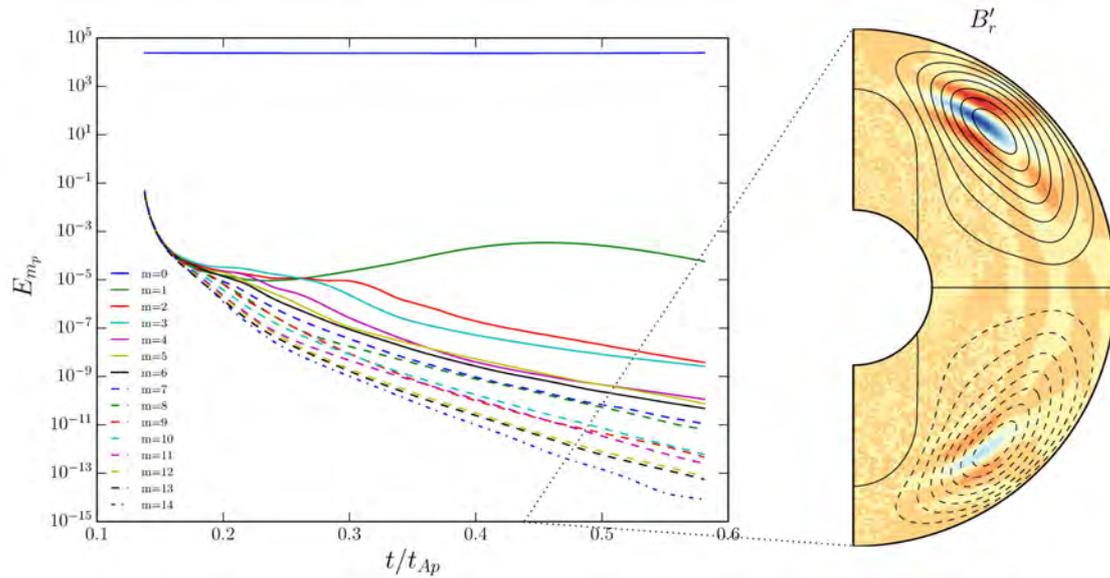


FIGURE 4.8 – À gauche : Évolution de l'énergie magnétique poloidale E_{mp} pour les modes azimutaux de $m = 0$ à 14 à partir du temps $t \simeq 1.38 \times 10^{-1} t_{Ap}$ auquel l'état de référence est perturbé. À droite : Coupe méridienne du champ magnétique radial fluctuant B'_r (c'est à dire le champ radial total pour lequel la composante axisymétrique a été retirée) au temps $t \simeq 0.44 t_{Ap}$. Les lignes noires indiquent les isocontours du champ toroïdal B_φ . Les paramètres des simulations sont $Lu = 35.5$, $t_{Ap}/t_\Omega = 808$, le profil radial de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.36), $N/\Omega_0 = 5$ et $Pr_0 = 1$.

favorisant le déclenchement d'une instabilité magnétorotationnelle. Le profil de rotation différentielle que nous allons considérer maintenant est radial, celui défini par l'Éq. (3.36). L'effet Ω plus efficace qu'avec le profil cylindrique, générant un champ toroïdal plus intense, produit dans ce cas des configurations telles que $\Omega/\omega_{A\varphi} \simeq 4$ au minimum. Le mode opératoire pour l'étude de la stabilité de ces configurations magnétiques est le même que précédemment, l'état de référence axisymétrique est perturbé lors de la phase de croissance linéaire du champ toroïdal avec un bruit blanc.

La FIGURE 4.8 montre les résultats d'une simulation dans une zone stratifiée de façon stable réalisée avec les mêmes paramètres que celle présentée sur la FIGURE 4.3, mais avec le profil radial de rotation différentielle à la place du profil cylindrique. Le développement d'une instabilité du mode azimutal $m = 1$ est visible sur la figure de gauche. Le taux de croissance de l'instabilité est relativement faible, environ égal au maximum à $13 \Omega_{Ap}$. L'amplitude de l'énergie magnétique poloidale du mode instable $m = 1$ est alors loin d'atteindre l'amplitude du mode axisymétrique $m = 0$. L'instabilité ne se développe en effet pas suffisamment avant que la configuration magnétique axisymétrique ne soit modifiée significativement. La figure de droite montre quant à elle en couleurs la localisation dans un plan méridien de l'instabilité, ainsi que les isocontours du champ toroïdal en lignes noires, au temps $t \simeq 0.44 t_{Ap}$ alors que l'amplitude du mode $m = 1$ est maximale.

4.2.1 Caractéristiques de l'instabilité

L'identification de la nature de cette instabilité est possible par plusieurs moyens. Tout d'abord, de la même manière que pour l'identification de l'instabilité qui se déclenche dans la simulation présentée à la Section 4.1.1, un test simple consiste à inverser le profil initial de rotation. Au contraire du cas précédent, le développement de l'instabilité ainsi que ses caractéristiques ne sont ici pas modifiés par l'inversion du profil initial de rotation, l'instabilité n'est donc pas magnétorotationnelle. D'après la discussion de la Section 2.4.4 sur les instabilités magnétiques susceptibles de se développer dans une zone radiative stratifiée de façon stable, le meilleur candidat est alors l'instabilité de Taylor.

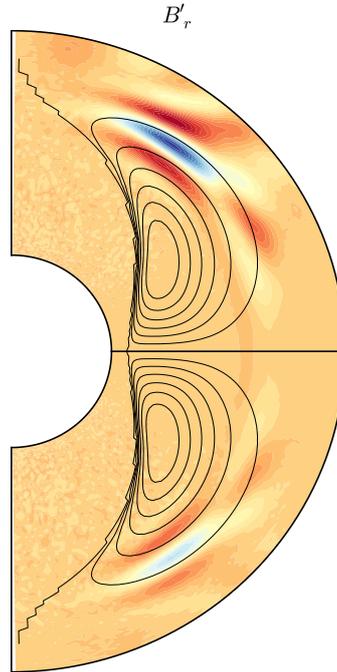


FIGURE 4.9 – Coupe méridienne du champ magnétique radial fluctuant B'_r (c'est à dire le champ radial total pour lequel la composante axisymétrique a été retirée) au temps $t \simeq 0.44 t_{Ap}$. Les lignes noires indiquent les isocontours du taux de croissance du mode azimutal $m = 1$ calculé à partir de la relation de dispersion de Ogilvie (2007). Les paramètres de la simulation sont $Lu = 35.5$, $t_{Ap}/t_\Omega = 808$, $N/\Omega_0 = 5$, $Pr_0 = 1$ et le profil radial de rotation différentielle donné par l'équation (3.36).

Les zones les plus instables sont localisées au niveau de forts gradients latitudinaux de champ toroïdal tels que $\partial \ln B_\varphi / \partial \theta \sim 2$ (voir graphique de droite de la FIGURE 4.8). En appliquant le critère local de l'instabilité de Tayler sur les gradients de champ toroïdal (voir Éq. 2.31), on constate que seul le mode $m = 1$ peut être instable. Cette propriété est tout à fait cohérente avec nos simulations où seul le mode $m = 1$ est instable. Le taux de croissance est en relativement bon accord avec sa valeur théorique maximale d'environ $23 \Omega_{Ap}$ donné par $\omega_{A\varphi}^2 / \Omega$ (Éq. 2.32), sachant que cette valeur théorique ne tient pas

compte des effets de la stratification stable. Les caractéristiques de l'instabilité observée dans cette simulation sont cohérentes avec les propriétés de l'instabilité de Tayler telles que déterminées par les analyses locales de stabilité.

La relation de dispersion de [Ogilvie \(2007\)](#) prévoit pour cette simulation stratifiée que les perturbations les plus instables sont à nouveau celles qui ne ressentent pas la stratification stable. Le mode dominant prédit est $m = 1$ et son taux de croissance maximal est $\sigma \simeq 10 \Omega_{Ap}$, en très bon accord avec les résultats de la simulation. Avec des taux de croissance moindres que celui du $m = 1$ et généralement de l'ordre du taux de croissance théorique de l'instabilité magnétorotationnelle $q\Omega/2$, les modes $m = 2$ jusqu'à au moins $m = 14$ sont également prédits instables par la relation de dispersion au contraire de ce qui est observé dans la simulation. Pour les mêmes raisons que celles explicitées dans la Section 4.1.2 à propos de la stabilité des cas stratifiés où le profil cylindrique de rotation différentielle est utilisé, cet écart entre prédictions et résultats des simulations provient probablement du fait que la relation de dispersion de [Ogilvie \(2007\)](#) ne prend pas en compte les effets diffusifs. Enfin, la FIGURE 4.9 montre que les zones les plus instables prédites par la relation de dispersion ne sont pas celles où l'instabilité se développe dans la simulation, ni celles où le critère d'instabilité du mode $m = 1$ de [Goossens et al. \(1981\)](#) (Éq. 2.27) est respecté.

4.2.2 Effet de la diffusivité thermique

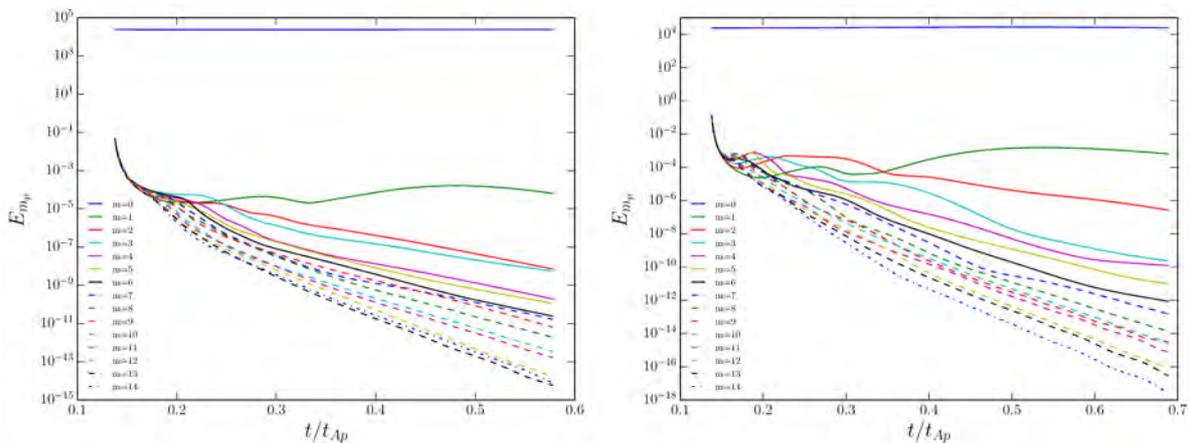


FIGURE 4.10 – Évolution de l'énergie magnétique poloidale E_{m_p} pour les modes azimutaux de $m = 0$ à 14 à partir du temps $t \simeq 1.38 \times 10^{-1} t_{Ap}$ auquel l'état de référence est perturbé. Les paramètres des simulations sont $Lu = 35.5$, $t_{Ap}/t_\Omega = 808$, le profil radial de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.36), $N/\Omega_0 = 5$ et Pr_0 respectivement égal à 10^{-1} (à gauche) et 10^{-2} (à droite).

De la même manière que dans le cas du profil initial de rotation différentielle cylindrique, l'effet de la diffusion thermique sur le développement de l'instabilité est étudié avec le profil radial de rotation différentielle défini par l'Éq. (3.36). La FIGURE 4.10

montre que le taux de croissance du mode $m = 1$ augmente lorsque Pr_0 diminue, l'effet stabilisant de la stratification étant réduit. Cependant, l'instabilité de Tayler étant moins affectée par la stratification stable que l'instabilité magnétorotationnelle, l'augmentation de son taux de croissance avec $1/Pr_0$ est moindre que dans les cas où une instabilité magnétorotationnelle se développe. Comme nous l'avons montré dans la Section 3.4, en deçà d'un certain nombre de Prandtl l'advection du champ poloidal par la circulation méridienne modifie drastiquement la configuration magnétique axisymétrique. Pour le cas $N/\Omega_0 = 5$ considéré ici, cet effet devient très important à partir de $Pr_0 = 10^{-3}$ de telle sorte qu'aucune comparaison objective pour la stabilité des configurations axisymétriques n'est possible entre les cas où $Pr_0 \lesssim 10^{-3}$ et ceux où $Pr_0 > 10^{-3}$. L'influence de N/Ω_0 et de Pr_0 sur l'instabilité de Tayler ne peut donc pas être étudiée en détail.

4.2.3 Influence de t_{Ap}/t_Ω

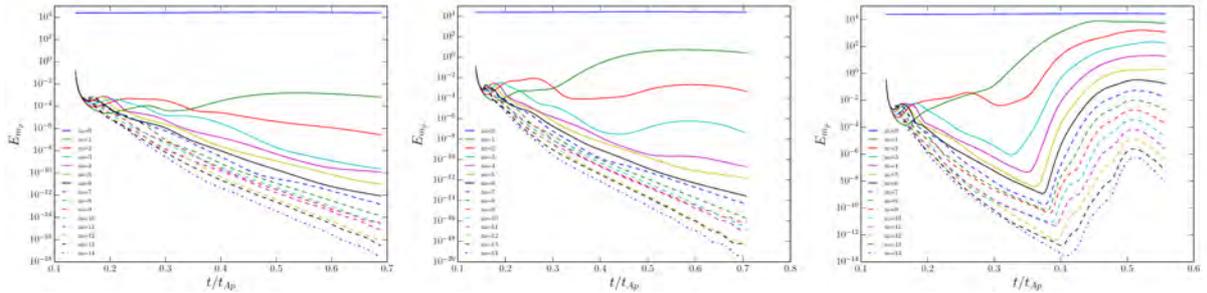


FIGURE 4.11 – Évolution de l'énergie magnétique poloidale E_{m_p} pour les modes azimutaux de $m = 0$ à 14 à partir du temps $t \simeq 1.38 \times 10^{-1} t_{Ap}$ auquel l'état de référence est perturbé. Les paramètres des simulations sont $Lu = 35.5$, $N/\Omega_0 = 5$, $Pr_0 = 10^{-2}$, le profil radial de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.36) et t_{Ap}/t_Ω respectivement égal à 808 (à gauche), 1212 (au milieu) et 1717 (à droite).

La FIGURE 4.11 affiche l'énergie magnétique poloidale de différents modes azimutaux m dans trois cas où t_{Ap}/t_Ω est respectivement égal à 808 (à gauche), 1212 (au milieu) et 1717 (à droite). Dans les trois cas, le mode non-axisymétrique dominant est $m = 1$ et l'amplitude atteinte par ce mode augmente lorsque t_{Ap}/t_Ω augmente. Elle atteint presque l'amplitude du mode axisymétrique dans le cas où $t_{Ap}/t_\Omega = 1717$ (voir figure de droite). Étant limité numériquement à cette valeur maximale de t_{Ap}/t_Ω , je n'ai pas réalisé de simulations où l'amplitude du mode axisymétrique est atteinte, mais par simple extrapolation nous pouvons estimer que ce serait le cas pour $t_{Ap}/t_\Omega \gtrsim 2 \times 10^3$. Le champ magnétique initialement à grande échelle est alors déstructuré par l'instabilité pour de telles valeurs de t_{Ap}/t_Ω . Rappelons que dans le cas stratifié où le profil de rotation cylindrique est utilisé, la valeur critique de t_{Ap}/t_Ω à partir de laquelle une configuration magnétique instable vis-à-vis de l'instabilité magnétorotationnelle devient dominée par des petites échelles spatiales est d'environ 800. Ces valeurs critiques ne sont pas intrinsèques aux types d'instabilité, magnétorotationnelle ou de Tayler, mais dépendent assurément de nombreux paramètres

comme la valeur des coefficients de diffusion ou l'importance de la stratification stable par exemple.

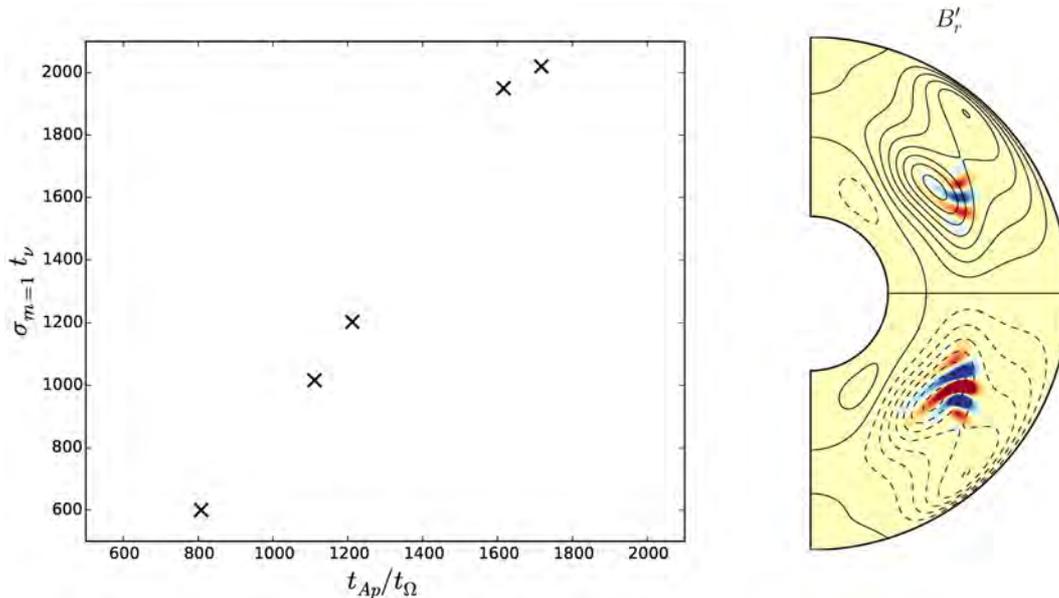


FIGURE 4.12 – À gauche : Taux de croissance maximal, atteint au temps $t \simeq 0.35 t_{Ap}$, du mode $m = 1$ en fonction de t_{Ap}/t_Ω . À droite : Coupe méridienne de B_r' dans le cas où $t_{Ap}/t_\Omega = 1717$ au temps $t \simeq 0.35 t_{Ap}$. Les lignes noires indiquent les isocontours de B_ϕ . Les autres paramètres des simulations sont $Lu = 35.5$, $N/\Omega_0 = 5$, $Pr_0 = 10^{-2}$ et le profil radial de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.36).

L'instabilité qui se développe dans ces simulations où t_{Ap}/t_Ω a été augmenté semble être la même que dans le cas où $t_{Ap}/t_\Omega = 808$, c'est à dire l'instabilité de Tayler. Le mode le plus instable est le mode $m = 1$, les taux de croissance sont en relativement bon accord avec ceux fournis par l'expression théorique (2.32) et l'instabilité est inchangée lorsque le profil initial de rotation est inversé. Le graphique de gauche de la FIGURE 4.12 montre le taux de croissance maximal $\sigma_{m=1}$ du mode dominant $m = 1$, atteint au temps $t \simeq 0.35 t_{Ap}$, en fonction de t_{Ap}/t_Ω . $\sigma_{m=1}$ est multiplié par environ 3.4 lorsque t_{Ap}/t_Ω est multiplié par 2.1. On s'attend en théorie à ce que la relation entre $\sigma_{m=1}$ et t_{Ap}/t_Ω soit proche de la proportionnalité. B_ϕ , et donc ω_{A_ϕ} , sont en effet quasiment proportionnels à t_{Ap}/t_Ω (voir Section 3.4.1) et $\sigma_{m=1}$ est théoriquement proportionnel à ω_{A_ϕ} (cela reste vrai dans les cas où $\Omega \gg \omega_{A_\phi}$, ω_{A_ϕ}/Ω étant constant lorsque t_{Ap}/t_Ω varie). L'influence de t_{Ap}/t_Ω est donc un peu plus importante que prévu par la théorie à propos de l'instabilité de Tayler mais ce n'est pas un écart très significatif. Par contre, la coupe méridienne à droite de la FIGURE 4.12 montre que l'instabilité n'est pas localisée là où l'instabilité de Tayler est attendue. En effet, elle se développe au niveau de gradients de B_ϕ tels que $\partial \ln(B_\phi^2 \sin \theta \cos \theta) / \partial \theta < 0$ qui n'autorisent théoriquement pas, d'après le critère de Goossens et al. (1981), le développement d'une instabilité de Tayler du mode $m = 1$. Dans ce contexte, il est possible que cette instabilité soit l'instabilité de cisaillement

magnétique brièvement évoquée à la fin de la Section 2.4.4. Le mode dominant $m = 1$ et le fait qu'il existe une rotation différentielle latitudinale au moment où l'on perturbe l'état de référence (le moment cinétique a déjà été légèrement redistribué) sont conformes aux caractéristiques de cette instabilité. Cependant, le taux de croissance du mode $m = 1$ dans la simulation est un ordre de grandeur inférieur au taux de croissance théorique de l'instabilité de cisaillement magnétique $\omega_{A\varphi}$. Quelque soit la nature de l'instabilité présente dans nos simulations, celle-ci est bien physique et peut avoir un impact sur le champ magnétique que l'on peut observer en surface.

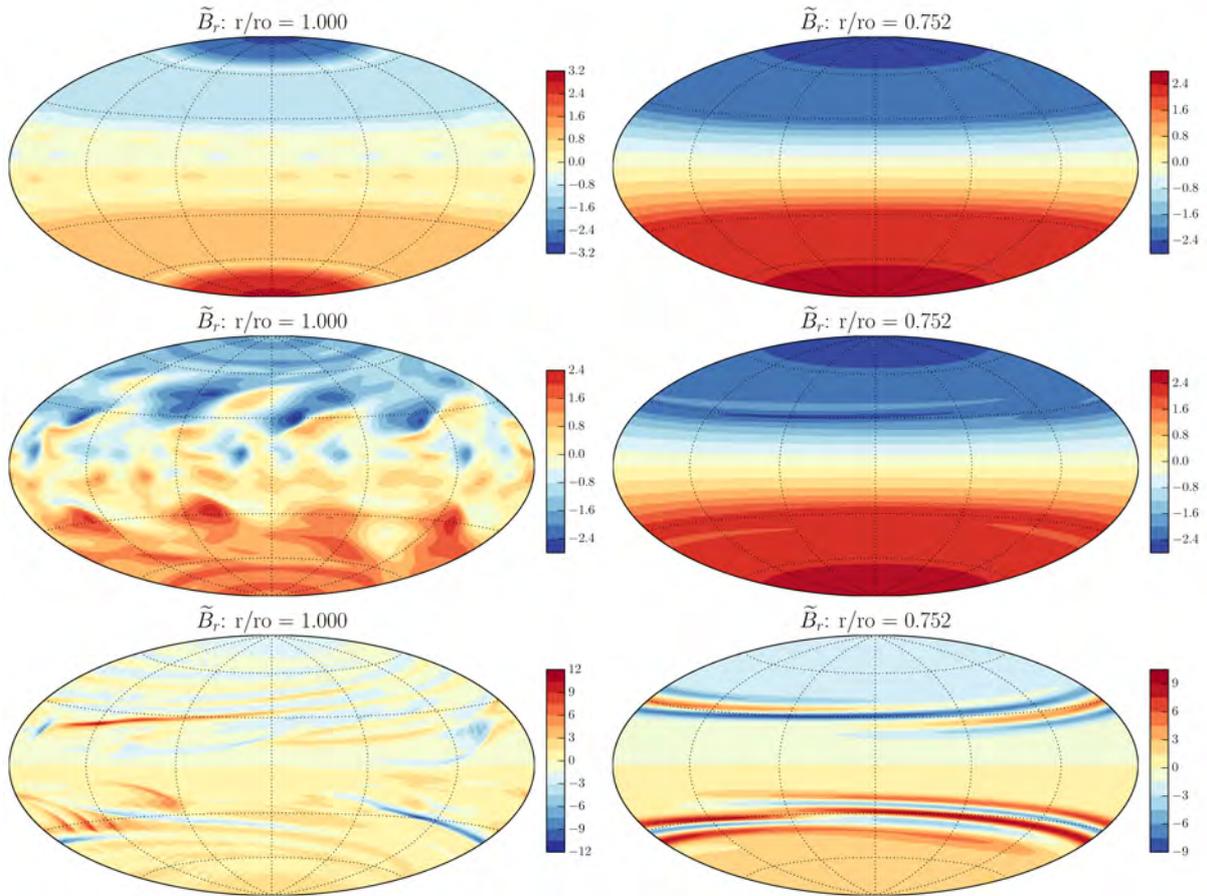


FIGURE 4.13 – Champ magnétique radial B_r lorsque l'amplitude des modes azimutaux non-axisymétriques dominants est à son maximum au rayon $r = R$ pour les figures de gauche et $r = 0.75 R$ pour les figures de droite. À gauche : Les paramètres des simulations sont $N/\Omega_0 = 5$, $Pr_0 = 10^{-5}$, le profil cylindrique de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.37) et Lu et t_{Ap}/t_Ω respectivement égaux à 106.5 et 269 (en haut à gauche), 71 et 404 (au milieu à gauche) et 35.5 et 808 (en bas à gauche). À droite : Les paramètres des simulations sont $N/\Omega_0 = 5$, $Pr_0 = 10^{-2}$, le profil radial de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.36), $Lu = 35.5$ et t_{Ap}/t_Ω respectivement égal à 808 (en haut à droite), 1212 (au milieu à droite) et 1717 (en bas à droite).

4.3 Champ magnétique de surface résultant des instabilités

Sous certaines conditions (intensité initiale du champ poloïdal et de la rotation différentielle respectivement suffisamment faible ou forte), le développement d'une instabilité MHD fait que l'énergie magnétique contenue dans les petites échelles spatiales devient comparable à l'énergie contenue dans les grandes échelles. Quelle serait alors la topologie résultante du champ magnétique et l'intensité du champ magnétique que l'on mesurerait à la surface d'étoiles ayant subi de telles instabilités? Les graphiques de gauche de la FIGURE 4.13 montrent le champ magnétique radial B_r au niveau du rayon externe du domaine de calcul en $r = R$, que l'on identifie ici à la surface photosphérique de l'étoile, dans les cas stratifiés de façon stable où le profil de rotation différentielle cylindrique est utilisé et où une instabilité magnétorotationnelle se développe (mêmes simulations que celles présentées sur la FIGURE 4.7). Dans les cas où $t_{Ap}/t_\Omega < 8 \times 10^2$, le champ radial de surface présente une structure dipolaire quasiment identique à sa structure initiale (figure en haut à gauche) ou un peu plus complexe avec des polarités de signe opposé au champ initial dans chaque hémisphère (figure au milieu à gauche). La structure initiale du champ poloïdal est par contre complètement détruite par l'instabilité magnétorotationnelle dans le cas où $t_{Ap}/t_\Omega > 8 \times 10^2$ (figure en bas à gauche) et de nombreuses polarités de signe opposé sont réparties à la surface de l'étoile. Il est clairement visible sur ces figures que l'instabilité magnétorotationnelle peut significativement modifier le champ magnétique de surface si elle se développe suffisamment. Plus l'intensité initiale du champ poloïdal est faible par rapport à l'intensité de la rotation différentielle, c'est à dire plus t_{Ap}/t_Ω est grand, plus le champ de surface devient structuré à petites échelles spatiales.

