



HAL
open science

Prédiction des mécanismes vibroacoustiques des plaques orthotropes raidies de formes quelconques Application à la table d'harmonie de piano.

Benjamin Trévisan

► To cite this version:

Benjamin Trévisan. Prédiction des mécanismes vibroacoustiques des plaques orthotropes raidies de formes quelconques Application à la table d'harmonie de piano.. Acoustique [physics.class-ph]. Université de Lyon; INSA de Lyon (France), 2016. Français. NNT : 2016LYSEI146 . tel-01451727v1

HAL Id: tel-01451727

<https://theses.hal.science/tel-01451727v1>

Submitted on 7 Feb 2017 (v1), last revised 30 Nov 2018 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT : xxx

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

opérée au sein de

Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

Ecole Doctorale N° EDA162

MEGA de Lyon

(Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique)

Spécialité de doctorat : Acoustique

Soutenance prévue publiquement le 07/12/2016, par :

Benjamin TRÉVISAN

**Prédiction des mécanismes vibroacoustiques des plaques
orthotropes raidies de formes quelconques**

Application à la table d'harmonie de piano

Devant le jury composé de :

Gautier, François	Professeur des Universités	Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine, Université du Maine	Rapporteur
Mattei, Pierre-Olivier	Chargé de Recherche CNRS / HDR	Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique	Rapporteur
Boutillon, Xavier	Directeur de Recherche CNRS	Laboratoire de Mécanique des Solides, École Polytechnique	Examineur
Dumontet, Hélène	Professeur des Universités	Institut Jean Le Rond d'Alembert, Université Pierre et Marie Curie	Examinatrice
Paulello, Stephen	Facteur de pianos	SPCP Pianos Technologies	Invité
Ege, Kerem	Maître de Conférence	Laboratoire Vibrations Acoustique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon	Co-Directeur de thèse
Laulagnet, Bernard	Maître de Conférence / HDR	Laboratoire Vibrations Acoustique, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon	Co-Directeur de thèse

LISTE DES ECOLES DOCTORALES

Département FEDORA – INSA Lyon - Ecoles Doctorales – Quinquennal 2016-2020

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	CHIMIE DE LYON http://www.edchimie-lyon.fr Sec : Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e etage secretariat@edchimie-lyon.fr Insa : R. GOURDON	M. Stéphane DANIELE Institut de Recherches sur la Catalyse et l'Environnement de Lyon IRCELYON-UMR 5256 Équipe CDFA 2 avenue Albert Einstein 69626 Villeurbanne cedex directeur@edchimie-lyon.fr
E.E.A.	ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE http://edeea.ec-lyon.fr Sec : M.C. HAVGOUDOUKIAN Ecole-Doctorale.eea@ec-lyon.fr	M. Gérard SCORLETTI Ecole Centrale de Lyon 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04.72.18 60.97 Fax : 04 78 43 37 17 Gerard.scorletti@ec-lyon.fr
E2M2	EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION http://e2m2.universite-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Bat Darwin - UCB Lyon 1 04.72.43.28.91 Insa : H. CHARLES Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr	Mme Gudrun BORNETTE CNRS UMR 5023 LEHNA Université Claude Bernard Lyon 1 Bât Forel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cédex Tél : 06.07.53.89.13 e2m2@univ-lyon1.fr
EDISS	INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE http://www.ediss-lyon.fr Sec : Safia AIT CHALAL Hôpital Louis Pradel - Bron 04 72 68 49 09 Insa : M. LAGARDE Safia.ait-chalal@univ-lyon1.fr	Mme Emmanuelle CANET-SOULAS INSERM U1060, CarMeN lab, Univ. Lyon 1 Bâtiment IMBL 11 avenue Jean Capelle INSA de Lyon 69621 Villeurbanne Tél : 04.72.68.49.09 Fax :04 72 68 49 16 Emmanuelle.canet@univ-lyon1.fr
INFOMATHS	INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES http://infomaths.univ-lyon1.fr Sec :Renée EL MELHEM Bat Blaise Pascal 3 ^e etage infomaths@univ-lyon1.fr	Mme Sylvie CALABRETTO LIRIS – INSA de Lyon Bat Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72. 43. 80. 46 Fax 04 72 43 16 87 Sylvie.calabretto@insa-lyon.fr
Matériaux	MATERIAUX DE LYON http://ed34.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry Ed.materiaux@insa-lyon.fr	M. Jean-Yves BUFFIERE INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Saint Exupéry 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.43 71.70 Fax 04 72 43 85 28 Ed.materiaux@insa-lyon.fr
MEGA	MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE http://mega.universite-lyon.fr Sec : M. LABOUNE PM : 71.70 –Fax : 87.12 Bat. Saint Exupéry mega@insa-lyon.fr	M. Philippe BOISSE INSA de Lyon Laboratoire LAMCOS Bâtiment Jacquard 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72 .43.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 Philippe.boisse@insa-lyon.fr
ScSo	ScSo* http://recherche.univ-lyon2.fr/scso/ Sec : Viviane POLSINELLI Brigitte DUBOIS Insa : J.Y. TOUSSAINT viviane.polsinelli@univ-lyon2.fr	Mme Isabelle VON BUELTZINGLOEWEN Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.77.23.86 Fax : 04.37.28.04.48

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

RESUME

L'étude des structures raidies est un sujet de recherche récurrent. En effet, celles-ci sont présentes dans de nombreuses applications industrielles. Leur utilisation offre de multiples avantages notamment du point de vue de l'allègement, critère qui est particulièrement important dans l'industrie automobile par exemple. Le milieu musical est également adepte de ce type de structures complexes et les instruments de musique font appel à des aspects très variés aussi bien structurels que perceptifs et subjectifs.

Dans ce domaine, l'une des principales difficultés est de mettre en place une passerelle entre les lexiques musicaux et scientifiques et surtout de créer des équivalences entre les phénomènes entendus / décrits par les musiciens et les indicateurs habituellement utilisés dans les contextes industriels. La table d'harmonie de piano constitue un exemple typique de ces structures raidies et les problèmes relevés aussi bien par les facteurs que par les musiciens sont nombreux. De nos jours, les ressources numériques permettent de prendre en compte de nombreux phénomènes dans les modèles développés avec, pour conséquence, une difficulté d'interprétation entre les données d'entrée et de sortie. En considérant moins de paramètres à la fois, les modèles simplifiés présentent alors l'avantage de pouvoir en séparer l'influence et la participation dans le rendu global.

En prenant comme point de départ une plaque simplement supportée rectangulaire orthotrope dite « spéciale » dans laquelle la table est inscrite, la forme de la table d'harmonie est recrée par ajout d'une densité de ressorts ponctuels dans le domaine complémentaire. Par couplage avec des superstructures collées sur chaque face, il est possible de déterminer le comportement vibratoire de l'instrument ainsi que le rayonnement acoustique à partir des impédances de rayonnement d'une plaque simplement supportée bafflée. Ce modèle analytique simplifié est représentatif des phénomènes constatés dans la littérature tout en étant particulièrement bien adapté aux études paramétriques (continuité du chevalet et des raidisseurs dans l'extrême aigu). Ainsi, il met en lumière les phénomènes de localisations spatiales de vibrations inhérents à la conception de l'instrument, et permet aussi d'étudier l'influence des différents paramètres structurels et mécaniques sur la mobilité le long des chevalets ou encore la puissance rayonnée.

Afin de pouvoir qualifier pour un coût calcul réduit l'influence des paramètres structurels sur le son rayonné par l'instrument, ce modèle analytique de structure raidie est couplé à une corde et résolu dans le domaine temporel. Un tel calcul présente alors l'avantage de pouvoir évaluer perceptivement l'impact de ces paramètres, comme l'amortissement des matériaux ou encore les longueurs mortes des cordes, et de mettre en évidence les conséquences du couplage sur le contenu spectral des notes jouées. L'originalité de cette approche typique des problèmes de contacts ou de frottements tient dans le fait que les forces d'interactions qui assurent la continuité entre les sous-systèmes deviennent des inconnues du problème. Enfin, la prise en compte des petites non-linéarités géométriques de la corde est faite en les considérant comme des seconds membres des équations du mouvement, ce qui permet de conserver la notion de modes linéaires.

TABLE DES MATIERES

LISTE DES ECOLES DOCTORALES	I
RESUME	III
TABLE DES MATIERES	V
INTRODUCTION GENERALE	1
CHAPITRE I LA TABLE D'HARMONIE DE PIANO : UNE STRUCTURE RAIDIE ORTHOTROPE AUX CARACTERISTIQUES SPECIFIQUES	7
I.A. CONCEPTION GENERALE DU PIANO	8
I.A.1. LA TABLE D'HARMONIE	9
I.A.2. LE PLAN DE CORDES	15
I.A.3. LE BOIS, UN MATERIAU DE CONSTRUCTION COURANT	16
I.A.4. CADRE, MARTEAU, MEUBLE ET DE NOMBREUSES AUTRES PIECES	21
I.B. ÉTUDES MENEES SUR LA TABLE D'HARMONIE	23
I.B.1. CONNAISSANCES RELATIVES A LA TABLE D'HARMONIE	24
I.B.2. DIFFERENTS MODELES DE TABLE D'HARMONIE : DUALITE ENTRE LES METHODES DETERMINISTES ET STATISTIQUES	27
I.B.3. REPONSE TEMPORELLE ET SYNTHESE SONORE	32
CHAPITRE II MODELE VIBRATOIRE D'UNE PLAQUE ORTHOTROPE DE CONTOURS QUELCONQUES ..	37
II.A. PRINCIPE GENERAL	38
II.B. APPROCHE VARIATIONELLE DU PROBLEME	39
II.B.1. PLAQUE ETENDUE : SIMPLEMENT SOUTREE RECTANGULAIRE AVEC ORTHOTROPIE SPECIALE	40
II.B.2. DENSITE DE RESSORTS PONCTUELS	41
II.C. VERS UN MODELE GENERALISE	42
II.C.1. DECOMPOSITION MODALE : CHANGEMENT DE VARIABLES	43
II.C.2. MINIMISATION DE L'ACTION : EXPRESSION MATRICIELLE DU PROBLEME	44
II.D. REPONSE LIBRE ET FORCEE	45
II.D.1. PROBLEME AUX VALEURS PROPRES	45
II.D.2. CONVERGENCE DE LA BASE : INFLUENCE DE LA TRONCATURE MODALE	47
II.D.3. REPONSE A UNE EXCITATION PONCTUELLE HARMONIQUE	49
II.D.4. CHARGE ACOUSTIQUE PARIETALE	50
II.D.5. MECANISMES D'AMORTISSEMENT	51
II.E. CALIBRATION DE LA DENSITE DE RESSORTS	55
II.F. COMPARAISON AVEC UN MODELE ELEMENTS FINIS	60
CHAPITRE III MODELISATION VIBROACOUSTIQUE D'UNE STRUCTURE ORTHOTROPE RAIDIE DANS DEUX DIRECTIONS, ET DE CONTOURS QUELCONQUES	63
III.A. VERS UNE STRUCTURE ORTHOTROPE RAIDIE DANS DEUX DIRECTIONS	64
III.B. EXTENSION DU MOUVEMENT DE LA PLAQUE AUX SUPERSTRUCTURES	67
III.B.1. HYPOTHESES CINEMATIQUES ET CHAMP DE DEPLACEMENTS	69
III.B.2. MILIEU MINCE ET CHAMP DE CONTRAINTES	71

III.B.3. ÉNERGIE CINÉTIQUE D'UN RENFORT ORIENTÉ SELON y	72
III.B.4. ÉNERGIE DE DÉFORMATION D'UN RENFORT ORIENTÉ SELON y	73
III.B.5. HAMILTONIEN D'UN RENFORT ORIENTÉ SELON y	75
III.B.6. HAMILTONIEN D'UN RENFORT ORIENTÉ SELON x	75
III.C. EXTENSION DU MODÈLE AU CAS DES STRUCTURES RAIDIES.....	76
III.C.1. SUPERSTRUCTURE ORIENTÉE SELON y	76
III.C.2. SUPERSTRUCTURE ORIENTÉE SELON x	78
III.C.3. MODÈLE VIBRATOIRE D'UNE STRUCTURE ORTHOTROPE RAIDIE DE FORME QUELCONQUE.....	80
III.E. APPLICATION À LA TABLE D'HARMONIE DE PIANO : PLEYEL P131	86
III.E.1. MODES DE STRUCTURES	87
III.E.2. CARTOGRAPHIES DU COMPORTEMENT VIBROACOUSTIQUE D'UNE TABLE D'HARMONIE DE PLEYEL P131.....	94
III.E.3. VERS UN INDICATEUR PLUS MUSICAL.....	98
III.F. SENSIBILITÉ À DES CHANGEMENTS DANS LA CONCEPTION DES TABLES D'HARMONIE.....	105
III.F.1. CHEVALET DES MEDIUM-AIGUS CONTINU	106
III.F.2. SUPPRESSION DE RAIDISSEURS DANS L'EXTREME AIGU	109
III.G. LIMITES DU MODÈLE : VALIDATIONS NUMÉRIQUES ET EXPÉRIMENTALES	112
CHAPITRE IV INTERACTION CORDES / TABLE D'HARMONIE : RÉSOLUTION DU PROBLÈME COUPLE	
DANS LE DOMAINE TEMPOREL.....	121
IV.A. INTERACTION DES CORDES AVEC LA TABLE D'HARMONIE : CONSIDÉRATIONS ET SIMPLIFICATIONS GÉOMÉTRIQUES	122
IV.B. RÉSOLUTION DU PROBLÈME COUPLE.....	123
IV.B.1. ONDES TRANSVERSALES ET LONGITUDINALES DE LA CORDE.....	124
IV.B.2. TABLE D'HARMONIE DANS LE DOMAINE TEMPOREL.....	126
IV.B.3. SYSTÈME D'ÉQUATIONS COUPLÉES CORDES / TABLE	128
IV.B.4. SCHEMA AUX DIFFÉRENCES FINIES CENTRÉES.....	129
IV.B.5. RAYONNEMENT ACOUSTIQUE	131
IV.C. APPLICATION À UNE TABLE D'HARMONIE SIMPLIFIÉE.....	133
IV.C.1. PLAN DE CORDES ET EFFORT EXCITATEUR	134
IV.C.2. COMPOSITION DU SPECTRE D'ÉCOUTE.....	136
IV.C.3. SENSIBILITÉ À L'AMORTISSEMENT DE LA TABLE D'HARMONIE	139
IV.C.4. DISPARITIONS DE PARTIELS PAR COUPLAGE ET INFLUENCE DES LONGUEURS MORTES	145
IV.D. PRISE EN COMPTE DES NON-LINÉARITÉS	148
IV.D.1. EFFORTS EXCITATEURS GÉNÉRÉS PAR COUPLAGE DES ONDES.....	148
IV.D.2. ENRICHISSEMENTS DES AIGUS	155
CONCLUSION GÉNÉRALE.....	161
ANNEXE A FONCTIONNELLE DE HAMILTON D'UNE PLAQUE ORTHOTROPE RECTANGULAIRE.....	I
ANNEXE B BASE D'UNE PLAQUE SIMPLEMENT SOUTENUE RECTANGULAIRE	VII
ANNEXE C LAGRANGIENS EN VARIABLES MODALES	XVII
ANNEXE D MINIMISATION DES FONCTIONNELLES D'ACTION EN VARIABLES MODALES	XXV
ANNEXE E DÉFORMÉES MODALES D'UNE PLAQUE SIMPLEMENT SOUTENUE DANS L'ESPACE DES	
NOMBRES D'ONDES.....	XXXV

ANNEXE F	IMPEDANCES DE RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE PLAQUE BAFFLEE.....	XXXIX
ANNEXE G	SCHEMA AUX DIFFERENCES FINIES CENTREES ET FORMULATION INTEGRALE TEMPORELLE	XLVII
ANNEXE H	FORMALISME TEMPOREL DISCRET.....	LI
BIBLIOGRAPHIE		LIX

INTRODUCTION GENERALE

La maîtrise du comportement vibratoire et du rayonnement acoustique des structures représente actuellement un enjeu majeur dans tous les secteurs d'activité. L'exigence croissante des différents acteurs économique-industriels et des utilisateurs de produits finis justifie l'intérêt de la communauté scientifique sur le sujet, tout particulièrement à propos des structures raidies qui représentent un véritable challenge. Historiquement, leur conception répond à des critères de dimensionnements statiques puisque de par la présence de nombreux renforts, de telles structures présentent l'avantage d'allier légèreté et robustesse. Ainsi, elles sont très présentes dans de nombreux domaines industriels mais aussi dans l'artisanat. Citons parmi eux l'industrie automobile, aéronautique et navale ou encore le bâtiment et la facture instrumentale.

En contrepartie leur conception rend leur comportement vibroacoustique délicat et difficile à anticiper lors des premières phases de conception contrairement à des structures plus simples telles que les poutres ou les plaques qui sont aujourd'hui bien décrites. Sans en dresser une liste exhaustive, citons les travaux de Mindlin [Mind51] quant à l'influence de l'inertie de rotation et du cisaillement dans le comportement vibratoire des plaques, qui ont par ailleurs conduit à la théorie des plaques épaisses de Reisler-Mindlin ; les ouvrages des références de Leissa [Leis69], Soedel [Soed04] et de Guyader [Guya06] qui ne se limitent pas qu'aux vibrations de structures simples ; ainsi que les travaux traitant de leur rayonnement acoustique comme ceux de Laulagnet [Laul98a] ou Putra & Thompson [PuTh10a] pour le rayonnement acoustique des plaques bafflées ou non-bafflées ainsi que les ouvrages et travaux de référence traitant des interactions fluide/structure tels que ceux de Wallace [Wall72, Wall87], Lesueur [Lesu88] ou encore Wang [Wang15].

Dans l'optique de répondre aux besoins industriels et donc de comprendre le comportement de structures de plus en plus complexes, de nombreuses études ont vu le jour au cours des dernières décennies. La plupart d'entre elles concernent les poutres ou plaques planes raidies de façon périodique, soit par des appuis linéiques tel que dans les travaux de Mead [MeMa76, MePa79] et Mace [Mace80a, Mace80b], soit par des renforts physiques. Dans ce dernier cas, on distingue tout d'abord les études à propos des structures finies raidies dans une et deux directions perpendiculaires pour lesquelles on cite les travaux de Vaicaitis [VaSl80], Maidanik [Maid62] et plus récemment Mejdj [MeAt10a] ou Legault [LeMA11]. Il en va de même à propos des structures infinies pour lesquelles on peut citer les travaux de Mace [Mace80c] prenant en compte des renforts bidirectionnels, et ceux de Xin [Xin15] pour des renforts monodirectionnels. En complément, Lin & Garrelick [LiGa77] propose une comparaison des transparences acoustiques d'une plaque infinie raidie dans une seule direction et de la même plaque reliée à une seconde par l'intermédiaire des renforts ce qui constitue une des premières investigations sur les matériaux type nid d'abeille.

En parallèle, les recherches entre autres menées sur les panneaux courbés ou les coques par Koval [Kova79], Chang [ChVa82], Stepanishen [Step82] ainsi que Blaise & al [BLGB91] ont permis

par extension et combinaison des connaissances d'aboutir à l'étude des cylindres raidis. On distingue le cas des cylindres raidis radialement [Burr84, GuLa90, HoPW85a, HoPW85b, MeBa87], axialement [BeOa81, MeBa86] ou les deux à la fois [Kova80a] ouvrant de ce fait la voie à des domaines d'application plus larges, comme les coques de sous-marins ou les fuselages d'avion.

De nos jours, la démocratisation des matériaux composites offre par ailleurs de nouvelles possibilités d'amélioration qui s'accordent très bien avec les exigences des industries du transport relatives à l'allègement des véhicules. On observe par conséquent un regain d'intérêt marqué pour ces structures. Ainsi, en plus des aspects géométriques, de nouveaux axes de recherche se développent et les études actuelles prennent dorénavant en considération les caractéristiques intrinsèques aux matériaux. Citons par exemple, l'interaction entre les différentes couches de matériaux en composites laminés dans le cas des coques cylindriques étudiées à de nombreuses reprises par Blaise & Lesueur [BILe92, BILe94a, BILe94b] et Koval [Kova80b], et dans le cas des panneaux raidis étudiés par Mejdj [MeAt12, MeLA12]. Les matériaux sandwich type nid d'abeille, par leur légèreté, font également partie des axes de recherche prometteurs comme en témoigne l'intérêt récent de Legault [LeAt10], Xin [XiLu10a, XiLu10b, XiLu11a, XiLu11b] et plus avant-gardiste de Lin & Garrelick [LiGa77], que nous avons évoqué précédemment.

Bien entendu, les ressources informatiques actuelles, aussi bien en terme de « soft » que de « hard ware », offrent à la fois la possibilité de décrire des géométries variées ainsi que d'inclure les spécificités liées aux matériaux tout en bénéficiant de résultats précis. Cependant, ces méthodes de calculs numériques restent lourdes et les temps de calculs longs pour les structures les plus complexes. Elles ne rentrent ainsi pas dans une démarche de compréhension des phénomènes et sont plutôt adaptées à l'évaluation des performances à posteriori i.e après une première phase de conception. Il manque alors encore et toujours des règles qui permettent de dicter les bonnes pratiques à adopter aussi bien pour en anticiper les performances dès les premières ébauches de conception ou lors des phases d'optimisation. Leur modélisation via des méthodes moins coûteuses représente donc un enjeu majeur et un sujet de recherche d'envergure pour les années à venir. Ainsi, l'établissement de ces règles passe entre autres par des campagnes d'études paramétriques nécessaires pour révéler des tendances comportementales transférables d'un domaine à l'autre.

Le modèle proposé dans ce manuscrit s'inscrit dans cette démarche de compréhension des phénomènes et d'établissement des règles de conception utilisables dans l'industrie ou l'artisanat. Pour cela, les approches analytiques sont particulièrement bien adaptées aux études paramétriques au regard de leurs faibles coûts numériques. On s'accordera le « droit » à un biais global en termes de résultats, biais qui ne dénature pas les tendances décrites et les conclusions qui en résulteront. On s'intéresse tout particulièrement à des structures composées d'une plaque non-rectangulaire dont le matériau est orthotrope (modules de Young différents dans les directions des axes d'orthotropie). Les axes principaux d'orthotropie ne sont pas considérés parallèles aux bords de la plaque afin de rester le plus généraliste possible. Dans le cas contraire, on parlera d'orthotropie spéciale. De plus, on considère un système de renforts raidissant la plaque de part et d'autre de cette dernière par

collage. Ces renforts, que l'on qualifiera parfois de superstructures, sont orientés dans les directions des axes principaux d'orthotropie, par conséquent dans deux directions perpendiculaires.

La table d'harmonie de piano représente un exemple typique de ces structures raidies non-rectangulaires. La facture instrumentale est en effet un champ d'application particulièrement intéressant étant donné les contraintes liées à la conception de l'instrument et leurs conséquences perceptives sur le son produit. Dans le cas du piano, de nombreux paramètres entrent en ligne de compte allant des bois utilisés, fortement étudiés par Bremaut [Brém06, Brém08, Brém12, BrPo13], jusqu'à la conception même de l'instrument qui détermine son comportement vibroacoustique. Parmi ces aspects mécaniques, citons la conception propre de la table d'harmonie dont les auteurs historiques sont Suzuki [SuNa90, Suzu86], Moore [MoZi06], Conklin [Conk00, Conk96a, Conk96b, Conk96c], Kindel [KiWa87], Giordano [Gior97, Gior98] et plus récemment Berthaut [BeIJ03a], Ege & Boutillon [BoEg13, EgBR13], Chabassier [ChCJ13], Chaigne & al [ChCV13], les cordes [Wein77, Conk96b, EtCM15], le marteau [Bout87, ChAs94, Conk96a] mais surtout les interactions entre ces différents sous-systèmes.

Il s'agit alors d'un champ d'investigation très complet qui n'a rien à envier aux applications industrielles et la démarche présentée tout au long de ce manuscrit pourrait parfaitement faire l'objet d'applications dans d'autres domaines. Les problématiques sont cependant très différentes et font intervenir des notions subjectives et perceptives quant à la qualité son produit. La table d'harmonie est une pièce maîtresse dans le fonctionnement de l'instrument. En effet, les cordes étant de sections trop faibles pour rayonner d'elles-mêmes, leur vibration est transmise à la table via le chevalet qui fait alors office de radiateur acoustique efficace. La table d'harmonie joue donc un rôle prépondérant, ce qui justifie les nombreuses études à son sujet. Ces études ont notamment pu mettre en évidence toute la complexité du comportement vibroacoustique de l'instrument qui résulte en partie de la conception même de la table d'harmonie : sa forme non-rectangulaire, sa courbure, l'utilisation systématique de bois, la présence de nombreux renforts ou encore la pression exercée par les cordes sont toutes des caractéristiques inhérentes à leur design. En effet, la conception des tables d'harmonie répond en grande partie à des critères empiriques relatifs aux charges statiques et dynamiques imposées à l'instrument. Les règles de dimensionnement habituellement utilisées par les facteurs ne permettent donc pas de prévoir l'intérêt d'une modification structurelle sur la qualité du son perçu et dans ce domaine où les moyens sont limités, les tentatives d'innovation s'annoncent coûteuses et risquées.

Les professionnels du domaine rapportent souvent un aspect insatisfaisant du timbre ainsi qu'une difficulté à obtenir un compromis entre la longueur de son et la puissance rayonnée dans les notes aigües. Encore faut-il interpréter en « langage scientifique » ces problématiques. De notre point de vue, l'identification des problématiques est une des principales difficultés existantes tant les lexiques et les termes utilisés peuvent avoir des significations différentes dans deux domaines d'activité distincts. La passerelle entre les deux langages scientifiques et musicaux nous semble nécessaire.

Du côté scientifique, il est regrettable de constater que la majorité des études menées se limitent aux seuls aspects fréquentiels de la table d'harmonie (modes propres, mobilité au chevalet par exemple) et ne peuvent donc pas représenter l'aspect perceptif du problème. Dans le but de répondre aux questions d'ordre purement musical, comme la recherche d'un bon compromis « longueur de son / puissance rayonnée », il semble pertinent d'introduire des notions de systèmes couplés et de comportement dans le domaine temporel. En couplant la table d'harmonie avec une corde et en résolvant ce problème en temps, il devient alors possible d'écouter le son produit et de juger la différence entre deux tables d'harmonie. La résolution de ce type de problème offre ainsi de nouvelles perspectives d'analyse et de nouveaux indicateurs peuvent alors être mis en place.

Cette thèse de doctorat s'inscrit dans le cadre de la prédiction et de la compréhension des phénomènes vibroacoustiques liés aux structures raidies orthotropes de formes quelconques. Dans cet objectif, le développement d'un modèle analytique est privilégié pour faciliter les campagnes d'études paramétriques.

Ce manuscrit se décompose en quatre parties distinctes. Le premier chapitre présente une revue du fonctionnement général du piano. Le rôle de la table d'harmonie y est expliqué de même que sa conception. Les autres pièces principales sont introduites de façon à comprendre le fonctionnement de l'instrument dans sa globalité et d'appréhender la suite du manuscrit avec une vision plus complète. La deuxième partie de ce chapitre reprend les résultats importants de ces dernières décennies sous forme d'un état de l'art tout d'abord sur les connaissances acquises à propos du comportement de la table d'harmonie, puis sur les modèles permettant de le décrire.

Les second et troisième chapitres sont complémentaires et généralistes dans leurs démarches, c'est à dire qu'il ne sera que peu mention de la table d'harmonie avant d'effectuer une application numérique du modèle. Ce choix vise à conserver une certaine distance par rapport au domaine musical et à ne pas laisser sous-entendre que ces travaux y soient limités. Pour une approche pédagogique, le chapitre deux se focalise sur la façon de recréer une plaque encastrée de forme quelconque et prenant en compte un matériau orthotrope à partir d'une plaque rectangulaire d'orthotropie dite spéciale. Pour cela, le modèle développé est basé sur une approche variationnelle puisant son inspiration dans les travaux de Laulagnet & Guyader [GuLa90, GuLa94]. La fin du chapitre montre, via une comparaison avec un modèle éléments finis, que la méthode développée est pertinente.

Le troisième chapitre est une extension du second chapitre au cas des structures raidies et inclut la présence de renforts orientés dans deux directions perpendiculaires. En sus, le rayonnement acoustique de la structure est introduit et formulé de façon à proposer une alternative aux méthodes purement numériques telles que les éléments finis de frontière par exemple. A l'instar de l'approche suivie pour recréer les vibrations de la structure, le rayonnement d'une structure non-rectangulaire raidie est calculé à partir des impédances de rayonnement acoustique d'une plaque rectangulaire non-raïdie bafflée ce qui constitue une véritable originalité puisque ce principe est pour l'instant

limité au cas des structures rectangulaires [GuLa90, GuLa94]. Au final, le modèle proposé permet de modéliser le comportement vibroacoustique aussi bien de structures industrielles que d'instruments de musique. Le modèle est appliqué à la table d'harmonie à la fin du troisième chapitre dont le comportement est étudié sur la bande de fréquences $[0 ; 3000]$ Hz. Différentes familles de modes propres seront mises en évidence et on s'intéressera tout particulièrement à la puissance rayonnée ainsi qu'à la mobilité le long du chevalet. Pour finir, l'influence de quelques modifications structurelles sera mise en évidence et les comparaisons avec un cas de référence montreront que le design issu de l'empirisme traditionnel de la facture instrumentale a permis aux facteurs d'aboutir à une solution relativement optimale.

Contrairement aux deux chapitres précédents, le chapitre quatre est intégralement dédié à une application piano. Dans le but de répondre aux problématiques purement musicales, le modèle de table d'harmonie est couplé à un modèle de cordes (linéaire ou non) et résolu en temps. L'originalité d'un tel calcul tient dans le fait que des forces d'interactions au chevalet deviennent des inconnues du problème qui, comme dans les problèmes de contacts [Laul09] ou de frottements, assurent la continuité des déplacements de la corde et du chevalet à chaque pas de temps. L'influence de paramètres structurels peut de ce fait être entendue sur le son produit et jugé de manière perceptive. Grâce à cela, on montrera notamment l'influence de l'amortissement du matériau dont la table d'harmonie est faite, de la longueur morte des cordes ou encore l'enrichissement des aigus résultant du comportement non-linéaire des cordes de piano.

CHAPITRE I

LA TABLE D'HARMONIE DE PIANO : UNE STRUCTURE RAIDIE ORTHOTROPE AUX CARACTERISTIQUES SPECIFIQUES

SOMMAIRE

I.A. CONCEPTION GENERALE DU PIANO	8
I.A.1. LA TABLE D'HARMONIE	9
I.A.2. LE PLAN DE CORDES	15
I.A.3. LE BOIS, UN MATERIAU DE CONSTRUCTION COURANT.....	16
I.A.4. CADRE, MARTEAU, MEUBLE ET DE NOMBREUSES AUTRES PIECES	21
I.B. ÉTUDES MENEES SUR LA TABLE D'HARMONIE	23
I.B.1. CONNAISSANCES RELATIVES A LA TABLE D'HARMONIE.....	24
I.B.2. DIFFERENTS MODELES DE TABLE D'HARMONIE : DUALITE ENTRE LES METHODES DETERMINISTES ET STATISTIQUES.....	27
I.B.3. REPONSE TEMPORELLE ET SYNTHESE SONORE.....	32

Ce manuscrit porte essentiellement sur l'étude de la table d'harmonie de piano. Cependant, cet instrument est composé d'une multitude d'autres pièces qui façonnent, à leur manière, le timbre typique de l'instrument et rendent la prévision de son comportement vibratoire si difficile. Parmi ces pièces, citons le meuble, le cadre, le plan de cordes ou encore la mécanique propre du marteau. Dans les chapitres suivants, ces éléments nous conduisent à nous intéresser au comportement vibroacoustique de la table en elle-même (CHAPITRE III) mais aussi à étendre notre champ d'investigation au couplage des cordes avec la table. L'influence de cette interaction sur le son produit par l'instrument fera l'objet du CHAPITRE IV.

Avant toute chose, il est impératif de s'attarder dans un premier temps sur la conception générale du piano pour appréhender au mieux la suite de cet ouvrage. Dans un second temps, un résumé des études publiées par le passé sera dressé en tant que synthèse bibliographique.

I.A. Conception générale du piano

Historiquement et avant son invention au cours du XVIII^{ème} siècle, il était quasiment impossible aux musiciens de nuancer leurs jeux sur les instruments à clavier de l'époque : le piano vit donc le jour, pour répondre à cette nécessité. Celui-ci est décrit comme un clavecin permettant de nuancer l'intensité du son produit par la frappe des touches et donc de jouer à la fois « piano » et « forte », d'où son nom originel de « piano-forte ». A la différence du clavecin, les cordes deviennent par ailleurs frappées. Au cours du temps, l'instrument a subi de nombreuses évolutions jusqu'à tendre il y a environ 150 ans vers une forme standard dont les codes de conception restent encore en vigueur aujourd'hui. De nos jours, le terme « piano-forte » est réservé aux instruments anciens et on lui préfère l'appellation abrégée de « piano » pour désigner la version moderne de l'instrument, hormis en Italie où cette dénomination subsiste.

Il convient de distinguer deux grandes familles, dont la forme et l'utilisation sont spécifiques : les pianos droits, plutôt destinés à l'étude (voir Figure I-1-a), et les pianos à queue, plutôt destinés aux salles de concert (voir Figure I-1-b). Dans les deux cas, il s'agit d'un instrument complexe composé de multiples pièces très différentes les unes des autres, que ce soit en terme de design ou de matériau et dont la conception est empirique. La Figure I-2 propose une vue éclatée d'un piano à queue où les pièces principales sont annotées. Nous nous efforcerons dans la suite de cette section à décrire et expliquer le rôle de ces pièces principales.

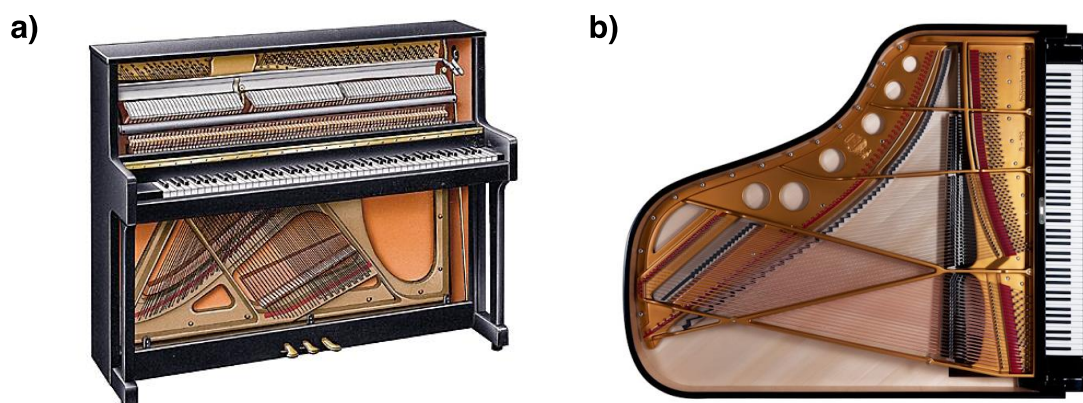


Figure I-1 : Exemple de différents types de piano. a) Piano droit, illustration de G. Macé, Larousse ; b) Piano à queue Steingraeber & Sohne - B 192.

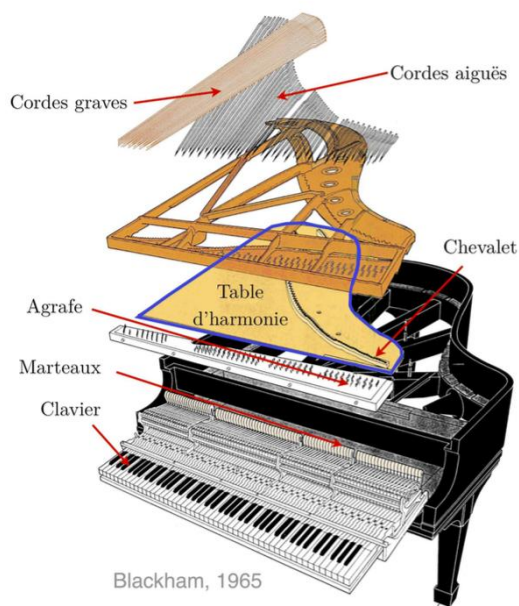


Figure I-2 : Vue éclatée d'un piano à queue d'après Blackham [Blac65].

I.A.1. La table d'harmonie

La table d'harmonie de piano joue un rôle essentiel dans le fonctionnement de l'instrument. Les cordes sont en effet de sections trop faibles pour pouvoir rayonner suffisamment d'elles-mêmes. Pour combler ce manque de rayonnement, il faut introduire un radiateur acoustique efficace à l'instrument. Un tel manque est facilement visible (devrait-on plutôt dire « entendu » au lieu de « visible »..) en comparant une guitare électrique et une guitare sèche (classique ou folk, peu importe) ; l'absence de caisse de résonance dans la conception de la guitare électrique ne permet pas de l'entendre (sauf si branchée à un ampli bien entendu) à l'inverse de la guitare sèche. Dans le cas du piano, il n'est nullement question de caisse de résonance à proprement parler ni d'amplificateurs à transistors ou lampes, quoique ce concept serait original... Le rôle de radiateur acoustique est imputé à la table d'harmonie qui réceptionne la vibration des cordes par l'intermédiaire d'un ou plusieurs chevalets.

Le design des tables d'harmonie est relativement complexe. Celles-ci sont systématiquement composées d'une plaque non-rectangulaire, en particulier dans le cas des pianos à queue, et faites de bois, un matériau orthotrope. Il s'agit classiquement d'épicéa. L'orientation des axes d'orthotropie est également une caractéristique inhérente à la conception des tables puisque les fibres du bois forment un angle par rapport aux bords de la plaque comme l'illustre la Figure I-3. Les travaux de Conklin [Conk96c] montrent que sur les pianos à queue, cet angle varie généralement entre 30 et 50°. En sus, un ou deux chevalets sont apposés sur une face de la table, destinés à supporter les cordes. Ces derniers sont

orientés dans une direction globalement parallèle aux fibres du bois comme visible sur la Figure I-3.

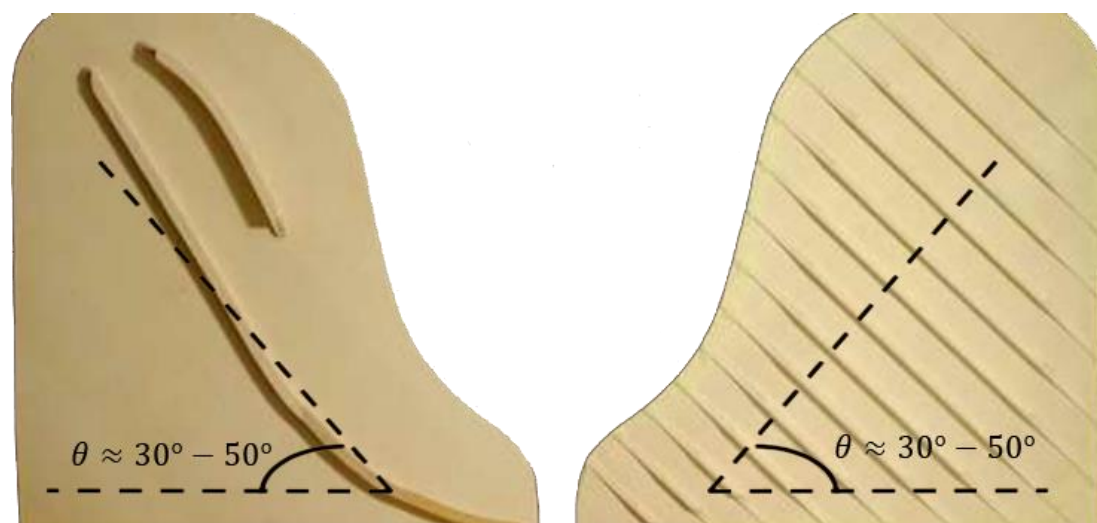


Figure I-3 : Table d'harmonie de piano à queue Fazioli vue sur chaque face. L'angle d'orthotropie est défini par rapport au petit côté et à la direction de la fibre du bois. Les chevalets sont sensiblement parallèles aux fibres tandis que les barres de renforts leurs sont perpendiculaires pour des raisons de contraintes statiques.

Ces quelques caractéristiques constituent des éléments indispensables pour concevoir le radiateur acoustique efficace ci-avant évoqué. Seulement, ceci n'est pas sans contraintes mécaniques sous-jacentes que nous allons succinctement développer. De façon à transmettre la vibration des cordes à la table, le plan de cordes est relié aux chevalets par un système de doubles pointes formant une chicane (voir Figure I-4). Par la conception de ce système de fixation, le plan de corde n'est pas horizontal et exerce donc un effort statique sur toute la table qui doit alors résister aux contraintes mécaniques.



Figure I-4 : Couplage des cordes avec la table d'harmonie par un système de doubles pointes formant une chicane.

Telle que décrite jusqu'ici, la table d'harmonie présente alors une faiblesse non-négligeable dans la direction perpendiculaire aux fibres du bois, si bien qu'elle romprait face à la pression exercée par les cordes. Pour pallier cette défaillance, des renforts, également appelés barres ou plus simplement raidisseurs, sont ajoutés dans la direction perpendiculaire aux fibres pour des raisons, à l'origine, purement statiques (voir Figure I-3). Ces derniers sont

appliqués sur la face arrière et ils viennent s'opposer à l'orthotropie de la plaque sur laquelle ils sont collés, voire même l'inverser. En omettant les chevalets, la direction des fibres pourrait ainsi devenir la plus faible [Ege09] ce qui constitue d'après Askenfelt [Aske06a] la direction optimale pour supporter la courbure de la table, que nous aborderons au paragraphe suivant. Même si la table d'harmonie devient alors suffisamment résistante face aux contraintes mécaniques en vigueur, un autre phénomène doit être abordé avant de continuer. Supposons la table d'harmonie plane, de toute évidence la charge statique appliquée par les cordes impose une flèche si bien que la table se creuse. Avec le vieillissement du bois, une telle architecture serait mal adaptée puisqu'il apparaîtrait des risques d'affaissement de la table sous son propre poids augmentés de la charge exercée par le plan de cordes. De plus, il y aurait risque de décollement des cordes au niveau du chevalet à cause de la conception du système de couplage au chevalet.

Pour compenser cette insuffisance structurelle, la plaque de bois destinée à la table d'harmonie est fabriquée courbée dans la direction inverse de la charge appliquée par les cordes. Ainsi en mettant sous tension les cordes, la table d'harmonie s'aplanit et revient à une position presque plane. Elle ne peut alors plus s'affaisser et le contact cordes / chevalet est assuré. En contrepartie, les contours de la table sont précontraints en compression. Pour appréhender les conséquences de ce phénomène (nommé « downbearing » en anglais), un raisonnement simple consiste à le décomposer en deux mécanismes distincts : l'influence de la diminution de la courbure de la table et l'influence de la précontrainte appliquée sur les contours. Concernant la courbure, il est habituellement admis dans le cas des plaques et coques fines (épaisseur inférieure à 1/20 des dimensions latérales) de nombreuses hypothèses fortes, dont l'omission de l'inertie de membrane, qui permettent l'introduction d'une fonction de Airy [Soed04, Touz09]. C'est le cas des modèles de Von Kármán pour les plaques minces et de Donnell-Mushtari-Vlasov pour les coques minces.

Remarque

Ces hypothèses sont généralement levées dans les cas particuliers où l'épaisseur n'est plus négligeable ou encore lorsque la courbure devient importante.

Les équations du mouvement d'une telle coque dont la courbure est sphérique, que l'on peut trouver dans [Elis75], permettent d'exprimer les pulsations propres d'une telle coque dont le rayon de courbure est noté R :

$$\omega_{mnT}^2 = \omega_{mn}^2 + \frac{\left(\left(\frac{m}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right)^2}{\rho h R^2 \left(\frac{1}{E_y h} \left(\frac{m}{L_x} \right)^4 + \frac{1}{E_x h} \left(\frac{n}{L_y} \right)^4 + \frac{1}{G_{xy}} - \frac{\nu_{xy}}{E_x} - \frac{\nu_{yx}}{E_y} \right) \left(\frac{m}{L_x} \right)^2 \left(\frac{n}{L_y} \right)^2} \quad (I.1)$$

De cette façon les fréquences propres augmentent avec la courbure. Il ne faut cependant pas perdre de vue qu'en montant en fréquence l'influence de la courbure perd de son importance : le rayon de courbure paraît infini à l'échelle des petites longueurs d'onde (15 à 50m d'après [Conk96c]). Ainsi l'augmentation des fréquences propres qui résulterait d'une courbure reste limitée dans le cadre de la table d'harmonie du piano. Qui plus est que l'application du cordage vient même la réduire : les fréquences propres diminuent donc lorsque les cordes exercent une pression sur le chevalet.

L'application du cordage vient également pré-contraindre la table dans le plan de la plaque en la comprimant. Gérardin & Rixen [GéRi96] ainsi que Busch-Vishiac [Busc82] montrent que l'équation de mouvement d'une plaque orthotrope rectangulaire est alors modifiée par l'application de tensions T_x et T_y sur les bords. Il en découle que les pulsations propres sont décalées par rapport à la même plaque non précontrainte :

$$\omega_{mnT}^2 = \omega_{mn}^2 + \frac{\pi^2}{\rho h} \left(T_x \left(\frac{m}{L_x} \right)^2 + T_y \left(\frac{n}{L_y} \right)^2 \right) \quad (I.2)$$

Cette équation montre que la raideur globale de la structure chute lorsque la plaque est comprimée sur ses bords (tensions négatives) ce qui implique une diminution des fréquences propres [CKBD08]. Selon les mêmes auteurs, l'effet de précontraintes dans le plan d'une plaque isotrope est essentiellement concentré sur les premiers modes et s'atténue au fur et à mesure que l'ordre des modes augmente. Cela semble par ailleurs être le cas pour une plaque orthotrope [Ege09].

Ce raisonnement simple tend donc à montrer que le « downbearing » entraîne une diminution des premières fréquences propres de la table d'harmonie. Ege [EgBR13] propose une comparaison numérique éléments finis dont est extrait la Figure I-5 où le « C » désigne la courbure et le « L » la précontrainte. Cette figure confirme partiellement notre raisonnement concernant la précontrainte sur les contours de la table. En revanche, ces résultats montrent une légère diminution des fréquences propres de la table lorsque celle-ci est courbée ce qui n'est pas cohérent avec notre raisonnement. Une explication réside pour ce modèle dans le fait que les projections à plat de la table plane et courbée sont les mêmes. Il en découle que la table avec une courbure est légèrement plus grande que la table plane ce qui augmente sa masse et diminue ses fréquences propres. Toujours est-il que cette étude montre que le décalage en fréquence est très faible et négligeable.

Mode	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(1,2)	(2,2)	(4,1)	(3,2)
"C" and "L"	84	127	194	204	229	271	301
"C", no "L"	88	131	199	207	233	277	306
No "C", "L"	87	129	196	204	230	273	302
No "C", no "L"	88	131	200	209	234	280	309

Figure I-5 : Premières fréquences propres d'une table d'harmonie de piano droit en Hz. Le « C » désigne la courbure et le « L » la précontrainte. Extrait de [EgBR13].

Une comparaison croisée des résultats de Wogram [Wogr80], Conklin [Conk96c], Kindel [KiWa87], Moore [MoZi06], Derogis [DeCa94] et Nakamura [Naka83], également réalisée par Ege [Ege09], montre à l'inverse que le « downbearing » entraîne une légère augmentation des premières fréquences propres. Selon Moore [MoZi06], les différences peuvent même aller jusqu'à environ 30 Hz sur le premier mode de table entre une table seule et une autre en situation de jeu. Ce résultat est surprenant à l'égard du raisonnement simple que nous venons de mettre en place. Les travaux de Mamou-Mani [MaFB08] apportent des éléments de réponses à propos de ce raisonnement contradictoire. Ils montrent en effet que les contraintes résiduelles dans la table et le rayon de courbure imposé lors de la fabrication peuvent entraîner tantôt une augmentation et tantôt une diminution des fréquences propres : ce décalage suit alors une loi non-linéaire. Ainsi, le fait d'imposer à la table une courbure avant chargement peut justifier que les premières fréquences propres augmentent. En outre, l'effet du « downbearing » sur les premières fréquences propres de la table d'harmonie (augmentation ou diminution) dépend de la courbure imposée lors de la fabrication¹. Parmi les éléments susceptibles d'engendrer une modification des fréquences propres, on peut également citer le cadre qui, en venant appuyer sur les bords, peut réduire fictivement la surface vibrante de la table et ainsi entraîner une augmentation des fréquences propres. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que nous ne tirons ici aucune conclusion quant à l'origine exacte de cette augmentation des fréquences propres engendrée par le « downbearing ».

Pour revenir à la conception de la table d'harmonie de piano, si les barres sont elles aussi classiquement faites d'épicéa, ce n'est pas forcément le cas des chevalets. Ils sont généralement constitués d'un bois plus dense, comme du hêtre ou de l'érable, de façon à répartir les contraintes mécaniques des cordes au niveau des attaches et peuvent représenter plus de 20% de la masse totale de la table d'harmonie [Conk96c, Ege09]. Notons également que les deux chevalets n'ont pas les mêmes dimensions. Celui des basses, accueillant les 20 premières notes, est plus imposant que le chevalet des médium-aigus. Ce dernier est par ailleurs discontinu de façon à laisser passer le cadre en fonte supportant les cordes dont nous reparlerons plus loin.

¹ « The downbearing effects are very dependent of the initial crown », extrait de Mamou-Mani [MaFB08].

De nombreux autres éléments font dorénavant partie intégrante du design de l'instrument dans le but d'optimiser son rayonnement. Un principe général réside dans les travaux de Bilhuber et Johnson [BiJo40] stipulant que n'importe quel procédé permettant de favoriser la réponse diaphragmatique (« diaphragmatic response » en anglais) de la table est bonne à suivre. En ce sens, une solution consiste à réduire l'épaisseur de la table d'harmonie sur les pourtours : les bords sont donc plus souples. Les fréquences propres de ces modes étant plus faibles que la fréquence critique de la structure, augmenter leurs amplitudes permet ainsi d'améliorer sensiblement le rayonnement en basses fréquences. Selon ces recommandations, Steinway utilise depuis les années 1930 le « diaphragmatic soundboard patented » publiés par Bilhuber [Bilh36] et on constate dans la pratique des différences notables d'épaisseur entre le centre et les bords sur la majorité des tables d'harmonie allant jusqu'à quelques millimètres [Aske06a]. Cette pratique courante qui consiste donc à réduire progressivement l'épaisseur de la table est nommée « tapering » en anglais.

Dans le même ordre d'idée, les barres de renforts diminuent de hauteur à leurs extrémités de façon à assouplir les bords. Cette variation progressive de hauteur en « sifflet », illustrée Figure I-6, va donc dans le sens d'autoriser des amplitudes plus grandes sur les premiers modes de table d'harmonie. Le profil des sifflets est interpellateur et rappelle les profils favorisant l'apparition de trous noirs acoustiques pour lesquels les ondes sont réfléchies de telle manière qu'elles restent piégées dans les extrémités [DGPP15]. Il est donc important de garder ce phénomène en mémoire même si de telles constatations n'ont jamais été faites dans la littérature.



Figure I-6 : Décroissance lente en sifflet de la hauteur des barres de renforts d'un piano.

Il faut d'autre part noter que tous les facteurs de piano ne suivent pas à la lettre cette recommandation d'assouplir les bords de table. En effet, l'influence sur la dynamique de la structure est très différente en basses et hautes fréquences. Selon Ege [Ege09], ces réductions d'épaisseurs de plaques et de hauteurs de barres augmentent la mobilité ayant un effet essentiellement bénéfique en basses fréquences tandis que dans la zone où les aigus sont placés, cela augmente le transfert d'énergie entre les cordes et la table et donc diminue la longueur de son (« sustain »). Pour ces raisons, de nombreux facteurs recommandent de limiter la pratique du « tapering » aux bords proches des basses, comme la « Frandrich Piano Compagny » [Ege09, Fand95].

Cette description rapide de la table d'harmonie de piano montre à quel point cette pièce est complexe. Il est alors évident qu'une telle conception n'est pas sans conséquence sur le comportement vibroacoustique de l'instrument.

I.A.2. Le plan de cordes

Le plan de cordes n'est pas une pièce à proprement parler mais revêt tout de même une importance capitale dans le fonctionnement de l'instrument puisque qu'il représente le « moteur » du son. Classiquement, le piano est constitué d'un clavier à 88 notes (même si des claviers plus longs existent) auxquelles correspondent des cordes particulières. Sur une telle configuration, les 20 à 30 premières notes sont reliées au chevalet des basses, où une corde filée correspond à une note. Le chevalet des medium-aigus accueille quant à lui les notes restantes. A la différence des cordes de basses, une note ne correspond pas à une seule corde : on trouve des doublets puis des triplets de cordes à mesure que l'on monte dans les aigus. Notons que ces cordes sont non-filées. La distinction entre les cordes filées et non-filées sera ré-abordée dans le CHAPITRE IV qui sera dédié à la synthèse sonore et au couplage cordes / table d'harmonie. Au sein d'un même triplet, on note par ailleurs un léger décalage en fréquence entre les cordes provoquant ainsi un phénomène de battement entre les cordes d'un même chœur [Wein77]. Selon Martin [Mart47], ce désaccord participe à l'apparition d'une double décroissance dans le son produit : le début du signal décroît rapidement tandis que la fin décroît lentement ce qui introduit la notion de son rémanent (ou « aftersound »).

Des études plus récentes ont mis en évidence que ce phénomène n'est pas uniquement lié à l'accordage du triplet mais également à la présence d'ondes transversales et longitudinales dans les cordes qui se justifie par le comportement non-linéaire de la corde [ChCJ13, EtCM15]. Dans la pratique, il apparaît également que la corde a tendance à sortir naturellement du plan de vibration imposé par le marteau et à posséder une composante horizontale : le déplacement vertical de la corde se transforme progressivement en déplacement horizontal. L'origine de ce phénomène de double polarisation, qui a été mis en évidence par Murthy [MuRa65], est assez mal expliquée dans la littérature. Les études récentes tendent à confirmer l'hypothèse que ce phénomène est issu à la fois d'un transfert d'énergie par couplage non-linéaires entre les ondes transversales et longitudinales dans la corde ainsi que par couplage au niveau du chevalet [Kurm03, AnSt07]. Toujours est-il que selon Weinreich [Wein77], ce phénomène est lui aussi susceptible de contribuer à la double décroissance du son produit étant donné que le chevalet n'est pas conçu pour transmettre la polarisation horizontale. Il en résulte que le transfert d'énergie est affaibli lorsque la corde vibre horizontalement, donnant alors une décroissance forte au départ puis lente par la suite. Pour résumer, le phénomène de double décroissance dans le son produit par le piano est possiblement le fruit de plusieurs phénomènes qui s'ajoutent les uns aux autres : le désaccord au sein d'un même chœur de cordes, le couplage

non-linéaire des ondes transversales et longitudinales et la double polarisation des ondes transversales.

Pour en revenir au plan de cordes à proprement parlé, la différence entre les cordes de basses et d'aigus va au delà du filage. Dans la pratique, la majorité des pianos modernes adopte une configuration en cordes dites croisées telle que sur la Figure I-2. Cette configuration permet entre autres d'augmenter la longueur des cordes de basses, ce qui a pour effet de réduire l'inharmonicité entre les partiels d'une même note [Ege09]. Le dimensionnement du plan de cordes en lui même a été étudié par Conklin et publié dans l'article [Conk96b] où il propose une méthode de dimensionnement permettant de calculer les différents paramètres relatifs à chaque corde : longueur, diamètre, masse linéique, etc. En outre, une corde applique un effort statique pouvant atteindre une valeur égale à environ 0,5-3% de sa tension [Conk96c] tandis que l'intégralité du plan de cordes exerce un effort allant jusqu'à 4-6 kN sur un piano de concert [Aske06a]. Les efforts appliqués sont donc très importants et on comprend de ce fait mieux les renforts incorporés à la table d'harmonie que nous avons décrite dans la sous-section précédente.

I.A.3. Le bois, un matériau de construction courant

Historiquement, on peut constater que l'évolution des technologies a permis au cours du temps le remplacement des matériaux dans de nombreux domaines d'activités. Malgré tout, le milieu musical est un des rares où le bois reste le matériau prédominant. Son utilisation massive n'est pourtant pas sans contrainte puisque ce dernier est un matériau dit « vivant » ce qui implique un changement de ses propriétés au cours de son vieillissement. On dit dans le langage courant que le bois bouge, ce qui impose un processus de séchage qui, en plus de prendre beaucoup du temps, monopolise une place considérable. Cependant, ce matériau semble, pour les musiciens, synonyme de qualité ce qui peut en partie expliquer l'immobilisme des grandes firmes quant à l'utilisation d'autres matériaux tels que les composites qui offriraient sans doute de nouvelles possibilités. Quelques essais récents sont cependant à souligner tel Ege [Ege09] proposant le remplacement d'une table d'harmonie de violon par un composite, même s'il est composé exclusivement de végétaux (composite balsa / lin). Actuellement, dans le cadre du projet ANR Maestro², le remplacement de la table d'harmonie est envisagé : en premier lieu par une imitation des propriétés du bois utilisé puis par la création d'un matériau optimisé pour la table d'harmonie. Ce travail fait l'objet de la thèse de P. Margerit à l'École Nationale des Ponts et Chaussées.

² Projet ANR MAESSTRO (Modélisations Acoustiques, Expérimentations et Synthèse Sonore pour Tables d'harmonie de piano) regroupant au sein d'un même consortium quatre laboratoires de recherche (LMS, Ecole Polytechnique ; UME, ENSTA ; UMR NAVIER, Ponts et Chaussées ; LVA, INSA-Lyon) et le facteur de piano Stephen Paulello (SPCP Piano Technologies).

La coupe du bois destiné à la lutherie diffère grandement des coupes dites sur dosse que l'on retrouve dans la charpenterie ou encore l'ébénisterie et qui donnent un côté esthétique au bois coupé. A l'opposée, la coupe en quartier est fortement plébiscitée dans le domaine musical puisqu'elle permet rendre homogène les propriétés mécaniques des planches venant d'un même arbre. La Figure I-7-a montre la différence entre ces deux types de coupes. En imaginant que les cernes du bois soient parfaitement rondes et concentriques, ce qui représente un cas idéal puisque dans ces conditions la normale à la surface et la tangente de toutes les cernes forment un angle de 90° , il est possible de tailler des planches de mêmes propriétés en effectuant une coupe en quartier d'épaisseur infinitésimale. Dans la pratique, ceci est bien évidemment impossible d'une part à cause de l'épaisseur de la découpe de l'ordre de 6 à 10 mm, et d'autre part parce que les cernes sont loin d'être parfaitement régulières. Il apparaît alors que les conditions réelles de coupe sont très éloignées de ce cas idéal allant jusqu'à des angles de 45° , au lieu de 90° , entre la normale et la tangente aux cernes.

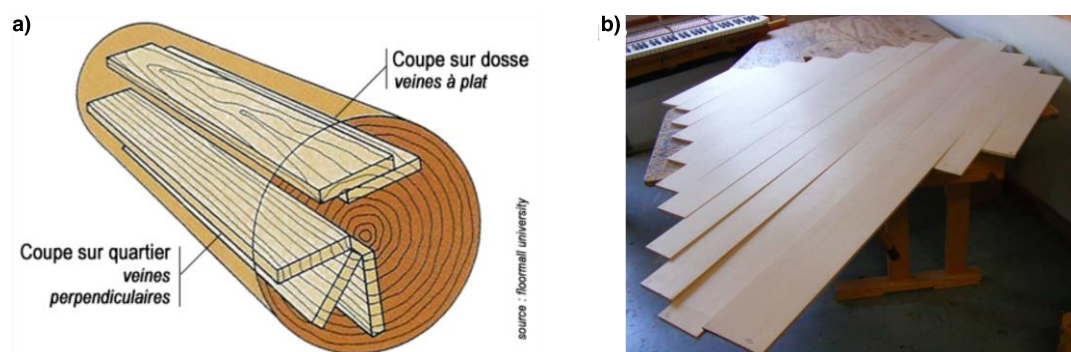


Figure I-7 : a) Illustration des deux types de coupes d'un tronc d'arbre. La coupe en dosse permet d'obtenir des motifs décoratifs intéressants ; la coupe en quartier, utilisée en lutherie, permet d'obtenir des fibres perpendiculaires. b) Collage des planches destinées à la fabrication d'une table d'harmonie de piano. Extrait de [Chab12].

Grâce à cette méthode de coupe et à une sélection soignée des planches de bois, il est possible de construire (par collage des planches, voir Figure I-7-b) une plaque dont les propriétés sont globalement homogènes. Au final, la plaque construite est orthotrope avec le module le plus fort correspondant aux fibres du bois et l'axe le plus faible au module radial.

L'utilisation du bois dans la facture de piano est certes commune mais les essences limitées : pour les tables d'harmonie, l'épicéa est systématiquement utilisé. En particulier, l'épicéa européen et le Sitka sont les essences les plus nobles et réservées aux tables haut de gamme [PeWe67, Conk96c, Aske06a, Bucu06, Ege09]. La taille de l'arbre est également un facteur de choix prépondérant puisqu'un arbre âgé permet d'extraire une plus grande quantité de bois et donc facilite le choix de planches aux propriétés similaires. L'épicéa de Sitka (« Sitka spruce ») est ainsi fortement plébiscité par les facteurs de piano du monde entier [Bucu06] en raison de son diamètre largement supérieur à l'essence européenne (5m de diamètre contre 1,5m) ce qui le rend, selon Haines [Hain79], particulièrement bien adapté aux

grands instruments tels que les pianos à queue de concert. De plus, la localisation de cette espèce dans le sud de l'Alaska et le nord de la Californie joue sans doute un rôle économique majeur dans le choix des grands manufacturiers américains comme Steinway [Ege09].

Outre la localisation et la taille de l'arbre, les propriétés mécaniques du bois sont également primordiales dans le choix des essences. Cependant les qualités acoustiques sont souvent évaluées sur des échantillons de type poutre ce qui rend difficile d'apprécier l'influence des paramètres mécaniques dans le cas d'une structure raidie. Pour simplifier, on raisonne souvent sur des structures planes pour lesquelles il a été constaté que seulement trois propriétés jouent un rôle fondamental sur le rayonnement acoustique : le module de Young E , la masse volumique ρ et le facteur de perte η , i.e rigidité, poids et amortissement.

Dans sa thèse, Ege [Ege09] dresse un résumé des différents critères présents dans la littérature qui sont détaillés de façon exhaustive par Brémaud dans [Brém08]. Ceux-ci ont été suggérés par de nombreux auteurs notamment Yoshikawa [Yosh07] qui propose un « radiation ratio » mettant en jeu le module de Young et la masse volumique du matériau en s'apparentant à la puissance acoustique générée par une plaque guidée telle que définie par Haines [Hain79] :

$$R = \sqrt{\frac{E}{\rho^3}} \quad \text{« radiation ratio » de Yoshikawa} \quad (\text{I.3})$$

Quant à eux, Chaigne et Kergomard se basent sur l'idée générale que diminuer la fréquence de coïncidence de la structure tout en conservant une mobilité élevée au chevalet permet de maximiser le rayonnement acoustique de la structure mais leur critère, bien que plus poussé que celui de Yoshikawa, ne met pas non plus en jeu l'amortissement interne du bois. D'après les travaux de Barlow [Barl97] et le théorème de la valeur moyenne de Skudryzk [Skud80], les auteurs définissent alors un critère correspondant au rapport de la mobilité moyenne sur la fréquence critique de la structure :

$$\frac{Y_{mean}}{f_c^2} = \frac{\pi^2}{2 c_a^2 \sqrt{12(1 - \nu^2)}} R \quad (\text{I.4})$$

Selon une démarche similaire, Barlow développe une autre approche permettant d'optimiser le rayonnement de la table d'harmonie. Sur le principe des travaux de Langley [Lang94] qui donne une expression de l'enveloppe supérieure de la mobilité (et non pas sur le théorème de la valeur moyenne de Skudryzk [Skud80] tel que réalisé dans [CKBD08]), il apparaît une expression qui cette fois-ci fait intervenir la densité modale $n(f)$ de la structure

(elle-même caractéristique à chaque instrument [Barl97, Wegs06]), et le facteur de perte du matériau η :

$$Y_{peak} = \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \frac{n(f) R}{\pi f S^2 \eta} \quad (1.5)$$

Dans cette expression, le paramètre à maximiser afin d'optimiser le rayonnement acoustique de la structure est nommé le « conversion acoustic efficiency » par Obataya & al [ObON00] et il met en jeu les trois paramètres physiques précédemment évoqués. Haines [Hain79] propose également un autre critère qui se trouve être proportionnel à celui d'Obataya : le « loudness index ». Ces derniers sont exprimés de manière simple :

$$E_{ac} = \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{E}{\rho^3}} \quad \text{« Conversion acoustic efficiency » d'Obataya} \quad (1.6)$$

$$L = \left(\frac{E_{ac}}{\pi}\right)^2 \quad \text{« Loudness index » de Haines}$$

De ces études, il ressort que les matériaux alliant un fort « radiation ratio » et un facteur de perte interne relativement faible sont préférables d'un point de vue acoustique musicale. Le diagramme d'Asby, donné Figure I-8-a, et de Wegst [Wegs06], donné Figure I-8-b, sont alors des outils très utiles permettant de trier rapidement les matériaux les plus adaptés. Sur la Figure I-8-a, le « radiation ratio » optimal pour la table d'harmonie de piano, noté R , est tracé et la valeur moyenne de l'épicéa ajoutée en rouge. Dans son ensemble, cette figure montre la pertinence du choix de l'épicéa en tant que matériau favori des facteurs d'instruments. D'autres choix auraient bien entendu été possibles mais il convient de concilier ce critère avec les contraintes de dimensionnement dues aux efforts appliqués à la table.

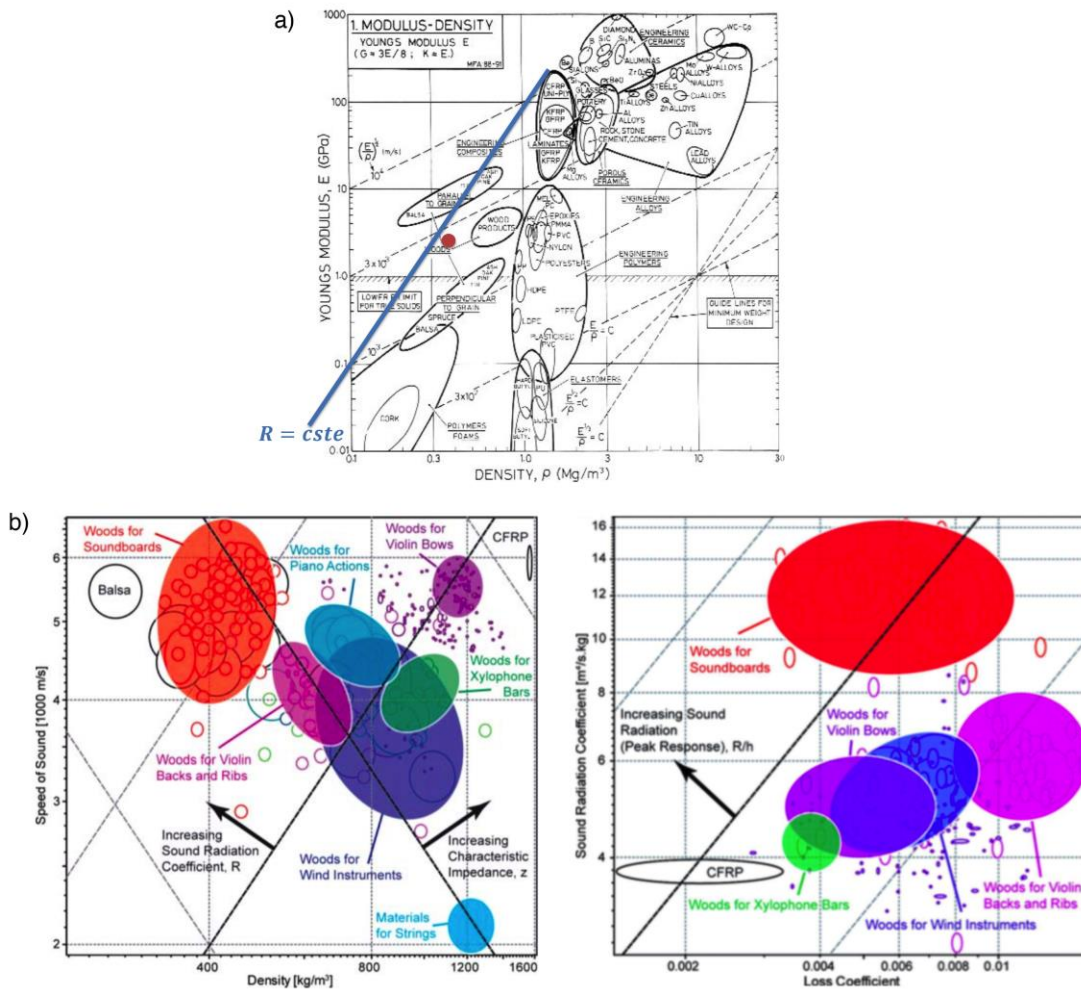


Figure I-8 : a) Diagramme d'Ashby extrait de [Ashb05]. La valeur moyenne des propriétés longitudinales et radiales de l'épicéa a été ajoutée en rouge ainsi que le « radiation ratio » R optimal déterminé dans la littérature. b) Diagrammes extraits de Wegst [Wegs06].

Ces critères rendent encore plus difficile la tâche de sélection des bois et, même au sein de l'essence épicéa, des différences apparaissent. D'après Lieber [Lieb79], un arbre poussant lentement donne de meilleures propriétés mécaniques. La vitesse de pousse est visible sur l'espacement inter-cernes puisque celui-ci reflète une année de pousse pour l'arbre. En abattant un arbre à sa base, il est alors possible de déterminer son âge de même que l'âge d'une branche en la coupant. L'épaisseur du cerne témoigne de l'historique de l'année vécue par l'arbre, i.e les conditions climatiques, sa croissance, etc. Ainsi l'espacement entre les cernes du bois est d'autant plus faible que la pousse est lente, donnant ainsi des propriétés plus homogènes [Hutc78]. Une raison à cela, avancée par [Ege09], réside dans la proportion de bois jeune, également appelé bois de printemps, et de bois d'été au sein d'un même espace inter-cernes. Le même auteur rappelle que la densité d'un bois jeune a une masse volumique d'environ 280 kg/m^3 tandis que le bois d'été est beaucoup plus lourd, environ 900 kg/m^3 . Pour les bois de résonance comme c'est le cas pour la table d'harmonie, la proportion de bois d'été excède rarement 25% [Bucu06] ce qui permet d'avoir une masse volumique global de l'ordre de 390 à

460 kg/m³ et de limiter les pertes internes qui augmenteraient considérablement dans la direction perpendiculaire aux fibres [Holz84].

Remarque

Dans son livre « Acoustics of Wood », Bucur [Bucu06] recommande une variation progressive de l'épaisseur inter-cernes au niveau du chevalet entre les graves et les aigus. Bien que cette théorie ne soit à ce jour pas confirmée par les facteurs de piano, il encourage à favoriser des cernes plus espacés pour les basses et à l'inverse plus rapprochés pour les zones dans l'aigus. Il en résulterait, selon le principe évoqué au paragraphe précédent, une variation de la densité du bois et de l'amortissement le long du chevalet.

En pratique, un bois dont les cernes sont espacés de plus de 3mm est considéré comme médiocre par les facteurs de piano [Fuka50, Holz84]. Les bois les plus adaptés à la lutherie apparaissent alors comme ceux poussant dans les régions climatiques les plus rudes. L'épicéa roumain « Carpathians spruce », une sous famille de l'épicéa européen, répond à ce critère avec des cernes espacés de seulement 1 à 2 mm [Ege09]. Celui-ci est également fortement plébiscité pour ses propriétés acoustiques par les luthiers européens.

Cette partie montre toute la diversité et la finesse qui s'impose dans la sélection des bois de facture instrumentale. Il est alors évident qu'au sein d'une même essence, les propriétés peuvent être extrêmement variables en fonction des conditions météorologiques et du vécu de l'arbre. Les propriétés mécaniques de l'épicéa pour différentes sous-essences peuvent être consultées dans les travaux de Haines [Hain79] et Hearmon [Hear00].

1.A.4. Cadre, marteau, meuble et de nombreuses autres pièces

Le plan de cordes et la table d'harmonie ne constituent bien évidemment pas les seules pièces de l'instrument comme la vue éclatée Figure I-2 le suggère. Sans en dresser une liste exhaustive, citons et commentons celles susceptibles d'être les plus influentes sur le timbre de l'instrument. En s'écartant de la table d'harmonie, nous avons vu dans les parties précédentes qu'un plan de cordes est relié au niveau des chevalets. Ces cordes sont reliées de part et d'autre à des points que l'on peut considérer au premier ordre comme fixes : le cadre.

Le cadre est une pièce métallique faite de fonte, dont la structure cristallographique est susceptible d'impacter le rendu sonore. Selon les facteurs de piano et fondeurs spécialisés, l'agencement des cristaux de carbone modifie l'amortissement du matériau et donc rend le cadre plus « sonore ». Ainsi, l'usage d'une fonte à graphite sphéroïdale plutôt que lamellaire

(moins amortissante) pourrait modifier cet état de fait³. Ainsi, la sonorité cristalline des notes aiguës nous pousse à nous interroger quant à la participation du cadre dans le rayonnement des aigus. Cette participation revient d'ailleurs souvent dans les discussions tenues avec les spécialistes du domaine et force est de constater que le cadre vibre fortement pour ces notes. Il n'empêche que sa fonction principale est de soutenir la tension des cordes qui, comme nous l'avons vu dans la section I.A.2, est très importante ce qui justifie amplement les matériaux et procédés de fabrication utilisés.

Remarque

Entre le milieu du XIXème et le début du XXème siècle, de nombreux pianos droits sont produits avec ce qui était appelé à tort des « cadres bois ». Ces pianos n'étaient en réalité pas pourvus de cadre mais d'un système de barrage fait de nombreuses poutres de bois. Leur principal défaut était qu'il fallait les accorder plusieurs fois par an.

En tant qu'instrument à cordes frappées, la pression exercée sur les touches par le musicien est transmise à la corde par l'intermédiaire du marteau dont la cinématique est relativement complexe comme peut en témoigner la Figure I-9. On dénote de nombreux paramètres susceptibles d'entrer en jeu dans le son produit par l'instrument, en particulier : la masse de la tête, la dureté du feutre au niveau de la zone de contact avec la corde, l'interaction avec la corde et bien entendu les nuances de jeu du musicien mais ceci relève du domaine artistique.

Nombreuses sont les études et les modèles à ce sujet sont de plus en plus réalistes [Bout87, HaAs88, ChAs94, Conk96a, GiWi00, Stul95, Stul03]. En outre, la dureté du feutre est un paramètre capital puisqu'elle détermine la largeur de la zone de contact ainsi que sa durée en raison du comportement hystérétique du matériau (comportement viscoélastique). Un état de l'art exhaustif des caractéristiques des marteaux et de leurs interactions avec les cordes peut être consulté dans la thèse de Chabassier [Chab12].

³ Selon les dires d'Isaac OLEG, facteur, accordeur et réparateur à Vitry sur Seine.

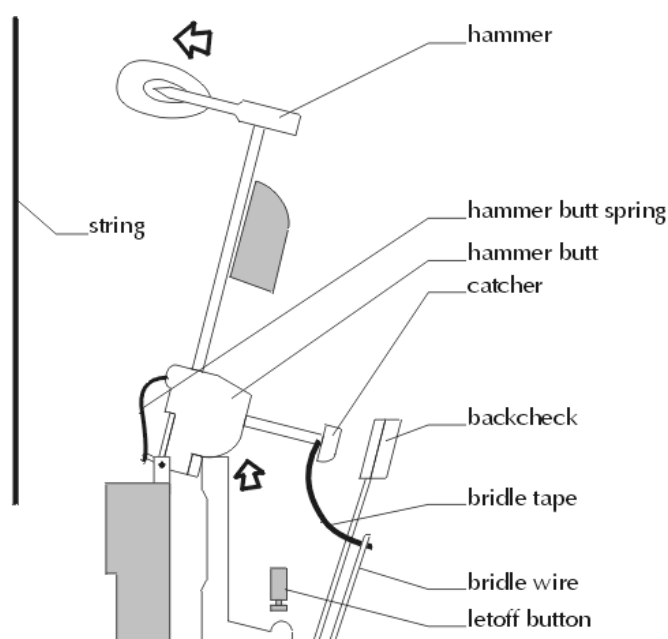


Figure I-9 : Schéma de la mécanique d'un marteau de piano. Extrait de [Ming97].

Tous les éléments que nous venons de lister sont enfermés dans le meuble, une imposante pièce de bois, qui constitue la partie visible de l'instrument. Une caractéristique propre des pianos à queue est d'inclure un déflecteur permettant de diriger le son vers le public : le couvercle. Le meuble enferme donc la table d'harmonie et ses deux faces se retrouvent alors isolées l'une de l'autre bien que cet isolement puisse être remis en cause en basses fréquences lorsque les longueurs d'onde sont grandes devant la taille de l'objet. Cependant, les longueurs d'onde deviennent vite suffisamment petites pour pouvoir considérer que le meuble empêche tout court-circuit acoustique. On se rapproche alors de conditions bafflées, c'est à dire que les deux demi-espaces de fluide sont séparés par une paroi rigide. Ces deux demi-espaces sont donc indépendants et les ondes propagées dans l'un n'interfère pas avec l'autre : il n'y a pas de court-circuit acoustique.

I.B. Études menées sur la table d'harmonie

Le piano est un instrument fascinant qui soulève de nombreuses questions quant à son comportement vibroacoustique. Comme tous les instruments de musique, les questions d'ordre musical côtoient les indicateurs scientifiques et la passerelle entre les langages des deux domaines est parfois difficile à mettre en place. Le plus captivant est la manière dont les instruments ont été conçus et ont évolué au cours du temps sans connaissances ni outils scientifiques pour parvenir à un niveau de complexité impressionnant. C'est ainsi que de nombreuses études ont vu le jour dans ce domaine pour comprendre l'ensemble des mécanismes qui sculptent le son de l'instrument. Même si l'engouement pour les instruments de musique est bien plus restreint que pour les structures industrielles, entre autre à cause d'un contexte économique moins favorable, le

savoir à leurs sujets s'est considérablement agrandi. Par la suite, on agrémentera l'état de l'art débuté dans ce chapitre avec les connaissances acquises au cours des dernières décennies.

I.B.1. Connaissances relatives à la table d'harmonie

De nombreuses questions se posent au regard de la conception de l'instrument. Une interrogation de premier ordre concerne les conditions aux limites de la table d'harmonie qui, comme nous l'avons vu, est fixée au meuble. Instinctivement, cette fixation sous-entend un encastrement de la table d'harmonie mais il ne faut pas ignorer que l'instrument entier vibre malgré l'importance du meuble. En outre, il apparaît souvent dans les structures de tout domaine que les conditions dépendent de la fréquence : tout est question de l'ordre de grandeur des déplacements vis à vis des longueurs d'onde. Dans le cadre de la table d'harmonie, Nakamura [Naka83] montre qu'aucune condition aux limites « simple » (i.e qui permet des simplifications intéressantes dans les équations de mouvements) n'est vraiment valable. Comme on pouvait le prévoir, les conditions aux limites de la table d'harmonie évoluent avec la fréquence : en basses fréquences, les conditions sont proches du cas simplement supporté ; en hautes fréquences, l'encastrement s'impose très vite comme la condition la plus réaliste. De plus, il semble que les conditions tendent très vite vers ce second cas passés les premiers modes propres de la structure. Dans le même ordre d'idée, Suzuki [SuNa90, Suzu86] montre que le rayonnement basses fréquences est également particulier. Comme nous l'avons évoqué, le meuble crée un obstacle aux ondes acoustiques se rapprochant des conditions bafflées hormis en basses fréquences où des courts-circuits acoustiques existent, impliquant de fait un appauvrissement de l'efficacité du rayonnement [Ege09, SuNa90, Suzu86]. Nous verrons par la suite que d'autres considérations sont susceptibles d'expliquer cette chute du rayonnement dans ce domaine fréquentiel.

L'identification des modes de structure fait depuis longtemps partie des indicateurs de bases en vibration, depuis leur mise en évidence par Chladni⁴. Dans le cadre du piano, nombreux sont les auteurs à s'être intéressés à la reproduction de ses figures. C'est le cas de Conklin qui visualisa les premiers modes propres d'une table d'harmonie d'un piano de concert dénuée de chevalet [Conk96c]. En utilisant des méthodes plus modernes, Moore & al [MoZi06] (« electronic speckle pattern interferometry ») ainsi que Ege [Ege09] (analyse modale haute résolution) ont déterminé les modes propres de table d'harmonie de différents pianos droits. Il en ressort des motifs globalement homogènes, dans le sens où toute la surface de la table vibre, bien que légèrement asymétriques en basses fréquences (voir Figure I-10). Ainsi, les premiers modes sont très loin de refléter l'aspect fortement hétérogène de la structure. Cette constatation ouvre la voie à des modèles d'homogénéisation des structures raidies, tel que le

⁴ « Qu'on juge de mon étonnement en voyant ce que personne n'avait encore vu. Il apparut une étoile à 10 ou 12 rayons, qui m'évoqua aussitôt les expériences sur les figures électriques [de Lichtenberg, en 1777]. » Ernest Chladni, à propos des figures géométriques obtenues en frottant un archet sur une plaque de cuivre saupoudrée de sable.

modèle de Berthaut [BeIJ03b, Bert04], applicable en basses fréquences. D'un autre côté, Moore [MoZi06] montre que cette légère asymétrie, principalement due à la charge des cordes, n'est pas sans conséquence sur le rayonnement acoustique de la table d'harmonie : pour les modes à l'aspect dipolaire, l'asymétrie réduit les interférences négatives entre les ondes propagées dans l'air et augmente le rayonnement en basses fréquences ; les courts-circuits acoustiques sont donc réduits.

