



**HAL**  
open science

# Propagation d'incertitudes à travers des modèles dynamiques d'assemblages de structures mécaniques

Sami Daouk

► **To cite this version:**

Sami Daouk. Propagation d'incertitudes à travers des modèles dynamiques d'assemblages de structures mécaniques. Génie mécanique [physics.class-ph]. Université Paris Saclay (COMUE), 2016. Français. NNT : 2016SACLN046 . tel-01457670

**HAL Id: tel-01457670**

**<https://theses.hal.science/tel-01457670>**

Submitted on 6 Feb 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

NNT : 2016SACLN046

THÈSE DE DOCTORAT  
DE  
L'UNIVERSITÉ PARIS-SACLAY  
PRÉPARÉE À  
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE PARIS-SACLAY

École doctorale N°579  
Sciences mécaniques et énergétiques, matériaux et géosciences

Spécialité de doctorat : Génie Mécanique

par

**M. SAMI DAOUK**

Propagation d'incertitudes à travers des modèles dynamiques  
d'assemblages de structures mécaniques

Thèse présentée et soutenue à Cachan, le 15 Novembre 2016.

Composition du Jury :

M.	DAIDIÉ, ALAIN	Professeur, INSA Toulouse	Président du Jury
M.	BLANZÉ, CLAUDE	Professeur, CNAM Paris	Rapporteur
M.	FOLTÊTE, EMMANUEL	Professeur, ENSMM	Rapporteur
M.	CLUZEL, CHRISTOPHE	Maître de conférences, IUT d'Evry	Examineur
Mme.	AUDEBERT, SYLVIE	Ingénieur-Chercheur, EDF R&D	Examinatrice
M.	LOUF, FRANÇOIS	Maître de conférences, ENS Cachan	Co-encadrant
M.	CHAMPANEY, LAURENT	Professeur, ENSAM	Directeur de thèse



# Remerciements

Ce manuscrit est loin d'être uniquement le résultat d'une aventure personnelle, mais aussi le fruit d'un travail impliquant plusieurs personnes, depuis son initiation jusqu'à son achèvement. Ces années de thèse représentent une aventure humaine riche en événements et embellie de rencontres.

Mes premiers remerciements vont naturellement à mes encadrants Laurent Champaney et François Louf, sans qui tout ceci n'aurait pas été possible. Laurent, je te remercie de m'avoir choisi pour travailler sur ce projet. François, j'ai été privilégié de mener ces travaux sous ton encadrement. Un grand merci de ta disponibilité, ton enthousiasme et tes conseils toujours pertinents, tout cela assaisonné de bonne humeur et de sympathie. Merci à tous les deux de la confiance que vous m'avez accordée, de la connaissance que vous m'avez transmise, et des belles qualités humaines que vous avez manifestées. Votre expérience et expertise m'ont permis de mûrir et développer diverses compétences professionnelles et personnelles.

Je souhaite aussi remercier chaleureusement l'intégralité des membres de mon jury de thèse pour leurs commentaires constructifs et encourageants. Merci à M. Alain Daidié de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Un grand merci à M. Claude Blanzé et M. Emmanuel Foltête qui ont bien voulu m'accorder une partie de leur temps extrêmement précieux pour évaluer mon travail et rapporter ce mémoire.

Ces travaux de thèse ont été réalisés dans le cadre du projet SICODYN, initié et piloté par Mme Sylvie Audebert, envers qui j'exprime toute ma gratitude pour la confiance et l'appréciation qu'elle m'a montrées. Je souhaite la remercier d'avoir accepté d'examiner mon travail de façon minutieuse et attentionnée. Je garderai un excellent souvenir du travail effectué avec elle et de sa convivialité. Merci également à Olivier Dorival qui a été une source d'encouragement et de motivation tout au long de ces travaux. Je remercie également les différents partenaires de ce projet, en particulier Anas Batou, Scott Cogan, Chafi Kaici et Stéphane Muller des échanges scientifiques enrichissants que nous avons eus.

Le travail expérimental effectué au cours de cette thèse n'aurait pas pu être accompli sans l'aide précieuse de Christophe Cluzel. Je suis particulièrement redevable envers lui et je voudrais lui exprimer mes sincères remerciements d'avoir été patient

avec moi, expérimentateur débutant, et de m'avoir guidé tout au long de mes essais. Il a toujours été présent pour m'aider à surmonter les difficultés du travail expérimental par des suggestions pratiques et un esprit de synthèse fin. J'aurais aimé avoir plus de temps pour apprendre davantage de son expertise et poursuivre nos collaborations.

Cette thèse a été réalisée au sein du Laboratoire de Mécanique et Technologie de Cachan que je remercie de m'avoir accueilli et soutenu durant ces années.

Parmi l'équipe, je souhaite commencer par remercier Alexandre Michou, dont les poutres en béton précontraint ont une renommée internationale. Je ne peux le remercier suffisamment du temps qu'il a consacré à me prêter main forte dans tous les domaines, du serrage de boulons à la résolution de problèmes numériques sur Cast3M. Merci également de nos innombrables échanges qui allaient de la construction et le béton précontraint à la dynamique des assemblages boulonnés !

Merci à Nicolas, le Courrier du LMT, et à Pierre-Eric de leurs conseils sur l'optimisation et le calcul d'erreur sous Matlab. Merci à Rémi, Xavier, et Boubou de l'aide pratique qu'ils m'ont apportée pendant la préparation et la réalisation du travail expérimental. Je remercie également Jean-Paul, le grand bricoleur, du temps qu'il a pris pour m'introduire à la mécanique de précision et l'usinage.

Je tiens aussi à remercier les occupants du bureau qui ont contribué à sa bonne ambiance. Je pense d'abord au bel exemple des anciens post-doctorants Hadjer et Jean-Sébastien. Je leur souhaite une excellente carrière dans la recherche académique. Je pense également à Elena, Maxime, Fred et Werty pour nos échanges réguliers amusants. Je vous souhaite un futur brillant et ne peux qu'espérer avoir des futurs co-bureaux comme vous.

Un petit clin d'oeil à tous les collègues et amis : PAB, Patate, Adrien, Max, Frisou, Python, MF, Hadrien, Amaury, sans oublier la jeune équipe libanaise formée de Rana, Farah, Chady et Jack Daniel's.

Une délicate attention à Lydia pour sa disponibilité et son aide précieuses, sa gentillesse constante et son incroyable dévouement.

Parce que la thèse n'est pas qu'un simple travail, je tiens à remercier du fond du coeur mes amis proches et ma famille, notamment Asia et Oliver, qui, bien que n'ayant toujours pas compris mon sujet de thèse, m'ont toujours encouragé, motivé et soutenu.

Mes plus grands et profonds remerciements vont à ma chère Ghinwa, pleine de tendresse et d'amour à mon égard. C'est vraiment grâce à toi que j'ai pu atteindre le sommet de la montagne et finir cette thèse. Merci infiniment pour ta patience et ta bonté de coeur durant les périodes intenses en activité et pour tout le soutien moral, affectif et spirituel que tu m'apportes quotidiennement.

# Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Liste des tableaux	ix
Introduction	1
<b>I Incertitudes et liaison boulonnée en dynamique</b>	<b>9</b>
<b>1 Etude des incertitudes</b>	<b>11</b>
1.1 Types d'incertitudes	13
1.1.1 Incertitude aléatoire	14
1.1.2 Incertitude épistémique	14
1.1.3 Aléatoire ou épistémique ?	15
1.2 Classification des sources d'incertitudes	16
1.2.1 Incertitudes sur les paramètres	16
1.2.2 Incertitudes de modélisation	17
1.2.3 Incertitudes expérimentales	18
<b>2 Quantification des incertitudes dans les modèles dynamiques</b>	<b>19</b>
2.1 Incertitudes et probabilités	21
2.1.1 Rappels de probabilités	22
2.1.2 Modélisation probabiliste des paramètres incertains	27
2.1.3 Cadre d'étude des problèmes stochastiques	28
2.2 Méthodes paramétriques probabilistes	29
2.2.1 Méthodes d'intégration directe	29
2.2.2 Méthodes d'analyse de fiabilité des structures	32
2.2.3 Méthodes d'approximation polynomiale	33
2.2.4 Techniques de projection	36
2.3 Méthodes paramétriques non probabilistes	40
2.4 Méthodes non paramétriques	42
2.5 Théorie des méconnaissances	44

2.5.1	Méconnaissances de base et méconnaissances effectives . . . . .	44
2.5.2	À propos des faibles méconnaissances . . . . .	46
2.6	Applications et analyses comparatives . . . . .	47
2.6.1	Modèle d'un treillis plan . . . . .	48
2.6.2	Modèle tridimensionnel . . . . .	49
<b>3</b>	<b>Modélisation des fixations boulonnées</b>	<b>53</b>
3.1	Modèles empiriques . . . . .	54
3.2	Modèles analytiques . . . . .	57
3.2.1	Cas d'une charge statique . . . . .	57
3.2.2	Cas d'une charge dynamique . . . . .	59
3.2.3	Cas d'un crash . . . . .	62
3.3	Modèles numériques en éléments finis . . . . .	62
3.3.1	Modèles locaux . . . . .	63
3.3.2	Modèles intermédiaires . . . . .	64
3.3.3	Modèles structuraux . . . . .	66
	<b>Bilan</b>	<b>69</b>
 <b>II Caractérisation expérimentale des incertitudes dans une liaison boulonnée</b>		 <b>71</b>
<b>4</b>	<b>Conception d'un banc d'essai dynamique</b>	<b>73</b>
4.1	Objectifs de l'étude . . . . .	75
4.2	Principe de fonctionnement . . . . .	76
4.3	Dimensionnement du montage . . . . .	77
4.3.1	Calcul des fréquences et modes propres . . . . .	78
4.3.2	Recherche du chargement optimal . . . . .	82
4.3.3	Evaluation de l'effort à injecter . . . . .	83
4.3.4	Géométrie finale de la liaison . . . . .	86
4.4	Identifications par analyse différentielle . . . . .	87
4.5	Caractérisation de l'amortissement . . . . .	88
4.5.1	Facteur de qualité . . . . .	90
4.5.2	Capacité d'amortissement spécifique . . . . .	90
<b>5</b>	<b>Analyse expérimentale de l'influence des paramètres de liaison</b>	<b>93</b>
5.1	Instrumentation . . . . .	94
5.2	Démarche expérimentale . . . . .	98
5.3	Aléas expérimentaux . . . . .	99
5.4	Analyse modale de l'assemblage . . . . .	101
5.4.1	Etude de l'assemblage avec liaison boulonnée . . . . .	103
5.4.2	Etude de l'assemblage de référence . . . . .	110
5.5	Analyse différentielle de la liaison . . . . .	111

5.5.1	Evolution de la dissipation dans la liaison . . . . .	111
5.5.2	Evolution de la raideur apparente de la liaison . . . . .	113
<b>Bilan</b>		<b>119</b>
<b>III Fortes incertitudes dans les modèles dynamiques</b>		<b>121</b>
<b>6 Propagation de fortes méconnaissances en dynamique</b>		<b>123</b>
6.1	Contexte et besoin d'une extension . . . . .	124
6.2	Développements . . . . .	125
6.2.1	Problème aux valeurs propres . . . . .	125
6.2.2	Construction d'une base réduite . . . . .	126
6.2.3	Problème réduit . . . . .	127
6.2.4	Appairage des modes . . . . .	128
6.2.5	Interpolation des pulsations et modes propres . . . . .	129
6.2.6	Calcul des méconnaissances effectives . . . . .	131
<b>7 Applications à des modèles dynamiques</b>		<b>133</b>
7.1	Modèle plan . . . . .	134
7.2	Modèle tridimensionnel . . . . .	136
<b>Bilan</b>		<b>139</b>
<b>IV Etude d'une structure industrielle</b>		<b>141</b>
<b>8 Le projet SICODYN</b>		<b>143</b>
8.1	Contexte de l'étude . . . . .	144
8.2	Principaux objectifs . . . . .	145
8.3	Verrous technologiques . . . . .	149
<b>9 Analyse modale expérimentale</b>		<b>151</b>
9.1	Description du montage . . . . .	152
9.2	Analyse modale expérimentale . . . . .	154
9.3	Influence des configurations . . . . .	158
9.3.1	Configuration à 10 boulons . . . . .	159
9.3.2	Configuration à 6 boulons . . . . .	160
9.3.3	Configuration à 2 boulons . . . . .	162
9.3.4	Synthèse . . . . .	164
9.4	Influence des niveaux de sollicitation . . . . .	166
<b>10 Quantification des incertitudes</b>		<b>171</b>
10.1	Faibles incertitudes . . . . .	173
10.2	Fortes incertitudes . . . . .	174

<b>Bilan</b>	<b>177</b>
<b>Conclusion</b>	<b>179</b>
<b>A Dessin technique des pièces du banc d'essai dynamique</b>	<b>183</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>191</b>

# Table des figures

1	Illustration de la démarche V&V . . . . .	2
2	Démonstrateur du benchmark et du projet SICODYN . . . . .	6
1.1	Modules de FRF de 20 voitures nominalement identiques pour deux points d'observation différents (tirées de [Durand <i>et al.</i> 2008]) . . . . .	13
2.1	Illustration du principe de propagation des incertitudes . . . . .	22
2.2	Treillis plan à quatre barres . . . . .	48
2.3	Forme des modes propres associés au modèle déterministe du treillis . . . . .	48
2.4	Maillage du modèle tridimensionnel étudié . . . . .	50
2.5	Forme des trois premiers modes propres associés au modèle déterministe du modèle tridimensionnel étudié . . . . .	50
3.1	Configuration d'une liaison en cisaillement simple et double . . . . .	55
3.2	Assemblage et réseau électrique équivalent d'après [Ross 1947] . . . . .	58
3.3	Modèle masse-raideur et types de liaisons pouvant être représentées par ce modèle d'après [McCarthy <i>et al.</i> 2006] . . . . .	59
3.4	Différents modèles de Iwan d'après [Segalman et Starr 2008] . . . . .	60
3.5	Modèle analytique à 4 paramètres ( $K_1, K_3, K_\theta, C$ ) de [Ahmadian et Jalali 2007b] . . . . .	61
3.6	Modèle analytique à 6 paramètres de [Ahmadian et Jalali 2007a] . . . . .	62
3.7	Maillage du modèle de [Alkatan <i>et al.</i> 2007] . . . . .	63
3.8	Modèle numérique de [Izumi <i>et al.</i> 2005] . . . . .	64
3.9	Modèle non linéaire en éléments finis 3D issu de [McCarthy <i>et al.</i> 2005b] : (a) coupe à travers un modèle à un boulon montrant les corps en contact ; (b) corps en contact isolés . . . . .	65
3.10	Assemblage étudié et modèle non linéaire en éléments finis 3D proposé par [Champaney <i>et al.</i> 2008] . . . . .	66
3.11	Modèles en éléments finis pour une liaison boulonnée proposés dans [Kim <i>et al.</i> 2007] : (a) modèle de boulon solide, (b) modèle de boulon couplé, (c) modèle de boulon araignée et (d) modèle sans boulon . . . . .	67
4.1	Illustration des caractéristiques des liaisons boulonnées présentes sur une pompe mono-étagée à axe horizontal (les boulons ne sont pas représentés) . . . . .	75

4.2	Liaison boulonnée et système de chargement . . . . .	77
4.3	Modèle analytique simplifié permettant l'estimation de la fréquence de résonance du premier mode de flexion symétrique . . . . .	79
4.4	Modèle analytique simplifié permettant l'estimation de la fréquence de résonance du premier mode de flexion antisymétrique . . . . .	80
4.5	Le modèle utilisé pour effectuer le dimensionnement de la liaison – Chargement final appliqué : $T = 13000$ N et $M_f = 6500$ N.m . . . . .	83
4.6	Géométrie finale de la liaison boulonnée à analyser . . . . .	87
4.7	Géométrie de la pièce de référence non dissipative ayant des caractéristiques similaires à celles de la liaison boulonnée . . . . .	88
4.8	Caractéristiques de la pièce de référence et la liaison avec 8 boulons . . . . .	89
4.9	Caractéristiques de la pièce de référence (avec des vis sans tête M16 dans les trous extrêmes) et la liaison avec 16 boulons . . . . .	89
4.10	Illustration de la largeur de bande à $-3$ dB . . . . .	91
5.1	Montage final du banc d'essai et de la liaison boulonnée analysés . . . . .	94
5.2	Éléments utilisés pour mesurer l'énergie injectée par le pot vibrant . . . . .	95
5.3	Implantation des jauges de déformation sur les bras élastiques . . . . .	96
5.4	Position et orientation des 20 jauges implantées sur l'assemblage . . . . .	97
5.5	Difficulté liée aux modes doubles du montage et solution proposée pour écarter leurs fréquences propres . . . . .	99
5.6	Liaison souple permettant d'avoir davantage de liberté de rotation des masses excentrées . . . . .	100
5.7	La forme des 4 premiers modes propres de flexion du montage : projection sur l'axe . . . . .	102
5.8	Fonction de réponse en fréquence obtenue à partir d'une excitation de type bruit blanc sur l'assemblage de référence . . . . .	103
5.9	Illustration de l'ordre de serrage des boulons adopté pour les essais avec 8 et 16 boulons . . . . .	104
5.10	Fonctions de réponse en fréquence obtenues à partir d'une excitation de type bruit blanc sur l'assemblage dans différentes configurations . . . . .	105
5.11	Evolution du coefficient d'absorption en fonction du moment dans la liaison : étude des différentes configurations de liaison testées . . . . .	107
5.12	Interprétation de l'écart entre les valeurs du coefficient d'absorption obtenues par la méthode énergétique et la méthode à $-3$ dB . . . . .	108
5.13	Evolution de la fréquence de résonance en fonction du moment dans la liaison : étude des différentes configurations de liaison testées . . . . .	109
5.14	Evolution du coefficient d'absorption et de la fréquence de résonance en fonction du moment dans la partie centrale : étude du montage de référence . . . . .	110
5.15	Evolution de l'énergie dissipée dans la liaison via une analyse différentielle en fonction du moment dans la liaison : influence de la configuration . . . . .	112

5.16	Représentation de la contribution de la liaison boulonnée ramenée à l'énergie élastique totale . . . . .	113
5.17	Evolution de la fréquence de résonance en fonction du moment dans la liaison : comparaison des différentes configurations testées . . . . .	114
5.18	Stratégie de recalage en deux étapes permettant d'estimer la raideur apparente de la liaison boulonnée en fonction des conditions de liaison	115
5.19	Modèle utilisé pour estimer la fréquence propre du premier mode de flexion dans différentes configurations . . . . .	116
5.20	Modèles numériques linéaires permettant d'estimer la raideur $k_0$ de la pièce de référence dans la première étape de recalage et d'initialiser la raideur de la liaison boulonnée à une valeur raisonnable lors de la seconde étape . . . . .	117
5.21	Résultats issus des deux étapes de la démarche de recalage présentées sur la figure 5.18 . . . . .	118
7.1	Assemblage de poutres plan . . . . .	135
7.2	Forme des trois premiers modes propres du modèle déterministe de l'assemblage de poutres plan . . . . .	135
7.3	Maillage de l'assemblage 3D . . . . .	136
8.1	Démonstrateur du benchmark et du projet SICODYN équipant les centrales thermiques . . . . .	145
8.2	Modèles 3D des différents composants de la pompe SICODYN . . . . .	146
8.3	Fonctions de réponse en fréquence de la pompe SICODYN à une excitation au marteau de choc : pompe non couplée (courbe rose) et pompe couplée aux tuyauteries (courbe bleue) (tirée de [Audebert <i>et al.</i> 2014]) . . . . .	147
8.4	Structuration scientifique du projet SICODYN . . . . .	148
9.1	Sous-système de la pompe SICODYN étudié . . . . .	153
9.2	Maillage expérimental de l'assemblage étudié . . . . .	153
9.3	Modes de vibration du montage pour la configuration à 10 boulons . . . . .	158
9.4	Quelques FRF synthétisées – Configuration à 10 boulons . . . . .	159
9.5	Matrice AutoMAC – Configuration à 10 boulons . . . . .	160
9.6	Quelques FRF synthétisées – Configuration à 6 boulons . . . . .	161
9.7	Matrice AutoMAC – Configuration à 6 boulons . . . . .	162
9.8	Quelques FRF synthétisées – Configuration à 2 boulons . . . . .	163
9.9	Matrice AutoMAC – Configuration à 2 boulons . . . . .	163
9.10	Fonctions de réponse en fréquence obtenues pour les trois configurations testées . . . . .	164
9.11	Matrice MAC croisée entre les différentes configurations . . . . .	165
9.12	Fonctions de réponse en fréquence obtenues pour les trois niveaux de sollicitation appliqués – Configuration à 10 boulons . . . . .	167

9.13	Fonctions de réponse en fréquence obtenues pour les trois niveaux de sollicitation appliqués – Configuration à 6 boulons . . . . .	168
9.14	Fonctions de réponse en fréquence obtenues pour les trois niveaux de sollicitation appliqués – Configuration à 2 boulons . . . . .	169
10.1	Modèles de l’assemblage du corps de palier et support de palier de la pompe SICODYN . . . . .	172
10.2	Forme des trois premiers modes propres associés au modèle déterministe de l’assemblage des deux composants de pompe . . . . .	173
10.3	Forme de quelques modes propres associés au modèle déterministe de l’assemblage 2 . . . . .	175
A.1	Bride centrale de liaison . . . . .	184
A.2	Monobloc / Pièce de référence . . . . .	185
A.3	Poutre de section circulaire . . . . .	186
A.4	Masse de section circulaire . . . . .	187
A.5	Masse de section rectangulaire . . . . .	188
A.6	Pige de centrage de section circulaire : assure la mise en position des brides centrales de liaison . . . . .	189

# Liste des tableaux

2.1	Intervalles à 99% pour toutes les fréquences propres du treillis (10000 tirages) . . . . .	49
2.2	Intervalles à 99% pour les trois premières fréquences propres de l'assemblage, avec les erreurs relatives et temps de calcul (10000 tirages)	50
3.1	Analogie électro-mécanique de [Ross 1947] . . . . .	58
3.2	Principales méthodes paramétriques de propagation des incertitudes en mécanique des structures . . . . .	69
5.1	Valeurs des fréquences de résonance et amortissements modaux pour les différentes configurations de liaison testées . . . . .	106
5.2	Variations relatives de la fréquence de résonance dans les différentes configurations étudiées . . . . .	110
6.1	Intervalles à 99% pour les fréquences propres du treillis (20000 tirages) avec faibles et fortes méconnaissances . . . . .	125
7.1	Intervalles à 99% pour toutes les fréquences propres de l'assemblage de poutres (10000 tirages) . . . . .	135
7.2	Intervalles à 99% pour les trois premières fréquences propres de l'assemblage ( $\delta_{\text{cale}} = 0.5$ ) . . . . .	137
7.3	Intervalles à 99% pour les trois premières fréquences propres de l'assemblage ( $\delta_{\text{cône}} = 0.05$ ) . . . . .	137
9.1	Fréquences de résonance et amortissements modaux pour la configuration à 10 boulons sur [0–500] Hz . . . . .	159
9.2	Fréquences de résonance et amortissements modaux pour la configuration à 6 boulons sur [0–500] Hz . . . . .	161
9.3	Fréquences de résonance et amortissements modaux pour la configuration à 2 boulons sur [0–500] Hz . . . . .	162
10.1	Intervalles à 99% pour les trois premières fréquences propres du modèle de l'assemblage 1 ( <i>faibles incertitudes</i> ) . . . . .	174
10.2	Intervalles à 99% pour les trois premières fréquences propres du modèle de l'assemblage 1 ( <i>fortes incertitudes</i> ) . . . . .	175

10.3 Intervalles à 99% pour quelques fréquences propres du modèle de l'assemblage 2 ( <i>fortes incertitudes</i> ) . . . . .	176
--	-----

# Introduction

Dans le monde industriel actuel, la conception et la qualification d'assemblages de structures mécaniques complexes nécessitent des campagnes d'essais coûteuses et lourdes à mettre en place. Les moyens disponibles et les délais courts ont poussé les ingénieurs à mettre en avant les simulations numériques et leur accorder une importance majeure dans le but de compléter, orienter ou même remplacer une partie du travail expérimental.

Étant donné que les performances des calculateurs augmentent rapidement et de manière considérable, des phénomènes complexes peuvent être aujourd'hui modélisés avec plus de finesse et précision afin de rendre les modèles numériques de plus en plus réalistes. Cependant, afin qu'une simulation soit avantageuse, il faut que le temps de calcul reste réduit. Souvent cela implique de faire des hypothèses simplificatrices et de modéliser certains éléments ou phénomènes de manière approchée. Même l'utilisation d'un modèle très raffiné ne garantit pas un résultat crédible. En effet, la confrontation entre un modèle et l'expérience démontre souvent l'incapacité du modèle à prédire la réponse de manière fiable [Oberkampf et Roy 2010]. Par conséquent, des questions majeures ont été soulevées quant à la validité des résultats obtenus : « **Peut-on considérer les prédictions numériques comme bases fiables pour prendre des décisions cruciales ? Comment peut-on évaluer la précision ou la validité d'un résultat numérique ? Quel niveau de confiance peut-on accorder à un résultat numérique ?** » L'ensemble des méthodes et procédures développées pour répondre à ces questions et démontrer la crédibilité d'une simulation s'inscrivent dans le cadre de la **Vérification et Validation des modèles** (ou démarche V&V) [Babuska et Oden 2004, Hemez 2005, Oberkampf et Roy 2010]. D'après [Trucano *et al.* 2006], ces termes sont définis actuellement de la manière suivante :

- La **vérification** est le processus qui détermine si le modèle numérique, obtenu par discrétisation du modèle mathématique continu du phénomène physique, et le code de calcul considéré peuvent être utilisés pour représenter le modèle mathématique avec une précision suffisante.
- La **validation** est le processus qui détermine si un modèle d'un phénomène physique représente le phénomène physique réel avec une précision suffisante, en vue de l'utilisation prévue du modèle.

Comme le résume bien Roache [Roache 1998], « la vérification traite des mathématiques ; la validation traite de la physique ».

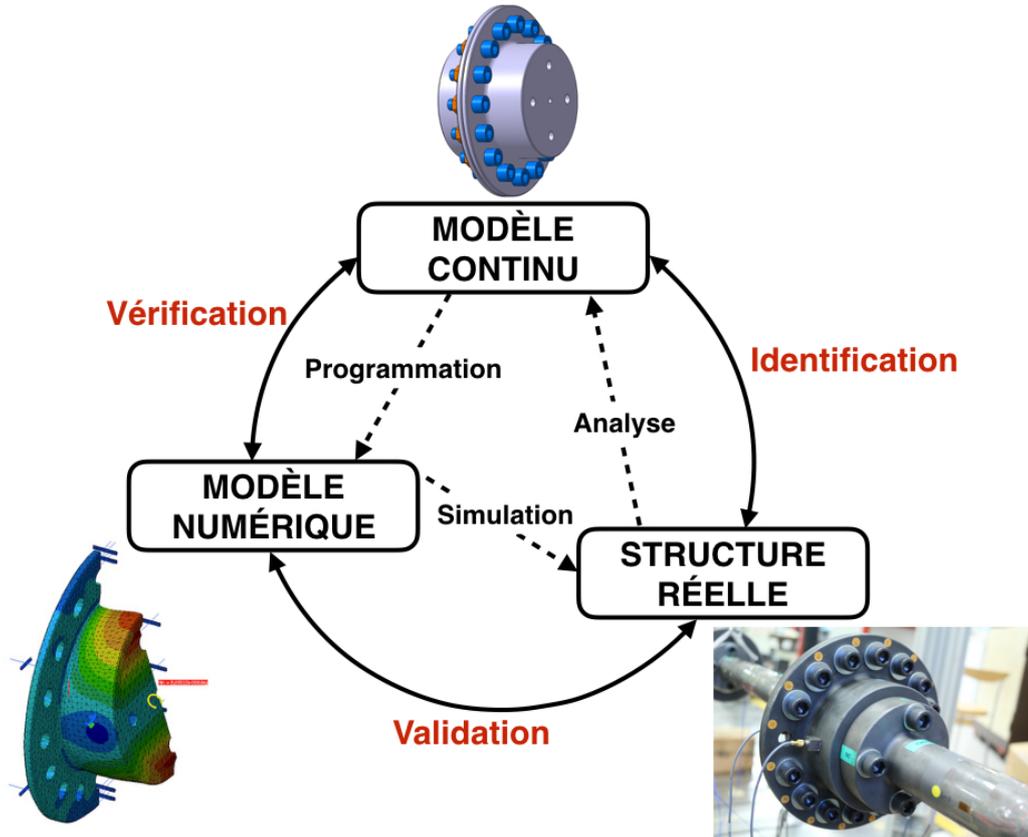


FIGURE 1: Illustration de la démarche V&V

La démarche principale de la vérification de modèle est d'identifier, de quantifier et de réduire les erreurs dues au passage d'un modèle mathématique à un code informatique. Il s'agit alors d'évaluer la qualité du modèle vis-à-vis de la solution analytique du problème de référence. La modélisation du comportement des structures se fait par l'intermédiaire d'équations mathématiques complexes, avec des conditions initiales et des conditions aux limites. La solution analytique exacte de ces équations étant souvent inaccessible, on fait appel à des méthodes de discrétisation, telles que la méthode des éléments finis, afin de rechercher une solution approchée. L'ingénieur doit donc se poser la question : « **Suis-je en train de résoudre les équations correctement ?** » (*Am I solving the equations right ?*). Lors de la procédure de vérification, on cherche à estimer l'écart ou l'accord entre la solution exacte du problème analytique continu et la solution approchée du problème discrétisé.

Plusieurs travaux de recherche ont abouti au développement d'outils dits *a posteriori* exploitant les défauts de la solution approchée pour quantifier l'erreur de discrétisation globale de façon fiable. Des ouvrages de référence tels que [Babuška et

[Strouboulis 2001, Ramm *et al.* 2003, Ladevèze et Pelle 2005] présentent une description détaillée des principaux outils développés. On peut répartir ces outils dans trois familles d'*estimateurs d'erreur globale a posteriori*. La première, introduite dans [Babuška et Rheinboldt 1978], est basée sur les défauts d'équilibre de la solution approchée ; la seconde, proposée dans [Zienkiewicz et Zhu 1987], est fondée sur les défauts de régularité de la solution approchée en utilisant le lissage des contraintes ; et la troisième famille, décrite dans [Ladevèze et Leguillon 1983], s'appuie sur la non-vérification de la relation de comportement en exploitant le concept d'erreur en relation de comportement. Plus récemment, des estimateurs de l'erreur locale ont été développés [Becker et Rannacher 2001, Ladevèze 2008] dans le but d'avoir davantage d'information sur les quantités d'intérêt indispensables au dimensionnement des structures.

Cependant, même si l'approche de vérification est nécessaire, elle ne s'intéresse pas à la question de la relation entre le modèle mathématique et le monde réel. Rien ne peut garantir que le modèle utilisé représente la vraie physique du comportement mécanique de la structure étudiée. La démarche de validation a pour but d'apporter des éléments qui permettent d'indiquer le niveau de précision avec lequel le modèle numérique simule la réponse physique de la structure réelle. Elle se fait par un ensemble d'essais qui permettent à l'ingénieur de répondre à la question : « **Suis-je en train de résoudre les bonnes équations ?** » (*Am I solving the right equations ?*). Cette volonté de valider les modèles réalisés et de quantifier l'accord entre les mesures physiques et les prédictions numériques a motivé le développement de techniques de corrélation calcul-essai dans le cadre de la modélisation par éléments finis, également appelées **méthodes de recalage de modèles**. La démarche consiste à rechercher un modèle numérique dont la réponse est la plus proche possible de celle de la structure analysée expérimentalement. Le lecteur intéressé trouvera dans [Mottershead et Friswell 1993] une revue de diverses techniques employées dans le recalage de modèles dynamiques de structures à comportement déterministe ou incertain. Ces méthodes utilisent un modèle paramétrable afin de minimiser la distance entre les résultats de simulations et les résultats provenant d'analyses modales expérimentales. Le recalage est généralement effectué sur les matrices de raideur, de masse et d'amortissement du modèle dynamique. En particulier, une méthode reposant sur le principe de l'erreur en relation de comportement modifiée a été développée au sein du LMT-Cachan [Ladevèze 1993, Ladevèze et Chouaki 1999]. Son intérêt a été démontré à travers différentes applications à des modèles dynamiques [Deraemaeker *et al.* 2000, Ladevèze *et al.* 2006a, Faverjon *et al.* 2008, Faverjon *et al.* 2009] et acoustiques [Decouvreur *et al.* 2004, Decouvreur *et al.* 2008].

Les méthodes et procédures V&V [Babuska et Oden 2004, Trucano *et al.* 2006] ont amélioré fondamentalement la crédibilité des simulations dans des domaines majeurs, tels que la sécurité des réacteurs et déchets nucléaires. Cependant, atteindre un niveau supérieur de crédibilité exige des efforts continus et déterminés de la part

des ingénieurs, scientifiques, universités, laboratoires de recherche, établissements publics et des entreprises développant les codes informatiques. Ces efforts doivent être orientés vers l'amélioration de la fiabilité des logiciels informatiques, de l'estimation de la précision numérique, de la qualité des modèles physiques utilisés, et de la formation des utilisateurs des codes. Ainsi, des benchmarks de vérification et de validation ont été construits dans différents domaines de la mécanique, et leur conception et utilisation ne cessent de s'améliorer [Oberkampf et Trucano 2008].

Malgré ces travaux et progrès, les modèles ne pourront jamais représenter de manière fine et précise la complexité du monde réel. En effet, des hypothèses simplificatrices sont introduites aux modèles et les essais de validation contiennent toujours des erreurs. De plus, l'évaluation des paramètres d'entrée des modèles est souvent incertaine à cause d'une variabilité naturelle ou de méconnaissances. Par conséquent, afin de pouvoir prédire le comportement des structures industrielles, et garantir leur tenue, il est nécessaire d'analyser les types et sources d'incertitudes et de les prendre en compte pendant la phase de conception. Les industriels ont l'habitude de pondérer les résultats des simulations avec des coefficients de sécurité, mais cela fait que les pièces étudiées sont très souvent surdimensionnées, et donc leur coût de fabrication et d'exploitation est assez élevé. Afin de pallier cela, il existe aujourd'hui plusieurs familles de méthodes permettant de modéliser, propager et quantifier les incertitudes dans les modèles numériques :

- les méthodes paramétriques probabilistes [Matthies *et al.* 1997, Schuëller 1997, Sudret et Der Kiureghian 2000];
- les méthodes paramétriques non probabilistes [Moens et Vandepitte 2005, Moens et Hanss 2011];
- les méthodes probabilistes non paramétriques [Soize 2000, Soize 2001] et les méthodes mixtes paramétriques / non paramétriques [Soize 2010, Soize 2013];
- la théorie des méconnaissances [Ladevèze *et al.* 2006b, Louf *et al.* 2010].

En dépit de ces incertitudes, les ingénieurs doivent prendre des décisions ayant des conséquences sur les consommateurs, le public et l'environnement. Pour améliorer la prise de décision et éviter des incidents qui peuvent mettre en danger la sécurité des personnes et la sûreté des installations, une connaissance fiable du comportement des structures industrielles est indispensable, particulièrement en dynamique basses fréquences. La liaison boulonnée fait partie des éléments les plus utilisés dans l'assemblage de ces structures. L'expérience montre que sa présence introduit des mécanismes non-linéaires et a une influence sur le comportement dynamique de l'ensemble [Gaul et Lenz 1997, Esteban et Rogers 2000]. Étant donné qu'il peut y avoir des centaines ou milliers de fixations sur un assemblage industriel, vouloir prendre en compte tous ces mécanismes dans un modèle numérique dynamique de grande taille serait trop coûteux et complexe. Du coup, ils sont souvent négligés dans la phase de modélisation, et les éléments de fixations sont représentés de manière simplifiée, ce qui génère des incertitudes.

Ainsi, quantifier la qualité et la fiabilité du modèle numérique d'un assemblage industriel boulonné reste une question majeure en dynamique basse-fréquence. En particulier, le comportement dynamique des systèmes mécaniques qui équipent les centrales nucléaires doit pouvoir être prédit en toute confiance. Pour fournir des éléments de réponse, et étant donné que « notre confiance dans le processus de prédiction précise exige des benchmarks » (« *our confidence in the process of accurate prediction does require benchmarks* ») [Trucano *et al.* 2006], plusieurs travaux de benchmarking en dynamique des structures ont été réalisés, sur des structures académiques [Zang *et al.* 2008, Paez et Red-Horse 2008] et des structures de laboratoire [Link et Friswell 2003, Lermite *et al.* 2008]. Néanmoins, aucun de ces benchmarks

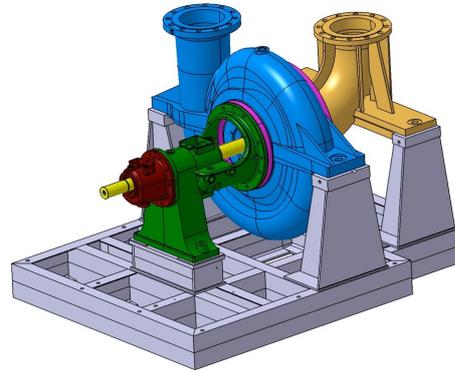
- ne concerne une structure complexe, assemblage de différentes sous-structures, considérée dans son environnement industriel ;
- ne reproduit les conditions d'une étude industrielle confiée par exemple par un bureau d'étude ;
- n'est basé sur des résultats expérimentaux obtenus dans des conditions aussi proches de la réalité industrielle ;
- n'a permis la confrontation de différentes équipes pour l'obtention de mesures dynamiques.

C'est dans ce contexte que le benchmark international SICODYN (pour des Simulations crédibles via la COrrélation calcul-essai et l'estimation d'incertitudes en DYNamique des structures) [Audebert 2010] a été organisé par EDF R&D (Électricité de France Recherche et Développement) sur la période 2008–2010. Son but est de quantifier la variabilité obtenue à l'issue de calculs purement prédictifs (en aveugle) des caractéristiques dynamiques d'une pompe booster mono-étagée à axe horizontal, équipant les centrales thermiques, à l'arrêt et non connectée (cf. Figure 2). Du point de vue de l'utilité industrielle, ce benchmark a permis de montrer que l'état de l'art des études de modélisation du comportement dynamique des pompes ne permettait pas aux constructeurs ou aux bureaux d'étude d'atteindre, par le seul recours du calcul, les objectifs de performance vibratoire fixés par le constructeur ou l'exploitant. De plus, on a constaté que la dispersion des résultats de calculs aveugles était notablement supérieure aux marges d'incertitudes proposées dans les études paramétriques ou de propagation des incertitudes.

Il en résulte un réel besoin d'améliorer la capacité de modélisation du comportement vibratoire des structures industrielles en général, et des pompes en particulier, ainsi que la caractérisation et la quantification des incertitudes. De ce fait, EDF R&D propose le projet SICODYN [Audebert *et al.* 2014], sur la période 2012–2016. En s'appuyant sur les résultats du benchmark SICODYN et en appliquant la démarche V&V, l'objectif est de caractériser et quantifier, sur la base du même démonstrateur considéré maintenant dans son environnement complexifié, les incertitudes sur le comportement dynamique des assemblages sous deux aspects :



(a) Pompe Booster mono-étagée à axe horizontal



(b) CAO des 7 composants principaux assemblés

**FIGURE 2:** Démonstrateur du benchmark et du projet SICODYN

- l'aspect expérimental en cherchant à observer la variabilité liée à la diversité des spécimens, la variabilité liée à l'opérateur et à la variation des conditions de liaison, ainsi que la variabilité liée aux moyens de mesure et aux méthodes de traitement des données d'essais ;
- l'aspect numérique en cherchant, d'une part, à observer l'incertitude totale via une opération de benchmarking et, d'autre part, à caractériser par calcul les incertitudes liées à la propagation des erreurs sur les paramètres et celles liées à la simplification ou la non prise en compte de phénomènes physiques.

Le but final est d'avoir une boîte à outils et des méthodologies de calcul qui permettent de donner à un bureau d'études ou à un industriel, soit des intervalles de confiance, soit des coefficients de sécurité adaptés aux simulations mises en œuvre pour réaliser le dimensionnement vibratoire des structures.

Dans le cadre de ce projet, l'objectif de cette thèse est d'améliorer le dimensionnement vibratoire des assemblages boulonnés par la prise en compte de différents types et sources d'incertitudes, de valeurs faibles et élevées<sup>1</sup>, **de manière simple, efficace et peu intrusive.**

Les contributions originales apportées par ce travail et décrites dans ce document portent sur la mise en place d'un modèle **dynamique** de connecteur amélioré à travers la prise en compte de **faibles et fortes incertitudes sur la raideur, à destination du milieu industriel.** Ces contributions peuvent être recensées autour de trois points majeurs :

- le premier point est lié à **la comparaison de différentes méthodes de propagation des incertitudes en dynamique des structures** [Daouk *et al.* 2014a, Daouk *et al.* 2015b]. Une analyse comparative de quelques mé-

1. Dans ce présent travail, les incertitudes  $\leq 10\%$  ont été considérées faibles, sinon fortes.

thodes paramétriques probabilistes et la théorie des méconnaissances est menée et illustrée sur deux modèles numériques. Cela permet d'évaluer la capacité de prédiction de ces méthodes en terme de précision et de coût de calcul ;

- le second point est consacré à **l'analyse modale expérimentale de structures boulonnées dans le but de quantifier l'impact de la présence d'une liaison boulonnée sur le comportement dynamique global d'un assemblage mécanique**. A cet effet, un banc d'essai dynamique comportant une liaison boulonnée paramétrable a été conçu, réalisé puis étudié [Daouk *et al.* 2015a, Louf *et al.* 2015, Daouk *et al.* 2017]. Ensuite, l'intérêt est porté sur un sous-système de la pompe de la figure 2. La démarche qui a été mise en place est universelle et peut être appliquée à l'étude de tout type de liaisons mécaniques ;
- le troisième point concerne **l'extension de la théorie des méconnaissances pour permettre la propagation d'un ensemble de faibles et fortes incertitudes en dynamique des structures** [Daouk *et al.* 2014b]. Ces développements sont appliqués à divers modèles dynamiques d'assemblages mécaniques en considérant de fortes incertitudes sur la raideur de liaison en plus de faibles incertitudes sur des paramètres de raideur de la structure.

Les différents points abordés dans ce travail de recherche constituent donc des éléments de réponse aux questions soulevées par le projet SICODYN. La conception et le dimensionnement du banc d'essai et d'autres pièces mécaniques ont été effectués sous Catia V5<sup>2</sup>. L'implémentation des diverses méthodes et techniques utilisées et développées dans ce travail a été réalisée au sein de Cast3M<sup>3</sup> qui est un code de calcul pour l'analyse de structures par la méthode des éléments finis. Le logiciel LMS Test.Lab<sup>4</sup> a été utilisé pour l'acquisition de toutes les données expérimentales, dont certaines ont été traitées ensuite sur MATLAB<sup>5</sup>.

Le document est divisé en quatre parties, organisées de la manière suivante :

- la *première partie* dresse un état de l'art des différentes approches de quantification des incertitudes et de modélisation des fixations boulonnées en dynamique des structures. Après avoir détaillé les différentes sources et types d'incertitudes, les principales familles de méthodes de propagation et quantification des incertitudes dans les modèles dynamiques de structures mécaniques sont présentées. La fin de cette partie est consacrée à un état de l'art, non

---

2. <http://www.3ds.com/fr/produits-et-services/catia/>

3. <http://www-cast3m.cea.fr>

4. [http://www.plm.automation.siemens.com/fr\\_fr/products/lms/testing/test-lab/](http://www.plm.automation.siemens.com/fr_fr/products/lms/testing/test-lab/)

5. <http://fr.mathworks.com/products/matlab/>

exhaustif, sur les différentes modélisations existantes des fixations boulonnées.

- la *seconde partie* concerne la caractérisation expérimentale des incertitudes dans les assemblages boulonnés, liées aux paramètres de liaison. Les démarches de conception et de réalisation d'un banc d'essai dynamique basé sur une structure boulonnée sont décrites. Une analyse modale expérimentale de ce montage est menée dans le but d'améliorer notre compréhension de la variabilité du comportement dynamique des assemblages boulonnés.
- la *troisième partie* s'attache à l'extension de la théorie des méconnaissances pour la prise en compte de fortes incertitudes dans les modèles dynamiques de structures boulonnées. Suite à la description des développements analytiques permettant de considérer la présence de plusieurs faibles et fortes incertitudes sur des paramètres structuraux de raideur, la pertinence et la fiabilité de cette technique sont illustrées sur quelques modèles simples d'assemblages mécaniques.
- la *quatrième et dernière partie* est consacrée à l'étude de l'assemblage d'un sous-système de la pompe. Une brève présentation de l'organisation et des verrous technologiques du projet SICODYN est effectuée. L'analyse modale expérimentale de l'assemblage de deux composants de la pompe et la propagation de faibles et fortes incertitudes dans son modèle dynamique permettent d'évaluer l'applicabilité de la théorie des méconnaissances en milieu industriel.

Première partie

Incertitudes et liaison boulonnée en  
dynamique



# Chapitre 1

## Etude des incertitudes

*Ce premier chapitre présente une étude bibliographique sur les types et les sources d'incertitudes rencontrées lors de l'analyse d'un système mécanique. Cette étude permettra d'incorporer aux modèles numériques une stratégie de propagation et quantification des incertitudes qui les rendra plus robustes aux incertitudes et améliorera la prise de décision.*

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Types d'incertitudes</b>	<b>13</b>
1.1.1	Incertaince aléatoire	14
1.1.2	Incertaince épistémique	14
1.1.3	Aléatoire ou épistémique ?	15
<b>1.2</b>	<b>Classification des sources d'incertitudes</b>	<b>16</b>
1.2.1	Incertainces sur les paramètres	16
1.2.2	Incertainces de modélisation	17
1.2.3	Incertainces expérimentales	18

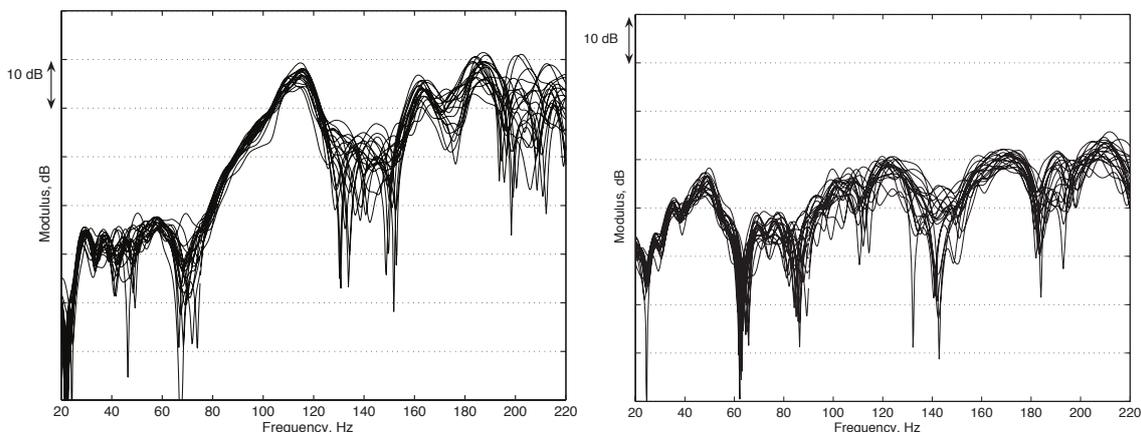
---

Dans le but de comprendre et généraliser les phénomènes physiques observés, des scientifiques tels que Descartes et Newton ont mis en place des formalismes mathématiques rigoureux et les ont appliqués à la physique. Ainsi, le **modèle mathématique** d'un phénomène physique a été défini comme une représentation abstraite et idéale du phénomène par des relations mathématiques en lien avec la théorie scientifique relative à ce phénomène, dont la solution peut être observée expérimentalement. Mais une révolution majeure a eu lieu avec la naissance du monde numérique durant la seconde moitié du siècle passé. On commence à parler du **modèle numérique** qui est la version discrétisée du modèle mathématique telle que prise en compte par l'ordinateur. La modélisation devient alors un outil indispensable utilisé par les ingénieurs dans la conception, la fabrication et le pilotage de structures industrielles.

Les performances des calculateurs augmentent considérablement et rapidement, ce qui permet aux ingénieurs de modéliser des phénomènes et résoudre des équations de plus en plus complexes. Ainsi, le calcul et les simulations numériques sont employés quotidiennement, dans les mondes académique et industriel, dans le but de concevoir des produits (e.g. voitures, avions, trains, ponts, centrales nucléaires, ...) ou fournir des prédictions (e.g. bourse, changement climatique, météorologie, ...). Dans le cas de l'industrie mécanique, cela permet également de compléter, orienter ou même remplacer une partie du travail expérimental qui est beaucoup plus coûteux et lourd à mettre en place.

Cependant, malgré les améliorations extraordinaires apportées au calcul numérique et à la richesse des quantités calculées, les modèles ne pourront jamais représenter de manière fine et précise la complexité du monde réel. La complexification des modèles numériques s'accompagne de façon inéluctable d'une augmentation des sources potentielles d'incertitudes. En effet, certains phénomènes ou comportements tels que la défaillance d'une entité présentent une variabilité et sont très difficiles à prédire. La phase de modélisation contient aussi des hypothèses simplificatrices et approximations numériques introduites au modèle dans le but de réduire les temps de calcul. De plus, l'identification des paramètres influençant les systèmes étudiés (pression, température, ...) est souvent difficile et imprécise, donc incertaine. Pour illustrer, on considère l'exemple de l'analyse vibratoire d'un véhicule automobile. Les modèles numériques actuels parviennent à synthétiser les premières résonances uniquement et les écarts entre les calculs et les essais augmentent vite avec la fréquence. La figure 1.1 montre une forte variabilité des modules de fonctions de réponse en fréquence (FRF) mesurées sur 20 voitures nominale­ment identiques pour deux points d'observation différents [Durand *et al.* 2008].

En conséquence, un modèle numérique ne pourra jamais restituer la réponse réelle de la structure qu'il représente, aussi avancé et précis qu'il soit. Un écart persistera à cause des fluctuations naturelles des spécimens d'un système. En dépit



**FIGURE 1.1:** Modules de FRF de 20 voitures nominalemt identiques pour deux points d'observation différents (tirées de [Durand *et al.* 2008])

de cela, les ingénieurs doivent prendre des décisions ayant des conséquences sur la sécurité, la fiabilité et la performance des systèmes. Pour réduire cet écart, améliorer la prise de décision et éviter de mettre en danger les consommateurs, le public et l'environnement, il est nécessaire d'identifier les sources d'incertitudes et de distinguer leurs types. Cela permettra également d'incorporer aux modèles une stratégie de quantification des incertitudes qui les rendra plus robustes aux incertitudes.

## 1.1 Types d'incertitudes

La plupart des chercheurs distinguent deux types d'incertitudes selon la quantité d'information disponible sur les fluctuations de la grandeur d'intérêt : *aléatoire* lorsqu'elle est due à une variabilité naturelle, et *épistémique* si elle est due à un manque de connaissance [Ferson et Ginzburg 1996, Oberkampf *et al.* 2002, Der Kiureghian et Ditlevsen 2009]. Dans [Oberkampf *et al.* 2002], on distingue de plus l'erreur, une lacune identifiable dans la phase de modélisation ou d'expérimentation qui n'est pas due à une méconnaissance.

Il existe néanmoins d'autres manières de classer les incertitudes. En effet, Camerer et Weber [Camerer et Weber 1992] emploient le terme ambiguïté pour parler du manque d'information. Ce terme est défini comme l'incertitude par rapport à la probabilité provenant du manque d'informations importantes qui pourraient être connues. Dubois [Dubois 2010] prétend que toutes les incertitudes sont de nature épistémique. Mais il reconnaît que l'incertitude peut avoir plusieurs origines, à savoir être due à la variabilité naturelle d'un phénomène, à des informations incomplètes ou contradictoires. Blockley [Blockley 2013] propose une définition de l'incertitude dans un espace orthogonal tridimensionnel : l'axe de l'aléatoire (*randomness*) qui

signifie un manque d'un motif ou schéma spécifique, l'axe de l'incomplétude (*incompleteness*) qui se réfère à ce qu'on ne connaît pas, et l'axe du flou (*fuzziness*) qui indique une imprécision ou ambiguïté. Cette définition de l'incertitude est motivée par le fait que la classification aléatoire/épistémique n'est pas suffisamment riche pour une prise de décision pratique.

### 1.1.1 Incertitude aléatoire

Le mot aléatoire dérive du terme latin *alea* qui signifie « lancer les dés ». L'incertitude est considérée *aléatoire* si elle est irréductible provenant d'une variabilité naturelle. Une incertitude est qualifiée comme aléatoire si on suppose qu'elle est intrinsèque à un phénomène aléatoire, et apparaît généralement entre les membres d'une même population présentant des variations temporelles ou spatiales. Curieusement, ce terme *alea* est employé également dans un cadre artistique pour parler de l'improvisation. On trouve dans la littérature d'autres références à ce type d'incertitude, comme l'incertitude irréductible, la variabilité, l'incertitude intrinsèque et l'incertitude stochastique.

En mécanique des structures, on considère que les incertitudes sont aléatoires si elles sont liées

- aux propriétés matériau (raideur, endommagement, nombre de cycles à rupture, etc.);
- à l'usinage et aux défauts de fabrication;
- aux conditions aux limites et conditions du milieu environnant (température, humidité, ...);
- au spectre des chargements et excitations extérieures.

L'utilisation d'un modèle probabiliste s'avère appropriée pour représenter et propager les incertitudes aléatoires. D'un point de vue mathématique, ce modèle est souvent une densité de probabilité (notée PDF pour *Probability Density Function*) ou fonction de répartition (notée CDF pour *Cumulative Density Function*) connue et justifiée dans la littérature.

### 1.1.2 Incertitude épistémique

Le mot épistémique dérive du terme grec *επιστημη* (*episteme*) qui signifie connaissance. On trouve dans la littérature d'autres références à ce type d'incertitude, comme l'incertitude réductible, l'état de connaissance, l'incertitude subjective et l'incertitude cognitive. Ainsi, une incertitude est considérée *épistémique* si elle provient d'un manque d'information ou méconnaissance. Elle apparaît généralement lors de la modélisation de systèmes complexes, lorsque des phénomènes physiques sont négligés ou des représentations sont simplifiées. Par exemple, lors de l'étude du comportement dynamique du modèle d'un assemblage boulonné, il est assez com-

mun de ne pas modéliser les boulons dans leur intégralité, ou de les modéliser par des barres ou des poutres, en omettant ainsi le frottement entre le boulon et la pièce. De plus, les phénomènes de glissement et de frottement dans les zones de contact entre les sous-structures sont souvent négligés en modélisant la liaison boulonnée par une liaison collée ou rigide.

Le passage d'un modèle continu à un modèle discrétisé s'accompagne aussi d'erreurs numériques dues aux effets de discrétisation et les tolérances de convergence, même lorsque le maillage est très fin et sa taille est inférieure au seuil de convergence. L'incertitude épistémique est également manifeste quand on dispose de peu de données expérimentales, ou aucune donnée, pour un paramètre physique, et lorsqu'on a une compréhension limitée des phénomènes physiques complexes étudiés.

Si le choix du cadre probabiliste est justifié pour les incertitudes aléatoires pour lesquelles on dispose de données suffisantes permettant l'ajustement des fonctions de densité de probabilité, il peut être remis en cause pour les incertitudes épistémiques dont la caractérisation s'appuie uniquement sur l'avis d'expert. Ainsi, il est commun de représenter les incertitudes épistémiques dans des intervalles de confiance, et d'utiliser l'analyse des intervalles pour les propager [Moore 1966]. Il est difficile de quantifier ou modéliser ces incertitudes, mais on peut les réduire en rassemblant davantage d'informations (résultats expérimentaux, opinion d'expert, etc.) ou en améliorant la définition des modèles, ce qui nécessite du temps et des ressources. Habituellement, l'incertitude épistémique est représentée par un intervalle sans PDF associée, ou bien par une PDF décrivant le niveau de croyance et plausibilité de l'analyste [Agarwal *et al.* 2004, Park et Grandhi 2012].

### 1.1.3 Aléatoire ou épistémique ?

La différence entre l'incertitude épistémique et aléatoire n'est pas toujours facile à faire lors de l'analyse d'un système. A titre d'exemple, lors de la procédure de fabrication de pièces mécaniques, la mesure des grandeurs géométriques des pièces montre que la valeur réelle est différente de la valeur nominale. Si on considère la longueur d'une pièce comme variable aléatoire, et si on ne peut mesurer qu'un petit nombre d'échantillons de la population, alors on ne sera pas capable de caractériser la PDF de cette variable de façon précise. Dans ce cas, l'incertitude sur la longueur des pièces peut être considérée comme une combinaison d'incertitude aléatoire et épistémique. Si on apporte de l'information en mesurant davantage d'échantillons des pièces fabriquées, on peut déterminer la forme et les paramètres de la PDF avec plus de précision. Lorsqu'on considère un nombre suffisamment important d'échantillons, il est possible de qualifier l'incertitude sur la longueur comme purement aléatoire décrite par une PDF précise.

La distinction entre les incertitudes aléatoires ou épistémiques est importante car les décisions prises en conséquence sont différentes. Si l'incertitude est aléatoire

due à une variabilité, alors une action concrète doit être prise pour éviter les effets dangereux potentiels d'une telle variabilité. Si l'incertitude est épistémique due à des informations incomplètes, la meilleure décision serait probablement de chercher à la réduire en recueillant de l'information. De plus, il est essentiel de pouvoir distinguer les types d'incertitudes car les représentations mathématiques et méthodes de propagation sont différentes [Ferson et Ginzburg 1996]. Néanmoins, même si certains prétendent qu'une distinction franche et nette entre ces deux types est possible, il est souvent très difficile de déterminer, lors de la phase de modélisation, si une incertitude particulière devrait être considérée aléatoire ou épistémique. Le rôle du constructeur du modèle est d'effectuer cette distinction selon les circonstances et les données disponibles. Ses choix personnels de modélisation sont conditionnés par la connaissance scientifique et les données disponibles, mais surtout par le besoin pratique d'avoir un modèle fin pour améliorer la prise de décision à partir des calculs prédictifs [Der Kiureghian et Ditlevsen 2009].

## 1.2 Classification des sources d'incertitudes

Au cours des années passées, un intérêt considérable s'est manifesté sur la recherche des sources d'incertitudes, surtout celles introduites dans les modèles mathématiques et les outils de simulation numérique. Les ingénieurs, les scientifiques et les décideurs ont commencé à distinguer et caractériser les différentes sources responsables de l'écart observé entre les prédictions numériques et le comportement de la structure réelle. Généralement, les incertitudes en mécanique des structures proviennent de plusieurs sources : les incertitudes paramétriques et les incertitudes de modélisation dans les phases de conception et modélisation, et les incertitudes expérimentales lors de la réalisation d'essais. Dans les phases de vérification et de validation, il est très important de prendre en compte chacune de ces sources de manière appropriée selon la quantité d'information disponible afin d'apporter les améliorations nécessaires. Une description complète de ces sources est effectuée dans [Oberkampf et Roy 2010].

### 1.2.1 Incertitudes sur les paramètres

Ce sont des incertitudes liées aux paramètres d'entrée du modèle, tels que ceux relatifs aux dimensions, au comportement des matériaux ou aux conditions aux limites. Ces paramètres sont estimés à partir de données issues du retour d'expérience. En théorie il faut disposer d'un nombre infini de données observées pour que l'estimation puisse être considérée comme dénuée d'erreur. Vu que ceci est impossible en pratique, il en résulte la présence d'incertitudes sur ces paramètres.

Dans le domaine de la mécanique des structures, les données « physiques » d'entrée d'un modèle sont généralement constituées de

- paramètres décrivant la géométrie de l'ensemble de la structure, comme les dimensions, les épaisseurs et sections, etc. ;
- paramètres définissant la loi de comportement, tels que le module d'Young, la raideur, le coefficient de Poisson, la limite d'élasticité, etc. ;
- paramètres décrivant les chargements extérieurs, tels que les forces d'excitation, l'état de précontrainte, le couple de serrage, etc. ;
- paramètres liés aux conditions aux limites, comme les déplacements imposés, les raideurs de contact, etc.

Les incertitudes paramétriques sont souvent considérées de nature aléatoire. Néanmoins, dans certains cas, elles sont de nature mixte car une partie de l'incertitude décroît et peut disparaître en augmentant la qualité et la quantité des données disponibles.

### 1.2.2 Incertitudes de modélisation

Ces incertitudes résultent de simplifications et d'hypothèses relatives à un manque de connaissance sur un système ou le comportement d'une structure dans des conditions variées [Ditlevsen 1983].

L'incertitude de modélisation (ou incertitude de modèle) est principalement épistémique car elle concerne des changements dans la structure du modèle. Le processus de modélisation induit des erreurs de modélisation, liées au niveau de détail du modèle, qui empêchent le modèle d'être complètement représentatif du système réel, telles que

- les erreurs numériques qui incluent l'erreur de discrétisation, l'erreur de convergence, et les erreurs faites lors de l'implémentation et la programmation (parfois qualifiées d'incertitudes numériques) ;
- la simplification, la négligence ou l'ignorance des dépendances structurelles entre les différentes variables du modèle mathématique ou du modèle probabiliste ;
- les hypothèses simplificatrices au niveau des lois de comportement ;
- la simplification de la géométrie ;
- les formulations mathématiques approchées et les approximations effectuées dans la modélisation de certaines parties du système telles que les conditions aux limites (fondation élastique rigide encastrée, ...) et les liaisons (hypothèses de linéarité, ... ) ;
- les variables cachées ou volontairement omises (dimension réduite, ... ) ;
- les négligences de certaines propriétés intrinsèques comme l'amortissement, et de certains phénomènes non linéaires tels que le cisaillement, le frottement, le glissement et le décollement dans les zones de contact.

Afin de réduire ces incertitudes, il suffit de construire le modèle pour qu'il soit le plus proche possible de la structure réelle. Cependant, le niveau de détail du modèle est limité car il engendre deux problèmes, qui sont le coût de la complexité et de

calcul du modèle, et l'augmentation du nombre d'incertitudes paramétriques. Par conséquent, l'incertitude totale dans le modèle simplifié n'est pas nécessairement plus forte que dans le modèle détaillé.

### 1.2.3 Incertitudes expérimentales

La réalisation d'essais sur une structure ne peut pas être considérée comme un travail parfait. Cette étape essentielle à la validation des modèles comporte également des incertitudes et erreurs de mesure qui proviennent principalement

- du bruit de mesure et des erreurs de calibration ;
- des erreurs de positionnement et orientation des excitateurs et capteurs ;
- de la variabilité de comportement de la structure en fonction de sa procédure de fabrication, la température extérieure, son âge, son niveau d'endommagement et de fatigue ;
- des incertitudes sur le niveau de chargement et les conditions aux limites ;
- de la variabilité liée à l'opérateur, à l'appareil de mesure (processus d'acquisition et de traitement des données mesurées) et à la méthode d'analyse ;
- de la variation des conditions de liaison, tels que la précharge des boulons, ainsi que le nombre et la position des boulons serrés.

Ces sources d'incertitudes génèrent une variabilité sur les données mesurées. De plus, on dispose généralement de peu, voire très peu, de données expérimentales car le coût de réalisation d'essais sur des structures industrielles est très élevé. Souvent on ne teste qu'une seule structure, et l'analyse d'une seule géométrie ne permet pas d'observer la dispersion de fabrication. De plus, on ne réalise qu'un nombre réduit d'essais pour représenter le comportement de la structure en un nombre restreint de points et pour un ensemble réduit de sollicitations. Les mesures disponibles peuvent aussi ne fournir qu'une information indirecte sur les paramètres d'intérêt. Tout cela engendre des écarts considérables lors de toute tentative de corrélation calcul-essai ou de recalage du modèle à partir de mesures expérimentales.

# Chapitre 2

## Quantification des incertitudes dans les modèles dynamiques

*Dans ce chapitre, on dresse un état de l'art, non exhaustif, des principales méthodes de propagation et quantification des incertitudes dans les modèles dynamiques de structures mécaniques. Après avoir présenté le principe et les caractéristiques de chaque méthode, la théorie des méconnaissances est décrite dans le cadre de faibles incertitudes. Des analyses comparatives de plusieurs méthodes permettent d'évaluer leur capacité de prédiction en terme de précision et de coût de calcul.*

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Incertitudes et probabilités</b>	<b>21</b>
2.1.1	Rappels de probabilités	22
2.1.2	Modélisation probabiliste des paramètres incertains	27
2.1.3	Cadre d'étude des problèmes stochastiques	28
<b>2.2</b>	<b>Méthodes paramétriques probabilistes</b>	<b>29</b>
2.2.1	Méthodes d'intégration directe	29
2.2.2	Méthodes d'analyse de fiabilité des structures	32
2.2.3	Méthodes d'approximation polynomiale	33
2.2.4	Techniques de projection	36

<b>2.3</b>	<b>Méthodes paramétriques non probabilistes</b>	<b>40</b>
<b>2.4</b>	<b>Méthodes non paramétriques</b>	<b>42</b>
<b>2.5</b>	<b>Théorie des méconnaissances</b>	<b>44</b>
2.5.1	Méconnaissances de base et méconnaissances effectives	44
2.5.2	À propos des faibles méconnaissances	46
<b>2.6</b>	<b>Applications et analyses comparatives</b>	<b>47</b>
2.6.1	Modèle d'un treillis plan	48
2.6.2	Modèle tridimensionnel	49

---

De plus en plus de structures industrielles sont des assemblages de pièces à géométrie complexe ayant des caractéristiques non-linéaires. En analysant numériquement ces structures mécaniques, les ingénieurs tendent généralement à considérer que leurs modèles mathématiques et leurs paramètres sont déterministes. Cependant, le retour d'expérience montre que ces éléments sont souvent incertains, à cause d'une variabilité naturelle ou d'une méconnaissance.

Afin de garantir la tenue des structures et prendre en compte les incertitudes, il est commun de définir des coefficients de sécurité pour pondérer les résultats des simulations numériques. Mais cela résulte en un surdimensionnement des pièces, ce qui élève leur coût de fabrication et d'exploitation. C'est pourquoi plusieurs travaux de recherche ont été menés pour modéliser et quantifier les incertitudes dans les structures mécaniques de manière plus précise.

Il existe aujourd'hui plusieurs familles de méthodes permettant de modéliser, propager et quantifier les incertitudes aléatoires et épistémiques dans les modèles numériques (cf. [Figure 2.1](#)) :

- les méthodes paramétriques probabilistes [[Matthies et al. 1997](#), [Schuëller 1997](#), [Sudret et Der Kiureghian 2000](#)] ;
- les méthodes paramétriques non probabilistes [[Moens et Vandepitte 2005](#), [Moens et Hanss 2011](#)] ;
- les méthodes probabilistes non paramétriques [[Soize 2000](#), [Soize 2001](#)] et mixtes paramétriques / non paramétriques [[Soize 2010](#), [Soize 2013](#)] ;
- la théorie des méconnaissances [[Puel 2004](#), [Ladevèze et al. 2006b](#), [Louf et al. 2010](#)].

Ce chapitre brosse un état de l'art, non exhaustif, de ces méthodes qui sont utilisées dans plusieurs domaines de la mécanique. Dans un premier temps, une présentation générale des différents concepts et cadres mathématiques sera effectuée, avec une description plus détaillée des méthodes paramétriques probabilistes. Puis, dans un second temps, la théorie des méconnaissances sera décrite dans le cadre de faibles incertitudes ( $\leq 10\%$ ) en dynamique des structures. Enfin, la dernière partie est consacrée à une analyse comparative de quelques méthodes paramétriques probabilistes et la théorie des méconnaissances, en terme de précision et de coût de calcul. Cette comparaison est réalisée sur deux modèles de structures mécaniques dans le cas de faibles incertitudes en dynamique.

## 2.1 Incertitudes et probabilités

Les méthodes probabilistes sont les méthodes non déterministes les plus employées pour le traitement des incertitudes car elles sont basées sur l'usage des probabilités. Leur objectif est d'étudier la variabilité des grandeurs de sortie du

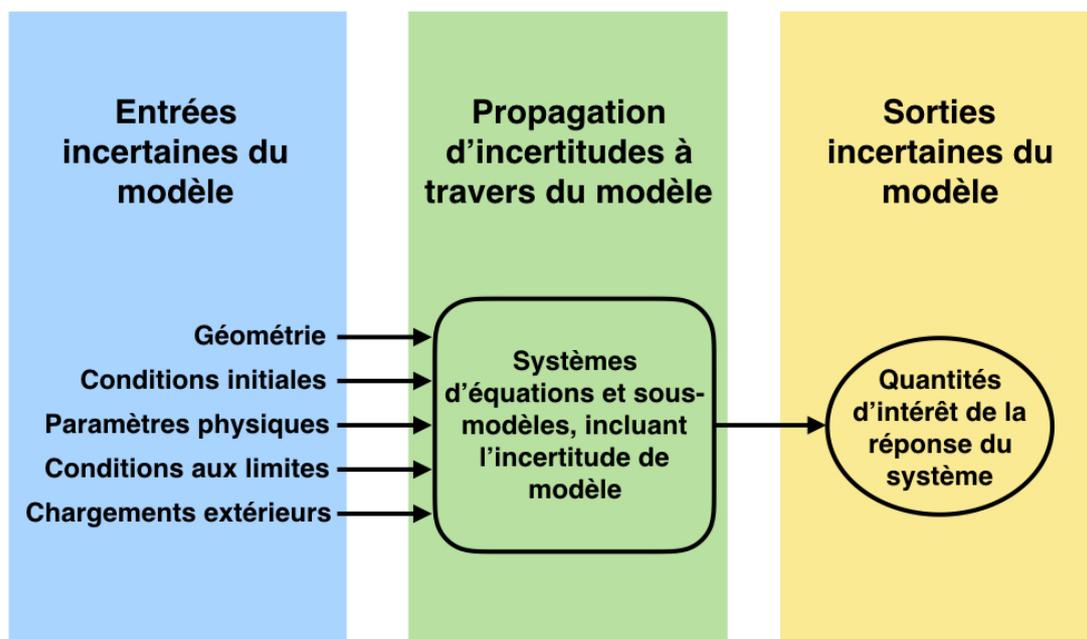


FIGURE 2.1: Illustration du principe de propagation des incertitudes

modèle causée par des incertitudes aléatoires portant sur les paramètres d'entrée. Afin de mieux comprendre le cadre mathématique de ces méthodes, on commencera par rappeler quelques notions pertinentes de la théorie des probabilités, pour ensuite préciser comment modéliser les paramètres incertains en termes probabilistes et comment formuler un problème stochastique de manière générique.

## 2.1.1 Rappels de probabilités

L'introduction des probabilités dans la mécanique nécessite l'utilisation d'outils mathématiques avancés. On présentera ici certains d'entre eux ainsi que la notation utilisée dans la suite de ce rapport. Pour plus d'approfondissement sur la théorie des probabilités, on pourra consulter par exemple [Delmas 2013].

### 2.1.1.1 Généralités

La notion de probabilité est liée à celle d'expérience aléatoire. Une expérience est aléatoire si l'on ne peut pas prédire avec certitude son résultat. Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé *réalisation*, notée  $\theta$ . Tous les résultats possibles d'une

réalisation forment un espace appelé *l'espace des réalisations*, noté  $\Theta$ . Un événement  $B$  est défini comme un sous-ensemble de  $\Theta$  contenant des réalisations  $\theta \in \Theta$ . Ainsi, l'ensemble certain est tout l'espace  $\Theta$  et l'événement impossible est l'ensemble vide  $\emptyset$ . L'intersection (respectivement l'union) de deux événements  $B$  et  $C$  est notée  $B \cap C$  (respectivement  $B \cup C$ ). En considérant que  $\Theta$  est dénombrable, on note dans ce cas  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Theta)$  l'ensemble des sous-ensembles de  $\Theta$ . On dit alors que  $B$  est un événement si  $B \in \mathcal{F}$ .

