



HAL
open science

Modélisation et commande des robots : nouvelles approches basées sur les modèles Takagi-Sugeno

Benyamine Allouche

► **To cite this version:**

Benyamine Allouche. Modélisation et commande des robots : nouvelles approches basées sur les modèles Takagi-Sugeno. Automatique / Robotique. Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis, 2016. Français. NNT : 2016VALE0021 . tel-01469234

HAL Id: tel-01469234

<https://theses.hal.science/tel-01469234>

Submitted on 16 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse de doctorat
Pour obtenir le grade de Docteur de l'Université de
VALENCIENNES ET DU HAINAUT-CAMBRÉSIS

Spécialité : **Automatique**

présentée et soutenue le 15 septembre 2016 par

Benyamine ALLOUCHE

(version finale)

École doctorale :

Sciences Pour l'Ingénieur (SPI)

Équipe de recherche, Laboratoire :

Laboratoire d'Automatique, de Mécanique et d'Informatique industrielles et Humaines (LAMIH)

**Modélisation et commande des robots : nouvelles
approches basées sur les modèles Takagi-Sugeno**

JURY

Président du jury :

Pr. Franck PLESTAN (École Centrale de Nantes, IRCCyN)

Rapporteurs :

Pr. Kouider Nacer M'SIRDI (Polytech Marseille, LSIS)

Pr. Ahmed EL HAJJAJI (Université de Picardie Jules Vernes, MIS)

Examineurs :

Dr. Mohamed BOURI (École Polytechnique Fédérale de Lausanne, LSRO)

Dr. Ahmed CHEMORI (LIRMM, CNRS)

Invité :

Mr. Julien CAU (BA Healthcare, BA SYSTEMES)

Encadrants de thèse :

Pr. Laurent VERMEIREN (Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, LAMIH)

Dr. Antoine DEQUIDT (Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, LAMIH)

Pr. Michel DAMBRINE (Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, LAMIH)

Modélisation et commande des robots : nouvelles approches basées sur les modèles Takagi-Sugeno

Résumé :

Chaque année, plus de 5 millions de personnes à travers le monde deviennent hémiparétiques suite à un accident vasculaire cérébral. Ce soudain déficit neurologique conduit bien souvent à une perte partielle ou totale de la station debout et/ou à la perte de la capacité de déambulation. Dans l'optique de proposer de nouvelles solutions d'assistance situées entre le fauteuil roulant et le déambulateur, cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet ANR TECSAN VHIPOD « véhicule individuel de transport en station debout auto-équilibrée pour personnes handicapées avec aide à la verticalisation ». Dans ce contexte, ces travaux de recherche apportent des éléments de réponse à deux problématiques fondamentales du projet : l'assistance au passage assis-debout (PAD) des personnes hémiparétiques et le déplacement à l'aide d'un véhicule auto-équilibré à deux roues. Ces problématiques sont abordées du point de vue de la robotique avec comme question centrale : peut-on utiliser l'approche Takagi-Sugeno (TS) pour la synthèse d'une commande ?

Dans un premier temps, la problématique de mobilité des personnes handicapées a été traitée sur la base d'une solution de type gyropode. Des lois de commande basées sur les approches TS standard et descripteur ont été proposées afin d'étudier la stabilisation des gyropodes dans des situations particulières telles que le déplacement sur un terrain en pente ou le franchissement de petites marches. Les résultats obtenus ont non seulement permis d'aboutir à un concept potentiellement capable de franchir des obstacles, mais ils ont également permis de souligner la principale difficulté liée à l'applicabilité de l'approche TS en raison du conservatisme des conditions LMIs (inégalités matricielles linéaires).

Dans un second temps, un banc d'assistance au PAD à architecture parallèle a été conçu. Ce type de manipulateur constitué de multiples boucles cinématiques présente un modèle dynamique très complexe (habituellement donné sous forme d'équations différentielles ordinaires). L'application de lois de commande basées sur l'approche TS est souvent vouée à l'échec compte tenu du grand nombre de non-linéarités dans le modèle. Afin de remédier à ce problème, une nouvelle approche de modélisation a été proposée. À partir d'un jeu de coordonnées bien particulier, le principe des puissances virtuelles est utilisé pour générer un modèle dynamique sous forme d'équations algébro-différentielles (DAEs). Cette approche permet d'aboutir à un modèle quasi-LPV où les seuls paramètres variants représentent les multiplicateurs de Lagrange issus de la modélisation DAE. Les résultats obtenus ont été validés en simulation sur un robot parallèle à 2 degrés de liberté (ddl) puis sur un robot parallèle à 3 ddl développé pour l'assistance au PAD.

Mots-clés : robot mobile à deux roues, passage assis-debout, manipulateur parallèle, forme descripteur, approche TS, LMI, TS robuste, multiplicateurs de Lagrange, équation algébro-différentielle, coordonnées naturelles.

Modeling and control of robots : new approaches based on the Takagi-Sugeno models

Abstract :

Every year more than 5 million people worldwide become hemiplegic as a direct consequence of stroke. This neurological deficiency, often leads to a partial or a total loss of standing up abilities and /or ambulation skills. In order to propose new supporting solutions lying between the wheelchair and the walker, this thesis comes within the ANR TECSAN project named VHIPOD “self-balanced transporter for disabled persons with sit-to-stand function”. In this context, this research provides some answers for two key issues of the project : the sit-to-stand assistance (STS) of hemiplegic people and their mobility through a two wheeled self-balanced solution. These issues are addressed from a robotic point of view while focusing on a key question : are we able to extend the use of Takagi-Sugeno approach (TS) to the control of complex systems ?

Firstly, the issue of mobility of disabled persons was treated on the basis of a self-balanced solution. Control laws based on the standard and descriptor TS approaches have been proposed for the stabilization of gyropod in particular situations such as moving along a slope or crossing small steps. The results have led to the design a two-wheeled transporter which is potentially able to deal with the steps. On the other hand, these results have also highlighted the main challenge related to the use of TS approach such as the conservatisms of the LMIs constraints (Linear Matrix Inequalities).

In a second time, a test bench for the STS assistance based on parallel kinematic manipulator (PKM) was designed. This kind of manipulator characterized by several closed kinematic chains often presents a complex dynamical model (given as a set of ordinary differential equations, ODEs). The application of control laws based on the TS approach is often doomed to failure given the large number of non-linear terms in the model. To overcome this problem, a new modeling approach was proposed. From a particular set of coordinates, the principle of virtual power was used to generate a dynamical model based on the differential algebraic equations (DAEs). This approach leads to a quasi-LPV model where the only varying parameters are the Lagrange multipliers derived from the constraint equations of the DAE model. The results were validated on simulation through a 2-DOF (degrees of freedom) parallel robot (Biglide) and a 3-DOF manipulator (Triglide) designed for the STS assistance.

Keywords : Two wheeled mobile robot, sit-to-stand, parallel manipulator, descriptor form, TS approach , LMI, TS robust, Lagrange multipliers, differential algebraic equations, natural coordinates.

Remerciements

La réalisation de ce modeste travail est le fruit d'un certain nombre d'événements, de rencontres, de discussions et de relations très fructueuses qui m'ont permis de m'entourer de ressources humaines ainsi que d'acquérir les outils scientifiques nécessaires pour la concrétisation de cette thèse de doctorat. De ce fait, il est très compliqué de recenser le nombre de personnes à qui je dois des remerciements ! Néanmoins, je voudrais exprimer ma gratitude envers un certain nombre de personnes et/ou institutions qui ont contribué directement à l'aboutissement de ce travail.

Ce travail a été réalisé avec le soutien de la Région Hauts-de-France, le Campus International sur la Sécurité et l'Intermodalité des Transports, la Délégation Régionale à la Recherche et à la Technologie, le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, l'Agence Nationale de la Recherche, le Centre National de la Recherche Scientifique et la Communauté Européenne.

Tout d'abord, je remercie ces institutions pour leur soutien, en plus de tous les partenaires du projet ANR TECSAN VHIPOD (Véhicule de transport en station debout individuel auto-équilibré pour personne handicapée avec aide à la verticalisation, réf : ANR-12-TECS-0001) : le Laboratoire de Traitement de l'Information Médicale (La-TIM-INSERM UMR 1101), le Centre de Ressources & d'Innovation Mobilité Handicap (CEREMH), le Centre de Réadaptation Mutualiste et de Réadaptation fonctionnelle de Kerpape (CMRRF de Kerpape), les sociétés BA systèmes et Duguet Conseil.

Je tiens aussi à présenter mes sincères remerciements au pilote du projet VHIPOD, le professeur Olivier Rémy-Néris (PU-PH), à mes deux rapporteurs les professeurs Ahmed El Hajjaji (PU) et Kouider Nacer M'sirdi (PU) et à l'ensemble des personnes constituant le jury de cette thèse. Merci d'avoir pris de votre précieux temps pour lire, juger, et critiquer ce travail.

Mes plus profondes gratitudes vont à mes superviseurs, Messieurs Laurent Vermeiren, Antoine Dequidt et Michel Dambrine pour leur suivi scientifique, leurs disponibilités, leur soutien, leur encadrement régulier, leurs précieux conseils ainsi que leur patience. Je suis particulièrement reconnaissant envers vous pour avoir sélectionné ma candidature pour cette belle aventure et pour avoir partagé avec moi vos expériences de recherche. Ces remerciements ne concernent pas uniquement vos compétences scientifiques car le talent n'est rien sans vision et bonne gestion. Je vous remercie profondément pour vos nombreuses qualités humaines ainsi que de votre précieuse amitié.

J'adresse mes remerciements à Monsieur le Professeur Thierry-Marie Guerra, le directeur du LAMIH pour m'avoir accueilli pendant ces années de thèse. Je tiens à remercier

tous les membres du LAMIH avec qui j'ai partagé des moments très agréables.

Un grand merci aux personnels administratif toujours serviables, aimables, souriants et surtout professionnel pour leur rôle et leur implication dans la bonne gestion de ce travail. Je pense particulièrement à Madame Isabelle Oliveira-Machado, Madame Sylvie Rubens, Madame Maureen Courbez, Madame Melanie Lecq, Madame Marlene Genevieve, Madame Corinne Aureggi et Madame Veronique Landrain.

Je tiens à remercier tous les membres de l'équipe VHIPOD qui ont travaillé dans l'ombre pour la réussite du projet. Je pense particulièrement aux ingénieurs du LAMIH : Messieurs Sébastien Paganelli, Christophe Gillet, Valentin Dubreucq, Benoit Havez et Michael Aguggiaro, à l'équipe BA Healthcare : Madame Pauline Hamon et Monsieur Julien Cau.

J'adresse un grand merci très spécial à tous mes amis « thésards » du LAMIH avec qui j'ai partagé des moments très agréables, systématiques et parfois même difficiles. Pour moi ce chapitre de thèse gravé à jamais dans mes pensées est le plus intéressant car en dépit de nos différences ethniques, culturels et d'autres ..., la science nous a permis d'enrichir nos vies à travers le partage de cet héritage universel. Mes sincères remerciements vont à Molly, Amir, Boussade, Djamel, Younfei, Raton, Victor, Raymundo, Marco, Lydia, Maroi, Souhir, Zeineb, Tariq, Thomas, Rémy, Ciska, Mathias, Viet, Anh-Tu, Van-Anh, Salvator, Chunshi, Ismat, Jeremy, Guillaume etc. Pour ce qui n'ont pas encore soutenu je leur dirais : « accrochez-vous les gars ! La thèse est avant tout un exercice d'endurance ».

Je tiens à exprimer mes profondes gratitude envers Monsieur Said ALLOUCHE et Madame Zohra SEDDI, mes chers parents. Papa, Maman, c'est très difficile de vous remercier car ceci dépasse le cadre de cette thèse, je me contente tout simplement de vous dire : merci pour tout ce que vous avez fait pour moi au cours de ma vie. Merci d'avoir fait de moi ce que je suis aujourd'hui et j'espère que vous aurez une longue vie afin que l'on puisse partager ensemble d'autres réussites. J'ai évidemment une pensée très particulière pour mes frères Mohamed et Raouf, ma sœur Rania, mes cousins Ramy et Badrou, mes oncles Mohamed, Rachid, Ali et Nourdine, mes chers amis Bilel, Rachid, Azzedine, Soumeya, Yasmine, Islem, El-Hadi, Djelloul et Alilou. . . La famille, les amis, je vous dis simplement : merci d'exister dans le jardin de ma vie.

Enfin, je remercie toute personne ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce travail.



*À mes très chers parents : Saïd et Fehra Sources de mes joies et secrets de ma force
À la mémoire de ma grand mère Hadda et mon cousin Hamza : Que leurs âmes
representent en paix*

À ma chère sœur Rania

À mes chers frères Mohamed et Racuf

À mes chers cousins Ramy et Badrou

À ma chère tante Saïda

À mes chers oncles Mohamed, Ali, Rachid et Nourdine

À mes chers amis : Bilal, Rachid, Axxedine, Soumeya, Yasmine, Islem,

El-Hadi, Djelloul, Alilou, Molly et Amir



Table des matières

Table des figures	V
Liste des tableaux	IX
Introduction générale	1
I Du contexte au problème	7
I.1 Contexte	8
I.2 Projet VHIPOD	9
I.3 Le passage assis-debout (PAD)	10
I.3.1 Définition	10
I.3.2 Assistance au PAD	11
I.3.3 Problématique liée à la conception des dispositifs d'assistance au PAD	19
I.4 Conception d'un banc d'assistance au PAD	21
I.4.1 Définition du support d'assistance	21
I.4.2 Définition de l'espace de travail du banc	21
I.4.3 Définition de la topologie cinématique	22
I.5 Mobilité des personnes handicapées	23
I.5.1 Robot auto-équilibré à deux roues	24
I.5.2 Robot mobile à deux roues pour l'assistance des personnes handicapées	26
I.5.3 Problématique liée à la nature du sol	28
I.6 Conclusion	30
II Approche Takagi-Sugeno	31
II.1 Introduction	32
II.2 Systèmes non linéaires	32
II.3 Modèles de Takagi-Sugeno	33
II.3.1 Modèles TS standard	33
II.3.2 Modèles TS descripteur	34
II.3.3 Construction des modèles TS	35
II.4 Aperçu sur les inégalités matricielles linéaires (LMIs)	38
II.4.1 Classes des Problèmes LMIs	39
II.4.2 Propriétés matricielles	40
II.4.3 Quelques notations utiles	41
II.5 Stabilités des modèles TS	41
II.5.1 Stabilité des modèles TS standards	41
II.5.2 Stabilité des modèles TS descripteurs	42

II.6	Synthèse de contrôleur basé TS	43
II.6.1	Stabilisation	43
II.6.2	α -stabilité	46
II.6.3	Poursuite de trajectoire (PDC étendue)	47
II.6.4	Robustesse	48
II.7	Réduction du conservatisme des conditions LMIs pour les modèles TS	49
II.8	Difficultés de l'approche TS en robotique	51
II.9	Conclusion	53
III	Commande des robots auto-équilibrés	55
III.1	Introduction	56
III.2	Commande robuste d'un robot auto-équilibré sur une pente	56
III.2.1	Modèle dynamique	56
III.2.2	Angle d'équilibre naturel	58
III.2.3	Modèle TS descripteur	59
III.2.4	Loi de commande	60
III.2.5	Résultats de simulation	63
III.3	Franchissement d'obstacle à l'aide d'un robot auto-équilibré	65
III.3.1	Modèle dynamique	67
III.3.2	Angle d'équilibre naturel	69
III.3.3	Comparaison entre les modèles TS standard et descripteur	69
III.3.4	Stratégie du franchissement d'obstacle	71
III.3.5	Stabilisation	72
III.4	Conclusion	73
IV	Modélisation des robots manipulateurs	75
IV.1	Introduction	76
IV.2	Cinématique des robots manipulateurs	77
IV.2.1	Modèles géométriques	78
IV.2.2	Les matrices jacobienne	80
IV.2.3	Analyse des singularités	80
IV.3	Modélisations dynamiques des robots	82
IV.3.1	Système de coordonnées	82
IV.3.2	Formalismes de modélisation	86
IV.3.3	MDI d'une chaîne cinématique ouverte	89
IV.3.4	MDI d'une chaîne cinématique fermée	90
IV.4	Modélisation du Biglide	94
IV.4.1	Modèle géométrique	95
IV.4.2	Modèle cinématique	95
IV.4.3	Singularités et espace de travail	95
IV.4.4	Modèle dynamique	95
IV.5	Modélisation du Triglide	97
IV.5.1	Modèle géométrique	98
IV.5.2	Modèle cinématique	98
IV.5.3	Singularités et espace de travail	98
IV.5.4	Modèle dynamique	100
IV.6	Conclusion	103

V	Commande des manipulateurs parallèles : approche PDC basée DAE	105
V.1	Introduction	106
V.2	Modèle DAE	107
V.3	Notion d'indice d'un modèle DAE	108
V.3.1	L'indice de différentiation	108
V.3.2	Réduction d'indice	109
V.3.3	Modèle découplé d'un manipulateur parallèle	110
V.4	Commande PDC d'une classe de modèle DAE	111
V.4.1	Modèle TS d'un modèle DAE	112
V.4.2	Problème de la boucle algébrique	112
V.5	Commande des manipulateurs parallèles	116
V.5.1	Commande PDC étendue du Biglide	118
V.5.2	Commande PDC étendue du Triglide	124
V.6	Conclusion	135
	Conclusion	137
	Bibliographie	143
	Annexes	159
A	Banc d'assistance VHIPOD	159
A.1	Paramètres mécaniques	159
A.2	Cahier des charges	159
A.3	Butées et saturations	160
A.4	Trajectoire du PAD	160
A.5	Instrumentation de la tablette	160
A.6	Architecture de contrôle	160
A.7	Architecture logicielle	163
A.8	Exigence de sécurité matériels et logiciels	164
A.9	Interface homme-machine (IHM)	165
B	Robot auto-équilibré à deux roues	167
B.1	paramètres mécaniques de simulation	167
B.2	Gains de stabilisation du robot auto-équilibré sur une pente	167
B.3	Gains de stabilisation du robot auto-équilibré lors du franchissement d'obstacle	167
B.4	Prototype d'un robot auto-équilibré	168
C	Commande CTC	169
D	Critères de performances quadratiques	169
E	Commande LQ	169
F	Biglide	170
F.1	Réduction d'indice et découplage du Biglide	170
F.2	Modèle ODE du Biglide	170
F.3	Modèle dynamique de simulation	171
F.4	Matrices des sous-modèles TS	172
F.5	Gains des lois de commande	172
F.6	Paramètres de simulation	173
G	Triglide	174
G.1	Réduction d'indice et découplage du Triglide	174
G.2	Matrices des sous-modèles TS	176

G.3	Gains de la loi PDC étendue	177
H	Modèle "barre" d'un solide plan écrit à partir des coordonnées naturelles sous forme DAE	179
H.1	Description du modèle "barre" de solide plan	179
H.2	Forme ODE de référence	180
H.3	Forme DAE écrite à partir de coordonnées naturelles	181

Table des figures

I.1	Accident vasculaire cérébral (AVC)	8
I.2	Problématique du projet VHIPOD	10
I.3	Phases d'exécution d'un PAD	11
I.4	Classification des dispositifs d'aide à la mobilité	12
I.5	Dispositifs d'assistance passive	12
I.6	Le Lokomat (Hokoma) et la version commercialisé du WalkTrainer (Swortec)	13
I.7	Exemples d'exosquelettes	14
I.8	Prototype de l'Université Ritsumeikan	15
I.9	Prototype de l'Université de Ljubljana	15
I.10	Prototype de l'Université de Tokyo	16
I.11	Prototype du KAIST	17
I.12	Robot verticalisateur d'assistance fonctionnelle	17
I.13	Prototype de l'université d'Égypte	18
I.14	Prototype MONIMAD (UPMC)	18
I.15	Smart mobile walker	18
I.16	Robotic walking support	19
I.17	Support d'assistance de type tablette	22
I.18	Cycle d'assistance via une tablette en bois	22
I.19	Reconstruction du mouvement en 3D.	23
I.20	Banc d'assistance au PAD.	23
I.21	Exemples de fauteuil roulant à assistance électrique	24
I.22	Concept de Shilovsky : Gyrocar	25
I.23	Prototypes de l'Inria B2	25
I.24	Synoptique de robot mobile à deux roues	26
I.25	robots mobiles auto-équilibrés à deux roues commercialisés	27
I.26	Prototypes de robots mobiles auto-équilibrés à deux roues	27
I.27	Concepts auto-équilibrés pour personnes handicapées	28
I.28	RM2R sur une pente [Li et al., 2007]	29
I.29	Franchissement d'obstacle	30
II.1	Secteur non linéaire [Tahar, 2009]	36
II.2	Système manivelle-coulisseau avec moteur électrique	38
II.3	Stabilisation PDC du système manivelle-coulisseau	45
II.4	Stabilisation Non-PDC du système manivelle-coulisseau	47
II.5	Commande PDC avec partie intégrale	48
III.1	Vue dans le plan du pendule inversé à 2 roues	57
III.2	Angle d'équilibre instable sur une pente	59
III.3	Stabilisation d'un robot auto-équilibré à deux roues pour $\alpha = 0$	64

III.4	Empreinte du robot sur le sol pendant la stabilisation	64
III.5	Profil de sol	65
III.6	Stabilisation d'un robot auto-équilibré en mouvement pour $\alpha \neq 0$	66
III.7	phases du franchissement d'obstacle	67
III.8	Modèle dynamique en phase de franchissement	68
III.9	Stabilisation quadratique : comparaison entre TS standard et descripteur	70
III.10	TS descripteur : comparaison entre les cas quadratique et non quadratique	71
III.11	franchissement d'obstacle en fonction de la position de la roue	72
III.12	Stabilisation durant la montée de la marche	73
III.13	Évolution de la commande durant la montée de la marche	73
IV.1	Différents types de chaînes cinématiques	77
IV.2	Manipulateur sériel et parallèle	79
IV.3	Illustration d'une singularité sérielle sur un mécanisme parallèle à 2 ddl [Krut, 2003]	81
IV.4	Illustration d'une singularité parallèle sur un mécanisme parallèle à 2 ddl [Krut, 2003]	82
IV.5	Différents types de coordonnées	83
IV.6	Illustration des coordonnées indépendantes sur une chaîne cinématique ou- verte à 3 ddl - coordonnées absolues (a) et relatives (b)	84
IV.7	Illustration des coordonnées relatives sur une chaîne cinématique fermée de type 4 barres - coordonnées dépendantes (a) et indépendantes (b)	85
IV.8	Illustration des coordonnées dépendantes absolues sur (a) une chaîne ciné- matique ouverte à 3 ddl et (b) sur une chaîne cinématique fermée de type 4 barres	86
IV.9	Illustration des coordonnées absolues en nombre restreint sur une chaîne cinématique fermée de type 4 barres	86
IV.10	Illustration des coordonnées naturelles sur une chaîne cinématique fermée de type 4 barres	87
IV.11	Synoptique d'un robot parallèle	91
IV.12	Synoptique du Biglide	94
IV.13	Singularités du Biglide	96
IV.14	Espace de travail du Biglide pour ($a = 0,07m$)	96
IV.15	Synoptique du Triglide	98
IV.16	Singularités du Triglide	99
IV.17	Espace de travail du Triglide	99
IV.18	Représentation des caractéristiques inertielles d'une barre non homogène	100
IV.19	Assemblage de deux solides	101
IV.20	Modèle du Triglide en 5 points	101
V.1	Système deux masses	108
V.2	Système deux masses découplé avec multiplicateurs de Lagrange	110
V.3	Réponse du système à deux masses : S1 commande dynamique, S2 com- mande par échantillonnage partiel, S3 solution analytique exacte	115
V.4	Evolution de la commande et de la force interne : S1 commande dynamique, S2 commande par échantillonnage partiel, S3 solution analytique exacte	116
V.5	Évolution de la force interne durant le régime transitoire	116
V.6	Résultats de simulation dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 0kg$	121
V.7	(a) Trajectoire de l'effecteur et (b) Erreur radiale pour $\Delta m = 0kg$	121

V.8	Résultats de simulation dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 0,816kg$	122
V.9	(a) Trajectoire de l'effecteur et (b) Erreur radiale pour $\Delta m = 0,816kg$	122
V.10	Résultats de simulation dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 1,632kg$	123
V.11	(a) Trajectoire de l'effecteur et (b) Erreur radiale pour $\Delta m = 1,632kg$	123
V.12	Modèle SimMechanis tridimensionnel du banc d'assistance VHIPOD	125
V.13	Cycle d'exécution d'un PAD	126
V.14	Schéma SimMechanis du banc d'assistance VHIPOD	127
V.15	Résultats de simulation dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 0kg$	128
V.16	Trajectoires dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 0kg$	128
V.17	Évolution de la commande, des tensions spécifiques et des prémisses pour $\Delta m = 0kg$	129
V.18	Écart de poursuite pour $\Delta m = 0kg$	129
V.19	Résultats de simulation dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 80kg$	130
V.20	Trajectoires dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 80kg$	130
V.21	Évolution de la commande, des tensions spécifiques et des prémisses pour $\Delta m = 80kg$	131
V.22	Écart de poursuite pour $\Delta m = 80kg$	131
V.23	Banc VHIPOD en configuration singulière parallèle	132
V.24	Résultats de simulation dans l'espace opérationnel lors du franchissement de la singularité parallèle	133
V.25	Trajectoires dans l'espace opérationnel lors du franchissement de la singularité parallèle	133
V.26	Évolution de la commande, des tensions spécifiques et des prémisses lors du franchissement de la singularité parallèle	134
V.27	Écart de poursuite lors du franchissement de la singularité parallèle	134
A.1	Trajectoires de la tablette dans le plan sagittal	160
A.2	Instrumentation de la tablette	161
A.3	Topologie du banc d'assistance au PAD.	162
A.4	Aperçu sur les différents modules de TwinCAT [automation company, 2016].	163
A.5	Machine d'état d'un axe	164
A.6	Machine d'état du banc d'assistance au PAD	165
A.7	Interface Homme-Machine du Banc.	166
B.1	Analyse des contraintes et des déplacements en statique	168
B.2	Modèle CAO d'un prototype auto-équilibré	168
H.1	Modèle "barre" d'un solide en mouvement dans le plan	179

Liste des tableaux

I.1	Tableau récapitulatif des différents concepts d'assistance au PAD	20
V.1	Critères ISV et IAE pour les différentes simulations.	120
A.1	Banc d'assistance VHIPOD : Paramètres mécaniques	159
A.2	Banc d'assistance VHIPOD : Butées et saturations	160
B.1	paramètres mécaniques d'un robot auto-équilibré	167
F.1	Biglide : Paramètres de simulation	173

Introduction générale

Les travaux de recherche présentés dans ce mémoire portent sur le développement des outils de modélisation et l'exploration de l'applicabilité de l'approche Takagi-Sugeno (TS) pour la commande des systèmes robotiques complexes. Ces travaux s'inscrivent dans le cadre du projet ANR TECSAN 2012 intitulé VHIPOD : véhicule individuel de transport en station debout auto-équilibré pour personne handicapée avec aide à la verticalisation. Ce projet vise à développer des systèmes robotiques pour l'assistance aux personnes souffrant d'un handicap.

Chaque année, plus de 5 millions de personnes à travers le monde deviennent hémiplegiques suite à un accident vasculaire cérébral (AVC). Cette attaque cérébrale conduit bien souvent à une perte partielle ou totale de la station debout et/ou la perte de la capacité de déambulation.

Assister des personnes souffrant de déficience motrice pour leur redonner une certaine autonomie et un confort de vie nécessite dans un premier temps de comprendre au mieux les tenants et aboutissants de leur pathologie afin de pouvoir proposer des solutions adaptées à leur situation. Pour cela, la problématique d'assistance des personnes hémiplegiques a été décomposée en deux parties : l'assistance robotisée au passage assis debout (PAD) et la mobilité via une solution robotisée auto-équilibrée à deux roues.

Dans cette optique et tenant compte des contraintes d'analyse biomécanique, un banc d'essai à architecture cinématique parallèle a été conçu pour l'analyse de l'assistance au PAD chez les personnes hémiplegiques. Développer une loi de commande non linéaire basée sur l'approche TS pour ce type d'architecture est un réel challenge scientifique. La présence de plusieurs boucles cinématiques dans le système conduit souvent à un modèle dynamique très complexe (comportant un grand nombre de non-linéarités) ; il en découle un modèle TS avec un très grand nombre de règles floues. Avec un tel modèle polytopique, le problème de synthèse de commande mis sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMIs) aboutit souvent à des conditions de stabilité très conservatives.

Afin de générer un modèle TS utilisable pour la commande de robots parallèles, une nouvelle approche de modélisation a été proposée. Celle-ci consiste à utiliser le principe des puissances virtuelles afin de générer un modèle algèbro-différentiel (DAE) comportant un découpage du robot en plusieurs sous-systèmes. Notre approche permet de réduire considérablement le nombre de règles du modèle TS et par conséquent le conservatisme des conditions LMIs. Ce travail a été validé en simulation sur un robot parallèle à 2 degrés de liberté puis sur un robot parallèle à 3 degrés de liberté développé pour l'assistance au PAD. Concernant la problématique de mobilité des personnes hémiplegiques, des lois de commande basées sur l'approche TS standard et descripteur ont été proposées afin

d'étudier la stabilisation du véhicule mobile à deux roues dans des contextes particuliers relatifs au déplacement sur une pente et au franchissement de petite marche.

Le mémoire de thèse se décompose en cinq parties.

Du contexte au problème (Chapitre I) : Ce chapitre décrit dans un premier temps le contexte médico-social dans lequel s'inscrit ce travail. Dans un second temps, ce chapitre présente un état de l'art sur les dispositifs d'assistance au passage assis-debout. Différents systèmes sont analysés selon leur architecture cinématique, le nombre de degrés de liberté, les capteurs, les lois de commande ainsi que la stratégie d'assistance. Par la suite, le banc d'assistance au passage assis-debout réalisé au cours de cette thèse est présenté. Enfin, la dernière partie concerne l'assistance à la mobilité des personnes handicapées. Un bref état de l'art sur les robots auto-équilibrés est présenté afin de faire apparaître les différents verrous scientifiques liés à l'extension et la certification de ce type de solutions pour l'usage des personnes à mobilité réduite.

Approche Takagi-Sugeno (Chapitre II) : le but de ce chapitre est de rappeler brièvement les grandes lignes de l'approche Takagi-Sugeno (TS) dans le cas continu. Dans un premier temps, la procédure de construction d'un modèle TS, sous forme standard ou descripteur, d'un système non linéaire est rapidement décrite. Ensuite, certains travaux permettant d'étudier la stabilité, la stabilisation et la robustesse d'un tel modèle sont présentés. Les conditions proposées obtenues à partir de la seconde méthode de Lyapunov sont exprimées en termes d'inégalités matricielles linéaires (anglais Linear Matrix Inequalities). La fin de ce chapitre concerne les principales difficultés d'utilisation de l'approche pour des applications en robotique.

Commande des robots auto-équilibrés (Chapitre III) : Ce chapitre vise à étudier la faisabilité d'un dispositif de transport de personne handicapée basé sur le principe de l'équilibre d'un pendule inversé et du maintien de l'équilibre sagittal par l'asservissement de la translation de la base mobile. Le but de la commande basée sur l'approche TS est d'assurer à la fois la stabilisation et le suivi de trajectoire définie par le conducteur. Le mouvement du passager devient dans ce cas une perturbation à rejeter. Deux problématiques sont à résoudre : lors d'un déplacement sur une pente et lors d'un franchissement d'obstacle (bordure de trottoir par exemple).

Modélisation des robots manipulateurs (Chapitre IV) :
Ce chapitre vise à analyser les différentes méthodologies de modélisation dynamique des manipulateurs parallèles. L'objectif est de pointer du doigt les différentes sources de complexité liées aux modèles, que ce soit par rapport au choix du jeu de coordonnées ou du formalisme de modélisation. Une méthodologie générale de modélisation est proposée à partir du principe des puissances virtuelles pour aboutir à un modèle sous forme algébro-différentielle (DAE). L'intérêt majeur de notre nouvelle approche est sa souplesse quant aux choix du jeu de coordonnées ou la manipulation des dynamiques du système. Cette méthodologie est appliquée à un manipulateur parallèle à 2 ddl avec un jeu de coordonnées couramment utilisé en robotique. Dans la dernière partie, il sera montré que l'introduction des coordonnées naturelles (utilisées dans le domaine de la simulation multi-corps) pour un manipulateur parallèle à 3 ddl permettra de réduire d'avantage la complexité du modèle.

Commande des manipulateurs parallèles : approche PDC basée DAE (Chapitre V) : Ce chapitre propose une nouvelle méthode de synthèse de commande des modèles DAEs à partir de leurs écritures sous la forme TS. Une brève description de ces modèles est présentée avec les différentes notions nécessaires pour la compréhension du manuscrit. Un exemple linéaire très simple est présenté afin de comprendre la philosophie de l'approche. Les modèles DAEs d'indice 3 développés dans le chapitre précédent sont repris et découplés via la méthode de réduction d'indice. Des solutions seront proposées pour résoudre le problème de la boucle algébrique liée à la nature singulière du modèle. Une application pour la commande d'un manipulateur parallèle à 2 ddl (Biglide) est présentée afin de justifier l'approche dans le cas général et faire des comparaisons avec le modèle ODE. Enfin, à partir d'un modèle DAE décrit avec un jeu de coordonnées naturelles et mis sous forme TS, une application pour la commande du banc d'assistance au PAD est proposée.

Motivation

Initialement, les travaux présentés dans ce mémoire ont été motivés par un thème de recherche relatif à l'assistance robotisée des personnes handicapées dans le cadre du projet ANR VHIPOD. Par la suite, les pistes de recherche abordées ont été définies au fur et à mesure de l'état d'avancement du projet afin d'apporter des éléments de réponse d'un point de vue de l'automatique.

Contribution

La contribution de notre travail est d'apporter des éléments de réponse pour la commande des systèmes robotiques complexes. Les problématiques sont abordées du point de vue de la robotique puis situées dans le contexte de l'automatique afin de mettre en évidence les complexités issues de l'utilisation de différents jeux de coordonnées et l'application de différents formalismes de modélisation pour la description des systèmes. Une approche s'articulant à la fois entre la modélisation et la commande a été proposée. Elle permet de réduire la complexité des modèles dynamiques via leur écriture sous forme algèbro-différentielle. Ensuite l'exploitation de ces modèles pour la commande a été effectuée à travers l'approche TS. Cette approche a permis le remplacement des variables algébriques par leurs bornes de variations en se basant sur l'aspect fini des efforts internes compte tenu des limites mécaniques (limites élastiques et limites à la rupture des structures mécaniques).

Publications personnelles

Revue

1. Allouche, B., Dequidt, A., Vermeiren, L., & Dambrine, M. Modeling and PDC fuzzy control of planar parallel robot : A differential algebraic equations approach. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. SagePub. 2016. DOI : 10.1177/1729881416687112.

Conférences internationales avec comité de lecture

1. Dang, Q. V., Allouche, B., Dequidt, A., Vermeiren, L., & Dubreucq, V. (2015, March). Real-time control of a force feedback haptic interface via EtherCAT field-bus. In *Industrial Technology (ICIT), 2015 IEEE International Conference on* (pp. 441-446).
2. Dang, Q. V., Allouche, B., Vermeiren, L., Dequidt, A., & Dambrine, M. (2014, December). Design and implementation of a robust fuzzy controller for a rotary inverted pendulum using the Takagi-Sugeno descriptor representation. In *Computational Intelligence in Control and Automation (CICA), 2014 IEEE Symposium on* (pp. 1-6).
3. Allouche, B., Vermeiren, L., Dequidt, A., & Dambrine, M. (2014, October). Step-crossing control of two-wheeled transporter based on Takagi-Sugeno approach : Comparison between state and descriptor form. In *Control Applications (CCA), 2014 IEEE Conference on* (pp. 1324-1329). IEEE.
4. Allouche, B., Vermeiren, L., Dequidt, A., & Dambrine, M. (2014, October). Step-crossing feasibility of two-wheeled transporter : Analysis based on Takagi-Sugeno descriptor approach. In *Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2014 IEEE 17th International Conference on* (pp. 2675-2680).
5. Litim, M., Allouche, B., Omari, A., Dequidt, A., & Vermeiren, L. (2014, September). Sliding mode control of biglide planar parallel manipulator. In *Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), 2014 11th International Conference on* (Vol. 2, pp. 303-310).
6. Allouche, B., Vermeiren, L., Dequidt, A., & Dambrine, M. (2013, October). Robust control of two-wheeled self-balanced transporter on sloping ground : A Takagi-Sugeno descriptor approach. In *Systems and Control (ICSC), 2013 3rd International Conference on* (pp. 372-377).
7. Estrada, A., Plestan, F., & Allouche, B. (2013, July). An adaptive version of a second order sliding mode output feedback controller. In *Proceedings of the 2013 European Control Conference* (pp. 3228-3233).

Conférences nationales avec comité de lecture

1. Nguyen T.V.A., B. Allouche B., Vermeiren L., Dequidt A., Dang Q.V. Cung Le. (2016). Commande temps-réel d'un pendule inversé : Approche TS descripteur robuste. LFA 2016, La Rochelle, Novembre. (Soumis).
2. Allouche B., Vermeiren L., Dequidt A., Dambrine M. (2014, octobre). Franchissement d'obstacle d'un gyropode : comparaison entre deux approches TS. 23ème Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Application (LFA 2014), Cargèse, Corse.
3. Allouche B., Vermeiren L., Dequidt A., Dambrine M. (2013, octobre). Modélisation TS sous forme descripteur et commande d'un pendule inversé à deux roues. 22ème Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Application (LFA 2013), Reims.

Séminaires et autres communications

1. Allouche B., Dequidt A., Vermeiren L., Rémy-néris O., Hamon P. (2015, novembre). Conception d'un dispositif d'assistance au passage assis-debout pour personnes hémiplégiques. GT Systèmes mécatroniques, Université de Nantes.
2. Allouche, B., Vermeiren, L., Dequidt, A., & Dambrine, M. (2013, décembre). Commande robuste d'un véhicule de transport auto-équilibré sur un terrain en pente : approche descripteur Takagi-Sugeno. 2ème Journée Régionale des Doctorants en Automatique, Université de Valenciennes.

Chapitre I

Du contexte au problème

« En essayant continuellement on finit par réussir. Donc : plus ça rate, plus on a de chance que ça marche. »

Jacques Rouxel

Sommaire

I.1	Contexte	8
I.2	Projet VHIPOD	9
I.3	Le passage assis-debout (PAD)	10
I.3.1	Définition	10
I.3.2	Assistance au PAD	11
I.3.3	Problématique liée à la conception des dispositifs d'assistance au PAD	19
I.4	Conception d'un banc d'assistance au PAD	21
I.4.1	Définition du support d'assistance	21
I.4.2	Définition de l'espace de travail du banc	21
I.4.3	Définition de la topologie cinématique	22
I.5	Mobilité des personnes handicapées	23
I.5.1	Robot auto-équilibré à deux roues	24
I.5.2	Robot mobile à deux roues pour l'assistance des personnes handicapées	26
I.5.3	Problématique liée à la nature du sol	28
I.6	Conclusion	30

I.1 Contexte

De nos jours, nous vivons dans une société où la dépendance est devenue une question fondamentale posée pratiquement dans chaque foyer. D'après un rapport des Nations Unies, 15% de la population mondiale vivent avec un handicap [Nation, 2016]. En France, cet enjeu est associé au 5ème risque [wikipedia, 2015]; il est lié à plusieurs phénomènes simultanés et conjoints tels que le vieillissement de la population, l'augmentation de l'espérance de vie, l'obésité, l'augmentation de la fréquence des maladies handicapantes, etc. La classification internationale du fonctionnement humain, du handicap et de la santé définit la dépendance comme la résultante d'une interaction entre une déficience ou trouble de santé cause d'incapacité et de limitation d'activité avec un environnement au sens large [Guichard and Huteau, 2007]. En France, la première cause de handicap est l'accident vasculaire cérébral (AVC) : c'est un déficit neurologique soudain d'origine vasculaire causé par un infarctus ou une hémorragie au niveau du cerveau (Figure.I.1) [Emmerich and Blétry, 1998].

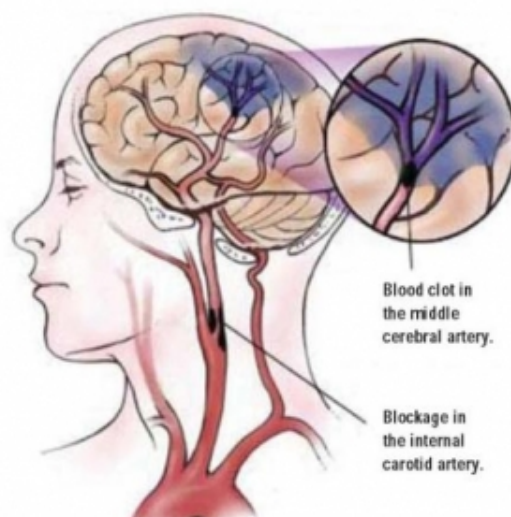


FIGURE I.1: Accident vasculaire cérébral (AVC)

Chaque année, 150 000 personnes sont touchées par un AVC, 20% des personnes atteintes meurent dans le mois qui suit, ce qui rend cette attaque deux fois plus dangereuse que les accidents de la circulation. 75% des survivants gardent des séquelles définitives et 33% deviennent handicapés [GRPA, 2011]. Le handicap lié à l'AVC est connu sous le nom de l'hémiplégie, c'est la paralysie d'un ou plusieurs membres d'un seul côté du corps. Elle peut être totale, et dans ce cas, le membre supérieur, le membre inférieur, le tronc et la moitié de la face sont touchés. L'hémiplégie peut engendrer la perte de la marche, des mouvements d'un bras, coude ou épaule, la perte de la parole et de la compréhension.

La récupération des fonctionnalités dépend pour beaucoup de l'âge du patient (plasticité cérébrale) et du degré d'atteinte au niveau du cerveau [Patten et al., 2004]. Souvent la récupération est très difficile pour les personnes adultes et, en absence de solution définitive et adéquate, la station assise devient permanente pour les personnes hémiplégiques. D'un point de vue médical, cette situation n'est pas sans conséquences puisque le fait de ne pas solliciter son corps pour les activités quotidiennes peut aggraver l'état du patient

directement (déminéralisation osseuse, escarres, etc.) ou indirectement (fracture, troubles neurologiques, isolement social, etc.). Maintenir la station debout et retrouver des capacités de déambulation est donc un objectif important pour la santé. C'est aussi une attente, un rêve pour les personnes qui en souffrent et qui le vivent comme un interminable deuil poussant parfois les patients à tenter tous les moyens possibles et à prendre des risques inconsidérés dans l'espoir de remarcher.

I.2 Projet VHIPOD

Afin d'améliorer le quotidien des personnes handicapées, plusieurs projets de recherche visent à développer des dispositifs d'assistance pour le déplacement et la verticalisation. En ce qui concerne le déplacement, on peut retrouver des dispositifs d'assistance de type déambulateur robotisé, le but est d'étendre la capacité de la marche avec un système de soutien au déplacement. Malheureusement, ce type d'assistance n'est pas envisageable pour des personnes hémiplegiques (généralement préconisé pour des personnes âgées souffrant d'une diminution de leur capacité motrice) à cause de l'asymétrie du handicap sur le plan sagittal ce qui rend les patients incapables de saisir la poignée du côté paralysé et même s'ils y arrivent, ils sont incapables d'exécuter des mouvements de marche symétriques et réguliers. Ce premier point souligne l'importance d'une assistance au déplacement complètement motorisée (base mobile). Le deuxième volet de recherche traite la question de la verticalisation, plusieurs types de verticalisateurs existent sur le marché ou dans les laboratoires de recherche mais il n'existe aucun verticalisateur conçu spécifiquement pour les besoins des personnes hémiplegiques afin de les assister à se mettre debout de la façon la plus fidèle au mouvement naturel.

Le projet VHIPOD a pour objectif de concevoir un véhicule électrique individuel de transport en station debout pour personne handicapée avec aide à la verticalisation. Entre le déambulateur et le fauteuil roulant, ce dispositif sera doté d'une fonction d'assistance au passage assis-debout. Pouvant être utilisé à partir de n'importe quelle surface d'assise habituelle, le véhicule permettra de circuler à l'intérieur ou l'extérieur et de se déplacer en position verticale. Le projet est financé par l'agence nationale de recherche (ANR) dans son programme Tecsan « technologies pour la santé et l'autonomie ». Il réunit des partenaires cliniques (le CEREMH et le centre de rééducation de Kerpape) et académiques (université de Valenciennes, CRHU de Brest) autour de la société BA Systèmes spécialisée dans la conception de plates-formes robotisées et la société ADM concept spécialisée dans le design et la réalisation de projets avec l'industrie automobile. Du point de vue de la robotique, deux problématiques fondamentales font l'objet de ce projet :

- Quelle est la meilleure façon pour concevoir une base mobile permettant de répondre aux attentes du projet (déplacement autonome à l'intérieur / extérieur) ? Peut-on envisager d'étendre l'utilisation des méthodes avancées de commande à des applications robotique à haut risque (interaction robot/ personne handicapée) ?
- Quels sont les paramètres déterminants lors de l'exécution d'un passage assis-debout ? Comment assister une personne hémiplegique afin d'exécuter un passage assis-debout proche du mouvement sain ? Quels sont les degrés de liberté impliqués dans le mouvement et comment définir la forme de l'interface robotique d'assistance ?

Cette thèse a pour objectif de répondre aux questions posées ci-dessus. Le choix de la base mobile s'est porté sur un gyropode. Cela est dû aux multitudes avantages que présentent ce type de système, tels que le faible encombrement et la manœuvrabilité dans les espaces étroits. Deux parties essentielles constituent ce travail (Figure.I.2) : Stabilisation et commande des gyropodes, le but est d'étudier la faisabilité dans différents contextes afin de pouvoir étendre l'utilisation du gyropode au transport des personnes handicapées. La deuxième partie porte sur la conception et commande d'une interface robotique pour une étude biomécanique du passage assis-debout chez les personnes hémiplegiques.

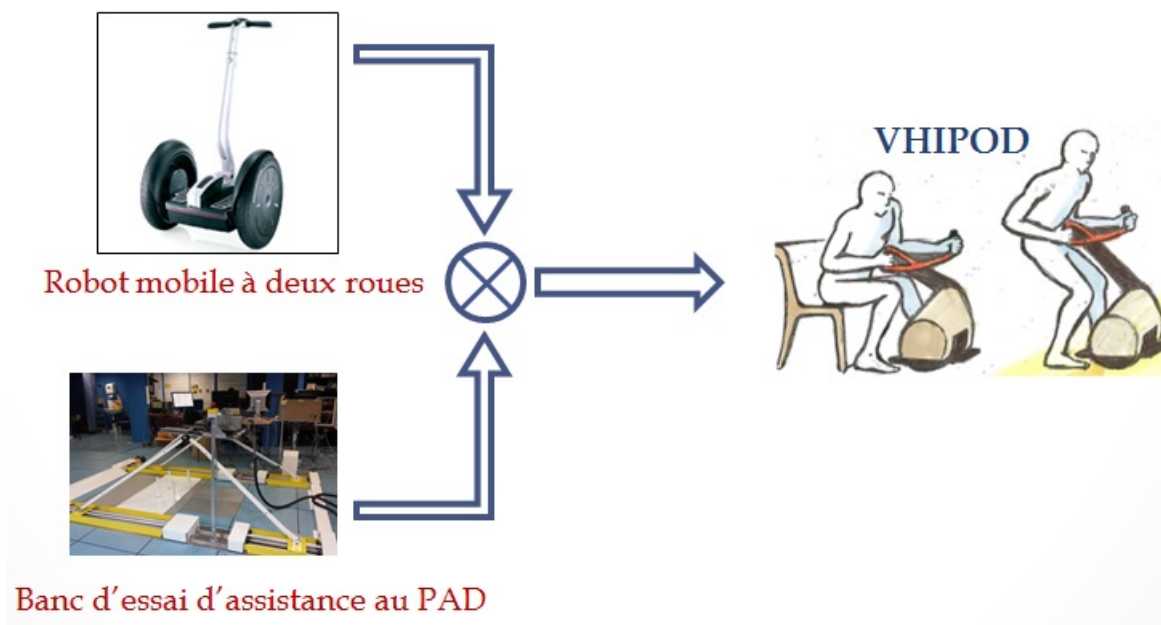


FIGURE I.2: Problématique du projet VHIPOD

I.3 Le passage assis-debout (PAD)

I.3.1 Définition

Le passage assis-debout (PAD) ou debout-assis (PDA) est l'une des aptitudes les plus importantes, acquise durant l'enfance. Ce mouvement paraissant simple est en réalité une action très complexe. Il demeure l'activité quotidienne la plus importante et l'initiateur de tout autre mouvement comme la marche ou la course. Selon les objectifs et les contextes, cette action peut avoir plusieurs définitions. [Roebroek et al., 1994] définit le PAD comme le déplacement du centre de gravité (CG) du corps de la position assise à la position debout sans perte d'équilibre. [Vander Linden et al., 1994] le définit comme un mouvement de transition entre une posture stable (assise) à une autre moins stable (debout). [Tully et al., 2005] le définit comme une tâche nécessitant la coordination et l'interaction de chaque segment du corps pour déplacer le CG horizontalement, puis verticalement, tout en le conservant à l'intérieur de la surface du support (les pieds). [Cachia, 2008] définit le PAD comme la transition d'une surface de support relativement grande (assis) à une surface de support beaucoup plus petite (debout). Malgré les multiples définitions du PAD, l'objectif d'un point de vue biomécanique reste toujours le même : être en mesure de déplacer le

corps d'une position assise à une position debout tout en assurant la stabilité (Figure.I.3).

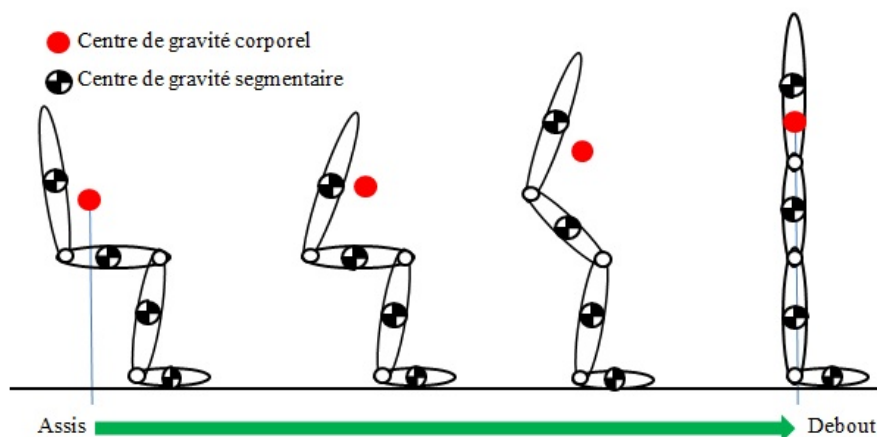


FIGURE I.3: Phases d'exécution d'un PAD

De nombreux facteurs influencent les performances d'un PAD tels que l'environnement [Burdett et al., 1985, Mourey et al., 2000, Roy et al., 2006], les caractéristiques du sujet (âge, pathologie) [Demura and Yamada, 2007, Ganea et al., 2011, Lomaglio and Eng, 2005, Mazzà et al., 2006], les stratégies (vitesse du PAD, position des membres supérieurs et inférieurs, etc.) [Roy et al., 2006, Roy et al., 2007, Cheng et al., 2001] et les objectifs (assistance, exercices de réhabilitation et analyse du mouvement) [Chugo et al., 2012, Saadé et al., 2014, Burnfield et al., 2012]. La large littérature sur le PAD témoigne de la complexité de cette tâche, elle est considérée comme l'une des activités quotidiennes les plus exigeantes mécaniquement [Médéric, 2006]. Le moment articulaire minimal requis (Tronc + genoux) est de l'ordre de 1,53 Nm/Kg [Yoshioka et al., 2007] et le moment minimal requis par chaque articulation est de 0,5 Nm/Kg [Chugo et al., 2012]. La force totale requise pour le mouvement est comprise dans l'intervalle de 35,3 à 49,2 N/Kg [Yoshioka et al., 2012]. Malheureusement, les personnes souffrant d'une hémiplegie ne sont pas toujours en mesure d'exécuter le PAD sans assistance.

I.3.2 Assistance au PAD

Le développement spectaculaire des outils informatiques et des techniques de conception a ouvert la voie aux chercheurs afin de développer de nombreux dispositifs d'assistance au PAD. Néanmoins, à cause de la législation stricte en matière de sécurité des patients, la plupart de ces dispositifs et plus particulièrement ceux qui sont motorisés (assistance active) souffrent encore d'un poids et d'un encombrement important. Pour certains concepts, leur utilisation est strictement restreinte au cadre hospitalier sous conditions particulières [Salah et al., 2013]. C'est pour cela que beaucoup de patients préfèrent les moyens d'assistance conventionnels (assistance passive) pour leur simplicité d'utilisation. Cette partie montre différents types de moyens d'assistance. On peut les classer en deux grandes classes suivant leur nature active ou passive (Figure.I.4).

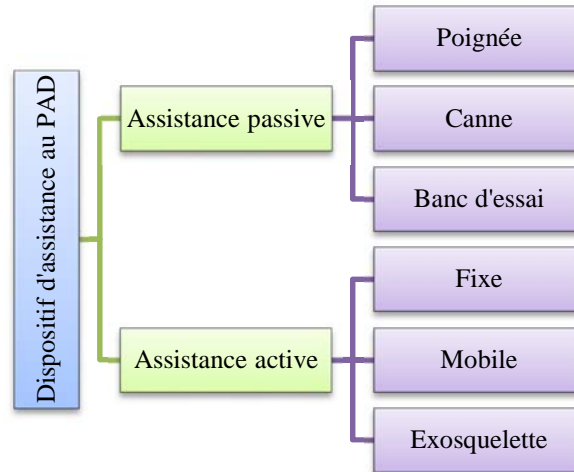


FIGURE I.4: Classification des dispositifs d'aide à la mobilité

I.3.2.1 Dispositifs d'assistance passive

Ce sont les plus utilisés dans le domaine médical, ils ne comprennent pas d'actionneur (Figure.I.5). Des exemples bien connus sont la canne, la barre d'appui fixe et le déambulateur qui constituent des aides au PAD et à la marche permettant d'assurer la stabilité via des appuis supplémentaires. L'utilisateur décide de manière autonome l'amplitude de la force ou du couple à appliquer. Les personnes handicapées sont généralement encouragées par le personnel médical à utiliser les dispositifs d'assistance passive afin de renforcer naturellement les capacités motrices restantes.



FIGURE I.5: Dispositifs d'assistance passive

De nombreuses études ont montré l'efficacité de l'assistance passive. Par exemple, selon le degré d'handicap, l'utilisation d'une aide de type poignée-barre diminue les moments articulaires du genou de 18 à 50% [Jeyasurya et al., 2013, Bahrami et al., 2000, O'Meara and Smith, 2006]. L'utilisation d'une canne réduit les forces du genou et des hanches de 20 à 40% [Anglin and Wyss, 2000].

I.3.2.2 Dispositifs d'assistance active

Les dispositifs d'assistance active sont généralement conçus sous forme d'interface ou de bras robotique interactif. La littérature dans ce domaine est très abondante, nous

allons nous contenter de présenter quelques exemples parmi les plus connus afin de montrer leur base conceptuelle et leur efficacité pour l'analyse du PAD chez les personnes hémiplegiques.

a) Exosquelettes

Ce sont des bras robotiques sériels à enfiler sur les membres du patient, ils contiennent autant de degrés de liberté que d'articulations à contrôler (Figure.I.6). Ils permettent d'augmenter la vitesse, la force et l'endurance de l'opérateur [Matthias, 2007]. Parmi les principaux objectifs de développement des exosquelettes, on trouve la réhabilitation, l'étude de la physiologie humaine et des orthèses actives [Colombo et al., 2000, Bouri et al., 2006, Bouri et al., 2014]. Toutefois, on trouve aussi de nombreux autres prototypes pour une utilisation personnelle (Figure.I.7) [Kong and Jeon, 2005, Tsukahara et al., 2009]. D'un point de vue conceptuel, les inconvénients majeurs des exosquelettes sont les mêmes que ceux rencontrés en robotique sérielle tels que le faible rapport poids/puissance ainsi que la rigidité du système. De plus, les exosquelettes ne sont pas des dispositifs personnalisables, la conception est faite sur mesure.



(a) Lokomat



(b) WalkTrainer

FIGURE I.6: Le Lokomat (Hokoma) et la version commercialisé du WalkTrainer (Swortec)

b) Dispositifs d'assistance fixes

Ils servent de moyens d'observations et de collectes de données. Pour le personnel médical, l'analyse des données enregistrées sur un grand nombre de patients devrait fournir une évaluation sur la déficience motrice ainsi que sur la pertinence de la stratégie d'assistance. Généralement ces tests (cliniques/biomécaniques) servent de moyen d'argumentation pour la mise en place des protocoles de rééducation fonctionnelle. Ils permettent aussi d'ouvrir des perspectives pour la mise en place des dispositifs d'assistance à usage personnel.



FIGURE I.7: Exemples d'exosquelettes

Parmi les dispositifs fixes, on peut citer le prototype de l'université de Ritsumeikan (Japon) [Nagai et al., 2003]. C'est une plate-forme sur laquelle l'utilisateur peut s'appuyer pour se mettre debout, s'asseoir ou se déplacer dans le périmètre de la chambre. Le dispositif en soi est un robot parallèle à câbles (Figure I.8). Ce dispositif semble être adapté pour des populations hémiplegiques ; par contre, son utilisation pour des analyses biomécaniques est très contraignante à cause du volume occupé par le portique rendant très difficile l'installation des caméras de capture du mouvement dans la salle.

Un autre dispositif fixe est le prototype de l'Université de Ljubljana (Slovénie) [Kamnik and Bajd, 2003]. Ce robot d'assistance est destiné à la rééducation du PAD pour des patients paraplégiques partiels. Le mécanisme du robot est constitué d'un bras sériel à 3 ddl (degré de liberté) asservi en force/position. Il est instrumenté via des capteurs électromyographiques permettant ainsi la mesure du flux nerveux résiduel. L'utilisateur s'appuie sur des barres parallèles, s'assoit sur un siège (effecteur) reposant sur une structure mé-

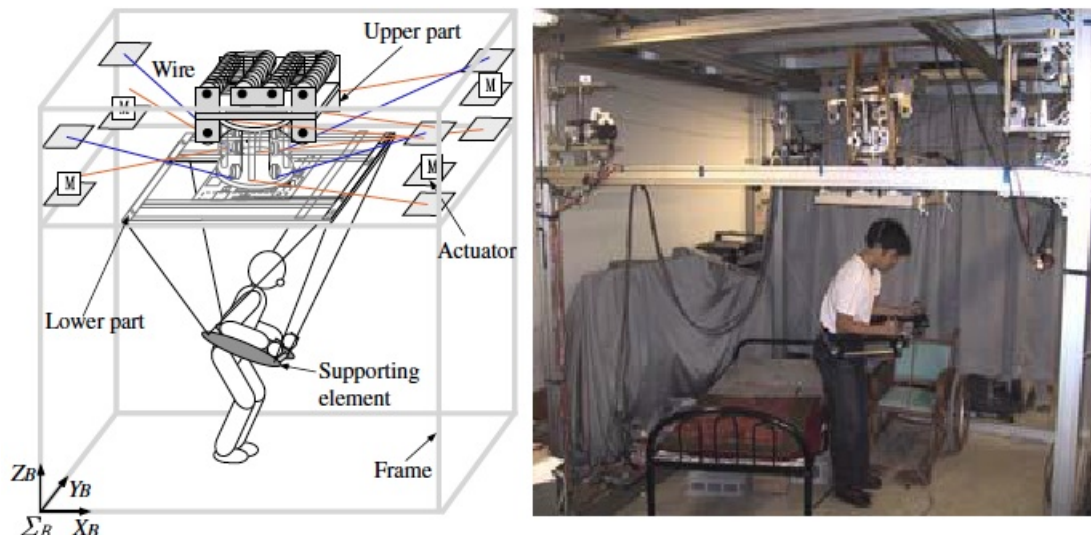


FIGURE I.8: Prototype de l'Université Ritsumeikan

canique semblable à une demi-balançoire (Figure.I.9). Néanmoins, ce dispositif n'est pas du tout adapté pour des personnes hémiplegiques car le patient utilise les mains comme points d'appuis pour effectuer le PAD.

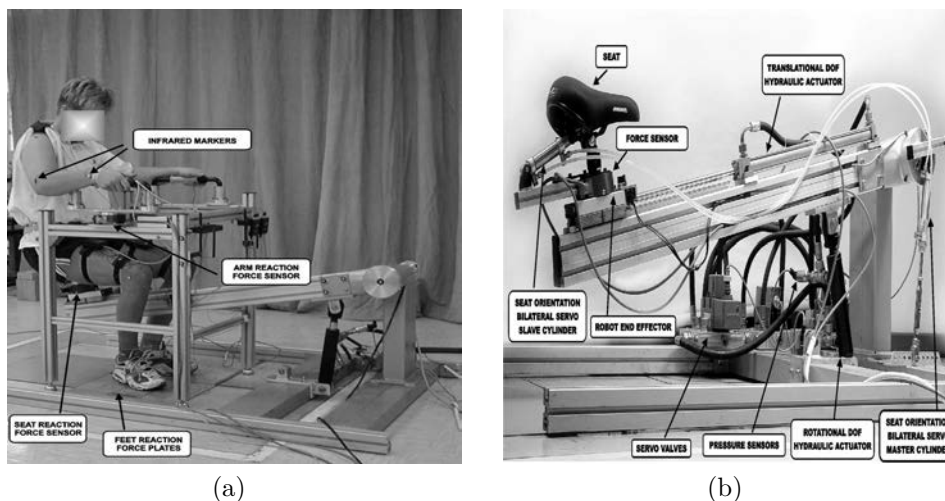


FIGURE I.9: Prototype de l'Université de Ljubljana

Un autre dispositif fixe est le prototype de l'université de Tokyo [Tomuro et al., 2009], c'est un robot plan à 2 ddl permettant de déplacer une poignée dans le plan sagittal (Figure.I.10). Il est équipé d'un capteur d'effort à 6 axes pour l'analyse biomécanique du mouvement. Le robot est commandé uniquement en position. Pour effectuer le PAD, le patient saisit la poignée puis se déplace dans le plan sagittal en suivant une trajectoire prédéfinie.



FIGURE I.10: Prototype de l'Université de Tokyo

c) Dispositifs d'assistance mobiles

Dans la classe des dispositifs mobiles permettant d'effectuer le PAD et la déambulation, on peut citer le prototype du KAIST (Institut de sciences et de technologie avancée de Corée) [Lee et al., 2002]. C'est un manipulateur robotisé à 1 ddl sur une base mobile équipée de capteurs de proximité (sonars) pour la navigation et l'évitement d'obstacles (Figure.I.11). La liaison entre le système et l'utilisateur se situe sous les aisselles du patient. Un capteur d'efforts permet de mesurer l'interaction entre l'utilisateur et le robot. Le système de commande est basé sur un algorithme de réseau de neurones permettant de compenser l'interaction dynamique, les dynamiques non modélisées, ainsi que les perturbations induites par le patient sur le système. Ce type d'assistance n'est pas adapté pour des personnes hémiplegiques. Le contact patient-robot peut être très douloureux et n'est pas toujours bien supporté [Saint-Bauzel, 2007]. De plus, les patients hémiplegiques souffrent d'une asymétrie et dans la plupart des cas, leur bras parétique est maintenu à l'aide d'une écharpe.

Dans la même catégorie, on trouve également le prototype développé par l'Université d'électro-communication et des systèmes d'information de Tokyo [Chugo et al., 2008]. C'est un robot sériel à 3 ddl avec une base mobile pour l'aide à la marche. Il soulève les patients en incluant un support au niveau du tronc (Figure.I.12). Ce robot est spécifiquement destiné aux personnes âgées. Le système est asservi en force et en position. La trajectoire de référence est adaptable en fonction de la taille du patient, le robot peut soulever des patients mesurant jusqu'à 180 cm de taille et d'un maximum de 150 kg. La structure du robot n'est pas lourde (35 kg) et il est peu encombrant car l'alimentation en puissance ainsi que le système de commande sont externes au robot.

Le robot d'assistance au PAD de l'université d'Égypte [Asker et al., 2015] est une structure originale basée sur une architecture parallèle de type 3-RPR (Rotoïde-Prismatique-Rotoïde). Il dispose de 5 actionneurs linéaires assurant ainsi les 3 ddl nécessaires à l'exécution du PAD (Figure.I.13). La base mobile consiste en deux roues motrices différentielles et deux roues libres. La base mobile a été conçue de telle sorte que le centre de masse de



FIGURE I.11: Prototype du KAIST



(a) vue de face



(b) vue de profil

FIGURE I.12: Robot verticalisateur d'assistance fonctionnelle

l'utilisateur se situe toujours à l'intérieur de la zone entre les quatre roues pour garantir la stabilité du dispositif.

Plusieurs autres dispositifs existent dans la littérature, on peut ainsi citer également le prototype MONIMAD de l'Université Pierre et Marie Curie [Médéric, 2006] défini pour l'étude du syndrome post-chute (Figure.I.14) ; le prototype développé par l'université de Séoul (Smart Mobile Walker) [Jun et al., 2011] comprenant un mécanisme d'entraînement, un mécanisme de transfert assis-debout et un module assurant la complianc du mouvement (Figure.I.15) ; le prototype de l'Université de Tohoku (Robotic Walking support) [Chuy Jr et al., 2006], défini initialement pour l'assistance à la marche, l'algorithme de commande a été adapté pour l'assistance au PAD via l'une des poignées fixes du robot (Figure.I.16).

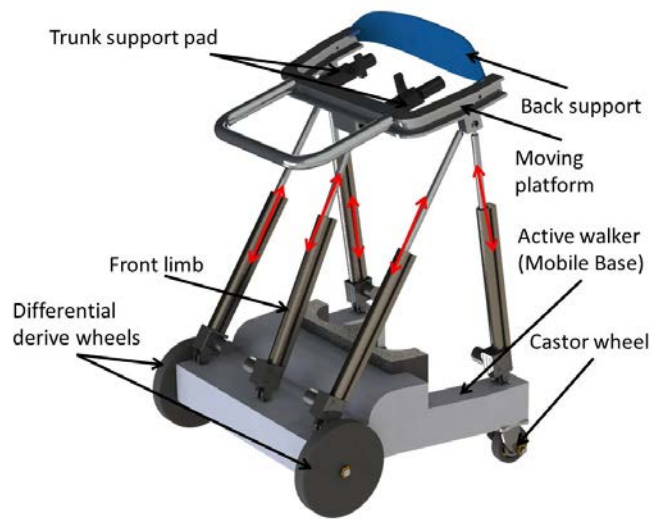


FIGURE I.13: Prototype de l'université d'Égypte

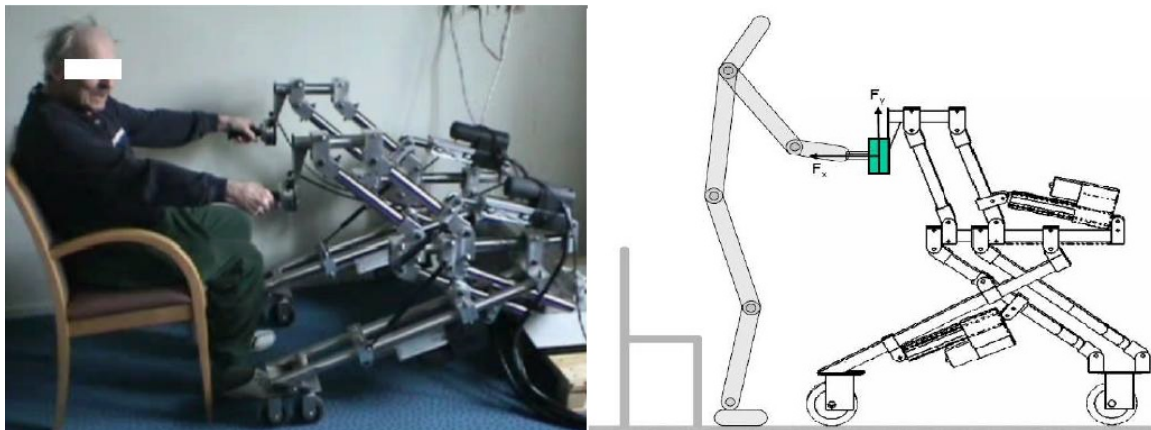


FIGURE I.14: Prototype MONIMAD (UPMC)

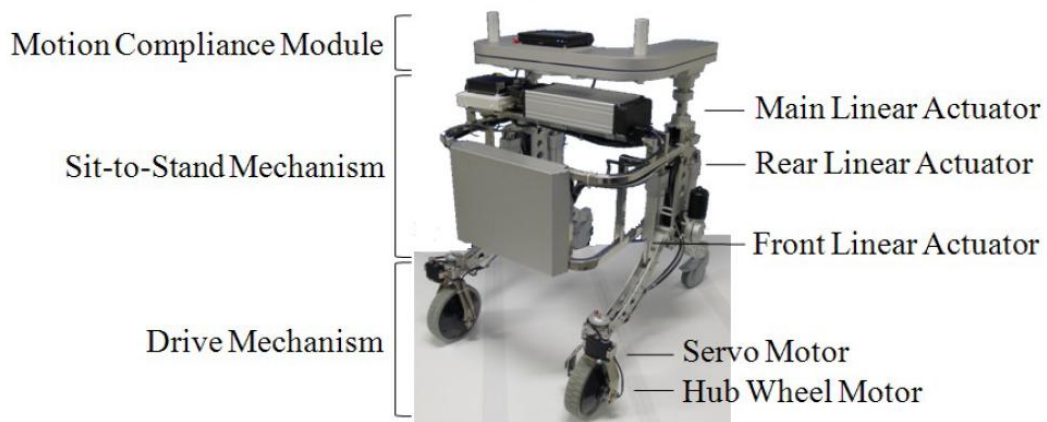


FIGURE I.15: Smart mobile walker

I.3.3 Problématique liée à la conception des dispositifs d'assistance au PAD

L'objectif des systèmes robotiques d'assistance est de suivre un patient lors du PAD tout en le soutenant en cas d'incapacité (difficulté de verticalisation, déséquilibre ou chute). Cette contrainte exige la connaissance du mouvement volontaire initié par le patient ainsi que sa pathologie. Ce type d'information exige que l'interface remédie à la pathologie du patient afin que les médecins puissent entamer des procédures d'assistances fonctionnelles.



FIGURE I.16: Robotic walking support

Durant l'assistance au PAD, plusieurs paramètres influencent le mouvement. En fait, non seulement il existe des différences évidentes reliées aux données anthropométriques de chaque individu, mais chacun a son propre style, sa propre manière d'exécuter le mouvement et cela dépend de plusieurs paramètres comme l'âge, l'environnement, la force musculaire, voire la personnalité de l'individu. De plus, un même individu ne pourrait jamais exécuter le même mouvement d'un essai à un autre. En général, le concepteur doit définir un mécanisme permettant de satisfaire toutes les exigences citées auparavant. Par conséquent, la procédure de conception doit tenir compte de la définition de l'espace de travail du robot dans le plan sagittal, le volume occupé, le type d'actionneurs et les techniques de commandes appliquées. Plus précisément, à partir de l'état de l'art présenté dans la section précédente, un dispositif d'assistance doit disposer d'au moins 2 ddl dans le plan sagittal pour accomplir les trajectoires du PAD. De plus l'orientation du tronc dépend de la hauteur de l'assise ainsi que d'autres paramètres physiologiques. Par conséquent, un degré de liberté supplémentaire peut être considérée afin de fournir une orientation appropriée au tronc. À partir de ces spécifications, la topologie de la chaîne cinématique est déterminée, elle peut être sérielle, parallèle ou hybride. Le dimensionnement de la structure et des articulations doit être effectué en fonction des forces et des couples agissant sur le système pendant son fonctionnement. Le choix des points d'appuis est un autre point clé dans la phase de conception, ce choix dépend de la pathologie des populations cibles. Il détermine la nature de l'interaction entre le patient et le robot. Cette interaction est définie comme un transfert d'énergie mécanique avec le patient (assistance motrice ou de freinage) et elle doit empêcher toute forme de rétropulsion.

Le récapitulatif des dispositifs d'assistance au PAD en fonction de leur structure est donné dans la table (I.1) :

projet	Nombre de ddl	Architecture		Type de plate-forme			Type d'interfaçage					
		sérielle	parallèle	Fixe	Mobile	Exosquelette	HAR	ASS	COU	POI	AIS	
[Colombo et al., 2000]	2	×				×	×					
[Tsukahara et al., 2009]	3	×				×						
[Nagai et al., 2003]	5		×	×				×			×	
[Kamnisk and Bajd, 2003]	3	×		×				×			×	
[Tomuro et al., 2009]	2	×		×							×	
[Lee et al., 2002]	1	×			×							×
[Chugo et al., 2008]	3	×			×				×			
[Asker et al., 2015]	3		×						×			
[Médéric, 2006]	2	×										×
[Jun et al., 2011]	3	×							×			
[Chuy Jr et al., 2006]	1				×							×

TABLE I.1: Tableau récapitulatif des différents concepts d'assistance au PAD

où

HAR : harnais ou prise au niveau du bassin ; ASS : prise au niveau de l'assise ; COU : support au niveau du coude ; POI : poignée ; AIS : support au niveau des aisselles.

I.4 Conception d'un banc d'assistance au PAD

Nous avons exposé précédemment la complexité de la problématique du passage assis-debout (PAD) et les différents dispositifs d'assistance rencontrés dans la littérature que ce soit par rapport à son architecture cinématique ou la stratégie d'assistance au transfert assis-debout. Concernant l'assistance des personnes hémiplegiques, il n'existe aucun dispositif visant à répondre au besoin. L'assistance au PAD des personnes hémiplegiques via des interfaces robotiques est un thème de recherche en soi. À ce jour, il n'y a aucune étude concluante sur la façon dont une personne hémiplegique exécute le mouvement PAD. De ce fait et dans le cadre du projet ANR VHIPOD, il a été proposé de concevoir un dispositif d'assistance fixe dans le but d'étudier l'analyse biomécanique du PAD des personnes hémiplegiques. La finalité de ce banc est la compréhension du mouvement assisté afin de pouvoir par la suite proposer des solutions cinématiques beaucoup plus adaptées.

En tenant compte de la problématique liée à la conception des dispositifs d'assistance au PAD et aux exigences du staff médical, il a été conclu que le banc devait être doté de 3 ddl afin de reproduire les trois mouvements élémentaires d'un PAD : deux translations (en x et y) et une rotation dans le plan sagittal. De plus, il a été supposé que l'assistance apportée par les ergothérapeutes est de qualité. Par conséquent, la cinématique d'assistance devait être fixée de manière à reproduire ce mouvement.

