



HAL
open science

Modèles Nambu–Jona-Lasinio pour l'étude des phases de la chromodynamique quantique : qualités des prédictions et phases hautes densités

Alexandre Biguet

► **To cite this version:**

Alexandre Biguet. Modèles Nambu–Jona-Lasinio pour l'étude des phases de la chromodynamique quantique : qualités des prédictions et phases hautes densités. Physique Nucléaire Théorique [nucl-th]. Université de Lyon, 2016. Français. NNT : 2016LYSE1179 . tel-01453184

HAL Id: tel-01453184

<https://theses.hal.science/tel-01453184>

Submitted on 2 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



N°d'ordre NNT : 2016LYSE1179

THESE de DOCTORAT DE L'UNIVERSITE DE LYON

opérée au sein de

I'Université Claude Bernard Lyon 1

Ecole Doctorale ED52

Physique et Astrophysique de Lyon (PHAST)

Spécialité de doctorat : Physique Théorique

Discipline : Physique Hadronique

Soutenue publiquement le 07/10/2016, par :

Alexandre Biguet

**Modèles Nambu–Jona-Lasinio pour l'étude des phases de la chromodynamique quantique -
Qualités des prédictions et phases hautes densités**

Devant le jury composé de :

Monsieur KNEUR Jean-Loïc, Directeur de recherche CNRS, UMR 5221, Laboratoire Charles
Coulomb, Université de Montpellier. **Président**

Monsieur GOSSIAUX Pol-Bernard, Professeur des universités, École des Mines de Nantes.
Rapporteur

Monsieur COSTA Pédro, Professeur, Université de Coimbra, Portugal. **Rapporteur**

Madame OERTEL Micaela, Chargée de recherche CNRS, UMR 8102, LUTH, Observatoire
de Paris. **Examinatrice**

Monsieur CHANFRAY Guy, Professeur des universités, Université de Lyon 1. **Examineur**

Monsieur DAVESNE Dany, Professeur des universités, Université de Lyon 1. **Directeur de
thèse.**

Monsieur HANSEN Hubert, Maître de conférence, Université de Lyon 1. **Co-directeur de
thèse.**

Modèles Nambu–Jona-Lasinio pour l'étude des phases de la
chromodynamique quantique - Qualités des prédictions et
phases hautes densités

Alexandre Biguet

28 novembre 2016

Table des matières

1	Chromodynamique quantique, symétries et transitions de phases	3
1.1	La chromodynamique quantique	3
1.2	Certaines symétries de la chromodynamique quantique	14
1.2.1	Le lagrangien de QCD	15
1.2.2	Symétrie de jauge	16
1.2.3	Symétrie de saveur	17
1.2.4	Symétrie chirale et les conséquences de sa brisure spontanée	18
1.2.4.1	Cas de deux saveurs, les pions comme pseudo-bosons de Goldstone	21
1.2.4.2	Cas de trois saveurs	22
1.2.5	Symétrie axiale $U(1)_A$	23
1.2.6	Déconfinement et symétrie $Z(3)$	28
1.3	Diagrammes de phases schématiques, phases hautes densités	31
2	Un modèle Nambu–Jona-Lasinio	35
2.1	Masse dynamique et quantités mésoniques dans le vide	36
2.1.1	Équation du gap dans l’approximation de champ moyen	37
2.1.2	Quantités mésoniques dans l’approximation des boucles	39
2.2	Température et densité finie	42
2.2.1	Équation du gap à partir du propagateur	44
2.2.2	Grand potentiel et équation du gap	45
2.2.3	Restauration de la symétrie chirale et point critique chirale	49
2.2.3.1	Restauration de la symétrie chirale et transition de phase	49
2.2.3.2	Point critique chirale et diagramme de phase	51
2.2.3.3	Effets de la paramétrisation sur la position du CEP	54
3	Sensibilité de la prédiction du CEP dans un modèle NJL simple	57
3.1	Introduction	58
3.2	Sensibilité des prédictions du modèle NJL	60
3.2.1	Paramétrisation du modèle NJL : observables	60
3.2.2	Sensibilité et problème mal-conditionné	62
3.2.3	Résultats : sensibilité de certaines prédictions du modèle NJL	64
3.2.4	Sensibilités pour différentes valeurs du condensat de quark	66
3.3	Conséquences de petites déviations des observables	68
3.3.1	Pertinence de petites déviations	69
3.3.2	Inprédictibilité du CEP	69
3.3.3	Conclusions :	76

4	Modèle Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio	79
4.1	Couplage minimal à la boucle de Polyakov et modèle PNJL	79
4.2	Calcul du grand potentiel	81
4.2.1	Variables Φ et $\bar{\Phi}$ indépendantes	81
4.2.2	Partie réelle du grand potentiel et champs ϕ_3 et ϕ_8	82
4.3	Potentiels gluoniques effectifs	84
4.3.1	Potentiels, mesure de Haar et action des quarks sur la boucle de Polyakov	84
4.3.1.1	Potentiel polynomial	85
4.3.1.2	Potentiel logarithmique	85
4.3.1.3	Potentiel de Fukushima	86
4.3.1.4	Potentiel de Dexhaimer	86
4.3.1.5	<i>Back reaction</i> et dépendance en potentiel chimique du potentiel gluonique	87
4.3.1.6	Dépendance phénoménologique en potentiel chimique et <i>Silver Blaze</i>	88
4.3.1.7	$T_0(\mu)$ et phases quarkyoniques	89
4.3.1.8	<i>Back reaction</i> et constante de couplage dépendante de Φ	89
4.3.2	Caractéristiques	90
4.4	Résolution des équations de champ moyen	90
4.4.1	Comparaison : potentiels gluoniques	92
4.4.1.1	Sans la <i>back reaction</i>	92
4.4.1.2	<i>Back reaction</i> implémentée dans $T_0^{\text{type 1}}$	94
4.4.1.3	<i>Back reaction</i> implémentée dans $G_s(\Phi)$	97
4.4.1.4	<i>Back reaction</i> implémentée dans $T_0^{\text{type 1}}$ et $G_s(\Phi)$	97
4.4.2	Comparaison : <i>back reaction</i>	99
4.5	Positions du CEP chiral	102
4.5.1	Méthode de calcul	102
4.5.2	Résultats	103
4.6	Sensibilité du CEP et conséquences de déviations finies des observables	105
4.6.1	Sensibilité du CEP	105
4.6.1.1	Rappel de la méthode	105
4.6.1.2	Résultats	106
4.6.2	Déviations finies des observables	111
4.6.3	Conclusions et ouvertures	112
5	Phases hautes densité et condensats de diquarks	114
5.1	Grand potentiel et énergie de quasi-particules	115
5.2	Condensation de diquark dans le cas $N_f = 2$	117
5.3	Grand potentiel sous les contraintes de neutralité	121
6	Conclusions	123
A	Quelques généralités sur les problèmes inverses	126
A.1	Introduction	126
A.2	Solution générale d'un problème inverse	128
A.2.1	Rappel de définitions	128
A.2.2	Résolution du problème inverse	132

B	Sensibilité de la prédiction du CEP dans un modèle NJL simple - détails des calculs	136
B.1	Inversion analytique du modèle NJL	136
B.1.1	Réduction du système	136
B.1.2	Solution pour x	138
B.2	Algorithme rapide pour le calcul de la position du CEP	139
B.2.1	Réécriture des équations du gap	141
B.2.2	Trouver la position du CEP	143
B.3	Calcul analytique de la sensibilité de la masse du méson sigma	144
B.4	Calcul analytique de la composition de distributions de probabilité	145
B.5	Kernel density approximation	146
	Bibliographie	147

Résumé

Les modèles effectifs de type Nambu—Jona-Lasinio (NJL) peuvent être utilisés pour étudier les phases à densité et température finies de la chromodynamique quantique (QCD). Alors que les prédictions de ces modèles effectifs peuvent être comparées avec les résultats sur réseaux aux faibles densités, un tel garde-fou n'existe pas à plus haute densité où la méthode fait face à un problème de signe sévère. Dans cette thèse nous proposons une méthode systématique permettant de calculer la stabilité d'une prédiction par rapport aux données d'entrée du modèle. De cette manière un critère quantitatif est fabriqué permettant d'évaluer le pouvoir prédictif d'un modèle. La discussion est principalement orientée sur le point critique chiral d'un modèle NJL et de sa version couplée à la boucle de Polyakov (PNJL). Enfin les phases très hautes densités, telles que pouvant exister à l'intérieur des étoiles compactes, sont abordées et la superconductivité de couleur est discutée dans le cadre des modèles NJL.

Nambu–Jona-Lasinio (NJL) models can be used to study finite density and finite temperature quantum chromodynamics phases. Finite temperature and low density predictions of these models can be compared to lattice results. Such a comparison is not possible at larger density because of the so called sign problem. In this thesis the systematic method that we propose allows to compute the stability of a prediction with respect to the inputs of the model. In this way a quantitative criterium is constructed which can be used to evaluate the predictive power of the studied model. The chiral critical end point prediction of a particular NJL model and its Polyakov loop coupling version (PNJL) will be studied. Finally the high density phases which can exist in the interior of compact stellar objects are discussed along with color superconductivity in NJL type models.

Remerciements

L'institut de physique nucléaire de Lyon a été ma seconde maison pendant ces trois années. Je tiens à exprimer ma gratitude à tous ses occupants pour la belle ambiance aussi bien studieuse que joyeuse qu'ils créent. Mes remerciements vont d'abord à son directeur, Guy Chanfray, pour m'y avoir accueilli, et à l'école doctorale PHAST, avec à sa tête Christophe Dujardin, pour m'avoir permis de faire ce travail de recherche.

Mes directeurs de thèses, Hubert Hansen et Dany Davesne, ont toujours été d'une grande aide et d'un grand soutien. Que ce soit sur le plan technique ou administratif, ils ont toujours répondu à mes nombreuses questions. Discuter, comprendre, résoudre, triangle lumineux de la recherche telle que je l'ai comprise à leur contact. Pour tout, je les remercie.

Le manuscrit symbolise la conclusion d'un travail de recherche de trois années. Loin d'être une liste de résultats, il doit les présenter de manière logique et cohérente. J'espère avoir réussi cet exercice et je remercie mes rapporteurs, Pol-Bernard Gossiaux et Pedro Costa, d'avoir accepté la tâche d'en juger. Je remercie également Micaela Oertel et Jean-Loïc Kneur, le président du jury, pour leur lecture sérieuse du manuscrit. À tous, pour vos conseils, questions et encouragements, merci.

Dur de faire un travail original sans connaître ce qui existe déjà. En plus de toutes les informations administratives qu'elle m'a donné, Sylvie Flores a été d'une grande aide en recherche documentaire. Sylvie, je t'adresse ici un grand merci.

Merci également à l'équipe support et en particulier à Ziane Boukraa d'avoir répondu à mes très nombreuses demandes d'installation de softs. Merci bien sur à Noël Giraud pour avoir pris le temps de m'aider avec mes questions de programmation C et C++ et à Martin Mommey pour avoir répondu à celles concernant la parallélisation.

Mes co-bureaux, anciens et nouveaux, Jie Jie Lie, Pierre Becker et Bertrand Soares, ainsi que les habitants du *bureau d'en face*, Jean-Baptiste Flament, Solene Le Corre et Nicolas Deutschmann, ainsi que ceux des *autres bureaux*, Pierre-Alexandre Pantel, Robin Jodon, Anne-Laure Pequegnot, Rémi Été, Boris Teyssier, Nicolas Baillot d'Étivaux, ont toujours créé une ambiance heureuse et chaleureuse et je les en remercie. De la vie des mouettes en arctique à la théorie des graphes en passant par la machine téléportante doubleuse d'âme, les débats, parfois animés, ont toujours été intéressants. Je n'oublie pas non plus *les autres*, Noël Martin, Philippe Birembaux, Pierre Charlet et Gaëtan Busato avec lesquels j'ai eu le plaisir de partager mes années fac !

Mes très chers amis, trois années, que dis-je, dix ans bien plus, mais qu'aurais-je pu faire sans

vous ? Ensemble nous avons navigué à la Voile, parcouru des milles sur de Vieux Remparts, sommes allées à plus de 42 de la Bourgogne en Espagne et des Brotteaux en Bretagne. Alors que notre port d'attache au grés des saisons peut varier, notre amitié reste, elle, figée. Amis Lyonnais et d'ailleurs, ne soyez pas offusqué de ne pas voir vos noms apparaître sur ce papier. Votre place est dans mon coeur où ils sont inscrits sans ordre de préséance.

Maman, mes grand-parents, vous ne trouverez rien dans ces quelques lignes que vous ne savez déjà. Je vous suis extrêmement reconnaissant pour tout ce que vous avez fait et faites pour moi. Merci pour votre soutien indéfectible.

Véronique, bien sûr j'ai toujours été très calme, compréhensif, patient, posé, doux, délicat, aimable, etc, j'imagine bien que cela n'a pas dû être si compliqué de me supporter... Devine ! *Vivre avec de la dynamite : entre défis et passion*, voilà le titre d'un livre que tu pourrais écrire. Heureusement, la soutenance agit comme un désamorçage, non ? Alors que maintes fois mes faiblesses se sont avouées, jamais en as tu profité pour affirmer ta force. Pour cela et pour tout le reste, je te remercie.

Chapitre 1

Chromodynamique quantique, symétries et transitions de phases

1.1 La chromodynamique quantique

La Chromodynamique quantique (QCD) est la théorie fondamentale des interactions fortes. Dans la vie de tous les jours, les interactions fortes ont la tâche importante de lier les protons et neutrons à l'intérieur des noyaux. Peu après la découverte du neutron en 1932, [1, 2], il a été réalisé que les forces qui maintenaient les nucléons à l'intérieur des noyaux étaient différentes des forces électromagnétiques, bien plus faibles. La compréhension de la dynamique des particules interagissant fortement, les hadrons², a suivi un chemin tortueux. Un chemin dont les méandres, qui, maintenant en 2015, soit près de 40 ans après l'introduction de la QCD [3–5], semblent s'être estompés.

La première théorie des interactions fortes a été construite par Yukawa en 1935, pour pallier à un problème de taille à l'époque. Pour rendre compte de la différence importante d'énergie de liaison entre un deutéron et une particule alpha [6], les forces nucléaires doivent être de courte portée (~ 1 fm). Cependant, l'énergie de liaison observée n'augmente pas aussi vite que le nombre de nucléons, indiquant que les forces nucléaires sont saturées. Une première explication à ce phénomène fut donnée par Heisenberg, [7–9], en faisant l'hypothèse que la force entre deux nucléons était due à l'échange d'un électron. Faisant suite à l'hypothèse selon laquelle un neutron pourrait se désintégrer en un proton, un électron et une particule de masse quasi nulle interagissant très peu (un neutrino), la théorie des désintégrations β fut créée [10, 11], donnant au passage la possibilité aux forces nucléaires d'être réduites à l'échange entre deux nucléons d'une paire composée d'un électron et d'un neutrino. Il s'est avéré que les forces nucléaires ainsi obtenues n'étaient pas assez forte [12].

L'idée de Yukawa [13] fut alors de considérer un nouveau champ, mésonique, médiateur des interactions entre nucléons, dont les excitations représenteraient un nouveau type de particules : les mésons³. Cette théorie diffère de l'électrodynamique quantique (QED) [14, 15], déjà connue depuis quelques années alors, en plusieurs points. (i) Le champ électromagnétique est un champ vectoriel et des particules de même charge se repoussent alors que des particules de charge opposée s'attirent. Le noyau, quant à lui, n'est composé que d'un seul type de particule⁴ et l'interaction est attractive.

2. Hadron vient du grec *hadros* signifiant large, épais, volumineux.

3. Le terme méson vient du grec *mesos* signifiant moyen, intermédiaire.

4. Dans la limite où la masse du proton et la masse du neutron sont égales, le nucléon peut être représenté comme un doublet d'isospin.

Le choix de particule médiatrice le plus simple pour répondre à cette contrainte est une particule de spin nul. (ii) Les photons étant de masse nulle, l'interaction électromagnétique a une portée infinie. Dans le cas des forces nucléaires, la portée de l'interaction est finie et le méson vecteur doit avoir une masse d'environ $(1 \text{ fm})^{-1} \sim 200 \text{ MeV}^1$. (iii) La constante de couplage des interactions électromagnétiques (*i.e.* la charge électrique) est faible. La constante de couplage méson–nucléon de l'interaction *forte* doit être grande.

Dans la première formulation du modèle de Yukawa, le champ scalaire décrivant les interactions nucléaires était solution de l'équation différentielle :

$$(\square - \lambda^2)\phi = 0 , \quad (1.1)$$

où \square est le D'Alembertien et où λ^{-1} correspond à la portée des forces. Le potentiel statique entre deux nucléons séparés par une distance r est proportionnel à $\exp(-\lambda r)/r$. Les particules associées au champ ϕ ont alors une masse donnée par $\mu = \lambda\hbar/c$. Lorsque λ est remplacé par une grandeur de l'ordre du fermi, une masse d'environ 200 fois la masse de l'électron est trouvée. Avec la découverte dans les rayons cosmiques du muon [16, 17], avec une masse de l'ordre de celle du méson prédit par le modèle, les physiciens ont essayé d'associer cette nouvelle particule au méson du modèle. Sans succès bien sûr, le muon étant un fermion de spin 1/2.

Dans le modèle de Yukawa, un méson scalaire de charge positive (négative) est émis (absorbé) quand le nucléon passe d'un état neutron à un état proton. Les nucléons interagissent donc entre eux via l'échange de mésons, de la même manière que des particules chargées interagissent entre elles via l'échange de photons. La théorie garde les caractéristiques du modèle de Heisenberg basé sur les forces d'échanges entre nucléons, mais comme celle de Heisenberg, elle ne peut pas expliquer l'interaction type coeur dur introduite par Majorana, nécessaire pour empêcher les noyaux de s'effondrer sur eux-mêmes et nécessaire pour expliquer la saturation des forces nucléaires. Pour pallier à ce problème, la théorie fut étendue pour inclure d'autres champs mésoniques : vecteurs, pseudoscalaires, pseudovecteurs [18–22]. Les champs vectoriels ont été étudié en détails car ils donnent naissance à un mélange des interactions type Heisenberg et Majorana, pouvant expliquer le moment magnétique anormal du neutron et du proton et ainsi donner au deutéron un moment électrique quadrupolaire [23]. Cependant, le signe du moment électrique quadrupolaire tel que prédit par la théorie était en désaccord avec les résultats expérimentaux. Il s'est alors avéré que le seul champ pouvant à la fois donner le bon signe pour les forces nucléaires et aussi le moment électrique quadrupolaire du deutéron était un champ pseudoscalaire [24, 25]. La théorie de Yukawa a été considéré comme un succès lorsque les pions chargés furent découverts en 1947 dans les rayons cosmiques [26] et le pion neutre en 1950 dans le cyclotron de Berkeley [27]. La densité lagrangienne de la théorie de Yukawa s'écrit alors :

$$\mathcal{L}_{\text{Méson}} = i\bar{N}\gamma_\mu\partial^\mu N - m\bar{N}N + \frac{1}{2}(\partial_\mu\pi)^2 - \frac{\mu^2}{2}\pi^2 - ig\bar{N}\gamma^5\tau_i N\pi^i , \quad (1.2)$$

où N est le champ nucléonique et μ la masse du pion associé au champ $\pi = (\pi^+, \pi^0, \pi^-)$. Le dernier terme du membre de droite correspond au terme d'interaction entre un pion et un nucléon, où g est la constante de couplage, où τ sont les matrices de Pauli et où les indices répétés sont sommés.

Bien que la théorie (1.2) décrive bien certaines caractéristiques des forces nucléaires et ait prédit l'existence d'une particule, elle rencontre deux problèmes majeurs. (i) Après la découverte du pion, de nombreux autres mésons et baryons ont été découverts et rien ne rend les champs nucléonique et pionique différents des autres champs et leur utilisation dans la théorie (1.2) en

1. Nous considérons, ici et dans la suite, les unités naturelles $\hbar = c = k_B = 1$.

tant que champs fondamentaux est assez arbitraire : tous les autres champs apparaissant comme également fondamentaux. (ii) La constante de couplage pion–nucléon de cette théorie est grande rendant le développement perturbatif inutile et toutes les approches non-perturbatives testées se sont révélées infructueuses.

L'idée prévalant à l'époque était qu'aucune théorie des champs n'était acceptable, même si certaines, comme la théorie de Fermi de la désintégration β donnait des résultats en accord avec l'expérience. L'un des problèmes des théories des champs, déjà rencontré en QED, était le problème des infinis rencontré dès lors que le développement perturbatif est poussé au-delà de l'ordre le plus bas. Les techniques de renormalisation étaient alors plus vues comme une astuce pour faire disparaître ces infinis que comme un outil logiquement cohérent comme il l'est aujourd'hui. La conséquence principale de la renormalisation est le fait que la constante de couplage dépend de l'impulsion. Certains physiciens, comme Landau [28], se sont intéressés dans les années 50 au comportement de QED à très haute énergie et en particulier à la relation entre la charge électrique physique mesurée et la charge électrique du vide. Ils ont rencontré ce qui est appelé le problème de la charge nulle¹. De manière simple et intuitive plus que rigoureuse, il peut être résumé ainsi. Le vide d'une théorie des champs n'est pas un vide au sens propre mais est un terme utilisé pour désigner son état fondamental qui ne correspond pas forcément à la notion intuitive de vide. Dû à l'inégalité de Heisenberg reliant le temps et l'énergie, des paires de particule–antiparticule peuvent se créer et s'annihiler de manière aussi rapide que l'énergie de la paire créée est grande. Ce phénomène est appelé polarisation du vide. Ainsi le vide d'une théorie des champs est composé de paires virtuelles de particule–antiparticule. Si l'on considère le cas de QED, les composants élémentaires sont chargés électriquement et le vide de QED peut être vu comme un milieu diélectrique, les paires virtuelles étant des dipôles. Si une charge est placée dans ce milieu, les dipôles vont se polariser et la charge mesurée apparaîtra plus faible qu'elle ne l'est vraiment, dû à l'écrantage produit par les dipôles. Plus la mesure de la charge est faite loin du milieu, plus le nombre de dipôle est grand et plus la charge mesurée sera petite. Le problème de la charge nulle, est qu'une distance *finie* suffit à rendre la charge mesurée nulle. Le même raisonnement peut être fait avec la constante de couplage de la théorie : à une distance finie (appelée pôle de Landau), la constante de couplage devient infinie. Le problème principal soulevé par cette découverte, est qu'il apparaît dans toutes les théories des champs connues à l'époque. Le problème de la charge nulle peut simplement être résumé par la positivité de la fonction β reliant la constante de couplage et l'échelle d'énergie considérée.

Plutôt que de chercher une théorie des champs dont la fonction β serait négative, indiquant que la constante de couplage diminue lorsque l'échelle d'énergie augmente et donc libérée du problème de la charge nulle, beaucoup de physiciens de l'époque n'ont plus étudié les théories des champs. L'idée était alors qu'il n'existe aucune particules fondamentales et aucun champs fondamentaux et que la théorie doit être basée sur les principes généraux d'analyticité et d'unitarité. La théorie ainsi créée a été appelée théorie de la matrice S [29–33]. L'idée principale est que la matrice S qui répond à ces principes peut être construite sans aucun constituant fondamental ni aucune équation du mouvement. Autrement dit, la théorie de la matrice S est une théorie basée sur le principe que tout dépend de tout d'une manière autonome². Nous savons maintenant que les conditions cinématiques d'unitarité, de causalité, de symétries internes et d'espace-temps, sont nécessaires,

1. Traduction littérale du terme *zero charge problem*, aussi appelé *quantum triviality problem*.

2. C'est ce qui est appelé la théorie du *tirant de botte*, en anglais bootstrap theory. Ce nom trouve son origine dans les exploits du Baron de Munchhausen. La version française s'intitule *Aventures du Baron de Munchhausen*, par Théophile Gautier fils. Le Baron, alors coincé dans des sables mouvants, s'en extrait en tirant sur ses tirants de botte (ou par ses cheveux selon la traduction). Il s'envole de manière auto-cohérente !

mais pas suffisantes pour construire la matrice S de manière unique.

Certains physiciens de l'époque mettent alors de côté l'envie de trouver des champs fondamentaux et s'occupent de classer le nombre grandissant de nouvelles particules. Il fut découvert [34–37] que les hadrons connus alors pouvaient se regrouper en des multiplets du groupe de Lie $SU(3)$. Cette symétrie $SU(3)$ n'est pas exacte, mais l'erreur introduite par sa brisure était considérée comme contrôlée. La base de cette classification se trouve dans l'étude des nombres quantiques conservés lors des désintégrations des particules lourdes¹ [38]. La formule reliant le nombre baryonique B , l'étrangeté S , l'isospin I et la charge électrique Q :

$$Q = I + \frac{1}{2}(B + S) , \quad (1.3)$$

apparaît dans [39] quasiment sous cette forme. À ce moment, l'étrangeté est un nouveau nombre quantique introduit pour rendre compte du fait que certaines particules lourdes, en particulier les kaons, mettent plus de temps pour se désintégrer que prévu. L'hypothèse est faite dans [39], que l'étrangeté est conservée par les interactions fortes et électromagnétique, mais pas par les interactions faibles. Une des prédictions importantes de cette classification est l'existence d'un baryon Ω^- [40], confirmée par l'expérience [41].

Les représentations octet et décuplet de $SU(3)$ étaient visibles dans les expériences, mais il était impossible de voir les particules appartenant à la représentation fondamentale de $SU(3)$ et son conjugué. Ces particules invisibles furent appelées des quarks et il fut postulé qu'il en existe trois, de trois saveurs différentes : up (u), down (d) et strange (s). Le modèle des quarks pour les hadrons voit le jour et la symétrie $SU(3)$ devint $SU(3)$ de saveur notée dans la suite $SU(3)_f$. Le modèle des quarks est basé sur la décomposition, sous la symétrie $SU(3)_f$, des produits tensoriels de plusieurs représentations fondamentales. Il fut remarqué dans [35]², que la décomposition des hadrons pouvait se faire élégamment si la charge électrique des quarks n'était pas entière. En considérant que les quarks sont des fermions et en leur assignant les nombres quantiques corrects donnés dans le tableau 1.1 et en considérant que les hadrons sont composés de quarks de la même manière que les noyaux sont composés de nucléons, les nombres quantiques de tous les hadrons observés alors étaient reproduit.

	B	I	Q	S
u	1/3	1/2	2/3	0
d	1/3	-1/2	-1/3	0
s	1/3	0	-1/3	-1

TABLE 1.1 – Nombre baryonique B , isospin I , charge électrique Q et étrangeté S des quarks u , d et s .

Les connaissances que nous avons actuellement sur l'interaction forte nous donnent à penser que cette symétrie de saveur, qui, à l'époque, était considérée comme une symétrie profonde des interactions fortes, est due à la masse faible des quarks u , d et s , comparée à l'échelle typique d'énergie des interactions fortes.

1. À cette époque, les particules lourdes instables étaient appelées des *particules V*.

2. Le nom *quark* est donné dans cet article et l'auteur cite la page 383 du livre *Finnegan's Wake* de James Joyce (Viking Press, New-York, 1939).

Malgré son succès, le modèle des quarks est principalement confronté à deux problèmes. (i) Les quarks sont invisibles dans la Nature, bien que les recherches pour les trouver soient intensives. (ii) Certains des hadrons observés expérimentalement sont prédits par le modèle de manière illégale, ne respectant pas le principe de Pauli. L'exemple typique est la prédiction pour le Δ^{++} , constitué de trois quarks u ayant tous la même orientation de spin. La solution au deuxième problème fut trouvée rapidement [42, 43] en introduisant un nouveau nombre quantique. L'hypothèse est faite que chaque saveur de quark est trouvée dans la Nature sous trois couleurs. Dans ce cas, le principe de Pauli est de nouveau respecté puisque les fonctions d'ondes des hadrons concernés peuvent s'écrire sous forme totalement antisymétrisées.

L'hypothèse de l'existence du nombre quantique de couleur permet également de donner une explication au premier problème : seuls les états singlets de couleur peuvent apparaître dans la Nature. Il est alors postulé que l'interaction forte se couple à la couleur, d'une manière ou d'une autre, rendant les états neutres en couleurs plus légers que les états colorés. Cependant l'existence des quarks est mis en doute car ils restent invisibles, même dans des expériences où l'énergie atteinte est plusieurs fois leur seuil de production : c'est le problème du confinement de la couleur. Les quarks sont alors vu comme un appareil mathématique pratique, mais non-physique.

Ce point de vue sur les quarks a prévalu jusque dans les années 70. Pour voir si les hadrons sont composites, l'idée fut d'étudier les résultats des diffusions profondément inélastiques d'un photon virtuel et d'un nucléon. Ces expériences furent menées conjointement avec la dérivation théorique de quantités mesurables expérimentalement, grâce à ce qui est appelé l'algèbre des courants [44]. L'idée principale est de postuler une forme pour les commutateurs des courants et d'en déduire des règles de sommes pouvant être testées. En particulier, les règles de sommes, tirées de [45], sur les fonctions de structure¹ suggèrent qu'à haute énergie de transfert, la somme d'une part et la différence d'autre part, des fonctions de structure du proton et du neutron ne dépendent pas de l'énergie du photon virtuel échangé. Cette prédiction fut confirmée expérimentalement au SLAC [47] et fut appelée loi d'échelle de Bjorken [48]. Dans [49], il fut démontré que les fonctions de structure pouvaient être reliées au ratio de la section efficace de diffusion d'un photon virtuel longitudinale (σ_L) et transverse (σ_T). Il fut montré que l'étude de ce ratio pouvait donner le spin des constituants (alors hypothétiques) électriquement chargé du nucléon. Si les constituants sont de spin nul alors $\sigma_T = 0$, s'ils sont de spin 1/2 alors $\sigma_L = 0$. Les résultats expérimentaux donnèrent un $\sigma_L \simeq 0$ donnant clairement la preuve que le nucléon est composite et que ses constituants sont de spin 1/2. Il fut également montré que ces constituants ont un nombre baryonique 1/3, les faisant de plus en plus ressembler aux quarks [50].

Ces constituants furent d'abord appelés des partons. Le modèle des partons [51, 52], alors introduit, permet de donner une description simple des diffusions profondément inélastiques et de faire des prédictions, sans se soucier de la dynamique sous-jacente. Dans le modèle des partons, la loi d'échelle de Bjorken est compris en terme de diffusion *élastique* des partons, considérés ponctuels, à suffisamment grande énergie de transfert.

Ces résultats très prometteurs donnent lieu à deux questions fondamentales. (i) Les hadrons sont composés de quarks, mais sont-ils composés d'autres choses qu'il serait impossible de voir avec une sonde électromagnétique ? (ii) Pourquoi les quarks se comportent-ils comme des particules ponctuelles lorsqu'ils sont sondés à haute énergie alors qu'ils restent introuvables dans la Nature ?

La réponse à la première question a été donnée lorsqu'il a été montré qu'il était possible de

1. Pour une revue récente sur les fonctions de structure et leur calcul en QCD, voir [46].

mesurer la fraction d'impulsion d'un proton portée par un quark [53]. Expérimentalement, il fut trouvé que l'impulsion d'un proton était due pour moitié seulement à l'impulsion des quarks. Connaître la nature de particules manquantes était donc un nouvel objectif levé par cette observation.

Nous sommes actuellement dans les années 70. Le problème des pôles de Landau a été formulé il y a près de vingt ans et, observations à l'appui, il semblerait que des composants élémentaires existent. L'étude des théories des champs, bien que n'ayant jamais vraiment arrêté, reprend de plus belle.

Il fut réalisé [54–56] grâce à l'étude des théories des champs invariantes d'échelle, que le seul moyen d'obtenir une loi d'échelle parfaite était de considérer des théories libres (sans interactions). L'idée était répandue alors que la loi d'échelle observée au SLAC ne pouvait pas rester exacte à plus haute énergie. L'argument principal avancé était alors que, dû à la renormalisation, les dimensions des opérateurs et aussi les constantes de couplages (sans dimension) changent avec l'échelle à laquelle la physique est sondée. Lorsque la distance est diminuée (*i.e.* l'énergie est augmentée), ces quantités tendent vers des valeurs fixées qui sont celles d'une théorie fortement couplée (donc très loin d'une théorie sans interaction). Comment les quarks peuvent-ils être (quasiment) libres à haute énergie et *confinés* dans les hadrons à basses énergie ?

Parmi ceux que le problème des pôles de Landau n'avait pas arrêté, il y a Yang et Mills qui généralisèrent le principe d'invariance de jauge locale au cas du groupe non-abélien $SU(2)$ [57]¹. Il avait alors été montré que le spectre de cette théorie mettait en jeu des particules de masses nulles appartenant au triplet de $SU(2)$. À cette époque, un terme de masse fut ajouté au lagrangien en essayant de l'associer au méson (vecteur) ρ , sans succès. En partie à cause de cet échec et aussi à cause de sa complexité, la théorie de Yang-Mills fut abandonnée. Les théories de Yang-Mills furent remises au goût du jour lorsqu'il fut prouvé qu'elles étaient renormalisables [59–61]. Ces résultats ouvrirent la voie aux théories renormalisables de l'interaction faible [62, 63]. Leur application pour les interactions fortes ont mis plus de temps. En effet, le rapport entre la loi d'échelle, considérée alors comme un élément clef de l'interaction forte et les théories de Yang-Mills n'est pas trivial. Cependant, un premier pas fut fait lorsque l'on réalisa que pour expliquer la loi d'échelle, il fallait que la théorie soit libre asymptotiquement [64, 65]². La liberté asymptotique est la propriété de renormalisation [66–70] rendant la constante de couplage faible lorsque la distance diminue. Le deuxième pas fut fait lorsque l'on démontra qu'aucune théorie de jauge abélienne³ renormalisable ne pouvait être libre asymptotiquement [72]. Le lien fut finalement réalisé lorsque la fonction β fut calculée pour les théories de Yang-Mills [3, 4] et lorsqu'il fut proposé que les interactions fortes soient décrites par des gluons non-abéliens dont les interactions sont spécifiées par une symétrie de jauge basée sur le groupe $SU(3)$ de couleur (noté $SU(3)_c$) [5, 73] : QCD est née. La négativité de la fonction β est assurée tant que le nombre de saveur ne dépasse pas 16. Les théories de jauge non-abéliennes possèdent donc la propriété de liberté asymptotique. Simplement, le vide des théories de Yang-Mills peut être vu comme un système (chromo-)paramagnétique, où les gluons, (chromo-)chargés, se comportent comme des dipôles (chromo-)magnétiques. Si un champ est appliqué au système, ces dipôles vont se positionner parallèlement au champ appliqué, augmentant ainsi sa magnitude. On appelle ce phénomène l'anti-écranage. La QCD est asymptotiquement libre

1. La quantification des théories de Yang-Mills par la méthode des intégrales de chemin a d'abord été proposée par Fadeev et Popov en 1967 [58].

2. Les théories non-abéliennes ne sont cependant pas prises en compte dans ces papiers.

3. Cette démonstration est faite pour tout en ensemble de théories renormalisables et pas seulement les théories de jauge abélienne. Voir aussi [71].

tant que cet effet d’anti-écranage dû aux gluons dépasse l’effet d’écranage dû aux quarks.

Qu’en est-il du problème de la charge nulle de Landau dans le cas des théories de jauge non-abéliennes ? Dans le cas de l’écranage, comme nous l’avons déjà expliqué dans un paragraphe précédent, une charge placée dans le vide induit un nuage de particules virtuelles autour d’elle. L’influence de cette charge sur le vide en sera diminuée. Dans le cas de l’anti-écranage, au contraire, le nuage de particules virtuelles crée au voisinage d’une charge placée dans le vide rendra son effet plus grand. Plus on s’éloigne de cette charge, plus son effet sera amplifié par le nuage de particules virtuelles. Dans la limite où l’on s’éloigne infiniment, une énergie infinie est observée et dans ce cas, il n’aurait pas été possible, dès le début de l’expérience, de placer la charge dans le vide. Par l’absurde, le problème de Landau est réglé. Cependant, un autre problème est levé : les quarks existent bel et bien et l’augmentation de l’énergie autour d’une charge semble hors de contrôle... Ce problème est réglé grâce au confinement. Il donne la possibilité aux quarks d’exister, mais pas seul. Si un quark est placé dans le vide accompagné de l’antiquark correspondant, alors le nuage autour de la source et “l’antinuage” autour de l’antisource s’annulent l’un l’autre. L’état lié quark–antiquark a alors une énergie finie.

QCD semblait être alors un excellent candidat pour décrire les interactions fortes. Il manquait cependant une dernière brique : la preuve expérimentale de l’existence des gluons. Personne ne doutait vraiment de leur existence : QCD était la seule théorie asymptotiquement libre, capable de reproduire la quasi loi d’échelle observée dans les diffusions profondément inélastique. Elle était également capable de reproduire la violation de la loi d’échelle [65, 74–76]¹. Le milieu des années 70 voit l’arrivée d’un nouveau sujet de recherche : la physique des gerbes (*jets*). De manière simple, considérons une annihilation, e^+e^- par exemple comme au SLAC, avec création d’un grand nombre de hadrons dans l’état final. Si l’énergie de la collision est suffisamment grande, alors QCD nous explique que le processus peut se décomposer en deux étapes. Premièrement, les quarks et gluons sont produits ($e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$; $\rightarrow qq\bar{q}$; etc) et la section efficace de chacun de ces processus peut être calculée en QCD perturbative (pQCD) [79–81]. Comme les quarks et les gluons ne peuvent pas exister seuls, nous n’observons que des hadrons dans l’état final. Lors de la deuxième étape, les quarks et les gluons, énergétiques, créent des *jets* de hadrons allant plus ou moins dans la même direction que les quarks et gluons initiaux. Ces *jets* ont été observés, en particulier ceux provenant du processus $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ [82]. La raison pour cela est que la probabilité d’un événement à N *jets* fait apparaître une puissance de la constante de couplage de l’interaction forte (g) de plus que celle d’un événement à $N - 1$ *jets* et g est petit. Néanmoins, de la physique des *jets* pouvait provenir une preuve direct de l’existence des gluons via le processus à 3 *jets* $e^+e^- \rightarrow qq\bar{q}$ [83–86]. Un autre moyen de détecter les gluons apparut lorsque les états bottomium Υ furent découverts [87] : pQCD prédit que la désintégration du $\Upsilon(1S)$ se fait principalement en 3 gluons, donnant à l’état final une signature différente de celle de l’état final provenant des processus à 2 *jets* $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ [88, 89]. Cette différence fut observée [90] donnant une importante preuve de l’existence des gluons. Pour que QCD puisse définitivement être adoptée comme la théorie de jauge des interactions fortes, un dernier point restait à être élucidé : les gluons observés sont-ils des particules vecteurs ? La méthode proposée dans [91] pour mesurer le spin des gluons, fut utilisée pour prouver que les gluons sont bien des particules vecteurs [92].

Aux faibles distances, les techniques perturbatives appliquées à QCD ont permis de tester cette

1. La comparaison entre les résultats expérimentaux et les prédictions de QCD à trois saveurs a donné lieu à la découverte du quark charmé (c) [77, 78].

théorie et de l'installer comme la théorie des interactions fortes. Cependant, aux grandes distances, ces techniques ne s'appliquent plus et, encore à ce jour, il n'existe que quelques outils analytiques (AdS/QCD [93–95] est un exemple) pour décrire cette région de QCD.

Une dizaine d'années avant la découverte des gluons, une question importante était de savoir si l'idée du confinement était bien fondée. L'idée importante proposée par Wilson [96] était de formuler les théories de jauge sur un réseau correspondant à la discrétisation de l'espace-temps. L'avantage de la discrétisation est que la limite des couplages forts est facile à prendre et que le confinement est manifeste. Dans cette formulation le passage au continuum depuis la discrétisation requiert de prendre la limite des couplages faibles¹. Si l'on fait l'hypothèse que la propriété de confinement ne manifeste pas de transition de phase lorsque l'on passe continûment de la limite des couplages forts aux couplages faibles, alors le confinement est cohérent en QCD sur réseau. Il semble que cette hypothèse soit vérifiée : les calculs numériques sur réseau des masses des hadrons reproduisant les données expérimentales correctement [98]. Expliquer le fonctionnement détaillé des calculs de QCD sur réseau (LQCD) sort du cadre de cette thèse, même si comprendre les résultats sur réseau a fait partie intégrante du travail de thèse². Il reste néanmoins intéressant de comprendre comment la mesure des masses des hadrons se fait sur réseau, d'autant que le principe est simple et ne nécessite pas de formule mathématique, mis à part la formule d'Einstein $m = E/c^2$. Comme nous l'expliquions précédemment, l'augmentation sans limite de l'énergie d'anti-écranage du nuage de particules virtuelles qui se forme autour d'une charge de couleur placée dans le vide de QCD est contrecarrée par l'énergie du nuage formé autour d'une anticharge, formant ainsi un méson, ou autour de deux autres charges de couleurs complémentaires, formant ainsi un baryon. Une annulation parfaite ne peut se faire cependant que si toutes les sources se trouvent au même endroit, superposées. Cependant, du point de vue de la mécanique quantique, la localisation parfaite des charges, décrites par des fonctions d'ondes, demande une infinité d'énergie. Si l'on cherche à minimiser l'énergie du système, il faut d'une part minimiser l'énergie dû aux nuages (*i.e.* l'énergie des champs de couleur) et donc “mettre les charges les unes sur les autres” et d'autre part minimiser l'énergie que coûte la localisation des fonctions d'ondes et donc rester ignorant de l'endroit où se trouvent les charges. Les configurations stables du système seront celles qui trouvent le meilleur compromis énergétique. Quel que soit le compromis trouvé, chaque configuration aura une énergie donnant au système une masse suivant $m = E/c^2$. Toutes les configurations stables peuvent être associées à des particules de masses différentes et toutes les configurations métastables à des particules dont le temps de vie est fini. Pour mesurer les masses des hadrons sur un réseau, l'idée est de placer un état $\bar{q}q$ ou qqq sur le réseau et de le propager en prenant un *très* grand nombre de configurations possibles des champs de jauge (créées grâce à un algorithme Monte-Carlo) et en les sélectionnant avec un algorithme type Metropolis.

Plusieurs remarques peuvent être faites. Premièrement, l'utilisation de réseaux préserve l'invariance de jauge : le spectre mesuré ne dépend pas des charges de couleur. Deuxièmement, la discrétisation de l'espace-temps donne naturellement un cutoff qui ne dépend pas du nuage de particules autour des charges : autrement dit, qui ne dépend pas du nombre de boucles internes

1. Le lien entre couplage faible et continuum n'est pas direct, voir l'équation (3.16) de [97].

2. Le lecteur intéressé peut se référer aux nombreux livres et articles de revues qui existent. Pour les livres, la partie 1.3 de [99] est utile pour comprendre comment la limite du continuum est prise et la partie 5 de ce même livre pour la simulation sur réseau de systèmes hadroniques (la physique nucléaire à partir de QCD !). Le livre [100] est détaillé et est un livre avec lequel j'ai aimé travailler. Parmi les revues, [97] traite de LQCD à température finie et est utile pour comprendre ce que veulent dire les graphiques présentés dans les papiers de LQCD. Les sections III.A.(5,6,7,8) sont particulièrement utiles. La revue [101], plus récente, est aussi intéressante. En particulier, les différentes méthodes de LQCD à densité finie sont exposées.

de particules virtuelles. Ainsi, la formulation sur un réseau de QCD et sa propriété de liberté asymptotique nous sauvegarde du problème de Landau. Troisièmement, le point physique en LQCD ne s'obtient pas en fixant la masse des quarks à leur valeur dans le vide, mais en ajustant les paramètres du réseau pour reproduire des inputs expérimentaux¹. La masse des quarks est un output des calculs sur réseau, voir par exemple [102].

La propriété de liberté asymptotique a plusieurs conséquences importantes. Premièrement, elle permet à QCD d'exhiber ses quarks et ses gluons à haute énergie et de les rendre invisible à grande distance. D'un point de vue plus fondamental, elle nous conforte dans l'idée que les théories des champs sont adaptées pour décrire la physique des particules. Dans la limite des masses nulles pour les quarks, QCD ne possède pour simplifier qu'un seul paramètre², sans dimension, donnant la magnitude de la force. De part la dépendance de la charge avec l'énergie, la théorie produit d'elle même une échelle d'énergie, appelée Λ_{QCD} , dont toutes les observables dépendent. En particulier, c'est cette échelle d'énergie qui donne au proton (par exemple) la plus grande partie de sa masse (et non pas le mécanisme de Higgs).

La propriété de liberté asymptotique nous permet de prédire que la matière nucléaire, si elle est poussée à suffisamment haute énergie, subira une transition de phase vers un nouvel état, constitué de quarks et de gluons (sur leur couche de masse), quasiment libres : un plasma de quarks et de gluons (QGP). Quelques microsecondes après sa création dans la théorie du Big-Bang, l'Univers est supposé avoir été dans cet état : la propriété de liberté asymptotique permet également d'appréhender les débuts de l'Univers.

Il existe plusieurs paramètres thermodynamiques externes que l'on peut faire varier pour sonder le diagramme de phase de la matière. Pour le moment, nous focalisons la discussion sur les deux plus naturels de l'ensemble grand canonique : la température et la densité de quarks.

Comme l'échelle intrinsèque de QCD est $\Lambda_{\text{QCD}} \simeq 200 \text{ MeV}$ [103], il peut être attendu que la transition de phase ait lieu pour des températures de l'ordre de 200 MeV soit environ³ de l'ordre de 10^{12} K , ou bien pour des densités de l'ordre⁴ de 1 fm^{-3} . Expérimentalement, les collisions d'ions lourds (voir [104, 105] par exemple pour des revues) permettent de reproduire les conditions du Big Bang (haute température, densité nulle) en laboratoire. Bien que des expériences soient prévues pour sonder le diagramme de phase à des densités plus élevées, comme FAIR⁵ au GSI⁶ ou NICA⁷ au JINR⁸, les densités atteintes seront bien inférieures à celles à l'intérieur des étoiles compactes [106, 107].

Grâce à la liberté asymptotique, l'étude des phases hautes température ou hautes densités peut, en principe, se faire en utilisant les méthodes perturbatives. Il est intéressant de se demander pourquoi ces méthodes peuvent être utilisées. Autrement dit, est-il raisonnable de penser qu'à haute température ou haute densité, la constante de couplage de l'interaction forte est suffisamment petite pour autoriser un développement perturbatif ?

Bien que l'idée de la possible libération des quarks à haute densité (voir par exemple [108, 109])

1. Par exemple, la masse du pion $m_\pi \simeq 140 \text{ MeV}$, la masse du kaon $m_K \simeq 490 \text{ MeV}$, etc.

2. Nous verrons dans la section 1.2.5 qu'il existe un autre paramètre.

3. La conversion énergie-Kelvin se fait en utilisant $k_B \sim 8.5 \cdot 10^{-5} \text{ eV.K}^{-1}$.

4. La conversion énergie-longueur se fait en utilisant $\hbar c \simeq 197 \text{ MeV.fm}$.

5. Facility for Antiproton and Ion reasearch.

6. Gesellschaft für SchwerIonenforschung

7. Nuclotron-based Ion Collider fAcility

8. Joint Institute for Nuclear Research

soit plus ancienne que leur libération à haute température, son explication par des arguments physiques est plus compliquée. Aussi commencerai-je par une possible explication pour la phase très haute température. Faisons une hypothèse de départ forte et regardons si les conséquences de cette hypothèse sont sensées.

À haute température (et densité baryonique nulle), faisons l’hypothèse que le système est un gaz parfait (sans interaction) de quarks et de gluons. La thermodynamique d’un tel système est contrôlée principalement par les particules ayant une grande énergie et une grande impulsion. De part la liberté asymptotique, nous savons qu’à haute énergie, les particules interagissent faiblement. L’hypothèse de départ est vérifiée et, en première approximation, la phase très haute température peut être étudiée grâce à un développement perturbatif.

À très haute densité (et très faible température), faisons, là encore, l’hypothèse de départ que les interactions peuvent être négligées. Chaque quark a alors une grande surface de Fermi (de l’ordre de $\mu = \mu_B/3$, où μ_B est le potentiel chimique baryonique, *i.e.* la variable de Lagrange associée à la densité baryonique et où μ est l’énergie nécessaire pour ajouter un quark au système à température nulle). Les degrés de libertés actifs d’un point de vue thermodynamique sont les excitations des quarks aux abords de leur surface de Fermi, c’est à dire les quarks ayant une grande impulsion. Les quarks de faibles impulsions, c’est à dire à l’intérieur de leur surface de Fermi ne peuvent pas interagir car bloqués par le principe de Pauli. L’argument simple donné dans le cas haute température ne peut pas être donné, car les gluons sont des bosons et n’ont donc pas de surface de Fermi et le principe de Pauli ne s’applique pas pour eux. Il est donc tout à fait possible que des gluons de faible énergie (*i.e.* des “gluons non-perturbatifs”) soient échangés entre deux quarks. Une explication possible provient de la physique de la matière condensée : deux particules d’impulsions opposées se trouvant à l’opposé sur la surface de Fermi peuvent s’apparier à partir du moment où il existe une force d’attraction, aussi faible soit-elle, entre elles [110]. Cet appariement donne lieu aux phénomènes de supraconductivité et de superfluidité. Dans le cas de la matière condensée, les particules sont des électrons (*i.e.* des particules de même charge électrique) et la force de Coulomb les repousse l’une l’autre. Une force effective attractive est alors trouvée par des mécanismes compliqués mettant en jeu l’interaction avec des phonons. Dans le cas de QCD, le problème est plus simple puisque la force entre deux quarks est déjà attractive. Dans un superconducteur, un champ magnétique appliqué au système ne peut pas le pénétrer à cause des courants électriques circulant à la surface du superconducteur et écrantant l’interaction. Tout se passe alors comme si les interactions électromagnétiques étaient devenue de portée finie, *i.e.* comme si les photons étaient devenus massifs. Ce phénomène est appelé l’effet Meissner [111]. On peut faire l’analogie et penser que dans un superconducteur de couleur, les gluons vont eux aussi devenir massifs, ne permettant plus aux gluons de faibles impulsions d’interagir. L’appariement des électrons étant favorable énergétiquement, une quantité d’énergie finie doit donc être fournie au système pour exciter les électrons hors de l’état fondamental et leur permettre d’interagir entre eux. En supposant que cet argument est aussi valide pour les quarks, alors l’hypothèse de départ est vérifiée.

Bien que cela puisse paraître étonnant, la QCD aux densités asymptotiquement élevées est mieux comprise que dans les autres contextes [112–114]. Les collisions aux hautes énergies sont traitées avec la QCD perturbative mais les fonctions de structures qui en sont déduites ne donnent que peu d’informations sur la physique non-perturbative de QCD. Dans la limite des très hautes températures, les modes de basses impulsions, bien que pouvant être ignorée en première approximation (comme nous l’avons fait précédemment), restent fortement couplé. Ce genre de problème n’a pas lieu aux très hautes densités. Bien que la superconductivité de couleur sera brièvement discutée par la suite, le lecteur intéressé peut déjà se référer aux nombreuses revues existantes [114–128].

Bien que QCD soit une théorie bien établie, il n'existe pas encore de moyens de théoriques fiables permettant de sonder son diagramme de phase à des densités finies (mais pas infiniment grandes). La formulation sur réseau de QCD ne peut pas être utilisée dans la zone de faible température et haute densité à cause du problème de signe : le déterminant de Dirac¹ devient complexe pour $\mu_B \neq 0$ et ni sa partie réelle ni sa partie imaginaire ne sont positive semi-définie. Comme les méthodes Monte-Carlo–Metropolis utilisées pour générer les configurations de jauge dont nous parlions précédemment utilise ce déterminant de Dirac comme une mesure dans l'espace de jauge, elles ne peuvent plus être utilisées. Bien qu'il existe déjà de nombreux moyens de contourner le problème de signe [101, 129–132] sur réseau, les prédictions faites ne sont fiables que lorsque $\mu/T < 1$.

Pour explorer ces phases, les modèles effectifs sont alors une possibilité. À partir d'une théorie dont il est difficile d'extraire des informations, un modèle effectif peut être construit en ne prenant en compte que certaines propriétés de la théorie de base et en en négligeant d'autres, dans le but de rendre le modèle effectif plus simple à traiter. Par construction, un modèle effectif a ses limitations, mais il paraît honnête de penser qu'une vision sensée (bien qu'inexacte) de la physique du modèle sous-jacent peut être obtenue en ajoutant les résultats obtenus avec les différents modèles effectifs. Cependant, il ne nous semble pas raisonnable de penser que *tous* les résultats obtenus avec un modèle effectif donné peuvent apporter une information précise et correcte sur la physique décrite par le modèle de base.

Tout le problème est de savoir, pour un modèle effectif donné, quelles sont les prédictions qui peuvent avoir un sens dans le cadre de la théorie de base et quelles sont celles qui peuvent ne pas en avoir. En terme un peu plus mathématique, quelle est la probabilité pour que la prédiction faite avec un modèle effectif soit cohérente avec la physique décrite par le modèle de base et, de manière ultime, avec la Nature. Comme j'ai essayé de le montrer tout au long de cette introduction, le juge de paix reste l'expérience. Quelque que soit la beauté d'une théorie, je soutiens qu'elle n'est utile que si elle nous permet de comprendre ce que la Nature nous donne d'une part et que si elle nous permet de prédire ce que la Nature ne nous a pas encore donné. QCD rentre tout à fait dans ce cadre. En plus d'être belle, elle nous permet de comprendre la Nature et nous a permis de faire de nombreuses prédictions qui se sont avérées.

Cependant, il est fort peu probable que nous arrivions à reproduire sur Terre les conditions existant à l'intérieur des étoiles compactes et nous n'arrivons pas à utiliser QCD pour prédire ce qu'il pourrait s'y trouver. Sur quoi pouvons-nous nous baser alors pour dire que telle prédiction "effective" est cohérente et que telle ne l'est pas ? Le point de vue adopté est qu'une étude systématique des prédictions effectives permet de donner, sinon un critère, au moins une idée.

Bien que la méthode que nous proposons dans le chapitre 3 soit utilisable pour la plupart des modèles effectifs, nous concentrons notre discussion sur les modèles de type Nambu–Jona-Lasinio (NJL).

Nous sommes intéressés par le diagramme de phase de QCD. Afin de pouvoir utiliser la théorie de Landau des transitions de phase, certaines symétries de QCD et les paramètres d'ordre associés seront rappelées dans la section 1.2. À partir de ces considérations, nous établirons un diagramme de phase schématique de la matière.

La théorie de Landau des transitions de phases nécessite quatre ingrédients. (i) Pour chaque

1. La fonction de partition de QCD s'écrit sous la forme :

$$Z \sim \int Dq D\bar{q} D A_\mu e^{\bar{q} D q} = \det D, \quad (1.4)$$

où D est appelé opérateur de Dirac. Pour la signification des quantités utilisées, voir la partie 1.2.5.

symétrie considérée, un paramètre d'ordre doit être construit. (ii) L'hypothèse est ensuite faite que le grand potentiel, contenant toute la physique du système, a une forme analytique (souvent considéré comme un polynôme des paramètres d'ordre). (iii) Ce grand potentiel doit respecter les symétries du système. (iv) Le grand potentiel est ensuite développé au premier ordre par rapport aux variables thermodynamiques.

Dans le chapitre 2 les bases du modèle Nambu–Jona-Lasinio (NJL) seront rappelées. Ce modèle étant décrit par un lagrangien, les étapes (ii et iii) ne sont plus nécessaires car le grand potentiel peut se calculer directement à partir du lagrangien et il contiendra donc ses symétries. Dans ce contexte, l'étape (iv) n'est plus nécessaire.

Une fois les fondations du modèle NJL rappelées, l'étude probabiliste–statistique dont nous parlions précédemment sera appliquée (Chap. 3) à certaines prédictions possibles de ce modèle et en particulier la position du point critique chiral (CEP) dans le diagramme de phase.

Comme nous le verrons dans le chapitre 2, le confinement est absent du modèle NJL étudié. Une façon phénoménologique de le prendre en compte sera décrite dans le chapitre 4, où un modèle Polyakov–NJL (PNJL) sera introduit. La méthode dont nous parlions sera à nouveau utilisée pour la prédiction du CEP.

Enfin, des résultats analytiques concernant les phases hautes densités dans les modèles de type (P)NJL seront présentés dans le chapitre 5.

1.2 Certaines symétries de la chromodynamique quantique

L'objectif de cette partie est de construire des diagrammes de phases possibles de la matière. Un diagramme de phase est un graphique faisant apparaître les lignes de transitions de phase que subit un système lorsque des paramètres thermodynamiques (les axes du graphique) sont variés.

De manière simple, une transition de phase est observée lorsque les caractéristiques du système étudié changent drastiquement. Ces caractéristiques sont données par un ensemble d'observables qu'il est en principe possible de mesurer expérimentalement. Suivant le diagramme de phase que l'on souhaite obtenir, le système est stimulé en faisant varier certains paramètres thermodynamiques et la réponse du système à ce stimulus est mesurée.

Du point de vue théorique, une phase correspond à un état de symétrie du système. Une transition de phase est alors vue comme le passage d'un état de symétrie à un autre. Si l'on souhaite tracer un diagramme de phase de la matière, il convient donc d'étudier les symétries du modèle la décrivant. À chaque symétrie est associé un paramètre d'ordre [133], calculable mais rarement mesurable expérimentalement. La valeur d'un paramètre d'ordre donne l'état de symétrie dans lequel se trouve le système (pour une symétrie donnée). Grossièrement, lorsqu'il vaut 0, la symétrie est restaurée, lorsqu'il vaut 1 elle est brisée. Connaître les symétries du modèle ne suffit pas, il faut aussi pouvoir définir les paramètres d'ordre associés. La manière dont varie un paramètre d'ordre donné en fonction d'un paramètre thermodynamique, les autres étant fixés, donne l'ordre de la transition [134]. Dans la limite des volumes infinis (limite dans laquelle nous travaillerons dans la suite), les transitions de phases sont bien définies et peuvent être obtenues à partir du potentiel thermodynamique et de ses dérivées premières et secondes. Une transition est dite de premier ordre lorsqu'au moins une des dérivées premières du grand potentiel est discontinue. Elle est dite de second ordre lorsqu'au moins une de ses dérivées secondes est divergente. Lorsque la transition entre un état ordonné (désordonné) vers un état désordonné (ordonné) se fait de manière continue, la transition est dite de type *crossover* et, d'après les définitions précédentes, il ne s'agit pas d'une transition de phase à proprement parler. Dans le cas où le volume du système est fini, comme dans

une expérience, ou sur un réseau, l'interprétation des résultats est plus compliquée et il est difficile de donner l'ordre d'une transition de phase. En particulier, les effets de volume sont importants lorsque les échelles de longueur typiques de la physique étudiée sont plus grandes que la taille de l'échantillon. Dans ce cas, l'utilisation du groupe de renormalisation est nécessaire.

L'objectif de cette partie est d'une part étudier certaines des symétries de QCD et de définir les paramètres d'ordres associés et d'autre part de construire les différents diagrammes de phase, hypothétiques (ou non), associés.

1.2.1 Le lagrangien de QCD

QCD est une théorie de jauge non-Abélienne avec N_c couleurs et N_f saveurs. L'expérience montre qu'il existe trois couleurs, $N_c = 3$, en général appelées rouge (r), bleu (b) et vert (g) et $N_f = 6$ saveurs appelées up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) et top (t). L'échelle d'énergie de QCD étant approximativement de $\Lambda_{\text{QCD}} \sim 200$ MeV, seuls les quarks les plus légers, u , d et s sont pertinents thermodynamiquement aux énergies considérées dans cette thèse. Une estimation de leur masse dans le vide peut être trouvée dans [135] :

$$m_u = 2.3_{-0.5}^{+0.7} \text{ MeV} ; \quad (1.5)$$

$$m_d = 4.8_{-0.3}^{+0.7} \text{ MeV} ; \quad (1.6)$$

$$m_s = 95 \pm 5 \text{ MeV} . \quad (1.7)$$

La densité lagrangienne¹ classique de QCD peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{YM}} + \mathcal{L}_{\text{q}} + \mathcal{L}_{\text{CP}} . \quad (1.8)$$

Le premier terme du membre de droite de l'équation précédente correspond à la partie Yang-Mills pure de QCD, *i.e.* sans champ fermionique et est donnée par (les indices répétés sont sommés) :

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} , \quad (1.9)$$

où a est un indice de couleur dans la représentation adjointe de $SU(N_c)$, allant de 1 à $N_c^2 - 1$ et où F est le tenseur de jauge donné par :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c . \quad (1.10)$$

Dans l'équation précédente, A_μ^a correspond au champ de jauge vivant dans la représentation adjointe de $SU(N_c)$, f^{abc} sont les constantes de structure du groupe $SU(N_c)$ et g est la constante de couplage de l'interaction forte (sans dimension).

La deuxième partie du membre de droite de l'équation (1.8) est donnée par :

$$\mathcal{L}_{\text{q}} = \bar{q}_f^{c_1} (i\gamma_\mu \partial^\mu \delta_{c_1 c_2} + g\gamma^\mu A_\mu^a T_{c_1 c_2}^a - m_f \delta_{c_1 c_2}) q_f^{c_2} \quad (1.11)$$

et correspond à la partie ‘‘matière’’ du lagrangien et décrit la propagation libre des champs fermioniques et leurs interactions via l'échange de champ de jauge. q_f^c correspond à un champ de quark de saveur f et de couleur c et \bar{q} correspond à un champ d'anti-quark. Les indices c_1 et c_2 sont des indices de couleurs dans la représentation fondamentale de $SU(N_c)$, allant de 1 à N_c et f est un indice de saveur vivant dans la représentation fondamentale de $SU(N_f)$.

1. Dans la suite, nous ferons l'abus de langage consistant à appeler une densité lagrangienne un lagrangien.

La dernière partie :

$$\mathcal{L}_{\text{CP}} = \theta \frac{g^2}{32\pi^2} \tilde{F}_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad (1.12)$$

où \tilde{F} est le dual de F :

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta a}, \quad (1.13)$$

et où ϵ est le tenseur antisymétrique avec $\epsilon^{0123} = 1$. Ce terme brise explicitement la symétrie par renversement du temps, ou de manière équivalente, la symétrie CP (conjugaison de charge + parité). Ce terme étant invariant de jauge, il n'y a pas de raison a priori pour qu'il n'apparaisse pas dans le lagrangien. Ce terme trouve son origine dans la structure topologique du vide de QCD, voir par exemple le chapitre 1 de [136] ou [137]. Nous reviendrons sur ce terme un peu plus tard dans ce chapitre. Expérimentalement, une limite haute pour le paramètre θ est donnée [138] :

$$|\theta| < 10^{-10}. \quad (1.14)$$

Aucune raison théorique n'existe pour le moment expliquant pourquoi θ est si proche de 0. C'est ce qui est appelé le problème CP fort¹. À cause de cette valeur très faible, ce terme n'a pas forcément de conséquence sur la phénoménologie dans le vide. Cependant, dans des conditions extrêmes, lors des collisions d'ions lourds par exemple ou à l'intérieur des étoiles compactes, il est possible que θ prenne des valeurs non nulles correspondant à la condensation du pion [139, 140]. D'autre part, comme on le verra brièvement plus tard, ce terme peut être relié à la masse du méson η' de part son lien avec la susceptibilité topologique [141, 142].

Conventionnellement, le fait de prendre $m_u \neq m_d \neq m_s$ est dénoté par (1+1+1) saveurs, alors que prendre $m_u = m_d \neq m_s$ est dénoté par (2+1) saveurs. Comme la masse du quark étrange est plus grande que la masse des quarks up et down d'un ordre de grandeur, l'approximation $N_f = 2$ est souvent prise et est dénotée par (1+1) saveurs si $m_u \neq m_d$. La limite consistant à faire tendre la masse des quarks vers l'infinie est appelée *quenched-QCD*. Le lagrangien de QCD est alors celui d'une théorie de Yang-Mills pure, la dynamique des fermions étant alors ignorée et seules les boucles internes gluoniques sont prises en compte. Cette limite était souvent prise dans les débuts de QCD sur réseau pour des raisons de temps de calculs (voir [143] pour une étude des limites de cette approximation).

La quantification et la renormalisation de QCD ne sont pas traitées mais le lecteur intéressé peut consulter les nombreux livres existants, comme par exemple [144, 145].

1.2.2 Symétrie de jauge

Le lagrangien de QCD est invariant sous les transformations de jauge par construction. Si G est un élément de $SU(N_c)$,

$$GG^\dagger = G^\dagger G = 1 \quad \det G = 1, \quad (1.15)$$

alors

$$G = \exp(-i\theta_a T^a), \quad (1.16)$$

et le champ de quark q et le champ de jauge A se transforment comme :

$$q \rightarrow Gq; \quad (1.17)$$

$$A_\mu \rightarrow G(A_\mu - \frac{i}{g} \partial_\mu)G^\dagger, \quad (1.18)$$

1. Traduction littérale de *Strong CP-problem*.

où

$$A_\mu = T_a A_\mu^a . \quad (1.19)$$

En introduisant la dérivée covariante :

$$D_\mu = \partial_\mu + igT^a A_\mu^a , \quad (1.20)$$

la partie matière du lagrangien de QCD peut se réécrire comme :

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}(i\gamma_\mu D^\mu - m)q , \quad (1.21)$$

où tous les indices ont été supprimé. Remarquer que le tenseur F et la dérivée covariante D se transforment de manière covariante :

$$F_{\mu\nu} \rightarrow GF_{\mu\nu}G^\dagger \quad \text{où} \quad F_{\mu\nu} = t_a F_{\mu\nu}^a ; \quad (1.22)$$

$$D_\mu \rightarrow GD_\mu G^\dagger , \quad (1.23)$$

suffit à prouver que le lagrangien de QCD est invariant sous les transformations de jauge, locales si θ^a dépend de l'espace-temps, globales s'il n'en dépend pas.

De part le théorème d'Elitzur [146], la symétrie de jauge locale n'est jamais brisée spontanément au niveau du lagrangien classique. À haute densité cependant, la symétrie de jauge globale peut être brisée spontanément suivant le mécanisme de Higgs [147–149], donnant une masse effective aux gluons. Il s'agit de l'analogie de l'effet Meissner dont nous parlions dans l'introduction.

1.2.3 Symétrie de saveur

Les parties \mathcal{L}_{YM} et \mathcal{L}_{CP} ne dépendant pas des champs de quarks et seul \mathcal{L}_q est considéré ici. Décomposons le champ de quark q en deux parties, gauche et droite, correspondant aux vecteurs propres de l'opérateur de chiralité γ_5 avec les valeurs propres ± 1 :

$$q_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)q ; \quad (1.24)$$

$$q_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)q . \quad (1.25)$$

Le lagrangien donné par l'équation (1.21) peut alors se réécrire comme :

$$\mathcal{L}_q = \bar{q}_L i\gamma_\mu D^\mu q_L + \bar{q}_R i\gamma_\mu D^\mu q_R - \bar{q}_L m q_R - \bar{q}_R m q_L , \quad (1.26)$$

où m est la matrice diagonale dans l'espace des saveurs donnée par

$$m = \text{diag}_f(m_u, m_d, m_s, \dots) . \quad (1.27)$$

Dans la limite des masses des quarks nulles, les secteurs gauche (L) et droit (R) sont découplés. Le lagrangien est alors invariant sous les transformations chirales (globales) gauche et droite séparément :

$$q_L \rightarrow L q_L \quad \text{où} \quad L = \exp(i\theta_L^a t^a) ; \quad (1.28)$$

$$q_R \rightarrow R q_R \quad \text{où} \quad R = \exp(i\theta_R^a t^a) , \quad (1.29)$$

où les t^a sont les générateurs du groupe $SU(N_f)$, où a est un indice de saveur de la représentation adjointe de $SU(N_f)$, allant de 1 à $N_f^2 - 1$ et où les paramètres θ sont indépendants de l'espace-temps. Ces transformations peuvent s'écrire :

$$U(N_f)_L \times U(N_f)_R . \quad (1.30)$$

Ce groupe peut se réécrire en utilisant le fait que

$$U(N) = \frac{SU(N) \times U(1)}{Z(N)} , \quad (1.31)$$

où $Z(N)$ est le centre du groupe $U(N)$ ¹. Il vient :

$$U(N_f)_L \times U(N_f)_R \sim SU(N_f)_L \times U(1)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_R . \quad (1.33)$$

En notant par $Q_{L,R}^a$ la charge de Noether associée au courant $j_{L,R}^{\mu a} = \bar{q}_{L,R} \gamma^\mu t^a q_{L,R}$, définie comme :

$$Q_{L,R}^a = \int d^3x q_{L,R}^\dagger t^a q_{L,R} , \quad (1.34)$$

il est possible de définir les charges vecteurs Q_V^a et axial-vecteur Q_A^a comme :

$$Q_V^a = Q_R^a + Q_L^a ; \quad (1.35)$$

$$Q_A^a = Q_R^a - Q_L^a , \quad (1.36)$$

$$(1.37)$$

et donc de réécrire l'équation (1.33) comme :

$$SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \times U(1)_V \times U(1)_A . \quad (1.38)$$

Sous cette forme, le champ de quark q se transforme comme :

$$q \rightarrow \exp(-i\theta^a t^a) q ; \quad (1.39)$$

$$q \rightarrow \exp(-i\theta^a t^a \gamma_5) q . \quad (1.40)$$

Le groupe de symétrie précédent est composé de deux transformations $U(1)$. D'une part, $U(1)_V$, couramment notée $U(1)_B$ est relié au nombre baryonique. D'autre part, $U(1)_A$ correspond aux transformations axiales singulet de saveur.

1.2.4 Symétrie chirale et les conséquences de sa brisure spontanée

Le groupe de symétrie (1.33) peut être décomposé en deux parties. La partie :

$$SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \quad (1.41)$$

1. Le centre d'un groupe (G, \star) est le groupe abélien Z défini par :

$$Z_G = \{z \in G | \forall g \in G [z, g]_\star = 0\} , \quad (1.32)$$

où $[\cdot, \cdot]_\star$ est le commutateur où la loi \star est utilisée. L'égalité (1.31) fait apparaître le centre de $U(N)$ en dénominateur pour éviter le double comptage : $Z(N)$ est compris qu'une seule fois dans $U(N)$, mais est compris à la fois dans $SU(N)$ et dans $U(1)$.

correspond à ce qui est appelé la symétrie chirale. Si cette symétrie était exacte et non brisée, chaque hadron serait dégénéré avec un autre hadron de parité opposée et de même spin, même nombre baryonique et même étrangeté. Une possibilité de satisfaire à ces conditions est de considérer des hadrons de masses nulles, de même spin, même nombre baryonique et même étrangeté, mais venant en deux états d'hélicité possibles $|\pm\rangle$. Les états $|+\rangle + |-\rangle$ et $|+\rangle - |-\rangle$ ont des parités opposées. Comme les hadrons ne sont pas de masses nulles et que cette dégénérescence n'est pas observée dans le spectre hadronique, on peut conclure que, si la symétrie chirale est une bonne approximation, elle doit être brisée spontanément vers le sous-groupe $SU(N_f)_V$. Dans ce cas, l'application de l'opérateur Q_A^a sur un état hadronique donnera le hadron correspondant plus un état à un boson de Goldstone de masse nulle.

La question de savoir si la chromodynamique quantique manifeste vraiment cette brisure spontanée de symétrie :

$$SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A \rightarrow SU(N_f)_V, \quad (1.42)$$

met en jeu toute la dynamique de QCD. Bien qu'il existe un argument montrant que la symétrie chirale doit être spontanément brisée dans le cas $N_f = 3$, voir la partie 22.5 (Eqs. 7 et 8) de [150], un tel argument n'existe pas pour $N_f = 2$, (voir [151] pour un argument sur réseau¹). Aussi, nous admettrons que la symétrie chirale est spontanément brisée².

De manière générale, un opérateur généré dynamiquement permettant de coupler les quarks gauches et droits brisera la symétrie chirale spontanément. Le choix le plus simple pour un tel opérateur est la forme bilinéaire :

$$\langle \bar{q}q \rangle = \langle \bar{q}_R q_L + \bar{q}_L q_R \rangle, \quad (1.43)$$

appelée condensat de quark. Bien que ce choix ne soit pas unique, [158–161], c'est celui que nous ferons ici.

Il est possible de montrer que si $\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$ (avec $m_u = 0 = m_d$), alors :

$$\langle [Q_A^a, \bar{q}q] \rangle \neq 0; \quad (1.44)$$

$$\langle [Q_V^a, \bar{q}q] \rangle = 0, \quad (1.45)$$

où Q_A^a et Q_V^a sont donnés par les équations (1.35) et (1.36). La symétrie chirale est donc spontanément brisée.

Le phénomène de brisure spontanée de symétrie décrit par le mécanisme de Goldstone s'accompagne par la présence de particules de spins et masses nuls appelées bosons de Goldstone. Comme le lagrangien de QCD ne contient que des fermions et des bosons vecteurs, les bosons de Goldstone doivent être des états composites générés non-perturbativement par QCD. Le nombre de ces bosons de Goldstone est donné par la dimension du groupe quotient :

$$\frac{SU(N_f)_V \times SU(N_f)_A}{SU(N_f)_V}, \quad (1.46)$$

1. Voir aussi la partie 5.4 de la revue [152] et les références citées. Voir cependant le note 2 page 23.

2. Une brisure spontanée dans une théorie de champ est toujours associée à une dégénérescence des états du vide physique et n'est possible que dans le cas idéal des systèmes de volume infini [153]. Dans le cas où la symétrie spontanément brisée est continue (et globale), le théorème de Nambu-Goldstone [154, 155] implique que le spectre de la théorie doit contenir des particules de spin 0 et de masses nulles pour chacune des symétries brisées. Ces particules sont appelées des bosons de Goldstone et la preuve de leur existence a été donnée dans [156]. La plupart des livres de théories des champs traitent de la brisure spontanée, voir par exemple la section 19.2 du livre [150]. La section 19.3 de ce même livre traite également de la brisure spontanée de symétries non exactes (voir aussi [157]), particulièrement utile dans le cas où les masses des quarks ne sont pas considérées nulles.

soit $N_f^2 - 1$ bosons de Goldstone.