L'objectif de la théorie des probabilités est d'associer des chiffres à des événements, à savoir leur *probabilité de réalisation*. Une probabilité (ou mesure de probabilité) est une fonction  $\mathbb{P}$  de l'ensemble des événements  $\mathcal{F}$  vers  $[0,1]$  telle que :

- $\mathbb{P}(\Theta) = 1$  et  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
- Si  $(B_i, i \in I)$  est une collection finie ou dénombrable d'événements ( $B_i \in \mathcal{F}, \forall i \in I$ ) disjoints deux à deux ( $B_i \cap B_j = \emptyset, i \neq j, B_i, B_j \in \mathcal{F}, i, j \in I$ ), alors :

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{i \in I} B_i \right) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B_i) \tag{2.1}$$

Le triplet  $(\Theta, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est appelé espace de probabilités. Une variable aléatoire réelle  $X$  est une application mesurable  $X : \theta \in \Theta \mapsto X(\theta) \in \mathcal{D}_X \subset \mathbb{R}$ . On préférera la notation  $X(\theta)$  quand on voudra souligner le caractère aléatoire de  $X$ . Si  $\mathcal{D}_X$  est un ensemble discret, la variable aléatoire est dite discrète, sinon elle est dite continue. La variable aléatoire  $X$  est complètement définie par sa fonction de répartition  $F_X$  prenant des valeurs entre 0 et 1 :

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R} \tag{2.2}$$

La variable aléatoire  $X$  peut être également définie par sa densité de probabilité  $f_X$  qui n'est autre que la fonction dérivée de  $F_X : F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

**Dans ce qui suit, les notions présentées concernent la famille de lois continues. Ils se généralisent au cas de la famille de lois discrètes en remplaçant le signe  $\int dx$  par  $\sum_x$ .**

La notion d'espérance est la formalisation du concept de « en moyenne ». L'espérance mathématique  $\mathbb{E}[\bullet]$  d'une variable aléatoire réelle correspond à la valeur que l'on s'attend à trouver, en moyenne, si l'on répète un grand nombre de fois la même expérience aléatoire. Dans le cas de variables aléatoires continues, la moyenne  $\mu$ , la

variance  $\text{Var}[\bullet]$ , l'écart-type  $\sigma$  et le moment d'ordre  $n$  s'écrivent respectivement :

$$\mu_X \equiv \mathbb{E}[X] = \int_{\mathcal{D}_X} x f_X(x) dx \quad (2.3)$$

$$\text{Var}[X] = \sigma^2 = \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2] = \int_{\mathcal{D}_X} (x - \mu_X)^2 f_X(x) dx \quad (2.4)$$

$$\mathbb{E}[X^n] = \int_{\mathcal{D}_X} x^n f_X(x) dx \quad (2.5)$$

Un vecteur aléatoire est un vecteur dont les composantes sont des variables aléatoires. Connaissant la densité  $f_{(X,Y)}$  du vecteur aléatoire continu  $(X, Y)$ , la covariance des variables  $X$  et  $Y$  est définie par :

$$\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] = \int_{\mathcal{D}_X} \int_{\mathcal{D}_Y} (x - \mu_X)(y - \mu_Y) f_{(X,Y)}(x, y) dx dy \quad (2.6)$$

Un champ aléatoire est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , qui dépendent de l'aléa  $\theta$  et de l'espace  $\mathbf{x}$ . Il est généralement caractérisé par la donnée d'une moyenne et d'une variance qui dépendent de l'espace, et d'une fonction de covariance entre deux points de l'espace.

Parmi les lois à densité d'usage fréquent en mécanique probabiliste, on trouve :  
— la *loi uniforme*  $U_{[a,b]}$  sur l'intervalle  $[a, b]$ , dont la densité s'écrit :

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbf{1}_{[a,b]}(x) \quad (2.7)$$

où  $\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$  est la fonction indicatrice sur l'intervalle  $[a, b]$ , valant 1 si  $x \in [a, b]$  et 0 sinon. La moyenne est  $\mathbb{E}[X] = (b+a)/2$  et la variance est  $\text{Var}[X] = (b-a)^2/12$ .

— la *loi gaussienne ou normale*  $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  de paramètres  $\mu \in \mathbb{R}$  et  $\sigma$ , de densité définie pour  $x \in \mathbb{R}$  par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.8)$$

Cette loi a une importance capitale en calcul des probabilités et en statistique. Par exemple, elle apparaît naturellement comme la loi d'erreurs de mesures, d'après le théorème central limite (cf. paragraphe 2.1.1.3). Elle permet de construire des modèles robustes pour lesquels des calculs explicites peuvent être faits. Les paramètres de cette loi ont une interprétation immédiate :  $\mu$  est la moyenne et  $\sigma^2$  la variance.

- Puisque le domaine de définition de la loi normale est l'ensemble  $\mathbb{R}$ , des réalisations négatives peuvent se produire ce qui n'a pas de sens physique pour des paramètres tels que la masse ou la raideur. Pour résoudre ce problème, on utilise la *loi log-normale* de moyenne  $\mu$  et d'écart-type  $\sigma$ , dont la densité de probabilité est définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.9)$$

Contrairement à la loi normale, la densité de probabilité de la loi log-normale n'est pas symétrique autour de la valeur moyenne.

### 2.1.1.2 Principe du maximum d'entropie

On souhaite en pratique pouvoir déterminer les lois de probabilité des paramètres d'un modèle étudié tout en disposant d'une connaissance imparfaite. Il s'avère que le problème de la construction de la loi de probabilité *a priori* d'une variable aléatoire sous la contrainte définie par l'information disponible est un problème mal posé car une infinité de solutions existe. L'entropie de Shannon [Shannon 1948] a été introduite comme une fonction mathématique qui, intuitivement, correspond à la quantité d'information contenue ou délivrée par une source d'information, mesurant l'incertitude relative associée à une loi de probabilité. Pour une variable aléatoire  $X$  de densité  $f_X$ , on définit l'entropie de la loi par

$$\begin{aligned} H &= -\mathbb{E}[\log(f_X)] \\ &= -\int_{\mathcal{D}_X} f_X(x) \log(f_X(x)) dx \quad \text{si } X \text{ est continue} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Le **principe du maximum d'entropie** [Jaynes 1957, Kapur et Kesavan 1992] est un outil très efficace qui permet de construire une loi de probabilité sous la contrainte définie par l'information disponible. On construit alors de manière unique la loi de probabilité maximisant l'incertitude et prenant en compte l'information disponible. Par définition de l'entropie, de toutes les distributions possibles, celle ayant une entropie maximale contient le moins d'information, et elle est donc pour cette raison la moins arbitraire de toutes celles que l'on pourrait utiliser.

Pour illustrer, on suppose qu'on cherche à déterminer une loi de probabilité sur l'intervalle  $[a, b]$ ,  $a \neq b$ . Maximiser l'entropie  $H$  sous la contrainte de normalisation  $\int_a^b f_X(x) dx = 1$  implique que

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \quad (2.11)$$

ce qui correspond à la loi uniforme. Ce résultat semble logique car aucun point de l'intervalle  $[a, b]$  n'a de raison d'être plus probable qu'un autre. Par conséquent, la loi uniforme est généralement utilisée quand on n'a aucune connaissance préalable sur la dispersion des paramètres d'entrée du modèle.

### 2.1.1.3 Théorèmes limites

La dernière partie de ces rappels est consacrée à la présentation des deux résultats fondamentaux de la théorie des probabilités : le **loi forte des grands nombres** qui assure que la moyenne arithmétique de données aléatoires converge vers la moyenne théorique quand le nombre d'observations indépendantes augmente et le **théorème central limite** qui précise la vitesse de cette convergence.

#### Loi forte des grands nombres

Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variables aléatoires réelles ou vectorielles **indépendantes, de même loi et intégrables** (c'est-à-dire  $\mathbb{E}[|X_n|] < \infty$ ). Alors la moyenne empirique  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  converge vers  $\mathbb{E}[X_1]$ . Ainsi on a :

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[X_1] \quad (2.12)$$

De plus, on a  $\mathbb{E}[|\bar{X}_n - \mu|] \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Ainsi, la moyenne des  $n$  premiers termes d'une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi converge presque sûrement vers une constante non aléatoire, i.e leur espérance mathématique, lorsque  $n$  tend vers l'infini. En pratique, cela signifie que la moyenne observée converge presque sûrement vers la moyenne théorique. Cette loi s'avère très utile pour le calcul numérique et les simulations, en approchant la valeur d'une intégrale continue par une somme finie de termes. Elle est ainsi la base des techniques d'intégration numérique.

#### Théorème central limite (TCL)

Soit  $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$  une suite de variables aléatoires réelles **indépendantes, de même loi et de carré intégrable** (c-à-d  $\mathbb{E}[|X_n^2|] < \infty$ ). On pose  $\mu = \mathbb{E}[X_n]$ ,  $\sigma^2 = \text{Var}(X_n) = \mathbb{E}[(X_n - \mu)^2]$  et la moyenne empirique  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ . On a :

$$\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu) = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (2.13)$$

ou bien

$$\frac{\sqrt{n} (\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} = \frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}(0, 1) \quad (2.14)$$

Ainsi, pour la loi gaussienne, on peut démontrer que, pour  $a > 0$ , on a :

$$\mathbb{P} \left( \mu \left[ \bar{X}_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}} \right] \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{-a}^a e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \quad (2.15)$$

De manière pratique, si l'on désire donner une approximation de  $\mu$ , à l'aide de la moyenne empirique  $\bar{X}_n$ , on peut fournir un intervalle aléatoire

$$I_n = \left[ \bar{X}_n - \frac{a\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{a\sigma}{\sqrt{n}} \right] \quad (2.16)$$

contenant la valeur moyenne  $\mu$ , avec une probabilité asymptotique  $\mathbb{P}(|Y| < a) = 1 - \alpha$ , où  $Y$  est une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite  $\mathcal{N}(0, 1)$ . L'intervalle  $I_n$  est appelé *intervalle de confiance* de  $\mu$  de *niveau asymptotique*  $1 - \alpha$ . Les valeurs les plus courantes sont  $\alpha = 5\%$ , soit  $1 - \alpha = 95\%$  et  $a \simeq 1.96$ , et  $\alpha = 1\%$ , soit  $1 - \alpha = 99\%$  et  $a \simeq 2.58$ . Ce théorème montre que les sommes de variables aléatoires finies, indépendantes et de même loi quelconque ont tendance à suivre une distribution selon une loi gaussienne. En pratique, on peut alors affirmer que si le résultat d'une mesure est la somme de plusieurs effets individuellement négligeables et indépendants, alors cette mesure est distribuée selon une loi gaussienne.

### 2.1.2 Modélisation probabiliste des paramètres incertains

Quand on envisage une modélisation probabiliste des paramètres incertains, on commence par les définir dans un espace de probabilité convenable. Si l'on décide de modéliser un paramètre mécanique incertain  $h$  par une variable aléatoire (e.g. les paramètres de liaison tels que raideurs, coefficients de frottement et jeux), on fait l'hypothèse qu'il est homogène en espace. Dans ce cas, on l'écrit :

$$h(\theta) = \bar{h} (1 + \delta \xi(\theta)) \quad (2.17)$$

où  $\bar{h}$  est la valeur moyenne du paramètre,  $\delta$  le coefficient de variation du paramètre et  $\xi(\theta)$  une variable aléatoire suivant une loi de probabilité donnée décrivant la variation aléatoire du paramètre.

Si ce choix s'avère restrictif, on décidera de modéliser ce paramètre par un champ aléatoire tenant compte de sa variabilité spatiale. En effet, les champs aléatoires décrivent de manière plus réaliste des paramètres mécaniques incertains qui nécessitent parfois la prise en compte de la variabilité spatiale, tels que les paramètres structuraux (e.g. paramètres matériau, géométrie, conditions aux limites). Cela rend les calculs plus difficiles vu qu'à chaque point de l'espace est associée une densité de probabilité. On simplifie alors l'analyse en effectuant une projection orthogonale du champ sur une base d'espace séparant les variations spatiale et aléatoire.

Plusieurs méthodes ont été développées dans les années 1980 afin d'assurer la discrétisation d'un champ aléatoire en un ensemble fini de variables aléatoires. Parmi ces méthodes, on trouve la méthode de la moyenne spatiale (*spatial average method*) [Vanmarcke et Grigoriu 1983], la méthode de la fonction de forme (*shape function method*) [Liu et al. 1986] et la méthode du point milieu (*midpoint method*) [Der Kiureghian et Ke 1988]. Une revue et comparaison de ces méthodes est présentée dans [Li et Der Kiureghian 1993]. Néanmoins, ces méthodes s'avèrent relativement inefficaces car un nombre important de variables aléatoires est nécessaire pour avoir une bonne approximation du champ aléatoire. Par conséquent, des approches basées sur des développements en séries de polynômes ont été proposées au cours des années 1990, telles que la décomposition de Karhunen-Loève (KL) [Ghanem et Spanos 1991], le développement en séries orthogonales OSE (*Orthogonal*

*Series Expansion*) [Zhang et Ellingwood 1994] et la méthode EOLE (*Expansion Optimal Linear Estimation*) [Li et Der Kiureghian 1993]. Des détails sur les avantages de chacune de ces méthodes en terme de précision et efficacité se trouvent dans [Sudret et Der Kiureghian 2000].

Vu que la décomposition de Karhunen-Loève (KL) a été largement utilisée dans la littérature, nous en proposons ici une présentation brève. D'un point de vue mathématique, il s'agit d'une projection orthogonale dans des espaces de Hilbert séparables. Dans ce cas, la base hilbertienne  $\{e_i, i \geq 1\}$ , est formée des fonctions propres d'une équation intégrale de Fredholm du second type, ayant la fonction d'autocovariance « Cov » comme noyau. En considérant un champ aléatoire  $h(\mathbf{x}, \theta)$  à valeurs scalaires, défini sur un domaine spatial  $D$ , la décomposition de Karhunen-Loève est définie de la manière suivante :

$$h(\mathbf{x}, \theta) = \mu(\mathbf{x}) + \sum_{i \geq 1} \sqrt{\lambda_i} e_i(\mathbf{x}) \xi_i(\theta) \quad (2.18)$$

$$\text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{x}'] = \mathbb{E}[(h(\mathbf{x}, \theta) - \mu(\mathbf{x}))(h(\mathbf{x}', \theta) - \mu(\mathbf{x}'))] \quad (2.19)$$

$$\int_D \text{Cov}[\mathbf{x}, \mathbf{x}'] e_n(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \lambda_n e_n(\mathbf{x}') \quad (2.20)$$

où  $\mathbf{x}$  est un vecteur contenant les variables d'espace,  $\mu(\mathbf{x}) = \mathbb{E}[h(\mathbf{x}, \theta)]$ ,  $\lambda_i$  sont les valeurs propres de la fonction d'autocovariance, et  $\{\xi_i(\theta)\}$  forment un ensemble de variables aléatoires décorrélées. Si  $h(\mathbf{x}, \theta)$  est considéré gaussien, alors  $\{\xi_i(\theta)\}$  sont des variables aléatoires indépendantes suivant une loi normale centrée réduite. Afin de se ramener à un nombre fini de variables aléatoires, on tronque souvent cette décomposition, vu que les  $\lambda_i$  décroissent quand  $i$  augmente et que les champs utilisés en pratique ne sont pas très bruités. Dans le cas d'un champ aléatoire à valeurs vectorielles, on trouve dans [Perrin *et al.* 2013] une version revisitée de cette décomposition.

### 2.1.3 Cadre d'étude des problèmes stochastiques

La description mathématique de nombreux phénomènes physiques s'écrit sous la forme d'un système d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles. En adoptant une vision probabiliste des incertitudes, on les modélise par un ensemble fini de variables aléatoires  $\xi(\theta)$  définies dans un espace de probabilité convenable de dimension finie. Ainsi, la réponse  $\mathbf{u}$  du modèle incertain analysé sera recherchée comme une fonction aléatoire de  $\xi$  et devra vérifier un ensemble d'équations de la forme

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}(\xi); \xi) = b(\xi) \quad (2.21)$$

où  $\mathcal{A}$  est un opérateur différentiel,  $b$  est associé aux termes de source.

Tout le contenu probabiliste de la réponse du système se trouve dans sa densité de probabilité, qui dépend de la densité de probabilité des paramètres d'entrée incertains et du modèle mathématique.

## 2.2 Méthodes paramétriques probabilistes

Les méthodes paramétriques sont généralement utilisées pour modéliser les incertitudes provenant d'une variabilité naturelle. Elles permettent la propagation d'incertitudes sur les données ou paramètres caractérisant le modèle mathématique-mécanique d'intérêt. Parmi ces méthodes, celles qui se basent sur la théorie des probabilités sont les plus utilisées vu que les incertitudes paramétriques sont généralement considérées aléatoires. L'emploi de cette théorie s'impose de manière naturelle lorsqu'on cherche à modéliser les effets du hasard liés à la présence d'incertitudes affectant les paramètres du modèle. Les méthodes paramétriques probabilistes peuvent être réparties en quatre catégories de la manière suivante :

- les *méthodes d'intégration directe*, envisagées lorsqu'on recherche de manière directe toute la densité de probabilité de la réponse ;
- les *méthodes d'analyse de fiabilité des structures*, considérées quand l'intérêt est porté sur une partie de la densité de probabilité de la réponse, à savoir les quantiles faibles, ou sur la probabilité d'un événement particulier, tel que la défaillance de la structure ;
- les *méthodes d'approximation polynomiale*, utilisées si on cherche à déterminer la moyenne et la variance de la réponse du système. Elles fournissent une première estimation de la variabilité de la réponse, limitée aux deux premiers moments statistiques de la réponse ;
- les *techniques de projection*, employées afin d'accéder à toute la densité de probabilité à partir d'une représentation fonctionnelle précise de la solution par projection sur une base connue de fonctions permettant de séparer les composantes aléatoires et déterministes.

Pour une synthèse générale assez exhaustive sur des développements récents et applications de ces méthodes à la propagation des incertitudes en mécanique des structures, on pourra consulter [Matthies *et al.* 1997, Schuëller 1997, Sudret et Der Kiureghian 2000, Schuëller et Pradlwarter 2009, Nouy 2009].

### 2.2.1 Méthodes d'intégration directe

En mécanique probabiliste, les quantités d'intérêt peuvent être écrites en général comme l'espérance d'une fonctionnelle  $f$  de la réponse  $\mathbf{u}$  du système  $\mathbb{E}[f(\mathbf{u}(\xi); \xi)]$ . L'évaluation de cette espérance nécessite le calcul d'une intégrale de manière numé-

rique, ce qui amène à l'approximation suivante :

$$\mathbb{E}[f(\mathbf{u}(\xi); \xi)] \approx \sum_{k=1}^n f(\mathbf{u}(\mathbf{y}_k); \mathbf{y}_k) \omega_k \quad (2.22)$$

où  $\omega_k \in \mathbb{R}$  sont les poids d'intégration et  $\mathbf{y}_k$  sont les points d'intégration. Cette approximation provient du résultat de la *loi forte des grands nombres* (cf. paragraphe 2.1.1.3) qui permet d'approcher la moyenne empirique de la moyenne théorique lorsque  $n$  est assez grand. Les méthodes d'intégration directe cherchent à calculer la réponse du modèle pour  $n$  valeurs  $\xi = y_k$  des paramètres incertains. Pour calculer ces réponses  $\{\mathbf{u}(\mathbf{y}_k)\}_{k=1}^n$ , il faut résoudre  $n$  problèmes déterministes découplés :

$$\mathcal{A}(\mathbf{u}(\mathbf{y}_k); \mathbf{y}_k) = b(\mathbf{y}_k) \quad k = 1, \dots, n \quad (2.23)$$

Ces approches sont intéressantes car elles permettent d'employer des méthodes numériques déterministes bien maîtrisées.

### 2.2.1.1 Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo (*Monte Carlo Simulation*) est l'approche de base qui permet de caractériser la variabilité de la réponse d'un modèle à travers un grand nombre de simulations déterministes [Fishman 1996]. Après avoir défini un domaine de variation des données d'entrée (i.e. les paramètres incertains), cette méthode consiste à choisir pour les points d'intégration  $n$  échantillons indépendants pseudo-aléatoires des variables  $\xi$ , de variance  $\sigma$ . Les poids d'intégration sont considérées égaux à  $\omega_k = \frac{1}{n}$ . Pour chaque échantillon, un modèle déterministe est défini et son comportement est simulé dans le cadre de la méthode des éléments finis. Enfin, une étude statistique des variables de sortie permet d'accéder aux premier et second moments, à la densité de probabilité et à la probabilité de défaillance.

Cette méthode est avantageuse car elle peut s'appliquer à pratiquement n'importe quel modèle physique indépendamment de sa complexité, en plus d'être simple à implémenter sans modification du modèle mathématique-mécanique. Cependant, son utilisation s'avère prohibitive car la vitesse de convergence est en  $\sigma/\sqrt{n}$  (cf. paragraphe 2.1.1.3) mais elle est indépendante de la dimension stochastique du problème. L'obtention d'une valeur stable et précise de la réponse d'un modèle d'une structure réelle de taille industrielle exige alors un grand nombre d'échantillons, ce qui rend les temps de calcul très élevés. Les paragraphes suivants présentent diverses techniques qui ont été développées pour surmonter ces inconvénients.

### 2.2.1.2 Méthodes d'échantillonnage

Les méthodes de quasi-Monte-Carlo consistent à améliorer le choix des échantillons par l'utilisation de suites à discrétion faible ou suites quasi-aléatoires, telles

que la suite de Halton et la suite de Sobol [Caffisch 1998, Blatman *et al.* 2007]. Cela rend la vitesse de convergence de l'ordre de  $1/n$ .

L'optimisation de la position des échantillons est une autre façon d'améliorer la méthode de Monte-Carlo. L'échantillonnage préférentiel [Melchers 1989] (*Importance Sampling*), grandement appliqué à la fiabilité des structures, permet de réduire la variance et d'accélérer la convergence en concentrant la distribution des échantillons générés dans les zones les plus importantes, à savoir les régions qui contribuent le plus à l'estimation statistique de la grandeur d'intérêt. Cependant, pour que ces techniques restent avantageuses, le nombre de variables aléatoires indépendantes doit rester faible. Plusieurs améliorations ont été proposées, telles que *Adaptive Importance Sampling* [Au et Beck 1999], *Radial Importance Sampling* [Melchers 1990] et d'autres [Au et Beck 2003, Grooteman 2008].

*Latin Hypercube Sampling* (LHS) peut être considérée comme une procédure de compromis qui englobe plusieurs des qualités de l'échantillonnage aléatoire et l'échantillonnage stratifié, en produisant des résultats plus stables [Helton et Davis 2003]. C'est une technique très employée, permettant une réduction du nombre d'échantillons requis : l'intervalle de définition de chacune des  $p$  variables aléatoires du modèle est divisé en  $N$  intervalles équiprobables ; on tire une seule valeur de manière aléatoire dans chacun de ces intervalles ; les  $N$  tirages effectués pour chaque variable sont ensuite aléatoirement appariées ensemble jusqu'à obtenir finalement  $N$   $p$ -uplets,  $N$  étant nettement inférieur à  $n$  pour le même niveau de précision et de convergence. Les limites du LHS sont discutées dans [Huntington et Lyrintzis 1998], en présentant deux techniques permettant d'améliorer sa performance. De plus, pour réduire davantage les temps de calcul, des variantes sont proposées dans [Olsson *et al.* 2003] avec une étude comparative sur trois problèmes de fiabilité.

### 2.2.1.3 Parallélisation et surfaces de réponse

Deux autres améliorations de la méthode de Monte-Carlo, non basées sur l'optimisation de l'échantillonnage, permettent de réduire les temps de calcul en traitant directement la résolution des problèmes déterministes.

La première est de réaliser une parallélisation des opérations et traitements en effectuant les calculs sur plusieurs processeurs, ce qui accélère la convergence. Le lecteur intéressé trouvera dans [Johnson *et al.* 1997, LeBeau 1999] des exemples d'implémentations, et dans [Lee *et al.* 2010] un cas d'étude récent montrant l'utilité des cartes graphiques pour effectuer un grand nombre de simulations en parallèle.

La seconde manière est de recourir aux méthodes de surface de réponse (*Response Surface Methods*) [Faravelli 1989, Myers *et al.* 2009]. On commence par sélectionner les paramètres du modèle les plus pertinents, à savoir ceux la plus grande

influence sur la réponse du système. Le temps de calcul est réduit en établissant une surface approchée de la réponse du modèle obtenue par interpolation de différentes réponses du modèle déterministe complet calculées pour différents jeux de paramètres. N'étant pas intrusives, ces méthodes peuvent être employées facilement dans les codes Éléments Finis commerciaux [Boucard et Champaney 2003]. Le défi principal de ces méthodes est de construire de manière efficace et rapide une surface de réponse approchée [Romero *et al.* 2004, Champaney *et al.* 2005].

## 2.2.2 Méthodes d'analyse de fiabilité des structures

Dans une analyse de fiabilité, la durée de vie d'une structure, ou l'instant de sa défaillance, n'est jamais connu à l'avance. Il est impossible de prédire cet instant de manière précise car il a un caractère aléatoire inhérent. Du coup, lors de l'étude de la fiabilité d'une structure quelconque, l'instant de défaillance est incertain et peut être modélisé par une variable aléatoire.

Le but des méthodes fiabilistes est d'estimer la probabilité de défaillance, surtout lorsque l'emploi de la méthode de Monte-Carlo serait pénalisant. Le lecteur intéressé trouvera une présentation détaillée de ces méthodes dans les livres [Ditlevsen et Madsen 1996, Melchers 1999, Lemaire *et al.* 2005]. Le point de départ est de considérer  $\mathbf{S} = \mathcal{S}(\xi)$  un vecteur désignant les effets de charge (e.g. déplacements, contraintes, déformations, etc.) qui est lié aux paramètres incertains aléatoires  $\xi$  et dont les valeurs déterminent la défaillance du système. Ce vecteur est construit en général à l'aide d'un code Éléments Finis. Afin d'évaluer la fiabilité d'une structure, une fonction d'état limite ou de performance  $g$  est définie de sorte que

- $g(\mathbf{S}) > 0$  indique l'état sûr de la structure.
- $g(\mathbf{S}) \leq 0$  indique l'état de défaillance. Dans ce contexte, cela ne signifie pas nécessairement la rupture de la structure, mais le fait qu'une limite de sécurité ou que certaines conditions de fonctionnement ont été atteintes ou dépassées.

Les valeurs de  $\mathbf{S}$  tels que  $g(\mathbf{S}) = 0$  définissent la surface d'état limite. Si  $f_{\mathbf{S}}(s)$  désigne la densité de probabilité jointe de  $\mathbf{S}$ , la probabilité de défaillance est ainsi donnée par :

$$P_f = P(g(\mathbf{S}) \leq 0) = \int_{g(\mathbf{S}) \leq 0} f_{\mathbf{S}}(s) ds \quad (2.24)$$

Le calcul de cette probabilité avec la méthode de Monte-Carlo est impossible à cause du grand nombre de tirages exigé pour avoir une estimation correcte ( $10^{m+2}$  échantillons pour une précision de l'ordre de  $10^{-m}$ , avec  $m \geq 4$ ). De plus,  $f_{\mathbf{S}}(s)$  est généralement inconnue.

Afin de surmonter ces difficultés, une transformation isoprobabiliste  $\mathbf{Y} = \mathcal{Y}(\xi)$  est généralement appliquée, telle que la transformation de Rosenblatt ou celle de Nataf (pour plus de détail sur ces transformations, voir [Ditlevsen et Madsen 1996]).  $\mathbf{Y}$  est un vecteur aléatoire gaussien suivant une loi de probabilité normale centrée réduite.

La projection fonction d'état limite sur l'espace normal standard en utilisant  $\mathcal{Y}$  s'écrit :

$$g(\mathbf{S}) \equiv g(\mathcal{S}(\xi)) = g(\mathcal{S} \circ \mathcal{Y}^{-1}(\mathbf{Y})) = G(\mathbf{Y}) \quad (2.25)$$

Ainsi la probabilité de défaillance peut se réécrire :

$$P_f = \int_{G(\mathbf{Y}) \leq 0} \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad (2.26)$$

où  $\varphi(\mathbf{Y})$  désigne la densité de probabilité normale centrée réduite de  $\mathbf{Y}$  :

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{(-\frac{1}{2}\|\mathbf{y}\|^2)} \quad (2.27)$$

La forme de  $\varphi$  montre que le point de défaillance le plus probable  $P^*$  de la surface d'état-limite est celui qui est le plus proche de l'origine, et qui correspond au vecteur  $\mathbf{y}^*$  solution du problème de minimisation suivant :

$$\mathbf{y}^* = \arg \min_{G(\mathbf{Y}) \leq 0} \|\mathbf{y}\|^2 \quad (2.28)$$

Après avoir calculé  $\mathbf{y}^*$ , le calcul de la probabilité de défaillance s'effectue par approximation du domaine de défaillance autour du point  $P^*$  par un domaine plus simple dont la probabilité peut être estimée analytiquement. Une approximation du premier ordre, appelée FORM (*First Order Reliability Method*) [Hohenbichler et Rackwitz 1983], consiste à remplacer le domaine d'intégration par un hyperplan tangent à la surface d'état-limite pour  $\mathbf{y} = \mathbf{y}^*$ . On peut améliorer la précision en utilisant une approximation du second ordre, intitulée SORM (*Second Order Reliability Method*) [Der Kiureghian et al. 1987]. La surface d'état-limite est alors remplacée par une surface quadratique dont le contenu probabiliste est analytiquement connu.

Bien que SORM soit plus précise que FORM, son coût de calcul est plus élevé. Le besoin d'augmenter la précision des résultats sans exiger un coût de calcul supplémentaire a conduit à la proposition de la méthode FOSPA (*First-Order Saddlepoint Approximation method*) [Du et Sudjianto 2004]. Vu que la transformation isoprobabiliste augmente la nonlinéarité de la fonction d'état limite, la méthode FOSPA, utilisant l'approximation du point-selle, propose de linéariser cette fonction directement dans l'espace d'origine autour du point le plus probable  $P^*$ . Récemment, la méthode MVFOSA (*Mean-Value First Order Saddlepoint Approximation*) [Huang et Du 2008] a été développée pour rendre le calcul de la fonction de défaillance plus efficace, plus précis et plus robuste.

### 2.2.3 Méthodes d'approximation polynomiale

Quand on s'intéresse aux premiers moments statistiques (i.e. la moyenne et la variance) de la réponse du système étudié, on a recours à la méthode par perturbation ou à la méthode de décomposition de Neumann. Ces méthodes se basent sur une approximation de la solution de (2.21) en séries de polynômes.

### 2.2.3.1 Méthode par perturbation

La méthode par perturbation [Kleiber et Hien 1992], est considérée comme une variante de la méthode des éléments finis stochastiques (*Stochastic Finite Element Method*) [Sudret et Der Kiureghian 2000, Stefanou 2009], qui n'est qu'une extension de la méthode des éléments finis classique déterministe à la résolution de problèmes (statique et dynamique) discrétisés en éléments finis ayant des propriétés stochastiques.

Après la modélisation des paramètres incertains et la discrétisation (cf. section 2.1.2), la méthode par perturbation consiste à approcher la solution de (2.21) par un développement en séries de Taylor autour de la valeur moyenne  $\mu_\xi$  des variables aléatoires  $\{\xi_k(\theta)\}_{1 \leq k \leq n}$  de la manière suivante :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \sum_{i=1}^n (\xi_i - \mu_{\xi_i}) \mathbf{u}_{,i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\xi_i - \mu_{\xi_i})(\xi_j - \mu_{\xi_j}) \mathbf{u}_{,ij} + \dots \quad (2.29)$$

où  $\mathbf{u}_0 := \mathbf{u}(\mu_\xi)$ ,  $\mathbf{u}_{,i} := \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi_i}(\mu_\xi)$ ,  $\mathbf{u}_{,ij} := \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial \xi_i \partial \xi_j}(\mu_\xi)$ ,  $\dots$

En écrivant l'opérateur  $\mathcal{A}(\bullet, \xi(\theta))$  et le second membre  $b(\xi)$  de façon similaire, puis en les injectant dans l'équation (2.21), on trouve que les coefficients du développement de  $\mathbf{u}$  sont solutions d'une suite de problèmes déterministes.

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{u}_0) = b_0 \quad (2.30)$$

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{u}_{,i}) = b_{,i} - \mathcal{A}_i(\mathbf{u}_0) \quad (2.31)$$

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{u}_{,ij}) = b_{,ij} - \mathcal{A}_i(\mathbf{u}_{,j}) - \mathcal{A}_j(\mathbf{u}_{,i}) - \mathcal{A}_{,ij}(\mathbf{u}_0) \quad (2.32)$$

$$\dots \quad (2.33)$$

L'espérance et la covariance peuvent être exprimées simplement en fonction des coefficients du développement et des statistiques des variables aléatoires :

$$\mathbb{E}[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{\xi_i \xi_j} \mathbf{u}_{,ij} + \dots \quad (2.34)$$

$$\text{Cov}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{\xi_i \xi_j} \mathbf{u}_{,i} \mathbf{u}_{,j}^T + \dots \quad (2.35)$$

où  $C_{\xi_i \xi_j}$  désigne la covariance des variables  $\xi_i$  and  $\xi_j$ .

Les limitations du calcul différentiel numérique restreignent ces développements à l'ordre un ou deux, et seulement les moments d'ordre un et deux sont généralement calculés. Elle fournit une estimation efficace et précise de la variabilité de la réponse d'un modèle dans le cas de faibles incertitudes uniquement. Quelques applications à divers modèles éléments finis en dynamique des structures sont présentées dans [Kamiński 2001, Van den Nieuwenhof et Coyette 2003, Çavdar *et al.* 2008].

### 2.2.3.2 Méthode de décomposition de Neumann

L'idée principale de la décomposition de Neumann est d'effectuer un développement en série de Neumann de l'inverse de l'opérateur aléatoire  $\mathcal{A}(\bullet, \xi)$  [Yamazaki *et al.* 1988, Lei et Qiu 2000]. On débute alors par l'écriture de l'opérateur comme suit :

$$\mathcal{A}(\bullet, \xi) = \mathcal{A}_0 + \mathcal{A}_*(\bullet, \xi) = \mathcal{A}_0 (\mathcal{I} + \mathcal{A}_0^{-1} \mathcal{A}_*(\bullet, \xi)) \quad (2.36)$$

où  $\mathcal{A}_0$  est l'opérateur moyen de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{A}_0^{-1}$  son inverse, et  $\mathcal{I}$  désigne l'opérateur identité. L'inverse de  $\mathcal{A}$  peut être développé ensuite sous forme d'une série géométrique, connue sous le nom de série de Neumann :

$$\mathcal{A}^{-1}(\bullet, \xi) = (\mathcal{I} + \mathcal{A}_0^{-1} \mathcal{A}_*(\bullet, \xi))^{-1} \mathcal{A}_0^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\mathcal{A}_0^{-1} \mathcal{A}_*(\bullet, \xi))^i \mathcal{A}_0^{-1} \quad (2.37)$$

La série converge uniquement lorsque la valeur absolue de toutes les valeurs propres de  $\mathcal{A}_0^{-1} \mathcal{A}_*$  est inférieur à 1, ce qui peut toujours être satisfait après l'introduction d'un facteur scalaire décrit [Yamazaki *et al.* 1988]. La solution de l'équation (2.21) peut être alors écrite sous la forme :

$$\mathbf{u}(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\mathcal{A}_0^{-1} \mathcal{A}_*(\bullet, \xi))^i \mathbf{u}_0 = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \mathbf{u}_i(\xi) \quad (2.38)$$

où les termes  $\mathbf{u}_i(\xi)$  sont les solutions de l'ensemble des équations suivantes :

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{u}_0) = b_0 \quad (2.39)$$

$$\mathcal{A}_0(\mathbf{u}_i) = \mathcal{A}_*(\mathbf{u}_{i-1}) \quad i \geq 1 \quad (2.40)$$

La méthode de décomposition de Neumann présente un avantage dans le fait que seule la partie déterministe de l'opérateur aléatoire doit être inversée et une fois uniquement. De plus, les dérivées partielles par rapport aux variables aléatoires ne sont pas exigées. Cependant, le calcul des termes du développement de  $\mathbf{u}$  nécessitent la résolution d'équations avec des seconds membres aléatoires, ce qui peut coûter cher. En pratique, la série est tronquée et les moments d'ordre un et deux de la solution approchée sont calculés.

On trouve dans [Lei et Qiu 2000] une application de la décomposition de Neumann pour l'analyse dynamique de structures, contenant des paramètres stochastiques, soumises à un chargement dynamique aléatoire. Les résultats d'exemples numériques ont été comparés à ceux obtenus par la méthode de Monte-Carlo et la méthode par perturbation. Ils révèlent que la décomposition de Neumann est très précise et efficace dans l'analyse des vibrations aléatoires.

## 2.2.4 Techniques de projection

Les méthodes présentées précédemment sont généralement utilisées pour prédire des grandeurs telles que les premiers moments d'une quantité d'intérêt, ou la probabilité d'un événement particulier. Leur application se trouve souvent limitée par des hypothèses assez restrictives mais surtout par le coût de calcul souvent élevé. Les techniques de projection sont des approches alternatives qui cherchent à construire une solution approchée sous la forme d'un développement construit par projection sur une base connue de fonctions. Cette projection permet de séparer les composantes aléatoires de la réponse du système de ses composantes déterministes.

### 2.2.4.1 Techniques de réduction de modèle

La modélisation d'un phénomène physique sur des structures de taille industrielle se retrouve souvent limitée par l'insuffisance de ressources de calcul, en terme de temps de calcul et de capacité de stockage. En s'intéressant au modèle numérique lui-même sans modifier le modèle mathématique-mécanique, les techniques de réduction de modèle cherchent à appliquer des approximations et projections sur le modèle complet pour réduire sa taille. Deux types principaux existent : les techniques de réduction *a posteriori* et les techniques de réduction *a priori*.

L'idée directrice est de construire une solution approchée, qui est une fonction à plusieurs variables (e.g. paramètres incertains d'espace et de structure), comme une somme finie de produits de fonctions

$$u(\mathbf{x}, \xi) \approx u_n(\mathbf{x}, \xi) = \sum_{p=1}^n \psi_p(\mathbf{x}) \prod_{k=1}^{n_k} \lambda_{pk}(\xi_k) \quad (2.41)$$

où  $\{\psi_p(\mathbf{x})\}_{p=1..n}$  et  $\{\lambda_{pk}(\xi_k)\}_{p=1..n}$  forment des bases réduites de faibles dimensions contenant respectivement des vecteurs déterministes et des fonctions stochastiques des paramètres aléatoires  $\{\xi_k\}_{k=1..n_k}$ . Ces bases peuvent être définies de plusieurs manières aboutissant à une décomposition optimale de la solution pour un ordre donné  $n$ . Puis, une étude statistique permet d'obtenir les premiers moments et la densité de probabilité de la solution.

Pour construire la base réduite, les techniques de réduction *a posteriori* nécessitent une connaissance préalable, au moins partielle, de la solution du problème initial de référence. Ces informations préalables s'appellent *snapshots*, autrement des clichés de la solution pour différents jeux de paramètres incertains. Après projection de ce dernier sur la base réduite, les coefficients de la combinaison linéaire (2.41) sont calculés à partir de la résolution des équations du problème projeté. L'étape de calcul de la base, qualifiée hors-ligne (*offline*), se fait généralement avec un coût de calcul élevé, alors que la résolution des équations du modèle projeté réduit, qualifiée en-ligne (*online*), a un coût considérablement plus faible.

Parmi ces méthodes, on trouve la méthode POD (*Proper Orthogonal Decomposition*) [Chatterjee 2000, Willcox et Peraire 2002, Ryckelynck 2005] où des valeurs aléatoires des paramètres incertains sont considérées pour évaluer les snapshots. Les vecteurs de la base réduite sont choisis parmi les snapshots de sorte que l'approximation à variables séparées minimise la distance à la solution par rapport à une métrique donnée.

Une autre manière de construire la base réduite est proposée par la méthode RB (*Reduced Basis*) [Rozza *et al.* 2008], développée spécialement pour les problèmes paramétrés. Dans ce cas, les paramètres incertains sont choisis de manière itérative optimale pour le calcul des snapshots.

La projection sur une base modale tronquée, autrement connue comme la méthode des sous-espaces (*Subspace Reduction Method*) [Balmès 1998], constitue une approximation simple des propriétés des systèmes dynamiques. On suppose qu'une approximation de la réponse du système se trouve dans un sous-espace généré par les vecteurs colonnes d'une matrice rectangulaire  $\mathbf{T}$ , ayant  $N$  lignes et  $N_R \ll N$  colonnes, où  $N$  est le nombre de degrés de liberté du problème initial. Les modes propres approchés du modèle sont donnés par la relation  $\phi = \mathbf{T} \phi_R$ , où  $\phi_R$  sont les vecteurs propres du problème aux valeurs propres projeté (réduit) suivant

$$[\mathbf{T}^T [\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{T}] \phi_R = \mathbf{0} \quad (2.42)$$

En pratique, les colonnes de la matrice  $\mathbf{T}$  peuvent être formées des modes propres de quelques modèles différents construits en considérant différentes valeurs des paramètres incertains. De manière générale, le nombre de modes propres d'intérêt est faible ainsi que le nombre de problèmes déterministes réduits à résoudre, ce qui permet d'aboutir à une valeur de  $N_R \ll N$ . Cette approche s'avère très utile quand on veut étudier l'incertitude sur des valeurs particulières de fréquences et modes propres d'un modèle.

Les techniques de réduction de modèle *a priori* [Nouy 2010] n'exigent pas de connaissance préalable de tout ou partie de la solution et fonctionnent de manière itérative. Un système de problèmes simples, qui peuvent être considérés comme des pseudo problèmes aux valeurs propres, doit être résolu. Ces techniques se basent sur la méthode PGD (*Proper Generalized Decomposition*) [Chinesta *et al.* 2011], qui peut être vue comme une généralisation d'une décomposition en valeurs singulières pour la construction *a priori* d'une approximation produit tensoriel de la solution. Les fonctions stochastiques et les vecteurs déterministes de l'équation (2.41) initialement inconnus sont calculés à la volée. Cette étape de calcul hors-ligne coûte généralement très cher en temps de calcul, mais ne se réalise qu'une seule fois. L'évaluation de la solution pour une fonction aléatoire quelconque se fait ensuite lors d'une étape rapide de calcul en-ligne.

Dans le contexte de la propagation des incertitudes, cette méthode a initialement été introduite comme une généralisation des décompositions spectrales [Nouy 2007] pour la construction de représentations séparées de la solution d'équations aux dérivées

partielles stochastiques. Pour une incertitude d'entrée sur un paramètre quelconque du problème, l'évaluation de la solution se fait très rapidement à un faible coût de calcul. Par exemple, l'article [Safatly *et al.* 2011] s'intéresse à la prise en compte d'incertitudes géométriques et utilise une méthode PGD pour la résolution d'équations aux dérivées partielles définies sur un domaine incertain. D'autres travaux présentent également des applications de la méthode PGD à des problèmes stochastiques [Nouy 2008, Nouy et Le Maître 2009, Louf et Champaney 2013] ainsi qu'à des modèles multidimensionnels [Chinesta *et al.* 2010].

#### 2.2.4.2 Méthode spectrale des éléments finis stochastiques

D'un point de vue mathématique, les méthodes spectrales [Le Maître et Knio 2010] sont des méthodes d'ordre élevé pour la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Elles reposent sur une projection de la solution sur une base polynomiale et sont très efficaces pour la résolution de problèmes dont la solution est régulière.

En particulier, la méthode spectrale des éléments finis stochastiques [Ghanem et Spanos 1991], une seconde variante de la méthode des éléments finis stochastiques, consiste à représenter sous forme probabiliste la réponse d'un système dont les chargements et les propriétés des matériaux constitutifs sont aléatoires. Cette méthode débute par deux discrétisations successives du système d'équations stochastiques aux dérivées partielles qui décrivent le problème étudié :

- une discrétisation spatiale telle que celle réalisée par *la méthode des Éléments Finis*, i.e. comprenant un maillage de la structure et des fonctions de forme ;
- une discrétisation probabiliste des champs aléatoires décrivant le caractère incertain des matériaux constitutifs et chargements. Pour cela, on peut recourir à l'une des méthodes présentées dans le paragraphe 2.1.2.

Dans le cas d'une analyse déterministe, la réponse du système est donnée par le vecteur des déplacements nodaux. Vu que certains paramètres d'entrée sont des champs aléatoires, cette quantité d'intérêt devient le vecteur aléatoire des inconnues nodales  $\mathbf{u}(\theta)$ , dont le contenu probabiliste est a priori inconnu. Ce vecteur est recherché sous la forme d'un développement sur une base appropriée, séparant la partie aléatoire de la partie déterministe, appelé « chaos polynomial » [Ghanem et Spanos 1990] :

$$\mathbf{u}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{u}_j \Psi_j(\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty}) = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{u}_j \Psi_j(\theta) \quad (2.43)$$

où  $\{\Psi_j(\theta)\}_{j=0}^{\infty}$  est un ensemble complet de polynômes orthogonaux aléatoires, formant une base orthonormée de l'espace des  $\{\xi_i(\theta)\}_{i=1}^{\infty}$ , qui vérifie :

$$\Psi_0 \equiv 1 \quad (2.44)$$

$$\mathbb{E}[\Psi_j] = 0 \quad \forall j > 0 \quad (2.45)$$

$$\mathbb{E}[\Psi_j \Psi_k] = \mathbb{E}[\Psi_j^2] \delta_{jk} \quad (2.46)$$

Le chaos polynomial est une technique puissante de propagation d'incertitudes à travers des systèmes d'équations différentielles et aux dérivées partielles. Le premier développement sur le chaos polynomial a été proposé dans [Wiener 1938], en utilisant les polynômes d'Hermite pour des variables aléatoires suivant une loi gaussienne. Ce développement sur les polynômes orthogonaux d'Hermite s'est avéré très efficace pour calculer la réponse aléatoire de divers systèmes en mécanique des solides [Ghanem et Spanos 1991, Ghanem 1999, Blanzé et Champaney 2004, Blanzé et Rouch 2005], et en dynamique des fluides [Xiu et Karniadakis 2003, Le Maître et Knio 2010], pour des variables d'entrée gaussiennes et pour quelques types de variables non gaussiennes. Cependant, dans un cas général de variables aléatoires non gaussiennes, l'emploi des polynômes d'Hermite n'aboutit pas à une vitesse de convergence optimale. Afin d'y remédier, le développement sur le chaos polynomial de Wiener-Askey a été proposé dans [Xiu et Karniadakis 2002] sous le nom de *chaos polynomial généralisé*. Ainsi, selon le type des variables aléatoires  $\xi$  (discrète ou continue) et leur loi de probabilité (e.g. uniforme, normale, binomiale, etc.), un chaos polynomial de l'ensemble du chaos de Wiener-Askey  $\{\Psi(\xi)\}$  y correspond. Par exemple, les polynômes d'Hermite sont associés aux variables suivant une loi normale, et les polynômes de Legendre sont associés à celles suivant une loi uniforme. Les coefficients  $\{\mathbf{u}_j\}_{j=0}^{\infty}$  sont des vecteurs déterministes de même taille que  $\mathbf{u}(\theta)$ . On tronque ensuite ce développement en gardant  $M + 1$  termes dans la discrétisation du champ aléatoire d'entrée et  $P$  termes dans le développement sur le chaos polynomial. La relation entre le nombre  $M$  de variables aléatoires et le plus haut degré des polynômes  $\Psi_j$  est :

$$P = \sum_{k=0}^p \binom{M+k-1}{k} \quad (2.47)$$

En injectant le développement tronqué de la solution dans l'équation principale (2.21), avec  $\xi_0(\theta) \equiv 1$ , on trouve :

$$\mathcal{A} \left( \sum_{j=0}^{P-1} \mathbf{u}_j \Psi_j(\{\xi_i(\theta)\}_{i=0}^M), \xi \right) = b(\xi) \quad (2.48)$$

En utilisant un développement sur le chaos polynomial du vecteur  $\mathbf{u}(\theta)$ , l'aléa est transmis vers la base polynomiale. Le calcul des coefficients  $\mathbf{u}_j$  se fait en utilisant la propriété d'orthogonalité des polynômes  $\{\Psi_j(\theta)\}_{j=0}^{P-1}$ . Cela conduit à un ensemble de  $P$  équations déterministes couplées dont la résolution peut s'effectuer analytiquement si  $\mathbf{u}(\theta)$  suit une loi normale ou lognormale, sinon numériquement. La caractérisation du vecteur aléatoire de déplacements nodaux aboutit alors à la résolution d'un système linéaire de taille  $N \times P$ , où  $N$  est le nombre de degrés de liberté de la structure, et  $P$  l'ordre du développement polynomial de la réponse. En pratique,  $P$  est entre 10 et 35, ce qui signifie que le système à résoudre peut être de taille assez grande même pour des problèmes de petite taille. Des méthodes permettant de

résoudre ce système de manière efficace ont été proposées dans [Ghanem et Kruger 1996].

Une fois le calcul des coefficients  $\mathbf{u}_j$  mené, la description probabiliste de la réponse aléatoire du système est donnée par (2.47). Son espérance et sa matrice de covariance s'écrivent :

$$\mathbb{E}[\mathbf{u}] = \mathbf{u}_0 \quad (2.49)$$

$$\text{Cov}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \sum_{j=1}^{P-1} \mathbb{E}[\Psi_j^2] \mathbf{u}_j \mathbf{u}_j^T \quad (2.50)$$

Des approximations d'ordre supérieur sont nécessaires pour l'évaluation de statistiques d'ordre supérieur de la réponse. Une méthode non intrusive, introduite dans [Blatman et Sudret 2011], permet de relever ce défi en construisant un développement creux sur le chaos polynomial. Un autre travail récent [Doostan *et al.* 2007] propose d'utiliser une technique de réduction de modèle pour les représentations sur le chaos, ce qui atténue le coût de calcul sans réduire la précision des résultats.

## 2.3 Méthodes paramétriques non probabilistes

Pendant longtemps, le traitement des incertitudes dans les systèmes d'ingénierie se faisait dans le cadre de la théorie des probabilités. Cependant, comme précisé dans le paragraphe 1.1, les incertitudes peuvent être d'ordre épistémique, dues à des informations manquantes, imprécises ou incomplètes. Une modélisation probabiliste est alors injustifiée, insuffisante et entraîne une déformation du problème traité. En effet, l'ignorance de la cause de variation d'une grandeur ne rend pas cette variation aléatoire. Afin de traiter ce type d'incertitude paramétrique dans la modélisation et les analyses numériques non déterministes, des méthodes paramétriques non probabilistes ont émergé. Une synthèse générale de ces approches non probabilistes est présentée dans [Moens et Vandepitte 2005], et les activités de recherche et applications récentes sont décrites dans [Moens et Hanss 2011].

La théorie des intervalles (*Interval Theory*) [Moore 1979] fait partie des premiers développements dans ce domaine. Elle permet de calculer les bornes de l'intervalle dans lequel varie la grandeur d'intérêt sans connaissance préalable sur la dispersion des paramètres d'entrée incertains. En utilisant l'arithmétique des intervalles définie par Moore, la propagation des intervalles montre un phénomène pessimiste de surestimation : l'incertitude de la somme de deux intervalles est supérieure à la somme des incertitudes de chaque intervalle. Des améliorations, telles que le développement de l'arithmétique affine [De Figueiredo et Stolfi 2004], ont été effectuées afin de réduire la croissance de l'incertitude lorsqu'elle se propage dans un modèle. Dans le cadre de problèmes mécaniques incertains, une méthode basée sur la théorie

des intervalles a été développée dans [Muhanna et Mullen 2001] permettant la prise en compte d'incertitudes sur le chargement et la raideur et de calculer les bornes de la réponse de manière précise en évitant la plupart des sources de surestimation. Pour les problèmes de vibration où quelques paramètres sont incertains, une formulation par intervalles a été proposée dans [Dessombz *et al.* 2001] pour déterminer une enveloppe des fonctions de réponse en fréquence pour des systèmes mécaniques discrétisés par la méthode des Éléments Finis. Un mode de calcul spécifique est employé afin d'éviter le problème de surestimation des intervalles et d'avoir un coût de calcul faible comparé à une simulation par la méthode de Monte-Carlo. D'autres applications de cette approche ont été effectuées sur des problèmes en mécanique des structures [Köylüoglu *et al.* 1995] et en robotique [Merlet 2009].

Une autre approche est la théorie des ensembles flous (*Fuzzy Set Theory*) [Zadeh 1999] qui utilise le concept de logique floue (*fuzzy logic*) basé plutôt sur le raisonnement humain que sur des calculs rigides. En particulier, on souligne le développement d'une méthode des Éléments Finis flous (*Fuzzy FEM*) [Rao et Sawyer 1995], où les dispersions des paramètres incertains sont modélisées par des intervalles flous et la réponse est calculée à l'aide de l'arithmétique des intervalles. Les applications récentes dans le domaine de la mécanique couvrent l'analyse statique [Cherki *et al.* 2000, Hanss 2002], la dynamique des structures [Moens et Vandepitte 2002, Massa *et al.* 2008] et l'identification des modèles [Hanss *et al.* 2002].

Une approche plus générale est la théorie des fonctions de croyance (*Theory of Belief Functions* ou *Evidence Theory*), aussi connue sous le nom de la théorie de Dempster–Shafer (*Dempster–Shafer Theory*), proposée par Dempster [Dempster 1968] et Shafer [Shafer 1976]. Elle se base sur l'utilisation des fonctions de croyance qui représentent le degré auquel l'ensemble des informations disponibles accrédite l'hypothèse que la valeur d'un élément est comprise dans un ensemble. L'avantage à utiliser cette théorie réside dans le fait qu'elle peut réussir à quantifier le degré d'incertitude quand la quantité d'information disponible est faible. Elle fournit deux mesures incertaines, à savoir la croyance et la plausibilité. Des algorithmes de réduction du coût de calcul sont proposés dans [Bae *et al.* 2004] afin d'améliorer l'emploi pratique de cette théorie comme outil général d'analyse des incertitudes sur des structures mécaniques de grande taille. On trouve dans [Agarwal *et al.* 2004] une application de cette approche dans le cadre de l'optimisation du dimensionnement de systèmes multidisciplinaires contenant des incertitudes. Récemment, une méthodologie, utilisant les structures mathématiques de la théorie des fonctions de croyance, a été développée pour quantifier à la fois les incertitudes paramétriques et les incertitudes de modèle associées aux calculs prédictifs [Park et Grandhi 2012]. Une extension de cette théorie, la théorie des possibilités (*Possibility Theory*), a été introduite par Dubois et Prade [Dubois et Prade 1998], mais semble moins employée en mécanique des structures pour le traitement des incertitudes épistémiques.

La théorie des probabilités imprécises, développée par Walley [Walley 1991, Walley 2000], est une théorie mathématique bien plus générale que les théories présentées plus haut, qui constitue le cadre le plus général de représentation des incertitudes. Les probabilités imprécises sont définies comme un encadrement d'une distribution de probabilité par deux distributions haute et basse. Cette approche est intéressante lorsqu'on sait le type de modèle aléatoire avec une connaissance imprécise sur les paramètres, ou lorsque notre connaissance est limitée à certaines valeurs remarquables de la distribution. Ainsi, elle a été largement utilisée pour améliorer la prise de décision sous incertitudes dans la conception technique [Troffaes 2007]. Une nouvelle forme de probabilités imprécises, basée sur les intervalles généralisés, a été proposée récemment dans [Wang 2010] pour améliorer l'évaluation de la fiabilité des systèmes.

Bien que leur utilisation connaisse un succès croissant, ces méthodes non probabilistes n'ont pas eu d'applications dans le domaine de la validation des modèles. Mais ce n'est pas le cas de la théorie décisionnelle de lacune d'information (*Information-gap Decision Theory*), qui a été introduite dans [Ben-Haim et Elishakoff 1990] comme une généralisation du concept d'intervalle déterministe. Elle constitue un cadre novateur aux autres méthodes non probabilistes, en considérant l'incertitude comme la lacune d'information entre ce qui est connu et ce qui devrait être connu pour permettre une prise de décision fiable [Ben-Haim 2006]. On trouve divers domaines d'application de cette approche, tels que la fiabilité [Ben-Haim 1997], la dynamique des structures [Vinot *et al.* 2002] et la validation des modèles [Hemez et Ben-Haim 2004].

## 2.4 Méthodes non paramétriques

Dans les systèmes multicorps (mécanismes), les incertitudes concernent les paramètres du modèle. Cependant, pour les structures déformables, il existe des incertitudes de modèle induites par les erreurs de modélisation (cf. paragraphe 1.2.2) qui viennent s'ajouter aux incertitudes sur les paramètres et résultent en un modèle non-représentatif du système réel. Étant donné que les méthodes paramétriques n'ont pas été développées pour prendre en considération des incertitudes de modélisation, des méthodes non paramétriques sont proposées.

Quand une grande quantité de données expérimentales est disponible, on introduit un modèle probabiliste de l'erreur de prédiction en sortie de modèle [Beck et Katafygiotis 1998]. La distribution donnée au moment de la modélisation est dite *a priori*. L'intégration de l'information apportée par les données se fait par le calcul de la distribution dite *a posteriori* construite par actualisation Bayésienne, qui n'est autre que la distribution conditionnelle (calculée par la formule de Bayes) aux valeurs prises par les données. Des applications à la quantification des incertitudes en mécanique des structures sont présentées dans [Vanik *et al.* 2000, Zhang et Ma-

hadevan 2000, Igusa *et al.* 2002].

Si peu de données expérimentales sont disponibles, ou s'il n'y en a pas, on utilise l'*approche probabiliste non paramétrique* qui a été proposée dans [Soize 2000, Soize 2001]. Elle a été développée pour prendre en compte simultanément les incertitudes sur les paramètres du modèle et les incertitudes de modélisation en dynamique des structures. Elle se base sur une construction directe du modèle probabiliste d'incertitude au niveau des opérateurs du modèle numérique, et non sur les erreurs de prédiction en sortie du modèle numérique, comme la méthode précédente. La théorie des matrices aléatoires est utilisée pour remplacer les matrices des opérateurs incertains du modèle moyen (e.g. les matrices de raideur, de masse, et d'amortissement généralisées) par des matrices aléatoires ayant les matrices du modèle moyen comme moyennes. Puis, en utilisant le principe du maximum d'entropie (cf. paragraphe 2.1.1.2), on construit leur distribution de probabilité *a priori*, sous les contraintes définies par l'information disponible [Soize 2001]. L'article [Soize 2003] présente une validation numérique de cette méthode dans le domaine de l'analyse vibratoire basses fréquences, en comparant la réponse dynamique d'un système ayant un opérateur de raideur incertain avec des résultats de simulations par la méthode de Monte-Carlo.

Quelques années plus tard, afin d'améliorer la qualité des modèles à partir de données expérimentales, [Soize 2005] décrit une méthodologie permettant l'identification expérimentale des paramètres de dispersion (i.e. paramètres de la distribution de probabilité *a priori* des matrices aléatoires) de l'approche probabiliste non paramétrique pour les systèmes dynamiques linéaires contenant des incertitudes. Cette approche a fait l'objet de nombreuses applications industrielles, dans les contextes de validation et d'identification, en sous-structuration dynamique et en dynamique non linéaire, telles que sur des structures en matériaux composites [Chen *et al.* 2006], des véhicules automobiles [Durand *et al.* 2008], des turbomachines [Capiez-Lernout et Soize 2004], des systèmes avec des liaisons boulonnées complexes [Duchereau et Soize 2006], et des tubes de réacteurs nucléaires à eau pressurisée [Batou et Soize 2009].

Cependant, cette approche ne permet pas de contrôler séparément le niveau de variation de chacune des deux sources d'incertitudes, à savoir celles provenant des paramètres du modèle et des erreurs de modélisation. C'est pour cette raison qu'une méthode probabiliste mixte paramétrique / non paramétrique, appelée *Approche probabiliste généralisée des incertitudes*, a été introduite dans [Soize 2010], prenant en compte de manière séparée les incertitudes de modélisation et les incertitudes liées aux paramètres du système. Après la construction d'un modèle éléments finis nominal, un modèle numérique stochastique, tenant compte à la fois et séparément de ces sources d'incertitudes, est élaboré dans un contexte probabiliste. Le modèle probabiliste des paramètres incertains est ensuite élaboré en les considérant va-

riables aléatoires ; parallèlement le modèle probabiliste (non paramétrique) relatif aux incertitudes de modèle est construit en modélisant les matrices de masse et de raideur par des matrices aléatoires. Les distributions de probabilité *a priori* des paramètres du modèle et les matrices aléatoires de masse et de raideur dépendent de paramètres inconnus, appelés hyper-paramètres, typiquement les moyennes et coefficients de variation. Ces hyper-paramètres sont identifiés séparément à partir de tirages de Monte-Carlo via l'application du principe du maximum de vraisemblance et l'utilisation de données expérimentales, en minimisant un critère d'écart entre données simulées et observations mesurées. Cette méthode a été développée et validée dans le contexte de la dynamique linéaire des structures [Soize 2013, Batou et al. 2015].

## 2.5 Théorie des méconnaissances

Pour des assemblages de taille industrielle à géométrie complexe et à des échelles globales, l'ensemble des méthodes décrites précédemment reste encore trop coûteux. De plus, ne disposant pas de méthode prenant en compte différents types et sources d'incertitudes de manière simple et peu intrusive, la théorie des méconnaissances (*Lack-Of-Knowledge (LOK) Theory*) [Puel 2004, Ladevèze et al. 2006b] a été développée au sein du LMT-Cachan. Elle cherche à quantifier l'incertitude à partir de la différence entre le modèle numérique et la structure réelle.

### 2.5.1 Méconnaissances de base et méconnaissances effectives

L'idée directrice de la théorie des méconnaissances est de globaliser les incertitudes à l'échelle des sous-structures constitutives de la structure étudiée en les définissant comme des variables scalaires situées dans un intervalle dont les bornes sont des variables aléatoires.

On se place dans le cadre d'une structure réelle  $\Omega$  modélisée comme un assemblage de sous-structures, sachant qu'on peut assimiler les liaisons à des sous-structures particulières. C'est à l'échelle de ces sous-structures que les incertitudes seront quantifiées. Toutes les sources d'erreurs peuvent être ainsi globalisées à l'échelle de chaque sous-structure  $E \in \Omega$ . On considère dans ce qui suit des incertitudes liées uniquement à des paramètres de raideur structuraux.

On commence par se donner un modèle théorique déterministe de la structure étudiée auquel vient s'ajouter un *modèle de méconnaissances*. A chaque sous-structure  $E$  on associe une quantité  $m$  qui évolue dans un intervalle dont les bornes sont deux variables scalaires, positives et aléatoires  $m_E^-(\theta)$  et  $m_E^+(\theta)$ , appelées *méconnaissances de base* sur la sous-structure  $E$ , et définies comme suit :

$$-m_E^-(\theta) \bar{\mathbf{K}}_E \leq \mathbf{K}_E(\theta) - \bar{\mathbf{K}}_E \leq m_E^+(\theta) \bar{\mathbf{K}}_E \quad (2.51)$$

où  $\mathbf{K}_E$  et  $\overline{\mathbf{K}}_E$  sont les matrices de raideur de  $E$  de la structure réelle et son modèle théorique déterministe respectivement. Cette modélisation permet de pallier les inconvénients des méthodes purement probabilistes lorsque la quantité d'information disponible est si faible qu'une modélisation à l'aide de lois de probabilité serait inappropriée. Pour chaque sous-structure  $E$ , la quantité  $m$  appartient avec certitude à l'intervalle  $([-m_E^-(\theta); m_E^+(\theta)])$  sans plus de précisions. Ce sont donc ces deux bornes qui véhiculent la notion de méconnaissance. Elles sont définies comme des variables aléatoires afin de ne pas propager les incertitudes de manière surestimée comme le fait l'arithmétique des intervalles.

L'inégalité matricielle (2.51) pourrait paraître parfois difficile à utiliser surtout vu la taille des matrices de raideur des modèles des structures industrielles. Par conséquent, les méconnaissances de base peuvent s'exprimer autrement en utilisant des grandeurs scalaires liées à la raideur, à savoir les énergies de déformation :

$$-m_E^-(\theta) \bar{e}_E(\mathbf{U}) \leq e_E(\mathbf{U}, \theta) - \bar{e}_E(\mathbf{U}) \leq m_E^+(\theta) \bar{e}_E(\mathbf{U}) \quad (2.52)$$

où  $e_E(\mathbf{U}, \theta) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K}_E(\theta) \mathbf{U}$  est l'énergie de déformation d'une sous-structure réelle prise de l'ensemble  $\Omega$ , et  $\bar{e}_E(\mathbf{U}) = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \overline{\mathbf{K}}_E \mathbf{U}$  est l'énergie de déformation du modèle théorique déterministe de la sous-structure.

Différentes lois de probabilité peuvent caractériser les méconnaissances de base. Il faut que la nature de ces lois soit définie *a priori* en fonction d'hypothèses et informations sur les sources de dispersion dans la sous-structure considérée. Une hypothèse simplificatrice est de supposer que les réalisations des méconnaissances de base  $m_E^-$  et  $m_E^+$  sont équiprobables, comprises dans un domaine borné :

$$m_E^- \in [0; \overline{m}_E^-] \quad (2.53)$$

$$m_E^+ \in [0; \overline{m}_E^+] \quad (2.54)$$

où  $\overline{m}_E^-$  et  $\overline{m}_E^+$  sont des valeurs déterministes positives.

A partir des méconnaissances de base, une procédure générale, mise en place dans [Puel 2004], conduit à l'estimation de la dispersion d'une variable d'intérêt quelconque  $\alpha$ . On commence alors par distinguer  $\alpha_{\text{LOK}}$ , la valeur de  $\alpha$  donnée par le modèle de méconnaissance, et  $\bar{\alpha}$  qui est la valeur de  $\alpha$  provenant du modèle déterministe théorique. La différence entre ces valeurs est :

$$\Delta\alpha = \alpha_{\text{LOK}} - \bar{\alpha} \quad (2.55)$$

On exprime ensuite  $\Delta\alpha$  en fonction de la matrice de raideur ou de l'énergie de déformation, puis on propage le modèle de méconnaissance  $(m_E^-, m_E^+)_{E \in \Omega}$  en utilisant les inéquations (2.51) et (2.52). Ainsi, pour chaque tirage (réalisation)  $(m_E^-, m_E^+)$  des méconnaissances de base, on associe deux bornes  $\Delta\alpha_{\text{LOK}}^-(\theta)$  et  $\Delta\alpha_{\text{LOK}}^+(\theta)$  telles que :

$$-\sum_E \Delta\alpha_E^-(\theta) = \Delta\alpha_{\text{LOK}}^-(\theta) \leq \Delta\alpha \leq \Delta\alpha_{\text{LOK}}^+(\theta) = \sum_E \Delta\alpha_E^+(\theta) \quad (2.56)$$

La densité de probabilité des variables  $\Delta\alpha_{\text{LOK}}^-$  et  $\Delta\alpha_{\text{LOK}}^+$  est alors obtenue. Quand on effectue une analyse comparative, des quantités représentatives de la dispersion de  $\Delta\alpha$  doivent être extraites  $\alpha_{\text{LOK}}$ , à savoir  $\Delta\alpha_{\text{LOK}}^-(P)$  et  $\Delta\alpha_{\text{LOK}}^+(P)$ , appelées *méconnaissances effectives* sur la quantité d'intérêt  $\alpha$ . Ces grandeurs sont les bornes du plus petit intervalle contenant  $P\%$  de valeurs de  $\Delta\alpha$ .

## 2.5.2 À propos des faibles méconnaissances

On souhaite étudier les vibrations libres d'une structure mécanique homogène contenant de faibles incertitudes liées à des paramètres de raideur. Dans ce cas, les quantités d'intérêt sont les pulsations propres  $\omega_i = \omega_i(\theta)$  et les modes propres de vibration  $\phi_i = \phi_i(\theta)$ .

On définit  $\mathbf{K} = \sum_{E \in \Omega} \mathbf{K}_E$  et  $\bar{\mathbf{K}} = \sum_{E \in \Omega} \bar{\mathbf{K}}_E$  les matrices de raideur du système global et de son modèle déterministe respectivement.

Puisque les incertitudes sont faibles, une approximation du premier ordre de la différence entre le carré d'une pulsation propre du modèle avec méconnaissances  $\omega_{i\text{LOK}}^2$  et du modèle déterministe  $\bar{\omega}_i^2$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \Delta\omega_i^2 &= \omega_{i\text{LOK}}^2 - \bar{\omega}_i^2 \\ &= \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i - \bar{\phi}_i^T \bar{\mathbf{K}} \bar{\phi}_i \\ &\simeq \bar{\phi}_i^T (\mathbf{K} - \bar{\mathbf{K}}) \bar{\phi}_i = 2 \sum_{E \in \Omega} (e_E(\bar{\phi}_i, \theta) - \bar{e}_E(\bar{\phi}_i)) \end{aligned} \quad (2.57)$$

où les modes propres  $\bar{\phi}_i$  du modèle déterministe (associés respectivement aux pulsations propres  $\bar{\omega}_i$ ) sont normalisés par rapport à la matrice de masse  $\bar{\mathbf{M}} = \sum_{E \in \Omega} \bar{\mathbf{M}}_E$ . L'équation (2.57) permet de propager les intervalles de méconnaissances à l'aide de l'inégalité (2.52) de la manière suivante :

$$-\Delta\omega_{i\text{LOK}}^{2-} \leq \Delta\omega_i^2 \leq \Delta\omega_{i\text{LOK}}^{2+} \quad (2.58)$$

où

$$\Delta\omega_{i\text{LOK}}^{2-} = 2 \sum_{E \in \Omega} m_E^- \bar{e}_E(\bar{\phi}_i) \quad (2.59)$$

$$\Delta\omega_{i\text{LOK}}^{2+} = 2 \sum_{E \in \Omega} m_E^+ \bar{e}_E(\bar{\phi}_i) \quad (2.60)$$

Connaissant les lois de probabilité des méconnaissances de base, on obtient les dispersions des bornes  $\Delta\omega_{i\text{LOK}}^{2-}$  et  $\Delta\omega_{i\text{LOK}}^{2+}$  encadrant la quantité d'intérêt  $\Delta\omega_i^2$ . Cela nous permet d'accéder, pour une probabilité  $P$  donnée, aux méconnaissances effectives sur le carré de la pulsation propre  $\omega_i^2$ . On peut déterminer de façon semblable

les méconnaissances effectives sur les modes propres  $\phi_i$  dans le cas de faibles méconnaissances [Puel 2004, Ladevèze *et al.* 2006b].

Ainsi, en présence de faibles incertitudes en dynamique, les différentes étapes de l'application de la théorie des méconnaissances pour propager les incertitudes et déterminer les méconnaissances effectives sur une pulsation propre sont :

- la résolution du problème aux valeurs propres sur le modèle théorique déterministe de la structure étudiée ;
- le calcul des énergies de déformation modales du modèle ;
- le tirage des méconnaissances de base et leur propagation pour trouver les fonctions de répartition des bornes d'encadrement ;
- la détermination des méconnaissances effectives pour des valeurs de probabilité données qui permet d'obtenir un intervalle de confiance sur une quantité d'intérêt pour toute structure de la même famille.

En plus de la simplicité de mise en œuvre, le coût de calcul total de la théorie des méconnaissances est bien plus faible que la majorité des méthodes probabilistes. Cette approche a tout d'abord été appliquée au domaine de la dynamique des structures [Puel 2004, Ladevèze *et al.* 2006b] pour des dispersions associées aux raideurs des structures. Elle a ensuite été étendue aux problèmes de statique [Enjalbert 2009, Louf *et al.* 2010] pour des incertitudes sur la raideur et le chargement extérieur.

## 2.6 Applications et analyses comparatives

Quatre approches parmi celles présentées précédemment ont été implémentées et utilisées pour propager des incertitudes associées aux paramètres de raideur. La méthode de Monte-Carlo servant de base de comparaison, chacune des autres approches propage l'incertitude de façon différente : la méthode des sous-espaces fait partie des méthodes statistiques de réduction de modèle, la méthode par perturbation se base sur les éléments finis stochastiques, et la théorie des méconnaissances globalise les incertitudes à l'échelle de la sous-structure. Le choix de ces méthodes a été guidé par le fait qu'elles sont légèrement intrusives et ont été appliquées à des problèmes de taille industrielle. Pour les deux modèles étudiés par la suite, le module d'Young du matériau homogène de chaque sous-structure est incertain et a été modélisé par une variable aléatoire, de sorte que :

$$E = \bar{E} (1 + \delta \eta) \quad \text{avec } \delta = 0.08 \quad (2.61)$$

et  $\eta$  est une variable aléatoire suivant une loi uniforme définie sur l'intervalle  $[-1 ; +1]$ . Ainsi, les méconnaissances de base  $m_E(\theta)$  sont modélisées par des variables aléatoires suivant une loi uniforme définie sur l'intervalle  $[-0.08 ; +0.08]$ , donc  $\bar{m}_E^- = \bar{m}_E^+ = 0.08$ . Pour les études statistiques, 10000 tirages sont générés pour toutes les méthodes, et quelques fréquences propres d'intérêt sont calculées pour chaque réalisation. Afin

d'avoir une représentation commune des résultats, les bornes correspondant à une probabilité  $P = 0.99$  sont extraites des dispersions des fréquences propres d'intérêt obtenues pour chaque méthode. Autrement dit, ces bornes définissent le plus petit intervalle contenant 99% des valeurs des fréquences propres d'intérêt.