I.4.1 Définition du support d'assistance

La spécificité de l'assistance au PAD pour personnes hémiplegiques doit répondre à la problématique liée à l'asymétrie motrice des patients dans le plan sagittal. De ce fait, le dispositif d'assistance doit non seulement fournir un effort pour aider l'utilisateur à se verticaliser mais aussi contribuer à améliorer sa stabilité posturale. L'effort transmis par le robot doit être musculairement admissible par le patient (pas d'arrachement musculaire), pour cette raison, l'interfaçage basé seulement sur une poignée mobile a été écarté. Comme la finalité du projet est la conception d'un verticalisateur accessible de partout, l'interfaçage de type harnais a été également écarté. À partir de cela et afin de fournir à l'utilisateur une interface ergonomique avec une importante surface d'appui, un interfaçage de type tablette avec poignée a été défini (Figure.I.17). Ce type d'interface permet non seulement d'améliorer la stabilité posturale du patient mais aussi de générer un PAD proche du mouvement naturel. Des tests biomécaniques ont permis de vérifier ce constat.

I.4.2 Définition de l'espace de travail du banc

Afin de définir l'espace de travail du banc, l'allure de la trajectoire de la tablette a été définie à partir de tests biomécaniques sur des sujets hémiplegiques et sains de différentes tailles. De ce fait, des ergothérapeutes et des kinésithérapeutes ont été sollicités dans le but de fixer une première stratégie d'assistance (Figure.I.18).

La trajectoire de la tablette a été capturée en utilisant un système d'analyse de mouvements en 3 dimensions. Le principe repose sur l'utilisation de marqueurs rétro-réfléchissants, positionnés sur des points anatomiques précis, définis selon les recommandations de l'ISB (International Society of Biomechanics). Ces marqueurs ont été filmés à l'aide de 9 caméras infrarouges (Figure.I.19) et leur mouvement a été reconstruit en 3D afin de reproduire celui des différents segments corporels. Des marqueurs supplémentaires ont été posés sur la tablette afin de reconstruire son mouvement. Les trajectoires identifiées



FIGURE I.17: Support d'assistance de type tablette



FIGURE I.18: Cycle d'assistance via une tablette en bois

sont illustrées en annexe (A.4). Après analyse des données, le cahier des charges relatif au mouvement de la tablette a été fixé (Annexe.A.2)

I.4.3 Définition de la topologie cinématique

À partir de l'espace de travail du banc et des vitesses maximales sollicitées lors du PAD, des mesures expérimentales supplémentaires ont révélé que lors du PAD assisté par tablette, le sujet est capable d'exercer une pression sur la tablette équivalente à 85% de son poids. De ce fait, plusieurs architectures cinématiques peuvent répondre à ce cahier des charges. Néanmoins, l'exploitation du banc pour des tests biomécaniques impose des contraintes sur la visibilité des marqueurs rétro-réfléchissants. De ce fait et en collaboration avec l'entreprise BA Systèmes, la cinématique (Figure.I.20) a été proposée. c'est un robot parallèle à 3 ddl. Par l'intermédiaire de 6 jambes et des liaisons pivots, la tablette est reliée à 6 patins en translation. Le mouvement de ces patins est assuré via 3 actionneurs rotatifs montés sur des systèmes de type poulie-courroie. Ceci permet de générer des mouvements linéaires au niveau des patins. Par l'intermédiaire de 3 arbres de transmission, un mouvement symétrique par rapport au plan sagittal est assuré. L'intérêt de ce type de cinématique est que toutes les parties encombrantes du banc sont déportées

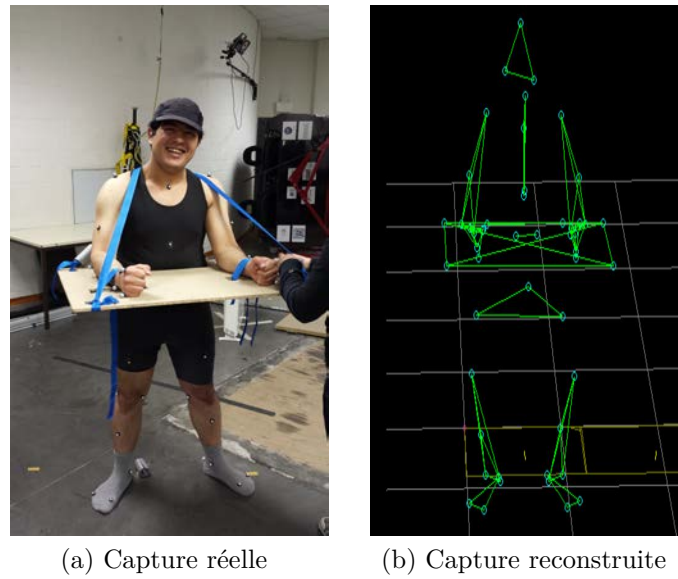


FIGURE I.19: Reconstruction du mouvement en 3D.

au niveau de la base. Les barres connectant la tablette à la base sont peut encombrantes ce qui permet de dégager le champ de vision des caméras au niveau des pieds du patient. L'architecture de contrôle ainsi que l'instrumentation de la tablette sont présentées en annexe (A)

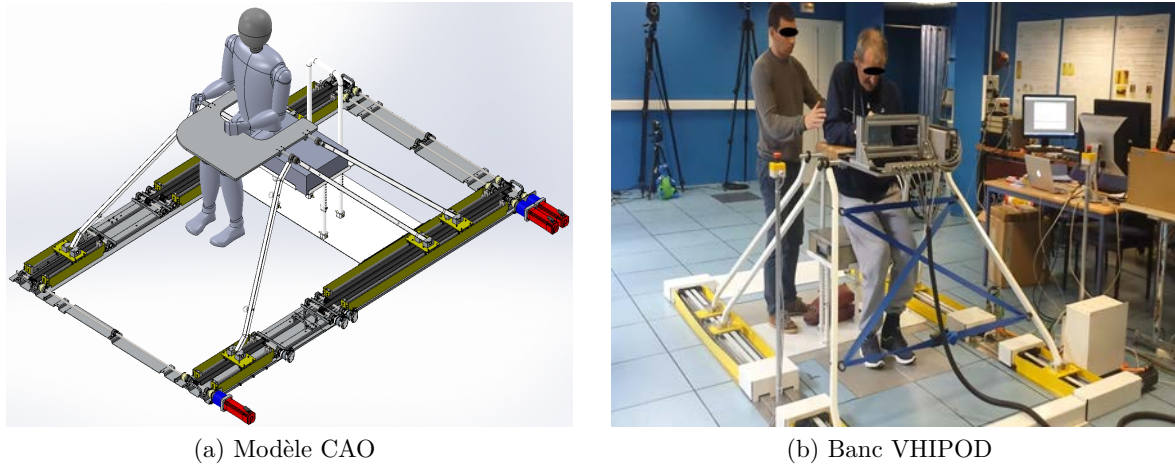


FIGURE I.20: Banc d'assistance au PAD.

I.5 Mobilité des personnes handicapées

Transport et mobilité sont deux notions étroitement liées à l'indépendance, le bien-être et la qualité de vie des êtres humains. La capacité de se déplacer sans assistance est un facteur critique pour la réintégration des personnes handicapées dans la société [Espeland et al., 2007]. Lorsque les outils de déambulation classiques sont dépassés en raison de la gravité du handicap, le fauteuil roulant devient une solution indispensable. De nombreux types de fauteuils roulants ont été développés intégrant des fonctionnalités

comme l'assistance électrique, la verticalisation ou le déplacement auto-équilibré sur deux roues (Figure.I.21). Ces fauteuils roulants robotisés posent toutefois des problèmes de commercialisation en partie à cause de leur coût très élevé [Oyekan and Hu, 2011]. La plupart des concepts ne préservent pas la verticalisation du patient lors du déplacement alors que ce point est reconnu comme bénéfique ne serait-ce qu'en terme d'amélioration du confort du patient [Dicianno et al., 2013]. Ils sont aussi très encombrants : dans beaucoup de situations leur utilisation nécessite un réaménagement de l'habitat.



FIGURE I.21: Exemples de fauteuil roulant à assistance électrique

I.5.1 Robot auto-équilibré à deux roues

L'idée d'un véhicule de transport auto-équilibré ne date pas d'aujourd'hui : dès 1912, Peter Schilovski a proposé un prototype baptisé Gyrocar. C'est un véhicule de type bicyclette équipé d'un gyroscope mécanique permettant ainsi la stabilisation de l'angle de roulis [Baloh and Parent, 2003] (Figure.I.22).

Le développement spectaculaire des outils informatiques, de la théorie de la commande ainsi que des technologies de fabrication [Tirmant et al., 2002] a permis aux chercheurs d'explorer de nouveaux concepts de véhicules mieux adaptés à nos besoins quotidiens tel que le robot mobile auto-équilibré à deux roues (RM2R). Ce nouveau concept est devenu très populaire cette dernière décennie grâce à son faible encombrement (petite empreinte sur le sol) et sa bonne manœuvrabilité dans les espaces étroits, il a la capacité de tourner

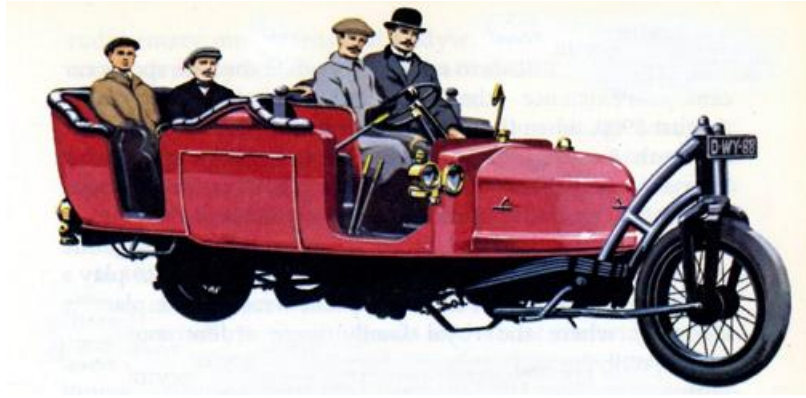


FIGURE I.22: Concept de Shilovsky : Gyrocar

sur place à l'instar des robots à commande différentielle [Kausar et al., 2012, Li et al., 2007, Choi and Oh, 2008]. Il a été avancé comme un produit approprié pour les environnements domestiques et de bureau [Kim et al., 2005] ce qui le place en bonne position comme alternative pour le transport des personnes ayant un équilibre et une marche précaire. La commande d'un tel système est un vrai challenge scientifique, car c'est un système complexe, sous-actionné avec des contraintes non-holonomes [Xu et al., 2012, Huang et al., 2010] opérant dans des conditions environnementales incertaines [Katariya, 2010]. Les premières implémentations sur un pendule inversé à roue ont été effectuées dans les années 80 [Castro, 2012]. Le premier RM2R a été développé par [Ha et al., 1996], il est commandé par deux roues séparées tournant autour du même axe avec un gyroscope permettant la mesure de l'inclinaison du corps du robot (Figure.I.24). Depuis, d'innombrables prototypes ont vu le jour comme : Joe - prototype l'école polytechnique fédéral de Lausanne [Grasser et al., 2002] et Nbot [Anderson, 2003] (Figure.I.26). D'autres prototypes destinés à la commercialisation (Figure.I.25) comme le Segway, qui est le concept le plus connu du grand public [Robotics, 2016], Ninebot, Robin et le B2 (prototype conçu par l'INRIA dont l'objectif de proposer un nouveau concept non conventionnel de véhicule urbain afin de réduire la consommation énergétique, la pollution et les espaces de stationnement dans les villes [Tirmant et al., 2002])(Figure.I.23).



FIGURE I.23: Prototypes de l'Inria B2

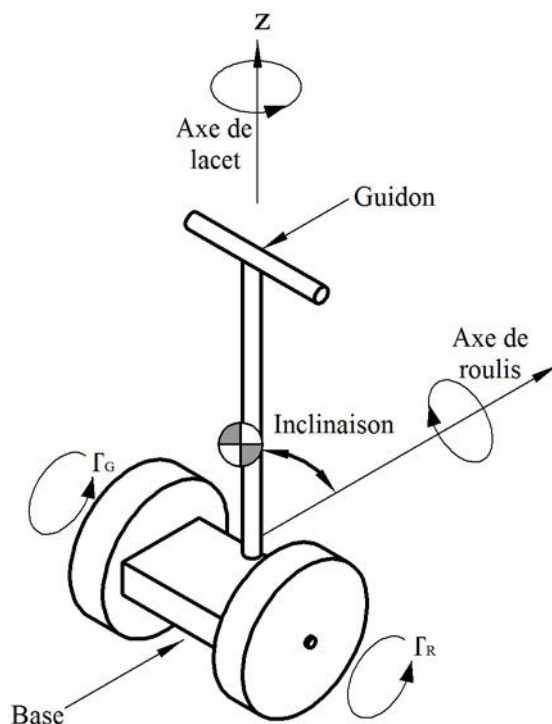


FIGURE I.24: Synoptique de robot mobile à deux roues

I.5.2 Robot mobile à deux roues pour l'assistance des personnes handicapées

Le RM2R a déjà été utilisé par le grand public, les services postaux canadiens et américains, la police de Paris, les services d'urgences médicales de Boston et la sécurité des aéroports. Plusieurs personnes handicapées ont testé ce moyen de transport et ont partagé leurs expériences via Internet [chat, 2016]. Dans l'optique de développer des dispositifs mieux adaptés aux personnes à mobilité réduite, la compagnie Segway a modifié son concept pour transporter des personnes en position assise. Une équipe italienne a proposé le Marioway [Mario et al., 2016], ce prototype auto-équilibré est équipé d'un mécanisme verticalisateur permettant ainsi le déplacement en position assise, semi-assise et debout. Un autre nouveau concept est le Chariot, ce prototype est destiné principalement aux personnes parapalégiques, il permet le déplacement en position debout (Figure.I.27). Toutefois, ces produits ne sont pas ouvertement commercialisés aux personnes à mobilité réduite. Jusqu'à aujourd'hui ces produits ne sont pas cliniquement certifiés comme des dispositifs médicaux, cela revient en grande partie à la complexité de ces systèmes, les conditions d'utilisation, ainsi que la robustesse des lois de commande. Le RM2R a toujours été avancé comme un moyen de transport indépendant et intelligent [Pinto et al., 2012]. Ces propos sont très optimistes, car il faut préciser que, dans l'utilisation de ce système, l'utilisateur est dans la boucle de commande : par le biais de ses sens et de sa capacité motrice, il peut estimer les changements dans l'environnement puis assurer, par un ajustement de sa posture, la stabilité du véhicule. Dans le cas où le robot transporte une personne handicapée, il faut que celui-ci soit complètement autonome pour garder la stabilité lors du déplacement sur un terrain en pente, d'un franchissement de petite marche ou de la manipulation du patient. Chacun de ces points constitue un axe de recherche à lui seul.



(a) B2



(b) Joe



(c) Nbot



(d) Legway

FIGURE I.25: robots mobiles auto-équilibrés à deux roues commercialisés



(a) Joe



(b) Nbot

FIGURE I.26: Prototypes de robots mobiles auto-équilibrés à deux roues



FIGURE I.27: Concepts auto-équilibrés pour personnes handicapées

I.5.3 Problématique liée à la nature du sol

Certaines propriétés du sol peuvent affecter directement le modèle dynamique du robot, ce qui complique la stratégie de commande. Dans ce qui suit quelques situations fréquentes lors de l'utilisation d'un RM2R sont présentées.

I.5.3.1 Déplacement sur une pente

L'hypothèse de base lors de la dérivation des équations dynamiques du robot est que le sol est une surface plane et horizontale. Des modèles et des lois de commande basés sur cette hypothèse peuvent avoir des performances limitées [Li et al., 2007]. Cependant la prise en compte des paramètres liés au sol dans le modèle du robot peut rendre le contrôleur plus robuste avec de meilleures performances. Un nombre limité d'études relatives à l'effet de l'inclinaison du sol sur la stabilisation des RM2Rs ont été rapportées dans la littérature [Kausar et al., 2012, Allouche et al., 2013]. Pour rester en équilibre sur une pente, le robot doit aligner verticalement son centre de gravité avec son point de contact sur le sol. Dans ce cas, l'angle d'équilibre instable n'est plus nul, il est fonction de l'angle de la pente, de la hauteur du centre de gravité par rapport au rayon de la roue ainsi que de la masse du corps par rapport à la base. Il est compliqué de calculer l'angle

d'équilibre au préalable puisque celui-ci est basé sur l'estimation de l'angle de la pente. De même, dans de telles situations, la synthèse de lois de commande basée sur des modèles linéarisés s'avère peu crédible [Huang et al., 2010]. Pour cela il semble très important de faire des études plus approfondies sur la stabilisation des RM2Rs dans de telles situations surtout quand l'enjeu est l'adaptation des RM2Rs pour l'usage des personnes handicapées.



FIGURE I.28: RM2R sur une pente [Li et al., 2007]

I.5.3.2 Franchissement de marche

Une des situations les plus fréquentes lors de l'utilisation du RM2R est le franchissement de petites marches. Cette situation peut être volontaire, comme monter sur un trottoir, ou involontaire, comme la présence d'un petit obstacle sur la route ou la conduite sur un terrain irrégulier. Dans le manuel d'utilisation du Segway, il est formellement interdit d'utiliser le robot pour monter une bordure de trottoir ou descendre un escalier. Néanmoins, plusieurs RM2Rs peuvent déjà franchir des petites marches en l'approchant avec des vitesses adéquates. Par exemple, [Li et al., 2007] ont montré sur un cas particulier de RM2R (Figure.I.28) que les obstacles peuvent être franchis. Toutefois, ce franchissement reste non contrôlé. Il peut causer un rebondissement du robot et même un déséquilibre total. Le franchissement d'obstacle contrôlé est un problème très complexe d'un point de vue dynamique, puisque au moment du contact avec la bordure (changement du point de contact) le RM2R change brutalement son angle d'équilibre instable vers une valeur qui est fonction de la hauteur de la marche. Dans la littérature il n'existe que deux études traitant ouvertement de la problématique du franchissement/descente des marches pour les RM2Rs [Chen et al., 2012, Yap and Hashimoto, 2013]. Hélas, ces deux études se basent sur des modèles dynamiques linéaires, ce qui peut être insuffisant dans la plupart des situations pratiques rencontrées. L'étude du franchissement d'obstacle (Figure.I.29) est une phase très importante lors de la conception d'un RM2R : d'une part, géométriquement le robot ne peut pas franchir une marche de hauteur supérieure à son rayon, d'autre part il y a un rapport inertiel à respecter entre la base du robot et le corps à transporter afin de concevoir un robot capable de franchir des obstacles avec des lois de commande appropriées [Chan et al., 2013, Allouche et al., 2014b].

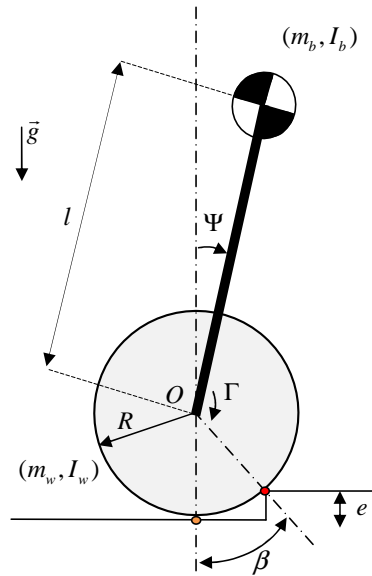


FIGURE I.29: Franchissement d'obstacle

I.6 Conclusion

Ce premier chapitre a été essentiellement consacré à l'exposition de la problématique d'assistance fonctionnelle des personnes handicapées. En premier lieu, l'hémiplégie ainsi que ces causes ont été définies puis situées dans le contexte du projet VHIPOD. Dans la deuxième partie, un état de l'art sur l'assistance au passage assis-debout a été présenté. Selon les variétés conceptuelles, le nombre de degrés de liberté, l'architecture cinématique et/ou la stratégie d'assistance, un nombre de dispositifs d'assistance ont été présentés afin de mettre en évidence les différents verrous scientifiques liés à la conception d'un tel dispositif. Dans la troisième partie, le banc d'assistance au PAD conçu dans le cadre du projet VHIPOD a été présenté. Finalement, la question sur la mobilité des personnes handicapées a été soulevée puis un état de l'art sur les robots auto-équilibrés à deux roues a été présenté afin de montrer les problématiques liées à l'utilisation de ce moyen de transport, tel que le déplacement sur un terrain en pente ou le franchissement de petite marche.

Chapitre II

Approche Takagi-Sugeno

« Le savant est l'homme par lequel s'opère facilement la distinction entre la franchise et le mensonge dans les paroles, entre la vérité et l'erreur dans les convictions entre la beauté et la laideur dans les actes. »

Abd El-Kader

Sommaire

II.1 Introduction	32
II.2 Systèmes non linéaires	32
II.3 Modèles de Takagi-Sugeno	33
II.3.1 Modèles TS standard	33
II.3.2 Modèles TS descripteur	34
II.3.3 Construction des modèles TS	35
II.4 Aperçu sur les inégalités matricielles linéaires (LMIs)	38
II.4.1 Classes des Problèmes LMIs	39
II.4.2 Propriétés matricielles	40
II.4.3 Quelques notations utiles	41
II.5 Stabilités des modèles TS	41
II.5.1 Stabilité des modèles TS standards	41
II.5.2 Stabilité des modèles TS descripteurs	42
II.6 Synthèse de contrôleur basé TS	43
II.6.1 Stabilisation	43
II.6.2 α -stabilité	46
II.6.3 Poursuite de trajectoire (PDC étendue)	47
II.6.4 Robustesse	48
II.7 Réduction du conservatisme des conditions LMIs pour les modèles TS	49
II.8 Difficultés de l'approche TS en robotique	51
II.9 Conclusion	53

II.1 Introduction

La théorie des ensembles flous a été introduite par Lotfi Zadeh dans les années soixante [Zadeh, 1965], elle constitue un outil très puissant pour la représentation des termes et des connaissances vagues. Cette approche est issue de la capacité de l'homme à décider et agir d'une manière intelligente malgré l'imprécision et l'incertitude des connaissances disponibles. Dans le domaine de l'automatique, elle a été introduite comme un outil permettant d'implémenter le raisonnement d'un expert pour la commande des systèmes complexes ou difficilement modélisables. Le premier ouvrage sur la commande floue a été publié en 1975 par [Mamdani and Assilian, 1975]. Quelques années plus tard, l'application de la commande floue sur le métro de Sendai au Japon a rendu cette technique très célèbre, et depuis les travaux dans ce domaine ne cessent de croître. L'un des avantages historiques de cette approche est qu'elle ne nécessite pas de modèle mathématique pour la synthèse des contrôleurs [Takagi and Sugeno, 1985]. Dans certaines applications critiques où la preuve de la stabilité du système est primordiale, la commande floue était moins appréciée à cause de sa nature heuristique. En 1992, [Tanaka and Sugeno, 1992] ont rompu avec cette façon de faire en introduisant l'approche basée modèle tout en gardant l'esprit de la modélisation floue. Cette dernière est très proche mathématiquement des modèles LPV (Linear Parameters varying) [Sala et al., 2005], ce qui a permis l'utilisation des outils classiques de l'automatique telles que les approches basées sur la théorie de Lyapunov.

Au cours de ces dernières décennies, les modèles de Takagi-Sugeno (TS) ont été largement utilisés pour la représentation des systèmes non linéaires. Ce type de modélisation permet de représenter un système non linéaire par une collection de sous-modèles linéaires pondérés par le biais de fonctions non linéaires satisfaisant la propriété de convexité [Tanaka et al., 1998, Sala, 2009]. Le passage du modèle non linéaire à la représentation TS peut être effectué par la linéarisation autour de plusieurs points de fonctionnement [Johansen et al., 2000] ou l'utilisation de l'approche par secteurs non linéaires [Ohtake et al., 2003].

L'étude de la stabilité/stabilisation des modèles TS est généralement basée sur le choix d'une fonction candidate de Lyapunov. En imposant un comportement dissipatif à cette fonction, on aboutit souvent à des conditions de stabilité/stabilisation sous forme d'inégalités matricielles linéaires (LMI : Linear Matrix Inequality) [Tanaka and Wang, 2001]. Une fois ces conditions établies, des algorithmes d'optimisation convexe sont utilisés pour résoudre le problème ainsi formulé [Gahinet et al., 1994].

L'objectif de ce chapitre est de proposer un petit aperçu sur les différents résultats concernant les modèles TS continus. En premier temps, une description des modèles TS ainsi que la procédure de construction d'un tel modèle à partir d'un modèle initial non linéaire est donnée. Dans la seconde partie, un bref descriptif sur les inégalités matricielles est donné. Par la suite, nous passons en revue les principaux résultats en stabilité, stabilisation et robustesse liés directement au travail effectué dans la suite de ce manuscrit. Pour un état de l'art plus détaillé, le lecteur pourra se référer à [Tanaka and Wang, 2001, Sala et al., 2005, Feng, 2006, Guerra et al., 2009].

II.2 Systèmes non linéaires

Par définition, un système non linéaire est un système régi par un ensemble d'équations différentielles ordinaires (voire algébriques) à coefficients non constants. Il décrit l'évolution temporelle des variables constitutives (variables d'état) d'un système physique. Cette

large définition explique la complexité, la diversité des systèmes non linéaires ainsi que la variété des méthodes qui s'y appliquent. La représentation d'état d'un système non linéaire est donnée par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_1(x(t), u(t)) & \text{(II.1a)} \\ y(t) = f_2(x(t), u(t)) & \text{(II.1b)} \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ représente le vecteur d'état du système, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée commande, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ est le vecteur de sortie mesuré, et $f_i(\cdot)$, $i \in \{1, 2\}$ sont des fonctions non linéaires. Les équations (II.1a) et (II.1b) sont appelées «équation d'état» et «équation de sortie» respectivement.

Suivant la complexité des fonctions $f_i(\cdot)$, $i \in \{1, 2\}$, le système (II.1) peut être écrit sous la forme d'une représentation d'état standard affine en la commande :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) & \text{(II.2a)} \\ y(t) = C(x(t))x(t) + D(x(t))u(t) & \text{(II.2b)} \end{cases}$$

où $A(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $B(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$, $D(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ sont des matrices de fonctions non linéaires.

II.3 Modèles de Takagi-Sugeno

II.3.1 Modèles TS standard

La modélisation floue de type Takagi-Sugeno est une représentation mathématique des systèmes non linéaires, appartenant à la famille des systèmes quasi-LPV [Takagi and Sugeno, 1985]. En se restreignant à un ensemble compact de variable d'état, un modèle flou TS peut représenter exactement un système non linéaire par une collection de sous-modèles linéaires pondérés par le biais de fonctions non linéaires appelées «Fonctions d'appartenance». L'activation de chaque sous-modèle est régie par des règles «Si ... Alors» sous la forme suivante :

$$R_i : \mathbf{Si} \quad (z_1(t) \text{ est } \mathcal{N}_{i1}) \quad \mathbf{Et} \quad (z_2(t) \text{ est } \mathcal{N}_{i2}) \quad \mathbf{Et} \quad \dots \quad (z_p(t) \text{ est } \mathcal{N}_{ip})$$

Alors

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_i(x(t))x(t) + B_i(x(t))u(t) & \text{(II.3a)} \\ y(t) = C_i(x(t))x(t) + D_i(x(t))u(t) & \text{(II.3b)} \end{cases}$$

où R_i , $i \in \{1, 2, \dots, r\}$, est la $i^{\text{ème}}$ règle; r est le nombre de règles du modèle; \mathcal{N}_{ij} , $j \in \{1, 2, \dots, p\}$ sont les fonctions d'appartenance; $z_1(t)$, $z_2(t)$, \dots , $z_p(t)$ représentent les variables de prémisse, elles peuvent être fonction des variables d'état, de l'entrée, de signaux exogènes, du temps, de variables mesurées ou non mesurées; $A_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$,

$B_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_x \times n_u}$, $C_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_x}$ et $D_i(x(t)) \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$.

Afin d'interpréter chaque règle R_i , l'opérateur «**Et**» est défini comme étant l'opérateur de multiplication. À partir de cette considération, chaque $i^{\text{ème}}$ sous-modèle a son degré d'appartenance au modèle global donné par :

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p \mu(\mathcal{N}_{ij}) \quad (\text{II.4})$$

tel que $\mu(\mathcal{N}_{ij}) \in [0, 1]$ est le degré d'appartenance de la prémisse $z_i(t)$ à l'ensemble flou \mathcal{N}_{ij} . Le modèle TS global est obtenu en utilisant la somme pondérée :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) (A_i(x(t))x(t) + B_i(x(t))u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \end{array} \right. \quad (\text{II.5a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = \frac{\sum_{i=1}^r w_i(z(t)) (C_i(x(t))x(t) + D_i(x(t))u(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))} \end{array} \right. \quad (\text{II.5b})$$

Si on note $h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{i=1}^r w_i(z(t))}$, le modèle TS standard relatif au système (II.2) est donné sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i(x(t))x(t) + B_i(x(t))u(t)) \end{array} \right. \quad (\text{II.6a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (C_i(x(t))x(t) + D_i(x(t))u(t)) \end{array} \right. \quad (\text{II.6b})$$

Il est évident de par leur définition que les fonctions h_i vérifient la propriété de convexité, c'est à dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i(z(t)) \geq 0 \quad \forall i \\ \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \end{array} \right. \quad (\text{II.7a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \end{array} \right. \quad (\text{II.7b})$$

Remarque II.1 Dans le cas général, on peut considérer un système non affine en la commande, *i.e.*, les matrices $A_i(x(t), u(t))$, $B_i(x(t), u(t))$, $C_i(x(t), u(t))$, $D_i(x(t), u(t))$ dépendent également de la commande. Cependant, pour la représentation TS, les fonctions d'appartenance vont dépendre aussi de $u(t)$, *i.e.*, $h_i(x(t), u(t))$.

II.3.2 Modèles TS descripteur

La modélisation des systèmes mécaniques est naturellement établie sous forme descripteur (équation II.8a) [Lewis, 1986, Luenberger, 1977]. Malgré cela, la plupart des travaux sur ce sujet utilise le modèle sous forme d'état standard qui est un cas particulier de la forme descripteur ($E(x(t))$ est inversible). Ce qui permet de faire la synthèse de commande dans l'espace d'état. Cependant, pour certains systèmes pour lesquels $\text{Rang}(E(x(t))) \leq n_x$, il est difficile d'écrire le modèle sous forme d'état standard à cause

de la multitude de solutions dans cet espace. Ces systèmes sont connus sous le nom de «systèmes singuliers» [Dai, 1989]. Ce sont des modèles décrits par un ensemble d'équations algèbro-différentielles, permettant ainsi la description des dynamiques et des contraintes agissant sur le système. Néanmoins, dans cette partie la matrice $E(x(t))$ est considérée de rang plein afin de montrer l'avantage de représenter un système avec ses propres caractéristiques structurelles issues de la modélisation.

$$\begin{cases} E(x(t))\dot{x}(t) = A(x(t))x(t) + B(x(t))u(t) & \text{(II.8a)} \\ y(t) = C(x(t))x(t) + D(x(t))u(t) & \text{(II.8b)} \end{cases}$$

En suivant le même raisonnement que dans la section (II.3.1), le modèle (II.8) est décomposé en deux parties (gauche et droite). La construction des fonctions d'activation de la partie droite du modèle reste la même que précédemment avec les définitions des $h_i(z(t))$, $i \in \{1, 2, \dots, r_a\}$, r_a étant le nombre de règles à droite. À cela vient s'ajouter les fonctions d'activation de la partie gauche du modèle relatives à la matrice $E(x(t))$: $v_k(z)$, $k \in \{1, 2, \dots, r_e\}$, où r_e est le nombre de règles à gauche. Les fonctions d'activation vérifient la propriété de convexité : $\sum_{i=1}^{r_a} h_i(z(t)) = 1$, $h_i(z(t)) \geq 0$, $\sum_{k=1}^{r_e} v_k(z(t)) = 1$ et $v_k(z(t)) \geq 0$.

Finalement le modèle TS descripteur s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{r_e} v_k(z(t))E_k\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r_a} h_i(z(t)) (A_i(x(t))x(t) + B_i(x(t))u(t)) & \text{(II.9a)} \\ y(t) = \sum_{i=1}^{r_a} h_i(z(t)) (C_i(x(t))x(t) + D_i(x(t))u(t)) & \text{(II.9b)} \end{cases}$$

II.3.3 Construction des modèles TS

Globalement, il existe trois approches pour obtenir un modèle non linéaire sous forme TS :

1. La première est basée sur des méthodes d'identification à partir des données d'entrées/sorties (modélisation floue classique) [Takagi and Sugeno, 1985]. Cette approche ne nécessite pas de modèle de connaissances, elle est appropriée dans le cas des systèmes sans modèle de connaissance.
2. La deuxième approche consiste à linéariser le système autour d'un nombre donné de points de fonctionnement méticuleusement choisis afin de décrire la dynamique du système par un ensemble fini de modèles linéaires, ces derniers sont par la suite interconnectés entre eux par le biais de fonction non linéaires afin d'obtenir le modèle TS [Ma et al., 1998, Johansen et al., 2000].
3. La dernière approche est appelée «approche par secteur non linéaire» [Tanaka and Wang, 2001, Morère, 2001, Ohtake et al., 2003]. Elle est basée sur une transformation polytopique convexe des termes non linéaires du modèle. Cette méthode permet de construire un modèle TS décrivant exactement la dynamique d'un système non linéaire.

Dans la suite de ce manuscrit, seuls les modèles TS issus de l'approche par secteur non linéaire sont considérés. Dans le cas d'un système mécanique, il est très rare de trouver un secteur non linéaire permettant de décrire la dynamique d'un système dans sa globalité.

Sachant que les variables d'état de ce type de système sont bornés, on peut toujours trouver un secteur non linéaire permettant ainsi de décrire toute la dynamique du système sur les frontières de son espace de travail (Figure.II.1).

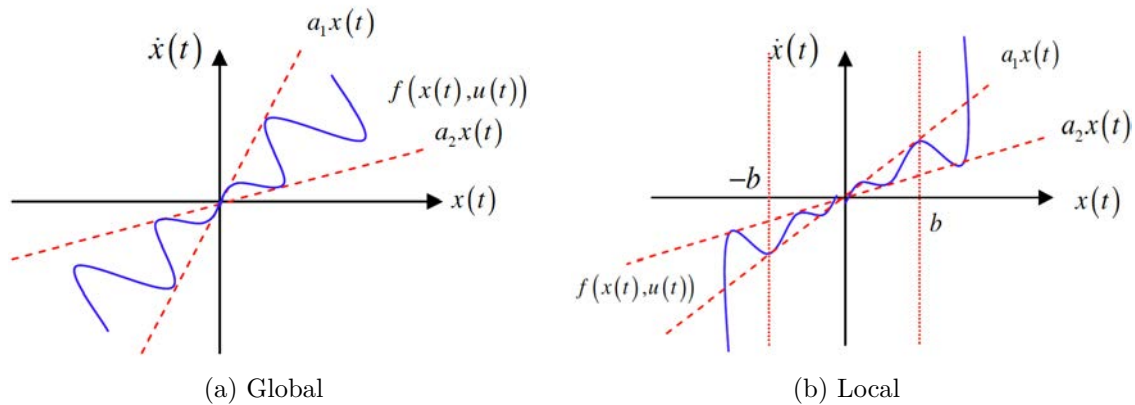


FIGURE II.1: Secteur non linéaire [Tahar, 2009]

De la figure (II.1.b), notons que, pour des variables d'état appartenant à un ensemble $\mathcal{C}_x = \{x(t) : |x(t)| \leq b\}$, leurs dérivés $\dot{x}(t)$ sont bornées entre $a_1x(t)$ et $a_2x(t)$, il est possible d'associer une infinité de modèles TS selon le découpage utilisé pour les non-linéarités. À partir de ces bornes, la représentation TS découle du lemme ci-dessous [Guerra and Vermeiren, 2001, Guerra and Vermeiren, 2004].

Lemme II.1

Soit $\{\zeta_j(z(x)), j \in \{1, 2, \dots, p\}\}$ l'ensemble des fonctions non linéaires du modèle (II.2), chaque fonction $\zeta_j(z(x)) \in [\underline{\zeta}_j, \overline{\zeta}_j]$ est bornée à l'intérieur d'un ensemble compact \mathcal{C}_x où $\underline{\zeta}_j$ et $\overline{\zeta}_j$ représentent respectivement les bornes inférieure et supérieure de la fonction $\zeta_j(z(x))$.

Les fonctions non linéaires $\zeta_j(z(x))$ peuvent être décomposées sous forme convexe telle que :

$$\zeta_j(z(x)) = w_0^j \underline{\zeta}_j + w_1^j \overline{\zeta}_j \quad (\text{II.10})$$

$$\text{où } w_0^j = \frac{\overline{\zeta}_j - \zeta_j(z(x))}{\overline{\zeta}_j - \underline{\zeta}_j}, \quad w_1^j = \frac{\zeta_j(z(x)) - \underline{\zeta}_j}{\overline{\zeta}_j - \underline{\zeta}_j}, \quad j \in \{1, 2, \dots, p\}.$$

Les fonctions $h_i(z(x))$ sont définies de la manière suivante :

$$h_i(\cdot) = h_{1+i_1+i_2 \times 2 + \dots + i_p \times 2^{p-1}}(\cdot) = \prod_{j=1}^p w_{i_j}^j(z_j), \quad i \in \{1, 2, \dots, 2^p\}, \quad i_j \in \{0, 1\} \quad (\text{II.11})$$

Finalement, les modèles locaux constituant le modèle TS (II.6a) sont donnés par :

$$A_i = A(z(\cdot))|_{h_i(\cdot)=1}, \quad B_i = B(z(\cdot))|_{h_i(\cdot)=1}, \quad C_i = C(z(\cdot))|_{h_i(\cdot)=1}, \quad D_i = D(z(\cdot))|_{h_i(\cdot)=1},$$

$i \in \{1, 2, \dots, r\}$ avec $r = 2^p$.

Remarque II.2 La représentation TS via la méthode des secteurs non linéaires n'est pas unique. Les manipulations algébriques sur le modèle non linéaire conduisent à différents vecteurs de prémisses ce qui change complètement les propriétés du polytope obtenu.

Remarque II.3 Dans la méthode des secteurs non linéaires, le nombre total de règles est relié de façon exponentielle au nombre de termes non linéaires, $r = 2^p$. Cela peut être un inconvénient lors de la modélisation des systèmes non linéaires complexes car un nombre de règles important peut conduire à des problèmes de calcul insolubles.

Exemple II.1

Considérons le système manivelle-coulisseau «scotch yoke» à 1 DDL (Figure.II.2). Le modèle dynamique sans frottements est donné sous la forme suivante :

$$(J + ml^2 \sin^2(q)) \ddot{q} + ml^2 \sin(q) \cos(q) \dot{q}^2 = \Gamma \quad (\text{II.12})$$

où q , \dot{q} et \ddot{q} représentent respectivement la position, la vitesse et l'accélération angulaire du moteur, l la longueur de la manivelle, J le moment d'inertie du système, m la masse de la charge et Γ le couple moteur.

Pour un vecteur d'état $x(t) = [q \ \dot{q}]^T$ et une entrée de commande $u(t) = \Gamma(t)$, le système est décrit par une représentation d'état standard (Equation.II.2a) avec les matrices A et B données par :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \frac{-ml^2 \sin(q) \cos(q)}{J+ml^2 \sin^2(q)} \dot{q} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J+ml^2 \sin^2(q)} \end{bmatrix}.$$

À partir de A et B , deux fonctions non linéaires sont distinguées, $\zeta_1 = -ml^2 \sin(q) \cos(q) \dot{q}$, $\zeta_2 = \frac{1}{J+ml^2 \sin^2(q)}$, donc le vecteur des prémisses z est de dimension $p = 2$. Sachant que $|\dot{q}| \leq \dot{q}_{max}$, $q \in [q_{min}, q_{max}]$, on a $\zeta_1 \in [\underline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_1]$ et $\zeta_2 \in [\underline{\zeta}_2, \overline{\zeta}_2]$. D'après le lemme (II.1), on peut écrire :

$$\begin{aligned} w_0^1 &= \frac{\overline{\zeta}_1 - \zeta_1}{\overline{\zeta}_1 - \underline{\zeta}_1} ; & w_1^1 &= 1 - w_0^1 \\ w_0^2 &= \frac{\overline{\zeta}_2 - \zeta_2}{\overline{\zeta}_2 - \underline{\zeta}_2} ; & w_1^2 &= 1 - w_0^2 \end{aligned}$$

En faisant toutes les combinaisons possibles, $h_1 = w_0^1 w_0^2$, $h_2 = w_0^1 w_1^2$, $h_3 = w_1^1 w_0^2$ et $h_4 = w_1^1 w_1^2$, le modèle non linéaire est écrit sous la forme de quatre sous-modèles linéaires ($r = 2^p = 2^2$) interconnectés avec les fonctions d'appartenance h_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \underline{\zeta}_1 \underline{\zeta}_2 \end{bmatrix} ; & A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \overline{\zeta}_1 \underline{\zeta}_2 \end{bmatrix} ; & B_1 &= B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\zeta}_2 \end{bmatrix} ; \\ A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \underline{\zeta}_1 \overline{\zeta}_2 \end{bmatrix} ; & A_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \overline{\zeta}_1 \overline{\zeta}_2 \end{bmatrix} & \text{et} & B_2 = B_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ \overline{\zeta}_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dans le cas descripteur, l'obtention du modèle TS se fait de la même façon que pour une représentation d'état standard. Cette extension a été proposée par [Taniguchi et al., 2000].

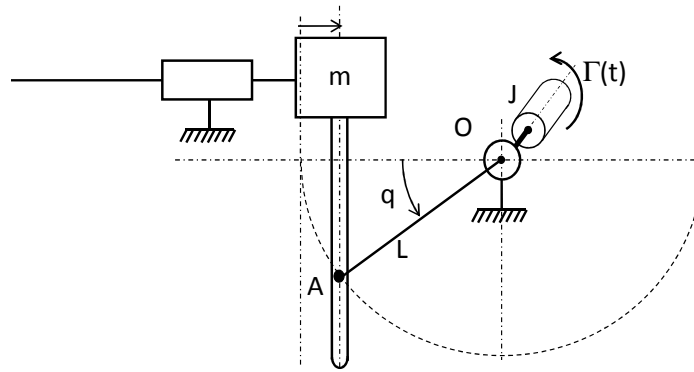


FIGURE II.2: Système manivelle-coulisseau avec moteur électrique

Exemple II.2

Reprenons le système manivelle-coulisseau (Figure.II.2). Pour $x(t) = [q \ \dot{q}]^T$, le modèle (Équation.II.12) est écrit sous forme descripteur (Équation.II.8a) avec :

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J + ml^2 \sin^2(q) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -ml^2 \sin(q) \cos(q) \dot{q} \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ce modèle contient une non-linéarité dans E et une autre dans A , respectivement. $\zeta_1 = J + ml^2 \sin^2(q)$ et $\zeta_2 = -ml^2 \sin(q) \cos(q) \dot{q}$. En séparant la partie gauche de la partie droite et en faisant toutes les combinaisons possibles $v_1 = w_0^1$, $v_2 = w_1^1$, $h_1 = w_0^2$, $h_2 = w_1^2$, le modèle non linéaire est écrit sous la forme de quatre sous-modèles linéaires ($r_e \times r_a$) interconnectés avec les fonctions d'appartenance v_k , $k \in \{1, 2\}$ et h_i , $i \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \underline{\zeta}_1 \end{bmatrix} & ; & E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \underline{\zeta}_1 \end{bmatrix} ; \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \underline{\zeta}_2 \end{bmatrix} & ; & A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \underline{\zeta}_2 \end{bmatrix} \text{ et } B_1 = B_2 = B. \end{aligned}$$

Remarque II.4 Dans le cas des systèmes mécaniques complexes, le fait d'inverser la matrice E pour obtenir un modèle d'état standard, ($A^* = E^{-1}A$, $B^* = E^{-1}B$), peut contribuer à augmenter significativement le nombre de termes non linéaires. De plus, contrairement à la matrice B , la matrice B^* est en général dépendante de l'état ce qui peut conduire à un régulateur plus complexe en introduisant des sommes doubles [Estrada Manzo, 2015]. Pour ces raisons, il est intéressant de noter que la représentation TS descripteur permet de réduire le nombre de règles du modèle ainsi que le conservatisme des résultats [Tanaka and Wang, 2001, Taniguchi et al., 2001, Guelton, 2003, Guerra and Vermeiren, 2004].

II.4 Aperçu sur les inégalités matricielles linéaires (LMIs)

L'avantage principal de la modélisation TS vient du fait de la systématisation de la méthode directe de Lyapunov [Tanaka and Sugeno, 1992]. L'objectif consiste à trouver une

fonction candidate de Lyapunov afin d'exprimer les conditions de stabilité/stabilisation sous forme d'inégalités linéaires matricielles «**LMIs**». La résolution des LMIs peut être effectuée via des techniques d'optimisation convexe. Afin de bien comprendre la suite du manuscrit, quelques notions de base sont présentées. Pour plus de détails sur l'utilisation des LMIs dans le domaine de la commande, le lecteur pourra se référer à [Boyd et al., 1994, Scherer and Weiland, 2000].

Définition II.1

Une fonction $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si $\forall \{x, y\} \in \mathbb{R}^m$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \quad (\text{II.13})$$

Définition II.2

Une contrainte LMI est définie sous la forme suivante :

$$F(x) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i < 0 \quad (\text{II.14})$$

où $x \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur inconnu contenant les variables de décision, $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $i \in \Omega_m$ sont des matrices symétriques données.

En d'autres termes, $F(x) < 0$ veut dire que toutes les valeurs propres $\lambda(F(x))$ de $F(x)$ sont strictement négatives.

II.4.1 Classes des Problèmes LMIs

Dans le domaine de la commande, il existe trois classes de problèmes LMIs.

a) Problème de faisabilité

L'objectif est de trouver un vecteur $x \in \mathbb{R}^m$ telle que la contrainte LMI (II.14) soit vérifiée. Si cela est possible, le problème LMI est dit faisable, sinon il est non faisable.

b) Problème de minimisation d'un objectif

L'objectif est de minimiser une fonction linéaire des variables de décision tout en vérifiant des contraintes LMIs, i.e. :

$$\begin{cases} \min c^T x \\ F(x) < 0, \end{cases} \quad (\text{II.15})$$

où x est le vecteur de décision et c est un vecteur de dimension appropriée.

c) Problème de minimisation de valeur propre généralisée

L'objectif est de trouver une solution $x \in \mathbb{R}^m$ au problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min \lambda \\ A(x) - \lambda B(x) < 0 \\ B(x) > 0 \\ C(x) > 0 \end{cases} \quad (\text{II.16})$$

où x est le vecteur de décision, λ est un scalaire et $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ sont des matrices symétriques de dimensions appropriées.

II.4.2 Propriétés matricielles

Dans cette partie, quelques lemmes utiles sont présentés. Ces lemmes sont essentiellement utilisés pour transformer un problème d'optimisation non linéaire en problème d'optimisation convexe sous contraintes LMIs.

Lemme II.2 (Propriété de congruence)

Soient deux matrices carrées \mathcal{R} et \mathcal{Q} , si $\mathcal{R} > 0$ et \mathcal{Q} est non singulière, alors la matrice $\mathcal{Q}\mathcal{R}\mathcal{Q}^T$ est définie positive.

Lemme II.3 (Complément de Schur)

Soient les deux matrices symétriques $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et $\mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et une matrice $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Alors, les expressions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q} & \mathcal{S}^T \\ \mathcal{S} & \mathcal{R} \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{II.17})$$

$$\begin{cases} \mathcal{Q} > 0 \\ \mathcal{R} - \mathcal{S}\mathcal{Q}^{-1}\mathcal{S}^T > 0 \end{cases} \quad (\text{II.18})$$

$$\begin{cases} \mathcal{R} > 0 \\ \mathcal{Q} - \mathcal{S}^T\mathcal{R}^{-1}\mathcal{S} > 0 \end{cases} \quad (\text{II.19})$$

Lemme II.4 (Carré matriciel) [Xie and de Souza, 1992]

Soient \mathcal{R} , \mathcal{Q} et $\mathcal{S} = \mathcal{S}^T$ des matrices réelles de dimensions appropriées. L'inégalité suivante est vraie $\forall \mathcal{S} > 0$:

$$\mathcal{R}^T \mathcal{Q} + \mathcal{Q}^T \mathcal{R} \leq \mathcal{R}^T \mathcal{S} \mathcal{R} + \mathcal{Q}^T \mathcal{S}^{-1} \mathcal{Q} \quad (\text{II.20})$$

II.4.3 Quelques notations utiles

Tout au long de ce manuscrit, les notations suivantes sont adoptées :

$$\Upsilon_h = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \Upsilon_i, \quad \Upsilon_{hh} = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij}, \quad \Upsilon_{hv} = \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z(t)) v_k(z(t)) \Upsilon_{ik},$$

$$\Upsilon_{hhv} = \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{j=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z(t)) h_j(z(t)) v_k(z(t)) \Upsilon_{ijk}.$$

l'astérisque (*) sera utilisé dans les expressions matricielles pour indiquer la transposée d'un élément symétrique, par exemple :

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & (*) \\ B & C \end{bmatrix}; \quad A + (*) = A + A^T; \quad AB(*) = ABA^T.$$

II.5 Stabilités des modèles TS

Cette partie concerne l'étude de stabilité des modèles TS continus en utilisant des fonctions de Lyapunov quadratiques. Des conditions suffisantes de stabilité sont données sous la forme d'un problème LMI.

II.5.1 Stabilité des modèles TS standards

Le résultat suivant traite le problème de stabilité du modèle TS standard dans le cas où celui-ci n'est soumis à aucune excitation externe $u(t) = 0$, appelé «Système autonome». Le but est de permettre au lecteur de se familiariser avec les conditions LMIs.

Théorème II.1 [Tanaka and Sugeno, 1992]

L'équilibre $x = 0$ du modèle TS standard autonome ($u(t) = 0$) (II.6a) est asymptotiquement stable s'il existe une matrice $P = P^T > 0$ telle que les LMIs suivantes soient vérifiées pour $i \in \{1, 2, \dots, r\}$:

$$A_i^T P + P A_i < 0 \quad (\text{II.21})$$

Preuve:

Soit la fonction candidate quadratique de Lyapunov :

$$V(x) = x^T P x \quad (\text{II.22})$$

Le système (II.6a) avec ($u(t) = 0$) est stable si :

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T(t) P x(t) + x^T(t) P \dot{x}(t) < 0 \quad (\text{II.23})$$

i.e. :

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t) \left(\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) (A_i^T P + P A_i) \right) x(t) < 0 \quad (\text{II.24})$$

L'inégalité (II.24) est vérifiée si les conditions suffisantes du théorème (II.1) le sont.

■

Remarque II.5 Il est important de noter que les conditions de stabilité données par le théorème (II.1) sont seulement suffisantes et pas nécessaires. Cette remarque est abordée plus en détail dans la section (II.7).

II.5.2 Stabilité des modèles TS descripteurs

Avant d'aborder la question de stabilité des systèmes descripteurs, il est plus judicieux de parler de la notion «d'admissibilité» [Dai, 1989]. Dans le cas descripteur, la notion de stabilité est insuffisante car il faut considérer d'autres propriétés comme la régularité et la non-impulsivité.

II.5.2.1 Propriétés des systèmes descripteurs

Définition II.3 [Dai, 1989]

Considérons le système descripteur (II.8a) dans le cas linéaire et autonome ($u(t) = 0$), le couple (E, A) est dit :

- *Régulier* si $\text{Det}(sE - A) \neq 0, \forall s \in \mathbb{C}$.
- *Non-impulsif* si $\text{Deg}(\text{Det}(sE - A)) = \text{rang}(E)$.
- *Stable* si $(sE - A)$ est Hurwitz.
- *Admissible* s'il est régulier, non-impulsif et stable.

II.5.2.2 Stabilité

Les premiers résultats sur la stabilité des modèles TS descripteur basée sur une fonction candidate quadratique de Lyapunov ont été proposés par [Yoneyama and Ichikawa, 1999, Taniguchi et al., 1999, Taniguchi et al., 2000]. Des conditions suffisantes de stabilité quadratique sont données dans le théorème (II.2).

Théorème II.2 [Taniguchi et al., 2000]

L'équilibre $x = 0$ du modèle TS descripteur autonome ($u(t) = 0$) (II.9a) est asymptotiquement stable s'il existe des matrices $P_1 = P_1^T > 0, P_3, P_4$ telles que les conditions LMIs suivantes soient vérifiées pour $i \in \{1, 2, \dots, r_a\}$ et $k \in \{1, 2, \dots, r_e\}$:

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_3 + P_3^T A_i & (*) \\ P_1 - E_k^T P_3 + P_4^T A_i & -E_k^T P_4 - P_4^T E_k \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{II.25})$$

Preuve:

Considérons la forme augmentée du modèle descripteur (II.9) [Tanaka and Sugie, 1997]

$$\begin{cases} \bar{E} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}_h \bar{x}(t) + \bar{B}_h u(t) & (\text{II.26a}) \\ y(t) = \bar{C}_h \bar{x}(t) + \bar{D}_h u(t) & (\text{II.26b}) \end{cases}$$

avec $\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$, $\bar{E} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{A}_{hv} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ A_h & -E_v \end{bmatrix}$, $\bar{B}_h = \begin{bmatrix} 0 \\ B_h \end{bmatrix}$, $\bar{C}_h = [C_h \ 0]$, $\bar{D}_h = D$,
et I matrice de dimension appropriée.

Soit la fonction candidate quadratique de Lyapunov :

$$V(\bar{x}(t)) = \bar{x}^T(t) \bar{E} P \bar{x}(t) \quad (\text{II.27})$$

où

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{bmatrix} \quad (\text{II.28})$$

La condition de symétrie $\bar{E}^T P = P^T \bar{E}$ conduit à $P_1 = P_1^T > 0$ et $P_2 = 0$, le système descripteur (II.9a) (avec $u(t) = 0$) est stable si :

$$\dot{V}(\bar{x}(t)) = \dot{\bar{x}}^T(t) \bar{E}^T P \bar{x}(t) + \bar{x}^T(t) P^T \bar{E} \dot{\bar{x}}(t) < 0 \quad (\text{II.29})$$

i.e. :

$$\dot{V}(\bar{x}(t)) = \bar{x}^T(t) \left(\bar{A}_{hv}^T P + P^T \bar{A}_{hv} \right) \bar{x}(t) < 0 \quad (\text{II.30})$$

En décomposant les conditions données par l'équation (II.30) selon la décomposition de P , on aboutit facilement aux conditions du théorème (II.2).

■

II.6 Synthèse de contrôleur basé TS

II.6.1 Stabilisation

Le problème de la stabilisation consiste à trouver une loi de commande $u(t)$ pour les modèles (II.6a),(II.9a) satisfaisant des performances en boucle fermée. Pour les modèles TS, plusieurs lois de commande ont été proposées dans la littérature. La loi la plus répandue est la «**PDC**» (*Parallel Distributed Compensation*). Depuis sa définition par [Wang et al., 1996, Tanaka et al., 1998], plusieurs variantes ont été proposées en fonction de la classe des modèles TS considérés. On trouve par exemple la PPDC (*proportional PDC*) [Lin and Er, 2001], la CFD (*compensation et division pour les modèles flous*) [Guerra and Vermeiren, 2001], la SSF (*stabilisation simultanée pour modèles flous*) [Guerra and Vermeiren, 1998] et la PDC modifiée pour les modèle TS descripteur (*Non-PDC*) [Taniguchi et al., 2000].

II.6.1.1 Loi de commande PDC

Cette loi de commande a été proposée pour la première fois par [Wang et al., 1996]. Son avantage réside dans sa capacité à relâcher la loi de commande linéaire $u(t) = -Fx(t)$ en calculant des gains pour chaque sous-modèle. Cela revient à incorporer les fonctions d'appartenance $h_i(z(t))$ dans la synthèse du régulateur. Ainsi cette loi de commande est donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i x(t) \quad (\text{II.31})$$

avec $F_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ représentant les matrices des gains de retour d'état de chaque sous-modèle. La synthèse du régulateur consiste alors à déterminer les matrices F_i .

En substituant la loi de commande (II.31) dans le modèle (II.6a), l'expression du modèle TS standard en boucle fermée est alors :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))(A_i - B_i F_j)x(t) \quad (\text{II.32})$$

Des conditions suffisantes de stabilisation sont présentées dans le théorème suivant.

Théorème II.3 [Wang et al., 1996]

Le modèle TS standard (II.6a) est asymptotiquement stable via la loi de commande (II.31) s'il existe des matrices X définie positive et M_j telles que les conditions LMIs suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{ii} &< 0, & \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, r\} \\ \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} &< 0, & \text{pour } i, j \in \{1, 2, \dots, r\} \text{ et } i < j \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

avec $\Upsilon_{ij} = A_i X - B_i M_j + X A_i^T - M_j^T B_i^T$, $X = P^{-1}$, $M_j = F_j P^{-1}$

Preuve:

L'application de la fonction candidate quadratique de Lyapunov donnée par le théorème (II.1) conduit à :

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t)((A_h - B_h F_h)^T P + P(A_h - B_h F_h))x(t) \quad (\text{II.34})$$

En appliquant la propriété de congruence (Lemme II.2) avec $X = P^{-1}$ et en posant $M_j = F_j P^{-1}$, on obtient

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \Leftrightarrow A_h X - B_h M_h + X A_h^T - M_h^T B_h^T < 0 \quad (\text{II.35})$$

■

Exemple II.3

Reprenons le modèle TS du système manivelle-coulisseau (Exemple II.1) avec : $m = 5 \text{ kg}$, $l = 0,5 \text{ m}$, $J = 8,75 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $q_0 = 10^\circ$, $q_{ref} = 10^\circ$, $10^\circ \leq q \leq 170^\circ$, $|\dot{q}| \leq -100^\circ/\text{s}$. Ce système peut être stabilisé via une loi PDC (Figure II.3) pour

$$P = \begin{bmatrix} 1631,9 & 54,9 \\ 54,9 & 4,3 \end{bmatrix}, F_1 = [126,5 \quad 17], F_2 = [126,5 \quad 5], F_3 = [126,5 \quad 19], F_4 = [126,5 \quad 6,3].$$

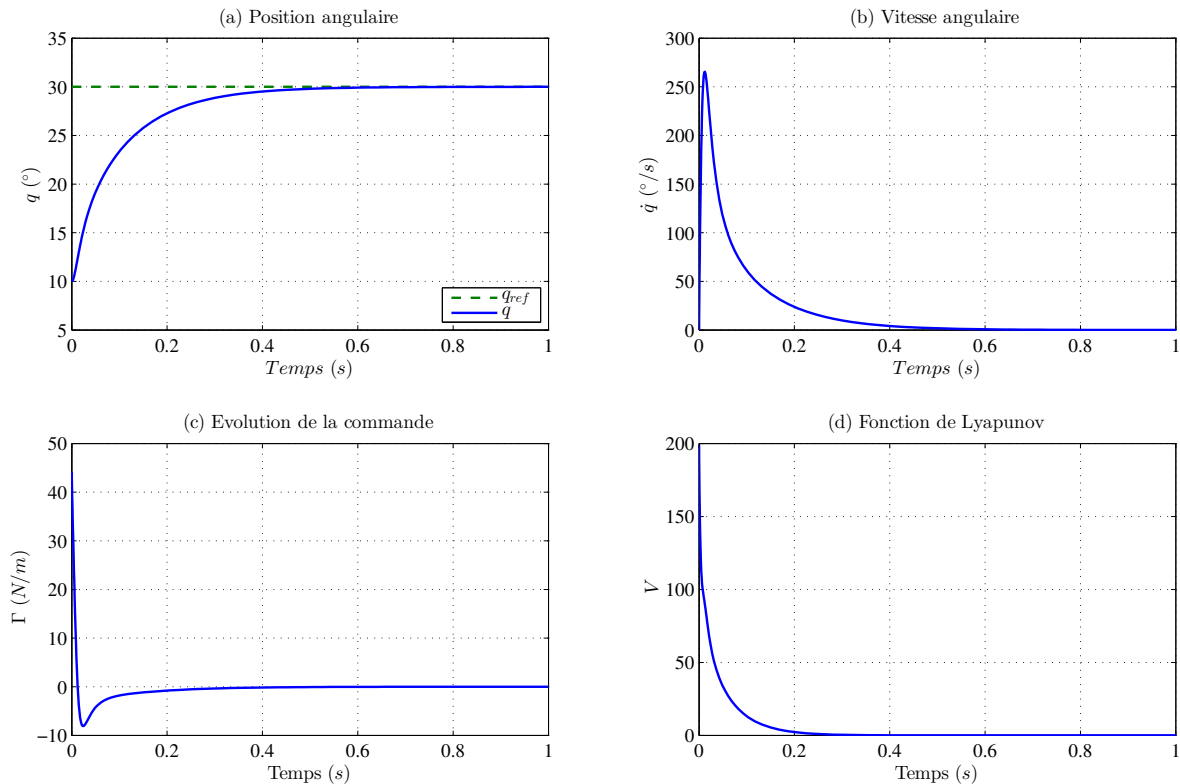


FIGURE II.3: Stabilisation PDC du système manivelle-coulisseau

II.6.1.2 Loi de commande Non-PDC

Bien que son appellation soit la Non-PDC, cette loi de commande a été proposée par [Taniguchi et al., 2000] dans le but d'étendre l'utilisation de la technique de stabilisation PDC aux systèmes descripteurs. Elle incorpore les fonctions d'appartenance $h_i(z(t))$ et $v_k(z(t))$ dans la synthèse du régulateur. Ainsi cette loi de commande est donnée par :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z(t)) v_k(z(t)) F_{ik} x(t) \quad (\text{II.36})$$

avec $F_{ik} \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$, $i \in \{1, 2, \dots, r_a\}$, $k \in \{1, 2, \dots, r_e\}$ représentant les matrices des gains de retour d'état de chaque sous-modèle. La synthèse du régulateur consiste alors à déterminer les matrices F_{ik} .

En utilisant la forme augmentée (II.26), la loi de commande (II.36) peut être réécrite sous la forme :

$$u(t) = -\bar{F}_{hv} \bar{x}(t) \quad (\text{II.37})$$

avec $\bar{F}_{hv} = \begin{bmatrix} F_{hv} & 0 \end{bmatrix}$.

En substituant la loi de commande (II.37) dans le modèle (II.26a), l'expression du modèle TS descripteur en boucle fermée est alors :

$$\bar{E} \dot{\bar{x}}(t) = (\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{F}_{hv}) \bar{x}(t) \quad (\text{II.38})$$

Les conditions suffisantes de stabilisation sont présentées dans le théorème suivant.

Théorème II.4 [Taniguchi et al., 2000]

Le modèle TS descripteur (II.9a) est asymptotiquement stable via la loi de commande (II.36) s'il existe des matrices $X_1 = X_1^T > 0$, X_3 , X_4 et M_{jk} telles que les conditions LMIs suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} \Upsilon_{iik} &< 0 && \text{pour } i \in \{1, 2, \dots, r_a\}, k \in \{1, 2, \dots, r_e\} \\ \Upsilon_{ijk} + \Upsilon_{jik} &< 0 && \text{pour } i, j \in \{1, 2, \dots, r\}, k \in \{1, 2, \dots, r_e\} \text{ et } i < j \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

$$\text{avec } \Upsilon_{ijk} = \begin{bmatrix} X_3 + X_3^T & (*) \\ A_i X_1 - B_i M_{jk} - E_k X_3 + X_4^T & -E_k X_4 - (E_k X_4)^T \end{bmatrix} \text{ et } F_{jk} = M_{jk} X_1^{-1}.$$

Preuve:

Reprenons la fonction candidate quadratique de Lyapunov (II.27) ainsi que la condition de symétrie. En posant $X = P^{-1} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ X_3 & X_4 \end{bmatrix}$ avec $X_1 = X_1^T > 0$.

En suivant le même raisonnement que dans la démonstration du théorème (II.3), on obtient

$$\dot{V}(x(t)) < 0 \Leftrightarrow \bar{A}_{hv} X - \bar{B}_h \bar{F}_{hv} X + X^T \bar{A}_{hv}^T - X^T \bar{F}_{hv}^T \bar{B}_h^T < 0 \quad (\text{II.40})$$

En décomposant les conditions données par l'équation (II.40) selon la décomposition de X et en posant $M_{hv} = F_{hv} X_1$, on aboutit facilement aux conditions du théorème (II.4). ■

Exemple II.4

Reprenons l'exemple (II.3). Le système peut être stabilisé via une loi Non-PDC (Figure II.4) pour $P_1 = \begin{bmatrix} 4198 & 361,4 \\ 361,4 & 41,7 \end{bmatrix}$, $F_{11} = [107 \ 11]$, $F_{12} = [107 \ 19]$, $F_{21} = [107 \ 13]$, $F_{22} = [107 \ 21]$.

II.6.2 α -stabilité

L' α -stabilité est une technique très simple utilisée pour l'amélioration des performances d'un système dans le domaine temporel. À partir d'une condition initiale x_0 , l'idée est d'imposer un critère afin que la trajectoire en boucle fermée converge le plus rapidement possible vers le point d'équilibre.

Définition II.4 Les systèmes (II.6a), (II.9a) sont dit α -stables, s'il existe $\alpha > 0$ tel que la dérivée de la fonction de Lyapunov $\dot{V}(x(t))$ satisfait l'inégalité suivante :

$$\dot{V}(x(t)) \leq 2\alpha V(x(t)), \quad \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}. \quad (\text{II.41})$$

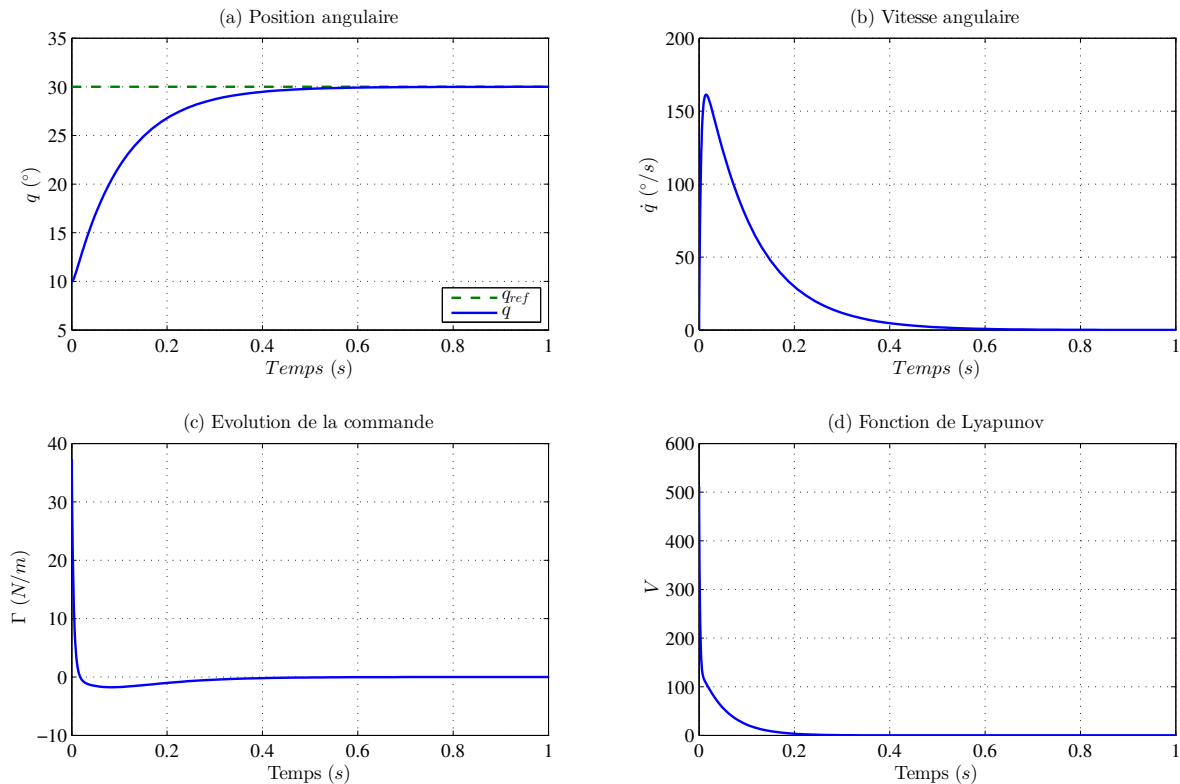


FIGURE II.4: Stabilisation Non-PDC du système manivelle-coulisseau

II.6.3 Poursuite de trajectoire (PDC étendue)

En général, l'étude de stabilité au sens de Lyapunov s'effectue autour d'un point d'équilibre. Dans le cas de la poursuite de trajectoire, la dynamique des signaux d'excitation (signaux exogènes) influencent directement la dynamique du système. Dans ce cas, la stabilité Entrée-État (ISS : input-to-state stability) doit être étudiée [Sontag and Wang, 1995]. Avant de rappeler la propriété de stabilité ISS, la définition suivante est à noter.

Définition II.5 Une fonction continue $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est de classe \mathcal{K} si elle est croissante et $\alpha(0) = 0$. De plus, si $\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha(s) = \infty$, alors α est dite de classe \mathcal{K}^∞ .

Propriété II.1 [Sontag and Wang, 1995]

Considérons le système non linéaire $\dot{x} = f(x) + g(x)u$ et la fonction candidate de Lyapunov $V : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^+$, telle que $V(0) = 0$ et $(V(x) > 0, \forall x \neq 0)$. S'il existe deux fonction $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ de classe \mathcal{K}^∞ telle que $\dot{V}(x) \leq \beta(\|u\|) - \alpha(\|x\|) \forall x \in \mathbb{R}^{n_x}$ et $u \in \mathbb{R}^{n_u}$, alors le système est stable entrée-état.

Dans le cas d'un modèle TS, la matrice de commande B_h est bornée par définition. À partir de cela, on peut facilement déduire que la propriété de stabilité ISS (II.1) est vérifiée si le système est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov [Lendek et al., 2011]. Ce constat permet de conclure que les conditions LMI établies précédemment garantissent aussi la stabilité ISS.

Dans le cas de la poursuite de trajectoire où la référence varie lentement, une structure intégrale peut être rajoutée (Figure.II.5) afin d'éliminer l'erreur au régime permanent.

Considérons le vecteur d'état augmenté $x^*(t) = [x^T \ x_l^T]^T$, Notons que :

$$\dot{x}_l = y_d - y = y_d - C_h x(t) \quad (\text{II.42})$$

Le modèle TS en boucle fermée est donné par :

$$\begin{cases} \dot{x}^*(t) = \sum_{j=1}^r \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) (A_i^* + B_i^* F_j^*) x^*(t) + B_0 y_d(t) \end{cases} \quad (\text{II.43a})$$

$$\begin{cases} y(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) C_i^* x^*(t) \end{cases} \quad (\text{II.43b})$$

avec $A_i^* = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ -C_i & 0 \end{bmatrix}$, $B_i^* = \begin{bmatrix} B_i \\ 0 \end{bmatrix}$, $C_i^* = [C_i \ 0]$, $B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$; 0 et I sont des matrices de dimensions adéquates. Par conséquent, la loi de commande PDC étendue peut être écrite comme

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) F_i^* x^*(t) \quad (\text{II.44})$$

avec $F_i^* = [F_i \ L_i]$.

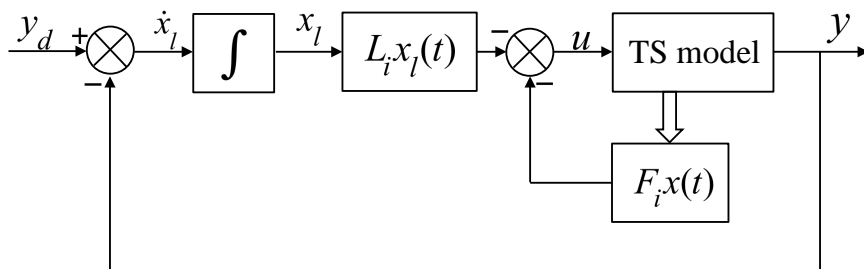


FIGURE II.5: Commande PDC avec partie intégrale

Dans le cas TS descripteur, le schéma de commande est le même avec une loi Non-PDC étendue, $u(t) = - \sum_{i=1}^{r_a} \sum_{k=1}^{r_e} h_i(z(t)) v_k(z(t)) F_i^* x^*(t)$ [Vermeiren et al., 2012].

II.6.4 Robustesse

La modélisation d'un système physique est une phase cruciale dans la synthèse du régulateur. À cause d'incertitudes, le modèle mathématique peut ne pas refléter la réalité physique du système. Néanmoins, si on arrive à caractériser ces incertitudes, il est possible de compléter le modèle nominal par une partie supplémentaire incertaine. Les sources d'incertitudes sont nombreuses mais elles sont généralement classées en deux catégories [Dubuisson, 1990, Oustaloup and Mathieu, 1999] :

- **Incertaines non structurales** dites également non paramétriques. Elles représentent des dynamiques externes, par exemple : bruit de mesures, perturbations externes, etc. En général leurs dynamiques sont inconnues et on ne dispose d'aucune information sur leurs façons d'agir sur le système. Par contre, on sait qu'elles sont bornées en normes.

- **Incertitudes structurelles** dites aussi de modélisation ou paramétriques. Elles sont généralement dues à des erreurs d'approximation et/ou de simplifications nécessaires afin d'obtenir un modèle de commande exploitable reflétant au mieux la dynamique réelle du système physique.

Dans cette partie, uniquement la robustesse des contrôleurs TS vis-à-vis d'incertitudes structurelles est présentée.

Considérant le modèle TS incertain suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_h + \Delta A_h)x(t) + (B_h + \Delta B_h)u(t) & \text{(II.45a)} \\ y(t) = (C_h + \Delta C_h)x(t) & \text{(II.45b)} \end{cases}$$

avec ΔA_h , ΔB_h et ΔC_h des matrices incertaines supposées bornées et décomposables sous la forme suivante [Kau et al., 2007] : $\Delta A_h = H_a \Delta a_h(t) W_{a_h}$, $\Delta B_h = H_b \Delta b_h(t) W_{b_h}$ et $\Delta C_h = H_c \Delta c_h(t) W_{c_h}$, où H_a , H_b , H_c , W_{a_h} , W_{b_h} , W_{c_h} sont des matrices constantes de dimensions appropriées et $\Delta a_h^T(t) \Delta a_h(t) \leq I$, $\Delta b_h^T(t) \Delta b_h(t) \leq I$, $\Delta c_h^T(t) \Delta c_h(t) \leq I$.

À partir du modèle TS incertain (II.45a). Les conditions LMIs de stabilisation robuste sont obtenues en suivant le même raisonnement que pour les théorèmes précédents en se basant sur le lemme (II.4) [Tanaka and Wang, 2001]. Plusieurs autres résultats existent dans la littérature [Taniguchi et al., 2001, Lee et al., 2001, Yoneyama, 2006, Tahar, 2009].