L'identification modale devient difficile en montant en fréquence. Pour cause, le recouvrement modal devient important et les résonances ne sont plus bien séparées. Au mieux peut-on considérer des déformées opérationnelles. Celles-ci mettent tout de même en évidence des phénomènes intéressants. En tant que structure raidie, les vibrations se localisent entre les espaces inter-raidisateurs. Ce phénomène est illustré Figure I-10 pour laquelle les vibrations sont inhibées sous les barrages. Selon certains auteurs [BeIJ03b, EgBR13], ce phénomène apparaît lorsque les longueurs d'onde deviennent plus petites que l'espace inter-raidisateurs. Selon Berthaut [BeIJ03b], des ondes stationnaires s'établiraient entre deux barres et se propageraient dans la direction perpendiculaire.

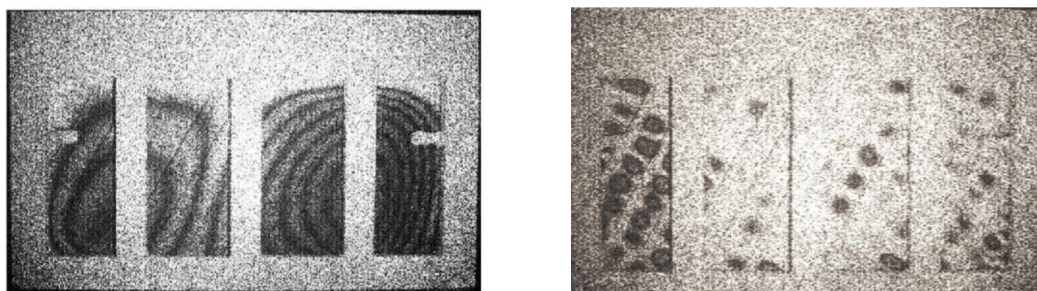


Figure I-10 : Déformées modales expérimentales déterminées par Moore [MoZi06].

Ce comportement particulier en hautes fréquences n'a pas échappé à Conklin qui propose une nouvelle conception du barrage dans [Conk00] : le nombre de barres est quadruplé tandis que leurs hauteurs sont divisées par deux de façon à conserver au global, raideurs et masses équivalentes (voir Figure I-11). Ainsi, les phénomènes de localisation sont repoussés à des fréquences nettement supérieures. Selon ses termes, le résultat est « une réponse fréquentielle uniformisée, une amélioration du rayonnement acoustique dans les aigus ainsi qu'une amélioration du timbre des dernières notes » [Conk00]. Paradoxalement, une table d'harmonie encore plus hétérogène rend le comportement de l'instrument plus homogène.

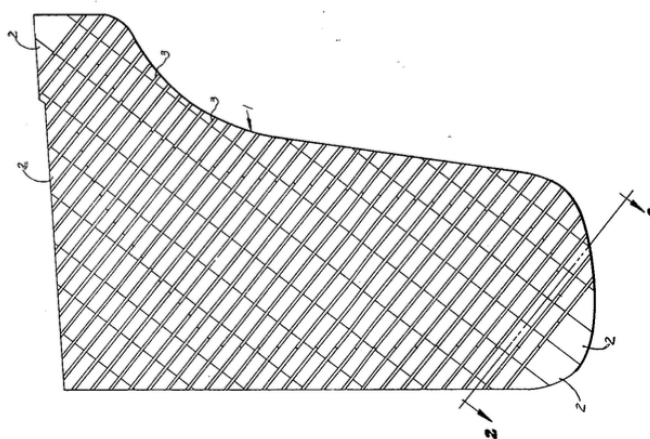


Figure I-11 : Table d'harmonie de piano à queue brevetée de Conklin dans [Conk00].

Cette localisation des vibrations n'est également pas sans conséquence sur la mobilité au point d'entrée qui fait également partie des indicateurs couramment utilisés pour caractériser les structures. Tout particulièrement, la mobilité au chevalet revêt une importance capitale puisqu'il s'agit directement du point de contact entre la table d'harmonie et la corde. Un raisonnement simple consiste à dire qu'une mobilité importante implique un couplage plus important entre les deux sous-systèmes et donc un transfert d'énergie rapide. De ce fait, une mobilité élevée traduit une note puissante au « sustain » court et inversement. Le nombre d'études sur le sujet est relativement limité et ces dernières se heurtent elles aussi à des problèmes en hautes fréquences comme un découplage entre la structure et les capteurs utilisés [Gior98] ou encore l'entrée en résonance du matériel de mesure [Naka83]. Ces difficultés n'empêchent pas d'alimenter les connaissances sur une bande de fréquences plus réduite mais suffisante. Nous nous concentrerons sur la mobilité transversale qui est la plus utilisée dans la littérature [Wogr80, Naka83, Conk96c, Gior98, Ege09]. Seuls Conklin et plus récemment Margerit [Conk96c, Marg15] s'intéressent à la mobilité dans le sens des cordes. On peut cependant regretter le manque d'études quant à cette mobilité puisqu'il est établi que les ondes longitudinales ont une importance capitale dans le rendu sonore des notes les plus basses [Aske06b].

Giordano [Gior98] et Nakamura [Naka83] montrent que la mobilité au chevalet a tendance à prendre beaucoup d'importance lorsque les longueurs d'onde deviennent petites, aux alentours de l'ordre de grandeur des espaces inter-raidsseurs, soit aux alentours de 2,5 kHz. En complément Giordano s'intéresse à la mobilité entre deux barres. Ce dernier met en évidence la même augmentation mais beaucoup plus tôt en fréquence (aux alentours de 700 Hz) ce qui montre que le point d'application change drastiquement le comportement global de la structure.

Les mesures effectuées par Conklin [Conk96c] sont particulièrement intéressantes puisqu'il compare une table d'harmonie seule et en situation de jeu, i.e cadre et cordes tendues inclus. Ege [Ege09] met en valeur ces résultats en superposant les courbes sur un même

graphique (voir Figure I-12). La différence entre ces deux configurations intervient principalement en basses fréquences en augmentant les fréquences propres d'une part et d'autre part en réduisant la dynamique, soit une augmentation de l'amortissement apparent. En montant en fréquence, les deux courbes tendent vers une valeur constante sensiblement égale.

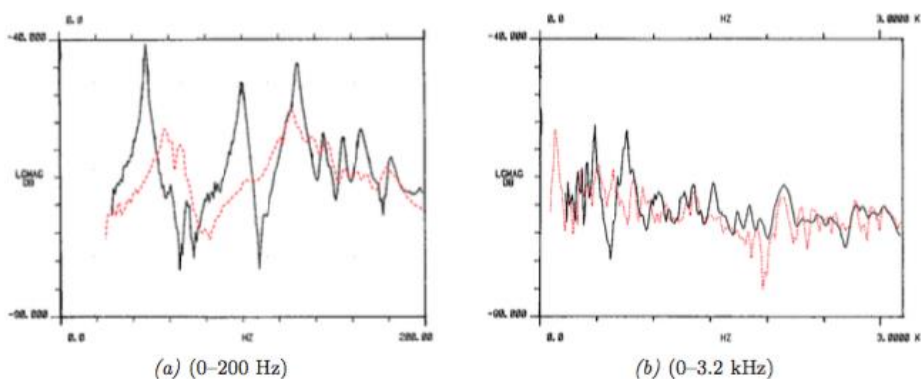


Figure I-12 : Comparaison de la mobilité expérimentale au niveau du Mi1 (chevalet) réalisée par Ege [Ege09] avec les résultats de Conklin [Conk96c]. Traits pleins noirs : table d'harmonie seule ; Pointillés rouges : table d'harmonie en condition de jeu.

I.B.2. Différents modèles de table d'harmonie : dualité entre les méthodes déterministes et statistiques

Que l'on parle d'identification ou de modélisation, le traitement des structures complexes n'est pas chose aisée tant les hétérogénéités structurelles sont nombreuses. Pour étudier leurs comportements, deux grandes visions s'opposent de par leurs philosophies respectives et le choix de l'une ou de l'autre dépend essentiellement de sa capacité à obtenir des résultats pertinents et fiables dans un temps convenable. Il s'agit des théories déterministes et statistiques. Maxit & al [MaTG00] résument très bien cet état de fait :

« Pour des systèmes présentant des résonances bien séparées, les méthodes déterministes telles que les éléments finis/éléments finis de frontière peuvent calculer en tout point la réponse du système. Ces méthodes s'appliquent généralement aux « basses fréquences ». La limite haute de calcul en fréquence de ces méthodes ne peut être définie de façon stricte car elle est liée à la capacité de l'informatique et à la nature du système étudié. Pour les éléments finis, un critère sur la taille du maillage basé sur les longueurs d'onde naturelle du système doit être appliqué. Plus on monte en fréquence, plus les longueurs d'onde naturelle sont petites, et plus le nombre de degrés de liberté à considérer devient important. Il en résulte des temps calculs qui peuvent devenir exorbitants. Par ailleurs, en « haute fréquence », il devient illusoire de vouloir prédire de façon déterministe la réponse d'un système. En effet, une dispersion des réponses vibratoires pour des structures apparemment identiques ont pu être observée par différents chercheurs. Leurs travaux

ont consisté à mesurer des fonctions de transfert en des points bien définis sur un lot de structures industrielles a priori identiques. Les résultats de ces mesures présentent une forte disparité attribuée à des petites variations non identifiées des caractéristiques des structures considérées. Cette dispersion semble de plus en plus forte pour les fréquences élevées ce qui rend les méthodes déterministes inopérantes dans les « hautes fréquences ».

Les méthodes statistiques permettent de remédier à ces limitations en estimant la réponse d'une population de structures a priori identiques. C'est le cas de la méthode SEA, qui signifie littéralement « Statistical Energy Analysis », consistant à découper la structure en sous-éléments plus simples, dont le nombre de modes est faible, et à évaluer l'énergie échangée entre chaque sous-système. Les hypothèses associées sont assez fortes et s'appliquent bien au domaine hautes fréquences où le recouvrement modal est important. Dans ce domaine, la réponse de la structure est en effet plus influencée par le « paquet de modes » excités dans la bande de fréquences que par un mode en particulier [Lesu88, Skud58]. Ce type de théorie perd donc de sa pertinence dès les moyennes fréquences lorsque le recouvrement modal n'est plus suffisant. La Figure I-13, inspirée de [Bert04, Ege09], donne une vision schématique de la complémentarité entre ces deux visions.

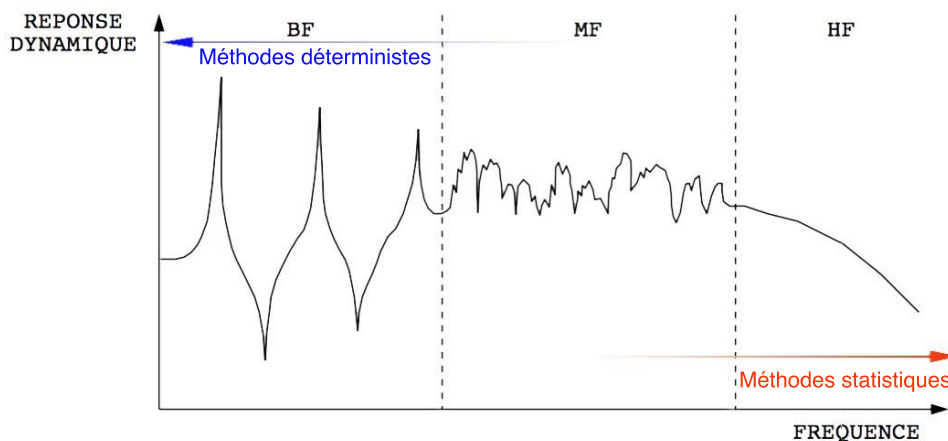


Figure I-13 : Schéma de principe des différents types de méthodes selon les domaines fréquentiels. Inspiré de [Bert04, Ege09].

Remarque

Cette dualité entre les visions déterministes et statistiques est non sans rappeler les deux courants de pensée qui se sont longtemps affrontés en physique fondamentale entre la théorie de la relativité (combinaison de la relativité restreinte et de la relativité générale qui renvoie à la relativité Galiléenne et à la mécanique Newtonienne) et la physique quantique. Citons la fameuse phrase d'Albert Einstein, père de la théorie de la relativité, « Dieu ne joue pas au dé » au congrès Solvay de 1927 par laquelle ce dernier exprimait son opposition à l'interprétation probabiliste de la mécanique quantique. Ces deux visions sont pourtant complémentaires et leur unification fait aujourd'hui l'objet de la théorie des cordes qui tente de fournir une description de la gravité quantique.

Pour revenir au cœur de notre sujet, nous nous intéresserons dans la suite de ce chapitre à des modèles déterministes de table d'harmonie de piano. Comme dans les contextes industriels, les méthodes éléments finis sont fortement mises à l'honneur, d'autant plus que les ressources informatiques s'accroissent constamment, facilitant ainsi leur application à des domaines fréquentiels jusqu'alors inaccessibles. Le modèle le plus exhaustif est celui de Chabassier [Chab12, ChCJ13] qui reprend les éléments principaux du piano : table d'harmonie, plan de cordes (avec un modèle non-linéaire), marteau ainsi qu'un couplage fluide structure par PML (« Perfectly Matched Layers »). La présence des barres de renfort et des chevalets est modélisée par une variation locale d'épaisseur et du matériau de la plaque. La Figure I-14 fournit des exemples typiques de déformées modales d'une table d'harmonie de piano à queue issues de ce modèle. Nous développerons plus en détails sur ce modèle physique à la section suivante puisqu'il permet des synthèses sonores d'une note jouée sur un piano.

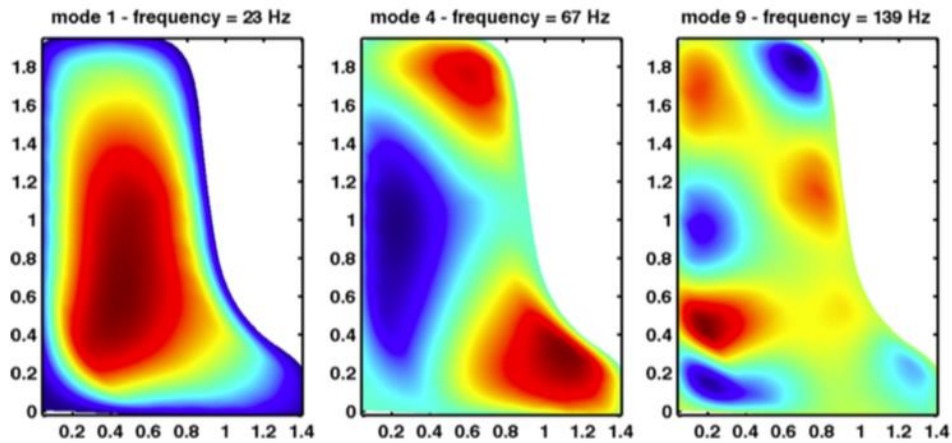


Figure I-14 : Exemples de déformées modales d'une table d'harmonie de piano à queue. Extrait de [ChCJ13].

Dans le même ordre d'idée, Berthaut [Bert04] propose une comparaison entre un modèle FEM d'une table d'harmonie de piano à queue et les déformées modales obtenues expérimentalement. Ce modèle se limite à la table d'harmonie « in vacuo » pour laquelle les superstructures sont « noyées » dans la plaque au lieu d'être déportées sur une face comme le montre la Figure I-15. L'auteur, conscient de cette erreur de modélisation, propose ainsi un terme de recalage en facteur des constantes de rigidité de la plaque orthotrope : modules de Young, coefficients de cisaillement, etc.

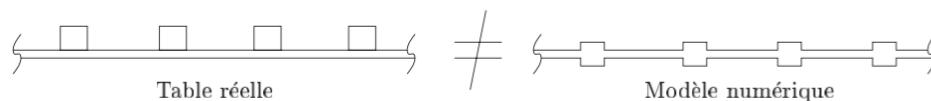
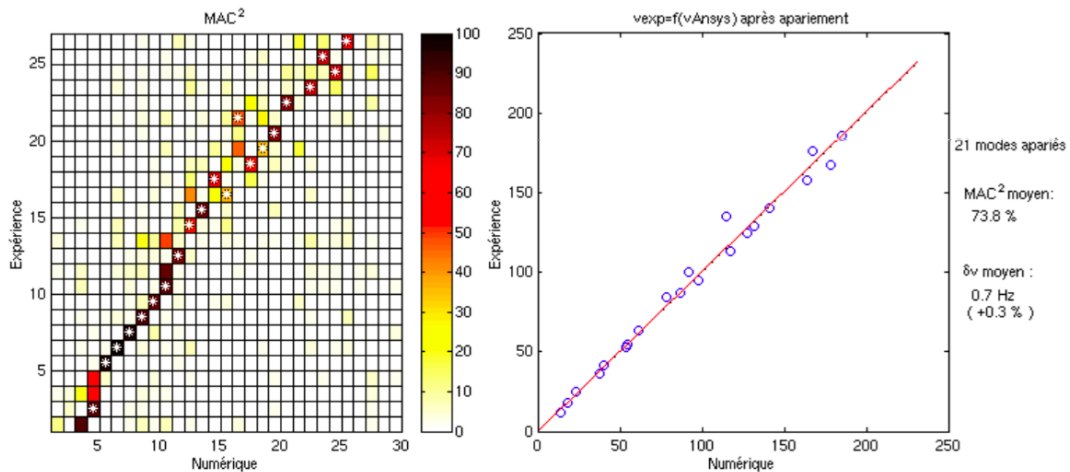


Figure I-15 : Table d'harmonie et modèle de [Bert04] en coupe.

Le résultat d'un tel modèle est plus qu'acceptable étant donné la bonne correspondance entre les fréquences et déformées modales expérimentales et numériques. Au travers de plusieurs comparaisons avant et après recalage entre les résultats numériques et expérimentaux, l'auteur montre toute la pertinence d'un tel modèle avec notamment une matrice de MAC en moyenne supérieure à 70% après recalage. La Figure I-16 en est un extrait représentatif.



Le même auteur propose également une méthode d'homogénéisation destinée à des applications basses fréquences, pour des longueurs d'onde grandes par rapport à l'espacement inter-raideurs, domaine où nous avons vu que le comportement de la table est globalement homogène [Conk96c]. Cette homogénéisation [BeIJ03b], basée sur des critères statiques, consiste à fusionner les raidisseurs avec la plaque et à déterminer un matériau homogène équivalent. L'intérêt de cette méthode réside dans le fait que le matériau de la plaque et celui des raidisseurs peuvent être différents d'une part et orthotropes d'autre part. Cependant, les hypothèses associées à cette méthode sont fortes : l'espacement inter-raideurs est parfaitement périodique et les barres sont de dimensions égales.

Les résultats escomptés sont malheureusement loin d'être satisfaisants. Berthaut lui-même réalise une comparaison avec les déformées et fréquences expérimentales d'un piano demi-queue : les déformées modales sont mal décrites et les fréquences propres sous-estimées d'environ 20%. Les limites de cette méthode sont partiellement confirmées par Ege [Ege09] qui réalise une comparaison expérimentale/modèle FEM non pas sur un piano à queue mais sur un piano droit. Les déformées modales sont cette fois-ci bien décrites mais le calcul d'homogénéisation entraîne des fréquences propres trop basses. Néanmoins, une table d'harmonie de piano droit est, par sa conception, moins éloignée d'une plaque homogène que celle d'un piano à queue ce qui peut expliquer que la méthode d'homogénéisation est plus pertinente. De l'aveu de l'auteur de la méthode, « il semble donc vain de vouloir utiliser un

modèle simple de table d'harmonie, contrairement à tout ce que l'on trouve dans la littérature »[BeIJ03b].

Paradoxalement, la littérature et les facteurs insistent sur le fait que la table d'harmonie en situation de jeu est assimilable à une plaque homogène isotrope en basses fréquences. Conklin [Conk96c] ajoute même que les barres (ou raidisseurs) compensent l'orthotropie du bois. Cette compensation est d'ailleurs corroborée par de nombreuses études [Bert04, DéCa94, Naka83, Wogr80]. Une démonstration intéressante est réalisée par Ege [Ege09] en supprimant les barres de renforts et en considérant une plaque homogène isotrope dont la raideur est celle correspondant à la fibre du bois. Les résultats sont reproduits en Figure I-17 et montrent la pertinence de cette démonstration.

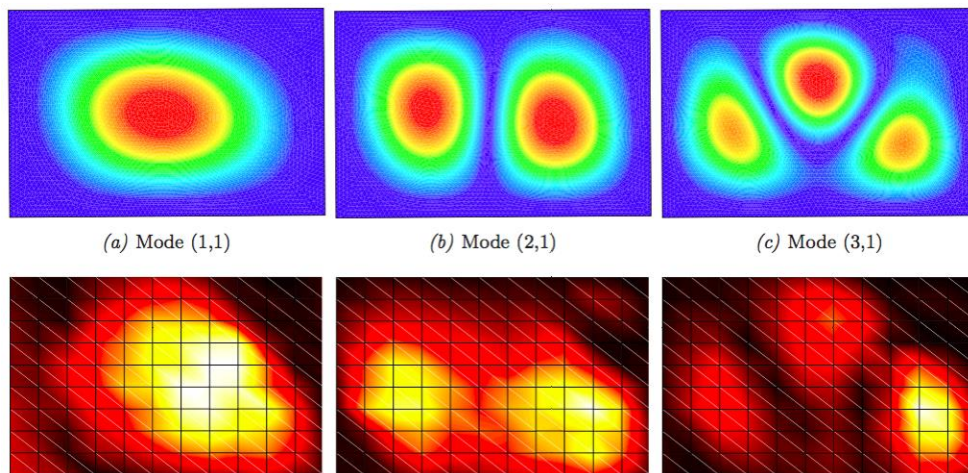


Figure I-17 : Déformées modales d'une table d'harmonie de piano droit extrait de [Ege09]. Ligne du haut : modèle FEM avec une plaque isotrope ; Ligne du bas : déformées expérimentales.

Ce résultat ouvre la voie à des modèles réduits de table d'harmonie tels que celui de Boutillon et Ege [BoEg13] permettant d'estimer rapidement la densité modale apparente ainsi que la mobilité d'une table d'harmonie. Deux domaines sont distingués : en basses fréquences, la table est considérée comme un assemblage de plaques homogènes délimitées par le chevalet medium-aigus (voir Figure I-18) ; en hautes fréquences, les vibrations étant localisées spatialement autour du point d'excitation, la table est seulement modélisée par les trois espaces inter-raideurs entourant ce même point.

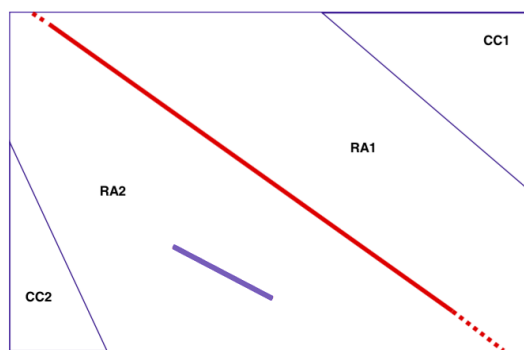


Figure I-18 : Découpage fictif de la table d'harmonie dans le modèle réduit [BoEg13] : la table est considérée comme un assemblage de plaques homogènes délimitées par le chevalet medium-aigus (en rouge).

L'apparition des premiers modèles réduits n'est pourtant pas récente puisque leur faible coût calcul était d'autant plus intéressant avant l'avènement de l'informatique grand public. Un modèle minimaliste est celui de Giordano présenté dans « Simple model of a piano soundboard » [Gior97] destiné à évaluer la mobilité au point d'entrée. Celui-ci se base sur la résolution de l'équation de mouvement d'une plaque orthotrope homogène rectangulaire pour une excitation sinusoïdale ponctuelle. La résolution est faite en temps sur une durée minimum de dix périodes et ce, pour chaque fréquence. Un schéma aux différences finies issu de [GiNa97], est utilisé pour exprimer le déplacement transversal à chaque pas de temps. Dans ce modèle, l'introduction des superstructures est simplifiée. L'auteur considère admissible que l'équation de mouvement de la plaque s'applique à chaque point de l'espace moyennant les considérations suivantes : les rigidités dynamiques sont modifiées au niveau des barres tandis que pour un point situé entre deux raidisseurs, l'équation de mouvement reste inchangée.

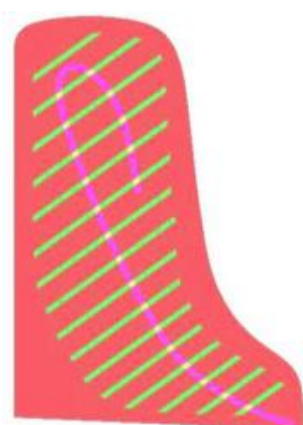
Sans être exhaustive, cette liste montre que les modèles numériques font essentiellement la part belle aux méthodes éléments finis. Quelques modèles réduits existent et permettent de recréer les tendances principales d'indicateurs tels que la mobilité ou encore la densité modale. Ce chapitre se poursuit avec une dernière sous-section dédiée au calcul temporel et à la synthèse sonore dans le cadre musical.

I.B.3. Réponse temporelle et synthèse sonore

Nous avons vu jusqu'ici que de nombreux paramètres participent au son produit par le piano allant des bois utilisés [Brém12] jusqu'aux spécificités liées à la conception de l'instrument. Pour rappel, citons la conception propre de la table d'harmonie [BeIJ03b, BoEg13, ChCJ13, ChCV13, EgBR13, Gior97, KiWa87, Suzu86], les cordes [Conk96b, EtCM15, Wein77], le marteau [Bout87, ChAs94, Conk96a], le cadre mais surtout les interactions entre ces différents sous-systèmes.

En outre, la qualité du son produit dépend de critères subjectifs et perceptifs. Les sections précédentes ont mis en évidence que la majorité des études se limite aux seuls aspects fréquentiels (modes propres, mobilité au chevalet) et ne peuvent donc représenter l'aspect perceptif du problème. Dans le but de répondre aux questions d'ordre purement musical, comme la recherche d'un bon compromis « longueur de son / puissance rayonnée » ou encore d'évaluer l'influence de paramètres structurels sur le timbre de l'instrument, la table d'harmonie seule n'est pas suffisante et l'intérêt d'une modélisation dans le domaine temporel devient évidente. Les travaux de Chabassier [Chab12, ChCJ13] semblent les plus accomplis pour répondre à ces questions en proposant un modèle complet de la table d'harmonie, du plan de cordes, du meuble, les interactions fluide/structure ainsi que la propagation des ondes dans le milieu fluide environnant.

La table d'harmonie est celle d'un piano à queue Steinway modèle D dont la plaque est considérée épaisse (modèle de Reissner-Mindlin). Le traitement des superstructures (barres et chevalet) présente une spécificité puisque leurs dimensions sont prépondérantes par rapport à l'épaisseur de la plaque. Dans ce modèle, les superstructures sont ainsi modélisées en autorisant une variation locale de hauteur et du matériau de la plaque. Comme dans le modèle de Berthaut [Bert04], l'inconvénient de cette approche est que les superstructures sont centrées au lieu d'être collées sur une face. Il en résulte deux approximations : la majoration des inerties due aux déports des barres n'est pas prise en compte et la membrane n'est pas alertée. La Figure I-19 montre une représentation de la table où les variations de matériaux sont symbolisées par des changements de couleurs.



Zone	Bois	Angle	Epaisseur
Rouge	Epicéa	-40	9 mm
Vert	Epicéa	54	34 mm
Rose	Hêtre	-40	29 mm
Jaune	Hêtre	-40	54 mm

Figure I-19 : Table d'harmonie de piano à queue Steinway modèle D, dont les différentes zones seront modélisées comme des matériaux différents. Extrait de [Chab12].

Le meuble de l'instrument est vu comme un obstacle au rayonnement de la structure dans le fluide (voir Figure I-20). La modélisation du plan de cordes fait l'objet de recherches approfondies. Sans entrer dans les détails puisque ce point sera abordé en profondeur dans le CHAPITRE IV, de nouvelles équations de mouvements sont créées pour modéliser le plus

exactement possible le comportement d'une corde de piano. Ce modèle dit « géométriquement exact » considère les non-linéarités géométriques de la corde justifiant ainsi la présence d'ondes transversales et d'ondes longitudinales, qui plus est couplées. En complément, ce modèle intègre la polarisation des ondes transversales. Pour finir, un modèle de marteau permet d'ajouter du réalisme à l'ensemble.

La résolution au sens propre du terme est réalisée via un modèle éléments finis pour la table d'harmonie, « Perfectly Matched Layers » pour le milieu fluide et d'une méthode itérative pour les cordes (non-linéaires). Les résultats d'un tel modèle sont très impressionnants en terme de réalisme mais restent imparfaits lorsque jugés par des musiciens. Il apparaît comme une présence légèrement trop importante dans les aigus comme le montre la Figure I-21. Mais le principal défaut de cette méthode réside dans les temps de résolution élevés de l'ordre de 24h en utilisant 300 cœurs de calcul. Il s'avère donc que ce modèle est mal adapté aux études paramétriques tant les résultats sont longs à obtenir et les moyens informatiques nécessaires importants.

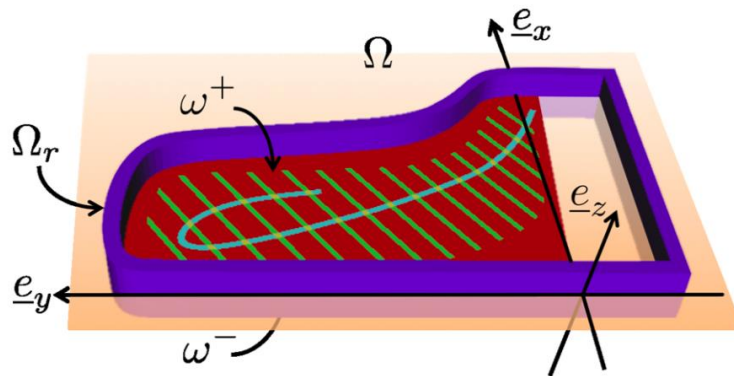


Figure I-20 : Schéma de principe d'une table d'harmonie dans un milieu fluide. Extrait de [Chab12].

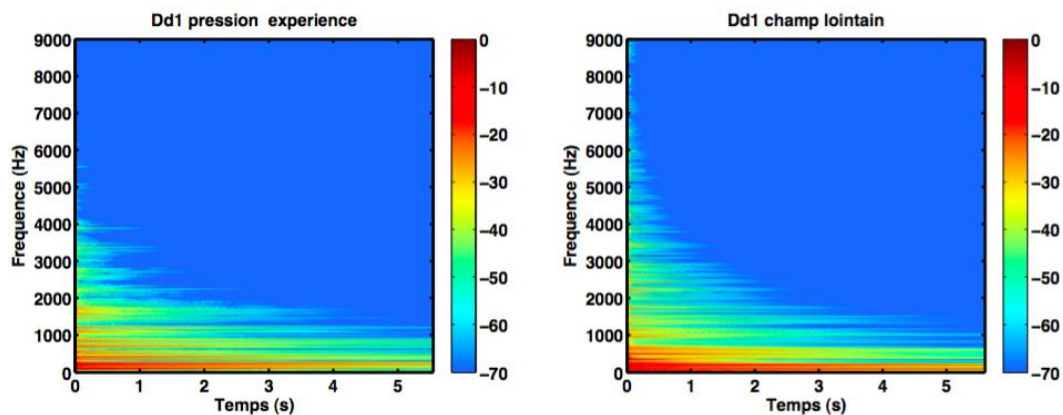


Figure I-21 : Comparaison expérimentale/numérique du spectre de la pression rayonnée par une note de Do0#. Extrait de [Chab12].

Conclusion

Ce premier chapitre nous a permis de présenter le rôle de la table d'harmonie et de mettre en évidence les contraintes majeures qui guident son dimensionnement. Nous avons pu constater au cours d'une synthèse bibliographique que le comportement dynamique de la table est difficile à appréhender surtout en hautes fréquences à cause de la présence de raidisseurs qui viennent complexifier le paysage vibratoire. En conséquence, le comportement vibroacoustique de la table d'harmonie est difficile à modéliser et, de fait, les études modales sont limitées aux basses fréquences. Le domaine hautes fréquences reste difficile d'accès autant pour les mesures expérimentales que pour les modèles développés, et on se retrouve globalement à effectuer des mesures de mobilité ou à utiliser des modèles réduits qui ne peuvent rendre compte de l'ensemble des caractéristiques de l'instrument. Exception faite lorsque l'accès à des ressources numériques importantes est possible comme nous l'avons vu à la fin de ce chapitre.

Il manque alors un outil simple et moins coûteux que les méthodes purement numériques, capable de décrire les tendances comportementales de l'instrument aussi bien en basses qu'en hautes fréquences. De manière à mener des études paramétriques et ainsi dégager des axes d'améliorations, cet outil doit nécessairement être alimenté par des données purement physiques, qui plus est, accessibles sans trop de difficultés. Cette recherche fera l'objet des prochains chapitres, tout d'abord dédiés à la modélisation de la table d'harmonie puis à son couplage avec une corde de façon à quantifier l'influence des paramètres structurels sur le son perçu.

CHAPITRE II

MODELE VIBRATOIRE D'UNE PLAQUE ORTHOTROPE DE CONTOURS QUELCONQUES

SOMMAIRE

II.A. PRINCIPE GENERAL	38
II.B. APPROCHE VARIATIONELLE DU PROBLEME.....	39
II.B.1. PLAQUE ETENDUE : SIMPLEMENT SUPPORTEE RECTANGULAIRE AVEC ORTHOTROPIE SPECIALE.....	40
II.B.2. DENSITE DE RESSORTS PONCTUELS.....	41
II.C. VERS UN MODELE GENERALISE	42
II.C.1. DECOMPOSITION MODALE : CHANGEMENT DE VARIABLES.....	43
II.C.2. MINIMISATION DE L'ACTION : EXPRESSION MATRICIELLE DU PROBLEME.....	44
II.D. REPONSE LIBRE ET FORCEE	45
II.D.1. PROBLEME AUX VALEURS PROPRES.....	45
II.D.2. CONVERGENCE DE LA BASE : INFLUENCE DE LA TRONCATURE MODALE	47
II.D.3. REPONSE A UNE EXCITATION PONCTUELLE HARMONIQUE	49
II.D.4. CHARGE ACOUSTIQUE PARIETALE.....	50
II.D.5. MECANISMES D'AMORTISSEMENT	51
II.E. CALIBRATION DE LA DENSITE DE RESSORTS.....	55
II.F. COMPARAISON AVEC UN MODELE ELEMENTS FINIS	60

Ce second chapitre pose les bases d'un modèle quasi-analytique décrivant le comportement vibroacoustique des structures raidies dans deux directions perpendiculaires et de contours quelconques. On s'intéresse tout particulièrement à des structures composées d'une plaque dont le matériau est orthotrope (modules de Young différents dans les directions des axes d'orthotropie). Les axes principaux d'orthotropie ne sont pas considérés parallèles aux bords de plaque afin de rester le plus généraliste possible et ainsi proposer un modèle susceptible d'être appliqué dans de nombreux domaines. Dans le cas contraire, on parlera d'orthotropie spéciale. De plus, on considère un système de renforts raidissant la plaque de part et d'autre par collage. Ces renforts, que l'on qualifiera parfois de superstructures dans la suite de ce manuscrit, sont orientés dans les directions des axes principaux d'orthotropie, par conséquent dans deux directions perpendiculaires.

Pour une approche plus pédagogique, ce chapitre est axé uniquement sur les deux premières caractéristiques énoncées : la description d'un angle d'orthotropie θ pouvant prendre n'importe quelle valeur et la création de contours quelconques. L'ajout de superstructures fera l'objet du chapitre suivant.

II.A. Principe général

Le modèle prend comme point de départ une plaque rectangulaire simplement supportée avec une orthotropie dite spéciale (« special orthotropy » : axes principaux parallèles aux bords de plaque). L'avantage d'une telle base réside dans sa simplicité d'utilisation ainsi que dans la bonne connaissance de son comportement vibro-acoustique, qui plus est, couramment utilisée dans la littérature. On considère donc une plaque rectangulaire à l'intérieur de laquelle la géométrie que l'on souhaite décrire puisse s'inscrire. On parlera par la suite de « plaque étendue » pour se référer à cette plaque représentée Figure II-1-a.

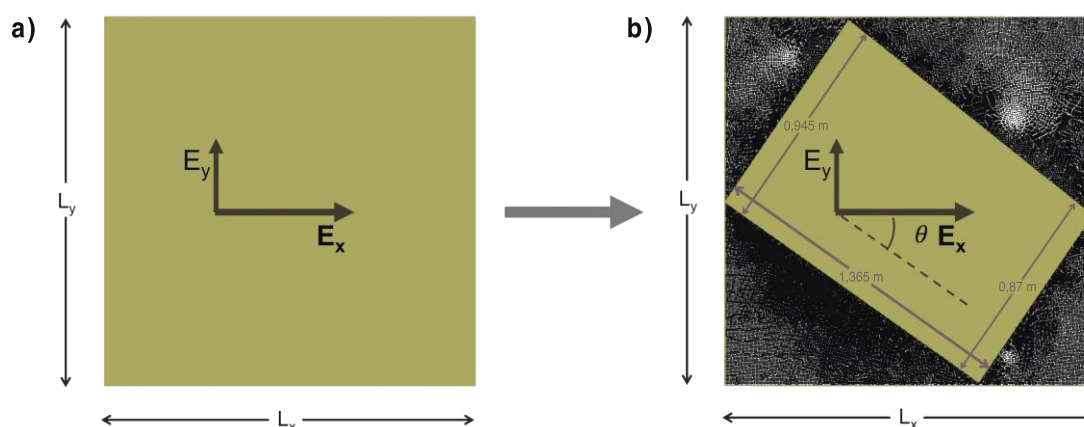


Figure II-1 : Schéma de principe d'une plaque étendue sur laquelle est appliquée une densité de ressorts ponctuels. a) plaque étendue rectangulaire avec un angle d'orthotropie nul (orthotropie spéciale) ; b) ajout d'une densité de ressorts ponctuels décrivant ainsi une nouvelle géométrie avec des contours non rectangulaire ainsi qu'un angle d'orthotropie défini par θ .

Par ajout d'une densité de ressorts ponctuels destinés à bloquer le déplacement transversal de la plaque étendue, on décrit à la fois les contours ainsi que l'angle d'orthotropie θ comme le montre la Figure II-1-b. Les conditions aux limites tendent alors vers l'encastrement sur les contours de la géométrie inscrite. Cette géométrie correspond à la plaque de la table d'harmonie de Pleyel P131 que nous modéliserons dans le CHAPITRE III. Les données d'entrée de la plaque étendue correspondent donc à ce cas d'application. Celle-ci est constituée d'épicéa dont les caractéristiques du bois sont issues du modèle de Berthaut [Bert04]. L'épaisseur est considérée constante ce qui n'est pas représentatif de la réalité du piano. En effet nous avons vu dans le CHAPITRE I section I.A.1 que les bords sont moins épais de façon à donner plus d'amplitude aux premiers modes. Il convient donc de déterminer une hauteur équivalente. Sachant que les

bords sont en général moins épais d'environ 2mm par rapport au centre. L'épaisseur au niveau des bords étant de 6mm, nous fixons donc l'épaisseur à 7mm pour toute la plaque. Les ressorts sont quant à eux positionnés de façon à recréer un angle θ d'environ 35° (mesuré sur une table à notre disposition) entre les fibres du bois et le bord de la table tel que défini sur la Figure II-1-b. Le Tableau II-1 regroupe les différentes caractéristiques de la plaque étendue.

ρ [kg.m ⁻³]	440
h [m]	0,007
L_x [m]	1,61
L_y [m]	1,56
E_x [Pa]	$1,59 E^{10}$
E_y [Pa]	$6,90 E^8$
ν_{xy}	0,44
ν_{yx}	0,019
G_{xy} [Pa]	$6,20E+08$

Tableau II-1 : Propriétés de la plaque dite « étendue » en épicea. Données matériau issues de Berthaut [Bert04].

La Figure II-2 donne à titre d'exemple d'autres géométries et angles qu'il est possible de décrire par ce principe : par une mise en donnée adéquate, il est possible de décrire n'importe quel angle et n'importe quelle forme.

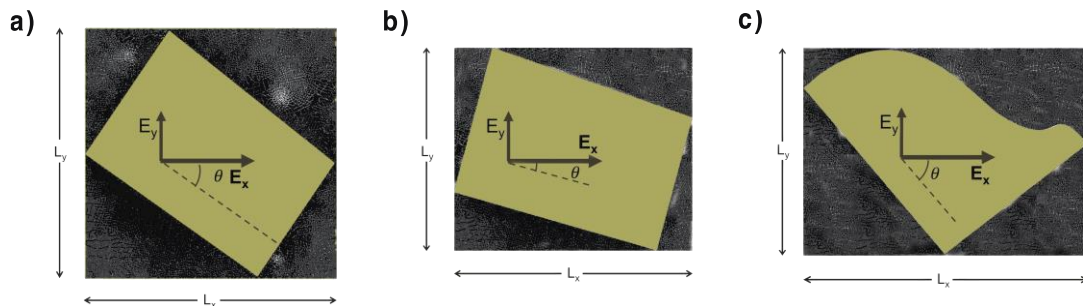


Figure II-2 : Exemples de géométrie possibles : a) géométrie considérée dans ce manuscrit tel que définie Figure II-1-b ; b) mêmes contours avec angle d'orthotropie plus petit ; c) Autre type de géométrie dont les contours et l'orientation des deux modules de Young laissent entrevoir un piano à queue.

II.B. Approche variationnelle du problème

Le modèle développé se base sur une approche variationnelle qui s'inspire des travaux de Laulagnet & Guyader [GuLa90, GuLa94]. Dans ce cadre, il convient d'exprimer la fonctionnelle de Hamilton du système défini comme son action durant un intervalle de temps arbitraire $[t_0; t_1]$. On donne alors la forme générique suivante de cette fonctionnelle de Hamilton ou fonctionnelle d'action du système :

$$H = \int_{t_0}^{t_1} (E_c - E_d + E_w) dt \quad (\text{II.1})$$

avec E_c , E_d les énergies cinétique et de déformation et E_w la somme des travaux extérieurs dus à un effort appliqué ou encore la pression acoustique pariétale.

Cette fonctionnelle se compose alors de la somme des énergies relatives aux différents sous-systèmes constituant le système complet. Dans un premier temps, on s'intéresse tout particulièrement aux énergies relatives à la plaque étendue (simplement supportée rectangulaire) et à la densité de ressorts ponctuels.

II.B.1. Plaque étendue : simplement supportée rectangulaire avec orthotropie spéciale

Le contenu de ce manuscrit ne donne que les grandes lignes des calculs réalisés. Le détail de cette section est présenté en ANNEXE A. La plaque rectangulaire étendue suit les hypothèses cinématiques liées à la théorie des plaques minces de Love-Kirchhoff. Ces dernières impliquent de négliger :

- Les effets de pompage dans l'épaisseur h de la plaque tant que la fréquence reste inférieure à la fréquence de pompage $f_{pompage} \approx \frac{1}{h} \sqrt{\frac{E_{mini}}{\rho}}$,
- Les effets de membranes : le feuillet moyen n'admet pas de déplacements dans le plan (x, y) ,
- Le cisaillement dans les plans de flexion.

En appliquant ces hypothèses au champ de déplacements de la plaque étendue et en linéarisant ce champ autour de la côte $z = 0$ (développement limité à l'ordre 1), il vient l'expression suivante du champ cinématique de la plaque étendue :

$$\begin{cases} u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{II.2})$$

De ce champ de déplacement, il est possible de déduire successivement les énergies cinétiques ainsi que l'énergie de déformation associées à la plaque étendue. Pour cette dernière, les contraintes dans la plaque sont déterminées en suivant la loi de Hooke tel que $\boldsymbol{\sigma} = \bar{\bar{M}}_H \boldsymbol{\epsilon}$ où

\bar{M}_H représente la matrice de Hooke (tenseur d'ordre 0 : proportionnalité entre les contraintes et les déformations). σ et ϵ sont les tenseurs des contraintes et des déformations selon la notation de Voigt (notation vectorielle). Il vient ainsi aisément (voir ANNEXE A) la sous-fonctionnelle d'action suivante [Leis69] :

$$H_{plaque} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \rho h \dot{w}^2 - (D_1 w_{,xx}^2 + D_3 w_{,yy}^2 + D_2 w_{,xx} w_{,yy} + D_4 w_{,xy}^2) dx dy dt \quad (\text{II.3})$$

avec w le déplacement transversal de la plaque ; L_x et L_y les dimensions de la plaque ; ρ sa masse volumique ; $D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$, $D_3 = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$, $D_2 = \frac{\nu_{yx} E_x h^3}{6(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$ et $D_4 = \frac{G_{xy} h^3}{3}$ les rigidités dynamiques ; E_x et E_y les deux modules de Young ; ν_{xy} et $\nu_{yx} = \nu_{xy} \frac{E_y}{E_x}$ les coefficients de Poisson qui traduisent la capacité du matériau à se contracter dans une direction lorsque l'on tire dans la direction perpendiculaire.

L'ensemble de termes dans l'intégrale de temps définit par ailleurs le Lagrangien de ce sous-système, dépendant du déplacement transversal de la plaque et de ses dérivées temporelles et spatiales :

$$\mathcal{L}_{plaque} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \rho h \dot{w}^2 - (D_1 w_{,xx}^2 + D_3 w_{,yy}^2 + D_2 w_{,xx} w_{,yy} + D_4 w_{,xy}^2) dx dy \quad (\text{II.4})$$

II.B.2. Densité de ressorts ponctuels

Une densité de ressorts ponctuels de raideur k est appliquée à la plaque. Dans cette zone, le déplacement transversal est alors limité par les efforts normaux appliqués par les ressorts. Ainsi, pour une raideur suffisamment importante, le déplacement transversal devient bloqué. Il est possible de cette façon de décrire n'importe quel contour ainsi que n'importe quel angle d'orthotropie comme le suggère la Figure II-2. La plaque rectangulaire étendue avec orthotropie spéciale devient alors un objet virtuel utilisé dans le seul but de recréer le comportement de la géométrie décrite par la densité de ressorts. L'avantage d'une telle méthode est d'utiliser deux objets simples dont le comportement est parfaitement connu et maîtrisé afin de recréer artificiellement un objet beaucoup plus complexe.

La démarche théorique reste la même qu'en section II.B.1. Dans le cas d'un ressort purement théorique (masse nulle), seule l'énergie de déformation est présente. La sous-fonctionnelle d'action d'un tel système est alors extrêmement simple :

$$H_{ressort} = \int_{t_0}^{t_1} -\frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} kw^2 \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) dx dy dt \quad (\text{II.5})$$

où la multiplication des deux distributions de Dirac rend ce ressort appliqué aux coordonnées (x_s, y_s) .

Finalement, la sous-fonctionnelle d'une densité de N_s ressorts s'écrit simplement comme une somme de l'expression (II.5) où les coordonnées (x_s, y_s) varient :

$$H_{ressorts} = \sum_{s=1}^{N_s} \int_{t_0}^{t_1} -\frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} kw^2 \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) dx dy dt \quad (\text{II.6})$$

Au même titre que la raideur, le nombre de ressorts nécessaires conditionne également les possibilités de blocage dans les zones voulues. Ces deux points seront abordés en fin de chapitre et on montrera en sus que la solution proposée est pertinente.

II.C. Vers un modèle généralisé

La fonctionnelle d'action de la plaque étendue bloquée s'écrit comme la somme des sous-fonctionnelles équations (II.3) et (II.6) :

$$\begin{aligned} H_{\text{plaque étendue}} &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \rho h \dot{w}^2 - (D_1 w_{,xx}^2 + D_3 w_{,yy}^2 + D_2 w_{,xx} w_{,yy} + D_4 w_{,xy}^2) dx dy dt \\ &\quad - \sum_{s=1}^{N_s} \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} kw^2 \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) dx dy dt \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

Traditionnellement, la minimisation de l'action du système via le principe de moindre action ($\Delta H = 0$) permet d'exprimer l'équation du mouvement du système. Dans la pratique, on utilise par ailleurs la forme différentielle d'Euler-Lagrange. Dans le cas présent, cela revient à minimiser le lagrangien de l'équation (II.7) par rapport au déplacement transversal ainsi que ses dérivées spatiales et temporelles :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{w}} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{,xx}} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{,yy}} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_{,xy}} = 0 \quad (\text{II.8})$$

L'équation différentielle qui en découlerait n'aurait pas de solution simple comme peut l'avoir une poutre ou encore la plaque rectangulaire étendue. Dans l'optique d'une résolution simple, nous allons introduire les modes de la plaque appuyée étendue d'où il découlera un problème généralisé.

II.C.1. Décomposition modale : changement de variables

Comme mentionné précédemment, le point de départ de notre modélisation est une plaque rectangulaire simplement supportée avec une orthotropie « spéciale ». Cette base, couramment utilisée en vibration mais aussi en rayonnement acoustique des plaques, est particulièrement bien adaptée aux approches analytiques et a fait l'objet de nombreuses études [GuLa90, GuLa94, Laul98b]. Bien évidemment cette base n'est pas celle de la géométrie interne décrite par la densité de ressorts mais bien une base pratique destinée à la recréer comme nous le verrons par la suite. Le déplacement transversal $w(x, y, t)$ est ainsi écrit comme une combinaison linéaire des modes $\phi_{mn}(x, y)$ de plaque simplement supportée étendue pondérés par les amplitudes modales $a_{mn}(t)$:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \phi_{mn}(x, y) \quad \forall x \in [0; L_x] \text{ and } y \in [0; L_y] \quad (\text{II.9})$$

où $\phi_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right)$. L'ANNEXE B démontre comment déterminer ces modes propres ainsi que les fréquences propres associées. De plus, notons que ces vecteurs propres sont orthogonaux (voir également l'ANNEXE B).

En injectant la décomposition modale (II.9) dans l'équation (II.7), la fonctionnelle d'action (tout comme le Lagrangien) devient alors fonction des amplitudes modales $a_{mn}(t)$ et de leurs dérivées temporelles ainsi que des déformées propres $\phi_{mn}(x, y)$ et de leur dérivées spatiales. L'avantage de cette décomposition est alors de pouvoir séparer les dépendances par rapport au temps et à l'espace en deux fonctions indépendantes l'une de l'autre. Il est ainsi possible de calculer l'intégrale de surface contenue dans le Lagrangien, ce qui était jusque là impossible. Grâce à cela, le Lagrangien devient uniquement fonction des variables $[a_{mn}(t), \dot{a}_{mn}(t)]$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{plaque}}^{\text{bloquée}} = & \frac{1}{2} \frac{L_x L_y}{4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \rho h \dot{a}_{mn}^2(t) - \left[D_1 \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^4 + D_3 \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^4 + (D_2 + D_4) \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \right] a_{mn}^2(t) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} k \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \phi_{mn}(x_s, y_s) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \phi_{pq}(x_s, y_s) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

où la première ligne correspond à la plaque et la deuxième à la densité de ressorts. Cette expression met en évidence les phénomènes de couplages des modes de plaque étendue introduits par les ressorts matérialisés par la double somme sur les indices p et q . Bien évidemment, la contribution de la plaque étendue n'apporte pas de couplage en raison des propriétés d'orthogonalité de ses vecteurs propres et de ses dérivées spatiales. Finalement, cette expression (dont le calcul est détaillé en ANNEXE C) montre que le comportement vibratoire du système plaque étendue / densité de ressorts est reconstitué par couplage des modes de plaque étendue simplement supportée rectangulaire (somme sur P et Q).

II.C.2. Minimisation de l'action : expression matricielle du problème

Le développement sur la base des modes de plaque simplement supportée a permis d'exprimer les équations du problème en fonction de nouvelles variables (voir II.C.1). De la même façon que dans une démarche que l'on pourrait qualifier de classique, la détermination de l'équation de mouvement décrivant le problème s'obtient en minimisant l'action. Comme mentionné, la forme différentielle du principe de moindre action (forme différentielle d'Euler-Lagrange) est privilégiée, soit la formulation suivante :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}_{mn}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{a}}_{mn}} = 0 \quad \forall mn \quad (\text{II.11})$$

La dérivée partielle sur les $\dot{\mathbf{a}}_{mn}$ conduit à exprimer des termes de masse, tandis que la dérivée sur les \mathbf{a}_{mn} conduit à des termes de raideur. Il en découle la forme matricielle suivante :

$$\{\bar{\mathbf{M}}^{plaque} + \bar{\mathbf{M}}^{ressorts}\} \ddot{\mathbf{a}} + \{\bar{\mathbf{K}}^{plaque} + \bar{\mathbf{K}}^{ressorts}\} \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (\text{II.12})$$

où $\bar{\mathbf{M}}$ et $\bar{\mathbf{K}}$ sont les matrices de masse et de raideur.

L'avantage d'une telle formulation est d'explicitement clairement les termes de couplages introduits par les différentes contributions. Dans le cas présent, ces matrices sont la somme de deux contributions distinctes : l'une venant de la plaque étendue et l'autre de la densité de ressorts ponctuels. Bien entendu, les matrices liées à la plaque sont diagonales puisque le déplacement transversal est projeté dans la base même de la plaque étendue. En revanche, celles liées à la densité de ressorts (tout comme pour un unique ressort) sont pleines et symétriques. Ainsi, les termes extra diagonaux représentent les couplages introduits, couplages qui viendront modifier le comportement de la plaque étendue et recréer artificiellement le comportement de la géométrie « dessinée » par la densité de ressort. L'ANNEXE D explicite

l'obtention de ces termes matriciels. Notons que la taille des matrices est déterminée par la troncature sur les ordres M et N dans la décomposition modale Eq. (II.9). Nous verrons par la suite que la précision des résultats dépend de cette dernière.

II.D. Réponse libre et forcée

Nous avons jusque là exclusivement traité des énergies cinétique et de déformation des différentes contributions en mettant de côté les travaux extérieurs pouvant s'appliquer à la structure. Deux cas de figures sont possibles : soit la structure n'est soumise à aucun travail et on s'intéresse à la réponse libre du système (résolution du problème aux valeurs propres) ; soit un ou plusieurs travaux s'y appliquent et la réponse du système est dite forcée. Le premier cas correspond à la solution du problème homogène tandis que le second à une solution particulière de l'EDP qui décrit le comportement de la structure en question : en l'occurrence une plaque étendue sur laquelle une densité de ressorts ponctuels appliquent chacun un effort normal à la plaque.

Cette partie montre de quelles façons ces deux cas de figures sont résolus. En particulier, le cas de la réponse forcée soulève plusieurs questions dont le type d'excitation et le choix d'un modèle d'amortissement adéquat.

II.D.1. Problème aux valeurs propres

La résolution du problème aux valeurs propres ne fait pas intervenir de travail extérieur (solution sans second membre). Le problème généralisé aux valeurs propres s'obtient en imposant une solution harmonique ($\mathbf{a}(t) = \mathbf{a} e^{j\omega t}$). Il en découle :

$$\bar{\bar{\mathbf{K}}}_{tot} \mathbf{a} - \omega^2 \bar{\bar{\mathbf{M}}}_{tot} \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad (\text{II.13})$$

où ω^2 sont les valeurs propres du système et $\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{tot}, \bar{\bar{\mathbf{K}}}_{tot}$ la somme des matrices de masse et de raideur de toutes les contributions. Il est également possible de revenir à un problème aux valeurs propres standard en prémultipliant cette expression par $\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{tot}^{-1}$, où $\bar{\bar{\mathbf{M}}}_{tot}^{-1} \bar{\bar{\mathbf{K}}}_{tot}$ devient la matrice de rigidité dynamique ou noyau du système [Gmür97].

La résolution du problème aux valeurs propres permet d'obtenir une matrice diagonale des pulsations propres au carré et une matrice de vecteurs propres normés notée $\bar{\bar{\mathbf{T}}}$.

« L'orthogonalité des vecteurs propres modaux et des modes propres d'une structure constitue une propriété fondamentale, puisqu'elle permet de montrer leur indépendance linéaire et qu'elle revêt une grande importance dans la formulation générale de la solution du régime libre ou forcée du système [Gmür97]. »

On montre aisément que les vecteurs propres contenus dans la matrice $\bar{\bar{T}}$ sont M et K orthogonaux et qu'elle permet ainsi de diagonaliser les matrices de masse et de raideur en les pré- et post-multipliant par la transposée de $\bar{\bar{T}}$ et $\bar{\bar{T}}$ elle-même (co-diagonalisation des matrices de masse et de raideur [Bert04, Gmür97]). Le travail virtuel des forces d'inertie et des forces élastiques du mode d'indice (m, n) est nul lors d'un déplacement selon le mode (p, q) et plus généralement, il y a indépendance mécanique des modes entre eux [GéRi96, CKBD08]. Il en résulte la relation entre la base initiale (i.e la base de la plaque étendue) et la base du système (i.e, la base de la géométrie décrite par la densité de ressorts) qui est donnée par l'expression suivante où \mathbf{a} et \mathbf{b} sont les vecteurs d'amplitudes modales respectivement dans la base initiale et dans la base du système :

$$\mathbf{a} = \bar{\bar{T}}\mathbf{b} \quad (\text{II.14})$$

On peut alors réécrire le problème généralisé dans sa base de vecteur propre. En utilisant l'équation (II.14) et en pré-multipliant l'équation (II.20) par ${}^t\bar{\bar{T}}$ le problème devient diagonal :

$$\bar{\bar{K}}_s\mathbf{b} - \omega^2\bar{\bar{M}}_s\mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{II.15})$$

$$\text{où } \bar{\bar{K}}_s = {}^t\bar{\bar{T}}\bar{\bar{K}}_{tot}\bar{\bar{T}} \text{ et } \bar{\bar{M}}_s = {}^t\bar{\bar{T}}\bar{\bar{M}}_{tot}\bar{\bar{T}}.$$

La reconstitution des modes de structure se fait par combinaison linéaire des modes de plaque étendue (simplement supportée rectangulaire). Pour reconstruire la $i^{\text{ème}}$ déformée propre $\Phi^{(i)}$, les amplitudes modales (qui correspondent aux termes du $i^{\text{ème}}$ vecteur propre) viennent pondérer celles de la plaque étendue :

$$\Phi_i(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}^{(i)} \phi_{mn}(x, y) \quad \forall x \in [0; L_x] \text{ et } y \in [0; L_y] \quad (\text{II.16})$$

où (i) se réfère à une colonne de la matrice des vecteurs propres.

II.D.2. Convergence de la base : influence de la troncature modale

Dans le cas des vibrations de structures simples telles que des plaques ou même de poutres, l'influence de la troncature dans la décomposition modale est facile à appréhender. En effet, dans ces cas pour lesquels les équations de mouvements sont bien définies on connaît analytiquement les expressions des fréquences propres et des déformées propres de façon analytique. Ainsi, pour mener une étude jusqu'à une fréquence donnée, l'ordre de troncature pour approximer le déplacement est facile à déterminer.

Dans le cas présent, les choses ne sont pas aussi simples puisque nous nous servons de la décomposition modale sur les modes d'une plaque simplement supportée pour recomposer les modes d'une autre structure. De ce fait, il est nécessaire de prendre en compte plus de modes que ce que l'on ferait habituellement. En effet, recréer les modes de petites longueurs d'onde de notre structure nécessite de prendre en compte les modes de la plaque simplement supportée dont les longueurs d'onde sont encore plus courtes. La précision de notre méthode de calcul dépend alors directement de la troncature réalisée sur la décomposition modale équation (II.9).

Remarque

Plus la structure considérée est éloignée de la base initiale, plus il est nécessaire d'augmenter les ordres de troncature.

L'objectif est de trouver une méthode de validation de ces ordres de troncature, ce qui correspond également à la dimension de l'équation linéaire matricielle (II.13). Un grand classique est la convergence en fréquence, ce qui consiste à évaluer de combien les fréquences propres évoluent en pourcentage entre deux valeurs de troncatures différentes. Dans le même ordre d'idée et d'un point de vue spatial, la matrice de MAC (Modal Assurance Criterion) [Alle03, VaJB10] permet d'évaluer la concordance des déformées propres entre deux troncatures.

Ces deux indicateurs semblent correspondre à notre objectif d'autant plus qu'ils ne dépendent pas d'un éventuel point d'application d'un effort et s'intéressent vraiment à l'aspect modal de la structure et donc à sa base propre. Cependant, on sait qu'en montant en fréquence les aspects modaux perdent progressivement de leur sens notamment à cause du recouvrement modal qui tend à masquer les phénomènes de résonance et d'anti-résonance. Les méthodes statistiques comme la SEA sont d'ailleurs bien adaptées aux domaines hautes fréquences à l'instar de la théorie de Sabine pour l'acoustique des salles [Kutt09].

Ainsi la validation des déformées propres en hautes fréquences via une matrice de MAC apparaît comme peu pertinente. En revanche, la convergence en fréquence peut être facilement

conservée étant donné son aspect facile à réaliser. Pour compléter cette dernière, on s'intéresse à la densité modale qui rend compte du nombre de modes présents par bandes de fréquence. On considère alors que le comportement vibratoire haute fréquence est davantage lié au « paquet de modes » qui réagissent, ce qui est cohérent avec la notion de recouvrement modal [Lesu88]. De ce fait, l'exactitude spatiale des déformées propres devient un second ordre.

Finalement, les critères de convergence de notre base sont déterminés à partir de la résolution du problème aux valeurs propres (II.13). Dans l'exemple d'application qui suit, la densité de ressorts est ici calibrée de façon adéquate. Nous reviendrons sur ce point plus tard en fin de chapitre section II.E. Nous faisons donc varier la troncature sur les ordres (M, N) et étudions l'évolution des indicateurs retenus. À titre de comparaison, on trace également la densité modale théorique d'une plaque orthotrope (angle de 35°) rectangulaire encadrée (de surface équivalente) dont l'expression est donnée par Ege [Ege09] basée sur les travaux de [XiTJ04] :

$$n(f) = n_\infty - \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \left(\frac{\rho h}{\tilde{D}(0, \theta_\perp)} \right)^{\frac{1}{4}} \left[2L_x + 2L_y \left(\frac{\tilde{D}(0, \theta_\perp)}{\tilde{D}\left(\frac{\pi}{2}, \theta_\perp\right)} \right)^{\frac{1}{4}} \right] f^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{II.17})$$

où $n_\infty = \frac{S}{\pi} \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} \left(\frac{D_1}{D_3} \right)^{\frac{1}{4}} F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right)$; $F\left(\frac{\pi}{2}, \alpha\right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \alpha^2 \sin^2(\theta)) d\theta$ avec $\alpha^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{D_2 + D_4}{2\sqrt{D_1 D_3}} \right)$
 et $\tilde{D}(\theta, \theta_\perp) = D_1 \cos^4(\theta - \theta_\perp) + D_3 \sin^4(\theta - \theta_\perp) + (D_2 + D_4) \cos^2(\theta - \theta_\perp) \sin^2(\theta - \theta_\perp)$.

La Figure II-3 communique les résultats de cette étude de convergence pour une fréquence maximum de 3 kHz. Étant donné que l'objectif est de pouvoir réaliser des réponses forcées de notre système et sachant qu'en hautes fréquences le recouvrement modal implique que les modes de la structure répondent par bande, on considère pour la convergence en fréquence un mode dont la fréquence propre est légèrement supérieure à 3 kHz, soit le 347^{ème} mode propre à 3200 Hz pour une troncature de $(M, N) = (82, 63)$.

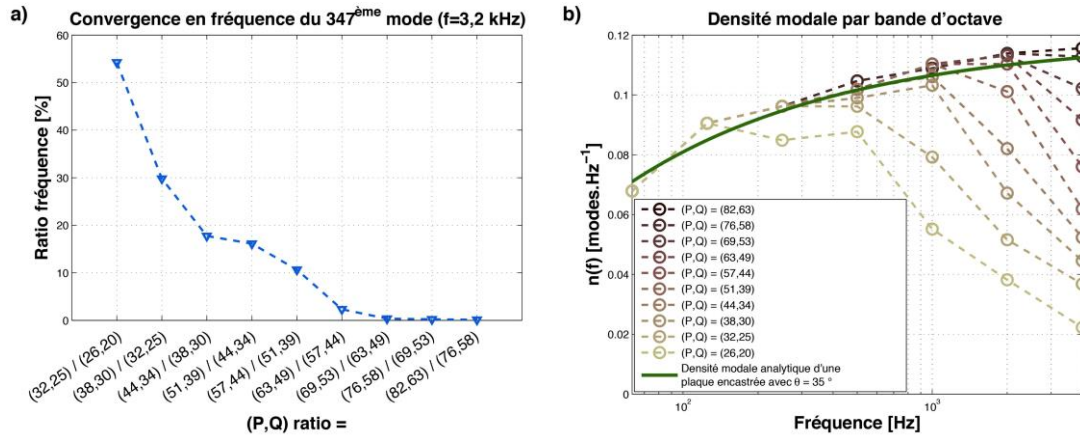


Figure II-3 : Convergence de la solution sur la bande de fréquence [0;3000] Hz. a) Convergence en fréquence du 347^{ème} mode propre dont la fréquence finale est au environ de 3,2 kHz : différence en % entre chaque ordre de troncature (M, N) ; b) Densités modales par bande d'octave pour différents ordres de troncature (traits pointillés) comparées à la densité modale théorique d'une plaque orthotrope quelconque rectangulaire de surface équivalente issue de [Ege09].

La Figure II-3-a révèle que la fréquence propre du 347^{ème} mode ne varie plus que d'environ quelques pourcents dès $(M, N) = (63, 49)$ ce qui est très acceptable. La densité modale tracée par bande d'octave (Figure II-3-b) donne des informations supplémentaires. On constate que pour une troncature insuffisante, il manque des modes en hautes fréquences. Plus cette dernière est sous dimensionnée et plus ce phénomène apparaît vers les bandes de fréquences basses. Finalement, cette étude démontre qu'une troncature sur les ordres $(M, N) = (82, 63)$ est satisfaisante et offre une base initiale adaptée permettant de déterminer la base physique du système.

II.D.3. Réponse à une excitation ponctuelle harmonique

Contrairement au problème aux valeurs propres, un travail dû à un ou plusieurs efforts extérieurs est maintenant pris en compte dans la fonctionnelle de Hamilton. Celui-ci vient alors enrichir les équations (II.13) et (II.15) d'un second membre. On considère un effort ponctuel sinusoïdal appliqué en (x_e, y_e) avec une amplitude de 1 Newton. Le travail E_w associé à un tel effort est très simple et défini par :

$$E_w = e^{j\omega t} w(x_e, y_e) \quad (\text{II.18})$$

En injectant la décomposition modale du déplacement transversal $w(x, y)$ équation (II.9), il découle une expression des termes de l'effort généralisé F_e associé à ce travail en minimisant l'action sur un mode a_{mn} arbitraire :

$$\begin{aligned}
 F_{pq} &= \frac{\partial E_w}{\partial a_{pq}} = e^{j\omega t} \frac{\partial \sum_m \sum_n a_{mn}(t) \phi_{mn}(x_e, y_e)}{\partial a_{pq}} \\
 &= e^{j\omega t} \phi_{pq}(x_e, y_e)
 \end{aligned}
 \tag{II.19}$$

Compte tenu de cet effort extérieur, la formulation matricielle du problème devient :

$$\bar{K}_{tot} \mathbf{a} - \omega^2 \bar{M}_{tot} \mathbf{a} = \mathbf{F}_e \quad \text{dans la base simplement supportée}$$

$$\bar{K}_s \mathbf{b} - \omega^2 \bar{M}_s \mathbf{b} = {}^t \bar{T} \mathbf{F}_e \quad \text{dans la base du système}$$

$$\text{où } \bar{K}_s = {}^t \bar{T} \bar{K}_{tot} \bar{T} \text{ et } \bar{M}_s = {}^t \bar{T} \bar{M}_{tot} \bar{T}.$$

En présence d'un amortissement de type modal, une matrice d'amortissement \bar{C} est introduite sur les vitesses généralisées dans la base du système (les mécanismes d'amortissement seront abordés plus en détail dans la section II.D.5). L'intérêt de calculer la réponse dans la base des modes de table d'harmonie est que cette matrice \bar{C} constitue l'amortissement des « vrais » modes et peut être ainsi obtenue expérimentalement. On donne alors l'expression du vecteur des amplitudes modales dans la base du système :

$$\mathbf{b} = [\bar{K}_s + j\omega \bar{C} - \omega^2 \bar{M}_s]^{-1} {}^t \bar{T} \mathbf{F}_e$$

Ou encore dans la base de la plaque étendue, i.e la base initiale :

$$\mathbf{a} = [\bar{K}_{tot} + j\omega ({}^t \bar{T})^{-1} \bar{C} \bar{T}^{-1} - \omega^2 \bar{M}_{tot}]^{-1} \mathbf{F}_e$$

II.D.4. Charge acoustique pariétale

Le comportement vibratoire d'une structure couplée à un fluide ne va pas avoir le même comportement que dans le vide. En effet, plongée dans un fluide, toute structure vibrante échange de l'énergie avec son environnement. La pression acoustique qui en résulte vient s'appliquer sur la structure et ainsi perturber son comportement de façon d'autant plus importante que le fluide est lourd. Une façon de prendre en compte directement l'influence de cette pression acoustique pariétale dans les équations du mouvement est d'introduire une matrice d'impédance intermodale acoustique \bar{Z} :

$$\bar{\bar{K}}_{tot} \mathbf{a} - j2\omega \bar{\bar{Z}} \mathbf{a} - \omega^2 \bar{\bar{M}}_{tot} \mathbf{a} = \mathbf{F}_e \quad (\text{II.23})$$

dont les termes sont calculés numériquement selon (voir ANNEXE F pour une démonstration complète du calcul de cette expression) :

$$Z_{mnpq}(\omega) = \frac{\rho_0 \omega}{\pi^2} \int_{k_x=0}^{+\infty} \int_{k_y=0}^{+\infty} \frac{\tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y \quad (\text{II.24})$$

où ϕ_{pq}^* désigne le complexe conjugué de ϕ_{pq} et $\tilde{\phi}_{pq}$ la transformée de Fourier d'une déformée bafflée.

Cette matrice $\bar{\bar{Z}}$ complexe a trois effets : la partie imaginaire (réactance) apporte une masse ajoutée au système qui a pour conséquence de décaler les fréquences propres vers le bas ; la partie réelle (résistance) apporte un amortissement dû au fluide d'autant plus important que la fréquence est supérieure à la fréquence critique de l'objet (régime supersonique) ; un couplage des modes de structures dû aux termes extra-diagonaux, dont nous reparlerons dans le chapitre suivant. On note cependant que ces termes de couplage et de masse ajoutée par rayonnement sont habituellement considérés négligeables en fluide léger.

On donne finalement une expression du vecteur des amplitudes modales incluant un effort extérieur ponctuel harmonique, la pression acoustique pariétale et un amortissement modal dans chaque base par :

$$\mathbf{a} = \left[\bar{\bar{K}}_{tot} + j\omega \left(({}^t\bar{\bar{T}})^{-1} \bar{\bar{C}} \bar{\bar{T}}^{-1} - 2\bar{\bar{Z}} \right) - \omega^2 \bar{\bar{M}}_{tot} \right]^{-1} \mathbf{F}_e \quad \text{dans la base simplement supportée} \quad (\text{II.25})$$

$$\mathbf{b} = \left[\bar{\bar{K}}_s + j\omega \left(\bar{\bar{C}} - 2 {}^t\bar{\bar{T}} \bar{\bar{Z}} \bar{\bar{T}} \right) - \omega^2 \bar{\bar{M}}_s \right]^{-1} {}^t\bar{\bar{T}} \mathbf{F}_e \quad \text{dans la base du système}$$

Dans la pratique la charge acoustique pariétale n'est pas prise en compte directement dans l'équation du mouvement. Celle ci sera introduite dans les termes modaux de la matrice d'amortissement $\bar{\bar{C}}$ que nous allons développer dans la suite.

II.D.5. Mécanismes d'amortissement

L'amortissement joue un rôle déterminant dans le comportement vibratoire des structures et les mécanismes dissipatifs restent difficiles à modéliser, en particulier lorsque la

structure devient complexe. Le choix d'un modèle d'amortissement adéquat est indissociable du type de structure considéré, de son matériau et surtout de l'étude souhaitée.

Dans le cadre de la table d'harmonie de piano, il convient d'identifier les phénomènes dissipatifs susceptibles d'interagir avec la structure. Lambourg [Lamb97], entre-autres, propose une classification de ces mécanismes dans le cadre des plaques et il en résulte deux grandes catégories :

- Les pertes internes : phénomènes visco- et thermo-élastiques,
- Les pertes par couplage : pertes par transmission mécanique, perte par rayonnement acoustique (interaction fluide/structure) ou encore les pertes par friction fluide.

En ce qui concerne les pertes par friction fluide, celles-ci semblent limitées aux mouvements de grandes amplitudes. Le modèle que nous développons se limite aux petites déformations. Par conséquent, nous ne nous intéressons pas aux pertes de ce type [CaVa95]. Les pertes par couplage mécanique sont également considérées nulles, les conditions aux limites étant supposées idéales.

L'importance des pertes internes dépend grandement des matériaux constituant la structure : les phénomènes viscoélastiques qui prédominent dans les matériaux peu conducteurs de la chaleur comme les polymères ou les bois ; et à l'inverse, les phénomènes thermoélastiques prédominant dans les matériaux conducteurs de la chaleur comme les métaux semblent être la première cause de dissipation en basses fréquences [CKBD08]. Notre domaine d'application se limite à des structures composées de bois où les dissipations d'origine thermoélastique sont *a priori* négligeables [Lamb97]. Il en découle que le facteur de perte total peut être écrit comme une somme des pertes par rayonnement et d'origine viscoélastique :

$$\eta_{total} = \eta_{visco} + \eta_{ray} \quad (II.26)$$

Les modèles de viscoélasticité linéaire cherchent à représenter un effet mémoire ou « fading memory » [Chri03] et partent du postulat d'un lien direct de cause à effet entre les déformations passées et les contraintes à l'instant présent. Il peut être représenté par un retard de phase de la contrainte sur la déformation (modèle de relaxation [CrHP05]) et se base sur l'hypothèse que le champ de contraintes à un instant donné dépend localement des valeurs antérieures du champ de déformations.

En régime harmonique, ce qui correspond à une excitation stationnaire et donc une absence de régime transitoire, une stratégie simple et couramment utilisée pour prendre en compte cette idée de déphasage entre les contraintes et les déformations infinitésimales consiste à introduire des rigidités complexes telles que $E^* = E(1 + j\eta)$ où η est le facteur de perte du matériau. Cette simplicité de mise en œuvre n'est cependant pas compatible avec une

application temporelle résolue par convolution de la réponse impulsionnelle puisque, dans ce cas, la fonction $h(t)$ peut d'une part présenter des défauts de causalité et d'autre part une partie imaginaire.

Le choix d'un modèle d'amortissement modal s'impose donc puisque par définition causal. Cette dissipation est introduite par une matrice d'amortissement $\bar{\bar{C}}$ appliquée sur les vitesses généralisées du système [GéRi96]. Le problème généralisé en temps dans la base propre du système prend alors la forme suivante :

$$\bar{\bar{M}}_s \ddot{\mathbf{b}} + \bar{\bar{C}} \dot{\mathbf{b}} + \bar{\bar{K}}_s \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{II.27})$$

où $\bar{\bar{C}}$ est une matrice pleine et symétrique et \mathbf{b} le vecteur des amplitudes modales dans la base du système.

Cependant, lorsque l'amortissement est faible, réparti de manière homogène et que les pulsations propres sont bien distinctes, Géroardin & Rixen [GéRi96] montrent que les termes de couplage introduits par l'amortissement peuvent être négligés. Ainsi, dans le cas des systèmes faiblement dissipatifs, cette précédente hypothèse appelée hypothèse de Basile conduit à une matrice d'amortissement $\bar{\bar{C}}$ diagonale dont les termes sont définis par :

$$\bar{\bar{C}} = \begin{pmatrix} \ddots & & (0) \\ & \eta_n & \\ (0) & & \ddots \end{pmatrix} \bar{\bar{M}}_s \begin{pmatrix} \ddots & & (0) \\ & \omega_n & \\ (0) & & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{II.28})$$

tel que les coefficients η_n sont les facteurs de pertes modaux où l'indice n désigne le $n^{\text{ième}}$ mode propre de la structure.

Il se pose alors la question de l'évaluation de ces termes, qui d'après ce que nous venons de voir dans cette partie, sont la somme des dissipations viscoélastiques et par rayonnement (couplage fluide / structure). Cependant l'évaluation de chacune de ces contributions modales est difficile. En effet, il est primordial de ne pas confondre les paramètres d'amortissement matériaux et modaux. Dans le premier cas, la littérature concernant les bois étant abondante, il est possible de connaître les paramètres viscoélastiques matériau d'une espèce. Concernant l'épicéa (dont la table d'harmonie est généralement faite), Haines [Hain79, HaLH96] montre une grande disparité selon les espèces, selon la saison de coupe du bois ou encore son âge. De plus, il semble que les facteurs de perte dans la direction perpendiculaire à la fibre soient en moyenne 3 fois supérieurs aux facteurs de perte dans la direction de la fibre avec notamment un accroissement systématique en hautes fréquences (au delà de 5 kHz) [Fuka50].

Le passage entre les paramètres matériaux et modaux n'est sans difficulté en particulier dans le cadre des structures raidies comme la table d'harmonie. En supposant connus les paramètres viscoélastiques du matériau, McIntyre & Woodhouse [McWo78] ont pu exprimer les facteurs de perte modaux η_n (via des coefficients de Rayleigh complexes⁵) associés aux modes d'une plaque dans plusieurs cas : des plaques isotropes, orthotropes (dont l'épaisseur pouvait varier) et pour différentes conditions aux limites. Dans le cadre des petites perturbations, les facteurs de perte modaux η_n s'expriment donc comme une somme pondérée des η_i dans les différentes directions :

$$\eta_n = \sum_{i=1}^4 \eta_i J_{i,n} \quad (\text{II.29})$$

où les coefficients de pondération $J_{i,n}$ sont définis par :

$$\begin{aligned} J_{1,n} &= \frac{\iint_S h^3 D_1 \left(\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} \right)^2 dS}{\omega_n^2 \|\phi_n\|^2} & J_{2,mn} &= \frac{\iint_S h^3 D_2 \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} dS}{\omega_n^2 \|\phi_n\|^2} \\ J_{3,n} &= \frac{\iint_S h^3 D_3 \left(\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial y^2} \right)^2 dS}{\omega_n^2 \|\phi_n\|^2} & J_{4,mn} &= \frac{\iint_S h^3 D_4 \left(\frac{\partial^2 \phi_n}{\partial x \partial y} \right)^2 dS}{\omega_n^2 \|\phi_n\|^2} \end{aligned} \quad (\text{II.30})$$

Lambourg [Lamb97] propose une expression semblable des facteurs de perte modaux associés aux dissipations thermoélastiques. Cependant ces modèles restent limités à des cas de structures homogènes et par conséquent non adaptés à notre cas. Il serait notamment intéressant et ambitieux de développer un modèle d'amortissement viscoélastique se basant sur le même principe en incluant les énergies liées à la densité de ressorts et aux renforts (dont il sera question dans le CHAPITRE III) mais ce n'est pas le sujet de ce manuscrit.

Pour en revenir aux facteurs de perte modaux de la table d'harmonie, Ege [Ege09] donne une estimation des facteurs de perte modaux d'une table d'harmonie de piano droit via une analyse modale haute résolution et la méthode ESPRIT. Estimés non pas *in vacuo* mais dans l'air, on peut alors convenir que ces facteurs de perte représentent déjà la somme des dissipations d'origines viscoélastiques et par rayonnement. Comme l'atteste la Figure II-4, les facteurs de perte modaux sont globalement compris dans un cône délimité par des valeurs de facteurs de perte de 1 et 3% en dessous de 3000 Hz. Cette disparité peut s'expliquer par le fait que dans le cas d'une plaque orthotrope, qui plus est raidie, « les modes ne sont pas forcément amortis de la même façon selon leur direction d'orthotropie, ni selon leur nature (mode en flexion, mode en torsion, mode en cisaillement...) » [Chab12].

⁵ le coefficient de Rayleigh représente le ratio de l'énergie modale de déformation sur l'énergie modale cinétique d'un mode de structure [Rayl00].