### 2.6.1 Modèle d'un treillis plan

Dans le but de valider l'implémentation des méthodes choisies, on étudie un treillis plan formé de quatre barres, reliées par des rotules, comme représenté sur la figure 2.2. On considère que les liaisons aux nœuds 1 et 2 entre la structure et le bâti sont parfaitement rigides et que les barres ne travaillent qu'en traction-compression. Toutes les barres sont en aluminium ( $\bar{E} = 72 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ ) avec une section circulaire de  $10^{-4} \text{ m}^2$ . Quatre modes propres sont associés au

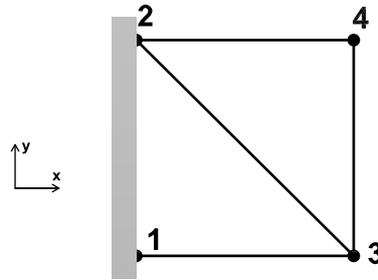


FIGURE 2.2: Treillis plan à quatre barres

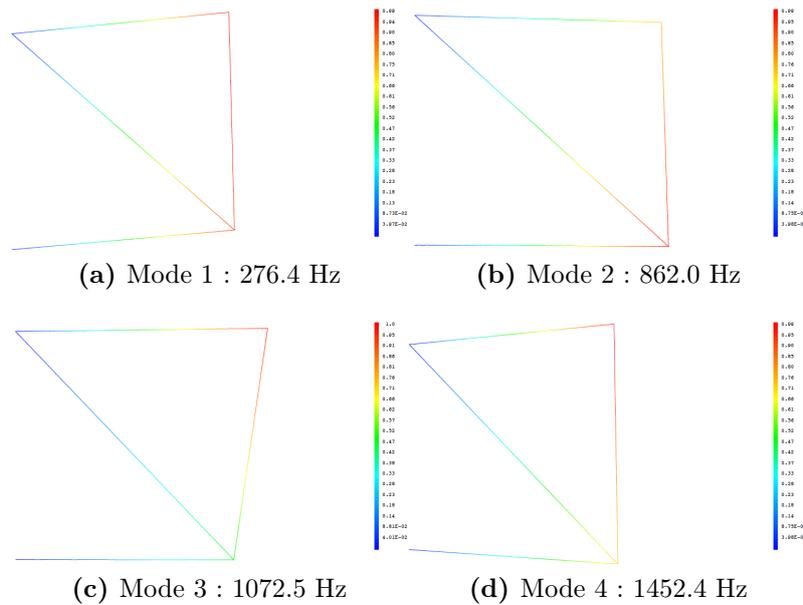


FIGURE 2.3: Forme des modes propres associés au modèle déterministe du treillis

modèle déterministe du treillis comme le montre la figure 2.3. Les intervalles à 99% présentés dans le tableau 2.1 montrent l'influence des incertitudes sur le module d'Young sur les fréquences propres de l'assemblage. De manière générale, on constate que ces intervalles sont quasiment identiques. En particulier, il est intéressant de voir que les intervalles issus des calculs par la théorie des méconnaissances (LOK) sont inclus dans ceux issus des simulations de Monte-Carlo. De plus, comme prévu pour ce cas d'étude, les méthodes de Monte-Carlo et des sous-espaces fournissent les mêmes intervalles étant donné que les modes propres d'intérêt du modèle déterministe font partie de la base modale de réduction.

**TABLE 2.1:** Intervalles à 99% pour toutes les fréquences propres du treillis (10000 tirages)

$i$	1	2	3	4
$\bar{f}_i$ (Hz)	276.4	862.0	1072.5	1452.4
<b>Monte-Carlo</b>	[266.5 ; 285.8]	[834.3 ; 888.0]	[1034.4 ; 1108.5]	[1397.1 ; 1506.0]
<b>Perturbation</b>	[266.8 ; 286.0]	[835.0 ; 888.7]	[1035.3 ; 1109.4]	[1398.2 ; 1507.1]
<b>Sous-espaces</b>	[266.5 ; 285.8]	[834.3 ; 888.0]	[1034.4 ; 1108.5]	[1397.1 ; 1506.0]
<b>LOK</b>	[266.8 ; 285.6]	[835.8 ; 887.0]	[1035.4 ; 1107.9]	[1398.2 ; 1504.9]

Ces résultats soulèvent une question importante quant à la possibilité d'obtenir une précision semblable en considérant un assemblage plus large représentatif d'une structure industrielle. Le second exemple vise à y apporter une réponse satisfaisante.

## 2.6.2 Modèle tridimensionnel

La structure de la figure 2.4 s'inspire de la géométrie simplifiée de quelques constituants de la pompe (cf. Figure 2), qui sont des pièces métalliques à géométrie de révolution avec des liaisons planes. Il s'agit de l'assemblage d'un cône et d'un tube liés par une cale, en acier ( $\bar{E} = 210$  GPa,  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>). Le maillage est constitué de 3240 éléments finis ( $\sim 20000$  degrés de liberté). Le côté le plus large du cône est encastré.

Pour ce cas d'étude, les quantités d'intérêt considérées sont les trois premières fréquences propres de l'assemblage. La figure 2.5 présente la forme des trois premiers modes propres associés au modèle déterministe de l'assemblage.

Une étude statistique de la propagation des incertitudes sur le module d'Young des sous-structures est menée et le tableau 2.2 donne les intervalles à 99% qui en résultent. Les bornes des intervalles de la colonne « ERA » représentent, en pourcentage, la plus grande valeur algébrique de l'erreur relative calculée pour chaque

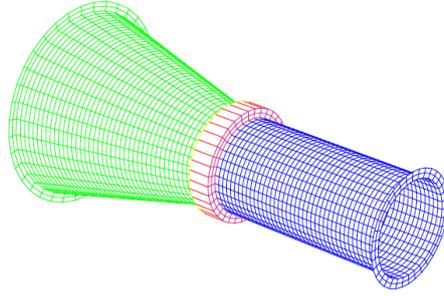


FIGURE 2.4: Maillage du modèle tridimensionnel étudié

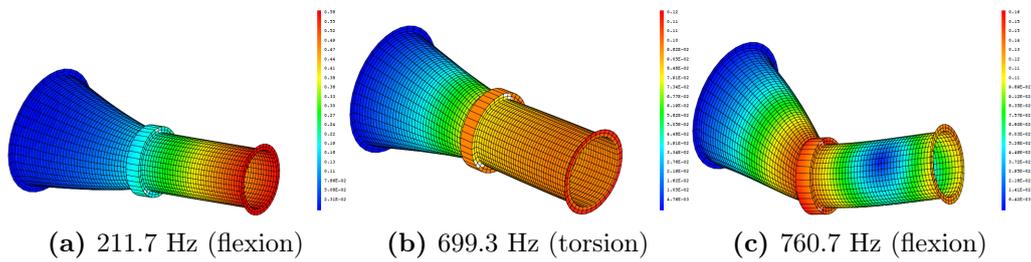


FIGURE 2.5: Forme des trois premiers modes propres associés au modèle déterministe du modèle tridimensionnel étudié

borne des intervalles de fréquence. La colonne « Temps CPU » (*Central Processing Unit*) présente les valeurs du cumul du temps passé par le processeur d'ordinateur pour le calcul des intervalles à 99%. Cela n'englobe ni le temps de résolution du problème déterministe principal ni le temps nécessaire pour effectuer les tirages.

TABLE 2.2: Intervalles à 99% pour les trois premières fréquences propres de l'assemblage, avec les erreurs relatives et temps de calcul (10000 tirages)

$i$	1	2	3	ERA(%)	Temps CPU (min)
$\bar{f}_i$ (Hz)	211.7	699.3	760.7		
Monte-Carlo	[203.7; 219.4]	[672.8; 724.3]	[732.0; 787.7]	– (référence)	1628
Perturbation	[203.8; 219.5]	[673.3; 724.8]	[733.2; 787.1]	[+0.08; +0.07]	1
Sous-espaces	[203.7; 219.4]	[672.8; 724.3]	[732.0; 787.7]	[0.00; 0.00]	116
LOK	[203.7; 219.4]	[673.2; 724.2]	[733.2; 787.1]	[+0.16; -0.06]	1

On constate que l'erreur relative algébrique est très faible et que les différentes méthodes conduisent à des résultats quasi identiques. Pour la méthode des sous-espaces, la base modale réduite considérée est formée de  $5 \times 3$  vecteurs : les 3 premiers vecteurs propres du modèle déterministe en plus de ceux issus de 4 modèles

construits chacun pour différents tirages de paramètres incertains. Étant donné que le problème est projeté sur une base contenant les vecteurs du modèle déterministe, et que la forme des modes est simple, alors l'erreur relative est nulle dans le cas de faibles incertitudes. Cependant, cette erreur ne sera pas nulle en présence de fortes incertitudes, pour des fréquences plus élevées et lors de l'étude de modes propres dont la forme dépend fortement des variations des paramètres incertains. Malgré cela, la méthode des sous-espaces en particulier, et les techniques de réduction de modèle en général, sont bien adaptées à la quantification des incertitudes dans les modèles dynamiques.

La théorie des méconnaissances semble être moins conservatrice que la méthode de Monte-Carlo vu que la taille des intervalles est plus réduite. Pour des faibles incertitudes, la méthode par perturbation et théorie des méconnaissances sont plus avantageuses en terme du temps de calcul que les autres méthodes. Il est clair que cet avantage sera plus considérable lorsque les degrés de liberté du modèle étudié sont plus nombreux.



# Chapitre 3

## Modélisation des fixations boulonnées

*Ce chapitre brosse un état de l'art, non exhaustif, sur les différentes techniques de modélisation d'une jonction boulonnée. On distingue trois types de modèles, à savoir les modèles empiriques, les modèles analytiques et les modèles numériques en éléments finis.*

### Sommaire

---

<b>3.1</b>	<b>Modèles empiriques</b>	<b>54</b>
<b>3.2</b>	<b>Modèles analytiques</b>	<b>57</b>
3.2.1	Cas d'une charge statique	57
3.2.2	Cas d'une charge dynamique	59
3.2.3	Cas d'un crash	62
<b>3.3</b>	<b>Modèles numériques en éléments finis</b>	<b>62</b>
3.3.1	Modèles locaux	63
3.3.2	Modèles intermédiaires	64
3.3.3	Modèles structuraux	66

---

La liaison boulonnée constitue une part importante des liaisons dans de nombreuses industries mécaniques, telles que l'industrie automobile, l'industrie énergétique, l'industrie ferroviaire et bien d'autres. Les boulons font partie des éléments les plus utilisés pour assembler et fixer les pièces de structures industrielles. L'expérience montre que leur présence a une influence considérable sur le comportement dynamique des assemblages mécaniques [Ibrahim et Pettit 2005, Bograd *et al.* 2011]. Il a été constaté que la liaison boulonnée introduit des mécanismes fortement non-linéaires tels que le frottement et le glissement, qui peuvent dépendre de plusieurs paramètres tels que la précharge et les jeux de fabrication de pièces [Esteban et Rogers 2000]. Il est clair que ces phénomènes doivent être pris en compte dans la phase de modélisation pour pouvoir simuler avec réalisme le comportement d'un assemblage boulonné. Cependant, puisqu'il peut y avoir des centaines ou milliers de fixations sur une structure industrielle, vouloir prendre en compte tous ces phénomènes dans un modèle numérique dynamique de grande taille serait trop coûteux et complexe. Du coup, les ingénieurs ont tendance à effectuer une modélisation des boulons et des liaisons boulonnées par des éléments équivalents. Cela permet de réduire la complexité des modèles, la taille du maillage et les coûts de calcul, mais introduit un biais.

Afin d'améliorer la robustesse des résultats prédits par la mise en place d'un modèle dynamique de connecteur amélioré à travers la prise en compte des incertitudes sur la raideur, il est important de réaliser un état de l'art sur les techniques existantes de modélisation d'une liaison boulonnée. Les principaux types de modèles qui seront présentés sont :

- les modèles empiriques ;
- les modèles analytiques ;
- les modèles numériques en éléments finis.

### 3.1 Modèles empiriques

Ces modèles sont obtenus par l'identification du comportement d'une liaison boulonnée à partir d'un ensemble d'essais. La conception des assemblages est basée sur la capacité à transmettre la charge d'une pièce à l'autre sans détériorer les pièces assemblées et les éléments de fixation. Dans le but de déterminer cette capacité, on considère un paramètre  $C$  qui désigne la souplesse (ou flexibilité) longitudinale équivalente de la fixation soumise à un chargement de cisaillement. Ce paramètre est très important puisque la fatigue et la durée de vie de l'assemblage sont directement liées à la répartition des contraintes autour de la fixation.

- Les paramètres qui sont supposés influencer le comportement de la fixation sont :
- **les matériaux des plaques** : on note  $E_1$  et  $E_2$  les modules d'Young des plaques 1 et 2 respectivement (cf. figure 3.1b) ;

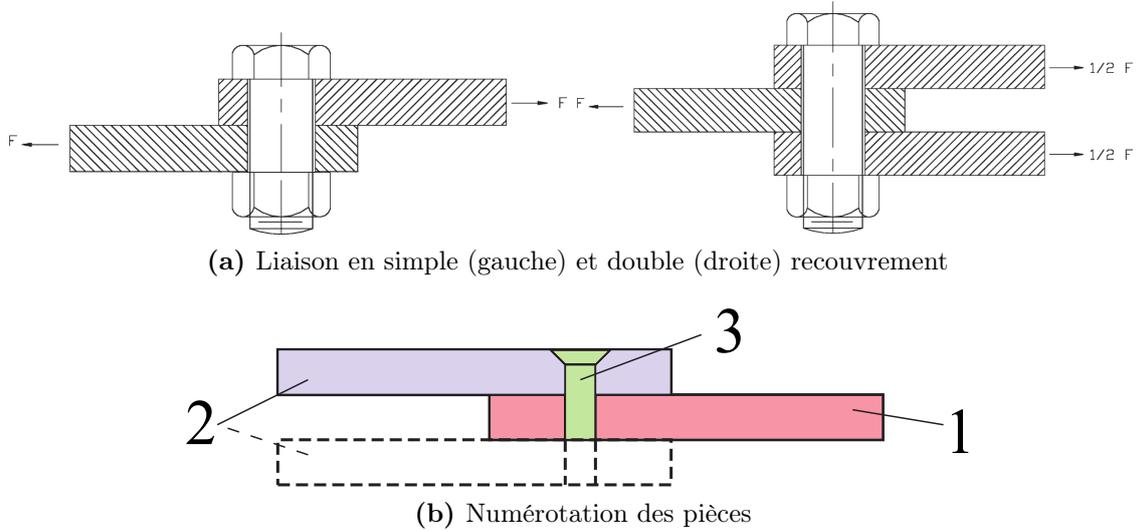


FIGURE 3.1: Configuration d'une liaison en cisaillement simple et double

- les épaisseurs des plaques : on note  $t_1$  et  $t_2$  les épaisseurs des plaques 1 et 2 respectivement ;
- le matériau de la fixation : on note  $E_3$  le module d'Young de la fixation et  $\nu_3$  son coefficient de Poisson ;
- le diamètre de la fixation : on note  $d$  le diamètre du trou ;
- la configuration : simple ou double recouvrement (cf. figure 3.1a).

Plusieurs études d'assemblages de plaques en cisaillement ont permis de proposer différentes formules. Parmi les premiers travaux dans ce domaine, on trouve Tate et Rosenfeld [Tate et Rosenfeld 1946] qui, après une étude expérimentale sur le cisaillement d'un assemblage de deux plaques à simple recouvrement, proposent la formule suivante :

$$C = \frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} + \frac{1}{E_3 t_1} + \frac{1}{E_3 t_2} + \frac{32(t_1 + t_2)(1 + \nu_3)}{9E_3 \pi d^2} + \frac{8(t_1^3 + 5t_2^2 t_1 + 5t_2 t_1^2 + t_2^3)}{5E_3 \pi d^4} \quad (3.1)$$

Quelques années plus tard, dans le même cadre d'étude, Swift [Swift 1971] propose de calculer la souplesse d'une fixation en cisaillement simple de la manière suivante :

$$C = \frac{5}{dE_3} + 0.8 \left( \frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{E_2 t_2} \right) \quad (3.2)$$

A partir de travaux expérimentaux, le constructeur aéronautique américain Boeing propose en 1986 une formule semi-empirique pour le cas d'un assemblage en cisaillement simple :

$$C = \frac{2^{(t_1/d)^{0.85}}}{t_1} \left( \frac{1}{E_1} + \frac{3}{8E_3} \right) + \frac{2^{(t_2/d)^{0.85}}}{t_2} \left( \frac{1}{E_2} + \frac{3}{8E_3} \right) \quad (3.3)$$

Étant donné que ces formules n'étaient applicables que sur un nombre restreint de géométries de fixations, Huth [Huth 1986] a étendu l'étude sur une plus large gamme de configurations, à savoir les assemblages boulonnés et rivetés à simple et double recouvrement (cf. figure 3.1a). Il distingue entre deux groupes de paramètres influençant le comportement de l'assemblage, à savoir les paramètres liés à la géométrie et aux matériaux et les paramètres liés aux conditions de liaison. Contrairement aux formules précédentes, il propose une relation qui prend en compte les configurations de liaison en cisaillement simple et double en plus du type d'assemblage :

$$C = \left( \frac{(t_1 + t_2)}{2d} \right)^a \frac{b}{n} \left( \frac{1}{E_1 t_1} + \frac{1}{n E_2 t_2} + \frac{1}{2 E_3 t_1} + \frac{1}{2n E_3 t_2} \right) \quad (3.4)$$

où  $n = 1$  pour un cisaillement simple et  $n = 2$  pour un cisaillement double. Les coefficients  $a$  et  $b$  varient en fonction du type d'assemblage :

- assemblage métallique boulonné :  $a = 2/3$  et  $b = 3$  ;
- assemblage métallique riveté :  $a = 2/5$  et  $b = 2.2$  ;
- assemblage carbone/epoxy boulonné :  $a = 2/3$  et  $b = 4.2$ .

Cette définition de la souplesse de la fixation est principalement utilisée dans les calculs sur des modèles de structure de très grandes dimensions, où les fixations ne peuvent pas être représentées de manière détaillée.

Les quatre formules présentées plus haut donnent des résultats en terme de souplesse qui diffèrent de manière considérable. Par exemple, en considérant que tous les modules d'Young sont égaux et que  $t_1 = t_2 = d$ , alors on obtient les expressions suivantes :

$$C = \begin{cases} \frac{13.0541}{E_1 t_1} & \text{(Tate)} \\ \frac{6.6}{E_1 t_1} & \text{(Swift)} \\ \frac{5.5}{E_1 t_1} & \text{(Boeing)} \\ \frac{10.5}{E_1 t_1} & \text{(Huth)} \end{cases} \quad (3.5)$$

Il est clair que la souplesse donnée par la formule de Tate vaut plus du double de celle obtenue par la formule de Boeing. Dans ses travaux, Huth [Huth 1986] montre que la valeur calculée par sa formule est en meilleure corrélation avec les mesures.

Dans le cas de plaques orthotropes, une variante de la formule de Tate et Rosenfeld a été développée dans [Nelson *et al.* 1983]. En considérant deux modules d'Young différents par plaque,  $E^L$  dans une direction parallèle à la direction de

chargement et  $E^T$  dans la direction perpendiculaire, la formule s'écrit :

$$C = \frac{8(2t_1 + t_2)(1 + \nu_3)}{3E_3\pi d^2} + \frac{8t_1^3 + 16t_1^2t_2 + 8t_1t_2^2 + t_2^3}{3E_3\pi d^4} + \frac{2t_1 + t_2}{t_1t_2E_3} + \frac{1}{t_1\sqrt{E_1^L E_1^T}} + \frac{2}{t_2\sqrt{E_2^L E_2^T}} \quad (3.6)$$

Dans toutes ces relations, la préoccupation est de faire correspondre les résultats donnés par les formules avec les réponses expérimentales sans chercher à analyser ou à modéliser les phénomènes physiques mis en jeu. Malgré la présence d'analogies, ces études montrent qu'il est difficile d'accéder à une valeur de référence de la souplesse des fixations dans un assemblage, vu le nombre de formulations différentes, qui reposent, soit entièrement, soit en partie, sur des résultats expérimentaux. Plus tard, d'autres formules ont été proposées dans l'ouvrage de référence [Niu 1988] et puis dans [Cope et Lacy 2000].

## 3.2 Modèles analytiques

De nombreux travaux de recherche ont conduit à l'élaboration de modèles analytiques dédiés à la simulation d'assemblages. Les paramètres de ces modèles sont généralement identifiés grâce à des essais. Il est difficile de ne pas se perdre dans la diversité de ces modèles étant donné que chacun a été créé pour une problématique différente. On distinguera alors trois cas d'étude principaux : le cas d'une charge statique, le cas d'un chargement dynamique et le cas d'un crash.

### 3.2.1 Cas d'une charge statique

Les premiers travaux de modélisation des fixations boulonnées s'appuient sur l'analogie entre la distribution de charges et un montage électrique de résistances. La figure 3.2 montre l'analogie proposée par [Ross 1947] dans le cas d'un assemblage boulonné de plaques en double recouvrement. Les plaques sont de section  $S$ , longueur  $L$ , largeur  $b$ , épaisseur  $t$ , module d'Young  $E$  et module de cisaillement  $G$ . Cette analogie permet, dans le cas particulier d'une fixation en double cisaillement, de trouver les charges transférées dans chaque partie de la liaison.

Un autre modèle, qui utilise un système classique masse-ressort, est celui de [McCarthy *et al.* 2006]. La figure 3.3 montre la relation entre l'assemblage boulonné et le modèle masse-ressort avec 9 paramètres de raideur dans la direction horizontale pouvant représenter plusieurs types de liaisons. Dans le cas d'une liaison à double recouvrement avec six boulons (cf. figure 3.3b(a)), le modèle de la figure 3.3a représente la quart de la liaison. Dans les cas d'une liaison à double recouvrement avec trois boulons (cf. figure 3.3b(b)) et celle à simple recouvrement avec six boulons (cf. figure 3.3b(c)), le modèle représente la moitié de la liaison. Enfin, pour une liaison à simple recouvrement avec trois boulons (cf. figure 3.3b(d)), le modèle représente

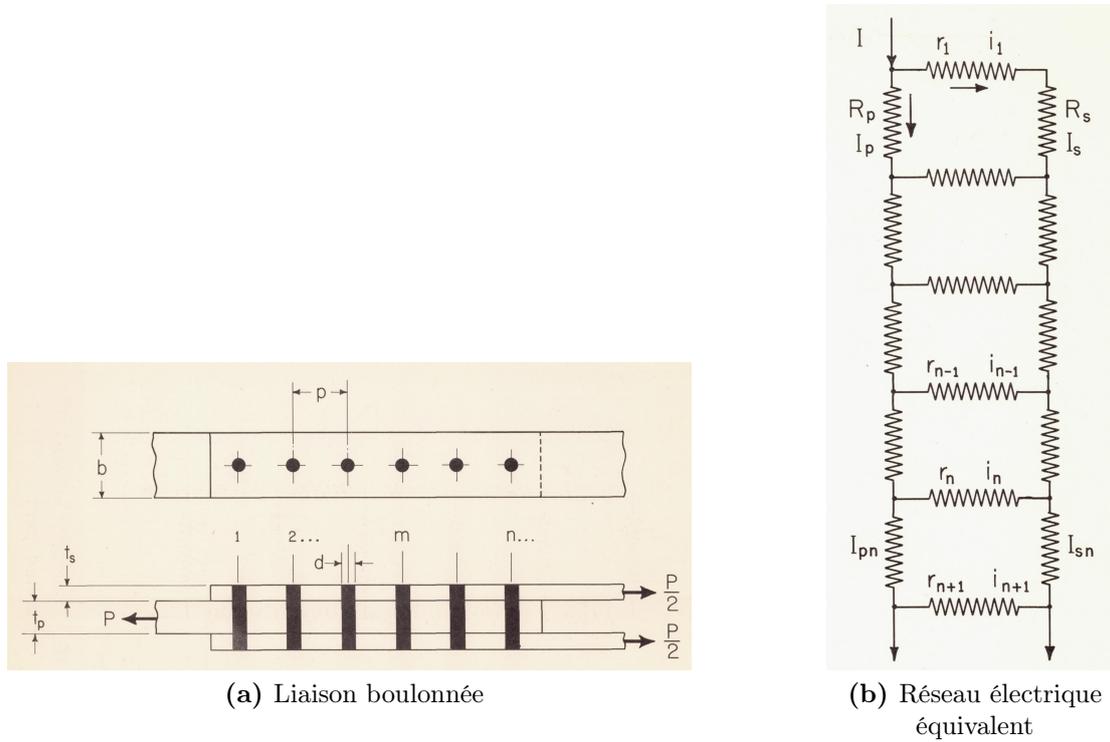
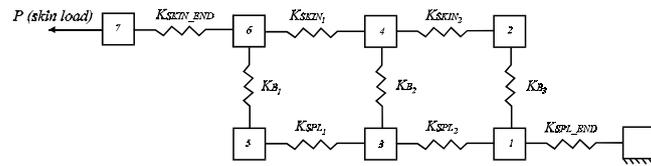


FIGURE 3.2: Assemblage et réseau électrique équivalent d'après [Ross 1947]

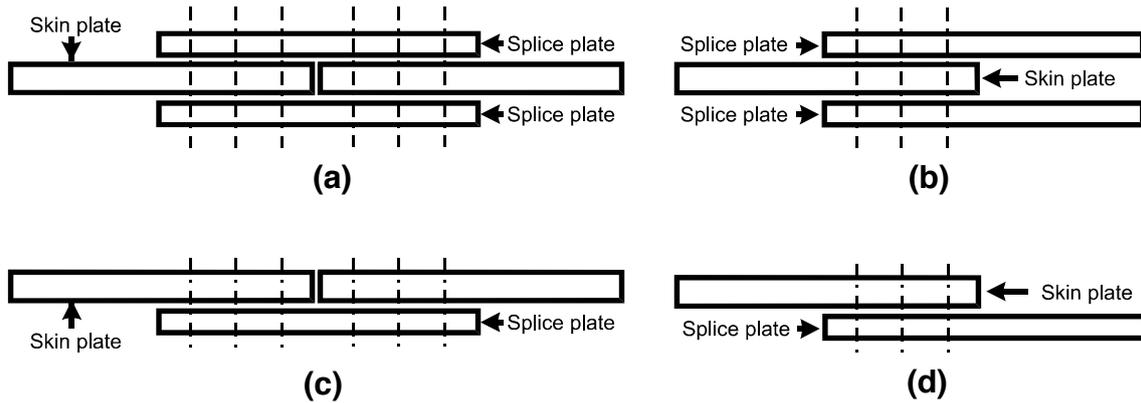
TABLE 3.1: Analogie électro-mécanique de [Ross 1947]

Liaison boulonnée (cf. figure 3.2a)	Réseau électrique (cf. figure 3.2b)
Chargement axial $P$	Courant longitudinal $I$
Souplesse axiale $\frac{L}{ES}$	Résistance longitudinale $R$
Force de cisaillement $F$	Courant transverse $i$
Souplesse de cisaillement $\frac{b}{GtL}$	Résistance transverse $r$
Déplacement axial $u$	Potentiel $V$

la liaison complète. Dans la figure 3.3a, les paramètres  $K_{B_1}$ ,  $K_{B_2}$  et  $K_{B_3}$  sont les raideurs des boulons. Les raideurs  $K$  ayant l'indice « *SKIN* » sont les raideurs des « skin plates » (plaques fines) et les raideurs  $K$  ayant l'indice « *SPL* » sont les raideurs des « splice plates » (plaques d'épaisseur). Les masses numérotées de 1 à 7 sont libres de bouger dans la direction horizontale uniquement et le frottement est négligé ce qui rend le modèle adapté aux liaisons serrées à la main seulement. Cette modé-



(a) Modèle masse-raideur pour une liaison contenant 3 boulons



(b) (a) Double recouvrement – type 1; (b) Double recouvrement – type 2; (c) Simple recouvrement – type 1; (d) Simple recouvrement – type 2

**FIGURE 3.3:** Modèle masse-raideur et types de liaisons pouvant être représentées par ce modèle d’après [McCarthy *et al.* 2006]

lisation a été validée dans [McCarthy *et al.* 2006] par des modèles tridimensionnels en éléments finis.

D’autres modèles analytiques ont été proposés permettant de prendre en compte l’effet de divers grandeurs telles que la température [Yen 1978] et le frottement [Bortman et Szabó 1992]. De plus, des études analytiques ont été menées sur le couple de serrage des fixations [Nassar *et al.* 2005] et la perte de précharge [Jaglinski *et al.* 2007] afin d’analyser leur influence sur la distribution des efforts dans les fixations.

### 3.2.2 Cas d’une charge dynamique

Dans le cadre d’un chargement dynamique, l’objectif premier des modèles analytiques est de caractériser les phénomènes dissipatifs dans les fixations [Esteban et Rogers 2000]. Les non-linéarités et la dissipation d’énergie entraînées par le phénomène de « micro/macro slip/slap » au niveau de l’interface de la liaison intéressent grandement les chercheurs [Segalman 2005]. Le « micro-slip » est un phénomène de micro-glisserment qui se produit au tout début de la soumission des plaques à l’effort. Ainsi le déplacement des plaques augmente progressivement avec la force. Ensuite vient le « macro-slip » où le déplacement augmente pour une force constante. Enfin, à un certain moment du chargement, le boulon entre en contact avec les plaques.

Parfois, il peut se produire un phénomène de « stick-slip », c'est à dire un glissement saccadé entre les deux plaques.

Plusieurs modèles ont été proposés afin de représenter la dissipation d'énergie et les non-linéarités dues aux frottements et glissements dans les liaisons, pour des cas de charges dynamiques :

- pour le micro-slip [Canudas De Wit *et al.* 1995, Pakdemirli et Boyaci 2003] ;
- pour le stick-slip [Gaul et Lenz 1997] ;
- et pour le slip (glissement) [Gaul et Nitsche 2001].

Un modèle rhéologique largement utilisé pour représenter la réponse stick-slip des assemblages a été proposé par Iwan [Iwan 1966, Iwan 1967]. Cette modélisation consiste en une combinaison d'éléments mis en série ou en parallèle afin de décrire le comportement hystérétique des matériaux et structures. Ces éléments contiennent chacun deux composants : un ressort ayant une raideur linéaire et un « amortisseur de Coulomb » (cf. Figure 3.4). Le déplacement du ressort ne peut avoir lieu tant que la force de traction  $f$  ne dépasse pas  $\tilde{\phi}$  qui est la force tangentielle à vaincre.

Segalman [Segalman 2005] utilise le modèle de Iwan afin de construire un modèle à quatre paramètres reproduisant les propriétés des liaisons à recouvrement en dynamique et vibrations. Dans [Segalman et Starr 2008], en mettant en parallèle plusieurs éléments « série » de Iwan (cf. figure 3.4a) et en mettant en série des éléments « parallèle » de Iwan (cf. figure 3.4b), Segalman montre que le modèle de Iwan permet de bien décrire le « micro/macro slip » au niveau des interfaces de liaison. De nombreuses représentations et applications du modèle de Iwan avec des

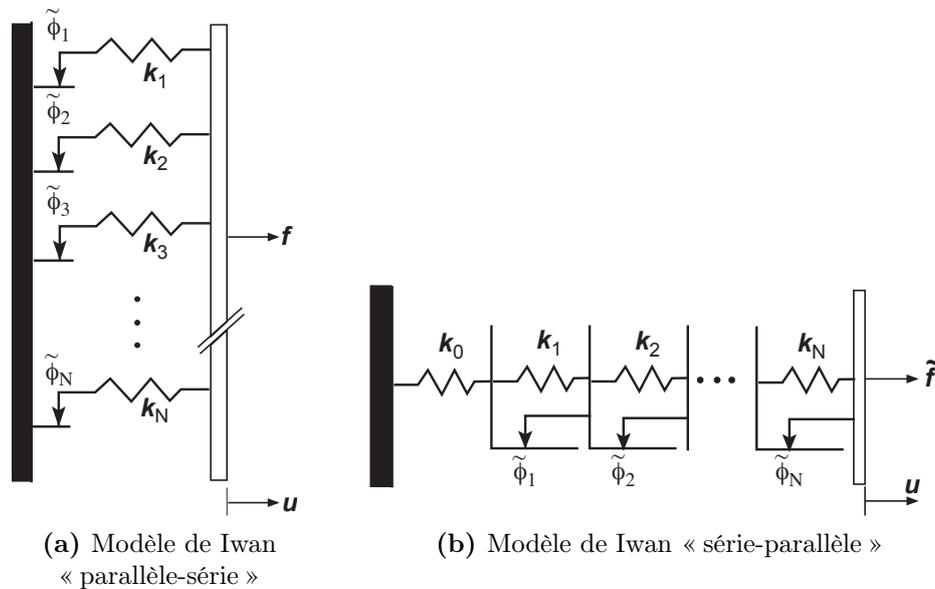
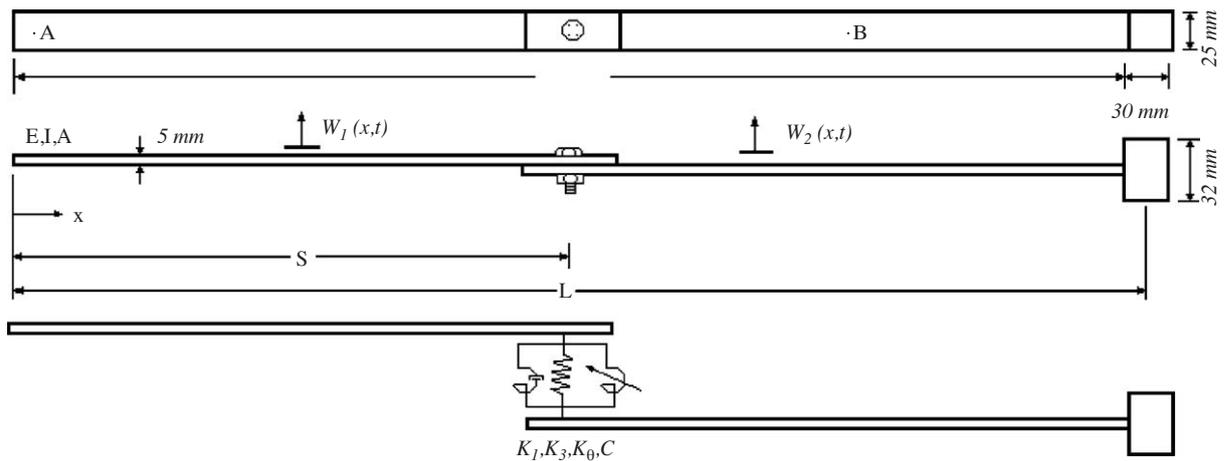


FIGURE 3.4: Différents modèles de Iwan d'après [Segalman et Starr 2008]

comparaisons à des résultats expérimentaux en dynamique peuvent être consultées dans [Song *et al.* 2004, Ouyang *et al.* 2006, Miller et Quinn 2009].

Pour ce qui est de la modélisation paramétrique proprement dite, on peut citer [Ahmadian et Jalali 2007b, Ahmadian et Jalali 2007a] qui proposent deux modélisations distinctes. Dans [Ahmadian et Jalali 2007b], on trouve la modélisation avec 4 paramètres de la figure 3.5. La raideur en cisaillement de la liaison peut être représentée par un ressort linéaire de raideur axiale  $K_1$ . Afin de modéliser le micro-slip et la dissipation d'énergie dans la liaison, la modélisation suivante de l'interface est proposée : un ressort linéaire de raideur en torsion  $K_\theta$ , un ressort de raideur cubique en torsion  $K_3$  et un amortisseur visqueux en torsion de coefficient  $C$ . Pour trouver ces quatre paramètres, on commence par résoudre analytiquement le problème pour trouver les fréquences harmoniques du système puis on réalise une série d'expériences. Puis, grâce à un algorithme d'optimisation minimisant l'écart entre les fréquences mesurées et calculées, on trouve les paramètres du modèle analytique.



**FIGURE 3.5:** Modèle analytique à 4 paramètres ( $K_1, K_3, K_\theta, C$ ) de [Ahmadian et Jalali 2007b]

Dans [Ahmadian et Jalali 2007a], un autre modèle à 6 paramètres est proposé pour la modélisation d'une liaison boulonnée à simple recouvrement (cf. Figure 3.6). La partie de l'assemblage comportant le boulon est alors modélisée comme une poutre horizontale avec deux degrés de liberté par nœud. En effet les raideurs linéaires et non linéaires sont séparées, ce qui simplifie leurs identifications grâce à une méthode analogue à celle employée au modèle à 4 paramètres.

Enfin, on peut citer le modèle proposé dans [Rashquinha et Hess 1997] qui est un modèle dynamique avec 8 paramètres permettant de tenir compte des filets de la vis et du taraudage du trou.

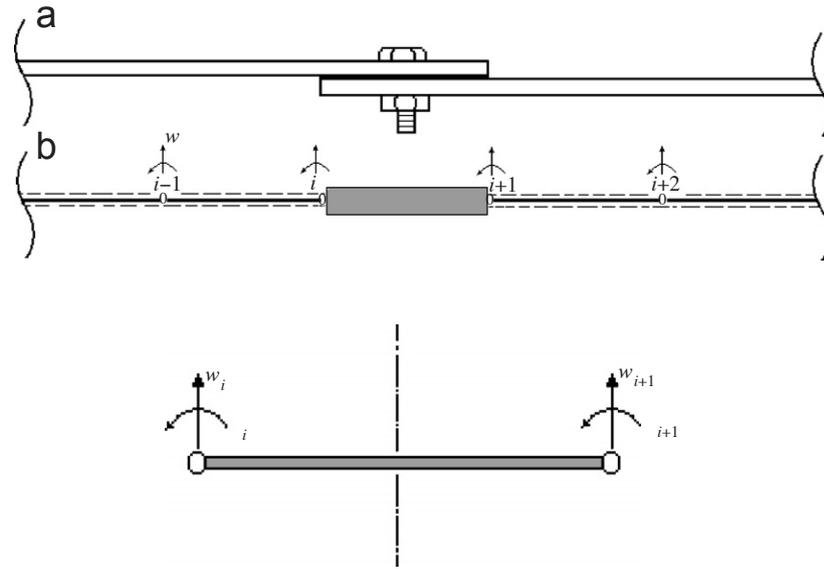


FIGURE 3.6: Modèle analytique à 6 paramètres de [Ahmadian et Jalali 2007a]

### 3.2.3 Cas d'un crash

Dans [Langrand et Combescure 2004], un modèle de connecteur pour le crash est proposé. Le connecteur est modélisé par un élément poutre à six degrés de liberté (3 translations et 3 rotations) ayant un comportement élasto-plastique endommageable. Cet élément est représentatif de la zone de « collage » qui est le lieu de phénomènes très complexes. Le modèle de plasticité utilisé est un modèle de type Ilyushin et l'endommagement est introduit par l'intermédiaire du modèle de rupture ductile de Lemaitre et Chaboche.

Les paramètres de ce modèle sont déterminés par une procédure d'identification classique qui sera évoquée dans la suite de ce document à partir de différents essais de type Arcan (traction/cisaillement).

Le bilan des comparaisons entre les résultats expérimentaux et les calculs numériques avec ce modèle montre que le connecteur permet de reproduire correctement la première partie de la réponse sur des essais de traction/cisaillement, mais ne permet pas d'atteindre la réponse post-pic (en particulier en cisaillement). L'intérêt principal de ce modèle est sa robustesse avant rupture, même s'il ne prend pas en compte les aspects du contact et du frottement au sein de la liaison.

## 3.3 Modèles numériques en éléments finis

Il existe une littérature abondante sur ce domaine dont on ne citera ici que quelques exemples. On trouvera dans [Mackerle 2003] une revue bibliographique très large (726 références!) sur les méthodes éléments finis appliquées à l'analyse théorique et pratique de fixations et assemblages de tous types, la partie dédiée aux

assemblages boulonnées listant à elle seule le tiers des références. Dans ce qui suit, on distinguera trois types de modèles : les modèles locaux, les modèles intermédiaires et les modèles structuraux.

### 3.3.1 Modèles locaux

La particularité de ces modèles est de représenter le filetage des éléments de liaison de manière explicite et fine, ce qui de toute évidence ne peut être envisagé sur un modèle en éléments finis 3D comportant plusieurs dizaines de fixations. En se plaçant à l'échelle locale de la fixation, ces modèles permettent de mieux comprendre les phénomènes locaux, tels que ceux liés à la précharge des boulons et la rupture des filets.

La figure 3.7 montre le modèle utilisé dans les travaux de [Alkatan *et al.* 2007] sur la raideur et la perte de raideur des fixations. Un autre travail sur la perte de raideur axiale est décrit dans [Lehnhoff et Bunyard 2001] et des études sur la perte de précharge en fonction du chargement extérieur sont présentées dans [Izumi *et al.* 2005, Zhang *et al.* 2007].

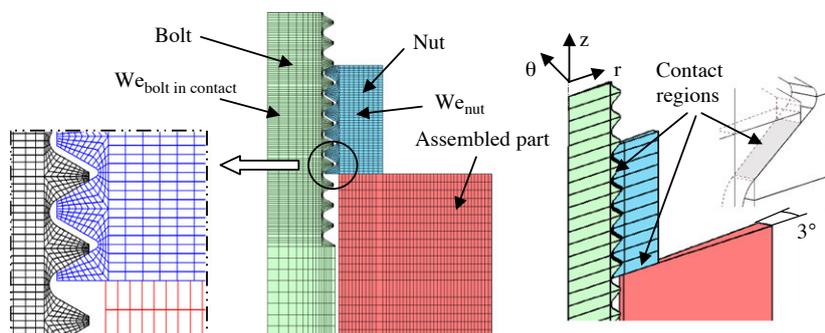


FIGURE 3.7: Maillage du modèle de [Alkatan *et al.* 2007]

En particulier, [Izumi *et al.* 2005] permet de se renseigner sur la perte de précharge dans un assemblage boulonné en prenant en compte le filetage. Une relation entre la précharge et le couple de serrage assez bien vérifiée par le modèle éléments finis 3D de la figure 3.8 est proposée, ainsi qu'une relation entre le chargement dans le boulon et le chargement dans un filet en fonction du numéro du filet. La perte de serrage suggère un chargement en cisaillement ce qui est en concordance avec le modèle numérique et les essais. Cette perte de serrage est initiée lorsqu'il y a glissement complet d'un filet et cela avant le glissement de la tête du boulon.

[Zhang *et al.* 2007] aborde également ce thème d'un point de vue numérique et conclut que les deux causes majeures de la perte de précharge dans un assemblage boulonné fileté sont d'une part le micro-slip entre le taraudage et le filetage et d'autre part la variation de la pression de contact.

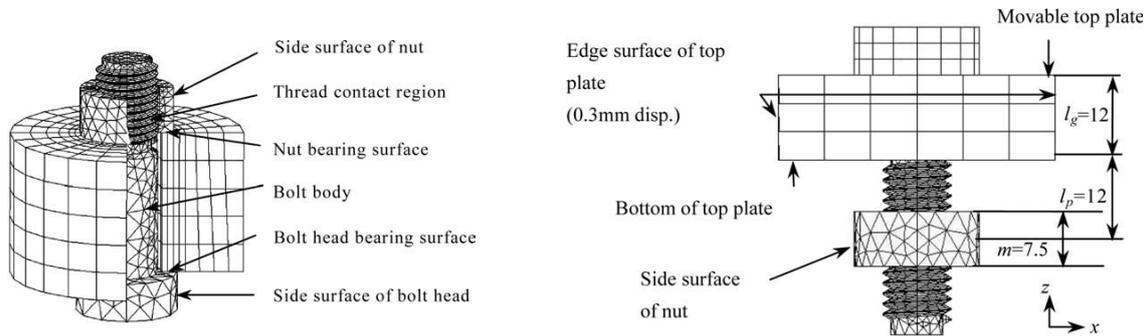


FIGURE 3.8: Modèle numérique de [Izumi *et al.* 2005]

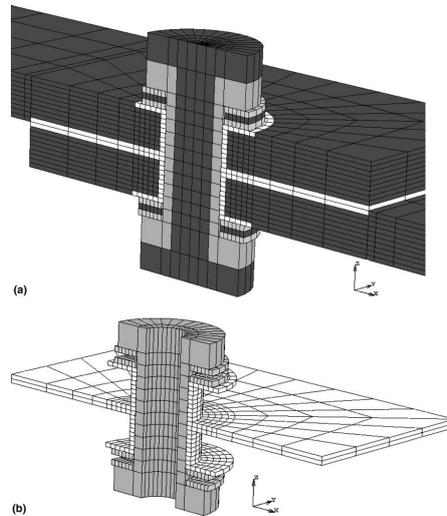
### 3.3.2 Modèles intermédiaires

La particularité de ces modèles est la représentation de la géométrie des fixations, sans les filets, et la prise en compte des effets du contact et du frottement sur le comportement de l'assemblage boulonné. Les coûts de calcul peuvent alors devenir très importants car les algorithmes de résolution utilisés sont itératifs. La prise en compte des effets du contact et du frottement peuvent également générer des difficultés de mise en œuvre (convergence, réglage des paramètres des algorithmes itératifs) qui ne sont pas toujours faciles à résoudre.

Une modélisation en éléments finis 2D validée expérimentalement est proposée dans [Kim et Kim 1995] pour les assemblages boulonnés à plaques composites. Elle permet de prendre en considération le frottement grâce à une loi de Coulomb, le contact étant géré par une méthode de pénalisation. Pour ces assemblages, un modèle 3D est présenté dans [Chen *et al.* 1995] tenant compte des effets de frottement, du jeu, de l'élasticité du boulon, de l'empilage des séquences du stratifié et l'effet du contact corps de vis/plaque.

Dans [McCarthy *et al.* 2005b], les auteurs révèlent l'importance du choix de l'algorithme de contact pour un modèle en éléments finis en comparant deux algorithmes différents. De plus, ils démontrent l'importance de raffiner le maillage au niveau de la surface d'appui de la tête de vis sous peine d'une perte réelle de précision du résultat dans cette zone (cf. Figure 3.9).

Afin d'augmenter la vitesse des calculs et d'être plus rapide qu'un solveur direct, le LMT-Cachan a développé une approche originale appelée la méthode LATIN (LArge Time INcrement method) qui permet une résolution numérique de manière non incrémentale. Un couplage de cette méthode à une décomposition de l'assemblage en sous-structures et en interfaces est effectué dans [Champaney *et al.* 2008]. Un modèle éléments finis prenant en compte le contact et le frottement via une loi de Coulomb (cf. Figure 3.10) est ainsi proposé. Cette méthode permet d'obtenir des



**FIGURE 3.9:** Modèle non linéaire en éléments finis 3D issu de [McCarthy *et al.* 2005b] : (a) coupe à travers un modèle à un boulon montrant les corps en contact ; (b) corps en contact isolés

résultats d'une très bonne précision, jusqu'à 20 fois plus rapidement qu'une méthode classique pour un ensemble de calculs avec des paramètres de frottements différents.

D'autres travaux sur des modèles numériques 3D non linéaires sont présentés dans [Chen *et al.* 1995, McCarthy *et al.* 2005a, Kim et Kuwamura 2007].

Dans le cas d'assemblages boulonnés de plaques en composite, les articles [Riccio et Scaramuzzino 2002, Tserpes *et al.* 2002] contiennent des modèles traitant la dégradation et l'endommagement des fibres. Les résultats montrent que l'endommagement apparaît proche du trou, et se propage dans l'épaisseur, depuis l'interface entre les plaques vers leurs surfaces extérieures.

Récemment, quelques chercheurs se sont intéressés à l'étude numérique de la fatigue des liaisons boulonnées. Par exemple, [Kelly 2006] et [Daidie *et al.* 2007] étudient, respectivement, la fatigue en traction et en compression des fixations à deux boulons utilisées dans les liaisons de pièces prismatiques. Généralement, les analyses en fatigue des fixations boulonnées sont très coûteuses en temps puisque outre les non-linéarités liées au contact-frottant, il faut prendre en compte les non-linéarités de comportement du matériau. De plus, la gestion du chargement cyclique en fatigue demande une discrétisation du chargement qui conduit encore à l'augmentation du temps de calcul.

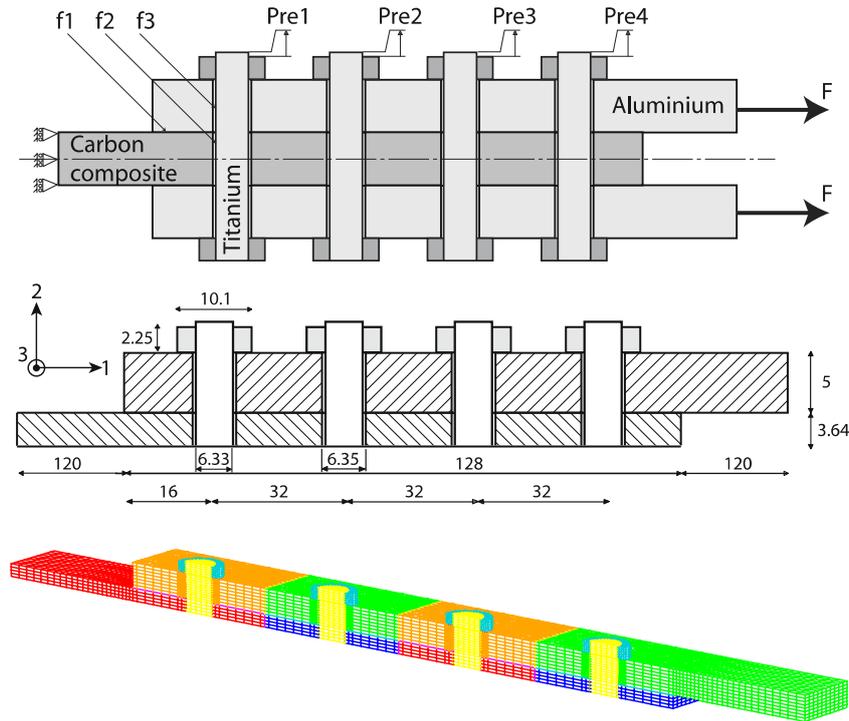


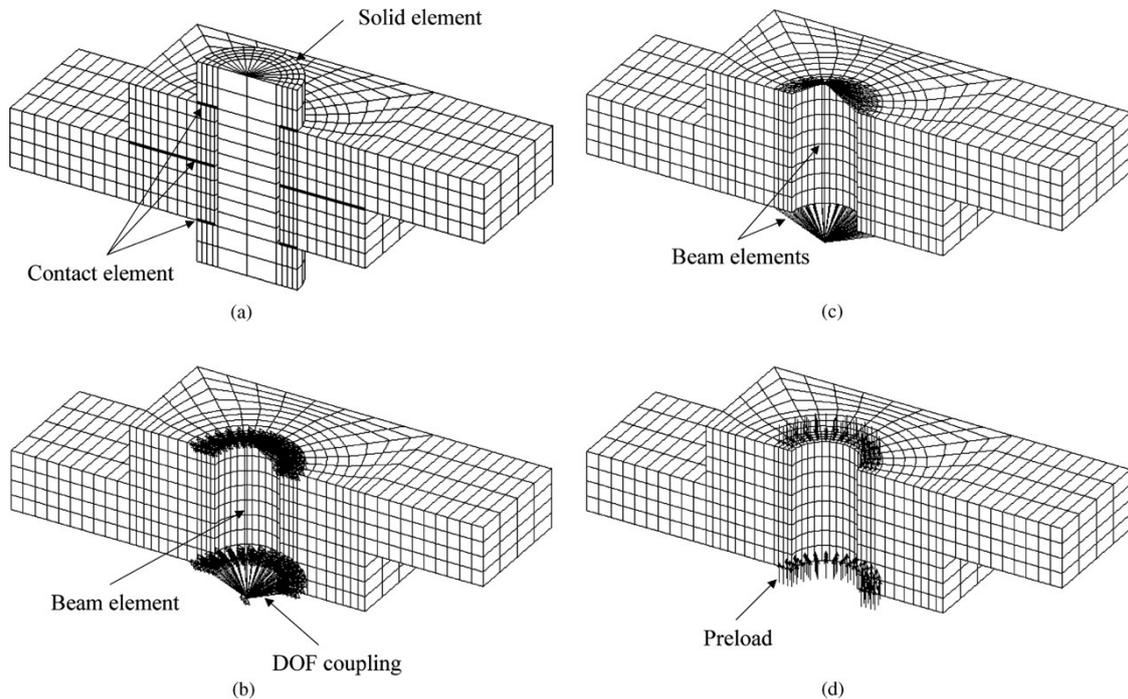
FIGURE 3.10: Assemblage étudié et modèle non linéaire en éléments finis 3D proposé par [Champaney *et al.* 2008]

### 3.3.3 Modèles structuraux

Les modèles structuraux sont des modèles numériques simplifiés qui constituent un bon compromis pour des structures de grandes tailles car ils limitent le temps de calcul tout en perdant un minimum de précision. Quelques exemples de développements récents sont présentés dans [Kim *et al.* 2007, Ekh et Schön 2008, Gant *et al.* 2011].

L'idée générale de ces modèles est de mélanger des modèles 3D locaux avec des éléments de plaques ou de coques, des connecteurs linéaires ou non linéaires, et des modèles 3D globaux. La difficulté est alors d'identifier proprement les paramètres de ces différents modèles : généralement une solution numérique 3D complète est prise comme référence et permet de recalibrer les modèles simplifiés. Il est important de noter qu'une limite de ces modélisations est la simplicité des cas traités (quelques liaisons boulonnées), ce qui rend leur généralisation à des assemblages complexes délicate.

En particulier, les travaux présentés dans [Kim *et al.* 2007] montrent qu'on peut alléger le maillage du modèle en éléments finis du boulon en substituant la géométrie du boulon par des éléments ayant un comportement équivalent, tels que des éléments poutres aux degrés de libertés couplés (cf. Figure 3.11 (b)), ou des éléments poutres,



**FIGURE 3.11:** Modèles en éléments finis pour une liaison boulonnée proposés dans [Kim *et al.* 2007] : (a) modèle de boulon solide, (b) modèle de boulon couplé, (c) modèle de boulon araignée et (d) modèle sans boulon

en forme de toile reliés à un même point au niveau de la tête de vis et de l'écrou (cf. Figure 3.11 (c)), ou une précharge appropriée appliquée sur la surface extérieure des rondelles supérieure et inférieure (cf. Figure 3.11 (d)). Ce dernier modèle ne peut être employé que lorsqu'il n'est pas nécessaire de tenir compte de la raideur du boulon et s'il n'y a pas de séparation entre les pièces. L'étude montre que le modèle complet (cf. Figure 3.11 (a)) reste le plus précis pour simuler le comportement physique de la structure. Néanmoins, il ressort que les modèles des figures 3.11 (b) et (c) permettent d'épargner respectivement 62% et 49% du temps de calcul et d'économiser respectivement 21% et 19% de mémoire en comparaison avec le modèle complet, tout cela dans le cadre d'une perte de précision raisonnable. Ainsi, les auteurs recommandent le modèle simplifié avec des éléments poutres aux degrés de liberté couplés de la figure 3.11 (b).

Dans le cas de charges dynamiques, on peut citer des modèles comportant des éléments simples avec amortissement [Ahmadian et Jalali 2007b, Mayer et Gaul 2007] des éléments spécifiques pour les chocs pyrotechniques [De Benedetti *et al.* 2007] ou pour les crashes [Combescure *et al.* 2003]. Dans la majorité des cas, les algorithmes proposés sont explicites permettant de diminuer les coûts de résolution, au détri-

ment d'une certaine précision dans les résultats puisque des interpénétrations dans les zones de contact sont tolérées au cours de la résolution.

Enfin, les travaux menés dans [Liu et Chen 2013], sur une liaison métal-composite en simple recouvrement à 6 boulons, montrent l'intérêt d'employer une stratégie de couplage global/local. La structure globale est modélisée en éléments finis 2D et les zones autour de chaque liaison boulonnée sont modélisées de manière fine en éléments finis 3D. Les grandeurs globales telles que le champ de déplacement de la structure sont déterminés sur le modèle global. Ces résultats globaux sont ensuite considérés comme conditions aux limites lors de l'analyse détaillée de la distribution des contraintes dans le modèle local autour du boulon. En comparaison avec un calcul effectué sur un modèle en éléments finis 3D global de la même structure, cette technique permet d'accélérer 85 fois le temps de calcul.

# Bilan

L'approche de vérification et validation n'a pas encore démontré qu'elle pouvait assurer une prise de décision confiante [Hemez 2005]. Il s'avère alors nécessaire de prendre en compte les différentes sources d'incertitudes de manière appropriée pour apporter les améliorations nécessaires et de quantifier a priori le niveau de confiance associé aux modèles numériques.

**TABLE 3.2:** Principales méthodes paramétriques de propagation des incertitudes en mécanique des structures

Méthodes probabilistes	Méthodes non probabilistes
Méthodes d'intégration directe <i>Méthode de Monte-Carlo</i> <i>Méthodes d'échantillonnage</i> <i>Parallélisation &amp; Surfaces de réponse</i>	Théorie des probabilités imprécises  Théorie des fonctions de croyance
Méthodes d'analyse de fiabilité des structures <i>FORM, SORM, FOSPA, MVFOSA</i>	Théorie des possibilités
Méthodes d'approximation polynomiale <i>Perturbation</i> <i>Décomposition de Neumann</i>	Théorie des intervalles  Théorie des ensembles flous
Techniques de projection <i>Techniques de réduction de modèle</i> <i>Méthodes spectrales</i>	Théorie décisionnelle de lacune d'information

De manière générale, les incertitudes sont dues à une variabilité naturelle ou à un manque de connaissance. Plusieurs familles de méthodes existent aujourd'hui, permettant de les prendre en compte dans les modèles numériques d'assemblages mécaniques. On distingue les approches paramétriques, propageant, pour un modèle fixé, les incertitudes sur les paramètres du modèle, et les approches non paramétriques,

généralement probabilistes, considérant les incertitudes de manière plus globale. Le tableau 3.2 présente un aperçu des principales méthodes paramétriques répandues, probabilistes et non probabilistes, qui ont été décrites.

La théorie des méconnaissances, également dédiée aux assemblages, a pour ambition de globaliser tous les types d'incertitudes au niveau des sous-structures. Les grandeurs incertaines sont supposées varier dans des intervalles dont les bornes sont des variables aléatoires. En présence de faibles méconnaissances, une étude comparative de plusieurs méthodes paramétriques avec cette approche a permis de démontrer qu'elle est très avantageuse en terme de précision et de coût de calcul.

Dans le cadre du présent travail, notre intérêt principal est porté sur les modèles existants qui permettent de représenter une géométrie 3D avec des éléments finis de manière simple. Ainsi, lors de la prise en compte des incertitudes dans les fixations avec la théorie des méconnaissances, des modèles numériques structuraux seront employés afin d'améliorer le dimensionnement vibratoire des assemblages boulonnés.

Dans les études d'assemblages boulonnés, même si les sources d'incertitudes peuvent être bien connues, la caractérisation de leur influence sur le comportement dynamique du système est toujours mal connue. De plus, la quantité d'information disponible, permettant d'aboutir à des conclusions pertinentes, est souvent réduite. On cherche alors à caractériser les incertitudes de manière expérimentale et à maîtriser la méconnaissance, ce qui permettra de mieux les prendre en compte dans les modèles et améliorer les prédictions numériques. La partie suivante propose d'affiner notre compréhension de l'influence des sources d'incertitudes, liées aux conditions de liaison, sur la réponse dynamique des structures boulonnées. A cet effet, un banc d'essai dynamique basé sur une structure boulonnée a été conçu et dimensionné. L'analyse modale expérimentale de ce banc, menée sous forte charge, permet de décrire l'évolution de la raideur apparente d'une liaison boulonnée et la dissipation dans la liaison en fonction des paramètres de liaison.

## Deuxième partie

# Caractérisation expérimentale des incertitudes dans une liaison boulonnée



# Chapitre 4

## Conception d'un banc d'essai dynamique

*Dans ce chapitre, on décrit la démarche de conception et dimensionnement d'un banc d'essai dynamique basé sur une structure boulonnée. On se munit d'une liaison boulonnée dont les conditions de liaison peuvent être facilement modifiées et pour laquelle le type et le niveau de chargement sont maîtrisés. L'objectif de ce travail est de comprendre les phénomènes mis en jeu en dynamique et de quantifier la variabilité liée aux conditions de liaison via une analyse modale expérimentale.*

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Objectifs de l'étude</b>	<b>75</b>
<b>4.2</b>	<b>Principe de fonctionnement</b>	<b>76</b>
<b>4.3</b>	<b>Dimensionnement du montage</b>	<b>77</b>
4.3.1	Calcul des fréquences et modes propres	78
4.3.2	Recherche du chargement optimal	82
4.3.3	Evaluation de l'effort à injecter	83
4.3.4	Géométrie finale de la liaison	86
<b>4.4</b>	<b>Identifications par analyse différentielle</b>	<b>87</b>
<b>4.5</b>	<b>Caractérisation de l'amortissement</b>	<b>88</b>
4.5.1	Facteur de qualité	90
4.5.2	Capacité d'amortissement spécifique	90

---

Une connaissance fiable du comportement dynamique des assemblages industriels est indispensable afin d'éviter des incidents qui peuvent mettre en danger la sécurité des personnes et la sûreté des installations. La raideur de ces structures assemblées est obtenue par le maintien en position de composants par un nombre important de fixations tels que des boulons précontraints. Ces éléments de fixation contribuent aux distributions de raideurs et de masses dans l'assemblage de manière complexe en rendant le système non linéaire, et sont ainsi sources d'incertitudes et de variabilité [Ibrahim et Pettit 2005, Di Maio 2016].

Beaucoup de difficultés rencontrées lors de l'analyse de systèmes non linéaires proviennent d'une compréhension pauvre des phénomènes physiques non linéaires. Pour un système non linéaire, de faibles différences dans la modélisation des éléments non linéaires peut aboutir à des écarts considérables entre les réponses du système [Brake 2013, Brake 2014]. Ainsi, lors de l'étude de la dynamique des liaisons boulonnées, l'absence d'une compréhension complète et profonde de ce qui a lieu aux interfaces pousse à poser plusieurs questions saillantes, comme :

- Quels effets a la liaison boulonnée sur l'amortissement et la raideur du système ?
- Comment la raideur et l'amortissement du système changent-ils en fonction du niveau d'excitation du système ?

Quelques travaux de recherche ont été menés récemment pour y apporter des éléments de réponse. Par exemple, l'étude d'une structure formée de deux poutres en acier inoxydable assemblées par trois boulons [Brake *et al.* 2014] montre que la présence d'une liaison boulonnée a un impact considérable sur les fonctions de réponse en fréquence du système. En particulier, les résultats de cette étude montrent que les modes de torsion sont très sensibles aux conditions d'interface et que les modes de flexion sont sensibles à la valeur du couple de serrage des boulons et à l'ordre de serrage. Afin de séparer les effets de la liaison mécanique des autres sources d'incertitudes et de non-linéarités, une seconde étude a été effectuée sur la même structure [Smith *et al.* 2016]. Elle se focalise sur l'impact des conditions aux limites, des techniques et conditions de mesure et des types d'excitation sur la réponse du système. Une autre analyse expérimentale a été réalisée sur la structure d'un portique simple, à géométrie rectangulaire, présentant des liaisons boulonnées acier-aluminium [Van Buren *et al.* 2015]. Les paramètres de liaison qui ont été variés sont le couple de serrage, l'ordre de serrage et la procédure de serrage. Les résultats ont montré que le couple de serrage est le seul paramètre ayant une influence non négligeable sur les fréquences propres. Cependant, le niveau de chargement des différentes liaisons était faible et n'était pas maîtrisé.

Dans ces travaux, les liaisons considérées contenaient peu de boulons, et les couples de serrage installés et les sollicitations étaient faibles. On propose alors de concevoir un banc d'essai dynamique contenant une liaison boulonnée paramétrable

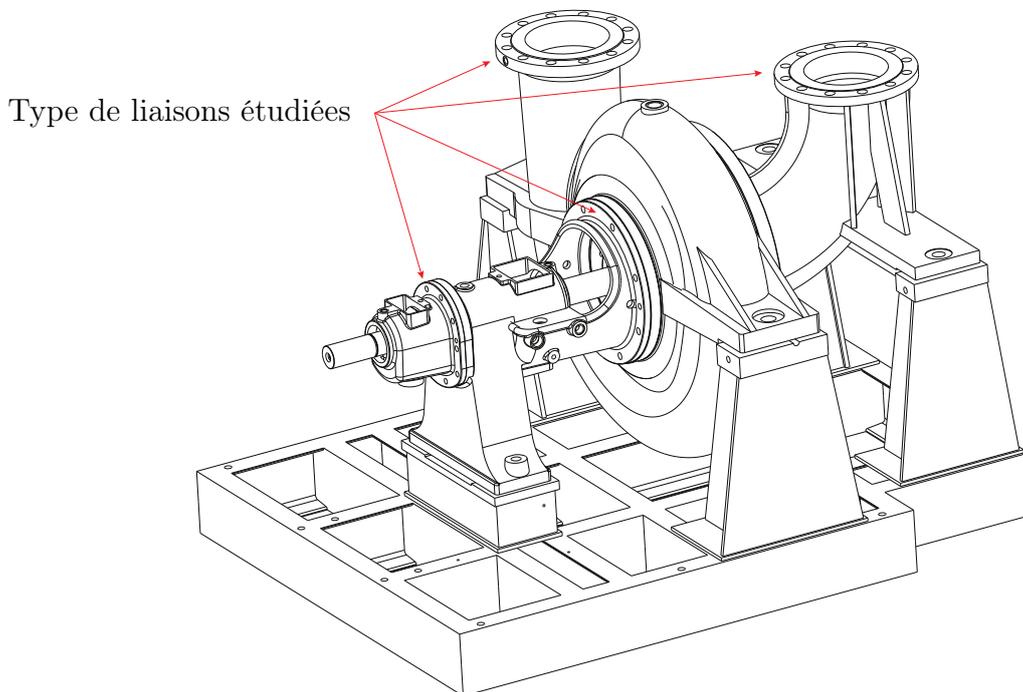
permettant d'augmenter la valeur de ces grandeurs et d'examiner la variabilité expérimentale liée aux variations des conditions de liaison.

## 4.1 Objectifs de l'étude

Une grande partie des assemblages boulonnés utilisés dans les machines tournantes sont soumis à des niveaux de chargement et de vibration élevés. En particulier, le comportement dynamique des systèmes mécaniques qui équipent les centrales nucléaires et thermiques, tels que les pompes, s'avère critique lors de leur conception et doit pouvoir être prédit en toute confiance. Comme le montre la figure 4.1, les liaisons boulonnées utilisées sur les pompes des centrales thermiques ont les caractéristiques suivantes :

- les pièces liées sont métalliques et massives ;
- la liaison entre les deux pièces est plane ;
- la couronne de boulons est de grand diamètre ;
- les liaisons contiennent beaucoup de boulons.

Selon les modes de vibration, les liaisons considérées peuvent travailler de différentes façons : flexion, cisaillement, torsion et traction. Les fréquences d'intérêt pour leur dimensionnement vibratoire sont basses, inférieures à 1 kHz.



**FIGURE 4.1:** Illustration des caractéristiques des liaisons boulonnées présentes sur une pompe mono-étagée à axe horizontal (les boulons ne sont pas représentés)

Afin de développer à terme des modèles pertinents, on se propose de quantifier

expérimentalement la dépendance des paramètres associés à des liaisons boulonnées du même type aux variations de la raideur et la dissipation de la liaison [Esteban et Rogers 2000]. Parmi les paramètres importants qu'on veut considérer, on trouve :

- la précharge des boulons liée au couple de serrage [O'Toole *et al.* 2006, Knight Jr *et al.* 2008];
- le nombre et la position des boulons effectivement serrés [Wang *et al.* 2015];
- le type et le niveau de chargement de la liaison boulonnée [Brake *et al.* 2014, Smith *et al.* 2016].

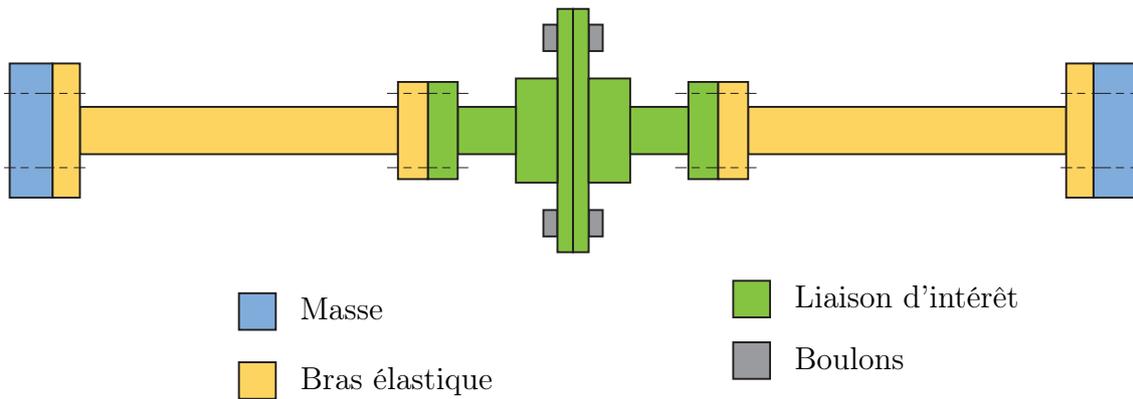
Pour d'atteindre cet objectif, on cherche à disposer d'une liaison boulonnée reprenant les principales caractéristiques de celles des pompes des centrales thermiques. Les paramètres de cette liaison doivent être facilement modifiables. Néanmoins, pour des raisons d'encombrement, on décide d'étudier une liaison de taille inférieure (environ 20 cm de diamètre) pouvant contenir 16 boulons de type M12.

## 4.2 Principe de fonctionnement

Le système sera préchargé via le serrage d'éléments boulonnés. Il en résulte des charges statiques dans la liaison. Lors de l'excitation dynamique de l'assemblage, des charges dynamiques vont se superposer à ces charges statiques. Si les variations des charges dynamiques sont petites par rapport aux charges statiques, alors il y aura peu d'effets sur la réponse dynamique en terme de dissipation et de fréquence de résonance. Cela correspond à décrire un effet de seuil sur le mécanisme d'ouverture ou de glissement qui a été précédemment décrit dans [Rouch *et al.* 2009] et [Caignot *et al.* 2010]. Il est donc important de pouvoir maîtriser le niveau de chargement dans la liaison et de pouvoir rendre celui-ci significatif par rapport aux charges statiques liées au serrage des éléments boulonnés.

Cependant, solliciter la liaison en dynamique à des niveaux de chargement élevés n'est pas aisé avec un matériel expérimental de taille raisonnable. Une solution proposée est de profiter de l'amplification dynamique et d'exciter la structure à la résonance sur ses modes propres. Ainsi, en injectant peu d'énergie dans le montage, les amplitudes de la réponse dynamique pourront être importantes. De plus, il est important de s'assurer que les premiers modes sollicitent bien la liaison boulonnée étudiée et que leur fréquence de résonance sont basses (quelques centaines de Hz). On cherche donc à raccorder la liaison boulonnée à deux masses excentrées par l'intermédiaire de résonateurs de type poutre permettant de mesurer les charges dans la liaison. L'ensemble est considéré en libre-libre afin de réduire le nombre de liaisons et de sources d'incertitudes. La transformation de l'énergie cinétique des masses en énergie élastique dans les poutres permettra de transmettre les efforts souhaités vers la liaison boulonnée centrale.

La géométrie préliminaire du montage est présentée sur la figure 4.2. La liaison



**FIGURE 4.2:** Liaison boulonnée et système de chargement

boulonnée, au centre, est reliée rigidement aux bras élastiques qui sont reliés rigidement aux masses extrêmes. L'ensemble est démontable de façon à pouvoir rajouter ou enlever des masses ou modifier leur éloignement sans modifier les conditions de liaison. Afin de faciliter le déplacement et la manipulation du montage complet, on décide de garder sa masse autour de 40 kg.

### 4.3 Dimensionnement du montage

Les principaux critères de dimensionnement de l'assemblage sont :

- avoir un niveau de chargement dans la liaison permettant d'assurer que des glissements et/ou ouvertures de l'ordre de quelques  $\mu\text{m}$  puissent avoir lieu dans les zones de contact entre les brides en liaison ou entre les boulons et les brides. Ces déplacements auront un impact sur l'énergie dissipée et les fréquences de résonance ;
- même lorsqu'elles sont soumises à de fortes charges, toutes les pièces doivent garder un comportement élastique ;
- les premiers modes propres doivent être bien identifiables. Pour ce type et cette taille de montage, cela revient à avoir une faible densité modale et des fréquences de résonance inférieures à 1 kHz.