Dans les simulations où le profil radial de rotation différentielle défini par l'Éq. (3.36) est utilisé, l'impact de l'instabilité qui se développe sur le champ magnétique de surface est négligeable et aucune différence significative n'apparaît suivant l'intensité initiale de la rotation différentielle. La raison est double : l'amplitude des modes non-axisymétriques ne devient jamais assez élevée dans les simulations que j'ai pu réaliser et l'instabilité qui se développe est confinée dans l'intérieur radiatif au contraire des cas précédents (voir la coupe méridienne de la FIGURE 4.12 en comparaison avec la FIGURE 4.5). Il est donc dans ces cas-ci impossible de quantifier l'impact de l'instabilité sur le champ de surface à partir de nos simulations. Cependant, afin d'avoir une idée de la configuration magnétique qui pourrait apparaître en surface de ces cas-ci si l'instabilité serait suffisamment développée, les graphiques de droite de la FIGURE 4.13 montrent le champ magnétique radial B_r au rayon $r = 0.75 R$ pour les mêmes simulations que celles présentées sur la FIGURE 4.11. Tandis que la configuration magnétique reste quasiment axisymétrique comme initialement lorsque $t_{Ap}/t_\Omega = 808$ (figure en haut à droite) et 1212 (figure au milieu à droite), l'instabilité du mode azimutal $m = 1$ est clairement visible dans le cas où $t_{Ap}/t_\Omega = 1717$ (figure en bas à droite). Le champ radial de surface dans un cas où $t_{Ap}/t_\Omega \gtrsim 2 \times 10^3$ devrait probablement ressembler à ce que l'on voit au rayon $r = 0.75 R$ dans le cas où $t_{Ap}/t_\Omega = 1717$.

4.3.1 Calcul du champ longitudinal B_l

Le champ longitudinal B_l est une quantité mesurée par spectropolarimétrie. C'est le champ magnétique projeté le long de la ligne de visée et intégré sur toute la surface visible de l'étoile. Son expression est la suivante

$$B_l(r) = \frac{\iint_{S_v} \mathbf{B}(r, \theta, \varphi) \cdot \mathbf{e}_i \, d\mathbf{S}(r, \theta) \cdot \mathbf{e}_i}{\iint_{S_v} d\mathbf{S}(r, \theta) \cdot \mathbf{e}_i} \quad , \quad (4.1)$$

où \mathbf{B} est le vecteur champ magnétique, $d\mathbf{S} = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, \mathbf{e}_r$ est le vecteur élément de surface sphérique, S_v est la surface visible de l'étoile et \mathbf{e}_i est le vecteur directeur dans la direction de la ligne de visée dont l'expression en coordonnées sphériques est

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i &= [\cos(i - \theta) + \sin i \sin \theta (\cos \varphi - 1)] \mathbf{e}_r \\ &+ [\sin(i - \theta) + \sin i \cos \theta (\cos \varphi - 1)] \mathbf{e}_\theta - \sin i \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi \quad , \end{aligned} \quad (4.2)$$

où $i \in [0, \pi/2]$ est l'angle formé entre l'axe de rotation de l'étoile et la ligne de visée. \mathbf{e}_i est inclus dans le plan défini par l'angle azimutal $\varphi = 0$. Le domaine d'intégration en θ et φ , qui correspond à la surface visible de l'étoile et dépend donc de l'angle i , est alors divisé en deux sous-domaines (voir par exemple l'Annexe D de [Lignières & Georgeot 2009](#))

$$S_v = \left[0, \frac{\pi}{2} - i\right] \times [0, 2\pi] \cup \left[\frac{\pi}{2} - i, \frac{\pi}{2} + i\right] \times [-\varphi_L, \varphi_L] \quad , \quad (4.3)$$

où φ_L est l'angle azimutal limite d'intégration défini par

$$\varphi_L(\theta, i) = \arccos(-\cot \theta \cot i) \quad . \quad (4.4)$$

Le graphique de gauche de la [FIGURE 4.14](#) montre le champ longitudinal B_l calculé grâce à l'Éq. (4.1) dans les trois cas présentés sur la gauche de la [FIGURE 4.13](#) pour différentes valeurs de l'angle d'inclinaison i . Dans les trois cas, B_l est maximal lorsque l'étoile est vue du pôle et tend approximativement vers 0 lorsque l'étoile est vue par l'équateur, la composante axisymétrique du champ magnétique étant antisymétrique par rapport à l'équateur. Quelque soit l'angle i , le champ longitudinal B_l est d'autant plus faible que t_{Ap}/t_Ω est grand. Ainsi, comme attendu d'après la distribution en surface du champ radial B_r visible sur la [FIGURE 4.13](#), le champ longitudinal B_l calculé est d'autant plus faible que le champ magnétique est réparti à petites échelles spatiales à la surface de l'étoile. Les écarts en terme de B_l entre les configurations magnétiques structurées à grande échelle ($t_{Ap}/t_\Omega = 269$ par exemple) et à petite échelle ($t_{Ap}/t_\Omega = 808$) sont cependant faibles, de l'ordre de 15% au maximum. Cette diminution de B_l sera discutée à la fin de cette section ainsi que dans le chapitre suivant.

Comme nous l'avons signalé dans la section précédente, les simulations où un profil initial de rotation différentielle radial est utilisé et où une instabilité de Tayler semble se développer ne nous permettent pas d'étudier l'impact de cette instabilité sur le champ magnétique de surface. Néanmoins, si l'instabilité était moins confinée dans l'intérieur

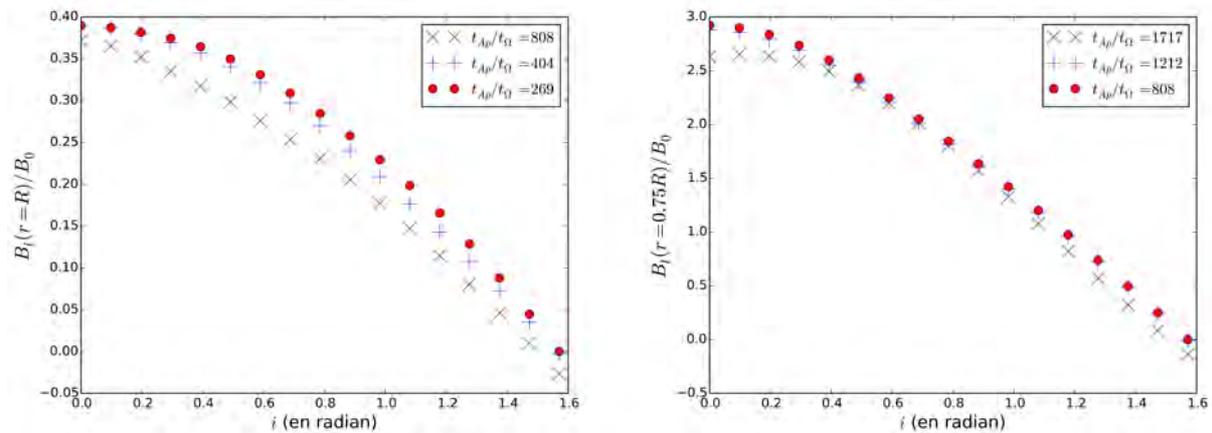


FIGURE 4.14 – Champ longitudinal B_l/B_0 au rayon $r = R$ pour la figure de gauche et $r = 0.75 R$ pour la figure de droite en fonction de l'angle d'inclinaison i lorsque l'amplitude des modes azimutaux non-axisymétriques dominants est à son maximum. À gauche : Les paramètres des simulations sont $N/\Omega_0 = 5$, $Pr_0 = 10^{-5}$, le profil cylindrique de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.37) et Lu et t_{Ap}/t_Ω respectivement égaux à 106.5 et 269 (o), 71 et 404 (+) et 35.5 et 808 (x). À droite : Les paramètres des simulations sont $N/\Omega_0 = 5$, $Pr_0 = 10^{-2}$, le profil radial de rotation différentielle donné par l'Éq. (3.36), $Lu = 35.5$ et t_{Ap}/t_Ω respectivement égal à 808 (o), 1212 (+) et 1717 (x).

stellaire et qu'elle affectait la configuration magnétique de surface, son impact serait probablement similaire à ce que l'on voit au rayon $r = 0.75 R$ dans nos simulations. Le graphique de droite de la FIGURE 4.14 montre alors les valeurs de B_l calculées au rayon $r = 0.75 R$ dans les trois cas présentés sur la droite de la FIGURE 4.13 pour différentes valeurs de l'angle i . De la même façon que pour les simulations où le profil cylindrique de rotation différentielle est utilisé, B_l diminue lorsque t_{Ap}/t_Ω augmente quelque soit l'angle i . Les écarts en terme de B_l entre les configurations magnétiques structurées à grande échelle ($t_{Ap}/t_\Omega = 808$ par exemple) et à petite échelle ($t_{Ap}/t_\Omega = 1717$) sont également faibles, de l'ordre de 12% au maximum.

Le développement d'une instabilité MHD peut donc suffisamment déstructurer une configuration magnétique de sorte que le champ longitudinal mesuré à la surface de l'étoile est plus faible que pour une configuration magnétique stable vis-à-vis d'une instabilité MHD. On pourrait s'attendre en voyant la FIGURE 4.13 que la diminution de B_l soit plus importante lorsque t_{Ap}/t_Ω atteint la valeur critique qui permet à l'énergie magnétique des modes azimutaux non-axisymétriques d'atteindre l'énergie du mode axisymétrique. Néanmoins, il faut noter que l'énergie magnétique transférée dans les petites échelles azimutales et latitudinales par les instabilités MHD observées dans ces simulations ne provient pas du champ poloïdal axisymétrique, mais de la rotation différentielle dans le cas où l'instabilité est magnétorotationnelle ou du champ toroïdal créé par effet Ω (et donc également de la rotation différentielle) dans le cas de l'instabilité de Tayler. Ces instabilités MHD ne déstructurent donc pas à proprement parler le champ poloïdal

axisymétrique, qui évolue d'ailleurs très peu sur les temps courts considérés dans notre étude, mais ajoutent plutôt à celui-ci des composantes de plus petites échelles spatiales. Si ces composantes supplémentaires s'annulent exactement lorsque l'on intègre le champ magnétique à la surface de l'étoile car elles sont de polarités de signe opposé, seul le champ poloïdal axisymétrique sera comptabilisé dans le calcul de B_l .

Discussion, conclusion

L'origine du champ magnétique des étoiles chaudes non-évoluées et l'impact de ce champ magnétique sur l'évolution des étoiles sont mal compris. Le désert magnétique observé entre le fort champ des étoiles Ap/Bp et le faible champ des *Vega-like* met en effet en lumière notre méconnaissance de ce type de magnétisme. Plusieurs scénarios se proposent d'expliquer ce fait observationnel. D'après [Aurière et al. \(2007\)](#), cette dichotomie magnétique serait la conséquence d'une instabilité MHD se développant dans la zone radiative en rotation différentielle de ces étoiles.

Résumé des résultats des simulations MHD

Cette thèse avait pour but d'étudier la stabilité de configurations magnétiques dans une zone radiative en rotation différentielle dans l'optique d'appliquer ces résultats au problème du désert magnétique des étoiles de masse intermédiaire. Pour cela, de nombreuses simulations numériques MHD 2D et 3D ont été réalisées. Les simulations 2D ont permis d'étudier l'évolution d'un champ magnétique axisymétrique dans une zone radiative en rotation différentielle en variant des paramètres comme l'intensité initial du champ poloïdal par rapport à l'intensité de la rotation différentielle, le profil initial de la rotation différentielle, le contraste de densité ρ_c/ρ_0 entre le rayon interne et le rayon externe de notre domaine de calcul, les diffusivités magnétique, visqueuse et thermique, les conditions aux limites, la circulation méridienne ou encore la stratification stable. Un suivi de quantités physiques importantes pour la stabilité d'une configuration magnétique, comme le rapport entre le champ magnétique toroïdal B_φ et le champ poloïdal B_p ainsi que le rapport entre la vitesse angulaire Ω et la fréquence d'Alfvén toroïdale $\omega_{A\varphi}$, a été effectué. Il a été montré que le rapport B_φ/B_p est quasiment proportionnel au nombre sans dimension t_{Ap}/t_Ω qui quantifie l'intensité initiale du champ poloïdal par rapport à l'intensité de la rotation différentielle. La valeur minimale atteinte dans tout le domaine de calcul du rapport $\Omega/\omega_{A\varphi}$ varie entre 2 et 5 suivant le profil initial de rotation différentielle utilisé, les autres paramètres des simulations ayant peu d'influence sur ce rapport. En accord avec de précédentes études ([Spiegel & Zahn 1992](#)), l'effet combiné de la diffusivité thermique et de la stratification stable a de plus été montré comme dépendant de $Pr_0 \times (N/\Omega_0)^2$ pourvu que le nombre de Prandtl $Pr_0 \ll 1$. Le champ magnétique et le champ de vitesse de configurations de même $Pr_0 \times (N/\Omega_0)^2$ évoluent alors exactement de la même manière, ce qui peut permettre une extrapolation de nos résultats à d'autres valeurs de Pr_0 et de N/Ω_0 . Enfin, d'autres régimes asymptotiques ont aussi été atteints en terme de diffusivités magnétique et visqueuse pour des nombres de Lundquist

$Lu \gtrsim 10^4$ ainsi qu'en terme de contraste de densité entre le rayon interne et le rayon externe de notre domaine de calcul pour des $\rho_c/\rho_0 \gtrsim 10^6$.

Les simulations 3D réalisées dans le cadre de l'approximation de Boussinesq ont ensuite permis l'étude de la stabilité vis-à-vis d'instabilités non-axisymétriques de nombreuses configurations magnétiques en présence d'une stratification stable. Nous constatons que la valeur de $\Omega/\omega_{A\varphi}$, et donc le profil initial de rotation différentielle (d'après les résultats des simulations 2D), détermine quelle instabilité MHD est la plus susceptible d'être déclenchée. Dans les cas où le profil cylindrique de rotation donné par l'Éq. (3.37) est utilisé, les configurations axisymétriques sont telles que $\Omega/\omega_{A\varphi} \simeq 5 - 6$ au minimum et une instabilité magnétorotationnelle se déclenche. Une instabilité du mode azimutal $m = 1$, identifiée comme étant probablement l'instabilité de Tayler, se déclenche quant à elle dans les cas où le profil radial de rotation donné par l'Éq. (3.36) est utilisé et où les configurations axisymétriques sont telles que $\Omega/\omega_{A\varphi} \simeq 4$ au minimum. La stratification stable peut limiter le développement de ces instabilités et même empêcher leur déclenchement. Cependant, augmenter la diffusivité thermique κ permet d'augmenter l'échelle radiale critique $\ell_c = \sqrt{\kappa/N}$ en deçà de laquelle les mouvements ne sont plus limités par la stratification stable. Par exemple, dans le cas où le profil cylindrique de rotation est utilisé et où $N/\Omega_0 = 5$, l'instabilité magnétorotationnelle n'est pratiquement plus affectée par la stratification stable lorsque $\ell_c \gtrsim 2.6 \times 10^{-2} R$.

L'énergie magnétique des modes azimutaux instables non-axisymétriques atteint le niveau de l'énergie du mode axisymétrique lorsque t_{Ap}/t_Ω est supérieur à une certaine valeur critique qui dépend de paramètres comme l'importance de la stratification stable et le profil de rotation différentielle. Dans les cas cylindriques où $N/\Omega_0 = 5$ et $Pr_0 = 10^{-5}$ et où une instabilité magnétorotationnelle se développe, cette valeur critique de t_{Ap}/t_Ω est environ égale à 8×10^2 . Cela correspond à un taux de croissance maximal des modes azimutaux les plus instables compris entre 70 et 100 Ω_{Ap} . Par extrapolation de nos résultats, nous avons déduit que la valeur critique de t_{Ap}/t_Ω est d'environ 2×10^3 dans le cas d'une rotation différentielle radiale où $N/\Omega_0 = 5$ et $Pr_0 = 10^{-2}$ et où une instabilité du mode $m = 1$ se développe. Nous avons enfin montré que lorsque t_{Ap}/t_Ω est supérieur à ces valeurs critiques, la configuration magnétique devient alors structurée à plus petites échelles spatiales qu'initialement et le champ longitudinal B_l calculé dans les simulations que nous avons réalisées est diminué de plusieurs pourcents par rapport aux cas où les instabilités ne se développent pas suffisamment.

Discussion des résultats

Les résultats des simulations réalisées soulèvent certains points qui doivent être discutés. De larges gammes de paramètres ont été explorées grâce aux simulations 2D et l'influence des différents paramètres testés sur l'évolution des configurations axisymétriques est bien comprise. Néanmoins, une interrogation persiste quant à l'effet de la circulation méridienne lorsque $t_{Ap}/t_\Omega \lesssim 1$. Dans ce régime de paramètres, nous avons en effet montré que la circulation méridienne n'a aucun effet sur l'évolution d'une configuration magnétique, alors même que la circulation méridienne est dominante devant la rotation différentielle. L'analyse des équations de la MHD (3.11-3.12-3.13-3.14-3.15-3.16)

révèle que pour $t_{Ap}/t_{\Omega} \lesssim 1$, le champ de vitesse azimutal v_{φ} ainsi que le champ magnétique toroïdal B_{φ} n'interviennent pas dans l'évolution de la circulation méridienne. Cela n'explique par contre pas pourquoi la circulation méridienne n'a pas d'influence sur l'évolution de v_{φ} et de B_{φ} .

Le domaine de paramètres exploré par les simulations 3D est nécessairement plus réduit. Nous nous sommes alors focalisés sur deux points : les configurations magnétiques instables vis-à-vis de l'instabilité magnétorotationnelle dans le but d'étudier l'influence de la stratification stable et de la diffusion thermique sur cette instabilité, et la recherche d'un domaine de paramètres où l'instabilité de Tayler se déclenche et peut être étudiée dans le contexte d'un champ magnétique en interaction avec une rotation différentielle. À propos de ce second point, nous avons noté que l'instabilité du mode $m = 1$ qui se développe dans les cas radiaux à $Pr_0 = 10^{-2}$ est en accord avec la plupart des caractéristiques théoriques de l'instabilité de Tayler. Cependant, les zones qui sont censées être les plus instables pour une instabilité de Tayler ne sont pas celles où l'instabilité se développe dans les simulations. Des simulations supplémentaires et une étude plus détaillée sont donc nécessaires pour éclaircir ce point et conclure sur la nature de cette instabilité. Il serait également intéressant de trouver un régime de paramètres qui permettrait à cette instabilité de se développer suffisamment pour que l'énergie du mode azimutal $m = 1$ atteigne l'énergie du mode $m = 0$. L'impact de l'instabilité sur le champ de surface pourrait alors être réellement quantifié. Augmenter t_{Ap}/t_{Ω} demanderait l'utilisation de résolutions spatiales et temporelles qui seraient très coûteuses en temps de calcul mais pas irréalisables. L'utilisation de profils radiaux de rotation différentielle provoquant un cisaillement plus intense que le profil donné par l'Éq. (3.36), mais moins intense que celui défini par l'Éq. (3.35), pourrait également être une piste à explorer pour qu'une instabilité du mode $m = 1$ puisse pleinement se développer.

Les résultats des simulations 2D et 3D nous permettent toutefois de proposer un modèle phénoménologique qui décrit la déstructuration par une instabilité MHD d'un champ poloidal soumis à une rotation différentielle non forcée par un mécanisme physique. Nos simulations ont en effet montré que le temps de croissance d'une instabilité doit être très supérieur au temps d'évolution du champ magnétique axisymétrique de référence pour que l'instabilité modifie significativement le champ axisymétrique. Ce temps caractéristique d'évolution est environ égal à $2t_{max}$ (voir FIGURE 3.4). La condition sur le taux de croissance σ de l'instabilité est donc

$$\sigma \gg \frac{1}{2t_{max}} \quad . \quad (4.5)$$

Grâce au modèle d'ondes d'Alfvén stationnaires présenté dans la Section 3.3.2, des expressions analytiques approximées de $B_{\varphi}(t = t_{max})$ et de t_{max} dépendantes des conditions aux limites sont données par les Éqs. (3.46) et (3.47), ou par les Éqs. (21) et (22) de Gaurat et al. (2015) dans un cas simplifié. En utilisant de plus l'expression théorique des taux de croissance de l'instabilité magnétorotationnelle (Éq. 2.25) et de l'instabilité de Tayler (Éqs. 2.30 et 2.32), la condition (4.5) devient

$$\Delta\Omega \gg \frac{\overline{v_{Ap}}}{L} \quad , \quad (4.6)$$

où $\Delta\Omega \approx r\partial\Omega/\partial r = q\Omega$, $\overline{v_{Ap}}$ et L sont respectivement sur une ligne de champ magnétique poloidal donnée le contraste de vitesse angulaire, la vitesse d'Alfvén poloidale moyenne et la longueur de la ligne de champ (voir Sections 4.2 et 5.2 de [Gaurat et al. 2015](#)). Il est intéressant de constater que l'on obtient la même condition (4.6) que l'instabilité soit magnétorotationnelle ou de Tayler. En effet, $\sigma_{MRI} \sim \Delta\Omega/2$ et $\sigma_{TI} = \omega_{A\varphi}$ (ou $\sigma_{TI} = \omega_{A\varphi}^2/\Omega$ si $\Omega \gg \omega_{A\varphi}$), mais le champ toroidal est engendré dans nos configurations par la rotation différentielle de telle sorte que, comme le montre le modèle d'ondes d'Alfvén stationnaires, $\omega_{A\varphi} \sim \Delta\Omega/2$ (et $\omega_{A\varphi}^2/\Omega \sim \Delta\Omega/2$).

La condition (4.6) est certes valide pour les deux types d'instabilités MHD, mais pour un couple particulier de conditions aux limites sur Ω : fixe au niveau d'une extrémité de la ligne de champ et *stress-free* au niveau de l'autre extrémité. Cependant, les simulations 2D ont montré que sur les temps courts considérés dans notre étude, de l'ordre de t_{Ap} , les conditions aux limites sur Ω ont un effet très limité sur la configuration magnétique obtenue au temps t_{max} . Nous pouvons donc considérer que la condition d'instabilité (4.6) est valable quelque soient les conditions aux limites sur Ω . On peut également noter que les expressions théoriques des taux de croissance utilisées pour dériver la condition (4.6) sont approximatives car dérivées à partir d'analyses locales qui ne prennent pas en compte certaines effets comme la stratification stable, les diffusivités ou encore le potentiel stabilisant du champ magnétique poloidal. Concernant tout d'abord l'effet stabilisant du champ poloidal, la relation de dispersion de [Ogilvie \(2007\)](#), qui ne tient pas compte de cet effet, donne des prédictions qui sont généralement en bon accord avec les résultats des simulations. L'effet stabilisant du champ poloidal est donc probablement négligeable sur nos configurations magnétiques qui sont largement dominées par le champ toroidal. En revanche, la stratification stable et les diffusions magnétique et visqueuse ont une influence significative sur le taux de croissance des instabilités qui se développent dans nos simulations 3D. De plus, la condition (4.5), d'où est tirée la condition (4.6), ne précise pas de combien le taux de croissance σ doit être supérieur au temps d'évolution de l'état de référence axisymétrique pour que l'instabilité soit capable de fortement affecter la topologie du champ magnétique. Les simulations 3D prennent en compte tous ces effets et leurs résultats nous permettent de préciser la condition d'instabilité (4.6). Réécrivons tout d'abord cette condition de la manière suivante

$$\Delta\Omega \gtrsim \frac{1}{C_{inst}} \frac{\overline{v_{Ap}}}{L}, \quad (4.7)$$

où C_{inst} est le facteur qui contient nos incertitudes sur la valeur exacte des taux de croissance et sur le rapport σ/Ω_{Ap} nécessaire afin que l'instabilité se développe suffisamment pour déstructurer le champ axisymétrique à grande échelle. Dans le cas particulier où le profil cylindrique de rotation est utilisé et où $N/\Omega_0 = 5$ et $Pr_0 = 10^{-5}$, l'instabilité magnétorotationnelle se développe pleinement lorsque le taux de croissance des modes instables est tel que $\sigma \gtrsim 100 \Omega_{Ap}$. Puisque $\Omega_{Ap} \simeq 1/(2t_{max})$, on a alors dans ce cas $C_{inst} \simeq 10^{-2}$, c'est à dire $\Delta\Omega \gtrsim 100 \overline{v_{Ap}}/L$.

Application au cas stellaire

La condition d'instabilité (4.7) peut être exprimée en fonction de quantités observables de surface

$$\frac{B_0}{R\Omega_0\sqrt{4\pi\rho_0}} \lesssim C_{inst} \frac{L}{R} \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \frac{V_{Ap}}{\bar{v}_{Ap}}, \quad (4.8)$$

où $V_{Ap} = R/t_{Ap}$. Cette condition (4.8) introduit un champ critique B_{crit} en-deçà duquel une instabilité non-axisymétrique qui se déclenche est capable de modifier la structure initiale à grande échelle d'un champ magnétique. Ce champ critique est proportionnel à $R\Omega_0\sqrt{4\pi\rho_0}$, comme celui de [Aurière et al. \(2007\)](#), mais diffère de ce dernier car il dépend aussi de quantités physiques internes comme le profil de rotation différentielle, de masse volumique et la géométrie du champ magnétique à travers $\Delta\Omega/\Omega_0$, V_{Ap}/\bar{v}_{Ap} et L/R .

La limite inférieure du champ des étoiles Ap/Bp pourrait être intimement liée à un champ critique comme celui donné par la condition (4.8). En effet, si $\Delta\Omega/\Omega_0$ ne dépend pas de la vitesse angulaire de surface Ω_0 , le champ critique est alors proportionnel à Ω_0 . Or, les observations du champ magnétique des étoiles Ap/Bp montrent que la limite inférieure du champ de ces étoiles semble dépendre linéairement de la rotation de surface (voir [FIGURE 1.5](#)). Puisque nous savons que la limite inférieure du champ dipolaire des Ap/Bp est $\simeq 300\text{G}$ et que $R\Omega_0\sqrt{4\pi\rho_0} \simeq 300\text{G}$ pour une étoile Ap typique ($R = 3R_\odot$, $P = 5$ jours, $\log g = 4$ dex et $T_{eff} = 10^4\text{K}$), la condition d'instabilité (4.8) serait en accord avec les observations si $C_{inst} \times \Delta\Omega/\Omega_0 \times V_{Ap}/\bar{v}_{Ap} \gtrsim 1$. Un profil de masse volumique calculé pour une telle étoile grâce au code d'évolution stellaire MESA donne $V_{Ap}/\bar{v}_{Ap} \simeq 2 \times 10^4$, ce qui implique dans les cas où $C_{inst} = 10^{-2}$ que $\Delta\Omega/\Omega_0 \gtrsim 5 \times 10^{-3}$. Une rotation différentielle très faible entre les extrémités d'une ligne de champ poloidal semble donc suffisante pour déclencher une instabilité susceptible de modifier significativement le champ magnétique observé.