Dans le cas de la symétrie chirale, $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R$, les bosons de Goldstone doivent avoir les mêmes nombres quantique que les courants de la symétrie spontanément brisée : spin nul, parité négative, isospin 1 et de nombre baryonique et étranger nuls. Les particules les plus légères ayant ces nombres quantiques sont les pions ($m_\pi \sim 140 \text{ GeV} < \Lambda_{\text{QCD}}$). Leur masse non nulle est reliée à la petite brisure explicite de la symétrie chirale par le terme de masse :

$$\bar{q}_L m q_R + \bar{q}_R m q_L , \quad (1.47)$$

et on parle alors de pseudo-bosons de Goldstone.

Il est possible de prouver, voir Eq.(19.3.20) de [150], que la matrice des masses de pseudo-bosons de Goldstone est donnée par :

$$M_{ab}^2 = -4f_{ac}^{-1} f_{bd}^{-1} \langle [t_c, [t_d, H_1]] \rangle , \quad (1.48)$$

où les t_i sont les générateurs de la symétrie brisée et H_1 est le hamiltonien ne contenant que les termes brisant explicitement la symétrie. Ce résultats est ‘‘perturbatif’’ dans le sens où l’on considère que la brisure explicite existe, mais est faible. f est une matrice de constante, mesurable expérimentalement, donnant une mesure de la force de la brisure, f^{-1} donne une mesure de la force avec laquelle les bosons de Goldstone interagissent entre eux et avec les autres particules.

Ces constantes f peuvent être mesurées en remarquant que les courants vecteur et axial :

$$j_V^{\mu a} = V^{\mu a} = i\bar{q}\gamma^\mu t^a q ; \quad (1.49)$$

$$j_A^{\mu a} = A^{\mu a} = i\bar{q}\gamma^\mu \gamma_5 t^a q , \quad (1.50)$$

sont ceux entrant dans les désintégrations semi-leptoniques conservant l’étrangeté, comme par exemple les désintégrations β . Il est possible de prouver que, pour des raisons de symétrie, le seul élément de matrice hadronique nécessaire pour calculer le ratio du processus de désintégration $\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu$ est l’élément de matrice de courant associé à la symétrie spontanément brisée entre le vide et un état à un boson de Goldstone (un pion ici) :

$$\langle 0 | A^{\mu a} | \pi^b \rangle = \frac{i f_{ij} \delta_{ij} p_\pi^\mu e^{ip_\pi x}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0}} . \quad (1.51)$$

En remarquant que l’isospin est un bon nombre quantique

$$f_{ij} = f_\pi \delta_{ij} , \quad (1.52)$$

le ratio de la désintégration d’un pion en un muon et un neutrino muonique peut s’écrire :

$$\Gamma(\pi \rightarrow \mu + \nu_\mu) = \frac{G_w f_\pi^2 m_\mu^2 (m_\pi^2 - m_\mu^2)^2}{4\pi m_\pi^3} , \quad (1.53)$$

où G_w est la constante de couplage reliée à la constante de couplage de Fermi :

$$G_w = G_F \cos(\theta_C) , \quad (1.54)$$

où θ_C est l’angle de Cabibbo, voir section 21.3 de [150]. Expérimentalement, [135] $\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu) \simeq 2.6033 \pm 0.0005 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, ce qui donne $f_\pi \simeq 92 \text{ MeV}$.

Le calcul de l’élément de matrice du courant axial entre deux états nucléoniques permet d’obtenir des informations sur l’échange de pions de basse énergie dans une collision de deux nucléons par exemple. Le calcul de cet élément de matrice fait intervenir la charge axial du nucléon, g_A . Cette quantité est fondamentale, car d’une part elle gouverne les désintégrations β et d’autre part elle permet de donner une mesure de la brisure de la symétrie chirale dans le monde hadronique.

1.2.4.1 Cas de deux saveurs, les pions comme pseudo-bosons de Goldstone

Considérons le cas $N_f = 2$. Les bosons de Goldstone associés à la brisure de $SU(N_f)_A$ sont les pions $\pi^\pm = (\pi^1 \pm i\pi^2)/\sqrt{2}$ et π^0 et les générateurs t_a sont les matrices de Pauli. En notant $q = p_1 - p_2$, où p_i est l'impulsion du nucléon i , il vient :

$$\langle N_1(p_1, s_1) | A_a^\mu(q) | N_2(p_2, s_2) \rangle = \bar{u}_N(p_1, s_1) \frac{t_a}{2} \left[g_A(q^2) \gamma_\mu \gamma_5 + g_P(q^2) \gamma_5 q^\mu \right] u_N(p_2, s_2), \quad (1.55)$$

où u est un spineur de Dirac et où s correspond à l'isospin. La charge axiale du nucléon est la valeur du facteur de forme $g_A(q^2)$ lorsque $q \rightarrow 0$. Dans la limite où la symétrie chirale est exacte, le courant axial est conservé :

$$\partial_\mu A_a^\mu = 0, \quad (1.56)$$

ce qui se traduit dans l'espace des impulsions par :

$$q_\mu A_a^\mu = 0, \quad (1.57)$$

soit

$$q_\mu \langle N_1(p_1, s_1) | A_a^\mu(q) | N_2(p_2, s_2) \rangle = 0. \quad (1.58)$$

En utilisant l'équation de Dirac pour les spineurs u_N et \bar{u}_N , correspondant à la propagation libre d'un nucléon de masse m_N , il est possible de prouver l'égalité :

$$2m_N g_A(q^2) = q_\mu q^\mu g_P(q^2). \quad (1.59)$$

Comme la masse du nucléon n'est pas nulle et que l'expérience montre que $g_A(0) = g_A = 1.2695 \pm 0.0029$, dans la limite $q \rightarrow 0$, le facteur de forme g_P doit avoir une singularité :

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} g_P(q^2) = \frac{2m_N g_A}{q^2}. \quad (1.60)$$

En considérant que l'interaction inter-nucléon par échange d'un pion est gouverné par un terme :

$$\mathcal{L}_{\pi NN} \propto -2i g_{\pi NN} \pi^a \bar{N} \gamma_5 t^a N, \quad (1.61)$$

alors il est possible de relier la constante de couplage d'interaction $g_{\pi NN}$ à la charge axiale du nucléon dans la limite $q^2 \rightarrow 0$:

$$g_{\pi NN} = \frac{m_N g_A}{f_\pi}, \quad (1.62)$$

constituant la relation de Goldberger-Treiman (GT) [162, 163]¹.

Lorsque la symétrie chirale est brisée explicitement par le terme de masse, dans le cas $N_f = 2$

$$H_1 = \bar{q} m q = \bar{u} m_u u + \bar{d} m_d d, \quad (1.63)$$

où m est toujours la matrice de masse des quarks diagonale dans l'espace des saveurs et où q est le vecteur à 4 composantes donné par $q^T = (u, d)$. Il est alors possible de montrer, en utilisant les équations (1.48) et (1.52), que :

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = (m_u + m_d) \langle \bar{u} u \rangle, \quad (1.64)$$

1. Pour des résultats sur réseau de g_A et f_π , voir par exemple [164, 165] et plus récemment, dans le cas $N_f = 2$, pour $m_\pi \sim 130$ MeV [166].

où la symétrie d'isospin non-brisée impose :

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle . \quad (1.65)$$

L'égalité (1.64) constitue la relation de Gell-Mann–Oakes–Renner (GOR) [167]. Cette relation est d'une grande importance phénoménologique, puisqu'elle permet de relier les propriétés des quarks aux observables mésoniques ¹. La relation GT est toujours approximativement vérifiée dans le cas où la symétrie chirale est explicitement brisée. Pour le démontrer, il suffit de prendre la divergence de l'équation (1.51) :

$$\langle 0 | \partial_\mu A^{\mu a} | \pi^b \rangle = \frac{i f_\pi m_\pi^2 e^{i p_\pi x}}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_\pi^0}} . \quad (1.66)$$

Le courant axial n'est plus conservé dû au terme de masse, mais on fait l'hypothèse que sa divergence est proportionnelle de m_π^2 :

$$\partial_\mu A_a^\mu = f_\pi m_\pi^2 \pi_a . \quad (1.67)$$

Cette hypothèse est appelée PCAC² et permet d'obtenir de nombreuses relations à basses énergies. L'élément de matrice (1.55) possède alors un pôle en m_π^2 qui se traduit par la réécriture de l'équation (1.60) comme :

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} g_P(q^2) = \frac{2m_N g_A}{q^2 + m_\pi^2} . \quad (1.68)$$

La fonction de structure $g_A(q^2)$ se comporte alors comme :

$$q^2 \in [0, m_\pi^2] , \quad g_A(q^2) \sim \frac{g_{\pi NN} f_\pi}{2m_N} . \quad (1.69)$$

Plus de détails sur la conservation partielle du courant vecteur et sur la calcul de théorèmes de basses énergie peuvent être trouvés dans [155, 169–173].

La relation GOR, donnée par l'équation (1.64), indique que les masses des pions chargés et du pion neutre sont égales (au premier ordre), bien que nous n'ayons fait aucune hypothèse sur la masse des quarks u et d . Alors que $m_u \neq m_d$ n'a pas de conséquence au premier ordre, la différence observée entre la masse des pions provient des interactions électromagnétiques [174].

Au début du paragraphe, nous n'avons pas prouvé que la symétrie chirale était spontanément brisée, mais nous en avons fait l'hypothèse. La faible masse du pion par rapport à la masse du nucléon $m_\pi^2/m_N^2 \sim 0.02$, peut indiquer a posteriori, que les conséquences de la brisure spontanée de la symétrie chirale sont raisonnables et vérifiées expérimentalement.

1.2.4.2 Cas de trois saveurs

La symétrie d'isospin $SU(2)_f$ approximative en physique nucléaire, a été généralisées dans les années 60 à la symétrie $SU(3)_f$, encore plus approximative [175, 176]. Cette symétrie groupe les hadrons connus (alors) en plusieurs représentations irréductibles : un octet de baryon (de spin 1/2), un octet de méson de spin 0 et de parité négative, etc.

Il est possible alors de généraliser le travail fait dans le paragraphe précédent, au cas $N_f = 3$. La symétrie chirale $SU(3)_L \times SU(3)_R$ est spontanément brisée vers le groupe $SU(3)$ de Gell-Mann, que nous avons appelé $SU(3)_V$ dans le paragraphe précédent.

1. Pour une étude dans ce contexte de la dépendance en densité de ces observables pour répondre aux contraintes des étoiles compactes, voir section 8 de [168].

2. Partial Conservation of the Axial Current.

Dans ce cas, les générateurs de $SU(N_f)_A$ sont les matrices de Gell-Mann (multipliées par γ_5) et les pseudo-bosons de Goldstone sont associés à l'octet pseudoscalaire de méson de spin nul : $\pi^{+, -, 0}$, $K^{+, 0}$, $\bar{K}^{-, 0}$, η^0 . Il est possible d'écrire d'utiliser la formule (1.48) pour obtenir leur masse (voir [167, 177] par exemple) :

$$m_{\pi^{+, 0}}^2 f_\pi^2 = (m_u + m_d) \langle \bar{u}u \rangle ; \quad (1.70)$$

$$m_{K^+}^2 f_\pi^2 = (m_u + m_s) \langle \bar{u}u \rangle ; \quad (1.71)$$

$$m_{K^0}^2 f_\pi^2 = (m_d + m_s) \langle \bar{u}u \rangle ; \quad (1.72)$$

$$m_{\eta^0}^2 f_\pi^2 = \frac{1}{3} (m_u + m_d + 4m_s) \langle \bar{u}u \rangle , \quad (1.73)$$

où la symétrie non-brisée explicitement impose :

$$\langle \bar{u}u \rangle = \langle \bar{d}d \rangle = \langle \bar{s}s \rangle . \quad (1.74)$$

Les masses des kaons sont mesurées expérimentalement et sont de l'ordre de 500 MeV, soit près de quatre fois plus que les masses des pions. D'après les formules précédemment données, on peut voir que la masse du quark s doit être bien plus élevée que celles des quarks u et d . Ces relations entre la masse des mésons pseudoscalaires impose une relation linéaire entre elle, nommée relation de Gell-Mann–Okubo [176, 178] avec laquelle il est possible par exemple de prédire la masse du méson η à quelques pour cent. Il est également possible d'obtenir des ratios pour la masse des quarks [179, 180], en relativement bon accord avec les valeurs expérimentales. Pour une discussion détaillée sur la masse des quarks, voir [181]¹. Pour plus de détails concernant la symétrie chirale, dans la limite exacte, ou dans le cas d'une brisure explicite, le lecteur peut consulter la partie 2.1 et 2.2 de la revue [152]².

1.2.5 Symétrie axiale $U(1)_A$

La deuxième partie du groupe de symétrie (1.38) est :

$$U(1)_V \times U(1)_A . \quad (1.75)$$

La symétrie $U(1)_V$ correspond à la conservation du nombre baryonique (observée expérimentalement) et ne doit pas être brisée. Sous la symétrie axiale $U(1)_A$, les champs de quarks se transforment comme :

$$q \rightarrow \exp(i\gamma_5\theta)q . \quad (1.76)$$

Si cette symétrie était exacte, le spectre hadronique serait composé de particules de masse égale, mais de parité opposée, ce qui n'est pas le cas. D'un autre côté, sa brisure spontanée impliquerait l'existence d'un boson de Goldstone isoscalaire de parité négative [182] de masse comparable à celle du pion. La seule particule ayant les bons nombres quantique est le η' , dont la masse est bien trop grande : $m_{\eta'} \simeq 960$ MeV.

Le résultat obtenu par Weinberg [183], voir aussi Eq.(19.10.12) de [150] est que si la symétrie $U(1)_A$ est spontanément brisée, alors la masse du pseudo-boson de Goldstone associée doit respecter :

$$m_b \leq \sqrt{3}m_\pi . \quad (1.77)$$

1. Pour pouvoir refaire les calculs de cette revue, il est nécessaire d'avoir lu le chapitre 20 de [150], concernant le calcul des fonctions de corrélation à deux points avec la méthode OPE (Operator Product Expansions).

2. Attention, il semble que le point de vue adopté dans cette revue concernant la résolution du problème $U_A(1)$ ne soit plus d'actualité. Voir la section 1.2.5

L'absence de pseudo-boson de Goldstone associé à la brisure spontanée de la symétrie $U(1)_A$ et l'absence de dégénérescence dans le spectre hadronique est appelé problème $U(1)_A$. Les effets de ce problème peuvent s'observer expérimentalement dans la désintégration du méson η [184]. La résolution du problème $U(1)_A$ a été un sujet controversé dans les années 80. D'une part, l'école de Crewther [152, 185] et d'autre part l'école de 't Hooft [186, 187]. De manière pragmatique, la différence provient du fait que des nombres particuliers, nommés *winding numbers*¹, sont entiers chez 't Hooft alors qu'ils sont rationnels chez Crewther. En réponse à [152], 't Hooft a écrit une autre revue, [188], dans laquelle il soutient que son calcul est juste². Il semblerait que le point de vue adopté maintenant soit celui de 't Hooft, voir par exemple le chapitre 1 de [136].

Aborder simplement la résolution du problème $U(1)_A$ ne peut pas se faire sans connaissances préalables qu'il est difficile de résumer en un nombre limité de pages. Aussi, je ne donnerai que les points clés importants et des références à étudier pour aller plus loin. Pour résoudre le problème $U_A(1)$, il faut : (i) trouver un moyen de briser cette symétrie et (ii) donner une explication aux phénomènes physique qui en découlent.

La symétrie $U_A(1)$ est respectée au niveau du lagrangien classique de QCD. Les infinis que l'on rencontre dans les calculs au-delà de l'ordre le plus bas dans la théorie quantifiée, doivent être régularisés. Lorsque la théorie est renormalisable, alors le résultat final ne dépend pas de la régularisation utilisée. Cependant, il est possible que la procédure de régularisation brise certaines symétries de la théorie et bien que le résultat final ne doive pas dépendre de la régularisation, il est possible qu'il soit affecté par la brisure de ces symétries. Lorsque c'est la cas, on parle d'anomalie. Donc simplement, une anomalie est une brisure explicite d'une symétrie au niveau de la théorie quantifiée.

Si l'on adopte une procédure de quantification basée sur l'intégrale de chemin, la fonction de partition dans l'espace Euclidien d'une théorie décrite par l'action de QCD, S , peut s'écrire :

$$Z = \int Dq D\bar{q} DA_\mu e^{-S}, \quad (1.78)$$

où q et \bar{q} sont des champs fermioniques (*i.e.* des variables de Grassmann) et A sont les champs de jauge (bosoniques). Soit U une transformation, pouvant être locale, vivant dans $\mathcal{E}_f \times \mathcal{E}_D$, où \mathcal{E}_f est l'espace des saveurs et où \mathcal{E}_D est l'espace de Dirac. Sous cette transformation, les champs fermioniques sont modifiés comme :

$$q(x) \rightarrow U(x)q(x). \quad (1.79)$$

La mesure d'intégration est modifiée comme [150, 189–191] :

$$Dq D\bar{q} \rightarrow (\det \mathcal{U} \det \bar{\mathcal{U}})^{-1} Dq D\bar{q}, \quad (1.80)$$

où

$$\mathcal{U}_{xi,yj} = U(x)_{ij} \delta^4(x-y); \quad (1.81)$$

$$\bar{\mathcal{U}}_{xi,yj} = i\gamma_0 U(x)_{ij}^\dagger i\gamma_0 \delta^4(x-y). \quad (1.82)$$

Considérons le cas où U est une transformation chirale :

$$U(x) = \exp(i\gamma_5 \alpha(x)t), \quad (1.83)$$

1. Littéralement “nombre de tours”, aussi appelés “indices” en analyse complexe.

2. Lire l'introduction de [152] et l'appendice A de [188].

où t est une matrice hermitienne et où α est une fonction réelle de x . Dans ce cas, la propriété suivante :

$$\bar{U} = U , \quad (1.84)$$

est respectée et la mesure d'intégration est modifiée par la transformation comme :

$$DqD\bar{q} \rightarrow (\det U)^{-2} DqD\bar{q} . \quad (1.85)$$

En considérant les paramètres α infinitésimaux et en utilisant l'identité :

$$\det O = \exp(\text{tr} \ln O) , \quad (1.86)$$

il est possible de montrer que la transformation affecte la mesure comme :

$$DqD\bar{q} \rightarrow \exp\left(i \int d^4x \alpha(x) \mathcal{A}(x)\right) DqD\bar{q} , \quad (1.87)$$

où \mathcal{A} est appelée fonction d'anomalie. Sous une transformation $U(1)$ globale, les champs fermioniques se transforment comme l'équation (1.76) et la fonction d'anomalie peut être écrite (dans l'espace Euclidien) comme :

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\gamma\delta} F_a^{\mu\nu} F_b^{\gamma\delta} \text{tr}(t_a t_b) , \quad (1.88)$$

où les indices a et b vivent dans l'espace adjoint des couleurs. Il est cependant possible de montrer que ce terme ne brise pas explicitement $U(1)_A$, car il peut être écrit comme une divergence totale [136, 192] :

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} = \partial_\mu K_\mu , \quad (1.89)$$

où :

$$K_\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} A_\nu^a \left(F_{\alpha\beta}^a - \frac{g}{3} f^{abc} A_\alpha^b A_\beta^c \right) . \quad (1.90)$$

De ce fait, la symétrie $U(1)_A$ est de nouveau respectée. L'idée de 't Hooft est alors de chercher des configurations de jauge pour lesquelles :

$$\int d^4x \partial_\mu K^\mu \neq 0 . \quad (1.91)$$

En général, les termes de surfaces sont nuls car on fait l'hypothèse que les champs deviennent nuls suffisamment vite à l'infini et ainsi, pouvoir utiliser le théorème de Riemann-Lebesgue [193, 194]. Cette hypothèse doit également être vérifiée si l'on veut que des solutions d'énergie finie existent (dans l'espace de Minkowski), ou, de manière équivalente une action finie (dans l'espace Euclidien).

Pour rendre l'action Yang-Mills :

$$S_{YM} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} , \quad (1.92)$$

finie, la condition que les champs de jauge soient nuls à l'infini est suffisante. Cependant, si les champs de jauge approchent une configuration donnée par la transformation de jauge d'un champ nul à l'infini (appelée pure jauge) :

$$A_\mu \rightarrow U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger , \quad (1.93)$$

$$\xrightarrow{r \rightarrow \infty} -\frac{i}{g} U \partial_\mu U^\dagger , \quad (1.94)$$

alors l'action est également finie et cette condition est nécessaire et suffisante (voir par exemple chapitre 23.1.c de [150]). La deuxième ligne de l'équation précédente fait apparaître le "rayon" de l'espace Euclidien à 4 dimensions, considéré comme une sphère de rayon :

$$r = \sqrt{x_\mu x^\mu} . \quad (1.95)$$

Connaissant ces valeurs des champs aux bords de l'espace, on peut se demander comment les utiliser pour obtenir des valeurs finies pour l'action. Autrement dit, on cherche une application qui à un élément de la surface de l'espace associe une action finie. Une telle application est donnée par U , qui associe aux éléments de la surface de l'espace Euclidien des éléments de l'espace de jauge noté G . La surface de l'espace Euclidien à quatre dimensions est la sphère à trois dimensions notée S^3 . La solution triviale est celle qui consiste à prendre l'identité pour U et $A_\mu = 0$ sur tous l'espace. L'existence de solutions, dites topologiques, dépend de la manière dont toutes les applications U peuvent être déformées continûment les unes vers les autres. Il suffit que cela ne soit pas possible pour que des solutions topologiques existent. Le nombre de solutions topologiques dépend du nombre d'applications $U : S^3 \mapsto G$ différentes qui ne peuvent pas être déformées continûment les unes dans les autres. Toutes celles qui le peuvent font partie d'une classe de solutions particulières. À chacune des applications peut être attaché un nombre *entier*, appelé *winding number* et noté ν . Deux applications peuvent être déformées l'une dans l'autre si ce nombre est le même pour les deux applications. Pour une application donnée, il existe une méthode générale permettant de calculer ce *winding number*, voir chap. 23.4 de [150].

Dans le cas où le groupe de jauge est $SU(3)$, il est possible de prouver que :

$$\int d^4x \mathcal{A}(x) = 2N_f \nu , \quad (1.96)$$

où :

$$\nu \propto \int d^4x \tilde{F}_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} , \quad (1.97)$$

et donc que $U(1)_A$ est bien brisée.

Chaque groupe d'application différente donne un vide de QCD différent que l'on identifie par le *winding number* associé à ce groupe d'application. Par analogie avec l'effet tunnel de la mécanique quantique, il est possible de passer d'un vide à l'autre [195, 196]. Le vide de QCD apparaît alors comme une superposition de ces différents vides possibles :

$$|0\rangle_\theta = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \exp(in\theta) |n\rangle , \quad (1.98)$$

est appelé le vide θ , où n correspond à la différence des *winding numbers* entre les états connectés par une transformation de jauge. Le paramètre θ permet de distinguer entre les différentes zones de QCD qui ne peuvent pas être reliées entre elles par un opérateur invariant de jauge, avec $|\theta| \leq \pi$.

La présence de ces solutions topologiques, appelées *instantons*, dans le vide de QCD implique que le terme :

$$\mathcal{L}_{CP} = \theta \frac{g^2}{32\pi^2} \tilde{F}_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} , \quad (1.99)$$

doit être ajouté au lagrangien si l'on travaille dans un vide à n fixé. Comme dit précédemment la mesure expérimentale de θ donne un nombre cohérent avec 0. La raison pour laquelle $\theta \sim 0$ n'est pas encore élucidée. Comme le terme \mathcal{L}_{CP} brise la symétrie CP , ce problème est appelé le problème CP fort (voir [136] pour une possible résolution de ce problème). Pour (beaucoup) plus

de détails et d'explications sur les instantons, les chapitres 6 et 7 de [153], le livre [197], au chapitre 23 de [150], ou encore les articles [198–200] peuvent être consultés.

Dans les modèles effectifs, la brisure de $U(1)_A$ doit être prise en compte pour avoir une description convenable de la masse du méson η' [201].

L'idée principale qu'il faut retenir est que QCD prédit l'existence de certaines configurations des champs de jauge auxquelles on peut assigner un nombre entier. La preuve de l'existence de ces configurations n'existe pas encore, mais des preuves indirectes existent. Dans [141], l'auteur montre que la masse du méson η' est reliée à la dérivée seconde de l'énergie du vide sans quark par rapport au paramètre θ (voir l'équation 22 de ce papier). Il ne calcule pas la masse du η' , mais utilise sa valeur expérimentale pour donner une estimation de l'échelle d'énergie typique des interactions fortes. Il trouve $\sim 150 - 200$ MeV en relativement bon accord avec Λ_{QCD} . Pour des résultats sur réseau, [202, 203] dans lesquels les auteurs montrent que la prise en compte de ces configurations permet de reproduire correctement le spectre mésonique.

Comme nous l'expliquons juste avant, les configurations ayant un *winding number* non nulles peuvent être vue comme des transitions entre différents vides de QCD. Pour passer d'un vide à l'autre, une barrière de potentiel doit être traversée dont la hauteur est proportionnelle à g^{-1} . La probabilité de passage d'un vide à l'autre par effet tunnel est donc fortement diminuée dans la zone de fort couplage. Ces configurations sont appelées instantons. À haute température, dans la phase QGP, la hauteur de la barrière diminue et il devient possible de passer par dessus. Ces configurations là sont appelées *sphalérons* [204–206]. Elles ont également été étudiées dans la théorie électrofaible comme mécanisme possible de la baryogénèse [207]. À haute température, la probabilité d'obtenir de telles configurations est assez grande [206, 208].

Ces configurations ont une action critique sur les quarks : elles peuvent changer la chiralité des quarks [200, 209, 210] via l'anomalie axiale. Il est possible de prouver, dans la limite chirale, que l'intégration spatiale de la divergence du courant axial donne le taux de changement de la chiralité du système au cours du temps :

$$\frac{d(N_R - N_L)}{dt} = \frac{-g^2 N_f}{16\pi^2} \int d^3x \tilde{F}_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad (1.100)$$

où N_R (N_L) est le nombre de quark moins le nombre d'antiquark d'hélicité droite (gauche). D'après l'équation (1.97), le terme de droite de l'équation précédente est proportionnel au *winding number*. Le calcul du membre de gauche a été fait sur réseau très récemment [206].

Comme le paramètre θ est presque nul, QCD ne viole pas les symétries P et CP, autrement dit, QCD a autant de chance de créer des configurations de *winding number* positif que des configurations de *winding number* négatif. Dans le QGP, beaucoup de ces configurations peuvent être créées à plusieurs point de l'espace-temps avec des *winding numbers* différents. À cause du principe de Pauli, une différence entre le nombre de quarks gauches et droits n'est pas favorisée car elle coûte de l'énergie au système. Ainsi, les configurations ne sont pas créées de manière aléatoire comme on pourrait le penser, mais de telle façon à ce que la chiralité du système soit baissée.

Comme nous venons de l'expliquer, les configurations ayant des *winding numbers* non nul peuvent être créées avec une assez grande probabilité à température finie. Ces configurations (sphalérons) peuvent transformer la chiralité des quarks. À cause de l'anomalie axiale, les interactions entre ces configurations brisent les symétries P et CP. Une manière phénoménologique de traiter un système de chiralité non nulle est d'introduire un potentiel chimique chiral μ_5 associé au nombre de quark droit $N_5 = q^\dagger \gamma_5 q$. Comme le montre l'équation 1.100, la chiralité du système évolue au cours

du temps et n'est donc pas une quantité conservée. Il en suit que μ_5 n'est pas un vrai potentiel chimique car il n'est pas associé à une quantité conservée. En gardant cette remarque à l'esprit, il est quand même possible de traiter μ_5 comme un potentiel chimique dans le cadre des modèles effectifs.

Le potentiel chimique chirale μ_5 permet de simuler l'effet des sphalérons. Comme le potentiel chimique chirale lève la dégénérescence entre les modes de chiralité droite et gauche, il permet de considérer un milieu de chiralité finie. À température nulle, le potentiel chimique chirale est l'énergie nécessaire pour pouvoir ajouter un quark droit sur sa surface de Fermi, ou de manière équivalente, retirer un quark gauche de sa surface de Fermi.

Il est attendu que lors des premiers instants de la production du QGP lors d'une collision d'ion lourds, le système aura une chiralité non nulle [211], mais que la moyenne de la chiralité sur plusieurs événements de création de QGP est nul. C'est ce qui est appelé event-by-event P and CP violations [139, 212]. Lors d'une collision d'ions lourds, un fort champ magnétique est créé. Si le milieu contient "une charge chirale", il est attendu que le champ magnétique sépare les particules des antiparticules de même chiralité. Un champ magnétique appliqué à un milieu de chiralité non nulle va avoir pour effet de créer un courant électrique le long du champ magnétique : les quarks de chiralité opposée se déplacent dans des sens opposés. Ce phénomène est appelé l'effet magnétique chirale (*chiral magnetic effect*). Ce phénomène pourrait avoir des effets importants dans les collisions d'ions lourds non centrales. Bien que des résultats expérimentaux montrent une séparation de la charge le long du champ magnétique, il n'existe pas à ce jour de consensus quant à leur origine.

Pour le lecteur intéressé, voici quelques références bibliographiques très intéressantes. Concernant l'étude de modèles effectifs, dont le modèle NJL, [140, 213–238]. À noter que l'utilisation d'un potentiel chimique chirale permet de rendre compte de la catalyse magnétique inverse dans les modèles NJL reproduisant ainsi les résultats réseaux. L'introduction d'un potentiel chimique chirale n'empêche pas les simulations réseaux [239–242] et son impact peut également être étudié dans le formalisme Dyson-Schwinger [243–245]. Pour des travaux théoriques en liens plus directs avec l'expérience [139, 212, 246–259]. Parmi les nombreux résultats expérimentaux concernant ce domaine les articles que j'ai eu le temps d'étudier [260–272]. À noter que ce domaine est également important dans l'étude des phases hautes densités [273–277].

1.2.6 Déconfinement et symétrie $Z(3)$

Dans la partie précédente, nous avons étudié la symétrie chirale qui est une symétrie de QCD dans la limite des masses de quarks nulles. L'étude de cette symétrie a permis de mettre en évidence un paramètre d'ordre (le condensat de quark $\langle \bar{q}q \rangle$) rendant compte de l'état de symétrie du système.

Dans cette partie, nous allons suivre le même cheminement en nous concentrant d'abord sur une autre symétrie de QCD qui est exacte dans la limite des masses de quarks infinies puis en fabriquant un paramètre d'ordre pour cette symétrie, c'est à dire en trouvant une quantité brisant spontanément cette symétrie. Nous montrerons ensuite comment cette symétrie est liée au déconfinement.

Comme on l'a vu dans la partie 1.2.2, le lagrangien de QCD est invariant sous les transformations de jauge du groupe $SU(3)_c$. Ce groupe contient un centre $Z(3)$ dont les éléments sont donnés par :

$$z = \exp(2i\pi n/N_C)\mathbb{I}_{N_C}, \quad (1.101)$$

où \mathbb{I}_{N_C} est la matrice identité dans l'espace des couleurs et où $\exp(2i\pi n/N_C)$ sont les racines n -ième de l'unité, avec $n = 0, 1, \dots, N_C - 1$.

On se place dans la limite¹ $N_f = 0$. À température finie, dans le formalisme du temps imaginaire,

1. Cette limite n'est pas triviale [278].

les champs de jauge (bosoniques) doivent respecter les conditions de périodicité [279–282] :

$$A_\mu(\tau + \beta, \mathbf{x}) = A_\mu(\tau, \mathbf{x}) , \quad (1.102)$$

où β est l'inverse de la température $\beta = 1/T$ correspondant à la direction temporelle dans l'espace Euclidien $\tau = it$.

Une transformation de jauge n'a cependant pas besoin d'être périodique. Considérons la transformation de jauge anti-périodique suivante :

$$G(\tau + \beta, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\xi} G(\tau, \mathbf{x}) , \quad (1.103)$$

où la forme de $\boldsymbol{\xi}$ reste à déterminer, mais est contrainte par le fait que les transformations jauge sont des éléments de $SU(N_C)$. $\boldsymbol{\xi}$ doit donc respecter :

$$\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{\xi}^\dagger = 1 ; \quad (1.104)$$

$$\det \boldsymbol{\xi} = 1 . \quad (1.105)$$

Appliquons la transformation (1.103) aux champs de jauge (nous ne notons que la coordonnée temporelle pour simplifier la notation) :

$$G(\tau + \beta) A_\mu(\tau + \beta) G^\dagger(\tau + \beta) = \boldsymbol{\xi} G(\tau) \left[A_\mu(\tau) + \frac{i}{g} \partial_\mu \right] G^\dagger(\tau) \boldsymbol{\xi}^\dagger , \quad (1.106)$$

$$= \boldsymbol{\xi} G(\tau) A_\mu(\tau) G^\dagger(\tau) \boldsymbol{\xi}^\dagger + \frac{i}{g} \boldsymbol{\xi} \partial_\mu \boldsymbol{\xi}^\dagger . \quad (1.107)$$

Dans la première ligne, la forme explicite des transformations de jauge (1.103) ainsi que la condition de périodicité (1.102) sont utilisées. Si

$$\boldsymbol{\xi} G \boldsymbol{\xi}^\dagger = G \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\xi} \partial_\mu \boldsymbol{\xi}^\dagger = 0 , \quad (1.108)$$

alors

$$G(\tau + \beta) A_\mu(\tau + \beta) G^\dagger(\tau + \beta) = G(\tau) A_\mu(\tau) G^\dagger(\tau) . \quad (1.109)$$

Une forme possible pour $\boldsymbol{\xi}$ respectant les conditions (1.108) est un élément du groupe $Z(N_C)$ donné par l'équation (1.101) :

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{z} . \quad (1.110)$$

Ce que nous venons de démontrer est que l'action Yang-Mills pure :

$$S_{\text{YM}} = \frac{1}{4} \int_0^\beta d\tau \int d^3x F^{\mu\nu a} F_{\mu\nu}^a , \quad (1.111)$$

est invariante sous les transformations de jauge apériodiques données par (1.103). Pour obtenir un paramètre d'ordre associé à cette symétrie, il faut trouver une quantité qui ne soit pas invariante sous ces transformations. Considérons la boucle de Polyakov définie comme :

$$L(\mathbf{x}) = \mathcal{P} \exp \left[ig \int_0^\beta d\tau A_4(\tau, \mathbf{x}) \right] , \quad (1.112)$$

où \mathcal{P} est un opérateur permettant d'ordonner les différents chemins possibles pour relier deux points dans l'espace et calculons la trace dans l'espace des couleurs de cette quantité soumise à une transformation de jauge apériodique. Il est possible de prouver que le résultat est donné par :

$$\text{tr} \left(G(\beta, \mathbf{x}) L(\mathbf{x}) G^\dagger(0, \mathbf{x}) \right) = \exp(2i\pi n/N_C) \text{tr} L(\mathbf{x}) . \quad (1.113)$$

On note :

$$l(\mathbf{x}) = \frac{1}{N_C} \text{tr} L(\mathbf{x}) , \quad (1.114)$$

et :

$$\Phi = \langle l(\mathbf{x}) \rangle . \quad (1.115)$$

Φ correspond à la valeur moyenne de la boucle de Polyakov tracée moyennée par le nombre de couleur. La trace de la boucle de Polyakov $l(\mathbf{x})$ n'est pas invariante sous les transformations de jauge apériodiques. Sa valeur moyenne, Φ , correspond au paramètre d'ordre associé à la symétrie $Z(3)$. Une valeur moyenne non nulle indique une brisure spontanée de cette symétrie.

Il est possible d'écrire Φ comme, [283] :

$$\Phi = e^{f_Q/\beta} ; \quad (1.116)$$

$$\bar{\Phi} = e^{f_{\bar{Q}}/\beta} , \quad (1.117)$$

où f_Q ($f_{\bar{Q}}$) est la différence entre l'énergie libre d'un système gluonique contenant un seul quark (anti-quark) infiniment massif et l'énergie libre d'un système gluonique pure. Dans un système confiné, placer un quark dans le système requiert une énergie infinie. L'énergie nécessaire pour le placer dans un système déconfiné est finie. Ainsi la brisure de $Z(3)$ est liée au déconfinement.

La mesure du potentiel d'interaction inter-quark permet de caractériser l'état du système, confiné ou déconfiné. Dans l'état confiné, le potentiel croît linéairement avec la distance inter-quark, alors que dans la phase déconfinée, le potentiel est écranté et reste fini. En plaçant dans notre système purement gluonique un quark lourd en x et un anti-quark lourd en y , la fonction de corrélation $\langle l^\dagger(y)l(x) \rangle$ peut s'écrire :

$$\langle l^\dagger(y)l(x) \rangle \propto \exp[-\beta f_{\bar{Q}Q}(|y-x|)] . \quad (1.118)$$

La valeur de cette fonction de corrélation aux très grandes séparations caractérise l'état du système :

$$\langle l^\dagger(\infty)l(0) \rangle = 0 \Rightarrow \Phi = 0 \quad (\text{confiné}); \quad (1.119)$$

$$\langle l^\dagger(\infty)l(0) \rangle \neq 0 \Rightarrow \Phi \neq 0 \quad (\text{déconfiné}) . \quad (1.120)$$

Dans un système gluonique pure, la phase confinée correspond à la phase symétrique sous les transformations du groupe $Z(3)$. Lorsqu'un système de quarks lourds est placé dans un milieu gluonique, la couleur des quarks n'a pas d'orientation préférée, la seule contrainte étant que le système de quarks soit blanc, c'est à dire que toutes les orientations autorisées par la symétrie $Z(N_C)$ soient prises.

Comme nous l'avons dit précédemment, les champs fermioniques brisent explicitement la symétrie $Z(3)$. Pour le montrer, il suffit de se rappeler que les champs fermioniques, à température finie, suivent des conditions aux bords apériodiques :

$$q(\tau + \beta, \mathbf{x}) = -q(\tau, \mathbf{x}) . \quad (1.121)$$

Comme ils sont modifiés sous une transformation de jauge apériodique comme :

$$q(\tau + \beta, \mathbf{x}) = -\exp(2i\pi n/N_C)q(\tau, \mathbf{x}) , \quad (1.122)$$

la seule valeur possible est $n = 0$ et les champs de quarks brisent explicitement la symétrie $Z(3)$. Dans ce cas Φ n'est qu'un paramètre d'ordre approximatif, car il prend des valeurs non nulles même dans l'état confiné.

Pour le moment, il n'existe pas de paramètre d'ordre exact en présence de quark. Dans [284], les auteurs proposent un autre paramètre d'ordre. Partant du principe que la nature n'autorise que des états asymptotiques ayant un nombre baryonique entier dans les conditions normales de températures, les auteurs définissent le paramètre d'ordre de la transition de déconfinement comme la probabilité de trouver un état de nombre baryonique rationnel lorsque la température est augmentée. Dans [285], cette définition du paramètre d'ordre est envisagée, mais ne donne pas de bons résultats, voir aussi [286].¹ Un autre paramètre d'ordre pour la transition de déconfinement a été proposé dans [287–289] et les résultats semblent être prometteurs [290–293]. Ce paramètre d'ordre a également été étudié dans des modèles effectifs (PNJL) [294] et (NJL) [295], où le confinement est soit statistique, soit absent ! Pour plus de détails voir [296].

Notre objectif est de construire un modèle effectif de la QCD. Il est donc important d'étudier les symétries de la théorie de base afin d'en extraire certaines relations qu'il doit être possible de retrouver grâce au modèle une fois que le choix des symétries a été fait de manière cohérente avec la physique que l'on veut décrire et qu'elles ont été implémentées dans le modèle. Par exemple, lorsque la symétrie chirale et sa brisure spontanée sont implémentées dans un modèle les relations d'algèbres de courant décrites dans la section 1.2.4 doivent être retrouvées. Nous y reviendrons brièvement dans le chapitre 2 où les bases des modèles de type Nambu–Jona-Lasinio sont introduites.

Avant d'entrer dans le vif du sujet, certaines phases de QCD sont présentées dans la partie suivante.

1.3 Diagrammes de phases schématiques, phases hautes densités

Après que QCD ait été établie comme la théorie des interactions fortes, la possibilité pour que la matière hadronique subisse une transition de phase à haute température et/ou haute densité vers un monde où les bons degrés de liberté sont les quarks et les gluons a été proposée. Dans cette image, le diagramme de phase dans le plan température–densité (ou de manière équivalente dans le plan température–potentiel chimique) est divisé en deux parties. L'une à basse température et basse densité où les quarks sont confinés à l'intérieur des hadrons et où la symétrie chirale est spontanément brisée et l'autre à haute température et/ou haute densité où la symétrie chirale est restaurée et où les quarks sont déconfinés (le QGP). Ces deux parties du diagrammes sont séparées par les lignes de transitions chirale et de déconfinement qui suivent une trajectoire non triviale dans le plan $(T - \mu)$.

L'étude des phases où les champs élémentaires de QCD sont les bons degrés de libertés peut être séparée en deux parties. D'une part le coté hautes températures $\mu \ll T$ où le principe d'entropie interdit l'ordre et où la symétrie chirale est restaurée, qui pourrait être l'état dans lequel se trouvait l'Univers quelques microsecondes après le Big-Bang. D'autre part le coté hautes densités $\mu \gg T$ où il existe une multitude de phases à symétrie spontanément brisée ou restaurée. Les étoiles compactes semblent être les seuls systèmes où de telles densités pourraient être atteinte. Toutes ces phases sont accessibles aux modèles effectifs.

La partie basse densité et haute température du diagramme de phase peut être étudiée expérimentalement.

1. L'argument avancé est relativement simple, mais nécessite quelques définitions supplémentaires qui ne trouvent pas leur place ici.

talement dans les collisions d'ions lourds où le signal de l'existence du QGP a été détecté [297–304]. Dans cette zone la transition vers le QGP peut également être étudiée sur réseaux où les transitions chirale et de déconfinement sont observées et sont de type crossover pour des masses de quarks physique et trois couleurs. Il n'existe pas encore de consensus quant à l'ordre d'apparition de ces transitions cependant.

L'idée que la matière nucléaire puisse devenir de la matière de quark aux hautes densités est ancienne et a été proposée avant même qu'une théorie pour l'interaction forte existe [305, 306]. L'argument avancé alors est simple. Les baryons ont une taille finie d'environ un fermi. Lorsque la densité augmente, les baryons se rapprochent les uns des autres et se recouvrent. À ces densités, les quarks sont partagés entre différents baryons. Si la densité est suffisamment haute alors les quarks peuvent se déplacer sur de longues distances : ils sont déconfinés. Peu après la découverte de la liberté asymptotique, il a été proposé que la matière de quark pourrait exister à l'intérieur des étoiles compactes [307]. Dans [109], les auteurs utilisent justement la notion de liberté asymptotique pour permettre un calcul perturbatif. Les deux arguments avancés sont que les interactions longues portées sont écrantées par le milieu dense et que les interactions aux courtes distances sont suffisamment faibles pour permettre un développement perturbatif. Dans ce même papier, les auteurs proposent également l'existence de phases superconductrices. Bien que la superconductivité de couleur ait été proposé que deux ans après la découverte de la liberté asymptotique, elle a peu été étudié avant les années 90 [308].

Pour des densités non nulles, les calculs sur réseaux deviennent compliqués à cause du problème de signe et les résultats doivent être pris avec précaution. Les données expérimentales étant pour le moment absentes dans le domaine des densités supérieures à quelques fois la densité de saturation de la matière nucléaire, une possibilité est d'appliquer des méthodes fonctionnelles comme les équations de Dyson–Schwinger [309–311] ou le groupe de renormalisation [312, 313] à QCD.

Une autre consiste à faire appel à des modèles effectifs. Les prédictions dépendent fortement du modèle utilisé pour les faire et les résultats obtenus doivent toujours être modulés par le fait que la plupart du temps les paramètres du modèles sont ajustés sur des données dans le vide et il n'est pas obligatoire que la valeur de ces paramètres reste la même dans le milieu. Certains de ces modèles prédisent que la transition de phase chirale cesse d'être de type crossover à suffisamment haute densité pour devenir un premier ordre, prédisant ainsi l'existence d'un point critique dans le diagramme de phase. Alors que certains modèles prédisent que la transition chirale reste de premier ordre lorsque la densité augmente, certains modèles prédisent l'existence d'un autre point critique à basse température et plus haut potentiel chimique, où la transition chirale redevient de type crossover [314–325], voir aussi [326–328] dans un autre contexte.

Bien que le domaine des densités asymptotiques puisse être étudié directement à partir de QCD, les domaines de densités intermédiaires ne le peuvent pas. Pour ce domaine de densité, les modèles de type NJL prédisent l'existence de différentes phases caractérisées par la condensation de quark dans d'autres secteurs que le secteur scalaire et de diquarks dans différents secteurs. La prise en compte de différentes contraintes comme la neutralité électrique, la neutralité de couleur ou encore l'équilibre β (voir chapitre 5) modifie qualitativement le diagramme de phase.

Aux densités asymptotiques, où la symétrie chirale est restaurée et où les quarks u , d et s peuvent être traité sur un pied d'égalité, la phase CFL (*Color-Flavor Locked*) semble être la plus favorisée. Dans cette phase, les quarks des trois couleurs et des trois saveurs sont appariés. Il n'existe cependant pas de consensus concernant l'ordre des phases qui apparaissent à mesure que la densité est diminuée (des densités asymptotiques aux densités intermédiaires). À température

nulle, les deux ingrédients importants pour déterminer l'ordre des phases est d'une part la masse du quark s et d'autre part les conditions de neutralité et d'équilibre β . Alors que la masse du quark s a pour effet de rendre les surfaces de Fermi du quark s et des quarks légers différentes et donc d'empêcher l'appariement CFL, les conditions de neutralité et d'équilibre β tendent à les faire se correspondre et donc favorise la phase CFL. Lorsque la température devient non nulle, beaucoup d'autres phases peuvent exister. Ces phases de densité intermédiaire (où les calculs perturbatifs ne sont plus possibles) peuvent être étudiée grâce aux modèles effectifs. Dans les modèles NJL à deux saveurs, il a été montré que la phase superconductrice de couleur à deux saveurs 2SC était favorisée à basse température et haut potentiel chimique. Cependant lorsque la condition d'équilibre β est imposée le potentiel chimique nécessaire à l'apparition de la phase 2SC est supérieur à celui qui pourrait exister à l'intérieur des étoiles compactes. Aux densités pertinentes pour l'étude des étoiles compactes, le quark s joue un rôle décisif dans la compétition entre les phases 2SC et CFL. Dans les anciens papiers traitant de la physique des étoiles compactes, la masse du quark s était fixé comme un paramètre. Globalement les résultats de ces études sont que sous les contraintes de neutralité et d'équilibre β la phase 2SC n'est pas favorisée par rapport à la phase CFL. Dans les papiers plus récents, la masse du quark s est calculée de manière auto-cohérente et les résultats obtenus montrent que la phase 2SC est favorisée aux potentiels chimiques intermédiaires.

Le nombre de phases différentes, les différentes contraintes que l'on peut imposer au système, les différents modèles que l'on peut utiliser, etc, font que le nombre de papier concernant la superconductivité de couleur (CSC) est très grand. Heureusement, il existe de nombreuses revues sur le sujet parmi lesquelles [114–128]. Pour la CSC dans un contexte général ou bien sur des sujets en relation qui ne sont pas forcément cités dans les revues précédentes voir [113, 329–335]. Pour la CSC dans le cadre du modèle NJL (le critère de sélection est la facilité de compréhension et d'étude ou bien la clarté des explications dans le cas où il n'y a pas de détails), voir [336–345]. Parmi les articles traitant des contraintes de neutralité ou d'équilibre β , en général dans le cadre des modèles NJL (avec le même critère de sélection que précédemment) [325, 344, 346–357]. Ces précédents papiers ne traitent que de la condensation de diquark type BCS, avec des paires formées par des particules sur leur surface de fermi avec des moments opposés. Il est également possible, dans certains cas, que la création de paires de moment total non nul soient favorisée, ouvrant la possibilité à des condensats inhomogènes d'exister (partie I de) [358] et pour une revue dans le cadre des modèles NJL, voir [359].

L'étude des phases hautes densités est intéressante en soi bien sûr mais a aussi pour objectif de comprendre la physique des étoiles compactes. Parmi les challenges de ce domaine de la physique, celui de savoir s'il l'intérieur des étoiles compactes est composé de quarks déconfinés en est un important. Les récentes observations d'étoiles compactes de masses d'environ deux masses solaires [360–366] ont des conséquences importantes. Ces observations suggèrent que l'équation d'état obtenue avec des modèles nucléaires n'est pas assez dure pour autoriser des masses aussi élevées. Pour comprendre pourquoi ces étoiles massives existent, la connaissance d'une équation d'état dans un domaine de densité allant de ρ_0 (la densité de saturation) dans la partie externe des étoiles compactes jusqu'à $10\rho_0$ dans sa partie interne est nécessaire. Pour le moment, il n'est pas possible d'obtenir une équation d'état à partir d'un seul modèle capable de reproduire l'ensemble de cette fenêtre de densité : les densités sont trop grandes pour utiliser les modèles nucléaires et elles sont trop faibles pour pouvoir appliquer un développement perturbatif. La stratégie employée pour le moment est de considérer plusieurs modèles différents, de les utiliser dans leur domaine de densité respectif et de les connecter via différentes méthodes. Cette connection est en général réalisée comme un transition de phase à l'équilibre entre les phases hadroniques et quarks, voir

par exemple [367–383] dans le contexte des étoiles compactes, et [384–393] dans un contexte “plus hautes températures”. La plupart du temps deux modèles sont employés (parfois trois [394–396]), un modèle de physique nucléaire utilisé pour la partie supérieure de l’étoile et un modèle de quark pour la partie interne. Alors que pour des densités de l’ordre de celles estimées à l’intérieur de ces étoiles la condensation de diquark est attendue, certaines paramétrisations de ces modèles ne permettent pas de créer des étoiles de deux masses solaires (mais d’autres le peuvent). Les paramétrisations autorisées sont en général celles qui rendent plus dure l’équation d’état, comme par exemple en considérant une forte répulsion dans le canal vecteur de l’interaction quark–antiquark (supprimant au passage le CEP du diagramme de phase), ou des interactions à huit quarks, etc [365, 397–400]. La plupart du temps, l’équation d’état obtenue est adoucie lorsque la condensation de kaon est prise en compte à l’intérieur des étoiles compactes, ou lorsque les hyperons sont ajoutés au système, ou encore lorsque de la matière de quark déconfinée est prise en compte etc, ce qui mène certains auteurs à douter de l’existence de ces phases à l’intérieur des étoiles compactes [401].

Le diagramme de phase de la matière n’est connu que dans la zone des densités faibles où sa structure est relativement simple : transition de déconfinement et transition chirale à suffisamment haute température. À plus haute densité, la plupart des informations connues sont celles obtenues avec des modèles effectifs (quelques informations ont été obtenues dans le formalisme Dyson–Schwinger). Il n’est pas possible de décrire toutes les phases qui pourraient exister et le lecteur est invité à lire les différentes revues existantes déjà citées.

Il est quand même nécessaire de rappeler que toutes les prédictions faites avec des modèles effectifs ne doivent pas être considérées comme vraies, et qu’elles sont toujours entachées d’une incertitudes qu’il nous semble nécessaire d’évaluer.

Chapitre 2

Un modèle Nambu–Jona-Lasinio

Le modèle de Nambu–Jona-Lasinio (NJL) est un modèle effectif originellement construit pour l'étude de systèmes de nucléons interagissant entre eux via un potentiel à deux corps de contact [172, 173, 402]. Sous cette forme, l'objectif du modèle est d'expliquer la masse des nucléons grâce à la brisure spontanée de la symétrie chirale. Le lagrangien du modèle est construit de manière à ce qu'il contienne une symétrie $U(N) \times U(N)$, dont la partie $SU(N)_A$ est brisée spontanément.

Le modèle NJL a été réinterprété et les champs nucléoniques remplacés par des champs de quarks [403, 404]. La symétrie de jauge locale $SU(N_c)$ de QCD est remplacée par une symétrie globale et les champs gluoniques n'apparaissent pas dans le lagrangien NJL. Les modèles NJL basiques ne rendent donc pas compte du confinement. Ils permettent néanmoins d'expliquer la masse des hadrons due à la brisure spontanée de la symétrie chirale (voir section 1.2.4) et aussi de rendre compte de sa restauration à hautes températures et/ou hautes densités. Ils permettent également d'accéder aux quantités mésoniques de manière dynamique.

L'approximation de champ moyen sera utilisée pour obtenir le condensat de quarks $\langle \bar{q}q \rangle$, paramètre d'ordre de la symétrie chirale et l'approximation des boucles² sera utilisée pour calculer certaines quantités mésoniques. Nous étudierons ensuite les effets de milieu dus à la température et à la densité, afin d'établir le diagramme de phase prédit par ce modèle.

Nous considérons un modèle NJL à deux saveurs de quarks où l'interaction de contact se fait dans les canaux scalaire et pseudoscalaire :

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma_\mu \partial^\mu - \hat{m})q + G \left[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \boldsymbol{\tau}q)^2 \right], \quad (2.1)$$

où $q^T = (u \ d)$, \hat{m} est la matrice des masses courantes des quarks, diagonale dans l'espace des saveurs $m = \text{diag}_f(m_u, m_d)$ et où $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ sont les matrices de Pauli dans l'espace des saveurs. Il est possible de vérifier, dans la limite chirale ($m_u = 0 = m_d$), que ce lagrangien est symétrique sous les transformations du groupe $U(2) \times U(2)$. Dans la suite de cette partie, nous considérons la symétrie d'isospin exacte : $m_u = m_d = m_0$.

Les interactions sont de contact : le modèle n'est pas renormalisable. Les intégrales divergentes sont régularisées suivant un schéma de *cutoff*. Il existe plusieurs procédures pour régulariser les intégrales divergentes, chacune ayant des spécificités propres, voir par exemple [405–410] pour la description de plusieurs schémas de régularisation. Le choix de la procédure de régularisation fait partie intégrante du modèle et les prédictions peuvent en dépendre fortement, voir par exemple [407, 411]. Dans la suite, nous ne considérerons que le schéma de *cutoff* 3D. Cette procédure consiste

2. *ring approximation*

à introduire une limite supérieure en impulsion, empêchant les quarks d'impulsion supérieure au *cutoff* d'interagir, reproduisant qualitativement la propriété de liberté asymptotique [412]. Bien que cette procédure ne soit pas covariante, elle trouve tout son intérêt dans le milieu où la température brise déjà la symétrie de Lorentz.

Le modèle NJL (2.1) contient trois paramètres. m_0 est la masse courante des quarks, G est la constante de couplage dans les canaux scalaire-isoscalaire et pseudoscalaire-isovecteur. Le dernier paramètre est le *cutoff* Λ . Les paramètres sont fixés :

$$m_0 = 5.01 \cdot 10^{-3} \text{ GeV} ; \quad (2.2)$$

$$G = 4.93 \text{ GeV}^{-2} ; \quad (2.3)$$

$$\Lambda = 0.653 \text{ GeV} , \quad (2.4)$$

permettant de reproduire la masse du pion dans le vide $m_\pi = 0.137 \text{ GeV}$, la constante de désintégration du pion dans le vide $f_\pi = 0.093 \text{ GeV}$ et le condensat de quark u dans le vide $\langle \bar{u}u \rangle = -(0.251)^3 \text{ GeV}^3$. L'impact de cette phénoménologie sur les prédictions sera étudié dans la partie 3.

2.1 Masse dynamique et quantités mésoniques dans le vide

Le modèle NJL a été construit en analogie avec la supraconductivité : le courant axial joue le même rôle que le courant électromagnétique de la théorie BCS. De la même manière que la brisure spontanée de $U(1)$ dans la théorie BCS donne une masse dynamique aux électrons, la brisure spontanée de la symétrie chirale donne une masse dynamique aux quarks. Cette masse dynamique peut être calculée à partir du propagateur en utilisant l'équation de Dyson [282, 413]. La propagation libre d'un quark est décrite par son propagateur (libre) dans l'espace des impulsions :

$$S_0(p) = \frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - m_0 + i\epsilon} , \quad (2.5)$$

où les indices de couleurs et de saveurs ne sont pas indiqués. Lorsque l'interaction est branchée, la propagation libre d'un quark est modifiée par les interactions avec les autres constituants du système. De manière générale, le propagateur exact est calculé par la somme de toutes les amplitudes de probabilité de tous les différents chemins possibles que le quark peut suivre dans le système. La *self-energy* contient tous les diagrammes sans ligne fermionique externe, pouvant être inséré dans une ligne fermionique. Parmi tous les diagrammes possibles, certains ne peuvent pas être coupés en deux diagrammes de *self-energy* indépendant en enlevant une ligne fermionique. Ces diagrammes irréductibles constituent ceux de la *self-energy* propre notée Σ^* . Cela se traduit au niveau du propagateur comme :

$$S(p) = \frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - m_0 - \Sigma^*(p) + i\epsilon} . \quad (2.6)$$

Tout se passe comme si le quark “nu” interagissant lors de sa propagation était remplacé par un quasi-quark de masse $M(p)$ “habillé” de l'interaction et n'interagissant plus lors de sa propagation :

$$S(p) = \frac{1}{\gamma_\mu p^\mu - M(p) + i\epsilon} , \quad (2.7)$$

où :

$$M(p) = m_0 + \Sigma^*(p) . \quad (2.8)$$



FIGURE 2.1 – Diagrammes de champ moyen entrant dans le calcul de la *self-energy* propre. À gauche, le diagramme “bulle” correspondant au terme de Hartree et, à droite, le diagramme “huître ouverte” correspondant au terme de Fock. L’interaction étant de contact dans le modèle NJL, les lignes gluoniques ne sont représentées que pour des raisons graphiques (les interactions sont de contact dans le modèle considéré).

Le calcul du propagateur exact peut se faire à partir du propagateur libre et de la *self-energy* propre de manière auto-cohérente grâce à l’équation de Dyson dans l’espace des impulsions :

$$S(p) = S_0(p) + S(p)\Sigma^*(p)S_0(p) , \quad (2.9)$$

L’équation précédente est algébrique : toutes les quantités y entrant sont des matrices. Cette approche est non-perturbative : Σ^* contient une somme infinie de tous les diagrammes irréductibles possibles. L’équation (2.9) peut se mettre sous la forme :

$$S(p)(S_0^{-1}(p) - \Sigma^*(p)) = 1 . \quad (2.10)$$

Pour pouvoir obtenir un résultat approché, il faut choisir une classe de diagrammes entrant dans la *self-energy* propre.

2.1.1 Équation du gap dans l’approximation de champ moyen

Les diagrammes “bulles” et “huîtres ouvertes” [413], donnés en figure 2.1, constituent les diagrammes de champ moyen. Les diagrammes bulles correspondant au terme direct, ou terme de Hartree. Les diagrammes huîtres ouvertes correspondent au terme d’échange, ou terme de Fock.

Pour chaque vertex, scalaire et pseudoscalaire, les diagrammes de Hartree et de Fock doivent être calculés. Cette approximation est dite de champ moyen. Il est cependant possible de montrer que [406], dans un développement en $1/N_c$, le diagramme d’échange apparaît à un ordre supérieur alors que le diagramme direct constitue l’ordre le plus bas. Si l’on se limite à l’ordre le plus bas dans le développement en $1/N_c$, seul le diagramme de Hartree doit être pris en compte. La *self-energy* s’écrit :

$$\Sigma^* = \Sigma_s^* + \Sigma_{ps}^* , \quad (2.11)$$

où l’indice s correspond au vertex scalaire et l’indice ps correspond au vertex pseudoscalaire. En utilisant les règles associées aux diagrammes de Feynman ces termes s’écrivent :

$$\Sigma_s^*(p) = 2iG\text{Tr}S(p) ; \quad (2.12)$$

$$\Sigma_{ps}^*(p) = 2iG(i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\text{Tr}[S(p)i\gamma_5\boldsymbol{\tau}]) , \quad (2.13)$$

où la trace est à prendre dans l'espace des couleurs, des saveurs et de Dirac. On trouve :

$$\Sigma^* = \Sigma_s^* = 8iGN_c N_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{p^2 - M^2 + i\epsilon} . \quad (2.14)$$

L'utilisation du *cutoff* 3D nécessite d'abord de faire l'intégration sur p_0 , voir par exemple l'équation (4.134) de [414], donnée par :

$$\int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} = -\frac{i}{2E_p} , \quad (2.15)$$

où E_p est l'énergie des quasi-quarks donnée par :

$$E_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + M^2} . \quad (2.16)$$

La *self-energy* propre prend finalement la forme :

$$\Sigma^* = 4GN_c N_f M \int_{\Lambda} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p^{-1} , \quad (2.17)$$

où le cutoff Λ apparaît. En utilisant la relation (2.8), il vient :

$$0 = M - m_0 - 4GN_c N_f M \int_{\Lambda} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p^{-1} . \quad (2.18)$$

Cette relation est appelée équation du gap, en analogie avec les gaps supraconducteurs de la théorie BCS. Il s'agit d'une équation auto-cohérente devant être résolue numériquement. Le condensat de quark est donné par :

$$\langle \bar{q}(x)q(y) \rangle = \lim_{x-y \rightarrow 0^+} \text{Tr} S(x-y) . \quad (2.19)$$

Une autre méthode possible pour obtenir les équations de champ moyen est la linéarisation du lagrangien :

$$\bar{q}\Gamma q = \langle \bar{q}\Gamma q \rangle + \delta(\bar{q}\Gamma q) , \quad (2.20)$$

où Γ est un opérateur dans l'espace donné par le produit tensoriel des espaces de couleurs, saveur et de Dirac et où δ est une fluctuation faible. Il suit que chaque terme d'interaction quadratique dans le lagrangien est réécrit au premier ordre en fonction du condensat associé de la manière suivante :

$$(\bar{q}\Gamma q)^2 \rightarrow 2\langle \bar{q}\Gamma q \rangle \bar{q}\Gamma q - \langle \bar{q}\Gamma q \rangle^2 , \quad (2.21)$$

Le lagrangien 2.1 peut être réécrit comme :

$$\mathcal{L} = \bar{q}[i\gamma_\mu \partial^\mu - (m_0 - 2G\langle \bar{q}q \rangle)]q - G\langle \bar{q}q \rangle^2 , \quad (2.22)$$

où la condensation pseudoscalaire n'est pas prise en compte : $\langle \bar{q}i\gamma_5 \boldsymbol{\tau} q \rangle = 0$. Par comparaison il vient :

$$\Sigma^* = -2G\langle \bar{q}q \rangle . \quad (2.23)$$

Au champ moyen, la procédure de linéarisation et le calcul de la *self-energy* par méthode diagrammatique ne sont pas strictement équivalente : le terme d'échange est absent de la linéarisation.

Dans la limite chirale $m_0 \rightarrow 0$, l'équation du gap peut admettre deux solutions. La première $M = 0$ constitue la solution triviale. La seconde, non perturbative, donnée par M solution de :

$$\frac{1}{G} = \frac{6G}{\pi^2} \int dp p^2 E_p^{-1} , \quad (2.24)$$

En considérant que le *cutoff* Λ est l'échelle d'énergie la plus haute, $\Lambda \gg M$, la constante de couplage critique au delà de laquelle une solution non triviale peut exister est donnée par :

$$G_{\text{crit}} = \frac{\pi^2}{6\Lambda^2} . \quad (2.25)$$

Si la constante de couplage est suffisamment grande, une solution non triviale de l'ordre de $M \sim 330$ MeV peut exister. Dans ce cas, le vide perturbatif n'est plus favorisé énergétiquement. Le système peut baisser son énergie en autorisant la création de paire $\bar{q}q$ dans son état fondamental, ne le rendant plus symétrique sous les transformations chirales. Les quasi-particules du système acquièrent une masse dynamique en interagissant avec ces paires.

Ce permet d'imaginer le système de quark en interaction comme un système de quasi-quarks libres de masse M . La masse de ces quasi-quarks est générée dynamiquement par l'interaction comme nous l'avons montré.

Le modèle NJL peut être utilisé pour calculer des quantités observables comme la masse de certains mésons, les constantes de désintégration, etc.

2.1.2 Quantités mésoniques dans l'approximation des boucles

La description d'états liés en théorie quantique des champs se fait grâce l'équation de Bethe–Salpeter [282, 413, 415–417]. L'idée de base est de considérer la propagation de deux particules dans le système en prenant en compte toutes les interactions possibles entre elles. Cette propagation est décrite par l'équation de Dyson pour deux particules. Le propagateur à deux particules, ou une particule et une anti-particule, est donné par la somme de toutes les amplitudes de probabilité de tous les chemins possibles que peuvent suivre les deux corps interagissant entre eux et avec les autres constituants du système.

En théorie quantique des champs, le spectre physique est donné par les pôles des propagateurs à n points. Par exemple, comme nous l'avons montré dans la partie précédente, le propagateur du quark possède un pôle à la masse M . C'est là encore une spécificité du modèle NJL : les quarks font partie du spectre physique car le modèle ne décrit pas le confinement.

La manière qu'ont un quark et anti-quark d'interagir entre eux est donnée par la matrice de transition T , obtenue par résolution de l'équation de Bethe–Salpeter¹ :

$$T = K + K\Pi^*T , \quad (2.26)$$

où K est le kernel (nu) de l'interaction quark–anti-quark et où Π^* est la fonction de polarisation irréductible [282]. Elle contient tous les diagrammes d'interaction possibles qui ne peuvent pas être séparés en deux diagrammes d'interaction indépendant par coupure d'une ligne d'interaction. L'approximation des boucles consiste à ne choisir que les diagrammes de boucles donnés en figure 2.2.

1. Voir par exemple, [418] et App. B,C de [419] (dans un formalisme différent du nôtre cependant).

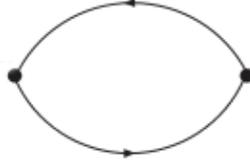


FIGURE 2.2 – Diagramme entrant dans le calcul de la polarisation irréductible Π^* dans l’approximation des boucles.

Si le propagateur à deux particules possède des pôles, alors les masses des différents modes mésoniques sont données par la condition :

$$\det[1 - \Pi^* K] = 0|_{q^2=m_M^2}, \quad (2.27)$$

où q est l’impulsion et m_M la masse du méson.

Dans le modèle NJL, les interactions sont de contact et, de manière générale, données par :

$$G_i(\bar{q}\Gamma_i q)^2, \quad (2.28)$$

où Γ_i est une matrice à $4N_f$ dimensions vivant dans l’espace défini par le produit tensoriel des espaces de saveur et de Dirac et où G_i est la constante de couplage associée à l’interaction dans le canal Γ_i . Ici nous avons considéré $\Gamma_s = 1$ et $\Gamma_{ps} = i\gamma_5\boldsymbol{\tau}$. La matrice K prend alors la forme :

$$K = \sum_{ij} K_{ij}\Gamma_i \otimes \bar{\Gamma}_j, \quad (2.29)$$

où :

$$\bar{\Gamma} = \gamma_0\Gamma^\dagger\gamma_0, \quad (2.30)$$

et où les indices i, j correspondent aux différents nombres quantiques mésoniques autorisés par les termes d’interactions, *i.e.*, ils prennent les “valeurs” scalaire-isoscalaire (s) et pseudoscalaire-isovecteur (ps) dans le modèle (2.1) considéré ici. Chaque élément K_{ij} est donc caractérisé par les nombres quantiques du canal mésonique dans lequel il opère. Le diagramme (2.2) est évalué et la fonction de polarisation prend la forme générale :

$$\Pi_{ij}^* = iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\bar{\Gamma}_i S \left(p + \frac{q}{2} \right) \Gamma_j S \left(p - \frac{q}{2} \right) \right], \quad (2.31)$$

où S correspond au propagateur exact (2.9). Le facteur N_c apparaît en facteur car les états mésoniques sont singlets de couleur et la trace est prise dans l’espace des saveurs et de Dirac.

Dans notre cas, la matrice de diffusion est diagonale car il n’y a aucun mélange entre les différents termes d’interaction. La matrice de diffusion prend la forme :

$$T(q) = \frac{2iG}{1 - 2G\Pi^*(q)}, \quad (2.32)$$

et les masses des excitations mésoniques sont obtenues en résolvant :

$$1 - 2G\Pi_{s, ps} = 0|_{q^2=m_\sigma^2, m_\pi^2}. \quad (2.33)$$

Le fonction de polarisation dans le canal pseudoscalaire prend la forme :

$$\Pi_{\text{ps}} = -iN_c \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[i\gamma_5 \tau^- S \left(p + \frac{q}{2} \right) i\gamma_5 \tau^+ S \left(p - \frac{q}{2} \right) \right] , \quad (2.34)$$

où l'on utilise $\tau^\pm = (\tau^1 \pm i\tau^2)/\sqrt{2}$. En évaluant la trace et en utilisant les intégrales de boucles [420–423] :

$$I_1(M) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M^2} ; \quad (2.35)$$

$$I_2(M, q^2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p + q/2)^2 - M^2][(p - q/2)^2 - M^2]} , \quad (2.36)$$

on obtient :

$$\Pi_{\text{ps}} = 2iN_c N_f \left[2I_1(M) - q^2 I_2(M, q^2) \right] . \quad (2.37)$$

L'intégrale I_1 apparaît dans la *self-energy* (2.14) et en injectant sa solution au champ moyen dans l'équation (2.33) où $q^2 = m_\pi^2$ il vient :

$$m_\pi^2 = -\frac{m_0}{M} \frac{1}{4iGN_c N_f I_2(M, m_\pi^2)} . \quad (2.38)$$

En intégrant I_2 sur la composante temporelle p_0 , on obtient :

$$I_2(M, q^2) = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p^{-1} \left(\frac{1}{q_0^2 + 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} - 2q_0 E_p} + \frac{1}{q_0^2 - 2\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + 2q_0 E_p} \right) . \quad (2.39)$$

En considérant l'état lié échangé au repos, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, l'intégrale I_2 devient :

$$I_2(M, q^2) = -i \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p^{-1} \left(\frac{1}{q_0^2 - 4E_p^2} \right) . \quad (2.40)$$

En faisant l'approximation de quasi-boson de Goldstone pour le calcul de I_2 (*i.e.* $m_\pi^2 \simeq 0$) l'intégrale devient :

$$I_2(M, 0) = -\frac{i}{4} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p^{-3} . \quad (2.41)$$

La même procédure peut être suivie pour calculer la masse du méson scalaire donnée par :

$$m_\sigma^2 = m_\pi^2 + 4M^2 . \quad (2.42)$$

La constante de désintégration du pion est calculée de la même manière que dans l'équation (1.51) :

$$iq_\mu f_\pi = -N_c g_{\pi\bar{q}q} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 S \left(p + \frac{q}{2} \right) \gamma_5 S \left(p - \frac{q}{2} \right) \right] , \quad (2.43)$$

où $g_{\pi\bar{q}q}$ est la constante de couplage effective entre un pion et un quark et un anti-quark. Cette constante de couplage effective apparaît dans les termes d'interaction entre un quark et un anti-quark par l'échange d'un pion où son propagateur est obtenu dans l'approximation des pôles :

$$T(q^2) \simeq i\gamma_5 \tau^- \frac{-ig_{\pi\bar{q}q}^2}{q^2 - m_\pi^2} i\gamma_5 \tau^+ . \quad (2.44)$$

En comparant cette dernière équation avec l'équation (2.32), il vient :

$$\frac{2iG}{1 - 2G\Pi_{\text{ps}}(q^2)} \Big|_{q^2=m_\pi^2} = -\frac{-ig_{\pi\bar{q}q}^2}{q^2 - m_\pi^2}. \quad (2.45)$$

En dérivant par rapport à q^2 , on trouve :

$$g_{\pi\bar{q}q}^2 = \left(\frac{\partial\Pi_{\text{ps}}(q^2)}{\partial q^2} \right)^{-1} \Big|_{q^2=m_\pi^2}. \quad (2.46)$$

La forme explicite de $g_{\pi\bar{q}q}$ se trouve à partir de l'équation (2.37) toujours dans l'approximation de quasi-boson de Goldstone :

$$g_{\pi\bar{q}q}^2 = -[2iN_cN_fI_2(M, 0)]^{-1}. \quad (2.47)$$

La constante de désintégration du pion peut alors être déduite¹ :

$$f_\pi^2 = -2iN_cN_fM^2I_2(M, 0). \quad (2.48)$$

Les résultats d'algèbre des courants développés dans les parties 1.2.3 et 1.2.4 doivent être vérifiées dans le modèle NJL car sa construction est basée sur la symétrie chirale. On peut vérifier que c'est bien le cas pour la relation GOR : $m_\pi^2 f_\pi^2 = -m_0 \langle \bar{q}q \rangle$.

Le lecteur intéressé par le calcul des quantités mésoniques dans les modèles de type NJL peut consulter, par exemple, les références [406, 424–433], où il verra que la description des quantités mésoniques avec le modèle NJL est satisfaisante, en particulier lorsque la symétrie $U_A(1)$ discutée en section 1.2.5 est implémentée.

2.2 Température et densité finie

Il est attendu en QCD qu'à suffisamment haute température (ou densité), la symétrie chirale soit restaurée. L'objectif de cette partie est d'étudier la réponse d'un système de quarks décrit par le modèle (2.1) à la température et/ou au potentiel chimique. L'étude de la restauration de la symétrie chirale dans le cas que nous considérons ici a déjà été faite dans beaucoup d'articles, comme par exemple [434–437]. Nous n'abordons pas le calcul des quantités mésoniques dans le milieu et le lecteur intéressé peut lire les références précédemment citées ainsi que [435, 438–442] plus spécifique au modèle étudié ici.

Dans cette partie, nous établissons l'équation du gap à température et potentiel chimique finis de plusieurs manières différentes. Nous l'obtenons d'une part à partir du propagateur à température et potentiel chimique finis et d'autre part, à partir de la fonction de partition du système. Il existe d'autres méthodes pour étudier la restauration de la symétrie chirale, en particulier l'approche de l'action effective, voir par exemple [443–446] pour plus de détails.