II.7 Réduction du conservatisme des conditions LMIs pour les modèles TS

Les résultats précédents traitent les problèmes de stabilité/stabilisation des modèles TS continus. Les conditions LMIs obtenues ne constituent que des conditions suffisantes et non nécessaires car on considère que pour qu'une somme soit négative, il faut que chaque terme de la somme soit négatif. À cause de ce problème de co-négativité, les contraintes LMIs à résoudre sont la plupart du temps très conservatives. Afin de réduire ce conservatisme, il faut chercher des conditions autorisant certains termes à être positifs tout en gardant la négativité de l'ensemble, dans ce cas on parle de conditions LMIs relâchées. En allant de la modélisation TS jusqu'à l'établissement des conditions de stabilité/stabilisation LMIs, plusieurs facteurs sont responsables de ce conservatisme [Sala, 2009].

Un premier facteur est la non-unicité des modèles TS basée sur l'approche des secteurs non linéaires (voir section II.8). Un autre facteur concerne le choix de la fonction candidate de Lyapunov. Ce choix peut être déterminant car le fait de choisir une forme quadratique implique la recherche d'une matrice commune $P = P^T > 0$ satisfaisant les contraintes LMIs pour chaque sous-modèle de la forme TS. De ce fait, pour certains systèmes ces conditions peuvent être très conservatives. Dans cette optique, plusieurs travaux sur la forme de la fonction de Lyapunov ont été effectués. [Johansson et al., 1999, Feng, 2003, Feng, 2004] ont proposé une approche basée sur l'utilisation de fonctions de Lyapunov continues par morceaux «*Piecewise Lyapunov functions*». Néanmoins, cette approche n'est pas applicable pour les modèles TS construits à partir de la méthode des secteurs non linéaires car plusieurs règles du modèle sont actives en même temps. Une alternative plus efficace est l'utilisation d'une fonction de Lyapunov non-quadratique de la forme [Blanco

et al., 2001, Tanaka et al., 2003, Guerra and Vermeiren, 2004, Feng, 2006] :

$$V(x) = x^T \left(\sum_{i=1}^r h_i P_i \right) x, \quad P_i = P_i^T > 0, \quad i \in \{1, 2, \dots, r\}. \quad (\text{II.46})$$

Cette fonction est connue aussi sous le nom de fonction de Lyapunov floue (FLF : Fuzzy Lyapunov Fonction) dans la mesure où les variables de décision P_i sont pondérées via les fonctions d'appartenance h_i . Le fait de donner une certaine flexibilité aux variables de décision permet de réduire le conservatisme des contraintes LMIs. L'un des désavantages de cette forme est l'apparition des dérivées des fonctions d'appartenance dans le calcul de la dérivée de la fonction de Lyapunov. Ces dérivées doivent être bornées et leurs bornes ϕ_i doivent être vérifiées a posteriori $|\dot{h}_i(z)| \leq \phi_i, i \in \{1, 2, \dots, r\}$. Une des solutions à ce problème a été présentée par [Rhee and Won, 2006]. Néanmoins, cette approche est limitée à une famille spécifique de modèles TS et la structure du contrôleur conduit à des conditions BMIs (Bilinear matrix inequalities). Ces conditions sont difficilement résolubles car la propriété de convexité est perdue et il peut exister une multitude de minima locaux. D'autres solutions existent dans la littérature [Bernal and Guerra, 2010, Guerra et al., 2012, Pan et al., 2012]. L'idée est de chercher des conditions de stabilité/stabilisation locale permettant ainsi de borner localement les dérivées des fonctions d'appartenance. Afin d'éviter les désavantages de la FLF, une alternative est basée sur une fonction de Lyapunov sous forme d'intégrale curviligne (Line Integral Lyapunov Function) [Khalil, 2002] :

$$V(x) = 2 \int_{\Gamma(0,x)} \mathcal{F}(\psi) d\psi \quad (\text{II.47})$$

où $\Gamma(0, x)$ est une trajectoire quelconque entre l'origine et l'état actuel x , $\psi \in \mathbb{R}^{n_x}$ est un vecteur de déplacement fictif et $d\psi \in \mathbb{R}^{n_x}$ est un vecteur de déplacement élémentaire infiniment petit. Dans le cas TS, des conditions de stabilisation ont été présentées par [Rhee and Won, 2006], mais toujours en utilisant une formulation BMI. Une contribution à ce problème a été proposée par [Márquez Borbón, 2015], par contre les conditions obtenues ne sont applicables que pour des systèmes du second ordre.

Le dernier point concernant les sources du conservatisme vient de l'interaction des termes croisés du modèles TS dans les conditions LMI. Sachant que les règles TS ne sont pas tous actives au même temps, plusieurs schémas de relaxation ont été proposés. Les lemmes suivants présenteront les résultats les plus connus.

Lemme II.5 [Tanaka and Sano, 1994]

Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}, \forall h_i > 0, \forall h_j > 0$, la condition $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t)) h_j(z(t)) \Upsilon_{ij} < 0$ est vérifiée si les conditions suivantes le sont :

$$\begin{cases} \Upsilon_{ii} < 0 & \text{pour } i = 1, 2, \dots, r \\ \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0 & \text{pour } i, j = 1, 2, \dots, r \text{ et } i < j \end{cases} \quad (\text{II.48})$$

Lemme II.6 [Tuan et al., 2001]

Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\forall h_i > 0$, $\forall h_j > 0$, la condition $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\Upsilon_{ij} < 0$ est vérifiée si les conditions suivantes le sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Upsilon_{ii} < 0 & \text{pour } i = 1, 2, \dots, r \\ \frac{2}{r-1}\Upsilon_{ii} + \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} < 0 & \text{pour } i, j = 1, 2, \dots, r \text{ et } 1 \leq i \neq j \leq r \end{array} \right. \quad (\text{II.49})$$

Lemme II.7 [Liu and Zhang, 2003]

Pour $i, j \in \{1, 2, \dots, r\}$, $\forall h_i > 0$, $\forall h_j > 0$, la condition $\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^r h_i(z(t))h_j(z(t))\Upsilon_{ij} < 0$ est vérifiée si les conditions suivantes le sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Upsilon_{ii} > \Xi_{ii} & \text{pour } i = 1, 2, \dots, r \\ \Upsilon_{ij} + \Upsilon_{ji} > \Xi_{ij} + \Xi_{ji} & \text{pour } i, j = 1, 2, \dots, r \text{ et } i < j \\ \begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \cdots & \Xi_{1r} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} & \cdots & \Xi_{2r} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \Xi_{r1} & \Xi_{r2} & \cdots & \Xi_{rr} \end{bmatrix} > 0 \end{array} \right. \quad (\text{II.50})$$

II.8 Difficultés de l'approche TS en robotique

Nous avons vu dans la partie précédente les différentes sources du conservatisme des conditions LMIs ainsi que les différentes contributions apportées afin de réduire ce conservatisme. Au meilleur de nos connaissances, la majorité des résultats dans la littérature traite ce problème d'une façon purement mathématique (choix de la fonction de Lyapunov et/ou nouvelles conditions de relaxation, etc.) sans pour autant remettre en cause la première source de ce conservatisme qui est le nombre de termes non linéaires et leur distribution dans le modèle dynamique. L'utilisation de lemmes de relaxation semble quasi incontournable dans la synthèse des régulateurs TS. Dans certain cas, nous sommes alors amené à introduire un certain nombre de variables supplémentaires conduisant à une situation paradoxale : les conditions LMIs sont moins conservatives, mais plus longues, voire même impossibles à résoudre du fait de la limitation en efficacité des solveurs actuels.

En général, l'approche de Lyapunov permet de prouver la «stabilité globale» d'un système non linéaire i.e., $V(x(t))$ est décroissante $\forall x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$. Par contre, dans le cas d'un système non linéaire modélisé sous forme TS, cette stabilité n'est garantie que localement, à l'intérieur d'un ensemble compact Ω où le modèle TS est strictement équivalent au système non linéaire.

En robotique, le fait de prouver localement la stabilité n'est en aucun cas un inconvénient car les robots sont confinés à des espaces de travail bien définis permettant ainsi de borner le modèle TS à l'intérieur de Ω . Malgré ceci, la question sur le conservatisme des contraintes LMIs pourrait avoir plusieurs interprétations suivant l'application. Par exemple :

En robotique sérielle, le modèle dynamique (équations du mouvement) d'un robot possédant n articulations (à 1 ddl) avec les coordonnées articulaires $q \in \mathbb{R}^n$ et les entrées de commande $u \in \mathbb{R}^n$, vérifie tout le temps les propriétés suivantes [Dabney et al., 2002] :

Propriété II.2

- P_1 Le nombre d'équations différentielles est égale au nombre de ddl, permettant ainsi une représentation d'ordre minimale.
- P_2 L'équation du mouvement est donnée sous forme explicite.
- P_3 Le modèle du robot est défini sur tout l'espace n-dimensionnel \mathbb{R}^n .

Notons que P_3 n'implique pas que toutes les valeurs de \mathbb{R}^n sont atteignables, mais au moins le modèle non linéaire est défini sur tout l'espace. Ces propriétés impliquent que les techniques de commande basées modèle dynamique, par exemple de type «Computed Torque Control» [Spong and Vidyasagar, 2008], peuvent assurer une stabilité globale. En conséquence, dans ce cas, le conservatisme des contraintes LMIs est dû uniquement à la complexité du modèle TS (nombre de règles important ou bornes très larges).

En robotique parallèle, le problème est plus complexe, car en général il est impossible d'écrire l'équation du mouvement avec les propriétés (II.2). Ceci est causé par la présence d'au moins une boucle cinématique dans le système ce qui se traduit par l'ajout de contraintes algébriques. Par conséquent, les propriétés P_2 , P_3 ne sont pas vérifiées [Ghorbel et al., 2000]. Dans ce cas, il est difficile d'affirmer que l'absence de solution LMIs est dû au conservatisme. Il se peut que le modèle TS dans Ω passe par des singularités. La solution à ce problème n'est pas triviale car il faudra retravailler le modèle TS afin de redéfinir un ensemble Ω sans singularités.

Le dernier exemple que nous traitons concerne les systèmes sous-actionnés. Dans ce cas, il est toujours possible d'écrire le modèle TS à l'intérieur de Ω , mais, rien ne garantit que cet ensemble représente le bassin d'attraction ν de $x(t) = 0$ [Sala, 2009]. Si les conditions LMIs ne sont pas vérifiées, cela pourrait signifier que l'ensemble Ω est très large, pouvant même contenir des trajectoires divergentes. La complexité des contraintes LMIs est étroitement liée à l'identification du bassin d'attraction, tâche souvent complexe pour des systèmes ayant plus d'un DDL.

II.9 Conclusion

Ce chapitre a donné un bref aperçu sur la formulation des systèmes non linéaires sous formes TS standard et/ou descripteur. Ce chapitre a montré comment sont formulées les conditions suffisantes de stabilité/stabilisation via la théorie de Lyapunov et les inégalités linéaires matricielles (LMIs). Par souci de concision, uniquement la fonction de Lyapunov quadratique a été utilisée pour la formulation des contraintes LMIs. Un bref aperçu sur la α -stabilité, la robustesse et la propriété ISS pour les problèmes de suivi de trajectoire a été donné. La question sur le conservatisme des contraintes LMIs a été abordée, leurs principales sources ont été discutées ainsi que les différentes pistes de recherche permettant de les relâcher. Enfin, une brève discussion sur l'applicabilité de l'approche en robotique a été présentée. Ce dernier point sera analysé beaucoup plus en détail tout au long de ce manuscrit. Pour un état de l'art beaucoup plus exhaustif, le lecteur pourra se référer aux références suivantes : [Boyd et al., 1994, Scherer and Weiland, 2000, Tanaka and Wang, 2001, Sala, 2009].

Chapitre III

Commande des robots auto-équilibrés

« Seulement ceux qui prendront le risque d'aller trop loin découvriront jusqu'où on peut aller »

Thomas Stearns Eliot

Sommaire

III.1 Introduction	56
III.2 Commande robuste d'un robot auto-équilibré sur une pente	56
III.2.1 Modèle dynamique	56
III.2.2 Angle d'équilibre naturel	58
III.2.3 Modèle TS descripteur	59
III.2.4 Loi de commande	60
III.2.5 Résultats de simulation	63
III.3 Franchissement d'obstacle à l'aide d'un robot auto-équilibré	65
III.3.1 Modèle dynamique	67
III.3.2 Angle d'équilibre naturel	69
III.3.3 Comparaison entre les modèles TS standard et descripteur	69
III.3.4 Stratégie du franchissement d'obstacle	71
III.3.5 Stabilisation	72
III.4 Conclusion	73

III.1 Introduction

Une question couramment posée en robotique mobile est : comment concevoir et commander un véhicule urbain capable de naviguer dans des espaces étroits ? Du point de vue de la robotique, le véhicule auto-équilibré à deux roues semble être une bonne solution en raison de son faible encombrement et de sa capacité à manœuvrer dans des espaces étroits. Cependant, du point de vue de la commande, ce robot est un système complexe sous-actionné [Xu et al., 2012, Huang et al., 2010]. La plupart des articles dans la littérature traitent le problème de commande d'un robot auto-équilibré comme un simple problème de stabilisation en considérant que le déplacement s'effectue sur une surface plane [Tirmant et al., 2002, Grasser et al., 2002, Xu et al., 2012, Ha et al., 1996, Chan et al., 2013]. Néanmoins, on trouve quelques études portant sur l'influence des irrégularités du sol [Huang et al., 2010, Kausar et al., 2012, Chan et al., 2013]. Dans certaines applications critiques telles que le transport des personnes à mobilité réduite, l'enjeu sur la sécurité des utilisateurs est de taille. Pour cette raison, il est important de poser la question plus en détail, non seulement pour vérifier la faisabilité du problème, mais aussi pour identifier les différents paramètres le rendant complexe. L'objectif de cette étude est de proposer des solutions de commande pour le robot auto-équilibré en se basant sur l'approche TS. Deux problématiques seront abordées, la première traite le déplacement du robot sur un terrain en pente : une loi de commande non-PDC étendue robuste en utilisant un modèle TS descripteur est proposée pour la stabilisation du robot. La deuxième étude porte sur le franchissement d'obstacle : l'objectif est de proposer un modèle dynamique dans ce cas de figure, puis d'étudier la faisabilité du problème en se basant sur différentes approches TS. Cette étude permettra de montrer l'intérêt de la forme TS descripteur par rapport à l'approche TS standard [Tanaka and Wang, 2001, Taniguchi et al., 2001]. Elle permettra aussi de mettre en évidence l'intérêt de l'utilisation des fonctions de Lyapunov non-quadratiques pour réduire le conservatisme des contraintes LMIs [Guerra and Vermeiren, 2004].

III.2 Commande robuste d'un robot auto-équilibré sur une pente

III.2.1 Modèle dynamique

Considérons un robot auto-équilibré (Figure.III.1). Sous l'hypothèse que l'utilisateur est solidaire au châssis durant le mouvement, l'ensemble (utilisateur + châssis) peut être représenté par un solide en libre rotation autour de l'axe de la roue. Comme représenté sur la figure (III.1), ψ et $\dot{\theta}$ sont respectivement, l'angle de basculement du solide et la vitesse angulaire de la roue. On suppose que le système se déplace sur une pente d'angle α . Les notations utilisées sont définies comme suit :

m_w, m_b - masses de la roue et du solide.

I_w, I_b - moments d'inertie de la roue et du solide.

l - distance entre le centre de gravité du solide et l'axe de rotation de la roue.

R - rayon de la roue.

b - coefficient de frottement visqueux.

Γ - couple moteur.

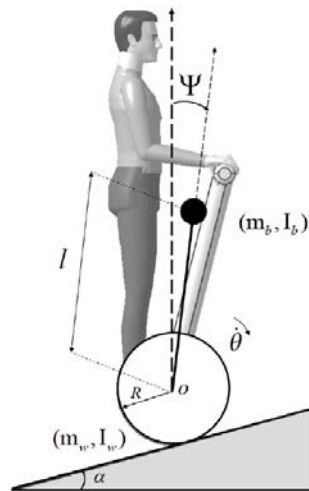


FIGURE III.1: Vue dans le plan du pendule inversé à 2 roues

Afin de modéliser la dynamique du robot auto-équilibré, les hypothèses suivantes ont été faites pour simplifier le modèle :

- le mouvement du robot est limité au plan longitudinal ;
- le robot et l'utilisateur sont supposés être des corps rigides ;
- la masse de chaque roue est supposée concentrée dans son centre.
- les roues tournent avec un angle θ et aucun glissement ne se produit entre les roues et le sol ;
- chaque roue est en contact avec le sol en un seul point.

Le modèle dynamique est obtenu à l'aide du formalisme de Lagrange, les énergies cinétique et potentielle sont écrites sous la forme suivante :

$$T = \frac{1}{2} [m_w R^2 + m_b R^2 + I_w] \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} [m_b l^2 + I_b] \dot{\psi}^2 + m_b R l \dot{\theta} \dot{\psi} \cos(\psi + \alpha) \quad (\text{III.1})$$

$$U = (m_w + m_b) g R \theta \sin \alpha + m_b g l \cos \psi \quad (\text{III.2})$$

On considère que la seule dissipation d'énergie est due au frottement visqueux du système :

$$D = \frac{1}{2} b \dot{\theta}^2 \quad (\text{III.3})$$

Les équations dynamiques sont dérivées à partir du Lagrangien $\mathcal{L} = T - U$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = \Gamma_{1,2} \quad (\text{III.4})$$

où $q_1 = \theta$, $q_2 = \psi$. Finalement, le modèle dynamique du robot auto-équilibré sur une pente est obtenu sous la forme suivante :

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta} + J_{12} \cos(\psi + \alpha) \ddot{\psi} + b \dot{\theta} - J_{12} \sin(\psi + \alpha) \dot{\psi}^2 + K_1(\alpha) = \Gamma \\ J_{12} \cos(\psi + \alpha) \ddot{\theta} + J_2 \ddot{\psi} - K_2 \sin \psi = -\Gamma \end{cases} \quad (\text{III.5a})$$

$$(\text{III.5b})$$

où :

$$\begin{aligned} J_1 &= m_w R^2 + m_b R^2 + I_w \\ J_2 &= m_b l^2 + I_b \\ J_{12} &= m_b R l \\ K_1(\alpha) &= (m_w + m_b) g R \sin \alpha \\ K_2 &= m_b g l \end{aligned}$$

L'équation (III.5) montre que la dynamique du robot auto-équilibré est fortement liée aux caractéristiques inertielles de l'utilisateur (m_b, I_b). Ces paramètres sont souvent incertains. Cela implique une synthèse de loi de commande robuste vis-à-vis des variations paramétriques du système.

Soit $x^T = [\psi \quad \dot{\theta} \quad \dot{\psi}]$ le vecteur d'état, la forme descripteur du système est donnée par :

$$E(x)\dot{x}(t) = A(x)x(t) + B\Gamma(t) + D \quad (\text{III.6})$$

avec

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & J_{12} \cos(\psi + \alpha) \\ 0 & J_{12} \cos(\psi + \alpha) & J_2 \end{bmatrix}; \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & J_{12} \sin(\psi + \alpha) \dot{\psi} \\ K_2 \frac{\sin \psi}{\psi} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ -K_1(\alpha) \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

III.2.2 Angle d'équilibre naturel

La particularité du déplacement du robot sur un plan incliné est liée au fait que l'angle d'équilibre naturel de ce dernier n'est plus autour de $\psi = 0$ comme dans le cas d'une surface plane. Dans ce cas, l'équilibre naturel est situé autour d'un angle ($\psi = \delta$). Cet angle représente l'inclinaison naturelle du robot permettant ainsi l'alignement du centre de gravité de tout le système à la verticale du point de contact sur le sol (Figure.III.2). À partir de cela, l'angle d'équilibre naturel peut être exprimé mathématiquement sous la forme suivante :

$$\delta = \sin^{-1} \left[\frac{(m_w + m_b)R}{m_w l} \sin(\alpha) \right] \quad (\text{III.7})$$

L'expression (III.7) permet de déterminer l'angle d'équilibre naturel dans le cas statique. En dynamique, cette expression peut être complétée de la façon suivante [Huang et al., 2009] :

$$\delta = \sin^{-1} \left[\frac{(m_w + m_b)R}{m_w l} \sin(\alpha) + \frac{b\dot{\theta}}{m_b g l} \right] \quad (\text{III.8})$$

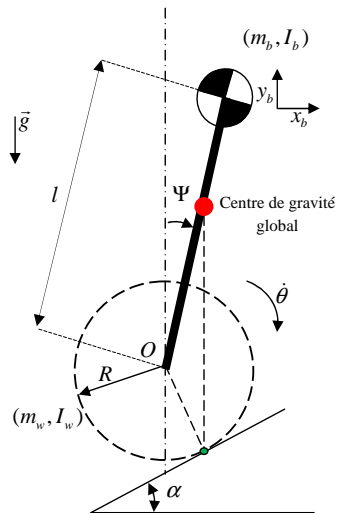


FIGURE III.2: Angle d'équilibre instable sur une pente

De l'équation (III.8), l'angle d'équilibre naturel du système est fonction de l'angle de la pente, des paramètres inertiels du système (utilisateur + robot), de la nature du contact ainsi que de la vitesse de déplacement. De ce fait, il est compliqué de calculer l'angle d'équilibre au préalable car ceci nécessite l'estimation de l'angle de la pente. De même, ce cas de figure montre que la stabilisation du robot auto-équilibré à partir d'un modèle linéarisé est peu crédible car l'angle d'équilibre naturel est non seulement inconnu mais aussi variable [Huang et al., 2010].

III.2.3 Modèle TS descripteur

Le modèle TS descripteur du robot auto-équilibré est obtenu en considérant les trois non-linéarités suivantes de l'équation (III.6) :

$$\begin{cases} \zeta_1 = \cos(\psi + \alpha) \\ \zeta_2 = \frac{\sin(\psi)}{\psi} \\ \zeta_3 = \sin(\psi + \alpha)\dot{\psi} \end{cases} \quad (\text{III.9})$$

La non-linéarité ζ_3 est considérée comme incertaine car il est supposé que la vitesse d'inclinaison du robot est non mesurable. De ce fait, elle peut être décomposée sous la forme suivante :

$$\zeta_3(t) = \zeta_{3m}(t) + \beta(t)\zeta_{3r}(t) \quad (\text{III.10})$$

avec $\beta \in [-1, 1]$, $\zeta_{3m} = \frac{\bar{\zeta}_3 + \zeta_3}{2}$ et $\zeta_{3r} = \frac{\bar{\zeta}_3 - \zeta_3}{2}$.

Le modèle TS descripteur obtenu est un modèle à 4 règles ($2^{r_e} \times 2^{r_a} = 4$ règles). La modélisation TS sous forme descripteur a permis de réduire le nombre de règles du modèle par rapport à la modélisation TS standard composée de 8 règles [Tirmant et al., 2002]. L'angle ainsi que la vitesse d'inclinaison du robot auto-équilibré sont supposées bornées : $|\psi| \leq 32^\circ$ et $|\dot{\psi}| \leq 100^\circ/s$. Les fonctions d'appartenance $h_i, v_k, i, k \in \{1, 2\}$ sont calculées comme dans l'exemple (II.2). Finalement, le modèle TS descripteur robuste sur une pente

est donné sous la forme suivante :

$$E_v \dot{x}(t) = (A_h + \Delta A_h)x(t) + B_h \Gamma \quad (\text{III.11})$$

avec

$$\begin{aligned} E_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & J_{12} \\ 0 & J_{12} & J_2 \end{bmatrix}; & E_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & J_1 & 0,85J_{12} \\ 0 & 0,85J_{12} & J_2 \end{bmatrix}; \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & \zeta_{3m} \\ K_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}; & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -b & \zeta_{3m} \\ 0,94K_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \Delta A_h &= H_a \Delta a_h(t) W_{a_h}; & H_a &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad W_a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \zeta_{3r} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

III.2.4 Loi de commande

III.2.4.1 Stabilisation

Afin de réduire le conservatisme du théorème (II.4), considérons le modèle descripteur augmenté (Équation.II.26). Soit la fonction de candidate non-quadratique de Lyapunov :

$$V(\bar{x}) = \bar{x}^T \bar{E} P(z) \bar{x} \quad (\text{III.12})$$

La condition de symétrie $\bar{E} P(z) = P^T(z) \bar{E}$ impose la structure suivante

$$P(z) = \begin{bmatrix} P^1(z) & 0 \\ P^3(z) & P^4(z) \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

avec $P^1(z) = (P^1(z))^T > 0$ et $P^4(z)$ une matrice régulière, l'inverse de $P(z)$ s'écrit alors comme suit :

$$(P(z))^{-1} = X_{hh} = \begin{bmatrix} (P^1(z))^{-1} & 0 \\ -(P^4(z))^{-1} P^3(z) (P^1(z))^{-1} & (P^4(z))^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Par conséquent, pour relâcher les contraintes LMIs, la matrice inverse s'écrit sous la forme suivante :

$$X_{hh} = \begin{bmatrix} X_{hh}^1 & 0 \\ X_{hh}^3 & X_{hh}^4 \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

avec $P^1(z) = (X_{hh}^1)^{-1}$, $P^4(z) = (X_{hh}^4)^{-1}$ et $P^3(z) = (X_{hh}^4)^{-1} (X_{hh}^3) (X_{hh}^1)^{-1}$. La dérivée de la fonction de Lyapunov (III.12) est donnée sous la forme suivante :

$$\dot{V}(\bar{x}) = \dot{\bar{x}}^T \bar{E} P(z) \bar{x} + \bar{x}^T \bar{E} P(z) \dot{\bar{x}} + \bar{x}^T \bar{E} \dot{P}(z) \bar{x} \quad (\text{III.16})$$

$$\text{où } \bar{E} \dot{P}(z) = \begin{bmatrix} \dot{P}^1(z) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De l'équation (III.16), il est difficile de prouver que la fonction de Lyapunov est décroissante et cela est dû au fait que le terme $\dot{P}^1(z) = \partial P^1(z) / \partial z \times \dot{z}$ dépend directement

des dérivées temporelle des variables de prémisses, souvent non mesurables. Quelques solutions à ce problème ont été présentées par [Bernal and Guerra, 2010, Rhee and Won, 2006]. Afin de contourner ce problème, [Vermeiren et al., 2012] ont proposé de prendre la matrice $P^1(z) > 0$ comme constante, cette considération permet d'annuler le terme en $\dot{P}(z)$ de l'équation (III.16) et d'avoir $X_{hh}^1 = X^1$.

Théorème III.1 [Vermeiren et al., 2012]

Le modèle TS descripteur (II.9a) est asymptotiquement stabilisé via la loi de commande (II.36) s'il existe des matrices $X_1 = X_1^T > 0$, X_{ij}^3 , X_{ij}^4 et M_{jk} telles que les conditions LMIs suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^1 > 0, \\ \Upsilon_{iik} < 0, \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, r_a, k = 1, 2, \dots, r_e \\ \frac{2}{r-1} \Upsilon_{iik} + \Upsilon_{ijk} + \Upsilon_{jik} < 0, \quad \text{pour } i, j = 1, 2, \dots, r_a, k = 1, 2, \dots, r_e \text{ et } i \neq j \end{array} \right. \quad (\text{III.17})$$

$$\text{avec } \Upsilon_{ijk} = \begin{bmatrix} X_{ij}^3 + (X_{ij}^3)^T & (*) \\ A_i X^1 - B_i M_{jk} - E_k X_{ij}^3 + (X_{ij}^4)^T & -E_k X_{ij}^4 - (E_k X_{ij}^4)^T \end{bmatrix} \text{ et } F_{jk} = M_{jk} X_1^{-1}.$$

Preuve:

Comme la matrice $P^1(z) > 0$ est à termes constants, la fonction de Lyapunov (Équation.III.16) devient :

$$\dot{V}(\bar{x}) = \dot{\bar{x}}^T \bar{E} P(z) \bar{x} + \bar{x}^T \bar{E} P(z) \dot{\bar{x}} \quad (\text{III.18})$$

$$\dot{V}(\bar{x}) = \bar{x}^T \left[(\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{F}_{hv})^T P(z) + P(z)^T (\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{F}_{hv}) \right] \bar{x} \quad (\text{III.19})$$

$$\dot{V}(\bar{x}) < 0, \forall \bar{x} \neq 0 \Leftrightarrow (\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{F}_{hv})^T P(z) + P(z)^T (\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{F}_{hv}) < 0 \quad (\text{III.20})$$

En utilisant la propriété de congruence (Lemme.II.2) avec $X_{hh} = P^{-1}(z)$, on obtient :

$$X_{hh}^T (\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{F}_{hv})^T + (\bar{A}_{hv} - \bar{B}_h \bar{F}_{hv}) X_{hh} < 0 \quad (\text{III.21})$$

En utilisant $X_{hh} = \begin{bmatrix} X^1 & 0 \\ X_{hh}^3 & X_{hh}^4 \end{bmatrix}$, le modèle descripteur augmenté (Équation.II.26), le complément de Schur (Lemme.II.3) et la relaxation de Tuan (Lemme.II.6), on aboutit aux conditions du théorème (III.1). ■

Remarque III.1 En appliquant la relaxation de Tuan (Lemme.II.6) sur le théorème (II.4), les résultats obtenus sont toujours inclus dans le théorème (III.1). En d'autres termes, les conditions de stabilisation quadratique sont un cas particulier des conditions de stabilisation non quadratique pour $X_{ij}^3 = X_3$ et $X_{ij}^4 = X_4$.

III.2.4.2 Stabilisation robuste

Dans le cas de la stabilisation robuste, le modèle TS descripteur (II.9a) peut être écrit sous la forme suivante :

$$(E_v + \Delta E_v)\dot{x}(t) = (A_h + \Delta A_h)x(t) + (B_h + \Delta B_h)u(t) \quad (\text{III.22})$$

avec ΔE_v , ΔA_h et ΔB_h des matrices incertaines supposées bornées et décomposables (Section II.6.4). À partir du théorème (III.1), les conditions de stabilisation robuste du modèle (III.22) sont données par le corollaire suivant :

Corollaire III.1

Le modèle TS descripteur (III.11) est asymptotiquement stabilisé via la loi de commande (II.36) s'il existe des matrices $X_1 = X_1^T > 0$, X_{ij}^3 , X_{ij}^4 , F_{jk} et des matrices diagonales τ_{ijk}^a , τ_{ijk}^b , τ_{ijk}^e telles que les conditions LMIs suivantes sont vérifiées :

$$\left\{ \begin{array}{l} X^1 > 0, \\ \Upsilon_{iik} < 0, \\ \frac{2}{r-1}\Upsilon_{iik} + \Upsilon_{ijk} + \Upsilon_{jik} < 0, \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{pour } i = 1, 2, \dots, r_a, k = 1, 2, \dots, r_e \\ \text{pour } i, j = 1, 2, \dots, r_a, k = 1, 2, \dots, r_e \text{ et } i \neq j \end{array} \right. \quad (\text{III.23})$$

$$\text{avec } \Upsilon_{ijk} = \begin{bmatrix} X_{ij}^3 + (X_{ij}^3)^T & (*) & (*) & (*) & (*) \\ \Lambda_{ijk} & \Omega_{ijk} & 0 & 0 & (*) \\ W_{a_i} X^1 & 0 & -\tau_{ijk}^a & 0 & 0 \\ W_{b_i} F_{jk} & 0 & 0 & -\tau_{ijk}^b & 0 \\ -W_{e_k} X_{ij}^3 & -W_{e_k} X_{ij}^4 & 0 & 0 & -\tau_{ijk}^e \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{ijk} &= A_i X^1 - B_i F_{jk} - E_k X_{ij}^3 + (X_{ij}^4)^T \\ \text{et } \Omega_{ijk} &= -E_k X_{ij}^4 - (E_k X_{ij}^4)^T + \tau_{ijk}^a H_a H_a^T + \tau_{ijk}^b H_b H_b^T + \tau_{ijk}^e H_e H_e^T. \end{aligned}$$

Preuve:

L'application de la fonction Lyapunov (III.12) sur le modèle (III.22) conduit aux conditions suivantes :

$$\mathcal{M}_{h hv} + \begin{bmatrix} 0 & (*) \\ \Delta A_h X^1 - \Delta B_h F_{hv} - \Delta E_v X_{hh}^3 & -\Delta E_v X_{hh}^4 - (\Delta E_v X_{hh}^4)^T \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.24})$$

$$\text{avec } \mathcal{M}_{h hv} = \begin{bmatrix} X_{hh}^3 + (X_{hh}^3)^T & (*) \\ A_h X^1 - B_h F_{hv} - E_v X_{hh}^3 + (X_{hh}^4)^T & -E_v X_{hh}^4 - (E_v X_{hh}^4)^T \end{bmatrix}.$$

En décomposant les termes incertains, l'inégalité (III.24) devient :

$$\mathcal{M}_{h hv} + \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ H_a & H_b & H_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta a_h(t) & 0 & 0 \\ 0 & \Delta b_h(t) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta e_h(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{a_h} X^1 & 0 \\ W_{b_h} F_{jk} & 0 \\ -W_{e_v} X_{hh}^3 & -W_{e_v} X_{hh}^4 \end{bmatrix} + (*) \right) < 0 \quad (\text{III.25})$$

Par application du lemme (II.4) avec $\mathcal{S} = \begin{bmatrix} \tau_{hhv}^a & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{hhv}^b & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{hhv}^e \end{bmatrix} > 0$, l'inégalité (III.24) est vraie si :

$$\Upsilon_{hhv} = \mathcal{M}_{hhv} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ H_a & H_b & H_e \end{bmatrix} \mathcal{S} (*) + (*) \mathcal{S}^{-1} \begin{bmatrix} W_{a_h} X^1 & 0 \\ W_{b_h} F_{jk} & 0 \\ -W_{e_v} X_{hh}^3 & -W_{e_v} X_{hh}^4 \end{bmatrix} < 0 \quad (\text{III.26})$$

Par application du complément de Schur (Lemme.II.3), l'inégalité (III.26) devient :

$$\Upsilon_{hhv} = \begin{bmatrix} \mathcal{M}_{hhv} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ H_a & H_b & H_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{hhv}^a & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{hhv}^b & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{hhv}^e \end{bmatrix} (*) & (*) \\ \begin{bmatrix} W_{a_h} X^1 & 0 \\ W_{b_h} F_{jk} & 0 \\ -W_{e_v} X_{hh}^3 & -W_{e_v} X_{hh}^4 \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \tau_{hhv}^a & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{hhv}^b & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{hhv}^e \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (\text{III.27})$$

■

III.2.5 Résultats de simulation

Les simulations sont basées sur les paramètres mécaniques donnés en annexe (B.1). Un contrôleur non-PDC robuste avec une action intégrale a été synthétisé (Figure.II.5). Les paramètres nominaux du robot auto-équilibré sont supposés varier sur une plage de 40%. Les gains de la loi non-PDC sont calculés avec la boîte à outils LMI [Gahinet et al., 1994] en considérant une α -stabilisation sur le corollaire (III.1) (Annexe.B.3).

a) Stabilisation

Un des inconvénients majeurs lors de la stabilisation d'un gyropode est le débattement des roues. Comme l'objectif global est de concevoir un robot adapté au déplacement des personnes handicapées à l'intérieur et à l'extérieur de l'habitat, il est important de vérifier l'aptitude du robot à se stabiliser sur une empreinte de sol très petite (souvent le cas à l'intérieur des appartements). Cette aptitude dépend en grande partie des performances du régulateur mais aussi des paramètres dynamiques du robot. Dans cette partie, il est supposé que le robot se retrouve sur une surface plane $\alpha = 0$. L'objectif est de vérifier les performances du régulateur ainsi que d'identifier les paramètres dynamiques permettant de réduire ce débattement. La figure (III.4) montre l'évolution de l'état $x(t) = [\psi \ \dot{\theta} \ \dot{\psi}]^T$ et la commande $\Gamma(t)$ à partir des conditions initiales $X_0 = [-20 \ 0 \ 0]^T$.

Dans une logique de conception, plusieurs simulations avec différents paramètres mécaniques ont été effectuées afin de mettre en évidence l'influence des paramètres dynamiques sur le comportement du robot. Du point de vue de la stabilisation, la loi de commande non-PDC a toujours assuré de bonnes performances. Néanmoins, les résultats (Figure.III.3 et III.4) ont été retenus car il présente une meilleure performance vis-à-vis du débattement des roues sur le sol ($x < 35\text{cm}$) (Figure.III.4). À partir de ce résultat, la conception d'un gyropode stabilisable dans des espaces étroits semble être un problème faisable.

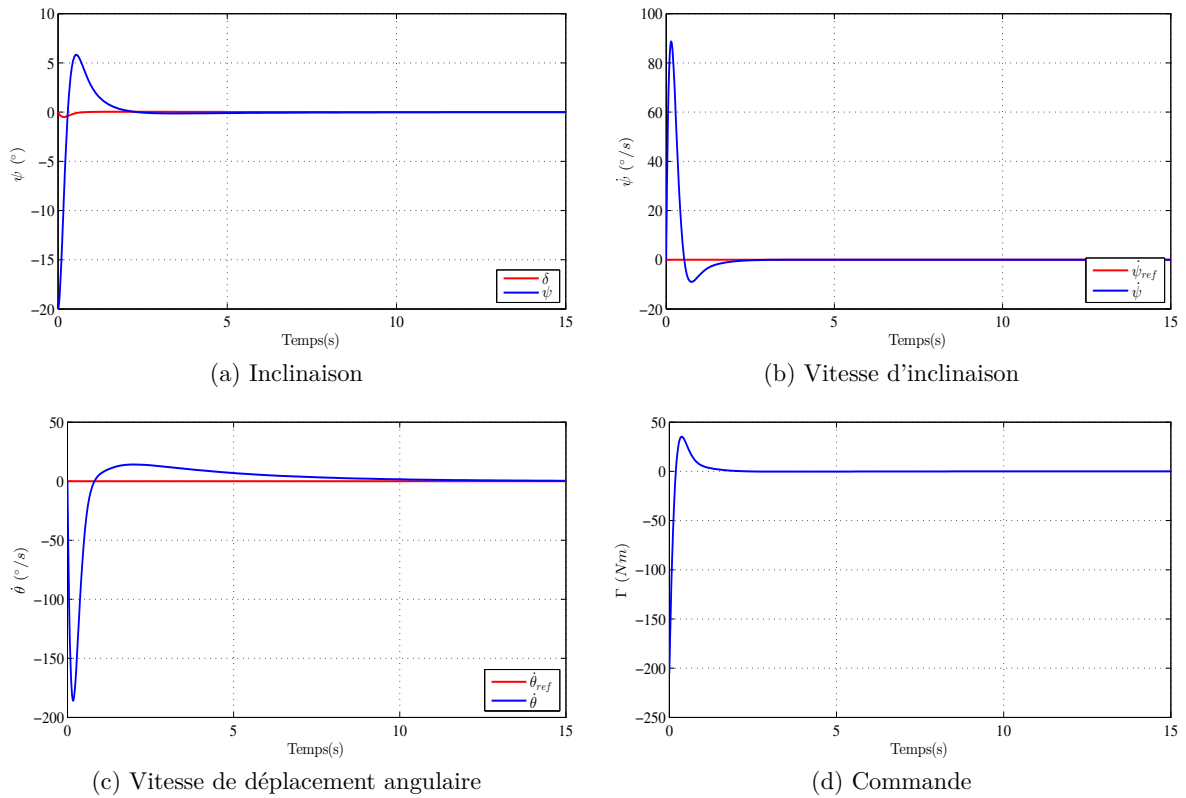
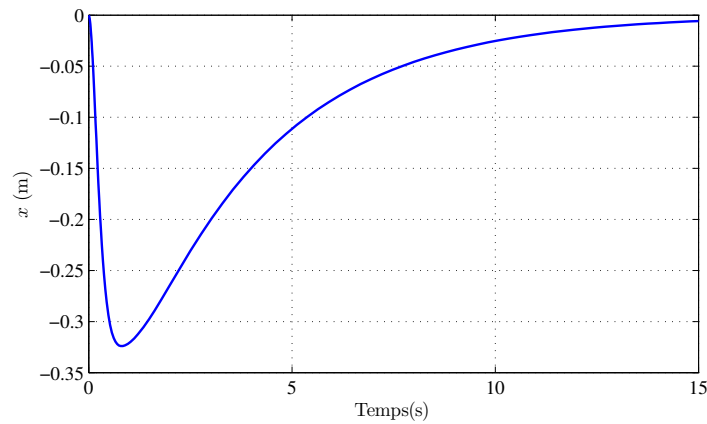
FIGURE III.3: Stabilisation d'un robot auto-équilibré à deux roues pour $\alpha = 0$ 

FIGURE III.4: Empreinte du robot sur le sol pendant la stabilisation

Remarque III.2 Il peut sembler évident pour certains concepteurs que pour réduire le débatement il suffit juste de diminuer la taille des roues. Hélas, cette procédure n'est pas triviale surtout si le robot est supposé franchir de petites marches. Dans ce cas de figure, il a été montré par [Allouche et al., 2014a] que le rapport des masses (m_w/m_b) et le rapport des longueurs (l/R) sont des grandeurs déterminantes lors du franchissement de marche contrôlé.

b) Suivi de consigne en vitesse

Dans cette section, un profil de sol a été imposé. Le but est de simuler un scénario

de navigation pour le robot. Ce test permet de vérifier la robustesse de l'approche TS descripteur.

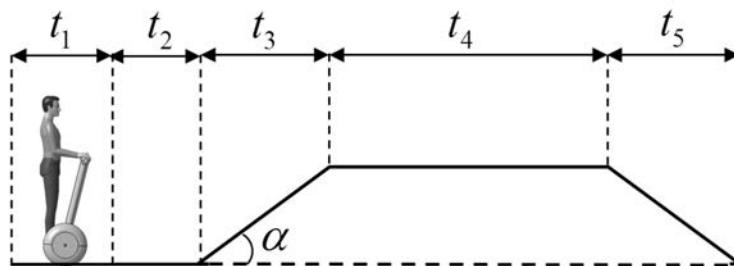


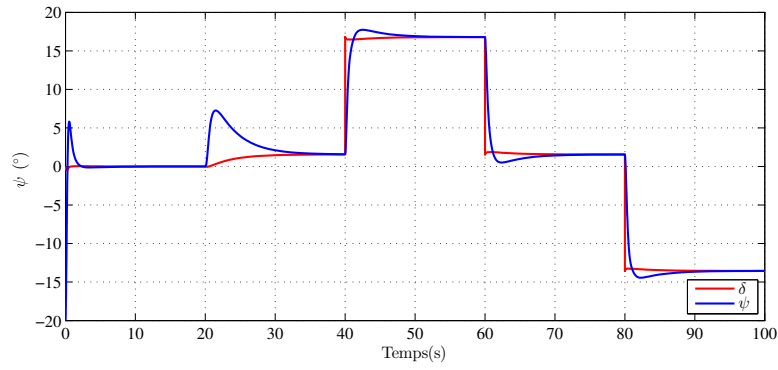
FIGURE III.5: Profil de sol

Le scénario contient cinq étapes de 20 secondes chacune (figure III.5). Dans la première le véhicule se stabilise. Puis, le véhicule se déplace jusqu'à atteindre une vitesse angulaire $\dot{\theta}_{ref}$ équivalente à une vitesse de translation de 10km/h (vitesse 2 fois plus élevée que la vitesse de la marche à pied). Une fois cette vitesse atteinte, le véhicule monte sur une pente de 30% ($\alpha = 16.7^\circ$), cette grandeur est définie par le personnel de santé comme objectif maximal à atteindre lors du déplacement à l'extérieur. Dans la quatrième étape, il se stabilise sur un plan pour un moment puis il descend la pente. Les résultats sont représentés sur la figure (III.6). Grâce à la structure intégrale, le robot suit bien sa consigne de vitesse. De plus, le résultat le plus intéressant est que la loi de commande non-PDC robuste assure une bonne stabilisation de l'angle d'inclinaison du robot ψ autour de son équilibre naturel même si aucune mesure de l'angle de la pente n'est considérée dans la synthèse du régulateur, seules les bornes de variation de la pente sont supposées connues.

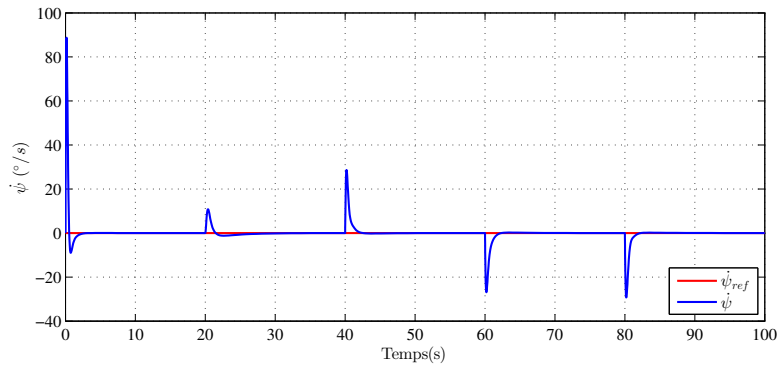
Remarque III.3 Il est à rappeler que les gyropodes sont des systèmes sous-actionnés. Seule la stabilisation autour d'un équilibre est envisageable. Le fait de se déplacer sur une pente avec un angle δ peut avoir un effet indésirable sur l'utilisateur, diminuant ainsi son confort et son sentiment de sécurité. À partir de l'équation (III.8) et en compromis avec les autres fonctionnalités du robot, l'angle d'équilibre naturel δ peut être minimisé dès la phase de conception.

III.3 Franchissement d'obstacle à l'aide d'un robot auto-équilibré

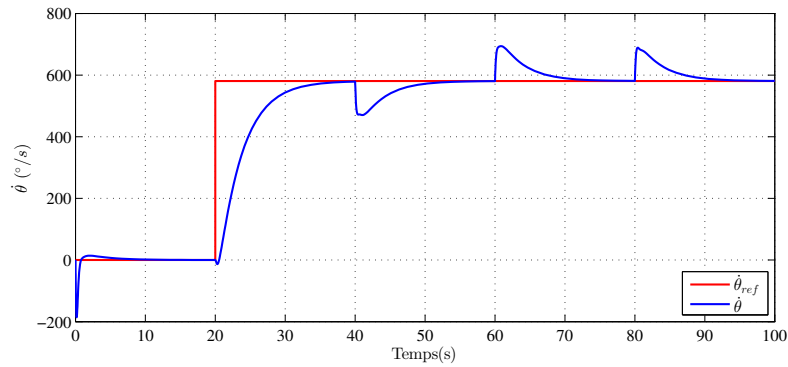
Les marches sont des obstacles fréquents dans l'environnement humain, et souvent il est préférable de les franchir en toute sécurité que de les éviter. Dans certaines applications critiques telles que l'aide à la mobilité des personnes handicapées, la sécurité des utilisateurs représente un enjeu très important. Pour cela il n'est pas suffisant de considérer le franchissement d'obstacle comme une perturbation temporelle à rejeter. Il faut prendre en compte cette dynamique dans le modèle du robot afin de garantir un franchissement contrôlé et sécurisé. À notre connaissance, il n'y a que deux études qui considèrent la problématique du franchissement/descente des marches [Chen et al., 2012, Yap and Hashimoto, 2013]. Ces deux études sont basées sur des modèles dynamiques linéarisés ce qui



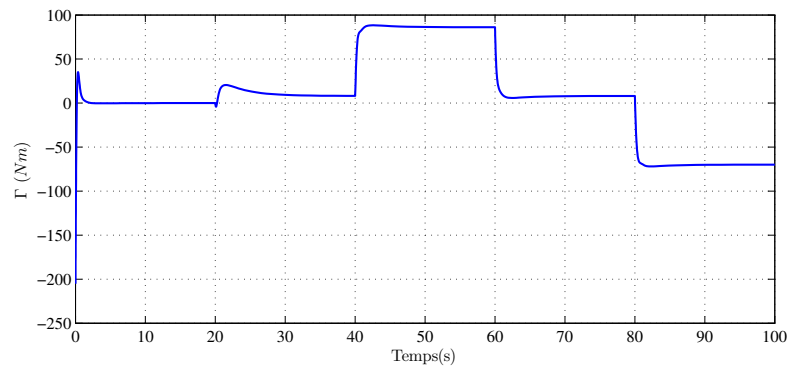
(a) Inclinaison



(b) Vitesse d'inclinaison



(c) Vitesse de déplacement angulaire



(d) Commande

FIGURE III.6: Stabilisation d'un robot auto-équilibré en mouvement pour $\alpha \neq 0$

peut rapidement être insuffisant dans la plupart des situations pratiques rencontrées.

Dans cette partie, seul le problème du franchissement d'obstacle est abordé. L'objectif est d'étudier la faisabilité du problème. L'étude commence par la proposition d'un modèle dynamique d'un robot auto-équilibré pour le franchissement d'obstacle puis une étude de faisabilité basée sur une comparaison entre les modèles TS standard et descripteur est proposée. Enfin, une stratégie pour un franchissement d'obstacle réussi est proposée puis validée en simulation.

III.3.1 Modèle dynamique

Le robot auto-équilibré est modélisé uniquement dans la phase du franchissement d'obstacle. Pour bien comprendre cette phase, il est important de souligner ce qui se passe avant. Dans [Chen et al., 2012], les auteurs ont décomposé le franchissement d'obstacle en trois phases distinctes suivant le contact (roue/sol), (Figure III.7).

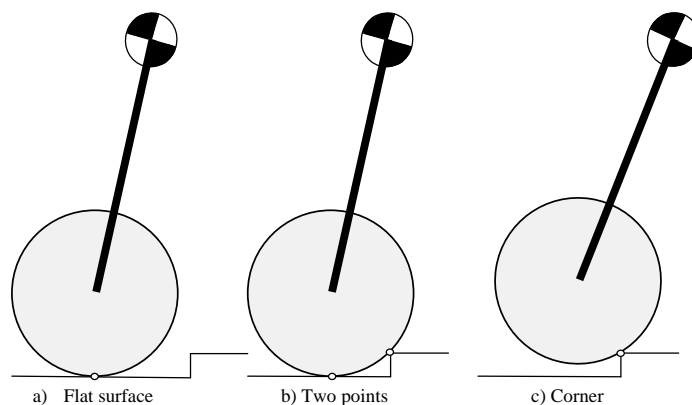


FIGURE III.7: phases du franchissement d'obstacle

La première phase (figure III.7.a) est l'évolution avant le contact. C'est le comportement le plus étudié [Chan et al., 2013]. Plusieurs lois de commande ont été mises au point pour assurer la stabilité en position stationnaire ou durant la navigation [Ha et al., 1996, Tirmant et al., 2002, Huang et al., 2010, Xu et al., 2012, Allouche et al., 2013].

Dans la deuxième phase, (figure III.7.b), le système passe d'un seul point de contact à deux points de contact. Cette phase est cruciale, car elle permet un transfert continu de l'énergie entre la première et la dernière phase. Autrement dit, elle définit les conditions initiales du franchissement. La modélisation de l'impact entre le robot et la bordure de la marche est en dehors du champ d'application de cette étude, car il a déjà été montré que certains robots auto-équilibrés peuvent franchir des petites marches en arrivant au niveau de celles-ci à des vitesses adéquates [Li et al., 2007]. Toutefois, ce franchissement reste non contrôlé, il peut causer un rebondissement du robot et même un déséquilibre total. Pour cette raison, on se focalise uniquement sur le franchissement d'obstacle en quasi-statique.

La troisième phase (figure III.7.c) décrit la dynamique du franchissement. À partir de l'hypothèse du non-glissement, la roue pivote autour de la bordure et le robot se comporte comme un Acrobot - robot à deux bras au mouvement analogue à celui d'un gymnaste sur une barre fixe ; la première articulation n'est pas actionnée et correspond à la main, la deuxième articulation exerce un couple et correspond au tronc [Yoshimoto et al., 2005]. L'acrobot est un robot sous-actionné avec une dynamique non linéaire [Spong, 1995]. La

figure (III.8) montre la structure du système, où β est l'angle de pivotement de la roue par rapport à la bordure.

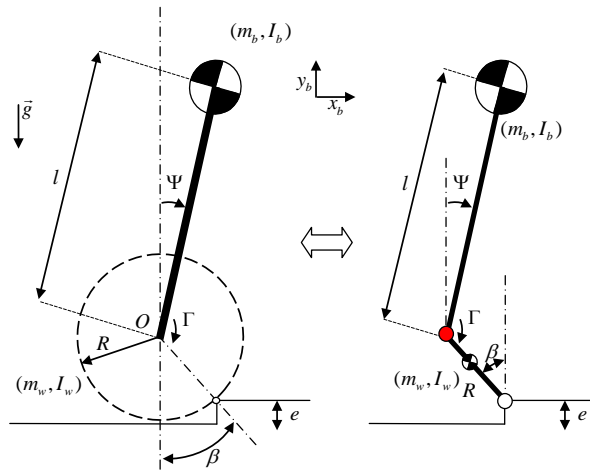


FIGURE III.8: Modèle dynamique en phase de franchissement

Le modèle dynamique du robot est obtenu à l'aide du formalisme de Lagrange (voir section.III.2.1) :

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\beta} + J_{12} \cos(\psi - \beta) \ddot{\psi} - J_{12} \sin(\psi - \beta) \dot{\psi}^2 + b \dot{\beta} - K_1 \sin \beta = \Gamma & \text{(III.28a)} \\ J_{12} \cos(\psi - \beta) \ddot{\beta} + J_2 \ddot{\psi} + J_{12} \sin(\psi - \beta) \dot{\beta}^2 - K_2 \sin \psi = -\Gamma & \text{(III.28b)} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} J_1 &= m_w R^2 + m_b R^2 + I_w \\ J_2 &= m_b l^2 + I_b \\ J_{12} &= m_b R l \\ K_1 &= (m_w + m_b) g R \\ K_2 &= m_b g l \end{aligned}$$

À partir de l'équation (III.28), le modèle du robot peut être écrit sous la forme descripteur (Équation.III.6) avec le vecteur d'état $x^T = [\beta \ \psi \ \dot{\beta} \ \dot{\psi}]$ et les matrices E , A , B et D définies par :

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_1 & J_{12} \cos(\psi - \beta) \\ 0 & 0 & J_{12} \cos(\psi - \beta) & J_2 \end{bmatrix}; \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ K_1 \frac{\sin \beta}{\beta} & 0 & -b & 0 \\ 0 & K_2 \frac{\sin \psi}{\psi} & 0 & 0 \end{bmatrix}; \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{12} \sin(\psi - \beta) \dot{\psi}^2 \\ -J_{12} \sin(\psi - \beta) \dot{\beta}^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque III.4 Dans cette étude, le vecteur D est négligé car il est supposé que le franchissement s'effectue en quasi-statique ($\dot{\beta}^2 \approx \dot{\psi}^2 \approx 0$). Il est aussi possible de considérer le vecteur D comme une incertitude non linéaire bornée, puis utiliser la condition de stabilisation robuste (Section.III.2.4.2); cela est en dehors du champ de ce travail car l'objectif principal est de vérifier la faisabilité du problème.

III.3.2 Angle d'équilibre naturel

Comme dans le cas du déplacement sur une pente, dans la phase du franchissement, le robot est stabilisable autour de l'angle ψ_{eq} dépendant de la position angulaire de la roue qui est variable au cours du temps :

$$\psi_{eq}(\beta) = \sin^{-1} \left[\frac{(m_w + m_b)R}{m_b l} \sin(\beta) \right] \quad (\text{III.29})$$

où

$$-\beta_0 \leq \beta \leq 0 \quad (\text{III.30})$$

β_0 représente le pivotement maximal de la roue pour que le franchissement soit effectué, cet angle est fonction du rayon de la roue (R) et de la hauteur de la marche (e) :

$$\beta_0 = \cos^{-1} \left(\frac{R - e}{R} \right) \quad (\text{III.31})$$

Remarque III.5 De l'équation (III.31), on remarque que la hauteur maximale de l'obstacle à franchir ne peut pas dépasser le rayon de la roue, ceci peut être déduit aussi de façon intuitive en regardant la géométrie du robot, car au-delà de (R) il est impossible de supposer une liaison pivot entre le sol et la roue. Dans un cas pratique, la hauteur de la marche est beaucoup plus petite que (R).

III.3.3 Comparaison entre les modèles TS standard et descripteur

Comme mentionné précédemment, le problème du franchissement d'obstacle a été formulé comme un problème de stabilisation d'un acrobot. Les bornes des modèles TS sont données comme suit :

$$\begin{aligned} -\beta_0 &\leq \beta \leq 0 \\ -\epsilon &\leq \psi \leq (1 + \epsilon)\bar{\psi}_{eq}(\beta_0) \end{aligned}$$

où $\bar{\psi}_{eq}$ est donné par (III.29) et (III.31).

Le modèle TS descripteur est obtenu directement à partir du modèle dynamique en considérant les non-linéarités suivantes. Pour la matrice E , il y a une seule non-linéarité : $\zeta_1(x, t) = \cos(\psi - \beta)$. Pour la matrice A , il y a deux non-linéarités $\zeta_2(x, t) = \frac{\sin(\psi)}{\psi}$ et $\zeta_3(x, t) = \frac{\sin(\beta)}{\beta}$. Au final, on obtient un modèle TS descripteur à 8-règles ($2^{r_e} \times 2^{r_a}$). À partir de cela, une loi non-PDC (Théorème.II.4) avec la relaxation de Tuan (Lemme.II.6) est appliquée.

Afin de modéliser le robot sous forme TS standard, le modèle du robot est réécrit sous la forme suivante :

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(x)x(t) + \tilde{B}u(t) \quad (\text{III.32})$$

avec

$$\tilde{A} = |E|^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & |E| & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |E| \\ \frac{J_2 K_1 \sin(\beta)}{\beta} & \frac{-J_{12} K_2 \cos(\psi - \beta) \sin(\psi)}{\psi} & -J_2 C & 0 \\ \frac{-J_{12} K_1 \cos(\psi - \beta) \sin(\beta)}{\beta} & \frac{J_1 K_2 \sin(\psi)}{\psi} & J_{12} \cos(\psi - \beta) C & 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{B} = |E|^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_2 + J_{12} \cos(\psi - \beta) \\ -J_1 - J_{12} \cos(\psi - \beta) \end{bmatrix};$$

$$\text{et } |E| = J_1 J_2 - J_{12}^2 \cos(\psi - \beta)^2.$$

Un modèle TS standard à 16 règles est obtenu en considérant les quatre non-linéarités suivantes : $\zeta_1(x, t) = |E|^{-1}$, $\zeta_2(x, t) = \cos(\psi - \beta)$, $\zeta_3(x, t) = \sin(\psi)/\psi$ et $\zeta_4(x, t) = \sin(\beta)/\beta$. Le contrôleur de ce modèle est basé sur une loi PDC (Théorème.II.3) et la relaxation de Tuan (Lemme.II.6).

De ce fait, il est proposé de vérifier la faisabilité en variant le rapport entre les poids et les longueurs ($\frac{m_w}{m_b}, \frac{l}{R}$). Les résultats de comparaison entre l'approche TS standard et l'approche descripteur dans le cas quadratique sont représentés sur la figure (III.9). La région représentée par des (+) désigne l'ensemble des solutions obtenues par l'approche descripteur, les (o) désignent l'ensemble des solutions obtenues par l'approche TS standard et la région donnée par les (Δ) désigne l'ensemble des cas où le robot ne possède pas d'angle d'équilibre naturel.

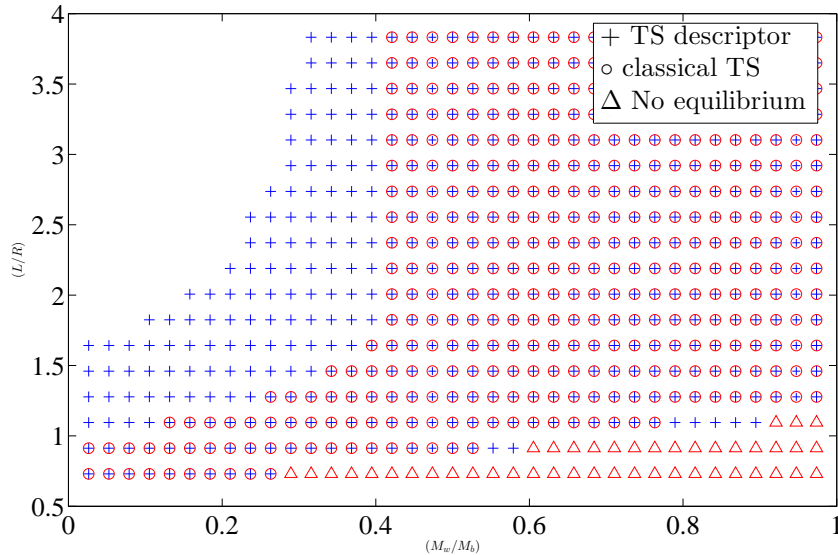


FIGURE III.9: Stabilisation quadratique : comparaison entre TS standard et descripteur

De la figure (III.9), plusieurs résultats peuvent être déduits. Premièrement, avec l'approche TS, on ne peut pas garantir la stabilité du franchissement d'obstacle pour tous les concepts auto-équilibrés. Pour certains concepts pour lesquels le rapport des masses ($\frac{m_w}{m_b}$) est faible et le rapport des longueurs ($\frac{l}{R}$) est élevé, on ne peut pas conclure avec

certitude sur la stabilité du robot. Cela peut être dû à la dynamique (bassin d'attraction très petit) [Spong, 1995] ou encore à des contraintes LMIs trop conservatives. L'approche TS descripteur fournit plus de solutions que l'approche TS standard, cela vient renforcer l'hypothèse disant que la formulation des contraintes LMIs faite à partir de la forme descripteur contribue à la réduction du conservatisme [Tanaka and Wang, 2001, Taniguchi et al., 2001, Guelton et al., 2009].

Dans la phase de conception d'un prototype de robot auto-équilibré adapté aux besoins des personnes handicapées, on risque d'aboutir à un concept où le rapport des longueurs est tel que ($\frac{l}{R} \geq 2$). Dans ce cas, les conditions de stabilisation quadratique semblent conservatives. Pour y remédier, on propose l'approche non quadratique (Théorème.III.1). La figure (III.10) montre qu'avec l'approche non quadratique, on relâche davantage les contraintes LMIs.

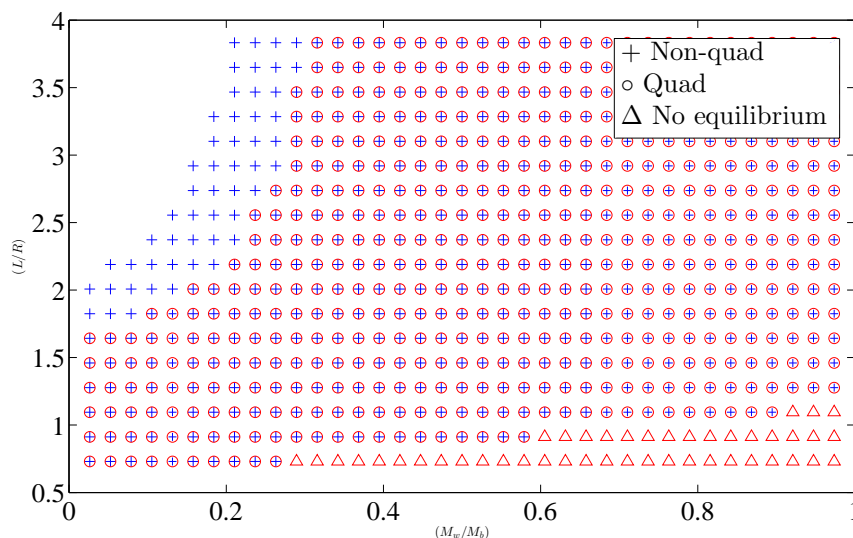


FIGURE III.10: TS descripteur : comparaison entre les cas quadratique et non quadratique

III.3.4 Stratégie du franchissement d'obstacle

Même si le problème de stabilisation est faisable avec l'obtention de gains, ceci n'est pas suffisant pour garantir un franchissement d'obstacle réussi car l'hypothèse de l'acrobat est très forte. Dans ce cas, la loi de commande doit satisfaire certaines performances afin de garantir la validité de l'hypothèse. Pour réussir le franchissement, le contrôle doit être déterminé en tenant compte des différents points suivants :

Couple réel : lorsque le robot heurte un obstacle, son équilibre naturel change instantanément de ($\psi = 0$) à ($\psi = \psi_{eq}$) en fonction de la hauteur de la marche. Ceci génère un écart important dans la boucle de régulation et comme le franchissement s'effectue en quasi-statique, le couple demandé aux actionneurs est généralement très important, parfois hors des limites des actionneurs. Pour cela, il serait bien d'être capable de détecter l'obstacle afin de préparer le robot pour le franchissement en tendant $\psi \rightarrow \psi_{eq}$ avant l'impact.

Pas de retour en arrière : l'hypothèse de l'acrobot n'est valide qu'en allant dans le sens de l'impact. En d'autres termes, le robot doit franchir l'obstacle avec une accélération positive, car une accélération négative l'éloignerait de la bordure, et le contact avec cette dernière serait perdu. La figure (III.11) montre la réponse de la position de la roue β pour différentes positions initiales ψ_0 .

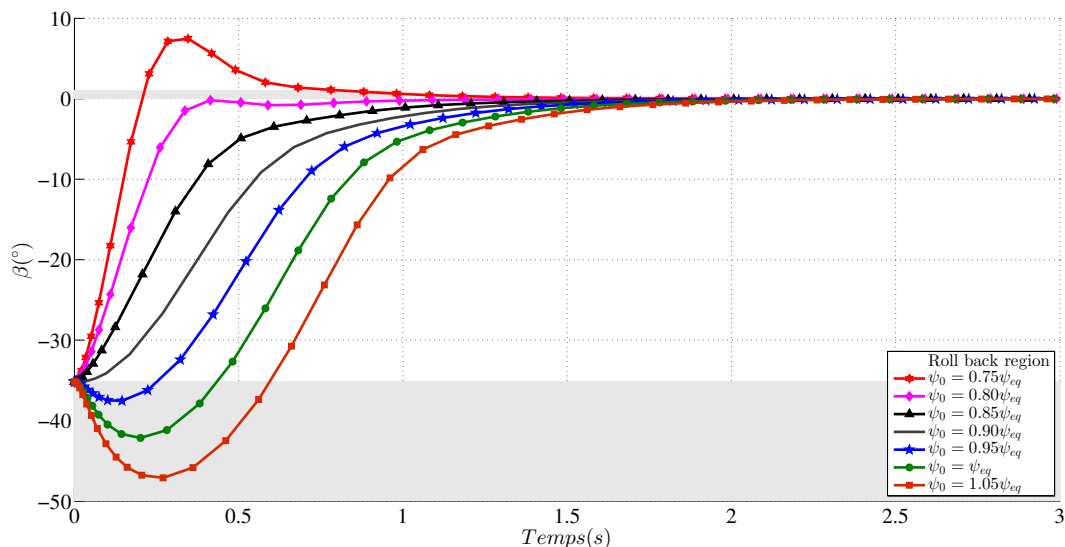


FIGURE III.11: franchissement d'obstacle en fonction de la position de la roue

De la figure (III.11), plus $\psi \rightarrow \psi_{eq}$ plus le robot risque de générer des accélérations négatives, plus ψ s'éloigne de ψ_{eq} , plus la commande est importante pour ramener le robot à l'équilibre, dans ce cas, il faut trouver un compromis permettant de réussir le franchissement d'un seul coup, sans retour en arrière ni dépassement.

Condition de non-glissement : l'hypothèse donnée dans la modélisation suppose que la roue est rigide et pivote autour de la bordure. Dans le cas réel, un peu de glissement peut être nécessaire [Chen et al., 2012].

III.3.5 Stabilisation

Les tests de simulation sont basés sur la version du robot auto-équilibré présentée dans la partie stabilisation sur une pente (Annexe.B.1). Il est supposé que le véhicule arrive à la bordure avec les conditions initiales suivantes : $x(t) = [-\beta_0 \quad 0.9\psi_{eq} \quad 0 \quad 0]^T$. Le but est de traverser un obstacle de 5 cm de hauteur.

De la figure (III.12), l'évolution de $\beta(t)$ montre un franchissement d'obstacle réussi (franchissement en une seule passe). Concernant l'inclinaison du robot, on remarque que celui-ci conserve son équilibre durant toute la phase de franchissement avec l'angle ψ qui tend vers son équilibre naturel. Une fois le franchissement terminé, le robot retrouve son équilibre à $\psi = 0$. La figure (III.13) montre un couple de commande $\Gamma(t)$ relativement raisonnable. En pratique, cette stratégie ne peut être appliquée que si le robot est capable d'ajuster sa posture avant le franchissement ce qui implique la détection de l'obstacle et la prédiction de l'instant de l'impact.

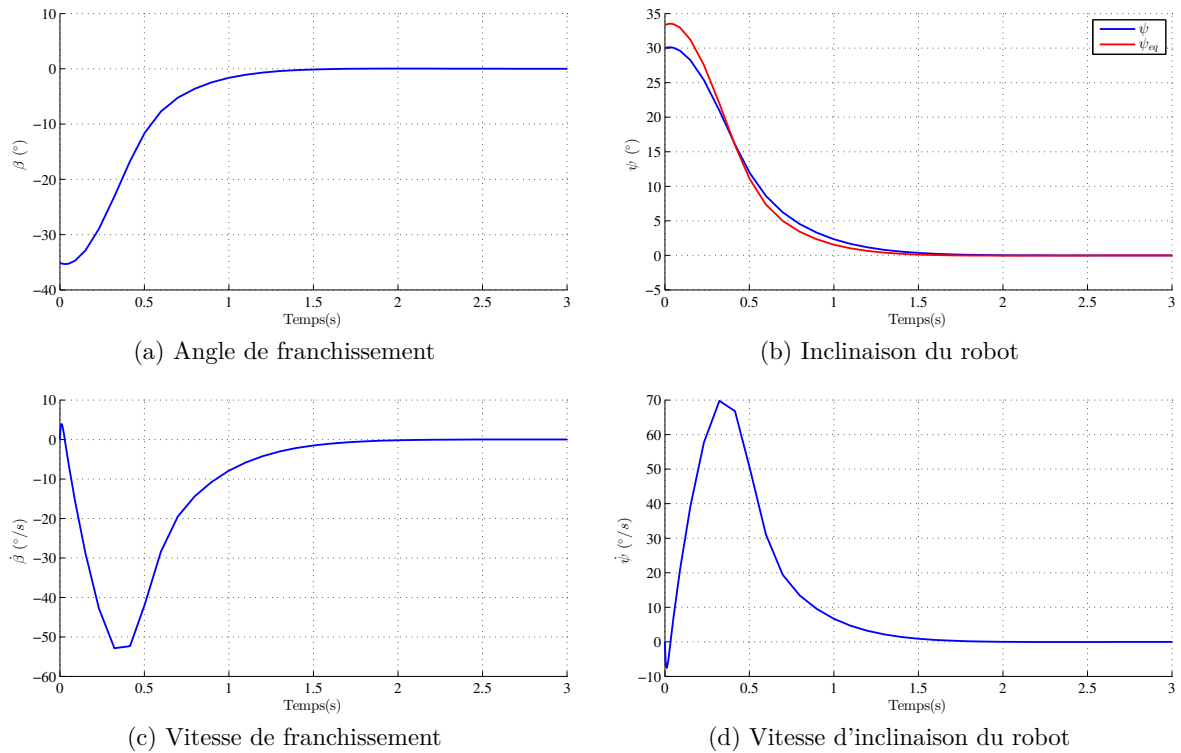


FIGURE III.12: Stabilisation durant la montée de la marche

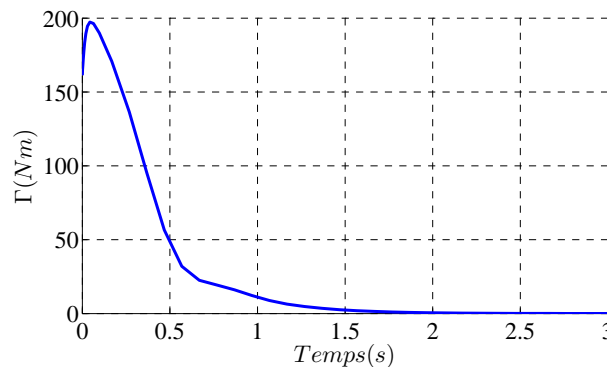


FIGURE III.13: Évolution de la commande durant la montée de la marche

III.4 Conclusion

Dans le cadre du projet VHIPOD, plusieurs questions ont été soulevées concernant les performances des robots auto-équilibrés à deux roues, par exemple, le déplacement à domicile/extérieur, le déplacement sur une pente ou le franchissement d'une petite marche. Le but de cette réflexion est d'étudier la possibilité d'étendre l'utilisation de cette technologie au profit des personnes handicapées.

La première partie de ce chapitre concerne la stabilisation du gyropode sur une pente. Un modèle à deux dimensions du véhicule sur une pente a été présenté afin de mettre en évidence l'effet de la pente ainsi que celui des paramètres inertiels de l'utilisateur sur l'équilibre naturel du robot. Un contrôleur non-PDC robuste a été proposé pour la stabilisation du modèle sous forme descripteur. L'intérêt de la première simulation est la stabilisation

du robot dans un espace réduit afin de montrer la possibilité d'envisager son utilisation à domicile. La deuxième simulation s'est focalisée sur la robustesse du contrôleur TS vis-à-vis des variations du profil du sol.

Dans la deuxième partie de ce chapitre, une étude concernant le franchissement d'obstacle a été proposée. Un modèle dynamique a été écrit sous l'hypothèse que le robot se comporte comme un acrobot lors du franchissement d'obstacle. Ensuite, des comparaisons ont été faites entre modèle TS standard et descripteur, entre approche quadratique et non quadratique afin de décider sur le choix du contrôleur. Enfin, une stratégie de franchissement a été proposée afin de garantir la validité de l'hypothèse de l'acrobot puis des résultats de simulation ont été proposés.

Les résultats de ce travail ont permis de concevoir un robot auto-équilibré potentiellement capable de répondre aux problématiques citées auparavant (Annexe.B.4). Prochainement, des tests expérimentaux seront effectués pour tester la validité de l'approche proposée.