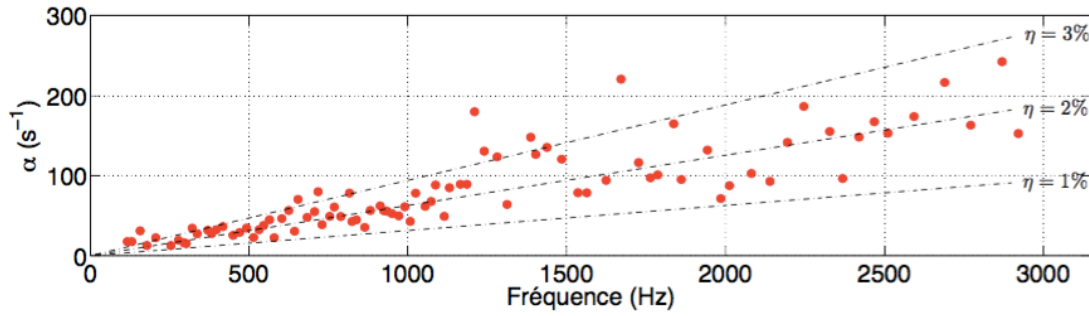

 FIG. 3.24 – Facteurs d'amortissement estimés au point A_2 jusqu'à 3 kHz.

Figure II-4 : Paramètres d'amortissement mesurés entre 0 et 3 kHz sur une table d'harmonie de piano droit. Les facteurs de perte η fluctuent entre 1 et 3 % sur la bande de fréquences [0 ;3000] Hz montrant la disparité des différents types de modes en terme d'amortissement. Extrait de Ege [Ege09].

On considérera dans la suite de ce manuscrit que les facteurs de perte modaux η_n intervenant dans l'équation (II.28) ont tous une valeur égale à 2%.

II.E. Calibration de la densité de ressorts

Recentrons nous sur le sujet principal de ce chapitre : recréer des contours non rectangulaire ainsi qu'un angle d'orthotropie pouvant être de n'importe quelle valeur. Pour ce faire, le point de départ de notre modélisation est une plaque simplement supportée avec un angle d'orthotropie nul, i.e que les axes principaux d'orthotropie sont parallèles aux bords de plaque. On parle d'orthotropie spéciale. Puis nous avons vu que par ajout d'une densité de ressorts ponctuels exerçant un effort normal à la plaque que l'on qualifie de plaque étendue, nous pouvions décrire n'importe quels contours et n'importe quel angle d'orthotropie. En théorie, cette façon de procéder est très simple cependant, dans la pratique, la densité de ressorts doit être calibrée. Cette calibration dépend de l'espacement des ressorts et de leurs raideurs, les deux étant fonction de la fréquence et du matériau.

La calibration de l'espacement est intimement liée aux longueurs d'onde présentes dans la plaque. En effet, on peut penser qu'il est indispensable d'avoir un nombre suffisant de ressorts par longueur d'onde de façon à inhiber la vibration. Prenons l'exemple d'un système à une seule dimension : une poutre en appuis simples animée d'un mouvement de flexion. L'objectif est de laisser la moitié droite vibrer tandis que la moitié gauche est inerte (voir Figure II-5). En plaçant quelques ressorts sur la moitié gauche, pour l'instant supposés de raideur infinie, les modes de grandes longueurs d'onde, comme le premier mode de cette poutre par exemple, ne vont plus exister (Figure II-5-a). En montant en fréquence les longueurs d'onde vont devenir plus petites que l'espacement entre les ressorts et l'intégralité de la poutre va être animée d'un mouvement de flexion comme si les ressorts étaient inexistants (Figure II-5-b).



Figure II-5 : Schéma de principe sur un système à une seule dimension du lien entre l'espacement des ressorts et la longueur d'onde des modes propres. a) Pour les grandes longueurs d'onde (pointillés oranges), plusieurs ressorts viennent contraindre le ou les ventre(s) de vibration : la vibration est inhibée dans la zone « tapissée » de ressorts. Il s'établit alors un nouveau mode dans la zone libre (pointillés bleus). b) Pour des petites longueurs d'onde, aucun ressort n'exerce de contraintes sur les ventres de vibration.

On souhaite alors exprimer la longueur d'onde en fonction de la fréquence d'un système à deux dimensions. Dans le cas particulier d'une plaque orthotrope la situation se complique puisque les longueurs d'onde n'évoluent pas de façon homogène à cause du caractère hétérogène des rigidités dans les différentes directions. On sait cependant que les longueurs d'onde dans une plaque orthotrope sont bornées par les relations de dispersion associées aux deux modules de Young. Ainsi la plus petite longueur d'onde intervient dans la direction du module de Young le plus faible dont la rigidité dynamique associée est D_3 :

$$\lambda = \sqrt{\frac{2\pi}{f} \left(\frac{D_3}{\rho h}\right)^{\frac{1}{4}}} \quad (\text{II.31})$$

Un critère de $\lambda/10$ est choisi pour déterminer l'espacement minimal entre ressorts dans le but de surestimer leur nombre. Dans le cas de l'épicéa et pour une étude jusqu'à 3 kHz, nous obtenons une distance minimale de l'ordre de 7,3 mm.

Le choix d'une raideur de ressort suffisante est également primordial : cette raideur doit contrebalancer celle de la plaque pour toutes les fréquences. On sait que la raideur modale d'une plaque croît lorsque le rang du mode devient élevé, en témoigne l'expression (D.8) en ANNEXE D donnant les termes de raideur généralisée des modes d'une plaque simplement supportée. De ce fait, lorsque la raideur des ressorts est insuffisante, il apparaît des vibrations dans les parties bloquées (là où les ressorts sont localisés) en hautes fréquences. Afin de détecter facilement la présence de ces vibrations que nous qualifierons « d'externe », on définit le ratio de la vitesse quadratique de la plaque étendue sur celle de la zone dite « intérieure » :

$$L_v \text{ ratio} = 10 \log \left(\frac{\int_{S_{tot}} |v(x,y)|^2 dS}{\int_{S_{int}} |v(x,y)|^2 dS} \right) \quad (\text{II.32})$$

Lorsque la raideur est suffisante, la vitesse dans la partie bloquée doit tendre vers zéro et cet indicateur doit faire de même.

La Figure II-6 montre ce ratio pour deux valeurs de raideur de ressorts. Dans les deux cas, les ordres de troncature dans la décomposition modale sont fixés à $(M, N) = (82, 63)$ pour lesquels la convergence de la solution est garantie. On réalise un balayage en fréquence jusqu'à 3 kHz avec une excitation ponctuelle (voir section II.D.3) placée volontairement proche d'un bord.

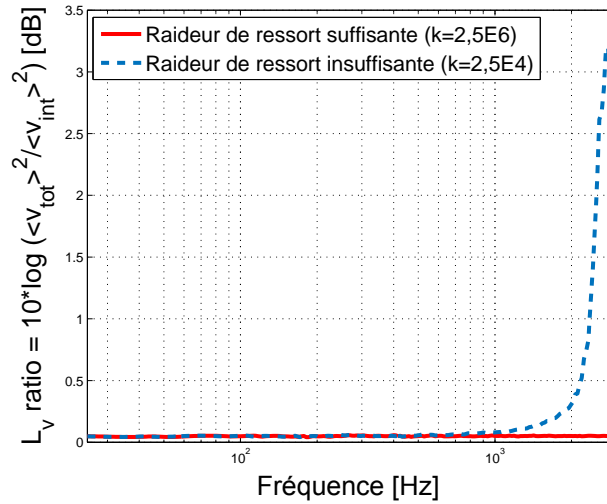


Figure II-6 : Ratio des vitesses quadratiques de toute la surface de la plaque étendue sur la surface de la géométrie « intérieure ». Une rigidité insuffisante engendre une forte augmentation de ce ratio visible en hautes fréquences.

Lorsque les ressorts sont suffisamment forts par rapport à la plaque, le ratio est plus petit que 0,006 dB pour toute la bande de fréquences étudiée (ligne pleine rouge Figure II-6). A l'inverse, un accroissement de l'indicateur « ratio des vitesses » apparaît à partir de 1 kHz lorsque les ressorts sont insuffisants, avec un maximum de 3,2 dB à 2,5 kHz (pointillés bleus Figure II-6), zone de fréquence qui correspond à des modes « externes » comme nous le verrons par la suite.

Pour illustrer ces propos, la Figure II-7 présente des déformées propres pour ces deux cas de rigidité. La colonne de gauche correspond à des modes pour lesquels la raideur des ressorts est insuffisante à l'inverse de la colonne de droite. De haut en bas, on retrouve pour chaque configuration : le premier mode de la structure ainsi qu'un mode plus haut en fréquence qui appartient à la zone sensible décrite ci dessus.

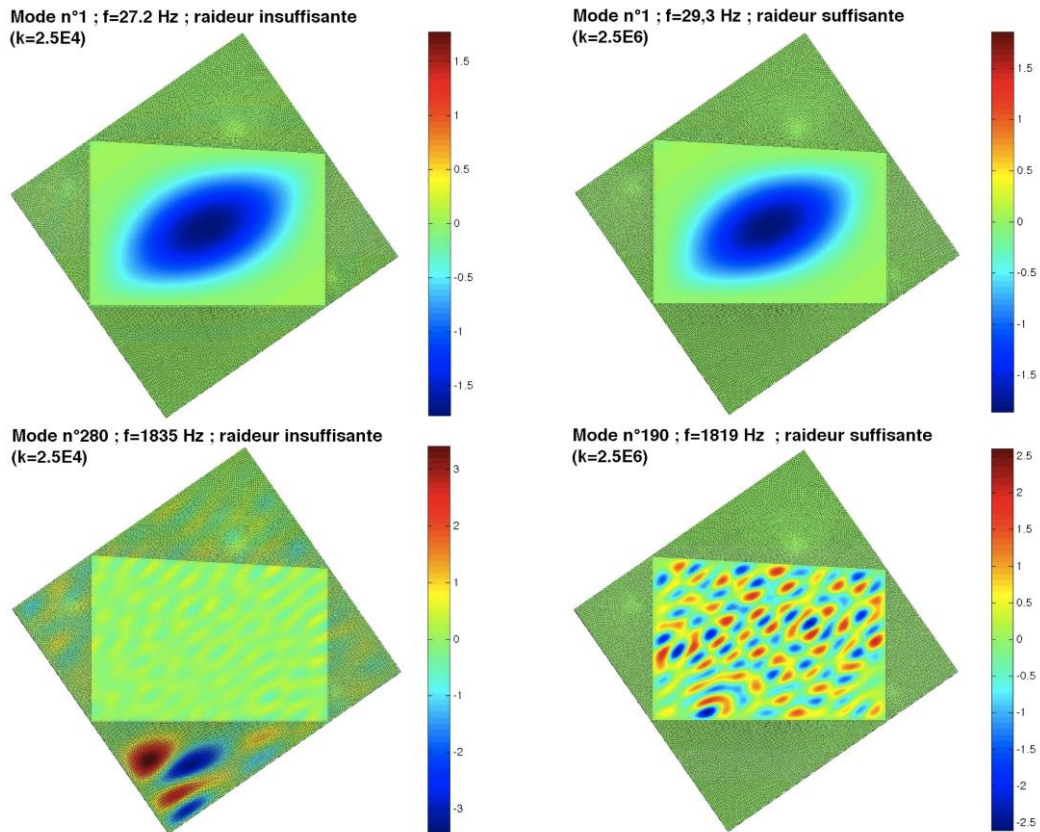


Figure II-7 : Déformées propres d'une plaque non rectangulaire encastree orthotrope avec un angle de $34,8^\circ$ reconstruit à partir des modes d'une plaque simplement supportee rectangulaire orthotrope avec un angle nul avec une troncature modale $(M,N) = (82,63)$. Deux cas de raideurs sont utilisées : les déformées basses fréquences (ligne du haut) sont bien décrites pour les deux cas, en revanche des modes « externes » (en bas à gauche) apparaissent dans la partie bloquée (zones grisées) lorsque la raideur est insuffisante. Lorsque la raideur des ressorts est suffisamment importante les modes hautes fréquences sont correctement décrits (en bas à droite).

Une comparaison visuelle est largement suffisante pour apprécier la problématique de la raideur des ressorts. En basse fréquence, les déformées propres sont semblables avec un léger décalage des fréquences propres. En revanche aux alentours de 1,8 kHz, les déformées propres sont clairement différentes. On retrouve bien un mode avec une vibration « externe », i.e, dans la zone bloquée, lorsque la raideur est insuffisante tandis que la vibration reste bien concentrée dans la zone « intérieure » lorsque la raideur est suffisante. Ces exemples corroborent bien la possibilité de détecter ces modes non désirés qualifiés « d'externes » grâce au ratio des vitesses quadratiques. Finalement, lorsque la raideur est insuffisante plusieurs familles de modes propres coexistent dont des modes où la zone souhaitée vibre (mode de structure) et des modes « externes ».

Remarque

En réalité une troisième catégorie de modes existe lorsque la rigidité est insuffisante. Cette catégorie correspond à des modes hybrides où la vibration s'établit dans les deux zones à la fois. Bien que celle-ci ne soit pas illustrée, cette dernière est bien évidemment détectée par l'indicateur présenté ici au même titre que les modes « externes ».

Le ratio des vitesses quadratiques présente deux inconvénients majeurs : il dépend du point d'excitation et nécessite de réaliser un balayage en fréquence, ce qui en soit peut être coûteux en temps de calcul. L'idéal est de définir un indicateur global qui s'affranchirait de ces deux inconvénients.

En partant du postulat que l'augmentation du ratio des vitesses quadratiques coïncide avec la présence de plusieurs familles de modes, dont une grande majorité sont des modes externes ou hybrides, il découle naturellement que la densité modale devrait considérablement augmenter si la raideur des ressorts est insuffisante. L'avantage est que le tracé de la densité modale nécessite uniquement de résoudre le problème aux valeurs propres, équation (II.13), soit un indicateur nettement moins coûteux en terme de temps de calcul. La Figure II-8 montre qu'en effet la densité modale augmente dans la dernière bande d'octave lorsque la raideur des ressorts est insuffisante.

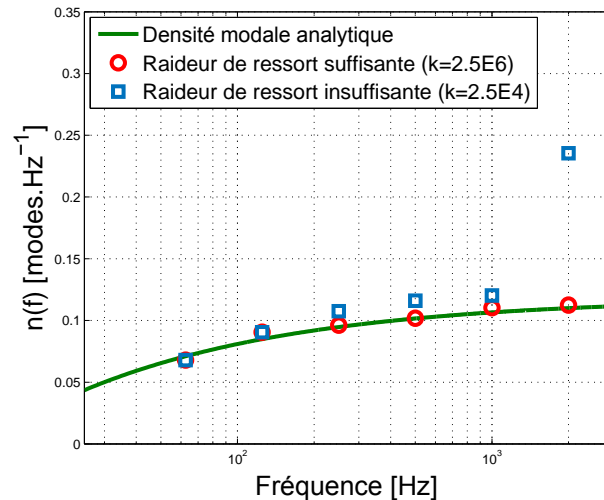


Figure II-8 : Densité modale pour différentes valeurs de raideur de ressorts. La densité modale augmente considérablement dans la bande d'octave à 2 kHz lorsque la raideur est insuffisante. La densité modale analytique équation (II.17) issue de [Ege09].

Une question majeure se pose alors : qu'en est-il lorsque la troncature modale est trop petite ? Nous avons vu en section II.D.2 qu'en telles circonstances, la densité modale chutait étant donné qu'il manque des modes en hautes fréquences. On peut alors se demander si la chute de densité modale engendrée par une troncature trop courte peut être compensée par l'augmentation qu'impliquerait une raideur des ressorts insuffisante et par conséquent ne pas mettre en évidence ces modes « externes ».

Dans la pratique, on constate que la forte augmentation de la densité induite par une raideur insuffisante prédomine largement sur la chute engendrée par une troncature trop faible. La Figure II-9-a illustre ces propos dans le cas de $(M, N) = (43, 32)$. Tant que la raideur des ressorts est inférieure à $2,5^{E5}$, on détecte une augmentation de la densité modale dans la bande

d'octave centrée à 2000 Hz. En complément, la Figure II–9–b montre que peu importe les ordres de troncatures (M, N), une augmentation drastique est visible lorsque la raideur est insuffisante. Dans cet exemple, la raideur des ressorts est fixée à $2,5^{E4}$. Par ailleurs, en augmentant les ordres de troncatures, on voit que l'on converge vers une même courbe, comme il a pu être montré en section II.D.2.

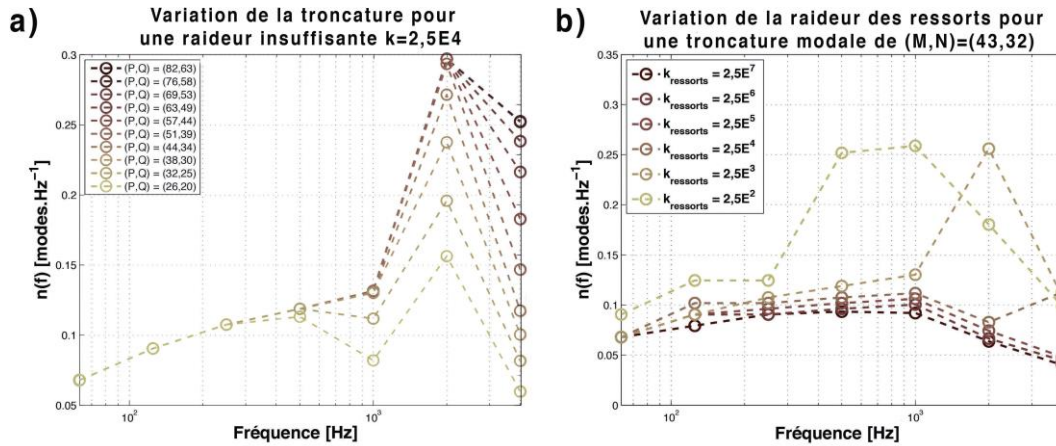


Figure II–9 : Détection des modes dits « externes » par visualisation de la densité modale. a) Ressorts de raideur insuffisante : forte augmentation de la densité modale dans la bande d'octave à 2 kHz pour tout les ordres de troncature ; b) Densités modales pour différentes raideur de ressort pour une troncature donnée de $(M, N) = (43, 32)$: les pics de densité signalent la présence de modes externes. Malgré une base non convergente au sens de la section II.D.2, la densité modale permet de calibrer la raideur des ressorts.

En résumé, il n'est pas nécessaire d'avoir une solution convergente (en terme de troncature sur la décomposition modale) pour détecter la présence de modes externes. La calibration des ressorts est alors assez bien maîtrisée. L'indicateur du ratio des vitesses quadratiques reste tout de même un outil intéressant, notamment pour une éventuelle vérification à posteriori. Une raideur de ressorts de $2,5^{E6}$ est suffisante afin de garantir l'absence de mode « externes » et ainsi bloquer le déplacement transversal d'une plaque étendue faite d'épicéa dans la bande de fréquence $[0 ; 3000]$ Hz.

II.F. Comparaison avec un modèle éléments finis

Pour conclure ce chapitre, nous avons comparé nos résultats avec un modèle éléments finis NASTRAN. On considère un modèle 2D avec une plaque non rectangulaire encastrée maillée avec des éléments coques PSHELL. L'angle d'orthotropie est recréé en donnant un angle au matériau. La taille des éléments est de 5mm pour assurer la convergence du calcul sur la bande de fréquence $[0 ; 3000]$ Hz.

Cette comparaison entre notre modèle (colonne de gauche sur la Figure II–10) et le modèle éléments finis (colonne de droite sur la Figure II–10) montre que notre solution est pertinente. En effet, les conditions aux limites encastées, les fréquences propres ainsi que les déformées propres semblent bien décrites par une analyse visuelle, aussi bien pour le premier mode de structure (en haut sur la Figure II–10) que pour un mode hautes fréquences (en bas sur la Figure II–10). La matrice de MAC [PaBH12] (Figure II–11) entre les déformées propres des deux modèles confirme cette analyse qualitative et montre que les déformées calculées dans le cadre de ces deux modélisations sont extrêmement proches : les critères de MAC sont respectivement de 0,9997 et de 0,9848 pour le premier mode aux alentours de 30 Hz et le mode en hautes fréquences aux alentours de 1,8 kHz présentés Figure II–10.

Concernant les fréquences propres, la différence est inférieure à 4% aussi bien pour le premier mode que pour le mode en hautes fréquences, ce qui peut être considéré comme acceptable. Cette différence est sans doute due aux conditions d'encastrement qui restent imparfaites dans notre modèle. De ce fait, notre modèle est légèrement moins raide que le modèle éléments finis auquel sont imposées des conditions idéales.

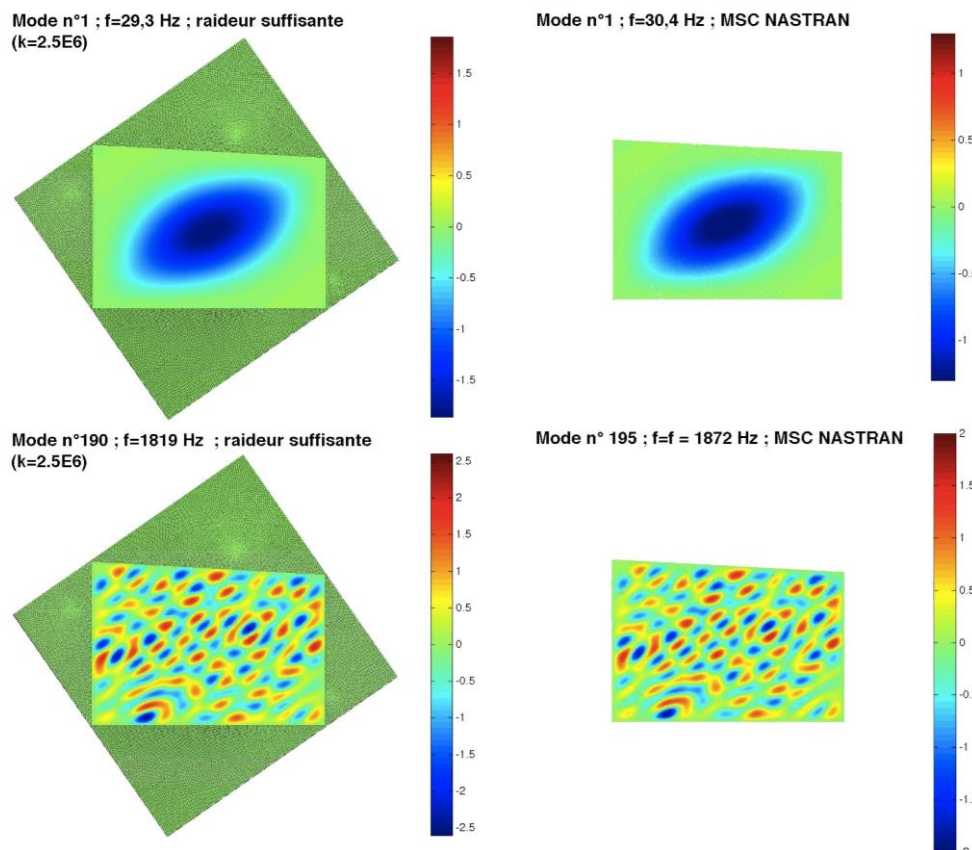


Figure II–10 : Comparaison des déformées propres d'une plaque non rectangulaire encastée orthotrope avec un angle de 35° issues de : notre modèle analytique (colonne de gauche) avec une troncature modale $(M, N) = (82, 63)$ et des ressorts calibrés à $k = 2,5E6$; un modèle éléments finis 2D NASTRAN (colonne de droite) maillé avec des éléments PSHELL de 5mm. Les déformées basses fréquences (ligne du haut) et hautes fréquences (ligne du bas) correspondent autant en termes de fréquences que de déformées.

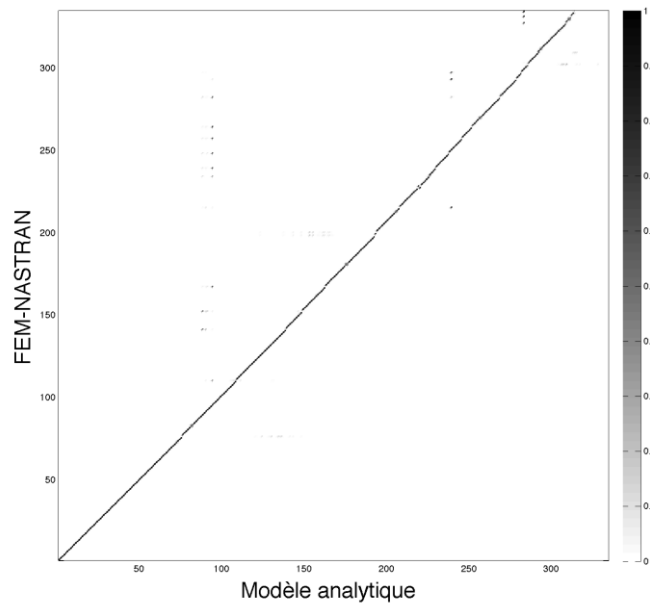


Figure II-11 : Matrice de MAC (Modal Assurance Criterion) entre les déformées propres du modèle analytique et celles du modèle FEM-NASTRAN. Cette matrice est tracée en fonction du numéro de chaque mode.

Conclusion

Dans ce second chapitre, nous avons posé les bases d'un modèle destiné à la prédiction des mécanismes vibroacoustiques des plaques raidies de formes quelconques. Nous nous sommes focalisés sur une façon de recréer des contours non-rectangulaires ainsi que la description d'un angle d'orthotropie. Nous avons pu mettre en évidence des indicateurs permettant de calibrer les paramètres nécessaires au bon fonctionnement de notre méthode et avons montré sa pertinence en fin de chapitre via une comparaison avec un modèle éléments finis.

Le chapitre suivant s'inscrit dans la continuité en incluant des renforts dans deux directions perpendiculaires ainsi qu'en proposant une méthode originale pour calculer le rayonnement acoustique d'une structure raidie.

CHAPITRE III

MODELISATION VIBROACOUSTIQUE D'UNE STRUCTURE ORTHOTROPE RAIDIE DANS DEUX DIRECTIONS, ET DE CONTOURS QUELCONQUES

SOMMAIRE

III.A. VERS UNE STRUCTURE ORTHOTROPE RAIDIE DANS DEUX DIRECTIONS	64
III.B. EXTENSION DU MOUVEMENT DE LA PLAQUE AUX SUPERSTRUCTURES.....	67
III.B.1. HYPOTHESES CINEMATQUES ET CHAMP DE DEPLACEMENTS	69
III.B.2. MILIEU MINCE ET CHAMP DE CONTRAINTES	71
III.B.3. ÉNERGIE CINETIQUE D'UN RENFORT ORIENTE SELON y	72
III.B.4. ÉNERGIE DE DEFORMATION D'UN RENFORT ORIENTE SELON y	73
III.B.5. HAMILTONIEN D'UN RENFORT ORIENTE SELON y	75
III.B.6. HAMILTONIEN D'UN RENFORT ORIENTE SELON x	75
III.C. EXTENSION DU MODELE AU CAS DES STRUCTURES RAIDIES.....	76
III.C.1. SUPERSTRUCTURE ORIENTEE SELON y	76
III.C.2. SUPERSTRUCTURE ORIENTEE SELON x	78
III.C.3. MODELE VIBRATOIRE D'UNE STRUCTURE ORTHOTROPE RAIDIE DE FORME QUELCONQUE	80
III.D. RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE STRUCTURE RAIDIE.....	81
III.E. APPLICATION A LA TABLE D'HARMONIE DE PIANO : PLEYEL P131	86
III.E.1. MODES DE STRUCTURES.....	87
III.E.2. CARTOGRAPHIES DU COMPORTEMENT VIBROACOUSTIQUE D'UNE TABLE D'HARMONIE DE PLEYEL P131	94
III.E.3. VERS UN INDICATEUR PLUS MUSICAL.....	98
III.F. SENSIBILITE A DES CHANGEMENTS DANS LA CONCEPTION DES TABLES D'HARMONIE.....	105
III.F.1. CHEVALET DES MEDIUM-AIGUS CONTINU	106
III.F.2. SUPPRESSION DE RAIDISSEURS DANS L'EXTREME AIGU	109
III.G. LIMITES DU MODELE : VALIDATIONS NUMERIQUES ET EXPERIMENTALES	112

Le présent chapitre se positionne comme une extension du modèle proposé dans le CHAPITRE II. Jusqu'ici, nous nous sommes contentés de recréer une plaque encastrée non-rectangulaire incluant un angle d'orthotropie en prenant comme point de départ une plaque simplement supportée rectangulaire avec une orthotropie dite spéciale. L'objectif de ce manuscrit est de développer une méthode destinée à la modélisation du comportement vibroacoustique des structures raidies. Ce chapitre est consacré à la prise en compte de renforts structuraux qui viendront raidir la structure dans deux directions perpendiculaires.

III.A. Vers une structure orthotrope raidie dans deux directions

Au regard de leurs utilisations diverses et variées, les structures raidies ont fait l'objet de nombreuses études pour en comprendre le fonctionnement. D'une manière générale, la compréhension des phénomènes vibroacoustiques se limite souvent à des applications bien éloignées de la réalité, notamment des structures infinies et/ou périodiquement raidies. Or ces situations idéales sont loin de correspondre aux cas que l'on rencontre dans la pratique tels que des panneaux de cabine de camion (« rear and side wall »), les fuselages et dans notre contexte, la table d'harmonie de piano.

Cette dernière a guidé bons nombres de choix relatifs au modèle que nous développerons par la suite. Il ne faut cependant pas perdre de vue que notre outil ne se limite pas à cette seule et unique application musicale. L'aspect fini de la structure a été traité au CHAPITRE II. Concernant les renforts, l'objectif est ici de recréer une géométrie au plus proche de la table d'harmonie de piano tout en conservant une approche analytique le plus longtemps possible. On se référera par la suite à la table d'harmonie du piano droit Pleyel P131 dont plusieurs exemplaires ont pu être récupérés à l'Institut Européen des Métiers de la Musique du Mans. Cette table d'harmonie, dont une photographie légendée est disponible Figure III-1, est composée de :

- une plaque en épicéa non rectangulaire avec un angle d'orthotropie d'environ 35° ,
- 10 barres de renforts (raidisseurs) sur une face destinées à compenser la faiblesse du bois dans la direction perpendiculaire aux fibres (soit le module de Young le plus faible de la plaque), également en épicéa,
- 2 barres de mouchoirs en hêtre (« cut-off corner beams ») délimitant les zones appelées mouchoirs (« cut-off corners ») placées sur la même face dans une direction globalement parallèle aux fibres du bois (module de Young le plus fort),
- 2 chevalets, également fabriqués en hêtre dans une direction globalement parallèle aux fibres, sur la face opposée. On distingue d'une part le chevalet des basses qui sur ce modèle accueille des cordes filées et d'autre part le chevalet des medium-aigus sur lequel sont couplés des triplets de cordes non-filées. L'importance de ces éléments sera ré-abordée dans le CHAPITRE IV.

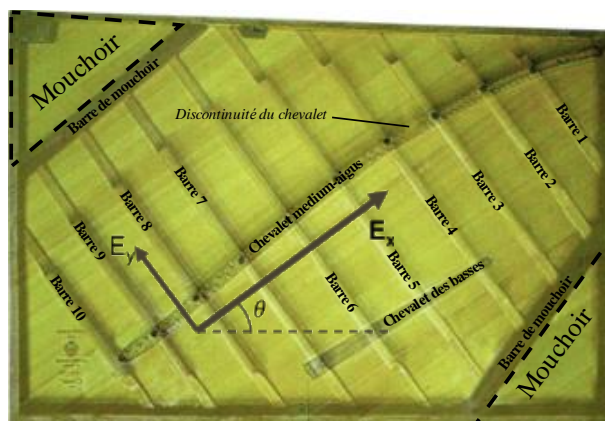


Figure III-1 : Table d'harmonie du piano droit Pleyel P131. E_x et E_y représentent les modules de Young de la plaque orthotrope et θ définit l'angle d'orthotropie. Les chevalets sont ajoutés par transparence.

Quelques points importants doivent être soulignés avant d'aborder la modélisation d'une telle structure. Chaque superstructure suit le mouvement de la plaque à laquelle elle est supposée raccordée par une liaison parfaite. Il en résulte une parfaite continuité des déplacements transversaux et des angles de rotation à chaque interface. Les superstructures sont alors animées de mouvements de flexion et de torsion.

Les barres de renforts (que nous appellerons également raidisseurs pour éviter les répétitions successives) ne sont quant à elles pas espacées de manière périodique. Cependant, on constate dans la pratique que leur espacement oscille autour de 13 cm. Des données plus précises seront communiquées au moment opportun. Dans la conception des tables d'harmonie d'une façon générale, ces barres peuvent être de longueurs, de largeurs et de hauteurs différentes bien que dans le cas de la table d'harmonie du Pleyel P131 les largeurs soient identiques. Rappelons que les barres ont la spécificité d'avoir une hauteur décroissante aux extrémités, zones que l'on nomme les sifflets (voir Figure III-3-a). Cette décroissance permet d'assouplir les bords de la table et ainsi augmenter l'amplitude des premiers modes de table et donc son rayonnement en basses fréquences. Le lecteur est invité à se reporter au CHAPITRE I sous-section I.A.1 pour de plus amples informations sur le rôle statique des barres et sur les mécanismes qui permettent d'accroître le rayonnement en basses fréquences. Bien que globalement orienté dans le sens de la fibre du bois, le chevalet des medium-aigus est clairement courbé comme le montre la Figure III-1. De plus, une discontinuité intervient dans les notes de l'extrême aigu de façon à laisser passer le cadre en fonte auquel les cordes sont attachées (Figure III-2).



Figure III-2 : Cadre en fonte passant au travers du chevalet dans les aigus.

La variation de hauteur lente au niveau des sifflets (Figure III-3-a) n'est pas vraiment appropriée à une formulation analytique simple. Il en est de même pour la courbure du chevalet des medium-aigus qui nécessiterait de paramétrer les variables x et y . Dans une moindre mesure, l'orientation des barres de mouchoirs ainsi que du chevalet des basses, qui ne sont pas exactement parallèles aux fibres, impliquerait également un paramétrage des variables d'espace non compatibles avec une approche analytique. Pour éviter de tomber dans le piège d'une modélisation dont la complexité réduirait sa bonne compréhension, quelques simplifications géométriques sont observées : toutes les superstructures sont rectilignes et la décroissance lente des sifflets (Figure III-3-a) sera simplifiée par un changement brutal de la hauteur (Figure III-3-b).

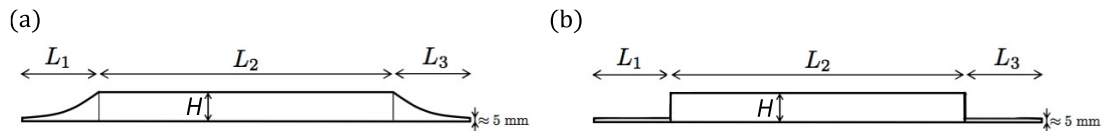


Figure III-3 : Géométrie réelle et simplifiée des barres de renfort (raidisseurs) d'une table d'harmonie de piano. Figure inspirée de [Ege09]. a) Géométrie réaliste : décroissance lente de la hauteur au niveau des sifflets jusqu'à une hauteur finale de 5mm ; b) Géométrie simplifiée : changement brutal de la hauteur aux extrémités. La hauteur passe d'une hauteur H au centre à 5mm.

Aux extrémités, chaque barre a donc une hauteur de 5mm qui correspond à la hauteur finale observée en fin de décroissance. Cette simplification permet de prendre en compte l'assouplissement au niveau des bords tout en conservant une approche analytique simple. Même si plus éloignée de la réalité, une hauteur équivalente [Ege09] aurait également été envisageable et présenterait l'avantage de simplifier la mise en données.

Pour résumer, le modèle qui est présenté dans le cadre de ce manuscrit, dont une représentation légendée est proposée en Figure III-4, respecte les contraintes suivantes :

- Les superstructures sont rectilignes parallèles aux axes d'orthotropie de la plaque simplement supportée,
- Le déport des superstructures par rapport au feuillet moyen de la plaque doit être pris en compte,

- Une superstructure peut être composée de plusieurs parties mais chacune d'entre-elles est de hauteur et de largeur constante,
- Les superstructures peuvent être placées n'importe où : pas de contrainte de périodicité,
- Les superstructures sont continues en déplacement et en rotation avec la plaque,
- Les superstructures sont animées de mouvements de flexion et de torsion.

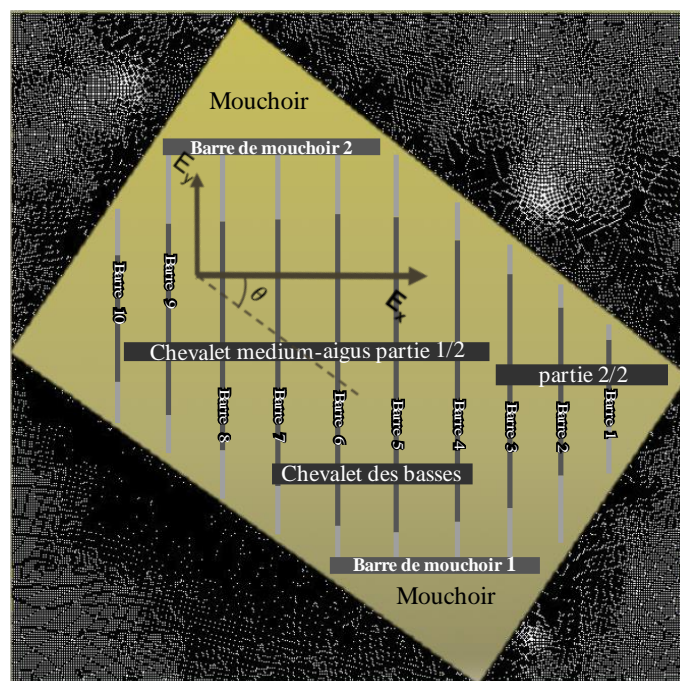


Figure III-4 : Table d'harmonie simplifiée du Pleyel P131. Les sifflets (gris clair) sont remplacés par un changement brutal de hauteur. Toutes les superstructures sont rectilignes et parallèles aux axes d'orthotropie.

III.B. Extension du mouvement de la plaque aux superstructures

Toute superstructure est couplée à la plaque étendue par une liaison parfaite venant modifier son comportement vibratoire. De ce fait, chaque renfort suit le mouvement de la plaque dans les deux plans où cette dernière fléchit. Ainsi les ondes de flexion et de torsion internes à un renfort viennent perturber les ondes de flexion transitant dans la plaque.

Néanmoins, les superstructures ne peuvent pas être approchées comme de simples poutres animées de mouvements de flexion et de torsion à cause de leurs couplages avec la plaque étendue. En effet, les conditions aux limites étant appliquées à cette dernière, son mouvement gouverne celui de chaque élément auquel elle est reliée. De ce fait, le champ de déplacements de la plaque étendue sera propagé dans les superstructures en considérant une continuité des champs

de déplacements à chaque interface. Il en est de même pour les hypothèses cinématiques de la plaque étendue (voir section II.B.1), ce qui reste cohérent avec la notion de poutre.

Nous nous intéresserons dans un premier temps à un renfort orienté dans la direction \mathbf{y} , placé en $x = x_r$ dans le repère global de la plaque dont la longueur L est délimitée par les côtes y_i et y_f (voir Figure III-5). La largeur b et la hauteur H sont considérées comme petites devant la longueur, ce qui justifie l'hypothèse de milieu mince formulée par extension des hypothèses de la plaque étendue. De plus, les renforts sont déportés par rapport au plan médian de la plaque étendue. On parlera d'excentricité des superstructures. On distinguera par la suite deux repères illustrés à la Figure III-5 :

- Le repère global dans lequel le renfort est lié à la plaque à la côte $x = x_r$. Ce repère est centré en $(x, y) = (0, 0)$ correspondant au coin inférieur gauche de plaque étendue et où la côte $z = 0$ coïncide avec son feuillet moyen,
- Le repère local qui correspond au repère global translaté sur x à la côte $x = x_r$. Dans ce repère, l'origine est centrée en $(X, Y, Z) = (x_r, 0, 0)$ et par conséquent la barre devient centrée en $X = 0$.

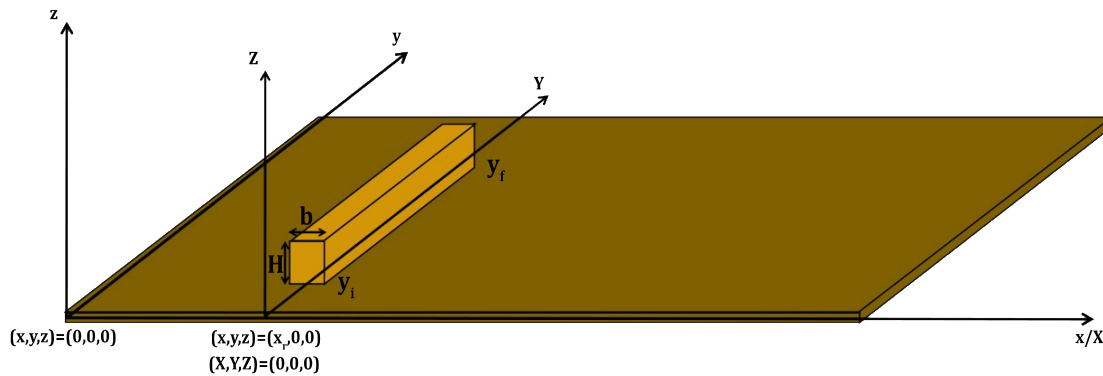


Figure III-5 : Orientations des repères locaux et globaux par rapport aux cotes des superstructures.

La formulation des « sous Hamiltoniens » liés aux superstructures suit le même cheminement que celui de la plaque dans le CHAPITRE II. Contrairement à la plaque, la formulation des renforts est présentée dans le corps même du manuscrit puisque ce cheminement est peu habituel. Cette démarche sera présentée pour un renfort orienté selon \mathbf{y} puis le résultat sera généralisé à un renfort orienté dans une direction perpendiculaire. Comme au chapitre précédent (voir équation (II.7)), la fonctionnelle d'action de l'ensemble du système est déterminée par la somme des différentes contributions, soit pour N_y superstructures selon \mathbf{y} et N_x selon \mathbf{x} :

$$H_{\text{Système}} = H_{\text{plaque}} + \sum_{s=1}^{N_s} H_{\text{ressort}} + \sum_{r=1}^{N_y} H_{\text{renfort } y} + \sum_{c=1}^{N_x} H_{\text{renfort } x} \quad (\text{III.1})$$

III.B.1. Hypothèses cinématiques et champ de déplacements

La barre est considérée comme « collée » de façon parfaite à la plaque sur un côté. De par les petites dimensions de cette dernière, les variations de déplacements sur x autour de x_r et sur z autour de $z = 0$ peuvent être approchées par linéarisation (Développement Limité de Taylor Young à l'ordre 2) :

$$\mathbf{U}_r = \begin{cases} u_r(x, y, z, t) = u_r(x_r, y, z = 0, t) + z \frac{\partial u_r}{\partial z} \Big|_{x=x_r; z=0} + (x - x_r) \frac{\partial u_r}{\partial x} \Big|_{x=x_r; z=0} \\ \quad + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \Big|_{x=x_r; z=0} + \frac{(x - x_r)^2}{2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \Big|_{x=x_r; z=0} + z(x - x_r) \frac{\partial^2 u_r}{\partial x \partial z} \Big|_{x=x_r; z=0} \\ v_r(x, y, z, t) = v_r(x_r, y, z = 0, t) + z \frac{\partial v_r}{\partial z} \Big|_{x=x_r; z=0} + (x - x_r) \frac{\partial v_r}{\partial x} \Big|_{x=x_r; z=0} \\ \quad + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \Big|_{x=x_r; z=0} + \frac{(x - x_r)^2}{2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \Big|_{x=x_r; z=0} + z(x - x_r) \frac{\partial^2 v_r}{\partial x \partial z} \Big|_{x=x_r; z=0} \\ w_r(x, y, z, t) = w_r(x_r, y, z = 0, t) + z \frac{\partial w_r}{\partial z} \Big|_{x=x_r; z=0} + (x - x_r) \frac{\partial w_r}{\partial x} \Big|_{x=x_r; z=0} \\ \quad + \frac{z^2}{2} \frac{\partial^2 w_r}{\partial z^2} \Big|_{x=x_r; z=0} + \frac{(x - x_r)^2}{2} \frac{\partial^2 w_r}{\partial x^2} \Big|_{x=x_r; z=0} + z(x - x_r) \frac{\partial^2 w_r}{\partial x \partial z} \Big|_{x=x_r; z=0} \end{cases} \quad (\text{III.2})$$

Par extension, le champ de déplacements du renfort est soumis aux mêmes hypothèses que celui de la plaque étendue auxquelles s'ajoute de négliger les phénomènes de gauchissement (les sections droites restent droites) :

- Milieu mince : les effets de pompage dans la hauteur et dans la largeur sont négligés ; les contraintes de traction / compression dans la direction orthogonale à la fibre neutre sont négligeables $\rightarrow w_{r,z} = 0$ et σ_{zz} et $\sigma_{xx} \ll \sigma_{yy}$
- Les effets de membranes de la plaque étendue sont négligés $\rightarrow u_r|_{z=0} = 0$ et $v_r|_{z=0} = 0 \quad \forall(x, y)$. De même pour les dérivées par rapport à la variable $x \rightarrow u_{r,x}|_{z=0} = 0$ et $v_{r,x}|_{z=0} = 0$ etc..
- Le cisaillement dans les plans de flexion et de torsion sont négligés $\rightarrow u_{r,z}|_{z=0} = -w_{r,x}|_{z=0}$ et $v_{r,z}|_{z=0} = -w_{r,y}|_{z=0}$
- Gauchissement négligeable $\rightarrow w_{r,xx} = 0$

Par combinaison de ces hypothèses, il découle également que $u_{r,zz}|_{z=0} = -w_{r,xz}|_{z=0} = 0$ et $v_{r,zz}|_{z=0} = -w_{r,yz}|_{z=0} = 0$.

Le champ de déplacements d'un renfort se simplifie alors de la façon suivante :

$$\mathbf{U}_r = \begin{cases} u_r(y, z, t) = -z \frac{\partial w_r}{\partial x} \Big|_{x=x_r} \\ v_r(y, z, t) = -z \frac{\partial w_r}{\partial y} \Big|_{x=x_r} \\ w_r(x, y, z, t) = w_r(x_r, y, t) + (x - x_r) \frac{\partial w_r}{\partial x} \Big|_{x=x_r} \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Comme mentionné précédemment, le champ de déplacements de la plaque est étendu aux superstructures assurant ainsi la continuité des champs de déplacements à chaque interface (voir Figure III-6). Le champ de déplacements du renfort est alors exprimé en fonction du déplacement transversal de la plaque étendue $w(x, y, t)$ appliqué en $x = x_r$:

$$\mathbf{U}_r = \begin{cases} u_r(y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=x_r} \\ v_r(y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{x=x_r} \\ w_r(x, y, z, t) = w(x_r, y, t) + (x - x_r) \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{x=x_r} \end{cases} \quad (\text{III.4})$$

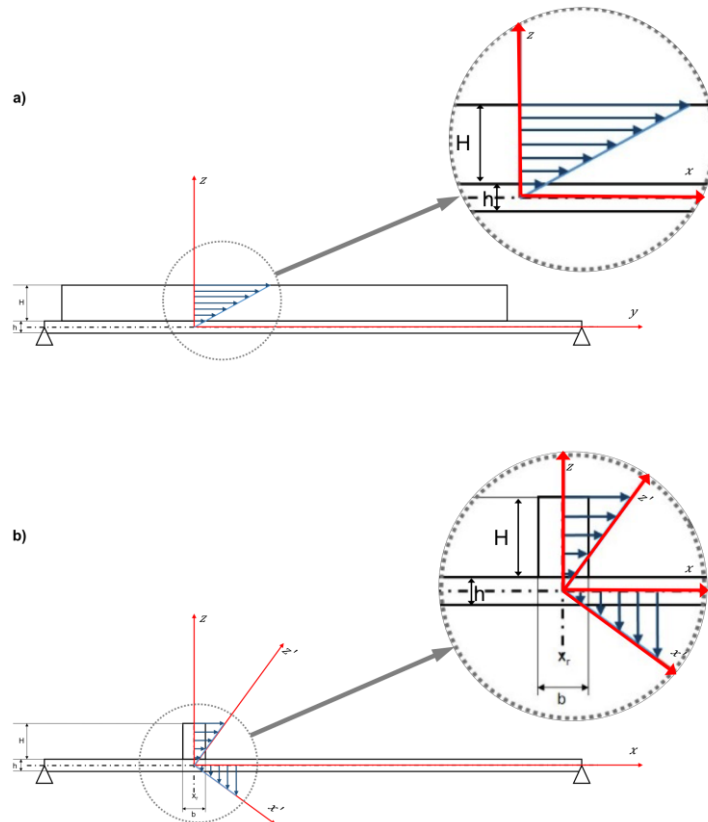


Figure III-6 : Continuité des champs de déplacements dans les plans de flexion (a) et de torsion (b).

III.B.2. Milieu mince et champ de contraintes

Mettons pour l'instant le champ de déplacements de côté et supposons le tenseur des déformations infinitésimales ϵ associé comme complet. De fait, le comportement du matériau peut être modélisé par une loi élastique linéaire qui les relie aux contraintes σ dans le renfort. L'hypothèse de milieu mince permet de simplifier le champ de contraintes associé aux renforts : les contraintes de traction / compression dans les directions où les dimensions des superstructures sont petites, sont négligeables. Dans le cas d'un renfort orienté selon y , σ_{zz} et $\sigma_{xx} \ll \sigma_{yy} \rightarrow \sigma_{zz} \approx \sigma_{xx} \approx 0$.

Analogiquement à la plaque étendue (voir ANNEXE A), la loi inverse de Hooke nous permet d'exprimer cette relation. Dans le cadre d'une approche généraliste et en supposant toutes les constantes connues, il résulte la relation suivante pour un matériau orthotrope :

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{xy} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & \frac{1}{E_z} \\ & & & \frac{1}{2G_{xy}} \\ & & & & \frac{1}{2G_{xz}} \\ & & & & & \frac{1}{2G_{yz}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{yy} \\ 0 \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} \quad (0) \quad (III.5)$$

d'où l'expression suivante des contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{yy} = E_y \epsilon_{yy} \\ \sigma_{xy} = 2 G_{xy} \epsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} = 2 G_{xz} \epsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} = 2 G_{yz} \epsilon_{yz} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \epsilon_{xx} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} \sigma_{yy} \\ \epsilon_{zz} = -\frac{\nu_{yz}}{E_y} \sigma_{yy} \end{cases} \quad (\text{effets Poisson}) \quad (III.6)$$

Remarque

Nous verrons par la suite que les effets Poissons ne seront pas pris en considération. En effet, l'hypothèse de milieux minces nous conduira à un tenseur des déformations infinitésimales pour lequel ϵ_{xx} et ϵ_{zz} sont négligeables même si non nuls.

III.B.3. Énergie cinétique d'un renfort orienté selon y

L'énergie cinétique d'un renfort est estimée par une intégrale sur son volume. Soit dans le repère global :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{x=x_x-\frac{b}{2}}^{x_x+\frac{b}{2}} \int_{y=y_i}^{y_f} \int_{z=\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+H} \rho_r (\dot{u}_r^2 + \dot{v}_r^2 + \dot{w}_r^2) dx dy dz \quad (\text{III.7})$$

où ρ_r est la masse volumique du matériau ; b sa largeur, H sa hauteur, h l'épaisseur de la plaque, x_r sa position selon x et y_i, y_f les coordonnées des extrémités selon y .

Par substitution des termes u_r, v_r et w_r déterminés à l'équation (III.4), l'énergie cinétique devient :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_r \int_{x=x_x-\frac{b}{2}}^{x_x+\frac{b}{2}} \int_{y=y_i}^{y_f} \int_{z=\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+H} z^2 (\dot{w}_{,x}^2 + \dot{w}_{,y}^2) + \dot{w}^2 + (x - x_r)^2 \dot{w}_{,x}^2 + 2(x - x_r) \dot{w} \dot{w}_{,x} dx dy dz \quad (\text{III.8})$$

où l'intégrale de $2(x - x_r) \dot{w} \dot{w}_{,x}$ est nulle étant donné la parité de la fonction intégrée. Le passage dans le repère local permet de calculer simplement les intégrales sur x et z :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho_r \int_{y=y_i}^{y_f} Hb\dot{w}^2 + I_f \dot{w}_{,y}^2 + I_g \dot{w}_{,x}^2 dy \quad (\text{III.9})$$

avec I_f le moment d'inertie de flexion et I_g le moment quadratique d'inertie de torsion dont les expressions sont données par :

$$I_f = \int_{x=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+H} z^2 dX dz = \frac{b}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + H \right)^3 - \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right] \quad (\text{III.10})$$

$$I_g = \int_{x=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+H} X^2 + z^2 dX dz = I_f + \frac{Hb^3}{12}$$

III.B.4. Énergie de déformation d'un renfort orienté selon y

L'énergie de déformation est calculée à partir de l'intégrale du produit terme à terme des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ et des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\epsilon}$. A partir du champ de déplacements équation (III.3), les déformations sont les suivantes :

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}} = \begin{pmatrix} 0 & -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & 0 \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \boldsymbol{\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z w_{,yy} \\ 0 \\ -\frac{z}{2} w_{,xy} \\ 0 \\ \frac{x}{2} w_{,xy} \end{pmatrix} \quad (\text{III.11})$$

Remarque

Le fait de négliger les effets de pompage conduit à $\epsilon_{xx} = \epsilon_{zz} = 0$. Même si ce résultat est paradoxal compte tenu des hypothèses formulées sur les contraintes qui conduisent à des termes non nuls, il reste valable et bien connu de la théorie des poutres d'Euler-Bernoulli.

L'expression de l'énergie de déformation d'un renfort est alors relativement simple, soit dans le repère global :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{x=x_x - \frac{b}{2}}^{x_x + \frac{b}{2}} \int_{y=y_i}^{y_f} \int_{z=\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+H} \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \epsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} \epsilon_{yz} dx dy dz \quad (\text{III.12})$$

De même que pour l'énergie cinétique, le passage dans le repère local offre un changement de variables pratique en vue des intégrations sur x et z . Ainsi, après substitution des expressions des contraintes et des déformations, respectivement équations (III.6) et (III.11), l'énergie de déformation est donnée par :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{y=y_i}^{y_f} I_f E_y w_{,yy}^2 + D_g w_{,xy}^2 dy \quad (\text{III.13})$$

avec D_g que l'on pourrait qualifier de « rigidité dynamique en torsion » en référence aux rigidités dynamiques en flexion D_1 , D_2 , D_3 et D_4 de la plaque étendue dont l'expression est donnée par :

$$D_g = \int_{x=-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{z=\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+H} G_{yz}X^2 + G_{xz}z^2 dX dz = G_{xz}I_f + G_{yz} \frac{Hb^3}{12} \quad (III.14)$$

Jusqu'ici le formalisme adopté permet d'exprimer l'énergie de déformation dans le cas d'un matériau orthotrope, ce qui suppose de connaître l'orientation des différents axes d'orthotropie avec précision. Dans le cas de la table d'harmonie, il est évident que les fibres du bois sont orientées dans la longueur des renforts (pareillement pour les chevalets) le module de Young longitudinal étant le plus fort. Concernant les deux autres modules de Young, il existe deux orientations possibles illustrées en Figure III-7 : en rouge les cernes du renfort sont parallèles à la plaque, i.e que le module de Young transverse est normal à la surface ; en bleu les cernes sont cette fois-ci perpendiculaires à la plaque, i.e que le module de Young transverse est tangent à la surface. Il est donc impératif de connaître parfaitement l'orientation des fibres pour déterminer dans quelle configuration nous nous plaçons tout en supposant que les cernes du bois soient parfaitement droits.

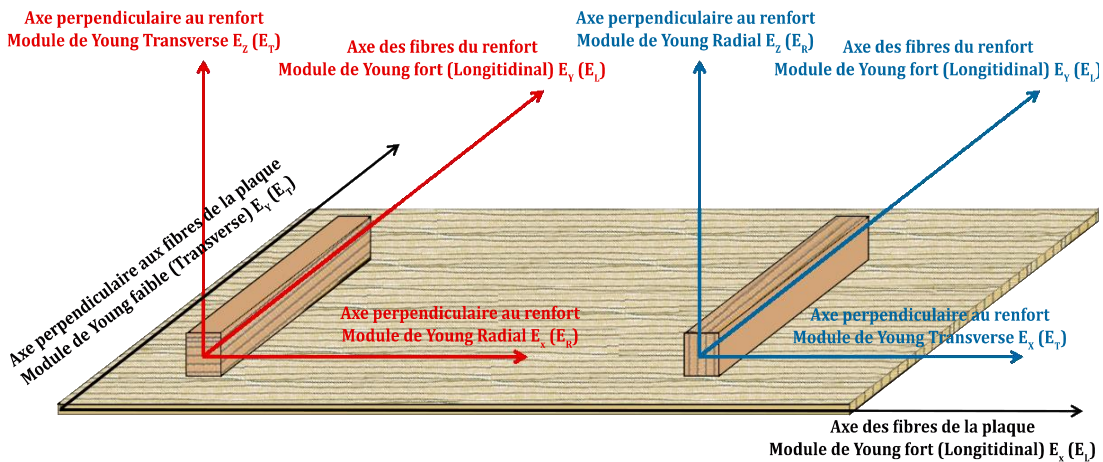


Figure III-7 : Orientation des fibres et donc des modules de Young de la plaque et d'un renfort orienté selon y . Deux configurations sont possibles pour le raidisseur selon comment sont tournées les directions faibles. Première configuration : axes rouges ; Seconde configuration : axes bleus.

De plus, nous avons vu dans le CHAPITRE 1 que les propriétés des bois sont difficiles à mesurer et qu'il existe une grande disparité des propriétés au sein même d'une espèce de bois, ce qui complique la mise en données. D'un autre côté, on peut penser que l'orthotropie des renforts est du second ordre comparativement à celle de la plaque. Il serait donc prétentieux de conserver un modèle avec autant de paramètres. Le choix est donc de considérer toutes les superstructures faites d'un matériau isotrope dont le module de Young E_T correspond au module le plus fort du bois (l'indice « r » désigne le raidisseur, à ne pas confondre avec E_R sur la Figure III-7 désignant les modules radiaux). L'équation revient alors à celle d'une poutre :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{y=y_i}^{y_f} E_r I_f w_{,yy}^2 + G_r I_g w_{,xy}^2 dy \quad (\text{III.15})$$

avec G_r le module de cisaillement associé et où les expressions de I_f et I_g sont données par l'équation (III.10).

III.B.5. Hamiltonien d'un renfort orienté selon y

Selon le même principe que pour la plaque, le « sous-Hamiltonien » est exprimé en fonction du déplacement transversal de la plaque et de ses dérivées spatiales et temporelles. Soit :

$$H_{renfort\ y} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_{y=y_i}^{y_f} \rho_r (Hb\dot{w}^2 + I_f \dot{w}_{,y}^2 + I_g \dot{w}_{,x}^2) - (E_r I_f w_{,yy}^2 + G_r I_g w_{,xy}^2) dy dt \quad (\text{III.16})$$

Expression dans laquelle on refait apparaître l'intégrale sur x de façon à rester homogène avec celle de la plaque étendue (voir équation (II.3)). Pour cela, une distribution de Dirac sur x rend l'application de l'énergie concentrée sur une ligne en $x = x_r$ comprise entre y_i et y_f . Soit la « sous-fonctionnelle » de Hamilton :

$$H_{renfort\ y} = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}_{renfort\ y} dt \quad (\text{III.17})$$

avec $\mathcal{L}_{renfort\ y}$ le « sous Lagrangien » en fonction des variables de la plaque :

$$\mathcal{L}_{renfort\ y} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=y_i}^{y_f} [\rho_r (Hb\dot{w}^2 + I_f \dot{w}_{,y}^2 + I_g \dot{w}_{,x}^2) - (E_r I_f w_{,yy}^2 + G_r I_g w_{,xy}^2)] \delta(x - x_r) dx dy \quad (\text{III.18})$$

III.B.6. Hamiltonien d'un renfort orienté selon x

La démarche est exactement la même pour un renfort orienté selon x . On donne donc directement l'expression du « sous Lagrangien » en fonction des variables de la plaque telle que l'expression de la fonctionnelle d'action associée prend la même forme que l'équation (III.16) :

$$\mathcal{L}_{renfort\ x} = \frac{1}{2} \int_{x=x_i}^{x_f} \int_{y=0}^{L_y} [\rho_c (H_c b_c \dot{w}^2 + I_{fc} \dot{w}_{,x}^2 + I_{gc} \dot{w}_{,y}^2) - (E_c I_{fc} w_{,xx}^2 + G_c I_{gc} w_{,xy}^2)] \delta(y - y_c) dx dy \quad (\text{III.19})$$

avec ρ_c la masse volumique du matériau, E_c son module de Young et G_c son coefficient de cisaillement ; H_c et b_c la hauteur et la largeur du renfort ; y_c sa position selon \mathbf{y} et x_i, x_f les coordonnées des extrémités. Les moments d'inertie sont eux aussi semblables à celui d'une superstructure dans la direction \mathbf{y} :

$$I_{fc} = \frac{b_c}{3} \left[\left(\frac{h}{2} + H_c \right)^3 - \left(\frac{h}{2} \right)^3 \right] \quad (\text{III.20})$$

$$I_g = I_f + \frac{H_c b_c^3}{12}$$

III.C. Extension du modèle au cas des structures raidies

Selon le même principe que dans le CHAPITRE II, le déplacement transversal est décomposé sur la base des modes propres de la plaque simplement supportée rectangulaire, dite plaque étendue (voir équation (II.9)).

Dans un premier temps, les « sous Lagrangien » sont donc ré-exprimés non plus en variables plaque mais en variables modales, i.e, non plus en fonction du déplacement transversal et de ses dérivées spatiales et temporelles mais en fonction des amplitudes modales des modes de la plaque étendue et de leurs dérivées temporelles.

Dans un second temps, le problème sera transposé sous la forme d'une équation généralisée matricielle et ceci en utilisant la forme différentielle d'Euler-Lagrange du principe de moindre action sur les variables modales tel que présenté par l'équation (II.11). Cette section indique les grandes étapes de calcul décrites ci-dessus, tout d'abord pour une superstructure orientée selon \mathbf{y} puis selon \mathbf{x} .

III.C.1. Superstructure orientée selon \mathbf{y}

La décomposition modale (II.9) est injectée dans l'expression du « sous Lagrangien » (III.18) d'un renfort orienté selon \mathbf{y} de façon à ré-exprimer ce dernier en fonction des amplitudes modales de la plaque étendue. En utilisant les propriétés de distributivité des intégrales et en les calculant analytiquement, on obtient une nouvelle expression de ce Lagrangien en variables modales :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{renfort\ y} = & \frac{1}{2} \left[\rho_r \left(Hb \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0 \right. \right. \\
 & + I_f \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_1 \\
 & + I_g \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0 \left. \right) \\
 & - \left(E_r I_f \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \left(\frac{q\pi}{L_y}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0 \right. \\
 & \left. \left. + G_r I_g \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_1 \right) \right] \quad (III.21)
 \end{aligned}$$

avec les fonctions g_0 et g_1 définies par :

$$g_0(n, q, y_i, y_f, L_y) = \begin{cases} \frac{y_f - y_i}{2} - \frac{L_y}{2q\pi} \sin\left(\frac{2q\pi[y_f + y_i]}{L_y}\right) \cos\left(\frac{2q\pi[y_f - y_i]}{L_y}\right) & \forall n = q \\ \frac{L_y}{(n - q)\pi} \sin\left(\frac{[n - q]\pi[y_f + y_i]}{L_y}\right) \cos\left(\frac{[n - q]\pi[y_f - y_i]}{L_y}\right) & \forall n \neq q \\ -\frac{L_y}{(n + q)\pi} \sin\left(\frac{[n + q]\pi[y_f + y_i]}{L_y}\right) \cos\left(\frac{[n + q]\pi[y_f - y_i]}{L_y}\right) & \forall n \neq q \end{cases} \quad (III.22)$$

$$g_1(n, q, y_i, y_f, L_y) = \begin{cases} \frac{y_f - y_i}{2} + \frac{L_y}{2q\pi} \sin\left(\frac{2q\pi[y_f + y_i]}{L_y}\right) \cos\left(\frac{2q\pi[y_f - y_i]}{L_y}\right) & \forall n = q \\ \frac{L_y}{(n - q)\pi} \sin\left(\frac{[n - q]\pi[y_f + y_i]}{L_y}\right) \cos\left(\frac{[n - q]\pi[y_f - y_i]}{L_y}\right) & \forall n \neq q \\ +\frac{L_y}{(n + q)\pi} \sin\left(\frac{[n + q]\pi[y_f + y_i]}{L_y}\right) \cos\left(\frac{[n + q]\pi[y_f - y_i]}{L_y}\right) & \forall n \neq q \end{cases}$$

où l'ANNEXE C section C.III donne de plus amples précisions concernant ce calcul.

Par minimisation de l'action sur les variables modales (forme différentielle d'Euler-Lagrange (II.11)), il découle les matrices de masse et de raideur généralisées notées $\bar{\bar{M}}_{renfort\ y}$ et $\bar{\bar{K}}_{renfort\ y}$ dont les termes sont donnés par les expressions suivantes (voir ANNEXE D section D.III) :

$$\begin{aligned}
 k_{ry}(m, n, p, q) = & E_r I_f \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \left(\frac{q\pi}{L_y} \right)^2 \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) g_0(n, q, y_i y_f, L_y) \quad (\text{flexion}) \\
 & + G_r I_g \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_1(n, q, y_i y_f, L_y) \quad (\text{torsion})
 \end{aligned} \tag{III.23}$$

$$\begin{aligned}
 m_{ry}(m, n, p, q) = & Hb \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0(n, q, y_i y_f, L_y) \quad (\text{flexion}) \\
 & + I_f \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_1(n, q, y_i y_f, L_y) \quad (\text{flexion}) \\
 & + I_g \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0(n, q, y_i y_f, L_y) \quad (\text{torsion})
 \end{aligned} \tag{III.24}$$

où les contributions des ondes de flexion et de torsion sont clairement distinguables. Enfin, ces matrices à coefficients réels, symétriques et pleines, sont agencées de la façon suivante :

$$\bar{M}_{renfort\ y} = \rho_r \left(\begin{array}{cccc} m_{ry}(1,1,1,1) & m_{ry}(1,1,1,2) & \dots & m_{ry}(1,1,P,Q) \\ m_{ry}(1,2,1,1) & m_{ry}(1,2,1,2) & \dots & m_{ry}(1,2,P,Q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{ry}(M,N,1,1) & m_{ry}(M,N,1,2) & \dots & m_{ry}(M,N,P,Q) \end{array} \right) \Bigg|_{x=x_r} \tag{III.25}$$

$$\bar{K}_{renfort\ y} = \left(\begin{array}{cccc} k_{ry}(1,1,1,1) & k_{ry}(1,1,1,2) & \dots & k_{ry}(1,1,P,Q) \\ k_{ry}(1,2,1,1) & k_{ry}(1,2,1,2) & \dots & k_{ry}(1,2,P,Q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{ry}(M,N,1,1) & k_{ry}(M,N,1,2) & \dots & k_{ry}(M,N,P,Q) \end{array} \right) \Bigg|_{x=x_r} \tag{III.26}$$

Le fait que ces matrices soient pleines signifie que tous les modes de la plaque étendue seront couplés et donc qu'il existe une perturbation des fréquences et déformées propres de la base initiale (la base simplement supportée). Ainsi, plus le renfort est imposant et/ou leur nombre conséquent, plus la base sera perturbée donnant ainsi de l'importance aux termes de couplage extra-diagonaux.

III.C.2. Superstructure orientée selon x

Le cas d'une superstructure parallèle à l'axe x est somme toute très analogue au cas précédent. La démarche suivie est exactement la même et le lecteur est invité à se référer aux mêmes annexes qui contiennent toutes les étapes de calcul nécessaires à une compréhension approfondie de ce qui est présenté dans cette section. Ainsi, en partant de l'expression (III.19) du Lagrangien, expression dans laquelle le déplacement transversal est décomposé sur la base des modes propres de la plaque étendue, il découle la nouvelle expression de ce même Lagrangien en variables modales :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{renfort \mathbf{x}} = & \frac{1}{2} \left[\rho_c \left(H_c b_c \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0 \right. \right. \\
 & + I_{fc} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_1 \\
 & + I_{gc} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0 \left. \right) \\
 & - \left(E_c I_{fc} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \left(\frac{p\pi}{L_x}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0 \right. \\
 & \left. \left. + G_c I_{gc} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_1 \right) \right] \quad (III.27)
 \end{aligned}$$

avec les fonctions g_0 et g_1 définies de la même façon mais où les indices ne se réfèrent non plus aux dimensions et sommes dans la direction \mathbf{y} mais dorénavant dans la direction \mathbf{x} :

$$g_0(m, p, x_i, x_f, L_x) = \begin{cases} \frac{x_f - x_i}{2} - \frac{L_x}{2p\pi} \sin\left(\frac{2p\pi[x_f + x_i]}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2p\pi[x_f - x_i]}{L_x}\right) & \forall m = p \\ \frac{L_x}{(m-p)\pi} \sin\left(\frac{[m-p]\pi[x_f + x_i]}{L_x}\right) \cos\left(\frac{[m-p]\pi[x_f - x_i]}{L_x}\right) & \forall m \neq p \\ -\frac{L_x}{(m+p)\pi} \sin\left(\frac{[m+p]\pi[x_f + x_i]}{L_x}\right) \cos\left(\frac{[m+p]\pi[x_f - x_i]}{L_x}\right) & \forall m \neq p \end{cases} \quad (III.28)$$

$$g_1(m, p, x_i, x_f, L_x) = \begin{cases} \frac{x_f - x_i}{2} + \frac{L_x}{2p\pi} \sin\left(\frac{2p\pi[x_f + x_i]}{L_x}\right) \cos\left(\frac{2p\pi[x_f - x_i]}{L_x}\right) & \forall m = p \\ \frac{L_x}{(m-p)\pi} \sin\left(\frac{[m-p]\pi[x_f + x_i]}{L_x}\right) \cos\left(\frac{[m-p]\pi[x_f - x_i]}{L_x}\right) & \forall m \neq p \\ +\frac{L_x}{(m+p)\pi} \sin\left(\frac{[m+p]\pi[x_f + x_i]}{L_x}\right) \cos\left(\frac{[m+p]\pi[x_f - x_i]}{L_x}\right) & \forall m \neq p \end{cases}$$

Les étapes de ce calcul sont détaillées en section C.IV de l'ANNEXE C.

Par minimisation de l'action sur les variables modales, on obtient les matrices de masse et de raideur généralisées $\bar{\mathbf{M}}_{renfort \mathbf{x}}$ et $\bar{\mathbf{K}}_{renfort \mathbf{x}}$ dont les termes sont donnés par les expressions suivantes (voir ANNEXE D section D.IV) :

$$\begin{aligned}
 k_{rx}(m, n, p, q) = & E_c I_{fc} \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{p\pi}{L_x} \right)^2 \sin \left(\frac{n\pi}{L_y} y_c \right) \sin \left(\frac{q\pi}{L_y} y_c \right) g_0(m, p, x_i x_f, L_x) \quad (\text{flexion}) \\
 & + G_c I_{gc} \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{q\pi}{L_y} \cos \left(\frac{n\pi}{L_y} y_c \right) \cos \left(\frac{q\pi}{L_y} y_c \right) g_1(m, p, x_i x_f, L_x) \quad (\text{torsion})
 \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

$$\begin{aligned}
 m_{rx}(m, n, p, q) = & H_c b_c \sin \left(\frac{n\pi}{L_y} y_c \right) \sin \left(\frac{q\pi}{L_y} y_c \right) g_0(m, p, x_i x_f, L_x) \quad (\text{flexion}) \\
 & + I_{fc} \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \sin \left(\frac{n\pi}{L_y} y_c \right) \sin \left(\frac{q\pi}{L_y} y_c \right) g_1(m, p, x_i x_f, L_x) \quad (\text{flexion}) \\
 & + I_{gc} \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \cos \left(\frac{n\pi}{L_y} y_c \right) \cos \left(\frac{q\pi}{L_y} y_c \right) g_0(m, p, x_i x_f, L_x) \quad (\text{torsion})
 \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Comme en section précédente, les matrices de masse et de raideur s'organisent de la façon suivante :

$$\bar{\bar{M}}_{renfort\ x} = \rho_c \left(\begin{array}{cccc} m_{rx}(1,1,1,1) & m_{rx}(1,1,1,2) & \dots & m_{rx}(1,1,P,Q) \\ m_{rx}(1,2,1,1) & m_{rx}(1,2,1,2) & \dots & m_{rx}(1,2,P,Q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{rx}(M,N,1,1) & m_{rx}(M,N,1,2) & \dots & m_{rx}(M,N,P,Q) \end{array} \right) \Bigg|_{y=y_c} \quad (\text{III.31})$$

$$\bar{\bar{K}}_{renfort\ x} = \left(\begin{array}{cccc} k_{rx}(1,1,1,1) & k_{rx}(1,1,1,2) & \dots & k_{rx}(1,1,P,Q) \\ k_{rx}(1,2,1,1) & k_{rx}(1,2,1,2) & \dots & k_{rx}(1,2,P,Q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{rx}(M,N,1,1) & k_{rx}(M,N,1,2) & \dots & k_{rx}(M,N,P,Q) \end{array} \right) \Bigg|_{y=y_c} \quad (\text{III.32})$$

Remarque

L'ANNEXE D ne se contente pas de fournir des étapes de calcul détaillées de l'obtention des matrices de masse et de raideur. En outre, elle présente le cas particulier de superstructures de mêmes dimensions que la plaque étendue, cas dans lequel une seule partie des modes sont couplés.

III.C.3. Modèle vibratoire d'une structure orthotrope raidie de forme quelconque

Les contributions des différentes superstructures enrichissent le modèle présenté lors du CHAPITRE II. Comme précédemment évoqué, la fonctionnelle d'action de la structure étudiée se compose de la somme des différentes contributions comme le montrait l'équation (II.1). Nous avons abordé lors du chapitre précédent les contributions liées à la plaque étendue et à la densité de ressorts et déduit un système linéaire matriciel composé de matrices de masse et de raideur. Ainsi, nous avons défini des matrices de masse et de raideur totales qui s'écrivent comme la somme de celles de la plaque et de chaque ressort ponctuel appliqué dans le domaine dit complémentaire.

La prise en compte des superstructures se fait simplement en redéfinissant ces matrices de masse et de raideur totales, soit la somme des contributions de la plaque, la densité de ressorts et dorénavant des superstructures orientées dans la direction \mathbf{x} ainsi que celles dans la direction \mathbf{y} . Soit :

$$\bar{M}/\bar{K}_{\text{système}} = \bar{M}/\bar{K}_{\text{plaque}} + \sum_{s=1}^{N_s} \bar{M}/\bar{K}_{\text{ressort}} + \sum_{r=1}^{N_y} \bar{M}/\bar{K}_{\text{renfort } y}|_{x=x_r} + \sum_{c=1}^{N_x} \bar{M}/\bar{K}_{\text{renfort } x}|_{y=y_c} \quad (\text{III.33})$$

La suite de la méthode développée dans la CHAPITRE II reste valable, à savoir : la résolution du problème aux valeurs propres ainsi que la détermination de la base du système qui en découle que nous appellons également base raidie (section II.D.1), la convergence de cette base (section II.D.2), la réponse forcée face à une excitation ponctuelle harmonique et l'introduction d'un amortissement modal (sections II.D.3 et II.D.5 équation (II.22)).

III.D. Rayonnement acoustique d'une structure raidie

La modélisation proposée jusqu'ici se focalise sur la réponse vibratoire de la structure dont l'interaction avec le fluide est *a priori* comprise dans les termes d'amortissement. Cependant, les vibrations de structure à elles seules ne nous semblent pas suffisantes pour une étude complète et exhaustive de leur comportement d'autant plus dans le cas de structures raidies. En effet, même s'il est évident que le fait de raidir une structure réduit son niveau vibratoire, son rayonnement acoustique ne suit pas une logique aussi simple, principalement en raison de la participation de modes éloignés dans les bandes de fréquences élevées. Ainsi, leur rayonnement est d'un intérêt tout particulier et de nombreuses méthodes existent.

Dans le cadre de cette thèse, nous proposons une alternative aux méthodes purement numériques comme les éléments finis de frontière, les intégrales de Rayleigh ou encore le PML (« Perfectly Matched Layers »). Cette alternative consiste à se servir des impédances de rayonnement acoustique de la plaque non-raïdie étendue de façon à calculer celui de la structure. Même si ce calcul existe dans la littérature (voir les papiers de Guyader & Laulagnet [GuLa90, GuLa94]), il est pour l'instant limité au cas des plaques raidies rectangulaires. La véritable originalité de ce modèle consiste à étendre ce principe aux structures raidies non-rectangulaires. Le rayonnement acoustique d'une plaque non-rectangulaire raidie est alors calculé en se basant sur les impédances de rayonnement acoustique d'une plaque rectangulaire non-raïde qui sont bien maîtrisées et qui ont par ailleurs fait l'objet de nombreuses études comme celles de Wallace [Wall72, Wall87], Maidanik [Maid62] ou Stepanishen [Step82].

La puissance acoustique rayonnée est définie par l'intégrale de l'intensité acoustique « s'échappant » de la surface de la structure. En condition de champ lointain où la pression et la vitesse sont en phase, la pression acoustique rayonnée est par définition donnée par la relation suivante [Lesu88] :

$$W(\omega) = \frac{1}{2} \text{Real} \left\{ \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} p_a(x,y) \dot{w}(x,y)^* dx dy \right\} \quad (\text{III.34})$$

On considère la structure comme bafflée, plane (négligeant ainsi la surface développée par les superstructures), délimitant donc deux demi-espaces indépendants et symétriques. Concernant l'hypothèse bafflée, il va de soit qu'en situation réelle un panneau rayonne par ses deux faces qui communiquent naturellement donnant ainsi naissance à de nombreux court-circuits acoustiques en basses fréquences. Le rayonnement devient alors dipolaire lorsque les longueurs d'onde sont grandes devant la taille de la structure ce qui entraîne un affaiblissement du rayonnement acoustique BF [Laul98b, PuTh10b]. Il serait alors plus adapté de considérer la structure comme non-bafflée dans ce domaine fréquentiel. Cependant, lorsqu'on s'intéresse à des fréquences au delà des premiers modes (au delà de la première octave par exemple), les longueurs d'onde acoustiques chutent et deviennent très vite plus petites que la structure. On tend alors très vite vers une condition bafflée et on peut se permettre de ne calculer que le rayonnement sur une face. Dans le cas de la table d'harmonie, nous avons vu dans le CHAPITRE I à la sous-section I.A.4 que le meuble fait en partie obstacle à la propagation des ondes et empêche tout court-circuit acoustique.

Mathématiquement, la condition bafflée impose un déplacement transversal nul en dehors de la structure, soit une réduction des bornes d'intégrales d'espace. Dans le cadre d'un problème harmonique $\dot{w}(x,y)^* = -j\omega w(x,y)^*$, en injectant la décomposition modale du déplacement transversal équation (II.9) ainsi que l'expression de la pression acoustique pariétale $p_a(x,y)$ déterminée en ANNEXE F, on a :

$$W(\omega) = \frac{1}{2} \text{Real} \left\{ \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \frac{\rho_0 \omega}{4\pi^2} \int_{k_x=-\infty}^{+\infty} \int_{k_y=-\infty}^{+\infty} \frac{\omega^2}{k_z} \sum_m^M \sum_n^N a_{mn} \tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y) e^{+jk_x x} e^{+jk_y y} dk_x dk_y \sum_p \sum_q a_{pq}^* \phi(x,y) dx dy \right\} \quad (\text{III.35})$$

En réarrangeant judicieusement cette expression, il apparaît la transformée de Fourier bidimensionnelle du conjugué de ϕ_{pq} (voir annexe E) ainsi que l'impédance intermodale de rayonnement acoustique $Z_{mnpq}(\omega)$ déterminée dans l'ANNEXE F :

$$W(\omega) = \frac{\omega^2}{2} \text{Real} \left\{ \sum_m \sum_n \sum_p \sum_q a_{mn} a_{pq}^* \int_{k_x=-\infty}^{+\infty} \int_{k_y=-\infty}^{+\infty} \frac{\rho_0 \omega \tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y) \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \phi(x, y) e^{+jk_x x} e^{+jk_y y} dx dy}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y \right\} \quad (\text{III.36})$$

$\tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)$
 \uparrow
 $\tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y)$
 \downarrow
 $Z_{mnpq}(\omega)$

L'expression de la puissance acoustique rayonnée devient alors compacte :

$$W(\omega) = \frac{\omega^2}{2} \sum_m^M \sum_n^N \sum_p \sum_q a_{mn} R_{mnpq}(\omega) a_{pq}^* \quad (\text{III.37})$$

avec $R_{mnpq}(\omega)$ la partie réelle de la matrice d'impédance acoustique $Z_{mnpq}(\omega)$. Cette partie réelle ne fait intervenir que la partie propagative de la solution. On retrouve donc bien dans cette expression la notion de champ lointain puisque seules les ondes planes progressives entrent en jeu dans cette expression. D'un point de vue calculatoire, cela revient à intégrer sur un cercle de rayon k le nombre d'onde acoustique dépendant de la fréquence d'étude.