Pour étudier une théorie de champ à température finie et potentiel chimique fini, une possibilité est de passer dans l'ensemble grand canonique où la grande fonction de partition est donnée par :

$$Z = \sum_n \left\langle n \left| \exp \left(-\frac{H - \mu N}{T} \right) \right| n \right\rangle, \quad (2.49)$$

1. Si le lecteur souhaite comparer l'équation (2.47) avec l'équation (4.25) de [406], il remarquera une différence. Le résultat donné ici est correct. L'équation pour f_π (4.26) de cette même référence n'est pas impactée par la faute de frappe dans 4.25.

où H est le hamiltonien de la théorie, μ le potentiel chimique, la variable de Lagrange associée au nombre de particule N et les $|n\rangle$ correspondent à un ensemble complet d'états quantiques. En comparant cette expression avec l'expression de l'amplitude de transition entre un état $|m\rangle$ au temps t_i à un état $|n\rangle$ au temps t_f :

$$K_{nm}(t_f, t_i) = \langle n | \exp[-iH(t_f - t_i)] | m \rangle , \quad (2.50)$$

Il est possible de passer de l'équation (2.50) à l'équation (2.49) en faisant la substitution :

$$t_f \rightarrow t_i - \frac{i}{T} ; \quad (2.51)$$

$$H \rightarrow H - \mu N ; \quad (2.52)$$

$$|m\rangle \rightarrow |n\rangle , \quad (2.53)$$

dans (2.50). Pour obtenir la représentation en intégrale de chemin de l'amplitude de transition (2.50), l'intervalle $t_f - t_i$ est divisé en k intervalles de longueur égale $d = (t_f - t_i)/k$ et un ensemble complet d'états $|z\rangle$:

$$\int dz |z\rangle \langle z| = 1 , \quad (2.54)$$

est inséré, permettant d'écrire :

$$K_{nm}(t_f, t_i) = \int \prod_{i=1}^{k-1} dz_i \langle m | e^{-iHd} | z_{k-1} \rangle \dots \langle z_i | e^{-iHd} | n \rangle ; \quad (2.55)$$

En introduisant l'action :

$$S[\bar{q}, q] = \int_{t_i}^{t_f} dt H[\bar{q}, q] \quad (2.56)$$

l'équation (2.55) devient [447, 448] :

$$K_{nm} = \int D[\bar{q}, q] e^{iS[\bar{q}, q]} , \quad (2.57)$$

où $D[\bar{q}, q]$ est la mesure de l'intégrale. Cette équation est à interpréter comme la somme sur toutes les trajectoires possibles. À chacune de ces trajectoires est associé un poids e^{iS} et les conditions aux bords sont données par la valeur des champs \bar{q} et q aux temps t_i et t_f . Le chemin reliant t_i à t_f peut être choisi dans le plan complexe : $t = \Re(t) + i\Im(t)$. Le chemin que nous considérons ici et dans la suite, est la ligne droite entre $t_i = 0$ et $t_f = -i/T$, correspondant au chemin que Matsubara a choisi dans [279]. Le chemin de Matsubara est caractérisé par un seul paramètre noté τ tel que $0 \leq \tau \leq 1/T$. La théorie de champ ainsi obtenue est définie dans une boîte de dimension spatiale infinie et de dimension temporelle $1/T$. La limite $T \rightarrow 0$ correspond à une théorie de champ définie dans l'espace Euclidien à température nulle. Les opérateurs fermionique \bar{q} et q sont soumis au principe de Fermi, *i.e.* ils anti-commutent. De ce fait, ils doivent satisfaire des conditions temporelles aux bords anti-périodiques comme nous l'avons déjà dit en section 1.2.6 :

$$q(0, \mathbf{x}) = -q(1/T, \mathbf{x}) \quad \bar{q}(0, \mathbf{x}) = -\bar{q}(1/T, \mathbf{x}) . \quad (2.58)$$

Pour obtenir la fonction de partition dans l'espace Euclidien à partir de sa forme dans l'espace de Minkowski, on peut opérer les changements $t \rightarrow -i\tau$ et $\mathcal{L}_{\text{Mink}} \rightarrow -\mathcal{L}_{\text{Eucl}}$:

$$Z = \int D[\bar{q}, q] \exp \left(-\frac{1}{T} \int_0^{1/T} d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{\text{E}}[\bar{q}, q] \right) . \quad (2.59)$$

Dans l'espace Euclidien, on introduit :

$$x_\mu^E = (\tau, \mathbf{x}) ; \quad (2.60)$$

$$\gamma_\mu^E = (i\gamma_0 = \gamma_4, \boldsymbol{\gamma}) ; \quad (2.61)$$

$$\partial_\mu^E = (\partial_\tau, \boldsymbol{\partial}) . \quad (2.62)$$

Comme nous le disions précédemment, il est attendu que l'augmentation de la densité de quark restaure également la symétrie chirale. Lorsque que les effets de la densité de quark $n_q = q^\dagger q$ veulent être étudiés, au lagrangien NJL (2.1) peut être ajouté le potentiel chimique associé à chaque saveur de quark présente :

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \bar{q}\gamma_0\hat{\mu}q ; \quad (2.63)$$

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma_\mu\partial^\mu - m + \gamma_0\hat{\mu})q + G \left[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2 \right] , \quad (2.64)$$

où $\hat{\mu}$ est une matrice diagonale dans l'espace des saveurs $\hat{\mu} = \text{diag}_f(\mu_u, \mu_d)$. Nous considérons un potentiel chimique commun μ aux deux saveurs de quarks :

$$\mu_u = \mu_d \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}(\mu_u + \mu_d) = \mu_B/3 , \quad (2.65)$$

où μ_B est le potentiel chimique baryonique. Le lagrangien peut être écrit dans l'espace Euclidien comme :

$$\mathcal{L}_E = \bar{q}(-i\gamma_\mu\partial_\mu + m + i\gamma_4\mu)q + G \left[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}q)^2 \right] , \quad (2.66)$$

où les indices covariants et contravariants n'ont plus d'importance dans l'espace Euclidien.

2.2.1 Équation du gap à partir du propagateur

L'avantage du formalisme de Matsubara réside dans le fait que les diagrammes de Feynman sont inchangés. De ce fait l'équation de Dyson est également inchangée. Les règles de Feynman changent cependant, voir [282] pour plus de détails. En écrivant $p = (i\omega_n, \mathbf{p})$, où les ω_n sont les fréquences de Matsubara discrètes, associées à la taille finie de la boîte dans la direction temporelle, prenant les valeurs $\omega_n = (2n + 1)\pi T$ pour les fermions, la *self-energy* garde la même forme (sans le facteur i) que dans l'équation (2.12) :

$$\Sigma_s^*(p) = M - m_0 = 2G \text{Tr}S(\omega_n, \mathbf{p}) . \quad (2.67)$$

Le propagateur est solution de l'équation de Dyson :

$$(\gamma_\mu p_\mu - M + i\gamma_4\mu)S(p) = 1 . \quad (2.68)$$

Il est possible d'écrire le propagateur en somme partielle :

$$S(\omega_n, \mathbf{p}) = \frac{\gamma_\mu p_\mu + M}{2E_p} \frac{1}{i\omega_n - (E_p - \mu)} + \frac{\gamma_\mu p_\mu - M}{2E_p} \frac{1}{i\omega_n + E_p + \mu} , \quad (2.69)$$

permettant de mettre en évidence les quarks d'énergie positive et négative. L'équation du gap devient :

$$M = m_0 - 4GN_c N_f MT \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_p} \left(\frac{1}{i\omega_n - (E_p - \mu)} - \frac{1}{i\omega_n + E_p + \mu} \right) . \quad (2.70)$$

En utilisant la formule [280, 281] :

$$\sum_n \frac{1}{i\omega_n - x} = \frac{1}{e^{x/T} + 1}, \quad (2.71)$$

il vient :

$$M = m_0 + 4GN_c N_f M \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p^{-1} [1 - f(E_p - \mu) - f(E_p + \mu)], \quad (2.72)$$

où $f(x)$ est la distribution de Fermi-Dirac :

$$f(x) = [1 + e^{x/T}]^{-1}, \quad (2.73)$$

et où l'égalité $f(-x) = 1 - f(x)$ a été utilisée. Les distributions de Fermi-Dirac pour les quarks et antiquarks écrantant l'interaction lorsque la température et/ou le potentiel chimique augmente, diminuant ainsi la masse effective des quarks jusqu'à la rendre égale à m_0 lorsqu'ils sont suffisamment élevés, restaurant la symétrie chirale (voir la figure 2.3). À noter que la partie contenant les distributions de Fermi-Dirac de l'intégrale précédente n'a pas besoin d'être régularisée car elles approchent des valeurs nulles suffisamment vite lorsque $p \rightarrow \infty$. L'équation (2.72) peut alors se réécrire :

$$M = m_0 + 4GN_c N_f M \int_{\Lambda} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p^{-1} - 4GN_c N_f M \int_{\infty} \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} E_p^{-1} [f(E_p - \mu) + f(E_p + \mu)]. \quad (2.74)$$

Plus de détails peuvent être trouvés par exemple dans la partie 5.B de [406], ou dans la partie 5.2 de [433].

2.2.2 Grand potentiel et équation du gap

Les propriétés thermodynamiques du système sont obtenues à partir du grand potentiel Ω :

$$Z = e^{-\beta V \Omega} \Rightarrow \Omega = -\frac{T}{V} \ln Z, \quad (2.75)$$

où V est le volume du système. Le lagrangien linéarisé est de la forme :

$$\mathcal{L} = \bar{q} S^{-1} q - G \langle \bar{q} q \rangle^2, \quad (2.76)$$

où l'inverse du propagateur est donnée par :

$$S^{-1} = i\gamma_{\mu} \partial^{\mu} - (m_0 - 2G \langle \bar{q} q \rangle) + \gamma_0 \mu. \quad (2.77)$$

Dans le formalisme de Matsubara, on peut écrire la fonction de partition comme :

$$Z = \int D[\bar{q}, q] \exp \left[-\beta \int_0^{\beta} d\tau \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L} \right], \quad \text{où } \beta = T^{-1}. \quad (2.78)$$

Utilisant la relation valable pour des variables de Grassmann χ et $\bar{\chi}$:

$$\int D[\bar{\chi}, \chi] e^{-\bar{\chi} M \chi} = \det M, \quad (2.79)$$

où M est une matrice complexe quelconque. Le grand potentiel s'écrit :

$$\Omega = -T \sum_n \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln[\text{Det} \beta S^{-1}] + G \langle \bar{q} q \rangle^2, \quad (2.80)$$

où la relation $\text{Tr} \ln = \ln \text{Det}$ a été utilisée. Le déterminant est à prendre dans tous les espaces (saveur, couleur, Dirac).

L'objectif maintenant est de trouver une forme pour l'inverse du propagateur permettant de calculer son déterminant simplement. De manière générale, S^{-1} peut être considéré comme une matrice de dimension $N = 4N_c N_f$, où 4 est la dimension de l'espace de Dirac. Lorsque l'interaction ne lève pas la dégénérescence sur le spin s des particules, il est possible d'écrire :

$$S_s^{-1} = p_0 \mathbb{I}_{N/2} - M_s, \quad (2.81)$$

où l'indice $s = \pm$ correspond aux spins des fermions et où M_s est une matrice carrée à déterminer et où $\mathbb{I}_{N/2}$ est la matrice identité, toutes deux de dimension $N/2$. De manière générale, M_s est de la forme (dans l'espace des spins) :

$$M_s = \begin{pmatrix} A & -s|\mathbf{p}| + C \\ -s|\mathbf{p}| + D & B \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

En appelant P_+ et P_- les projecteurs de spin :

$$P_{\pm} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right), \quad (2.83)$$

où les σ sont les matrices de spin de Pauli, on prouve que :

$$\sum_{s=\pm} M_s P_s = \begin{pmatrix} A & -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + C \\ -\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p} + D & B \end{pmatrix} \quad (2.84)$$

Remarquons que :

$$\text{Det} S^{-1} = \text{Det}[\gamma_0 \gamma_0 S^{-1}] = \text{Det} \gamma_0 \text{Det}[\gamma_0 S^{-1}], \quad (2.85)$$

et calculons $\gamma_0 S^{-1}$:

$$\gamma_0 S^{-1} = \sum_{s=\pm} \begin{pmatrix} p_0 - M + \mu & -s|\mathbf{p}| \\ -s|\mathbf{p}| & p_0 + M + \mu \end{pmatrix} P_s; \quad (2.86)$$

$$= \sum_{s=\pm} (p_0 \mathbb{I} - M_s) P_s, \quad (2.87)$$

où M_s est donnée par :

$$M_s = \begin{pmatrix} M - \mu & s|\mathbf{p}| \\ s|\mathbf{p}| & -M - \mu \end{pmatrix}, \quad (2.88)$$

on a donc :

$$\gamma_0 S^{-1} = \sum_{s=\pm} S_s^{-1} P_s. \quad (2.89)$$

Comme le spectre est dégénéré en spin, l'égalité :

$$\text{Det}[S_+^{-1}] = \text{Det}[S_-^{-1}], \quad (2.90)$$

est vérifiée et il vient :

$$\text{Det}[\gamma_0 S^{-1}] = \text{Det}[S_+^{-1}] \text{Det}[S_-^{-1}] . \quad (2.91)$$

En appelant ϵ_i les valeurs propres de M , on peut alors écrire :

$$\text{Det}(\gamma_0 \beta S^{-1}) = \prod_{i=1}^{N/2} \left(\frac{p_0^2 - \epsilon_i^2}{T^2} \right) . \quad (2.92)$$

Le grand potentiel devient :

$$\Omega = -T \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{i=1}^{N/2} \sum_n \ln \left(\frac{\omega_n^2 + \epsilon_i^2}{T^2} \right) + G \langle \bar{q} q \rangle^2 . \quad (2.93)$$

En utilisant la formule [280] :

$$\sum_n \ln \left(\frac{\omega_n^2 + \epsilon_i^2}{T^2} \right) = \frac{\epsilon_i}{T} + 2 \ln \left(1 + e^{-\epsilon_i/T} \right) , \quad (2.94)$$

il vient :

$$\Omega = -\frac{1}{2\pi^2} \int dp p^2 \sum_{i=1}^{N/2} \left[\epsilon_i + 2T \ln \left(1 + e^{-\epsilon_i/T} \right) \right] + G \langle \bar{q} q \rangle^2 . \quad (2.95)$$

Cette technique a deux avantages. D'une part, elle permet de séparer les fréquences de Matsubara qui rendent la décomposition du propagateur sur les états d'énergie positive et négative (voir l'équation (2.69)) compliquée lorsqu'un modèle plus complet est considéré. D'autre part, si le calcul des valeurs propres ϵ_i ne peut pas se faire analytiquement, il est toujours possible de les trouver numériquement. Dans ce cas, le calcul de la somme de Matsubara est analytique et l'on peut directement utiliser la formule pour le grand potentiel. Dans la partie 5.1, nous généralisons cette approche pour le calcul de l'inverse du propagateur de Nambu–Gor'kov, dans le cas où la condensation de diquarks est considérée.

Il suffit maintenant de calculer les valeurs propres de la matrice M données par :

$$\epsilon_{1,\dots,6} \equiv \epsilon_+ = E_p + \mu ; \quad (2.96)$$

$$\epsilon_{7,\dots,12} \equiv \epsilon_- = E_p - \mu , \quad (2.97)$$

et le grand potentiel devient :

$$\Omega = -\frac{1}{2\pi^2} (I + J) - \mathcal{L}_{\text{cond}} , \quad (2.98)$$

où :

$$\mathcal{L}_{\text{cond}} = -G \langle \bar{q} q \rangle^2 ; \quad (2.99)$$

$$I = \int_0^\Lambda dp p^2 \sum_i \epsilon_i = \int_0^\Lambda dp p^2 12 E_p ; \quad (2.100)$$

$$J = \int_0^{\Lambda T} dp p^2 \sum_i 2T \ln \left(1 + e^{-\epsilon_i/T} \right) = \int_0^{\Lambda T} dp p^2 12T \left[\ln \left(1 + e^{-\epsilon_+/T} \right) + \ln \left(1 + e^{-\epsilon_-/T} \right) \right] . \quad (2.101)$$

où $\mathcal{L}_{\text{cond}}$ ne dépend pas des champs dynamiques, seulement des condensats. Le facteur 12 apparaissant dans les équations des intégrales I et J provient de la dimension de la matrice M et correspond

à $12 = (4N_c N_f)/2$. L'intégrale I est divergente et doit être régularisée. L'intégrale J est convergente et peut être intégrée jusqu'à l'infini ($\Lambda_T = \infty$). Les effets du *cuttoff* sur les intégrales thermiques ($\Lambda_T = \Lambda$) ont par exemple été étudié dans [449–453]. Dans la suite, sauf mention du contraire, nous prenons toujours $\Lambda_T = \infty$.

Le paramètre d'ordre $\sigma = \langle \bar{q}q \rangle$ ne peut prendre que les valeurs autorisées par la condition :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = 0 . \quad (2.102)$$

L'évaluation du membre de gauche, noté :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma} = g(\mu, T, \sigma) , \quad (2.103)$$

donne l'équation du gap (2.72).

Dans certaines applications, comme pour l'étude des étoiles compactes, la limite de température nulle est justifiée. Avec les notations précédentes, on cherche :

$$\lim_{T \rightarrow 0} f(\epsilon_i, T) , \quad \text{où} \quad f(\epsilon_i, T) = T \ln \left(1 + e^{-\epsilon_i/T} \right) . \quad (2.104)$$

En séparant le calcul sur les énergies de quasiparticules positives et négatives il vient :

$$\lim_{T \rightarrow 0} f(\epsilon_i, T) = -\epsilon_i \Theta(-\epsilon_i) , \quad (2.105)$$

où $\Theta(x)$ est la fonction marche de Heavyside. Cette condition donne un *cuttoff* naturel à l'intégrale J , donné par l'énergie de Fermi des quasiparticules. Dans notre cas :

$$J_{T=0} = \int_0^{\Lambda_T} dp p^2 \sum_i \ln \left(1 + e^{-\epsilon_i/T} \right) \Theta(-\epsilon_i) ; \quad (2.106)$$

$$= \int_0^{p_F} dp p^2 (-E_p + \mu) , \quad \text{où} \quad p_F = \sqrt{\mu^2 - M^2} . \quad (2.107)$$

Il est possible de la calculer explicitement et le résultat est :

$$J_{T=0} = \frac{p_F^3 \mu}{3} + \frac{M^4}{8} \ln \left(\frac{p_F + \mu}{M} \right) - \frac{1}{8} p_F (2p_F^2 + M^2) \mu . \quad (2.108)$$

Le grand potentiel à température nulle est alors donné par :

$$\Omega_{T=0} = -\frac{1}{2\pi^2} (I + J_{T=0}) - \mathcal{L}_{\text{cond}} . \quad (2.109)$$

La limite $T \rightarrow 0$ du grand potentiel (2.98) est numériquement instable. C'est la raison pour laquelle il faut la calculer analytiquement. À l'inverse la limite $\mu \rightarrow 0$ peut être prise sans problème.

Dans cette partie, nous avons établi les équations du gap et le grand potentiel à température et potentiel chimique finis. Au champ moyen, les équations du gap peuvent être retrouvées dérivant le grand potentiel par rapport aux paramètres d'ordre (dans le cas traité ici, il n'y en a qu'un : le condensat chiral). Le calcul du grand potentiel peut être fait de différentes manières. Nous avons choisi de décrire une méthode basée sur la décomposition en spin. L'avantage de cette méthode est qu'elle est facilement généralisable aux cas où plusieurs condensats sont pris en compte comme nous le verrons dans les prochains chapitres.

Le grand potentiel est la quantité centrale lorsque les propriétés thermodynamiques d'un système à l'équilibre veulent être étudiées. Les propriétés critiques d'un système sont régies par la modification des paramètres d'ordre, solutions des équations du gap, lorsque les paramètres thermodynamiques sont modifiés. Au champ moyen, comme les équations du gap sont calculables à partir du grand potentiel, le calcul du grand potentiel est la pièce centrale de notre étude.

Les propriétés critiques d'un système peuvent être rassemblées dans un diagramme de phase que nous allons maintenant construire dans le cadre du modèle NJL considéré dans cette partie.

2.2.3 Restauration de la symétrie chirale et point critique chiral

Dans cette partie, la restauration de la symétrie chirale sous la modification des paramètres thermodynamiques est discutée. Pour établir le diagramme de phase correspondant au modèle étudié, les lignes critiques de transition doivent être calculées. Comme nous le verrons, un point critique chiral existe dans le diagramme de phase et une méthode possible pour calculer sa position est proposée.

2.2.3.1 Restauration de la symétrie chirale et transition de phase

Comme expliqué dans l'introduction, on s'attend à observer une transition de phase entre le monde hadronique à basse température et bas potentiel chimique et le monde QGP à haute température et/ou hauts potentiels chimiques.

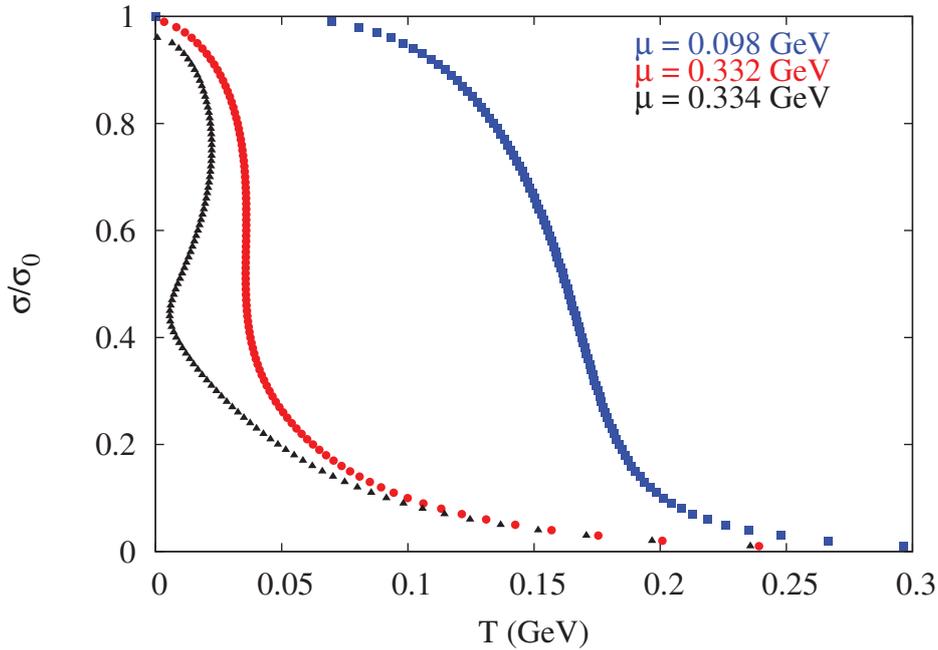


FIGURE 2.3 – Le condensat de quark $\sigma = \langle \bar{q}q \rangle$ normalisé par sa valeur dans le vide σ_0 , en fonction de la température pour plusieurs valeurs du potentiel chimique. La multivaluation du condensat pour $\mu = 0.334$ GeV est typique d'une transition de premier ordre.

La figure 2.3 représente le condensat de quark $\sigma = \langle \bar{q}q \rangle$ normalisé à sa valeur dans le vide (σ_0), en fonction de la température. Une valeur proche de 1 pour le condensat normalisé brise fortement

la symétrie chirale. Une valeur proche de 0 signifie que la symétrie chirale est presque restaurée¹. Lorsque la température augmente pour une valeur fixée du potentiel chimique faible, le condensat normalisé passe continûment de 1 vers 0. La transition est dite de type *crossover*. Plus le potentiel chimique augmente, plus la “vitesse” de transition augmente, jusqu’à devenir infinie au CEP. La transition est alors de second ordre. Lorsque le potentiel chimique augmente encore, la transition devient de premier ordre rendant le paramètre d’ordre multivalué. La solution stable est celle qui a l’énergie la plus basse.

Pour construire le diagramme de phase, il est nécessaire de choisir une prescription pour la définition de la transition de type *crossover*. Comme elle n’est pas à proprement parlé une vraie transition, plusieurs définitions sont possibles. On peut la définir comme le point pour lequel la transition est la plus rapide. C’est à dire, nous pouvons chercher, à μ fixé, la valeur de la température T^* telle que :

$$T^* \text{ est le max de } \left. \frac{d\sigma}{dT} \right|_{\mu}, \quad (2.110)$$

ou bien :

$$\mu^* \text{ est le max de } \left. \frac{d\sigma}{d\mu} \right|_T, \quad (2.111)$$

où σ est déterminé en résolvant l’équation du gap.

Il est également possible de définir la ligne de transition de type *crossover*, comme la valeur T^* à μ fixé en résolvant :

$$g(T^*, \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{1}{2}, \mu) = 0, \quad (2.112)$$

ou bien :

$$g(T, \frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{1}{2}, \mu^*) = 0. \quad (2.113)$$

À $\mu = 0$, la différence des températures caractéristiques obtenues avec ces deux prescriptions et de l’ordre de 10 MeV.

Comme on peut le voir sur la figure 2.3, lorsque le potentiel chimique est suffisamment haut la transition est de premier ordre. La potentiel chimique critique d’une transition de premier ordre (avec brisure explicite) est celui pour lequel, à température fixée :

$$\Omega(\mu_{1er \text{ ordre}}^*, T_{fixée}, \sigma_{branche \text{ haute}}) = \Omega(\mu_{1er \text{ ordre}}^*, T_{fixée}, \sigma_{branche \text{ basse}}). \quad (2.114)$$

Dans notre étude, nous définissons le potentiel chimique critique d’une autre manière permettant de simplifier le calcul numériquement. Pour obtenir la valeur du potentiel chimique critique, il est plus facile d’inverser les axes, voir figure 2.4 et de chercher le potentiel chimique critique μ^* solution des équations de champ :

$$g(\mu^*, T_{fixée}, \sigma_{min}) = 0, \quad (2.115)$$

où

$$\sigma_{min} \text{ est le min de } \left. \frac{d\mu}{d\sigma} \right|_{T_{fixée}}. \quad (2.116)$$

La même formule peut être trouvée dans le cas où l’on travaille à potentiel chimique fixé, il suffit d’effectuer le remplacement $\mu \leftrightarrow T$ dans l’équation précédente. Lorsque la transition est de premier

1. Lorsqu’un terme de masse est ajouté au lagrangien, la symétrie chirale est explicitement brisée et ne sera jamais restaurée totalement lorsque la température ou le potentiel chimique augmente.

ordre, la fonction $d\mu/d\sigma(\sigma)$ possède un minimum et deux racines. Le potentiel chimique critique de la transition est celui qui résout les équations du gap pour à $\sigma = \sigma^*$ fixé, où σ^* est l'abscisse du minimum de la fonction $d\mu/d\sigma(\sigma)$. Les deux racines donnent la largeur de la zone de métastabilité caractérisée par la coexistence des deux phases (à symétrie brisée et à symétrie restaurée). Le diagramme de phase 2.5 est donné dans le plan (T, μ) . La prescription (2.110, 2.111) est utilisée pour la transition de cross-over et la zone de premier ordre est obtenue en suivant la méthode précédemment expliquée.

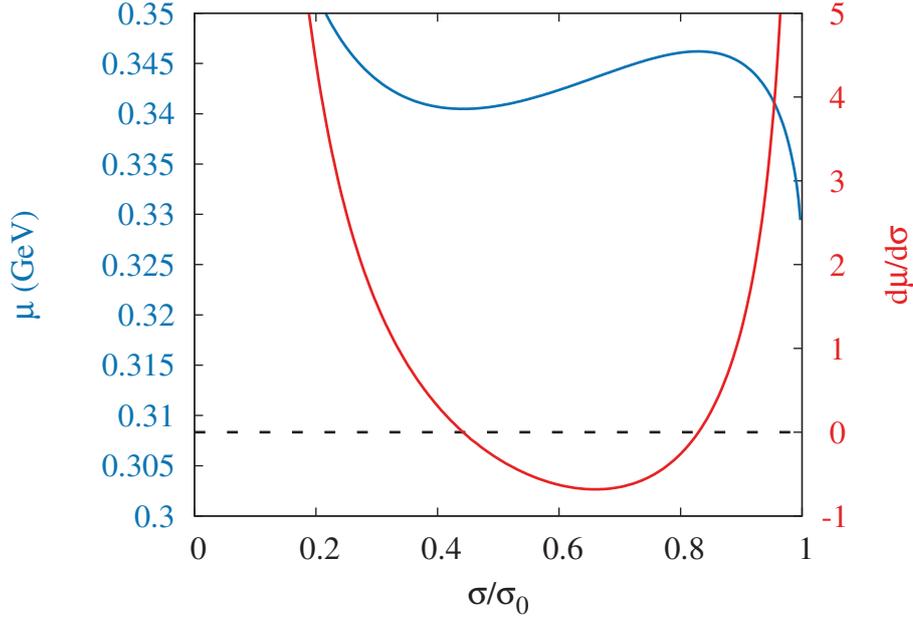


FIGURE 2.4 – L’ordonnée de gauche, en bleu, correspond à la valeur du potentiel chimique en fonction du condensat de quark normalisé par sa valeur dans le vide à température nulle. Les axes sont inversés pour montrer que la résolution de l’équation du gap pour μ à σ et T fixés est simple dans le cas où la transition est de premier ordre car sa solution est unique. L’ordonnée de droite, en rouge, représente la dérivée de la solution μ des équations du gap par rapport à σ en fonction du condensat normalisé. La courbe présente trois points caractéristiques. Le minimum donne la valeur du condensat correspondant au potentiel chimique de la transition. Les deux racines donne accès à la zone de méta-stabilité. Le minimum est trouvé en $\sigma/\sigma_0 \simeq 0.659$, correspondant à $\mu_c(T = 0) \simeq 0.343$ GeV. Les deux racines en 0.829 et 0.441, correspondant respectivement à un potentiel chimique de 0.346 et 0.340 GeV.

2.2.3.2 Point critique chiral et diagramme de phase

Le diagramme de phase (Fig. 2.5) est partagé en deux parties. Lorsque le potentiel chimique est suffisamment faible, la transition est de type crossover lorsque la température augmente (voir aussi la figure 2.3). Au contraire, à température nulle, la transition est un premier ordre lorsque le potentiel chimique augmente, voir la figure 2.4. Ces deux parties sont séparées par un point critique chiral (CEP), où la transition est de second ordre. Au CEP, la transition est de second ordre et $d\sigma/d\mu = \infty$. Rechercher un infini numériquement est compliqué. Il est donc plus simple d’utiliser la méthode déjà décrite dans la partie précédente consistant à résoudre les équations du

gap pour μ à σ et T fixés. Cependant, résoudre $d\mu/d\sigma = 0$ n'est pas suffisant, il faut également que la courbure soit nulle $d^2\mu/d\sigma^2 = 0$.

Une autre manière de poser le problème est la suivante. Pour obtenir le potentiel chimique de transition de premier ordre, il faut résoudre les équations du gap pour σ fixé au minimum de $d\mu/d\sigma$. Il faut donc résoudre $d^2\mu/d\sigma^2 = 0$. La zone de métastabilité est donnée par les racines de $d\mu/d\sigma$. La zone de métastabilité se finit lorsque les deux racines sont confondues : $d\mu/d\sigma = 0$.

On cherche donc l'ensemble T_{CEP} , μ_{CEP} et σ_{CEP} , tel que le système :

$$g(\mu, T, \sigma) = 0 ; \quad (2.117)$$

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = 0 ; \quad (2.118)$$

$$\frac{d^2\mu}{d\sigma^2} = 0 , \quad (2.119)$$

soit résolu.

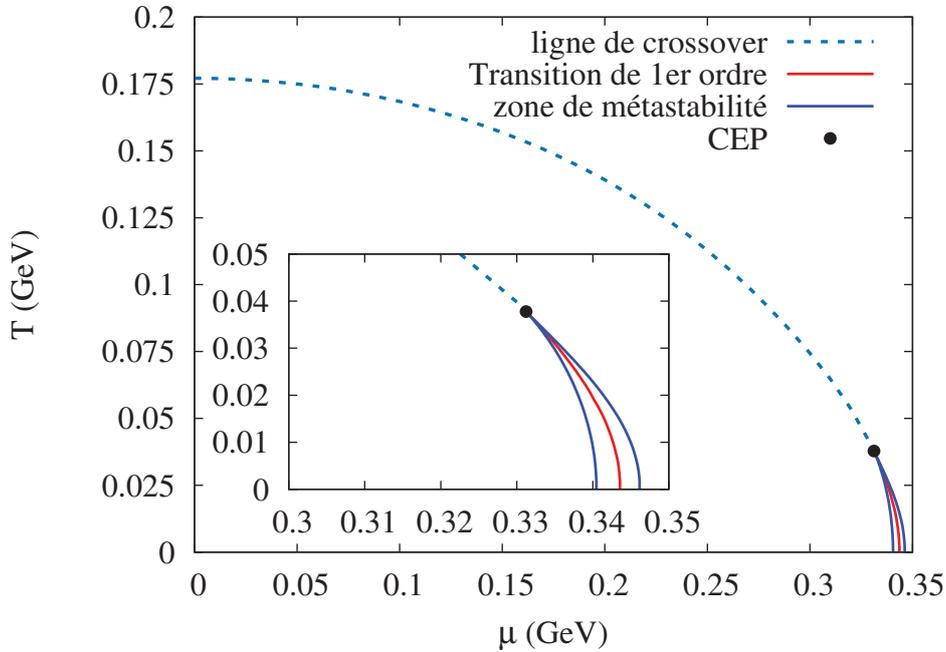


FIGURE 2.5 – Le diagramme de phase dans le plan température – potentiel chimique. Pour étudier le graphique, fixons le potentiel chimique et déplaçons nous dans le sens des températures croissantes. Tant que le potentiel chimique est suffisamment faible, la transition entre un monde où $\sigma/\sigma_0 \simeq 1$ (symétrie chirale spontanément brisée) vers un monde où $\sigma/\sigma_0 \simeq 0$ (symétrie chirale partiellement restaurée), se fait de manière continue. La ligne de transition de cross-over, en pointillés bleus, est définie comme la température où la vitesse de transition est maximum. Lorsque le potentiel chimique est suffisamment grand, la transition est de premier ordre. La zone de méta-stabilité est entourée par les courbes bleues foncées et la ligne rouge donne la température de transition telle que définie dans le texte. La ligne de premier ordre s'achève au CEP où la transition est de second ordre. Ses coordonnées sont données par l'équation (2.126). L'inclusion est simplement un grossissement de la zone méta-stable.

le calcul des dérivées *droites*, données par les équations (2.118) et (2.119) peut être fait numériquement, mais il en résultera un algorithme lent et très instable. Au contraire, si les dérivées

droites sont calculées analytiquement, l'algorithme est beaucoup plus stable. Nous verrons en section B.2 une réécriture de cette méthode en terme de nouvelles variables, rendant l'algorithme encore plus rapide et stable.

Le calcul de la dérivée droite $d\mu/d\sigma$ peut se faire simplement en écrivant la différentielle totale de l'équation du gap et en remarquant qu'elle est nulle lorsque l'équation du gap est résolue :

$$dg = 0 = \partial_\mu g d\mu + \partial_T g dT + \partial_\sigma g d\sigma , \quad (2.120)$$

où l'on utilise la notation $\partial_z = \partial/\partial z$. Lorsque l'on travaille à température fixée, $dT = 0$, on a accès à la dérivée convoitée :

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = -\frac{\partial_\sigma g}{\partial_\mu g} . \quad (2.121)$$

Le même résultat peut être obtenu lorsque le potentiel chimique est fixé à la place de la température. Le calcul de $d^2\mu/d\sigma^2$ suit exactement la même procédure. On écrit la différentielle totale d'ordre deux, qui est nulle lorsque l'équation du gap est résolue. En travaillant à température fixée, il vient :

$$\frac{d^2\mu}{d\sigma^2} = -\frac{1}{\partial_\mu g} \left[\partial_{\sigma\sigma} g + 2 \partial_{\mu\sigma} g \frac{d\mu}{d\sigma} + \partial_{\mu\mu} g \left(\frac{d\mu}{d\sigma} \right)^2 \right] . \quad (2.122)$$

Une formule équivalente peut être trouvée lorsque le potentiel chimique est fixé. Le système donné par les équations (2.117), (2.118) et (2.119) peut alors être réécrit comme :

$$g(\mu, T, \sigma) = 0 ; \quad (2.123)$$

$$\frac{\partial_\sigma g}{\partial_\mu g} = 0 ; \quad (2.124)$$

$$\frac{\partial_{\sigma\sigma} g}{\partial_\mu g} = 0 . \quad (2.125)$$

Avec les paramètres utilisés pour faire les graphiques :

$$\begin{aligned} m_0 = 0.0052 \text{ GeV} ; & & T_{\text{CEP}} = +0.0378 \text{ GeV} ; \\ \Lambda = 0.65 \text{ GeV} ; & \Rightarrow & \mu_{\text{CEP}} = +0.3312 \text{ GeV} ; \\ G\Lambda^2 = 2.14 . & & \sigma_{\text{CEP}} = -0.0180 \text{ GeV}^3 . \end{aligned} \quad (2.126)$$

Une fois que le point critique chiral est connu, le diagramme de phase (Fig. 2.5) peut se construire de la manière suivante.

Pour la zone où la transition est de premier ordre, on fait varier la température entre 0 et T_{CEP} et on cherche les points critiques de la courbe $d\mu/d\sigma$. La courbe rouge correspond au potentiel chimique critique de la transition tel que définit dans la section précédente. Les deux courbes bleues représente les solutions μ_1 et μ_2 des équations du gap résolues à température fixée pour les σ_1 et σ_2 racines de $d\mu/d\sigma$. Cette zone est appelée zone de méta-stabilité et est caractérisée par la coexistence des deux phases : l'une à symétrie brisée et l'autre à symétrie restaurée.

Pour la zone où la transition est de type crossover, il est plus simple de faire varier μ entre 0 et μ_{CEP} et de trouver la température où la transition est la plus rapide, c'est à dire en cherchant la température où $d\sigma/dT$ est maximum, comme nous le disions dans la section précédente. L'utilisation de la prescription 2.113 ne change pas qualitativement les résultats.

$m_0 = 0.0052 \text{ GeV}$				
$\Lambda \text{ (GeV)}$	$G\Lambda^2$	$T_{\text{CEP}} \text{ (GeV)}$	$\mu_{\text{CEP}} \text{ (GeV)}$	$\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0$
+0.5900	+2.5000	+0.0912	+0.3222	+0.4013
+0.6000	+2.4000	+0.0791	+0.3254	+0.4259
+0.6100	+2.3000	+0.0651	+0.3260	+0.4532
+0.6400	+2.2000	+0.0503	+0.3331	+0.5314
+0.6500	+2.1000	+0.0264	+0.3257	+0.5836

TABLE 2.1 – Différentes positions du CEP pour plusieurs valeurs des paramètres Λ et G en gardant le paramètre m_0 fixé. La température du CEP est comprise dans une fenêtre de 70 MeV entre 20 MeV et 90 MeV environ. Le potentiel chimique du CEP varie dans une zone de 15 MeV entre 320 et 335 MeV.

Dans les sections précédentes, nous avons établi les équations du gap à température et densité finie pour le modèle NJL considéré (Eq. 2.64). La restauration de la symétrie chirale a été discutée et le diagramme de phase associé construit.

Comme le modèle NJL est un modèle effectif, il dépend de paramètres qui sont, dans ce cas, ajustés sur des quantités mesurées à température et densité nulles. Une étude très souvent faite pour étudier l'impact de la paramétrisation est de faire varier les paramètres du modèle dans un domaine donné et de regarder l'effet sur les prédictions du modèle. Dans la section suivante, nous suivons cette méthode et l'appliquons à la position du CEP dans le diagramme de phase.

2.2.3.3 Effets de la paramétrisation sur la position du CEP

Il est intéressant de savoir de quelle manière la paramétrisation affecte les prédictions. Ici, nous nous intéressons spécifiquement à la position du CEP.

La position précise du CEP dépend fortement de la valeur des paramètres utilisés, comme on peut le voir sur le tableau 2.1, où plusieurs valeurs du *cutoff* et de la constante de couplage sont prises. D'après les résultats que nous obtenons, nous voyons que la température du CEP varie plus que son potentiel chimique.

Comme certains des paramètres ne sont pas très bien contraints, il est difficile de savoir quelle est la fenêtre autorisée pour leur variation.

Le choix du domaine de variation est souvent fait de manière qualitative. Il n'est pas rare que des variations de 10% des paramètres autour de leur valeur reproduisant des données soient considérées, parfois bien plus. La figure 2.6 donne les différentes valeurs de la masse du pion m_π , la constante de désintégration du pion f_π , du condensat de quark σ et de la masse constituante des quarks dans le vide M_{vac} lorsque les paramètres Λ , $G\Lambda^2$ et m_0 sont variés de 10% autour des valeurs (Eqs. 2.2, 2.3, 2.4) permettant de reproduire la masse du pion dans le vide $m_\pi = 0.137 \text{ GeV}$, la constante de désintégration du pion dans le vide $f_\pi = 0.093 \text{ GeV}$ et le condensat de quark u dans le vide $\langle \bar{u}u \rangle = -(0.251)^3 \text{ GeV}^3$.

Pour obtenir la figure 2.6, 10^4 valeurs des paramètres m_0 , G et Λ ont été choisies uniformément sur le domaine autorisé par des variations de 10% autour de leur valeur moyenne. Pour chaque ensemble de paramètre, la masse du pion dans le vide, la constante de désintégration du pion dans le vide, le condensat de quark et la masse constituante de quarks ont été calculés. Une distribution de ces prédictions est obtenue sous forme d'histogramme. La distribution de probabilité calculée à partir des histogrammes est tracée en vert sur les graphiques précédents de manière à servir de guide pour l'oeil.

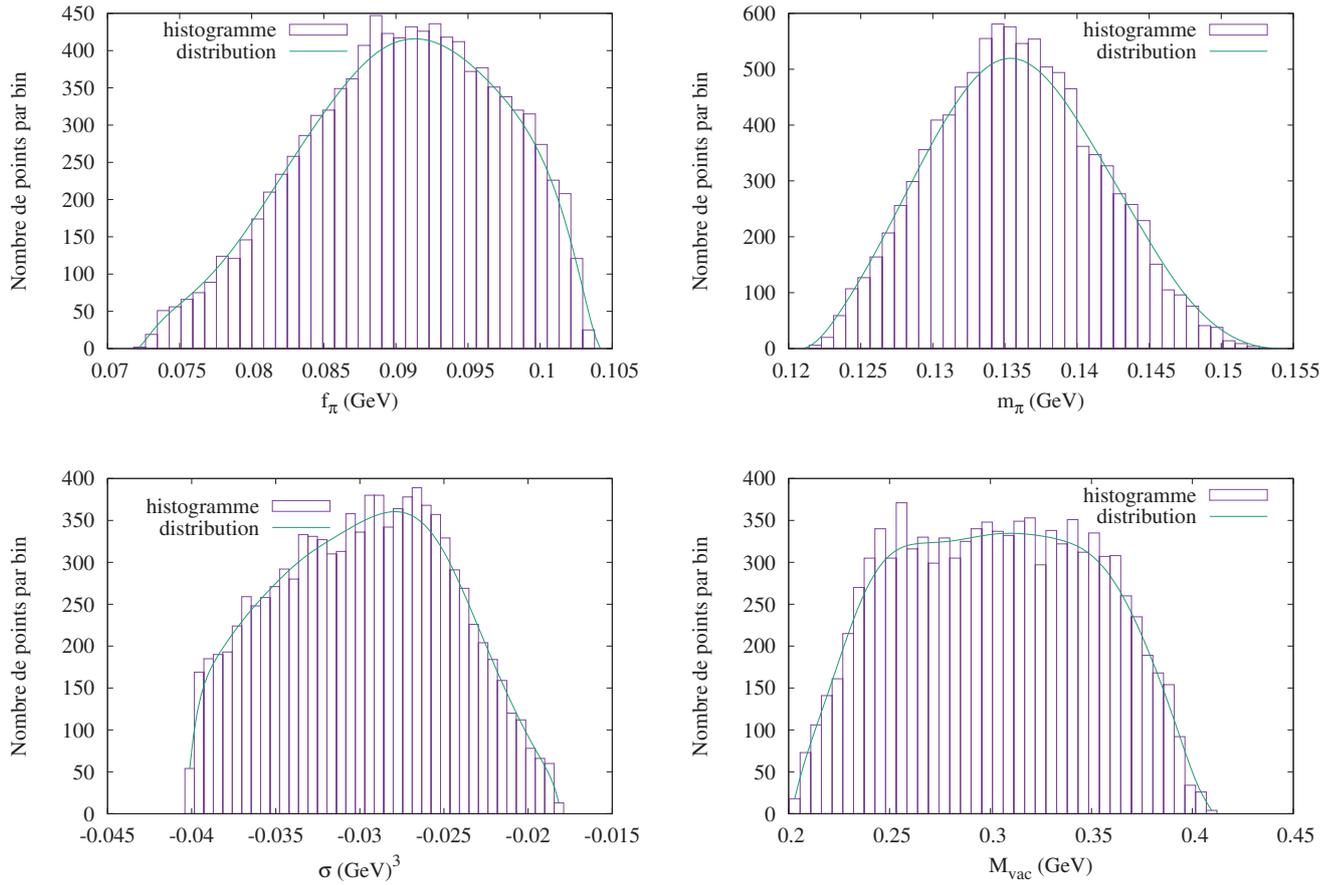


FIGURE 2.6 – 10^4 valeurs possibles pour les paramètres sont choisies telle que décrit dans le texte. Pour chaque set de paramètres les quantités dans le vide –la constante de désintégration du pion (haut gauche), la masse du pion (haut droite), le condensat de quark (bas gauche) et la masse dynamique des quarks (bas droite)– sont calculées. Les données obtenues sont représentées sous forme d’histogramme et la courbe verte correspond à la distribution de probabilité calculée à partir des histogrammes.

Comme on peut le voir, faire varier les paramètres directement peut empêcher le modèle de reproduire les données utilisées pour fixer les paramètres. Comme les paramètres sont ajustés pour reproduire une phénoménologie choisie, il devient évident que la zone de variation de ces paramètres doit être telle que la phénoménologie ne change pas trop. Nous partons de cette remarque pour étudier de manière systématique la position du CEP et pour en déduire si elle constitue une bonne prédiction du modèle où le terme “bonne prédiction” sera défini dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Sensibilité de la prédiction du CEP dans un modèle NJL simple

Cette partie reprend et détaille les résultats que nous avons obtenus et publiés dans [454]. Une introduction générale sur les problèmes inverses et leurs résolution est donnée en annexe A. Les détails des calculs de ce chapitre sont donnés en annexe B.

À partir d'une théorie compliquée à étudier, comme QCD dans le secteur non perturbatif, un modèle effectif peut être construit en ne gardant que certaines caractéristiques de la théorie de base. Par construction ce modèle dépend de paramètres et toutes les quantités calculables en dépendent. Parmi les quantités calculables certaines sont connues expérimentalement (ou par d'autres méthodes comme les calculs sur réseaux par exemple) alors que d'autres ne le sont pas. Celles là sont appelées prédictions. Pour obtenir une valeur numérique pour une prédiction, il faut donner une valeur numérique aux paramètres. Les paramètres sont ajustés pour reproduire tout ou partie des données expérimentales connues accessibles avec le modèle. Alors que le problème direct consiste à utiliser le modèle dans le but d'obtenir un résultat, le problème inverse consiste à utiliser des résultats (expérimentaux par exemple) pour définir les paramètres du modèle. En effet, le modèle n'est entièrement défini que lorsque les paramètres sont fixés (et que les approximations faites pour traiter le modèle sont données). Résoudre le problème inverse consiste à résoudre un problème, en général non linéaire, constitué d'au moins autant d'équations que le modèle contient de paramètres. Une solution du problème inverse est constituée des paramètres permettant de reproduire les données choisies. L'existence d'une solution n'est pas garantie dans le sens où il est possible qu'aucun jeu de paramètre ne puisse reproduire parfaitement les données. Dans ce cas, la notion de solution peut être modifiée et peut être définie comme le minimum de différence entre données utilisées et quantités calculées (une fonction de vraisemblance comme un χ^2 par exemple). Rien ne garanti non plus l'unicité de la solution : il est possible que plusieurs jeu de paramètres donnent accès à la même différence entre données et quantités calculées. Lorsque plusieurs solutions équivalentes existent le problème est dit mal posé et un a priori est nécessaire pour choisir la solution. Lorsque le problème inverse est mal posé, il est fort possible que les différents jeux de paramètres solutions donnent des valeurs pour des prédictions très différentes. Lorsque c'est le cas, le problème est dit mal conditionné : des variations infinitésimales des données d'entrée (*inputs*) entraîne de larges variations pour les prédictions. Lorsque les variations d'une prédiction sont faibles, on dit qu'elle est stable et cette prédiction est pertinente dans le cadre du modèle. Au contraire, une prédiction instable ne l'est pas. Lorsque les erreurs (expérimentales si les données sont expérimentales par exemple) qui affectent chacune des données utilisées sont prises en compte, alors une prédiction

stable sera affectée par une erreur de l'ordre des erreurs des données alors que celle qui affecte une prédiction instable sera bien plus grande. Pour plus de détails, voir la section A.

La mesure de la position du point critique chirale (CEP) dans le diagramme de phase de QCD fait l'objet d'un débat intense. Bien qu'il soit possible de prédire sa position en utilisant des modèles effectifs, construits pour reproduire certains aspects de QCD, la qualité des prédictions obtenues dans de tels modèles dépend du conditionnement du problème inverse, directement lié à son caractère bien ou mal posé.

Dans la suite, nous appliquons ce raisonnement sur les prédictions d'un modèle NJL particulier, dans l'approximation de champ-moyen + boucle, en prêtant une attention particulière à la prédiction de la position du CEP dans le plan (T, μ) .

Nous verrons que de petites variations des inputs engendrent de grandes variations de la coordonnée de température du CEP, alors que les variations de sa coordonnée de potentiel chimique sont plus faibles. La conséquence principale est que des variations des inputs de l'ordre de 0.6% suffisent à faire disparaître le CEP du diagramme de phase.

3.1 Introduction

Le point critique chirale (CEP) a d'abord été proposé à la fin des années 80 [436] et est depuis un important sujet de discussion. Dans la forme la plus basique du diagramme de phase, une seule ligne de transition chirale sépare le monde hadronique de la phase quarks et gluons. À faible température et haut potentiel chimique, cette transition est de premier ordre. Lorsque le potentiel chimique diminue, cette ligne de transition de premier ordre s'achève au CEP où la transition est de second ordre. Lorsque le potentiel chimique diminue encore, la transition chirale devient de type *crossover*.

L'existence du CEP est toujours une question ouverte du point de vue théorique et sa recherche expérimentale est en cours [455–463].

À cause de son importance pour le diagramme de phase de QCD, le CEP fait l'objet de recherche importante dans différents programmes expérimentaux de collision d'ions lourds : sa localisation, ainsi que la transition de déconfinement [460–462] sont étudiées au SPS au CERN [463] et au BNL à RHIC [455–457]. Elles seront également étudiées dans les prochaines expériences FAIR au GSI et NICA au JIRN [464, 465]. L'éventuelle preuve de l'existence du CEP serait l'une des premières observations dans le milieu (à température et densité finies) d'une observable de QCD et serait une contrainte forte pour de nombreux modèles effectifs.

Du point de vue théorique, il n'existe pas de consensus concernant l'existence du CEP. Même si des résultats de QCD sur réseau (Lattice-QCD ou LQCD) prédisent son existence [466], les résultats sur réseaux doivent être pris avec précaution à densité non nulle et il est tout à fait possible que la transition chirale reste de type *crossover* dans tous le diagramme de phase comme elle l'est déjà à densité nulle [467, 468].

La plupart des modèles de type NJL, avec ou sans couplage à la boucle de Polyakov, [450, 451, 469–477], ainsi que les modèles de type quarks-meson [478, 479], présentent une transition chirale de premier ordre se terminant au CEP. Même si ces modèles prédisent l'existence du CEP, chacun d'entre eux le localise à une position différente dans le diagramme de phase. Cette position peut dépendre de la paramétrisation choisie [451], de la valeur de la constante de couplage dans le canal vecteur, de l'anomalie de 't Hooft [473, 474, 480], ou même du couplage à la boucle de Polyakov. Face à ces résultats, plusieurs tentatives de contraintes ont été essayées pour comprendre si le CEP existe ou non [481–483]. Dans [481], les auteurs ont fixé la constante de couplage vecteur de telle manière à ce que la pente de la ligne critique obtenue sur réseau dans [484] à faible potentiel

chimique soit reproduite. Concernant l'existence du CEP, une autre contrainte pourrait provenir de l'étude des étoiles compactes : montrer l'existence d'une transition de premier ordre à l'intérieur de ces objets stellaires impliquerait l'existence d'une transition de premier ordre dans le diagramme de phase de QCD et donc impliquerait l'existence d'un CEP [485].

Lorsque l'étude du CEP se fait grâce aux modèles effectifs, l'approche usuelle pour comprendre les mécanismes générant un CEP est de faire varier certains paramètres pour voir si la physique contrôlée par ces paramètres est pertinente pour la prédiction de la position du CEP (voir [451] par exemple). Ces études permettent de comprendre ces mécanismes qualitativement. Le principal inconvénient de ce type de méthode est, lorsque les paramètres sont variés dans un domaine donné, qu'il se peut très bien que les prédictions du modèle utilisées pour fixer les paramètres ne soient plus du tout en accord avec les données expérimentales correspondantes.

Ici, nous proposons une nouvelle méthode permettant d'étudier la sensibilité de certaines prédictions d'un modèle NJL, en se basant sur les méthodes de résolution du problème inverse. Ces méthodes sont déjà utilisées en physique nucléaire, où elles ont prouvé leur utilité [486–489]. Dans un cadre différent de celui que nous considérons ici, les auteurs de [489], ont montré que le fait de varier les paramètres du modèle indépendamment peut être trompeur si le problème inverse correspondant est mal posé. Dans [487], l'utilité d'une analyse systématique de l'espace des paramètres est discutée. Ces deux papiers mettent en exergue que, bien que la valeur de la fonction de mérite utilisée (un χ^2 en l'occurrence) en son minimum donne une mesure de la manière dont le modèle est capable de reproduire les données, il existe d'autres informations intéressantes pouvant être étudiées. En particulier, la stabilité des prédictions peut être reliée à la courbure de la fonction de mérite en son minimum.

Dans le cadre des modèles effectifs, une fois que la procédure d'ajustements des paramètres a été appliquée, une question centrale est d'évaluer si les autres prédictions pouvant être faites avec ce modèle gardent leur sens. En d'autres termes, est-il raisonnable d'utiliser un modèle effectif pour faire des prédictions qui n'ont pas été utilisées dans la procédure d'ajustement : le modèle garde-t-il son pouvoir prédictif et jusqu'où peut-il être utilisé ? Par exemple, si les données utilisées sont obtenues dans le vide, les prédictions gardent-elles un sens lorsque faites dans le milieu ?

Pour essayer de répondre à ces questions, nous introduisons un paramètre de sensibilité permettant d'évaluer si une prédiction est sensible à la valeur des inputs utilisés. Si une prédiction est très sensible, alors il est possible que sa valeur prédite ne soit pas pertinente. Ce type d'analyse de sensibilité est assez commun en physique nucléaire [486–490]. Bien que la définition du paramètre de sensibilité varie d'un travail à l'autre, il permet toujours d'estimer la stabilité des prédictions d'un modèle. Les modèles de physique nucléaire utilisés dans les papiers précédemment cités dépendent de nombreux paramètres et l'inversion est faite en utilisant un χ^2 . Dans le cas du modèle NJL que nous utiliserons par la suite, il se trouve que l'inversion peut se faire analytiquement, nous permettant de définir un paramètre de sensibilité mesurant l'impact sur les prédictions de variations infinitésimales des inputs.

Il se trouve que le paramètre de sensibilité que nous définirons dans la suite est relié de très près à un critère utilisé en informatique théorique permettant de déterminer si le résultat d'un calcul numérique va être endommagé par la propagation des erreurs d'arrondi¹.

1. En informatique, l'erreur d'arrondi, *round-off error*, est la différence entre un nombre réel et sa valeur approximée par l'ordinateur à une précision donnée. En l'occurrence, lorsque des calculs numériques, sujets à des erreurs d'arrondi, sont fait les uns à la suite des autres, ces erreurs peuvent s'accumuler jusqu'à dominer le résultat lorsque le problème est mal conditionné. En analyse numérique, le critère utilisé rendant compte du conditionnement d'un problème est relié au *condition number* qui mesure la manière dont un nombre calculé numériquement dépend de la valeur des arguments d'entrée. Quand ce nombre de conditionnement est grand, le

Le raisonnement utilisé lorsque l'on considère les problèmes inverses et les méthodes qui leurs sont associées peuvent être assez compliquées. Aussi, comme à notre connaissance, ils n'ont jamais été utilisés pour l'étude des phases de QCD, nous présentons ici une étude simple, basée sur l'étude du paramètre de sensibilité et sur l'analyse des corrélations.

Nous choisissons le modèle NJL à deux saveurs dans l'approximation d'isospin exact, en considérant les interactions dans le canal scalaire uniquement, dans l'approximation de champ moyen + boucle. Les inputs que nous choisissons sont le condensat de quark, $\langle \bar{q}q \rangle$, la masse du pion dans le vide m_π et la constante de désintégration du pion dans le vide f_π . Ce modèle a l'avantage de bien reproduire les propriétés chirales de base de QCD, tout en restant suffisamment simple : la résolution du problème inverse associé peut se faire analytiquement. La simplicité du modèle choisi permet de se concentrer sur l'analyse de sensibilité (du CEP en particulier) et de vérifier la validité de nos calculs.

Le reste de cette section est organisée comme suit. Dans la première partie, nous rappellerons les bases du modèle NJL nécessaires pour la suite. Le paramètre de sensibilité sera ensuite défini et nous le calculerons dans le cadre du modèle NJL pour plusieurs prédictions dans le vide : la masse du méson sigma et la constante de couplage effective pion-quark-antiquark et dans le milieu : la position du point critique chiral dans le plan (T, μ) . Nous présenterons également une analyse de la situation lorsque la contrainte sur le modèle liée à la valeur du condensat de quark est relaxée.

Dans la deuxième partie, des variations finies sur les inputs m_π , f_π et $\langle \bar{q}q \rangle$ sont considérées et discutées dans le cadre des résultats obtenues dans la première partie de l'étude.

Pour ne pas surcharger l'exposé des résultats, les détails des calculs sont donnés dans l'annexe B.

3.2 Sensibilité des prédictions du modèle NJL

3.2.1 Paramétrisation du modèle NJL : observables

Nous considérons le modèle NJL dans sa version locale, à deux saveurs, dans l'approximation d'isospin $SU(2)$ exact, dont la densité lagrangienne est donné par [121, 406, 426, 433] :

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_0)\psi + G \left[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\boldsymbol{\tau}\psi)^2 \right]. \quad (3.1)$$

Ce lagrangien dépend de trois paramètres : m_0 est la masse des quarks u et d dans l'approximation d'isospin $SU(2)$ (en GeV) ; G , la constante de couplage (en GeV^{-2}) et Λ , le cutoff 3D (en GeV) imitant la liberté asymptotique des quarks. Comme le modèle NJL ne peut pas être construit directement à partir de QCD, ces paramètres sont des paramètres libres. Cependant, il existe des

problème est dit mal-conditionné, lorsqu'il est petit, il est dit bien conditionné. Notre paramètre de sensibilité est défini de cette manière. Numériquement, une possibilité d'accéder à ce nombre-condition, est d'utiliser les techniques de différentiation automatique. Pour plus de détails concernant la différentiation automatique et son utilisation pour le calcul du condition number, ou pour la résolution de systèmes (non-)linéaires, ou de problèmes d'optimisation, voir par exemple les livres [491–493]. Très grossièrement, la différentiation automatique utilise le fait que tout calcul numérique se fait par la composition de fonctions de base comme l'addition, la multiplication, etc. La procédure consiste à utiliser les formules de dérivations de fonctions composées pour obtenir la dérivée du résultat d'un algorithme par rapport à ses arguments d'entrée. Par curiosité, le lecteur peut utiliser l'utilitaire de l'INRIA, TAPENADE, <http://www-sop.inria.fr/tropics/tapenade.html>. Il suffit de fournir un algorithme écrit en C ou Fortran, pour obtenir un algorithme "différentié". L'avantage énorme de la différentiation automatique est que la dérivée est calculée à la précision de la machine : les problèmes liés aux calculs de dérivées numériques avec les différences finies disparaissent.

contraintes faibles sur ces paramètres : m_0 doit être de l'ordre de la masse des quarks u et d . Λ est relié à l'échelle Λ_{QCD} . La constante de couplage G est très peu contrainte, mais si on la considère de la même manière que la constante de couplage pour la théorie de Fermi, $G \simeq g/M^2 \simeq \tilde{g}/\Lambda^2$, alors $G\Lambda^2$ doit être dans l'intervalle $[1, 10]$.

Usuellement, ces paramètres sont ajustés sur les valeurs de la masse du pion, m_π , de la constante de désintégration du pion f_π et du condensat de quark normalisé pour être positif et ayant la dimension d'une énergie : $c = -\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$. Le condensat de quark est relié à une autre quantité, que l'on appelle la masse dynamique des quarks m , ne pouvant pas être considérée comme une observable, mais donnant une image de la physique du monde hadronique, où la symétrie chirale est spontanément brisée, en terme de quasi-particules de masse $m \gg m_0$. Elle donne aussi une approximation grossière de la masse du nucléon comme trois fois la masse d'un quasi-quark de masse m .

Nous choisissons l'approximation de champ moyen pour le calcul du condensat et l'approximation des boucles pour le calcul des quantités mésoniques [406].

La masse effective au champ moyen, $m(\Lambda, m_0, G)$, est déterminée par la résolution de l'équation du gap :

$$m_0 - m + 8iGN_c N_f m I_1 = 0 \quad (3.2)$$

où I_1 est l'intégrale du propagateur à une ligne fermionique apparaissant dans les diagrammes "bulles" :

$$I_1 = -i \int^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \text{ (avec } E_p^2 = p^2 + m^2 \text{)}. \quad (3.3)$$

La forme du condensat de quark au champ moyen $\langle \bar{q}q \rangle(\Lambda, m_0, G)$ est :

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{m_0 - m}{2G} . \quad (3.4)$$

Enfin, la masse du pion $m_\pi(\Lambda, m_0, G)$ et la constante de désintégration du pion $f_\pi(\Lambda, m_0, G)$ dans le vide sont donnés dans l'approximation des boucles par :

$$m_\pi^2 = -\frac{m_0}{m} \frac{1}{4iGN_c N_f I_2(0)} , \quad (3.5)$$

$$f_\pi^2 = -4iN_c m^2 I_2(0) , \quad (3.6)$$

où I_2 est l'intégrale à deux lignes fermioniques provenant des diagrammes de boucle de quark dans l'approximation des boucles. En plus de cette approximation, nous faisons l'approximation de quasi-boson de Goldstone : la masse du pion est négligée dans le calcul de l'intégrale I_2 : $k^2 = 0$ (et non pas $k^2 = m_\pi^2$). Explicitement :

$$I_2(0) = -i \int^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4E_p^3} . \quad (3.7)$$

Quand $(m_\pi, f_\pi, \langle \bar{q}q \rangle)$ sont fixés à leur valeur phénoménologique, le problème inverse est résolu quand le système :

$$m_\pi(\Lambda, m_0, G) = m_\pi , \quad (3.8)$$

$$f_\pi(\Lambda, m_0, G) = f_\pi , \quad (3.9)$$

$$\langle \bar{q}q \rangle(\Lambda, m_0, G) = \langle \bar{q}q \rangle , \quad (3.10)$$

est résolu pour les paramètres Λ , m_0 et G . Grâce à l'approximation de quasi-boson de Goldstone, ce système a des solutions semi-analytique, voir la section B.1. Comme nous le montrons dans cette partie, le système précédent a des solutions que si le ratio $\alpha = f_\pi^3 / \langle \bar{q}q \rangle$ est plus grand qu'une valeur critique constante (ceci est relié à la discussion de la partie 2.2.2 de [121]). Parmi les solutions, une seule est physique.

Quand les paramètres sont fixés, le modèle NJL considéré peut décrire de la phénoménologie simple dans le vide, comme la masse du méson sigma m_σ et la constante de couplage effective $g_{\pi\bar{q}q}$:

$$\begin{aligned} m_\sigma &= \sqrt{4m^2 + m_\pi^2} , \\ g_{\pi\bar{q}q} &= \frac{1}{\sqrt{-4iN_c I_2(0)}} . \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ce modèle NJL est aussi capable de prédire, pour certaines valeurs des paramètres, une transition de premier ordre vers une phase où la symétrie chirale est partiellement restaurée. Cette ligne de transition s'achève au point critique chiral, dont les propriétés sont décrites dans la partie B.2, dans le plan (T, μ) . Dans cette partie, nous décrivons également un algorithme rapide et stable pour le calculer.

3.2.2 Sensibilité et problème mal-conditionné

Pour étudier la sensibilité d'une prédiction donnée, nous utiliserons un nombre-condition [494,495] du problème servant de mesure de la sensibilité d'une solution à ce problème par rapport à des variations infinitésimales de ses données d'entrées. Ici, nous utiliserons un nombre-condition relatif : s'il est infini, le problème sera dit mal posé ; s'il est fini mais grand, le problème sera dit mal conditionné.

Le choix que nous avons fait pour le calculer est basé sur la propagation statistique des erreurs : c'est le choix naturel pour calculer des variations (déviations standard) d'une quantité calculée par rapport à des variations des données utilisées pour la calculer (considérées non corrélées).

Soit X une prédiction dépendante de deux inputs a et b . La déviation standard de la prédiction X est calculée en propageant les variations $\sigma(a)$ et $\sigma(b)$ des inputs :

$$\sigma^2(X) = \left(\frac{\partial X}{\partial a} \right)^2 \sigma^2(a) + \left(\frac{\partial X}{\partial b} \right)^2 \sigma^2(b) . \quad (3.12)$$

La sensibilité est le ratio de la déviation standard relative et de la moyenne des variations relatives des inputs :

$$\Sigma(X) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\sigma_{rel}(X)}{\sigma_{rel}^I} , \quad (3.13)$$

où :

$$\sigma_{rel}(X) = \frac{\sigma(X)}{X} , \quad (3.14)$$

et où, pour les inputs :

$$\sigma_{rel}^I = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma(a)}{a} + \frac{\sigma(b)}{b} \right) , \quad (3.15)$$

et où $\lim_{\sigma \rightarrow 0}$ représente le fait que nous considérons des variations infinitésimales. La manière dont cette limite est approchée doit être spécifiée. Nous choisissons de prendre des dispersions relatives

des inputs infinitésimales. C'est à dire, pour $I = a$ ou b , $\sigma(I)/I = p$ et $p \rightarrow 0$. Afin de vérifier que nos résultats ne dépendent pas trop de ce choix, nous discuterons brièvement d'une autre manière d'approcher cette limite : en prenant des dispersions absolues infinitésimales. Dans le cas où tous les inputs ont la même dimension, cela revient à considérer : $\sigma(I) = d$ et $d \rightarrow 0$.

Explicitement et dans le cas de la dispersion relative, pour les inputs (m_π, f_π, c) , la sensibilité d'une prédiction X s'écrit :

$$\Sigma(X) = \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial m_\pi}\right)^2 \frac{m_\pi^2}{X^2} + \left(\frac{\partial X}{\partial f_\pi}\right)^2 \frac{f_\pi^2}{X^2} + \left(\frac{\partial X}{\partial c}\right)^2 \frac{c^2}{X^2}}, \quad (3.16)$$

où nous pouvons remarquer que :

$$\left(\frac{\partial X}{\partial a} \frac{a}{X}\right)^2 = \left(\frac{\partial \ln X}{\partial \ln a}\right)^2. \quad (3.17)$$

Dans la suite, nous soutiendrons l'hypothèse que si la sensibilité d'une prédiction est grande (lorsque le calcul est mal conditionné), alors on ne peut pas donner de crédit à cette prédiction, car une erreur faible sur les données se traduit par une modification importante de la valeur de cette prédiction : la prédiction n'est pas stable. Au contraire, une prédiction dont la sensibilité est faible est considérée stable et sa valeur a un sens. Une remarque ici est nécessaire. Nous ne disons pas qu'une prédiction, faite grâce à un modèle donné, dont la sensibilité serait grande est fausse et nous ne disons pas qu'une autre prédiction dont la sensibilité serait faible est vraie. Ce que nous disons en revanche, est que si l'on souhaite comparer les prédictions du modèle avec des mesures expérimentales (faites ou à venir), il vaut mieux comparer celles qui ont une sensibilité faible. Si un modèle donne une prédiction stable d'une quantité et qu'il s'avère que cette quantité n'est pas celle mesurée, alors on peut dire que le modèle ne marche pas bien. On ne peut pas en faire autant pour une prédiction instable. De la même manière, s'il s'avère qu'une prédiction instable est proche de celle mesurée, alors cela est plus dû à la chance qu'à la compréhension profonde de la physique sous-jacente.

Remarque sur le calcul de sensibilité :

Il est en principe possible de calculer analytiquement la sensibilité d'une prédiction. Nous le ferons pour les prédictions dans le vide, où cela peut être fait assez aisément car le problème inverse est exacte. Les détails concernant le calcul de la sensibilité de la masse du sigma, $\Sigma(m_\sigma)$ peuvent être trouvés en section B.3. Il est en principe toujours possible de calculer $\Sigma(T_{\text{CEP}})$ et $\Sigma(\mu_{\text{CEP}})$, bien que beaucoup plus difficile car nécessitant le calcul des dérivées d'un système de trois fonctions implicites (voir la section B.2). Le calcul de ces dérivées devient encore plus difficile dans le cadre de modèle plus réalistes, prenant en compte des interactions dans le canal vecteur, ou prenant en compte le couplage à la boucle de Polyakov, en particulier car la dimension du système d'équations augmente. Bien que nous ayons choisi le présent modèle pour sa simplicité, ce travail sert aussi de point de départ pour des études futures. Pour cette raison, nous avons choisi d'utiliser une méthode type Monte-Carlo pour le calcul des sensibilités. De plus, comme nous utilisons la formule de propagation statistique des erreurs, le cadre Monte-Carlo est celui le plus adapté pour calculer moyennes et déviations standards. Enfin, le dernier avantage d'un calcul Monte-Carlo, est qu'il permet de visualiser les données facilement dans le cas de dispersions finies des inputs. Plus de détails concernant le Monte-Carlo seront donnés en section 3.3.

3.2.3 Résultats : sensibilité de certaines prédictions du modèle NJL

Venons en au premier résultat de ce travail. Nous choisissons comme valeur des inputs :

$$\begin{pmatrix} m_\pi \\ f_\pi \\ \langle \bar{q}q \rangle^{1/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 137 & \text{MeV} \\ 93 & \text{MeV} \\ -315 & \text{MeV} \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

La valeur choisie pour le condensat de quark est équivalente à la valeur $\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} \simeq -250$ MeV pour le condensat de quark u . Cette valeur pour le condensat de quark u est en bon accord avec les limites obtenues avec les règles de somme, $190 \text{ MeV} \leq -\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} \leq 260 \text{ MeV}$ obtenus à l'échelle de renormalisation 1 GeV [496] et celles obtenues à une échelle de renormalisation de 2 GeV, $\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} = -270$ MeV [497]. Cette valeur est également en accord avec celle obtenue sur réseau $\langle \bar{u}u \rangle^{1/3} = -269(08)$ MeV [498].

Paramétrisation :

Dans le contexte considéré, les vrais inputs du modèle sont les observables phénoménologiques m_π , f_π et $\langle \bar{q}q \rangle$ à partir desquels les paramètres m_0 , G et Λ sont définis. Il est donc possible de calculer une sensibilité pour les paramètres. Comme déjà remarqué dans [488, 489], une variation autour de la solution du problème inverse permet d'obtenir des informations concernant la précision du modèle. Si les paramètres avaient une grande sensibilité, cela voudrait dire que dès le départ, le modèle ainsi défini ne pourrait pas être utilisé pour faire des prédictions : le modèle lui-même serait mal conditionné. Nous verrons en section 3.2.4, que dans le cas où $\alpha \rightarrow \alpha_c$ (où α_c est la valeur limite du ratio $f_\pi^3/\langle \bar{q}q \rangle$ au delà de laquelle le problème inverse n'a plus de solution, voir la section B.1), toutes les sensibilités divergent. En ce point précis, le problème devient mal posé et plus rien ne peut être fait avec le modèle.

Une étude des corrélations est également intéressante : des corrélations faibles entre les paramètres et les inputs signaleraient que les inputs choisis ne sont pas pertinents pour contraindre les paramètres [489].

Les sensibilités des paramètres sont en dessous de 5 (voir le tableau 3.1), ce qui signifie que les inputs utilisés sont pertinents.

Il est à noter que la relation GOR (équation (1.64) nous permet d'accéder à $\Sigma(m_0)$ simplement. Au premier ordre en m_0 , la relation GOR est donnée par :

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -m_0 \langle \bar{q}q \rangle, \quad (3.19)$$

que nous pouvons différentier :

$$dm_0/m_0 = 2dm_\pi/m_\pi + 2df_\pi/f_\pi - 3dc/c, \quad (3.20)$$

nous permettant d'obtenir :

$$\Sigma(m_0) = \sqrt{17} = 4.12. \quad (3.21)$$

La forme de la différentielle nous permet de voir que la sensibilité de m_0 provient des trois dérivées logarithmiques des inputs. De cette décomposition, on apprend que m_0 devrait être également sensible face à la variation de n'importe quel input, ce qui n'était absolument pas évident à partir de l'équation (3.5). En examinant la relation GMOR, nous aurions pu penser que m_0 était surtout dépendante de m_π , ce qui n'est pas le cas. L'étude des sensibilités permet donc, même à un niveau basique, d'obtenir des informations difficilement accessibles en se basant sur des arguments physiques seulement. Pour le cas de m_0 , la relation GOR est suffisante pour révéler le lien caché entre les observables. Dans le cas de prédictions plus compliquées, ce genre de lien ne peut pas se trouver de manière aussi simple et un calcul de sensibilité est nécessaire.

