



HAL
open science

Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de paires de fermions

Hadrien Kurkjian

► **To cite this version:**

Hadrien Kurkjian. Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de paires de fermions. Physique [physics]. Université Paris sciences et lettres, 2016. Français. NNT : 2016PSLEE016 . tel-01469344

HAL Id: tel-01469344

<https://theses.hal.science/tel-01469344>

Submitted on 16 Feb 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT
de l'Université de recherche
Paris Sciences Lettres

préparée à
l'École normale supérieure

Cohérence, brouillage et
dynamique de phase dans
un condensat de paires
de fermions

par Hadrien Kurkjian

École doctorale n°564
Spécialité Physique
Soutenue le 19/06/2016

Composition du Jury :

M Jean-Paul Blaizot
CEA-Saclay
Président du jury

Mme Anna Minguzzi
Université Joseph Fournier
Rapporteuse

M Carlos Lobo
University of Southampton
Rapporteur

M Giacomo Roati
LENS
Membre du jury

Mme Alice Sinatra
Université Pierre-et-Marie-Curie
Directrice de thèse

M Yvan Castin
École Normale Supérieure
Co-Directeur de thèse

THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE
LABORATOIRE KASTLER BROSSEL

Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de fermions appariés

soutenue par HADRIEN KURKJIAN

DIRECTRICE :	ALICE SINATRA
CO-DIRECTEUR :	YVAN CASTIN
RAPPORTEUR :	ANNA MINGUZZI
RAPPORTEUR :	CARLOS LOBO
EXAMINATEUR :	JEAN-PAUL BLAIZOT
EXAMINATEUR :	GIACOMO ROATI





**COHERENCE
BROUILLAGE
ET DYNAMIQUE
DE PHASE**

**DANS UN CONDENSAT
DE FERMIONS APPARIÉS**

Par Hadrien Kurkjian

Résumé

On considère généralement que la fonction d'onde macroscopique décrivant un condensat de paires de fermions possède une phase parfaitement définie et immuable. En réalité, il n'existe que des systèmes de taille finie, préparés à température non nulle ; le condensat possède alors un temps de cohérence fini, même lorsque le système est isolé. Cet effet fondamental, crucial pour les applications qui exploitent la cohérence macroscopique, restait très peu étudié. Dans cette thèse, nous relierons le temps de cohérence à la dynamique de phase du condensat, et nous montrons par une approche microscopique que la dérivée temporelle de l'opérateur phase $\hat{\theta}_0$ est proportionnelle à un opérateur potentiel chimique qui inclut les deux branches d'excitations du gaz : celle, fermionique, de brisure des paires et celle, bosonique, de mise en mouvement de leur centre de masse. Pour une réalisation donnée de l'énergie E et du nombre de particules N , la phase évolue aux temps longs comme $-2\mu_{mc}(E, N)t/\hbar$ où $\mu_{mc}(E, N)$ est le potentiel chimique microcanonique ; les fluctuations de E et de N d'une réalisation à l'autre conduisent alors à un brouillage balistique de la phase, et à une décroissance gaussienne de la fonction de cohérence temporelle avec un temps caractéristique $\propto N^{1/2}$. En l'absence de telles fluctuations, la décroissance est au contraire exponentielle avec un temps de cohérence qui diverge linéairement en N à cause du mouvement diffusif de $\hat{\theta}_0$ dans l'environnement des modes excités. Nous donnons une expression explicite de ce temps caractéristique à basse température dans le cas d'une branche d'excitation bosonique convexe lorsque les phonons interagissent via les processus $2 \leftrightarrow 1$ de Beliaev-Landau. Enfin, nous proposons des méthodes permettant de mesurer avec un gaz d'atomes froids chaque contribution au temps de cohérence.

Mots-clés *Condensation de Bose-Einstein, Cohérence macroscopique, problème à N corps, gaz de fermions, paires de Cooper, transition BEC-BCS, diffusion de quasi-particules*

Abstract

It is generally assumed that a condensate of paired fermions at equilibrium is characterized by a macroscopic wavefunction with a well-defined, immutable phase. In reality, all systems have a finite size and are prepared at non-zero temperature ; the condensate has then a finite coherence time, even when the system is isolated. This fundamental effect, crucial for applications using macroscopic coherence, was scarcely studied. Here, we link the coherence time to the condensate phase dynamics, and show using a microscopic theory that the time derivative of the condensate phase operator $\hat{\theta}_0$ is proportional to a chemical potential operator which includes both the fermionic pair-breaking and the bosonic pair-motion excitation branches. For a given realization of the number of particle N and of the energy E , the phase evolves at long times as $-2\mu_{mc}(E, N)t/\hbar$ where $\mu_{mc}(E, N)$ is the microcanonical chemical potential ; fluctuations of N and E from one realization to the other then lead to a ballistic spreading of the phase and to a Gaussian decay of the temporal coherence function with a characteristic time $\propto N^{1/2}$. On the contrary, in the absence of energy and number fluctuations, the decay of the temporal coherence function is exponential with a characteristic time scaling as N due to the diffusive motion of $\hat{\theta}_0$ in the environment created by the excited modes. We give an explicit expression of this characteristic time at low temperature in the case where the bosonic branch is convex and the phonons undergo $2 \leftrightarrow 1$ Beliaev-Landau process. Finally, we propose methods to measure each contribution to the coherence time using ultracold atoms.

Key-words *Bose-Einstein Condensation, Macroscopic Coherence, many-body problem, Fermi gases, Cooper pairs, BEC-BCS transition, quasiparticles scattering*

Résumé en français courant

La cohérence est une propriété essentielle des systèmes quantiques macroscopiques tel que les lasers, les supraconducteurs et les superfluides. Elle signale l'apparition d'un comportement collectif des particules de lumière ou de matière qui, cessant d'être des objets discernables, se mettent à vibrer en phase pour former une onde macroscopique appelée un condensat. Dans des systèmes bien isolés du désordre environnant, la cohérence permet d'améliorer sensiblement la précision des mesures utilisant les technologies quantiques, comme les horloges atomiques, les gravimètres ou les magnétomètres, et l'efficacité des télécommunication quantiques.

Il est donc crucial de savoir combien de temps cette cohérence macroscopique perdure dans un système isolé. Lorsque les particules du condensat interagissent, ceci constitue un difficile problème de physique à grand nombre de corps, encore plus à température non nulle, lorsque le condensat baigne dans un nuage d'excitations résultant de l'agitation thermique. Dans les systèmes de bosons, ce problème a été étudié en profondeur et plusieurs expériences ont rapporté des mesures du temps de cohérence. Cependant, aucune prédiction théorique n'existait pour des systèmes où la cohérence s'établit entre des paires formées de particules fermioniques de deux espèces différentes, comme dans les supraconducteurs ou les gaz froids d'atomes fermioniques. Cette thèse comble ce vide théorique en partant des premiers principes de la physique. Nous nous concentrons sur le cas où les paires de fermions sont formées d'atomes neutres refroidis presque jusqu'au zéro absolu et soumis à des interactions attractives d'intensité ajustable, situation qui est de nos jours couramment réalisée en laboratoire. Nos résultats restent néanmoins pertinents pour les autres systèmes fermioniques.

Pour un gaz entièrement isolé préparé à température non nulle, nous montrons que le condensat est déphasé par deux types d'excitations thermiques : lorsque les paires se brisent en libérant deux fermions libres, et lorsqu'elles se mettent à vibrer collectivement telles les molécules d'air au passage d'une onde sonore. Ce déphasage conduit à une perte de cohérence au bout d'un temps typique de l'ordre de la seconde. Nous montrons aussi que lorsque l'on compare plusieurs gaz dont les nombres de particules et les énergies totales diffèrent, la cohérence de l'ensemble décroît encore plus rapidement, sur un temps typique de l'ordre de la milliseconde. Enfin, nous proposons plusieurs schémas expérimentaux réalistes permettant de mesurer le temps de cohérence d'un gaz d'atomes froids par interférence entre ondes de matière.

Remerciements

Je remercie chaleureusement tous mes collègues au laboratoire Kastler-Brossel et à l'École Normale Supérieure, qui ont permis à cette thèse de se dérouler dans un environnement joyeux et de grande qualité scientifique : Christian, Jakob, Jean, Jérôme, Krzysiek, Kris, Romain, Michèle, Tarik, Thierry, Viviane, ainsi que toutes les personnes qui font fonctionner notre laboratoire, notre école et le Pôt, tous les midis. J'ai une pensée émue à l'idée de quitter la bande des doctorants de l'ENS et du LKB, Baptiste, Claire, Daniel, Francesco, Konstantin, Hugo, Laure, Manon, Mariane, Marion, Riccardo, Swann, Thomas, Valérian, toujours unis face à l'adversité. Merci à Christophe Salomon d'avoir bien voulu être le tuteur du jeune thésard que je ne suis plus. Merci à Félix pour ses conseils et toutes les discussions que nous avons eu ensemble. Merci à Pascal Stabat et à Marie-Laure Manceau de m'avoir permis d'enseigner pour ISUPFERE, une formation d'ingénieurs de grande qualité. Je pense beaucoup à Hélène qui a partagé les hauts et parfois supporté les bas de quatre ans de travail.

Merci bien sûr à Yvan pour son encadrement exigeant, ses idées brillantes et ses vérifications scrupuleuses. Et surtout merci à Alice d'avoir été une directrice de thèse hors du commun, qui d'un normalien encore un peu candide a fait un aspirant chercheur. Merci pour tout le temps que tu m'as consacré, pour le travail accompli ensemble et pour les perspectives que tu m'as ouvertes.

Table des matières

Introduction	15
Première partie : Brouillage de phase	20
I Brouillage de phase à température nulle	21
II Brouillage thermique	24
II.1 Mode et phase d'un condensat de paires de fermions	24
II.2 Décroissance de la fonction de cohérence temporelle	27
II.2.1 Brouillage dans l'ensemble microcanonique - Diffusion de phase	28
II.2.2 Brouillage en présence de fluctuations de l'énergie et du nombre de particules - Superdiffusion de phase	33
Deuxième partie : Dynamique de phase	34
III Description mésoscopique du gaz de paires et dynamique de phase par l'hydrodynamique quantique	35
III.1 Champs de densité et de phase dans le modèle sur réseau	35
III.2 Quadratisation du hamiltonien hydrodynamique	36
III.3 Dynamique de phase	39
III.4 Validité de l'approximation de faibles fluctuations dans le modèle sur réseau	39
IV Description microscopique du gaz de paires de fermions	41
IV.1 Interactions dans un gaz de fermions froids	41
IV.1.1 Fermions dans l'espace libre et modèle sur réseau	41
IV.1.2 Potentiel d'interaction	41
IV.1.3 Diffusion dans un gaz d'atomes froids	42
IV.1.4 Hamiltonien d'interaction dans l'onde s	46
IV.2 Approximation BCS de l'état fondamental	47
IV.2.1 État cohérent de paires	47
IV.2.2 État BCS fondamental	49
IV.3 Excitations fermioniques	54

V	Dynamique de phase par la RPA - Contribution de la branche fermionique	60
V.1	Équations du mouvement de la RPA	60
V.2	Dynamique dans le sous-espace d'impulsion nulle	65
V.2.1	Équations de la RPA à impulsion nulle	65
V.2.2	Modes collectifs d'énergie nulle	67
V.2.3	Quelques mots sur les modes excités	71
V.3	Dynamique de l'opérateur phase	75
V.3.1	Opérateur phase adiabatique	75
V.3.2	Dynamique linéarisée dans le sous-espace d'énergie nulle	76
V.3.3	Comparaison des opérateurs phase	77
V.3.4	Tentatives d'inclusion de la branche bosonique	79
VI	Dynamique de phase par la théorie variationnelle	81
VI.1	Présentation de la théorie variationnelle d'un gaz de fermions appariés	81
VI.1.1	Ansatz de paires en mouvement	81
VI.1.2	Moyennes quantiques microscopiques	82
VI.1.3	Dynamique des variables conjuguées - équations hamiltoniennes	83
VI.2	État fondamental à nombre de particules fixé	85
VI.3	Équations du mouvement à symétrie conservée	86
VI.3.1	Développement autour du cercle des minimiseurs	87
VI.3.2	Équation de la dynamique de phase incomplète	88
VI.3.3	Moyenne temporelle à gros grains du champ Λ	88
VII	Application de la théorie variationnelle : branche bosonique d'excitation collective	95
VII.1	Théorie variationnelle à symétrie brisée	95
VII.1.1	État cohérent de quasi-particules	95
VII.1.2	Cinématique de l'état cohérent de quasi-particules	96
VII.1.3	Dynamique dans l'approximation des petites amplitudes	96
VII.1.4	Dynamique linéarisée	99
VII.2	Modes excités quasi individuels à impulsion \mathbf{q}	100
VII.2.1	Équation aux valeurs propres	100
VII.2.2	Modes quasi individuels	101
VII.3	Spectre des excitations bosoniques	102
VII.3.1	Équation implicite aux valeurs propres	102
VII.3.2	Énergie phononique	103
VII.3.3	Spectre à la limite continue	104
VII.4	Opérateurs de création d'excitations bosoniques	116
VII.4.1	Modes propres	116
VII.4.2	Opérateurs de phonons dans la limite des grandes longueurs d'onde	119
VII.4.3	Quantification des opérateurs de phonons	119
VII.4.4	États de Fock d'excitations bosoniques	120
VIII	Diffusion de phase	126
VIII.1	Équations cinétiques pour les états de Fock de quasi-particules	126
VIII.2	Fonctions de corrélation microcanoniques	128

VIII.3	Équations cinétiques à basse température pour une branche bosonique convexe	130
VIII.3.1	Amplitudes de couplage Beliaev-Landau des excitations bosoniques	130
VIII.3.2	Application aux équations cinétiques	135
VIII.4	Application au coefficient de diffusion de la phase à basse température	137
Troisième partie : Expériences et applications		140
IX	Temps de brouillage attendus dans une expérience d'atomes froids	141
IX.1	Brouillage de partition à température nulle	141
IX.2	Brouillage thermique à l'unitarité dans l'ensemble canonique	143
IX.3	Brouillage thermique à l'unitarité dans l'ensemble microcanonique	147
Conclusion		148
Annexes		151
A	Extension du raisonnement à température nulle au cas thermique intégrable	151
B	Passage à la limite thermodynamique dans l'expression de la résolvante de $\hat{H} + \hat{W}$	156
C	Relations de passage en point de vue des quasi-particules	158
D	Autre raisonnement pour obtenir l'équation complète de la dynamique de phase dans l'approche variationnelle à symétrie conservée	159
1	Principe du développement autour de $\Phi_0(N + \delta N)$	160
2	Principe du développement autour de $\Phi_0(N)$	161
3	Fin du développement autour de $\phi_0(N)$	163
4	Fin du développement autour de $\phi_0(N + \delta N)$	164
5	Identification des développements ordre par ordre	164
E	Calcul des intégrales $I_{n,p}$ et $J_{n,p}$	166
F	Développements limités des intégrales de l'équation de dispersion	169
G	Complément sur le calcul microscopique des amplitudes de Beliaev-Landau	172
1	Limite continue et simplifications	175
2	Limite des grandes longueurs d'onde	178
2.1	Développements limités de Y et S	178
2.2	Resommation des degrés de liberté internes \mathbf{k} et \mathbf{k}'	180
2.3	Fraction rationnelles intervenant dans l'expression de \mathcal{A}	183
2.4	Expression de \mathcal{A} en fonction des nombres d'onde	184

H	Thermodynamique de quasi-particules sans interaction et application au gaz unitaire	186
1	Hamiltonien effectif à basse énergie	186
2	Se ramener à l'ensemble canonique	187
3	L'énergie libre et ses dérivées	187
4	Les relations de dispersion	188
5	Poids relatif des branches bosonique et fermionique	189
	Articles publiés	199
I	Spin squeezing and EPR entanglement of two bimodal condensates in state-dependent potentials	199
II	Phase operator and blurring time of a pair-condensed Fermi gas	210
III	Thermal blurring of coherent Fermi gas	227
IV	Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover	253

Liste des symboles utilisés

Symboles généraux

l	Pas du réseau dans l'espace réel
L	Taille de la boîte de quantification
\mathcal{D}	$\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3 \cap [-\pi/l, \pi/l]^3$, ensemble des vecteurs de la première zone de Brillouin compatibles avec les conditions aux limites périodiques
m	Masse d'un fermion
N/ρ	Nombre de particules/densité du gaz dans un état où ceux-ci sont fixés
$\bar{N}/\bar{\rho}$	Nombre moyen de particules/densité moyenne
k_F	$(3\pi^2\rho)^{1/3}$, vecteur d'onde de Fermi
ε_F	$\hbar^2 k_F^2 / 2m$, énergie de Fermi
T_F	ε_F / k_B , température de Fermi
\bar{N}_0	Nombre de paires condensées
$E_0(N)$	Énergie de l'état fondamental à N particules
$\mu_0(N)$	Potentiel chimique de l'état fondamental à N particules
μ	Potentiel chimique dans l'ensemble grand canonique, égal pour les deux espèces \uparrow et \downarrow de fermions
T	Température du gaz
a	Longueur de diffusion entre fermions de spins opposés
$\hat{\theta}_0$	Opérateur phase du condensat de paires
$\hat{\psi}_\sigma$	Opérateur champ des fermions de spin σ
$\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$	Opérateur d'annihilation d'un fermion de vecteur d'onde \mathbf{k} et de spin σ
$\epsilon_{F,\alpha}$	Énergie des quasi-particules dans le mode α de la branche fermionique ($\alpha = \mathbf{k}, \sigma$ dans l'espace homogène)
$\epsilon_{B,\alpha}$	Énergie des quasi-particules dans le mode α de la branche bosonique ($\alpha = \mathbf{q}$ dans l'espace homogène)
$\hat{n}_{F,\alpha}$	Opérateur nombre de quasi-particules dans le mode α de la branche fermionique
$\hat{n}_{B,\alpha}$	Opérateur nombre de quasi-particules dans le mode α de la branche bosonique
c	Vitesse du son

$\langle \dots \rangle_0$	Valeur moyenne dans l'état fondamental du gaz. À partir du chapitre IV, moyenne dans le fondamental BCS à symétrie brisée $ \psi_0^{\text{BCS}}\rangle$
$\langle \dots \rangle_\lambda$	Valeur moyenne dans l'état propre $ \psi_\lambda\rangle$ du hamiltonien
$\frac{\dots}{\dots t}$	Moyenne temporelle à gros grains (définie dans la section II.2.1)

Symboles de la théorie BCS (chapitre IV)

$ \psi^{\text{BCS}}\rangle$	Ansatz BCS
Δ	Gap de la théorie BCS, paramètre d'ordre dans l'état $ \psi^{\text{BCS}}\rangle$
$ \psi_0^{\text{BCS}}\rangle$	Fondamental BCS à symétrie brisée
Δ_0	Gap dans l'état $ \psi_0^{\text{BCS}}\rangle$
$\bar{N}_0^{\text{BCS}}/\hat{\theta}_0^{\text{BCS}}$	Approximation de $\bar{N}_0/\hat{\theta}_0$ dans l'état $ \psi_0^{\text{BCS}}\rangle$
$\xi_{\mathbf{k}}$	$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu + g_0 n_\uparrow$, paramètre de la théorie BCS
$\epsilon_{\mathbf{k}}$	$\sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2}$, énergie $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}$ des quasi-particules fermioniques d'après la théorie BCS
$U_{\mathbf{k}}^0$	$\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)}$, paramètre de l'état $ \psi_0^{\text{BCS}}\rangle$
$V_{\mathbf{k}}^0$	$\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)}$ paramètre de l'état $ \psi_0^{\text{BCS}}\rangle$
$\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}$	Opérateur d'annihilation d'une quasi-particule fermionique de vecteur d'onde \mathbf{k} et de spin σ
Θ/I_Θ	$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \Delta_0^3 / \epsilon_{\mathbf{k}}^3 \int_0^{+\infty} u^2 du / \epsilon_u^3$
X/I_X	$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \Delta_0^2 \xi_{\mathbf{k}} / \epsilon_{\mathbf{k}}^3 \int_0^{+\infty} u^2 du \xi_u / \epsilon_u^3$
k_Δ	$(2m\Delta_0/\hbar^2)^{1/2}$ unité de vecteur d'onde associée au gap Δ_0
k_μ/k_{\min}	$(2m\mu)^{1/2}/\hbar$ unité de vecteur d'onde associée au potentiel chimique μ . En même temps, minimum de la relation de dispersion BCS $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$

Symboles de la RPA et de la théorie variationnelle (chapitres V, VII et VIII)

	<i>Opérateurs de la RPA en point de vue des particules</i>
$\hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}/\hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$	$\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} / \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}$
$\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}/\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$	$\hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} / \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$
	<i>Opérateurs de la RPA/amplitudes de la théorie variationnelle en point de vue des quasi-particules</i>
$\hat{y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}/y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$	$\hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} - \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger / \langle \psi^{\text{BCS}} \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} - \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \psi^{\text{BCS}} \rangle$
$\hat{s}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}/s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$	$\hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger / \langle \psi^{\text{BCS}} \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \psi^{\text{BCS}} \rangle$
$\hat{m}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}/m_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$	$\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} / \langle \psi^{\text{BCS}} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \psi^{\text{BCS}} \rangle$
$\hat{h}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}/h_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$	$\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} - \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} / \langle \psi^{\text{BCS}} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} - \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \psi^{\text{BCS}} \rangle$

Opérateurs collectifs de la RPA/ amplitudes collectives de la théorie variationnelle

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{\Delta}^{\mathbf{q}} - \hat{\bar{\Delta}}^{\mathbf{q}}}{\Delta^{\mathbf{q}} - \bar{\Delta}^{\mathbf{q}}} & \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (W_{\mathbf{kq}}^+ \hat{y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - w_{\mathbf{kq}}^- \hat{h}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) / \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{kq}}^+ y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\
\frac{\delta \hat{\Delta}^{\mathbf{q}} + \delta \hat{\bar{\Delta}}^{\mathbf{q}}}{\delta \Delta^{\mathbf{q}} + \delta \bar{\Delta}^{\mathbf{q}}} & \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (W_{\mathbf{kq}}^- \hat{s}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + w_{\mathbf{kq}}^+ \hat{m}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) / \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{kq}}^- \hat{s}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\
\frac{\hat{n}_{\uparrow}^{\mathbf{q}} - \hat{n}_{\downarrow}^{\mathbf{q}}}{\hat{n}_{\uparrow}^{\mathbf{q}} - \hat{n}_{\downarrow}^{\mathbf{q}}} & \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (w_{\mathbf{kq}}^- \hat{y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + W_{\mathbf{kq}}^+ \hat{h}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) / \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{kq}}^- \hat{y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\
\frac{\delta \hat{n}_{\uparrow}^{\mathbf{q}} + \delta \hat{n}_{\downarrow}^{\mathbf{q}}}{\delta n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} + \delta n_{\downarrow}^{\mathbf{q}}} & \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (-w_{\mathbf{kq}}^+ \hat{s}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + W_{\mathbf{kq}}^- \hat{m}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) / \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (-w_{\mathbf{kq}}^+ \hat{s}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega_+^{\mathbf{q}} & \frac{i\hbar}{\Delta_0} \frac{d}{dt} (\delta \Delta^{\mathbf{q}} + \delta \bar{\Delta}^{\mathbf{q}}) \\
\Omega_-^{\mathbf{q}} & -\frac{i\hbar}{\Delta_0} \frac{d}{dt} g_0 (\delta n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} + \delta n_{\downarrow}^{\mathbf{q}})
\end{aligned}$$

Paramètres des équations du mouvement

$$\begin{aligned}
W_{\mathbf{kq}}^{\pm} & U_{\mathbf{k+q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 \pm V_{\mathbf{k+q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 \\
w_{\mathbf{kq}}^{\pm} & U_{\mathbf{k+q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 \pm V_{\mathbf{k+q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 \\
\epsilon_{\mathbf{kq}}^{\pm} & \epsilon_{\mathbf{k+q}} \pm \epsilon_{\mathbf{k}}, \text{ énergie des continuums de biexcitations fermioniques} \\
\xi_{\mathbf{kq}}^{\pm} & \xi_{\mathbf{k+q}} \pm \xi_{\mathbf{k}} \\
d_{\mathbf{kq}}^{\pm} & -\frac{\Delta_0}{2\epsilon_{\mathbf{k+q}}} \mp \frac{\Delta_0}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \\
z_{\mathbf{kq}}^{\pm} & \frac{\xi_{\mathbf{k+q}}}{2\epsilon_{\mathbf{k+q}}} \pm \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}
\end{aligned}$$

Paramètres du spectre bosonique

$$\begin{aligned}
\hbar\omega_{\mathbf{q}} & \text{Énergie } \epsilon_{B,\mathbf{q}} \text{ des quasi-particules bosoniques d'après la RPA} \\
\hat{b}_{\mathbf{q}}/b_{\mathbf{q}} & \text{Opérateur d'annihilation d'une quasi-particule bosonique de vecteur d'onde } \mathbf{q} / \text{amplitude normale du champ classique sur le mode collectif de vecteur d'onde } \mathbf{q} \\
x & \Delta_0/\mu, \text{ variable servant à exprimer les paramètres du spectre bosonique} \\
y & (\partial\Delta_0/\partial\mu)_a, \text{ idem, variable liée à la précédente par l'équation d'état BCS (voir la figure VII.4)} \\
\gamma/\eta & \text{Paramètre du terme cubique/quintique de l'énergie } \hbar\omega_{\mathbf{q}} \text{ aux faibles } q \text{ (voir (VII.72))}
\end{aligned}$$

Symboles des processus d'interaction entre quasi-particules

$n_{F,\alpha}/n_{B,\alpha}$	Nombre de quasi-particules fermioniques/bosoniques dans un état de Fock où celui-ci est fixé
$\bar{n}_{F,\alpha}/\bar{n}_{B,\alpha}$	Nombre moyen de quasi-particules fermioniques/bosoniques à l'équilibre thermodynamique
$n_{\mathbf{q}}/\bar{n}_{\mathbf{q}}$	Raccourci pour $n_{B,\mathbf{q}}/\bar{n}_{B,\mathbf{q}}$
Λ_F	$\frac{\bar{\rho}}{3} \frac{d^2\mu}{d\rho^2} \left(\frac{d\mu}{d\rho} \right)^{-1}$, correction fermionique aux équations cinétiques (voir la figure VIII.2)
<i>Grandeurs adimensionnées</i>	
\check{q}	$\hbar q/m^{1/2}\Delta_0^{1/2}$, vecteur d'onde adimensionné par le <i>gap</i> Δ_0
\check{c}	$m^{1/2}c/\Delta_0^{1/2}$, vitesse du son adimensionnés par le <i>gap</i> Δ_0
ε	$k_B T/mc^2$, petit paramètre du développement à basse température
\tilde{q}	$\hbar qc/\sqrt{2}k_B T$, vecteur d'onde adimensionné par la température

Introduction

On parle de cohérence à propos d'un système ondulatoire lorsqu'il existe une relation de phase bien définie sur l'onde prise à deux instants différents, dans le cas de la cohérence temporelle, ou dans deux sous-régions du système, dans le cas de la cohérence spatiale. Lorsque la phase relative de l'onde entre les deux points a une valeur bien définie, identique sur plusieurs oscillations, on dit que ces deux parties sont cohérentes entre elles. À l'inverse, elles sont incohérentes si de fortes fluctuations brouillent leur phase relative. Comme tout objet ondulatoire, un système quantique peut ou non être cohérent, dans le temps ou dans l'espace. On sait aujourd'hui manipuler des systèmes quantiques individuels ou mésoscopiques ayant une cohérence temporelle longue : photons dans une cavité [1], ions piégés [2] ou atomes neutres indépendants. Ils sont utilisés en information quantique pour faciliter le transport des bits quantiques et augmenter la fidélité des portes logiques, dans les horloges atomiques pour maximiser le temps d'interrogation et réduire l'incertitude sur la mesure [3], ou dans les mémoires quantiques [4] pour augmenter le temps de stockage de l'information. Depuis la découverte des supraconducteurs [5], de la superfluidité [6, 7, 8] et du laser [9], on sait aussi préparer des systèmes cohérents macroscopiques, dans lesquels la cohérence est partagée par un grand nombre de particules, réunies dans une même fonction d'onde. Plus récemment, grâce à l'essor des techniques de refroidissement et de piégeage laser, la cohérence macroscopique a pu être observée dans les gaz d'atomes neutres bosoniques [10], où l'ensemble des particules cohérentes est appelé un *condensat*. Elle a ensuite été exploitée pour former, avec des atomes en interaction, des états de spin comprimés [11, 12, 13, 14, 15] qui permettent de réduire l'incertitude d'une mesure de phase au-dessous des fluctuations poissonniennes classiques d'une assemblée de N atomes indépendants. D'ores et déjà, l'intérêt de ces états pour améliorer les mesures de temps [16, 14] ou de champ magnétique [17, 18] a reçu une démonstration de principe. L'utilisation de condensats de Bose-Einstein cohérents pourrait aussi permettre d'améliorer les mesures de champ gravitationnel [19]. Dernièrement, l'existence d'une cohérence macroscopique dans un gaz d'atomes fermioniques appariés dans des états internes \uparrow et \downarrow différents a été démontrée expérimentalement [20, 21, 22]. Cette percée scientifique ouvre la voie à une nouvelle thématique de recherche, potentiellement aussi féconde que les travaux sur la cohérence macroscopique en optique et dans les condensats de bosons. Cette thèse s'inscrit dans cette nouvelle thématique et espère parvenir à une étude, la première pour un condensat de paires de fermions, à la fois fondamentale, essentiellement analytique et la plus complète possible de la cohérence du gaz et de ses limites intrinsèques, conséquences de la dynamique interne du gaz.

Spécificités des systèmes d'atomes froids : Expérimentalement, l'avantage des systèmes d'atomes froids est d'offrir une grande liberté dans le choix des paramètres microscopiques du gaz. Les résonances de Feshbach [23, 24, 25], qui utilisent un champ magnétique externe pour amplifier les processus de diffusion à deux corps entre certains états internes des atomes,

permettent ainsi de régler la force des interactions entre les particules, aussi bien bosoniques [26] que fermioniques [27]. Dans les gaz de bosons, la liberté offerte par ces résonances est malheureusement limitée par l'apparition de fortes collisions inélastiques à trois corps [28]. Ce n'est pas le cas des gaz de fermions, où les résonances de Feshbach ont permis de parcourir la transition continue [29, 30, 31, 32] d'un superfluide de paires faiblement liées, proche d'une mer de Fermi, dans le régime dit de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS), à un condensat de dimères quasi bosoniques dans le régime de Condensation de Bose-Einstein (CBE). Cette possibilité unique distingue les gaz d'atomes fermioniques neutres des autres systèmes fermioniques dégénérés, tel l'Hélium III superfluide ou les supraconducteurs. Autre exemple de l'adaptabilité offerte par les atomes froids, la géométrie du potentiel de piégeage externe peut être contrôlée précisément, notamment depuis l'utilisation de dispositifs de micro-optique qui offrent une précision à l'échelle micrométrique. On peut ainsi créer des potentiels optiques à fond plat [33], en double puits avec une barrière de hauteur ajustable [34] ou en réseau de profondeur ajustable. Cette dernière possibilité a permis d'observer la transition entre une phase de Mott, où les particules sont localisées sur les sites du réseau et incohérentes entre elles, et une phase superfluide, où les particules, délocalisées, partagent une cohérence macroscopique.

Du point de vue théorique, les gaz d'atomes froids sont de bons systèmes pour explorer analytiquement le problème à N corps. D'une part, leur étude bénéficie de puissants outils développés dans d'autres domaines de la physique, physique de la matière condensée ou physique nucléaire : l'approximation de Hartree-Fock [35, 36, 37, 38] ou de Hartree-Fock-Bogolioubov [39, 40, 29] (dites parfois approximations de champ moyen) pour décrire l'état fondamental approché du gaz, la théorie de Bogolioubov [41] dans les gaz de bosons, l'Approximation de la Phase Aléatoire (RPA) [42], l'approche par les fonctions de Green [43] ou les approches variationnelles [40] dans les gaz de fermions pour décrire les excitations élémentaires du gaz, et le traitement perturbatif des processus non linéaires pour tenir compte des interactions entre excitations élémentaires [44, 45, 46]. En pratique, l'emploi de ces théories statistiques de basse énergie se justifie par les températures très basses atteintes par les atomes du gaz, et par le nombre de ceux-ci, qui, sans être comparable aux populations des systèmes de matière condensée, est néanmoins plus que suffisant pour justifier les approximations habituelles de la physique statistique. D'autre part, les conditions expérimentales particulières aux gaz d'atomes froids offrent un cadre théorique avantageux dans lequel les approches précédemment citées aboutissent à des prédictions essentiellement analytiques des observables collectives du gaz. En particulier, le régime dilué et de basse énergie dans lequel les interactions ont lieu dans ces systèmes permet de les décrire avec un nombre de paramètres limité [47, 48]. Dans les gaz de fermions, ces simplifications ont permis des prédictions analytiques des quantités thermodynamiques du gaz [49], du spectre des excitations élémentaires [50] et des processus d'amortissement des quasi-particules [46, 51, 52].

Cohérence macroscopique dans les gaz d'atomes froids : Du point de vue de la cohérence macroscopique, les gaz d'atomes froids sont aussi des systèmes singuliers. D'un côté, le nombre d'atomes relativement faible comparé aux systèmes de matière condensée rend sensibles des effets de taille finie sur la cohérence macroscopique. Mais surtout, tandis que dans la plupart des systèmes de matière condensée, la cohérence est rapidement perdue suite à l'interaction avec un environnement désordonné, dans les gaz d'atomes froids, cette décohérence extrinsèque peut être efficacement réduite par l'utilisation de pièges immatériels non dissipatifs dans une enceinte à vide. Signe de son importance pour la physique des atomes

froids, les expériences ont cherché à mettre en évidence cette persistance d'une cohérence macroscopique dès le début des travaux sur les gaz de bosons condensés [53, 54], le plus souvent *via* des protocoles d'interférences entre ondes de matières après temps de vol [55, 56]. Ces conditions expérimentales uniques donnent son importance pratique à une question fondamentale : qu'est-ce qui, en l'absence de décohérence extrinsèque, limite le temps de cohérence du gaz ?

Cohérence macroscopique dans les gaz de bosons : Ce temps de cohérence intrinsèque a d'abord été déterminé théoriquement à température nulle [57, 58] dans un gaz de bosons en interaction faible, et la perte de cohérence a été reliée au brouillage de la phase du condensat sous l'effet combiné des interactions entre les particules et des fluctuations du nombre de particules [59, 60]. À température non nulle, des travaux théoriques plus récents ont montré que, (i) contrairement à ce qui avait d'abord été prédit [61, 62, 63], l'étalement de la phase du condensat à nombre de particules fixé est balistique plutôt que diffusif [64] du fait des fluctuations de l'énergie [65], ce qui conduit à une décroissance gaussienne de la fonction de cohérence temporelle, (ii) en l'absence de telles fluctuations, il subsiste, sous l'effet des interactions entre quasi-particules, un étalement diffusif [66] de la phase du condensat qui conduit à une décroissance exponentielle de la fonction de cohérence. En revanche, aucune prédiction théorique du temps de cohérence intrinsèque d'un gaz condensé de fermions n'existe à ce jour. Cette thèse entend combler cette lacune.

Cohérence macroscopique dans les gaz de fermions : La cohérence dans les systèmes fermioniques, atomes neutres comme supraconducteurs, ne peut s'établir directement entre les particules comme dans les systèmes bosoniques. En effet, le principe d'exclusion de Pauli empêche les fermions d'appartenir à la même fonction d'onde et donc de former un condensat de particules individuelles. Une cohérence macroscopique est cependant possible si les fermions se corrélaient par petits groupes, le plus souvent par paires, assez fortement liés pour pouvoir se condenser dans la même fonction d'onde de leur centre de masse. Le cas le plus courant est celui où deux fermions s'assemblent *en onde s*, dans une fonction d'onde de paire invariante par rotation autour de son centre de masse, symétrique vis-à-vis de l'échange des deux fermions, qui doivent donc être dans deux états internes distincts \uparrow et \downarrow . Pour que la condensation puisse avoir lieu, la fonction de paire doit être suffisamment large dans l'espace de Fourier du vecteur d'onde relatif pour autoriser une densité non nulle, donc une population macroscopique, dans un vecteur d'onde du centre de masse donné [39]. Dans ce travail, nous considérerons un gaz de fermions \uparrow et \downarrow non polarisé, c'est-à-dire avec le même nombre de fermions dans chaque état interne. Dans ce cas, le condensat est formé de paires au repos, avec un vecteur d'onde de leur centre de masse nul.

Observer la cohérence macroscopique d'un condensat de paires de fermions est aussi plus difficile que dans un condensat de bosons, où il apparaît un pic de population dans le mode fondamental. Puisqu'il s'agit d'une condensation de paires, elle affecte seulement les observables à deux corps et se révèle donc dans les corrélations entre des mesures de densité du gaz [67, 68]. Néanmoins, il est toujours possible de transformer les paires en dimères quasi bosoniques dans la limite CBE à l'aide d'une résonance de Feshbach, et donc de réutiliser les techniques d'observation ayant fait leurs preuves sur des condensats bosoniques. Cette astuce a permis l'observation de franges d'interférence dans le recouvrement après temps de vol de deux condensats de dimères [69]. La phase relative des deux condensats n'étant pas initialement bien définie, le contraste des franges est nul après moyenne sur les réalisations dans une telle expérience. Reprendre ce protocole avec deux condensats initialement cohérents paraît

à portée des techniques actuelles et permettrait d'identifier d'éventuelles sources de pertes de cohérence.

L'étude, aussi bien théorique qu'expérimentale, du temps de cohérence intrinsèque d'un gaz de fermions à température non nulle promet d'être encore plus riche que le cas bosonique sur plusieurs points. D'abord, il sera possible de suivre l'évolution de ce temps le long de la transition continue entre les régimes BCS et CBE, et, entre ces deux extrêmes, d'étudier la limite unitaire, point où la longueur de diffusion devient infinie et les interactions résonnantes, et où le comportement du gaz peut être qualifié d'universel au sens où il ne dépend d'aucune échelle de longueur associée aux interactions. Ensuite, le spectre des excitations élémentaires du gaz de fermions appariés est plus riche que celui du gaz de bosons : d'une part les paires de fermions peuvent être excitées dans leur mouvement relatif, éventuellement jusqu'à la brisure, ce qui constitue une première branche d'excitation de type fermionique [70, 42], d'autre part, leur centre de masse peut être mis en mouvement, ce qui constitue une branche d'excitation bosonique, plus semblable à la branche d'excitation dite de Bogolioubov d'un gaz de bosons. L'inclusion des contributions de ces deux branches à la dynamique de la phase du condensat est un des défis majeurs de cette thèse. Enfin, l'existence de changements de concavité dans les deux branches d'excitation modifie les processus d'amortissement des quasi-particules : même à basse température, ce ne sont plus nécessairement les processus $1 \leftrightarrow 2$ de type Beliaev-Landau qui dominent la cinétique du gaz comme dans un gaz de bosons. Ces modifications se répercutent sur le taux d'étalement diffusif de la phase, et donc sur le temps de cohérence du gaz.

Plan de cette thèse : Le présent travail sera divisé en trois parties. *Dans la première partie*, nous exposerons le raisonnement qui permet de conclure en toute généralité que la fonction de cohérence du condensat de paires de fermions se brouille après un temps que nous appelons le temps *de brouillage* et que nous exprimerons en fonction des paramètres thermodynamiques du gaz. Pour cela nous introduirons l'opérateur phase du condensat de paires, dont la dérivée par rapport au temps est une dérivée adiabatique de l'énergie par rapport au nombre de particules, sorte d'opérateur potentiel chimique. Les fluctuations de cet opérateur, qu'en invoquant l'hypothèse de thermicité des états propres nous relierons aux fluctuations de l'énergie et du nombre de particules, conduisent à un étalement balistique de l'opérateur phase et à une décroissance gaussienne de la fonction de cohérence, phénomène que nous appelons *superdiffusion* de phase. À l'ordre suivant en la taille du système, l'approche non perturbative que nous utilisons, fondée sur l'utilisation de la résolvante et de la méthode des projecteurs, permet de montrer que la *diffusion* de l'opérateur phase du condensat sous l'effet des interactions entre quasi-particules à température non nulle ajoute une décroissance exponentielle à la fonction de cohérence. Cet effet, en principe sous-dominant, est cependant le seul brouillage qui subsiste dans un gaz préparé dans l'ensemble microcanonique. *Dans la deuxième partie*, nous revenons à l'étude de la dynamique de l'opérateur phase du condensat et établissons fermement, sur une base microscopique, l'équation fondamentale qui relie sa dérivée temporelle à un opérateur potentiel chimique, dans lequel nous pointons les contributions des deux branches d'excitation, fermionique et bosonique. Nous aborderons ce problème par les différentes théories de basse énergie du gaz cohérent de fermions : (i) l'approche hydrodynamique quantique qui permet d'inclure la branche bosonique sans approximation aucune sur l'équation d'état du gaz mais en se contentant d'une description mésoscopique qui omet les degrés de liberté internes des paires et donc la branche d'excitation fermionique, (ii) l'Approximation de la Phase Aléatoire (RPA), fondée sur l'approximation de Bardeen-Cooper-Schrieffer

(BCS) de l'état fondamental, qui décrit correctement la branche d'excitation fermionique et sa contribution à la dynamique de phase mais échoue à inclure la branche bosonique, et enfin (iii) une théorie variationnelle, semi-classique et microscopique, qui parvient à décrire tout le spectre d'excitation et sa contribution à la dynamique de phase par un raisonnement général, reposant uniquement sur les symétries du hamiltonien, symétries que notre théorie prend soin de respecter. Toujours dans cette deuxième partie, nous exploitons le cadre fourni par la théorie variationnelle pour obtenir des résultats analytiques explicites sur la branche bosonique : son spectre, les opérateurs de création et d'annihilation de quasi-particule qui lui sont associés et le taux d'amortissement de ces quasi-particules par les processus Beliaev-Landau $1 \leftrightarrow 2$. Ces résultats sont exploités dans un dernier chapitre pour décrire la diffusion de la phase du condensat à basse température dans le cas d'une branche bosonique convexe. Enfin, *une troisième partie* combine les résultats microscopiques explicites de la deuxième partie à des données expérimentales pour fournir des estimations quantitatives du temps de cohérence du gaz, à température nulle puis dans l'ensemble canonique à la limite unitaire, et finalement dans l'ensemble microcanonique. À chaque fois, nous proposons un protocole simple et à la portée des dispositifs expérimentaux actuels pour observer la cohérence et le brouillage du gaz de paires de fermions.

Première partie
Brouillage de phase

Chapitre I

Brouillage de phase à température nulle

Ce chapitre introductif entend permettre une première compréhension intuitive du brouillage de phase dans un gaz de paires de fermions, à partir d'une situation expérimentale concrète, et à température nulle. La séquence que nous imaginons est la suivante : (i) Un gaz de N fermions répartis à proportions égales dans deux états internes notés \uparrow et \downarrow est préparé sous forme de dimères bosoniques \uparrow / \downarrow dans le mode fondamental ϕ_0 d'un puits simple et avec des interactions négligeables. (ii) Une barrière de potentiel sépare le gaz en

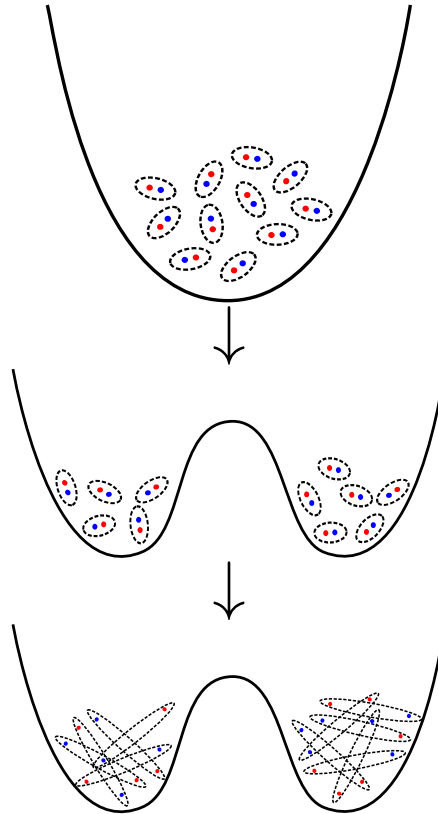


FIGURE I.1 – Gaz parfait de dimères bosoniques initialement dans un puits simple. Le gaz est ensuite séparé en deux composantes spatiales non polarisées par une évolution adiabatique du potentiel de piégeage vers un potentiel en double puits symétrique.

deux sous-systèmes a et b , cohérents entre eux et piégés dans des puits symétriques l'un de l'autre; nous appelons \hat{a} (respectivement \hat{b}) l'opérateur d'annihilation d'un dimère dans le mode fondamental du puits a (respectivement b). Au cours de la séparation, nous supposons que le couplage tunnel et la variation adiabatique du potentiel de piégeage assurent que le gaz demeure dans son état fondamental, où chaque dimère est dans la superposition $(\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger)|0\rangle/\sqrt{2}$,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{(N/2)!}} \left(\frac{\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger}{\sqrt{2}} \right)^{N/2} |0\rangle = \sum_{n_a=0}^{N/2} c_{n_a} |n_a : \phi_{0a}; N/2 - n_a : \phi_{0b}\rangle, \quad (\text{I.1})$$

avec ici $c_{n_a} = 2^{-N/4} \binom{N/2}{n_a}^{1/2}$, $\phi_{0a(b)}$ la fonction d'onde du condensat dans le puits $a(b)$ et n_a le nombre de dimères bosoniques dans le puits a . (iii) Le lien entre les deux puits est coupé et les deux systèmes évoluent séparément tout en restant intriqués. Dans le même temps, la force des interactions est ajustée pour atteindre le régime intermédiaire souhaité entre CBE et BCS. Nous supposons cet ajustement suffisamment lent pour que l'état $|n_a : \phi_{0a}; N/2 - n_a : \phi_{0b}\rangle$ de dimères se transforme en l'état $|\psi_{0a}(2n_a); \psi_{0b}(N - 2n_a)\rangle$ avec $2n_a$ (respectivement $N - 2n_a$) fermions dans l'état fondamental du puits a (respectivement b),

$$|\psi\rangle = \sum_{n_a=0}^{N/2} c_{n_a} |\psi_{0a}(2n_a); \psi_{0b}(N - 2n_a)\rangle, \quad (\text{I.2})$$

mais néanmoins suffisamment rapide pour ne pas donner lieu à une dynamique de phase significative. (iv) On laisse ensuite l'état (I.2) évoluer pendant un temps t . Chacun des termes de la superposition est un état propre du hamiltonien et acquiert un facteur de phase $\exp(-it(E_0(2n_a) + E_0(N - 2n_a))/\hbar)$ où $E_0(N')$ est l'énergie d'un gaz non polarisé de N' fermions dans le puits a ou b . (v) Enfin, nous mesurons par interférence la fonction de corrélation $a - b$ aux temps égaux,

$$C_{ab}(t) = \langle \psi(t) | \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}_b) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}_b) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_a) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_a) | \psi(t) \rangle. \quad (\text{I.3})$$

où $\hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r})$ est l'opérateur de création d'un fermion de spin σ au point \mathbf{r} , la position $\mathbf{r}_{a(b)}$ appartenant au puits $a(b)$. Pour un grand système, les coefficients $c_{n_a} c_{n_a-1} \approx c_{n_a}^2$ de la superposition obtenue en (I.2) s'approchent, d'après le théorème de Moivre-Laplace, d'une distribution gaussienne pour le nombre de paires n_a , de moyenne $N/4$ et d'écart-type $\sqrt{N/8}$. Les fluctuations relatives de la différence des nombres de fermions $N_a - N_b$, avec $N_a = 2n_a$ et $N_b = N - N_a$, diminuent donc comme $1/\sqrt{N}$ avec la taille du système. Ce constat autorise plusieurs approximations. Premièrement, l'élément de matrice de l'opérateur $\hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}_b, 0) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}_b, 0) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_a, 0) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_a, 0)$, qui transfère deux fermions du puits a au puits b et ne connecte donc, dans la superposition (I.2), l'état $|\psi_{0a}(2n_a); \psi_{0b}(N - 2n_a)\rangle$ qu'au seul état $|\psi_{0a}(2n_a - 2); \psi_{0b}(N - 2n_a + 2)\rangle$, cet élément de matrice varie peu en fonction de n_a dans un voisinage d'ordre \sqrt{N} autour de $2n_a = N/2$; c'est donc, à peu de chose près, la valeur initiale de la fonction de corrélation $C_{ab}(0)$. Deuxièmement, nous nous autorisons à développer l'énergie $E_0(N_{a(b)})$ autour de sa valeur en $N_a = N_b = N/2$:

$$E_0(N_\sigma) = E_0(N/2) + \mu_0 \left(N_\sigma - \frac{N}{2} \right) + \frac{1}{2} \frac{d\mu_0}{dN_\sigma} \left(N_\sigma - \frac{N}{2} \right)^2 + \dots \quad (\text{I.4})$$

où $\mu_0(N_\sigma)$ est le potentiel chimique de l'état fondamental à N_σ particules, dérivée par rapport à N_σ de l'énergie $E_0(N_\sigma)$, pris en $N_\sigma = N/2$ et égal dans les deux puits a et b par symétrie. En négligeant les termes cubiques en $(N_{a(b)} - N/2)$ dans le développement de E_0 , et en tenant compte du fait qu'il apparaît des différences d'énergie $E_0(2n_a) - E_0(2n_a - 2)$ et $E_0(N - 2n_a) - E_0(N + 2 - 2n_a)$ dans chaque terme de $C_{ab}(t)$, nous obtenons pour la fonction de corrélation l'expression suivante :

$$C_{ab}(t) \simeq C_{ab}(0) \sum_{n_a=1}^{N/2} c_{n_a}^2 \exp\left(-\frac{2it}{\hbar} \frac{d\mu_0}{dN_\sigma}(N_a - N_b)\right). \quad (\text{I.5})$$

Pour un grand système, la somme sur le nombre de paires n_a peut être remplacée par l'intégrale, gaussienne étant donné ce qui a été dit plus haut, d'un facteur de phase linéaire en $N_a - N_b = 4n_a - N$. Le résultat est immédiat :

$$C_{ab}(t) \simeq C_{ab}(0) \exp\left[-\frac{2t^2}{\hbar^2} \left(\frac{d\mu_0}{dN_\sigma}\right)^2 \text{Var}\left(\hat{N}_a - \hat{N}_b\right)\right]. \quad (\text{I.6})$$

Dans cette formule l'opérateur $\hat{N}_{a(b)}$ est l'opérateur nombre de fermions dans le puits $a(b)$. Deux ingrédients entrent dans le calcul du temps caractéristique de la décroissance gaussienne que nous prédisons : premièrement la variance du nombre relatif de particules, en l'occurrence poissonienne, $\text{Var}\left(\hat{N}_a - \hat{N}_b\right) = 2N$, mais qui peut dépendre du protocole de séparation des deux parties du gaz, et deuxièmement la dérivée du potentiel chimique μ_0 par rapport à N , quantité qui se comporte comme $1/N$ aux grands N , et qui peut être connue quantitativement à partir de l'équation d'état du gaz, chose qui, fort à propos, a récemment été mesurée expérimentalement [31]. De ce qui vient d'être dit nous concluons que le temps de brouillage du gaz diverge comme \sqrt{N} à la limite thermodynamique ; c'est donc un effet de taille finie.

Pour mesurer la fonction de corrélation de paires et tenter d'observer son brouillage, plusieurs propositions [67, 68, 71] existent qui utilisent les corrélations du bruit quantique dans des images après temps de vol, et plusieurs résultats expérimentaux ont été obtenus dans cette direction [72, 73]. Une autre possibilité est de retransformer les paires de fermions en dimères en ajustant à nouveau la force des interactions à la fin du temps d'interaction. La fonction de corrélation de paires devrait alors se comporter comme une fonction de corrélation bosonique à un corps, dont la mesurabilité a déjà été démontrée.

Chapitre II

Brouillage thermique

Le but de cette thèse est d'aller au-delà du raisonnement présenté en introduction, qui nous laisse insatisfaits car il ne permet pas de décrire les effets de la température sauf dans le cas non physique d'un système intégrable (*cf.* annexe A). Venir à bout du cas thermique requiert une compréhension plus en profondeur du phénomène de brouillage, et en particulier, d'adopter une description microscopique de la dynamique du gaz au cours de son évolution libre. Pour cela, la première étape est de lier le brouillage du gaz à la dynamique de l'opérateur phase du condensat de paires, opérateur dont nous commençons par donner la définition. Comme nous le verrons dans la suite de ce travail, il est commode de discrétiser l'espace en un réseau cubique de pas l afin de pouvoir modéliser l'interaction entre les deux états de spin \uparrow et \downarrow par un potentiel δ de Kronecker sur site, d'une façon donc exempte de divergence ultraviolette.