La prise en compte des couplages intermodaux est sujette à discussion. Dans le cas d'un fluide léger, ces couplages sont généralement assez faibles pour être considérés comme négligeables au premier ordre [Lesu88, Wall72, Wall87]. Wallace [Wall72] tout comme Laulagnet [LaGu96] et Mejdj [MeAt10b, MeAt12] montrent notamment, dans le cas de plaques simplement supportées (bafflées ou non), et malgré la présence de renforts, que ces termes ne dénaturent pas le comportement des structures et que les tendances décrites restent les mêmes.

Il convient cependant de rappeler que les termes de couplages intermodaux ne sont pas stricto sensu plus petits que les termes diagonaux. En effet, les termes de couplages d'un mode (m, n) sont parfois du même ordre de grandeur voire plus importants que l'impédance de rayonnement du mode (m, n) lui-même comme le montre la Figure III-8 extraite de Trévisan & al [TrEL16].

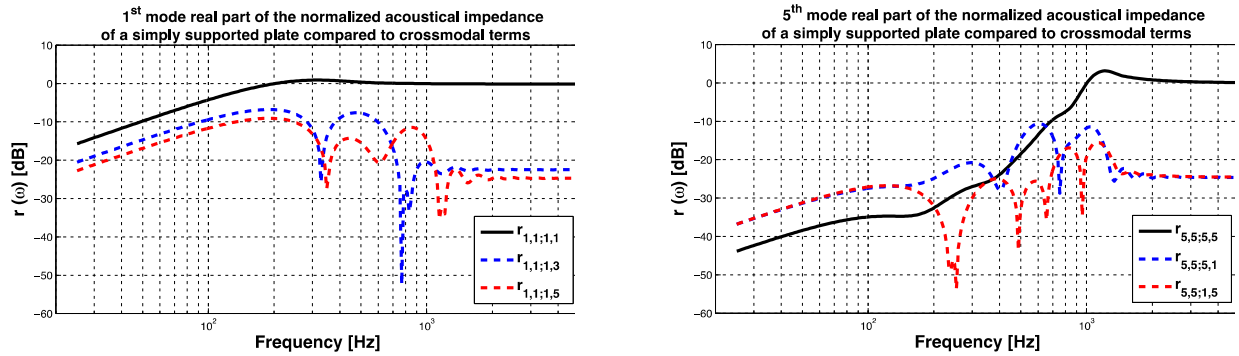


Figure III-8 : Impédance de rayonnement acoustique normalisée directe d'une plaque simplement supportée comparée aux termes de couplages. Cas pour le premier et le cinquième mode. Extrait de [TrEL16].

Dans cette étude menée sur une structure raidie typique (celle-ci sera d'ailleurs présentée au cours du CHAPITRE IV), lorsque le mode atteint sa fréquence critique, les termes de couplages sont environ 10 dB inférieurs aux termes diagonaux. A l'inverse, en basse fréquence les termes de couplages peuvent être jusqu'à 5 dB plus grands. En d'autres termes, les couplages peuvent être prépondérants contrairement à ce que l'on admet habituellement, mais ceci n'intervient que dans des zones fréquentielles où les modes sont très peu rayonnants. Étant donné l'ordre de grandeur des termes extra-diagonaux, ceux-ci impactent très peu le résultat et les considérer comme négligeables peut être admis. Lorsque les modes sont rayonnants, la matrice d'impédance de rayonnement acoustique devient bien à proprement parler une matrice à diagonale dominante.

Cependant d'autres auteurs [BeNi91, KePe87] ont montré que certaines situations étaient susceptibles de favoriser les échanges d'énergie entre modes et ainsi contribuer sensiblement au rayonnement même pour des fluides légers. Ces auteurs montrent que cela peut arriver dans le cas de conditions aux limites inhomogènes, la présence de raidisseurs où encore une excitation à des fréquences de résonance [Pasc00].

Nous choisissons délibérément de négliger ces termes de couplages dans nos applications futures, en partant du principe que ceux-ci resteront négligeables au premier ordre malgré la présence de renforts structuraux ou tout du moins ne changeront pas fondamentalement les tendances décrites. De ce fait, la matrice d'impédance acoustique devient diagonale et allège donc sensiblement le coût numérique, d'autant plus que son calcul doit être réalisé pour chaque fréquence évaluée. Ceci nous amène à simplifier l'expression de la puissance acoustique rayonnée par la structure raidie dans le domaine fréquentiel :

$$\begin{aligned}
 W(\omega) &= \frac{\omega^2}{2} \sum_m \sum_n |a_{mn}|^2 R_{mnmn}(\omega) = \frac{\omega^2}{2} {}^t \mathbf{a}^*(\omega) \bar{\bar{R}}(\omega) \mathbf{a}(\omega) && \text{base initiale} \\
 W(\omega) &= \frac{\omega^2}{2} {}^t \mathbf{b}^*(\omega) {}^t \bar{\bar{T}} \bar{\bar{R}}(\omega) \bar{\bar{T}} \mathbf{b}(\omega) && \text{base structure raidie}
 \end{aligned} \tag{III.38}$$

où $\bar{R}(\omega)$ est la partie réelle de la matrice d'impédance acoustique intermodale de la plaque étendue et ${}^t\bar{R}(\omega)\bar{T}$ la même matrice transcrite dans la base propre du système. Le calcul de la partie réelle de la matrice d'impédance s'effectue numériquement et revient à une intégration sur un quart de disque de rayon k égale au nombre d'onde acoustique :

$$R_{mnmn}(\omega) = \frac{\rho_0 \omega}{\pi^2} \int_{k_x=0}^k \int_{k_y=0}^k \frac{|\tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y)|^2}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y \quad (\text{III.39})$$

La détermination complète de la matrice d'impédance acoustique intermodale est pour rappel présentée de façon explicite en ANNEXE F. Outre le fait de fournir une méthode de calcul de la puissance acoustique rayonnée d'une structure raidie, cette méthode offre la possibilité d'analyser et de comparer les impédances modales de rayonnement d'une structure raidie à celle d'une plaque « lisse » via la transposition dans la base propre de la structure ou base raidie.

Notamment dans le cas d'une structure raidie dont un barrage fort délimite la plaque en deux zones, on montre dans [TrEL16] que les impédances de rayonnement basses fréquences (lorsque les modes restent homogènes) sont sensiblement identiques à celles d'une plaque non raidie de mêmes dimensions (Figure III-9-a) alors qu'elles sont proches de celles d'une plaque de dimensions équivalentes lorsque les modes sont confinés sur une surface réduite de la structure (Figure III-9-b).

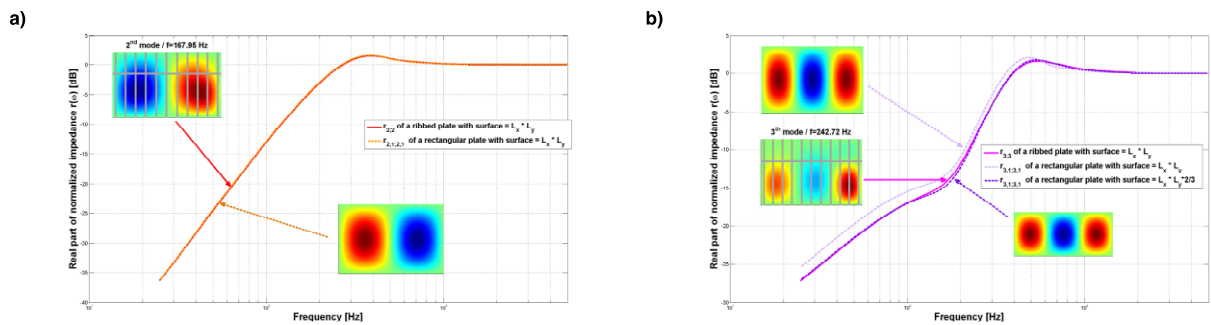


Figure III-9 : Impédance de rayonnement acoustique normalisée directe d'un panneau raidi en bois comparée à celle de plaques non raidies de dimensions égales et inférieures : a) Deuxième mode dit homogène comparé à un mode (2,1) d'une plaque non raidie ; b) Troisième mode d'un panneau raidi semblable à un mode (3,1) comparé aux modes (3,1) d'une plaque non raidie de mêmes dimensions et de dimensions réduites. Extrait de [TrEL16].

III.E. Application à la table d'harmonie de piano : Pleyel P131

En guise d'application, nous nous intéressons à la table d'harmonie de piano droit Pleyel P131 dont une photographie légendée a été présentée au début du présent chapitre en Figure III-1. Cette table d'harmonie est constituée d'une plaque non rectangulaire en épicea dont l'orientation des fibres forme un angle d'orthotropie de 35° . L'épaisseur de la plaque est sujette à discussion. Sachant que les tables sont généralement plus épaisses au centre d'environ 2mm (principe de « tapering » dont nous avons parlé au CHAPITRE I section I.A.1), nous avons mesuré l'épaisseur au niveau des bords et pris la valeur moyenne. Cela nous amène à une épaisseur de 7mm que nous avons déjà évoquée au CHAPITRE II. Les données relatives à la plaque étendue sont communiquées dans le Tableau II-1. D'autre part, notre modélisation simplifie légèrement la géométrie en terme d'orientation des superstructures et correspond à la géométrie décrite Figure III-4 dont il a été question dans la section III.A de ce chapitre. Les dimensions qui suivent ont été évaluées sur une table d'harmonie de Pleyel P131 présente au laboratoire.

Par ailleurs, cette table est constituée sur une face de multiples raidisseurs dans la direction \mathbf{x} destinés à compenser la faiblesse du bois dans la direction perpendiculaire aux fibres. Leurs profils de hauteur ont été simplifiés pour correspondre à la Figure III-3-b (voir explication à la section III.A de ce chapitre). Ces barres sont donc constituées de trois portions de hauteur constante entre les longueurs L_1 , L_2 et L_3 . Les propriétés de ces raidisseurs également faits d'épicéa sont spécifiés dans le Tableau III-1.

Barre n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ρ_r [kg.m ⁻³]	440									
H [m]	0,015	0,019	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,022	0,019	0,016
b [m]	0,025									
E_r [Pa]	1,59E+10									
G_r [Pa]	6,20E+008									
L_1 [m]	0,04	0,05	0,07	0,08	0,15	0,16	0,17	0,18	0,18	0,10
L_2 [m]	0,21	0,41	0,57	0,69	0,76	0,76	0,65	0,56	0,46	0,31
L_3 [m]	0,11	0,16	0,14	0,11	0,08	0,10	0,11	0,10	0,10	0,10
x_r [m]	1,44	1,32	1,20	1,07	0,93	0,78	0,64	0,51	0,37	0,25

Tableau III-1 : Dimensions et propriétés mécaniques des 10 barres de renforts encore appelées raidisseurs collées sur une des face de la table d'harmonie du piano. Voir Figure III-4.

Les chevalets et les barres de mouchoirs sont faits dans un bois différent, sensiblement plus lourd que l'épicéa : le hêtre. Précisons que les barres de mouchoirs sont collées du même côté que les raidisseurs tandis que les deux chevalets sont sur la face opposée. Toutes ces superstructures orientées dans la direction \mathbf{y} sont d'une hauteur constante, donc d'une seule portion contrairement aux raidisseurs dans l'autre direction. Seule exception : le chevalet des medium-

aigus en raison de la discontinuité au chevalet (passage du cadre). Leurs dimensions et propriétés mécaniques sont répertoriées dans le Tableau III-2.

	Chevalet medium-aigus partie 1/2	Chevalet medium-aigus partie 2/2	Chevalet basses	Barre de mouchoir 1	Barre de mouchoir 2
ρ_c [kg.m ⁻³]	674				
H_c [m]	0,033		0,038	0,0185	0,0192
b_c [m]	0,035		0,0325	0,0345	
E_c [Pa]	1,40E+10				
G_c [Pa]	4,70E+008				
L [m]	0,88	0,41	0,47	0,51	0,52
Y_c [m]	0,78	0,72	0,48	0,26	1,27

Tableau III-2 : Dimensions et propriétés mécaniques des deux chevalets et des deux barres délimitant les mouchoirs. Voir Figure III-4.

Intéressons nous tout d'abord aux modes propres de la table d'harmonie qui sont classifiés en différentes familles selon leurs déformées, puis complétons l'analyse de notre objet d'étude par des cartographies du comportement vibroacoustique en des points stratégiques selon différents points de vue.

III.E.1. Modes de structures

Dès lors que toutes les matrices de masse et de raideur sont déterminées, la première étape consiste à déterminer une base de calcul convergente, soit en d'autres termes, déterminer les ordres de troncature (M, N) adéquats dans la troncature modale équation (II.9). La calibration des ressorts effectuée dans le CHAPITRE II est quant à elle supposée valide pour l'instant. L'absence de modes « externes » dans la zone bloquée sera vérifiée a posteriori comme expliqué dans la section II.E du chapitre précédent. Le domaine d'étude reste la bande de fréquence [0;3000] kHz.

De façon analogue à la structure sans renfort, la Figure III-10 montre la convergence en fréquence du 213^{ème} modes propres dont la fréquence tend vers 3,2 kHz et l'évolution de la densité modale pour différents ordres de troncature (M, N).

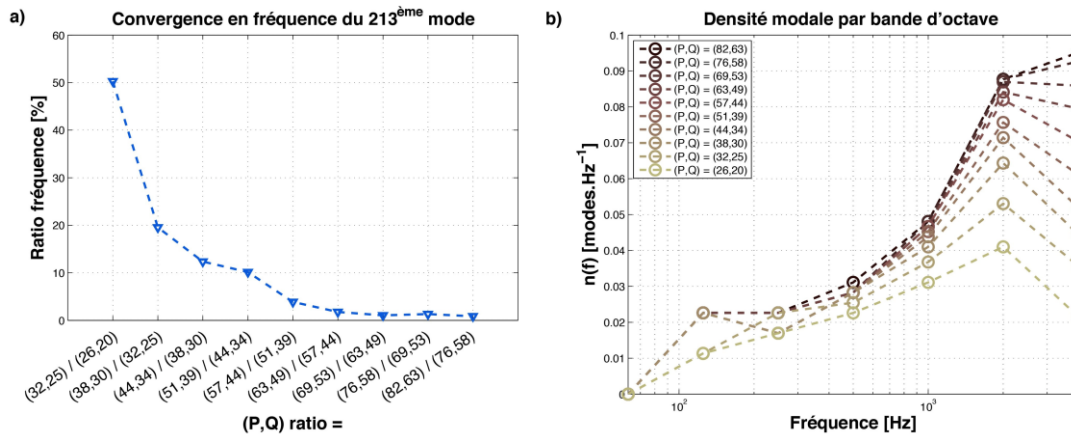


Figure III-10 : Convergence du modèle appliqué à une table d'harmonie de Pleyel P131 : détermination d'une troncature modale adéquate pour une étude sur la bande de fréquence [0 ;3000] Hz. a) Convergence de la 213^{ème} fréquences propres tendant vers une valeur finale d'environ 3,2 kHz : différence en % entre deux ordres consécutifs de troncature ; b) Densité modale par bande d'octave pour différents ordres de troncature : l'échelle de couleur devient de plus en plus foncée à mesure que l'ordre de troncature croît.

Comme on peut le constater, les indicateurs retenus dans le chapitre précédent ne laissent pas de doute quant à la convergence du calcul. En effet la 213^{ème} fréquence propre n'évolue plus très rapidement au-delà d'une troncature $(M, N) = (63, 49)$ et les écarts entre deux ordres consécutifs de troncature sont inférieurs à 2% (Figure III-10-a). La densité modale converge également de façon claire. Encore une fois, une troncature trop faible montre une densité modale par bande d'octave appauvrie dans toute les bandes de fréquence (courbes claires sur la Figure III-10-b) tandis que les densités modales se stabilisent vers une valeur commune lorsque la troncature est plus importante (courbe foncée sur la Figure III-10-b). Tout au plus observe-t-on encore une légère évolution sur la toute dernière bande d'octave. Compte tenu de ces résultats, une troncature modale $(M, N) = (82, 63)$ est retenue pour la suite.

Le ratio des vitesses quadratiques de toute la plaque étendue sur la surface interne présenté en section II.E du CHAPITRE II est utilisé à titre de vérification quant à l'absence de modes « externes », ce que confirme la Figure III-11 qui ne montre pas d'augmentation marquée de cet indicateur lorsque la raideur est suffisante ($k=2,5^E6$ en rouge sur la figure).

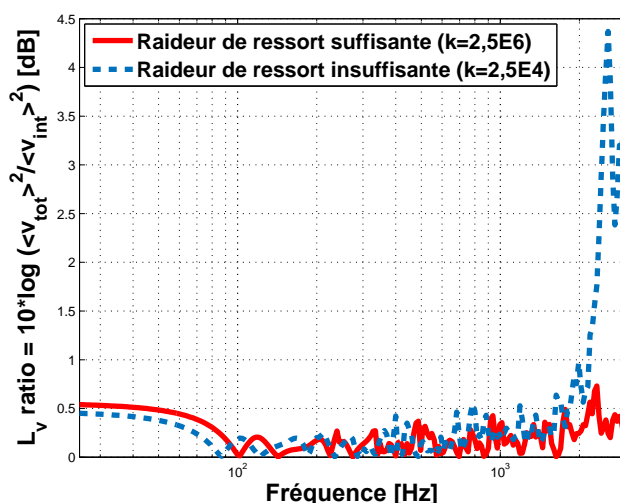


Figure III-11 : Ratio des vitesses quadratiques de toute la surface de la plaque étendue sur la surface de la géométrie « intérieure ». Une rigidité insuffisante engendre une explosion de ce ratio visible en hautes fréquences.

A titre de comparaison avec l'étude réalisée dans la section II.E du chapitre précédent, le ratio est également calculé pour une rigidité de ressorts insuffisante et tracé en bleu pointillé. Comme pour la plaque non raidie, le ratio des vitesses augmente sensiblement en hautes fréquences traduisant la présence de modes « externes ». On remarque cependant que les niveaux globaux sont plus hauts que sur la Figure II-6 même lorsque la rigidité est suffisante. En effet, raidir la structure tend à réduire les vibrations dans la partie « intérieure ». De ce fait, le ratio est plus sensible aux vibrations résiduelles présentes dans la partie bloquée par rapport à la plaque non raidie.

La troncature modale et la raideur des ressorts validées, le comportement vibroacoustique de la table d'harmonie peut être étudié. Son comportement peut être catégorisé en différentes bandes de fréquences où les vibrations mais aussi le rayonnement sont sensiblement différents en raison du design de l'instrument.

Nous nous intéressons à la réponse de la structure dans le vide. En terme de déformées propres, de nombreux phénomènes apparaissent selon la bande de fréquence considérée. Il est en effet connu que la raideur modale augmente avec la fréquence. Ainsi, plus les fréquences propres sont élevées et plus les superstructures vont raidir localement la structure et l'empêcher de vibrer au niveau de leurs positions. Cette forte limitation de la vibration au niveau de superstructures débute bien évidemment par les chevalets dont les dimensions sont les plus imposantes, puis viennent les raidisseurs. De nombreuses études montrent également des phénomènes de localisation de la vibration en hautes fréquences. Lorsque les longueurs d'onde deviennent du même ordre de grandeur que les espaces inter-raideurs (environ 13 cm) il semble apparaître des effets de guide d'ondes qui contraignent les vibrations à se localiser entre un ou deux de ces espaces [BoEg13, EgBR13].

La Figure III–12 propose une classification des modes propres de la table d'harmonie de Pleyel P131 en différentes familles de modes caractéristiques de la contrainte la plus faible à la plus élevée :

- « Similaires » aux modes d'une plaque non-raïdie : ces modes peuvent être nommés en fonction du nombre de ventre de vibration selon deux directions orthogonales, comme mode (1,3) par exemple,
- Chevalets bloquants : lorsque les deux chevalets limitent fortement le déplacement transversal de la plaque,
- Chevalets et barres bloquants : lorsque toutes les superstructures (chevalets et barres de renforts incluses) limitent fortement le déplacement transversal,
- Vibrations localisées : en sus de la famille précédente, la vibration est en plus localisée dans une petite surface délimitée par les superstructures.

Pour déterminer ces différentes familles de modes propres, nous recherchons numériquement ceux pour lesquelles les vibrations sont quasiment inhibées en dessous des barres. Pour ce faire, nous mettons en place un indicateur de vitesse quadratique moyenne « linéique » qui vient évaluer la vitesse en dessous des superstructures. Les seuils sont réglés de façon à classer dans les bonnes familles un échantillon de modes qui a été trié visuellement au préalable. Concernant la famille de modes localisés, qui correspond à une sous catégorie de celle où toutes les superstructures limitent grandement le déplacement transversal, nous ajoutons un critère de répartition spatiale des vibrations. On se base cette fois-ci sur la vitesse quadratique moyenne surfacique totale de la structure que l'on compare à la vitesse quadratique moyenne surfacique sur une zone centrée autour du maximum d'amplitude. Puis on élargit la surface de la zone jusqu'à atteindre un certain pourcentage de la vitesse quadratique moyenne de toute la structure. De même, ce pourcentage est réglé de manière à classer un échantillon de modes où les vibrations sont localisées. Une fois cette classification effectuée, on procède à une vérification visuelle de chaque famille pour éviter toutes erreurs.

Il est alors possible de classer environ 73% des modes en dessous de 3 kHz, soit environ 200 modes. Un tri manuel des modes restants permet d'aboutir à la Figure III–12 pour laquelle 96% des modes sont classés dans les familles susmentionnées. Concernant les 4% restants, les chevalets commencent à bloquer le déplacement transversal mais de manière insuffisante pour appartenir à la seconde famille décrite.

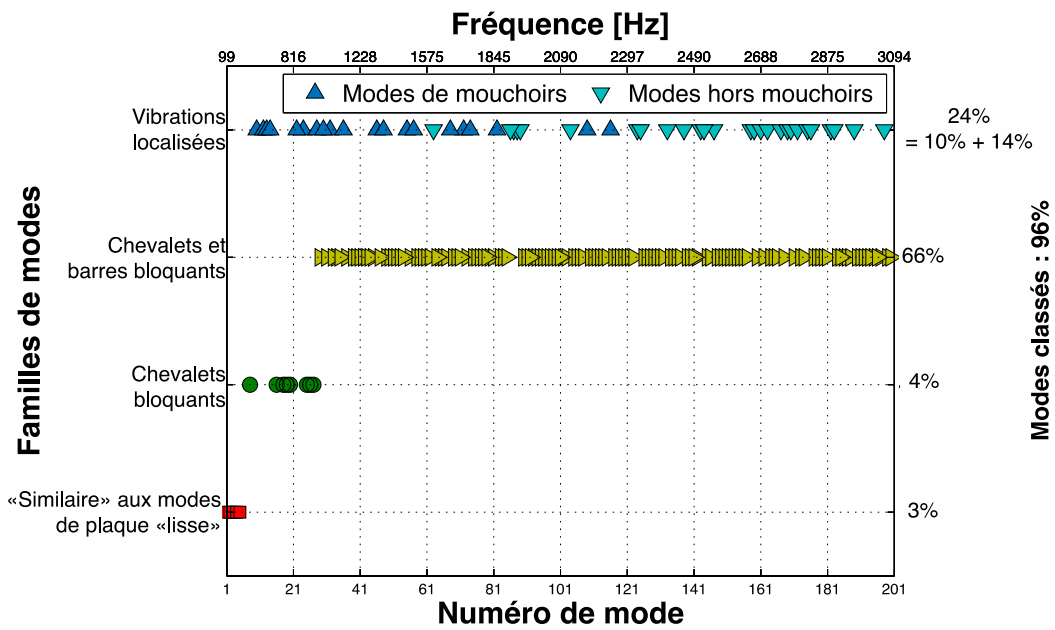


Figure III-12 : Classification des 200 premiers modes d'une table d'harmonie de piano droit Pleyel P131 en 4 familles selon les caractéristiques de leurs déformées propres : les déformées « similaires » à celles d'une plaque non raidie, celles où les chevalets limitent fortement le déplacement transversal de la table d'harmonie, celles pour lesquelles toutes les superstructures en font de même et enfin les déformées pour lesquelles la vibration est en plus localisée dans une zone réduite.

Nous constatons sur cette figure que la répartition entre les familles est très inégale. En effet, pour la majorité des modes de structures, les superstructures limitent fortement le déplacement transversal (somme des marqueurs triangulaires d'environ 90%) tandis que les modes pour lesquels les ondes « ne voient pas » les superstructures, les modes similaires à ceux d'une plaque non-raïdie, ne représentent que 3% des modes de structure (marqueurs carrés). Ces derniers correspondent au domaine basses fréquences lorsque les longueurs d'onde sont grandes par rapport aux dimensions de la structure, phénomène qui dans le cadre de la table d'harmonie de ce piano est limité aux 5 premiers modes. La Figure III-13 en montre deux exemples dont le premier est identifiable à un mode (1,1) et le second à un mode (3,1).

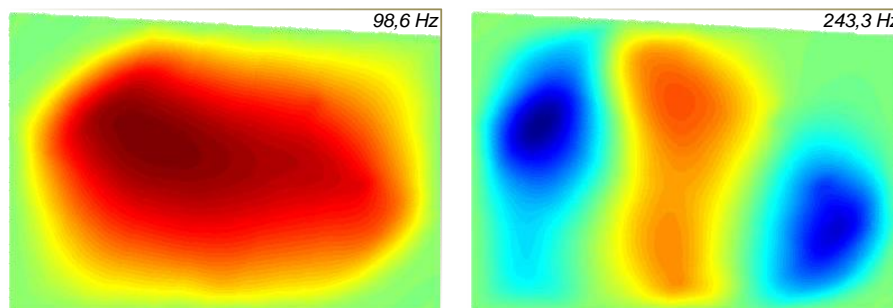


Figure III-13 : Déformées propres basses fréquences similaires à des modes de plaque non raidie.

La seconde famille peut être associée à la bande de fréquences [300;900] Hz lorsque les chevalets limitent grandement le déplacement transversal dont deux exemples sont donnés Figure III-14.

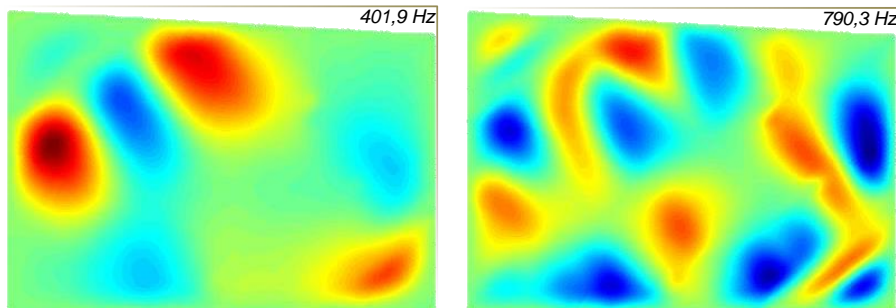


Figure III-14 : Déformées propres pour lesquelles le déplacement transversal est fortement limité au niveau des superstructures les plus imposantes, ici les chevalets.

Dans notre article publié dans le *Journal of Acoustical Society of America* [TrEL16], nous avons montré dans le cas d'une structure sur laquelle était collée un renfort particulièrement imposant (similaire au chevalet medium-aigus en terme de dimensions) et faisant toute la longueur de la table, que la table était comme coupée en deux zones délimitées par cette même barre : une vibrante et une non vibrante. Ce découpage de la plaque en deux zones distinctes n'apparaît cependant pas sur notre cas d'étude puisque le chevalet des medium aigus ne traverse pas la table d'harmonie. Même si celui-ci crée en quelque sorte un obstacle, les ondes peuvent le contourner, notamment par le coin inférieur gauche (voir Figure III-4).

Pour la majorité des déformées propres au-delà de 1 kHz, toutes les superstructures limitent le déplacement transversal. Pour environ 66%, la vibration est répartie sur toute la plaque, au moins sur une large surface (marqueurs triangulaires pointant à droite sur la Figure III-12). La Figure III-15 illustre cette famille de modes par deux exemples : l'un aux alentours de 1 kHz et l'autre de 3 kHz. Dans les deux cas, l'emplacement des superstructures se laisse très clairement deviner.

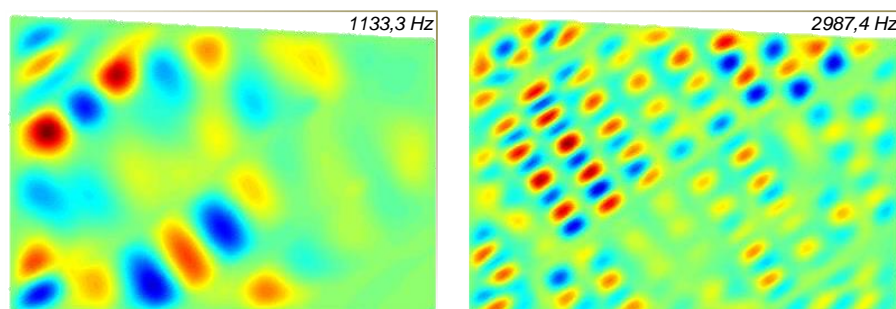


Figure III-15 : Déformées propres pour lesquelles toutes les superstructures limitent le déplacement transversal.

Enfin, les vibrations semblent être localisées dans des zones délimitées par les superstructures pour les 24 % restants. Il est important de distinguer ces 24% en deux sous-catégories : 10% pour les modes dits de mouchoirs (marqueurs triangulaires pointant vers le haut) et 14% pour les modes où la vibration est localisée entre des raidisseurs (marqueurs triangulaires pointant vers le bas). La Figure III-16 donne deux exemples de modes de mouchoirs en basses et hautes fréquences. Dans le cadre du piano, ceux-ci sont *a priori* peu influant étant donné l'emplacement de leur ventre de vibration. En effet, on sait que la table d'harmonie est excitée par les cordes au niveau des chevalets, soit sur ce que l'on pourrait qualifier de « surfaces nodales » de ces modes.

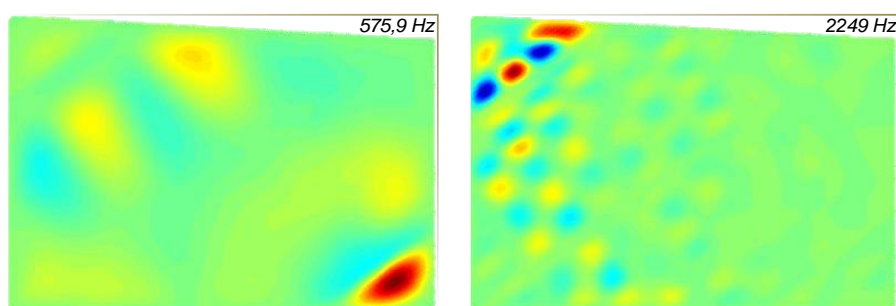


Figure III-16 : Déformées propres de modes dits de mouchoir : la vibration existe uniquement dans les mouchoirs de la table d'harmonie.

Les modes pour lesquels la vibration est entre deux espaces inter-raisseurs, illustrés par la Figure III-17, semblent apparaître aux alentours de 1,6 kHz, soit lorsque les longueurs d'onde sont déjà du même ordre de grandeur voire plus petites que les espaces inter-raisseurs [BoEg13, EgBR13]. Cependant comme le montre la Figure III-12, cette famille ne représente finalement que 14% des modes de structure qui semblent répartis de façon plus ou moins homogène entre 1 et 3 kHz. La seule condition en longueur d'onde ne semble donc pas être une condition suffisante pour prédire l'existence de cette famille de modes mais reste néanmoins nécessaire.

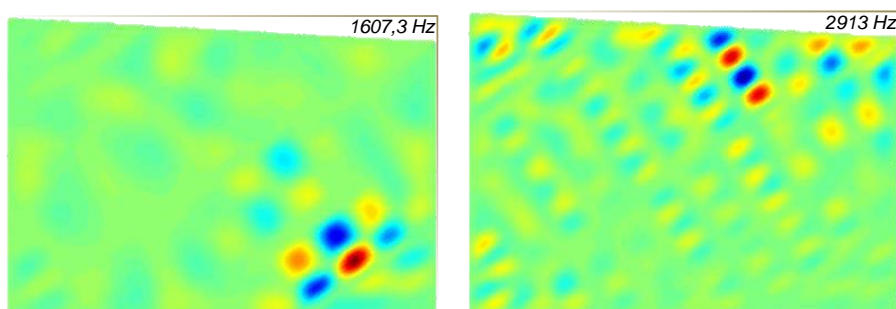


Figure III-17 : Déformées propres pour lesquelles la vibration est localisée sur une faible surface délimitée par les superstructures.

Cette première étude montre toute la complexité des déformées modales qui découle directement de la présence de renforts. De ce fait, appréhender le comportement vibratoire d'une telle structure devient particulièrement difficile notamment en hautes fréquences lorsque la notion de résonance n'a plus lieu d'être mais que les modes répondent par bande.

III.E.2. Cartographies du comportement vibroacoustique d'une table d'harmonie de Pleyel P131

Compte tenu des résultats précédents, l'étude du comportement vibroacoustique des structures raidies passe par l'utilisation d'indicateurs susceptibles de rendre compte du caractère large bande des réponses en hautes fréquences. Pour cela, la mobilité transversale au point d'entrée est une quantité intéressante d'autant plus essentielle dans le domaine musical où elle caractérise le transfert entre la source, c'est à dire la corde, et le radiateur acoustique, c'est à dire la table d'harmonie. Pour une excitation ponctuelle en (x_e, y_e) de fréquence f_e , celle-ci est définie comme le rapport entre la vitesse au niveau du point d'application et l'amplitude F de la force. Soit en décibels :

$$L_M(\omega) = 20 \log \left(\frac{|\dot{w}(x_e, y_e, 2\pi f_e)|}{F} \right) \quad (\text{III.40})$$

Cet indicateur a été couramment utilisé depuis de nombreuses années pour étudier la table d'harmonie du piano [BoEg13, Gior98]. Dans le cadre de la table d'harmonie de la harpe, des cartographies de mobilité le long du chevalet en fonction de la fréquence ont été réalisées dans [LeLG10, WaKo08]. Dans ces cartographies, le point d'excitation le long du chevalet correspond aux points de couplages entre les cordes et la table. Cette vision cartographique est très intéressante puisqu'elle permet de produire une vue d'ensemble du comportement de la structure étudiée.

Cependant, la mobilité n'a d'intérêt que dans la vibration au niveau du point d'excitation. Il semble intéressant de compléter notre étude avec des indicateurs plus globaux tels que la puissance rayonnée qui prend en compte la vibration de l'ensemble de la structure. Dans cette optique, on considère une excitation sinusoïdale se déplaçant le long du chevalet medium-aigus aux positions des points de couplages cordes / table. Pour rappel, l'ordre de troncature dans la décomposition modale nous permet d'atteindre 3 kHz. En conséquence, nous n'évaluerons pas les dernières notes du piano dont le fondamental est au dessus de 3kHz, ce qui correspond à la seconde moitié de la dernière octave. Pour éviter de couper notre étude à la moitié de la dernière octave, nous préférons nous arrêter au début de la 7^{ème}. Cette étude s'étend donc de la 32^{ème} note, correspondant à un Mi2 (E3) dont le fondamental est de 164,8 Hz jusqu'à la 76^{ème} note, soit le Do6 (C7) avec un fondamental à 2093 Hz, c'est à dire de

gauche à droite sur le chevalet medium-aigus Figure III-4 et de bas en haut sur les cartographies que nous présenterons.

La Figure III-18 présente ces cartographies de mobilité (en haut) et de puissance acoustique rayonnée (en bas). Les deux courbes sont tracées en décibels avec une même dynamique de 60 dB.

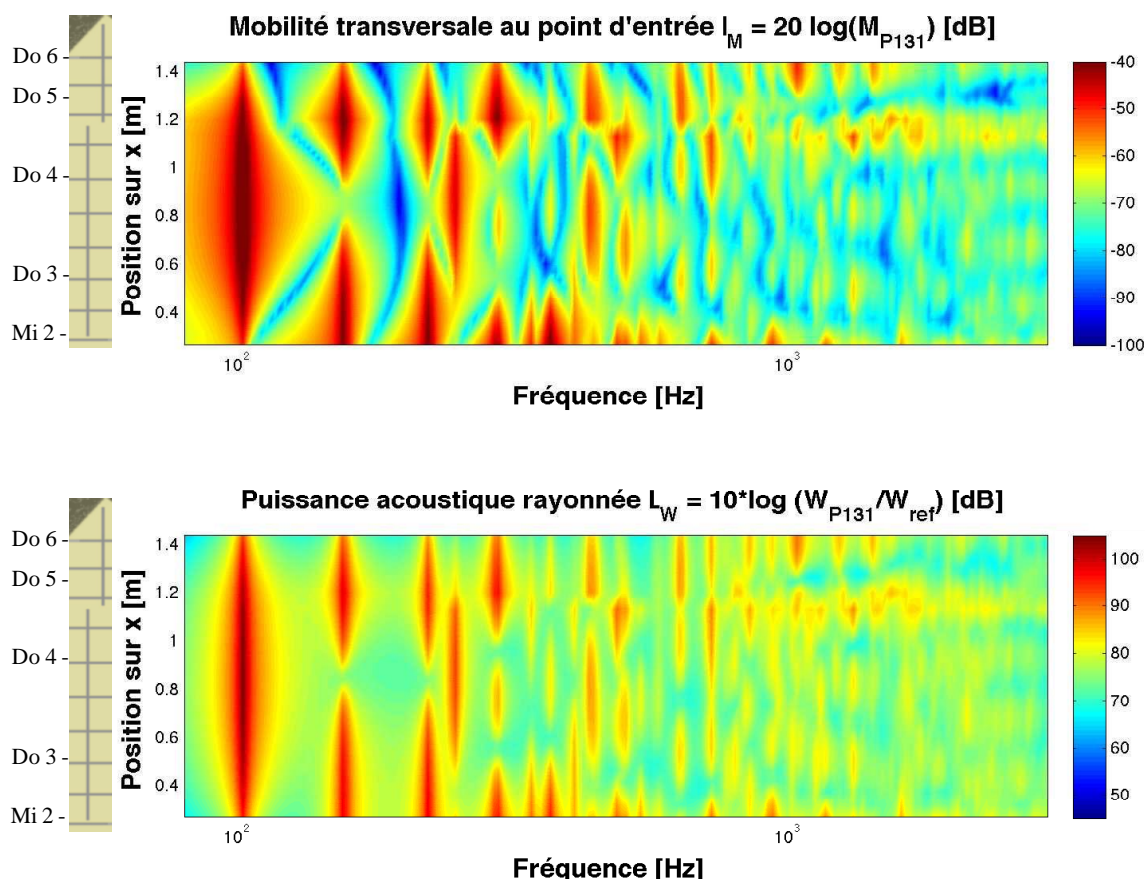


Figure III-18 : Cartographies de la mobilité au point d'entrée et de la puissance acoustique rayonnée en fonction de la fréquence et pour un point courant le long du chevalet aux positions des points de couplage cordes / table d'harmonie.

Globalement les deux indicateurs suivent les mêmes tendances principales. Premièrement les niveaux en dB diminuent lorsque la fréquence augmente ce qui est cohérent avec les résultats de Giordano concernant la mobilité au point d'entrée pour une excitation placée au chevalet. Ce dernier a montré dans [Gior98] que la mobilité au chevalet tend à décroître lorsque la fréquence augmente, à l'inverse d'une excitation placée directement sur la peau. Les deux cartographies montrent également que les notes proches de la discontinuité au chevalet ou de l'extrémité sont sensibles au changement brutal de la hauteur, c'est à dire au changement local de raideur. Il apparaît alors une augmentation de la mobilité et de la puissance acoustique rayonnée aux alentours de 0,3 m (début du chevalet médium-aigus) et de

1,2 m (discontinuité au chevalet). Deuxièmement, dans la bande fréquentielle [400 ; 3000] Hz, la dynamique des cartographies est inférieure d'environ 2/3 comparée à la dynamique en dessous de 400 Hz, ce qui devient bien évidemment de plus en plus visible en montant en fréquences lorsque le recouvrement modal ne permet plus de voir les résonances.

Indépendamment du domaine fréquentiel, ces deux visions montrent que la mobilité est un indicateur beaucoup plus sensible aux hétérogénéités de structure que la puissance rayonnée, ce qui est cohérent puisque comme nous l'avons souligné, la mobilité est un indicateur qui prend en compte la vibration locale. Il en irait de même en comparant la mobilité avec la vitesse quadratique moyenne surfacique par exemple ou n'importe quel indicateur prenant en compte la vibration de toute la structure. Ce constat soulève la question suivante : la mobilité, ou plus généralement les indicateurs locaux, n'accentuent-ils pas l'influence des hétérogénéités structurelles en mettant en valeur des phénomènes qui au global étaient invisibles ? On pourrait également se poser la question inverse en se demandant si un indicateur général ne masquerait pas des phénomènes visibles par des indicateurs locaux ? Toujours est-il que la mobilité à elle seule peut inciter à formuler des conclusions hâtives. Dans notre cas, la mobilité fluctue d'environ 60 dB en dessous de 400 Hz tandis que la puissance rayonnée ne fluctue que de 40 dB, soit un rapport de 2/3. Au delà de 400 Hz, ce rapport reste du même ordre de grandeur, bien que les niveaux généraux soient plus petits.

Au-delà des données brutes de mobilité et de puissance acoustique rayonnée, de nombreux phénomènes sont visibles sur des résultats relatifs. Dans le cas d'une structure raidie rectangulaire avec une orthotropie dite « spéciale » où les superstructures sont traversantes, nous avons montré dans [TrEL16] que la fréquence critique apparente est abaissée par la présence de renforts. En effet, en raidissant la structure, la vitesse des ondes de flexion augmente, passant ainsi plus tôt en régime supersonique. Le coefficient de rayonnement global de la structure est défini par le rapport entre la puissance rayonnée et la vitesse quadratique moyenne surfacique, à un coefficient près :

$$\sigma(\omega) = \frac{1}{\rho_{air} c S_{int}} \frac{W(\omega)}{\langle v^2 \rangle(\omega)} \quad (III.41)$$

avec ρ_{air} la masse volumique de l'air, c la célérité du son dans l'air et S_{int} la surface de la géométrie décrite. La vitesse quadratique $\langle v^2 \rangle(\omega)$ est elle même calculée via l'expression suivante :

$$\langle v^2 \rangle(\omega) = \frac{1}{2 S_{int}} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} |v(x, y, \omega)|^2 dx dy = \frac{\omega^2}{2 S_{int}} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} |w(x, y, \omega)|^2 dx dy \quad (III.42)$$

expression qui devient compacte de par la décomposition modale appliquée au déplacement transversal et les propriétés d'orthogonalité des vecteurs propres qui en découlent :

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle(\omega) &= \frac{\omega^2}{2 S_{int}} \left| \left(\sum_m \sum_n a_{mn}(\omega) \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \phi_{mn}(x,y) dx dy \right)^2 \right| \\ &= \frac{\omega^2 L_x L_y}{8 S_{int}} \sum_m \sum_n |a_{mn}(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (III.43)$$

Cet indicateur traduit l'efficacité du rayonnement acoustique et s'interprète comme le rapport entre la puissance effective et la puissance virtuelle (comme si la source était un piston dont la vitesse est spatialement uniforme et équivaut à la vitesse quadratique moyenne surfacique de la structure). Sur le même principe que les cartographies de mobilité et de puissance rayonnée, la Figure III-19 prouve que la table d'harmonie de piano droit Pleyel P131 passe en régime supersonique dès environ 800 Hz. Au-delà, tous les modes alertés sont rayonnants. En dessous de 800 Hz et jusqu'à 80 Hz, la capacité de la structure à propager l'énergie dans l'air est bien inférieure. On note par ailleurs une différence générale de l'ordre de 5 dB entre ces deux régimes.

Il convient de ne pas faire d'amalgame face à ce dernier résultat. Les modes de la table d'harmonie sont certes plus rayonnants en hautes qu'en basses fréquences mais il serait faux de dire que la table elle-même rayonne plus en hautes fréquences comme le montre la cartographie de la puissance rayonnée Figure III-18. En effet, le coefficient de rayonnement traduit simplement de son efficacité à transmettre les vibrations dans le milieu fluide. Une interprétation physique est qu'au-dessus de la fréquence critique apparente (environ 800 Hz), la structure a besoin de vibrer en quantité moindre qu'en basses fréquences pour transférer une quantité équivalente d'énergie dans l'air.

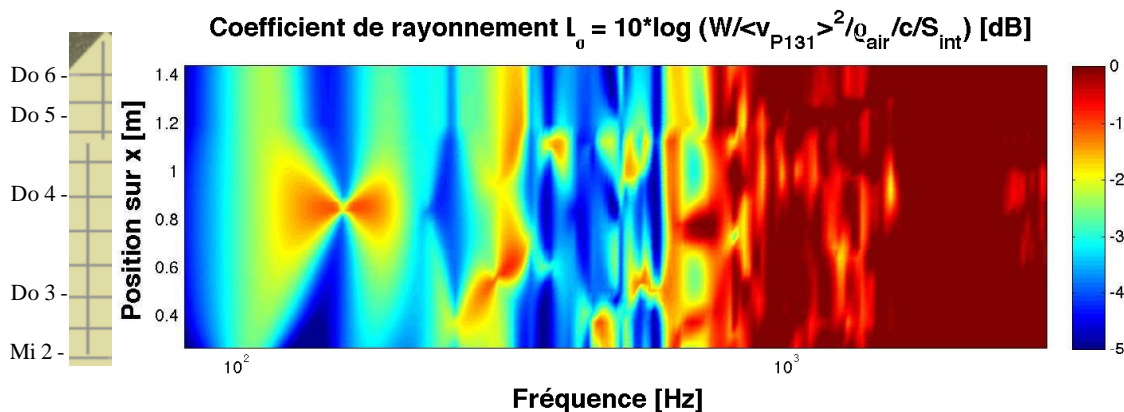


Figure III-19 : Cartographies du coefficient de rayonnement global de la table d'harmonie de Pleyel P131.

III.E.3. Vers un indicateur plus musical

D'un point de vue musical, les cartographies présentées dans la précédente section sont très riches en informations ce qui rend leurs interprétations difficiles. En effet, le contenu fréquentiel d'une note jouée par un instrument de musique est très loin d'être uni-fréquentiel mais constitué de multiples composantes. Ainsi outre les aspects discrets et variables du point d'excitation (couplages cordes / table) dont nous avons auparavant tenu compte, les fréquences à considérer sont également discrètes et variables d'une note à l'autre.

Dans le cadre de la table d'harmonie de la harpe, Waltham & Kotlicky [WaKo08] se sont intéressés à l'admittance au chevalet de différentes notes pour une fréquence correspondant à leurs fondamentaux ainsi qu'aux premiers et seconds partiels (voir Figure III-20). Dans leurs études, ces derniers négligent l'in-harmonicité entre les composantes qu'apporte la mobilité au point de couplage qui n'est bien évidemment pas immobile dans la réalité.

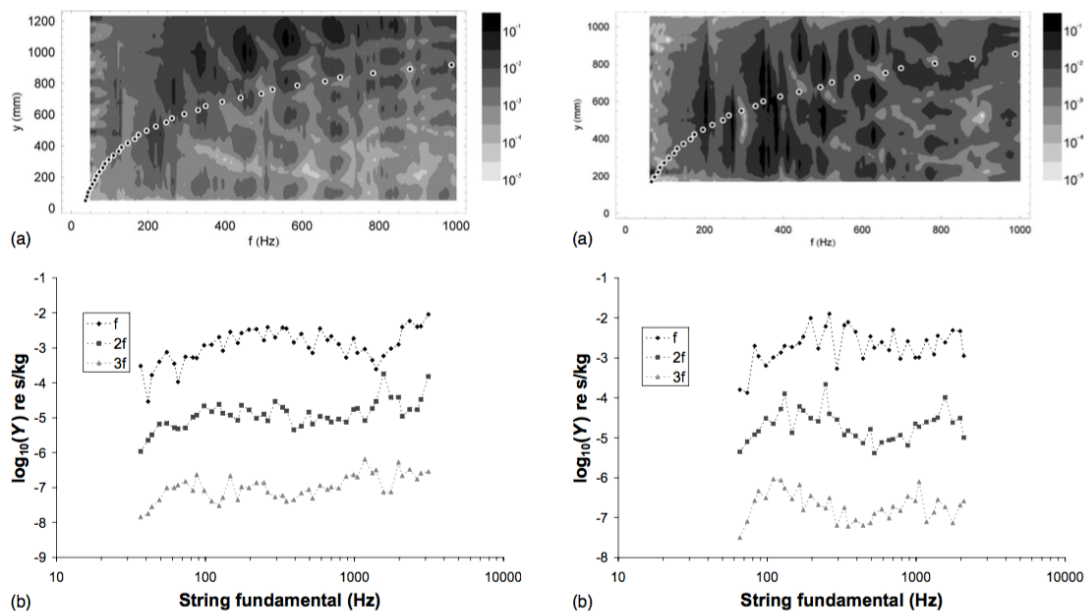


Figure III-20 : Cartographies de l'admittance au chevalet de deux tables d'harmonie de harpe sur lesquelles sont ajoutées les fréquences correspondant aux fondamentaux de chaque note. Les figures du bas présentent les admittances aux fondamentaux et des deux premiers partiels. Extrait de [WaKo08].

Pensant que ce type d'indicateur serait intéressant d'un point de vue musical, nous avons décidé d'étendre cette idée à la puissance rayonnée. Par la suite, seules les fréquences issues des ondes transversales en dessous de 3 kHz de la corde seront prises en compte. Cependant trois problèmes surviennent, toujours liés à la richesse du timbre de l'instrument.

Premièrement, le nombre de composantes des notes basses est particulièrement impressionnant. A titre d'exemple un Ré-1# (D#1) a environ 130 partiels entre 0 et 5000 Hz. Comparer un nombre aussi important de partiels n'est pas simple à réaliser.

Deuxièmement, le nombre de composantes varie grandement entre les notes aiguës et basses : on passe de 130 partiels pour un Ré-1# à seulement 2 pour un Do6 (C#7). La question est alors de savoir ce que l'on compare : en gardant le même exemple, la comparaison entre les fondamentaux et les premiers harmoniques est réalisable mais à quoi compare-t-on les 128 harmoniques restants du Ré-1# ?

Troisièmement, on sait de manière empirique (ce point sera développé à nouveau dans le chapitre suivant) que l'énergie injectée par une corde de basse et une note d'aigu n'est pas la même. D'ailleurs pour une même corde, l'énergie n'est pas équirépartie entre chaque composante d'autant plus que les partiels sont déphasés. La tendance générale veut que l'énergie décroisse à mesure que le rang soit élevé.

Pour s'affranchir au mieux de ces difficultés, on étudie la moyenne de la mobilité et de la puissance acoustique rayonnée issue de chaque partiel. La troisième difficulté est à l'heure actuelle mise de côté : toutes les composantes ont la même amplitude et sont supposées en phase. Conscient que cette considération nous place encore loin de la réalité, nous pensons que ces moyennes restent d'un intérêt majeur même s'il existe un biais du fait du poids égal de chaque harmonique et de la phase identique entre chaque composante. Ces moyennes présentent notamment l'intérêt de « saisir l'image » d'un piano et de la comparer avec d'autres designs ou variation dans la conception de l'instrument. Ces indicateurs sont définis par :

$$L_M(note) = 20 \log \left(\frac{1}{N_{partiels}} \sum_{n=1}^{N_{partiels}} \frac{|\dot{w}(x_{note}, y_{note}, n f_{note})|}{F} \right) \quad (III.44)$$

$$L_W(note) = 10 \log \left(\frac{1}{N_{partiels}} \sum_{n=1}^{N_{partiels}} \frac{W(x_{note}, y_{note}, n f_{note})}{W_{ref}} \right) \quad (III.45)$$

Comme précédemment, on effectue un balayage de la 32^{ème} à la 76^{ème} note et on trace en complément les gradients de chaque indicateur entre deux notes successives. Tous les résultats sont présentés avec la même dynamique en décibels. Les abscisses sont les mêmes à la seule différence que les labels sont différents : la puissance acoustique rayonnée est tracée en fonction du numéro des notes associé à leurs noms en notation grégorienne tandis que la mobilité indique la fréquence des fondamentaux.

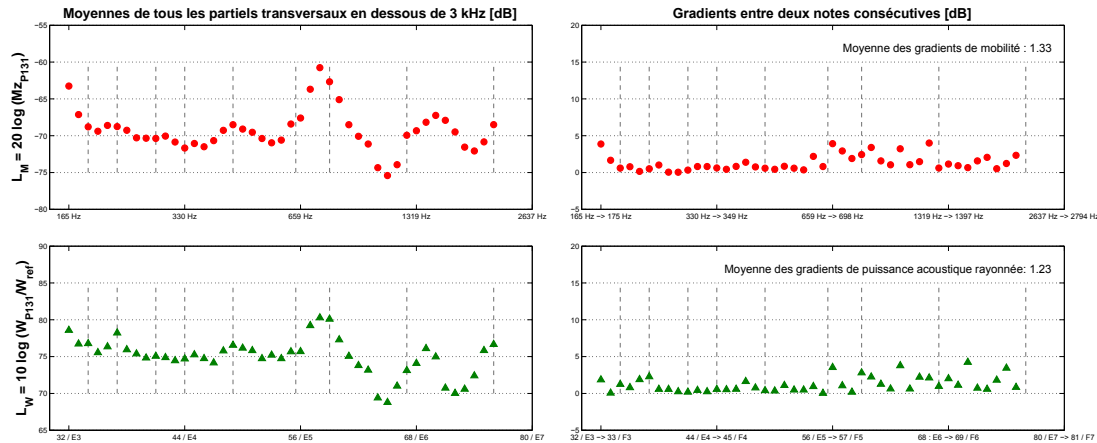


Figure III–21 : Évolution des moyennes de la mobilité (a) et de la puissance acoustique rayonnée (b) de la 32^{ème} à la 76^{ème} note sur une table d'harmonie de Pleyel P131. Gradients de ces moyennes entre deux notes consécutives en c) pour la mobilité et d) pour la puissance. Seules les fréquences des ondes transversales de la corde, en négligeant l'in-harmonicité, sont prises en compte.

La Figure III–21 dresse un état de l'art de la table d'harmonie de Pleyel P131. La tendance majeure qui ressort de ces résultats est l'importante inhomogénéité aussi bien de la mobilité que de la puissance acoustique rayonnée (Figure III–21–a et b). Pour la justifier, on peut pointer du doigt la discontinuité au chevalet, c'est à dire entre les notes 58 et 59, où les deux indicateurs augmentent de manière très conséquente. Les notes placées proches du début du chevalet (proche de la 32^{ème} note) souffrent de la même constatation avec des niveaux en dB sensiblement du même ordre de grandeur qu'au niveau de la discontinuité. De plus, il ne semble pas y avoir de lien entre une décroissance des indicateurs moyens et la localisation des barres représentées en pointillés gris verticaux sur la Figure III–21. Au contraire, le passage d'une barre va tendre tantôt à leurs augmentations et tantôt à leurs diminutions.

Bien que l'on puisse constater une corrélation flagrante entre les inhomogénéités de réponse et de structure le long du chevalet, il serait réducteur de considérer ces dernières comme seules responsables. En effet, les variations visibles sur la Figure III–21–a et b ne sont pas limitées à ces deux seuls endroits. Indépendamment de la quantité regardée, une combinaison de fréquences discrètes montre que les variations les plus importantes apparaissent après la discontinuité du chevalet, ce qui n'était pas visible sur les cartographies présentées Figure III–18. Au-delà de la 59^{ème} note, toutes les longueurs d'onde injectées sont petites à l'inverse des notes placées avant la discontinuité au chevalet où les fréquences sont plus faibles. Cette discontinuité constitue alors un obstacle à la propagation d'ondes via le chevalet, si bien qu'en basses fréquences celui-ci distribue l'énergie sur toute la surface alors qu'en hautes fréquences les deux parties du chevalet medium-aigus ne communiquent pas (voir la géométrie de la table Figure III–4).

De plus, les notes placées après la discontinuité du chevalet souffrent d'une faible richesse harmonique qui a pour conséquence de majorer les variations. A l'inverse, le grand

nombre de partiels des premières notes va permettre de réguler la réponse de la table et donc de minimiser les variations de mobilité et de puissance rayonnée. D'un autre côté, ces indicateurs, bien que biaisés, montrent que plus la note est placée dans l'extrême aigu, plus la variabilité peut être importante à cause de l'affaiblissement du contenu spectral.

Sachant que ce que perçoit un auditeur en champ lointain est plutôt proportionnel à la vitesse de l'objet, les déformées opérationnelles en vitesse associées à chaque note permettraient de visualiser comment se comporte la structure.

On constate que les pics de puissance acoustique rayonnée coïncident avec des niveaux importants et répartis de vitesse sur la table d'harmonie comme le montre la Figure III-22 sur laquelle on remarque que les sifflets sont des zones favorisant la propagation des ondes en raison de la raideur localement plus faible sur le pourtour de la table. Cette figure donne la déformée opérationnelle en vitesse de la structure pour une excitation multi-fréquentielle correspondant à la 58^{ème} note. Le point d'excitation est marqué d'une croix noire sur la déformée et les marqueurs correspondants à la note deviennent noirs sur les courbes des indicateurs moyens de mobilité et de puissance. Le constat est le même pour les maximums de puissance après la discontinuité au chevalet comme aux notes 70 et 76 illustrées Figure III-25.

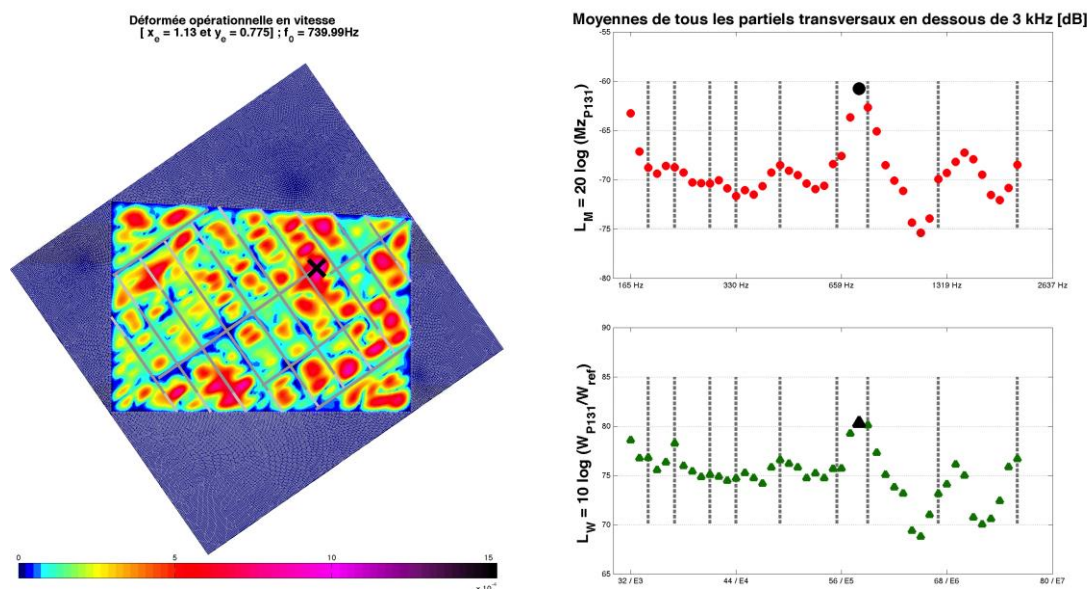


Figure III-22 : Déformée opérationnelle de la 58^{ème} note et moyennes de mobilité et de puissance issues de la Figure III-21. L'excitation multi fréquentielle est appliquée au niveau de la croix noire sur la déformée ; les marqueurs noirs symbolisent la note courante sur les moyennes.

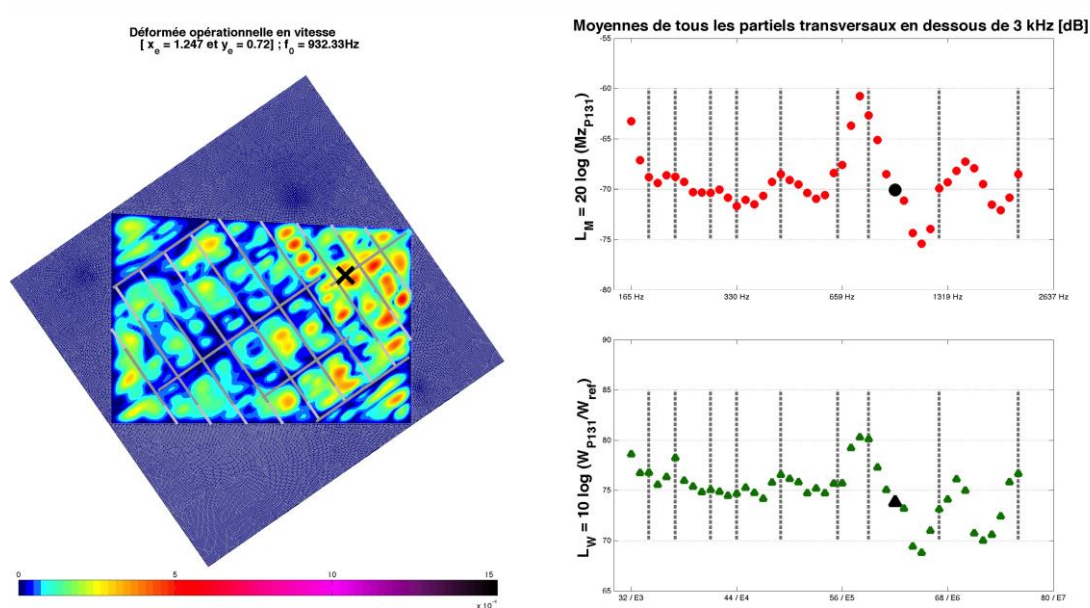


Figure III-23 : Déformée opérationnelle de la 62^{ème} note et moyennes de mobilité et de puissance issues de la Figure III-21. L'excitation multi fréquentielle est appliquée au niveau de la croix noire sur la déformée ; les marqueurs noirs symbolisent la note courante sur les moyennes.

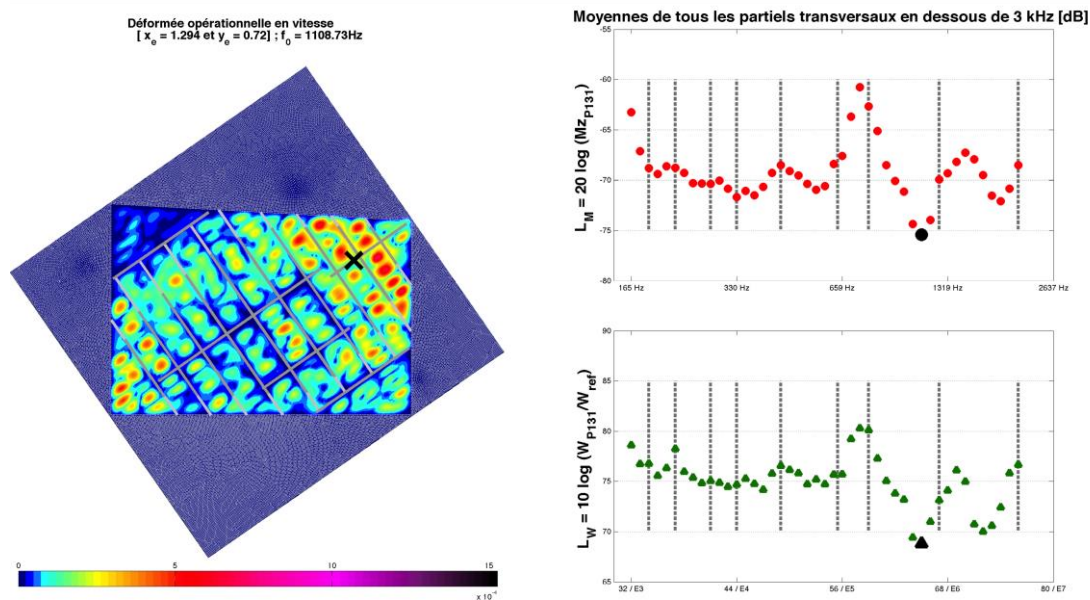


Figure III-24 : Déformée opérationnelle de la 65^{ème} note et moyennes de mobilité et de puissance issues de la Figure III-21. L'excitation multi fréquentielle est appliquée au niveau de la croix noire sur la déformée ; les marqueurs noirs symbolisent la note courante sur les moyennes.

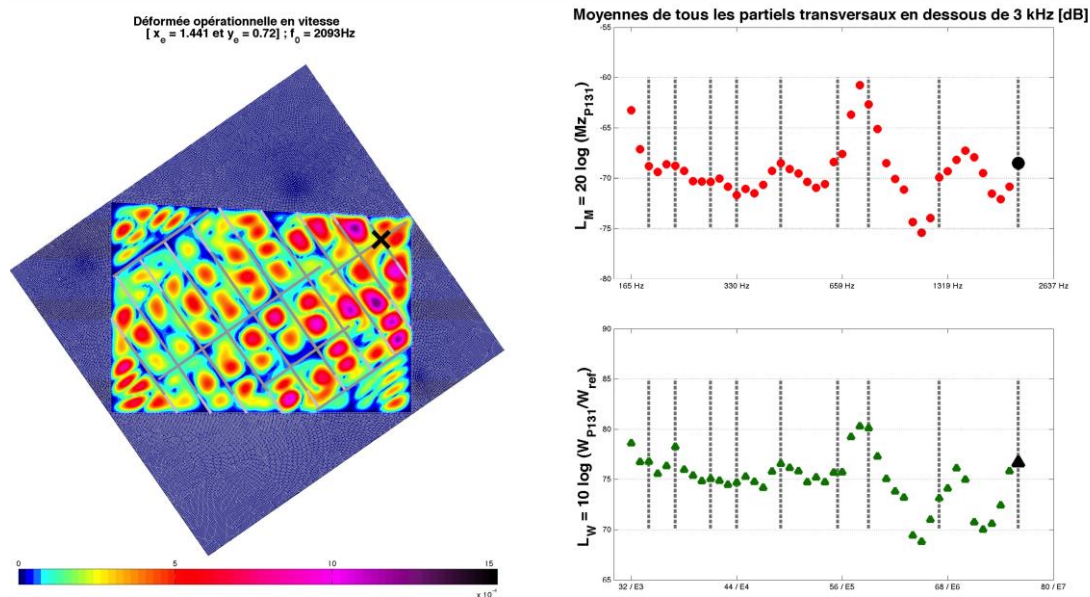


Figure III-25 : Déformée opérationnelle de la 76^{ème} note et moyennes de mobilité et de puissance issues de la Figure III-21. L'excitation multi fréquentielle est appliquée au niveau de la croix noire sur la déformée ; les marqueurs noirs symbolisent la note courante sur les moyennes.

Ces images du champ de vitesse mettent également en évidence une propriété importante liée à l'aspect hétérogène de la structure. Les superstructures agissent comme un squelette sur lequel une peau est reliée. Le paysage vibratoire est alors réparti sur une large surface et les ondes portées jusque dans des zones, comme les mouchoirs par exemple, que l'on aurait instinctivement pu penser inertes.

En revanche, les chutes de puissance rayonnée (65^{ème} et 72^{ème} note) ne coïncident pas spécialement avec un niveau de vitesse très faible ou un confinement flagrant des ondes sur une surface très réduite de la structure (Figure III-24) même si elles semblent moins bien réparties que dans les deux cas précédents. A titre de contre-exemple, la déformée opérationnelle de la 62^{ème} note est celle où les ondes sont les plus confinées et qui pourtant ne correspond pas à un minimum ni de puissance ni de mobilité (Figure III-23).

Ces observations soulèvent la question de la « killer-octave » qui d'après les facteurs de piano se situe autour de l'avant dernière octave de l'instrument, soit du Do5 au Do6 (C6 à C7) tandis que Fandrich [Fand95] le décrit comme une région située plus tôt sur le clavier, entre le Do4 (C5) et le Do5 (C6), soit de la cinquième à la sixième octave. Dans tous les cas, cette région est caractérisée par une faible longueur de son (« low sustain ») et semble être présente sur la plupart des pianos sans distinction de design des tables. La Figure III-21-a et b montre deux zones qui pourraient correspondre à cette « killer-octave », moyennant deux théories différentes. La première théorie, assez directe, correspond à l'accroissement de la mobilité au niveau de la discontinuité au chevalet, soit au milieu de la cinquième octave. En

effet, un haut niveau de mobilité impliquerait un transfert d'énergie rapide entre la corde et la table d'harmonie, par conséquent une longueur de son courte. A l'inverse, la seconde théorie correspond à la chute des deux indicateurs dans la sixième octave (puissance rayonnée et mobilité faibles). De cette façon, la puissance acoustique perçue diminue bien que la note dure longtemps (faible transfert d'énergie due à une mobilité réduite). Cette seconde théorie est cohérente avec la solution trouvée par les facteurs de piano qui consiste à rendre plus rigides les marteaux destinés à frapper les cordes aiguës et ainsi contrebalancer le manque d'énergie dans la « killer-octave ». Cependant d'après Fandrich [Fand95], cette solution ne permet pas de résoudre complètement le problème, ce qui suggère plutôt une combinaison des deux théories. A l'heure actuelle, ces résultats en fréquence ne nous permettent pas de répondre à cette question et doivent être complétés par des réponses en temps ainsi que par des expériences de perception.

Pour revenir au cœur de notre étude, on peut penser que se focaliser uniquement sur les valeurs moyennes de mobilité et de puissance est incomplet étant donné qu'en situation de jeu, le musicien s'attend à avoir un rendu différent entre deux notes éloignées, comme entre un La3 et Do5# par exemple. En revanche, une variation importante entre deux notes consécutives risque de donner une sensation d'inhomogénéité importante. Partant de ce postulat, l'analyse des gradients note à note des valeurs moyennes de mobilité et de puissance acoustique rayonnée est une évidence. La Figure III-21-c et d montre des variations importantes entre deux notes consécutives, par extension une perception hétérogène du jeu ; en moyenne, les gradients de mobilité et de puissance rayonnée sont de 1,33 et 1,23 dB. Plus précisément, le clavier peut être découpé en deux intervalles de notes pour lesquels la réponse de la table d'harmonie est différente.

De la troisième à la quatrième octave, les gradients sont relativement faibles et la réponse globalement homogène. Ceci est vrai pour la mobilité et pour la puissance. En revanche dès le début de la cinquième octave autour de 659 Hz, les gradients deviennent plus importants allant jusqu'à atteindre 4 dB. En conséquence, la sensation de puissance perçue peut être divisée ou multipliée par 2,5 entre deux notes consécutives, ce qui est loin d'être négligeable. Le même effet apparaît dans une moindre mesure au début du chevalet autour de la 32^{ème} note. On notera toutefois qu'un important gradient de mobilité n'est pas nécessairement corrélé avec un important gradient de puissance rayonnée et vice-versa.

Pour résumer, cette étude montre que le comportement de la table d'harmonie peut être décomposé en deux intervalles principaux :

- Après la discontinuité au chevalet où les gradients entre deux notes consécutives sont les plus forts. Il en est de même pour les variations globales de mobilité et de puissance acoustique rayonnée,
- Avant la discontinuité au chevalet où les quantités observées ne sont certes pas constantes mais pour lesquelles la variabilité existe dans une moindre mesure.

Les notes de l'extrême-aigu apparaissent, au même titre que les premières notes proches du début du chevalet, comme particulièrement difficiles à contrôler par le facteur de piano contrairement au médium : l'inhomogénéité entre deux notes y est plus marquée.

Instinctivement, l'application d'un effort au chevalet a pour effet de distribuer l'énergie sur toute la surface de la table d'harmonie et donc d'homogénéiser la réponse de l'instrument. Cependant lorsqu'une discontinuité structurelle existe, cet effet disparaît si « l'obstacle » est suffisamment important comparativement à la longueur de l'onde propagée. En basses fréquences, les longueurs d'onde sont longues et la discontinuité au chevalet n'empêche pas leur propagation, alors qu'en hautes fréquences les longueurs d'onde sont trop courtes et la discontinuité du chevalet constitue un obstacle. De plus, le contenu spectral de chaque note joue sans doute un rôle majeur dans le comportement final de l'instrument et rend d'autant plus difficile sa compréhension. Pour la première note étudiée, il y a 76 partiels en dessous de 3 kHz tandis que pour la dernière (76^{ème} note) le contenu spectral se résume seulement à son fondamental. Une discontinuité de structure aura alors une plus grande influence sur une note dont le contenu spectral est pauvre, i.e, les notes dans l'extrême aigu, ainsi que sur les harmoniques de rangs élevés d'une note riche. En conséquence, si la conception de l'instrument nécessite d'introduire une discontinuité au niveau du chevalet, il serait judicieux de la placer au niveau des cordes plus basses afin de réduire son préjudice. De la même manière, la suppression de cette hétérogénéité structurelle devrait régulariser le comportement global de l'instrument.

Nous achèverons ce résumé en soulignant que la vitesse sur la table tend à être moins bien répartie lorsque la puissance acoustique rayonnée chute sans pour autant être confinée sur une petite surface de la structure.

III.F. Sensibilité à des changements dans la conception des tables d'harmonie

La section précédente a montré que les hétérogénéités structurelles présentes sur la table d'harmonie sont susceptibles d'être responsables d'un comportement inhomogène probablement lié à une sensation de jeu parfois discontinue sur une partie du clavier comme rapporte les facteurs de piano. Bien que tous les partiels d'une note n'aient pas les mêmes amplitudes, une évolution linéaire ou au moins progressive des indicateurs présentés dans la section précédente pourrait contribuer à obtenir un rendu sonore plus approprié d'un point de vue musical. A minima, les variations constatées mais surtout les gradients devraient sans doute être minimisés afin de rendre le jeu du pianiste plus homogène.

Dans cette optique, quelques modifications sont apportées à la conception de la table d'harmonie pour évaluer comment elles impactent le comportement vibro-acoustique de la

structure. Deux nouveaux designs sont proposés pour la table d'harmonie de Pleyel P131 (voir Figure III-26) :

- Une table avec un chevalet des medium-aigus continu,
- Une table sur laquelle les deux barres situées dans l'extrême aigu sont supprimées.

Ces nouveaux cas d'étude sont comparés au Pleyel P131 qui sera le cas de référence pour la suite de notre analyse. Pour simplifier la lecture et la comparaison entre deux designs, les moyennes de mobilité et de puissance seront dorénavant tracées en lignes pleines mais les études restent à des fréquences discrètes.

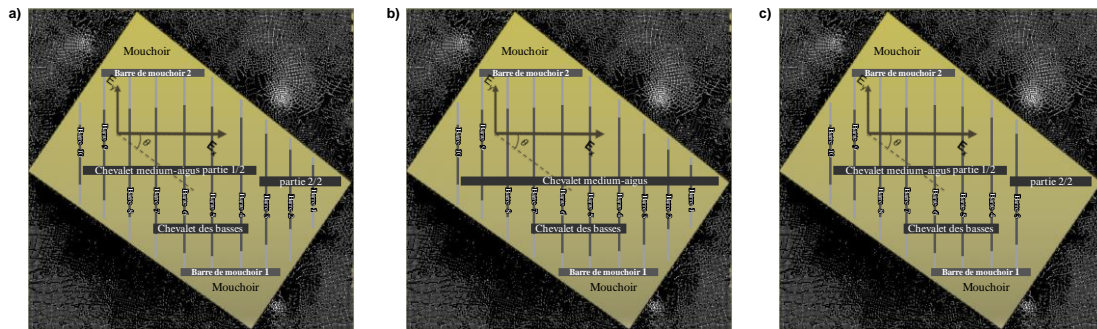


Figure III-26 : Différentes configurations de table d'harmonie de piano droit basées sur le design du Pleyel P131. a) Table de Pleyel P131 : cas de référence ; b) Table d'harmonie P131 avec un chevalet des medium-aigus continu ; c) Table d'harmonie P131 dont les deux barres situées dans l'extrême aigu ont été supprimées.

III.F.1. Chevalet des medium-aigus continu

Évidemment un chevalet des medium-aigus continu régularise le défaut observé aux alentours des notes 58 et 59 puisque le changement brutal et local de raideur a disparu (Figure III-27-a et b).

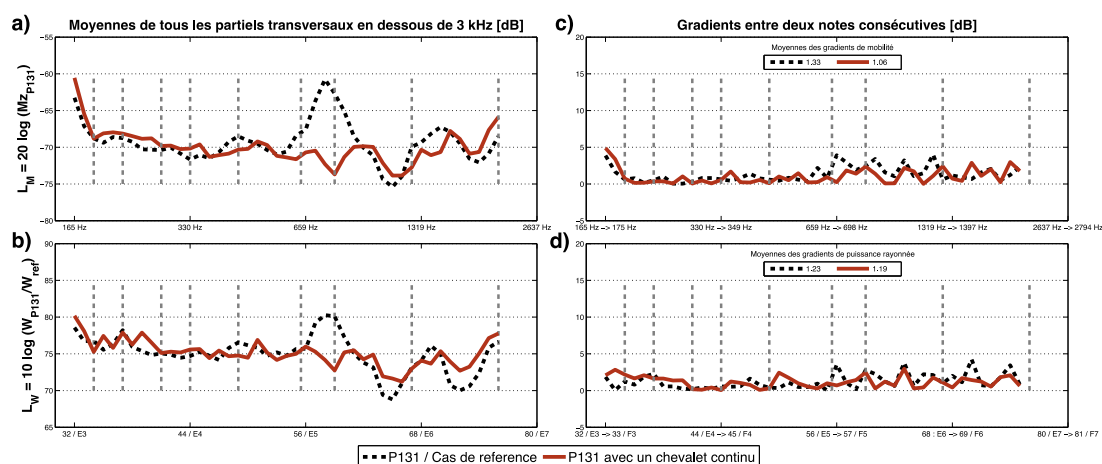


Figure III-27 : Évolution des moyennes de la mobilité (a) et de la puissance acoustique rayonnée (b) de la 32^{ème} à la 76^{ème} note sur une table d'harmonie de Pleyel P131 avec un chevalet medium-aigus continu. Gradients de ces moyennes entre deux notes consécutives en (c) pour la mobilité et (d) pour la puissance. Seules les fréquences des ondes transversales de la corde, en négligeant l'in-harmonicité, sont prises en compte.

De plus, les petites longueurs d'onde n'étant plus bloquées par la discontinuité au chevalet qui constituait un obstacle, le chevalet distribue désormais mieux l'énergie sur l'ensemble de la structure. En conséquence, les grandes variations de mobilité et de puissance au-delà de la 56^{ème} note sont à présent plus faibles que dans le cas de référence. La répartition spatiale des vitesses sur la structure est dans l'ensemble similaire au cas de référence, confirmant que le chevalet « porte » l'énergie sur la structure. Les mêmes observations que dans le cas de référence subsistent concernant les pics de puissance acoustique. Ceux-ci coïncident encore une fois avec des niveaux de vitesse plus importants que la moyenne et des vibrations réparties sur une large surface de la table d'harmonie comme le montre la Figure III-29 relative à la 76^{ème} note. Par contre, le minimum de puissance à la 66^{ème} note est cette fois-ci corrélé avec un confinement des ondes sur une surface réduite (Figure III-28). Cependant, affirmer que ce confinement est seul responsable de la chute de puissance serait sans doute excessif compte tenu des résultats présentés dans le cas de référence.

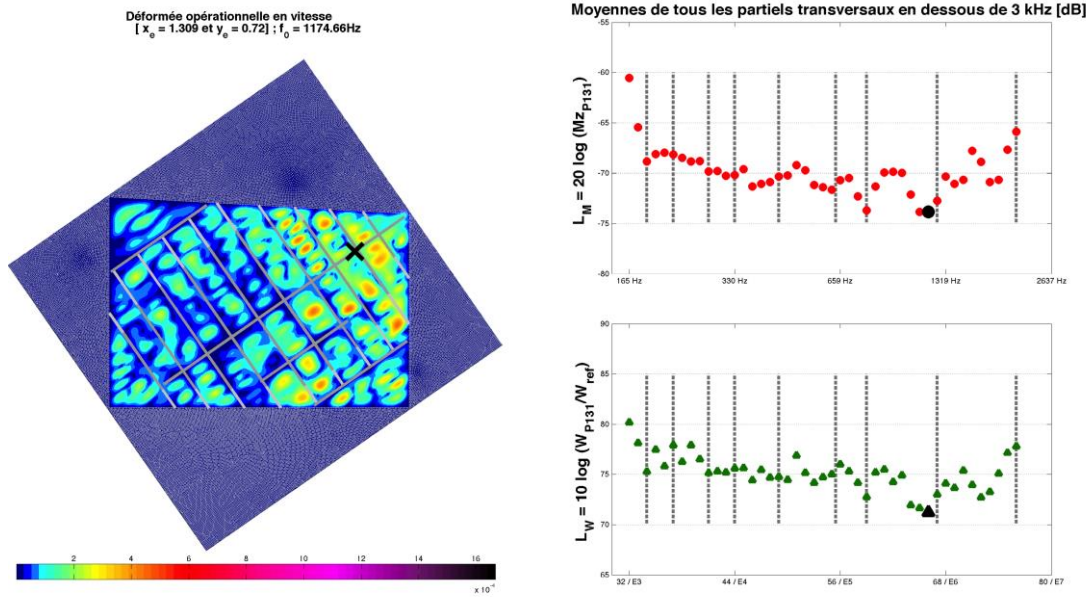


Figure III-28 : Déformée opérationnelle de la 66^{ème} note et moyennes de mobilité et de puissance issues de la Figure III-27. L'excitation multi fréquentielle est appliquée au niveau de la croix noire sur la déformée ; les marqueurs noirs symbolisent la note courante sur les moyennes.