	Sensibilités		Valeurs
Paramètres	Λ	2.83	0.653 (GeV)
	m_0	4.11	0.0051 (GeV)
	$G\Lambda^2$	3.32	2.11
Prédictions dans le vide	m	6.72	0.313 (GeV)
	m_σ	6.41	0.642 (GeV)
	$g_{\pi\bar{q}q}$	5.97	3.37
Prédiction dans le milieu	T_{CEP}	71.5	0.0299 (GeV)
	μ_{CEP}	1.05	0.327 (GeV)

TABLE 3.1 – Sensibilités des paramètres, des prédictions dans le vide et des prédictions dans le milieu, en considérant des variations infinitésimales des inputs. Les sensibilités des paramètres, des prédictions dans le vide et de μ_{CEP} sont proches de 1. La sensibilité de la coordonnée de température du CEP est très grande. Ces valeurs ont été calculées avec un Monte-Carlo.

Sensibilités des prédictions :

Comme les paramètres du modèle sont ajustés sur des quantités mesurées dans le vide, on s’attend à ce que les sensibilités soient faibles pour les paramètres, plus élevées pour les prédictions dans le vide et encore plus élevées pour les prédictions dans le milieu. Le tableau 3.1 donne les sensibilités triées de haut en bas des sensibilités attendues les plus petites aux sensibilités attendues les plus grandes.

Commençons notre discussion sur l’utilité de l’analyse de sensibilité en se concentrant sur les prédictions dans le vide de la masse du méson sigma et la constante de couplage effective pion-quark-antiquark (équation (3.11)).

Comme attendu, les sensibilités des prédictions dans le vide sont plus grandes que celles des paramètres. Elles restent cependant pas trop grandes (< 7). Les conclusions que l’on peut tirer de ce modèle concernant le secteur mésonique dans le vide sont donc assez sûres. Une fois encore, “sûres” ne signifie pas ici que les prédictions sont proches des valeurs expérimentales. Cela signifie seulement que si le modèle est considéré comme étant une bonne reproduction de QCD, alors ces prédictions peuvent également l’être. Autrement dit, ces prédictions sont a priori aussi bonnes que l’on pense que le modèle utilisé est bon.

En section B.3, nous calculons analytiquement $\Sigma(m_\sigma)$ nous permettant de vérifier le résultat obtenu avec le Monte-Carlo. Nous obtenons la différentielle :

$$dm_\sigma = 0.21dm_\pi + 34df_\pi - 8.2dc . \quad (3.22)$$

Premièrement, nous voyons que la sensibilité provenant de la dérivée partielle par rapport à la masse du pion est négligeable. Ceci n’est pas surprenant, le théorème de Goldstone étant approximativement réalisé dans le modèle NJL à cause de la faible (mais non nulle) masse des quarks nue, la masse du sigma est essentiellement deux fois la masse habillée des quarks. De manière générale, le pion étant un quasi-boson de Goldstone, toutes les observables ne dépendant pas de m_0 ne sont pas trop sensibles à sa masse.

L’analyse de sensibilité peut mettre en exergue des relations plus difficiles que celles obtenues à partir d’arguments de symétrie. Par exemple, comme $m_\sigma^2 = 4m^2 + m_\pi^2$ et que m est principalement due à la brisure spontanée de la symétrie chirale dans le modèle NJL, l’on pourrait penser que la masse du sigma est surtout sensible à la valeur du condensat de quark. Les coefficients de la différentielle (3.22) montrent qu’elle est aussi sensible à la valeur de f_π . Ceci est dû aux non-linéarités

couplant l'échelle Λ , f_π et le condensat et n'aurait pas pu être prédit par simple observation des équations. Rappelons que l'objectif ici est de montrer l'utilité de l'analyse de sensibilité dans le cadre d'un modèle simple : les liens entre observables peuvent ne pas être apparents lors de l'examen des équations. Dans le cas de f_π , on peut voir, dans le cadre d'un modèle sigma par exemple, que la valeur moyenne dans le vide du champ sigma et f_π sont fortement corrélées : $v^2 = f_\pi^2(1 + o(m_\pi^2))$, impliquant une forte corrélation entre m et f_π . L'analyse de sensibilité peut donc mettre en évidence des relations cachées par la non-linéarité du problème. Dans le cas du CEP, il est difficile de prédire de telles corrélations, comme nous le verrons après et l'analyse de sensibilité que nous proposons trouve toute son utilité.

Examinons maintenant les sensibilités des prédictions (dans le milieu) des coordonnées du CEP (T_{CEP} et μ_{CEP}). Toutes deux sont surprenantes. D'une part la sensibilité de T_{CEP} est très grande (~ 70) et celle de μ_{CEP} est très proche de 1 (rendant cette prédiction plus stable que les paramètres du modèle eux-mêmes).

Concernant T_{CEP} , la conclusion est relativement simple. Le modèle dans son ensemble, c'est à dire constitué des approximations faites et du choix spécifique des inputs, est mal conditionné, rendant la prédiction de T_{CEP} très instable. Aucune conclusion ne peut être tirée concernant T_{CEP} dans ce contexte. Ceci sera illustré dans la section 3.3, où les résultats de variations finies sont présentés.

Concernant μ_{CEP} , la conclusion est complètement différente. Sa sensibilité étant proche de 1, on peut dire que la physique implémentée dans le modèle NJL étudié, *i.e.* symétrie chirale et secteur scalaire, fait partie de la physique contraignant fortement la coordonnées μ du CEP. Bien sûr, cela ne veut pas dire que le μ_{CEP} prédit est proche de celui qui sera peut-être observé dans la nature. Cela veut simplement dire que la physique chirale générée par le secteur scalaire est pertinent pour cette prédiction. A priori, le fait d'ajouter d'autres effets physiques, comme des interactions dans le canal vecteur, va certainement modifier la position de μ_{CEP} dans le diagramme de phase (en le translatant essentiellement [406]), mais ne va pas changer drastiquement la sensibilité de μ_{CEP} , ni résoudre le problème de la grande sensibilité de T_{CEP} ¹. Résoudre ce problème nécessite très certainement l'ajout de contraintes dans le milieu.

3.2.4 Sensibilités pour différentes valeurs du condensat de quark

Comme la valeur du condensat de quark est bien moins connue comparée à la masse du pion et à la constante de désintégration du pion, nous traçons les sensibilités de m , T_{CEP} et μ_{CEP} en fonction de la valeur du condensat, pour des valeurs fixées de m_π and f_π données par l'équation (3.18). Cela va nous permettre d'étudier d'autres conséquences que l'on peut tirer d'une étude de sensibilité.

La figure 3.1 représente la masse constituante des quarks, T_{CEP} et μ_{CEP} et leurs sensibilités tracées en fonction de la valeur du condensat de quark dans le domaine [306, 316] MeV. À $c = 306$ MeV, $\alpha \simeq \alpha_c$ et le problème inverse n'a plus de solution. À $c \simeq 316$ MeV, $T_{\text{CEP}} \simeq 0$: le CEP disparaît du diagramme de phase. Comme nous l'avons précédemment mentionné, nous observons que les sensibilités divergent à la limite basse du condensat : ceci est dû qu'en ce point le problème inverse n'a pas de solution, le problème devient mal posé et les paramètres ne peuvent même plus être fixés.

Sur la partie basse de la figure 3.1, on peut voir que μ_{CEP} ne varie que dans un domaine de 2.5 MeV, ce qui est cohérent avec ce qui est attendu pour une prédiction dont la sensibilité est très

1. Cette conjecture est basée sur la figure 1 de [499], dans laquelle on voit que le CEP reste mal contraint.

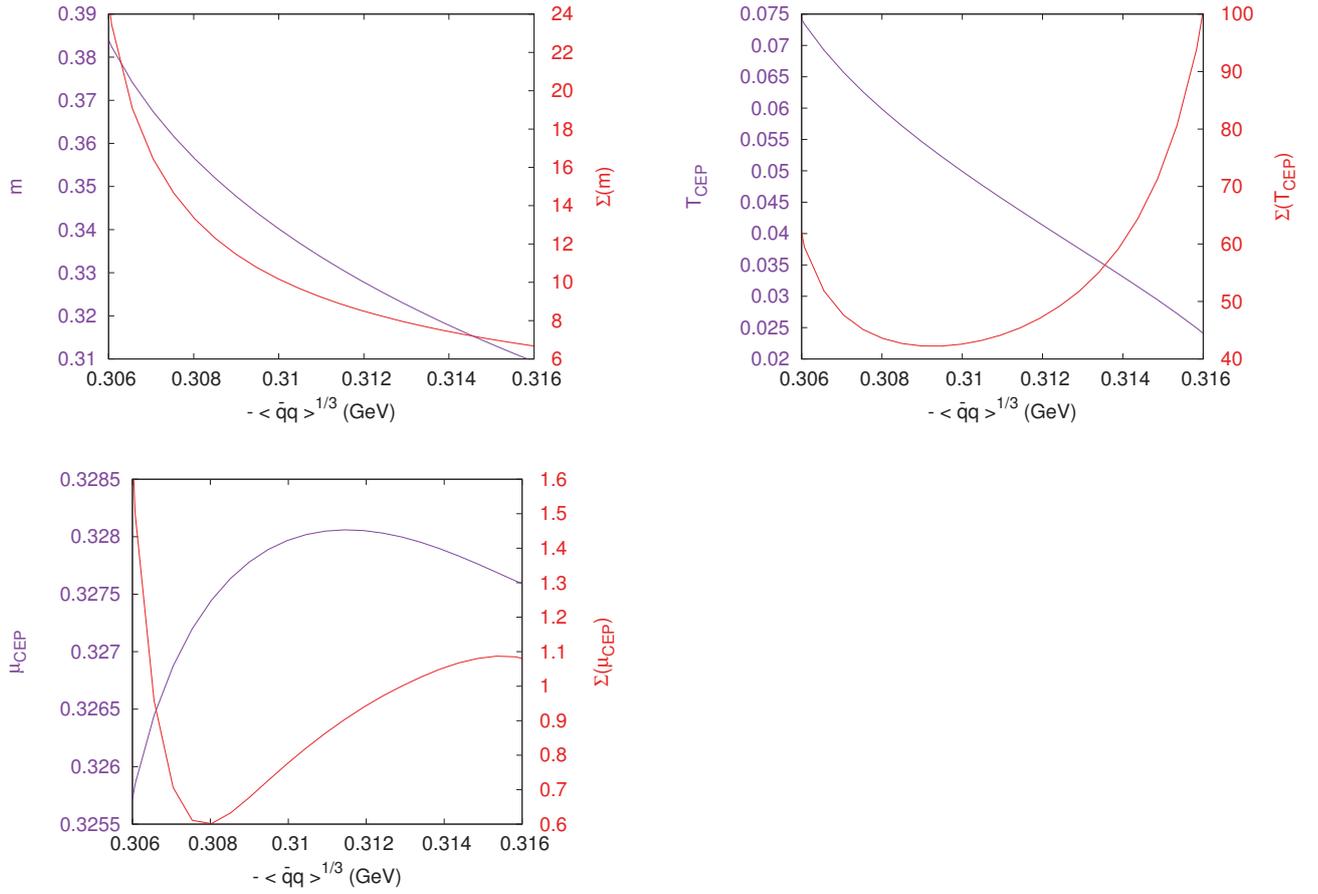


FIGURE 3.1 – La masse constituante des quarks m (en haut à gauche), la coordonnée de température du CEP (en haut à droite) et la coordonnée de potentiel chimique du CEP (en bas), ainsi que leurs sensibilités tracées en fonction du condensat de quark : $-\langle \bar{q}q \rangle^{1/3}$. La valeur du condensat de quark est limitée au domaine où une solution au problème inverse existe. Quand le condensat de quark varie dans un domaine de 10 MeV, la masse constituante des quarks varie dans un domaine de 85 MeV, T_{CEP} dans un domaine de 60 MeV et μ_{CEP} dans un domaine de 2.5 MeV seulement. Ces fenêtres sont reliées à la sensibilité de ces prédictions, voir le tableau 3.1.

proche de 1. La prédiction de μ_{CEP} est très stable et de large variation du condensat n'ont qu'un effet faible sur cette prédiction. Ceci est également confirmé par nos calculs de corrélation de μ_{CEP} avec le condensat, voir le tableau 3.5.

Au contraire, la masse constituante des quarks varie dans une fenêtre de 85 MeV et T_{CEP} dans un domaine de 60 MeV, ce qui est cohérent avec les plus grandes sensibilités correspondantes à ces prédictions.

Sur ce domaine de variation, $\Delta m/m \simeq \pm 11\%$ et $\Delta T/T \simeq \pm 100\%$. Bien sûr, ces valeurs ne correspondent pas exactement aux sensibilités calculées précédemment (les sensibilités étant des quantités locales, reliées aux gradient dans l'espace des inputs), mais elles montrent que l'accord est correct entre cette variation finie et une extrapolation basée sur le premier ordre d'un développement de Taylor dont les coefficients sont reliés aux sensibilités. Cela montre que le problème est suffisamment linéaire, tout au moins dans la direction du condensat de quark, autour

des valeurs d'inputs, pour que la sensibilité, définie pour des variations finies par l'équation (3.26), soit une quantité utile même pour ce cas où le problème est non-linéaire.

Comme le condensat de quark est relié à la brisure spontanée de la symétrie chirale, *i.e.* à la masse dynamique des quarks, il est donc relié à la création d'une transition de phase de premier ordre à température nulle. En partant de cette remarque, nous pourrions prédire que μ_{CEP} et m devraient varier de la même manière lorsque le condensat est modifié. En comparant le graphique en haut à gauche de la figure 3.1 avec celui du bas, nous voyons que ce n'est pas le cas : la prédiction de μ_{CEP} est remarquablement stable. Ce résultat montre que les non-linéarités du problème inverse peuvent affecter les prédictions de manière non triviale et l'analyse de sensibilité permet de le révéler. En l'occurrence, nous verrons que μ_{CEP} est très corrélé avec la constante de désintégration du pion.

En regardant le graphique en haut à gauche de la figure 3.1, on peut remarquer que, à f_π et m_π fixées, la masse constituante des quarks diminue lorsque c augmente. À partir de la relation approchée $m \simeq 2Gc^3$, on aurait pu s'attendre à ce que m augmente avec c et à ce que μ_{CEP} augmente également car une densité plus élevée aurait été nécessaire pour détruire le condensat. Ici, les résultats du calcul montrent que m diminue alors que μ_{CEP} est non-monotone. Cela montre également l'intérêt de varier les inputs du modèle et non pas ses paramètres : la phénoménologie peut varier de manière contre intuitive lorsque l'on se rend compte que les vraies inputs d'un modèle sont les données. En fait, lorsque m_π et f_π sont fixées, $G \equiv G(\langle \bar{q}q \rangle)$ et $m \simeq -2G(\langle \bar{q}q \rangle)\langle \bar{q}q \rangle$. Le comportement non-linéaire de G rend la conclusion du premier raisonnement fausse.

Mentionnons finalement que ce genre d'analyse peut servir de guide pour des expériences. Comme remarqué dans [489], l'analyse des corrélations est, la plupart du temps, un moyen systématique de déterminer quelles sont les observables les plus corrélées avec les paramètres. Les expériences peuvent alors se concentrer sur les plus accessibles de ces observables. Dans notre cas, nous pouvons faire l'expérience de pensée suivante pour illustrer ce propos. Supposons que le canal scalaire soit le seul pertinent et qu'un CEP existe. Supposons également que les propriétés du pion soient bien connues mais que le condensat de quark n'ait pas été mesuré. Le résultat de cette partie montre que le condensat devrait être cherché dans la fenêtre [306, 316] MeV, même si nous ne pouvons pas dire où le CEP se trouve dans le diagramme de phase à cause de la grande sensibilité de T_{CEP} .

Sur le choix de la dispersion Nous avons choisi de prendre une dispersion relative égale pour les inputs. Bien sûr, nous aurions pu choisir une dispersion absolue égale et cela aurait changé les résultats. Avec les valeurs utilisées pour les inputs, cela se serait traduit par une variation trois fois plus grande pour le condensat que pour les autres inputs. Cela pourrait être un bon choix étant donné que le condensat est bien moins connu que les autres inputs et devrait donc varier plus. Nous avons vérifié que nos conclusions ne sont pas modifiées qualitativement par ce changement de choix de dispersion.

3.3 Conséquences de petites déviations des observables

Dans les parties précédentes, nous avons considéré des variations infinitésimales des inputs et calculé la sensibilité des prédictions dans le vide et dans le milieu. Comme expliqué dans l'introduction, les inputs sont en général affectés par des erreurs finies. Il est donc intéressant d'étudier l'impact de déviations finies des inputs sur les prédictions et de visualiser l'effet de la sensibilité.

3.3.1 Pertinence de petites déviations

Dans le cas où le problème inverse peut être résolu exactement, si les inputs sont très bien connues, les prédictions peuvent ne varier que très peu, même si leurs sensibilités est très grande. Ceci n'est pas forcément vrai lorsque le problème inverse est résolu en minimisant un χ^2 : dans ce cas il n'existe pas de jeu de paramètres reproduisant exactement les inputs.

Nous verrons cependant que des variations de 0.6% des inputs autour de leur valeur moyenne suffit à changer totalement la physique décrite par le modèle que nous considérons, le CEP pouvant ne plus exister.

Ces variations finies sont justifiées d'une part par le fait que les inputs ne sont pas connues exactement. D'autre part, les sensibilités sont calculées pour des prédictions faites pour un modèle donné, dans un schéma d'approximation donné. En comparant les résultats obtenus dans le cas où les approximations sont moins fortes, on peut évaluer grossièrement l'ordre de magnitude des erreurs systématiques générées par les approximations.

Par exemple, en relaxant l'approximation de quasi-boson de Goldstone dans le calcul des intégrales I_2 , *i.e.* en prenant $k^2 = m_\pi^2$ dans l'équation (3.5), nous trouvons $m_\pi = 135.6$ MeV, c'est à dire une variation d'environ 1%.

De la même manière si l'on inclut les boucles mésoniques dans le calcul des équations du gap, voir [500], on voit que des corrections de l'ordre de 5% sont apportées aux propriétés pioniques.

3.3.2 Inprédicibilité du CEP

Pour pouvoir voir concrètement les effets d'une sensibilité grande ou petite, nous autorisons une variation de 1% des inputs autour de leur valeur moyenne donnée par l'équation (3.18). Explicitement, les fenêtres des valeurs autorisées pour les inputs sont :

$$\begin{aligned} m_\pi &\in [135.6, 138.4] \\ f_\pi &\in [92.07, 93.93] \\ \langle \bar{q}q \rangle^{1/3} &\in [-318.1, -311.8] . \end{aligned} \tag{3.23}$$

Pour pouvoir accéder aux distributions des prédictions, nous avons utilisé un algorithme de type Monte-Carlo dont nous expliquons maintenant le fonctionnement. Un ensemble de n configurations des inputs est choisi aléatoirement en suivant une certaine densité de probabilité. Nous avons considéré le cas d'une distribution uniforme $\rho^u(X)$, particulièrement adaptée pour l'analyse des erreurs déterministes, qui est constante autour de sa valeur moyenne \bar{X} :

$$\rho^u(X) = \mathcal{N} \Theta(X - X_{\max}) \theta(X_{\min} - X) , \tag{3.24}$$

où Θ est la distribution de Heavyside, où \mathcal{N} est une constante de normalisation et où $X_{\min} = (1-p)\bar{X}$ et $X_{\max} = (1+p)\bar{X}$, avec $p = 1\%$.

Nous avons également considéré le cas d'une distribution gaussienne $\rho^G(X)$ utilisée lorsque la variable aléatoire est supposée être distribuée suivant la loi normale autour de sa valeur moyenne avec une déviation standard σ . L'intérêt de la distribution gaussienne réside dans le fait que des points très loin de la moyenne peuvent être considérés, permettant d'explorer un plus grand domaine que celui autorisé par la distribution uniforme. Pour comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus dans le cas de la distribution uniforme, nous utilisons $\sigma = p\bar{X}$ et la distribution gaussienne prend la forme :

$$\rho^G(X) = \mathcal{N} e^{(X-\bar{X})/2\sigma^2} , \tag{3.25}$$

où \mathcal{N} est une constante de normalisation. Nous avons vérifié que les résultats ne changeaient pas qualitativement lorsque l'une ou l'autre de ces distributions est utilisée.

Une fois que l'ensemble de n configurations d'inputs est choisi, le problème inverse est résolu pour chacune des configurations, donnant accès à un ensemble de n configurations de paramètres. Pour chacune des configurations de paramètres sont calculées m_σ , $g_{\pi\bar{q}q}$ et aussi la position du point critique chirale dans le plan $(T - \mu)$. À la fin, les distributions des prédictions sont obtenues. Pour chaque distributions ρ_X de la prédiction X , une valeur moyenne \bar{X} et une déviation standard $\sigma(X)$ peuvent être calculées. La sensibilité de la prédiction X , équation (3.16), devient alors :

$$\Sigma(X) = \frac{\sigma(X)}{\bar{X}} \frac{1}{\sigma_{rel}^I}, \quad (3.26)$$

où σ_{rel}^I est donnée par l'équation (3.15) dans le cas de deux variables et peut s'écrire dans le cas où le modèle contient N_I inputs noté I :

$$\sigma_{rel}^I = \frac{1}{N_I} \sum_{i=1}^{N_I} \frac{\sigma(I_i)}{\bar{I}_i}, \quad (3.27)$$

Notons que les sensibilités dans la limite des dispersions infinitésimales ont été obtenues avec ce même algorithme en considérant une dispersion $p = 0.005\%$. Nous avons vérifié que cette valeur de dispersion était suffisamment faible pour pouvoir extrapoler vers la limite $p = 0$.

Nous avons également vérifié que les résultats ne dépendaient pas qualitativement du choix de la distribution.

Les erreurs statistiques ont été calculées en utilisant l'erreur sur la déviations standard :

$$\text{Err}(\sigma) = \frac{\sigma}{2} \left[\sqrt{1 + \epsilon} - \sqrt{1 - \epsilon} \right], \quad (3.28)$$

où N est le nombre de set d'inputs, σ est la déviation standard, et ϵ est l'erreur sur la variance :

$$\epsilon = \sqrt{\frac{2}{N - 1}}. \quad (3.29)$$

Distributions des paramètres du modèle :

La distribution de probabilité de $\alpha = f_\pi^3/c$ est tracée en figure 3.2, où la distribution théorique calculée en section B.4 est représentée, permettant de vérifier les résultats.

La figure 3.3 représente les distributions obtenues pour les paramètres du modèle NJL. Les moyennes et déviations standard des distributions des paramètres sont également représentées et permettent de vérifier que la statistique considérée ($n = 50^3$) est suffisamment grande pour avoir des erreurs statistiques sous contrôle. Pour chaque variable X est également représenté un point situé en \bar{X} , mais dont les barres d'erreurs sont données par $S(X) = \bar{X} \sigma_{rel}^I$. Ce point permet de comparer la déviation standard relative d'une quantité par rapport à σ_{rel}^I et donc de visualiser l'effet de la sensibilité. Quand $\sigma(X) > S(X)$, alors la dispersion choisie pour les inputs donne une dispersion plus grande pour la quantité X . La sensibilité est donnée par le rapport de ces deux grandeurs : $\Sigma(X) = \sigma(X)/S(X)$.

La valeur de la masse nue des quarks m_0 est comprise entre 4 et 6 MeV, qui sont des valeurs typiques trouvées dans la littérature. Nous remarquons que la dispersion absolue du paramètre G est faible et que sa valeur minimum se coupe brusquement. Cette coupure induit une forte asymétrie de la distribution comme on peut le voir par la position de la moyenne. Les valeurs de $G\Lambda^2$ sont localisées autour de 2.1 avec $\sigma(G) \simeq 0.1$, en accord avec les valeurs couramment utilisées. Enfin, la distribution pour le paramètre Λ a une déviation standard relativement grande, permettant à ce paramètre d'avoir des valeurs un peu plus grande que celles trouvées dans la littérature.

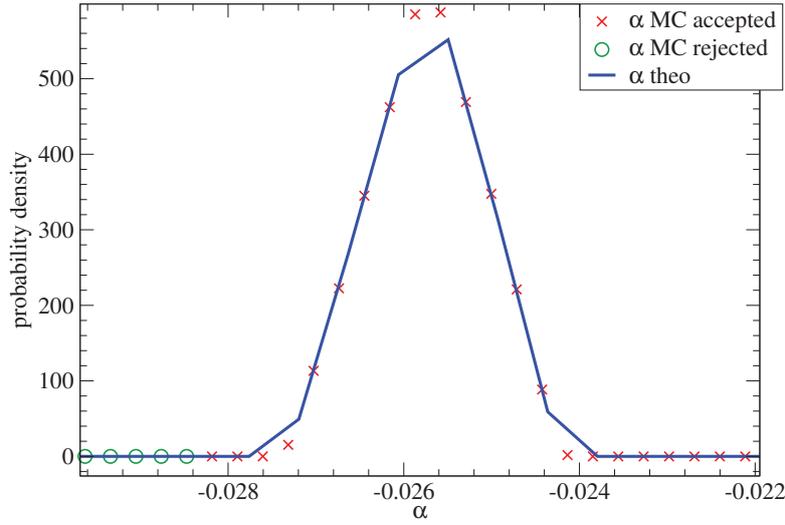


FIGURE 3.2 – Distribution de probabilité de α avec une dispersion $p = 1\%$ des inputs dans le cas où la distribution est uniforme. La ligne en trait plein représente la densité de probabilité théorique donnée par l'équation (B.81). Les cercles et croix sont les valeurs d'un histogramme normalisé (l'intégrale est égale à 1) obtenu avec le Monte-Carlo. Les croix représentent les configurations de paramètres acceptées, *i.e.* celles pour lesquelles la relation $\alpha > \alpha_c$ est vérifiée. Les cercles représentent les configurations des paramètres ne vérifiant pas cette relation.

Distribution de la prédiction de la masse du méson sigma :

La figure 3.4 présente la distribution de m_σ , sa valeur moyenne et sa déviation standard. Ces quantités sont rassemblées dans le tableau 3.2, avec les valeurs correspondantes pour la prédiction $g_{\pi\bar{q}q}$. Nous voyons que la distribution possède une longue queue, bien que la distribution initiale choisie fût la distribution uniforme. Ainsi des valeurs de 700 MeV ne sont pas exclues. Comme on peut le voir dans le tableau, les résultats pour m_σ et pour $g_{\pi\bar{q}q}$ sont en accords avec la phénoménologie obtenue dans le cadre de modèle de quark : $m_\sigma \simeq 600$ MeV est la valeur attendue pour la masse du sigma dans ce cadre¹.

$\overline{m_\sigma}$	(0.6439 ± 0.0003) (GeV)
$\sigma(m_\sigma)$	(0.0246 ± 0.0002) (GeV)
$\sigma(m_\sigma)/\overline{m_\sigma}$	3.82 (%)
$\overline{g_{\pi\bar{q}q}}$	3.3822 ± 0.0001
$\sigma(g_{\pi\bar{q}q})$	0.209 ± 0.002
$\sigma(g_{\pi\bar{q}q})/\overline{g_{\pi\bar{q}q}}$	6.18 (%)

TABLE 3.2 – Résultats obtenus pour les prédictions dans le vide m_σ et $g_{\pi\bar{q}q}$, dans le cas de la distribution uniforme, pour une dispersion de 1% et un nombre de configurations de $n^3 = 50^3$.

Distribution de la prédiction de la position du CEP :

Comme expliqué précédemment, il est possible que la solution au problème inverse existe, mais

1. Un telle valeur pour la masse du méson scalaire ne peut pas être comparée aux résultats expérimentaux voir [501, 502] pour une discussion.

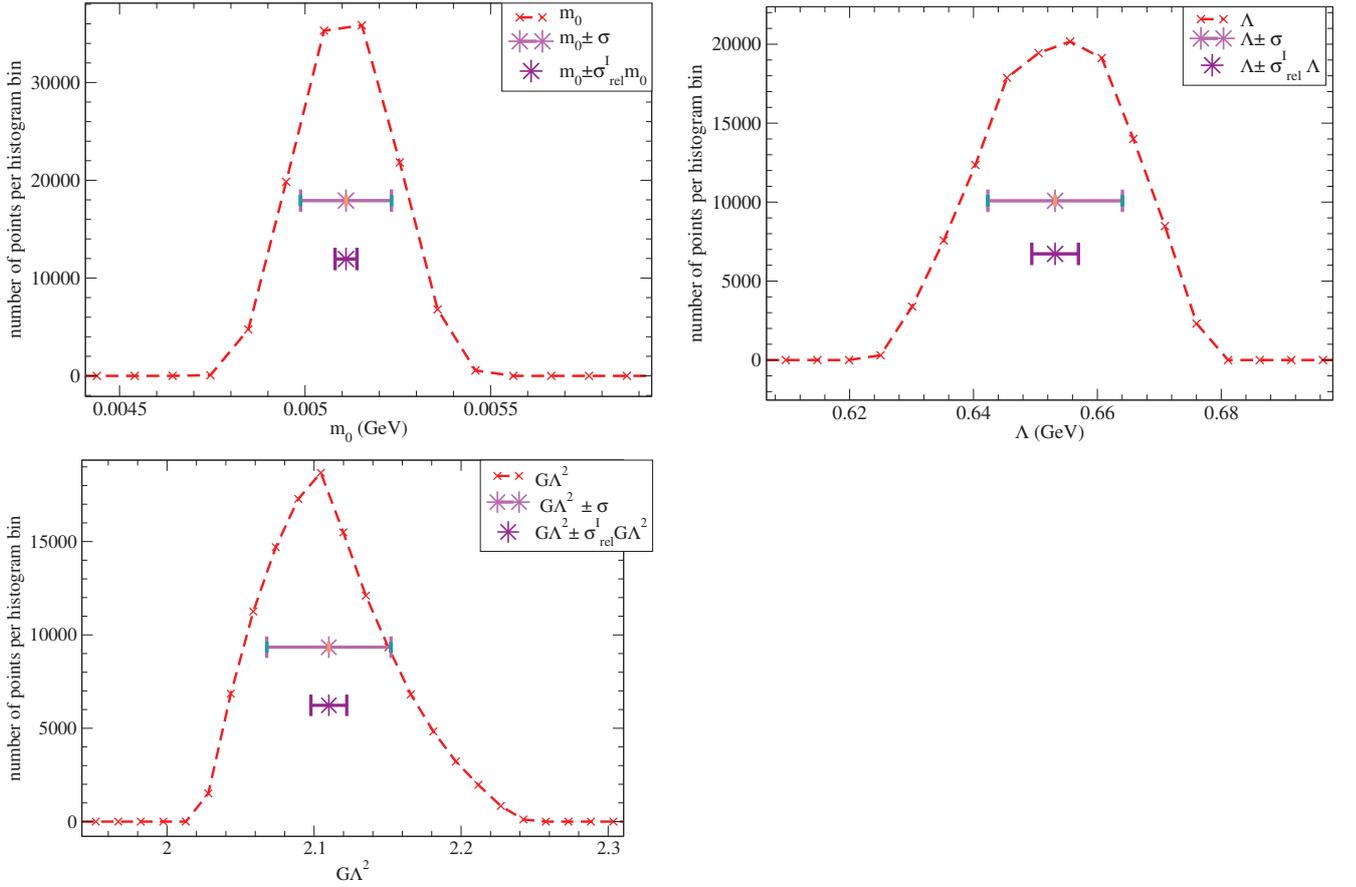


FIGURE 3.3 – Les lignes en tiret parsemées de croix (dash-crossed line en anglais) représentent les distributions des paramètres du modèle : m_0 (en haut à gauche), Λ (en haut à droite) et GA^2 (en bas). Chaque distribution est un histogramme non-normalisé, *i.e.* l’intégrale donne le nombre de points utilisé. Les résultats sont obtenus avec l’algorithme Monte-Carlo pour une dispersion $p = 1\%$, avec $n = 50^3$ configurations d’inputs. L’étoile supérieure correspond à la moyenne et les barres d’erreur associées à la déviation standard. L’étoile inférieure correspond également à la moyenne, mais les barres d’erreurs associées sont données par la multiplication de la moyenne par la dispersion moyenne des inputs : $S(X) = \bar{X}\sigma_{rel}^I$.

qu’elle ne donne pas de CEP. Lorsque la dispersion des inputs est aussi basse que 0.6% , le CEP commence à disparaître du diagramme de phase. La sensibilité de la température du CEP est si grande, que la prédiction de la position du CEP est déjà gâchée lorsque les inputs varient dans un domaine de 0.6% autour de leur valeur moyenne. L’existence même du CEP, même s’il existe lorsque les inputs sont fixées à leur valeur moyenne, ne peut pas être discutée dans le modèle que nous considérons. Le CEP ne peut pas être considéré comme une “vraie” prédiction du modèle.

Le nombre de configurations de paramètres obtenues et le nombre de CEP calculés pour des dispersions de 1% et 0.5% sont rassemblés dans le tableau 3.3.

En figure 3.5, les CEPs obtenus lors du calcul sont représentés, avec les ellipses de confiance à $1 - \sigma$ et $2 - \sigma$. Comme la densité de probabilité $\rho(T_{CEP}, \mu_{CEP})$ n’est pas une distribution gaussienne, ces ellipses de confiance sont une approximation des vraies ellipses à $1 - \sigma$ et $2 - \sigma$. Elles permettent juste d’avoir un moyen visuel de représenter la matrice de covariance (le demi grand-axe et le demi petit-axe sont les valeurs propres de cette matrice).

Lorsque la dispersion est de 1% , la distribution des CEPs s’étend dans une large fenêtre de

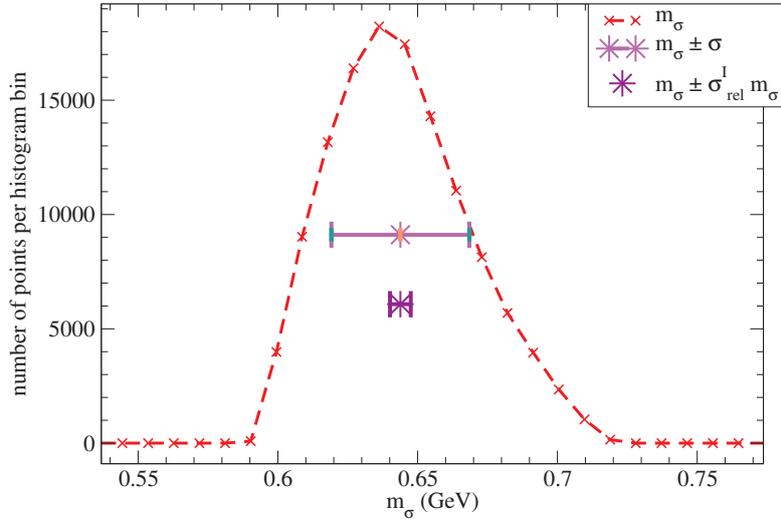


FIGURE 3.4 – La ligne en tiret représente la distribution de m_σ (histogramme non-normalisé dont l’intégral donne le nombre de points), obtenues avec l’algorithme Monte-Carlo en considérant une dispersion $p = 1\%$ et un nombre de configurations $n = 50^3$ dans le cas de la distribution gaussienne. Les étoiles ont la même signification qu’en Fig. (3.3).

Distribution uniforme			
p (%)	n_{config}	n_{CEP}	$n_{\text{CEP}}/n_{\text{sets}}$ (%)
1	3375	3066	91
0.5	3375	3375	100

TABLE 3.3 – À partir des $n^3 = 15^3$ configurations d’inputs générées par le Monte-Carlo pour une dispersion p , n_{config} configurations de paramètres ont pu être calculées (le problème inverse a une solution). Parmi ces configurations de paramètres, n_{CEP} admettent un CEP.

température $T_{\text{CEP}} \in [0, 55]$ MeV. Rappelons qu’une telle dispersion implique une variation de 3 MeV maximum des inputs. La distribution s’étend dans une fenêtre réduite de potentiel chimique $\mu_{\text{CEP}} \in [324, 332]$ MeV.

Comme dit, précédemment, il existe des configurations de paramètres ne donnant pas de CEP. Pour toutes ces configurations, la transition à température nulle est un crossover. Pour pouvoir visualiser le fait que des paramétrisations ne donnent pas de CEP, nous ajoutons un point dans le diagramme correspondant à un “non-CEP”. Ce point est placé à température nulle et son potentiel chimique est tel que $d\mu/dm = 0$ à $T = 0$ ¹. La figure 3.6 permet de visualiser la densité de CEP dans le diagramme de phase et a été créée en utilisant la technique de *Kernel density approximation* (KDE), décrite rapidement en section B.5. Cette densité est normalisée, l’intégrale sur \mathbb{R}^2 de cette distribution est 1 et a pour dimension $[\text{GeV}^{-2}]$.

Le tableau 3.4 donne les moyennes et déviations standards des coordonnées du CEP. Le rapport de la déviation sur la moyenne peut paraître faible comparé à la valeur de la sensibilité. C’est en fait un artefact de la méthode dû aux CEPs manquants qui ne rentrent pas en compte dans le calcul de la moyenne et de la déviation standard. On peut remarquer que ce ratio est étonnamment faible pour μ_{CEP} .

1. C’est le potentiel chimique caractéristique de la transition type crossover à température nulle.

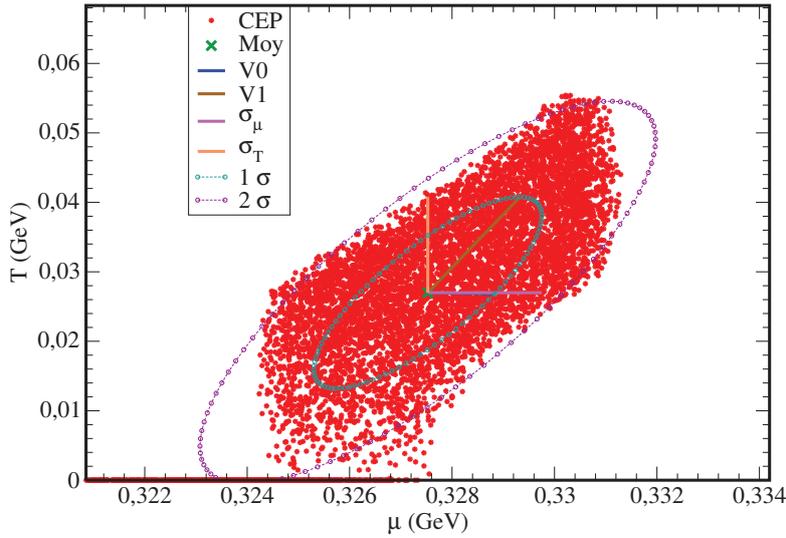


FIGURE 3.5 – Les CEPs obtenus pour la distribution uniforme avec une dispersion de $p = 1\%$ et un nombre de configurations d’inputs de $n = 20^3$. Sont également données la position de la moyenne $(\mu_{\text{CEP}}, T_{\text{CEP}}) = (0.327, 0.026)$ (GeV), les déviations standard $\sigma(T) = 0.019$ GeV et $\sigma(\mu) = 0.0076$ GeV et les approximations des ellipses de confiance (voir texte) à 1– et 2– σ . Sont également représentées les directions principales de ces ellipses ($V_0 = 0.0013$ GeV and $V_1 = 0.0138$ GeV) données par les valeurs propres de la matrice de corrélation. Lorsque la dispersion des inputs augmente, les CEPs semblent “disparaître par le bas”, vers des températures de plus en plus faible.

Ces résultats sont en accord avec les valeurs des sensibilités à dispersion infinitésimale que nous avons trouvées pour le CEP. Comme déjà remarqué, le problème est suffisamment linéaire autour des valeurs moyennes pour que le calcul de la sensibilité fait à dispersion finie garde son sens.

$\overline{T_{\text{CEP}}}$	(0.0303 ± 0.0001) (GeV)
$\sigma(T_{\text{CEP}})$	(0.0107 ± 0.0001) (GeV)
$\sigma(T_{\text{CEP}})/\overline{T_{\text{CEP}}}$	35.25 (%)
$\overline{\mu_{\text{CEP}}}$	(0.3280 ± 0.0001) (GeV)
$\sigma(\mu_{\text{CEP}})$	(0.0018 ± 0.0001) (GeV)
$\sigma(\mu_{\text{CEP}})/\overline{\mu_{\text{CEP}}}$	0.54 (%)

TABLE 3.4 – Résultats obtenus pour les prédictions dans le milieu, *i.e.* concernant la position du CEP, dans le cas de la distribution uniforme et d’un nombre de configurations d’inputs de $n^3 = 20^3$, à dispersion $p = 1\%$. Ces résultats ne comprennent que les CEPs trouvés. Les résultats présentés sont donc biaisés (voir texte). Si les CEPs manquants avaient été utilisés les déviations standard relatives auraient été plus grandes.

Corrélation de la position du CEP et des observables :

Comme expliqué dans l’introduction de cette partie, il peut être intéressant de regarder les corrélations entre les prédictions d’un modèle et les inputs.

Les corrélations entre deux quantités A et B , pouvant aussi bien être des inputs que des paramètres, que des prédictions, peut être obtenue grâce aux coefficients de la matrice de corrélation

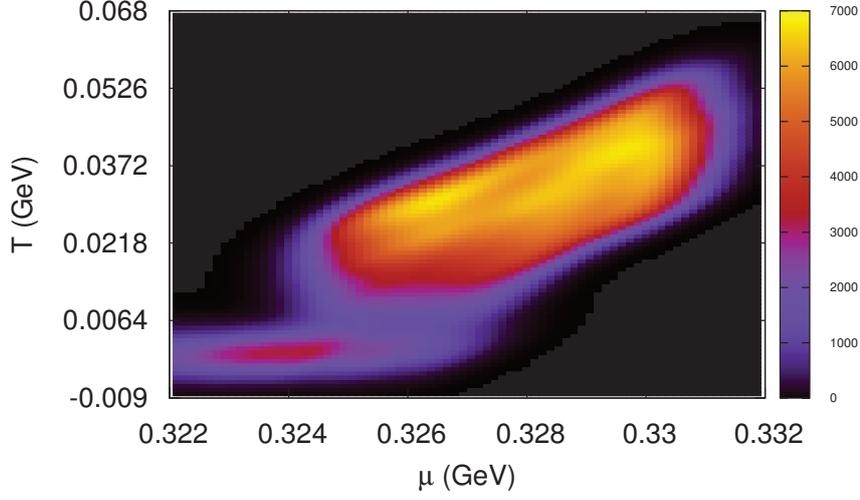


FIGURE 3.6 – *Kernel Density Approximation* (KDE) de la distribution des CEPs, obtenue dans les mêmes conditions que dans le tableau 3.4. La couleur représente l'axe z du graphique dont l'unité est le GeV^{-2} . Toutes les paramétrisations donnent un point dans le diagramme. Les points situés sur l'axe $T = 0$ représentent le fait qu'un CEP n'a pas pu être trouvé pour la paramétrisation correspondante (voir texte).

C_{AB} définie comme [486] :

$$C_{AB} = \frac{|\text{Covar}(A, B)|}{\sigma(A)\sigma(B)}, \quad (3.30)$$

où $\text{Covar}(A, B)$ est le coefficient hors-diagonale de covariance de A et B . Explicitement, si A_i et B_i sont des points générés aléatoirement constituant les ensembles A et B , l'élément correspondant de la matrice de covariance est donné par :

$$\text{Covar}(A, B) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (A_i - \bar{A})(B_i - \bar{B}), \quad (3.31)$$

où \bar{A} et \bar{B} sont les valeurs moyennes des deux ensembles A et B . Cette matrice est symétrique, $\text{Covar}(B, A) = \text{Covar}(A, B)$ et les éléments diagonaux sont les variances, $\text{Covar}(A, A) = \sigma^2(A)$.

Quand le coefficient de corrélation est proche de 1, les deux quantités sont très corrélées (par exemple, $C_{AA} = 1$). Au contraire, lorsqu'il est nul, les deux quantités sont non corrélées.

Ces définitions s'appliquent aux problèmes linéaires. Lorsque le problème est non linéaire, comme ici, les conclusions peuvent changer et doivent être prises avec précautions. Par exemple, dans le cas non linéaire, un coefficient de corrélation quasi nul entre deux quantités ne signifie plus nécessairement que ces quantités sont quasi indépendantes. Dans le cas non linéaire, il est donc important de vérifier les conclusions faites par observations des coefficients de corrélation, en traçant les densités de probabilités jointes des ensembles A et B .

La figure 3.7 représente les corrélations entre les coordonnées du CEP et les inputs. Comme la distribution initiale des inputs est uniforme, une corrélation parfaite entre deux quantités est représentée par une ligne, où la densité de point est constante. L'indépendance de deux quantités est représentée par un rectangle où la densité de point est constante.

Corrélations de		T_{CEP}	μ_{CEP}
avec les inputs	m_π	0.021	0.123
	f_π	0.646	0.987
	$\langle \bar{q}q \rangle$	0.591	0.130
avec les paramètres	m_0	0.797	0.494
	Λ	0.933	0.445
	$G\Lambda^2$	0.975	0.686

TABLE 3.5 – Coefficients de corrélation entre les coordonnées du CEP et les inputs ou les paramètres du modèle, calculés dans la cas de la distribution uniforme pour une dispersion de 1% et un nombre de configurations d’inputs $n = 20^3$.

Comme nous l’avons expliqué plus haut, l’étude des corrélations est importante pour pouvoir déceler quelles sont les observables qui contraignent le plus les prédictions. Sur la figure 3.7, les corrélations sont représentées pour une dispersion de 1%. Le tableau 3.5 donne les valeurs des coefficients de corrélation entre les coordonnées du CEP avec les inputs et les paramètres, calculés avec l’équation 3.30.

Nous remarquons que la position du CEP est quasiment indépendante de la valeur de la masse du pion. Cela résulte du fait que les quantités qui ne dépendent pas de m_0 sont assez peu sensible à la valeur précise de m_π . Cette quasi indépendance peut se voir sur le graphique, avec une forme quasi rectangulaire et dans le tableau, avec des coefficients de l’ordre de 0.1. On remarque également que la corrélation entre T_{CEP} et μ_{CEP} avec la constante de désintégration du pion est forte (très forte pour μ_{CEP}).

Nous pouvons voir sur la figure 3.7 les points où un CEP n’a pas été trouvé. Ces points sont surtout corrélés avec les faibles valeurs de la constante de désintégration du pion. Cette remarque n’aurait pas pu être faite si les coefficients de corrélation seuls avaient été calculés. L’analyse des graphiques de corrélations peut donner accès à des informations inaccessibles avec la matrice de corrélation.

La seule différence qualitative concernant les corrélations entre les coordonnées du CEP et les inputs provient des corrélations avec le condensat de quark. T_{CEP} est environ 4 fois plus corrélé avec lui que ne l’est μ_{CEP} . Comme déjà mentionné précédemment, ce genre de relation n’aurait pas pu être trouvée sur la base d’argument physique, ce qui illustre encore une fois l’utilité de l’analyse des corrélations. Cette différence entre T_{CEP} et μ_{CEP} est peut être à l’origine de la grande sensibilité de la prédiction de T_{CEP} comparée à la faible sensibilité de μ_{CEP} .

3.3.3 Conclusions :

Dans cette étude, nous avons étudié les effets de variations infinitésimales des inputs, utilisés pour fixer les paramètres d’un modèle NJL, grâce à un paramètre de sensibilité.

Le paramètre de sensibilité, tel que nous l’avons défini, donne un moyen systématique de connaître quantitativement la qualité d’une prédiction. Lorsque ce paramètre est grand ($\gg 1$), la prédiction dépend fortement de la valeur des inputs utilisés pour fixer les paramètres du modèle : la prédiction est alors instable. Au contraire, lorsque ce paramètre est de l’ordre de l’unité, la prédiction ne dépend pas de la valeur précise des inputs utilisés : la prédiction faite est stable.

Dans la plupart des études cherchant à connaître la stabilité d’une prédiction donnée, les auteurs font varier les paramètres directement et analyse l’influence de ces variations sur les prédictions.

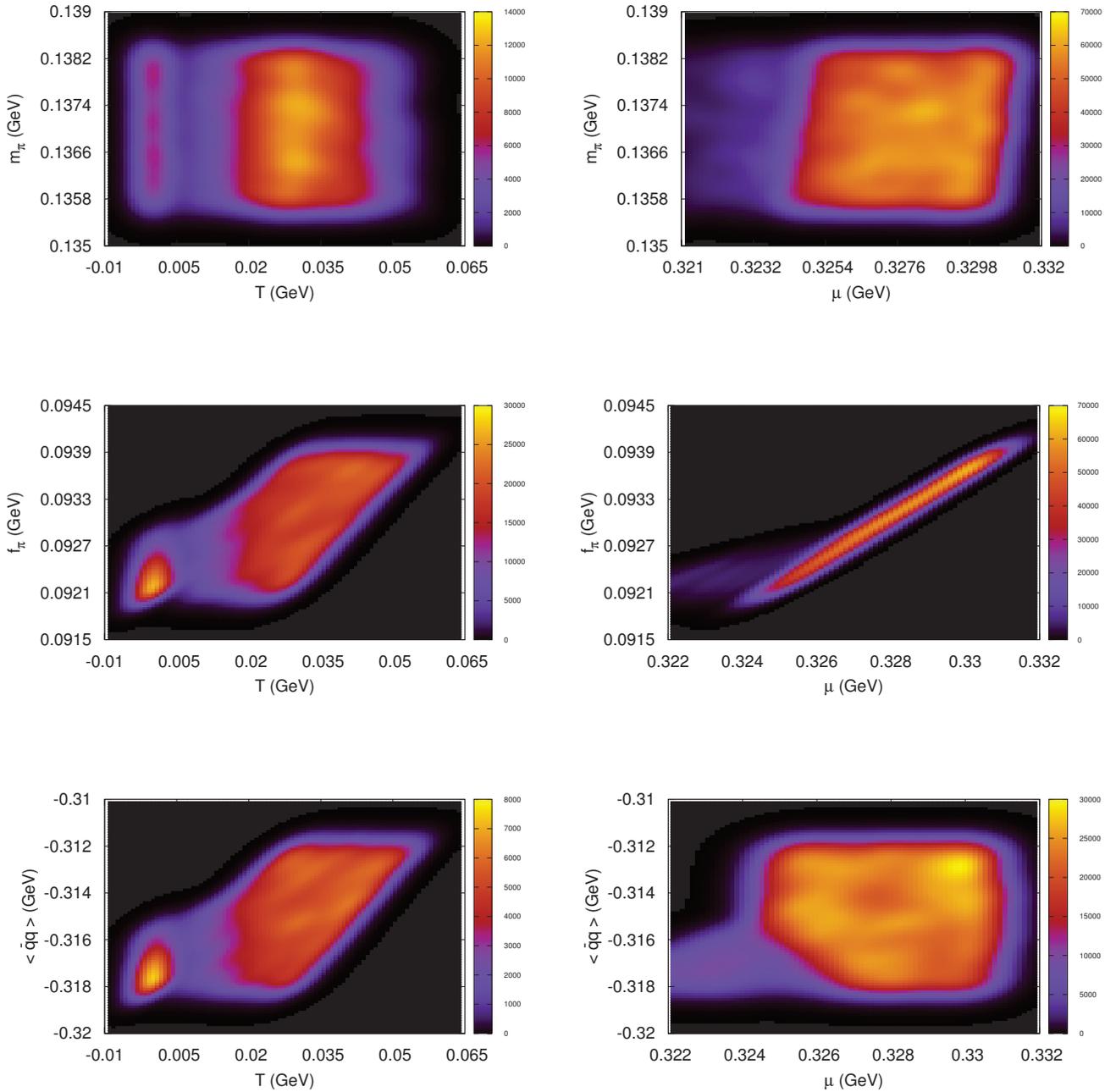


FIGURE 3.7 – Corrélation de T_{CEP} (colonne de gauche) et de μ_{CEP} (colonne de droite) avec les inputs, dans le cas de la distribution uniforme pour une dispersion de 1%, avec un nombre de configuration d'input $n = 20^3$. La méthode KDE est utilisée pour représenter la densité de probabilité des deux ensembles considérés. La couleur représente l'axe z dont l'unité est le GeV^{-2} .

En nous basant sur la théorie du problème inverse, nous avons préféré faire varier directement les inputs, c'est à dire les données à partir desquelles les paramètres du modèle sont fixés. L'intérêt de

cette méthode réside dans le fait que les non linéarités du problème peuvent mettre en exergue des relations non triviales qu'il aurait été impossible d'obtenir par simple variation des paramètres.

D'une manière générale, la résolution du problème inverse est une tâche difficile, car elle revient à résoudre un système d'équations non linéaires. Il se trouve que dans le cas du modèle utilisé, l'inversion peut se faire de manière exacte. Nous avons pu alors accéder aux sensibilités de prédictions faites dans le vide (la masse du méson sigma et la constante de couplage effective pion-quark-antiquark) et dans le milieu (coordonnées du CEP dans le plan (T, μ)), en considérant des variations infinitésimales des inputs. Nous avons montré que les prédictions faites dans le vide sont relativement stables. Nous avons également montré que la prédictions de la température du CEP est très instable, alors que celle concernant le potentiel chimique du CEP est très stable.

Pour comprendre quel est l'impact de la stabilité d'une prédiction, nous avons ensuite autorisé des variations finies des inputs de l'ordre de 1%. Cette variation est relativement grande comparée aux erreurs expérimentales connues des inputs, mais est faible en comparaison des corrections apportées lorsque les calculs sont fait à l'ordre supérieur (par exemple en prenant en compte les boucles mésoniques). Nous avons montré qu'une variations des inputs de cet ordre suffit à avoir des paramétrisations, *i.e.* le problème inverse a une solution, qui ne donnent pas de CEP. La largeur de la fenêtre en température du CEP est de l'ordre de 60 MeV, alors qu'elle n'est que de quelques MeV pour le potentiel chimique. Cette observation est certainement due à la différence de sensibilité de ces deux prédictions.

Pour obtenir des informations complémentaires, nous avons également fait une analyse des corrélations en suivant des méthodes bien connues et utilisées en physique nucléaire. Nous avons montré que, dans le cas où le problème est non linéaire, la connaissance seule des coefficients de la matrice de corrélation ne suffit pas. Il est également nécessaire de tracer les graphiques de corrélation. Nous avons vu que les coordonnées du CEP ne sont que peu corrélées à la masse du pion, mais sont particulièrement corrélées à la constante de désintégration du pion. La seule différence qualitative concernant les corrélations, est celle avec le condensat de quark. On a vu que T_{CEP} est corrélée avec le condensat alors que μ_{CEP} l'est moins. Ceci est peut être la cause de la forte sensibilité de la température du CEP.

Pour réaliser cette étude, nous avons d'une part réalisé que le problème inverse pouvait se résoudre analytiquement et d'autre part, nous avons élaboré un algorithme de recherche de CEP rapide et efficace, nécessaire pour pouvoir calculer un grand nombre de CEP en un temps correct.

La résultat le plus remarquable de cette étude est que l'existence même du CEP est remise en question lorsque les inputs sont variés de 0.6%. Cette remise en question est due au fait que la température du CEP prédite par le modèle est très sensible à la valeur des inputs utilisés. Étonnement, la prédiction du potentiel chimique du CEP dans ce modèle est une prédiction très stable, plus stable encore que les prédictions faites dans le vide. Ce résultat est étonnant bien sûr, puisque l'intuition nous dicte qu'un modèle dont les paramètres sont fixés sur des quantités mesurées dans le vide donnera de meilleurs résultats pour des prédictions dans le vide. La stabilité de μ_{CEP} est assez contre-intuitive.

La stabilité de la prédiction du potentiel chimique du CEP ne signifie pas que la valeur prédite soit correcte. Il y a d'ailleurs fort à parier que l'inclusion des interactions dans les canaux vecteurs modifie cette valeur. Dans la partie 4.6, nous étudions la sensibilité du CEP dans le cadre du modèle NJL couplé à la boucle de Polyakov.

Chapitre 4

Modèle Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio

4.1 Couplage minimal à la boucle de Polyakov et modèle PNJL

Parmi les nombreux modèles construits pour étudier l'interaction entre dynamique chirale et boucle de Polyakov [503–510], voir [511] pour une revue récente, le modèle Polyakov–Nambu–Jona-Lasinio (PNJL) couple de façon minimale la boucle de Polyakov :

$$L(\mathbf{x}) = \mathcal{P} \exp \left[ig \int_0^\beta d\tau A_4(\tau, \mathbf{x}) \right] , \quad (4.1)$$

au modèle, et les quarks se propagent alors dans un milieu homogène de champ de jauge temporel statique [470, 471, 512–520]. Bien que la symétrie $Z(3)$ soit brisée spontanément [521–523], voir [524] pour une revue, et que la boucle de Polyakov soit le paramètre d'ordre associé à la transition de déconfinement en pure jauge, une masse finie des quarks implique une brisure explicite de $Z(3)$, et la boucle de Polyakov n'est plus un paramètre d'ordre à proprement parler [286]. Alors que certains modèles considèrent la boucle de Polyakov comme une variable dynamique [525–528], elle est statique dans le modèle PNJL. Le couplage minimal de la boucle de Polyakov dans la jauge de Polyakov, dont la trace est :

$$l = \frac{1}{N_c} \text{Tr} \left(e^{i\beta A_4} \right) , \quad \text{où} : A_4 = \phi_3 \lambda_3 + \sqrt{3} \phi_8 \lambda_8 , \quad (4.2)$$

agit comme si un potentiel chimique imaginaire était ajouté au modèle [529–531]. Dans l'équation (4.2), les matrices λ_3 et λ_8 sont les matrices de Gell-Mann du groupe $SU(3)_c$, et ϕ_3 et ϕ_8 sont les champs de jauge temporelle. Dans la jauge de Polyakov, la matrice A_4 est diagonale dans l'espace des couleurs et sa trace est :

$$N_c l = \cos(2\beta\phi_8) + 2 \cos(\beta\phi_3) \cos(\beta\phi_8) + i [2 \cos(\beta\phi_3) \sin(\beta\phi_8) - \sin(\beta\phi_8)] ; \quad (4.3)$$

$$N_c l^* = \cos(2\beta\phi_8) + 2 \cos(\beta\phi_3) \cos(\beta\phi_8) - i [2 \cos(\beta\phi_3) \sin(\beta\phi_8) - \sin(\beta\phi_8)] . \quad (4.4)$$

Le lagrangien du modèle PNJL s'écrit :

$$\mathcal{L}_{\text{PNJL}} = \bar{q}(\gamma_\mu D^\mu - m + \mu\gamma_0)q + \mathcal{L}_{\text{int}} - U , \quad (4.5)$$

où la dérivée covariante s'écrit :

$$D^\mu = \partial^\mu - i\delta^{\mu 4} A_4 . \quad (4.6)$$

Les champs de quarks sont couplés à la composante temporelle de la boucle de Polyakov seulement. Le confinement n'est donc pas pris en compte de manière dynamique dans le modèle PNJL, mais de façon statistique : les quarks se propagent dans un milieu homogène de champ de jauge temporel.

Dans l'équation (4.5), U est un potentiel effectif ajouté à la main et construit pour reproduire des résultats de LQCD en pure jauge. Il ne dépend donc pas des champs de quarks. Par construction, U dépend de la température et $\mathcal{L}_{\text{PNJL}}$ n'est donc pas un "vrai" lagrangien. La quantité \mathcal{L}_{int} correspond à toutes les interactions que l'on veut prendre en compte et qui satisfont aux contraintes de symétrie imposées (symétrie chirale par exemple).

Comme dit précédemment, coupler la boucle de Polyakov de cette manière implique une modification du potentiel chimique :

$$\mu \rightarrow \mu - iA_4 = \mu - i(\lambda_3\phi_3 + \sqrt{3}\lambda_8\phi_8) . \quad (4.7)$$

On voit dans cette dernière équation que si ϕ_3 et ϕ_8 sont complexes, à chaque couleur correspond un potentiel chimique différent. D'un autre côté, si ϕ_3 et ϕ_8 sont réels, alors les énergies des quasiparticules sont complexes. Dans [532], les auteurs indiquent que les valeurs moyennes thermiques de la boucle de Polyakov, noté Φ dans l'équation (1.115), et de son hermitien conjugué $\bar{\Phi} = \Phi^*$ dans la jauge de Polyakov, doivent être tous deux réels impliquant $\Phi = \bar{\Phi}$. Sous la contrainte que $\phi_3 \in \mathbb{R}$ et $\phi_8 \in \mathbb{R}$, alors $\phi_8 = 0$ [476, 533], et la trace de la boucle de Polyakov devient :

$$l = l^* = \frac{1}{N_c} [1 + 2 \cos(\beta\phi_3)] . \quad (4.8)$$

Cependant, à potentiel chimique fini, il est attendu [532] que $\Phi \neq \bar{\Phi}$ tout en restant réels. Dès lors, les valeurs complexes des énergies des quasiparticules rendent le grand potentiel complexe. Le problème de signe est donc présent dans le modèle PNJL. D'après [476], la différence entre Φ et $\bar{\Phi}$ lorsque $\mu \neq 0$ provient des fluctuations des champs ϕ_3 et ϕ_8 , et est donc un effet au delà du champ moyen. Le champ moyen est alors obtenu en minimisant la partie réelle du grand potentiel.

Un moyen souvent utilisé pour résoudre ce problème est de ne pas tenir compte du problème de signe. On considère alors Φ et $\bar{\Phi}$ comme deux variables réelles indépendantes. Le grand potentiel est alors réel, et sa minimisation est possible. Cependant, dans [534] les auteurs montrent que lorsque cette prescription est prise, le grand potentiel n'est pas borné par le bas. Autrement dit, même si le grand potentiel est réel, il n'a pas de minimum. Résoudre les équations de champs moyen dans ce cas consiste non pas à minimiser le grand potentiel, mais à trouver un point selle. Dans [534], les auteurs proposent de minimiser la partie réelle du grand potentiel et de simplement négliger sa partie imaginaire. Les paramètres d'ordre Φ et $\bar{\Phi}$ sont remplacés par leur partie réelle et complexe (voir Eq. 2.12 de cette référence). Dans la suite, nous procéderons d'une autre manière pour assurer la minimisation du grand potentiel : nous ne considérerons que les configurations de champs moyen pour lesquelles $\phi_8 = 0$ impliquant $\Phi = \bar{\Phi}$ et ainsi la réalité du grand potentiel [476, 533]. Un autre moyen pourrait être de suivre la décomposition de la fonction de partition proposée par [535], voir équation (8).

Ici, nous calculons premièrement le grand potentiel sans prendre en compte les conditions de réalité des champs ϕ_3 et ϕ_8 . Nous obtiendrons alors un grand potentiel dépendant de Φ et $\bar{\Phi}$. Nous montrerons ensuite comment calculer la partie réelle du grand potentiel, et nous vérifierons que lorsque $\phi_8 = 0$ le grand potentiel est réel.

4.2 Calcul du grand potentiel

4.2.1 Variables Φ et $\bar{\Phi}$ indépendantes

Considérons le cas $N_f = 2$, dans l'approximation d'isospin exact, avec un potentiel chimique commun μ aux deux saveurs, avec des interactions dans les canaux scalaire–isoscalaire et pseudoscalaire–isovecteur :

$$\mathcal{L} = \bar{q}(\gamma^\mu p_\mu - m_0 + (\mu - iA_4)\gamma_0)q + G[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\tau q)^2] - U . \quad (4.9)$$

La modification du potentiel chimique par la boucle de Polyakov se traduit par :

$$\mu^r = \mu - i(\phi_3 + \phi_8) ; \quad (4.10)$$

$$\mu^g = \mu + i(\phi_3 + \phi_8) ; \quad (4.11)$$

$$\mu^b = \mu + 2i\phi_8 . \quad (4.12)$$

Les énergies des quasiparticules s'obtiennent avec la méthode précédente, où :

$$\Sigma_s = -(m_0 - 2G\langle\bar{q}q\rangle) = -M \quad (4.13)$$

$$\Sigma_v = \mu - iA_4 . \quad (4.14)$$

Le couplage à la boucle de Polyakov lève la dégénérescence sur les couleurs, et les 12 valeurs propres s'écrivent :

$$\epsilon_{1,2} = \epsilon_{3,4} = E \pm \mu^b , \quad \epsilon_{5,6} = \epsilon_{7,8} = E \pm \mu^g , \quad \epsilon_{9,10} = \epsilon_{11,12} = E \pm \mu^r , \quad (4.15)$$

où $E = \sqrt{p^2 + M^2}$. En écrivant :

$$X = e^{-\beta(E-\mu)} \quad \text{et} \quad \bar{X} = e^{-\beta(E+\mu)} , \quad (4.16)$$

et :

$$y_b = e^{-2i\beta\phi_8} , \quad y_g = e^{-i\beta(\phi_3-\phi_8)} , \quad y_r = e^{i\beta(\phi_3+\phi_8)} , \quad (4.17)$$

on peut écrire :

$$\begin{aligned} \ln \left[\prod_{i=1}^{12} (1 + e^{-\beta\epsilon_i}) \right] &= 2 \ln \left[1 + (y_b + y_g + y_r)X + (y_g y_r + y_r y_b + y_g y_b)X^2 + y_b y_g y_r X^3 \right] \\ &+ 2 \ln \left[1 + (\bar{y}_b + \bar{y}_g + \bar{y}_r)\bar{X} + (\bar{y}_g \bar{y}_r + \bar{y}_r \bar{y}_b + \bar{y}_g \bar{y}_b)\bar{X}^2 + \bar{y}_b \bar{y}_g \bar{y}_r \bar{X}^3 \right] . \end{aligned} \quad (4.18)$$

En remarquant que :

$$y_b + y_g + y_r = N_c \Phi \quad y_i y_j = \bar{y}_k \quad y_b y_g y_r = 1 , \quad (4.19)$$

on peut alors écrire :

$$\ln \left[\prod_{i=1}^{12} (1 + e^{-\beta\epsilon_i}) \right] = 2 \ln [1 + 3\Phi X + 3\bar{\Phi} X^2 + X^3] + 2 \ln [1 + 3\bar{\Phi} \bar{X} + 3\Phi \bar{X}^2 + \bar{X}^3] , \quad (4.20)$$

permettant de réécrire la partie fermionique du grand potentiel du modèle PNJL [471] :

$$\Omega_q = -\frac{1}{2\pi^2}(I + J) , \quad (4.21)$$

où :

$$I = \int_0^\Lambda dp p^2 12E ; \quad (4.22)$$

$$J = \int_0^{\Lambda T} dp p^2 2T \ln \left[\prod_{i=1}^{12} (1 + e^{-\beta\epsilon_i}) \right] . \quad (4.23)$$

Le grand potentiel du modèle est défini comme la somme de Ω_q et du potentiel effectif U , dépendant de Φ et $\bar{\Phi}$:

$$\Omega = \Omega_q - \mathcal{L}_{\text{cond}} + U . \quad (4.24)$$

Comme expliqué dans l'introduction de cette partie, il n'est pas toujours possible de réexprimer le grand potentiel en terme des champs Φ et $\bar{\Phi}$. Dans la partie suivante, nous montrons comment calculer la partie réelle du grand potentiel. Nous montrons également que dans le cas étudié ici, le calcul de la partie réelle du grand potentiel permet de retrouver la forme que nous venons d'obtenir dans laquelle $\Phi = \bar{\Phi}$.

4.2.2 Partie réelle du grand potentiel et champs ϕ_3 et ϕ_8

Lorsqu'il n'est pas possible de réexprimer les champs ϕ_3 et ϕ_8 en terme des champs Φ et $\bar{\Phi}$ directement, la partie réelle du grand potentiel doit être calculée. Nous montrons ici que la contrainte $\phi_8 = 0$ permet toujours d'exprimer le grand potentiel en terme de Φ , le rendant réel.

Lorsque les énergies des quasiparticules sont exprimées en fonctions des champs ϕ_3 et ϕ_8 , elles prennent la forme générale :

$$\epsilon_j = \sqrt{a + ib} , \quad (4.25)$$

pouvant être décomposées comme :

$$\epsilon_j = (a^2 + b^2)^{1/4} \left\{ \cos \left[\frac{1}{2} \arg(a + ib) \right] + i \sin \left[\frac{1}{2} \arg(a + ib) \right] \right\} . \quad (4.26)$$

Les énergies des quasiparticules peuvent donc toujours s'écrire sous la forme :

$$\epsilon_j = \epsilon_j^{\text{re}} + i\epsilon_j^{\text{im}} , \quad (4.27)$$

où ϵ_j^{re} (ϵ_j^{im}) est la partie réelle (imaginaire) de ϵ_j . Lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 0$, $\arg(a + ib) = \arctan(a/b)$. Il est possible de montrer ¹ que :

$$\cos \left[\frac{1}{2} \arctan(x) \right] = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)} ; \quad (4.28)$$

$$\sin \left[\frac{1}{2} \arctan(x) \right] = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right)} . \quad (4.29)$$

La partie matière du grand potentiel s'écrit :

$$\Omega_q = -\frac{1}{2\pi^2} \int dp p^2 \sum_j \left\{ \epsilon_j^{\text{re}} + i\epsilon_j^{\text{im}} + 2T \ln \left[1 + e^{-\beta\epsilon_j^{\text{re}}} \left(\cos(\beta\epsilon_j^{\text{im}}) - i \sin(\epsilon_j^{\text{im}}) \right) \right] \right\} . \quad (4.30)$$

1. Le changement de variable $y = \arctan(x)$ et la relation $\cos(y) = 2 \cos^2(y/2) - 1$ permettent de démontrer l'équation (4.28). Le même changement de variable, la relation $\cos(y) = \cos^2(y/2) - \sin^2(y/2)$ et le résultat précédent permettent de démontrer l'équation (4.29).

Un nombre complexe $z = a + ib$ peut toujours s'écrire $z = \sqrt{a^2 + b^2}e^{i\theta}$, où $\theta = \arg(z)$. Si $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \neq 0$, alors $z = e^{\ln|z|}e^{i\theta}$. Il en suit que le logarithme d'un nombre complexe peut toujours s'écrire sous la forme $\ln(z) = \ln|z| + i\theta$. La partie réelle de l'équation (4.30) s'écrit alors :

$$\Re(\Omega_q) = -\frac{1}{2\pi^2} \int dp p^2 \sum_j \left\{ \epsilon_j^{\text{re}} + T \ln \left[1 + e^{-2\beta\epsilon_j^{\text{re}}} + 2e^{-\beta\epsilon_j^{\text{re}}} \cos(\beta\epsilon_j^{\text{im}}) \right] \right\} . \quad (4.31)$$

Dans tous les cas que nous avons testé, nous avons vérifié que lorsque la limite $\phi_8 = 0$ est prise, seules certaines énergies de quasiparticules sont imaginaires et leur partie imaginaire est toujours donnée par $\epsilon_j^{\text{im}} = \pm\phi_3$. En appelant \mathcal{I}_{im} (\mathcal{I}_{re}) l'ensemble des indices des quasiparticules imaginaires (réelles), la partie matière du grand potentiel peut toujours se mettre sous la forme :

$$\Re(\Omega_q) = -\frac{1}{2\pi^2} [I + J_{\text{im}} + J_{\text{re}}] , \quad (4.32)$$

où, en utilisant l'égalité (4.8) :

$$I = \int_0^\Lambda dp p^2 \sum_j \epsilon_j^{\text{re}} ; \quad (4.33)$$

$$J_{\text{re}} = \int_0^{\Lambda_T} dp p^2 T \sum_{j \in \mathcal{I}_{\text{re}}} \ln \left(1 + e^{-2\beta\epsilon_j} + 2e^{-\beta\epsilon_j} \right) ; \quad (4.34)$$

$$J_{\text{im}} = \int_0^{\Lambda_T} dp p^2 T \sum_{j \in \mathcal{I}_{\text{im}}} \ln \left(1 + e^{-2\beta\epsilon_j^{\text{re}}} + e^{-\beta\epsilon_j^{\text{re}}} (3\Phi - 1) \right) . \quad (4.35)$$

Le grand potentiel aura donc toujours la forme :

$$\Omega = -\frac{1}{2\pi^2} (J + J_{\text{re}} + J_{\text{im}}) - \mathcal{L}_{\text{cond}} + U . \quad (4.36)$$

En utilisant les formules précédentes, il est possible de vérifier qu'elles permettent de retrouver l'équation (4.21) dans laquelle $\Phi = \bar{\Phi}$. Lorsque $\phi_8 = 0$, les quarks bleus ne sont pas affectés par la boucle de Polyakov :

$$\mu_r = \mu - i\phi_3, \quad \mu_g = \mu + i\phi_3, \quad \mu_b = \mu . \quad (4.37)$$

En utilisant les relations de dispersion (4.15), il est alors possible d'écrire l'intégrale J (4.23) comme :

$$J = -\frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\Lambda_T} dp p^2 \left[\ln(F) + \ln(\bar{F}) \right] , \quad (4.38)$$

où :

$$F = \left[1 + X^2 + 2X \cos(\beta\phi_3) \right]^4 \left[1 + X^2 + 2X \right] , \quad (4.39)$$

et où $\bar{F} = F(X \leftrightarrow \bar{X})$. En utilisant la relation (4.8), il vient :

$$\ln(F) = 4 \ln[1 + 3X\Phi(1 + X) + X^3] , \quad (4.40)$$

et une forme équivalente pour $\ln(\bar{F})$. On retrouve alors bien l'équation (4.21) dans laquelle $\Phi = \bar{\Phi}$.

Les modèles chiraux couplés à la boucle de Polyakov, en particulier le modèle PNJL [451, 471, 533, 536–539] ou le modèle PQM [478, 540–542] permettent de bien reproduire certaines quantités thermodynamiques mesurées sur réseaux (où le potentiel gluonique U est contraint par des résultats

réseaux). Ces modèles permettent de traiter aussi bien la transition chirale que la transition de déconfinement. La manière de coupler le confinement et la dynamique liée à la symétrie chirale est simple dans ces modèles mais permettent d'obtenir une bonne image de la physique sous-jacente. En examinant la partie matière du grand potentiel (4.21), on voit que lorsque la symétrie chirale est brisée par la masse dynamique des quarks, les exponentielles entrant dans l'équation (4.23) deviennent petites et le couplage de la boucle de Polyakov avec le secteur chiral diminue favorisant ainsi le confinement. Lorsque la boucle de Polyakov a une valeur faible, l'intégrale thermique J a une valeur faible, ajournant la restauration de symétrie chirale.