Afin d'assurer un dimensionnement optimal de la liaison et les autres pièces du montage, on cherchera à modifier les paramètres suivants :

- la géométrie des brides formant la liaison centrale d'intérêt (diamètre, longueur, épaisseur des parties en contact, etc.) ;
- la géométrie des poutres (longueur et diamètre) ;
- la géométrie et l'éloignement des masses.

La première étape du dimensionnement consiste à estimer les premières fréquences propres du montage en libre-libre et la forme des premiers modes propres.

Alors un premier modèle numérique du montage complet a été conçu. La seconde étape concerne l'optimisation de la géométrie du montage et de la liaison d'intérêt. Étant donné que la structure est initialement imaginée symétrique, il n'y aura que des modes symétriques ou antisymétriques. Les deux premiers modes propres du modèle sont associés aux premiers modes de flexion symétrique et antisymétrique respectivement. Les deux modes suivants sont des modes de torsion symétrique et antisymétrique. La géométrie et les caractéristiques du modèle font que le premier mode de flexion symétrique est associé à une fréquence inférieure à 100 Hz, alors que les premiers modes de traction-compression sont associés à des fréquences supérieures à 1 kHz. Par conséquent, lors de l'analyse modale expérimentale, on s'intéressera particulièrement aux modes de flexion et aux modes de torsion. Pour chacun de ces modes, il est indispensable d'extraire le type et le niveau de chargement dans la liaison. Cela nous conduit à la réalisation d'un modèle analytique simplifié du montage pour chaque mode.

### 4.3.1 Calcul des fréquences et modes propres

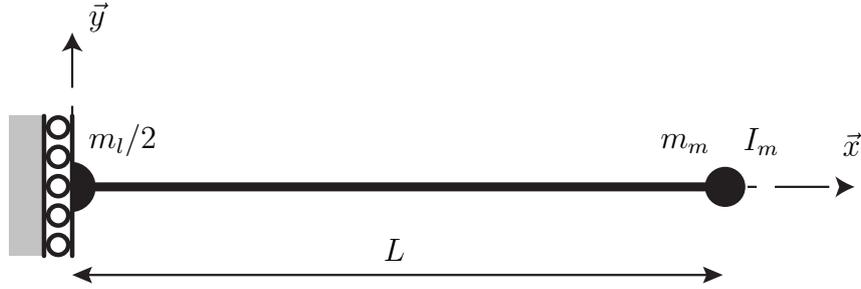
La recherche des formes des modes fondamentaux peut se faire de manière exacte, mais la lourdeur des calculs nous conduit à réaliser une estimation approchée. Pour cela, on utilise la méthode du quotient de Rayleigh en postulant une forme de mode raisonnable qui conduira à une estimation par excès de la valeur exacte de la fréquence recherchée.

La démarche et les calculs d'estimation des fréquences de résonance ont été menés sur les différents modes propres de la structure, à savoir les modes de flexion, torsion et traction-compression, symétrique et antisymétrique. Dans la suite, on présente le cas des deux premiers modes de flexion, symétrique et antisymétrique. On considère que l'énergie cinétique des poutres est négligeable comparée à celle des masses. Pour tous ces calculs, on introduit un certain nombre de notations :

- Géométrie : chaque poutre cylindrique a une longueur  $L$ , un diamètre  $D$ , une section  $S$  et un moment quadratique  $I$  par rapport à l'axe  $\bar{z}$ ;
- Matériau : on note  $\rho$  la densité et  $E$  le module d'Young ;
- Masses : on note  $m_l$  la masse de la liaison, et  $m_m$  la masse d'une masse excentrée ;
- Inerties : on note  $I_l$  l'inertie en rotation de la liaison autour d'une axe passant par son centre et orthogonal à l'axe principal du système ; on note  $I_m$  l'inertie en rotation d'une masse autour d'une axe passant par son centre et orthogonal à l'axe principal du système.

En considérant la moitié de la structure, le modèle associé à l'estimation de la fréquence du premier mode de flexion symétrique est proposé sur la figure 4.3. La liaison et la masse excentrée sont modélisées par des masses ponctuelles. Puisque l'essai est réalisé en libre-libre, deux modes de corps rigides sont possibles dans le

cas d'une étude plane : une translation transversale, une rotation selon l'axe hors plan. Étant donné que l'on étudie un mode symétrique, la rotation est bloquée sur le plan de symétrie, d'où la liaison proposée en  $x = 0$ . Le degré de liberté restant est important : si on le supprime, le centre de gravité de la configuration déformée ne pourra pas être le même que celui de la configuration non déformée, ce qui contredit une propriété importante des structures vibrant en libre-libre.



**FIGURE 4.3:** Modèle analytique simplifié permettant l'estimation de la fréquence de résonance du premier mode de flexion symétrique

On postule comme champ cinématiquement admissible représentatif de ce mode la somme d'un mode rigide de translation et d'un mode déformant la structure :

$$V_{s,1}(x) = a + x^2 \quad (4.1)$$

Si l'on néglige l'énergie cinétique des poutres par rapport à celle des masses, le quotient de Rayleigh est de la forme :

$$R(V_{s,1}) = \frac{\int_0^L EI(V_{s,1}''(x))^2 dx}{\int_0^L \rho S(V_{s,1}(x))^2 dx + \frac{1}{2} m_l (V_{s,1}(0))^2 + m_m (V_{s,1}(L))^2 + I_m (V_{s,1}'(L))^2} \quad (4.2)$$

En fonction des données du problème, on obtient :

$$R(V_{s,1}) = \frac{4 E I L}{2 I_m L^2 + \frac{1}{2} a^2 m_l + (a + L^2)^2 m_m + a^2 \rho S L + \frac{2}{3} a L^3 S \rho + \frac{1}{5} L^5 S \rho} \quad (4.3)$$

Le coefficient  $a$  qui minimise le quotient de Rayleigh est alors :

$$a = -\frac{2 (3 L^2 m_m + L^3 S \rho)}{3 (m_l + 2 m_m + 2 \rho S L)} \quad (4.4)$$

Le carré de la pulsation propre de ce mode est enfin :

$$\omega_{flex,s,1}^2 = \frac{180 E I (m_l + 2 (m_m + \rho S L))}{90 L I_m (m_l + 2 (m_m + \rho S L)) + L^3 (9 m_l (5 m_m + \rho S L) + 8 \rho S L (6 m_m + \rho S L))} \quad (4.5)$$

En postulant un champ associé à la déformée statique d'une poutre encastrée avec effort en bout :

$$V_{s,1}(x) = a + \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \quad (4.6)$$

on obtient le quotient de Rayleigh suivant :

$$R(V_{s,1}) = \frac{EIL^3}{\rho S \left( a^2 L + \frac{1}{4} a L^4 + \frac{11}{420} L^7 \right) + \frac{1}{2} m_l a^2 + m_m \left( a + \frac{1}{3} L^3 \right)^2 + \frac{1}{4} I_m L^4} \quad (4.7)$$

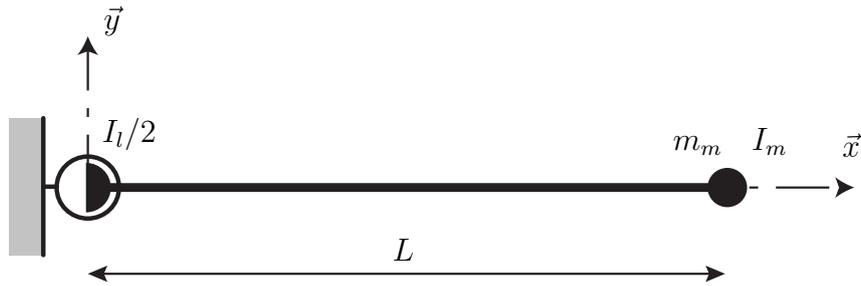
Le coefficient  $a$  qui minimise ce quotient est alors :

$$a = -\frac{\frac{2}{3} m_m L^3 + \frac{1}{4} \rho S L^4}{2 m_m + m_l + 2 \rho S L} \quad (4.8)$$

on obtient une estimation un peu différente du carré de la pulsation propre :

$$\omega_{flex,s,1}^2 = \frac{(3360 EI(m_l + 2(m_m + \rho S L)))}{1260 LI_m(m_l + 2(m_m + \rho S L)) + L^3(8 m_l(140 m_m + 33 \rho S L) + \rho S L(1088 m_m + 213 \rho S L))} \quad (4.9)$$

On procède de manière similaire pour l'étude du premier mode de flexion antisymétrique. On considère la moitié de la structure et le modèle associé à l'estimation de la fréquence propre de ce mode est proposé sur la figure 4.4. Étant donné que l'essai est réalisé en libre-libre et qu'on étudie un mode antisymétrique, le déplacement transversal est bloqué sur le plan de symétrie en  $x = 0$ . Le degré de liberté restant correspond donc à une rotation de corps rigide de la poutre autour de  $(O, \vec{z})$ .



**FIGURE 4.4:** Modèle analytique simplifié permettant l'estimation de la fréquence de résonance du premier mode de flexion antisymétrique

On postule comme champ cinématiquement admissible représentatif de ce mode la somme d'un mode rigide de rotation et d'un mode déformant la structure :

$$V_{a,1}(x) = ax + x^2 \quad (4.10)$$

En négligeant l'inertie des poutres, le quotient de Rayleigh est de la forme :

$$R(V_{a,1}) = \frac{\int_0^L EI(V_{a,1}''(x))^2 dx}{\int_0^L \rho S(V_{a,1}(x))^2 dx + \frac{1}{2} I_l(V_{a,1}'(0))^2 + m_m(V_{a,1}(L))^2 + I_m(V_{a,1}'(L))^2} \quad (4.11)$$

En fonction des données du problème, on obtient :

$$R(V_{a,1}) = \frac{4 E I L}{\frac{1}{2} a^2 I_l + I_m(a + 2L)^2 + L^2(a + L)^2 m_m + \frac{1}{3} a^2 L^3 S \rho + \frac{1}{2} a L^4 S \rho + \frac{1}{5} L^5 S \rho} \quad (4.12)$$

Le coefficient  $a$  qui minimise le quotient de Rayleigh est alors :

$$a = -\frac{3}{2} \frac{8 I_m L + 4 L^3 m_m + L^4 S \rho}{3 I_l + 6 I_m + 6 L^2 m_m + 2 L^3 S \rho} \quad (4.13)$$

Le carré de la pulsation propre de ce mode est enfin :

$$\omega_{flex,a,1}^2 = \frac{160 E I (3 I_l + 6 I_m + 2 L^2 (3 m_m + \rho S L))}{24 I_l (20 L I_m + L^3 (5 m_m + \rho S L)) + L^3 (L^3 S \rho (8 m_m + \rho S L) + 16 I_m (15 m_m + 8 \rho S L))} \quad (4.14)$$

En postulant un champ associé à la déformée statique d'une poutre encastree avec effort en bout :

$$V_{a,1}(x) = ax + \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6} \quad (4.15)$$

on obtient une estimation un peu différente du carré de la pulsation propre :

$$\omega_{flex,a,1}^2 = \frac{16800 E I (3 I_l + 6 I_m + 2 L^2 (3 m_m + \rho S L))}{120 I_l (315 L I_m + L^3 (140 m_m + 33 \rho S L)) + L^3 (600 I_m (14 m_m + 9 \rho S L) + L^3 S \rho (640 m_m + 99 \rho S L))} \quad (4.16)$$

On peut considérer également un champ de la forme  $a + f(x)$  où  $f(x)$  est la déformée statique d'une poutre sous un effort linéique ou linéaire. Ce champ permet de prendre en compte la masse linéique et l'inertie des poutres en plus de celles des masses.

Afin de déterminer la forme la plus pertinente du champ cinématiquement admissible, pour chacun des modes étudiés, ces calculs analytiques sont validés sur le cas de la géométrie imaginée (cf. Figure 4.2). Pour des valeurs données des différents paramètres du modèle, et pour chaque champ considéré, les fréquences propres sont comparées aux résultats de simulations menées sur un modèle éléments finis de poutre. Les résultats obtenus montrent que le champ de la forme  $V_{s,1}(x) = a + \frac{Lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}$  donne la plus basse fréquence du premier mode de flexion symétrique, alors que le champ de la forme  $V_{a,1}(x) = ax + x^2$  donne la meilleure estimation de la fréquence du premier mode de flexion antisymétrique.

### 4.3.2 Recherche du chargement optimal

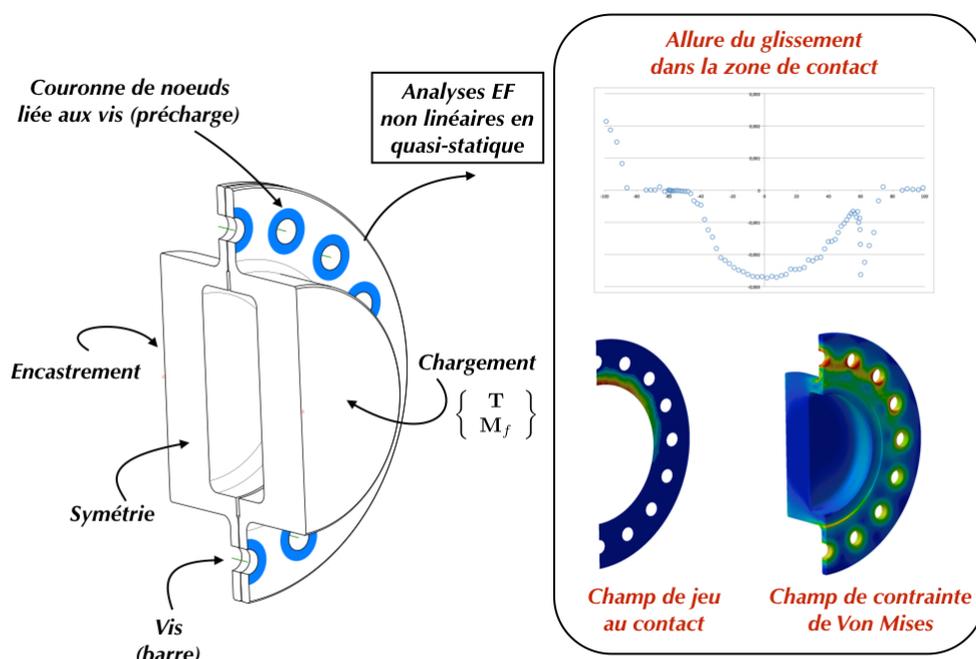
La seconde étape du dimensionnement du montage consiste à rechercher une géométrie optimale de l'assemblage et surtout de la liaison boulonnée permettant d'atteindre les objectifs de l'étude expérimentale. A cet effet, on commence par réaliser un modèle numérique non linéaire de la liaison, en considérant un contact avec frottement (cf. Figure 4.5). Ce type de modélisation a été effectué dans [Caignot 2009] lors du développement d'un outil de calcul permettant de prédire l'amortissement dans les structures spatiales.

La figure 4.5 montre les caractéristiques et conditions de l'analyse éléments finis non linéaire en quasi-statique du modèle de la liaison :

- pour le chargement en flexion, on considère la moitié de la structure en appliquant une condition de symétrie ;
- les vis hors du plan de symétrie sont modélisés par des éléments de type barre de section  $S$ , alors que les vis dans le plan de symétrie sont modélisés par des éléments de type poutre de section  $S/2$  ; les nœuds extrêmes des vis sont connectés à une couronne de nœuds sur une zone d'appui sous la tête de vis pour l'application de la précharge ;
- on réalise des maillages compatibles au niveau de la zone de contact des brides, et on considère que le frottement est régi par la loi de Coulomb ;
- sur les faces des brides qui seront en liaison avec les poutres, on applique un encastrement d'un côté et un torseur de l'autre.

Quand on évalue les efforts transmis à la liaison, on s'aperçoit que le moment le plus élevé au centre de la liaison est engendré par la déformation selon le premier mode de flexion symétrique. La liaison centrale est sollicitée en flexion pure pour ce mode. Néanmoins, afin d'avoir la possibilité d'étudier la variabilité liée aux conditions de liaison pour d'autres modes de vibration et types de déformation, on dimensionne la liaison dans le cas général de flexion simple, en se plaçant dans le cas extrême où les valeurs du moment de flexion et de l'effort tranchant dans la liaison sont les plus élevés. Le serrage des vis est effectué dans un calcul préliminaire en leur appliquant un champ de température permettant d'avoir une force de serrage correspondante à 80% de la limite élastique des vis. On se place dans ce cas de figure afin de garantir que la liaison dissipera de l'énergie pour des valeurs inférieures de précharge.

On commence l'analyse non linéaire de la structure par rechercher le niveau de chargement permettant d'avoir des glissements de l'ordre de  $5 \mu\text{m}$  et/ou des ouvertures de l'ordre de  $0.05 \text{ mm}$ . Les glissements peuvent avoir lieu aux différentes zones de contact, à savoir dans le plan de joint et dans les liaisons boulon-bride. Mais dans le cas présent, étant donné que la représentation des boulons est simplifiée, le dimensionnement est effectué avec des chargements générant des glissements dans le plan de joint uniquement.



**FIGURE 4.5:** Le modèle utilisé pour effectuer le dimensionnement de la liaison –  
Chargement final appliqué :  $T = 13000$  N et  $M_f = 6500$  N.m

Ensuite, on contrôle la tenue mécanique des brides en calculant le champ de contrainte de Von Mises. Si l'on constate que cette contrainte dépasse la limite élastique localement, alors on propose une nouvelle géométrie en modifiant les congés et les épaisseurs des brides. Puis on modifie les diamètres et longueurs des bras élastiques afin qu'ils puissent supporter les efforts transmis à la liaison tout en restant dans le domaine élastique.

### 4.3.3 Evaluation de l'effort à injecter

L'objectif de cette partie est d'estimer la réponse en fréquence de la structure lorsqu'elle est sollicitée par un pot vibrant en un point donné. Pour cela, il est nécessaire de postuler un ordre de grandeur de l'amortissement. On propose d'utiliser un amortissement modal maximal  $\zeta = 0.2\%$  pour tous les modes étudiés. Cette valeur nous permettra d'avoir une estimation de la valeur minimale de l'effort injectée par le pot nécessaire à transmettre un chargement donné à la liaison centrale.

Si l'on étudie la flexion d'une poutre d'Euler-Bernoulli dont on force la vibration par un effort  $f(x, t)$ , l'équation d'équilibre local que vérifie le déplacement vertical

$v(x, t)$  est :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + \rho S \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = f(x, t) \quad (4.17)$$

On cherche une solution décomposée dans la base modale :

$$v(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j(t) V_j(x) \quad (4.18)$$

En introduisant cette décomposition dans l'équation d'équilibre, en multipliant chaque membre par  $V_i(x)$  et en intégrant le long de la poutre, on obtient :

$$\int_0^L V_i(x) \left( \sum_{j=0}^{\infty} (q_j(t) EIV_j''(x))'' \right) dx + \int_0^L \rho S V_i(x) \left( \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{q}_j(t) V_j(x) \right) dx = \int_0^L V_i(x) f(x, t) dx \quad (4.19)$$

Le terme

$$Q_i(t) = \int_0^L V_i(x) f(x, t) dx \quad (4.20)$$

est appelé projection de la force imposée sur le mode  $i$ . Il représente la participation de l'effort imposé à l'excitation du mode  $i$ . Dans le cas où  $f(x, t)$  est un effort ponctuel de norme  $F(t)$  exercé au point  $x = x_0$ , on trouve :

$$Q_i(t) = \int_0^L V_i(x) f(x, t) dx = \int_0^L V_i(x) \delta(x - x_0) F(t) dx = V_i(x_0) F(t) \quad (4.21)$$

En intégrant deux fois par parties le premier terme de l'équation (4.19) et en utilisant les propriétés d'orthogonalité des modes, il reste :

$$M_i \ddot{q}_i(t) + K_i q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 0 \dots \infty \quad (4.22)$$

avec

$$M_i = \int_0^L \rho S V_i(x) V_i(x) dx \quad (4.23)$$

$$K_i = \int_0^L EIV_i''(x) V_i''(x) dx \quad (4.24)$$

La résolution du problème de vibrations forcées se ramène donc à la résolution d'un ensemble de systèmes scalaires à un degré de liberté indépendants. Lorsque la structure est amortie, par exemple dans le cas où le matériau utilisé est viscoélastique, et dans le cas d'un amortissement faible (coefficient d'amortissement visqueux  $C_i$ ), on trouve l'équation :

$$M_i \ddot{q}_i(t) + C_i \dot{q}_i(t) + K_i q_i(t) = Q_i(t), \quad i = 0 \dots \infty \quad (4.25)$$

Dans le cas d'une excitation ponctuelle harmonique  $F(t) = F e^{i\omega t}$ , l'amplitude  $q_i(t)$  associée au mode  $i$  est cherchée sous la forme  $q_i e^{i\omega t + \phi}$ . Cette amplitude doit donc vérifier :

$$(-\omega^2 M_i + i\omega C_i + K_i) q_i e^{i\phi} = F V_i(x_0), \quad i = 0 \dots \infty \quad (4.26)$$

Le module de l'amplitude est alors :

$$|q_i(\omega)| = \frac{F V_i(x_0)}{|-\omega^2 M_i + i\omega C_i + K_i|}, \quad i = 0 \dots \infty \quad (4.27)$$

Lorsque l'excitation se fait à la fréquence propre du mode  $i$ , alors :

$$|q_i(\omega_i)| = \frac{F V_i(x_0)}{\omega_i C_i}, \quad i = 0 \dots \infty \quad (4.28)$$

Si l'on introduit un amortissement modal  $\zeta_i$ , celui-ci vaut :

$$\zeta_i = \frac{C_i}{C_{i,c}} \quad (4.29)$$

où  $C_{i,c}$  désigne le taux d'amortissement critique (par analogie avec un système masse-ressort-amortisseur) :

$$C_{i,c} = 2 \sqrt{K_i M_i} = 2 M_i \omega_i \quad (4.30)$$

Ainsi, on trouve que :

$$C_i = 2 \zeta_i M_i \omega_i \quad (4.31)$$

Finalement, l'amplitude à la pulsation propre s'exprime, en fonction de l'amortissement modal  $\zeta_i$ , par :

$$|q_i(\omega_i)| = \frac{F V_i(x_0)}{2 \zeta_i K_i}, \quad i = 0 \dots \infty \quad (4.32)$$

Cette relation est bien évidemment indépendante du type de problème traité (flexion, traction, torsion) de sorte qu'il sera possible de trouver cette amplitude à la résonance dans tous les autres cas précédemment envisagés.

Dans le cas du premier mode de flexion symétrique et pour une excitation en  $x = L$  (au niveau d'une masse excentrée), l'amplitude des vibrations vaut :

$$|q(\omega_{flex,s,1})| = F \frac{4 m_l + 5 \rho S L}{8 \zeta E I (m_l + 2 m_m + 2 \rho S L)} \quad (4.33)$$

On obtient alors le moment fléchissant sur la poutre, à la résonance :

$$M_{fz,s,1}(x) = E I |q(\omega_{flex,s,1})| V_{s,1}''(x) = \frac{F(L-x)(4 m_l + 5 \rho S L)}{8 \zeta (m_l + 2 m_m + 2 \rho S L)} \quad (4.34)$$

Ce moment étant linéaire, l'effort tranchant sur la poutre est alors constant. Cependant, en considérant l'assemblage complet, il est important de noter que cet effort est transmis par les poutres de manière identique et dans le même sens sur les deux brides formant la liaison boulonnée centrale. Au centre de la liaison, seuls des efforts d'accélération, dus aux vibrations, orientés dans le même sens existent, et ne génèrent pas de cisaillement dans la liaison. Ainsi, pour ce mode de vibration, le déplacement relatif entre les brides est nul et la liaison est en flexion pure.

En  $x = 0$ , le moment dans la liaison est :

$$M_{fz,s,1}(0) = \frac{FL(4m_l + 5\rho SL)}{8\zeta(m_l + 2m_m + 2\rho SL)} \quad (4.35)$$

et l'amplitude de l'effort sinusoïdal à injecter par le pot au niveau d'une masse excentrée est :

$$F = \frac{M_{fz,s,1}(0) 8\zeta(m_l + 2m_m + 2\rho SL)}{L(4m_l + 5\rho SL)} \quad (4.36)$$

Dans le cas du premier mode de flexion antisymétrique et pour une excitation en  $x = L$  (vu que le déplacement est nul en  $x = 0$ ), l'amplitude des vibrations vaut :

$$|q(\omega_{flex,a,1})| = \frac{FL(6I_l - 12I_m + L^3S\rho)}{16EI\zeta(3I_l + 6I_m + 2L^2(3m_m + \rho SL))} \quad (4.37)$$

On obtient alors le moment fléchissant sur la poutre, à la résonance :

$$M_{fz,a,1}(x) = EI |q(\omega_{flex,a,1})| V''_{a,1}(x) = \frac{FL(6I_l - 12I_m + L^3S\rho)}{8\zeta(3I_l + 6I_m + 2L^2(3m_m + \rho SL))} \quad (4.38)$$

Le moment pour ce mode de vibration est constant, et la liaison est également en flexion pure. D'où l'amplitude de l'effort sinusoïdal à injecter par le pot au niveau d'une masse excentrée est :

$$F = \frac{M_{fz,a,1}(0) 8\zeta(3I_l + 6I_m + 2L^2(3m_m + \rho SL))}{L(6I_l - 12I_m + L^3S\rho)} \quad (4.39)$$

#### 4.3.4 Géométrie finale de la liaison

La démarche de dimensionnement de la structure en général, et de la géométrie de la liaison boulonnée en particulier, est itérative. Pour chaque mode d'intérêt que l'on souhaite étudier, une itération comporte les étapes élémentaires suivantes :

1. On recherche la forme du mode propre et la fréquence propre associée en fonction de la géométrie retenue et des masses additionnelles : cette étape est rapide puisqu'un modèle analytique a été réalisé ;

2. pour une forme de chargement de la liaison compatible avec la forme du mode étudié, on recherche l'amplitude du chargement conduisant à des ouvertures et des glissements locaux satisfaisants ; pour cela, une analyse éléments finis non linéaire (contact, frottement) est menée sur la bride en quasi-statique (cf. Figure 4.5) ; la tenue mécanique de la bride et du reste de la structure est également vérifiée à cette étape ;
3. pour une excitation à la fréquence de résonance, et pour un amortissement modal maximal  $\zeta = 0.2\%$ , on estime analytiquement le lien entre l'effort à injecter (point d'excitation situé à l'extrémité de l'assemblage) et l'amplitude du chargement dans la liaison : cette étape permet de vérifier que la valeur de l'effort à injecter pour obtenir le niveau de chargement souhaité est compatible avec le moyen expérimental. Si cela n'est pas le cas, on modifie la géométrie des poutres et/ou des masses pour augmenter le niveau de chargement dans la liaison en réduisant l'effort appliqué.

Cette étude de dimensionnement a permis de converger vers la géométrie de la liaison présentée sur la figure 4.6.

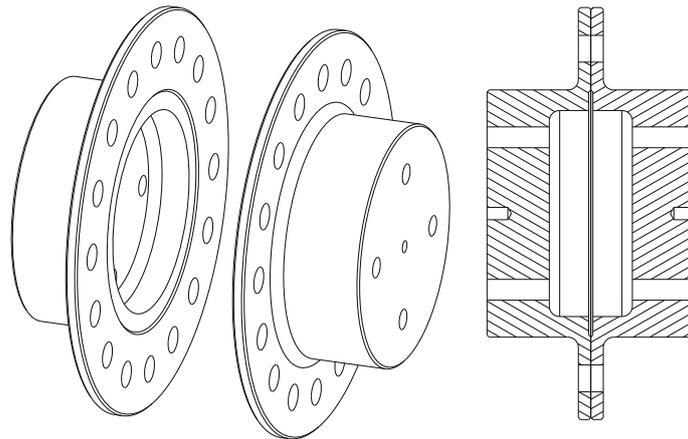


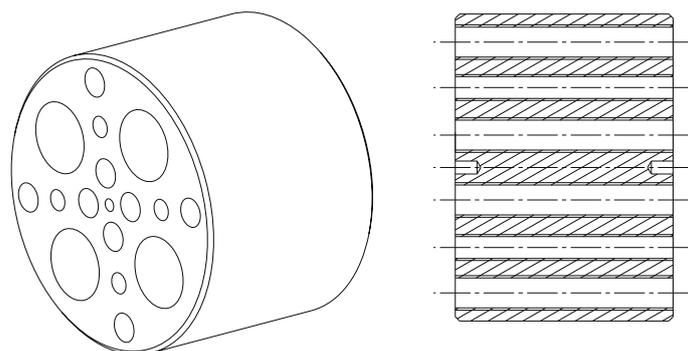
FIGURE 4.6: Géométrie finale de la liaison boulonnée à analyser

## 4.4 Identifications par analyse différentielle

Étant donné que le montage est constitué de plusieurs liaisons (cf. Figure 4.2), il est nécessaire de disposer d'un moyen permettant d'extraire les informations inhérentes à la liaison boulonnée d'intérêt. Une idée efficace est de concevoir une pièce non dissipative, qu'on qualifiera de « pièce de référence », ayant des caractéristiques similaires à celles de la liaison boulonnée. Ainsi, le remplacement de la liaison boulonnée centrale par un massif non dissipatif devrait permettre d'identifier les dissipations dans la liaison et les variations de la raideur de la liaison par analyse différentielle. On trouve dans [Le Loch 2003, Rouch *et al.* 2009, De Crevoisier *et al.*

2012, Cluzel *et al.* 2015] des applications de cette démarche pour identifier expérimentalement le frottement ou la dissipation dans différents composants et liaisons mécaniques.

La figure 4.7 présente la géométrie finale de la pièce de référence. L'assemblage contenant cette pièce au centre est par la suite qualifié d'« assemblage de référence ». Afin d'être non dissipatif, ce massif est très rigide avec une géométrie simple facile



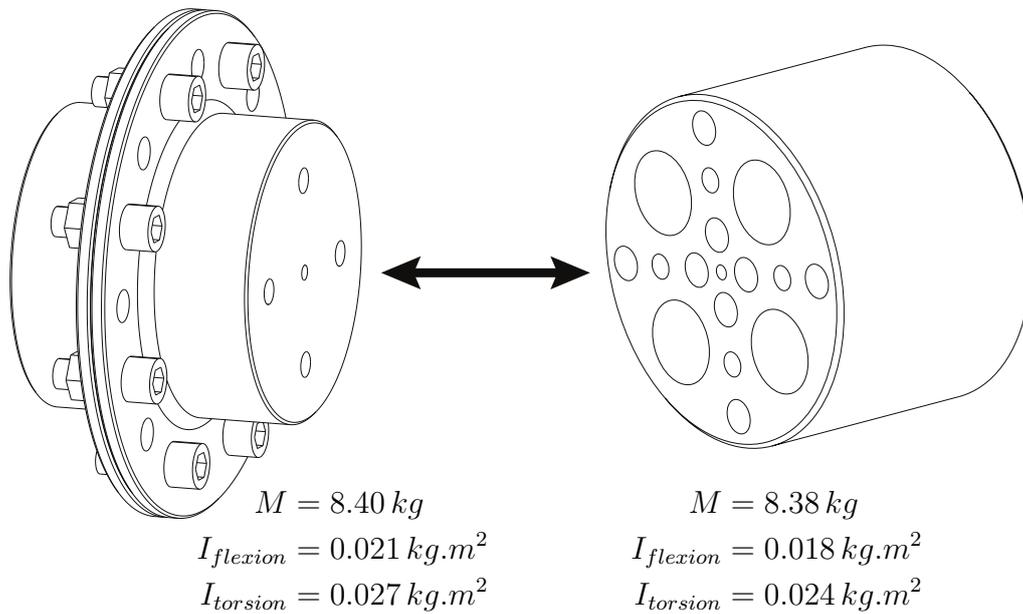
**FIGURE 4.7:** Géométrie de la pièce de référence non dissipative ayant des caractéristiques similaires à celles de la liaison boulonnée

à usiner. Un autre élément essentiel est d'avoir le même éloignement des masses excentrées et le même niveau de chargement au centre du montage dans les deux cas, ce qui fait que la pièce de référence a la même longueur que la liaison boulonnée. De plus, les interfaces de contact entre les poutres et la liaison boulonnée, et celles entre les poutres et la pièce monobloc doivent se comporter de la même manière, notamment en terme de dissipation. Pour cela, ces liaisons sont de géométries identiques, et les exigences de planéité et rugosité des surfaces de contact sont identiques aussi.

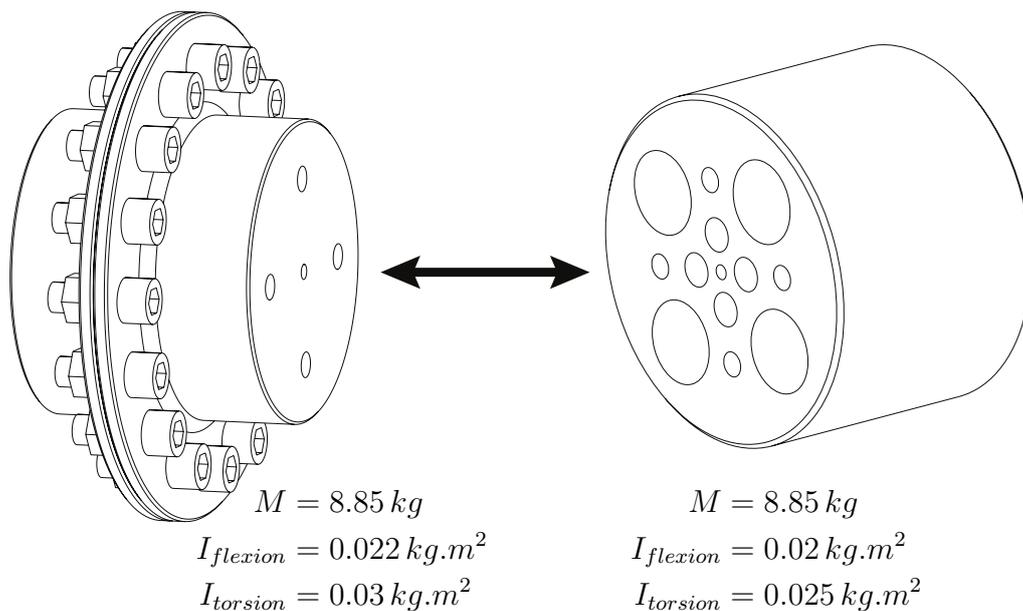
Un dernier point important est lié aux valeurs de masse et d'inertie de la pièce. Étant donné que le nombre de boulons serrés est un paramètre qui sera considéré lors de l'étude expérimentale, la pièce de référence a été conçue de manière à prendre en compte les deux configurations principales, à savoir lorsque 8 et 16 boulons sont serrés. La figure 4.8 présente les valeurs de masse et d'inertie de la pièce de référence et la liaison avec 8 boulons. Pour faciliter la prise en considération du cas où 16 boulons sont serrés, des trous taraudés permettent de modifier légèrement la masse et les inerties en y introduisant des vis sans tête de type M16 de part et d'autre de la pièce, comme l'illustre la figure 4.9.

## 4.5 Caractérisation de l'amortissement

L'amortissement d'un système physique est une tendance inhérente qui atténue, limite ou empêche ses oscillations. L'amortissement est causé par des phénomènes qui génèrent des dissipations et déperditions d'énergie telles que le frottement et



**FIGURE 4.8:** Caractéristiques de la pièce de référence et la liaison avec 8 boulons



**FIGURE 4.9:** Caractéristiques de la pièce de référence (avec des vis sans tête M16 dans les trous extrêmes) et la liaison avec 16 boulons

la nature des matériaux. Lorsque l'amortissement d'une structure est faible, sa répartition est presque toujours mal connue, et il est en général nécessaire de faire une hypothèse sur cette répartition. Étant donné que les techniques expérimentales d'identification de la dynamique des structures sont basées principalement sur l'analyse modale, on caractérise l'amortissement des structures par des coefficients

d'amortissement modaux  $\zeta_i$ . N'ayant, le plus souvent, aucune connaissance sur leur valeur, plusieurs méthodes existent afin de les identifier à partir de résultats expérimentaux. Dans ce qui suit, nous décrirons les deux méthodes employées pour évaluer la dissipation dans la liaison boulonnée d'intérêt (cf. [Figure 4.6](#)).

#### 4.5.1 Facteur de qualité

Une première approche pour caractériser expérimentalement la dissipation inhérente à une structure consiste à exploiter les taux d'amortissement modaux  $\zeta$  fournis par les logiciels d'analyse modale expérimentale. L'estimation de ces quantités se fait principalement à l'aide de la méthode de mesure à  $-3\text{ dB}$  [[Ewins 2000](#)]. Cela revient à considérer les pulsations  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  à  $-3\text{ dB}$  du maximum de l'amplitude de la fonction de transfert à la pulsation de résonance  $\Omega_r$ . Cela correspond à l'amplitude maximale divisée par  $\sqrt{2}$ . Le principe est illustré sur la figure [4.10](#). Les pulsations  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  sont également les extrema de la partie réelle de la fonction de transfert autour de la pulsation  $\Omega_r$ .

On utilise classiquement le facteur de qualité  $Q$  qui est le rapport entre la pulsation de résonance et la largeur de bande à  $-3\text{ dB}$  :

$$Q = \frac{\Omega_r}{\Delta\Omega} = \frac{\Omega_r}{\Omega_2 - \Omega_1} \quad (4.40)$$

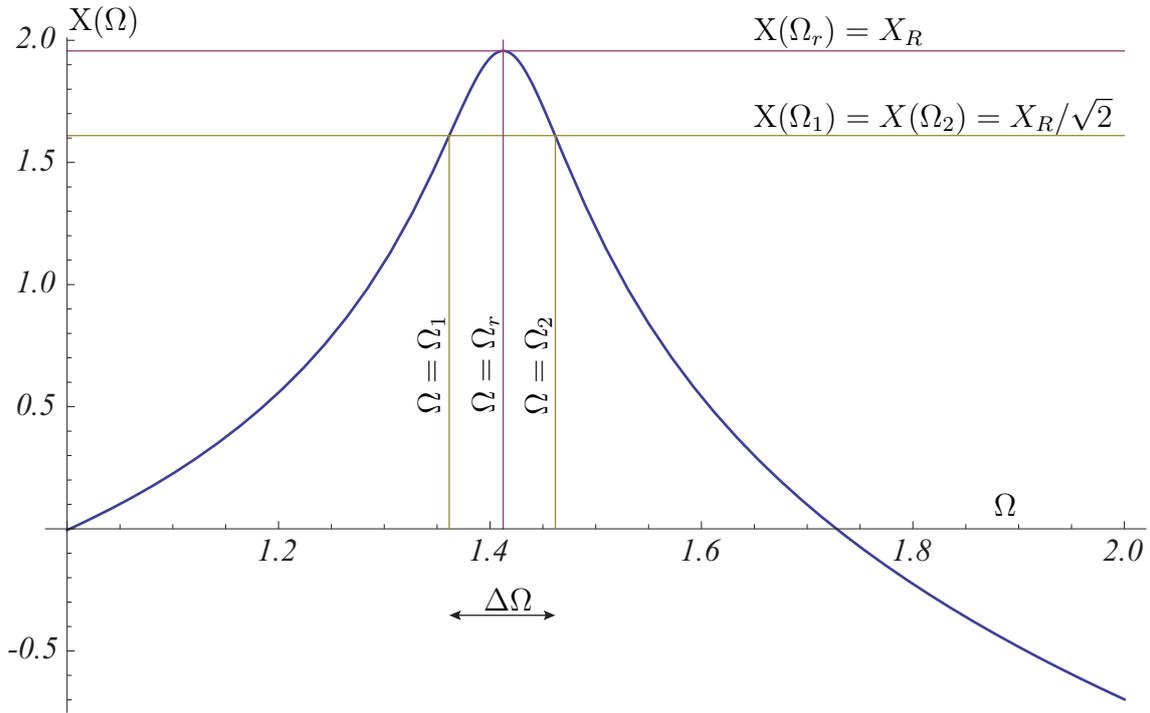
Initialement, le facteur de qualité est une grandeur sans dimension qui permet de qualifier la qualité d'un filtre. Plus la bande de fréquence sélectionnée par le filtre est fine, plus son facteur de qualité est grand. Il faut donc se placer dans le domaine fréquentiel pour estimer le facteur de qualité. Dans le cas où l'amortissement est faible, le coefficient d'amortissement modal  $\zeta$  peut être approché par :

$$\zeta \approx \frac{1}{2Q} \quad (4.41)$$

Cette mesure suppose que l'amortissement est constant en fonction de l'amplitude des vibrations dans la bande à  $-3\text{ dB}$ , ce qui la rend précise uniquement lorsque l'amortissement varie peu par rapport au niveau de charge. Malgré cela, c'est un outil pratique qui est disponible dans les logiciels d'analyse modale expérimentale.

#### 4.5.2 Capacité d'amortissement spécifique

Le coefficient d'absorption ou la capacité d'amortissement spécifique (*Specific Damping Capacity*) est une mesure de l'amortissement dans les structures pour une déformée donnée, par exemple une déformée modale. Cette méthode a été utilisée pour évaluer l'amortissement dans des structures en composite sandwich [[Adams et Maheri 1993](#), [Maheri et Adams 2003](#), [Maheri et al. 2008](#), [Rouch et al. 2009](#)] et dans



**FIGURE 4.10:** Illustration de la largeur de bande à  $-3 \text{ dB}$

les câbles électriques d'une structure satellite [Cluzel *et al.* 2015].

Le coefficient d'absorption  $\psi$  permet de caractériser la perte d'énergie sur un cycle vibratoire. Pour qu'il soit adimensionné, sur un cycle, l'énergie dissipée est divisée par l'énergie élastique maximale de la structure sur le mode de vibration :

$$\psi = \frac{W_d}{W_e} \quad (4.42)$$

En vibrations forcées, l'énergie dissipée  $W_d$  est calculée en sommant la puissance injectée dans la structure via le pot vibrant sur une période :

$$W_d = \int_0^T \vec{F} d\vec{u} = \int_0^T \vec{F} \cdot \vec{v} dt \quad (4.43)$$

Dans notre montage en particulier, l'énergie élastique  $W_e$  est majoritairement située au niveau des poutres élastiques reliant les masses et la liaison. Cette énergie est donc évaluée via la mesure de la déformation en différents points d'une poutre (montage symétrique) par l'intermédiaire de jauges de déformation. Par exemple, dans le cas d'un mode de flexion qui génère un moment de flexion  $M_{fz}$  dans chaque poutre, l'énergie élastique totale dans les deux poutres est donnée par la relation :

$$W_e = 2 \times \frac{1}{2EI} \int_0^L M_{fz}^2(x) dx \quad (4.44)$$

Le paragraphe 5.1 présentera une description détaillée des moyens de mesures employés et la démarche suivie pour mesurer cette énergie. Tout calcul fait, on trouve qu'à la résonance, le coefficient  $\psi$  peut être relié à l'amortissement modal  $\zeta$  par la relation suivante :

$$\psi = 4\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (4.45)$$

Lorsque l'amortissement est faible, on peut l'exprimer en fonction du facteur de qualité :

$$\psi \approx 4\pi\zeta \approx \frac{2\pi}{Q} \quad (4.46)$$

En utilisant cette méthode énergétique, on ne fait aucune hypothèse sur la variation de l'amortissement en fonction de l'amplitude des vibrations. Du coup, la mesure du coefficient d'absorption  $\psi$  permet de caractériser avec plus de précision l'amortissement de chaque mode propre pour un niveau quelconque de chargement dans la liaison.

# Chapitre 5

## Analyse expérimentale de l'influence des paramètres de liaison

*Ce chapitre présente les principaux résultats obtenus suite à une analyse modale expérimentale du banc d'essai dynamique. L'étude vibratoire de l'assemblage, menée sous forte charge en flexion pure, permet de décrire l'évolution de la dissipation dans une liaison boulonnée et sa raideur apparente en fonction des conditions de liaison.*

### Sommaire

---

<b>5.1 Instrumentation</b>	<b>94</b>
<b>5.2 Démarche expérimentale</b>	<b>98</b>
<b>5.3 Aléas expérimentaux</b>	<b>99</b>
<b>5.4 Analyse modale de l'assemblage</b>	<b>101</b>
5.4.1 Etude de l'assemblage avec liaison boulonnée	103
5.4.2 Etude de l'assemblage de référence	110
<b>5.5 Analyse différentielle de la liaison</b>	<b>111</b>
5.5.1 Evolution de la dissipation dans la liaison	111
5.5.2 Evolution de la raideur apparente de la liaison	113

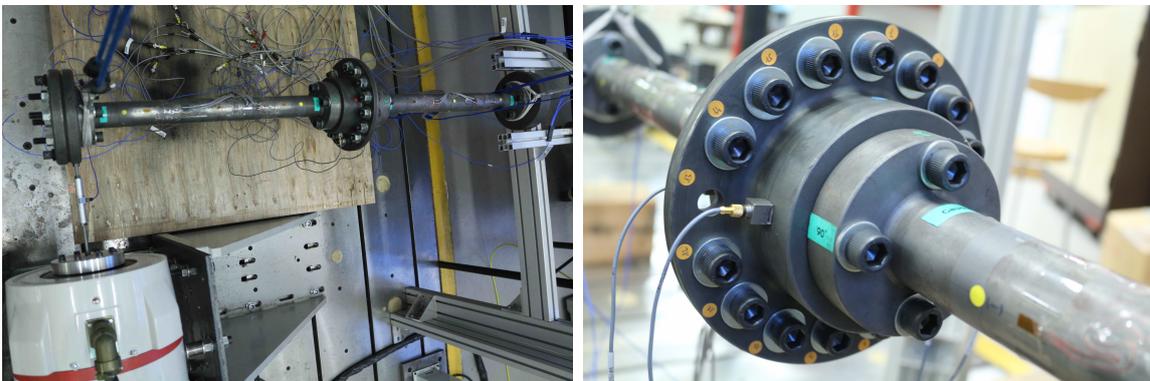
---

L'analyse modale expérimentale est bien connue et employée depuis des décennies en industrie mécanique, permettant d'évaluer la réponse d'une structure soumise à des chargements dynamiques [Ewins 2000]. Dans l'objectif d'affiner notre connaissance du comportement dynamique des assemblages boulonnés et d'améliorer la pertinence des modèles numériques, on se propose de quantifier, à l'aide d'analyses modales expérimentales, l'influence des paramètres associés à des liaisons boulonnées sur le comportement dynamique global. Suite à la conception et la fabrication du banc d'essai présenté dans le chapitre précédent, on décrit ici la démarche et les résultats de l'analyse modale expérimentale réalisée. Notre étude concerne les paramètres suivants :

- le type et le niveau de chargement de la liaison boulonnée ;
- la précharge des boulons liée au couple de serrage ;
- le nombre et la position des boulons effectivement serrés.

La figure 5.1a présente le montage final complet du banc d'essai, qui a été étudié en libre-libre. L'excitation a été réalisée par l'intermédiaire d'un pot vibrant pour pouvoir imposer un effort sinusoïdal à une fréquence précise maîtrisée.

La figure 5.1b montre la liaison boulonnée faisant l'objet de cette analyse modale expérimentale. Elle peut contenir jusqu'à 16 boulons de type M12.



(a) Banc d'essai dynamique étudié

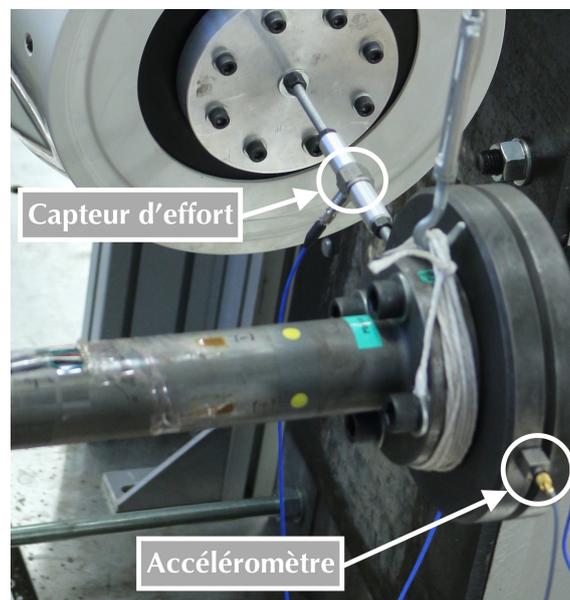
(b) Liaison boulonnée centrale d'intérêt

**FIGURE 5.1:** Montage final du banc d'essai et de la liaison boulonnée analysés

## 5.1 Instrumentation

On s'intéresse dans ce présent travail au premier mode de flexion de l'assemblage uniquement car il est associé à un facteur d'amplification dynamique élevé. De nombreux outils expérimentaux sont nécessaires afin de réaliser des mesures fines des grandeurs d'intérêt de cette étude. Des accéléromètres monoaxes et triaxes ont été placés sur les différentes sous-structures afin de mesurer les fonctions de réponse en

fréquence de l'assemblage et déterminer ses fréquences et modes propres. Afin de mesurer l'énergie injectée par le pot vibrant, un accéléromètre monoaxe, disposé au droit de l'excitateur, permet par intégration d'obtenir la vitesse recherchée  $\vec{v}$  (voir la relation (4.43)). Le pot vibrant étant placé radialement à une extrémité du montage pour l'excitation des modes de flexion, la direction de l'effort injecté  $\vec{F}$  est connue et son intensité est mesurée via un capteur d'effort situé sur la tige de l'excitateur, comme présenté sur la figure 5.2. Une tige filetée zinguée de type M6 a été utilisée pour assurer une liaison rigide entre l'assemblage (au niveau d'une masse extrême) et le pot. Deux pièces de raccord particulières ont été usinées pour pouvoir visser le capteur d'effort de type 10-32 UNF à la tige.



**FIGURE 5.2:** Éléments utilisés pour mesurer l'énergie injectée par le pot vibrant

Étant donné que l'on souhaite faire varier le niveau de chargement imposé à la liaison, il est nécessaire de disposer d'un moyen pour le mesurer avec précision. Dans le cas de notre montage, l'énergie élastique est majoritairement située au niveau des poutres élastiques reliant les masses et la liaison. En effet, un calcul éléments finis sur une des deux brides, sollicitée par un moment de flexion  $M = 1000 \text{ N.m}$  conduit à une énergie de déformation de  $1.6 \times 10^{-2} \text{ J}$ , alors que le calcul de l'énergie de déformation dans la poutre est égale à  $1.75 \text{ J}$ , soit 100 fois plus grande. Quand on se place dans le cadre d'un mode de flexion, cette énergie est calculée via la donnée du moment fléchissant en différents points d'une poutre (voir la relation (4.44)).

La forme générale exacte d'un mode de flexion  $V(x)$  d'une poutre est donnée dans [Géradin et Rixen 2014] par :

$$V(x) = A \cos(\beta x) + B \sin(\beta x) + C \cosh(\beta x) + D \sinh(\beta x), \quad \beta^4 = \omega^2 \frac{\rho S}{EI} \quad (5.1)$$

où  $\omega$  est la pulsation propre, et  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , et  $D$  sont des constantes réelles calculées à partir des conditions aux limites. Pour la géométrie et les matériaux considérés, la forme du moment fléchissant correspondant au premier mode de flexion symétrique est très proche d'une fonction linéaire. Cela rejoint les résultats obtenus pour ce mode sur le modèle analytique (cf. paragraphe 4.3.3), étant donné que les forces d'inertie réparties sur les poutres sont vraiment négligeables en comparaison avec les forces d'inertie associées aux masses excentrées et à la partie centrale qui ont une grande amplitude de vibration. Ainsi, ce moment de flexion peut être estimé sur toute la poutre avec une bonne précision s'il est estimé en deux points particuliers. Pour cela, des jauges montées en deux demi-ponts sur chaque poutre permettent d'accéder à la courbure en deux points. Après une calibration statique, ces informations permettent d'accéder au moment fléchissant en ces deux points et donc au moment sur toute la poutre puisque sa forme est connue. Cela permet de calculer l'énergie élastique  $W_e$  puis d'évaluer le coefficient d'absorption  $\psi$ . Pour une question de simplicité, la forme du moment est considérée linéaire ce qui induit une erreur sur l'estimation de cette énergie élastique inférieure à 2 %.



(a) Jauges collées dans les deux plans de symétrie (b) Jauges collées à  $0^\circ$  sur la poutre droite

**FIGURE 5.3:** Implantation des jauges de déformation sur les bras élastiques

Comme le montre la figure 5.3, les jauges, de type CEA-06-250 UN-120, ont été collées dans les deux plans de symétrie de l'assemblage afin de pouvoir mesurer les déformations dans ces plans. Pour permettre de bien estimer le moment de flexion, ces jauges doivent être placées là où le moment fléchissant est important, donc à proximité des encastremets. Elles ont été donc placées à une distance égale à 2 fois le diamètre des extrémités des parties utiles des poutres. La figure 5.4 montre le montage des jauges en 4 demi-ponts sur chaque poutre (jauges D1, D2, G1 et G2 à  $(0^\circ, 180^\circ)$  et  $(90^\circ, 270^\circ)$ ), formés de 2 jauges chacun, permettant de mesurer la déformation en surface liée à la flexion. L'installation de 2 demi-ponts sur chaque poutre a pour but de vérifier que l'assemblage est sollicité uniquement dans le plan d'excitation et que la répartition des efforts est identique sur chaque poutre.

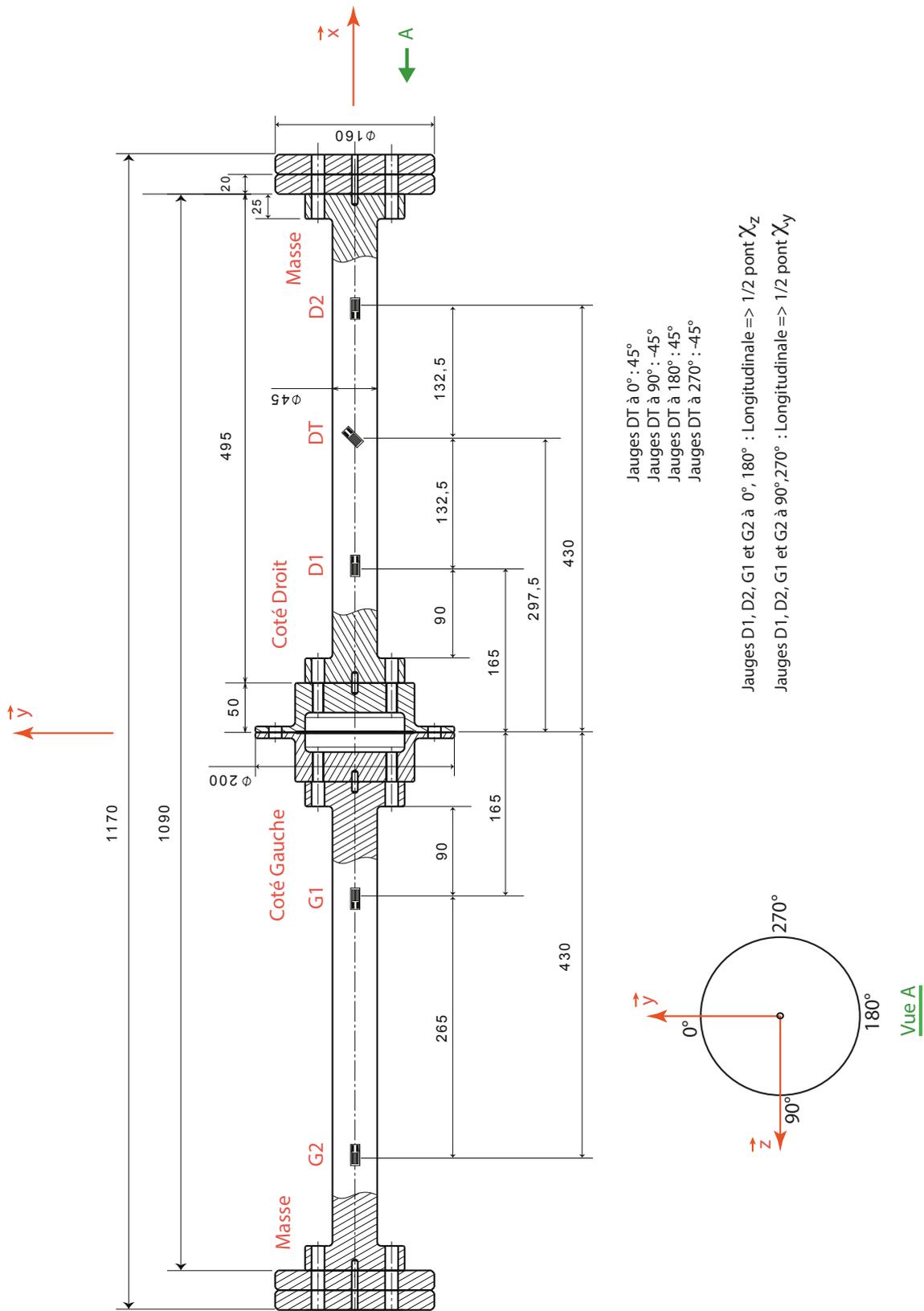


FIGURE 5.4: Position et orientation des 20 jauges implantées sur l'assemblage

La sollicitation de la liaison en cisaillement n'a pas été menée dans le cadre du présent travail mais est envisagée dans un second temps. Par conséquent, un montage en pont complet formé de 4 jauges (jauges DT à  $(0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ)$ ) a été réalisé au milieu de la poutre droite permettant de mesurer la déformation liée à la torsion et d'estimer l'énergie élastique de torsion (cf. figure 5.4).

## 5.2 Démarche expérimentale

L'étude de chaque configuration du montage est divisée en trois phases. Tout d'abord, il est essentiel d'effectuer une analyse modale de l'assemblage qui permet de mesurer les fonctions de réponse en fréquence en différents points d'acquisition. On détermine alors les fréquences propres de la structure et l'allure des modes propres jusqu'à environ 1000 Hz, surtout la fréquence propre du mode d'intérêt, à savoir le premier mode de flexion symétrique. Les modes sont mesurés sur le montage d'abord avec un marteau de choc à très faible niveau d'amplitude, puis au pot vibrant avec un bruit blanc, donc à faible niveau de charge. Ces mesures sont effectuées à l'aide des applications « *Impact Testing* » et « *MIMO FRF Testing* » du logiciel LMS Test.Lab respectivement.

La seconde phase consiste à réaliser un balayage en sinus autour de la fréquence d'intérêt ( $\pm 0.5$  Hz). Pendant ce balayage, l'effort injecté par le pot vibrant est modulé automatiquement afin de maintenir le moment dans la liaison à un niveau constant souhaité. Pour le cas d'une déformation de flexion, la valeur du moment dans la liaison est obtenue par la mesure de la déformation  $\varepsilon(x)$  en surface en deux points  $x_1$  et  $x_2$  d'une poutre, comme expliqué dans le paragraphe 5.1 :

$$M_f(x_1) = \frac{2EI}{D} \varepsilon(x_1) \quad (5.2)$$

$$M_f(x_2) = \frac{2EI}{D} \varepsilon(x_2) \quad (5.3)$$

$$M_f(x) = \frac{M_f(x_2) - M_f(x_1)}{x_2 - x_1} x + \frac{M_f(x_1) x_2 - M_f(x_2) x_1}{x_2 - x_1} \quad (5.4)$$

avec  $D = 0.045$  m,  $I = \pi D^4 / 64$  m<sup>4</sup> et  $E = 2.1 \times 10^{11}$  Pa.

Cette étape permet d'obtenir :

- le lien entre le moment souhaité et l'amplitude de l'effort injecté ;
- la fréquence de résonance pour le moment qui est imposé ;
- le facteur de qualité associé à cette fréquence.

La dernière phase consiste à imposer, pour un niveau de moment donné, un effort sinusoïdal à la fréquence de résonance précédemment mesurée. Cette excitation se fait à la fréquence de résonance afin :

- de considérer les bonnes valeurs de l'effort injecté et de la vitesse lors du calcul de l'énergie dissipée (selon la relation (4.43)) ;

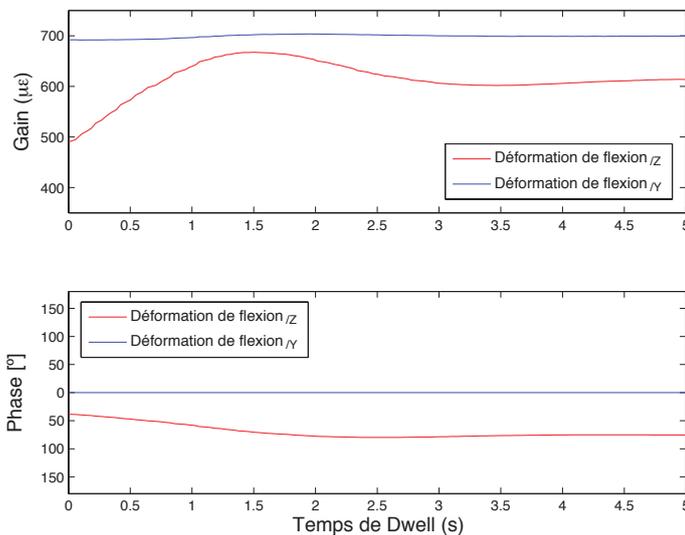
- d’avoir une déformée modale, permettant de déterminer, via le modèle analytique simplifié, la nature de l’évolution du moment de flexion dans les poutres, nécessaire au calcul de l’énergie élastique (selon la relation (4.44)).

Durant cet essai (ou *Dwell*) d’excitation à la fréquence de résonance, les évolutions temporelles de l’effort injecté, de l’accélération au point d’excitation et des déformations sont mesurées. Le post-traitement de ces signaux, l’extraction des grandeurs nécessaires au calcul des énergies, et l’évaluation du coefficient d’absorption  $\psi$  pour chaque niveau de chargement (cf. paragraphe 4.5.2) sont réalisés sur MATLAB.

Les deux dernières étapes sont réalisées dans l’application « *Tracked Sine Dwell* » du logiciel LMS Test.Lab, pour chaque valeur de moment souhaitée et pour chaque configuration testée.

### 5.3 Aléas expérimentaux

Lors de tout travail expérimental, plusieurs difficultés sont rencontrées et la recherche d’outils permettant de les surmonter s’avère toujours enrichissante. Dans cette section, on s’arrête brièvement sur deux aléas importants qui ont eu une conséquence directe sur les résultats de l’étude.



(a) Diagramme de Bode montrant l’évolution des déformations de flexion durant un essai *Dwell*



(b) Masse rectangulaire utilisée

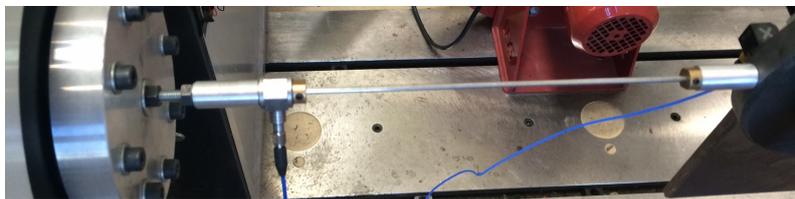
**FIGURE 5.5:** Difficulté liée aux modes doubles du montage et solution proposée pour écarter leurs fréquences propres

Une première difficulté rencontrée était liée à la symétrie de l'assemblage. Au fait que l'excitation dans une direction donnée n'est jamais parfaite vient s'ajouter le fait que le premier mode de flexion symétrique est un mode double. Les fréquences de résonance des vibrations dans les deux plans de symétrie sont ainsi très voisines. En sollicitant la structure à la fréquence de résonance dans la direction  $\vec{z}$ , on génère des déformations très significatives dans la direction  $\vec{y}$  également.

La figure 5.5a montre l'évolution des déformations de flexion selon les directions  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  durant un essai *Dwell* d'excitation à la fréquence de résonance. Le rapport entre les amplitudes maximales des déformations des poutres est égale à 94.85 %. Cela signifie que la liaison boulonnée d'intérêt est sollicitée fortement dans les directions  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ .

Afin de pouvoir maîtriser l'orientation et le calcul de l'énergie dissipée dans la structure, on conçoit deux masses de section rectangulaire ayant la même masse que les masses de section circulaire, et la même inertie selon l'axe d'excitation. Des analyses modales réalisées sur un modèle numérique permettent de converger vers la géométrie présentée sur la figure 5.5b. Suite au montage de ces masses, le rapport entre les amplitudes maximales des déformations de flexion dans les directions  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$  devient égal à 1.38 %. Les dissipations causées par les vibrations dans la direction  $\vec{y}$  sont alors considérées négligeables.

Un autre aléa est lié à la liaison entre la structure et le pot vibrant. Puisque l'assemblage sera soumis à de fortes charges, l'amplitude des vibrations pourra atteindre quelques mm, ce qui fait qu'une liaison collée ne peut être envisagée. On réalise alors une liaison rigide par tige filetée et contre-écrou. Cependant, l'observation du signal du capteur d'effort permet de déduire que cette solution n'est pas parfaitement adaptée à notre cas d'étude. En effet, en vibrant selon le premier mode de flexion symétrique, les masses extrêmes tournent autour de l'axe orthogonal à leur axe principal. La rotation de la masse liée rigidement au pot met la tige en flexion et génère du cisaillement dans le capteur d'effort et produit du bruit dans son signal.



**FIGURE 5.6:** Liaison souple permettant d'avoir davantage de liberté de rotation des masses excentrées

La solution apportée consiste à remplacer la liaison rigide de la figure 5.2 par une liaison plus souple, sauf dans la direction d'excitation, qui permet aux masses d'avoir plus de liberté de rotation. Malgré cette modification, le signal de l'effort

utilisé dans le calcul de l'énergie dissipée reste un peu bruité. Afin d'améliorer sa qualité, on lui applique un filtre passe-bande autour de la fréquence de résonance lors du post-traitement.

## 5.4 Analyse modale de l'assemblage

L'assemblage est monté par des sangles élastiques sur un portique en aluminium, de manière à limiter les dissipations au sein de liaisons avec le bâti. Un couple de serrage de 110  $N.m$  est appliqué aux boulons reliant les poutres et les masses, ainsi que les poutres et la partie centrale. Cette valeur est raisonnable pour les vis M12 ( $d=12$  mm) de qualité 12.9 utilisées. En effet, la contrainte de Von Mises dans la vis est donnée par la contrainte normale et par la contrainte de cisaillement due à la torsion :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \quad (5.5)$$

avec :

$$\sigma = \frac{4F_0}{\pi d^2} \quad \text{et} \quad \tau = \frac{32C_0}{\pi d^4} \frac{d}{2} = \frac{16C_0}{\pi d^3} \quad (5.6)$$

et

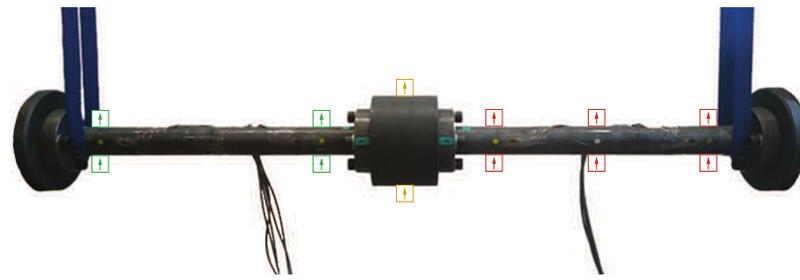
$$F_0 = \frac{C_0}{0.16p + \mu_1 0.582d_2 + \mu_2 r_m} \quad (5.7)$$

où :  $d = 12$  mm,  $p = 1.75$  mm,  $d_2 = d - 0.6495p = 10.86$  mm et  $r_m = 7.5$  mm. Pour simplifier, on considère que  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ . Ainsi, pour un coefficient de frottement minimal de  $\mu = 0.1$ , un couple de  $C_0 = 110$   $N.m$  conduit à une précharge  $F_0 = 66000$  N et à  $\sigma_{VM} = 810$  MPa, soit 0.75 fois la limite élastique des vis utilisées :  $\sigma_e = 12 \times 9 \times 10 = 1080$  MPa. Ce serrage important, associé à une surépaisseur des flans, permet de limiter les glissements et ouvertures dans ces liaisons. De plus, pour éviter une perte de raideur des liaisons poutre-masse causée par le déserrage des boulons, du freinfillet fort a été appliqué lors de leur serrage.

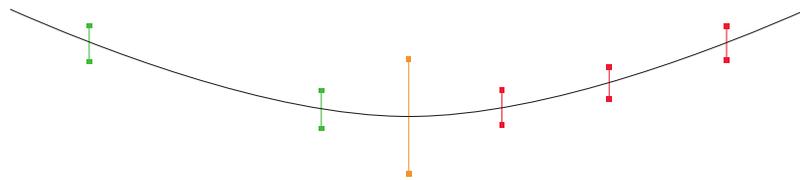
On commence par exciter l'assemblage de référence avec un marteau de choc afin de valider les valeurs des fréquences propres et l'allure des modes propres obtenues sur le modèle numérique. La figure 5.7 présente l'allure des 4 premiers modes de flexion de l'assemblage.

Ensuite, la réponse forcée de l'assemblage de référence à une excitation dans le plan horizontal de type bruit blanc est étudiée. La figure 5.8 présente la fonction de réponse en fréquence de la structure sur la bande de fréquence [0 – 1024] Hz, avec une fréquence d'échantillonnage de 8192 Hz. Un moyennage sur 10 acquisitions a été réalisé et un fenêtrage de type Hann a été utilisé.

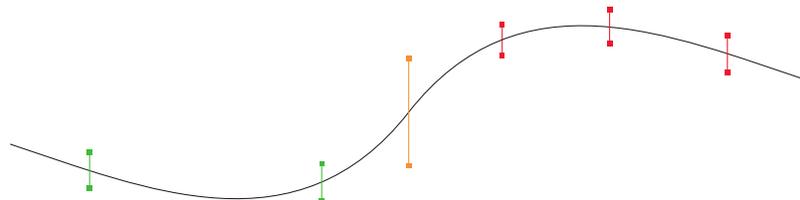
Pour les modes de flexion et dans l'ordre des fréquences propres croissantes, on trouve :



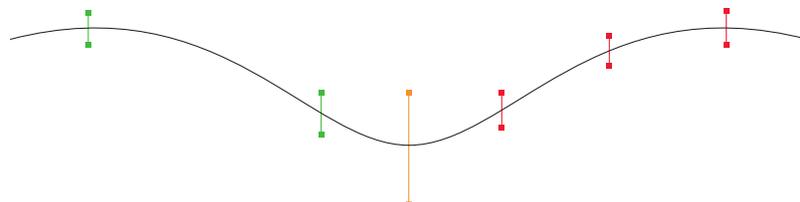
(a) Positions des points d'excitation avec un marteau de choc



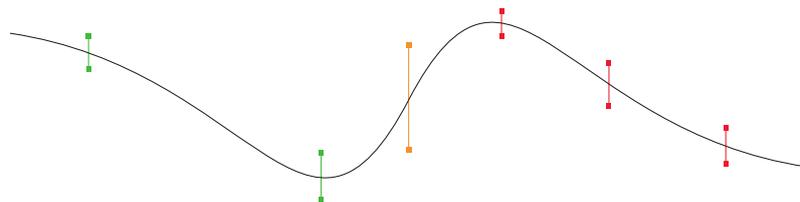
(b) Allure du mode de flexion 1 symétrique



(c) Allure du mode de flexion 1 antisymétrique



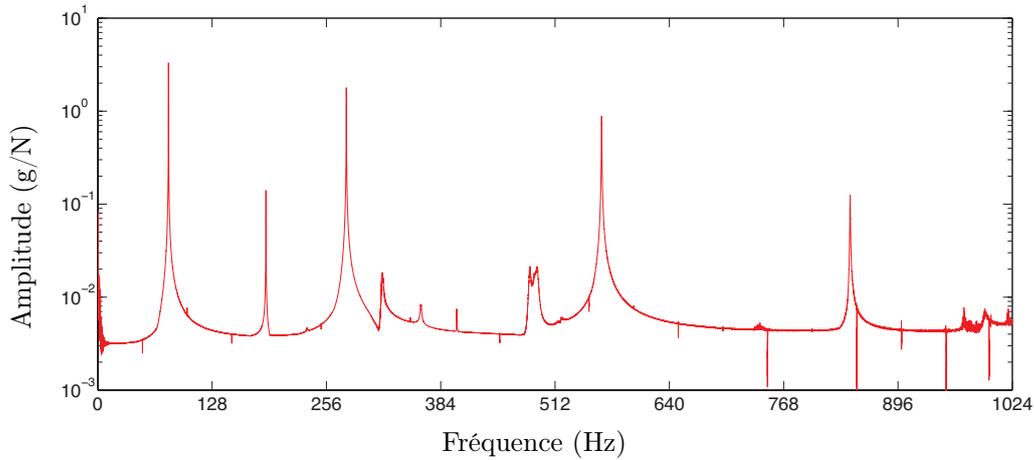
(d) Allure du mode de flexion 2 symétrique



(e) Allure du mode de flexion 2 antisymétrique

**FIGURE 5.7:** La forme des 4 premiers modes propres de flexion du montage : projection sur l'axe

- Mode de flexion 1 symétrique :  $f_1 = 79.1 \text{ Hz}$  -  $\zeta_1 = 0.008\%$
- Mode de flexion 1 antisymétrique :  $f_2 = 278.3 \text{ Hz}$  -  $\zeta_2 = 0.019\%$
- Mode de flexion 2 symétrique :  $f_3 = 564.1 \text{ Hz}$  -  $\zeta_3 = 0.03\%$



**FIGURE 5.8:** Fonction de réponse en fréquence obtenue à partir d'une excitation de type bruit blanc sur l'assemblage de référence

— Mode de flexion 2 antisymétrique :  $f_4 = 842.4 \text{ Hz} - \zeta_4 = 0.029\%$

Ces valeurs de fréquences sont du même ordre que celles prédites par le modèle numérique, tout en étant inférieures de quelques Hz.