II.1 Mode et phase d'un condensat de paires de fermions

Cette première partie entend donner une définition claire et rigoureuse de l'opérateur phase du condensat de paires dont nous aurons besoin tout au long de cette thèse. Pour commencer, nous supposons qu'à température nulle il existe un et un seul condensat peuplé par un nombre macroscopique de paires. Plus précisément, nous disons que dans l'état fondamental du gaz, la matrice densité à deux corps ρ_2 possède un et un seul mode propre macroscopiquement peuplé. Nous appelons ce mode le *mode du condensat*, nous le notons $\varphi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ et nous le choisissons normalisé à l'unité

$$l^6 \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} |\varphi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)|^2 = 1. \quad (\text{II.1})$$

Comme le gaz polarisé n'a pas de cohérence du premier ordre entre \uparrow et \downarrow , le mode du condensat s'obtient en résolvant l'équation aux valeurs propres :

$$l^6 \sum_{\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2} \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \varphi_0(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = \bar{N}_0 \varphi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (\text{II.2})$$

où ρ_2 est la matrice densité dans l'espace réel à deux fermions de spins opposés

$$\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = \langle \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}'_1) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}'_2) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) \rangle_0 \quad (\text{II.3})$$

et la moyenne $\langle \dots \rangle_0$ est prise dans l'état fondamental du système. Le choix de définir le mode du condensat à température nulle, plutôt que dans un état thermique sera une constante dans toute cette thèse où nous développerons plusieurs théorie en puissances de faibles déviations autour de l'état fondamental ; cela suppose bien sûr d'être à température suffisamment faible. Le *nombre moyen de paires condensées* \bar{N}_0 , valeur propre apparaissant dans l'équation (II.2), est une fraction non nulle à la limite thermodynamique du nombre total $N/2$ de paires de fermions. L'amplitude \hat{a}_0 du champ de paires dans le mode du condensat s'obtient par projection sur φ_0 :

$$\hat{a}_0 \equiv l^6 \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \varphi_0^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1). \quad (\text{II.4})$$

La *phase du condensat* est la phase de cette amplitude :

$$e^{-i\hat{\theta}_0} = \frac{1}{\sqrt{\hat{N}_0}} \hat{a}_0^\dagger, \quad (\text{II.5})$$

où $\hat{N}_0 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$ est l'opérateur nombre de paires condensées. La décomposition (II.5) de l'amplitude du condensat \hat{a}_0 en un module $\sqrt{\hat{N}_0}$ et une phase $\hat{\theta}_0$ supposée hermitienne est légitime à condition (i) l'on puisse considérer que l'opérateur \hat{N}_0 est inversible, c'est-à-dire exclure la possibilité que le condensat soit vide, ce qui est légitime si la température est faible devant la température critique et (ii) que l'opérateur $e^{i\hat{\theta}_0}$ soit unitaire comme le suggère son écriture. Il faut donc nous assurer que

$$\hat{a}_0 \frac{1}{\hat{N}_0} \hat{a}_0^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\hat{N}_0}} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \frac{1}{\sqrt{\hat{N}_0}} = 1 \quad (\text{II.6})$$

La seconde égalité est évidente. La première en revanche nécessite quelques manipulations. Nous utilisons l'égalité

$$\left(1 + \frac{1}{\hat{N}_0} [\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger]\right) \hat{a}_0 \frac{1}{\hat{N}_0} \hat{a}_0^\dagger = \left(1 + \frac{1}{\hat{N}_0} [\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger]\right) \quad (\text{II.7})$$

qui s'obtient par simple développement des commutateurs. Si l'opérateur \hat{a}_0 était bosonique, $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = 1$, l'opérateur $\left(1 + \frac{1}{\hat{N}_0} [\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger]\right)$ serait suffisamment proche de l'identité à la limite des grands N_0 pour être inversible, ce qui prouverait l'égalité manquante dans (II.6). Mais étant un opérateur de paires de fermions, \hat{a}_0 ne peut être exactement bosonique

$$\begin{aligned} [\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = 1 - l^9 \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}'_1} \varphi_0^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \varphi_0(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}'_1) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) \\ - l^9 \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}_2} \varphi_0^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \varphi_0(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_2) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}'_2) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2), \quad (\text{II.8}) \end{aligned}$$

et pour la même raison, $\hat{\theta}_0$ et \hat{N}_0 ne peuvent être des variables canoniquement conjuguées. Néanmoins, en supposant que le gaz ne contienne pas de cohérence à longue portée à un corps¹, il demeure vrai que les éléments de matrice du commutateur $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger]$ sont d'ordre unité comme le montre l'expression (II.8), et donc que l'opérateur entre parenthèses dans l'équation (II.7) est inversible.

1. Nous excluons donc les états dans lesquels les fonctions $\langle \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}'_1) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) \rangle$ et $\langle \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}'_2) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \rangle$ ne sont pas à décroissance rapide en fonction respectivement de $\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}_2$.

Illustration par la théorie variationnelle de Hartree-Fock-Bogolioubov

Illustrons maintenant notre définition générale de $\hat{\theta}_0$ en prenant pour état fondamental approché celui, $|\psi_0\rangle$, de la théorie variationnelle (*cf.* chapitre VI). Cet état étant gaussien, on peut appliquer le théorème de Wick pour calculer ρ_2 :

$$\begin{aligned} \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = & \langle \psi_0 | \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}'_1) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}'_2) | \psi_0 \rangle \langle \psi_0 | \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) | \psi_0 \rangle \\ & + \langle \psi_0 | \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}'_1) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) | \psi_0 \rangle \langle \psi_0 | \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}'_2) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) | \psi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Dans $|\psi_0\rangle$ les fonctions de cohérence à un corps tendent vers zéro pour des valeurs typiques de $\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1\|$ et $\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2\|$ de l'ordre de la taille d'une paire². À la limite thermodynamique, leur contribution à l'intégrale dans (II.2) est donc négligeable. Les opérateurs tels que $\hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r})\hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}')$, qui changent la polarisation du gaz, ont eux une valeur moyenne nulle dans $|\psi_0\rangle$, qui décrit un gaz non polarisé. On obtient alors le vecteur propre macroscopique de ρ_2 en posant

$$\varphi_0^{\text{HFB}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{\langle \psi_0 | \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) | \psi_0 \rangle}{\sqrt{\bar{N}_0^{\text{HFB}}}} \quad (\text{II.11})$$

où \bar{N}_0^{HFB} est le nombre moyen de paires condensées prédit par la théorie variationnelle :

$$\bar{N}_0^{\text{HFB}} = l^6 \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} |\langle \psi_0 | \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) | \psi_0 \rangle|^2. \quad (\text{II.12})$$

L'approximation de Hartree-Fock-Bogolioubov de l'opérateur (II.4) d'annihilation d'une paire dans le condensat s'écrit

$$\hat{a}_0^{\text{HFB}} = \frac{l^6}{\sqrt{\bar{N}_0^{\text{HFB}}}} \sum_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2} \langle \psi_0 | \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}_2) | \psi_0 \rangle \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) \quad (\text{II.13})$$

et la phase associée

$$e^{-i\hat{\theta}_0^{\text{HFB}}} = \frac{l^6}{\sqrt{\hat{N}_0^{\text{HFB}} \bar{N}_0^{\text{HFB}}}} \sum_{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2} \langle \psi_0 | \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) | \psi_0 \rangle \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}_2) \quad (\text{II.14})$$

où $\hat{N}_0^{\text{HFB}} = (\hat{a}_0^{\text{HFB}})^\dagger \hat{a}_0^{\text{HFB}}$. Dans le cas plus particulier du hamiltonien d'interaction dans l'onde s dont l'état fondamental approché est $|\psi_0^{\text{BCS}}\rangle$ (*cf.* section IV.2.2.3 en page 54) nous avons

$$\langle \psi_0^{\text{BCS}} | \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) | \psi_0^{\text{BCS}} \rangle = -\frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \quad (\text{II.15})$$

2. Dans le cadre de la théorie BCS (*cf.* chapitre IV), on peut calculer explicitement ces fonctions de corrélation à un corps :

$$\langle \psi_0^{\text{BCS}} | \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}) | \psi_0^{\text{BCS}} \rangle = \frac{1}{2L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \left(1 - \frac{\hbar^2 k^2 / 2m - \mu}{\sqrt{(\hbar^2 k^2 / 2m - \mu)^2 + \Delta_0^2}} \right). \quad (\text{II.10})$$

Ce sont des transformées de Fourier de fonctions décroissantes de k , de largeur typique $m\Delta_0/(\hbar^2 k_{\min})$ autour de $k_{\min} = (2m\mu/\hbar^2)^{1/2}$, d'où une largeur spatiale typique $\hbar^2 k_{\min}/m\Delta_0$ qui est aussi la taille typique des paires.

et donc un opérateur phase

$$e^{-i\hat{\theta}_0^{\text{BCS}}} = -\frac{1}{\sqrt{\bar{N}_0^{\text{BCS}} \hat{N}_0^{\text{BCS}}}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger, \quad (\text{II.16})$$

où Δ_0 est la *gap* BCS, l'opérateur $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ annihile un fermion de vecteur d'onde \mathbf{k} dans l'état de spin σ , $\mathcal{D} = \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3 \cap [-\pi/l, \pi/l]^3$ est l'ensemble des vecteurs de la première zone de Brillouin compatibles avec les conditions aux limites périodiques et $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$ est le spectre des excitations fermioniques BCS. Une version linéarisée de cet opérateur pour des états proches de l'états BCS à symétrie brisée est donnée par l'équation (V.121). Le nombre de paires condensées est de façon remarquable proportionnel à la variance du nombre de particules dans l'état $|\psi_0^{\text{BCS}}\rangle$:

$$\bar{N}_0^{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0^2}{4\epsilon_{\mathbf{k}}^2} = \frac{\text{Var } \hat{N}}{4}. \quad (\text{II.17})$$

Les variations de la fraction condensée $2\bar{N}_0^{\text{BCS}}/\bar{N}$ en fonction de $1/k_F a$ sont représentées sur la figure IV.3 en page 57. Dans la limite CBE, tous les dimères sont condensés $\bar{N}_0^{\text{BCS}} \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} \bar{N}/2$ alors qu'à l'inverse le nombre de paires condensées tend vers 0 lorsque l'état se rapproche d'une mer de Fermi dans la limite BCS, $\bar{N}_0^{\text{BCS}} \xrightarrow{a \rightarrow 0^-} 0$. Enfin le commutateur (II.8) peut s'expliciter

$$[\hat{a}_0^{\text{BCS}}, (\hat{a}_0^{\text{BCS}})^\dagger] = 1 - \frac{1}{\bar{N}_0^{\text{BCS}}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}, \sigma = \uparrow, \downarrow} \frac{\Delta_0^2}{4\epsilon_{\mathbf{k}}^2} \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \quad (\text{II.18})$$

Puisque $|\langle \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \rangle| < 1$ dans tout état du gaz, les éléments de matrice de ce commutateur sont bien d'ordre unité. De plus, dans la limite CBE où les dimères sont fortement liés et où la fonction d'onde de paire est très large dans l'espace de Fourier, les modes de Fourier tendent à devenir très peu peuplés $|\langle \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} \rangle| \ll 1$ pour tout état proche de l'état fondamental. Dans cette limite l'opérateur \hat{a}_0 est donc en pratique un opérateur bosonique.

II.2 Décroissance de la fonction de cohérence temporelle

Reprenons maintenant notre étude de la cohérence du gaz. Contrairement au chapitre introductif où nous étudions la cohérence à temps égaux de deux sous-parties du gaz, nous nous intéressons ici à la cohérence temporelle d'un gaz contenu dans un piège simple. Aux températures inférieures à la température critique, la fonction de cohérence temporelle du champ de paires $\hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}')$ est dominée aux temps longs par celle du condensat :

$$g_1(t) = \langle \hat{a}_0^\dagger(t) \hat{a}_0(0) \rangle. \quad (\text{II.19})$$

Nous imaginons que le gaz a été, à un moment donné de sa préparation, en contact avec un réservoir qui a fixé par exemple sa température et son nombre moyen de particules, mais que ce contact a été coupé si bien que le gaz, entièrement isolé de son environnement, se trouve dans un mélange statistique d'états propres à N corps $|\psi_\lambda\rangle$, avec des poids Π_λ ,

$$\hat{\rho} = \sum_{\lambda} \Pi_\lambda |\psi_\lambda\rangle \langle \psi_\lambda| \quad (\text{II.20})$$

Selon le protocole de préparation du gaz, ces poids Π_λ peuvent décrire une distribution canonique, grand-canonique, voir même microcanonique, par exemple lorsque le gaz est dans l'état pur³ $|\psi_\lambda\rangle$. La fonction g_1 est d'ailleurs la moyenne avec la distribution Π_λ des fonctions de cohérence microcanoniques

$$g_1^\lambda(t) = \langle \psi_\lambda | \hat{a}_0^\dagger(t) \hat{a}_0(0) | \psi_\lambda \rangle. \quad (\text{II.21})$$

La première partie de notre problème consiste donc à étudier la cohérence du gaz dans l'ensemble microcanonique déterminé par l'état propre $|\psi_\lambda\rangle$, d'énergie E_λ et de nombre de particules N_λ .

II.2.1 Brouillage dans l'ensemble microcanonique - Diffusion de phase

Pour tirer parti des faibles fluctuations relatives du nombre de paires condensées pour un grand système, nous utilisons la décomposition (II.5) en les opérateurs hermitiens phase et module et nous approximations \hat{N}_0 par sa valeur moyenne \bar{N}_0 dans l'état d'équilibre du système. Il reste dans g_1^λ un produit de trois exponentielles

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{iE_\lambda t/\hbar} \left\langle e^{-i\hat{\theta}_0} e^{-i\hat{H}t/\hbar} e^{i\hat{\theta}_0} \right\rangle_\lambda = \bar{N}_0 e^{iE_\lambda t/\hbar} \left\langle \exp \left(-ie^{-i\hat{\theta}_0} \hat{H} e^{i\hat{\theta}_0} t/\hbar \right) \right\rangle_\lambda \quad (\text{II.22})$$

où, par souci de compacité, nous nous permettons d'utiliser la notation $\langle \hat{A} \rangle_\lambda \equiv \langle \psi_\lambda | \hat{A} | \psi_\lambda \rangle$. Nous pouvons récrire formellement ce produit d'exponentielles sous forme d'une amplitude de probabilité de non-transition :

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{iE_\lambda t/\hbar} \langle \psi_\lambda | e^{-i(\hat{H} + \hat{W})t/\hbar} | \psi_\lambda \rangle. \quad (\text{II.23})$$

L'opérateur « perturbatif » \hat{W} , différence entre le transformé de \hat{H} par $e^{i\hat{\theta}_0}$ et \hat{H} , peut s'exprimer comme une série de commutateurs itérés à l'aide de la formule de Baker-Campbell-Hausdorff :

$$\hat{W} = e^{-i\hat{\theta}_0} \hat{H} e^{i\hat{\theta}_0} - \hat{H} = -i[\hat{\theta}_0, \hat{H}] - \frac{1}{2}[\hat{\theta}_0, [\hat{\theta}_0, \hat{H}]] + \dots \quad (\text{II.24})$$

De plus, et c'est la raison pour laquelle nous l'avons introduit, il est approximativement N fois plus petit que \hat{H} . En effet, puisque $e^{i\hat{\theta}_0}$, comme \hat{a}_0 , change le nombre total de particules d'un $O(N^0)$, les éléments de matrice du transformé $e^{-i\hat{\theta}_0} \hat{H} e^{i\hat{\theta}_0}$ diffèrent de ceux de \hat{H} d'une quantité qui est de l'ordre de l'énergie par particules, beaucoup plus petite que l'énergie du gaz. Ainsi, alors que \hat{H} est une observable extensive, \hat{W} est un opérateur intensif et le double commutateur dans (II.24) est d'ordre \bar{E}/N^2 , où \bar{E} est l'énergie moyenne du gaz.

Il apparaît formellement dans l'équation (II.23) un opérateur d'évolution correspondant au hamiltonien \hat{H} perturbé par \hat{W} , restreint à l'état propre $|\psi_\lambda\rangle$ de \hat{H} . La fonction g_1^λ/\bar{N}_0 est donc, à un facteur de phase près, proportionnelle à l'amplitude de probabilité que le système initialement préparé dans $|\psi_\lambda\rangle$ y soit encore au bout d'un temps t sous l'évolution perturbée par \hat{W} . Une approche naturelle pour obtenir une approximation non perturbative de cette amplitude est celle des fonctions de Green ou de l'opérateur résolvante

$$\hat{G}(z) = \frac{1}{z\hat{1} - (\hat{H} + \hat{W})} \quad (\text{II.25})$$

3. Dans un système quantique ergodique, un état propre du hamiltonien est nécessairement équivalent, en ce qui concerne les valeurs moyennes des quantités thermodynamiques, à l'ensemble microcanonique correspondant à son énergie et à son nombre de particules puisque par définition toutes les valeurs moyennes dans cet état sont stationnaires, donc égales à leur moyenne ergodique.

du hamiltonien perturbé. Au voisinage de l'axe réel, les opérateurs $\hat{G}(E + i0^+)$ et $\hat{G}(E - i0^+)$ s'interprètent comme les propagateurs, respectivement retardé et avancé, du hamiltonien perturbé $\hat{H} + \hat{W}$. La probabilité de transition $\langle \psi_\lambda | e^{-i(\hat{H} + \hat{W})t/\hbar} | \psi_\lambda \rangle$, et donc la fonction g_1^λ , s'exprime comme une transformée de Fourier de ces propagateurs⁴ dans l'état $|\psi_\lambda\rangle$:

$$g_1^\lambda(t) \simeq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(E - E_\lambda)t/\hbar} \frac{1}{2i\pi} \langle \psi_\lambda | \left(\hat{G}(E - i0^+) - \hat{G}(E + i0^-) \right) | \psi_\lambda \rangle dE. \quad (\text{II.26})$$

Par la méthode des projecteurs (voir la sous-section §III.B.2 de la référence [74]), on définit un hamiltonien effectif non hermitien

$$\hat{H}_{\text{eff}}(z) = \hat{H} + \hat{W} + \hat{W} \hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{z \hat{Q}_\lambda - \hat{Q}_\lambda (\hat{H} + \hat{W}) \hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda \hat{W} \quad (\text{II.27})$$

gouvernant l'évolution restreinte à $|\psi_\lambda\rangle$, donc tel que

$$\langle \psi_\lambda | \hat{G}(z) | \psi_\lambda \rangle = \frac{1}{z - \langle \psi_\lambda | \hat{H}_{\text{eff}}(z) | \psi_\lambda \rangle}. \quad (\text{II.28})$$

Nous avons introduit dans (II.27) le projecteur orthogonal à l'état $|\psi_\lambda\rangle$

$$\hat{Q}_\lambda = \hat{1} - |\psi_\lambda\rangle \langle \psi_\lambda|. \quad (\text{II.29})$$

Limitons-nous dans $\hat{H}_{\text{eff}}(z)$ à l'ordre deux en \hat{W}

$$\hat{H}_{\text{eff}}(E \pm i\eta) \approx \hat{H} + \hat{W} + \hat{W} \hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{(E \pm i\eta) \hat{Q}_\lambda - \hat{Q}_\lambda \hat{H} \hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda \hat{W} \quad (\text{II.30})$$

et discutons le premier et le second ordre en \hat{W} ⁵ de sa valeur moyenne dans $|\psi_\lambda\rangle$.

a. Premier ordre en \hat{W} Le terme du premier ordre est $\langle \psi_\lambda | \hat{W} | \psi_\lambda \rangle$, d'ordre N^0 comme \hat{W} . Afin de l'interpréter, nous constatons d'abord que, d'après le développement (II.24), en point de vue de Heisenberg,

$$\hat{W}(t) = \hbar \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} + O\left(\frac{\bar{E}}{N^2}\right). \quad (\text{II.31})$$

Cette innocente équation fait le lien entre les deux problèmes qui sont au cœur de cette thèse : le brouillage du gaz d'une part, et la dynamique de l'opérateur phase d'autre part. L'étude de la dynamique de phase demande beaucoup de travail, et nous occupera tout au long des chapitres V et VI. Néanmoins, pour ne pas nous cantonner ici à une description purement formelle du brouillage du gaz, et pour pouvoir relier le temps de brouillage à des quantités thermodynamiques comme au chapitre introductif, nous donnons et commentons dès à présent le résultat central de cette étude. La moyenne temporelle à gros grains de $d\hat{\theta}_0/dt$

4. Pour $t > 0$, la contribution du propagateur avancé $\hat{G}(E - i0^+)$ est en fait nulle comme on le voit en refermant le contour d'intégration dans le demi-plan complexe inférieur où la résolvante $\hat{G}(z)$ du hamiltonien perturbé $\hat{H} + \hat{W}$ n'a pas de pôle. Nous gardons néanmoins cette forme qui conduit à des résultats plus symétriques, comme à l'équation (II.44).

5. Le terme d'ordre zéro est trivial, c'est l'énergie E_λ , qui compense le facteur $\exp(iE_\lambda t/\hbar)$ présent dans (II.23).

dans un gaz faiblement excité est en fait proportionnelle à un opérateur potentiel chimique, quantité thermodynamique par nature :

$$\boxed{-\frac{\hbar}{2} \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} = \mu_0(\hat{N}) + \sum_{s=F,B} \sum_{\alpha} \frac{d\epsilon_{s,\alpha}}{dN} \hat{n}_{s,\alpha}} \quad (\text{II.32})$$

La somme au second membre porte sur les deux branches d'excitation, celle des quasi-particules fermioniques (α inclut un indice de spin et un indice orbital, $\alpha = \mathbf{k}, \sigma$ pour un système spatialement homogène) qui présente une bande interdite, et celle des quasi-particules bosoniques (α est uniquement orbital, $\alpha = \mathbf{q}$ dans le cas homogène) dont le départ, à la limite thermodynamique et pour un système homogène, est phononique. Lorsque nous disons que le gaz doit être faiblement excité, nous voulons dire que la déplétion thermique du condensat doit rester petite. Ceci suppose en particulier que le nombre moyen de quasi-particules soit une faible fraction du nombre total de particules. La moyenne temporelle à gros grains est prise sur un temps long devant l'inverse des pulsations propres typiques $\epsilon_{s,\alpha}/\hbar$ de ces quasi-particules mais court devant leur temps de collision, c'est-à-dire le temps typique de variation des $\hat{n}_{s,\alpha}$, ce qui suppose que ces quasi-particules sont dans le régime faiblement collisionnel de Knudsen. Enfin $\mu_0(N)$ est le potentiel chimique à température nulle du gaz non polarisé à N particules, autrement dit la dérivée de l'énergie du fondamental $E_0(N)$ par rapport à N . Nous interprétons le membre de droite de (II.32) comme un « opérateur potentiel chimique » au sens où sa moyenne dans l'état $|\psi_\lambda\rangle$ est la dérivée de l'énergie des quasi-particules

$$E_\lambda \simeq E_0(N_\lambda) + \sum_{s=F,B} \sum_{\alpha} \epsilon_{s,\alpha} \langle \hat{n}_{s,\alpha} \rangle_\lambda, \quad (\text{II.33})$$

par rapport à N aux populations des quasi-particules $\langle \hat{n}_{s,\alpha} \rangle_\lambda$ fixées

$$\langle \psi_\lambda | \hbar \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} | \psi_\lambda \rangle = -2 \left. \frac{\partial E_\lambda}{\partial N} \right|_{\{\langle \hat{n}_{s,\alpha} \rangle_\lambda\}} = -2 \left. \frac{\partial E_\lambda}{\partial N} \right|_S. \quad (\text{II.34})$$

Cette dérivée (II.34) consiste à faire varier le paramètre N sans changer la configuration microscopique des populations de quasi-particules, c'est donc une dérivée adiabatique, à entropie S fixée. L'équation (II.32) relie donc la dérivée de la phase au potentiel chimique au niveau des opérateurs quantiques d'une théorie microscopique multimode. De ce point de vue, elle va au-delà de la seconde relation de Josephson établie pour la phase du paramètre d'ordre du supraconducteur (*cf.* la section §3.4 de [29]).

Enfin, en utilisant l'hypothèse de thermicité des états propres [75] pour identifier moyenne dans un état propre et moyenne d'ensemble microcanonique, on montre que la dérivée adiabatique dans (II.34) ne dépend pas réellement de tous les détails microscopiques de la configuration λ , mais uniquement des paramètres thermodynamiques associés à l'état $|\psi_\lambda\rangle$ c'est-à-dire ici, l'énergie et le nombre de particules⁶

$$\left. \frac{\partial E_\lambda}{\partial N} \right|_S = \left. \frac{\partial E}{\partial N} \right|_S (E_\lambda, N_\lambda). \quad (\text{II.35})$$

6. Autrement dit tous les états $|\psi(E, N, \beta)\rangle$ et $|\psi(E, N, \beta')\rangle$ pour $\beta \neq \beta'$ se valent dès lors que l'on ne s'intéresse qu'à des quantités thermodynamiques telles que la dérivée adiabatique dans l'équation (II.34).

Cette quantité n'est autre que le potentiel chimique microcanonique μ_{mc} à l'énergie E_λ et au nombre de particules N_λ , si bien que

$$\langle \psi_\lambda | \hbar \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} | \psi_\lambda \rangle = -2\mu_{\text{mc}}(E_\lambda, N_\lambda). \quad (\text{II.36})$$

b. Second ordre en \hat{W} Le terme du second ordre dans $\langle \psi_\lambda | \hat{H}_{\text{eff}} | \psi_\lambda \rangle$ dépend, via son dénominateur, de l'énergie $E \pm i\eta$. Pour le calculer au voisinage de l'axe réel, nous commençons par injecter une relation de fermeture sur les états propres du hamiltonien, qu'à la limite thermodynamique nous pouvons écrire comme un continuum :

$$\hat{1} = \int \rho(E, N, \beta) |\psi(E, N, \beta)\rangle \langle \psi(E, N, \beta)| dE dN d\beta, \quad (\text{II.37})$$

où nous avons reparamétré les états propres par leur énergie, leur nombre de particules et d'éventuels nombres quantiques β supplémentaires $|\psi_{\lambda'}\rangle = |\psi(E_{\lambda'}, N_{\lambda'}, \beta_{\lambda'})\rangle$, et introduit la densité d'états ρ . Ensuite nous passons à la limite $\eta \rightarrow 0^+$ et utilisons la relation au sens des distributions $\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i0^+} = \mathcal{P} \frac{1}{x} \mp i\delta(x)$ pour établir

$$\hbar(\delta_\lambda(E) \mp i\gamma_\lambda(E)) = \langle \hat{W} \hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{(E \pm i0^+) \hat{Q}_\lambda - \hat{Q}_\lambda \hat{H} \hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda \hat{W} \rangle_\lambda \quad (\text{II.38})$$

avec

$$\hbar\delta_\lambda(E) = \mathcal{P} \int \rho(E', N', \beta') \frac{|\langle \psi_\lambda | \hat{W} | \psi(E', N', \beta') \rangle|^2}{E - E'} dE' dN' d\beta' \quad (\text{II.39})$$

$$\hbar\gamma_\lambda(E) = \int \rho(E, N, \beta) |\langle \psi_\lambda | \hat{W} | \psi(E, N, \beta) \rangle|^2 dN d\beta. \quad (\text{II.40})$$

Estimons l'ordre de grandeur de ces termes. Pour ce faire, nous les relierons à la fonction de corrélation temporelle de $d\hat{\theta}_0/dt$ dans l'état $|\psi_\lambda\rangle$. À une contribution d'ordre $1/N^2$ près :

$$\gamma_\lambda(E) + i\delta_\lambda(E) = \int_0^{+\infty} dt \left[\left\langle \frac{d\hat{\theta}_0(t)}{dt} \frac{d\hat{\theta}_0(0)}{dt} \right\rangle_\lambda - \left\langle \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} \right\rangle_\lambda^2 \right] e^{i(E - E_\lambda + i0^+)t/\hbar}. \quad (\text{II.41})$$

On vérifie cette expression en y injectant une relation de fermeture sur les états propres de \hat{H} , ce qui redonne bien l'équation (II.38). L'intégrande a comme valeur initiale $\text{Var}_\lambda(d\hat{\theta}_0/dt) = O(1/N)$ (ceci s'obtient en additionnant les variances des nombres de quasi-particules, ce qui correspond à un gaz parfait de quasi-particules dans l'ensemble canonique et surestime donc la variance microcanonique) et décroît sur le temps typique de corrélation τ_c des $\hat{n}_{s,\alpha}$, c'est-à-dire le temps typique de collision entre les quasi-particules, temps intensif donné à basse température par l'équation (VIII.61), à ne pas confondre avec le temps t_c de cohérence du condensat de paires. Pour $E = E_\lambda$, ceci conduit à l'estimation

$$|\gamma_\lambda(E_\lambda) + i\delta_\lambda(E_\lambda)| \approx \tau_c \text{Var} \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} = O(1/N). \quad (\text{II.42})$$

Par analogie avec le mouvement diffusif d'une particule soumise à une force de Langevin, l'expression (II.41) permet d'interpréter $\gamma_\lambda(E_\lambda)$ comme le coefficient de la diffusion que subit

la phase $\hat{\theta}_0$ sous l'effet des fluctuations de sa vitesse $d\hat{\theta}_0/dt$. Ce sont les collisions entre quasi-particules, qui, en provoquant des fluctuations des populations $\hat{n}_{s,\alpha}$, affectent la vitesse de variation de la phase du condensat et la font diffuser. Cette remarque nous fait voir que $\gamma_\lambda(E_\lambda)$ est une quantité essentiellement thermodynamique, qui, comme plus haut pour le potentiel chimique, ne dépend que des paramètres macroscopiques du système en vertu de l'hypothèse de thermicité des états propres :

$$\gamma_\lambda(E_\lambda) = D(E_\lambda, N_\lambda). \quad (\text{II.43})$$

Si l'on dispose d'équations cinétiques pour les nombres de quasi-particules apparaissant dans (II.32), on peut calculer leur fonction de corrélation temporelle et en déduire, à partir de (II.41), une valeur explicite de D . Le chapitre VIII est consacré à ce calcul. On notera que $2\gamma_\lambda(E_\lambda)$ n'est autre que le taux de départ de l'état $|\psi_\lambda\rangle$ induit par \hat{W} tel que le prédit la règle d'or de Fermi.

Nous avons désormais en main tous les éléments nécessaires pour calculer les propagateurs intervenant dans (II.26) :

$$\frac{1}{2i\pi} \langle \psi_\lambda | \left(\hat{G}(E - i0^+) - \hat{G}(E + i0^-) \right) | \psi_\lambda \rangle = \frac{\hbar\gamma_\lambda(E)/\pi}{\left(E - (E_\lambda + \langle \hat{W} \rangle_\lambda + \hbar\delta_\lambda(E)) \right)^2 + \hbar^2\gamma_\lambda^2(E)} \quad (\text{II.44})$$

Calculer la transformée de Fourier de cette fonction n'est certes *a priori* pas faisable analytiquement du fait de la dépendance de δ_λ et γ_λ en l'énergie. Heureusement, le fait que les éléments de matrice de \hat{W} soient petits car intensifs (*cf.* aussi la justification du paragraphe précédent pour l'ordre de grandeur de δ_λ et γ_λ) permet d'établir une hiérarchie entre les termes :

$$E_\lambda \approx N \gg \langle \hat{W} \rangle_\lambda \approx N^0 \gg \hbar\delta_\lambda, \hbar\gamma_\lambda \approx N^{-1}. \quad (\text{II.45})$$

Dans la limite d'un grand système, la fonction (II.44) ne prend donc des valeurs significatives que dans un intervalle en énergie très réduit autour de E_λ . Par conséquent, si le couplage $\langle \psi_\lambda | \hat{W} | \psi(E, N, \beta) \rangle$ de $|\psi_\lambda\rangle$ au continuum est une fonction de E suffisamment large pour que les fonctions γ_λ et δ_λ n'aient pas de variations brutales autour de $E = E_\lambda$, nous pouvons négliger la dépendance en l'énergie de ces fonctions :

$$\delta_\lambda(E) \approx \delta_\lambda(E_\lambda) \equiv \delta_\lambda \quad (\text{II.46})$$

$$\gamma_\lambda(E) \approx \gamma_\lambda(E_\lambda) \equiv \gamma_\lambda. \quad (\text{II.47})$$

Ceci constitue l'approximation du pôle.⁷ Grâce à elle la fonction (II.44) devient une lorentzienne centrée en $E_\lambda + \langle \hat{W} \rangle_\lambda + \hbar\delta_\lambda(E_\lambda)$ et de largeur $\hbar\gamma_\lambda(E_\lambda)$. Sa transformée de Fourier pour $t > 0$ est donc le produit d'un facteur de phase et d'une exponentielle décroissante. Ceci, pour g_1^λ , conduit⁸ à :

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{-it\langle \psi_\lambda | \hat{W} | \psi_\lambda \rangle / \hbar} e^{-(i\delta_\lambda + \gamma_\lambda)t}. \quad (\text{II.48})$$

7. L'approximation du pôle est valable aux temps longs devant \hbar sur l'échelle de variation en énergie de $\gamma_\lambda(E) + i\delta_\lambda(E)$, donc longs devant τ_c d'après l'équation (II.41).

8. L'on pourrait objecter qu'il y a une contradiction entre notre description (II.37) de l'ensemble des états propres comme un continuum à la limite thermodynamique, qui fait apparaître un ligne de coupure dans la résolvante et donc la partie imaginaire dans l'équation (II.38) qui est le coefficient de diffusion de la phase, et le fait que lorsque le nombre de particules N est strictement infini ce coefficient est nul. Nous consacrons l'annexe B à répondre en détail à cette objection. L'idée est de ne prendre la limite thermodynamique qu'après s'être placé à des temps d'ordre N pour que la fonction de déplacement au second membre de (II.38) ainsi redimensionnée ait une limite non nulle à la limite thermodynamique.

Dans cette expression, le déplacement δ_λ est du même ordre en N que le terme sous-dominant $[\hat{\theta}_0, [\hat{\theta}_0, \hat{H}]]$ dans \hat{W} , et N fois plus faible que le terme du premier ordre (II.36) ; on le néglige pour un grand système. En revanche $\gamma_\lambda = D(E_\lambda, N_\lambda)$, est le seul terme qui conduise à un amortissement de la fonction g_1^λ et doit donc être conservé. Nous retenons finalement :

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{[2i\mu_{\text{mc}}(E_\lambda, N_\lambda)/\hbar - D(E_\lambda, N_\lambda)]t}. \quad (\text{II.49})$$

II.2.2 Brouillage en présence de fluctuations de l'énergie et du nombre de particules - Superdiffusion de phase

Il nous reste maintenant à effectuer la moyenne statistique sur les états $|\psi_\lambda\rangle$ constituant l'état du système. Aux grands N , on suppose que l'ensemble généralisé donné par les Π_λ conduit à des fluctuations de l'énergie totale et du nombre de particules très faibles en valeur relative autour de leur valeur moyenne \bar{E} et de \bar{N} (c'est le cas par exemple des ensembles canonique et grand canonique). On en prend donc une approximation gaussienne et on linéarise μ_{mc} autour de (\bar{E}, \bar{N}) . À cet ordre, on peut remplacer D , déjà sous-dominant d'un facteur N , par $D(\bar{E}, \bar{N})$. Il n'y a plus qu'à calculer, comme au chapitre introductif, l'intégrale gaussienne du facteur de phase $\exp\{2i[(\partial\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})/\partial E)(E - \bar{E}) + (\partial\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})/\partial N)(N - \bar{N})]t/\hbar\}$ pour obtenir le résultat central de cette thèse :

$$g_1(t) \simeq \bar{N}_0 e^{2i\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})t/\hbar} e^{-t^2/2t_{\text{br}}^2} e^{-D(\bar{E}, \bar{N})t} \quad (\text{II.50})$$

En présence de fluctuations de l'énergie ou du nombre de particules, le brouillage thermique aux temps longs prend la forme d'une décroissance gaussienne de la fonction de cohérence $g_1(t)$, avec un temps caractéristique

$$(2t_{\text{br}}/\hbar)^{-2} = \text{Var} \left(N \frac{\partial\mu_{\text{mc}}}{\partial N}(\bar{E}, \bar{N}) + E \frac{\partial\mu_{\text{mc}}}{\partial E}(\bar{E}, \bar{N}) \right) \quad (\text{II.51})$$

qui diverge en $N^{1/2}$ pour des fluctuations normales. Le coefficient de diffusion de la phase D donne, quant à lui, un temps de décroissance caractéristique qui diverge en N ; c'est donc bien une contribution sous-dominante aux temps longs, sauf dans l'ensemble microcanonique où cette diffusion de phase intrinsèque peut être observée directement. Une évaluation numérique des différents temps de brouillage dus à la variance du nombre de particules, de l'énergie et à la diffusion de phase à partir des modèles microscopiques est donnée en troisième partie. La deuxième partie est consacrée à présentation de ces modèles microscopiques, cadre dans lequel nous justifierons l'équation fondamentale de la dynamique de phase (II.32).

Concluons en remarquant que les résultats généraux de ce chapitre permettent de reproduire aisément le cas particulier (I.6) de deux condensats à température nulle. Pour le voir, il faut (i) appliquer l'équation (II.32) séparément aux opérateurs phase $\hat{\theta}_{0,a}$ et $\hat{\theta}_{0,b}$ des deux condensats, en négligeant la contribution des quasi-particules, ce qui conduit aux temps longs et après linéarisation du potentiel chimique autour de $N_a = N_b = N/2$, à $\hat{\theta}_{0,a}(t) - \hat{\theta}_{0,b}(t) \sim -2(\hat{N}_a - \hat{N}_b)(d\mu_0/dN_\sigma)t/\hbar$, (ii) dans l'expression (I.3) de la fonction de corrélation $a - b$ à temps égaux, ne garder que la contribution des modes des condensats en négligeant les fluctuations du module des amplitudes \hat{a}_0 et \hat{b}_0^\dagger correspondantes. On aboutit alors à $C_{ab}(t) \propto \langle \exp[i(\hat{\theta}_{0,a}(t) - \hat{\theta}_{0,b}(t))] \rangle$. (iii) Il ne reste alors qu'à prendre la moyenne gaussienne sur $N_a - N_b$ pour retrouver le résultat (I.6).

Deuxième partie
Dynamique de phase

Chapitre III

Description mésoscopique du gaz de paires et dynamique de phase par l'hydrodynamique quantique

Dans ce chapitre, nous justifions une première fois l'équation fondamentale (II.32) de la dynamique de phase par l'hydrodynamique quantique, théorie développée en 1949 par Landau et Khalatnikov [44] pour calculer la viscosité de l'hélium superfluide à basse température. Cette théorie, phénoménologique et mésoscopique, n'est pas spécifique aux systèmes fermioniques. Elle traite d'ailleurs les paires de fermions aux grandes échelles spatiales comme un champ bosonique. Pour cette raison, elle n'a aucune chance de décrire correctement la branche d'excitation fermionique dont nous avons souligné la contribution à la dynamique de phase ; elle demeure une théorie effective de basse énergie, valable à basse température lorsque les degrés de liberté internes des paires ne sont pas excités. Cependant, l'hydrodynamique quantique possède l'avantage majeur de reposer uniquement sur l'équation d'état exacte et d'être ainsi valide dans tous les régimes d'interaction, au contraire des théories microscopiques variationnelles, qui ne sont quantitatives que dans le régime d'interaction faible. Elle permet donc de déterminer de manière exacte, à l'ordre dominant en T , les effets d'une température non nulle sur les observables d'un fluide quantique, du moins sur celles qui dépendent seulement des faibles échelles d'énergie et des grandes échelles de longueur. Aussi, à plusieurs reprises dans cette thèse, les prédictions de l'hydrodynamique quantique nous serviront de point de comparaison pour des résultats obtenus après de difficiles calculs dans un cadre microscopique, sur le comportement collectif du gaz, et tout particulièrement sur la branche d'excitation bosonique. Comparée au travail fondateur de 1949 [44], notre approche dans cette thèse comporte deux petits raffinements, tous deux dictés par l'étude de la dynamique de phase : une régularisation des divergences ultraviolettes et une spécialisation au cas irrotationnel.

III.1 Champs de densité et de phase dans le modèle sur réseau

Nous supposons que le gaz de densité ρ évolue sur un réseau cubique de pas l , sous-multiple de la longueur L de la boîte de quantification, beaucoup plus petit que la longueur

d'onde typique $2\pi/q_{\text{th}}$ des excitations du fluide peuplées thermiquement, mais beaucoup plus grand que la distance moyenne $\rho^{-1/3}$ entre particules,

$$\rho^{-1/3} \ll l \ll q_{\text{th}}^{-1}, \quad (\text{III.1})$$

ce qui est réalisable à suffisamment basse température. Ce maillage souscrit au régime de validité de l'hydrodynamique, celui d'une description spatiale à gros grains, et fournit une coupure naturelle ultraviolette dans l'espace des vecteurs d'onde \mathbf{q} , en les restreignant¹ à la première zone de Brillouin $[-\pi/l, \pi/l]^3$. Nous verrons plus loin que cette discrétisation de l'espace permet d'éviter élégamment la divergence du niveau d'énergie fondamental du hamiltonien hydrodynamique quand on lui intègre l'énergie quantique de point zéro des modes propres du système. Nous emploierons d'ailleurs une technique similaire dans le chapitre suivant pour renormaliser la constante de couplage nue g_0 et aboutir à la longueur de diffusion a mesurée expérimentalement (*cf.* l'équation (IV.28)).

Chaque point du réseau contenant un grand nombre de particules, on peut lui associer une densité et une vitesse mésoscopique. Ces deux quantités sont traitées par Landau et Khalatnikov comme deux champs quantiques hermitiens $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$ et $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$. La densité de quasi-particules fermioniques, exponentiellement petite en $1/T$, est quant à elle directement omise par la théorie hydrodynamique. Pour construire l'opérateur phase du condensat, nous spécialisons la théorie au cas d'un opérateur champ de vitesse $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ irrotationnel, qu'on peut donc écrire comme le gradient (discret) d'un opérateur champ de phase $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$,

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \mathbf{grad} \hat{\phi}(\mathbf{r}, t), \quad (\text{III.2})$$

canoniquement conjugué à l'opérateur champ de densité $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$:

$$[\hat{\rho}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}(\mathbf{r}', t)] = i \frac{\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}{l^3}. \quad (\text{III.3})$$

Ceci revient à négliger la composante transverse du champ $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$, comme l'a fait la référence [44] pour déterminer l'interaction entre phonons et avancer dans le calcul de la viscosité. Dans le cas particulier invariant d'échelle du gaz de fermions unitaire, une justification en est donnée dans la référence [76] dans le cadre de la théorie effective des champs.

III.2 Quadratisation du hamiltonien hydrodynamique

Le hamiltonien hydrodynamique s'écrit

$$\hat{H}_{\text{hydro}} = l^3 \sum_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{2} m \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}} + e_{0,0}(\hat{\rho}) \right], \quad (\text{III.4})$$

où $e_{0,0}(\rho)$ est la densité volumique d'énergie *nue*, fonction du pas du réseau l ; suivant les idées de la renormalisation, l'énergie quantique de point zéro des modes, formellement divergente

1. En vérité, il faut aussi que $mcl/\hbar > 1$, où c est la vitesse du son à température nulle introduite plus bas, afin que les excitations élémentaires du système restent phononiques sur toute la première zone de Brillouin. Cette condition découle de celle déjà invoquée, $l\rho^{1/3} \gg 1$, dans le régime d'interaction forte ou dans la limite de BCS, puisque c y est d'ordre la vitesse de Fermi. Elle doit être ajoutée explicitement dans la limite dite de CBE, où les paires de fermions, assimilables à des bosons, forment un condensat en interaction faible.

lorsque $l \rightarrow 0$, s'ajoute alors à $e_{0,0}(\rho)$ pour reconstruire précisément la densité volumique d'énergie *effective* ou *vraie* $e_0(\rho)$, indépendante de l , et qui est celle mesurée expérimentalement (voir plus loin l'équation (III.19)). En écrivant les équations de Heisenberg avec ce hamiltonien on obtient des équations du mouvement des champs $\hat{\rho}$ et $\hat{\mathbf{v}}$ qui sont l'analogie quantique de l'équation de continuité et de l'équation d'Euler hydrodynamique. Comme nous travaillons avec un champ de vitesse irrotationnel, nous intégrons l'équation d'Euler pour obtenir l'équation du mouvement du champ de phase $\hat{\phi}$:

$$\partial_t \hat{\rho} + \text{div} \left[\frac{1}{2} \{ \hat{\rho}, \hat{\mathbf{v}} \} \right] = 0 \quad (\text{III.5})$$

$$\hbar \partial_t \hat{\phi} = -\frac{1}{2} m \hat{\mathbf{v}}^2 - \mu_{0,0}(\hat{\rho}), \quad (\text{III.6})$$

où $\{ \hat{A}, \hat{B} \} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ est l'anticommutateur de deux opérateurs et

$$\mu_{0,0}(\rho) = \frac{d}{d\rho} e_{0,0}(\rho) \quad (\text{III.7})$$

est le potentiel chimique nu de l'état fondamental à la densité ρ .

Pour linéariser les équations du mouvement, nous supposons que les fluctuations spatiales du champ de densité et de phase autour de leur moyenne spatiale sont petites. Nous posons donc

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \hat{\rho}_0 + \delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{III.8})$$

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\phi}_0(t) + \delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \quad (\text{III.9})$$

avec des perturbations $\delta\hat{\rho}$ et $\delta\hat{\phi}$ que nous traitons comme des infiniment petits. L'opérateur $\hat{\rho}_0$ vaut simplement \hat{N}/L^3 , où \hat{N} est l'opérateur nombre total de particules; c'est une constante du mouvement. L'opérateur $\hat{\phi}_0$ est l'opérateur phase du condensat, ici

$$\hat{\phi}_0 = \hat{\theta}_0/2 \quad (\text{III.10})$$

puisque l'opérateur phase $\hat{\theta}_0$ de l'équation (II.5) est conjugué au nombre de paires, alors que d'après l'équation (III.3) $\hat{\phi}_0$ est conjugué au nombre de fermions. Nous donnerons une justification détaillée de l'hypothèse de faibles fluctuations après avoir étudié les modes propres du système. Mais nous pouvons déjà donner deux arguments qualitatifs : d'une part, la population mésoscopique des points du réseau rend les fluctuations quantiques faibles en valeur relative et d'autre part la faiblesse de la température n'autorise que des excitations de grande longueur d'onde et de faible amplitude, générant donc de faibles fluctuations de densité et de phase.

La suite est classique. On linéarise les équations du mouvement autour de la solution spatialement uniforme puis on passe dans l'espace de Fourier des vecteurs d'onde \mathbf{q} appartenant à l'ensemble $\mathcal{D} = \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3 \cap [-\pi/l, \pi/l]^3$ privé du vecteur nul,

$$\delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \delta\hat{\rho}_{\mathbf{q}} \quad (\text{III.11})$$

$$\delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \delta\hat{\phi}_{\mathbf{q}}, \quad (\text{III.12})$$

avec, par hermiticité des membres de gauche, $\delta\hat{\rho}_{-\mathbf{q}} = \delta\hat{\rho}_{\mathbf{q}}^\dagger$ et $\delta\hat{\phi}_{-\mathbf{q}} = \delta\hat{\phi}_{\mathbf{q}}^\dagger$. Cette transformation rend les équations du mouvement linéarisées diagonales par blocs de vecteur d'onde \mathbf{q} fixé. L'énergie nue $\hbar\omega_{\mathbf{q},0}$ des modes propres est phononique,

$$\hbar\omega_{\mathbf{q},0}(\hat{\rho}_0) = \hbar c_0(\hat{\rho}_0)q, \quad (\text{III.13})$$

avec une vitesse du son nue reliée à la dérivée du potentiel chimique nu par :

$$mc_0^2(\rho_0) = \rho_0 \frac{d\mu_{0,0}}{d\rho}(\rho_0). \quad (\text{III.14})$$

L'opérateur d'annihilation d'un phonon de vecteur d'onde \mathbf{q} s'écrit :

$$\hat{b}_{\mathbf{q}} = \left(\frac{mc_0(\hat{\rho}_0)}{2\hbar q \hat{\rho}_0} \right)^{1/2} \delta\hat{\rho}_{\mathbf{q}} + i \left(\frac{\hbar q \hat{\rho}_0}{2mc_0(\hat{\rho}_0)} \right)^{1/2} \delta\hat{\phi}_{\mathbf{q}}. \quad (\text{III.15})$$

C'est un opérateur bosonique, $[\hat{b}_{\mathbf{q}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger] = 1$, dont l'évolution linéarisée au cours du temps est triviale

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{b}_{\mathbf{q}} = \hbar\omega_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}}. \quad (\text{III.16})$$

Il est aisé ensuite d'inverser la relation (III.15) pour obtenir le développement des champs sur les modes propres :

$$\delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\rho}_0^{1/2}}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} \left(\frac{\hbar q}{2mc_0(\hat{\rho}_0)} \right)^{1/2} (\hat{b}_{\mathbf{q}} + \hat{b}_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad (\text{III.17})$$

$$\delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{-i}{\hat{\rho}_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} \left(\frac{mc_0(\hat{\rho}_0)}{2\hbar q} \right)^{1/2} (\hat{b}_{\mathbf{q}} - \hat{b}_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}. \quad (\text{III.18})$$

Enfin, en injectant ces développements dans le hamiltonien hydrodynamique (III.4), puis en regroupant la densité d'énergie nue et l'énergie quantique de point zéro pour former la densité d'énergie effective

$$e_0(\rho_0) = e_{0,0}(\rho_0) + \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} \frac{\hbar q c_0(\rho_0)}{2}, \quad (\text{III.19})$$

on obtient le hamiltonien quadratique renormalisé :

$$\hat{H}_{\text{hydro}}^{(2)} = L^3 e_0(\hat{\rho}_0) + \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} \hbar q c(\hat{\rho}_0) \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}. \quad (\text{III.20})$$

Nous avons identifié, dans le préfacteur des opérateurs nombres de phonons $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}$, la vitesse du son nue $c_0(\rho_0)$ avec la vitesse du son vraie à température nulle,

$$mc^2(\rho_0) = \rho_0 \frac{d\mu_0}{d\rho}(\rho_0), \quad (\text{III.21})$$

où $\mu_0 = de_0/d\rho$ est le vrai potentiel chimique. Pour justifier ceci, nous montrerons à la fin de ce chapitre que la correction relative entre l'énergie nue $e_{0,0}$ et renormalisée e_0 , donc entre c_0 et c , est du même ordre de grandeur que les fluctuations spatiales relatives de densité $\delta\hat{\rho}^2/\rho_0^2$, et donne donc lieu à des termes d'ordre supérieur en les fluctuations spatiales lorsqu'elle multiplie l'opérateur $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}$.

III.3 Dynamique de phase

Revenons à notre problème de départ : la dynamique de phase. Nous reprenons l'équation d'Euler sur le champ de phase (III.6) et développons son membre de droite jusqu'à l'ordre deux inclus en $\delta\hat{\rho}$ et $\delta\hat{\phi}$. Nous extrayons la composante de Fourier de vecteur d'onde nul

$$\hbar \frac{d}{dt} \hat{\phi}_0 = -\mu_{0,0}(\hat{\rho}_0) - \frac{l^3}{2L^3} \sum_{\mathbf{r}} \left(\frac{\hbar^2}{m} \left(\mathbf{grad} \delta\hat{\phi}(\mathbf{r}) \right)^2 + \left(\frac{d^2 \mu_{0,0}}{d\rho^2}(\hat{\rho}_0) \right) \delta\hat{\rho}^2(\mathbf{r}) \right) \quad (\text{III.22})$$

et injectons les développements sur les modes (III.17, III.18) pour exprimer le résultat en termes de $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$. Nous prenons ensuite une moyenne temporelle à gros grains qui élimine les termes croisés oscillants $\hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{-\mathbf{q}}$ et $\hat{b}_{-\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$,

$$\overline{\frac{d}{dt} \hat{\phi}_0}^t = -\mu_{0,0}(\hat{\rho}_0) - \frac{1}{2L^3} \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} \hbar q \frac{c_0(\hat{\rho}_0)}{2\hat{\rho}_0} \left(1 + \frac{\hat{\rho}_0^2}{mc^2(\hat{\rho}_0)} \frac{d^2 \mu_{0,0}}{d\rho^2}(\hat{\rho}_0) \right) \left(\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}} + \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \right), \quad (\text{III.23})$$

et reconnaissons une dérivée de la vitesse du son par rapport au nombre de particules :

$$\frac{dc_0}{dN}(\rho_0) = \frac{1}{2L^3 m c_0(\rho_0)} \left(\left(\frac{d\mu_{0,0}}{d\rho}(\rho_0) \right)^2 + \rho_0 \frac{d^2 \mu_{0,0}}{d\rho^2}(\rho_0) \right) = \frac{c_0(\rho_0)}{2L^3 \rho_0} \left(1 + \frac{\rho_0^2}{mc^2(\rho_0)} \frac{d^2 \mu_{0,0}}{d\rho^2}(\rho_0) \right). \quad (\text{III.24})$$

Comme pour le hamiltonien quadratique, nous regroupons la contribution de point zéro et le potentiel chimique nu $\mu_{0,0}(\hat{\rho}_0)$ pour former le potentiel chimique vrai $\mu_0(\hat{\rho}_0)$ du fluide à température nulle,

$$\mu_0(\rho_0) = \mu_{0,0}(\rho_0) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} \hbar q \left(\frac{dc_0}{dN}(\rho_0) \right), \quad (\text{III.25})$$

et nous identifions vitesse du son nue et effective. Nous obtenons alors une équation de la dynamique de phase

$$\overline{\frac{d}{dt} \hat{\phi}_0}^t = -\mu_0(\hat{\rho}_0) - \sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} \hbar q \left(\frac{dc}{d\hat{N}}(\hat{\rho}_0) \right) \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}. \quad (\text{III.26})$$

dans laquelle on reconnaît une dérivée adiabatique (à $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}$ fixé) du hamiltonien (III.20) par rapport à N . Il s'agit en vérité de la limite phononique (de basse température) de la relation (II.32) qui se trouve ainsi justifiée sans hypothèse aucune sur la force (ou la faiblesse) des interactions. L'enchaînement par lequel nous sommes parvenus à l'équation (III.26) (linéarisation des équations du mouvement, obtention des modes propres, développement du champ sur ces derniers et enfin injection de ce développement dans l'équation non linéaire de la phase du condensat) est en quelque sorte l'enchaînement théorique idéal que nous aurons en tête lorsque nous serons dans un cadre entièrement microscopique et que la prise en compte des degrés de liberté internes des paires rendra la progression plus difficile.