Comme dit précédemment, un potentiel gluonique est ajouté au lagrangien du modèle PNJL afin de simuler phénoménologiquement la partie gluonique de QCD. Dans la partie suivante nous introduisons certains des potentiels gluoniques couramment utilisés dans la littérature. Certaines de leurs caractéristiques sont étudiées. Dans sa formulation de base, le modèle PNJL permet de prendre en compte l'effet de la boucle de Polyakov sur les quarks. Cependant, les quarks ont eux aussi un effet sur la boucle de Polyakov. Nous verrons également comment prendre en compte cet effet, appelé *back reaction*, de manière phénoménologique.

4.3 Potentiels gluoniques effectifs

Par construction, ce potentiel effectif doit être invariant sous les transformations de $Z(3)$ et doit donner la possibilité à la solution des équations de champ moyen Φ de prendre une valeur non nulle lorsque la température est suffisamment grande. Il doit surtout permettre de reproduire les données sur réseaux. Il existe un grand nombre de potentiels possibles, tous dépendant de paramètres ajustés pour reproduire des résultats sur réseau obtenus en pure jauge et plus récemment en *full-QCD* (résultats réseaux avec quarks).

4.3.1 Potentiels, mesure de Haar et action des quarks sur la boucle de Polyakov

Dans cette partie, quatre potentiels gluoniques couramment employés dans la littérature sont introduits : le potentiel polynomial, le potentiel logarithmique, le potentiel de Fukushima et le potentiel de Dexhaimer. Le potentiel polynomial a été le premier introduit et correspond à un développement à la Landau par rapport aux paramètres d'ordre Φ et $\bar{\Phi}$. Les trois autres potentiels introduits ont une forme logarithmique provenant de la mesure Haar de QCD. Le potentiel logarithmique a été le premier à être introduit ayant cette forme. Le potentiel de Fukushima a une forme plus proche de QCD dont la forme est basée sur les modèles de spin de QCD. Le potentiel de Dexhaimer introduit une dépendance en potentiel chimique permettant de prendre en compte le confinement statistique du modèle PNJL à température nulle.

Pour d'autres formes possibles de grand potentiel, et des informations complémentaires les concernant, voir par exemple [478, 534, 543–549]. Pour une comparaison des résultats obtenus avec différents potentiels, voir par exemple [541, 550].

La dépendance en potentiel chimique du potentiel gluonique de Dexhaimer permet également de prendre en compte la *back reaction*. D'autres moyens existent pour la prendre en compte et certains d'entre eux seront introduits.

4.3.1.1 Potentiel polynomial

Dans le papier original [471], les auteurs proposent une forme polynomiale [525, 526, 551, 552] :

$$\frac{U_{\text{POL}}}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2}\Phi\bar{\Phi} - \frac{b_3}{6}(\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) + \frac{b_4}{4}(\Phi\bar{\Phi})^2, \quad (4.41)$$

où :

$$b_2(T) = a_0 + a_1\frac{T_0}{T} + a_2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2 + a_3\left(\frac{T_0}{T}\right)^3. \quad (4.42)$$

	a_0	a_1	a_2	a_3	b_3	b_4
[471]	6.75	-1.95	2.625	-7.44	0.75	7.5
[553]	6.47	-4.67	7.95	-9.09	1.03	7.32

TABLE 4.1 – Deux paramétrisations possibles pour les paramètres du potentiel gluonique logarithmique (Eq. 4.41). Les paramètres de la première ligne ont été obtenus en ajustant les données réseaux [554]. Ceux de la deuxième ligne ont été obtenus en ajustant des données réseaux plus récentes [555].

Deux paramétrisations possibles sont données dans le tableau 4.1. Ces paramètres ont été obtenus dans [471], en ajustant des données sur réseaux [554]. Dans [553], les auteurs utilisent des données réseaux plus récentes [555] et obtiennent une autre paramétrisation. Lorsque le potentiel polynomial est utilisé, on utilise la première paramétrisation sauf mention du contraire.

4.3.1.2 Potentiel logarithmique

Dans [476, 518, 533, 536, 556] les auteurs proposent un autre potentiel :

$$\frac{U_{\text{LOG}}}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2}\Phi\bar{\Phi} + b_4\left(\frac{T_0}{T}\right)^3 \log[h(\Phi, \bar{\Phi})], \quad (4.43)$$

où :

$$b_2(T) = a_0 + a_1\frac{T_0}{T} + a_2\left(\frac{T_0}{T}\right)^2; \quad (4.44)$$

$$h(\Phi, \bar{\Phi}) = 1 - 6\Phi\bar{\Phi} + 4(\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) - 3(\Phi\bar{\Phi})^2. \quad (4.45)$$

La fonction h provient de la mesure de Haar du groupe $SU(N_c)$ [473, 533, 557] pouvant jouer un rôle essentiel dans la transition de déconfinement [528, 558]. Deux paramétrisations possibles pour ce potentiel sont données dans le tableau 4.2. Les paramètres sont donnés par ajustement des données réseau [554]. Le paramètre a_0 est fixé : $a_0 = 16\pi^2/45$, et le paramètre b_4 est obtenu à partir des paramètres a_i : $b_4 = -0.108(a_0 + a_1 + a_2)$. Les auteurs de [519] estiment les erreurs qui affectent les paramètres. Les erreurs sont également données dans le tableau 4.2. Dans [553], les auteurs réalisent un nouvel ajustement pour ces paramètres avec des données réseau plus récentes [555]. Comme aucune barre d'erreur sur les paramètres n'est donnée, il est difficile de comparer les deux jeux de paramètres, et là encore, la première paramétrisation sera utilisée dans les calculs, sauf mention du contraire.

Dans [553] les auteurs comparent les effets des nouvelles paramétrisations pour un potentiel gluonique donné (polynomial ou logarithmique) et ils trouvent des différences négligeables devant les modifications apportées par l'utilisation de l'un ou l'autre de ces deux potentiels.

	a_0	a_1	a_2	b_3
[519]	3.51	$-2.47 \pm 3\%$	$15.22 \pm 6\%$	$-1.75 \pm 2\%$
[553]	3.51	-5.121	20.99	-2.09

TABLE 4.2 – Deux paramétrisations possibles des paramètres du potentiel gluonique logarithmique. Les paramètres de la première ligne ont été obtenus en ajustant les données réseaux [554]. Ceux de la deuxième ligne ont été obtenus en ajustant des données réseaux plus récente [555].

4.3.1.3 Potentiel de Fukushima

Une autre forme de potentiel gluonique a été proposé dans [473, 474] qui trouve son origine dans la description de la transition de déconfinement grâce à des modèles de spin [508, 509, 511, 559]. Il s'écrit comme :

$$\frac{U_{\text{FUK}}}{bT} = -54e^{-\beta a} \Phi \bar{\Phi} - \ln[h(\Phi, \bar{\Phi})], \quad (4.46)$$

et ne contient que deux paramètres : $a = 0.664 \text{ MeV}$ et $b = 0.03\Lambda^3 \text{ MeV}^3$. Le paramètre a détermine la température de transition de déconfinement en pure jauge. Le paramètre b paramétrise la manière dont la transition chirale et la transition de déconfinement sont corrélées. Pour plus d'informations voir les parties II.D et III.A de [473].

4.3.1.4 Potentiel de Dexhaimer

De part sa définition, la boucle de Polyakov n'a de sens qu'à température finie. Les auteurs de [376, 560] propose d'écrire U comme :

$$U_{\text{DEX}} = (a_0 T^4 + a_1 \mu^4 + a_2 T^2 \mu^2) \Phi \bar{\Phi} + a_3 T_0^4 \ln[h(\Phi, \bar{\Phi})], \quad (4.47)$$

avec pour objectif de pouvoir décrire des objets stellaires compacts froids, tout en gardant les effets de la boucle de Polyakov voir par exemple [378]. Les paramètres sont donnés par $a_0 = -1.85$, $a_1 = -1.44 \cdot 10^{-3}$, $a_2 = -0.08$ et $a_3 = -0.4$.

Dans les formes polynomiale, logarithmique et de Dexhaimer du potentiel gluonique, le paramètre T_0 correspond à la température (pseudo)critique de transition obtenue sur réseau à potentiel chimique nul. En pure jauge $T_0 = 0.270 \text{ GeV}$. Lorsque la dynamique des quarks est prise en comptes, et que les quarks agissent aussi sur la boucle de Polyakov, la température de transition est modifiée : $T_0 \sim 0.200 \text{ GeV}$, voir la figure 4 de [557] pour une compilation de résultats sur réseaux concernant T_0 .

À cause des effets de la renormalisation sur la boucle de Polyakov [561–567], celle ci peut dépasser 1 aux grandes températures. En partie pour cette raison, et pour d'autres [568], le modèle PNJL n'est pas fiable bien au delà de la température de transition à potentiel chimique nul. Une manière de prendre en compte les effets de renormalisation dans PNJL à deux couleurs est proposé dans [567]. La forme polynomiale du potentiel gluonique autorise des valeurs de Φ supérieures à 1, mais peut être à l'origine de certains problèmes (figure 18 de [520]). Le terme logarithmique des autres potentiels présentés rendent Φ inférieur à 1.

Pour d'autres formes possibles de grand potentiel, et des informations complémentaires les concernant, voir par exemple [478, 534, 543–549]. Pour une comparaison des résultats obtenus avec différents potentiels, voir par exemple [541, 550].

Dans les modèles PNJL de bases, la ligne de déconfinement est relativement proche de la ligne de transition chirale tant que le potentiel chimique n'est pas trop grand. À partir d'une certaine valeur, la ligne de transition de déconfinement s'éloigne de la ligne de transition chirale. Dans cette zone, la température pseudo-critique de déconfinement est supérieure à la température pseudo-critique de transition chirale voir par exemple la figure 12 de [473]. Ce phénomène va clairement à l'encontre de l'argument [569, 570] selon lequel un milieu confinant brise la symétrie chirale, et donc que la température de transition de déconfinement est nécessairement inférieure à la température de la restauration de la symétrie chirale.

Ce problème pourrait être dû au fait que ces modèles PNJL ne rendent pas compte de l'action des quarks sur la boucle de Polyakov (*back reaction*). Dans la section suivante, plusieurs moyens de la prendre en compte phénoménologiquement sont introduits.

4.3.1.5 *Back reaction* et dépendance en potentiel chimique du potentiel gluonique

De manière phénoménologique, le potentiel de pure jauge doit être modifié par la dynamique des quarks.

$T_0(\mu)$: premier type

Dans [478], les auteurs se basent sur des calculs perturbatifs pour obtenir un T_0 dépendant du nombre de saveurs actives thermodynamiquement prises en comptes. Pour deux saveurs, ils trouvent $T_0 \simeq 0.208$ GeV (voir le tableau 1 de cette référence). Ces auteurs incluent également une dépendance en μ dans T_0 . Cette dépendance est construite de manière à suivre l'argument selon lequel l'action des quarks sur le potentiel gluonique rend la température de transition de déconfinement plus basse à haut potentiel chimique :

$$T_0 = T_\tau \exp\left(-\frac{1}{c_1 - c_2\mu^2}\right), \quad (4.48)$$

où les coefficients c_1 et c_2 sont définis par :

$$c_1 = \alpha_0 \left(\frac{11N_c - 2N_f}{6\pi}\right); \quad (4.49)$$

$$c_2 = -\frac{16\alpha_0 N_f}{(\gamma T_\tau)^2 \pi}. \quad (4.50)$$

Les deux paramètres α_0 et T_τ prennent les valeurs $\alpha_0 = 0.304$ et $T_\tau = 1.77$ GeV. Le paramètre γ gouverne la courbure de $T_0(\mu)$ et de faibles valeurs de γ tendent à rendre nul la température de transition pour de faibles potentiels chimiques. Dans la suite, sauf mention du contraire, nous utiliserons $\gamma = 1$. Cette prescription pour la dépendance en potentiel chimique de T_0 sera appelée dans le texte $T_0^{\text{type 1}}$. Le paramètre α_0 correspond à la valeur que prend la constante de couplage α_s au premier d'un développement perturbatif au premier ordre à l'échelle $T_\tau = 1.77$ GeV. Lorsque $N_f = 0$, il est possible de vérifier que la formule précédente donne bien $T_0(\mu = 0) = 0.270$ GeV.

Cependant les modifications apportées par cette dépendance en potentiel chimique ne permettent pas de reproduire une transition de déconfinement de premier ordre à haut potentiel chimique [479, 571–573] comme semblent l'indiquer des résultats de calcul type Schwinger–Dyson [545, 574].

$T_0(\mu)$: deuxième type

Les auteurs de [547] proposent un autre moyen de rendre la boucle de Polyakov dépendante du

potentiel chimique. Ils proposent la modification :

$$\frac{T_0}{T} \rightarrow \frac{T_0}{T} \left(1 + \eta \frac{\mu^2}{T^2} \right)^{-1/2}. \quad (4.51)$$

Le facteur η contrôle la manière dont T_0 décroît avec le potentiel chimique. Les auteurs estiment $\eta = 0.37$. Avec cette forme, les auteurs trouvent une vraie¹ transition de déconfinement premier ordre, avec un saut du paramètre d'ordre d'environ 0.6 (voir le haut de la figure 3 de [547]). Cette prescription pour la dépendance en potentiel chimique de T_0 sera appelée dans le texte $T_0^{\text{type 2}}$. Cette paramétrisation pour $T_0(\mu)$ doit être utilisée en même temps qu'une modification du potentiel gluonique : $T^4 \rightarrow T^4 + 0.288\mu^2 T^2 + B\mu^4$ provenant de la pression de Stefan–Boltzmann. Dans l'équation précédente, B est un paramètre relié à l'échelle typique du confinement. Dans la limite de Stefan–Boltzmann, il vaut $B = 0.00146$. Les auteurs de [547] font varier ce paramètre entre 0 et 1, et montrent que la position relative du CEP chiral et du CEP de déconfinement ne dépend pas de B lorsque $B > 0$. Il est l'équivalent du paramètre a_1 du potentiel gluonique U_{DEX} .

4.3.1.6 Dépendance phénoménologique en potentiel chimique et *Silver Blaze*

D'un point de vue physique, implémenter phénoménologiquement une dépendance en potentiel chimique dans la partie pure jauge du potentiel lui permet de contribuer à la densité baryonique du système [567]. Cet effet est non physique, mais ne viole pas le principe appelé Flamme d'Argent² dans [575] : à température nulle, la partie pure jauge du grand potentiel devient nulle, et l'état fondamentale de la théorie n'est pas modifié par cette contribution non physique. Voir également les équations (9,10,11) de [573] pour une remarque concernant la propriété de *Silver Blaze* de $T_0^{\text{type 1}}$.

Schématiquement, le problème de *Silver Blaze* est relié à la manière de prendre la limite de température nulle d'une théorie des champs à température finie. Considérons un système à température nulle. Ajouter une particule de masse m dans le système n'est possible que si l'énergie apportée est suffisamment grande : $\mu_c = m$. Pour $\mu < \mu_c$, la densité $\sim T\partial\Omega/\partial\mu$ (prise à température nulle), ne dépend pas de μ . Pour $\mu > \mu_c$, la densité dépend de μ . Le problème de *Silver Blaze* est relié au problème de signe “fort” [132] : l'effet du potentiel chimique se fait sentir au delà d'une certaine valeur critique. Le potentiel chimique à partir duquel le problème de signe devient sévère est de $m_\pi/2$, soit la masse de l'état lié de plus basse masse que la théorie autorise divisé par le nombre de constituant. Pour plus de détails voir [575–581] et la partie 4.2 du volume 1 de [582], et les références se rapportant à ces références. Dans le modèle NJL considéré en partie 2, la figure 2.4 est une illustration de ce phénomène. Le potentiel chimique $\mu_c = 0.33$ GeV est la valeur du potentiel chimique où $\sigma/\sigma_0 = 1$. La masse correspondant est alors de 0.33 GeV, correspondant à la masse habillée des quarks dans le modèle. En prenant en compte les remarques précédentes, cette figure est un moyen compliqué de montrer que le modèle NJL ne confine pas les quarks.

1. Dans les autres modèles PNJL, il est toujours possible de trouver un endroit dans le diagramme de phase où Φ n'est pas continu. Cependant le saut du paramètre d'ordre est petit, voir par exemple la courbe en pointillée de la figure 6.b de [471].

2. Traduit de l'anglais *Silver Blaze*. L'auteur de [575] cherche comment décrire mathématiquement comment “rien ne se passe”. Dans le roman *Silver Blaze* de Sir A. Conan Doyle, un homme est accusé du meurtre de l'entraîneur d'un cheval nommé Flamme d'Argent. Holmes trouve la solution à l'énigme grâce à un chien ne faisant rien. Je ne révélerai pas qui est le tueur, le silence est d'or. L'homme accusé est innocenté cependant.

4.3.1.7 $T_0(\mu)$ et phases quarkyoniques

L'objectif de l'introduction d'une dépendance en potentiel chimique de T_0 est de permettre de coller la ligne de transition de déconfinement à la ligne de transition chirale à haut potentiel chimique. La transition de confinement/déconfinement n'est bien définie que dans les théories de pure jauge où les quarks sont absents ou bien lorsqu'ils sont infiniment massifs, comme nous l'avons vu précédemment. Il existe encore une autre limite où cette transition est bien définie : la limite d'un grand nombre de couleurs ($N_c \rightarrow \infty$). Grossièrement, dans la phase déconfinée, les quarks contribuent pour N_c à la pression alors que les gluons contribuent pour N_c^2 . Dans limite $N_c \rightarrow \infty$, la contribution des quarks devient négligeable [583, 584]. Dans la limite *quenched* (masse des quarks infinie), la transition de déconfinement est un premier ordre faible¹ pour $N_c = 3$ et devient plus fort lorsque le nombre de couleur augmente [585–590]. Il semble être confirmé numériquement que les propriétés thermodynamiques à l'équilibre les plus importantes (pression, entropie, densité d'énergie et anomalie de la trace²) ont une dépendance en N_c faible [555, 593–595], rendant la théorie à $N_c = 3$ suffisamment proche de la théorie à $N_c = \infty$. Dans cette limite (en gardant fixé N_f), le diagramme de phase de QCD révèle une autre de ses structures [596–598] : il existe une phase à haut potentiel chimique appelée quarkyonique, confinante mais où la symétrie chirale est restaurée. Dans cette limite, le diagramme de phase est décomposé en trois zones. Deux sont celles dont nous avons déjà parlé : phase confinée et symétrie chirale brisée à basse température et bas potentiel chimique, et l'autre déconfinée et symétrie chirale restaurée à haute température et bas potentiel chimique. La troisième est la phase quarkyonique à basse température et haut potentiel chimique. Le potentiel chimique critique est d'environ la masse de l'état lié le plus léger de la théorie [599]. Dans cette phase, les degrés de libertés physiques sont à la fois les hadrons interagissant fortement entre eux, et aussi les quarks interagissant faiblement entre eux. Cette phase s'observe dans les modèles PNJL comme nous l'avons remarqué précédemment. Elle s'observe également en comparant la valeur de l'entropie et de la densité baryonique à basses températures et hauts potentiels chimiques. Dans cette zone, la phase quarkyonique peut être caractérisée par une entropie faible (un monde "de gluons" confinés), mais un nombre baryonique grand (un monde de quarks déconfinés) [473]. L'étude de la phase quarkyonique est possible dans les modèles de type PNJL [473, 520, 600], mais l'étude des hadrons dans cette phase confinée et symétrique chirale n'est pas possible le confinement n'étant que statistique. Dans modèle soluble [601–603] à grand N_c , il est prouvé que l'argument de Casher n'est pas assez général, et qu'il n'interdit pas la phase quarkyonique aux hauts potentiels chimiques.

4.3.1.8 *Back reaction* et constante de couplage dépendante de Φ

Le fait d'introduire l'action des quarks sur la boucle de Polyakov (appelée *back-reaction*) en donnant à T_0 une dépendance en potentiel chimique ferme la phase quarkyonique.

Un autre moyen de prendre en compte la *back-reaction* est de rendre la constante de couplage explicitement dépendante de la boucle de Polyakov. Les résultats sur réseaux à potentiel chimique imaginaire indiquent que la transition chirale et la transition de déconfinement arrivent simultanément [604–613]. À potentiel chimique nul, les résultats semblent indiquer que ces deux transitions

1. Lorsque l'on écrit un potentiel à la Landau, la présence d'un terme cubique force toujours la transition à être un premier ordre. La transition est un "faible" premier ordre lorsque le terme cubique est faible.

2. Pour plus d'informations concernant l'anomalie de la trace [591] et une comparaison entre résultats perturbatifs et sur réseaux [592].

arrivent aussi au même moment [614–616]. Ces résultats indiquent une forte corrélation entre la transition chirale et la transition de déconfinement. Bien que le modèle PNJL soit capable de reproduire les données sur réseaux à potentiel chimique imaginaire [223, 617–626], et dans sa forme de base, il n’est pas possible de faire coïncider les transitions chirale et de déconfinement [620]. En se basant sur des résultats du groupe de renormalisation [293, 479, 627, 628], les auteurs ont proposé dans [223, 623, 624, 629, 630] de modifier la constante de couplage en la faisant dépendre explicitement de la boucle de Polyakov :

$$G(\Phi, \bar{\Phi}) = G \left[1 - \alpha_1 \Phi \bar{\Phi} - \alpha_2 (\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) \right] , \quad (4.52)$$

où α_1 et α_2 sont des paramètres ajustés pour reproduire la température de cross-over à potentiel chimique nul [631], et à reproduire l’ordre de la transition au point critique de Roberge–Weiss à potentiel chimique imaginaire [612]. Cette forme de la constante de couplage a été utilisé dans le modèle PNJL dans différents cas et permet d’une manière générale¹ une meilleure reproduction des résultats sur réseaux [380, 624, 636–640]. La fenêtre autorisée pour les paramètres α_1 et α_2 est (voir équation 8 de [624]) :

$$-1.5\alpha_1 + 0.3 < \alpha_2 < -0.86\alpha_1 + 0.32 , \quad \text{avec } \alpha_2 > 0 . \quad (4.53)$$

Dans la suite nous considérerons $\alpha_1 = 0.25$ et $\alpha_2 = 0.1$. Les paramètres $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.2$ ne satisfont pas les inégalités précédentes, mais sont très souvent utilisés dans la littérature.

4.3.2 Caractéristiques

Les potentiels gluoniques décrits précédemment ont tous en commun d’autoriser des valeurs non nulles pour Φ lorsque la température est suffisamment haute. La figure 4.1 montre le potentiel gluonique logarithmique en fonction de Φ pour plusieurs valeurs de la température. Le Φ solution est celui qui minimise le potentiel. Comme on le voit sur la figure, tant que $T < T_0$, $\Phi = 0$. Lorsque $T \geq T_0$, Φ peut prendre des valeurs non nulles.

Bien que les prédictions obtenues avec les différents potentiels gluoniques diffèrent quantitativement, ils ont tous qualitativement le même comportement. La figure 4.2 montre les potentiels polynomial, logarithmique et de Dexhaimer (pris à $\mu = 0$) en fonction de Φ pour $T = 2T_0$. Bien que la position du minimum du potentiel diffère suivant le potentiel utilisé, la différence est faible.

Bien que ces différences apparaissent faible qualitativement au niveau du potentiel gluonique, nous verrons dans la section suivante, où les équations de champs moyen sont résolues, que l’utilisation de l’un ou l’autre de ces potentiels à un impact important. De la même manière, la prise en compte de l’action des quarks sur la boucle de Polyakov peut changer drastiquement la phénoménologie du modèle.

4.4 Résolution des équations de champ moyen

Dans ce cas, les équations de champ moyen :

$$\partial_\sigma \Omega = 0 = \partial_\Phi \Omega , \quad (4.54)$$

1. Cette forme ne permet cependant pas de reproduire les résultats sur réseaux concernant l’anti-catalyse magnétique. Une autre forme pour la constante de couplage a été proposée dans [632, 633] permettant de reproduire les résultats réseaux [634]. Pour une revue récente sur ce sujet, voir [635].

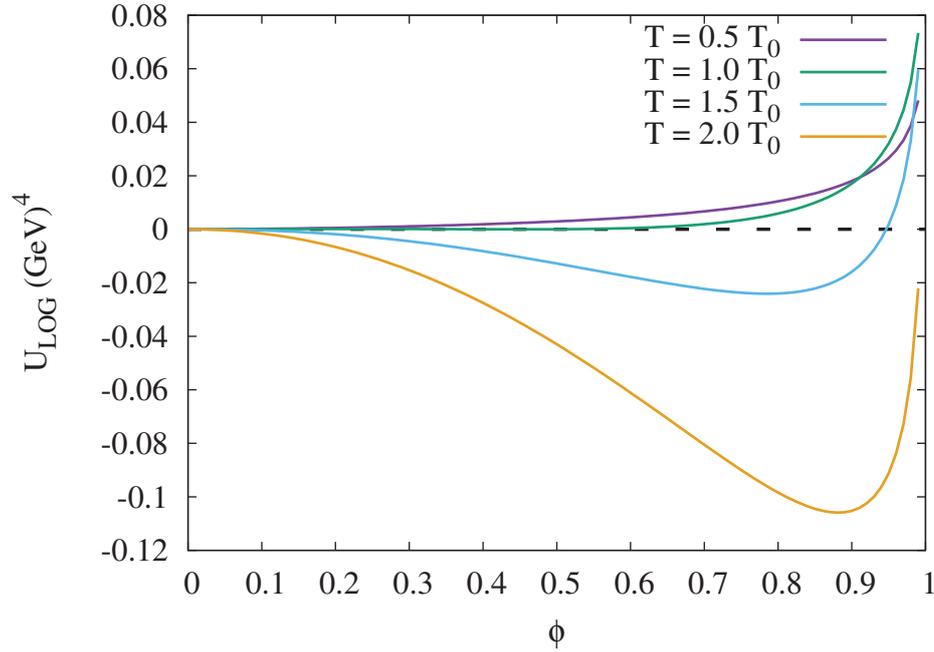


FIGURE 4.1 – Le potentiel gluonique logarithmique ($T_0 = 0.270$ GeV) en fonction de Φ pour plusieurs valeurs de la température. Le Φ minimisant le potentiel ne prend des valeurs non nulles que si $T > T_0$.

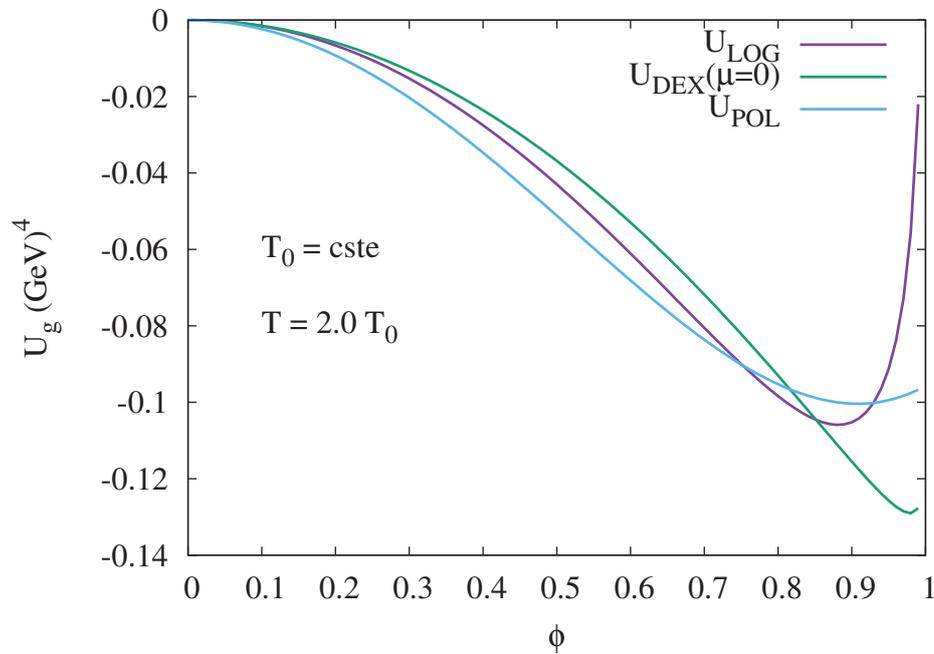


FIGURE 4.2 – Les potentiels gluoniques polynomial, logarithmique et de Dexhaimer en fonction de Φ pour la même température, et à $\mu = 0$ la différence concernant la position du minimum entre ces différents potentiels.

doivent être résolues pour les paramètres d'ordre de la symétrie chirale σ et de la symétrie $Z(3)$, à température et potentiel chimique fixés. Comme expliqué précédemment, il est attendu que la symétrie chirale soit restaurée à haute température et/ou haut potentiel chimique. Il est également attendu que la symétrie $Z(3)$ soit brisée spontanément à haute température. Le terme de masse nue des quarks brise explicitement la symétrie chirale, et sa restauration n'est que partielle à haute température et/ou haut potentiel chimique. De la même manière, les champs de quarks brisent explicitement la symétrie $Z(3)$ mais $\Phi = 0$ dans le vide. La manière dont varient les paramètres d'ordres en fonction de la température et du potentiel chimique dépendent du potentiel gluonique utilisé et aussi de la manière dont ces paramètres d'ordre sont corrélés. Dans la suite, les paramètres du secteur NJL utilisés sont ceux donnés par l'équation (2.126).

Dans la section 4.4.1 nous comparons les effets des potentiels gluoniques logarithmique, polynomial et de Dexhaimer que nous avons introduits dans la partie 4.3. Nous comparons ensuite, Sec. 4.4.2, l'effet de la *back reaction* sur la restauration de la symétrie chirale et sur le déconfinement.

4.4.1 Comparaison : potentiels gluoniques

Dans la section 4.3.2 nous avons vu que le potentiel gluonique permettait au paramètre d'ordre de la transition de déconfinement Φ de prendre des valeurs non nulles lorsque la température était suffisamment haute (Fig. 4.1). Dans cette même partie, nous avons comparé les potentiels logarithmique, polynomial et de Dexhaimer (à potentiel chimique nul) (Fig. 4.2) où nous avons vu que le minimum du potentiel ne dépendait pas qualitativement du potentiel utilisé.

Dans cette partie, nous comparons en détail ces trois potentiels gluoniques et étudions leurs effets sur les solutions des équations de champs moyen. Nous séparons la comparaison des potentiels gluoniques en quatre. La partie 4.4.1.1 compare les solutions des équations de champs moyen dans le cas $T_0 = cste$ et $G_s = cste$. Puisque le potentiel de Dexhaimer contient de base une dépendance en potentiel chimique, l'action des quarks sur la boucle de Polyakov est déjà pris en compte dans ce potentiel. Nous verrons si des modifications qualitatives apparaissent. Les sections suivantes comparent ces potentiels dans le cas où la *back reaction* est implémentée seulement dans le $T_0^{\text{type 1}}$ (Sec. 4.4.1.2), seulement dans le $G_s(\Phi)$ (Sec. 4.4.1.3) et lorsque les deux précédents types d'action inverse sont implémentées dans le modèle (Sec.4.4.1.4).

4.4.1.1 Sans la *back reaction*

Dans cette partie nous comparons les solutions des équations de champ moyen pour les potentiels gluoniques polynomial, logarithmique et de Dexhaimer. La figure 4.3 présente le paramètre d'ordre de la transition chirale σ normalisé par sa valeur dans le vide σ_0 (colonne de gauche) et le paramètre d'ordre de la transition de déconfinement Φ (colonne de droite) en fonction de la température pour plusieurs valeurs du potentiel chimique dans le cas $T_0 = cste$ et $G_s = cste$.

D'une manière générale, la transition chirale est de type crossover lorsque le potentiel chimique n'est pas trop élevé. La vitesse de transition $d\sigma/dT$ augmente lorsque le potentiel chimique augmente. Lorsque le potentiel chimique est supérieur à une valeur critique, la transition chirale est de premier ordre quel que soit le potentiel gluonique utilisé. Les modèles considérés ici prédisent donc tous l'existence d'un CEP chiral dans le diagramme de phase où la vitesse de transition est infinie.

La transition de déconfinement reste un crossover dans tout le diagramme de phase pour les modèles considérés dans cette section. La vitesse de transition $d\Phi/dT$ diminue lorsque le potentiel

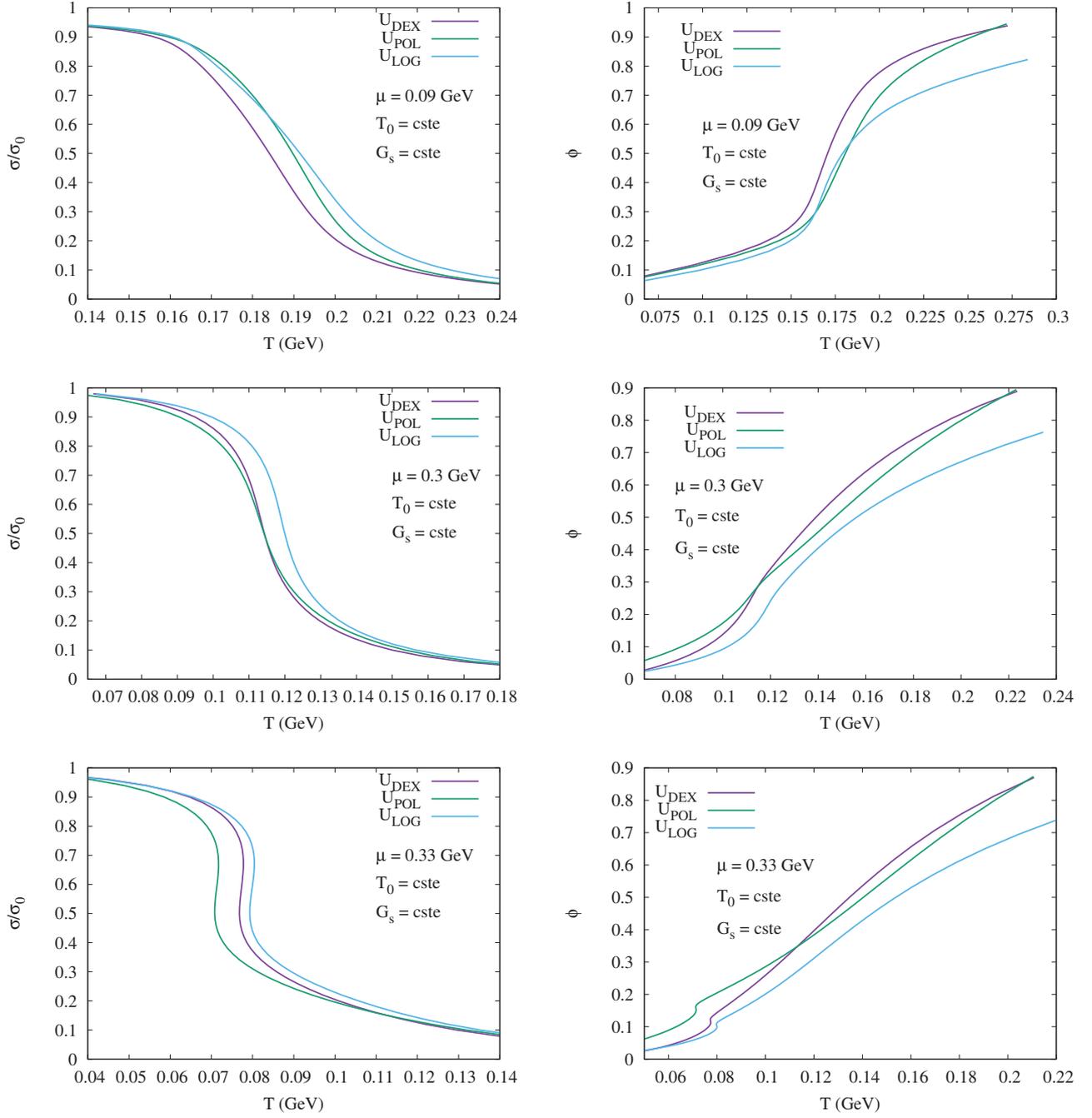


FIGURE 4.3 – Les paramètres d’ordre de la transition chirale σ divisé par sa valeur dans le vide σ_0 (colonne de gauche) et de la transition de déconfinement Φ (colonne de droite), en fonction de la température pour $\mu = 0.09$ GeV (en haut), $\mu = 0.3$ GeV (au milieu) et $\mu = 0.34$ GeV (en bas). Les potentiels polynomial (vert), logarithmique (bleu) et de Dexheimer (violet) sont utilisés dans le cas $T_0 = cste$ et $G_s = cste$.

chimique augmente. Lorsque la transition chirale est de premier ordre, la vitesse de transition de déconfinement a une divergence (en bas à droite de la figure 4.3). Nous n'associons pas cette divergence à une transition de premier ordre car le système ne change pas de phase à cette température : le paramètre d'ordre n'est que très peu modifié et le système reste dans la phase confiné.

La température de la transition chirale diminue lorsque le potentiel chimique augmente et le diagramme de phase du modèle aurait les mêmes propriétés que celui que nous avons obtenu dans le cadre du modèle NJL : une transition de type crossover pour des potentiels chimiques faibles, un point critique et une zone de transition de premier ordre lorsque le potentiel chimique est suffisamment élevé. Bien sûr la position des lignes critiques et du point critique seraient différentes. La température de transition de déconfinement diminue faiblement lorsque le potentiel chimique augmente. Alors que la transition de déconfinement a lieu en premier lorsque le potentiel chimique est suffisamment bas, la transition chirale devient la première à plus haut potentiel chimique, ouvrant ainsi la possibilité aux phases quarkyoniques d'exister, comme nous l'avons déjà mentionné.

Lorsque le potentiel chimique est faible, le potentiel de Dexhaimer force les transitions chirale et de déconfinement à se faire à des températures plus basses que celles des deux autres potentiels. Bien que chaque potentiel prédise une température de transition (chirale ou de déconfinement) différente des autres, il n'y a pas de différence qualitative entre ces différents potentiels.

4.4.1.2 *Back reaction* implémentée dans $T_0^{\text{type 1}}$

La figure 4.4 utilise les mêmes conventions que la figure 4.3. La seule différence est l'utilisation de l'action des quarks sur la boucle de Polyakov grâce au $T_0^{\text{type 1}}$.

Lorsque le potentiel chimique est faible, les transitions chirale et de déconfinement sont de type crossover et la transition de déconfinement a lieu pour des températures plus faibles que la transition chirale. Lorsque le potentiel chimique est faible, la différence entre le cas $T_0 = \text{cste}$ et le cas $T_0^{\text{type 1}}$ est faible. Nous étudierons plus spécifiquement ces différences dans le cas du potentiel logarithmique dans la section 4.4.2. Là encore l'utilisation du potentiel de Dexhaimer permet d'obtenir des températures de transition chirale et de déconfinement inférieures à celles obtenues avec les deux autres potentiels.

Lorsque le potentiel chimique augmente, les températures de transition chirale et de déconfinement diminuent et ont environ la même valeur (pour un potentiel gluonique donné). La différence de température de transition que l'on pouvait voir entre les différents potentiels diminue (c'est visible dans la ligne du bas de la figure 4.4). Alors que les températures de transitions restaient différentes quelque soit le potentiel chimique dans le cas $T_0 = \text{cste}$, l'utilisation de $T_0^{\text{type 1}}$ rend les différences entre potentiels gluoniques encore plus faible.

Lorsque la *back reaction* est implémentée à travers le $T_0^{\text{type 1}}$ la température nécessaire pour casser le condensat de quark est inférieure à cause justement de la dépendance en potentiel chimique de T_0 . Le même argument justifie le fait que la température de transition de crossover est plus faible lorsque le potentiel de Dexhaimer est utilisé, car, de part sa dépendance en potentiel chimique, une *back reaction* est déjà implémentée dans ce potentiel.

De manière générale, les températures de transition chirale et de déconfinement sont bien différentes lorsque le potentiel chimique est suffisamment bas. Elles se rapprochent fortement lorsque le potentiel chimique augmente fermant la zone des phases quarkyoniques.

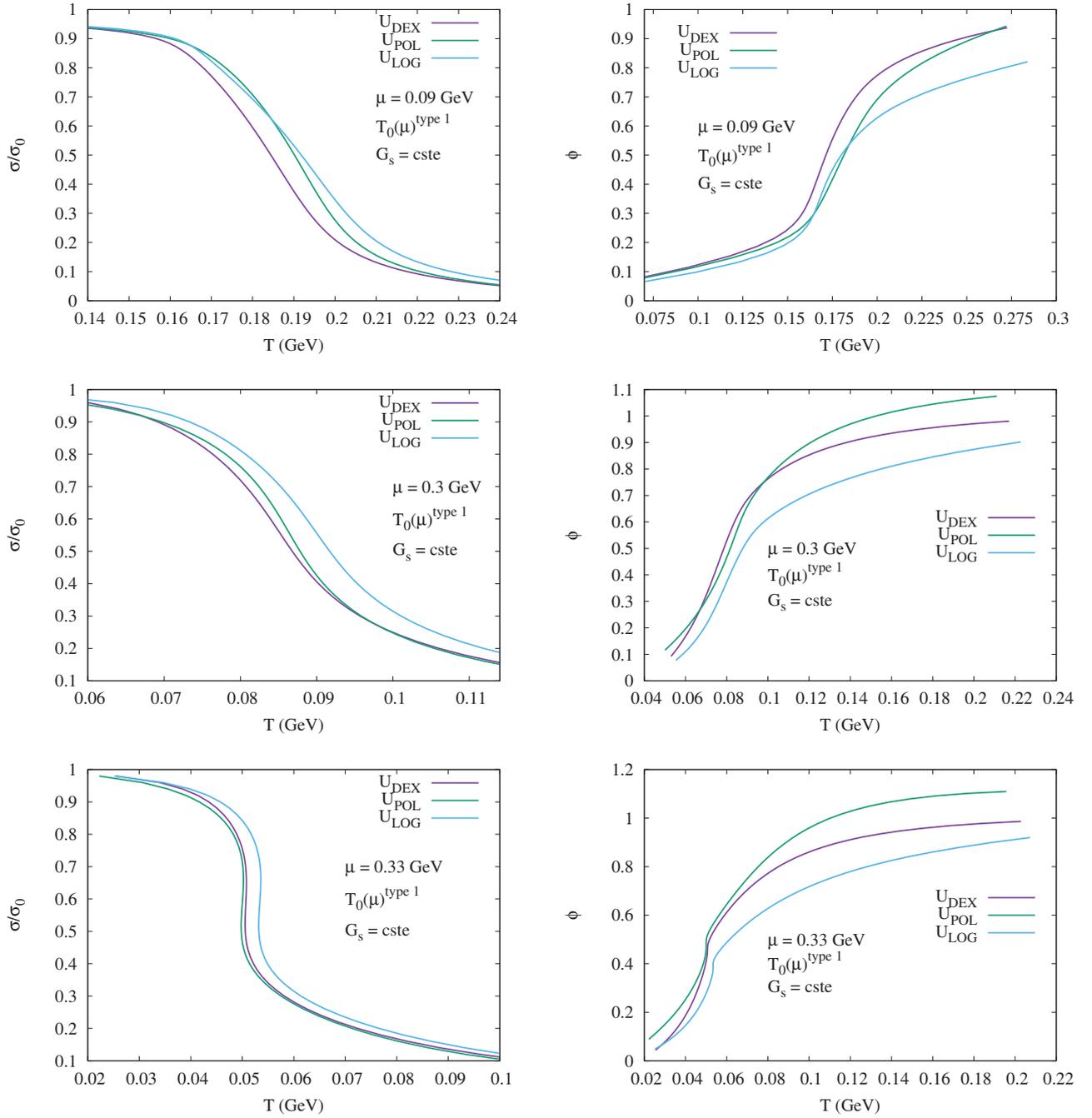


FIGURE 4.4 – Les paramètres d'ordre de la transition chirale σ divisé par sa valeur dans le vide σ_0 (colonne de gauche) et de la transition de déconfinement Φ (colonne de droite), en fonction de la température pour $\mu = 0.09$ GeV (en haut), $\mu = 0.3$ GeV (au milieu) et $\mu = 0.34$ GeV (en bas). Les potentiels polynomial (vert), logarithmique (bleu) et de Dexhaïmer (violet) sont utilisés dans le cas $T_0^{\text{type 1}}$ et $G_s = \text{cste}$.

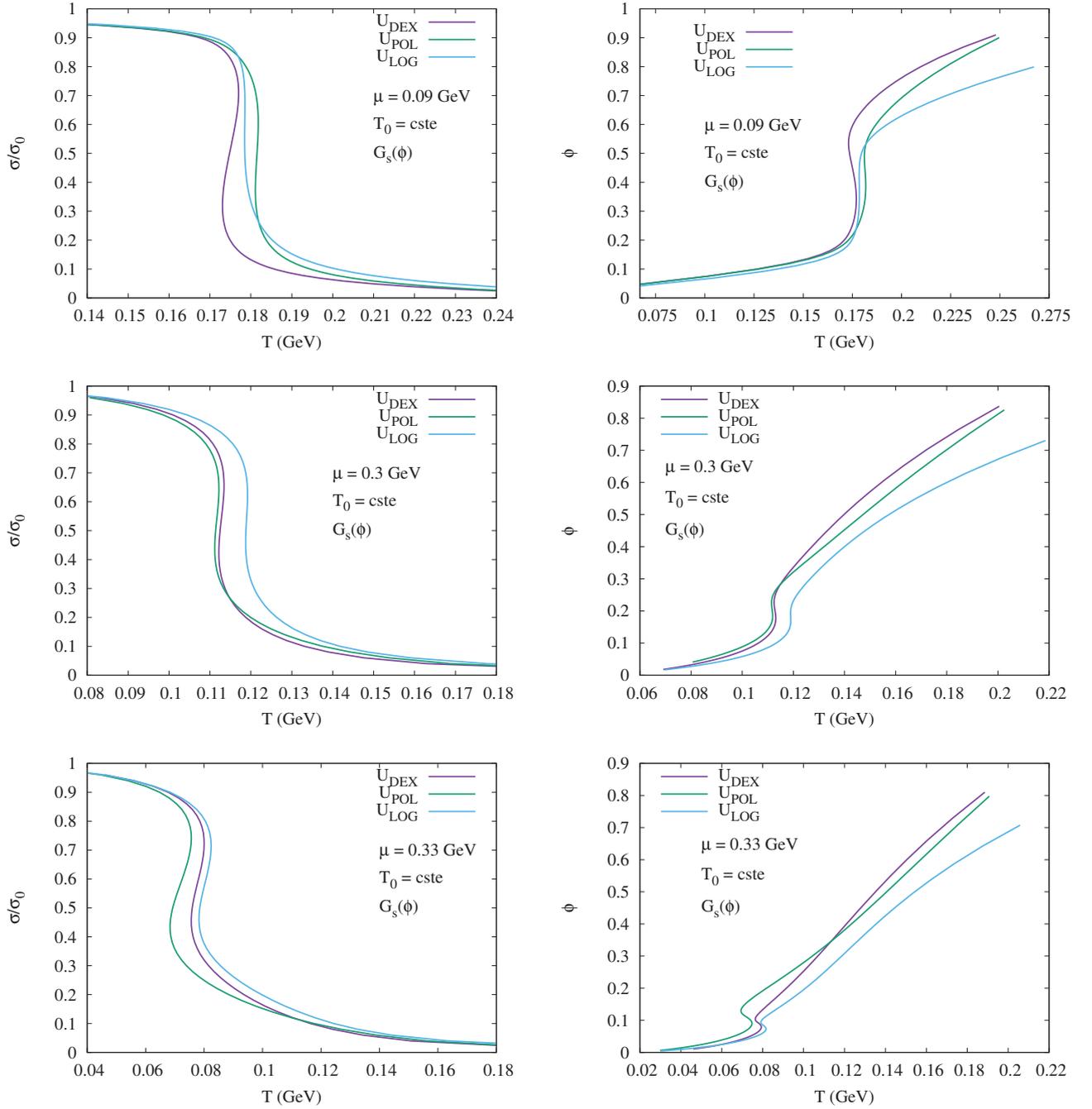


FIGURE 4.5 – Les paramètres d'ordre de la transition chirale σ divisé par sa valeur dans le vide σ_0 (colonne de gauche) et de la transition de déconfinement Φ (colonne de droite), en fonction de la température pour $\mu = 0.09$ GeV (en haut), $\mu = 0.3$ GeV (au milieu) et $\mu = 0.34$ GeV (en bas). Les potentiels polynomial (vert), logarithmique (bleu) et de Dexhaimer (violet) sont utilisés dans le cas $T_0 = \text{cste}$ et $G_s(\phi)$.

4.4.1.3 *Back reaction* implémentée dans $G_s(\Phi)$

Comme nous le disions en section 4.3.1.5, une autre manière de prendre en compte l'action des quarks sur la boucle de Polyakov est de rendre la constante de couplage (ici correspondant aux canaux scalaire et pseudoscalaire) dépendante de la boucle de Polyakov. La figure 4.5 reprend les conventions utilisés dans les figures précédentes et montre les paramètres d'ordre de la symétrie chirale normalisé par sa valeur dans le vide σ/σ_0 et de la symétrie $Z(3)$ Φ en fonction de la température pour plusieurs valeurs de potentiel chimique et les potentiels gluoniques logarithmique, polynomial et de Dexhaimer.

Bien que la transition chirale soit un premier ordre dans tout le diagramme de phase quelque soit le potentiel gluonique utilisé, il n'y a pas de différence qualitative entre les différents potentiels. La transition de déconfinement a un comportement particulier ici : alors qu'elle est de premier ordre lorsque le potentiel chimique est faible, elle devient de type crossover lorsque le potentiel chimique augmente. Ce résultat ne semble pas être discuté dans la littérature et vient certainement de la paramétrisation utilisée pour le $G_s(\Phi)$.

Lorsque le potentiel chimique est faible, les transitions chirale et de déconfinement coïncident. Lorsque le potentiel chimique augmente, la différence entre les températures de transition augmente (pour un potentiel gluonique donné). Bien que les résultats obtenus avec le potentiel de Dexhaimer et le potentiel polynomial soient proches, la différence avec le potentiel logarithmique est faible également.

4.4.1.4 *Back reaction* implémentée dans $T_0^{\text{type } 1}$ et $G_s(\Phi)$

Comme précédemment, nous comparons l'évolution des paramètres d'ordre σ et Φ pour les trois potentiels gluoniques : U_{LOG} , U_{POL} , U_{DEX} . La figure 4.6 montre l'évolution de ces paramètres d'ordre en fonction de la température pour les trois potentiels chimiques utilisés dans les figures précédentes. L'action des quarks sur la boucle de Polyakov est prise en compte à la fois grâce au $T_0^{\text{type } 1}$ et grâce au $G_s(\Phi)$.

De manière générale, la transition chirale et de déconfinement apparaissent pour des températures égales à la fois à bas et hauts potentiels chimiques. Cela résulte certainement du fait que l'utilisation de $T_0^{\text{type } 1}$ seul fait coïncider les températures de transition à haut potentiels chimiques et que $G_s(\Phi)$ seul les fait coïncider à bas potentiels chimiques.

Alors que la transition chirale est de premier ordre dans tout le diagramme de phase lorsque le potentiels polynomial et de Dexhaimer sont utilisés, elle reste de type crossover pour de faibles potentiels chimiques dans le cas où le potentiel logarithmique est utilisé. De toute l'étude que nous avons faite dans cette partie, c'est la seule différence qualitative que nous observons entre les trois potentiels gluoniques considérés. La transition de déconfinement est elle aussi un premier ordre dans tout le diagramme de phase lorsque les potentiels polynomial et de Dexhaimer sont utilisés. Elle est de type crossover avec le potentiel logarithmique tant que le potentiel chimique n'est pas trop élevé. L'utilisation de U_{LOG} prédit donc un point critique de déconfinement et un point critique chiral.

Dans cette partie nous nous sommes focalisé sur les différences d'évolution des paramètres d'ordre de la transition chirale et de déconfinement lorsque le potentiel gluonique est polynomial ou logarithmique ou encore de Dexhaimer. La conclusion principale qu'il faut retenir est que bien que les prédictions soient quantitativement différentes dans tous les cas considérés (avec ou sans *back*

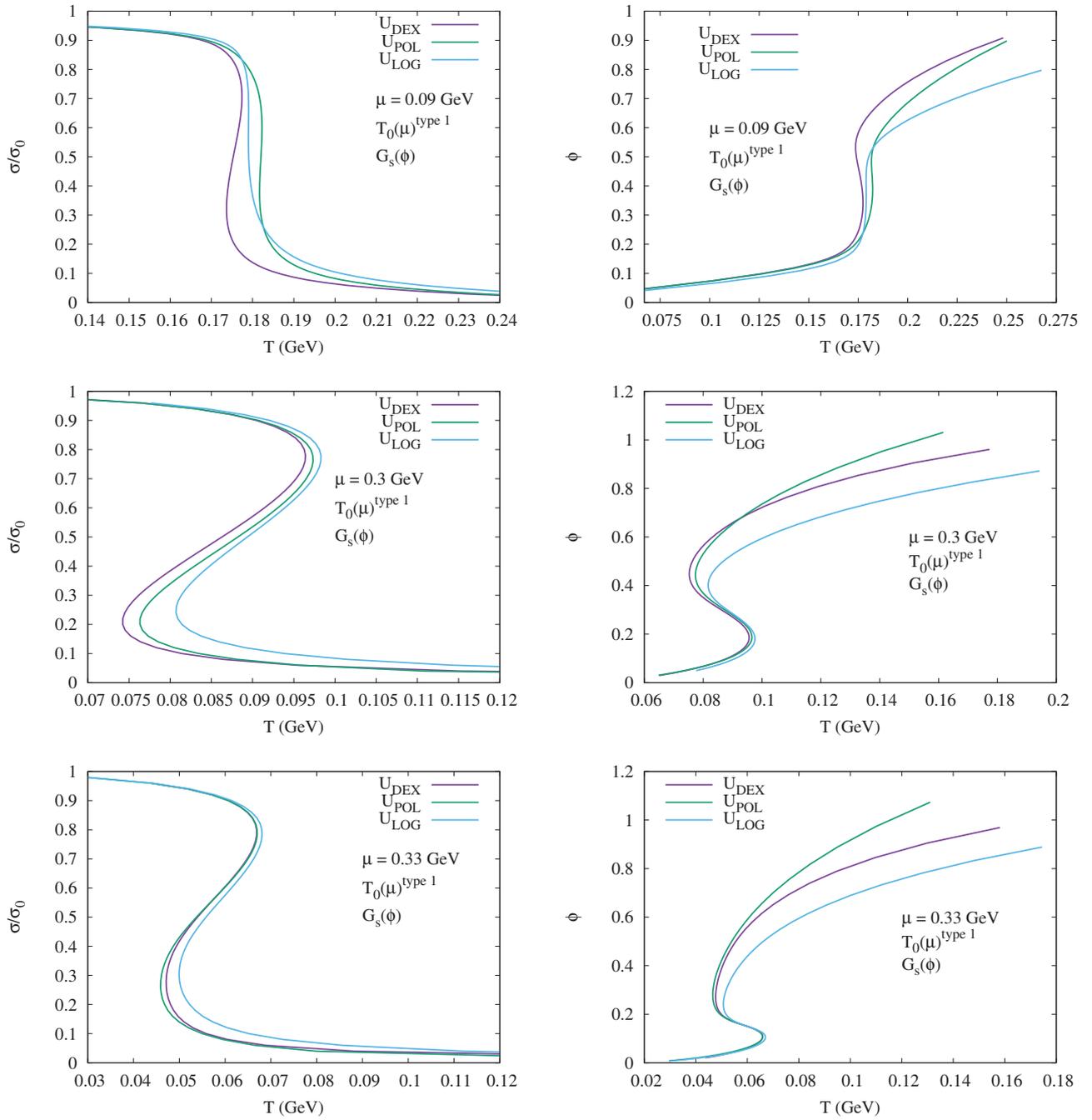


FIGURE 4.6 – Les paramètres d'ordre de la transition chirale σ divisé par sa valeur dans le vide σ_0 (colonne de gauche) et de la transition de déconfinement Φ (colonne de droite), en fonction de la température pour $\mu = 0.09$ GeV (en haut), $\mu = 0.3$ GeV (au milieu) et $\mu = 0.34$ GeV (en bas). Les potentiels polynomial (vert), logarithmique (bleu) et de Dexhaïmer (violet) sont utilisés dans le cas $T_0(\mu)^{\text{type 1}}$ et $G_s(\phi)$.

reaction), la seule différence qualitative que nous avons repérée n'apparaît que lorsque l'action des quarks sur la boucle de Polyakov est prise en compte à la fois grâce à $T_0^{\text{type 1}}$ et $G_s(\Phi)$. Dans ce cas, alors que le modèle PNJL prédit une transition chirale et de déconfinement de premier ordre dans tout le diagramme de phase lorsque les potentiels polynomial et de Dexamier sont utilisés, il prédit un point critique chirale et un point critique de déconfinement lorsque le potentiel logarithmique est utilisé. Dans ce cas, les transitions chirale et de déconfinement sont toutes deux de type crossover lorsque le potentiel chimique est suffisamment faible et deviennent toutes deux de premier ordre lorsque le potentiel chimique atteint une certaine valeur critique.

Avant de nous intéresser à la position précise du point critique chirale dans le diagramme de phase, comparons de manière plus précise l'effet de la *back reaction* dans le cas particulier du potentiel logarithmique.

4.4.2 Comparaison : *back reaction*

Dans la section précédente, nous avons comparé les effets de différents potentiels gluonique sur l'évolution des paramètres d'ordre de la symétrie chirale et de la symétrie $Z(3)$. Qualitativement, tous les potentiels que nous avons utilisé donnent la même phénoménologie, sauf dans le cas où la *back reaction* était prise en compte à la fois avec le $T_0^{\text{type 1}}$ et le $G_s(\Phi)$.

Dans cette partie, nous utilisons le potentiel logarithmique et comparons l'évolution des paramètres d'ordre pour les différentes possibilités de prendre en compte la *back reaction*.

La figure 4.7 montre l'évolution du paramètre d'ordre de la symétrie chirale normalisé par sa valeur dans le vide σ/σ_0 (colonne de gauche) et du paramètre d'ordre de la symétrie $Z(3)$ Φ (colonne de droite) en fonction de la température pour les trois valeurs de potentiels chimiques utilisées dans la section précédente, $\mu = 0.09$ GeV (première ligne), $\mu = 0.3$ GeV (deuxième ligne) et $\mu = 0.33$ GeV (dernière ligne).

Lorsque le potentiel chimique est faible, la transition chirale est de type crossover sauf dans le cas où la *back reaction* est prise en compte dans le $G_s(\Phi)$ seul où elle est de premier ordre. La vitesse de transition est faible lorsque l'action des quarks sur la boucle de Polyakov n'est pas prise en compte ou bien si elle l'est avec le $T_0^{\text{type 1}}$ seul. L'utilisation du $G_s(\Phi)$ rend la transition beaucoup plus rapide dans le cas où $T_0^{\text{type 1}}$ est aussi utilisé et la rend de premier ordre lorsque $G_s(\Phi)$ est utilisée seule. La raison pour laquelle la transition redevient de type crossover lorsque $T_0^{\text{type 1}}$ est ajouté au modèle provient certainement de sa paramétrisation.

L'évolution de Φ avec la température est modifiée par la *back reaction* de la même manière que σ l'est. La transition de déconfinement est de type crossover quelque soit la manière de prendre en compte l'action des quarks sur Φ . La vitesse de transition augmente lorsque $G_s(\Phi)$ est utilisée.

Comme nous l'avons déjà remarqué dans la section précédente, l'effet de $T_0^{\text{type 1}}$ est faible lorsque le potentiel chimique est faible et pour ces valeurs de potentiels chimiques l'utilisation de $G_s(\Phi)$ permet de faire coïncider les transitions chirale et de déconfinement.

Lorsque le potentiel chimique augmente, les températures critiques de transition chirale et de déconfinement diminuent. La vitesse de transition chirale augmente lorsque la *back reaction* n'est pas prise en compte ou bien qu'elle l'est grâce au $T_0^{\text{type 1}}$ seul. Dans ces deux cas, la transition chirale est encore de type crossover pour $\mu = 0.3$ GeV, mais la température de transition est diminuée par l'utilisation de $T_0^{\text{type 1}}$ par rapport au cas $T_0 = \text{cste}$. Cette remarque est également vraie lorsque $G_s(\Phi)$ est utilisé. La température critique de la transition de premier ordre est inférieure dans

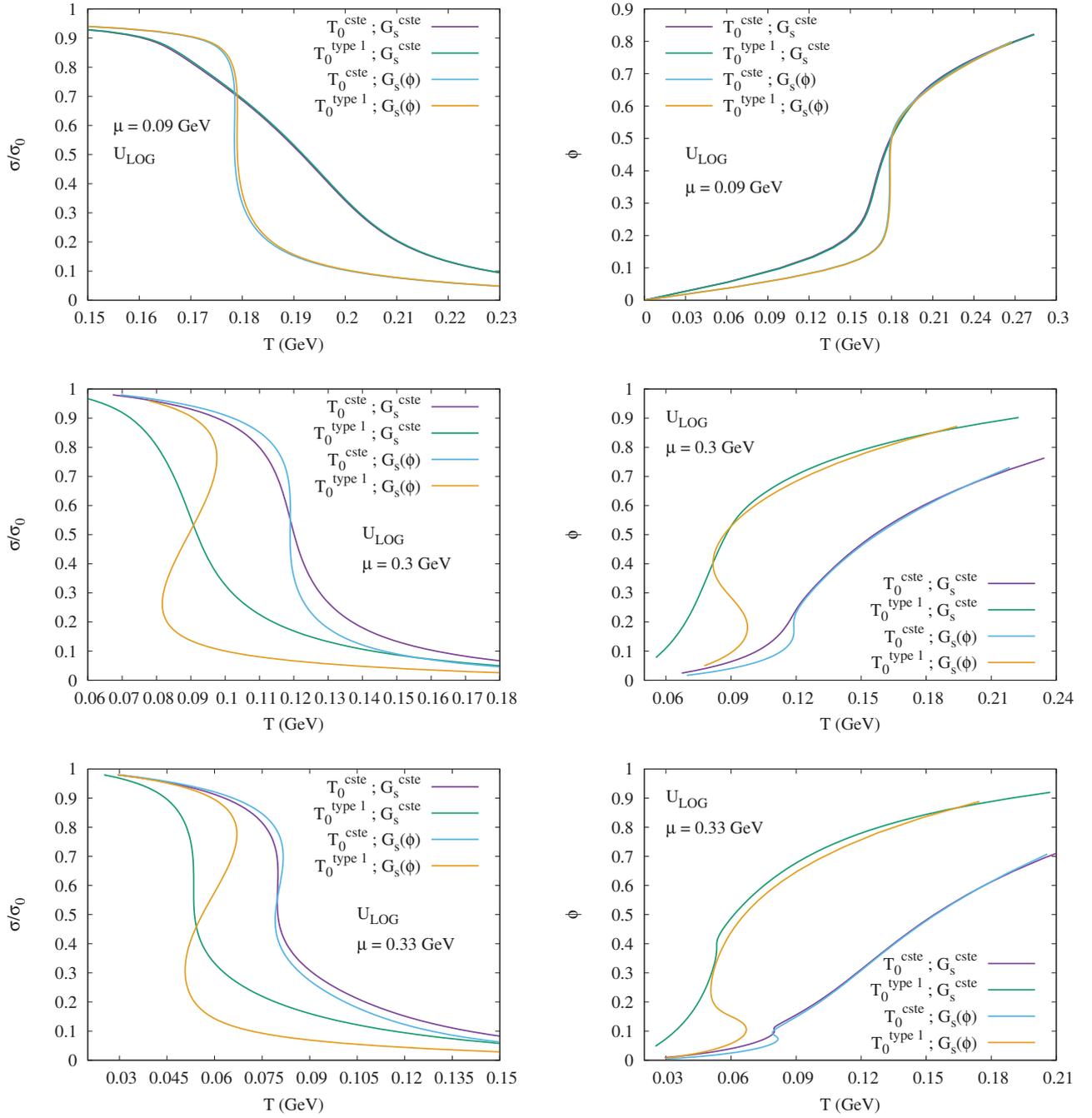


FIGURE 4.7 – Les paramètres d'ordre de la transition chirale σ divisé par sa valeur dans le vide σ_0 (colonne de gauche) et de la transition de déconfinement Φ (colonne de droite), en fonction de la température pour $\mu = 0.09$ GeV (en haut), $\mu = 0.3$ GeV (au milieu) et $\mu = 0.34$ GeV (en bas). Le potentiel logarithmique est utilisé et les cas sans *back reaction* (violet), avec $T_0^{type\ 1}$ et $G_s = cste$ (vert), avec $T_0 = cste$ et $G_s(\Phi)$ (bleu) et avec $T_0^{type\ 1}$ et $G_s(\Phi)$ (orange) sont comparés.

le cas où $T_0^{\text{type 1}}$ est ajouté au $G_s(\Phi)$ que dans le cas où le $G_s(\Phi)$ est utilisé seul. Dans le cas où $\mu = 0.3$ GeV, les températures de transition chirale semblent coïncider lorsque G_s est fixée : le point d'intersection des lignes verte et orange d'une part et des lignes violette et bleue d'autre part correspond à la température (pseudo)-critique de transitions. La raison pour cette coïncidence n'est pas claire et est peut être le fruit du hasard.

L'augmentation du potentiel chimique n'a que peu d'effets sur la boucle de Polyakov dans le cas où la *back reaction* n'est pas prise en compte (la température pseudo-critique de transition diminue). Lorsque la *back reaction* est prise en compte, les effets sur Φ de l'augmentation du potentiel chimique sont plus visibles. Lorsque $T_0 = \text{cte}$, l'utilisation du $G_s(\Phi)$ rend la transition beaucoup plus rapide comme nous l'avons déjà remarqué. L'utilisation de $T_0^{\text{type 1}}$ diminue fortement la température de transition de déconfinement et la fait coïncider avec la transition chirale.

Comme on peut le voir en comparant les deux lignes du haut de la figure 4.7, l'utilisation du $G_s(\Phi)$ permet de faire coïncider les températures de transition chirale et de déconfinement à bas potentiel chimique : dans le cas $\mu = 0.09$ GeV, les lignes bleue et orange d'une part et violette et verte d'autre part ont la même forme. Lorsque $\mu = 0.3$ GeV, les lignes à comparer sont celles qui partagent le même T_0 quelque soit le G_s (verte et orange d'une part et violette et bleue d'autre part).

La dernière ligne de la figure 4.7 correspond au cas $\mu = 0.33$ GeV. Pour cette valeur du potentiel chimique la transition chirale est de premier ordre quelque soit la manière de prendre compte, ou pas, l'action des quarks sur la boucle de Polyakov. L'utilisation de $T_0^{\text{type 1}}$ rend la température de transition inférieure au cas $T_0 = \text{cte}$ et l'utilisation du $G_s(\Phi)$ rend la transition chirale de premier ordre plus forte. La zone de métastabilité, définie par la différence des températures de début et de fin d'existence des solutions instables, augmente lorsque $G_s(\Phi)$ est utilisé.

Lorsque le potentiel chimique est fixé à une valeur haute et à température fixée, Φ prend des valeurs plus hautes dans le cas où le $T_0^{\text{type 1}}$ est utilisé que dans le cas où il ne l'est pas. Comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, l'utilisation de $T_0^{\text{type 1}}$ ferme la phase à haut potentiel chimique où la symétrie chirale est restaurée et où les quarks sont encore confinés (phase quarkyonique).

L'utilisation conjointe de $G(\Phi)$ et de $T_0^{\text{type 1}}$ n'est pas facilement justifiable d'un point de vue physique : les deux intègrent la *back reaction*, et il est fort probable que les utiliser ensemble surestime l'effet des quarks sur la boucle de Polyakov. Il doit également être noté que cette association n'a pas encore été considérée pour ajuster les données réseaux. Il est donc possible que les paramètres utilisés dans l'ajustement varient fortement. Cependant, comme on a vu que l'utilisation de $T_0^{\text{type 1}}$ avait peu d'influence aux bas potentiel chimique, il est tout de même probable que les paramètres ne soient pas trop modifiés, les données réseaux étant obtenues à faibles potentiels chimiques.

Comme nous l'avons vu dans cette section et dans la section précédente (Sec. 4.4.1), la position du CEP chirale est un peu influencé par le potentiel gluonique utilisé et est très influencé par la manière de prendre en compte la *back reaction*. Dans la partie suivante, nous détaillons une manière de calculer la position d'un point critique dans le diagramme de phase, et calculons la position du CEP chirale dans le plan $(T - \mu)$ dans tous les cas précédemment étudiés.

4.5 Positions du CEP chiral

4.5.1 Méthode de calcul

Pour construire le diagramme de phase, nous avons vu dans la partie 2.2.3 qu'il était nécessaire de trouver les points extrêmes (minima, maxima, racines) des dérivées d'un paramètre d'ordre donné par rapport à une variable thermodynamique (toutes les autres étant fixées). Dans cette partie, nous donnons des formules générales pour obtenir ces dérivées.

Lorsque les paramètres thermodynamiques sont fixés, les paramètres d'ordre sont obtenus en minimisant le grand potentiel. Dans le cas considéré dans cette section cette minimisation revient à résoudre le système :

$$\partial_\sigma \Omega = 0 = \partial_\Phi \Omega . \quad (4.55)$$

Comme nous l'avons déjà expliqué (Sec. 2.2.3.2), une ligne critique de transition de type crossover peut s'obtenir en fixant tous les paramètres thermodynamiques sauf un et en calculant la valeur de celui-ci où la vitesse de transition est la plus grande. Concrètement, si l'on cherche la température de transition chirale à potentiel chimique fixé suffisamment petit pour que la transition soit de type crossover, on cherche la température T où $|d\sigma/dT|$ est maximum. Comme on l'a déjà expliqué, lorsque la transition est un premier ordre, il est plus commode de fixer un des paramètres d'ordre et de calculer les points extrêmes de $dT/d\sigma$ par exemple.

Quelque soit la dérivée voulue, les ingrédients sont toujours les mêmes : parmi toutes les variables dont dépend le grand potentiel (thermodynamiques et les paramètres d'ordres), il faut choisir les variables fixées et la variable entrant dans le dénominateur de la dérivée (fixée elle aussi). Par exemple, si l'on souhaite calculer $dT/d\sigma$ dans le cas du modèle PNJL considéré ici, alors les variables fixées sont μ et σ et la variable entrant au dénominateur de la dérivée est σ .

Introduisons l'ensemble \mathcal{X} des variables dont dépend le grand potentiel et notons x_i ses éléments. Appelons $\mathcal{Z} \subset \mathcal{X}$ l'ensemble contenant les variables z_i fixées lors du calcul ($dz_i = 0$). Le complémentaire de \mathcal{Z} est appelé \mathcal{Y} , constitué des variables y_i (qui ne sont pas fixées). Parmi les éléments de \mathcal{Z} choisissons la variable dénominateur notée x_d . Notons $g_k = \partial_k \Omega$, où k est un des paramètres d'ordre. On a :

$$\forall k , \quad dg_k = \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i} dx_i ; \quad (4.56)$$

$$= \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial y_i} dy_i + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial g_k}{\partial x_d} dx_d ; \quad (4.57)$$

$$= \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial g_k}{\partial x_d} dx_d . \quad (4.58)$$

Lorsque les équations de champ moyen sont résolues, $dg_k = 0$ et il vient :

$$\forall k , \quad \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial y_i} \frac{dy_i}{dx_d} = - \frac{\partial g_k}{\partial x_d} , \quad (4.59)$$

formant ainsi un système linéaire d'équations dont les inconnues sont les dy_i/dx_d et devant être résolu après avoir résolu les équations de champ moyen.

Dans la section 2.2.3, nous avons montré que la recherche de points critiques nécessite le calcul des dérivées secondes d^2y_i/dx_d^2 . Pour les obtenir, on calcul la différentielle totale d'ordre deux. Avec

les notations précédemment introduites, on obtient pour tout k :

$$d^2g_k = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial y_i \partial y_j} dy_i dy_j + 2 \sum_i \frac{\partial^2 g_k}{\partial y_i \partial x_d} dy_i dx_d + \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_d^2} dx_d^2 + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial y_i} d^2 y_i + \frac{\partial g_k}{\partial x_d} d^2 x_d . \quad (4.60)$$

En prenant $d^2g_k = 0$, on trouve simplement :

$$\forall k , \quad \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial y_i} \frac{d^2 y_i}{dx_d^2} = -(a + b + c + d) , \quad (4.61)$$

où :

$$a = 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 g_k}{\partial y_i \partial y_j} \frac{dy_i dy_j}{dx_d^2} ; \quad (4.62)$$

$$b = \sum_i \frac{\partial^2 g_k}{\partial y_i^2} \left(\frac{dy_i}{dx_d} \right)^2 ; \quad (4.63)$$

$$c = 2 \sum_i \frac{\partial^2 g_k}{\partial y_i \partial x_d} \frac{dy_i}{dx_d} ; \quad (4.64)$$

$$d = \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_d^2} . \quad (4.65)$$

Ces équations constituent celle d'un système linéaire dont les inconnues sont les $d^2 y_i / dx_d^2$, à résoudre lorsque les équations de champ moyen sont résolues et lorsque les dy_i / dx_d sont connus.

Cette méthode est essentiellement un autre moyen de calculer les susceptibilités, voir par exemple [470, 473, 475, 520, 547, 641–644] pour plus de détails les concernant.

Les points critiques peuvent s'obtenir en résolvant le système d'équations définie par $\forall k, g_k = 0$, $dy_i / dx_d = 0$ et $d^2 y_i / dx_d^2 = 0$ dans le cas où x_d est un paramètre d'ordre et y_i est une variable thermodynamique. Pour une méthode équivalente, voir l'appendice B de [645].