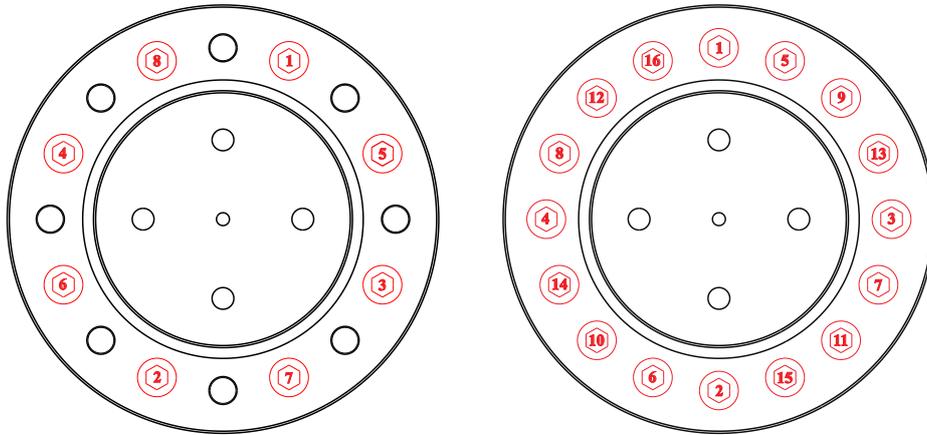
#### 5.4.1 Etude de l'assemblage avec liaison boulonnée

Les différentes configurations de liaison qui ont été testées sur le premier mode de flexion symétrique sont :

- 8 boulons serrés à  $70 \text{ N.m}$  ;
- 8 boulons serrés à  $40 \text{ N.m}$  ;
- 16 boulons serrés à  $70 \text{ N.m}$  ;
- 16 boulons serrés à  $40 \text{ N.m}$ .

Avant chaque essai, tous les boulons de la liaison centrale étaient démontés puis serrés de nouveau en diagonale à la clé dynamométrique. Cela est un moyen de garantir d'avoir des conditions initiales pour chaque essai assez proche. La figure 5.9 illustre l'ordre de serrage des boulons qui a été adopté pour tous les essais effectués.

On cherche à se mettre dans deux configurations de serrage distinctes, en considérant les valeurs de  $70 \text{ N.m}$  et  $40 \text{ N.m}$ . La limite élastique des vis M12 ( $d = 12 \text{ mm}$ ) de qualité 12.9 utilisées est :  $\sigma_e = 12 \times 9 \times 10 = 1080 \text{ MPa}$ . D'après les relations 5.5, 5.6 et 5.7, pour un coefficient de frottement minimal de  $\mu = 0.1$ , un couple de  $C_0 = 70 \text{ N.m}$  conduit à une précharge  $F_0 = 42000 \text{ N}$  et à  $\sigma_{VM} = 515 \text{ MPa}$ , soit 0.5 fois la limite élastique des vis. Pour un couple de serrage  $C_0 = 40 \text{ N.m}$  avec  $\mu = 0.1$ , on trouve une précharge  $F_0 = 24000 \text{ N}$  et une contrainte de Von Mises  $\sigma_{VM} = 295 \text{ MPa}$ , soit 0.3 fois la limite élastique des vis utilisées.

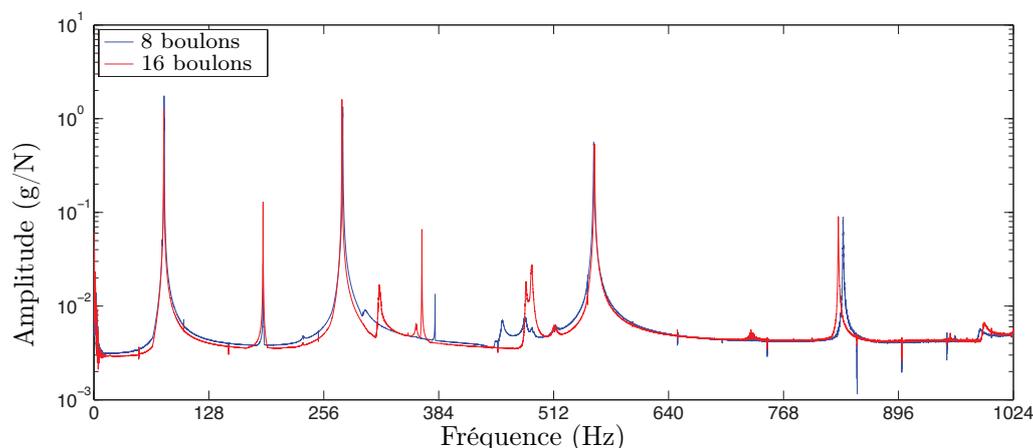
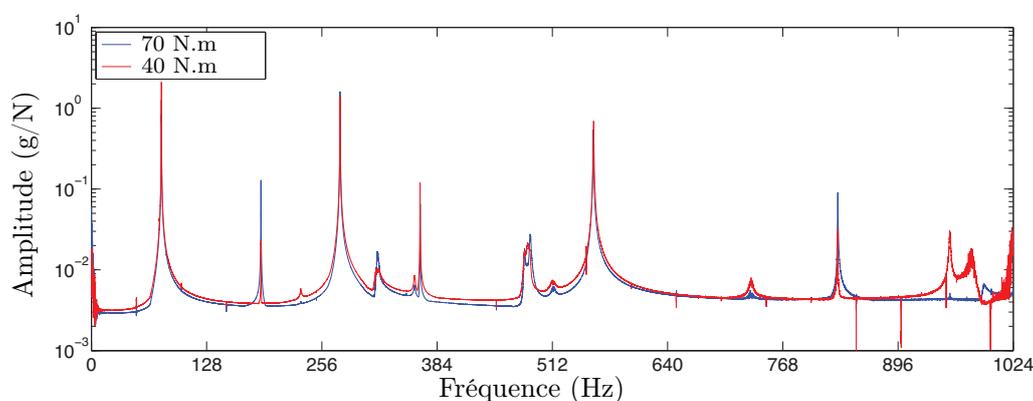


**FIGURE 5.9:** Illustration de l'ordre de serrage des boulons adopté pour les essais avec 8 et 16 boulons

On commence par étudier la réponse forcée de l'assemblage avec liaison boulonnée à une excitation dans le plan horizontal de type bruit blanc. La figure 5.10 présente les fonctions de réponse en fréquence de la structure, sur la bande de fréquence  $[0 - 1024]$  Hz, dans différentes configurations. On constate que, à faible niveau de charge, le nombre de boulons serrés a le plus d'impact sur la réponse dynamique du système. Ce résultat est dû à la variation de raideur et de masse qu'apporte la variation du nombre de boulons serrés. A ce niveau de chargement, et pour les basses fréquences, le couple de serrage n'a pas d'influence notable visible sur les valeurs des fréquences propres et amortissements modaux (voir tableau 5.1).

La figure 5.11 présente les évolutions du coefficient d'absorption  $\psi$  en fonction du niveau de chargement, pour l'ensemble des configurations de liaison testées. Les deux courbes correspondent aux valeurs de  $\psi$  calculées par la méthode à  $-3$  dB, à partir de la valeur du facteur de qualité donné par le logiciel, et par le rapport entre l'énergie dissipée et l'énergie élastique sur un cycle (cf. paragraphe 4.5.2). Le moment de flexion dans la partie centrale varie de  $250$  N.m à  $2250$  N.m. Même si la pièce de référence et la liaison peuvent supporter des charges supérieures à  $2250$  N.m, les poutres risquent de ne plus se comporter de manière élastique.

Ces valeurs de moment sont qualifiées de « fortes charges » pour plusieurs raisons. Une première raison provient de la réponse de l'assemblage à l'excitation de type bruit blanc réalisée. Le relevé temporel sur les jauges de déformation a montré une déformation axiale maximale de  $\varepsilon = 2.3 \times 10^{-6}$  ce qui fait un moment fléchissant  $M_f = 4.3$  N.m au droit de la section de mesure. En supposant que cette déformation est liée au premier mode de flexion, le modèle de moment linéaire (voir paragraphe 5.1) permet de remonter à un moment  $M_{fc} = 6.7$  N.m dans la liaison boulonnée. Il est clair ainsi qu'une excitation de type bruit blanc classique ne

(a) 8 et 16 boulons serrés à 70  $N.m$ (b) 16 boulons serrés à 70  $N.m$  puis 40  $N.m$ 

**FIGURE 5.10:** Fonctions de réponse en fréquence obtenues à partir d'une excitation de type bruit blanc sur l'assemblage dans différentes configurations

permettra pas d'atteindre les niveaux atteints en travaillant à la résonance sur un mode.

Ensuite, on cherche à chiffrer les variations d'efforts dans les éléments de fixation, en écrivant la relation 5.7 entre le couple de serrage et la tension dans la vis, pour des vis de type M12. Un calcul éléments finis réalisé sur une bride permet d'estimer la variation des efforts dans chaque vis en fonction du moment appliqué à la liaison. On considère que les coefficients de frottement sous tête et dans les filets sont égaux à  $\mu = 0.1$  ou à  $\mu = 0.2$ , avec un moment de 2500  $N.m$  dans la liaison. Dans ces deux cas, et pour les couples de serrage de 70  $N.m$  et 40  $N.m$ , les variations des efforts, au niveau de la vis la plus chargée, peuvent atteindre des valeurs supérieures à 10 %.

Une dernière raison résulte de l'observation de la variation de pression de contact entre la configuration préchargée et la configuration chargée par le moment  $M$ . Pour cela, on calcule l'intégrale de la pression de contact dans les zones  $z > 0$  puis  $z < 0$  dans la configuration préchargée et dans la configuration chargée par un moment

**TABLE 5.1:** Valeurs des fréquences de résonance et amortissements modaux pour les différentes configurations de liaison testées**8 boulons**

Serrage à 70 $N.m$	Serrage à 40 $N.m$
$f_1 = 78.1 \text{ Hz} - \zeta_1 = 0.054\%$	$f_1 = 78.2 \text{ Hz} - \zeta_1 = 0.032\%$
$f_2 = 277.1 \text{ Hz} - \zeta_2 = 0.032\%$	$f_2 = 277.0 \text{ Hz} - \zeta_2 = 0.033\%$
$f_3 = 557.7 \text{ Hz} - \zeta_3 = 0.045\%$	$f_3 = 557.9 \text{ Hz} - \zeta_3 = 0.044\%$
$f_4 = 834.3 \text{ Hz} - \zeta_4 = 0.027\%$	$f_4 = 834.2 \text{ Hz} - \zeta_4 = 0.028\%$

**16 boulons**

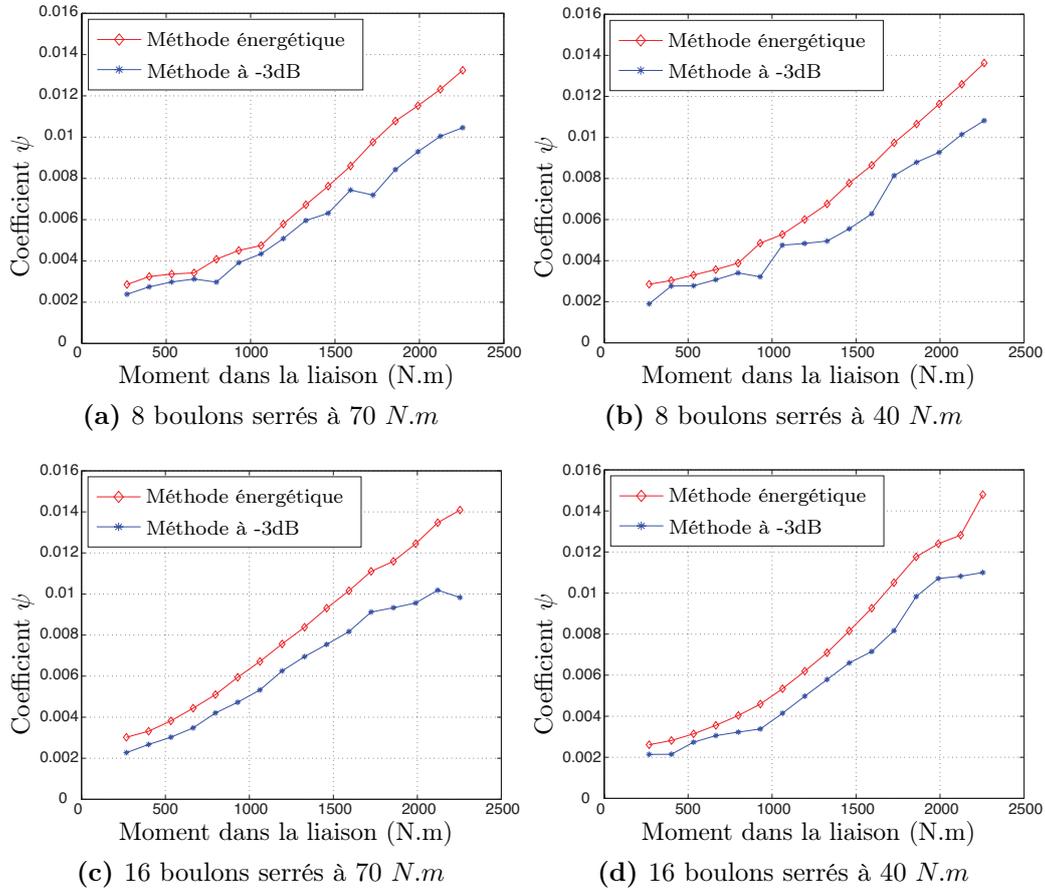
Serrage à 70 $N.m$	Serrage à 40 $N.m$
$f_1 = 77.7 \text{ Hz} - \zeta_1 = 0.026\%$	$f_1 = 77.7 \text{ Hz} - \zeta_1 = 0.025\%$
$f_2 = 276.1 \text{ Hz} - \zeta_2 = 0.024\%$	$f_2 = 276.2 \text{ Hz} - \zeta_2 = 0.030\%$
$f_3 = 557.4 \text{ Hz} - \zeta_3 = 0.039\%$	$f_3 = 557.8 \text{ Hz} - \zeta_3 = 0.038\%$
$f_4 = 829.0 \text{ Hz} - \zeta_4 = 0.025\%$	$f_4 = 829.1 \text{ Hz} - \zeta_4 = 0.028\%$

de 2500  $N.m$ . Pour les mêmes coefficients de frottement et couples de serrage que l'étude précédente, la pression moyenne dans les parties supérieure et inférieures d'une bride varie autour de 20 %, et parfois plus de 30 %. Ces calculs montrent que le chargement mis en place modifie de façon notable les niveaux de pressions dans les différentes zones de contact.

Les évolutions de la figure 5.11 montrent que l'amortissement augmente sensiblement avec la charge dans la liaison, avec une valeur maximale supérieure à celle de l'assemblage de référence. La valeur maximale du coefficient  $\psi$  obtenue pour les différentes configurations est de l'ordre de  $14 \times 10^{-3}$  lorsque le chargement est maximal. Cette valeur correspond à un amortissement modal maximal de 0.11 %. Les dissipations dans le système conçu sont donc, sur ce premier mode de flexion, très faibles.

On constate aussi que le coefficient d'absorption  $\psi$  calculé à partir du facteur de qualité  $Q$  (méthode à  $-3 \text{ dB}$ ) sous-évalue toujours le coefficient d'absorption calculé par la méthode énergétique. La figure 5.12 permet d'expliquer ce point.

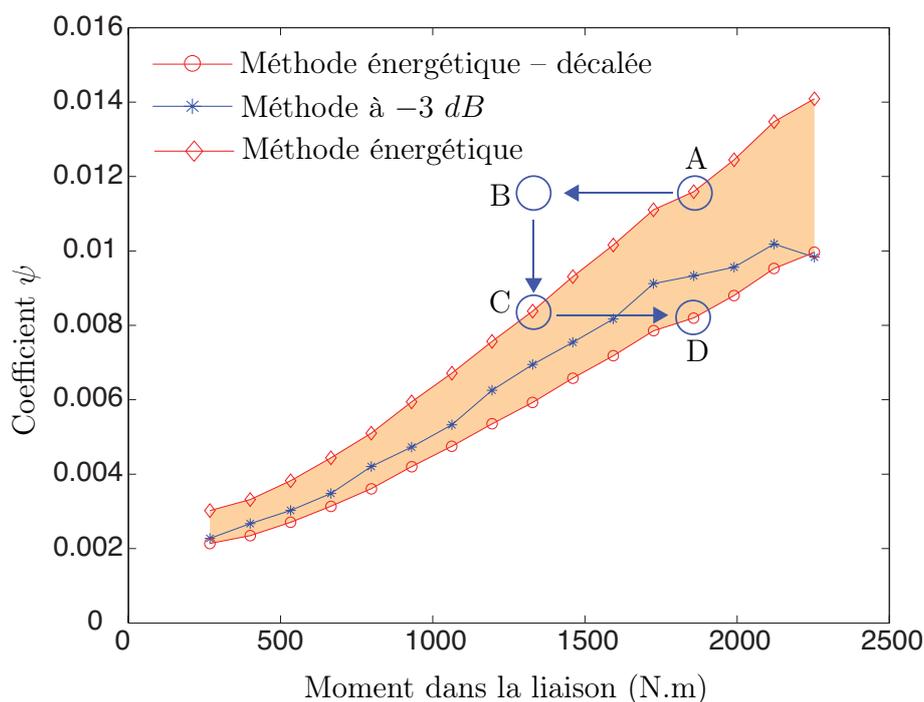
On considère la configuration à 16 boulons serrés à 70  $N.m$ . Par exemple, pour un moment de  $M = 1858 \text{ N.m}$ , le coefficient d'absorption mesuré par la méthode énergétique est de  $\psi = 0.0116 \text{ J}$ . On note  $A(M, \psi)$  ce point de départ, qui est



**FIGURE 5.11:** Evolution du coefficient d'absorption en fonction du moment dans la liaison : étude des différentes configurations de liaison testées

un point mesuré. L'amplitude de déformation, donc de moment, à  $-3dB$  est donnée par  $M_{-3dB} = 1858/\sqrt{2} = 1314 \text{ N.m}$ . On note  $B$  le point de coordonnées  $(M_{-3dB}, \psi)$ . En utilisant à nouveau la courbe expérimentale, on trouve qu'un moment de  $M_{-3dB} = 1314 \text{ N.m}$  devrait conduire à un coefficient d'absorption d'environ  $\psi_{-3dB} = 0.0084 \text{ J}$ . On obtient ainsi le point  $C$  de coordonnées  $(M_{-3dB}, \psi_{-3dB})$ . Ainsi, si le coefficient d'absorption retenu pour une amplitude de moment  $M$  était celui estimé pour une amplitude  $M_{-3dB}$ , on obtiendrait le point  $D$  de coordonnées  $(M, \psi_{-3dB})$ . En pratique, la méthode classique à  $-3 \text{ dB}$  revient à considérer constant le coefficient d'absorption dans la bande  $[M_{-3dB} ; M]$  et donc à retenir une valeur moyenne du coefficient d'absorption entre  $\psi$  et  $\psi_{-3dB}$ . Il est donc logique de trouver la courbe correspondante entre les deux courbes issues de la méthode énergétique, celle mesurée et celle décalée.

Il est intéressant de noter que l'écart entre les valeurs de  $\psi$  obtenues par les deux méthodes augmente avec le niveau de chargement dans la liaison. Même s'il

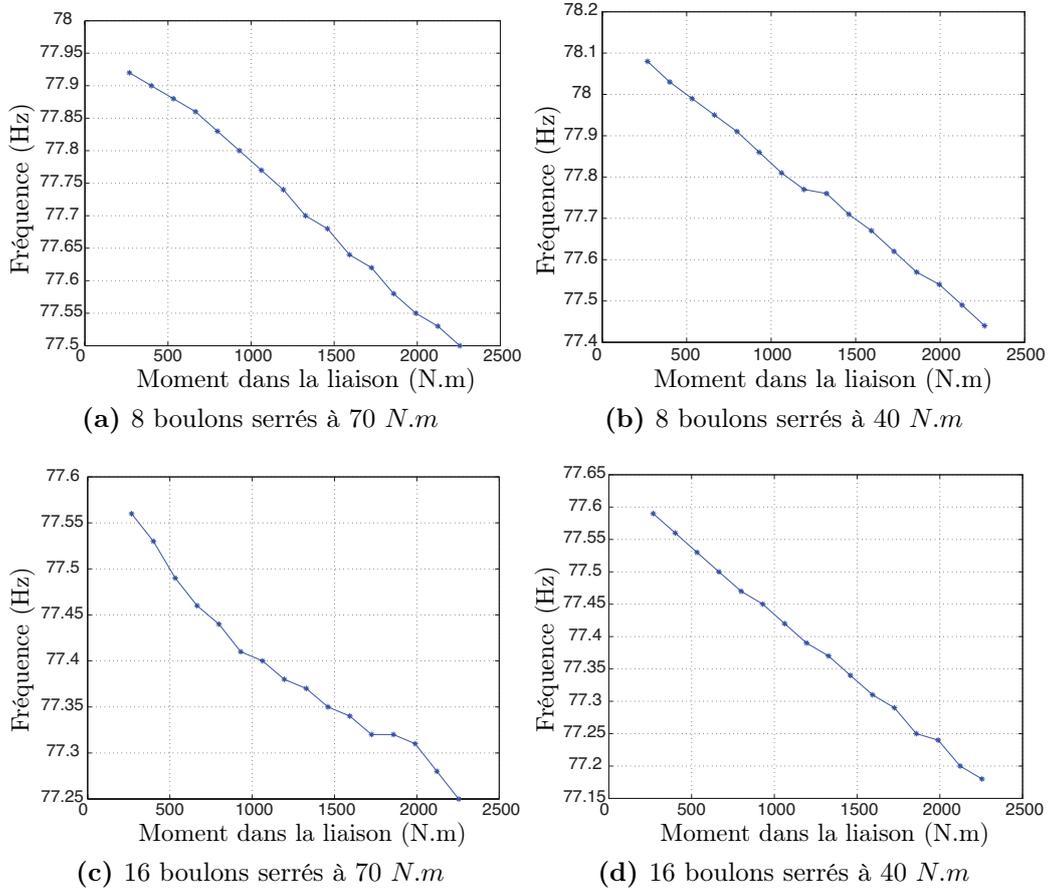


**FIGURE 5.12:** Interprétation de l'écart entre les valeurs du coefficient d'absorption obtenues par la méthode énergétique et la méthode à  $-3$  dB

est faible dans notre cas d'étude, cet écart pourrait devenir considérable lorsque la taille de la structure et le nombre de liaisons boulonnées augmente.

Pour ce qui est de la variation des fréquences de résonance du système, la figure 5.13 montre leurs évolutions en fonction du chargement pour toutes les configurations testées. On constate une décroissance régulière lorsque l'amplitude du moment dans la liaison augmente, ce qui ne peut pas être expliqué par du bruit ou des erreurs de mesures. La réduction de la fréquence avec le niveau de chargement est un fait cohérent avec les mécanismes d'ouverture qui prennent place à forte charge, qui assouplissent la structure en général, et la liaison centrale en particulier.

Le tableau 5.2 montre les variations relatives de la fréquence de résonance dans les différentes configurations étudiées. Le fait que la fréquence du cas à 8 boulons serrés à  $40$  N.m (faible précharge et faible nombre de boulons.) soit plus élevée que celle du cas 16 boulons serrés à  $70$  N.m (forte précharge et grand nombre de boulons) s'explique par le fait que 8 boulons ont été supprimés : ainsi, la masse de la partie centrale a été réduite de  $8 \times 71$  g =  $568$  g. La raideur ayant été elle aussi réduite, on ne peut pas prédire dans quelle sens va changer la fréquence de résonance. Cependant, la variation est plus élevée dans le cas de 8 boulons serrés à  $40$  N.m que dans le cas 16 boulons serrés à  $70$  N.m. Effectivement, les fréquences varient peu mais cela ne signifie pas que la raideur apparente de la liaison boulonnée



**FIGURE 5.13:** Evolution de la fréquence de résonance en fonction du moment dans la liaison : étude des différentes configurations de liaison testées

change peu. En effet, une moitié du système présent d'un côté du plan de symétrie peut être modélisé par deux ressorts en série : un ressort représentant la rigidité angulaire de la liaison boulonnée notée  $k_L$ , l'autre représentant la rigidité angulaire de la poutre notée  $k_P$ . La rigidité équivalente à ces deux éléments est :

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_P}} \quad (5.8)$$

L'ordre de grandeur de la rigidité angulaire de la liaison boulonnée est de  $k_L \approx 100 \times 10^5 \text{ N.m.rad}^{-1}$  (voir 5.5.2). L'ordre de grandeur de la rigidité angulaire de la poutre soumise à un effort en bout est  $k_P = 1.8 \times 10^5 \text{ N.m.rad}^{-1}$ . Il y a donc un facteur supérieur à 50 entre les deux rigidités. Ainsi, une variation relative de 50 % de la raideur  $k_L$  conduit à une variation relative de la raideur équivalente de :

$$\frac{\Delta k_{eq}}{k_{eq}} = \frac{\frac{1}{k_L} + \frac{1}{k_P}}{\frac{1}{1.5k_L} + \frac{1}{k_P}} - 1 = 0.6 \% \quad (5.9)$$

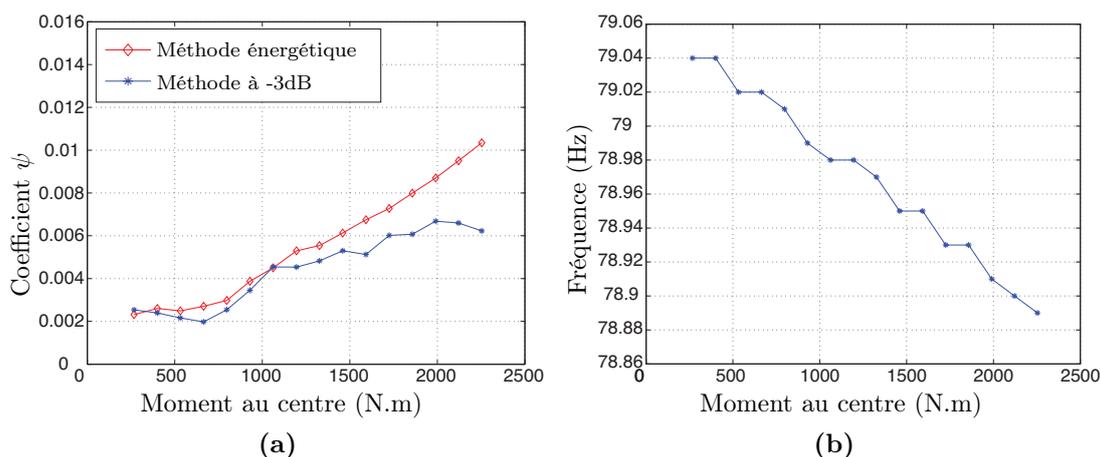
Configuration	Moment inf.	Moment sup.	Variation relative
8 boulons – 40 N.m	78.08 Hz	77.44 Hz	0.83 %
8 boulons – 70 N.m	77.92 Hz	77.49 Hz	0.55 %
16 boulons – 40 N.m	77.59 Hz	77.18 Hz	0.53 %
16 boulons – 70 N.m	77.56 Hz	77.25 Hz	0.40 %
Référence	79.04 Hz	78.89 Hz	0.19 %

**TABLE 5.2:** Variations relatives de la fréquence de résonance dans les différentes configurations étudiées

La faible variation de la fréquence de résonance n'illustre donc pas du tout une faible variation de la rigidité de la liaison. Elle est due à un grand écart de rigidité entre les poutres et la partie centrale.

#### 5.4.2 Etude de l'assemblage de référence

Pour le premier mode de flexion symétrique, la figure 5.14 montre l'évolution du coefficient d'absorption  $\psi$  et de la fréquence de résonance en fonction du moment au centre de la pièce de référence. Les résultats obtenus amènent à des commentaires



**FIGURE 5.14:** Evolution du coefficient d'absorption et de la fréquence de résonance en fonction du moment dans la partie centrale : étude du montage de référence

très proches de ceux de la section précédente. A partir de la figure 5.14a, on constate

que l'amortissement (et l'énergie dissipée) augmente avec le niveau de chargement, même si la valeur maximale atteinte reste faible. On note toutefois que le coefficient  $\psi$  est plus faible que dans les configurations avec la liaison boulonnée. Ce résultat est attendu puisqu'une partie des sources de dissipation a été supprimée dans ce montage.

Les valeurs des fréquences propres sont supérieures à celles des montages avec liaison boulonnée. Pour une masse similaire, la raideur de la pièce de référence est supérieure à la raideur de la liaison boulonnée. La fréquence de résonance varie de nouveau régulièrement mais peu. La dernière ligne du tableau 5.2 montre que la variation relative est de 0.19 % seulement. Elle est donc inférieure à celles obtenues dans les configurations boulonnées étudiées. Cela est encore lié au fait qu'une partie des phénomènes non linéaires de contact ne peuvent plus avoir lieu avec la pièce monobloc.

## 5.5 Analyse différentielle de la liaison

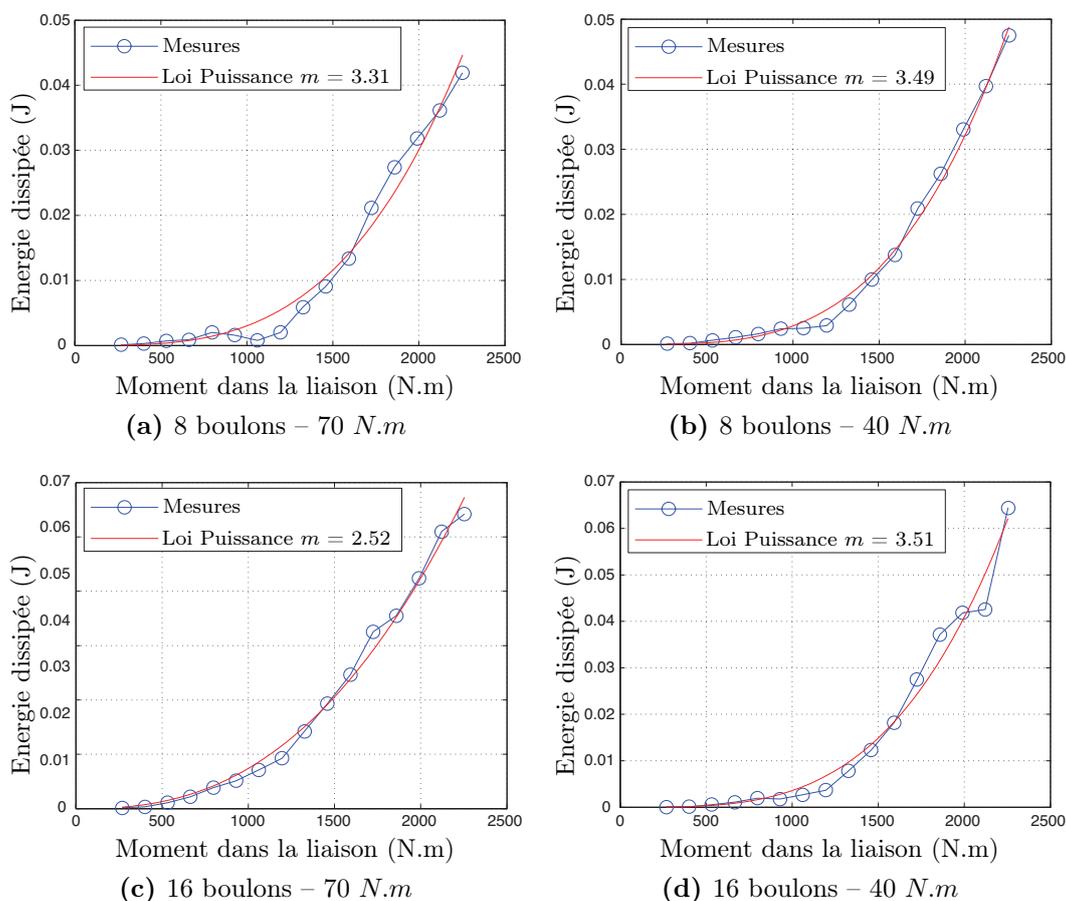
La quantification de la dépendance des conditions de liaison sur les caractéristiques dynamiques de la liaison boulonnée peut se faire grâce à des analyses différentielles. Une première analyse porte sur l'amortissement en calculant les variations d'énergies entre le montage avec la liaison boulonnée et l'assemblage de référence. Ainsi, on peut décrire l'évolution de la dissipation dans la liaison boulonnée en fonction des différents paramètres de liaison considérés.

Une autre analyse différentielle porte sur la variation en fréquence, les masses de la liaison boulonnée et de la pièce de référence étant quasiment identiques (pour les configurations avec 8 et 16 boulons étudiées). Donc, le glissement en fréquence semble être principalement lié à une variation de la raideur de la liaison étudiée.

### 5.5.1 Evolution de la dissipation dans la liaison

Pour chacune des quatre configurations testées, et pour chaque valeur de moment imposé dans la liaison, l'énergie dissipée dans l'assemblage de référence est retranchée de l'énergie dissipée dans le montage avec liaison boulonnée. On obtient alors les évolutions de l'énergie dissipée uniquement dans la liaison, pour chaque configuration, en fonction du moment dans la liaison. Les courbes obtenues sont présentées sur la figure 5.15.

On constate que la dissipation dans la liaison augmente avec l'amplitude des vibrations, elle même proportionnelle à l'amplitude du moment dans la liaison. Si l'amortissement était indépendant du niveau de chargement, la croissance devrait être proportionnelle au carré du moment (comme l'énergie élastique). En pratique, une régression en loi puissance des résultats montre que l'exposant obtenu est nettement différent de  $m = 2$ . Cela confirme que le comportement de la liaison est



**FIGURE 5.15:** Evolution de l'énergie dissipée dans la liaison via une analyse différentielle en fonction du moment dans la liaison : influence de la configuration

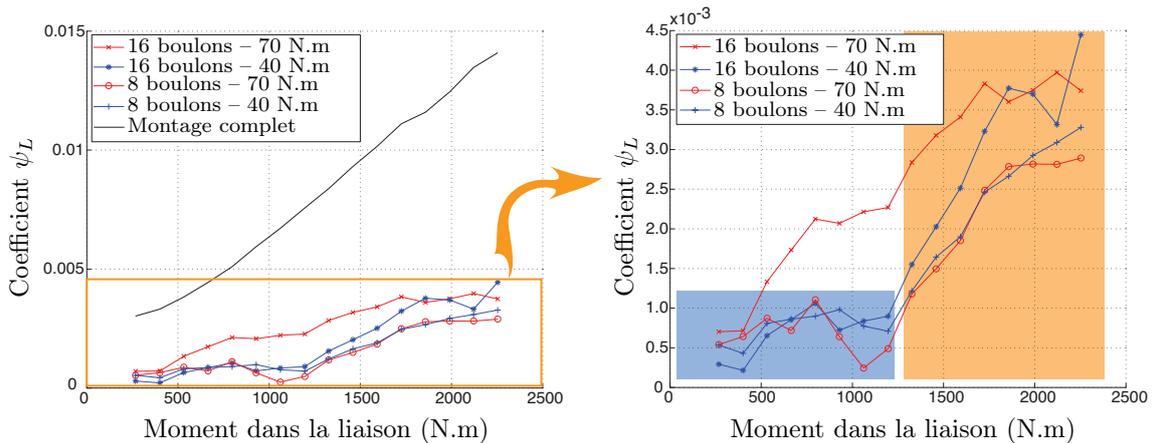
non linéaire et que l'amplitude du chargement a une influence sur les phénomènes dissipatifs dans la liaison.

L'extraction de l'énergie dissipée dans la liaison nous permet maintenant de reconstruire un coefficient d'absorption  $\psi_L$  qui représente uniquement la contribution de la liaison dans la dissipation. Pour un niveau de chargement donné, le coefficient reconstruit  $\psi_L$  est calculé en faisant le rapport entre l'énergie dissipée dans la liaison uniquement et l'énergie élastique maximale.

La figure 5.16 présente l'évolution de ce coefficient  $\psi_L$  pour chaque configuration de liaison et le compare au coefficient  $\psi$  calculé pour un montage complet.

On remarque que le niveau de variation de serrage ou le nombre de boulons influence peu la dissipation localisée sur ce mode de chargement en flexion pure sans effort tranchant. La dissipation due à la liaison boulonnée est faible relativement à celle du montage expérimental complet : environ  $1/4$ . Deux causes principales

permettent d'aboutir à ce résultat. La première est la souplesse de la liaison qui n'est pas considérablement plus grande que celle des poutres. La seconde cause est liée à la symétrie du montage et du chargement. En effet, pour le premier mode de flexion, si la symétrie est parfaitement respectée, alors il n'y a pas de déplacement relatif entre les brides et il ne peut y avoir de glissement sur le plan de joint. Les seuls glissements pouvant exister sont au niveau des contacts entre les boulons et et les brides.

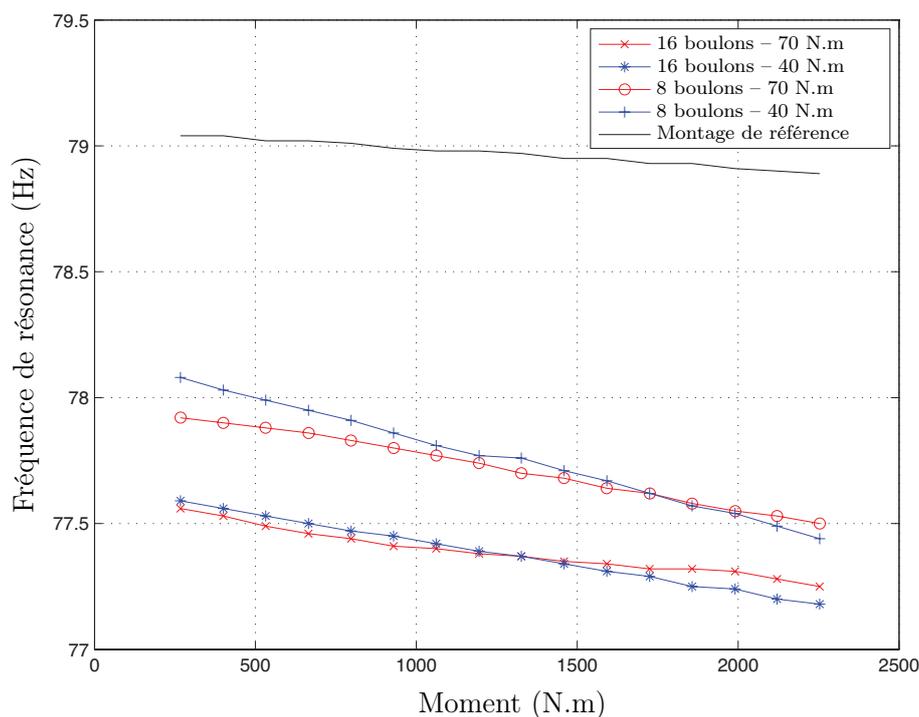


**FIGURE 5.16:** Représentation de la contribution de la liaison boulonnée ramenée à l'énergie élastique totale

En faisant un zoom sur ces évolutions, on constate que pour trois des quatre configurations testées, le coefficient  $\psi_L$  est très faiblement variable jusqu'à un certain niveau de chargement et qu'il augmente ensuite. Pour des moments faibles dans la liaison, les zones de glissement dans le contact entre les boulons et la pièce évoluent peu. Ensuite, lorsque le chargement dépasse un certain niveau, les zones de glissement évoluent et la dissipation devient plus importante. Autrement dit, il existe un effet de seuil en deçà duquel la liaison a un comportement sensiblement linéaire, et au dessus duquel les zones de glissement évoluent ce qui accroît les dissipations de manière non linéaire.

### 5.5.2 Evolution de la raideur apparente de la liaison

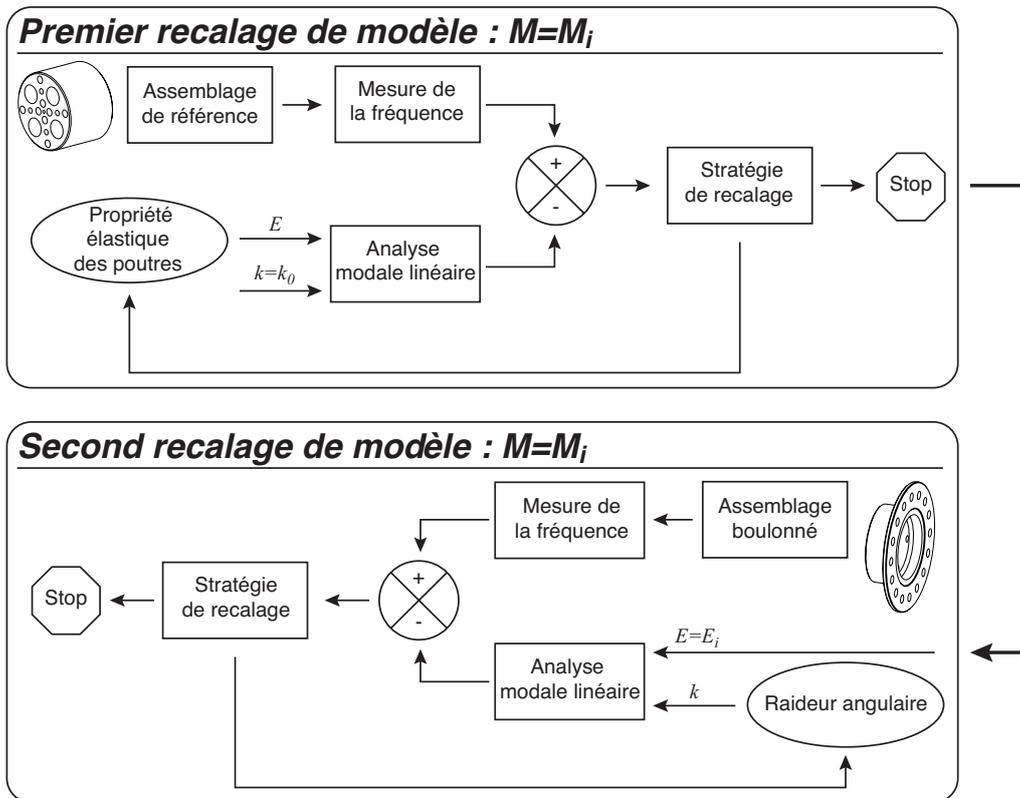
Dans un premier temps, on propose d'exploiter les résultats obtenus dans les différentes configurations sur la fréquence de résonance. La figure 5.17 montre des évolutions notables des fréquences de résonance du montage lorsque la liaison boulonnée est présente. Cela suggère que des mécanismes non linéaires apparaissent dans la liaison durant les oscillations. On constate, comme prévu, que la variation du nombre de boulons conduit à des variations de fréquence entre les configurations. Mais pour un cas donné, la variation de fréquence est inférieure à 1 %.



**FIGURE 5.17:** Evolution de la fréquence de résonance en fonction du moment dans la liaison : comparaison des différentes configurations testées

La figure 5.17 présente aussi présente l'évolution de la fréquence de résonance dans le cas de l'assemblage de référence. On remarque qu'il existe aussi des non-linéarités dans ce montage du fait de la présence de liaisons boulonnées entre les poutres et le reste de l'assemblage. Ainsi, il n'est pas possible d'imputer le comportement non linéaire observé à la seule liaison boulonnée et nous devons procéder à une analyse différentielle pour isoler les non-linéarités provenant de la liaison boulonnée seule.

A cet effet, la démarche de recalage présentée sur la figure 5.18 est proposée. La première étape consiste à recalcr, sur la configuration de référence, un paramètre de raideur associé aux poutres (module d'élasticité), permettant de représenter globalement la variation de raideur due aux non-linéarités présentes dans les autres liaisons. La forme du mode propre étudié étant très similaire entre la configuration de référence et une configuration boulonnée, on peut considérer que, à moment identique, ces effets non linéaires sont les mêmes dans ces deux configurations. Par contre, dans le cas d'une configuration boulonnée, des non-linéarités sont présentes dans la liaison centrale. La seconde étape de la démarche de recalage consiste donc à recalcr le paramètre de raideur associé à cette liaison, pour un module d'élasticité des poutres donné issu de la première étape.



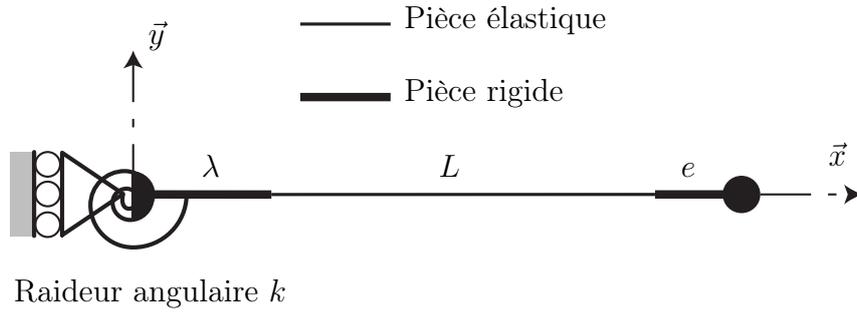
**FIGURE 5.18:** Stratégie de recalage en deux étapes permettant d'estimer la raideur apparente de la liaison boulonnée en fonction des conditions de liaison

Les deux étapes du recalage exploitent un modèle numérique simple (cf. figure 5.21) qui permet d'estimer la fréquence du premier mode symétrique dans les différentes configurations :

- la souplesse de la partie centrale, massive ou liaison boulonnée, est modélisée par le ressort de raideur angulaire  $k$  ;
- le bras reliant les masses excentrées à la partie centrale est modélisé par une poutre élastique (cinématique d'Euler-Bernoulli) de module d'élasticité  $E$  ;
- le centre de gravité des masses excentrées est relié rigidement à l'extrémité de la poutre ;
- la poutre élastique, de longueur  $L$ , est rigidement reliée au point d'accroche du ressort.

Dans ce modèle, les paramètres de masses peuvent évoluer car ils dépendent de la configuration étudiée, mais sont bien connus. Le premier mode propre symétrique  $v(x)$  est cherché dans la base  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$

$$v(x) = \sum_{p=1}^3 \gamma_i \varphi_i(x) \quad (5.10)$$



**FIGURE 5.19:** Modèle utilisé pour estimer la fréquence propre du premier mode de flexion dans différentes configurations

avec :

$$\varphi_1(x) = 1 \quad (5.11)$$

$$\varphi_2(x) = x \quad (5.12)$$

$$\varphi_3(x) = (H(x - \lambda) - H(x - \lambda - L)) \frac{L}{2} (x - \lambda)^2 \left(1 - \frac{x - \lambda}{3L}\right) \quad (5.13)$$

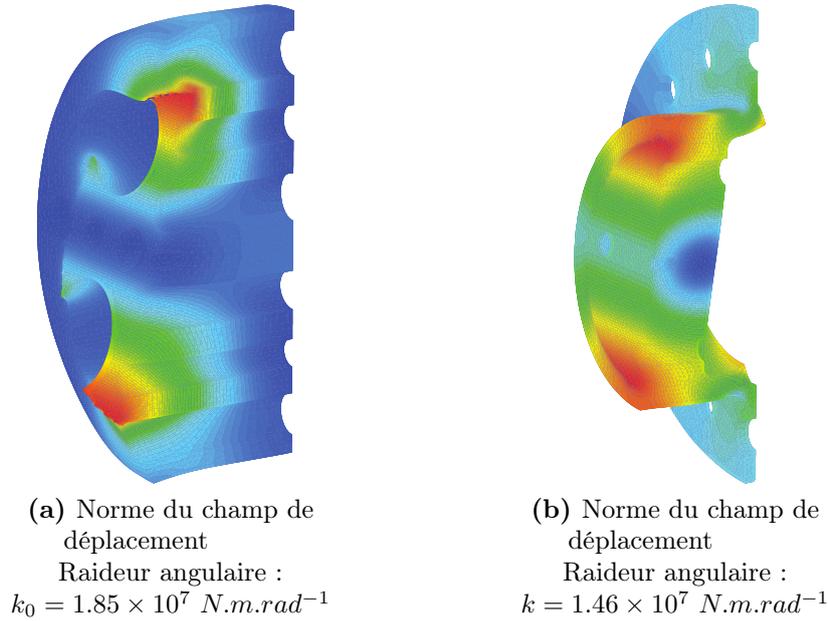
où  $H$  est la fonction de Heaviside (ou fonction échelon) définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (5.14)$$

La fonction  $\varphi_1$  permet de représenter le mode de corps rigide de translation selon  $\vec{y}$ , alors que la fonction  $\varphi_2$  permet de représenter la rotation de l'ensemble autour de  $\vec{z}$  qui est possible puisque la raideur angulaire  $k$  n'est pas infinie. La fonction  $\varphi_3$  de base permet de représenter la déformation de la poutre flexible. Elle correspond à la déformée d'une poutre sollicitée par un effort ponctuel en bout. Ce choix est guidé par la présence de masses importantes à l'extrémité de la poutre.

Les coordonnées du premier mode dans la base  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$  et la fréquence propre associée sont alors obtenues en écrivant la stationnarité du quotient de Rayleigh et en résolvant le problème aux valeurs propres  $3 \times 3$  qui en découle. Ce modèle permettra d'accéder, pour une répartition de masse donnée dépendant de la configuration étudiée, à la fréquence propre du premier mode symétrique, notée  $f(E, k)$  dans la suite.

Dans un premier temps, les fréquences de résonance dans le cas du montage de référence sont exploitées. La raideur angulaire  $k = k_0$  de la partie centrale est supposée connue et fixe : elle est déterminée par un calcul éléments finis statique linéaire simple. Puisque la partie centrale monobloc présente deux plans de symétrie, le quart de la pièce est maillé avec deux conditions de symétrie (déplacement normal nul) et la norme du champ de déplacement obtenu avec un maillage fin d'éléments de degré 2 est présentée sur la figure 5.20a. La zone de contact de la poutre élastique



**FIGURE 5.20:** Modèles numériques linéaires permettant d'estimer la raideur  $k_0$  de la pièce de référence dans la première étape de recalage et d'initialiser la raideur de la liaison boulonnée à une valeur raisonnable lors de la seconde étape

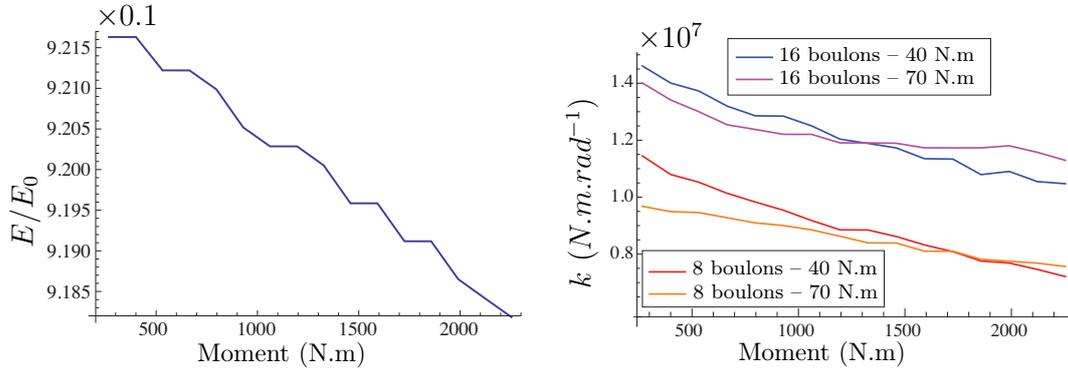
avec la bride est rigidifiée et le moment est appliqué au centre de cette surface. Pour chaque moment imposé  $M_i$ , on cherche le module d'élasticité des poutres qui permet de minimiser l'écart entre la fréquence de résonance du modèle  $f_i(E, k = k_0)$  et la fréquence de résonance mesurée  $f_{i,mes}$ . Pour cela, l'écart :

$$e_i^2 = (f_i(E, k = k_0) - f_{i,mes})^2 \quad (5.15)$$

est construit et minimisé via une méthode de type gradient à pas variable :

$$E_i = \arg \min_{E > 0} [f_i(E, k = k_0) - f_{i,mes}]^2 \quad (5.16)$$

Le module de référence  $E_0 = 2.0 \times 10^{11} \text{ N.m}^{-2}$  est choisi comme valeur initiale de  $E$  lors du processus de recalage. A l'issue de cette première étape, on obtient un ensemble de couples  $(M_i, E_i)$  permettant d'obtenir une bonne corrélation entre le modèle et la mesure de référence. On représente sur la figure 5.21a les couples  $(M_i, E_i/E_0)$ . Dans un second temps, on considère la moitié d'une bride centrale, avec une condition de symétrie et une condition de contact total avec l'autre bride (déplacement normal nul). La norme du champ de déplacement obtenu avec un maillage fin d'éléments de degré 2 est présentée sur la figure 5.20b. Pour chaque configuration boulonnée testée, et pour chaque moment imposé  $M_i$ , on cherche la raideur de liaison  $k$  qui permet de minimiser l'écart entre la réponse du modèle



(a) Evolution du module des poutres obtenue à l'issue de la première étape de recalage sur la configuration de référence

(b) Evolution de la raideur angulaire de la liaison issue de la seconde étape de recalage, pour chaque configuration boulonnée

**FIGURE 5.21:** Résultats issus des deux étapes de la démarche de recalage présentées sur la figure 5.18

$f_i(E = E_i, k)$  et la fréquence de résonance mesurée  $f_{i,mes}$  :

$$k_i = \arg \min_{k>0} [f_i(E = E_i, k) - f_{i,mes}]^2 \quad (5.17)$$

A l'issue de cette seconde étape, et pour chaque configuration testée avec la liaison boulonnée, on obtient un ensemble de couples  $(M_i, k_i)$ , représentés sur la figure 5.21b, permettant d'obtenir une bonne corrélation entre le modèle et la mesure dans une configuration boulonnée.

La figure 5.21b met en évidence des effets non linéaires dans le comportement de l'assemblage boulonné. Pour l'ensemble des configurations boulonnées testées, la raideur de liaison chute d'environ 30 % lorsque le moment appliqué varie de 250 N.m à 2250 N.m. On constate, comme attendu, que la liaison avec 16 boulons est plus raide que celle à 8 boulons. Enfin, dans ce cas d'étude, l'effet de la précharge, pour un nombre de boulons fixé, n'est pas très significatif.

# Bilan

En mécanique des structures, le comportement des structures de type poutre et plaque est généralement bien connu et compris. Néanmoins, la plupart des structures industrielles sont des assemblages de plusieurs composants et les phénomènes ayant lieu au niveau des jonctions sont toujours mal saisis. Ce manque de compréhension est considérable parce que le comportement de tout l'assemblage peut dépendre de manière cruciale des conditions de liaison, surtout sous forte charge en dynamique.

Afin de mieux comprendre ces phénomènes mis en jeu, et développer à terme des modèles pertinents, un banc d'essai dynamique basé sur une structure boulonnée paramétrable a été conçu et une analyse modale expérimentale a été réalisée. La liaison boulonnée faisant l'objet de l'étude reprend les principales caractéristiques des liaisons présentes dans les pompes des centrales thermiques. Les paramètres importants, liés aux conditions de liaison, qui ont été considérés incluent la précharge des boulons, le type et le niveau de chargement de la liaison, le nombre et la position des boulons effectivement serrés. Pour pouvoir extraire les informations inhérentes à la liaison boulonnée d'intérêt, une pièce rigide non dissipative a été conçue avec des caractéristiques similaires à celles de la liaison. L'étude vibratoire s'est focalisée sur l'excitation de l'assemblage en flexion pure, en travaillant sur le premier mode de flexion symétrique de l'ensemble.

De manière globale, dans le cas présent, les résultats montrent que le niveau de chargement imposé est le paramètre ayant le plus d'influence sur la fréquence de résonance et sur l'amortissement modal.

D'un point de vue local, en modifiant les différents paramètres, on constate une évolution non linéaire de la dissipation dans la liaison boulonnée et de sa raideur apparente. Même si le niveau d'amortissement dans la liaison est faible lorsqu'elle est sollicitée sur ce mode propre, cette étude a permis de montrer qu'il existe un effet de seuil en deçà duquel la liaison a un comportement sensiblement linéaire, et au delà duquel les dissipations évoluent de manière non linéaire. D'un autre côté, pour l'ensemble des configurations testées, la raideur apparente de la liaison étudiée chute d'environ 30% lorsque le moment appliqué augmente. On peut alors déduire que le contact boulon-pièce dissipe de l'énergie et modifie les caractéristiques de la liaison en fonction du niveau de chargement.

---

La détermination a priori, par calcul, de l'incertitude correspondant à la variabilité élevée observée lors de cette étude, constitue un défi. On doit être en mesure de rendre compte à la fois de l'incertitude de modèle et de l'incertitude paramétrique. La théorie des méconnaissances permet de relever ces défis de façon simple et efficace, mais les développements actuels ne permettent pas d'assurer une estimation a priori de l'incertitude totale dans les cas de fortes méconnaissances. Ainsi, la partie suivante propose d'étendre cette théorie pour la prise en compte d'une combinaison de faibles et fortes incertitudes sur des paramètres de raideur en dynamique.

## Troisième partie

# Fortes incertitudes dans les modèles dynamiques



# Chapitre 6

## Propagation de fortes méconnaissances en dynamique

*Dans ce chapitre, des développements analytiques sont apportés à la théorie des méconnaissances. Ils permettent d'aboutir à une démarche de propagation, de manière simple et à moindre coût, d'un ensemble d'incertitudes faibles et fortes dans les modèles dynamiques d'assemblages mécaniques.*

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Contexte et besoin d'une extension</b>	<b>124</b>
<b>6.2</b>	<b>Développements</b>	<b>125</b>
6.2.1	Problème aux valeurs propres	125
6.2.2	Construction d'une base réduite	126
6.2.3	Problème réduit	127
6.2.4	Appairage des modes	128
6.2.5	Interpolation des pulsations et modes propres	129
6.2.6	Calcul des méconnaissances effectives	131

---

Dans le cas où un modèle probabiliste est trop lourd à manipuler ou lorsque très peu d'informations sur les valeurs des incertitudes sont disponibles, il peut être nécessaire de globaliser celles-ci en utilisant la théorie des méconnaissances. L'introduction d'une variable interne globale sur chaque sous-structure ou chaque liaison, appelée méconnaissance et liée à une variation de paramètres de raideur, permet de calculer un intervalle d'appartenance pour une quantité d'intérêt dont les bornes sont des variables aléatoires. La méthode permet d'obtenir des intervalles de confiance fiables des quantités d'intérêt à moindre coût lorsque les méconnaissances sont faibles.

Cependant, les résultats de l'étude expérimentale du banc d'essai dynamique (cf. paragraphe 5.5) ont montré que les valeurs des incertitudes peuvent être d'un ordre élevé, ce qui sort du cadre des faibles méconnaissances. Dans ce cas on pourrait envisager d'employer des méthodes paramétriques telles que les méthodes d'intégration directe, des techniques de projection telles que la méthode spectrale des éléments finis stochastiques [Nghah et Young 2007], ou des méthodes non paramétriques [Batou et Soize 2013].

Bien que ces méthodes permettent de propager des incertitudes fortes, la fiabilité des résultats est obtenue pour des coûts de calcul plus conséquents. Afin d'optimiser ces coûts, on propose de revenir à la théorie des méconnaissances.

## 6.1 Contexte et besoin d'une extension

Les calculs de méconnaissances effectives réalisés dans le paragraphe 2.5 se basent sur une approximation au premier ordre, ce qui conduit à des prédictions fiables dans le cas de faibles incertitudes ( $\leq 10\%$ ). On peut toutefois penser que des incertitudes de l'ordre de 30% voire 50% (i.e. des méconnaissances de base de l'ordre de 0,3 ou 0,5) peuvent entraîner des erreurs sur les intervalles prédits.

Pour illustrer, on étudie de nouveau l'exemple du treillis plan présenté dans le paragraphe 2.6.1, avec le même modèle déterministe. Cependant, le module d'Young du matériau homogène de chaque barre est incertain et a été modélisé par une variable aléatoire, de sorte que :

$$E = \bar{E} (1 + \delta \eta) \quad \text{avec } \delta = \begin{cases} 0.08 & \text{pour les barres 1-3 et 2-3} \\ 0.4 & \text{pour les barres 2-4 et 3-4} \end{cases} \quad (6.1)$$

et  $\eta$  est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme définie sur l'intervalle  $[-1; +1]$ . Le tableau 6.1 donne les intervalles à 99% qui résultent de l'étude statistique de la propagation des incertitudes par la méthode de Monte-Carlo et la théorie de méconnaissances (LOK). Pour chacun des 20000 tirages générés, on calcule toutes les fréquences propres de l'assemblage.

**TABLE 6.1:** Intervalles à 99% pour les fréquences propres du treillis (20000 tirages) avec faibles et fortes méconnaissances

$i$	1	2	3	4	ERA(%)
$\bar{f}_i$ (Hz)	276.4	862.0	1072.5	1452.4	
<b>Monte-Carlo</b>	[265.0; 287.0]	[752.6; 906.1]	[932.5; 1237.8]	[1174.5; 1700.4]	– (référence)
<b>LOK</b>	[266.2; 287.0]	[807.2; 916.1]	[894.0; 1223.8]	[1398.2; 1504.9]	[+19; -13]

En observant les intervalles obtenus par la théorie des méconnaissances, on constate que les écarts sont différents selon les modes. L'erreur est faible lorsque le mode ne sollicite que des sous-structures avec une faible méconnaissance, sinon l'erreur est grande.

De façon générale, ces résultats amènent à la conclusion principale que la théorie des méconnaissances, telle qu'elle a été développée dans le cadre des faibles incertitudes, n'est pas performante pour propager des méconnaissances fortes et conduit à l'obtention d'intervalles non fiables.

## 6.2 Développements

Dans [Puel 2004, Ladevèze *et al.* 2006b], la prise en compte d'une forte méconnaissance en analyse dynamique a été considérée. Cependant, la majorité des structures industrielles sont des assemblages de nombreux composants, avec des géométries complexes et des caractéristiques non linéaires, ce qui induit un grand nombre d'incertitudes élevées, surtout sur des paramètres de raideur. Ainsi, on propose ici d'étendre la théorie des méconnaissances pour permettre la propagation d'un ensemble de plusieurs faibles et fortes incertitudes dans les modèles dynamiques d'assemblages mécaniques.

### 6.2.1 Problème aux valeurs propres

Le problème se construit autour d'une famille de structures réelles nominale ment identiques. Chaque structure  $\Omega$  appartenant à cette famille est modélisée par un assemblage de deux types de sous-structures :

- $\mathcal{L}$  est l'ensemble de  $l$  sous-structures  $\{\mathcal{L}_j\}_{j=1}^l$ , chacune associée avec une faible méconnaissance de base ( $\leq 0.1$ );
- $\mathcal{H}$  est l'ensemble de  $h$  sous-structures  $\{\mathcal{H}_k\}_{k=1}^h$ , chacune associée avec une forte méconnaissance de base ( $> 0.1$ );
- $\Omega = \mathcal{L} \cup \mathcal{H}$
- $\emptyset = \mathcal{L} \cap \mathcal{H}$

En absence de fortes méconnaissances, on a considéré qu'une légère modification de la raideur du système a une influence négligeable sur la forme de ses modes propres

(cf. équation (2.57)). Les résultats de propagation de faibles méconnaissances ont montré que cette supposition est assez juste (cf. paragraphes 2.6.1 et 2.6.2). Cependant, cette hypothèse n'est plus raisonnable en présence de fortes méconnaissances.

De manière pratique, soit  $m_{\mathcal{H}_k}$  une forte méconnaissance de base associée à une sous-structure  $\mathcal{H}_k \subset \mathcal{H}$ . L'objectif est de déterminer les pulsations  $\tilde{\omega}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}})$  et modes propres  $\tilde{\phi}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}})$  du modèle global perturbé par les fortes incertitudes, où  $\mathbf{m}_{\mathcal{H}} = [m_{\mathcal{H}_1} \dots m_{\mathcal{H}_h}]^T$  est un vecteur aléatoire contenant les variables aléatoires  $\{m_{\mathcal{H}_k}\}_{k=1}^h$ , tirées dans les intervalles  $\{-m_{\mathcal{H}_k}^-; m_{\mathcal{H}_k}^+\}_{k=1}^h \subset [-1; +1]$ .

Par conséquent, le problème aux valeurs propres à résoudre est :

$$(\bar{\mathbf{K}} + \sum_{k=1}^h m_{\mathcal{H}_k} \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k}) \tilde{\phi}_i = \tilde{\omega}_i^2 \bar{\mathbf{M}} \tilde{\phi}_i \quad (6.2)$$

où  $\bar{\mathbf{K}}$  et  $\bar{\mathbf{M}}$  sont respectivement les matrices de raideur et de masse du modèle théorique déterministe, et  $\bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k}$  est la contribution de la sous-structure  $\mathcal{H}_k$  à la matrice de raideur globale du modèle déterministe. On remarque qu'il serait très coûteux de résoudre ce problème pour chaque réalisation du vecteur  $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}$ , surtout qu'il faut un grand nombre de tirages, donc de résolutions, pour assurer une moyenne statistique des bornes de méconnaissances effectives qui soit représentative de la solution exacte. On propose alors de procéder en deux étapes :

1. réduction du modèle, qui nécessite la construction d'une base réduite ;
2. résolution du problème pour quelques jeux de méconnaissances fortes, suivie par une étape d'interpolation des pulsations et modes propres.

## 6.2.2 Construction d'une base réduite

En s'inspirant de la démarche efficace des techniques de réduction de modèle (cf. paragraphe 2.2.4.1), on propose de réduire la taille du problème 6.2 par la construction d'une base de réduction. Parmi les modes propres du modèle déterministe global,  $n$  modes  $\{\bar{\varphi}_i\}_{i=1}^n$  sont considérés pour construire la base, calculés à partir de la valeur moyenne des paramètres incertains,  $n$  étant le nombre de modes d'intérêt. Ensuite, on réalise un enrichissement de la base de réduction et cela dans le but d'augmenter son efficacité et la précision des résultats. On l'enrichit de  $m \leq n$  modes statiques  $\{\psi_i^k\}_{i=1}^m$ , qui sont calculés, pour chaque sous-structure fortement perturbée  $\mathcal{H}_k$ , de la manière suivante :

$$\bar{\mathbf{K}} \underline{\psi}_i^k = \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \bar{\varphi}_i \quad k = 1, \dots, h \quad i = 1, \dots, m \quad (m \leq n) \quad (6.3)$$

Par souci de simplicité, on considère le même nombre  $m$  de modes statiques pour chacune des sous-structures  $\mathcal{H}_k$ . Puis on effectue une orthonormalisation de cette famille de vecteurs (par rapport à la matrice de masse globale  $\bar{\mathbf{M}}$ ), en utilisant par exemple l'algorithme de Gram-Schmidt modifié itératif [Daniel *et al.* 1976, Ruhe

1983, Dax 2000] ou le procédé de décomposition en valeurs singulières (*Singular Value Decomposition*) [Eckart et Young 1939, Golub et Van Loan 1996]. On obtient alors la base suivante, formée de  $(n + m \times h)$  vecteurs :

$$\mathcal{B} = \left( \underline{\varphi}_1 \ \dots \ \underline{\varphi}_n \ \underline{\psi}_1^1 \ \dots \ \underline{\psi}_m^1 \ \underline{\psi}_1^2 \ \dots \ \underline{\psi}_m^2 \ \underline{\psi}_1^h \ \dots \ \underline{\psi}_m^h \right) \quad (6.4)$$

### 6.2.3 Problème réduit

On recherche les modes propres solutions du problème aux valeurs propres perturbé 6.2 en fonction des vecteurs de la base réduite :

$$\underline{\tilde{\phi}}_i = \Phi \underline{x} + \sum_{k=1}^h \Psi_k \underline{y}_k = (\Phi | \Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_h) \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_h \end{pmatrix} \quad (6.5)$$

où  $\Phi = (\underline{\varphi}_1 \ \dots \ \underline{\varphi}_n)$  et  $\Psi_k = (\underline{\psi}_1^k \ \dots \ \underline{\psi}_m^k)$ , avec  $m \leq n$ , et  $k = 1, \dots, h$ .

En multipliant à gauche les deux termes de l'égalité 6.2 par  $(\Phi | \Psi_1 \Psi_2 \dots \Psi_h)^T$ , on obtient une nouvelle écriture du problème à résoudre :

$$\left\{ \left( \begin{array}{cc|c} \omega_1^2 & 0 & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_n^2 \\ \hline & \mathbf{0} & \mathbb{B}_1 \end{array} \right) + \sum_{k=1}^h m_{\mathcal{H}_k} \left( \begin{array}{c|c} \Phi^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Phi & \mathbb{B}_2 \\ \mathbb{B}_3 & \mathbb{B}_4 \end{array} \right) \right\} \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_h \end{pmatrix} = \tilde{\omega}_i^2 \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_h \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

où les blocs  $\mathbb{B}_1$  et  $\mathbb{B}_4$  sont des blocs de taille  $(m \times h) \times (m \times h)$ ; le bloc  $\mathbb{B}_2$  de taille  $n \times (m \times h)$ , et le bloc  $\mathbb{B}_3$  de taille  $(m \times h) \times n$ . Ils sont définis de la manière suivante :

$$\mathbb{B}_1 = \begin{bmatrix} \Psi_1^T \bar{\mathbf{K}} \Psi_1 & \dots & \Psi_1^T \bar{\mathbf{K}} \Psi_h \\ \Psi_2^T \bar{\mathbf{K}} \Psi_1 & \dots & \Psi_2^T \bar{\mathbf{K}} \Psi_h \\ \vdots & & \vdots \\ \Psi_h^T \bar{\mathbf{K}} \Psi_1 & \dots & \Psi_h^T \bar{\mathbf{K}} \Psi_h \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$\mathbb{B}_2 = \left[ \Phi^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Psi_1 \quad \Phi^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Psi_2 \quad \cdots \quad \Phi^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Psi_h \right] \quad (6.8)$$

$$\mathbb{B}_3 = \begin{bmatrix} \Psi_1^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Phi \\ \Psi_2^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Phi \\ \vdots \\ \Psi_h^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Phi \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

$$\mathbb{B}_4 = \begin{bmatrix} \Psi_1^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Psi_1 & \cdots & \Psi_1^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Psi_h \\ \Psi_2^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Psi_1 & \cdots & \Psi_2^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Psi_h \\ \vdots & & \vdots \\ \Psi_h^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Psi_1 & \cdots & \Psi_h^T \bar{\mathbf{K}}_{\mathcal{H}_k} \Psi_h \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

Le problème aux valeurs propres 6.6 est de dimension  $(n + m \times h) \times (n + m \times h)$ , bien plus petite que celle du problème initial 6.2. Sa résolution conduit, pour chaque réalisation du vecteur  $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}$ , à une estimation efficace de  $\tilde{\omega}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}})$  et  $\tilde{\phi}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}})$ .

#### 6.2.4 Appairage des modes

Afin de pouvoir déterminer les intervalles de confiance et calculer les méconnaissances effectives, il est indispensable de vérifier l'association des fréquences et modes propres obtenus.

Différents critères [Allemang et Brown 1982, Lieven et Ewins 1988, Hunt 1992] permettent de comparer et appairer les modes propres, obtenus après interpolation. Le plus simple à implémenter est le critère de *MAC* (Modal Assurance Criterion) [Allemang et Brown 1982], qui porte sur la forme du mode et qui est généralement utilisé, dans la validation des modèles, pour mesurer la corrélation entre les modes numériques et expérimentaux. Pour deux vecteurs  $\phi_i$  et  $\phi_j$ , normalisés par rapport à la matrice de masse, ce critère s'écrit :

$$\text{MAC}(\phi_i, \phi_j) = \frac{(\phi_i^T \phi_j)^2}{(\phi_i^T \phi_i)(\phi_j^T \phi_j)} \quad (6.11)$$

Lorsque  $\phi_i$  et  $\phi_j$  sont normalisés,  $\text{MAC}(\phi_i, \phi_j) = (\phi_i^T \phi_j)^2$ . En manipulant des vecteurs complexes, on remplace le transposé par le transconjugué.