III.4 Validité de l'approximation de faibles fluctuations dans le modèle sur réseau

Terminons ce chapitre par une justification *a posteriori* de l'approximation de faibles fluctuations. En utilisant le développement (III.17) on peut estimer les fluctuations de la

densité sur un même site du réseau à température nulle :

$$\frac{\langle \delta \hat{\rho}^2 \rangle}{\rho_0^2} \approx \frac{\hbar \rho_0^{1/3}}{mc} \frac{1}{(\rho_0^{1/3} l)^4}. \quad (\text{III.27})$$

Compte tenu du choix (III.1) du pas du réseau et de la propriété $mc/(\hbar \rho_0^{1/3}) = O(1)$ qui vaut dans toute la zone de raccordement entre les limites de CBE et de BCS, ces fluctuations sont faibles en valeur relative. À ceci s'ajoute, à $T > 0$, la contribution thermique $\approx \frac{\hbar \rho_0^{1/3}}{mc} \left(\frac{q_{\text{th}} l}{\rho_0^{1/3} l} \right)^4$, qui est inférieure à la contribution quantique d'un facteur $(q_{\text{th}} l)^4 \ll 1$ et qui est donc négligeable. On vérifie ensuite que les fluctuations de phase entre deux sites voisins sont faibles en valeur absolue. Pour cela, on utilise (III.18) pour les relier aux fluctuations de densité :

$$l^2 \langle (\mathbf{grad} \delta \hat{\theta})^2 \rangle = (mcl/\hbar)^2 \frac{\langle \delta \hat{\rho}^2 \rangle}{\rho_0^2} \approx \frac{mc}{\hbar \rho_0^{1/3}} \frac{1}{(\rho_0^{1/3} l)^2} \quad (\text{III.28})$$

et on utilise les arguments cités plus haut pour conclure.

Pour finir, estimons le rapport entre l'énergie de point zéro $\sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} \hbar c q / 2$ et l'énergie nue du fondamental. Pour cela, nous anticipons sur le chapitre suivant en utilisant l'équation d'état BCS détaillée à la section IV.2.2.2. Dans la limite BCS comme à la limite unitaire, l'énergie des particules est comparable à l'énergie de Fermi ε_F , nous estimons donc $L^3 e_{0,0} \approx N \varepsilon_F \approx N \hbar^2 \rho_0^{2/3} / m = \hbar^2 \rho_0^{5/3} L^3 / m$. À l'inverse, dans la limite CBE l'énergie des particules est dominée par l'énergie de liaison $\hbar^2 / (ma^2)$ des dimères, où a est la longueur de diffusion ; nous avons alors $\rho_0^{1/3} a = O(1)$ puisque a est la taille typique d'un dimère². De ceci nous tirons

$$\frac{\sum_{\mathbf{q} \in \mathcal{D}^*} \hbar c q / 2}{L^3 e_{0,0}} \approx \begin{cases} \frac{mc}{\hbar \rho_0^{1/3}} \frac{1}{(\rho_0^{1/3} l)^4} & \text{limite BCS et limite unitaire} \\ \frac{(\rho_0^{1/3} a)^{5/2}}{(\rho_0^{1/3} l)^4} & \text{limite CBE} \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

$$= O \left(\frac{1}{(\rho_0^{1/3} l)^4} \right). \quad (\text{III.30})$$

La correction relative introduite par la renormalisation de l'énergie est donc du même ordre de grandeur que les fluctuations relatives $\langle \delta \hat{\rho}^2 \rangle / \rho_0^2$ de la densité. Ceci justifie le remplacement des quantités nues par les quantités habillées dans les équations (III.20) et (III.26).

2. À l'aide de l'équation d'état BCS dans la limite CBE (IV.87), on peut aussi écrire $mc^2 \approx \hbar^2 \rho_0 a / m$ et donc $\rho_0^{1/3} a = \left(mc / (\hbar \rho_0^{1/3}) \right)^{2/3}$, ce qui relie cette estimation à l'ordre de grandeur $mc / (\hbar \rho_0^{1/3}) = O(1)$ déjà énoncé.

Chapitre IV

Description microscopique du gaz de paires de fermions

Nous avons promis une démonstration rigoureuse de l'équation fondamentale de la phase (II.32) dans un cadre microscopique et en faisant apparaître explicitement les contributions des branches d'excitation bosonique et fermionique. Cet objectif va nous occuper tout au long des trois chapitres qui vont suivre. Avant de nous tourner vers la dynamique de phase proprement dite aux chapitres V et VI, nous commençons dans le présent chapitre par rappeler la description des interactions dans un gaz froid et dilué de fermions. Nous étudierons ensuite les propriétés d'équilibre, dans l'état fondamental du gaz, avec la théorie de champ moyen de Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS).

IV.1 Interactions dans un gaz de fermions froids

IV.1.1 Fermions dans l'espace libre et modèle sur réseau

Fixons d'abord la géométrie du problème. Pour qu'il soit possible d'obtenir des résultats entièrement analytiques, nous considérons que les atomes évoluent dans un espace homogène (qui peut être approché expérimentalement par un potentiel à fond plat) de longueur L dans les trois dimensions. Pour éviter toute irrégularité mathématique nous discrétisons cet espace en un réseau cubique de pas l , ce qui, dans l'espace de Fourier, revient à restreindre les vecteurs d'onde à la première zone de Brillouin $[-\pi/l, \pi/l]^3$. La valeur du pas du réseau l est arbitraire mais doit être suffisamment faible pour que la longueur typique de variation des grandeurs physiques reste grande devant le pas du réseau :

$$k_{\text{typ}}l \ll 1 \tag{IV.1}$$

où k_{typ} est le vecteur d'onde typique des particules du gaz. Nous l'évaluerons dans les différents régimes d'interaction dans le paragraphe IV.1.3.c. de la présente section. En pratique, nous prendrons, à la fin des calculs, la limite d'un espace continu en faisant tendre l vers 0.

IV.1.2 Potentiel d'interaction

Venons-en maintenant au potentiel d'interaction. L'interaction entre fermions est une interaction à deux corps avec un potentiel $V(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ dépendant *a priori* des positions \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2

des deux fermions. Nous connaissons en général mal les détails microscopiques de ce potentiel mais heureusement, le régime habituel des atomes froids est un régime dilué, de collisions à basse énergie, où seul un nombre limité de paramètres suffit à décrire l'interaction. Nous consacrons ici un paragraphe à rappeler pourquoi, dans ce régime, on peut remplacer le vrai potentiel par une interaction effective de contact.

IV.1.3 Diffusion dans un gaz d'atomes froids

a. Gaz dilué et froid L'hypothèse que le gaz est *dilué*, c'est-à-dire que sa densité n est faible par rapport à la portée r_0 du potentiel,

$$nr_0^3 \ll 1, \quad (\text{IV.2})$$

va nous permettre de ramener le problème de N fermions en interaction au problème, beaucoup plus simple, de la diffusion de deux particules asymptotiquement libres. En effet, cette approximation permet de négliger la probabilité de trouver trois particules ou plus dans une sphère de rayon d'ordre r_0 . Il nous suffit donc d'étudier les collisions qui n'impliquent que deux particules. L'hypothèse que le gaz est *froid* permet de se limiter aux événements à basse énergie, où le vecteur d'onde relatif des particules incidentes est faible devant l'inverse de la portée du potentiel. Pour de tels processus, c'est la diffusion dans l'onde s qui domine¹. Or, à cause du principe d'exclusion de Pauli, c'est seulement entre fermions de spins opposés que cette diffusion, dans laquelle les particules sont dans une fonction d'onde spatiale symétrique et ont donc une probabilité non nulle de se trouver au même endroit, est permise. Rappelons donc les grandes lignes du problème de diffusion de deux particules discernables.

b. États stationnaires de diffusion Il s'agit de trouver, dans le modèle sur réseau, l'état stationnaire, ou asymptotique, de deux particules subissant, *via* le potentiel V , une collision à un vecteur d'onde incident \mathbf{k}_i . La situation est invariante par translation discrète et le potentiel ne dépend que de la position relative des particules $V = V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. En nous plaçant dans le cas d'un centre de masse au repos, nous éliminons les variables liées à la position de ce dernier, et choisissons comme base de l'espace de Hilbert les états $|\mathbf{r}\rangle$ décrivant deux fermions à une position relative \mathbf{r} , et vérifiant la condition d'orthogonalité $\langle \mathbf{r}|\mathbf{r}'\rangle = \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'}/l^3$. L'état stationnaire de diffusion vérifie l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$\hat{H}_{\text{diff}}|\phi\rangle = E|\phi\rangle, \quad (\text{IV.3})$$

avec une énergie E qui est positive et fixée par le vecteur d'onde \mathbf{k}_i de l'onde incidente,

$$E \equiv \frac{\hbar^2 k_i^2}{2m_r}. \quad (\text{IV.4})$$

Le hamiltonien du problème de diffusion

$$\hat{H}_{\text{diff}} = \frac{\hat{p}^2}{2m_r} + \hat{V} \quad (\text{IV.5})$$

1. L'amplitude de diffusion dans l'onde p par exemple s'annule quadratiquement avec le vecteur d'onde incident.

contient un terme d'énergie cinétique, avec \hat{p} l'opérateur impulsion relative des deux fermions et $m_r = m/2$ leur masse réduite, et un terme d'interaction \hat{V} , diagonal dans la base $|\mathbf{r}\rangle$, avec $V(\mathbf{r})$ comme coefficient. En l'absence d'interactions, les états propres de l'énergie cinétique sont les ondes planes :

$$|\mathbf{k}\rangle = l^3 \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} |\mathbf{r}\rangle. \quad (\text{IV.6})$$

d'énergie $\hbar^2 k^2 / (2m_r)$. Comme le potentiel tend vers zéro à grande distance, l'onde incidente est justement une onde plane² de vecteur d'onde \mathbf{k}_i . L'onde diffusée se comporte asymptotiquement comme une onde sphérique sortante. Par conservation de l'énergie son nombre d'onde vaut aussi k_i . Nous retenons la condition aux limites pour la fonction d'onde $\phi(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | \phi \rangle$:

$$\phi(\mathbf{r}) \underset{r \rightarrow \infty}{=} e^{i\mathbf{k}_i \mathbf{r}} + f_{k_i}(\mathbf{n}) \frac{e^{ik_i r}}{r} + o\left(\frac{1}{r}\right). \quad (\text{IV.7})$$

où $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ est la direction émergente, et $f_{k_i}(\mathbf{n})$ est l'amplitude de l'onde émergente dans la direction \mathbf{n} . Cette dernière mesure le poids relatif, par exemple en terme de courant de probabilité, de l'onde incidente et de l'onde diffusée dans la direction \mathbf{n} ; elle est donc reliée à la section efficace différentielle de diffusion $\sigma(\mathbf{n})$ par $\sigma(\mathbf{n}) = |f_{k_i}(\mathbf{n})|^2$. On peut exprimer formellement la solution de l'équation de Schrödinger (IV.3) à partir de la solution libre $|\phi_0\rangle$ pour $V = 0$, en l'occurrence $|\phi_0\rangle = |\mathbf{k}_i\rangle$, en introduisant la résolvante $\hat{G}(z) = 1/(z - \hat{H}_{\text{diff}})$ du hamiltonien complet :³

$$|\phi\rangle = \left(1 + \hat{G}(E + i0^+) \hat{V}\right) |\phi_0\rangle. \quad (\text{IV.12})$$

2. En cela le problème quantique de diffusion est très différent du problème classique de diffusion de particules ponctuelles : les particules incidentes sont complètement délocalisées et le processus de diffusion s'étend à l'infini à la fois dans l'espace et le temps.

3. Une façon d'établir l'équation (IV.12) est d'utiliser la fonction de Green retardée G_+ de l'énergie cinétique, solution de l'équation inhomogène $\frac{\hbar^2}{2m_r}(\Delta_{\mathbf{r}} + k_i^2)G_+(\mathbf{r}) = \delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}}$ et se comportant asymptotiquement comme une onde sortante

$$G_+(\mathbf{r}) \underset{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ik_i|\mathbf{r}|}}{|\mathbf{r}|}. \quad (\text{IV.8})$$

Le laplacien discret $\Delta_{\mathbf{r}}$ est tel que $\Delta_{\mathbf{r}}\langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = -k^2 \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle$. En termes de G_+ et de la solution homogène $\phi_0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}}$, $(\Delta_{\mathbf{r}} + k_i^2)\phi_0(\mathbf{r}) = 0$, la solution s'écrit

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}) + l^3 \sum_{\mathbf{r}'} G_+(\mathbf{r} - \mathbf{r}') V(\mathbf{r}') \phi(\mathbf{r}'), \quad (\text{IV.9})$$

En utilisant le lien entre la résolvante non perturbée (*cf.* texte) et la fonction de Green retardée $G_+(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r}' | \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \hat{G}_0(E + i\eta) | \mathbf{r} \rangle$ nous obtenons

$$|\phi\rangle = |\phi_0\rangle + \left(\hat{G}_0(E + i0^+) \hat{V}\right) |\phi\rangle. \quad (\text{IV.10})$$

En itérant cette relation implicite, version discrète de l'équation de Lippmann-Schwinger, on fait apparaître une série infinie et l'on parvient à éliminer $|\phi\rangle$ du second membre :

$$|\phi\rangle = \left(1 + \left(\hat{G}_0(E + i0^+) + \hat{G}_0(E + i0^+) \hat{V} \hat{G}_0(E + i0^+) + \dots\right) \hat{V}\right) |\phi_0\rangle. \quad (\text{IV.11})$$

Cette série infinie est en fait le développement de la résolvante, conséquence de la relation implicite $\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}$, ce qui démontre (IV.12).

Il est d'usage d'éliminer \hat{G} au profit de la résolvante de l'énergie cinétique $\hat{G}_0(z) = 1/(z - \frac{\hat{p}^2}{2m_r})$ et de la matrice \hat{T}

$$\hat{T} = \hat{V} + \hat{V}\hat{G}\hat{V} \quad (\text{IV.13})$$

En utilisant la relation implicite entre les résolvantes perturbées et non perturbées $\hat{G} = \hat{G}_0 + \hat{G}_0\hat{V}\hat{G}$, nous obtenons

$$|\phi\rangle = \left(1 + \hat{G}_0(E + i0^+)\hat{T}(E + i0^+)\right) |\phi_0\rangle \quad (\text{IV.14})$$

Revenons maintenant en point de vue \mathbf{r} pour vérifier que les conditions aux limites (IV.7) sont bien vérifiées :

$$\phi(\mathbf{r}) \underset{r \gg l}{=} e^{i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}} - \frac{m_r}{2\pi\hbar^2} l^3 \sum_{\mathbf{r}'} \frac{e^{i\mathbf{k}_i |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \langle \mathbf{r}' | \hat{T}(E + i0^+) | \phi_0 \rangle, \quad (\text{IV.15})$$

où nous avons utilisé l'expression de la fonction de Green de l'énergie cinétique (*cf.* équation (IV.8) de la note 3). À grande distance $r \gg r'$, $e^{i\mathbf{k}_i |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}/|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \approx e^{ik_i r} e^{-i\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'/r}/r$, ce qui fait apparaître l'onde sphérique attendue. Son amplitude est une transformée de Fourier prise sur \mathbf{r}' , ce qui permet d'exprimer l'amplitude de diffusion sous la forme :

$$f_k(\mathbf{n}) = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \langle k_i \mathbf{n} | \hat{T}(E + i0^+) | \phi_0 \rangle \quad (\text{IV.16})$$

c. Diffusion dans l'onde s à basse énergie Nous utilisons maintenant l'hypothèse que le gaz est froid. La diffusion se fait donc très majoritairement dans l'onde s , où l'amplitude $f_{\mathbf{k}_i}$ ne dépend pas du vecteur émergent \mathbf{n} . Cette dernière est alors reliée à la section efficace totale σ par $\sigma = 4\pi|f_k|^2$. Le théorème optique, appliqué ici à des ondes de matières, et qui traduit le fait que la probabilité que l'onde ait été diffusée doit être compensée par une baisse de la probabilité de trouver l'onde dans la direction incidente, permet alors de déterminer la partie imaginaire de $1/f_k$. Il impose la contrainte suivante :

$$|f_k|^2 = \frac{\text{Im} f_k}{k} \quad (\text{IV.17})$$

En utilisant la relation pour tout nombre complexe z , $\text{Im}(1/z) = -\text{Im}z/|z|^2$ nous mettons l'amplitude de diffusion sous la forme

$$f_k = -\frac{1}{u(k) + ik} \quad (\text{IV.18})$$

où la fonction u est à valeurs dans \mathbb{R} . Par conséquent, dans la limite des grandes longueurs d'onde $k \rightarrow 0$, f_k tend vers un nombre réel, qui, au vu des dimensions, est une longueur, que nous appelons *longueur de diffusion* et notons a :

$$\lim_{k \rightarrow 0} f_k = -\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{u(k)} \equiv -a \quad (\text{IV.19})$$

Profitions de ce que nous venons de dire pour discuter un peu plus en détail à quelles conditions le gaz est froid. La seule longueur caractéristique du problème de diffusion étant la portée

du potentiel, il faut pour que l'hypothèse soit vérifiée que le vecteur d'onde incident typique k_{typ} vérifie l'inégalité :

$$k_{\text{typ}}r_0 \ll 1. \quad (\text{IV.20})$$

Pour connaître le domaine de validité de cette inégalité il faut estimer la valeur de k_{typ} . Si les interactions sont faibles, le gaz est très peu perturbé par rapport au gaz parfait et les interactions ont lieu au voisinage de la surface de Fermi. On prendra alors $k = k_F$ le vecteur d'onde de Fermi, relié à la densité du gaz par

$$\rho = \frac{1}{3\pi^2}k_F^3. \quad (\text{IV.21})$$

Si au contraire les interactions sont fortes au point que les fermions forment des dimères, c'est le vecteur d'onde relatif au sein de ces dimères qui fixe la valeur typique $k_{\text{typ}} = 1/a$.

d. Potentiel de contact effectif Le calcul de la longueur de diffusion à partir de l'expression du potentiel est un problème difficile, mais, heureusement, inutile en ce qui nous concerne. En pratique, elle sera déterminée expérimentalement, par des mesures de spectroscopie par photo-association [77, 78] par exemple. Dès lors, nous pouvons remplacer le vrai potentiel d'interaction par un potentiel effectif plus simple mais équivalent dans le régime des atomes froids car ajusté pour avoir la même longueur de diffusion. Le potentiel modèle le plus simple, et qui sera utilisée dans cette thèse, est un potentiel d'interaction sur site, caractérisé par une constante de couplage nue g_0 :

$$V_c(\mathbf{r}) = g_0 \frac{\delta_{\mathbf{r},\mathbf{0}}}{l^3} \quad (\text{IV.22})$$

où δ est le symbole de Kronecker, et \mathbf{r} désigne toujours la position relative des deux fermions. Bien localisé dans l'espace réel, ce potentiel est à l'inverse uniforme dans l'espace des impulsions :

$$\forall \mathbf{k}, \mathbf{k}', \langle \mathbf{k} | \hat{V}_c | \mathbf{k}' \rangle = g_0. \quad (\text{IV.23})$$

Tout ce qui nous reste à calculer est le lien entre la constante de couplage nue g_0 et la longueur de diffusion de ce modèle, afin de pouvoir ajuster cette dernière à la longueur de diffusion du vrai potentiel. Pour cela reprenons l'expression (IV.16) de l'amplitude de diffusion, et développons la matrice \hat{T}_c associée au potentiel de contact en une série infinie en puissances du potentiel \hat{V}_c :

$$\hat{T}_c(E + i0^+) = \hat{V}_c + \hat{V}_c \hat{G}_0(E + i0^+) \hat{V}_c + \hat{V}_c \hat{G}_0(E + i0^+) \hat{V}_c \hat{G}_0(E + i0^+) \hat{V}_c + \dots \quad (\text{IV.24})$$

L'uniformité de \hat{V}_c (IV.23), ajoutée au fait que la résolvante non perturbée \hat{G}_0 soit diagonale dans la base de Fourier,

$$\hat{G}_0(E + i0^+) = \int_{[-\pi/l, \pi/l]^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(E + i0^+) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}|, \quad (\text{IV.25})$$

permet d'obtenir sans mal

$$f_{k_i} = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} g_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (g_0 I(E + i0^+))^n \right) = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \frac{1}{g_0^{-1} - I(E + i0^+)} \quad (\text{IV.26})$$

où l'intégrale $I(E)$ est donnée par

$$I(E) = \int_{[-\pi/l, \pi/l]^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{E - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}} \quad (\text{IV.27})$$

En utilisant la relation au sens des distribution $\frac{1}{x+i0^+} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{x}\right) - i\pi\delta(x)$, on obtient (i) que la partie imaginaire de $I(E+i0^+)$ tend vers 0 comme k_i (donc comme \sqrt{E}) lorsque l'énergie tend vers zéro, comme prescrit par le théorème optique, et (ii) que sa partie réelle tend à l'inverse vers la valeur finie $-\int_{[-\pi/l, \pi/l]^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2m_r}{\hbar^2 k^2}$. La longueur de diffusion de ce modèle est donc donnée par

$$\frac{1}{g_0} = \frac{m_r}{2\pi\hbar^2 a} - \int_{[-\pi/l, \pi/l]^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{2m_r}{\hbar^2 k^2}. \quad (\text{IV.28})$$

À la limite continue, $l \rightarrow 0$, l'intégrale au second membre diverge tandis que la longueur de diffusion est finie (car maintenue égale à la longueur de diffusion du vrai potentiel); la constante de couplage g_0 doit donc tendre vers 0 par valeurs négatives pour compenser cette divergence. Ce régime dans lequel $|a|$ est beaucoup plus grande que la portée l du potentiel d'interaction effectif est un régime de diffusion résonnante.

IV.1.4 Hamiltonien d'interaction dans l'onde s

Le cadre de la description microscopique des interactions du gaz étant posé, nous pouvons écrire le hamiltonien grand canonique⁴ du système en seconde quantification :

$$\hat{H} = l^3 \sum_{\mathbf{r}, \sigma=\uparrow/\downarrow} \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}} - \mu \right) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}) + g_0 l^3 \sum_{\mathbf{r}} \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}), \quad (\text{IV.29})$$

où la notation \mathbf{r} désigne à nouveau la position d'un fermion, l'opérateur champ $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$ obéit à des relations d'anticommutation fermioniques discrètes $\{\hat{\psi}_{\sigma'}(\mathbf{r}'), \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r})\} = \frac{\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}{l^3}$ et l'opérateur laplacien $\Delta_{\mathbf{r}}$ est tel que $\Delta_{\mathbf{r}} \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle = -k^2 \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle$. Le premier terme, quadratique en les opérateurs champs, correspond à l'énergie cinétique de fermions de masse m , à laquelle on a soustrait le terme grand canonique $\mu \hat{N}$. Nous nous sommes placé ici dans le cas d'un gaz non polarisé, avec des potentiels chimiques égaux dans les deux états de spin. Le second terme, quartique en $\hat{\psi}_\sigma$, est le terme d'interaction de contact, somme simple sur les sites \mathbf{r} du réseau. Comme tous ses termes possèdent le même nombre de $\hat{\psi}$ et de $\hat{\psi}^\dagger$, le hamiltonien commute avec

4. Le choix d'un hamiltonien grand canonique, choix que nous ferons dès lors que nous utilisons la théorie BCS, ne correspond pas *a priori* aux situations expérimentales, où c'est plutôt le nombre de particules N qui est fixé. Néanmoins, on s'attend à ce que les grandeurs thermodynamiques de l'ensemble grand canonique coïncident avec celles de l'ensemble canonique à la limite thermodynamique, lorsque les fluctuations du nombre de particules deviennent négligeables devant le nombre moyen de particules, \bar{N} (que fixe le potentiel chimique μ). Le choix de l'ensemble grand canonique est indépendant du choix de travailler avec des états quantiques dont le nombre de particules n'est pas fixé. Au chapitre VI par exemple nous introduisons un Ansatz qui comporte des fluctuations quantiques du nombre de particules bien que nous travaillions avec le hamiltonien canonique. À l'inverse, nous aurions pu chercher à minimiser l'énergie grand canonique avec un mélange statistique d'états à nombre de particules fixé. Cependant, la contrainte $N = \bar{N}$ occasionne de lourds calculs supplémentaires pour un système de fermions du fait des corrélations introduites par le principe d'exclusion de Pauli.

l'opérateur nombre de particules

$$\hat{N} = l^3 \sum_{\mathbf{r}, \sigma=\uparrow/\downarrow} \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}), \quad (\text{IV.30})$$

qui est donc une constante du mouvement. Le passage des opérateurs champ à l'espace de Fourier,

$$\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} \quad \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{k}\downarrow}, \quad (\text{IV.31})$$

où nous introduisons les opérateurs $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}$ qui créent une particules d'impulsion \mathbf{k} et de spin σ , permet de diagonaliser la partie cinétique, mais ceci vient au prix d'une somme triple sur les vecteurs d'onde de l'énergie d'interaction :

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}, \sigma=\uparrow/\downarrow} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q} \in \mathcal{D}} \hat{a}_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}, \quad (\text{IV.32})$$

Ici $\mathcal{D} = [-\frac{\pi}{l}, \frac{\pi}{l}]^3 \cap \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3$ est l'ensemble des points de la première zone de Brillouin compatibles avec les conditions aux limites périodiques. Toutes les dépendances en les vecteurs d'onde doivent être comprises *modulo* un vecteur du réseau réciproque $\frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3$.

IV.2 Approximation BCS de l'état fondamental

Nous voulons maintenant obtenir l'état fondamental, ou du moins une approximation de celui-ci, du hamiltonien (IV.29) écrit au paragraphe précédent. À part le pas l du réseau, ce hamiltonien possède deux paramètres, le potentiel chimique μ et la constante de couplage g_0 , auxquels on peut éventuellement substituer, nous verrons comment, la densité moyenne $\bar{\rho}$ et la longueur de diffusion a . Notre objectif sera donc d'exprimer tous les paramètres microscopiques du gaz dans son état fondamental en fonction de ces deux variables.

IV.2.1 État cohérent de paires

Pour trouver cette approximation, nous allons parcourir, en cherchant à minimiser l'énergie, la famille des états de Bardeen-Cooper-Schriffer (BCS), états cohérents de paires :

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}(t) \exp \left(t^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}') \right) |0\rangle, \quad (\text{IV.33})$$

La fonction d'onde Γ dans laquelle les paires de l'état cohérent sont créées dépend *a priori* des positions \mathbf{r} et \mathbf{r}' des deux fermions et du temps t . Cependant, l'état de plus basse énergie doit être stationnaire et, étant donnée la symétrie du problème, invariant par translation. On cherche donc sa fonction d'onde Γ_0 parmi les fonctions de la seule variable $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, de la forme $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \Gamma_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}$. Une simple transformée de Fourier des opérateurs champs (IV.31) permet alors de récrire l'état sous forme d'un produit :

$$|\psi^{\text{BCS}}\rangle = \mathcal{N} \prod_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \exp \left(\Gamma_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle, \quad (\text{IV.34})$$

Sous cette forme, le calcul de la constante de normalisation s'effectue sans difficulté, $\mathcal{N}^{-1} = \prod_{\mathbf{k}} (1 + |\Gamma_{\mathbf{k}}|^2)^{1/2}$. Associé au caractère fermionique des opérateurs \hat{a} , qui limite le développement de l'exponentielle dans (IV.34) à l'ordre 1, ceci permet de récrire l'état BCS fondamental sous la forme BCS habituelle :

$$|\psi^{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(U_{\mathbf{k}} - V_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (\text{IV.35})$$

Les paramètres

$$U_{\mathbf{k}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |\Gamma_{\mathbf{k}}|^2}} \quad (\text{IV.36})$$

$$V_{\mathbf{k}} = -\frac{\Gamma_{\mathbf{k}}}{\sqrt{1 + |\Gamma_{\mathbf{k}}|^2}} \quad (\text{IV.37})$$

des orbitales de l'état BCS sont liés par la relation

$$U_{\mathbf{k}} = \sqrt{1 - |V_{\mathbf{k}}|^2}. \quad (\text{IV.38})$$

Nous faisons le choix de prendre $U_{\mathbf{k}}$ réel, ce qui est toujours possible quitte à faire un changement de phase globale sur l'état. Ce sont ces paramètres qui permettent, grâce à une rotation de Bogolioubov, de construire les opérateurs de quasi-particules

$$\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}\uparrow} = U_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} + V_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \quad (\text{IV.39})$$

$$\hat{\mathbf{b}}_{-\mathbf{k}\downarrow} = -V_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger + U_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \quad (\text{IV.40})$$

dont l'état BCS (IV.35) est le vide :

$$\forall \mathbf{k}, \sigma, \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}\sigma} |\psi^{\text{BCS}}\rangle = 0. \quad (\text{IV.41})$$

Ces opérateurs vérifient des relations d'anticommutation fermioniques

$$\{\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}'\sigma'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (\text{IV.42})$$

$$\{\hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}\sigma}, \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}'\sigma'}\} = 0. \quad (\text{IV.43})$$

La transformation de Bogolioubov inverse

$$\hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} = U_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}\uparrow} - V_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{b}}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \quad (\text{IV.44})$$

$$\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} = U_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{b}}_{-\mathbf{k}\downarrow} + V_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{b}}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \quad (\text{IV.45})$$

est un moyen parmi d'autres de calculer les moyennes dans $|\psi^{\text{BCS}}\rangle$ des opérateurs bilinéaires :

$$\langle \psi^{\text{BCS}} | \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma'} | \psi^{\text{BCS}} \rangle = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{q}\mathbf{0}} |V_{\mathbf{k}}|^2 \quad (\text{IV.46})$$

$$\langle \psi^{\text{BCS}} | \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} | \psi^{\text{BCS}} \rangle = -\delta_{\mathbf{q}\mathbf{0}} U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}}. \quad (\text{IV.47})$$

Les moyennes superfluides à deux annihilateurs ou à deux créateurs de même spin sont nulles pour des raisons évidentes. Notons que seuls les opérateurs qui créent une impulsion totale \mathbf{q} nulle ont une moyenne non nulle dans un BCS tel que (IV.34). Ceci est une conséquence du choix de nous restreindre à des fonctions d'onde ne dépendant que de la position relative $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ des fermions de spins opposés, ce qui exclu les paires en mouvement de l'état cohérent. Concluons cette sous-section en remarquant que l'équation (IV.46) permet d'interpréter $V_{\mathbf{k}}$ comme l'amplitude de probabilité que l'orbitale $\mathbf{k}\uparrow$, et donc la paire $\mathbf{k}\uparrow / -\mathbf{k}\downarrow$ puisque dans l'état (IV.34) tous les fermions sont appariés, soit occupée.

IV.2.2 État BCS fondamental

Venons en maintenant à la minimisation de l'énergie. Elle doit nous permettre de calculer les amplitudes $U_{\mathbf{k}}^0$ et $V_{\mathbf{k}}^0$ de l'état fondamental BCS $|\psi_0^{\text{BCS}}\rangle$ en fonction des paramètres du gaz, à savoir sa densité moyenne $\bar{\rho}$ (ou son nombre moyen de particules \bar{N}) et sa longueur de diffusion a .

IV.2.2.1 Paramètres $V_{\mathbf{k}}^0$ du minimiseur

Les états cohérents $|\psi\rangle$ (IV.33), en particulier les états BCS $|\psi^{\text{BCS}}\rangle$ (IV.34), sont des états gaussiens, dans lesquels le théorème de Wick s'applique. Avec les valeurs des moyennes d'opérateurs bilinéaires (IV.46, IV.47) déjà obtenues, le calcul de l'énergie moyenne ne pose aucune difficulté. Plutôt que de paramétrer la fonctionnelle énergie par les variables réelles $\text{Re } V_{\mathbf{k}}$ et $\text{Im } V_{\mathbf{k}}$, nous la considérons comme une fonction du jeu de variables complexes formellement indépendantes $(V_{\mathbf{k}}, V_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$:

$$E^{\text{BCS}}((V_{\mathbf{k}}, V_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}) \equiv \langle \psi^{\text{BCS}} | \hat{H} | \psi^{\text{BCS}} \rangle = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \left[2 \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) |V_{\mathbf{k}}|^2 \right] + \left(g_0 n_{\uparrow} n_{\downarrow} + \frac{|\Delta|^2}{g_0} \right) L^3. \quad (\text{IV.48})$$

Dans cette expression, Δ est le *gap*⁵ de la théorie BCS :

$$\Delta = g_0 \langle \hat{\psi}_{\downarrow} \hat{\psi}_{\uparrow} \rangle = -\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} \quad (\text{IV.49})$$

et n_{σ} est le nombre de particule de spin σ par unité de volume :

$$n_{\sigma} = \langle \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger} \hat{\psi}_{\sigma} \rangle = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} |V_{\mathbf{k}}|^2. \quad (\text{IV.50})$$

Le terme $g_0 n_{\uparrow} n_{\downarrow} L^3$ de l'énergie (IV.48) s'interprète comme une énergie d'interaction de champ moyen : il y a $n_{\uparrow} L^3$ particules de spin \uparrow qui ressentent une interaction moyenne $g_0 n_{\downarrow}$ avec les particules de spin \downarrow . Notons toutefois que l'énergie de champ moyen $g_0 n_{\uparrow}$ est nulle si l'on prend la limite continue car alors g_0 tend vers 0 (*cf.* paragraphe IV.1.3.d.) alors que la densité du gaz reste finie. Ceci est un artefact du fait que, dans ce terme de Hartree, l'interaction est traitée dans l'approximation de Born. Le second terme est une énergie de condensation, négative compte tenu du signe de g_0 . Elle provient d'un traitement non perturbatif de l'interaction. Elle permet d'interpréter la bande interdite Δ comme le *paramètre d'ordre* du système : lorsque $\Delta \neq 0$ le condensat est peuplé par un nombre macroscopique de paires⁶.

La conservation du nombre de particules par le hamiltonien \hat{H} donne à la fonction E^{BCS} sa propriété la plus importante : son invariance par changement de phase global

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, E^{\text{BCS}}((e^{i\theta} V_{\mathbf{k}}, e^{-i\theta} V_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}) = E^{\text{BCS}}((V_{\mathbf{k}}, V_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}), \quad (\text{IV.51})$$

5. L'origine de ce nom sera clarifiée plus bas.

6. Cela se voit peut-être plus directement dans l'expression (II.17) du nombre moyen de particules condensées, écrite pour un état BCS fondamental mais facilement généralisable à un état BCS quelconque mais invariant par translation.

aussi appelée symétrie $U(1)$. Du fait de cette symétrie, le minimum de l'énergie (IV.48) est atteint sur un cercle plutôt qu'en un unique point. Le rayon de ce cercle s'obtient en cherchant les valeurs $|V_{\mathbf{k}}^0|$ du module de $V_{\mathbf{k}}$ qui minimisent E^{BCS} :

$$\left. \frac{\partial E^{\text{BCS}}}{\partial V_{\mathbf{k}}} \right|_{|V_{\mathbf{k}}|=|V_{\mathbf{k}}^0|} = \left. \frac{\partial E^{\text{BCS}}}{\partial V_{\mathbf{k}}^*} \right|_{|V_{\mathbf{k}}|=|V_{\mathbf{k}}^0|} = 0 \quad (\text{IV.52})$$

Il en ressort une équation sur $V_{\mathbf{k}}^0$, la célèbre équation « du *gap* » :

$$2\xi_{\mathbf{k}}V_{\mathbf{k}}^0 - \Delta_0U_{\mathbf{k}}^0 + (\Delta_0(V_{\mathbf{k}}^0)^* + \Delta_0^*V_{\mathbf{k}}^0) \frac{V_{\mathbf{k}}^0}{2U_{\mathbf{k}}^0} = 0, \quad (\text{IV.53})$$

où on a posé

$$\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2k^2}{2m} - \mu + g_0n_{\uparrow}, \quad (\text{IV.54})$$

l'énergie cinétique d'une particule corrigée du champ moyen et mesurée par rapport au potentiel chimique et

$$\Delta_0 = -\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0, \quad (\text{IV.55})$$

le *gap* dans le fondamental BCS. Nous savons que l'ensemble des solutions de (IV.53) est un cercle de rayon $|V_{\mathbf{k}}^0|$ fixé. Pour trouver ce rayon, le plus simple est de chercher la solution réelle positive de (IV.53), c'est-à-dire de faire le choix de la phase nulle pour $V_{\mathbf{k}}^0$. Dans toute la suite $V_{\mathbf{k}}^0$ désignera donc la solution *réelle positive* de (IV.53). En résolvant une équation du second degré, on obtient :

$$V_{\mathbf{k}}^0 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right)} \quad (\text{IV.56})$$

où nous avons introduit l'énergie $\epsilon_{\mathbf{k}}$

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2}, \quad (\text{IV.57})$$

construite avec le *gap* Δ_0 réel correspondant à (IV.56). Nous avons écarté la solution $\sqrt{1 + \xi_{\mathbf{k}}/\epsilon_{\mathbf{k}}}/\sqrt{2}$ de l'équation (IV.53) car elle correspond en fait à un maximum de l'énergie (*cf.* section IV.3 du présent chapitre). Le choix de phase nulle pour $V_{\mathbf{k}}^0$ permet de récrire l'équation du *gap* (IV.53) sous une forme parfois plus simple à manipuler :

$$U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 = \frac{\Delta_0}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \quad (\text{IV.58})$$

La solution (IV.56) de l'équation du *gap* est en fait encore implicite à cause de la présence du *gap*, qui est fonction de $V_{\mathbf{k}}^0$ d'après l'équation (IV.55), dans $\epsilon_{\mathbf{k}}$. La marche à suivre est donc de déterminer d'abord la valeur du *gap* en fonction de g_0 et de μ en éliminant $V_{\mathbf{k}}^0$ de l'équation (IV.55) à l'aide de (IV.58), ce qui conduit à l'équation intégrale :

$$-\frac{1}{g_0} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (\text{IV.59})$$

Les deux membres de (IV.59) étant divergents à la limite continue, on préférera, avant de faire tendre l vers 0, éliminer g_0 au profit de a à l'aide de (IV.28), ce qui, à la limite thermodynamique conduit à :

$$\frac{m}{4\pi\hbar^2 a} = \int_{[-\pi/l, \pi/l]^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{m}{\hbar^2 k^2} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right). \quad (\text{IV.60})$$

Plutôt que le potentiel chimique, il est d'usage d'utiliser la densité moyenne $\bar{\rho}$ comme paramètre de l'état fondamental. La substitution se fait en inversant la relation qui donne $\bar{\rho}$ en fonction de μ et Δ_0 :

$$\bar{\rho} = \frac{2}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} |V_{\mathbf{k}}^0|^2. \quad (\text{IV.61})$$

Cette relation s'obtient en calculant la valeur moyenne de l'opérateur \hat{N} dans un état BCS $|\psi^{\text{BCS}}\rangle$ puis en appliquant le résultat au minimiseur en remplaçant $V_{\mathbf{k}}$ par $V_{\mathbf{k}}^0$. Comme \hat{N} conserve évidemment le nombre de particules, le résultat ne dépend pas du choix de la phase du minimiseur.

IV.2.2.2 Équation d'état à température nulle à la limite continue

Les équations implicites (IV.60, IV.61) peuvent être résolues analytiquement [79] à la limite continue $l \rightarrow 0$, ce qui conduira à l'équation d'état du gaz

$$\mu = f(\bar{\rho}, a). \quad (\text{IV.62})$$

Pour y parvenir, nous commençons par remplacer les sommes par des intégrales à trois dimensions lorsque le pas du réseau l tend vers 0. Les équations implicites donnant la longueur de diffusion et la densité du gaz deviennent ainsi :

$$\frac{m}{4\pi\hbar^2 a} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{m}{\hbar^2 k^2} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right) \quad (\text{IV.63})$$

$$\bar{\rho} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 2|V_{\mathbf{k}}^0|^2. \quad (\text{IV.64})$$

La partie angulaire de ces intégrales est triviale compte tenu de l'invariance angulaire des fonctions $\mathbf{k} \mapsto \hbar^2 k^2 / (2m)$, $\mathbf{k} \mapsto \xi_{\mathbf{k}}$ et $\mathbf{k} \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$. Puis nous adimensionnons toutes les énergies par Δ_0 et les vecteurs d'onde par

$$k_{\Delta_0} = \left(\frac{2m\Delta_0}{\hbar^2} \right)^{1/2} \quad (\text{IV.65})$$

en posant

$$u^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m\Delta_0} \quad (\text{IV.66})$$

$$u_{\min}^2 = \frac{\mu}{\Delta_0} \quad (\text{IV.67})$$

$$\xi_u = \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} \quad (\text{IV.68})$$

$$\epsilon_u = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\Delta_0}. \quad (\text{IV.69})$$

Les intégrales s'adimensionnent donc de la façon suivante :

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \rightarrow \frac{k_{\Delta_0}^3}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} u^2 du. \quad (\text{IV.70})$$

Notons que le préfacteur de l'intégrale peut aussi s'écrire :

$$\frac{k_{\Delta_0}^3}{2\pi^2} = \frac{3}{2} \bar{\rho} \left(\frac{\Delta_0}{\varepsilon_F} \right)^{3/2}, \quad (\text{IV.71})$$

où ε_F désigne l'énergie de Fermi, reliée à la densité $\bar{\rho}$ par

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 \bar{\rho})^{2/3}. \quad (\text{IV.72})$$

conséquence directe de l'équation (IV.21). En fonction de u_{\min} et des intégrales I_{Θ} et I_X

$$I_{\Theta} = \int_0^{+\infty} u^2 du \frac{1}{\varepsilon_u^3} \quad (\text{IV.73})$$

$$I_X = \int_0^{+\infty} u^2 du \frac{\xi_u}{\varepsilon_u^3}, \quad (\text{IV.74})$$

nous avons

$$\frac{1}{k_F a} = -\frac{4}{\pi} \frac{u_{\min}^2 I_X - I_{\Theta}}{(u_{\min}^2 I_{\Theta} + I_X)^{1/3}} \quad (\text{IV.75})$$

$$\frac{\Delta_0}{\varepsilon_F} = \frac{1}{(u_{\min}^2 I_{\Theta} + I_X)^{2/3}} \quad (\text{IV.76})$$

$$\frac{\mu}{\varepsilon_F} = \frac{\Delta_0}{\varepsilon_F} u_{\min}^2 \quad (\text{IV.77})$$

$$\frac{\bar{N}_0^{\text{BCS}}}{\bar{N}} = \frac{3\pi}{16} \frac{\left(\sqrt{1 + u_{\min}^4} + u_{\min}^2 \right)^{1/2}}{2^{1/2} (u_{\min}^2 I_{\Theta} + I_X)} \quad (\text{IV.78})$$

$$(\text{IV.79})$$

Les intégrales I_{Θ} et I_X peuvent à leur tour être exprimées analytiquement en fonction de $u_{\min}^2 = \mu/\Delta_0$ à l'aide d'intégrales elliptiques. Ces formules sont données dans l'annexe E. Pour visualiser l'équation d'état, nous avons tracé, en trait plein, le *gap* (figure IV.1), le potentiel chimique (figure IV.2) et la fraction condensée (figure IV.3) en fonction de la force des interactions $1/(k_F a)$, à densité fixée. Les courbes bleues tiretées figurent les comportements asymptotiques dans les limites $k_F a \rightarrow 0^+$ et $k_F a \rightarrow 0^-$ et le point rouge montre la prédiction de la théorie BCS à la limite unitaire $1/(k_F a) = 0$. Discutons brièvement ces cas limites.

a. Limite BCS $k_F a \rightarrow 0^-$ La limite $k_F a \rightarrow 0^-$ est appelée *limite BCS* car c'est dans cette limite seulement que les prédictions de la théorie BCS sont quantitatives. Elle correspond à un gaz parfait de fermions légèrement perturbé par l'apparition d'une bande interdite, exponentiellement faible en $1/(k_F |a|)$:

$$\frac{\Delta_0}{\varepsilon_F} \underset{k_F a \rightarrow 0^-}{\sim} 8e^{-2} e^{-\pi/(2k_F |a|)} \quad (\text{IV.80})$$

La fraction condensée (*cf.* section II.1), proportionnelle au *gap* dans cette limite, est elle aussi exponentiellement petite :

$$\frac{\bar{N}_0^{\text{BCS}}}{\bar{N}} \underset{k_F a \rightarrow 0^-}{\sim} \frac{3\pi}{16} \frac{\Delta_0}{\epsilon_F} \sim \frac{3\pi}{2} e^{-2} e^{-\pi/(2k_F a)} \quad (\text{IV.81})$$

Le potentiel chimique quant à lui s'approche exponentiellement rapidement du potentiel chimique du gaz parfait de fermions, autrement dit l'énergie de Fermi ϵ_F :

$$\mu \underset{k_F a \rightarrow 0^-}{=} \epsilon_F \left(1 + O\left(\frac{\Delta_0^2}{\epsilon_F^2} \ln \frac{\Delta_0}{\epsilon_F}\right) \right), \quad (\text{IV.82})$$

ce qui est un artefact de l'approximation de Born dans le terme de champ moyen, comme il est expliqué sous l'équation (IV.50), le véritable potentiel chimique admettant un développement en puissances [80] de $k_F a$ dont le premier terme, linéaire, est l'énergie de champ moyen renormalisée $g\bar{n}_\uparrow$.

b. Limite CBE $k_F a \rightarrow 0^+$ Lorsque $k_F a \rightarrow 0^+$, la théorie BCS prédit que les paires de fermions forment des dimères d'énergie de liaison

$$E_L \underset{k_F a \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\hbar^2}{ma^2}. \quad (\text{IV.83})$$

Ces dimères forment un gaz de bosons en interaction faible, complètement condensé, soit

$$\frac{2\bar{N}_0^{\text{BCS}}}{\bar{N}} \underset{k_F a \rightarrow 0^+}{\rightarrow} 1, \quad (\text{IV.84})$$

et avec une longueur de diffusion dimère-dimère

$$a_{\text{dim}}^{\text{BCS}} = 2a, \quad (\text{IV.85})$$

valeur grossièrement fautive, la valeur exacte étant $a_{\text{dim}} \simeq 0,60a$ [81, 49]. L'énergie du fondamental BCS dans cette limite est la somme des énergies de liaison et de l'énergie de ce gaz de $\bar{N}/2$ bosons en interaction faible :

$$E_0^{\text{BCS}} \underset{k_F a \rightarrow 0^+}{=} -\frac{\bar{N}}{2} \frac{\hbar^2}{ma^2} + \frac{1}{2} g_{\text{dim}} \frac{(\bar{N}/2)^2}{L^3} + o(k_F a) \quad (\text{IV.86})$$

avec la constante de couplage entre deux dimères de masse $2m$: $g_{\text{dim}} = 4\pi\hbar^2 a_{\text{dim}}^{\text{BCS}}/2m$. Le potentiel chimique s'en déduit immédiatement en dérivant par rapport à \bar{N} :

$$\mu \underset{k_F a \rightarrow 0^+}{=} -\frac{\hbar^2}{2ma^2} + \frac{1}{2} g_{\text{dim}} \frac{\bar{\rho}}{2} + o(k_F a) \quad (\text{IV.87})$$

$$\underset{k_F a \rightarrow 0^+}{=} \epsilon_F \left(-\frac{1}{(k_F a)^2} + \frac{2}{3\pi} k_F a + o(k_F a) \right) \quad (\text{IV.88})$$

Chaque fermion porte donc la moitié de l'énergie de liaison d'un dimère et la moitié de l'énergie de champ moyen par particule d'un gaz de boson avec une constante de couplage g_{dim} et une densité moitié de la densité des fermions. Enfin, le *gap* (qui dans cette limite n'est pas l'énergie minimale requise pour briser une paire, *cf.* la section IV.3) possède l'équivalent :

$$\Delta_0 \underset{k_F a \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{\sqrt{3\pi}} (k_F a)^{3/2} \frac{\hbar^2}{ma^2}. \quad (\text{IV.89})$$

c. Limite unitaire $|a| \rightarrow \infty$ La limite unitaire $|a| \rightarrow \infty$ n'est pas à proprement parler une limite pour la théorie BCS, qui prédit une équation d'état parfaitement régulière⁷ en fonction de $1/k_F a$. C'est néanmoins un point particulier car la seule longueur caractéristique du problème, a , diverge, ce qui rend le système invariant d'échelle. Toutes les quantités thermodynamiques correctement adimensionnées sont alors *universelles*, au sens où elles ne dépendent d'aucun paramètre associé aux interactions. On définit généralement le paramètre de Bertsch :

$$\xi \Big|_{|a| \rightarrow \infty} \equiv \frac{\mu}{\varepsilon_F}. \quad (\text{IV.90})$$

De même, un paramètre sans dimension relie le *gap* à l'énergie de Fermi, ou la fraction condensée au nombre de paires $\bar{N}/2$. La théorie BCS prédit :

$$\xi_{\text{BCS}} = 0,59 \quad (\text{IV.91})$$

$$\frac{\Delta_0}{\varepsilon_F} \Big|_{|a| \rightarrow \infty} = 0,69 \quad (\text{IV.92})$$

$$\frac{2\bar{N}_0^{\text{BCS}}}{\bar{N}} \Big|_{|a| \rightarrow \infty} = 0,70 \quad (\text{IV.93})$$

ce qui est quantitativement faux. Les mesures les plus récentes donnent : $\xi \simeq 0,376$ [32], $\Delta_0/\varepsilon_F \simeq 0,44$ [82] et $2\bar{N}_0^{\text{BCS}}/\bar{N} \simeq 0,62$ [83]. La valeur de μ/Δ_0 est au contraire bien prédite par la théorie BCS qui obtient 1,16 au lieu de 1,17 pour les expériences. Aussi nous utiliserons fréquemment cette quantité pour paramétrer la force des interactions dans la suite.

IV.2.2.3 État fondamental à symétrie brisée

Comme nous l'avons souligné, à cause de la symétrie $U(1)$ du minimiseur, il n'y a pas un fondamental BCS unique, mais une infinité : tous ceux dont les paramètres $V_{\mathbf{k}}$ ont pour module $V_{\mathbf{k}}^0$ (IV.56). Or, il nous faut décider de ce qui sera l'origine de nos théories en puissances d'une petite perturbation au voisinage fondamental. Il est évidemment plus élégant de tenir compte de la symétrie $U(1)$ du lieu des minima et de ne pas choisir arbitrairement un point du cercle comme origine du développement, et cela évite d'ailleurs de gros ennuis dès que l'on essaie de pousser le développement au-delà de l'ordre linéaire. Nous ferons ce développement autour du cercle au chapitre VI. Néanmoins choisir une approche à symétrie brisée, qui distingue un point du cercle, par exemple celui où la phase de $V_{\mathbf{k}}$ est nulle, doit donner en définitive les mêmes résultats que l'approche qui respecte la symétrie $U(1)$. Dans la suite, nous nous autoriserons donc à prendre comme origine le fondamental BCS de phase nulle, c'est-à-dire celui dont les paramètres sont réels et donnés par (IV.56) :

$$|\psi_0^{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \left(U_{\mathbf{k}}^0 - V_{\mathbf{k}}^0 \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (\text{IV.94})$$

IV.3 Excitations fermioniques

La raison pour laquelle nous avons attendu jusqu'ici pour parler des excitations élémentaires de la théorie BCS est que leur écriture n'est pas indépendante du choix de phase

⁷ On parle en anglais de *crossover* pour désigner le passage progressif d'un superfluide BCS à un gaz de dimères en interaction faible.