4.5.2 Résultats

La position précise du point critique chiral, lorsqu'il existe dans le diagramme de phase, dépend de la forme du potentiel gluonique utilisé et de la forme de la *back reaction* utilisée. Le tableau 4.3 liste les différentes positions du CEP obtenues pour les potentiels gluoniques U_{LOG} , U_{DEX} et U_{POL} , avec l'utilisation de $T_0^{\text{type 1}}$ ou de $T_0 = cst$, et $G_s = cst$, ou $G_s(\Phi)$. Les colonnes Φ_{CEP} et $\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0$ représentent respectivement la valeur de Φ et de σ solutions des équations du gap à $T = T_{\text{CEP}}$ et $\mu = \mu_{\text{CEP}}$. Avec le jeu de paramètre utilisé pour le secteur NJL, le CEP disparaît du diagramme de phase lorsque $G(\Phi)$ est utilisé et que $T_0 = cst$. Il est possible de trouver des paramètres permettant de le faire exister, voir par exemple [629]. L'utilisation de $T_0^{\text{type 1}}$ a tendance à rendre la température du CEP plus basse. Dans le cas du potentiel logarithmique, cela suffit à replacer le CEP dans le diagramme de phase lorsque $G_s(\Phi)$ est utilisé. Cela n'est pas suffisant pour les deux autres potentiels gluoniques. Il est possible de remarquer que si la valeur de $\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0$ est relativement stable et reste autour de 0.6, la valeur de Φ_{CEP} ne l'est pas. En l'occurrence, Φ_{CEP} est plus grand lorsque $T_0^{\text{type 1}}$ est utilisé signifiant que le point critique chirale se situe dans un monde plus déconfiné (comparable à $\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0$) que lorsque $T_0 = cst$ est utilisé. Dans ce cas

		T_{CEP} (GeV)	μ_{CEP} (GeV)	Φ_{CEP}	$\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0$	
U_{LOG}	T_0	G_s	0.087	0.326	0.123	0.584
		$G_s(\Phi)$	Pas de CEP			
	$T_0^{\text{type 1}}$	G_s	0.056	0.328	0.411	0.588
		$G_s(\Phi)$	0.183	0.059	0.382	0.645
U_{DEX}	T_0	G_s	0.084	0.326	0.141	0.585
		$G_s(\Phi)$	Pas de CEP			
	$T_0^{\text{type 1}}$	G_s	0.053	0.328	0.480	0.586
		$G_s(\Phi)$	Pas de CEP			
U_{POL}	T_0	G_s	0.077	0.3267	0.173	0.585
		$G_s(\Phi)$	Pas de CEP			
	$T_0^{\text{type 1}}$	G_s	0.054	0.327	0.500	0.588
		$G_s(\Phi)$	Pas de CEP			

TABLE 4.3 – La position du point critique chirale pour trois potentiels gluoniques : U_{LOG} , U_{DEX} et U_{POL} , avec l'utilisation de $T_0^{\text{type 1}}$ ou de $T_0 = cst$, et $G_s = cst$, ou $G_s(\Phi)$. Les colonnes Φ_{CEP} et $\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0$ sont les paramètres d'ordre de la symétrie $Z(3)$ et de la symétrie chirale solutions des équations du gap à température et potentiel chimique fixés à leur valeur au CEP. Lorsque $G_s = cst$, l'utilisation de $T_0^{\text{type 1}}$ diminue la température du CEP. Avec les paramètres utilisés pour les calculs, le CEP n'existe pas lorsque $G_s(\Phi)$ est utilisé, sauf lorsqu'il est utilisé conjointement à $T_0^{\text{type 1}}$ dans le cas du potentiel gluonique logarithmique. La valeur de σ_{CEP} est relativement stable et se situe toujours autour de $0.6\sigma_0$ quelque soit le potentiel ou le T_0 utilisé. La valeur que prend Φ_{CEP} dépend cependant du choix de T_0 : lorsque $T_0 = cst$, le CEP apparait dans un monde confiné où $\Phi_{\text{CEP}} \sim 0.15$; lorsque $T_0^{\text{type 1}}$ est utilisé, le CEP apparait dans un monde déconfiné où $\Phi_{\text{CEP}} \sim 0.5$. Comme expliqué précédemment, la modélisation $T_0^{\text{type 1}}$ permet d'empêcher l'existence de phase quarkyonique où les quarks nus sont confinés.

$\Phi_{\text{CEP}} < \sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0$, et le point critique chirale est situé dans un monde confiné. Comme expliqué plus haut, $T_0^{\text{type 1}}$ ferme la phase quarkyonique où les mésons partenaires chiraux ont la même masse.

Lorsque l’interaction quark–antiquark est choisie, il existe autant de modèle PNJL possibles que de choix d’un potentiel gluonique parmi ceux existant chacun pouvant être utilisé avec ou sans la *back reaction* implémentée dans le T_0 et/ou dans le $G_s(\Phi)$. Dans la partie suivante nous calculons la sensibilité du CEP pour plusieurs choix possibles et tentons de faire un tri dans toutes ces possibilités.

4.6 Sensibilité du CEP et conséquences de déviations finies des observables

Il est possible d’utiliser la méthode décrite au chapitre 3 pour accéder à la sensibilité de la prédiction du CEP dans le cadre du modèle PNJL que nous considérons ici. L’effet de petites déviations peut également être étudié permettant d’obtenir une distribution de CEP dans le plan température–potentiel chimique.

Le nombre de paramètres que contient le modèle dépend de la forme du potentiel gluonique considéré, de la forme de T_0 et de la forme de $G_s(\Phi)$. Les paramètres du modèles sont décomposés en deux secteurs : le secteur NJL et le secteur gluonique. Le secteur NJL est composé des paramètres m_0 , G_s et Λ , qui sont fixés sur les valeurs, dans le vide, de la masse du pion m_π , de la constante de désintégration du pion f_π et le condensat de quarks $\langle \bar{q}q \rangle \equiv \sigma_0$, de la même manière que dans le cadre du modèle NJL en section 3.2. Les paramètres du secteurs gluoniques sont composés d’une part des paramètres de Landau (les a_i et b_i apparaissant des les formules des potentiels gluoniques), et d’autre part de la température de déconfinement T_0 . Les paramètres de Landau sont ajustés sur plusieurs données obtenues sur réseaux telles que la pression, l’entropie et la densité d’énergie (voir par exemple [471, 519]), alors que T_0 est un résultat réseau.

La méthode que nous avons proposée consiste à faire varier les inputs utilisés pour fixer les paramètres du modèle. Comme les données réseaux utilisées pour fixer les paramètres du secteur gluonique ne sont pas accessibles nous avons fait varier directement les paramètres. Nous revenons sur ce problème en section 4.6.1.2.

4.6.1 Sensibilité du CEP

Comme nous l’avons mentionné à la fin de la section 4.5.2 le choix d’un grand potentiel et d’une manière de prendre en compte la *back reaction* définit un modèle PNJL. Chacun de ces modèles prédit une position du CEP différente et la sensibilité de sa position est étudiée pour un déterminer la pertinence.

4.6.1.1 Rappel de la méthode

Pour calculer la sensibilité d’une prédiction nous avons proposer en section 3.2 de faire varier les inputs utilisés pour fixer les paramètres du modèle. Les inputs dans le cas considéré ici sont m_π , f_π , et σ_0 pour le secteur NJL. Le T_0 est directement pris des résultats sur réseau et constitue un input du modèle. Les paramètres de Landau sont fixés par une procédure de minimisation sur des données

réseaux. Les données utilisées sont les vraies inputs. Cependant, comme elles ne sont pas accessibles facilement, nous considérons les paramètres de Landau comme les inputs. Il est possible de choisir quelles inputs faire varier, pour étudier l'influence de tel ou tel secteur sur les prédictions. Quel que soit le choix fait, un grand nombre d'input doit être choisi autour de leur valeur moyenne fixée, en suivant une distribution de probabilité connue. Pour pouvoir comparer les résultats obtenus ici avec ceux obtenus dans la partie 3, nous choisissons ici aussi une distribution uniforme autour des valeurs moyennes. Pour chacun des sets d'inputs considérés, les paramètres du modèles doivent être fixés, et une observable calculée. Une distribution de probabilité est alors obtenue pour chacune des observables considérées. Pour chacune de ces distributions, leurs différents moments peuvent être calculés. Lorsque le problème n'est pas trop non-linéaire, c'est à dire lorsque la distribution obtenue pour une prédiction est suffisamment proche d'une gaussienne, ce qui est en général le cas lorsque les déviations choisies sont suffisamment basses, il est possible de définir la sensibilité Σ d'une observables X comme (Éq. 3.26) :

$$\Sigma(X) = \frac{\sigma(X)}{\bar{X}} \frac{1}{\sigma_{rel}^I}, \quad (4.66)$$

où σ_{rel}^I est la moyenne des variation relatives des inputs (Éq. 3.15) :

$$\sigma_{rel}^I = \frac{1}{N_I} \sum_{i=1}^{N_I} \frac{\sigma(I_i)}{\bar{I}_i}, \quad (4.67)$$

où N_I est le nombre d'inputs I du modèle. Là encore, nous choisissons une dispersion relative p pour pouvoir comparer les résultats obtenus pour le modèle NJL avec ceux obtenus ici : $\sigma(I)/\bar{I} = p$. La sensibilité d'une prédiction donnée est obtenue lorsque $p \rightarrow 0$. Pour obtenir numériquement la sensibilité d'une prédiction par rapport au inputs, il faut la calculer pour des déviations de plus en plus petites. La sensibilité est obtenue lorsqu'un plateau pour la sensibilité est obtenu. Comme nous l'avons déjà remarqué, calculer une sensibilité est essentiellement un calcul de dérivée. Les résultats suivant ont été obtenus avec $p = 10^{-4}\%$ et nous avons vérifié que cette valeur de p est suffisamment basse pour pouvoir extrapoler vers la limite $p = 0$.

Les valeurs moyennes des inputs utilisés pour fixer les paramètres du secteur NJL du modèle sont données par (Éq. 3.18)

$$\begin{pmatrix} m_\pi \\ f_\pi \\ \langle \bar{q}q \rangle^{1/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 137 & \text{MeV} \\ 93 & \text{MeV} \\ -315 & \text{MeV} \end{pmatrix}. \quad (4.68)$$

Lorsque T_0 est indépendante du potentiel chimique, nous choisissons comme précédemment la valeur $T_0 = 0.2$ GeV, qui est également utilisée comme valeur moyenne d'une distribution uniforme lorsque des variations de T_0 sont considérées. Si des variations sont considérés pour les paramètres de Landau des potentiels gluoniques, alors leurs valeurs moyennes sont les valeurs données en section 4.3.

4.6.1.2 Résultats

Plusieurs cas peuvent être étudiés et comparés : la sensibilité du CEP peut être calculée en faisant varier tous les inputs à la fois, ou bien en en choisissant certains fixés. Bien que la dérivée d'un paramètre d'ordre ne soit pas définie au point critique, nous donnons également la sensibilité de σ et de Φ calculés en $(T, \mu) = (T_{\text{CEP}}, \mu_{\text{CEP}})$.

	$\Sigma(T_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\mu_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\Phi_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0)$
U_{LOG}	0.2669 ± 0.0077	0.0068 ± 0.0002	1.5624 ± 0.04516	0.0517 ± 0.0014
U_{DEX}	0.3134 ± 0.0090	0.0061 ± 0.0002	1.6502 ± 0.04769	0.0525 ± 0.0015
U_{POL}	0.3222 ± 0.0093	0.0039 ± 0.0001	1.2187 ± 0.03522	0.0647 ± 0.0018

TABLE 4.4 – Sensibilité de la position du CEP dans le cas où seul le paramètre T_0 est autorisé à varier. Les potentiels U_{LOG} , U_{DEX} et U_{POL} ont été utilisé avec la forme $T_0(\mu) = cste$ et $G_s(\Phi) = cste$. Les résultats ont été obtenus en considérant la méthode Monte-Carlo pour des déviations relatives de $10^{-4}\%$ et une dispersion uniforme et un nombre de set d’inputs considéré de 600.

	$\Sigma(T_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\mu_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\Phi_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0)$
U_{LOG}	34.282 ± 0.767	0.569 ± 0.013	57.122 ± 1.278	4.569 ± 0.102
U_{DEX}	31.456 ± 0.704	0.581 ± 0.013	70.883 ± 1.586	4.491 ± 0.100
U_{POL}	34.663 ± 0.776	0.470 ± 0.011	39.433 ± 0.882	4.379 ± 0.097

TABLE 4.5 – Sensibilité de la position du CEP dans le cas seuls les inputs du secteur NJL sont autorisés à varier. Les potentiels U_{LOG} , U_{DEX} et U_{POL} ont été utilisé avec la forme $T_0(\mu) = cste$ et $G_s(\Phi) = cste$. Les résultats ont été obtenus en considérant la méthode Monte-Carlo pour des déviations relatives de $10^{-4}\%$ et une dispersion uniforme et un nombre de set d’inputs considéré de 1000.

	$\Sigma(T_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\mu_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\Phi_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0)$
U_{LOG}	35.247 ± 0.788	0.594 ± 0.013	58.667 ± 1.312	4.688 ± 0.104
U_{DEX}	30.540 ± 0.683	0.580 ± 0.012	68.784 ± 1.539	4.354 ± 0.097
U_{POL}	33.281 ± 0.744	0.475 ± 0.011	37.839 ± 0.846	4.197 ± 0.093

TABLE 4.6 – Sensibilité de la position du CEP dans le cas où tous les inputs sont autorisés à varier. Les potentiels U_{LOG} , U_{DEX} et U_{POL} ont été utilisé avec la forme $T_0(\mu) = cste$ et $G_s(\Phi) = cste$. Les résultats ont été obtenus en considérant la méthode Monte-Carlo pour des déviations relatives de $10^{-4}\%$ et une dispersion uniforme et un nombre de set d’inputs considéré de 1000.

Sensibilité du CEP sans *back reaction*

Le tableau 4.4 donne la sensibilité de la position du CEP dans le cas où seul le paramètre T_0 est varié, pour les potentiels U_{LOG} , U_{POL} et U_{DEX} avec $T_0 = cste$ et $G_s = cste$.

Bien que la valeur de Φ_{CEP} soit la plus sensible à la valeur de T_0 , les faibles valeurs générales des sensibilités indiquent une bonne stabilité de la position du CEP par rapport à la valeur de précise de T_0 . Nous avons vérifié que dans le cas où seuls les paramètres a_i et b_i des potentiels gluoniques sont variés, la conclusion est identique : la position du CEP est stable par rapport à ces paramètres. Le tableau 4.5 donne la sensibilité de la position du CEP dans le cas où seuls les inputs du secteur NJL sont variés, et le tableau 4.6 dans le cas où tous les inputs sont variés, avec les potentiels U_{LOG} , U_{DEX} et U_{POL} avec $T_0 = cste$ et $G_s = cste$.

En comparant les résultats des tableaux 4.5 et 4.4, il peut être remarqué que la sensibilité de la position du CEP provient très majoritairement des inputs du secteur NJL, et la variation de tous les inputs du modèle ne change pas qualitativement les conclusions que l’on peut faire à partir du tableau 4.5 où seules les inputs NJL varient. Les conclusions faite avec la version NJL du modèle considéré ici ne sont pas modifiées qualitativement non plus : T_{CEP} est bien plus sensible que μ_{CEP} à des variations des inputs du modèle.

Comme dans le cadre du modèle NJL étudié en section 3, le potentiel chimique du CEP est très

	$\Sigma(T_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\mu_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\Phi_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0)$
U_{LOG}	26.936 ± 0.602	0.383 ± 0.008	38.167 ± 0.854	3.609 ± 0.081
U_{DEX}	26.017 ± 0.582	0.369 ± 0.008	45.988 ± 1.029	4.411 ± 0.098
U_{POL}	33.336 ± 0.745	0.382 ± 0.008	32.534 ± 0.728	4.356 ± 0.097

TABLE 4.7 – Sensibilité de la position du CEP dans le cas seuls les inputs du secteur NJL sont autorisés à varier. Les potentiels U_{LOG} , U_{DEX} et U_{POL} ont été utilisé avec la forme $T_0^{\text{type 1}}$ et $G_s(\Phi) = cste$. Les résultats ont été obtenus en considérant la méthode Monte-Carlo pour des déviations relatives de $10^{-4}\%$ et une dispersion uniforme et un nombre de set d’inputs considéré de 1000.

	$\Sigma(T_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\mu_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\Phi_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0)$
U_{LOG}	28.086 ± 0.628	0.375 ± 0.008	39.818 ± 0.891	3.760 ± 0.084
U_{DEX}	25.175 ± 0.563	0.368 ± 0.008	44.552 ± 0.996	4.261 ± 0.095
U_{POL}	32.441 ± 0.725	0.382 ± 0.008	31.760 ± 0.711	4.272 ± 0.095

TABLE 4.8 – Sensibilité de la position du CEP dans le cas où tous les inputs sont autorisés à varier. Les potentiels U_{LOG} , U_{DEX} et U_{POL} ont été utilisé avec la forme $T_0^{\text{type 1}}$ et $G_s(\Phi) = cste$. Les résultats ont été obtenus en considérant la méthode Monte-Carlo pour des déviations relatives de $10^{-4}\%$ et une dispersion uniforme et un nombre de set d’inputs considéré de 1000.

stable $\Sigma(\mu_{\text{CEP}}) \simeq 0.5$. La valeur du condensat au CEP est également stable $\Sigma(\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0) \simeq 4$. Bien que la sensibilité de T_{CEP} soit environ deux fois inférieure à sa valeur dans le cadre du modèle NJL, elle reste peu contrainte avec des valeurs de l’ordre de 30.

Il pourrait paraître étonnant de voir que la valeur de la boucle de Polyakov au CEP soit une prédiction instable avec $\Sigma(\Phi_{\text{CEP}}) \simeq 50$ quelque soit le potentiel gluonique utilisé. Cependant, ceci est principalement dû au fait que la valeur de la boucle de Polyakov calculée au CEP est de l’ordre de 0.1 (voir le tableau 4.3). La valeur moyenne de Φ apparaît au dénominateur de $\Sigma(\Phi_{\text{CEP}})$ et explique pourquoi sa sensibilité est grande. Lorsque $T_0^{\text{type 1}}$ est utilisé, on a vu que la boucle de Polyakov calculée au CEP prenait des valeurs de l’ordre de 0.5 et a priori, la sensibilité de Φ devrait être plus basse.

En comparant les tableaux 4.5 et 4.6, on peut voir que la sensibilité de la position du CEP avec les potentiel U_{DEX} et U_{POL} diminue alors que plus d’inputs sont variés. Cet effet ne semble pas être dû à un effet statistique : nous avons testé dans le cas de U_{DEX} (avec $N = 2000$ sets d’inputs) et avons également trouvé une sensibilité inférieure. Malgré cette faible diminution de la sensibilité, les conclusions restent inchangées.

Dans ce paragraphe, nous avons calculé la sensibilité de la position du CEP dans le cas $T_0 = cste$ et $G_s = cste$. Nous avons vu que la position du CEP était surtout sensible aux inputs du secteur NJL.

Dans le paragraphe suivant, la même étude est faite, mais dans le cas où la *back reaction* est prise en compte.

Influence du $T_0^{\text{type 1}}$ sur la sensibilité du CEP

La même procédure peut être suivie pour calculer la sensibilité de la prédiction dans le cas $T_0^{\text{type 1}}$ et $G_s = cste$. Comme nous l’avons vu dans le paragraphe précédent, la position du CEP n’est pas très sensible à la valeurs des paramètres a_i et b_i des potentiels gluoniques U_{LOG} , U_{DEX} et U_{POL} . Les

	$\Sigma(T_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\mu_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\Phi_{\text{CEP}})$	$\Sigma(\sigma_{\text{CEP}}/\sigma_0)$
Secteur NJL seulement	0.821 ± 0.018	9.763 ± 0.218	2.286 ± 0.051	0.637 ± 0.014
Tous les inputs	0.810 ± 0.018	10.716 ± 0.239	2.289 ± 0.051	0.801 ± 0.018

TABLE 4.9 – Sensibilité de la position du CEP dans le cas où seuls les inputs du secteur NJL sont variés (ligne du haute) et dans le cas où tous les inputs sont autorisés à varier (ligne du bas). Le potentiel U_{LOG} a été utilisé avec la forme $T_0^{\text{type 1}}$ et $G_s(\Phi)$. Les résultats ont été obtenus en considérant la méthode Monte-Carlo pour des déviations relatives de $10^{-4}\%$ et une dispersion uniforme et un nombre de set d’inputs considéré de 1000.

tableaux 4.7 et 4.8 présentent les sensibilités des coordonnées du CEP pour ces trois potentiels gluoniques, dans les cas où seules les inputs du secteur NJL peuvent varier et où tous les inputs peuvent varier respectivement. Les paramètres du $T_0^{\text{type 1}}$ sont fixés à leurs valeurs données dans le paragraphe 4.3.1.5.

Les conclusions par rapport au cas $T_0 = \text{cste}$ ne sont pas qualitativement modifiées : le température du CEP reste instable alors que μ_{CEP} est très stable. On remarque également que la sensibilité de Φ_{CEP} est plus basse que dans le cas $T_0 = \text{cste}$. Comme nous l’expliquions dans le paragraphe précédent cela provient du fait que la valeur de Φ_{CEP} est plus grande dans le cas $T_0^{\text{type 1}}$ que dans le cas $T_0 = \text{cste}$ où elle est proche de 0.

Action conjointe de $T_0^{\text{type 1}}$ et de $G_s(\Phi)$ sur la sensibilité du CEP

Dans la partie 4.5.2 nous avons montré que seul le potentiel gluonique logarithmique permettait de prédire un CEP dans le diagramme de phase lorsque la *back reaction* est prise en compte à la fois dans le $T_0^{\text{type 1}}$ et le $G_s(\Phi)$.

Le tableau 4.9 présente les résultats obtenus dans le cas du potentiel U_{LOG} avec $T_0^{\text{type 1}}$ et $G_s(\Phi)$ dans le cas où seules les inputs du secteur NJL sont variées. La principale observation pouvant être faite est que dans ce cas, T_{CEP} devient bien moins sensible que μ_{CEP} . De plus la sensibilité des paramètres d’ordre diminue beaucoup également.

La raison sous-jacente de cette diminution importante de la sensibilité de la position du CEP dans le diagramme de phase n’est pas claire. D’une part, on peut dire que le CEP est essentiellement contrôlé par le secteur chiral du modèle PNJL lorsque la *back reaction* n’est pas prise en compte. D’autre part, ce résultat montre que l’introduction de la *back reaction* à la fois avec le $G_s(\Phi)$ et avec le $T_0(\mu)$ couple fortement le secteur chiral et de déconfinement avec pour effet de stabiliser la prédiction de la température du point critique chiral. Cependant, les paramètres dont dépendent les $T_0^{\text{type 1}}$ et $G_s(\Phi)$ étaient fixés et il est possible que la position du CEP soit très sensible à la valeur de ces paramètres. Comme ces paramètres ont été ajustés indépendamment, il est possible qu’un nouvel ajustement de tous les paramètres à la fois change fortement leur valeur.

Discussion et ouvertures

Une remarque générale doit être faite concernant les résultats précédents. Les paramètres du secteur gluonique, $T_0 = \text{cste}$, $T_0^{\text{type 1}}$, et les paramètres a_i et b_i ont été ajusté sur des données réseaux différentes ou non et de manière indépendante ou non. En l’occurrence, il est a priori possible que

l'utilisation du potentiel U_{DEX} avec $T_0^{\text{type 1}}$ ne permettent plus de reproduire les données réseaux utilisées pour ajuster les paramètres du potentiel et les paramètres du $T_0^{\text{type 1}}$. Les résultats présentés sont donc une étape intermédiaire entre la méthode consistant à modifier les paramètres du modèle sans se soucier de la phénoménologie, et la méthode exposée en section 3 qui est une vraie étude de sensibilité. Pour pouvoir faire une étude de sensibilité complète, il faudrait avoir accès à toutes les données réseaux utilisées pour ajuster tous les paramètres du secteur gluonique.

Cependant, comme les résultats précédent le montre, la position du CEP n'est pas très sensible à la valeurs des paramètres a_i et b_i des potentiels gluoniques. Ainsi, même si un ajustement complet des paramètres gluoniques prenant en compte à la fois un $T_0(\mu)$ et un $G_s(\Phi)$ par exemple, changera (peut-être beaucoup) la valeurs des paramètres du modèle, la sensibilité de la position du CEP ne devrait pas trop changer.

Les résultats que nous obtenons indique que le couplage de la boucle de Polyakov au modèle NJL permet de réduire la sensibilité de la coordonnée de température du point critique chiral (de 70 à 30 environ), tout en gardant une sensibilité faible de sa coordonnée de potentiel chimique. Les inputs du modèle étudié peuvent être décomposés en deux ensembles : d'une part les inputs du secteur NJL et d'autre part les inputs du secteur gluonique. L'analyse de sensibilité telle que nous l'avons définie en section 3 trouve son sens lorsque les vrais inputs sont variés. C'est bien ce que nous avons fait ici lorsque seuls les inputs du secteur NJL sont variés. Comme nous n'avons pas accès aux données réseaux utilisées pour ajuster les paramètres gluoniques, nous les avons fait varier directement. Mis à part la valeur de la température de transition à potentiel chimique nul T_0 qui est un vrai input, les autres paramètres du secteurs gluoniques sont ajustés et il est fort probable que de faibles variations des données utilisées dans l'ajustement induisent de larges modifications de ces paramètres. Comme nous avons varié très faiblement ces paramètres autour d'une valeur centrale qui peut être changée drastiquement par de faibles variations des vrais inputs, la sensibilité de la position du CEP par rapport aux vrais inputs peut être différente de celle que nous avons obtenue. Nous avons vérifié que la position du CEP n'était pas sensible à la valeur des paramètres a_i et b_i dans le cas U_{LOG} , $T_0 = \text{cste}$ et $G_s = \text{cste}$. En gardant tous les inputs fixés et en autorisant une variation de 100% pour les a_i et b_i le rapport de la déviation standard sur la valeur moyenne de la température du CEP est de l'ordre de $\sigma(T_{\text{CEP}})/\overline{T_{\text{CEP}}} \simeq 3 \cdot 10^{-3}$ et est de $\sigma(\mu_{\text{CEP}})/\overline{\mu_{\text{CEP}}} \simeq 9 \cdot 10^{-4}$ pour le potentiel chimique.

Le résultat principal de cette étude : un couplage fort entre le secteur chiral et de déconfinement est nécessaire pour stabiliser la prédiction de la position du CEP dans le diagramme de phase. Cependant ce résultat doit être modulé par le fait que la position du CEP change beaucoup par rapport aux autres cas où la constante de couplage ne dépend pas de Φ . De plus, seule l'utilisation du potentiel logarithmique permet d'obtenir un CEP lorsque la back-reaction est implémentée dans le $G(\Phi)$ et le $T_0^{\text{type 1}}$. L'analyse de sensibilité faite ici semble donc indiquer qu'une possibilité de stabiliser la position du CEP dans le diagramme de phase est d'implémenter un fort couplage entre les secteurs chiral et de déconfinement.

De la même manière que nous l'avons fait dans le cadre du modèle NJL, il peut être intéressant de regarder l'effet de variations finies des inputs.

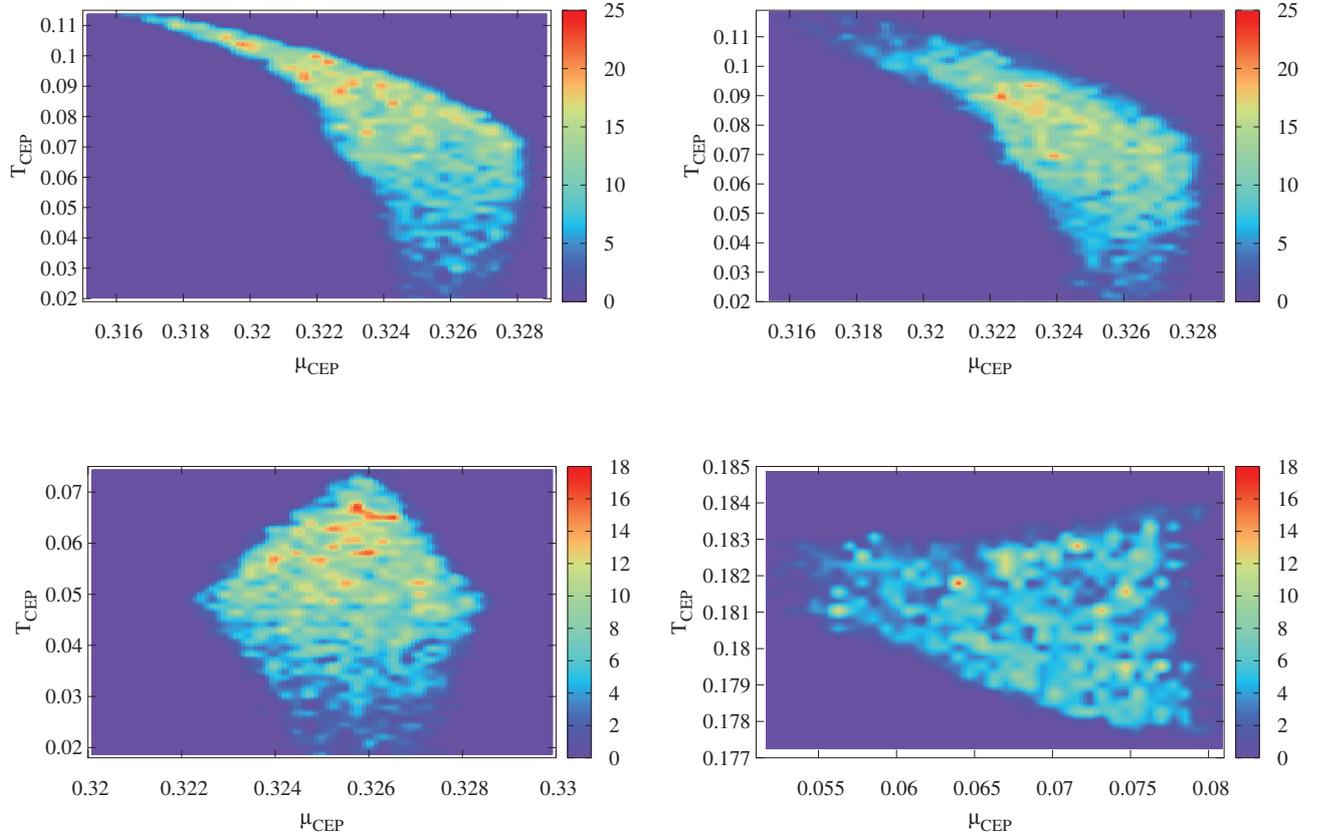


FIGURE 4.8 – Distributions des CEPs obtenues avec des dispersions uniformes de 1% des inputs du secteur NJL dans le cas où $T_0 = 0.2$ GeV fixée et $G_s = cste$ (en haut à gauche); $T_0 = 0.2 \pm 0.02$ GeV et $G_s = cste$ (en haut à droite); $T_0^{\text{type 1}}$ avec $\gamma = 1$ et $G_s = cste$ (en bas à gauche), et $T_0^{\text{type 1}}$ avec $\gamma = 1$ et $G_s(\Phi)$ (en bas à droite). Chaque graphique est une représentation d'un histogramme à deux dimensions où la couleur donne le nombre de CEP par bin d'historgramme.

4.6.2 Déviations finies des observables

En considérant que les paramètres a_i et b_i sont fixés à leur valeurs données plus haut, il est possible de tracer la distribution des CEPs dans le plan température–potentiel chimique. Seul les résultats pour le potentiel U_{LOG} sont présentés. Des variations des inputs du secteur NJL de 1% sont considérés.

La figure 4.8 donne les distributions de CEPs obtenues dans le cas $T_0 = 0.2$ GeV fixée et $G_s = cste$ (en haut à gauche); $T_0 = 0.2 \pm 0.02$ GeV et $G_s = cste$ (en haut à droite); $T_0^{\text{type 1}}$ avec $\gamma = 1$ et $G_s = cste$ (en bas à gauche), et $T_0^{\text{type 1}}$ avec $\gamma = 1$ et $G_s(\Phi)$ (en bas à droite).

Les résultats ont été obtenus en considérant 6000 set d'input et avec les dispersions choisies, tous les sets d'inputs donne un CEP dans le plan (T, μ) . Les graphiques sont une représentation d'un histogramme en deux dimensions, la couleur donne le nombre de CEP par bin d'historgramme.

Les deux figures du haut peuvent être comparées pour voir l'effet d'une variation de 10% de T_0 (dans le cas $T_0 = cste$). La dispersion en température est équivalente dans ces deux graphiques et s'étend de 0.02 GeV à environ 0.11 GeV. De la même manière, la fenêtre autorisée pour le potentiel

chimique est d'environ 0.012 GeV compris entre 0.316 et 0.328, dans les deux cas. La principale différence est la largeur de la distribution des CEPs dans le cas où T_0 varie pour les CEPs situés à bas potentiels chimiques et hautes températures. Dans le cas où $T_0 = 0.2$ GeV fixée (haut gauche) la distribution est fine et localisée dans cette région du plan (T, μ) , alors qu'elle est plus étendue dans le cas où T_0 varie. Dans ces deux cas, le rapport entre la déviation standard et la valeur moyenne de T_{CEP} d'une part et de μ_{CEP} d'autre part sont équivalentes, ce qui est cohérent avec les valeurs de sensibilité de T_{CEP} et μ_{CEP} obtenues dans ces deux cas qui sont similaires.

Dans le cas $T_0^{\text{type 1}}$ et $G_s = \text{cste}$ (en bas à gauche de la figure 4.8, la dispersion des CEPs est plus localisée que dans le cas $T_0 = \text{cste}$, ce qui est cohérent avec les sensibilités de T_{CEP} et μ_{CEP} obtenues dans le paragraphe précédent. La température du CEP varie dans une fenêtre de 50 MeV entre 20 et 70 MeV environ et le potentiel chimique du CEP varie entre 322 MeV et 328 MeV. Pour ce graphique et les deux précédents, la densité de CEP semble être plus élevée pour les plus hautes température. Cet effet ne semble pas être dû à la statistique : nous avons vérifié qu'il était toujours observé dans le cas $T_0 = \text{cste}$ fixée et $G_s = \text{cste}$ lorsque 12000 sets d'inputs étaient considérés. Ce résultat semble donc cohérent avec l'observation que nous avons fait en section 3 où nous remarquons que les CEPs semblent disparaître "vers le bas".

Le dernier cas, $T_0^{\text{type 1}}$ et $G_s(\Phi)$ est le qualitativement bien différents des autres. Les CEPs sont situés à des températures plus élevées et des potentiels chimiques plus bas que dans les autres cas. Dans le paragraphe précédent, nous avons vu que sensibilité de la température du CEP était plus faible que celle du potentiel chimique, en conséquence la dispersion en température est moins importante que la dispersion en potentiel chimique : T_{CEP} varie entre 178 MeV et 184 MeV et μ_{CEP} varie entre 51 MeV et 80 MeV. Les CEPs semblent plus uniformément répartie que dans les trois autres cas, bien que la densité de CEPs semble diminuer à mesure que l'axe $\mu = 0$ est approché. Ceci semble cohérent avec le fait que lorsque les autres potentiels gluoniques sont considérés, la transition chirale soit un premier ordre dans tout le diagramme de phase.

4.6.3 Conclusions et ouvertures

L'étude de sensibilité faite en section 4.6.1 montre qu'un couplage fort entre les secteurs chiral et de déconfinement permet de stabiliser la position du CEP dans le diagramme de phase. Comme nous l'avons déjà mentionné cependant, seule l'utilisation du potentiel logarithmique permet d'obtenir un CEP dans le diagramme de phase dans le cas où la back-reaction provient à la fois de la dépendance en potentiel chimique de T_0 et de la dépendance en Φ de la constante de couplage dans le secteur scalaire. De plus, la position du CEP dans ce cas est bien différente que dans les autres cas où G_s ne dépend pas de Φ . Alors que ces différents modèles prédisent tous un CEP pour des potentiels chimique de l'ordre de 300 MeV, l'utilisation de $G(\Phi)$, de $T_0^{\text{type 1}}$ et de U_{LOG} diminue fortement la valeur de μ_{CEP} . Il est donc étonnant de voir que le modèle ayant une prédiction assez stable du CEP est celui qui le prédit à une position bien différente de ceux qui le prédisent avec une sensibilité plus élevée. De part une étude plus standard de variation des paramètres α_i de $G(\Phi)$, il pourrait être possible de déterminer si ce résultat ne provient pas du fait que la position du CEP est sur-contraint par l'effet joint du $G(\Phi)$ et du $T_0^{\text{type 1}}$.

L'étude de variation finie des inputs du modèle faite en section 4.6.2 permet d'obtenir la distribution des CEP dans le diagramme de phase. Si l'on regarde ces distributions comme des distributions de probabilité, alors il semble cohérent de penser que la meilleure prédiction d'un modèle donné soit celle pour laquelle la probabilité est maximum. Cette remarque doit être modulée par les a priori que l'on fait sur la valeur moyenne des inputs, la dispersion associée à chacun d'eux

et la sensibilité de l'observable considérée. Pour aller plus loin, je propose une stratégie que je n'ai pas eu le temps de mettre en oeuvre. Les inputs étant des données mesurées, soit expérimentalement soit sur réseaux, une valeur moyenne et une erreur leur est associée. Pour une prédiction donnée, obtenue avec un modèle donné, un moyen de trouver la "meilleure" prédiction serait de trouver les valeurs moyennes des inputs minimisant la sensibilité de la prédiction (calculée pour des dispersions nulles), et de chercher la prédiction maximisant la distribution de probabilité obtenue pour la prédiction en question lorsque des dispersions cohérentes avec les erreurs expérimentales et avec les a priori sur le modèle sont prises en compte. Les a priori sur le modèle représentent l'erreur associée à la prédiction que l'on pourrait estimer en répétant le même procédé que précédemment, avec les valeurs moyennes d'inputs minimisant la sensibilité de la prédiction inconnue, mais en calculant le maximum de probabilité pour des prédictions connues par ailleurs.

Chapitre 5

Phases hautes densité et condensats de diquarks

Dans l'introduction, nous avons introduit la superconductivité de couleur. Dans ce chapitre, nous présentons une méthode générale pour calculer le grand potentiel d'un système où la condensation de diquark est autorisée.

De manière générale, on peut écrire le lagrangien NJL de la manière suivante :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}} , \quad (5.1)$$

où \mathcal{L}_0 correspond à la propagation libre des quarks et où \mathcal{L}_{int} correspond à leurs interactions possibles. Le lagrangien doit être construit de telle manière à ce que la symétrie chirale soit présente. Une possibilité de satisfaire à cette contrainte est de considérer une interaction de contact de QCD, comme interaction via l'échange d'un gluon, ou interaction type instanton, et de lui appliquer une transformation de Fierz. Cette transformation de Fierz fait apparaître l'interaction quark–anti-quark et quark–quark dans tous les canaux possibles. Il suffit ensuite de choisir les canaux qui nous intéressent, sous la contrainte que le terme d'interaction choisi doit être symétrique chirale. Il est toujours possible d'écrire l'interaction quark–anti-quark comme :

$$\mathcal{L}_{\bar{q}q} = g_i \bar{q} \Gamma_i q , \quad (5.2)$$

où chaque G_i est la constante de couplage associée à l'interaction dont le canal est donné par Γ_i . Chaque Γ_i est donc un opérateur dans l'espace déterminé par le produit tensoriel des espaces de couleurs, noté \mathcal{E}_c , de saveurs, noté \mathcal{E}_f et de Dirac, noté \mathcal{E}_d . Les Γ_i peuvent donc être représentées par des matrices de dimensions $4N_c N_f$. Dans le cas où la symétrie globale de couleur est protégée (*i.e.* aucun condensat ne peut la briser), on peut réduire l'espace à $\mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_d$. Le terme d'interaction quark–quark apparaissant après la transformation de Fierz peut, quant à lui, toujours s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{L}_{qq} = h_i (\bar{q}^c \chi_i q) (\bar{q} \chi_i q^c) , \quad (5.3)$$

où les h_i sont les constantes de couplages associées à chaque interaction dont le canal est χ_i . Comme les Γ_i , ces canaux vivent dans l'espace $\mathcal{E}_d \otimes \mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_c$. Ils peuvent donc être, eux aussi, représentés par une matrice de dimension $4N_c N_f$. L'exposant c signifie que le champ associé est conjugué de charge. La matrice C de conjugaison de charge est donnée par $C = i\gamma_2 \gamma_0$ et il vient :

$$q^c = C \bar{q}^t , \quad \bar{q}^c = q^t C , \quad (5.4)$$

où t indique la transposition.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, un système infini de fermions est sujet à une instabilité appelée instabilité de Cooper dès lors qu'il existe une interaction attractive, aussi faible soit elle, entre eux [646]. Dans un métal, une interaction attractive peut être créée grâce à un processus d'échange de phonons [647, 648]. De manière simple, lorsqu'un électron se propage à l'intérieur d'un solide, il laisse derrière lui une déformation qui affecte la position des ions formant le solide. Lorsque l'électron se déplace, la densité de charge positive est augmentée localement ce qui a un effet attractif sur les autres électrons du système [649]. À cause de cette interaction attractive des paires de particules (ou de trous) se forment ce qui a pour effet de réduire l'énergie du système, rendant le système de particules original instable face à la formation de ces paires (dites paires de Cooper). La première excitation au dessus du vide BCS résultant de cette interaction attractive met en jeu la rupture d'une paire de Cooper à cause d'une influence extérieure. Le spectre de la théorie contient un gap correspondant à l'énergie qu'il faut apporter au système pour casser une de ces paires. Ce gap correspond à la formation d'un condensat de paire de Cooper.

En analogie avec ce mécanisme, on peut s'attendre à ce que la matière de quarks déconfinés à suffisamment basse température devienne un superconducteur de couleur, où des paires de quarks se condensent. Dans ce cas, ces paires condensées sont appelées condensats de diquarks.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les résultats préliminaires que nous avons obtenus en considérant la condensation de diquarks dans différents canaux. La section 5.1 décrit la méthode utilisée plus tôt généralisée dans le cas où la condensation de diquark est autorisée. Dans la section 5.3, la manière de prendre en compte la neutralité électrique et de couleur est décrite et le grand potentiel du système est calculé.

5.1 Grand potentiel et énergie de quasi-particules

Dans cette partie, nous présentons une méthode générale pour obtenir le grand potentiel au champ moyen à partir d'un lagrangien général pouvant s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{L} = \bar{q}G_0^{-1}q + \sum_i g_i(\bar{q}\Gamma_i q)^2 + \sum_i h_i(\bar{q}^c\chi_i q)(\bar{q}\chi_i q^c), \quad (5.5)$$

où G_0^{-1} est le propagateur libre des quarks et où les autres termes sont définis dans la partie précédente. Lorsque la condensation de diquark est prise en compte, il est pratique de doubler le nombre de degrés de liberté et de travailler dans la base de Nambu–Gor'kov (\mathcal{E}_{NG}). On introduit les bispineurs¹ :

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} q \\ q^c \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{q} \quad \bar{q}^c). \quad (5.6)$$

Au champ moyen, le lagrangien (5.5) peut alors s'écrire :

$$\mathcal{L}_{\text{MF}} = \bar{\Psi}S^{-1}\Psi - \mathcal{L}_{\text{cond}}, \quad (5.7)$$

où $\mathcal{L}_{\text{cond}}$ ne dépend pas des champs dynamiques et où S^{-1} est le propagateur vivant dans l'espace $\mathcal{E}_{NG} \otimes \mathcal{E}_c \otimes \mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_d$ et pouvant être représenté par une matrice $2 \times 4N_c N_f$:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} G^+ & \Phi \\ \Phi' & G^- \end{pmatrix}. \quad (5.8)$$

1. Pour plus de détails sur le formalisme de Nambu–Gor'kov, voir par exemple la partie 4 de [121], ou bien [650].

En négligeant les interactions quarks–anti-quarks dans les canaux tenseurs, G^+ prend la forme :

$$G^+ = \gamma_\mu p^\mu + \Sigma_s + \Sigma_v \gamma_0 + \Sigma_p \gamma_5 + \Sigma_a \gamma_0 \gamma_5 , \quad (5.9)$$

où la structure de Lorentz est montrée explicitement et où chaque Σ_i est la *self-energy* dans les canaux scalaire (s), vecteur (v), pseudo-scalaire (p) et axial-vecteur (a). Chaque Σ_i vit dans l'espace $\mathcal{E}_c \otimes \mathcal{E}_f$. G^- est obtenue en appliquant la conjugaison de charge à G^+ : $G^- = CG^+C^{-1}$ et est donné par :

$$G^- = \gamma^\mu p_\mu + \Sigma_s - \Sigma_v \gamma_0 - \Sigma_p \gamma_5 + \Sigma_a \gamma_0 \gamma_5 . \quad (5.10)$$

Les composantes non diagonales du propagateur dépendent des self-energy provenant des interactions quark–quark. Si seules les interactions dans les canaux scalaire, pseudoscalaire et vecteur sont prises en compte, alors :

$$\Phi = \phi_s \gamma_5 + \phi_p + \phi_v \gamma_0 \gamma_5 ; \quad (5.11)$$

$$\Phi' = \phi'_s \gamma_5 + \phi'_p + \phi'_v \gamma_0 \gamma_5 , \quad (5.12)$$

où les ϕ_i sont les *self energies* dans les canaux correspondant. Les ϕ'_i sont en général les conjugués complexes des ϕ_i , mais le signe peut changer en fonction du canal d'interaction. Pour le moment, il n'est pas nécessaire d'explicitier leurs formes.

Nous suivons exactement la même méthode que celle utilisée dans la section 2.2.2. La seule différence ici est que le propagateurs S^{-1} contient des termes non diagonaux. En utilisant les projecteurs définis par l'équation (2.83), on peut prouver que :

$$\gamma_0 G^\pm = \sum_{s=\pm} \begin{pmatrix} p_0 \pm \Sigma_v + \Sigma_s & -s|\mathbf{p}| \pm \Sigma_p + \Sigma_a \\ -s|\mathbf{p}| \mp \Sigma_p + \Sigma_a & p_0 \pm \Sigma_v - \Sigma_s \end{pmatrix} P_s ; \quad (5.13)$$

$$\gamma_0 \Phi = \sum_{s=\pm} \begin{pmatrix} \phi_p & \phi_s + \phi_v \\ -\phi_s + \phi_v & -\phi_p \end{pmatrix} P_s ; \quad (5.14)$$

$$\gamma_0 \Phi' = \gamma_0 \Phi(\phi_i \rightarrow \phi'_i) . \quad (5.15)$$

Il est alors possible d'écrire :

$$\gamma_0 S^{-1} = \sum_{s=\pm} (p_0 \mathbb{I}_N - M_s) P_s ; \quad (5.16)$$

$$= \sum_{s=\pm} S_s^{-1} P_s , \quad (5.17)$$

où M_s prend la forme :

$$M_s = \begin{pmatrix} -\Sigma_v - \Sigma_s & s|\mathbf{p}| - \Sigma_p - \Sigma_a & -\phi_p & -\phi_s - \phi_v \\ s|\mathbf{p}| + \Sigma_p - \Sigma_a & \Sigma_s - \Sigma_v & \phi_s - \phi_v & \phi_p \\ -\phi'_p & -\phi'_s - \phi'_v & \Sigma_v - \Sigma_s & s|\mathbf{p}| + \Sigma_p - \Sigma_a \\ \phi'_s - \phi'_v & \phi'_p & s|\mathbf{p}| - \Sigma_p - \Sigma_a & \Sigma_v + \Sigma_s \end{pmatrix} , \quad (5.18)$$

et où $N = 2 \times 4N_c N_f$ est la dimension de la matrice représentant le propagateur S^{-1} . En désignant par ϵ_i les valeurs propres de la matrice M_s , on peut écrire le déterminant de S_s^{-1} comme :

$$\text{Det}(S_s^{-1}) = \prod_{i=1}^{N/2} (p_0 - s\epsilon_i) , \quad (5.19)$$

où la dégénérescence en spin est rendue explicite. Le formalisme de Nambu–Gor’kov implique également que pour toute solution d’énergie positive correspond une solution d’énergie négative. L’utilisation de la base de Nambu–Gor’kov implique donc une autre dégénérescence, que l’on peut rendre explicite en écrivant :

$$\text{Det}S_s^{-1} = \prod_{i=1}^{N/4} (p_0 - s\epsilon_i)(p_0 + s\epsilon_i) ; \quad (5.20)$$

$$= \prod_{i=1}^{N/4} (p_0^2 - \epsilon_i^2) . \quad (5.21)$$

La dégénérescence en spin implique que l’équation (2.90) est vérifiée et il vient :

$$\text{Det}(\gamma_0 S^{-1}) = \text{Det}(S_+^{-1})\text{Det}(S_-^{-1}) ; \quad (5.22)$$

$$= \prod_{i=1}^{N/4} (p_0^2 - \epsilon_i^2)^2 ; \quad (5.23)$$

$$= \prod_{i=1}^{N/4} (\omega_n^2 + \epsilon_i^2)^2 , \quad (5.24)$$

où la dernière ligne est trouvée utilisant $p_0 = i\omega_n$. Le grand potentiel prend la forme (voir l’équation 2.80) :

$$\Omega = -\frac{T}{2} \sum_n \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln[\text{Det}(\beta S^{-1})] - \mathcal{L}_{\text{cond}} , \quad (5.25)$$

où le facteur 1/2 vient de la normalisation des bispineurs (5.6) introduite pour éviter le double comptage introduit lors du passage à la base de Nambu–Gor’kov. En utilisant la formule (2.94), le grand potentiel prend la forme :

$$\Omega = -\frac{1}{2\pi^2} \int dp p^2 \sum_{i=1}^{N/4} \left\{ \epsilon_i + 2T \ln [1 + e^{-\beta\epsilon_i}] \right\} - \mathcal{L}_{\text{cond}} . \quad (5.26)$$

Une fois que les énergies des quasiparticules sont calculées, il est possible d’étudier la réponse du système à des excitations thermodynamiques. Le diagramme de phase est obtenu en étudiant la le comportement des paramètres d’ordres lorsque les variables thermodynamiques varient.

5.2 Condensation de diquark dans le cas $N_f = 2$

Dans la suite, nous établissons le propagateur de champ moyen d’un lagrangien NJL à deux saveurs de quarks u et d , où nous autorisons un potentiel chimique différents pour chaque saveurs, où un potentiel chimique chiral μ_5 est autorisé et où nous considérons les termes d’interactions quark-antiquark dans les canaux scalaire, pseudo-scalaire, vecteur et axial et les termes d’interactions quark-quark dans les canaux scalaire, pseudoscalaire et vecteur. Dans toute la suite les matrices $\boldsymbol{\tau}$ sont les générateurs de $SU(N_f)$ et les matrices $\boldsymbol{\lambda}$ sont les générateurs de $SU(N_c)$. Le lagrangien prend la forme :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\bar{q}q} + \mathcal{L}_{qq} , \quad (5.27)$$

où \mathcal{L}_0 est le lagrangien libre donné par :

$$\mathcal{L}_0 = \bar{q}(i\gamma_\mu p^\mu - \hat{m} + \hat{\mu}\gamma_0 + \hat{\mu}_5\gamma_0\gamma_5 - iA_4\gamma_0)q , \quad (5.28)$$

où \hat{m} , $\hat{\mu}$ et $\hat{\mu}_5$ sont les matrices diagonales dans l'espace des saveurs des masses nues, des potentiels chimiques et des potentiels chimiques chiraux des quarks u et d . Le lagrangien d'interaction quark-antiquark que nous considérons ici est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{q}q} = & G_s \left[(\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5\tau q)^2 \right] + G_d \left[(\bar{q}i\gamma_5q)^2 + (\bar{q}\tau q)^2 \right] \\ & + G_w \left[(\bar{q}\gamma_\mu q)^2 + (\bar{q}\gamma_5\gamma_\mu q)^2 \right] + G_r \left[(\bar{q}\gamma_\mu\tau q)^2 + (\bar{q}\gamma_\mu\gamma_5\tau q)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Le lagrangien d'interaction quark-quark par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{qq} = & H_s (\bar{q}^c \gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} q) (\bar{q} \gamma_5 \tau_A \lambda_{A'} q^c) + H_p (\bar{q}^c \tau_A \lambda_{A'} q) (\bar{q} \tau_A \lambda_{A'} q^c) \\ & + H_v (\bar{q}^c \gamma_5 \gamma_\mu \tau_A \lambda_{A'} q) (\bar{q} \gamma_5 \gamma_\mu \tau_A \lambda_{A'} q^c). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Dans l'équation précédente, les indices A et A' sont sommés et les τ_A et λ_A sont les générateurs antisymétriques des groupes $U(N_f)$ et $U(N_c)$. La forme générale d'un condensat de diquark est $\delta_{AA'}^i = \langle \bar{q}^c \Gamma_i \tau_A \lambda_{A'} q \rangle$, où Γ_i est un opérateur dans l'espace de Dirac et l'indice i correspond au canal correspondant. Dans le lagrangien précédent, nous n'avons considéré que les canaux antisymétrique sous la transposition, c'est à dire $\Gamma_s = \gamma_5$, canal pseudoscalaire $\Gamma_p = 1$ et canal vecteur $\Gamma_v = \gamma_\mu \gamma_5$. Dans le cas $N_f = 2$ que nous considérons, $A = 2$ est la seule possibilité alors que $A' = 2, 5, 7$. Comme expliqué dans [121], les trois condensats $\delta_{2A'}^i$ forment un vecteur dans l'espace des couleurs. Comme une transformation globale de $SU(3)_c$ peut toujours lui être appliquée dans la direction $A' = 2$, on peut choisir $A' = 2$ sans perte de généralité. Ainsi, dans la suite, les condensats de diquarks δ_{22}^i sont notés δ_i . Au champ moyen et dans la base de Nambu–Gor'kov le lagrangien prend la forme donnée par l'équation (5.7) et le propagateur a la forme générale donnée par l'équation (5.8). Les termes apparaissant dans les propagateurs G^+ et G^- sont donnés par :

$$\Sigma_s = -m + 2G_s \sigma + 2G_d \sum_j \sigma_j \tau_j ; \quad (5.31)$$

$$\Sigma_p = 2iG_d \pi + 2iG_s \sum_j \sigma_j \tau_j ; \quad (5.32)$$

$$\Sigma_v = \mu + 2G_w \omega + 2G_r \sum_j \omega_j \tau_j ; \quad (5.33)$$

$$\Sigma_a = \mu_5 + 2G_w \theta + 2G_r \sum_j \theta_j \tau_j , \quad (5.34)$$

où $\sigma = \langle \bar{q}q \rangle$, $\sigma_j = \langle \bar{q}\tau_j q \rangle$, $\pi = \langle \bar{q}i\gamma_5 q \rangle$, $\pi_j = \langle \bar{q}i\gamma_5 \tau_j q \rangle$, $\omega = \langle \bar{q}\gamma_0 q \rangle$, $\omega_j = \langle \bar{q}\gamma_0 \tau_j q \rangle$, $\theta = \langle \bar{q}\gamma_0 \gamma_5 q \rangle$ et $\theta_j = \langle \bar{q}\gamma_0 \gamma_5 \tau_j q \rangle$ correspondent respectivement aux condensats scalaire isoscalaire, scalaire isovecteur, pseudoscalaire isoscalaire, pseudoscalaire isovecteur, vecteur isoscalaire, vecteur isovecteur, axial isoscalaire et axial isovecteur. Comme l'interaction est répulsive dans les canaux vecteur, les constantes de couplages G_w et G_r sont négatives. Les termes apparaissant dans le terme non-diagonal Φ sont donnés par :

$$\phi_s = 2H_s \delta_s \tau_2 \lambda_2 ; \quad (5.35)$$

$$\phi_p = 2H_p \delta_p \tau_2 \lambda_2 ; \quad (5.36)$$

$$\phi_v = 2H_v \delta_v \tau_2 \lambda_2 , \quad (5.37)$$

où $\delta_s = \langle \bar{q}^c \tau_2 \lambda_2 \gamma_5 q \rangle$, $\delta_p = \langle \bar{q}^c \tau_2 \lambda_2 q \rangle$ et $\delta_v = \langle \bar{q}^c \tau_2 \lambda_2 \gamma_0 \gamma_5 q \rangle$ correspondent respectivement aux condensats de diquarks dans les canaux scalaire, pseudoscalaire et vecteur et où les facteurs 2

viennent du passage dans la base de Nambu–Gor’kov. Les termes apparaissant dans le terme non diagonal Φ' du propagateur sont donnés par :

$$\phi'_s = 2H_s \xi_s \tau_2 \lambda_2 ; \quad (5.38)$$

$$\phi'_p = 2H_p \xi_p \tau_2 \lambda_2 ; \quad (5.39)$$

$$\phi'_v = 2H_v \xi_v \tau_2 \lambda_2 , \quad (5.40)$$

où les ξ_i sont les δ_i dans lesquels le remplacement $q \rightarrow q^c$ et $\bar{q}^c \rightarrow \bar{q}$ est effectué. Il est possible de réexprimer les ξ_i à partir des conjugués complexes des δ_i . En notant que $\bar{q}^c = q^t C$ et $q^c = C \bar{q}^t$, où C est l’opérateur de conjugaison de charge et en se rappelant que $q^\dagger = q^{*t} = \bar{q} \gamma_0$ et que $\bar{q}^t = (q^\dagger \gamma_0)^t = \gamma_0 q^*$ et en appelant K l’opérateur de conjugaison complexe, il est possible de calculer :

$$\begin{aligned} K(\delta_s) &= \langle q^\dagger C \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q^* \rangle ; \\ &= \langle q^\dagger C \gamma_5 C^{-1} C \tau_2 \lambda_2 q^* \rangle ; \\ &= -\langle \bar{q} \gamma_0 \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 C \gamma_0 \bar{q}^t \rangle ; \\ &= \langle \bar{q} \gamma_0 \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 \gamma_0 C \bar{q}^t \rangle ; \\ &= \langle \bar{q} \gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 \tau_2 \lambda_2 q^c \rangle ; \\ &= -\langle \bar{q} \gamma_5 \tau_2 \lambda_2 q^c \rangle ; \\ &= -\xi_s . \end{aligned} \quad (5.41)$$

De la même manière, on trouve :

$$K(\delta_p) = -\xi_p ; \quad (5.42)$$

$$K(\delta_v) = \xi_v . \quad (5.43)$$

Le terme non diagonal Φ' devient :

$$\Phi' = 2 \left[-H_s \delta_s^* \gamma_5 - H_p \delta_p^* + H_v \delta_v^* \right] \tau_2 \lambda_2 . \quad (5.44)$$

La partie du lagrangien de champ moyen ne dépendant pas des champs s’écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{cond}} &= -G_s \left(\sigma^2 + \sum_j \pi_j^2 \right) - G_d \left(\pi^2 + \sum_j \sigma_j^2 \right) - G_w (\omega^2 + \theta^2) - G_r \left(\sum_j (\omega_j^2 + \theta_j^2) \right) \\ &\quad + 2H_s |\delta_s|^2 + 2H_p |\delta_p|^2 - 2H_v |\delta_v|^2 . \end{aligned} \quad (5.45)$$

Dans les équations précédentes, nous avons utilisé les potentiels chimiques baryonique μ_B et d’isospin μ_I sont définis comme :

$$\frac{\mu_B}{3} = \frac{1}{2} (\hat{\mu}_u + \hat{\mu}_d) \quad \frac{\mu_I}{2} = \frac{1}{2} (\hat{\mu}_u - \hat{\mu}_d) , \quad (5.46)$$

tel que le potentiel chimique $\hat{\mu}$ puisse s’écrire :

$$\hat{\mu} = \frac{\mu_B}{3} + \frac{\mu_I}{2} \tau_3 . \quad (5.47)$$

De la même manière, la matrice des masses nues des quarks peut s’écrire :

$$\hat{m} = m_0 + \delta_m \tau_3 , \quad (5.48)$$

où :

$$m_0 = \frac{1}{2}(\hat{m}_u + \hat{m}_d) \quad \delta_m = \frac{1}{2}(\hat{m}_u - \hat{m}_d) . \quad (5.49)$$

La quantité qui nous intéresse est le grand potentiel associé au système physique que nous voulons décrire. Pour l'obtenir, il faut calculer le déterminant de l'inverse du propagateur. La méthode décrite ici peut être utilisée jusqu'à un certain point où les calculs analytiques ne sont plus possibles. La raison est que le calcul des valeurs propres de M_s (Éq. 5.18) nécessite de trouver les racines de polynômes d'ordre supérieur à trois dans le cas général. Bien que le calcul puisse facilement se faire numériquement, nous avons plutôt été intéressé par les solutions analytiques¹ pouvant être obtenues lorsque des simplifications sont faites dans les équations précédentes.

Pour rendre le calcul plus simple, il est souvent plus facile de décomposer les matrices Σ_s , Σ_p , Σ_v et Σ_a et aussi ϕ_s , ϕ_p , ϕ_v dans l'espace $\mathcal{E}_c \otimes \mathcal{E}_f$. Sous cette forme, il m'a souvent paru plus simple de trouver des transformations permettant de rendre la matrice M_s diagonale par bloc la rendant plus simple à diagonaliser.

Condensation de diquark dans les canaux scalaire, pseudoscalaire et vecteur

Nous donnons ici les énergies de quasiparticules obtenues dans le cas où la symétrie d'isospin est respectée, sans potentiel chimique chiral, où $\sigma_i = 0$, $\omega_i = 0$, $\pi = 0 = \pi_j$ et $\theta = 0 = \theta_i$. Dans ce cas, la matrice M_s est presque diagonale, sauf pour les termes correspondant à la condensation des diquarks (et les termes d'impulsions : p). Comme seuls les quarks rouges et verts sont appariés, il est plus pratique d'exprimer la matrice M_s dans l'espace $\mathcal{E}_f \otimes \mathcal{E}_c$. De cette manière, M_s apparaît comme composée de deux blocs, un de 16×16 composés des condensats de diquarks et un autre de 8×8 diagonal. Les 12 énergies de quasiparticules prennent la forme :

$$\epsilon_{1,2} = \epsilon_{3,4} = \sqrt{M^2 + p^2} \pm (\mu + 2i\phi_8 + 2G_w\omega) ; \quad (5.50)$$

$$\epsilon_{5,\dots,8} = \frac{1}{2}\sqrt{a \pm \sqrt{b}} \mp i\phi_3 ; \quad (5.51)$$

$$\epsilon_{9,\dots,12} = \frac{1}{2}\sqrt{a \pm \sqrt{b}} \pm i\phi_3 , \quad (5.52)$$

où a et b sont donnés par :

$$a = 4 \left[M^2 + p^2 - \Delta_p^2 + \Delta_s(\Delta_s + \Delta_v) \right] + \bar{\mu}^2 ; \quad (5.53)$$

$$b = -4M^2\Delta_p^2 - 4Mp\Delta_p\Delta_v + \Delta_v^2(\Delta_s + \Delta_v)^2 - 2\Delta_v[-p\Delta_p + M(\Delta_s + \Delta_v)]\bar{\mu} + (M^2 + p^2)\bar{\mu}^2 , \quad (5.54)$$

où $\bar{\mu}$ est donné par :

$$\bar{\mu} = 2(\mu + i\phi_8 + 2G_w\omega) , \quad (5.55)$$

et où $\Delta_i = 2H_i\delta_i$ avec $i = s, p, v$. Comme nous le disions plutôt, lorsque $\phi_8 = 0$ la partie imaginaire des énergies propres est donnée par $\pm\phi_3$ et le grand potentiel est du système est donné par l'équation (4.36), où les indices des quasiparticules réelles sont donnés par $1, \dots, 4$ et ceux des énergies complexes par $5, \dots, 12$. Les équations du gap à résoudre sont données par les dérivées du grand potentiel par rapport aux variables σ , ω , δ_s , δ_p , δ_v et Φ . Nous avons vérifié que les cas limites du résultat précédent donne les résultats obtenus lorsque les limites sont prises avant de faire le

1. Une méthode pratique pour calculer le déterminant autre que celle utilisée ici est donnée dans [651]. En particulier, lorsque le système considéré lève la dégénérescence sur le spin (cas d'un champ magnétique par exemple) la méthode utilisée ici n'est plus utilisable.

calcul. Par exemple, la limite $\Delta_v = 0$ et $\Delta_p = 0$ dans le résultat précédent permet de retrouver le résultat obtenu lorsque $\Delta_v = 0$ et $\Delta_p = 0$ est pris au début du calcul. Nous avons également vérifié que cette limite en question permet de reproduire les résultats de [519]. Bien que la résolution numérique n'ait pas pu être faite pour des raisons de temps, le résultat présenté ici doit être correct.

5.3 Grand potentiel sous les contraintes de neutralité

Lorsque la condensation de diquark est prise en compte, ou bien que la physique des étoiles compactes veut être étudiée, il est possible de ne vouloir considérer que les solutions des équations de champ moyen qui satisfont les conditions de neutralité électrique ou de couleur. Dans ce cas, le potentiel chimique est modifié selon :

$$\mu_c^f = \mu^f + \mu_Q Q_f^f + \frac{\mu_3}{2} \lambda_{3c} + \frac{2\mu_8}{\sqrt{3}} \lambda_{8c}, \quad (5.56)$$

où f et c sont des indices de saveur et de couleur respectivement et où Q_f est la matrice des charges électrique diagonale dans l'espace des saveurs : $Q_f = \text{diag}(2/3, -1/3)$ et où λ_3 et λ_8 sont les matrices diagonales de Gell-Mann (dans l'espace des couleurs) : $\lambda_3 = \text{diag}(1/2, -1/2)$ et $\lambda_8 = 3^{-1/2} \text{diag}(1/2, 1/2, -1)$. Lorsque la neutralité électrique est étudiée, un terme pour chaque espèce de lepton considérée doit être ajouté au grand potentiel du modèle [652, 653] :

$$\Omega_{\text{leptons}} = \frac{T}{\pi^2} \sum_l \sum_{s=\pm} \int_0^\infty dp p^2 \ln(1 + e^{-\beta(E_l - s\mu_l)}), \quad (5.57)$$

où l correspond à chaque lepton considéré et où $E_l = \sqrt{p^2 + m_l^2}$ est l'énergie associée à un lepton de masse m . Lorsque seuls les électrons sont considérés, on peut écrire $\mu_Q = -\mu_e$ correspondant à la contrainte d'équilibre β . Des complications que nous ne considérons pas ici peuvent apparaître lorsque les neutrinos électroniques piégés à l'intérieur des étoiles à neutrons sont pris en compte, voir par exemple [353]. Le potentiel chimique des saveurs u et d peuvent s'écrire :

$$\mu_u^r = \frac{\mu_B}{3} + \frac{\mu_I}{2} - \frac{2\mu_e}{3} + \frac{\mu_3}{2} + \frac{\mu_8}{3} - i(\phi_3 + \phi_8); \quad (5.58)$$

$$\mu_u^g = \frac{\mu_B}{3} + \frac{\mu_I}{2} - \frac{2\mu_e}{3} - \frac{\mu_3}{2} + \frac{\mu_8}{3} + i(\phi_3 - \phi_8); \quad (5.59)$$

$$\mu_u^b = \frac{\mu_B}{3} + \frac{\mu_I}{2} - \frac{2\mu_e}{3} - \frac{2\mu_8}{3} + 2i\phi_8; \quad (5.60)$$

$$\mu_d^r = \frac{\mu_B}{3} - \frac{\mu_I}{2} + \frac{\mu_e}{3} + \frac{\mu_3}{2} + \frac{\mu_8}{3} - i(\phi_3 + \phi_8); \quad (5.61)$$

$$\mu_d^g = \frac{\mu_B}{3} - \frac{\mu_I}{2} + \frac{\mu_e}{3} - \frac{\mu_3}{2} + \frac{\mu_8}{3} + i(\phi_3 - \phi_8); \quad (5.62)$$

$$\mu_d^b = \frac{\mu_B}{3} - \frac{\mu_I}{2} + \frac{\mu_e}{3} - \frac{2\mu_8}{3} + 2i\phi_8. \quad (5.63)$$

Le calcul des énergies des quasiparticules n'est pas rendu plus compliqué par la prise en compte des conditions de neutralité car seuls les éléments diagonaux de la matrice M_s sont modifiés. On

trouve :

$$\epsilon_{1,2} = \sqrt{M^2 + p^2} \pm \left(-\frac{2}{3}(\mu_8 + \mu_e) + \mu + 2i\phi_8 + 2G_\omega\omega \right) ; \quad (5.64)$$

$$\epsilon_{3,4} = \sqrt{M^2 + p^2} \pm \left(-\frac{1}{3}(2\mu_8 + \mu_e) + \mu + 2i\phi_8 + 2G_\omega\omega \right) ; \quad (5.65)$$

$$\epsilon_{5,\dots,8} = \frac{1}{2} \left[\pm\delta_{\mu_1} + \sqrt{a \pm \sqrt{b}} \right] ; \quad (5.66)$$

$$\epsilon_{9,\dots,12} = \frac{1}{2} \left[\pm\delta_{\mu_2} + \sqrt{a \pm \sqrt{b}} \right] , \quad (5.67)$$

où a et b sont donnés par les équations (5.53) et (5.54) respectivement avec $\bar{\mu}$ modifié comme :

$$\bar{\mu} = \frac{2}{3}\mu_8 + 2\mu - \frac{\mu_e}{3} - 2i\phi_8 + 4G_\omega\omega , \quad (5.68)$$

et où :

$$\delta_{\mu_1} = \mu_3 - \mu_e - 2i\phi_3 ; \quad (5.69)$$

$$\delta_{\mu_2} = -\mu_3 - \mu_e + 2i\phi_3 . \quad (5.70)$$

Les équations du gap sont données par les dérivées du grand potentiel par rapport aux paramètres d'ordre σ , ω , δ_s , δ_p , δ_v et Φ et elles doivent être résolues sous les contraintes :

$$\partial_{\mu_3}\Omega = \partial_{\mu_8}\Omega = \partial_{\mu_e}\Omega = 0 . \quad (5.71)$$

Le lecteur peut vérifier que dans la limite $\mu_8 \rightarrow 0$, $\mu_e \rightarrow 0$ et $\mu_3 \rightarrow 0$, les énergies de quasiparticules obtenues à la fin de la section 5.1 sont retrouvées.

Nous n'avons pas eu le temps de résoudre numériquement les équations de champ moyen ni d'établir le diagramme de phase. Dans la littérature, les détails du calcul du grand potentiel sont rarement présentés. Retrouver les résultats obtenus par les auteurs ou bien les généraliser est alors une tâche compliquée. Pour cette raison, j'ai trouvé intéressant de présenter une méthode possible pour calculer le grand potentiel dans le cas où la condensation de diquarks est prise en compte. Ceci constitue une première étape dans l'étude des phases superconductrices de couleur.

Chapitre 6

Conclusions

Il est fort peu probable que la zone haute densité du diagramme de phase de QCD puisse un jour être étudiée expérimentalement dans un laboratoire terrestre. Bien que des techniques de calcul sur réseaux permettent d'obtenir des résultats à faible densité baryonique, ces résultats doivent être pris avec précaution à cause du problème de signe. Deux autres approches sont possibles pour étudier cette zone du diagramme de phase. La première utilise le formalisme de Dyson–Schwinger et l'applique directement à QCD. Dans ce contexte, les approximations faites pour obtenir des résultats ne sont pas toujours contrôlées, et la mise en oeuvre de ces méthodes est relativement complexe.

Une autre possibilité consiste à créer un modèle effectif construit à partir de QCD en sélectionnant seulement la physique qui semble cohérente pour l'étude que l'on veut faire avec ce modèle. Par construction ces modèles sont incomplets car ils doivent être plus simples à utiliser que la théorie initiale. Ils permettent néanmoins de donner une image des mécanismes fondamentaux mis en jeu dans la théorie de base. Ces modèles dépendent de paramètres ajustés pour que le modèle reproduise certains résultats connus. Une fois les paramètres fixés, le modèle est utilisé pour faire des prédictions, en l'occurrence à haute densité.

Lorsqu'un résultat prédit (qui n'entre pas dans la procédure d'ajustement) par le modèle peut être comparé à des données expérimentales ou réseaux, il suffit de comparer les deux résultats pour savoir si le résultat du modèle est satisfaisant ou non. Lorsqu'aucun résultat expérimental n'existe et que les calculs sur réseaux sont impossibles, rien ne garantit que le modèle fonctionne car aucune comparaison n'est possible. Cela est d'autant plus vrai dans les zones hautes densités où les paramètres du modèle doivent certainement être différents de ceux utilisés pour faire le calcul qui ont été, la plupart du temps, ajustés sur des données obtenues dans le vide. Cette remarque met en exergue la première question que nous devons nous poser lorsque nous faisons des prédictions avec un modèle effectif : “jusqu'où puis-je extrapoler le modèle ?” Si aucune donnée expérimentale ou donnée réseaux n'est disponible, il paraît difficile de trouver un moyen de répondre à cette question.

Le moyen que nous proposons dans cette thèse est d'étudier la sensibilité d'une prédiction aux valeurs des données utilisées pour ajuster les paramètres dont le modèle dépend. La méthode proposée consiste essentiellement à calculer la dérivée d'une prédiction par rapport aux données. Lorsque la prédiction faite est facilement calculable, il est possible de calculer sa sensibilité analytiquement comme nous l'avons fait pour la masse du méson sigma dans le chapitre 3. Cependant, ce n'est en général pas le cas et les prédictions sont souvent solutions d'un système d'équations non-linéaires. Dans ce cas, le calcul analytique devient difficile. La méthode que nous avons proposée pour contourner ce problème est de calculer la sensibilité grâce à un algorithme Monte–Carlo. L'idée se

base sur les travaux réalisés en physique nucléaire utilisant la théorie du problème inverse pour obtenir des informations statistiques et probabilistes sur les paramètres du modèle et les prédictions faites. L'idée est de faire la prédiction un très grand nombre de fois pour des paramètres ajustés sur des données d'entrée que nous faisons varier de manière infinitésimale autour de leur valeur moyenne respective. Le critère de sensibilité que nous avons défini est construit de telle façon qu'une prédiction est dite stable lorsque sa sensibilité est proche de 1 et elle est dite instable lorsque sa sensibilité est grande. Comme nous l'avons déjà dit, le fait qu'une prédiction soit stable ne signifie pas qu'elle sera proche de la valeur mesurée lorsqu'une expérience pourra être faite pour cette observable. Le fait qu'une prédiction faite soit stable indique qu'elle est cohérente avec le modèle effectif dans son ensemble, c'est à dire les données d'entrée utilisées, les approximations faites, etc. Autrement dit, une prédiction stable faite avec un modèle simpliste ne signifie pas que la prédiction faite est celle que la Nature nous donnera. Elle signifie que la prédiction faite et la physique implémentée dans ce modèle sont cohérentes. L'étude de sensibilité permet surtout de dire que telle prédiction ayant une grande sensibilité ne peut être discutée : la physique implémentée dans le modèle ne permet pas de la contraindre.