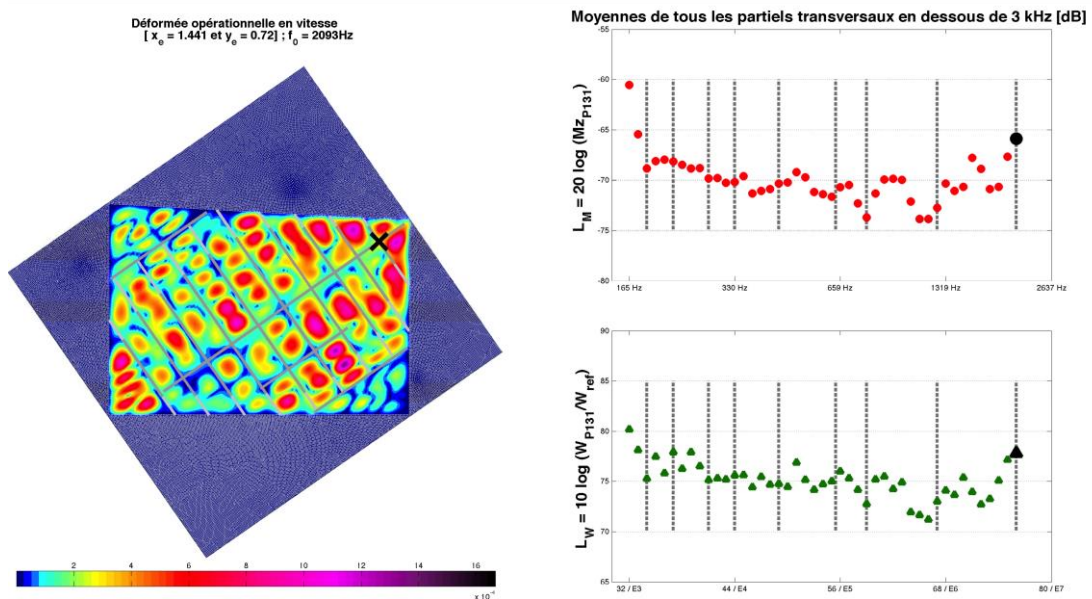


Figure III-29 : Déformée opérationnelle de la 76^{ème} note et moyennes de mobilité et de puissance issues de la Figure III-27. L'excitation multi fréquentielle est appliquée au niveau de la croix noire sur la déformée ; les marqueurs noirs symbolisent la note courante sur les moyennes.

Concernant les gradients note à note, leurs moyennes deviennent plus faibles par rapport au cas de référence, notamment à propos de la mobilité (Figure III-27-c et d). Ils ne sont par contre pas tous impactés de la même façon selon les intervalles de fréquence. Les gradients entre deux notes aigües sont certes encore importants mais deviennent plus faibles. Cela dit,

en termes de puissance perçue, un auditeur peut encore avoir une sensation de puissance multipliée ou divisée par deux entre deux notes consécutives (maximum de 3dB sur la Figure III-27-d).

Pour les notes placées originellement avant la discontinuité au chevalet, les gradients de mobilité sont sensiblement les mêmes (Figure III-27-c). En revanche, il en est tout autrement pour la puissance entre deux notes (Figure III-27-d). On constate une nette détérioration dans la bande de fréquences [165 ; 650] Hz où les gradients prennent de l'importance. Étant donné que les moyennes des gradients de puissance sont sensiblement équivalentes pour les deux designs de table, un chevalet continu détériore les moyennes fréquences, i.e en dessous de 650 Hz, et améliore l'homogénéité de jeu pour les notes dont le fondamental est supérieur à 650 Hz.

III.F.2. Suppression de raidisseurs dans l'extrême aigu

La suppression de deux barres dans l'extrême aigu de la table d'harmonie (Figure III-26-c) a des conséquences très différentes du cas présenté dans la section précédente. Celle-ci n'affecte presque en rien la première partie du chevalet comme le prouve la Figure III-30 en dessous de la 56^{ème} note. Que ce soit sur les moyennes ou sur les gradients de mobilité et de puissance, les différences sont négligeables sur cet intervalle. Evidemment, les incidents dus à la discontinuité au chevalet persistent, où pour mémoire, on observe des accroissements très marqués de mobilité et de puissance acoustique rayonnée autour de la 58^{ème} note (Figure III-30-a et b).

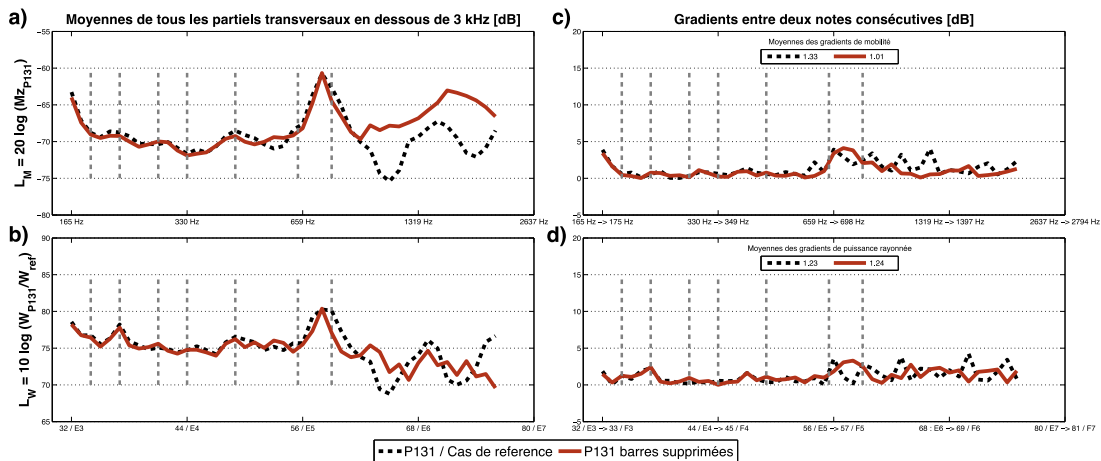


Figure III-30 : Évolution des moyennes de la mobilité (a) et de la puissance acoustique rayonnée (b) de la 32^{ème} à la 76^{ème} note sur une table d'harmonie de Pleyel P131 dont les deux barres situées dans l'extrême aigu ont été supprimées. Gradients de ces moyennes entre deux notes consécutives en (c) pour la mobilité et (d) pour la puissance. Seules les fréquences des ondes transversales de la corde, en négligeant l'in-harmonicité, sont prises en compte.

En revanche, les notes placées après la discontinuité au chevalet réagissent de façon très différente. Logiquement, on observe un niveau de mobilité bien supérieur par rapport au cas de référence puisque la raideur est devenue bien plus faible dans cette zone à cause de la suppression de deux raidisseurs (Figure III-30-a). En conséquence, la chute de mobilité entre les 62^{ème} et 67^{ème} notes, soit entre 900 Hz et 1250 Hz, disparaît. Au-delà, la mobilité continue de croître jusqu'à la 71^{ème} note à environ 1550 Hz puis fini par décroître. On peut donc supposer que la suppression de ces deux barres favorise le transfert d'énergie au niveau du couplage cordes / table dans les notes aiguës : l'énergie contenue dans la corde sera plus vite absorbée par le récepteur et donc la longueur de son plus courte.

Comme la mobilité, la puissance acoustique rayonnée est essentiellement impactée après la discontinuité au chevalet (Figure III-30-b). Au global, la puissance rayonnée décroît en oscillant autour d'une droite qui passe par le milieu de la courbe de référence. En revanche, les variations sont encore très importantes comparées à la courbe de puissance du cas de référence et à la mobilité qui évolue de façon très douce. Les effets sur les deux quantités sont donc très différents. Néanmoins il faut rappeler que les partiels au delà de 3 kHz ne sont pas pris en compte par nos indicateurs ce qui peut impacter les conclusions en hautes fréquences.

Les paysages de vitesse sont quant à eux similaires aux cas précédents. On note toutefois une plus grande proportion de déformées opérationnelles pour lesquelles les vibrations sont concentrées sur une surface réduite. L'explication la plus logique tient au fait que la suppression des barres offre une zone privilégiée où les vibrations peuvent s'établir, donnant alors des paysages que l'on pourrait qualifier de « confiné en bout de table » comme le montre la Figure III-31 (70^{ème} note). Encore une fois, ce type de paysage n'est pas corrélé avec un minimum de mobilité ou de puissance. Les bords de la structure étant plus souples en raison de la présence de sifflets, les paysages où la vibration s'établit loin du point d'excitation sont également courants, et cela dans la même gamme de fréquences. La Figure III-32 montre d'ailleurs une de ces déformées opérationnelles, en l'occurrence celle de la 73^{ème} note, dont les niveaux de puissance et de mobilité sont sensiblement égaux à ceux de la Figure III-31.

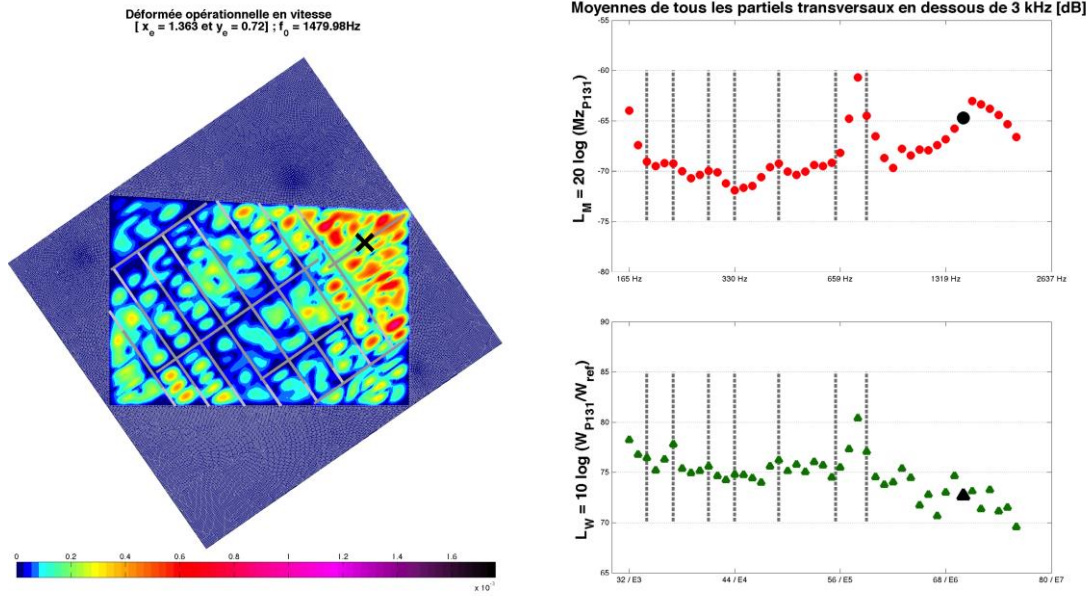


Figure III-31 : Déformée opérationnelle de la 70^{ème} note et moyennes de mobilité et de puissance issues de la Figure III-30. L'excitation multi fréquentielle est appliquée au niveau de la croix noire sur la déformée ; les marqueurs noirs symbolisent la note courante sur les moyennes.

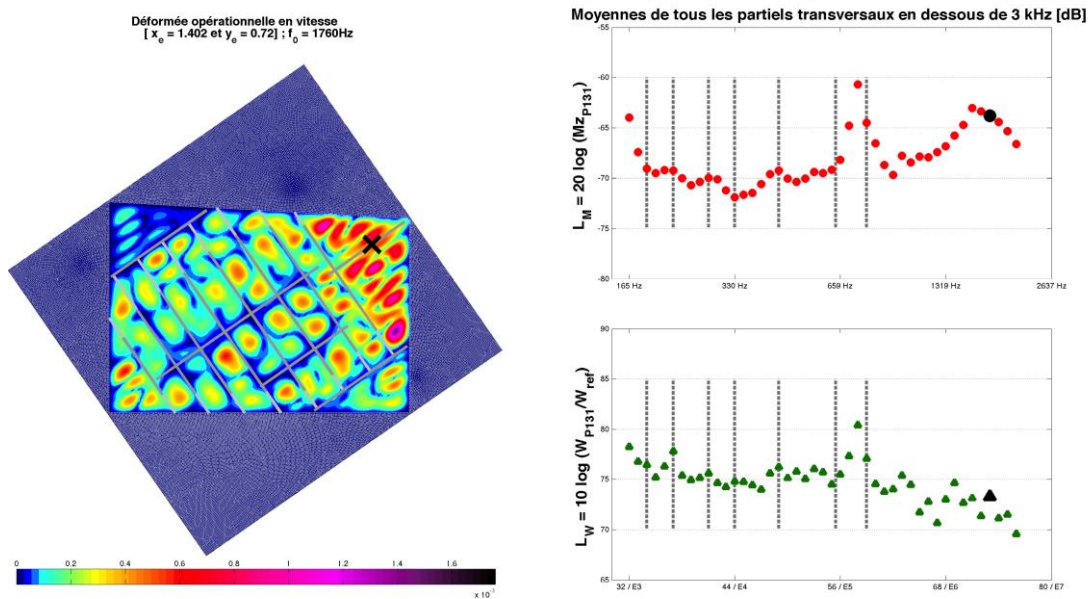


Figure III-32 : Déformée opérationnelle de la 73^{ème} note et moyennes de mobilité et de puissance issues de la Figure III-30. L'excitation multi fréquentielle est appliquée au niveau de la croix noire sur la déformée ; les marqueurs noirs symbolisent la note courante sur les moyennes.

Ce design de table d'harmonie présente l'avantage d'homogénéiser les gradients de mobilité avec en moyenne une diminution de l'ordre de 25% (Figure III-30-c). Si on se focalise uniquement sur les notes supérieures à la 62^{ème}, on remarque même une diminution encore plus

accentuée avec un rapport de 0,5 entre le cas de référence et la table d'harmonie sans barres dans les aigus. Respectivement, les gradients moyens au-delà de la 72^{ème} note sont de 1,5 dB pour le P131 contre 0,8 pour ce nouveau design. En revanche, les gradients de puissance acoustique rayonnée sont très peu impactés avec des valeurs moyenne et maximum quasi identiques (Figure III-30-d).

En résumé, la suppression de barres dans les aigus provoque logiquement une augmentation du niveau de mobilité qui peut potentiellement réduire la longueur de son. En contrepartie, ce design de table d'harmonie présente l'avantage de réduire les variations globales de mobilité et de puissance par rapport à la table du Pleyel P131. D'un point de vue musical, il en résulte certainement un jeu plus homogène avec des variations note à note moins importantes dans les aigus.

Ces études paramétriques mettent en évidence la difficulté à contrôler le comportement vibroacoustique de la table d'harmonie, notamment dans les aigus qui représentent un intervalle particulièrement sensible aux modifications de design de l'instrument. Au regard des indicateurs mis en place, certaines hétérogénéités structurelles semblent par ailleurs avoir un effet bénéfique sur le comportement de l'instrument. C'est le cas de la discontinuité au chevalet qui rend plus homogène les réponses notes à notes des 3^{ème} et 4^{ème} octaves (les deux premières étant couplées avec le chevalet des basses) même si bien entendu, celle-ci implique en contrepartie de fortes hausses de la mobilité et de la puissance au début de la 5^{ème} octave. Cette remarque doit être nuancée par rapport aux premières notes dont le comportement est différent en raison de leur proximité avec le bord du chevalet. Une solution consisterait à allonger le chevalet sans changer les points de couplages cordes / table de façon à les éloigner de l'extrémité du chevalet et donc d'un changement local de raideur.

Ces études ont également mis en évidence les qualités de conception du P131 qui, compte tenu des contraintes de conception⁶ et de l'absence d'outils scientifiques, démontre du savoir-faire et des connaissances des facteurs de piano.

III.G. Limites du modèle : validations numériques et expérimentales

Le développement d'une méthode de calcul passe nécessairement par une phase de validation des résultats via des comparaisons numérique/expérience ou encore numérique/numérique. En ce sens, des comparaisons croisées entre des résultats expérimentaux et issus de plusieurs méthodes de calculs numériques ont permis de montrer la pertinence d'un

⁶ Ajout de barres pour compenser la faiblesse du bois dans la direction perpendiculaire aux fibres, discontinuité au chevalet pour laisser passer le cadre en fonte, etc.

grand nombre de simplifications réalisées dans notre modèle mais aussi de mettre en défaut certaines hypothèses.

Dans cette optique, des campagnes de mesures ont fait office de première phase de validation. Celles-ci se sont déroulées au LVA dans le cadre du stage de Master 2 recherche M.E.G.A de Pierre Margerit [Marg15] sur une table d'harmonie de Pleyel P131 (Figure III-33), laquelle avait servi pour la mise en données du modèle présenté jusqu'ici. Cette table d'harmonie a été séparée du meuble pour élaborer un montage destiné à créer un encastrement. Elle a par la suite été montée dans la fenêtre de transparence d'une salle réverbérante de façon à reconstituer les conditions de baffle pour des mesures de rayonnement.

La structure est excitée par un bruit blanc au chevalet dont les vibrations sont mesurées avec un vibromètre laser à balayage POLYTEC PSV-400 sur un maillage d'environ 4600 points. La bonne séparation des résonances en basses fréquences permet alors de mesurer directement les déformées propres de la table d'harmonie. Ces mesures ont montré une très bonne correspondance spatiale entre les déformées expérimentales et issues du modèle analytique, en témoigne la Figure III-34 extraite de [Marg15]. Malgré les simplifications géométriques (chevalets rectilignes, hauteurs de sifflets non progressives, orientations des barres de mouchoirs) le modèle analytique permet donc de calculer des champs de déplacements pertinents au regard de l'expérience. Cependant à l'inverse des déformées propres, les fréquences sont sensiblement différentes. A titre d'exemple, le premier mode est calculé à 100 Hz au lieu de 66 Hz, ce qui est symptomatique d'une structure trop raide. Sur les autres types de mesures effectuées, comme la puissance acoustique rayonnée ou encore le coefficient de rayonnement, les écarts ont pour répercussion d'introduire un décalage en fréquence des courbes vers le haut, sans en modifier les tendances. La Figure III-35 illustre ce décalage sur la puissance acoustique rayonnée et le coefficient de rayonnement global de la structure qui est surestimé en BF.

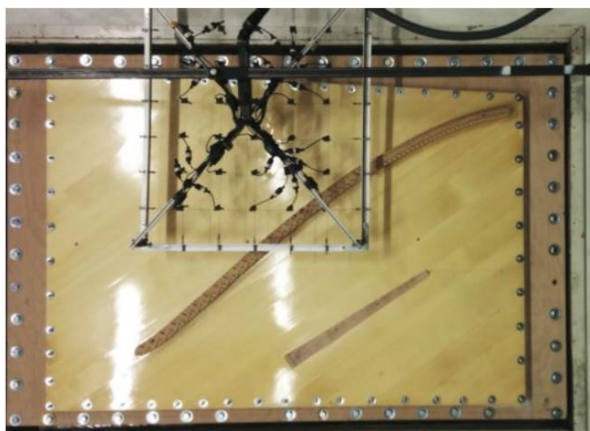


Figure III-33 : Montage de la table dans la fenêtre de transparence d'une salle réverbérante vue du côté chevalet. Le montage permet de réaliser les conditions d'encastrement et de baffle nécessaires à la comparaison expérimentale avec le modèle.

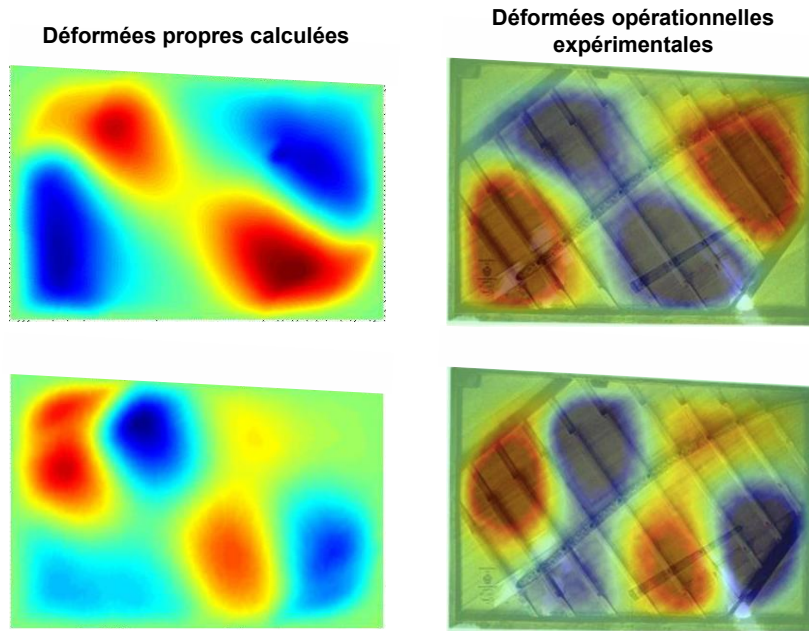


Figure III-34 : Comparaison entre le modèle analytique et les mesures faites sur table d'harmonie bafflée encastrée : déformées basses fréquences. Extrait de [Marg15].

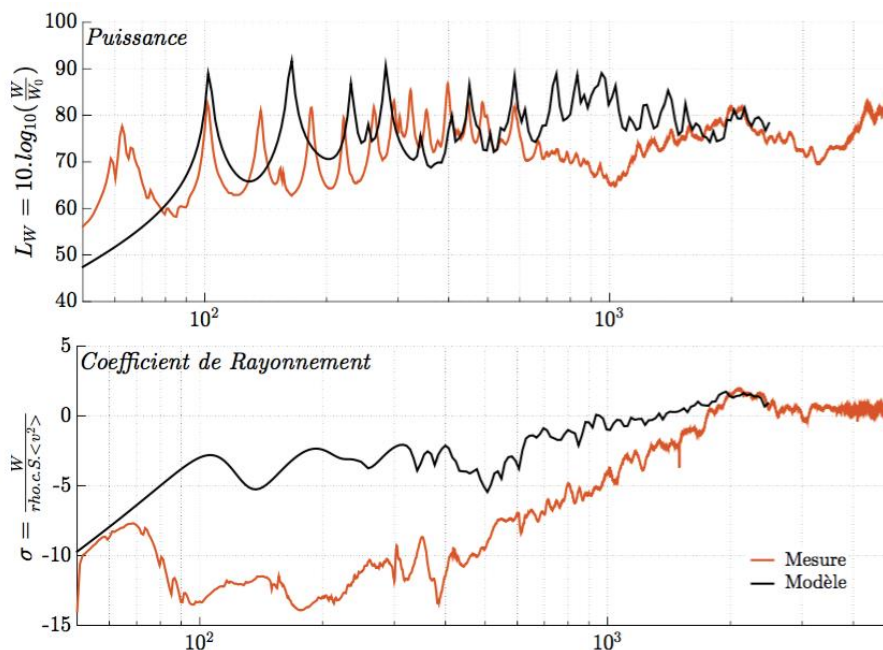


Figure III-35 : Comparaison entre le modèle analytique et les mesures faites sur table d'harmonie bafflée encastrée : puissance et coefficient de rayonnement de la structure. Extrait de [Marg15].

La problématique est alors de déterminer la ou les cause(s) principale(s) de ces écarts. Du fait d'une bonne correspondance spatiale mais non fréquentielle, les simplifications géométriques ne semblent pas les premières suspectes. En revanche, les effets de membrane ne sont pas pris en compte et seraient susceptibles de justifier ces différences. En effet, la structure n'est pas symétrique : une grande partie des superstructures sont collées sur une face, les autres sont sur la face opposée. Du fait de cette dissymétrie, les effets de membrane sont alertés. En prenant les

hypothèses de Love-Kirchhoff, on supprime alors deux degrés de liberté à la structure et on introduire donc de la raideur supplémentaire. Ceci explique alors le décalage des fréquences propres mais valide également l'exactitude des tendances décrites par notre modèle puisque ces effets perdent de l'importance en montant en fréquence, d'où un décalage des courbes vers le haut. On sait par ailleurs que pour une même déformée propre, plus sa fréquence est basse et moins le mode est rayonnant, ce qui justifie la surestimation du coefficient de rayonnement mentionnée précédemment.

Une double comparaison avec un modèle élément fini est réalisée afin de répondre à ces questions. Pour confirmer la validité des simplifications géométriques appliquées à notre modèle, ces dernières sont reproduites à l'identique dans un modèle 2D NASTRAN. Comme dans le chapitre précédent, la plaque non-rectangulaire orthotrope est encadrée et maillée avec des éléments coques PSHELL. Quant à elles, les superstructures sont maillées avec des éléments poutres PBEAM dont les inerties sont déportées du feuillet moyen de la plaque. Afin d'assurer la continuité des éléments coques et poutres à chaque nœud, le maillage de la plaque diffère de celui du chapitre précédent de façon à minimiser la distance entre les nœuds. La continuité entre les différentes pièces en contact est faite en appliquant des équivalences aux nœuds des éléments de chacune de ces pièces. La géométrie décrite est illustrée Figure III-36 et les simplifications géométriques réalisées sont les mêmes que dans notre modélisation. On distingue cependant deux cas de figure :

- Un modèle où la membrane est bloquée en imposant des déplacements nuls aux nœuds du maillage dans le plan de la plaque,
- Un modèle où la membrane est laissée libre, seulement contrainte sur les bords par la condition d'encastrement.

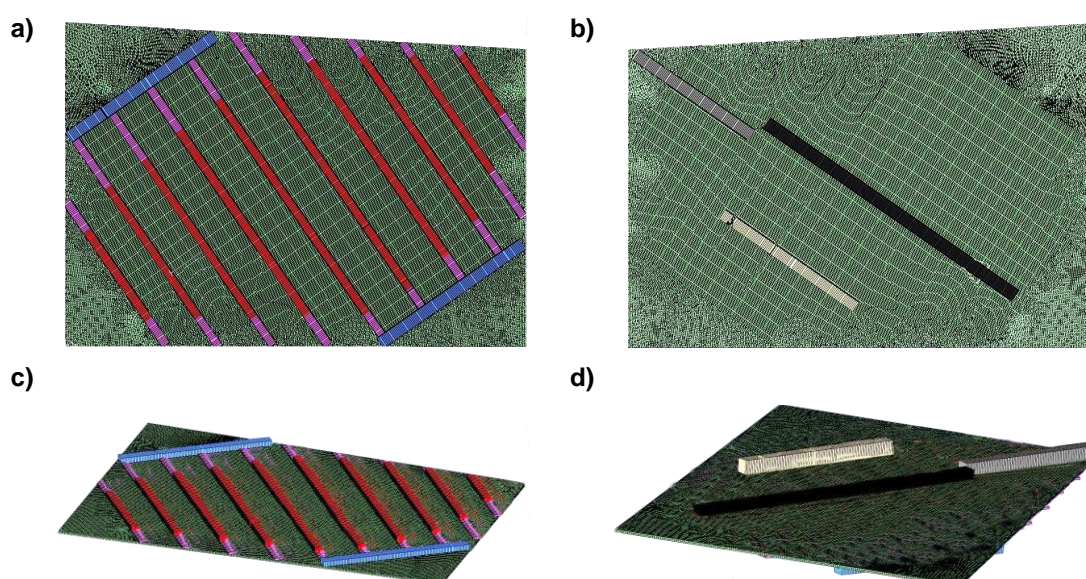


Figure III-36 : Modèle éléments finis de la table d'harmonie de Pleyel P131 : géométrie identique au modèle analytique.

Contrairement au modèle FEM de la plaque orthotrope présenté au chapitre précédent, la taille du maillage doit ici être de 1mm pour assurer la convergence du modèle. La Figure III-37 propose une étude comparative de convergence des fréquences propres de notre modèle et du modèle NASTRAN (ici sans membrane) respectivement en fonction de la troncature modale et de la finesse du maillage.

Même si dans notre modèle, l'augmentation de l'ordre de troncature améliore la précision du calcul, ce résultat confirme bien que l'ordre déterminé dans la section III.E.1 est très acceptable. Par ailleurs, cet ordre de troncature est le même qu'il y ait ou non présence des superstructures. Le modèle éléments finis se comporte d'une façon toute autre. En effet, on constate une différence importante entre un maillage de 5mm et un maillage de 1mm. Ainsi, l'ajout des superstructures conduit à devoir considérablement augmenter le nombre d'éléments, et donc le temps de calcul, contrairement à notre modèle.

Ce résultat montre bien que les deux solutions convergent vers un même résultat à mesure que chacun des modèles devient de plus en plus raffiné. Notons par ailleurs une différence fondamentale entre les deux modèles : le modèle développé dans le cadre de cette thèse converge par le haut (diminution des fréquences propres : « assouplissement » lorsque la troncature augmente) alors que le modèle éléments finis converge par le bas. En effet, dans ce modèle éléments finis, les masses sont concentrées (la matrice de masse n'est donc pas cohérente avec celle de raideur) et non pas réparties par interpolation entre les nœuds du maillage, d'où un modèle « trop lourd » lorsque le maillage n'est pas assez fin et donc une augmentation des fréquences propres lorsque celui-ci se raffine. Cette différence décroît alors lorsque la taille des éléments diminue dans le modèle NASTRAN et/ou si l'ordre de troncature augmente dans notre modèle.

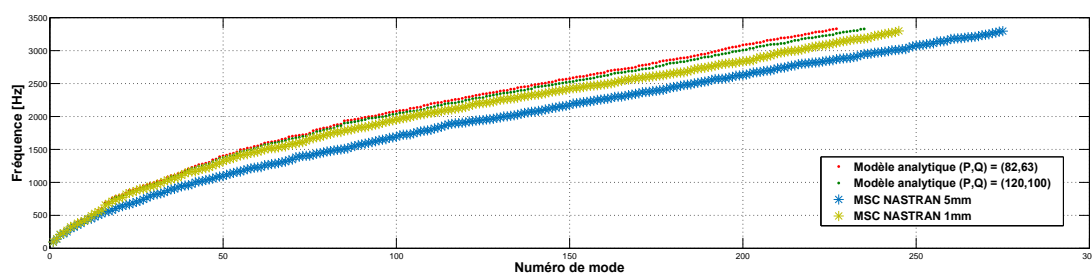


Figure III-37 : Étude comparative de convergence des fréquences propres entre le modèle analytique et le modèle NASTRAN (ici sans membrane) respectivement en fonction de la troncature modale et de la finesse du maillage.

Pour recentrer la discussion, les résultats des deux modèles FEM sont sensiblement différents en terme de fréquences propres. La Figure III-38 propose une comparaison des premières déformées propres de la table d'harmonie pour les quatre méthodes d'obtention : le modèle analytique, le modèle FEM sans membrane, le modèle FEM avec membrane et les déformées expérimentales. Un premier résultat intéressant consiste à dire que sur le plan spatial,

les quatre méthodes donnent des résultats sensiblement équivalents. En revanche, ils sont un peu différents concernant les fréquences propres. Comme nous pouvions le prévoir, celles de notre modèle et du modèle FEM sans prise en compte des effets de membrane sont très proches avec des écarts semblent-ils minimes. De la même façon, le modèle éléments finis avec la prise en compte des effets de membrane, recolle parfaitement avec les fréquences propres expérimentales. Ceci montre que les simplifications géométriques appliquées à notre modélisation sont bien négligeables au premier ordre et que les écarts fréquentiels observés sont essentiellement dus à l'hypothèse de membrane négligeable.

Pour compléter, la Figure III-39 donne la matrice de MAC entre les déformées calculées par l'intermédiaire de notre modèle et du modèle éléments finis sans membrane. A l'instar de l'étude menée à la section II.F du CHAPITRE II, les premières déformées propres sont très semblables entre les deux modèles. Cependant, en montant en fréquence les déformées propres perdent peu à peu en similitude, constatation qui n'est cependant pas alarmante puisqu'en hautes fréquences les aspects modaux deviennent de moins en moins pertinents. En effet, les modes de structure ne répondent plus de façon individuelle mais par paquet [Lesu88].

Ces comparaisons montrent que les simplifications géométriques réalisées dans notre modèle sont pertinentes. Ainsi, la prise en compte des sifflets, l'orientation exacte des barres de mouchoirs, la courbure du chevalet ou encore l'épaisseur variable de la plaque sont des seconds ordres et les négliger est tout à fait acceptable. Effets de membrane mis à part, ces résultats confirment les hypothèses réalisées dans notre modélisation selon lesquelles les barres peuvent être modélisées comme isotropes, l'absence de phénomènes de gauchissement dans les renforts, l'hypothèse de milieu mince appliquée aux barres et à la plaque ainsi que le principe général qui consiste à utiliser une plaque étendue puis à la contraindre afin de recréer les contours et l'angle d'orthotropie souhaités.

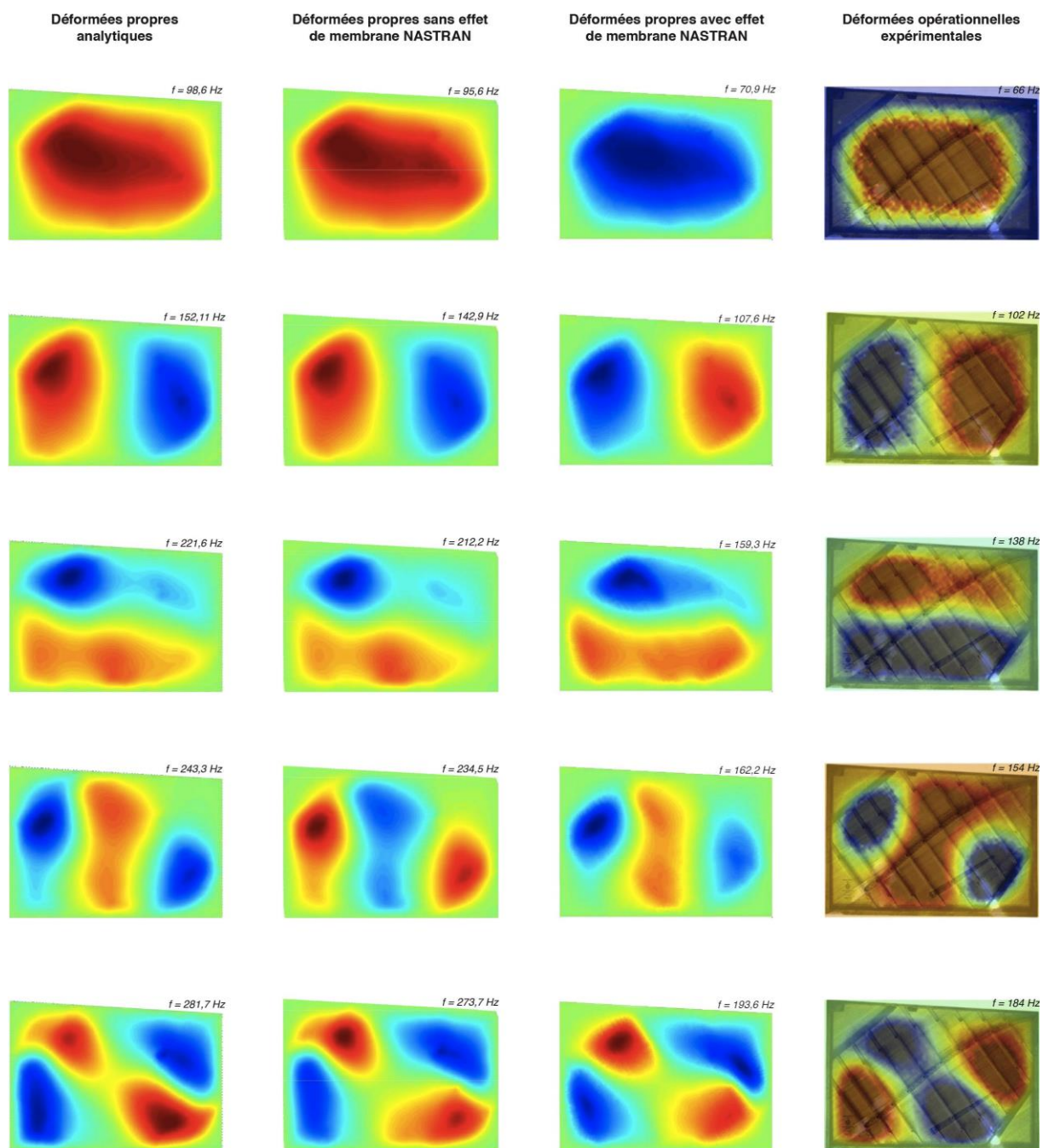


Figure III-38 : Comparaison des premières déformées propres de la table d'harmonie pour les quatre méthodes d'obtention : le modèle analytique, le modèle FEM sans membrane, le modèle FEM avec membrane et les déformées expérimentales.

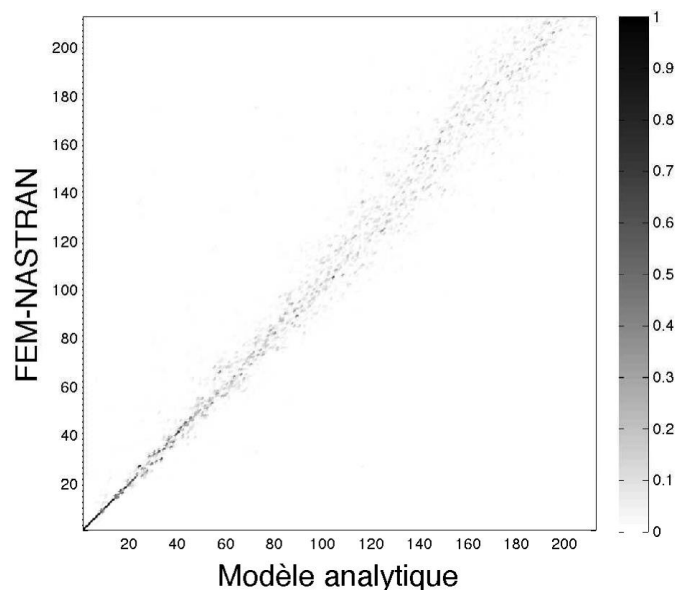


Figure III-39 : Matrice de MAC entre les déformées calculées par l'intermédiaire de notre modèle et du modèle éléments finis sans membrane.

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons terminé de mettre en place un modèle destiné à la prédiction des mécanismes vibroacoustiques des plaques orthotropes raidies de formes quelconques. Dans la continuité du CHAPITRE II consacré à la prise en compte de contours quelconques et à la prise en considération d'un angle d'orthotropie, nous avons ici introduit des renforts qui peuvent être orientés dans deux directions perpendiculaires, lesquelles correspondent aux axes d'orthotropie de la plaque « étendue ».

Nous avons également introduit le calcul du rayonnement acoustique d'une structure raidie non-rectangulaire encastrée. L'originalité de ce calcul étant d'utiliser les impédances de rayonnement acoustique d'une structure à ce jour parfaitement maîtrisé, i.e la plaque rectangulaire simplement supportée bafflée, pour calculer le rayonnement acoustique d'une structure beaucoup plus complexe, ce qui était jusqu'ici limité au cas des structures rectangulaires.

Cette méthodologie a ensuite été appliquée à la table d'harmonie de piano droit et nous avons pu mettre en évidence quatre familles de modes étroitement liées aux domaines fréquentiels. Il ressort que les premiers modes d'une table d'harmonie et plus généralement d'une structure raidie sont semblables à ceux d'une structure non-raïdie. En revanche, la montée en fréquence s'accompagne d'un paysage vibratoire beaucoup plus hétéroclite : les renforts se mettent progressivement à inhiber la vibration jusqu'à ce que les ondes ne puissent s'établir que dans les zones laissées sans barres. Conformément à ce que la littérature présente, on identifie également des

modes où la vibration est confinée entre quelques barres lorsque les longueurs d'onde deviennent de l'ordre de grandeur des espaces inter-raidisateurs.

L'outil développé nous a également permis de produire des cartographies du comportement vibroacoustique de la table d'harmonie. En considérant des indicateurs plus musicaux, nous avons également mis en évidence que le comportement des notes médiums et aigües est clairement différent et dépend de leur contenu spectral. Il ressort que les notes de l'extrême aigu souffrent d'une grande hétérogénéité tandis que les notes des 3^{ème} et 4^{ème} octaves ont un comportement plus homogène. Même si les études paramétriques menées montrent qu'il est possible de modifier légèrement l'aspect inhomogène dans les aigus, elles ont également mis en évidence toute la difficulté de « lisser » la réponse de la table d'harmonie dans ce même domaine.

Enfin, nous avons vérifié les hypothèses associées de notre modèle via une comparaison croisée avec des résultats expérimentaux et numériques. Malgré des effets de membrane non pris en compte dont il résulte un décalage des premières fréquences propres, les tendances décrites par notre outil sont correctes. Son utilisation à des fins d'études paramétriques devient alors pertinente.

Cependant, nous avons jusqu'ici traité exclusivement de la table d'harmonie qui constitue le récepteur des ondes présentes dans la corde. Il nous semble alors que le meilleur moyen de traiter les questions d'ordre musical soit d'introduire la notion de systèmes couplés cordes / table et de considérer le problème dans le domaine fréquentiel, logique dans laquelle le prochain chapitre s'inscrit.

CHAPITRE IV

INTERACTION CORDES / TABLE D'HARMONIE : RESOLUTION DU PROBLEME COUPLE DANS LE DOMAINE TEMPOREL

SOMMAIRE

IV.A. INTERACTION DES CORDES AVEC LA TABLE D'HARMONIE : CONSIDERATIONS ET SIMPLIFICATIONS GEOMETRIQUES	122
IV.B. RESOLUTION DU PROBLEME COUPLE	123
IV.B.1. ONDES TRANSVERSALES ET LONGITUDINALES DE LA CORDE	124
IV.B.2. TABLE D'HARMONIE DANS LE DOMAINE TEMPOREL	126
IV.B.3. SYSTEME D'EQUATIONS COUPLEES CORDES / TABLE	128
IV.B.4. SCHEMA AUX DIFFERENCES FINIES CENTREES	129
IV.B.5. RAYONNEMENT ACOUSTIQUE	131
IV.C. APPLICATION A UNE TABLE D'HARMONIE SIMPLIFIEE	133
IV.C.1. PLAN DE CORDES ET EFFORT EXCITATEUR	134
IV.C.2. COMPOSITION DU SPECTRE D'ECOUTE	136
IV.C.3. SENSIBILITE A L'AMORTISSEMENT DE LA TABLE D'HARMONIE	139
IV.C.4. DISPARITIONS DE PARTIELS PAR COUPLAGE ET INFLUENCE DES LONGUEURS MORTES	145
IV.D. PRISE EN COMPTE DES NON-LINEARITES	148
IV.D.1. EFFORTS EXCITATEURS GENERES PAR COUPLAGE DES ONDES	148
IV.D.2. ENRICHISSEMENTS DES AIGUS	155

Grâce au modèle développé dans les chapitres précédents, il serait aisé de poursuivre les investigations débutées dans la section III.F du CHAPITRE III ou même d'oser des comparaisons plus audacieuses telles qu'entre des pianos droits et à queues. Afin d'éviter de proposer une multitude de résultats numériques, ce qui reviendrait à rester dans une certaine zone de confort, notre choix se porte sur la prise en compte du couplage cordes / table dans le domaine temporel, qui de notre point de vue, apporte une réelle plus-value en raison des aspects perceptifs et subjectifs qui interviennent dans le son produit par l'instrument.

Dans le but de répondre aux questions d'ordre purement musical, comme la recherche d'un bon compromis « longueur de son / puissance rayonnée », le modèle analytique de la table d'harmonie est couplé à une corde au niveau du chevalet en vue d'une résolution temporelle. L'objectif est de proposer un modèle simplifié peu onéreux qui permette d'apprécier convenablement l'influence de modifications structurelles sur le son rayonné.

Le principe de résolution présenté dans la suite de ce manuscrit peut être transposé à d'autres systèmes couplés comme réalisé par Laulagnet [Laul09] qui propose de modéliser une poutre encastree/libre impactant une plaque.

IV.A. Interaction des cordes avec la table d'harmonie : considérations et simplifications géométriques

Le son produit par un piano n'est bien entendu pas lié uniquement au design de la table d'harmonie. Sans dresser une liste exhaustive, citons d'autres pièces qui sculptent le son de l'instrument : plan de cordes, marteau, cadre, etc. Observé séparément, le comportement vibroacoustique de ces pièces est tout aussi complexe que celui de la table en elle-même. De fait, de nombreuses études les concernant ont été menées, citons par exemple [Flet64, Wein77, Conk96b, ChAs98, EtCM15] pour le plan de cordes et [Bout87, Conk96a] à propos du marteau. A cela s'ajoute l'interaction entre les différents sous-systèmes qui augmente le niveau de complexité comme le montrent Chaigne & Askenfelt [ChAs94] dans le cadre de l'interaction marteau / corde.

Afin d'alléger un modèle trop lourd qui laisse peu de place à l'interprétation des phénomènes entre les données d'entrée et de sortie, nous nous focalisons sur l'interaction cordes / table. Nous considérons alors une seule corde horizontale encastree de longueur L_C selon le schéma de principe Figure IV-1.

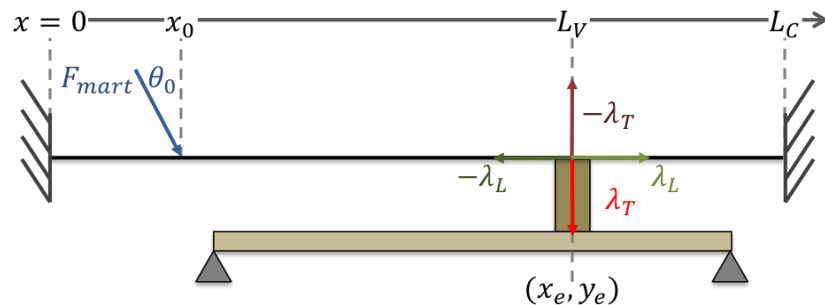


Figure IV-1 : Schéma de principe d'une corde encastree horizontale de longueur totale L_C couplée à la table d'harmonie où l'effort du marteau F_{mart} est injecté en x_0 . Les efforts de contacts $\lambda_T(t)$ et $\lambda_L(t)$ assurent la continuité entre la corde et le chevalet.

Au point x_0 se situe l'effort injecté par le marteau F_{mart} supposé ponctuel, connu mais pas forcément normal à l'axe de la corde. L'introduction de l'angle θ_0 est motivée par le fait que le contact entre le marteau et la corde est réparti sur une petite portion de corde ce qui engendre deux composantes dans l'effort injecté. Le couplage avec le chevalet se fait à la longueur L_V pour longueur vibrante et, par extension, la longueur morte vaut donc $L_C - L_V$. Les coordonnées du point de couplage avec la table sont notées (x_e, y_e) . De plus, la corde est animée de vibrations transverses et longitudinales, appliquant un effort transversal ainsi qu'un moment dû à l'effort longitudinal à la table d'harmonie. On définit alors les efforts de contact $\lambda_T(t)$ et $\lambda_L(t)$ qui assurent la continuité entre la corde et le chevalet.

Notons toutefois que l'horizontalité de la corde n'est pas réaliste. Dans la pratique, la corde prend un angle qui introduit des contraintes statiques dans la table d'harmonie. La projection des efforts dans le repère de la table d'harmonie est illustrée en Figure IV-2.

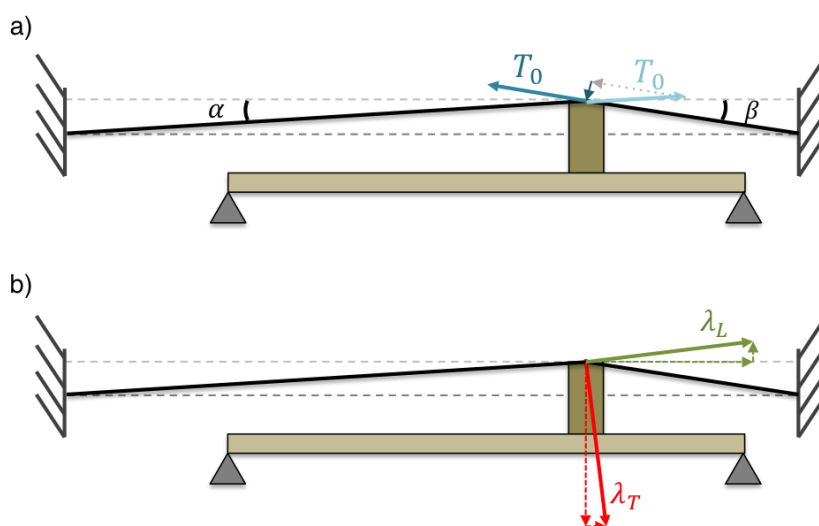


Figure IV-2 : Charge statique et projection des efforts dues à l'inclinaison de la corde. a) charge statique induite par la tension de la corde T_0 ; b) Projection des efforts transversaux et longitudinaux dans la corde (flèches pleines) dans le repère de la table d'harmonie (flèches pointillées).

Enfin, la corde et la table d'harmonie seront considérées immobiles à l'instant initial. Les conditions initiales imposeront des déplacements et des vitesses nuls à $t = 0$.

IV.B. Résolution du problème couplé

Dans un premier temps, les équations du mouvement de la corde sont supposées linéaires. Les non-linéarités inhérentes au comportement d'une corde de piano seront abordées dans la section IV.D de ce chapitre. La résolution du problème couplé est basée sur une approche modale

résolue en temps. Le modèle de la table d'harmonie est conservé par rapport au chapitre précédent alors que les déplacements de la corde sont décomposés sur la base de modes encastres / encastres.

La résolution du problème est faite via un schéma explicite aux différences finies centrées. De cette façon, on détermine à chaque pas de temps les efforts d'interactions entre les deux sous-systèmes (efforts injectés) ainsi que les amplitudes modales liées à chaque onde : flexion dans la table, ondes transversales et longitudinales dans la corde. Enfin, le champ vibratoire de la table provoque un champ acoustique rayonné qui sera calculé à partir d'une intégrale de Rayleigh en temps.

IV.B.1. Ondes transversales et longitudinales de la corde

La formulation des équations de mouvement des cordes est sujette à de multiples discussions et nombreuses sont les études sur le sujet [Flet64, Wein77, Conk96b, ChAs98, EtCM15]. La représentation la plus simple d'une corde est l'équation de d'Alembert [Alem47, S.214–249] : une EDP linéaire représentant une seule onde transverse avec des partiels harmoniques. Cependant, cette formulation est très sommaire et très loin de rendre compte des phénomènes réels. Chaigne [CKBD08] met notamment en évidence que de nombreux phénomènes interviennent dans les cordes de piano : vibrations transversales et longitudinales, double polarisation, in-harmonicité des partiels, non-linéarités, etc. Le modèle MGE (Modèle Géométriquement Exacte) de Chabassier [Chab12, ChCJ13] est le plus à même de représenter au mieux la réalité puisqu'il intègre toutes ses composantes. Toujours dans l'optique d'écrire un modèle simplifié et de le complexifier par étapes successives, la formulation sans la double polarisation est privilégiée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho S \ddot{u}_c - ES u_{c,xx} + (ES - T_0) \frac{\partial}{\partial x} \frac{u_{c,x}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} = 0 \quad \text{Ondes transversales} \\ \rho S \ddot{v}_c - ES v_{c,xx} + (ES - T_0) \frac{\partial}{\partial x} \frac{(1 + v_{c,x})}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} = 0 \quad \text{Ondes longitudinales} \end{array} \right. \quad (\text{IV.1})$$

où ρ représente la masse volumique de la corde ; S sa section ; E le module de Young ; T_0 la tension ; u_c et v_c les déplacements transversaux et longitudinaux.

Ce système met en évidence un échange d'énergie « direct » entre les deux ondes présentes dans la corde représenté par des termes transverses dans l'équation d'onde longitudinale et vice versa. Concernant les cordes de piano, l'influence perceptive de ce

couplage entre les ondes transversales et longitudinales est d'une importance capitale [Conk96b]. Celle-ci est par ailleurs étroitement liée à l'existence d'un précurseur dans le son, comme l'ont montré de nombreux travaux [Aske93, CKBD08], qui est décrit comme une « présence » vibratoire dans l'accélération au chevalet précédant l'arrivée des ondes transversales, d'où son nom. Ainsi la participation des ondes longitudinales est susceptible d'expliquer ce phénomène puisque celles-ci se propagent à une vitesse bien supérieure que les ondes transverses. Le marteau frappant la corde sur une portion et non ponctuellement, celui-ci excite directement les ondes longitudinales même s'il agit dans une moindre mesure que sur les vibrations transverses. Comme précisé, l'effort injecté par le marteau sera en conséquence incliné de façon à exciter majoritairement l'onde transverse et à solliciter légèrement l'onde longitudinale. Cela nous amène à imposer un effort longitudinal d'environ 2% de l'effort total.

Même sans cela, l'échange d'énergie induit par les non-linéarités viendrait exciter ces ondes longitudinales qui donneraient naissance à un précurseur dans le son. Ce dernier aspect est pour l'instant écarté pour être abordé plus tard en fin de chapitre. Via un développement de Taylor à l'ordre 0, ce modèle est linéarisé donnant ainsi deux équations d'onde indépendantes :

$$\begin{cases} \rho S \ddot{u}_c - T_0 u_{c,xx} = 0 & \text{Onde transverses} \\ \rho S \ddot{v}_c - ES v_{c,xx} = 0 & \text{Onde longitudinales} \end{cases} \quad (\text{IV.2})$$

Il n'y a donc plus d'échange d'énergie « direct » entre les deux ondes. On retrouve deux équations très classiques : la première correspondant à l'équation de d'Alembert pour les ondes transverses ; la seconde correspond à une équation de poutre en traction / compression. Nous observerons par la suite que le couplage avec la table d'harmonie engendre un échange entre les deux ondes cette fois-ci de façon « indirecte » puisque la rotation du chevalet vient solliciter longitudinalement la corde. L'inharmonicité sera quant à elle apportée par le contact au chevalet qui, étant mobile, apporte un décalage entre les partiels.

Conformément au schéma de principe donné à la Figure IV-1, l'effort du marteau ainsi que les deux efforts de contact sont ajoutés au second membre de l'équation (IV.2) où les distributions de Dirac les rendent ponctuels :

$$\begin{cases} \rho S \ddot{u}_c - T_0 u_{c,xx} = F_{mart}(t)\cos(\theta_0)\delta(x - x_0) - \lambda_T(t)\delta(x - L_V) & \text{Ondes transverses} \\ \rho S \ddot{v}_c - ES v_{c,xx} = F_{mart}(t)\sin(\theta_0)\delta(x - x_0) - \lambda_L(t)\delta(x - L_V) & \text{Ondes longitudinales} \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

Selon le même formalisme que dans les chapitres précédents, les déplacements transversaux et longitudinaux de la corde sont décomposés sur la base des modes encastrés / encastrés d'une corde de longueur totale L_C . Soit :

$$\begin{cases} u_c(x, t) = \sum_m U_m(t) \psi_m^{(1)}(x) \text{ avec } \psi_m^{(1)}(x) = \sin\left(\frac{m\pi}{L_C} x\right) & \text{Ondes transverses} \\ v_c(x, t) = \sum_n V_n(t) \psi_n^{(2)}(x) \text{ avec } \psi_n^{(2)}(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L_C} x\right) & \text{Ondes longitudinales} \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

lesquels sont injectés dans le système d'équations de mouvement (IV.3). La projection sur des modes d'indices r et s quelconques permet alors d'écrire le problème sous forme matricielle :

$$\begin{cases} \bar{m}_T \ddot{\mathbf{U}}(t) + \bar{k}_T \mathbf{U}(t) = F_{mart}(t) \cos(\theta_0) \boldsymbol{\psi}^{(1)}(x_0) - \lambda_T(t) \boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) & \text{Ondes transversales} \\ \bar{m}_L \ddot{\mathbf{V}}(t) + \bar{k}_L \mathbf{V}(t) = F_{mart}(t) \sin(\theta_0) \boldsymbol{\psi}^{(2)}(x_0) - \lambda_L(t) \boldsymbol{\psi}^{(2)}(L_V) & \text{Ondes longitudinales} \end{cases} \quad (\text{IV.5})$$

où \bar{m}_T , \bar{m}_L , \bar{k}_T et \bar{k}_L sont les matrices de masses et de raideurs ; $\mathbf{U}(t)$ et $\mathbf{V}(t)$ les vecteurs amplitudes modales des ondes dans la corde ; $\boldsymbol{\psi}^{(1)}(X)$ et $\boldsymbol{\psi}^{(2)}(X)$ les vecteurs propres généralisés appliqués à la position X .

L'usage des propriétés d'orthogonalité des modes permet d'écrire les matrices de masses et de raideurs diagonales telles que :

$$\begin{aligned} \bar{m}_T = \bar{m}_L &= \begin{pmatrix} \ddots & & (0) \\ & \frac{\rho S L_C}{2} & \\ (0) & & \ddots \end{pmatrix} \\ \bar{k}_T &= \begin{pmatrix} \ddots & & (0) \\ & \frac{T_0 L_C}{2} \left(\frac{r\pi}{L_C}\right)^2 & \\ (0) & & \ddots \end{pmatrix} & \bar{k}_L &= \begin{pmatrix} \ddots & & (0) \\ & \frac{E S L_C}{2} \left(\frac{s\pi}{L_C}\right)^2 & \\ (0) & & \ddots \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.6})$$

IV.B.2. Table d'harmonie dans le domaine temporel

Du côté de la table d'harmonie, l'effort de contact transversal vient appliquer un effort ponctuel normal à la table. Le travail d'un tel effort a été explicité dans le cas d'une excitation harmonique dans le CHAPITRE II section II.D.3 à l'équation (II.19). Sans faire l'hypothèse d'un effort pulsant à une fréquence précise, l'expression de l'effort généralisé est ici directe. On a alors pour un effort appliqué aux coordonnées (x_e, y_e) dans le plan de la plaque :

$$F_{\lambda_T}(t) = \lambda_T(t)\boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) \quad (\text{IV.7})$$

Concernant l'effort de contact qui assure la continuité dans la direction de la corde, le raisonnement est moins immédiat. Ce dernier applique un effort perpendiculaire au sommet du chevalet. Conformément au champ de déplacements dans le chevalet explicité à la section III.B.1 du CHAPITRE III équation (III.4), le déplacement dans cette direction est donné par :

$$v(x, y, z) = -z w_{,y}(x, y) \quad (\text{IV.8})$$

Le travail d'une force $\lambda_L(t)$ appliquée en haut du chevalet est alors donné par :

$$W_{moment} = \lambda_L(t) v(x_e, y_e, d) = -d \lambda_L(t) w_{,y}(x_e, y_e) \quad (\text{IV.9})$$

où d est le bras de levier défini par $d = \frac{h}{2} + H_c$ la somme de la demie épaisseur de la plaque plus la hauteur du chevalet au niveau du point d'excitation de coordonnées (x_e, y_e) dans le plan de la plaque.

En substituant le déplacement transversal de la plaque $w(x, y)$ par la décomposition modale sur les modes de plaques en appui simple équation (II.9), il devient possible de minimiser l'action de ce moment comme il l'a été fait tout au long des chapitres précédents. Il vient alors l'expression suivante du moment généralisé :

$$M_{pq} = \frac{\partial W_{moment}}{\partial a_{pq}} = -d \lambda_L(t) \frac{\partial \sum_m \sum_n a_{mn}(t) \phi_{mn,y}(x_e, y_e)}{a_{pq}} \quad (\text{IV.10})$$

$$\mathbf{M}_{\lambda_L}(t) = -d \lambda_L(t) \begin{pmatrix} \vdots \\ \frac{q\pi}{L_y} \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_e\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y_e\right) \\ \vdots \end{pmatrix} = -d \lambda_L(t) \boldsymbol{\phi}_{,y}(x_e, y_e)$$

$$\text{où } \phi_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right).$$

Analogiquement à ce qui a été réalisé dans les chapitres antérieurs, les efforts et moments généralisés enrichissent au second membre l'équation matricielle représentant la table d'harmonie. Celle-ci peut s'exprimer soit dans la base simplement supportée soit dans la base propre de la table d'harmonie (base raidie) en utilisant la relation (II.14) :

$$\bar{\bar{M}}_{tot} \ddot{\mathbf{a}} + \bar{\bar{K}}_{tot} \mathbf{a} = \lambda_T(t) \boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) - d \lambda_L(t) \boldsymbol{\phi}_{,y}(x_e, y_e) \quad \text{Base simplement supportée} \quad (IV.11)$$

$$\bar{\bar{M}}_s \ddot{\mathbf{b}} + \bar{\bar{K}}_s \mathbf{b} = \lambda_T(t) {}^t \bar{\bar{T}} \boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) - d \lambda_L(t) {}^t \bar{\bar{T}} \boldsymbol{\phi}_{,y}(x_e, y_e) \quad \text{Base de la table d'harmonie}$$

$$\text{avec } \bar{\bar{K}}_s = {}^t \bar{\bar{T}} \bar{\bar{K}}_{tot} \bar{\bar{T}} \text{ et } \bar{\bar{M}}_s = {}^t \bar{\bar{T}} \bar{\bar{M}}_{tot} \bar{\bar{T}}.$$

IV.B.3. Système d'équations couplées cordes / table

Des sections précédentes découle un système d'équations matricielles représentant le problème couplé cordes / table d'harmonie où les sous-systèmes sont reliés par les efforts de contacts au chevalet, eux-mêmes des inconnues du problème. Il manque encore aux expressions (IV.5) et (IV.11) des termes dissipatifs. Conformément à la section II.D.5 du CHAPITRE II, l'amortissement est introduit sous la forme d'une matrice d'amortissement modal noté $\bar{\bar{C}}_{TH}$ par la suite, dont les termes sont explicités à l'équation (II.28). L'amortissement des modes transversaux et longitudinaux des ondes dans la corde est introduit de façon identique. On notera respectivement $\bar{\bar{c}}_T$ et $\bar{\bar{c}}_L$ les matrices d'amortissement des modes transverses et longitudinaux. On donne alors le système de 3 équations suivant :

$$\begin{cases} \bar{\bar{m}}_T \ddot{\mathbf{U}} + \bar{\bar{c}}_T \dot{\mathbf{U}} + \bar{\bar{k}}_T \mathbf{U} = F_{mart}(t) \cos(\theta_0) \boldsymbol{\psi}^{(1)}(x_0) - \lambda_T(t) \boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) & \text{Ondes transverses corde} \\ \bar{\bar{m}}_L \ddot{\mathbf{V}} + \bar{\bar{c}}_L \dot{\mathbf{V}} + \bar{\bar{k}}_L \mathbf{V} = F_{mart}(t) \sin(\theta_0) \boldsymbol{\psi}^{(2)}(x_0) - \lambda_L(t) \boldsymbol{\psi}^{(2)}(L_V) & \text{Ondes longitudinales corde} \\ \bar{\bar{M}}_s \ddot{\mathbf{b}} + \bar{\bar{C}}_{TH} \dot{\mathbf{b}} + \bar{\bar{K}}_s \mathbf{b} = \lambda_T(t) {}^t \bar{\bar{T}} \boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) - d \lambda_L(t) {}^t \bar{\bar{T}} \boldsymbol{\phi}_{,y}(x_e, y_e) & \text{Flexion table d'harmonie} \end{cases} \quad (IV.12)$$

où les facteurs de pertes modaux des cordes sont représentatifs d'un acier standard et sont considérés comme constants tel que $\eta_{corde} = 5^E-4$.

Comme mentionné auparavant $\lambda_T(t)$ et $\lambda_L(t)$ sont des efforts de contact qui assurent une double continuité des déplacements entre la corde et la table d'harmonie à chaque instant t . Intéressons-nous tout d'abord à la continuité des déplacements transversaux, soit :

$$\begin{aligned} U_c(L_V, t) &= w(x_e, y_e, t) \quad \forall t \\ \Leftrightarrow \sum_m U_m(t) \psi_m^{(1)}(L_V) &= \sum_p \sum_q a_{pq}(t) \phi_{pq}(x_e, y_e) \quad \forall t \end{aligned} \quad (IV.13)$$

$$\Leftrightarrow {}^t \boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) \mathbf{U}(t) = {}^t \boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) \mathbf{a}(t) = {}^t \boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) \bar{\bar{T}} \mathbf{b}(t) \quad \forall t$$

et à la continuité des déplacements dans la direction perpendiculaire au chevalet, soit la direction de la corde :

$$\begin{aligned}
 V_c(L_V, t) &= v(x_e, y_e, z = d, t) \quad \forall t \\
 \Leftrightarrow \sum_n V_n(t) \psi_n^{(2)}(L_V) &= -d \sum_p \sum_q a_{pq}(t) \frac{\partial \phi_{pq}(x_e, y_e)}{\partial y} \quad \forall t \\
 \Leftrightarrow {}^t \boldsymbol{\psi}^{(2)}(L_V) \mathbf{V}(t) &= -d {}^t \boldsymbol{\phi}_{,y}(x_e, y_e) \bar{\mathbf{T}} \mathbf{b}(t) \quad \forall t
 \end{aligned} \tag{IV.14}$$

Au final, la résolution du problème couplé cordes / table d'harmonie se résume à la résolution d'un système de 5 équations à 5 inconnues dont les solutions sont valables à chaque pas de temps et dont les conditions initiales de ce calcul sont, pour rappel, déplacements et vitesses nuls à $t = 0$.

IV.B.4. Schéma aux différences finies centrées

L'approximation des termes de vitesses et d'accélération est une condition *sine qua non* pour résoudre ce problème. Pour ce faire, on applique un schéma explicite aux différences finies centrées pour les variables modales de la table d'harmonie et de la corde pour lequel l'intervalle de temps doit être suffisamment petit pour assurer la convergence du calcul. :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{b}}(t) = \frac{\mathbf{b}(t + \Delta t/2) - \mathbf{b}(t - \Delta t/2)}{\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{b}}(t) = \frac{\mathbf{b}(t + \Delta t) - 2\mathbf{b}(t) + \mathbf{b}(t - \Delta t)}{\Delta t^2} \end{cases} \tag{IV.15}$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}(t) = \frac{\mathbf{U}(t + \Delta t/2) - \mathbf{U}(t - \Delta t/2)}{\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{U}}(t) = \frac{\mathbf{U}(t + \Delta t) - 2\mathbf{U}(t) + \mathbf{U}(t - \Delta t)}{\Delta t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{V}}(t) = \frac{\mathbf{V}(t + \Delta t/2) - \mathbf{V}(t - \Delta t/2)}{\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{V}}(t) = \frac{\mathbf{V}(t + \Delta t) - 2\mathbf{V}(t) + \mathbf{V}(t - \Delta t)}{\Delta t^2} \end{cases}$$

Numériquement, déterminer les solutions du système d'équations nécessite une discrétisation sur le domaine temporel. Pour des raisons évidentes, l'approximation des vitesses doit être élargie sur une période de $2\Delta t$ afin de pouvoir être incrémentée dans un code de calcul. Il en découle le schéma explicite aux différences finies centrées discrétisé pour les variables modales de la table d'harmonie et de la corde :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{b}}^i = \frac{\mathbf{b}^{i+1} - \mathbf{b}^{i-1}}{2\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{b}}^i = \frac{\mathbf{b}^{i+1} - 2\mathbf{b}^i + \mathbf{b}^{i-1}}{\Delta t^2} \end{cases} \quad (\text{IV.16})$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}^i = \frac{\mathbf{U}^{i+1} - \mathbf{U}^{i-1}}{2\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{U}}^i = \frac{\mathbf{U}^{i+1} - 2\mathbf{U}^i + \mathbf{U}^{i-1}}{\Delta t^2} \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{V}}^i = \frac{\mathbf{V}^{i+1} - \mathbf{V}^{i-1}}{2\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{V}}^i = \frac{\mathbf{V}^{i+1} - 2\mathbf{V}^i + \mathbf{V}^{i-1}}{\Delta t^2} \end{cases}$$

Par substitution dans le système (IV.12) ainsi que dans les relations de continuité (IV.13) et (IV.14), il vient l'expression suivante du problème après avoir isolé les différents instants de temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\bar{m}_T}{2\Delta t} + \frac{\bar{c}_T}{2\Delta t} \right] \mathbf{U}^{i+1} + \left[\bar{k}_T - 2\frac{\bar{m}_T}{\Delta t^2} \right] \mathbf{U}^i + \left[\frac{\bar{m}_T}{2\Delta t} - \frac{\bar{c}_T}{2\Delta t} \right] \mathbf{U}^{i-1} = F_{mart}^i \cos(\theta_0) \boldsymbol{\psi}^{(1)}(x_0) - \lambda_T^i \boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) \\ \left[\frac{\bar{m}_L}{2\Delta t} + \frac{\bar{c}_L}{2\Delta t} \right] \mathbf{V}^{i+1} + \left[\bar{k}_L - 2\frac{\bar{m}_L}{\Delta t^2} \right] \mathbf{V}^i + \left[\frac{\bar{m}_L}{2\Delta t} - \frac{\bar{c}_L}{2\Delta t} \right] \mathbf{V}^{i-1} = F_{mart}^i \sin(\theta_0) \boldsymbol{\psi}^{(2)}(x_0) - \lambda_L^i \boldsymbol{\psi}^{(2)}(L_V) \\ \left[\frac{\bar{M}_s}{2\Delta t} + \frac{\bar{C}_{TH}}{2\Delta t} \right] \mathbf{b}^{i+1} + \left[\bar{K}_s - 2\frac{\bar{M}_s}{\Delta t^2} \right] \mathbf{b}^i + \left[\frac{\bar{M}_s}{2\Delta t} - \frac{\bar{C}_{TH}}{2\Delta t} \right] \mathbf{b}^{i-1} = \lambda_T^i {}^t\bar{T} \boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) - d \lambda_L^i {}^t\bar{T} \boldsymbol{\phi}_y(x_e, y_e) \quad (\text{IV.17}) \\ \\ {}^t\boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) \mathbf{U}^{i+1} = {}^t\boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) \bar{T} \mathbf{b}^{i+1} \\ \\ {}^t\boldsymbol{\psi}^{(2)}(L_V) \mathbf{V}^{i+1} = -d {}^t\boldsymbol{\phi}_y(x_e, y_e) \bar{T} \mathbf{b}^{i+1} \end{array} \right.$$

Par calcul, qui n'est pas présenté dans le corps de ce manuscrit mais dont le lecteur pourra retrouver les éléments en ANNEXE H, on détermine des expressions compactes des efforts de contacts et des vecteurs amplitudes modales de chaque onde. A l'itération i , on détermine alors les efforts de contacts à cet instant i ainsi que les vecteurs modaux à l'instant futur $i + 1$. La réponse temporelle du système couplé cordes / table d'harmonie répond alors au principe suivant illustré Figure IV-3 :

- Détermination des efforts de contacts à l'instant i connaissant : les vecteurs des amplitudes modales en i et $i - 1$; l'effort du marteau en i ,
- Détermination des vecteurs amplitudes modales à l'instant $i + 1$ connaissant : les vecteurs des amplitudes modales en i et $i - 1$; les efforts de contact en i précédemment déterminés ; l'effort du marteau en i .

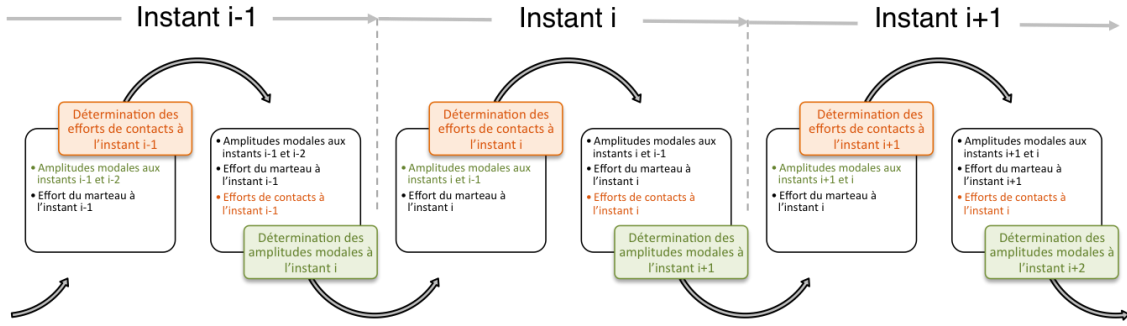


Figure IV-3 : Calculs réalisés pendant les itérations i-1, i et i+1. Deux calculs sont réalisés à chaque itération : la détermination des efforts de contacts (en orange), basée sur les résultats de l'itération précédente, qui servira au second calcul ; la détermination des amplitudes modales (en vert) notamment à partir des efforts de contacts précédemment calculés.

Soulignons néanmoins que la première itération est calculée de manière différente en raison de l'inexistence des informations nécessaires à ce calcul avant $i = 0$. Les conditions initiales qui imposent des déplacements et des vitesses nuls à chaque sous-système impliquent des expressions particulières nécessaires à l'amorce du calcul (se reporter à la section H.II de l'ANNEXE H pour de plus amples informations).

Un tel schéma explicite présente l'avantage de ne pas laisser planer de doute quant à la convergence numérique du résultat puisque celui-ci diverge lorsque le pas de temps n'est pas suffisamment fin. Instinctivement, il vient un critère analogue au critère de Shannon pour les fréquences d'échantillonnage. Dans la pratique, il est nécessaire de respecter $\Delta t < \frac{1}{6 f_{max}}$ soit un pas de l'ordre de 0,03 ms pour que la méthode converge.

IV.B.5. Rayonnement acoustique

Le calcul des amplitudes modales à chaque pas de temps permet alors de reconstruire les champs de déplacements, de vitesses et d'accélération sur toute la table d'harmonie. Le vecteur des accélérations modales est recréé selon le schéma aux différences finies (IV.16) tandis que l'accélération en elle-même est reconstituée par combinaison linéaire :

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{b}}^i = \frac{\mathbf{b}^{i+1} - 2\mathbf{b}^i + \mathbf{b}^{i-1}}{\Delta t^2} \rightarrow \ddot{\mathbf{a}}^i = \bar{\bar{\mathbf{T}}} \ddot{\mathbf{b}}^i \\ w^i(x, y) = \sum_p \sum_q \ddot{a}_{pq}^i \phi_{pq}(x, y) \end{cases} \quad (IV.18)$$

avec $\bar{\bar{\mathbf{T}}}$ la matrice des vecteurs propres normés de la table d'harmonie qui permet de passer de la base initiale à la base propre du système (voir CHAPITRE II sous-section II.D.1).

Une formulation intégrale temporelle est utilisée afin de propager la vibration dans le milieu fluide. Comme dans les chapitres précédents, la table est considérée bafflée (les conséquences de cette hypothèse ont été abordées et justifiées dans le CHAPITRE I à la sous-section I.A.4 ainsi que dans le CHAPITRE III section III.D), la paroi plane et le milieu semi-infini. Dans cette situation, l'utilisation de sources images permet de s'affranchir du calcul du terme dipolaire présent classiquement dans ce type de formulation. On donne le schéma de principe Figure IV-4 représentant la structure vibrante bafflée en appuis simples.

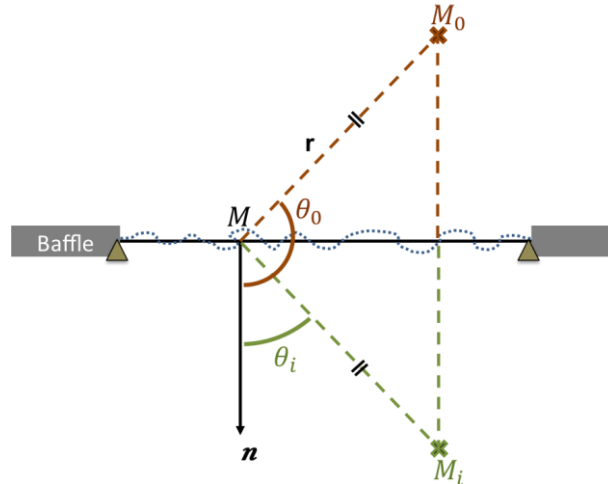


Figure IV-4 : Schéma de principe de la formulation intégrale d'une source bafflée plane utilisant le principe des sources images.

Chaque demi-espace répond à l'équation de Helmholtz. Le point d'écoute est placé dans le demi-espace supérieur et noté M_0 auquel est associé son image M_i , placée dans le demi-espace inférieur. La position du point d'écoute est donnée par la distance r depuis le point courant M sur l'objet et par l'angle θ_0 défini par rapport à la normale en M . En utilisant le principe des sources images, il vient la pression au point d'écoute dans le domaine temporel :

$$P(M_0, t) = -\rho_{air} \int_S \frac{\ddot{w}\left(M, t - \frac{r}{c}\right)}{2\pi r} dS \quad (IV.19)$$

où la masse volumique de l'air est notée ρ_{air} et vaut $1,184 \text{ kg/m}^3$.

Cette formulation intégrale de Rayleigh met en évidence un retard de r/c entre les contributions des différents points courants sur la table, qui dépend des temps de trajet jusqu'au point d'écoute. Il faut néanmoins que la discrétisation spatiale soit adaptée à l'éloignement du point d'écoute par rapport à la structure. Il est de coutume de considérer deux cas :

- Champ proche : critère vibratoire dépendant des longueurs d'onde de flexion de la structure vibrante,

- Champ lointain : critère acoustique basé sur la propagation des ondes dans le fluide.

Le son perçu en champ proche est sensiblement différent de ce qu'un auditeur entend en champ lointain. Dans une situation réaliste, il est évident qu'un auditeur ne « colle » pas son oreille sur l'instrument mais se trouve à une distance relativement éloignée du piano. Il nous semble alors plus pertinent de se limiter à des études dans ce second cas. Ainsi, l'éloignement sera toujours de 1,5 m en face de l'objet. Le critère de discrétisation spatiale retenu est donc corrélé à la fréquence max prise en compte, tel que :

$$\Delta x \text{ ou } \Delta y \leq \frac{\lambda_{acoustique}}{4} \text{ tel que } \lambda_{acoustique} = \frac{c}{f} \quad (IV.20)$$

avec la célérité du son dans l'air $c = 343 \text{ m/s}$.

IV.C. Application à une table d'harmonie simplifiée

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'ordre de troncature appliqué sur la décomposition modale de la table d'harmonie nous permettait de réaliser des études dans la bande de fréquence $[0 ; 3000]$ Hz. Or, pour considérer au mieux le riche contenu spectral du piano, il serait intéressant d'étendre la bande de fréquences au delà de cette limitation. Pour des raisons pratiques de puissance de calcul, il nous est pour le moment difficile de repousser cette limite pour la géométrie présentée dans le CHAPITRE III avec une optimisation de notre code de calcul Matlab. De plus, nous souhaitons en fin de chapitre introduire les non-linéarités géométriques de la corde dans la résolution de ce problème. En les traitant comme des seconds membres des équations du mouvement de la corde, nous pourrons alors conserver la notion de modes linéaires, mais nous verrons ceci au moment opportun.

Le choix d'une géométrie simplifiée se justifie puisqu'elle permet de limiter fortement les ordres de troncature de la base modale initiale. Il serait en effet prématuré à ce stade de développement, d'engager des calculs coûteux sans avoir un ordre d'idée de leurs pertinences. Il aurait bien entendu été possible de ne simplifier la géométrie que plus tard lors de la prise en compte des non-linéarités géométriques de la corde. Cependant, réaliser cette simplification dès cette section rend le manuscrit cohérent dans sa démarche et en termes de comparaison vis à vis des résultats.

Il en résulte que le principe présenté dans la suite de ce manuscrit s'applique à tout type de structures couplées comme réalisé par Laulagnet [Laul09] qui propose de modéliser une poutre encastrée impactant une plaque.

La géométrie retenue est celle présentée dans notre article [TrEL16], illustrée en Figure IV-5 et constituée de :

- Une plaque en épicéa simplement supportée rectangulaire avec une orthotropie dite spéciale,
- 11 raidisseurs orientés dans la direction perpendiculaire aux fibres du bois également en épicéa. Leurs dimensions sont comparables aux barres de renforts,
- 1 raidisseur en épicéa, assimilable au chevalet des médium-aigus, orientée dans la direction des fibres.

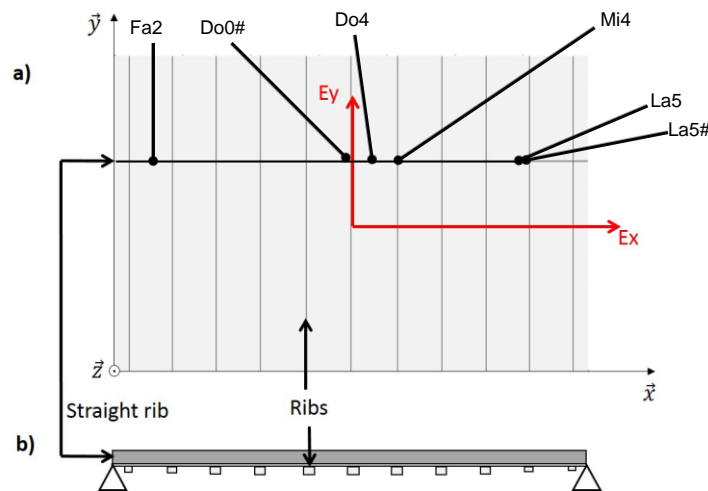


Figure IV-5 : Table d'harmonie simplifiée composée d'une plaque rectangulaire, 11 barres de renforts et 1 chevalet continu, le tout fait en épicéa. Extrait de [TrEL16]. Les positions où seront couplées les cordes sont ajoutées par anticipation vis à vis de la suite de ce manuscrit.