Nous avons vu à la fin du Chapitre 4 que le champ longitudinal B_l calculé dans des cas instables est plus faible que dans des cas stables et que la diminution de B_l est de l'ordre de 15% au maximum pour les cas considérés. C'est bien moindre que les 2 ordres de grandeur observés entre le champ stable des Ap/Bp et le champ des *Vega-like*. La condition $\Delta\Omega/\Omega_0 \gtrsim 5 \times 10^{-3}$ ne semble donc pas suffisante pour reproduire la discontinuité observée dans la distribution du champ magnétique des étoiles de masse intermédiaire. Dans les simulations que nous avons réalisées, nous avons cependant constaté que le champ longitudinal calculé diminue lorsque t_{Ap}/t_Ω augmente, c'est à dire lorsque σ/Ω_{Ap} augmente. Dans notre critère (4.8), cela se traduit par une diminution de C_{inst} et, pour un champ critique donné, par une augmentation de $\Delta\Omega/\Omega_0$. Il semble donc que, pour qu'une instabilité MHD déstructure suffisamment la configuration magnétique de sorte que le champ longitudinal alors calculé soit 2 ordres de grandeur inférieur à celui d'un cas stable, le contraste de vitesse angulaire $\Delta\Omega/\Omega_0$ nécessaire au développement de cette instabilité doit être bien supérieur à 5×10^{-3} .

Un autre effet qui n'a pas été étudié durant ma thèse est le développement d'une turbulence MHD nourrie par les instabilités. Celle-ci est susceptible d'augmenter la diffusion magnétique effective et ainsi de diminuer le champ longitudinal. Quantifier les effets d'une turbulence MHD, notamment pour des valeurs de t_{Ap}/t_Ω supérieures à celles que

nous avons utilisées dans les simulations, sera donc nécessaire afin de savoir si ces instabilités sont capables de déstructurer de manière très significative un champ magnétique à grande échelle.

Perspectives

Les simulations numériques montrent que, conformément au scénario proposé par [Aurière et al. \(2007\)](#), des instabilités MHD se développent dans une zone radiative en rotation différentielle et modifient significativement la configuration magnétique lorsque le champ poloïdal initial est suffisamment faible. Le manque de réalisme de ces simulations ne nous permet cependant pas de confirmer avec certitude ce scénario. Certains éléments physiques absents de nos simulations devront être pris en compte pour poursuivre l'exploration du scénario de [Aurière et al. \(2007\)](#). Tout d'abord, les régimes de paramètres en terme de coefficients de diffusion atteints dans les simulations numériques globales actuelles sont très éloignés des valeurs stellaires. Comme nous l'avons signalé dans ce manuscrit, la gamme d'échelles dynamiques supérieures et inférieures à l'échelle critique ℓ_c en deçà de laquelle les mouvements verticaux ne ressentent pas l'effet stabilisateur de la stratification est beaucoup plus importante dans une zone radiative stellaire que dans les simulations numériques. Seuls les progrès informatiques et les améliorations des méthodes de résolution numérique pourront réduire cet écart. Il sera de plus nécessaire de considérer la stratification en densité absente de nos simulations 3D. Résoudre les équations de la MHD sous l'approximation anélastique peut permettre cela, mais encore une fois les ressources numériques actuelles ne permettent pas d'inclure dans les simulations 3D des contrastes de densité réalistes. Enfin, au lieu de considérer des profils initiaux de rotation différentielle arbitraires, le forçage de la rotation différentielle par un mécanisme physique comme la contraction du cœur d'une étoile devra être introduit dans les simulations numériques afin de rendre compte de la réalité astrophysique. Les conséquences sur la stabilité d'une configuration magnétique seront très probablement contrôlées par le rapport entre le temps caractéristique du mécanisme à l'origine de ce forçage et le temps caractéristique de redistribution du moment cinétique. Si ce rapport est trop grand, aucune rotation différentielle susceptible de déstabiliser une configuration magnétique ne pourra subsister suffisamment longtemps pour qu'une instabilité MHD puisse pleinement se développer. Au contraire, si ce rapport est trop petit, la source d'énergie cinétique disponible pour le développement des instabilités MHD sera en permanence renouvelée.

Il est par ailleurs évident que nos simulations numériques de l'interaction entre un champ magnétique et une rotation différentielle sont intéressantes du point de vue de l'effet des instabilités MHD non-axisymétriques sur l'évolution du moment cinétique des étoiles. Comme notamment noté dans [Jouve et al. \(2015\)](#), le développement de ces instabilités s'accompagne d'une augmentation du transport du moment cinétique par rapport à des cas stables. La quantification précise du transport du moment cinétique induit par les instabilités MHD est un problème qui peut donc être abordé grâce à ce type de simulations numériques.

En parallèle, des contraintes observationnelles supplémentaires sur la rotation interne des étoiles, notamment des étoiles pulsantes de masse intermédiaire comme les γ Dor,

seront fournies par l'astérosismologie. Cela devrait permettre de mieux contraindre le transport du moment cinétique ainsi que les caractéristiques du forçage de la rotation qui doit être inclus dans les simulations numériques. Enfin, les observations spectropolarimétriques apporteront des contraintes toujours plus précises sur le magnétisme stellaire. La dépendance de la limite inférieure du champ magnétique des étoiles Ap/Bp avec la période de rotation de ces étoiles devra notamment être précisée, l'hypothèse d'un désert magnétique dans les étoiles massives de la séquence principale sera vérifiée et le magnétisme des étoiles de masse intermédiaire de la pré-séquence principale sera exploré en détail. Combiner ces contraintes observationnelles aux résultats numériques ainsi qu'aux développements théoriques permettra ainsi une meilleure compréhension des mécanismes à l'origine des champs magnétiques stellaires observés ainsi que de l'impact de ces champs magnétiques sur l'évolution des étoiles.

Annexes

Annexe A

Équations de la MHD

La magnétohydrodynamique (MHD) est la théorie qui décrit la dynamique d'un fluide conducteur. Cette annexe se propose de dériver les équations de cette théorie. Il ne sera pas question de les dériver à partir d'une description statistique d'un ensemble de particules chargées électriquement car cela va bien au-delà de mon travail de thèse. Il n'est pas aisé en effet de dériver les propriétés macroscopiques d'un fluide conducteur à partir des propriétés microscopiques d'un ensemble de particules chargées électriquement à cause des interactions électromagnétiques à longues distances que chacune de ces particules exerce sur les autres. Il va donc être question dans cette annexe de dériver les équations de la MHD à partir de considérations macroscopiques sans justifications microscopiques précises qui sont, pour les personnes intéressées, explicitées dans tout livre de physique des plasmas.

Je vais tout de même préciser que pour que la MHD soit applicable à un plasma, il faut que la séparation des charges électriques soit négligeable. Autrement dit, il faut que l'on puisse décrire le plasma comme un ensemble d'un seul type de particules chargées et non pas comme un ensemble de particules regroupant des électrons, des ions et des atomes neutres. Cette condition est respectée si les échelles spatiales considérées sont plus grandes que la longueur de Debye $\lambda_D = (k_B T / 8\pi n_e q_e^2)^{1/2}$, où k_B est la constante de Boltzmann, T est la température, q_e est la charge électrique de l'électron et n_e est la densité d'électrons ou d'ions, et si les échelles de temps sont plus grandes que l'inverse de la fréquence de plasma $\omega_p = (4\pi n_e q_e^2 / m_e)$, où m_e est la masse de l'électron. Une autre condition à l'application de la MHD est que le plasma doit être dans un état proche localement de l'équilibre thermodynamique afin que ces particules suivent une distribution des vitesses proche de la distribution de Maxwell. Le respect de ces conditions pour un plasma permet de se placer dans l'approximation des milieux continus et on peut alors définir, tout comme en dynamique des fluides, ce que l'on appelle une particule fluide. Cette particule fluide est un ensemble de particules chargées pour laquelle on peut définir des grandeurs moyennées comme la vitesse \mathbf{v} , le champ magnétique \mathbf{B} ou la température T . La théorie de la MHD permet alors de suivre l'évolution de ces grandeurs pour une particule de fluide conducteur. Les équations gouvernant cette théorie sont basées sur les principes fondamentaux de la physique que sont la conservation de la masse, de la quantité de mouvement ainsi que de l'énergie. Les équations de Maxwell doivent également être

considérées afin de décrire l'évolution du champ électromagnétique.

A.1 Conservation de la masse

Considérons une particule fluide de masse volumique ρ et de volume V . La variation de la masse $M = \int \rho dV$ de cette particule fluide ne peut être due qu'à un flux de masse traversant la surface délimitant son volume V , ce qui se traduit par

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV = - \oiint_{S(V)} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} \quad , \quad (\text{A.1})$$

où $d\mathbf{S}$ est le vecteur élément de surface dirigé vers l'extérieur du volume. D'après le théorème de Gauss, l'intégrale de surface d'une quantité est égale à l'intégrale de volume de la divergence de cette quantité. L'équation qui relate de la conservation de la masse devient donc

$$\iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right] dV = 0 \quad . \quad (\text{A.2})$$

Puisque cette équation est vraie pour n'importe quel volume de particule fluide, on obtient

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad , \quad (\text{A.3})$$

ou encore

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad . \quad (\text{A.4})$$

On appelle cette équation l'équation de continuité.

A.2 Conservation de la quantité de mouvement

La seconde loi de Newton traduit, avec l'aide de l'équation de continuité, la conservation de la quantité de mouvement. Partons donc de la seconde loi de Newton qui permet de donner l'évolution de la vitesse d'une particule fluide. Tout d'abord, l'évolution d'une grandeur physique associée à une particule fluide doit prendre en compte l'advection due au champ de vitesse \mathbf{v} à travers la dérivée particulaire, ou encore dérivée Lagrangienne $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$. Pour une particule fluide de masse $\rho \delta V$, la seconde loi de Newton donne

$$\rho \delta V \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \delta \mathbf{F}_{\text{volume}} + \delta \mathbf{F}_{\text{surface}} \quad . \quad (\text{A.5})$$

Les forces de volume, telles que la gravité, agissent en tout point à l'intérieur du volume et peuvent donc être mises sous la forme $\delta \mathbf{F}_{\text{volume}} = \delta V \mathbf{f}_{\text{vol}}$, où \mathbf{f}_{vol} dénote les forces de volume par unité de volume. Les forces de surface sont spécifiques à la mécanique des milieux continus et sont dues au fait que l'on considère une particule fluide possédant une surface. Elles agissent à travers la surface délimitant le volume de la particule fluide et sont proportionnelles à cette surface. La proportionnalité est assurée par un tenseur de rang

deux, le tenseur des contraintes σ_v , et l'on peut alors montrer que $\delta \mathbf{F}_{\text{surface}} = \nabla \cdot \sigma_v \delta V$. On obtient

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f}_{\text{vol}} + \nabla \cdot \sigma_v \quad . \quad (\text{A.6})$$

Il reste alors à donner l'expression des forces de volume et du tenseur des contraintes.

A.2.1 Forces de volume - Force de Laplace

Deux forces de volume sont à considérer dans le cas général en MHD, la force de gravité $\mathbf{F}_{\text{grav}} = \rho \mathbf{g}$ ainsi que la force de Laplace, résultante macroscopique de la force de Lorentz. Dans un plasma décrit par la MHD, le champ électrique généré par les charges électriques est écranté car les échelles de longueur considérées sont plus grandes que la longueur de Debye λ_D . La force de Laplace par unité de masse est alors

$$\mathbf{F}_{\mathbf{L}} = \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad , \quad (\text{A.7})$$

où c est la vitesse de la lumière, \mathbf{j} est la densité de courant électrique et \mathbf{B} le champ magnétique. On peut exprimer le courant électrique \mathbf{j} à partir de l'équation de Maxwell-Ampère en négligeant le courant de déplacement \mathbf{j}_d (les vitesses caractéristiques sont non-relativistes dans les intérieurs stellaires)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad , \quad (\text{A.8})$$

La force de Laplace par unité de masse devient donc

$$\mathbf{F}_{\mathbf{L}} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad , \quad (\text{A.9})$$

que l'on peut aussi exprimer sous la forme suivante

$$\mathbf{F}_{\mathbf{L}} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} - \nabla \frac{B^2}{8\pi} \quad , \quad (\text{A.10})$$

où $\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} / 4\pi$ est la tension magnétique et $B^2 / 8\pi$ est la pression magnétique.

A.2.2 Forces de surface - Tenseur des contraintes

L'expression du tenseur des contraintes σ_v est donnée par ce que l'on appelle une loi de comportement dynamique. Dans le cas d'un fluide réel isotrope, les composantes σ_{ij} du tenseur des contraintes σ_v sont fonction des composantes $\partial_i v_j$ du gradient du champ de vitesse $\nabla \mathbf{v}$. Plus précisément, elles sont fonction des composantes symétriques de $\nabla \mathbf{v}$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(t_{kl}^s) \quad , \quad (\text{A.11})$$

avec $\partial_i v_j = t_{ij}^s + t_{ij}^a$ où t^s est un tenseur symétrique et t^a un tenseur antisymétrique (on peut toujours décomposer un tenseur en une partie symétrique et une partie antisymétrique). Dans la mesure où l'on considère de petites déformations du fluide (régime

linéaire), on développe les composantes de σ_v à l'ordre 1 autour de $t^s = 0$ qui traduit l'équilibre. Seul t^s mesure l'écart à la situation d'équilibre, t^a traduit la rotation.

$$\sigma_{ij} \simeq \sigma_{ij}(t^s = 0) + \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t_{kl}^s} \right|_{t^s=0} t_{kl}^s \quad , \quad (\text{A.12})$$

où l'on va noter $D_{ijkl} = \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t_{kl}^s} \right|_{t^s=0}$. On utilise ici et par la suite la notation d'Einstein, c'est à dire que la sommation sur toutes les valeurs que peuvent prendre les indices dits muets est sous-entendue. Par exemple $\left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t_{kl}^s} \right|_{t^s=0} t_{kl}^s = \sum_{k,l} \left. \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial t_{kl}^s} \right|_{t^s=0} t_{kl}^s$.

$\sigma_{ij}(t^s = 0)$ est le tenseur des contraintes en situation d'équilibre, c'est à dire sans gradient du champ de vitesse et donc équivalent à une situation où le fluide est sans viscosité. On écrit alors

$$\sigma_{ij}(t^s = 0) = -p\delta_{ij} \quad , \quad (\text{A.13})$$

où p est la seule contrainte qui s'exerce dans un fluide isotrope à l'équilibre thermodynamique, la pression thermique.

En ce qui concerne D_{ijkl} , le seul tenseur isotrope du quatrième ordre symétrique en ij et kl a la forme suivante

$$D_{ijkl} = a(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) + b\delta_{ij}\delta_{kl} \quad . \quad (\text{A.14})$$

Ce qui implique

$$D_{ijkl}t_{kl}^s = a(t_{ij}^s + t_{ji}^s) + b\delta_{ij}t_{kk}^s \quad ,$$

$$\Leftrightarrow D_{ijkl}t_{kl}^s = a(\partial_i v_j - t_{ij}^a + \partial_j v_i - t_{ji}^a) + b\delta_{ij}(\partial_k v_k - t_{kk}^a) \quad . \quad (\text{A.15})$$

Or $t_{ij}^a = -t_{ji}^a$ et $t_{kk}^a = -t_{kk}^a = 0$ car le tenseur t^a est antisymétrique, donc

$$D_{ijkl}t_{kl}^s = a(\partial_i v_j + \partial_j v_i) + b\delta_{ij}\partial_k v_k \quad . \quad (\text{A.16})$$

En général, on écrit $a = \mu$ et $b = \zeta - \frac{2}{3}\mu$, où μ est le coefficient de viscosité dynamique de cisaillement et ζ le coefficient de viscosité dynamique de volume. Finalement, les composantes du tenseur des contraintes σ_v sont

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i - \frac{2}{3}\delta_{ij}\partial_k v_k) + \zeta\delta_{ij}\partial_k v_k \quad . \quad (\text{A.17})$$

La divergence de ce tenseur est alors

$$\begin{aligned} \partial_j \sigma_{ij} &= -\partial_i p + \partial_j (\mu(\partial_i v_j + \partial_j v_i)) + \partial_i (\zeta - \frac{2}{3}\mu)\partial_k v_k \quad , \\ \Rightarrow \nabla \cdot \sigma_v &= -\nabla p + \nabla \cdot \left(\mu(\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) \right) + \nabla \cdot \left((\zeta - \frac{2}{3}\mu)\nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad . \quad (\text{A.18}) \end{aligned}$$

A.2.3 Référentiel en rotation

En physique stellaire, on étudie généralement des objets en rotation. Se placer dans un référentiel en rotation à une vitesse angulaire constante Ω_0 plutôt que dans un référentiel inertiel peut être judicieux. Il faut alors prendre en compte, en plus de la vitesse particulière, la vitesse de rotation globale du fluide $\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}$

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{D\mathbf{r}'}{Dt} + \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}' \quad , \quad (\text{A.19})$$

où \mathbf{r} est le vecteur position en coordonnées sphériques dans le référentiel inertiel et \mathbf{r}' est le vecteur position dans le référentiel tournant. On a donc

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{D^2\mathbf{r}}{Dt^2} = \frac{D\mathbf{v}'}{Dt} + 2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v}' + \mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}') \quad . \quad (\text{A.20})$$

On omettra par la suite le prime indiquant une quantité mesurée dans le référentiel tournant. Le terme $2\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v}$ est l'accélération de Coriolis et l'accélération centrifuge est

$$\mathbf{\Omega}_0 \times (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r}) = -\nabla \left(\frac{1}{2} (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r})^2 \right) \quad , \quad (\text{A.21})$$

où $(\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r})^2/2$ est le potentiel centrifuge.

A.2.4 Équations de Navier-Stokes

En se plaçant dans un référentiel en rotation à la vitesse angulaire Ω_0 et en remplaçant l'expression des forces de volume et de surface dans les Éqs. (A.6), on obtient

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = & -2\rho \mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \rho \nabla \left(\frac{1}{2} (\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{r})^2 \right) - \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \\ & + \nabla \cdot \left(\mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top) \right) + \nabla \left(\left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Ces célèbres équations sont connues sous le nom des équations de Navier-Stokes. La résolution de ces équations dans le cas général est un des sept problèmes du millénaire et celui qui y parviendra sera doté d'un prix d'un million de dollars américains par le Clay Mathematics Institute. Avis aux amateurs de mathématiques!

A.3 Conservation de l'énergie

La conservation de l'énergie d'un système s'exprime ainsi : la variation de l'énergie cinétique et de l'énergie interne du système est égale au flux d'énergie entrant ou sortant de ce système et aux sources d'énergie S internes au système. Appliquée à un volume fixe V , on écrit

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) dV = - \oint_{S(V)} \rho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} + \iiint_V S dV \quad , \quad (\text{A.23})$$

où e est l'énergie interne massique. D'après le théorème de Gauss, on a

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) \right] dV = - \iiint_V \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) \rho \mathbf{v} \right] dV + \iiint_V S dV \quad . \quad (\text{A.24})$$

En utilisant l'équation de continuité (A.4), on montre que

$$\iiint_V \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) dV = \iiint_V S dV \quad . \quad (\text{A.25})$$

Les sources d'énergie sont diverses

$$\iiint_V S dV = \underbrace{\iiint_V \mathbf{f}_{\text{vol}} \cdot \mathbf{v} dV}_{\text{puissance des forces de volume}} + \underbrace{\oint_{S(V)} v_i \sigma_{ij} dS_j}_{\text{puissance des forces de contraintes}} - \underbrace{\oint_{S(V)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}}_{\text{flux de chaleur}} + \underbrace{\iiint_V Q dV}_{\text{puissance des sources de chaleur locales}} \quad , \quad (\text{A.26})$$

où \mathbf{F} est la densité de flux de chaleur et Q les sources de chaleur locales. Encore une fois, grâce au théorème de Gauss on obtient

$$\iiint_V S dV = \iiint_V \mathbf{f}_{\text{vol}} \cdot \mathbf{v} dV + \iiint_V \partial_j (v_i \sigma_{ij}) dV - \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV + \iiint_V Q dV \quad . \quad (\text{A.27})$$

En remplaçant cette dernière équation dans l'Éq. (A.25) et puisque celles-ci sont vrais pour tout volume V , on obtient alors une équation donnant l'évolution de l'énergie totale

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) = \mathbf{f}_{\text{vol}} \cdot \mathbf{v} + \partial_j (v_i \sigma_{ij}) - \nabla \cdot \mathbf{F} + Q \quad . \quad (\text{A.28})$$

Afin de dériver une équation donnant uniquement l'évolution de l'énergie interne massique e , on multiplie scalairement l'équation (A.6) par \mathbf{v} afin d'obtenir l'équation d'évolution de l'énergie cinétique massique $v^2/2$

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \mathbf{f}_{\text{vol}} \cdot \mathbf{v} + v_i \partial_j \sigma_{ij} \quad . \quad (\text{A.29})$$

On élimine $v^2/2$ de l'Éq. (A.28) qui devient alors

$$\rho \frac{De}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{F} + \sigma_{ij} \partial_j v_i + Q \quad , \quad (\text{A.30})$$

$$= -\nabla \cdot \mathbf{F} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + C_{\text{visq}} + Q \quad , \quad (\text{A.31})$$

où l'on a remplacé σ_{ij} par son expression donnée par la loi de comportement dynamique (A.17) et où C_{visq} est la dissipation visqueuse dont l'expression est

$$C_{\text{visq}} = \frac{\mu}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i)^2 + \left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) (\nabla \cdot \mathbf{v})^2 \quad . \quad (\text{A.32})$$

Une inconnue reste à déterminer, la densité de flux de chaleur \mathbf{F} dont l'expression nous est fournie par une loi de comportement thermique.

A.3.1 Loi de comportement thermique

Tout comme $\partial_i v_j$ qui caractérise l'écart à l'équilibre dynamique (plus précisément la partie symétrique t_{ij}^s de $\partial_i v_j$), le gradient de température ∇T caractérise l'écart à l'équilibre thermodynamique. La densité de flux de chaleur \mathbf{F} a donc la forme suivante

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\nabla T) \quad . \quad (\text{A.33})$$

On fait, comme avec σ_{ij} , un développement limité de \mathbf{F} à l'ordre 1 autour de l'équilibre caractérisé par $\nabla T = \mathbf{0}$

$$\mathbf{F} \simeq \mathbf{F}(\nabla T = \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \nabla T} \right|_{\nabla T = \mathbf{0}} \nabla T \quad , \quad (\text{A.34})$$

soit pour la i -ème composante de \mathbf{F}

$$F_i \simeq F_i(\nabla T = \mathbf{0}) + \left. \frac{\partial F_i}{\partial (\partial_j T)} \right|_{\partial_j T = 0} \partial_j T = F_i(\nabla T = \mathbf{0}) - \chi_{ij} \partial_j T \quad , \quad (\text{A.35})$$

où χ est le tenseur de conductivité thermique défini par

$$\chi_{ij} = - \left. \frac{\partial F_i}{\partial (\partial_j T)} \right|_{\partial_j T = 0} \quad . \quad (\text{A.36})$$

On considère le fluide isotrope donc la conductivité thermique se résume à un scalaire χ et donc $\chi_{ij} = \delta_{ij} \chi$. De plus, à l'équilibre thermodynamique le flux de chaleur est nul $\mathbf{F}(\nabla T = \mathbf{0}) = \mathbf{0}$. On obtient donc comme expression pour la densité de flux de chaleur

$$\mathbf{F} = -\chi \nabla T \quad . \quad (\text{A.37})$$

Cette équation est la célèbre loi de Fourier.

En remplaçant l'Éq. (A.37) dans l'équation de conservation de l'énergie interne (A.30), on obtient finalement

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (\chi \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{v} + C_{visq} + Q \quad . \quad (\text{A.38})$$

A.4 Équation d'induction

En MHD, l'équation d'induction décrit la dynamique d'un champ magnétique. Elle est dérivée à partir des équations de Maxwell et de la loi d'Ohm. En régime non-relativiste, les équations de Maxwell prennent la forme suivante

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho_e \quad , \quad (\text{A.39})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad , \quad (\text{A.40})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad , \quad (\text{A.41})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad (\text{A.42})$$

où ρ_e est la densité de charge électrique et \mathbf{E} est le champ électrique. Quant à la loi d'Ohm, si l'on néglige les termes de second ordre tels que celui de l'effet Hall par exemple, elle s'écrit

$$\mathbf{j} = \sigma_{cond} \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \right) , \quad (\text{A.43})$$

où σ_{cond} est la conductivité électrique.

En remplaçant, dans la loi d'Ohm, \mathbf{j} donné par l'équation de Maxwell-Ampère (A.41), on obtient l'expression suivante

$$\mathbf{E} = -\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} + \frac{c}{4\pi\sigma_{cond}} \nabla \times \mathbf{B} . \quad (\text{A.44})$$

On remplace alors l'Éq. (A.44) dans l'équation de Maxwell-Faraday (A.42) pour obtenir l'équation donnant l'évolution de \mathbf{B} appelée équation d'induction

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) , \quad (\text{A.45})$$

où $\eta = c^2/(4\pi\sigma_{cond})$ est la diffusivité magnétique.

A.5 L'ensemble complet des équations

Pour résumer, voici l'ensemble des équations de la MHD dans un cas général

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 , \quad (\text{A.46})$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = & -2\rho \boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} + \rho \nabla \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r})^2 \right) - \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \\ & + \nabla \cdot \left(\mu (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^\top) \right) + \nabla \cdot \left(\left(\zeta - \frac{2}{3} \mu \right) \nabla \cdot \mathbf{v} \right) , \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$$\rho \frac{De}{Dt} = \nabla \cdot (\chi \nabla T) - p \nabla \cdot \mathbf{v} + C_{visq} + Q , \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\eta \nabla \times \mathbf{B}) . \quad (\text{A.49})$$

Il y a donc huit équations, or le nombre de variables apparaissant dans ces équations est de dix : les trois composantes de la vitesse \mathbf{v} et du champ magnétique \mathbf{B} , la densité ρ , la pression p , l'énergie interne massique e ainsi que la température T . Cependant, seulement deux des quatre dernières variables énoncées sont indépendante. La pression peut en effet être reliée à la densité par une équation d'état du genre $p \equiv p(\rho)$. Généralement,

en physique stellaire, le plasma peut être considéré comme un gaz parfait satisfaisant l'équation d'état suivante

$$p = \frac{\rho k_B T}{\langle m_p \rangle} \quad , \quad (\text{A.50})$$

où k_B est la constante de Boltzmann et $\langle m_p \rangle$ la masse moyenne des particules du plasma.

De même, une équation liant l'énergie interne et la température de la forme $e \equiv e(T)$ peut être trouvée. Par exemple, pour un gaz parfait monoatomique on a

$$e = \frac{3 k_B T}{2 m_p} \quad . \quad (\text{A.51})$$

On se retrouve donc bien avec huit équations et huit variables indépendantes ce qui fait de la MHD une théorie dynamique complète qui permet de déterminer l'évolution des quantités physiques caractérisant un plasma.