Lorsque l'on cherche quels sont les secteurs les plus influencés par la physique du modèle et par la valeur des données d'entrée, l'analyse de sensibilité peut être faite conjointement à une analyse des corrélations. Comme nous l'avons montré l'analyse des corrélations permet aussi d'obtenir une réponse concrète et quantitative à la question : quelles sont les observables qui ont le plus d'impact sur les prédictions ?

L'analyse de sensibilité implique de considérer des variations infinitésimales des données d'entrée autour de leur valeur moyenne. Nous avons également étudié l'impact de variations finies. Ces variations finies peuvent provenir d'erreurs expérimentales, ou bien de ce que nous avons appelé incertitudes théoriques. Elles peuvent être vues comme l'a priori que l'on a du modèle utilisé de reproduire la réalité. Cet a priori est subjectif et trouver un moyen systématique de construire cet a priori semble difficile. Cependant, comme nous l'avons montré, la sensibilité d'une prédiction et sa dispersion lorsque des variations finies sont considérées sont fortement reliées. Une prédiction ayant une haute sensibilité aura une grande dispersion. Comme nous l'avons dit à la fin de la partie 4.6.1, l'intérêt d'étudier des variations finies ne réside pas seulement dans le fait qu'elles offrent un moyen de visualiser la sensibilité d'une prédiction. Lorsque les variations finies sont justifiées (les données d'entrée utilisées dans la procédure d'ajustement sont affectées par une large erreur), l'étude de variations finies permet d'obtenir une distribution de probabilité pour la prédiction faite. Si l'on considère des déviations finies autour des valeurs moyennes des données d'entrée pour lesquelles la sensibilité d'une prédiction donnée est la plus faible, il est possible que la meilleure prédiction que le modèle puisse faire soit celle qui maximise la distribution de probabilité obtenue. Bien sûr, rien n'oblige la sensibilité des autres prédictions à rester basse (ou haute) lorsque la sensibilité d'une autre prédiction est minimisée. Je suppose qu'une fonction de likelihood pourrait être définie à partir des sensibilités de chacune des prédictions qui nous intéressent.

L'étude de sensibilité a été faite pour la prédiction de la position du point critique chiral (CEP) dans le cadre d'un modèle NJL simple et de ce même modèle couplé à la boucle de Polyakov (PNJL). Dans le cadre du modèle NJL, nous avons trouvé que la température du CEP était très sensible aux données d'entrée du modèle et que, au contraire, le potentiel chimique du CEP était très stable. Les mêmes conclusions tiennent pour l'étude du modèle PNJL correspondant (sans *back reaction*). Comme nous l'avons vu cependant, l'utilisation de différents types de potentiels gluoniques effectifs modifie la position du CEP et les sensibilités des coordonnées de température et de potentiel chimique. Nous avons même trouvé une configuration de différents ajouts effectifs, où le couplage entre le secteur chirale et le secteur de déconfinement est fort, rendant la température

du CEP plus stable que son potentiel chimique. Comme nous l'avons dit alors, les paramètres des potentiels gluoniques effectifs, ceux des constantes de couplages effectives, etc sont ajustés, en général indépendamment, sur des données réseaux à température finie. L'utilisation de différentes parties effectives en même temps dans le modèle peut mener à des résultats non physiques. D'autre part, comme nous l'avons mentionné alors, le modèle ayant une prédiction plus stable du CEP est celui qui le prédit à une position qualitativement bien différente de ceux qui le prédisent avec une sensibilité plus élevée. Une étude de l'effet de la paramétrisation des ajouts effectifs rendant compte de la back-reaction pourrait permettre de déterminer si le modèle considéré ne contraint alors pas trop la position du CEP.

Bien que l'étude de sensibilité que nous avons introduite et utilisée pourrait faire penser que l'utilisation de modèles effectifs n'est pas justifiée, nous pensons le contraire. Les modèles effectifs permettent d'isoler et de comprendre des mécanismes compliqués qu'il serait difficile d'étudier grâce à la théorie complète.

La deuxième partie du travail de thèse concernait l'étude des phases très hautes densités possiblement atteintes à l'intérieur des étoiles compactes. Les énergies des quasiparticules ont été calculées dans le cas analytique le plus compliqué que nous ayons trouvé mettant en jeu la condensation de diquarks. Les condensats de diquarks scalaire, pseudoscalaire et vecteur ont été pris en compte dans le calcul, et les cas limites du résultat obtenu ont été comparés avec les différents résultats de la littérature. La manière dont les énergies de quasiparticules ont été calculée peut facilement être implémentée dans un programme permettant ainsi de les obtenir dans des cas non analytiques qui sont nécessaires pour obtenir des résultats cohérent avec l'étude des étoiles compactes (brisure de la symétrie d'isospin, conditions de neutralité et équilibre β). Dans le cadre des hautes densités, une étude de sensibilité pourrait être très intéressante, car elle permettrait d'obtenir une réponse quantitative à la question : la densité à l'intérieur des étoiles compactes est elle suffisante pour autoriser l'existence de la matière de quark déconfinée. Encore une fois, la réponse apportée devra être modulée par l'a priori que l'on a du modèle utilisée de reproduire la réalité.

Annexe A

Quelques généralités sur les problèmes inverses

Dans cette partie nous introduisons de manière assez général le contexte des problèmes inverses et de leurs résolution. Le formalisme mathématique sous-jacent est assez compliqué et les résultats présentés sont formelles. Cependant, la manière dont les résultats sont établis n'a pas la rigueur qu'un mathématicien pourrait attendre. Pour ces deux raisons, cette partie ne trouve pas sa place dans le texte principal. Cette partie doit donc être vue comme un petit récapitulatif des résultats qui me semblent importants pour appréhender le problème inverse. J'espère que le lecteur intéressé trouvera dans les références citées les informations qui ne sont pas présentées par soucis de clarté et de concision.

A.1 Introduction

L'étude d'un système physique peut être décomposée en deux parties : étude expérimentale et étude théorique. Les expériences induisent des modèles et les modèles permettent de prédire les résultats des expériences. La comparaison entre les résultats prédits par un modèle et les résultats obtenus par une expérience, permet en principe d'améliorer le modèle. Ils permettent aussi de réfuter un modèle si la différence entre les résultats est inacceptable [654].

Le fait d'utiliser un modèle pour faire des prédictions est appelé problème direct. Le problème inverse consiste à utiliser des résultats pour déterminer la valeur des paramètres d'un modèle. Bien qu'en général le problème direct ait une solution unique, ce n'est en général pas le cas pour le problème inverse. D'après [655], deux problèmes sont dits inverses l'un de l'autre si la formulation de l'un utilise (une partie de) la solution de l'autre. Autrement dit, le problème direct consiste à déterminer les effets connaissant les causes, alors que le problème inverse consiste à retrouver les causes de certains effets. Avec cette définition, il est facile de voir que le problème inverse peut avoir plusieurs solutions : des causes différentes peuvent avoir les mêmes effets.

En se référant à [656], un problème est dit *bien posé* lorsque (i) une solution au problème existe, (ii) qu'elle est unique et (iii) qu'elle dépend continûment des données. De part sa définition, un problème inverse est donc en général mal posé, ne remplissant pas l'une ou l'autre de ces conditions et, dans la plupart des cas, les trois ensembles. Dans le cas des problèmes inverse, la non-existence d'une solution n'est pas un problème : la notion de solution pouvant toujours être modifiée comme nous le verrons plus tard. La non-unicité de la solution est un problème plus sérieux, car si plusieurs solutions existent, il faut pouvoir faire un choix. Pour cela, il faut la connaissance d'une information

a priori. La non-continuité est le problème le plus sérieux, puisque dans un tel cas, il n'est pas possible d'approcher la solution convenablement.

Pour nous permettre d'aller plus avant, il est nécessaire de fixer la notation. Notons \mathcal{G} le système physique étudié. Notons \mathcal{M} , le modèle théorique permettant son étude. Par construction, le modèle dépend d'un ensemble de paramètres \mathbf{p} et d'un ensemble d'équations \mathbf{F} , en général non-linéaires, dépendantes des paramètres. L'application des équations aux paramètres permet d'obtenir l'ensemble des prédictions \mathcal{Q} du modèle. L'étape précédente est typiquement ce que l'on a appelé le problème direct dans les paragraphes précédents. L'ensemble des données connues relatives au système physique \mathcal{G} considéré, est noté \mathcal{D} et contient aussi bien des données expérimentales que des prédictions obtenues indépendamment du modèle \mathcal{M} .

Résoudre le problème inverse consiste à choisir un sous-ensemble des données $d \subset \mathcal{D}$ et un sous-ensemble des prédictions $q \subset \mathcal{Q}$, où chacun des q_i de \mathcal{Q} a son homologue d_i dans \mathcal{D} . Résoudre le problème inverse consiste à résoudre $\mathbf{F}^{-1}(d) = \mathbf{p}$ (où $\dim(d) \geq \dim(\mathbf{p})$). Comme expliqué précédemment, lorsque ce système n'a pas de solution, il est possible de relaxer la notion de solution, en définissant, par exemple, la notion de distance entre un élément de d et son homologue dans q et en définissant une fonction de mérite, dépendant des paramètres du modèle. Il suffit alors de chercher les paramètres minimisant la distance entre chaque éléments des sous-ensembles choisis.

Généralement, les quantités prédites par le modèle ne peuvent pas être identiques aux données choisies pour deux raisons : les incertitudes expérimentales et les imperfections du modèle. Ces deux différentes sources d'erreur produisent des incertitudes de même ordre : lorsque de nouvelles méthodes expérimentales permettent de diminuer l'incertitude sur les mesures, des théories sont créées ou modifiées pour rendre compte plus précisément de ces nouveaux résultats. Une analyse rigoureuse des erreurs dues aux imperfections du modèle doit être faite pour que le problème inverse associé soit le mieux posé possible. Bien que la manière d'évaluer les incertitudes de mesure est un sujet bien compris, ce n'est pas le cas pour la modélisation des erreurs théoriques, pour lesquelles il n'existe pas de conventions acceptées par tout le monde. La point de vue développé dans [657] est que toute source d'information, aussi bien théorique qu'expérimentale, est décrite par une densité de probabilité. En ce sens, le problème inverse est vu comme la conjonction de deux états d'information et sa solution est représentée par une densité de probabilité σ_P , permettant d'obtenir la probabilité pour que les paramètres du modèle appartiennent à une région de l'espace où ils sont définis, connaissant les données utilisées et leurs incertitudes.

L'analyse des incertitudes de modélisation se fait alors par l'étude de σ_P . Lorsque cette densité de probabilité est proche d'une distribution gaussienne, il est possible d'obtenir des informations pertinentes en calculant les différents moments de σ_M . Lorsque ce n'est pas le cas, les moments de la distribution perdent de leur sens et il convient d'utiliser d'autres méthodes pour l'étudier.

La résolution des problèmes inverses est un sujet intéressant en soi et a été partie intégrante du travail de thèse. Dans la section A.2, une possibilité de résolution est décrite de manière assez formelle, sans spécifier le système physique à l'étude.

L'étude des problèmes inverses est un domaine de recherche qui a pris naissance dans les années 30, avec un papier [658], dans lequel les auteurs essaient de retrouver l'équation aux dérivées partielles menant à certaines classes de valeurs propres. Bien que ce papier n'eut pas un succès retentissant à sa publication, il est considéré comme la base des travaux concernant la résolution des problèmes inverses.

Telle que nous la formulons ici, la résolution des problèmes inverses nécessite des connaissances en théorie des probabilités. Concernant les probabilités, j'ai utilisé [659–664]. Concernant les problèmes inverses et leur résolution, il existe de très nombreuses références récentes, parmi lesquelles j'ai utilisé [?, 665–667] et moins récentes [657]. Historiquement, les travaux [668–670] sont parmi les

premiers à traiter de la résolution des problèmes inverses d'un point de vue probabiliste (dans le cas de problèmes linéaires cependant).

A.2 Solution générale d'un problème inverse

Construisons maintenant la densité de probabilité $\sigma_{\mathcal{P}}$ solution d'un problème inverse. Reprenons les notations précédemment introduites. Nous étudions un système physique \mathcal{G} , grâce à un modèle \mathcal{M} dépendant de paramètres \mathbf{p} vivant dans l'espace \mathcal{P} . Ces paramètres sont à comparer avec des données d , vivant dans l'espace \mathcal{D} . Pour simplifier, nous ne considérons que le cas où \mathcal{P} et \mathcal{D} sont de dimension finie.

Comme nous l'avons dit dans l'introduction, nous postulons que toute source d'information peut être décrite par une distribution de probabilité. On peut donc définir une distribution de probabilité sur \mathcal{P} , c'est à dire une fonction P associant à n'importe quel sous-ensemble de \mathcal{P} un nombre réel positif, avec la normalisation $P(\mathcal{P}) = 1$. Une telle distribution de probabilité peut être définie sur n'importe quel espace de dimension finie et indépendamment d'un choix spécifique d'un des éléments de l'espace. Si un point de l'espace a été choisie, c'est à dire une paramétrisation donnée, il est possible de décrire cette distribution de probabilité grâce à une densité de probabilité. Nous pouvons remarquer au passage qu'une paramétrisation donnée n'est représentée par un vecteur que si l'espace \mathcal{P} est linéaire. Dans la plupart des cas, \mathcal{P} est non-linéaire.

Pour obtenir des informations sur les paramètres du modèle, il faut choisir des données indépendantes du modèle. Dans le cas usuel, le terme *données* correspond effectivement aux données expérimentales. Dans ce cas, l'espace \mathcal{D} peut être vu comme l'ensemble des résultats pouvant être obtenu lors de n'importe quelle expérience. Un point précis de cet espace correspond à un résultat *exact* d'une expérience. De manière générale, le résultat d'une expérience donne accès à la valeur de plusieurs observables. Donc chaque point de \mathcal{D} correspond à un ensemble de valeurs pour des observables. De la même manière que pour l'espace des paramètres, un point de \mathcal{D} ne peut être vu comme un vecteur que si l'espace dans lequel il est défini est linéaire. Cependant, les données expérimentales sont le résultat d'expériences et sont donc sujettes à des incertitudes. Le résultat d'une mesure n'est donc pas seulement la valeur d'un ensemble d'observable, mais un état d'information pouvant être représenté par une densité de probabilité.

Comme dit dans l'introduction, l'espace des données contient également les résultats obtenus par d'autres modèles théoriques. Si l'on accepte que chaque modèle possède des incertitudes, alors on peut se convaincre que le fait d'ajouter des résultats théoriques à l'ensemble des données est possible et n'est pas un non-sens.

À partir des deux ensembles \mathcal{P} et \mathcal{D} , on peut définir l'espace "physique" du problème, construit par le produit cartésien $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$. De la même manière une distribution de probabilité peut être choisie sur cet espace et une densité de probabilité peut lui être associée lorsqu'un point de cet espace est choisi.

A.2.1 Rappel de définitions

Considérons un ensemble \mathcal{E} pouvant être aussi bien l'espace des données, que l'espace des paramètres. Considérons \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 deux sous-ensembles de \mathcal{E} . Ces sous-ensembles peuvent tout aussi bien être un seul point, ou un ensemble discontinu de points, ou encore une région entière de \mathcal{E} (c'est à dire un ensemble continu de points). En théorie des probabilités un tel sous-ensemble est appelé un événement. Le champ des événements est appelé un champ σ . Cette notion permet

d'introduire la notion de probabilité de manière générale, pour des espaces de dimensions finies et infinie [671–673]. Comme nous nous restreignons aux ensembles finis, il n'est pas nécessaire de les introduire.

Probabilité :

Par définition, on appelle mesure sur \mathcal{E} , une application P qui associe un nombre réel positif à n'importe quel élément \mathcal{E}_i de \mathcal{E} . Pour être une mesure, P doit satisfaire les axiomes de Kolmogorov [674, 675] (i) $0 \leq P(\mathcal{E}_i) \leq 1$, (ii) $P(\mathcal{E}_i) + P(\bar{\mathcal{E}}_i) = 1$, où $\bar{\mathcal{E}}_i$ est le complémentaire de \mathcal{E}_i dans \mathcal{E} et (iii) $P(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \dots) = \sum_i P(\mathcal{E}_i)$, où les \mathcal{E}_i sont des sous-ensembles disjoints. De (ii), il vient immédiatement que la probabilité de l'ensemble vide est nul et de (iii) il vient que pour deux sous ensembles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 non-nécessairement disjoints que $P(\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2) = P(\mathcal{E}_1) + P(\mathcal{E}_2) - P(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2)$. Pour que P puisse être considérée comme une probabilité, il faut que $P(\mathcal{E}) = 1$ ¹. Dans ce cas, l'application P est appelée une distribution de probabilité et $P(\mathcal{E}_1)$ est appelée la probabilité de l'évènement \mathcal{E}_1 .

Si un système de coordonnées $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ a été choisie sur l'ensemble \mathcal{E} et étant donnée P une distribution de probabilité sur cet espace, il existe, de part le théorème de Radon-Nikodyn [676], une fonction $g(x)$ positive telle que la probabilité d'un sous-ensemble $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}$, $P(\mathcal{E}_1)$ est donné par l'intégrale :

$$P(\mathcal{E}_1) = \int_{\mathcal{E}_1} dx g(x) . \quad (\text{A.1})$$

La fonction $g(x)$ est appelée densité de probabilité représentant la distribution de probabilité P dans un système de coordonnées choisi. En général, $g(x)$ est une distribution, mais nous ne ferons pas de distinction.

Dans le cadre du problème inverse, il n'est pas nécessaire d'avoir accès à la probabilité d'un évènement donné. La plupart du temps, nous sommes seulement intéressés par la probabilité relative de deux évènements, qui peut être obtenue en considérant des mesures qui ne sont pas des distributions probabilité. Nous ne ferons pas de distinction et nous appellerons aussi, par abus de langage, distributions probabilité, des mesures qui n'en sont pas.

Distribution de probabilité homogène :

Considérons que la notion de volume existe dans \mathcal{E} : à chaque sous-ensemble $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{E}$, on peut associer un volume $V(\mathcal{E}_i)$. Dans un système de coordonnée x donné, on peut écrire l'élément différentiel de volume comme :

$$dV(\mathcal{E}_i) = v(x) dx , \quad (\text{A.2})$$

où $v(x)$ est appelée densité volumique de \mathcal{E}_i dans le système de coordonnée x . Le volume d'un évènement \mathcal{E}_i est alors donné par :

$$V(\mathcal{E}_i) = \int_{\mathcal{E}_i} dx v(x) . \quad (\text{A.3})$$

Si le volume de \mathcal{E} est fini

$$V(\mathcal{E}) = V = \int_{\mathcal{E}} dx v(x) , \quad (\text{A.4})$$

on peut définir une densité de probabilité normalisée

$$\mu(x) = v(x)/V , \quad (\text{A.5})$$

1. Ou du moins soit finie et dans ce cas normalisé à 1.

associant à n'importe quel sous-ensemble $\mathcal{E}_i \subseteq \mathcal{E}$ la probabilité

$$P_h(\mathcal{E}_i) = \int_{\mathcal{E}_i} dx \mu(x) . \quad (\text{A.6})$$

De part la définition de $\mu(x)$, cette probabilité est proportionnelle au volume de \mathcal{E}_i . La probabilité P_h et la densité de probabilité $\mu(x)$ sont dites *homogène*. Dans cette définition, homogène ne signifie pas constante mais signifie proportionnelle au volume d'un évènement [677]. Si le système de coordonnées choisi est cartésien, alors l'élément différentielle de volume est $dV = \prod_i dx_i$ et la densité de probabilité $\mu(x)$ est constante. Pour un système de coordonnées arbitraire, la densité de probabilité est proportionnelle à la densité volumique $v(x)$ (qui peut ne pas être constante).

Lorsque la notion de volume peut être définie, il peut être plus aisé de représenter la probabilité d'un évènement $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}$, dans un système de coordonnées x donné, à l'aide de la probabilité volumique $G(x)$:

$$P(\mathcal{E}_1) = \int_{\mathcal{E}_1} dV(x) G(x) . \quad (\text{A.7})$$

Alors que la densité de probabilité $g(x)$ définie par Eq. (A.1) est dépendante du système de coordonnées, la probabilité volumique ne l'est pas. Ainsi, la probabilité volumique homogène associée à la distribution de probabilité homogène P_h est constante quelque soit le système de coordonnées choisi. En remplaçant simplement $dV(x)$ par son expression Eq. (A.4), on trouve que $G(x) = g(x)/v(x)$. De part sa définition Eq. (A.5), on peut également construire la fonction

$$\gamma(x) = \frac{g(x)}{\mu(x)} , \quad (\text{A.8})$$

ayant les mêmes propriétés que la probabilité volumique et entrant dans la définition de la mesure de l'information contenue dans $g(x)$ [678–682] :

$$I(g, \mu) = \int dx g(x) \log(\gamma(x)) . \quad (\text{A.9})$$

Probabilité conditionnelle :

Pour introduire de manière logique la notion de probabilité conditionnelle, introduisons les notions de conjonction et de disjonction de probabilité, représentées par les opérateurs logiques \wedge (ET) et \vee (OU). Pour P_1 et P_2 deux distributions de probabilité sur \mathcal{E} et $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}$, ces opérateurs logiques doivent être commutatifs $(P_1 \wedge P_2)(\mathcal{E}_1) = (P_2 \wedge P_1)(\mathcal{E}_1)$ et $(P_1 \vee P_2)(\mathcal{E}_1) = (P_2 \vee P_1)(\mathcal{E}_1)$ et P_h , la distribution de probabilité homogène sert d'élément neutre pour \wedge : $(P_1 \wedge P_h) = P_1$. Nous voulons une expression pour la conjonction et disjonction des densités de probabilité $f_1(x)$ et $f_2(x)$ associées aux distributions de probabilités P_1 et P_2 respectivement.

Par définition, pour tout $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}$:

$$(P_1 \wedge P_2)(\mathcal{E}_1) = \int_{\mathcal{E}_1} dx (f_1 \wedge f_2)(x) ; \quad (\text{A.10})$$

$$(P_1 \vee P_2)(\mathcal{E}_1) = \int_{\mathcal{E}_1} dx (f_1 \vee f_2)(x) . \quad (\text{A.11})$$

Dans [683], les auteurs prouvent que les solutions les plus simples sont :

$$(f_1 \vee f_2)(x) = \frac{1}{2} (f_1(x) + f_2(x)) ; \quad (\text{A.12})$$

$$(f_1 \wedge f_2)(x) = \frac{1}{\int_{\mathcal{E}} dx \frac{f_1(x)f_2(x)}{\mu(x)}} \frac{f_1(x)f_2(x)}{\mu(x)} . \quad (\text{A.13})$$

La dernière égalité n'est définie que si le produit $f_1(x)f_2(x) \neq 0 \forall x$.

Ces deux égalités permettent de définir la notion de probabilité conditionnelle. Considérons un évènement \mathcal{E}_1 de \mathcal{E} . Appelons P_1 et P_2 deux distributions de probabilité définies dans \mathcal{E} et f_1 et f_2 les densités de probabilités associées. À chaque évènement \mathcal{E}_1 , on peut associer une distribution de probabilité particulière $H_{\mathcal{E}_1}$, nommée en anglais *p-event*, caractérisée par la densité de probabilité $\mu_{\mathcal{E}_1}$, nulle de partout sauf à l'intérieur de \mathcal{E}_1 où elle est proportionnelle à la densité de probabilité homogène $\mu(x)$, c'est à dire définie par :

$$\mu_{\mathcal{E}_1} = \begin{cases} c\mu(x) & \forall x \in \mathcal{E}_1, \\ 0 & \forall x \notin \mathcal{E}_1. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

où $c \in \mathbb{R}$. Comme la densité homogène $\mu(x)$ est relié à l'élément de volume de \mathcal{E} , la probabilité $H_{\mathcal{E}_1}(\mathcal{E}_2) = \int_{\mathcal{E}_2} dx \mu_{\mathcal{E}_1}(x)$ d'un autre évènement $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}$ est reliée au volume de l'intersection des deux ensembles \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 : $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$. Étant donné un évènement $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}$ et sa distribution p-event associée $H_{\mathcal{E}_1}$, ainsi qu'une distribution de probabilité P définie sur \mathcal{E} , la conjonction des distributions P et $H_{\mathcal{E}_1}$ est appelée distribution de probabilité conditionnelle de P sachant \mathcal{E}_1 . En utilisant la formule Eq. (A.11) et en considérant $P(\mathcal{E}_1) \neq 0$ on trouve :

$$(P \wedge H_{\mathcal{E}_1})(\mathcal{E}_2) = \frac{P(\mathcal{E}_2 \cap \mathcal{E}_1)}{P(\mathcal{E}_1)}. \quad (\text{A.15})$$

Le membre de droite de cette dernière équation est en général posé par définition de la distribution de probabilité conditionnelle :

$$P(\mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2) = \frac{P(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2)}{P(\mathcal{E}_2)}, \quad (\text{A.16})$$

où \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont deux éléments de \mathcal{E} . On retrouve alors $P(\mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2)$ comme cas particulier de la conjonction $(P \wedge Q)(\mathcal{E}_1)$, où $Q = H_{\mathcal{E}_2}$.

En renversant l'équation Eq. (A.16) et en se souvenant que l'opérateur de conjonction \wedge est commutatif, on retrouve le théorème de Bayes (voir par exemple les sections 3.5 et 4.4 de [675]) :

$$P(\mathcal{E}_2|\mathcal{E}_1) = \frac{P(\mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2)P(\mathcal{E}_2)}{P(\mathcal{E}_1)}. \quad (\text{A.17})$$

Ce théorème permet d'obtenir la probabilité d'une cause \mathcal{E}_2 produisant un effet donné \mathcal{E}_1 connaissant les probabilités des évènements \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 séparément et de la probabilité de l'effet \mathcal{E}_1 lorsque la cause est connue et est \mathcal{E}_2 ¹. Lorsque deux évènements sont indépendants, la probabilité de l'intersection de ces deux évènements est le produit des probabilités de chacun des évènements $P(\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2) = P(\mathcal{E}_1)P(\mathcal{E}_2)$. Il en suit que, dans ce cas, les probabilités conditionnelles sont égales aux probabilités inconditionnelles $P(\mathcal{E}_2|\mathcal{E}_1) = P(\mathcal{E}_2)$ et $P(\mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2) = P(\mathcal{E}_1)$.

Densité de probabilité marginale :

Considérons à nouveau l'espace \mathcal{E} , mais cette fois ci construit comme le produit cartésien de deux ensembles distincts \mathcal{E}_1 dont les points sont donnés par x_1 et \mathcal{E}_2 dont les points sont donnés par x_2 . $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ et ses points sont donnés par $y = \{x_1, x_2\}$. Une distribution de probabilité

1. Citons en tant qu'article historique [684], dans lequel on peut trouver la phrase, peut-être plus compréhensive (traduite en anglais courant) (p.370) : “[...] to find out a method by which we might judge concerning the probability that an event has to happen, in given circumstances, upon supposition that we know nothing concerning it but that, under the same circumstances it has happen a certain number of times, and failed another certain number of times.”

sur \mathcal{E} est représentée par une densité de probabilité $f(y) = f(x_1, x_2)$ (considérée normalisée). On peut définir les densités de probabilité marginales comme la densité de probabilité d'une variable moyennant l'information que nous avons sur l'autre :

$$f_{\mathcal{E}_1}(x_1) = \int_{\mathcal{E}_2} dx_2 f(x_1, x_2) ; \quad (\text{A.18})$$

$$f_{\mathcal{E}_2}(x_2) = \int_{\mathcal{E}_1} dx_1 f(x_1, x_2) . \quad (\text{A.19})$$

$$(\text{A.20})$$

La densité de probabilité $f(y) = f(x_1, x_2)$ est appelée densité de probabilité jointe. Elle est égale au produit des deux distributions marginales lorsque les variables x_1 et x_2 sont indépendantes.

De la même manière que nous avons introduit les distributions de probabilité conditionnelles, nous pouvons introduire les densités de probabilité conditionnelle. Pour cela, il faut nous donner une application g permettant de relier les éléments de \mathcal{E}_1 aux éléments de \mathcal{E}_2 . Cette application est à voir comme une condition permettant de sélectionner les éléments de $f(x_1, x_2)$ qui satisfont à cette condition, les probabilités des autres éléments étant nuls. Introduire de manière générale les densités de probabilité conditionnelles est compliqué car elles dépendent du choix de l'application. Dans le cas simple, lorsque l'application choisie est linéaire et où les points x_1^i et x_2^i forment des coordonnées cartésiennes, on peut écrire¹ :

$$f_{\mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2}(x_1|x_2 = g(x_1)) = \frac{f(x_1, g(x_1))}{\int_{\mathcal{E}_1} dx f(x, g(x))} . \quad (\text{A.21})$$

Dans le cas où l'application g associe une valeur x_2^0 constante à toutes valeur de x_1 , on peut écrire la densité de probabilité jointe comme le produit de la densité de probabilité conditionnelle et la densité de probabilité marginale :

$$f(x_1, x_2^0) = f_{\mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2}(x_1|x_2^0) f_{\mathcal{E}_2}(x_2^0) . \quad (\text{A.22})$$

En introduisant une autre application g' associant à chaque élément de \mathcal{E}_2 un élément de \mathcal{E}_1 constant, x_1^0 , on peut réécrire le théorème de Bayes en utilisant les densités de probabilité conditionnelles :

$$f_{\mathcal{E}_1|\mathcal{E}_2}(x_1|x_2^0) = \frac{f_{\mathcal{E}_2|\mathcal{E}_1}(x_2|x_1^0) f_{\mathcal{E}_1}(x_1^0)}{f_{\mathcal{E}_2}(x_2^0)} . \quad (\text{A.23})$$

A.2.2 Résolution du problème inverse

Nous reprenons les notations utilisées dans l'introduction. \mathcal{P} est l'espace des paramètres d'un modèle \mathcal{M} décrivant un système physique \mathcal{G} . Le modèle est caractérisé par un ensemble de paramètres \mathbf{p} et par un ensemble d'équations \mathbf{F} . \mathcal{D} est l'ensemble des données connues concernant le système physique étudié. L'espace des paramètres est caractérisé par un système de coordonnées $p = \{p_1, p_2, \dots\}$ et par une densité de probabilité homogène $\mu_P(p)$. De la même manière, l'espace des données est caractérisée par des coordonnées $d = \{d_1, \dots\}$ et par une densité de probabilité homogène $\mu_D(d)$. L'espace physique \mathcal{E} est donné par le produit cartésien de $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$ et est caractérisé par les coordonnées $e = (p, d) = \{p_1, p_2, \dots, d_1, d_2, \dots\}$ et par sa densité de probabilité homogène jointe $\mu_E(e) = \mu(p, d) = \mu_D(d)\mu_P(p)$. Notons $\Theta(p, d)$ la densité de probabilité jointe décrivant les

1. Cette définition reste valide [677] lorsque l'application g n'est pas trop non-linéaire et que les coordonnées ne sont pas trop non-cartésiennes. Un exemple de problème "pas trop" non linéaire est donné en section 3

liens entre les données et les paramètres du modèle. Elle correspond à l'application g utilisée pour définir les densités de probabilité conditionnelles dans le paragraphe précédent. Si les hypothèses faites dans le paragraphe précédent sont vérifiées, alors on peut toujours écrire la densité de probabilité jointe $\Theta(p, d)$ comme le produit d'une densité de probabilité conditionnelle $\theta(d|p)$ et d'une densité de probabilité marginale. En choisissant comme densité marginale la densité homogène pour les paramètres $\mu_P(p)$, on peut écrire :

$$\Theta(p, d) = \theta(d|p)\mu_P(p) . \quad (\text{A.24})$$

Comme expliqué dans l'introduction, chaque mesure est affectée par une incertitude et le résultat d'une mesure peut être décrite par une densité de probabilité $\rho_D(d)$ définie sur \mathcal{D} .

D'autre part, les informations, a priori, que l'on a sur les paramètres du modèles peuvent être décrites par une densité de probabilité $\rho_P(p)$ définie sur \mathcal{P} . Lorsqu'aucune information n'est connue concernant les paramètres du modèle, autre que leur définition, cette densité de probabilité est la densité de probabilité homogène : $\rho_P(p) = \mu_P(p)$.

La totalité des informations a priori que l'on a peuvent être décrites dans \mathcal{E} par la densité de probabilité jointe $\rho(p, d)$. Dans le cas où les informations a priori concernant les données et les a priori concernant le modèle sont indépendantes, on peut écrire :

$$\rho(p, d) = \rho_P(p)\rho_D(d) . \quad (\text{A.25})$$

Le point de vue développé dans [683] est que l'information *a posteriori* est donnée par la conjonction des informations a priori $\rho(p, d)$ et $\Theta(p, d)$:

$$\sigma(p, d) = c \frac{\rho(p, d)\Theta(p, d)}{\mu(p, d)} , \quad (\text{A.26})$$

où $\mu(p, d)$ représente la densité homogène définie sur $\mathcal{E} = \mathcal{P} \times \mathcal{D}$ et où c est une facteur de normalisation. On peut alors définir les densités de probabilités marginales concernant les informations a posteriori dans \mathcal{P} :

$$\sigma_P(p) = \int_{\mathcal{D}} dd \sigma(p, d) , \quad (\text{A.27})$$

et les informations a posteriori dans \mathcal{D} :

$$\sigma_D(d) = \int_{\mathcal{P}} dp \sigma(p, d) . \quad (\text{A.28})$$

Si les hypothèses du paragraphe précédent sont vérifiées, c'est à dire que l'égalité donnée par l'équation A.24 est vérifiée et si l'on considère que les informations a priori concernant les données et les paramètres sont indépendantes (l'égalité donnée par l'équation A.25 est vérifiée), alors on peut écrire l'information a posteriori dans l'espace \mathcal{P} comme :

$$\sigma_P(p) = c \rho_P(p) \int_{\mathcal{D}} dd \frac{\rho_D(d)\theta(d|p)}{\mu_D(d)} . \quad (\text{A.29})$$

Le membre de droite de cette dernière équation ne dépend que des paramètres et peut être écrit comme :

$$L(p) = \int_{\mathcal{D}} dd \frac{\rho_D(d)\theta(d|p)}{\mu_D(d)} , \quad (\text{A.30})$$

donnant une mesure de la manière qu'ont les paramètres de reproduire les données, en d'autres terme, il s'agit d'une fonction de *likelihood*.

L'Eq. (A.29) est la solution générale d'un problème inverse à partir de laquelle on peut accéder à toutes les informations dont on pourrait avoir besoin concernant les paramètres du modèle, comme des valeurs moyennes, des barres d'erreurs, etc. On peut également avoir accès à la probabilité que les paramètres satisfassent certaines conditions en intégrant $\sigma_{\mathcal{P}}(p)$ sur le sous-espace de \mathcal{P} de l'ensemble des paramètres qui satisfont cette condition.

Lorsque le point de vue développé précédemment est adopté, l'existence de la solution veut dire que $\sigma_{\mathcal{P}}(p)$ n'est pas nulle. Si elle l'était, cela pourrait vouloir dire que les résultats expérimentaux, les a priori et les informations théoriques implémentées dans $\theta(p, d)$, sont incompatibles. Si l'on considère la densité de probabilité en tant que solution au problème, alors la solution, construite comme la conjonction de deux densités de probabilité, est unique.

Une fois que la densité de probabilité a posteriori $\sigma_{\mathcal{P}}(p)$ est connue, il faut l'étudier pour en tirer le maximum d'informations. Lorsque $\sigma_{\mathcal{P}}(p)$ est une gaussienne, les incertitudes sur les paramètres peuvent être obtenues en comparant les matrices de covariances pour la densité a posteriori ($\sigma_{\mathcal{P}}$) et celle pour la densité a priori $\rho_{\mathcal{P}}$. Cependant, lorsque la densité n'est pas une gaussienne, les moments perdent de leur sens¹. Dans ce cas, il faut opter pour d'autres méthodes.

Bien qu'il existe un grand nombre de méthodes possibles pour la résolution des problèmes inverses, elles ont toutes pour objectif de trouver la paramétrisation optimale, permettant d'expliquer au mieux les données, c'est à dire, de trouver le p telle que la densité $\sigma_{\mathcal{P}}(p)$ soit maximum.

Pour ce faire, il existe plusieurs classes de méthodes. On peut choisir d'explorer la totalité de l'espace \mathcal{P} afin d'avoir la densité $\sigma_{\mathcal{P}}$ en tout points, permettant d'obtenir le maximum global. Cette méthode est la plus simple à mettre en oeuvre numériquement et est relativement efficace pour des problèmes de dimension peu élevée et à condition que le calcul de $\sigma_{\mathcal{P}}$ ne soit pas trop lourd. En général, ce n'est pas le cas : soit le nombre de paramètres est grand, soit le calcul de la densité est long ; la plupart du temps les deux à la fois. Dans ce cas, il existe deux autres possibilités, formant deux autres classes de méthodes. La possibilité la plus proche de la méthode précédente, consiste toujours à explorer l'espace \mathcal{P} , mais cette fois ci en utilisant un processus pseudo-aléatoire permettant de n'explorer que certaines zones de l'espace \mathcal{P} . Ces méthodes sont dénommées Monte-Carlo. Pour plus de détails quant à leur utilisation pour la résolution des problèmes inverses, on peut se référer, par exemple, à [685, 686]. Ces méthodes nécessitent tout de même le calcul de $\sigma_{\mathcal{P}}$ un grand nombre de fois et peuvent donc être inappropriées lorsque $\sigma_{\mathcal{P}}$ est trop compliquée. Dans ce cas, l'utilisation de la dernière classe de méthode peut être utile. Ces méthodes consistent à définir une fonctionnelle de la distance dans \mathcal{E} entre les données et les prédictions et à la minimiser. Le résultat va évidemment dépendre de la manière dont la distance a été définie. Les méthodes traditionnellement utilisées définissent la distance à partir de la norme l_p , pour $p \in [1, \infty]$ ². En physique, le choix $p = 2$ est souvent fait et dans ce cas la minimisation se fait au sens des moindres carrés (voir par exemple [486, 488] en physique nucléaire). Lorsque le choix $p = 1$ est fait, la minimisation se fait au sens des moindres valeurs absolues. Le choix $p = \infty$, correspondant aux fonctions bornées, peut se faire lorsque les incertitudes sur les données et les incertitudes a priori sont bornées. Dans ce cas, il est possible de montrer que la densité $\sigma_{\mathcal{P}}$ est constante (n'a donc pas de maximum). Il est néanmoins possible de définir une fonction associant aux paramètres le maximum de la distance, au sens de la norme l_1 , entre les données et le modèle. Les paramètres optimaux sont ceux pour lesquels cette fonction est minimum (méthode minimax)³.

En général, en physique, lorsque l'on cherche à résoudre le problème inverse, on fait sans le dire

1. Par exemple, la valeur moyenne obtenue à partir d'une densité de probabilité de type double gaussienne est un point pour lequel la probabilité peut être faible.

2. Remarque : Les espaces L_p sont les espaces *vectoriels* des fonctions exposant p sommables.

3. Je n'ai pas trouvé d'exemple en physique nucléaire où ce critère est utilisé.

l'hypothèse que les espaces considérés sont des espaces vectoriels et on cherche la solution comme celle minimisant la distance au sens des moindres carrés. Cela n'est pas forcément étonnant, car, implicitement, les espaces considérés sont de Hilbert (c'est à dire des espaces de fonctions de norme l_2). Ce choix peut paraître étonnant, puisque la physique impose a priori des contraintes sur les paramètres utilisés : les paramètres sont donc des fonctions bornées (vivant dans L_∞).

D'une manière générale, la norme l_2 a tendance à donner plus de poids aux points aberrants et l'utilisation du critère de moindre carré dans le cas où les distributions ne sont pas exactement gaussienne peut être dangereuse. Au contraire, le critère de moindre valeur absolue est plus robuste face à ce genre de problème [687].

Une dernière remarque peut être faite. Dans la définition de Hadamard d'un problème bien posé, l'unicité de la solution est un critère. Dans le point de vue adopté ici, la solution au problème inverse est la densité de probabilité σ_P dans son ensemble. De ce point de vue, la solution est unique. Cependant, comme dit juste au dessus, nous cherchons les paramètres pour lesquels le modèle reproduit au mieux les données, c'est à dire la maximum de σ_P . Si l'on considère comme solution au problème inverse une paramétrisation donnée obtenue grâce à une des méthodes précédentes, il n'est pas possible d'assurer l'unicité : σ_P peut avoir plusieurs maxima.

Un des objectifs du travail de thèse a été d'appliquer certaines de ces méthodes dans le cadre des modèles de type NJL, afin d'extraire une mesure de la qualité des prédictions obtenues, en particulier celle du point critique chiral.

Annexe B

Sensibilité de la prédiction du CEP dans un modèle NJL simple - détails des calculs

B.1 Inversion analytique du modèle NJL

Le modèle NJL que nous considérons ici, dont le lagrangien est donné par l'Eq. (3.1) a trois paramètres m_0 , Λ et G , dont les valeurs sont ajustées pour reproduire la masse du pion, m_π , la constante de désintégration du pion, f_π et le condensat de quark $\langle \bar{q}q \rangle$.

Le système d'équations définissant le problème inverse est donné par les équations (3.5,3.6,3.4). Quand $(m_\pi, f_\pi, \langle \bar{q}q \rangle)$ sont fixés à leur valeur phénoménologique, le système :

$$m_\pi^2 = -\frac{m_0}{m} \frac{1}{4iGN_c N_f I_2(0)}, \quad (\text{B.1})$$

$$f_\pi^2 = -4iN_c m^2 I_2(0), \quad (\text{B.2})$$

$$\langle \bar{q}q \rangle = \frac{m_0 - m}{2G}, \quad (\text{B.3})$$

doit être résolu pour les paramètres Λ , m_0 et G , conjointement avec la résolution de l'équation du gap (3.2) permettant d'accéder à la masse dynamique des quarks m :

$$m_0 - m + 8iGN_c N_f m I_1 = 0. \quad (\text{B.4})$$

B.1.1 Réduction du système

L'idée est de réduire le système en utilisant des quantités adimensionalisées. Pour ce faire, nous réécrivons les équations (3.3,Eq. (3.7)) :

$$I_1 = -i\Lambda^2 i_1(m/\Lambda),$$

avec $i_1(x) \equiv \int^1 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{p^2 + x^2}}, \quad (\text{B.5})$

et

$$I_2(0) = \frac{i}{4} i_2(m/\Lambda),$$

$$\text{avec } i_2(x) \equiv \int^1 \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{-1}{(p^2 + x^2)^{3/2}}. \quad (\text{B.6})$$

Les intégrales i_1 et i_2 sont analytiques et sont données par :

$$i_1(x) = \frac{1}{8\pi^2} \left[\Lambda_E + x^2 \log \left(\frac{x}{1 + \Lambda_E} \right) \right], \quad (\text{B.7})$$

$$i_2(x) = \frac{1}{2\pi^2} \left[\frac{1}{\Lambda_E} + \log \left(\frac{x}{1 + \Lambda_E} \right) \right], \quad (\text{B.8})$$

où $\Lambda_E = \sqrt{x^2 + 1}$.

Pour résoudre le système, l'échelle Λ est utilisée pour adimensionnaliser les variables :

$$x = m/\Lambda \quad \text{and} \quad x_0 = m_0/\Lambda. \quad (\text{B.9})$$

Avec ces variables, le système peut se réécrire comme :

$$\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} = \frac{x_0}{x} \frac{1}{G\Lambda^2 N_c N_f i_2(x)}, \quad (\text{B.10})$$

$$\frac{f_\pi^2}{\Lambda^2} = N_c x^2 i_2(x), \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{\Lambda^3} = \frac{x_0 - x}{2G\Lambda^2}, \quad (\text{B.12})$$

et l'équation du gap devient :

$$0 = x_0 - x + 8G\Lambda^2 N_c N_f x i_1(x). \quad (\text{B.13})$$

Cette équation est automatiquement résolue si

$$G\Lambda^2 = \frac{x - x_0}{8N_c N_f x i_1(x)}. \quad (\text{B.14})$$

Cette forme pour $G\Lambda^2$ peut être introduite dans les équations (B.11) et (B.12). En introduisant la nouvelle variable :

$$\delta = \frac{x - x_0}{x_0}, \quad (\text{B.15})$$

le système s'écrit :

$$\frac{m_\pi^2}{\Lambda^2} = \frac{8i_1(x)}{\delta i_2(x)}, \quad (\text{B.16})$$

$$\frac{f_\pi^2}{\Lambda^2} = N_c x^2 i_2(x), \quad (\text{B.17})$$

$$\frac{\langle \bar{q}q \rangle}{\Lambda^3} = -4N_c N_f x i_1(x). \quad (\text{B.18})$$

Sous cette forme, le système peut se résoudre en calculant dans un premier temps le ratio :

$$\alpha = \frac{f_\pi^3}{\langle \bar{q}q \rangle} . \quad (\text{B.19})$$

Ce ratio est une constante phénoménologique indépendante de l'échelle Λ . Ensuite, il faut trouver une solution pour x , qui est la solution d'un système d'une équation à une inconnue (α) si l'on considère le quotient de l'équation (B.17) et (B.18) :

$$G_\alpha(x) = 0 , \quad (\text{B.20})$$

avec :

$$G_\alpha(x) = \frac{\sqrt{N_c} x^2 (i_2(x))^{3/2}}{4N_f i_1(x)} + \alpha . \quad (\text{B.21})$$

Une fois que Eq. (B.20) est résolue, on peut calculer δ en calculant le ratio f_π^2/m_π^2 :

$$\delta = \frac{f_\pi^2}{m_\pi^2} \frac{8i_1(x)}{N_c (xi_2(x))^2} . \quad (\text{B.22})$$

Enfin, il suffit de remettre le système à l'échelle en calculant :

$$\Lambda = \frac{f_\pi}{x \sqrt{N_c i_2(x)}} . \quad (\text{B.23})$$

Les valeurs de m_0 et G sont alors données par :

$$m_0 = \Lambda \frac{x}{\delta + 1} , \quad (\text{B.24})$$

$$G = \frac{1}{\Lambda^2} \frac{x - x_0}{8N_c N_f x i_1(x)} . \quad (\text{B.25})$$

B.1.2 Solution pour x

Si aucun des paramètres n'est nul, alors le système donné par les équations (B.16, B.17, Eq. (B.18)) est équivalent à l'équation (B.20). Cette équation doit être résolue pour x et suivant la valeur de la constante α (voir l'équation (B.19)), le système peut être résolu ou non. La figure B.1 donne une représentation de la fonction G_α tracée en fonction de x pour trois valeurs typiques du paramètre α . Nous voyons graphiquement que si $\alpha > \alpha_c$, où α_c est définie comme la valeur de α pour laquelle la valeur de la fonction G_α pour $x = x_{\max}$ est nulle :

$$\alpha_c \Leftrightarrow G_{\alpha_c}(x_{\max}) = 0 . \quad (\text{B.26})$$

alors l'équation (B.20) possède des solutions.

Comme l'abscisse du maximum de $G_\alpha(x)$ est indépendante de α , il suffit de calculer une seule fois la valeur critique $\alpha_c = -0.0283275$. Pour toutes les valeurs de α respectant la condition $\alpha > \alpha_c$, le système possède deux solutions. La première peut être trouvée numériquement dans l'intervalle $[0, x_{\max}]$. Cette solution correspond à la masse dynamique "physique" des quarks $x = m/\Lambda < x_{\max}$. La seconde racine correspond à une solution non physique¹ pour la masse $m/\Lambda > x_{\max}$. Si l'on

1. Cette seconde solution est un autre moyen de voir le phénomène décrit dans [121] (figure 2.6).

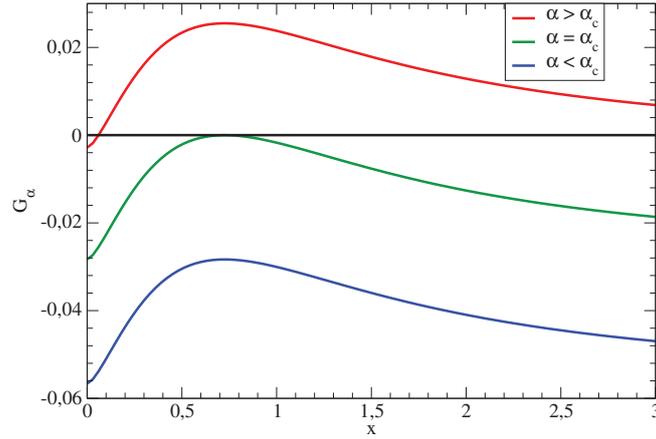


FIGURE B.1 – Fonction $G_\alpha(x)$ pour trois valeurs typiques du paramètre α , toujours négatif pour des valeurs phénoménologiques physiques des inputs. $0 > \alpha > \alpha_c$ (courbe du haut) : il existe deux solutions. $\alpha = \alpha_c$ (courbe du milieu) : il existe une solution dégénérée au maximum. $\alpha < \alpha_c$ (courbe du bas) : il n'existe pas de solutions. Lorsque $\alpha > \alpha_c$, le système a deux solutions, l'une est physique, lorsque $x < x_{\max}$ et l'autre ne l'est pas, lorsque $x > x_{\max}$, où x_{\max} est l'abscisse du maximum de G_α .

s'intéresse à cette solution non physique, un moyen de la trouver est de calculer l'asymptote de $G_\alpha(x)$ en $x \rightarrow +\infty$ donnée par :

$$G_\alpha^\infty(x) = \sqrt{\frac{N_c}{3}} \frac{x^{-3/2}}{4\pi N_f} + \alpha . \quad (\text{B.27})$$

La solution de $G_\alpha^\infty(x) = 0$ est analytique et s'écrit :

$$x^\infty = - \left(\frac{N_c}{24} \right)^{1/3} (\alpha\pi N_f)^{-2/3} . \quad (\text{B.28})$$

La solution non physique peut alors être chercher numériquement dans l'intervalle $[x_{\max}, x^\infty]$.

B.2 Algorithme rapide pour le calcul de la position du CEP

Pour étudier les propriétés dans le milieu du modèle NJL, il faut généraliser l'équation du gap (B.4), écrite dans le vide, à température et potentiel chimique finis. L'équation du gap à résoudre alors est :

$$g_m(m, T, \mu) = 0 , \quad (\text{B.29})$$

où :

$$g_m = m_0 - m + 8GN_c N_f m [iI_1(m, \Lambda) - I_\beta(m, T, \mu)] , \quad (\text{B.30})$$

avec I_1 l'intégrale donnée par l'équation (B.5) et I_β est l'intégrale définie par :

$$I_\beta = \int^\infty \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} [f(p) + \bar{f}(p)] , \quad (\text{B.31})$$

où $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ et f et \bar{f} sont les distributions de Fermi-Dirac pour les quarks et les antiquarks respectivement :

$$f(p) = \frac{1}{1 + \exp(\beta(E_p - \mu))},$$

$$\bar{f}(p) = \frac{1}{1 + \exp(\beta(E_p + \mu))},$$

avec $\beta = T^{-1}$ et $k_B = 1$. La solution de l'équation (B.29) est tracée en fonction du potentiel chimique pour plusieurs températures en figure B.2.

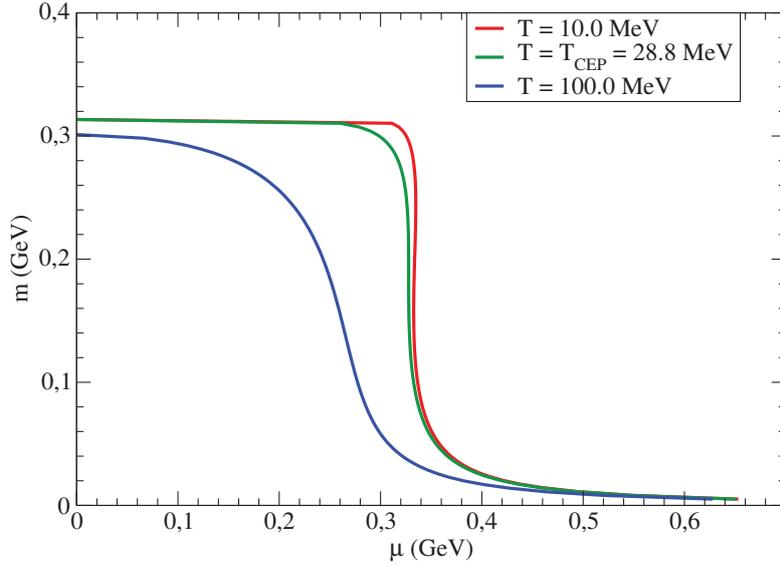


FIGURE B.2 – Solution m de l'équation du gap dans le milieu en fonction du potentiel chimique pour trois valeurs de la température. Le comportement dans les trois cas sont décrit dans le texte.

La solution m des équations du gap dans le milieu possède trois comportements différents :

- Lorsque $T > T_{\text{CEP}}$, il n'y a qu'une solution $m(T, \mu)$ caractéristique d'une transition de type crossover entre la phase à symétrie chirale spontanément brisée ($\langle \bar{q}q \rangle \neq 0$) vers la phase à symétrie chirale restaurée ($\langle \bar{q}q \rangle \simeq 0$) ;
- Lorsque $T < T_{\text{CEP}}$, il existe, dans une certaine fenêtre de potentiel chimique, trois solutions pour m , caractéristique d'une transition de premier ordre, dont les solutions sont caractérisées de stable, métastable et instable ;
- Lorsque $T = T_{\text{CEP}}$, il existe une unique solution pour m . Cependant, si $\mu = \mu_{\text{CEP}}$, alors la tangente à la courbe $m(T, \mu)$ en ce point est infinie. Au CEP, la transition est de second ordre.

Pour calculer les coordonnées du CEP, il faut calculer la température et le potentiel chimique pour lesquels la courbe m possède une tangente infinie unique¹ :

$$\left. \frac{dm}{d\mu} \right|_{T=T_{\text{CEP}}} = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \left. \frac{d\mu}{dm} \right|_{T=T_{\text{CEP}}} = 0, \quad (\text{B.32})$$

1. Dans le cadre du modèle NJL considéré ici, il est équivalent de travailler avec la masse ou avec le condensat de quark, qui est le "vrai" paramètre d'ordre de la transition.

où la fonction $\mu(m, T)$ est une solution implicite de l'équation $g_m(m, T, \mu(m, T)) = 0$. Il est plus simple d'étudier la fonction $\mu(m, T)$ car elle est toujours uniquement définie, à l'inverse de la fonction $m(T, \mu)$ qui peut être multivaluée.

A cause de l'unicité de la tangente infinie au CEP, ce point est également un point d'inflexion. Ainsi, les coordonnées du CEP sont trouvées en résolvant le système d'équations suivant :

$$g_m(m_{\text{CEP}}, T_{\text{CEP}}, \mu_{\text{CEP}}) = 0 , \quad (\text{B.33})$$

$$\left. \frac{d\mu}{dm} \right|_T (m_{\text{CEP}}, T_{\text{CEP}}, \mu_{\text{CEP}}) = 0 , \quad (\text{B.34})$$

$$\left. \frac{d^2\mu}{dm^2} \right|_T (m_{\text{CEP}}, T_{\text{CEP}}, \mu_{\text{CEP}}) = 0 . \quad (\text{B.35})$$

La méthode traditionnelle pour calculer les coordonnées du CEP est de résoudre numériquement l'équation (B.33) et ensuite de trouver le maximum de $d\mu/dm$ quelque soit T et enfin de trouver T tel que $d\mu/dm$ soit nulle. Cette méthode marche bien, si les dérivées ne sont pas calculées numériquement et si les valeurs initiales données à l'algorithme ne sont pas trop éloignées des solutions. Le temps nécessaire pour trouver les coordonnées d'un CEP en utilisant cette méthode est de l'ordre de la demi seconde. Dans la suite, nous présentons un algorithme permettant d'accélérer les calculs.

B.2.1 Réécriture des équations du gap

Nous introduisons les nouvelles variables :

$$\sigma = \beta\mu \quad \text{and} \quad x = \beta m . \quad (\text{B.36})$$

À la différence de l'adimensionnalisation pratiquée précédemment, l'échelle utilisée ici est la température. Nous gardons les mêmes noms de variables car aucune confusion n'est possible. En utilisant le changement de variable $p \rightarrow \beta p$ dans l'intégrale donnée par l'équation (B.31), on peut écrire :

$$I_\beta(m, T, \mu) = T^2 i_\beta(\sigma, x) , \quad (\text{B.37})$$

où i_β est donnée par :

$$i_\beta(\sigma, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E} [f(p) + \bar{f}(p)] , \quad (\text{B.38})$$

où $E = \sqrt{p^2 + x^2}$ et f et \bar{f} sont les distributions de Fermi-Dirac $f = [1 + \exp(E \pm \sigma)]^{-1}$.

L'équation au champ moyen, donnée par l'équation (B.33), peut être réécrite en utilisant les nouvelles variables $x_0 = \beta m_0$, $\gamma = GT^2$ et $\lambda = \beta\Lambda$ comme :

$$0 = x_0 - x - 8\gamma N_c N_f x [i_\beta(\sigma, x) - \lambda^2 i_1(x/\lambda)] . \quad (\text{B.39})$$

Si l'on introduit la variable $\eta = x/\lambda$, l'équation précédente peut être écrite comme :

$$8\gamma N_c N_f \eta^2 i_1(\eta^{-1}) = 8\gamma N_c N_f \frac{i_\beta(\sigma, x)}{x^2} - \frac{x_0}{x^3} + x^{-2} . \quad (\text{B.40})$$

En utilisant la définition des nouvelles variables, on peut calculer :

$$\frac{1}{\gamma x^2} = \frac{\eta^2}{G\Lambda^2} \quad \text{et} \quad \frac{x_0}{\gamma x^3} = \eta^3 \frac{m_0}{\Lambda} \frac{1}{G\Lambda^2} , \quad (\text{B.41})$$

et, en introduisant :

$$a = (8G\Lambda^2 N_c N_f)^{-1} \quad \text{et} \quad b = \frac{m_0}{\Lambda}, \quad (\text{B.42})$$

l'équation du gap devient :

$$a\eta^2(b\eta - 1) + \eta^2 i_1(\eta^{-1}) = \frac{i_\beta(\sigma, x)}{x^2}. \quad (\text{B.43})$$

Nous pouvons alors introduire la fonction $F(\eta)$ telle que :

$$F(\eta) = a\eta^2(b\eta - 1) + \eta^2 i_1(\eta^{-1}), \quad (\text{B.44})$$

et la fonction $Z(\sigma, x)$ telle que :

$$Z(\sigma, x) = \frac{i_\beta(\sigma, x)}{x^2}. \quad (\text{B.45})$$

L'équation (B.43) s'écrit alors simplement :

$$F(\eta) = Z(\sigma, x). \quad (\text{B.46})$$

Comme l'intégrale donnée par l'équation (B.38) est calculée numériquement, calculer son inverse prend du temps. Au contraire, l'intégrale $i_1(x)$ étant analytique, la fonction inverse $F^{-1}(\eta)$ peut être calculée efficacement en utilisant un simple algorithme de recherche de zéro. Lorsque σ et x sont fixés, la solution η de l'équation du gap est donnée par :

$$\eta_{\text{MFE}}(\sigma, x) = F^{-1} \circ Z(\sigma, x), \quad (\text{B.47})$$

où η_{MFE} est le η solution de l'équation ; solution à partir de laquelle peuvent être calculés la masse, la température et le potentiel chimique en utilisant les relations :

$$m = \frac{\Lambda}{\eta_{\text{MFE}}}; \quad T = \frac{\Lambda}{x\eta_{\text{MFE}}}; \quad \mu = \frac{\Lambda\sigma}{x\eta_{\text{MFE}}}. \quad (\text{B.48})$$

Il peut paraître étonnant de travailler avec ces variables, mais l'utilisation de ces variables est en fait équivalent à choisir une trajectoire sur la surface définie par :

$$g_m(m, T, \mu) = 0. \quad (\text{B.49})$$

Par exemple, à σ fixé, calculer $\eta(x)$ et ensuite $m(x) = \Lambda/\eta(x)$ est équivalent à calculer $g_m(m, T, \mu) = 0$ sous la contrainte $\sigma = \text{cst} = \mu/T$.

La courbe paramétrique $\{m = m(x), \mu = \Lambda\sigma/[x\eta(x)]\}$ à σ fixé est simplement la solution de :

$$g_m\left(m(\mu), T = \frac{\mu}{\sigma}, \mu\right) = 0, \quad (\text{B.50})$$

i.e. , la solution de l'équation du gap sur les lignes $T = \mu/\sigma$ dans le plan (T, μ) .

Comme le CEP est définie comme le point où la courbe de m a une dérivée infinie par rapport aux paramètres thermodynamiques T et μ , il faut être prudent lorsque l'on cherche à calculer sa position. D'après l'équation (B.50), calculer les coordonnées du CEP est équivalent à résoudre le système données par les équations (B.33, B.34, B.35) à σ fixé. On peut remarquer que travailler à x fixé donnerait lieu à des équations plus simple, mais il est possible de vérifier que la solution trouvée ne correspondrait pas au CEP. En effet la trajectoire suivie sur la surface $S = \{g_m(m, T, \mu) = 0\}$ n'est pas triviale et le lien entre cette solution et CEP n'est pas évident.

B.2.2 Trouver la position du CEP

En utilisant les précédentes notations, le système peut être écrit comme :

$$F(\eta) = Z(\sigma, x) , \quad (\text{B.51})$$

$$\left. \frac{d\mu}{dm} \right|_{\sigma} = 0 , \quad (\text{B.52})$$

$$\left. \frac{d^2\mu}{dm^2} \right|_{\sigma} = 0 , \quad (\text{B.53})$$

où :

$$\frac{\mu}{\Lambda}(\sigma, x) = \frac{\sigma}{\eta x} , \quad (\text{B.54})$$

$$\frac{m}{\Lambda}(\sigma, x) = \eta^{-1} . \quad (\text{B.55})$$

À σ fixé, on peut calculer la différentielle totale :

$$d\left(\frac{\mu}{\Lambda}\right) = -\frac{\sigma}{x\eta^2}d\eta - \frac{\sigma}{\eta x^2}dx , \quad (\text{B.56})$$

$$d\left(\frac{m}{\Lambda}\right) = -\frac{d\eta}{\eta^2} . \quad (\text{B.57})$$

À partir de l'équation (B.51) et en utilisant les équations (B.56) et (B.57), on trouve :

$$\eta F'(\eta) + x Z_x(\sigma, x) = 0 , \quad (\text{B.58})$$

où F' est la dérivée de la fonction F par rapport à η et Z_x est la dérivée partielle de la fonction Z par rapport à x . De la même manière, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d^2\mu}{dm^2} \right|_{\sigma} \\ &= \frac{d}{dm} \left[-\frac{\sigma}{\eta x} \left(\eta^{-1} + x^{-1} \frac{dx}{d\eta} \right) (-\eta^2) \right] . \end{aligned} \quad (\text{B.59})$$

Après quelques manipulations et en utilisant l'équation (B.58), on trouve :

$$\eta^2 F''(\eta) - x^2 Z_{xx}(\sigma, x) - 2x Z_x(\sigma, x) = 0 , \quad (\text{B.60})$$

où Z_{xx} est la seconde dérivée partielle de la fonction Z par rapport à x .

Le système à résoudre s'écrit alors comme :

$$F(\eta) - Z(\sigma, x) = 0 , \quad (\text{B.61})$$

$$\eta F'(\eta) + x Z_x(\sigma, x) = 0 , \quad (\text{B.62})$$

$$\eta^2 F''(\eta) - x^2 Z_{xx}(\sigma, x) - 2x Z_x(\sigma, x) = 0 . \quad (\text{B.63})$$

Avec une initialisation correcte, en particulier si la valeur initiale de η est déjà solution de l'équation (B.47) pour les valeurs initiales de x et de σ , un simple algorithme de recherche de zéro

trouvera la solution en quelques millisecondes, soit environ cent fois plus rapide que l'algorithme usuellement utilisé.

Suivant la valeur des paramètres a et b , donnés par l'équation (B.42), le CEP peut ne pas exister. Dans ce cas, on ne doit pas essayer de résoudre le système donné par les équations (B.61, B.62, B.63).

Pour détecter si un CEP existe ou non, il suffit de regarder si une solution métastable existe à température nulle, *i.e.*, en résolvant pour m l'équation $d^2\mu/d^2m = 0$ et en calculant la valeur de $d\mu/dm$ en ce point. Un CEP existe si $d\mu/dm > 0$.

B.3 Calcul analytique de la sensibilité de la masse du méson sigma

Pour calculer la sensibilité de la masse du méson sigma :

$$m_\sigma^2 = 4m^2 + m_\pi^2, \quad (\text{B.64})$$

on peut utiliser le précédent changement de variable $m = \Lambda x$. Ainsi :

$$m_\sigma^2 = 4\Lambda^2 x^2 + m_\pi^2. \quad (\text{B.65})$$

Si x est solution de l'équation (B.20), alors Λ est donné par l'équation (B.23) et la masse du sigma peut s'écrire comme :

$$m_\sigma = \sqrt{\frac{4}{N_c} \frac{f_\pi^2}{i_2} + m_\pi^2}. \quad (\text{B.66})$$

Avec $c^3 = -\langle \bar{q}q \rangle$, il est possible d'écrire la différentielle suivante :

$$di_2 = \frac{di_2}{dx} dx = -\frac{di_2}{dx} \frac{1}{G'_\alpha(x)} d(f_\pi^3/c^3). \quad (\text{B.67})$$

Il est assez simple de calculer $dm_\sigma^2 = 2m_\sigma dm_\sigma$ ainsi que les dérivées partielles nécessaires. On trouve :

$$\frac{\partial m_\sigma}{\partial m_\pi} = \frac{m_\pi}{m_\sigma}, \quad (\text{B.68})$$

$$\frac{\partial m_\sigma}{\partial f_\pi} = \frac{2f_\pi}{m_\sigma N_c i_2} \left(2 + \frac{3\alpha}{i_2} \frac{di_2}{dx} \frac{1}{G'_\alpha} \right), \quad (\text{B.69})$$

$$\frac{\partial m_\sigma}{\partial c} = -6 \frac{f_\pi^2}{m_\sigma N_c i_2^2} \frac{\alpha}{c} \frac{di_2}{dx} \frac{1}{G'_\alpha}. \quad (\text{B.70})$$

Avec les valeurs des inputs données dans un précédent paragraphe, on trouve :

$$dm_\sigma = 0.21 dm_\pi + 34 df_\pi - 8.2 dc. \quad (\text{B.71})$$

Lorsque la dispersion relative est infinitésimale, on trouve alors :

$$\Sigma(m_\sigma) = 6.42. \quad (\text{B.72})$$

La valeur trouvée avec l'algorithme Monte-Carlo est $\Sigma(m_\sigma) = 6.41$ (voir le tableau 3.1) et est en bon accord.

La difficulté vient du fait que l'équation pour x est implicite. Dans la cas que nous étudions, toutes les quantités apparaissant dans les équations définissant le problème inverse ne dépendent que de la solution de l'équation (B.20) qui ne dépend que du ratio $\alpha = f_\pi^3/c^3$. On peut alors avoir accès aux sensibilités des prédictions dans le vide de manière assez simple. Ce n'est pas la cas pour les prédictions dans le milieu et ce ne sera plus le cas lorsque la résolution du problème inverse ne sera plus équivalente à la résolution d'une équation d'une inconnue. Dans ces cas, l'utilisation de la méthode Monte-Carlo est une bonne alternative.

B.4 Calcul analytique de la composition de distributions de probabilité

Pour vérifier si les résultats obtenus avec la simulation Monte-Carlo sont corrects, nous les comparons aux distributions de probabilité théorique lorsqu'il est facilement possible de les calculer.

Dans le cas d'une seule variable, la composition de deux distributions de probabilité se fait de la manière suivante. Soient X et Y deux variables aléatoires, suivant respectivement les distributions de probabilité ρ_X et $Y = f(X)$, *i.e.*, la variable aléatoire Y est une fonction de la variable aléatoire X . Soient x et y les réalisations des variables aléatoires X et Y suivant leur distributions de probabilité.

Si la fonction f est monotone croissante, la probabilité de trouver x entre x_1 et x_2 (avec $x_1 < x_2$) est égale à la probabilité de trouver y entre $y_1 = f(x_1)$ et $y_2 = f(x_2)$:

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = P(y_1 = f(x_1) \leq y \leq y_2 = f(x_2)) . \quad (\text{B.73})$$

Par définition de la distribution de probabilité, les égalités suivantes sont vérifiées :

$$P(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \rho_X(x) dx ; \quad (\text{B.74})$$

$$P(y_1 \leq y \leq y_2) = \int_{f(x_1)}^{f(x_2)} \rho_Y(x) dy . \quad (\text{B.75})$$

On peut alors exprimer ρ_X comme :

$$\rho_X(x) = (\rho_Y \circ f)(x) f'(x) , \quad (\text{B.76})$$

impliquant :

$$\rho_Y(y) = (\rho_X \circ f^{-1})(y) \left[(f' \circ f^{-1})(y) \right]^{-1} . \quad (\text{B.77})$$

Pour illustrer le cas de deux variables, nous donnons le résultat de la distribution ρ_α . En suivant la même procédure que dans le cas d'une seule variables et en utilisant la notation f pour f_π et c

pour $\langle \bar{q}q \rangle$, on trouve :

$$\begin{aligned}
P(\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2) &= P\left(\frac{f^3}{c} \in [\alpha_1, \alpha_2]\right) \\
&= P\left(\frac{f^3}{c} \geq \alpha_1 \wedge \frac{f^3}{c} \leq \alpha_2\right) \\
&= P\left(f \in \mathbb{R}^+ \wedge \frac{f^3}{\alpha_2} \leq x \leq \frac{f^3}{\alpha_1}\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}^+} df \int_{f^3/\alpha_2}^{f^3/\alpha_1} dc \rho_f(f) \rho_c(c) .
\end{aligned} \tag{B.78}$$

Cette probabilité peut se réécrire en utilisant la distribution de probabilité ρ_α :

$$P(\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho_\alpha(\alpha) d\alpha , \tag{B.79}$$

nous permettant d'obtenir une expression pour ρ_α :

$$\rho_\alpha(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} \int_{\mathbb{R}^+} df \int_{f^3/\alpha}^{f^3/\alpha^*} dc \rho_f(f) \rho_c(c) , \tag{B.80}$$

où α^* est une constante. Finalement, ρ_α peut s'écrire :

$$\rho_\alpha(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2} \int_{\mathbb{R}^+} df f^3 \rho_f(f) \rho_c(f^3/\alpha) . \tag{B.81}$$

B.5 Kernel density approximation

Lorsqu'un CEP a été calculé pour toutes les configurations de paramètres solution du problème inverse, on a accès à une distribution de CEP. Cette distribution peut être représentée graphiquement, voir la figure 3.5. Cependant, il est également intéressant d'avoir accès à la densité de points dans le plan (T, μ) et ainsi avoir accès à la distribution de probabilité de CEP. Il est possible de construire une densité à partir de données en utilisant la technique de *Kernel Density approximation* (KDE) utilisant des kernels gaussiens.

Suivant les équations (4), (5), (6) et (7) de la référence [688], on peut reconstruire la densité $\rho(T_{CEP}, \mu_{CEP})$. Cet algorithme normalise la densité ($\int \rho(T, \mu) dT d\mu = 1$) de façon à obtenir une distribution de probabilité dont la dimension est dans notre cas des GeV^{-2} .

Pour ce faire, il faut d'abord calculer la matrice de covariance S et transformer les données de manière à obtenir un ensemble de données de moyenne nulle et de déviation standard unitaire. Cette transformation se fait en appliquant aux données la racine de la matrice de covariance $S^{1/2}$.

Ensuite, chaque point transformé est remplacé par une gaussienne de variance choisie telle que la sa déviation standard soit suffisamment grande pour chevaucher les autres points, mais suffisamment petite pour ne pas créer de longues queues qui n'existe pas dans les données. Cette procédure de lissage est contrôlée par le paramètre h donné dans le papier [688]. Nous avons vérifié qu'avec ce paramètre, nous étions capable de reconstruire correctement une distribution gaussienne à deux dimensions avec seulement une centaine de point (ce qui est le cas simple dans le cas où les kernels utilisés sont gaussiens) et aussi de reconstruire une distribution uniforme à deux dimension relativement bien avec une centaine de points.

Enfin, la densité reconstruite est la somme des données lissées sur lesquelles la matrice $S^{-1/2}$ est appliquée pour retrouver les données originale.