Cette géométrie simplifiée nous permet de pouvoir garantir une convergence jusqu'à 5kHz pour un ordre de troncature réduit à $(P, Q) = (43, 32)$.

IV.C.1. Plan de cordes et effort excitateur

Encore plus que les caractéristiques intrinsèques de la table d'harmonie, la mise en données des cordes joue en rôle capital dans la reproduction du son de l'instrument [Flet64, Wein77, Conk96b, ChAs98, EtCM15]. Ces données ont été mesurées sur la table d'harmonie de Pleyel P131 à notre disposition de façon à utiliser des paramètres réalistes par la suite. On relève quelques caractéristiques principales : les cordes de basses, qui sont filées, sont unitaires tandis que les cordes médium-aigus sont non filées en acier et composées de triplets de cordes dès le début du chevalet médium-aigus. A l'identique des études précédemment menées au CHAPITRE III, nous ne nous intéressons qu'aux notes placées sur le chevalet des médium-aigus et plus précisément de la 32^{ème} à la 76^{ème} note.

Conformément à ce qui a été évoqué en début de chapitre, le triplet ne sera pas pris en compte au profit d'une seule et unique corde pour chaque note. Pour chacune d'entre-elles, le diamètre et la longueur morte ont été mesurés sur l'ensemble du plan. Concernant les longueurs vibrantes, la situation est plus délicate. En raison du montage, du cadre et des dimensions qui deviennent importantes, une mesure exhaustive des longueurs vibrantes devient fastidieuse et imprécise. Pour simplifier, ces longueurs sont échantillonnées, en plusieurs endroits répartis sur le chevalet, puis interpolées en utilisant la méthode de dimensionnement proposée par Conklin [Conk96b]. Cette méthode nécessite de déterminer un « scaling factor » pour faire coïncider les longueurs de cordes mesurées et calculées. Dans notre cas, cela nous amène à un facteur de 1,0535. Les tensions sont quant à elles déduites des mesures précédentes pour correspondre aux fondamentaux de chaque note. A l'inverse, les longueurs mortes sont quant à elles mesurées dans leur intégralité étant donné qu'elles sont plus accessibles que les longueurs vibrantes.

Les positions de couplage (x_e, y_e) dans le repère de la table simplifiée sont déterminées par « identification » au regard des positions sur le modèle que nous avons à disposition. On repère tout d'abord les cordes dont la position de couplage coïncide avec une éventuelle extrémité du chevalet ou intersection chevalet / barre de renfort. Les cordes comprises entre deux positions identifiées sont alors réparties de façon linéaire.

Bien évidemment le son produit dépend grandement de l'effort appliqué par le marteau sur la corde. Il faut avoir conscience que les mécanismes d'interaction entre le marteau et la corde sont eux-mêmes complexes et qu'ils interviennent directement sur le son produit par l'instrument. Nous pensons cependant que l'intégration d'un modèle de marteau interférerait sur l'étude au lieu de lui apporter un réel intérêt. Il ne faut en effet pas perdre de vue que l'objectif est ici de rendre compte de l'interaction cordes / table d'harmonie et d'en comprendre les phénomènes principaux. Apporter cet élément supplémentaire rendrait le modèle trop complexe pour permettre d'identifier les causes d'un changement dans le son produit.

Pour illustrer nos propos, imaginons deux cordes différentes couplées aux mêmes points mais qui produisent cependant toutes deux le même fondamental. La différence de son entre des cordes acier et nylon sur une guitare en est un parfait exemple. Lorsque les deux cordes sont excitées par le même effort, la différence sur le son produit est directement corrélée avec l'interaction cordes / table d'harmonie qui est modifiée puisque le matériau de la corde est différent. En revanche, lorsque le même marteau frappe deux cordes différentes, l'interaction marteau / cordes est modifiée et par conséquent l'effort excitateur aussi puisque leurs tensions ou encore leurs longueurs sont différentes. La différence sur le son produit est alors une résultante de deux interactions pour lesquelles il est difficile d'en identifier la participation.

Pour garder une forme de maîtrise sur ce qui est injecté dans la corde, nous imposons un effort de type porte d'une durée relativement brève de 1 ms. De même, le point d'impact sur la corde est également fixé proportionnellement à environ $2/17^{\text{ème}}$ de la longueur vibrante. Cette valeur réaliste (Conklin [Conk96a] montre que le point d'impact est généralement compris entre $1/7^{\text{ème}}$ et $1/9^{\text{ème}}$ de la longueur vibrante) nous permet d'exciter efficacement une grande quantité de modes de cordes tout en évitant de frapper sur un nœud de vibration.

Le point d'écoute est également un élément important de la structure : un piano rayonnant de façon optimale dans toutes les directions est utopique et la réalité est malheureusement bien différente. On sait empiriquement que ce sont principalement les aigus qui sont impactés par cette position pour des raisons de directivité et d'interférence entre monopoles. Les études concernant les pianos sont malheureusement peu présentes dans ce domaine : Dérogis et Caussé [DéCa95] proposent un modèle basé sur une plaque orthotrope rectangulaire équivalente qui ne s'applique donc qu'en basse fréquence ; à l'opposé l'influence du couvercle d'un piano à queue a été montrée par une série de mesures effectuées par Meyer [Meye09]. Margerit [Marg15] a également effectué des mesures de directivité sur une table d'harmonie bafflée en champ lointain. Il montre que le premier mode à un rayonnement de type monopolaire et qu'en montant en fréquence le rayonnement devient multipolaire (dipôles, quadripôles, etc). La conséquence directe de cette multiplication des lobes de directivité est alors que certaines directions sont très privilégiées par rapport à d'autres. De plus, le design complexe de la table d'harmonie, étudiée dans le chapitre précédent, engendre une dissymétrie des lobes même en basses fréquences ce qui rend l'influence de la position du point d'écoute prépondérante. Il est donc évident que le point d'écoute doit être constant dans toutes les comparaisons qui vont suivre. Celui-ci sera fixé à 1,5m en face de la table pour toutes les simulations.

IV.C.2. Composition du spectre d'écoute

Le spectre de la pression rayonnée est composé de multiples contributions que l'on peut dissocier facilement. Les ondes longitudinales provoquent notamment une double décroissance caractéristique du son produit par le piano [Wein77, ChCJ13, EtCM15]. De par leurs vitesses largement supérieures à celles des ondes transversales, elles se dissipent plus rapidement. Ainsi la queue du son n'est majoritairement composée que d'un seul type d'onde tandis que le début l'est de deux types. La Figure IV-6-a illustre ce phénomène sur la note de Fa2 pour laquelle cette double décroissance est visible⁷.

⁷ Le fichier son de la pression rayonnée par un Fa2 est disponible en cliquant ici où à l'url suivante <http://bentrevisan.wixsite.com/vibrasound/media>.

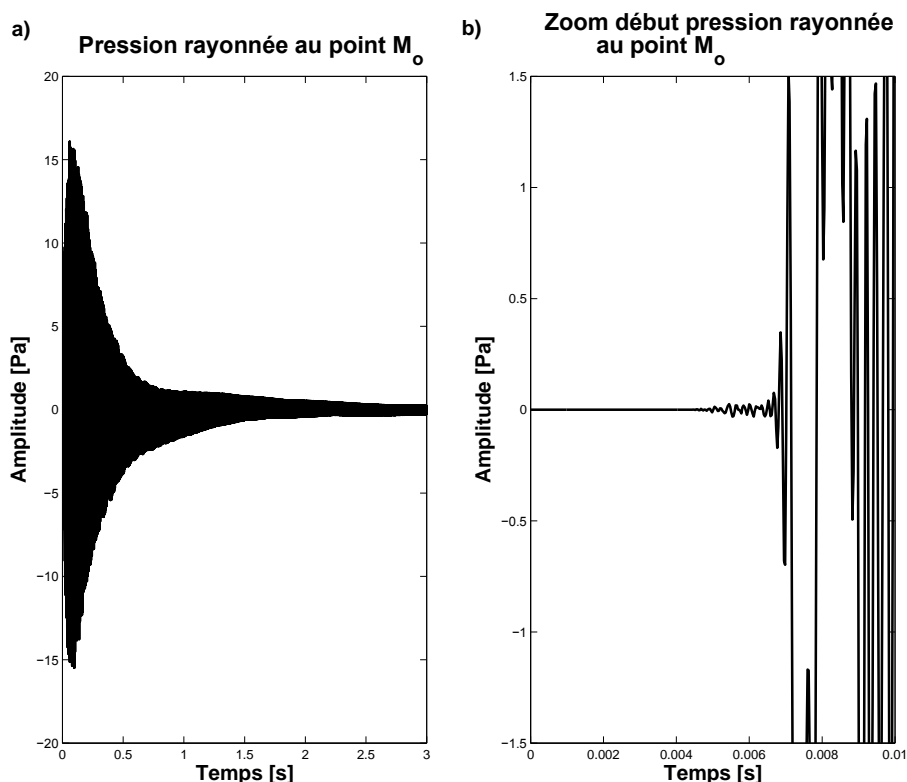


Figure IV-6 : Pression rayonnée au point d'écoute M_0 d'un Fa2 en face de la table d'harmonie à 1,5m. a) sur fenêtre de temps complète de 3s : double décroissance du son ; b) un zoom sur les 10 premières millisecondes montre la présence d'un précurseur dans le son.

En zoomant sur le début de la pression rayonnée Figure IV-6-b, il apparaît un précurseur du son malgré la non prise en compte des non-linéarités géométriques. Ce précurseur se retrouve malgré tout par ce calcul linéaire étant donné qu'une petite quantité d'effort a été injectée dans l'équation longitudinale (voir section IV.B). De ce fait, les ondes longitudinales sont alertées en même temps que les ondes transverses et leur vitesse de propagation étant plus grande, elles arrivent plus rapidement au chevalet.

La présence des ondes longitudinales se ressent bien au-delà d'une simple double décroissance et d'un précurseur puisqu'elles viennent enrichir le timbre de l'instrument. Ainsi un Fa2 n'est pas seulement constitué de son fondamental à 174 Hz et de ses harmoniques mais également de nombreuses autres contributions comme le montre le spectrogramme Figure IV-7-a.

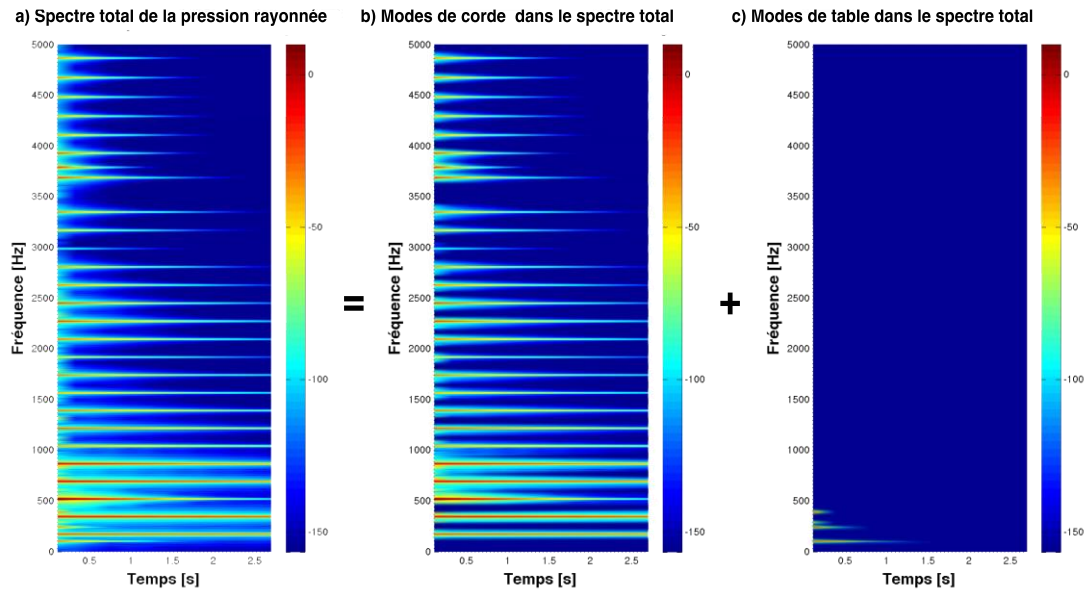


Figure IV-7 : Schéma de principe des différentes contributions présentes pour la pression rayonnée d'un Fa2. a) Spectre total ; b) Contributions des ondes transversales et longitudinales de corde ; c) Contribution des modes de tables d'harmonie.

Il apparaît clairement que toutes les raies présentes dans le spectrogramme ne sont pas toutes dues aux vibrations de la corde. Le schéma de principe⁸ Figure IV-7 montre qu'une partie des raies, essentiellement en basses fréquences, correspond à des modes de la table d'harmonie (Figure IV-7-c) qui répondent dans une moindre mesure par rapport aux modes de cordes (Figure IV-7-b). Comme attendu, la table ne se comporte pas comme un simple radiateur acoustique mais participe aussi dans le timbre même si cet effet a lieu dans de bien moindres proportions. Nous établirons par la suite que l'amortissement même du matériau dont la table d'harmonie est constituée conditionne la présence audible ou non de ces modes.

Bien qu'ils soient d'un ordre de grandeur inférieur aux partiels issus de la corde, on peut constater visuellement que ces modes de table sont, pour un facteur de perte réaliste, relativement comparables aux derniers partiels de corde en termes d'ordre de grandeur. Il apparaît alors que la présence de ces modes de table dans le spectre peut avoir une importance perceptive sur l'attaque.

Ces constatations sont également identifiables sur les spectrogrammes des efforts injectés au chevalet, particulièrement riches en informations. Du fait que ce calcul linéaire omet les échanges directs d'énergies entre les ondes transversales et longitudinales, i.e à cause des non-linéarités géométriques, on pourrait instinctivement penser que chaque effort soit constitué des

⁸ Par schéma de principe nous entendons que la figure présentée n'est pas obtenue en appliquant des filtres passe-bandes ou stop-bandes par exemple mais réalisée par montage. Elle est utilisée dans l'unique but d'illustrer nos propos tout en facilitant la compréhension du corps de texte et non pas de tromper le lecteur à propos de son obtention. Seule la Figure IV-7-a est un vrai résultat numérique.

composantes correspondant à l'onde qu'il relie au chevalet, i.e effort transversal constitué des harmoniques transverses et effort longitudinal composé des harmoniques longitudinales.

La Figure IV–8 montre qu'il existe un transfert d'énergie indirect puisque l'on s'aperçoit que chaque effort est constitué de l'ensemble des composantes des deux ondes. Ceci est dû au couplage de la corde au chevalet qui donne un chemin d'accès à toutes les ondes dans n'importe quel sous-système. De ce fait, l'équation de corde longitudinale continue à être excitée par le moment au chevalet et entretient en partie sa réponse durant une plus longue durée. De plus, les modes de table se retrouvent beaucoup plus dans l'effort longitudinal que dans l'effort transverse, preuve que la table d'harmonie répond plus facilement pour un moment appliqué au chevalet que pour un effort transversal.

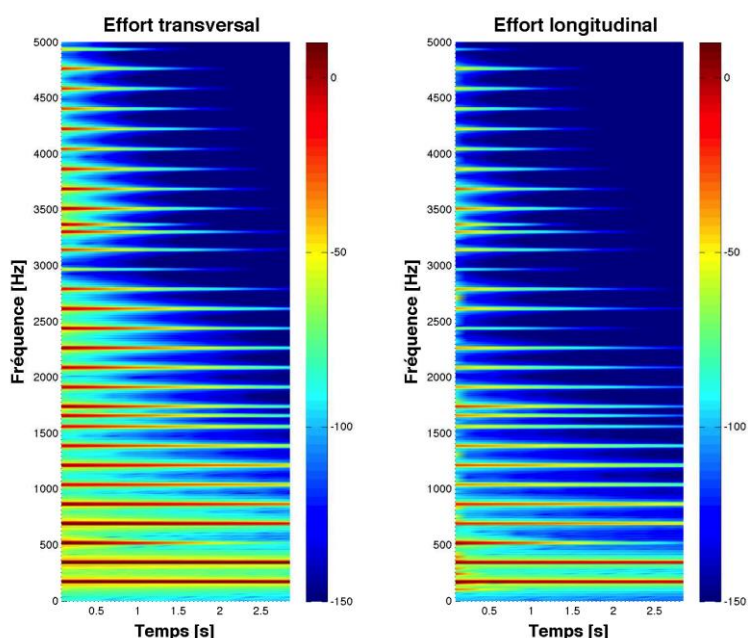


Figure IV–8 : Efforts de contacts transversaux et longitudinaux d'un Fa2 pour un facteur de perte de 2% dans le matériau de la table d'harmonie. Chaque effort est composé des partiels de toutes les ondes présentes dans le système couplé cordes / table.

IV.C.3. Sensibilité à l'amortissement de la table d'harmonie

La conception empirique des instruments de musique répond parfois à des règles qui n'ont pas de justifications scientifiques reconnues. A titre, d'exemple, la sélection des essences de bois est considérée comme primordiale sur une guitare électrique, sans pour autant qu'il n'y ait de preuves scientifiques des conséquences attendues et les arguments avancés se cachent souvent derrière des termes abstraits : l'acajou apporte de la chaleur et un son rond, l'aulne un son cristallin et neutre, etc. D'un autre côté, on voit émerger des instruments atypiques

proposant de réelles nouveautés sous couverts d'arguments plus ou moins bien justifiés. On retrouve par exemple de très nombreuses guitares électriques, au corps fait d'acier, dont le son est clairement différent d'un modèle standard.

Dans un contexte plus maîtrisé, le remplacement des tables d'harmonie dites traditionnelles par des tables composites représente un enjeu majeur étant donné le labeur que constitue la sélection du bois, son séchage, son assemblage pour avoir une « planche » de propriétés constantes, etc. L'utilisation de matériaux composites permettrait alors de s'affranchir de très nombreuses contraintes mais aussi de pouvoir faire éventuellement varier localement les propriétés du matériau de façon à optimiser le son.

Une des possibilités est de reproduire un matériau semblable au bois dans ses propriétés structurelles. Il se pose alors la question de l'amortissement qui est plus difficile à reproduire que le module de Young ou encore de changer de stratégie en adoptant un taux d'amortissement inhabituel. Pour cela faut-il encore déterminer une cible correcte et quantifier l'influence de ce paramètre sur le son perçu. Dans l'étude qui suit, l'amortissement de référence est celui utilisé tout au long de ce manuscrit, soit un facteur de perte de 2% dans un modèle d'amortissement modal. Nous proposons de le modifier de manière extrême en le divisant et en le multipliant par quatre, soit un premier cas avec un facteur de perte égale à 0,5% et un second avec un facteur de perte de 8%.

Dans la mesure où trois contributions distinctes apparaissent dans le spectre d'une note, il est plus intéressant de se concentrer dorénavant sur les spectrogrammes des efforts de contacts puisqu'ils permettent de dissocier les contributions transversales, longitudinales de même que celles des modes de table. Une comparaison des spectrogrammes de ces efforts, pour différents taux d'amortissements, appliqués à la note Fa2 sont présentés Figure IV-9⁹.

⁹ Les fichiers sons des pressions rayonnées dans ces trois cas sont disponibles en cliquant ici ou à l'url suivante <http://bentrevisan.wixsite.com/vibrasound/media>.

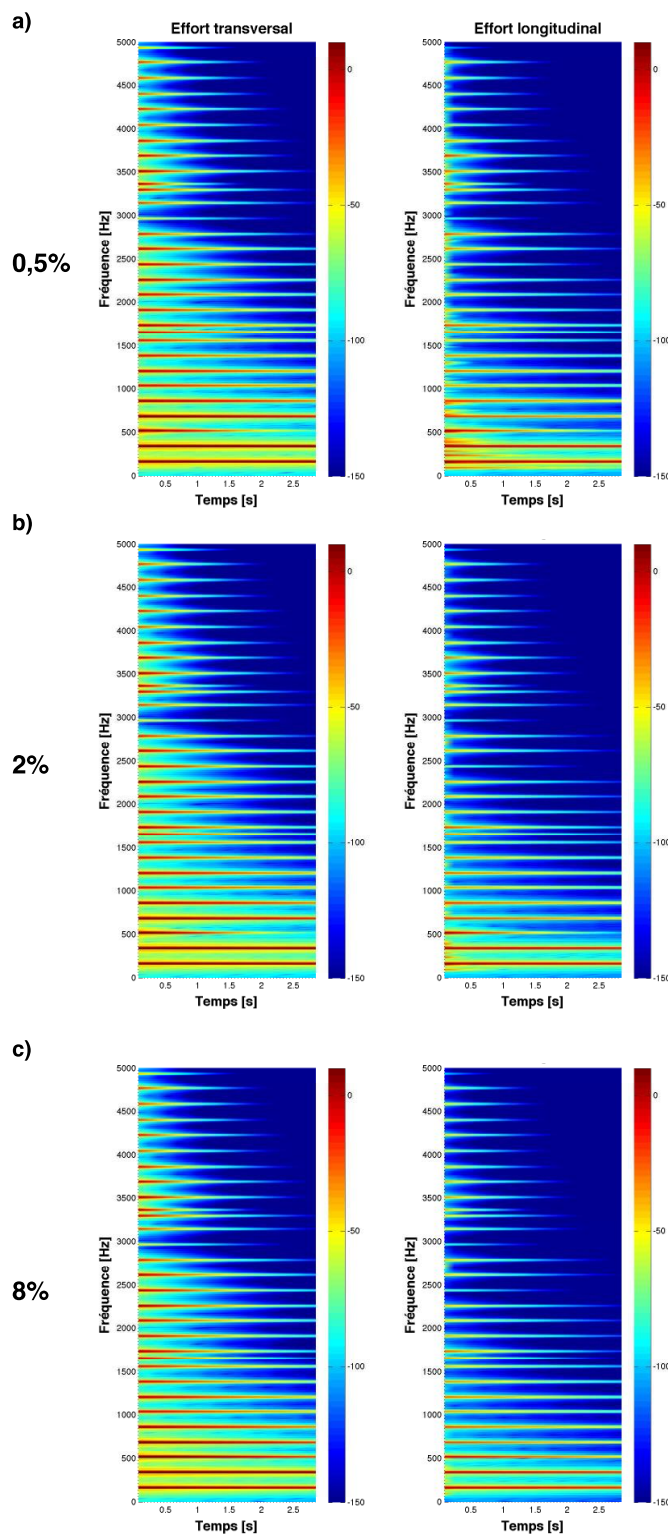


Figure IV-9 : Efforts de contacts transversaux et longitudinaux d'un Fa2 pour différents facteurs de perte caractérisant le matériau de la table d'harmonie. a) $\eta = 0,5\%$; b) $\eta = 2\%$; c) $\eta = 8\%$.

De manière globale, le taux d'amortissement est corrélé avec la tenue des partiels et évidemment plus les facteurs de perte sont importants, plus le son sera court. Exception faite

du troisième partiel de corde qui déroge à cette règle : sa longueur augmente sensiblement pour un facteur de perte de 8%. Une explication de ce phénomène nécessite de raisonner en systèmes couplés puisque la table d'harmonie et la corde forment un seul et même ensemble. Il faut donc considérer que les fréquences propres du système entier ne correspondent pas exactement à celles de la corde et de la table d'harmonie. Pour ce troisième partiel, il se trouve qu'un mode de corde est proche en fréquence d'un mode de table et que le point de couplage est à proximité d'un ventre de vibration. Lorsque l'amortissement est faible, les deux résonances sont encore séparées comme l'atteste la courbe bleue de la Figure IV-10-a. Or, une augmentation de l'amortissement engendre un décalage des fréquences propres, principalement de la table d'harmonie : lorsque les fréquences se rejoignent (on pourrait également dire s'accordent) il n'y a plus qu'une seule et même fréquence propre et le système entier répond alors de façon très prononcée. La Figure IV-10-a présente les résonances aux alentours du troisième partiel pour les trois taux d'amortissement étudiés dans cette sous-section. Une conséquence directe est la modification du couplage cordes / table et donc une augmentation de l'énergie apportée au troisième partiel qui dure plus longtemps. Pour conclure sur cette hypothèse, la Figure IV-10-b propose une variation lente de l'amortissement et met en évidence que les fréquences s'accordent progressivement à mesure que les taux d'amortissement deviennent élevés.

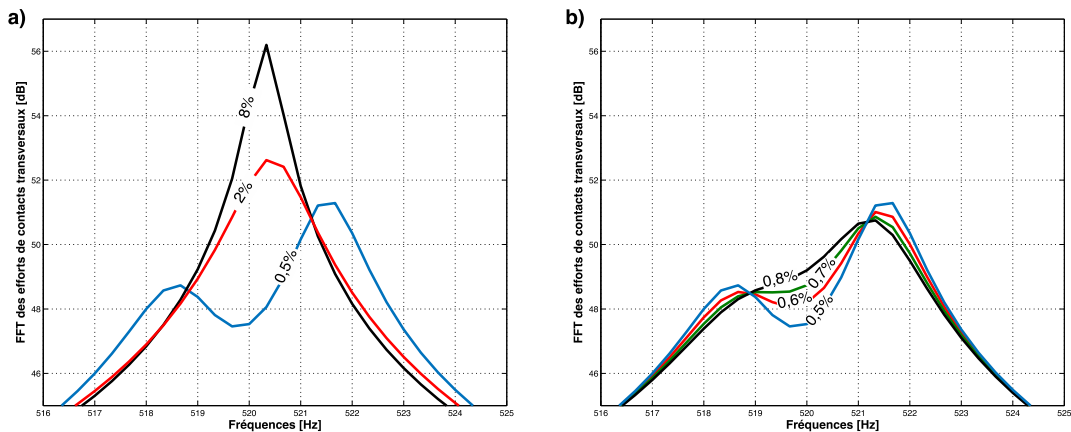


Figure IV-10 : Transformées de Fourier des efforts de contacts transversaux : décalage des fréquences propres du système couplé cordes / table d'harmonie en fonction du taux d'amortissement du matériau constituant la table aux alentours du troisième partiel de la note Fa2 / 33^{ème} note. a) Les trois taux d'amortissement étudiés dans cette sous-section : 0,5/2/8 % ; b) Variation lente du taux d'amortissement en partant d'une cible faible : 0,5/0,6/0,7/0,8 %.

Un second résultat intéressant est que l'effort longitudinal est plus sensible à l'amortissement que son homologue transversal. Une explication réside dans la nature initiale de l'onde générée. En effet, malgré le fait que les deux efforts soient constitués des mêmes composantes, les ondes « porteuses » sont différentes. Si longitudinales, elles se déplacent à une vitesse bien supérieure par rapport aux ondes transversales. Elles seraient alors plus sensibles à la valeur de l'amortissement du fait qu'elles effectuent plus d'aller-retour dans la corde. Du côté de l'effort transversal, un changement d'amortissement est plus discret. On

constate plus une différence de pondération des différents harmoniques qu'une réelle réduction de la durée des partiels.

Abstraction faite de la différence entre les des deux types d'ondes dans la corde, la variation des facteurs de perte de la table influence au premier ordre les partiels dus à la table et seulement au second ordre, les partiels de la corde (se référer au schéma de principe Figure IV-7). D'autre part, on constate que les partiels de table sont visibles essentiellement dans l'effort longitudinal et qu'ils sont quasi-inexistants dans le transversal. Ainsi, pour un amortissement de 8%, la présence de la table d'harmonie ne s'entend plus directement dans le spectre bien que les partiels soient encore légèrement présents (Figure IV-9-c). A l'inverse, pour un amortissement de 0,5%, les partiels produits par la table d'harmonie sont du même ordre de grandeur que ceux de la corde et ne se cantonnent plus seulement à l'attaque de la note comme le montre la Figure IV-9-a. Leur présence devient alors parfaitement audible donnant au son un effet de choc pendant l'attaque.

Les mêmes observations peuvent être faites concernant la note Mi4 (Figure IV-11) à la différence près que les modes de table sont un peu plus visibles dans l'effort transversal que dans le cas du Fa3.

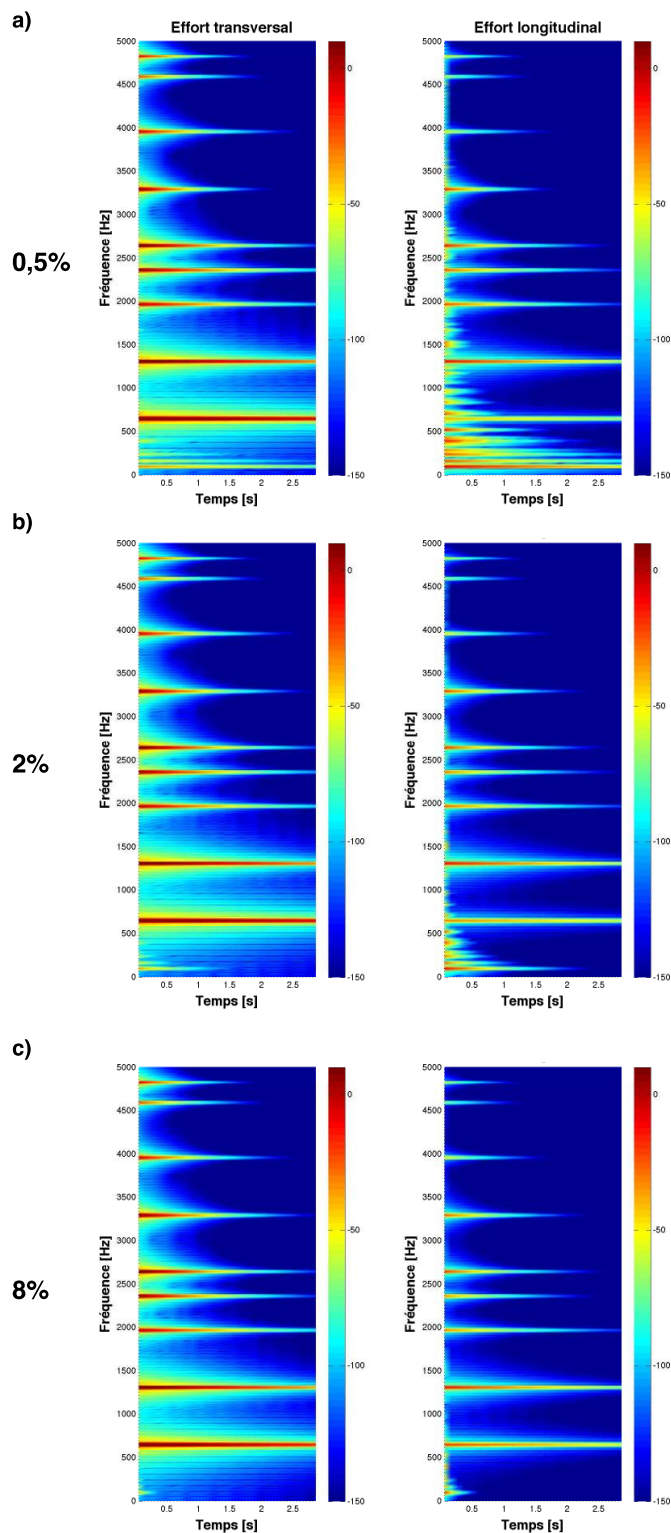


Figure IV-11 : Efforts de contacts transversaux et longitudinaux d'un Mi4 pour différents facteurs de perte caractérisant le matériau de la table d'harmonie. a) $\eta = 0,5\%$; b) $\eta = 2\%$; c) $\eta = 8\%$.

Cette étude montre que la cible d'amortissement est prépondérante et que des taux faibles favorisent l'apparition des partiels de table d'harmonie. On peut penser qu'une présence trop importante des modes de table n'est pas désirée puisque, comme en témoignent les

synthèses sonores, il apparaît un effet de choc comme si on frappait la table. Il convient cependant de rappeler que cet effet participe à l'attaque de la note. Ainsi, une présence limitée et contrôlée peut être recherchée par les facteurs de pianos. Bien entendu, la tendance générale veut que des taux d'amortissements importants dissipent plus d'énergie et réduisent ainsi la longueur de son de même que la puissance perçue.

IV.C.4. Disparitions de partiels par couplage et influence des longueurs mortes

L'étude de sensibilité sur l'amortissement menée dans la section précédente a montré à quel point le couplage entre la corde et la table pouvait conditionner l'amortissement de certains types de partiels. En outre, l'effet du couplage entre les deux systèmes est beaucoup plus difficile à appréhender et son incidence n'est pas la même selon la gamme de la note jouée. Revenons sur le cas de référence avec un facteur de perte de 2% et effectuons un balayage des notes sur le chevalet medium-aigus. Rappelons que dans ce cas de référence, les longueurs mortes ont été mesurées sur une table d'harmonie de Pleyel P131 à notre disposition. Dans un second temps, nous ferons justement varier les longueurs mortes des cordes et nous verrons que la transmission d'énergie entre les deux systèmes est alors impactée de façon significative. Les longueurs mortes seront proportionnelles aux longueurs vibrantes et respecteront la règle suivante $L_V + L_M = 1,05 L_V$ où L_V désigne la longueur vibrante et L_M la longueur morte. Par la suite, nous reviendrons aux spectrogrammes de la pression rayonnée qui offrent une vision plus globale que les efforts de contacts. Le Tableau IV-1 regroupe les ratios longueurs totales sur longueurs vibrantes pour les deux cas de longueurs mortes évoqués.

	Do4	La5	La5#
Longueurs mortes mesurées	1,26	1,576	1,603
Longueurs mortes proportionnelles	1,05		

Tableau IV-1 : Ratios longueurs totales sur longueurs vibrantes dans les deux cas étudiés. Le premier cas correspond à des longueurs mortes mesurées, le second à des longueurs proportionnelles aux longueurs vibrantes.

Concentrons-nous tout d'abord sur le cas de référence qui a longuement été décrit dans la section IV.B. Un premier résultat concerne la disparition de partiel que l'on qualifiera de « disparition par couplage ». On constate pour quelques notes que certains partiels s'éteignent rapidement comme c'est le cas du fondamental de corde de Do4 / 52^{ème} note aux alentours de 523 Hz (Figure IV-12-a). A l'écoute, la note paraît légèrement étouffée comme si un feutre absorbait une partie la vibration de la corde. Cette absence peut donc être préjudiciable d'un point de vue perceptif.

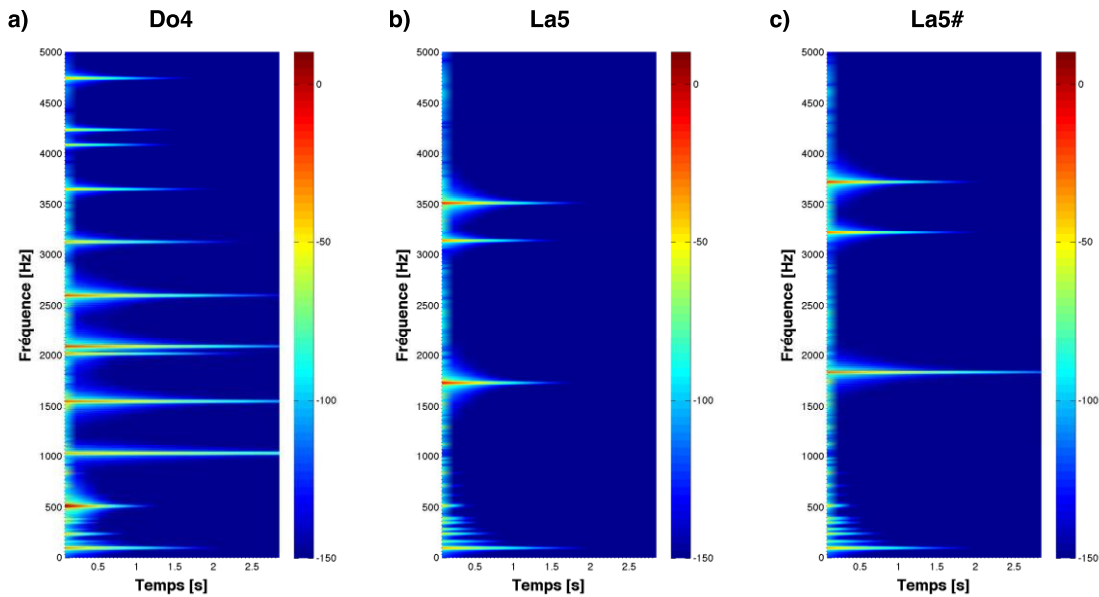


Figure IV–12 : Spectrogramme de la pression rayonnée en face de la table d'harmonie simplifiée à 1,5m pour des longueurs mortes réalistes mesurées sur une table d'harmonie de piano droit Pleyel P131. a) Do4/52^{ème} note ; b) La5/73^{ème} note ; c) La5#/Si5-b/74^{ème} note¹⁰.

Dans le cas d'une note de faible richesse harmonique, cette différence n'est probablement pas anecdotique, d'autant plus lorsqu'il s'agit du fondamental d'une note de haut rang composée de seulement quelques partiels comme c'est les notes 68 et 73 dont la dernière est illustrée Figure IV–12–b. Cet effet du couplage, lorsqu'il apparaît sur une note élevée, vient alors dissiper très rapidement l'énergie donnant une impression de note complètement étouffée. La table d'harmonie ne se comporte alors plus seulement comme un radiateur et modulateur du timbre mais également comme un amortisseur aux yeux de la corde. Fort heureusement, ce phénomène ne devient pas pour autant systématique en montant en fréquence. Comme l'atteste la Figure IV–12–c, celui-ci n'est pas présent pour la 74^{ème} note par exemple.

Malgré tout, on constate à l'écoute que cette note semble également étouffée. Une hypothèse avancée par les facteurs de pianos est que les notes aigües ne rayonnent non pas par la table d'harmonie mais par le cadre, ce qui leurs donnent par ailleurs une consonance cristalline. En prenant cette hypothèse en considération, il n'est alors pas étonnant que la note de La5# ne s'entende que très peu malgré la présence du fondamental dans le spectre d'écoute. Une conclusion hâtive serait de dire que la note de Do4 (Figure IV–12–a) souffre également de ce rayonnement par le cadre. Or, nous avons montré dans la sous-section précédente IV.C.3 que le Mi4 (56^{ème} note soit deux tons plus hauts), ne souffrait pas de cet effet d'étouffement même dans le cas de taux d'amortissement abusifs (Figure IV–11). Il convient donc de distinguer les notes pour lesquelles le son perçu est étouffé car le rayonnement ne s'effectue pas via la table d'harmonie (La5#), et celles pour lesquelles le

¹⁰ Les fichiers sons de ces trois notes dans le cas de longueurs mortes réalistes sont disponibles en cliquant ici où à l'url suivante <http://bentrevisan.wixsite.com/vibrasound/media>.

couplage vient dissiper un partiel donnant également une sensation de note étouffée, notamment lorsqu'il s'agit du fondamentale de la note (Do4).

Bien entendu, la position du point de couplages cordes / table d'harmonie est susceptible de venir modifier le couplage. Ce point de couplage peut varier de deux manières : par la position du couplage sur le chevalet ou bien par la position sur la corde, i.e l'influence de la longueur morte. Portons notre attention sur cette dernière. Jusqu'ici les longueurs mortes avaient été mesurées sur une table d'harmonie de piano droit. Nous allons à présent imposer une longueur totale proportionnelle à la longueur vibrante respectant la règle suivante : $L_V + L_M = 1,05 L_V$. Cette variation n'est pas sans conséquence puisque sur le modèle à notre disposition, la longueur totale des dernières notes est environ 1,5 fois plus grande que la partie vibrante.

Pour les notes que nous venons d'étudier, les conséquences sont sensiblement différentes. Pour la note Do4/52^{ème} note (Figure IV-13-a) l'énergie est légèrement mieux conservée dans la corde et les partiels tiennent donc un peu plus longtemps. En revanche, le fondamental du La5/73^{ème} note est complètement étouffé dans cette nouvelle configuration comme le montre la Figure IV-13-b. Cela étant, la sensation d'étouffement est à l'écoute sensiblement la même que dans le cas de référence.

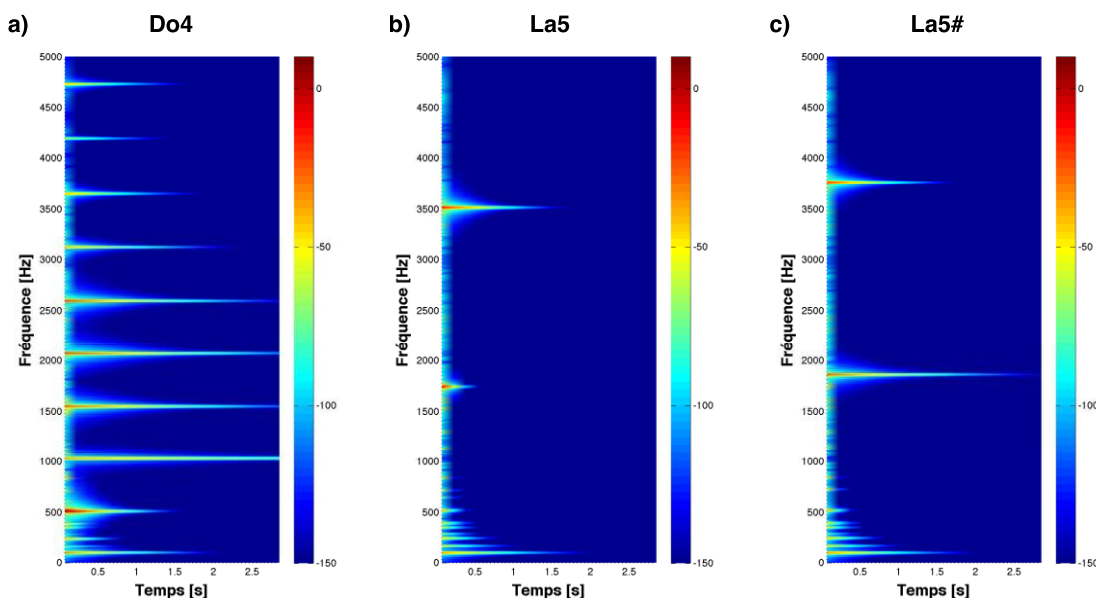


Figure IV-13 : Spectrogramme de la pression rayonnée en face de la table d'harmonie simplifiée à 1,5m pour des longueurs mortes égales à 0,05 fois les longueurs vibrantes. a) Do4/52^{ème} note ; b) La5/73^{ème} note ; c) La5#/Si5-b/74^{ème} note¹¹.

¹¹ Les fichiers sons de ces trois notes dans le cas de longueurs mortes proportionnelles aux longueurs vibrantes sont disponibles en cliquant ici où à l'url suivante <http://bentrevisan.wixsite.com/vibrasound/media>.

La comparaison de cette dernière figure avec la Figure IV-12 révèle également la disparition d'un partiel supplémentaire qui n'est pas un harmonique du fondamental transverse ni du longitudinal. Cette disparition est également présente dans le cas du La5#/74^{ème} note comme le montre la Figure IV-13-c.

A la différence du fondamental du La5/73^{ème} note qui est fortement atténué, ce partiel absent n'est plus du tout présent comme si une contribution avait disparu après modification de la longueur morte. Une hypothèse probable est que ce partiel vienne de la participation de la longueur morte dans la configuration précédente (avec des longueurs mortes réalistes). En effet, la longueur étant plus grande, cette dernière pourrait vibrer suffisamment pour enrichir le spectre de la note jouée.

Se pose alors la question de pertinence de ce partiel dans la composition des spectrogrammes. Une simple observation sur une table d'harmonie cordée montre que les longueurs mortes sont étouffées par des feutres, exception faite des dernières cordes correspondant à l'extrême aigu. De plus, le système de fixation au chevalet qui couple les cordes à la table d'harmonie forme une chicane matérialisée par deux pointes (se référer à la Figure I-4) : il est alors susceptible de limiter le transfert d'énergie dans les longueurs mortes. De notre point de vue, il serait donc curieux que ces longueurs enrichissent autant le timbre de l'instrument.

IV.D. Prise en compte des non-linéarités

La simplification des équations de cordes vers une formulation linéaire facilite la résolution du problème couplé cordes / table d'harmonie. Elle présente l'avantage de mettre en exergue rapidement des phénomènes susceptibles de réduire la « qualité » du son produit, de détecter des « défauts » dans le son résultant de la conception de la table d'harmonie ou encore de mener des études paramétriques rapidement.

Cependant, il existe un biais perceptif non négligeable lorsqu'il s'agit de restitution fidèle du son produit par l'instrument. Cette dernière sous partie propose une alternative originale pour résoudre le problème couplé cordes / table d'harmonie en considérant les non-linéarités comme des efforts extérieurs qui excitent la corde.

IV.D.1. Efforts excitateurs générés par couplage des ondes

On considère une nouvelle fois comme point de départ le problème géométriquement exact de Chabassier [ChCJ13] que nous rappelons ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho S \ddot{u}_c - ES u_{c,xx} + (ES - T_0) \frac{\partial}{\partial x} \frac{u_{c,x}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} = 0 \quad \text{Ondes transverses} \\ \rho S \ddot{v}_c - ES v_{c,xx} + (ES - T_0) \frac{\partial}{\partial x} \frac{(1 + v_{c,x})}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} = 0 \quad \text{Ondes longitudinales} \end{array} \right. \quad (\text{IV.21})$$

où les non-linéarités représentent le couplage entre les ondes transversales et longitudinales.

A partir de ce modèle, nous posons comme hypothèse que les angles pris par la corde restent relativement petits. Ce choix se justifie en observant simplement les débattements sur un instrument en situation de jeu qui restent relativement faibles. Partant de ce postulat, les termes non-linéaires prennent de l'importance non pas parce que les angles sont grands mais parce qu'ils sont en facteur de $(ES - T_0)$. ES étant très grand devant T_0 , on a une contribution importante des termes non-linéaires en facteurs. Le matériau de la corde joue alors un rôle essentiel dans cette proportion de non-linéarités. On peut alors penser qu'une corde en nylon, en supposant qu'elle permette d'atteindre les tensions nécessaires à la note voulue, ne fasse que très peu intervenir ces termes. La guitare est d'ailleurs un parfait exemple d'instrument qui peut être équipé avec différents types de cordes (nylon / acier) émettant un son est clairement différent surtout à l'attaque.

De l'hypothèse énoncée, deux stratégies sont envisageables. Toutes deux considèrent que les non-linéarités sont petites et agissent comme des perturbations sur les équations linéaires présentées dans la section IV.B de ce chapitre. La première stratégie est analogue à celle suivie dans cette même section où les termes non-linéaires étaient soumis à un développement de Taylor à l'ordre 0, ce qui avait finalement conduit à des équations de corde linéaire. Le terme non-linéaire identifié dans l'équation transversale peut être développé tel que :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{u_{c,x}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} = \frac{u_{c,xx}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} - u_{c,x} \frac{v_{c,xx} + v_{c,x} v_{c,xx} + u_{c,x} u_{c,xx}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}^3} \quad (\text{IV.22})$$

Contrairement à ce qui a été réalisé dans la partie consacrée au modèle linéaire, on applique un développement de Taylor à l'ordre 1 de la racine carrée sur le premier terme du membre de gauche de l'équation (IV.22) :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{u_{c,x}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} = u_{c,xx} - u_{c,xx} v_{c,x} - u_{c,x} \frac{v_{c,xx} + v_{c,x} v_{c,xx} + u_{c,x} u_{c,xx}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}^3} \quad (\text{IV.23})$$

Ainsi en réinjectant cette forme dans l'équation des ondes transversales, on fait apparaître une équation d'onde linéaire classique comme dans la section IV.B, enrichie d'un second membre noté $F_T(x, t)$, correspondant aux non-linéarités :

$$\rho S \ddot{u}_c - T_0 u_{c,xx} = F_T(x, t)$$

avec $F_T(x, t) = (ES - T_0) \left[u_{c,xx} v_{c,x} + u_{c,x} \frac{v_{c,xx} + v_{c,x} v_{c,xx} + u_{c,x} u_{c,xx}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}^3} \right]$ (IV.24)

L'équation d'onde longitudinale est plus facile à traiter puisqu'elle fait directement apparaître une équation de poutre en traction / compression à laquelle participe un terme non-linéaire. On reformule ce terme en appliquant la dérivée spatiale tel que :

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{1 + v_{c,x}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} = \frac{v_{c,xx}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} - (1 + v_{c,x}) \frac{v_{c,xx} + v_{c,x} v_{c,xx} + u_{c,x} u_{c,xx}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}^3} \quad (\text{IV.25})$$

Il vient alors l'équation d'onde longitudinale où les non-linéarités, notée $F_L(x, t)$, apparaissent au second membre de l'équation :

$$\rho S \ddot{v}_c - ES v_{c,xx} = F_L(x, t)$$

avec $F_L(x, t) = -(ES - T_0) \left[\frac{v_{c,xx}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} - (1 + v_{c,x}) \frac{v_{c,xx} + v_{c,x} v_{c,xx} + u_{c,x} u_{c,xx}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}^3} \right]$ (IV.26)

Il convient de mentionner que le développement de Taylor effectué pour parvenir à l'équation (IV.24) rend la formulation non-conservative, i.e qu'une partie du flux d'énergie est perdue dans la décomposition en série de Taylor. Le théorème de Ta-Tsien [TaYD94] montre que cette non-conservation du flux d'énergie peut engendrer une explosion de la norme en temps fini et donc une divergence du calcul. Nous verrons par la suite que cette façon de faire fonctionne malgré tout mais il convient de garder à l'esprit que ces approximations ne sont probablement acceptables qu'en présence de petites non-linéarités comme dans le cas présent.

Le système d'équation (IV.2) est alors remplacé par le suivant qui prend les petites non-linéarités en compte comme des efforts excitateurs :

$$\begin{cases} \rho S \ddot{u}_c - T_0 u_{c,xx} = F_T(x, t) & \text{Ondes transverses} \\ \rho S \ddot{v}_c - ES v_{c,xx} = F_L(x, t) & \text{Ondes longitudinales} \end{cases} \quad (\text{IV.27})$$

La démarche restant la même, les efforts excitateurs du marteau et les efforts de contacts viennent eux aussi enrichir le second membre de l'équation. Le système suivant remplace alors le système (IV.3) :

$$\begin{cases} \rho S \ddot{u}_c - T_0 u_{c,xx} = F_{mart}(t) \cos(\theta_0) \delta(x - x_0) - \lambda_T(t) \delta(x - L_V) + F_T(x, t) & \text{Ondes transverses} \\ \rho S \ddot{v}_c - ES v_{c,xx} = F_{mart}(t) \sin(\theta_0) \delta(x - x_0) - \lambda_L(t) \delta(x - L_V) + F_L(x, t) & \text{Ondes longitudinales} \end{cases} \quad (\text{IV.28})$$

Comme déjà mentionné, nous considérons les termes non-linéaires comme des perturbations aux yeux des équations linéaires dont il était question dans les sections précédentes. Ainsi, les décompositions modales équation (IV.4) sont toujours d'actualité et il en découle, après projection dans la base des modes de corde encastrée, le système matriciel suivant :

$$\begin{cases} \bar{m}_T \ddot{\mathbf{U}}(t) + \bar{k}_T \mathbf{U}(t) = F_{mart}(t) \cos(\theta_0) \boldsymbol{\psi}^{(1)}(x_0) - \lambda_T(t) \boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) + \mathbf{F}_T(t) & \text{Ondes transverses} \\ \bar{m}_L \ddot{\mathbf{V}}(t) + \bar{k}_L \mathbf{V}(t) = F_{mart}(t) \sin(\theta_0) \boldsymbol{\psi}^{(2)}(x_0) - \lambda_L(t) \boldsymbol{\psi}^{(2)}(L_V) + \mathbf{F}_L(t) & \text{Ondes longitudinales} \end{cases} \quad (\text{IV.29})$$

où les matrices de masses et de raideurs restent inchangées et définies à l'équation (IV.6). Cette formulation est identique au système (IV.5) pour lequel les efforts dus aux non-linéarités sont ajoutés aux seconds membres sous la forme de vecteurs généralisés définis par :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_T(t) &= \begin{pmatrix} \vdots \\ \int_{x=0}^{L_C} F_T(x, t) \sin\left(\frac{m\pi}{L_C} x\right) dx \\ \vdots \end{pmatrix} \\ \mathbf{F}_L(t) &= \begin{pmatrix} \vdots \\ \int_{x=0}^{L_C} F_L(x, t) \sin\left(\frac{n\pi}{L_C} x\right) dx \\ \vdots \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{IV.30})$$

Il est évident que ces efforts généralisés devront par la suite être calculés numériquement à chaque pas de temps, ce qui alourdit considérablement les temps de calcul, d'autant plus pour les premières notes où le nombre de partiels transverses est très important. Cette formulation reste néanmoins intéressante puisque le traitement des petites non-linéarités se fait sans diminuer le pas de temps entre les calculs linéaires et non-linéaires.

La résolution du problème non-linéaire est réalisée via le schéma aux différences finies centrées explicitées à l'équation (IV.16). Tout comme les équations de cordes, le système complet de 5 équations à 5 inconnues est enrichi des seconds membres $\mathbf{F}_T(t)$ et $\mathbf{F}_L(t)$ représentant les perturbations issues des non-linéarités. On a alors le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\bar{m}_T}{2\Delta t} + \frac{\bar{c}_T}{2\Delta t} \right] \mathbf{U}^{i+1} + \left[\bar{k}_T - 2 \frac{\bar{m}_T}{\Delta t^2} \right] \mathbf{U}^i + \left[\frac{\bar{m}_T}{2\Delta t} - \frac{\bar{c}_T}{2\Delta t} \right] \mathbf{U}^{i-1} = F_{mart}^i \cos(\theta_0) \boldsymbol{\psi}^{(1)}(x_0) - \lambda_T^i \boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) + \mathbf{F}_T(t) \\ \left[\frac{\bar{m}_L}{2\Delta t} + \frac{\bar{c}_L}{2\Delta t} \right] \mathbf{V}^{i+1} + \left[\bar{k}_L - 2 \frac{\bar{m}_L}{\Delta t^2} \right] \mathbf{V}^i + \left[\frac{\bar{m}_L}{2\Delta t} - \frac{\bar{c}_L}{2\Delta t} \right] \mathbf{V}^{i-1} = F_{mart}^i \sin(\theta_0) \boldsymbol{\psi}^{(2)}(x_0) - \lambda_L^i \boldsymbol{\psi}^{(2)}(L_V) + \mathbf{F}_L(t) \\ \left[\frac{\bar{M}_s}{2\Delta t} + \frac{\bar{C}_{TH}}{2\Delta t} \right] \mathbf{b}^{i+1} + \left[\bar{K}_s - 2 \frac{\bar{M}_s}{\Delta t^2} \right] \mathbf{b}^i + \left[\frac{\bar{M}_s}{2\Delta t} - \frac{\bar{C}_{TH}}{2\Delta t} \right] \mathbf{b}^{i-1} = \lambda_T^i {}^t \bar{\mathbf{T}} \boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) - d \lambda_L^i {}^t \bar{\mathbf{T}} \boldsymbol{\phi}_{,y}(x_e, y_e) \\ {}^t \boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) \mathbf{U}^{i+1} = {}^t \boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) \bar{\mathbf{T}} \mathbf{b}^{i+1} \\ {}^t \boldsymbol{\psi}^{(2)}(L_V) \mathbf{V}^{i+1} = -d {}^t \boldsymbol{\phi}_{,y}(x_e, y_e) \bar{\mathbf{T}} \mathbf{b}^{i+1} \end{array} \right. \quad (\text{IV.31})$$

Pareillement à la section IV.B, la résolution de ce système n'est pas présentée dans le corps de ce manuscrit. L'ANNEXE H développe le calcul des expressions compactes permettant de calculer les efforts de contact à l'instant i et les vecteurs amplitudes modales à l'instant futur $i + 1$. Les termes non-linéaires sont symbolisés en rouge pour plus de clarté. En résumé, à chaque itération on calcule :

- Les non-linéarités le long de la corde ainsi que les vecteurs généralisés associés à l'instant i connaissant : les vecteurs amplitudes modales aux instants i et $i - 1$; l'effort du marteau en i ,
- Les efforts de contact à l'instant i connaissant : les vecteurs amplitudes modales aux instants i et $i - 1$; les vecteurs généralisés des non-linéarités à l'instant i ; l'effort du marteau en i ,
- Les vecteurs amplitudes modales à l'instant $i + 1$ connaissant : les vecteurs amplitudes modales aux instants i et $i - 1$; les vecteurs généralisés des non-linéarités à l'instant i ; les efforts de contact à l'instant i ; l'effort du marteau en i .

Étant donné que l'onde longitudinale est entre 10 à 20 fois plus rapide que la transversale [Chab12], une stratégie alternative consiste à tirer partie de cet écart de vitesse afin d'introduire des simplifications adéquates. Quelques articles appliquent ce principe au cas

des cordes planaires [LeFl84, Nara68, Opli60] en se basant sur le fait que l'onde rapide, i.e l'onde longitudinale, est quasi-statique par rapport à l'onde lente, i.e, l'onde transversale.

Chabassier [Chab12] applique ce principe au modèle de Bilbao [Bilb05] basé lui aussi sur un développement en série de Taylor. En négligeant l'effet inertiel de l'onde longitudinale, i.e le terme en facteur de \dot{v}_c , elle détermine une expression de l'angle pris par la corde $v_{c,x}$ ce qui lui permet de proposer une équation de l'onde transversale dont la vitesse de propagation est variable.

Inspiré par cette démarche, appliquons ce principe au modèle MGE (équation (IV.21)). L'objectif est de déterminer non pas une expression de $v_{c,x}$ mais une expression de la racine carrée dans le terme non-linéaire transverse puisque cette dernière nous a contraint à réaliser un développement en série de Taylor. On pose alors que l'effet inertiel de l'onde longitudinale est négligeable, soit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[c_L^2 v_{c,x} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{(1 + v_{c,x})}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} \right] = 0 \quad (IV.32)$$

avec la célérité des ondes longitudinales $c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ et celle des ondes transversales $c_T = \sqrt{\frac{T_0}{\rho S}}$. On peut alors intégrer cette équation de 0 à L_C la longueur de la corde, soit :

$$c_L^2 v_{c,x} - (c_L^2 - c_T^2) \frac{(1 + v_{c,x})}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} = cste \quad (IV.33)$$

En l'intégrant une nouvelle fois et en appliquant les conditions aux limites à chaque extrémité de la corde encastree, on trouve alors une expression de la constante qui peut être vue comme l'énergie moyenne apportée à l'onde longitudinale par le couplage entre les deux types d'ondes :

$$cste = -\frac{c_L^2 - c_T^2}{L_C} \int_{x=0}^{L_C} \frac{(1 + v_{c,x})}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} dx \quad (IV.34)$$

Il vient donc en substituant (IV.34) dans (IV.33) une expression de la racine carrée :

$$\frac{1}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} = \left[\frac{1}{1 - \delta^2} - \frac{1}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} \right] v_{c,x} + \frac{1 - \delta^2}{L_C} \int_{x=0}^{L_C} \frac{(1 + v_{c,x})}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} dx \quad (\text{IV.35})$$

tel que $\delta = \frac{c_T}{c_L} \approx 5E^{-3}$ soit $\delta^2 \ll 1$. En prenant la limite formelle on aboutit à l'équation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} = \left[1 - \frac{1}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} \right] v_{c,x} + \frac{1}{L_C} \int_{x=0}^{L_C} \frac{(1 + v_{c,x})}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} dx \quad (\text{IV.36})$$

En réinjectant cette expression dans l'équation d'onde transversale du modèle MGE, il vient alors l'expression suivante où, comme dans la première stratégie utilisée, les non-linéarités sont mises aux seconds membres :

$$\begin{cases} S \ddot{u}_c - \left[\frac{T_0}{L_C} \int_{x=0}^{L_C} \frac{(1 + v_{c,x})}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} dx + ES \left(1 - \frac{1}{L_C} \int_{x=0}^{L_C} \frac{(1 + v_{c,x})}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} dx \right) \right] u_{c,xx} = F_T(x, t) \\ \rho S \ddot{v}_c - ES v_{c,xx} = F_L(x, t) \end{cases} \quad (\text{IV.37})$$

avec $F_L(x, t)$ défini par l'équation (IV.26) et $F_T(x, t)$ défini par :

$$F_T(x, t) = -(ES - T_0) \left[\left[1 - \frac{1}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} \right] u_{c,xx} v_{c,x} - u_{c,x} \frac{v_{c,xx} + v_{c,x} v_{c,xx} + u_{c,x} u_{c,xx}}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}^3} \right] \quad (\text{IV.38})$$

Une interprétation physique et simple du terme en facteur de $u_{c,xx}$ est la présence d'une tension uniforme variable au cours du temps. En d'autres termes, le couplage entre les deux types d'ondes dans la corde vient modifier la tension de la corde, tel que :

$$T(t) = \frac{T_0}{L_C} \int_{x=0}^{L_C} \frac{(1 + v_{c,x})}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} dx + ES \left(1 - \frac{1}{L_C} \int_{x=0}^{L_C} \frac{(1 + v_{c,x})}{\sqrt{u_{c,x}^2 + (1 + v_{c,x})^2}} dx \right) \quad (\text{IV.39})$$

Lorsque les vibrations s'estompent à la fin de la note, on se rend bien compte que la tension tend alors vers la tension statique T_0 . Cette expression de la tension montre également que le matériau de la corde accentue la variation de tension de façon d'autant plus importante

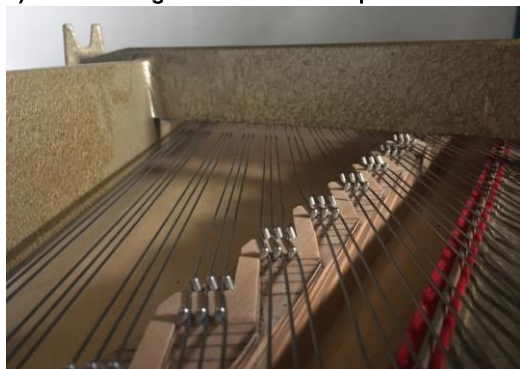
que son module de Young est élevé. Ce constat corrobore l'idée énoncée relative à l'implication du matériau dans l'apparition ou non des non-linéarités et la comparaison acier/nylon évoquée précédemment. En raisonnant de façon pragmatique, on peut dire que durant l'attaque, les angles pris par la corde sont les plus importants, si bien qu'au début de la note, la tension varie grandement si la note est excitée de façon suffisamment intense par le pianiste.

Même si cette stratégie alternative présente l'avantage d'avoir une interprétation physique directe sur la tension de la note, nous la mettrons de côté dans la suite de ce manuscrit, la laissant au stade de « possibilité ». Nous utiliserons ainsi la première méthode basée sur un développement limité de Taylor en considérant l'ensemble des termes non-linéaires comme des efforts excitateurs.

IV.D.2. Enrichissements des aigus

Comme les termes non-linéaires sont nourris par les interactions entre les ondes de compression et de flexion animant la corde, leur présence est d'autant plus marquée pour les notes dont le contenu spectral est riche. Il est alors évident que les notes basses sont toutes indiquées pour mettre en évidence l'influence de ces termes alors qu'elle serait fortement limitée voir inexistante sur les notes aigües. De ce fait, nous laisserons dorénavant à l'écart les notes du chevalet médium-aigus pour nous concentrer exclusivement sur la note de Do0# dont le fondamental est à 38,9 Hz. A la différence des cordes étudiées jusqu'ici, composées de cordes pleines en triplets (Figure IV-14-a), le Do0# est produit par une seule corde qui plus est filée (Figure IV-14-b). Le filage de la corde pose donc problème puisque les comportements ainsi que les matériaux de l'âme et de la gaine sont différents.

a) Cordes d'aigus non filées en triplet



b) Cordes de basses filées

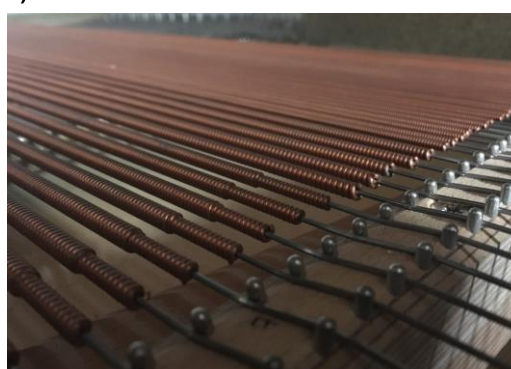


Figure IV-14 : Photographies des deux configurations de cordes présentes sur la table d'harmonie Pleyel P131. a) Triplets de cordes non filées présentes sur l'ensemble du chevalet médium-aigus ; b) Mono-cordes de basses non filées.

Le filage est une caractéristique inhérente aux cordes de basse. Cette particularité permet d'alourdir la corde afin d'atteindre les notes les plus graves, tout en limitant l'inharmonicité [Chab12]. En outre, la technique de filage permet de laisser les spires légèrement espacées de façon à augmenter la masse linéique de la corde sans la raidir outre mesure [Chab12, Conk96b]. D'après les mêmes auteurs, « une corde massive en acier de même masse linéique se comporterait comme une poutre et l'inharmonicité serait très désagréable ». Enfin, la gaine n'allant pas jusqu'aux extrémités, les conditions aux limites restent les mêmes que pour une corde non filée.

Il est alors nécessaire de déterminer les paramètres équivalents afin d'alimenter le modèle qui considère une corde homogène et uniforme. Chabassier [Chab12] passe en revue différentes stratégies permettant de retrouver ces paramètres équivalents. Celle qui est retenue se base sur une remise en cause des mesures de diamètres. Dans cette méthode, la connaissance de la fréquence de l'onde longitudinale et de la longueur vibrante permet de calculer successivement la masse volumique équivalente, le diamètre équivalent ainsi que la tension de la corde. Nous reprendrons par la suite ces paramètres équivalents déterminés pour la corde de Do0#. Les connaissant, nous nous intéressons à l'influence des termes non-linéaires sur cette note. Pour chaque simulation, l'effort injecté dans la corde est une porte d'une durée de 1ms et d'amplitude 80 Newton de manière à solliciter efficacement les aigus. Cette table d'harmonie simplifiée ne disposant pas de chevalet des basses, le positionnement du point de couplage cordes / table est ici imposé de façon arbitraire au milieu de la table dans la direction x (voir Figure IV-5). Le pas de temps est le même dans les deux cas¹².

Le son produit par le modèle linéaire est insuffisant en terme de réalisme et de détail dans le son. L'attaque particulière des notes basses n'est évidemment pas présente, puisque le calcul est linéaire, mais l'équilibre basses/medium/aigus est acceptable du point de vue perceptif comme le montre le spectrogramme de la pression rayonnée par cette note Figure IV-15-a. En incluant les non-linéarités, on retrouve bien une attaque clairement différente dans le son perçu. A l'inverse du calcul linéaire, le son semble assurément trop riche en aigus et on entend le meuble de manière flagrante. Bien évidemment ce défaut peut être imputé directement à l'effort injecté qui n'est pas réaliste mais ce n'est cependant pas le but recherché ici. Un résultat en soit est l'enrichissement des aigus et, plus timidement, un appauvrissement des basses fréquences par l'action des non-linéarités, visibles sur le spectrogramme de la pression rayonnée Figure IV-15-b.

¹² Les fichiers sons de ces deux pressions rayonnées sont disponibles en cliquant ici où à l'url suivante <http://bentrevisan.wixsite.com/vibrasound/media>.

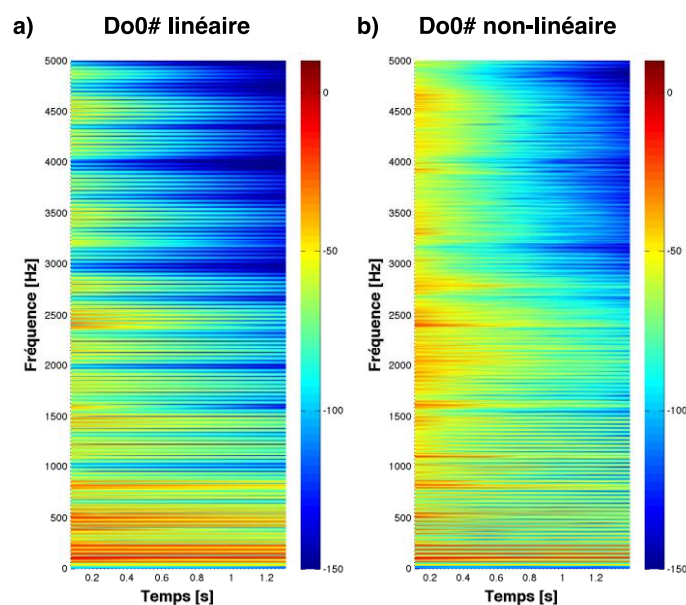


Figure IV–15 : Comparaison des spectrogrammes de pression rayonnée en face de la table à 1,5m par une note de Do0#. a) Calcul linéaire ; b) Calcul intégrant les non-linéarités géométriques de la corde.

Tel que nous les avons considérées, les non-linéarités sont des efforts qui excitent la corde et dont l'importance décroît à mesure que l'amplitude des ondes diminue. Ainsi, une interprétation physique de l'enrichissement des aigus est l'injection dans la corde sur des durées très courtes, d'efforts ponctuels (ou quasi-ponctuels) par le couplage entre les ondes transversales et longitudinales. Cette hypothèse se confirme en analysant la répartition spatiale de ces efforts le long de la corde à chaque pas de temps. On montre alors que les non-linéarités génèrent deux efforts qui se déplacent à la même vitesse le long de la corde. A l'instant où le marteau frappe la corde, les efforts induits par les non-linéarités sont localisés en point d'impact du marteau (Figure IV–16). Puis ces efforts se déplacent tels deux fronts d'ondes dans des directions opposées (Figure IV–17). Lorsque l'un d'eux rencontre un obstacle, comme un point d'attache de la corde (Figure IV–18) où encore le chevalet (Figure IV–19), on constate que ces efforts prennent de l'amplitude de façon significative, avant de se re-déplacer dans la direction opposée. Il en résulte alors des interférences positives lorsque les deux fronts se rejoignent (Figure IV–20). De plus, les efforts de traction / compression sont d'un ordre de grandeur bien plus important que les transversaux et ni l'un ni l'autre ne pénètre dans la longueur morte de la corde¹³.

¹³ Pour voir l'évolution des non-linéarités dans la corde, une vidéo est disponible en cliquant ici où à l'url suivante <http://bentrevisan.wixsite.com/vibrasound/media>.

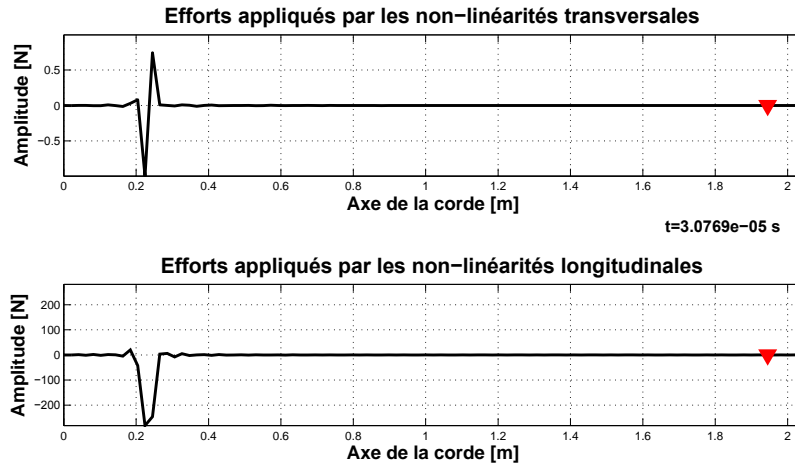


Figure IV-16 : Efforts transversaux en haut et longitudinaux en bas dus aux non-linéarités géométriques dans la corde : début du contact marteau / corde.

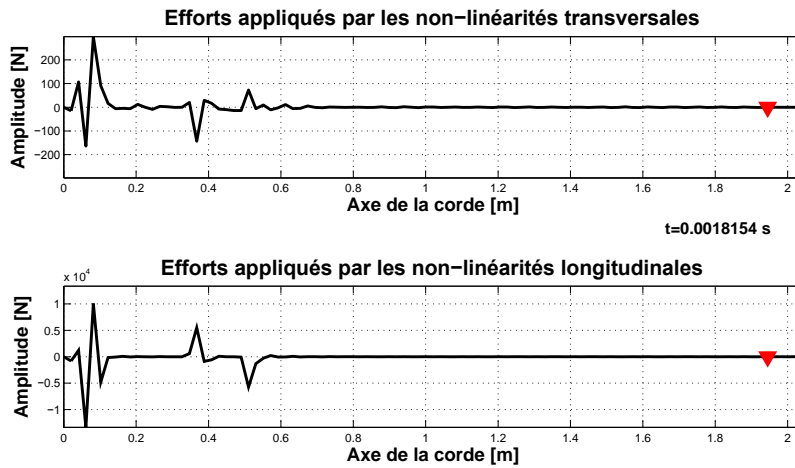


Figure IV-17 : Efforts transversaux en haut et longitudinaux en bas dus aux non-linéarités géométriques dans la corde : déplacements tel des fronts d'ondes dans deux directions opposées.

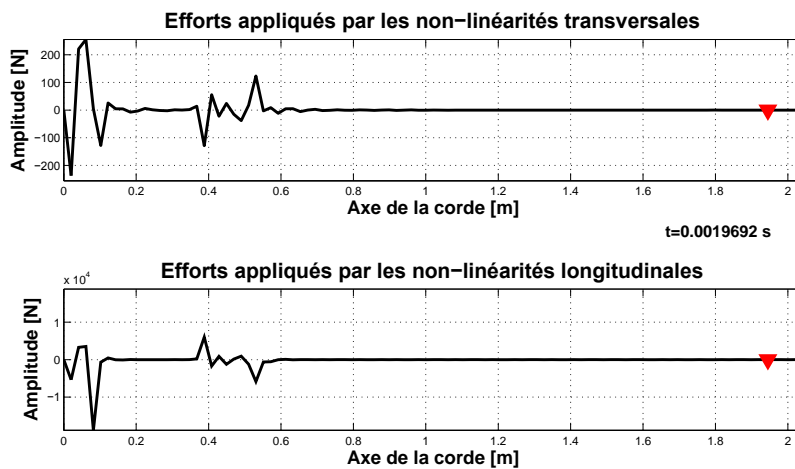


Figure IV-18 : Efforts transversaux en haut et longitudinaux en bas dus aux non-linéarités géométriques dans la corde : instant juste après le contact avec le point d'attache de la corde en $x = 0$, les amplitudes prennent de l'importance.

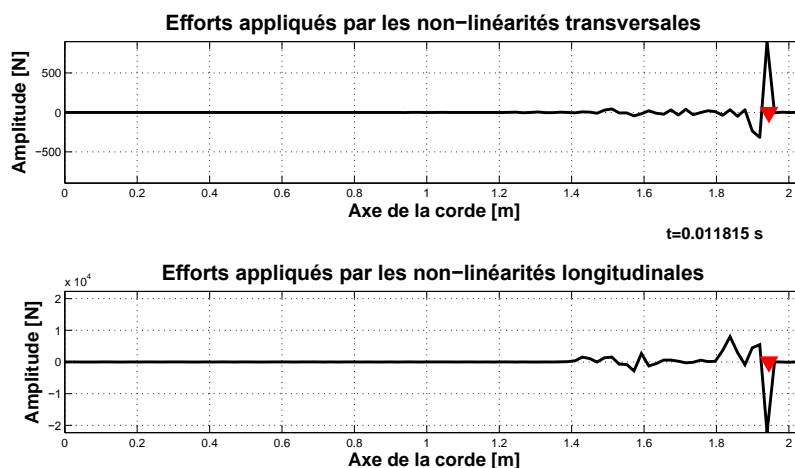


Figure IV-19 : Efforts transversaux en haut et longitudinaux en bas dus aux non-linéarités géométriques dans la corde : instant du contact avec le chevalet de la corde en $x = L_V$, les amplitudes sont maximales.

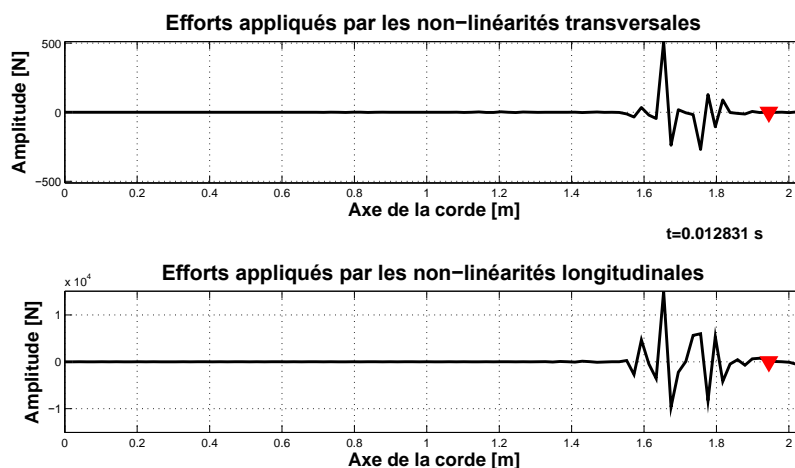


Figure IV-20 : Efforts transversaux en haut et longitudinaux en bas dus aux non-linéarités géométriques dans la corde : les deux fronts d'efforts se déplaçant dans des directions opposées se rejoignent, des interférences globalement positives se produisent donnant de l'amplitude aux efforts.

La répartition spatiale de ces efforts est également très intéressante puisqu'elle corrobore notre hypothèse. On constate en effet que les efforts induits par les non-linéarités sont spatialement locaux, qu'ils se déplacent et qu'ils sont courts, assimilables à des injections au marteau de choc sur la corde.

Au delà de l'aspect réaliste qui dépend fortement de l'effort injecté dans la corde par le marteau, cette comparaison entre les modèles linéaires et non-linéaires démontre l'importance de ces termes sur le contenu spectral des notes jouées. En outre, cette vision en efforts produits par les non-linéarités explique comment il est possible d'alerter des fréquences hautes, allant jusqu'à plus de 10 kHz, avec des temps de contact marteau / corde relativement longs.

Conclusion

La résolution des équations couplées cordes / table d'harmonie dans le domaine temporel nous a permis d'adopter un nouveau point de vue pour apporter des éléments de réponses aux questions d'ordre musical. L'intérêt de ce calcul réside dans la possibilité d'estimer l'influence de modifications structurelles sur le son perçu en sus des indicateurs purement scientifiques.

Ce chapitre a permis de mettre en évidence que l'interaction entre les sous-systèmes est prépondérante et que l'étude de la table d'harmonie à elle seule rend l'interprétation des phénomènes difficile à extrapoler dans une situation réelle. Le rôle de la table étant d'amplifier le son de la corde, il est impératif de tenir compte au minimum de ces deux systèmes afin d'appréhender le problème de manière plus globale.

En outre, le son produit découle principalement de la corde avec tout de même une légère participation de la table d'harmonie dans le contenu spectral. Cette participation reste cependant peu perceptible étant donné les matériaux utilisés et il faut descendre jusqu'à des amortissements relativement faibles pour entendre de manière audible. En effet, il apparaît que l'amortissement de la table d'harmonie contrôle en première approximation la présence ou non des modes de table dans le spectre d'écoute et seulement au second ordre la durée des partiels de la corde. La tendance générale valide que plus l'amortissement est important, moins la note ne dure sans pour autant que cette règle ne soit systématique.

L'étude menée sur l'influence des longueurs mortes soulève également des questionnements puisqu'il apparaît que des partiels peuvent disparaître sous l'action du couplage avec la table. Cette constatation doit bien entendu être confirmée mais ce phénomène est susceptible de participer aux problèmes de rayonnement dans l'extrême aigu où les notes ont un contenu spectral pauvre.

Pour clore ce chapitre, l'influence des non-linéarités permet d'apporter de l'énergie dans les aigus et ainsi enrichir considérablement le contenu spectral des notes jouées. Ce phénomène a été interprété en considérant les termes non-linéaires comme des efforts qui excitent la corde au cours du temps. De nos constatations, il ressort que ces efforts sont quasi-ponctuels, de durées très courtes et se déplacent le long des cordes.

CONCLUSION GENERALE

Le travail effectué durant cette thèse de doctorat s'inscrit dans une démarche de compréhension des phénomènes vibroacoustiques des structures raidies. Comme nous l'avons évoqué à plusieurs reprises, ce type de structure est très largement répandu dans l'industrie et les domaines susceptibles d'être intéressés par ce travail sont nombreux. En effet, cette étude offre la possibilité de répondre à des problématiques qui touchent actuellement l'industrie du transport soucieuse d'alléger les véhicules pour augmenter considérablement les charges utiles tout en garantissant des niveaux de prestations élevés en terme de confort acoustique par exemple.

Dans le cadre de ce travail, nous avons choisi délibérément de nous orienter vers un contexte radicalement différent qui n'altère en rien le caractère transversal du modèle développé. Le domaine musical offre en effet une diversité des phénomènes mis en jeu qui sont en lien avec la qualité subjective du son perçu. Dans ce milieu, les notions qui interviennent sont complémentaires et font par ailleurs intervenir des raisonnements qui relèvent à la fois des domaines fréquentiels et temporels. Musicalement parlant, il peut paraître évident d'exploiter cette complémentarité (malgré la rareté des études en temps) mais cela n'est pas systématique dans l'industrie. On constate pourtant un intérêt croissant des industries automobiles à propos de la sensation de qualité renvoyée par le bruit des véhicules. A titre d'exemple, les claquements de portières font l'objet d'études approfondies en perception de façon à déterminer si la sensation de qualité renvoyée est en lien avec le contenu spectral du bruit, sa durée, etc.