Pour toute réalisation de  $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}$  et après résolution du problème 6.6, on calcule les  $\text{MAC}(\tilde{\phi}_i, \tilde{\varphi}_j)$  de chaque mode propre calculé  $\tilde{\phi}_i$  avec les modes déterministes d'intérêt  $\tilde{\varphi}_j$ , puis on les compare. La fréquence associée au mode ayant le plus grand MAC (généralement supérieur à 0.8) est regroupée avec les autres valeurs de fréquence obtenues pour ce mode, en vue d'une étude statistique.

## 6.2.5 Interpolation des pulsations et modes propres

Même s'il est de taille réduite, il reste onéreux de résoudre le problème 6.6 pour un grand nombre de réalisations de  $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}$ . On décide donc de réaliser une approximation des pulsations et modes propres par interpolation, à partir de valeurs particulières de  $\tilde{\omega}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}})$  et  $\tilde{\phi}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}})$ .

En présence de plusieurs fortes méconnaissances, une interpolation multidimensionnelle est nécessaire. La pondération inverse à la distance (*Inverse Distance Weighted*) est une des techniques les plus employées pour interpoler un nuage de points. L'idée centrale est de supposer que la surface d'interpolation devrait être davantage plus influencée par les points les plus proches que par ceux qui sont éloignés. La surface d'interpolation est ainsi une moyenne pondérée du nuage de points et le poids assigné à chaque point diminue quand sa distance à l'ensemble des points augmente.

La forme la plus simple de cette technique est la *méthode de Shepard* [Shepard 1968]. On cherche à déterminer la valeur interpolée  $v(\mathbf{x})$  d'une grandeur en un point donné  $\mathbf{x}$ , à partir d'un ensemble de valeurs connues  $v_i$  en différents points connus  $\mathbf{x}_i$  du nuage. Pour cela, on considère la fonction  $\mathcal{F}$  qui mesure l'écart entre l'ensemble des points interpolés et celui des points connus, définie comme suit :

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, v(\mathbf{x})) = \left( \sum_{i=1}^N \frac{(v(\mathbf{x}) - v_i)^2}{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)^p} \right)^{\frac{1}{p}} \quad (6.12)$$

où  $N$  est le nombre de points connus utilisés dans l'interpolation, et  $p$  un réel positif, appelé paramètre de puissance. Plus les valeurs de  $p$  sont grandes, plus l'influence aux valeurs les plus proches du point interpolé est grande. Pour  $0 < p < 1$ , les pics de  $v(\mathbf{x})$  sont lissés au-dessus du point interpolé, mais ils deviennent plus pointus pour  $p > 1$ . Le choix de  $p$  s'effectue alors en fonction des distribution et densité des échantillons à interpoler, et du degré de lissage désiré. La condition de minimisation de  $\mathcal{F}$  par rapport  $v(\mathbf{x})$  s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{x}, v(\mathbf{x}))}{\partial v(\mathbf{x})} = 0 \quad (6.13)$$

et permet de trouver  $v(\mathbf{x})$  de la forme :

$$v(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N w_i(\mathbf{x})v_i & \text{si } d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \neq 0 \forall i \\ v_i & \text{si } \exists i, d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

où les  $w_i(\mathbf{x})$  sont les fonctions de pondération associées à chaque point du nuage, définies par :

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)^{-p}}{\sum_{j=1}^N d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)^{-p}} \quad (6.15)$$

et  $d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$  est la distance euclidienne du point connu  $\mathbf{x}_i$  au point inconnu  $\mathbf{x}$  :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}\| \quad (6.16)$$

Par définition, les fonctions de pondération sont normalisées afin que leur somme soit égale à 1. Ainsi, quand on est très proche du nuage de points connus, leur valeur est proche de 1, alors qu'elle est proche de 0 lorsqu'on s'éloigne du nuage.

Cependant, cette forme des fonctions de pondération accorde une grande influence aux points qui sont assez éloignés du point d'approximation, ce qui s'avère inacceptable dans certains cas. Ainsi, une amélioration de la forme classique des fonctions de pondération a été proposée dans [Franke et Nielson 1980]. Dans ce cas, les fonctions de pondération permettent de localiser l'interpolation en utilisant uniquement les points contenus dans une sphère de rayon  $R$ , autour du point  $\mathbf{x}$  :

$$w_i(\mathbf{x}) = \frac{\left[ \frac{R - d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)}{R d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)} \right]^2}{\sum_{j=1}^N \left[ \frac{R - d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)}{R d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_j)} \right]^2} \quad (6.17)$$

Du coup, pour affaiblir l'influence des points à la frontière du nuage et d'agrandir celle des points voisins, il suffit de prendre le paramètre  $R$  égal à la distance du point d'interpolation au point le plus éloigné du nuage.

Cette technique est utilisée de manière directe pour interpoler les pulsations propres, puisqu'elles sont des grandeurs scalaires. Cependant, les vecteurs propres solutions du problème 6.6, appartiennent à une variété compacte, et leur interpolation doit s'effectuer dans un espace euclidien. Une transformation et son inverse permettant de réaliser ce passage, en préservant les propriétés des vecteurs, sont décrites dans [Amsallem et Farhat 2011].

L'interpolation permet ainsi, pour chaque réalisation de méconnaissances fortes, de trouver rapidement les fréquences et formes des modes propres associées aux différents modes d'intérêt.

### 6.2.6 Calcul des méconnaissances effectives

En s'intéressant à la pulsation propre du mode  $i$ , la différence  $\Delta\omega_i^2$  entre le carré de la pulsation propre du modèle avec méconnaissances et celui du modèle déterministe s'exprime de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\Delta\omega_i^2 &= \underline{\tilde{\phi}}_i^T \mathbf{K} \underline{\tilde{\phi}}_i - \overline{\Phi}_i^T \overline{\mathbf{K}} \overline{\Phi}_i \\
&\simeq \underline{\tilde{\phi}}_i^T \left( \overline{\mathbf{K}} + \sum_{k=1}^h m_{\mathcal{H}_k} \mathbf{K}_{\mathcal{H}_k} + \sum_{j=1}^l m_{\mathcal{L}_j} \mathbf{K}_{\mathcal{L}_j} \right) \underline{\tilde{\phi}}_i - \overline{\Phi}_i^T \overline{\mathbf{K}} \overline{\Phi}_i \\
&\simeq \tilde{\omega}_i^2(\mathbf{m}_{\mathcal{H}}) + \sum_{j=1}^l m_{\mathcal{L}_j} \underline{\tilde{\phi}}_i^T \mathbf{K}_{\mathcal{L}_j} \underline{\tilde{\phi}}_i - \overline{\omega}_i^2
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Si  $\mathcal{L}_j$  est une sous-structure de  $\mathcal{L}$  associée à une faible méconnaissance, son énergie de déformation s'écrit :

$$\tilde{e}_{\mathcal{L}_j}(\underline{\tilde{\phi}}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}})) = \frac{1}{2} \underline{\tilde{\phi}}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}})^T \mathbf{K}_{\mathcal{L}_j} \underline{\tilde{\phi}}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}}) \tag{6.19}$$

Ainsi, l'inégalité (2.52) permet de propager les intervalles de méconnaissances de base  $\left( [-m_{\mathcal{L}_j}^-; m_{\mathcal{L}_j}^+] \right)_{j=1}^l$  de la manière suivante :

$$-\Delta\omega_{i\text{LOK}}^{2-} \leq \Delta\omega_i^2 \leq \Delta\omega_{i\text{LOK}}^{2+} \tag{6.20}$$

où

$$\Delta\omega_{i\text{LOK}}^{2-} = 2 \sum_{\mathcal{L}_j \in \mathcal{L}} m_{\mathcal{L}_j}^- \tilde{e}_{\mathcal{L}_j}(\underline{\tilde{\phi}}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}})) - (\tilde{\omega}_i^2(\mathbf{m}_{\mathcal{H}}) - \overline{\omega}_i^2) \tag{6.21}$$

$$\Delta\omega_{i\text{LOK}}^{2+} = 2 \sum_{\mathcal{L}_j \in \mathcal{L}} m_{\mathcal{L}_j}^+ \tilde{e}_{\mathcal{L}_j}(\underline{\tilde{\phi}}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}})) + (\tilde{\omega}_i^2(\mathbf{m}_{\mathcal{H}}) - \overline{\omega}_i^2) \tag{6.22}$$

et on obtient des expressions analogues pour les modes propres.

Enfin on trouve les dispersions des bornes  $\Delta\omega_{i\text{LOK}}^{2-}$  et  $\Delta\omega_{i\text{LOK}}^{2+}$  qui encadrent la quantité d'intérêt  $\Delta\omega_i^2$ , et par conséquent, pour une valeur de probabilité  $P$  donnée, la méconnaissance effective sur le carré de la pulsation propre  $\omega_i^2$ , donc sur la fréquence propre.



# Chapitre 7

## Applications à des modèles dynamiques

*Ce chapitre présente les résultats de la propagation de fortes incertitudes sur des paramètres de raideur par la théorie des méconnaissances. Des analyses comparatives avec la méthode de Monte-Carlo permettent d'évaluer la capacité de la théorie des méconnaissances ainsi étendue à assurer une conception robuste en présence de fortes incertitudes.*

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Modèle plan</b> . . . . .	<b>134</b>
<b>7.2</b>	<b>Modèle tridimensionnel</b> . . . . .	<b>136</b>

---

Afin de pouvoir évaluer et juger des développements apportés à la théorie des méconnaissances pour la prise en compte de fortes incertitudes, on propose d'étudier quelques modèles dynamiques. Les intervalles obtenus sont comparés avec des simulations par la méthode de Monte-Carlo. Pour les modèles considérés, le module d'Young du matériau de chaque sous-structure est considéré incertain et a été modélisé par une variable aléatoire, de sorte que :

$$E = \bar{E} (1 + \delta \eta) \quad \text{avec } \delta = \begin{cases} 0.05 & \text{pour les sous-structures de } \mathcal{L} \\ 0.5 & \text{pour les sous-structures de } \mathcal{H} \end{cases} \quad (7.1)$$

et  $\eta$  est une variable aléatoire suivant une loi uniforme définie sur l'intervalle  $[-1; +1]$ . Ainsi, les méconnaissances de base sont modélisées par des variables aléatoires suivant une loi uniforme définie sur l'intervalle  $[-\delta; +\delta]$ .

Pour les deux cas d'étude présentés, les quantités d'intérêt considérées sont les trois premières fréquences propres de l'assemblage. Pour la théorie des méconnaissances, afin d'enrichir la base réduite, le nombre de modes statiques ajoutés est égal au nombre de modes propres d'intérêt, et ce pour chaque sous-structure de l'ensemble  $\mathcal{H}$ . Ainsi, dans l'expression 6.4,  $m = n = 3$ . Le problème réduit est résolu pour 30 réalisations de  $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}$  équirépartis. On utilise les fonctions d'interpolation définies par la relation 6.17 en considérant  $R$  égal à la distance du point d'interpolation au point le plus éloigné du nuage. On obtient ainsi les points d'interpolation  $(\mathbf{m}_{\mathcal{H}}; \tilde{\omega}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}}))$  et  $(\mathbf{m}_{\mathcal{H}}; \tilde{\phi}_i(\mathbf{m}_{\mathcal{H}}))$ .

Quelque 10000 réalisations de variables aléatoires sont générées, puis propagées à travers le modèle pour le calcul des fréquences et modes propres d'intérêt. Pour une représentation commune des résultats des deux méthodes, les bornes correspondant à une probabilité  $P = 0.99$  sont extraites des dispersions des fréquences obtenues. Ces bornes définissent le plus petit intervalle contenant 99% des valeurs des fréquences propres d'intérêt.

## 7.1 Modèle plan

Le premier modèle considéré est celui d'un assemblage plan de 9 poutres, présenté sur la figure 7.1. La liaison entre la structure et la base est supposée parfaitement rigide (i.e. les nœuds 1 et 2 sont encastés). La longueur des 3 poutres horizontales est 1.5 fois plus grande que celle des poutres verticales. Toutes les poutres sont en acier ( $\bar{E} = 210$  GPa,  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>) avec une section circulaire de  $10^{-2}$  m<sup>2</sup>.

Le maillage est constitué de 180 éléments finis ( $\sim 540$  degrés de liberté). La figure 7.2 présente la forme des modes propres associés à ces fréquences du modèle

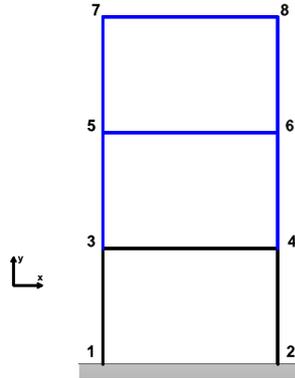


FIGURE 7.1: Assemblage de poutres plan

déterministe de l'assemblage. Tous sont des modes de flexion.

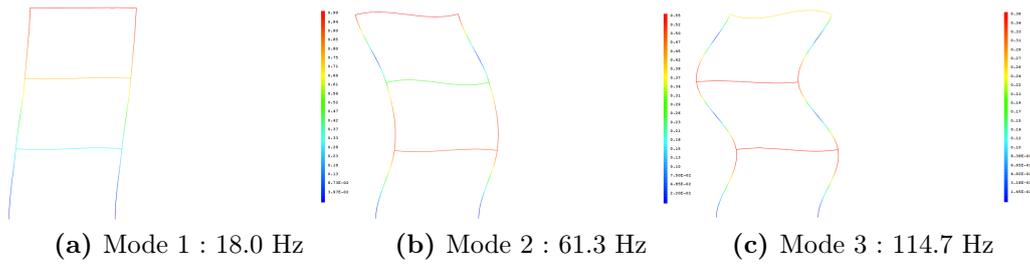


FIGURE 7.2: Forme des trois premiers modes propres du modèle déterministe de l'assemblage de poutres plan

Le module d'Young de chacune des 6 poutres de couleur bleue de la figure 7.1 est fortement incertain, et ceux des 3 autres poutres sont associées à de faibles incertitudes. Ainsi,  $h = 6$  dans l'expression 6.4, et la base réduite est formée de 21 modes.

TABLE 7.1: Intervalles à 99% pour toutes les fréquences propres de l'assemblage de poutres (10000 tirages)

$i$	1	2	3
$\bar{f}_i$ (Hz)	18.0	61.3	114.7
<b>Monte-Carlo</b>	[15.9 ; 19.1]	[53.2 ; 66.4]	[98.1 ; 125.4]
<b>LOK</b>	[16.7 ; 18.9]	[55.0 ; 65.8]	[101.7 ; 124.1]

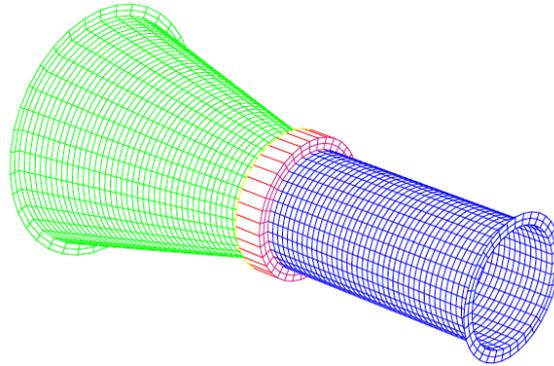
Ce premier modèle permet de valider l'implémentation des développements ap-

portés à la théorie des méconnaissances pour propager plusieurs fortes méconnaissances de base. Les intervalles à 99% du tableau 7.1 sont quasi-identiques, mais on constate que les intervalles obtenus par la théorie des méconnaissances sont parfois inclus dans les résultats des simulations par la méthode de Monte-Carlo. Ces intervalles sont ainsi plus centrés autour de la valeur moyenne pour un coût de calcul plus faible.

L'étude d'un modèle plus large permettra de juger davantage le gain apporté par l'emploi de la théorie des méconnaissances en présence de faibles et fortes méconnaissances.

## 7.2 Modèle tridimensionnel

On étudie de nouveau le modèle de la figure 7.3 qui est l'assemblage d'un cône et d'un tube liés par une cale, en acier ( $\bar{E} = 210$  GPa,  $\rho = 7800$  kg/m<sup>3</sup>). Le maillage est constitué de 3240 éléments finis ( $\sim 20000$  degrés de liberté). Le côté le plus large du cône est encastré.



**FIGURE 7.3:** Maillage de l'assemblage 3D

Dans un premier temps, on commence par propager une seule forte incertitude ( $h = 1$  dans 6.4). Ainsi la cale appartient à l'ensemble  $\mathcal{H}$ , et les autres sous-structures sont associées à de faibles incertitudes. Le tableau 7.2 donne les intervalles à 99% qui résultent de l'étude statistique.

Dans un second temps, on cherche à propager plusieurs fortes incertitudes. Ainsi le cône appartient à l'ensemble  $\mathcal{L}$ , et les autres sous-structures sont associées à des fortes incertitudes ( $h = 2$  dans 6.4). Le tableau 7.3 donne les intervalles à 99% résultants. Les bornes de l'intervalle « ERA » sont la plus grande erreur relative algébrique calculée pour chaque borne des intervalles. La dernière colonne « Temps CPU » donne les valeurs du temps passé par le processeur d'ordinateur pour le calcul des intervalles à 99%, sans inclure ni le temps de résolution du problème théorique

**TABLE 7.2:** Intervalles à 99% pour les trois premières fréquences propres de l'assemblage ( $\delta_{\text{cale}} = 0.5$ )

$i$	1	2	3	<b>ERA</b> (%)
$\bar{f}_i$ (Hz)	211.7	699.3	760.7	
<b>Monte-Carlo</b>	[204.8 ; 217.2]	[678.5 ; 716.3]	[737.0 ; 779.8]	– (référence)
<b>LOK</b>	[205.6 ; 216.8]	[680.6 ; 715.9]	[739.3 ; 779.2]	[+0.3 ; -0.07]

déterministe ni le temps nécessaire pour effectuer les tirages.

**TABLE 7.3:** Intervalles à 99% pour les trois premières fréquences propres de l'assemblage ( $\delta_{\text{cône}} = 0.05$ )

$i$	1	2	3	<b>ERA</b> (%)	<b>Temps CPU</b> (min)
$\bar{f}_i$ (Hz)	211.7	699.3	760.7		
<b>Monte-Carlo</b>	[201.6 ; 219.5]	[658.6 ; 722.9]	[715.4 ; 789.4]	– (référence)	1628
<b>LOK</b>	[202.4 ; 217.6]	[661.8 ; 721.1]	[717.1 ; 785.7]	[+0.23 ; -0.47]	12

En observant la taille des intervalles, on conclut que la méthode de Monte-Carlo est plus conservative que la théorie des méconnaissances. Pour ce modèle, les intervalles obtenus par la théorie des méconnaissances sont toujours inclus dans les résultats de la méthode de Monte-Carlo. Néanmoins, l'erreur relative reste extrêmement faible et les intervalles prédits sont très proches. De plus, comme pour le cas de faibles incertitudes, le coût de calcul de la théorie des méconnaissances est fort intéressant. Le calcul des modes statiques, la résolution du problème réduit pour différents tirages et la phase d'interpolation sont certes coûteux mais le temps de calcul global reste très faible.



# Bilan

Dans le monde industriel, la réalité est souvent constituée d'assemblages d'un grand nombre de composants à géométrie complexes avec des fixations ayant des comportements non-linéaires. Comme il a déjà été démontré, la présence de liaisons boulonnées et la variation des conditions de liaison génèrent des incertitudes et ont un impact considérable sur la réponse dynamique globale de l'assemblage. Un ensemble d'incertitudes, faibles et fortes sur la raideur, contribue alors à faire élargir l'écart entre les prédictions et le comportement réel.

Lorsque les incertitudes sont faibles, la théorie des méconnaissances conduit à des intervalles précis de manière simple et pour un coût de calcul très faible. Cependant la prise en compte de fortes incertitudes est plus délicate et nécessite des développements importants. Même si certaines méthodes paramétriques et non paramétriques probabilistes peuvent être employées à cet effet, l'intrusivité et la lourdeur des calculs sont décourageants. Une extension de la théorie des méconnaissances, permettant de propager plusieurs faibles et fortes incertitudes sur des raideurs structurales dans les modèles dynamiques, est ainsi proposée.

L'idée principale est de considérer que la présence d'une forte incertitude sur une sous-structure a une influence non négligeable sur la valeur des fréquences propres et la forme des modes propres du système. Par conséquent, cela doit être pris en compte dans l'écriture du problème aux valeurs propres de la structure. On cherche alors à résoudre ce nouveau problème en réduisant sa taille par projection sur une base réduite enrichie. Une étape d'interpolation à partir de solutions particulières permet de déterminer les bornes de l'intervalle de variation des grandeurs d'intérêt avec un coût de calcul et de stockage mémoire réduit.

Après validation de l'implémentation sur un modèle de poutres, un modèle dynamique plus élaboré est étudié en considérant des incertitudes faibles et fortes sur des paramètres de raideur des composants. Des analyses comparatives avec la méthode de Monte-Carlo montrent la capacité de la théorie des méconnaissances à assurer une conception robuste en présence de fortes incertitudes.

A ce stade, une question importante se pose quant à l'applicabilité industrielle de la théorie des méconnaissances ainsi étendue. On propose alors d'étudier un as-

---

semblage boulonné industriel. L'analyse modale expérimentale de la structure réelle permettra d'évaluer sa variabilité expérimentale de réalisation. Puis, de faibles et fortes incertitudes sur des paramètres de raideur seront propagées par la théorie des méconnaissances dans plusieurs modèles dynamiques de cette structure industrielle.

Quatrième partie

Etude d'une structure industrielle



# Chapitre 8

## Le projet SICODYN

*Ce chapitre présente brièvement le contexte, les objectifs et les verrous technologiques du projet SICODYN. Le travail de recherche présent se place dans le cadre de ce projet.*

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Contexte de l'étude</b>	<b>144</b>
<b>8.2</b>	<b>Principaux objectifs</b>	<b>145</b>
<b>8.3</b>	<b>Verrous technologiques</b>	<b>149</b>

---

## 8.1 Contexte de l'étude

Que ce soit dans un contexte de conception d'un nouveau matériel, de qualification ou d'expertise d'un matériel existant, la connaissance fiable des caractéristiques dynamiques relatives aux vibrations d'une structure industrielle est indispensable. Cette connaissance permet de maîtriser les phénomènes vibratoires pouvant occasionner des incidents, voire même des accidents dangereux pour la sécurité des personnes et la sûreté des installations. Les coûts humains, les pertes de production et les coûts de maintenance supplémentaires liés à ces défaillances peuvent atteindre des valeurs considérables dans le cas de grosses unités industrielles.

Les simulations numériques sont de plus en plus utilisées pour répondre à ce besoin, d'une part car elles sont moins coûteuses que la réalisation de mesures, d'autre part car elles permettent un prototypage rapide de solutions techniques. De la même manière qu'un résultat de mesure est théoriquement assorti de son incertitude associée, un résultat numérique doit être fourni assorti d'une mesure de la confiance ou de la crédibilité qu'on peut lui accorder. Deux approches sont possibles. La première, plus traditionnelle, consiste à affecter le résultat d'un calcul d'un coefficient de sécurité généralement issu d'un retour d'expérience. La seconde consiste à réaliser des simulations numériques, souvent lourdes, pour estimer un intervalle de confiance ou une densité de probabilité à partir d'incertitudes supposées sur les paramètres du modèle.

Un exemple d'application de ces démarches concerne les spécifications techniques qu'EDF impose aux constructeurs de pompes. Dû à un retour d'expérience défavorable, et pour la construction du nouveau palier nucléaire EPR (réacteur pressurisé européen), il est important pour EDF de savoir, a priori :

- la capacité de ces constructeurs à réaliser des études (a priori par voie de simulation numérique) permettant de satisfaire aux exigences d'EDF ;
- le niveau de confiance qu'EDF pourra accorder aux résultats de calculs fournis par les constructeurs de pompes sur leurs matériels.

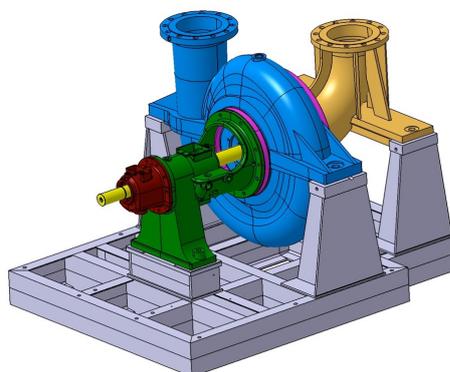
Étant donné que les travaux de benchmarking en dynamique des structures présents dans la littérature ne permettent pas de répondre de manière satisfaisante aux besoins d'EDF, un benchmark international est organisé par EDF R&D sur la période 2008–2010 [Audebert 2010, Audebert *et al.* 2014]. Il a permis, sur la base des simulations effectuées par les différents participants, d'observer la variabilité numérique des caractéristiques dynamiques d'une pompe, à l'arrêt et non connectée (cf. Figure 8.1 et Figure 8.2), issues de calculs purement prédictifs (en aveugle).

Les résultats de ce benchmark ont révélé un besoin de poursuivre les développements dans les domaines suivants :

- la capacité à modéliser le comportement vibratoire des structures industrielles



(a) Pompe Booster mono-étagée à axe horizontal



(b) CAO des 7 composants principaux assemblés

**FIGURE 8.1:** Démonstrateur du benchmark et du projet SICODYN équipant les centrales thermiques

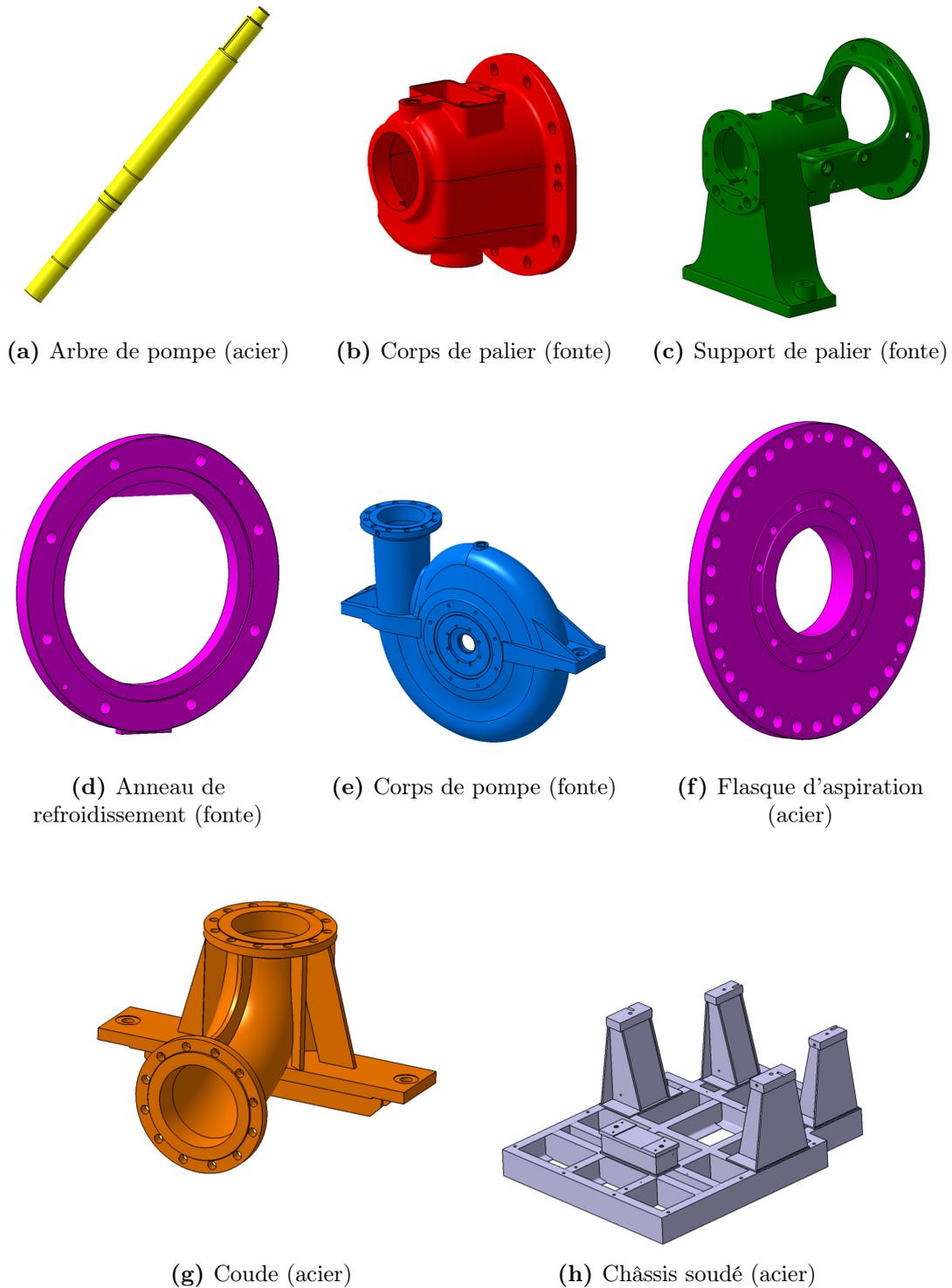
- (et en particulier les pompes) ;
- la quantification des incertitudes de calcul ;
  - la quantification des incertitudes expérimentales.

## 8.2 Principaux objectifs

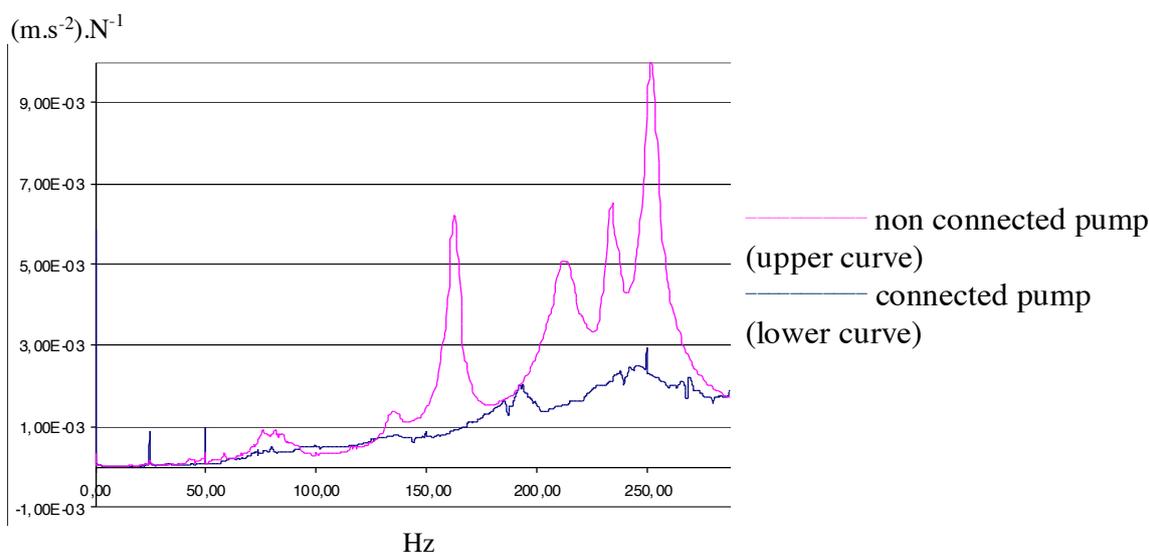
Un programme de recherche plus ambitieux a été proposé par EDF R&D et a été accepté comme projet FUI (Fonds Unique Interministériel), intitulé SICODYN (pour des SIMulations crédibles via la CORRélation calcul-essai et l'estimation d'incertitudes en DYNAMique des structures), initié en 2012 et réalisé jusqu'en 2016. Le démonstrateur est toujours la pompe de la figure 8.1, considérée maintenant dans son environnement industriel. La complexité liée à la prise en compte de l'environnement réel est illustrée sur la figure 8.3 : l'exploitation des données expérimentales est extrêmement plus difficile dans le cas où la pompe est couplée (pics de résonance difficilement identifiables) que dans le cas où la pompe est déconnectée des tuyauteries (pics de résonance bien marqués).

L'objectif principal de ce projet est de quantifier et caractériser les incertitudes sur le comportement dynamique des assemblages sous deux aspects :

- l'aspect expérimental en cherchant à observer la variabilité liée à la diversité des spécimens, la variabilité liée à l'opérateur et à la variation des conditions de liaison, ainsi que la variabilité liée aux moyens de mesure et aux méthodes de traitement des données d'essais ;
- l'aspect numérique en cherchant, d'une part, à observer l'incertitude totale via une opération de benchmarking et, d'autre part, à caractériser par calcul



**FIGURE 8.2:** Modèles 3D des différents composants de la pompe SICODYN



**FIGURE 8.3:** Fonctions de réponse en fréquence de la pompe SICODYN à une excitation au marteau de choc : pompe non couplée (courbe rose) et pompe couplée aux tuyauteries (courbe bleue) (tirée de [Audebert *et al.* 2014])

les incertitudes liées à la propagation des erreurs sur les paramètres et celles liées à la simplification ou la non prise en compte de phénomènes physiques.

Le but final est d'avoir une boîte à outils et des méthodologies de calcul qui permettent d'estimer le niveau de confiance a priori associé au résultat d'un calcul prédictif en dynamique. L'organisation générale des 6 lots du projet est décrite sur la figure 8.4.

Le lot 1 présente un inventaire des benchmarks existants en dynamique des structures, en plus d'un état de l'art des méthodes de propagation et quantification des incertitudes.

Le lot 2 est un benchmark qui a pour but d'observer la variabilité expérimentale liée à l'opérateur et à la variation des conditions de liaison sur des structures nominalelement identiques.

Un autre benchmark fait l'objet du lot 3 permettant d'observer la variabilité numérique totale qui résulte des différentes options de modélisation prises par les partenaires (type de modèle physique, type de conditions de liaison, type d'équation et de schémas numériques utilisés, code de calcul) et des différentes options de paramétrage retenues (valeurs des caractéristiques mécaniques utilisées par chacun des partenaires). Les configurations retenues sont celle de la pompe à l'arrêt, coulée dans le béton, non connectée puis connectée aux tuyauteries.

Le lot 4 est consacré à la corrélation calcul-essai en utilisant une collection de résultats numériques et de mesures expérimentales. Son objectif est d'établir un modèle présentant le meilleur compromis entre le temps mis pour l'élaborer, le temps

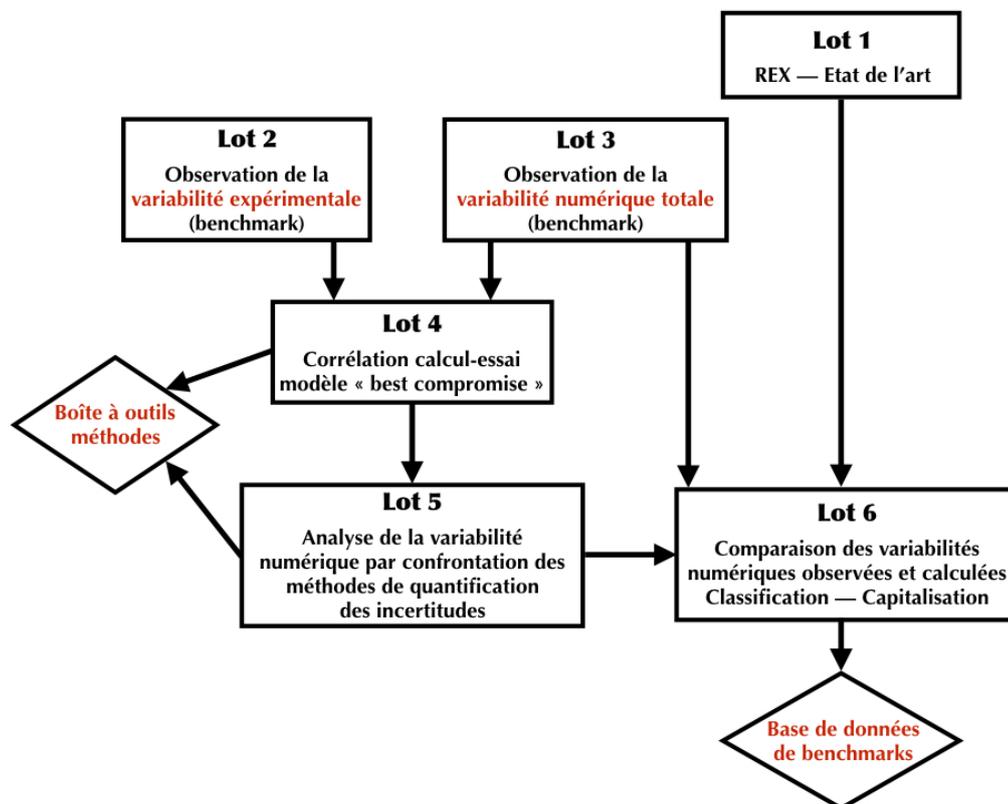


FIGURE 8.4: Structuration scientifique du projet SICODYN

de calcul lié directement à la taille du modèle et la représentation du comportement dynamique global de la structure.

Dans le lot 5, il s'agit de confronter des méthodes paramétriques et non paramétriques de quantification des incertitudes, dans un contexte déterministe puis dans un cadre probabiliste.

Enfin, le lot 6 propose de comparer les variabilités numériques totales observées (via le benchmark du lot 3) et simulées (dans le lot 5). Cette comparaison permettra de statuer sur la capacité des méthodes utilisées dans le lot 5 à quantifier de manière prédictive la confiance qu'on peut accorder au résultat de calcul. Les méthodes les plus adaptées à une application industrielle seront retenues en vue d'en dégager des coefficients de sécurité et des intervalles de confiance pouvant être employés dans d'autre cas en dynamique des structures.

La littérature récente présente des applications intéressantes de la démarche suivie dans le cadre du projet SICODYN à des structures de différentes tailles et échelles [Schuëller et Pradlwarter 2007, Atamturktur *et al.* 2012, Linderholt *et al.* 2015, Van Buren *et al.* 2015].

## 8.3 Verrous technologiques

Les principaux verrous techniques et scientifiques que le projet se propose de lever sont les suivants :

- **Application de méthodes à des structures à grand nombre de degrés de liberté :**  
Un enjeu important est celui d'éprouver, sur des structures à grand nombre de degrés de liberté, des méthodes décrites théoriquement, et éventuellement testées sur des structures académiques simples, conçues spécialement pour la démonstration de leur faisabilité.
- **Application de méthodes à des structures assemblées :**  
Outre les problèmes liés à la taille généralement élevée des modèles de structures assemblées, la prise en compte des liaisons, source majoritaire d'incertitudes, augmente considérablement le nombre de paramètres à considérer dans les processus de corrélation calcul-essai et de quantification des incertitudes.
- **Prise en compte du milieu environnant :**  
La prise en compte du milieu environnant est essentielle pour l'industriel. L'enjeu est de statuer sur la capacité d'un modèle, mis au point avec des conditions aux limites simplifiées, à représenter le comportement dynamique de cette structure considérée dans son environnement industriel, dans un contexte purement prédictif.
- **Estimation de l'incertitude de modèle et de l'incertitude numérique totale :**  
L'estimation de l'incertitude liée aux paramètres de modèle est réalisée par des méthodes éprouvées depuis un certain nombre d'années. La quantification des incertitudes de modèle est en revanche un champ nouveau, qui commence à être étudié par certains laboratoires. Ce projet permet de statuer sur la capacité des méthodes numériques à reproduire les incertitudes effectivement observées.
- **Amélioration de la robustesse des modèles vis-à-vis des incertitudes :**  
La robustesse est un des éléments justifiant de la crédibilité d'un modèle. Ce projet répond à l'état de robustesse de modèles numériques de structures assemblées, en distinguant ce qui relève de la robustesse du phénomène physique lui-même (certaines conditions aux limites) et de la représentation de ce phénomène par le modèle.



# Chapitre 9

## Analyse modale expérimentale

*Ce chapitre présente l'analyse modale expérimentale réalisée sur un assemblage de deux composants de la pompe. Plusieurs configurations de serrage et différents niveaux de sollicitation ont été envisagés. Les résultats obtenus permettent d'évaluer la variabilité expérimentale de réalisation d'une structure industrielle.*

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Description du montage</b> . . . . .	<b>152</b>
<b>9.2</b>	<b>Analyse modale expérimentale</b> . . . . .	<b>154</b>
<b>9.3</b>	<b>Influence des configurations</b> . . . . .	<b>158</b>
9.3.1	Configuration à 10 boulons . . . . .	159
9.3.2	Configuration à 6 boulons . . . . .	160
9.3.3	Configuration à 2 boulons . . . . .	162
9.3.4	Synthèse . . . . .	164
<b>9.4</b>	<b>Influence des niveaux de sollicitation</b> . . . . .	<b>166</b>

---

La production de pièces et structures mécaniques contient toujours des incertitudes, causant des différences entre les produits d'une même population et des écarts dans leur comportement. Dans le but d'élaborer des modèles génériques et d'assurer des prédictions fiables en dynamique des structures, la quantification de la variabilité expérimentale est nécessaire.

On recense la variabilité liée à l'opérateur et la variabilité de réalisation. La littérature récente montre l'intérêt de mener des analyses modales sur des structures nominale-ment identiques et confronter plusieurs équipes [Linderholt *et al.* 2015]. Les observations montrent que les procédures d'assemblage et d'expérimentation génèrent des écarts, parfois non négligeables, entre les résultats des différents opérateurs.

On propose ici de réaliser une analyse modale expérimentale d'un sous-système de la pompe SICODYN et de caractériser la variabilité de réalisation liée au nombre de boulons serrés et au niveau d'excitation.

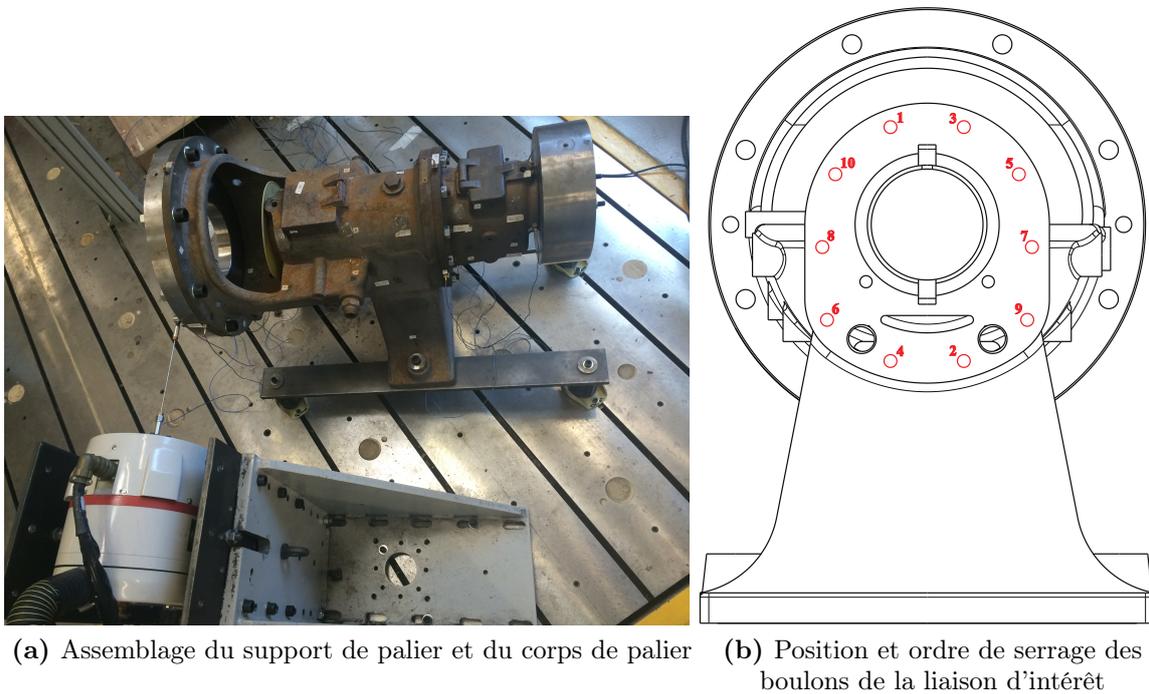
Dans le cadre du projet SICODYN, et afin de caractériser la variabilité liée à l'opérateur aussi, ces résultats sont confrontés à ceux obtenus par deux autres laboratoires, ayant mené une étude similaire sur le même assemblage.

## 9.1 Description du montage

Le montage retenu pour cette étude est l'assemblage du support de palier (147 kg) et du corps de palier (23 kg). La liaison d'intérêt est celle entre le corps de palier et le support de palier. Afin d'atteindre les objectifs de l'étude expérimentale, une étude numérique préparatoire a permis de vérifier si les modes basse-fréquence sollicitent bien la liaison et, sinon, de proposer des modifications sur les répartitions de masse.

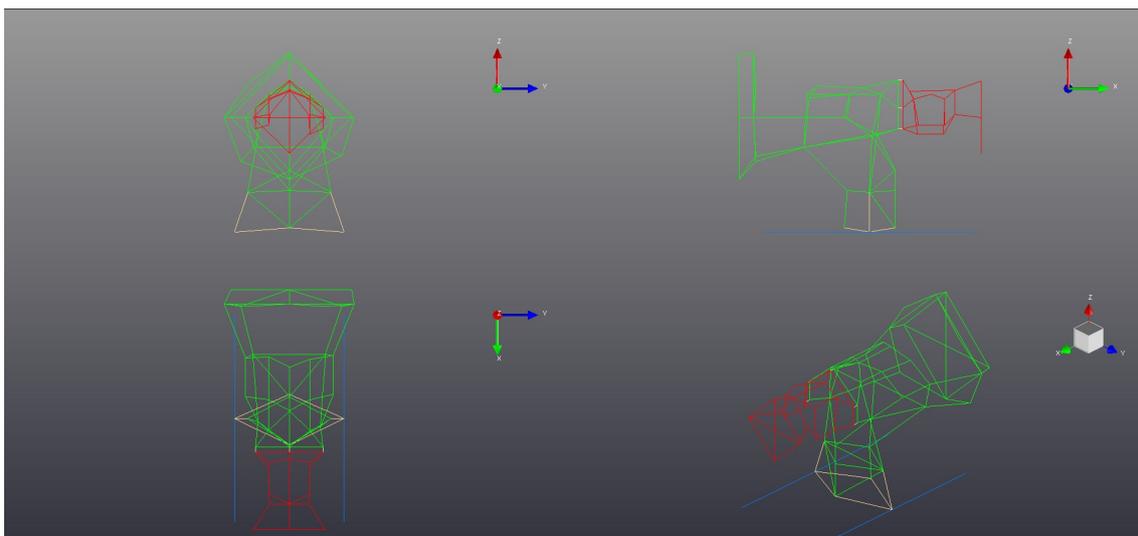
Ainsi, comme le montre la figure 9.1a, deux masses additionnelles, d'environ 55 kg chacune, ont été conçues et fixées aux extrémités de la structure. Une flasque, en appui plan centrage court, a été boulonnée au support de palier. Un cylindre, centré dans l'alésage du corps de palier, a été fixé par une barre parallélépipédique suffisamment rigide et présentant deux perçages filetés pour serrage. Comme pour le banc d'essai académique présenté dans le chapitre 4, ces masses permettent de solliciter la liaison boulonnée centrale à des fréquences plus basses. Dans ce cas, ces masses rigidifient également des zones souples dans les composants qui conduisent à de nombreux modes locaux en basse-fréquence.

La solution technique qui a été envisagée pour rigidifier le pied du support de palier est de le fixer à deux lames / poutres, de longueur 100 cm, de largeur 10 cm et d'épaisseur 2 cm. L'ensemble a été découplé du sol par un dispositif de suspension constitué de quatre supports antivibratoires à ressorts métalliques amortis.



**FIGURE 9.1:** Sous-système de la pompe SICODYN étudié

La figure 9.1b montre la position des boulons serrés et l'ordre de serrage des boulons de la liaison d'intérêt. Le couple de serrage a été fixé à 115 N.m pour tous les boulons.

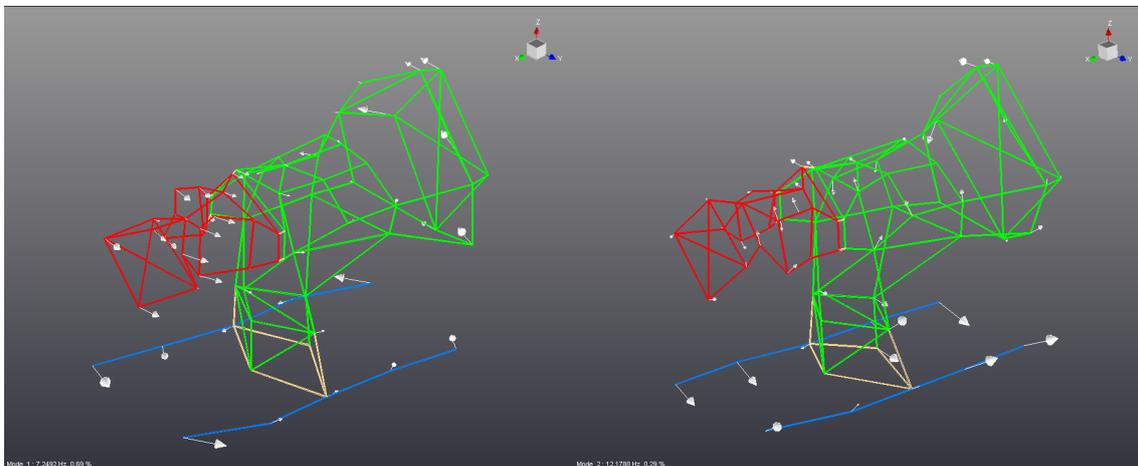


**FIGURE 9.2:** Maillage expérimental de l'assemblage étudié

## 9.2 Analyse modale expérimentale

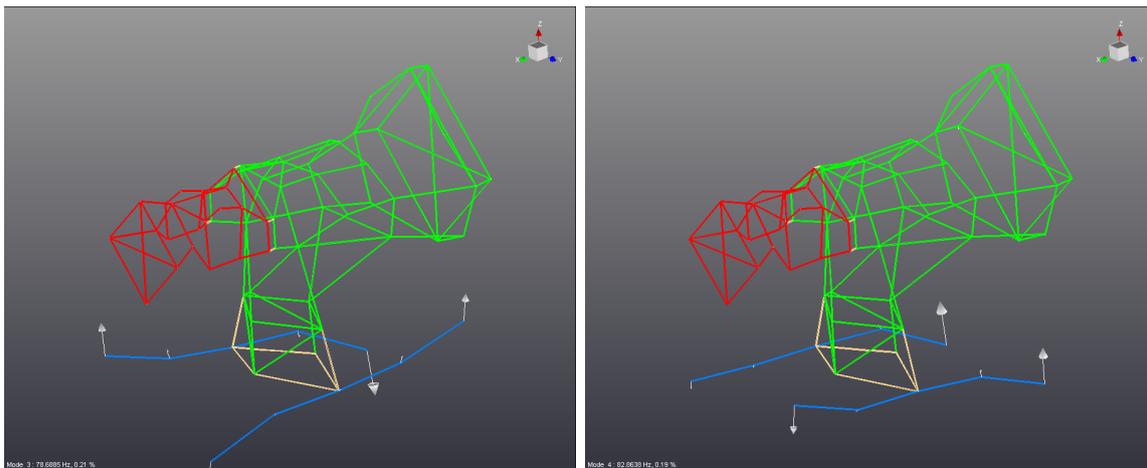
L'excitation de l'assemblage a été réalisée selon un axe horizontal par un bruit blanc généré par un pot vibrant, maintenu en position entre deux équerres fixées rigidement au sol (cf. figure 9.1a). Pour les analyses modales expérimentales, la gamme de fréquences d'excitation est [0–1024] Hz et la bande de fréquences d'étude est [0–500] Hz, avec une fréquence d'échantillonnage de 8192 Hz. Un moyennage sur 10 acquisitions a été réalisé et un fenêtrage de type Hann a été utilisé.

La figure 9.2 montre le maillage expérimental construit, formé de 72 points de mesure. Dans le cas de la configuration à 10 boulons, la figure 9.3 présente l'ensemble des modes de vibration obtenus dans la bande de fréquence d'analyse.

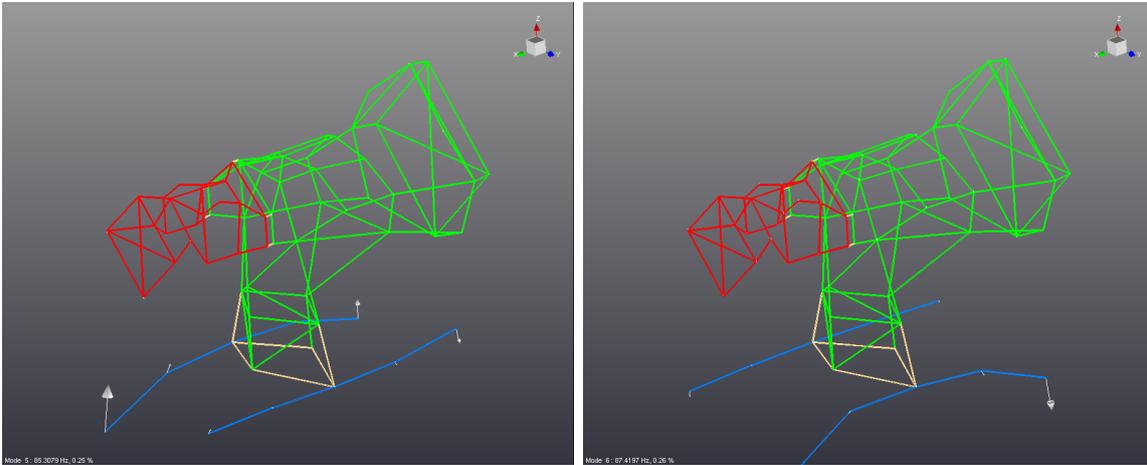


(a) Mode 1 : mode de rotation autour de z

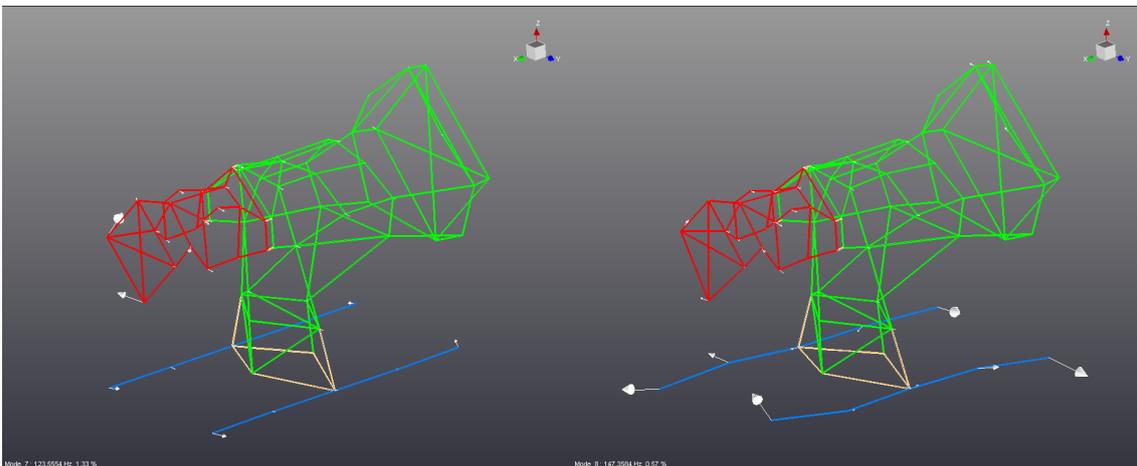
(b) Mode 2 : mode de basculement



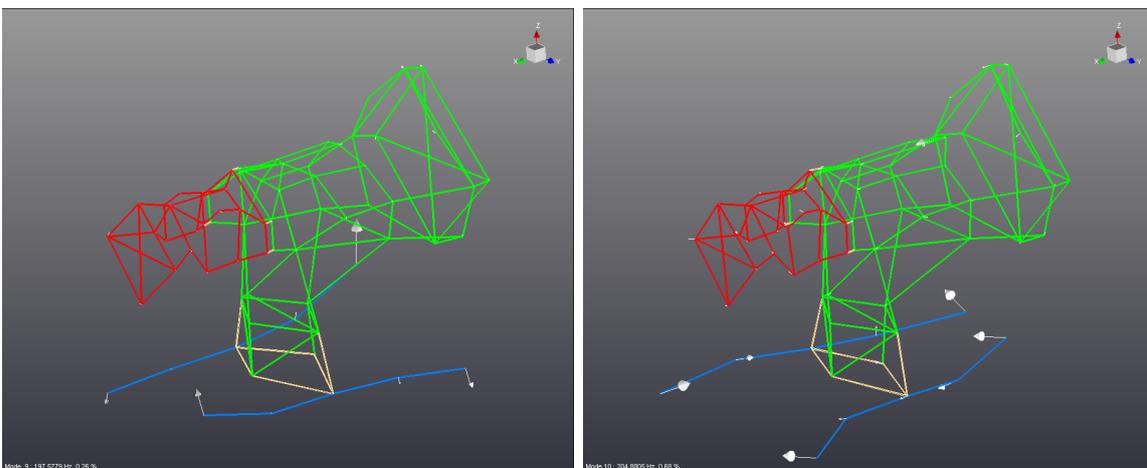
(c) Modes 3 et 4 : modes de flexion des poutres ou modes des ressorts



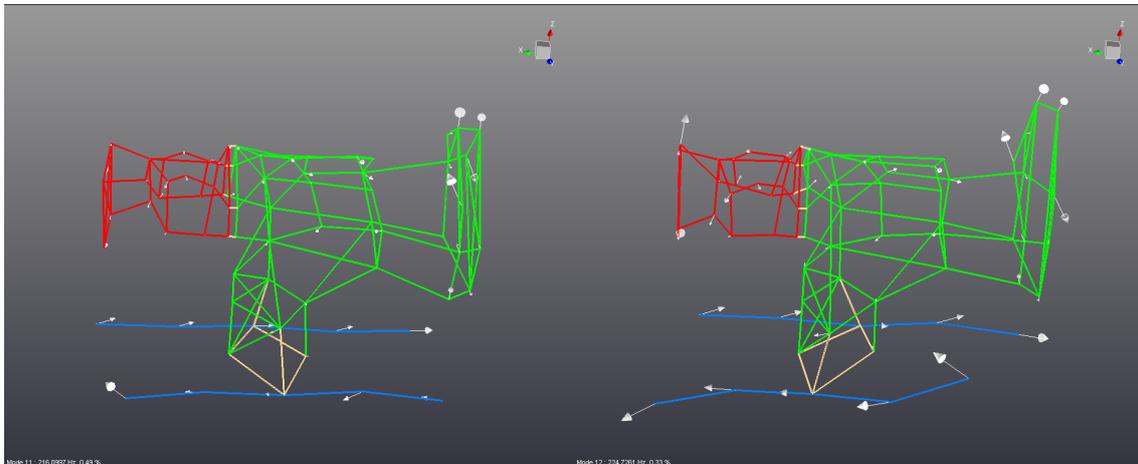
(d) Modes 5 et 6 : modes de flexion des poutres ou modes des ressorts



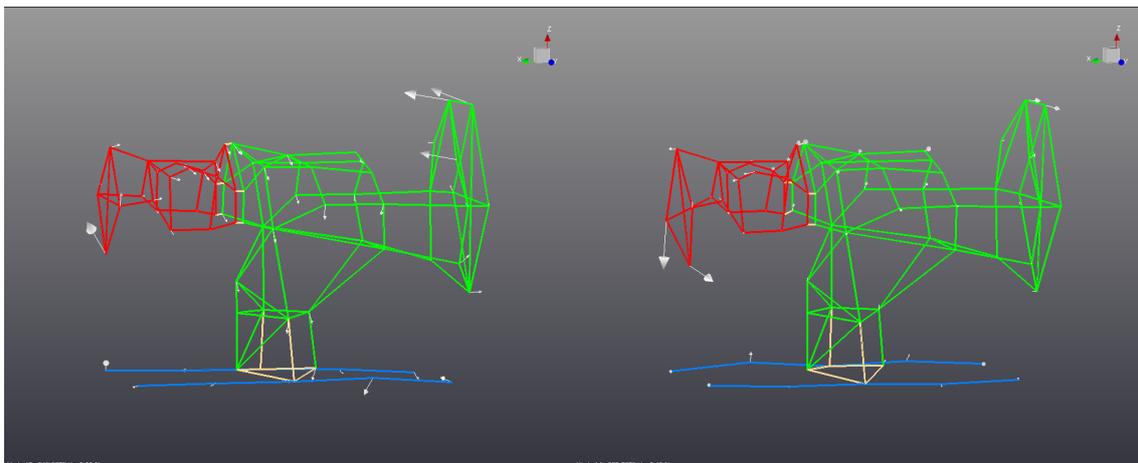
(e) Mode 7 : mode de flexion du corps de palier (f) Mode 8 : mode de rotation de l'assemblage sur le dispositif de suspension



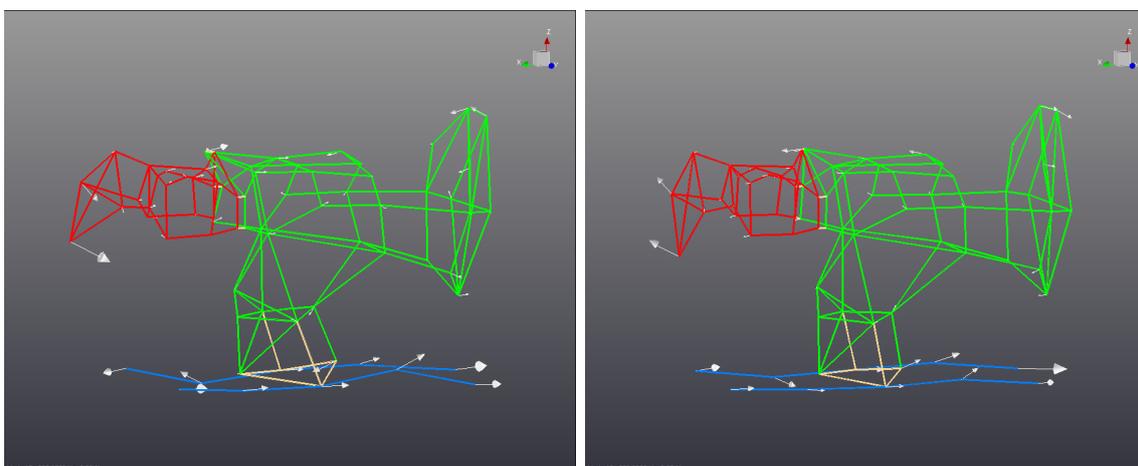
(g) Modes 9 et 10 : modes de flexion des poutres ou modes des ressorts



(h) Mode 11 : mode de torsion du support de palier      (i) Mode 12 : mode de torsion de l'assemblage



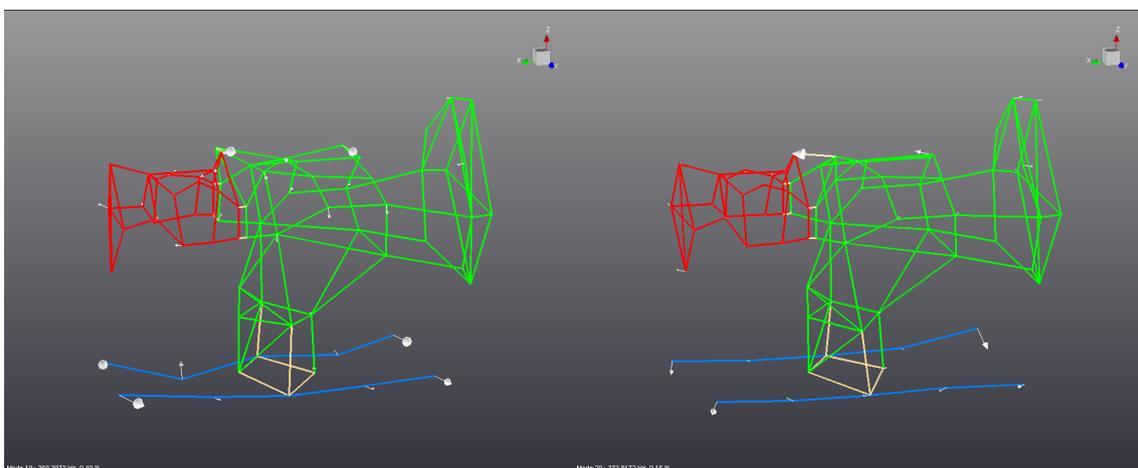
(j) Mode 13 : mode de flexion de l'assemblage      (k) Mode 14 : mode de torsion du corps de palier



(l) Modes 15 et 16 : modes de flexion de l'assemblage couplés aux modes de poutres

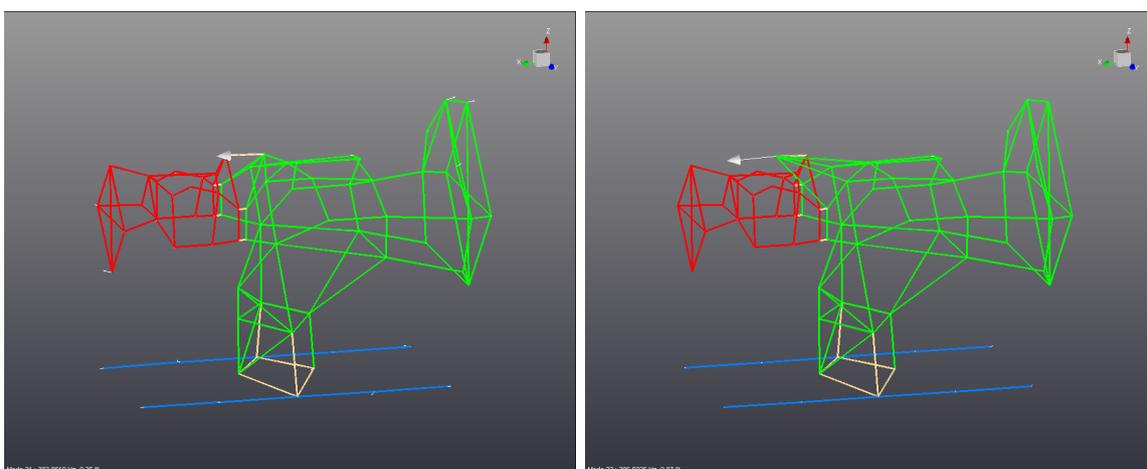


(m) Modes 17 et 18 : modes de poutres ou de ressorts

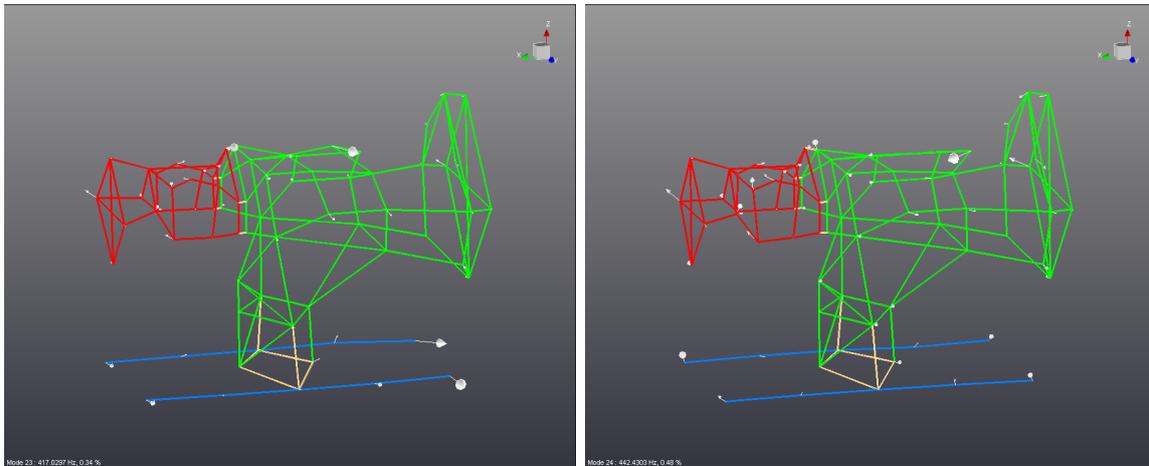


(n) Mode 19 : mode de torsion du support de palier

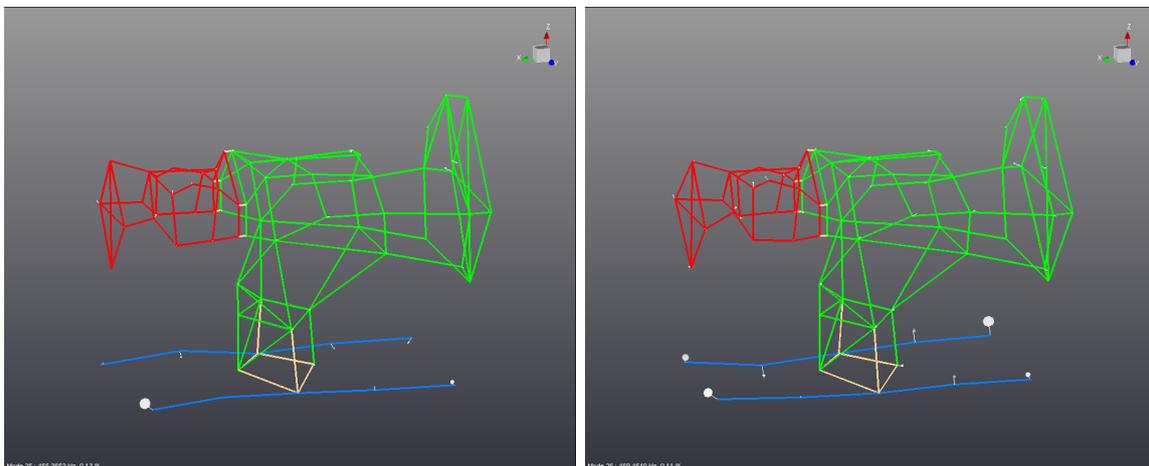
(o) Mode 20 : mode local du support de palier



(p) Modes 21 et 22 : modes locaux du support de palier



(q) Modes 23 et 24 : modes d'assemblage



(r) Modes 25 et 26 : modes de poutres ou de ressorts

**FIGURE 9.3:** Modes de vibration du montage pour la configuration à 10 boulons

Ces résultats montrent que les poutres utilisées en support présentent une souplesse relativement importante : elles sont trop rigides pour être découplées des premiers modes élastiques, mais trop souple pour être considérées indéformables.

### 9.3 Influence des configurations

Dans le but de caractériser la variabilité de réalisation liée aux conditions de liaison, les essais ont été réalisés selon trois configurations :

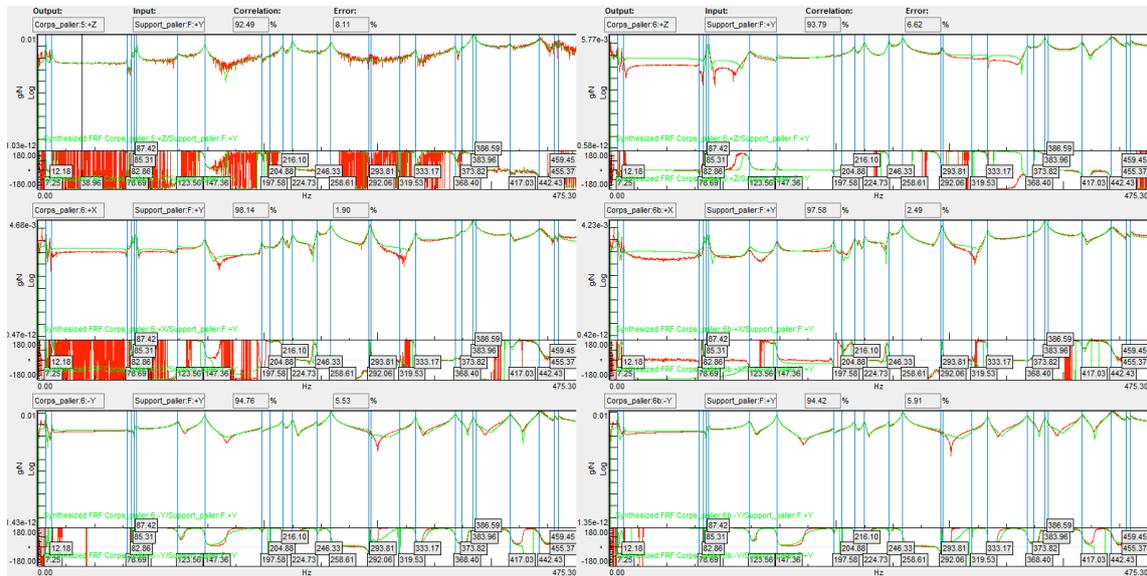
- **Configuration à 10 boulons** : tous les boulons sont serrés ;
- **Configuration à 6 boulons** : les boulons 5, 6, 9 et 10 sont enlevés (cf. figure 9.1b) ;
- **Configuration à 2 boulons** : seuls les boulons 7 et 8 restent (cf. figure 9.1b).