Bibliographie

- [1] J. CHADWICK, *Nature* **129**, 312–312 (1932).
- [2] J. Chadwick, *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **142**, 1–25 (1933).
- [3] D. J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343–1346 (1973).
- [4] H. D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346–1349 (1973).
- [5] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler, *Phys. Lett. B* **47**, 365–368 (1973).
- [6] E. Wigner, *Phys. Rev.* **43**, 252–257 (1933).
- [7] W. Heisenberg, *Z. Physik* **80**, 587–596 (1933).
- [8] W. Heisenberg, *Z. Physik* **78**, 156–164 (1932).
- [9] W. Heisenberg, *Z. Physik* **77**, 1–11 (1932).
- [10] E. Fermi, *Z. Physik* **88**, 161–177 (1934).
- [11] E. Fermi, *Nuovo Cim* **11**, 1–19 (1934).
- [12] I. TAMM, *Nature* **133**, 981–981 (1934).
- [13] H. YUKAWA, *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series* **17**, 48 (1935).
- [14] P. A. M. Dirac, *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **114**, 243–265 (1927).
- [15] E. Fermi, *Rev. Mod. Phys.* **4**, 87–132 (1932).
- [16] J. Street and E. Stevenson, *Phys. Rev.* **52**, 1003–1004 (1937).
- [17] S. H. Neddermeyer and C. D. Anderson, *Phys. Rev.* **51**, 884–886 (1937).
- [18] N. Kemmer, *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **166**, 127–153 (1938).
- [19] H. Frohlich, W. Heitler, and N. Kemmer, *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **166**, 154–177 (1938).
- [20] H. YUKAWA, S. SAKATA, and M. TAKETANI, *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series* **20**, 319 (1938).
- [21] H. YUKAWA and S. SAKATA, *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series* **19**, 1084 (1937).
- [22] H. YUKAWA, S. SAKATA, M. KOBAYASI, and M. TAKETANI, *Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan. 3rd Series* **20**, 720 (1938).
- [23] C. MOLLER and L. ROSENFELD, *Nature* **144**, 476–477 (1939).
- [24] W. Rarita and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **59**, 436–452 (1941).
- [25] W. Rarita and J. Schwinger, *Phys. Rev.* **59**, 556–564 (1941).
- [26] C. M. G. LATTES, H. MUIRHEAD, G. P. S. OCCHIALINI, and C. F. POWELL, *Nature* **159**, 694–697 (1947).
- [27] R. Bjorklund, W. E. Crandall, B. J. Moyer, and H. F. York, *Phys. Rev.* **77**, 213–218 (1950).
- [28] L. Landau, *Nuclear Physics* **13**, 181–192 (1959).
- [29] M. M. Broido and J. G. Taylor, *Phys. Rev.* **147**, 993–1016 (1966).
- [30] G. F. Chew, S. C. Frautschi, and S. Mandelstam, *Phys. Rev.* **126**, 1202–1208 (1962).
- [31] H. P. Stapp, *Phys. Rev.* **125**, 2139–2162 (1962).
- [32] J. Gunson, *Journal of Mathematical Physics* **6**, 827 (1965).
- [33] R. J. Eden, P. V. Landshoff, D. I. Olive, and J. C. Polkinghorne, *The Analytic S-Matrix* (Cambridge University Press, 2002).
- [34] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **125**, 1067–1084 (1962).
- [35] M. Gell-Mann, *Physics Letters* **8**, 214–215 (1964).
- [36] G. Zweig, An SU(3) model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 2, in *DEVELOPMENTS IN THE QUARK THEORY OF HADRONS. VOL. 1. 1964 - 1978*, edited by D. Lichtenberg and S. P. Rosen, pp. 22–101, CERN-TH, 1964.
- [37] A. Petermann, *Nuclear Physics* **63**, 349–352 (1965).
- [38] K. Nishijima, *Prog. Theor. Phys.* **13**, 285–304 (1955).
- [39] M. Gell-Mann, *Nuovo Cim* **4**, 848–866 (1956).
- [40] R. E. Behrends, J. Dreitlein, C. Fronsdal, and W. Lee, *Rev. Mod. Phys.* **34**, 1–40 (1962).
- [41] V. E. Barnes *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **12**, 204–206 (1964).

- [42] O. W. Greenberg, Phys. Rev. Lett. **13**, 598–602 (1964).
- [43] M. Y. Han and Y. Nambu, Phys. Rev. **139**, B1006–B1010 (1965).
- [44] R. Dashen and M. Gell-Mann, Phys. Rev. Lett. **17**, 340–343 (1966).
- [45] C. G. Callan and D. J. Gross, Phys. Rev. Lett. **21**, 311–313 (1968).
- [46] A. De Roeck and R. Thorne, Prog. Part. Nucl. Phys. **66**, 727–781 (2011).
- [47] E. D. Bloom *et al.*, Phys. Rev. Lett. **23**, 930–934 (1969).
- [48] J. D. Bjorken, Phys. Rev. **179**, 1547–1553 (1969).
- [49] C. G. Callan and D. J. Gross, Phys. Rev. Lett. **22**, 156–159 (1969).
- [50] M. Riordan, SLAC-PUB-5724 (1992).
- [51] R. P. Feynman, Phys. Rev. Lett. **23**, 1415–1417 (1969).
- [52] S. D. Drell and T.-M. Yan, Ann. Phys. **66**, 578–623 (1971).
- [53] C. H. Llewellyn Smith, Phys. Rev. D **4**, 2392–2397 (1971).
- [54] D. J. Gross and J. Wess, Phys. Rev. D **2**, 753–764 (1970).
- [55] C. G. Callan, Phys. Rev. D **2**, 1541–1547 (1970).
- [56] K. Symanzik, Commun. Math. Phys. **18**, 227–246 (1970).
- [57] C. N. Yang and R. L. Mills, Phys. Rev. **96**, 191–195 (1954).
- [58] L. Faddeev and V. Popov, Phys. Lett. B **25**, 29–30 (1967).
- [59] G. Hooft, Nucl. Phys. B **35**, 167–188 (1971).
- [60] G. 'tHooft, Nucl. Phys. B **33**, 173–199 (1971).
- [61] G. 't Hooft and M. Veltman, Nucl. Phys. B **44**, 189–213 (1972).
- [62] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19**, 1264–1266 (1967).
- [63] A. Salam and J. C. Ward, Nuovo Cim **19**, 165–170 (1961).
- [64] G. Parisi, Lettere Al Nuovo Cimento Series 2 **7**, 84–88 (1973).
- [65] C. G. Callan and D. J. Gross, Phys. Rev. D **8**, 4383–4394 (1973).
- [66] E. C. G. Stueckelberg and A. Petermann, Helvetica Physica Acta **24**, 317 (1951).
- [67] E. C. G. Stueckelberg and A. Petermann, Helvetica Physica Acta **26**, 499 (1953).
- [68] M. Gell-Mann and F. E. Low, Phys. Rev. **95**, 1300–1312 (1954).
- [69] K. Wilson, Phys. Rep. **12**, 75–199 (1974).
- [70] J. Lacki, H. Ruegg, and G. Wanders, editors, *E. C. G. Stueckelberg, An Unconventional Figure of Twentieth Century Physics : Selected Scientific Papers with Commentaries* (Birkhäuser Basel, Basel, 2009), chap. The normalization group in quantum theory [87], pp. 395–398.
- [71] A. Zee, Phys. Rev. D **7**, 3630–3636 (1973).
- [72] S. Coleman and D. J. Gross, Phys. Rev. Lett. **31**, 851–854 (1973).
- [73] W. Marciano and H. Pagels, Phys. Rep. **36**, 137–276 (1978).
- [74] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. D **8**, 3633–3652 (1973).
- [75] H. Georgi and H. D. Politzer, Phys. Rev. D **9**, 416–420 (1974).
- [76] D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. D **9**, 980–993 (1974).
- [77] G. Tarnopolsky *et al.*, Phys. Rev. Lett. **32**, 432–435 (1974).
- [78] J. J. Aubert *et al.*, Phys. Rev. Lett. **33**, 1404–1406 (1974).
- [79] G. Sterman and S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **39**, 1436–1439 (1977).
- [80] H. Georgi and M. Machacek, Phys. Rev. Lett. **39**, 1237–1239 (1977).
- [81] E. Farhi, Phys. Rev. Lett. **39**, 1587–1588 (1977).
- [82] G. Hanson *et al.*, Phys. Rev. Lett. **35**, 1609–1612 (1975).
- [83] J. Ellis, M. K. Gaillard, and G. G. Ross, Nucl. Phys. B **111**, 253–271 (1976).
- [84] J. Ellis, M. K. Gaillard, and G. G. Ross, Nucl. Phys. B **130**, 516 (1977).
- [85] A. De Rujula, J. Ellis, E. Floratos, and M. Gaillard, Nucl. Phys. B **138**, 387–429 (1978).
- [86] S. L. Wu and G. Zoernig, Zeitschrift fur Physik C Particles and Fields **2**, 107–110 (1979).
- [87] S. W. Herb *et al.*, Phys. Rev. Lett. **39**, 252–255 (1977).
- [88] K. Koller and T. Walsh, Phys. Lett. B **72**, 227–230 (1977).
- [89] T. Koller, K. and Walsh, Phys. Lett. B **73**, 503–504 (1978).
- [90] C. Berger *et al.*, Phys. Lett. B **82**, 449–455 (1979).
- [91] J. Ellis and I. Karliner, Nucl. Phys. B **148**, 141–147 (1979).
- [92] R. Brandelik *et al.*, Phys. Lett. B **97**, 453–458 (1980).
- [93] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, Phys. Rep. **323**, 183–386 (2000).

- [94] A. V. Ramallo, (2013), 1310.4319.
- [95] C. Csáki, M. Reece, and J. Terning, *J. High Energy Phys.* **2009**, 067–067 (2009).
- [96] K. G. Wilson, *Phys. Rev. D* **10**, 2445–2459 (1974).
- [97] H. Meyer-Ortmanns, *Rev. Mod. Phys.* **68**, 473 (1996).
- [98] S. Aoki *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **84**, 238–241 (2000).
- [99] H.-W. Lin and H. B. Meyer, editors, *Lattice QCD for Nuclear Physics* (Springer International Publishing, 2015).
- [100] C. Gattringer and C. B. Lang, *Quantum Chromodynamics on the Lattice* (Springer Berlin Heidelberg, 2010).
- [101] C. E. DeTar and U. M. Heller, *The European Physical Journal A* **41**, 405–437 (2009).
- [102] C. MCNEILE, *Mod. Phys. Lett. A* **28**, 1360012 (2013).
- [103] S. Eidelman *et al.*, *Phys. Lett. B* **592**, 1–5 (2004).
- [104] N. Armesto *et al.*, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **35**, 054001 (2008).
- [105] P. Braun-Munizinger, B. Friman, and J. S. (Ed), *Nucl. Phys. A* (2014).
- [106] H. Heiselberg, *Phys. Rep.* **328**, 237–327 (2000).
- [107] A. Schmitt, *Dense Matter in Compact Stars* (Springer Berlin Heidelberg, 2010).
- [108] N. Cabibbo and G. Parisi, *Phys. Lett. B* **59**, 67–69 (1975).
- [109] J. C. Collins and M. J. Perry, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1353–1356 (1975).
- [110] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175–1204 (1957).
- [111] W. Meissner and R. Ochsenfeld, *Naturwissenschaften* **21**, 787–788 (1933).
- [112] D. T. Son, *Phys. Rev. D* **59**, 094019 (1999).
- [113] R. D. Pisarski and D. H. Rischke, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 37–40 (1999).
- [114] M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal, and T. Schäfer, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1455–1515 (2008).
- [115] D. Bailin and A. Love, *Phys. Rep.* **107**, 325–385 (1984).
- [116] S. D. H. Hsu, arXiv **hep-ph/0003140** (2007), hep-ph/0003140.
- [117] K. Rajagopal and F. Wilczek, arXiv (2007), hep-ph/0011333.
- [118] M. Alford, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **51**, 131–160 (2001).
- [119] G. Nardulli, arXiv (2007), hep-ph/0610285.
- [120] D. Rischke, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **52**, 197–296 (2004).
- [121] M. BUBALLA, *Phys. Rep.* **407**, 205–376 (2005).
- [122] M. HUANG, *International Journal of Modern Physics E* **14**, 675–738 (2005).
- [123] I. A. Shovkovy, *Found Phys* **35**, 1309–1358 (2005).
- [124] H. cang Ren, arXiv **hep-ph/0404074** (2007), hep-ph/0404074.
- [125] T. Schaefer, arXiv **hep-ph/0304281** (2007), hep-ph/0304281.
- [126] S. Reddy, *Acta Phys.Polon. B* **33**, 4101 (2002), nucl-th/0211045.
- [127] D. K. Hong, *Acta Phys.Polon. B* **32**, 1253 (2001), hep-ph/0101025.
- [128] G. Nardulli, *Riv.Nuovo Cim.* **25N3 :1-80,2002**, 1 (2002), hep-ph/0202037.
- [129] S. Muroya, A. Nakamura, C. Nonaka, and T. Takaishi, *Prog. Theor. Phys.* **110**, 615–668 (2003).
- [130] S. Ejiri, *PoS LATTICE 2008 :002,2008* (2008), 0812.1534.
- [131] M. P. Lombardo, K. Splittorff, and J. J. M. Verbaarschot, arXiv **0912.4410** (2009), 0912.4410.
- [132] P. de Forcrand, *PoS LAT 2009 :010,2009* (2010), 1005.0539.
- [133] L. Landau, *Zh. Eksp. Teor. Fiz* **7**, 19 (1937).
- [134] G. Jaeger, *Archive for History of Exact Sciences* **53**, 51–81 (1998).
- [135] J. Beringer *et al.*, *Phys. Rev. D* **86**, 010001 (2012).
- [136] M. Kuster, G. Raffelt, and B. Beltran, editors, *Axions* (Springer Berlin Heidelberg, 2008).
- [137] J. E. Kim and G. Carosi, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 557–601 (2010).
- [138] C. A. Baker *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 131801 (2006).
- [139] D. E. Kharzeev, L. D. McLerran, and H. J. Warringa, *Nucl. Phys. A* **803**, 227–253 (2008).
- [140] K. Fukushima, D. E. Kharzeev, and H. J. Warringa, *Phys. Rev. D* **78**, 074033 (2008).
- [141] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **156**, 269–283 (1979).
- [142] G. Veneziano, *Nucl. Phys. B* **159**, 213–224 (1979).
- [143] M. F. L. Golterman, *Pramana* **45**, 141–154 (1995).
- [144] F. J. Ynduráin, *The Theory of Quark and Gluon Interactions* (Springer Berlin Heidelberg, 2006).
- [145] T. Muta, *Foundations Of Quantum Chromodynamics : An Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories* (World Scientific Publishing Company, 2009).
- [146] S. Elitzur, *Phys. Rev. D* **12**, 3978–3982 (1975).
- [147] F. Englert and R. Brout, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 321–323 (1964).
- [148] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble, *Phys. Rev. Lett.* **13**, 585–587 (1964).

- [149] P. Higgs, *Physics Letters* **12**, 132–133 (1964).
- [150] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields, Volume 1 et 2* (Cambridge University Press, 2005).
- [151] D. Weingarten, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1830–1833 (1983).
- [152] G. A. Christos, *Phys. Rep.* **116**, 251–336 (1984).
- [153] S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press (CUP), 1985).
- [154] J. Goldstone, *Nuovo Cim* **19**, 154–164 (1961).
- [155] Y. Nambu, *Phys. Rev. Lett.* **4**, 380–382 (1960).
- [156] J. Goldstone, A. Salam, and S. Weinberg, *Phys. Rev.* **127**, 965–970 (1962).
- [157] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1698–1701 (1972).
- [158] I. I. Kogan, A. Kovner, and M. Shifman, *Phys. Rev. D* **59**, 16001 (1998).
- [159] J. Stern, arXiv [hep-ph/9801282](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9801282) (2007), [hep-ph/9801282](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9801282).
- [160] M. Harada, C. Sasaki, and S. Takemoto, *Phys. Rev. D* **81**, 016009 (2010).
- [161] Y. Watanabe, K. Fukushima, and T. Hatsuda, *Prog. Theor. Phys.* **111**, 967–972 (2004).
- [162] M. L. Goldberger and S. B. Treiman, *Phys. Rev.* **111**, 354–361 (1958).
- [163] B. R. Holstein, *Phys. Lett. B* **244**, 83–87 (1990).
- [164] R. G. Edwards *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 052001 (2006).
- [165] T. Yamazaki *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 171602 (2008).
- [166] R. Horsley *et al.*, *Phys. Lett. B* **732**, 41–48 (2014).
- [167] M. Gell-Mann, R. J. Oakes, and B. Renner, *Phys. Rev.* **175**, 2195–2199 (1968).
- [168] G. Brown and M. Rho, *Phys. Rep.* **269**, 333–380 (1996).
- [169] M. Gell-Mann and M. Lévy, *Nuovo Cim* **16**, 705–726 (1960).
- [170] C. Kuang-Chao, *JETP* **12**, 492 (1961).
- [171] J. Bernstein, S. Fubini, M. Gell-Mann, and W. Thirring, *Nuovo Cim* **17**, 757–766 (1960).
- [172] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345–358 (1961).
- [173] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **124**, 246–254 (1961).
- [174] T. Das, G. S. Guralnik, V. S. Mathur, F. E. Low, and J. E. Young, *Phys. Rev. Lett.* **18**, 759–761 (1967).
- [175] Y. Ne’eman, *Nuclear Physics* **26**, 222–229 (1961).
- [176] Y. G.-M. Murray; Ne’Eman, *The Eightfold Way; A Review with a Collection of Reprints (Frontiers in Physics Series : Lecture Note & Reprint Series)* (W.A. Benjamin, Inc Publishers, 1964).
- [177] S. L. Glashow and S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **20**, 224–227 (1968).
- [178] S. Okubo, *Prog. Theor. Phys.* **27**, 949–966 (1962).
- [179] S. Weinberg, *Transactions of the New York Academy of Sciences* **38**, 185–201 (1977).
- [180] H. Leutwyler, *Phys. Lett. B* **378**, 313–318 (1996).
- [181] J. Gasser and H. Leutwyler, *Phys. Rep.* **87**, 77–169 (1982).
- [182] S. Glashow, *Hadrons and their Interactions*, 83–140 (1968).
- [183] S. Weinberg, *Phys. Rev. D* **11**, 3583–3593 (1975).
- [184] A. Kupsc, *AIP Conference Proceedings* **950**, 165 (2007).
- [185] R. Crewther, *Phys. Lett. B* **70**, 349–354 (1977).
- [186] G. ’t Hooft, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 8–11 (1976).
- [187] G. ’t Hooft, *Phys. Rev. D* **14**, 3432–3450 (1976).
- [188] G. ’t Hooft, *Phys. Rep.* **142**, 357–387 (1986).
- [189] R. A. Bertlmann, *Anomalies in Quantum Field Theory (International Series of Monographs on Physics)* (Clarendon Press, 2001).
- [190] K. Fujikawa, *Phys. Rev. D* **21**, 2848–2858 (1980).
- [191] K. Fujikawa, *Phys. Rev. D* **22**, 1499–1499 (1980).
- [192] W. Bardeen, *Nucl. Phys. B* **75**, 246–258 (1974).
- [193] K. Chandrasekharan, *Classical Fourier Transforms* (Springer Berlin Heidelberg, 1989).
- [194] E. Titchmarsh, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals* (Oxford University Press, 1948).
- [195] C. Callan, R. Dashen, and D. Gross, *Phys. Lett. B* **63**, 334–340 (1976).
- [196] R. Jackiw and C. Rebbi, *Phys. Rev. Lett.* **37**, 172–175 (1976).
- [197] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons, Volume 15 : An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory* (North Holland, 1987).
- [198] D. J. Gross, R. D. Pisarski, and L. G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* **53**, 43–80 (1981).
- [199] T. Schäfer and E. V. Shuryak, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 323–425 (1998).
- [200] C. G. Callan, R. Dashen, and D. J. Gross, *Phys. Rev. D* **17**, 2717–2763 (1978).
- [201] V. Bernard, R. Jaffe, and U.-G. Meissner, *Nucl. Phys. B* **308**, 753–790 (1988).
- [202] C. Michael and P. S. Spencer, *Phys. Rev. D* **52**, 4691–4699 (1995).
- [203] M. C. Chu, J. M. Grandy, S. Huang, and J. W. Negele, *Phys. Rev. D* **49**, 6039–6050 (1994).
- [204] L. McLerran, E. Mottola, and M. E. Shaposhnikov, *Phys. Rev. D* **43**, 2027–2035 (1991).

- [205] G. Giudice and M. Shaposhnikov, Phys. Lett. B **326**, 118–124 (1994).
- [206] M. Mace, S. Schlichting, and R. Venugopalan, Phys. Rev. D **93**, 074036 (2016).
- [207] N. S. Manton, Phys. Rev. D **28**, 2019–2026 (1983).
- [208] G. D. Moore, Phys. Lett. B **412**, 359–370 (1997).
- [209] N. H. Christ, Phys. Rev. D **21**, 1591–1602 (1980).
- [210] A. V. Smilga, Phys. Rev. D **45**, 1378–1394 (1992).
- [211] D. Kharzeev, A. Krasnitz, and R. Venugopalan, Phys. Lett. B **545**, 298–306 (2002).
- [212] D. Kharzeev, Phys. Lett. B **633**, 260–264 (2006).
- [213] T. Fujihara, T. Inagaki, and D. Kimura, Prog. Theor. Phys. **117**, 139–160 (2007).
- [214] A. Andrianov and D. Espriu, Phys. Lett. B **663**, 450–455 (2008).
- [215] D. Boer and J. K. Boomsma, Phys. Rev. D **78**, 054027 (2008).
- [216] A. Andrianov, D. Espriu, and V. Andrianov, Phys. Lett. B **678**, 416–421 (2009).
- [217] J. K. Boomsma and D. Boer, Phys. Rev. D **80**, 034019 (2009).
- [218] E. V. Gorbar, V. A. Miransky, and I. A. Shovkovy, Phys. Rev. C **80**, 032801 (2009).
- [219] D. E. Kharzeev, Ann. Phys. **325**, 205–218 (2010).
- [220] K. Fukushima, M. Ruggieri, and R. Gatto, Phys. Rev. D **81**, 114031 (2010).
- [221] S. Fayazbakhsh and N. Sadooghi, Phys. Rev. D **83**, 025026 (2011).
- [222] Y. Sakai, H. Kouno, T. Sasaki, and M. Yahiro, Phys. Lett. B **705**, 349–355 (2011).
- [223] H. Kouno, Y. Sakai, T. Sasaki, K. Kashiwa, and M. Yahiro, Phys. Rev. D **83**, 076009 (2011).
- [224] M. Ruggieri, Phys. Rev. D **84**, 014011 (2011).
- [225] M. N. Chernodub and A. S. Nedelin, Phys. Rev. D **83**, 105008 (2011).
- [226] E. Gorbar, V. Miransky, and I. Shovkovy, Phys. Lett. B **695**, 354–358 (2011).
- [227] R. Gatto and M. Ruggieri, Phys. Rev. D **85**, 054013 (2012).
- [228] Z. Zhang, Phys. Rev. D **85** (2012).
- [229] J. Chao, P. Chu, and M. Huang, Phys. Rev. D **88**, 054009 (2013).
- [230] A. A. Andrianov, D. Espriu, and X. Planells, The European Physical Journal C **74** (2014).
- [231] A. A. Andrianov, V. A. Andrianov, and D. Espriu, The European Physical Journal C **74** (2014).
- [232] L. Yu, H. Liu, and M. Huang, Phys. Rev. D **90** (2014).
- [233] K. Mameda, Nucl. Phys. B **889**, 712–726 (2014).
- [234] G. Cao and P. Zhuang, Phys. Rev. D **92**, 105030 (2015).
- [235] L. Yu, J. Van Doorselaere, and M. Huang, Phys. Rev. D **91** (2015).
- [236] M. Ruggieri and G. Peng, Phys. Rev. D **93**, 094021 (2016).
- [237] Y. Lu, Z.-F. Cui, Z. Pan, C.-H. Chang, and H.-S. Zong, Phys. Rev. D **93**, 074037 (2016).
- [238] V. Braguta and A. Kotov, Phys. Rev. D **93**, 105025 (2016).
- [239] A. Yamamoto, Phys. Rev. Lett. **107**, 031601 (2011).
- [240] V. V. Braguta *et al.*, J. High Energ. Phys. **2015** (2015).
- [241] V. Braguta *et al.*, EPJ Web of Conferences **95**, 03002 (2015).
- [242] P. V. Buividovich, J. Phys. : Conf. Ser. **607**, 012018 (2015).
- [243] B. Wang, Y.-L. Wang, Z.-F. Cui, and H.-S. Zong, Phys. Rev. D **91** (2015).
- [244] Y.-L. Tian *et al.*, Chinese Phys. Lett. **32**, 081101 (2015).
- [245] S.-S. Xu *et al.*, Phys. Rev. D **91** (2015).
- [246] D. Kharzeev and A. Zhitnitsky, Nucl. Phys. A **797**, 67–79 (2007).
- [247] Y. Burnier, D. E. Kharzeev, J. Liao, and H.-U. Yee, Phys. Rev. Lett. **107** (2011).
- [248] A. Andrianov, V. Andrianov, D. Espriu, and X. Planells, Phys. Lett. B **710**, 230–235 (2012).
- [249] M. Stephanov and H.-U. Yee, Phys. Rev. C **88**, 014908 (2013).
- [250] J. Błoczyński, X.-G. Huang, X. Zhang, and J. Liao, Phys. Lett. B **718**, 1529–1535 (2013).
- [251] A. Bzdak and P. Bożek, Phys. Lett. B **726**, 239–243 (2013).
- [252] H.-U. Yee and Y. Yin, Phys. Rev. C **89**, 044909 (2014).
- [253] D. Satow and H.-U. Yee, Phys. Rev. D **90** (2014).
- [254] G.-L. Ma and X.-G. Huang, Phys. Rev. C **91**, 054901 (2015).
- [255] Y. Jiang, X.-G. Huang, and J. Liao, Phys. Rev. D **91**, 045001 (2015).
- [256] K. Fukushima, Phys. Rev. D **92**, 054009 (2015).
- [257] S. F. Taghavi and U. A. Wiedemann, Phys. Rev. C **91**, 024902 (2015).
- [258] D. Espriu, J. Phys. : Conf. Ser. **623**, 012012 (2015).
- [259] I. Iatrakis, S. Lin, and Y. Yin, Phys. Rev. Lett. **114** (2015).
- [260] B. I. Abelev *et al.*, Phys. Rev. Lett. **103**, 251601 (2009).

- [261] B. I. Abelev *et al.*, Phys. Rev. C **81**, 054908 (2010).
- [262] A. Bzdak, V. Koch, and J. Liao, Phys. Rev. C **81**, 031901 (2010).
- [263] J. Liao, V. Koch, and A. Bzdak, Phys. Rev. C **82**, 054902 (2010).
- [264] D. E. Kharzeev and D. T. Son, Phys. Rev. Lett. **106** (2011).
- [265] N. N. Ajitanand, R. A. Lacey, A. Taranenko, and J. M. Alexander, Phys. Rev. C **83**, 011901 (2011).
- [266] H. Ke, J Phys : Conf Ser **389**, 012035 (2012).
- [267] B. Abelev *et al.*, Phys. Rev. Lett. **110** (2013).
- [268] L. Adamczyk *et al.*, Phys. Rev. C **88**, 064911 (2013).
- [269] L. Adamczyk *et al.*, Phys. Rev. Lett. **113** (2014).
- [270] L. Adamczyk *et al.*, Phys. Rev. C **89**, 044908 (2014).
- [271] L. Adamczyk *et al.*, Phys. Rev. Lett. **114**, 252302 (2015).
- [272] W.-T. Deng and X.-G. Huang, Phys. Lett. B **742**, 296–302 (2015).
- [273] D. T. Son and A. R. Zhitnitsky, Phys. Rev. D **70**, 074018 (2004).
- [274] M. A. Metlitski and A. R. Zhitnitsky, Phys. Rev. D **72**, 045011 (2005).
- [275] M. Eto, Y. Hirono, M. Nitta, and S. Yasui, Progress of Theoretical and Experimental Physics **2014**, 12D01–0 (2014).
- [276] J. Charbonneau and A. Zhitnitsky, Journal of Cosmology and Astroparticle Physics **2010**, 010–010 (2010).
- [277] G. Wang, Nucl. Phys. A **904-905**, 248c–255c (2013).
- [278] M. A. Stephanov, Phys. Rev. Lett. **76**, 4472–4475 (1996).
- [279] T. Matsubara, Prog. Theor. Phys. **14**, 351–378 (1955).
- [280] J. I. Kapusta and C. Gale, *Finite-Temperature Field Theory : Principles and Applications* (Cambridge University Press, 2011).
- [281] M. L. Bellac, *Thermal Field Theory* (Cambridge University Press, 2000).
- [282] A. L. Fetter, J. D. Walecka, and Physics, *Quantum Theory of Many-Particle Systems* (Dover Publications, 2003).
- [283] L. D. McLerran and B. Svetitsky, Phys. Rev. D **24**, 450–460 (1981).
- [284] C. DeTar and L. McLerran, Phys. Lett. B **119**, 171–173 (1982).
- [285] H. Meyer-Ortmanns, Nucl. Phys. B **230**, 31–48 (1984).
- [286] K. Fukushima, Ann. Phys. **304**, 72–88 (2003).
- [287] C. Gatttringer, Phys. Rev. Lett. **97** (2006).
- [288] F. Synatschke, A. Wipf, and K. Langfeld, Phys. Rev. D **77**, 114018 (2008).
- [289] E. Bilgici, F. Bruckmann, C. Gatttringer, and C. Hagen, Phys. Rev. D **77**, 094007 (2008).
- [290] C. S. Fischer, Phys. Rev. Lett. **103**, 052003 (2009).
- [291] C. S. Fischer and J. A. Mueller, Phys. Rev. D **80**, 074029 (2009).
- [292] C. S. Fischer, J. Luecker, and J. A. Mueller, Phys. Lett. B **702**, 438–441 (2011).
- [293] J. Braun, L. M. Haas, F. Marhauser, and J. M. Pawłowski, Phys. Rev. Lett. **106**, 022002 (2011).
- [294] K. Kashiwa, H. Kouno, and M. Yahiro, Phys. Rev. D **80**, 117901 (2009).
- [295] T. K. Mukherjee, H. Chen, and M. Huang, Phys. Rev. D **82**, 034015 (2010).
- [296] F. Marquez, A. Ahmad, M. Buballa, and A. Raya, Phys. Lett. B **747**, 529–535 (2015).
- [297] M. Abreu *et al.*, Phys. Lett. B **477**, 28–36 (2000).
- [298] J. Adams *et al.*, Nucl. Phys. A **757**, 102–183 (2005).
- [299] P. JACOBS and X. WANG, Prog. Part. Nucl. Phys. **54**, 443–534 (2005).
- [300] B. Müller and J. L. Nagle, Annual Review of Nuclear and Particle Science **56**, 93–135 (2006).
- [301] U. Heinz and M. Jacob, (2007), nucl-th/0002042.
- [302] G. E. Bruno, EPJ Web of Conferences **95**, 06001 (2015).
- [303] J. Schukraft, Physica Scripta **T158**, 014003 (2013).
- [304] J. Schukraft and R. Stock, 60 Years of CERN Experiments and Discoveries , 61–87 (2015).
- [305] F. PACINI, Nature **209**, 389–390 (1966).
- [306] N. Itoh, Prog. Theor. Phys. **44**, 291–292 (1970).
- [307] F. Iachello, W. D. Langer, and A. Lande, Nucl. Phys. A **219**, 612–620 (1974).
- [308] B. C. Barrois, Nucl. Phys. B **129**, 390–396 (1977).
- [309] C. D. Roberts and A. G. Williams, Prog. Part. Nucl. Phys. **33**, 477–575 (1994).
- [310] C. Roberts and S. Schmidt, Prog. Part. Nucl. Phys. **45**, S1–S103 (2000).
- [311] C. S. Fischer, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. **32**, R253–R291 (2006).
- [312] J. M. Pawłowski, Ann. Phys. **322**, 2831–2915 (2007).
- [313] H. Gies, *Introduction to the Functional RG and Applications to Gauge Theories* (Springer Science + Business Media, 2012).
- [314] T. Hatsuda, M. Tachibana, N. Yamamoto, and G. Baym, Phys. Rev. Lett. **97**, 122001 (2006).

- [315] N. Yamamoto, T. Hatsuda, M. Tachibana, and G. Baym, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **34**, S635–S638 (2007).
- [316] N. Yamamoto, M. Tachibana, T. Hatsuda, and G. Baym, *Phys. Rev. D* **76** (2007).
- [317] G. Baym, T. Hatsuda, M. Tachibana, and N. Yamamoto, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **35**, 104021 (2008).
- [318] Z. Zhang and T. Kunihiro, *Phys. Rev. D* **80** (2009).
- [319] Z. Zhang, K. Fukushima, and T. Kunihiro, *Phys. Rev. D* **79** (2009).
- [320] H. Basler and M. Buballa, *Phys. Rev. D* **82**, 094004 (2010).
- [321] H. Abuki, G. Baym, T. Hatsuda, and N. Yamamoto, *Phys. Rev. D* **81**, 125010 (2010).
- [322] A. Schmitt, S. Stetina, and M. Tachibana, *Phys. Rev. D* **83** (2011).
- [323] Z. Zhang and T. Kunihiro, *Phys. Rev. D* **83** (2011).
- [324] J.-Y. Pang, J.-C. Wang, and Q. Wang, *Communications in Theoretical Physics* **57**, 251–270 (2012).
- [325] P. D. Powell and G. Baym, *Phys. Rev. D* **88**, 014012 (2013).
- [326] K. Maeda, G. Baym, and T. Hatsuda, *Phys. Rev. Lett.* **103**, 085301 (2009).
- [327] T. Ozawa and G. Baym, *Phys. Rev. A* **82**, 063615 (2010).
- [328] Y. Nishida, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012).
- [329] M. Iwasaki and T. Iwado, *Phys. Lett. B* **350**, 163–168 (1995).
- [330] M. Alford, K. Rajagopal, and F. Wilczek, *Phys. Lett. B* **422**, 247–256 (1998).
- [331] T. Schäfer and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3956–3959 (1999).
- [332] W. V. Liu and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 047002 (2003).
- [333] E. Gubankova, W. V. Liu, and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 032001 (2003).
- [334] A. Schmitt, Q. Wang, and D. H. Rischke, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 242301 (2003).
- [335] B. Deb, A. Mishra, H. Mishra, and P. K. Panigrahi, *Phys. Rev. A* **70**, 011604 (2004).
- [336] R. Rapp, T. Schäfer, E. Shuryak, and M. Velkovsky, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 53–56 (1998).
- [337] M. Alford, K. Rajagopal, and F. Wilczek, *Nucl. Phys. B* **537**, 443–458 (1999).
- [338] K. Langfeld and M. Rho, *Nucl. Phys. A* **660**, 475–505 (1999).
- [339] J. Berges and K. Rajagopal, *Nucl. Phys. B* **538**, 215–232 (1999).
- [340] M. Buballa, J. Hošek, and M. Oertel, *Phys. Rev. D* **65**, 014018 (2001).
- [341] F. Gastineau, R. Nebauer, and J. Aichelin, *Phys. Rev. C* **65**, 045204 (2002).
- [342] M. Buballa and M. Oertel, *Nucl. Phys. A* **703**, 770–784 (2002).
- [343] M. Huang, P. Zhuang, and W. Chao, *Phys. Rev. D* **65**, 076012 (2002).
- [344] I. Shovkovy and M. Huang, *Phys. Lett. B* **564**, 205–211 (2003).
- [345] M. Kitazawa, T. Koide, T. Kunihiro, and Y. Nemoto, *Nucl. Phys. A* **721**, C289–C292 (2003).
- [346] K. Rajagopal and F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3492–3495 (2001).
- [347] K. Iida and G. Baym, *Phys. Rev. D* **63**, 074018 (2001).
- [348] M. Alford and K. Rajagopal, *J. High Energy Phys.* **2002**, 031–031 (2002).
- [349] K. Iida and G. Baym, *Phys. Rev. D* **66**, 059903 (2002).
- [350] A. W. Steiner, S. Reddy, and M. Prakash, *Phys. Rev. D* **66** (2002).
- [351] M. Huang, P. Zhuang, and W. Chao, *Phys. Rev. D* **67**, 065015 (2003).
- [352] F. Neumann, M. Buballa, and M. Oertel, *Nucl. Phys. A* **714**, 481–501 (2003).
- [353] D. Aguilera, D. Blaschke, and H. Grigorian, *Nucl. Phys. A* **757**, 527–542 (2005).
- [354] S. B. Rüster, V. Werth, M. Buballa, I. A. Shovkovy, and D. H. Rischke, *Phys. Rev. D* **72**, 034004 (2005).
- [355] D. Blaschke, S. Fredriksson, H. Grigorian, A. M. Öztaş, and F. Sandin, *Phys. Rev. D* **72**, 065020 (2005).
- [356] M. Buballa and I. A. Shovkovy, *Phys. Rev. D* **72**, 097501 (2005).
- [357] H. Abuki and T. Kunihiro, *Nucl. Phys. A* **768**, 118–159 (2006).
- [358] T. Kojo, Y. Hidaka, L. McLerran, and R. D. Pisarski, *Nucl. Phys. A* **843**, 37–58 (2010).
- [359] M. Buballa and S. Carignano, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **81**, 39–96 (2015).
- [360] P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom, M. S. E. Roberts, and J. W. T. Hessels, *Nature* **467**, 1081–1083 (2010).
- [361] F. Özel, G. Baym, and T. Güver, *Phys. Rev. D* **82**, 101301 (2010).
- [362] A. W. Steiner, J. M. Lattimer, and E. F. Brown, *The Astrophysical Journal* **722**, 33–54 (2010).
- [363] R. W. Romani *et al.*, *The Astrophysical Journal* **760**, L36 (2012).

- [364] J. Antoniadis *et al.*, *Science* **340**, 1233232–1233232 (2013).
- [365] T. Klähn, R. Łastowiecki, and D. Blaschke, *Phys. Rev. D* **88**, 085001 (2013).
- [366] A. W. Steiner, J. M. Lattimer, and E. F. Brown, *The Astrophysical Journal* **765**, L5 (2013).
- [367] N. Glendenning and S. Moszkowski, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 2414–2417 (1991).
- [368] N. K. Glendenning, *Phys. Rev. D* **46**, 1274–1287 (1992).
- [369] N. K. Glendenning and J. Schaffner-Bielich, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4564–4567 (1998).
- [370] N. K. Glendenning and J. Schaffner-Bielich, *Phys. Rev. C* **60**, 025803 (1999).
- [371] G. F. Burgio, M. Baldo, P. K. Sahu, and H.-J. Schulze, *Phys. Rev. C* **66**, 025802 (2002).
- [372] T. Maruyama, S. Chiba, H.-J. Schulze, and T. Tatsuami, *Phys. Rev. D* **76**, 123015 (2007).
- [373] F. Yang and H. Shen, *Phys. Rev. C* **77**, 025801 (2008).
- [374] G.-y. Shao and Y.-x. Liu, *Phys. Rev. C* **82**, 055801 (2010).
- [375] J. Xu, L.-W. Chen, C. M. Ko, and B.-A. Li, *Phys. Rev. C* **81**, 055803 (2010).
- [376] V. A. Dexheimer and S. Schramm, *Phys. Rev. C* **81**, 045201 (2010).
- [377] G.-y. Shao, *Phys. Lett. B* **704**, 343–346 (2011).
- [378] G. Y. Shao, M. Colonna, M. Di Toro, Y. X. Liu, and B. Liu, *Phys. Rev. D* **87**, 096012 (2013).
- [379] M. Hempel, V. Dexheimer, S. Schramm, and I. Iosilevskiy, *Phys. Rev. C* **88**, 014906 (2013).
- [380] G. Y. Shao *et al.*, *Phys. Rev. D* **92**, 114027 (2015).
- [381] T. Zhao *et al.*, *Phys. Rev. D* **92**, 054012 (2015).
- [382] A. Li, W. Zuo, and G. X. Peng, *Phys. Rev. C* **91**, 035803 (2015).
- [383] D. L. Whittenbury, H. H. Matevosyan, and A. W. Thomas, *Phys. Rev. C* **93**, 035807 (2016).
- [384] H. Müller, *Nucl. Phys. A* **618**, 349–370 (1997).
- [385] M. Di Toro, A. Drago, T. Gaitanos, V. Greco, and A. Lavagno, *Nucl. Phys. A* **775**, 102–126 (2006).
- [386] M. Di Toro *et al.*, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **62**, 389–401 (2009).
- [387] M. Di Toro *et al.*, *Phys. Rev. C* **83**, 014911 (2011).
- [388] B. Liu *et al.*, *The European Physical Journal A* **47** (2011).
- [389] R. Cavagnoli, C. Providência, and D. P. Menezes, *Phys. Rev. C* **83**, 045201 (2011).
- [390] G. Pagliara and J. Schaffner-Bielich, *Phys. Rev. D* **81**, 094024 (2010).
- [391] G. Y. Shao *et al.*, *Phys. Rev. D* **83** (2011).
- [392] G. Y. Shao *et al.*, *Phys. Rev. D* **84** (2011).
- [393] G. Y. Shao, M. Colonna, M. Di Toro, B. Liu, and F. Matera, *Phys. Rev. D* **85** (2012).
- [394] T. Kojo, P. D. Powell, Y. Song, and G. Baym, *Phys. Rev. D* **91**, 045003 (2015).
- [395] T. Kojo, *The European Physical Journal A* **52** (2016).
- [396] K. Masuda, T. Hatsuda, and T. Takatsuka, *The European Physical Journal A* **52** (2016).
- [397] T. Klähn *et al.*, *Phys. Lett. B* **654**, 170–176 (2007).
- [398] L. Bonanno and A. Sedrakian, *A&A* **539**, A16 (2012).
- [399] S. Benić, *The European Physical Journal A* **50** (2014).
- [400] S. Benić, D. Blaschke, D. E. Alvarez-Castillo, T. Fischer, and S. Typel, *A&A* **577**, A40 (2015).
- [401] F. Özel, *Nature* **441**, 1115–1117 (2006).
- [402] V. Vaks and A. Larkin, *JETP* **13**, 192 (1961).
- [403] T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Phys. Lett. B* **145**, 7–10 (1984).
- [404] M. Volkov, *Ann. Phys.* **157**, 282–303 (1984).
- [405] M. Jaminon, G. Ripka, and P. Stassart, *Phys. Lett. B* **227**, 191–194 (1989).
- [406] S. P. Klevansky, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 649–708 (1992).
- [407] T. Meissner, E. R. Arriola, and K. Goeke, *Zeitschrift für Physik A Atomic Nuclei* **336**, 91–96 (1990).
- [408] F. Döring *et al.*, *Nucl. Phys. A* **536**, 548–572 (1992).
- [409] G. Ripka, *Quarks Bound by Chiral Fields* Oxford science publications (Clarendon Press, 1997).
- [410] T. Fujihara, D. Kimura, T. Inagaki, and A. Kvinikhidze, *Phys. Rev. D* **79**, 096008 (2009).
- [411] Y. L. Kalinovsky and A. V. Friesen, *Physics of Particles and Nuclei Letters* **12**, 737–743 (2015).
- [412] T. Hatsuda and T. Kunihiro, *Prog. Theor. Phys.* **74**, 765–781 (1985).
- [413] R. D. Mattuck, *A Guide to Feynman Diagrams in the Many-Body Problem* (Dover Publications, 1992).
- [414] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization* (Springer, 2008).
- [415] C. Itzykson, J.-B. Zuber, and Physics, *Quantum Field Theory (Dover Books on Physics)* (Dover Publications, 2006).
- [416] E. E. Salpeter and H. A. Bethe, *Phys. Rev.* **84**, 1232–1242 (1951).
- [417] Y. Nambu, *Prog. Theor. Phys.* **5**, 614–633 (1950).

- [418] S. Adler and A. Davis, Nucl. Phys. B **244**, 469–491 (1984).
- [419] A. Le Yaouanc, L. Oliver, S. Ono, O. Pène, and J.-C. Raynal, Phys. Rev. D **31**, 137–159 (1985).
- [420] P. Rehberg and S. Klevansky, Ann. Phys. **252**, 422–457 (1996).
- [421] R. D. Pisarski, Nucl. Phys. B **309**, 476–492 (1988).
- [422] A. Denner and S. Dittmaier, Nucl. Phys. B **734**, 62–115 (2006).
- [423] R. K. Ellis, Z. Kunszt, K. Melnikov, and G. Zanderighi, Phys. Rep. **518**, 141–250 (2012).
- [424] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl, and W. Weise, Nucl. Phys. A **516**, 429–468 (1990).
- [425] U. Vogl, M. Lutz, S. Klimt, and W. Weise, Nucl. Phys. A **516**, 469–495 (1990).
- [426] U. Vogl and W. Weise, Prog. Part. Nucl. Phys. **27**, 195–272 (1991).
- [427] M. Lutz, S. Klimt, and W. Weise, Nucl. Phys. A **542**, 521–558 (1992).
- [428] V. Bernard and U.-G. Meissner, Nucl. Phys. A **489**, 647–670 (1988).
- [429] V. Dmitrasinovic, R. Lemmer, and R. Tegen, Phys. Lett. B **284**, 201–204 (1992).
- [430] V. Dmitrašinović, S. Klevansky, and R. Lemmer, Phys. Lett. B **386**, 45–49 (1996).
- [431] P. Rehberg, S. P. Klevansky, and J. Hüfner, Phys. Rev. C **53**, 410–429 (1996).
- [432] S. P. Klevansky and R. H. Lemmer, arXiv **hep-ph/9707206** (1997), hep-ph/9707206.
- [433] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Rep. **247**, 221–367 (1994).
- [434] H. Reinhardt and B. V. Dang, J. Phys. G : Nucl. Phys. **13**, 1179–1183 (1987).
- [435] V. Bernard, U.-G. Meissner, and I. Zahed, Phys. Rev. D **36**, 819–823 (1987).
- [436] A. Masayuki and Y. Koichi, Nucl Phys A **504**, 668–684 (1989).
- [437] T. M. Schwarz, S. P. Klevansky, and G. Papp, Phys. Rev. C **60**, 055205 (1999).
- [438] V. Bernard, U.-G. Meissner, and I. Zahed, Phys. Rev. Lett. **59**, 966–969 (1987).
- [439] T. Hatsuda and T. Kunihiro, Phys. Lett. B **185**, 304–309 (1987).
- [440] T. Ainsworth, G. Brown, M. Prakash, and W. Weise, Phys. Lett. B **200**, 413–418 (1988).
- [441] A. Hosaka, Phys. Lett. B **244**, 363–367 (1990).
- [442] C. Christov, E. Ruiz Arriola, and K. Goetze, Phys. Lett. B **243**, 191–197 (1990).
- [443] R. Casalbuoni, S. De Curtis, D. Dominici, and R. Gatto, Phys. Lett. B **150**, 295–300 (1985).
- [444] A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, D. Dominici, and R. Gatto, Phys. Rev. D **38**, 238–278 (1988).
- [445] A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto, and G. Pettini, Phys. Lett. B **231**, 463–470 (1989).
- [446] A. Barducci, R. Casalbuoni, S. De Curtis, R. Gatto, and G. Pettini, Phys. Rev. D **41**, 1610–1619 (1990).
- [447] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration (Dover Books on Physics)* (Dover Publications, 2012).
- [448] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill Companies, 1965).
- [449] P. Costa, M. C. Ruivo, and C. A. de Sousa, Phys. Rev. D **77**, 096009 (2008).
- [450] P. Costa, M. C. Ruivo, C. A. de Sousa, and H. Hansen, Symmetry **2**, 1338–1374 (2010).
- [451] P. Costa, H. Hansen, M. C. Ruivo, and C. A. de Sousa, Phys. Rev. D **81**, 016007 (2010).
- [452] M. C. Ruivo *et al.*, AIP Conference Proceedings **1257**, (2010).
- [453] G. Goessens, *A study of the transition between quark gluon plasma and hadronic matter in an effective model of QCD : the Polyakov – Nambu – Jona-Lasinio model*, Theses, Université Claude Bernard - Lyon I, 2012.
- [454] A. Biguet, H. Hansen, P. Costa, P. Borgnat, and T. Brugière, The European Physical Journal A **51** (2015).
- [455] B. I. Abelev *et al.*, Phys. Rev. C **81**, 024911 (2010).
- [456] e. a. M. M. Aggarwal, arXiv **1007.2613** (2010), 1007.2613.
- [457] T. J. Tarnowsky, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. **38**, 124054 (2011).
- [458] R. A. Lacey, Phys. Rev. Lett. **114**, 142301 (2015).
- [459] Y. Akiba *et al.*, arXiv **1502.02730** (2015), 1502.02730.
- [460] *8th International Workshop on Critical Point and Onset of Deconfinement*, 2013.
- [461] X.-F. Luo, M. Shao, C. Li, and H.-F. Chen, Phys. Lett. B **673**, 268–271 (2009).
- [462] R. Gavai, Acta Phys. Pol. B **43**, 723 (2012).
- [463] M. Gazdzicki and N. N. Collaborations, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. **38**, 124024 (2011).
- [464] A. N. Sissakian, A. S. Sorin, and V. D. Toneev, Physics of Particles and Nuclei **39**, 1062–1073 (2008).
- [465] D. Blaschke *et al.*, Searching for a qcd mixed phase at the nuclotron-based ion collider facility (nica white paper), Nica-project, 2013.
- [466] Z. Fodor and S. Katz, J. High Energy Phys. **2004**, 050–050 (2004).

- [467] S. Borsanyi *et al.*, JHEP **1011** :077,2010 (2010), 1007.2580.
- [468] A. Bazavov *et al.*, Phys. Rev. D **85**, 054503 (2012).
- [469] H. Fujii, Phys. Rev. D **67**, 094018 (2003).
- [470] K. Fukushima, Phys. Lett. B **591**, 277–284 (2004).
- [471] C. Ratti, M. A. Thaler, and W. Weise, Phys. Rev. D **73**, 014019 (2006).
- [472] P. Costa, C. de Sousa, M. Ruivo, and Y. Kalinovsky, Phys. Lett. B **647**, 431–435 (2007).
- [473] K. Fukushima, Phys. Rev. D **77**, 114028 (2008).
- [474] K. Fukushima, Phys. Rev. D **78**, 039902 (2008).
- [475] K. Kashiwa, H. Kouno, M. Matsuzaki, and M. Yahiro, Phys. Lett. B **662**, 26–32 (2008).
- [476] S. Rößner, T. Hell, C. Ratti, and W. Weise, Nucl. Phys. A **814**, 118–143 (2008).
- [477] P. Costa, C. A. de Sousa, M. C. Ruivo, and H. Hansen, Europhys. Lett. **86**, 31001 (2009).
- [478] B.-J. Schaefer, J. M. Pawłowski, and J. Wambach, Phys. Rev. D **76**, 074023 (2007).
- [479] T. K. Herbst, J. M. Pawłowski, and B.-J. Schaefer, Phys. Lett. B **696**, 58–67 (2011).
- [480] M. Kitazawa, T. Koide, T. Kunihiro, and Y. Nemoto, Prog. Theor. Phys. **108**, 929–951 (2002).
- [481] N. Bratovic, T. Hatsuda, and W. Weise, Phys. Lett. B **719**, 131–135 (2013).
- [482] G. A. Contrera, A. G. Grunfeld, and D. B. Blaschke, Physics of Particles and Nuclei Letters **11**, 342–351 (2014).
- [483] T. Hell, K. Kashiwa, and W. Weise, JMP **04**, 644–650 (2013).
- [484] O. Kaczmarek *et al.*, Phys. Rev. D **83**, 014504 (2011).
- [485] D. Blaschke, D. E. Alvarez-Castillo, and S. Benic, PoS CPOD **2013**, 063 (2013), 1310.3803.
- [486] J. Dobaczewski, W. Nazarewicz, and P.-G. Reinhard, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. **41**, 074001 (2014).
- [487] J. Toivanen, J. Dobaczewski, M. Kortelainen, and K. Mizuyama, Phys. Rev. C **78**, 034306 (2008).
- [488] P.-G. Reinhard and W. Nazarewicz, Phys. Rev. C **81**, 051303 (2010).
- [489] F. J. Fattoyev and J. Piekarewicz, Phys. Rev. C **84**, 064302 (2011).
- [490] M. Kortelainen *et al.*, Phys. Rev. C **82**, 024313 (2010).
- [491] U. Kulisch, R. Hammer, D. Ratz, and M. Hocks, *Numerical Toolbox for Verified Computing I* (Springer Berlin Heidelberg, 1993).
- [492] M. Bucker, G. Corliss, U. Naumann, P. Hovland, and B. Norris, editors, *Automatic Differentiation : Applications, Theory, and Implementations* (Springer-Verlag, 2006).
- [493] G. Corliss, C. Faure, A. Griewank, L. Hascoët, and U. Naumann, editors, *Automatic Differentiation of Algorithms* (Springer Science + Business Media, 2002).
- [494] F. Cucker and M. Wschebor, Numerische Mathematik **94**, 419–478 (2003).
- [495] J. W. Demmel, Numerische Mathematik **51**, 251–289 (1987).
- [496] H. Dosch and S. Narison, Phys. Lett. B **417**, 173–176 (1998).
- [497] J. Bordes, C. A. Dominguez, P. Moodley, J. Peñarocha, and K. Schilcher, JHEP **1005** :064,2010 (2010), 1003.3358.
- [498] S. Aoki *et al.*, arXiv **1310.8555** (2013), 1310.8555.
- [499] O. Lourenço, M. Dutra, T. Frederico, A. Delfino, and M. Malheiro, Phys. Rev. D **85**, 097504 (2012).
- [500] M. Oertel, arXiv **hep-ph/0012224** (2007), hep-ph/0012224.
- [501] L. S. Celenza, S.-f. Gao, B. Huang, H. Wang, and C. M. Shakin, Phys. Rev. C **61**, 035201 (2000).
- [502] L. S. Celenza, H. Wang, and C. M. Shakin, Phys. Rev. C **63**, 025209 (2001).
- [503] A. Gocksch and M. Ogilvie, Phys. Rev. D **31**, 877–884 (1985).
- [504] E. M. Ilgenfritz and J. Kripfganz, Zeitschrift für Physik C Particles and Fields **29**, 79–82 (1985).
- [505] S. Digal, E. Laermann, and H. Satz, The European Physical Journal C **18**, 583–586 (2001).
- [506] P. N. Meisinger, T. R. Miller, and M. C. Ogilvie, Phys. Rev. D **65**, 034009 (2002).
- [507] F. Sannino, Phys. Rev. D **66** (2002).
- [508] K. Fukushima, Phys. Lett. B **553**, 38–44 (2003).
- [509] K. Fukushima, Phys. Rev. D **68**, 045004 (2003).
- [510] A. Mocsy, F. Sannino, and K. Tuominen, Phys. Rev. Lett. **92** (2004).
- [511] K. Fukushima, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. **39**, 013101 (2011).
- [512] P. N. Meisinger and M. C. Ogilvie, Phys. Lett. B **379**, 163–168 (1996).
- [513] P. N. Meisinger and M. C. Ogilvie, Nucl. Phys. B - Proc. Suppl **47**, 519–522 (1996).
- [514] Y. Hatta and K. Fukushima, Phys. Rev. D **69**, 097502 (2004).
- [515] K. Fukushima, Nucl. Phys. B - Proc. Suppl. **140**, 580–582 (2005).
- [516] S. K. Ghosh, T. K. Mukherjee, M. G. Mustafa, and R. Ray, Phys. Rev. D **73**, 114007 (2006).

- [517] E. Megías, E. R. Arriola, and L. L. Salcedo, Phys. Rev. D **74**, 065005 (2006).
- [518] C. Ratti, S. Rößner, M. Thaler, and W. Weise, The European Physical Journal C **49**, 213–217 (2006).
- [519] C. Ratti, M. A. Thaler, and W. Weise, arXiv (2007), nucl-th/0604025.
- [520] C. Sasaki, B. Friman, and K. Redlich, Phys. Rev. D **75**, 074013 (2007).
- [521] A. Polyakov, Phys. Lett. B **72**, 477–480 (1978).
- [522] L. Susskind, Phys. Rev. D **20**, 2610–2618 (1979).
- [523] B. Svetitsky and L. G. Yaffe, Nucl. Phys. B **210**, 423–447 (1982).
- [524] B. Svetitsky, Phys. Rep. **132**, 1–53 (1986).
- [525] R. D. Pisarski, Phys. Rev. D **62**, 111501 (2000).
- [526] A. Dumitru and R. D. Pisarski, Phys. Lett. B **504**, 282–290 (2001).
- [527] A. Dumitru and R. D. Pisarski, Phys. Lett. B **525**, 95–100 (2002).
- [528] F. Lenz and M. Thies, Ann. Phys. **268**, 308–358 (1998).
- [529] N. Weiss, Phys. Rev. D **24**, 475–480 (1981).
- [530] N. Weiss, Phys. Rev. D **25**, 2667–2672 (1982).
- [531] K. Fukushima and K. Ohta, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. **26**, 1397–1415 (2000).
- [532] A. Dumitru, R. D. Pisarski, and D. Zschiesche, Phys. Rev. D **72**, 065008 (2005).
- [533] S. Rößner, C. Ratti, and W. Weise, Phys. Rev. D **75**, 034007 (2007).
- [534] B. W. Mintz, R. Stiele, R. O. Ramos, and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. D **87**, 036004 (2013).
- [535] Y. Tanizaki, H. Nishimura, and K. Kashiwa, Phys. Rev. D **91**, 101701 (2015).
- [536] H. Hansen *et al.*, Phys. Rev. D **75**, 065004 (2007).
- [537] Z. Zhang and Y.-X. Liu, Phys. Rev. C **75**, 064910 (2007).
- [538] K. Fukushima, Phys. Rev. D **78**, 114019 (2008).
- [539] T. Hell, S. Rößner, M. Cristoforetti, and W. Weise, Phys. Rev. D **79**, 014022 (2009).
- [540] B.-J. Schaefer and M. Wagner, Prog. Part. Nucl. Phys. **62**, 381–385 (2009).
- [541] B.-J. Schaefer, M. Wagner, and J. Wambach, Phys. Rev. D **81**, 074013 (2010).
- [542] H. Mao, J. Jin, and M. Huang, J. Phys. G : Nucl. Part. Phys. **37**, 035001 (2010).
- [543] P.-C. Chu, X. Wang, L.-W. Chen, and M. Huang, Phys. Rev. D **91**, 023003 (2015).
- [544] L. M. Haas, R. Stiele, J. Braun, J. M. Pawłowski, and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. D **87**, 076004 (2013).
- [545] C. S. Fischer, L. Fister, J. Luecker, and J. M. Pawłowski, Phys. Lett. B **732**, 273–277 (2014).
- [546] T. K. Herbst, M. Mitter, J. M. Pawłowski, B.-J. Schaefer, and R. Stiele, Phys. Lett. B **731**, 248–256 (2014).
- [547] X.-y. Xin, S.-x. Qin, and Y.-x. Liu, Phys. Rev. D **89**, 094012 (2014).
- [548] R. Stiele and J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. D **93**, 094014 (2016).
- [549] S. Chatterjee and K. A. Mohan, Phys. Rev. D **85**, 074018 (2012).
- [550] W.-j. Fu, Z. Zhang, and Y.-x. Liu, Phys. Rev. D **77**, 014006 (2008).
- [551] O. Scavenius, A. Dumitru, and J. T. Lenaghan, Phys. Rev. C **66**, 034903 (2002).
- [552] A. Dumitru and R. Pisarski, Nucl. Phys. A **698**, 444–447 (2002).
- [553] A. V. FRIESEN, Y. L. KALINOVSKY, and V. D. TONEEV, Int. J. Mod. Phys. A **27**, 1250013 (2012).
- [554] G. Boyd *et al.*, Nucl. Phys. B **469**, 419–444 (1996).
- [555] M. Panero, Phys. Rev. Lett. **103**, 232001 (2009).
- [556] P. Costa, M. C. Ruivo, C. A. de Sousa, H. Hansen, and W. M. Alberico, Phys. Rev. D **79**, 116003 (2009).
- [557] K. Fukushima and T. Hatsuda, Reports on Progress in Physics **74**, 014001 (2010).
- [558] A. Gocksch and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. B **402**, 657–668 (1993).
- [559] J. Greensite, *An Introduction to the Confinement Problem (Lecture Notes in Physics)* (Springer, 2011).
- [560] V. Dexheimer and S. Schramm, Nucl. Phys. A **827**, 579c–581c (2009).
- [561] O. Kaczmarek, F. Karsch, P. Petreczky, and F. Zantow, Phys. Lett. B **543**, 41–47 (2002).
- [562] K. Fukushima, Acta Phys. Pol. Suppl. **3**, 567 (2010).
- [563] A. Polyakov, Nucl. Phys. B **164**, 171–188 (1980).
- [564] M. Creutz, Phys. Rev. D **23**, 1815–1823 (1981).
- [565] A. Dumitru, Y. Hatta, J. Lenaghan, K. Orginos, and R. D. Pisarski, Phys. Rev. D **70**, 034511 (2004).
- [566] O. Kaczmarek and F. Zantow, Phys. Rev. D **71**, 114510 (2005).
- [567] J. O. Andersen, T. Brauner, and W. R. Naylor, Phys. Rev. D **92**, 114504 (2015).
- [568] P. N. Meisinger, M. C. Ogilvie, and T. R. Miller, Phys. Lett. B **585**, 149–154 (2004).
- [569] A. Casher, Phys. Lett. B **83**, 395–398 (1979).
- [570] S. Coleman and E. Witten, Phys. Rev. Lett. **45**, 100–102 (1980).

- [571] H. Abuki, R. Anglani, R. Gatto, G. Nardulli, and M. Ruggieri, Phys. Rev. D **78**, 034034 (2008).
- [572] M. Ciminale, R. Gatto, N. D. Ippolito, G. Nardulli, and M. Ruggieri, Phys. Rev. D **77**, 054023 (2008).
- [573] T. K. Herbst, J. M. Pawłowski, and B.-J. Schaefer, Phys. Rev. D **88**, 014007 (2013).
- [574] L. Fister and J. M. Pawłowski, Phys. Rev. D **88**, 045010 (2013).
- [575] T. D. Cohen, Phys. Rev. Lett. **91**, 222001 (2003).
- [576] G. Akemann, J. Osborn, K. Splittorff, and J. Verbaarschot, Nucl. Phys. B **712**, 287–324 (2005).
- [577] J. C. Osborn, K. Splittorff, and J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. **94**, 202001 (2005).
- [578] J. C. Osborn, K. Splittorff, and J. J. M. Verbaarschot, Int. J. Mod. Phys. A **21**, 859–864 (2006).
- [579] J. C. Osborn, K. Splittorff, and J. J. M. Verbaarschot, arXiv [hep-lat/0510118](https://arxiv.org/abs/hep-lat/0510118) (2007), hep-lat/0510118.
- [580] K. Nagata and A. Nakamura, Phys. Rev. D **82**, 094027 (2010).
- [581] K. Nagata, arXiv [1204.6480](https://arxiv.org/abs/1204.6480) (2012), 1204.6480.
- [582] M. Shifman, A. Vainshtein, and J. Wheeler, editors, *From Fields to Strings : Circumnavigating Theoretical Physics* (World Scientific Publishing Company, 2005).
- [583] G. 't Hooft, Nucl. Phys. B **72**, 461–473 (1974).
- [584] E. Witten, Nucl. Phys. B **160**, 57–115 (1979).
- [585] B. Lucini, M. Teper, and U. Wenger, Phys. Lett. B **545**, 197–206 (2002).
- [586] B. Lucini, M. Teper, and U. Wenger, J. High Energy Phys. **2004**, 061–061 (2004).
- [587] K. Holland, M. Pepe, and U.-J. Wiese, Nucl. Phys. B **694**, 35–58 (2004).
- [588] K. Holland, M. Pepe, and U.-J. Wiese, Nucl. Phys. B - Proc. Suppl **129-130**, 712–714 (2004).
- [589] B. Lucini, M. Teper, and U. Wenger, J. High Energy Phys. **2005**, 033–033 (2005).
- [590] M. Pepe, Nucl. Phys. B - Proc. Suppl **141**, 238–243 (2005).
- [591] I. T. Drummond, R. R. Horgan, P. V. Landshoff, and A. Rebhan, DAMTP-1999-66 (1999).
- [592] J. O. Andersen, L. E. Leganger, M. Strickland, and N. Su, Phys. Rev. D **84**, 087703 (2011).
- [593] B. Bringoltz and M. Teper, Phys. Lett. B **628**, 113–124 (2005).
- [594] M. Teper, PoS LATTICE **2008 :022,2008** (2008), 0812.0085.
- [595] S. Datta and S. Gupta, Nucl. Phys. A **830**, 749c–752c (2009).
- [596] L. McLerran and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A **796**, 83–100 (2007).
- [597] Y. Hidaka, L. D. McLerran, and R. D. Pisarski, Nucl. Phys. A **808**, 117–123 (2008).
- [598] K. Miura, T. Z. Nakano, and A. Ohnishi, Prog. Theor. Phys. **122**, 1045–1054 (2009).
- [599] P. Damgaard, D. Hochberg, and N. Kawamoto, Phys. Lett. B **158**, 239–244 (1985).
- [600] L. McLerran, K. Redlich, and C. Sasaki, Nucl Phys A **824**, 86–100 (2009).
- [601] L. Y. Glozman and R. F. Wagenbrunn, Phys. Rev. D **77**, 054027 (2008).
- [602] L. Y. Glozman, Phys. Rev. D **79**, 037504 (2009).
- [603] L. Y. Glozman, Phys. Rev. D **80**, 037701 (2009).
- [604] P. de Forcrand and O. Philipsen, Nucl. Phys. B **642**, 290–306 (2002).
- [605] P. de Forcrand and O. Philipsen, Nucl. Phys. B **673**, 170–186 (2003).
- [606] M. D’Elia and M.-P. Lombardo, Phys. Rev. D **67**, 014505 (2003).
- [607] M. D’Elia and M.-P. Lombardo, Phys. Rev. D **70**, 074509 (2004).
- [608] M. D’Elia, F. Di Renzo, and M. P. Lombardo, Phys. Rev. D **76**, 114509 (2007).
- [609] M. D’Elia and F. Sanfilippo, Phys. Rev. D **80**, 014502 (2009).
- [610] M. D’Elia and F. Sanfilippo, Phys. Rev. D **80**, 111501 (2009).
- [611] P. Cea, L. Cosmai, M. D’Elia, C. Manneschi, and A. Papa, Phys. Rev. D **80**, 034501 (2009).
- [612] P. de Forcrand and O. Philipsen, Phys. Rev. Lett. **105**, 152001 (2010).
- [613] K. Nagata and A. Nakamura, Phys. Rev. D **83**, 114507 (2011).
- [614] Y. Aoki, Z. Fodor, S. Katz, and K. Szabó, Phys. Lett. B **643**, 46–54 (2006).
- [615] Y. Aoki *et al.*, J. High Energy Phys. **2009**, 088–088 (2009).
- [616] S. Borsanyi *et al.*, J. High Energ. Phys. **2010** (2010).
- [617] Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, and M. Yahiro, Phys. Rev. D **77**, 051901 (2008).
- [618] Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, and M. Yahiro, Phys. Rev. D **78**, 036001 (2008).
- [619] Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, M. Matsuzaki, and M. Yahiro, Phys. Rev. D **78**, 076007 (2008).
- [620] Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, M. Matsuzaki, and M. Yahiro, Phys. Rev. D **79**, 096001 (2009).
- [621] K. Kashiwa, M. Matsuzaki, H. Kouno, Y. Sakai, and M. Yahiro, Phys. Rev. D **79**, 76008 (2009).

- [622] H. Kouno, Y. Sakai, K. Kashiwa, and M. Yahiro, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **36**, 115010 (2009).
- [623] Y. Sakai, T. Sasaki, H. Kouno, and M. Yahiro, *Phys. Rev. D* **82**, 076003 (2010).
- [624] T. Sasaki, Y. Sakai, H. Kouno, and M. Yahiro, *Phys. Rev. D* **84**, 091901 (2011).
- [625] H. Kouno, M. Kishikawa, T. Sasaki, Y. Sakai, and M. Yahiro, *Phys. Rev. D* **85**, 016001 (2012).
- [626] Y. Sakai, H. Kouno, T. Sasaki, and M. Yahiro, *Phys. Lett. B* **718**, 130–135 (2012).
- [627] C. Wetterich, *Phys. Lett. B* **301**, 90–94 (1993).
- [628] K.-I. Kondo, *Phys. Rev. D* **82**, 065024 (2010).
- [629] Y. Sakai, T. Sasaki, H. Kouno, and M. Yahiro, *J. Phys. G : Nucl. Part. Phys.* **39**, 035004 (2012).
- [630] T. Sasaki, J. Takahashi, Y. Sakai, H. Kouno, and M. Yahiro, *Phys. Rev. D* **85**, 056009 (2012).
- [631] Y. Aoki, G. Endrődi, Z. Fodor, S. D. Katz, and K. K. Szabó, *Nature* **443**, 675–678 (2006).
- [632] P. Costa, M. Ferreira, D. P. Menezes, J. Moreira, and C. Providência, *Phys. Rev. D* **92**, 036012 (2015).
- [633] M. Ferreira, P. Costa, O. Lourenço, T. Frederico, and C. Providência, *Phys. Rev. D* **89**, 116011 (2014).
- [634] G. S. Bali *et al.*, *Phys. Rev. D* **86**, 071502 (2012).
- [635] J. O. Andersen, W. R. Naylor, and A. Tranberg, *Rev. Mod. Phys.* **88**, 025001 (2016).
- [636] M. C. Ruivo, P. Costa, and C. A. de Sousa, *Phys. Rev. D* **86**, 116007 (2012).
- [637] T. E. Restrepo, J. C. Macias, M. B. Pinto, and G. N. Ferrari, *Phys. Rev. D* **91**, 065017 (2015).
- [638] R. Gatto and M. Ruggieri, *Phys. Rev. D* **83**, 034016 (2011).
- [639] M. Ferreira, P. Costa, D. P. Menezes, C. Providência, and N. N. Scoccola, *Phys. Rev. D* **89**, 016002 (2014).
- [640] M. Ferreira, P. Costa, and C. Providência, *Phys. Rev. D* **89**, 036006 (2014).
- [641] Y. Zhao, L. Chang, W. Yuan, and Y.-x. Liu, *The European Physical Journal C* **56**, 483–492 (2008).
- [642] S.-x. Qin, L. Chang, H. Chen, Y.-x. Liu, and C. D. Roberts, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 172301 (2011).
- [643] L.-j. Jiang, X.-y. Xin, K.-l. Wang, S.-x. Qin, and Y.-x. Liu, *Phys. Rev. D* **88**, 016008 (2013).
- [644] W.-y. Ke and Y.-x. Liu, *Phys. Rev. D* **89**, 074041 (2014).
- [645] G. A. Contrera, M. Orsaria, and N. N. Scoccola, *Phys. Rev. D* **82**, 054026 (2010).
- [646] L. N. Cooper, *Phys. Rev.* **104**, 1189–1190 (1956).
- [647] H. Frohlich, *Phys. Rev.* **79**, 845–856 (1950).
- [648] H. Frohlich, *Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences* **215**, 291–298 (1952).
- [649] C. Kittel, *Introduction to Solid State Physics* (Wiley, 2004).
- [650] M. D. J. Nickel, *Color-superconductivity from a Dyson-Schwinger perspective*, PhD thesis, Darmstadt university, 2007.
- [651] V. Ritus, *Ann. Phys.* **69**, 555–582 (1972).
- [652] K. Masuda, T. Hatsuda, and T. Takatsuka, *The Astrophysical Journal* **764**, 12 (2013).
- [653] K. Masuda, T. Hatsuda, and T. Takatsuka, *Progress of Theoretical and Experimental Physics* **2013**, 73D01–0 (2013).
- [654] K. Popper, *The Logic of Scientific Discovery* (Routledge, 2002).
- [655] J. Keller, *Amer. Math. Monthly* **83**, 107 (1976).
- [656] J. Hadamard, *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations* (Ulan Press, 2012).
- [657] A. Tarantola, *Inverse Problem Theory : Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation* (Elsevier Science Ltd, 1987).
- [658] V. Ambarzumian, *Z. Physik* **53**, 690–695 (1929).
- [659] H. Jeffreys, *Theory of Probability (Oxford Classic Texts in the Physical Sciences)*, 3 ed. (Oxford University Press, 1998).
- [660] E. T. Jaynes, *Probability Theory : The Logic of Science 1st edition by Jaynes, E. T. (2003) Hardcover* (Cambridge University Press, 2003).
- [661] R. Carnap, *Logical Foundations of Probability*, 2nd ed. (The University of Chicago Press, 1962).
- [662] C. Howson and P. Urbach, *Scientific Reasoning : The Bayesian Approach* (Open Court, 2005).
- [663] A. N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability* (Martino Fine Books, 2013).
- [664] M. Li and P. Vitanyi, *An Introduction to Kolmogorov Complexity and Its Applications* (Springer, 2008).
- [665] Y. Wang, C. Yang, and A. G. Yagola, editors, *Optimization and Regularization for Computational Inverse Problems and Applications* (Springer Science + Business Media, 2011).
- [666] F. D. Moura Neto and A. J. da Silva Neto, *An Introduction to Inverse Problems with Applications* (Springer Science + Business Media, 2013).
- [667] L. Beilina, editor, *Inverse Problems and Applications* (Springer International Publishing, 2015).
- [668] G. Backus, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **65**, 1 (1970), <http://www.pnas.org/content/65/1/1.full.pdf>.

- [669] G. Backus, Proceedings of the National Academy of Sciences **65**, 281 (1970), <http://www.pnas.org/content/65/2/281.full.pdf>.
- [670] G. Backus, Proceedings of the National Academy of Sciences **67**, 282 (1970), <http://www.pnas.org/content/67/1/282.full.pdf>.
- [671] P. Billingsley, *Probability and Measure* (Wiley, 2012).
- [672] W. Rudin, *Real and Complex Analysis (Higher Mathematics Series)* (McGraw-Hill Education, 1986).
- [673] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability (Probability and Its Applications)* (Springer, 2002).
- [674] J. L. Doob, The American Mathematical Monthly **103**, 586 (1996).
- [675] A. Papoulis, *Probability, random variables, and stochastic processes* (McGraw-Hill Kogakush, 1981).
- [676] O. Nikodym, Fundamenta Mathematicae **30**, 131 (1930).
- [677] K. Mosegaard and A. Tarantola, International Handbook of Earthquake and Engineering Seismology , 237–265 (2002).
- [678] C. E. Shannon and W. Weaver, *The Mathematical Theory of Communication* (University of Illinois Press, 1971).
- [679] R. Ellis, *Entropy, Large Deviations, and Statistical Mechanics (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften)* (Springer, 1985).
- [680] A. Y. Khinchin and Mathematics, *Mathematical Foundations of Information Theory* (Dover Publications, 1957).
- [681] J. Rothstein, Science **114**, 171–175 (1951).
- [682] C. E. Shannon, Bell System Technical Journal **27**, 379–423 (1948).
- [683] A. Tarantola and B. Valette, J. of geophys. **50**, 159 (1982).
- [684] M. Bayes and M. Price, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **53**, 370–418 (1763).
- [685] K. Mosegaard and M. Sambridge, Inverse Problems **18**, R29–R54 (2002).
- [686] K. Mosegaard and A. Tarantola, Journal of Geophysical Research : Solid Earth **100**, 12431–12447 (1995).
- [687] J. F. Claerbout and F. Muir, GEOPHYSICS **38**, 826–844 (1973).
- [688] J.-N. Hwang, S.-R. Lay, and A. Lippman, IEEE Trans. Signal Process. **42**, 2795–2810 (1994).