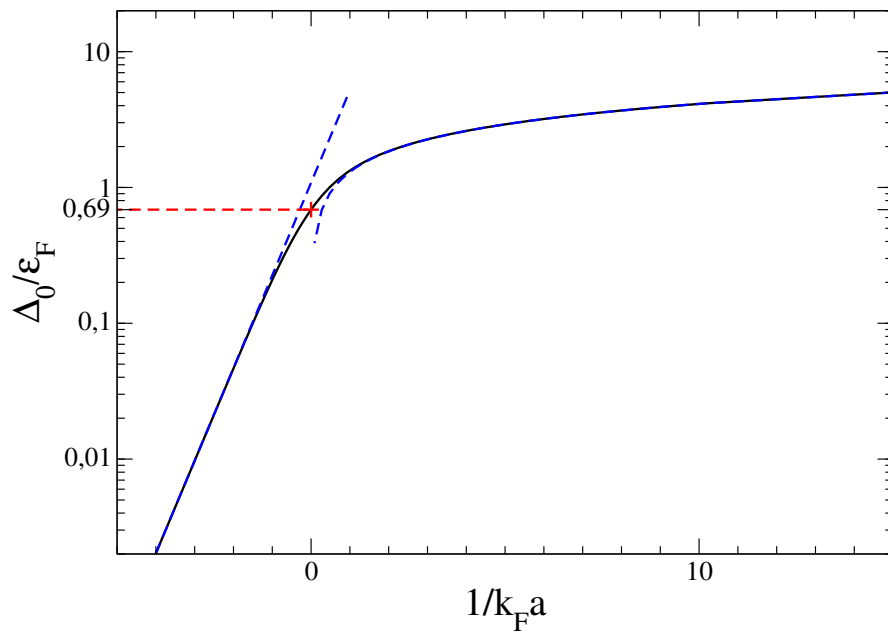


FIGURE IV.1 – Largeur de la bande interdite adimensionnée par l'énergie de Fermi ε_F en fonction de la force des interaction $1/(k_F a)$. La ligne en trait plein représente la prédiction BCS et les tiretés bleus ses comportements asymptotiques. Le pointillé et la croix rouges indiquent la valeur atteinte à la limite unitaire quand $1/(k_F a) = 0$.

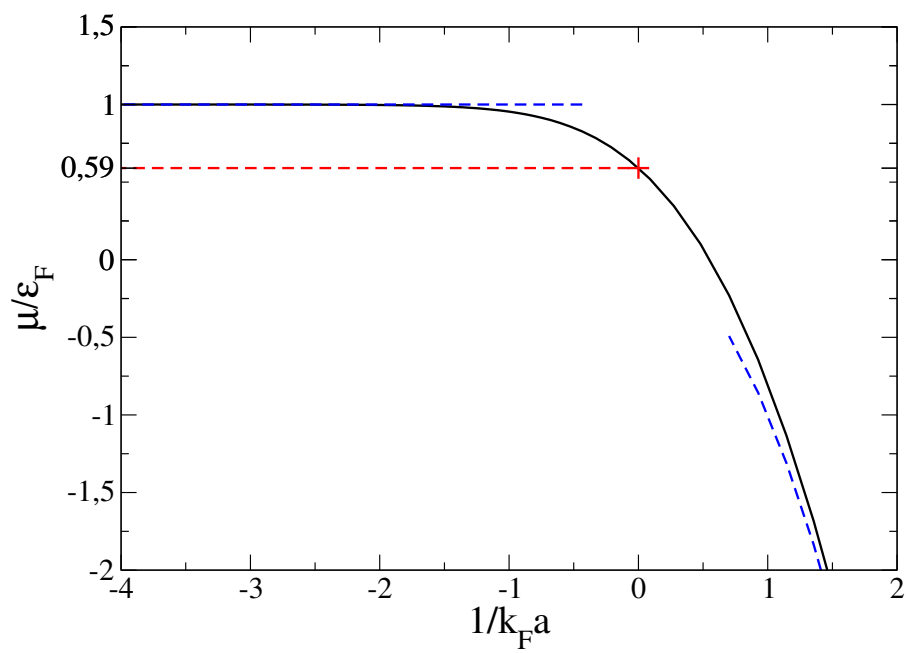


FIGURE IV.2 – Potentiel chimique adimensionné par l'énergie de Fermi ε_F en fonction de la force des interaction $1/(k_F a)$ d'après la théorie BCS. Pour la description des courbes voir la légende de la figure IV.1.

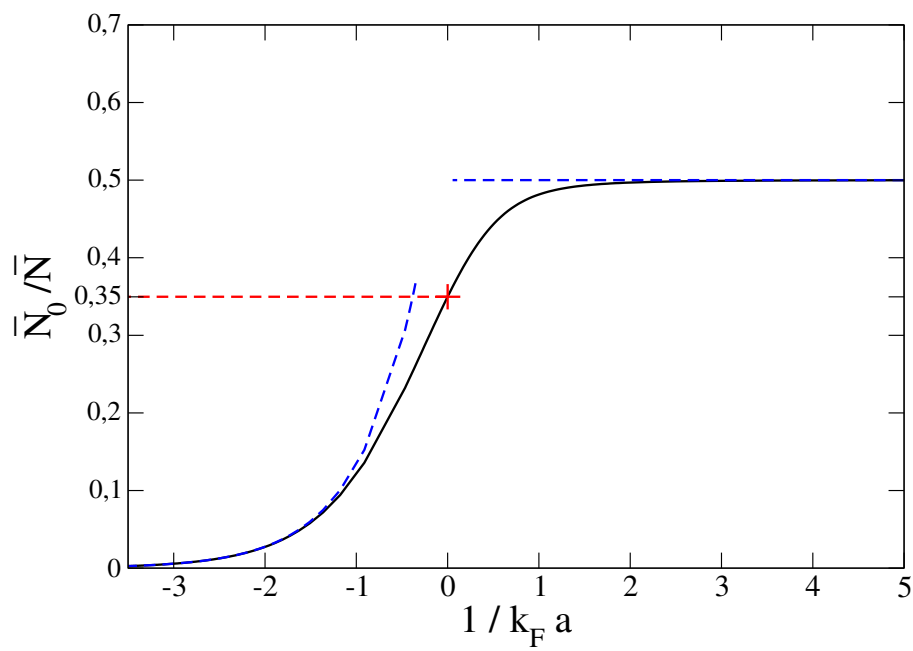


FIGURE IV.3 – Nombre moyen de paires condensées \bar{N}_0^{BCS} ramené au nombre moyen de fermions \bar{N} en fonction de la force des interactions $1/(k_F a)$ d'après la théorie BCS. Pour la description des courbes voir la légende de la figure IV.1.

du minimiseur. Les opérateurs fermioniques associés comme aux équations (IV.39,IV.40) à l'état BCS à symétrie brisée (IV.94), dont il est le vide, et que nous désignons par \hat{b} (notez la différence de police avec les équations (IV.39,IV.40)), s'écrivent

$$\hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} = U_{\mathbf{k}}^0 \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} + V_{\mathbf{k}}^0 \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \quad (\text{IV.95})$$

$$\hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} = -V_{\mathbf{k}}^0 \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} + U_{\mathbf{k}}^0 \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}. \quad (\text{IV.96})$$

Ils ne seraient pas identiques si l'on avait fait un autre choix de phase et sont donc indissociables d'un choix de brisure de symétrie. L'action d'un opérateur de création $\hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger}$ sur le fondamental BCS (IV.94) transforme la paire d'impulsion \mathbf{k} en un fermion libre, on dit que la paire est brisée :

$$\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} |\psi_0^{\text{BCS}}\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \prod_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} \left(U_{\mathbf{k}'}^0 - V_{\mathbf{k}'}^0 \hat{a}_{\mathbf{k}'\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}'\downarrow}^{\dagger} \right) |0\rangle. \quad (\text{IV.97})$$

C'est, rappelons-le, une excitation fermionique. Son énergie est l'énergie $\epsilon_{\mathbf{k}}$ du spectre d'excitation BCS définie en (IV.57) :

$$\langle \psi_0^{\text{BCS}} | \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} \hat{H} \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} | \psi_0^{\text{BCS}} \rangle - \langle \psi_0^{\text{BCS}} | \hat{H} | \psi_0^{\text{BCS}} \rangle = \epsilon_{\mathbf{k}} \quad (\text{IV.98})$$

La figure IV.4 montre l'allure de cette branche d'excitation $k \rightarrow \epsilon_{\mathbf{k}}/\Delta_0$ pour différentes valeurs du rapport μ/Δ_0 . Du côté BCS, où à la fois μ et Δ_0 sont positifs, la branche atteint son minimum égal à Δ_0 (d'où le nom de bande interdite) en $k_{\text{min}} = (2m\mu/\hbar^2)^{1/2}$. À l'inverse, du côté CBE, μ devient négatif, la branche d'excitation est purement convexe et son minimum atteint en $k = 0$ s'approche de μ , qui, à l'ordre dominant, est l'énergie requise pour briser une paire, $\hbar^2/(2ma^2)$. Faire agir simultanément la paire d'opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{k},\uparrow}^{\dagger}, \hat{b}_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger}$ reforme la paire $\mathbf{k}\uparrow / -\mathbf{k}\downarrow$.

$$\hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} |\psi_0^{\text{BCS}}\rangle = \left(V_{\mathbf{k}}^0 + U_{\mathbf{k}}^0 \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \right) \prod_{\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}} \left(U_{\mathbf{k}'}^0 - V_{\mathbf{k}'}^0 \hat{a}_{\mathbf{k}'\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}'\downarrow}^{\dagger} \right) |0\rangle. \quad (\text{IV.99})$$

mais la met dans un état d'énergie $2\epsilon_{\mathbf{k}}$ plus élevée

$$\langle \psi_0^{\text{BCS}} | \hat{b}_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{H} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k},\downarrow}^{\dagger} | \psi_0^{\text{BCS}} \rangle - \langle \psi_0^{\text{BCS}} | \hat{H} | \psi_0^{\text{BCS}} \rangle = 2\epsilon_{\mathbf{k}}. \quad (\text{IV.100})$$

On dit que la paire est excitée.

Pour résumer ce qui vient d'être dit, on peut décrire les excitations fermioniques par le hamiltonien réduit :

$$\hat{H}_{\text{BCS}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \left(\xi_{\mathbf{k}} (\hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}) + \Delta_0 (\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger}) \right) - \frac{L^3}{g_0} \Delta_0^2 - g_0 L^3 n_{\uparrow} n_{\downarrow} \quad (\text{IV.101})$$

obtenu à partir du hamiltonien (IV.32) en effectuant des contractions partielles sur les termes quartiques,

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} \rightarrow \hat{a}\hat{b}\langle\hat{c}\hat{d}\rangle_0 + \langle\hat{a}\hat{b}\rangle_0\hat{c}\hat{d} - \hat{a}\hat{c}\langle\hat{b}\hat{d}\rangle_0 - \langle\hat{a}\hat{c}\rangle_0\hat{b}\hat{d} + \hat{a}\hat{d}\langle\hat{b}\hat{c}\rangle_0 \\ + \langle\hat{a}\hat{d}\rangle_0\hat{b}\hat{c} - \langle\hat{a}\hat{b}\rangle_0\langle\hat{c}\hat{d}\rangle_0 + \langle\hat{a}\hat{c}\rangle_0\langle\hat{b}\hat{d}\rangle_0 - \langle\hat{a}\hat{d}\rangle_0\langle\hat{b}\hat{c}\rangle_0 \end{aligned} \quad (\text{IV.102})$$

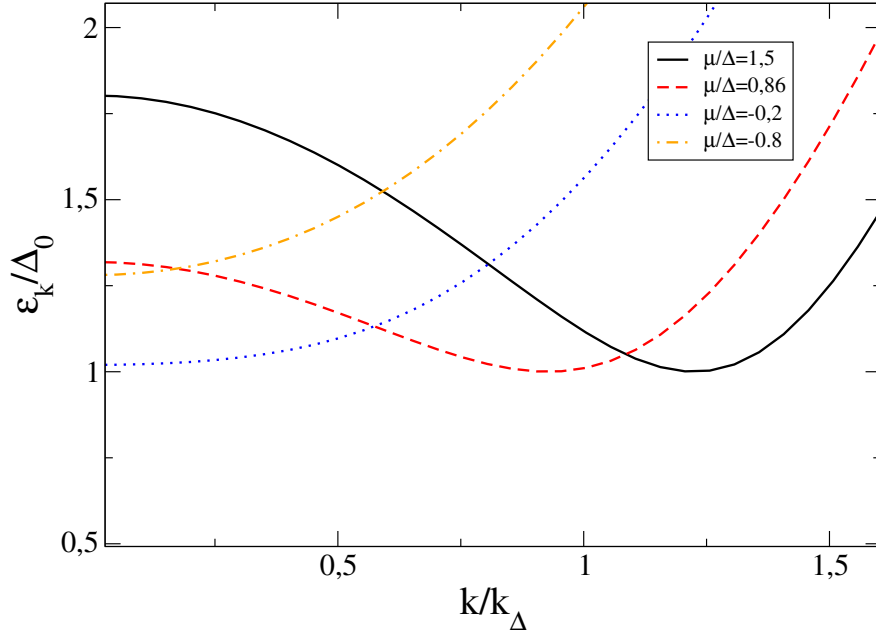


FIGURE IV.4 – Spectre de la branche d'excitation fermionique pour différentes valeurs du rapport μ/Δ_0 d'après la théorie BCS. Le vecteur d'onde k est en unités de $k_\Delta = (2m\Delta_0/\hbar^2)^{1/2}$ et l'énergie $\epsilon_{\mathbf{k}}$ en unités de Δ_0 . Lorsque $\mu/\Delta_0 > 0$ la fonction $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}/\Delta_0$ atteint son un minimum, égal à 1, en $k = k_{\min} = (2m\mu/\hbar^2)^{1/2}$

où la notation $\langle \dots \rangle_0$ désigne une valeur moyenne prise dans le fondamental BCS à symétrie brisée. Exprimé en termes des opérateurs de quasi-particules \hat{b} , et de l'énergie E_0^{BCS} du fondamental BCS (la valeur de la fonctionnelle énergie E^{BCS} évaluée en $V_{\mathbf{k}} = V_{\mathbf{k}}^0$), ce hamiltonien est diagonal, avec les $\epsilon_{\mathbf{k}}$ comme énergies propres :

$$\hat{H}_{\text{BCS}} = E_0^{\text{BCS}} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}, \sigma = \uparrow/\downarrow} \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k},\sigma}. \quad (\text{IV.103})$$

Attention cependant à ne pas confondre la « recette » des contractions partielles avec une méthode systématique de développement en puissances des faibles écarts du gaz par rapport à son état fondamental, qui donnerait accès à un hamiltonien effectif de quasi-particules à basse énergie, comme sont la méthode de Bogolioubov, ou l'approche variationnelle que nous introduirons au chapitre VI. Nous verrons en particulier au chapitre VII qu'il existe une branche d'excitation bosonique, du même ordre que la branche fermionique en termes de déviations par rapport à l'état $|\psi_0^{\text{BCS}}\rangle$, et que la théorie BCS rate complètement.

Chapitre V

Dynamique de phase par la RPA - Contribution de la branche fermionique

Nous abordons maintenant la démonstration promise de l'équation fondamentale (II.32) de l'opérateur phase. Et nous commençons avec l'objectif ambitieux d'établir cette équation dans un cadre purement quantique, celui des équations d'Heisenberg linéarisées de l'Approximation de la Phase Aléatoire (la Random Phase Approximation, RPA d'Anderson [42]). L'approche RPA permet une description entièrement quantique des degrés de liberté microscopiques d'un gaz de fermions homogène. Le système d'équations du mouvement linéarisées qu'elle fournit donne accès au spectre complet du gaz, y compris la branche d'excitation bosonique ; nous verrons qu'il est l'analogue, avec tout de même quelques changements importants, de celui que nous obtiendrons au chapitres suivants VI et VII par la théorie variationnelle. En ce qui concerne la dynamique de phase, la RPA décrit correctement le brouillage de phase à température nulle dû aux fluctuations du nombre de particules et permet même d'inclure la contribution de la branche fermionique à la dynamique de $\hat{\theta}_0$. Malheureusement, pour des raisons que nous expliquerons en détail, elle s'avérera insuffisante pour capturer la contribution de la branche bosonique, et donc inutilisable à température non nulle. Mais commençons par expliquer en quoi consiste cette RPA introduite pour la première fois pour un gaz de fermions appariés par P.W. Anderson en 1958.

V.1 Équations du mouvement de la RPA

La RPA consiste en une linéarisation des équations du mouvement d'un jeu complet d'opérateurs quantiques, qui inclut donc à la fois les opérateurs normaux $\hat{\psi}_\sigma^\dagger \hat{\psi}_\sigma$, les opérateurs d'appariement superfluide $\hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow$ et leur hermitien conjugué. Comme la RPA linéarise à partir de l'état BCS fondamental, mieux vaut travailler avec des opérateurs définis dans l'espace de Fourier :

$$\begin{aligned} \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} &= \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}, & \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} &= \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \\ \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} &= \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}, & \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} &= \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger. \end{aligned} \quad (\text{V.1})$$

Dans ces notations la coordonnée haute \mathbf{q} désigne le vecteur d'onde du centre de masse (l'action de l'opérateur sur un état donné change l'impulsion totale du gaz de $\hbar\mathbf{q}$) tandis que la coordonnée basse paramètre le vecteur d'onde relatif $\mathbf{k} + \mathbf{q}/2$; la lettre d dénote des

opérateurs de création ou d'annihilation de paire, la lettre n des opérateurs de « déplacement » de particule (une particule est détruite à impulsion $\hbar\mathbf{k}$ et recrée à impulsion $\hbar(\mathbf{k} + \mathbf{q})$). Par convention et pour alléger les notations, nous nous permettrons d'omettre la coordonnée haute lorsque celle-ci est $\mathbf{0}$, $\hat{d}_{\mathbf{k}} \equiv \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{0}}$. Avant de linéariser les équations du mouvement écrivons d'abord leur version exacte :

$$i\hbar \frac{d\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2}{2m} - 2\mu \right) \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \hat{d}_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{q}} - \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_1} \left(\hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}_1\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}_1\downarrow} + \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{q}_1\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} \right) \hat{a}_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}_1\uparrow} \quad (\text{V.2})$$

$$-i\hbar \frac{d\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2(\mathbf{k} + \mathbf{q})^2}{2m} - 2\mu \right) \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \hat{d}_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{q}} - \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_1} \hat{a}_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}_1\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}_1\downarrow}^\dagger \left(\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1\uparrow} + \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}_1\downarrow} \right) \quad (\text{V.3})$$

$$i\hbar \frac{d\hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = -(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}}) \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_1} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}_1\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}_1\uparrow} - \hat{a}_{\mathbf{k}_1\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}-\mathbf{q}_1\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} \right) \quad (\text{V.4})$$

$$-i\hbar \frac{d\hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = -(\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}}) \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{q}_1} \left(\hat{a}_{\mathbf{k}_1\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}_1\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_1\uparrow} - \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}-\mathbf{q}_1\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}_1-\mathbf{q}_1\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}_1\uparrow} \right). \quad (\text{V.5})$$

On pourrait si l'on voulait remplacer, en les appariant, les opérateurs fermioniques \hat{a} par des opérateurs de la RPA (V.1) dans les seconds membres des équations (V.2-V.5). On se rendrait compte (i) qu'il existe toujours deux façons de faire une telle substitution, car il existe deux façon d'apparier les opérateurs fermioniques, par exemple

$$\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{-\mathbf{k}_1\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}_1\uparrow} = \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \hat{d}_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{0}} = -\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}_1\downarrow} \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}_1\uparrow} = -\hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{k}-\mathbf{k}} \hat{d}_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{k}-\mathbf{k}_1+\mathbf{q}}, \quad (\text{V.6})$$

(ii) que l'on obtient un système d'équations non linéaires où tous les opérateurs de la RPA, y compris à impulsion totale $\hbar\mathbf{q}$ différente, sont couplés. Pour linéariser ces équations du mouvement, nous imaginons que le gaz n'explore qu'une petite région de l'espace de Hilbert autour de l'état BCS fondamental de phase nulle $|\psi_{\text{BCS}}^0\rangle$, région dans laquelle l'action des opérateurs quadratiques (V.1) est très proche d'une multiplication par leur valeur moyenne dans ce fondamental, que nous notons $\langle \dots \rangle_0$. Rappelons que seuls les opérateurs avec une impulsion totale nulle ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$) ont une valeur moyenne non nulle. Ces valeurs moyennes sont nos quantités d'ordre zéro dont les opérateurs diffèrent par un infiniment petit. Ce raisonnement suggère d'écrire un opérateur quadratique $\hat{a}\hat{b}$ (où \hat{a} et \hat{b} sont des opérateurs de création ou d'annihilation fermioniques) comme sa valeur moyenne plus une petite déviation :

$$\hat{a}\hat{b} = \langle \hat{a}\hat{b} \rangle_0 + \delta(\hat{a}\hat{b}). \quad (\text{V.7})$$

Cette prescription n'est cependant pas satisfaisante. En effet, un opérateur quartique $\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}$ peut être réordonné par les relations d'anticommutation fermioniques, de sorte qu'il n'existe pas de manière unique d'apparier les opérateurs pour injecter la décomposition (V.7). C'est pourquoi, l'approche RPA considère *tous* les appariements possibles d'opérateurs à un corps à l'intérieur du produit $\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}$; si aucun ne permet de former un opérateur bilinéaire d'impulsion nulle $\mathbf{q} = 0$ (possédant donc un ordre zéro) alors ce produit est d'ordre supérieur et sera négligé. Dans le cas contraire, on remplace ces opérateurs d'impulsion nulle par le développement (V.7). Cette procédure revient à effectuer des contractions de Wick partielles comme prescrit à l'équation (IV.102). L'intérêt principal de cette approximation, outre de linéariser les équations du mouvement, est de les découpler en systèmes à impulsion totale $\hbar\mathbf{q}$ fixée. Formellement, on obtient donc une série d'opérateurs d'évolution $\mathcal{L}_{\text{RPA}}^{\mathbf{q}}$ pour chaque valeur de $\mathbf{q} \in \mathcal{D}$:

$$\forall \mathbf{q} \in \mathcal{D}, \quad i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \mathcal{L}_{\text{RPA}}^{\mathbf{q}} \begin{pmatrix} \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \quad (\text{V.8})$$

Avant d'écrire explicitement ce système, introduisons quelques notations intuitives qui nous simplifieront la vie. D'abord les opérateurs collectifs :

$$\hat{\Delta}^{\mathbf{q}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \hat{d}_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{q}} \quad (\text{V.9})$$

$$\hat{\Delta}^{\mathbf{q}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \hat{d}_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{q}} \quad (\text{V.10})$$

$$\hat{n}_{\uparrow}^{\mathbf{q}} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \hat{n}_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{q}} \quad (\text{V.11})$$

$$\hat{n}_{\downarrow}^{\mathbf{q}} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \hat{n}_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{q}}. \quad (\text{V.12})$$

Ensuite les combinaisons de paramètres du fondamental BCS qui apparaîtront fréquemment dans les équations :

$$\xi_{\mathbf{kq}}^{\pm} = \xi_{\mathbf{k+q}} \pm \xi_{\mathbf{k}} \quad (\text{V.13})$$

$$\epsilon_{\mathbf{kq}}^{\pm} = \epsilon_{\mathbf{k+q}} \pm \epsilon_{\mathbf{k}} \quad (\text{V.14})$$

$$d_{\mathbf{kq}}^{\pm} = \langle \hat{d}_{\mathbf{k+q}} \rangle_0 \pm \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 = -\frac{\Delta_0}{2\epsilon_{\mathbf{k+q}}} \mp \frac{\Delta_0}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \quad (\text{V.15})$$

$$z_{\mathbf{kq}}^{\pm} = \frac{\xi_{\mathbf{k+q}}}{2\epsilon_{\mathbf{k+q}}} \pm \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (\text{V.16})$$

Avec ces notations le système (V.8) s'écrit explicitement ¹ :

$$i\hbar \frac{d\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = \xi_{\mathbf{kq}}^+ \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - \Delta_0(\hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) + z_{\mathbf{kq}}^+ \hat{\Delta}^{\mathbf{q}} + g_0(\langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 \hat{n}_{\uparrow}^{\mathbf{q}} + \langle \hat{d}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle_0 \hat{n}_{\downarrow}^{\mathbf{q}}) \quad (\text{V.17})$$

$$i\hbar \frac{d\hat{\bar{d}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = -\xi_{\mathbf{kq}}^+ \hat{\bar{d}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \Delta_0(\hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) - z_{\mathbf{kq}}^+ \hat{\Delta}^{\mathbf{q}} - g_0(\langle \hat{d}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle_0 \hat{n}_{\uparrow}^{\mathbf{q}} + \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 \hat{n}_{\downarrow}^{\mathbf{q}}) \quad (\text{V.18})$$

$$i\hbar \frac{d\hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = -\xi_{\mathbf{kq}}^- \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - \Delta_0(\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - \hat{\bar{d}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) - g_0 z_{\mathbf{kq}}^- \hat{n}_{\downarrow}^{\mathbf{q}} + \langle \hat{d}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle_0 \hat{\Delta}^{\mathbf{q}} - \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 \hat{\Delta}^{\mathbf{q}} \quad (\text{V.19})$$

$$i\hbar \frac{d\hat{\bar{n}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = \xi_{\mathbf{kq}}^- \hat{\bar{n}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - \Delta_0(\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - \hat{\bar{d}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) + g_0 z_{\mathbf{kq}}^- \hat{n}_{\uparrow}^{\mathbf{q}} - \langle \hat{d}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} \rangle_0 \hat{\Delta}^{\mathbf{q}} + \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 \hat{\Delta}^{\mathbf{q}}. \quad (\text{V.20})$$

Dans chacune de ces équations nous trouvons premièrement une partie individuelle, qui ne couple que les opérateurs de même impulsion relative \mathbf{k} et qui est celle que l'on aurait obtenue si on avait écrit des équations du mouvement de Heisenberg avec le hamiltonien BCS réduit (IV.103), et deuxièmement, une partie collective qui couple les opérateurs de la RPA aux opérateurs collectifs (V.9–V.12) de même impulsion totale \mathbf{q} . Il est évidemment tentant, au vu de la forme des équations, d'introduire les variables somme et différence des opérateurs (V.1); l'opérateur $\mathcal{L}_{\text{RPA}}^{\mathbf{q}}$ serait anti-diagonal par blocs dans cette nouvelle base. Mais il y a encore plus astucieux. En effet, la remarque précédente sur la partie individuelle des équations suggère que cette dernière sera diagonalisée si nous abandonnons les opérateurs de particules \hat{a} pour ceux des quasi-particules fermioniques \hat{b} . Nous verrons que ce n'est pas le seul avantage de ce nouveau point de vue. Nous faisons donc le changement de base somme et différence *et* passons en même temps en point de vue de quasi-particules; nos nouvelles variables seront :

$$\hat{y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} - \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \quad (\text{V.21})$$

$$\hat{s}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \quad (\text{V.22})$$

$$\hat{m}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \quad (\text{V.23})$$

$$\hat{h}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} - \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \quad (\text{V.24})$$

La matrice de passage en point de vue de quasi-particules a le bon goût d'être orthogonale (c'est une conséquence immédiate de l'orthogonalité de la rotation de Bogolioubov induite par $U_{\mathbf{k}}^0$ et $V_{\mathbf{k}}^0$) et diagonale par blocs à condition d'utiliser la base somme et différence tant pour les particules que pour les quasi-particules :

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ \hat{h}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ \hat{s}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ \hat{m}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{\mathbf{kq}}^+ & w_{\mathbf{kq}}^- & 0 & 0 \\ -w_{\mathbf{kq}}^- & W_{\mathbf{kq}}^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_{\mathbf{kq}}^- & -w_{\mathbf{kq}}^+ \\ 0 & 0 & w_{\mathbf{kq}}^+ & W_{\mathbf{kq}}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - \hat{\bar{d}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - \hat{\bar{n}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ \delta(\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \hat{\bar{d}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) \\ \delta(\hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \hat{\bar{n}}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) \end{pmatrix} \quad (\text{V.25})$$

où nous avons introduit les notations qui seront très utiles tout au long de cette thèse,

$$W_{\mathbf{kq}}^+ = U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 + V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 \quad W_{\mathbf{kq}}^- = U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 - V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 \quad (\text{V.26})$$

$$w_{\mathbf{kq}}^+ = U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 + U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 \quad w_{\mathbf{kq}}^- = U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 - U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0. \quad (\text{V.27})$$

1. Mentionnons que le terme complètement contracté des contractions de Wick partielles (IV.102) disparaît après exploitation de l'équation du gap (IV.53).

L'orthogonalité de la matrice de passage se traduit pour ces coefficients par :

$$(W_{\mathbf{kq}}^\pm)^2 + (w_{\mathbf{kq}}^\mp)^2 = 1. \quad (\text{V.28})$$

Une liste de relations impliquant les deux jeux de coefficients (V.13–V.16) et (V.26,V.27) est donnée en annexe C. Le système obtenu après utilisation de ces relations a le mérite d'être très simple :

$$i\hbar \frac{d\hat{y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = \epsilon_{\mathbf{kq}}^+ \hat{s}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + W_{\mathbf{kq}}^- (\delta\hat{\Delta}^{\mathbf{q}} + \delta\hat{\Delta}^{\mathbf{q}}) - g_0 w_{\mathbf{kq}}^+ (\delta\hat{n}_{\uparrow}^{\mathbf{q}} + \delta\hat{n}_{\downarrow}^{\mathbf{q}}) \quad (\text{V.29})$$

$$i\hbar \frac{d\hat{s}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = \epsilon_{\mathbf{kq}}^+ \hat{y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + W_{\mathbf{kq}}^+ (\hat{\Delta}^{\mathbf{q}} - \hat{\Delta}^{\mathbf{q}}) - g_0 w_{\mathbf{kq}}^- (\hat{n}_{\uparrow}^{\mathbf{q}} - \hat{n}_{\downarrow}^{\mathbf{q}}) \quad (\text{V.30})$$

$$i\hbar \frac{d\hat{m}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = -\epsilon_{\mathbf{kq}}^- \hat{h}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \quad (\text{V.31})$$

$$i\hbar \frac{d\hat{h}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = -\epsilon_{\mathbf{kq}}^- \hat{m}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}, \quad (\text{V.32})$$

où la notation δ signifie que l'on leur retranche à une opérateur sa valeur moyenne dans $|\psi_{\text{BCS}}^0\rangle$

$$\delta\hat{O} = \hat{O} - \langle\hat{O}\rangle_0. \quad (\text{V.33})$$

La partie collective a disparu des opérateurs de déplacement (de quasi-particules cette fois) \hat{m} et \hat{h} , qui, n'étant plus couplés que l'un à l'autre et au niveau individuel, se comportent comme des champs libres. Leur dynamique, triviale, s'obtient de façon complètement indépendante du reste des inconnues. Mais attention, c'est là une des spécificités des équations de la RPA, ces opérateurs agissent quand même comme un terme source pour les opérateurs de paire \hat{y} et \hat{s} , *via* les opérateurs collectifs $\hat{\Delta}^{\mathbf{q}}$, $\hat{\Delta}^{\mathbf{q}}$ et \hat{n}_{σ} . De fait, en point de vue des quasi-particules, les opérateurs collectifs s'écrivent :

$$\hat{\Delta}^{\mathbf{q}} - \hat{\Delta}^{\mathbf{q}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (W_{\mathbf{kq}}^+ \hat{y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - w_{\mathbf{kq}}^- \hat{h}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) \quad (\text{V.34})$$

$$\hat{n}_{\uparrow}^{\mathbf{q}} - \hat{n}_{\downarrow}^{\mathbf{q}} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (w_{\mathbf{kq}}^- \hat{y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + W_{\mathbf{kq}}^+ \hat{h}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) \quad (\text{V.35})$$

$$\delta\hat{\Delta}^{\mathbf{q}} + \delta\hat{\Delta}^{\mathbf{q}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \delta(\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (W_{\mathbf{kq}}^- \hat{s}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + w_{\mathbf{kq}}^+ \hat{m}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) \quad (\text{V.36})$$

$$\delta\hat{n}_{\uparrow}^{\mathbf{q}} + \delta\hat{n}_{\downarrow}^{\mathbf{q}} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \delta(\hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \hat{n}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (-w_{\mathbf{kq}}^+ \hat{s}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + W_{\mathbf{kq}}^- \hat{m}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}). \quad (\text{V.37})$$

Ces relations s'obtiennent à partir des définitions (V.9–V.12) des opérateurs collectifs en faisant leur somme et différence puis en remplaçant les opérateurs de particules par leur équivalents de quasi-particules à l'aide du système (V.25), trivial à inverser car orthogonal. La procédure pour résoudre le système linéaire (V.29–V.32) est alors la suivante : (i) on cherche les modes propres des équations homogènes sur les opérateurs de paires (les équations (V.29) et (V.30) sans la contribution des opérateurs de déplacement \hat{m} et \hat{h}), et on projette le champ de paire (\hat{y} , \hat{s}) sur ces modes propres pour obtenir des opérateurs de *quasi-particules RPA*²

2. À ne pas confondre avec les quasi-particules fermioniques BCS, \hat{b} . Les opérateurs de quasi-particules RPA sont des combinaisons linéaires des opérateurs de paires de quasi-particules BCS $\hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q},\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k},\uparrow}$ et $\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\uparrow} \hat{b}_{-\mathbf{k},\downarrow}$.

ayant une dynamique simple pour les équations homogènes ; (ii) on résout la dynamique libre des opérateurs normaux \hat{m} et \hat{h} , (iii) on incorpore cette dynamique à celle des opérateurs de quasi-particules RPA en cherchant une solution particulière des équations inhomogènes (V.29) et (V.30). Tandis que les étapes (i) et (ii) ne posent pas de problème particulier, l'étape (iii) peut se révéler assez ardue dans le cas où les paires sont en mouvement ($\mathbf{q} \neq 0$), à la fois en termes de calculs que pour l'interprétation des résultats. Heureusement, lorsque le gaz est faiblement excité, les modes de quasi-particules BCS sont presque complètement vides et la contribution des opérateurs de déplacement \hat{m} et \hat{h} peut être négligée. Nous justifierons ceci plus en détail lorsque nous développerons une théorie semi-classique au chapitre VII. Cette théorie fournit un développement systématique en puissances des écarts au fondamental BCS, développement pour lequel les valeurs moyennes de \hat{m} et \hat{h} sont d'ordre supérieur à celles de \hat{y} et \hat{s} . Pour le moment, concentrons-nous sur les équations du mouvement qui nous intéressent directement pour la dynamique de phase : celles du sous-espace d'impulsion nulle $\mathbf{q} = 0$.

V.2 Dynamique dans le sous-espace d'impulsion nulle

L'opérateur phase $\hat{\theta}_0$ (II.16) est formé d'opérateurs d'impulsion nulle, ce qui n'est pas surprenant puisque l'amplitude \hat{a}_0 du champ de paires dans le mode du condensat, et par conséquent sa phase, ne changent pas l'impulsion du gaz. Pour les équations linéarisées de la RPA, la dynamique de $\hat{\theta}_0$ n'implique donc que les opérateurs d'impulsion nulle $\mathbf{q} = 0$. C'est pourquoi nous nous concentrons à partir de maintenant sur le sous-espace formé par ces opérateurs.

V.2.1 Équations de la RPA à impulsion nulle

Pour alléger les notations, nous nous permettons d'omettre l'écriture de l'impulsion totale lorsque celle-ci est nulle, ainsi $\hat{y}_{\mathbf{k}} \equiv \hat{y}_{\mathbf{k}}^0$, $z_{\mathbf{k}}^+ \equiv z_{\mathbf{k}0}^+$, $W_{\mathbf{k}}^+ \equiv W_{\mathbf{k}0}^+$ et *cætera*. La restriction à $\mathbf{q} = 0$ permet de nombreuses simplifications au sein des coefficients (V.13–V.16) et (V.26,V.27), ainsi :

$$W_{\mathbf{k}}^+ = 1 \qquad w_{\mathbf{k}}^- = 0 \qquad (\text{V.38})$$

$$W_{\mathbf{k}}^- = z_{\mathbf{k}}^+ = \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \qquad w_{\mathbf{k}}^+ = -d_{\mathbf{k}}^+ = \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \qquad (\text{V.39})$$

Et le système (V.29–V.32) se simplifie lui-aussi :

$$i\hbar \frac{d\hat{y}_{\mathbf{k}}}{dt} = 2\epsilon_{\mathbf{k}}\hat{s}_{\mathbf{k}} + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}(\delta\hat{\Delta} + \delta\hat{\Delta}^\dagger) - \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}}g_0(\delta\hat{n}_{\uparrow} + \delta\hat{n}_{\downarrow}) \qquad (\text{V.40})$$

$$i\hbar \frac{d\hat{s}_{\mathbf{k}}}{dt} = 2\epsilon_{\mathbf{k}}\hat{y}_{\mathbf{k}} + (\hat{\Delta} - \hat{\Delta}^\dagger) \qquad (\text{V.41})$$

$$i\hbar \frac{d\hat{m}_{\mathbf{k}}}{dt} = 0 \qquad (\text{V.42})$$

$$i\hbar \frac{d\hat{h}_{\mathbf{k}}}{dt} = 0 \qquad (\text{V.43})$$

Les nombres de quasi-particules fermioniques $\hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}$ et $\hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}$ (dont la somme et différence donne $\hat{m}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{h}_{\mathbf{k}}$) sont donc des constantes du mouvement. On peut voir ce premier résultat

comme une forme de compatibilité entre les excitations BCS et les équations de la RPA : bien que la RPA construise de nouveaux opérateurs de quasi-particules, bilinéaires en les opérateurs de quasi-particules fermioniques, elle considère néanmoins ces dernières comme des particules sans interaction, et leur nombre, comme une constante du mouvement. Reste donc à résoudre le système homogène formé par les équations (V.40,V.41), dont on met de côté, dans les opérateurs collectifs $\hat{\Delta}$ et \hat{n}_σ , les termes sources, en l'occurrence constants, où apparaissent les opérateurs $\hat{m}_{\mathbf{k}_1}$:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{s}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{s}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} + \begin{pmatrix} \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}_1}} (\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}_1}) \hat{m}_{\mathbf{k}_1} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}. \quad (\text{V.44})$$

L'opérateur d'évolution \mathcal{L} agit uniquement sur le vecteur $\begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{s}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$, et est antidiagonal du point de vue des blocs $(\hat{y}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$ et $(\hat{s}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$:

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{s}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \begin{pmatrix} 2\epsilon_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{k}} + \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \frac{\xi_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}_1} + \Delta_0^2}{\epsilon_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}_1}} \hat{s}_{\mathbf{k}_1} \\ 2\epsilon_{\mathbf{k}} \hat{y}_{\mathbf{k}} + \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \hat{y}_{\mathbf{k}_1} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}. \quad (\text{V.45})$$

Cette propriété innocente est en fait une trace du caractère très symétrique de l'opérateur d'évolution. Pour le voir, quittons pour un temps la base somme et différence, en définissant :

$$\tilde{\mathcal{L}} = P_{\text{SD}}^{-1} \mathcal{L} P_{\text{SD}} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & -A \end{pmatrix} \quad (\text{V.46})$$

où A et B sont deux matrices réelles symétriques, où la notation par blocs s'applique cette fois à un vecteur écrit dans l'ordre $\left((\hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger)_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \right)$, et où P_{SD} est la matrice de passage de ce vecteur vers sa somme et différence $\left((\hat{y}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (\hat{s}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \right)$. En notation par blocs, et en notant Id l'identité matricielle :

$$P_{\text{SD}} = \begin{pmatrix} \text{Id} & -\text{Id} \\ \text{Id} & \text{Id} \end{pmatrix}. \quad (\text{V.47})$$

La symétrie *symplectique* de $\tilde{\mathcal{L}}$,

$$\sigma_z \tilde{\mathcal{L}} \sigma_z = \tilde{\mathcal{L}}^\dagger, \quad (\text{V.48})$$

où σ_z est la matrice de Pauli, en notation par blocs $\sigma_z = \begin{pmatrix} \text{Id} & 0 \\ 0 & -\text{Id} \end{pmatrix}$, permet de déduire les vecteurs propres de $\tilde{\mathcal{L}}^\dagger$ (vecteur propres à gauche de $\tilde{\mathcal{L}}$) des vecteurs propres à droite de $\tilde{\mathcal{L}}$ par une simple multiplication par σ_z . Soit un vecteur propre à droite \vec{e} de \mathcal{L} (obtenu donc dans la base somme et différence) on obtient le vecteur propre à gauche correspondant \vec{d} par la multiplication :

$$\vec{d} \propto P_{\text{SD}} \sigma_z P_{\text{SD}}^{-1} \vec{e} = \sigma_x \vec{e}. \quad (\text{V.49})$$

Reste une constante de normalisation à déterminer à l'aide de la condition $\vec{d}^* \cdot \vec{e} = 1$. La symétrie par *renversement du temps*,

$$\sigma_x \tilde{\mathcal{L}} \sigma_x = -\tilde{\mathcal{L}}^*, \quad (\text{V.50})$$

où en notation par blocs $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix}$, assure quant à elle qu'un mode propre (a, b) associé à la valeur propre ϵ possède un correspondant (b^*, a^*) de valeur propre $-\epsilon$, pourvu que ϵ soit non nul. Ces deux symétries seront très utiles dans la suite.

V.2.2 Modes collectifs d'énergie nulle

Le système homogène (V.45) obtenu à la section précédente peut très bien être diagonalisé directement, en le dérivant une seconde fois puis en le resommant pour obtenir une équation aux valeurs propres sur les opérateurs collectifs. Nous suivrons cette voie pour les modes excités. Mais nous préférons, pour stimuler l'intuition physique de lecteur, commencer par obtenir les modes les plus importants pour la dynamique de phase par des arguments physiques qui exploitent la symétrie $U(1)$ du hamiltonien. Nous conserverons le point de vue des particules pour développer ces arguments car il est en l'occurrence plus naturel. Nous ne reviendrons au point de vue des quasi-particules seulement à la fin du raisonnement, pour expliciter les modes et vérifier leurs propriétés par le calcul explicite.

V.2.2.1 Mode d'énergie nulle

Rappelons que nous avons choisi l'état BCS de phase nulle comme origine de la linéarisation des équations du mouvement. Prendre la valeur moyenne du système RPA (V.17–V.20) (ou dans sa version (V.29–V.32) écrite dans la base des quasi-particules où cette opération est triviale) dans l'état BCS, permet de conclure, sans grande surprise, que les valeurs moyennes BCS, tel $\langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0$ n'évoluent pas. Ainsi le gaz préparé initialement dans l'état $|\psi_0^{\text{BCS}}\rangle$ n'évolue pas non plus, du moins selon la RPA. Mais, nous aurions pu, à la place de $|\psi_0^{\text{BCS}}\rangle$, choisir comme origine de la linéarisation l'état dont les paramètres ont une phase Q , soit $V_{\mathbf{k}} = e^{iQ} V_{\mathbf{k}}^0$. De là nous aurions conclu sans plus de surprise que les valeurs moyennes dans cet état $\langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle = e^{iQ} \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0$ sont aussi des constantes du mouvement. Et ce résultat doit subsister, comme une réminiscence de la symétrie $U(1)$ que nous avons brisée, dans le système linéarisé autour de $|\psi_0^{\text{BCS}}\rangle$, en tout cas pour les états fondamentaux peu éloignés de celui de phase nulle, *i.e.* $Q \ll 1$. Ainsi, en faisant la fluctuation classique (qui n'est qu'un cas particulier des fluctuations quantiques que nous considérons dans la RPA) associée à une rotation de phase à partir du fondamental BCS de phase nulle :

$$\begin{pmatrix} \hat{d}_{\mathbf{k}} \\ \hat{d}_{\mathbf{k}}^\dagger \\ \hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \hat{n}_{\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{iQ} \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 \\ e^{-iQ} \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.51})$$

et en la linéarisant pour $Q \ll 1$,

$$\begin{pmatrix} \delta \hat{d}_{\mathbf{k}} \\ \delta \hat{d}_{\mathbf{k}}^\dagger \\ \delta \hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \delta \hat{n}_{\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iQ \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 \\ -iQ \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{V.52})$$

nous nous attendons à obtenir un mode d'énergie nulle (c'est-à-dire un mode du noyau) du système de la RPA. En point de vue de quasi-particules, ce mode s'écrit

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{s}_{\mathbf{k}} \\ \hat{h}_{\mathbf{k}} \\ \hat{m}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2iQ\langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{V.53})$$

On vérifie sans peine que le vecteur (V.53) est bien un mode d'énergie nulle en injectant la valeur de $\hat{y}_{\mathbf{k}}$ dans la seconde ligne de (V.45) (l'équation de la première ligne est trivialement vérifiée). On tombe en fait sur l'avatar (IV.55) de l'équation du *gap*. Ceci prouve finalement que

$$\mathcal{L}\vec{e}_n = 0 \quad (\text{V.54})$$

avec \vec{e}_n , le mode d'énergie nulle :

$$\vec{e}_n = \begin{pmatrix} -i\frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}. \quad (\text{V.55})$$

Mais ce n'est pas là la fin de l'histoire : le vecteur (V.55) est égal (en quittant la base somme et différence) à son symétrique par renversement du temps $P_{\text{SD}}^{-1}\vec{e}_n = \sigma_x(P_{\text{SD}}^{-1}\vec{e}_n)^*$ et ne suffit donc pas à former une base car l'espace sur lequel agit la matrice \mathcal{L} est de dimension paire. Le paragraphe suivant est consacré à l'obtention du vecteur manquant.

V.2.2.2 Mode anormal

Après avoir considéré des fluctuations de phase à partir du fondamental, nous sommes naturellement tentés de considérer des fluctuations du paramètre conjugué, le nombre de particules. Ainsi, en variant *adiabatiquement* le potentiel chimique μ du gaz, c'est-à-dire en changeant le nombre moyen de particules sans sortir du fondamental BCS, nous allons démontrer l'existence d'un *mode anormal* \vec{e}_a , antécédent par \mathcal{L} du mode d'énergie nulle :

$$\mathcal{L}\vec{e}_a = -2i\frac{d\mu}{dN}\vec{e}_n \quad (\text{V.56})$$

$$\mathcal{L}^2\vec{e}_a = \vec{0} \quad (\text{V.57})$$

L'idée est de considérer un fondamental BCS de phase nulle $|\psi_0^{\text{BCS}}(\mu + \delta\mu)\rangle$ à un potentiel chimique déplacé $\mu + \delta\mu$, et d'obtenir la dynamique linéarisée des opérateurs de la RPA (ou de leur valeur moyenne si l'on préfère) dans cet état de deux manières différentes. Premièrement, on peut linéariser les équations du mouvement tirées du hamiltonien grand canonique au potentiel chimique $\mu + \delta\mu$, noté $\hat{H}(\mu + \delta\mu)$, autour de l'état BCS considéré. La conclusion qui s'impose alors immédiatement est que les valeurs moyennes des opérateurs de la RPA dans $|\psi_0^{\text{BCS}}(\mu + \delta\mu)\rangle$ sont constantes pour le hamiltonien $\hat{H}(\mu + \delta\mu)$. Mais, pour $\delta\mu$ suffisamment petit, on peut aussi considérer que ces valeurs moyennes tombent sous le coup des équations linéarisées du hamiltonien $\hat{H}(\mu)$ puisqu'elles sont assez proches des valeurs moyennes dans $|\psi_0^{\text{BCS}}(\mu)\rangle$. Comme la seule différence entre $\hat{H}(\mu)$ et $\hat{H}(\mu + \delta\mu)$ est un simple changement de référentiel

$$\hat{H}(\mu + \delta\mu) - \hat{H}(\mu) = -\delta\mu\hat{N}, \quad (\text{V.58})$$

la dynamique *exacte* des valeurs moyennes des opérateurs de paires ne diffère elle, d'un hamiltonien à l'autre, que d'une simple rotation de phase, par exemple

$$e^{2i\delta\mu t/\hbar} e^{-i\hat{H}(\mu)t/\hbar} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger e^{i\hat{H}(\mu)t/\hbar} = e^{-i\hat{H}(\mu+\delta\mu)t/\hbar} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger e^{i\hat{H}(\mu+\delta\mu)t/\hbar} \quad (\text{V.59})$$

pour un opérateur qui retire deux particules au gaz et

$$e^{-i\hat{H}(\mu)t/\hbar} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} e^{i\hat{H}(\mu)t/\hbar} = e^{-i\hat{H}(\mu+\delta\mu)t/\hbar} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} e^{i\hat{H}(\mu+\delta\mu)t/\hbar} \quad (\text{V.60})$$

pour un opérateur nombre, à tous les ordres en $\delta\mu$. La dynamique linéarisée avec le hamiltonien $\hat{H}(\mu + \delta\mu)$ fournit une approximation des membres de droite de (V.59) et (V.60), celle avec $\hat{H}(\mu)$ des membres de gauche. Or, en valeur moyenne dans l'état $|\psi_0^{\text{BCS}}(\mu + \delta\mu)\rangle$, le membre de droite est une constante du mouvement pour la dynamique linéarisée avec $\hat{H}(\mu + \delta\mu)$. Comme les deux linéarisations avec $\hat{H}(\mu + \delta\mu)$ et $\hat{H}(\mu)$ doivent être compatibles pour $\delta\mu \ll 1$, ceci impose que le membre de gauche soit aussi constant pour la dynamique linéarisée avec $\hat{H}(\mu)$. En se limitant au premier ordre en $\delta\mu$, ceci conduit à :

$$\frac{d}{dt} \langle \psi_0^{\text{BCS}}(\mu + \delta\mu) | \begin{pmatrix} \delta \hat{d}_{\mathbf{k}} \\ \delta \hat{d}_{\mathbf{k}}^\dagger \\ \delta \hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \delta \hat{n}_{\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} | \psi_0^{\text{BCS}}(\mu + \delta\mu) \rangle = \begin{pmatrix} 2\delta\mu \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 \\ -2\delta\mu \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + O(\delta\mu^2). \quad (\text{V.61})$$

Ceci prouve que le vecteur qui apparaît dérivé par rapport au temps au premier membre de (V.61), et qui s'écrit autrement

$$\langle \psi_0^{\text{BCS}}(\mu + \delta\mu) | \begin{pmatrix} \delta \hat{d}_{\mathbf{k}} \\ \delta \hat{d}_{\mathbf{k}}^\dagger \\ \delta \hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \delta \hat{n}_{\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} | \psi_0^{\text{BCS}}(\mu + \delta\mu) \rangle = \delta\mu \begin{pmatrix} \frac{d\langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0}{d\mu} \\ \frac{d\langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0}{d\mu} \\ \frac{d\langle \hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle_0}{d\mu} \\ \frac{d\langle \hat{n}_{\mathbf{k}\downarrow} \rangle_0}{d\mu} \end{pmatrix} + O(\delta\mu^2), \quad (\text{V.62})$$

doit être envoyé par la dynamique linéarisée sur le mode d'énergie nulle (V.51). Après passage en point de vue de quasi-particules, et en éliminant les coordonnées correspondant aux opérateurs de déplacement qui donnent lieu à des équations triviales, ceci s'écrit

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} \frac{d}{d\mu} \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = -2i\vec{e}_n. \quad (\text{V.63})$$

On obtient donc bien la propriété (V.56) annoncée en posant :

$$\vec{e}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} \frac{d}{dN} \xi_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}. \quad (\text{V.64})$$

Vérifier ce résultat par un calcul direct demande un peu plus d'effort que plus haut pour le mode d'énergie nul. On commence par dériver les énergies $\xi_{\mathbf{k}}$, $\epsilon_{\mathbf{k}}$ par rapport au nombre moyen de particules

$$\frac{d\xi_{\mathbf{k}}}{d\bar{N}} = -\frac{d\mu}{d\bar{N}} + \frac{g_0}{2L^3} \quad (\text{V.65})$$

$$\frac{d\epsilon_{\mathbf{k}}}{d\bar{N}} = \left(-\frac{d\mu}{d\bar{N}} + \frac{g_0}{2L^3} \right) \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} + \frac{d\Delta_0}{d\bar{N}} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (\text{V.66})$$

Puis on fait de même pour les coefficients apparaissant dans les opérateurs collectifs du système (V.45) :

$$\frac{d}{d\bar{N}} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} = -\frac{\Delta_0}{\xi_{\mathbf{k}}} \frac{d}{d\bar{N}} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} = -\frac{\Delta_0^2}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3} \left(\frac{d\mu}{d\bar{N}} - \frac{g_0}{2L^3} + \frac{d\Delta_0}{d\bar{N}} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} \right). \quad (\text{V.67})$$

Enfin on obtient des équations implicites sur $d\Delta_0/d\bar{N}$ et $d\bar{N}/d\mu$ en dérivant par rapport à μ les équations implicites sur le gap (IV.49) et la densité (IV.50), appliquées au fondamental BCS :

$$\frac{d\Delta_0}{d\bar{N}} = -\frac{g_0}{2L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{d}{d\bar{N}} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \quad (\text{V.68})$$

$$1 = -\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{d}{d\bar{N}} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (\text{V.69})$$

Ces équations permettent de calculer sans trop souffrir la somme collective apparaissant à la première ligne du système (V.45) quand on injecte le coefficient $s_{\mathbf{k}}^{\text{an}} = \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} \frac{d}{d\bar{N}} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}$ du mode anormal

$$\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \mathcal{D}} \frac{\xi_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}_1} + \Delta_0^2}{\epsilon_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}_1}} \hat{s}_{\mathbf{k}_1}^{\text{an}} = 2 \frac{d\Delta_0}{d\bar{N}} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} - \frac{g_0}{L^3} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}}, \quad (\text{V.70})$$

après quoi le résultat s'obtient par des calculs élémentaires.