L'enjeu principal de cette thèse réside donc dans le développement d'un modèle analytique destiné à la prédiction des mécanismes vibroacoustiques des structures raidies, applicable sur un large domaine fréquentiel étant donné la disparité des applications possibles et envisageables. L'objectif d'un tel modèle est notamment de pouvoir mener des campagnes d'études paramétriques de façon à dégager des tendances comportementales globales.

Dans cette optique, un modèle basé sur une formulation variationnelle permet, à partir d'une plaque plane rectangulaire simplement supportée d'orthotropie dite « spéciale », de recréer une plaque orthotrope encastrée de contours quelconques raidie sur chaque face par de nombreuses superstructures s'apparentant à des poutres. Cette méthode a été appliquée à une table d'harmonie de piano droit grâce à laquelle il a été possible de proposer une classification des modes propres en différentes familles caractéristiques associées à des domaines fréquentiels distincts. On relèvera en particulier, le caractère homogène en basses fréquences ainsi que le confinement des vibrations entre les barres que l'on retrouve abondamment dans la littérature.

L'outil développé nous a ensuite permis de dresser des cartographies du comportement vibroacoustique de la structure. Notre application étant une table d'harmonie de piano, nous avons

naturellement choisi d'exciter la structure aux points de couplage cordes / table, puis de balayer les différentes notes en fonction de la fréquence. Ceci a été réalisé pour la mobilité, la puissance acoustique rayonnée et le coefficient de rayonnement de la structure. Ces cartographies sont particulièrement utiles pour avoir une vision complète du comportement en une seule figure et permettent d'identifier rapidement les points ou domaines fréquentiels pour lesquels la structure rayonne le plus ou le plus efficacement. Ces cartographies seraient d'un grand intérêt dans un contexte industriel mais s'appliquent difficilement au domaine musical étant donné le caractère discret des fréquences injectées par une corde couplée à la table.

De ce constat, la mise en place d'un indicateur plus proche de notre domaine d'application devient essentielle. Pour proposer une visualisation synthétique tout en apportant un aspect plus réaliste à nos études, les fréquences considérées sont celles des cordes et nous sommes alors intéressés aux valeurs moyennes de la mobilité et de la puissance acoustique rayonnée. Nous avons alors mis en évidence que le comportement des notes placées sur le chevalet medium-aigu dépend de leur contenu spectral. Les deux premières octaves ont une réponse plus progressive à l'inverse de l'extrême aigu qui souffre d'une réponse hétérogène. Certaines modifications structurelles peuvent alors améliorer subtilement la situation pour un certain groupe de notes mais bien souvent au détriment d'un autre. Il est également apparu qu'une modification structurelle peut intervenir différemment sur les quantités regardées : l'évolution de la mobilité n'est pas toujours corrélée avec celle de la puissance acoustique rayonnée par l'instrument.

Un point de vue complémentaire est porté sur le problème en couplant le modèle développé à une corde. La résolution de ces deux systèmes couplés dans le domaine temporel apporte des informations supplémentaires qui ne sont pas accessibles via les études fréquentielles. Nous avons montré que l'interaction entre les sous-systèmes était primordiale et ne considérer que de la table d'harmonie permettait difficilement de répondre aux problématiques musicales avec efficacité. De ce fait, l'influence des paramètres structurels peut être appréciée de façon perceptive. Nous avons par exemple mis en évidence que l'amortissement du matériau constituant la table permet en priorité de contrôler la présence ou non des partiels dits de « table d'harmonie ». Bien entendu l'amortissement du bois joue également un rôle sur la longueur de son d'une note mais son effet peut être parfois délicat à anticiper. En effet, il s'est avéré qu'augmenter l'amortissement ne raccourcissait pas la longueur de tous les partiels bien qu'au global cette règle soit vraie, et inversement.

Nous avons également identifié un phénomène de disparition des partiels sur certaines notes jouées. On peut penser que ce phénomène est préjudiciable sur les notes de l'extrême aigu dont le contenu spectral est faible, qui plus est lorsqu'il intervient sur le fondamental de la note. A l'inverse, la disparition d'un partiel nous paraît peu perceptible sur une note riche en harmoniques. Les interactions au niveau du couplage cordes / table sont directement mises en cause dans ce phénomène et nous l'avons prouvé en faisant varier la longueur morte de la corde : la tension est modifiée pour rester accordée de façon à jouer la même note. D'où, on montre que les partiels disparus réapparaissent en ne modifiant que le couplage entre les deux systèmes.

En dernier lieu, l'influence des non-linéarités permet d'apporter de l'énergie dans les aigus et ainsi enrichir considérablement le contenu spectral des notes jouées. Cet enrichissement peut s'interpréter comme des efforts ponctuels, très courts et se déplaçant le long de la corde.

Au final, ce manuscrit dresse un bilan du comportement vibroacoustique de la table d'harmonie de piano dans deux domaines d'études complémentaires tout en proposant des méthodes universelles qui peuvent être exploitées dans d'autres milieux. Le cœur du modèle, qui permet de décrire une structure orthotrope raidie, est directement transférable et permet de décrire des contours complexes très facilement. Dans son approche, la méthode temporelle est quant à elle typique des problèmes de contact ou encore de frottement.

Enfin, certaines approximations réalisées auraient pu altérer la précision des résultats de notre méthode : les effets de membrane, l'épaisseur variable de la table de même que sa courbure ou encore la courbure du chevalet dans le cas d'une application piano. Une comparaison croisée avec des résultats expérimentaux et un modèle éléments finis a d'ores et déjà montré que les hypothèses associées à la méthode apportent certes un biais dans les résultats mais ne dénaturent cependant pas les tendances décrites, ce qui n'est pas préjudiciable dans le cadre d'études paramétriques.

Le principal intérêt de la méthode développée réside donc dans sa capacité à mettre en place des études paramétriques de façon très simple. Grâce à une mise en données facilitée, il est en effet facile de faire varier un paramètre sans avoir à recalculer l'ensemble des constantes nécessaires. Ceci ouvre la voie à des méthodes d'optimisation des structures. En partant du principe que les cibles sont bien définies, par exemple un niveau de mobilité particulier dans les aigus ou encore une longueur de son spécifique pour une certaine note, on peut envisager ce modèle paramétrique couplé à un algorithme génétique de façon à laisser les mutations des solutions converger vers un optimum préalablement défini.

Nous avons également vu que les conditions aux limites de la table d'harmonie tendent très vite vers l'encastrement. La solution proposée dans ce manuscrit pour recréer les contours et l'angle d'orthotropie correspond parfaitement à cette condition. Cependant sur un plan généraliste et en vue d'autres domaines d'application, il pourrait être intéressant de recréer d'autres conditions aux limites ou encore des conditions aux limites mixtes. De nombreux travaux existent à ce sujet dont la méthodologie consiste à appliquer des ressorts de torsions sur les bords de plaque dont la raideur dépend des conditions à recréer. Partant de ce constat, il ne semble pas impossible d'introduire ce principe sur les bords de la plaque inscrite.

Concernant l'amortissement, il serait également intéressant de développer un modèle permettant de calculer les facteurs de perte modaux à partir des caractéristiques matériaux. Des formulations de ce type existent mais restent actuellement limitées aux cas des structures homogènes. En se basant sur les énergies cinétiques et de déformations de la plaque et de chaque

superstructure, il serait possible de proposer un modèle de ce type et ainsi d'étudier l'influence de l'ajout de renforts sur les mécanismes dissipatifs.

La table est par ailleurs fabriquée courbée de telle sorte qu'elle s'aplanit par application et mise sous tension du plan de cordes. Cette conception permet de préserver la structure de la pression exercée par les cordes mais implique en contrepartie des contraintes résiduelles dans la table. En sus, l'application du cordage vient également ajouter des contraintes de compression sur les bords. D'après la littérature, ce phénomène de « downbearing » engendre une augmentation des fréquences propres. Nous avons démontré qu'un raisonnement simple ne permet pas de comprendre ce phénomène dans son intégralité et il semble que les précontraintes résiduelles de même que la courbure initiale de fabrication engendrent un glissement non-linéaire des fréquences propres. La prise en compte de ce phénomène mais surtout sa compréhension constitue une perspective intéressante pour l'avenir.

Un autre développement d'ordre purement musical réside dans la caractérisation de la table d'harmonie de piano par une réponse impulsionnelle appliquée sur la corde. Les cordes étant en effet le moteur du son produit, il serait judicieux de réaliser cette expérience de façon à mettre en évidence les modes du système couplé qui sont alertés. Cette mesure expérimentale pourrait être réalisée en étouffant les autres cordes puis comparée avec le modèle temporel.

Enfin, une dernière perspective envisageable concerne le remplacement du bois par un matériau composite. Ce travail interviendra dans le cadre du projet Maestro¹⁴ et sera réalisé entre autres au cours de la thèse de doctorat de Pierre Margerit à l'École Nationale des Ponts et Chaussées. Il consistera dans un premier temps à reproduire les propriétés de l'épicéa puis, dans un second temps, à proposer un ou plusieurs matériaux ainsi que des structures optimisés dont les propriétés pourraient être déterminées à l'aide de notre modèle.

¹⁴ Projet ANR MAESSTRO (Modélisations Acoustiques, Expérimentations et Synthèse Sonore pour Tables d'harmonie de piano) regroupant au sein d'un même consortium quatre laboratoires de recherche (LMS, Ecole Polytechnique ; UME, ENSTA ; UMR NAVIER, Ponts et Chaussées ; LVA, INSA-Lyon) et le facteur de piano Stephen Paulello (SPCP Piano Technologies).

ANNEXE A

FONCTIONNELLE DE HAMILTON D'UNE PLAQUE ORTHOTROPE RECTANGULAIRE

Cette annexe détaille les étapes de calcul de la fonctionnelle d'action d'une plaque orthotrope dites spéciale (« special orthotropy »), i.e que les axes principaux d'orthotropie sont parallèles aux bords de plaque. Cette plaque est rectangulaire d'épaisseur h et de dimensions L_x et L_y dans les directions \mathbf{x} et \mathbf{y} . Les modules de Young associés à ces directions sont notés E_x et E_y . La Figure II-1-a donne le schéma de principe d'une telle structure. La plaque est considérée mince et suit par conséquent les hypothèses de Love-Kirchhoff :

- milieu mince : les effets de pompage dans l'épaisseur h de la plaque sont négligés tant que la fréquence reste inférieure à la fréquence de pompage $f_{pompage} \approx \frac{1}{h} \sqrt{\frac{E_{mini}}{\rho}}$; les contraintes dans la direction normale au plan de la plaque sont négligeables,
- les effets de membrane sont négligés : le feuillet moyen n'admet pas de déplacements dans le plan (x,y) ,
- le cisaillement dans les plans de flexion est négligé.

A.I. Champ de déplacement

En notant u , v et w les composantes du champ de déplacements associées aux directions \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} (repère cartésien), les hypothèses énoncées se traduisent par :

- milieu mince : effets de pompage $w_{,z} = 0$; contrainte nulle $\sigma_{zz} = 0$
- les effets de membrane : $u|_{z=0} = 0$ et $v|_{z=0} = 0 \quad \forall(x,y)$
- le cisaillement dans les plans de flexion : $u_{,z}|_{z=0} = -w_{,x}|_{z=0}$ et $v_{,z}|_{z=0} = -w_{,y}|_{z=0}$

On considère initialement que chaque composante du champ de déplacements \mathbf{U} dépend de toutes les variables d'espace et du temps. Le milieu étant mince, la variation de chaque

composante selon la variable z peut être linéarisée à partir des déplacements au niveau du feuillet moyen (côte $z = 0$), soit :

$$\mathbf{U} = \begin{cases} u(x, y, z, t) = u(x, y, z = 0, t) + z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ v(x, y, z, t) = v(x, y, z = 0, t) + z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, z = 0, t) + z \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{z=0} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

En appliquant les hypothèses cinématiques susmentionnées, ce champ de déplacements se simplifie de la façon suivante où chaque composante est paramétrée par rapport au déplacement transversal w qui lui-même ne dépend que des variables x et y ainsi que du temps :

$$\mathbf{U} = \begin{cases} u(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) = -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) = w(x, y, t) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

A.II. Tenseur des déformations infinitésimales

Le tenseur des déformations infinitésimales s'exprime via le gradient du champ de déplacements tel que $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^t)$, soit le tenseur suivant avec à droite les déformations en notation de Voigt :

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} & 0 \\ & -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} & 0 \\ (sym) & & 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \epsilon = \begin{pmatrix} -z w_{,xx} \\ -z w_{,yy} \\ 0 \\ -z w_{,xy} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

A.III. Relation entre contraintes et déformations

On considère les déformations ϵ de faibles amplitudes. Le comportement du matériau est modélisé par une loi élastique linéaire (loi de Hooke inverse) reliant les déformations et les contraintes par un tenseur d'ordre 4 symétrique :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & & & \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & -\frac{\nu_{yz}}{E_y} & & & \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & -\frac{\nu_{zy}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & & & \\ & & & \frac{1}{2G_{xy}} & & \\ & & & & \frac{1}{2G_{xz}} & \\ & & & & & \frac{1}{2G_{yz}} \end{pmatrix} \sigma \quad (0) \quad (A.4)$$

L'hypothèse de milieu mince formulée précédemment suppose que $\sigma_{zz} \ll \sigma_{xx}$ et $\sigma_{yy} \rightarrow \sigma_{zz} \approx 0$. En considérant le tenseur des déformations comme plein (en faisant abstraction de l'expression des déformations décrites au point A.II), les contraintes s'expriment en fonction des déformations de la façon suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \epsilon_{xx} + \frac{\nu_{xy}E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \epsilon_{yy} \\ \sigma_{yy} = \frac{\nu_{yx}E_x}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \epsilon_{xx} + \frac{E_y}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} = -\frac{\nu_{zx}}{E_z} \sigma_{xx} - \frac{\nu_{zy}}{E_z} \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} = 2G_{xy}\epsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} = 2G_{xz}\epsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} = 2G_{yz}\epsilon_{yz} \end{cases} \quad (A.5)$$

Remarque

ϵ_{zz} n'est alors pas nul comme montré dans le point A.II. On note donc un paradoxe venant de l'hypothèse de milieu mince qui néglige à la fois les effets de pompage dans l'épaisseur mais également les contraintes de traction / compression nulles dans la direction normale à la plaque. La première impose des déformations nulles dans cette direction tandis que la seconde impose des contraintes nulles, ce qui est en soit contradictoire.

A.IV. Hamiltonien d'une plaque orthotrope rectangulaire

La fonctionnelle de Hamilton (ou fonctionnelle d'action) d'un système quel qu'il soit, se définit par l'intégrale de l'action du système sur un intervalle de temps arbitraire $[t_0; t_1]$:

$$H = \int_{t_0}^{t_1} (E_c - E_d + E_w) dt \quad (A.6)$$

où E_c , E_d et E_w représentent respectivement les énergies cinétique et de déformation du système ainsi que les travaux extérieurs s'y appliquant. Nous considérons pour le moment qu'aucun travail ne s'applique à la plaque.

A.IV.1. Énergie cinétique

L'énergie cinétique du système entier se définit comme l'énergie de l'ensemble des particules composant le système, soit l'intégrale sur le volume du système. On donne donc la formulation suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx dy dz \quad (\text{A.7})$$

En substituant les termes génériques du champ de déplacements par leurs expressions (voir A.I), on aboutit à l'expression suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \dot{w}^2 dx dy dz + \frac{1}{2} \rho \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 (\dot{w}_{,x}^2 + \dot{w}_{,y}^2) dx dy dz \quad (\text{A.8})$$

La seconde intégrale correspond à des termes d'inertie rotationnelle. Dans le cadre des plaques minces, cette énergie est négligeable. Ainsi, l'énergie cinétique associée à une plaque rectangulaire s'exprime par :

$$E_c = \frac{1}{2} \rho h \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \dot{w}^2 dx dy \quad (\text{A.9})$$

A.IV.2. Énergie de déformation

Comme pour l'énergie cinétique, l'énergie de déformation se définit par une intégrale sur le volume du système. Son expression générique est donnée par :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\epsilon} \, dx \, dy \, dz \quad (\text{A.10})$$

Les sections A.II et A.III ont montré que certaines composantes sont nulles simplifiant alors l'expression précédente :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \int_{z=-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} + \sigma_{yy} \epsilon_{yy} + 2\sigma_{xy} \epsilon_{xy} \, dx \, dy \, dz \quad (\text{A.11})$$

Après substitution par les expressions des déformations infinitésimales (A.II) et des contraintes (A.III), puis en réalisant l'intégrale sur z, il vient :

$$E_d = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} D_1 w_{,xx}^2 + D_3 w_{,yy}^2 + D_2 w_{,xx} w_{,yy} + D_4 w_{,xy}^2 \, dx \, dy \quad (\text{A.12})$$

avec $D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$, $D_3 = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$, $D_2 = \frac{\nu_{yx} E_x h^3}{6(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$ et $D_4 = \frac{G_{xy} h^3}{3}$ les rigidités dynamiques.

A.IV.3. Fonctionnelle d'action

Finalement l'expression de l'Hamiltonien d'une plaque rectangulaire est donnée par :

$$H_{\text{plaque}} = \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \rho h \dot{w}^2 - (D_1 w_{,xx}^2 + D_3 w_{,yy}^2 + D_2 w_{,xx} w_{,yy} + D_4 w_{,xy}^2) \, dx \, dy \, dt \quad (\text{A.13})$$

ANNEXE B

BASE D'UNE PLAQUE SIMPLEMENT SUPPORTEE RECTANGULAIRE

Cette annexe est une démonstration des modes d'une plaque simplement supportée rectangulaire. Pour une approche plus claire et faciliter la lecture, cette démonstration sera effectuée sur le cas isotrope puis généralisée au cas orthotrope. Dans un second temps, cette annexe démontrera l'orthogonalité des vecteurs propres associés à cette base. On considère une plaque rectangulaire de dimensions $L_x L_y$.

B.I. Détermination des modes propres d'une plaque simplement supportée

L'équation de mouvement d'une plaque isotrope peut être trouvée facilement dans la littérature [Guya06, Leis69] et est définie par :

$$D[w_{,x^4} + w_{,y^4} + 2w_{,xxyy}] - \omega^2 \rho h w = 0 \quad (\text{B.1})$$

où w , ρ , h et $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ désignent le déplacement transversal, la masse volumique du matériau, son épaisseur et la rigidité dynamique. Les conditions aux limites simplement supportées impliquent des déplacements transversaux ainsi que des moments de flexions nuls sur chaque bord :

$$\left\{ \begin{array}{l} w|_{x=0} = 0 \\ w|_{x=L_x} = 0 \\ w|_{y=0} = 0 \\ w|_{y=L_y} = 0 \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} M_x = -D (w_{,yy}|_{x=0} + \nu w_{,xx}|_{x=0}) = 0 \\ M_x = -D (w_{,yy}|_{x=L_x} + \nu w_{,xx}|_{x=L_x}) = 0 \\ M_y = -D (w_{,xx}|_{y=0} + \nu w_{,yy}|_{y=0}) = 0 \\ M_y = -D (w_{,xx}|_{y=L_y} + \nu w_{,yy}|_{y=L_y}) = 0 \end{array} \right. \quad (\text{B.2})$$

B.I.1. Séparation de variables d'espace

On pose $\lambda^4 = \omega^2/c^2$ avec $c = \sqrt{\frac{D}{\rho h}}$. La séparation de variables $w(x, y) = X(x)Y(y)$ permet de ré exprimer l'équation tel que :

$$X_{,x^4}Y + 2X_{,x^2}Y_{,y^2} + XY_{,y^4} - \lambda^4 XY = 0 \quad (\text{B.3})$$

La solution d'une telle équation dépend des conditions aux limites. En appliquant la même séparation de variables à ces conditions, il vient :

$$\begin{cases} X(0) = 0 \\ X(L_x) = 0 \\ Y(0) = 0 \\ Y(L_y) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X(0)Y_{,yy}(y) + \nu X_{,xx}(0)Y(y) = 0 \quad \forall y \rightarrow X_{,xx}(0) = 0 \\ X(L_x)Y_{,yy}(y) + \nu X_{,xx}(L_x)Y(y) = 0 \quad \forall y \rightarrow X_{,xx}(L_x) = 0 \\ X_{,xx}(x)Y(0) + \nu X(x)Y_{,yy}(0) = 0 \quad \forall x \rightarrow Y_{,yy}(0) = 0 \\ X_{,xx}(x)Y(L_y) + \nu X(x)Y_{,yy}(L_y) = 0 \quad \forall x \rightarrow Y_{,yy}(L_y) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

B.I.2. Solution de $X(x)$

La séparation de variables présente l'intérêt de découpler les solutions d'une variable par rapport à l'autre. En effet, l'équation différentielle sur $X(x)$ devient une équation différentielle du second ordre à coefficient constant étant donné que $Y(y)$ n'est pas dépendant de x (l'inverse étant également vrai). Il vient alors l'équation suivante dont les coefficients a, b, c sont arbitraires :

$$aX_{,x^4} + bX_{,x^2} + cX = 0 \quad (\text{B.5})$$

En exprimant le polynôme caractéristique de cette équation puis en cherchant son discriminant (supposé strictement positif), il vient une solution de la forme avec des coefficients arbitraires :

$$X(x) = A_1 \cos(\alpha_1 x) + B_1 \sin(\alpha_1 x) + C_1 \cosh(\alpha_2 x) + D_1 \sinh(\alpha_2 x) \quad (\text{B.6})$$

En appliquant les conditions aux limites sur $X(x)$ il vient alors :

$$\begin{cases} B_1 + D_1 = 0 \\ \sin(\alpha_1 L_x)A_1 + \cos(\alpha_1 L_x)B_1 + \sinh(\alpha_2 L_x)C_1 + \cosh(\alpha_2 L_x)D_1 = 0 \\ -\alpha_1^2 B_1 + \alpha_2^2 D_1 = 0 \\ -\alpha_1^2 \sin(\alpha_1 L_x)A_1 - \alpha_1^2 \cos(\alpha_1 L_x)B_1 + \alpha_2^2 \sinh(\alpha_2 L_x)C_1 + \alpha_2^2 \cosh(\alpha_2 L_x)D_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Et sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha_1 L_x) & \cos(\alpha_1 L_x) & \sinh(\alpha_2 L_x) & \cosh(\alpha_2 L_x) \\ 0 & -\alpha_1^2 & 0 & \alpha_2^2 \\ -\alpha_1^2 \sin(\alpha_1 L_x) & -\alpha_1^2 \cos(\alpha_1 L_x) & \alpha_2^2 \sinh(\alpha_2 L_x) & \alpha_2^2 \cosh(\alpha_2 L_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.8})$$

Dont le calcul du déterminant conduit à l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\sinh(\alpha_2 L_x) \sin(\alpha_1 L_x) = 0 \quad (\text{B.9})$$

Il en découle deux solutions. L'une est triviale puisqu'elle conduit à une absence de déplacement ($\sinh(\alpha_2 L_x) = 0$). La seconde solution est donc retenue et conduit à la pulsation propre :

$$\alpha_1 = \frac{m\pi}{L_x} \quad (\text{B.10})$$

Le mineur de la matrice précédente (élimination de la première ligne et de la première colonne tout en conservant les égalités dues aux conditions aux limites) permet d'affiner la solution de $X(x)$:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1 L_x) & \sinh(\alpha_2 L_x) & \cosh(\alpha_2 L_x) \\ -\alpha_1^2 & 0 & \alpha_2^2 \\ -\alpha_1^2 \cos(\alpha_1 L_x) & \alpha_2^2 \sinh(\alpha_2 L_x) & \alpha_2^2 \cosh(\alpha_2 L_x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha_1 L_x) A_1 \\ 0 \\ \alpha_1^2 \sin(\alpha_1 L_x) A_1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Or puisque $\sin(\alpha_1 L_x) = 0$, les constantes B_1, C_1, D_1 sont nulles. La solution finale de $X(x)$ est donc de la forme :

$$X_m(x) = A_1 \sin(\alpha_1 x) \quad \text{avec} \quad \alpha_1 = \frac{m\pi}{L_x} \quad (\text{B.12})$$

B.1.3. Solution de $Y(y)$

Cette solution de la première variable est injectée dans l'équation de mouvement :

$$X(Y_{,y^4} - 2\alpha^2 Y_{,y^2} + (\alpha_m^4 - \lambda^4)Y) = 0 \quad \forall x \quad (\text{B.13})$$

La démarche est la même que celle utilisée pour déterminer la solution de $X(x)$. Le polynôme caractéristique associé à l'équation en $Y(y)$:

$$r^4 - 2\alpha^2 r^2 + (\alpha_m^4 - \lambda^4) = 0 \quad (\text{B.14})$$

On pose $R = r$ pour calculer le discriminant de ce polynôme :

$$\Delta = 4\lambda^4 > 0 \quad (\text{B.15})$$

Il y a alors deux racines réelles R_1 et R_2 :

$$R_1 = \alpha_m^2 + \lambda^2 > 0 \text{ et } R_2 = \alpha_m^2 - \lambda^2 < 0 \quad (\text{B.16})$$

D'où il découle 4 racines r_1, r_2, r_3 et r_4 :

$$\begin{cases} r_1 = \sqrt{\lambda^2 + \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} = \gamma_1 \\ r_2 = -\gamma_1 \\ r_3 = \sqrt{\lambda^2 - \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} = j\gamma_2 \\ r_4 = -j\gamma_2 \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Il en résulte une solution de la forme :

$$Y(y) = A_2 \sin(\gamma_2 y) + B_2 \cos(\gamma_2 y) + C_2 \sinh(\gamma_1 y) + D_2 \cosh(\gamma_1 y) \quad (\text{B.18})$$

De même que pour la solution de la fonction $X(x)$, les conditions aux limites sur $Y(y)$ nous amènent à écrire

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \sin(\gamma_2 L_y) & \cos(\gamma_2 L_y) & \sinh(\gamma_1 L_y) & \cosh(\gamma_1 L_y) \\ 0 & -\gamma_2^2 & 0 & \gamma_1^2 \\ -\gamma_2^2 \sin(\gamma_2 L_y) & -\gamma_2^2 \cos(\gamma_2 L_y) & \gamma_1^2 \sinh(\gamma_1 L_y) & \gamma_1^2 \cosh(\gamma_1 L_y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (\text{B.19})$$

dont le calcul du déterminant conduit à l'équation aux valeurs propres suivante :

$$\sinh(\gamma_1 L_y) \sin(\gamma_2 L_y) = 0 \quad (\text{B.20})$$

Il en découle deux solutions évidentes. L'une est triviale puisqu'elle conduit à une absence de déplacement ($\sinh(\gamma_1 L_y) = 0$). La seconde solution est donc retenue et conduit à la pulsation propre :

$$\gamma_2 = \frac{n\pi}{L_y} \rightarrow \omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho h} \left[\left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right]} \quad (\text{B.21})$$

Encore une fois, le mineur de la matrice permet d'affiner la solution de $Y(y)$ tel que :

$$Y(y) = A_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \quad (\text{B.22})$$

Le déplacement transversal est donné par la multiplication des deux fonctions précédemment calculées :

$$w(x, y) = X(x)Y(y) = \sum_m \sum_n a_{mn} \phi_{mn}(x, y) \quad (\text{B.23})$$

Avec $\phi_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right)$ la déformée modale.

B.1.4. Généralisation au cas d'une plaque orthotrope

On suppose que les déformées propres déterminées précédemment restent inchangées. On donne par ailleurs l'équation de mouvement d'une plaque orthotrope rectangulaire, soit :

$$\left[D_1 w_{,x^4} + D_3 w_{,y^4} + (D_2 + D_4) w_{,xxyy} \right] - \omega^2 \rho h w = 0 \quad (\text{B.24})$$

où w , ρ , h et $D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$, $D_3 = \frac{E_y h^3}{12(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$, $D_2 = \frac{\nu_{yx} E_x h^3}{6(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}$ et $D_4 = \frac{G_{xy} h^3}{3}$ désignent le déplacement transversal, la masse volumique du matériau, son épaisseur et les rigidités dynamiques. En injectant la solution du déplacement transversal obtenue précédemment il vient l'équation d'ondes suivante :

$$\left[D_1 \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^4 + D_3 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 + (D_2 + D_4) \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right] - \omega^2 \rho h = 0 \quad (\text{B.25})$$

La seule solution permettant de satisfaire cette équation est de définir les nouvelles fréquences propres associées aux déformées d'une plaque rectangulaire orthotrope simplement supportée. Soit :

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{1}{\rho h}} \left[D_1 \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^4 + D_3 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 + (D_2 + D_4) \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right] \quad (\text{B.26})$$

B.II. Propriétés d'orthogonalité

La seconde partie de cette annexe démontre l'orthogonalité des opérateurs de masse et de raideur d'une plaque simplement supportée rectangulaire orthotrope. On considère deux modes distincts différenciés par leurs indices :

$$\begin{aligned} \phi_{mn}(x, y) &= \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \\ \phi_{pq}(x, y) &= \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y\right) \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

B.II.1. Opérateur de masse

L'opérateur de masse est défini par :

$$\rho h w(x, y) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} \quad (\text{B.28})$$

On considère un mode particulier (m, n) lequel est projeté sur un second mode d'indexage différent (p, q) :

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \rho h \phi_{mn}(x, y) \phi_{pq}(x, y) dx dy \\
 &= \rho h \int_{x=0}^{L_x} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x\right) dx \int_{y=0}^{L_y} \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y\right) dy
 \end{aligned} \tag{B.29}$$

On s'intéresse dans un premier temps uniquement à l'intégrale sur la variable x . On utilise les propriétés de multiplicité des fonctions sinus. On distingue deux cas de figures :

$$\int_{x=0}^{L_x} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x\right) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} 1 - \cos\left(2\frac{p\pi}{L_x} x\right) dx & \forall m = p \\ \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \cos\left(\frac{[m-p]\pi}{L_x} x\right) - \cos\left(\frac{[m+p]\pi}{L_x} x\right) dx & \forall m \neq p \end{cases} \tag{B.30}$$

Les intégrales sur les fonctions cosinus se font alors sur une ou plusieurs périodes et sont donc nulles. Il vient alors que l'intégrale sur x est nulle si $m \neq p$:

$$\int_{x=0}^{L_x} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x\right) dx = \begin{cases} \frac{L_x}{2} & \forall m = p \\ 0 & \forall m \neq p \end{cases} \tag{B.31}$$

Il en est de même pour l'intégrale sur y . D'où, le produit scalaire de deux déformées propres est nul hormis lorsque les indices sont les mêmes :

$$\int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \rho h \phi_{mn}(x, y) \phi_{pq}(x, y) dx dy = M_{pq} \delta_{mnpq} = \begin{cases} M_{pq} & \forall m = p \text{ et } n = q \\ 0 & \forall m \neq p \text{ et } n \neq q \end{cases} \tag{B.32}$$

avec $M_{pq} = \rho h \frac{L_x L_y}{4}$ la masse généralisée et δ_{mnpq} le symbole de Kronecker.

B.II.2. Opérateur de raideur

La même démarche que pour l'opérateur de masse est adoptée. Après projection l'opérateur de raideur d'une plaque orthotrope rectangulaire en appui simple est défini par :

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} D_1 \frac{\partial^4 \phi_{mn}(x,y)}{\partial x^4} \phi_{pq}(x,y) + D_3 \frac{\partial^4 \phi_{mn}(x,y)}{\partial y^4} \phi_{pq}(x,y) + (D_2 + D_4) \frac{\partial^4 \phi_{mn}(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} \phi_{pq}(x,y) dx dy \\
 &= D_1 \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^4 \int_{x=0}^{L_x} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x\right) dx \int_{y=0}^{L_y} \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y\right) dy \\
 &+ D_3 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 \int_{x=0}^{L_x} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x\right) dx \int_{y=0}^{L_y} \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y\right) dy \\
 &+ (D_2 + D_4) \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \int_{x=0}^{L_x} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x\right) dx \int_{y=0}^{L_y} \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y\right) dy
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

L'opérateur de raideur est plus complexe que l'opérateur de masse en raison du bi Laplacien ∇^4 . En se basant sur les résultats des intégrales calculées pour l'opérateur de masse, il vient directement :

$$\begin{aligned}
 & \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} D_1 \frac{\partial^4 \phi_{mn}(x,y)}{\partial x^4} \phi_{pq}(x,y) + D_3 \frac{\partial^4 \phi_{mn}(x,y)}{\partial y^4} \phi_{pq}(x,y) + (D_2 + D_4) \frac{\partial^4 \phi_{mn}(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} \phi_{pq}(x,y) dx dy \\
 &= K_{pq} \delta_{mnpq} = \begin{cases} K_{pq} & \forall m = p \text{ et } n = q \\ 0 & \forall m \neq p \text{ et } n \neq q \end{cases}
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

avec K_{pq} la raideur généralisée :

$$K_{pq} = \frac{L_x L_y}{4} \left[D_1 \left(\frac{p\pi}{L_x} \right)^4 + D_3 \left(\frac{q\pi}{L_y} \right)^4 + (D_2 + D_4) \left(\frac{p\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{q\pi}{L_y} \right)^2 \right] \tag{B.35}$$

Dans le cas d'une plaque isotrope, il viendrait $D_1 = D_3 = \frac{D_2 + D_4}{2} = D$:

$$K_{pq} = \frac{L_x L_y}{4} D \left[\left(\frac{p\pi}{L_x} \right)^2 + \left(\frac{q\pi}{L_y} \right)^2 \right]^2 \tag{B.36}$$

B.II.3. Orthogonalité des dérivées spatiales

Cette dernière partie explore l'orthogonalité des dérivées spatiales des vecteurs propres d'une plaque simplement supportée rectangulaire. Ces pré-calculs seront utiles lors de la

lecture de l'ANNEXE C. On s'intéresse tout particulièrement à l'orthogonalité des dérivées secondes ainsi qu'aux dérivées croisées sur les variables x et y .

Considérons tout d'abord l'orthogonalité de la dérivée spatiale seconde en x :

$$\int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial x^2} dx dy \quad (\text{B.37})$$

où ϕ_{mn} et ϕ_{pq} désignent deux modes arbitraires pouvant être différents. L'expression de ϕ_{mn} trouvée en B.I.3 nous amène directement à la solution grâce au travail déjà effectué en B.II.1:

$$\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \left(\frac{p\pi}{L_x}\right)^2 \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \phi_{mn}(x, y) \phi_{pq}(x, y) dx dy = \frac{L_x L_y}{4} \left(\frac{p\pi}{L_x}\right)^4 \delta_{mnpq} \quad (\text{B.38})$$

De la même façon, il vient directement :

$$\int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial y^2} dx dy = \frac{L_x L_y}{4} \left(\frac{q\pi}{L_y}\right)^4 \delta_{mnpq} \quad (\text{B.39})$$

et :

$$\int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial y^2} dx dy = \frac{L_x L_y}{4} \left(\frac{p\pi}{L_x}\right)^2 \left(\frac{q\pi}{L_y}\right)^2 \delta_{mnpq} \quad (\text{B.40})$$

Pour les dérivées croisées, le calcul est moins direct et nous allons en détailler les étapes ci-après. On s'intéresse à :

$$\int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy \quad (\text{B.41})$$

Du fait de la dérivation sur les variables x et y , les déformées opérationnelles disparaissent pour laisser place à un produit de cosinus. Soit :

$$\frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \int_{x=0}^{L_x} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x\right) dx \int_{y=0}^{L_y} \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y\right) dy \quad (\text{B.42})$$

Les deux intégrales peuvent être traitées séparément. Traitons d'abord celle sur la variable x :

$$\int_{x=0}^{L_x} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x\right) dx \quad (\text{B.43})$$

Les propriétés des fonctions cosinus permettent de distinguer deux cas de figures comme à la section B.II.1 :

$$\int_{x=0}^{L_x} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x\right) dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} 1 + \cos\left(2\frac{p\pi}{L_x} x\right) dx & \forall m = p \\ \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \cos\left(\frac{[m-p]\pi}{L_x} x\right) + \cos\left(\frac{[m+p]\pi}{L_x} x\right) dx & \forall m \neq p \end{cases} \quad (\text{B.44})$$

Sachant que l'intégrale d'une fonction cosinus sur un multiple entier de période est nulle, il convient que la projection est non nulle uniquement lorsque les indices m et p sont les mêmes. L'orthogonalité des dérivées croisées est alors évidente :

$$\int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy = \frac{L_x L_y}{4} \left(\frac{p\pi}{L_x}\right)^2 \left(\frac{q\pi}{L_y}\right)^2 \delta_{mnpq} \quad (\text{B.45})$$

ANNEXE C

LAGRANGIENS EN VARIABLES MODALES

Cette annexe explique les étapes de calcul pour exprimer les Lagrangiens de chaque contribution en variables modales. Il est évident que le terme de Lagrangien désigne normalement l'action totale du système et que l'utilisation de ce terme pour désigner celui associé à l'une ou l'autre des contributions est impropre. Au mieux aurait on le droit de parler de « sous-Lagrangien » ou de « Lagrangien partiel ». Cependant, pour des raisons d'allègement et de facilité de lecture, nous choisissons délibérément de parler du Lagrangien de la plaque, de la densité de ressorts ou encore d'une superstructure. Lorsqu'il sera question de l'action du système complet, cela sera clairement explicité. Le Lagrangien complet est donc considéré comme la somme de plusieurs contributions traitées séparément. Il va de soit, que la minimisation de l'action reste la minimisation du Lagrangien complet qui est exprimé par :

$$\mathcal{L}_{\text{complet}} = \mathcal{L}_{\text{plaque}} + \mathcal{L}_{\text{ressorts}} + \mathcal{L}_{\text{renforts } x} + \mathcal{L}_{\text{renforts } y} \quad (\text{C.1})$$

Chaque contribution va être exprimée non pas en fonction des variables plaque mais de variables modales. Pour cela, le déplacement transversal $w(x, y)$ est décomposé sur la base des modes propres d'une plaque simplement supportée. Soit la combinaison linéaire suivante :

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \phi_{mn}(x, y) \quad (\text{C.2})$$

avec les déformées modales $\phi_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right)$.

C.I. Lagrangien d'une plaque orthotrope rectangulaire

Le Lagrangien d'une plaque orthotrope rectangulaire en fonction du déplacement transversal et de ses dérivées spatiales et temporelles est :

$$\mathcal{L}_{plaque} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \rho h \dot{w}^2 - [D_1 w_{,xx}^2 + D_3 w_{,yy}^2 + D_2 w_{,xx} w_{,yy} + D_4 w_{,xy}^2] dx dy \quad (C.3)$$

En injectant le déplacement transversal écrit comme une combinaison linéaire et en distinguant les deux sommes par un double indiçage différent, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{plaque} = & \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \rho h \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \dot{a}_{mn}(t) \phi_{mn}(x, y) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{pq}(t) \phi_{pq}(x, y) \\ & - \left[D_1 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial x^2} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial x^2} \right. \\ & + D_3 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial y^2} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial y^2} \\ & + D_2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial x^2} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial y^2} \\ & \left. + D_4 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial x \partial y} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial x \partial y} \right] dx dy \end{aligned} \quad (C.4)$$

où les produits croisés $\sum_m \sum_n \dot{a}_{mn} \phi_{mn} \sum_p \sum_q \dot{a}_{pq} \phi_{pq}$ peuvent être ré-exprimés de la façon suivante $\sum_m \sum_n \sum_p \sum_q \dot{a}_{mn} \dot{a}_{pq} \phi_{mn} \phi_{pq}$. En utilisant les propriétés de distributivités des intégrales, il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{plaque} = & \frac{1}{2} \left(\rho h \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \phi_{mn}(x, y) \phi_{pq}(x, y) dx dy \right. \\ & - \left[D_1 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial x^2} dx dy \right. \\ & + D_3 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial y^2} dx dy \\ & + D_2 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial y^2} dx dy \\ & \left. + D_4 \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial x \partial y} dx dy \right] \end{aligned} \quad (C.5)$$

Il est donc possible de réaliser les deux intégrales sur la surface de la plaque. Les propriétés d'orthogonalité des opérateurs de masse et de raideur (voir ANNEXE B) permettent de simplifier le Lagrangien de la plaque :

$$\mathcal{L}_{plaque} = \frac{1}{2} \frac{L_x L_y}{4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \rho h \dot{a}_{mn}^2(t) - \left[D_1 \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^4 + D_3 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 + (D_2 + D_4) \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right] a_{mn}^2(t) \quad (C.6)$$

C.II. Lagrangien d'une densité de ressorts ponctuels

Le Lagrangien d'un ressort ponctuel exerçant un effort normal à la plaque est donné par :

$$\mathcal{L}_{ressort} = -\frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} k w^2 \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) dx dy \quad (C.7)$$

En appliquant la décomposition modale sur le déplacement transversal, l'équation devient :

$$\mathcal{L}_{ressort} = -\frac{1}{2} k \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \phi_{mn}(x, y) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \phi_{pq}(x, y) \delta(x - x_s) \delta(y - y_s) dx dy \quad (C.8)$$

L'intégrale de surface est extrêmement simple du fait des propriétés d'intégration du Dirac :

$$\mathcal{L}_{ressort} = -\frac{1}{2} k \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \phi_{mn}(x_s, y_s) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \phi_{pq}(x_s, y_s) \quad (C.9)$$

Au final, une densité de ressorts ponctuels s'exprime comme la somme du Lagrangien unitaire d'un seul ressort où les coordonnées (x_s, y_s) varient :

$$\mathcal{L}_{ressorts} = -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^{N_s} k \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \phi_{mn}(x_s, y_s) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \phi_{pq}(x_s, y_s) \quad (\text{C.10})$$

C.III. Lagrangien d'un renfort orienté dans la direction \mathbf{y}

L'obtention du Lagrangien d'un renfort orienté dans la direction \mathbf{y} est explicitée dans le CHAPITRE III. Son expression est donnée par :

$$\mathcal{L}_{renfort \mathbf{y}} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=y_i}^{y_f} [\rho_r (Hb \dot{w}^2 + I_f \dot{w}_{,y}^2 + I_g \dot{w}_{,x}^2) - (E_r I_f w_{,yy}^2 + G_r I_g w_{,xy}^2)] \delta(x - x_r) dx dy \quad (\text{C.11})$$

En injectant la décomposition modale équation (C.2), on peut ré-exprimer ce Lagrangien non plus en fonction du déplacement transversal et de ses dérivées spatiales et temporel mais en fonction des variables modales $a_{mn}(t)$ et $\dot{a}_{mn}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{renfort \mathbf{y}} = & \frac{1}{2} \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=y_i}^{y_f} \left[\rho_r \left(Hb \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \dot{a}_{mn}(t) \phi_{mn}(x, y) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{pq}(t) \phi_{pq}(x, y) \right. \right. \\ & + I_f \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \dot{a}_{mn}(t) \frac{\partial \phi_{mn}(x, y)}{\partial y} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{pq}(t) \frac{\partial \phi_{pq}(x, y)}{\partial y} \\ & + I_g \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \dot{a}_{mn}(t) \frac{\partial \phi_{mn}(x, y)}{\partial x} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{pq}(t) \frac{\partial \phi_{pq}(x, y)}{\partial x} \left. \right) \\ & - \left(E_r I_f \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial y^2} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial y^2} \right. \\ & \left. \left. + G_r I_g \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial x \partial y} \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial x \partial y} \right) \right] \delta(x - x_r) dx dy \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Les propriétés de distributivité des intégrales permettent de donner une nouvelle expression du Lagrangien :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{renfort y} = & \frac{1}{2} \left[\rho_r \left(Hb \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=y_i}^{y_f} \phi_{mn}(x, y) \phi_{pq}(x, y) \delta(x - x_r) dx dy \right. \right. \\
 & + I_f \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=y_i}^{y_f} \frac{\partial \phi_{mn}(x, y)}{\partial y} \frac{\partial \phi_{pq}(x, y)}{\partial y} \delta(x - x_r) dx dy \\
 & + I_g \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=y_i}^{y_f} \frac{\partial \phi_{mn}(x, y)}{\partial x} \frac{\partial \phi_{pq}(x, y)}{\partial x} \delta(x - x_r) dx dy \left. \right) \\
 & - \left(E_r I_f \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=y_i}^{y_f} \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial y^2} \delta(x - x_r) dx dy \right. \\
 & \left. \left. + G_r I_g \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=y_i}^{y_f} \frac{\partial^2 \phi_{mn}(x, y)}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi_{pq}(x, y)}{\partial x \partial y} \delta(x - x_r) dx dy \right) \right] \quad (C.13)
 \end{aligned}$$

Connaissant $\phi_{mn}(x, y)$, l'intégrale sur x est immédiate étant donné les propriétés d'intégration du Dirac. En revanche, aucune propriété particulière ne s'applique à l'intégrale sur y . On aboutit alors à :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{renfort y} = & \frac{1}{2} \left[\rho_r \left(Hb \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0 \right. \right. \\
 & + I_f \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_1 \\
 & + I_g \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0 \left. \right) \\
 & - \left(E_r I_f \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \left(\frac{q\pi}{L_y}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0 \right. \\
 & \left. \left. + G_r I_g \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_1 \right) \right] \quad (C.14)
 \end{aligned}$$

où les fonctions $g_0(n, q, y_i, y_f, L_y)$ et $g_1(n, q, y_i, y_f, L_y)$ sont définies par :

$$\begin{aligned}
 g_0(n, q, y_i, y_f, L_y) &= \int_{y=y_i}^{y_f} \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y\right) dy \\
 g_1(n, q, y_i, y_f, L_y) &= \int_{y=y_i}^{y_f} \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y\right) dy
 \end{aligned} \quad (C.15)$$

Il convient de distinguer les cas $n = q$ et $n \neq q$ lorsque l'on donne une expression analytique de ces fonctions, soit :

$$g_0(n, q, y_i, y_f, L_y) = \begin{cases} \frac{y_f - y_i}{2} - \frac{L_y}{2q\pi} \sin\left(\frac{2q\pi[y_f + y_i]}{L_y}\right) \cos\left(\frac{2q\pi[y_f - y_i]}{L_y}\right) & \forall n = q \\ \frac{L_y}{(n - q)\pi} \sin\left(\frac{[n - q]\pi[y_f + y_i]}{L_y}\right) \cos\left(\frac{[n - q]\pi[y_f - y_i]}{L_y}\right) & \forall n \neq q \\ -\frac{L_y}{(n + q)\pi} \sin\left(\frac{[n + q]\pi[y_f + y_i]}{L_y}\right) \cos\left(\frac{[n + q]\pi[y_f - y_i]}{L_y}\right) & \forall n \neq q \end{cases} \quad (\text{C.16})$$

$$g_1(n, q, y_i, y_f, L_y) = \begin{cases} \frac{y_f - y_i}{2} + \frac{L_y}{2q\pi} \sin\left(\frac{2q\pi[y_f + y_i]}{L_y}\right) \cos\left(\frac{2q\pi[y_f - y_i]}{L_y}\right) & \forall n = q \\ \frac{L_y}{(n - q)\pi} \sin\left(\frac{[n - q]\pi[y_f + y_i]}{L_y}\right) \cos\left(\frac{[n - q]\pi[y_f - y_i]}{L_y}\right) & \forall n \neq q \\ +\frac{L_y}{(n + q)\pi} \sin\left(\frac{[n + q]\pi[y_f + y_i]}{L_y}\right) \cos\left(\frac{[n + q]\pi[y_f - y_i]}{L_y}\right) & \forall n \neq q \end{cases}$$

Ces expressions montrent que dans le cas où la longueur du renfort est égale à la dimension L_y de la plaque, les fonctions g_0 et g_1 sont nulles $\forall n \neq q$ et valent $L_y/2 \forall n = q$. En effet, dans ce cas précis, les propriétés d'orthogonalité de déformées propres démontrées en ANNEXE B section B.II s'appliquent. Physiquement, cela signifie que lorsque une barre fait une longueur complète de plaque étendue L_y alors celle-ci n'engendre qu'un couplage de la moitié des modes de plaque. Dans le cas où la barre est incomplète comme ce sera le cas dans ce manuscrit, le collage d'un seul renfort entraîne un couplage de l'intégralité des modes de plaque.

C.IV. Lagrangien d'un renfort orienté dans la direction x

En suivant la même démarche, il vient facilement le Lagrangien d'un renfort orienté dans la direction x . Les étapes de calculs ne sont pas développées car identiques au point précédant :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{renfort\ x} = & \frac{1}{2} \left[\rho_c \left(H_c b_c \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0 \right. \right. \\
& + I_{fc} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_1 \\
& + I_{gc} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0 \left. \right) \\
& - \left(E_c I_{fc} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \left(\frac{p\pi}{L_x}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0 \right. \\
& \left. \left. + G_c I_{gc} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_1 \right) \right] \quad (C.17)
\end{aligned}$$

où les variables des fonctions changent par rapport à l'équation (C.16) au profit des indices et des dimensions du renfort orienté selon la direction x tel que $g_0(m, p, x_i, x_f, L_x)$ et $g_1(m, p, x_i, x_f, L_x)$.

ANNEXE D

MINIMISATION DES FONCTIONNELLES D'ACTION EN VARIABLES MODALES

Cette annexe traite de la minimisation des « sous-Lagrangien » dont le calcul est détaillé en ANNEXE C. Cette minimisation conduit à un système linéaire homogène exprimé sous forme matricielle. Comme dans l'ANNEXE C, les différentes contributions sont traitées séparément de façon à alléger la lecture et faciliter la compréhension. Il est cependant évident que l'action minimisée est bien celle du système entier. Alors, les matrices du système complet sont définies par la somme des différentes contributions :

$$\bar{\bar{A}}_{complet} = \bar{\bar{A}}_{plaque} + \bar{\bar{A}}_{ressorts} + \bar{\bar{A}}_{renforts\ x} + \bar{\bar{A}}_{renforts\ y} \quad (D.1)$$

avec $\bar{\bar{A}}$ pouvant désigner des matrices de masse ou de raideur.

La minimisation de la fonctionnelle de Hamilton se fait en suivant le principe de moindre action $\Delta H = 0$. Dans la pratique, la forme différentielle de ce principe (forme d'Euler-Lagrange) est privilégiée tel que les Lagrangiens sont minimisés par rapport à une amplitude modale a_{mn} d'indigage arbitraire :

$$-\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_{mn}} + \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}_{mn}} = 0 \quad (D.2)$$

La minimisation sur la variable \dot{a}_{mn} fera systématiquement apparaître des termes de masse généralisée, tandis que la variable a_{mn} correspondra à de la raideur. Pour des questions de clarté, les deux sont traités de manière distincte.

D.I. Plaque orthotrope rectangulaire

Pour rappel, le Lagrangien d'une plaque orthotrope rectangulaire de dimensions $L_x L_y$ est donné par :

$$\mathcal{L}_{\text{plaque}} = \frac{1}{2} \frac{L_x L_y}{4} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \rho h \dot{a}_{mn}^2(t) - \left[D_1 \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^4 + D_3 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 + (D_2 + D_4) \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right] a_{mn}^2(t) \quad (\text{D.3})$$

D.I.1. Matrice de masses généralisées

On s'intéresse à la minimisation sur la variable \dot{a}_{mn} :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{plaque}}}{\partial \dot{a}_{mn}} = \frac{L_x L_y}{4} \rho h \dot{a}_{mn} \quad (\text{D.4})$$

Et en appliquant la dérivée par rapport au temps :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{plaque}}}{\partial \dot{a}_{mn}} = \frac{L_x L_y}{4} \rho h \ddot{a}_{mn} \quad (\text{D.5})$$

Qui est ré exprimable sous la forme d'une matrice diagonale de masse généralisée constante :

$$\bar{\bar{M}}_{\text{plaque}} = \begin{pmatrix} \ddots & & (0) \\ & M_{mn} & \\ (0) & & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{D.6})$$

avec $M_{mn} = \frac{L_x L_y}{4} \rho h$ la masse généralisée.

D.I.2. Matrice de raideurs généralisées

On s'intéresse à la minimisation sur la variable a_{mn} :

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{plaque}}}{\partial a_{mn}} = \frac{L_x L_y}{4} \left[D_1 \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^4 + D_3 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 + (D_2 + D_4) \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right] a_{mn} \quad (\text{D.7})$$

Qui est ré-exprimable sous la forme d'une matrice diagonale de raideur généralisée non constante :

$$\bar{\bar{K}}_{\text{plaque}} = \begin{pmatrix} \ddots & & & (0) \\ & K_{mn} & & \\ & & & \\ (0) & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{D.8})$$

$$\text{avec } K_{mn} = \frac{L_x L_y}{4} \left[D_1 \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^4 + D_3 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^4 + (D_2 + D_4) \left(\frac{m\pi}{L_x} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \right] \rho h \text{ la raideur généralisée.}$$

D.II. Densité de ressorts ponctuels

Le Lagrangien d'un ressort ponctuel exerçant un effort transversal en (x_s, y_s) est :

$$\mathcal{L}_{\text{ressort}} = -\frac{1}{2} k \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N a_{mn}(t) \phi_{mn}(x_s, y_s) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \phi_{pq}(x_s, y_s) \quad (\text{D.9})$$

Dans le cas d'un ressort ponctuel, il n'y a pas d'énergie cinétique. Il en résulte donc uniquement une matrice de raideur généralisée, soit la minimisation sur la variable a_{mn} :

$$-\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ressort}}}{\partial a_{mn}} = k \phi_{mn}(x_s, y_s) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \phi_{pq}(x_s, y_s) \quad (\text{D.10})$$

Dans cette expression, la somme sur les modes pq montre un couplage de modes de plaques étendues introduit par le ressort ponctuel. Sous forme matricielle, ces couplages se traduisent par des termes extra-diagonaux. La matrice de raideur d'un ressort ponctuel est donc pleine et symétrique en plus d'être carrée dont les termes sont définis par :

$$\bar{\bar{K}}_{\text{ressort}} = k \begin{pmatrix} \phi_{11}\phi_{11} & \phi_{11}\phi_{21} & \cdots & \phi_{11}\phi_{PQ} \\ \phi_{21}\phi_{11} & \phi_{21}\phi_{21} & & \phi_{21}\phi_{PQ} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \phi_{MN}\phi_{11} & \phi_{MN}\phi_{21} & \cdots & \phi_{MN}\phi_{PQ} \end{pmatrix} \Bigg|_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} \quad (\text{D.11})$$

Notons par ailleurs que cette matrice peut être écrite sous la forme du produit d'une sous matrice $\bar{\bar{A}}$ multipliée par sa transposée tel que :

$$\bar{\bar{A}} = \left(\begin{array}{cccc} \phi_{11} & \phi_{11} & \dots & \phi_{11} \\ \phi_{21} & \phi_{21} & \dots & \phi_{21} \\ & & \ddots & \\ \phi_{MN} & \phi_{MN} & \dots & \phi_{MN} \end{array} \right) \Bigg|_{\substack{x=x_s \\ y=y_s}} \quad (\text{D.12})$$

$$\text{soit } \bar{\bar{K}}_{ressort} = k \bar{\bar{A}} \bar{\bar{A}}^t.$$

Comme précédemment, la contribution d'une densité de ressorts ponctuels s'exprime comme la somme des matrices de raideur d'un seul ressort où les coordonnées (x_s, y_s) varient :

$$\bar{\bar{K}}_{ressorts} = \sum_{s=1}^{N_s} \bar{\bar{K}}_{ressort} \quad (\text{D.13})$$

D.III. Renfort orienté dans la direction \mathbf{y}

L'obtention du Lagrangien en variables modales d'un renfort placé en $x = x_r$ dont les extrémités sont aux cotes y_i et y_f a été démontrée en ANNEXE C section C.III :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{renfort\ y} = & \frac{1}{2} \left[\rho_r \left(Hb \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0 \right. \right. \\ & + I_f \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_1 \\ & \left. \left. + I_g \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0 \right) \right. \\ & - \left(E_r I_f \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 \left(\frac{q\pi}{L_y}\right)^2 \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0 \right. \\ & \left. \left. + G_r I_g \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_1 \right) \right] \quad (\text{D.14}) \end{aligned}$$

Les fonctions g_0 et g_1 sont définies à la section C.III de l'ANNEXE C.

D.III.1. Matrice de masses généralisées

Les termes de masses généralisées découlent de la minimisation sur la dérivée temporelle de la variable modale \dot{a}_{mn} , soit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{renfort y}}{\partial \dot{a}_{mn}} = & \rho_r \left(Hb \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \ddot{a}_{pq}(t) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0 \right. \\ & + I_f \frac{n\pi}{L_y} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \ddot{a}_{pq}(t) \frac{q\pi}{L_y} \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_1 \\ & \left. + I_g \frac{m\pi}{L_x} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \ddot{a}_{pq}(t) \frac{p\pi}{L_x} \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0 \right) \end{aligned} \quad (D.15)$$

On peut distinguer deux contributions distinctes dans cette expression, l'une venant des ondes de flexion et l'autre des ondes de torsion. Posons la fonction $m_{ry}(m, n, p, q)$ représentant les termes de masses généralisées associés à un renfort placé en $x = x_r$, compris entre y_i et y_f :

$$\begin{aligned} m_{ry}(m, n, p, q) = & Hb \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0(n, q, y_i y_f, L_y) \quad (flexion) \\ & + I_f \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_1(n, q, y_i y_f, L_y) \quad (flexion) \\ & + I_g \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \cos\left(\frac{m\pi}{L_x} x_r\right) \cos\left(\frac{p\pi}{L_x} x_r\right) g_0(n, q, y_i y_f, L_y) \quad (torsion) \end{aligned} \quad (D.16)$$

La matrice de masses à coefficients réels, carrée, symétrique et pleine, notée $\bar{\bar{M}}_{renfort y}$ est donnée par :

$$\bar{\bar{M}}_{renfort y} = \rho_r \left(\begin{array}{cccc} m_{ry}(1,1,1,1) & m_{ry}(1,1,1,2) & \dots & m_{ry}(1,1,P,Q) \\ m_{ry}(1,2,1,1) & m_{ry}(1,2,1,2) & \dots & m_{ry}(1,2,P,Q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{ry}(M,N,1,1) & m_{ry}(M,N,1,2) & \dots & m_{ry}(M,N,P,Q) \end{array} \right) \Bigg|_{x=x_r} \quad (D.17)$$

D.III.2. Matrice de raideurs généralisées

Les termes de la matrice de raideurs proviennent de la minimisation du « sous Lagrangien » sur les variables modales a_{mn} :

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial \mathcal{L}_{renfort \mathbf{y}}}{\partial a_{mn}} = & E_r I_f \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \sin \left(\frac{m\pi}{L_x} x_r \right) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \left(\frac{q\pi}{L_y} \right)^2 \sin \left(\frac{p\pi}{L_x} x_r \right) g_0 \\
& + G_r I_g \frac{m\pi}{L_x} \frac{n\pi}{L_y} \cos \left(\frac{m\pi}{L_x} x_r \right) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \frac{p\pi}{L_x} \frac{q\pi}{L_y} \cos \left(\frac{p\pi}{L_x} x_r \right) g_1
\end{aligned} \tag{D.18}$$

Une nouvelle fois, deux contributions distinctes sont présentes dans cette expression, l'une venant des ondes de flexion et l'autre des ondes de torsion. Posons la fonction $k_{ry}(m, n, p, q)$ représentant les termes de masses généralisées associés à un renfort placé en $x = x_r$, compris entre y_i et y_f :

$$\begin{aligned}
k_{ry}(m, n, p, q) = & E_r I_f \left(\frac{n\pi}{L_y} \right)^2 \left(\frac{q\pi}{L_y} \right)^2 \sin \left(\frac{p\pi}{L_x} x_r \right) \sin \left(\frac{m\pi}{L_x} x_r \right) g_0(n, q, y_i y_f, L_y) \quad (flexion) \\
& + G_r I_g \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{q\pi}{L_y} \cos \left(\frac{m\pi}{L_x} x_r \right) \cos \left(\frac{p\pi}{L_x} x_r \right) g_1(n, q, y_i y_f, L_y) \quad (torsion)
\end{aligned} \tag{D.19}$$

Et donc la matrice de raideur, elle aussi à coefficients réels, carrée, symétrique et pleine, notée $\bar{\bar{K}}_{renfort \mathbf{y}}$ donnée par :

$$\bar{\bar{K}}_{renfort \mathbf{y}} = \left(\begin{array}{cccc} k_{ry}(1,1,1,1) & k_{ry}(1,1,1,2) & \dots & k_{ry}(1,1,P,Q) \\ k_{ry}(1,2,1,1) & k_{ry}(1,2,1,2) & \dots & k_{ry}(1,2,P,Q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{ry}(M,N,1,1) & k_{ry}(M,N,1,2) & \dots & k_{ry}(M,N,P,Q) \end{array} \right) \Bigg|_{x=x_r} \tag{D.20}$$

D.III.3. Cas particulier d'un renfort de longueur L_y

Il est démontré dans l'ANNEXE C section C.III que lorsque la longueur des renforts est égale à la dimension L_y de la plaque étendue alors les fonctions g_0 et g_1 sont nulles $\forall n \neq q$ et valent $L_y/2 \forall n = q$ traduisant un couplage d'une seule partie des modes de plaque étendue (les modes « P ») alors que lorsque la longueur est plus petite, tous les modes de plaque sont couplés.

Ce couplage est d'autant plus visible au niveau des matrices de masses et de raideurs. En effet, lorsque la longueur du renfort est égale à L_y alors ces matrices ne sont plus pleines. Elles gardent cependant toutes leurs autres propriétés à savoir réelles, symétriques et carrées. Pour un renfort orienté selon la direction \mathbf{y} , les matrices de masses et de raideurs sont des matrices par blocs, dont la taille est égale à l'ordre de troncature M . L'équation suivante

illustre ce cas particulier pour un ordre de troncature faible de $(M, N) = (4, 3)$ où A_{mnpq} peut désigner arbitrairement $k_{ry}(m, n, p, q)$ ou $m_{ry}(m, n, p, q)$:

$$\left(\begin{array}{cccc}
 A_{1111} & A_{1121} & A_{1131} & A_{1141} \\
 A_{2111} & A_{2121} & A_{2131} & A_{2141} \\
 A_{3111} & A_{3121} & A_{3131} & A_{3141} \\
 A_{4111} & A_{4121} & A_{4131} & A_{4141} \\
 & & & \\
 & & A_{1212} & A_{1222} & A_{1232} & A_{1242} \\
 & & A_{2212} & A_{2222} & A_{2232} & A_{2242} \\
 & & A_{3212} & A_{3222} & A_{3232} & A_{3242} \\
 & & A_{4212} & A_{4222} & A_{4232} & A_{4242} \\
 & & & & & \\
 & & & & & A_{1313} & A_{1323} & A_{1333} & A_{1343} \\
 & & & & & A_{2313} & A_{2323} & A_{2333} & A_{2343} \\
 & & & & & A_{3313} & A_{3323} & A_{3333} & A_{3343} \\
 & & & & & A_{4313} & A_{4323} & A_{4333} & A_{4343}
 \end{array} \right) \quad (0) \quad (D.21)$$

(sym)

D.IV. Renfort orienté dans la direction x

L'obtention des matrices de masses et de raideurs d'un renfort placé en y_c orienté dans la direction x répond à la même démarche que celle développée dans la section D.III pour un renfort orienté dans la direction perpendiculaire. Le « sous-Lagrangien » associé à une telle superstructure est calculé en section C.IV de l'ANNEXE C et donné par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{renfort\ x} = & \frac{1}{2} \left[\rho_c \left(H_c b_c \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0 \right. \right. \\
 & + I_{fc} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_1 \\
 & + I_{gc} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \dot{a}_{mn}(t) \dot{a}_{pq}(t) \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0 \left. \right) \\
 & - \left(E_c I_{fc} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \left(\frac{p\pi}{L_x}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0 \right. \\
 & \left. + G_c I_{gc} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{mn}(t) a_{pq}(t) \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_1 \right) \left. \right] \quad (D.22)
 \end{aligned}$$

Les fonctions g_0 et g_1 sont définies à la section C.IV de l'ANNEXE C.

D.IV.1. Matrice de masses généralisées

Une nouvelle fois les termes de masses généralisées s'obtiennent par la minimisation du Lagrangien sur la dérivée temporelle de la variable modale \dot{a}_{mn} , soit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_{renfort\ x}}{\partial \dot{a}_{mn}} = & \rho_c \left(H_c b_c \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \ddot{a}_{pq}(t) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0 \right. \\ & + I_{fc} \frac{m\pi}{L_x} \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \ddot{a}_{pq}(t) \frac{p\pi}{L_x} \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_1 \\ & \left. + I_{gc} \frac{n\pi}{L_y} \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q \ddot{a}_{pq}(t) \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0 \right) \end{aligned} \quad (D.23)$$

De même qu'en section D.III relative à un renfort orienté dans la direction x , on distingue deux contributions distinctes dans cette expression, l'une venant des ondes de flexion et l'autre des ondes de torsion. Posons alors la fonction $m_{rx}(m, n, p, q)$ représentant les termes de masses généralisées associés à un renfort placé en $y = y_c$, compris entre x_i et x_f :

$$\begin{aligned} m_{rx}(m, n, p, q) = & H_c b_c \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0(m, p, x_i x_f, L_x) \quad (flexion) \\ & + I_{fc} \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_1(m, p, x_i x_f, L_x) \quad (flexion) \\ & + I_{gc} \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0(m, p, x_i x_f, L_x) \quad (torsion) \end{aligned} \quad (D.24)$$

Alors la matrice de masse à coefficients réels, carrée, symétrique et pleine, notée $\bar{\bar{M}}_{renfort\ x}$ est donnée par :

$$\bar{\bar{M}}_{renfort\ x} = \rho_c \left(\begin{array}{cccc} m_{rx}(1,1,1,1) & m_{rx}(1,1,1,2) & \dots & m_{rx}(1,1,P,Q) \\ m_{rx}(1,2,1,1) & m_{rx}(1,2,1,2) & \dots & m_{rx}(1,2,P,Q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{rx}(M,N,1,1) & m_{rx}(M,N,1,2) & \dots & m_{rx}(M,N,P,Q) \end{array} \right) \Bigg|_{y=y_c} \quad (D.25)$$

D.IV.2. Matrice de raideurs généralisées

L'obtention des termes de la matrice de raideur vient de la minimisation du « sous Lagrangien » sur les variables modales a_{mn} :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \mathcal{L}_{renfort\ x}}{\partial a_{mn}} = & E_c I_{fc} \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \left(\frac{p\pi}{L_x}\right)^2 \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0 \\
 & + G_c I_{gc} \frac{m\pi}{L_x} \frac{n\pi}{L_y} \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sum_{p=1}^P \sum_{q=1}^Q a_{pq}(t) \frac{p\pi}{L_x} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_1
 \end{aligned} \tag{D.26}$$

De la même manière, les contributions venant des ondes de flexion et de torsion peuvent être distinguées. Posons la fonction $k_{rx}(m, n, p, q)$ représentant les termes de masses généralisées associés à un renfort placé en $y = y_c$, compris entre x_i et x_f :

$$\begin{aligned}
 k_{rx}(m, n, p, q) = & E_c I_{fc} \left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 \left(\frac{p\pi}{L_x}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \sin\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_0(m, p, x_i x_f, L_x) \quad (flexion) \\
 & + G_c I_{gc} \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{q\pi}{L_y} \cos\left(\frac{n\pi}{L_y} y_c\right) \cos\left(\frac{q\pi}{L_y} y_c\right) g_1(m, p, x_i x_f, L_x) \quad (torsion)
 \end{aligned} \tag{D.27}$$

D'où il découle la matrice de raideurs, elle aussi à coefficients réels, carrée, symétrique et pleine, notée $\bar{\bar{K}}_{renfort\ x}$ donnée par :

$$\bar{\bar{K}}_{renfort\ x} = \left(\begin{array}{cccc} k_{rx}(1,1,1,1) & k_{rx}(1,1,1,2) & \dots & k_{rx}(1,1,P,Q) \\ k_{rx}(1,2,1,1) & k_{rx}(1,2,1,2) & \dots & k_{rx}(1,2,P,Q) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{rx}(M,N,1,1) & k_{rx}(M,N,1,2) & \dots & k_{rx}(M,N,P,Q) \end{array} \right) \Bigg|_{y=y_c} \tag{D.28}$$

D.IV.3. Cas particulier d'un renfort de longueur L_x

La présence de renforts induit des couplages des modes de plaque étendue, signature de la perturbation des déformées propres des modes de la plaque. Lorsque la longueur des superstructures est comprise entre deux bornes arbitraires (définies par x_i et x_f dans le cas d'un renfort selon \mathbf{y}) un couplage de l'ensemble des modes de plaque simplement supportée apparaît.

Le cas où ces bornes sont 0 et L_x représente un cas particulier pour lequel seul une partie des modes sont couplés : les modes « Q ». De la même façon que dans l'ANNEXE C section C.III, on montre que lorsque la longueur des renforts est égale à la dimension L_x de la plaque étendue alors les fonctions g_0 et g_1 sont nulles $\forall m \neq p$ et valent $L_x/2 \forall m = p$.

D'un point de vue matriciel, lorsque la longueur du renfort est égale à L_x , on constate que les matrices ne sont plus pleines tout en restant symétriques et carrées et à coefficients

réels. De façon analogue au cas précédent présenté en section D.III.3 de cette annexe, ces matrices sont constituées de blocs mais dont l'agencement est clairement différent, où chacun d'entre eux constitue une matrice diagonale. Pour illustrer ce cas particulier, on considère un ordre de troncature faible de $(M, N) = (4, 3)$ où A_{mnpq} peut désigner arbitrairement $k_{rx}(m, n, p, q)$ ou $m_{rx}(m, n, p, q)$:

$$\left(\begin{array}{ccc}
 \boxed{\begin{array}{ccc} A_{1111} & & (0) \\ & A_{2121} & \\ (0) & & A_{3131} \\ & & & A_{4141} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{ccc} A_{1112} & & (0) \\ & A_{2122} & \\ (0) & & A_{3132} \\ & & & A_{4142} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{ccc} A_{1113} & & (0) \\ & A_{2123} & \\ (0) & & A_{3133} \\ & & & A_{4143} \end{array}} \\
 & \boxed{\begin{array}{ccc} A_{1212} & & (0) \\ & A_{2222} & \\ (0) & & A_{3232} \\ & & & A_{4242} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{ccc} A_{1213} & & (0) \\ & A_{2223} & \\ (0) & & A_{3233} \\ & & & A_{4243} \end{array}} \\
 & & \boxed{\begin{array}{ccc} A_{1313} & & (0) \\ & A_{2323} & \\ (0) & & A_{3333} \\ & & & A_{3343} \end{array}}
 \end{array} \right) \quad (D.29)$$

(sym)

ANNEXE E

DEFORMEES MODALES D'UNE PLAQUE SIMPLEMENT SUPPORTEE DANS L'ESPACE DES NOMBRES D'ONDES

Cette annexe est un préambule à l'ANNEXE F. Dans un premier temps, le passage dans l'espace des nombres d'ondes d'un mode de plaque simplement supportée rectangulaire sera présenté. Puis, nous nous intéresserons à la parité du produit de deux modes distincts, et ce, toujours dans l'espace des nombres d'ondes.

E.I. Passage dans l'espace des nombres d'ondes

On note $\tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y)$ la transformée de Fourier bidimensionnelle d'un mode $\phi_{mn}(x, y)$ fonction d'espace, soit :

$$\tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \phi_{mn}(x, y) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dx dy \quad (\text{E.1})$$

Les déformées modales en variables spatiales d'une plaque simplement supportée rectangulaire étant bien connues et leurs expressions démontrées en ANNEXE B tel que

$$\phi_{mn}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi}{L_x} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L_y} y\right) \quad (\text{E.2})$$

il est alors possible de traiter les deux intégrales sur x et y de façon séparée. On s'intéresse à l'intégrale sur x dont les bornes peuvent être réduites du fait des dimensions finies de l'objet :

$$\int_{x=-\infty}^{+\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) e^{-jk_x x} dx = \int_{x=0}^{L_x} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) e^{-jk_x x} dx \quad (\text{E.3})$$

En appliquant la formule d'Euler au sinus, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{x=0}^{L_x} \sin\left(\frac{m\pi}{L_x}x\right) e^{-jk_x x} dx &= \frac{1}{2j} \int_{x=0}^{L_x} e^{j\left(\frac{m\pi}{L_x} - k_x\right)x} dx - \frac{1}{2j} \int_{x=0}^{L_x} e^{-j\left(\frac{m\pi}{L_x} + k_x\right)x} dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{e^{j\left(\frac{m\pi}{L_x} - k_x\right)L_x} - 1}{\frac{m\pi}{L_x} - k_x} + \frac{e^{-j\left(\frac{m\pi}{L_x} + k_x\right)L_x} - 1}{\frac{m\pi}{L_x} + k_x} \right] \\ &= \frac{\frac{m\pi}{L_x} - \left[\frac{m\pi}{L_x} \cos(m\pi) + jk_x \sin(m\pi) \right] e^{-jk_x L_x}}{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 - k_x^2} \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

On peut alors discrétiser les valeurs de $\cos(m\pi)$ et $\sin(m\pi)$ selon les valeurs de $m \in \mathbf{N}^*$:

$$\begin{cases} \cos(m\pi) = 1 & \forall m \text{ pair} \in \mathbf{N}^* \\ \cos(m\pi) = -1 & \forall m \text{ impair} \in \mathbf{N}^* \\ \sin(m\pi) = 0 & \forall m \in \mathbf{N}^* \end{cases} \quad (\text{E.5})$$

L'expression de $\tilde{\Phi}_{mn}(k_x, k_y)$ est alors :

$$\tilde{\Phi}_{mn}(k_x, k_y) = \frac{m\pi}{L_x} \frac{n\pi}{L_y} \frac{1 - (1)^m e^{-jk_x L_x}}{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 - k_x^2} \frac{1 - (1)^n e^{-jk_y L_y}}{\left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 - k_y^2} \quad (\text{E.6})$$

E.II. Parité du produit de deux déformées modales dans l'espace des nombres d'ondes

Cette partie étudie la parité du produit $\tilde{\Phi}_{mn}(k_x, k_y)\tilde{\Phi}_{pq}^*(k_x, k_y)$ en fonction des valeurs de (m, n, p, q) où $\tilde{\Phi}_{pq}^*(k_x, k_y)$ désigne le complexe conjugué de $\tilde{\Phi}_{pq}(k_x, k_y)$. On obtient :

$$\tilde{\Phi}_{mn}(k_x, k_y) \tilde{\Phi}_{pq}^*(k_x, k_y) = \frac{m\pi}{L_x} \frac{p\pi}{L_x} \frac{n\pi}{L_y} \frac{q\pi}{L_y} N_x(m, p, k_x) N_y(n, q, k_y)$$

$$N_x(m, p, k_x) = \frac{1 - (1)^m e^{-jk_x L_x}}{\left(\frac{m\pi}{L_x}\right)^2 - k_x^2} \frac{1 - (1)^p e^{+jk_x L_x}}{\left(\frac{p\pi}{L_x}\right)^2 - k_x^2} \quad (\text{E.7})$$

$$N_y(n, q, k_y) = \frac{1 - (1)^n e^{-jk_y L_y}}{\left(\frac{n\pi}{L_y}\right)^2 - k_y^2} \frac{1 - (1)^q e^{+jk_y L_y}}{\left(\frac{q\pi}{L_y}\right)^2 - k_y^2}$$

Quatre cas existent pour la fonction $N_x(m, p, k_x)$:

- m pair $\leftrightarrow m \text{ modulo } 2 = 0$
- m impair $\leftrightarrow m \text{ modulo } 2 = 1$
- p pair $\leftrightarrow p \text{ modulo } 2 = 0$
- p impair $\leftrightarrow p \text{ modulo } 2 = 1$

Le dénominateur de $N_x(m, p, k_x)$ est pair. En fonction des cas précédemment cités, on donne les expressions simplifiées des numérateurs dans le tableau ci-dessous :

	$1 - (1)^m e^{-jk_x L_x}$		$1 - (1)^p e^{+jk_x L_x}$
$m \text{ modulo } 2 = 0$	$1 - e^{-jk_x L_x}$	$p \text{ modulo } 2 = 0$	$1 - e^{+jk_x L_x}$
$m \text{ modulo } 2 = 1$	$1 + e^{-jk_x L_x}$	$p \text{ modulo } 2 = 1$	$1 + e^{+jk_x L_x}$

D'où les différentes fonctions combinées possibles selon les parités du couple (m, p) :

	$p \text{ modulo } 2 = 0$	$p \text{ modulo } 2 = 1$
$m \text{ modulo } 2 = 0$	$2 - 2 \cos(k_x L_x)$	$2j \sin(k_x L_x)$
$m \text{ modulo } 2 = 1$	$-2j \sin(k_x L_x)$	$2 + 2 \cos(k_x L_x)$

Il vient alors la parité de la fonction $N_x(m, p, k_x)$:

	$p \text{ modulo } 2 = 0$	$p \text{ modulo } 2 = 1$
$m \text{ modulo } 2 = 0$	Pair	Impair
$m \text{ modulo } 2 = 1$	Impair	Pair

Ainsi, une intégrale symétrique de la fonction $N_x(m, p, k_x)$ est nulle lorsque m et p sont de parités différentes. Il en est évidemment de même pour $N_y(n, q, k_y)$. Le tableau ci dessous donne alors la valeur de $\int_{-\alpha}^{+\alpha} \tilde{\Phi}_{mn}(k_x, k_y) \tilde{\Phi}_{pq}^*(k_x, k_y) dk_x dk_y$ en fonction des valeurs de (m, n, p, q) :

	$m \text{ modulo } 2 = p \text{ modulo } 2$	$m \text{ modulo } 2 \neq p \text{ modulo } 2$
$n \text{ modulo } 2 = q \text{ modulo } 2$	$\neq 0$	$= 0$
$n \text{ modulo } 2 \neq q \text{ modulo } 2$	$= 0$	$= 0$

ANNEXE F

IMPEDANCES DE RAYONNEMENT ACOUSTIQUE D'UNE PLAQUE BAFFLEE

Cette annexe introduit la notion d'impédances de rayonnement acoustique [Lesu88, Wall72], en particulier dans le cas d'une plaque bafflée rectangulaire dont les conditions aux limites sont simplement supportées. Celle ci est entourée d'un fluide léger.

F.I. Hypothèses

Plusieurs hypothèses fortes sont posées qui font de cette annexe dédiée au rayonnement acoustique un cas particulier. On suppose la plaque simplement supportée (déformées propres dédiées), bafflée et le fluide léger homogène, soit :

- La plaque est inscrite dans le plan (x, y) et ses déformées propres $\phi_{mn}(x, y)$ sont de formes connues,
- Baffle : absence de court circuit acoustique entre les deux demi-espaces supérieurs et inférieurs,
- Fluide environnant homogène et semi infini dans les deux demi-espaces $z \geq 0$ et $z \leq 0$,
- Le rayonnement est supposé symétrique dans les deux demi-espaces.

F.II. Équations du problème

En régime harmonique, le comportement d'une plaque isotrope est gouverné par l'équation suivante où la pression acoustique pariétale P_a s'applique sur toute sa surface :

$$D\nabla^4 w(x, y) - \omega^2 \rho h w(x, y) = F(x_e, y_e) - p_a(x, y) \quad (\text{F.1})$$

avec $w(x, y)$ le déplacement transversal, D la rigidité dynamique, ρ la masse volumique du matériau de la plaque, h son épaisseur, ∇^4 l'opérateur nabla (bi Laplacien) et ω la pulsation.

$F(x_e, y_e)$ est un effort extérieur appliqué aux coordonnées (x_e, y_e) et $p_a(x, y)$ la pression acoustique pariétale (charge acoustique).

Du fait de la symétrie du rayonnement dans les deux demi-espaces supérieur et inférieur et de l'absence de court-circuits acoustiques, on ne s'intéresse qu'au demi-espace supérieur $z \geq 0$. Le comportement du fluide est gouverné par l'équation de Helmholtz qui en régime harmonique est donnée par :

$$\frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial z^2} + k^2 p(x, y, z) = 0 \quad (\text{F.2})$$

où $p(x, y, z)$ désigne la pression dans le demi-espace $z \geq 0$ et $k = \frac{\omega}{c}$ le nombre d'onde acoustique tel que c est la célérité de l'onde dans le fluide.