### 9.3.1 Configuration à 10 boulons

Pour la configuration à 10 boulons, le tableau 9.1 présente les valeurs des fréquences de résonance et amortissements modaux relatifs aux 26 modes situés dans la bande de fréquences d'analyse.

**TABLE 9.1:** Fréquences de résonance et amortissements modaux pour la configuration à 10 boulons sur [0–500] Hz

Mode 1 : 7.25 Hz, 0.69%	Mode 2 : 12.18 Hz, 0.29%	Mode 3 : 78.68 Hz, 0.21%
Mode 4 : 82.86 Hz, 0.19%	Mode 5 : 85.30 Hz, 0.25%	Mode 6 : 87.42 Hz, 0.26%
Mode 7 : 123.55 Hz, 1.33%	Mode 8 : 147.36 Hz, 0.57%	Mode 9 : 197.58 Hz, 0.26%
Mode 10 : 204.88 Hz, 0.68%	Mode 11 : 216.10 Hz, 0.49%	Mode 12 : 224.72 Hz, 0.33%
Mode 13 : 246.32 Hz, 0.28%	Mode 14 : 258.60 Hz, 0.40%	Mode 15 : 292.06 Hz, 0.36%
Mode 16 : 293.80 Hz, 0.25%	Mode 17 : 319.53 Hz, 0.14%	Mode 18 : 333.16 Hz, 0.22%
Mode 19 : 368.39 Hz, 0.40%	Mode 20 : 373.81 Hz, 0.15%	Mode 21 : 383.96 Hz, 0.25%
Mode 22 : 386.59 Hz, 0.97%	Mode 23 : 417.03 Hz, 0.34%	Mode 24 : 442.43 Hz, 0.48%
Mode 25 : 455.36 Hz, 0.13%		Mode 26 : 459.45 Hz, 0.11%



**FIGURE 9.4:** Quelques FRF synthétisées – Configuration à 10 boulons

La qualité de l'identification peut être contrôlée grâce à la synthèse des fonctions de réponse en fréquence. En effet, connaissant les modes et les termes com-

plémentaires (ou résiduels), on peut reconstruire mathématiquement des fonctions de réponse en fréquence. La figure 9.4 montre quelques FRF synthétisées (courbes de couleur verte), pour différents points de mesure. Ces FRF sont comparées aux fonctions de réponse en fréquence mesurées (courbes de couleur rouge). La valeur élevée de la corrélation (ou la valeur faible de l'erreur) permet de conclure quant à la bonne reconstruction modale des essais et la qualité de l'identification de la base modale.

Afin de comparer les modes propres entre eux, on construit la matrice AutoMAC [Ewins 2000] (Processing A et Processing B sont les vecteurs de la base calculée). Cette matrice est utilisée afin de déterminer si le nombre et la position des points de mesure sont suffisants pour pouvoir distinguer les modes entre eux. La diagonale de la matrice permet de vérifier que les vecteurs propres sont bien différents et donne des informations sur les modes locaux. L'existence de termes non négligeables en dehors de la diagonale dans la matrice AutoMAC est généralement une indication de repliements spatiaux.

La figure 9.5 présente la matrice AutoMAC obtenue pour la configuration à 10 boulons. La couleur bleue correspond à un MAC = 0 (vecteurs orthogonaux) et la couleur rouge correspond à un MAC = 1 (vecteurs colinéaires).

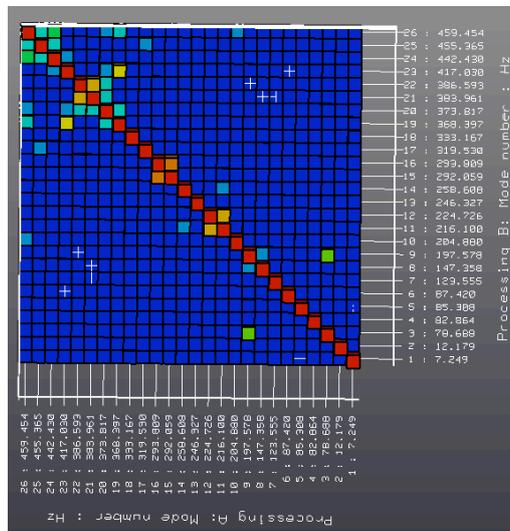


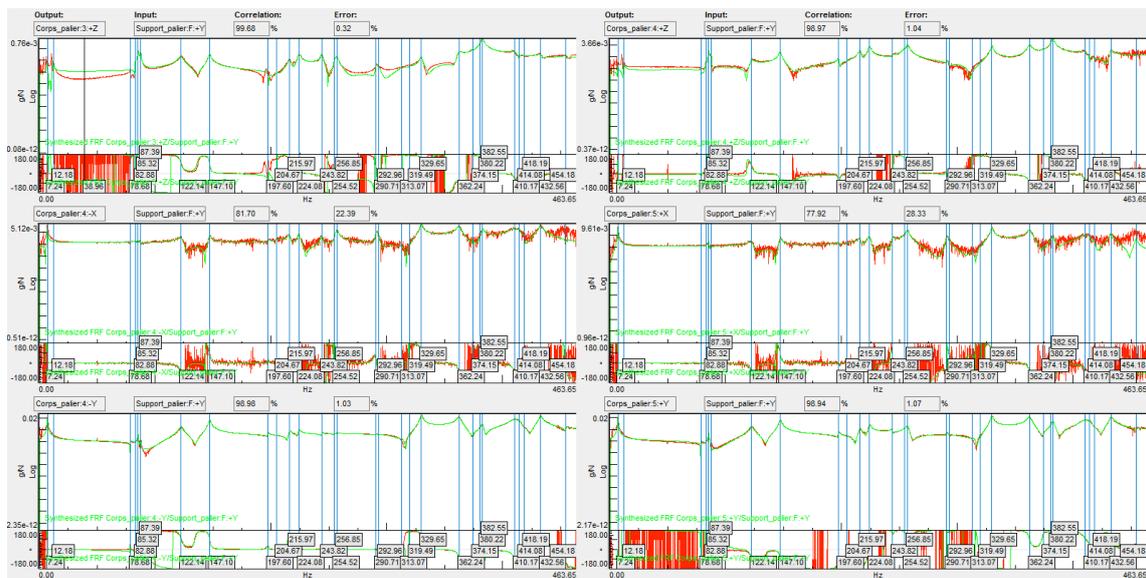
FIGURE 9.5: Matrice AutoMAC – Configuration à 10 boulons

### 9.3.2 Configuration à 6 boulons

Pour la configuration à 6 boulons, le tableau 9.2 présente les valeurs des fréquences de résonance et amortissements modaux relatifs aux 29 modes situés dans la bande de fréquences d'analyse.

**TABLE 9.2:** Fréquences de résonance et amortissements modaux pour la configuration à 6 boulons sur [0–500] Hz

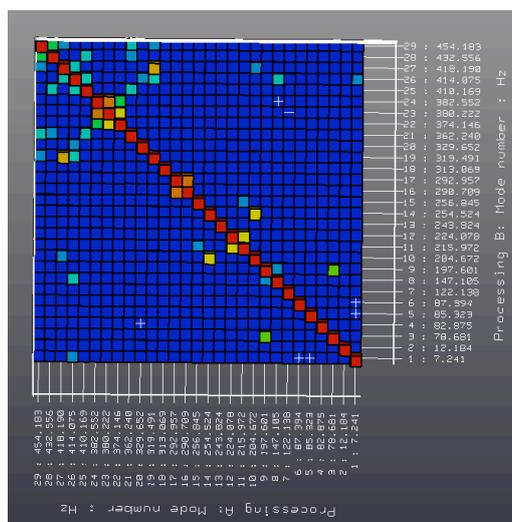
Mode 1 : 7.24 Hz, 0.64%	Mode 2 : 12.18 Hz, 0.35%	Mode 3 : 78.68 Hz, 0.21%
Mode 4 : 82.87 Hz, 0.19%	Mode 5 : 85.32 Hz, 0.27%	Mode 6 : 87.39 Hz, 0.25%
Mode 7 : 122.13 Hz, 1.39%	Mode 8 : 147.10 Hz, 0.57%	Mode 9 : 197.60 Hz, 0.30%
Mode 10 : 204.67 Hz, 0.76%	Mode 11 : 215.97 Hz, 0.50%	Mode 12 : 224.07 Hz, 0.35%
Mode 13 : 243.82 Hz, 0.27%	Mode 14 : 254.52 Hz, 0.31%	Mode 15 : 256.84 Hz, 0.39%
Mode 16 : 290.70 Hz, 0.20%	Mode 17 : 292.95 Hz, 0.44%	Mode 18 : 313.07 Hz, 1.42%
Mode 19 : 319.49 Hz, 0.15%	Mode 20 : 329.65 Hz, 0.25%	Mode 21 : 362.24 Hz, 0.40%
Mode 22 : 374.14 Hz, 0.07%	Mode 23 : 380.22 Hz, 1.08%	Mode 24 : 382.55 Hz, 0.26%
Mode 25 : 410.17 Hz, 0.79%	Mode 26 : 414.07 Hz, 0.18%	Mode 27 : 418.19 Hz, 0.17%
Mode 28 : 432.55 Hz, 0.31%		Mode 29 : 454.18 Hz, 0.19%



**FIGURE 9.6:** Quelques FRF synthétisées – Configuration à 6 boulons

La figure 9.6 montre quelques FRF synthétisées (courbes de couleur verte), pour différents points de mesure. Leur comparaison avec les fonctions de réponse en fréquence expérimentales (courbes de couleur rouge) montre l'excellente qualité de l'identification de la base modale dans cette configuration.

La figure 9.7 présente la matrice AutoMAC obtenue pour cette configuration. La



**FIGURE 9.7:** Matrice AutoMAC – Configuration à 6 boulons

diagonale montre que les vecteurs propres sont bien différents et que le nombre de modes couplés croît à partir de 300 Hz.

### 9.3.3 Configuration à 2 boulons

**TABLE 9.3:** Fréquences de résonance et amortissements modaux pour la configuration à 2 boulons sur [0–500] Hz

Mode 1 : 7.26 Hz, 0.36%	Mode 2 : 12.18 Hz, 0.32%	Mode 3 : 78.66 Hz, 0.21%
Mode 4 : 82.87 Hz, 0.19%	Mode 5 : 85.29 Hz, 0.29%	Mode 6 : 87.36 Hz, 0.26%
Mode 7 : 121.42 Hz, 1.20%	Mode 8 : 146.77 Hz, 0.57%	Mode 9 : 197.58 Hz, 0.30%
Mode 10 : 204.75 Hz, 0.63%	Mode 11 : 215.65 Hz, 0.48%	Mode 12 : 222.79 Hz, 0.43%
Mode 13 : 230.17 Hz, 0.25%	Mode 14 : 247.56 Hz, 0.11%	Mode 15 : 252.77 Hz, 0.36%
Mode 16 : 255.39 Hz, 0.37%	Mode 17 : 285.63 Hz, 0.21%	Mode 18 : 291.37 Hz, 0.64%
Mode 19 : 319.49 Hz, 0.14%	Mode 20 : 321.82 Hz, 0.35%	Mode 21 : 353.59 Hz, 0.44%
Mode 22 : 379.47 Hz, 0.26%	Mode 23 : 388.58 Hz, 1.07%	Mode 24 : 402.60 Hz, 0.57%
Mode 25 : 428.47 Hz, 0.26%		

Pour la configuration à 2 boulons, le tableau 9.3 présente les valeurs des fréquences de résonance et amortissements modaux relatifs aux 25 modes situés dans la bande de fréquences d'analyse.

La figure 9.8 montre quelques FRF synthétisées (courbes de couleur verte), pour différents points de mesure. Leur comparaison avec les fonctions de réponse en fréquence expérimentales (courbes de couleur rouge) illustre bien la qualité de l'identification de la base modale.

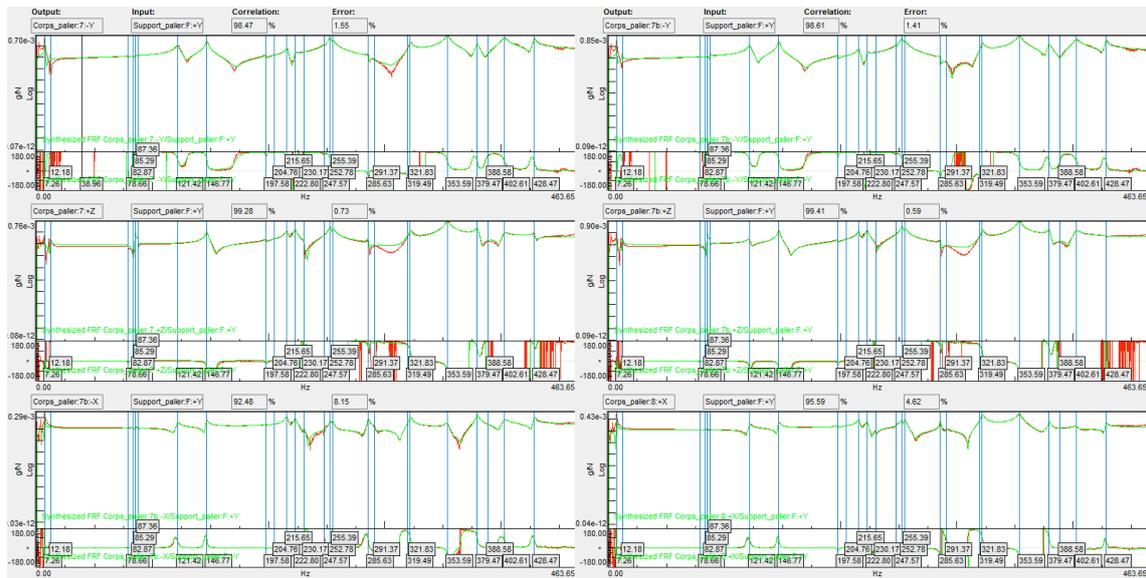


FIGURE 9.8: Quelques FRF synthétisées – Configuration à 2 boulons

La figure 9.9 présente la matrice AutoMAC obtenue pour cette configuration. La diagonale montre que les vecteurs propres sont bien différents et que le nombre de modes couplés croît à partir de 300 Hz.

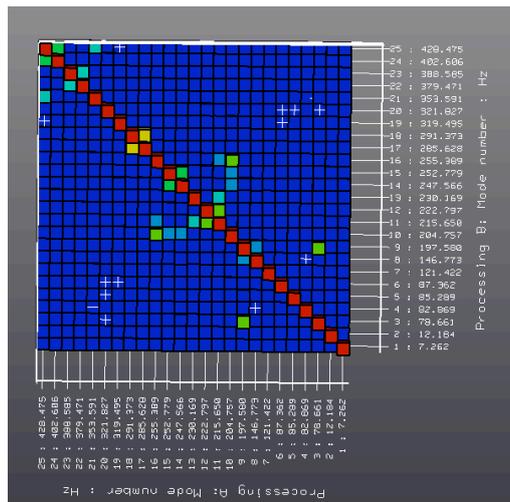
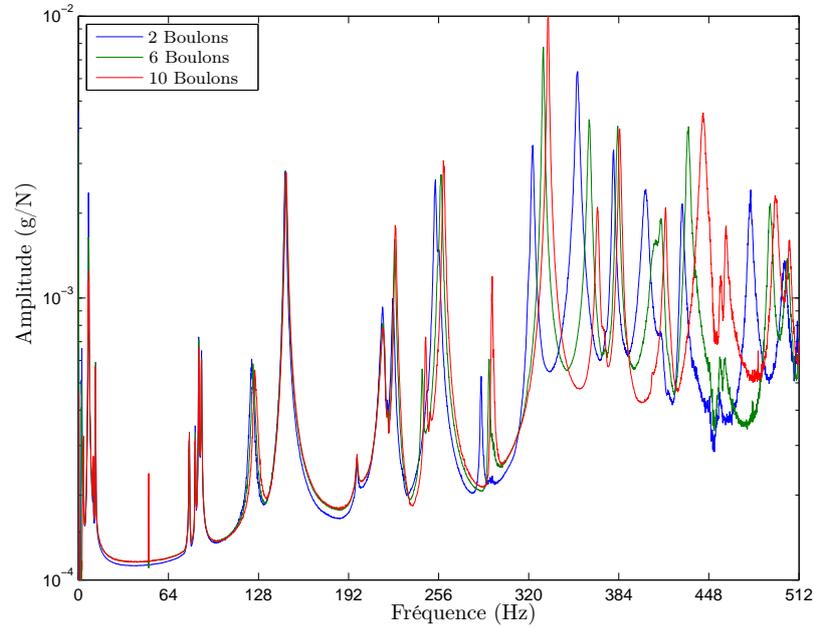
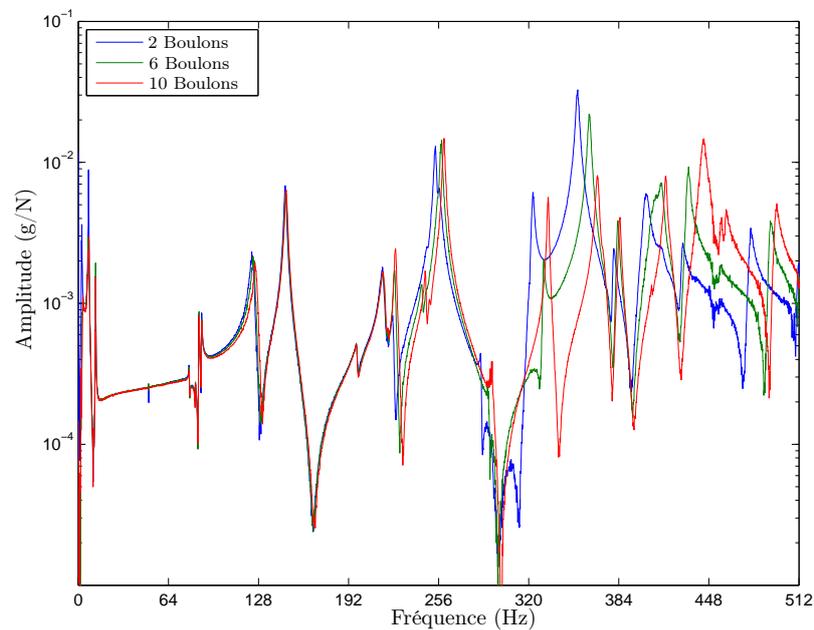


FIGURE 9.9: Matrice AutoMAC – Configuration à 2 boulons

### 9.3.4 Synthèse



(a) Somme des FRF

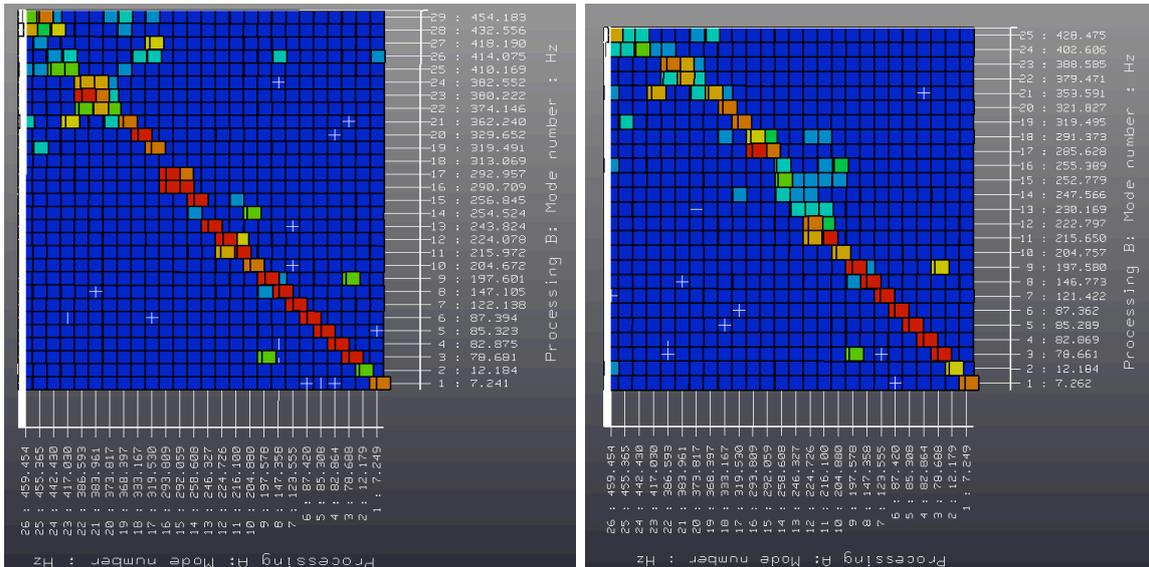


(b) FRF mesurées sur un point de la liaison

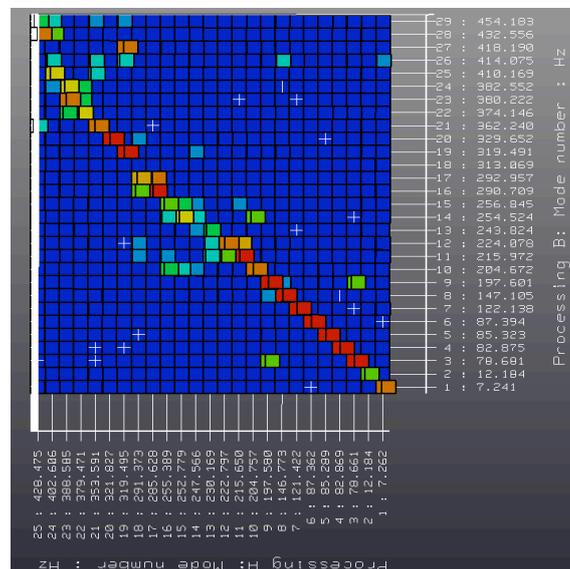
**FIGURE 9.10:** Fonctions de réponse en fréquence obtenues pour les trois configurations testées

La figure 9.10 permet d'évaluer l'influence des configurations de serrage sur le comportement dynamique de l'assemblage. La figure 9.10a compare les fonctions

de réponse en fréquence obtenues en sommant les fonctions mesurées sur les 72 points du maillage expérimental. La figure 9.10b compare les fonctions de réponse en fréquence mesurées sur un point de la liaison boulonnée étudiée.



(a) Configurations 10 boulons (Processing A) et 6 boulons (Processing B) (b) Configurations 10 boulons (Processing A) et 2 boulons (Processing B)



(c) Configurations 2 boulons (Processing A) et 6 boulons (Processing B)

FIGURE 9.11: Matrice MAC croisée entre les différentes configurations

La figure 9.11 présente les matrices MAC croisées entre les différentes configura-

tions testées. Cet outil permet d'évaluer le degré de corrélation entre les modes, de comparer les déformées modales et d'appairer les modes.

L'examen de ces résultats montre que les neuf premiers modes déterminés sont communs aux trois configurations. Ces modes, situés en dessous de 200Hz, sont principalement des modes liés au dispositif de suspension qui ne font pas travailler la liaison d'intérêt, à l'exception du mode 7 qui est un mode de flexion de l'assemblage lié au corps de palier. Au-delà de 200Hz, le suivi des déformées modales devient plus délicat entre les différentes configurations. De plus, un glissement des pics de résonance en fonction du serrage est observé. Ces glissements, prépondérants dans la bande de fréquences [300–500] Hz, s'accompagnent de variations, plus ou moins significatives, des amplitudes des pics de résonance.

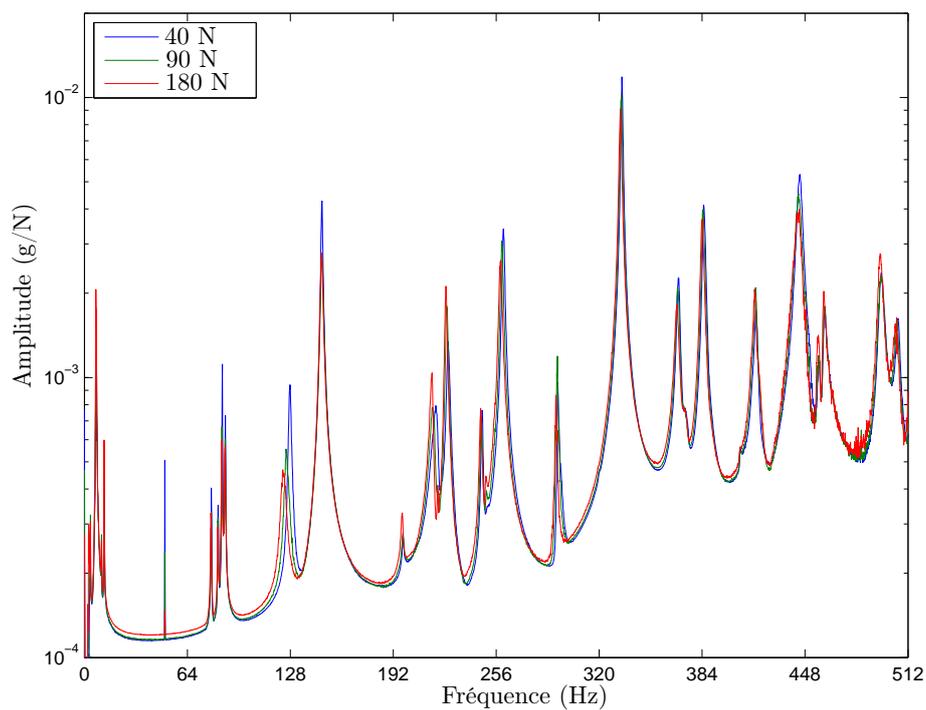
On constate aussi que les différentes configurations ont des impacts uniquement sur les modes qui déforment le support de palier et sollicitent la liaison. On rappelle que l'excitation de l'assemblage a été effectuée selon un axe horizontal (cf. figure 9.1a), et que les boulons serrés dans les configurations à 6 et 2 boulons sont ceux qui travaillent le plus dans cet axe (cf. figure 9.1b). Les écarts en fréquence augmentent légèrement en fonction de l'augmentation du nombre de boulons serrés, donc de la raideur de l'assemblage. Les variations des amortissements modaux restent très légères. En ce qui concerne les déformées modales, la synthèse des résultats obtenus permet de conclure que :

- le mode de flexion du corps de palier évolue très peu en fonction du nombre de boulons serrés ;
- les modes de torsion du support de palier et de rotation de l'assemblage sur son dispositif de suspension n'évoluent pas, ou légèrement, en fonction de la configuration ;
- la fréquence du mode de flexion de l'assemblage augmente de manière notable avec le nombre de boulons serrés (de 230.17 Hz pour 2 boulons à 246.32 Hz pour 10 boulons, soit une variation de 7%).

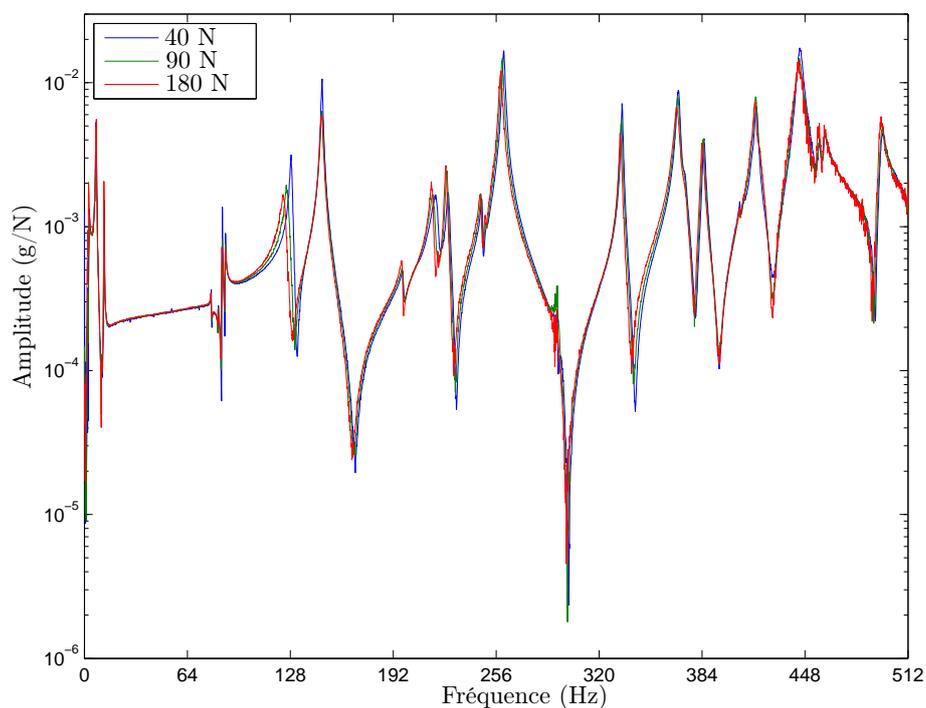
## 9.4 Influence des niveaux de sollicitation

Afin d'observer les effets non linéaires liés à la liaison boulonnée, on propose d'appliquer à l'assemblage, pour chaque configuration, différents niveaux de force d'excitation :

- bruit blanc avec une moyenne à 40 N ;
- bruit blanc avec une moyenne à 90 N ;
- bruit blanc avec une moyenne à 180 N.

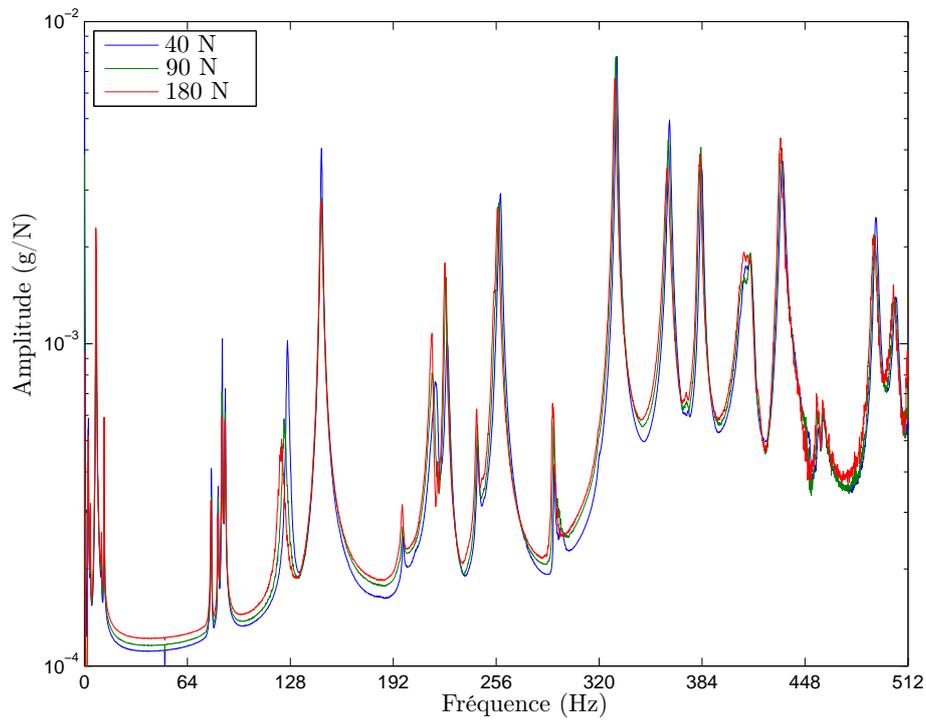


(a) Somme des FRF

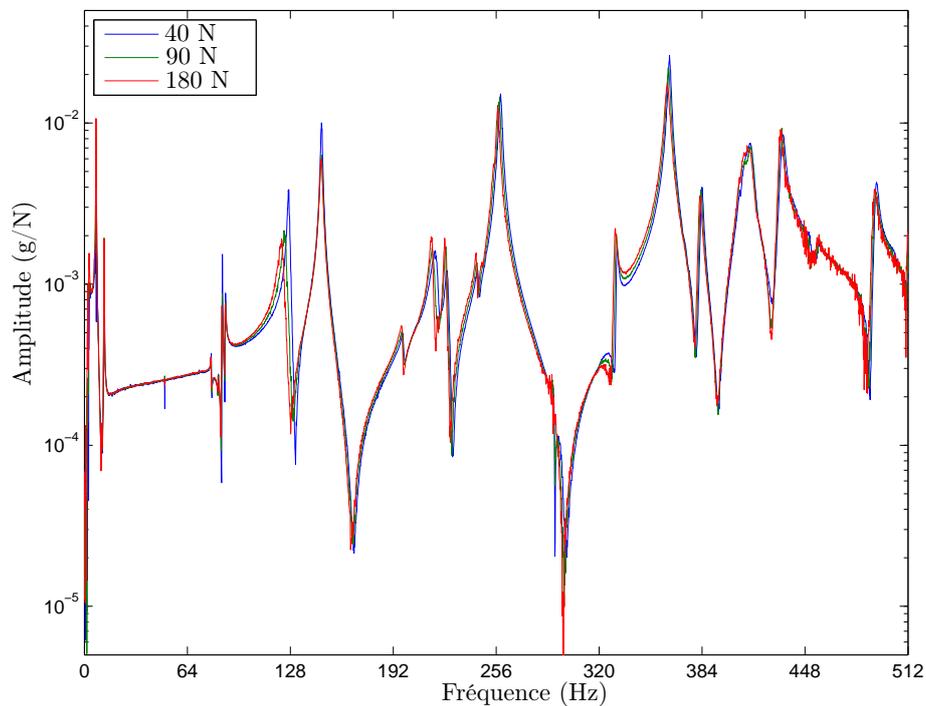


(b) FRF mesurées sur un point de la liaison

**FIGURE 9.12:** Fonctions de réponse en fréquence obtenues pour les trois niveaux de sollicitation appliqués – Configuration à 10 boulons

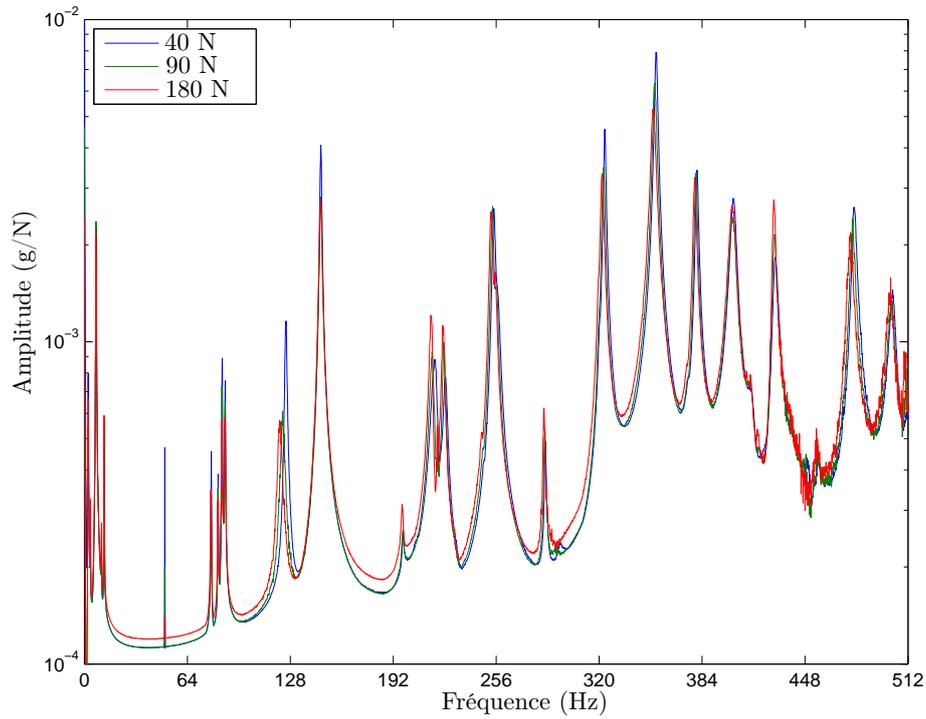


(a) Somme des FRF

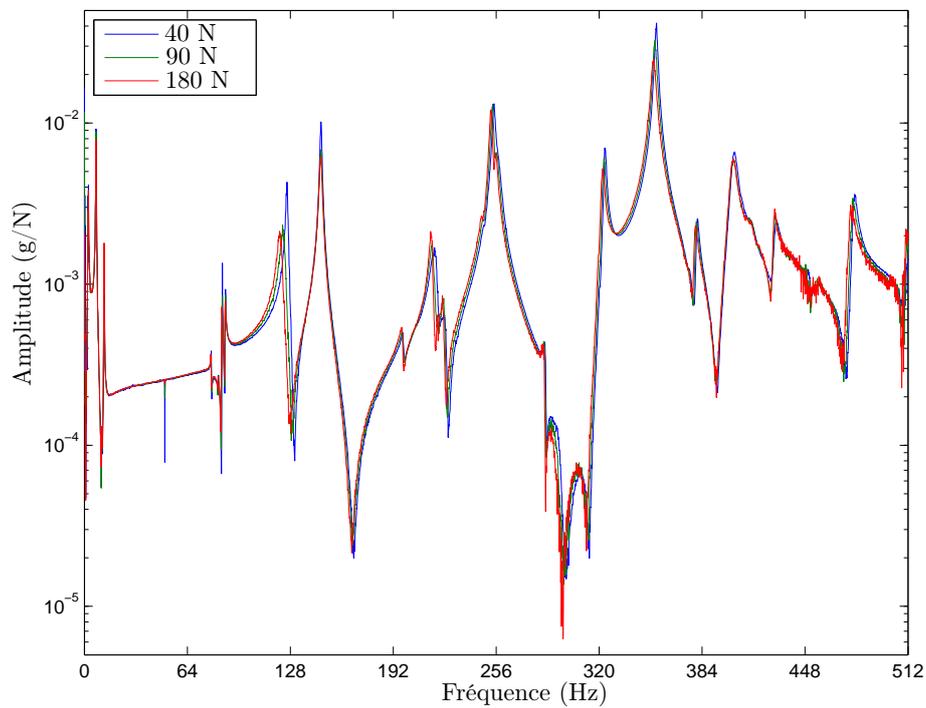


(b) FRF mesurées sur un point de la liaison

**FIGURE 9.13:** Fonctions de réponse en fréquence obtenues pour les trois niveaux de sollicitation appliqués – Configuration à 6 boulons



(a) Somme des FRF



(b) FRF mesurées sur un point de la liaison

**FIGURE 9.14:** Fonctions de réponse en fréquence obtenues pour les trois niveaux de sollicitation appliqués – Configuration à 2 boulons

Les figures 9.12, 9.13 et 9.14 montrent la variabilité du comportement dynamique liée à la variation du niveau de sollicitation, pour les configurations à 10 boulons, 6 boulons et 2 boulons respectivement. Les figures 9.12a, 9.13a et 9.14a présentent les fonctions de réponse en fréquence qui résultent de la sommation des fonctions mesurées sur les 72 points de mesure. Les figures 9.12b, 9.13b et 9.14b comparent les fonctions mesurées sur un point de la liaison d'intérêt.

Pour chacune des trois configurations de serrage, les fonctions de réponse en fréquence obtenues montrent un léger glissement des valeurs des fréquences de résonance en fonction du niveau d'excitation. Cependant, l'amortissement modal augmente avec la force d'excitation, et cette augmentation devient significative lorsque le mode sollicite la liaison boulonnée, comme c'est le cas du mode 7 où l'amplitude à la résonance chute de 40% environ en passant de 40 N à 90 N. On observe que la variation d'amplitude est plus faible en passant de 90 N à 180 N qu'en passant de 40 N à 90 N. Cela pourrait être lié au fait que les zones de glissement dans le contact atteignent leur limite d'évolution.

L'examen de l'ensemble des résultats de cette analyse modale expérimentale affirme que la variation des conditions de liaison peut avoir un impact notable sur le comportement dynamique d'un assemblage industriel. Cela se traduit globalement par un glissement des fréquences de résonance et une variation de l'amplitude de la réponse dynamique.

# Chapitre 10

## Quantification des incertitudes

*Dans ce dernier chapitre, de faibles et fortes incertitudes sur des paramètres de raideur sont propagées à travers différents modèles dynamiques de l'assemblage de deux composants du démonstrateur du projet SICODYN. Des analyses comparatives permettent d'évaluer l'applicabilité de la théorie des méconnaissances en milieu industriel pour assurer une conception robuste.*

### Sommaire

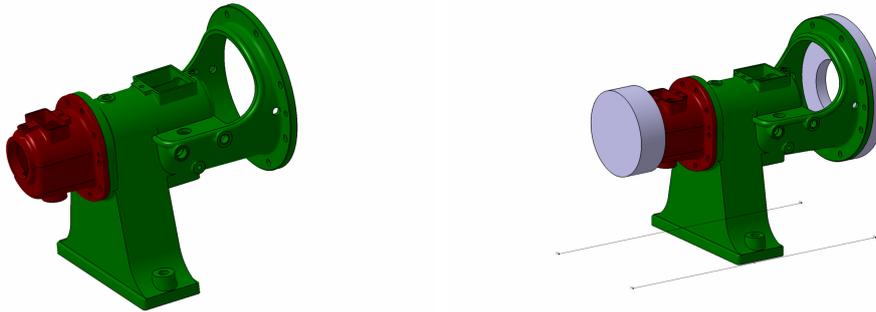
---

<b>10.1 Faibles incertitudes</b> . . . . .	<b>173</b>
<b>10.2 Fortes incertitudes</b> . . . . .	<b>174</b>

---

Les résultats des analyses modales expérimentales réalisées sur l'assemblage des deux composants de la pompe SICODYN (démonstrateur du projet) montrent la présence de fortes incertitudes sur les raideurs de liaison. On propose ici de considérer différents modèles dynamiques de cet assemblage où sont propagées des méconnaissances faibles sur des raideurs structurales et des méconnaissances fortes sur des raideurs de liaison. Cette étude permettra d'évaluer la capacité de la théorie des méconnaissances à prédire de manière fiable le comportement dynamique incertain de structures industrielles. Le but final est d'obtenir une méthodologie de calcul qui permet d'estimer le niveau de confiance a priori associé au résultat d'un calcul prédictif en dynamique.

On s'intéresse ici au modèle de l'assemblage du support de palier et du corps de palier de la pompe booster mono-étagée à axe horizontal. On propagera des incertitudes faibles et fortes à travers le modèle de l'assemblage sans supports de la figure 10.1a, puis des incertitudes fortes à travers le modèle du montage expérimental étudié dans le chapitre précédent (cf. figure 9.1a), présenté sur la figure 10.1b.



(a) Modèle de l'assemblage sans supports  
(Assemblage 1)

(b) Modèle de l'assemblage expérimental étudié  
(Assemblage 2)

**FIGURE 10.1:** Modèles de l'assemblage du corps de palier et support de palier de la pompe SICODYN

Le support de palier et le corps de palier sont en fonte ( $\bar{E} = 150$  GPa,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7000$  kg/m<sup>3</sup>). Pour les deux modèles, la liaison boulonnée entre les support et corps de palier est modélisée de manière simple par un joint élastique de contact de raideur normale  $K_N$  ( $\bar{K}_N = 10^{10}$  N.m<sup>-2</sup>) et de raideur de cisaillement  $K_T$  ( $\bar{K}_T = 10^{10}$  N.m<sup>-2</sup>).

Dans l'objectif d'évaluer l'applicabilité industrielle de la théorie des méconnaissances, on propose de propager des incertitudes faibles et fortes sur des paramètres de raideur. Ainsi, le module d'Young du matériau des support et corps de palier, les raideurs du joint de contact, sont considérés incertains et sont modélisés par des

variables aléatoires, de sorte que :

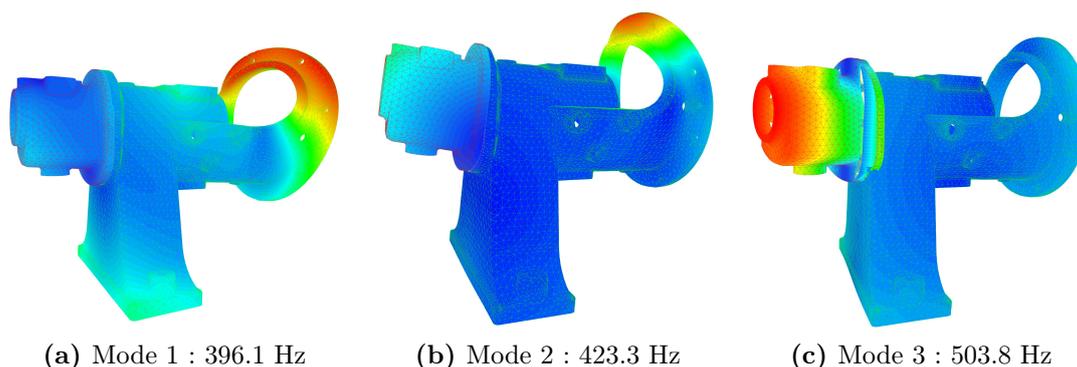
$$\begin{aligned} E &= \bar{E} (1 + \delta_1 \eta) \\ K_N &= \bar{K}_N (1 + \delta_2 \eta) \\ K_T &= \bar{K}_T (1 + \delta_2 \eta) \end{aligned}$$

où  $\delta_1$  et  $\delta_2$  sont des réels appartenant à l'intervalle  $[0;1]$ , et  $\eta$  est une variable aléatoire suivant une loi uniforme définie sur l'intervalle  $[-1;+1]$ .

## 10.1 Faibles incertitudes

Le maillage du modèle de l'assemblage 1 de la figure 10.1a est constitué de 139 543 éléments finis, et le problème de vibrations est traité en libre-libre. Pour cet assemblage, la propagation des incertitudes est effectuée avec la méthode de Monte-Carlo et la théorie des méconnaissances. Le temps de calcul de la méthode de Monte-Carlo étant extrêmement long sur ce modèle, 1000 tirages sont générés pour l'étude statistique de la répartition des fréquences propres d'intérêt.

Dans le cadre de faibles incertitudes, on considère  $\delta_1 = 0.05$  et  $\delta_2 = 0.1$  dans les relations ???. Les quantités d'intérêt considérées sont les trois premières fréquences propres de l'assemblage. La figure 10.2 présente la forme des trois modes propres associés à ces fréquences pour le modèle déterministe de l'assemblage 1.



**FIGURE 10.2:** Forme des trois premiers modes propres associés au modèle déterministe de l'assemblage des deux composants de pompe

Le tableau 10.1 présente les intervalles à 99% issus de la propagation des incertitudes par la méthode de Monte-Carlo et la théorie des méconnaissances.

**TABLE 10.1:** Intervalles à 99% pour les trois premières fréquences propres du modèle de l'assemblage 1 (*faibles incertitudes*)

$i$	1	2	3	ERA(%)	Temps CPU (min)
$\bar{f}_i$ (Hz)	396.1	423.3	503.8		
<b>Monte-Carlo</b>	[386.3 ; 405.6]	[412.3 ; 433.9]	[483.0 ; 522.8]	– (référence)	15222
<b>LOK</b>	[384.3 ; 405.6]	[412.9 ; 433.5]	[483.5 ; 522.5]	[+0.12 ; -0.05]	13 (0.085%)

L'observation de ces résultats permet de conclure que la l'approximation effectuée par la théorie des méconnaissances, en présence de faibles incertitudes, est très avantageuse sur une structure industrielle. L'erreur relative est négligeable et les intervalles prédits sont ainsi précis. Le coût de calcul est bien faible par rapport à la méthode de Monte-Carlo, puisque la théorie des méconnaissances réalise le calcul en 0.085% du temps.

## 10.2 Fortes incertitudes

On considère ici les deux modèles de la figure 10.1 en présence de faibles incertitudes sur les paramètres matériau et fortes incertitudes sur les raideurs de liaison, avec  $\delta_1 = 0.05$  et  $\delta_2 = 0.5$  dans les relations ???. Pour la théorie des méconnaissances, afin d'enrichir la base réduite, le nombre de modes statiques ajoutés est égal au nombre de modes propres d'intérêt. Le problème réduit est résolu pour 50 réalisations de  $\mathbf{m}_{\mathcal{H}}$  équiréparties pour déterminer les 50 points d'interpolation. Ici aussi, on utilise les fonctions d'interpolation définies par la relation 6.17 en considérant  $R$  égal à la distance du point d'interpolation au point le plus éloigné du nuage.

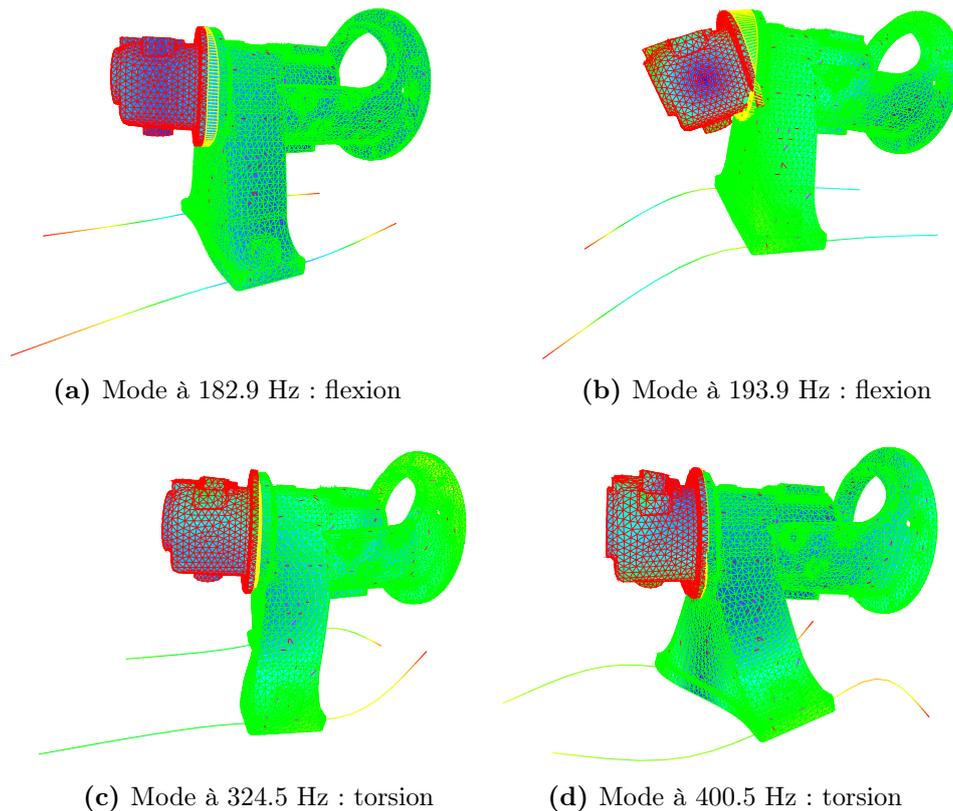
Le tableau 10.2 compare les intervalles à 99% qui résultent de la propagation des incertitudes par la méthode de Monte-Carlo et la théorie des méconnaissances pour l'assemblage 1. On constate que la théorie des méconnaissances conduit à des intervalles de confiance très proches de ceux de la méthode de Monte-Carlo, avec un temps de calcul très faible ( $\sim 0.1\%$ ), et s'avère de nouveau moins conservative vu que la taille des intervalles obtenus est plus réduite.

On considère à présent le modèle de l'assemblage 2 de la figure 10.1b. Le maillage de ce modèle est constitué de 139 583 éléments finis. Les masses additionnelles, d'environ 55 kg chacune, sont modélisées par des masses ponctuelles (ayant une masse et trois inerties) reliées rigidement aux centres des faces extrêmes rigidifiées de l'assemblage. Les lames de support, de section rectangulaire, sont modélisées par des éléments finis linéaires de type poutre, avec des paramètres matériau déterministes. L'ensemble est monté sur 4 appuis élastiques ayant des raideurs dans les trois direc-

**TABLE 10.2:** Intervalles à 99% pour les trois premières fréquences propres du modèle de l'assemblage 1 (*fortes incertitudes*)

$i$	1	2	3	ERA(%)	Temps CPU (min)
$\bar{f}_i$ (Hz)	396.1	423.3	503.8		
Monte-Carlo	[364.2 ; 406.0]	[370.6 ; 439.0]	[398.0 ; 590.6]	– (référence)	15222
LOK	[369.5 ; 404.5]	[373.8 ; 435.3]	[401.2 ; 585.4]	[+0.79 ; -0.88]	15 (~ 0.1%)

tions, reprenant les caractéristiques du dispositif de suspension utilisé lors de l'étude expérimentale. Pour le modèle déterministe de cet assemblage, la figure 10.3 présente la forme de quelques modes propres sollicitant la liaison en flexion ou cisaillement. Le choix de ces modes est guidé par une volonté d'agrandir l'impact de la variabilité des raideurs de contact sur les fréquences propres de l'assemblage.



**FIGURE 10.3:** Forme de quelques modes propres associés au modèle déterministe de l'assemblage 2

On propose ici de comparer les résultats de la théorie des méconnaissances aux

résultats de la méthode des sous-espaces. L'objectif est de réduire les temps de calcul et de comparer les ordres de grandeur des intervalles de confiance obtenus. On génère 1000 tirages pour l'étude statistique, et la base modale réduite de la méthode des sous-espaces est formée de  $6 \times 4$  vecteurs : les 4 premiers vecteurs propres du modèle déterministe et ceux issus de 5 modèles construits chacun pour différents tirages de paramètres incertains. Le tableau 10.3 montre les intervalles à 99% qui résultent de cette analyse comparative, pour l'assemblage 2.

**TABLE 10.3:** Intervalles à 99% pour quelques fréquences propres du modèle de l'assemblage 2 (*fortes incertitudes*)

$\bar{f}$ (Hz)	182.9	193.9	324.5	400.5	ERA(%)
<b>Sous-espaces</b>	[145.8 ; 187.6]	[158.8 ; 210.5]	[285.7 ; 330.6]	[369.4 ; 435.3]	– (référence)
<b>LOK</b>	[151.4 ; 196.0]	[165.6 ; 222.3]	[298.3 ; 332.8]	[386.5 ; 433.5]	[+4.6 ; +5.7]

Les résultats montrent que la théorie des méconnaissances permet d'obtenir des intervalles de confiance assez précis, en présence de faibles et fortes incertitudes sur des paramètres de raideurs. Dans ce cas, le rapport du temps de calcul entre les deux approches est de 0.2%. Les valeurs des erreurs relatives sont faibles, même si les résultats de la méthode des sous-espaces seraient également en léger décalage avec ceux de la méthode de Monte-Carlo, vu la nature du problème. L'implémentation des développements, permettant de prendre en compte les fortes méconnaissances, exige certes un travail supplémentaire, mais reste relativement simple à réaliser et le gain en temps de calcul est vraiment considérable. Par conséquent, l'exploitation de la théorie des méconnaissances dans un contexte industriel s'avère pratique et très avantageuse.

# Bilan

La quantification de la qualité et la fiabilité d'un modèle numérique reste une question majeure en dynamique basse-fréquence des assemblages boulonnés. En particulier, le comportement dynamique des systèmes mécaniques qui équipent les centrales nucléaires et thermiques, tels que les pompes, doit pouvoir être prédit en toute confiance. Le projet SICODYN propose alors d'améliorer la capacité de modélisation du comportement vibratoire des structures industrielles en général, et des pompes en particulier, ainsi que de caractériser et quantifier les incertitudes.

Sous l'aspect expérimental, des analyses modales ont été réalisées sur un assemblage de deux composants de la pompe SICODYN. Afin d'observer la variabilité de réalisation liée à la variation des conditions de liaison, trois configurations de serrage et trois niveaux de sollicitation différents ont été considérés dans la bande de fréquence [0–500] Hz. L'examen des fonctions de réponse en fréquence montre que les fréquences de résonance glissent en fonction du serrage, et les amortissements modaux varient de façon plus ou moins significative. Ainsi, la variation des conditions de liaison d'une structure boulonnée de taille industrielle a un impact important sur son comportement dynamique global, et cela même à faible niveau d'excitation.

Sous l'aspect numérique, la théorie des méconnaissances a été appliquée sur plusieurs modèles dynamiques de cet assemblage pour propager des méconnaissances faibles sur des paramètres structuraux de raideur et des méconnaissances fortes sur des raideurs de liaison. Des analyses comparatives ont montré l'efficacité de la théorie des méconnaissances à prédire de manière fiable le comportement dynamique incertain de structures industrielles avec un coût de calcul faible. Par conséquent, cette technique est considérée comme un outil de calcul efficace pour propager tout niveau d'incertitude et estimer le niveau de confiance a priori associé au résultat d'un calcul prédictif en dynamique.



# Conclusion

Ce travail de thèse a porté sur l'amélioration du dimensionnement vibratoire des assemblages boulonnés par la mise en place d'un modèle dynamique de connecteur prenant en compte différents types et sources d'incertitudes sur des paramètres de raideur, de valeurs faibles et fortes, de manière simple, efficace et exploitable dans un contexte industriel. Il s'inscrit dans le cadre du projet SICODYN, qui a pour objectif la caractérisation et la quantification des incertitudes sur le comportement dynamique des assemblages boulonnés sous les aspects expérimental et numérique.

En premier lieu, nous avons étudié les différents types et sources d'incertitudes rencontrées lors de l'analyse d'un système mécanique. Généralement, les incertitudes sont dus à une variabilité naturelle ou à un manque de connaissance, et sont liées aux paramètres d'entrée du modèle, au processus de modélisation et au travail expérimental. La prise en compte de ces incertitudes lors de la modélisation des structures mécanique peut se faire aujourd'hui à l'aide d'un grand nombre de méthodes. Les approches paramétriques, propageant, pour un modèle fixé, les incertitudes sur les paramètres du modèle, puis les approches non paramétriques, généralement probabilistes, considérant les incertitudes de manière plus globale. De manière simple et peu intrusive, la théorie des méconnaissances consiste à enrichir un modèle déterministe de quantités, appelées méconnaissances de base, permettant de globaliser tout type d'incertitudes à l'échelle des sous-structures. Dans le cadre de faibles incertitudes sur des paramètres de raideur, les performances de plusieurs méthodes ont été comparées sur des exemples numériques. Les résultats ont démontré que la théorie des méconnaissances est très avantageuse en terme de temps de calcul et de précision.

En second lieu, nous avons réalisé une caractérisation expérimentale des incertitudes dans les assemblages boulonnés. Afin de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu au sein des liaisons boulonnées, et développer à terme des modèles pertinents, un banc d'essai dynamique basé sur une structure boulonnée paramétrable a été conçu, dimensionné et produit. Les paramètres importants, liés aux conditions de liaison, qui ont été considérés incluent la précharge des boulons, le type et le niveau de chargement de la liaison, le nombre et la position des boulons serrés. L'analyse modale expérimentale de ce banc sous forte charge de flexion pure a montré que le contact boulon-pièce dissipe de l'énergie et modifie les caractéristiques de la liaison en fonction du niveau de chargement. Il semble qu'il existe un effet de seuil en

deçà duquel la liaison a un comportement sensiblement linéaire, et au delà duquel les dissipations évoluent de manière non linéaire. De plus, la raideur apparente de la liaison chute de manière notable lorsque les charges appliquées augmentent, ce qui se traduit par un glissement des fréquences de résonance. L'ensemble de ces résultats indique que le comportement dynamique d'un assemblage boulonné dépend fortement des paramètres de liaison et du niveau de chargement. La démarche expérimentale de chargement, de pilotage et d'analyse mise en place est novatrice et générale, pouvant être appliquée à l'étude de tout type de liaisons mécaniques.

En troisième lieu, nous avons mis en œuvre une extension de la théorie des méconnaissances pour propager une combinaison de faibles et fortes incertitudes sur des paramètres de raideur en dynamique, sans nuire à la simplicité et l'efficacité de la démarche initiale. L'introduction d'une base de réduction puis d'une étape d'interpolation des pulsations et modes propres permettent de réduire la taille du problème et le temps de calcul nécessaire à l'obtention des méconnaissances effectives. L'application de ces développements à divers modèles dynamiques montre que la théorie des méconnaissances est très avantageuse en terme de qualité des prédictions, de coût de calcul engendré et de simplicité de mise en œuvre dans un code de calcul industriel.

Enfin, nous avons mené des analyses modales sur l'assemblage de deux composants de la pompe SICODYN. Sur le plan expérimental, pour observer la variabilité liée à la variation des conditions de liaison, trois configurations de serrage et trois niveaux de sollicitation différents ont été considérés en basses fréquences. A faible charge, un glissement des fréquences de résonance en fonction du serrage est observé, en plus de variations, plus ou moins fortes, des amplitudes des pics de résonance. Lorsque la force d'excitation augmente, l'amortissement modal augmente, et cela devient significatif lorsque le mode sollicite la liaison boulonnée. Sur le plan numérique, la propagation de ces fortes incertitudes sur les raideurs de liaison est effectuée par la théorie des méconnaissances. Les résultats issus de l'étude de différents modèles dynamiques de cet assemblage conduisent à la conclusion que la théorie des méconnaissances est un outil de calcul efficace qui permet d'estimer le niveau de confiance a priori associé au résultat d'un calcul prédictif en dynamique.

Dans le prolongement de ce travail, différentes perspectives peuvent être envisagées à court ou moyen terme :

- l'étude des modes de torsion, symétrique (à 188 Hz) et antisymétrique (à 379 Hz), du banc d'essai dynamique, ou bien la création de cisaillement dans la liaison en rompant la symétrie du premier mode de flexion. Cela permettra de générer des glissements significatifs dans la liaison boulonnée et aboutir à une meilleure description de l'évolution de la dissipation dans la liaison et l'influence des conditions de liaison ;
- l'analyse de l'influence de l'ordre de serrage des boulons sur la raideur de la

- liaison et la dissipation dans la liaison ;
- la réalisation d'autres essais dans de multiples configurations de la liaison boulonnée : précharge non uniforme, précharge localement trop faible, boulon manquant, etc. ;
  - la mise en place d'une définition globale et énergétique des méconnaissances permettant de considérer des incertitudes portant sur un comportement non linéaire, comme un comportement plastique ou la présence de contacts et frottements ;
  - l'extension de la théorie des méconnaissances pour propager plusieurs faibles et fortes méconnaissances sur des quantités d'intérêt statiques, telles que les efforts et les déplacements ;
  - la définition d'une procédure claire pour identifier les méconnaissances à partir de résultats expérimentaux et la mise en œuvre d'une démarche de détermination des essais complémentaires à effectuer permettant de réduire une méconnaissance donnée. Ainsi, on pourra établir une stratégie pour le choix des meilleurs essais à réaliser sur une structure donnée, ce qui aboutira à une optimisation des coûts du travail expérimental.

Dans le cadre de la thématique relative à la propagation et quantification des incertitudes par la théorie des méconnaissances, différentes pistes de recherches pourraient être explorées à plus long terme, notamment :

- la mise en place d'une démarche permettant de prendre en compte, de manière précise, un ensemble d'incertitudes de natures différentes, pour aboutir aux méconnaissances de base. Par exemple, pour un matériau hétérogène, les valeurs algébriques et spatiales du module d'Young peuvent être incertaines. On pourrait alors envisager d'approfondir la manière de représenter l'incertitude dans le calcul de structures mécaniques, et aboutir à d'autres pistes mathématiques de modélisation des méconnaissances de base ;
- la prise en considération de façon simple et simultanée des incertitudes sur différentes caractéristiques dynamiques d'un système, telles que sa rigidité, sa masse et son amortissement modal, ce dernier étant souvent mal connu dans les structures industrielles. Cela rendra la théorie des méconnaissances générale et complète en dynamique des structures.

Ces axes de recherche constitueront des avancées considérables dans le domaine de la quantification des incertitudes, aussi bien au niveau de la recherche que de l'industrie.