Remarquons au passage que l'équation (V.68) peut être résolue, et nous permet d'exprimer $d\Delta_0/d\mu$ en fonction d'intégrales sur les vecteurs d'onde :

$$\frac{d\Delta_0}{d\tilde{\mu}} = \frac{X}{\Theta}, \quad (\text{V.71})$$

où nous avons introduit le potentiel chimique corrigé du champ moyen

$$\tilde{\mu} = \mu - g_0 \bar{\rho}_{\uparrow} \quad (\text{V.72})$$

pour alléger les notations, et

$$\Theta = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0^3}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3} \quad (\text{V.73})$$

$$X = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0^2 \xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3}, \quad (\text{V.74})$$

pendant discret des intégrales sur les vecteurs d'onde I_X et I_{Θ} qui nous ont servi à obtenir l'équation d'état à la section IV.2.2.2. Enfin, en utilisant l'équation suivante (V.69), on parvient à exprimer $d\bar{N}/d\tilde{\mu}$:

$$\frac{d\bar{N}}{d\tilde{\mu}} = \frac{X^2 + \Theta^2}{\Delta_0 \Theta}. \quad (\text{V.75})$$

V.2.2.3 Modes duaux

Nous introduisons les vecteurs \vec{d} duaux de ceux de la base propre de \mathcal{L} . Si on note $(\vec{e}_i)_i$ cette base propre, les vecteurs $(\vec{d}_j)_j$ de la base duale vérifient la condition :

$$\vec{d}_j^* \cdot \vec{e}_i = \delta_{ij}. \quad (\text{V.76})$$

Nous notons par ailleurs \vec{d}_n et \vec{d}_a les vecteurs duaux des modes \vec{e}_n et \vec{e}_a respectivement. L'action de l'opérateur \mathcal{L} à l'intérieur du sous-espace stable d'énergie nulle $\text{Vec}(\vec{e}_n, \vec{e}_a)$ s'écrit simplement

$$\mathcal{L}|_{\text{Vec}(\vec{e}_n, \vec{e}_a)} = -2i \frac{d\mu}{dN} \vec{e}_n \langle \vec{d}_a, \cdot \rangle \quad (\text{V.77})$$

où $\langle \vec{d}_a, \cdot \rangle$ est la forme linéaire associée au vecteur \vec{d}_a par le produit scalaire $\langle \vec{d}_a, \vec{x} \rangle = \vec{d}_a^* \cdot \vec{x}$. Le vecteur dual \vec{d}_a est donc aussi mode d'énergie nulle à gauche ; à ce titre, il se déduit de \vec{e}_n comme à l'équation (V.49), c'est-à-dire par action de σ_x . De même, le vecteur dual \vec{d}_n est le mode anormal à gauche, déduit de \vec{e}_a par (V.49). Avec la condition de normalisation (V.76), ceci conduit à

$$\vec{e}_n = \begin{pmatrix} -i \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \quad \vec{d}_n = \begin{pmatrix} i \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} \frac{d}{dN} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \quad (\text{V.78})$$

$$\vec{e}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} \frac{d}{dN} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \quad \vec{d}_a = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \quad (\text{V.79})$$

Il est immédiat sur ces écritures que \vec{d}_n (respectivement \vec{d}_a) est orthogonal à \vec{e}_a (respectivement à \vec{e}_n). Nous vérifierons plus tard qu'il l'est aussi à tous les modes d'énergie non nulle.

V.2.3 Quelques mots sur les modes excités

Attaquons-nous maintenant aux modes d'énergie non nulle de \mathcal{L} , cette fois-ci par le calcul direct. Cette sous-section n'est pas strictement indispensable pour obtenir la dynamique de l'opérateur phase, et le lecteur pressé pourra donc passer directement à la suivante. Nous le donnons néanmoins par souci de complétude, pour ne pas laisser de zone d'ombre sur le spectre de \mathcal{L} . Le système aux valeurs propres à résoudre est le suivant :

$$\hbar\omega \hat{y}_{\mathbf{k}} - 2\epsilon_{\mathbf{k}} \hat{s}_{\mathbf{k}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \frac{\xi_{\mathbf{k}_1} \xi_{\mathbf{k}} + \Delta_0^2}{\epsilon_{\mathbf{k}_1} \epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{s}_{\mathbf{k}_1} \quad (\text{V.80})$$

$$\hbar\omega \hat{s}_{\mathbf{k}} - 2\epsilon_{\mathbf{k}} \hat{y}_{\mathbf{k}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \hat{y}_{\mathbf{k}_1}. \quad (\text{V.81})$$

avec l'énergie propre $\hbar\omega$ à déterminer. En multipliant la première ligne (V.80) par $\hbar\omega$ puis en utilisant la deuxième (V.81) pour éliminer $\hat{s}_{\mathbf{k}}$, on se ramène, après de petits calculs et en remarquant notamment que $\sum_{\mathbf{k}_1} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}_1}} \hat{s}_{\mathbf{k}_1} = 0$, à une seule équation :

$$(\hbar^2\omega^2 - 4\epsilon_{\mathbf{k}}^2) \hat{y}_{\mathbf{k}} = 2\epsilon_{\mathbf{k}} (\hat{\Delta} - \hat{\Delta}^\dagger) + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{\Xi}. \quad (\text{V.82})$$

Nous avons isolé au second membre les deux opérateurs collectifs du problème ; on rappelle que $\hat{\Delta} - \hat{\Delta}^\dagger = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \hat{y}_{\mathbf{k}_1}$ et nous avons posé

$$\hat{\Xi} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} (2\xi_{\mathbf{k}_1} + Z) \hat{y}_{\mathbf{k}_1} \quad (\text{V.83})$$

avec le nombre réel

$$Z = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \frac{\xi_{\mathbf{k}_1}}{\epsilon_{\mathbf{k}_1}}. \quad (\text{V.84})$$

V.2.3.1 Modes excités quasi individuels

Commençons par traiter des modes propres *quasi individuels* de (V.82). Ces modes sont ceux (i) pour lesquels il existe $\mathbf{k}_0 \in \mathcal{D}$ tel que $\hbar|\omega| = 2\epsilon_{\mathbf{k}_0}$, (ii) qui ne mettent en jeu que quelques modes de Fourier ayant cette énergie $\epsilon_{\mathbf{k}_0}$ dans la théorie BCS, (iii) qui sont enfin des modes propres de la partie individuelle, diagonale par blocs de vecteurs d'onde, de \mathcal{L} car la partie collective au second membre des équations est nulle. Pour pouvoir les décrire, notons

$$\mathcal{S}_{\mathbf{k}_0} = \{\mathbf{k} \in \mathcal{D}, \|\mathbf{k}\| = \|\mathbf{k}_0\|\} \quad (\text{V.85})$$

la coupe sphérique de \mathcal{D} de rayon $\|\mathbf{k}_0\|$, et considérons les vecteurs $\vec{x} = ((y_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}, (s_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}})$ tels que

$$\begin{cases} y_{\mathbf{k}} = s_{\mathbf{k}} = 0, \forall \mathbf{k} \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{k}_0} \\ \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{S}_{\mathbf{k}_0}} y_{\mathbf{k}} = 0 \end{cases} \quad (\text{V.86})$$

Alors nous avons immédiatement

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \xi_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{S}_{\mathbf{k}_0}} \xi_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}_0} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{S}_{\mathbf{k}_0}} y_{\mathbf{k}} = 0 \quad (\text{V.87})$$

ce qui prouve que les deux opérateurs collectifs de l'équation (V.82) sont nuls pour le vecteur que nous nous sommes donné en (V.86). Pour que le système possède une solution non nulle, il faut alors impérativement que

$$\hbar\omega = \pm 2\epsilon_{\mathbf{k}_0}, \quad (\text{V.88})$$

après quoi le choix des coefficients $y_{\mathbf{k}}$ est arbitraire tant que leur somme sur $\mathcal{S}_{\mathbf{k}_0}$ reste nulle. Ce choix fixe en revanche les valeurs de $s_{\mathbf{k}}$ *via* l'équation individuelle (valable quand les opérateurs collectifs sont nuls) :

$$\hbar\omega s_{\mathbf{k}} = 2\epsilon_{\mathbf{k}} y_{\mathbf{k}}. \quad (\text{V.89})$$

Comme la définition (V.86) n'impose qu'une seule contrainte sur le choix des coefficients sur la coupe sphérique $\mathcal{S}_{\mathbf{k}_0}$, nous avons trouvé là $2(\#\mathcal{S}_{\mathbf{k}_0} - 1)$ modes propres pour chaque valeur de la norme de \mathbf{k}_0 , où $\#\mathcal{S}_{\mathbf{k}_0}$ est le cardinal de la coupe sphérique $\mathcal{S}_{\mathbf{k}_0}$, le facteur deux comptant les deux signes possibles de l'énergie propre. Si l'on tient à se donner une base de l'espace formé par ces modes quasi individuels, on peut prendre l'ensemble des vecteurs $\vec{e}_{\mathbf{k}}^\pm = ((y_{\mathbf{k}_1})_{\mathbf{k}_1 \in \mathcal{D}}, (s_{\mathbf{k}_1})_{\mathbf{k}_1 \in \mathcal{D}})$ avec :

$$s_{\mathbf{k}_1} = \pm y_{\mathbf{k}_1}, \quad (\text{V.90})$$

le signe étant fonction de celui de l'énergie propre, et

$$y_{\mathbf{k}_1}/\mathcal{N}_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{k}_1 = \mathbf{k} \\ -\frac{1}{\#\mathcal{S}_{\mathbf{k}} - 1} & \text{si } \mathbf{k}_1 \in \mathcal{S}_{\mathbf{k}} \text{ et } \mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k} \\ 0 & \text{si } \mathbf{k}_1 \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{S}_{\mathbf{k}}, \end{cases} \quad (\text{V.91})$$

où $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ est une constante de normalisation, *a priori* peu sympathique à calculer. Attention, telle qu'elle, cette base n'est pas orthogonale et il faut exclure un vecteur d'onde par coupe sphérique $\mathcal{S}_{\mathbf{k}}$ pour qu'elle ne soit pas surcomplète. Elle tend néanmoins vers une base orthogonale car purement individuelle à la limite continue lorsque le cardinal de $\mathcal{S}_{\mathbf{k}}$ devient infini. Le vecteur propre s'écrit alors

$$\vec{e}_{\mathbf{k}}^{\pm} \xrightarrow{g_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{N}_{\mathbf{k}}} \left(\begin{array}{c} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \\ \pm \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \end{array} \right)_{\mathbf{k}_1 \in \mathcal{D}}. \quad (\text{V.92})$$

Pour obtenir les vecteurs duaux, vecteurs propres à gauche de \mathcal{L} , notés \vec{d} , nous nous servons de (V.49)

$$\vec{d}_{\mathbf{k}}^{\pm} \propto \sigma_x \vec{e}_{\mathbf{k}}^{\pm} \quad (\text{V.93})$$

Enfin nous déterminons la constante $\mathcal{N}_{\mathbf{k}}$ par la condition de normalisation :

$$(\vec{d}_{\mathbf{k}}^{\pm})^* \cdot \vec{e}_{\mathbf{k}}^{\pm} = 1 \quad (\text{V.94})$$

Les sous-espaces propres à gauche sont de manière évidente orthogonaux aux sous-espaces propres à droite d'énergie différente, y compris le sous-espace d'énergie nulle. Mais, un vecteur propre à gauche $\vec{d}_{\mathbf{k}}^{\pm}$ n'est véritablement le dual de $\vec{e}_{\mathbf{k}}^{\pm}$ qu'à la limite continue car autrement il n'est pas orthogonal aux modes $\vec{e}_{\mathbf{k}'}^{\pm}$ de même énergie. À la limite continue, nous obtenons finalement

$$\vec{e}_{\mathbf{k}}^{\pm} = 2\vec{d}_{\mathbf{k}}^{\pm} \xrightarrow{g_0 \rightarrow 0} \left(\begin{array}{c} \pm \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \\ \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \end{array} \right)_{\mathbf{k}_1 \in \mathcal{D}}. \quad (\text{V.95})$$

Les opérateurs associés aux modes quasi individuels s'obtiennent par projection du champ quantique $\left((\hat{y}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \quad (\hat{s}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \right)$ sur les vecteurs $\vec{e}_{\mathbf{k}}^{\pm}$ à l'aide des vecteurs duaux. À la limite continue, ce sont simplement les opérateurs de création et d'annihilation de paires d'excitations fermioniques :

$$(\vec{d}_{\mathbf{k}}^+) * \cdot \left(\begin{array}{c} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{s}_{\mathbf{k}} \end{array} \right)_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} \quad (\text{V.96})$$

$$(\vec{d}_{\mathbf{k}}^-) * \cdot \left(\begin{array}{c} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{s}_{\mathbf{k}} \end{array} \right)_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger}, \quad (\text{V.97})$$

autrement dit, de biexcitations fermioniques.

V.2.3.2 Modes excités collectifs

Attaquons-nous maintenant aux modes excités qui ne sont pas quasi individuels. Nous supposons que $\forall \mathbf{k} \in \mathcal{D}, |\hbar\omega| \neq 2\epsilon_{\mathbf{k}}$, et nous nous autorisons donc à diviser par $(\hbar\omega)^2 - 4\epsilon_{\mathbf{k}}^2$. Pour résoudre le système, nous resomons l'équation (V.82) et nous nous ramenons à une équation aux valeurs propres à deux dimensions dont les inconnues sont les opérateurs collectifs $\hat{\Delta} - \hat{\Delta}^\dagger$ et $\hat{\Xi}$. Pour simplifier le système, il est utile d'écrire $\epsilon_{\mathbf{k}}^2 = (-\hbar^2\omega^2 - 4\epsilon_{\mathbf{k}}^2 + \hbar^2\omega^2)/4$. Nous obtenons :

$$2\Delta_0\hbar^2\omega^2 X_\omega(\hat{\Delta} - \hat{\Delta}^\dagger) + (\hbar^2\omega^2 - 4\Delta_0^2)\Theta_\omega \hat{\Xi} = 0 \quad (\text{V.98})$$

$$\hbar^2\omega^2\Theta_\omega(\hat{\Delta} - \hat{\Delta}^\dagger) + 2\Delta_0 X_\omega \hat{\Xi} = 0, \quad (\text{V.99})$$

avec

$$\Theta_\omega = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0^2}{\epsilon_{\mathbf{k}}(\hbar^2\omega^2 - 4\epsilon_{\mathbf{k}}^2)} \quad (\text{V.100})$$

$$X_\omega = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0 \xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}(\hbar^2\omega^2 - 4\epsilon_{\mathbf{k}}^2)}. \quad (\text{V.101})$$

Ce système possède une solution non triviale si et seulement si

$$4\Delta_0^2 X_\omega^2 = (\hbar^2\omega^2 - 4\Delta_0^2)\Theta_\omega^2, \quad (\text{V.102})$$

équation qui admet des solutions réelles si et seulement si $\hbar|\omega| > 2\Delta_0$. Il n'y a donc pas d'excitations d'énergie inférieure à l'énergie des biexcitations fermioniques en dehors du sous-espace d'énergie nulle. En prenant la racine carré de l'équation (V.102), et écrivant le dénominateur $\hbar^2\omega^2 - 4\epsilon_{\mathbf{k}}^2 = (\hbar^2\omega^2 - 4\Delta_0^2) - 4\xi_{\mathbf{k}}^2$ pour reconnaître une identité remarquable, nous mettons l'équation aux valeurs propres sous la forme :

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}}((\hbar^2\omega^2 - 4\Delta_0^2)^{1/2} \pm 2\xi_{\mathbf{k}})} = 0 \quad (\text{V.103})$$

On peut d'ores et déjà éliminer l'équation avec un signe + devant $2\xi_{\mathbf{k}}$ car le membre de gauche est alors strictement positif pour tout ω . À l'inverse, le sommande avec un signe -, considéré comme une fonction de ω^2 , possède autant de pôles que de valeurs de $\|\mathbf{k}\|$, qui sont atteints lorsque $\hbar^2\omega^2 = 4\epsilon_{\mathbf{k}}^2$. Appelons \mathcal{K} l'ensemble de ces valeurs comptées une fois, c'est-à-dire sans leur multiplicité :

$$\mathcal{K} = \{\|\mathbf{k}\|, \mathbf{k} \in \mathcal{D}\}, \quad (\text{V.104})$$

et multiplions (V.103) par la quantité³ $\prod_{k \in \mathcal{K}} ((\hbar^2\omega^2 - 4\Delta_0^2)^{1/2} - 2\xi_k)$ non nulle par hypothèse. Le problème se ramène à la détermination des racines réelles positives du polynôme de degré $\#\mathcal{K} - 1$:

$$P(x) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \prod_{k_1 \in \mathcal{K} \setminus \|\mathbf{k}\|} (x - 2\xi_{k_1}), \quad (\text{V.105})$$

3. Nous étendons de façon évidente la définition de $\xi_{\mathbf{k}}$ à des valeurs scalaires en posant $\xi_k = \hbar^2 k^2 / 2m - \mu + g_0 \rho_\uparrow$.

où x représente l'énergie $(\hbar^2\omega^2 - 4\Delta_0^2)^{1/2}$. Appelons $k_1 < k_2 < \dots < k_{\#\mathcal{K}}$ les éléments de \mathcal{K} ; il est clair que pour tout $i \in 1, \#\mathcal{K}$, $P(2\xi_{k_i})$ et $P(2\xi_{k_{i+1}})$ sont non nuls et de signes opposés. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, P possède donc $\#\mathcal{K} - 1$ racines réelles positives, que nous notons $x_1, x_2, \dots, x_{\#\mathcal{K}-1}$ et qui se situent entre deux valeurs consécutives de $2\xi_{\mathbf{k}}$. Comme P est justement de degré $\#\mathcal{K} - 1$, nous avons trouvé là toutes ses racines, et donc, en comptant aussi les solutions d'énergie négative, $2(\#\mathcal{K} - 1)$ solutions de (V.103), situées entre deux valeurs consécutives de $\pm 2\epsilon_{\mathbf{k}}$:

$$\hbar\omega_i^\pm = \pm \sqrt{4\Delta_0^2 + x_i^2} \quad (\text{V.106})$$

Nous notons \vec{e}_i^\pm le vecteur propre associé à la valeur propre $\hbar\omega_i^\pm$. Ne serait-ce pour la valeur de ω_i , nous en avons une expression entièrement analytique :

$$\vec{e}_i^\pm = \frac{1}{\mathcal{N}_i^\pm} \left(\frac{\frac{1}{\epsilon_{\mathbf{k}}((\hbar\omega_i^\pm)^2 - 4\epsilon_{\mathbf{k}}^2)} \left(2\epsilon_{\mathbf{k}}^2 - \frac{(\hbar\omega_i^\pm)^2 \xi_{\mathbf{k}}}{((\hbar\omega_i^\pm)^2 - 4\Delta_0^2)^{1/2}} \right)}{\frac{\hbar\omega_i^\pm}{((\hbar\omega_i^\pm)^2 - 4\Delta_0^2)^{1/2} + 2\xi_{\mathbf{k}}}} \right) \quad (\text{V.107})$$

avec là encore une constante de normalisation \mathcal{N}_i^\pm à ajuster à l'aide du vecteur dual \vec{d}_i^\pm , lui-même déduit de \vec{e}_i^\pm comme en (V.49). Il s'agit bien ici du vecteur dual, même en dehors de la limite continue, car il est orthogonal à tous les autres modes collectifs puisque ceux-ci ont une énergie différente. Ces solutions complètent la base propre de \mathcal{L} : nous avons $2(\#\mathcal{D} - \#\mathcal{K})$ modes excités individuels auxquels il faut ajouter les $2(\#\mathcal{K} - 1)$ modes excités collectifs que nous venons de trouver ainsi que les 2 modes du sous-espace d'énergie nulle pour obtenir l'ordre $2\#\mathcal{D}$ de la matrice \mathcal{L} .

Ces calculs étant achevés, cherchons à en tirer quelque enseignement physique. À la limite thermodynamique, la densité d'état pour $\hbar\omega > 2\Delta_0$ converge vers celle d'un continuum à deux excitations fermioniques $k \mapsto 2\epsilon_{\mathbf{k}}$. Ce continuum à deux excitations fermioniques n'est rien d'autre que la branche d'excitation BCS traitée par la RPA à l'ordre bilinéaire en les opérateurs fermioniques. Il ne faut donc pas, dans la thermodynamique, ajouter la contribution des biexcitations RPA à celle de la branche BCS, car elles feraient double emploi.

V.3 Dynamique de l'opérateur phase

Nous avons étudié les modes excités simplement par souci de complétude car nous verrons dans cette section que seul le sous-espace d'énergie nulle importe pour saisir les caractéristiques essentielles de la dynamique de $\hat{\theta}_0$.

V.3.1 Opérateur phase adiabatique

Nous développons le champ quantique sur les modes d'énergie nulle et anormal et passons sous silence la contribution des modes excités :

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{s}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \hat{P}\vec{e}_a + \hat{Q}\vec{e}_n + \dots \quad (\text{V.108})$$

Ce développement fait apparaître deux opérateurs hermitiens, \hat{P} et \hat{Q} , obtenus par projection du champ sur les vecteurs duaux :

$$\hat{P} = \vec{d}_a^* \cdot \begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{s}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = - \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{s}_{\mathbf{k}} \quad (\text{V.109})$$

$$\hat{Q} = \vec{d}_n^* \cdot \begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{s}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = -i \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} \frac{d}{dN} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{y}_{\mathbf{k}} \quad (\text{V.110})$$

L'opérateur \hat{P} s'interprète comme la partie des fluctuations du nombre de particules qui excite des quasi-particules :

$$\hat{N} - \bar{N} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (\delta \hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow} + \delta \hat{n}_{\mathbf{k}\downarrow}) = \hat{P} + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{m}_{\mathbf{k}}, \quad (\text{V.111})$$

le reliquat, second terme du troisième membre, ayant une action nulle sur $|\psi_0^{\text{BCS}}\rangle$ ⁴. Remarquons enfin que, s'il on oublie les opérateurs de déplacement, \hat{Q} est un opérateur conjugué à \hat{P} au sens où leur commutateur est égal à $2i$:

$$[\hat{Q}, \hat{P}] = -2i \left(1 + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{d}{dN} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{m}_{\mathbf{k}} \right). \quad (\text{V.112})$$

Nous verrons plus loin que \hat{Q} s'interprète comme un opérateur phase *adiabatique*, qui est différent de $\hat{\theta}_0$ mais possède la même dynamique aux temps longs.

V.3.2 Dynamique linéarisée dans le sous-espace d'énergie nulle

Étudions pour l'instant la dynamique linéarisée de ces opérateurs. Nous dérivons le développement (V.108) par rapport au temps

$$\mathcal{L} \begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{s}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} + \begin{pmatrix} \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}_1} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}_1}} (\xi_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}_1}) \hat{m}_{\mathbf{k}_1} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = i\hbar \frac{d}{dt} \hat{P} \vec{e}_a + i\hbar \frac{d}{dt} \hat{Q} \vec{e}_n + \dots \quad (\text{V.113})$$

et nous le projetons dans le sous-espace d'énergie nulle à l'aide des vecteurs duaux \vec{d}_n et \vec{d}_a . Après un peu de calcul (on mettra à profit les équations (V.66–V.69)) ceci conduit à :

$$\frac{d}{dt} \hat{P} = 0 \quad (\text{V.114})$$

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d}{dt} \hat{Q} = \frac{d\mu}{dN} (\hat{N} - \bar{N}) + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}, \sigma=\uparrow/\downarrow} \frac{d\epsilon_{\mathbf{k}}}{dN} \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma} \quad (\text{V.115})$$

4. Cet opérateur \hat{P} diffère de celui construit dans la référence [84] justement par ce reliquat. Ceci provient d'un choix de variables différent pour le système pour le système (V.45). On peut de manière arbitraire définir un nouveau jeu de variables en panachant les $\hat{y}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{s}_{\mathbf{k}}$ avec les constantes du mouvement $\hat{m}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{h}_{\mathbf{k}}$. Ceci est sans incidence sur la dynamique. En revanche l'opérateur \hat{Q} coïncide avec celui de la référence [84] puisque $\hat{y}_{\mathbf{k}} = \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} - \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$.

La première de ces équations indique que \hat{P} est une constante du mouvement. Comme la dynamique linéarisée considère aussi les opérateurs nombre de quasi-particules fermionique $\hat{m}_{\mathbf{k}}$, et donc la différence $\hat{N} - \bar{N} - \hat{P}$, comme des constantes du mouvement, ce résultat signifie plus intuitivement que la dynamique linéarisée est bien compatible avec la conservation du nombre de particules $d\hat{N}/dt = 0$. La seconde équation ressemble fort à l'équation fondamentale de la phase (II.32). Comme son membre de droite est une constante du mouvement pour la dynamique linéarisée, elle prédit notamment que l'opérateur $\hat{Q}(t)$ comporte un terme linéaire en t :

$$\hat{Q}(t) = \hat{Q}(0) - \frac{2t}{\hbar} \left(\frac{d\mu}{d\bar{N}} (\hat{N} - \bar{N}) + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}, \sigma = \uparrow/\downarrow} \frac{d\epsilon_{\mathbf{k}}}{d\bar{N}} \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\sigma} \right) \quad (\text{V.116})$$

et donc un étalement balistique de sa variance dans le fondamental BCS :

$$\text{Var}\hat{Q}(t) = \text{Var}\hat{Q}(0) + \frac{4t^2}{\hbar^2} \left(\frac{d\mu}{d\bar{N}} \right)^2 \text{Var}\hat{N}. \quad (\text{V.117})$$

La variance initiale $\text{Var}\hat{Q}(0)$, qui se comporte comme $1/\bar{N}$ (nous l'avons représentée sur la figure V.1), est donc rapidement éclipsée par le second terme, quadratique en temps, avec un temps caractéristique qui n'est autre que le temps de brouillage de partition à température nulle (*cf.* l'équation (I.6) du premier chapitre, ainsi que la section IX.1 de la dernière partie). Ce résultat permet une réinterprétation de la décroissance gaussienne de la fonction de corrélation décrite au chapitre II comme étant causé par l'étalement du paquet d'onde de phase. La branche fermionique n'apporte ici aucune contribution à l'étalement car celui-ci est envisagé à température nulle dans le fondamental BCS, vide des opérateurs \hat{b} . Sa présence pourrait cependant se faire sentir si la température était suffisamment élevée pour créer des excitations fermioniques, d'énergie, rappelons-le, supérieure à Δ_0 . Il reste néanmoins trois détails par lesquels l'équation (V.115) diffère de l'équation fondamentale de la dynamique de phase (II.32) que nous nous proposons de démontrer : (i) l'opérateur phase du condensat $\hat{\theta}_0$ est remplacé par \hat{Q} , (ii) la moyenne temporelle à gros grains a disparu ainsi que (iii) la branche d'excitations bosonique. Nous consacrons les deux sous-sections suivantes à expliquer l'origine de ces différences.

V.3.3 Comparaison des opérateurs phase

À la différence de $\hat{\theta}_0$ qui agit sur le nombre de paires condensées, \hat{Q} est le générateur des translations du nombre moyen de particules dans le fondamental BCS $|\psi_0^{\text{BCS}}\rangle$:

$$e^{i\delta N \hat{Q}} |\psi_0^{\text{BCS}}(\bar{N})\rangle \underset{\delta N \ll \bar{N}}{=} |\psi_0^{\text{BCS}}(\bar{N} - 2\delta N)\rangle. \quad (\text{V.118})$$

Cette propriété se démontre en faisant agir sur (IV.94) l'opérateur

$$e^{i\delta N \hat{Q}} \underset{\delta N \ll \bar{N}}{\simeq} \prod_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \left(1 - \frac{2\delta N \frac{d}{d\bar{N}} V_{\mathbf{k}}^0}{U_{\mathbf{k}}^0} \left(\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} - \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) \right), \quad (\text{V.119})$$

où l'on s'est servi des relations (V.38, V.39) pour exprimer dans (V.110) le coefficient $\epsilon_{\mathbf{k}}/\Delta_0$ en termes de $U_{\mathbf{k}}^0$ et $V_{\mathbf{k}}^0$ et pour remarquer qu'en l'occurrence les points de vue de particules

et de quasi-particules coïncident : $\hat{y}_{\mathbf{k}} = \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} - \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$. L'opérateur $\exp(i\hat{\theta}_0)$ au contraire fait varier le nombre de particules condensées sans toucher aux autres modes, ce qui crée nécessairement des excitations par rapport au fondamental à $\bar{N} - 2$ particules. Il n'y a que dans la limite CBE où l'état fondamental est un pur condensat de dimères que cette opération devient adiabatique, et qu'en conséquence les opérateurs phase associés coïncident :

$$\hat{Q} \xrightarrow[k_{Fa} \rightarrow 0^+]}{\delta\hat{\theta}_0^{\text{BCS}}}. \quad (\text{V.120})$$

Cette propriété peut se vérifier directement en linéarisant l'équation (II.16) pour de faibles fluctuations $\delta\hat{\theta}_0^{\text{BCS}}$ de $\hat{\theta}_0^{\text{BCS}}$ autour de sa valeur moyenne

$$\delta\hat{\theta}_0^{\text{BCS}} = \frac{i}{4\bar{N}_0^{\text{BCS}}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \left(\delta\hat{d}_{\mathbf{k}} - \delta\hat{d}_{\mathbf{k}}^\dagger \right) \quad (\text{V.121})$$

et en comparant l'expression obtenue à (V.110) : dans la limite CBE, nous pouvons (i) négliger Δ_0 devant le potentiel chimique (qui est négatif), et donc remplacer $\epsilon_{\mathbf{k}}$ par $\xi_{\mathbf{k}}$, (ii) négliger $d\mu/(\Delta_0 d\bar{N})$ devant $d\Delta_0/(\Delta_0 d\bar{N})$ car la première quantité tend vers 0 tandis que la seconde possède la limite finie $1/2\bar{N}$ d'après l'équation (IV.89), (iii) remplacer \bar{N}_0^{BCS} par $\bar{N}/2$. Tout ceci conduit à

$$-i \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} \frac{d}{d\bar{N}} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \xrightarrow[k_{Fa} \rightarrow 0^+]}{\frac{i}{2\bar{N}} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}}} \quad (\text{V.122})$$

et permet l'identification dans cette limite de $\delta\hat{\theta}_0^{\text{BCS}}$ et de \hat{Q} . En dehors de la limite CBE en revanche, le blocage de Pauli se fait sentir et impose d'adapter la fonction d'onde du condensat φ_0 au nombre de particules. L'action de \hat{Q} contient cette adaptation, au contraire de celle de $\hat{\theta}_0$, qui par conséquent est créatrice d'excitations. Les deux opérateurs diffèrent notamment par leur variance initiale dans le fondamental BCS, que nous représentons sur la figure V.1. La variance de $\hat{\theta}_0^{\text{BCS}}(0)$ est exactement l'inverse de celle du nombre de particule,

$$\text{Var } \hat{\theta}_0(0) \text{Var } \hat{N} = 1, \quad (\text{V.123})$$

propriété réminiscente d'une relation d'incertitude d'Heisenberg pour deux opérateurs canoniquement conjugués, et que ne possède pas la variance de $\hat{Q}(0)$.

Néanmoins, la dynamique linéarisée de ces deux opérateurs est identique aux temps long et donnée par (V.115). En effet, séparons dans la décomposition de $\hat{y}_{\mathbf{k}}$ sur les modes de \mathcal{L} la contribution de \hat{Q} de celle des modes excités :

$$\hat{y}_{\mathbf{k}} = -i \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{Q} + \hat{y}_{\mathbf{k}}^{\text{exc}} \quad (\text{V.124})$$

et injectons cette décomposition dans l'expression linéarisée (V.121) de $\hat{\theta}_0$. Nous obtenons :

$$\delta\hat{\theta}_0^{\text{BCS}} = \hat{Q} + \frac{i}{4\bar{N}_0^{\text{BCS}}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{y}_{\mathbf{k}}^{\text{exc}}, \quad (\text{V.125})$$

où la somme sur \mathbf{k} au second membre est un effet de la non-adiabaticité de l'opérateur $\exp(i\hat{\theta}_0)$ précédemment mentionnée. Dans cette expression, la somme portant sur les modes excités est bornée donc négligeable aux temps longs devant le premier terme qui croît linéairement

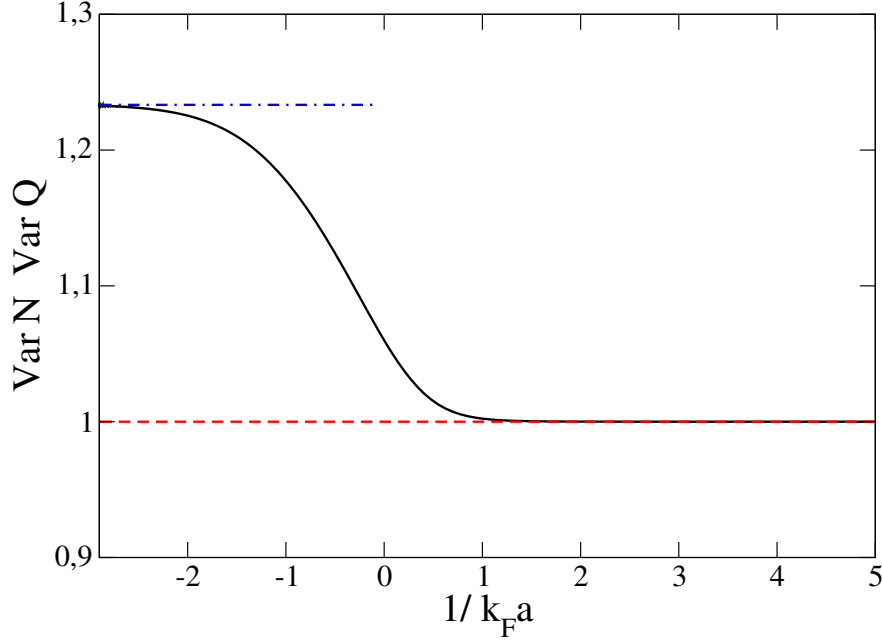


FIGURE V.1 – Produit des variances initiales des opérateurs phase \hat{Q} et $\hat{\theta}_0^{\text{BCS}}$ dans le fondamental BCS avec la variance du nombre de particules. La ligne en trait plein montre $\text{Var } \hat{Q}(0) \text{Var } \hat{N}$, le tireté rouge $\text{Var } \hat{\theta}_0^{\text{BCS}}(0) \text{Var } \hat{N}$, identiquement égal à 1, et le tireté pointillé bleu est la valeur, 1,23, atteinte par $\text{Var } \hat{Q}(0) \text{Var } \hat{N}$ dans la limite BCS. Les variances initiales de \hat{Q} et $\hat{\theta}_0^{\text{BCS}}$ s’obtiennent respectivement à partir des équations (V.110) et (V.121), celle de \hat{N} est donnée par (II.17).

en temps. Sa dérivée par rapport au temps est une somme de termes oscillants aux fréquences des modes excités, supérieures donc à $2\Delta_0$. En moyenne sur un temps long devant l’inverse de ces fréquences mais court devant le temps de brouillage, ce que nous appelons, rappelons-le, une moyenne à *gros grains* et notons $\overline{\quad}^t$, sa contribution est nulle, ce qui conduit à une version de l’équation (II.32) où seule manque encore la branche bosonique :

$$\overline{\frac{d\hat{\theta}_0^{\text{BCS}}}{dt}}^t = \frac{d\hat{Q}}{dt}. \quad (\text{V.126})$$

V.3.4 Tentatives d’inclusion de la branche bosonique

Reste donc ce problème majeur : l’absence de la branche d’excitation bosonique dans la dynamique linéarisée de l’opérateur phase. C’est bien la linéarisation des équations du mouvement qui est à l’origine de cette absence puisqu’elle a découpé les opérateurs d’impulsion totale nulle tels que la phase du condensat $\hat{\theta}_0$ des opérateurs d’impulsion non nulle parmi lesquels les opérateurs de création d’une excitation bosonique $\hat{b}_{\mathbf{q}}$. D’ailleurs, si de tels opérateurs doivent apparaître dans la dynamique de phase, ce ne peut être qu’au-delà de l’ordre

linéaire puisque les opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ sont des opérateurs de paire, bilinéaires en les opérateurs fermioniques \hat{a} comme les opérateurs de la RPA, et l'opérateur nombre $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}$ nécessairement quadratique en les opérateurs de la RPA. Nous avons donc tenté d'obtenir cette contribution de la branche bosonique en poussant le calcul par la RPA jusqu'à l'ordre quadratique comme suit. Premièrement, on calcule $d\hat{\theta}_0/dt$ jusqu'à l'ordre quadratique en les opérateurs de paires. Deuxièmement, on trouve les deux modes collectifs des matrices $\mathcal{L}_{\mathbf{q}}^{\text{RPA}}$ (pour le détail du calcul on pourra se référer au chapitre VII sur la théorie variationnelle puisqu'il s'agit en fait des mêmes matrices). Leurs énergies, opposées l'une de l'autre, sont linéaires en \mathbf{q} dans la limite des grandes longueurs d'onde. On développe alors les opérateurs de la RPA sur l'ensemble des modes propres de $\mathcal{L}_{\mathbf{q}}$; les amplitudes obtenues sur les modes collectifs, $\hat{b}_{-\mathbf{q}}$ and $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$, annihilent ou créent respectivement une excitation collective d'impulsion $\mp \hbar \mathbf{q}$. Troisièmement, on insère cette décomposition modale dans les opérateurs de la RPA apparaissant dans $d\hat{\theta}_0/dt$ pour obtenir expression quadratique en les amplitudes modales, et donc des termes en $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}$ comme dans (II.32). Malheureusement, cette approche par la RPA n'est pas fiable et nous devons y renoncer car les opérateurs de la RPA, bien que linéairement indépendants, ne sont *pas* quadratiquement indépendants, comme on le voit en dissociant et réassociant les opérateurs de paires grâce aux relations d'anticommutation fermioniques, par exemple

$$(\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow})(\hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}) = (\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger)(\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}). \quad (\text{V.127})$$

Ceci montre (i) qu'il n'y a pas une manière unique d'exprimer $d\hat{\theta}_0/dt$ comme une fonction quadratique des opérateurs de la RPA, (ii) que les amplitudes modales ne sont pas quadratiquement indépendantes, et (iii) que le coefficient de $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}$ n'est pas déterminé de manière unique par cette approche fondée sur la RPA.

Chapitre VI

Dynamique de phase par la théorie variationnelle

Pour inclure la contribution de la branche bosonique à la dynamique de phase, nous abandonnons l'approche RPA pour la théorie variationnelle d'Hartree-Fock-Bogolioubov, théorie semi-classique dont le principal intérêt est de fournir des variables indépendantes, canoniquement conjuguées, et permettant un développement systématique en puissances des faibles écarts du gaz par rapport au fondamental BCS. Ceci ne constitue cependant pas un abandon définitif du formalisme quantique car nous verrons qu'il est possible de donner un sens quantique aux variables de notre théorie variationnelle dans la limite où le gaz possède une faible densité d'excitations.

VI.1 Présentation de la théorie variationnelle d'un gaz de fermions appariés

VI.1.1 Ansatz de paires en mouvement

Le point de départ de la théorie variationnelle est l'Ansatz (IV.33), état cohérent de paires. Comme nous ne voulons plus décrire simplement le fondamental approché du gaz mais des phénomènes dynamiques, incluant des paires en mouvement, nous autorisons la fonction d'onde de l'état cohérent $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)$ à dépendre indépendamment des positions \mathbf{r} et \mathbf{r}' des deux fermions et du temps. Le prix à payer est que le passage dans l'espace de Fourier ne permet plus de diagonaliser l'opérateur de création de paires, ce qui rend le calcul des moyennes quantiques plus délicat que dans un état de type BCS $|\psi^{\text{BCS}}\rangle$. Nous voulons donc nous ramener formellement à la situation déjà étudiée où la fonction d'onde de l'état cohérent ne dépend que d'un unique paramètre. Pour cela, nous associons à la fonction d'onde $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ la matrice à coefficients sans dimension $\Gamma = (l^3 \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'))_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}$, que nous décomposons en valeurs singulières :

$$\Gamma = PDQ^\dagger \tag{VI.1}$$

où P et Q sont des matrices unitaires, de coefficients $P_{\mathbf{r}\alpha}$ et $Q_{\mathbf{r}\alpha}$, et D une matrice diagonale dont les coefficients positifs ou nuls sont notés :

$$D_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \Gamma_\alpha. \tag{VI.2}$$

Remarquons que le changement de base orthonormale induit par P (respectivement Q) diagonalise la matrice hermitienne $\Gamma\Gamma^\dagger$ (respectivement $\Gamma^\dagger\Gamma$). Cette décomposition permet d'écrire la décomposition de Schmidt de l'opérateur de création d'une paire,

$$l^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}') = \sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \hat{A}_{\alpha\uparrow}^\dagger \hat{A}_{\alpha\downarrow}^\dagger, \quad (\text{VI.3})$$

où les opérateurs $\hat{A}_{\alpha\uparrow}^\dagger$ et $\hat{A}_{\alpha\downarrow}^\dagger$ créent un fermion dans les orbitales engendrées par les matrices P et Q respectivement :

$$\hat{A}_{\alpha\uparrow}^\dagger = l^{3/2} \sum_{\mathbf{r}} P_{\mathbf{r}\alpha} \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \quad (\text{VI.4})$$

$$\hat{A}_{\alpha\downarrow}^\dagger = l^{3/2} \sum_{\mathbf{r}'} Q_{\mathbf{r}'\alpha}^* \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}'). \quad (\text{VI.5})$$

Ce sont des opérateurs fermioniques, qui vérifient les relations d'anticommutation $\{\hat{A}_{\alpha\sigma}, \hat{A}_{\beta\sigma'}^\dagger\} = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\sigma\sigma'}$ et $\{\hat{A}_{\alpha\sigma}, \hat{A}_{\beta\sigma'}\} = 0$. Avec ces nouveaux opérateurs, l'Ansatz (IV.33) se met sous la forme d'un état BCS traditionnel :

$$|\psi\rangle = \mathcal{N} \exp\left(\sum_{\alpha} \Gamma_{\alpha} \hat{A}_{\alpha\uparrow}^\dagger \hat{A}_{\alpha\downarrow}^\dagger\right) |0\rangle = \prod_{\alpha} \left(U_{\alpha} - V_{\alpha} \hat{A}_{\alpha\uparrow}^\dagger \hat{A}_{\alpha\downarrow}^\dagger\right) |0\rangle. \quad (\text{VI.6})$$

La deuxième égalité s'obtient en faisant commuter les opérateurs $\hat{A}_{\alpha\uparrow}^\dagger \hat{A}_{\alpha\downarrow}^\dagger$ et $\hat{A}_{\beta\uparrow}^\dagger \hat{A}_{\beta\downarrow}^\dagger$ pour $\alpha \neq \beta$ et en calculant la constante de normalisation comme pour un état BCS : $\mathcal{N} = 1/\prod_{\alpha} (1 + \Gamma_{\alpha}^2)$. Par analogie avec la théorie BCS, on a posé :

$$V_{\alpha} = -\frac{\Gamma_{\alpha}}{\sqrt{1 + \Gamma_{\alpha}^2}} \quad (\text{VI.7})$$

$$U_{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1 + \Gamma_{\alpha}^2}} = \sqrt{1 - V_{\alpha}^2}. \quad (\text{VI.8})$$

Notons que V_{α} sont les coefficients de la matrice diagonale $-D/(1 + D^2)^{1/2}$.

VI.1.2 Moyennes quantiques microscopiques

Un préalable à toute théorie microscopique est de pouvoir calculer les valeurs moyennes des observables microscopiques :

$$l^3 n_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = l^3 \langle \hat{\psi}_{\sigma}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}) \rangle \quad (\text{VI.9})$$

$$\Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = l^3 \langle \hat{\psi}_{\downarrow}(\mathbf{r}') \hat{\psi}_{\uparrow}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (\text{VI.10})$$

Grâce à notre réécriture de l'Ansatz (IV.33), les moyennes bilinéaires en les opérateurs \hat{A} s'obtiennent sans mal :

$$\langle \hat{A}_{\alpha\sigma}^\dagger \hat{A}_{\beta\sigma'} \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{\sigma\sigma'} V_{\alpha}^2 \quad (\text{VI.11})$$

$$\langle \hat{A}_{\alpha\downarrow} \hat{A}_{\beta\uparrow} \rangle = -\delta_{\alpha\beta} U_{\alpha} V_{\alpha} \quad (\text{VI.12})$$

Pour revenir aux moyennes (VI.9,VI.10) dans l'espace réel, nous inversons les relations (VI.4, VI.5) de passage des orbitales au champ de paires en utilisant l'unitarité de P et de Q ,

$$\sum_{\alpha} P_{\mathbf{r},\alpha}^* \hat{A}_{\alpha\uparrow}^{\dagger} = l^{3/2} \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \quad (\text{VI.13})$$

$$\sum_{\alpha} Q_{\mathbf{r},\alpha} \hat{A}_{\alpha\downarrow}^{\dagger} = l^{3/2} \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}'), \quad (\text{VI.14})$$

et nous introduisons la matrice Φ :

$$\Phi = -\Gamma \frac{1}{\sqrt{1 + \Gamma^{\dagger}\Gamma}} = -\frac{1}{\sqrt{1 + \Gamma\Gamma^{\dagger}}} \Gamma = -P \frac{D}{\sqrt{1 + D^2}} Q^{\dagger} \quad (\text{VI.15})$$

La matrice Φ est construite de façon à ce que ses valeurs singulières dans les bases induites par P et Q soient justement les coefficients V_{α} . En conséquence, les matrices $\Phi\Phi^{\dagger}$ et $\Phi^{\dagger}\Phi$ sont diagonalisées par les changements de base orthonormale induits respectivement par P et Q , et ont pour coefficients diagonaux l'ensemble des V_{α}^2 . Enfin la matrice $\Phi\sqrt{1 - \Phi^{\dagger}\Phi}$ a $U_{\alpha}V_{\alpha}$ comme valeur singulières dans les mêmes bases que Φ . Ces remarques permettent d'exprimer les moyennes de l'opérateur champ en termes de la matrice Φ :

$$l^3 n_{\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(P \frac{D^2}{1 + D^2} P^{\dagger} \right)_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = (\Phi\Phi^{\dagger})_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \quad (\text{VI.16})$$

$$l^3 n_{\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \left(Q \frac{D^2}{1 + D^2} Q^{\dagger} \right)_{\mathbf{r}',\mathbf{r}} = (\Phi^{\dagger}\Phi)_{\mathbf{r}',\mathbf{r}} \quad (\text{VI.17})$$

$$\Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = - \left(P \frac{D}{1 + D^2} Q^{\dagger} \right)_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} = - \left(\Phi \sqrt{1 - \Phi^{\dagger}\Phi} \right)_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \quad (\text{VI.18})$$

Nous verrons plus loin que la matrice Φ permet aussi d'écrire les équations du mouvement sous une forme très simple. Pour le moment, remarquons qu'en conséquence de (VI.16) et (VI.17),

$$\|\Phi\|^2 \equiv \text{Tr} \Phi^{\dagger}\Phi = \frac{N}{2} \quad (\text{VI.19})$$

où $N = l^3 \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}',\sigma=\uparrow/\downarrow} n_{\sigma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est le nombre moyen de fermions.

VI.1.3 Dynamique des variables conjuguées - équations hamiltoniennes

La partie précédente peut se voir comme une étude cinématique du système, où nous avons fait un choix judicieux de paramètres pour décrire toutes les observables microscopique du gaz. Nous passons maintenant à l'étude dynamique. Pour obtenir les équations du mouvement semi-classiques nous appliquons le principe variationnel à notre Ansatz (IV.33), c'est-à-dire que nous extrémalisons l'action :

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{i\hbar}{2} \left(\langle \psi | \frac{d}{dt} | \psi \rangle - \text{c.c.} \right) - \mathcal{H} \right) dt \quad (\text{VI.20})$$

où l'intégrale est prise entre deux temps t_i et t_f auxquels l'état du système est fixé. La fonctionnelle énergie \mathcal{H} est simplement la valeur moyenne du hamiltonien quantique

$$\mathcal{H} = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle. \quad (\text{VI.21})$$

Pour démontrer l'équation (II.32) dans le cadre de cette théorie variationnelle, nous n'aurons besoin d'aucune hypothèse sur le hamiltonien \hat{H} , autre que le fait qu'il conserve le nombre de particules et donne donc lieu à une fonctionnelle énergie \mathcal{H} possédant une symétrie $U(1)$. Nous resterons donc général tout au long de ce chapitre, et n'incarnerons la théorie variationnelle en choisissant un hamiltonien d'interaction de contact qu'au chapitre suivant pour étudier les excitations élémentaires du système.

Le point essentiel pour aboutir à des équations du mouvement agréables est d'exprimer le terme cinétique $i\hbar (\langle \psi | \frac{d}{dt} | \psi \rangle - \text{c.c.}) / 2$ du Lagrangien en termes de variables conjuguées. D'après la définition (IV.33) de notre Ansatz, nous avons¹ :

$$\langle \psi | \frac{d}{dt} | \psi \rangle - \text{c.c.} = \langle \psi | l^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}') | \psi \rangle - \text{c.c.} \quad (\text{VI.22})$$

Nous calculons la moyenne à l'aide de (VI.18) et reconnaissons la trace, notée Tr , d'un produit de matrices :

$$\langle \psi | \frac{d}{dt} | \psi \rangle - \text{c.c.} = - \left(\text{Tr} \left((1 - \Phi^{\dagger} \Phi)^{1/2} \Phi^{\dagger} \frac{d\Gamma}{dt} \right) - \text{c.c.} \right). \quad (\text{VI.23})$$

En utilisant $(1 - \Phi^{\dagger} \Phi)^{1/2} \Phi^{\dagger} = -Q \frac{D}{1+D^2} P^{\dagger} = -\frac{1}{1+\Gamma^{\dagger} \Gamma} \Gamma^{\dagger}$ nous éliminons dans un premier temps la matrice Φ au profit de Γ ,

$$\langle \psi | \frac{d}{dt} | \psi \rangle - \text{c.c.} = \text{Tr} \left(\frac{1}{1 + \Gamma^{\dagger} \Gamma} \Gamma^{\dagger} \frac{d\Gamma}{dt} \right) - \text{c.c.}, \quad (\text{VI.24})$$

pour mieux y revenir ensuite, grâce à la relation.

$$\text{Tr} \left(\Phi^{\dagger} \frac{d\Phi}{dt} \right) = \text{Tr} \left(\frac{1}{1 + \Gamma^{\dagger} \Gamma} \Gamma^{\dagger} \frac{d\Gamma}{dt} \right) + \text{Tr} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \Gamma^{\dagger} \Gamma}} \Gamma^{\dagger} \Gamma \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 + \Gamma^{\dagger} \Gamma}} \right) \quad (\text{VI.25})$$

En utilisant la propriété $(\text{Tr } A)^* = \text{Tr } A^{\dagger}$ pour toute matrice A , l'invariance de la trace par permutation circulaire puis la commutation de $\Gamma^{\dagger} \Gamma$ avec $1/\sqrt{1 + \Gamma^{\dagger} \Gamma}$, on se convainc que le deuxième terme est réel et disparaît après prise de la partie imaginaire. Le terme cinétique se met finalement sous la forme très simple :

$$\langle \psi | \frac{d}{dt} | \psi \rangle - \text{c.c.} = \text{Tr} \left(\Phi^{\dagger} \frac{d\Phi}{dt} \right) - \text{c.c.} \quad (\text{VI.26})$$

Ceci suggère qu'ici encore la matrice Φ est le bon jeu de paramètres de l'état cohérent. De fait, les équations du mouvement découlant de l'extrémalisation de l'action (VI.20) prennent en fonction ses coefficients $l^3 \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et de leur complexe conjugué la forme d'équations hamiltoniennes :

$$i\hbar l^6 \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \quad (\text{VI.27})$$

$$-i\hbar l^6 \frac{\partial \Phi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} \quad (\text{VI.28})$$

1. Notons que le terme $d\mathcal{N}/dt/\mathcal{N}$ présent dans $\langle \psi | d/dt | \psi \rangle$ est réel et disparaît de (VI.22).