A.6 L'approximation Boussinesq

L'ensemble des équations de la MHD dans leur forme générale est très difficile à résoudre, et ce même grâce à des méthodes de résolution numérique. Il existe cependant des approximations qui permettent de simplifier ce système d'équations, les plus répandues en physique stellaire et géophysique sont les approximations Boussinesq et anélastique. Nous allons ici nous intéresser à la première de ces approximations.

L'approximation Boussinesq est applicable aux fluides newtoniens faiblement compressibles. Pour de tels fluides, une forte variation de pression provoque une variation de densité négligeable, seul une variation de température peut avoir un effet significatif sur la densité. On écrit alors

$$\rho = \bar{\rho} (1 - \alpha(T - \bar{T})) \quad , \quad (\text{A.52})$$

où $\bar{\rho}$ et \bar{T} sont respectivement la masse volumique et la température qui caractérisent

l'équilibre autour duquel ces quantités peuvent fluctuer. Le profil de $\bar{\rho}$ est déterminé par l'équation d'état. Il est, sauf cas très particuliers, uniforme dans l'approximation Boussinesq. α est le coefficient de dilatation thermique, il est généralement très petit devant 1. Une forte variation de température provoque donc une faible variation de densité qui est négligeable dans la plupart des termes des équations de la MHD, sauf dans celui de gravité où ces faibles variations peuvent tout de même déclencher des mouvements verticaux. De plus, puisque $|D \ln \rho / Dt| \ll 1$, d'après l'équation de continuité (A.46) on a $|\nabla \cdot \mathbf{v}| \ll 1$. L'énergie interne massique peut alors être reliée à la température par

$$de = c_p dT \quad , \quad (\text{A.53})$$

où c_p est la capacité calorifique massique à pression constante.

Sous l'approximation Boussinesq, le système d'équations de la MHD devient

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = & -2\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{v} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nabla \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \mathbf{r})^2 \right) \\ & + \frac{\rho}{\bar{\rho}} \mathbf{g} + \frac{1}{4\pi\bar{\rho}} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} + \bar{\nu} \Delta \mathbf{v} \quad , \end{aligned} \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{DT}{Dt} = \bar{\kappa} \Delta T \quad , \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} \quad , \quad (\text{A.56})$$

où $\bar{\nu} = \mu/\bar{\rho}$ est la viscosité cinématique et $\bar{\kappa} = \chi/(c_p \bar{\rho})$ est la diffusivité thermique. On a de plus supposé ici que μ , η et χ sont homogènes et que le chauffage thermique dû à la dissipation visqueuse et aux sources locales de chaleur est négligeable.

Annexe B

Le modèle d'ondes d'Alfvén stationnaires

Dans la Section 3.3.2, un modèle global dit d'ondes d'Alfvén stationnaires donnant des expressions analytiques de $\max(B_\varphi/B_p)$ et t_{max} a été introduit. La dérivation de ces expressions est présentée dans cette annexe. Nous avons vu que les perturbations initiales de Ω et de B_φ se propagent comme des ondes d'Alfvén le long des lignes de champ poloidales. Le principe de ce modèle est alors de résoudre l'équation d'onde unidimensionnelle gouvernant l'évolution de Ω et de B_φ le long de chaque ligne de champ. Afin d'obtenir $\max(B_\varphi/B_p)$ et t_{max} , il faut donc résoudre ce problème sur la ligne de champ sur laquelle $\max(B_\varphi/B_p)$ est atteint. Nous nous attendons à ce que cette ligne de champ soit celle où l'effet Ω agit le plus longtemps et où donc les ondes d'Alfvén se propagent le plus lentement, c'est à dire celle où le temps de propagation $\tau(L) = \int_0^L ds_l/v_{Ap}$ le long de cette ligne de longueur L est le plus long.

L'équation d'onde gouvernant l'évolution de Ω le long d'une ligne de champ poloidale est

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t^2} - v_{Ap}^2 \frac{\partial^2 \Omega}{\partial s_l^2} = 0 \quad . \quad (\text{B.1})$$

Des solutions de cette équation seront dans une première section données dans le cas d'un milieu homogène, c'est à dire dans lequel la vitesse d'Alfvén poloidale v_{Ap} est homogène. Le cas d'un milieu hétérogène sera ensuite traité dans une seconde section sous l'approximation Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB). Enfin, dans une troisième et dernière section $\max(B_\varphi/B_p)$ et t_{max} seront calculés grâce aux solutions de l'équation d'onde en intégrant l'équation d'induction.

B.1 Dans un milieu homogène

Dans le cas où v_{Ap} est homogène le long de la ligne de champ poloidale considérée, des solutions de l'équation d'onde sous forme de modes propres sont facilement calculables grâce à la méthode de séparation des variables

$$\Omega(s_l, t) = S_s(s_l)T_t(t) + \Omega_b \quad , \quad (\text{B.2})$$

où $S_s T_t$ est la partie ondulatoire de Ω et Ω_b est sa partie homogène indépendante du temps. En remplaçant l'expression (B.2) de Ω dans l'équation d'onde (B.1), on obtient

$$\frac{d^2 S_s / ds_l^2}{S_s} = \frac{1}{v_{Ap}^2} \frac{d^2 T_t / dt^2}{T_t} . \quad (\text{B.3})$$

Cette équation est vérifiée si et seulement si chaque terme est égal à une même constante que l'on va noter $-\lambda^2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. On ne s'intéresse donc pas aux solutions telles que $-\lambda^2 > 0$, ni aux solutions triviales $-\lambda^2 = 0$. Nous nous retrouvons donc avec 2 équations différentielles du second ordre à coefficients constants

$$\frac{d^2 S_s}{ds_l^2} + \lambda^2 S_s = 0 , \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d^2 T_t}{dt^2} + \lambda^2 v_{Ap}^2 T_t = 0 , \quad (\text{B.5})$$

dont les solutions sont

$$S_s = S_{s1} e^{i\lambda s_l} + S_{s2} e^{-i\lambda s_l} , \quad (\text{B.6})$$

$$T_t = T_{t1} e^{i\lambda v_{Ap} t} + T_{t2} e^{-i\lambda v_{Ap} t} , \quad (\text{B.7})$$

où S_{s1} , S_{s2} , T_{t1} et T_{t2} sont des constantes déterminées par les conditions initiales et aux limites et où l'on peut remarquer que λ est la longueur d'onde. En remplaçant ces expressions de S_s et T_t dans l'Éq. (B.2), on obtient la solution suivante

$$\Omega(s_l, t) = (S_{s1} e^{i\lambda s_l} + S_{s2} e^{-i\lambda s_l}) (T_{t1} e^{i\lambda v_{Ap} t} + T_{t2} e^{-i\lambda v_{Ap} t}) + \Omega_b . \quad (\text{B.8})$$

B.1.1 Conditions initiales et aux limites

Les résultats donnés par le modèle d'ondes d'Alfvén stationnaires sont comparés aux résultats des simulations numériques 2D. Les conditions aux limites choisies ici pour déterminer les constantes d'intégration sont donc les mêmes que celles employées aux bords du domaine de calcul de nos simulations. Sachant que le champ magnétique toroïdal B_φ est initialement nul, une première condition initiale est alors donnée, si la circulation méridienne ainsi que la diffusion visqueuse sont négligées, par (voir Éq. 3.14)

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial t} \right|_{s_l, t=0} = 0 , \quad (\text{B.9})$$

ce qui implique que

$$\left. \frac{dT_t}{dt} \right|_{t=0} = 0 , \quad (\text{B.10})$$

et donc que

$$T_{t2} = T_{t1} . \quad (\text{B.11})$$

L'Éq. (B.8) devient alors

$$\Omega(s_l, t) = 2 T_{t_1} (S_{s_1} e^{i\lambda s_l} + S_{s_2} e^{-i\lambda s_l}) \cos(\lambda v_{Ap} t) + \Omega_b \quad . \quad (\text{B.12})$$

Les conditions aux limites permettent ensuite de déterminer les constantes restantes. Tout d'abord, dans nos simulations numériques une condition *stress-free* est adoptée au rayon externe du domaine de calcul. Ainsi, quelque soit la ligne de champ sur laquelle on résout l'équation d'onde, qu'elle soit ouverte et coupe le rayon externe ou qu'elle soit fermée et traverse l'équateur, la condition au bout de la ligne de champ en $s_l = L$ est une condition *stress-free*

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial s_l} \right|_{s_l=L, t} = 0 \quad . \quad (\text{B.13})$$

Si une condition aux limites fixe était adoptée au rayon externe, la solution de l'équation d'onde serait différente suivant la ligne de champ poloidal considérée (ouverte ou fermée). La condition (B.13) implique que

$$S_{s_2} = S_{s_1} e^{2i\lambda L} \quad . \quad (\text{B.14})$$

La solution (B.12) devient alors

$$\Omega(s_l, t) = 2 T_{t_1} S_{s_1} (e^{i\lambda s_l} + e^{-i\lambda s_l} e^{2i\lambda L}) \cos(\lambda v_{Ap} t) + \Omega_b \quad . \quad (\text{B.15})$$

Pour finir, dans nos simulations, des conditions aux limites fixe et *stress-free* au rayon interne du domaine de calcul ont été testées. Les solutions de l'équation d'onde (B.1) vont être dérivées dans ces deux cas de figure.

Condition fixe au rayon interne

Adoptons tout d'abord une condition fixe au rayon interne telle que

$$\Omega(s = 0, t) = \Omega_c \quad . \quad (\text{B.16})$$

où Ω_c est la vitesse angulaire au rayon interne car les lignes de champ sont toutes ancrées au rayon interne avec les géométries de champ poloidal adoptées dans nos simulations. Dans ce cas, la partie ondulatoire de Ω oscille autour de cette valeur fixe Ω_c . On a donc $\Omega_b = \Omega_c$ et il résulte alors de la condition (B.16) que

$$1 + e^{2i\lambda L} = 0 \quad \iff \quad \cos(\lambda L) = 0 \quad . \quad (\text{B.17})$$

Cela implique une discrétisation des valeurs que peut prendre la longueur d'onde que l'on va alors noter λ_n , où $n \in \mathbb{Z}$ (à ne pas confondre avec le nombre d'onde radial utilisé dans le reste du manuscrit)

$$\lambda_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2L} \quad . \quad (\text{B.18})$$

La partie oscillatoire de la solution donnée par l'Éq. (B.15) est donc également discrétisée en modes propres Ω_n et une solution générale de l'équation d'onde est une combinaison linéaire de ces modes propres

$$\Omega(s_l, t) = \sum_n a_n \Omega_n(s_l, t) + \Omega_c \quad , \quad (\text{B.19})$$

où les coefficients a_n sont des constantes.

D'après l'Éq. (B.18), on a $e^{2i\lambda_n L} = -1$, ce qui implique que

$$\Omega_n(s_l, t) = \sin \left[(2n+1) \frac{\pi s_l}{2L} \right] \cos \left[(2n+1) \frac{\pi v_{Ap} t}{L} \right] . \quad (\text{B.20})$$

Notons de plus que

$$\Omega(s_l = L, t = 0) = \sum_n a_n \sin \left[(2n+1) \frac{\pi}{2} \right] + \Omega_c , \quad (\text{B.21})$$

soit

$$\Delta\Omega = \Omega_c - \Omega(s_l = L, t = 0) = - \sum_n a_n (-1)^n . \quad (\text{B.22})$$

Si le profil initial de vitesse angulaire varie sur une échelle spatiale de l'ordre de la longueur L de la ligne de champ, comme c'est le cas dans nos simulations, une bonne approximation est de négliger dans la solution (B.19) les modes propres autres que le mode fondamental $n = 0$. Sous cette approximation, en combinant les Éqs. (B.19), (B.20) et (B.22), on obtient la solution de l'équation d'onde suivante

$$\Omega(s_l, t) \simeq -\Delta\Omega \sin \left(\frac{\pi s_l}{2L} \right) \cos \left(\frac{\pi v_{Ap} t}{L} \right) + \Omega_c . \quad (\text{B.23})$$

Condition *stress-free* au rayon interne

Adoptons maintenant une condition *stress-free* au rayon interne de sorte que

$$\left. \frac{\partial\Omega}{\partial s_l} \right|_{s_l=0, t} = 0 . \quad (\text{B.24})$$

D'après l'Éq. (B.15), il résulte de cette condition au limites que

$$1 - e^{2i\lambda L} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(\lambda L) = 0 . \quad (\text{B.25})$$

De la même manière qu'avec une condition fixe, cela implique une discrétisation en modes propres de longueur d'onde

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L} , \quad (\text{B.26})$$

dont l'expression est, puisque $e^{2i\lambda_n L} = 1$, la suivante

$$\Omega_n(s_l, t) = \cos \left[n\pi \frac{s_l}{L} \right] \cos \left[n\pi \frac{v_{Ap} t}{L} \right] . \quad (\text{B.27})$$

Notons alors que

$$\Delta\Omega = \Omega(s_l = 0, t = 0) - \Omega(s_l = L, t = 0) = \sum_n a_n [1 - (-1)^n] . \quad (\text{B.28})$$

Comme précédemment, il est raisonnable avec nos profils initiaux de vitesse angulaire de négliger les modes d'oscillation d'ordre supérieur au mode fondamental qui est ici $n = 1$. Il en résulte d'après les Éqs. (B.27) et (B.28) la solution de l'équation d'onde suivante

$$\Omega(s_l, t) \simeq a_0 + \Omega_b + \frac{\Delta\Omega}{2} \cos\left(\pi \frac{s_l}{L}\right) \cos\left(\pi \frac{v_{Ap} t}{L}\right) \quad , \quad (\text{B.29})$$

où a_0 et Ω_b sont déterminés par le profil initial de vitesse angulaire.

B.2 Dans un milieu hétérogène

Dans le cas plus pertinent pour notre problème où v_{Ap} n'est pas homogène le long de la ligne de champ poloidal considérée, la résolution de l'équation d'onde (B.1) est plus complexe. L'approximation WKB permet cependant d'obtenir des solutions approchées qui sont, comme montré dans la Section 3.3.2, en bon accord avec les résultats des simulations numériques. Nous cherchons alors des solutions harmoniques de la forme $f(s_l)e^{i\omega t}$, où $f(s_l)$ donne la dépendance spatiale de l'onde et ω est la pulsation de l'onde. L'équation d'onde (B.1) devient

$$\frac{d^2 f(s_l)}{ds_l^2} + K^2(s_l) f(s_l) = 0 \quad , \quad (\text{B.30})$$

où $K(s_l) = \omega/v_{Ap}(s_l)$. Choisissons alors des solutions à cette équation de la forme

$$f(s_l) = \hat{f}(s_l)e^{i\Psi(s_l)} \quad , \quad (\text{B.31})$$

où $\hat{f}(s_l)$ est une fonction à déterminer et avec

$$\Psi(s_l) = \int_0^{s_l} k(s'_l) ds'_l + \phi \quad , \quad (\text{B.32})$$

où k est la norme du vecteur d'onde et ϕ la phase de l'onde. En remplaçant l'expression de $f(s_l)$ dans l'Éq. (B.30), on obtient alors

$$\frac{d^2 \hat{f}}{ds_l^2} + i \left(2k \frac{d\hat{f}}{ds_l} + \hat{f} \frac{dk}{ds_l} \right) - \hat{f} k^2 = -\hat{f} K^2 \quad (\text{B.33})$$

\hat{f} est choisi de sorte que la partie imaginaire de l'Éq. (B.33) soit nulle, c'est à dire de sorte que

$$2k \frac{d\hat{f}}{ds_l} + \hat{f} \frac{dk}{ds_l} = 0 \quad , \quad (\text{B.34})$$

et donc que

$$\hat{f} = A k^{-\frac{1}{2}} \quad , \quad (\text{B.35})$$

où A est une constante.

L'approximation WKB réside dans le fait que nous considérons alors l'inégalité suivante

$$\frac{1}{k} \ll \frac{k}{dk/ds_l} \quad . \quad (\text{B.36})$$

Sous l'approximation WKB, et d'après l'expression de \hat{f} donné par l'Éq. (B.35), on peut montrer que le terme $d^2\hat{f}/ds_l^2$ de l'Éq. (B.33) est négligeable devant le terme $\hat{f}k^2$. Il en résulte que

$$k^2(s_l) = K^2(s_l) = \frac{\omega^2}{v_{Ap}^2(s_l)} \quad . \quad (\text{B.37})$$

La condition d'application de l'approximation WKB, donnée par l'Éq. (B.36), peut alors être réécrite comme

$$\lambda \sim \frac{1}{k} \ll \frac{v_{Ap}}{dv_{Ap}/ds_l} \quad . \quad (\text{B.38})$$

Cela signifie que la longueur d'onde des perturbations que l'on considère sous l'approximation WKB est très petite par rapport à l'échelle de variation du milieu (de v_{Ap} ici). À noter que dans la limite où $\lambda \rightarrow 0$, on peut considérer le milieu comme homogène (voir Section B.1). D'après les Éqs. (B.35) et (B.37), l'Éq. (B.31) devient

$$f(s_l) = A\sqrt{\frac{v_{Ap}(s_l)}{\omega}} \cos\left(\int_0^{s_l} \frac{\omega}{v_{Ap}(s'_l)} ds' + \phi\right) \quad . \quad (\text{B.39})$$

où l'on a gardé que la partie réelle de $f(s_l)$.

B.2.1 Conditions initiales et aux limites

Une solution de l'équation d'onde sous l'approximation WKB est donc d'après l'Éq. (B.39)

$$\Omega(s_l, t) = A\sqrt{\frac{v_{Ap}(s_l)}{\omega}} \cos\left(\int_0^{s_l} \frac{\omega}{v_{Ap}(s'_l)} ds' + \phi\right) \cos(\omega t) + \Omega_b \quad , \quad (\text{B.40})$$

où l'évolution temporelle est choisie de sorte que la condition initiale $|\partial\Omega/\partial t|_{s_l, t=0} = 0$ soit respectée. Les autres conditions initiales et aux limites permettent de déterminer la constante A ainsi que la phase ϕ . Tout d'abord, tout comme dans le cas d'un milieu homogène (voir Section B.1.1), la condition au bout de la ligne de champ en $s_l = L$ est une condition *stress-free*

$$\left|\frac{\partial\Omega}{\partial s_l}\right|_{s_l=L, t} = 0 \quad , \quad (\text{B.41})$$

ce qui donne en injectant la solution (B.40)

$$\frac{1}{2} \left|\frac{dv_{Ap}}{ds_l}\right|_{s_l=L} \cos\left(\int_0^L \frac{\omega}{v_{Ap}(s'_l)} ds' + \phi\right) + \omega \sin\left(\int_0^L \frac{\omega}{v_{Ap}(s'_l)} ds' + \phi\right) = 0 \quad . \quad (\text{B.42})$$

Or, d'après la condition (B.36), l'approximation WKB implique que $\omega \gg dv_{Ap}/ds$. Le premier terme du membre de gauche de l'Éq. (B.42) est donc négligeable devant le second. Il en résulte que

$$\sin \left(\int_0^L \frac{\omega}{v_{Ap}(s')} ds' + \phi \right) = 0 \quad , \quad (\text{B.43})$$

et donc une discrétisation des solutions de l'équation d'onde en modes propres de phase

$$\phi_n = n \pi - \int_0^L \frac{\omega}{v_{Ap}(s')} ds' \quad . \quad (\text{B.44})$$

Les modes propres ont donc l'expression suivante

$$\Omega_n(s_l, t) = \sqrt{\frac{v_{Ap}(s_l)}{\omega}} \cos [\omega (\tau(s_l) - \tau(s_l = L)) + n \pi] \cos (\omega t) \quad , \quad (\text{B.45})$$

avec $\tau(s_l) = \int_0^{s_l} \frac{ds'}{v_{Ap}(s')}$. Une solution de l'équation d'onde est une combinaison linéaire de ces modes propres

$$\Omega(s_l, t) = \sum_n a_n \Omega_n(s_l, t) + \Omega_b \quad . \quad (\text{B.46})$$

Comme dans le cas d'un milieu homogène, nous supposons que les contributions des modes propres d'ordre supérieur au mode fondamentale $n = 0$ sont négligeables car les profils initiaux de vitesse angulaire utilisés dans notre étude varie sur une échelle spatiale de l'ordre de la longueur L d'une ligne de champ poloïdal. De plus, les solutions de l'équation d'onde vont être dérivées dans les cas où une condition fixe ou *stress-free* sur la vitesse angulaire est utilisée au rayon interne du domaine de calcul.

Condition fixe au rayon interne

De la même manière que dans la Section B.1.1, adopter une condition fixe au rayon interne implique que

$$\Omega_b = \Omega_c = \Omega(s_l = 0, t) \quad . \quad (\text{B.47})$$

D'après les Éqs. (B.45) et (B.46) et en ne considérons que le mode fondamental $n = 0$, il résulte de la condition fixe que

$$\cos [\omega \tau(s_l = L)] = 0 \quad , \quad (\text{B.48})$$

et donc que la pulsation ω de l'onde est donnée par

$$\omega = \frac{\pi}{2} \frac{1}{\tau(s_l = L)} \quad . \quad (\text{B.49})$$

Notons par ailleurs que

$$\Omega(s_l = L, t = 0) = a_0 \sqrt{\frac{v_{Ap}(s_l = L)}{\omega}} + \Omega_c \quad , \quad (\text{B.50})$$

et donc que

$$a_0 = -\Delta\Omega \sqrt{\frac{\omega}{v_{Ap}(s_l = L)}} \quad , \quad (\text{B.51})$$

avec $\Delta\Omega = \Omega_c - \Omega(s_l = L, t = 0)$. En utilisant les Éqs. (B.49) et (B.51), on obtient la solution suivante

$$\Omega(s_l, t) \simeq -\Delta\Omega \sqrt{\frac{v_{Ap}(s_l)}{v_{Ap}(s_l = L)}} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau(s_l)}{\tau(s_l = L)}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau(s_l = L)}\right) + \Omega_c \quad . \quad (\text{B.52})$$

Condition *stress-free* au rayon interne

Une condition *stress-free* au rayon interne sur la vitesse angulaire implique que

$$\left. \frac{\partial\Omega}{\partial s_l} \right|_{s_l=0, t} = 0 \quad , \quad (\text{B.53})$$

ce qui donne, avec l'expression de Ω fournie par les Éqs. (B.45) et (B.46) et toujours en ne considérant que le mode d'oscillation fondamental (ici $n = 1$)

$$\frac{1}{2} \left. \frac{dv_{Ap}}{ds_l} \right|_{s_l=0} \cos[\omega\tau(s_l = L)] + \omega \sin[\omega\tau(s_l = L)] = 0 \quad . \quad (\text{B.54})$$

Puisque $\omega \gg dv_{Ap}/ds$ sous l'approximation WKB, il en résulte que

$$\sin[\omega\tau(s_l = L)] = 0 \quad , \quad (\text{B.55})$$

et donc que

$$\omega = \frac{\pi}{\tau(s_l = L)} \quad . \quad (\text{B.56})$$

Notons pour finir que Ω_b , la vitesse angulaire autour de laquelle l'onde oscille, est avec des conditions *stress-free* aux deux bouts de la ligne de champ poloidal égal à $\Omega(s_l = 0, t = 0) - \Delta\Omega/2$. Or, d'après les Éqs. (B.45), (B.46) et (B.56), on a

$$\Omega(s_l = L, t = 0) = a_0 \sqrt{\frac{v_{Ap}(s_l = L)}{\omega}} + \Omega(s_l = 0, t = 0) - \frac{\Delta\Omega}{2} \quad , \quad (\text{B.57})$$

soit

$$a_0 = -\frac{\Delta\Omega}{2} \sqrt{\frac{\omega}{v_{Ap}(s_l = L)}} \quad . \quad (\text{B.58})$$

Finalement, la solution de l'équation d'onde est dans ce cas

$$\Omega(s_l, t) \simeq \frac{\Delta\Omega}{2} \sqrt{\frac{v_{Ap}(s_l)}{v_{Ap}(s_l = L)}} \cos\left(\pi \frac{\tau(s_l)}{\tau(s_l = L)}\right) \cos\left(\pi \frac{t}{\tau(s_l = L)}\right) + \Omega_b \quad . \quad (\text{B.59})$$

B.3 Calcul de $\max(B_\varphi/B_p)$ et t_{max}

Les Éqs. (B.23), (B.29), (B.52) et (B.59) donnent l'expression de solutions approximées de l'équation d'onde (B.1) suivant si le milieu est homogène ou non et suivant la condition aux limites sur Ω au rayon interne du domaine de calcul. $\max(B_\varphi/B_p)$ et t_{max} peuvent alors être calculés grâce à ces solutions à partir de la composante azimutal de l'équation d'induction pour laquelle la circulation méridienne ainsi que la diffusion magnétique sont négligées

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = r \sin \theta \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Omega \quad . \quad (\text{B.60})$$

En considérant tout comme dans les simulations 2D que le champ poloïdal est indépendant du temps et que B_φ est initialement nul, on obtient en intégrant cette équation jusqu'à $t = t_{max}$

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(s_l, t = t_{max}) = g(s_l) \int_0^{t_{max}} \frac{\partial \Omega}{\partial s_l} dt \quad , \quad (\text{B.61})$$

avec $g(s_l) = r(s_l) \sin \theta(s_l)$.

B.3.1 Dans un milieu homogène

Condition fixe au rayon interne

D'après l'Éq. (B.23), on a

$$\int_0^{t_{max}} \frac{\partial \Omega}{\partial s_l} dt = -\Delta \Omega \frac{1}{v_{Ap}} \cos\left(\frac{\pi s_l}{2L}\right) \sin\left(\frac{\pi v_{Ap} t_{max}}{2L}\right) \quad , \quad (\text{B.62})$$

La valeur absolue de B_φ/B_p atteint un maximum temporel lorsque $t = t_{max}$. Il faut donc $t_{max} = L/v_{Ap}$ de sorte que $\sin(\pi v_{Ap} t_{max}/2L)$ soit maximal, c'est à dire égal à 1. En insérant la valeur absolue de l'Éq. (B.62) dans l'Éq. (B.61), on obtient alors

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(s_l, t = t_{max}) = \Delta \Omega \frac{g(s_l)}{v_{Ap}} \cos\left(\frac{\pi s_l}{2L}\right) \quad . \quad (\text{B.63})$$

$\max(B_\varphi/B_p)$ est finalement obtenu en calculant le maximum spatial de cette équation sur la ligne de champ pour laquelle $\tau(L) = \int_0^L ds_l/v_{Ap}$ est maximal.

Condition *stress-free* au rayon interne

De la même façon, en insérant la solution (B.29) dans l'Éq. (B.61), on obtient

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(s_l, t = t_{max}) = \frac{\Delta \Omega}{2} \frac{g(s_l)}{v_{Ap}} \sin\left(\pi \frac{s_l}{L}\right) \quad , \quad (\text{B.64})$$

avec $t_{max} = L/2v_{Ap}$.