L'équation d'Euler donne le lien entre la variation de pression et la vitesse particulière du fluide au point $M \in z \geq 0$ dans la direction du vecteur \mathbf{n} :

$$\frac{j}{\rho_0 c} \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial n} = v_n(x, y, z) \quad (\text{F.3})$$

où ρ_0 désigne la masse volumique du fluide, c la célérité des ondes dans le milieu et $v_n(x, y, z)$ la vitesse particulière dans la direction \mathbf{n} . En régime harmonique, on peut écrire la relation suivante qui lie le déplacement particulier du fluide et le gradient de pression dans la direction \mathbf{z} normale à la plaque :

$$\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} = \rho_0 \omega^2 u_z(x, y, z) \quad (\text{F.4})$$

où $u_z(x, y, z)$ est le déplacement particulier dans la direction \mathbf{z} . Il y a égalité des déplacements particuliers du fluide et de la plaque sur toute sa surface S_p . De plus, étant bafflée, $u_z(x, y, z = 0)$ est nul en dehors de cette surface, soit à la côte $z = 0$:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial p(x, y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \rho_0 \omega^2 u_z(x, y, z = 0) = \rho_0 \omega^2 w(x, y) & \forall M \in S_p \\ u_z(x, y, z = 0) = 0 & \forall M \notin S_p \end{cases} \quad (\text{F.5})$$

F.III. Passage dans l'espace des nombres d'ondes

Une façon de trouver une solution à l'équation de Helmholtz consiste à passer dans le domaine des nombres d'ondes via une transformée de Fourier bidimensionnelle sur les variables x et y . Pour la pression acoustique, on obtient alors :

$$\tilde{p}(k_x, k_y, z) = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} p(x, y, z) e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dx dy \quad (\text{F.6})$$

Concernant les dérivées spatiales de la pression le résultat est moins direct. Par la suite on mènera le calcul uniquement pour $\frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial x^2}$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}(k_x, k_y, z)}{\partial x^2} = \int_{x=-\infty}^{+\infty} \int_{y=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial x^2} e^{-jk_x x} e^{-jk_y y} dx dy \quad (\text{F.7})$$

En isolant l'intégrale sur x et en menant deux Intégrations Par Partie, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 p(x, y, z)}{\partial x^2} e^{-jk_x x} dx = \left[\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} e^{-jk_x x} + jk_x p(x, y, z) e^{-jk_x x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - k_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y, z) e^{-jk_x x} dx \quad (\text{F.8})$$

L'espace étant semi-infini, les termes $\left[\frac{\partial p(x, y, z)}{\partial x} e^{-jk_x x} + jk_x p(x, y, z) e^{-jk_x x} \right]_{-\infty}^{+\infty}$ sont supposés nuls. Cette hypothèse devra être vérifiée ultérieurement. On a alors :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}(k_x, k_y, z)}{\partial x^2} = -k_x^2 \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y, z) e^{-jk_x x} dx = -k_x^2 \tilde{p}(k_x, k_y, z) \quad (\text{F.9})$$

De même pour la dérivée sur la variable y :

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}(k_x, k_y, z)}{\partial y^2} = -k_y^2 \tilde{p}(k_x, k_y, z) \quad (\text{F.10})$$

Ainsi dans l'espace des nombres d'ondes, l'équation de Helmholtz devient :

$$k_z^2 \tilde{p}(k_x, k_y, z) + \frac{\partial^2 \tilde{p}(k_x, k_y, z)}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{F.11})$$

tel que $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$. Une solution évidente de cette équation différentielle du second ordre est :

$$\tilde{p}(k_x, k_y, z) = Ae^{jk_z z} + Be^{-jk_z z} \quad (\text{F.12})$$

L'espace étant considéré comme semi infini, il n'y a pas d'onde retour (condition de Sommerfeld). On a donc $A = 0$. La détermination de la constante B passe par l'application de la condition aux limites à l'interface fluide/plaque (plaque bafflée). On exprime donc également l'équation d'Euler dans l'espace des nombres d'ondes :

$$\left. \frac{\partial \tilde{p}(k_x, k_y, z)}{\partial z} \right|_{z=0} = \rho_0 \omega^2 \tilde{w}(k_x, k_y) \quad (\text{F.13})$$

Finalement, en appliquant cette condition aux limites d'interface à l'expression de $\tilde{p}(k_x, k_y, z)$, il vient :

$$\tilde{p}(k_x, k_y, z) = \frac{j\rho_0 \omega^2}{k_z} \tilde{w}(k_x, k_y) e^{-jk_z z} \quad (\text{F.14})$$

avec $B = \frac{j\rho_0 \omega^2}{k_z} \tilde{w}(k_x, k_y)$.

F.IV. Retour dans le domaine spatial

Pour revenir à la pression $p(x, y, z)$, on utilise une transformée de Fourier bidimensionnelle inverse :

$$p(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{k_x=-\infty}^{+\infty} \int_{k_y=-\infty}^{+\infty} \tilde{p}(k_x, k_y, z) e^{+jk_x x} e^{+jk_y y} dk_x dk_y \quad (\text{F.15})$$

à laquelle on substitue $\tilde{p}(k_x, k_y, z)$ par son expression en fonction de la transformée de Fourier du déplacement transversal de la plaque :

$$p(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{k_x=-\infty}^{+\infty} \int_{k_y=-\infty}^{+\infty} \frac{j\rho_0\omega^2}{k_z} \tilde{w}(k_x, k_y) e^{-jk_z z} e^{jk_x x} e^{jk_y y} dk_x dk_y \quad (\text{F.16})$$

Cette expression de la pression dans le milieu fluide montre que le rayonnement est une superposition d'ondes planes au sein desquelles on distingue deux cas :

- Ondes progressives : lorsque k_z est réel $k_x^2 + k_y^2 < k^2$
- Ondes évanescentes : lorsque k_z est imaginaire $k_x^2 + k_y^2 > k^2$

Nous verrons dans la suite que ces deux types d'ondes agissent sur la structure par des actions de type résistance et inertielle [Lesu88].

La pression pariétale $p_a(x, y) = p(x, y, z = 0)$ s'exprime simplement par :

$$p_a(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{k_x=-\infty}^{+\infty} \int_{k_y=-\infty}^{+\infty} \frac{j\rho_0\omega^2}{k_z} \tilde{w}(k_x, k_y) e^{jk_x x} e^{jk_y y} dk_x dk_y \quad (\text{F.17})$$

La plaque étant finie, son mouvement peut se décomposer sur la base de ses modes propres. Il en est de même dans le domaine des nombres d'ondes. On a :

$$\tilde{w}(k_x, k_y) = \sum_m^M \sum_n^N a_{mn}(\omega) \tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y) \quad (\text{F.18})$$

Le calcul de $\tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y)$ est présenté en ANNEXE E. L'expression de la pression pariétale devient alors :

$$p_a(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{k_x=-\infty}^{+\infty} \int_{k_y=-\infty}^{+\infty} \frac{j\rho_0\omega^2}{k_z} \sum_m^M \sum_n^N a_{mn}(\omega) \tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y) e^{jk_x x} e^{jk_y y} dk_x dk_y \quad (\text{F.19})$$

Dans l'optique d'aborder le problème sous forme matricielle généralisée, on définit \mathbf{P}_a le vecteur des efforts généralisés résultant de la pression pariétale. On désigne P_{pq} chaque terme de ce vecteur :

$$\begin{aligned}
 P_{pq} &= \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \phi_{pq}(x, y) p_a(x, y) dx dy \\
 &= \int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \frac{1}{4\pi^2} \phi_{pq}(x, y) \int_{k_x=-\infty}^{+\infty} \int_{k_y=-\infty}^{+\infty} \frac{j\rho_0\omega^2}{k_z} \sum_m^M \sum_n^N a_{mn}(\omega) \tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y) e^{+jk_x x} e^{+jk_y y} dk_x dk_y dx dy \quad (\text{F.20}) \\
 &= \frac{j\rho_0\omega^2}{4\pi^2} \sum_m^M \sum_n^N a_{mn}(\omega) \int_{k_x=-\infty}^{+\infty} \int_{k_y=-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y)}{k_z} \left[\int_{x=0}^{L_x} \int_{y=0}^{L_y} \phi_{pq}(x, y) e^{+jk_x x} e^{+jk_y y} dx dy \right] dk_x dk_y
 \end{aligned}$$

On reconnaît que le terme entre crochet désigne le conjugué de $\tilde{\phi}_{pq}(k_x, k_y)$, soit :

$$P_{pq} = \frac{j\rho_0\omega^2}{4\pi^2} \sum_m^M \sum_n^N a_{mn}(\omega) \int_{k_x=-\infty}^{+\infty} \int_{k_y=-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)}{k_z} dk_x dk_y \quad (\text{F.21})$$

On définit alors l'impédance intermodale de rayonnement acoustique comme un amortissement dû au fluide tel que :

$$P_{pq} = j\omega \sum_m^M \sum_n^N a_{mn}(\omega) Z_{mnpq}(\omega) \quad (\text{F.22})$$

avec :

$$Z_{mnpq}(\omega) = \frac{\rho_0\omega}{4\pi^2} \int_{k_x=-\infty}^{+\infty} \int_{k_y=-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y \quad (\text{F.23})$$

La parité de la fonction intégrée nous permet de réduire les bornes de l'intégrale (voir ANNEXE E). On distingue donc deux cas :

- Les couples (m, p) et/ou (n, q) sont de parités différentes : la fonction est impaire et $Z_{mnpq}(\omega) = 0$
- Les couples (m, p) et (n, q) sont de même parité : la fonction est paire et $Z_{mnpq}(\omega) \neq 0$

Dans le second cas, on peut donc écrire :

$$Z_{mnpq}(\omega) = \frac{\rho_0\omega}{\pi^2} \int_{k_x=0}^{+\infty} \int_{k_y=0}^{+\infty} \frac{\tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y \quad (\text{F.24})$$

En transposant cette expression sous forme matricielle, les termes diagonaux représentent l'action directe des modes sur eux mêmes et le champ de pression généré par un mode (m, n) agit sur son propre comportement. A l'inverse, les termes extra-diagonaux représentent l'influence du rayonnement produit par un mode sur un autre.

Comme nous l'avons souligné, les deux types d'ondes produites par la structure n'ont pas les mêmes conséquences sur son comportement. Les ondes progressives (champ lointain) correspondent à la partie réelle de cette matrice d'impédance intermodale. Cette dernière oppose une résistance au déplacement transversal de la structure et modifie par conséquent l'amortissement in vacuo. La partie imaginaire provient quant à elle des ondes évanescentes (champ proche) et correspond à une action inertielle du fluide sur la structure : l'opérateur de masse de la structure est modifié et les fréquences propres diminuent [Lesu88].

En pratique, nous supposons négligeable la charge acoustique pariétale dans la réponse vibratoire. L'interaction entre le fluide et la structure est supposée prise en considération dans les termes du modèle d'amortissement que nous utiliserons. Ce modèle ne prendra en compte que les actions résistives et non les actions inertielles puisque notre matrice d'amortissement (en facteur de $j\omega$) est réelle. Dans le cas d'un fluide léger comme l'air, cette considération est habituellement admise.

Finalement, la notion d'impédance de rayonnement acoustique est utilisée dans le seul but de calculer la puissance rayonnée par la plaque. Pour cela, il est seulement nécessaire de calculer la partie réelle de la matrice des $Z_{mnpq}(\omega)$. Cela revient à intégrer sur la surface du cercle de rayon k (nombre d'onde). On a alors, $R_{mnpq}(\omega) = \text{Real}(Z_{mnpq}(\omega))$:

$$R_{mnpq}(\omega) = \frac{\rho_0 \omega}{\pi^2} \int_{k_x=0}^k \int_{k_y=0}^k \frac{\tilde{\phi}_{mn}(k_x, k_y) \tilde{\phi}_{pq}^*(k_x, k_y)}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2}} dk_x dk_y \quad (\text{F.25})$$

ANNEXE G

SCHEMA AUX DIFFERENCES FINIES CENTREES ET FORMULATION INTEGRALE TEMPORELLE

Cette annexe est constituée d'un rappel sur l'origine mathématique du schéma aux différences finies centrées. Dans un deuxième temps, nous traiterons de la formulation intégrale en temps qui est utilisée pour calculer le rayonnement acoustique dans le CHAPITRE IV.

G.I. Schéma aux différences finies centrées

L'approximation des termes de vitesses et d'accélération est une condition *sine qua non* pour résoudre les problèmes d'EDP dans le domaine temporel. Une méthode est d'introduire un schéma aux différences finies centrées. Pour ce faire, partons de la définition de la dérivée première d'une fonction continue :

$$\dot{f}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - f\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} \quad (\text{G.1})$$

En considérant un intervalle de temps suffisamment petit, il est acceptable de supposer que la limite devient une égalité. On donne alors les relations suivantes permettant d'approximer la dérivée première et, par combinaison, la dérivée seconde d'une fonction continue :

$$\begin{aligned} \dot{f}(t) &= \frac{f\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - f\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} \\ \ddot{f}(t) &= \frac{\dot{f}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right) - \dot{f}\left(t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - 2f(t) + f(t - \Delta t)}{\Delta t^2} \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Numériquement, déterminer les solutions d'un système d'équations aux dérivés partielles ou généralisées nécessite une discrétisation sur le domaine temporel. L'approximation des vitesses doit être élargie sur une période de $2\Delta t$ afin de pouvoir être incrémentée dans un code de calcul. Il vient alors le schéma explicite aux différences finies centrées suivant :

$$\begin{cases} \dot{f}^i = \frac{f^{i+1} - f^{i-1}}{2\Delta t} \\ \ddot{f}^i = \frac{f^{i+1} - 2f^i + f^{i-1}}{\Delta t^2} \end{cases} \quad (G.3)$$

G.II. Formulation intégrale temporelle

Pour les structures bafflées, de parois plane et encadrées de deux milieux semi-infinis, l'utilisation de sources images permet de s'affranchir du calcul du terme dipolaire présent classiquement dans les formulations intégrales. On donne le schéma de principe Figure G-1 représentant une structure vibrante en appui simple bafflée.

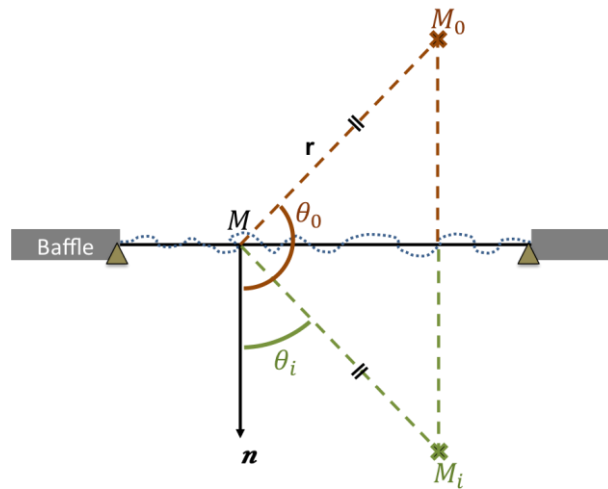


Figure G-1 : Schéma de principe de la formulation intégrale d'une source bafflée plane utilisant le principe des sources images.

Chaque demi-espace répond à l'équation de Helmholtz. Le point d'écoute est placé dans le demi-espace supérieur et noté M_0 auquel est associé la fonction de Green G_0 . La position du point d'écoute est donnée par la distance r depuis le point courant M sur l'objet et par l'angle θ_0 défini par rapport à la normale en M . La source image M_i de M_0 est placée dans le demi-espace inférieur et la fonction de Green associée, qui est par ailleurs le symétrique de G_0 , est notée G_i . La fonction de Green complète vaut alors $G = G_0 + G_i$ et la pression au point d'écoute est donnée par l'intégrale de Rayleigh où les termes dipolaires se simplifient grâce à la symétrie des sources :

$$P(M_0, \omega) = \rho_{air} \omega^2 \int_S w(M, \omega) G(M, M_0, \omega) dS - \int_S \left[\frac{\partial G_0}{\partial r} \cos(\theta_0) + \frac{\partial G_i}{\partial r} \cos(\theta_i) \right] P(M) dS \quad (G.4)$$

$$= \rho_{air} \omega^2 \int_S w(M, \omega) G(M, M_0, \omega) dS \quad \forall M \in \text{Surface de la table}$$

puisque $\frac{\partial G_0}{\partial r} = \frac{\partial G_i}{\partial r}$ et $\cos(\theta_0) = -\cos(\theta_i)$. La masse volumique de l'air est notée ρ_{air} et vaut $1,184 \text{ kg/m}^3$.

La pression au point d'écoute en temps est alors donnée par la transformée de Fourier inverse de l'équation (G.4) dans le domaine fréquentiel. Soit :

$$\begin{aligned} P(M_0, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} P(M_0, \omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= -\rho_{air} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_S \ddot{w}(M, \omega) G(M, M_0, \omega) e^{j\omega t} dS d\omega \end{aligned} \quad (G.5)$$

avec $\ddot{w}(M, \omega) = -\omega^2 w(M, \omega)$ l'accélération de la structure. Sachant que le produit de convolution entre deux fonctions est défini par

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) g(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (G.6)$$

l'équation (G.6) se reformule plus simplement tel que :

$$\begin{aligned} P(M_0, t) &= -\rho_{air} \int_S \ddot{w}(M, t) * G(M, M_0, t) dS \\ &= -\rho_{air} \int_S \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{w}(M, t) G(M, M_0, t - \tau) d\tau dS \end{aligned} \quad (G.7)$$

La fonction de Green s'exprime dans le domaine temporel par :

$$\begin{aligned} G(M, M_0, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(M, M_0, \omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{j\omega(t-r/c)}}{2\pi r} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right) \end{aligned} \quad (G.8)$$

car par définition $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega$. Il vient donc l'expression suivante de la pression au point d'écoute dans le domaine temporel :

$$P(M_0, t) = -\rho_{air} \int_S \frac{\ddot{w}\left(M, t - \frac{r}{c}\right)}{2\pi r} dS \quad (G.9)$$

Cette formulation intégrale met en évidence un retard de r/c entre les contributions des différents points courants sur la table, qui dépend des temps de trajet jusqu'au point d'écoute. Il faut néanmoins que la discrétisation spatiale soit adaptée à l'éloignement du point d'écoute de la structure. Il est coutume de considérer deux cas :

- Champ proche : critère vibratoire dépendant des longueurs d'onde de flexion de la structure vibrante,
- Champ lointain : critère acoustique basé sur la propagation des ondes dans le fluide.

ANNEXE H

FORMALISME TEMPOREL DISCRET

La réponse temporelle des équations couplées cordes / table d'harmonie se base sur une résolution discrète via un schéma explicite aux différences finies. Le corps du manuscrit s'arrête à l'expression de ces équations après discrétisation. Cette annexe, hautement calculatoire, propose d'isoler les termes à calculer de façon à donner des expressions compactes des efforts de contacts transversaux et longitudinaux ainsi que des vecteurs amplitudes modales de la table d'harmonie et de la corde.

En outre, les termes correspondant aux non linéarités géométriques (symbolisés en rouge) de la corde sont ajoutés comme second membre des équations. De cette façon cette annexe s'applique au calcul complet prenant en compte les non-linéarités (section IV.D du CHAPITRE IV) et au calcul linéaire simplifié tel que présenté dans la section IV.B et pour lequel il suffit simplement d'omettre les termes non-linéaires. Dans un second temps, le calcul sera initialisé en adéquation avec des conditions initiales réalistes.

H.I. Détermination des inconnues du problème

Le point de départ de cette partie est le système d'équations (IV.17) déterminé dans la sous-section IV.B.4 auquel les non-linéarités sont ajoutées comme des termes supplémentaires, symbolisés en rouge, aux seconds membres des équations de cordes. Pour en alléger la lecture, une première série de constantes est posée. On donne :

$$\overline{\overline{OT1}} = \left[\frac{\overline{\overline{m}}_T}{2\Delta t} + \frac{\overline{\overline{c}}_T}{2\Delta t} \right] \quad (\text{H.1})$$

$$\overline{\overline{OT2}} = \left[\overline{\overline{k}}_T - 2 \frac{\overline{\overline{m}}_T}{\Delta t^2} \right] \quad (\text{H.2})$$

$$\overline{\overline{OT3}} = \left[\frac{\overline{\overline{m}}_T}{2\Delta t} - \frac{\overline{\overline{c}}_T}{2\Delta t} \right] \quad (\text{H.3})$$

$$\overline{OL1} = \left[\frac{\overline{m}_L}{2\Delta t} + \frac{\overline{c}_L}{2\Delta t} \right] \quad (\text{H.4})$$

$$\overline{OL2} = \left[\overline{k}_L - 2 \frac{\overline{m}_L}{\Delta t^2} \right] \quad (\text{H.5})$$

$$\overline{OL3} = \left[\frac{\overline{m}_L}{2\Delta t} - \frac{\overline{c}_L}{2\Delta t} \right] \quad (\text{H.6})$$

$$\overline{TH1} = \left[\frac{\overline{M}_s}{2\Delta t} + \frac{\overline{C}_{TH}}{2\Delta t} \right] \quad (\text{H.7})$$

$$\overline{TH2} = \left[\overline{K}_s - 2 \frac{\overline{M}_s}{\Delta t^2} \right] \quad (\text{H.8})$$

$$\overline{TH3} = \left[\frac{\overline{M}_s}{2\Delta t} - \frac{\overline{C}_{TH}}{2\Delta t} \right] \quad (\text{H.9})$$

Soit la reformulation, plus légère, du système (IV.17) :

$$\begin{aligned} \overline{OT1} \mathbf{U}^{i+1} + \overline{OT2} \mathbf{U}^i + \overline{OT3} \mathbf{U}^{i-1} &= F_{mart}^i \cos(\theta_0) \boldsymbol{\psi}^{(1)}(x_0) - \lambda_T^i \boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) + \mathbf{F}_T^i \\ \overline{OL1} \mathbf{V}^{i+1} + \overline{OL2} \mathbf{V}^i + \overline{OL3} \mathbf{V}^{i-1} &= F_{mart}^i \sin(\theta_0) \boldsymbol{\psi}^{(2)}(x_0) - \lambda_L^i \boldsymbol{\psi}^{(2)}(L_V) + \mathbf{F}_L^i \\ \overline{TH1} \mathbf{b}^{i+1} + \overline{TH2} \mathbf{b}^i + \overline{TH3} \mathbf{b}^{i-1} &= \lambda_T^i {}^t\overline{T} \boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) - d \lambda_L^i {}^t\overline{T} \boldsymbol{\phi}_{,y}(x_e, y_e) \\ {}^t\boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) \mathbf{U}^{i+1} &= {}^t\boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) \overline{T} \mathbf{b}^{i+1} \\ {}^t\boldsymbol{\psi}^{(2)}(L_V) \mathbf{V}^{i+1} &= -d {}^t\boldsymbol{\phi}_{,y}(x_e, y_e) \overline{T} \mathbf{b}^{i+1} \end{aligned} \quad (\text{H.10})$$

En isolant les termes en $i + 1$ il vient :

$$\mathbf{U}^{i+1} = -\overline{OT1}^{-1} \overline{OT2} \mathbf{U}^i - \overline{OT1}^{-1} \overline{OT3} \mathbf{U}^{i-1} - \lambda_T^i \overline{OT1}^{-1} \boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) + F_{mart}^i \cos \theta_0 \overline{OT1}^{-1} \boldsymbol{\psi}^{(1)}(x_0) + \overline{OT1}^{-1} \mathbf{F}_T^i \quad (\text{H.11})$$

$$\mathbf{V}^{i+1} = -\overline{OL1}^{-1} \overline{OL2} \mathbf{V}^i - \overline{OL1}^{-1} \overline{OL3} \mathbf{V}^{i-1} - \lambda_L^i \overline{OL1}^{-1} \boldsymbol{\psi}^{(2)}(L_V) + F_{mart}^i \sin \theta_0 \overline{OL1}^{-1} \boldsymbol{\psi}^{(2)}(x_0) + \overline{OL1}^{-1} \mathbf{F}_L^i \quad (\text{H.12})$$

$$\mathbf{b}^{i+1} = -\overline{TH1}^{-1} \overline{TH2} \mathbf{b}^i - \overline{TH1}^{-1} \overline{TH3} \mathbf{b}^{i-1} + \lambda_T^i \overline{TH1}^{-1} {}^t\overline{T} \boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) - \lambda_L^i d \overline{TH1}^{-1} {}^t\overline{T} \boldsymbol{\phi}_{,y}(x_e, y_e) \quad (\text{H.13})$$

qui peuvent alors être réinjectés dans les relations de continuité pour faire disparaître les termes en $i + 1$:

$$\begin{aligned} {}^t\boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) \overline{OT1}^{-1} \overline{OT2} \mathbf{U}^i - {}^t\boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) \overline{OT1}^{-1} \overline{OT3} \mathbf{U}^{i-1} &+ {}^t\boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) \overline{OT1}^{-1} \mathbf{F}_T^i \\ &- \lambda_T^i {}^t\boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) \overline{OT1}^{-1} \boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) + F_{mart}^i \cos \theta_0 {}^t\boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) \overline{OT1}^{-1} \boldsymbol{\psi}^{(1)}(x_0) \\ &= - {}^t\boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) \overline{T} \overline{TH1}^{-1} \overline{TH2} \mathbf{b}^i - {}^t\boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) \overline{T} \overline{TH1}^{-1} \overline{TH3} \mathbf{b}^{i-1} \\ &+ \lambda_T^i {}^t\boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) \overline{T} \overline{TH1}^{-1} {}^t\overline{T} \boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) - \lambda_L^i d {}^t\boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) \overline{T} \overline{TH1}^{-1} {}^t\overline{T} \boldsymbol{\phi}_{,y}(x_e, y_e) \end{aligned} \quad (\text{H.14})$$

$$(\beta_1 + \beta_3)\lambda_T^i - \beta_4 d\lambda_L^i = {}^t\alpha_4 \mathbf{b}^i + {}^t\alpha_5 \mathbf{b}^{i-1} - {}^t\alpha_1 \mathbf{U}^i - {}^t\alpha_2 \mathbf{U}^{i-1} + {}^t\alpha_3 \mathbf{F}_T^i + F_{mart}^i \cos \theta_0 \beta_2 \quad (\text{H.36})$$

$$d\beta_7 \lambda_T^i - (d^2 \beta_8 + \beta_5) \lambda_L^i = {}^t\alpha_6 \mathbf{V}^i + {}^t\alpha_7 \mathbf{V}^{i-1} + d {}^t\alpha_9 \mathbf{b}^i + d {}^t\alpha_{10} \mathbf{b}^{i-1} - {}^t\alpha_8 \mathbf{F}_L^i - F_{mart}^i \sin \theta_0 \beta_6 \quad (\text{H.37})$$

ce qui est équivalent à :

$$\lambda_T^i = \frac{{}^t\alpha_4 \mathbf{b}^i + {}^t\alpha_5 \mathbf{b}^{i-1} - {}^t\alpha_1 \mathbf{U}^i - {}^t\alpha_2 \mathbf{U}^{i-1} + {}^t\alpha_3 \mathbf{F}_T^i + F_{mart}^i \cos \theta_0 \beta_2}{\beta_1 + \beta_3} + \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} d\lambda_L^i \quad (\text{H.38})$$

$$\begin{aligned} & \left[d^2 \beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - (d^2 \beta_8 + \beta_5) \right] \lambda_L^i \\ &= {}^t\alpha_6 \mathbf{V}^i + {}^t\alpha_7 \mathbf{V}^{i-1} + d \frac{\beta_7}{\beta_1 + \beta_3} {}^t\alpha_1 \mathbf{U}^i + d \frac{\beta_7}{\beta_1 + \beta_3} {}^t\alpha_2 \mathbf{U}^{i-1} \\ &+ d \left[{}^t\alpha_9 - \beta_7 \frac{{}^t\alpha_4}{\beta_1 + \beta_3} \right] \mathbf{b}^i + d \left[{}^t\alpha_{10} - \beta_7 \frac{{}^t\alpha_5}{\beta_1 + \beta_3} \right] \mathbf{b}^{i-1} \\ &- \left[d \frac{\beta_7}{\beta_1 + \beta_3} \beta_2 \cos \theta_0 + \beta_6 \sin \theta_0 \right] F_{mart}^i - d \frac{\beta_7}{\beta_1 + \beta_3} {}^t\alpha_3 \mathbf{F}_T^i - {}^t\alpha_8 \mathbf{F}_L^i \end{aligned} \quad (\text{H.39})$$

En isolant les efforts de contacts dans ces deux équations, il est alors possible de déterminer une expression qui ne dépend que des amplitudes modales de chaque sous-système aux instants présents et passés, i.e i et $i - 1$. A chaque pas de temps, on détermine donc les efforts de contacts à l'instant i entre les deux objets en fonction des mouvements passés et présents (équations (H.40) et (H.41)). Ensuite, on calcule les vecteurs des amplitudes modales à l'instant futur $i + 1$, et cela à chaque itération (équations (H.42), (H.43) et (H.44)). Finalement après avoir posé une nouvelle série de constantes, il vient :

$$\lambda_T^i = {}^t\mathbf{LT1} \mathbf{U}^i + {}^t\mathbf{LT2} \mathbf{U}^{i-1} + \mathbf{LT3} [{}^t\alpha_6 \mathbf{V}^i + {}^t\alpha_7 \mathbf{V}^{i-1}] + {}^t\mathbf{LT4} \mathbf{b}^i + {}^t\mathbf{LT5} \mathbf{b}^{i-1} + \mathbf{LT8} F_{mart}^i + {}^t\mathbf{LT6} \mathbf{F}_T^i - {}^t\mathbf{LT7} \mathbf{F}_L^i \quad (\text{H.40})$$

$$\lambda_L^i = {}^t\mathbf{LL1} \mathbf{U}^i + {}^t\mathbf{LL2} \mathbf{U}^{i-1} + {}^t\mathbf{LL3} \mathbf{V}^i + {}^t\mathbf{LL4} \mathbf{V}^{i-1} + {}^t\mathbf{LL5} \mathbf{b}^i + {}^t\mathbf{LL6} \mathbf{b}^{i-1} - \mathbf{LL9} F_{mart}^i - {}^t\mathbf{LL7} \mathbf{F}_T^i - {}^t\mathbf{LL8} \mathbf{F}_L^i \quad (\text{H.41})$$

$$\mathbf{U}^{i+1} = \overline{\mathbf{G1}} \mathbf{U}^i + \overline{\mathbf{G2}} \mathbf{U}^{i-1} - \lambda_T^i \mathbf{g1} + F_{mart}^i \mathbf{g2} + \overline{\mathbf{OT1}}^{-1} \mathbf{F}_T^i \quad (\text{H.42})$$

$$\mathbf{V}^{i+1} = \overline{\mathbf{G3}} \mathbf{V}^i + \overline{\mathbf{G4}} \mathbf{V}^{i-1} - \lambda_L^i \mathbf{g3} + F_{mart}^i \mathbf{g4} + \overline{\mathbf{OL1}}^{-1} \mathbf{F}_L^i \quad (\text{H.43})$$

$$\mathbf{b}^{i+1} = \overline{\mathbf{G5}} \mathbf{b}^i + \overline{\mathbf{G6}} \mathbf{b}^{i-1} + \lambda_T^i \mathbf{g5} - \lambda_L^i \mathbf{g6} \quad (\text{H.44})$$

avec les différentes constantes définies comme suit en commençant par celles des ondes transversales de la corde :

$${}^t\mathbf{LT1} = \frac{\frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3}}{d\beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - \left(d\beta_8 + \frac{\beta_5}{d} \right)} d \frac{\beta_7}{\beta_1 + \beta_3} {}^t\alpha_1 - \frac{{}^t\alpha_1}{\beta_1 + \beta_3} \quad (\text{H.45})$$

$${}^t\mathbf{LT2} = \frac{\frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3}}{d\beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - \left(d\beta_8 + \frac{\beta_5}{d}\right)} d \frac{\beta_7}{\beta_1 + \beta_3} {}^t\alpha_2 - \frac{{}^t\alpha_2}{\beta_1 + \beta_3} \quad (\text{H.46})$$

$$\mathbf{LT3} = \frac{\frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3}}{d\beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - \left(d\beta_8 + \frac{\beta_5}{d}\right)} \quad (\text{H.47})$$

$${}^t\mathbf{LT4} = \frac{{}^t\alpha_4}{\beta_1 + \beta_3} + \frac{\frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3}}{d\beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - \left(d\beta_8 + \frac{\beta_5}{d}\right)} d \left[{}^t\alpha_9 - \beta_7 \frac{{}^t\alpha_4}{\beta_1 + \beta_3} \right] \quad (\text{H.48})$$

$${}^t\mathbf{LT5} = \frac{{}^t\alpha_5}{\beta_1 + \beta_3} + \frac{\frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3}}{d\beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - \left(d\beta_8 + \frac{\beta_5}{d}\right)} d \left[{}^t\alpha_{10} - \beta_7 \frac{{}^t\alpha_5}{\beta_1 + \beta_3} \right] \quad (\text{H.49})$$

$${}^t\mathbf{LT6} = \frac{{}^t\alpha_3}{\beta_1 + \beta_3} - \frac{\frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3}}{d\beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - \left(d\beta_8 + \frac{\beta_5}{d}\right)} d \frac{\beta_7}{\beta_1 + \beta_3} {}^t\alpha_3 \quad (\text{H.50})$$

$${}^t\mathbf{LT7} = \frac{\frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3}}{d\beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - \left(d\beta_8 + \frac{\beta_5}{d}\right)} {}^t\alpha_8 \quad (\text{H.51})$$

$$\mathbf{LT8} = \frac{\cos \theta_0 \beta_2}{\beta_1 + \beta_3} - \frac{\frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3}}{d\beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - \left(d\beta_8 + \frac{\beta_5}{d}\right)} \left(d \frac{\beta_7}{\beta_1 + \beta_3} \beta_2 \cos \theta_0 + \beta_6 \sin \theta_0 \right) \quad (\text{H.52})$$

celles relatives aux ondes longitudinales de la corde :

$${}^t\mathbf{LL1} = \frac{d \frac{\beta_7}{\beta_1 + \beta_3} {}^t\alpha_1}{d^2 \beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - (d^2 \beta_8 + \beta_5)} \quad (\text{H.53})$$

$${}^t\mathbf{LL2} = \frac{d \frac{\beta_7}{\beta_1 + \beta_3} {}^t\alpha_2}{d^2 \beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - (d^2 \beta_8 + \beta_5)} \quad (\text{H.54})$$

$${}^t\mathbf{LL3} = \frac{{}^t\alpha_6}{d^2 \beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - (d^2 \beta_8 + \beta_5)} \quad (\text{H.55})$$

$${}^t\mathbf{LL4} = \frac{{}^t\alpha_7}{d^2 \beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - (d^2 \beta_8 + \beta_5)} \quad (\text{H.56})$$

$${}^t\mathbf{LL5} = \frac{d \left[{}^t\alpha_9 - \beta_7 \frac{{}^t\alpha_4}{\beta_1 + \beta_3} \right]}{d^2 \beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - (d^2 \beta_8 + \beta_5)} \quad (\text{H.57})$$

$${}^t\mathbf{LL6} = \frac{d \left[{}^t\alpha_{10} - \beta_7 \frac{{}^t\alpha_5}{\beta_1 + \beta_3} \right]}{d^2 \beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - (d^2 \beta_8 + \beta_5)} \quad (\text{H.58})$$

$${}^t\mathbf{LL7} = \frac{d \frac{\beta_7}{\beta_1 + \beta_3} {}^t\alpha_3}{d^2 \beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - (d^2 \beta_8 + \beta_5)} \quad (\text{H.59})$$

$${}^t\mathbf{LL8} = \frac{{}^t\alpha_8}{d^2 \beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - (d^2 \beta_8 + \beta_5)} \quad (\text{H.60})$$

$$\mathbf{LL9} = \frac{\left[d \frac{\beta_7}{\beta_1 + \beta_3} \beta_2 \cos \theta_0 + \beta_6 \sin \theta_0 \right]}{d^2 \beta_7 \frac{\beta_4}{\beta_1 + \beta_3} - (d^2 \beta_8 + \beta_5)} \quad (\text{H.61})$$

et enfin les constantes des ondes de flexion dans la table d'harmonie :

$$\overline{\overline{G1}} = -\overline{\overline{OT1}}^{-1} \overline{\overline{OT2}} \quad (\text{H.62})$$

$$\overline{\overline{G2}} = -\overline{\overline{OT1}}^{-1} \overline{\overline{OT3}} \quad (\text{H.63})$$

$$\overline{\overline{G3}} = -\overline{\overline{OL1}}^{-1} \overline{\overline{OL2}} \quad (\text{H.64})$$

$$\overline{\overline{G4}} = -\overline{\overline{OL1}}^{-1} \overline{\overline{OL3}} \quad (\text{H.65})$$

$$\overline{\overline{G5}} = -\overline{\overline{TH1}}^{-1} \overline{\overline{TH2}} \quad (\text{H.66})$$

$$\overline{\overline{G6}} = -\overline{\overline{TH1}}^{-1} \overline{\overline{TH3}} \quad (\text{H.67})$$

$$\mathbf{g1} = \overline{\overline{OT1}}^{-1} \boldsymbol{\psi}^{(1)}(L_V) \quad (\text{H.68})$$

$$\mathbf{g2} = \cos \theta_0 \overline{\overline{OT1}}^{-1} \boldsymbol{\psi}^{(1)}(x_0) \quad (\text{H.69})$$

$$\mathbf{g3} = \overline{\overline{OL1}}^{-1} \boldsymbol{\psi}^{(2)}(L_V) \quad (\text{H.70})$$

$$\mathbf{g4} = \sin \theta_0 \overline{\overline{OL1}}^{-1} \boldsymbol{\psi}^{(2)}(x_0) \quad (\text{H.71})$$

$$\mathbf{g5} = \overline{\overline{TH1}}^{-1} {}^t\overline{\overline{T}} \boldsymbol{\phi}(x_e, y_e) \quad (\text{H.72})$$

$$\mathbf{g6} = d \overline{\overline{TH1}}^{-1} {}^t\overline{\overline{T}} \boldsymbol{\phi}_y(x_e, y_e) \quad (\text{H.73})$$

H.II. Initialisation du calcul temporel

Le démarrage du calcul nécessite des équations particulières conformes aux conditions initiales imposées au système couplé cordes / table d'harmonie. A la première itération, le calcul des efforts de contacts ainsi que des vecteurs amplitudes modales font intervenir des termes passés en $i = -1$ qui « n'existent pas » :

$$\lambda_T^0 = {}^t\mathbf{LT1} U^0 + {}^t\mathbf{LT2} U^{-1} + \mathbf{LT3} [{}^t\alpha_6 V^0 + {}^t\alpha_7 V^{-1}] + {}^t\mathbf{LT4} b^0 + {}^t\mathbf{LT5} b^{-1} + \mathbf{LT8} F_{mart}^0 \quad (\text{H.74})$$

$$+ {}^t\mathbf{LT6} F_T^0 - {}^t\mathbf{LT7} F_L^0$$

$$\lambda_L^0 = {}^t\mathbf{LL1} U^0 + {}^t\mathbf{LL2} U^{-1} + {}^t\mathbf{LL3} V^0 + {}^t\mathbf{LL4} V^{-1} + {}^t\mathbf{LL5} b^0 + {}^t\mathbf{LL6} b^{-1} - \mathbf{LL9} F_{mart}^0 \quad (\text{H.75})$$

$$- {}^t\mathbf{LL7} F_T^0 - {}^t\mathbf{LL8} F_L^0$$

$$U^1 = \overline{\overline{G1}} U^0 + \overline{\overline{G2}} U^{-1} - \lambda_T^0 \mathbf{g1} + F_{mart}^0 \mathbf{g2} + \overline{\overline{OT1}}^{-1} F_T^0 \quad (\text{H.76})$$

$$V^1 = \overline{\overline{G3}} V^0 + \overline{\overline{G4}} V^{-1} - \lambda_L^0 \mathbf{g3} + F_{mart}^0 \mathbf{g4} + \overline{\overline{OL1}}^{-1} F_L^0 \quad (\text{H.77})$$

$$b^1 = \overline{\overline{G5}} b^0 + \overline{\overline{G6}} b^{-1} + \lambda_T^0 \mathbf{g5} - \lambda_L^0 \mathbf{g6} \quad (\text{H.78})$$

On considère que tous les déplacements sont nuls à l'instant initial. De fait, les vecteurs des amplitudes modales sont nuls, i.e $\mathbf{U}^0 = \mathbf{V}^0 = \mathbf{b}^0 = \mathbf{0}$, de même que les vitesses. D'où, il existe une symétrie par rapport à l'axe des temps entre les vitesses avant $i = 0$ et après tel que :

$$\begin{cases} \mathbf{b}^0 = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{b}}^0 = \frac{\mathbf{b}^1 - \mathbf{b}^{-1}}{2\Delta t} = \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{b}^1 = \mathbf{b}^{-1} \end{cases} \quad (\text{H.79})$$

$$\begin{cases} \mathbf{U}^0 = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{U}}^0 = \frac{\mathbf{U}^1 - \mathbf{U}^{-1}}{2\Delta t} = \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{U}^1 = \mathbf{U}^{-1} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{V}^0 = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{V}}^0 = \frac{\mathbf{V}^1 - \mathbf{V}^{-1}}{2\Delta t} = \mathbf{0} \leftrightarrow \mathbf{V}^1 = \mathbf{V}^{-1} \end{cases}$$

Physiquement l'absence d'ondes propagées dans la corde implique que les termes représentant les non-linéarités sont également nuls. En conséquence, les équations du problème se simplifient grandement tel que :

$$\lambda_T^0 = {}^t\text{LT2 } \mathbf{U}^1 + \text{LT3 } {}^t\alpha_7 \mathbf{V}^1 + {}^t\text{LT5 } \mathbf{b}^1 + \text{LT8} F_{mart}^0 \quad (\text{H.80})$$

$$\lambda_L^0 = {}^t\text{LL2 } \mathbf{U}^1 + {}^t\text{LL4 } \mathbf{V}^1 + {}^t\text{LL6 } \mathbf{b}^1 - \text{LL9 } F_{mart}^0 \quad (\text{H.81})$$

$$\mathbf{U}^1 = \overline{\overline{G2}} \mathbf{U}^1 - \lambda_T^0 \mathbf{g1} + F_{mart}^0 \mathbf{g2} \quad (\text{H.82})$$

$$\mathbf{V}^1 = \overline{\overline{G4}} \mathbf{V}^1 - \lambda_L^0 \mathbf{g3} + F_{mart}^0 \mathbf{g4} \quad (\text{H.83})$$

$$\mathbf{b}^1 = \overline{\overline{G6}} \mathbf{b}^1 + \lambda_T^0 \mathbf{g5} - \lambda_L^0 \mathbf{g6} \quad (\text{H.84})$$

Les trois dernières équations permettent d'obtenir des expressions des vecteurs amplitudes modales à l'instant futur en fonction des efforts de contacts à l'instant présent. On a :

$$\mathbf{U}^1 = -(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G2}})^{-1} \mathbf{g1} \lambda_T^0 + (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G2}})^{-1} \mathbf{g2} F_{mart}^0 \quad (\text{H.85})$$

$$\mathbf{V}^1 = -(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G4}})^{-1} \mathbf{g3} \lambda_L^0 + (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G4}})^{-1} \mathbf{g4} F_{mart}^0 \quad (\text{H.86})$$

$$\mathbf{b}^1 = (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G6}})^{-1} \mathbf{g5} \lambda_T^0 - (\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G6}})^{-1} \mathbf{g6} \lambda_L^0 \quad (\text{H.87})$$

En substituant \mathbf{U}^1 , \mathbf{V}^1 et \mathbf{b}^1 dans les expressions (H.80) et (H.81), il vient :

$$\lambda_T^0 = \frac{\left[\text{LT8} + {}^t\text{LT2}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G2}})^{-1} \mathbf{g2} + \text{LT3 } {}^t\alpha_7(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G4}})^{-1} \mathbf{g4} \right] F_{mart}^0}{\left[1 - {}^t\text{LT5}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G6}})^{-1} \mathbf{g5} + {}^t\text{LT2}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G2}})^{-1} \mathbf{g1} \right]} - \frac{\left[{}^t\text{LT5}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G6}})^{-1} \mathbf{g6} + \text{LT3 } {}^t\alpha_7(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G4}})^{-1} \mathbf{g3} \right] \lambda_L^0}{\left[1 - {}^t\text{LT5}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G6}})^{-1} \mathbf{g5} + {}^t\text{LT2}(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{G2}})^{-1} \mathbf{g1} \right]} \quad (\text{H.88})$$

$$\lambda_L^0 = \frac{\left[{}^tLL6(\bar{I} - \bar{G6})^{-1} \mathbf{g5} - {}^tLL2(\bar{I} - \bar{G2})^{-1} \mathbf{g1} \right]}{\left[1 + {}^tLL6(\bar{I} - \bar{G6})^{-1} \mathbf{g6} + {}^tLL4(\bar{I} - \bar{G4})^{-1} \mathbf{g3} \right]} \lambda_T^0 + \frac{\left[{}^tLL2(\bar{I} - \bar{G2})^{-1} \mathbf{g2} + {}^tLL4(\bar{I} - \bar{G4})^{-1} \mathbf{g4} - LL9 \right]}{\left[1 + {}^tLL6(\bar{I} - \bar{G6})^{-1} \mathbf{g6} + {}^tLL4(\bar{I} - \bar{G4})^{-1} \mathbf{g3} \right]} F_{mart}^0 \quad (H.89)$$

Puis en injectant (H.89) dans (H.88), il découle une expression de l'effort de contacts longitudinal uniquement en fonction de l'effort appliqué par le marteau à l'instant initial. Soit :

$$\lambda_T^0 = \left(\frac{\left[LT8 + {}^tLT2(\bar{I} - \bar{G2})^{-1} \mathbf{g2} + LT3 {}^t\alpha_7(\bar{I} - \bar{G4})^{-1} \mathbf{g4} \right]}{\left[1 - {}^tLT5(\bar{I} - \bar{G6})^{-1} \mathbf{g5} + {}^tLT2(\bar{I} - \bar{G2})^{-1} \mathbf{g1} \right]} \right) \frac{\left[{}^tLL6(\bar{I} - \bar{G6})^{-1} \mathbf{g5} - {}^tLL2(\bar{I} - \bar{G2})^{-1} \mathbf{g1} \right]}{\left[1 - \left[1 + {}^tLL6(\bar{I} - \bar{G6})^{-1} \mathbf{g6} + {}^tLL4(\bar{I} - \bar{G4})^{-1} \mathbf{g3} \right] \right]} \frac{\left[{}^tLT5(\bar{I} - \bar{G6})^{-1} \mathbf{g6} + LT3 {}^t\alpha_7(\bar{I} - \bar{G4})^{-1} \mathbf{g3} \right] \left[{}^tLL2(\bar{I} - \bar{G2})^{-1} \mathbf{g2} + {}^tLL4(\bar{I} - \bar{G4})^{-1} \mathbf{g4} - LL9 \right]}{\left[1 - {}^tLT5(\bar{I} - \bar{G6})^{-1} \mathbf{g5} + {}^tLT2(\bar{I} - \bar{G2})^{-1} \mathbf{g1} \right] \left[1 + {}^tLL6(\bar{I} - \bar{G6})^{-1} \mathbf{g6} + {}^tLL4(\bar{I} - \bar{G4})^{-1} \mathbf{g3} \right]} \left. \right) F_{mart}^0 \quad (H.90)$$

$$1 - \frac{\left[{}^tLL6(\bar{I} - \bar{G6})^{-1} \mathbf{g5} - {}^tLL2(\bar{I} - \bar{G2})^{-1} \mathbf{g1} \right]}{\left[1 + {}^tLL6(\bar{I} - \bar{G6})^{-1} \mathbf{g6} + {}^tLL4(\bar{I} - \bar{G4})^{-1} \mathbf{g3} \right]}$$

Connaissant alors λ_T^0 on peut calculer numériquement λ_L^0 grâce à l'équation (H.89) puis les vecteurs des amplitudes modales par les équations (H.85), (H.86) et (H.87). Après cela, les équations de la section précédente de cette annexe deviennent consistantes.

BIBLIOGRAPHIE

- [Alem47] d'Alembert, Jean Le Rond: Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. Histoire de l'Académie des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin. Aufl., 1747
- [Alle03] ALLEMANG, RANDALL J.: The modal assurance criterion—twenty years of use and abuse. In: *Sound and vibration* Bd. 37 (2003), Nr. 8, S. 14–23
- [AnSt07] ANDERSSEN, R. ; STUART, W.: The challenge for the piano maker. In: *Math. Scientist* Bd. 32 (2007), S. 71–82
- [Ashb05] ASHBY, M. F.: *Materials selection in mechanical design*. 3rd ed. Aufl. Amsterdam ; Boston : Butterworth-Heinemann, 2005 — ISBN 978-0-7506-6168-3
- [Aske06a] ASKENFELT, ANDERS: Structure piano. Udine, Italy, 2006
- [Aske06b] ASKENFELT, ANDERS: Sound radiation and timbre. In: . Udine, Italy, 2006
- [Aske90] ASKENFELT, ANDERS: Five lectures on the acoustics of the piano. Royal Swedish Academy of Music, Stockholm, 1990
- [Aske93] ASKENFELT, ANDERS: Observations on the transient components of the piano tone. In: *STL-QPSR* Bd. 34 (1993), Nr. 4, S. 15–22
- [Barl97] BARLOW, C. Y.: Materials selection for musical instruments. In: *Proceedings of the ISMA - Institute of Acoustics* Bd. 19 (1997), S. 69–78
- [BeIJ03a] BERTHAUT, J. ; ICHCHOU, M.N. ; JÉZÉQUEL, L.: Piano soundboard: structural behavior, numerical and experimental study in the modal range. In: *Applied Acoustics* Bd. 64 (2003), Nr. 11, S. 1113–1136
- [BeIJ03b] BERTHAUT, J. ; ICHCHOU, M.N. ; JÉZÉQUEL, L.: Piano soundboard: structural behavior, numerical and experimental study in the modal range. In: *Applied Acoustics* Bd. 64 (2003), Nr. 11, S. 1113–1136
- [BeNi91] BERRY, ALAIN ; NICOLAS, JEAN: Vibration and sound radiation of complex plates: A variational approach. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 90 (1991), Nr. 4, S. 2249–2250
- [BeOa81] BESKOS, D. E. ; OATES, J. B.: Dynamic analysis of ring-stiffened circular cylindrical shells. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 75 (1981), Nr. 1, S. 1–15
- [Bert04] BERTHAUT, JULIEN: Contribution à l'indentification large bande des structures anisotropes. Application aux tables d'harmonie de piano.. Lyon, École Centrale de Lyon, 2004
- [BiJo40] BILHUBER, P. H. ; JOHNSON, C. A.: The influence of the soundboard on piano tone quality.

- In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 11 (1940), Nr. 3, S. 311–320
- [Bilb05] BILBAO, STEFAN: Conservative numerical methods for nonlinear strings. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 118 (2005), Nr. 5, S. 3316–3327
- [Bilh36] BILHUBER, P. H.: Soundboard for pianos and other instruments or devices using soundboards. In: *United States Patents* (1936)
- [Blac65] BLACKHAM, E. DONNELL: The Physics of the Piano. In: *Scientific American* Bd. 213 (1965), Nr. 6, S. 88–99
- [BLGB91] BLAISE, A. ; LESUEUR, C. ; GOTTELAND, M. ; BARBE, M.: On sound transmission into an orthotropic infinite shell: Comparison with Koval’s results and understanding of phenomena. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 150 (1991), Nr. 2, S. 233–243
- [BILe92] BLAISE, A. ; LESUEUR, C.: Acoustic transmission through a 2-D orthotropic multi-layered infinite cylindrical shell. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 155 (1992), Nr. 1, S. 95–109
- [BILe94a] BLAISE, A. ; LESUEUR, C.: Acoustic Transmission Through a „3-D“ Orthotropic Multi-Layered Infinite Cylindrical Shell, Part I: Formulation of the Problem. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 171 (1994), Nr. 5, S. 651–664
- [BILe94b] BLAISE, A. ; LESUEUR, C.: Acoustic Transmission Through a „3-D“ Orthotropic Multi-Layered Infinite Cylindrical Shell, Part II: Validation and Numerical Exploitation for Large Structures. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 171 (1994), Nr. 5, S. 665–680
- [BoEg13] BOUTILLON, XAVIER ; EGE, KEREM: Vibroacoustics of the piano soundboard: Reduced models, mobility synthesis, and acoustical radiation regime. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 332 (2013), Nr. 18, S. 4261–4279
- [Bout87] BOUTILLON, XAVIER: Model for piano hammers: Experimental determination and digital simulation. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 83 (1987), Nr. 2, S. 746–754
- [Brém06] BREMAUD, IRIS: Diversité des bois utilisés ou utilisables en facture d’instruments de musique. Etude expérimentale des propriétés vibratoires en direction axiale de types de bois contrastés en majorité tropicaux. Relations à des déterminants de microstructure et de composition chimique secondaire, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc, 2006
- [Brém08] BREMAUD, IRIS: Caractérisation mécanique des bois et facture: origines et recensement de la variabilité. In: *Journée d’étude-Le bois: instrument du patrimoine musical* (2008)
- [Brém12] BREMAUD, IRIS: Acoustical properties of wood in string instruments soundboards and tuned idiophones: Biological and cultural diversity. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 131 (2012), Nr. 1, S. 807–818
- [BrPo13] BRÉMAUD, IRIS ; POIDEVIN, NELLY: Cultural and mechanical approaches in the choice of

- woods in instrument making: the case of early bows. In: «*La musique et ses instruments/Music and its instruments*» (2013), S. 1–27
- [Bucu06] BUCUR, VOICHITA: *Acoustics of Wood* : Springer Science & Business Media, 2006 — ISBN 978-3-540-30594-1
- [Burr84] BURROUGHS, COURTNEY B.: Acoustic radiation from fluid-loaded infinite circular cylinders with doubly periodic ring supports. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 75 (1984), Nr. 3, S. 715–722
- [Busc82] BUSCH-VISHNIAC, I. J.: Drive point impedance of an infinite orthotropic plate under tension. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 71 (1982), Nr. 2, S. 368
- [CaVa95] CARACCILOLO, A. ; VALETTE, C.: Damping mechanisms governing plate vibration. In: *Acta Acustica united with Acustica* Bd. 3 (1995), Nr. 5, S. 393–404
- [Chab12] CHABASSIER, JULIETTE: Modélisation et simulation numérique d'un piano par modèles physiques, Ecole Polytechnique X, 2012
- [ChAs94] CHAIGNE, ANTOINE ; ASKENFELT, ANDERS: Numerical simulations of a piano strings. II. Comparisons with measurements and systematic exploration of some hammer-string parameters. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 95 (1994), Nr. 3, S. 1631–1640
- [ChAs98] CHAIGNE, ANTOINE ; ASKENFELT, ANDERS: Numerical simulations of piano strings. I. A physical model for a struck string using finite difference methods. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 95 (1998), Nr. 2, S. 1112–1118
- [ChCJ13] CHABASSIER, JULIETTE ; CHAIGNE, ANTOINE ; JOLY, PATRICK: Modeling and simulation of a grand piano. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 134 (2013), Nr. 1, S. 648–665
- [ChCV13] CHAIGNE, ANTOINE ; COTTÉ, BENJAMIN ; VIGGIANO, ROBERTO: Dynamical properties of piano soundboards. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 133 (2013), Nr. 4, S. 2456–2466
- [Chri03] CHRISTENSEN, RICHARD M.: *Theory of Viscoelasticity* : Courier Corporation, 2003 — ISBN 978-0-486-42880-2
- [ChVa82] CHANG, M. T. ; VAICAITIS, R.: Noise transmission into semicylindrical enclosures through discretely stiffened curved panels. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 85 (1982), Nr. 1, S. 71–83
- [CKBD08] CHAIGNE, ANTOINE ; KERGOMARD, JEAN ; BOUTILLON, XAVIER ; DALMONT, JEAN-PIERRE ; COLLECTIF: *Acoustique des instruments de musique*. Paris : Belin, 2008 — ISBN 978-2-7011-3970-8
- [Conk00] CONKLIN, HAROLD A.: Soundboard construction for stringed musical instruments.

- [Conk96a] CONKLIN JR, HAROLD A.: Design and tone in the mechanoacoustic piano. Part I. Piano hammers and tonal effects. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 99 (1996), Nr. 6, S. 3286–3296
- [Conk96b] CONKLIN JR, HAROLD A.: Design and tone in the mechanoacoustic piano. Part III. Piano strings and scale design. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 100 (1996), Nr. 3, S. 1286–1298
- [Conk96c] CONKLIN JR, HAROLD A.: Design and tone in the mechanoacoustic piano. Part II. Piano structure. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 100 (1996), Nr. 2, S. 695–708
- [CrHP05] CREMER, L. ; HECKL, M. ; PETERSSON, BJÖRN A. T.: *Structure-Borne Sound: Structural Vibrations and Sound Radiation at Audio Frequencies* : Springer Science & Business Media, 2005 — ISBN 978-3-540-26514-6
- [DeCa94] DEROGIS, PH. ; CAUSSE, R.: Caractérisation du rayonnement de la table d’harmonie d’un piano droit. In: *Le Journal de Physique IV* Bd. 04 (1994), Nr. C5, S. C5–609–C5–612
- [DéCa94] DÉROGIS, PHILIPPE ; CAUSSÉ, R.: Characterization of the acoustic radiation of the soundboard of an upright piano. In: *Journal De Physique* Bd. 4 (1994), Nr. C5, S. 609–612
- [DéCa95] DÉROGIS, PHILIPPE ; CAUSSÉ, RENÉ: Computation and modelisation of the sound radiation of an upright piano using modal formalism and integral equations. In: *ICA: International Congress on Acoustic*. Bd. 3, 1995, S. 409–412
- [DGPP15] DENIS, V. ; GAUTIER, F. ; PELAT, A. ; POITTEVIN, J.: Measurement and modelling of the reflection coefficient of an Acoustic Black Hole termination. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 349 (2015), S. 67–79
- [EgBR13] EGE, KEREM ; BOUTILLON, XAVIER ; RÉBILLAT, MARC: Vibroacoustics of the piano soundboard:(Non) linearity and modal properties in the low-and mid-frequency ranges. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 332 (2013), Nr. 5, S. 1288–1305
- [Ege09] EGE, KEREM: La table d’harmonie du piano-Études modales en basses et moyennes fréquences, Ecole Polytechnique X, 2009
- [Elis75] ELISHAKOFF, I.: Distribution of natural frequencies in certain structural elements. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 57 (1975), Nr. 2, S. 361–369
- [EtCM15] ETCHENIQUE, NIKKI ; COLLIN, SAMANTHA R. ; MOORE, THOMAS R.: Coupling of transverse and longitudinal waves in piano strings. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 137 (2015), Nr. 4, S. 1766–1771
- [Fand95] FANDRICH, DELWIN: Soundboard Technology & Manufacture. In: , 1995
- [Flet64] FLETCHER, HARVEY: Normal vibration frequencies of a stiff piano string. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 36 (1964), Nr. 1, S. 203–209

- [Fuka50] FUKADA, E.: Vibrational study of the wood used for the sound boards of pianos. In: *Nature, London* Bd. 166 (1950), Nr. 4227, S. 772–3
- [GéRi96] GERADIN, MICHEL ; RIXEN, DANIEL: *Théorie des vibrations: application à la dynamique des structures* : Masson, 1996 — ISBN 978-2-225-85173-5
- [GiNa97] GIORDANO, N. ; NAKANISHI, HISAO: *Computational Physics*. Upper Saddle River, NJ : Pearson, Prentice-Hall, 1997
- [Gior97] GIORDANO, N.: Simple model of a piano soundboard. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 102 (1997), Nr. 2, S. 1159–1168
- [Gior98] GIORDANO, N.: Mechanical impedance of a piano soundboard. In: *Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 103 (1998), Nr. 4, S. 2128–2133
- [GiWi00] GIORDANO, N. ; WINANS, J. P.: Piano hammers and their force compression characteristics: Does a power law make sense? In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 107 (2000), Nr. 4, S. 2248–2255
- [Gmür97] GMÜR, THOMAS: *Dynamique des structures: analyse modale numérique* : PPUR presses polytechniques, 1997 — ISBN 978-2-88074-333-8
- [GuLa90] GUYADER, JEAN-LOUIS ; LAULAGNET, BERNARD: Sound radiation by finite cylindrical ring stiffened shells. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 138 (1990), Nr. 2, S. 173–191
- [GuLa94] GUYADER, JEAN-LOUIS ; LAULAGNET, BERNARD: Structural acoustic radiation prediction: Expanding the vibratory response on a functional basis. In: *Applied Acoustics* Bd. 43 (1994), Nr. 3, S. 247–269
- [Guya06] GUYADER, JEAN-LOUIS: *Vibration in Continuous Media*. London : ISTE Ltd., 2006 — ISBN 978-1-905209-27-9
- [HaAs88] HALL, DONALD E. ; ASKENFELT, ANDERS: Piano string excitation V: Spectra for real hammers and strings. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 83 (1988), Nr. 4, S. 1627–1638
- [Hain79] HAINES, DANIEL W.: On musical instrument wood. In: *Catgut Acoustical Society Newsletter* Bd. 3& (1979), S. 23–32
- [HaLH96] HAINES, DANIEL W. ; LEBAN, JEAN-MICHEL ; HERBÉ, CHRISTIAN: Determination of Young's modulus for spruce, fir and isotropic materials by the resonance flexure method with comparisons to static flexure and other dynamic methods. In: *Wood science and technology* Bd. 30 (1996), Nr. 4, S. 253–263
- [Hear00] HEARMON, R.F.S.: The elasticity of wood and plywood. In: *Forest Products Research special report no.7. H.M. Stationery Office, London*, Nr. 1948
- [Holz84] HOLZ, D.: On some relations between anatomic properties and acoustical qualities of resonance wood. In: *Holztechnologie* Bd. 25 (1984), Nr. 1, S. 31–36

- [HoPW85a] HODGES, C. H. ; POWER, J. ; WOODHOUSE, J.: The low frequency vibration of a ribbed cylinder, Part 1: Theory. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 101 (1985), Nr. 2, S. 219–235
- [HoPW85b] HODGES, C. H. ; POWER, J. ; WOODHOUSE, J.: The low frequency vibration of a ribbed cylinder, Part 2: Observations and interpretation. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 101 (1985), Nr. 2, S. 237–256
- [Hutc78] HUTCHINS, C. M.: Wood for violin. In: *Catgut Acoustical Society Newsletter* (1978)
- [KePe87] KELTIE, R. F. ; PENG, H.: The Effects of Modal Coupling on the Acoustic Power Radiation From Panels. In: *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design* Bd. 109 (1987), Nr. 1, S. 48–54
- [KiWa87] KINDEL, JOSEPH ; WANG, I. CHIH: Vibrations of a piano soundboard: Modal analysis and finite element analysis. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 81 (1987), S. 61–61
- [Kova79] KOVAL, L. R.: On sound transmission into an orthotropic shell. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 63 (1979), Nr. 1, S. 51–59
- [Kova80a] KOVAL, L. R.: On sound transmission into a stiffened cylindrical shell with rings and stringers treated as discrete elements. In: *Journal of Sound Vibration* Bd. 71 (1980), S. 511–521
- [Kova80b] KOVAL, L. R.: Sound transmission into a laminated composite cylindrical shell. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 71 (1980), Nr. 4, S. 523–530
- [Kurm03] KURMYSHEV, E. V.: Transverse and longitudinal mode coupling in a free vibrating soft string. In: *Physics Letters A* Bd. 310 (2003), S. 148–160
- [Kutt09] KUTTRUFF, HEINRICH: *Room acoustics*. 5th ed. Aufl. London & New York : Spon Press/Taylor & Francis, 2009 — ISBN 978-0-415-48021-5
- [LaGu96] LAULAGNET, BERNARD ; GUYADER, JEAN-LOUIS: C-valor : Commission de validation des progiciels de calcul vibroacoustique: résultats de référence pour le rayonnement acoustique des plaques, benchmarks for vibroacoustic software. In: *Société française des mécaniciens*. Courbevoie (France) (1996)
- [Lamb97] LAMBOURG, CHRISTOPHE: *Modele temporel pour la simulation numerique de plaques vibrantes. Application a la synthese sonore* : Le Mans, 1997
- [Lang94] LANGLEY, R. S.: Spatially Averaged Frequency Response Envelopes For One- And Two-dimensional Structural Components. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 178 (1994), Nr. 4, S. 483–500
- [Laul09] LAULAGNET, BERNARD: Rattle Noise Generated by a Beam Tip Impacting a Baffled Plate. In: *Acta Acoustica* Bd. 95 (2009), Nr. 1, S. 1–9

- [Laul98a] LAULAGNET, B.: Sound radiation by a simply supported unbaffled plate. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 103 (1998), Nr. 5, S. 2451–2462
- [Laul98b] LAULAGNET, B.: Sound radiation by a simply supported unbaffled plate. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 103 (1998), Nr. 5, S. 2451–2462
- [LeAt10] LEGAULT, JULIEN ; ATALLA, NOUREDDINE: Sound transmission through a double panel structure periodically coupled with vibration insulators. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 329 (2010), Nr. 15, S. 3082–3100
- [LeF184] LEGGE, K. A. ; FLETCHER, N. H.: Nonlinear generation of missing modes on a vibrating string. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 76 (1984), Nr. 1, S. 5–12
- [Leis69] LEISSA, ARTHUR W.: *Vibration of plates*. Bd. 160 : Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and Space Administration, 1969
- [LeLG10] LE CARROU, JEAN-LOIC ; LECLERE, QUENTIN ; GAUTIER, FRANCOIS: Some characteristics of the concert harp's acoustic radiation. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 127 (2010), Nr. 5, S. 3203
- [LeMA11] LEGAULT, JULIEN ; MEJDI, ABDERRAZAK ; ATALLA, NOUREDDINE: Vibro-acoustic response of orthogonally stiffened panels: The effects of finite dimensions. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 330 (2011), Nr. 24, S. 5928–5948
- [Lesu88] LESUEUR, CLAUDE: *Rayonnement acoustique des structures: vibroacoustique, interactions fluide-structure* : Eyrolles, 1988 — ISBN 978-2-212-01613-0
- [Lieb79] LIEBER, E.: The influence of the soundboard on piano sound. In: *Das Musikinstrument* Bd. 28 (1979), Nr. 304-316
- [LiGa77] LIN, GAU-FENG ; GARRELICK, JOEL M.: Sound transmission through periodically framed parallel plates. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 61 (1977), Nr. 4, S. 1014–1018
- [Mace80a] MACE, B. R.: Periodically stiffened fluid-loaded plates, I: Response to convected harmonic pressure and free wave propagation. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 73 (1980), Nr. 4, S. 473–486
- [Mace80b] MACE, B. R.: Periodically stiffened fluid-loaded plates, II: Response to line and point forces. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 73 (1980), Nr. 4, S. 487–504
- [Mace80c] MACE, B. R.: Sound radiation from a plate reinforced by two sets of parallel stiffeners. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 71 (1980), Nr. 3, S. 435–441
- [MaFB08] MAMOU-MANI, ADRIEN ; FRELAT, JOËL ; BESNAINOU, CHARLES: Numerical simulation of a piano soundboard under downbearing. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 123 (2008), Nr. 4, S. 2401–2406
- [Maid62] MAIDANIK, GIDEON: Response of Ribbed Panels to Reverberant Acoustic Fields. In: *The*

Journal of the Acoustical Society of America Bd. 34 (1962), Nr. 6, S. 809–826

- [Marg15] MARGERIT, PIERRE: Caractérisation Vibro-Acoustique d'une Table d'Harmonie de Piano Pleyel P131, Comparaison Modèle-Mesures., 2015
- [Mart47] MARTIN, D. W.: Decay Rates of Piano Tones. In: *Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 19 (1947), Nr. 4, S. 535–541
- [MaTG00] MAXIT, LAURENT ; TOTARO, NICOLAS ; GUYADER, JEAN-LOUIS: *Formulation de base du modèle SEA*. URL http://vibroacoustique.fr/cours/M07_C01/co/module_VAC_M07_C01.html
- [McWo78] MC INTYRE, M.E. ; WOODHOUSE, J.: Influence of geometry on linear damping. In: *ACUSTICA* Bd. 39 (1978), Nr. doi:, S. 209–224
- [MeAt10a] MEJDI, ABDERRAZAK ; ATALLA, NOUREDDINE: Dynamic and acoustic response of bidirectionally stiffened plates with eccentric stiffeners subject to airborne and structure-borne excitations. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 329 (2010), Nr. 21, S. 4422–4439
- [MeAt10b] MEJDI, ABDERRAZAK ; ATALLA, NOUREDDINE: Dynamic and acoustic response of bidirectionally stiffened plates with eccentric stiffeners subject to airborne and structure-borne excitations. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 329 (2010), Nr. 21, S. 4422–4439
- [MeAt12] MEJDI, ABDERRAZAK ; ATALLA, NOUREDDINE: Vibroacoustic analysis of laminated composite panels stiffened by complex laminated composite stiffeners. In: *International Journal of Mechanical Sciences* Bd. 58 (2012), Nr. 1, S. 13–26
- [MeBa86] MEAD, D. J. ; BARDELL, N. S.: Free vibration of a thin cylindrical shell with discrete axial stiffeners. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 111 (1986), Nr. 2, S. 229–250
- [MeBa87] MEAD, D. J. ; BARDELL, N. S.: Free vibration of a thin cylindrical shell with periodic circumferential stiffeners. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 115 (1987), Nr. 3, S. 499–520
- [MeLA12] MEJDI, ABDERRAZAK ; LEGAULT, JULIEN ; ATALLA, NOUREDDINE: Transmission loss of periodically stiffened laminate composite panels: Shear deformation and in-plane interaction effects. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 131 (2012), Nr. 1, S. 174–185
- [MeMa76] MEAD, D. J. ; MALLIK, A. K.: An approximate method of predicting the response of periodically supported beams subjected to random convected loading. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 47 (1976), Nr. 4, S. 457–471
- [MePa79] MEAD, D. J. ; PARTHAN, S.: Free wave propagation in two-dimensional periodic plates. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 64 (1979), Nr. 3, S. 325–348
- [Meye09] MEYER, JÜRGEN: *Acoustics and the Performance of Music: Manual for Acousticians, Audio Engineers, Musicians, Architects and Musical Instrument Makers* : Springer Science &

Business Media, 2009 — ISBN 978-0-387-09517-2

- [Mind51] MINDLIN, R. D.: Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plate. In: *Journal of Applied Mechanics-Transactions of the Asme* Bd. 18 (1951), Nr. 1, S. 31–38
- [Ming97] MING-YEE, LU: A Mathematical Force Model for a Piano Action, Cooperative Education Work Report.
- [MoZi06] MOORE, THOMAS ; ZIETLOW, SARAH: Interferometric studies of a piano soundboard. In: *Student-Faculty Collaborative Research* (2006)
- [MuRa65] MURTHY, G. ; RAMAKRISHNA, B.: Nonlinear character of resonance in stretched strings. In: *Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 38 (1965), S. 461
- [Naka83] NAKAMURA, I.: The vibrational character of the piano soundboard. In: *Proceedings of the 11th ICA* Bd. 4 (1983), S. 385–388
- [Nara68] NARASIMHA, R.: Non-Linear vibration of an elastic string. In: *Journal of Sound Vibration* Bd. 8 (1968), S. 134–146
- [ObON00] OBATAYA, E. ; ONO, T. ; NORIMOTO, M.: Vibrational properties of wood along the grain. In: *Journal of Materials Science* Bd. 35, Nr. 12, S. 2993–3001
- [Opli60] OPLINGER, DONALD W.: Frequency Response of a Nonlinear Stretched String. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 32 (1960), Nr. 12, S. 1529–1538
- [PaBH12] PASTOR, MIROSLAV ; BINDA, MICHAL ; HARČARIK, TOMÁŠ: Modal Assurance Criterion. In: *Procedia Engineering* Bd. 48 (2012), S. 543–548
- [Pasc00] PASCAL, JEAN-CLAUDE: Vibroacoustique des structures planes - cours de l'ENSIM. Université du Maine
- [PeWe67] PEARSON, F. G. O. ; WEBSTER, C.: Timber used in the musical industry. Forest Products Laboratory. Ministry of Technology. In: *Forest Products Laboratory. Ministry of Technology, London* (1967)
- [PuTh10a] PUTRA, A. ; THOMPSON, D.J.: Sound radiation from rectangular baffled and unbaffled plates. In: *Applied Acoustics* Bd. 71 (2010), Nr. 12, S. 1113–1125
- [PuTh10b] PUTRA, A. ; THOMPSON, D.J.: Sound radiation from rectangular baffled and unbaffled plates. In: *Applied Acoustics* Bd. 71 (2010), Nr. 12, S. 1113–1125
- [Ray100] RAYLEIGH, J. W. S.: *The theory of sound* : Macmillan, London 1894 ; Dover, New York 1945
- [Skud58] SKUDRZYK, EUGEN J.: Vibrations of a System with a Finite or an Infinite Number of Resonances. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 30 (1958), Nr. 12, S. 1140–1152

- [Skud80] SKUDRZYK, EUGEN: The mean-value method of predicting the dynamic response of complex vibrators. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 67 (1980), Nr. 4, S. 1105–1135
- [Soed04] SOEDEL, WERNER: *Vibrations of Shells and Plates*. Third Edition. Aufl. : CRC Press, 2004 — ISBN 978-0-8247-5629-1
- [Step82] STEPANISHEN, PETER R.: Modal coupling in the vibration of fluid-loaded cylindrical shells. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 71 (1982), Nr. 4, S. 813–823
- [Stul03] STULOV, ANATOLI: Experimental and theoretical studies of piano hammer. In: *Proceedings of the Stockholm Music Acoustics Conference*, 2003
- [Stul95] STULOV, ANATOLI: Hysteretic model of the grand piano hammer felt. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 97 (1995), Nr. 4, S. 2577–2585
- [SuNa90] SUZUKI, HIDEO ; NAKAMURA, I.: Acoustics of Pianos. In: *Applied Acoustics* Bd. 30 (1990), S. 147–205
- [Suzu86] SUZUKI, HIDEO: Vibration and sound radiation of a piano soundboard. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 80 (1986), Nr. 6, S. 1573–1582
- [TaYD94] TA-TSIEN, LI ; YI, ZHOU ; DE-XING, KONG: Weak linear degeneracy and global classical solutions for general quasilinear hyperbolic systems. In: *Communications in Partial Differential Equations* Bd. 19 (1994), Nr. 7-8, S. 1263–1317
- [Touz09] TOUZE, CYRIL: Vibrations non linéaires géométriques de structures minces - Modèles d'ordre réduit et transition vers le chaos (Habilitation à Diriger les Recherches), 2009
- [TrEL16] TRÉVISAN, BENJAMIN ; EGE, KEREM ; LAULAGNET, BERNARD: Vibroacoustics of orthotropic plates ribbed in both directions: Application to stiffened rectangular wood panels. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 139 (2016), Nr. 1, S. 227–246
- [VaJB10] VACHER, P. ; JACQUIER, B. ; BUCHARLES, A.: Extensions of the MAC criterion to complex modes. In: *Proceedings of the International Conference on Noise and Vibration Engineering*. Leuven (Belgium), 2010
- [VaSl80] VAICAITIS, R. ; SLAZAK, M.: Noise transmission through stiffened panels. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 70 (1980), Nr. 3, S. 413–426
- [WaKo08] WALTHAM, CHRIS ; KOTLICKI, ANDRZEJ: Vibrational characteristics of harp soundboards. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 124 (2008), Nr. 3, S. 1774
- [Wall72] WALLACE, C. E.: Radiation Resistance of a Rectangular Panel. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 51 (1972), Nr. 3, S. 946–952
- [Wall87] WALLACE, C. E.: The acoustic radiation damping of the modes of a rectangular panel. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 81 (1987), Nr. 6, S. 1787–1794

- [Wang15] WANG, CHONG: Modal sound transmission loss of a single leaf panel: Effects of inter-modal coupling. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 137 (2015), Nr. 6, S. 3514–3522
- [Weg06] WEGST, ULRIKE G. K.: Wood for sound. In: *American Journal of Botany* Bd. 93 (2006), Nr. 10, S. 1439–1448. — PMID: 21642091
- [Wein77] WEINREICH, GABRIEL: Coupled piano strings. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 62 (1977), Nr. 6, S. 1474–1484
- [Wogr80] WOGRAM, K.: Acoustical research on pianos. Part I: Vibrational characteristics of the sound-board. In: *Das Musikinstrument*, Bd. 24 (1980), S. 694–702
- [XiLu10a] XIN, F.X. ; LU, T.J.: Analytical modeling of fluid loaded orthogonally rib-stiffened sandwich structures: Sound transmission. In: *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* Bd. 58 (2010), Nr. 9, S. 1374–1396
- [XiLu10b] XIN, F.X. ; LU, T.J.: Sound radiation of orthogonally rib-stiffened sandwich structures with cavity absorption. In: *Composites Science and Technology* Bd. 70 (2010), Nr. 15, S. 2198–2206
- [XiLu11a] XIN, F.X. ; LU, T.J.: Analytical modeling of wave propagation in orthogonally rib-stiffened sandwich structures: Sound radiation. In: *Computers & Structures* Bd. 89 (2011), Nr. 5-6, S. 507–516
- [XiLu11b] XIN, F. X. ; LU, T. J.: Transmission loss of orthogonally rib-stiffened double-panel structures with cavity absorption. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 129 (2011), Nr. 4, S. 1919–1934
- [Xin15] XIN, F.X.: An exact elasticity model for rib-stiffened plates covered by decoupling acoustic coating layers. In: *Composite Structures* Bd. 119 (2015), S. 559–567
- [XiTJ04] XIE, G. ; THOMPSON, D. J. ; JONES, C. J. C.: Mode count and modal density of structural systems: relationships with boundary conditions. In: *Journal of Sound and Vibration* Bd. 274 (2004), Nr. 3–5, S. 621–651
- [Yosh07] YOSHIKAWA, SHIGERU: Acoustical classification of woods for string instruments. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* Bd. 122 (2007), Nr. 1, S. 568



FOLIO ADMINISTRATIF

THESE DE L'UNIVERSITE DE LYON OPEREE AU SEIN DE L'INSA LYON

NOM : Trévisan

DATE de SOUTENANCE : 7 Décembre 2016

Prénoms : Benjamin, Philippe, Charles, Marcel

TITRE : Prédiction des mécanismes vibroacoustiques des plaques orthotropes raidies de formes quelconques : application à la table d'harmonie de piano.

NATURE : Doctorat

Numéro d'ordre : AAAALYSEIXXXX

Ecole doctorale : Mécanique, Énergétique, Génie civil, Acoustique

Spécialité : Acoustique

RESUME :

L'étude des structures raidies est un sujet de recherche récurrent. En effet, celles-ci sont présentes dans de nombreuses applications industrielles. Leur utilisation offre de multiples avantages notamment du point de vue de l'allègement, critère qui est particulièrement important dans l'industrie automobile par exemple. Le milieu musical est également adepte de ce type de structures complexes et les instruments de musique font appel à des aspects très variés aussi bien structurels que perceptifs et subjectifs. Dans ce domaine, l'une des principales difficultés est de mettre en place une passerelle entre les lexiques musicaux et scientifiques et surtout de créer des équivalences entre les phénomènes entendus / décrits par les musiciens et les indicateurs habituellement utilisés dans les contextes industriels. La table d'harmonie de piano constitue un exemple typique de ces structures raidies et les problèmes relevés aussi bien par les facteurs que par les musiciens sont nombreux. De nos jours, les ressources numériques permettent de prendre en compte de nombreux phénomènes dans les modèles développés avec, pour conséquence, une difficulté d'interprétation entre les données d'entrée et de sortie. En considérant moins de paramètres à la fois, les modèles simplifiés présentent alors l'avantage de pouvoir en séparer l'influence et la participation dans le rendu global. En prenant comme point de départ une plaque simplement supportée rectangulaire orthotrope dite « spéciale » dans laquelle la table est inscrite, la forme de la table d'harmonie est recrée par ajout d'une densité de ressorts ponctuels dans le domaine complémentaire. Par couplage avec des superstructures collées sur chaque face, il est possible de déterminer le comportement vibratoire de l'instrument ainsi que le rayonnement acoustique à partir des impédances de rayonnement d'une plaque simplement supportée bafflée. Ce modèle analytique simplifié est représentatif des phénomènes constatés dans la littérature tout en étant particulièrement bien adapté aux études paramétriques (continuité du chevalet et des raidisseurs dans l'extrême aigu). Ainsi, il met en lumière les phénomènes de localisations spatiales de vibrations inhérents à la conception de l'instrument, et permet aussi d'étudier l'influence des différents paramètres structurels et mécaniques sur la mobilité le long des chevalets ou encore la puissance rayonnée. Afin de pouvoir qualifier pour un coût calcul réduit l'influence des paramètres structurels sur le son rayonné par l'instrument, ce modèle analytique de structure raidie est couplé à une corde et résolu dans le domaine temporel. Un tel calcul présente alors l'avantage de pouvoir évaluer perceptivement l'impact de ces paramètres, comme l'amortissement des matériaux ou encore les longueurs mortes des cordes, et de mettre en évidence les conséquences du couplage sur le contenu spectral des notes jouées. L'originalité de cette approche typique des problèmes de contacts ou de frottements tient dans le fait que les forces d'interactions qui assurent la continuité entre les sous-systèmes deviennent des inconnues du problème. Enfin, la prise en compte des petites non-linéarités géométriques de la corde est faite en les considérant comme des seconds membres des équations du mouvement, ce qui permet de conserver la notion de modes linéaires.

MOTS-CLÉS :

Laboratoire de recherche : Laboratoire Vibrations Acoustique

Directeurs de thèse: Kerem Ege et Bernard Laulagnet

Président de jury :

Composition du jury : François Gautier (Rapporteur), Pierre-Olivier Mattei (Rapporteur), Xavier Boutillon, Hélène Dumontet, Kerem Ege, Bernard Laulagnet.