Notations d'Einstein Pour les calculs qui vont suivre, il est plus agréable, pour ne pas trop souffrir des multiples contractions tensorielles à venir, de passer à une notation des champs à un seul indice. Nous désignons donc le couple de variables $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ discrètes par un seul indice, et adimensionnons au passage les champs en leur intégrant un élément de volume l^3 :

$$\{l^3\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \rightarrow \{\Phi_i\} \quad (\text{VI.29})$$

Ainsi l'équation du mouvement (VI.27) se met sous la forme

$$i\hbar \frac{d\Phi_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_i^*} \quad (\text{VI.30})$$

Par ailleurs, nous nous servons de la convention d'Einstein de sommation des indices répétés :

$$f^i g_i = \sum_i f_i g_i = l^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} f(\mathbf{r}, \mathbf{r}') g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (\text{VI.31})$$

Dans notre cas la hauteur de l'indice sert juste à indiquer une sommation implicite, mais ne change pas la nature du champ

$$f^i = f_i. \quad (\text{VI.32})$$

Notons que dans ces notations la norme au carré d'un champ s'écrit

$$\|f\|^2 = f^i f_i. \quad (\text{VI.33})$$

VI.2 État fondamental à nombre de particules fixé

Les bases de la théorie étant solidement posées, cherchons maintenant à en savoir le plus possible, sans perdre en généralité, sur la solution stationnaire des équations hamiltoniennes (VI.27, VI.28), plus précisément le minimum de la fonctionnelle énergie $\mathcal{H}(\Phi, \Phi^*)$ à nombre de particules fixé à N , et donc à norme du champ Φ fixée à $(N/2)^{1/2}$ d'après (VI.19). En vérité, comme $\mathcal{H}(\Phi, \Phi^*)$ possède une symétrie $U(1)$, ce minimum n'est pas atteint en un point unique mais sur un cercle correspondant aux changements de phase globale que l'on peut effectuer sur Φ sans pour autant modifier ni sa norme ni la valeur de l'énergie. Dans le cas du hamiltonien (IV.29) avec interactions de contact dans le modèle sur réseau, nous connaissons bien cet ensemble de minimiseurs; en point de vue de Fourier, c'est l'ensemble des couples $(V_{\mathbf{k}}^0 e^{i\theta}, V_{\mathbf{k}}^0 e^{-i\theta})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$ où la phase θ représente justement la position sur le cercle. Dans le cas général nous appelons (Φ_0, Φ_0^*) un point quelconque du cercle des minimiseurs, cercle qui s'écrit donc :

$$\{(\Phi_0 e^{i\theta}, \Phi_0^* e^{-i\theta}), \theta \in \mathbb{R}\}. \quad (\text{VI.34})$$

La fonction d'onde Φ_0 du minimiseur possède une double dépendance en le nombre de particules N . La première est évidente, elle provient de la condition de normalisation $\|\Phi_0\|^2 = N/2$. Cependant une des spécificités du problème fermionique, y compris dans l'espace homogène, est que même le mode ϕ_0 normalisé à l'unité proportionnel à Φ_0 dépend de N . On peut y voir, comme plus haut dans la distinction entre $\hat{\theta}_0$ et \hat{Q} , une conséquence du principe d'exclusion de Pauli. Plutôt que d'utiliser le minimiseur Φ_0 tel quel, il est donc plus naturel de séparer ces deux dépendances en écrivant :

$$\Phi_0^i = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \phi_0^i \quad (\text{VI.35})$$

avec un mode ϕ_0 normalisée à l'unité $\|\phi_0\|^2 = 1$. En dérivant cette condition de normalisation sur ϕ_0 par rapport à N , on obtient la condition d'orthogonalité :

$$\operatorname{Re} \left((\phi_0^i)^* \frac{d\phi_{0i}}{dN} \right) = 0 \quad (\text{VI.36})$$

Pour déterminer ϕ_0 , nous introduisons le multiplicateur de Lagrange μ_0 associé à la conservation de la norme et cherchons à extrémiser la quantité $\mathcal{H} - 2\mu_0\|\Phi\|^2$, ce qui conduit à :

$$\left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_i} \right|_0 - 2\mu_0 \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \phi_{0i}^* = 0 \quad (\text{VI.37})$$

avec, dans toute la suite, la notation $\dots|_0$ pour indiquer qu'une fonction est évaluée au minimiseur $((N/2)^{1/2}\phi_0, (N/2)^{1/2}\phi_0^*)$. La valeur minimale atteinte par \mathcal{H} en ce point est l'approximation que la théorie variationnelle nous fournit de l'énergie du fondamental contenant N particules. Nous la notons $E_0(N)$:

$$E_0(N) = \mathcal{H} \left((N/2)^{1/2}\phi_0, (N/2)^{1/2}\phi_0^* \right) \quad (\text{VI.38})$$

Reste maintenant à déterminer la valeur du multiplicateur de Lagrange μ_0 . Comme le suggère sa notation, il n'est autre que l'approximation de champ moyen du potentiel chimique à température nulle, c'est-à-dire la dérivée de l'énergie du fondamental E_0 par rapport à N :

$$\mu_0 = \frac{dE_0}{dN}. \quad (\text{VI.39})$$

Pour le voir nous projetons d'abord l'équation (VI.37) sur ϕ_0 , ce qui permet d'exprimer μ_0 en termes des dérivées de \mathcal{H} :

$$\left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} 2\mu_0 = \phi_0^i \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_i} \right|_0 \quad (\text{VI.40})$$

Puis, en dérivant l'énergie du fondamental (VI.38) par rapport à N , nous faisons apparaître la même contraction (qui est réelle d'après (VI.40)) des dérivées de \mathcal{H} :

$$\frac{dE_0}{dN} = \frac{1}{(2N)^{1/2}} \phi_0^i \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_i} \right|_0 + \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \operatorname{Re} \left(\frac{d\phi_0^i}{dN} \left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_i} \right|_0 \right) \quad (\text{VI.41})$$

La nullité du second terme, conséquence de la colinéarité de $\left. \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} \right|_0$ à ϕ_0^* d'une part, et de la condition d'orthogonalité (VI.36) d'autre part, permet de conclure.

VI.3 Équations du mouvement à symétrie conservée

Étudions maintenant la dynamique des états faiblement excités où le champ Φ est proche de Φ_0 .

VI.3.1 Développement autour du cercle des minimiseurs

Contrairement à ce que nous avons fait dans le chapitre précédent avec la RPA, nous allons ici linéariser les équations du mouvement *en tenant compte de la symétrie* $U(1)$. Pour cela, nous posons :

$$\Phi^i = e^{i\theta}[n^{1/2}\phi_0^i(N) + \Lambda^i] \quad (\text{VI.42})$$

Le premier terme de ce développement est la composante de Φ parallèle à ϕ_0 ; sa norme au carré est nécessairement inférieure à celle du champ entier, que nous ne fixons pas pour l'instant à $N/2$. Pour respecter la symétrie $U(1)$, nous avons laissé la phase θ de cette projection libre d'avoir une excursion arbitrairement grande. Le second terme, composante du champ orthogonale à ϕ_0 , est nécessairement borné dans son évolution, et il en va de même donc pour le champ Λ , dans lequel on a retiré le facteur de phase $e^{i\theta}$. Ce cadre nous permet de développer une théorie perturbative systématique en puissances du champ Λ , qui est l'analogie pour les fermions de la théorie de Bogolioubov sans brisure de symétrie $U(1)$ pour les bosons [85].

Commençons par développer le hamiltonien classique \mathcal{H} en puissances de Λ à n fixé. Grâce à sa symétrie $U(1)$, on peut éliminer le facteur de phase présent dans le champ Φ et se ramener au développement de

$$\mathcal{H}(\Phi, \Phi^*) = \mathcal{H}(n^{1/2}\phi_0 + \Lambda, n^{1/2}\phi_0^* + \Lambda^*). \quad (\text{VI.43})$$

On obtient alors :

$$\mathcal{H}(\Phi, \Phi^*) = \mathcal{T}_0[n, \phi_0, \phi_0^*] + \sum_{j=1}^3 \mathcal{T}_j[n, \phi_0, \phi_0^*](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^4). \quad (\text{VI.44})$$

Le tenseur \mathcal{T}_j , de rang j si bien que $\mathcal{T}_j(\Lambda, \Lambda^*)$ est d'ordre exactement j en Λ et Λ^* , peut s'exprimer en termes de la différentielle $j^{\text{ème}}$ de \mathcal{H} prise en $(\Phi, \Phi^*) = (n^{1/2}\phi_0, n^{1/2}\phi_0^*)$ restreinte au sous-espace orthogonal à $(\phi_0^*, 0)$ et $(0, \phi_0)$:

$$\mathcal{T}_0[n, \phi_0, \phi_0^*] = \mathcal{H}(n^{1/2}\phi_0, n^{1/2}\phi_0^*) \quad (\text{VI.45})$$

$$\mathcal{T}_1[n, \phi_0, \phi_0^*](\Lambda, \Lambda^*) = \Lambda^i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_i}(n^{1/2}\phi_0, n^{1/2}\phi_0^*) + \text{c.c.} \quad (\text{VI.46})$$

$$\begin{aligned} 2\mathcal{T}_2[n, \phi_0, \phi_0^*](\Lambda, \Lambda^*) &= \Lambda^i \Lambda^j \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j}(n^{1/2}\phi_0, n^{1/2}\phi_0^*) \quad (\text{VI.47}) \\ &\quad + \Lambda^i (\Lambda^j)^* \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j^*}(n^{1/2}\phi_0, n^{1/2}\phi_0^*) + \text{c.c.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6\mathcal{T}_2[n, \phi_0, \phi_0^*](\Lambda, \Lambda^*) &= \Lambda^i \Lambda^j \Lambda^k \frac{\partial^3 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j \partial \Phi_k}(n^{1/2}\phi_0, n^{1/2}\phi_0^*) \quad (\text{VI.48}) \\ &\quad + 3\Lambda^i \Lambda^j (\Lambda^k)^* \frac{\partial^3 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j \partial \Phi_k^*}(n^{1/2}\phi_0, n^{1/2}\phi_0^*) + \text{c.c.} \end{aligned}$$

Notons que la condition de stationnarité de l'énergie (VI.37) au point $((N/2)^{1/2}\phi_0, (N/2)^{1/2}\phi_0^*)$ se traduit par la nullité du tenseur d'ordre 1 (qui, rappelons-le, n'agit que dans l'espace orthogonal) en ce point :

$$\forall N, \mathcal{T}_1[N, \phi_0(N), \phi_0^*(N)] = 0. \quad (\text{VI.49})$$

VI.3.2 Équation de la dynamique de phase incomplète

Les variables phase et module au carré de l'amplitude du champ Φ dans le mode ϕ_0 héritent de Φ et Φ^* leur caractère canoniquement conjugué, si bien que :

$$-\hbar \frac{d\theta}{dt} = \partial_n \mathcal{H}_n(n, \Lambda, \Lambda^*). \quad (\text{VI.50})$$

où le hamiltonien \mathcal{H}_n s'obtient en remplaçant dans \mathcal{H} le champ Φ par le développement (VI.42) :

$$\mathcal{H}_n(n, \Lambda, \Lambda^*) = \mathcal{H}(n^{1/2}\phi_0 + \Lambda, n^{1/2}\phi_0^* + \Lambda^*). \quad (\text{VI.51})$$

Une fois effectuée cette dérivée dans (VI.44) à Λ et Λ^* fixés, on peut fixer la norme de Φ à $(N/2)^{1/2}$ (c'est-à-dire le nombre total de particules à N) et éliminer n grâce à la relation

$$n = \frac{N}{2} - \|\Lambda\|^2; \quad (\text{VI.52})$$

le champ Λ reste alors la seule variable dynamique du problème. L'expression est utile seulement jusqu'à l'ordre deux en Λ, Λ^* :

$$\begin{aligned} -\hbar \frac{d\theta}{dt} = & \partial_n \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)] - \|\Lambda\|^2 \partial_n^2 \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)] \\ & + \sum_{j=1}^2 \partial_n \mathcal{T}_j[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3). \end{aligned} \quad (\text{VI.53})$$

Dans cette expression, tous les tenseurs sont évalués en $N/2$; on a utilisé pour cela la relation (VI.52) dans $\partial_n \mathcal{T}_0$ puis on a développé au second ordre en Λ comme suit :

$$\partial_n \mathcal{T}_0[n, \phi_0(N), \phi_0^*(N)] = \partial_n \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)] - \|\Lambda\|^2 \partial_n^2 \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)] + O(\|\Lambda\|^4). \quad (\text{VI.54})$$

Dans les autres tenseurs \mathcal{T}_j , on peut remplacer directement n par $N/2$ en commettant une erreur $O(\|\Lambda\|^3)$ négligeable. Toute la difficulté de notre problème provient de l'existence du terme $\partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)](\Lambda, \Lambda^*)$, linéaire en Λ, Λ^* , dans $d\theta/dt$ dont la valeur moyenne temporelle, bien que faible, est comparable aux termes quadratiques. Ce terme est une conséquence directe de la dépendance de ϕ_0 en le nombre de paires [84], car sans cette dépendance la dérivée partielle $\partial_n \mathcal{T}_1$ serait assimilable à une dérivée totale par rapport au nombre de particules, qui est nulle comme on peut le voir en dérivant l'équation (VI.49). Dans le même temps, les dérivées partielles $\partial_n^2 \mathcal{T}_0$ et $\partial_n \mathcal{T}_2$ seraient assimilables à des dérivées totales, ce qui conduirait directement au résultat (VI.78), résultat auquel le lecteur ne voulant pas s'embarasser des subtilités qu'introduit la dépendance de ϕ_0 en N pourra sauter directement. La sous-section suivante est consacrée au calcul de la valeur moyenne du terme linéaire, terme qui complète les dérivées totales par rapport à N en apportant la contribution venant de $\phi_0(N)$.

VI.3.3 Moyenne temporelle à gros grains du champ Λ

L'argument central du calcul de la valeur moyenne du terme linéaire est la nullité, pour un champ Λ dont l'excursion est bornée, de la moyenne temporelle à gros grains de sa dérivée temporelle :

$$\overline{\frac{d\Lambda}{dt}}^t = 0. \quad (\text{VI.55})$$

La moyenne temporelle à gros grains est prise sur un temps long devant l'inverse des pulsations typiques des modes propres du champ Λ , mais court devant leur temps d'amortissement dû aux non-linéarités des équations du mouvement. Nous allons exploiter la propriété (VI.55) en écrivant l'équation du mouvement de Λ , ce qui nous donnera une relation entre la moyenne temporelle des termes linéaires et les termes quadratiques. L'équation du mouvement de Λ découle du hamiltonien \mathcal{H}_N obtenu à partir de \mathcal{H}_n en remplaçant² n par $N/2 - \|\Lambda\|^2$ dans (VI.44) :

$$\mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*) = \mathcal{H}_n(N/2 - \|\Lambda^2\|, \Lambda, \Lambda^*) \quad (\text{VI.59})$$

Jusqu'à l'ordre 3 en Λ et Λ^* , ceci conduit à

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*) = & E_0(N) + \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) + \mathcal{T}_3[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)](\Lambda, \Lambda^*) \\ & - \|\Lambda\|^2 \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^4) \end{aligned} \quad (\text{VI.60})$$

où le tenseur $\check{\mathcal{T}}_2$ regroupe les termes quadratiques :

$$\check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) = \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)](\Lambda, \Lambda^*) - 2\mu_0(N)\|\Lambda\|^2. \quad (\text{VI.61})$$

Pour faire apparaître le potentiel chimique, nous avons utilisé la relation

$$\boxed{\partial_n \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)] = 2\mu_0(N)}, \quad (\text{VI.62})$$

simple réécriture de l'équation (VI.40) sur $\mu_0(N)$ en termes de la dérivée partielle du tenseur \mathcal{T}_0 (VI.45) par rapport à n . L'équation du mouvement du champ Λ s'écrit :

$$i\hbar \frac{d\Lambda_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_N}{\partial \Lambda_i^*}, \quad (\text{VI.63})$$

la dérivée partielle étant prise à N et Λ fixés. Pour calculer la moyenne temporelle à gros grains du terme $\partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*)$ apparaissant dans (VI.53), nous commençons par le transformer à l'aide de la relation

$$\boxed{2\mathcal{D} \cdot \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) = -\partial_n \mathcal{T}_1(\Lambda, \Lambda^*)} \quad (\text{VI.64})$$

2. De fait, Λ et Λ^* ne sont pas des variables canoniquement conjuguées au regard du hamiltonien (VI.44) car Λ contient un facteur de phase $e^{-i\theta}$. Pour se convaincre que le bon hamiltonien est \mathcal{H}_N , on peut écrire $\Lambda_i = e^{-i\theta} \Phi_{\perp i}$ où Φ_{\perp} est la projection du champ Φ orthogonalement à ϕ_0 . Les variables $\Phi_{\perp i}$ et $\Phi_{\perp i}^*$ sont elles bien canoniquement conjuguées vis-à-vis de \mathcal{H} . En dérivant par rapport au temps, on obtient

$$i\hbar \frac{d\Lambda_i}{dt} = \left(\hbar \frac{d\theta}{dt} \right) \Lambda_i + e^{-i\theta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_{\perp i}^*}(\Phi, \Phi^*) \quad (\text{VI.56})$$

En utilisant la relation

$$\frac{\partial \mathcal{H}_N}{\partial \Lambda_i^*} = -\Lambda_i \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial n} + \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \Lambda_i^*} \quad (\text{VI.57})$$

obtenue en dérivant la définition (VI.59) de \mathcal{H}_N par rapport à Λ_i^* , puis

$$\frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \Lambda_i^*}(n, \Lambda, \Lambda^*) = e^{-i\theta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_{\perp i}^*}(\Phi, \Phi^*) \quad (\text{VI.58})$$

qui découle cette fois de la définition (VI.51) de \mathcal{H}_n , et enfin l'équation (VI.50) pour la dérivée de la phase, on obtient l'équation du mouvement de Λ (VI.63) attendue.

où \mathcal{D} est un opérateur différentiel qui « substitue » $d\phi_0/dN$ à Λ et $d\phi_0^*/dN$ à Λ^* , c'est-à-dire le générateur des translations de Λ parallèlement à $d\phi_0/dN$:

$$\mathcal{D} = \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{d\phi_0^i}{dN} \frac{\partial}{\partial \Lambda_i} + \frac{d(\phi_0^i)^*}{dN} \frac{\partial}{\partial \Lambda_i^*} \right). \quad (\text{VI.65})$$

La relation (VI.64) n'est autre que l'équation du minimiseur, dérivée par rapport à N et exprimée en termes des tenseurs \mathcal{T} . En effet, en dérivant (VI.37), il vient :

$$\begin{aligned} -N^{-1} \left(\phi_0^i \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} + (\phi_0^i)^* \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i^* \partial \Phi_j} \right) &= \frac{d\phi_0^i}{dN} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} + \frac{d(\phi_0^i)^*}{dN} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i^* \partial \Phi_j} \\ &\quad - 2\mu_0(N) \frac{d\phi_{0j}^*}{dN} - 2N^{-1/2} \frac{d(\mu_0(N)N^{1/2})}{dN} \phi_{0j}^*(N). \end{aligned} \quad (\text{VI.66})$$

La restriction de ce tenseur de rang 1 à l'espace orthogonal fait disparaître le dernier terme où la fonction ϕ_0 apparaît non contractée. Puis en ajoutant à cette équation son complexe conjugué, nous reconnaissons à gauche la dérivée partielle de \mathcal{T}_1 par rapport à n prise en $n = N/2$ et à droite l'action de \mathcal{D} sur $\tilde{\mathcal{T}}_2$. L'astuce suggérée par la relation (VI.64) est d'écrire directement la dérivée temporelle de la partie imaginaire du champ Λ projetée sur la fonction $(N/2)^{1/2} d\phi_0/dN$,

$$Y = \frac{l^6}{2i} \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{d\phi_0^i}{dN} (\Lambda_i - \Lambda_i^*) \quad (\text{VI.67})$$

de façon à faire apparaître automatiquement l'opérateur \mathcal{D} . En dérivant Y par rapport au temps, nous obtenons :

$$-2\hbar \frac{dY}{dt} = \mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*) = \mathcal{D} \cdot \tilde{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) + \mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3) \quad (\text{VI.68})$$

où $\mathcal{H}_N^{\text{cub}}$ est la partie de \mathcal{H}_N d'ordre trois en Λ et Λ^* ,

$$\mathcal{H}_N^{\text{cub}} = \mathcal{T}_3[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)](\Lambda, \Lambda^*) - \|\Lambda\|^2 \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)](\Lambda, \Lambda^*). \quad (\text{VI.69})$$

La nullité de la moyenne temporelle de Y , $\overline{dY/dt}^t = 0$, simple conséquence de celle de $\overline{d\Lambda/dt}^t$ (VI.55), permet alors d'obtenir la relation

$$\overline{\partial_n \mathcal{T}_1(\Lambda, \Lambda^*)}^t = -2\overline{\mathcal{D} \cdot \tilde{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*)}^t = \overline{2\mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda, \Lambda^*)}^t \quad (\text{VI.70})$$

qui montre que nous avons eu raison de nous méfier des termes linéaires apparaissant dans l'équation de la dynamique de phase et de ne pas les traiter comme des termes purement oscillants. Leur contribution à la valeur moyenne temporelle de $d\theta/dt$ est en effet comparable à celles des termes quadratiques, dont on aurait pu penser naïvement qu'elle serait la seule à survivre aux temps longs.

VI.3.3.1 Reconstitution des dérivées totales par rapport à N

Nous devons maintenant ajouter la valeur moyenne des termes linéaires obtenue en (VI.70) aux termes quadratiques de (VI.53). Nous allons montrer que ceci reconstitue une dérivée totale par rapport à N . Ce résultat s'appuie sur la relation valable avant moyenne temporelle :

$$\boxed{2 \frac{d}{dN} \tilde{\mathcal{T}}_2(\Lambda, \Lambda^*) = 2\mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda, \Lambda^*) - \|\Lambda\|^2 \partial_n^2 \mathcal{T}_0 + \partial_n \mathcal{T}_2(\Lambda, \Lambda^*)} \quad (\text{VI.71})$$

où tous les tenseurs sont évalués en $[n = N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)]$ ou simplement en N dans le cas de $\check{\mathcal{T}}_2$. Nous allons démontrer cette relation pas à pas, en identifiant dans $d\check{\mathcal{T}}_2/dN$ chacun des termes du second membre de (VI.71). À cette fin commençons par développer $\mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}$ en remarquant que l'opérateur \mathcal{D} agit comme une dérivation. En omettant une fois de plus d'écrire le point $[n = N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)]$ où sont évalués tous les tenseurs :

$$\mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda, \Lambda^*) = \mathcal{D} \cdot \mathcal{T}_3(\Lambda, \Lambda^*) - \partial_n \mathcal{T}_1(\Lambda, \Lambda^*) (\mathcal{D} \cdot \|\Lambda\|^2) - (\mathcal{D} \cdot \partial_n \mathcal{T}_1(\Lambda, \Lambda^*)) \|\Lambda\|^2 \quad (\text{VI.72})$$

Le lecteur parvenu jusqu'à ce point se sera immédiatement aperçu que la notation $d\check{\mathcal{T}}_2/dN(\Lambda, \Lambda^*)$ utilisée dans (VI.71) pose problème. En effet, on tendrait à voir cette dérivée comme la limite quand $\delta N \rightarrow 0$ de $(\check{\mathcal{T}}_2[N + \delta N](\Lambda, \Lambda^*) - \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*)) / \delta N$, mais cette quantité n'est pas bien définie. En effet, le tenseur $\check{\mathcal{T}}_2[N + \delta N]$ ne peut *a priori* agir que sur des champs appartenant à l'espace orthogonal à $\phi_0(N + \delta N)$, ce qui n'est pas le cas de Λ car les fonctions $\phi_0(N)$ et $\phi_0(N + \delta N)$ sont légèrement différentes. Aussi, pour tenir compte du fait que l'espace même où agit le tenseur $\check{\mathcal{T}}_2$ dépend de N à travers ϕ_0 , nous étendons sa définition à tout l'espace en lui ajoutant simplement le projecteur

$$Q_N = 1 - \phi_0^i(N) \phi_{0j}^*(N) \quad (\text{VI.73})$$

dans l'espace orthogonal à ϕ_0 . La définition suivante de $\check{\mathcal{T}}_2$ est valable pour un champ Λ' quelconque :

$$\begin{aligned} 2\check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda', \Lambda'^*) &= 2\mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N), \phi_0^*(N)](Q_N \Lambda', Q_N^* \Lambda'^*) - 4\mu_0(N) \|Q_N \Lambda'\|^2 \\ &= \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \Big|_0 (\Lambda'^i - \phi_0^i \phi_{0k}^* \Lambda'^k) (\Lambda'^j - \phi_0^j \phi_{0l}^* \Lambda'^l) + \text{c.c.} \\ &+ \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j^*} \Big|_0 - 2\mu_0(N) \delta_{ij} \right) (\Lambda'^i - \phi_0^i \phi_{0k}^* \Lambda'^k) (\Lambda'^j - \phi_0^j \phi_{0l}^* \Lambda'^l)^* + \text{c.c.} \quad (\text{VI.74}) \end{aligned}$$

Dérivons maintenant par rapport à N , et appliquons le résultat à un champ Λ orthogonal à $\phi_0(N)$:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dN} \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) &= \partial_n \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0, \phi_0^*](\Lambda, \Lambda^*) \\ &+ \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{\partial^3 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j \partial \Phi_k} \Big|_0 \Lambda^i \Lambda^j \frac{d\phi_0^k}{dN} + \frac{\partial^3 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j \partial \Phi_k^*} \Big|_0 \Lambda^i \Lambda^j \frac{d(\phi_0^k)^*}{dN} \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\partial^3 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j^* \partial \Phi_k} \Big|_0 \Lambda^i (\Lambda^j)^* \frac{d\phi_0^k}{dN} + \text{c.c.} \right) \\ &- \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \Big|_0 \phi_0^i \Lambda^j + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j^*} \Big|_0 \phi_0^i (\Lambda^j)^* + \text{c.c.} \right) \left(\frac{d\phi_{0k}}{dN} \Lambda_k^* + \text{c.c.} \right) \\ &\quad - 4 \frac{d\mu_0}{dN} \|\Lambda\|^2 \quad (\text{VI.75}) \end{aligned}$$

Sous cette forme, nous pouvons reconnaître un à un les différents termes apparaissant dans (VI.71). (i) Le premier terme est présent dans la formule finale, nous le conservons tel quel. (ii) Le second terme provient de la dépendance en ϕ_0 des dérivées secondes de \mathcal{H} ; nous

reconnaissons en lui le tenseur $2\mathcal{T}_3[N, \phi_0(N), \phi_0(N)^*]$ contracté par l'opérateur \mathcal{D} . (iii) Le troisième terme est la dérivée du projecteur orthogonal sur l'espace orthogonal; il s'identifie au terme $2\partial_n \mathcal{T}_1[N, \phi_0(N), \phi_0(N)^*](\Lambda, \Lambda^*) \times (\mathcal{D} \cdot \|\Lambda\|^2)$ présent dans $\mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}$. Enfin (iv) pour interpréter le dernier terme, exprimons-le, à l'aide de la relation (VI.62), en termes des dérivées partielles de \mathcal{H} :

$$4 \frac{d\mu_0}{dN} = \partial_n^2 \mathcal{T}_0[N, \phi_0(N), \phi_0(N)^*] + \left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j} \Big|_0 \phi_0^i \frac{d\phi_0^j}{dN} + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j^*} \Big|_0 \phi_0^i \frac{d(\phi_0^j)^*}{dN} + \text{c.c.} \right) \quad (\text{VI.76})$$

Après changement de signe et multiplication par $\|\Lambda\|^2$, on obtient le second terme au membre de droite de (VI.71), ainsi que le terme $-2\mathcal{D} \cdot \partial_n \mathcal{T}_1[N, \phi_0(N), \phi_0(N)^*](\Lambda, \Lambda^*) \times \|\Lambda\|^2$ qui complète $\mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}$. Notons que nous avons utilisée la nullité de $\text{Re}(d\phi_0^i/dN \partial \mathcal{H}/\partial \Phi_i|_0)$ déjà relevée à l'occasion de l'équation (VI.41).

Le lecteur qui aura su apprécier ce joli calcul sera heureux d'apprendre qu'il existe une autre façon tout aussi élégante de parvenir en une fois aux résultats (VI.62), (VI.64) et (VI.71), qui utilise un raisonnement qui n'est pas sans rappeler celui grâce auquel nous avons obtenu le mode anormal à la section V.2.2.2 du chapitre précédent. On considère formellement un champ Φ' à $N + \delta N$ particules et on obtient de deux façons différentes l'approximation quadratique en Λ' et Λ'^* de $\mathcal{H}_{N+\delta N}(\Lambda', \Lambda'^*)$ où Λ' est comme dans (VI.42) (écrite pour $N + \delta N$ particules) la composante de Φ' orthogonale à $\phi_0(N + \delta N)$. D'une part, on remplace simplement N par $N + \delta N$ et Λ par Λ' dans (VI.60), puis on développe au premier ordre en δN , ce qui fait apparaître $d\tilde{\mathcal{T}}_2/dN[N]$. D'autre part, on applique à $\mathcal{H}(\Phi', \Phi'^*)$ le développement (VI.44) autour de $\Phi_0(N)$ sachant qu'au premier ordre en δN , la composante de Φ' orthogonale à $\phi_0(N)$ contient, en plus de celle Λ'_\perp de Λ' , une contribution venant de $d\phi_0/dN$:

$$\Lambda = \delta N \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \frac{d\phi_0}{dN} + \Lambda'_\perp + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^2, \delta N \|\Lambda'\|) \quad (\text{VI.77})$$

C'est ce décalage infinitésimal proportionnel à δN dans la direction de $d\phi_0/dN$ qui fait apparaître l'opérateur \mathcal{D} . Les équations (VI.62), (VI.64) et (VI.71) résultent de l'identification aux ordres zéro, un et deux en Λ' et Λ'^* des deux expressions de $\mathcal{H}_{N+\delta N}(\Lambda', \Lambda'^*)$ obtenues. Le lecteur souhaitant avoir les détails de ce calcul est prié de se reporter à l'annexe D.

VI.3.3.2 Équation de la phase complétée

Avec la relation (VI.71) en main, le plus dur est derrière nous. Il ne reste qu'à prendre la valeur moyenne temporelle de l'équation de la dynamique de phase incomplète (VI.53), à remplacer les termes linéaires à l'aide de l'équation (VI.70), et à utiliser justement l'équation (VI.71) pour obtenir :

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\overline{\theta}^t}{dt} = \mu_0(N) + \overline{\frac{d\tilde{\mathcal{T}}_2}{dN}[N](\Lambda, \Lambda^*)}^t + O(\|\Lambda\|^3) \quad (\text{VI.78})$$

Rappelons que d'après (VI.60), la forme quadratique $\tilde{\mathcal{T}}_2[N]$ représente le développement quadratique en Λ et Λ^* de l'énergie au voisinage de la solution stationnaire. Nous la représentons par la matrice $\sigma_z \mathcal{L}[N]$

$$\tilde{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \Lambda^* & \Lambda \end{pmatrix} \sigma_z \mathcal{L}[N] \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda^* \end{pmatrix} \quad (\text{VI.79})$$

avec $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, et $\mathcal{L}[N]$ est, comme dans la section V.2, une matrice symplectique

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A^* \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.80})$$

À la différence de la RPA, la théorie variationnelle permet d'interpréter les matrices A et B en termes des dérivées partielles secondes de l'énergie :

$$A_{ij} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i \partial \Phi_j^*} \right|_0 - 2\mu_0(N)\delta_{ij} \quad (\text{VI.81})$$

$$B_{ij} = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \Phi_i^* \partial \Phi_j} \right|_0. \quad (\text{VI.82})$$

La symétrie symplectique permet de regrouper deux à deux les modes de \mathcal{L} , d'une part les modes (u_α, v_α) d'énergie ϵ_α et d'autre part les modes (v_α^*, u_α^*) d'énergie $-\epsilon_\alpha$. Ces modes sont normalisés par la condition $\|u_\alpha\|^2 - \|v_\alpha\|^2 = 1$. Développons le champ Λ sur ces modes propres :

$$\begin{pmatrix} \Lambda(t) \\ \Lambda^*(t) \end{pmatrix} = \sum_\alpha b_\alpha(t) \begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix} + b_\alpha^*(t) \begin{pmatrix} v_\alpha^* \\ u_\alpha^* \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.83})$$

Il apparaît alors des amplitudes complexes b_α, b_α^* qui sont l'analogue classique des opérateurs d'annihilation et de création de quasi-particules dans les modes propres de la RPA. Injecter cette décomposition dans l'équation (VI.79) permet d'écrire l'énergie classique comme une énergie de quasi-particules :

$$\mathcal{H} = E_0(N) + \sum_\alpha \epsilon_\alpha b_\alpha^* b_\alpha + O(\|\Lambda\|^3/N^{3/2}). \quad (\text{VI.84})$$

Il n'y a pas ici de mode d'énergie nulle ni de mode anormal puisque nous n'avons pas brisé la symétrie $U(1)$. Pour exprimer le tenseur apparaissant au second membre de l'équation (VI.78), nous injectons maintenant le développement dans l'équation (VI.79) préalablement dérivée par rapport à N . La valeur moyenne à gros grains $\overline{}$ se charge d'éliminer les termes croisés oscillants en $b_\alpha b_\beta$ ou $b_\alpha^* b_\beta^*$ et le théorème d'Hellmann-Feynman assure que³

$(u_\alpha^*, -v_\alpha^*) \frac{d\mathcal{L}[N]}{dN} \begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix} = d\epsilon_\alpha/dN$. Ceci nous offre une équation de la dynamique de phase enfin complète :

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\overline{\theta}^t}{dt} = \mu_0(N) + \sum_\alpha \frac{d\epsilon_\alpha}{dN} |b_\alpha|^2 + O(\|\Lambda\|^3). \quad (\text{VI.85})$$

Le chapitre suivant établira explicitement le spectre ϵ_α dans le cas d'un système spatialement homogène, à la limite continue $l \rightarrow 0$ pour une interaction de contact dans l'onde s de longueur de diffusion fixée entre fermions de spins opposés. Nous verrons que, pour chaque valeur du vecteur d'onde total \mathbf{q} , ce spectre se compose d'au plus une énergie discrète $\epsilon_{B,\mathbf{q}}$, et d'un continuum paramétré par deux vecteurs d'onde $(\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow) \mapsto \epsilon_{F,\mathbf{k}_1,\uparrow} + \epsilon_{F,\mathbf{k}_2,\downarrow}$ de somme

3. Là encore, la symétrie symplectique $(\sigma_z \mathcal{L})^\dagger = \sigma_z \mathcal{L}$ assure que $(u_\alpha, -v_\alpha)$ est le vecteur dual de (u_α, v_α) .

fixée ($\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{q}$), où $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}$ est la relation de dispersion BCS. La branche $q \mapsto \epsilon_{B,\mathbf{q}}$ coïncide bien avec celle de la référence [50], comme nous le vérifierons. De départ phononique, elle correspond aux excitations élémentaires bosoniques du gaz de fermions dont nous cherchions la contribution à la dynamique de phase. Elle doit donc être gardée dans (VI.85). En revanche, le continuum correspond à l'excitation de deux quasi-particules fermioniques; celles-ci ne peuvent en effet être excitées que par paires à partir du fondamental car le hamiltonien \hat{H} contient un nombre pair de facteurs $\hat{\psi}$ et $\hat{\psi}^\dagger$, qui détruisent ou créent chacun une quasi-particule. Ces biexcitations ne sont pas physiquement indépendantes⁴, et font double emploi avec la contribution à $d\hat{\theta}_0/dt$ obtenue par la RPA. Il ne faut donc pas les inclure dans (VI.85).

Deux dernières remarques nous séparent de l'équation fondamentale de la dynamique de phase (II.32). (i) Les champs $\langle \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow \rangle$ et Φ sont distincts, aussi les phases⁵ θ_0 et θ ne coïncident-elles pas exactement. Leur valeur moyenne temporelle à gros grains ne diffèrent cependant que par un terme d'ordre $\|\Lambda\|^2$, borné, négligeable aux temps longs, ne contribuant pas au brouillage de phase du condensat de paires⁶. (ii) La phase de notre approche variationnelle est une variable classique, alors que $\hat{\theta}_0$ dans (II.32) est un opérateur quantique. Ce hiatus est comblé par application au résultat (VI.85) de la procédure de quantification décrite à la section VII.4.3 et grâce à laquelle les b_α seront reliés à leur équivalent quantique obtenu par la RPA. Dans la limite où le gaz possède une faible densité d'excitation, les amplitudes normales b_α de la branche bosonique sont remplacés par des opérateurs bosoniques \hat{b}_α . Cette procédure s'appuie sur la méthode décrite au chapitre 11 de la référence [40] qui permet d'obtenir ces opérateurs bosoniques en toute généralité.

4. Exciter $\alpha = (\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow)$ et $\alpha' = (\mathbf{k}'_1, \uparrow; \mathbf{k}'_2, \downarrow)$ revient à exciter $\alpha'' = (\mathbf{k}'_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow)$ et $\alpha''' = (\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}'_2, \downarrow)$.

5. Pour définir l'équivalent semi-classique de l'opérateur phase quantique $\hat{\theta}_0$, il suffit de prendre sa valeur moyenne dans l'Ansatz (IV.33).

6. En remplaçant dans $\langle \hat{a}_0 \rangle$ le champ de paires par Φ , on se rend compte que pour Λ faible $\langle \hat{a}_0 \rangle = e^{i\theta} \sqrt{N_0} (1 + O(\|\Lambda\|))$ et donc, étant donné que $\bar{\Lambda}^t = O(\|\Lambda\|^2)$, on a $\bar{\theta}_0^t = \bar{\theta}^t + O(\|\Lambda\|^2)$.

Chapitre VII

Application de la théorie variationnelle : branche bosonique d'excitation collective

Nous quittons maintenant notre approche générale pour étudier de façon explicite les excitations collectives du gaz de fermions. Nous reprenons le modèle microscopique des chapitres IV et V du gaz sur un réseau cubique avec interactions de contact. L'étude du spectre des excitations collectives dans la limite BCS est dû à Anderson [42], qui se sert pour cela de la RPA. Sa généralisation à l'ensemble de la transition CBE-BCS et le calcul de la vitesse du son apparaissent dans la référence [79] puis [50], avec des méthodes équivalentes à la RPA. Nous irons au-delà de ces approches et chercherons à calculer des corrections non linéaires à la relation de dispersion, corrections dont nous aurons besoin au chapitre suivant pour écrire des équations cinétiques. Nous aurons aussi à cœur de définir les opérateurs de création et d'annihilation de quasi-particules associés à la branche bosonique, dont nous avons vu qu'ils sont indispensables à l'étude de la dynamique de phase. Notre cadre théorique sera la théorie variationnelle présentée dans la section VI.1, légèrement adaptée pour faciliter les calculs. Nous ferons aussi le lien avec la RPA.

VII.1 Théorie variationnelle à symétrie brisée

VII.1.1 État cohérent de quasi-particules

Lors de notre étude du système de la RPA (V.29–V.32) le choix d'utiliser les opérateurs de quasi-particules fermioniques a nettement simplifié l'interprétation des équations du mouvement, et allégé les calculs. C'est pourquoi nous adoptons ce point de vue aussi pour la théorie variationnelle, en choisissant un nouvel Ansatz, état cohérent de quasi-particules fermioniques :

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}(t) \exp\left(\sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q} \in \mathcal{D}} z_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger\right) |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle. \quad (\text{VII.1})$$

Cet Ansatz s'inspire de celui du chapitre 9, section 9.9b, du livre *Quantum theory of finite systems* [40]. Si on omet la somme sur le vecteur d'onde du centre de masse \mathbf{q} , l'état $|\psi\rangle$ est au fondamental BCS de phase nulle $|\psi_{\text{BCS}}^0\rangle$ — le vide de quasi-particules — ce que l'état BCS lui-même est au vide de particules. En faisant ce choix d' Ansatz, et en désignant l'état de phase nulle comme vide, nous avons brisé la symétrie.

VII.1.2 Cinématique de l'état cohérent de quasi-particules

La cinématique de l'état (VII.1) s'obtient exactement comme à la section VI.1. Nous appelons β le champ de variables canoniquement conjugué

$$\beta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = - (z(1+z^\dagger z)^{-1/2})_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \quad (\text{VII.2})$$

où la notation matricielle s'applique cette fois dans l'espace de Fourier $z = (z_{\mathbf{k},\mathbf{k}'})_{\mathbf{k},\mathbf{k}' \in \mathcal{D}}$. En parallèle de la notation (VII.2) du champ β , nous utiliserons aussi, lorsque cela est plus élégant, la paramétrisation inspirée des notations (V.1) de la RPA :

$$\beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \equiv \beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}, \quad (\text{VII.3})$$

où \mathbf{q} est le vecteur d'onde du centre de masse tandis que \mathbf{k} paramètre le mouvement relatif. Les moyennes des opérateurs de quasi-particules se calculent comme se calculaient les moyennes des opérateurs champs à la section VI.1. Elle s'expriment comme suit en fonction des variables canoniquement conjuguées :

$$\kappa_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \equiv \langle \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}'\uparrow} \rangle = - (\beta(1 - \beta^\dagger \beta)^{1/2})_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} \quad (\text{VII.4})$$

$$\kappa_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^* \equiv \langle \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \rangle = - (\beta(1 - \beta^\dagger \beta)^{1/2})_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^* \quad (\text{VII.5})$$

$$\rho_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}^\uparrow \equiv \langle \hat{b}_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle = (\beta \beta^\dagger)_{\mathbf{k},\mathbf{k}'} = \sum_{\mathbf{k}_1} \beta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}_1}^* \beta_{\mathbf{k},\mathbf{k}_1} \quad (\text{VII.6})$$

$$\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^\downarrow \equiv \langle \hat{b}_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \rangle = (\beta^\dagger \beta)_{\mathbf{k}',\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}_1} \beta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}'}^* \beta_{\mathbf{k}_1,\mathbf{k}}. \quad (\text{VII.7})$$

Remarquons enfin que

$$\forall \sigma, (\rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^\sigma)^* = \rho_{\mathbf{k}',\mathbf{k}}^\sigma. \quad (\text{VII.8})$$

VII.1.3 Dynamique dans l'approximation des petites amplitudes

Les équations du mouvement des variables conjuguées s'écrivent avec la fonctionnelle énergie du hamiltonien (IV.32),

$$E = \langle \hat{H} \rangle \quad (\text{VII.9})$$

comme des équations de Hamilton-Jacobi :

$$i\hbar \frac{d\beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}^*} \quad (\text{VII.10})$$

$$-i\hbar \frac{d\beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}^*}{dt} = \frac{\partial E}{\partial \beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}} = \left(i\hbar \frac{d\beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}}{dt} \right)^*. \quad (\text{VII.11})$$

L'état cohérent qui minimise l'énergie E à nombre moyen de particules fixé est le fondamental BCS (*cf.* chapitre IV). Autrement dit, en point de vue de quasi-particules, le minimiseur β^0 s'exprime sous la forme radicalement simple :

$$\beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}^0 = 0. \quad (\text{VII.12})$$

Le développement autour de ce minimiseur, appelé aussi parfois *approximation des petites amplitudes*, revient donc à considérer β comme un infiniment petit,

$$\forall \mathbf{k}, \mathbf{q}, |\beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}| \ll 1. \quad (\text{VII.13})$$

L'état $|\psi\rangle$ étant gaussien, la moyenne (VII.9) se calcule à l'aide du théorème de Wick :

$$E = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k}^2}{2m} - \mu \right) \langle \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \rangle + \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathcal{D}} \left[\langle \hat{a}_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger \rangle \langle \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle + \langle \hat{a}_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle \langle \hat{a}_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \rangle \right]. \quad (\text{VII.14})$$

Pour utiliser les valeurs moyennes (VII.4-VII.7), nous devons passer en point de vue de quasi-particules. Le passage se fait à l'aide de la matrice (V.25), à condition d'avoir préalablement retranché aux opérateurs de particules leur valeur moyenne dans le fondamental BCS, toujours notée $\langle \dots \rangle_0$. Nous écrivons donc :

$$\langle \hat{a}\hat{b} \rangle = \langle \delta(\hat{a}\hat{b}) \rangle + \langle \hat{a}\hat{b} \rangle_0. \quad (\text{VII.15})$$

Le terme constant (c'est-à-dire le terme obtenu pour $|\psi\rangle = |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle$) est l'énergie E_0 , minimum de la fonctionnelle énergie obtenue au chapitre IV. En lui ajoutant les termes de la forme $\langle \delta(\hat{a}\hat{b}) \rangle \langle \hat{c}\hat{d} \rangle_0$ on obtient le hamiltonien BCS semi-classique :

$$E_{\text{BCS}} = E_0 + \left\langle \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \left(\epsilon_{\mathbf{k}} \left(\hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \right) \right) \right\rangle \quad (\text{VII.16})$$

$$= E_0 + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathcal{D}} (\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}'}) |\beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}|^2 \quad (\text{VII.17})$$

où nous avons utilisé la relation

$$\xi_{\mathbf{k}} (\delta(\hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}) + \delta(\hat{a}_{\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\downarrow})) + \Delta (\delta(\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}) + \delta(\hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger)) = \epsilon_{\mathbf{k}} (\hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}), \quad (\text{VII.18})$$

puis pris les moyennes (VII.4, VII.5), et enfin changé $\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ en $\beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}$ par le changement de variable $\mathbf{k} \leftrightarrow \mathbf{k}'$. Restent enfin les termes $\langle \delta(\hat{a}\hat{b}) \rangle \langle \delta(\hat{c}\hat{d}) \rangle$, qui proviennent exclusivement du terme d'interaction :

$$E - E_{\text{BCS}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathcal{D}} \left[\left\langle \delta(\hat{a}_{\mathbf{k}'\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger) \right\rangle \left\langle \delta(\hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}) \right\rangle + \left\langle \delta(\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}) \right\rangle \left\langle \delta(\hat{a}_{-\mathbf{k}'-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}'\downarrow}) \right\rangle \right]. \quad (\text{VII.19})$$

Nous avons effectué la série de changements de variables $\mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}'$, $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ et enfin $\mathbf{q}' \rightarrow \mathbf{q}$ sur le second terme (en $\hat{a}^\dagger \hat{a}$) de façon à ce que \mathbf{q} soit toujours le vecteur d'onde du centre de masse de la paire et \mathbf{k} et \mathbf{k}' les vecteurs d'onde relatifs. Nous passons maintenant en point de vue de quasi-particules en inversant la relation (V.25) :

$$\begin{pmatrix} \langle \delta(\hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}) \rangle \\ \langle \delta(\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) \rangle \\ \langle \delta(\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}) \rangle \\ \langle \delta(\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}) \rangle \end{pmatrix} = P_{\text{qp} \rightarrow \text{p}} \begin{pmatrix} \kappa_{\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{q}} \\ \kappa_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}}^* \\ \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}}^\uparrow \\ \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}}^\downarrow \end{pmatrix} \quad (\text{VII.20})$$

où $P_{\text{qp} \rightarrow \text{p}}$ est la matrice de passage des quasi-particules aux particules,

$$P_{\text{qp} \rightarrow \text{p}} = \begin{pmatrix} U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 & -V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 & V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 & U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 \\ -V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 & U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 & U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 & V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 \\ -V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 & -U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 & U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 & -V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 \\ -U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 & -V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 & -V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 & U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VII.21})$$

Enfin nous développons en puissances du champ β . Nous aurons besoin de l'ordre 3 pour écrire la première correction non linéaire aux équations du mouvement. Au cas où il puisse être un jour utile, nous donnons aussi le terme d'ordre 4 de l'énergie. Pour les moyennes quantiques anormales (VII.4, VII.5) nous utilisons le développement :

$$\kappa_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} = -\beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \mathcal{D}} \beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}_1} \rho_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1}^\downarrow + O(\beta^5) \quad (\text{VII.22})$$

$$= -\beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_1 \in \mathcal{D}} \beta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}} \rho_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'}^\uparrow + O(\beta^5) \quad (\text{VII.23})$$

Les termes en $\kappa\kappa$ ou $\kappa\kappa^*$ contribuent donc aux ordres pairs, tandis que les termes $\kappa\rho^\sigma$ et $\kappa^*\rho^\sigma$ contribuent aux ordres impairs, ordre 1 exclu (l'énergie est stationnaire au voisinage de $\beta = 0$). Les termes de l'énergie BCS E_{BCS} se limitent quant à eux à l'ordre 2. Ordre par ordre, nous trouvons :

$$\begin{aligned} E_2 = E_0 + \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathcal{D}} (\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}'}) |\beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}|^2 \\ + \frac{g_0}{4L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathcal{D}} [2(W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ + W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- + w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ - w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^-) \beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}}^* \beta_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}, \mathbf{k}'} \\ + ((w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ + w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^-)(w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ + w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^-) - (W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ - W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^-)(W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ + W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^-)) (\beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}, \mathbf{k}'} + \beta_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}, \mathbf{k}'}^* \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{q}}^*)] \end{aligned} \quad (\text{VII.24})$$

$$\begin{aligned} E_3 = \frac{g_0}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q} \in \mathcal{D}} (w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- + w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ + W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- - W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+) \\ \times \left(\beta_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}, \mathbf{k}'} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}}^\uparrow + \beta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'+\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{q}}^\downarrow + \text{c.c.} \right) \end{aligned} \quad (\text{VII.25})$$

$$\begin{aligned} E_4 = -\frac{g_0}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}, \mathbf{k}_1 \in \mathcal{D}} \left[(U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}'}^0 V_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^0 - U_{\mathbf{k}}^0 U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}'}^0 V_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^0) \right. \\ \times \left((\beta_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}, \mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}+\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^\uparrow + \beta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}+\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'} \rho_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\uparrow + \text{c.c.}) + \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}}^\uparrow \rho_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\uparrow + \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}}^\downarrow \rho_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\downarrow \right) \\ + (U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 U_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}'}^0 + V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}'}^0 + U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 U_{\mathbf{k}'}^0 V_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^0 + U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}'}^0) \\ \left. \times \left(\beta_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}, \mathbf{k}'} \beta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}+\mathbf{q}}^* \rho_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}}^\uparrow + \beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}}^* \beta_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'} \rho_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\uparrow + \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}}^\uparrow \rho_{\mathbf{k}', \mathbf{k}'+\mathbf{q}}^\downarrow \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{VII.26})$$

où nous utilisons les coefficients $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm$ et $w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^\pm$ définis en (V.26) et (V.27).

VII.1.4 Dynamique linéarisée

Le système d'équations linéarisées dont découlent les modes de quasi-particules s'obtient en appliquant les équations hamiltoniennes (VII.10, VII.11) à l'énergie quadratique E_2 . En observant l'expression (VII.24), on constate immédiatement que la variable $\beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}$ n'est pas couplée à l'ensemble du champ β , mais seulement à ses composantes ayant le même vecteur d'onde \mathbf{q} du centre de masse, à savoir $(\beta_{\mathbf{k}'+\mathbf{q},\mathbf{k}'})_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}}$ et $(\beta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}'+\mathbf{q}}^*)_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}}$ (souvenons-nous que la transposition change le signe de \mathbf{q}). En définissant

$$\bar{\beta}_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}} = \beta_{\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{q}}^*, \quad \text{ou avec la notation à la RPA} \quad \bar{\beta}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = (\beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\mathbf{q}})^*, \quad (\text{VII.27})$$

on obtient donc un système linéaire, découplé par valeurs de \mathbf{q} comme dans la RPA,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \beta^{\mathbf{q}} \\ \bar{\beta}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{\mathbf{q}} & B^{\mathbf{q}} \\ -B^{\mathbf{q}} & -A^{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta^{\mathbf{q}} \\ \bar{\beta}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}, \quad (\text{VII.28})$$

où $\beta^{\mathbf{q}} = (\beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$, et $A^{\mathbf{q}}$ et $B^{\mathbf{q}}$ sont les matrices symétriques :

$$A_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}(\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{k}}) \quad (\text{VII.29})$$

$$+ \frac{g_0}{2L^3} (W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ + W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- + w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ - w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^-)$$

$$B_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} = \frac{g_0}{2L^3} (w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ + w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- + W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- - W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+). \quad (\text{VII.30})$$

L'opérateur d'évolution associé à ce système

$$\mathcal{L}^{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} A^{\mathbf{q}} & B^{\mathbf{q}} \\ -B^{\mathbf{q}} & -A^{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad (\text{VII.31})$$

est manifestement symplectique puisque

$$\sigma_z \mathcal{L}^{\mathbf{q}} \sigma_z = (\mathcal{L}^{\mathbf{q}})^\dagger. \quad (\text{VII.32})$$

Ici encore, nous rendons le système diagonal par blocs en passant à la base somme et différence définie par :

$$y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - \bar{\beta}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \quad (\text{VII.33})$$

$$s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \bar{\beta}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}. \quad (\text{VII.34})$$

Il n'y a pas de confusion de notation possible avec les opérateurs de la RPA puisque les y et s introduits ici n'ont pas de chapeau. Dans cette base, le système (VII.28) s'écrit :

$$\boxed{i\hbar \frac{dy_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- (\delta \Delta^{\mathbf{q}} + \delta \bar{\Delta}^{\mathbf{q}}) - w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ g_0 (\delta n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} + \delta n_{\downarrow}^{\mathbf{q}})} \quad (\text{VII.35})$$

$$\boxed{i\hbar \frac{ds_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{dt} = \epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ (\Delta^{\mathbf{q}} - \bar{\Delta}^{\mathbf{q}}) - w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- g_0 (n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} - n_{\downarrow}^{\mathbf{q}}), \quad (\text{VII.36})$$

où l'on rappelle que $\epsilon_{\mathbf{kq}}^+ = \epsilon_{\mathbf{k+q}} + \epsilon_{\mathbf{k}}$. Les variables collectives sont notées par analogie avec les opérateurs collectifs (V.34–V.37) du chapitre V,

$$\Delta^{\mathbf{q}} - \bar{\Delta}^{\mathbf{q}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{kq}}^+ y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \quad (\text{VII.37})$$

$$n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} - n_{\downarrow}^{\mathbf{q}} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{kq}}^- y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \quad (\text{VII.38})$$

$$\delta\Delta^{\mathbf{q}} + \delta\bar{\Delta}^{\mathbf{q}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{kq}}^- s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \quad (\text{VII.39})$$

$$\delta n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} + \delta n_{\downarrow}^{\mathbf{q}} = -\frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{kq}}^+ s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}, \quad (\text{VII.40})$$

de sorte que les équations (VII.35, VII.36) sont formellement identiques aux équations de la RPA (V.29, V.30) pour les opérateurs de création et d'annihilation de paires de quasi-particules. Hormis la disparition du chapeau pour des variables ici classiques, nous remarquons surtout celle des termes sources, combinaisons linéaires des opérateurs de déplacement $\hat{m}_{\mathbf{kq}}$ et $\hat{h}_{\mathbf{kq}}$, qui apparaissaient dans les opérateurs collectifs quantiques. Ceci ne constitue pas une surprise : dans le langage de la théorie variationnelle, ces termes sont d'ordre 2 en le champ β (*cf.* les moyennes (VII.6, VII.7)) et sont donc à ranger parmi les corrections non linéaires aux équations du mouvement. Nous retrouverions d'ailleurs ces termes, parmi d'autres termes quadratiques, si nous allions au-delà de la dynamique linéarisée. Ainsi, le système semi-classique se déduit du système quantique en prenant la valeur moyenne dans l'état cohérent de quasi-particules $|\psi\rangle$ et en négligeant les valeurs moyennes de $\hat{m}_{\mathbf{kq}}$ et $\hat{h}_{\mathbf{kq}}$. Ses modes propres sont donc identiques à ceux du système homogène de la RPA, mais la dynamique linéarisée des opérateurs est différente.