## Annexe A

# Dessin technique des pièces du banc d'essai dynamique

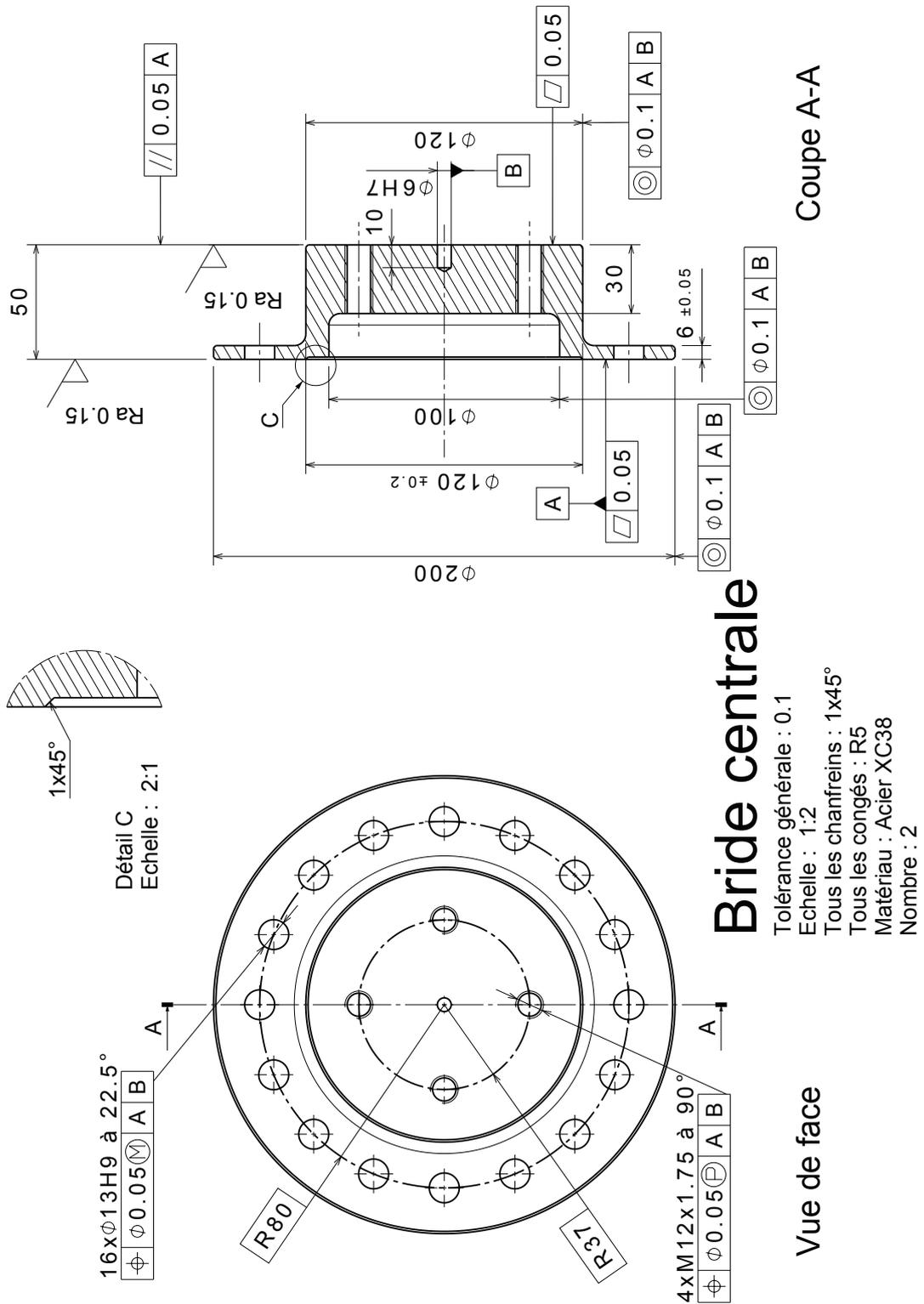
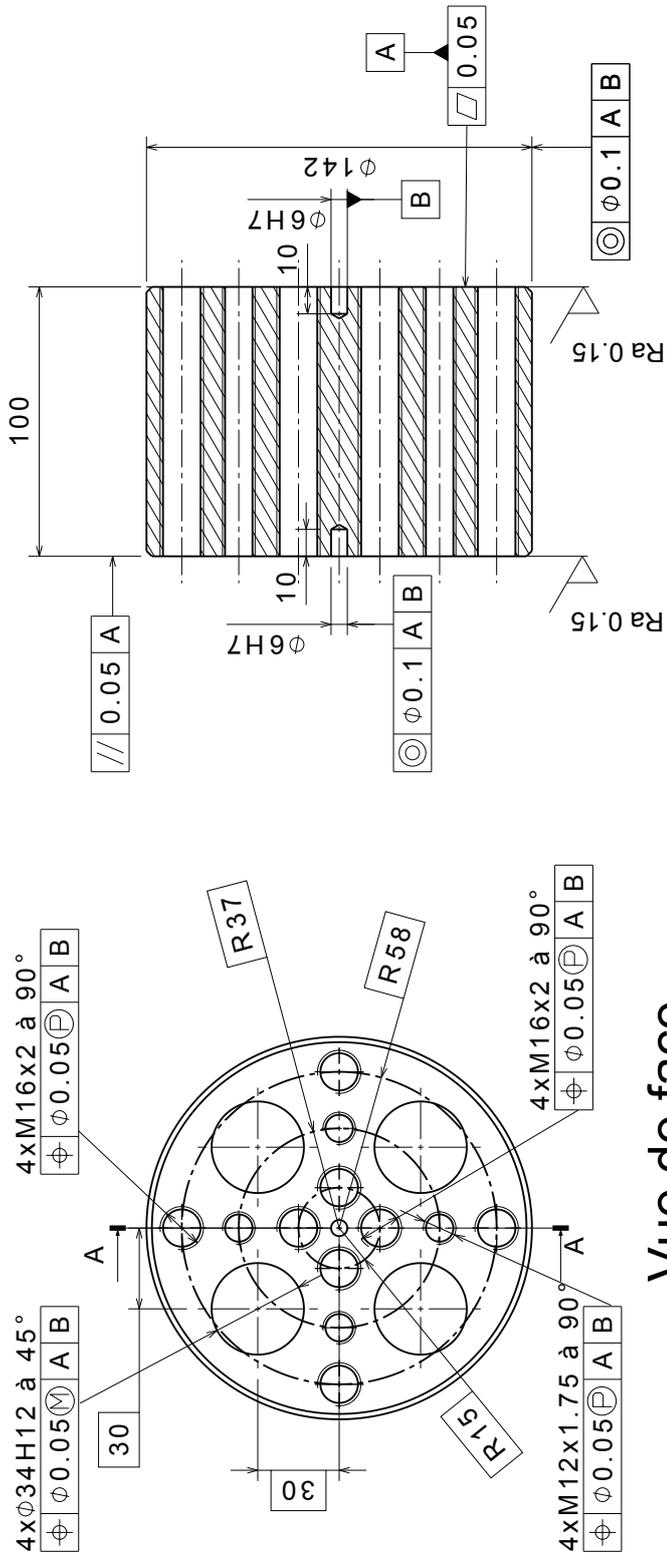


FIGURE A.1: Bride centrale de liaison



Vue de face

Coupe A-A

## Pièce de référence

Tolérance générale : 0.1  
 Echelle : 1:2  
 Tous les chanfreins : 1x45°  
 Matériau : Acier XC38  
 Nombre : 1

FIGURE A.2: Monobloc / Pièce de référence

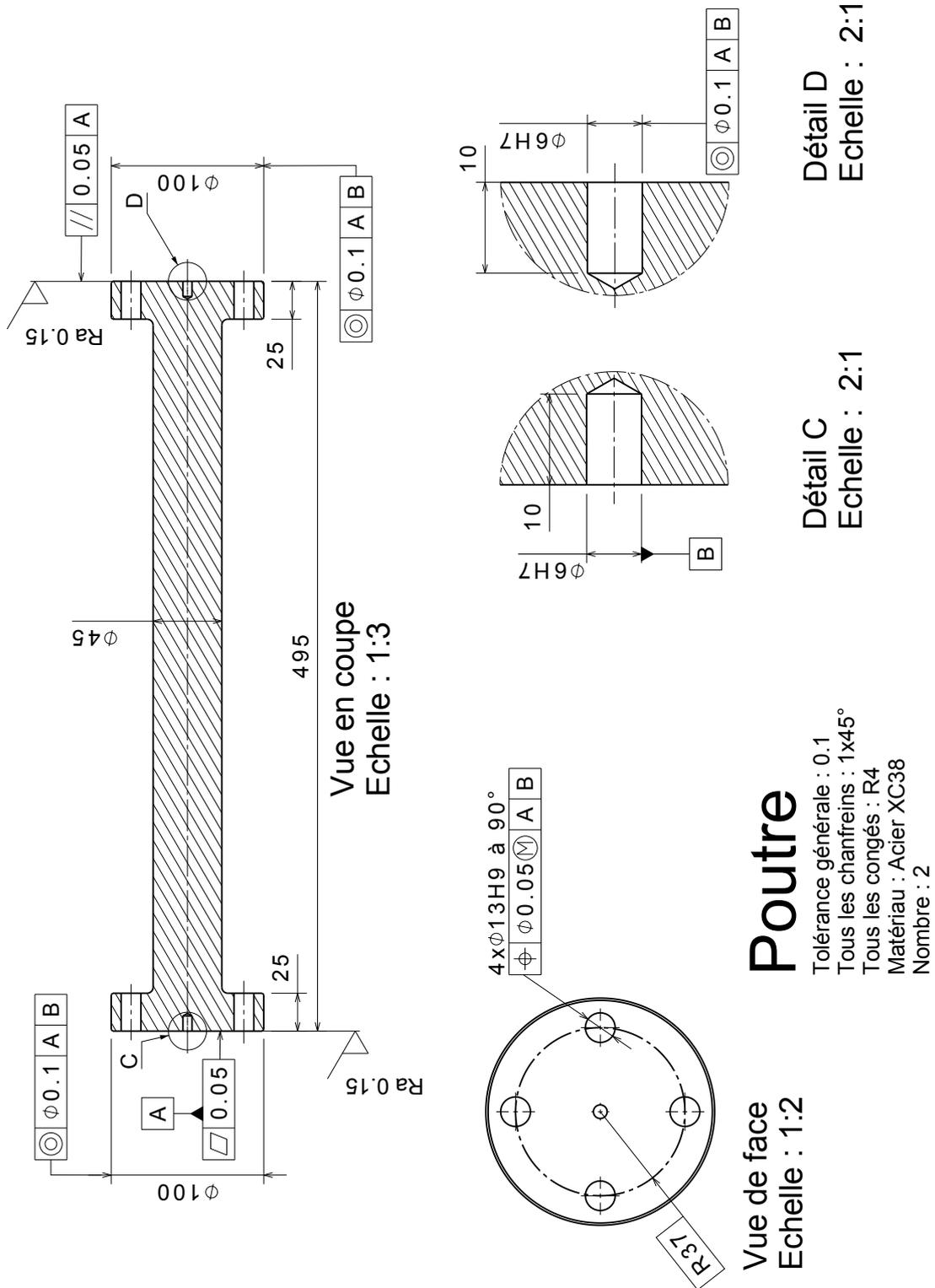
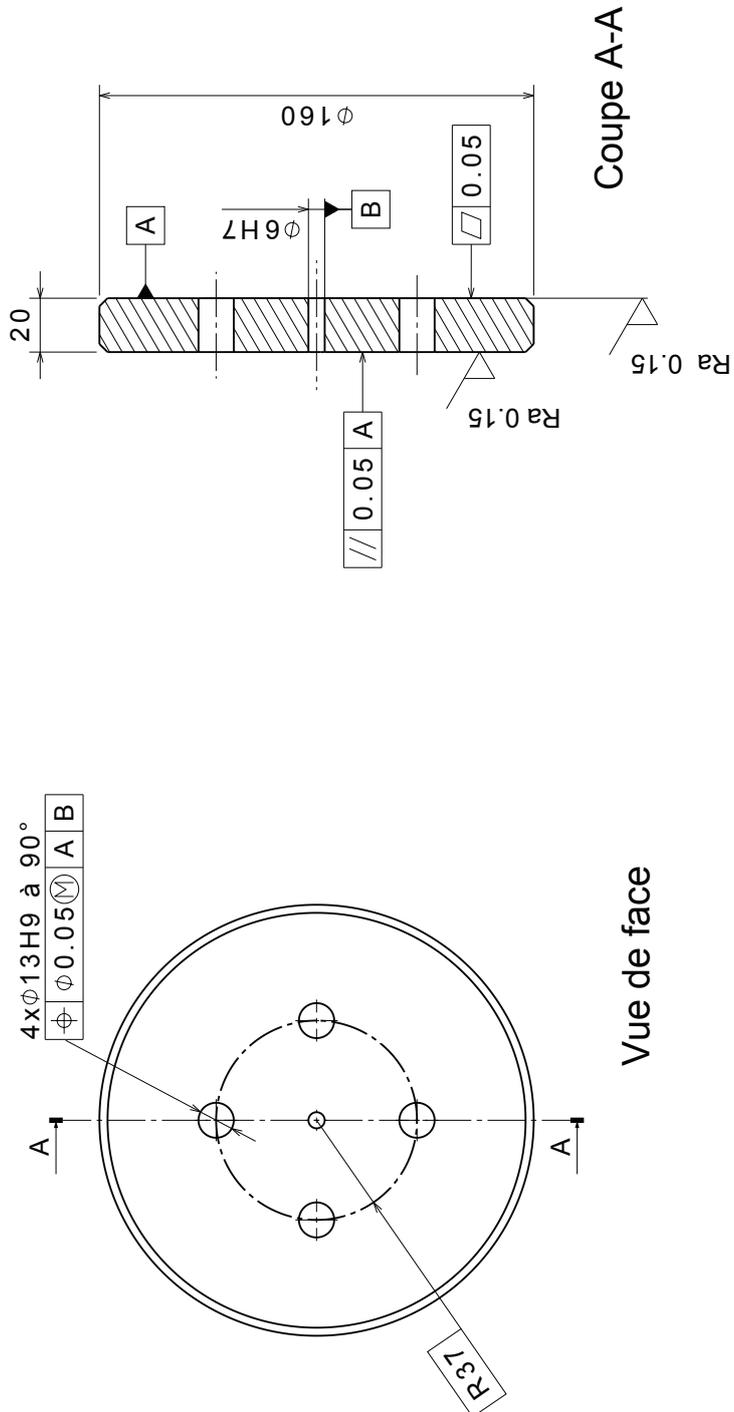


FIGURE A.3: Poutre de section circulaire



## Masse circulaire

Tolérance générale : 0.1

Echelle : 1:2

Tous les chanfreins :  $3 \times 45^\circ$

Matériau : Acier XC38

Nombre : 4

FIGURE A.4: Masse de section circulaire

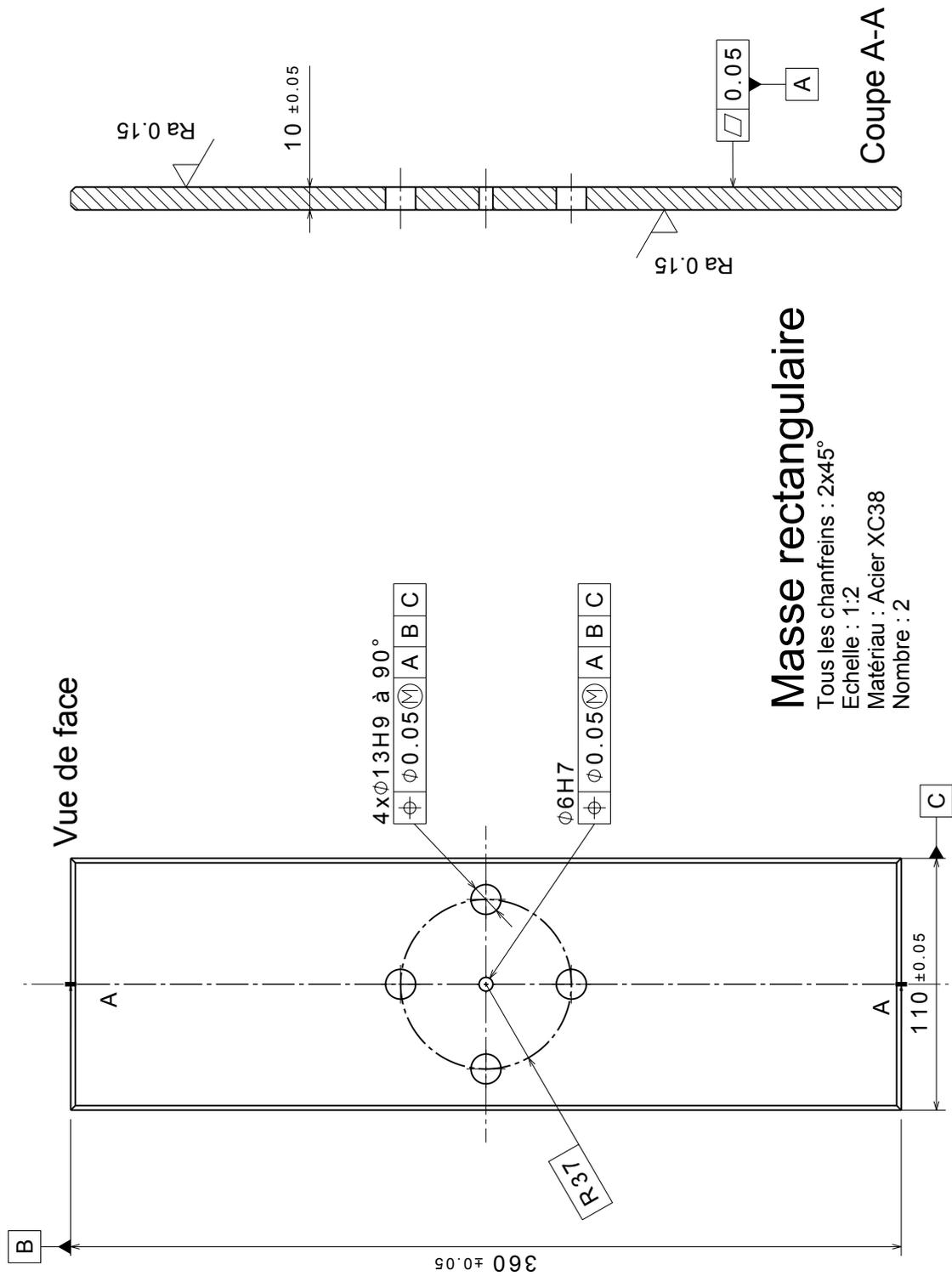
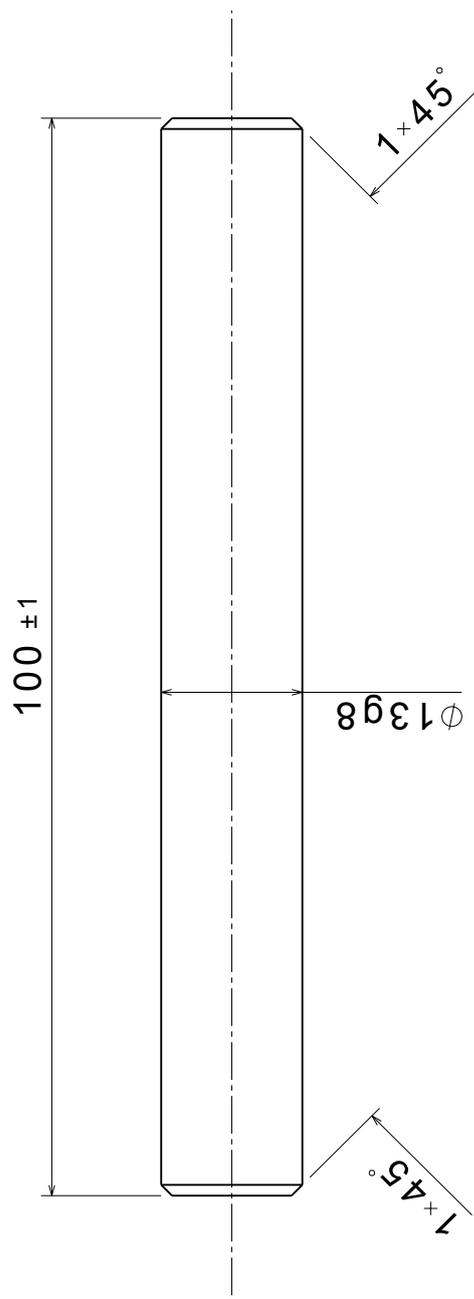


FIGURE A.5: Masse de section rectangulaire



## Pige de centrage

Echelle : 2:1

Matériau : Acier XC38

Nombre : 2

**FIGURE A.6:** Pige de centrage de section circulaire : assure la mise en position des brides centrales de liaison



# Bibliographie

- [Adams et Maheri 1993] R. ADAMS et M. MAHERI (1993). The dynamic shear properties of structural honeycomb materials. *Composites Science and Technology*, 47(1):15–23. (Cité à la page 90.)
- [Agarwal *et al.* 2004] H. AGARWAL, J. E. RENAUD, E. L. PRESTON et D. PADMANABHAN (2004). Uncertainty quantification using evidence theory in multidisciplinary design optimization. *Reliability Engineering & System Safety*, 85(1–3):281–294. (Cité aux pages 15 et 41.)
- [Ahmadian et Jalali 2007a] H. AHMADIAN et H. JALALI (2007a). Generic element formulation for modelling bolted lap joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(5):2318–2334. (Cité aux pages v, 61 et 62.)
- [Ahmadian et Jalali 2007b] H. AHMADIAN et H. JALALI (2007b). Identification of bolted lap joints parameters in assembled structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2):1041–1050. (Cité aux pages v, 61 et 67.)
- [Alkatan *et al.* 2007] F. ALKATAN, P. STEPHAN, A. DAIDIE et J. GUILLOT (2007). Equivalent axial stiffness of various components in bolted joints subjected to axial loading. *Finite Elements in Analysis and Design*, 43(8):589–598. (Cité aux pages v et 63.)
- [Allemang et Brown 1982] R. J. ALLEMANG et D. L. BROWN (1982). A Correlation Coefficient for Modal Vector Analysis. *In International Modal Analysis Conference*, volume 1, pages 110–116. SEM, Orlando. (Cité à la page 128.)
- [Amsallem et Farhat 2011] D. AMSALLEM et C. FARHAT (2011). An online method for interpolating linear parametric reduced-order models. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 33(5):2169–2198. (Cité à la page 130.)
- [Atamturktur *et al.* 2012] S. ATAMTURKTUR, F. HEMEZ et J. LAMAN (2012). Uncertainty quantification in model verification and validation as applied to large scale historic masonry monuments. *Engineering Structures*, 43:221–234. (Cité à la page 148.)
- [Au et Beck 1999] S. AU et J. L. BECK (1999). A new adaptive importance sampling scheme for reliability calculations. *Structural safety*, 21(2):135–158. (Cité à la page 31.)
- [Au et Beck 2003] S. K. AU et J. L. BECK (2003). Important sampling in high dimensions. *Structural Safety*, 25(2):139–163. (Cité à la page 31.)

- [Audebert 2010] S. AUDEBERT (2010). SICODYN international benchmark on dynamic analysis of structure assemblies : variability and numerical-experimental correlation on an industrial pump. *Mécanique & Industries*, 11(6):439–451. (Cité aux pages 5 et 144.)
- [Audebert et al. 2014] S. AUDEBERT, A. MIKCHEVITCH et I. ZENTNER (2014). SICODYN international benchmark on dynamic analysis of structure assemblies : variability and numerical-experimental correlation on an industrial pump (part 2). *Mechanics & Industry*, 15(01):1–17. (Cité aux pages vii, 5, 144 et 147.)
- [Babuska et Oden 2004] I. BABUSKA et J. T. ODEN (2004). Verification and validation in computational engineering and science : basic concepts. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(36):4057–4066. (Cité aux pages 1 et 3.)
- [Babuška et Rheinboldt 1978] I. BABUŠKA et W. C. RHEINBOLDT (1978). A-posteriori error estimates for the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(10):1597–1615. (Cité à la page 3.)
- [Babuška et Strouboulis 2001] I. BABUŠKA et T. STROUBOULIS (2001). *The finite element method and its reliability*. Oxford university press. (Cité à la page 2.)
- [Bae et al. 2004] H.-R. BAE, R. V. GRANDHI et R. A. CANFIELD (2004). Epistemic uncertainty quantification techniques including evidence theory for large-scale structures. *Computers & Structures*, 82(13–14):1101–1112. (Cité à la page 41.)
- [Balmès 1998] E. BALMÈS (1998). Efficient sensitivity analysis based on finite element model reduction. *In Proc. IMAC XVII*, pages 1168–1174. (Cité à la page 37.)
- [Batou et Soize 2009] A. BATOU et C. SOIZE (2009). Identification of stochastic loads applied to a non-linear dynamical system using an uncertain computational model and experimental responses. *Computational Mechanics*, 43(4):559–571. (Cité à la page 43.)
- [Batou et Soize 2013] A. BATOU et C. SOIZE (2013). Stochastic modeling and identification of an uncertain computational dynamical model with random fields properties and model uncertainties. *Archive of Applied Mechanics*, 83(6):831–848. (Cité à la page 124.)
- [Batou et al. 2015] A. BATOU, C. SOIZE et S. AUDEBERT (2015). Model identification in computational stochastic dynamics using experimental modal data. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 50-51(0):307–322. (Cité à la page 44.)
- [Beck et Katafygiotis 1998] J. L. BECK et L. S. KATAFYGIOTIS (1998). Updating models and their uncertainties. I : Bayesian statistical framework. *Journal of Engineering Mechanics*, 124(4):455–461. (Cité à la page 42.)
- [Becker et Rannacher 2001] R. BECKER et R. RANNACHER (2001). An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods. *Acta Numerica 2001*, 10:1–102. (Cité à la page 3.)
- [Ben-Haim 1997] Y. BEN-HAIM (1997). Robust reliability of structures. *Advances in Applied Mechanics*, 33:1–41. (Cité à la page 42.)

- [Ben-Haim 2006] Y. BEN-HAIM (2006). *Information-gap Decision Theory : Decisions Under Severe Uncertainty*. Academic Press, 2nd edition édition. (Cité à la page 42.)
- [Ben-Haim et Elishakoff 1990] Y. BEN-HAIM et I. ELISHAKOFF (1990). *Convex Models of Uncertainty in Applied Mechanics*, volume 11. Elsevier Amsterdam. (Cité à la page 42.)
- [Blanzé et Champaney 2004] C. BLANZÉ et L. CHAMPANEY (2004). A computational strategy for the random response of assemblies of structures. *International Journal of Solids and Structures*, 41(22):6383–6405. (Cité à la page 39.)
- [Blanzé et Rouch 2005] C. BLANZÉ et P. ROUCH (2005). Analysis of structures with stochastic interfaces in the medium-frequency range. *Journal of Computational Acoustics*, 13(4):711–729. (Cité à la page 39.)
- [Blatman et Sudret 2011] G. BLATMAN et B. SUDRET (2011). Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression. *Journal of Computational Physics*, 230(6):2345–2367. (Cité à la page 40.)
- [Blatman et al. 2007] G. BLATMAN, B. SUDRET et M. BERVEILLER (2007). Quasi random numbers in stochastic finite element analysis. *Mechanics & Industry*, 8(3):289–298. (Cité à la page 31.)
- [Blockley 2013] D. BLOCKLEY (2013). Analysing uncertainties : Towards comparing Bayesian and interval probabilities'. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 37(1–2):30–42. (Cité à la page 13.)
- [Bograd et al. 2011] S. BOGRAD, P. REUSS, A. SCHMIDT, L. GAUL et M. MAYER (2011). Modeling the dynamics of mechanical joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 25(8):2801–2826. (Cité à la page 54.)
- [Bortman et Szabó 1992] J. BORTMAN et B. SZABÓ (1992). Nonlinear models for fastened structural connections. *Computers & Structures*, 43(5):909–923. (Cité à la page 59.)
- [Boucard et Champaney 2003] P.-A. BOUCARD et L. CHAMPANEY (2003). A suitable computational strategy for the parametric analysis of problems with multiple contact. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 57(9):1259–1282. (Cité à la page 32.)
- [Brake 2013] M. R. BRAKE (2013). The effect of the contact model on the impact-vibration response of continuous and discrete systems. *Journal of Sound and Vibration*, 332(15):3849–3878. (Cité à la page 74.)
- [Brake 2014] M. R. BRAKE (2014). The role of epistemic uncertainty of contact models in the design and optimization of mechanical systems with aleatoric uncertainty. *Nonlinear Dynamics*, 77(3):899–922. (Cité à la page 74.)
- [Brake et al. 2014] M. R. BRAKE, P. REUSS, D. J. SEGALMAN et L. GAUL (2014). Variability and repeatability of jointed structures with frictional interfaces. *In*

- M. ALLEN, R. L. MAYES et D. J. RIXEN, éditeurs : *Dynamics of Coupled Structures, Volume 1 : Proceedings of the 32nd IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics*, pages 245–252. Springer. (Cité aux pages 74 et 76.)
- [Caflich 1998] R. CAFLISCH (1998). Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods. *Acta numerica*, 7:1–49. (Cité à la page 31.)
- [Caignot 2009] A. CAIGNOT (2009). *Prédiction par essais virtuels de l'amortissement dans les structures spatiales*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan. (Cité à la page 82.)
- [Caignot et al. 2010] A. CAIGNOT, P. LADEVÈZE, D. NÉRON et J.-F. DURAND (2010). Virtual testing for the prediction of damping in joints. *Engineering Computations*, 27(6):621–644. (Cité à la page 76.)
- [Camerer et Weber 1992] C. CAMERER et M. WEBER (1992). Recent developments in modeling preferences : Uncertainty and ambiguity. *Journal of Risk and Uncertainty*, 5(4):325–370. (Cité à la page 13.)
- [Canudas De Wit et al. 1995] C. CANUDAS DE WIT, H. OLSSON, K. J. ASTROM et P. LISCHINSKY (1995). A new model for control of systems with friction. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(3):419–425. (Cité à la page 60.)
- [Capiez-Lernout et Soize 2004] E. CAPIEZ-LERNOUT et C. SOIZE (2004). Nonparametric modeling of random uncertainties for dynamic response of mistuned bladed disks. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 126(3):610–618. (Cité à la page 43.)
- [Çavdar et al. 2008] Ö. ÇAVDAR, A. BAYRAKTAR, A. ÇAVDAR et S. ADANUR (2008). Perturbation based stochastic finite element analysis of the structural systems with composite sections under earthquake forces. *Steel and Composite Structures*, 8(2):129–144. (Cité à la page 34.)
- [Champaney et al. 2005] L. CHAMPANEY, C. BLANZÉ et P.-A. BOUCARD (2005). Outils de dimensionnement et d'analyse de sensibilité pour les assemblages de structures. *Mechanics & Industry*, 6(1):89–99. (Cité à la page 32.)
- [Champaney et al. 2008] L. CHAMPANEY, P.-A. BOUCARD et S. GUINARD (2008). Adaptive multi-analysis strategy for contact problems with friction : Application to aerospace bolted joints. *Computational Mechanics*, 42(2):305–315. (Cité aux pages v, 64 et 66.)
- [Chatterjee 2000] A. CHATTERJEE (2000). An introduction to the proper orthogonal decomposition. *Current science*, 78(7):808–817. (Cité à la page 37.)
- [Chen et al. 2006] C. CHEN, D. DUHAMEL et C. SOIZE (2006). Probabilistic approach for model and data uncertainties and its experimental identification in structural dynamics : Case of composite sandwich panels. *Journal of Sound and Vibration*, 294(1):64–81. (Cité à la page 43.)
- [Chen et al. 1995] W.-H. CHEN, S.-S. LEE et J.-T. YEH (1995). Three-dimensional contact stress analysis of a composite laminate with bolted joint. *Composite Structures*, 30(3):287–297. (Cité aux pages 64 et 65.)

- [Cherki *et al.* 2000] A. CHERKI, G. PLESSIS, B. LALLEMAND, T. TISON et P. LEVEL (2000). Fuzzy behavior of mechanical systems with uncertain boundary conditions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189(3):863–873. (Cité à la page 41.)
- [Chinesta *et al.* 2010] F. CHINESTA, A. AMMAR et E. CUETO (2010). Recent advances and new challenges in the use of the proper generalized decomposition for solving multidimensional models. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 17(4):327–350. (Cité à la page 38.)
- [Chinesta *et al.* 2011] F. CHINESTA, A. AMMAR, A. LEYGUE et R. KEUNINGS (2011). An overview of the proper generalized decomposition with applications in computational rheology. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(11):578–592. (Cité à la page 37.)
- [Cluzel *et al.* 2015] C. CLUZEL, P. ROUCH, O. DORIVAL et S. BEHAR (2015). Experimental identification and associated model of the dissipation in the electric cables of a satellite structure. *Journal of Sound and Vibration*, 357:156–167. (Cité aux pages 87 et 91.)
- [Combescure *et al.* 2003] A. COMBESCURE, F. DELCROIX, L. CAPLAIN, S. ESPANOL et P. ELIOT (2003). A finite element to simulate the failure of weld points on impact. *International Journal of Impact Engineering*, 28(7):783–802. (Cité à la page 67.)
- [Cope et Lacy 2000] D. COPE et T. LACY (2000). Stress intensity determination in lap joints with mechanical fasteners. *In The 41th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference and Exhibit*. (Cité à la page 57.)
- [Daidie *et al.* 2007] A. DAIDIE, J. CHAKHARI et A. ZGHAL (2007). Numerical model for bolted T-stubs with two bolt rows. *Structural Engineering and Mechanics*, 26(3):343–361. (Cité à la page 65.)
- [Daniel *et al.* 1976] J. W. DANIEL, W. B. GRAGG, L. KAUFMAN et G. STEWART (1976). Reorthogonalization and stable algorithms for updating the Gram-Schmidt factorization. *Mathematics of Computation*, 30(136):772–795. (Cité à la page 126.)
- [Daouk *et al.* 2015a] S. DAOUK, F. LOUF, C. CLUZEL, O. DORIVAL et L. CHAMPANEY (2015a). Variability of a bolted assembly through an experimental modal analysis. *In H. S. ATAMTURKTUR, B. MOAVENI, C. PAPADIMITRIOU et T. SCHOENHERR,   diteurs : Model Validation and Uncertainty Quantification, Volume 3 : Proceedings of the 33rd IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics*, pages 171–178. Springer. (Cité à la page 7.)
- [Daouk *et al.* 2017] S. DAOUK, F. LOUF, C. CLUZEL, O. DORIVAL, L. CHAMPANEY et S. AUDEBERT (2017). Study of the dynamic behavior of a bolted joint under heavy loadings. *Journal of Sound and Vibration*, 392:307–324. (Cité à la page 7.)

- [Daouk *et al.* 2014a] S. DAOUK, F. LOUF, O. DORIVAL et L. CHAMPANEY (2014a). Comparative analysis of stochastic and non-stochastic methods for the evaluation of uncertainties in simulated and experimental data. *In Proceedings of the XIXth Symposium Vibrations, SHocks and NOise*. (Cité à la page 6.)
- [Daouk *et al.* 2014b] S. DAOUK, F. LOUF, O. DORIVAL et L. CHAMPANEY (2014b). On the lack-of-knowledge theory for low and high values of uncertainties. *In Proceedings of the 2nd International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling*, Rouen, France. (Cité à la page 7.)
- [Daouk *et al.* 2015b] S. DAOUK, F. LOUF, O. DORIVAL, L. CHAMPANEY et S. AUDEBERT (2015b). Uncertainties in structural dynamics : overview and comparative analysis of methods. *Mechanics & Industry*, 16(4). (Cité à la page 6.)
- [Dax 2000] A. DAX (2000). A modified gram–schmidt algorithm with iterative orthogonalization and column pivoting. *Linear Algebra and its Applications*, 310(1):25–42. (Cité à la page 126.)
- [De Benedetti *et al.* 2007] M. DE BENEDETTI, G. GAROFALO, M. ZUMPARO et R. BARBONI (2007). On the damping effect due to bolted junctions in space structures subjected to pyro-shock. *Acta Astronautica*, 60(12):947–956. (Cité à la page 67.)
- [De Crevoisier *et al.* 2012] J. DE CREVOISIER, N. SWIERGIEL, L. CHAMPANEY et F. HILD (2012). Identification of in situ frictional properties of bolted assemblies with digital image correlation. *Experimental mechanics*, 52(6):561–572. (Cité à la page 87.)
- [De Figueiredo et Stolfi 2004] L. H. DE FIGUEIREDO et J. STOLFI (2004). Affine arithmetic : Concepts and applications. *Numerical Algorithms*, 37(1):147–158. (Cité à la page 40.)
- [Decouvreur *et al.* 2004] V. DECOUVREUR, P. BOUILLARD, A. DERAEMAEKER et P. LADEVÈZE (2004). Updating 2D acoustic models with the constitutive relation error method. *Journal of Sound and Vibration*, 278(4):773–787. (Cité à la page 3.)
- [Decouvreur *et al.* 2008] V. DECOUVREUR, P. LADEVÈZE et P. BOUILLARD (2008). Updating 3D acoustic models with the constitutive relation error method : a two-stage approach for absorbing material characterization. *Journal of Sound and Vibration*, 310(4):985–997. (Cité à la page 3.)
- [Delmas 2013] J.-F. DELMAS (2013). *Introduction au calcul des probabilités et à la statistique*. Les Presses de l’ENSTA. (Cité à la page 22.)
- [Dempster 1968] A. P. DEMPSTER (1968). A generalization of Bayesian inference. *Journal of the Royal Statistical Society*, 30:205–247. (Cité à la page 41.)
- [Der Kiureghian et Ditlevsen 2009] A. DER KIUREGHIAN et O. DITLEVSEN (2009). Aleatory or epistemic? does it matter? *Structural Safety*, 31(2):105–112. (Cité aux pages 13 et 16.)

- [Der Kiureghian et Ke 1988] A. DER KIUREGHIAN et J.-B. KE (1988). The stochastic finite element method in structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 3(2):83–91. (Cité à la page 27.)
- [Der Kiureghian *et al.* 1987] A. DER KIUREGHIAN, H.-Z. LIN et S.-J. HWANG (1987). Second-order reliability approximations. *Journal of Engineering Mechanics*, 113(8):1208–1225. (Cité à la page 33.)
- [Deraemaeker *et al.* 2000] A. DERAEMAERKER, P. LADEVÈZE, E. COLLARD et P. LECONTE (2000). Identification of damped joints parameters using the error in the constitutive relation. *Inverse Problems in Engineering Mechanics II*, pages 367–376. (Cité à la page 3.)
- [Dessombz *et al.* 2001] O. DESSOMBZ, F. THOUVEREZ, J.-P. LAÏNÉ et L. JÉZÉQUEL (2001). Analysis of mechanical systems using interval computations applied to finite element methods. *Journal of Sound and Vibration*, 239(5):949–968. (Cité à la page 41.)
- [Di Maio 2016] D. DI MAIO (2016). Identification of dynamic nonlinearities of bolted structures using strain analysis. In G. KERSCHEN, éditeur : *Nonlinear Dynamics, Volume 1 : Proceedings of the 33rd IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics*, pages 387–414. Springer. (Cité à la page 74.)
- [Ditlevsen 1983] O. DITLEVSEN (1983). Model uncertainty in structural reliability. *Structural safety*, 1(1):73–86. (Cité à la page 17.)
- [Ditlevsen et Madsen 1996] O. DITLEVSEN et H. O. MADSEN (1996). *Structural Reliability Methods*, volume 178. John Wiley & Sons. (Cité à la page 32.)
- [Doostan *et al.* 2007] A. DOOSTAN, R. G. GHANEM et J. RED-HORSE (2007). Stochastic model reduction for chaos representations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(37):3951–3966. (Cité à la page 40.)
- [Du et Sudjianto 2004] X. DU et A. SUDJIANTO (2004). First order saddlepoint approximation for reliability analysis. *AIAA journal*, 42(6):1199–1207. (Cité à la page 33.)
- [Dubois 2010] D. DUBOIS (2010). Representation, propagation, and decision issues in risk analysis under incomplete probabilistic information. *Risk Analysis*, 30(3):361–368. (Cité à la page 13.)
- [Dubois et Prade 1998] D. DUBOIS et H. PRADE (1998). Possibility theory : qualitative and quantitative aspects. In *Quantified representation of uncertainty and imprecision*, pages 169–226. Springer. (Cité à la page 41.)
- [Duchereau et Soize 2006] J. DUCHEREAU et C. SOIZE (2006). Transient dynamics in structures with non-homogeneous uncertainties induced by complex joints. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 20(4):854–867. (Cité à la page 43.)
- [Durand *et al.* 2008] J.-F. DURAND, C. SOIZE et L. GAGLIARDINI (2008). Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(3):1513–1525. (Cité aux pages v, 12, 13 et 43.)

- [Eckart et Young 1939] C. ECKART et G. YOUNG (1939). A principal axis transformation for non-hermitian matrices. *Bull. Amer. Math. Soc*, 45(2):118–121. (Cité à la page 127.)
- [Ekh et Schön 2008] J. EKH et J. SCHÖN (2008). Finite element modeling and optimization of load transfer in multi-fastener joints using structural elements. *Composite Structures*, 82(2):245–256. (Cité à la page 66.)
- [Enjalbert 2009] P. ENJALBERT (2009). *Sur une théorie des méconnaissances en conception robuste*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan. (Cité à la page 47.)
- [Esteban et Rogers 2000] J. ESTEBAN et C. A. ROGERS (2000). Energy dissipation through joints : theory and experiments. *Computers & Structures*, 75(4):347–359. (Cité aux pages 4, 54, 59 et 76.)
- [Ewins 2000] D. EWINS (2000). *Modal Testing : Theory, Practice and Application*. Research Studies Press, second edition édition. (Cité aux pages 90, 94 et 160.)
- [Faravelli 1989] L. FARAVELLI (1989). Response-surface approach for reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 115(12):2763–2781. (Cité à la page 31.)
- [Faverjon et al. 2008] B. FAVERJON, P. LADEVÈZE et F. LOUF (2008). An updating method for structural dynamics models with uncertainties. *Shock and Vibration*, 15(3–4):245–256. (Cité à la page 3.)
- [Faverjon et al. 2009] B. FAVERJON, P. LADEVÈZE et F. LOUF (2009). Validation of stochastic linear structural dynamics models. *Computers & Structures*, 87(13): 829–837. (Cité à la page 3.)
- [Ferson et Ginzburg 1996] S. FERSON et L. R. GINZBURG (1996). Different methods are needed to propagate ignorance and variability. *Reliability Engineering & System Safety*, 54(2–3):133–144. (Cité aux pages 13 et 16.)
- [Fishman 1996] G. S. FISHMAN (1996). *Monte Carlo : Concepts, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag. (Cité à la page 30.)
- [Franke et Nielson 1980] R. FRANKE et G. NIELSON (1980). Smooth interpolation of large sets of scattered data. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 15(11):1691–1704. (Cité à la page 130.)
- [Gant et al. 2011] F. GANT, P. ROUCH, F. LOUF et L. CHAMPANEY (2011). Definition and updating of simplified models of joint stiffness. *International Journal of Solids and Structures*, 48(5):775–784. (Cité à la page 66.)
- [Gaul et Lenz 1997] L. GAUL et J. LENZ (1997). Nonlinear dynamics of structures assembled by bolted joints. *Acta Mechanica*, 125(1):169–181. (Cité aux pages 4 et 60.)
- [Gaul et Nitsche 2001] L. GAUL et R. NITSCHKE (2001). The role of friction in mechanical joints. *Applied Mechanics Reviews*, 54(2):93–106. (Cité à la page 60.)
- [Géradin et Rixen 2014] M. GÉRADIN et D. J. RIXEN (2014). *Mechanical Vibrations. Theory and Application to Structural Dynamics*. John Wiley & Sons. (Cité à la page 95.)

- [Ghanem 1999] R. GHANEM (1999). Stochastic finite elements with multiple random non-Gaussian properties. *Journal of Engineering Mechanics*, 125(1):26–40. (Cité à la page 39.)
- [Ghanem et Kruger 1996] R. G. GHANEM et R. M. KRUGER (1996). Numerical solution of spectral stochastic finite element systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 129(3):289–303. (Cité à la page 40.)
- [Ghanem et Spanos 1990] R. G. GHANEM et P. D. SPANOS (1990). Polynomial chaos in stochastic finite elements. *Journal of Applied Mechanics*, 57(1):197–202. (Cité à la page 38.)
- [Ghanem et Spanos 1991] R. G. GHANEM et P. D. SPANOS (1991). *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach*. Springer-Verlag. (Cité aux pages 27, 38 et 39.)
- [Golub et Van Loan 1996] G. H. GOLUB et C. F. VAN LOAN (1996). *Matrix computations, Third Edition*. Johns Hopkins University Press, Baltimore. (Cité à la page 127.)
- [Grooteman 2008] F. GROOTEMAN (2008). Adaptive radial-based importance sampling method for structural reliability. *Structural Safety*, 30(6):533–542. (Cité à la page 31.)
- [Hanss 2002] M. HANSS (2002). The transformation method for the simulation and analysis of systems with uncertain parameters. *Fuzzy Sets and Systems*, 130(3): 277–289. (Cité à la page 41.)
- [Hanss et al. 2002] M. HANSS, S. OEXL et L. GAUL (2002). Identification of a bolted-joint model with fuzzy parameters loaded normal to the contact interface. *Mechanics Research Communications*, 29(2–3):177–187. (Cité à la page 41.)
- [Helton et Davis 2003] J. C. HELTON et F. J. DAVIS (2003). Latin hypercube sampling and the propagation of uncertainty in analyses of complex systems. *Reliability Engineering & System safety*, 81(1):23–69. (Cité à la page 31.)
- [Hemez 2005] F. M. HEMEZ (2005). Uncertainty quantification and the verification and validation of computational models. In D. J. INMAN, C. R. FARRAR, V. LOPES JUNIOR et V. STEFFEN JUNIOR, éditeurs : *Damage Prognosis for Aerospace, Civil and Mechanical Systems*, chapitre 9, pages 201–220. John Wiley & Sons. (Cité aux pages 1 et 69.)
- [Hemez et Ben-Haim 2004] F. M. HEMEZ et Y. BEN-HAIM (2004). Info-gap robustness for the correlation of tests and simulations of a non-linear transient. *Mechanical systems and signal processing*, 18(6):1443–1467. (Cité à la page 42.)
- [Hohenbichler et Rackwitz 1983] M. HOHENBICHLER et R. RACKWITZ (1983). First-order concepts in system reliability. *Structural safety*, 1(3):177–188. (Cité à la page 33.)
- [Huang et Du 2008] B. HUANG et X. DU (2008). Probabilistic uncertainty analysis by mean-value first order saddlepoint approximation. *Reliability Engineering & System safety*, 93(2):325–336. (Cité à la page 33.)

- [Hunt 1992] D. HUNT (1992). Application of an Enhanced Coordinate Modal Assurance Criterion (ECOMAC). *In International Modal Analysis Conference*, pages 66–71. (Cité à la page 128.)
- [Huntington et Lyrantzis 1998] D. HUNTINGTON et C. LYRINTZIS (1998). Improvements to and limitations of latin hypercube sampling. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 13(4):245–253. (Cité à la page 31.)
- [Huth 1986] H. HUTH (1986). Influence of fastener flexibility on the prediction of load transfer and fatigue life for multiple-row joints. *In Fatigue in mechanically fastened composite and metallic joints*, volume 927, pages 221–250. ASTM Special Technical Publications. (Cité à la page 56.)
- [Ibrahim et Pettit 2005] R. IBRAHIM et C. PETTIT (2005). Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners. *Journal of Sound and Vibration*, 279(3):857–936. (Cité aux pages 54 et 74.)
- [Igusa *et al.* 2002] T. IGUSA, S. BUONOPANE et B. ELLINGWOOD (2002). Bayesian analysis of uncertainty for structural engineering applications. *Structural Safety*, 24(2):165–186. (Cité à la page 42.)
- [Iwan 1966] W. D. IWAN (1966). A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response. *Journal of Applied Mechanics*, 33(4):893–900. (Cité à la page 60.)
- [Iwan 1967] W. D. IWAN (1967). On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems. *Journal of Applied Mechanics*, 34(3):612–617. (Cité à la page 60.)
- [Izumi *et al.* 2005] S. IZUMI, T. YOKOYAMA, A. IWASAKI et S. SAKAI (2005). Three-dimensional finite element analysis of tightening and loosening mechanism of threaded fastener. *Engineering Failure Analysis*, 12(4):604–615. (Cité aux pages v, 63 et 64.)
- [Jaglinski *et al.* 2007] T. JAGLINSKI, A. NIMITYONGSKUL, R. SCHMITZ et R. LAKES (2007). Study of bolt load loss in bolted aluminum joints. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 129(1):48–54. (Cité à la page 59.)
- [Jaynes 1957] E. T. JAYNES (1957). Information theory and statistical mechanics. *Physical Review*, 106(4):620–630 et 108(3), 171–190. (Cité à la page 25.)
- [Johnson *et al.* 1997] E. A. JOHNSON, L. A. BERGMAN et B. F. SPENCER (1997). Parallel implementation of Monte-Carlo simulation – Comparative studies from stochastic structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12(4):208–212. (Cité à la page 31.)
- [Kamiński 2001] M. KAMIŃSKI (2001). Stochastic second-order perturbation approach to the stress-based finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, 38(21):3831–3852. (Cité à la page 34.)
- [Kapur et Kesavan 1992] J. N. KAPUR et H. K. KESAVAN (1992). *Entropy Optimization Principles with Applications*. Academic Press, San Diego. (Cité à la page 25.)

- [Kelly 2006] G. KELLY (2006). Quasi-static strength and fatigue life of hybrid (bonded/bolted) composite single-lap joints. *Composite Structures*, 72(1):119–129. (Cité à la page 65.)
- [Kim *et al.* 2007] J. KIM, J.-C. YOON et B.-S. KANG (2007). Finite element analysis and modeling of structure with bolted joints. *Applied Mathematical Modelling*, 31(5):895–911. (Cité aux pages v, 66 et 67.)
- [Kim et Kim 1995] S. J. KIM et J. H. KIM (1995). Finite element analysis of laminated composite plates with multi-pin joints considering friction. *Computers & Structures*, 55(3):507–514. (Cité à la page 64.)
- [Kim et Kuwamura 2007] T. S. KIM et H. KUWAMURA (2007). Finite element modeling of bolted connections in thin-walled stainless steel plates under static shear. *Thin-Walled Structures*, 45(4):407–421. (Cité à la page 65.)
- [Kleiber et Hien 1992] M. KLEIBER et T. D. HIEN (1992). *The stochastic finite element method : basic perturbation technique and computer implementation*. John Wiley & Sons, England. (Cité à la page 34.)
- [Knight Jr *et al.* 2008] N. F. KNIGHT JR, D. R. PHILLIPS et I. S. RAJU (2008). Simulating the structural response of a preloaded bolted joint. *In Proceedings of the 49th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, pages 1–20. (Cité à la page 76.)
- [Köylüoglu *et al.* 1995] H. U. KÖYLÜOĞLU, A. S. ÇAKMAK et S. R. NIELSEN (1995). Interval algebra to deal with pattern loading and structural uncertainties. *Journal of Engineering Mechanics*, 121(11):1149–1157. (Cité à la page 41.)
- [Ladevèze 1993] P. LADEVÈZE (1993). Erreur en relation de comportement en dynamique : théorie et application au recalage de modèles de structures. *Rapport interne 150, LMT Cachan*. (Cité à la page 3.)
- [Ladevèze 2008] P. LADEVÈZE (2008). Strict upper error bounds on computed outputs of interest in computational structural mechanics. *Computational Mechanics*, 42(2):271–286. (Cité à la page 3.)
- [Ladevèze et Chouaki 1999] P. LADEVÈZE et A. CHOUAKI (1999). Application of a posteriori error estimation for structural model updating. *Inverse Problems*, 15(1):49–58. (Cité à la page 3.)
- [Ladevèze et Leguillon 1983] P. LADEVÈZE et D. LEGUILLON (1983). Error estimate procedure in the finite element method and applications. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 20(3):485–509. (Cité à la page 3.)
- [Ladevèze et Pelle 2005] P. LADEVÈZE et J.-P. PELLE (2005). *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*. Springer. (Cité à la page 2.)
- [Ladevèze *et al.* 2006a] P. LADEVÈZE, G. PUEL, A. DERAEMAERKER et T. ROMEUF (2006a). Validation of structural dynamics models containing uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:373–393. (Cité à la page 3.)

- [Ladevèze *et al.* 2006b] P. LADEVÈZE, G. PUEL et T. ROMEUF (2006b). Lack of knowledge in structural model validation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195:4697–4710. (Cité aux pages 4, 21, 44, 47 et 125.)
- [Langrand et Combescure 2004] B. LANGRAND et A. COMBESCURE (2004). Non-linear and failure behaviour of spotwelds : a global finite element and experiments in pure and mixed modes I/II. *International Journal of Solids and Structures*, 41(24):6631–6646. (Cité à la page 62.)
- [Le Loch 2003] S. LE LOCH (2003). *Modélisation et identification de l’amortissement dans les structures spatiales*. Thèse de doctorat,  cole Normale Supérieure de Cachan. (Cité à la page 87.)
- [Le Maître et Knio 2010] O. P. LE MAÎTRE et O. M. KNIO (2010). *Spectral methods for uncertainty quantification : with applications to computational fluid dynamics*. Springer. (Cité aux pages 38 et 39.)
- [LeBeau 1999] G. LEBEAU (1999). A parallel implementation of the direct simulation monte carlo method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 174(3):319–337. (Cité à la page 31.)
- [Lee *et al.* 2010] A. LEE, C. YAU, M. B. GILES, A. DOUCET et C. C. HOLMES (2010). On the utility of graphics cards to perform massively parallel simulation of advanced monte carlo methods. *Journal of computational and graphical statistics*, 19(4):769–789. (Cité à la page 31.)
- [Lehnhoff et Bunyard 2001] T. F. LEHNHOFF et B. A. BUNYARD (2001). Effects of bolt threads on the stiffness of bolted joints. *Journal of pressure vessel technology*, 123(2):161–165. (Cité à la page 63.)
- [Lei et Qiu 2000] Z. LEI et C. QIU (2000). Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation. *Computers & Structures*, 77(6):651–657. (Cité à la page 35.)
- [Lemaire *et al.* 2005] M. LEMAIRE, A. CHATEAUNEUF et J.-C. MITTEAU (2005). *Fiabilité des structures : Couplage m cano-fiabiliste statique*. Herm s Science Publications. (Cité à la page 32.)
- [Lermitte *et al.* 2008] S. LERMITTE, T. CHAUDAT, T. PAYEN, D. VANDEPUTTE et E. VIALLET (2008). Smart 2008 : seismic design and best-estimate methods assesment for RC buildings subjected to torsion. *In Proceedings of 14th World Conference on Earthquake Engineering*, Beijing, China. (Cité à la page 5.)
- [Li et Der Kiureghian 1993] C.-C. LI et A. DER KIUREGHIAN (1993). Optimal discretization of random fields. *Journal of Engineering Mechanics*, 119(6):1136–1154. (Cité aux pages 27 et 28.)
- [Lieven et Ewins 1988] N. LIEVEN et D. EWINS (1988). Spatial Correlation of Mode Shapes, The Coordinate Modal Assurance Criterion (COMAC). *In International Modal Analysis Conference*, pages 690–695. (Cité à la page 128.)

- [Linderholt *et al.* 2015] A. LINDERHOLT, T. ABRAHAMSSON, A. JOHANSSON, D. STEINEPREIS et P. REUSS (2015). A Comparison of the Dynamic Behavior of Three Sets of the Ampair 600 Wind Turbine. In M. ALLEN, R. L. MAYES et D. J. RIXEN, éditeurs : *Dynamics of Coupled Structures, Volume 4 : Proceedings of the 33rd IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics*, pages 99–110. Springer. (Cité aux pages 148 et 152.)
- [Link et Friswell 2003] M. LINK et M. FRISWELL (2003). Working Group 1 : generation of validated structural dynamic models results of a benchmark study utilising the GARTEUR SM-AG19 test-bed. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 17(1):9–20. (Cité à la page 5.)
- [Liu et Chen 2013] L. LIU et K. CHEN (2013). Global–local finite element stress analysis of thick laminate multi-bolt joints in large-scale structures. *Finite Elements in Analysis and Design*, 75:31–37. (Cité à la page 68.)
- [Liu *et al.* 1986] W. K. LIU, T. BELYTSCHKO et A. MANI (1986). Random field finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 23(10):1831–1845. (Cité à la page 27.)
- [Louf et Champany 2013] F. LOUF et L. CHAMPANEY (2013). Fast validation of stochastic structural models using a PGD reduction scheme. *Finite Elements in Analysis and Design*, 70–71:44–56. (Cité à la page 38.)
- [Louf *et al.* 2015] F. LOUF, S. DAOUK, C. CLUZEL, O. DORIVAL, L. CHAMPANEY et S. AUDEBERT (2015). Etude expérimentale de l’impact d’une liaison boulonnée sur le comportement dynamique d’une structure. In *CSMA 2015, 12e Colloque National en Calcul de Structures, May 2015, Giens, France*. (Cité à la page 7.)
- [Louf *et al.* 2010] F. LOUF, P. ENJALBERT, P. LADEVÈZE et T. ROMEUF (2010). On lack-of-knowledge theory in structural mechanics. *Comptes Rendus Mécanique*, 338(7-8):424–433. (Cité aux pages 4, 21 et 47.)
- [Mackerle 2003] J. MACKERLE (2003). Finite element analysis of fastening and joining : A bibliography (1990–2002). *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, 80(4):253–271. (Cité à la page 62.)
- [Maheri et Adams 2003] M. MAHERI et R. ADAMS (2003). Modal vibration damping of anisotropic FRP laminates using the Rayleigh–Ritz energy minimization scheme. *Journal of Sound and Vibration*, 259(1):17–29. (Cité à la page 90.)
- [Maheri *et al.* 2008] M. MAHERI, R. ADAMS et J. HUGON (2008). Vibration damping in sandwich panels. *Journal of Materials Science*, 43(20):6604–6618. (Cité à la page 90.)
- [Massa *et al.* 2008] F. MASSA, K. RUFFIN, T. TISON et B. LALLEMAND (2008). A complete method for efficient fuzzy modal analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 309(1):63–85. (Cité à la page 41.)
- [Matthies *et al.* 1997] H. G. MATTHIES, C. E. BRENNER, C. G. BUCHER et C. GUEDES SOARES (1997). Uncertainties in probabilistic numerical analysis of

- structures and solids-Stochastic finite elements. *Structural safety*, 19(3):283–336. (Cité aux pages 4, 21 et 29.)
- [Mayer et Gaul 2007] M. MAYER et L. GAUL (2007). Segment-to-segment contact elements for modelling joint interfaces in finite element analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 21(2):724–734. (Cité à la page 67.)
- [McCarthy et al. 2005a] C. MCCARTHY, M. MCCARTHY, W. STANLEY et V. LAWLOR (2005a). Experiences with modeling friction in composite bolted joints. *Journal of Composite Materials*, 39(21):1881–1908. (Cité à la page 65.)
- [McCarthy et al. 2005b] M. MCCARTHY, C. MCCARTHY, V. LAWLOR et W. STANLEY (2005b). Three-dimensional finite element analysis of single-bolt, single-lap composite bolted joints : Part I—model development and validation. *Composite Structures*, 71(2):140–158. (Cité aux pages v, 64 et 65.)
- [McCarthy et al. 2006] M. MCCARTHY, C. MCCARTHY et G. PADHI (2006). A simple method for determining the effects of bolt-hole clearance on load distribution in single-column multi-bolt composite joints. *Composite Structures*, 73(1):78–87. (Cité aux pages v, 57 et 59.)
- [Melchers 1989] R. MELCHERS (1989). Importance sampling in structural systems. *Structural Safety*, 6(1):3–10. (Cité à la page 31.)
- [Melchers 1990] R. MELCHERS (1990). Radial importance sampling for structural reliability. *Journal of engineering mechanics*, 116(1):189–203. (Cité à la page 31.)
- [Melchers 1999] R. E. MELCHERS (1999). *Structural reliability analysis and prediction*. John Wiley & Sons. (Cité à la page 32.)
- [Merlet 2009] J.-P. MERLET (2009). Interval analysis for certified numerical solution of problems in robotics. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, 19(3):399–412. (Cité à la page 41.)
- [Miller et Quinn 2009] J. D. MILLER et D. D. QUINN (2009). A two-sided interface model for dissipation in structural systems with frictional joints. *Journal of Sound and Vibration*, 321(1–2):201–219. (Cité à la page 61.)
- [Moens et Hanss 2011] D. MOENS et M. HANSS (2011). Non-probabilistic finite element analysis for parametric uncertainty treatment in applied mechanics : Recent advances. *Finite Elements in Analysis and Design*, 47(1):4–16. (Cité aux pages 4, 21 et 40.)
- [Moens et Vandepitte 2002] D. MOENS et D. VANDEPITTE (2002). Fuzzy finite element method for frequency response function analysis of uncertain structures. *AIAA journal*, 40(1):126–136. (Cité à la page 41.)
- [Moens et Vandepitte 2005] D. MOENS et D. VANDEPITTE (2005). A survey of non-probabilistic uncertainty treatment in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12):1527–1555. (Cité aux pages 4, 21 et 40.)

- [Moore 1966] R. M. MOORE (1966). *Interval Analysis*. Prentice-Hall. (Cité à la page 15.)
- [Moore 1979] R. M. MOORE (1979). *Methods and Applications of Interval Analysis*. Studies In Applied Mathematics (SIAM). (Cité à la page 40.)
- [Mottershead et Friswell 1993] J. MOTTERSHEAD et M. FRISWELL (1993). Model updating in structural dynamics : A survey. *Journal of Sound and Vibration*, 167(2):347–375. (Cité à la page 3.)
- [Muhanna et Mullen 2001] R. L. MUHANNA et R. L. MULLEN (2001). Uncertainty in mechanics problems—Interval-based approach. *Journal of Engineering Mechanics*, 127(6):557–566. (Cité à la page 41.)
- [Myers *et al.* 2009] R. H. MYERS, D. C. MONTGOMERY et C. M. ANDERSON-COOK (2009). *Response surface methodology : process and product optimization using designed experiments*. Wiley, third edition édition. (Cité à la page 31.)
- [Nassar *et al.* 2005] S. A. NASSAR, G. BARBER et D. ZUO (2005). Bearing friction torque in bolted joints. *Tribology Transactions*, 48(1):69–75. (Cité à la page 59.)
- [Nelson *et al.* 1983] W. D. NELSON, B. L. BUNIN et L. J. HART-SMITH (1983). Critical joints in large composite aircraft structure. Rapport technique, DTIC Document. (Cité à la page 56.)
- [Nghah et Young 2007] M. NGAH et A. YOUNG (2007). Application of the spectral stochastic finite element method for performance prediction of composite structures. *Composite Structures*, 78(3):447–456. (Cité à la page 124.)
- [Niu 1988] M. C. Y. NIU (1988). *Airframe structural design : practical design information and data on aircraft structures*. Hong Kong Conmilit Press limited. (Cité à la page 57.)
- [Nouy 2007] A. NOUY (2007). A generalized spectral decomposition technique to solve a class of linear stochastic partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:4251–4537. (Cité à la page 37.)
- [Nouy 2008] A. NOUY (2008). Generalized spectral decomposition method for solving stochastic finite element equations : invariant subspace problem and dedicated algorithms. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:4718–4736. (Cité à la page 38.)
- [Nouy 2009] A. NOUY (2009). Recent developments in spectral stochastic methods for the numerical solution of stochastic partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 16(3):251–285. (Cité à la page 29.)
- [Nouy 2010] A. NOUY (2010). A priori model reduction through proper generalized decomposition for solving time-dependent partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(23):1603–1626. (Cité à la page 37.)
- [Nouy et Le Maître 2009] A. NOUY et O. P. LE MAÎTRE (2009). Generalized spectral decomposition for stochastic nonlinear problems. *Journal of Computational Physics*, 228(1):202–235. (Cité à la page 38.)

- [Oberkampf *et al.* 2002] W. L. OBERKAMPF, S. M. DELAND, B. M. RUTHERFORD, K. V. DIEGERT et K. F. ALVIN (2002). Error and uncertainty in modeling and simulation. *Reliability Engineering & System Safety*, 75(3):333–357. (Cité à la page 13.)
- [Oberkampf et Roy 2010] W. L. OBERKAMPF et C. J. ROY (2010). *Verification and validation in scientific computing*. Cambridge University Press. (Cité aux pages 1 et 16.)
- [Oberkampf et Trucano 2008] W. L. OBERKAMPF et T. G. TRUCANO (2008). Verification and validation benchmarks. *Nuclear engineering and Design*, 238(3):716–743. (Cité à la page 4.)
- [Olsson *et al.* 2003] A. OLSSON, G. SANDBERG et O. DAHLBLOM (2003). On latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *Structural safety*, 25(1):47–68. (Cité à la page 31.)
- [O’Toole *et al.* 2006] B. O’TOOLE, K. KARPANAN et M. FEGHHI (2006). Experimental and finite element analysis of preloaded bolted joints under impact loading. *In Proceedings of the 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, pages 1–9. (Cité à la page 76.)
- [Ouyang *et al.* 2006] H. OUYANG, M. OLDFIELD et J. MOTTERSHEAD (2006). Experimental and theoretical studies of a bolted joint excited by a torsional dynamic load. *International Journal of Mechanical Sciences*, 48(12):1447–1455. (Cité à la page 61.)
- [Paez et Red-Horse 2008] T. L. PAEZ et J. RED-HORSE (2008). Structural dynamics challenge problem : Summary. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(29):2660–2665. (Cité à la page 5.)
- [Pakdemirli et Boyacı 2003] M. PAKDEMIRLI et H. BOYACI (2003). Non-linear vibrations of a simple–simple beam with a non-ideal support in between. *Journal of Sound and Vibration*, 268(2):331–341. (Cité à la page 60.)
- [Park et Grandhi 2012] I. PARK et R. V. GRANDHI (2012). Quantification of model-form and parametric uncertainty using evidence theory. *Structural Safety*, 39:44–51. (Cité aux pages 15 et 41.)
- [Perrin *et al.* 2013] G. PERRIN, C. SOIZE, D. DUHAMEL et C. FUNFSCHILLING (2013). Karhunen–Loève expansion revisited for vector-valued random fields : Scaling, errors and optimal basis. *Journal of Computational Physics*, 242:607–622. (Cité à la page 28.)
- [Puel 2004] G. PUEL (2004). *Sur une théorie des méconnaissances en dynamique des structures*. Thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Cachan. (Cité aux pages 21, 44, 45, 47 et 125.)
- [Ramm *et al.* 2003] E. RAMM, E. RANK, R. RANNACHER, K. SCHWEIZERHOF, E. STEIN, W. WENDLAND, G. WITTUM, P. WRIGGERS et W. WUNDERLICH (2003). *Error-controlled adaptive finite elements in solid mechanics*. John Wiley & Sons. (Cité à la page 2.)

- [Rao et Sawyer 1995] S. S. RAO et J. P. SAWYER (1995). Fuzzy finite element approach for analysis of imprecisely defined systems. *AIAA Journal*, 33(12):2364–2370. (Cité à la page 41.)
- [Rashquinha et Hess 1997] I. A. RASHQUINHA et D. P. HESS (1997). Modelling nonlinear dynamics of bolted assemblies. *Applied Mathematical Modelling*, 21(12):801–809. (Cité à la page 61.)
- [Riccio et Scaramuzzino 2002] A. RICCIO et F. SCARAMUZZINO (2002). Influence of damage onset and propagation on the tensile structural behavior of protruding composite joints. In *4th GRACM Congress on Computation Mechanics GRACM*, pages 27–29. Citeseer. (Cité à la page 65.)
- [Roache 1998] P. J. ROACHE (1998). *Verification and validation in computational science and engineering*. Hermosa. (Cité à la page 2.)
- [Romero et al. 2004] V. ROMERO, L. SWILER et A. GIUNTA (2004). Construction of response surfaces based on progressive-lattice-sampling experimental designs with application to uncertainty propagation. *Structural Safety*, 26(2):201–219. (Cité à la page 32.)
- [Ross 1947] R. D. ROSS (1947). An electrical computer for the solution of shear-lag and bolted-joint problems. Rapport technique, DTIC Document. (Cité aux pages v, ix, 57 et 58.)
- [Rouch et al. 2009] P. ROUCH, C. CLUZEL et O. GUEZET (2009). Meso-model and experimental identification of damping in joint of satellite sandwich panel. In *European Conference on Spacecraft Structures, Materials and Mechanical Testing, Toulouse, France*, pages 15–17. (Cité aux pages 76, 87 et 90.)
- [Rozza et al. 2008] G. ROZZA, D. HUYNH et A. T. PATERA (2008). Reduced basis approximation and a posteriori error estimation for affinely parametrized elliptic coercive partial differential equations. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 15(3):229–275. (Cité à la page 37.)
- [Ruhe 1983] A. RUHE (1983). Numerical aspects of Gram-Schmidt orthogonalization of vectors. *Linear Algebra and Its Applications*, 52–53:591–601. (Cité à la page 126.)
- [Ryckelynck 2005] D. RYCKELYNCK (2005). A priori hyperreduction method : an adaptive approach. *Journal of Computational Physics*, 202(1):346–366. (Cité à la page 37.)
- [Safatly et al. 2011] E. SAFATLY, M. CHEVREUIL et A. NOUY (2011). Proper Generalized Decomposition pour les problèmes aux limites définis sur des domaines incertains. In *CSMA*. (Cité à la page 38.)
- [Schuëller 1997] G. SCHUËLLER (1997). A state-of-the-art report on computational stochastic mechanics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 12:197–321. (Cité aux pages 4, 21 et 29.)

- [Schuëller et Pradlwarter 2007] G. SCHUËLLER et H. PRADLWARTER (2007). Benchmark study on reliability estimation in higher dimensions of structural systems—an overview. *Structural Safety*, 29(3):167–182. (Cité à la page 148.)
- [Schuëller et Pradlwarter 2009] G. SCHUËLLER et H. PRADLWARTER (2009). Uncertain linear systems in dynamics : Retrospective and recent developments by stochastic approaches. *Engineering Structures*, 31(11):2507–2517. (Cité à la page 29.)
- [Segalman 2005] D. J. SEGALMAN (2005). A four-parameter iwan model for lap-type joints. *Journal of Applied Mechanics*, 72(5):752–760. (Cité aux pages 59 et 60.)
- [Segalman et Starr 2008] D. J. SEGALMAN et M. J. STARR (2008). Inversion of Masing models via continuous Iwan systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43(1):74–80. (Cité aux pages v et 60.)
- [Shafer 1976] G. SHAFER (1976). *A Mathematical Theory of Evidence*, volume 1. Princeton University Press. (Cité à la page 41.)
- [Shannon 1948] C. E. SHANNON (1948). A mathematical theory of communication. *Bell System Technical Journal*, 27(3–4):379–423 et 623–656. (Cité à la page 25.)
- [Shepard 1968] D. SHEPARD (1968). A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In *Proceedings of the 23rd ACM national conference*, pages 517–524. ACM. (Cité à la page 129.)
- [Smith *et al.* 2016] S. SMITH, J. BILBAO-LUDENA, S. CATALFAMO, M. BRAKE, P. REUSS et C. SCHWINGSHACKL (2016). The effects of boundary conditions, measurement techniques, and excitation type on measurements of the properties of mechanical joints. In G. KERSCHEN,  diteur : *Nonlinear Dynamics, Volume 1 : Proceedings of the 33rd IMAC, A Conference and Exposition on Structural Dynamics*, pages 415–431. Springer. (Cité aux pages 74 et 76.)
- [Soize 2000] C. SOIZE (2000). A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 15(3):277–294. (Cité aux pages 4, 21 et 43.)
- [Soize 2001] C. SOIZE (2001). Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 109(5):1979–1996. (Cité aux pages 4, 21 et 43.)
- [Soize 2003] C. SOIZE (2003). Random matrix theory and non-parametric model of random uncertainties in vibration analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 263(4):893–916. (Cité à la page 43.)
- [Soize 2005] C. SOIZE (2005). Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(12):1333–1366. (Cité à la page 43.)
- [Soize 2010] C. SOIZE (2010). Generalized probabilistic approach of uncertainties in computational dynamics using random matrices and polynomial chaos decompositions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 81(8):939–970. (Cité aux pages 4, 21 et 43.)

- [Soize 2013] C. SOIZE (2013). Stochastic modeling of uncertainties in computational structural dynamics – recent theoretical advances. *Journal of Sound and Vibration*, 332(10):2379–2395. (Cité aux pages 4, 21 et 44.)
- [Song et al. 2004] Y. SONG, C. HARTWIGSEN, D. MCFARLAND, A. F. VAKAKIS et L. BERGMAN (2004). Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted iwan beam elements. *Journal of Sound and Vibration*, 273(1–2):249–276. (Cité à la page 61.)
- [Stefanou 2009] G. STEFANOUE (2009). The stochastic finite element method : past, present and future. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(9):1031–1051. (Cité à la page 34.)
- [Sudret et Der Kiureghian 2000] B. SUDRET et A. DER KIUREGHIAN (2000). *Stochastic finite element methods and reliability : a state-of-the-art report*. Department of Civil and Environmental Engineering, University of California. (Cité aux pages 4, 21, 28, 29 et 34.)
- [Swift 1971] T. SWIFT (1971). Development of the fail-safe design features of the dc-10. In *Damage Tolerance in Aircraft Structures*, volume 486. ASTM International. (Cité à la page 55.)
- [Tate et Rosenfeld 1946] M. TATE et S. ROSENFELD (1946). Preliminary investigation of the loads carried by individual bolts in bolted joints. 1051, NACA, Langley Memorial Aeronautical Laboratory, Langley Field, Va. (Cité à la page 55.)
- [Troffaes 2007] M. C. TROFFAES (2007). Decision making under uncertainty using imprecise probabilities. *International Journal of Approximate Reasoning*, 45(1): 17–29. (Cité à la page 42.)
- [Trucano et al. 2006] T. G. TRUCANO, L. P. SWILER, T. IGUSA, W. L. OBERKAMPF et M. PILCH (2006). Calibration, validation, and sensitivity analysis : What’s what. *Reliability Engineering & System Safety*, 91(10–11):1331–1357. (Cité aux pages 1, 3 et 5.)
- [Tserpes et al. 2002] K. TSERPES, G. LABEAS, P. PAPANIKOS et T. KERMANIDIS (2002). Strength prediction of bolted joints in graphite/epoxy composite laminates. *Composites Part B : Engineering*, 33(7):521–529. (Cité à la page 65.)
- [Van Buren et al. 2015] K. L. VAN BUREN, T. M. HALL, L. M. GONZALES, F. M. HEMEZ et S. R. ANTON (2015). A case study to quantify prediction bounds caused by model-form uncertainty of a portal frame. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 50–51:11–26. (Cité aux pages 74 et 148.)
- [Van den Nieuwenhof et Coyette 2003] B. VAN DEN NIEUWENHOF et J.-P. COYETTE (2003). Modal approaches for the stochastic finite element analysis of structures with material and geometric uncertainties. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192:3705–3729. (Cité à la page 34.)
- [Vanik et al. 2000] M. W. VANIK, J. L. BECK et S.-K. AU (2000). Bayesian probabilistic approach to structural health monitoring. *Journal of Engineering Mechanics*, 126(7):738–745. (Cité à la page 42.)

- [Vanmarcke et Grigoriu 1983] E. VANMARCKE et M. GRIGORIU (1983). Stochastic finite element analysis of simple beams. *Journal of Engineering Mechanics*, 109(5): 1203–1214. (Cité à la page 27.)
- [Vinot *et al.* 2002] P. VINOT, S. COGAN et Y. BEN-HAIM (2002). Reliability of structural dynamic models based on info-gap models. *In Proceedings of the 20th International Modal Analysis Conference (IMAC-XX)*, pages 1057–1063. (Cité à la page 42.)
- [Walley 1991] P. WALLEY (1991). *Statistical reasoning with imprecise probabilities*, volume 42. Peter Walley. (Cité à la page 42.)
- [Walley 2000] P. WALLEY (2000). Towards a unified theory of imprecise probability. *International Journal of Approximate Reasoning*, 24(2–3):125–148. (Cité à la page 42.)
- [Wang *et al.* 2015] H. WANG, Z. QIN et F. CHU (2015). Effect of bolt number on joint stiffness of disc and drum connected by bolted joints. *In K. CHAN et J. YEH, éditeurs : Proceedings of the International Conference on Electrical, Automation and Mechanical Engineering (EAME 2015)*, pages 165–167. Atlantis Press. (Cité à la page 76.)
- [Wang 2010] Y. WANG (2010). Imprecise probabilities based on generalised intervals for system reliability assessment. *International Journal of Reliability and Safety*, 4(4):319–342. (Cité à la page 42.)
- [Wiener 1938] N. WIENER (1938). The homogeneous chaos. *American Journal of Mathematics*, 60:897–936. (Cité à la page 39.)
- [Willcox et Peraire 2002] K. WILLCOX et J. PERAIRE (2002). Balanced model reduction via the proper orthogonal decomposition. *AIAA Journal*, 40(11):2323–2330. (Cité à la page 37.)
- [Xiu et Karniadakis 2002] D. XIU et G. E. KARNIADAKIS (2002). The wiener–askey polynomial chaos for stochastic differential equations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 24(2):619–644. (Cité à la page 39.)
- [Xiu et Karniadakis 2003] D. XIU et G. E. KARNIADAKIS (2003). Modeling uncertainty in flow simulations via generalized polynomial chaos. *Journal of computational physics*, 187(1):137–167. (Cité à la page 39.)
- [Yamazaki *et al.* 1988] F. YAMAZAKI, M. SHINOZUKA et G. DASGUPTA (1988). Neumann expansion for stochastic finite element analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 114(8):1335–1354. (Cité à la page 35.)
- [Yen 1978] S.-W. YEN (1978). Multirow joint fastener load investigation. *Computers & Structures*, 9(5):483–488. (Cité à la page 59.)
- [Zadeh 1999] L. ZADEH (1999). Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. *Fuzzy Sets and Systems*, 100:9–34. (Cité à la page 41.)
- [Zang *et al.* 2008] C. ZANG, C. SCHWINGSHACKL et D. EWINS (2008). Model validation for structural dynamic analysis : an approach to the sandia structural

- dynamics challenge. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(29):2645–2659. (Cité à la page 5.)
- [Zhang et Ellingwood 1994] J. ZHANG et B. ELLINGWOOD (1994). Orthogonal series expansions of random fields in reliability analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 120(12):2660–2677. (Cité à la page 28.)
- [Zhang et al. 2007] M. ZHANG, Y. JIANG et C.-H. LEE (2007). Finite element modeling of self-loosening of bolted joints. *Journal of Mechanical Design*, 129(2):218–226. (Cité à la page 63.)
- [Zhang et Mahadevan 2000] R. ZHANG et S. MAHADEVAN (2000). Model uncertainty and bayesian updating in reliability-based inspection. *Structural Safety*, 22(2):145–160. (Cité à la page 42.)
- [Zienkiewicz et Zhu 1987] O. C. ZIENKIEWICZ et J. Z. ZHU (1987). A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24(2):337–357. (Cité à la page 3.)





**Titre :** Propagation d'incertitudes à travers des modèles dynamiques d'assemblages de structures mécaniques

**Mots clefs :** Quantification des incertitudes, Théorie des méconnaissances, Dynamique des structures, Liaison boulonnée, Analyse modale

**Résumé :** Lors de l'étude du comportement des systèmes mécaniques, les modèles mathématiques et les paramètres structuraux sont généralement considérés déterministes. Néanmoins, le retour d'expérience montre que ces éléments sont souvent incertains, dû à une variabilité naturelle ou manque de connaissance. La quantification de la qualité et la fiabilité du modèle numérique d'une structure industrielle reste alors une question majeure en dynamique basse-fréquence. L'objectif de cette thèse est d'améliorer le dimensionnement vibratoire des assemblages boulonnés par la mise en place d'un modèle dynamique de connecteur prenant en compte différents types et sources d'incertitudes sur des paramètres de raideur, de manière simple, efficace et exploitable dans un contexte industriel. Ces travaux

s'inscrivent dans le cadre du projet SICODYN, piloté par EDF R&D, visant à caractériser et quantifier les incertitudes sur le comportement dynamique des assemblages industriels boulonnés sous les aspects numérique et expérimental. Des études comparatives de plusieurs méthodes numériques de propagation d'incertitudes montrent l'avantage de l'utilisation de la théorie des méconnaissances. Une caractérisation expérimentale des incertitudes dans les structures boulonnées est réalisée sur un banc d'essai dynamique et sur un assemblage industriel. La propagation de plusieurs faibles et fortes incertitudes à travers différents modèles dynamiques d'assemblages mécaniques permet d'aboutir à l'évaluation de l'efficacité de la théorie des méconnaissances et son applicabilité en milieu industriel.

**Title :** Uncertainty Propagation Through Dynamic Models of Assemblies of Mechanical Structures

**Keywords :** Uncertainty Quantification, Lack-of-knowledge Theory, Structural Dynamics, Bolted Joint, Modal Analysis

**Abstract :** When studying the behaviour of mechanical systems, mathematical models and structural parameters are usually considered deterministic. Return on experience shows however that these elements are uncertain in most cases, due to natural variability or lack of knowledge. Therefore, quantifying the quality and reliability of the numerical model of an industrial structure remains a major question in low-frequency dynamics. The purpose of this thesis is to improve the vibratory design of bolted assemblies through setting up a dynamic connector model that takes account of different types and sources of uncertainty on stiffness parameters, in a simple, efficient and exploitable in industrial context. This work has been carried

out in the framework of the SICODYN project, led by EDF R&D, that aims to characterize and quantify, numerically and experimentally, the uncertainties in the dynamic behaviour of bolted industrial assemblies. Comparative studies of several numerical methods of uncertainty propagation demonstrate the advantage of using the Lack-Of-Knowledge theory. An experimental characterisation of uncertainties in bolted structures is performed on a dynamic test rig and on an industrial assembly. The propagation of many small and large uncertainties through different dynamic models of mechanical assemblies leads to the assessment of the efficiency of the Lack-Of-Knowledge theory and its applicability in an industrial environment.