B.3.2 Dans un milieu hétérogène

Condition fixe au rayon interne

D'après l'Éq. (B.52), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial s_l} = & -\frac{\Delta \Omega}{2} \frac{1}{\sqrt{v_{Ap}(s_l) v_{Ap}(L)}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau(L)}\right) \\ & \times \left[\frac{\pi}{\tau(L)} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau(s_l)}{\tau(L)}\right) + \frac{dv_{Ap}}{ds_l} \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau(s_l)}{\tau(L)}\right) \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

Or, sous l'approximation WKB on a $\omega = \pi/2\tau(L) \gg dv_{Ap}/ds_l$, donc

$$\frac{\partial \Omega}{\partial s_l} \simeq -\frac{\Delta \Omega}{2} \frac{1}{\sqrt{v_{Ap}(s_l) v_{Ap}(L)}} \frac{\pi}{\tau(L)} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{t}{\tau(L)}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau(s_l)}{\tau(L)}\right) . \quad (\text{B.66})$$

Finalement, en insérant cette équation dans l'Éq. (B.61), on obtient

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(s_l, t = t_{max}) = \Delta \Omega \frac{g(s_l)}{\sqrt{v_{Ap}(s_l) v_{Ap}(L)}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau(s_l)}{\tau(L)}\right) , \quad (\text{B.67})$$

avec $t_{max} = \tau(L)$.

Condition *stress-free* au rayon interne

De la même manière que dans le cas précédent, en insérant l'Éq. (B.59) dans l'Éq. (B.61), on obtient

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(s_l, t = t_{max}) = \frac{\Delta \Omega}{2} \frac{g(s_l)}{\sqrt{v_{Ap}(s_l) v_{Ap}(L)}} \sin\left(\pi \frac{\tau(s_l)}{\tau(L)}\right) , \quad (\text{B.68})$$

avec $t_{max} = \tau(L)/2$.

Références

- Acevedo-Arreguin, L. A., Garaud, P., & Wood, T. S. 2013, *MNRAS*, 434, 720
- Acheson, D. J. 1978, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, 289, 459
- Aerts, C., Christensen-Dalsgaard, J., & Kurtz, D. W. 2010, *Asteroseismology*
- Aerts, C., Thoul, A., Daszyńska, J., et al. 2003, *Science*, 300, 1926
- Alecian, E., Catala, C., Wade, G. A., et al. 2008a, *MNRAS*, 385, 391
- Alecian, E., Kochukhov, O., Petit, V., et al. 2014, *A&A*, 567, A28
- Alecian, E., Wade, G. A., Catala, C., et al. 2008b, *A&A*, 481, L99
- Alecian, E., Wade, G. A., Catala, C., et al. 2013, *MNRAS*, 429, 1001
- Alecian, G. 2015, *MNRAS*, 454, 3143
- Alfvén, H. 1942, *Nature*, 150, 405
- Arlt, R., Hollerbach, R., & Rüdiger, G. 2003, *A&A*, 401, 1087
- Arlt, R. & Rüdiger, G. 2011a, *Astronomische Nachrichten*, 332, 70
- Arlt, R. & Rüdiger, G. 2011b, *MNRAS*, 412, 107
- Armitage, P. J. 2015, *ArXiv e-prints*
- Augustson, K. C., Brun, A. S., & Toomre, J. 2016, *ApJ*, 829, 92
- Aurière, M., Konstantinova-Antova, R., Petit, P., et al. 2011, *A&A*, 534, A139
- Aurière, M., Wade, G. A., Lignières, F., et al. 2010, *A&A*, 523, A40
- Aurière, M., Wade, G.-A., Silvester, J., Lignières, F., et al. 2007, *A&A*, 475, 1053
- Babcock, H. W. 1947, *ApJ*, 105, 105
- Babcock, H. W. 1958a, *ApJS*, 3, 141
-

-
- Babcock, H. W. 1958b, *ApJ*, 128, 228
- Babcock, H. W. 1960, *ApJ*, 132, 521
- Bagnulo, S., Landi Degl’Innocenti, M., & Landi Degl’Innocenti, E. 1996, *A&A*, 308, 115
- Bagnulo, S., Landolfi, M., Mathys, G., & Landi Degl’Innocenti, M. 2000, *A&A*, 358, 929
- Bagnulo, S., Landstreet, J. D., Fossati, L., & Kochukhov, O. 2012, *A&A*, 538, A129
- Bagnulo, S., Landstreet, J. D., Mason, E., et al. 2006, *A&A*, 450, 777
- Bagnulo, S., Wade, G. A., Donati, J.-F., et al. 2001, *A&A*, 369, 889
- Balbus, S.-A. & Hawley, J.-F. 1991, *ApJ*, 376, 214
- Balbus, S. A. & Hawley, J. F. 1992, *ApJ*, 400, 610
- Baudrand, J. & Bohm, T. 1992, *A&A*, 259, 711
- Beck, P. G., Montalban, J., Kallinger, T., et al. 2012, *Nature*, 481, 55
- Bedding, T. R., Huber, D., Stello, D., et al. 2010, *ApJL*, 713, L176
- Benomar, O., Takata, M., Shibahashi, H., Ceillier, T., & García, R. A. 2015, *MNRAS*, 452, 2654
- Bernstein, I. B., Frieman, E. A., Kruskal, M. D., & Kulsrud, R. M. 1958, *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 244, 17
- Bikmaev, I. F., Musaev, F. A., Galazutdinov, G. A., Savanov, I. S., & Savel’Eva, Y. Y. 1998, *Astronomy Reports*, 42, 362
- Blazère, A., Neiner, C., & Petit, P. 2016a, *MNRAS*, 459, L81
- Blazère, A., Petit, P., Lignières, F., et al. 2016b, *A&A*, 586, A97
- Bohlender, D. A., Landstreet, J. D., & Thompson, I. B. 1993, *A&A*, 269, 355
- Bonanno, A. & Urpin, V. 2012, *ApJ*, 747, 137
- Bonanno, A. & Urpin, V. 2013, *MNRAS*, 431, 3663
- Borra, E. F. & Landstreet, J. D. 1980, *ApJS*, 42, 421
- Bouret, J.-C., Donati, J.-F., Martins, F., et al. 2008, *MNRAS*, 389, 75
- Braithwaite, J. 2006a, *A&A*, 449, 451
- Braithwaite, J. 2006b, *A&A*, 453, 687
- Braithwaite, J. 2007, *A&A*, 469, 275
-

-
- Braithwaite, J. 2008, MNRAS, 386, 1947
- Braithwaite, J. 2009, MNRAS, 397, 763
- Braithwaite, J. & Cantiello, M. 2013, MNRAS, 428, 2789
- Braithwaite, J. & Nordlund, Å. 2006, A&A, 450, 1077
- Braithwaite, J. & Spruit, H. C. 2004, Nature, 431, 819
- Briquet, M., Morel, T., Thoul, A., et al. 2007, MNRAS, 381, 1482
- Brown, S. F., Donati, J.-F., Rees, D. E., & Semel, M. 1991, A&A, 250, 463
- Brun, A. S., Browning, M. K., & Toomre, J. 2005, ApJ, 629, 461
- Brun, A. S. & Zahn, J.-P. 2006, A&A, 457, 665
- Bychkov, V. D., Bychkova, L. V., & Madej, J. 2003, A&A, 407, 631
- Bychkov, V. D., Bychkova, L. V., & Madej, J. 2005, A&A, 430, 1143
- Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., Christensen-Dalsgaard, J., & Paxton, B. 2014, ApJ, 788, 93
- Castro, N., Fossati, L., Hubrig, S., et al. 2015, A&A, 581, A81
- Catala, C., Alecian, E., Donati, J.-F., et al. 2007, A&A, 462, 293
- Ceillier, T., Eggenberger, P., García, R. A., & Mathis, S. 2013, A&A, 555, A54
- Chandrasekhar, S. 1960, Proceedings of the National Academy of Science, 46, 253
- Chaplin, W. J., Appourchaux, T., Elsworth, Y., et al. 2010, ApJL, 713, L169
- Chaplin, W. J., Kjeldsen, H., Christensen-Dalsgaard, J., et al. 2011, Science, 332, 213
- Chaplin, W. J. & Miglio, A. 2013, ARA&A, 51, 353
- Charbonneau, P. & MacGregor, K.-B. 1992, ApJ, 387, 639
- Charbonneau, P. & MacGregor, K.-B. 1993, ApJ, 417, 762
- Charpinet, S., Fontaine, G., & Brassard, P. 2009, Nature, 461, 501
- Charpinet, S., Van Grootel, V., Reese, D., et al. 2008, A&A, 489, 377
- Christensen, U. R., Holzwarth, V., & Reiners, A. 2009, Nature, 457, 167
- Christensen-Dalsgaard, J., Bedding, T. R., & Kjeldsen, H. 1995, ApJL, 443, L29
-

-
- Claverie, A., Isaak, G. R., McLeod, C. P., van der Raay, H. B., & Cortes, T. R. 1979, *Nature*, 282, 591
- Claverie, A., Isaak, G. R., McLeod, C. P., et al. 1984, *Mem. Soc. Astron. Ital.*, 55, 63
- Córsico, A. H., Althaus, L. G., Kawaler, S. D., et al. 2011, *MNRAS*, 418, 2519
- Couvidat, S., García, R. A., Turck-Chièze, S., et al. 2003, *ApJL*, 597, L77
- De Ridder, J., Barban, C., Baudin, F., et al. 2009, *Nature*, 459, 398
- Deheuvels, S., Ballot, J., Beck, P. G., et al. 2015, *A&A*, 580, A96
- Deheuvels, S., Doğan, G., Goupil, M. J., et al. 2014, *A&A*, 564, A27
- Deheuvels, S., García, R. A., Chaplin, W. J., et al. 2012, *ApJ*, 756, 19
- Dikpati, M. & Gilman, P. A. 1999, *ApJ*, 512, 417
- Dikpati, M., Gilman, P. A., & Rempel, M. 2003, *ApJ*, 596, 680
- Donati, J.-F. 2001, in *Lecture Notes in Physics*, Berlin Springer Verlag, Vol. 573, *Astrotophography, Indirect Imaging Methods in Observational Astronomy*, ed. H. M. J. Boffin, D. Steeghs, & J. Cuypers, 207
- Donati, J.-F., Howarth, I. D., Jardine, M. M., et al. 2006, *MNRAS*, 370, 629
- Donati, J.-F. & Landstreet, J. D. 2009, *ARA&A*, 47, 333
- Donati, J.-F., Morin, J., Petit, P., et al. 2008, *MNRAS*, 390, 545
- Donati, J.-F., Semel, M., Carter, B. D., Rees, D. E., & Collier Cameron, A. 1997, *MNRAS*, 291, 658
- Dormy, E., Cardin, P., & Jault, D. 1998, *EPSL*, 160, 15
- Duez, V., Braithwaite, J., & Mathis, S. 2010a, *ApJL*, 724, L34
- Duez, V. & Mathis, S. 2010, *A&A*, 517, A58
- Duez, V., Mathis, S., & Turck-Chièze, S. 2010b, *MNRAS*, 402, 271
- Dupret, M.-A., Thoul, A., Scuflaire, R., et al. 2004, *A&A*, 415, 251
- Duvall, Jr., T. L., Dziembowski, W. A., Goode, P. R., et al. 1984, *Nature*, 310, 22
- Duvall, Jr., T. L. & Harvey, J. W. 1984, *Nature*, 310, 19
- Duvall, Jr., T. L., Harvey, J. W., & Pomerantz, M. A. 1986, *Nature*, 321, 500
- Eggenberger, P., Montalbán, J., & Miglio, A. 2012, *A&A*, 544, L4
-

-
- Favier, B., Jouve, L., Edmunds, W., Silvers, L. J., & Proctor, M. R. E. 2012, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*
- Featherstone, N. A., Browning, M. K., Brun, A. S., & Toomre, J. 2009, *ApJ*, 705, 1000
- Ferrario, L., Pringle, J. E., Tout, C. A., & Wickramasinghe, D. T. 2009, *MNRAS*, 400, L71
- Ferraro, V.-C.-A. 1937, *MNRAS*, 97, 458F
- Flowers, E. & Ruderman, M.-A. 1977, *ApJ*, 215, 302
- Fossati, L., Castro, N., Morel, T., et al. 2015a, *A&A*, 574, A20
- Fossati, L., Castro, N., Schöller, M., et al. 2015b, *A&A*, 582, A45
- Fossati, L., Zwintz, K., Castro, N., et al. 2014, *A&A*, 562, A143
- Foster, H. M., Reed, M. D., Telting, J. H., Østensen, R. H., & Baran, A. S. 2015, *ApJ*, 805, 94
- Fromang, S. 2013, in *EAS Publications Series*, Vol. 62, *EAS Publications Series*, ed. P. Hennebelle & C. Charbonnel, 95–142
- Gabriel, A. H., Grec, G., Charra, J., et al. 1995, *Solar Phys.*, 162, 61
- Garaud, P. & Garaud, J.-D. 2008, *MNRAS*, 391, 1239
- García, R. A., Turck-Chièze, S., Jiménez-Reyes, S. J., et al. 2007, *Science*, 316, 1591
- Gaurat, M., Jouve, L., Lignières, F., & Gastine, T. 2015, *A&A*, 580, A103
- Gilman, P. A., Dikpati, M., & Miesch, M. S. 2007, *ApJS*, 170, 203
- Gilman, P. A. & Fox, P. 1997, in *Bulletin of the American Astronomical Society*, Vol. 29, *AAS/Solar Physics Division Meeting #28*, 895
- Gilman, P. A. & Glatzmaier, G. A. 1981, *ApJS*, 45, 335
- Gizon, L., Ballot, J., Michel, E., et al. 2013, *Proceedings of the National Academy of Science*, 110, 13267
- Goossens, M., Biront, D., & Tayler, R.-J. 1981, *Ap&SS*, 75, 521
- Gough, D. O. & McIntyre, M. E. 1998, *Nature*, 394, 755
- Grec, G., Fossat, E., & Pomerantz, M. 1980, *Nature*, 288, 541
- Green, E. M., Fontaine, G., Reed, M. D., et al. 2003, *ApJL*, 583, L31
-

- Grunhut, J. H. & Neiner, C. 2015, in IAU Symposium, Vol. 305, Polarimetry, ed. K. N. Nagendra, S. Bagnulo, R. Centeno, & M. Jesús Martínez González, 53–60
- Hale, G. E. 1908, *ApJ*, 28, 315
- Hartmann, J. & Lazarus, F. 1937, *Mat. Fys. Medd.*, 15, 1
- Harvey, J. W., Hill, F., Hubbard, R. P., et al. 1996, *Science*, 272, 1284
- Heber, U. 2009, *ARA&A*, 47, 211
- Hekker, S., Gilliland, R. L., Elsworth, Y., et al. 2011, *MNRAS*, 414, 2594
- Henrichs, H. F., de Jong, J. A., Donati, D.-F., et al. 2000, in *Magnetic Fields of Chemically Peculiar and Related Stars*, ed. Y. V. Glagolevskij & I. I. Romanyuk, 57–60
- Heyvaerts, J. & Priest, E.-R. 1983, *A&A*, 117, 220
- Horedt, G. P., ed. 2004, *Astrophysics and Space Science Library*, Vol. 306, *Polytropes - Applications in Astrophysics and Related Fields*
- Hubrig, S., Briquet, M., De Cat, P., et al. 2009a, *Astronomische Nachrichten*, 330, 317
- Hubrig, S., Fossati, L., Carroll, T. A., et al. 2014, *A&A*, 564, L10
- Hubrig, S., Schöller, M., Savanov, I., et al. 2009b, *Astronomische Nachrichten*, 330, 708
- Ionson, J.-A. 1978, *ApJ*, 226, 650
- Jouve, L., Brun, A.-S., Arlt, R., Brandenburg, A., et al. 2008, *A&A*, 483, 949
- Jouve, L., Gastine, T., & Lignières, F. 2015, *A&A*, 575, A106
- Kallinger, T., Mosser, B., Hekker, S., et al. 2010, *A&A*, 522, A1
- Kichatinov, L. L. & Rudiger, G. 1993, *A&A*, 276, 96
- Kilkenny, D., Koen, C., O'Donoghue, D., & Stobie, R. S. 1997, *MNRAS*, 285, 640
- Kitchatinov, L. & Rüdiger, G. 2008, *A&A*, 478, 1
- Kjeldsen, H., Bedding, T. R., Viskum, M., & Frandsen, S. 1995, *AJ*, 109, 1313
- Kosugi, T., Matsuzaki, K., Sakao, T., et al. 2007, *Solar Phys.*, 243, 3
- Kueker, M., Ruediger, G., & Kitchatinov, L. L. 1993, *A&A*, 279, L1
- Kurtz, D. W., Saio, H., Takata, M., et al. 2014, *MNRAS*, 444, 102
- Landstreet, J. D. 1982, *ApJ*, 258, 639
- Landstreet, J. D. & Mathys, G. 2000, *A&A*, 359, 213
-

-
- Lanz, T. & Mathys, G. 1993, *A&A*, 280, 486
- Lawson, N., Strugarek, A., & Charbonneau, P. 2015, *ApJ*, 813, 95
- Leroy, J. L. 1995, *A&AS*, 114, 79
- Lignières, F. 1999, *A&A*, 348, 933
- Lignières, F. & Georgeot, B. 2009, *A&A*, 500, 1173
- Lignières, F., Petit, P., Aurière, M., Wade, G. A., & Böhm, T. 2014, in *IAU Symposium*, Vol. 302, *Magnetic Fields throughout Stellar Evolution*, ed. P. Petit, M. Jardine, & H. C. Spruit, 338–347
- Lignières, F., Petit, P., Böhm, T., & Aurière, M. 2009, *A&A*, 500, L41
- López Ariste, A. 2002, *ApJ*, 564, 379
- MacDonald, J. & Mullan, D. J. 2004, *MNRAS*, 348, 702
- MacGregor, K. B. & Cassinelli, J. P. 2003, *ApJ*, 586, 480
- Maeder, A. & Meynet, G. 2000, *ARA&A*, 38, 143
- Markey, P. & Tayler, R. J. 1973, *MNRAS*, 163, 77
- Marques, J. P., Goupil, M. J., Lebreton, Y., et al. 2013, *A&A*, 549, A74
- Masada, Y., Sano, T., & Takabe, H. 2006, *ApJ*, 641, 447
- Mathis, S., Talon, S., Pantillon, F.-P., & Zahn, J.-P. 2008, *Solar Physics*, 251, 101
- Mathys, G. 1988, in *Elemental Abundance Analyses*, ed. S. J. Adelman & T. Lanz, 101
- Mathys, G. 1995a, *A&A*, 293
- Mathys, G. 1995b, *A&A*, 293
- Mathys, G. 2015, *IAU General Assembly*, 22, 2256010
- Mathys, G. & Hubrig, S. 1995, *A&A*, 293
- Mathys, G. & Hubrig, S. 1997, *A&AS*, 124
- Mathys, G., Hubrig, S., Landstreet, J. D., Lanz, T., & Manfroid, J. 1997, *A&AS*, 123
- Mathys, G. & Lanz, T. 1990, *A&A*, 230, L21
- Menou, K., Balbus, S. A., & Spruit, H. C. 2004, *ApJ*, 607, 564
- Menou, K. & Le Mer, J. 2006, *ApJ*, 650, 1208
-

-
- Mestel, L., Tayler, R. J., & Moss, D. L. 1988, *MNRAS*, 231, 873
- Mestel, L. & Weiss, N.-O. 1987, *MNRAS*, 226, 123
- Michel, E., Baglin, A., Auvergne, M., et al. 2008, *Science*, 322, 558
- Morgenthaler, A., Petit, P., Saar, S., et al. 2012, *A&A*, 540, A138
- Morin, J., Donati, J.-F., Forveille, T., et al. 2008a, *MNRAS*, 384, 77
- Morin, J., Donati, J.-F., Petit, P., et al. 2008b, *MNRAS*, 390, 567
- Moss, D. L., Mestel, L., & Tayler, R. J. 1990, *MNRAS*, 245, 550
- Mosser, B., Goupil, M. J., Belkacem, K., et al. 2012, *A&A*, 548, A10
- Neiner, C., Folsom, C. P., & Blazere, A. 2014, in *SF2A-2014 : Proceedings of the Annual meeting of the French Society of Astronomy and Astrophysics*, ed. J. Ballet, F. Martins, F. Bounaud, R. Monier, & C. Reylé, 163–166
- Neiner, C., Geers, V. C., Henrichs, H. F., et al. 2003, *A&A*, 406, 1019
- Ogilvie, G. 2007, *The Solar Tachocline* (D. W. Hughes, R. Rosner, & N.O. Weiss), 299
- Ogilvie, G. I. & Pringle, J. E. 1996, *MNRAS*, 279, 152
- Pamyatnykh, A. A., Handler, G., & Dziembowski, W. A. 2004, *MNRAS*, 350, 1022
- Parker, E. N. 1966, *ApJ*, 145, 811
- Parker, E.-N. 1991, *ApJ*, 376, 355
- Pesnell, W. D., Thompson, B. J., & Chamberlin, P. C. 2012, *Solar Phys.*, 275, 3
- Petit, P., Donati, J.-F., Aurière, M., et al. 2005, *MNRAS*, 361, 837
- Petit, P., Lignières, F., Aurière, M., Wade, G.-A., et al. 2011, *A&A*, 523, L13
- Petit, P., Lignières, F., Wade, G.-A., et al. 2010, *A&A*, 523, A41
- Petit, V., Wade, G. A., Drissen, L., Montmerle, T., & Alecian, E. 2008, *MNRAS*, 387, L23
- Petitdemange, L., Dormy, E., & Balbus, S. 2013, *Phys. Earth Planet. Inter.*, 223, 21
- Petitdemange, L., Dormy, E., & Balbus, S. A. 2008, *Geophys. Res. Lett.*, 35, L15305
- Pitts, E. & Tayler, R.-J. 1985, *MNRAS*, 216, 139
- Prendergast, K. H. 1956, *ApJ*, 123, 498
- Preston, G. W. 1967, *ApJ*, 150, 547
-

-
- Raedler, K.-H. 1986, in ESA Special Publication, Vol. 251, Plasma Astrophysics, ed. T. D. Guyenne & L. M. Zeleny
- Rayleigh, L. 1883, Proc. Lond. Math. Soc., 14, 170
- Ringot, O. 1998, A&A, 335, L89
- Robinson, R. D., Worden, S. P., & Harvey, J. W. 1980, ApJL, 236, L155
- Rogers, T. M., Lin, D. N. C., McElwaine, J. N., & Lau, H. H. B. 2013, ApJ, 772, 21
- Rüdiger, G., Gellert, M., Schultz, M., Hollerbach, R., & Stefani, F. 2014, MNRAS, 438, 271
- Rüdiger, G., Gellert, M., Spada, F., & Tereshin, I. 2015, A&A, 573, A80
- Rüdiger, G. & Kitchatinov, L.-L. 1996, ApJ, 466, 1078
- Sainz Dalda, A., Martínez-Sykora, J., Bellot Rubio, L., & Title, A. 2012, ApJ, 748, 38
- Saio, H., Kurtz, D. W., Takata, M., et al. 2015, MNRAS, 447, 3264
- Schaeffer, N., Jault, D., Cardin, P., & Drouard, M. 2012, GJI, 191, 508
- Scherrer, P. H., Bogart, R. S., Bush, R. I., et al. 1995, Solar Phys., 162, 129
- Semel, M. 1989, A&A, 225, 456
- Shorlin, S.-L.-S., Wade, G.-A., Donati, J.-F., et al. 2002, A&A, 392, 637
- Spada, F., Lanzafame, A.-C., & Lanza, A.-F. 2010, MNRAS, 404, 641
- Spiegel, E. A. & Zahn, J.-P. 1992, ApJ, 265, 106
- Spruit, H. C. 1987, in Astrophysics and Space Science Library, Vol. 137, The Internal Solar Angular Velocity, ed. B. R. Durney & S. Sofia, 185–200
- Spruit, H.-C. 1999, A&A, 349, 189
- Spruit, H.-C. 2002, A&A, 381
- Spruit, H. C. & van Ballegooijen, A. A. 1982, A&A, 106, 58
- Stibbs, D. W. N. 1950, MNRAS, 110, 395
- Szklarski, J. & Arlt, R. 2013, A&A, 550, A94
- Talon, S. & Charbonnel, C. 2008, A&A, 482, 597
- Tassoul, J.-L. & Tassoul, M. 1986, ApJ, 310, 786
- Tayler, R.-J. 1973, MNRAS, 161, 365
-

-
- Tayler, R. J. 1980, MNRAS, 191, 151
- Taylor, G. 1950, Proceedings of the Royal Society of London Series A, 201, 192
- Telting, J. H., Baran, A. S., Nemeth, P., et al. 2014, A&A, 570, A129
- Triana, S. A., Moravveji, E., Pápics, P. I., et al. 2015, ApJ, 810, 16
- Tsvetkova, S., Petit, P., Aurière, M., et al. 2013, A&A, 556, A43
- Tutukov, A. V. & Fedorova, A. V. 2010, Astronomy Reports, 54, 156
- Van Grootel, V., Charpinet, S., Fontaine, G., & Brassard, P. 2008, A&A, 483, 875
- Van Reeth, T., Tkachenko, A., & Aerts, C. 2016, ArXiv e-prints
- van Saders, J. L. & Pinsonneault, M. H. 2013, ApJ, 776, 67
- Velikhov, E. P. 1959, Sov. Phys. JETP, 36, 1398
- Viticchié, B. & Sánchez Almeida, J. 2011, A&A, 530, A14
- Wade, G. A., Bagnulo, S., Drouin, D., Landstreet, J. D., & Monin, D. 2007, MNRAS, 376, 1145
- Wade, G. A., Donati, J.-F., Landstreet, J. D., & Shorlin, S. L. S. 2000, MNRAS, 313, 823
- Wade, G. A., Folsom, C. P., Petit, P., et al. 2014, MNRAS, 444, 1993
- Wade, G. A., Neiner, C., Alecian, E., et al. 2016, MNRAS, 456, 2
- Wei, X. & Goodman, J. 2015, ApJ, 806, 50
- Wicht, J. 2002, Physics of the Earth and Planetary Interiors, 132, 281
- Woodard, M. F. & Noyes, R. W. 1985, Nature, 318, 449
- Woodard, M. F. & Noyes, R. W. 1988, in IAU Symposium, Vol. 123, Advances in Helio- and Asteroseismology, ed. J. Christensen-Dalsgaard & S. Frandsen, 197
- Wright, G. A. E. 1973, MNRAS, 162, 339
- Zahn, J.-P., Talon, S., & Matias, J. 1997, A&A, 322, 320
-

Publication

Evolution of a magnetic field in a differentially rotating radiative zone

M. Gaurat^{1,2}, L. Jouve^{1,2}, F. Lignières^{1,2}, and T. Gastine³

¹ Université de Toulouse, UPS-OMP, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie, 31028 Toulouse Cedex 4, France
e-mail: [mathieu.gaurat;laurene.jouve;francois.lignieres]@irap.omp.eu

² CNRS, Institut de Recherche en Astrophysique et Planétologie, 14 avenue Édouard Belin, 31400 Toulouse, France

³ Max-Planck-Institut für Sonnensystemforschung, Justus-von-Liebig-Weg 3, 37077 Göttingen, Germany
e-mail: gastine@mps.mpg.de

Received 18 March 2015 / Accepted 24 June 2015

ABSTRACT

Context. Recent spectropolarimetric surveys of main-sequence intermediate-mass stars have exhibited a dichotomy in the distribution of the observed magnetic field between the kG dipoles of Ap/Bp stars and the sub-Gauss magnetism of Vega and Sirius.