VII.2 Modes excités quasi individuels à impulsion \mathbf{q}

Dans le chapitre V nous avons obtenu une classification exhaustive des modes de l'opérateur d'évolution à impulsion nulle \mathcal{L}^0 . Nous avons notamment montré qu'à part les deux modes collectifs d'énergie nulle et anormal, tous les modes sont situés dans le quasi-continuum $\mathbf{k} \mapsto 2\epsilon_{\mathbf{k}}$ à deux excitations fermioniques, et ne sont autres, à la limite thermodynamique, que des bi-excitations fermioniques $\hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}$. Cette section généralise ce résultat à impulsion \mathbf{q} quelconque.

VII.2.1 Équation aux valeurs propres

Nous utilisons la même méthode de sommation que celle utilisée à la section V.2.3.1 pour les modes excités du sous-espace d'énergie nulle. Appelons $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ la valeur propre inconnue, et dérivons l'équation (VII.35) par rapport au temps. En combinant (VII.35) et (VII.36), ceci conduit à :

$$(\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 - (\epsilon_{\mathbf{kq}}^+)^2) y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \epsilon_{\mathbf{kq}}^+ (W_{\mathbf{kq}}^+ (\Delta^{\mathbf{q}} - \bar{\Delta}^{\mathbf{q}}) - w_{\mathbf{kq}}^- g_0 (n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} - n_{\downarrow}^{\mathbf{q}})) + \Delta_0 (W_{\mathbf{kq}}^- \Omega_{\uparrow}^{\mathbf{q}} + w_{\mathbf{kq}}^+ \Omega_{\downarrow}^{\mathbf{q}}). \quad (\text{VII.41})$$

Pour éliminer la variable $s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$, nous avons remplacé les variables collectives $\delta\Delta^{\mathbf{q}} + \delta\bar{\Delta}^{\mathbf{q}}$ et $\delta n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} + \delta n_{\downarrow}^{\mathbf{q}}$ par leur dérivée temporelle :

$$\begin{aligned}\Delta_0\Omega_+^{\mathbf{q}} &\equiv i\hbar\frac{d}{dt}(\delta\Delta^{\mathbf{q}} + \delta\bar{\Delta}^{\mathbf{q}}) \\ &= \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- \epsilon_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ y_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} + \left(\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- \right) (\Delta^{\mathbf{q}} - \bar{\Delta}^{\mathbf{q}}) - \left(\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- \right) g_0(n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} - n_{\downarrow}^{\mathbf{q}})\end{aligned}\tag{VII.42}$$

$$\begin{aligned}\Delta_0\Omega_-^{\mathbf{q}} &\equiv -i\hbar\frac{d}{dt}g_0(\delta n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} + \delta n_{\downarrow}^{\mathbf{q}}) \\ &= \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ \epsilon_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ y_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} + \left(\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ \right) (\Delta^{\mathbf{q}} - \bar{\Delta}^{\mathbf{q}}) - \left(\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- \right) g_0(n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} - n_{\downarrow}^{\mathbf{q}})\end{aligned}\tag{VII.43}$$

Notons que l'équation (VII.41) est moins simple que son équivalent (V.82) à impulsion nulle car les amplitudes collectives $(n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} - n_{\downarrow}^{\mathbf{q}})$ et $\Omega_-^{\mathbf{q}}$ liées aux variables de densité $n_{\uparrow}^{\mathbf{q}}$ et $n_{\downarrow}^{\mathbf{q}}$, qui disparaissaient du système à impulsion nulle, ne peuvent plus être éliminées.

VII.2.2 Modes quasi individuels

Pour obtenir un mode quasi individuel, il faut chercher à annuler simultanément toutes les amplitudes collectives, de la forme $\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\mathbf{q}} y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ avec $a_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ une fonction uniquement de $\|\mathbf{k}\|$ et $\|\mathbf{k} + \mathbf{q}\|$. Par analogie avec la section V.2.3.1, ceci suggère de définir la coupe circulaire

$$\mathcal{C}_{\|\mathbf{k}_0\|, \|\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}\|} = \{\mathbf{k} \in \mathcal{D}, \|\mathbf{k}\| = \|\mathbf{k}_0\| \text{ et } \|\mathbf{k} + \mathbf{q}\| = \|\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}\|\}\tag{VII.44}$$

On considère alors le vecteur $\vec{x} = ((y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}, (s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}})$ vérifiant

$$\begin{cases} y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = 0, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathcal{D} \setminus \mathcal{C}_{\|\mathbf{k}_0\|, \|\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}\|} \\ \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{C}_{\|\mathbf{k}_0\|, \|\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}\|}} y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = 0 \end{cases}\tag{VII.45}$$

Avec ce choix de variables, nous avons immédiatement $\sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}\mathbf{q}} y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = 0$ pour toute fonction $a_{\mathbf{k}\mathbf{q}}$ qui dépend uniquement de $\|\mathbf{k}\|$ et $\|\mathbf{k} + \mathbf{q}\|$. Les quatre amplitudes normales collectives au membre de droite de (VII.41) sont donc nulles et l'énergie propre doit valoir

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} = \pm(\epsilon_{\mathbf{k}_0} + \epsilon_{\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}}),\tag{VII.46}$$

pour que le vecteur \vec{x} soit non trivial. Enfin $s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ est fixé par l'équation individuelle (valable quand les opérateurs collectifs sont nuls) :

$$s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \pm y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}},\tag{VII.47}$$

le signe étant fonction de celui de l'énergie propre.

Les coefficients $y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ dans $\mathcal{C}_{\|\mathbf{k}_0\|, \|\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}\|}$ sont arbitraires tant que leur somme sur ce même ensemble reste nulle. Nous avons donc trouvé $2(\#\mathcal{C}_{\|\mathbf{k}_0\|, \|\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}\|} - 1)$ modes quasi individuels

pour chaque valeur de $\|\mathbf{k}_0\|, \|\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}\|$. Comme à la section V.2.3.2, on peut chercher ensuite à se donner une base de cet espace de modes quasi individuels puis calculer la base duale à l'aide de la symétrie symplectique et montrer qu'à la limite thermodynamique, lorsque le cardinal de la coupe circulaire $\mathcal{C}_{\|\mathbf{k}_0\|, \|\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}\|}$ devient infini, les opérateurs associés aux modes quasi individuels sont les opérateurs de création et d'annihilation de biexcitation fermionique $\hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}$ et $\hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}$ (nous utilisons pour cela l'équivalence entre l'amplitude semi-classique $-\beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}}$ et l'opérateur $\hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}$, voir la section VII.4.3).

Ces modes quasi individuels n'épuisent pas le spectre de $\mathcal{L}^{\mathbf{q}}$. Comme pour \mathcal{L}^0 , des modes excités collectifs vont apparaître entre les énergies des modes quasi individuels. Parmi ceux-ci, les modes situés au-delà de la bande interdite nous intéressent peu car ils ne modifient pas fondamentalement le spectre d'excitation. À la limite thermodynamique ils sont noyés dans le continuum $\mathbf{k} \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$ et nous pensons qu'ils acquièrent une partie imaginaire et décrivent l'instabilité des phénomènes collectifs lorsque leur énergie est comparable à l'énergie de liaison des paires. En revanche, s'il existe des modes excités en-deçà de la bande interdite du continuum $\mathbf{k} \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}$, ceci a un impact majeur sur la dynamique à basse énergie, et donc sur la dynamique de phase à basse température. C'est ce que nous nous attachons à prouver dans la section suivante.

VII.3 Spectre des excitations bosoniques

VII.3.1 Équation implicite aux valeurs propres

Nous cherchons une solution de l'équation (VII.41) d'énergie inférieure à l'énergie des biexcitations fermioniques à vecteur d'onde total \mathbf{q} fixé :

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} < \inf_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}). \quad (\text{VII.48})$$

Ceci nous autorise à diviser par le facteur $(\hbar\omega_{\mathbf{q}})^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+)^2$ présent au membre de gauche de (VII.41). Puis nous sommions les équations pour \mathbf{k} variant dans \mathcal{D} de façon à reconstituer les variables collectives (VII.37–VII.40). Ceci conduit au système matriciel :

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{W^+W^+}^\epsilon - 1 & \Sigma_{W^+W^-} & -\Sigma_{W^+w^-}^\epsilon & \Sigma_{W^+w^+} \\ \frac{\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2}{\Delta_0^2} \Sigma_{W^+W^-} & \Sigma_{W^-W^-}^\epsilon - 1 & -\frac{\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2}{\Delta_0^2} \Sigma_{W^-w^-} & \Sigma_{W^-w^+}^\epsilon \\ \Sigma_{W^+w^-}^\epsilon & \Sigma_{W^-w^-} & -\Sigma_{w^-w^-}^\epsilon - 1 & \Sigma_{w^+w^-} \\ \frac{\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2}{\Delta_0^2} \Sigma_{W^+w^+} & \Sigma_{W^-w^+}^\epsilon & -\frac{\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2}{\Delta_0^2} \Sigma_{w^+w^-} & \Sigma_{w^+w^+}^\epsilon - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta^{\mathbf{q}} - \bar{\Delta}^{\mathbf{q}} \\ \Omega_+^{\mathbf{q}} \\ n_{\uparrow}^{\mathbf{q}} - n_{\downarrow}^{\mathbf{q}} \\ \Omega_-^{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{VII.49})$$

Les sommes Σ qui apparaissent dans ce déterminant traduisent le caractère collectif des modes que nous cherchons ; ce sont des sommes sur le vecteur d'onde relatif \mathbf{k} des paires, fonctions de $\omega_{\mathbf{q}}^2$ via le dénominateur de leurs termes :

$$\Sigma_{ab}^\epsilon = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{k}\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}\mathbf{q}}}{\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+)^2} \quad (\text{VII.50})$$

$$\Sigma_{ab} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0 a_{\mathbf{k}\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}\mathbf{q}}}{\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+)^2}. \quad (\text{VII.51})$$

Pour que ce système possède une solution non triviale, il faut que le déterminant de la matrice au premier membre de (??) soit nul. Cette condition conduit à une équation implicite d'inconnue $\omega_{\mathbf{q}}^2$ dont la résolution s'avère assez lourde dans le cas général. Dans la suite, nous commencerons par prendre la limite des grandes longueurs d'onde pour montrer que l'énergie est phononique à l'ordre le plus bas en q , et calculer la vitesse du son associée. Puis nous nous placerons à la limite continue pour faire une étude numérique globale du domaine d'existence des solutions et de la concavité de la branche. Enfin, nous combinerons les deux limites pour obtenir les premières corrections non linéaires à l'énergie phononique.

VII.3.2 Énergie phononique

Nous commençons donc par rechercher les solutions de l'équation aux valeurs propres (??) lorsque le nombre d'onde q tend vers 0. Remarquons que tous les coefficients qui concernent la variable $n_{\sigma}^{\mathbf{q}} - n_{\sigma}^{\mathbf{q}}$, ceux de la troisième ligne et de la troisième colonne, sont d'ordre au moins 2 en q , sauf le coefficient diagonal qui vaut -1 à l'ordre zéro. Cette ligne et cette colonne ne contribuent donc pas à l'ordre dominant de l'énergie¹.

Le système à résoudre se réduit à un déterminant 3×3 :

$$\begin{vmatrix} \Sigma_{W^+W^+}^{\epsilon} - 1 & \Sigma_{W^+W^-} & \Sigma_{W^+w^+} \\ \frac{\hbar^2 \omega_{\mathbf{q}}^2}{\Delta_0^2} \Sigma_{W^+W^-} & \Sigma_{W^-W^-}^{\epsilon} - 1 & \Sigma_{W^-w^+}^{\epsilon} \\ \frac{\hbar^2 \omega_{\mathbf{q}}^2}{\Delta_0^2} \Sigma_{W^+w^+} & \Sigma_{W^-w^+}^{\epsilon} & \Sigma_{w^+w^+}^{\epsilon} - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (\text{VII.52})$$

Les développements à faible q des sommes apparaissant dans ce déterminant sont les suivants :

$$\Sigma_{W^+W^+}^{\epsilon} - 1 = -\frac{g_0}{\Delta_0 L^3} \left(\frac{\Theta \hbar^2 \omega_{\mathbf{q}}^2}{8 \Delta_0^2} - \frac{\bar{N} \hbar^2 q^2}{8 \Delta_0 m} \right) + O(q^4) \quad (\text{VII.53})$$

$$\Sigma_{W^-W^-}^{\epsilon} - 1 = \frac{g_0}{\Delta_0 L^3} \frac{\Theta}{2} + O(q^2) \quad (\text{VII.54})$$

$$\Sigma_{W^+W^-} = -\frac{g_0}{\Delta_0 L^3} \frac{X}{4} + O(q^2) \quad (\text{VII.55})$$

$$\Sigma_{W^+w^+} = -\frac{g_0}{\Delta_0 L^3} \frac{\Theta}{4} + O(q^2) \quad (\text{VII.56})$$

$$\Sigma_{W^-w^+}^{\epsilon} = -\frac{g_0}{\Delta_0 L^3} \frac{X}{2} + O(q^2) \quad (\text{VII.57})$$

$$\Sigma_{w^+w^+}^{\epsilon} = -\frac{g_0}{\Delta_0 L^3} \frac{\Theta}{2} + O(q^2), \quad (\text{VII.58})$$

où Θ et X sont donnés par les équation (V.73) et (V.74). Pour le premier de ces développements (VII.53), nous nous permettons d'utiliser la relation

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\hbar^2 k^2}{2m \Delta_0} \frac{\Delta_0^4}{\epsilon_{\mathbf{k}}^5} = -\frac{X}{2} + \bar{N} \quad (\text{VII.59})$$

qui provient d'une intégration par parties réalisée à la limite continue (*cf.* l'annexe E). En développant le déterminant (VII.52), par exemple par rapport à sa dernière colonne, et en

1. Dans la section VII.3.3.3.b. nous calculons justement les coefficients γ et η des ordres 3 et 5 de l'énergie $\omega_{\mathbf{q}}$ mais nous nous plaçons à la limite continue, auquel cas l'opérateur $n_{\sigma}^{\mathbf{q}} - n_{\sigma}^{\mathbf{q}}$ disparaît.

utilisant les développements limités (VII.53, VII.58) nous obtenons la relation de dispersion :

$$\hbar^2 \omega_{\mathbf{q}}^2 = \hbar^2 c^2 q^2 + O(q^4), \quad (\text{VII.60})$$

qui est celle d'excitations phononiques avec une vitesse du son donnée par

$$c^2 = \frac{\bar{N}}{m} \frac{\Delta_0 \Theta}{\Theta^2 + X^2} \left(1 + \frac{g_0}{2L^3} \frac{\Theta^2 + X^2}{\Delta_0 \Theta} \right). \quad (\text{VII.61})$$

Pour reconnaître dans l'équation précédente la formule (III.21) de l'hydrodynamique, nous exprimons la dérivée du potentiel chimique par rapport à \bar{N} à partir de celle (V.75) de $\tilde{\mu}$ et du lien (V.72) entre $\tilde{\mu}$ et μ :

$$\frac{d\mu}{d\bar{N}} = \frac{d\tilde{\mu}}{d\bar{N}} \frac{d\mu}{d\tilde{\mu}} = \frac{\Delta_0 \Theta}{\Theta^2 + X^2} \left(1 + \frac{g_0}{2L^3} \frac{\Theta^2 + X^2}{\Delta_0 \Theta} \right). \quad (\text{VII.62})$$

La théorie variationnelle retrouve ici la formule, déjà démontrée au chapitre III par l'hydrodynamique, valable en toute généralité pour un système superfluide, qui relie la vitesse du son à l'équation d'état à température nulle :

$$mc^2 = \bar{\rho} \frac{d\mu}{d\bar{\rho}}, \quad (\text{VII.63})$$

où la dérivée est prise à longueur de diffusion a fixée et la densité $\bar{\rho}$ du gaz peut être remplacée par le nombre moyen de particules \bar{N} pour un système de taille finie. Dans le cadre de la théorie variationnelle, l'équation d'état apparaissant dans l'équation (VII.63) est celle, approchée, de la théorie BCS (IV.61). Mais grâce à l'hydrodynamique, nous savons que cette formule n'est pas tributaire des approximations de la théorie BCS et permet de calculer la vitesse du son exacte à partir de l'équation d'état exacte.

VII.3.3 Spectre à la limite continue

VII.3.3.1 Équation aux valeurs propres à la limite continue

Dans ce paragraphe, au contraire du précédant, nous nous plaçons à q fixé et prenons la limite continue, c'est-à-dire que nous faisons tendre le pas du réseau l vers zéro à longueur de diffusion a fixée. Rappelons que la constante de couplage nue g_0 doit alors tendre vers zéro pour que la longueur de diffusion reste finie.

Nous transformons les sommes Σ en intégrales avec quelques précautions : (i) nous utilisons l'équation du gap (IV.59) pour remplacer g_0/L^3 par l'inverse de la somme $-\sum_{\mathbf{k}} 1/(2\epsilon_{\mathbf{k}})$, quantité qui devient une intégrale divergente à la limite continue, (ii) nous symétrisons les intégrandes en faisant le changement de variable $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} - \mathbf{q}/2$, par exemple $\epsilon_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^+ \rightarrow \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{q}}^+ = \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}$. Ceci revient à faire les substitutions suivantes :

$$\Sigma_{ab}^{\epsilon} \rightarrow - \frac{\int d^3 k \frac{\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{q}}^+ a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{q}}}{\hbar^2 \omega_{\mathbf{q}}^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{q}}^+)^2}}{\int d^3 k / 2\epsilon_{\mathbf{k}}} \quad (\text{VII.64})$$

$$\Sigma_{ab} \rightarrow - \frac{\int d^3 k \frac{\Delta_0 a_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{q}} b_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{q}}}{\hbar^2 \omega_{\mathbf{q}}^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2,\mathbf{q}}^+)^2}}{\int d^3 k / 2\epsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (\text{VII.65})$$

Comme l'intégrale apparaissant au dénominateur est divergente, le quotient est nul à moins que l'intégrale au numérateur soit elle aussi divergente. Ceci se produit dès lors que l'intégrande décroît moins vite que k^{-3} à grand k . De toutes les sommes apparaissant dans l'équation aux valeurs propres (??), seules Σ_{W+W}^ϵ et Σ_{W-W}^ϵ conduisent à de telles intégrales divergentes. En particulier, dans les troisièmes et quatrièmes lignes et colonnes du déterminant (??), c'est-à-dire celles qui concernent les opérateurs collectifs normaux $n_\sigma^{\mathbf{q}}$, ou leur dérivée temporelle Ω^- , tous les coefficients tendent vers 0, sauf les coefficients sur la diagonale qui tendent vers -1 . Prendre la limite continue, conduit donc à prendre :

$$n_\uparrow^{\mathbf{q}} - n_\downarrow^{\mathbf{q}} = 0 \quad (\text{VII.66})$$

$$\Omega_-^{\mathbf{q}} = 0, \quad (\text{VII.67})$$

ce qui simplifie nettement le déterminant en le réduisant au bloc 2×2 supérieur gauche. On peut alors multiplier l'ensemble par l'intégrale $\int d^3k/2\epsilon_{\mathbf{k}}$, ce qui fait apparaître des différences d'intégrales dont les divergences se compensent exactement. L'équation aux valeurs propres à la limite continue s'écrit finalement :

$$\boxed{I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q) = \hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 [I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)]^2.} \quad (\text{VII.68})$$

avec

$$I_{++}(\omega, q) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \left[\frac{\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{q}}^+ \left(W_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{q}}^+ \right)^2}{\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{q}}^+)^2} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \quad (\text{VII.69})$$

$$I_{--}(\omega, q) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \left[\frac{\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{q}}^+ \left(W_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{q}}^- \right)^2}{\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{q}}^+)^2} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right] \quad (\text{VII.70})$$

$$I_{+-}(\omega, q) = \int_{\mathbb{R}^3} d^3k \frac{W_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{q}}^-}{\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{q}}^+)^2}. \quad (\text{VII.71})$$

Outre la RPA d'Anderson [42] dont nous avons déjà souligné qu'elle conduisait au même spectre des modes collectifs que notre approche variationnelle, l'équation aux valeurs propres (VII.68) a été obtenue par différentes approches : une approximation gaussienne de l'action dans un cadre d'intégrale de chemin [79, 86] et une approche de fonctions de Green associée à une approximation diagrammatique [50]. Les solutions, si elles existent, sont opposées l'une de l'autre, comme le veut la symétrie symplectique. Nous notons $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ la solution *positive* de l'équation (VII.68), l'autre solution étant $-\hbar\omega_{\mathbf{q}}$. À cause de la présence du dénominateur $\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{q}}^+)^2$, seules les valeurs de $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ inférieures au continuum de biexcitations fermioniques $\mathbf{k} \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2} + \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}$ peuvent donner lieu à des solutions réelles stables de l'équation de dispersion (VII.68). Une excitation dont l'énergie serait située dans le continuum pourrait décroître en émettant deux excitations fermioniques d'énergie $\epsilon_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}$ et $\epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}/2}$ ce qui la rendrait instable et ajouterait une partie imaginaire à son énergie propre.

VII.3.3.2 Domaine d'existence des solutions

La référence [50] discute le domaine d'existence en fonction du vecteur d'onde \mathbf{q} d'une solution à l'équation (VII.68). Nous synthétisons ses résultats, que nous avons reproduits

par une étude numérique, sur la figure VII.1 où le domaine d'existence est représenté dans le plan $q/k_\mu, \Delta_0/\mu$ avec $k_\mu = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$. Plusieurs cas de figure se détachent en fonction du régime d'interaction, que nous avons choisi de paramétrer par Δ_0/μ plutôt que par $k_F a$. (i) Lorsque la longueur de diffusion est négative $a < 0$, autrement dit pour $\Delta_0/\mu < 1,162$, le domaine d'existence des solutions de l'équation (VII.68) en fonction de q est compact et simplement connexe [50], de la forme $[0, q_{\text{sup}}]$. (ii) De l'autre côté de la résonance ($a > 0$), et jusqu'à $\Delta_0/\mu = 1,729$, le domaine d'existence des solutions de l'équation (VII.68) se sépare en deux composantes connexes $[0, q_{\text{sup}}]$ et $[q_{\text{inf}}, +\infty[$. (iii) Enfin, lorsque Δ_0/μ est supérieur à 1,729, ou est négatif, les deux composantes du domaine d'existence se rejoignent, si bien qu'une solution à l'équation (VII.68) existe pour tout q .

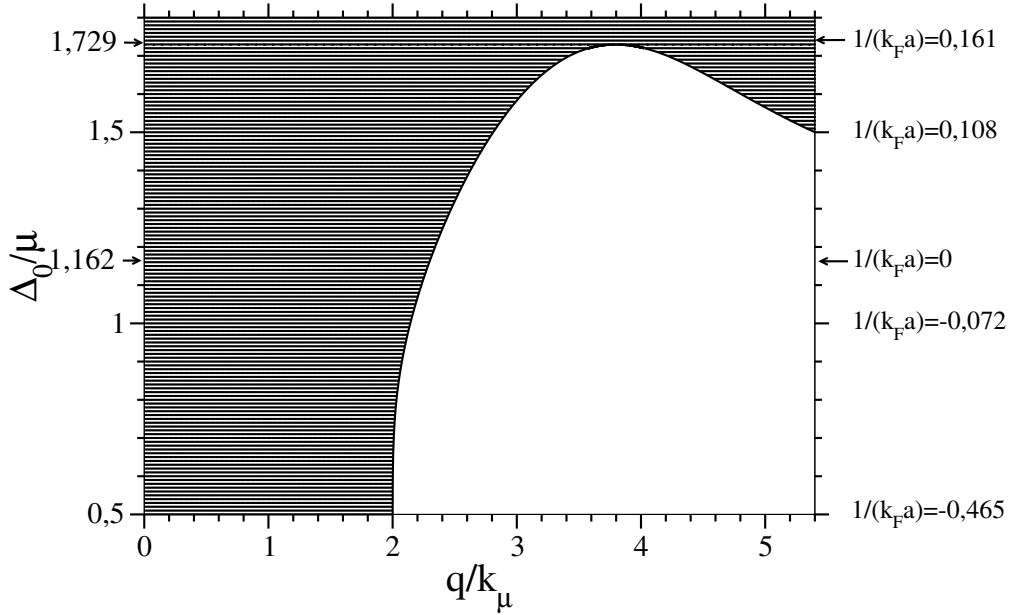


FIGURE VII.1 – En grisé, domaine d'existence de la branche bosonique $q \mapsto \omega_q$ selon les valeurs de Δ_0/μ et du nombre d'onde q mesuré en unités de $k_\mu = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$. Les valeurs de $1/(k_F a)$ correspondant à celles de Δ_0/μ sont indiquées sur le bord droit du graphe. La ligne épaisse en trait plein délimite le domaine d'existence des solutions de l'équation de dispersion (VII.68). Quatre flèches encadrent l'intervalle des valeurs de Δ_0/μ ou $1/(k_F a)$ sur lequel le domaine d'existence en q de la solution de l'équation (VII.68) n'est pas simplement connexe. Les flèches inférieures se situent exactement à la limite unitaire, où la longueur de diffusion diverge $|a| \rightarrow +\infty$.

VII.3.3.3 Concavité du spectre

Nous nous intéressons maintenant à la concavité de la branche bosonique. Celle-ci a été étudiée dans la limite BCS [79] puis de manière qualitative dans la zone de raccordement CBE-BCS [50, 87, 52]. L'étude quantitative exhaustive que nous reproduisons ici est l'objet de la référence [88].

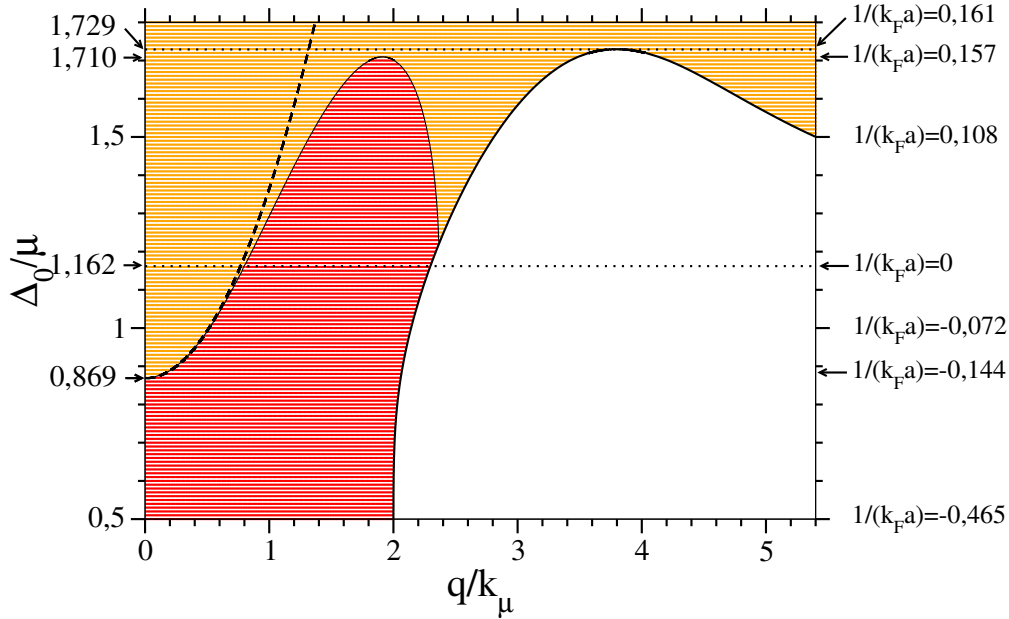


FIGURE VII.2 – Concavité locale de la branche bosonique $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ selon les valeurs de Δ_0/μ et du nombre d'onde q mesuré en unités de $k_\mu = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$. Les valeurs de $1/(k_F a)$ correspondant à celles de Δ_0/μ sont indiquées sur le bord droit du graphe. Les points rouges sombres correspondent à une branche localement concave, les points orange clair à une branche localement convexe. La ligne épaisse en trait plein délimite le domaine d'existence des solutions de l'équation de dispersion (VII.68). La ligne tiretée est une prédiction analytique à faible q (*cf.* l'équation (VII.91) du paragraphe *b.4*) de la frontière entre les zones sombre et claire, lieu des points d'inflexion de la courbe $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$, représentée par un trait fin. L'ordonnée $\Delta_0/\mu = 0,869$ du point où cette ligne rejoint l'axe $q = 0$ et l'ordonnée $\Delta_0/\mu = 1,710$ au-delà de laquelle la zone de concavité disparaît sont indiquées par des flèches. Enfin les deux lignes pointillées, dont les ordonnées sont elles aussi indiquées par des flèches, encadrent l'intervalle des valeurs de Δ_0/μ ou $1/(k_F a)$ sur lequel le domaine d'existence en q de la solution de l'équation (VII.68) n'est pas simplement connexe. La ligne pointillée inférieure correspond à la limite unitaire, où la longueur de diffusion diverge $|a| \rightarrow +\infty$.

L'intérêt physique d'étudier la concavité du spectre bosonique est de déterminer quels processus d'amortissement des modes collectifs dominant à basse température. Si la branche est convexe sur un voisinage de $q = 0$ alors ce sont les processus 2 phonons \leftrightarrow 1 phonon de Beliaev-Landau [45, 46] qui dominant, tandis que si elle est concave ce sont les processus 2 phonons \leftrightarrow 2 phonons de Landau-Khalatnikov [44]. En effet, on montrera à partir de la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement des trois excitations mises en jeu que les processus Beliaev-Landau sont interdits pour une branche d'excitation concave. À basse température, la branche fermionique, dont le spectre possède une bande interdite, ne participe pas à l'amortissement des modes collectifs, sa contribution étant exponentiellement réduite [51]. En outre, la connaissance quantitative du paramètre de concavité γ , défini plus loin par l'équation (VII.72), permet de prédire le taux d'amortissement des phonons par les

processus 2 phonons \leftrightarrow 1 phonon dans le cas convexe au-delà de l'hydrodynamique quantique [52], ou 2 phonons \leftrightarrow 2 phonons dans le cas concave où l'interaction effective prédite par l'hydrodynamique quantique fait intervenir des processus 2 phonons \leftrightarrow 1 phonon virtuels et dépend de γ [44]. En ce qui concerne la dynamique de phase, la connaissance de γ est indispensable au calcul du coefficient de diffusion de la phase du condensat de paires (*cf.* [89] et le chapitre VIII) à basse température, calcul qui repose sur des équations cinétiques pour les populations des modes bosoniques.

a. Étude numérique globale de la concavité En résolvant numériquement l'équation de dispersion (VII.68) nous obtenons la relation de dispersion $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ sur tout son domaine d'existence. Nous donnons sur la figure VII.3 l'exemple de la limite unitaire $1/(k_F a) = 0$, où $\Delta_0/\mu = 1,162$ d'après la théorie BCS. Plutôt que la fonction $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ elle-même, nous traçons en trait noir plein la fonction $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}} - cq$, où c est la vitesse du son et $q \mapsto cq$ la partie linéaire du spectre. Les propriétés de concavité de cette fonction sont les mêmes que celles de $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ mais se voient mieux graphiquement aux faibles q car elles ne sont pas masquées par la partie linéaire. Cette dernière, bien que dominante, ne joue aucun rôle dans la détermination des processus d'amortissement décrits dans l'introduction de cette sous-section. Sur la figure, on distingue nettement le point d'inflexion de la dispersion de relation à $q/k_\mu \simeq 0,795$; il sépare un intervalle aux faibles q où la relation de dispersion est convexe d'un intervalle aux grands q où elle est concave. Par conséquent, d'après la RPA, les processus d'amortissement des excitations collectives du gaz unitaire qui dominent à basse température sont les processus 2 phonons \leftrightarrow 1 phonon de Beliaev-Landau (voir le paragraphe *c.* de cette sous-section).

La figure VII.2 reprend le modèle de la figure VII.1 et y ajoute les résultats sur la concavité de la branche $\mathbf{q} \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ obtenus par résolution numérique de l'équation de dispersion (VII.68).

Entre la zone rouge sombre où la branche est localement concave et la zone orange clair où elle est localement convexe, une frontière apparaît, que nous faisons figurer par un trait fin. Cette frontière est le lieu des points d'inflexion de la courbe $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$. Pour $q \rightarrow 0$, elle rejoint l'axe des ordonnées avec une tangente horizontale en $\Delta_0/\mu \simeq 0,869$ (soit $1/(k_F a) \simeq -0,144$). Au voisinage de $q = 0$, nous en donnons un équivalent parabolique (tireté noir) obtenu par un calcul analytique (*cf.* l'équation (VII.91) du paragraphe *b.4*). Puis la frontière passe par un maximum en $q/k_\mu \approx 1,9$ où elle atteint $\Delta_0/\mu \simeq 1,710$ ($1/(k_F a) \simeq 0,157$), valeur au-delà de laquelle la branche est convexe sur tout son domaine d'existence. Enfin, elle rejoint la limite du domaine d'existence en $q/k_\mu \approx 2,4$ et $\Delta_0/\mu \simeq 1,22$ avec une tangente oblique du fait d'une dérivée troisième de $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ non nulle au point de contact. Entre $\Delta_0/\mu = 1,22$ et $\Delta_0/\mu \simeq 1,710$, la branche est donc successivement convexe puis concave puis à nouveau convexe à q croissant. Entre $\Delta_0/\mu \simeq 0,869$ et $\Delta_0/\mu \simeq 1,22$ elle est seulement convexe puis concave, comme par exemple sur la figure VII.3.

Toutes les valeurs numériques que nous prédisons dans la figure VII.2 proviennent de la théorie variationnelle ou de la théorie BCS, donc sont approchées. Rappelons en particulier qu'en linéarisant les équations du mouvement des variables classiques $y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ et $s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ nous négligeons les interactions entre les quasi-particules bosoniques. Or ces interactions vont donner lieu à un déplacement des énergies propres $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$; elles vont aussi faire apparaître, même à température nulle, une partie imaginaire dans $\omega_{\mathbf{q}}$, décrivant la durée de vie finie des excitations, lorsque la concavité de la relation de dispersion permet d'avoir des processus de Beliaev 1 phonon \rightarrow 2 phonons résonnants [52].

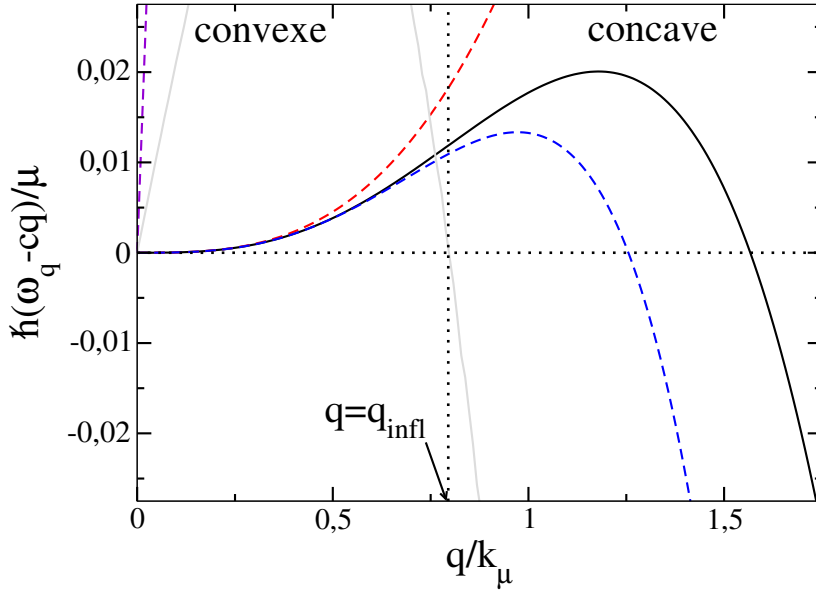


FIGURE VII.3 – À l’unitarité $(k_F a)^{-1} = 0$, c’est-à-dire pour $\Delta_0/\mu = 1,162$, nous représentons en trait noir plein la relation de dispersion des excitations collectives *après soustraction* de sa partie phononique cq afin de mettre en valeur ses propriétés de concavité. Le nombre d’onde q est en unités de $k_\mu = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$. La partie linéaire $q \mapsto cq$ (tireté violet) est représentée à titre de comparaison de même que l’approximation cubique (tireté rouge) et quintique (tireté bleu) de $\omega_{\mathbf{q}} - cq$ (voir plus loin l’équation (VII.72)). La dérivée seconde $d^2\omega_{\mathbf{q}}/dq^2$, représentée en trait gris plein, s’annule au point d’inflexion $q_{\text{infl}} \simeq 0,795k_\mu$ marqué d’une ligne pointillée verticale. À gauche (respectivement à droite) de ce point, la relation de dispersion est convexe (respectivement concave).

b. Étude analytique de la concavité dans la limite des grandes longueurs d’onde

Nous cherchons maintenant à obtenir analytiquement le spectre des modes collectifs dans la limite des grandes longueurs d’onde $q \rightarrow 0$. Pour cela nous développons l’énergie propre jusqu’à l’ordre 5 en q :

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} \underset{q \rightarrow 0}{=} \hbar cq \left[1 + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{\hbar q}{mc} \right)^2 + \frac{\eta}{16} \left(\frac{\hbar q}{mc} \right)^4 + O \left(\left(\frac{\hbar q}{mc} \right)^6 \right) \right]. \quad (\text{VII.72})$$

En utilisant le développement au premier ordre non trivial des intégrales apparaissant dans l’équation (VII.68), développement qui figure explicitement dans l’annexe F, nous obtenons la vitesse du son réduite sous forme d’une fraction rationnelle

$$\frac{mc^2}{\mu} = \frac{2(xy + 1)}{3(y^2 + 1)}, \quad (\text{VII.73})$$

en les variables

$$x = \frac{\Delta_0}{\mu} \quad \text{et} \quad y = \left(\frac{\partial \Delta_0}{\partial \mu} \right)_a, \quad (\text{VII.74})$$

où la dérivée est prise à longueur de diffusion a fixée comme le suggère la notation. La variable y s'exprime à son tour en fonction de x grâce à la relation

$$y = \frac{\int d^3k \frac{\hbar^2 k^2 / (2m) - \mu}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3}}{\int d^3k \frac{\Delta}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3}} = \frac{\int_0^{+\infty} du \frac{u^2(u^2 - x^{-1})}{[(u^2 - x^{-1})^2 + 1]^{3/2}}}{\int_0^{+\infty} du \frac{u^2}{[(u^2 - x^{-1})^2 + 1]^{3/2}}} \quad (\text{VII.75})$$

simple réécriture dans le cas continu de l'équation (V.71) (qui, rappelons-le, découle de l'équation du gap (IV.60) par dérivation par rapport à μ à longueur de diffusion a fixée). Les expressions des intégrales apparaissant au numérateur et au dénominateur du troisième membre de (VII.75) en termes d'intégrales elliptiques complètes de première et deuxième espèce [79], données dans l'annexe E, sont utilisées pour obtenir la figure VII.4 où y est tracé en fonction de $1/x$. La courbe bleue tiretée montre le comportement asymptotique dans la limite CBE $y \simeq -4/x$ (voir plus bas le paragraphe consacré à la limite CBE). Notons aussi qu'à la limite unitaire $y = x \simeq 1,162$, puisque Δ_0 et μ sont proportionnels par invariance d'échelle.

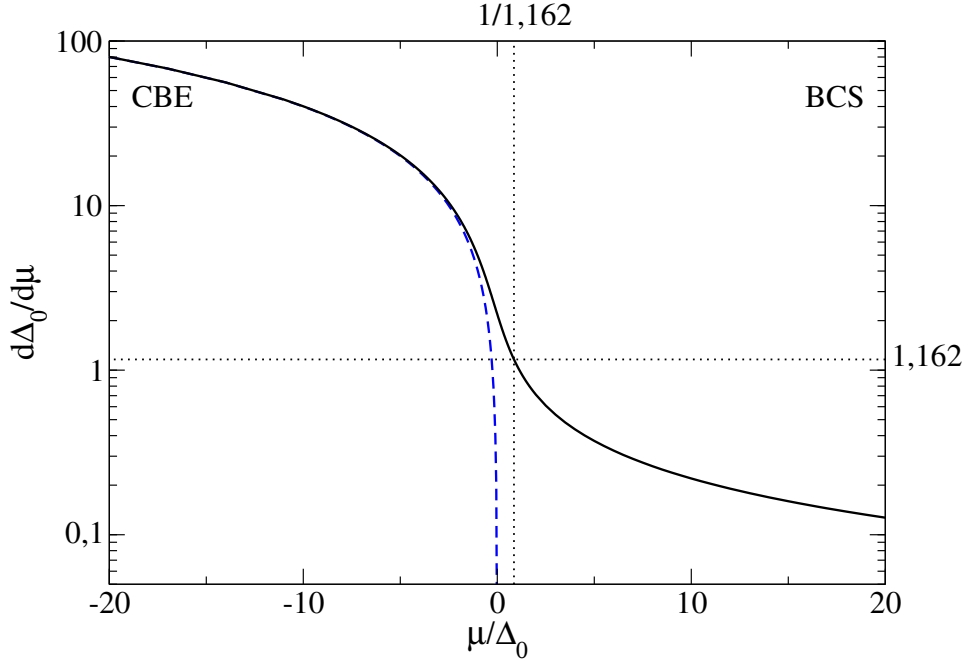


FIGURE VII.4 – Variation du paramètre $y = (\partial\Delta_0/\partial\mu)_a$ représenté ici en échelle logarithmique en fonction de $1/x = \mu/\Delta_0$. La courbe bleue tiretée montre le comportement asymptotique dans la limite CBE $y \sim -4/x$. Les deux pointillés marquent la limite unitaire où, par invariance d'échelle, $x = y \simeq 1,162$.

Comme plus haut à la section VII.3.2, l'expression (VII.73) de la vitesse du son reproduit la formule hydrodynamique (VII.63), prise cette fois avec l'équation d'état à la limite continue. Pour le voir, divisons par \bar{N} l'expression (VII.62) de $d\mu/d\bar{N}$ et faisons tendre le pas du réseau vers zéro. Nous pouvons oublier le terme proportionnel à g_0 au second membre car il tend vers zéro. Les sommes Θ et X deviennent des intégrales (qui sont à un facteur près les intégrales

I_Θ et I_X rencontrées à la section IV.2.2.2 du chapitre IV) que l'on exprime en fonction de x , y et de $\bar{\rho}$ à l'aide de (VII.75) et de la relation

$$\frac{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Delta^3}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3}}{\bar{\rho}} = \frac{\int_0^{+\infty} du \frac{u^2}{[(u^2-x^{-1})^2+1]^{3/2}}}{\int_0^{+\infty} du u^2 \left(1 - \frac{u^2-x^{-1}}{[(u^2-x^{-1})^2+1]^{1/2}}\right)} = \frac{3x}{2(1+xy)}, \quad (\text{VII.76})$$

qui se démontre en intégrant par parties le dénominateur du second membre, u^2 étant la fonction à intégrer. Finalement, nous obtenons l'expression

$$\frac{\bar{\rho} d\mu}{\mu d\bar{\rho}} = \frac{2(xy+1)}{3(y^2+1)} \quad (\text{VII.77})$$

qui fait le lien entre l'expression rationnelle (VII.73) et l'expression hydrodynamique (VII.63) de la vitesse du son.

Pour obtenir les coefficients sans dimension γ et η des ordres supérieurs en q de $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ dans l'équation (VII.72), nous poussons deux ordres plus loin le développement limité des intégrales $I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$, $I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$ et $I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$ en puissances de q après remplacement de $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ par le développement (VII.72). Les expressions explicites de ces développements, assez lourdes, sont données en annexe F. Comme plus haut pour la vitesse du son, nous parvenons à mettre nos résultats sous forme de fractions rationnelles en x et y :

$$\gamma = \frac{\sum_{i=0}^4 P_i(y)x^i}{135x^2(x^2+1)(y^2+1)^3} \quad (\text{VII.78})$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=0}^8 Q_i(y)x^i}{1020600(y^2+1)^6 x^4(x^2+1)^2}. \quad (\text{VII.79})$$

Les polynômes $P_i(y)$ et $Q_i(y)$ qui apparaissent aux numérateurs ordonnés par puissances croissantes de x des expressions de γ et de η valent :

$$\begin{aligned} P_0(y) &= -4(13y^4 + 16y^2 + 8) \\ P_1(y) &= 4y(13y^4 + 41y^2 + 8) \\ P_2(y) &= 50y^6 - 21y^4 - 252y^2 - 61 \\ P_3(y) &= 2y(y^4 + 32y^2 + 71) \\ P_4(y) &= 35y^6 + 56y^4 - 13y^2 - 54 \end{aligned} \quad (\text{VII.80})$$

et

$$\begin{aligned} Q_0(y) &= 16(7745y^8 + 19528y^6 + 20304y^4 + 8384y^2 + 1088) \\ Q_1(y) &= 32y(2857y^8 + 67y^6 - 3186y^4 - 7920y^2 - 2624) \\ Q_2(y) &= -8(12882y^{10} + 28061y^8 - 26936y^6 + 7221y^4 - 24496y^2 - 5232) \\ Q_3(y) &= -8y(8456y^{10} - 9859y^8 + 9977y^6 + 145295y^4 + 3523y^2 + 23720) \\ Q_4(y) &= -17500y^{12} - 247996y^{10} - 1249743y^8 - 1341332y^6 + 337202y^4 - 694392y^2 + 18321 \\ Q_5(y) &= -4y(25564y^{10} + 36027y^8 - 66984y^6 + 92206y^4 + 387932y^2 - 56121) \\ Q_6(y) &= -2(12250y^{12} + 115637y^{10} + 558246y^8 + 1071518y^6 + 589478y^4 - 248499y^2 + 53082) \\ Q_7(y) &= -4y(12957y^{10} + 33764y^8 - 41904y^6 - 173106y^4 - 96189y^2 + 53406) \\ Q_8(y) &= -8575y^{12} - 44544y^{10} - 149742y^8 - 360644y^6 - 477615y^4 - 270756y^2 - 20412. \end{aligned} \quad (\text{VII.81})$$

Nous obtenons les expressions (VII.78) et (VII.79) en réutilisant à chaque ordre les résultats des ordres inférieurs : la valeur (VII.73) de c pour obtenir γ , puis celles de c et de γ (VII.78) pour obtenir η . Au cours du calcul, nous rencontrons des intégrales avec des puissances élevées de $\epsilon_{\mathbf{k}}$ (ou $[(u^2 - x^{-1})^2 + 1]^{1/2}$ après adimensionnement) au dénominateur ; leur calcul par intégrations par partie répétées est expliqué dans l'annexe E.

Nous représentons sur la figure VII.5 les coefficients γ et η en fonction de $1/(k_F a)$, variable que nous avons préférée ici à Δ/μ . Pour les interpréter, nous ne pouvons malheureusement pas nous appuyer sur des expressions thermodynamiques connues, comme nous l'avons fait pour la vitesse du son. Nous pouvons cependant préciser leurs comportements asymptotiques dans les limites CBE $1/(k_F a) \rightarrow +\infty$ et BCS $1/(k_F a) \rightarrow -\infty$. Nous en profitons pour commenter leurs valeurs remarquables dans les régimes intermédiaires.

b.1 Limite CBE Dans la limite CBE, $k_F a \rightarrow 0^+$, le système est assimilable à un gaz de bosons de masse $2m$ en interaction faible, de potentiel chimique

$$\mu_B = 2\mu - E_{\text{dim}}, \quad (\text{VII.82})$$

où $E_{\text{dim}} = -\hbar^2/(ma^2)$ est l'énergie interne d'un dimère [49, 90]. On sait alors que la relation de dispersion des excitations bosoniques est convexe et se réduit à celle des excitations de Bogolioubov au potentiel chimique μ_B lorsque $q = o(1/a)$ [50] :

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{\text{Bog}} = \left[\frac{\hbar^2 q^2}{4m} \left(\frac{\hbar^2 q^2}{4m} + 2\mu_B \right) \right]^{1/2}, \quad (\text{VII.83})$$

auquel cas la vitesse du son est telle que $2mc^2 = \mu_B$. Les coefficients γ et η devraient donc admettre les limites suivantes :

$$\gamma \xrightarrow[k_F a \rightarrow 0^+]{} \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \eta \xrightarrow[k_F a \rightarrow 0^+]{} -\frac{1}{128}. \quad (\text{VII.84})$$

C'est bien ce que donnent les équations (VII.78) et (VII.79) prises à la limite CBE, c'est-à-dire avec $x = O(k_F a)^{3/2} \rightarrow 0^-$ [48] et, comme le montre l'équation (VII.75) après le changement de variable $u = u'/|x|^{1/2}$, avec $y \sim -4/x$.

b.2 Limite BCS Quand $k_F a \rightarrow 0^-$, le bord inférieur du continuum à deux excitations fermioniques (à nombre d'onde total $q < q_{\text{sup}}$ fixé) devient exponentiellement faible et contraint la branche d'excitation bosonique, qui ne peut pénétrer dans ce continuum, à se courber vers le bas [50, 87]. Cette courbure se produit sur une échelle de nombre d'onde q_c telle que $\hbar c q_c = \Delta_0$, c'est-à-dire telle que le terme dominant dans le développement (VII.72) soit de l'ordre de Δ_0 . Physiquement, ceci signifie que les modes collectifs sont affectés par la structure interne des paires dès que leur longueur d'onde devient de l'ordre de la taille des paires dans l'espace réel $\approx \hbar^2 k_F / (m \Delta_0)$ [79], quantité qui est effectivement d'ordre $1/q_c$ puisque $c \propto \hbar k_F / m$ dans cette limite.