Chapitre IV

Modélisation des robots manipulateurs

« Si une idée ne paraît pas d'abord absurde, alors il n'y a aucun espoir qu'elle devienne quelque chose ! »

Albert Einstein

Sommaire

IV.1 Introduction	76
IV.2 Cinématique des robots manipulateurs	77
IV.2.1 Modèles géométriques	78
IV.2.2 Les matrices jacobiniennes	80
IV.2.3 Analyse des singularités	80
IV.3 Modélisations dynamiques des robots	82
IV.3.1 Système de coordonnées	82
IV.3.2 Formalismes de modélisation	86
IV.3.3 MDI d'une chaîne cinématique ouverte	89
IV.3.4 MDI d'une chaîne cinématique fermée	90
IV.4 Modélisation du Biglide	94
IV.4.1 Modèle géométrique	95
IV.4.2 Modèle cinématique	95
IV.4.3 Singularités et espace de travail	95
IV.4.4 Modèle dynamique	95
IV.5 Modélisation du Triglisse	97
IV.5.1 Modèle géométrique	98
IV.5.2 Modèle cinématique	98
IV.5.3 Singularités et espace de travail	98
IV.5.4 Modèle dynamique	100
IV.6 Conclusion	103

IV.1 Introduction

Avant de procéder à la synthèse de commande d'un robot parallèle, la modélisation du manipulateur est une étape clef. Le cœur de ce chapitre s'articule autour de la modélisation dynamique des manipulateurs parallèles. La complexité des modèles issus de ce type d'architecture fait toujours débat aujourd'hui au sein de la communauté scientifique. Depuis ces deux dernières décennies, on trouve une littérature abondante sur cette problématique et sur les applications inhérentes ; aussi pourrait-on penser que cette question est close. Néanmoins, on constate un certain contraste dans les solutions proposées entre les communautés scientifiques. Ces solutions dépendent notamment des finalités. En robotique, les finalités majeures tournent autour de la conception (où la cinématique est centrale), l'identification et la commande. La génération du modèle dynamique, sous forme symbolique la plupart du temps, est orientée essentiellement par ces deux dernières finalités. Un objectif majeur est donc de disposer d'un modèle de taille minimale (nombre de variables et de paramètres à identifier minimum). Du point de vue des mécaniciens et plus spécifiquement des spécialistes des systèmes multi-corps, la finalité majeure est la simulation de systèmes mécaniques aussi variés que possible (machine, véhicule,...) avec des architectures très diverses, pouvant être de grande taille, avec des lois de comportement non linéaires (contact, déformation,...). L'objectif est de générer des modèles numériques efficaces pour minimiser le temps de simulation, la taille du modèle étant secondaire. De ce fait, l'automaticien qui recherche par exemple un modèle d'état pour la synthèse d'une commande optimale robuste se trouvera face à l'alternative suivante : l'utilisation d'un modèle issu de la robotique (qui est le choix habituel) mais dont la forme est souvent complexe et fortement non linéaire (mais avec un minimum de variables d'état) ou l'utilisation d'un modèle multi-corps, sous forme algébro-différentielle par exemple, avec des équations plus simples mais de grande taille et comprenant des variables algébriques (non régies par des équations différentielles).

Ce chapitre est l'occasion d'examiner ces alternatives. Il commence par un rappel de cinématique des manipulateurs sériels et parallèles ; l'objectif est d'introduire les différents modèles cinématiques nécessaires à l'écriture des modèles dynamiques. Une brève présentation des singularités est proposée afin de mettre en évidence la complexité des manipulateurs parallèles. Dans la deuxième partie, la modélisation dynamique est développée. La question du choix des coordonnées est posée en premier lieu à partir des travaux sur la modélisation des systèmes multi-corps, ce qui est peu courant en robotique. Ce choix de description cinématique d'un manipulateur conditionne en effet la complexité du modèle dynamique obtenu (liée aux non-linéarités) ainsi que sa taille (en particulier, la dimension du vecteur d'état). Il s'en suit une présentation des principaux formalismes pour générer les équations du modèle, en particulier le principe des puissances virtuelles utilisé par la suite. La modélisation des chaînes cinématiques ouverte et fermée est décrite successivement. Les chaînes cinématiques fermées font l'objet d'un développement important puisque c'est l'élément clef pour un manipulateur parallèle. Une méthodologie générale de modélisation est proposée à partir du principe des puissances virtuelles pour aboutir à un modèle sous forme algébro-différentielle ; cette méthodologie reste souple quant au choix du type de coordonnées. Dans la troisième partie, cette méthodologie est appliquée à un manipulateur parallèle à 2ddl avec les coordonnées couramment utilisées en robotique. Enfin, en dernière partie, on montrera que l'introduction des coordonnées naturelles pour un manipulateur parallèle à 3ddl permet d'obtenir un modèle dynamique de façon encore plus simple.

IV.2 Cinématique des robots manipulateurs

L'architecture mécanique d'un robot manipulateur est constituée de plusieurs solides S_i articulés entre eux par des liaisons ou articulations L_i , l'un de ces solides étant la base fixe (le bâti) et au moins un autre solide étant l'organe terminal ou effecteur (un préhenseur ou un outil). Pour décrire l'architecture mécanique des manipulateurs, on distingue deux grandes familles de chaînes cinématiques de solides : les chaînes ouvertes et fermées. Les chaînes cinématiques ouvertes sont constituées d'une succession unique de solides entre la base et un effecteur ; une chaîne ouverte peut être simple (avec un seul effecteur) ou arborescente (avec plusieurs effecteurs). Une chaîne cinématique est fermée lorsqu'au moins un ensemble de solides et d'articulations forme une boucle cinématique : plusieurs chemins le long des solides articulés sont alors possibles pour passer de la base à l'effecteur. (Figure.IV.1) [Khalil and Dombre, 2004].

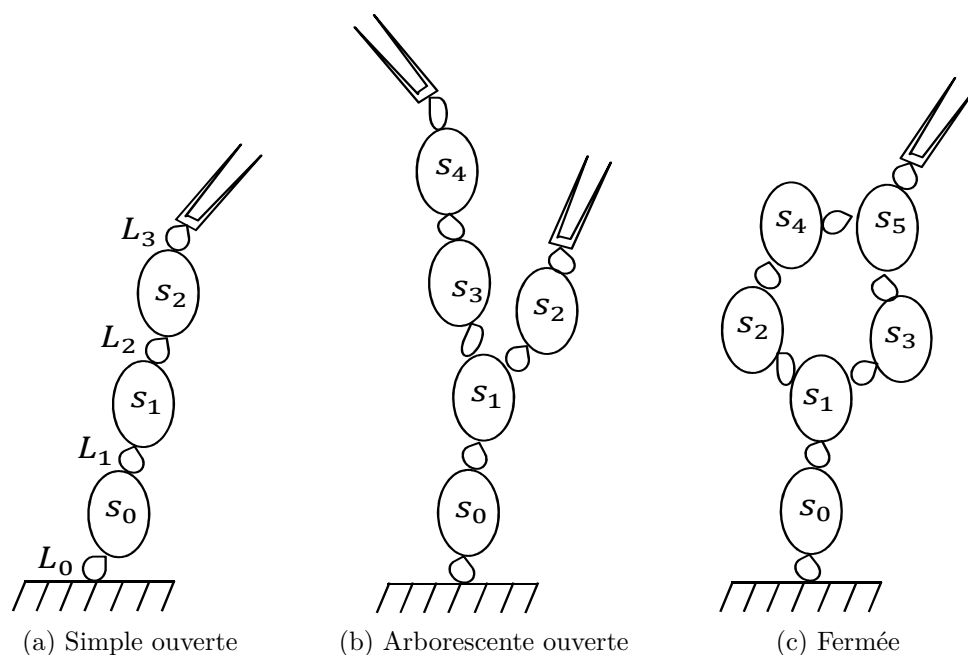


FIGURE IV.1: Différents types de chaînes cinématiques

Les manipulateurs robotiques sont habituellement classés en trois catégories : sériel, parallèle et hybride. Un manipulateur sériel peut être constitué de chaînes cinématiques ouvertes ou fermées, mais la chaîne cinématique principale reliant la base à l'effecteur est ouverte et les liaisons les constituant possèdent un seul degré de liberté (ddl) en rotation (liaison rotoïde) ou en translation (liaison prismatique). La base et l'effecteur ne sont reliés, chacun, qu'à un seul solide de la chaîne cinématique. Les manipulateurs parallèles (généralisés) sont, quant à eux, constitués de plusieurs chaînes cinématiques indépendantes reliant la base à l'effecteur [Merlet, 2012]. La base et l'effecteur sont donc situés dans une ou plusieurs boucles cinématiques. Afin de n'introduire aucun hyperstatisme dans le mécanisme, des liaisons à plusieurs ddl sont introduites, par exemple des liaisons universelles (2 rotations) ou rotules (3 rotations). La spécificité du solide terminal sur lequel on retrouve l'effecteur est donc d'être relié à plusieurs chaînes cinématiques ; on l'appelle habituellement la nacelle [Dombre and Khalil, 2010]. Chaque chaîne cinématique indépendante est souvent appelée jambe ; un robot parallèle est donc constitué d'une nacelle et d'un ensemble de jambes reliant la nacelle à la base. Les manipulateurs pleinement parallèles

constituent une classe particulière où le nombre de chaînes cinématiques indépendantes (les jambes) est strictement égal au nombre de ddl de la nacelle (solide terminal) [Merlet, 2012]. Les manipulateurs hybrides constituent la troisième catégorie ; par exemple, un manipulateur construit à partir de deux manipulateurs parallèles placés en série n'est ni sériel (base et effecteur sont situés dans une ou plusieurs boucles cinématiques fermées) ni parallèle (les chaînes cinématiques reliant la base à l'effecteur ne sont pas indépendantes), il est donc hybride. Un robot parallèle ou hybride sera constitué de deux types de liaisons, actives et passives, compte tenu des boucles cinématiques. Une liaison, généralement à un seul ddl (rotoïde ou prismatique), est dite active lorsqu'elle est actionnée (articulation avec actionneur et capteur) ; sinon elle est dite passive (sans actionneur ni capteur). Un manipulateur possèdera un nombre de liaisons actives supérieur ou égal au nombre de ddl souhaités de l'organe terminal. Dans le cas où ce nombre est supérieur au nombre de ddl de l'organe terminal, on parlera de robot redondant (actionnement redondant).

Les manipulateurs sériels sont largement utilisés dans la robotique de manipulation en raison de leur polyvalence pour une grande variété de tâches [He et al., 2007] (Figure.IV.2a). Leur architecture confère au robot un large espace de travail [Simaan, 1999]. Néanmoins, les manipulateurs sériels sont pénalisés le plus souvent par un rapport charge de l'effecteur sur masse du robot défavorable en raison des actionneurs répartis sur la chaîne cinématique en mouvement. De plus, pour éviter une déformation sous charge importante, le dimensionnement des solides est souvent imposant, d'où une structure mécanique massive. En outre, une faible précision apparaît en raison des erreurs cumulatives sur chaque articulation et de la déflexion de la chaîne cinématique sous son propre poids. Compte tenu de ces désavantages, les robots parallèles (Figure.IV.2b) suscitent un grand intérêt dans plusieurs applications, telles que l'usinage à grande vitesse, l'assemblage et la manutention à très hautes cadences, les simulateurs de vol ainsi que diverses applications médicales et spatiales [Vermeiren et al., 2012, Abdellatif et al., 2005, Weck and Staimer, 2002, Jamwal et al., 2010]. En effet, l'architecture cinématique parallèle peut conférer à un robot une plus grande capacité de charge, une plus grande capacité d'accélération et une plus grande précision tout en assurant une grande rigidité ; ces propriétés découlent des jambes mises en parallèle et de la réduction de masse en mouvement grâce au report des actionneurs sur la base ou à proximité. [Merlet, 2012]. Par ailleurs, les boucles cinématiques conduisent à plusieurs inconvénients ; ils peuvent être résumés de la façon suivante :

- Un espace de travail très limité en regard du volume total du mécanisme [Krut, 2003].
- De nombreuses singularités [Sartori Natal et al., 2015] incluant un type de singularité propre aux manipulateurs parallèles. Ce type de singularité conduit à la perte de la commandabilité de la nacelle et, éventuellement, à une détérioration mécanique. C'est le point le plus critique pour un manipulateur parallèle, que ce soit pour sa conception ou sa commande.
- Un modèle dynamique très complexe [Khalil and Ibrahim, 2007] et un modèle géométrique direct (MGD) dont la forme analytique est rarement obtenue [Krut, 2003].

IV.2.1 Modèles géométriques

Dans la section précédente, les manipulateurs ont été définis comme des chaînes cinématiques constituées de plusieurs solides assemblés entre eux par des liaisons supposées

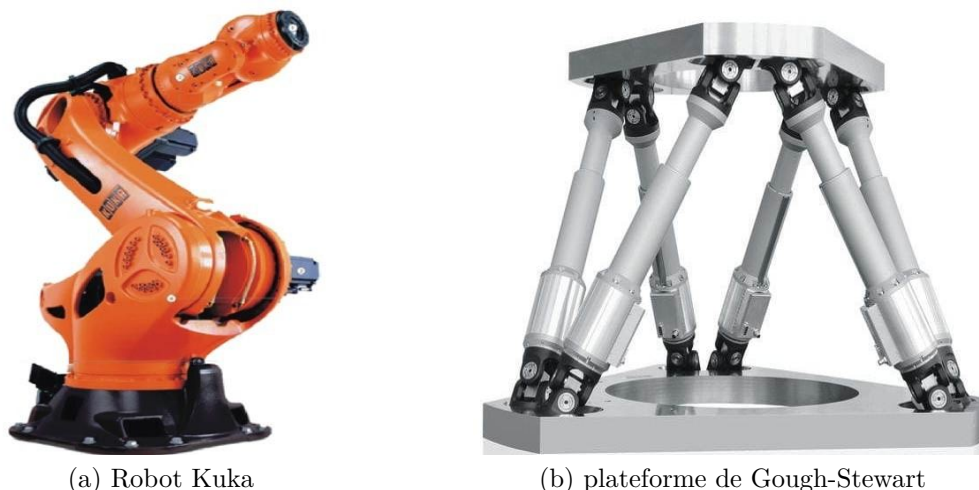


FIGURE IV.2: Manipulateur sériel et parallèle

parfaites (liaisons holonomes). Les propriétés mécaniques de ces liaisons se traduisent par un ensemble de contraintes géométriques entre les coordonnées articulaires actives (variables de position linéaire et/ou angulaire associées aux liaisons actives) et les coordonnées opérationnelles décrivant la position et/ou l'orientation de l'organe terminal. Les espaces articulaire et opérationnel sont les espaces de définition des coordonnées articulaires actives et des coordonnées opérationnelles, respectivement. L'ensemble des contraintes peut être représenté par la relation implicite :

$$\phi(q, \chi) = 0 \quad (\text{IV.1})$$

où $q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_{n_q}]^T$ et $\chi = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_{n_x}]^T$ représentent respectivement les vecteurs des coordonnées articulaires actives et opérationnelles avec $n_q \geq n_x$. À partir de l'équation (IV.1), deux modèles géométriques sont définis :

- **Le modèle géométrique directe (MGD) :** représente l'ensemble des relations géométriques permettant le calcul des coordonnées opérationnelles en fonction des coordonnées articulaires. En d'autres termes, ce modèle permet de décrire la situation (position et/ou orientation) de l'organe terminal à partir des mesures de positions articulaires. La forme générale du MGD peut être représentée par la relation :

$$\chi = g_D(q) \quad (\text{IV.2})$$

- **Le modèle géométrique inverse (MGI) :** représente l'ensemble des relations géométriques permettant la détermination des coordonnées articulaires à partir d'une situation donnée de l'organe terminal. La forme générale du MGI peut être représentée par la relation :

$$q = g_I(\chi) \quad (\text{IV.3})$$

Ces modèles sont utilisés pour l'analyse de l'espace de travail, la simulation, la commande, la calibration, la planification de trajectoire... Ils seront utiles par la suite pour le modèle dynamique. L'obtention des fonctions g_I et g_D sous forme analytique dépend de l'architecture du manipulateur étudié. Pour un robot sériel, il est relativement facile

d'écrire le MGD g_D qui exprime la solution unique des coordonnées opérationnelles en fonction des coordonnées articulaires. En revanche, le MGI g_I , quand on peut l'obtenir sous forme explicite (c'est le cas des robots sériels courants), exprime l'ensemble des solutions articulaires pour atteindre une position opérationnelle donnée [Khalil and Dombre, 2004]. Pour un robot sériel non redondant, il existe un nombre fini de solutions; elles sont obtenues par inversion du MGD. Dans le cas des robots parallèles, le problème se pose plutôt de façon duale. Le plus simple est de calculer analytiquement le MGI. Il comprend souvent plusieurs solutions (comme pour un robot sériel). En revanche, l'obtention du MGD sous forme analytique est assez rare en dehors des architectures simples. En effet, les boucles cinématiques conduisent souvent à des expressions fortement non linéaires formant ainsi un système d'équations complexes à résoudre. Une méthode consiste à se ramener à une équation polynomiale d'une variable dont le degré est souvent élevé (supérieur à 4), ce qui nécessite une résolution numérique. Par exemple, le MGD de la plateforme de Gough-Stewart (Figure.IV.2b) peut avoir jusqu'à 40 solutions [Siciliano and Khatib, 2008].

IV.2.2 Les matrices jacobiennes

Les matrices jacobiennes ont plusieurs applications en robotique. Elles permettent de calculer les vitesses opérationnelles en fonction des vitesses articulaires (modèle cinématique directe ou MCD) et inversement (modèle cinématique inverse ou MCI). En statique, elles sont utilisées pour décrire les relations d'efforts entre les espaces opérationnel et articulaire. Elles sont également utilisées pour analyser les propriétés cinématiques et statiques du robot dans tout l'espace de travail avec, en premier lieu, la détermination des singularités [Khalil and Dombre, 2004].

Dans le cas des robots sériels, le MCD est écrit sous la forme suivante :

$$\dot{\chi} = J(q)\dot{q} \quad (\text{IV.4})$$

avec la jacobienne $J \in \mathbb{R}^{n_x \times n_q}$. On peut, par exemple, obtenir la jacobienne à partir du MGD tel que $J(q) = \frac{\partial g_D(q)}{\partial q}$. Dans le cas d'un robot non redondant où $n_q = n_x$, le MCI est calculé pour une configuration q par inversion de la jacobienne si celle-ci est de rang plein :

$$\dot{q} = J^{-1}(q)\dot{\chi} \quad (\text{IV.5})$$

Dans le cas des robots parallèles, la relation entre les vitesses articulaires et opérationnelles pourra toujours s'écrire sous la forme suivante [Gosselin and Angeles, 1990] :

$$J_\chi(q, \chi)\dot{\chi} = J_q(q, \chi)\dot{q} \quad (\text{IV.6})$$

avec $J_q(q, \chi)$ et $J_\chi(q, \chi)$ des matrices que l'on peut calculer par dérivation de la contrainte (Équation.IV.1) par rapport au temps.

IV.2.3 Analyse des singularités

L'analyse du modèle cinématique (Équation.IV.1) permet de mettre en évidence les «configurations singulières» ou «singularités» du robot où apparaît une perte partielle ou totale de contrôle du robot. Pour les robots sériels, la notion bien connue de singularité se traduit localement par la perte d'un ou plusieurs ddl de l'organe terminal (vitesse(s)

impossible(s) de l'effecteur suivant une ou plusieurs directions), c'est-à-dire une sous-mobilité. En plus de ces singularités, les robots parallèles comportent un autre type de singularités pouvant aller jusqu'à la violation des contraintes géométriques et, éventuellement à une détérioration du mécanisme [Krut, 2003]. Il est donc nécessaire d'exclure ces singularités particulières de l'espace de travail du robot, ce qui le restreint encore d'autant plus. Une classification complète des types de singularités, compte tenu des liaisons actives et passives, a été proposée par [Zlatanov et al., 1998]. Dans le cadre de ce manuscrit, uniquement les deux principaux types de singularités sont considérés [Gosselin and Angeles, 1990].

IV.2.3.1 Singularités sérielles

Un robot est dit en configuration singulière sériele s'il existe une vitesse articulaire non nulle ($\dot{q} \neq 0$) qui ne génère aucun mouvement de la nacelle ($\dot{\chi} = 0$) (Figure IV.3). Une singularité sériele se traduit donc par une «sous-mobilité» (perte locale d'un ou plusieurs ddl), ce qui réduit localement l'espace dans lequel générer des trajectoires. Ce phénomène concerne les robots sériels et parallèles et il apparaît lorsque les matrices J et J_q sont singulières, respectivement.

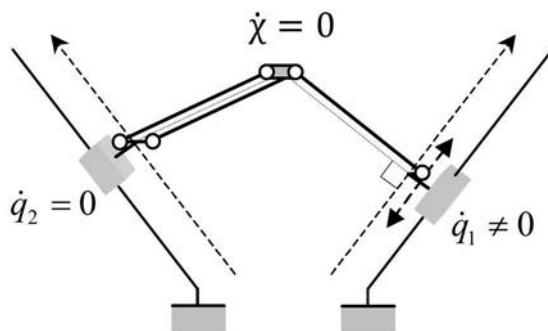


FIGURE IV.3: Illustration d'une singularité sériele sur un mécanisme parallèle à 2 ddl [Krut, 2003]

IV.2.3.2 Singularités parallèles

Un robot est dit en configuration singulière parallèle s'il existe un mouvement instantané possible de la nacelle ($\dot{\chi} \neq 0$) alors que les vitesses articulaires sont nulles ($\dot{q} = 0$) (Figure IV.4). Ce type de singularité se traduit par une «sur-mobilité» car le robot gagne localement un ou plusieurs ddl dont la particularité est d'être non commandable. Ce phénomène concerne uniquement les robots parallèles et il se produit lorsque la matrice J_χ est singulière.

Remarque IV.1 Dans certaines configurations, les matrices J_q et J_χ peuvent être singulières en même temps; on est alors en présence de singularités à la fois sérielles et parallèles.

Remarque IV.2 Un robot peut «traverser» sans difficulté une singularité sériele à condition de définir correctement la trajectoire; la commandabilité n'est pas perdue sur cette trajectoire. En revanche, pour «traverser» une singularité parallèle, le problème est beaucoup plus délicat, même si on peut également définir une trajectoire qui permet

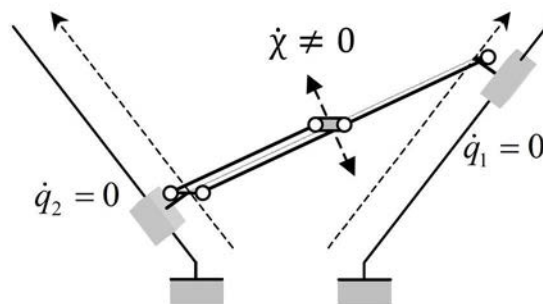


FIGURE IV.4: Illustration d'une singularité parallèle sur un mécanisme parallèle à 2 ddl [Krut, 2003]

de la franchir [Pagis et al., 2015]. La commandabilité est perdue sur la singularité parallèle et une «mauvaise» traversée peut générer des efforts internes pouvant être très élevés. Pour cette raison, la caractérisation des singularités parallèles est une étape primordiale en phase de conception du robot parallèle comme en phase de développement de sa commande.

IV.3 Modélisations dynamiques des robots

Une des étapes les plus importantes dans la commande, l'étude ou la synthèse de robots est la modélisation du comportement dynamique. On distingue deux formes de modèle dynamique :

- **Modèle dynamique directe (MDD)** : Ce modèle est nécessaire à la simulation temporelle du système, il permet de décrire la trajectoire du robot à partir des efforts qui lui sont appliqués. Il permet aussi d'écrire le modèle sous forme d'état pour la commande.
- **Modèle dynamique inverse (MDI)** : Ce modèle est utile pour la commande et la planification de trajectoire car il permet de calculer les efforts articulaires nécessaires pour suivre une trajectoire donnée. Le MDI peut également servir pour écrire le modèle descripteur destiné à certaines lois de commande.

Les manipulateurs sont modélisés le plus souvent par des systèmes mécaniques articulés constitués de solides rigides supposés indéformables et de liaisons supposées parfaites (modèle multi-corps rigide). À partir de ces hypothèses, un système de coordonnées sera choisi pour décrire le mouvement et un formalisme basé sur un des principes de la mécanique permettra de générer un modèle de connaissance du robot. L'ajustement des paramètres géométriques et dynamiques pourra être réalisé via une identification expérimentale.

IV.3.1 Système de coordonnées

La complexité d'un modèle dynamique est étroitement liée au choix du système de coordonnées décrivant le mouvement. La figure (IV.5) résume les différents types de coordonnées généralement utilisés pour la description d'un système multi-corps. Un système de coordonnées définit l'ensemble des variables de position (linéaire et angulaire) utilisées dans les équations différentielles et, éventuellement, des équations algébriques additionnelles.

Remarque IV.3 Le plus souvent, les variables de vitesse correspondent aux dérivées temporelles des variables de position. Pour décrire le mouvement instantané de rotation d'un solide dans l'espace, par exemple la nacelle, on pourra avantageusement utiliser des pseudo-vitesses, par exemple les composantes du vecteur rotation instantanée de ce solide, qui ne sont pas issues de la dérivée d'un vecteur position. Par la suite, le mouvement des différents robots étant décrit dans un plan, les vitesses seront toujours les dérivées temporelles des coordonnées choisies.

Remarque IV.4 La définition d'un type de coordonnées est une question qui a été largement traitée dans le domaine des systèmes multi-corps et assez peu en robotique. Cela s'explique par des finalités généralement différentes. Concernant les systèmes multi-corps, la communauté scientifique est formée de mécaniciens visant généralement la génération de modèles numériques et la simulation temporelle de systèmes très variés (véhicule, machine, humain...) pouvant être de très grande taille [Nikravesh, 1988, Valasek et al., 2007, De Jalon and Bayo, 2012]. En robotique, les finalités majeures étant la conception (où la cinématique est centrale) et la commande, des modèles sous forme symbolique comportant un minimum de variables et de paramètres sont recherchés [Khalil and Dombre, 2004, Siciliano and Khatib, 2008, Briot and Khalil, 2015], le paramétrage de Denavit-Hartenberg, éventuellement modifié, étant très largement utilisé. Nous ré-abordons cette question en robotique dans le but d'écrire un modèle de Takagi-Sugeno avec un minimum de fonctions non linéaires.

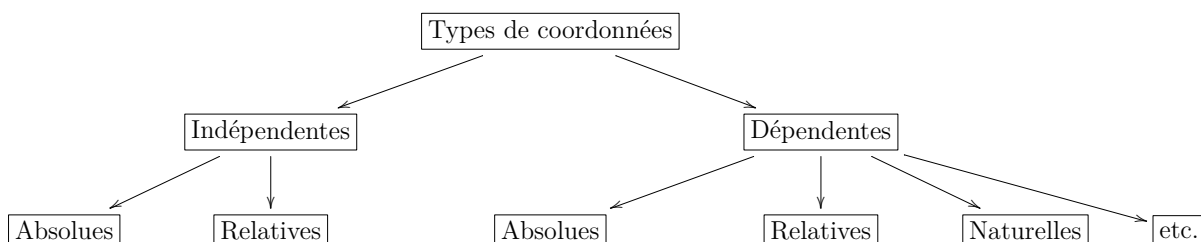


FIGURE IV.5: Différents types de coordonnées

Dans les paragraphes suivants, une brève description des principaux types de coordonnées sera présentée avec des exemples simples afin de montrer les avantages et les inconvénients de chaque type ainsi que leur utilité.

IV.3.1.1 Coordonnées dépendantes et indépendantes

Pour décrire complètement le mouvement instantané d'une chaîne cinématique, le nombre de variables de position utilisées devra être supérieur ou égal au nombre de ddl. En choisissant correctement un ensemble de variables en nombre égal au nombre de ddl, on définit un système de coordonnées indépendantes (Figure.IV.6 et figure.IV.7.b). Si le nombre de variables de position choisies est supérieur au nombre de ddl, on définit alors un système de coordonnées dépendantes (Figure.IV.7.a et figure.IV.8) : des relations algébriques existent entre ces coordonnées, relations qui donnent lieu à des équations de contraintes algébriques dans le modèle dynamique.

En robotique, les coordonnées indépendantes sont naturellement associées aux ddl des liaisons actives (positions mesurées), ce qui permet d'écrire un modèle dynamique avec un minimum de variables et d'équations [Khalil and Dombre, 2004]. Elles sont quasi-systématiquement utilisées par les roboticiens pour les manipulateurs sériels. Pour les

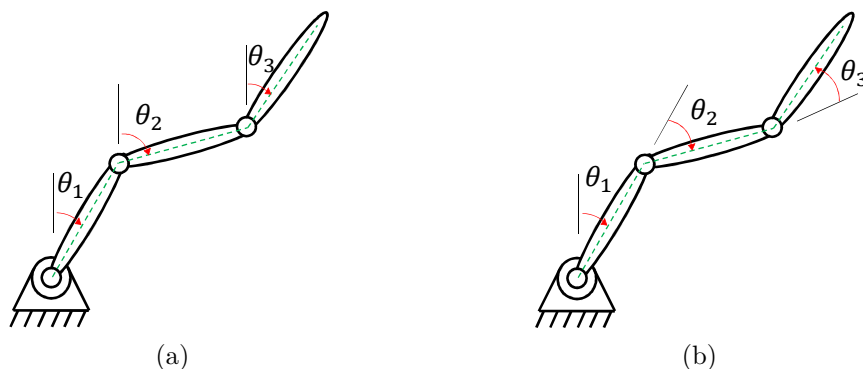


FIGURE IV.6: Illustration des coordonnées indépendantes sur une chaîne cinématique ouverte à 3 ddl - coordonnées absolues (a) et relatives (b)

manipulateurs parallèles, les coordonnées dépendantes sont parfois utilisées afin de faire apparaître, par exemple, les variables associées aux liaisons passives (variables non mesurées). En présence de boucle cinématique, la formulation des modèles dynamiques à partir des coordonnées indépendantes conduit le plus souvent à un système d'équations différentielles ordinaires fortement non linéaires (forme complexe en générale). De plus, ce type de coordonnées ne permet pas de définir, dans le cas général, la configuration complète d'une chaîne fermée de manière univoque [De Jalon and Bayo, 2012] (Figure.IV.7.b).

IV.3.1.2 Coordonnées relatives

Les coordonnées linéaires ou angulaires décrivent des positions dans un référentiel qui peut être absolu (lié à la base) ou relatif (lié à un solide en mouvement). Dans une chaîne cinématique, on pourra décrire la position variable d'un solide par rapport à un autre solide (éventuellement la base) qui lui est relié par une liaison : les variables linéaires et/ou angulaires directement associées aux ddl de cette liaison constituent des coordonnées relatives de ce solide (Figure.IV.6.b et figure.IV.7). Par exemple, le paramétrage de Denavit-Hartenberg modifié constitue une méthode systématique pour définir les coordonnées relatives de chaînes cinématiques quelconques (ouverte, arborescente, fermée) [Khalil and Dombre, 2004, Briot and Khalil, 2015]. Cette formulation est utilisée en robotique pour établir des modèles dynamiques sous forme minimale (nombre de variables et de paramètres minimum). Dans le cas des chaînes cinématiques ouvertes, les coordonnées relatives sont indépendantes (Figure.IV.6.b). Pour les chaînes cinématiques fermées, on pourra choisir des coordonnées relatives dépendantes (Figure.IV.7.a) ou indépendantes (Figure.IV.7.b). Avec des coordonnées relatives indépendantes, le modèle dynamique d'un robot parallèle s'écrira sous forme d'équations différentielles ordinaires complexes, le plus souvent, comme cela a été évoqué au paragraphe précédent. Une autre possibilité est d'utiliser un référentiel absolu.

IV.3.1.3 Coordonnées absolues

La description de la position et de l'orientation de chaque solide dans un référentiel lié à la base, indépendamment des liaisons, conduit à définir un jeu de coordonnées absolues de la chaîne cinématique (Figure.IV.8). Compte tenu des liaisons, ces variables sont dépendantes ; les liaisons se traduisent alors par un ensemble d'équations de contraintes algébriques fonctions de ces variables et des paramètres géométriques du manipulateur.

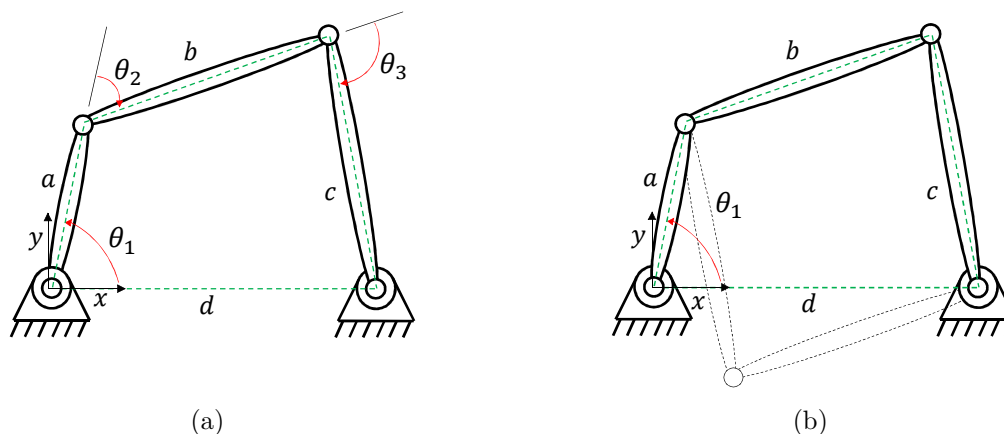


FIGURE IV.7: Illustration des coordonnées relatives sur une chaîne cinématique fermée de type 4 barres - coordonnées dépendantes (a) et indépendantes (b)

Ce type de modélisation est couramment employé pour la simulation des systèmes multi-corps [Nikravesh, 1988, De Jalon and Bayo, 2012], comme par exemple dans le logiciel ADAMS. Grâce à l'utilisation des coordonnées cartésiennes absolues du centre de masse de chaque solide, l'intérêt, surtout en présence de boucles cinématiques, est de générer un ensemble d'équations différentielles ordinaires simples issues des équations de Newton et d'Euler (écrites au centre de masse de chaque solide). Les équations de contrainte sont également assez simples à écrire. Par conséquent, les coordonnées absolues permettent de réduire la complexité du modèle dynamique et de définir la configuration du manipulateur d'une manière univoque dans tous les cas de figure. Malgré cela, l'établissement des modèles destinés à la commande à partir de cette formulation ne semble pas vraiment être une piste séduisante à cause de la forme algèbro-différentielle du modèle, du grand nombre de variables et d'équations. Par exemple, le mouvement plan de la chaîne cinématique de type 4 barres (Figure IV.8.b) sera régi par 9 équations différentielles ordinaires du second ordre et 8 équations algébriques en utilisant 18 variables d'état (positions et vitesses) et 8 multiplicateurs de Lagrange alors qu'il s'agit d'un mécanisme à 1 ddl!

Remarque IV.5 Dans certains cas particuliers (par exemple pour un mouvement plan), on peut également restreindre le nombre de coordonnées absolues à partir des liaisons, par exemple pour une chaîne ouverte avec les coordonnées de la figure (IV.6.a) au lieu de celles de la figure (IV.8.a), et pour une chaîne fermée avec les coordonnées de la figure (IV.9) au lieu de celles de la figure (IV.8.b). Dans cet exemple de mécanisme 4 barres, le nombre d'équations passera de 17 équations algèbro-différentielles à 5, le nombre de variables d'état de 18 à 6 et le nombre de multiplicateurs de Lagrange de 8 à 2.

IV.3.1.4 Coordonnées naturelles

Les coordonnées naturelles ont été introduites pour la première fois en analyse cinématique par De Jalon en 1981 à partir de travaux issus de la mécanique des structures (méthode des éléments finis) [De Jalón, 2007]. Elles présentent une bonne alternative aux coordonnées absolues ou relatives pour générer des modèles numériques de simulation de systèmes multi-corps [De Jalon and Bayo, 2012, Valasek et al., 2007]. Le principe est basé sur une description de la chaîne cinématique à partir d'un ensemble de points situés sur

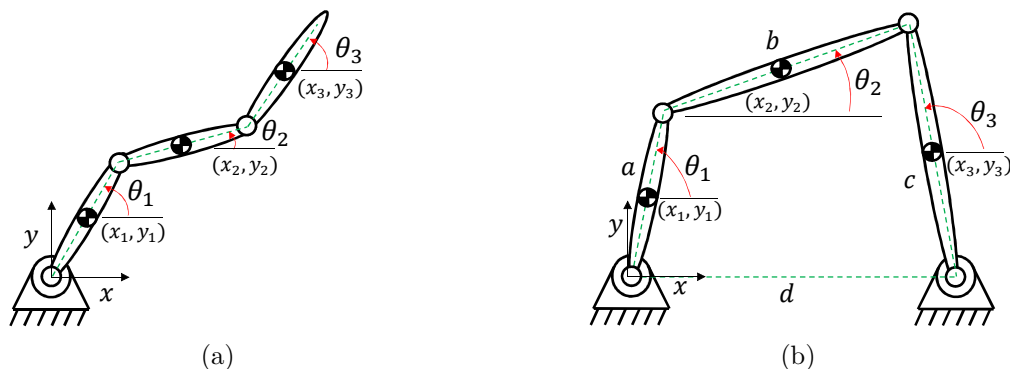


FIGURE IV.8: Illustration des coordonnées dépendantes absolues sur (a) une chaîne cinématique ouverte à 3 ddl et (b) sur une chaîne cinématique fermée de type 4 barres

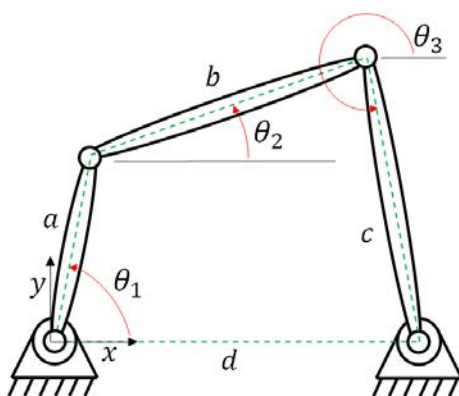


FIGURE IV.9: Illustration des coordonnées absolues en nombre restreint sur une chaîne cinématique fermée de type 4 barres

les axes des liaisons ; les coordonnées cartésiennes absolues de ces points constituent les coordonnées naturelles (Figure.IV.10). Ce type de coordonnées évite donc l'utilisation de variable angulaire, ce qui réduit considérablement les non-linéarités du modèle [De Jalon and Bayo, 2012]. La formulation des contraintes est issue d'un produit scalaire conduisant souvent à des équations algébriques sous forme quadratique et à des jacobiniennes à termes linéaires [Valasek et al., 2007]. Enfin, le plus grand avantage lié à l'utilisation des coordonnées naturelles est l'obtention de matrice de masse à coefficients constants [De Jalon and Bayo, 2012].

IV.3.2 Formalismes de modélisation

Plusieurs formalismes, traduisant les principes fondamentaux de la mécanique, permettent d'écrire le modèle dynamique d'un robot. Les plus courants sont :

a) Formalisme de Newton-Euler Basé sur les équations de Newton (seconde loi) et d'Euler (correspondant au théorème du moment cinétique), ce formalisme est bien adapté au calcul du modèle dynamique (sous forme inverse ou directe) de chaînes cinématiques ouvertes ; il utilise des coordonnées relatives. Les algorithmes de génération du MDI, comme du MDD, utilisent une double récurrence (de la base à l'effecteur et inversement) ; l'écriture du torseur dynamique dans un repère lié à une liaison du solide permet de ne

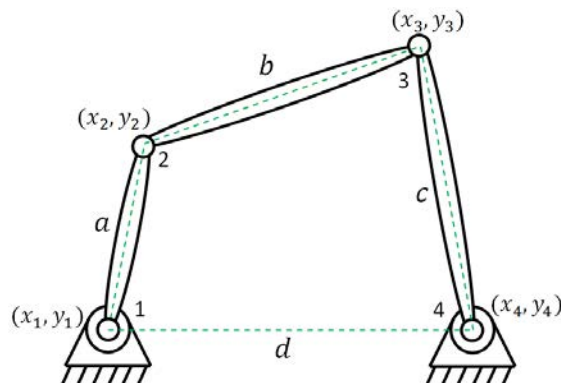


FIGURE IV.10: Illustration des coordonnées naturelles sur une chaîne cinématique fermée de type 4 barres

pas faire apparaître les efforts de réaction dans les liaisons. La mise en œuvre par calcul symbolique itératif avec le paramétrage de Denavit Hartenberg modifié et les paramètres inertiels de base permet d'obtenir de façon systématique le MDI de toute chaîne cinématique ouverte (éventuellement arborescente) et ainsi de disposer d'un système d'équations différentielles ordinaires qui minimise le nombre d'opérations arithmétiques (pour un calcul en ligne) et le nombre de paramètres à identifier [Khalil and Dombre, 2004]. L'extension aux robots parallèles est également possible [Khalil and Ibrahim, 2007] mais cela reste une tâche fastidieuse conduisant à un modèle de grande complexité pour beaucoup de manipulateurs parallèles.

b) Formalisme de Lagrange Ce formalisme est certainement le plus populaire. L'approche est basée sur l'expression des énergies cinétique et potentielle du manipulateur en fonction des variables généralisées. Des coordonnées indépendantes ou dépendantes peuvent être utilisées comme variables généralisées. Ce formalisme a été utilisé avec des coordonnées indépendantes pour modéliser le robot auto-équilibré (Chapitre.III).

En utilisant n coordonnées dépendantes $q_1 q_2 \dots q_n$, le modèle dynamique comprendra les équations de contraintes algébriques correspondantes ainsi que les équations différentielles ordinaires issues de la différentiation du Lagrangien comme suit :

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + J^T \lambda \quad (\text{IV.7})$$

où $\mathcal{L} = E_c - E_p$ est le Lagrangien, E_c représente l'énergie cinétique, E_p représente l'énergie potentielle, $q = [q_1 q_2 \dots q_n]^T$ est le vecteur des coordonnées généralisées, $F = [F_1 F_2 \dots F_n]^T$ est le vecteur des forces généralisées. $\lambda \in \mathbb{R}^{n_\phi}$ est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, avec $n_\phi = \dim(\phi(q, \chi))$, $J \in \mathbb{R}^{n_\phi \times n}$ est la matrice jacobienne établie à partir de la dérivée temporelle des équations de contraintes algébriques (Équation.IV.1).

L'intérêt de cette approche est sa grande facilité de mise en œuvre pour les chaînes cinématiques ouvertes et fermées et sa grande souplesse de paramétrage. Malheureusement, les équations générées sont en général complexes, sauf dans les cas simples, et dépendent complètement des choix paramétriques effectués.

c) Principe des puissances virtuelles Le principe des puissances virtuelles (PPV) est l'un des principes les plus généraux de la mécanique ; il est utilisé dans de nombreuses branches comme la mécanique des milieux continus. C'est un principe variationnel basé

sur un calcul de puissances ; le point de départ consiste à choisir un champ de vitesses imaginaires, appelées vitesses virtuelles, qui soit admissible compte tenu des liaisons et autres conditions aux limites du système mécanique, et qui soit le plus approprié au problème posé.

Pour énoncer le PPV, considérons un problème de statique : un système mécanique, constitué de particules matérielles, est soumis à un champ de forces extérieures, $F \in \mathbb{R}^n$. Ces particules sont éventuellement liées entre elles par des liaisons (supposées parfaites). Considérons un champ de vitesses virtuelles associé à ce champ de forces $v^* \in \mathbb{R}^n$. Si le système mécanique est en équilibre statique, alors le PPV s'écrit :

$$v = 0 \Rightarrow v^{*T} F = 0 \quad (\text{IV.8})$$

Le produit scalaire $v^{*T} F$ est appelé puissance virtuelle du champ de forces F . Si v^* est un champ de vitesses virtuelles indépendantes, alors l'égalité IV.8 est vraie quel que soit ce champ, ce qui conduit à $F = 0$. Sinon, en présence de vitesses virtuelles dépendantes compte tenu de p équations de contrainte algébrique dues aux liaisons, on écrira la relation : $Jv^* = 0$ avec $J \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Alors, on peut multiplier ces p équations de dépendance sur le champ de vitesses virtuelles par p variables supplémentaires λ_i , les multiplicateurs de Lagrange, tel que : $v^{*T} J^T \lambda = 0, \forall \lambda \in \mathbb{R}^p$ (nullité des puissances virtuelles dans les liaisons parfaites). Il est alors toujours possible de trouver $\lambda \in \mathbb{R}^p$ qui vérifie :

$$v = 0 \Rightarrow v^{*T} (F + J^T \lambda) = 0, \quad \forall v^{*T} \in \mathbb{R}^n \quad (\text{IV.9})$$

ce qui implique : $F + J^T \lambda = 0$. On retrouve donc l'équilibre entre le champ de forces extérieures et les réactions dans les liaisons d'intensité λ_i .

Le PPV est étendu à la dynamique grâce au principe de D'Alembert. L'intérêt du PPV en modélisation de système mécanique est de définir le champ de vitesses virtuelles adéquat pour projeter les efforts afin d'obtenir les équations qui nous «intéressent». Néanmoins, sa mise en œuvre est plus délicate que les formalismes bien pratiques de Newton-Euler et de Lagrange. Mais son caractère plus fondamental permet d'obtenir des modèles dynamiques de manipulateurs parallèles sous la forme souhaitée. Par exemple, le développement du MDI de la plate-forme de Gough-Stewart (13 solides dans l'espace avec 6 boucles cinématiques) a été fait en combinant le PPV avec les équations de Newton-Euler de chaque jambe [Afroun et al., 2012]. Comme pour les équations de Lagrange (Équation.IV.7), le PPV (Équation.IV.9) permet de traiter les chaînes cinématiques fermées. L'efficacité de ces deux approches pour obtenir un modèle dynamique exploitable en commande est souvent débattue car ces modèles demeurent souvent complexes à cause de l'élimination des multiplicateurs de Lagrange [Guglielmetti, 1994]. Une des réponses à cette question est la synthèse de régulateurs basées sur des modèles algèbro-différentiels. Cette idée sera développée en détail dans la suite de ce manuscrit. D'autres méthodes de modélisation existent dans la littérature comme les équations canoniques de Hamilton [De Jalon and Bayo, 2012], les équations de Kane [Kane and Levinson, 1985] ou la théorie des visseurs [Davidson and Hunt, 2004]. Ces méthodes n'ont pas fait l'objet, à notre connaissance, d'un traitement approfondi pour l'utilisation en commande dans un cadre systématique. C'est ce qui est proposé par la suite grâce au PPV pour générer un modèle algèbro-différentiel dédié à la commande avec l'approche TS.

IV.3.3 MDI d'une chaîne cinématique ouverte

a) MDI dans l'espace articulaire

Le plus souvent, les coordonnées relatives issues des liaisons sont utilisées pour décrire le mouvement instantané d'une chaîne cinématique ouverte. Pour un manipulateur sériel avec boucle cinématique, on pourra se ramener à une chaîne ouverte équivalente constituée de liaisons actives (rotoïdes et prismatiques). Pour un manipulateur sériel à n_q liaisons rotoïdes et prismatiques, l'ensemble des coordonnées relatives, formant un paramétrage indépendant, constitue le vecteur des coordonnées articulaires auquel on associe le vecteur des vitesses articulaires $q, \dot{q} \in \mathbb{R}^{n_q}$ pour former l'état du système. Le MDI s'écrit alors sans difficulté dans l'espace articulaire avec les équations de Newton-Euler ou de Lagrange sous la forme suivante [Khalil and Dombre, 2004] :

$$\Gamma = M_q(q)\ddot{q} + N_q(q, \dot{q})\dot{q} + G_q(q)q \quad (\text{IV.10})$$

avec Γ , le vecteur des entrées de commande, $M_q(q)$, la matrice d'inertie, $N_q(q, \dot{q})\dot{q}$, le vecteur relatif aux accélérations centripètes et de Coriolis et $G_q(q)q$, est le vecteur de pesanteur.

Remarque IV.6 Les termes de la diagonale de $M_q(q)$ sont les inerties articulaires et les termes hors diagonale sont les termes de couplages articulaires. Dans le vecteur $N_q(q, \dot{q})\dot{q}$, les termes fonctions de \dot{q}_i^2 , $i \in \{1, 2, \dots, n_q\}$ expriment les quantités d'accélérations centripètes et les termes $\dot{q}_i\dot{q}_j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n_q\}$ et $i \neq j$ expriment les quantités d'accélérations de Coriolis. Le vecteur de pesanteur $G_q(q)q$ présenté ici fait apparaître le vecteur des coordonnées articulaires prémultiplié par une matrice $G_q(q)$, contrairement à l'habitude des roboticiens. Le but est de présenter une forme directement exploitable pour écrire le modèle TS par la suite. Cela suppose un choix adéquat des coordonnées angulaires (pour les liaisons rotoïdes) afin que le MDI soit défini sur tout l'intervalle de variation de ces coordonnées (compte tenu des butées articulaires).

b) MDI dans l'espace opérationnel

La commande dans l'espace opérationnel peut être requise pour que l'effecteur puisse suivre des trajectoires avec précision. En outre, un tel modèle sera utile lorsque l'effecteur interagit avec son environnement et que l'on doit caractériser la dynamique du robot du point de vue de l'effecteur. Généralement, on utilise les coordonnées et les vitesses de l'effecteur, $\chi, \dot{\chi} \in \mathbb{R}^{n_\chi}$. Il peut aussi être intéressant d'utiliser des pseudo-vitesses de l'effecteur à la place de la dérivée temporelle des coordonnées opérationnelles (pour une rotation dans l'espace de l'effecteur). À partir du MGI (Équation.IV.3), du MCI (Équation.IV.5) et de la dérivée du MCD (Équation.IV.4), le MDI dans l'espace opérationnel d'un manipulateur sériel non redondant peut être écrit à partir de (Équation.IV.10) sous la forme suivante :

$$F = M_\chi(\chi)\ddot{\chi} + N_\chi(\chi, \dot{\chi})\dot{\chi} + G_\chi(\chi)\chi \quad (\text{IV.11})$$

avec

$$\begin{aligned} F &= J^{-T}(q)\Gamma; \\ M_\chi(\chi) &= J^{-T}(q)M_q(q)J^{-1}(q); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_x(\chi, \dot{\chi}) &= \left(J^{-T}(q)N_q(q, \dot{q})J^{-1}(q) - J^{-T}(q)M_q(q)J^{-1}(q)\dot{J}(q)J^{-1}(q) \right); \\ G_x(\chi)\chi &= J^{-T}(q)G_q(q)q. \end{aligned}$$

Évidemment, le MDI dans l'espace opérationnel n'est plus valide en configuration singulière sérielle alors que le MDI dans l'espace articulaire est toujours valide.

IV.3.4 MDI d'une chaîne cinématique fermée

La modélisation de chaînes cinématiques fermées est nécessaire pour générer le modèle dynamique d'un manipulateur parallèle. De nombreux auteurs ont étudié la dynamique des robots parallèles [Merlet, 2012, Tsai, 1999]. Mais, il est encore relativement difficile d'étendre les travaux sur la commande basée sur le modèle dynamique développé dans le cadre des robots sériels pour la commande des architectures parallèles [Wang and Ghorbel, 2006a]. Cette difficulté est étroitement liée à la complexité du modèle dynamique qui est, par nature, décrit par un ensemble d'équations algébro-différentielles (DAE) d'indice 3 [Gear et al., 1985a]. Deux méthodes peuvent être principalement envisagées pour modéliser un manipulateur parallèle suivant la complexité de son architecture cinématique. La première méthode consiste à réécrire les différents termes du modèle (suivant le formalisme utilisé) en fonction uniquement de coordonnées indépendantes afin d'obtenir un modèle dynamique sous formes d'équations différentielles ordinaires (ODE). Les relations géométriques entre les coordonnées articulaires actives, passives et opérationnelles, ainsi que leurs dérivées temporelles premières et secondes, sont utilisées pour aboutir à un MDI dans l'espace articulaire (Équation.IV.10) ou opérationnel (Équation.IV.11). Cette méthode conduit à un problème de dimension la plus réduite possible (dimension minimum du vecteur d'état) mais les équations du MDI sont très complexes. Leur utilisation pour la synthèse des lois de commande avancées telles que le TS est souvent très difficile voire même impossible pour certains robots à moins que des hypothèses simplificatrices ne soient considérées [Nabat, 2007]. La deuxième méthode consiste à ouvrir dans un premier temps les boucles cinématiques afin d'écrire le modèle ODE de chaque chaîne cinématique ouverte puis de produire le modèle DAE en regroupant les modèles ODE et les équations de fermeture de boucles. L'idée a été initié par Wittenburg [Wittenburg, 2013] pour la modélisation et la simulation de systèmes multi-corps et elle a été appliquée par Ghorbel [Ghorbel et al., 2000] pour la commande de robot parallèle. Dans la suite de ce manuscrit, nous proposons une méthode de modélisation DAE des robots parallèles qui s'inspire de cette deuxième méthode ; l'objectif est d'aboutir à un modèle faisant apparaître la dynamique des jambes et la dynamique de la nacelle.

Considérons le manipulateur parallèle (Figure.IV.11.b). Ce système mécanique articulé est constitué de n jambes (chaînes cinématiques ouvertes simples) à m articulations (rotoïdes ou prismatiques) et d'une nacelle (solide terminale) reliée à l'ensemble des jambes. Soit $\rho_i \in \mathbb{R}^m$ le vecteur des coordonnées articulaires actives et passives de la $i^{\text{ème}}$ jambe, $\chi \in \mathbb{R}^{n \times \chi}$ le vecteur des coordonnées opérationnelles (décrivant la position et éventuellement l'orientation de la nacelle) et $\Gamma \in \mathbb{R}^{n_g}$ le vecteur des entrées de commandes (forces ou couples moteurs).

En premier lieu, le manipulateur est modélisé en séparant les jambes et la nacelle, ce qui revient à ouvrir les boucles cinématiques (Figure.IV.11.a). En utilisant l'un des formalismes vus précédemment, on aboutit à l'ensemble des équations suivantes :

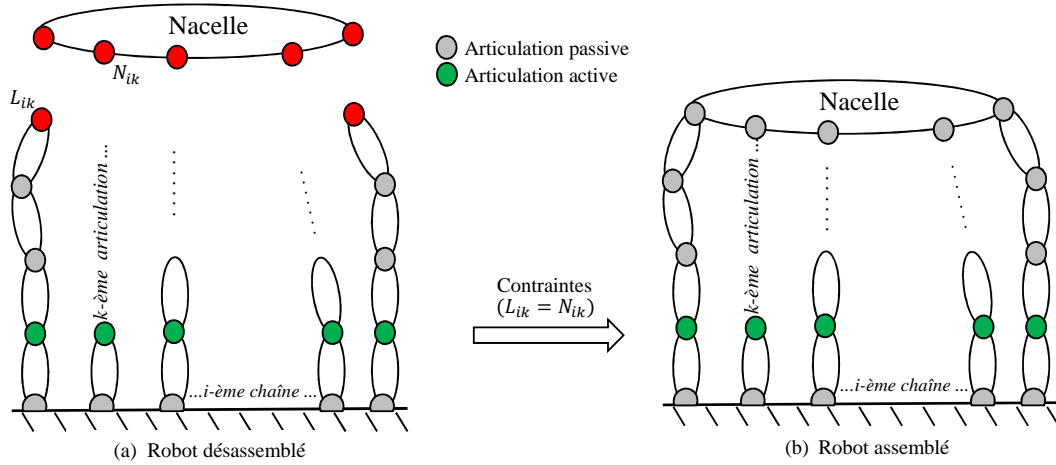


FIGURE IV.11: Synoptique d'un robot parallèle

$$H_i = M_{\rho_i}(\rho_i)\ddot{\rho}_i + N_{\rho_i}(\rho_i, \dot{\rho}_i)\dot{\rho}_i + G_{\rho_i}(\rho_i)\rho_i \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{IV.12})$$

$$F_p = M_\chi(\chi)\ddot{\chi} + N_\chi(\chi, \dot{\chi})\dot{\chi} + G_\chi(\chi)\chi \quad (\text{IV.13})$$

où H_i représente le modèle dynamique de la $i^{\text{ème}}$ jambe et F_p représente le modèle dynamique de la nacelle.

En second lieu, on procède à la fermeture des boucles cinématiques (Figure IV.11.b). Soient $q \in \mathbb{R}^{n_q}$ et $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ les vecteurs des coordonnées articulaires actives et passives respectivement de toutes les jambes. À partir des contraintes géométriques, il est souvent facile d'exprimer les coordonnées passives en fonction des coordonnées actives et opérationnelles.

$$\theta = \mu(q, \chi) \quad (\text{IV.14})$$

De ce fait, les vitesses articulaires passives peuvent être exprimées sous la forme suivante :

$$\dot{\theta} = K_\chi(q, \chi)\dot{\chi} + K_q(q, \chi)\dot{q} \quad (\text{IV.15})$$

Remarque IV.7 L'équation (IV.14) a été exprimée en fonction de q et χ afin d'aboutir à une forme générale du modèle dynamique. Dans le cas pratique d'un manipulateur parallèle, il est souvent facile d'exprimer les coordonnées passives uniquement avec les coordonnées opérationnelles $\theta = \mu(\chi)$ car le MGI est disponible sous forme analytique. En revanche, la relation $\theta = \mu(q)$ ne pourra pas être obtenue en l'absence du MGD.

L'application du PPV sur l'ensemble du robot (jambes et nacelle) avec le champ de vitesses virtuelles dépendantes $(\dot{\rho}^{*T}, \dot{q}^{*T}, \dot{\chi}^{*T})$ conduit à l'expression suivante :

$$P_r^* = \dot{\rho}^{*T}H - \dot{q}^{*T}\Gamma + \dot{\chi}^{*T}F_p = 0 \quad (\text{IV.16})$$

$$\text{avec } \dot{\rho}^{*T} = [\dot{\rho}_1^T \quad \dot{\rho}_2^T \quad \dots \quad \dot{\rho}_n^T] \text{ et } H^T = [H_1^T \quad H_2^T \quad \dots \quad H_n^T].$$

Afin de faire apparaître la dynamique des parties actives et passives séparément, les lignes des vecteurs $\dot{\rho}$ et H sont réarrangées afin de séparer les grandeurs actives (\dot{q} et H_q) et passives ($\dot{\theta}$ et H_θ) :

$$\dot{\rho}^{*T} H = \begin{bmatrix} \dot{q}^T & \dot{\theta}^T \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} H_q \\ H_\theta \end{bmatrix} \quad (\text{IV.17})$$

où H_q et H_θ sont définis par :

$$\begin{bmatrix} H_q \\ H_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{qq} & M_{q\theta} \\ M_{q\theta}^T & M_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{qq} & N_{q\theta} \\ N_{\theta q} & N_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{qq} & 0 \\ 0 & G_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \theta \end{bmatrix} \quad (\text{IV.18})$$

En remplaçant l'expression (IV.17) dans l'équation (IV.16), la puissance virtuelle s'écrit sous la forme suivante :

$$P_r^* = \dot{q}^{*T} (H_q - \Gamma) + \dot{\chi}^{*T} F_p + \dot{\theta}^{*T} H_\theta = 0 \quad (\text{IV.19})$$

La puissance virtuelle (Équation.IV.19) est exprimée avec le champ de vitesses dépendantes (\dot{q}^{*T} , $\dot{\theta}^{*T}$, $\dot{\chi}^{*T}$) où les vitesses virtuelles actives et passives apparaissent séparément. Afin d'éliminer les vitesses virtuelles passives, l'expression (IV.15) est utilisée dans l'équation (IV.19) pour obtenir :

$$P_r^* = \dot{q}^{*T} (H_q - \Gamma + K_q^T H_\theta) + \dot{\chi}^{*T} (F_p + K_\chi^T H_\theta) = 0 \quad (\text{IV.20})$$

Le nouveau champ de vitesses virtuelles (\dot{q}^{*T} , $\dot{\chi}^{*T}$) est toujours dépendant. À partir de cette expression, on pourrait prolonger ce raisonnement pour aboutir à un champ de vitesses virtuelles indépendantes à l'aide de l'équation (IV.6) afin d'éliminer les vitesses virtuelles articulaires actives ou opérationnelles. Cette démarche aboutirait à un MDI sous forme ODE dans l'espace opérationnel ou articulaire, selon le champ de vitesses choisi. Cette procédure conduit souvent un MDI très complexe à cause des contraintes algébriques, de leurs dérivées premières et secondes «intégrées» dans les équations différentielles. Une autre alternative consiste à introduire des multiplicateurs de Lagrange afin de relâcher l'expression (IV.20).

Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange λ est un vecteur de variables additionnelles que l'on introduit à partir de la puissance virtuelle de l'ensemble des liaisons. Tant que les contraintes de liaison (Équation.IV.1) sont respectées, l'équation cinématique (IV.6) est vérifiée. La puissance virtuelle des contraintes de liaison étant nulle (liaisons parfaites), on peut écrire :

$$P_c^* = (\dot{q}^{*T} J_q^T - \dot{\chi}^{*T} J_\chi^T) \lambda = 0 \quad , \forall \lambda \in \mathbb{R}^{n_\phi} \quad (\text{IV.21})$$

avec $n_\phi = \dim(\phi(q, \chi))$.

Comme les puissances virtuelles (Équation.IV.20) et (Équation.IV.21) sont nulles, leur somme est également nulle :

$$P^* = \dot{q}^{*T} (H_q - \Gamma + K_q^T H_\theta + J_q^T \lambda) + \dot{\chi}^{*T} (F_p + K_\chi^T H_\theta - J_\chi^T \lambda) = 0 \quad (\text{IV.22})$$

On peut toujours trouver un vecteur des multiplicateurs de Lagrange qui vérifie l'équation (IV.22) quel que soit le champ de vitesse virtuel (\dot{q}^{*T} , $\dot{\chi}^{*T}$). On en déduit donc, avec les équations de contrainte (Équation.IV.1), le modèle dynamique algèbro-différentiel sous la forme du système d'équations (IV.23).

$$P^* = 0 \quad \forall \begin{bmatrix} \dot{q}^{*T} & \dot{\chi}^{*T} \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{(n_q+n_\chi)} \Rightarrow \begin{cases} H_q + K_q^T H_\theta + J_q^T \lambda = \Gamma & \text{(IV.23a)} \\ F_p + K_\chi^T H_\theta - J_\chi^T \lambda = 0 & \text{(IV.23b)} \\ \phi(q, \chi) = 0 & \text{(IV.23c)} \end{cases}$$

L'équation (IV.23a) décrit la dynamique des jambes sous contraintes tandis que l'équation (IV.23b) décrit la dynamique de la nacelle sous contraintes. Ce modèle fait encore apparaître les variables passives (coordonnées, vitesses et accélérations) à travers le terme H_θ . Afin d'éliminer ces variables, les équations (IV.14), (IV.15) et sa dérivée sont utilisées dans l'équation (IV.18); les expressions résultantes de H_q et H_θ fonctions de q , χ et leurs dérivées ainsi que l'expression de F_p issue de (IV.13) sont remplacées dans les équations (IV.23a) et (IV.23b) pour obtenir :

$$\begin{cases} M'_{qq} \ddot{q} + M_{q\chi} \ddot{\chi} + N'_{qq} \dot{q} + N_{q\chi} \dot{\chi} + G'_{qq} q + J_q^T \lambda = \Gamma & \text{(IV.24a)} \\ M'_{q\chi} \ddot{q} + M_{\chi\chi} \ddot{\chi} + N_{\chi q} \dot{q} + N_{\chi\chi} \dot{\chi} + G_{\chi\chi} \chi - J_\chi^T \lambda = 0 & \text{(IV.24b)} \\ \phi(q, \chi) = 0 & \text{(IV.24c)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } M'_{qq} &= M_{qq} + M_{q\theta} K_q + (M_{q\theta} K_q)^T + K_q^T M_{\theta\theta} K_q, \\ M_{\chi\chi} &= M_\chi + K_\chi^T M_{\theta\theta} K_\chi, \\ M_{q\chi} &= M_{q\theta} K_\chi + K_q^T M_{\theta\theta} K_\chi, \\ N'_{qq} &= N_{qq} + M_{q\theta} \dot{K}_q + N_{q\theta} K_q + K_q^T N_{\theta q} + K_q^T M_{\theta\theta} \dot{K}_q + K_q^T N_{\theta\theta} K_q, \\ N_{\chi\chi} &= N_\chi + K_\chi^T M_{\theta\theta} \dot{K}_\chi + K_\chi^T N_{\theta\theta} K_\chi, \\ N_{q\chi} &= M_{q\theta} \dot{K}_\chi + N_{q\theta} K_\chi + K_q^T M_{\theta\theta} \dot{K}_\chi + K_q^T N_{\theta\theta} K_\chi, \\ N_{\chi q} &= K_\chi^T N_{\theta q} + K_\chi^T M_{\theta\theta} \dot{K}_q + K_\chi^T N_{\theta\theta} K_q, \\ G'_{qq} q &= G_{qq} q + K_q^T G_{\theta\theta} \mu(q, \chi) \text{ et} \\ G_{\chi\chi} \chi &= G_\chi \chi + K_\chi^T G_{\theta\theta} \mu(q, \chi). \end{aligned}$$

L'équation (IV.24) représente le modèle dynamique d'un manipulateur parallèle écrit sous forme algèbro-différentielle à la fois dans les espaces articulaire et opérationnel; la dynamique de la partie passive est partagée entre ces deux espaces. À première vue, les expressions matricielles paraissent très complexes dans le cas général. L'intérêt de cette formulation réside dans son caractère univoque. Elle permet également d'identifier les différentes sources de non-linéarités ce qui permet de contrôler partiellement leur distribution selon l'objectif de commande.

En pratique, le choix des coordonnées et de la façon d'exploiter le modèle (IV.24) dépend de l'objectif de commande et de la complexité des jacobiniennes dans la relation cinématique (IV.15). Par exemple, si l'objectif est de synthétiser un régulateur à partir d'un modèle écrit dans l'espace articulaire, il est plus judicieux d'écrire les variables passives en fonction des variables opérationnelles (Remarque.IV.7); ceci permettra de placer toute la dynamique de la partie passive dans la partie opérationnelle ($K_q = 0$). Dans le cas d'une commande dans l'espace opérationnel, on peut faire l'opération inverse ($K_\chi = 0$) à

condition que l'on dispose d'un MGD sous forme analytique.

Le modèle (Équation.IV.24) n'est pas exploitable dans l'état pour un objectif de commande. La plupart des travaux dans ce domaine s'orientent soit vers l'élimination des multiplicateurs de Lagrange [Miller and Clavel, 1992, Ghorbel et al., 2001] soit vers l'augmentation du modèle avec une dynamique artificielle sur les contraintes [Dabney et al., 2002, Wang and Ghorbel, 2006b] (Chapitre.V). Dans le cadre de ce travail, l'objectif est de proposer des lois de commande appliquées à partir du modèle dynamique sous sa forme la plus simple possible. Pour cela, il est proposé de garder le modèle sous sa forme algébro-différentielle ; la démarche nécessite une phase de découplage du modèle entre espaces opérationnel et articulaire ce qui conduit parfois à des expressions matricielles beaucoup plus complexes (Chapitre.V). La complexité du modèle découplé est étroitement liée à la complexité des jacobienes J_q et J_χ (Équation.IV.6), leur inverse ainsi que leur dérivée temporelle (modèle cinématique d'ordre 2). Pour cela, il est très important de bien choisir le système de coordonnées afin d'aboutir à l'expression la plus simple possible de l'équation de contrainte. Deux exemples vont permettre d'illustrer la démarche.

IV.4 Modélisation du Biglide

Le Biglide est un manipulateur parallèle plan à 2 ddl [Majou et al., 2007, Cheung and Hung, 2005] (Figure.IV.12). Il est construit à partir de deux jambes constituées chacune d'un patin (solide en translation) et d'une barre de longueur a (solide élancé avec deux liaisons rotoïdes à chaque extrémité). Chaque barre relie donc un patin à l'effecteur. Les liaisons (prismatiques) actives sont situées entre la base et les patins dont l'axe est commun et horizontal ; leurs positions linéaires forment le vecteur $q = [q_1 \ q_2]^T$. À partir de ces coordonnées articulaires actives, un effecteur de coordonnées opérationnelles $\chi = [x \ y]^T$ est positionné dans l'espace de travail du robot. Cette architecture cinématique est employée en particulier dans l'industrie de l'électronique pour les robots de transfert [Cheung and Hung, 2005] et les centres d'usinage à grande vitesse [Greffioz, 2000] [Katz et al., 2003].

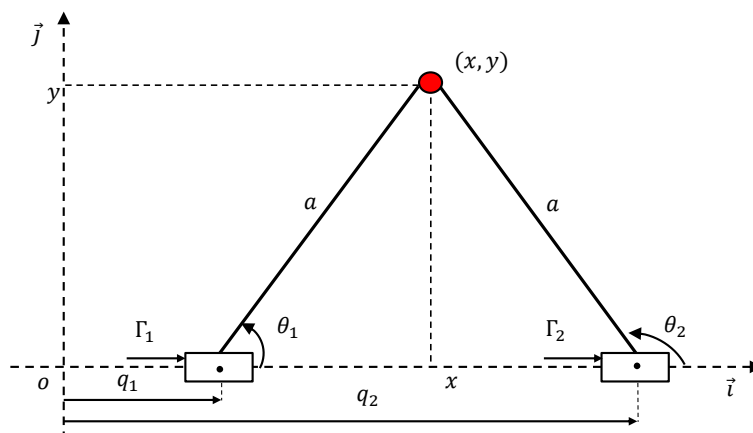


FIGURE IV.12: Synoptique du Biglide

IV.4.1 Modèle géométrique

La boucle cinématique du Biglide conduit à l'expression de contraintes (IV.1), avec :

$$\phi(q, \chi) = \begin{pmatrix} (x - q_1)^2 + y^2 - a^2 \\ (q_2 - x)^2 + y^2 - a^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{IV.25})$$

Le MGI peut se déduire de la relation (IV.25) sous la forme de l'expression (IV.3) avec :

$$q = g_I(\chi) = \begin{pmatrix} x - C(y) \\ x + C(y) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.26})$$

où $C(y) = \sqrt{a^2 - y^2}$.

En raison de l'architecture simple du Biglide, le MGD s'écrit facilement à partir de l'équation (IV.26) :

$$\chi = g_D(q) = \begin{pmatrix} \frac{q_1 + q_2}{2} \\ \sqrt{a^2 - \frac{(q_1 - q_2)^2}{4}} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.27})$$

IV.4.2 Modèle cinématique

À partir de la dérivation temporelle de l'équation de contraintes (IV.25), les jacobiniennes du modèle cinématique IV.6 s'écrivent sous la forme suivante :

$$J_\chi(q, \chi) = \begin{bmatrix} x - q_1 & y \\ x - q_2 & y \end{bmatrix} \quad (\text{IV.28})$$

$$J_q(q, \chi) = \begin{bmatrix} x - q_1 & 0 \\ 0 & x - q_2 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.29})$$

IV.4.3 Singularités et espace de travail

Au regard des Jacobiennes (IV.28) et (IV.29), il apparait clairement que le Biglide comporte deux singularités, une parallèle et l'autre sérielle et parallèle à la fois :

- singularité parallèle : $y = 0$, lorsque les deux barres sont alignées (Figure.IV.13a)
- singularité sérielle & parallèle : $q_1 = q_2 = x$, lorsque les deux barres sont superposées (Figure.IV.13b)

Pour une longueur des barres $a = 0,07 \text{ m}$ et un espace articulaire défini par $q_1 \in [0, 05450, 0895] \text{ m}$ et $q_2 \in [0, 12950, 1645] \text{ m}$, l'espace de travail du manipulateur est donné par la figure (IV.14).

IV.4.4 Modèle dynamique

Afin d'écrire le modèle dynamique du Biglide, considérons les notations suivantes (Figure.IV.12) :

- $\Gamma = [\Gamma_1 \quad \Gamma_2]^T$ représente les forces des actionneurs linéaires (entrées de commande)
- $\theta = [\theta_1 \quad \theta_2]^T$ représente l'inclinaison des barres (variables articulaires passives)

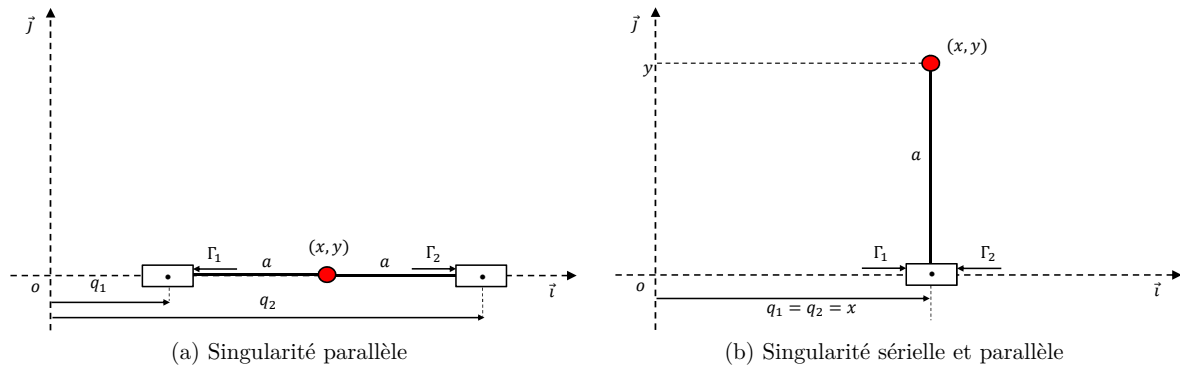
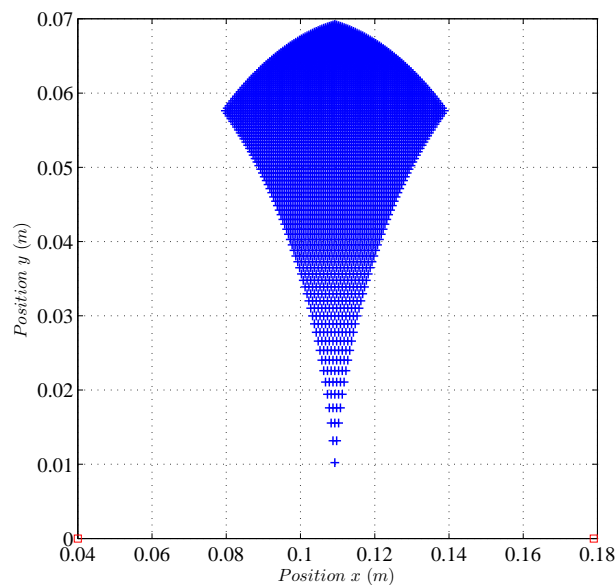


FIGURE IV.13: Singularités du Biglide


 FIGURE IV.14: Espace de travail du Biglide pour ($a = 0,07m$)

Le manipulateur est soumis à l'accélération de la pesanteur $\vec{g} = -g \vec{j}$ avec $\|\vec{j}\| = 1$.