Aims. We would like to test whether this dichotomy is linked to the stability versus instability of large-scale magnetic configurations in differentially rotating radiative zones.

Methods. We computed the axisymmetric magnetic field obtained from the evolution of a dipolar field threading a differentially rotating shell. A full parameter study including various density profiles and initial and boundary conditions was performed with a 2D numerical code. We then focused on the ratio between the toroidal and poloidal components of the magnetic field and discuss the stability of the configurations dominated by the toroidal component using local stability criteria and insights from recent 3D numerical simulations.

Results. The numerical results and a simple model show that the ratio between the toroidal and the poloidal magnetic fields is highest after an Alfvén crossing time of the initial poloidal field. For high density contrasts, this ratio converges towards an asymptotic value that can thus be extrapolated to realistic stellar cases. We then consider the stability of the magnetic configurations to non-axisymmetric perturbations and find that configurations dominated by the toroidal component are likely to be unstable if the shear strength is significantly higher than the poloidal Alfvén frequency. An expression for the critical poloidal field below which magnetic fields are likely to be unstable is found and is compared to the lower bound of Ap/Bp magnetic fields.

Key words. stars: magnetic field – stars: rotation – stars: interiors – magnetohydrodynamics (MHD) – methods: numerical

1. Introduction

In the past decades, the study of the interplay between magnetic fields and differential rotation in radiative zones has mainly been driven by constraints on stellar rotation. This interaction has in particular been invoked to explain the flat rotation profile of the solar radiative zone (see for example Mestel & Weiss 1987; Charbonneau & MacGregor 1993) or more recently, the slow rotation of the core of subgiants and giants revealed by asteroseismology (Deheuvels et al. 2014; Cantiello et al. 2014).

The evolution of the angular momentum in the presence of a magnetic field has mainly been investigated assuming axisymmetry and neglecting meridional circulation and turbulence. This was the case of the numerical simulations by Charbonneau & MacGregor (1992) that considered the spin-up of a radiative stellar zone threaded by an initial poloidal field. The authors pointed out the role of the field geometry, more specifically, the existence of field lines anchored in the core, in reaching or failing to reach a solid-body rotation as a final state. They determined the timescale necessary to reach this state. This timescale is controlled by the damping of the Alfvén waves that are excited by the back-reaction of the Lorentz force that follows the winding-up of the poloidal field by the differential rotation. Charbonneau & MacGregor (1993), Rüdiger & Kitchatinov (1996), and Spada et al. (2010) studied the spin-down of the radiative zone of the Sun under the same physical assumptions. The effect of

meridional flows has been addressed in Mestel et al. (1988), who restricted their analysis to the axisymmetric case. The impact of non-axisymmetric field components was then studied by Moss et al. (1990), Moss (1992) and more recently by Wei & Goodman (2015). It was shown that a state of solid-body rotation is reached on a timescale shorter than the global diffusive time, regardless of the existence of field lines anchored in the core. However, if the field strength is small compared to the differential rotation strength, the misaligned magnetic field can be axisymmetrised before solid-body rotation is reached.

These studies did not include the effect of possible non-axisymmetric instabilities of the magnetic configurations. However, on the one hand, such instabilities are expected if the winding-up of the poloidal field by differential rotation produces magnetic configurations that are dominated by the toroidal component. Purely toroidal field configurations can indeed be unstable to various kinds of instabilities, such as the Tayler instability, the magneto-rotational instability (MRI), or the buoyancy instability (see for a review Spruit 1999). On the other hand, magnetic fields with toroidal and poloidal components of the same order of magnitude can remain stable, as was found in recent numerical simulations (e.g. Braithwaite & Nordlund 2006; Braithwaite 2007). For the angular momentum transport, the occurrence of such instabilities is a crucial issue since the development of a non-axisymmetric instability could profoundly modify the redistribution of angular momentum. Estimates of the transport

resulting from the Tayler instability have been proposed in Spruit (2002) on phenomenological grounds, while recent numerical simulations by Rüdiger et al. (2015) quantified the transport induced by the so-called azimuthal-MRI in the simplified setup of a fluid of constant density confined between two rotating cylinders.

Beyond the problem of angular momentum transport, non-axisymmetric instabilities could also affect the value of the magnetic field measured at the surface of stars. Notably, spectropolarimetry is an observational technique that allows measuring the line-of-sight component of the magnetic field vector integrated over the whole visible surface. This averaged field could be strongly decreased as one goes from a well-organized large scale magnetic field to a destabilized configuration where opposite polarities cancel each other, especially if the typical length scale left by the instability is much smaller than the stellar radius. This effect has been invoked to explain the magnetic dichotomy observed among intermediate-mass stars between the strong mostly dipolar Ap/Bp magnetic fields and the ultra-weak magnetic fields of other intermediate-mass stars (Aurière et al. 2007; Lignières et al. 2014). In this scenario, the observed lower bound of Ap/Bp magnetic fields (~ 300 G for the dipolar strength) corresponds to the limit between stable and unstable magnetic fields. On phenomenological grounds, Aurière et al. (2007) approximated the maximum toroidal field produced by the winding-up of the poloidal field to $B_\varphi = R \Omega \sqrt{4\pi\rho}$ (where R is the radius of the star, Ω is the rotation rate and ρ is the density) and assumed that the magnetic configuration is unstable as soon as the toroidal field dominates the poloidal field at the stellar surface. They thus derived an order-of-magnitude estimate of the critical field $B_c = R \Omega \sqrt{4\pi\rho}$ that separates stable and unstable magnetic fields. This estimate appears to match the observed value for a typical Ap/Bp star.

Our ultimate goal is to investigate the occurrence and the effect of non-axisymmetric instabilities of the magnetic field induced by the winding-up of a poloidal field in a differentially rotating stellar radiative zone. In the present paper, we use axisymmetric simulations to explore the different magnetic configurations obtained for various differential rotation profiles, density stratifications, and boundary conditions. In this systematic parameter study, we focus on the ratio between the toroidal and poloidal magnetic field as a key parameter governing the stability of the magnetic configuration. We discuss the occurrence of instability in fields that are dominated by their toroidal component, for which we use local stability criteria for purely toroidal fields as well as results from recent 3D numerical simulations by (Jouve et al. 2015) performed for particular configurations. The advantage of these 2D axisymmetric numerical simulations over 3D simulations is to give access to a much broader parameter range and in particular to explore asymptotic behaviours in the regimes of low magnetic diffusivities and viscosities and large density stratifications that are inaccessible to 3D models.

In Sect. 2, the mathematical formulation of our problem is described. We set down the basic assumptions that we adopted and then introduce the equations governing the joint evolution of the differential rotation and the magnetic field. In Sect. 3, the results of the numerical simulations are presented. In Sect. 4, simple models that describe the evolution of the toroidal to poloidal field ratio are presented and compared to the numerical results. In Sect. 5, we discuss the stability of the magnetic configurations obtained by the simulations.

2. Mathematical formulation

2.1. Simplifying assumptions and governing equations

We consider the axisymmetric evolution of an initially poloidal field submitted to differential rotation in a spherical shell. Beyond the assumption that the flow remains axisymmetric over time, we also neglect the meridional circulation. The dynamics is therefore not affected by buoyancy effects and is only governed by the induction and the azimuthal momentum equations. The stellar equilibrium structure comes into play through the density stratification. We also consider timescales shorter than the magnetic diffusion time on a radius length scale. Under the assumptions of axisymmetry and without meridional circulation, the initial poloidal field only evolves through Ohmic dissipation and is thus considered as constant in time.

The governing equations are thus

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = r \sin \theta (\mathbf{B}_p \cdot \nabla) \Omega + \eta \left(\Delta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) B_\varphi, \quad (1)$$

$$\rho r \sin \theta \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \frac{1}{4\pi r \sin \theta} (\mathbf{B}_p \cdot \nabla) (r \sin \theta B_\varphi) + \mu \left(\Delta - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right) (r \sin \theta \Omega), \quad (2)$$

where the rotation rate $\Omega(r, \theta, t)$ is related to the azimuthal velocity by $u_\varphi(r, \theta, t) = r \sin \theta \Omega(r, \theta, t)$ and the magnetic field reads

$$\mathbf{B}(r, \theta, t) = \mathbf{B}_p(r, \theta) + B_\varphi(r, \theta, t) \mathbf{e}_\varphi, \quad (3)$$

$B_\varphi(r, \theta, t)$ being its azimuthal component and $\mathbf{B}_p(r, \theta)$, the time-independent poloidal component. In these equations, the magnetic diffusivity η and the dynamic viscosity μ are uniform, while the density ρ is given by a polytropic model of a star with a polytropic index $n = 3$ (Rieutord et al. 2005).

2.2. From three to two dimensionless numbers

A possible and straightforward nondimensionalization of these equations is obtained by taking the stellar radius R as the reference length scale, $1/\Omega_0$ as the reference timescale (where Ω_0 is the surface rotation rate at the equator), B_0 the surface poloidal magnetic field taken at the equator as a magnetic field unit, and ρ_0 the surface density as a density unit. The dynamical Eqs. (1) and (2) are then controlled by three different dimensionless numbers, namely the Reynolds number $Re = \Omega_0 R^2/\nu_0$, where $\nu_0 = \mu/\rho_0$ is the kinematic viscosity at the surface, the Elsasser number $\Lambda = B_0^2/(4\pi\rho_0 \Omega_0 \eta)$, and the magnetic Prandtl number $P_m = \nu_0/\eta$. However, it is also possible to reduce the number of dimensionless parameters to two by instead employing the Alfvén timescale $t_{Ap} = R \sqrt{4\pi\rho_0}/B_0$ as the reference timescale and $R \Omega_0 \sqrt{4\pi\rho_0}$ as a magnetic field unit for the toroidal component. In addition to the reduction of the number of dimensionless parameters allowed by this choice, it is motivated by the fact that B_φ is generated by the Ω -effect and hence related to Ω_0 in a differentially rotating radiative zone. B_0 remains the poloidal magnetic field unit and Ω_0 the angular rate unit for this nondimensionalization. The ratio of the toroidal to poloidal magnetic fields is then expressed as

$$\frac{B_\varphi}{B_p} = \frac{\widetilde{B}_\varphi}{\widetilde{B}_p} \frac{t_{Ap}}{t_\Omega}, \quad (4)$$

where $t_\Omega = 1/\Omega_0$, and where tildes indicate dimensionless quantities. With this nondimensionalization, Eqs. (1) and (2) read

$$\frac{\partial \widetilde{B}_\varphi}{\partial \widetilde{t}} = \widetilde{r} \sin \theta (\widetilde{\mathbf{B}}_p \cdot \widetilde{\nabla}) \widetilde{\Omega} + \frac{1}{L_u} \left(\widetilde{\Delta} - \frac{1}{\widetilde{r}^2 \sin^2 \theta} \right) \widetilde{B}_\varphi, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\rho} \widetilde{r} \sin \theta \frac{\partial \widetilde{\Omega}}{\partial \widetilde{t}} &= \frac{1}{\widetilde{r} \sin \theta} (\widetilde{\mathbf{B}}_p \cdot \widetilde{\nabla}) (\widetilde{r} \sin \theta \widetilde{B}_\varphi) \\ &+ \frac{P_m}{L_u} \left(\widetilde{\Delta} - \frac{1}{\widetilde{r}^2 \sin^2 \theta} \right) (\widetilde{r} \sin \theta \widetilde{\Omega}). \end{aligned} \quad (6)$$

L_u , the Lundquist number, is defined as follows:

$$L_u = \frac{t_\eta}{t_{\text{Ap}}} = \frac{R B_0}{\eta \sqrt{4\pi\rho_0}}. \quad (7)$$

This reduction from three to two dimensionless numbers greatly facilitates the exploration of the parameter space.

2.3. Initial and boundary conditions

The initial magnetic field is a dipole (see white lines in Fig. 1):

$$\mathbf{B}_p(r, \theta, t = 0) = \frac{2 \cos \theta B_0 R^3}{r^3} \mathbf{e}_r + \frac{\sin \theta B_0 R^3}{r^3} \mathbf{e}_\theta, \quad (8)$$

$$B_\varphi(r, \theta, t = 0) = 0. \quad (9)$$

As stated above, the poloidal component is time-independent, while the toroidal component will evolve in time. The boundary conditions are a perfect conductor at the bottom boundary and an insulating medium at the outer radius. This translates into

$$\left. \frac{\partial (r B_\varphi(r, \theta, t))}{\partial r} \right|_{r=R_c, \theta, t} = 0 \quad \text{and} \quad B_\varphi(r = R, \theta, t) = 0, \quad (10)$$

where R_c is the radius of the inner boundary. We here explore different initial and boundary conditions for the rotation. Three different radial differential rotations and two cylindrical profiles were considered:

$$\Omega(r) = \Omega_0 \frac{R}{r}, \quad (11)$$

$$\Omega(r) = \Omega_0 \frac{R^2}{r^2}, \quad (12)$$

$$\Omega(r) = \Omega_0 \frac{1 - c_1 (r - R_c)^2 R/r^3 - c_2 (r - R_c)^2/r^2}{1 - (c_1 + c_2)(1 - R_c/R)^2}, \quad (13)$$

$$\Omega(\varpi) = \Omega_0 \sqrt{\frac{2}{1 + (\varpi/R)^4}}, \quad (14)$$

$$\Omega(\varpi) = \Omega_0 \sqrt{\frac{12}{1 + 11(\varpi/R)^4}}, \quad (15)$$

where $\varpi = r \sin \theta$ is the distance from the rotation axis. Two types of boundary conditions are used at $r = R_c$, namely a stress-free or a fixed rotation, while a stress-free boundary condition is always used at $r = R$. These different cases are summarized in Tables 3 and 4 and illustrated in Fig. 1 which displays a meridional cut of a radial (left frame) and a cylindrical (right frame) differential rotation profile.

From our reference density profile corresponding to an $n = 3$ polytrope, we create different profiles with ratios ρ_c/ρ_0 ranging from 1 to 10^6 (where ρ_c is the density at the radius $r = R_c$) by cutting the polytropic profile at different radii. The created profiles

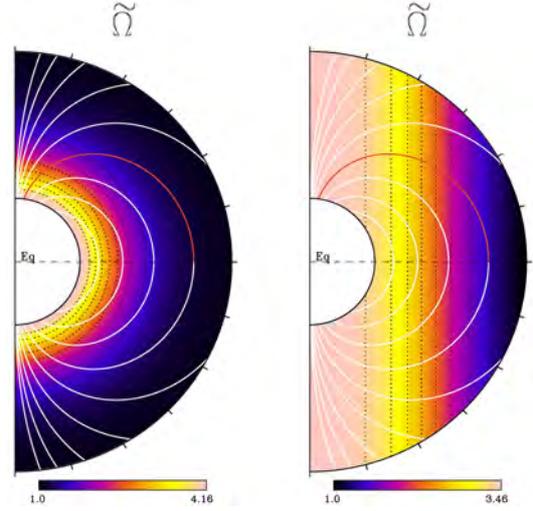


Fig. 1. Meridional cut of $\widetilde{\Omega}$ for the radial profile defined by Eq. (12) (left) and for the cylindrical profile defined by Eq. (15) (right). The dotted black lines represent the isocontours of $\widetilde{\Omega}$. The white lines represent the poloidal magnetic field lines and the red line the one on which Alfvén waves propagate the slowest. The radius at the inner boundary is $r = R_c = 0.3R$.

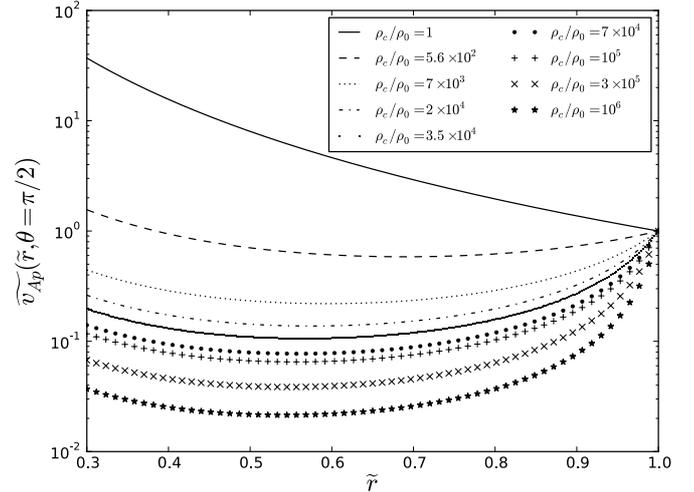


Fig. 2. $\widetilde{v}_{\text{Ap}}$ at the equator as a function of \widetilde{r} for different density contrasts ρ_c/ρ_0 . A $n = 3$ polytropic profile was cut at different radii to produce these various ρ_c/ρ_0 .

are then expanded on the whole computational domain. Figure 2 shows the radial dependence of the dimensionless Alfvén velocity $\widetilde{v}_{\text{Ap}} = \widetilde{B}_p/\sqrt{\widetilde{\rho}}$ for the different density profiles used in our simulations. The corresponding time for an Alfvén wave to propagate from $r = R_c$ to $r = R$ along the equator would vary from $0.25 t_{\text{Ap}}$ for $\rho_c/\rho_0 = 1$ to $22 t_{\text{Ap}}$ for $\rho_c/\rho_0 = 10^6$.

2.4. Numerical model

To solve Eqs. (5) and (6) with the boundary and initial conditions, we used the two-dimensional axisymmetric code STELEM (Charbonneau & MacGregor 1992; Jouve et al. 2008). This code uses a finite-element method in space and a third-order Runge-Kutta scheme in time. The computational domain is limited to the annulus $r \in [R_c, R]$, $\theta \in [0, \pi]$, where $R_c = 0.3R$ was chosen for all our simulations. P_m was fixed to 1 in all our simulations while the Lundquist number L_u is varied from 10

to 10^5 . Depending on the value of L_u and on the boundary and initial conditions, different spatial and temporal resolutions are required. We used a spatial mesh ranging from $N_r \times N_\theta = 128 \times 128$ to 512×512 nodes depending on the cases. The integration time was adjusted to satisfy the Courant-Friedrichs-Lewy criterion. It varies from $dt = 10^{-3} t_{Ap}$ to $dt = 10^{-8} t_{Ap}$.

With the initial conditions used in this study, our problem has an equatorial symmetry. This is clearly visible in the meridional cut of Fig. 1 for example. However, for comparison to future studies with more complex symmetry, we chose to include both hemispheres in our computations and always represent the full meridional plane.

We note that we do not present any results for $L_u > 245$ with a stress-free boundary condition at $r = R_c$. In fact, with this boundary condition there is a Hartmann boundary layer at the inner radius. The thickness δ of this boundary layer is known to be (Dormy et al. 1998)

$$\delta = \frac{R B_0}{B_p \cdot \mathbf{n}} \frac{\sqrt{P_m}}{L_u}, \quad (16)$$

where \mathbf{n} is the unit vector normal to the boundary. The number of mesh points is increased according to Eq. (16) to ensure that the Hartmann layer is much larger than the size of the numerical grid. However, for large L_u , this imposes prohibitive restrictions on the time step.

3. Description of the results

The evolution of the magnetic field and the rotation rate is first qualitatively described pointing out the successive phases and the associated physical mechanisms. We then focus on the ratio between the toroidal and the poloidal magnetic field as a key parameter in the study of the stability of a magnetic field. The influence of the Lundquist number, the density contrast, the initial and the boundary conditions on the highest value reached by this ratio is investigated in detail.

3.1. Evolution of the magnetic field and the differential rotation in a typical case

Figure 3 shows the evolution of the toroidal magnetic field B_φ , the ratio between B_φ and the poloidal magnetic field B_p , and the rotation rate Ω for a typical case (hereafter called the reference case). The parameters of this simulation are $L_u = 10^2$, a density contrast $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$, an initial radial differential rotation given by Eq. (12) and a fixed rotation at the inner radius. Different phases in the evolution of B_φ and Ω can be distinguished. The first is the winding-up phase, where the shearing of the poloidal field by the differential rotation, the so-called Ω -effect, generates B_φ without any back-reaction on the differential rotation (panel a). Since B_φ is generated by the term $\mathbf{B}_p \cdot \nabla \Omega$, the fact that B_φ is antisymmetric with respect to the equator directly relates to the properties of symmetry of Ω and \mathbf{B}_p . After this phase, the Lorentz force back-reacts on the differential rotation, leading to the propagation of Alfvén waves along the poloidal magnetic field lines in both directions. In this simulation, we mainly observe an outward propagation from the internal radius because the initial perturbation of the system is concentrated close to the bottom boundary.

In panel d, a region of opposite sign is visible on B_φ close to the core. It is due to the reflection of Alfvén waves on the equator, where conditions on B_φ and Ω allow for such reflections.

Indeed, the ability for a boundary to reflect Alfvén waves depends on the characteristics of B_φ and Ω at this boundary. In our simulations, the equator behaves as a boundary where $B_\varphi = 0$ (insulating condition) and $\partial\Omega/\partial\theta = 0$ (stress-free condition). This pair of boundary conditions induces a perfect reflection of Alfvén waves at the equator (Schaeffer et al. 2012). The subsequent evolution is characterized by the propagation and the reflection of the waves either at the equator, at the surface, or at the bottom boundary.

The variable Alfvén velocity and the different distances that the Alfvén waves have to travel before reflexion lead to a phase shift between waves on neighbouring magnetic field lines. As we can see in panel e, strong gradients of B_φ and Ω are then created between these waves. The effect of magnetic and viscous diffusion is thus increased. This is the phase-mixing mechanism as described in Ionson (1978), Heyvaerts & Priest (1983), or Parker (1991). The oscillations of B_φ then decrease in amplitude, as shown in panel f. After this dissipative phase controlled by the phase-mixing mechanism, the system evolves towards a steady state known as Ferraro’s law of isorotation (Ferraro 1937), in which Ω is constant along poloidal field lines. In our case, the only possible steady state compatible with the boundary conditions and Ferraro’s law is uniform rotation. This state of uniform rotation is reached on timescales of the order of a few diffusive timescales which are much longer than the timescales we are interested in here. It is thus not shown in Fig. 3.

3.2. Evolution of the ratio between the toroidal and the poloidal magnetic field

Since non-axisymmetric instabilities are expected to occur when the magnetic configuration is dominated by the toroidal component, we now focus on the highest value of B_φ/B_p achieved during the winding-up process. In the cases we considered, this maximum is always reached before the phase-mixing episode takes place (panel c for the simulation shown in Fig. 3). Figure 4 shows the evolution of the spatial maximal value of B_φ/B_p for the reference case. This quantity is defined as the highest value reached in the whole domain. At first, we observe a nearly linear growth of the spatial maximal value of B_φ/B_p . As can be seen in panels a–c of Fig. 3, during this phase the location of the maximum moves as an Alfvén wave along a poloidal field line. The B_φ/B_p ratio reaches its highest value in time and space, $\max(B_\varphi/B_p)$, at a time denoted t_{\max} . At later times in Fig. 4, the spatial maximal value of B_φ/B_p oscillates due to reflections of Alfvén waves at the boundaries and rapidly decreases towards 0 as the system evolves towards a steady state through the dissipation induced by the phase-mixing mechanism. The temporal evolution presented in Fig. 4 is typical for most of our simulations. We note that $(r_{\max}, \theta_{\max})$, the location at which $\max(B_\varphi/B_p)$ is reached, is visible in panel c of Fig. 3 at mid-radius and low latitude. In this zone, the poloidal magnetic field lines do not reach the external radius, they are closed within the shell (see Fig. 1).

To illustrate the physical mechanisms that give rise to $\max(B_\varphi/B_p)$, one can look at the evolution of B_φ/B_p and Ω along the poloidal field line on which $\max(B_\varphi/B_p)$ is reached. Figure 5 displays this evolution for the parameters of the reference case, except that $L_u = 10^4$ instead of 10^2 . Top panels show the growth and decrease of B_φ/B_p between 0 and $2 t_{\max}$, $\max(B_\varphi/B_p)$ being reached at time t_{\max} and location s_{\max} . The bottom panels show that Ω behaves like a standing wave rather than a traveling wave. This is due to the boundary conditions used in the simulation and the spatial scale of the initial differential rotation, which is comparable to the length of the field line. B_φ then

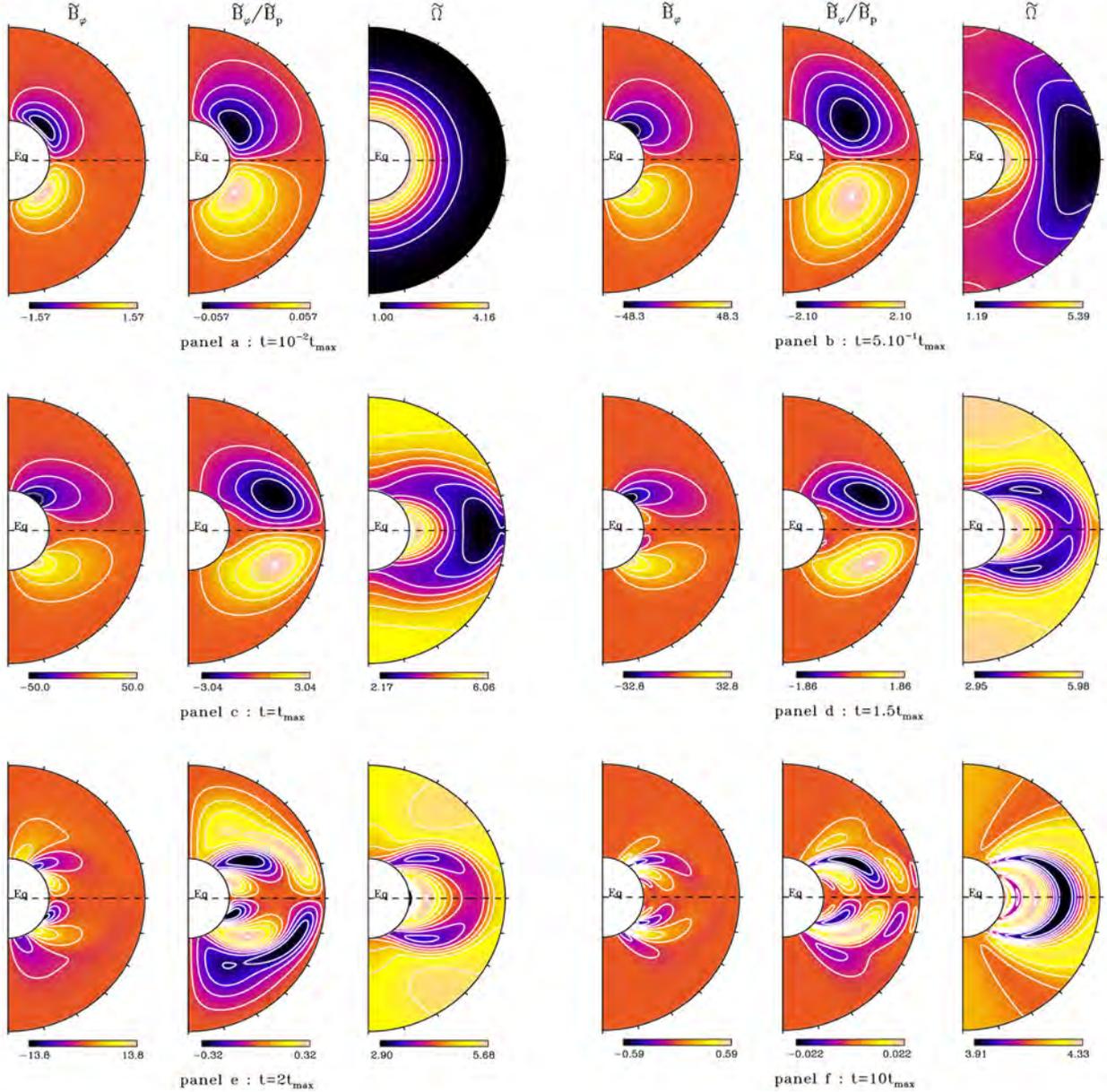


Fig. 3. The reference case: meridional cut of \widetilde{B}_φ , $\widetilde{\varphi}/\widetilde{B}_p$ and $\widetilde{\Omega}$ for different times. t_{\max} , the time at which B_φ/B_p is maximal, is equal to $1.85 t_{\text{Ap}}$ in this simulation. The colourbar at the bottom of each panel indicates the minimal and maximal values of each variable. The parameters of this simulation are $L_u = 10^2$, a density contrast of $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$, an initial radial differential rotation given by Eq. (12) and a fixed rotation at the inner radius.

also behaves as a standing wave, but this is not clearly visible in the top panels where B_φ/B_p is represented. Indeed, since B_p is not uniform along the field line, the standing wave character of B_φ is not obvious in B_φ/B_p . We also note that at approximately $t = t_{\max}$, the gradient of Ω projected onto the poloidal field line, $\partial\Omega/\partial s = \mathbf{e}_s \cdot \nabla\Omega$ where s is the curvilinear coordinate on the field line, changes sign. According to the induction Eq. (5) in which the effects of magnetic diffusion are neglected ($L_u \gg 1$), $\partial(B_\varphi/B_p)/\partial t$ changes sign together with $\partial\Omega/\partial s$, and we indeed observe in Fig. 5 the decrease of B_φ/B_p after t_{\max} .