Considérons les vecteurs des variables actives et passives $\rho_i = [q_i \theta_i]^T$, $i = \{1, 2\}$. Le modèle dynamique de chaque jambe H_i ainsi que celui de l'effecteur F_p (considéré comme un point matériel) sont donnés sous la forme des expressions (IV.12) et (IV.13) :

$$H_i = \begin{bmatrix} m_i & -ms_i \sin \theta_i \\ (*) & J_i \end{bmatrix} \ddot{\rho}_i + \begin{bmatrix} b_i & -ms_i \cos \theta_i \dot{\theta}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\rho}_i + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ms_i g \cos \theta_i / \theta_i \end{bmatrix} \rho_i \quad (\text{IV.30})$$

$$F_p = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \ddot{\chi} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & mg/y \end{bmatrix} \chi \quad (\text{IV.31})$$

où m et m_i sont respectivement les masses de l'effecteur et de la jambe i , $i = \{1, 2\}$, ms_i et J_i sont respectivement le premier et le second moment d'inertie de la barre i par rapport à son axe de rotation (sur le patin i), b_i est le coefficient de frottement visqueux du patin. Afin de placer la dynamique de la partie passive uniquement sur la dynamique

opérationnelle, les variables passives sont exprimées de la façon suivante :

$$\theta = \mu(\chi) \quad (\text{IV.32})$$

avec $\mu(\chi) = \tan^{-1}(C(y)/y) [1 \quad -1]^T$. De ce fait, les vitesses articulaires passives peuvent être exprimées sous forme :

$$\dot{\theta} = K_\chi(\chi)\dot{\chi} \quad (\text{IV.33})$$

$$\text{avec } K_\chi(\chi) = \begin{bmatrix} 0 & 1/C(y) \\ 0 & -1/C(y) \end{bmatrix}.$$

Pour appliquer la méthodologie présentée dans la partie (IV.3.4), la dynamique des jambes H_i , $i = \{1, 2\}$ est réordonnée de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} H_q \\ H_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{qq} & M_{q\theta} \\ M_{q\theta}^T & M_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{qq} & N_{q\theta} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & G_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \theta \end{bmatrix} \quad (\text{IV.34})$$

avec

$$M_{qq} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad M_{q\theta} = \begin{bmatrix} -ms_1 \sin \theta_1 & 0 \\ 0 & -ms_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}, \quad M_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}, \quad N_{qq} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix},$$

$$N_{q\theta} = \begin{bmatrix} ms_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 & 0 \\ 0 & ms_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}, \quad G_{\theta\theta} = \begin{bmatrix} ms_1 g \cos \theta_1 / \theta_1 & 0 \\ 0 & ms_2 g \cos \theta_2 / \theta_2 \end{bmatrix}.$$

L'application du PPV avec les multiplicateurs de Lagrange sur le Biglide conduit à l'expression suivante :

$$P^* = \dot{q}^{*T} (H_q + J_q^T \lambda - \Gamma) + \dot{\chi}^{*T} (F_p + K_\chi^T H_\theta - J_\chi^T \lambda) = 0 \quad (\text{IV.35})$$

Il est alors toujours possible de trouver un vecteur des multiplicateurs de Lagrange λ qui vérifie l'équation (IV.35) quel que soit le champ de vitesses virtuelles ($\dot{q}^{*T}, \dot{\chi}^{*T}$); on en déduit donc le modèle dynamique du Biglide sous forme algèbro-différentielle :

$$\begin{cases} M_{qq}\ddot{q} + M_{q\chi}\ddot{\chi} + N_{qq}\dot{q} + N_{q\chi}\dot{\chi} + J_q^T \lambda = \Gamma & (\text{IV.36a}) \\ M_{q\chi}^T \ddot{q} + M_{\chi\chi}\ddot{\chi} + N_{\chi\chi}\dot{\chi} + G_{\chi\chi}\chi - J_\chi^T \lambda = 0 & (\text{IV.36b}) \\ \phi(q, \chi) = 0 & (\text{IV.36c}) \end{cases}$$

$$\text{avec } M_{q\chi} = M_{q\theta} K_\chi, \quad M_{\chi\chi} = M_\chi + K_\chi^T M_{\theta\theta} K_\chi, \quad N_{\chi\chi} = K_\chi^T M_{\theta\theta} \dot{K}_\chi + K_\chi^T N_{\theta\theta} K_\chi,$$

$$N_{q\chi} = M_{q\theta} \dot{K}_\chi + N_{q\theta} K_\chi, \quad G_{\chi\chi}\chi = G_\chi\chi + K_\chi^T G_{\theta\theta} \mu(q, \chi).$$

Le chapitre suivant présente l'écriture du modèle TS à partir du modèle dynamique du Biglide.

IV.5 Modélisation du Triglide

Le Triglide est un robot parallèle plan à 3 ddl (Figure IV.15). Il est construit sur le principe du Biglide. Il permet de positionner et d'orienter dans le plan une nacelle (barre de longueur a_0) de coordonnées opérationnelles $\chi = [x \ y \ \alpha]^T$, à partir de trois patins en translation selon un axe horizontal commun. Les positions linéaires des patins constituent l'ensemble des coordonnées articulaires actives $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$. Cette architecture cinématique a été proposée pour la construction du banc d'assistance au passage assis-debout. Ce manipulateur permet de réaliser les trois mouvements élémentaires d'un PAD dans le plan sagittal (déplacement (x, y) et rotation).

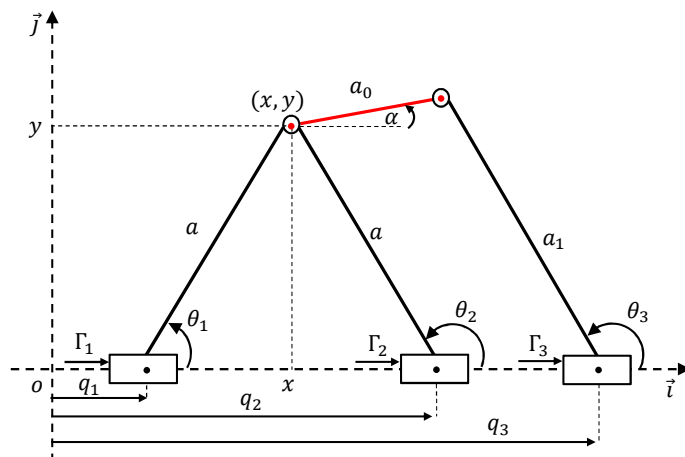


FIGURE IV.15: Synoptique du Triglide

IV.5.1 Modèle géométrique

L'analyse des boucles cinématiques du Triglide conduit à l'expression de contraintes (IV.1), avec :

$$\phi(q, \chi) = \begin{pmatrix} (x - q_1)^2 + y^2 - a^2 \\ (q_2 - x)^2 + y^2 - a^2 \\ C_1^2 + C_2^2 - a_1^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{IV.37})$$

où $C_1 = q_3 - x - a_0 \cos \alpha$ et $C_2 = y + a_0 \sin \alpha$.

Le MGI peut se déduire de la relation (IV.37) sous la forme (IV.3) avec :

$$q = g_I(\chi) = \begin{pmatrix} x - \sqrt{a^2 - y^2} \\ x + \sqrt{a^2 - y^2} \\ x + a_0 \cos \alpha + \sqrt{a_1^2 - (y + a_0 \sin \alpha)^2} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.38})$$

IV.5.2 Modèle cinématique

À partir de la dérivation temporelle de l'équation de contraintes (IV.37), les jacobiennes du modèle cinématique IV.6 s'écrivent sous la forme suivante :

$$J_\chi(q, \chi) = \begin{bmatrix} x - q_1 & y & 0 \\ x - q_2 & y & 0 \\ -C_1 & C_2 & a_0(C_1 \sin(\alpha) + C_2 \cos(\alpha)) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.39})$$

$$J_q(q, \chi) = \begin{bmatrix} x - q_1 & 0 & 0 \\ 0 & x - q_2 & 0 \\ 0 & 0 & -C_1 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.40})$$

IV.5.3 Singularités et espace de travail

Au regard des jacobiennes (IV.39) et (IV.40), il apparaît clairement que le Triglide comporte 3 singularités :

- Singularité sérielle pour $x = q_3 - a_0 \cos(\alpha)$: elle se produit lorsque la barre de longueur a_1 se retrouve à la perpendiculaire de l'axe de translation des patins (Figure.IV.16a). Le MCI ne doit pas être utilisé au voisinage de cette configuration.
- Singularité sérielle & parallèle pour $q_1 = q_2 = x$: elle se produit lorsque les deux barres de longueurs a sont superposées (Figure.IV.16b). Dans une telle configuration, on perd le contrôle du manipulateur. En pratique, on peut facilement supprimer cette singularité en ajoutant des butées sur q_1 et q_2 .
- Singularité parallèle pour $\alpha = \tan^{-1}(\frac{y}{x-q_3})$: elle se produit lorsque la barre de longueur a_1 est alignée avec la nacelle (Figure.IV.16c). Cette singularité est la plus difficile à gérer car elle nécessite l'utilisation de butées dynamiques pour ne jamais l'atteindre.

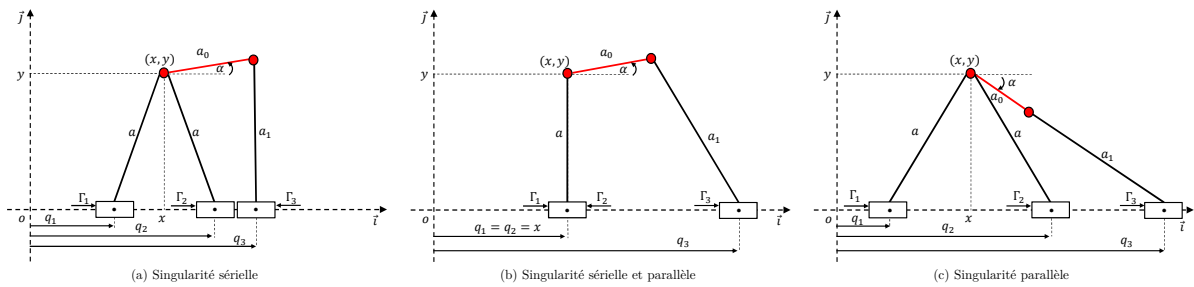


FIGURE IV.16: Singularités du Triglide

La figure (IV.17) montre l'espace de travail du Triglide pour des longueurs de barres $a_0 = 0,25m$, $a_1 = 1,292m$ et $a = 1,242$ et un espace articulaire (avec butées dynamiques) défini en annexe (A.3).

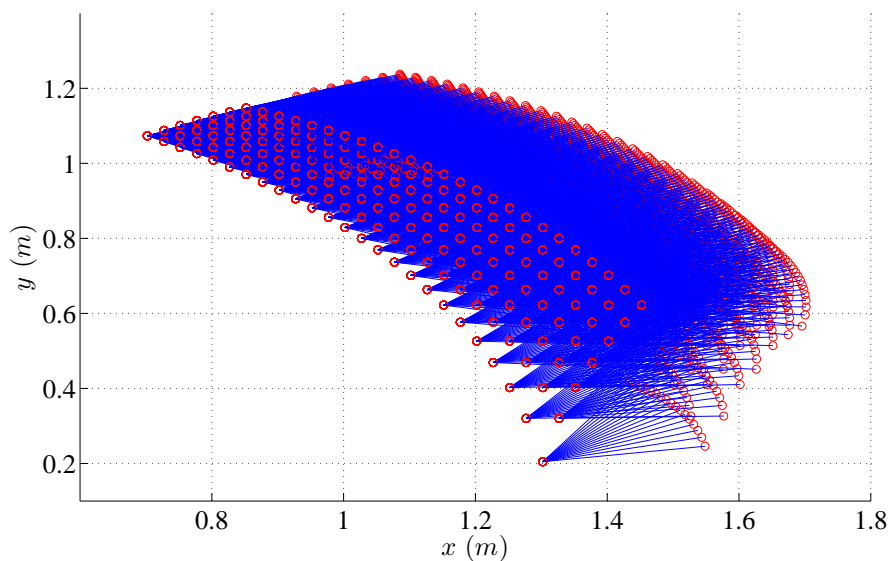


FIGURE IV.17: Espace de travail du Triglide

IV.5.4 Modèle dynamique

L'écriture du modèle dynamique du Triglide sous forme algèbro-différentielle selon la méthodologie présentée dans la partie (IV.3.4) et avec un choix de coordonnées similaire à celui utilisé pour le Biglide conduit à un modèle relativement complexe pour des objectifs de commande avancée. En effet, le choix des coordonnées opérationnelles $\chi = [x \ y \ \alpha]^T$ (Figure IV.15) est la principale cause de complexité dans le modèle; la rotation de la tablette α introduit plusieurs termes non linéaires dans les jacobiniennes J_χ et J_q qui se propagent ensuite dans tout le modèle. Dans cette partie, une nouvelle méthodologie de modélisation est présentée. Elle est basée sur l'écriture du PPV à partir des coordonnées naturelles du système mécanique articulé.

IV.5.4.1 Modèle dynamique d'une barre à partir des coordonnées naturelles

Considérons un solide en mouvement plan (Figure IV.18a) de masse m_G , de centre de masse G et de moment d'inertie I_G comportant deux points distincts A_1 et A_2 où sont localisées des liaisons et où sont appliquées des forces extérieures. On fait l'hypothèse que le centre de masse G est aligné avec ces deux points afin de définir un modèle de barre; son mouvement plan peut être décrit avec les coordonnées cartésiennes des points A_1 et A_2 qui constituent les coordonnées naturelles (x_1, y_1, x_2, y_2) de la barre. Ces coordonnées naturelles sont au nombre de quatre, pour un solide à trois ddl (avant assemblage au sein d'un système mécanique articulé), ce qui implique également une équation de contrainte traduisant l'équidistance des points A_1 et A_2 . Le modèle dynamique s'écrit avec trois paramètres de masse m_{ii} , m_{ij} et m_{0i} par point A_i , $i, j \in \{1, 2\}$, $i \neq j$ sous une forme algèbro-différentielle où la matrice de masse est constante. Ce modèle est développé en annexe (H).

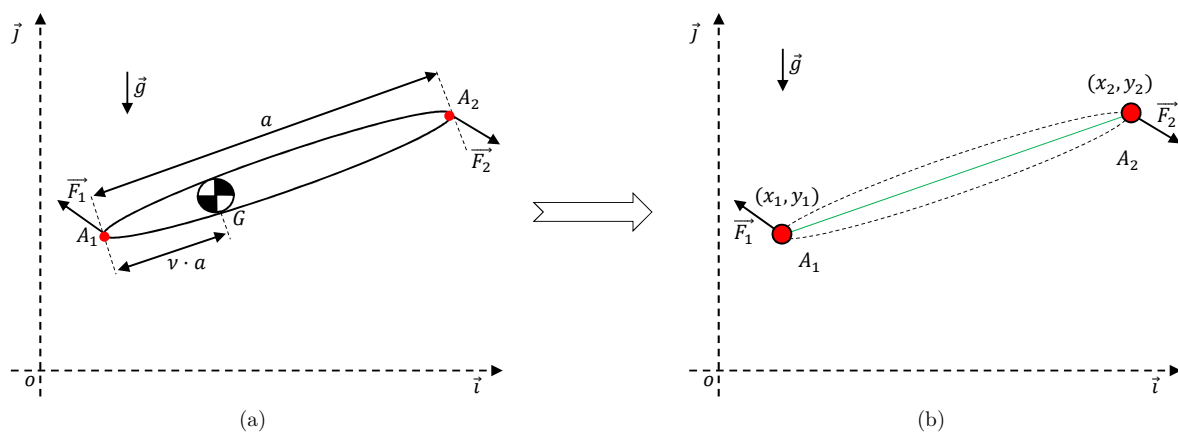


FIGURE IV.18: Représentation des caractéristiques inertielles d'une barre non homogène

IV.5.4.2 Principe d'assemblage

La construction du modèle d'un système mécanique articulé se fait par assemblage de barres en superposant les points placés sur les liaisons. À partir de la figure (IV.19a), il est évident que la contrainte d'assemblage impose que les vitesses des points $A_{j,i}$ et $A_{j,k}$ soient égales. De ce fait, l'écriture du modèle dynamique du système assemblé (Figure IV.19b) revient à l'application du PPV sur l'ensemble des points $\{\dots, A_i, A_j, A_k, \dots\}$ avec les masses des points localisées sur les liaisons définies comme suit :

$$m_{jj} = m_{jj,i} + m_{jj,k} \quad (\text{IV.41})$$

$$m_{0j} = m_{0j,i} + m_{0j,k} \quad (\text{IV.42})$$

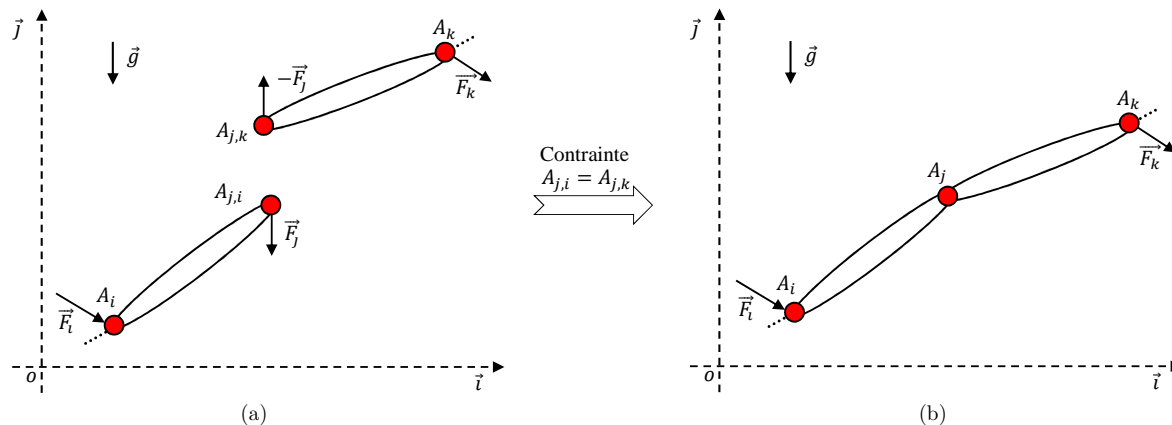


FIGURE IV.19: Assemblage de deux solides

IV.5.4.3 Modèle dynamique du Triglide à partir des coordonnées naturelles

Considérons le Triglide défini par l'ensemble des coordonnées naturelles des points matériels $\{A_1, \dots, A_5\}$ (Figure IV.20). On définit à partir de l'abscisse des points $\{A_1, \dots, A_3\}$ le vecteur des coordonnées articulaires $q = [q_1 \ q_2 \ q_3]^T$ et à partir des coordonnées des points $\{A_4, A_5\}$ le vecteur des coordonnées opérationnelles $\chi = [x_4 \ y_4 \ x_5 \ y_5]^T$.

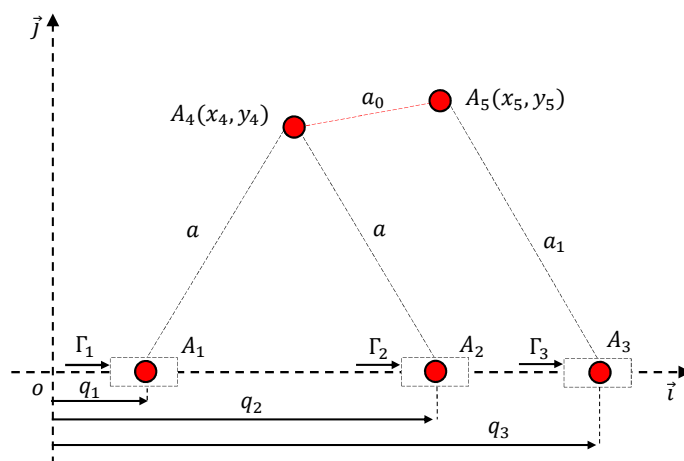


FIGURE IV.20: Modèle du Triglide en 5 points

La réécriture des contraintes géométriques conduit à la relation suivante :

$$\phi(q, \chi) = \begin{pmatrix} (x_4 - q_1)^2 + y_4^2 - a^2 \\ (q_2 - x_4)^2 + y_4^2 - a^2 \\ (q_3 - x_5)^2 + y_5^2 - a_1^2 \\ (x_5 - x_4)^2 + (y_5 - y_4)^2 - a_0^2 \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{IV.43})$$

Les expressions des jacobiennes J_q et J_χ sont déduites de l'équation de contrainte (IV.43) telles que :

$$J_\chi(q, \chi) = \begin{bmatrix} (x_4 - q_1) & y_4 & 0 & 0 \\ (x_4 - q_2) & y_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x_5 - q_3) & y_5 \\ (x_5 - x_4) & (y_5 - y_4) & (x_4 - x_5) & (y_4 - y_5) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.44})$$

$$J_q(q, \chi) = \begin{bmatrix} (x_4 - q_1) & 0 & 0 \\ 0 & (x_4 - q_2) & 0 \\ 0 & 0 & (x_5 - q_3) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{IV.45})$$

L'application du PPV avec le champ de vitesses dépendant $(\dot{q}^*, \dot{\chi}^*)$ conduit à l'expression de la puissance virtuelle suivante :

$$P_r^* = \dot{q}^{*T} (M_{qq}\ddot{q} + M_{q\chi}\ddot{\chi} + N_{qq}\dot{q} - \Gamma) + \dot{\chi}^{*T} (M_{\chi\chi}\ddot{\chi} + M_{q\chi}^T\ddot{q} + G_{\chi\chi}) = 0 \quad (\text{IV.46})$$

avec

$$M_{qq} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix}; \quad M_{q\chi} = \begin{bmatrix} m_{14} & 0 & 0 & 0 \\ m_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{35} & 0 \end{bmatrix}; \quad N_{qq} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$M_{\chi\chi} = \begin{bmatrix} m_{44} & 0 & m_{45} & 0 \\ 0 & m_{44} & 0 & m_{45} \\ m_{45} & 0 & m_{55} & 0 \\ 0 & m_{45} & 0 & m_{55} \end{bmatrix}; \quad G_{\chi\chi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{04}g/y_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{05}g/y_5 \end{bmatrix}.$$

La puissance virtuelle de l'équation contrainte cinématique est définie comme suit :

$$P_c^* = (\dot{q}^{*T} J_q^T - \dot{\chi}^{*T} J_\chi^T) \lambda = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^4 \quad (\text{IV.47})$$

La puissance virtuelle totale s'écrit alors :

$$P^* = \dot{q}^{*T} (M_{qq}\ddot{q} + M_{q\chi}\ddot{\chi} + N_{qq}\dot{q} - J_q^T \lambda - \Gamma) + \dot{\chi}^{*T} (M_{\chi\chi}\ddot{\chi} + M_{q\chi}^T\ddot{q} + G_{\chi\chi} + J_\chi^T \lambda) = 0 \quad (\text{IV.48})$$

Il est alors toujours possible de trouver un vecteur des multiplicateurs de Lagrange λ qui vérifie l'équation (IV.48) quel que soit le champ de vitesses virtuelles $(\dot{q}^{*T}, \dot{\chi}^{*T})$. On en déduit donc, avec les équations de contraintes (IV.43), le modèle dynamique algèbro-différentiel du Triglide décrit par 5 points matériels sous contraintes :

$$\begin{cases} M_{qq}\ddot{q} + M_{q\chi}\ddot{\chi} + N_{qq}\dot{q} - J_q^T \lambda = \Gamma & (\text{IV.49a}) \\ M_{\chi\chi}\ddot{\chi} + M_{q\chi}^T\ddot{q} + G_{\chi\chi} + J_\chi^T \lambda = 0 & (\text{IV.49b}) \\ \phi(q, \chi) = 0 & (\text{IV.49c}) \end{cases}$$

L'intérêt fondamental de ce modèle sous forme d'équations algèbro-différentielles (DAE) avec des coordonnées naturelles (IV.49) est d'aboutir à des matrices de masse M_{qq} , $M_{\chi\chi}$ et $M_{q\chi}$ à coefficients constants [De Jalón and Bayo, 2012]. Ce point est très important, surtout dans la phase de découplage du système (Chapitre.V).

IV.6 Conclusion

À travers ce chapitre, la modélisation dynamique des manipulateurs parallèles a été présentée en exposant le problème, autant que possible, du point de vue de la mécanique, la robotique et l'automatique. Un bref rappel en analyse cinématique a été fait afin d'introduire les outils nécessaires pour l'écriture d'un modèle dynamique. En préambule à la modélisation dynamique, un exposé des grandes familles de coordonnées a permis d'aborder la question de la complexité et de la taille du modèle, compte tenu des boucles fermées. Les principaux formalismes de génération d'équations différentielles en mécanique ont été rappelés avec les avantages et les inconvénients de chacun. Après un rappel des modèles dynamiques de chaînes cinématiques ouvertes, une méthodologie générale de modélisation des manipulateurs parallèles a été développée. Elle s'appuie sur l'approche de Wittenburg [Wittenburg, 1977] en partant du principe des puissances virtuelles des dynamiques séparées des jambes et de la nacelle (sans boucle fermée). Puis elle consiste à introduire des multiplicateurs de Lagrange compte-tenu des contraintes de fermeture de boucle. Le réarrangement en coordonnées articulaires actives et passives permet de répartir la dynamique liée aux variables passives soit dans l'espace articulaire (des variables actives), soit dans l'espace opérationnel, soit dans les deux. Cette approche permet aussi de choisir un autre type de coordonnées que celui utilisé habituellement en robotique [Briot and Khalil, 2015], par exemple les coordonnées naturelles [De Jalón, 2007]. Cette souplesse permet d'ajuster la complexité du modèle dans les espaces articulaires et opérationnels et d'en ajuster la taille. Cette méthodologie a été appliquée sur un manipulateur parallèle de type Biglide avec les coordonnées couramment employées, puis sur un manipulateur parallèle de type Triglide avec les coordonnées naturelles. L'intérêt majeur est d'aboutir à un modèle avec des matrices de masse à termes constants.

Les modèles issus de cette approche sont donnés sous forme algébro-différentielle dite d'indice 3. L'exploitation de ces modèles pour des objectifs de commande est très complexe compte tenu de la nature singulière du modèle. Deux types de procédure sont utilisés pour les exploiter ; l'un consiste à éliminer les multiplicateurs de Lagrange, ce qui conduit souvent à des modèles fortement non linéaires, l'autre consiste à introduire une dynamique supplémentaire sur les contraintes, d'où une augmentation de la taille du problème. Contrairement à ce qui est d'usage, nous proposons de garder le système sous la forme d'indice 3. Dans le chapitre suivant, l'analyse des modèles algébro-différentiels sera introduite puis la méthodologie de réduction d'indice sera discutée afin de proposer une solution pour exploiter la forme DAE durant la synthèse de régulateur basée sur l'approche TS.

Chapitre V

Commande des manipulateurs parallèles : approche PDC basée DAE

*« Pour atteindre la vérité, il faut une
fois dans la vie se défaire de toutes
les opinions qu'on a reçues, et
reconstruire de nouveau tout le
système de ses connaissances. »*

René Descartes

Sommaire

V.1 Introduction	106
V.2 Modèle DAE	107
V.3 Notion d'indice d'un modèle DAE	108
V.3.1 L'indice de différentiation	108
V.3.2 Réduction d'indice	109
V.3.3 Modèle découplé d'un manipulateur parallèle	110
V.4 Commande PDC d'une classe de modèle DAE	111
V.4.1 Modèle TS d'un modèle DAE	112
V.4.2 Problème de la boucle algébrique	112
V.5 Commande des manipulateurs parallèles	116
V.5.1 Commande PDC étendue du Biglide	118
V.5.2 Commande PDC étendue du Triglide	124
V.6 Conclusion	135

V.1 Introduction

Les équations algébo-différentielles (DAEs : Differential Algebraic Equations) sont des systèmes composés d'équations différentielles ordinaires (ODEs : Ordinary Differential Equations) et d'équations de contraintes algébriques. Ils forment l'un des moyens les plus simples et élégants pour modéliser un système physique, car ils permettent de décrire un système par un ensemble de sous-systèmes distincts assemblés par l'intermédiaire de contraintes algébriques [Biegler et al., 2012]. Ce type de représentations est fréquemment rencontré dans la modélisation des systèmes mécaniques [Führer and Leimkuhler, 1991, Haug, 1989, Petzold, 1992], systèmes multi-corps [Simeon et al., 1991], réseau électrique, mécanique des fluides et génie des procédés, etc. Les avantages des DAEs sont nombreux et cela est dû à plusieurs facteurs [Berger and Reis, 2013] :

- Parfois, il est difficile, voire impossible de reformuler un problème DAE sous forme ODE quand le système est non linéaire ;
- Les équations algébriques décrivent explicitement des lois de conservation ou des contraintes cinématiques qu'il peut être préférable de garder invariantes ;
- Il est souvent plus facile de faire varier les paramètres de conception d'un modèle implicite ;
- Lors de la modélisation, le modèle DAE ne nécessite pas de simplifications souvent nécessaires pour obtenir un modèle ODE ;
- Les variables gardent leurs interprétations physiques.

Cependant les travaux sur les DAEs ont été initialement menés en analyse numérique. Le but est de simuler le comportement d'un système complexe qui peut être une combinaison de systèmes mécaniques, électriques, chimiques ou d'autres composants physiques [Biegler et al., 2012]. Dans le domaine de l'automatique, l'extension de la théorie de commandes à des systèmes algébro-différentiels est toujours un problème ouvert car les modèles DAEs ne sont pas exprimés explicitement par une représentation d'état. Cette problématique est liée directement à la résolution des contraintes algébriques qui peuvent causer la non-unicité des conditions initiales ou bien la non-existence de solutions. Malgré cela, les DAEs ont trouvé leur place dans la théorie de la commande à travers les travaux de Rosenbrock [Rosenbrock, 1974], Luenberger [Luenberger, 1977], Verghese [Verghese et al., 1981], Cobb [Cobb, 1984], etc. Toutes ces contributions traitent les problèmes de commande des systèmes réguliers, i.e., les conditions initiales sont existantes et les solutions sont uniques. Cette notion de régularité a été présentée dans la partie (II.5.2.1). Pour un état de l'art plus exhaustif le lecteur pourra se référer aux références suivantes [Dai, 1989, Ilchmann and Reis, 2015]. Toutefois, dans le cas général d'un système non linéaire la notion de régularité est remplacée par la notion d'indice [Campbell, 1995]. Les applications des DAEs dans la commande des systèmes non linéaires sont nombreuses. Pour certains systèmes, la méthode la plus utilisée est l'élimination de la contrainte algébrique en la supposant respectées par les conditions initiales. Cette procédure conduit souvent à un ensemble d'équations différentielles ordinaires très complexes étant donné que la plupart du temps les contraintes sont non linéaires et leur élimination n'est pas facile. D'autres méthodes existent pour la mise en forme ODE d'un modèle DAE telle que l'approche singulièrement perturbée [Wang and Ghorbel, 2006b, Gordon et al., 2000], elle se traduit par l'extension du vecteur d'état avec des dynamiques artificielles rapides liées à la violation de contraintes algébriques. Du point de vue de la commande basée TS, cette représentation peut être très contraignante car elle favorise le conservatisme des conditions LMIs.

Dans ce chapitre, une brève description des modèles DAEs est présentée avec les différentes notions nécessaires pour la compréhension du manuscrit. Un exemple linéaire très simple est présenté afin de comprendre la philosophie de l'approche. Les modèles DAEs d'indice 3 développés dans le chapitre précédent seront repris afin de montrer la procédure de réduction d'indice et le découplage du système. La mise sous forme TS des modèles DAEs sera justifiée. Une application pour la commande d'un manipulateur parallèle à 2 ddl (Biglide) est présentée afin de justifier l'approche dans le cas général et de pouvoir faire des comparaisons avec le modèle ODE. Enfin, une dernière application est proposée pour la commande du banc d'assistance PAD.

V.2 Modèle DAE

La modélisation d'un système complexe via des équations algébro-différentielles conduit à la forme générale DAE suivante :

$$F(z, \dot{z}, u, t) = 0 \quad (\text{V.1})$$

où $z = \begin{bmatrix} x^T & \lambda^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n_x+n_\lambda}$ représente le vecteur des variables dynamiques et algébriques, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ est le vecteur d'entrée commande. Le modèle donné par l'équation (V.1) est connu sous le nom de modèle DAE implicite. Dans le cas d'un système mécanique, le modèle DAE est naturellement écrit sous la forme dite semi-implicite comme suit [Arnold et al., 2004] :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x, u, \lambda, t) & (\text{V.2a}) \\ 0 = \phi(x, u, \lambda, t) & (\text{V.2b}) \end{cases}$$

où l'équation (V.2a) représente l'ensemble des équations différentielles et l'équation (V.2b) l'ensemble des contraintes algébriques. Cette forme est également dite système descripteur ou système singulier [Dai, 1989]. Dans la suite de ce manuscrit, nous allons nous concentrer uniquement sur la forme semi-implicite d'un modèle DAE et les fonctions $f(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ seront supposées suffisamment différentiables.

Exemple V.1

Soit le système représenté à la figure V.1. Deux solides séparés d'une distance a via une barre de masse négligeable glissent sur une surface plane. m_1 , m_2 représentent les masses des solides, $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$, $x_4(t)$ représentent respectivement les positions et les vitesses. Pour des raisons de simplicité, on considère un frottement visqueux b uniquement sur la deuxième masse. Le système se déplace librement par application d'une force $u(t)$ sur le premier solide. Considérons $\lambda(t)$ la force interne d'interaction entre les deux solides. Le modèle DAE du système est naturellement écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_3(t) & (\text{V.3a}) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) & (\text{V.3b}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_3(t) = \frac{1}{m_1}(u(t) - \lambda(t)) & (\text{V.3c}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_4(t) = \frac{1}{m_2}(\lambda(t) - bx_4(t)) & (\text{V.3d}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = x_2(t) - x_1(t) - a & (\text{V.3e}) \end{cases}$$

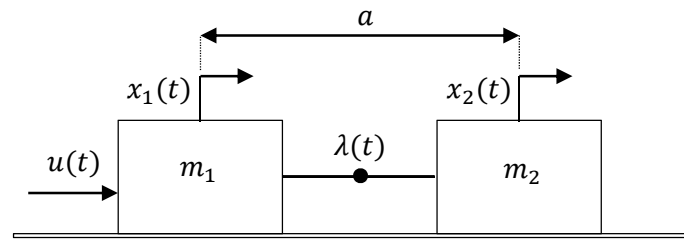


FIGURE V.1: Système deux masses

où, les équations (V.3a-V.3d) représentent l'ensemble des équations différentielles et (V.3e) représente la contrainte algébrique.

V.3 Notion d'indice d'un modèle DAE

L'indice est une notion couramment utilisée dans la théorie des systèmes DAEs. Il existe plusieurs types d'indice dans la littérature, par exemple l'indice de différentiation, l'indice de perturbation et l'indice d'étrangeté [Campbell, 1995, Kunkel and Mehrmann, 2001]. La propriété commune à ces différentes notions est qu'elles permettent en quelque sorte de dire à quel point un modèle DAE est différent d'une représentation d'état. Par conséquent, plus l'indice est élevé plus le modèle DAE est difficile à commander. L'indice est une notion propre au modèle, différents modèles d'un même système physique peuvent avoir différents indices.

V.3.1 L'indice de différentiation

L'indice de différentiation est le concept le plus utilisé dans la théorie des DAEs. Il désigne le nombre minimal de différentiations nécessaires pour obtenir un modèle ODE équivalent au modèle DAE initial.

Définition V.1 [Brenan et al., 1996]

Considérons le modèle DAE implicite (Équation.V.1). L'indice ν est le plus petit entier permettant de décrire \dot{z} comme une fonction continue de z , t , u et des dérivées supérieures de u , i.e.,

$$\dot{z}(t) = \Phi(t, z, u, \dot{u}, \dots, u^\nu) \quad (\text{V.4})$$

à partir de l'équation vectorielle $F_\nu^d(t, z, z_{\nu+1}, u, \dot{u}, \dots, u^\nu) = 0$, où

$$F_\nu^d(t, z, z_{\nu+1}, u, \dot{u}, \dots, u^\nu) = \begin{pmatrix} F(t, z, \dot{z}, u) \\ \frac{d}{dt} F(t, z, \dot{z}, u) \\ \vdots \\ \frac{d^\nu}{dt^\nu} F(t, z, \dot{z}, u) \end{pmatrix} \quad (\text{V.5})$$

et $z_\nu = (\dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(\nu)})$.

Remarque V.1 Dans le cas d'un modèle DAE semi-implicite (Équation.V.2), la notion d'indice de différentiation est beaucoup plus intuitive. Elle correspond au nombre de dérivations de la contrainte algébrique nécessaires afin de faire apparaître la dynamique des variables algébriques.

Remarque V.2 Pour l'exemple V.1, il est possible de résoudre l'équation algébrique (V.3e) pour λ après trois différentiations de la contrainte. Dans ce cas, le modèle DAE (V.3) est dit d'indice 3.

V.3.2 Réduction d'indice

La réduction d'indice est une procédure qui permet de réduire l'indice d'ordre supérieur ($indice \geq 2$) d'un modèle afin qu'il soit d'ordre un ou zéro. Bien entendu, l'objectif est d'obtenir un modèle plus facile à manipuler. Dans le cas d'un système mécanique, le modèle DAE est par nature d'indice 3 [Gear et al., 1985b]. Les contraintes d'assemblage imposent que les conditions initiales sur les positions respectent une certaine géométrie sinon le système serait considéré comme non utilisable ou désassemblé. De ce fait, la vérification des contraintes de vitesse ou d'accélération implique automatiquement la non-violation des contraintes géométriques. À partir de ce constat, la procédure de réduction d'indice revient à la différentiation des contraintes géométriques par rapport au temps.

Exemple V.2

Reprenons le modèle DAE d'indice 3 (Équation.V.3), la contrainte d'assemblage impose que les deux solides m_1 et m_2 soient séparés d'une distance a . À l'instant initial, si cette contrainte est respectée alors elle le sera toujours si les deux solides se déplacent à la même vitesse ou s'ils subissent la même quantité d'accélération. De ce fait, par une double dérivation de la contrainte géométrique par rapport au temps et par remplacement des variables, le modèle (Équation.V.3) pourrait être reformulé sous une forme DAE d'indice 1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{1}{m_1}(u(t) - \lambda(t)) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{1}{m_2}(\lambda(t) - bx_4(t)) \\ 0 = x_2(t) - x_1(t) - a \end{array} \right. \quad \frac{d^2\phi}{dt^2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{1}{m_1}(u(t) - \lambda(t)) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{1}{m_2}(\lambda(t) - bx_4(t)) \\ \lambda = (m_2u(t) + bx_4)/(m_1 + m_2) \end{array} \right.$$

Le système (V.6) est redondant, car il décrit deux dynamiques découplées et interconnectées via la contrainte algébrique (FigureV.2). L'écriture de ce modèle sous forme minimale pour un objectif de commande revient à contrôler l'un des sous-systèmes suivant :

$$\text{Solide 1} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_3(t) \\ \dot{x}_3(t) = \frac{1}{m_1}(u(t) - \lambda(t)) \\ \lambda = (m_2u(t) + bx_3)/(m_1 + m_2) \end{array} \right. \begin{array}{l} (V.7a) \\ (V.7b) \\ (V.7c) \end{array}$$

$$\text{Solide 2} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_2(t) = x_4(t) \\ \dot{x}_4(t) = \frac{1}{m_2}(\lambda(t) - bx_4(t)) \\ \lambda = (m_2u(t) + bx_4)/(m_1 + m_2) \end{array} \right. \begin{array}{l} (V.8a) \\ (V.8b) \\ (V.8c) \end{array}$$

La commande du système (Équation.V.3) revient soit à la commande du sous-système singulier (Équation.V.7) subissant une force externe λ où à la commande du sous-système singulier (Équation.V.8) qui a λ comme entrée de commande.

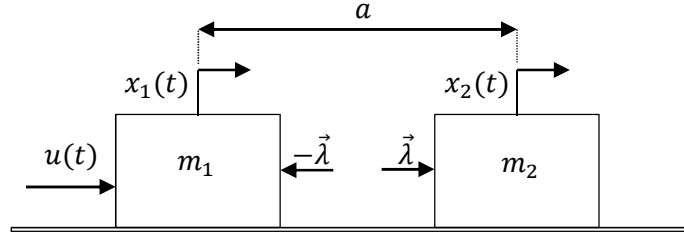


FIGURE V.2: Système deux masses découplé avec multiplicateurs de Lagrange

Remarque V.3 À partir du modèle (Équation.V.6), il est possible de remplacer λ par son expression algébrique afin d'aboutir à un modèle DAE d'indice 0 qui est par définition un système d'équations différentielles ordinaires (ODEs). Ceci ne rentre pas dans le cadre de ce travail car dans le cas de la commande des manipulateurs parallèles ce genre de remplacement conduit à un modèle ODE complexe et quasiment inexploitable pour la synthèse de lois de commande avancées telles que l'approche TS.

V.3.3 Modèle découplé d'un manipulateur parallèle

Dans le chapitre précédent, une forme générale de modèle DAE d'indice 3 pour les manipulateurs parallèles a été donnée. Il a bien été souligné que les dynamiques articulaires et opérationnelles du modèle (Équation.IV.24) sont couplées. Dans cette partie, la méthode de réduction d'indice est utilisée dans le but d'aboutir à deux sous-systèmes complètement découplés décrivant séparément la dynamique des jambes et celle de la nacelle. En suivant le même raisonnement, la contrainte algébrique $\phi(q, \chi)$ est dérivée deux fois par rapport au temps conduisant ainsi à la relation suivante :

$$J_q \ddot{q} - J_\chi \ddot{\chi} + \dot{J}_q \dot{q} - \dot{J}_\chi \dot{\chi} = 0 \quad (\text{V.9})$$

En remplaçant la contrainte $\phi(q, \chi)$ du modèle (Équation.IV.24) par sa deuxième dérivée (Équation.V.9), on aboutit à un système d'équations différentielles ordinaires redondant :

$$\begin{cases} M'_{qq} \ddot{q} + M'_{qx} \ddot{\chi} + N'_{qq} \dot{q} + N'_{qx} \dot{\chi} + G'_{qq} q + J_q^T \lambda = \Gamma & (\text{V.10a}) \\ M'_{qx} \ddot{q} + M'_{xx} \ddot{\chi} + N'_{xq} \dot{q} + N'_{xx} \dot{\chi} + G'_{xx} \chi - J_x^T \lambda = 0 & (\text{V.10b}) \\ J_q \ddot{q} - J_\chi \ddot{\chi} + \dot{J}_q \dot{q} - \dot{J}_\chi \dot{\chi} = 0 & (\text{V.10c}) \end{cases}$$

M'_{qq} et M'_{xx} sont des matrices de masses toujours inversibles. Dans le cas où J_q et J_χ sont inversibles, la résolution du système d'équations (V.10) conduit à un modèle de manipulateur parallèle décrit par deux sous-systèmes complètement indépendants comme suit :

$$\text{Modèle de jambes} \begin{cases} M_q \ddot{q} + N_q \dot{q} + G_q q + \Lambda_q \lambda = \Gamma & (\text{V.11a}) \\ \mathcal{P} \lambda + \mathcal{L} \dot{q} - \mathcal{Q} q - \mathcal{W} \Gamma = 0 & (\text{V.11b}) \end{cases}$$

$$\text{Modèle de la nacelle} \begin{cases} M'_x \ddot{\chi} + N'_x \dot{\chi} + G'_x \chi - \Lambda_x^T \lambda = 0 & (\text{V.12a}) \\ \mathcal{P} \lambda + \mathcal{L}' \dot{\chi} - \mathcal{Q}' \chi - \mathcal{W} \Gamma = 0 & (\text{V.12b}) \end{cases}$$

avec $M_q, N_q, G_q, \Lambda_q, M'_x, N'_x, G'_x, \Lambda_x, \mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{Q}, \mathcal{W}, \mathcal{L}$ et \mathcal{Q}' des matrices à identifier.

Ce résultat constitue la principale contribution de ce travail et montre l'intérêt de cette modélisation : avec un choix adéquat du système de coordonnées, on arrive à des expressions matricielles simples de $M_{(\cdot)}, N_{(\cdot)}$ et $G_{(\cdot)}$ dans au moins un sous-espace. Les termes non linéaires les plus complexes sont regroupés dans les matrices constituant les contraintes algébriques (Équations.V.11b et V.12b). Néanmoins, malgré cet intérêt, ces modèles sont singuliers, leur exploitation pour des objectifs de commande est un peu plus complexe car l'équation de contrainte dépend des entrées de commande ce qui crée une boucle algébrique lors de la synthèse de régulateur.

Remarque V.4 Dans le cas où l'une des jacobiniennes, J_q ou J_x , n'est pas inversible — ce qui est souvent le cas lorsqu'on utilise les coordonnées naturelles (Annexe.G.1) — on peut résoudre le système d'équations sans passer par l'inversion des jacobiniennes, en recherchant les matrices pseudo-inverses ou en essayant d'écrire $\dot{\chi} = Jq$ et $\dot{q} = J^{-1}\dot{\chi}$ directement à partir de la première dérivée temporelle de la contrainte géométrique.

Remarque V.5 Dans la procédure de réduction d'indice et de découplage, la formulation du problème a changé : le modèle DAE régi par une contrainte cinématique a été transformé en modèle DAE régi par une contrainte statique (Équation.V.11 ou V.12).

Remarque V.6 Quand on utilise les appellations «sous-modèle de jambes» ou «sous-modèle de nacelle», ceci ne veut pas dire «dynamique des jambes» ou «dynamique de nacelle» dans le sens classique du terme car les deux sous-modèles sont sous contraintes et chacun se suffit à lui-même pour décrire la dynamique tout entière du robot. De plus, nous avons évité les appellations «modèle articulaire» ou «modèle opérationnel» car cela sous-entend que l'une des dynamiques est ramenée vers l'autre. Dans le cadre de cette application, nous sommes vraiment dans la philosophie des systèmes multi-corps où un sous-modèle ne voit l'autre qu'à travers les efforts d'interaction.

V.4 Commande PDC d'une classe de modèle DAE

Considérons un système mécanique modélisé sous la forme DAE suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\zeta)x(t) + Bu(t) & (\text{V.13a}) \\ \zeta(t) = \alpha(x)x(t) + \beta(x)u(t) & (\text{V.13b}) \end{cases}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ est le vecteur des variables d'état, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ le vecteur des entrées de commande et $\zeta(t) \in \mathbb{R}^p$ le vecteur des variables algébriques. $A(\zeta), B, \alpha(x), \beta(x)$ sont des matrices de dimension appropriée. La particularité de ce modèle DAE est que la matrice $A(\zeta)$ est non linéaire en ζ , la matrice B est constante et l'équation algébrique est affine en la commande.

Le modèle (Équation.V.13) est singulier. Sa particularité est qu'il n'est pas exprimé sous forme d'état de façon explicite [Gordon et al., 2000]. Dans le cas général, deux méthodes sont utilisées pour la commande de ce type de modèles. La première méthode

consiste à l'élimination des variables algébriques par le remplacement directe des équations des contraintes (V.13b) dans les équations différentielles (V.13a). Dans notre cas d'étude, cette méthode n'est pas envisageable car le modèle mécanique est écrit volontairement sous la forme (V.13) afin de faire apparaître les matrices $A(\zeta)$ et B sous la forme la plus simple possible (on perdrait alors le bénéfice de l'approche). La deuxième approche consiste en l'approximation du modèle DAE par un modèle singulièrement perturbé [Naidu, 2002]. L'idée est de remplacer l'équation algébrique par une dynamique artificielle rapide représentant la violation des contraintes [Gordon and Liu, 1998, Gordon et al., 2000, Dabney et al., 2002, Wang and Ghorbel, 2006b]. Cette approche est tout à fait justifiée car, en réalité, les liaisons ne sont pas parfaites : il existe une certaine élasticité au sein du système mécanique [Khan et al., 2005]. L'avantage de cette méthode est qu'on évite l'élimination des contraintes, ce qui relâche plus au moins la complexité du modèle de commande. Néanmoins, son désavantage réside dans l'extension du vecteur d'état, ce point peut être très contraignant lors de l'utilisation des lois de commande basées sur l'optimisation convexe car les conditions LMIs peuvent devenir conservatives.

V.4.1 Modèle TS d'un modèle DAE

La condition nécessaire pour écrire un modèle sous forme TS est que les termes non linéaires de ce dernier soient au moins localement bornés. Dans un cas pratique, l'espace de travail du robot est toujours délimité, les vitesses bridées et la puissance maximale délivrée par les actionneurs bien connue. De ce fait, sous condition que le système ne passe pas par des singularités, il est toujours possible de borner les variables algébriques (termes non linéaires), $\underline{\zeta} \leq \zeta(t) \leq \bar{\zeta}$, à partir de l'équation (V.13b). Ce constat permet d'écrire le modèle (V.13) sous la forme TS suivante :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\zeta(t)) A_i x(t) + B u(t) \quad (\text{V.14})$$

avec $h_i(\zeta(t))$, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ défini à partir du lemme (II.1).

L'avantage de cette écriture est que les conditions de stabilisation LMIs dépendent uniquement de la structure des A_i , $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ et B . Le conservatisme des résultats dépend des bornes de $\zeta(t)$ car la contrainte algébrique (Équation.V.13b) n'intervient pas dans l'écriture des conditions de stabilisation LMIs. Néanmoins, le problème le plus important est que $\zeta(t)$ dépend de la loi de commande $u(t)$. Par exemple, la loi de commande PDC s'écrit de façon générale sous la forme : $u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(\zeta(t)) F_i x(t)$. De ce fait, on est face à un problème de boucle algébrique car la loi de commande $u(t)$ dépend des prémisses $h_i(\zeta(t))$, $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ et inversement.

V.4.2 Problème de la boucle algébrique

Afin de contourner le problème de la boucle algébrique, trois solutions sont proposées dans cette section.

V.4.2.1 Solution utilisant une commande dynamique

Considérons le modèle TS (Équation.V.14) avec la loi de commande PDC : $\hat{u}(x, u) = -\sum_{i=1}^r h_i(\zeta(t))F_i x(t)$. L'idée est d'ajouter une dynamique artificielle permettant d'assurer la convergence de $u(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \hat{u}(x, u)$ [Georges et al., 2007] :

$$\dot{\Psi}(x(t), \nu(t)) + \eta\Psi(x(t), \nu(t)) = 0 \quad (\text{V.15})$$

avec η une matrice constante diagonale définie positive. La solution temporelle de l'équation (V.15) est donnée sous la forme :

$$\Psi(x, \nu) = \Psi(x(0), \nu(0))e^{-\eta t} \quad (\text{V.16})$$

bien évidemment, $\Psi(x, \nu) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, dans ce cas, η^{-1} est une matrice diagonale de constante de temps fixant la vitesse de convergence vers 0.

Considérons la forme suivante :

$$\Psi(x, \nu) = \kappa\nu - \hat{u}(x, \nu) \quad (\text{V.17})$$

où ν est un changement de variable : $u(t) = \kappa\nu(t)$ et κ est une matrice de gain diagonale. La dérivée temporelle de l'équation (V.17) est donnée par :

$$\dot{\Psi}(x, \nu) = \left(\kappa - \frac{\partial \hat{u}(x, \nu)}{\partial \nu} \right) \dot{\nu} - \frac{\partial \hat{u}(x, \nu)}{\partial x} \dot{x} \quad (\text{V.18})$$

En remplaçant $\dot{\Psi}(x, \nu)$ à partir de l'équation (V.15) et (V.17), l'expression (V.18) devient :

$$\left(\kappa - \frac{\partial \hat{u}(x, \nu)}{\partial \nu} \right) \dot{\nu} - \frac{\partial \hat{u}(x, \nu)}{\partial x} \dot{x} + \eta(\kappa\nu - \hat{u}(x, \nu)) = 0 \quad (\text{V.19})$$

Grâce au changement de variable ν , le terme $\left(\kappa - \frac{\partial \hat{u}(x, \nu)}{\partial \nu} \right)$ est toujours inversible ce qui permet d'écrire :

$$\dot{\nu} = \left(\kappa - \frac{\partial \hat{u}(x, \nu)}{\partial \nu} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \hat{u}(x, \nu)}{\partial x} \dot{x} - \eta(\kappa\nu - \hat{u}(x, \nu)) \right) \quad (\text{V.20})$$

Sachant que $\hat{u}(x, \nu) = F_h x(t)$ et $\dot{x}(t) = A_h x(t) + B u(t)$, l'expression (V.20) devient :

$$\dot{\nu}(t) = \left(\kappa - \sum_{i=1}^r F_i x \frac{\partial h_i}{\partial \nu} \right)^{-1} \sum_{i=1}^r \left[\left(F_i x \frac{\partial h_i}{\partial x} + h_i F_i \right) (A_h x + B \kappa \nu) - \eta h_i (\kappa \nu - F_i x) \right] \quad (\text{V.21})$$

À partir de l'équation (V.21), il suffit d'intégrer $\dot{\nu}(t)$ afin de calculer la commande à appliquer au système : $u(t) = \kappa\nu(t)$. Cette dynamique artificielle permet de casser la boucle algébrique et d'assurer la convergence $u(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \hat{u}(x, u)$ en un temps suffisamment petit en fonction du choix de η . Toutefois, le calcul des Jacobiennes $\frac{\partial h_i}{\partial \nu}$, $\frac{\partial h_i}{\partial x}$ n'est pas trivial et demande une puissance de calcul importante.

V.4.2.2 Solution avec échantillonnage partiel

Dans une application temps réel déterministe, la commande calculée n'est pas transmise instantanément au robot, car il existe toujours des retards liés soit à la réponse des actionneurs soit à la mesure des variables. Malgré cela, souvent les contrôleurs en robotique sont synthétisés sur la base d'un modèle dynamique continue sans retard. Ceci se justifie par le fait que les systèmes embarqués actuels sont performants et le retard peut être négligé en première approximation, d'où la présence de boucle algébrique. De ce fait, afin de casser cette boucle, un échantillonnage partiel est introduit sur le calcul des prémisses $\zeta(x, u)$ et la loi de commande appliquée devient :

$$u(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(kT_e) F_i x(t) \quad \text{pour} \quad t \in]kT_e, (k+1)T_e] \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{N} \quad (\text{V.22})$$

où T_e est la période d'échantillonnage choisie.

On montre ci-dessous que pour une période d'échantillonnage suffisamment faible, la nouvelle loi de commande reste stabilisante pour le système.

En notant $\Delta h_i(t) = h_i(kT_e) - h_i(t)$, le modèle bouclé (Équation.V.14) s'écrit alors :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(t) [A_i - BF_i] x(t) - \sum_{i=1}^r \Delta h_i(t) BF_i x(t) \quad (\text{V.23})$$

Soit $V(x) = x^T P x$, avec P définie positive, une fonction candidate quadratique de Lyapunov. En suivant le même raisonnement que pour le théorème (II.3), le système autonome (V.23) est stable si :

$$\sum_{i=1}^r h_i(t) [A_i X - BM_i + X A_i^T - M_i^T B^T] + 2 \sum_{i=1}^r \Delta h_i(t) BM_i < 0 \quad (\text{V.24})$$

avec $X = P^{-1}$ et $M_i = F_i P^{-1}$.

La fonction h_i est dérivable par rapport au temps le long des trajectoires du système, de dérivée :

$$\dot{h}_i = \frac{\partial h_i}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h_i}{\partial u} \dot{u} \quad (\text{V.25})$$

Pour $x(t)$ et $u(t)$ pris dans un ensemble compact, $\dot{x}(t)$ est bornée d'après (Équation.V.14). Sur $]kT_e, (k+1)T_e]$, $\dot{u}(t) = - \sum_{i=1}^r h_i(kT_e) F_i \dot{x}(t)$. Par conséquent, $\dot{u}(t)$ est également bornée. Par application du théorème des accroissements finis, il existe un réel $\mathcal{H} > 0$, tel que :

$$\|\Delta h_i\| < \mathcal{H} T_e \quad (\text{V.26})$$

Par majoration de l'expression (V.24), $\dot{V}(x(t))$ est définie négative si

$$\sum_{i=1}^r h_i [A_i X - BM_i + X A_i^T - M_i^T B^T] + 2r \mathcal{H} T_e \|BM_i\| < 0 \quad (\text{V.27})$$

Si X et les M_i , $i = \{1, \dots, r\}$ vérifient les conditions du théorème (II.3), i.e.

$$(A_i X - BM_i + X A_i^T - M_i^T B^T) < 0$$

alors, il est clair qu'on peut toujours trouver T_e suffisamment petit de manière à ce que l'inégalité (V.27) soit vérifiée.

V.4.2.3 Solution analytique

Cette solution n'est valable que pour des fonctions d'appartenance $h_i(x, u)$ affines en la commande. Dans notre cas d'application, cette hypothèse n'est vérifiée que pour des modèles TS à deux règles.

À partir de l'équation algébrique (V.13b), les fonctions d'appartenance du modèle TS s'écrivent comme suit : $h_1(t) = \frac{\bar{\zeta} - \zeta(t)}{\bar{\zeta} - \underline{\zeta}}$ et $h_2(t) = 1 - h_1(t)$. Après quelques manipulations élémentaires, la commande PDC $u(t) = -\sum_{j=1}^2 h_j(\zeta(t))F_j x(t)$ devient

$$u(t) = \frac{(\alpha(x)x(t) - \bar{\zeta})(F_1 - F_2) - (\bar{\zeta} - \underline{\zeta})F_2}{\bar{\zeta} - \underline{\zeta} + \beta(x)(F_2 - F_1)x(t)}x(t) \quad (\text{V.28})$$

Remarque V.7 Il est très rare de pouvoir écrire un modèle TS de robot avec une seule non-linéarité. L'utilité de la solution analytique proposée sera de pouvoir comparer les deux premières solutions avec une solution « exacte » de la boucle algébrique.

Exemple V.3

Reprenons le système à deux masses (Exemple V.1) modélisé sous la forme DAE (V.7), avec $m_1 = 10\text{kg}$, $m_2 = 5\text{kg}$ et $b = 0.1\text{Ns/m}$.

Considérons le vecteur d'état $x = [x_1 \ x_3]^T$ et la non-linéarité $\zeta(t) = \lambda(t)/m_1 x_1(t)$ avec $1 \leq x_1(t) \leq 5$, $|x_3(t)| \leq 1\text{m/s}$ et $|u(t)| \leq 10\text{N}$. Avec la méthode des secteurs non linéaires, le modèle TS s'écrit sous la forme (Équation V.14) avec :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \underline{\zeta} & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \bar{\zeta} & 0 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m_1 \end{bmatrix}.$$

La constante de temps $1/\eta$ et la période d'échantillonnage partiel T_e sont fixées à 10^{-6}s .

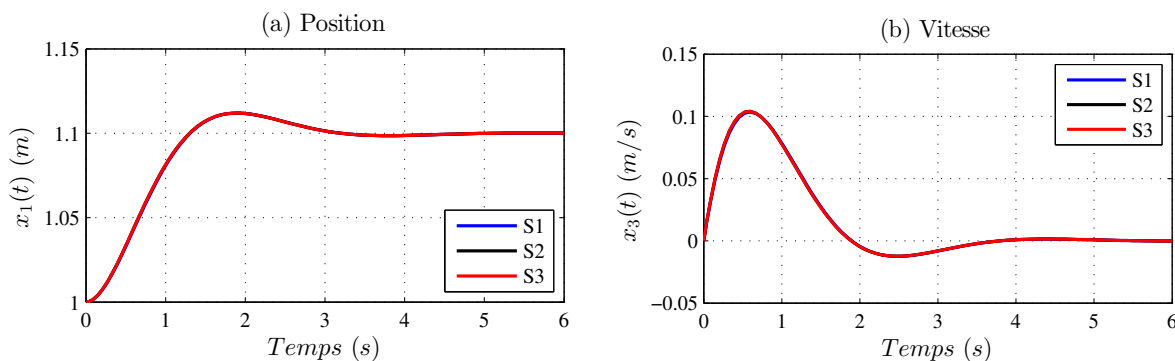


FIGURE V.3: Réponse du système à deux masses : S1 commande dynamique, S2 commande par échantillonnage partiel, S3 solution analytique exacte

À première vue, les trois solutions assurent les mêmes performances (Figures V.3 et V.4). La figure (V.5) montre le comportement pendant le régime transitoire initial. Comme prévue, la commande dynamique assure la convergence de $\lambda(t)$ avec une dynamique du

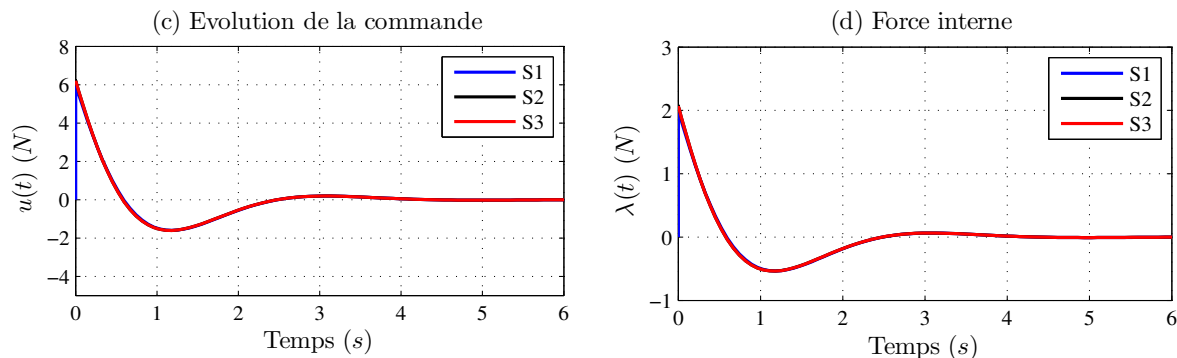


FIGURE V.4: Evolution de la commande et de la force interne : S1 commande dynamique, S2 commande par échantillonnage partiel, S3 solution analytique exacte

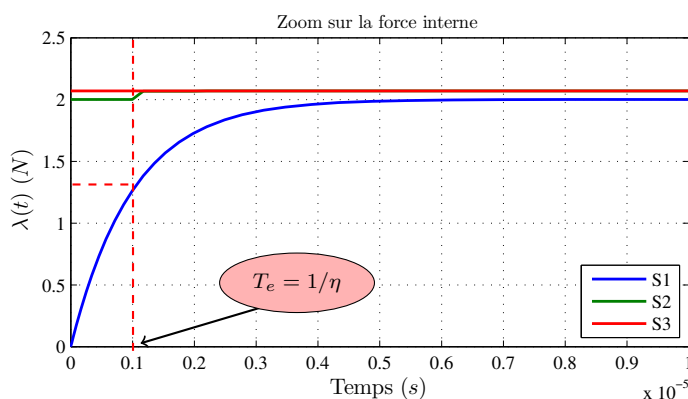


FIGURE V.5: Évolution de la force interne durant le régime transitoire

premier ordre de constante de temps de $\frac{1}{\eta}$ s. La solution avec échantillonnage partiel atteint plus rapidement le régime permanent car au démarrage nous disposons d'une information partielle sur la condition initiale de λ .

V.5 Commande des manipulateurs parallèles

Concernant les manipulateurs parallèles, on trouve une littérature scientifique abondante couvrant les sujets relatifs à l'analyse, la conception et la commande. Le sujet relatif à la commande reste plus que jamais d'actualité sachant qu'il constitue encore un verrou scientifique [He et al., 2007, Cheng et al., 2003]; Les différents travaux de recherche mettent en évidence que la complexité des robots parallèles varie d'une architecture à une autre. Pour cela, les schémas de commande sont très diversifiés, et leur complexité dépend de celle du manipulateur étudié et des performances souhaitées [Paccot et al., 2009]. De plus, la vaste théorie de la commande basée sur la forme d'état oriente souvent les recherches vers l'écriture des modèles de commande sous forme ODE. Sur cette piste, de nombreuses lois de commande ont été proposées. Parmi celles-ci, on peut citer la stratégie de commande classique de type PID axe par axe (aucun couplage n'est considéré entre les axes). Grâce à sa simplicité d'implémentation, ce contrôleur représente plus de 90% des applications industrielles [Ang et al., 2005]. Pour un manipulateur parallèle, la synthèse PID la plus simple s'effectue dans l'espace articulaire du robot [Dombre and

[Khalil, 2010, Brecher et al., 2008, Denkena and Holz, 2006, Zhiyong and Tian, 2004, Amirat et al., 1996, Tadokoro, 1994]. Cette méthode est bien connue pour son efficacité, mais elle n'est vérifiable que dans un espace de travail restreint où le robot évolue avec de faibles vitesses. [Paccot et al., 2009]. Des versions de PID ont été proposées dans l'espace opérationnel [Callegari et al., 2006, Beji et al., 1998, Kock and Schumacher, 2000, Lee et al., 2003]. Cette méthode nécessite souvent de nombreuses simplifications sur le modèle ce qui conduit à un manque de précision et de stabilité [Lee et al., 2003]. Afin de pallier aux désavantages du PID classique qui sont souvent liés aux réglages des gains à partir de modèles linéarisés autour d'un point de fonctionnement, d'autres versions de PID avec des gains non linéaires ont été appliquées [Su et al., 2004, Shang et al., 2009]. Ce type de loi de commande permet de garantir la stabilité ainsi que d'améliorer la robustesse.

Une autre approche très célèbre est la CTC (Computed Torque Control) [Siciliano and Khatib, 2008]. Cette technique est largement répandue en robotique sérielle [Spong and Vidyasagar, 2008, Craig, 2005, Dombre and Khalil, 2010]. Elle a également été mise en application sur plusieurs manipulateurs parallèles [Cheung and Hung, 2005, Paccot et al., 2009, Asgari and Ardestani, 2015]. L'idée générale de cette approche est l'utilisation de la notion de platitude différentielle du modèle afin d'obtenir une loi de commande qui linéarise et découple les équations du mouvement [Afroun, 2013]. Ainsi, le problème de la commande du robot sera réduit à un problème de stabilisation d'un double intégrateur que l'on peut écrire soit dans l'espace opérationnel, soit éventuellement dans l'espace articulaire. Comme les gains de la CTC classique sont constants, on retrouve parfois des schémas de commande plus évolués par exemple, la CTC adaptative [Shang et al., 2012].

Dans le cas où le modèle du robot n'est pas bien identifié ou entaché d'incertitudes, l'application d'une commande classique comme la CTC ne conduit pas à l'annulation des termes non linéaires. Dans un tel cas de figure, la notion de passivité est introduite [Bennehar, 2015] afin d'aboutir à un système stable [Abdellatif et al., 2008, Sartori Natal et al., 2015].

Dans la catégorie des lois de commande non basées modèle, on retrouve la commande floue (logique floue entrées/sorties) [Chung et al., 1999] et les réseaux de neurones [Li and Wang, 2009]. Ces lois de commande sont bien connues pour leur aspect heuristique ; souvent il est très difficile de prouver la stabilité du système de façon explicite. Afin de pallier ce problème, des combinaisons avec d'autres lois de commande basées modèle sont proposées [Bégon et al., 1995].

Dans la catégorie des commandes robustes, on retrouve la commande par mode glissant [Jafarinasab et al., 2011, Litim et al., 2014], la commande H^∞ [Becerra-Vargas and Morgado Belo, 2012, Rachedi et al., 2015] et la commande TS robuste [Vermeiren et al., 2012].

Plusieurs autres lois de commande existent dans la littérature comme : la commande prédictive [Vivas and Poignet, 2005], la commande PD avec compensation de la gravité [Yang et al., 2010], la commande PID avec anticipation [Natal et al., 2012], la commande adaptative [Chemori et al., 2013], etc.

En dépit de cet état de l'art non exhaustif, la complexité des lois de commande est toujours liée à celle des modèles ODEs. L'objet de cette section est de traiter le problème de commande TS des manipulateurs parallèles directement à partir des modèles DAEs.

V.5.1 Commande PDC étendue du Biglide

V.5.1.1 Synthèse de contrôleur

La réduction d'indice du modèle DAE du Biglide (Équation.IV.36) conduit à deux sous-modèles découplés décrivant séparément la dynamique des jambes et celle de l'effecteur (Annexe.F.1). À partir de cela, le sous-modèle retenu pour la commande du Biglide est celui des jambes :

$$\text{Modèle des jambes} \begin{cases} M_q \ddot{q} + N_q \dot{q} + J_q^T \lambda = \Gamma & \text{(V.29a)} \\ \mathcal{P} \lambda + \mathcal{L} \dot{q} - \mathcal{Q} q - \mathcal{W} \Gamma = 0 & \text{(V.29b)} \end{cases}$$

avec M_q , N_q , \mathcal{P} , \mathcal{L} , \mathcal{Q} et \mathcal{W} des matrices données en annexe (F.1) et J_q la Jacobienne du Biglide donnée par l'expression (IV.29).

Le choix du modèle (V.29) pour la commande se justifie par le fait que M_q et N_q sont des matrices à termes constants. De plus, le modèle ne contient aucun terme de pesanteur car tout a été renvoyé sur la dynamique de l'effecteur dans la phase d'élimination des variables passives. À partir de cela, les seuls termes non linéaires présents dans le modèle (Équation.V.29a) sont ceux introduits par la jacobienne J_q . Afin d'écrire le modèle des jambes sous forme TS, l'expression $J_q^T \lambda$ est réécrite sous la forme suivante :

$$J_q^T \lambda = \Pi(\lambda) q \quad \text{(V.30)}$$

$$\text{avec } \Pi(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda_1/2 & \lambda_1/2 \\ \lambda_2/2 & -\lambda_2/2 \end{bmatrix}.$$

De ce fait, la représentation d'état du robot dans l'espace articulaire avec le vecteur d'état $x = [q^T \ \dot{q}^T]^T$ est donnée sous la forme quasi-LPV suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M_q^{-1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Pi(\lambda) & -N_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \Gamma \right) \quad \text{(V.31)}$$

Les coefficients ms_i et b_i , $i = \{1, 2\}$ ont été définis dans la section (IV.4.4). À partir de cette représentation d'état, les seuls termes non linéaires du modèle sont les termes rajoutés par la matrice $\Pi(\lambda)$ car M_q et N_q sont à coefficients constants. Ainsi, le vecteur des prémisses du modèle TS est défini par $\lambda = [\lambda_1 \ \lambda_2]^T$ calculé à partir de l'équation algébrique (V.29b).

Remarque V.8 Les multiplicateurs de Lagrange représentent une image des efforts internes. Compte tenu de l'écriture des jacobienes, les multiplicateurs de Lagrange sont des forces par unité de longueur (longueur de jambe). Dans la suite du manuscrit, les multiplicateurs de Lagrange seront décrits comme des efforts "spécifiques".

Sachant que les actionneurs saturant à $|\Gamma_{1,2}| \leq \Gamma_{max}$, que l'espace de travail du robot est restreint avec les butées articulaires $q_i \in [q_i, \bar{q}_i]$, $i = \{1, 2\}$ et que les vitesses sont bornées $|\dot{q}_{1,2}| \leq \dot{q}_{max}$, alors les prémisses $\lambda_i(\cdot)$, $i = \{1, 2\}$ sont bornées, i.e. $\lambda_i(\cdot) \in [\underline{\lambda}_i \ \bar{\lambda}_i]$. Les sous-modèles linéaires sont obtenus avec la méthode des secteurs non linéaires (Lemme.II.1) et un modèle TS à 4 règles est obtenu (Annexe.F.4).

Afin de suivre des consignes de position, le modèle TS du Biglide est augmenté sous la forme (Équation.II.43) avec

$$\dot{x}_l(t) = q_{ref} - q = q_{ref} - Cx(t) \quad (\text{V.32})$$

où $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $x^T = [q^T \quad \dot{q}^T]$.

Une loi PDC étendue est appliquée selon le schéma de commande (Figure.II.5). Les gains F_i^* de la loi de commande (Équation.II.44) sont calculés de manière à minimiser un critère quadratique J_{LQR} (Annexe.E) pour chaque sous-modèle TS. Une fois que les gains de chaque sous-modèle sont calculés, la stabilité du modèle TS est garantie en vérifiant les conditions LMIs (Théorème.II.3) avec la relaxation de Tuan (Lemme.II.6).

La définition des bornes des efforts spécifiques λ est une phase très importante dans cette approche car elle nous permet d'écrire le modèle TS d'un modèle DAE dans un ensemble compact relatif à un fonctionnement normal du robot (bornes loin des singularités). Ce qui est séduisant, c'est qu'une fois que les bornes sont bien définies dans le pire des cas ainsi que les conditions LMIs vérifiées, le contrôleur assure la stabilité dans toute la plage de variation des efforts spécifiques tout en assurant une certaine robustesse naturelle. Par exemple, considérons un robot manipulateur découplé en deux sous-modèles DAEs : jambes et nacelle. Le sous-modèle de jambes subit les efforts générés par le mouvement de la nacelle. Plus la charge manipulée est importante plus les tensions au niveau des jambes sont importantes, donc si les bornes sont établies en fonction de la charge maximale portée par la nacelle, le contrôleur aura une propriété de robustesse naturelle vis-à-vis de la variation de la charge utile.

V.5.1.2 Résultats de simulation

Le modèle du Biglide utilisé pour les simulations numériques est un modèle comprenant des incertitudes structurelles et non structurelles. Les incertitudes structurelles représentent la variation de la masse de la charge au niveau de l'effecteur, cette variation est donnée par $\Delta m \in [0 \quad 1, 632] \text{ kg}$. Pour simuler au mieux un comportement réaliste du robot, le modèle de simulation comprend des dynamiques non incluses dans le modèle TS comme l'élasticité au niveau des articulations [Spong, 1987] et un modèle de frottement sec avec effet de Stribeck [Andersson et al., 2007] (Annexe.F.3). Les élasticités ont été introduites au niveau des patins afin de simuler la déformation d'une transmission mécanique (par exemple une courroie), ce qui introduit deux modes de résonance dont la plus petite fréquence est $\omega \simeq 29 \text{ rad/s}$. Pour un objectif de comparaison, un contrôleur CTC a été synthétisé (Annexe.C). Le réglage de la commande CTC est basé sur la technique de placement de pôles souvent utilisée dans le cas des robots manipulateurs [Paccot et al., 2009]. Les gains sont ajustés de façon à obtenir un pôle triple réel négatif avec une fréquence inférieure à la moitié de la plus petite fréquence de résonance [Dombre and Khalil, 2010]. Les valeurs appropriées sont utilisées pour la simulation (Annexe.F.5.2).

Concernant le modèle TS, les positions articulaires sont bornées de manière à éviter les singularités et couvrir un volume de travail important, $q_1 \in [54, 5, 89, 5] \text{ mm}$, $q_2 \in [129, 5, 164, 5] \text{ mm}$, les vitesses articulaires sont limitées à $|\dot{q}_1|, |\dot{q}_2| \leq 428 \text{ mm/s}$ et les actionneurs sont bridés à $|\Gamma_1|, |\Gamma_2| \leq 50 \text{ N}$. Les efforts spécifiques λ sont bornés à l'aide d'un algorithme (Équation.V.29b) pour une charge utile égale à 100% de la masse totale du robot. Concernant le calcul de la loi de commande, la boucle algébrique est résolue

avec l'approche utilisant la commande dynamique (Équation.V.21).

Trois simulations ont été effectuées en changeant à chaque fois la charge utile. Le mouvement de l'effecteur est basé sur une trajectoire circulaire. En l'absence de charge, ($\Delta m = 0kg$), les réponses des deux contrôleurs, CTC et PDC-étendue sont représentées par les figures (V.6-V.7). Dans le cas où le robot porte une charge représentant 50% de la masse totale du robot, ($\Delta m = 0,816kg$), les résultats sont représentés par les figures (V.8-V.9). Dans le cas où la charge est de 100% de la masse totale du robot, les résultats sont représentés par les figures (V.10-V.11).

En l'absence de charge (Figures.V.6-V.7), les deux lois de commande assurent un bon suivi de trajectoire avec un léger avantage pour la loi PDC-étendue. Cet avantage est principalement dû au fait que la loi PDC-étendue est capable de rejeter le frottement sec comme on peut le noter à partir du graphique de la commande (Figure.V.6 c, d). Dans la deuxième simulation, ($\Delta m = 0,816kg$), la loi PDC-étendue assure de bonnes performances en poursuite tandis que pour la loi CTC, le robot s'écarte de la trajectoire désirée mais garde la stabilité (Figure.V.8). Dans le dernier cas, la robustesse naturelle de la loi PDC-étendue vis-à-vis des incertitudes structurelles est bien confirmée, pour une charge utile de $\Delta m = 1,632kg$, la loi PDC étendue assure un bon suivi de trajectoire tandis que la loi CTC est instable (Figure.V.10).