3.3. Summary of the parameter study

The quantity $\max(B_\varphi/B_p)$ defined in the previous section determines whether the magnetic configuration is locally dominated by the toroidal or the poloidal field, and t_{\max} gives the time at

which $\max(B_\varphi/B_p)$ is reached. Tables 1–4 summarize the values of $\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ and \widetilde{t}_{\max} obtained by varying the Lundquist number L_u , the density contrast ρ_c/ρ_0 , the initial differential rotation profile, and the boundary condition for Ω at $r = R_c$, respectively. In the following, these results are discussed, starting with the effect of L_u . The two last columns show the predictions of models that are presented in the next section.

3.4. Influence of the diffusivities

Figure 6 displays $\max(B_\varphi/B_p)$ and t_{\max} as a function of L_u for the data listed in Table 1. Both $\max(B_\varphi/B_p)$ and t_{\max} increase with L_u . We expect $\max(B_\varphi/B_p)$ to increase when the effects of diffusion on the toroidal magnetic field decrease and thus when L_u increases. To explain why t_{\max} increases with L_u , we note that the diffusion term in the induction equation is expected to

Table 1. Influence of L_u on \tilde{t}_{\max} and $\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ obtained by the simulations and predicted by the model of Aurière et al. (2007) and the model of standing waves (SW) presented in Sect. 4.2.

L_u	\tilde{t}_{\max} (simulation)	\tilde{t}_{\max} (SW model)	$\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (simulation)	$\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (Aurière model)	$\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (SW model)
10^1	0.76	2.55	0.75	4.86	4.16
10^2	1.85	2.55	3.04	4.86	4.16
245	2.22	2.55	4.29	4.86	4.16
10^3	2.35	2.55	4.98	4.86	4.16
10^4	2.48	2.55	5.50	4.86	4.16
10^5	2.53	2.55	5.64	4.86	4.16

Notes. The parameters of the simulations are $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$, the initial radial differential rotation given by Eq. (12) and Ω fixed at the inner radius.

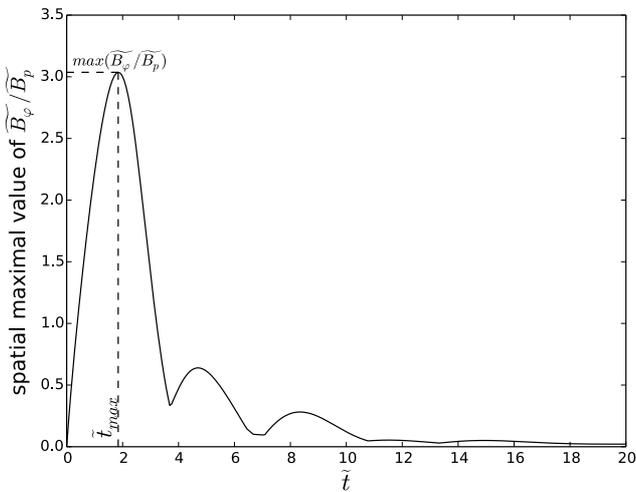


Fig. 4. Evolution of the spatial maximal value of $\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p$ for the reference case. The horizontal dashed line indicates $\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ and the vertical dashed line indicates \tilde{t}_{\max} .

be negative (positive) near local maxima (minima) of B_φ . Thus, diffusion contributes to a faster change of sign of $\partial B_\varphi/\partial t$ and hence to a smaller t_{\max} .

More interestingly, we see in this figure that an asymptotic value is reached for $L_u \gtrsim 10^4$. The same asymptotic behaviour with L_u is observed for all cases considered. The fact that the magnetic and viscous diffusions do not affect the maximum of B_φ/B_p above a certain L_u is not surprising since this maximum is reached on a timescale of the order of an Alfvén time, this timescale becoming much shorter than the diffusive timescale as L_u increases. This asymptotic behaviour constitutes an interesting feature when applications to realistic stellar radiative zones are considered.

3.5. Influence of the density profile

The dependence on the density contrast was studied numerically by varying ρ_c/ρ_0 between 1 and 10^6 (see Table 2). For a given configuration ($L_u = 10^5$, an initial differential rotation given by Eq. (12) and Ω fixed at the inner radius), the two top frames of Fig. 7 show that $\cos \theta_{\max}$ and \tilde{r}_{\max} respectively increases and decreases towards an asymptotic value as ρ_c/ρ_0 increases. Thus, the location of the maximum B_φ/B_p remains unchanged above a certain ρ_c/ρ_0 . As B_φ is produced through the propagation of

Alfvén waves along field lines, the field line where $\max(B_\varphi/B_p)$ is reached is the one that goes through θ_{\max} and r_{\max} . This field line will remain the same above a certain ρ_c/ρ_0 ratio. The same asymptotic behaviour with ρ_c/ρ_0 is observed for the other simulations not listed in Table 2, performed for different L_u and initial differential rotations. For all the cases considered, the asymptotic value of \tilde{r}_{\max} is comprised between 0.6 and 0.8, while $\cos \theta_{\max}$ is comprised between 0.3 and 0.4. Hence, $\max(B_\varphi/B_p)$ is always reached in a zone located between the middle and the top of the radiative zone, close to the equator.

Table 2 shows that $\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ and \tilde{t}_{\max} monotonically increase with ρ_c/ρ_0 . If we consider $\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p) \times \sqrt{\rho_0/\rho_c}$ and $\tilde{t}_{\max} \times \sqrt{\rho_0/\rho_c}$, we find that an asymptotic limit is reached for large ρ_c/ρ_0 . This is shown in the two bottom frames of Fig. 7. In other words, $\frac{\max(B_\varphi/B_p)}{R \Omega_0 \sqrt{4\pi\rho_c/B_0}} \rightarrow C1$ and $\frac{\tilde{t}_{\max}}{R \sqrt{4\pi\rho_c/B_0}} \rightarrow C2$ as ρ_c/ρ_0 tends towards realistic stellar values, where $C1$ and $C2$ are independent of the density contrast. For the different simulations performed, the value of $C1$ varies between 3×10^{-3} and 2×10^{-1} and $C2$ between 10^{-2} and 3×10^{-2} . The variations of these constants are mainly due to the initial differential rotation considered and, to a smaller extent, to the boundary condition adopted at the inner radius. This asymptotic behaviour is expected if the physical mechanism that gives rise to $\max(B_\varphi/B_p)$ is confined in the stellar interior since above a certain ρ_c/ρ_0 ratio the density profile is no longer modified in the internal layers. Indeed, $\max(B_\varphi/B_p)$ is reached along a field line that remains confined in these internal layers.

3.6. Influence of the initial and boundary conditions

The initial differential rotation can have a strong effect on $\max(B_\varphi/B_p)$, but it only slightly modifies t_{\max} . Indeed, as observed in Table 3, the value of $\max(B_\varphi/B_p)$ varies from $18.5 t_{\text{Ap}}/t_\Omega$ for the $1/r^2$ profile (Eq. (11)), which is the strongest shear we can use that is hydrodynamically stable, to $0.31 t_{\text{Ap}}/t_\Omega$ for the cylindrical profile given by Eq. (13). Generally, the stronger the shear, the larger $\max(B_\varphi/B_p)$. But we also find that the cylindrical differential rotation induces less B_φ than the radial one because the isocontours of Ω are more aligned with the poloidal magnetic field lines in the cylindrical case, causing the Ω -effect to be less efficient. The value of t_{\max} is approximately independent of the radial differential rotation profile. This indicates that the time to reverse the shear does not seem to depend on its intensity. However, t_{\max} varies from $0.96 t_{\text{Ap}}$ to $1.35 t_{\text{Ap}}$ for the two cylindrical profiles considered.

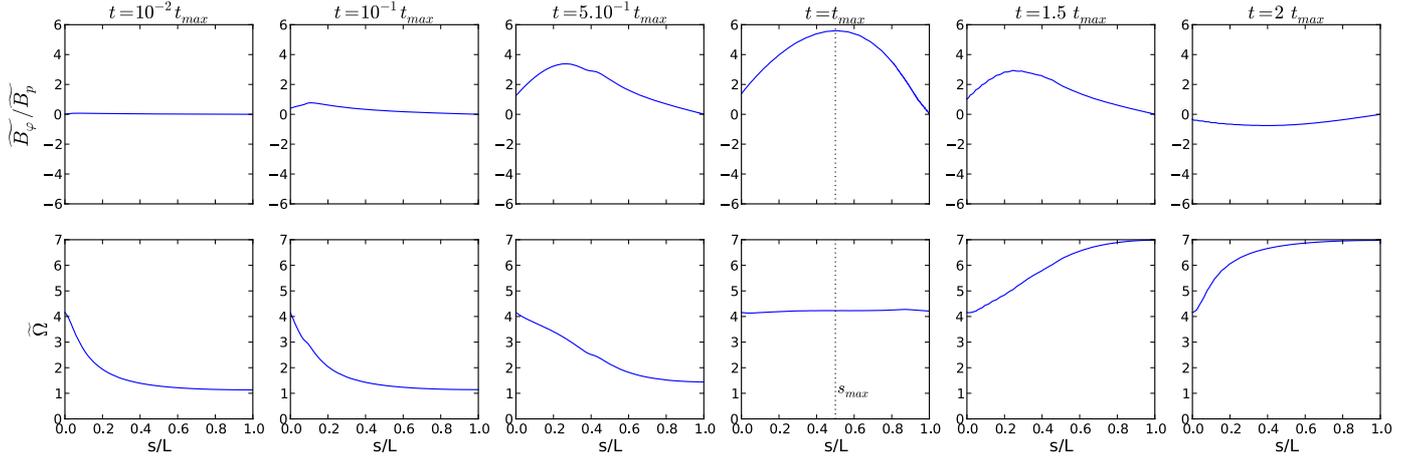


Fig. 5. $\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p$ (top panels) and $\widetilde{\Omega}$ (bottom panels) as a function of s/L for different times. s is the curvilinear coordinate of the poloidal field line in which $\max(B_\varphi/B_p)$ is reached, and L the length of this field line. $s = 0$ locates the inner radius and $s = L$ the equator. The simulation is the same as in Fig. 3 with the exception of $L_u = 10^4$. The vertical dashed line indicates s_{max} the location of $\max(B_\varphi/B_p)$ on the poloidal field line.

Table 2. Influence of the density contrast ρ_c/ρ_0 on \widetilde{t}_{max} and $\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$.

Density contrast ρ_c/ρ_0	\widetilde{t}_{max} (simulation)	\widetilde{t}_{max} (SW model)	$\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (simulation)	$\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (Aurière model)	$\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (SW model)
1	0.57	0.45	1.55	1.00	1.80
5.6×10^2	1.15	1.11	2.68	1.63	1.94
7×10^3	2.52	2.55	5.64	4.86	4.16
2×10^4	3.89	3.92	8.55	7.95	6.22
3.5×10^4	4.95	5.00	10.8	10.4	8.06
7×10^4	6.67	6.77	14.5	14.4	11.1
10^5	7.86	7.98	17.0	17.2	12.9
3×10^5	13.0	13.3	28.0	29.4	21.7
10^6	22.9	23.5	49.0	53.2	37.7

Notes. The parameters of the simulations are $L_u = 10^5$, the initial radial differential rotation given by Eq. (12) and Ω fixed at the inner radius.

Table 3. Influence of the initial differential rotation on \widetilde{t}_{max} and $\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$.

Initial condition for Ω	\widetilde{t}_{max} (simulation)	\widetilde{t}_{max} (SW model)	$\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (simulation)	$\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (Aurière model)	$\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (SW model)
Eq. (11) (radial profile)	2.48	2.55	3.63	4.58	2.93
Eq. (11) (radial profile)	2.50	2.55	18.5	8.85	13.1
Eq. (12) (radial profile)	2.48	2.55	5.50	4.86	4.16
Eq. (13) (cylindrical profile)	0.96	2.55	0.31	3.82	0.39
Eq. (15) (cylindrical profile)	1.35	2.55	2.19	6.13	2.91

Notes. The parameters of the simulations are $L_u = 10^4$, $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$ and Ω fixed at the inner radius.

Our variables of interest $\max(B_\varphi/B_p)$ and t_{max} are less influenced by the boundary conditions on Ω than by all the other parameters considered in this study. As illustrated in Table 4, for radial differential rotation profiles, $\max(B_\varphi/B_p)$ and t_{max} are always slightly larger for a fixed value than for a stress-free boundary condition, 1.01 to 1.66 and 1.03 to 1.37 times higher, respectively, depending on the cases. For the cylindrical profiles, $\max(B_\varphi/B_p)$ and t_{max} reach the same values, independently of the boundary conditions.

The boundary conditions other than the one on Ω at $r = R_c$ only have a limited impact on $\max(B_\varphi/B_p)$ and t_{max} . We thus

do not show their influence here. If longer timescales were considered (and final steady states), they would play a significant role, however.

4. Simple models

In this section two models are presented that provide an estimate of $\max(B_\varphi/B_p)$ and t_{max} . Their predictions are compared with the results of the simulations. The first model is a local model that uses the same phenomenological assumptions as Aurière et al. (2007). The second model consists of estimating the poloidal

Table 4. Influence of the boundary condition of Ω at the inner radius on $\tilde{\tau}_{\max}$ and $\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$.

Initial condition for Ω	Boundary condition for Ω at $r = R_c$	$\tilde{\tau}_{\max}$ (simulation)	$\tilde{\tau}_{\max}$ (SW model)	$\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (simulation)	$\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (Aurière model)	$\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p)$ (SW model)
Eq. (12) (radial profile)	fixed value	2.22	2.55	4.29	4.86	4.16
Eq. (12) (radial profile)	stress-free	1.69	1.27	2.97	4.86	3.03
Eq. (13) (cylindrical profile)	fixed value	0.85	2.55	0.26	3.82	0.39
Eq. (13) (cylindrical profile)	stress-free	0.85	1.27	0.26	3.82	0.28

Notes. The parameters of the simulations are $L_u = 245$ and $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$.

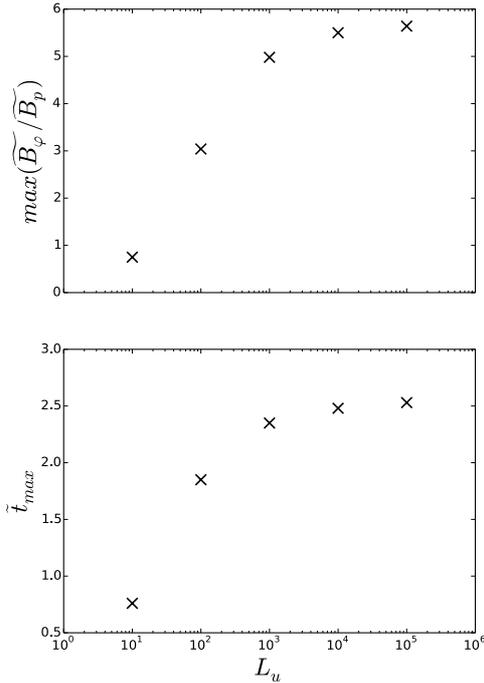


Fig. 6. $\max(B_\varphi/B_p)$ (top) and τ_{\max} (bottom) as a function of L_u with the physical ingredients used for the reference case.

field line on which $\max(B_\varphi/B_p)$ is reached and then of solving a 1D Alfvén wave equation along this field line.

4.1. Local model of Aurière et al. (2007)

Starting from the ideal induction equation for the toroidal component

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = r \sin \theta \mathbf{B}_p \cdot \nabla \Omega, \quad (17)$$

Aurière et al. (2007) assumed that the toroidal field back-reacts on the differential rotation after a time $\tau_{\max} = \ell/v_{\text{Ap}}$, corresponding to the period of an Alfvén wave of wavelength $\ell = |\nabla \Omega|/\Omega$, the length scale of the initial differential rotation. Then, by integrating Eq. (17) from $t = 0$ to $t = \tau_{\max}$ and assuming that the differential rotation is constant up to that time, we obtain

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(r, \theta, t = \tau_{\max}) = \frac{r \sin \theta \Omega(r, \theta, t = 0)}{v_{\text{Ap}}(r, \theta)}. \quad (18)$$

Taking the spatial maximum of B_φ/B_p in Eq. (18), $\max(B_\varphi/B_p)$, r_{\max} , θ_{\max} and then τ_{\max} can be determined.

Of the assumptions of this model, neglecting magnetic diffusion appears justified since the numerical results have shown that

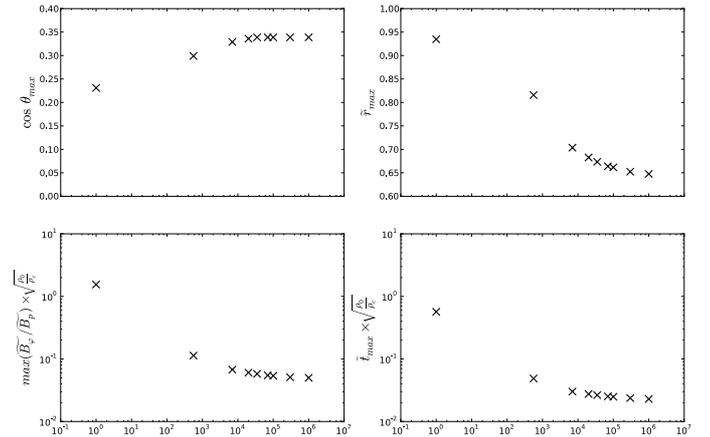


Fig. 7. $\cos \theta_{\max}$, $\tilde{\tau}_{\max}$ (top frames), $\max(\widetilde{B}_\varphi/\widetilde{B}_p) \times \sqrt{\rho_c/\rho_0}$ and $\tilde{\tau}_{\max} \times \sqrt{\rho_c/\rho_0}$ (bottom frames) as a function of ρ_c/ρ_0 . The parameters of the simulations are $L_u = 10^5$, a profile of Ω defined by Eq. (12) and Ω fixed at the inner radius.

$\max(B_\varphi/B_p)$ becomes independent of L_u when $L_u \gtrsim 10^4 - 10^5$. Relating τ_{\max} to the length scale of the initial differential rotation ℓ leads to a simple expression, but then B_φ/B_p taken at τ_{\max} does not depend on the initial gradient of Ω and in particular on its projection onto poloidal field lines. For example, if Ferraro's law is verified initially, B_φ should remain equal to zero, but the model incorrectly predicts that induction takes place. Another problem is that with a local model, the effects of the boundary conditions are not taken into account.

4.2. Model of standing Alfvén waves on a poloidal magnetic field line

Since the initial perturbations of Ω and B_φ propagate as Alfvén waves along \mathbf{B}_p , a more accurate model would be to solve a one-dimensional wave equation along the poloidal field line where $\max(B_\varphi/B_p)$ is reached. As we expect this field line to be the one for which the Ω -effect lasts the longest, we assume that $\max(B_\varphi/B_p)$ is reached on the field line that maximizes the Alfvén propagating time over the line length L (taken from the inner radius to the equator or the surface) $\tau(L) = \int_0^L ds/v_{\text{Ap}}$. The field line obtained using this condition for a case with $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$ is indicated in red in Fig. (1).

Neglecting the magnetic and viscous diffusions and assuming that the scale of variation of $r \sin \theta$ and B_p along \mathbf{B}_p is larger than the scale of $\partial \Omega / \partial s$ (Mestel & Weiss 1987), the 1D wave

equation to be solved on this field line is

$$\frac{\partial^2 \Omega(s, t)}{\partial s^2} - \frac{1}{v_{\text{Ap}}^2(s)} \frac{\partial^2 \Omega(s, t)}{\partial t^2} = 0. \quad (19)$$

As already noticed, Ω behaves approximately as a standing wave for the initial differential rotation considered here (see Fig. 5). We thus search for normal-mode solutions $f(s) \exp(i\omega t)$ of the wave equation. In addition, we consider the fundamental mode as an approximate solution of the problem because the initial perturbation is dominated by its large-scale component. The equation for $f(s)$ is

$$\frac{d^2 f(s)}{ds^2} + \left(\frac{\omega}{v_{\text{Ap}}(s)} \right)^2 f(s) = 0. \quad (20)$$

A simple and explicit solution is obtained assuming that v_{Ap} is a constant equal to the mean Alfvén velocity $\overline{v_{\text{Ap}}}$ along the poloidal field line. We then obtain $B_\varphi/B_p(s, t = t_{\text{max}})$ by integrating the induction equation up to t_{max}

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(s, t = t_{\text{max}}) = \Delta\Omega \frac{g(s)}{\overline{v_{\text{Ap}}}} \cos\left(\frac{\pi s}{2L}\right), \quad (21)$$

for a fixed boundary condition at $s = 0$ and a stress-free boundary condition at $s = L$, with $t_{\text{max}} = \frac{L}{\overline{v_{\text{Ap}}}}$ and where $\Delta\Omega = \Omega(s = 0, t = 0) - \Omega(s = L, t = 0)$ and $g(s) = r(s) \sin \theta(s)$.

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(s, t = t_{\text{max}}) = \frac{\Delta\Omega}{2} \frac{g(s)}{\overline{v_{\text{Ap}}}} \sin\left(\pi \frac{s}{L}\right), \quad (22)$$

for a stress-free boundary condition at $s = 0$ and $s = L$ and with $t_{\text{max}} = \frac{L}{2\overline{v_{\text{Ap}}}}$.

A more accurate solution can be obtained using the Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) approximation

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(s, t = t_{\text{max}}) = \Delta\Omega \frac{g(s)}{\sqrt{v_{\text{Ap}}(s) v_{\text{Ap}}(L)}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau(s)}{\tau(L)}\right), \quad (23)$$

for a fixed boundary condition at $s = 0$ and a stress-free boundary condition at $s = L$, with $t_{\text{max}} = \tau(L)$ and where $\tau(s) = \int_0^s \frac{ds'}{v_{\text{Ap}}}$.

$$\frac{B_\varphi}{B_p}(s, t = t_{\text{max}}) = \frac{\Delta\Omega}{2} \frac{g(s)}{\sqrt{v_{\text{Ap}}(s) v_{\text{Ap}}(L)}} \sin\left(\pi \frac{\tau(s)}{\tau(L)}\right), \quad (24)$$

for a stress-free boundary condition at $s = 0$ and $s = L$ and with $t_{\text{max}} = \frac{\tau(L)}{2}$.

We now compare this WKB solution and the model of Aurière et al. (2007), hereafter called SW model for “standing wave” and Aurière model, with the results of the numerical simulations.

4.3. Comparison of the models with the numerical simulations

The values of $\max(B_\varphi/B_p)$ and t_{max} given by the models are compared with the results of the simulations in Tables 1–4.

First, we observe that the Aurière model and the SW model reproduce the asymptotic behaviour of $\max(B_\varphi/B_p)$ when ρ_c/ρ_0 increases. Indeed, Table 2 indicates that $\max(B_\varphi/B_p)$ is given with a mean relative error of 13% by the Aurière model against 24% for the SW model. In this particular case, the Aurière model agrees better with the simulations than the SW model. However,

in the other simulations that are not listed in this paper it is generally the opposite trend. The SW model provides very accurate predictions of t_{max} with a mean relative error of only 4%, while the Aurière model predicts values of t_{max} several orders of magnitude higher than the simulations (we have thus chosen not to list them in the tables).

As expected, the effect of the initial differential rotation is much better reproduced by the SW model than by the Aurière model, with a mean relative error on $\max(B_\varphi/B_p)$ of 26% and 280%, respectively (see Table 3). While the Aurière model does not take into account the effects of the boundary conditions, the SW model estimates $\max(B_\varphi/B_p)$ with a mean relative error of only 16% for the different boundary conditions considered (see Table 4). Finally, Fig. 8, for the stress-free BC case, and Fig. 5, for the fixed BC, indeed show that the evolution of the perturbation is not far from the standing waves prescribed by the SW model.

We conclude that the SW model provides a useful approximation for the maximum ratio B_φ/B_p in a differentially rotating star with a dipolar field, provided that the length scale of the initial differential rotation is not too small compared to the stellar radius.

5. Towards the instability of the magnetic field

We now turn to the discussion of possible instabilities of the magnetic configurations found in our simulations. Figure 9 shows the configuration obtained at time t_{max} in a typical simulation. A 3D rendering of the field lines is shown, coloured by the total magnetic intensity. We clearly see in this figure that we have a complex structure with mixed poloidal and toroidal components, even if the toroidal field dominates at mid-latitudes. Moreover, differential rotation is still present in the spherical domain at this time of the simulation and may strongly influence the stability conditions of this complex magnetic field.