Finalement, afin de quantifier le comportement des deux contrôleurs, deux critères de performance sont calculés pour une durée de simulation ($T = 0,5s$), le premier critère représente l'intégrale de l'erreur absolue (IAE) où $\varepsilon(t)$ représente l'erreur radiale. Le deuxième critère représente l'intégrale du carré de la commande (ISV) (Annexe.D).

	J_{ISV}		J_{IAE}	
	<i>TS</i>	<i>CTC</i>	<i>TS</i>	<i>CTC</i>
$\Delta m = 0kg$	50.05	55.2	0.4287	28.06
$\Delta m = 0.816kg$	58.84	58.23	0.6281	253.7
$\Delta m = 1.632kg$	277.33	446.6	1.458	943.6

TABLE V.1: Critères ISV et IAE pour les différentes simulations.

Les simulations présentées dans cette partie ont été aussi comparées aux résultats présentés dans [Vermeiren et al., 2012]. Du point de vue des performances, il est difficile de conclure sur la supériorité de l'approche DAE, car les conditions de réglage ne sont pas les mêmes. Par contre, il est bien noté que l'approche DAE a permis de réduire le nombre de règles de 16 dans le cas TS descripteur à 4 dans le cas TS classique. De ce fait les modèles TS basés sur l'approche DAE permettent de réduire considérablement le conservatisme des conditions LMIs.

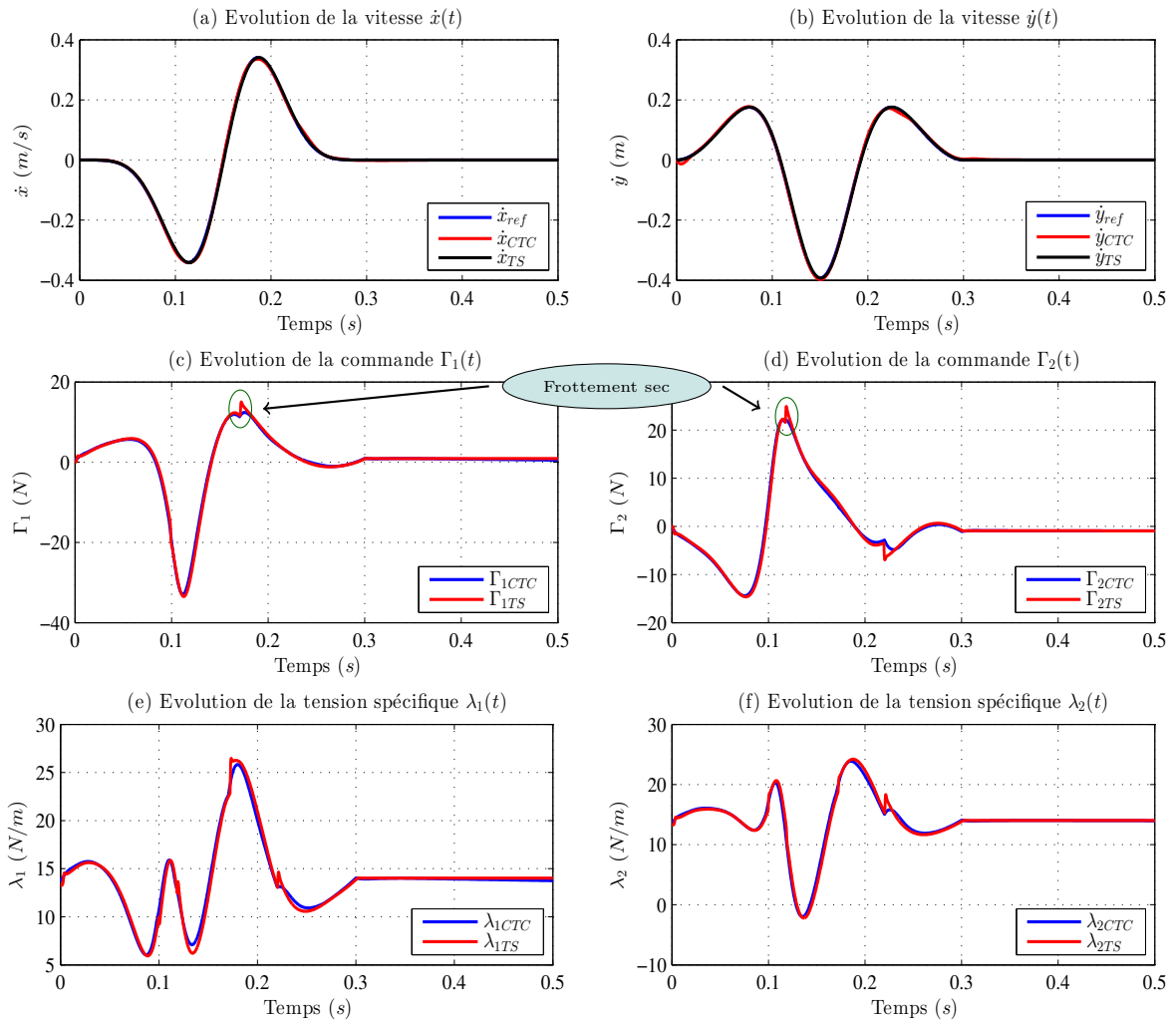


FIGURE V.6: Résultats de simulation dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 0kg$

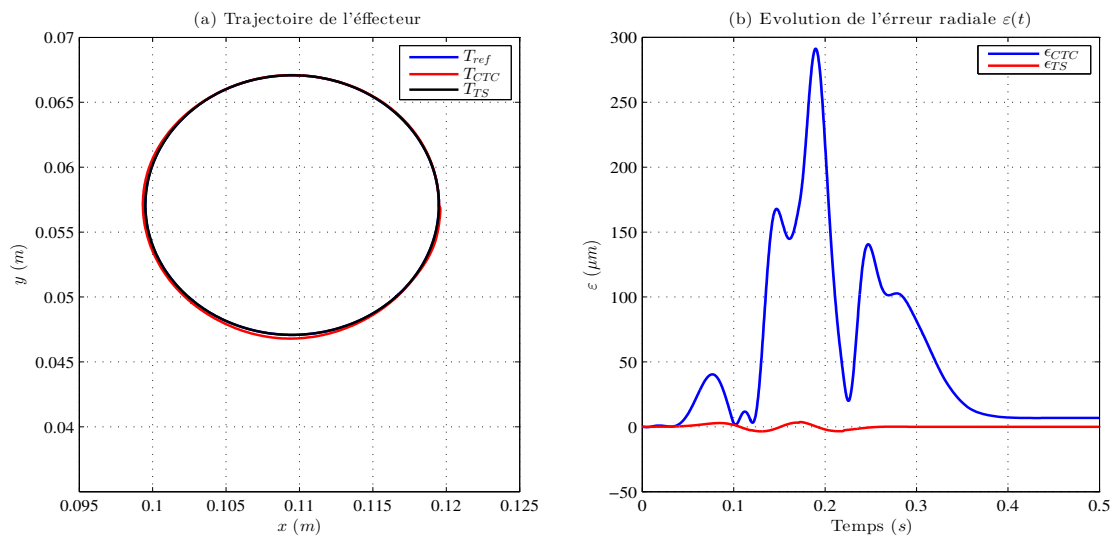


FIGURE V.7: (a) Trajectoire de l'effecteur et (b) Erreur radiale pour $\Delta m = 0kg$

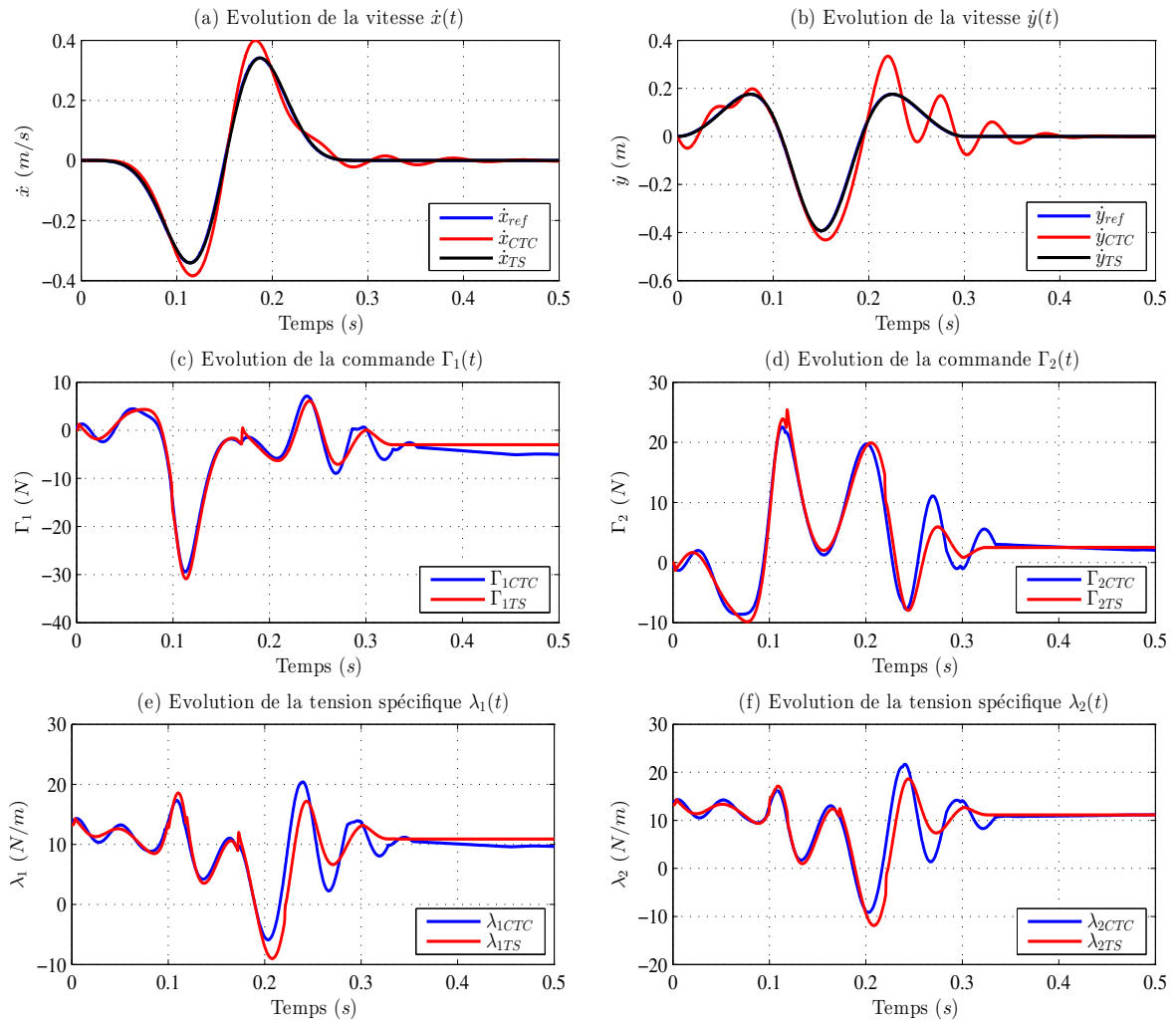


FIGURE V.8: Résultats de simulation dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 0,816kg$

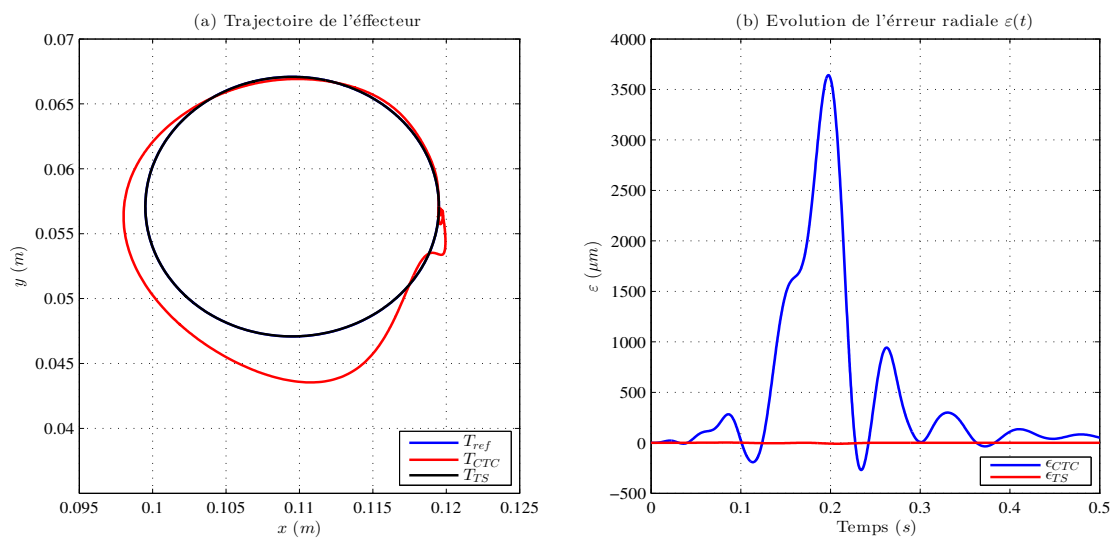


FIGURE V.9: (a) Trajectoire de l'effecteur et (b) Erreur radiale pour $\Delta m = 0,816kg$

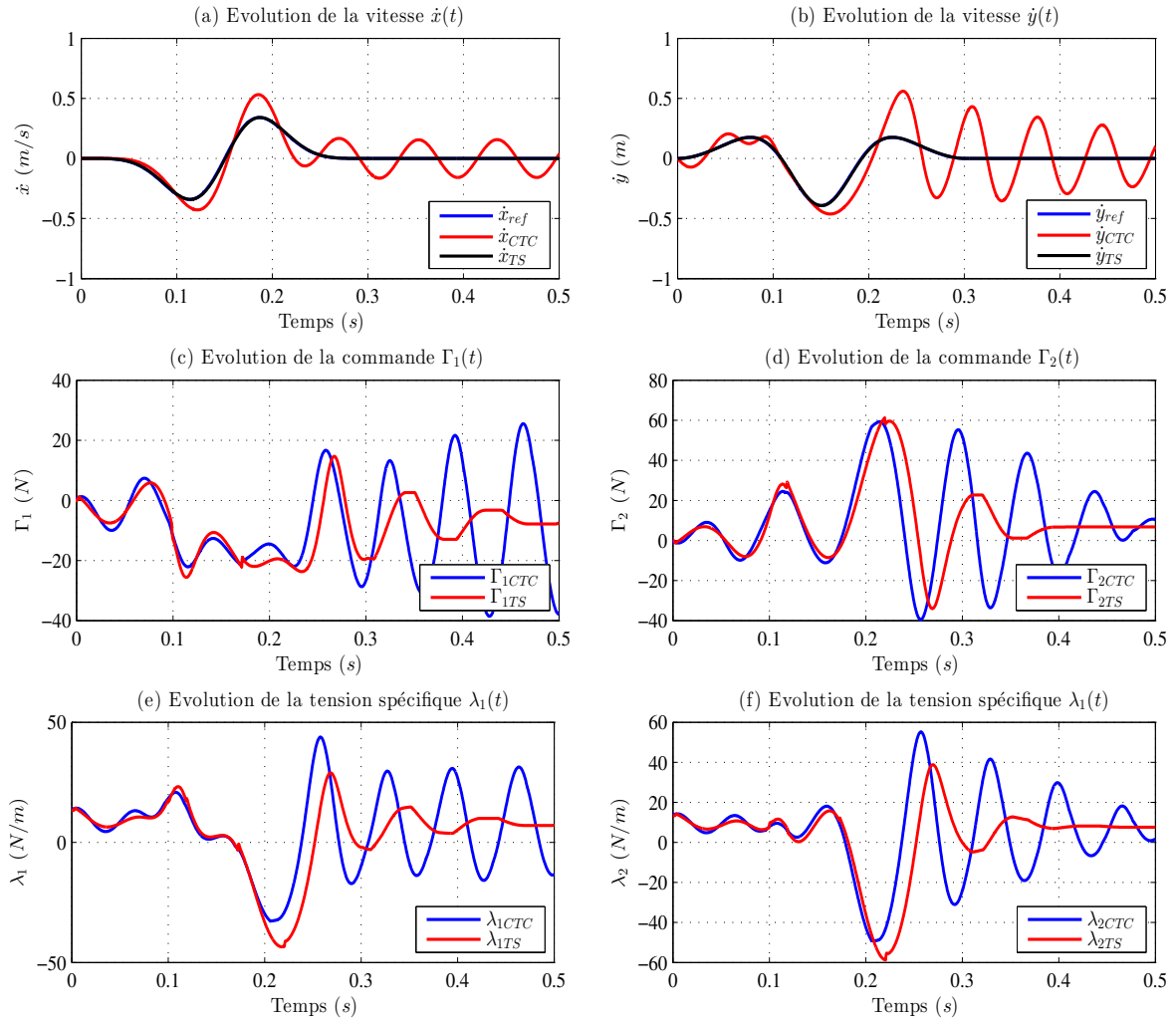


FIGURE V.10: Résultats de simulation dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 1,632kg$

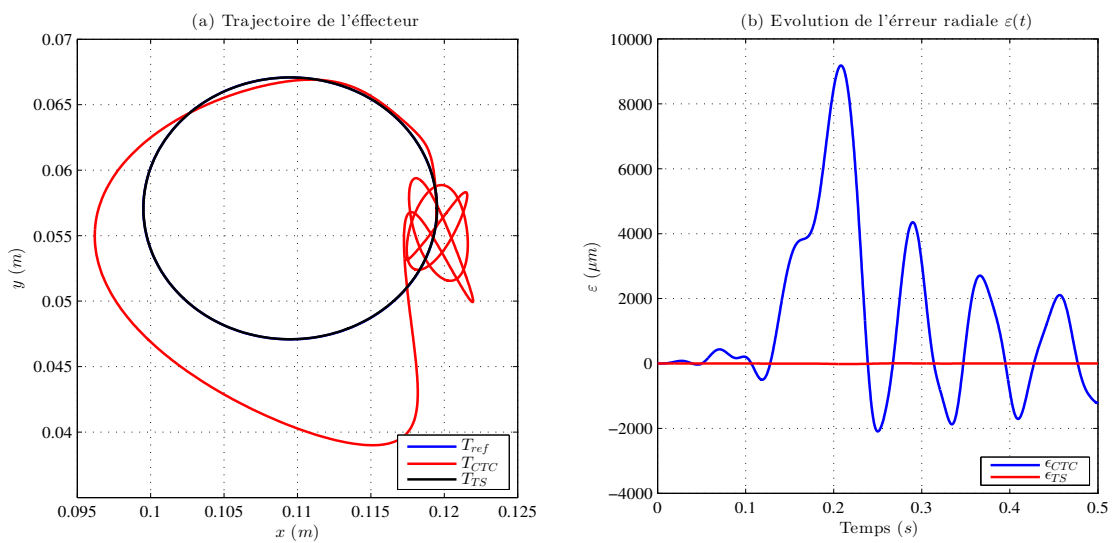


FIGURE V.11: (a) Trajectoire de l'effecteur et (b) Erreur radiale pour $\Delta m = 1,632kg$

V.5.2 Commande PDC étendue du Triglide

V.5.2.1 Synthèse de contrôleur

La réduction d'indice du modèle DAE du Triglide (Équation.IV.49) conduit au sous-modèle de jambes suivant (Annexe.G.1) :

$$\text{Modèle des jambes} \begin{cases} M_q \ddot{q} + N_q \dot{q} + \Lambda_q^T \lambda = \Gamma & (\text{V.33a}) \\ \mathcal{P} \lambda + \mathcal{L} \dot{q} - \mathcal{Q} q - \mathcal{W} \Gamma = 0 & (\text{V.33b}) \end{cases}$$

avec M_q , N_q , Λ_q , \mathcal{P} , \mathcal{L} , \mathcal{Q} et \mathcal{W} des matrices données en annexe (G.1).

Dans ce cas de figure, si le Triglide est modélisé avec un ensemble de coordonnées opérationnelles indépendantes comme dans le cas du Biglide, la coordonnée angulaire de la nacelle introduit des non-linéarités supplémentaires dans les matrices M_q et N_q . Grâce aux coordonnées naturelles, ces matrices sont constantes. Par conséquent, les seuls termes non linéaires présents dans le modèle (Équation.V.33a) sont ceux introduits par la matrice Λ_q^T . Afin d'écrire le modèle des jambes sous forme TS, l'expression $\Lambda_q^T \lambda$ est réécrite sous la forme suivante :

$$\Lambda^T \lambda = \Pi(\zeta) q \quad (\text{V.34})$$

avec $\Pi(\zeta) = \begin{bmatrix} -\zeta_1 & \zeta_1 & 0 \\ \zeta_2 & -\zeta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_3 \end{bmatrix}$ et $\zeta(\lambda, q) = [\zeta_1 \ \zeta_2 \ \zeta_3]^T$ représente le vecteur des prémisses :

$$\zeta(\lambda, q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{q_1 - q_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{q_1 - q_2} & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix} \Lambda_q^T \lambda \quad (\text{V.35})$$

La représentation d'état du Triglide dans l'espace articulaire avec le vecteur d'état $x = [q^T \ \dot{q}^T]^T$ est donnée sous la forme quasi-LPV (Équation.V.31). Les actionneurs saturent à $|\Gamma_{1,2,3}| \leq \Gamma_{max}$, l'espace de travail du robot est restreint par les butées articulaires $q_i \in [q_i, \bar{q}_i]$, $i = \{1, 2, 3\}$ et les vitesses sont bornées $|\dot{q}_{1,2,3}| \leq \dot{q}_{max}$. Par conséquent, les prémisses ζ_i , $i = \{1, 2, 3\}$ sont bornées telles que $\zeta(\cdot) \in [\underline{\zeta}_i \ \bar{\zeta}_i]$. Les sous-modèles linéaires sont obtenus avec la méthode des secteurs non linéaires (Lemme.II.1). De ce fait, un modèle TS à 8 règles est obtenu (Annexe.G.2).

Afin de suivre des consignes de position, le modèle TS du Triglide est augmenté sous la forme (Équation.II.43) avec le vecteur x_l défini par (Équation.V.32) où

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Une loi PDC étendue est appliquée selon le schéma de commande (Figure.II.5). Les gains F_i^* de la loi de commande (Équation.II.44) sont calculés de manière à minimiser un critère quadratique J_{LQR} (Annexe.E) pour chaque sous-modèle. À partir des gains identifiés, les conditions LMIs sont vérifiées en appliquant le théorème (II.3) avec la relaxation de Tuan (Lemme.II.6). Les gains de stabilisation F_i^* ainsi que la matrice P sont donnés en annexe (G.3).

V.5.2.2 Application pour la commande du banc d'assistance PAD

À partir du modèle CAO du Banc d'assistance VHIPOD (Figure.I.20), un robot virtuel a été développé avec la boîte à outil SimMechanics de Matlab. Cet outil fournit un environnement tridimensionnel (3D) pour la simulation des systèmes multi-corps (Figure.V.12b). Il permet de modéliser les systèmes mécaniques par un ensemble de solides et d'articulations (Figure.V.14). L'avantage de cette boîte à outils est qu'elle permet de simuler facilement un comportement plus réaliste du robot via le réglage des paramètres inertiels et l'attribution de propriétés mécaniques pour chaque pièce telles que l'élasticité, l'amortissement et le frottement sec.

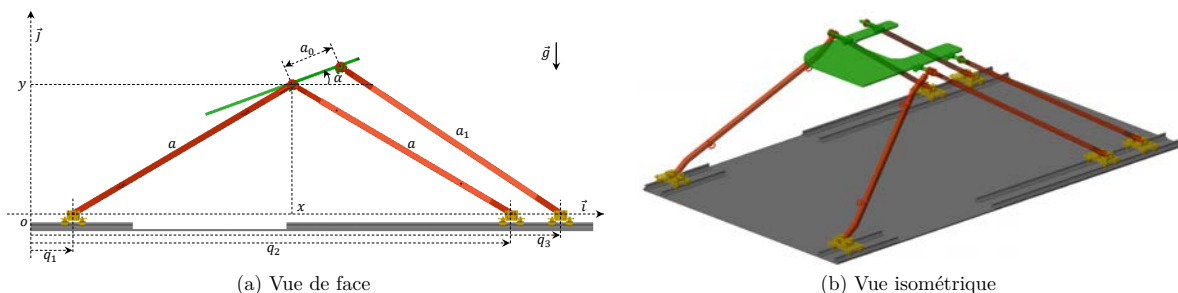


FIGURE V.12: Modèle SimMechanics tridimensionnel du banc d'assistance VHIPOD

La commande du robot est assurée via trois moteurs entraînant les patins via des systèmes poulies-courroies synchrones. Par le biais de trois arbres de transmission, une même force de translation Γ_i , $i = \{1, 2, 3\}$ est appliquée sur les deux patins de la partie gauche et droite du banc par rapport au plan sagittal. Cette symétrie permet de ramener la géométrie du banc à celle d'un triglide (Figure.V.12a). La force maximale appliquée sur l'un des patins est bridée à 45% de la tension maximale supportée par les courroies. Les bornes des positions articulaires sont fixées par rapport aux butées mécaniques. Les vitesses articulaires maximales sont calculées en fonction de la vitesse nominale des motoréducteurs en tenant compte de la transmission. Les paramètres mécaniques du banc d'assistance ainsi que les bornes du modèle sont donnés en annexes (A.1) et (A.3) respectivement.

Les deux singularités (Figure.IV.16a) et (Figure.IV.16b) sont naturellement exclues de l'espace de travail du banc par choix de conception. Le calcul des bornes relatives aux efforts spécifiques λ_i , $i = \{1, \dots, 4\}$ est effectué à l'aide d'un algorithme basé sur l'équation de contrainte statique (V.33b) en considérant que le banc supporte une charge maximale (Δm) de $80kg$. De ce fait, les bornes des non-linéarités ζ_i , $i = \{1, 2, 3\}$ sont déduites à leur tour. Concernant le calcul de la loi de commande, la boucle algébrique a été résolue avec la méthode d'échantillonnage partiel (section.V.4.2.2) car l'application de l'approche utilisant une commande dynamique (section.V.4.2.1) est difficile à cause de la complexité des jacobiniennes des fonctions d'appartenance h_i , $i = \{1, \dots, 8\}$.

Trois simulations ont été effectuées. En suivant les recommandations du staff médical, la trajectoire imposée à la tablette réalise un cycle d'assistance PAD d'une durée (T) de $2s$. La figure (V.13) montre la configuration du banc lors de l'exécution du cycle d'assistance.

Même si le modèle DAE ainsi que la loi de commande du banc (triglide) ont été

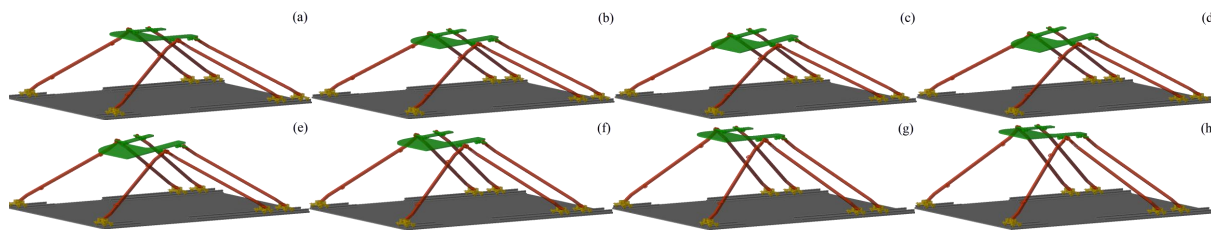


FIGURE V.13: Cycle d'exécution d'un PAD

établis à base des coordonnées naturelles, les résultats de simulations sont présentés par les coordonnées indépendantes dans l'espace opérationnel (Figure.V.12a) afin de faciliter l'interprétation des résultats.

La première simulation (Figures.V.15-V.18) vise à montrer le comportement du robot à vide (sans utilisateur) afin d'évaluer les performances de la loi de commande vis-à-vis des incertitudes non structurales. Dans la deuxième simulation (Figures.V.19-V.22), une charge de $80kg$ a été rajoutée sur la tablette en tenant compte des modifications inertielles nécessaires. Dans le dernier cas, la charge a été retirée et la trajectoire du robot a été modifiée afin qu'il passe par la singularité parallèle.

À partir de la figure (V.15), la loi de commande PDC étendue assure un bon suivi de consigne que ce soit par rapport à la translation ou la rotation de la tablette. La figure (V.16a) montre la trajectoire d'un point (pris au niveau du coude du patient) lors du transfert assis-debout. La configuration de la tablette est illustrée par la figure (V.16b) où apparaît une inclinaison de la tablette au démarrage du cycle permettant ainsi une inclinaison du tronc du patient. Ceci contribue à décharger le patient de son poids, ce qui permet de réduire les moments articulaires au niveau du genou.

Les efforts appliqués pour la translation des patins (Figure.V.17a) présentent des valeurs satisfaisantes compte tenu du poids de la structure et des propriétés mécaniques des différents composants du banc. Les tensions spécifiques (Figure.V.17b) donnent une image sur l'évolution des tensions au niveau des jambes et de la tablette. Comme dans cette simulation le banc est déchargé (cycle à vide), les forces de traction/compression des barres sont relativement faibles. La tension spécifique λ_3 et l'entrée de commande Γ_3 sont très faibles en comparant avec le reste des variables. Ceci s'explique par le fait que la 3^{ème} jambe ne subit que très peu le poids de la tablette. En l'absence d'une charge correspondant à une personne, la 3^{ème} jambe intervient essentiellement pour son orientation. L'évolution des prémisses (Figure.V.17c) est bien incluse dans le secteur non linéaire prédéfini ; ceci garantit la validité du modèle TS tout au long de la simulation.

Finalement, les écarts de poursuite sont illustrés par la figure (V.18). Il est noté que ces écarts ne sont pas nuls à $t = 0$, car les illustrations sont présentées à partir du moment d'exécution du PAD. Compte tenu des contraintes d'assemblage sur SimMechanics, la position initiale du robot a été définie arbitrairement, ensuite une phase d'initialisation a été effectuée afin de ramener le robot au départ du PAD. Sachant que les gains n'ont pas été optimisés, des erreurs dynamiques persistent. Les erreurs de position sont de l'ordre de $0,6mm$ pour les translations et $0,048'$ pour la rotation ; les erreurs de vitesse sont de l'ordre de $2mm/s$ pour les translations et $0,12'/s$ pour la rotation. Ceci a été jugé satisfaisant compte tenu de la tâche à réaliser (PAD) dans l'espace de travail.

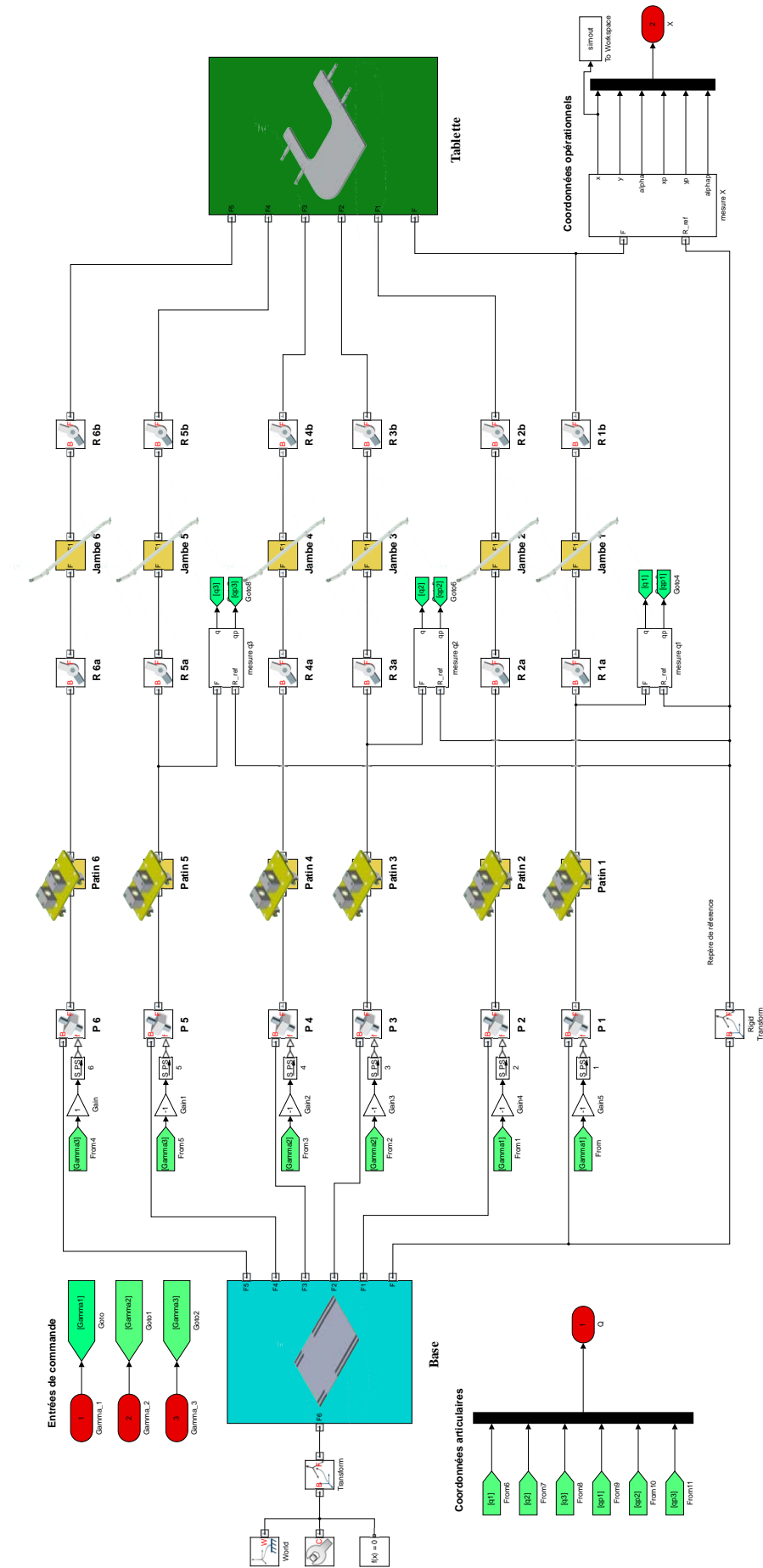


FIGURE V.14: Schéma SimMechanis du banc d'assistance VHIPOD

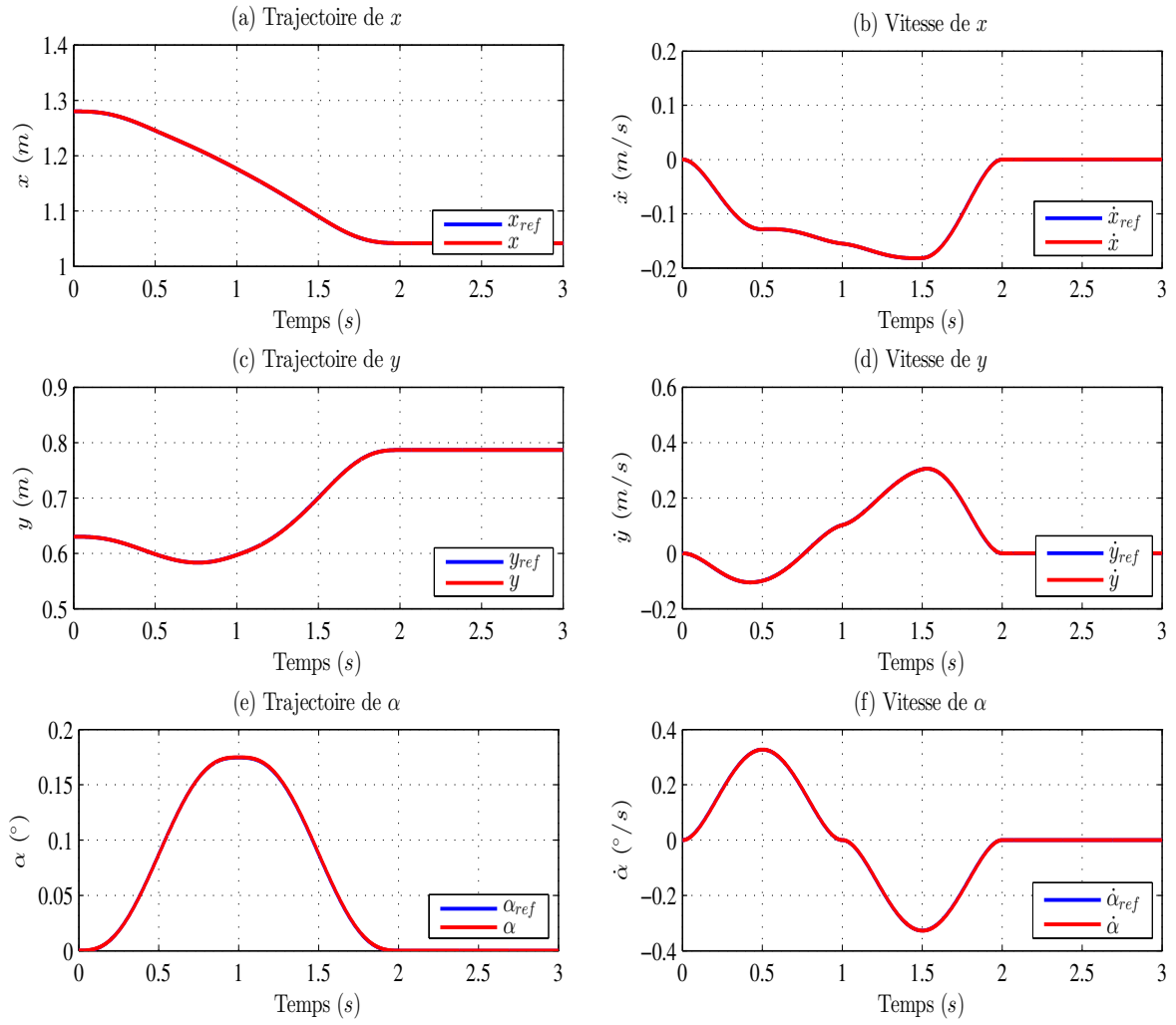


FIGURE V.15: Résultats de simulation dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 0kg$

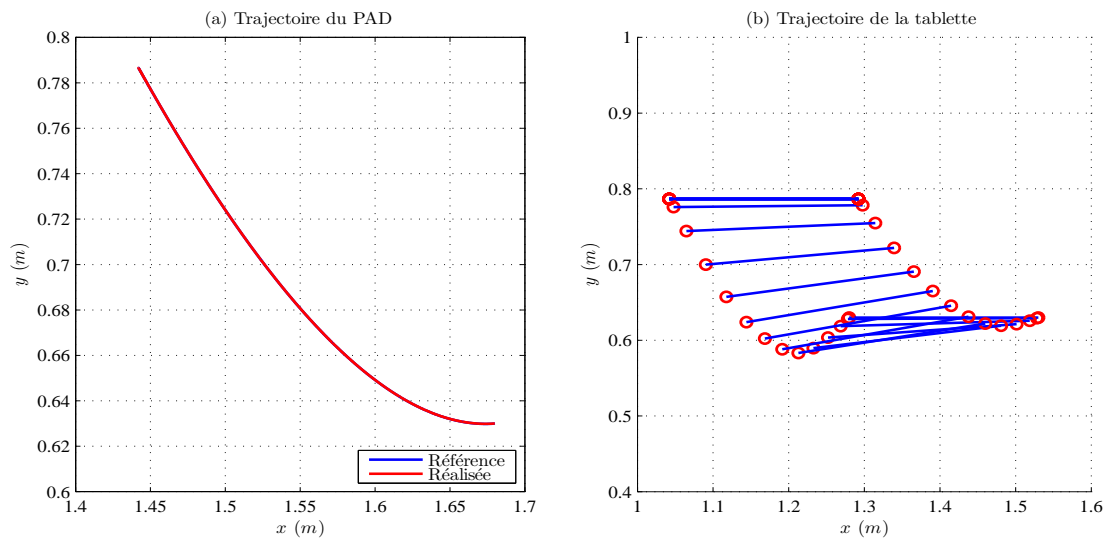


FIGURE V.16: Trajectoires dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 0kg$

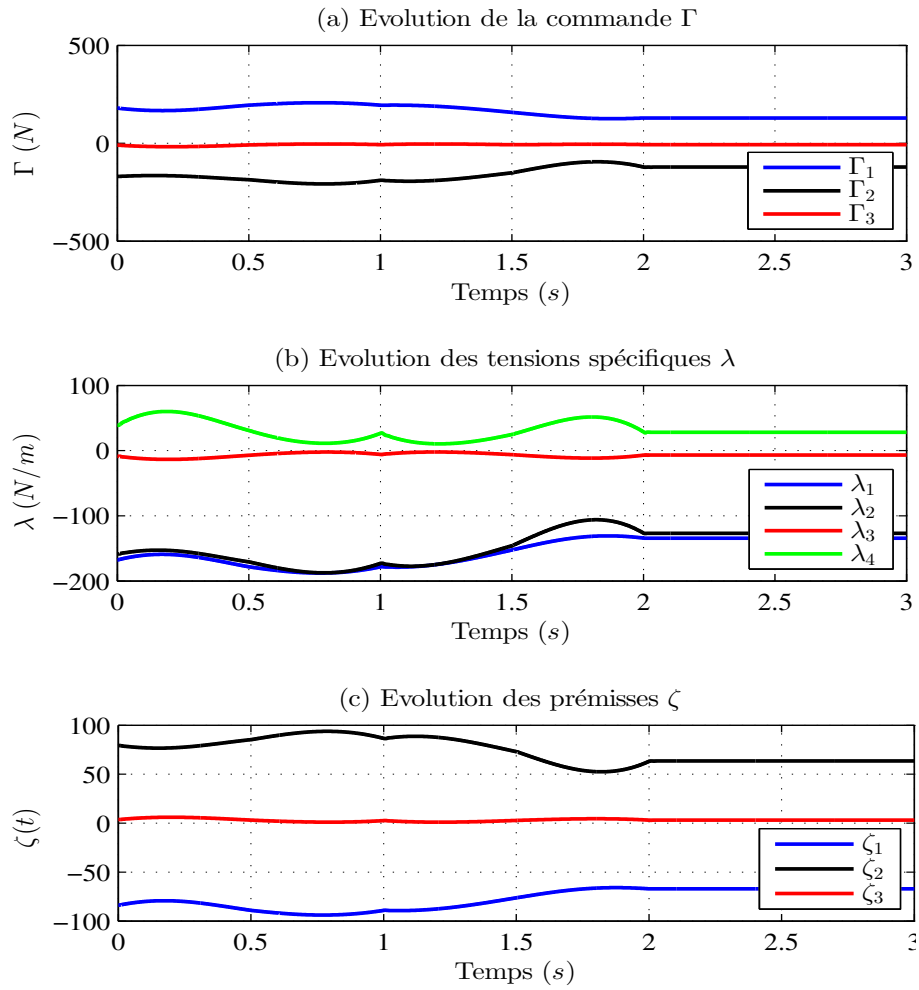


FIGURE V.17: Évolution de la commande, des tensions spécifiques et des prémisses pour $\Delta m = 0kg$

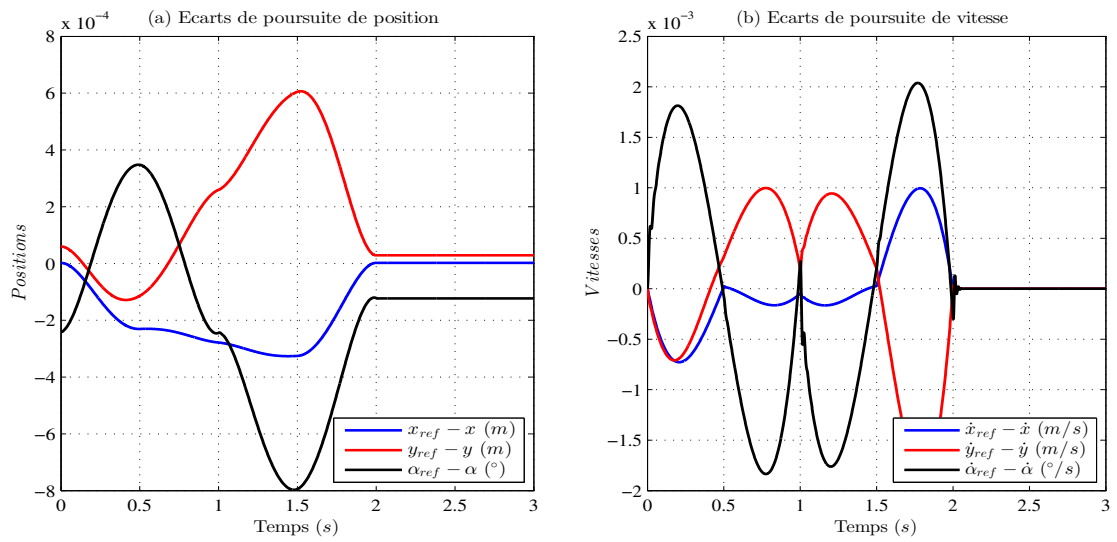


FIGURE V.18: Écart de poursuite pour $\Delta m = 0kg$

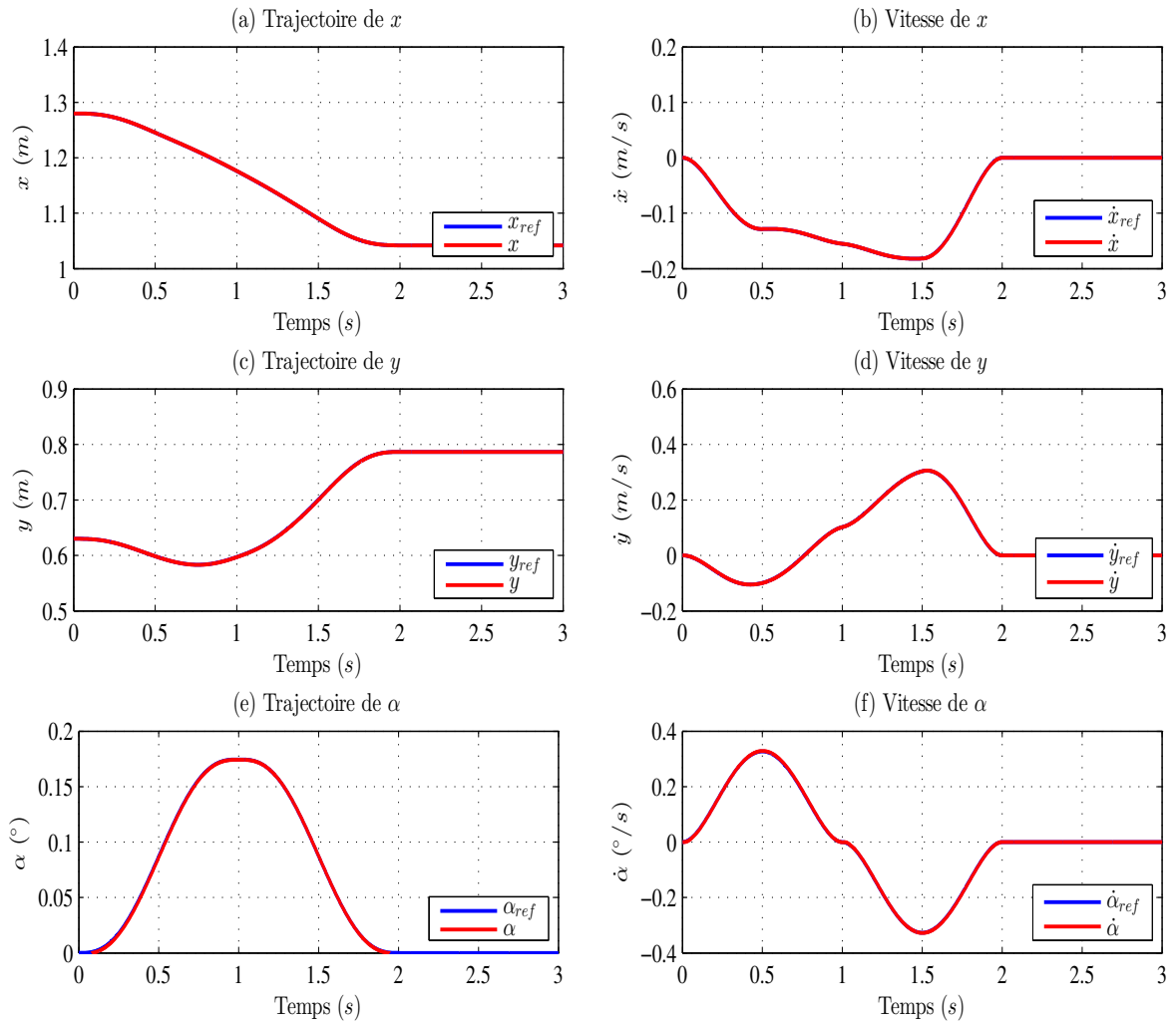


FIGURE V.19: Résultats de simulation dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 80kg$

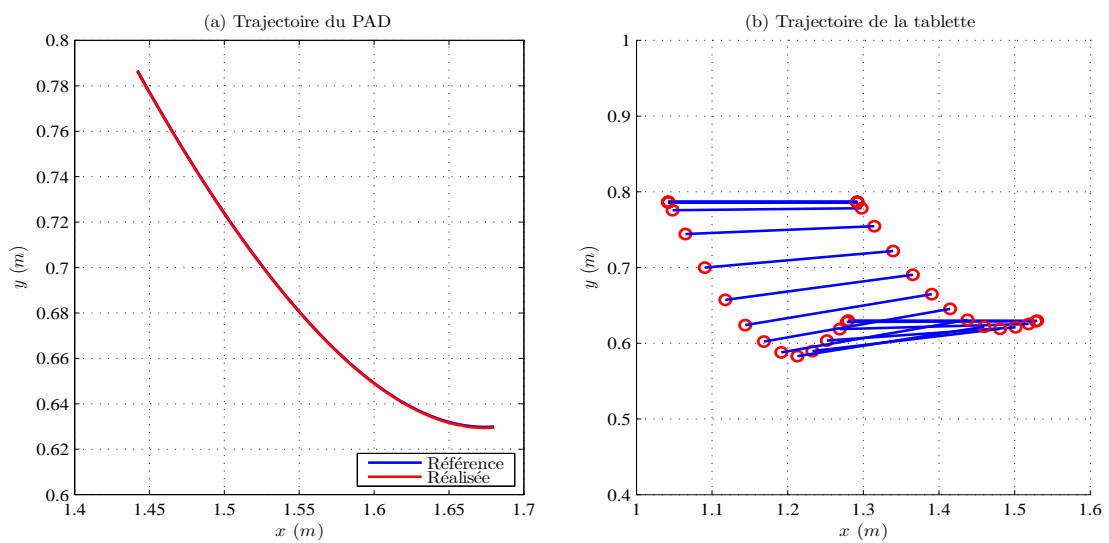


FIGURE V.20: Trajectoires dans l'espace opérationnel pour $\Delta m = 80kg$

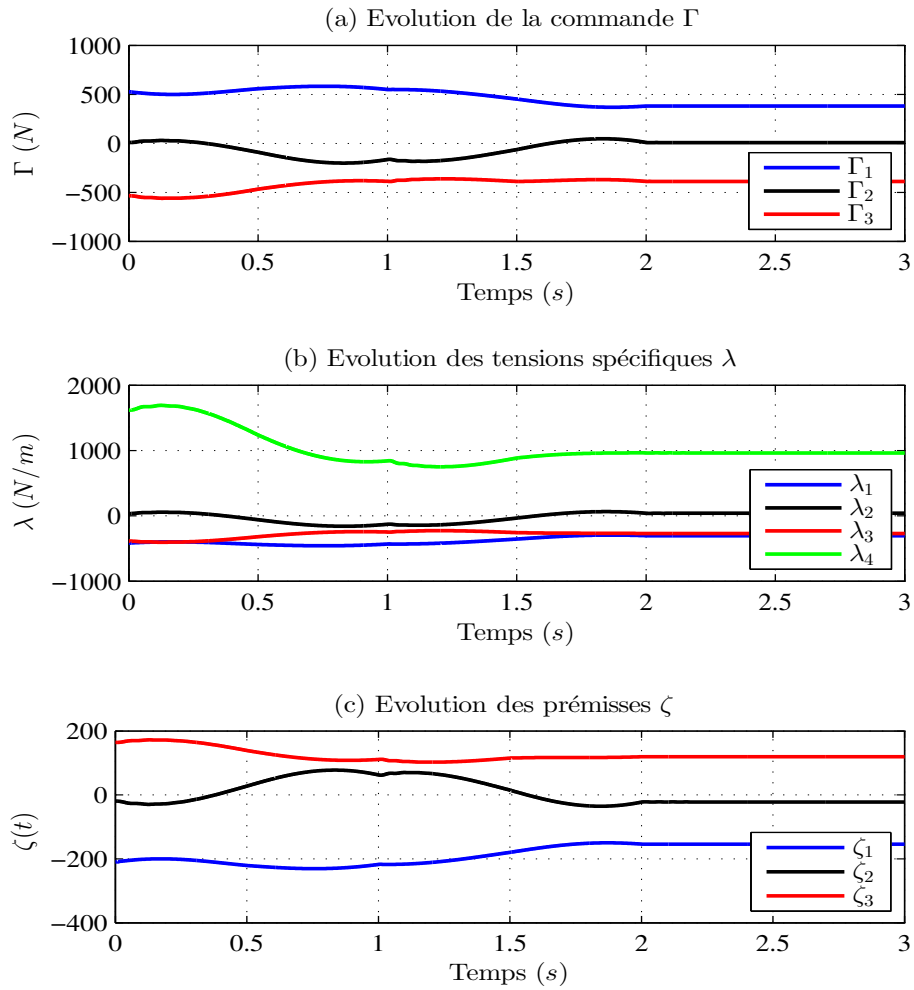


FIGURE V.21: Évolution de la commande, des tensions spécifiques et des prémisses pour $\Delta m = 0kg$

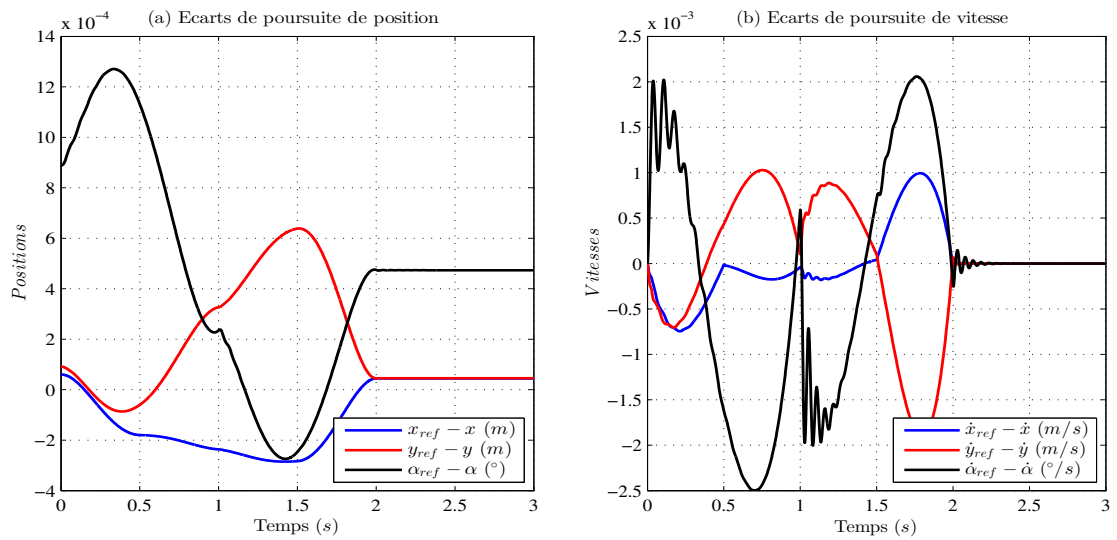


FIGURE V.22: Écart de poursuite pour $\Delta m = 80kg$

Dans la deuxième simulation (banc avec charge de 80 kg), le changement de charge influence peu le suivi de la trajectoire (Figures.V.19-V.20). La loi de commande rejette convenablement la perturbation induite par l'appui de l'utilisateur sur la tablette. Ceci confirme les conclusions tirées auparavant concernant la robustesse naturelle de l'approche TS-DAE vis-à-vis des incertitudes structurelles.

La commande (Figure.V.21a) et les efforts appliqués aux patins sont plus importants afin de contrer le poids du patient, de même pour les tensions dans les barres (Figure.V.21b). La tension spécifique λ_3 et l'entrée de commande Γ_3 ont considérablement augmenté car le poids du patient est entièrement concentré sur les bords de la tablette (emplacement du coude) rajoutant ainsi des efforts de compression à la 3^{ème} jambe. Par rapport aux prémisses (Figure.V.21c), elles restent incluses dans le secteur non linéaire. Sur la figure (V.22), les écarts de poursuite gardent le même ordre de grandeur que précédemment avec une légère augmentation de l'erreur au niveau de la rotation, causée par la pression du coude sur les bords de la tablette.

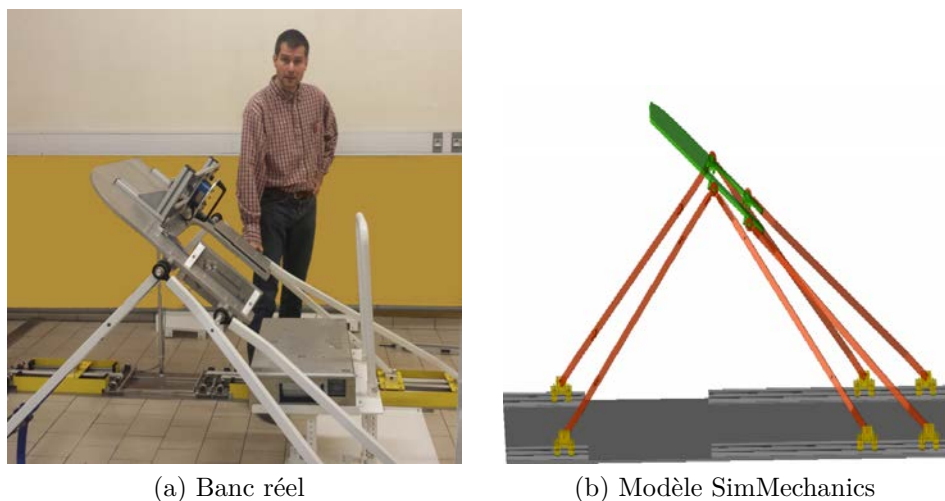


FIGURE V.23: Banc VHIPOD en configuration singulière parallèle

Une dernière simulation sans charge sur le banc a été rajoutée afin d'observer le comportement de la loi de commande lors du passage du robot par la singularité parallèle (Figure.V.23). Les bornes de saturation des actionneurs ainsi que celles des efforts spécifiques ont été exagérément élargies dans le but de garantir la validité du modèle TS tout au long de la simulation. Les conditions LMIs ont été revérifiées avec le même jeu de gains calculés précédemment. Lors de l'exécution du PAD, l'inclinaison de la tablette a été forcée à faire une rotation de $\alpha = -40^\circ$ afin de contraindre le robot à franchir la singularité parallèle.

À partir de la figure (V.24), la loi de commande PDC étendue assure un bon suivi de trajectoire sur les translations de la tablette. Concernant la rotation, on remarque une perte de contrôle au voisinage de la singularité parallèle due à la sur-mobilité du système. Ces résultats ne prouvent rien concernant les performances de la loi de commande, pour d'autres trajectoires le banc aurait bien pu se retrouver dans un 2^{ème} mode d'assemblage ce qui veut dire la non-validité du secteur non linéaire. L'objectif de cette simulation est d'analyser le comportement mécanique du banc. La figure (V.25) montre que la trajectoire du PAD n'est plus contrôlée durant le franchissement de la singularité même si le

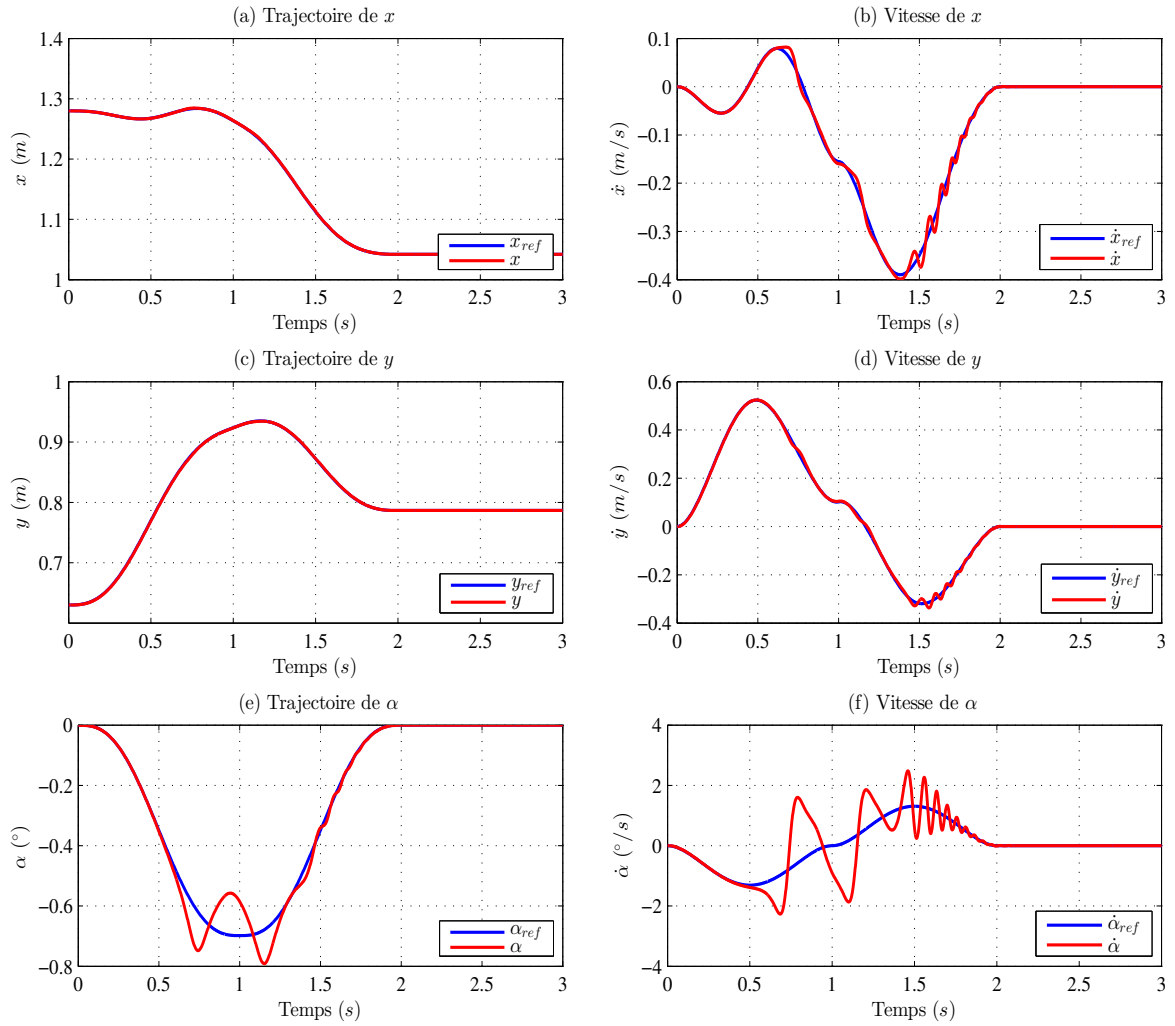


FIGURE V.24: Résultats de simulation dans l'espace opérationnel lors du franchissement de la singularité parallèle

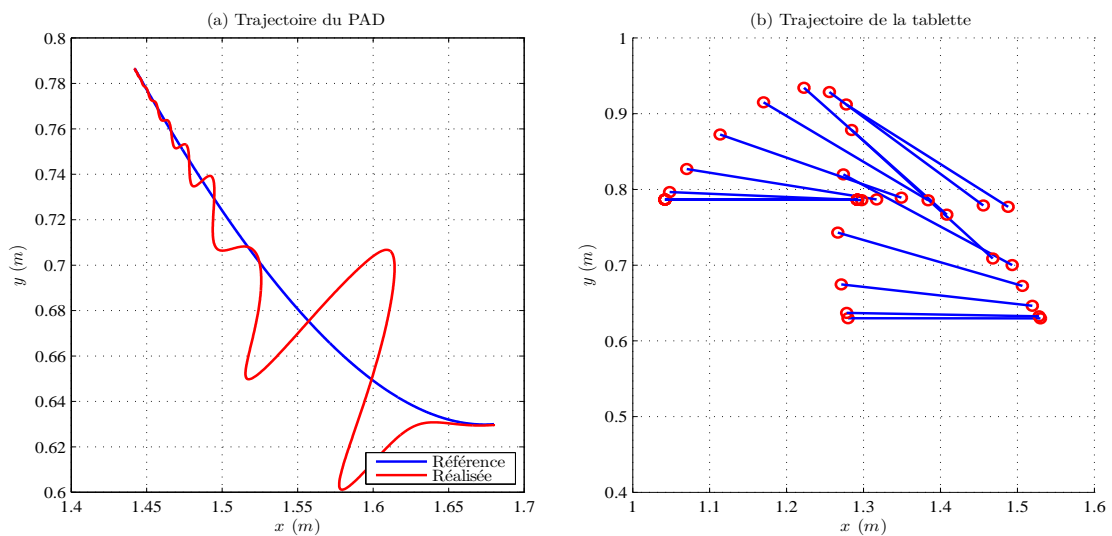


FIGURE V.25: Trajectoires dans l'espace opérationnel lors du franchissement de la singularité parallèle

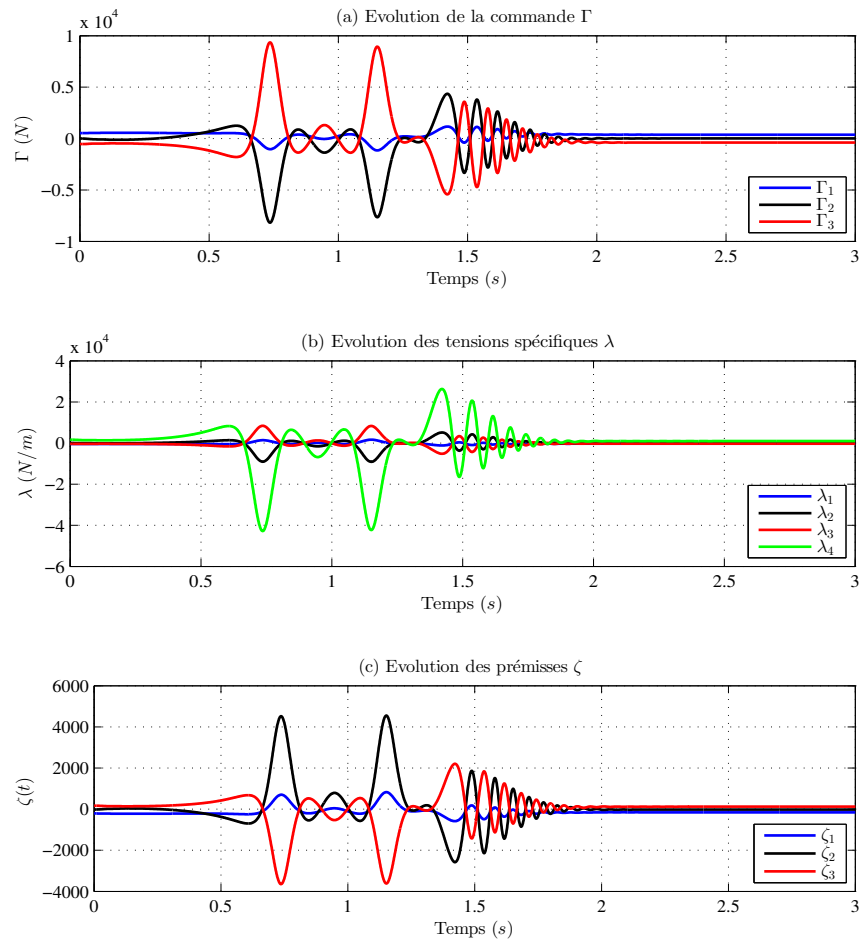


FIGURE V.26: Évolution de la commande, des tensions spécifiques et des prémisses lors du franchissement de la singularité parallèle

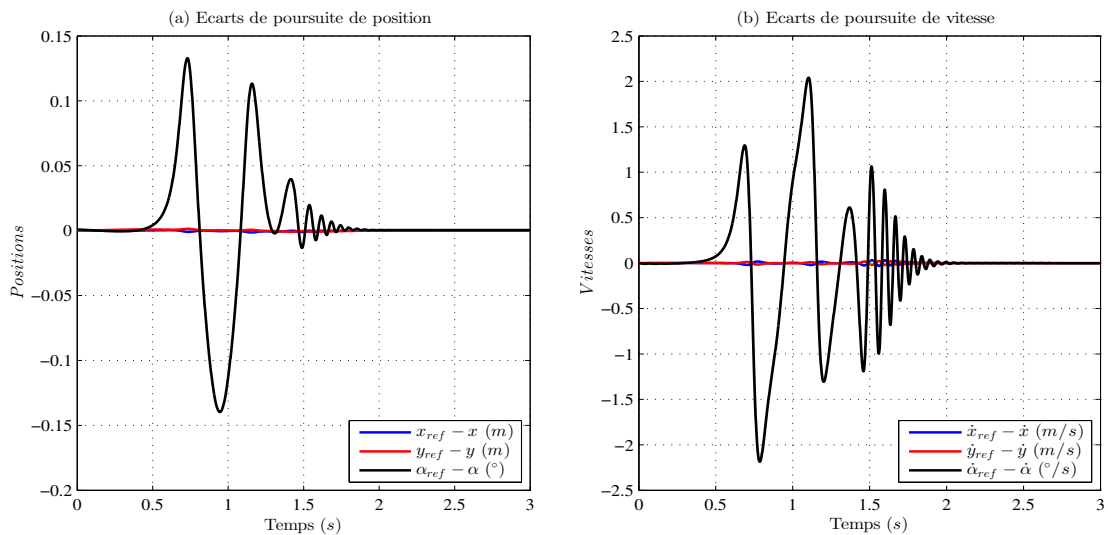


FIGURE V.27: Écart de poursuite lors du franchissement de la singularité parallèle

banc se stabilise après (fin du mouvement). Comme prévu, la figure (V.26a) montre un pic de commande sur la 2^{ème} et la 3^{ème} jambe pouvant atteindre $10^4 N$. En pratique, les

actionneurs du banc ne sont pas capables de fournir cette énergie et même si c'était le cas, la courroie de transmission céderait bien avant. La figure (V.26) montre à quel point il est dangereux de passer par une singularité parallèle. À partir de la courbe de l'effort spécifique λ_4 , on remarque que la tablette subit une compression très importante au moment du passage par la singularité pouvant aller jusqu'à la rupture du mécanisme.

V.6 Conclusion

Ce chapitre englobe les contributions majeures de cette thèse. Une brève introduction des modèles DAEs a été proposée afin de montrer les intérêts de cette représentation par rapport aux équations différentielles ordinaires, notamment en ce qui concerne l'interprétation physique des variables régissant le modèle.

La puissance de la modélisation DAE réside dans le fait qu'elle permet de décrire un système très complexe de façon relativement simple moyennant l'introduction des contraintes algébriques. Ce type de modèle est souvent utilisé en informatique dans les logiciels de simulation. Néanmoins leurs exploitations dans le domaine de l'automatique n'est pas courante. Ceci s'explique par leur nature singulière conduisant à plusieurs solutions pour les contraintes algébriques. De ce fait, la notion d'indice a été introduite ; elle permet de renseigner à quel point un modèle DAE est différent d'une représentation d'état. Un exemple linéaire élémentaire (2 masses en translation) a été présenté afin de dévoiler l'avantage de la modélisation DAE d'un système mécanique soumis à des contraintes algébriques.

Le modèle DAE d'un manipulateur parallèle quelconque est naturellement d'indice 3. Par utilisation de la méthode de réduction d'indice, ce modèle a été découplé en deux modèles DAEs d'indice 1 par la transformation des contraintes géométriques en contraintes statiques. Ces modèles DAEs d'indice 1 permettent de décrire la dynamique tout entière du manipulateur par un modèle de jambes dont la nacelle est représentée par les efforts d'interaction ou inversement.

À partir des modèles d'indice 1 et sous l'hypothèse que le robot évolue en un seul mode d'assemblage loin des singularités, les vitesses sont bridées et les efforts des actionneurs sont limités ; les efforts spécifiques (images des efforts internes) ont été bornés via l'équation algébrique statique. Ceci a permis de construire un modèle TS pour robot parallèle dont les seuls termes non linéaires sont ceux issus de la combinaison linéaire des efforts spécifiques.

La problématique liée à la résolution de la boucle algébrique a été exposée. Deux solutions ont été proposées, la première est basée sur l'introduction d'une dynamique artificielle très rapide sur la commande permettant ainsi de casser la boucle et d'assurer la convergence des prémisses vers leur valeur réelle en un temps fini. La deuxième solution est basée sur un échantillonnage partiel de la commande lors du calcul des prémisses. Une comparaison des deux solutions par rapport à une solution analytique exacte a été proposée.

Dans la dernière partie, l'approche a été validée sur deux exemples d'applications. Le

premier porte sur la commande d'un manipulateur parallèle de type Biglide. Une comparaison avec une approche classique a été proposée. Trois simulations ont été effectuées sur un modèle contenant des incertitudes structurelles et non structurelles.

La deuxième application porte sur la commande du banc d'assistance au passage assis-debout développé dans le cadre du projet VHIPOD. Les simulations ont été effectuées sur la base d'un modèle du banc développé avec la boîte à outils SimMechanics de Matlab. Trois tests différents ont été réalisés avec le même jeu de gains. La première simulation consiste à commander le banc sans charge, ensuite une charge a été rajoutée afin de simuler le comportement du banc lors de l'assistance d'un patient. Dans les deux situations, la loi de commande assure de bonnes performances. La dernière simulation a été rajoutée dans le but de montrer la dynamique du robot lors du franchissement d'une singularité et des risques qui peuvent se produire.

Les résultats ont confirmé l'efficacité de l'approche, notamment en ce qui concerne la robustesse naturelle de l'approche PDC-DAE vis-à-vis des incertitudes structurelles. Cette conclusion est très importante car elle est inhérente à l'approche conjointe de modélisation et de commande. En décrivant la dynamique du manipulateur avec un modèle DAE «jambes», la nacelle et sa charge n'apparaissent plus dans la partie différentielle du modèle ; leur dynamique n'est vue qu'à travers les efforts d'interaction, efforts qui sont obtenus par la contrainte statique. De ce fait, si ces efforts sont bornés, le modèle TS établi et les conditions LMIs vérifiées, alors cela implique forcément la stabilité du système sur tout l'ensemble compact des variables. Comme il existe une relation de proportionnalité entre le poids de la charge utile et l'ordre de grandeur des efforts internes, le fait d'élargir les bornes de ces derniers dans le modèle TS procure au système une robustesse naturelle. Néanmoins, l'élargissement des bornes n'est pas sans conséquence ; il peut conduire au conservatisme des contraintes LMIs.

Les résultats sur le banc d'assistance sont encore plus intéressants que ceux sur le Biglide car il y a une différence notable entre les deux modèles DAEs. Le modèle du banc a été établi à partir des coordonnées naturelles. L'utilisation de ce jeu de coordonnées a conduit à un modèle DAE exact du banc sous la forme de 5 points matériels soumis à des contraintes géométriques. La validation de cette méthode avec l'approche TS nous ouvre des perspectives paraissant prometteuses pour la commande de manipulateurs encore plus complexes.

Conclusion générale et Perspectives

Les problématiques abordées dans cette thèse relèvent de la commande des systèmes robotiques complexes. Ce travail de thèse s'insère dans le cadre du projet ANR VHIPOD « véhicule individuel de transport en station debout auto-équilibré pour personne handicapée avec aide à la verticalisation » ; ce projet ANR TecSan (Technologie pour la Santé) a débuté le 1 janvier 2013 pour une durée de 51 mois (fin programmée le 30 mars 2017). L'objectif du projet est de développer de nouvelles solutions pour la verticalisation et le déplacement des personnes à mobilité réduite et plus précisément les personnes souffrant d'une paralysie partielle.

Au regard des objectifs et caractères ambitieux et novateurs du projet, avant de proposer une solution complète, deux problématiques fondamentales et pluridisciplinaires ont été définies. La première concerne l'assistance au passage assis-debout (PAD) d'une personne hémiplegique via une solution robotisée. Nous avons tout d'abord conçu un banc d'assistance au PAD afin de comprendre le mouvement de verticalisation chez le sujet hémiplegique, pour ensuite proposer des stratégies d'assistance. Ce banc est un robot manipulateur parallèle à 3 ddl. Concernant sa modélisation dynamique, l'application des techniques usuelles consiste à éliminer les contraintes algébriques dues aux boucles cinématiques dans l'architecture. Cette méthodologie produit souvent des modèles dynamiques très complexes. Dans notre cas d'application, celle-ci rend difficile, voire impossible, la synthèse d'une loi de commande basée sur l'approche Takagi-Sugeno, à moins que des hypothèses simplificatrices ne soient prises en considération. Cette complexité de synthèse est due au nombre important de termes non linéaires dans le modèle qui aboutit à l'obtention d'un modèle TS avec un grand nombre de règles floues. Dans ce cas, la formulation du problème de commande sous forme de contraintes LMIs conduit souvent à des conditions de stabilité très conservatives.

Une solution à ce problème a été proposée dans le cadre de ce travail. Elle consiste à écrire, via le principe des puissances virtuelles, le modèle dynamique du robot sous forme algébro-différentielle (DAE). L'intérêt de cette formulation est de décomposer le modèle en sous-systèmes, interprétables physiquement, et d'introduire une plus grande souplesse dans le choix des coordonnées. Une forme DAE beaucoup plus simple (en termes de non-linéarités) du modèle dynamique peut alors être obtenue.

L'exploitation de ce type de modèle pour des objectifs de commande n'est pas évidente car il est de nature singulière et l'application des techniques de commande basée sur la forme d'état n'est pas possible. La solution la plus couramment utilisée dans la littérature est l'augmentation du vecteur d'état avec des dynamiques artificielles très rapides relatives à la violation des contraintes algébriques. L'association de cette méthode avec l'approche TS ne semble pas être la plus judicieuse puisque l'extension du vecteur

d'état avec les variables algébriques conduit à un conservatisme excessif. Par contre, en se basant sur l'aspect fini des efforts internes – efforts liés aux contraintes algébriques – compte tenu des limites mécaniques (limites élastiques et à la rupture des matériaux) obtenues sous l'hypothèse que le manipulateur ne passe aucune singularité, un modèle TS a été synthétisé permettant des conditions de stabilisation LMIs résolubles à l'aide des algorithmes usuels. Notre contribution a été validée en simulation sur un robot parallèle à 2 degrés de liberté puis sur le banc d'assistance au PAD développé dans le cadre du projet VHIPOD.

La deuxième problématique concerne la mobilité de la personne hémiplégique au moyen d'un robot mobile auto-équilibré adapté. La majorité de ce type de véhicules fonctionne avec une commande stabilisatrice via un capteur gyroscopique. La variation du centre de gravité global avec l'inclinaison du corps de l'utilisateur actionne la commande pour compenser le déséquilibre, ce qui se traduit par un déplacement (ou non) en avant ou en arrière. Dans notre cas, la personne handicapée disposera de points d'appui pour s'accrocher. Ce type de commande par inclinaison du corps pourrait entraîner un risque de basculement et donc serait dangereux pour cette personne. Dans le but d'éviter ce genre d'accident, la question de la stabilité du véhicule et de la robustesse du contrôleur suite à une manœuvre du conducteur devient primordiale.

Ainsi, un modèle dynamique classique du robot auto-équilibré a été complété afin de prendre en compte l'influence du terrain sur la dynamique du robot. Un modèle TS descripteur a été généré. L'avantage est que ce modèle s'obtient naturellement à partir du modèle dynamique inverse du robot et que cette approche conduit à une réduction du conservatisme. Des conditions de stabilisation robuste ont été écrites afin de prendre en compte la non connaissance de l'inclinaison du sol. Un deuxième modèle dynamique a été proposé afin de décrire le comportement du robot dans une situation de franchissement d'obstacle (une marche par exemple). Sous l'hypothèse que le robot franchit l'obstacle à partir d'une situation quasi-statique, son comportement a été représenté par celui d'un acrobot (mécanisme sous-actionné à deux degrés de liberté) pivotant autour de la bordure. Une comparaison entre les modèles TS standard et descripteur et des simulations avec différents jeux de paramètres ont été effectuées afin d'identifier, d'une part, les structures potentiellement stabilisables lors du franchissement et, d'autre part, l'approche qui offre le plus de possibilités de conception (variation paramétrique liée à la conception mécanique). Pour finir, une stratégie de franchissement a été proposée.

L'exposition des résultats à travers le manuscrit a été faite comme suit :

Dans le chapitre (I), le contexte de la thèse a été introduit, suivi d'une présentation des différents dispositifs d'assistance existant dans la littérature. Ensuite, après avoir décrits les différentes contraintes rencontrées lors de sa conception, le banc d'assistance au PAD développé dans le cadre de ce projet a été présenté. Dans la dernière partie, les robots mobiles à deux roues ont été introduits et situés dans le contexte de l'assistance des personnes handicapées. Les problématiques liées au déplacement des gyropodes sur une pente et le franchissement d'obstacle ont été exposées.

Dans le chapitre (II), l'approche TS a été présentée dans son cadre théorique général. Dans un premier temps, la méthodologie de construction des modèles TS sous leur forme

standard et descripteur via la méthode des secteurs non linéaires a été présentée, ainsi que les principales conditions sous forme LMI permettant l'analyse de la stabilité ou la synthèse de commandes stabilisatrices. Enfin, la difficulté de l'approche relative au conservatisme des conditions LMIs a été soulignée et une attention particulière a été apportée à l'applicabilité de l'approche dans le domaine de la robotique.

Dans le chapitre (III), une étude de faisabilité sur la stabilisation des gyropodes a été effectuée. Dans un premier temps, un contrôleur non PDC robuste avec action intégrale a été appliqué sur un modèle TS descripteur d'un gyropode en pente. Les résultats de cette simulation ont montré qu'avec l'approche TS descripteur robuste, le gyropode est toujours stabilisable autour de son équilibre naturel même si ce dernier est conditionné par la variation de la pente qui est souvent inconnue. Un deuxième résultat a été tiré de cette simulation concernant l'impact du dimensionnement du robot par rapport à son empreinte sur le sol lors de la stabilisation. Il a été montré qu'avec un choix judicieux de la structure, l'utilisation du robot dans des endroits étroits est envisageable. Dans la deuxième partie de cette étude, une situation de franchissement d'obstacle a été considérée. Il a été montré qu'avec un contrôleur basé TS, il n'est pas toujours possible de garantir la stabilité lors du franchissement de marche, car selon les paramètres mécaniques, le bassin d'attraction relatif à l'inclinaison du robot est plus ou moins grand, engendrant ainsi des conditions LMIs plus ou moins conservatives. Une stratégie de franchissement d'obstacle garantissant la validité du modèle acrobot utilisé a été proposée pour solliciter le moins possible les actionneurs. Néanmoins, il a été souligné que cette dernière n'est pas facile à mettre en œuvre en pratique car elle nécessite une détection préalable de l'obstacle et un ajustement de posture afin de préparer le robot au franchissement de l'obstacle.

Dans le chapitre (IV), des notions sur la modélisation dynamique des manipulateurs parallèles ont été abordées. Un bref rappel d'analyse cinématique a été effectué afin d'introduire les outils nécessaires pour l'écriture d'un modèle dynamique. Une analyse succincte des singularités a été présentée. Par la suite et en préambule à la modélisation dynamique, différentes familles de paramétrage du mouvement (type de coordonnées) ont été exposées, ce qui a permis de mettre l'accent sur le lien entre le choix des coordonnées et la complexité du modèle établi. Par la suite, différents formalismes de modélisation dynamique ont été rappelés en montrant les avantages de chacun. Une méthodologie générale de modélisation de manipulateur parallèle (permettant d'ajuster la structure du modèle et le choix des coordonnées) a été introduite en s'appuyant sur le principe des puissances virtuelles. De plus, les expressions matricielles obtenues ont montré que la complexité du modèle est étroitement liée à celles des jacobiniennes et de leurs dérivées temporelles. Comme la complexité de ces dernières est directement liée aux choix des coordonnées, ceci confirme les différentes affirmations trouvées dans la littérature. Cette méthodologie de modélisation a été appliquée sur un manipulateur parallèle à 2 ddl (Biglide) conduisant à un modèle algèbro-différentiel d'indice 3. L'analyse cinématique d'un autre robot manipulateur à 3 ddl (Triglide) a montré une complexité supplémentaire dans les jacobiniennes introduites en raison de la coordonnée angulaire de la nacelle. L'utilisation de coordonnées usuelles conduit à un modèle complexe (comportant un nombre important de non-linéarités). De ce fait, une solution à partir des coordonnées naturelles a été proposée et a permis d'obtenir un modèle DAE d'indice 3 comportant des matrices de masse à termes constants.

Dans le chapitre (V), les principales contributions de cette thèse ont été mises en va-

leur à travers la synthèse des modèles DAEs sous forme TS. Une brève description de ces modèles DAEs est faite avec les différentes notions nécessaires pour la compréhension du manuscrit. Un exemple linéaire très simple est présenté dans le but de montrer le comportement dynamique d'un système mécanique soumis à une contrainte cinématique. Les modèles DAEs d'indice 3 développés dans le chapitre (IV) ont été repris et découplés via une méthode de réduction d'indice. Le but de cette procédure a été d'exprimer les multiplicateurs de Lagrange de façon explicite dans les contraintes algébriques ; ceci a permis de transformer la contrainte initiale (cinématique) en une contrainte statique faisant apparaître les efforts internes ou leur image, les efforts spécifiques (leur interprétation dépend de la formulation des jacobiniennes). Après réduction d'indice, il en a résulté des modèles DAEs d'indice 1. La nature singulière de ces modèles a été soulignée et leur exploitation pour des objectifs de commande a été discutée. Une formulation TS a été proposée. Cette dernière a permis l'obtention d'un modèle TS comportant des fonctions d'appartenance non affines en la commande constituant ainsi une boucle algébrique. Deux solutions pratiques ont été exposées et justifiées. La première est basée sur une commande dynamique ; son principe repose sur la considération d'une dynamique artificielle très rapide sur la commande. Cette piste semble être très séduisante mais, en pratique, il s'est avéré que le calcul des jacobiniennes des fonctions d'appartenance peut rapidement se complexifier de façon exorbitante. Une deuxième méthode basée sur un échantillonnage partiel a été donnée.

Dans la dernière partie, l'approche a été validée sur deux exemples d'application. Le premier consiste à commander un manipulateur parallèle de type Biglide. Une trajectoire circulaire a été considérée et une comparaison avec une approche classique (Computed Torque Control) a été faite. Trois simulations ont été réalisées sur un modèle contenant des incertitudes structurelles et non structurelles. La deuxième application consiste à commander le banc d'assistance au passage PAD développé dans le cadre du projet ANR VHIPOD. Les simulations ont été effectuées sur un modèle SimMechanics du banc. Trois tests différents ont été réalisés avec le même jeu de gains. La première simulation concerne la commande du banc sans charge. Ensuite une charge a été ajoutée afin de simuler le comportement lors de l'assistance d'un patient. Dans les deux situations, la loi de commande assure de bonnes performances. Une dernière simulation a été rajoutée dans le but de montrer la dynamique du robot lors du franchissement d'une singularité parallèle et de mettre en évidence les risques correspondants.

Les simulations ont montré des résultats très intéressants qui permettent de dire que notre approche comprend une sorte de « robustesse naturelle » vis-à-vis des incertitudes structurelles. Cette particularité est liée à la fois à la méthode de modélisation dynamique et à la construction du modèle TS, ce qui produit en définitive un modèle TS dépendant uniquement des intervalles de variation des efforts spécifiques. De ce fait, l'impact de la charge n'est vu qu'à travers ces efforts. Les simulations sur le banc d'assistance au PAD ont montré des résultats très intéressants concernant le potentiel de la modélisation dynamique à partir des coordonnées naturelles.

Les problématiques abordées dans ce mémoire relèvent de la modélisation et de la commande du système dynamique complexe. Même si à la fin, cette contribution a permis de répondre aux problématiques particulières liées à notre périmètre d'intervention sur le projet VHIPOD, elle nous a ouvert des perspectives très larges, autant sur les plans

pratique que théorique.

a) Sur le plan pratique

- Par rapport à la problématique liée à la mobilité des personnes, à l'issue des résultats présentés dans ce mémoire, un robot mobile à deux roues a été spécialement conçu pour la validation temps réel des approches proposées. Les premiers tests ont été limités à des obstacles à hauteur bien définie et des conditions initiales lors du franchissement bien maîtrisées. Par la suite, cette structure a évolué afin d'intégrer des fonctionnalités supplémentaires permettant la détection des obstacles et la génération de consignes associées permettant l'adaptation de la posture du robot lors du franchissement. Cette adaptation de posture a été principalement proposée afin de minimiser la sollicitation des actionneurs en minimisant l'écart entre l'inclinaison du robot et son angle d'équilibre à l'impact. Une solution complètement radicale serait d'envisager de nouvelles structures mécaniques de robot auto-équilibré avec l'ajout de composants (approche intégrant conception mécanique et synthèse de commande). Théoriquement, cette solution permettrait de réduire la sollicitation des actionneurs moyennant une solution de modulation de l'énergie cinétique du robot.
- Par rapport à la problématique liée à l'assistance au PAD, une implémentation temps réel est prévue pour la validation de notre approche. Après l'analyse biomécanique des stratégies d'assistance réalisées avec le banc d'essai, des modèles de comportement devront être proposés puis intégrés dans la commande du PAD afin de tenir compte de l'interaction homme-machine sur le démonstrateur final VHIPOD.

b) Sur le plan théorique

- En dépit de l'aspect général de l'approche de modélisation développée, cette dernière n'a été appliquée que pour des architectures planes de robots parallèles avec des jambes de type PRR (Prismatic-Rotoïde-Rotoïde). Une extension vers d'autres architectures cinématiques est envisagée.
- Pour écrire le modèle dynamique des robots auto-équilibrés, l'utilisation de l'approche DAE est envisagée en incorporant des liaisons non holonomes, permettant de prendre en compte un profil de sol variable.
- Enfin, par rapport à l'écriture des conditions LMIs, il semble plus judicieux d'inclure la contrainte sur la saturation de la commande dans les conditions de stabilisation.

Bibliographie

- [Abdellatif et al., 2005] Abdellatif, H., Grotjahn, M., and Heimann, B. (2005). High efficient dynamics calculation approach for computed-force control of robots with parallel structures. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, pages 2024–2029. IEEE.
- [Abdellatif et al., 2008] Abdellatif, H., Heimann, B., and Kotlarski, J. (2008). Passivity-based observer/controller design with desired dynamics compensation for 6 dofs parallel manipulators. In *Intelligent Robots and Systems, 2008. IROS 2008. IEEE/RSJ International Conference on*, pages 2392–2397. IEEE.
- [Afroun, 2013] Afroun, M. (2013). *Modelisation, planification de trajectoires et commande de robots paralleles*. PhD thesis, Ecole Militaire Polytechnique.
- [Afroun et al., 2012] Afroun, M., Vermeiren, L., and Dequidt, A. (2012). Revisiting the inverse dynamics of the Gough–Stewart platform manipulator with special emphasis on universal–prismatic–spherical leg and internal singularity. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C : Journal of Mechanical Engineering Science*, page 0954406211434485.
- [Allouche et al., 2013] Allouche, B., Vermeiren, L., Dequidt, A., and Dambrine, M. (2013). Robust control of two-wheeled self-balanced transporter on sloping ground : A takagi-sugeno descriptor approach. In *Systems and Control (ICSC), 2013 3rd International Conference on*, pages 372–377. IEEE.
- [Allouche et al., 2014a] Allouche, B., Vermeiren, L., Dequidt, A., and Dambrine, M. (2014a). Step-crossing control of two-wheeled transporter based on takagi-sugeno approach : Comparison between state and descriptor form. In *Control Applications (CCA), 2014 IEEE Conference on*, pages 1324–1329. IEEE.
- [Allouche et al., 2014b] Allouche, B., Vermeiren, L., Dequidt, A., and Dambrine, M. (2014b). Step-crossing feasibility of two-wheeled transporter : Analysis based on takagi-sugeno descriptor approach. In *Intelligent Transportation Systems (ITSC), 2014 IEEE 17th International Conference on*, pages 2675–2680. IEEE.
- [Amirat et al., 1996] Amirat, Y., Francois, C., Fried, G., Pontnau, J., and Dafaoui, M. (1996). Design and control of a new six dof parallel robot : application to equestrian gait simulation. *Mechatronics*, 6(2) :227–239.
- [Anderson, 2003] Anderson, D. P. (2003). nbot balancing robot. <http://www.geology.smu.edu/~dpa-www/robo/nbot/>. Accessed : 11/02/2016 at 11 :20.
- [Andersson et al., 2007] Andersson, S., Söderberg, A., and Björklund, S. (2007). Friction models for sliding dry, boundary and mixed lubricated contacts. *Tribology international*, 40(4) :580–587.

-
- [Ang et al., 2005] Ang, K. H., Chong, G., and Li, Y. (2005). Pid control system analysis, design, and technology. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 13(4) :559–576.
- [Anglin and Wyss, 2000] Anglin, C. and Wyss, U. P. (2000). Arm motion and load analysis of sit-to-stand, stand-to-sit, cane walking and lifting. *Clinical Biomechanics*, 15(6) :441–448.
- [Arnold et al., 2004] Arnold, M., Mehrmann, V., and Steinbrecher, A. (2004). Index reduction in industrial multibody system simulation.
- [Asgari and Ardestani, 2015] Asgari, M. and Ardestani, M. A. (2015). Dynamics and improved computed torque control of a novel medical parallel manipulator : Applied to chest compressions to assist in cardiopulmonary resuscitation. *Journal of Mechanics in Medicine and Biology*, 15(04) :1550051.
- [Asker et al., 2015] Asker, A., Assal, S. F., and Mohamed, A. (2015). Dynamic analysis of a parallel manipulator-based multi-function mobility assistive device for elderly. In *Systems, Man, and Cybernetics (SMC), 2015 IEEE International Conference on*, pages 1409–1414. IEEE.
- [automation company, 2016] automation company, B. (2016). New automation technology. <http://http://www.beckhoff.com/english.asp?> Accessed : 05/07/2016 at 08 :51.
- [Bahrami et al., 2000] Bahrami, F., Riener, R., Jabedar-Maralani, P., and Schmidt, G. (2000). Biomechanical analysis of sit-to-stand transfer in healthy and paraplegic subjects. *Clinical Biomechanics*, 15(2) :123–133.
- [Baloh and Parent, 2003] Baloh, M. and Parent, M. (2003). Modeling and model verification of an intelligent self-balancing two-wheeled vehicle for an autonomous urban transportation system. In *The conference on computational intelligence, robotics, and autonomous systems*, pages 1–7. Citeseer.
- [Becerra-Vargas and Morgado Belo, 2012] Becerra-Vargas, M. and Morgado Belo, E. (2012). Application of h_∞ theory to a 6 dof flight simulator motion base. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 34(2) :193–204.
- [Bégon et al., 1995] Bégon, P., Pierrot, F., and Dauchez, P. (1995). Fuzzy sliding mode control of a fast parallel robot. In *Robotics and Automation, 1995. Proceedings., 1995 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 1178–1183. IEEE.
- [Beji et al., 1998] Beji, L., Abichou, A., and Pascal, M. (1998). Tracking control of a parallel robot in the task space. In *Robotics and Automation, 1998. Proceedings. 1998 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 2309–2314. IEEE.
- [Bennehar, 2015] Bennehar, M. (2015). *Some Contributions to Nonlinear Adaptive Control of PKMs : From Design to Real-Time Experiments*. PhD thesis, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc.
- [Berger and Reis, 2013] Berger, T. and Reis, T. (2013). Controllability of linear differential-algebraic systems—a survey. In *Surveys in Differential-Algebraic Equations I*, pages 1–61. Springer.
- [Bernal and Guerra, 2010] Bernal, M. and Guerra, T. M. (2010). Generalized nonquadratic stability of continuous-time takagi–sugeno models. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 18(4) :815–822.
-

- [Biegler et al., 2012] Biegler, L. T., Campbell, S. L., and Mehrmann, V. (2012). *Control and optimization with differential-algebraic constraints*, volume 23. SIAM.
- [Blanco et al., 2001] Blanco, Y., Perruquetti, W., and Borne, P. (2001). Non quadratic stability of nonlinear systems in the takagi-sugeno form. In *Control Conference (ECC), 2001 European*, pages 3917–3922. IEEE.
- [Bouri et al., 2014] Bouri, M., Abdi, E., Bleuler, H., Reynard, F., and Deriaz, O. (2014). Lower limbs robotic rehabilitation case study with clinical trials. In *New Trends in Medical and Service Robots*, pages 31–44. Springer.
- [Bouri et al., 2006] Bouri, M., Stauffer, Y., Schmitt, C., Allemand, Y., Gnemmi, S., Clavel, R., Métrailler, P., and Brodard, R. (2006). The walktrainer : a robotic system for walking rehabilitation. In *Robotics and Biomimetics, 2006. ROBIO'06. IEEE International Conference on*, pages 1616–1621. IEEE.
- [Boyd et al., 1994] Boyd, S. P., El Ghaoui, L., Feron, E., and Balakrishnan, V. (1994). *Linear matrix inequalities in system and control theory*, volume 15. SIAM.
- [Brecher et al., 2008] Brecher, C., Ostermann, T., and Friedrich, D. (2008). Control concept for PKM considering the mechanical coupling between actors. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 48(3) :427–436.
- [Brenan et al., 1996] Brenan, K. E., Campbell, S. L., and Petzold, L. R. (1996). *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*, volume 14. Siam.
- [Briot and Khalil, 2015] Briot, S. and Khalil, W. (2015). Dynamics of parallel robots—from rigid links to flexible elements. isbn : 978-3-319-19787-6.
- [Burdett et al., 1985] Burdett, R. G., Habasevich, R., Pisciotta, J., and Simon, S. R. (1985). Biomechanical comparison of rising from two types of chairs. *Physical Therapy*, 65(8) :1177–1183.
- [Burnfield et al., 2012] Burnfield, J. M., Shu, Y., Buster, T. W., Taylor, A. P., McBride, M. M., and Krause, M. E. (2012). Kinematic and electromyographic analyses of normal and device-assisted sit-to-stand transfers. *Gait & posture*, 36(3) :516–522.
- [Cachia, 2008] Cachia, C. (2008). *A Biomechanical Analysis of the Sit-to-stand Transfer in Parkinson's Disease*. ProQuest.
- [Callegari et al., 2006] Callegari, M., Palpacelli, M.-C., and Principi, M. (2006). Dynamics modelling and control of the 3-RCC translational platform. *Mechatronics*, 16(10) :589–605.
- [Campbell, 1995] Campbell, S. L. (1995). High-index differential algebraic equations. *Journal of Structural Mechanics*, 23(2) :199–222.
- [Castro, 2012] Castro, A. (2012). Modeling and dynamic analysis of a two-wheeled inverted-pendulum.
- [Chan et al., 2013] Chan, R. P. M., Stol, K. A., and Halkyard, C. R. (2013). Review of modelling and control of two-wheeled robots. *Annual Reviews in Control*, 37(1) :89–103.
- [chat, 2016] chat, S. (2016). Disabilities segway chat archive. <http://forums.segwaychat.org/archive/index.php/t-1032>. Accessed : 12/02/2016 at 11 :00.
- [Chemori et al., 2013] Chemori, A., Natal, G. S., and Pierrot, F. (2013). Control of parallel robots : towards very high accelerations. In *SSD'2013 : 10th International Multi-Conference on Systems, Signals and Devices*, page 8.

- [Chen et al., 2012] Chen, T., Hazelwood, P., and Stol, K.-J. (2012). Step ascent modelling of a two-wheeled robot. In *Mechatronics and Machine Vision in Practice (M2VIP), 2012 19th International Conference*, pages 310–315. IEEE.
- [Cheng et al., 2003] Cheng, H., Yiu, Y.-K., and Li, Z. (2003). Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators. *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, 8(4) :483–491.
- [Cheng et al., 2001] Cheng, P.-T., Wu, S.-H., Liaw, M.-Y., Wong, A. M., and Tang, F.-T. (2001). Symmetrical body-weight distribution training in stroke patients and its effect on fall prevention. *Archives of physical medicine and rehabilitation*, 82(12) :1650–1654.
- [Cheung and Hung, 2005] Cheung, J. W. and Hung, Y. (2005). Modelling and control of a 2-DOF planar parallel manipulator for semiconductor packaging systems. In *Advanced Intelligent Mechatronics. Proceedings, 2005 IEEE/ASME International Conference on*, pages 717–722. IEEE.
- [Choi and Oh, 2008] Choi, D. and Oh, J.-H. (2008). Human-friendly motion control of a wheeled inverted pendulum by reduced-order disturbance observer. In *Robotics and Automation, 2008. ICRA 2008. IEEE International Conference on*, pages 2521–2526. IEEE.
- [Chugo et al., 2008] Chugo, D., Asawa, T., Kitamura, T., Jia, S., and Takase, K. (2008). A rehabilitation walker with standing and walking assistance. In *Intelligent Robots and Systems, 2008. IROS 2008. IEEE/RSJ International Conference on*, pages 260–265. IEEE.
- [Chugo et al., 2012] Chugo, D., Morita, Y., Sakaida, Y., Yokota, S., Kobayashi, H., Hashimoto, H., and Takase, K. (2012). Standing assistance control using a physical strength of a patient with load estimation. In *RO-MAN, 2012 IEEE*, pages 234–239. IEEE.
- [Chung et al., 1999] Chung, I., Chang, H.-H., Lin, C.-T., et al. (1999). Fuzzy control of a six-degree motion platform with stability analysis. In *Systems, Man, and Cybernetics, 1999. IEEE SMC'99 Conference Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, volume 1, pages 325–330. IEEE.
- [Chuy Jr et al., 2006] Chuy Jr, O., Hirata, Y., Wang, Z., and Kosuge, K. (2006). Approach in assisting a sit-to-stand movement using robotic walking support system. In *Intelligent Robots and Systems, 2006 IEEE/RSJ International Conference on*, pages 4343–4348. IEEE.
- [Cobb, 1984] Cobb, D. (1984). Controllability, observability, and duality in singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(12) :1076–1082.
- [Colombo et al., 2000] Colombo, G., Joerg, M., Schreier, R., Dietz, V., et al. (2000). Treadmill training of paraplegic patients using a robotic orthosis. *Journal of rehabilitation research and development*, 37(6) :693–700.
- [Craig, 2005] Craig, J. J. (2005). *Introduction to robotics : mechanics and control*, volume 3. Pearson Prentice Hall Upper Saddle River.
- [Dabney et al., 2002] Dabney, J. B., Ghorbel, F. H., and Wang, Z. (2002). Modeling closed kinematic chains via singular perturbations. In *American Control Conference, 2002. Proceedings of the 2002*, volume 5, pages 4104–4110. IEEE.
- [Dai, 1989] Dai, L. (1989). *Singular control systems. Number 118 in lecture notes in control and information sciences*. Springer-Verlag, Berlin.

-
- [Dang et al., 2015] Dang, Q., Allouche, B., Dequidt, A., Vermeiren, L., and Dubreucq, V. (2015). Real-time control of a force feedback haptic interface via ethercat fieldbus. In *Industrial Technology (ICIT), 2015 IEEE International Conference on*, pages 441–446. IEEE.
- [Davidson and Hunt, 2004] Davidson, J. K. and Hunt, K. H. (2004). *Robots and screw theory : applications of kinematics and statics to robotics*. Oxford University Press on Demand.
- [De Jalón, 2007] De Jalón, J. G. (2007). Twenty-five years of natural coordinates. *Multibody System Dynamics*, 18(1) :15–33.
- [De Jalón and Bayo, 2012] De Jalón, J. G. and Bayo, E. (2012). *Kinematic and dynamic simulation of multibody systems : the real-time challenge*. Springer Science & Business Media.
- [Decotignie, 2005] Decotignie, J.-D. (2005). Ethernet-based real-time and industrial communications. *Proceedings of the IEEE*, 93(6) :1102–1117.
- [Demura and Yamada, 2007] Demura, S. and Yamada, T. (2007). Height of chair seat and movement characteristics in sit-to-stand by young and elderly adults 1. *Perceptual and motor skills*, 104(1) :21–31.
- [Denkena and Holz, 2006] Denkena, B. and Holz, C. (2006). Advanced position and force control concepts for the linear direct driven hexapod PaLiDA. In *Chemnitz Parallel Kinematics Seminar*, pages 359–378.
- [Dicianno et al., 2013] Dicianno, B. E., Morgan, A., Lieberman, J., and Rosen, L. (2013). Resna position on the application of wheelchair standing devices : 2013 current state of the literature. Technical report, Rehabilitation Engineering and Assistive Technology Society of North America.
- [Dombre and Khalil, 2010] Dombre, E. and Khalil, W. (2010). *Modeling, performance analysis and control of robot manipulators*. Wiley Online Library.
- [Dubuisson, 1990] Dubuisson, D. (1990). *Diagnostic et reconnaissance des formes*. Hermes.
- [Emmerich and Blétry, 1998] Emmerich, J. and Blétry, O. (1998). *Maladies des vaisseaux*. Doin Editions, Paris.
- [Espeland et al., 2007] Espeland, M. A., Gill, T. M., Guralnik, J., Miller, M. E., Fielding, R., Newman, A. B., Pahor, M., et al. (2007). Designing clinical trials of interventions for mobility disability : results from the lifestyle interventions and independence for elders pilot (life-p) trial. *The Journals of Gerontology Series A : Biological Sciences and Medical Sciences*, 62(11) :1237–1243.
- [Estrada Manzo, 2015] Estrada Manzo, V. (2015). *Estimation et commande des systèmes descripteurs*. PhD thesis, Valenciennes.
- [Feng, 2003] Feng, G. (2003). Controller synthesis of fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 11(5) :605–612.
- [Feng, 2004] Feng, G. (2004). H_∞ controller design of fuzzy dynamic systems based on piecewise lyapunov functions. *Systems, Man, and Cybernetics, Part B : Cybernetics, IEEE Transactions on*, 34(1) :283–292.
- [Feng, 2006] Feng, G. (2006). A survey on analysis and design of model-based fuzzy control systems. *Fuzzy systems, IEEE Transactions on*, 14(5) :676–697.
-

-
- [Führer and Leimkuhler, 1991] Führer, C. and Leimkuhler, B. (1991). Numerical solution of differential-algebraic equations for constrained mechanical motion. *Numerische Mathematik*, 59(1) :55–69.
- [Gahinet et al., 1994] Gahinet, P., Nemirovskii, A., Laub, A. J., and Chilali, M. (1994). The LMI control toolbox. In *IEEE conference on decision and control*, volume 2, pages 2038–2038. Institute Of Electrical Engineers INC (IEE).
- [Ganea et al., 2011] Ganea, R., Paraschiv-Ionescu, A., Büla, C., Rochat, S., and Aminian, K. (2011). Multi-parametric evaluation of sit-to-stand and stand-to-sit transitions in elderly people. *Medical engineering & physics*, 33(9) :1086–1093.
- [Gear et al., 1985a] Gear, C. W., Leimkuhler, B., and Gupta, G. (1985a). Automatic integration of euler-lagrange equations with constraints. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 12 :77–90.
- [Gear et al., 1985b] Gear, C. W., Leimkuhler, B., and Gupta, G. (1985b). Automatic integration of Euler-Lagrange equations with constraints. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 12 :77–90.
- [Georges et al., 2007] Georges, D., Besancon, G., Benayache, Z., and Witrant, E. (2007). A nonlinear state feedback design for nonlinear systems with input delay. In *Control Conference (ECC), 2007 European*, pages 915–921. IEEE.
- [Ghorbel et al., 2000] Ghorbel, F. H., Chételat, O., Gunawardana, R., and Longchamp, R. (2000). Modeling and set point control of closed-chain mechanisms : theory and experiment. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 8(5) :801–815.
- [Ghorbel et al., 2001] Ghorbel, F. H., Gunawardana, R., and Dabney, J. B. (2001). Experimental validation of a reduced model based tracking control of parallel robots. In *Control Applications, 2001.(CCA'01). Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on*, pages 375–382. IEEE.
- [Gordon and Liu, 1998] Gordon, B. W. and Liu, S. (1998). A singular perturbation approach for modeling differential-algebraic systems. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 120(4) :541–545.
- [Gordon et al., 2000] Gordon, B. W., Liu, S., and Asada, H. H. (2000). Realization of high index differential-algebraic systems using singularly perturbed sliding manifolds. In *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, volume 2, pages 752–756. IEEE.
- [Gosselin and Angeles, 1990] Gosselin, C. and Angeles, J. (1990). Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, 6(3) :281–290.
- [Grasser et al., 2002] Grasser, F., D’arrigo, A., Colombi, S., and Rufer, A. C. (2002). Joe : a mobile, inverted pendulum. *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, 49(1) :107–114.
- [Greffioz, 2000] Greffioz, A. (2000). Machine outil à plusieurs axes. Brevet FR2816230.
- [GRPA, 2011] GRPA (2011). AVC : Statistiques et chiffres. <http://grpa.ca/avc-statistiques-et-chiffres/>. Accessed : 29/01/2016 at 19 :19.
- [Guelton, 2003] Guelton, K. (2003). *Estimation des caractéristiques du mouvement humain en station debout. Mise en œuvre d’observateurs flous sous forme descripteur*. PhD thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambresis.
-

-
- [Guelton et al., 2009] Guelton, K., Bouarar, T., and Manamanni, N. (2009). Robust dynamic output feedback fuzzy lyapunov stabilization of takagi–sugeno systems—a descriptor redundancy approach. *Fuzzy sets and systems*, 160(19) :2796–2811.
- [Guerra et al., 2012] Guerra, T. M., Bernal, M., Guelton, K., and Labiod, S. (2012). Non-quadratic local stabilization for continuous-time takagi–sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*, 201 :40–54.
- [Guerra et al., 2009] Guerra, T. M., Kruszewski, A., and Lauber, J. (2009). Discrete tagaki–sugeno models for control : Where are we? *Annual Reviews in control*, 33(1) :37–47.
- [Guerra and Vermeiren, 1998] Guerra, T. M. and Vermeiren, L. (1998). Control laws for continuous fuzzy systems. In *International conference on advanced computer systems*, pages 368–375.
- [Guerra and Vermeiren, 2001] Guerra, T. M. and Vermeiren, L. (2001). Control laws for takagi–sugeno fuzzy models. *Fuzzy sets and systems*, 120(1) :95–108.
- [Guerra and Vermeiren, 2004] Guerra, T. M. and Vermeiren, L. (2004). Lmi-based relaxed nonquadratic stabilization conditions for nonlinear systems in the takagi–sugeno’s form. *Automatica*, 40(5) :823–829.
- [Guglielmetti, 1994] Guglielmetti, P. (1994). Model-based control of fast parallel robots.
- [Guichard and Huteau, 2007] Guichard, J. and Huteau, M. (2007). *Orientation et insertion professionnelle - 75 concepts clés : 75 concepts clés*. Dunod.
- [Ha et al., 1996] Ha, Y.-S. et al. (1996). Trajectory tracking control for navigation of the inverse pendulum type self-contained mobile robot. *Robotics and autonomous systems*, 17(1) :65–80.
- [Haug, 1989] Haug, E. J. (1989). *Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems*, volume 1. Allyn and Bacon Boston.
- [He et al., 2007] He, J., Jiang, H., Cong, D., Ye, Z. M., and Han, J. W. (2007). A survey on control of parallel manipulator. In *Key engineering materials*, volume 339, pages 307–313. Trans Tech Publ.
- [Huang et al., 2010] Huang, J., Guan, Z.-H., Matsuno, T., Fukuda, T., and Sekiyama, K. (2010). Sliding-mode velocity control of mobile-wheeled inverted-pendulum systems. *Robotics, IEEE Transactions on*, 26(4) :750–758.
- [Huang et al., 2009] Huang, J., Wang, H., Matsuno, T., Fukuda, T., and Sekiyama, K. (2009). Robust velocity sliding mode control of mobile wheeled inverted pendulum systems. In *Robotics and Automation, 2009. ICRA’09. IEEE International Conference on*, pages 2983–2988. IEEE.
- [IEC-61131-3, 1993] IEC-61131-3 (1993). Iec 61131-3. *Programmable Controllers-Part3 : Programming languages*, 3.
- [IEC-61508, 2010] IEC-61508 (2010). Iec 61508. *Functional safety of electrical/electronic/programmable electronic safety-related systems*.
- [Ilchmann and Reis, 2015] Ilchmann, A. and Reis, T. (2015). *Surveys in Differential-Algebraic Equations I, II, III*. Springer.
- [ISO-13482-1, 2014] ISO-13482-1 (2014). 13482-1. *Robots and robotic devices — Safety requirements for personal care robots*, 1.
-

- [ISO-13849-1, 2006] ISO-13849-1 (2006). 13849-1. *Safety of machinery—Safety-related parts of control systems—Part, 1* :13849–1.
- [Jafarinasab et al., 2011] Jafarinasab, M., Keshmiri, M., Azizan, H., and Danesh, M. (2011). Sliding mode control of a novel 6-dof parallel manipulator with rotary actuators. In *Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR), 2011 16th International Conference on*, pages 218–223. IEEE.
- [Jamwal et al., 2010] Jamwal, P., Xie, S., Tsoi, Y., and Aw, K. (2010). Forward kinematics modelling of a parallel ankle rehabilitation robot using modified fuzzy inference. *Mechanism and Machine Theory*, 45(11) :1537–1554.
- [Jeyasurya et al., 2013] Jeyasurya, J., Van der Loos, H., Hodgson, A., and Croft, E. A. (2013). Comparison of seat, waist, and arm sit-to-stand assistance modalities in elderly population. *Journal of Rehabilitation Research & Development*, 50(6) :835.
- [Johansen et al., 2000] Johansen, T. A., Shorten, R., and Murray-Smith, R. (2000). On the interpretation and identification of dynamic takagi-sugeno fuzzy models. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(3) :297–313.
- [Johansson et al., 1999] Johansson, M., Rantzer, A., and Årzén, K.-E. (1999). Piecewise quadratic stability of fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 7(6) :713–722.
- [Jun et al., 2011] Jun, H.-G., Chang, Y.-Y., Dan, B.-J., Jo, B.-R., Min, B.-H., Yang, H., Song, W.-K., and Kim, J. (2011). Walking and sit-to-stand support system for elderly and disabled. In *Rehabilitation Robotics (ICORR), 2011 IEEE International Conference on*, pages 1–5. IEEE.
- [Kamnik and Bajd, 2003] Kamnik, R. and Bajd, T. (2003). Robot assistive device for augmenting standing-up capabilities in impaired people. In *Intelligent Robots and Systems, 2003.(IROS 2003). Proceedings. 2003 IEEE/RSJ International Conference on*, volume 4, pages 3606–3611. IEEE.
- [Kane and Levinson, 1985] Kane, T. R. and Levinson, D. A. (1985). *Dynamics, theory and applications*. McGraw Hill.
- [Katariya, 2010] Katariya, A. S. (2010). *Optimal state-feedback and output-feedback controllers for the wheeled inverted pendulum system*. PhD thesis, Georgia Institute of Technology.
- [Katz et al., 2003] Katz, R., Koren, Y., Pierrot, F., and Li, Z. (2003). Bi-axial coplanar drilling apparatus. US Patent US6,557,235.
- [Kau et al., 2007] Kau, S.-W., Lee, H.-J., Yang, C.-M., Lee, C.-H., Hong, L., and Fang, C.-H. (2007). Robust h_∞ fuzzy static output feedback control of ts fuzzy systems with parametric uncertainties. *Fuzzy sets and systems*, 158(2) :135–146.
- [Kausar et al., 2012] Kausar, Z., Stol, K., and Patel, N. (2012). The effect of terrain inclination on performance and the stability region of two-wheeled mobile robots. *International Journal of Advanced Robotic Systems*, 9.
- [Khalil, 2002] Khalil, H. K. (2002). Nonlinear systems, 3rd. *New Jewsey, Prentice Hall*, 9.
- [Khalil and Dombre, 2004] Khalil, W. and Dombre, E. (2004). *Modeling, identification and control of robots*. Butterworth-Heinemann.
- [Khalil and Ibrahim, 2007] Khalil, W. and Ibrahim, O. (2007). General solution for the dynamic modeling of parallel robots. *Journal of intelligent and robotic systems*, 49(1) :19–37.

-
- [Khan et al., 2005] Khan, W. A., Krovi, V. N., Saha, S. K., and Angeles, J. (2005). Modular and recursive kinematics and dynamics for parallel manipulators. *Multibody System Dynamics*, 14(3-4) :419–455.
- [Kim et al., 2005] Kim, Y., Kim, S. H., and Kwak, Y. K. (2005). Dynamic analysis of a nonholonomic two-wheeled inverted pendulum robot. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 44(1) :25–46.
- [Kock and Schumacher, 2000] Kock, S. and Schumacher, W. (2000). Control of a fast parallel robot with a redundant chain and gearboxes : experimental results. In *Robotics and Automation, 2000. Proceedings. ICRA '00. IEEE International Conference on*, volume 2, pages 1924–1929 vol.2.
- [Kong and Jeon, 2005] Kong, K. and Jeon, D. (2005). Fuzzy control of a new tendon-driven exoskeletal power assistive device. In *Proceedings of the IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM 2005)*, pages 146–151.
- [Krut, 2003] Krut, S. (2003). *Contribution à l'étude des robots parallèles légers, 3T-1R et 3T-2R, à forts débattements angulaires*. PhD thesis, Montpellier 2, Université des Sciences et Techniques du Languedoc.
- [Kunkel and Mehrmann, 2001] Kunkel, P. and Mehrmann, V. (2001). Analysis of over- and underdetermined nonlinear differential-algebraic systems with application to nonlinear control problems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 14(3) :233–256.
- [Lee et al., 2002] Lee, C.-Y., Seo, K.-H., Kim, C.-H., Oh, S.-K., and Lee, J.-J. (2002). A system for gait rehabilitation : mobile manipulator approach. In *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA '02. IEEE International Conference on*, volume 3, pages 3254–3259. IEEE.
- [Lee et al., 2001] Lee, K. R., Jeung, E. T., and Park, H. B. (2001). Robust fuzzy h_∞ control for uncertain nonlinear systems via state feedback : an lmi approach. *Fuzzy sets and systems*, 120(1) :123–134.
- [Lee et al., 2003] Lee, S.-H., Song, J.-B., Choi, W.-C., and Hong, D. (2003). Position control of a Stewart platform using inverse dynamics control with approximate dynamics. *Mechatronics*, 13(6) :605–619.
- [Lendek et al., 2011] Lendek, Z., Guerra, T. M., Babuska, R., and De Schutter, B. (2011). *Stability analysis and nonlinear observer design using Takagi-Sugeno fuzzy models*. Springer.
- [Lewis, 1986] Lewis, F. L. (1986). A survey of linear singular systems. *Circuits, Systems and Signal Processing*, 5(1) :3–36.
- [Li et al., 2007] Li, J., Gao, X., Huang, Q., Du, Q., and Duan, X. (2007). Mechanical design and dynamic modeling of a two-wheeled inverted pendulum mobile robot. In *Automation and Logistics, 2007 IEEE International Conference on*, pages 1614–1619. IEEE.
- [Li and Wang, 2009] Li, Y. and Wang, Y. (2009). Trajectory tracking control of a redundantly actuated parallel robot using diagonal recurrent neural network. In *Natural Computation, 2009. ICNC'09. Fifth International Conference on*, volume 2, pages 292–296. IEEE.
- [Lin and Er, 2001] Lin, D. and Er, M. J. (2001). A new approach for stabilizing nonlinear systems with time delay. In *Control Conference (ECC), 2001 European*, pages 114–119. IEEE.
-

- [Litim et al., 2014] Litim, M., Allouche, B., Omari, A., Dequidt, A., and Vermeiren, L. (2014). Sliding mode control of Biglide planar parallel manipulator. In *Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO), 2014 11th International Conference on*, volume 2, pages 303–310. IEEE.
- [Liu and Zhang, 2003] Liu, X. and Zhang, Q. (2003). New approaches to h_∞ controller designs based on fuzzy observers for ts fuzzy systems via lmi. *Automatica*, 39(9) :1571–1582.
- [Lomaglio and Eng, 2005] Lomaglio, M. J. and Eng, J. J. (2005). Muscle strength and weight-bearing symmetry relate to sit-to-stand performance in individuals with stroke. *Gait & posture*, 22(2) :126–131.
- [Luenberger, 1977] Luenberger, D. G. (1977). Dynamic equations in descriptor form. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 22(3) :312–321.
- [Ma et al., 1998] Ma, X.-J., Sun, Z.-Q., and He, Y.-Y. (1998). Analysis and design of fuzzy controller and fuzzy observer. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 6(1) :41–51.
- [Majou et al., 2007] Majou, F., Wenger, P., and Chablat, D. (2007). A Novel method for the design of 2-DOF Parallel mechanisms for machining applications. *arXiv preprint arXiv :0705.1280*.
- [Mamdani and Assilian, 1975] Mamdani, E. H. and Assilian, S. (1975). An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller. *International journal of man-machine studies*, 7(1) :1–13.
- [Mario et al., 2016] Mario, V., Lorenzo, P., Massimo, G., and Stefano, M. (2016). Disabilities segway chat archive. <http://www.marioway.it/word/>. Accessed : 12/02/2016 at 14 :00.
- [Márquez Borbón, 2015] Márquez Borbón, R. (2015). *Nouveaux schémas de commande et d’observation basés sur les modèles de Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Valenciennes.
- [Matthias, 2007] Matthias, H. (2007). *Humanoid Robots : Human-like Machines*. i-Tech Education and Publishing.
- [Mazzà et al., 2006] Mazzà, C., Stanhope, S. J., Taviani, A., and Cappelozzo, A. (2006). Biomechanic modeling of sit-to-stand to upright posture for mobility assessment of persons with chronic stroke. *Archives of physical medicine and rehabilitation*, 87(5) :635–641.
- [Merlet, 2012] Merlet, J.-P. (2012). *Parallel robots*, volume 74. Springer Science & Business Media.
- [Miller and Clavel, 1992] Miller, K. and Clavel, R. (1992). The lagrange-based model of delta-4 robot dynamics. *Robotersysteme*, 8(1) :49–54.
- [Morère, 2001] Morère, Y. (2001). *Mise en œuvre de loi de commandes pour les modèles flous de type Takagi-Sugeno*. PhD thesis, Valenciennes.
- [Mourey et al., 2000] Mourey, F., Grishin, A., d’Athis, P., Pozzo, T., and Stapley, P. (2000). Standing Up From a Chair as a Dynamic Equilibrium Task A Comparison Between Young and Elderly Subjects. *The Journals of Gerontology Series A : Biological Sciences and Medical Sciences*, 55(9) :B425–B431.
- [Médéric, 2006] Médéric, P. (2006). *Conception et commande d’un système robotique d’assistance à la verticalisation et à la déambulation*. PhD thesis, Paris 6.

-
- [Nabat, 2007] Nabat, V. (2007). *Robots parallèles à nacelle articulée, du concept à la solution industrielle pour le pick-and-place*. PhD thesis, Université Montpellier II-Sciences et Techniques du Languedoc.
- [Nagai et al., 2003] Nagai, K., Nakanishi, I., and Hanafusa, H. (2003). Assistance of self-transfer of patients using a power-assisting device. In *Robotics and Automation, 2003. Proceedings. ICRA '03. IEEE International Conference on*, volume 3, pages 4008–4015. IEEE.
- [Naidu, 2002] Naidu, D. (2002). Singular perturbations and time scales in control theory and applications : an overview. *Dynamics of Continuous Discrete and Impulsive Systems Series B*, 9 :233–278.
- [Natal et al., 2012] Natal, G. S., Chemori, A., Michelin, M., and Pierrot, F. (2012). A dual-space feedforward pid control of redundantly actuated parallel manipulators with real-time experiments. In *PID'12 : IFAC Conference on Advances in PID Control*, page 6.
- [Nation, 2016] Nation, U. (2016). Factsheet on Persons with Disabilities. <http://www.un.org/disabilities/default.asp?id=18>. Accessed : 29/01/2016 at 19 :51.
- [Nikravesh, 1988] Nikravesh, P. E. (1988). *Computer-Aided : analysis of mechanical systems*.
- [Ohtake et al., 2003] Ohtake, H., Tanaka, K., and Wang, H. O. (2003). Fuzzy modeling via sector nonlinearity concept. *Integrated Computer-Aided Engineering*, 10(4) :333–341.
- [Oustaloup and Mathieu, 1999] Oustaloup, A. and Mathieu, B. (1999). *La commande CRONE : du scalaire au multivariable, 2e édition mise à jour*. Paris : Hermès Science Publications.
- [Oyekan and Hu, 2011] Oyekan, J. and Hu, H. (2011). Market evaluation for colchester catalyst on the use of robotic wheelchairs. Technical report, Technical Report : CES.
- [O'Meara and Smith, 2006] O'Meara, D. M. and Smith, R. M. (2006). The effects of unilateral grab rail assistance on the sit-to-stand performance of older aged adults. *Human movement science*, 25(2) :257–274.
- [Paccot et al., 2009] Paccot, F., Andreff, N., and Martinet, P. (2009). A review on the dynamic control of parallel kinematic machines : Theory and experiments. *The International Journal of Robotics Research*, 28(3) :395–416.
- [Pagis et al., 2015] Pagis, G., Bouton, N., Briot, S., and Martinet, P. (2015). Enlarging parallel robot workspace through type-2 singularity crossing. *Control Engineering Practice*, 39 :1–11.
- [Pan et al., 2012] Pan, J.-T., Guerra, T. M., Fei, S.-M., and Jaadari, A. (2012). Nonquadratic stabilization of continuous ts fuzzy models : Lmi solution for a local approach. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 20(3) :594–602.
- [Patten et al., 2004] Patten, C., Lexell, J., and Brown, H. E. (2004). Weakness and strength training in persons with poststroke hemiplegia : rationale, method, and efficacy. *Journal of Rehabilitation Research and Development*, 41(3A) :293–312.
- [Petzold, 1992] Petzold, L. R. (1992). Numerical solution of differential-algebraic equations in mechanical systems simulation. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 60(1-4) :269–279.
-

- [Pinto et al., 2012] Pinto, L. J., Kim, D.-H., Lee, J. Y., and Han, C.-S. (2012). Development of a segway robot for an intelligent transport system. In *System Integration (SII), 2012 IEEE/SICE International Symposium on*, pages 710–715. IEEE.
- [Rachedi et al., 2015] Rachedi, M., Hemici, B., and Bouri, M. (2015). Design of an h controller for the delta robot : experimental results. *Advanced Robotics*, 29(18) :1165–1181.
- [Rhee and Won, 2006] Rhee, B.-J. and Won, S. (2006). A new fuzzy lyapunov function approach for a takagi–sugeno fuzzy control system design. *Fuzzy sets and systems*, 157(9) :1211–1228.
- [Robotics, 2016] Robotics, S. (2016). Segway rmp. <http://rmp.segway.com>. Accessed : 11/02/2016 at 12 :00.
- [Roebroek et al., 1994] Roebroek, M. E., Doorenbosch, C. A. M., Harlaar, J., Jacobs, R., and Lankhorst, G. J. (1994). Biomechanics and muscular activity during sit-to-stand transfer. *Clinical Biomechanics*, 9(4) :235–244.
- [Rosenbrock, 1974] Rosenbrock, H. H. (1974). Structural properties of linear dynamical systems. *International Journal of Control*, 20(2) :191–202.
- [Roy et al., 2006] Roy, G., Nadeau, S., Gravel, D., Malouin, F., McFadyen, B. J., and Pottie, F. (2006). The effect of foot position and chair height on the asymmetry of vertical forces during sit-to-stand and stand-to-sit tasks in individuals with hemiparesis. *Clinical Biomechanics*, 21(6) :585–593.
- [Roy et al., 2007] Roy, G., Nadeau, S., Gravel, D., Pottie, F., Malouin, F., and McFadyen, B. J. (2007). Side difference in the hip and knee joint moments during sit-to-stand and stand-to-sit tasks in individuals with hemiparesis. *Clinical Biomechanics*, 22(7) :795–804.
- [Saadé et al., 2014] Saadé, A., Pudlo, P., Lempereur, M., and Rémy-Néris, O. (2014). The contribution of handgrip assistance on lower limb joint moments during sit-to-stand and stand-to-sit : a preliminary comparative study. *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering*, 17(sup1) :102–103.
- [Saint-Bauzel, 2007] Saint-Bauzel, L. (2007). *De la modélisation prédictive du comportement pathologique à l'application dans l'interaction Robot-Patient*. PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie.
- [Sala, 2009] Sala, A. (2009). On the conservativeness of fuzzy and fuzzy-polynomial control of nonlinear systems. *Annual Reviews in Control*, 33(1) :48–58.
- [Sala et al., 2005] Sala, A., Guerra, T. M., and Babuška, R. (2005). Perspectives of fuzzy systems and control. *Fuzzy Sets and Systems*, 156(3) :432–444.
- [Salah et al., 2013] Salah, O., Ramadan, A. A., Sessa, S., Ismail, A. A., Fujie, M., and Takanishi, A. (2013). Anfis-based sensor fusion system of sit-to-stand for elderly people assistive device protocols. *International Journal of Automation and Computing*, 10(5) :405–413.
- [Sartori Natal et al., 2015] Sartori Natal, G., Chemori, A., and Pierrot, F. (2015). Dual-Space Control of Extremely Fast Parallel Manipulators : Payload Changes and the 100g Experiment. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on*, 23(4) :1520–1535.
- [Sauter, 2007] Sauter, T. (2007). The continuing evolution of integration in manufacturing automation. *IEEE Industrial Electronics Magazine*, 1(1) :10–19.

-
- [Scherer and Weiland, 2000] Scherer, C. and Weiland, S. (2000). Linear matrix inequalities in control. *Lecture Notes, Dutch Institute for Systems and Control, Delft, The Netherlands*, 3.
- [Shang et al., 2012] Shang, W.-W., Cong, S., and Ge, Y. (2012). Adaptive computed torque control for a parallel manipulator with redundant actuation. *Robotica*, 30(03) :457–466.
- [Shang et al., 2009] Shang, W. W., Cong, S., Li, Z. X., and Jiang, S. L. (2009). Augmented nonlinear pd controller for a redundantly actuated parallel manipulator. *Advanced Robotics*, 23(12-13) :1725–1742.
- [Siciliano and Khatib, 2008] Siciliano, B. and Khatib, O. (2008). *Springer handbook of robotics*. Springer Science & Business Media.
- [Simaan, 1999] Simaan, N. (1999). *Analysis and synthesis of parallel robots for medical applications*. PhD thesis, Technion-Israel Institute of Technology, Faculty of Mechanical Engineering.
- [Simeon et al., 1991] Simeon, B., Führer, C., and Rentrop, P. (1991). Differential-algebraic equations in vehicle system dynamics. *Surv. Math. Ind.*, (1) :1–37.
- [Sontag and Wang, 1995] Sontag, E. D. and Wang, Y. (1995). On characterizations of the input-to-state stability property. *Systems & Control Letters*, 24(5) :351–359.
- [Spong, 1987] Spong, M. W. (1987). Modeling and control of elastic joint robots. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 109(4) :310–318.
- [Spong, 1995] Spong, M. W. (1995). The swing up control problem for the acrobot. *Control Systems, IEEE*, 15(1) :49–55.
- [Spong and Vidyasagar, 2008] Spong, M. W. and Vidyasagar, M. (2008). *Robot dynamics and control*. John Wiley & Sons.
- [Su et al., 2004] Su, Y., Duan, B., and Zheng, C. (2004). Nonlinear pid control of a six-dof parallel manipulator. In *Control Theory and Applications, IEE Proceedings-*, volume 151, pages 95–102. IET.
- [Tadokoro, 1994] Tadokoro, S. (1994). Control of parallel mechanisms. *Advanced Robotics*, 8(6) :559–571.
- [Tahar, 2009] Tahar, B. (2009). *Contribution à la synthèse de lois de commande pour les descripteurs de type Takagi-Sugeno incertains et perturbés*. PhD thesis, Université de Reims-Champagne Ardenne.
- [Takagi and Sugeno, 1985] Takagi, T. and Sugeno, M. (1985). Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *Systems, Man and Cybernetics, IEEE Transactions on*, (1) :116–132.
- [Tanaka and Sugie, 1997] Tanaka, H. and Sugie, T. (1997). General framework and bmi formulae for simultaneous design of structure and control systems. In *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, volume 1, pages 773–778. IEEE.
- [Tanaka et al., 2003] Tanaka, K., Hori, T., and Wang, H. O. (2003). A multiple lyapunov function approach to stabilization of fuzzy control systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 11(4) :582–589.
- [Tanaka et al., 1998] Tanaka, K., Ikeda, T., and Wang, H. O. (1998). Fuzzy regulators and fuzzy observers : relaxed stability conditions and LMI-based designs. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 6(2) :250–265.
-

-
- [Tanaka and Sano, 1994] Tanaka, K. and Sano, M. (1994). A robust stabilization problem of fuzzy control systems and its application to backing up control of a truck-trailer. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 2(2) :119–134.
- [Tanaka and Sugeno, 1992] Tanaka, K. and Sugeno, M. (1992). Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy sets and systems*, 45(2) :135–156.
- [Tanaka and Wang, 2001] Tanaka, K. and Wang, H. O. (2001). *Fuzzy control systems design and analysis : a linear matrix inequality approach*. John Wiley & Sons.
- [Taniguchi et al., 2001] Taniguchi, T., Tanaka, K., Ohtake, H., and Wang, H. O. (2001). Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of takagi-sugeno fuzzy systems. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 9(4) :525–538.
- [Taniguchi et al., 2000] Taniguchi, T., Tanaka, K., and Wang, H. O. (2000). Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 8(4) :442–452.
- [Taniguchi et al., 1999] Taniguchi, T., Tanaka, K., Yamafuji, K., and Wang, H. O. (1999). Fuzzy descriptor systems : stability analysis and design via lmis. In *American Control Conference, 1999. Proceedings of the 1999*, volume 3, pages 1827–1831. IEEE.
- [Tirmant et al., 2002] Tirmant, H., Baloh, M., Vermeiren, L., Guerra, T., and Parent, M. (2002). B2, an alternative two wheeled vehicle for an automated urban transportation system. In *Intelligent Vehicle Symposium, 2002. IEEE*, volume 2, pages 594–603. IEEE.
- [Tomuro et al., 2009] Tomuro, K., Nitta, O., Takahashi, Y., and Komeda, T. (2009). Development of a sit-to-stand assistance system. In *4th European Conference of the International Federation for Medical and Biological Engineering*, pages 2157–2160. Springer.
- [Tsai, 1999] Tsai, L.-W. (1999). *Robot analysis : the mechanics of serial and parallel manipulators*. John Wiley & Sons.
- [Tsukahara et al., 2009] Tsukahara, A., Hasegawa, Y., and Sankai, Y. (2009). Standing-up motion support for paraplegic patient with robot suit hal. In *Rehabilitation Robotics, 2009. ICORR 2009. IEEE International Conference on*, pages 211–217. IEEE.
- [Tuan et al., 2001] Tuan, H. D., Apkarian, P., Narikiyo, T., and Yamamoto, Y. (2001). Parameterized linear matrix inequality techniques in fuzzy control system design. *IEEE Transactions on fuzzy systems*, 9(2) :324–332.
- [Tully et al., 2005] Tully, E. A., Fotoohabadi, M. R., and Galea, M. P. (2005). Sagittal spine and lower limb movement during sit-to-stand in healthy young subjects. *Gait & posture*, 22(4) :338–345.
- [Valasek et al., 2007] Valasek, M., Sika, Z., and Vaculin, O. (2007). Multibody formalism for real-time application using natural coordinates and modified state space. *Multibody System Dynamics*, 17(2-3) :209–227.
- [Vander Linden et al., 1994] Vander Linden, D. W., Brunt, D., and McCulloch, M. U. (1994). Variant and invariant characteristics of the sit-to-stand task in healthy elderly adults. *Archives of physical medicine and rehabilitation*, 75(6) :653–660.
- [Verghese et al., 1981] Verghese, G. C., Levy, B. C., and Kailath, T. (1981). A generalized state-space for singular systems. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 26(4) :811–831.
- [Vermeiren et al., 2012] Vermeiren, L., Dequidt, A., Afroun, M., and Guerra, T.-M. (2012). Motion control of planar parallel robot using the fuzzy descriptor system approach. *ISA transactions*, 51(5) :596–608.
-

-
- [Vitturi et al., 2011] Vitturi, S., Peretti, L., Seno, L., Zigliotto, M., and Zunino, C. (2011). Real-time ethernet networks for motion control. *Computer standards & interfaces*, 33(5) :465–476.
- [Vivas and Poignet, 2005] Vivas, A. and Poignet, P. (2005). Predictive functional control of a parallel robot. *Control Engineering Practice*, 13(7) :863–874.
- [Wang et al., 1996] Wang, H. O., Tanaka, K., and Griffin, M. F. (1996). An approach to fuzzy control of nonlinear systems : stability and design issues. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on*, 4(1) :14–23.
- [Wang and Ghorbel, 2006a] Wang, Z. and Ghorbel, F. H. (2006a). Control of closed kinematic chains : a comparative study. In *American Control Conference, 2006*, pages 6–pp. IEEE.
- [Wang and Ghorbel, 2006b] Wang, Z. and Ghorbel, F. H. (2006b). Control of closed kinematic chains using a singularly perturbed dynamics model. *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, 128(1) :142–151.
- [Weck and Staimer, 2002] Weck, M. and Staimer, D. (2002). Parallel kinematic machine tools—current state and future potentials. *CIRP Annals-Manufacturing Technology*, 51(2) :671–683.
- [wikipedia, 2015] wikipedia (2015). Cinquième risque — Wikipedia, the free encyclopedia. [Online ; accessed 29-january-2016].
- [Wittenburg, 1977] Wittenburg, J. (1977). *Dynamics of systems of rigid bodies*. Teubner.
- [Wittenburg, 2013] Wittenburg, J. (2013). *Dynamics of systems of rigid bodies*, volume 33. Springer-Verlag.
- [Xie and de Souza, 1992] Xie, L. and de Souza, C. E. (1992). Robust h_∞ control for linear systems with norm-bounded time-varying uncertainty. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 37(8) :1188–1191.
- [Xing et al., 2011] Xing, H., Jia, H., and Yanqianga, L. (2011). Motion control system using sercos over ethercat. *Procedia Engineering*, 24 :749–753.
- [Xu et al., 2012] Xu, J.-X., Guo, Z.-Q., and Lee, T. H. (2012). Synthesized design of a fuzzy logic controller for an underactuated unicycle. *Fuzzy Sets and Systems*, 207 :77–93.
- [Yang et al., 2010] Yang, C., Huang, Q., Jiang, H., Peter, O. O., and Han, J. (2010). Pd control with gravity compensation for hydraulic 6-dof parallel manipulator. *Mechanism and Machine theory*, 45(4) :666–677.
- [Yap and Hashimoto, 2013] Yap, H. E. and Hashimoto, S. (2013). Dynamic step traverse of a two-wheeled mobile robot. *International Journal of Mechatronics and Manufacturing Systems*, 6(1) :3–22.
- [Yoneyama, 2006] Yoneyama, J. (2006). Robust h_∞ control analysis and synthesis for takagi–sugeno general uncertain fuzzy systems. *Fuzzy sets and systems*, 157(16) :2205–2223.
- [Yoneyama and Ichikawa, 1999] Yoneyama, J. and Ichikawa, A. (1999). H_∞ -control for takagi-sugeno fuzzy descriptor systems. In *Systems, Man, and Cybernetics, 1999. IEEE SMC'99 Conference Proceedings. 1999 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 28–33. IEEE.
-

- [Yoshimoto et al., 2005] Yoshimoto, J., Nishimura, M., Tokita, Y., and Ishii, S. (2005). Acrobot control by learning the switching of multiple controllers. *Artificial Life and Robotics*, 9(2) :67–71.
- [Yoshioka et al., 2012] Yoshioka, S., Nagano, A., Hay, D. C., and Fukashiro, S. (2012). The minimum required muscle force for a sit-to-stand task. *Journal of biomechanics*, 45(4) :699–705.
- [Yoshioka et al., 2007] Yoshioka, S., Nagano, A., Himeno, R., Fukashiro, S., and others (2007). Computation of the kinematics and the minimum peak joint moments of sit-to-stand movements. *Biomed Eng Online*, 6(1) :26.
- [Zadeh, 1965] Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3) :338–353.
- [Zhiyong and Tian, 2004] Zhiyong, Y. and Tian, H. (2004). A new method for tuning PID parameters of a 3 DoF reconfigurable parallel kinematic machine. In *Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA'04. 2004 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 2249–2254. IEEE.
- [Zlatanov et al., 1998] Zlatanov, D., Fenton, R., and Benhabib, B. (1998). Identification and classification of the singular configurations of mechanisms. *Mechanism and Machine Theory*, 33(6) :743–760.

Annexes

A Banc d'assistance VHIPOD

A.1 Paramètres mécaniques

TABLE A.1: Banc d'assistance VHIPOD : Paramètres mécaniques

Paramètres	Valeurs	Paramètres supplémentaires	Valeurs
Longueurs des barres 1 et 2 (m)		Masse de la charge (kg)	
a	1,242	Δm	[0 ~ 80]
Longueur de la barre 3 (m)		Rayon de la poulie (m)	
a_1	1,292	R	0,0199
Distance entre les pivots de la tablette (m)		Coefficient de réduction	
a_0	0,25	K_1	10
Masse de la tablette (kg)		$K_2 = K_3$	7
m_t	17,10	V_{max} à la sortie du réducteur (tr/min)	
Masses des barres (kg)		V_{max}	800
m_{b1}	8,94	Couple nominal imposé par le réducteur (Nm)	
m_{b2}	8,90	Γ_{nom}	50
m_{b3}	9,29	Ft_{max} imposée par la denture N	
Masse du patin (kg)		Ft_{max}	$1,0291 \times 10^4$
m_{patin}	2,22	Tension maximale dans la courroie N	
Premier moment des barres (kgm)		Fc_{max}	2240
ms_1	5,2932	Gravité (ms^2)	
ms_2	5,2712	g	9,81
ms_3	5,7332		
Premier moment de la tablette (kgm)			
ms_t	-1,9429		
Second moment des barres (kgm^2)			
J_1	4,3491		
J_2	4,3307		
J_3	4,8988		
Second moment de la tablette (kgm^2)			
J_t	4,3491		
Coefficient du frottement visqueux (sN/m)			
$b_i, i = \{1, 2, 3\}$	349,73		

A.2 Cahier des charges

Après l'analyse biomécanique des trajectoires du PAD, le cahier des charges du banc a été défini comme suit :

- Hauteur maximale : 1200mm.
- Hauteur minimale : 700mm
- Orientation maximale : 35°.
- Orientation minimale : -10°.
- Durée du mouvement : entre 0,7s et 4s.

A.3 Butées et saturations

TABLE A.2: Banc d'assistance VHIPOD : Butées et saturations

Paramètres	Valeurs
Butées articulaires (m)	
q_1	$[0,077 \sim 0,423]$
q_2	$[1,327 \sim (q_3 - 0,13)]$
q_3	$[(q_2 + 0,13) \sim 2,673]$
Vitesse articulaire maximale (m/s)	
$ \dot{q}_{i_{max}} , i = \{1, 2, 3\}$	1,67
Commande maximale (N)	
$ \Gamma_{i_{max}} , i = \{1, 2, 3\}$	1008

A.4 Trajectoire du PAD

La figure (A.1) montre les trajectoires de la tablette capturées avec le système d'analyse de mouvement.

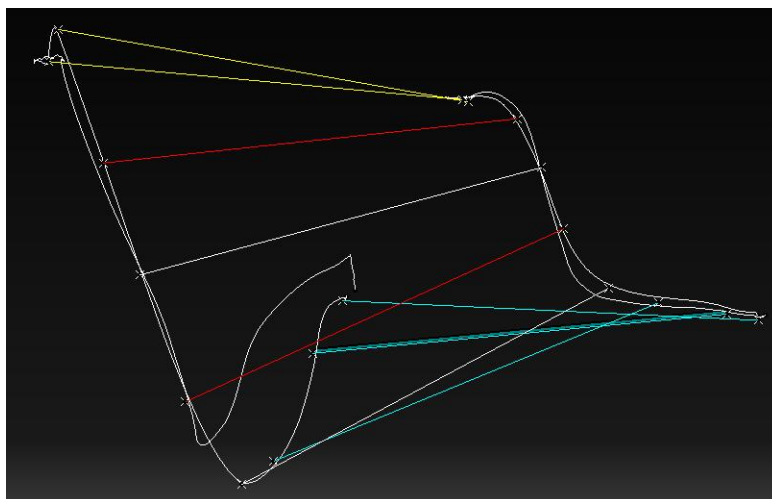


FIGURE A.1: Trajectoires de la tablette dans le plan sagittal

A.5 Instrumentation de la tablette

Pour des raisons d'analyse biomécanique, tous les efforts d'interaction entre le patient et son environnement doivent être mesurés. De ce fait 5 plates-formes de force/couple à 6 axes sont utilisées. L'interaction du patient avec l'environnement externe est mesurée via 2 capteurs placés au niveau de l'assise et des pieds. Concernant l'interaction du patient avec le banc, 3 capteurs sont posés sur la tablette afin de mesurer les efforts au niveau de la poignée, du coude et l'interaction avec le coté parétique (Figure.A.2).

A.6 Architecture de contrôle

De nos jours, les architectures de contrôle industriel sont souvent basées sur des topologies modulables afin de permettre au concepteur de faire évoluer son système. Le

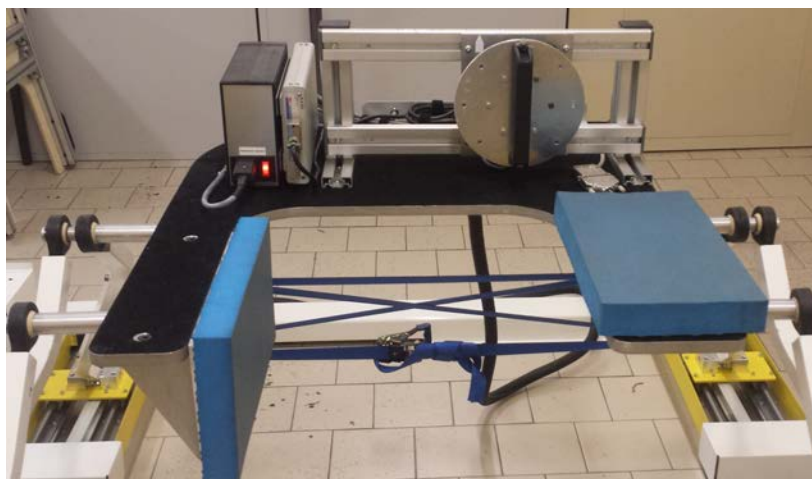


FIGURE A.2: Instrumentation de la tablette

développement des bus de terrains joue un rôle très important pour garantir l'aspect temps réel, la largeur de la bande passante, la sécurité du matériel et la fiabilité du système. Dans le domaine de l'automatique, plusieurs chercheurs ont adopté ce type de technologie pour l'implémentation de leurs lois de commande. Ceci est motivé soit par le besoin de s'adapter aux exigences de l'automatisation industrielle soit par la nécessité de certification des prototypes selon les normes internationales. Plusieurs bus de terrain existent, on peut citer : Profibus DP, DeviceNet, ControlNet and CANopen [Vitturi et al., 2011]. Cependant, leurs performances peuvent être limitées, voir même insatisfaisantes, pour certaines applications là où la synchronisation des variateurs électriques est cruciale. De plus, les vitesses de transmission limitées pour certain bus de terrain ainsi que la faible efficacité de leurs protocoles peuvent rendre la cadence de transmission, des consignes aux variateurs, très longue. L'introduction du réseau Ethernet temps-réel (RTE : Real-Time Ethernet) [Decotignie, 2005] permet de dépasser la plupart des limites ci-dessus. Les réseaux RTE sont des systèmes de communication à haute vitesse basés sur le protocole Ethernet. Ils ont été développés pour des applications industrielles afin de garantir des temps de transmission très courts et déterministes.

Dans le chapitre (I), la structure mécanique du banc d'assistance au PAD a été présentée et tous les choix ont été justifiés. Il en a résulté un banc d'assistance très puissant et encombrant (A.1). En France, le comité de protection des personnes (CPP) applique des réglementations très strictes concernant l'expérimentation des structures motorisées sur des personnes. Afin d'obtenir les autorisations nécessaires, il a fallu justifier que le banc a été conçu en respectant toutes les normes internationales relatives. C'est la raison pour laquelle le choix de l'architecture de contrôle s'est porté sur la technologie industrielle de Beckhoff automation pour la performance et la flexibilité de leur bus de terrain EtherCAT [Sauter, 2007].

A.6.1 Bus de terrain EtherCAT

Le bus de terrain EtherCAT [automation company, 2016] est une technologie Ethernet temps-réel développée par la société Beckhoff et le groupe EtherCAT technologie (EtherCAT Technology Group). EtherCAT dresse de nouvelles normes pour la performance et la flexibilité des topologies temps-réel. La technologie met en œuvre une communication

Maître/Esclave et gère les trames de données Ethernet d'une manière dite à la volée (en anglais : on-the-fly) permettant de dépasser les performances des autres protocoles Ethernet. À chaque nœud, les modules de gestion de mémoire de chaque composant du bus ont un accès direct à la lecture et écriture des données en même temps que la trame est envoyée au nœud suivant. De même, les données d'entrées sont insérées sur le bus, ainsi la réception paquet Ethernet n'est plus attendue et les trames ne sont retardées que de $10ns$ [Xing et al., 2011]. Le bus de terrain EtherCAT supporte presque tous les types de bus avec des nœuds via des coupleurs de bus. Le réseau EtherCAT est capable de connecter 65535 composants comme limite maximale et peut rafraîchir 1000 entrées/sorties numériques en $30\mu s$. Grâce à cette performance remarquable, ce bus de terrain ouvre de nombreuses perspectives pour des applications de commande. Il peut même être utilisé pour la commande du courant/couple au niveau des variateurs [Dang et al., 2015]. La figure (A.3) montre la topologie EtherCAT du banc d'assistance au PAD.