One way to study the stability of such a complex magnetic configuration without approximation is to perform 3D numerical simulations where the full set of MHD equations is solved. This approach has been followed in a companion paper (Jouve et al. 2015), although the magnetic configurations studied in 3D have been limited to cases of uniform density, cylindrical differential rotation, and low L_u values. Jouve et al. (2015) found that a magnetic instability is triggered and destroys the large-scale magnetic field if the ratio of the poloidal Alfvén time t_{Ap} to the rotation timescale t_Ω is sufficiently high. In unstable cases, an enhanced transport of angular momentum due to the turbulence induced by the instability is found, confirming the results of Rüdiger et al. (2015) in cylindrical geometry. This fully 3D study also served to test the capacity of approximate local criteria to determine the stability of these complex configurations. In particular, it was found that the dispersion relation of Ogilvie (2007) could predict the nature of instability and provide reasonable estimates of its growth rates. Here, we used these local criteria to predict the stability of the configuration obtained through our axisymmetric simulations. As compared to Jouve et al. (2015), we therefore study the stability of a wider range of configurations, including the effects of the density stratification, of a radial differential rotation profile, and of stable stratification.

5.1. Local stability analysis under simplifying assumptions

From numerous previous studies, we know that a magnetic field is more likely to be unstable if it is dominated by one of its

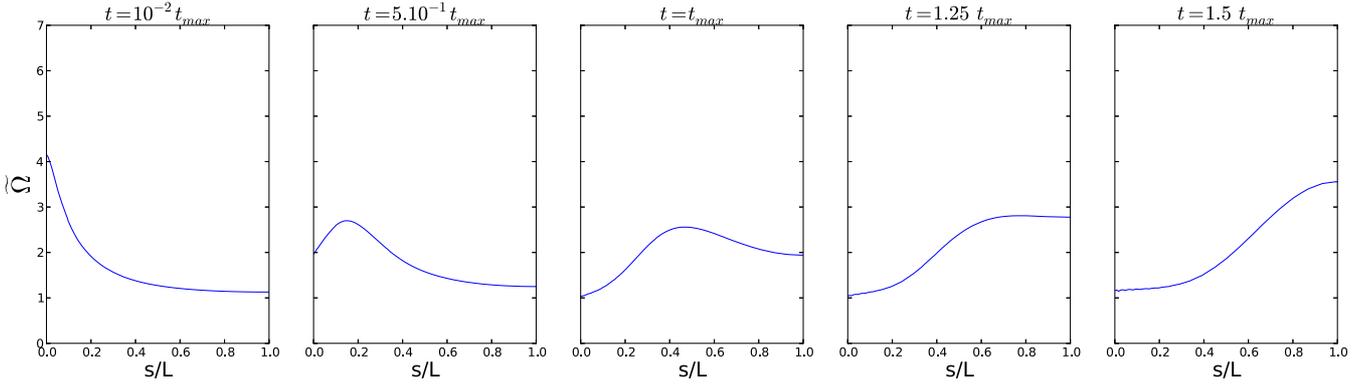


Fig. 8. $\tilde{\Omega}$ as a function of s/L for different times. s is the curvilinear coordinate of the poloidal field line on which $\max(B_\varphi/B_p)$ is reached, and L the length of this field line. $s = 0$ locates the inner radius and $s = L$ the equator. The parameters of the simulation are $L_u = 245$, $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$, the differential rotation profile given by Eq. (12) and a stress-free boundary condition.



Fig. 9. 3D view of the magnetic configuration obtained with our 2D simulations at t_{max} . It is computed for $L_u = 10^2$, a density contrast $\rho_c/\rho_0 = 7 \times 10^3$, the radial differential rotation profile defined by Eq. (12) and Ω fixed at the inner radius.

components, namely when it is either purely poloidal (Markey & Tayler 1973; Flowers & Ruderman 1977) or purely toroidal (Tayler 1973; Pitts & Tayler 1985). In the previous sections, we have established in which conditions the initial differential rotation produces a configuration dominated by the toroidal field. For the stability analysis, we only consider the situations where the toroidal magnetic field is so dominant that the poloidal component can be neglected. We return to this assumption in the next sub-section.

A major difficulty in performing a linear stability analysis of our magnetic configurations is that the axisymmetric background field evolves in time. Therefore, an important quantity to consider here is the ratio between the growth time of possible instabilities and the evolution timescale of the background magnetic field. From now on, we assume that this ratio is low and thus that the background state can be assumed to be steady. This assumption is discussed in the next sub-section.

The local magnitude of the differential rotation is measured by $q\Omega$, where $q = \partial \ln \Omega / \partial \ln \varpi$ is the shear parameter and ϖ is the cylindrical radius. For the different profiles considered (see

Eqs. (11) to (15)), the shear parameter is always of order unity, meaning that the differential rotation is of the order of the local rotation rate.

Under these assumptions, we may proceed to a local linear stability analysis, using the dispersion relation derived by Ogilvie (2007) for the case of a purely toroidal field under the influence of a differential rotation, both possessing arbitrary profiles. Two instabilities may be expected in this situation: the Tayler instability (TI), which derives from free magnetic energy, and the MRI, whose source of energy is the free kinetic energy of the differential rotation. The steady and axisymmetric basic state consists of a differential rotation profile $\Omega(\varpi, z)$ and a purely toroidal magnetic field $B_\varphi(\varpi, z)$, where z is the coordinate along the rotation axis. If we consider a perturbation such that the displacement is in the direction \mathbf{e} , we obtain the following form of the dispersion relation:

$$\left[\omega^2 - \frac{m^2 v_{A\varphi}^2}{\varpi^2} - (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_r)^2 N^2 - 2\varpi \Omega \mathbf{e} \cdot \nabla \Omega + \frac{2 v_{A\varphi}}{\sqrt{4\pi\rho}} \mathbf{e} \cdot \nabla \left(\frac{B_\varphi}{\varpi} \right) \right] \times \left[\omega^2 - \frac{m^2 v_{A\varphi}^2}{\varpi^2} \right] = \left[2\Omega \omega + \frac{2m v_{A\varphi}^2}{\varpi^2} \right]^2, \quad (25)$$

where ω is the frequency of the perturbation, m is the azimuthal wavenumber, $v_{A\varphi} = B_\varphi/\sqrt{4\pi\rho}$ is the toroidal Alfvén velocity, and N is the Brunt-Väisälä frequency taken as uniform in the whole domain. As noted previously, the buoyancy force does not affect the evolution of the axisymmetric magnetic field since the meridional flows are neglected. It influences the stability of the magnetic configurations through the value of the N/Ω ratio, however. As noted by Jouve et al. (2015), another important quantity of the magnetic stability is the ratio of the rotation rate Ω to the toroidal Alfvén frequency $\omega_{A\varphi} = v_{A\varphi}/r$.

For a given configuration $B_\varphi(\varpi, z, t_{max})$ and $\Omega(\varpi, z, t_{max})$, corresponding to a $\Omega(\varpi, z, t_{max})/\omega_{A\varphi}(\varpi, z, t_{max})$ ratio, obtained with the 2D numerical simulations and a value of N/Ω , the dispersion relation provides the growth rate $\sigma = \Im(\omega(\varpi, z))$ of a local perturbation characterized by m and \mathbf{e} . Two cases are illustrated in Fig. 10. In this figure, only the northern hemisphere is shown since the results are symmetric with respect to the equator. The contours of the toroidal magnetic field are drawn (white lines) together with the contours of the growth rate of the instability (coloured contours) for the most unstable perturbation, which is in the direction $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\varpi$. The only difference in the initial setup of these two simulations is the differential rotation profile (Eq. (13) was used for the case in the top panel and

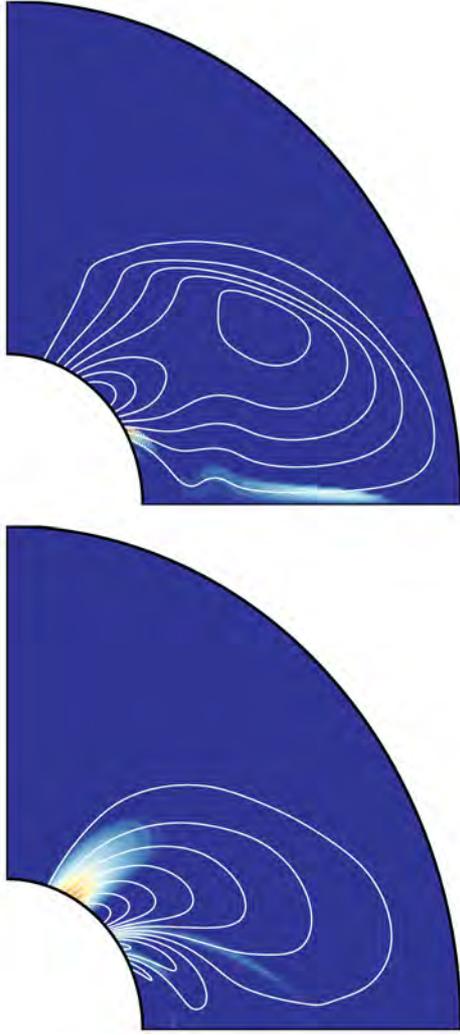


Fig. 10. Contours of the toroidal magnetic field (white lines) and of the growth rate of the instability (coloured contours) for the most unstable perturbation ($m = 7$ for the *top frame* and $m = 1$ for the *bottom frame*) which is in the direction $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\sigma$. The parameters of the simulations are $N = 0$ and, respectively for the *top* and the *bottom frames* $\Omega/\omega_{A\varphi} \approx 10$ and $\Omega/\omega_{A\varphi} \approx 1$ at the maximum of the toroidal field.

Eq. (12) for the bottom panel). As a consequence of a different winding-up between these two cases, the ratio $\Omega/\omega_{A\varphi}$ reaches very different values. As shown in Jouve et al. (2015), the nature of the instability that is likely to be triggered in these magnetic configurations depends on this $\Omega/\omega_{A\varphi}$ frequency ratio. For the case in the top panel $\Omega/\omega_{A\varphi} \approx 10$ at the maximum of toroidal field, the differential rotation thus plays a dominant role, and the most vigorous instability is the MRI, the most unstable mode having an azimuthal wave number $m = 7$. In contrast, for the other case where $\Omega/\omega_{A\varphi} \approx 1$ at the maximum of toroidal field, the current-driven Taylor instability is triggered and favours the $m = 1$ mode. The location of the instability is also quite different in both cases. In the MRI case, the most unstable region is concentrated at rather low latitudes and very extended in radius. In the TI case, however, the unstable zones are mainly located on strong gradients of the field close to the bottom of the domain at latitudes 30° and 60° . In all cases studied, the value of $\Omega/\omega_{A\varphi}$ is found to vary between about 1 and 10 depending on the initial and boundary conditions. We thus expect our axisymmetric configurations to be subject to an instability, the nature of which

only depends on this $\Omega/\omega_{A\varphi}$ ratio. Both the MRI and the TI are found to be likely to exist in our situations. The location of the instability, the growth rates as well as the typical lengthscale of the most unstable mode will then differ and the consequences on the observed surface field may be very different between the TI and the MRI cases.

We showed in Sect. 3.5 that when the density contrast is increased between the top and bottom of our domain, both the highest value of B_φ/B_p and its location tend to an asymptotic value. For the stability conditions, we find that for the case where the $m = 1$ Taylor instability is favoured (bottom panel of Fig. 10), increasing the density contrast does not significantly vary the nature, location, and growth rate of the instability. Indeed, as ρ_c/ρ_0 is increased from 7×10^3 (case shown in the figure) to 2×10^4 and to 10^6 , the whole magnetic configuration is left mostly unchanged and the value of $\Omega/\omega_{A\varphi}$ increases from 1 to 1.25 and to 1.54. In these three cases, the $m = 1$ mode is found to be the most unstable to the TI and is always located at the base of the domain in two distinct regions in latitude (i.e. at 30° and 60° where the gradients are the strongest). The highest growth rate is always around $\sigma \approx 7-9 \Omega_{A\varphi}$, where $\Omega_{A\varphi} = B_{\varphi_m}/R \sqrt{4\pi\rho_c}$ and B_{φ_m} is the maximal toroidal field. This is an interesting feature of this work since it implies that our results can be extrapolated to realistic values of the density contrast not only for the location and value of $\max(B_\varphi/B_p)$, but also for the instabilities that are likely to be triggered in the stellar interior.

The effect of the stratification has also been explored by varying the parameter N/Ω_0 , where Ω_0 is the rotation rate at the surface. For the case where the Taylor instability is favoured, increasing N/Ω_0 from 0 (case shown in the bottom panel of Fig. 10) to 8 and to 16 decreases the maximum growth rate of the instability from $9.2 \Omega_{A\varphi}$ to $8.2 \Omega_{A\varphi}$ and to $5.2 \Omega_{A\varphi}$. The location of the instability remains unchanged. For the case where the MRI is favoured, the highest growth rate strongly decreases, the most favoured wave number m decreases when N/Ω_0 increases, and the instability totally disappears for $N/\Omega_0 \geq 2$. This agrees with Spruit (1999), who stated that the MRI is more affected by the stable stratification than the TI. It also agrees with Masada et al. (2006), who showed that the most unstable azimuthal wave number m decreases when N/Ω_0 increases. Nevertheless, with a realistic stable stratification ($N/\Omega_0 \approx 10$), the most unstable perturbations are no longer in the direction $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\sigma$, but rather in the direction $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\theta$. Indeed, such horizontal perturbations are not affected by the stratification, and magnetic instabilities are still present in these cases. For the same case as the one shown in the bottom panel of Fig. 10, the $m = 1$ TI still possesses a significant growth rate $\sigma \approx 9 \Omega_{A\varphi}$ in the direction $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\theta$. The MRI can still be triggered for $\mathbf{e} = \mathbf{e}_\theta$, but with a growth rate $\sigma \approx 0.4 \Omega_{A\varphi}$ much lower than in the unstratified cases, where $\sigma \approx 2.6 \Omega_{A\varphi}$ (case shown in the top panel of Fig. 10). We thus still expect non-axisymmetric instabilities to develop in the stably stratified cases, the main difference being that when $\Omega/\omega_{A\varphi} > 1$ (MRI regime), the growth rate is significantly reduced.

5.2. Discussion of the stability condition

One of the simplifying assumptions in the previous section was to consider that the instability would grow on a steady axisymmetric background state. However, both the background magnetic field and the differential rotation always oscillate on the short timescales considered in our study.

From Fig. 4, this oscillation frequency can be estimated to be $1/2 t_{\max}$. To freely develop, an instability with a growth rate

σ should therefore fulfil the condition

$$\sigma > \frac{1}{2 t_{\max}}. \quad (26)$$

As discussed in the previous sub-section, if $\Omega/\omega_{A\varphi} > 1$, the MRI is favoured. Its maximum growth rate is related to the shear parameter and the rotation rate in the following way (see for example Balbus & Hawley 1991):

$$\sigma_{\text{MRI}} = q \Omega/2. \quad (27)$$

If $\Omega/\omega_{A\varphi} \lesssim 1$, the TI is favoured and the growth rate reads

$$\sigma_{\text{TI}} = \omega_{A\varphi}. \quad (28)$$

From the standing Alfvén wave model presented in Sect. 4.2, the toroidal Alfvén frequency $\omega_{A\varphi}$ and t_{\max} are given by Eqs. (23) and (24), or by Eqs. (21) and (22) in a simplified case. The quantity $\Delta\Omega$, which appears in these equations, can be expressed in terms of the rotation rate Ω and the shear parameter q : $\Delta\Omega \approx \varpi \partial\Omega/\partial\varpi = q \Omega$. The condition for the development of a non-axisymmetric instability, Eq. (26), can then be rewritten as

$$\Delta\Omega > \frac{\bar{v}_{\text{Ap}}}{L}, \quad (29)$$

which is valid for both the MRI and the TI cases.

In practice, effects ignored in this estimation will make this condition more restrictive. First, as shown in the previous sub-section, the stable stratification is expected to significantly decrease the instability growth rate in the MRI case. Second, to derive (29), we assumed that the toroidal component dominates the poloidal component. This assumption does not impose an additional constraint since, according to the SW model, condition (29) also ensures that the toroidal component dominates. Nevertheless, even in the presence of a small poloidal component, a more conservative instability condition might be necessary (see for the TI case Linton et al. 1996; Braithwaite 2009). Finally, the 3D simulations by Jouve et al. (2015) indicate that a condition $\sigma > 10 \frac{1}{2 t_{\max}}$ is more appropriate than $\sigma > \frac{1}{2 t_{\max}}$ to account for the effect of the oscillating background state. Indeed, in the regime $\frac{1}{2 t_{\max}} < \sigma < 10 \frac{1}{2 t_{\max}}$ perturbations do grow exponentially, but are killed by the background field reversal before they reach the level of energy of the axisymmetric field. Taking these three effects into account, the condition for the non-axisymmetric instabilities therefore is rather $\Delta\Omega \gg \frac{\bar{v}_{\text{Ap}}}{L}$. In the particular case of the 3D simulations by Jouve et al. (2015), the condition is $\Delta\Omega > 100 \frac{\bar{v}_{\text{Ap}}}{L}$.

5.3. Discussion of the critical surface field

When written in terms of quantities observables at the stellar surface, the condition for instability reads

$$\frac{B_0}{R\Omega_0 \sqrt{4\pi\rho_0}} < C \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \frac{v_{\text{Ap}}(R)}{\bar{v}_{\text{Ap}}}, \quad (30)$$

where, as we just discussed, the factor C takes into account effects on the instability ignored in the simple condition (29). In the case studied by 3D numerical simulations (where ρ is uniform, $\Delta\Omega/\Omega_0 \sim 1$ and the initial field is dipolar), it is found to be $\sim 10^{-2}$. This expression defines a surface critical field, B_{crit} , below which non-axisymmetric instabilities can be triggered by differential rotation. This field is proportional to $R\Omega_0 \sqrt{4\pi\rho_0}$ and depends on internal properties, such as differential rotation and

field geometry, through the ratio $\Delta\Omega/\Omega_0$ and $v_{\text{Ap}}(R)/\bar{v}_{\text{Ap}}$. The actual value of $\Delta\Omega/\Omega_0$ will depend on the mechanism that enforces differential rotation in the star and might be much lower than the $\Delta\Omega/\Omega_0 \sim 10^{-1}-1$ values we considered here as initial conditions.

Following Aurière et al. (2007), the magnetic dichotomy of intermediate-mass stars would be due to the development of non-axisymmetric instabilities separating stable strong field configurations, the Ap/Bp stars, from unstable weaker field configurations whose surface average field becomes very weak after the destabilization. Accordingly, the lower limit of Ap/Bp magnetic fields would be given by a stability condition such as (30) (the present stability condition is global and thus differs from the local condition found by Aurière et al. (2007)). As we know that the observed lower bound of Ap/Bp dipolar fields is ≈ 300 G and that $R\Omega_0 \sqrt{4\pi\rho_0} \approx 300$ G for a typical Ap star ($R = 3 R_{\odot}$, $P = 5$ days, $\log g = 4$ dex and $T_{\text{eff}} = 10^4$ K), the condition for instability (30) would match observations if $C \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} \frac{v_{\text{Ap}}(R)}{\bar{v}_{\text{Ap}}} \gtrsim 1$. A density profile calculated for such a star thanks to the stellar evolutionary code MESA yields $\frac{v_{\text{Ap}}(R)}{\bar{v}_{\text{Ap}}} \approx 2 \times 10^4$, which implies that $\Delta\Omega/\Omega_0 \gtrsim 5 \times 10^{-3}$. However, in making this estimate, we assumed that any non-axisymmetric instability taking place deep inside the star strongly affects the observed surface field. This is not necessarily true, in which case higher $\Delta\Omega/\Omega_0$ would be compatible with the Aurière scenario.

Given the present uncertainties on the stability condition (see previous sub-section), the level of the differential rotation and the effect of an internal instability on the surface field, the quantitative comparison between the theoretical critical field and the observed lower bound of Ap/Bp fields is still rather approximative. More realistic 3D simulations will help, although the density contrasts encountered in a stellar envelope remain beyond reach for such simulations. It will be more relevant to compare the dependence of the critical field on the surface rotation rate with observations. Existing data indeed point towards a linear dependency of the lower bound of Ap magnetic fields (Lignières et al. 2014) compatible with the stability condition (30).

6. Conclusion

We performed an extensive study of the evolution of a magnetic field in a differentially rotating radiative zone. Among other results, we provided a systematic estimate of the ratio between the toroidal and the poloidal magnetic field. We tested the influence of the diffusivities and of the density profile and characterized the impact of different boundary conditions and differential rotation profiles. The large parametric study that 2D numerical simulations made possible has allowed finding asymptotic regimes for the diffusion and the density contrast. This in turn enabled us to extrapolate our numerical results to realistic stellar diffusivities and density contrasts. A simple one-dimensional standing wave model was also found to provide reliable estimates of $\max(B_{\varphi}/B_p)$ and the time at which this maximum is reached.

We then discussed the stability of the magnetic configurations dominated by the toroidal component using a local dispersion relation derived by Ogilvie (2007) and results of full 3D numerical simulations performed in a simplified case (Jouve et al. 2015). We argued that these magnetic configurations are likely to be subject to a magneto-rotational instability or to the Taylor instability, the nature of the instability depending solely on the ratio of the rotation rate to the toroidal Alfvén frequency $\Omega/\omega_{A\varphi}$.

Such non-axisymmetric instabilities are expected to modify the large-scale axisymmetric configuration when the surface poloidal field is weaker than a threshold value B_{crit} . In the context of the Aurière scenario to explain the dichotomy of intermediate-mass star magnetism, our estimate of B_{crit} is compatible with the lower bound of Ap/Bp magnetic fields, although a precise quantitative comparison remains difficult at this stage.

We neglected meridional flows in our simulations. The effect of a prescribed circulation has been considered by Mestel et al. (1988) and Moss et al. (1990). They found that it is negligible as long as the circulation velocity is very low compared to the Alfvén speed, which is the case for typical Eddington-Sweet-type circulations. Another hypothesis in this work is that of axisymmetry, when it is known from observations that Ap/Bp stars are generally oblique rotators. Non-axisymmetric components of the initial poloidal field could have an influence on the stability of the magnetic field. Moss et al. (1990), Moss (1992), and Wei & Goodman (2015) have shown that if $B_0/R\Omega_0\sqrt{4\pi\rho_0} \ll 1$ the magnetic field is symmetrized before the differential rotation decays. In such extreme cases, the magnetic configurations are predicted to be unstable by (30). In the opposite regime, $B_0/R\Omega_0\sqrt{4\pi\rho_0} \gg 1$, the strong magnetic field quickly suppresses the differential rotation and the magnetic field remains inclined with respect to the rotation axis. These situations are similar to axisymmetric cases in which magnetic configurations are also predicted to be stable. In intermediate cases, we do not know the effect of the non-axisymmetric components of the field on the stability conditions. This question needs to be addressed.

To proceed, we need 3D numerical simulations that include the effects of the stable stratification as well as the mechanism that forces the differential rotation. The pre-main-sequence contraction phase can in principle generate the required differential rotation (Lignières et al. 2014). While realistic diffusivities and density contrasts are beyond what can be reached by 3D simulations, we expect that the dependency of B_{crit} with the rotation rate will not strongly depend on these parameters. The relation between B_{crit} and the surface rotation will then be compared to observational constraints on the lower bound of Ap/Bp magnetic fields. Another application of such simulations is to consider the role of non-axisymmetric instabilities on the efficiency of the angular momentum transport in stellar radiative zones.

Acknowledgements. The authors acknowledge financial support from the Programme National de Physique Stellaire (PNPS) of CNRS/INSU and from the Agence Nationale pour la Recherche (ANR) through the IMAGINE project. T.G. is supported by the Special Priority Program 1488 PlanetMag of the German Science Foundation. The authors wish to thank Sébastien Deheuvels for providing us with a density profile from a stellar evolutionary model.

References

- Aurière, M., Wade, G.-A., Silvester, J., Lignières, F., et al. 2007, *A&A*, 475, 1053
- Balbus, S.-A., & Hawley, J.-F. 1991, *ApJ*, 376, 214
- Braithwaite, J. 2007, *A&A*, 469, 275
- Braithwaite, J. 2009, *MNRAS*, 397, 763
- Braithwaite, J., & Nordlund, Å. 2006, *A&A*, 450, 1077
- Cantiello, M., Mankovich, C., Bildsten, L., et al. 2014, *ApJ*, 788, 93
- Charbonneau, P., & MacGregor, K.-B. 1992, *ApJ*, 387, 639
- Charbonneau, P., & MacGregor, K.-B. 1993, *ApJ*, 417, 762
- Deheuvels, S., Dogan, G., Goupil, M., et al. 2014, *A&A*, 564, A27
- Dormy, E., Cardin, P., & Jault, D. 1998, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 160, 15
- Ferraro, V.-C.-A. 1937, *MNRAS*, 97, 458
- Flowers, E., & Ruderman, M.-A. 1977, *ApJ*, 215, 302
- Heyvaerts, J., & Priest, E.-R. 1983, *A&A*, 117, 220
- Ionson, J.-A. 1978, *ApJ*, 226, 650
- Jouve, L., Brun, A.-S., Arlt, R., Brandenburg, A., et al. 2008, *A&A*, 483, 949
- Jouve, L., Gastine, T., & Lignières, F. 2015, *A&A*, 575, A106
- Lignières, F., Petit, P., Aurière, M., Wade, G.-A., & Böhm, T. 2014, *IAU Symp.*, 302, 338
- Linton, M.-G., Longcope, D.-W., & Fisher, G.-H. 1996, *ApJ*, 469, 954
- Markey, P., & Tayler, R.-J. 1973, *MNRAS*, 163, 77
- Masada, Y., Sano, T., & Takabe, H. 2006, *ApJ*, 641, 447
- Mestel, L., & Weiss, N.-O. 1987, *MNRAS*, 226, 123
- Mestel, L., Tayler, R. J., & Moss, D. L. 1988, *MNRAS*, 231, 873
- Moss, D. 1992, *MNRAS*, 257, 593
- Moss, D. L., Mestel, L., & Tayler, R. J. 1990, *MNRAS*, 245, 550
- Ogilvie, G. 2007, *The Solar Tachocline*, eds. D. W. Hughes, R. Rosner, & N. O. Weiss (Cambridge, UK: Cambridge University Press), 299
- Parker, E.-N. 1991, *ApJ*, 376, 355
- Pitts, E., & Tayler, R.-J. 1985, *MNRAS*, 216, 139
- Rieutord, M., Dintrans, B., Lignières, F., Corbard, T., & Pichon, B. 2005, in *SF2A-2005: Semaine de l'Astrophysique Française*, eds. F. Casoli, T. Contini, J. M. Hameury, & L. Paganì, 759
- Rüdiger, G., & Kitchatinov, L.-L. 1996, *ApJ*, 466, 1078
- Rüdiger, G., Gellert, M., Spada, F., & Tereshin, I. 2015, *A&A*, 573, A80
- Schaeffer, N., Jault, D., Cardin, P., & Drouard, M. 2012, *Geophys. J. Int.*, 191, 508
- Spada, F., Lanzafame, A.-C., & Lanza, A.-F. 2010, *MNRAS*, 404, 641
- Spruit, H.-C. 1999, *A&A*, 349, 189
- Spruit, H.-C. 2002, *A&A*, 381
- Tayler, R.-J. 1973, *MNRAS*, 161, 365
- Wei, X., & Goodman, J. 2015, *ApJ*, 806, 50