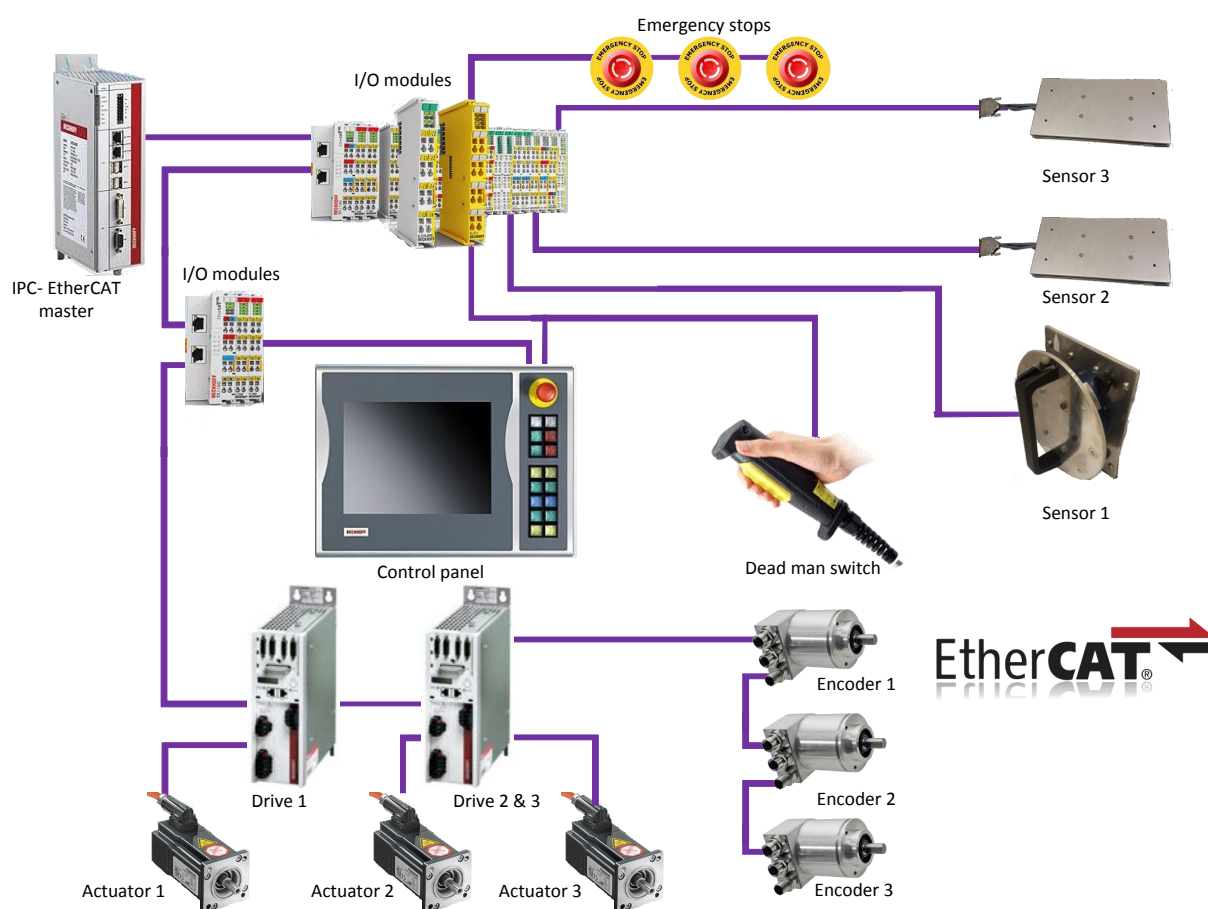


FIGURE A.3: Topologie du banc d'assistance au PAD.

A.6.2 TwinCAT

TwinCAT est un logiciel de commande de processus, il est installé sur le maître EtherCAT du réseau afin de gérer la commande et la performance temps réel du bus de terrain. Le noyau de TwinCAT est cadencé sur une horloge précise permettant aux programmes de PLC (Programmable Logic Controller) de s'exécuter de façon strictement déterministe, indépendamment des autres tâches du processeur. Il est doté d'un module XAE (eXtended Automation Engineering) autorisant le codage des programmes dans tous les langages

définis par la norme [IEC-61131-3, 1993]. TwinCAT offre aussi des solutions de prototypage rapide pour les chercheurs car il permet soit l'interfaçage direct avec Matlab via une communication ADS (Automation Device Specification) soit l'importation de blocs Simulink vers l'environnement TwinCAT. La figure (A.4) montre un aperçu des différents modules de TwinCAT.

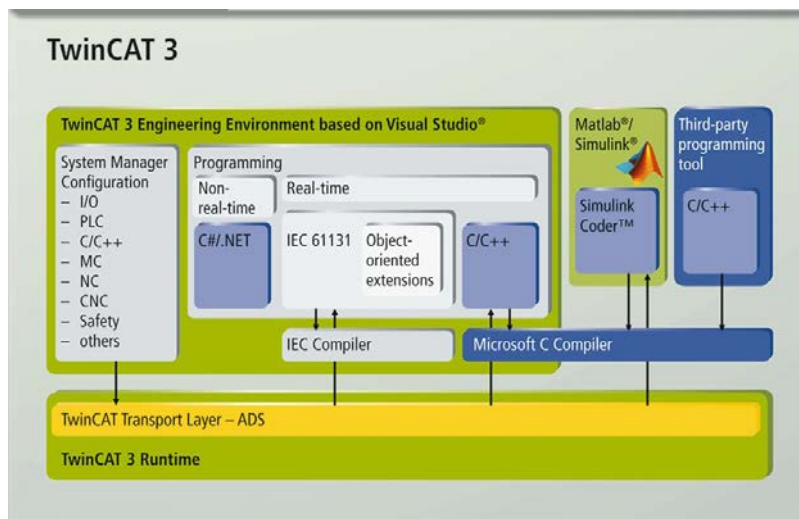


FIGURE A.4: Aperçu sur les différents modules de TwinCAT [automation company, 2016].

A.7 Architecture logicielle

Le programme de fonctionnement du banc a été développé dans l'environnement TwinCAT. Le cahier des charges imposait une manipulation simple du banc par des personnes non expertes (personnel médical). De ce fait, les différents modes de fonctionnement ont été définis par rapport au plan des expérimentations. Une analyse de risques approfondie a permis d'identifier les différentes situations dangereuses qu'elles soient liées aux matériels, à une mauvaise manipulation ou à une faute d'inattention. À partir de cela, l'algorithme du banc a été défini en tenant compte de la norme internationale liée à la sécurisation des machines [ISO-13849-1, 2006] et celle liée aux exigences de sécurité pour les robots de soins personnels [ISO-13482-1, 2014].

Deux machines d'état ont été programmées. La première gère le fonctionnement d'un seul axe et comporte les six états classiques d'un moteur (Figure.A.5). Les différentes transitions sont franchissables en fonction des consignes de l'automate global du robot à condition que tous les indicateurs de sécurité (Safety flags) soient à 0. En cas de dysfonctionnement d'un moteur, un code d'erreur est généré puis transmis à l'automate maître pour qu'il sécurise le banc.

La deuxième machine d'état gère le fonctionnement général du banc (Figure.A.6). Au démarrage du banc, l'automate est réinitialisé sur le bloc "Run Safety Network". Dans cette étape, le programme vérifie tout le matériel. Ensuite il charge un programme particulier dédié à la sécurisation du banc. Une fois le banc sécurisé, la machine d'état se met sur un mode d'arrêt et attend les consignes de l'opérateur. Deux modes de fonctionnement ont été programmés : mode manuel et mode automatique. Pour le mode manuel, à partir d'un panneau de contrôle, l'opérateur peut positionner manuellement la tablette. Ce mode a été défini pour la prise des positions haute (patient debout) et basse (patient assis). Les

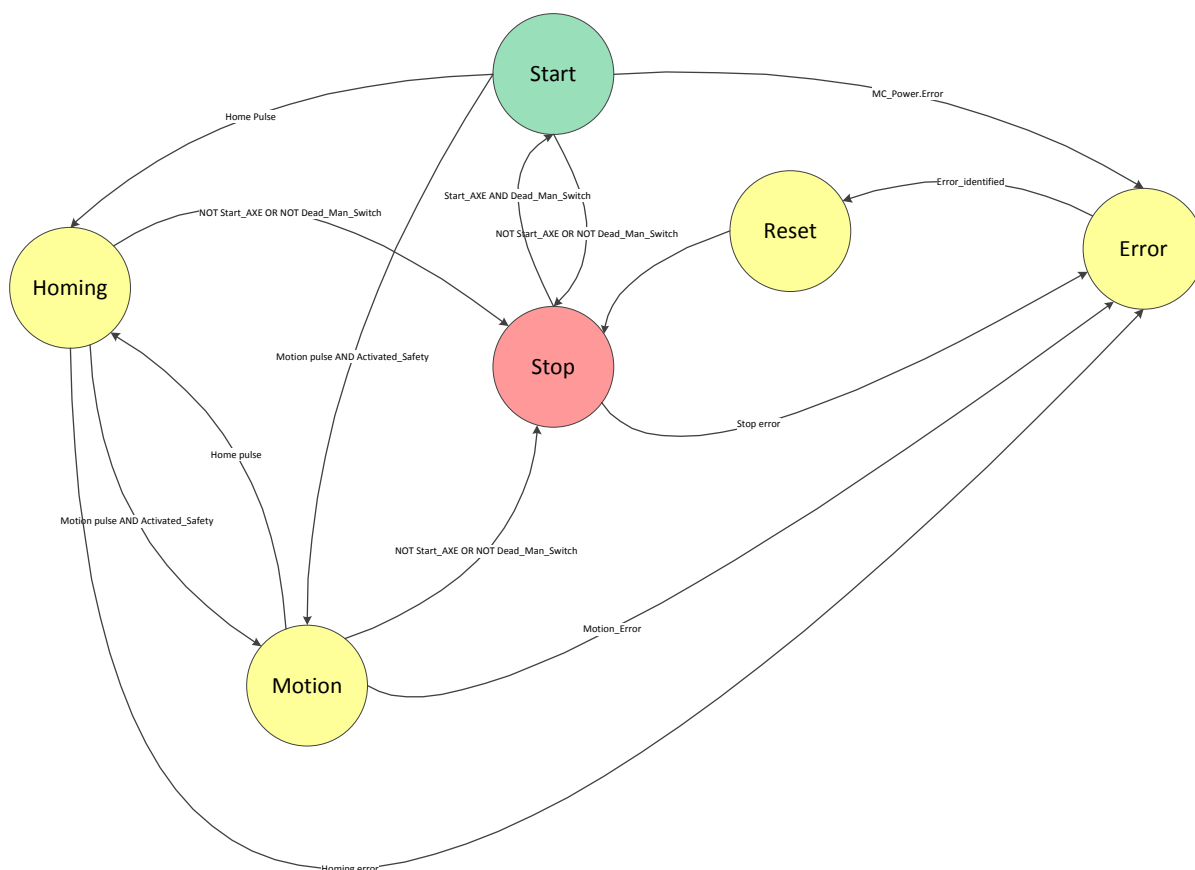


FIGURE A.5: Machine d'état d'un axe

positions relevées permettent d'exécuter un algorithme afin d'adapter la trajectoire du PAD à la taille du patient. Dans le mode automatique, l'opérateur charge la trajectoire du PAD et la consigne la vitesse. Par la suite, le PAD est exécuté à la demande de l'opérateur.

A.8 Exigence de sécurité matériels et logiciels

Le banc d'assistance au PAD dispose de 4 arrêts d'urgences, d'un homme mort et d'une redondance codeur (Figure.A.3). Deux cartes de sécurité spéciales sont rajoutées au niveau des variateurs afin de communiquer avec le programme dédié à cette tâche.

Le programme de sécurité a été développé sur trois niveaux : au premier niveau des butées logicielles dans les algorithmes de contrôles (Programme PLC) ont été imposées via la résolution des modèles géométriques et cinématiques, directe et inverse. Le deuxième niveau de sécurité se situe dans la partie gestion des axes (Tâche NC). Dans cette phase d'autres butées sont fixées et des tolérances sur les performances des moteurs sont réglées tel que l'écart de poursuite. En cas d'erreur, tous les axes seront bloqués. Le troisième niveau de sécurité est sans doute la solution la plus fiable et la plus complète. Le matériel de sécurité est géré dans un environnement particulier intégré à TwinCAT, appelé "TwinSAFE". Des modules de sécurité supplémentaire sont rajoutés sur le réseau. Grâce à un protocole de communication neutre intégré sur la couche EtherCAT, le programme développé dans cet environnement permettra de sécuriser le banc selon les normes [ISO-13849-1, 2006] et [IEC-61508, 2010] indépendamment de ce qui peut se produire sur le réseau ou dans le programme de commande. Le principe repose sur le chargement d'un

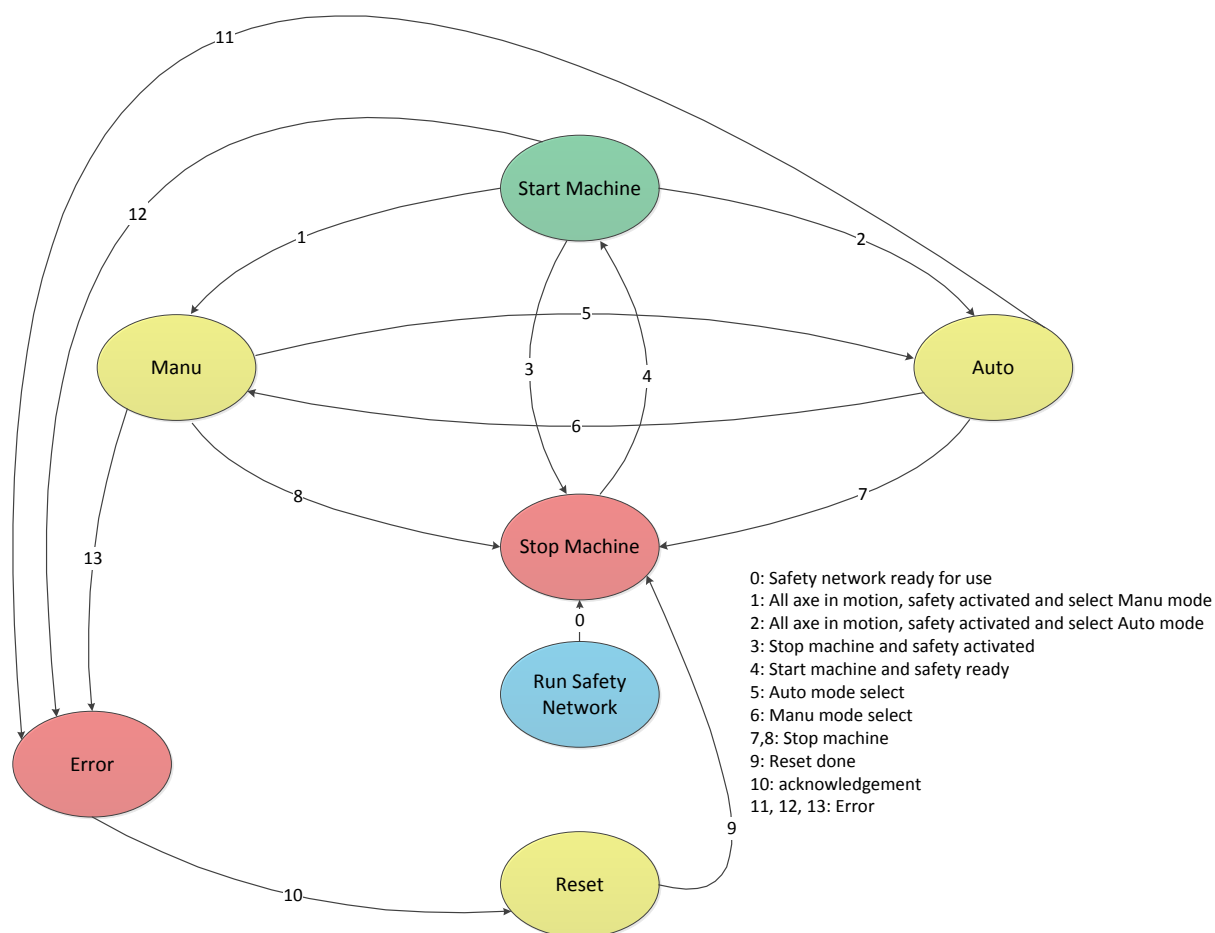


FIGURE A.6: Machine d'état du banc d'assistance au PAD

algorithme définissant toutes les mesures de sécurité nécessaires sur un module de sécurité dont la tâche ressemble à celle d'un automate de supervision.

A.9 Interface homme-machine (IHM)

Afin de faciliter l'utilisation du banc, une interface homme-machine a été développée sur Visual Basic. Cette interface communique avec TwinCAT via le protocole ADS. À partir d'une fenêtre (Figure.A.7), l'opérateur peut observer l'état du banc, la position de la tablette, celle des patins et en cas d'un mauvais fonctionnement, l'IHM remontera des informations concernant l'anomalie.

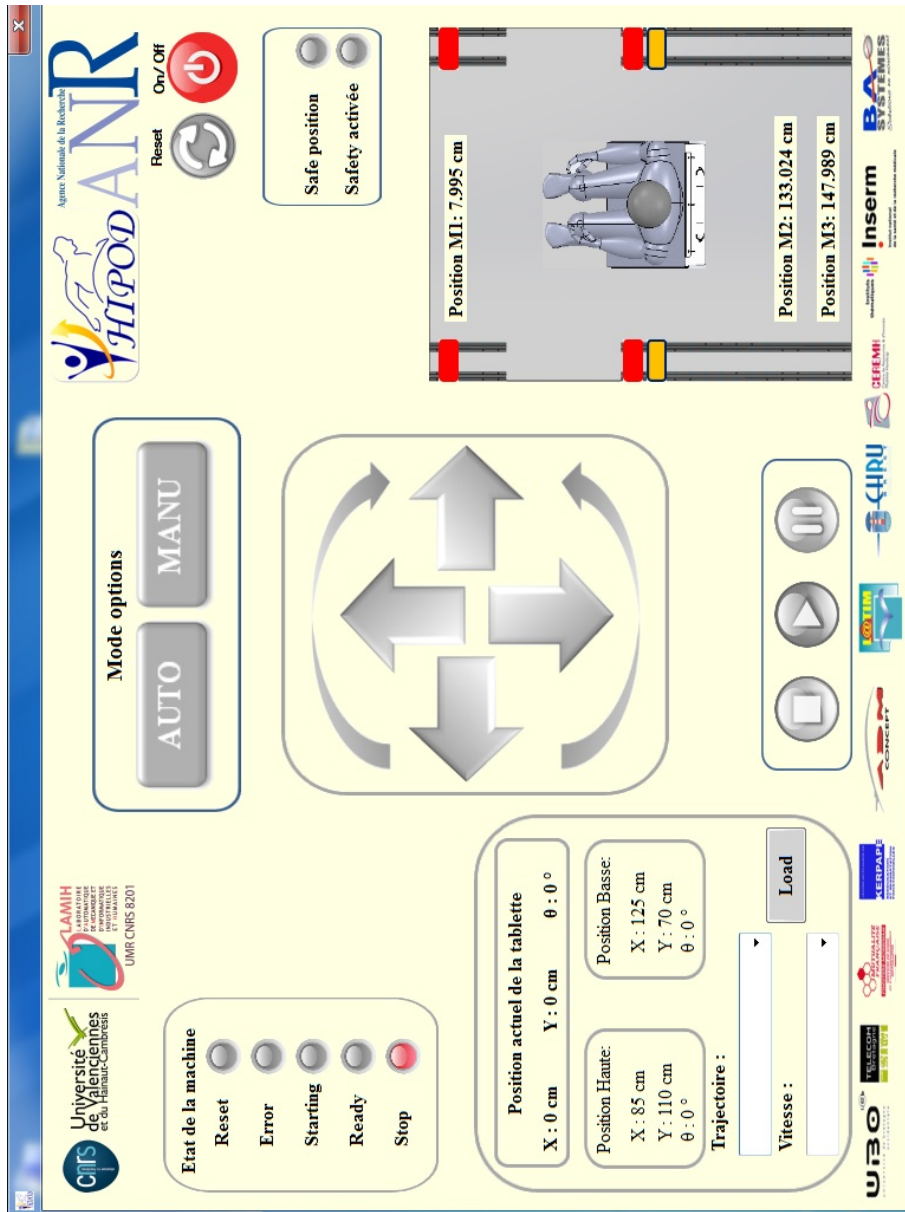


FIGURE A.7: Interface Homme-Machine du Banc.

B Robot auto-équilibré à deux roues

B.1 paramètres mécaniques de simulation

TABLE B.1: paramètres mécaniques d'un robot auto-équilibré

Paramètres	Valeurs
m_w	$30kg$
m_b	$76kg$
I_w	$1,173kg \cdot m^2$
I_b	$6,265 \cdot m^2$
R	$0,274m$
l	$0,4m$
b	$0,8N \cdot m \cdot s/rad$

B.2 Gains de stabilisation du robot auto-équilibré sur une pente

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} F_{11} & | & L_{11} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 574,1856 & 36,0983 & 128,2159 & | & -08,9318 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} F_{12} & | & L_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 806,2088 & 54,0965 & 192,6889 & | & -13,4587 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} F_{21} & | & L_{21} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 573,2427 & 36,3013 & 128,8452 & | & -08,9925 \end{bmatrix} \text{ et} \\
 \begin{bmatrix} F_{22} & | & L_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 808,6312 & 54,4818 & 193,9215 & | & -13,5709 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

B.3 Gains de stabilisation du robot auto-équilibré lors du franchissement d'obstacle

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} F_{11} & | & L_{11} \end{bmatrix} &= 10^4 \begin{bmatrix} -2,0415 & -2,3884 & -0,4739 & -0,6932 & | & 0,0015 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} F_{12} & | & L_{12} \end{bmatrix} &= 10^4 \begin{bmatrix} -4,0190 & -4,7317 & -0,9359 & -1,3704 & | & 0,0030 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} F_{21} & | & L_{21} \end{bmatrix} &= 10^4 \begin{bmatrix} -1,5429 & -1,7970 & -0,3573 & -0,5221 & | & 0,0011 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} F_{22} & | & L_{22} \end{bmatrix} &= 10^4 \begin{bmatrix} -3,2805 & -3,8554 & -0,7632 & -1,1169 & | & 0,0024 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} F_{31} & | & L_{31} \end{bmatrix} &= 10^4 \begin{bmatrix} -2,1643 & -2,5350 & -0,5026 & -0,7355 & | & 0,0016 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} F_{32} & | & L_{32} \end{bmatrix} &= 10^4 \begin{bmatrix} -3,2805 & -3,8554 & -0,7632 & -1,1169 & | & 0,0024 \end{bmatrix}, \\
 \begin{bmatrix} F_{41} & | & L_{41} \end{bmatrix} &= 10^4 \begin{bmatrix} -1,7841 & -2,0838 & -0,4139 & -0,6051 & | & 0,0013 \end{bmatrix} \text{ et} \\
 \begin{bmatrix} F_{42} & | & L_{42} \end{bmatrix} &= 10^4 \begin{bmatrix} -1,7841 & -2,0838 & -0,4139 & -0,6051 & | & 0,0013 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

B.4 Prototype d'un robot auto-équilibré

Analyse statique

Paramètres

Encastrement au niveau des fixations des axes roues

Poids : $8Kg$,

Gravité : $9800mm/s^2$,

Taille de maillage : $2mm$,

Pression sur la plate-forme : $47200Pa$.

Matériaux

Acier : $Re = 250MPa$, $\rho = 7800kg/m^3$, $E = 210000MPa$.

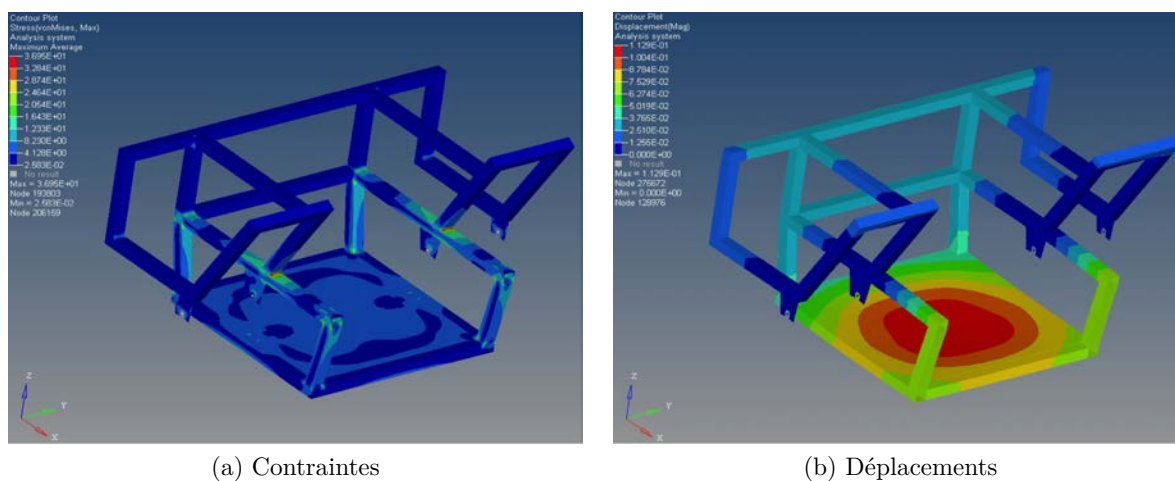


FIGURE B.1: Analyse des contraintes et des déplacements en statique

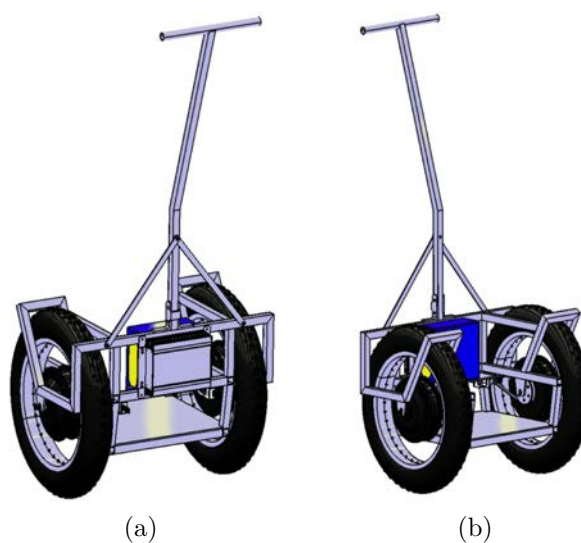


FIGURE B.2: Modèle CAO d'un prototype auto-équilibré

C Commande CTC

L'idée générale de cette approche est l'utilisation de la notion de platitude différentielle du modèle afin d'obtenir une loi de commande qui linéarise et découple les équations du mouvement [Afroun, 2013]. Ainsi, le problème de la commande du robot sera réduit à un problème de stabilisation d'un double intégrateur que l'on peut écrire soit dans l'espace opérationnel, soit éventuellement dans l'espace articulaire :

$$v(t) = \ddot{X} \quad (\text{C.1})$$

où $v(t)$ est une nouvelle entrée de commande. À partir du modèle du robot et de la nouvelle entrée $v(t)$, les forces/couples articulaires sont calculés comme suit :

$$\Gamma = \hat{M}(X)v + \hat{N}(X, \dot{X})\dot{X} + \hat{G}(X)X \quad (\text{C.2})$$

où v est généralement choisie comme un PID avec une accélération d'anticipation :

$$v = \ddot{X}_d + Z(s)\varepsilon_x \quad (\text{C.3})$$

où $Z(s) = K_p + K_d s + K_i/s$ est le contrôleur PID et $\varepsilon_x = X_d(t) - X(t)$.

D Critères de performances quadratiques

Intégrale de l'erreur absolue (IAE) :

$$J_{IAE} = \int_0^T |\varepsilon| dt \quad (\text{D.1})$$

Intégrale du carrée de la commande (ISV) :

$$J_{ISV} = \int_0^T \sum_{i=1}^2 \Gamma_i(t)^2 dt \quad (\text{D.2})$$

E Commande LQ

La commande LQ, est une méthode qui permet de calculer les gains d'une commande par retour d'état en minimisant le critère suivant :

$$J_{LQR} = \int_0^\infty (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)) dt \quad (\text{E.1})$$

où Q et R sont des matrices de pondérations permettant de conditionner les performances au régime transitoire.

F Biglide

F.1 Réduction d'indice et découplage du Biglide

Par utilisation de la deuxième dérivée de la contrainte (V.9) avec le modèle DAE d'indice 3 du Biglide (Équation.IV.36), un modèle ODE redondant est obtenu :

$$\begin{cases} M_{qq}\ddot{q} + M_{qx}\ddot{\chi} + N_{qq}\dot{q} + N_{qx}\dot{\chi} + J_q^T \lambda = \Gamma & \text{(F.1a)} \\ M_{qx}^T \ddot{q} + M_{xx}\ddot{\chi} + N_{xx}\dot{\chi} + G_{xx}\chi - J_x^T \lambda = 0 & \text{(F.1b)} \\ J_q \ddot{q} - J_x \ddot{\chi} + \dot{J}_q \dot{q} - \dot{J}_x \dot{\chi} = 0 & \text{(F.1c)} \end{cases}$$

Comme M_{qq} , M_{xx} , J_q et J_x sont inversibles, les équations suivantes peuvent être écrites :

$$\begin{cases} \ddot{q} = -M_{qq}^{-1} (M_{qx}\ddot{\chi} + N_{qq}\dot{q} + N_{qx}\dot{\chi} + J_q^T \lambda - \Gamma) & \text{(F.2a)} \\ \ddot{\chi} = -M_{xx}^{-1} (M_{qx}^T \ddot{q} + N_{xx}\dot{\chi} + G_{xx}\chi - J_x^T \lambda) & \text{(F.2b)} \\ \ddot{q} = J_q^{-1} (J_x \ddot{\chi} - \dot{J}_q \dot{q} + \dot{J}_x \dot{\chi}) & \text{(F.2c)} \\ \ddot{\chi} = J_x^{-1} (J_q \ddot{q} + \dot{J}_q \dot{q} - \dot{J}_x \dot{\chi}) & \text{(F.2d)} \end{cases}$$

Par remplacement des équations (F.2d) dans (F.1a), (F.2c) dans (F.1b), (F.2a) et (F.2b) dans (F.1c), on aboutit aux deux sous-systèmes DAEs découplés comme suit

$$\text{Modèle des jambes} \begin{cases} M_q \ddot{q} + N_q \dot{q} + J_q^T \lambda = \Gamma & \text{(F.3a)} \\ \mathcal{P} \lambda + \mathcal{L} \dot{q} - \mathcal{Q} q - \mathcal{W} \Gamma = 0 & \text{(F.3b)} \end{cases}$$

$$\text{Modèle de l'effecteur} \begin{cases} M'_x \ddot{\chi} + N'_x \dot{\chi} + G'_x \chi - J_x^T \lambda = 0 & \text{(F.4a)} \\ \mathcal{P} \lambda + \mathcal{L}' \dot{\chi} - \mathcal{Q}' \chi - \mathcal{W} \Gamma = 0 & \text{(F.4b)} \end{cases}$$

avec $M_q = M'_{qq} + M_{qx} J_x^{-1} J_q$, $M'_x = M_{xx} + M_{qx}^T J_q^{-1} J_x$, $N_q = N'_{qq} + N_{qx} J_x^{-1} J_q + M_{qx} J_x^{-1} \dot{J}_q - M_{qx} J_x^{-1} \dot{J}_x J_x^{-1} J_q$, $N'_x = N_{xx} + M_{qx}^T J_q^{-1} \dot{J}_x - M_{qx}^T J_q^{-1} \dot{J}_q J_q^{-1} J_x$, $G'_x = G_{xx}$, $\mathcal{P} = J_q M_q^{-1} J_q^T + J_x M_x'^{-1} J_x^T$, $\mathcal{L} = J_q M_q^{-1} N_q - \dot{J}_q + \dot{J}_x J_x^{-1} J_q - J_x M_x'^{-1} N'_x J_x^{-1} J_q$, $\mathcal{L}' = \mathcal{L} J_q^{-1} J_x$, $\mathcal{Q}' = J_x M_x'^{-1} G'_x$, $\mathcal{Q} q = \mathcal{Q}' g_D(q)$ et $\mathcal{W} = J_q M_q^{-1}$.

F.2 Modèle ODE du Biglide

Afin d'obtenir le modèle ODE du Biglide dans l'espace opérationnel, les vitesses virtuelles actives sont éliminées à partir de la puissance virtuelle (Équation.IV.20) par utilisation de la contrainte cinématique $\dot{q}^{*T} = \dot{\chi}^{*T} J_x^T J_q^{-T}$. Finalement la puissance virtuelle est écrite avec un champs de vitesse indépendant $\dot{\chi}^*$ comme suit :

$$P_r^* = \dot{\chi}^{*T} (J_x^T J_q^{-T} (H_q - \Gamma) + F_p + K_x^T H_\theta) = 0 \quad \forall \dot{\chi}^* \in \mathbb{R}^2 \quad \text{(F.5)}$$

Par conséquent, le modèle ODE est obtenu à partir de l'équation (F.5) comme suit :

$$\Gamma = H_q + J_q^T J_x^{-T} (F_p + K_x^T H_\theta) \quad \text{(F.6)}$$

Ensuite pour éliminer $\ddot{\theta}$ and \ddot{q} , les premières dérivées des équations (IV.6) et (IV.33) sont utilisées. Le modèle ODE du Biglide dans l'espace opérationnel est donné sous la forme suivante :

$$\Gamma = M(\chi)\ddot{\chi} + N(\chi, \dot{\chi})\dot{\chi} + G(\chi)\chi \quad (\text{F.7})$$

$$\text{avec } M(\chi) = \begin{bmatrix} m_1 + \frac{1}{2}(m - \eta_1 + \eta_2) & f_1(\chi) \\ m_2 + \frac{1}{2}(m - \eta_2 + \eta_1) & f_2(\chi) \end{bmatrix}, \quad N(\chi, \dot{\chi}) = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix},$$

$$G(\chi) = \begin{bmatrix} 0 & gC(y)(m + \eta_1 + \eta_2)/2y^2 \\ 0 & -gC(y)(m + \eta_1 + \eta_2)/2y^2 \end{bmatrix},$$

$$f_1(\chi) = [(2m_1 - 3\eta_1 - \eta_2)y^2 + mC(y)^2 + J_1 + J_2] / 2yC(y),$$

$$f_2(\chi) = -[(2m_2 - 3\eta_2 - \eta_1)y^2 + mC(y)^2 + J_1 + J_2] / 2yC(y),$$

$$\eta_{1,2} = ms_{1,2}/a, \quad n_{11} = b_1, \quad n_{21} = b_2,$$

$$n_{12} = b_1y/C(y) - [(2m_1 - 3\eta_1 - \eta_2)y^2 + (2m_1 - 3\eta_1 - \eta_2)C(y)^2 + J_1 + J_2] \dot{y} / (2C(y))^3 \text{ et}$$

$$n_{22} = -b_2y/C(y) + [(2m_2 - 3\eta_2 - \eta_1)y^2 + (2m_2 - 3\eta_2 - \eta_1)C(y)^2 + J_1 + J_2] \dot{y} / (2C(y))^3.$$

Dans un cas plus général, il n'est pas évident d'obtenir le modèle ODE d'un robot parallèle dans l'espace opérationnel. Pour obtenir le modèle dans l'espace articulaire, la même procédure est suivie en éliminant les vitesses opérationnelles virtuelles.

F.3 Modèle dynamique de simulation

Le modèle de simulation est un modèle avec des incertitudes structurelles et non structurelles. Il complète le modèle nominal avec les dynamiques non modélisées comme l'élasticité et le frottement sec au niveau des articulations prismatiques.

La dynamique des actionneurs est écrite sous la forme suivante :

$$\Gamma = M_a \ddot{q}_a + b \dot{q}_a + \Gamma_t + \Gamma_f \quad (\text{F.8})$$

avec $q_a = [q_{a1} \quad q_{a2}]^T$, $M_a = \text{diag}(m_{a1}, m_{a2})Z$, $\Gamma_f = [\Gamma_{f1} \quad \Gamma_{f2}]Z$, le modèle des articulations élastiques :

$$\Gamma_t = k_t(q_a - q) + b_t(\dot{q}_a - \dot{q}) \quad (\text{F.9})$$

et le modèle de frottement sec de Stribeck :

$$\Gamma_{fi} = \begin{cases} [\Gamma_{fc} + (\Gamma_{fs} - \Gamma_{fc})e^{-(\dot{q}_{ai}/v_s)^2}] \text{sign}(\dot{q}_{ai}) & \text{if } |\dot{q}_{ai}| > 0 \text{ (slip)} \\ \min(|\Gamma_i - \Gamma_{ti}|, \Gamma_{fs}) \text{sign}(\Gamma_i - \Gamma_{ti}) & \text{if } \dot{q}_{ai} = 0 \text{ (stick)} \end{cases} \quad (\text{F.10})$$

avec m_a la masse de l'actionneur, k_t la raideur au niveau des articulations, b_t l'amortissement au niveau des articulations, Γ_{fs} la force de frottement statique, Γ_{fc} la force de Coulomb et v_s le coefficient de la vitesse de glissement.

La dynamique de l'effecteur avec le modèle élastique des jambes est :

$$\Gamma_t = \hat{M}(\chi)\ddot{\chi} + \hat{N}(\chi, \dot{\chi}) + \hat{G}(\chi)\chi \quad (\text{F.11})$$

avec

$$\hat{M}(\chi) = \begin{bmatrix} m_{L1} + \frac{1}{2}(m - \eta_1 + \eta_2) & [(2m_{L1} - 3\eta_1 - \eta_2)y^2 + mC(y)^2 + J_1 + J_2] / 2yC(y) \\ m_{L2} + \frac{1}{2}(m - \eta_2 + \eta_1) & [(2m_{L2} - 3\eta_2 - \eta_1)y^2 + mC(y)^2 + J_1 + J_2] / 2yC(y) \end{bmatrix},$$

$$\hat{N}(\chi, \dot{\chi}) = \begin{bmatrix} 0 & -[(2m_{L1} - 3\eta_1 - \eta_2)y^2 + (2m_{L1} - 3\eta_1 - \eta_2)C(y)^2 + J_1 + J_2] \dot{y} / (2C(y)^3) \\ 0 & [(2m_{L2} - 3\eta_2 - \eta_1)y^2 + (2m_{L2} - 3\eta_2 - \eta_1)C(y)^2 + J_1 + J_2] \dot{y} / (2C(y)^3) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\hat{G}(\chi) = \begin{bmatrix} 0 & gC(y)(m + \Delta m + \eta_1 + \eta_2) / 2y^2 \\ 0 & -gC(y)(m + \Delta m + \eta_1 + \eta_2) / 2y^2 \end{bmatrix}.$$

où les masses des jambes m_{Li} , $i = 1, 2$ satisfont la relation suivante : $m_i = m_{ai} + m_{Li}$.

F.4 Matrices des sous-modèles TS

$$A_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M_q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_1/2 & \lambda_1/2 & b_1 & 0 \\ \lambda_2/2 & -\lambda_2/2 & 0 & b_2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M_q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\lambda_1/2 & \lambda_1/2 & b_1 & 0 \\ \bar{\lambda}_2/2 & -\bar{\lambda}_2/2 & 0 & b_2 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M_q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\bar{\lambda}_1/2 & \bar{\lambda}_1/2 & b_1 & 0 \\ \lambda_2/2 & -\lambda_2/2 & 0 & b_2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M_q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\bar{\lambda}_1/2 & \bar{\lambda}_1/2 & b_1 & 0 \\ \bar{\lambda}_2/2 & -\bar{\lambda}_2/2 & 0 & b_2 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ M_q^{-1} \end{bmatrix}.$$

F.5 Gains des lois de commande

F.5.1 Commande PDC étendue

$$Q = \begin{bmatrix} 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 10^{-9} & 0 \\ 0 & 10^{-9} \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 4,0809 \cdot 10^6 & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ -1,6956 \cdot 10^5 & 4,1312 \cdot 10^6 & (*) & (*) & (*) & (*) \\ 3121,4 & -80,1634 & 3,3881 & (*) & (*) & (*) \\ -72,9742 & 3144,4 & -0,0182 & 3,3944 & (*) & (*) \\ -1,2905 \cdot 10^5 & 5361,9 & -98,7045 & 2,3076 & 4081,7 & (*) \\ 5361,9 & -1.3064 \cdot 10^5 & 2,5350 & -99,4327 & -169,5566 & 4132,1 \end{bmatrix},$$

$$F_1^* = \begin{bmatrix} 3,1631 \cdot 10^6 & -7405,9 & 2412,5 & 35,7553 & | & -10^5 & 209,2761 \\ 5833,3 & 3,1631 \cdot 10^6 & 32,8824 & 2413,7 & | & -209,2761 & -10^5 \end{bmatrix},$$

$$F_2^* = \begin{bmatrix} 3,1631 \cdot 10^6 & -7390,4 & 2412,5 & 36,0093 & | & -10^5 & 208,7876 \\ 7405,4 & 3,1615 \cdot 10^6 & 33,1183 & 2413,2 & | & -208,7876 & -10^5 \end{bmatrix},$$

$$F_3^* = \begin{bmatrix} 3,1616 \cdot 10^6 & -5846,5 & 2411,9 & 35,9883 & | & -10^5 & 209,9417 \\ 5854,4 & 3,1631 \cdot 10^6 & 33,1401 & 2413,7 & | & -209,9417 & -10^5 \end{bmatrix} \text{et}$$

$$F_4^* = \begin{bmatrix} 3,1616 \cdot 10^6 & -5831 & 2412 & 36,2423 & | & -10^5 & 209,4532 \\ 7426,4 & 3,1615 \cdot 10^6 & 33,3760 & 2413,2 & | & -209,4532 & -10^5 \end{bmatrix},$$

F.5.2 Commande CTC

$$K_p = 10^4 \begin{bmatrix} 1,1844 & 1,1844 \end{bmatrix},$$

$$K_d = 10^3 \begin{bmatrix} 0,1885 & 0,1885 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$K_i = 10^5 \begin{bmatrix} 2,4805 & 2,4805 \end{bmatrix}.$$

F.6 Paramètres de simulation

TABLE F.1: Biglide : Paramètres de simulation

Paramètres nominaux	Valeurs	Paramètres supplémentaires	Valeurs
Longueur de jambe (m)		Masse (kg)	
a	0,07	Δm	$[0 \sim 1,632]$
Masse (kg)		m_a	0,7
m	0,034	m_{L1}	0,104
m1	0,8040	m_{L2}	0,094
m2	0,7940	Constante de raideur (N/m)	
Premier moment (kgm)		k_t	3.88×10^3
ms_1	0,0045	Constante d'amortissement (Ns/m)	
ms_2	0,0043	b_t	17.48
Second moment (kgm^2)		Force de frottement sec (N)	
J_1	222.643×10^{-4}	Γ_{fs}	1,5
J_2	2.539×10^{-4}	Γ_{fc}	1
Gravité (ms^2)		Coefficient de vitesse de glissement (m/s)	
g	9.81	v_s	0,1

G Triglide

G.1 Réduction d'indice et découplage du Triglide

Par utilisation de la deuxième dérivée de la contrainte (V.9) avec le modèle DAE d'indice 3 du Triglide (Équation.IV.49), un modèle ODE redondant est obtenu :

$$\begin{cases} M_{qq}\ddot{q} + M_{qx}\ddot{\chi} + N_{qq}\dot{q} - J_q^T\lambda = \Gamma & \text{(G.1a)} \\ M_{\chi\chi}\ddot{\chi} + M_{qx}^T\ddot{q} + G_{\chi\chi}\chi + J_\chi^T\lambda = 0 & \text{(G.1b)} \\ J_q\ddot{q} - J_\chi\ddot{\chi} + \dot{J}_q\dot{q} - \dot{J}_\chi\dot{\chi} = 0 & \text{(G.1c)} \end{cases}$$

L'utilisation du système de coordonnées naturelles conduit à des matrices de masse $M_{qq}, M_{\chi\chi}$ à coefficients constants et des jacobiennes J_q, J_χ non inversibles. De ce fait, les équations suivantes peuvent être déduites :

$$\begin{cases} \ddot{q} = -M_{qq}^{-1} (M_{qx}\ddot{\chi} + N_{qq}\dot{q} + J_q^T\lambda - \Gamma) & \text{(G.2a)} \\ \ddot{\chi} = -M_{\chi\chi}^{-1} (M_{qx}^T\ddot{q} + G_{\chi\chi}\chi - J_\chi^T\lambda) & \text{(G.2b)} \\ \dot{q} = \phi_\chi\dot{\chi} & \text{(G.2c)} \\ \dot{\chi} = \phi_q\dot{q} & \text{(G.2d)} \end{cases}$$

où ϕ_χ et ϕ_q sont des jacobiennes déduites par dérivation temporelle de la contrainte géométrique à partir de sa forme implicite (Équation.IV.43) telle que :

$$\phi_\chi = \begin{bmatrix} 1 & y_4/(x_4 - q_1) & 0 & 0 \\ 1 & y_4/(q_2 - x_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & y_5/(x_5 - q_3) \end{bmatrix} \quad \text{(G.3)}$$

$$\phi_q = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ (x_4 - q_1)/2y_4 & (q_2 - x_4)/2y_4 & 0 \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ (q_3 - x_5)d_1/y_5 & (q_3 - x_5)d_2/y_5 & (x_5 - q_3)(1 - d_3)/y_5 \end{bmatrix} \quad \text{(G.4)}$$

avec

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{(x_5 - x_4)/2 + (y_5 - y_4)(x_4 - q_1)/2y_4}{(x_5 - x_4) - (y_5 - y_4)(x_5 - q_3)/y_4}, \\ d_2 &= \frac{(x_5 - x_4)/2 + (y_5 - y_4)(q_2 - x_4)/2y_4}{(x_5 - x_4) - (y_5 - y_4)(x_5 - q_3)/y_4} \text{ et} \\ d_3 &= \frac{(y_5 - y_4)(q_3 - x_5)/y_5}{(x_5 - x_4) - (y_5 - y_4)(x_5 - q_3)/y_4}. \end{aligned}$$

Par remplacement des équations (G.2b) dans (G.1a) et (G.2a) dans (G.1b), on aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} M_q\ddot{q} + N_q\dot{q} + \Lambda_q^T\lambda = \Gamma & \text{(G.5a)} \\ M'_\chi\ddot{\chi} + N'_\chi\dot{\chi} + G'_\chi\chi - \Lambda_\chi^T\lambda = B_\chi\Gamma & \text{(G.5b)} \\ J_q\ddot{q} - J_\chi\ddot{\chi} + \dot{J}_q\dot{q} - \dot{J}_\chi\dot{\chi} = 0 & \text{(G.5c)} \end{cases}$$

avec $M_q = M_{qq} - M_{qx}M_{\chi\chi}^{-1}M_{qx}^T$, $M_\chi = M_{\chi\chi} - M_{qx}^T M_{qq}^{-1} M_{qx}$, $N_q = N_{qq}$, $N_\chi = -M_{qx}^T M_{qq}^{-1} N_{qq} \phi_\chi$, $G_\chi = G_{\chi\chi}$, $\Lambda_q^T = J_q^T - M_{qx} M_{\chi\chi}^{-1} J_\chi^T$, $\Lambda_\chi^T = J_\chi^T - M_{qx}^T M_{qq}^{-1} J_q^T$ et $B_\chi = -M_{qx}^T M_{qq}^{-1}$.

Par remplacement des équations (G.5a) et (G.5b) dans (G.5c), on aboutit au deux sous-systèmes DAEs découplés comme suit

$$\text{Modèle des jambes} \begin{cases} M_q \ddot{q} + N_q \dot{q} + \Lambda_q^T \lambda = \Gamma & \text{(G.6a)} \\ \mathcal{P} \lambda + \mathcal{L} \dot{q} - \mathcal{Q} q - \mathcal{W} \Gamma = 0 & \text{(G.6b)} \end{cases}$$

$$\text{Modèle de l'effecteur} \begin{cases} M'_\chi \ddot{\chi} + N'_\chi \dot{\chi} + G'_\chi \chi - \Lambda_\chi^T \lambda = B_\chi \Gamma & \text{(G.7a)} \\ \mathcal{P} \lambda + \mathcal{L}' \dot{\chi} - \mathcal{Q}' \chi - \mathcal{W} \Gamma = 0 & \text{(G.7b)} \end{cases}$$

avec $\mathcal{P} = J_q M_{qq}^{-1} \Lambda_q^T - J_\chi M_{\chi\chi}^{-1} \Lambda_\chi^T$, $\mathcal{L} = \dot{J}_\chi \phi_q - \dot{J}_q$, $\mathcal{L}' = \dot{J}_\chi - \dot{J}_q \phi_\chi$, $\mathcal{Q}' = J_\chi M_{\chi\chi}^{-1} G_\chi \chi$,
 $\mathcal{Q} q = \mathcal{Q}' g_D(q)$ et $\mathcal{W} = J_q M_{qq}^{-1} - J_\chi M_{\chi\chi}^{-1} B_\chi$,

G.3 Gains de la loi PDC étendue

F_1^*	$\left[\begin{array}{c} +4,4922 \cdot 10^6 \\ +2,0067 \cdot 10^4 \\ +180,6304 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -2,0246 \cdot 10^4 \\ +4,4522 \cdot 10^6 \\ +3,6052 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -180,7803 \\ -3,7652 \\ +4,4522 \cdot 10^6 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} +8243 \\ -66,2752 \\ -75,5751 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -66,8469 \\ +8211 \\ -75,0720 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -76,2356 \\ -75,0862 \\ +8150 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -4472 \\ -4472 \\ -0,1807 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} +0,1560 \\ +0,1560 \\ -0,0037 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} +0,1807 \\ +0,1807 \\ -4472 \end{array} \right.$
F_2^*	$\left[\begin{array}{c} +4,4922 \cdot 10^6 \\ +2,0067 \cdot 10^4 \\ -4,9098 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -2,0246 \cdot 10^4 \\ +4,4522 \cdot 10^6 \\ -181,3618 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} +4,7548 \\ +181,2097 \\ +4,4922 \cdot 10^6 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} +8243 \\ -66,2772 \\ -76,1339 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -66,8490 \\ +8211 \\ -75,6290 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -76,1170 \\ -74,9682 \\ +8175 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -4472 \\ -0,1560 \\ +0,0048 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} +0,1560 \\ -4472 \\ +0,1813 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -0,0048 \\ -4472 \\ -4472 \end{array} \right.$
F_3^*	$\left[\begin{array}{c} +4,4922 \cdot 10^6 \\ -2,0098 \cdot 10^4 \\ +92,7213 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -2,0081 \cdot 10^4 \\ +4,4922 \cdot 10^6 \\ +91,8429 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -92,8736 \\ -91,9943 \\ +4,4522 \cdot 10^6 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} +8244 \\ -79,6945 \\ -75,4593 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -79,6635 \\ +8237 \\ -75,1885 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -75,7987 \\ -75,5243 \\ +8150 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -4472 \\ +0,0084 \\ -0,0928 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -0,0084 \\ -4472 \\ -0,0919 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} +0,0928 \\ +0,0919 \\ -4472 \end{array} \right.$
F_4^*	$\left[\begin{array}{c} +4,4922 \cdot 10^6 \\ -2,0098 \cdot 10^4 \\ -92,8244 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -2,0081 \cdot 10^4 \\ +4,4922 \cdot 10^6 \\ -93,1193 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} +92,6738 \\ +92,9689 \\ +4,4922 \cdot 10^6 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} +8244 \\ -79,6965 \\ -76,0182 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -79,6655 \\ +8237 \\ -75,7453 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -75,6802 \\ -75,4061 \\ +8175 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -4472 \\ +0,0084 \\ +0,0927 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -0,0084 \\ -4472 \\ +0,0930 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -0,0927 \\ -0,0930 \\ -4472 \end{array} \right.$
F_5^*	$\left[\begin{array}{c} +4,4922 \cdot 10^6 \\ +2,0067 \cdot 10^4 \\ +180,6304 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -2,0246 \cdot 10^4 \\ +4,4522 \cdot 10^6 \\ +3,6052 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -180,7803 \\ -3,7652 \\ +4,4522 \cdot 10^6 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} +8243 \\ -66,2752 \\ -75,5751 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -66,8469 \\ +8211 \\ -75,0720 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -76,2356 \\ -75,0862 \\ 8150 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -4472 \\ -0,1560 \\ -0,1807 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} +0,1560 \\ -4472 \\ -0,0037 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} +0,1807 \\ +0,0037 \\ -4472 \end{array} \right.$
F_6^*	$\left[\begin{array}{c} +4,4922 \cdot 10^6 \\ +2,0067 \cdot 10^6 \\ -4,9098 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -2,0246 \cdot 10^4 \\ +4,4522 \cdot 10^6 \\ -181,3618 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} +4,7548 \\ +181,2097 \\ +4,4922 \cdot 10^6 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} +8243 \\ -66,2772 \\ -76,1339 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -66,8490 \\ +8211 \\ -75,6290 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -76,1170 \\ -74,9682 \\ +8175 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -4472 \\ -0,1560 \\ +0,0048 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} +0,1560 \\ -4472 \\ +0,1813 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -0,0048 \\ -4472 \\ -4472 \end{array} \right.$
F_7^*	$\left[\begin{array}{c} +4,4922 \cdot 10^6 \\ -2,0098 \cdot 10^4 \\ +92,7213 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -2,0081 \cdot 10^4 \\ +4,4922 \cdot 10^6 \\ +91,8429 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -92,8736 \\ -91,9943 \\ +4,4522 \cdot 10^6 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} +8244 \\ -79,6945 \\ -75,4593 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -79,6635 \\ +8237 \\ -75,1885 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -75,7987 \\ -75,5243 \\ +8150 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -4472 \\ +0,0084 \\ -0,0928 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -0,0084 \\ -4472 \\ -0,0919 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} +0,0928 \\ +0,0919 \\ -4472 \end{array} \right.$
F_8^*	$\left[\begin{array}{c} +4,4922 \cdot 10^6 \\ -2,0098 \cdot 10^4 \\ -92,8244 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -2,0081 \cdot 10^4 \\ +4,4922 \cdot 10^6 \\ -93,1193 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} +92,6738 \\ +92,9689 \\ +4,4922 \cdot 10^6 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} +8244 \\ -79,6965 \\ -76,0182 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -79,6655 \\ +8237 \\ -75,7453 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -75,6802 \\ -75,4061 \\ +8175 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -4472 \\ +0,0084 \\ +0,0927 \end{array} \right.$	$\left. \begin{array}{c} -0,0084 \\ -4472 \\ +0,0930 \end{array} \right]$	$\left[\begin{array}{c} -0,0927 \\ -0,0930 \\ -4472 \end{array} \right.$

et

$$Q = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad R = 10^{-7} \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2022,7 & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ -1570,5 & 4005,3 & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ 47,9988 & 31,0815 & 4363,7 & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ 3,7472 & -2,9674 & -0,0185 & 0,0094 & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) \\ -2,8977 & 7,3733 & -0,0340 & -0,0074 & 0,0184 & (*) & (*) & (*) & (*) \\ 0,1130 & 0,0319 & 7,9456 & -4,1094 \cdot 10^{-6} & -1,7672 \cdot 10^{-4} & (*) & (*) & (*) & (*) \\ -2,0231 & 1,5708 & -0,0480 & -0,0037 & 0,0029 & (*) & (*) & (*) & (*) \\ 1,5708 & -4,0057 & -0,0311 & 0,0030 & -0,0074 & -1,1297 \cdot 10^{-4} & 0,4701 & (*) & (*) \\ -0,0480 & -0,0311 & -4,3635 & 1,8524 \cdot 10^{-5} & 3,4033 \cdot 10^{-5} & -3,1885 \cdot 10^{-5} & -0,4696 & 0,4720 & (*) \\ & & & & & -0,0079 & 4,9397 \cdot 10^{-5} & 2,9661 \cdot 10^{-4} & 0,5048 \end{bmatrix}$$

H Modèle "barre" d'un solide plan écrit à partir des coordonnées naturelles sous forme DAE

H.1 Description du modèle "barre" de solide plan

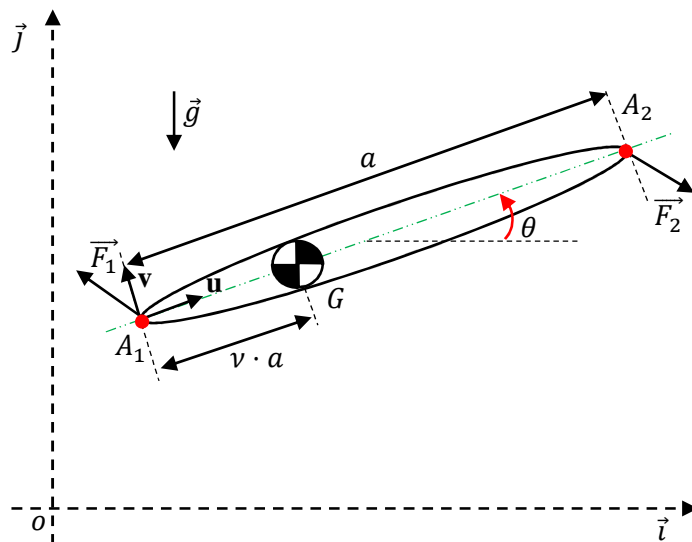


FIGURE H.1: Modèle "barre" d'un solide en mouvement dans le plan

Le mouvement dans un plan d'un solide, supposé indéformable, peut être décrit par trois coordonnées absolues $x(t), y(t)$ et $\theta(t)$, par exemple les coordonnées cartésiennes (x, y) de son centre de masse G et l'orientation θ par rapport à l'horizontal d'un axe (A_1A_2) de ce solide, A_1 et A_2 étant deux points distincts du solide. Les points A_1 et A_2 du solide sont utilisés pour décrire les actions mécaniques extérieures et les contraintes cinématiques appliquées au solide. On note (x_i, y_i) les coordonnées des points $A_i, i = 1, 2$.

Hypothèse : les points A_1, A_2 et G sont alignés.

Cette hypothèse permet de définir une "barre" articulée en A_1 et A_2 .

Le mouvement du solide est décrit dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) et la base vectorielle orthonormée (\vec{u}, \vec{v}) attachée au solide est orientée d'un angle θ par rapport à (\vec{i}, \vec{j}) . On note donc :

$$\overrightarrow{A_1A_2} = a \vec{u} \quad , \quad a \in \mathbb{R}, a > 0 \quad (\text{H.1})$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ S \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -S \\ C \end{pmatrix} \quad (\text{H.2})$$

Les caractéristiques inertielles du solide sont :

- sa masse m
- son centre de masse G tel que $\overrightarrow{A_1G} = \nu a \vec{u}, \nu \in \mathbb{R}$
- son moment d'inertie en G dans le plan du mouvement I_G

Le solide est soumis aux actions mécaniques extérieures suivantes :

- des forces ponctuelles \vec{f}_1 et \vec{f}_2 appliquées aux points A_1 et A_2 respectivement, telles que :

$$\vec{f}_i = f_{ix} \vec{i} + f_{iy} \vec{j} \quad , \quad i = 1, 2 \quad (\text{H.3})$$

- des forces de frottement visqueux appliquées selon les axes x et y , de constantes b_{ix}, b_{iy} respectivement aux points A_i , $i = 1, 2$ telles que :

$$\vec{f}_{vi} = -b_{ix} \dot{x}_i \vec{i} - b_{iy} \dot{y}_i \vec{j} \quad , \quad i = 1, 2 \quad (\text{H.4})$$

- la force de pesanteur appliquée en G :

$$m \vec{g} = -mg \vec{j} \quad (\text{H.5})$$

H.2 Forme ODE de référence

Sans contrainte cinématique appliquée en A_1 et A_2 (ou tout autre point), les coordonnées absolues (x, y, θ) constituent un jeu de variables indépendantes permettant d'écrire le modèle dynamique sous forme de 3 équations différentielles ordinaires.

En robotique, il est pratique d'utiliser le formalisme de Newton-Euler appliqué en un point situé sur l'axe d'une liaison cinématique plutôt qu'au centre de masse [Khalil and Dombre, 2004]. Appliquée au point A_1 , on obtient les ODE suivantes :

$$M_a(\theta) \ddot{X}_a + B_a(\theta) \dot{X}_a + N_a(\theta, \dot{\theta}) = F_a(\theta) \quad (\text{H.6})$$

avec

$$\dot{X}_a = [\dot{x}_1 \quad \dot{y}_1 \quad \dot{\theta}_1]^T$$

$$M_a(\theta) = \begin{bmatrix} m & 0 & -\nu am \sin(\theta) \\ 0 & m & \nu am \cos(\theta) \\ (*) & (*) & I_G + \nu^2 a^2 m \end{bmatrix}$$

$$B_a(\theta) = \begin{bmatrix} b_{1x} + b_{2x} & 0 & -ab_{2x} \sin(\theta) \\ 0 & b_{1y} + b_{2y} & ab_{2y} \cos(\theta) \\ (*) & (*) & a^2(b_{2x} \sin^2(\theta) + b_{2y} \cos^2(\theta)) \end{bmatrix}$$

$$N_a(\theta, \dot{\theta}) = -\nu am \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\theta}^2 + mg \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \nu a \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$F_a(\theta) = \begin{pmatrix} f_{1x} + f_{2x} \\ f_{1y} + f_{2y} \\ -a \sin(\theta) f_{2x} + a \cos(\theta) f_{2y} \end{pmatrix}$$

et les conditions initiales : $X_a(0) = [x_1(0) \quad y_1(0) \quad \theta(0)]^T$ et $\dot{X}_a(0) = [\dot{x}_1(0) \quad \dot{y}_1(0) \quad \dot{\theta}(0)]^T$

H.3 Forme DAE écrite à partir de coordonnées naturelles

On peut choisir pour décrire le mouvement plan du solide les coordonnées naturelles définies à partir des coordonnées des points (distincts) A_1 et A_2 alignés avec le centre de masse G :

$$X(t) \equiv [x_1(t) \quad y_1(t) \quad x_2(t) \quad y_2(t)]^T \quad (\text{H.7})$$

Ces coordonnées, qui ne sont pas indépendantes, doivent satisfaire la contrainte algébrique suivante traduisant l'hypothèse de solide indéformable :

$$\phi(X) \equiv (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - a^2 = 0 \quad (\text{H.8})$$

L'équation différentielle suivante (H.9) est écrite en fonction des coordonnées naturelles et d'un multiplicateur de Lagrange $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$M\ddot{X} + B\dot{X} + G + \Phi^T(\theta)\lambda = F(\theta) \quad (\text{H.9})$$

avec

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} m_{11}I & m_{12}I \\ m_{12}I & m_{22}I \end{bmatrix}, \quad I = \text{diag}(1, 1) \\ B &= \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}, \\ B_{11} &= \text{diag}(b_{1x}, b_{1x}), \quad B_{22} = \text{diag}(b_{2x}, b_{2y}), \\ G &= \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}, \quad G_i = m_{0i}g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad i = \{1, 2\}, \\ F &= \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} f_{1x} \\ f_{1y} \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} f_{2x} \\ f_{2y} \end{pmatrix}, \\ \Phi(\theta) &= [u(\theta)^T \quad -u(\theta)^T]. \end{aligned}$$

et des conditions initiales $X(0)$, $\dot{X}(0)$ compatibles avec la contrainte (H.8).

Dans l'équation (H.9), on peut remarquer que :

- les matrices de masse M , d'amortissement B , de pesanteur G sont à termes constants,
- aucun terme de coriolis ou centripète n'apparaît,
- les non-linéarités $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ n'apparaissent que dans la fonction $\Phi(\theta)$.

Théorème H.1

Le système DAE $\{(H.8), (H.9)\}$ est analytiquement équivalent au système ODE (H.6), au sens où ces deux systèmes régissent exactement le même comportement dynamique du modèle "barre" décrit au paragraphe H.1 (solide plan avec trois points A_1 , A_2 et G alignés, A_1 et A_2 distincts) si et seulement si

- les conditions initiales $X(0)$, $\dot{X}(0)$ du système DAE vérifient :
 $x_2(0) = x_1(0) + a \cos(\theta(0))$, $y_2(0) = y_1(0) + a \sin(\theta(0))$,

$$\dot{X}_2(0) = \dot{X}_1(0) + a\mathbf{v}(\theta(0))\dot{\theta}(0)$$

- les paramètres de l'équation différentielle (H.9) vérifient les relations suivantes fonctions des paramètres du système ODE (H.6) :

$$\begin{cases} m_{11} = m(1 - \nu)^2 + \frac{I_G}{a^2} \\ m_{22} = m\nu^2 + \frac{I_G}{a^2} \\ m_{12} = m\nu(1 - \nu) - \frac{I_G}{a^2} \\ m_{01} = m(1 - \nu) \\ m_{02} = m\nu \end{cases} \quad (\text{H.10})$$

Preuve: L'équation différentielle (H.9) du modèle DAE peut être réécrite sous la forme partitionnée :

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{X}_1 + m_{12}\ddot{X}_2 + B_{11}\dot{X}_1 + B_{12}\dot{X}_2 + G_1 + u(\theta)\lambda = F_1(\theta) \\ m_{12}\ddot{X}_1 + m_{22}\ddot{X}_2 + B_{21}\dot{X}_1 + B_{22}\dot{X}_2 + G_2 - u(\theta)\lambda = F_2(\theta) \end{cases} \quad (\text{H.11a})$$

$$(\text{H.11b})$$

En utilisant la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, on peut faire apparaître la relation cinématique du champ des vecteurs vitesses d'un solide vérifiant la contrainte (H.8) qui permet de relier $\dot{X}_a = [\dot{x}_1 \ \dot{y}_1 \ \dot{\theta}]^T$ et $\dot{X} = [\dot{x}_1 \ \dot{y}_1 \ \dot{x}_2 \ \dot{y}_2]^T$:

$$\dot{X}_2 = \dot{X}_1 + a\mathbf{u}(\theta)\dot{\theta} \quad (\text{H.12})$$

Sa dérivée temporelle permet d'écrire la relation entre les accélérations :

$$\ddot{X}_2 = \ddot{X}_1 + a\ddot{\theta}\mathbf{v} - a\dot{\theta}^2\mathbf{u} \quad (\text{H.13})$$

Les vitesses et accélérations de A_2 sont substituées par leur expressions (H.12-H.13) dans le système (H.11) :

$$\begin{cases} (m_{11} + m_{12})\ddot{X}_1 + am_{12}(v\ddot{\theta} - u\dot{\theta}^2) + B_{11}\dot{X}_1 + G_1 + u\lambda = F_1 \\ (m_{12} + m_{22})\ddot{X}_2 + am_{22}(v\ddot{\theta} - u\dot{\theta}^2) + B_{22}\dot{X}_1 + aB_{22}v\dot{\theta} + G_2 + u\lambda = F_2 \end{cases} \quad (\text{H.14a})$$

$$(\text{H.14b})$$

Pour obtenir un système d'équations comparable au système ODE (H.6), il est nécessaire de faire apparaître, à partir des équations (H.14a) et (H.14b) :

- la résultante des forces mécaniques extérieures, $F_1 + F_2$, avec la combinaison (H.14a) + (H.14b)
- le moment des actions mécaniques extérieures en A_1 , $\overrightarrow{A_1A_2} \times F_2 = a\mathbf{u} \times F_2$ avec $a\mathbf{u} \times$ (H.14b)

Cette combinaison linéaire des équations (H.14a) et (H.14b) conduit à des équations scalaires où le multiplicateur de Lagrange λ n'apparaît plus et qui peuvent s'exprimer

sous la forme :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{l} (m_{11} + m_{22} + 2m_{12})\ddot{x}_1 - a(m_{12} + m_{22})(s\ddot{\theta} + c\dot{\theta}^2) \\ (m_{11} + m_{22} + 2m_{12})\ddot{y}_1 - a(m_{12} + m_{22})(c\ddot{\theta} - s\dot{\theta}^2) \\ a(m_{12} + m_{22})(-s\ddot{x}_1 + c\ddot{y}_1) + a^2m_{22}\ddot{\theta} \end{array} \right) + \\ & \left(\begin{array}{l} (B_{11} + B_{22}) \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \end{pmatrix} - aB_{22} \begin{pmatrix} -s \\ c \end{pmatrix} \dot{\theta} \\ a\mathbf{u} \times B_{22}\dot{X}_1 + a^2\mathbf{u} \times B_{22}\mathbf{v}\dot{\theta} \end{array} \right) + \begin{pmatrix} G_1 + G_2 \\ a\mathbf{u} \times G_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 + F_2 \\ a\mathbf{u} \times F_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{H.15})$$

Sous la forme matricielle, le système (H.15) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_{11} + m_{22} + 2m_{12} & 0 & -a(m_{12} + m_{22}) \sin(\theta) \\ 0 & m_{11} + m_{22} + 2m_{12} & a(m_{12} + m_{22}) \cos(\theta) \\ (*) & (*) & a^2m_{22} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{y}_1 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} b_{1x} + b_{2x} & 0 & -ab_{2x} \sin(\theta) \\ 0 & b_{1y} + b_{2y} & ab_{2y} \cos(\theta) \\ (*) & (*) & a^2(b_{2x} \sin^2 \theta + b_{2y} \cos^2 \theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} + \\ & -a(m_{12} + m_{22}) \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \dot{\theta}^2 + g \begin{pmatrix} 0 \\ m_{01} + m_{02} \\ am_{02} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1x} + f_{2x} \\ f_{1y} + f_{2y} \\ -a \sin \theta f_{2x} + a \cos \theta f_{2y} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{H.16})$$

L'équation (H.16) est analytiquement équivalente à l'équation (H.6) en utilisant les égalités des paramètres (H.10). ■

Modélisation et commande des robots : nouvelles approches basées sur les modèles Takagi-Sugeno

Résumé :

Chaque année, plus de 5 millions de personnes à travers le monde deviennent hémiplegiques suite à un accident vasculaire cérébral. Ce soudain déficit neurologique conduit bien souvent à une perte partielle ou totale de la station debout et/ou à la perte de la capacité de déambulation. Dans l'optique de proposer de nouvelles solutions d'assistance situées entre le fauteuil roulant et le déambulateur, cette thèse s'inscrit dans le cadre du projet ANR TECSAN VHIPOD « véhicule individuel de transport en station debout auto-équilibrée pour personnes handicapées avec aide à la verticalisation ». Dans ce contexte, ces travaux de recherche apportent des éléments de réponse à deux problématiques fondamentales du projet : l'assistance au passage assis-debout (PAD) des personnes hémiplegiques et le déplacement à l'aide d'un véhicule auto-équilibré à deux roues. Ces problématiques sont abordées du point de vue de la robotique avec comme question centrale : peut-on utiliser l'approche Takagi-Sugeno (TS) pour la synthèse d'une commande ?

Dans un premier temps, la problématique de mobilité des personnes handicapées a été traitée sur la base d'une solution de type gyropode. Des lois de commande basées sur les approches TS standard et descripteur ont été proposées afin d'étudier la stabilisation des gyropodes dans des situations particulières telles que le déplacement sur un terrain en pente ou le franchissement de petites marches. Les résultats obtenus ont non seulement permis d'aboutir à un concept potentiellement capable de franchir des obstacles, mais ils ont également permis de souligner la principale difficulté liée à l'applicabilité de l'approche TS en raison du conservatisme des conditions LMIs (inégalités matricielles linéaires).

Dans un second temps, un banc d'assistance au PAD à architecture parallèle a été conçu. Ce type de manipulateur constitué de multiples boucles cinématiques présente un modèle dynamique très complexe (habituellement donné sous forme d'équations différentielles ordinaires). L'application de lois de commande basées sur l'approche TS est souvent vouée à l'échec compte tenu du grand nombre de non-linéarités dans le modèle. Afin de remédier à ce problème, une nouvelle approche de modélisation a été proposée. À partir d'un jeu de coordonnées bien particulier, le principe des puissances virtuelles est utilisé pour générer un modèle dynamique sous forme d'équations algèbro-différentielles (DAEs). Cette approche permet d'aboutir à un modèle quasi-LPV où les seuls paramètres variants représentent les multiplicateurs de Lagrange issus de la modélisation DAE. Les résultats obtenus ont été validés en simulation sur un robot parallèle à 2 degrés de liberté (ddl) puis sur un robot parallèle à 3 ddl développé pour l'assistance au PAD.

Mots-clés : robot mobile à deux roues, passage assis-debout, manipulateur parallèle, forme descripteur, approche TS, LMI, TS robuste, multiplicateurs de Lagrange, équation algèbro-différentielle, coordonnées naturelles.

Modeling and control of robots : new approaches based on the Takagi-Sugeno models

Abstract :

Every year more than 5 million people worldwide become hemiplegic as a direct consequence of stroke. This neurological deficiency, often leads to a partial or a total loss of standing up abilities and /or ambulation skills. In order to propose new supporting solutions lying between the wheelchair and the walker, this thesis comes within the ANR TECSAN project named VHIPOD "self-balanced transporter for disabled persons with sit-to-stand function". In this context, this research provides some answers for two key issues of the project : the sit-to-stand assistance (STS) of hemiplegic people and their mobility through a two wheeled self-balanced solution. These issues are addressed from a robotic point of view while focusing on a key question : are we able to extend the use of Takagi-Sugeno approach (TS) to the control of complex systems ?

Firstly, the issue of mobility of disabled persons was treated on the basis of a self-balanced solution. Control laws based on the standard and descriptor TS approaches have been proposed for the stabilization of gyropod in particular situations such as moving along a slope or crossing small steps. The results have led to the design a two-wheeled transporter which is potentially able to deal with the steps. On the other hand, these results have also highlighted the main challenge related to the use of TS approach such as the conservativisms of the LMIs constraints (Linear Matrix Inequalities).

In a second time, a test bench for the STS assistance based on parallel kinematic manipulator (PKM) was designed. This kind of manipulator characterized by several closed kinematic chains often presents a complex dynamical model (given as a set of ordinary differential equations, ODEs). The application of control laws based on the TS approach is often doomed to failure given the large number of non-linear terms in the model. To overcome this problem, a new modeling approach was proposed. From a particular set of coordinates, the principle of virtual power was used to generate a dynamical model based on the differential algebraic equations (DAEs). This approach leads to a quasi-LPV model where the only varying parameters are the Lagrange multipliers derived from the constraint equations of the DAE model. The results were validated on simulation through a 2-DOF (degrees of freedom) parallel robot (Biglide) and a 3-DOF manipulator (Triglide) designed for the STS assistance.

Keywords : Two wheeled mobile robot, sit-to-stand, parallel manipulator, descriptor form, TS approach , LMI, TS robust, Lagrange multipliers, differential algebraic equations, natural coordinates.