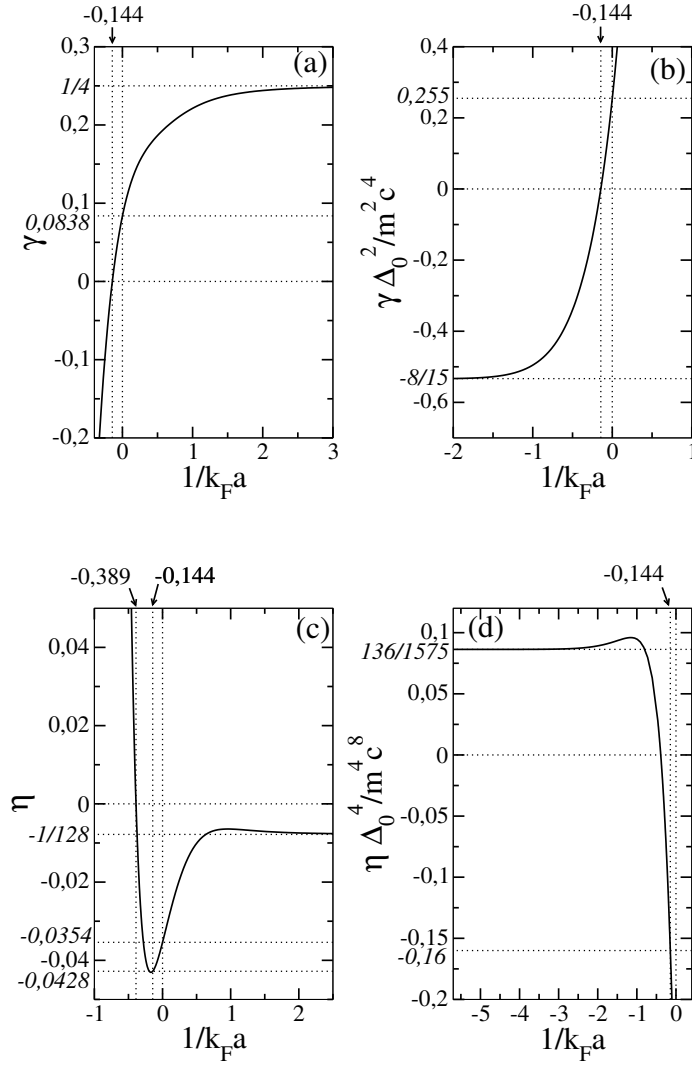


FIGURE VII.5 – Dans l’approximation de la RPA, coefficients adimensionnés γ et η des termes q^3 et q^5 de la relation de dispersion des excitations bosoniques pour $q \rightarrow 0$, voir l’équation (VII.72), en fonction de l’inverse $1/(k_F a)$ de la force des interactions. Dans la limite CBE, ils admettent une limite finie, qui correspond à la relation de dispersion de Bogolioubov, voir les équations (VII.83, VII.84) et les panneaux (a) et (c). Dans la limite BCS, ils divergent ; il vaut alors mieux adimensionner le nombre d’onde q par $\Delta_0/(\hbar c)$, ce qui revient à considérer les quantités $\gamma \Delta_0^2/(m^2 c^4)$ et $\eta \Delta_0^4/(m^4 c^8)$, qui admettent une limite finie, voir les panneaux (b) et (d). Entre ces deux limites, γ et η s’annulent en changeant de signe, respectivement en $1/(k_F a) \simeq -0,144$ et $1/(k_F a) \simeq -0,389$, et ils sont respectivement faiblement positif ($\gamma \simeq 0,0838$) et faiblement négatif ($\eta \simeq -0,0354$) à la limite unitaire. La valeur de η importe particulièrement au point où γ s’annule ; en ce point, $\eta \simeq -0,0428$, donc la relation de dispersion de la RPA est concave sur un voisinage de $q = 0$.

Ceci explique qualitativement pourquoi la relation de dispersion est concave aux faibles valeurs de q et de Δ_0/μ sur la figure VII.2, et donc pourquoi $\gamma < 0$ dans la limite BCS.

Plus quantitativement, on s'attend à ce que l'énergie adimensionnée $\hbar\omega_{\mathbf{q}}/\Delta_0$ devienne une fonction universelle de $q/q_c = \hbar cq/\Delta_0$ lorsque $k_F a \rightarrow 0^-$, auquel cas tous les termes entre crochets dans l'équation (VII.72) sont du même ordre de grandeur en $q = q_c$, c'est-à-dire $|\gamma(\hbar q_c/mc)^2| \approx 1$, $|\eta(\hbar q_c/mc)^4| \approx 1$. En prenant la limite $x \rightarrow 0$ et $y \rightarrow 0$ dans les équations (VII.78) et (VII.79), c'est bien ce que l'on obtient :

$$\gamma_{k_F a \rightarrow 0^-} \sim -\frac{8}{15} \left(\frac{mc^2}{\Delta_0} \right)^2 \quad \text{et} \quad \eta_{k_F a \rightarrow 0^-} \sim \frac{136}{1575} \left(\frac{mc^2}{\Delta_0} \right)^4, \quad (\text{VII.85})$$

le premier résultat reproduisant celui de la référence [79].

b.3 Régimes intermédiaires Dans la zone de raccordement entre CBE et BCS, γ est une fonction croissante de $1/(k_F a)$ et s'annule en changeant de signe pour la valeur x_0 de Δ_0/μ qui suit :

$$x_0 \simeq 0,868567. \quad (\text{VII.86})$$

Ceci correspond à $1/(k_F a) \simeq -0,144292$ et confirme le résultat numérique de la figure VII.2 ainsi que celui de la référence [52]. La RPA et l'approche variationnelle prédisent donc que la limite unitaire se situe du côté où la relation de dispersion est convexe sur un voisinage de $q = 0$:

$$\gamma_{(k_F a)^{-1}=0} \simeq 0,083769. \quad (\text{VII.87})$$

Le coefficient η change lui aussi de signe, pour une valeur x_1 de Δ_0/μ donnée par

$$x_1 \simeq 0,566411, \quad (\text{VII.88})$$

ce qui correspond à $1/(k_F a) \simeq -0,389027$. Il est négatif tant à la limite unitaire

$$\eta_{(k_F a)^{-1}=0} \simeq -0,035416, \quad (\text{VII.89})$$

qu'au point où γ s'annule :

$$\eta(x_0) \simeq -0,042794. \quad (\text{VII.90})$$

En ce point, le signe de η nous importe particulièrement car il détermine la concavité de la relation de dispersion au voisinage de $q = 0$.

b.4 Lieu des points d'inflexion Les coefficients γ et η permettent finalement de donner un équivalent aux faibles q de la frontière entre les zones rouge sombre et orange clair de la figure VII.2, autrement dit de l'ensemble des valeurs de $(q/k_\mu, \Delta_0/\mu)$ pour lesquelles la dérivée seconde $d^2\omega_{\mathbf{q}}/dq^2$ s'annule. En prenant pour $\omega_{\mathbf{q}}$ le développement (VII.72) et en développant les coefficients $\gamma(x)$ et $\eta(x)$ autour de $x = x_0$ respectivement à l'ordre un et à l'ordre zéro en $x - x_0$, on obtient l'équation

$$\frac{q_{\text{infl}}^2}{k_\mu^2} \underset{x \rightarrow x_0^+}{\sim} -\frac{3\gamma'(x_0)}{10\eta(x_0)} \frac{mc^2}{\mu} (x - x_0) \simeq 2,015858(x - x_0). \quad (\text{VII.91})$$

Ceci conduit à la courbe noire tiretée de la figure VII.2, qui rejoint l'axe $q = 0$ avec une tangente horizontale.

c. Discussion sur les processus d'amortissement dominants Une application directe de notre développement du spectre (VII.72) est de déterminer si une excitation collective de faible vecteur d'onde \mathbf{q} peut ou non décroître par un processus de Beliaev, c'est-à-dire en émettant deux excitations collectives de vecteurs d'onde \mathbf{q}_1 et $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q} - \mathbf{q}_1$. Ce processus est autorisé par la loi de conservation de l'énergie à condition que l'énergie propre $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ soit comprise dans le continuum $\mathbf{q}_1 \mapsto \hbar(\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1})$ à deux excitations collectives de vecteur d'onde total \mathbf{q} fixé. Le bord supérieur $\Omega_{\mathbf{q}}^{\text{sup}} = \sup_{\mathbf{q}_1} (\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1})$ du continuum est toujours strictement plus grand que $\omega_{\mathbf{q}}$; pour s'en convaincre, on peut choisir $\mathbf{q}_1 = q_1\mathbf{q}/q$ avec q_1 compris dans la première composante connexe du domaine d'existence de $\omega_{\mathbf{q}}$, et strictement supérieur à q donc tel que $\omega_{\mathbf{q}_1} > \omega_{\mathbf{q}}$. En revanche, le bord inférieur $\Omega_{\mathbf{q}}^{\text{inf}} = \inf_{\mathbf{q}_1} (\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1})$ est inférieur ou égal à $\omega_{\mathbf{q}}$ (il suffit de prendre $\mathbf{q}_1 \rightarrow 0$ pour s'en convaincre) mais pas forcément strictement inférieur. Il peut donc arriver que la valeur $\omega_{\mathbf{q}}$ ne soit jamais atteinte pour $\mathbf{q}_1 \neq 0$, auquel cas aucun processus de Beliaev non trivial n'est possible. C'est ce qui se passe dans le cas d'une branche entièrement concave. Rappelons le petit raisonnement par l'absurde qui permet de démontrer ce fait : imaginons trois vecteurs \mathbf{q}_1 , \mathbf{q}_2 et \mathbf{q} vérifiant à la fois la conservation de l'impulsion $\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \mathbf{q}$ et de l'énergie $\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2} = \omega_{\mathbf{q}}$; si la relation de dispersion est concave, on aboutit à une absurdité en faisant la suite d'opérations suivante :

$$\frac{\omega_{\mathbf{q}}}{q} \geq \frac{\omega_{\mathbf{q}}}{q_1 + q_2} = \frac{\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}_2}}{q_1 + q_2} = \frac{\omega_{\mathbf{q}_1}}{q_1} \frac{q_1}{q_1 + q_2} + \frac{\omega_{\mathbf{q}_2}}{q_2} \frac{q_2}{q_1 + q_2} > \frac{\omega_{\mathbf{q}}}{q}, \quad (\text{VII.92})$$

où l'on utilise successivement l'inégalité triangulaire puis la décroissance stricte² de la fonction $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}/q$, conséquence immédiate de la concavité de la relation de dispersion $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$. À l'inverse, lorsque la relation de dispersion est strictement convexe, nous pouvons affirmer que $\Omega_{\mathbf{q}}^{\text{inf}} < \omega_{\mathbf{q}}$ en prenant simplement $\mathbf{q}_1 = \mathbf{q}/2$. En effet, comme la dérivée de la relation de dispersion $d\omega_{\mathbf{q}}/dq$ est strictement croissante, nous savons que la fonction $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}} - 2\omega_{\mathbf{q}/2}$ est aussi strictement croissante donc strictement positive pour $q > 0$. L'amortissement de Beliaev existe donc toujours lorsque la branche d'excitation est entièrement convexe.

Ainsi, dans la majorité des cas, le signe du paramètre de courbure γ , qui détermine la concavité de la branche collective aux faibles q , permet de conclure sur la possibilité du processus d'amortissement de Beliaev. Un doute subsiste lorsque Δ_0/μ est proche de sa valeur critique $x_0 = 0,869$ où la relation de dispersion présente un point d'inflexion aux faibles q . Pour trancher, nous adaptons le raisonnement de la référence [87] pour calculer le bord inférieur $\Omega_{\mathbf{q}}^{\text{inf}}$ du continuum. Comme la relation de dispersion $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ est strictement croissante, on minimise toujours l'énergie $\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}$ de la biexcitation à norme q_1 fixée en choisissant \mathbf{q}_1 de même direction et même sens que \mathbf{q} . La borne inférieure du continuum $\mathbf{q}_1 \mapsto \omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}$ s'obtient donc en considérant les cas (i) et (ii) de la référence [87] où \mathbf{q}_1 et \mathbf{q} sont colinéaires et de même sens. Une petite étude³ de la fonction $f(q_1) = \omega(q_1) + \omega(q - q_1)$ sur l'intervalle $[0, q/2]$, avec $\omega(q) = \omega_{\mathbf{q}}$ donné par l'équation (VI.42), montre qu'il vaut

$$\Omega_{\mathbf{q}}^{\text{inf}} = \min(2\omega_{\mathbf{q}/2}, \omega_{\mathbf{q}}). \quad (\text{VII.93})$$

L'amortissement de Beliaev d'un vecteur d'onde \mathbf{q} est donc possible si et seulement si $2\omega_{\mathbf{q}/2} <$

2. Notons que l'hypothèse de décroissance de la fonction $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}/q$ suffit et qu'elle est plus faible que l'hypothèse de concavité.

3. En utilisant le paramétrage $q_1 = (1-t)q/2$, avec $t \in [0, 1]$, nous trouvons que $f(q_1)$ est une fonction parabolique concave de t^2 . Son minimum est donc atteint sur l'un des bords de l'intervalle et vaut soit $f(0) = \omega_{\mathbf{q}}$ soit $f(q/2) = 2\omega_{\mathbf{q}/2}$.

$\omega_{\mathbf{q}}$, ce qui, après un petit calcul conduit à la condition :

$$\left(\frac{\hbar q}{mc}\right)^2 < \frac{8\gamma}{5|\eta|}. \quad (\text{VII.94})$$

À température basse mais non nulle, d'autres mécanismes d'amortissement sont possibles : (i) le mécanisme de Landau $\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{q}_2$ est interdit dès lors que celui de Beliaev l'est puisqu'il peut être vu comme l'inverse d'un processus de Beliaev avec un vecteur d'onde \mathbf{q}_2 de module $> q$; (ii) le processus d'ordre supérieur de Landau-Khalatnikov $\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3$ est lui toujours permis, mais il est sous-dominant dès lors que les processus de Beliaev ou Landau sont présents.

VII.4 Opérateurs de création d'excitations bosoniques

Nous cherchons maintenant l'expression des amplitudes normales classiques $b_{\mathbf{q}}$ associées au spectre que nous venons d'étudier. Après quantification, elles donneront naissance aux opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ d'annihilation de quasi-particules qui interviennent dans l'équation fondamentale de la dynamique de phase (II.32).

VII.4.1 Modes propres

Une fois la valeur de l'énergie propre $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ déterminée, soit analytiquement dans la limite des grandes longueurs d'onde, soit numériquement ailleurs, nous obtenons un ensemble de relations entre les variables collectives. À la limite continue, les variables reliées aux fluctuations de densité du gaz $n_{\uparrow} - n_{\downarrow}$ et $\Omega_{\mathbf{q}}^-$ (cf. les équations (VII.66) et (VII.67)) ont une contribution nulle tant au spectre qu'aux modes propres. Il ne demeure donc que les deux variables collectives superfluides, liées par la relation :

$$\Omega_{\mathbf{q}}^+ = -\frac{I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)}{I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)} (\Delta^{\mathbf{q}} - \bar{\Delta}^{\mathbf{q}}). \quad (\text{VII.95})$$

La variable collective $\Delta^{\mathbf{q}} - \bar{\Delta}^{\mathbf{q}}$ reste indéterminée et joue le rôle de constante de proportionnalité. Puisqu'elle est homogène à une énergie, nous l'écrivons sous la forme

$$\Delta^{\mathbf{q}} - \bar{\Delta}^{\mathbf{q}} = 2\Delta_0 / \sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}} \quad (\text{VII.96})$$

de façon à faire apparaître une constante de normalisation $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ sans dimension, qui sera déterminée plus loin. Nous notons $Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ la composante de la variable « différence » $y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ sur le mode de phonon d'énergie $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$. Nous reprenons alors l'équation (VII.41) pour l'écrire sous la forme :

$$Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \frac{2\Delta_0}{\sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 - (\epsilon_{\mathbf{kq}}^+)^2)} \left(\epsilon_{\mathbf{kq}}^+ W_{\mathbf{kq}}^+ - \Delta_0 W_{\mathbf{kq}}^- \frac{I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)}{I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)} \right) \quad (\text{VII.97})$$

Il nous reste à déterminer la composante $S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ de la variable « somme » $s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ sur le même mode de phonon grâce à l'équation (VII.36). Nous définissons sa valeur pour le mode d'énergie $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ positive :

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \epsilon_{\mathbf{kq}}^+ Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + \frac{2\Delta_0 W_{\mathbf{kq}}^+}{\sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}} = \frac{2\Delta_0}{\sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}(\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 - (\epsilon_{\mathbf{kq}}^+)^2)} \left(\hbar^2\omega_{\mathbf{q}}^2 W_{\mathbf{kq}}^+ - \Delta_0 \epsilon_{\mathbf{kq}}^+ W_{\mathbf{kq}}^- \frac{I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)}{I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)} \right). \quad (\text{VII.98})$$

Relevons une propriété importante de Y et S : leur invariance par transposition, qui résulte de l'invariance par parité du problème et de l'appariement dans l'onde s ,

$$Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\mathbf{q}} = Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \quad (\text{VII.99})$$

$$S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\mathbf{q}} = S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}. \quad (\text{VII.100})$$

Pour le vecteur propre d'énergie négative il suffit de changer le signe de $s_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$, ou, en changeant le signe global, celui de $y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$. Nous disposons de deux vecteurs propres, que nous écrivons directement dans la base associée à $\beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ et $\bar{\beta}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ plutôt que dans la base somme et différence afin de faire apparaître la forme habituelle des modes d'un hamiltonien quadratique :

$$\vec{e}_{+c}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \quad (\text{VII.101})$$

$$\vec{e}_{-c}(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}, \quad (\text{VII.102})$$

avec

$$M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \frac{S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{2} \quad (\text{VII.103})$$

$$N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \frac{S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{2}. \quad (\text{VII.104})$$

Pour écrire des opérateurs de phonons, il nous faut disposer des vecteurs duaux des vecteurs propres que nous venons de trouver. Avantage de la théorie semi-classique, nous les obtenons sans douleur grâce à la symétrie symplectique (VII.32) :

$$\vec{d}_{+c}(\mathbf{q}) = \sigma_z \begin{pmatrix} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \begin{pmatrix} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ -N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \quad (\text{VII.105})$$

$$\vec{d}_{-c}(\mathbf{q}) = -\sigma_z \begin{pmatrix} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \begin{pmatrix} -N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \\ M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}. \quad (\text{VII.106})$$

Il ne reste plus qu'à projeter sur les vecteurs duaux pour obtenir nos amplitudes de phonon classiques :

$$b_{\mathbf{q}} = \vec{d}_{+c}(\mathbf{q}) \cdot \begin{pmatrix} \beta_{\mathbf{q}}^{\mathbf{q}} \\ \bar{\beta}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \bar{\beta}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} - N_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\mathbf{q}} (\beta_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}})^* \quad (\text{VII.107})$$

$$b_{-\mathbf{q}}^* = \vec{d}_{-c}(\mathbf{q}) \cdot \begin{pmatrix} \beta_{\mathbf{q}}^{\mathbf{q}} \\ \bar{\beta}_{\mathbf{q}}^{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} -N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \bar{\beta}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} -N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} + M_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\mathbf{q}} (\beta_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}})^* \quad (\text{VII.108})$$

compte tenu la relation un peu alambiquée $(\bar{\beta}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^* = \beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\mathbf{q}}$ dans les notations de la RPA. Nous n'avons pas introduit de notation particulière pour l'amplitude du projeté sur \vec{d}_{-c} car il n'est autre que $b_{-\mathbf{q}}^*$, complexe conjugué de $b_{-\mathbf{q}}$. Cette propriété découle simplement de l'invariance par transposition des coefficients M et N , $M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\mathbf{q}} = M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ et $N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\mathbf{q}} = N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$, conséquence de celle

de Y et S (VII.99, VII.100). On normalise les vecteurs propres en imposant que leur produit scalaire avec leur dual vaille 1 :

$$\left(\vec{d}_{\pm c}\right)^* \cdot \vec{e}_{\pm c} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2 - (N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2 = 1. \quad (\text{VII.109})$$

En introduisant les coefficients non normalisés $\tilde{Y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ et $\tilde{S}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$, cette condition permet de déterminer la constante de normalisation $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$:

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \tilde{Y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}. \quad (\text{VII.110})$$

Notons aussi qu'elle implique automatiquement que le crochet de poisson de $b_{\mathbf{q}}$ avec son conjugué $b_{\mathbf{q}}^*$ vaut 1 :

$$\{b_{\mathbf{q}}, b_{\mathbf{q}}^*\} = 1. \quad (\text{VII.111})$$

Le crochet de poisson de deux fonctions A et B du jeu de variables conjuguées $(\beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}'})_{\mathbf{k}, \mathbf{q}' \in \mathcal{D}}$ et $((\beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}'})^*)_{\mathbf{k}, \mathbf{q}' \in \mathcal{D}}$ est défini de la façon habituelle :

$$\{A, B\} = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}' \in \mathcal{D}} \left(\frac{\partial A}{\partial \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}'}} \frac{\partial B}{\partial (\beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}'})^*} - \frac{\partial A}{\partial (\beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}'})^*} \frac{\partial B}{\partial \beta_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}'}} \right). \quad (\text{VII.112})$$

Dans le cas du crochet de Poisson de $b_{\mathbf{q}}$ et $b_{\mathbf{q}}^*$ la somme sur \mathbf{q}' se réduit à $\mathbf{q}' = \mathbf{q}$ pour le premier terme et $\mathbf{q}' = -\mathbf{q}$ pour le second. En utilisant la correspondance habituelle entre crochet de Poisson et commutateur, on peut voir dans la propriété (VII.111) un équivalent semi-classique d'une relation de commutation bosonique $[\hat{b}_{\mathbf{q}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger] = 1$. Nous reviendrons sur ce point lorsque nous chercherons à quantifier les variables normales $b_{\mathbf{q}}$.

Pour exprimer en sens inverse le champ classique en fonction des amplitudes de phonons, nous le développons sur les vecteurs propres :

$$\begin{pmatrix} \beta_{\mathbf{q}} \\ \bar{\beta}_{\mathbf{q}} \end{pmatrix} = b_{\mathbf{q}} \vec{e}_{+c}(\mathbf{q}) + b_{-\mathbf{q}}^* \vec{e}_{-c}(\mathbf{q}) + \dots \quad (\text{VII.113})$$

L'ellipse matérialisée par les points de suspension concerne ici la composante du champ sur les autres modes excités de vecteur d'onde total \mathbf{q} . En suivant les mêmes étapes qu'aux sections V.2.3.1 et V.2.3.2, on s'attend à ce qu'à la limite d'un espace continu ces modes excités constituent le continuum $\mathbf{k} \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} + \epsilon_{\mathbf{k}}$ à deux quasi-particules fermioniques ayant un vecteur d'onde du centre de masse \mathbf{q} . En projetant l'équation vectorielle (VII.113), nous obtenons :

$$\beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}} = M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} + N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} b_{-\mathbf{q}}^* + \dots \quad (\text{VII.114})$$

$$\bar{\beta}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}} = N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} + M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} b_{-\mathbf{q}}^* + \dots \quad (\text{VII.115})$$

Ces dernières relations permettent d'interpréter M et N comme les coefficients d'une nouvelle rotation de Bogolioubov, qui, après quantification, transforme cette fois les opérateurs bilinéaires (VII.4, VII.5) de quasi-particules fermioniques en opérateurs de quasi-particules bosoniques, et qui se superpose à celle induite par les coefficients $U_{\mathbf{k}}^0$ et $V_{\mathbf{k}}^0$, qui transforme les opérateurs de particules en opérateurs quasi-particules fermioniques. Cette rotation agit au niveau des paires, d'où le fait que les coefficients M et N aient deux indices.

VII.4.2 Opérateurs de phonons dans la limite des grandes longueurs d'onde

Plaçons-nous maintenant à la limite des grandes longueurs d'onde $q \rightarrow 0$. Nous disposons déjà, en annexe F, du développement des intégrales I_{++} et I_{+-} , et donc du rapport I_{++}/I_{+-} qui sert à relier entre elles les variables collectives. Nous en déduisons immédiatement le développement des composantes (VII.97) et (VII.98) des modes propres dans la base somme et différence. Nous ne donnons ici que les deux premiers ordres, l'ordre suivant, qui est utile pour obtenir les amplitudes Beliaev-Landau (*cf.* le chapitre VIII), est donné dans l'annexe G,

$$\tilde{Y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = - (U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 + V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0) + O(q^2) \quad (\text{VII.116})$$

$$\tilde{S}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \frac{\hbar c q}{2(U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 + V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0)} \frac{d}{d\mu} (U_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 - V_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 V_{\mathbf{k}}^0) + O(q^3). \quad (\text{VII.117})$$

Les expressions (VII.116, VII.117) se raccordent à l'ordre le plus bas avec les coefficients des modes \vec{e}_n et \vec{e}_a du sous-espace d'impulsion nul (*cf.* sections V.2.2.1 et V.2.2.2) : l'ordre 0 de $\tilde{Y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ coïncide, à un facteur i près, avec le coefficient sur $y_{\mathbf{k}}^0$ du mode d'énergie nul \vec{e}_n (voir l'équation (V.55)), et l'ordre 0 de $\tilde{S}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}/(\hbar c q)$ coïncide, à un facteur $d\mu/d\bar{N}$ près, avec le coefficient sur $s_{\mathbf{k}}^0$ du mode d'énergie anormal \vec{e}_a (voir l'équation (V.64)). Nous avons donné en (VII.116, VII.117) le développement des composantes avant normalisation. La constante de normalisation possède le développement suivant :

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar c q}{2} \frac{d\bar{N}}{d\mu} \left(1 + \tau \frac{\hbar^2 c^2 q^2}{\Delta_0^2} \right) + O(q^5) \quad (\text{VII.118})$$

L'expression explicite du coefficient τ est donné par l'équation (??).

VII.4.3 Quantification des opérateurs de phonons

Pour quantifier les opérateurs de phonons obtenus par notre approche semi-classique, nous nous souvenons que κ représente un opérateur de paire de quasi-particules $\kappa_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}} = \langle \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} \rangle$. Or au premier ordre de l'approximation des petites amplitudes le champ β est confondu avec $-\kappa$. Nous sommes donc tenté de faire la substitution

$$\beta_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \mathbf{k}} \rightarrow -\hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}. \quad (\text{VII.119})$$

En soumettant l'amplitude normale $b_{\mathbf{q}}$ à cette substitution, nous obtenons l'opérateur quantique :

$$\hat{b}_{\mathbf{q}} = - \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} - N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}^{\dagger}. \quad (\text{VII.120})$$

Ce geste intuitif peut en fait être justifié par plusieurs arguments. Le premier est que l'opérateur quantique (VII.120) coïncide avec celui que nous aurions obtenu dans le cadre de la RPA en appliquant la procédure décrite en conclusion de la section V.1 aux sous-espaces d'impulsion non nulle. Le second est l'application⁴ de la procédure de quantification du chapitre 11

4. En vérité, pour appliquer la procédure au cas d'un gaz apparié, il faut d'abord généraliser les équations (11.81c) de la référence [40] au cas où les opérateurs de création de paires de particules ont une moyenne

de la référence [40] où le champ β est mis en correspondance avec un champ d'opérateurs bosoniques \mathbb{B} (à ne pas confondre avec les opérateurs de création d'excitations bosoniques $\hat{b}_{\mathbf{q}}$). L'expression de l'*image bosonique* des opérateurs fermioniques à deux corps tel $\hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}$, en termes de ce champ bosonique \mathbb{B} , qui permettrait d'envisager une substitution telle que (VII.119), n'est pas simple dans le cas général car elle implique une série infinie en puissances de \mathbb{B} . Mais, dans limite où le gaz est faiblement excité, l'opérateur population des images bosoniques $\mathbb{B}\mathbb{B}^\dagger$ peut être négligé, ce qui autorise la substitution (VII.119), où nous confondons les opérateurs fermioniques à deux corps et leur image bosonique. Enfin, le dernier argument est le caractère quasi bosonique (VII.120) de l'opérateur $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ lorsque le gaz est faiblement excité. En effet, calculons le commutateur de $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$:

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{q}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger\right] = 1 + \frac{1}{4} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \left((Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2 + (S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2 \right) \left(\hat{h}_{\mathbf{k}}^0 - \hat{h}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 \right) - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \left(\hat{m}_{\mathbf{k}}^0 + \hat{m}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^0 \right) \quad (\text{VII.121})$$

où nous utilisons les notations (V.21–V.24) des opérateurs de la RPA en point de vue de quasi-particules. Les termes par lesquels ce commutateur diffère de l'unité sont des opérateurs de populations de quasi-particules fermioniques. Ils sont donc exactement nuls dans le fondamental BCS et du second ordre en le champ $z = O(\beta)$ dans un état cohérent (IV.33) de quasi-particules. Nous verrons dans la section suivante dans quelle mesure le commutateur peut être identifié à l'identité dans des états à faible densité d'excitations phononiques, donc pas trop éloignés du fondamental BCS.

VII.4.4 États de Fock d'excitations bosoniques

Pour illustrer cette conclusion, et donner corps à ce que nous appelons un gaz faiblement excité, nous considérons, chose assez naturelle à basse température, les « états de Fock » d'excitations bosoniques,

$$|n_{B,\mathbf{q}} = p\rangle = \frac{\left(\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger\right)^p}{\sqrt{L_p(q)}} |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle, \quad (\text{VII.122})$$

c'est-à-dire ceux dans lesquels on a créé, à partir de l'état BCS fondamental, un nombre p d'excitations bosoniques qui est une fraction ϵ du nombre moyen \bar{N} de particules

$$p = \epsilon \bar{N}. \quad (\text{VII.123})$$

La quantité ϵ est donc la densité d'excitations collectives ramenée à la densité moyenne du gaz. Nous avons noté L_p la constante de normalisation de l'état :

$$L_p(q) = \langle \psi_{\text{BCS}}^0 | \left(\hat{b}_{\mathbf{q}}\right)^p \left(\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger\right)^p | \psi_{\text{BCS}}^0 \rangle. \quad (\text{VII.124})$$

non nulle. Ceci peut se faire simplement en utilisant l'analogie entre les paires particule-trou dans un gaz normal et les paires de quasi-particules dans un gaz superfluide, donc en remplaçant les opérateurs de destruction de particules et de création trous $\hat{a}_p, \hat{a}_h^\dagger$ par les opérateurs BCS $\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}$ de destruction de quasi-particules fermioniques.

a. Cas $p = 1$: normalisation et interprétation physique de la « fonction d'onde » d'un phonon dans l'espace de Fourier On parvient à calculer L_1 sans difficulté :

$$L_1(q) = \sum_{\mathbf{k}_1 \in \mathcal{D}} (M_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{q}})^2 \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \frac{\bar{N}_0^{\text{BCS}}}{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}}, \quad (\text{VII.125})$$

où \bar{N}_0^{BCS} (cf. l'équation (II.17)) est le nombre de paires condensées. Il s'agit là d'une simple normalisation d'ordre \bar{N}^0 , c'est-à-dire intensive, de la fonction d'onde $(M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$ du phonon créé sur la base des paires de quasi-particules, puisque $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ est extensif. Lorsque le vecteur d'onde \mathbf{q} tend vers 0, cette fonction d'onde normalisée n'est rien d'autre que celle du condensat de paires :

$$\frac{(M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2}{L_1(q)} \underset{q \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{1}{\bar{N}_0^{\text{BCS}}} \frac{\Delta_0^2}{4\epsilon_{\mathbf{k}}^2} = |\varphi_{0\mathbf{k}}|^2, \quad (\text{VII.126})$$

où $\varphi_{0\mathbf{k}}$ est la fonction d'onde du condensat de paires définie en (II.11), écrite ici dans l'état BCS fondamental et dans l'espace de Fourier pour le vecteur d'onde relatif \mathbf{k} des paires. Ceci confirme que l'excitation collective se propage à travers les paires condensées et qu'elle implique un grand nombre de modes d'excitation interne des paires, comparable au nombre de modes de Fourier affectés par la condensation, donc dans une largeur $\delta k \approx m\Delta_0/\hbar k_{\min}$ autour de la position k_{\min} du minimum de $k \mapsto \epsilon_{\mathbf{k}}$.

Par ailleurs, on remarque que $L_1(q)$ diverge lorsque $q \rightarrow 0$, puisque $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ tend vers 0 linéairement en q . Ceci est dû physiquement au fait que nous faisons agir $\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}$ sur le vide des quasi-particules fermioniques plutôt que sur le vide de phonons. Ce phénomène est particulièrement clair dans le cas d'un gaz de bosons en interaction faible : lorsqu'on fait agir l'opérateur de création d'un phonon de Bogolioubov $\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} = U_{\mathbf{q}}^B \hat{a}_{\mathbf{q}}^{\dagger} - V_{\mathbf{q}}^B \hat{a}_{-\mathbf{q}}$ sur le vide de particules, c'est-à-dire sur le vide des $\hat{a}_{\mathbf{q}}$, on obtient un état de norme

$$|V_{\mathbf{q}}^B| \underset{q \rightarrow 0}{\sim} \left(\frac{m_{BC}}{2\hbar q} \right)^{1/2}, \quad (\text{VII.127})$$

où m_B est la masse d'un boson. On retrouve exactement ce comportement dans notre système de fermions en spécialisant $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$ et \bar{N}_0^{BCS} à la limite CBE ($\bar{N}_0^{\text{BCS}} = \bar{N}/2 = N_B$ et $\mathcal{N}_{\mathbf{q}} \sim 2\hbar q N_B / m_{BC}$).

b. Cas p quelconque : approximation sur l'état et sur sa normalisation Si nos opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ étaient vraiment bosoniques, on s'attendrait à ce que

$$L_p(q) = p!(L_1(q))^p. \quad (\text{VII.128})$$

Malheureusement, la nature fermionique sous-jacente du phonon créé rend le calcul de L_p très ardu. Une première difficulté provient du principe d'exclusion de Pauli qui empêche le p -ième fermion d'être créé dans les mêmes fonctions d'onde que les $p - 1$ premiers. Ceci s'observe à partir de $p = 2$,

$$|n_{B,\mathbf{q}} = 2\rangle = \frac{1}{\sqrt{L_2(q)}} \sum_{\mathbf{k}_1 \neq \mathbf{k}_2 \in \mathcal{D}} M_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{q}} M_{\mathbf{k}_2}^{\mathbf{q}} \hat{b}_{\mathbf{k}_1+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k}_1\downarrow}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}_2+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{b}_{-\mathbf{k}_2\downarrow}^{\dagger} |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle \quad (\text{VII.129})$$

et produit, déjà sur L_2 , une déviation à la formule (VII.128) :

$$L_2(q) = 2! \sum_{\mathbf{k}_1 \in \mathcal{D}} (M_{\mathbf{k}_1}^{\mathbf{q}})^2 \sum_{\mathbf{k}_2 \neq \mathbf{k}_1} (M_{\mathbf{k}_2}^{\mathbf{q}})^2. \quad (\text{VII.130})$$

Cette difficulté serait encore surmontable si le caractère bilinéaire en les excitations fermioniques de l'opérateur $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ ne permettait pas des recombinaisons non triviales entre paires d'excitations de vecteurs d'onde relatifs différents, aboutissant à former des paires en mouvement à un vecteur d'onde du centre de masse multiple mais différent de \mathbf{q} , par exemple :

$$\hat{b}_{-\mathbf{k}-2\mathbf{q}\downarrow}\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger\hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger\hat{b}_{\mathbf{k}+3\mathbf{q}\uparrow}^\dagger\hat{b}_{-\mathbf{k}-2\mathbf{q}\downarrow}^\dagger|\psi_{\text{BCS}}^0\rangle = \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger\hat{b}_{\mathbf{k}+3\mathbf{q}\uparrow}^\dagger|\psi_{\text{BCS}}^0\rangle. \quad (\text{VII.131})$$

Cette possibilité contraste avec le cas bosonique où, dans un état de Fock de phonons tel que (VII.122), toutes les particules ont une impulsion \mathbf{q} , et complique nettement le calcul de L_p pour $p \geq 3$.

Heureusement, ces deux difficultés disparaissent si nous nous limitons aux états ayant une faible densité d'excitations fermioniques $\epsilon = p/\bar{N} \ll 1$. Dans ce cas, tant le blocage de Pauli que les processus de recombinaison évoqués en (VII.131) ont une probabilité négligeable, et on peut considérer que toutes les excitations bosoniques sont créées dans la même fonction d'onde, c'est-à-dire :

$$|n_{B,\mathbf{q}} = p\rangle \simeq |n_{B,\mathbf{q}} = p\rangle^{\text{approx}} = \frac{(\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger)^p}{\sqrt{p!}}|\psi_{\text{BCS}}^0\rangle. \quad (\text{VII.132})$$

où nous avons introduit l'opérateur $\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger$ qui crée une excitation bosonique dans une fonction d'onde normalisée lorsqu'il agit sur le vide des quasi-particules fermioniques

$$\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{\sqrt{L_1(q)}} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger. \quad (\text{VII.133})$$

Par rapport à $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$ l'opérateur $\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger$ a été renormalisé et purgé de la contribution des opérateurs $\hat{b}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}\hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}$ responsables des processus de recombinaison mentionnés en (VII.131).

Voyons où intervient notre approximation, en pratique, sur le calcul de L_p . D'abord, l'effet du blocage de Pauli, que nous avons pointé pour L_2 (VII.130), sur le calcul de L_p est de supprimer au plus $p - 1$ termes dans une somme qui en contient un nombre $\propto L^3$ donc comparable à \bar{N} , $\sum_{\mathbf{k}_p \neq \mathbf{k}_{p-1} \dots \mathbf{k}_1} (M_{\mathbf{k}_p}^{\mathbf{q}})^2 \simeq \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2$. L'erreur commise est $O(\epsilon)$. Ensuite, pour estimer le poids relatif Π_{rel} des états produits par les processus de recombinaison (VII.131) dans le calcul de L_p relativement à celui des états présents dans l'expression (VII.132), généralisons l'exemple (VII.131) au cas où les deux premiers facteurs $\hat{b}_{-\mathbf{k}-2\mathbf{q}\downarrow}\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}$ agissent sur un produit quelconque de $p - 1$ opérateurs de paires $\hat{b}_{\mathbf{k}_i+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger\hat{b}_{-\mathbf{k}_i\downarrow}^\dagger$, $1 \leq i \leq p - 1$; la somme sur tous les vecteurs d'onde \mathbf{k}_i possibles reconstruit l'état $|n_{B,\mathbf{q}} = p - 1\rangle^{\text{approx}}$, si bien que

$$\Pi_{\text{rel}} \approx \|\hat{b}_{-\mathbf{k}-2\mathbf{q}\downarrow}\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}|n_{B,\mathbf{q}} = p - 1\rangle^{\text{approx}}\|^2 \approx \left(\frac{pM_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}M_{\mathbf{k}+2\mathbf{q}}^{\mathbf{q}}}{L_1(q)} \right)^2 \quad (\text{VII.134})$$

en anticipant sur le résultat (VII.135). Ce facteur de réduction est donc $\propto (p/\bar{N})^2 = \epsilon^2$ puisque $L_1(q)$ est intensif alors que $M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} \approx 1/\sqrt{\bar{N}}$.

L'approximation (VII.132) suppose donc (i) que la fonction d'onde normalisée $M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}/\sqrt{L_1(q)}$ implique un grand nombre de modes fermioniques, ce qui est nécessairement le cas à la limite d'un grand système, (ii) que le nombre p d'excitations bosoniques reste une petite fraction du nombre total de particules, soit $\epsilon \ll 1$. L'idée générale de cette approximation est que les modes de quasi-particules fermioniques doivent rester toujours quasiment vides afin de ne pas être sensibles aux effets du blocage de Pauli.

c. Première application : nombres d'occupation des quasi-particules fermioniques dans l'état à p phonons Dans le cadre de l'approximation (VII.132), nous avons calculé la population des modes d'excitations fermioniques dans l'état à p excitations bosoniques :

$$\langle n_{B,\mathbf{q}} = p | \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} | n_{B,\mathbf{q}} = p \rangle = \langle n_{B,\mathbf{q}} = p | \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} | n_{B,\mathbf{q}} = p \rangle \simeq p \frac{(M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2}{L_1(q)}. \quad (\text{VII.135})$$

Ce résultat est intuitif pour des opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ considérés comme bosoniques : la population des modes de quasi-particules fermioniques dans l'état à p excitations bosoniques est simplement p fois celle dans l'état à 1 excitation, qui elle est le module au carré de la fonction d'onde normalisée $M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}/\sqrt{L_1(q)}$. Une conséquence de (VII.135) est que le nombre total d'excitations fermioniques dans l'état à p excitations bosoniques est $2p$:

$$\langle n_{B,\mathbf{q}} = p | \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \left(\hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} + \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \right) | n_{B,\mathbf{q}} = p \rangle \simeq 2p. \quad (\text{VII.136})$$

Pour obtenir le résultat (VII.135) nous calculons le commutateur de $\hat{B}_{\mathbf{q}}$ avec les opérateurs nombre de quasi-particules fermioniques :

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}, \hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger \right] = \left[\hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}, \hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger \right] = \frac{M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{\sqrt{L_1(q)}} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger. \quad (\text{VII.137})$$

Puisque cette dernière expression commute avec $\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger$, nous avons

$$\left[\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}, (\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger)^p \right] = \left[\hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}, (\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger)^p \right] = p \frac{M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{\sqrt{L_1(q)}} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger (\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger)^{p-1}. \quad (\text{VII.138})$$

Enfin, nous calculons, en itérant, le commutateur de $\hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$ avec $(\hat{B}_{\mathbf{q}})^p$:

$$\left[\hat{B}_{\mathbf{q}}, \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right] = \frac{M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{\sqrt{L_1(q)}} \left(1 - \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} - \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \right) \quad (\text{VII.139})$$

$$\begin{aligned} \left[(\hat{B}_{\mathbf{q}})^p, \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right] &= \frac{M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{\sqrt{L_1(q)}} \sum_{k=0}^{p-1} (\hat{B}_{\mathbf{q}})^{p-k-1} \left(1 - \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} - \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \right) (\hat{B}_{\mathbf{q}})^k \\ &\simeq p \frac{M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}}{\sqrt{L_1(q)}} (\hat{B}_{\mathbf{q}})^{p-1} \end{aligned} \quad (\text{VII.140})$$

Pour obtenir cette dernière égalité approchée, nous avons négligé les populations des quasi-particules dans les états à $k \leq p$ excitations bosoniques, petites devant 1 car d'ordre ϵ . Associés à l'expression approchée de L_p , ces commutateurs permettent d'obtenir le résultat (VII.135).

d. Seconde application : écart du commutateur de $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$ à l'identité Le résultat (VII.135) nous permet d'évaluer la valeur moyenne du commutateur des opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$ (VII.121) dans l'état à p excitations bosoniques. Pour ménager le lecteur, nous ne donnons sa valeur qu'à la limite aux grandes longueurs d'onde $q \rightarrow 0$ et pour un pas du réseau tendant vers 0, $l \rightarrow 0$:

$$\langle n_{B,\mathbf{q}} = p | [\hat{b}_{\mathbf{q}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger] | n_{B,\mathbf{q}} = p \rangle - 1 \simeq -2\epsilon \frac{mc^2 I_{5,0} + yJ_{5,0}}{\Delta_0 I_{2,0}}. \quad (\text{VII.141})$$

Nous utilisons les intégrales $I_{n,p}$ et $J_{n,p}$ de l'annexe E, dont nous nous sommes permis d'étendre la définition (E.1) aux exposants pairs afin d'exprimer la valeur de $\bar{N}_0^{\text{BCS}}/\bar{N}$ à la limite continue :

$$\frac{\bar{N}_0^{\text{BCS}}}{\bar{N}} \xrightarrow{l \rightarrow 0} I_{2,0} = \frac{k_\Delta^3}{2\pi^2 \rho} \int_0^{+\infty} du \frac{u^2}{\epsilon_u^2}. \quad (\text{VII.142})$$

Ces intégrales sont exprimées en fonction de $x = \Delta_0/\mu$ et $y = (\partial\Delta_0/\partial\mu)_a$ dans l'annexe E. La valeur moyenne du commutateur de $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$ diffère donc de l'unité, même à la limite d'un grand système, et l'action de ce commutateur sur les états à p excitations bosoniques n'est *a priori* pas assimilable à celle de l'identité. Néanmoins la déviation est petite pour une faible densité d'excitation car proportionnelle à ϵ . Qui plus est, elle peut être absorbée en redéfinissant les opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ par un facteur numérique.

Plus que la valeur moyenne, ce sont donc les fluctuations de ce commutateur qui nous importent. Cherchons à les calculer comme nous avons fait pour la valeur moyenne. Les commutateurs (VII.138) et (VII.140) calculés plus haut donnent accès aux corrélations des opérateurs nombre de quasi-particules fermioniques :

$$\langle n_{B,\mathbf{q}} = p | \hat{b}_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\uparrow} \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} | n_{B,\mathbf{q}} = p \rangle \simeq p(p-1) \frac{(M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2}{L_1(q)} \frac{(M_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}})^2}{L_1(q)} \quad (\text{VII.143})$$

$$\begin{aligned} \langle n_{B,\mathbf{q}} = p | \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} \hat{b}_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\uparrow} | n_{B,\mathbf{q}} = p \rangle \\ \simeq \langle n_{B,\mathbf{q}} = p | \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{b}_{-\mathbf{k}'\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}'\downarrow} | n_{B,\mathbf{q}} = p \rangle \\ \simeq \begin{cases} p(p-1) \frac{(M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2}{L_1(q)} \frac{(M_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}})^2}{L_1(q)} & \text{si } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \\ p \frac{(M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2}{L_1(q)} & \text{si } \mathbf{k} = \mathbf{k}'. \end{cases} \quad (\text{VII.144}) \end{aligned}$$

D'où nous tirons l'expression des covariances Covar_p dans l'état à p excitations bosoniques, par exemple pour deux excitations de spin \uparrow :

$$\text{Covar}_p(\hat{b}_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\uparrow} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}) \simeq \begin{cases} -p \frac{(M_{\mathbf{k}-\mathbf{q}}^{\mathbf{q}})^2 (M_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}}^{\mathbf{q}})^2}{(L_1(q))^2} & \text{si } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \\ p \frac{(M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2}{L_1(q)} (1 - p \frac{(M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2}{L_1(q)}) & \text{si } \mathbf{k} = \mathbf{k}'. \end{cases} \quad (\text{VII.145})$$

Ceci permet de calculer la variance du commutateur (VII.121) dans l'état à p excitations bosoniques. Là encore, nous ne donnons l'expression qu'à la limite des grandes longueurs d'onde. Les conclusions que nous tirerons sont néanmoins valables en toute généralité. Nous

obtenons l'expression :

$$\text{Var}_p \left[\hat{b}_{\mathbf{q}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \right]_{\mathbf{q} \rightarrow 0} \simeq \frac{p}{\bar{N}_0} \left(\frac{1}{\Delta_0} \frac{d\mu}{d\bar{N}} \right)^2 \left[2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0^8}{\epsilon_{\mathbf{k}}^8} \left(1 + \frac{d\Delta_0}{d\mu} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right)^2 \left(1 - \frac{p}{4\bar{N}_0} \frac{\Delta_0^2}{\epsilon_{\mathbf{k}}^2} \right) - \frac{1}{\bar{N}_0} \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \frac{\Delta_0^8}{\epsilon_{\mathbf{k}}^8} \left(1 + \frac{d\Delta_0}{d\mu} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right) \right)^2 \right]. \quad (\text{VII.146})$$

Cette variance est proportionnelle à $p/\bar{N}_0 \approx \epsilon$ donc faible pour une faible densité d'excitations. Mais, mieux encore, elle se comporte comme \bar{N}^{-1} puisque $d\mu/d\bar{N} = O(1/\bar{N})$ et que les sommes sur les vecteurs d'onde sont extensives. Nous sommes donc doublement autorisé à négliger les fluctuations du commutateur de $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$ dans les états à p excitations bosoniques.

Chapitre VIII

Diffusion de phase

Nous avons annoncé au chapitre II que le coefficient de diffusion de la phase peut se calculer à l'aide d'équations cinétiques ; le moment est venu de montrer que ce n'était pas une annonce en l'air. Rappelons que la diffusion de phase est à l'origine d'une décroissance exponentielle de la fonction de cohérence (*cf.* l'équation (II.50) du chapitre II) qui persiste dans l'ensemble microcanonique quand à la fois l'énergie et le nombre de particules sont fixés. Dans le chapitre II nous avons relié le coefficient D de diffusion de phase à la fonction de corrélation de $\overline{d\hat{\theta}_0/dt}$, donc à celles des nombres de quasi-particules. L'écriture d'un système d'équations cinétiques incluant toutes les excitations élémentaires, bosoniques et fermioniques, du gaz de fermions n'est pas chose aisée, mais, à basse température, grâce au chapitre précédent, nous disposons d'une approche systématique permettant de connaître les processus non linéaires d'ordre arbitrairement élevés impliquant les quasi-particules bosoniques, et donc d'écrire leurs équations cinétiques.

Nous commencerons ce chapitre par rappeler ce que sont les équations cinétiques et comment elles permettent de calculer les fonctions de corrélations des quasi-particules. Puis, pour écrire explicitement ces équations cinétiques, nous nous placerons dans le cadre théorique du chapitre précédent en considérant un condensat de paires spatialement homogène avec une interaction de contact dans l'onde s à température suffisamment faible pour pouvoir nous limiter à la branche d'excitation bosonique. Enfin nous appliquerons nos résultats au calcul du coefficient de diffusion de phase à basse température dans l'ensemble microcanonique à énergie E et nombre de particules N fixés. L'ensemble de ce chapitre réutilise, en les adaptant au cas fermionique, les résultats et raisonnements de la référence [66] obtenus pour un gaz de bosons en interaction faible.

VIII.1 Équations cinétiques pour les états de Fock de quasi-particules

Commençons par expliquer ce que sont des équations cinétiques en considérant des états de Fock de quasi-particules $|(n_{s,\alpha})_{s,\alpha}\rangle$, avec des nombres d'occupation de valeurs entières $n_{s,\alpha}$ initialement bien définies. Ces états nous serviront d'intermédiaires pour décrire un gaz où les quasi-particules interagissent peu, dont l'ensemble microcanonique peut être approché par

un mélange statistique de la forme :

$$\hat{\rho}_{\text{mc}} \simeq \sum_{(n_{s,\alpha})_{s,\alpha}} P((n_{s,\alpha})_{s,\alpha}) |(n_{s,\alpha})_{s,\alpha}\rangle \langle (n_{s,\alpha})_{s,\alpha}|. \quad (\text{VIII.1})$$

L'indice de branche s repère la statistique fermionique ou bosonique, et α contient l'ensemble des nombres quantiques. L'état de Fock de phonons (VII.122) que nous avons construit à la section VII.4.4 du chapitre précédent est un exemple d'état $|(n_{s,\alpha})_{s,\alpha}\rangle$, dans lequel $n_{B,\mathbf{q}} = p$. À cause des interactions entre quasi-particules, les nombres d'occupation à l'instant t , $n_{s_2,\alpha_2}(t) = \langle (n_{s,\alpha})_{s,\alpha} | \hat{n}_{s_2,\alpha_2}(t) | (n_{s,\alpha})_{s,\alpha} \rangle$ possèdent une dynamique que nous pouvons décrire par des équations cinétiques $dn_{s',\alpha'}/dt = f_{s',\alpha'}((n_{s,\alpha}(t))_{s,\alpha})$ si les quasi-particules interagissent faiblement (voir la section VIII.3.2 pour un calcul détaillé dans la limite de basse température). Heureusement, en pratique, les configurations de nombres d'occupation $(n_{s,\alpha}(t))_{s,\alpha}$ s'éloignent peu d'une configuration moyenne $(\bar{n}_{s,\alpha})_{s,\alpha}$ d'équilibre thermodynamique, qui est une solution stationnaire des équations cinétiques. Dans l'ensemble canonique à la température T , ces nombres d'occupation moyens sont ceux des statistiques de Fermi-Dirac ou de Bose-Einstein selon que $s = F$ ou B :

$$\bar{n}_{F,\alpha} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_{F,\alpha}}{k_B T}\right) + 1} \quad (\text{VIII.2})$$

$$\bar{n}_{B,\alpha} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\epsilon_{B,\alpha}}{k_B T}\right) - 1}. \quad (\text{VIII.3})$$

Nous pouvons donc linéariser les équations cinétiques au voisinage de la configuration moyenne $(\bar{n}_{s,\alpha})_{s,\alpha}$, ce qui conduit au système linéaire :

$$\frac{d}{dt} \vec{\delta n}(t) = M \vec{\delta n}(t) \quad (\text{VIII.4})$$

où $\vec{\delta n}(t)$ est le vecteur des écarts à l'équilibre des nombres d'occupation à l'instant t

$$\vec{\delta n}(t) \equiv (n_{s,\alpha}(t) - \bar{n}_{s,\alpha}(0))_{s,\alpha}, \quad (\text{VIII.5})$$

et la matrice M , qui sera écrite en détail dans la section VIII.3.2, est la matrice des équations cinétiques linéarisées. Elle est réelle, indépendante des populations $n_{s,\alpha}$ mais pas symétrique. Comme l'énergie de l'état de Fock est une constante du mouvement, la matrice M possède un mode de fréquence nulle. En effet, écrivons la condition de stationnarité de l'énergie, et dérivons-la par rapport au temps,

$$\sum_{s,\alpha} \epsilon_{s,\alpha} n_{s,\alpha} = \text{constante} \implies \vec{\epsilon} \cdot \frac{d}{dt} \vec{\delta n} = 0 \implies {}^t \vec{\epsilon} M \vec{\delta n} = 0, \quad (\text{VIII.6})$$

Le vecteur énergie,

$$\vec{\epsilon} = (\epsilon_{s,\alpha})_{s,\alpha}, \quad (\text{VIII.7})$$

est donc un mode de fréquence nulle à gauche de M . Pour trouver le mode de fréquence nulle à droite, nous utilisons un raisonnement qui n'est pas sans rappeler celui par lequel nous avons obtenu le mode anormal des équations de la RPA (*cf.* la section V.2.2.2 du

chapitre V). Comme nous l'avons dit plus haut la configuration moyenne $(\bar{n}_{s,\alpha})_{s,\alpha}$ est une solution stationnaire des équations cinétiques, et ce, pour toute température T . En générant la perturbation des nombre de quasi-particules associée à une petite variation de température

$$e_{s,\alpha} \propto \bar{n}_{s,\alpha}(T + \delta T) - \bar{n}_{s,\alpha}(T) \quad (\text{VIII.8})$$

on obtient un vecteur qui (i) relève du système d'équations cinétiques linéarisées (VIII.4) puisqu'il est arbitrairement proche de la configuration moyenne $\bar{n}_{s,\alpha}(T)$ et (ii) est constant au cours du temps puisqu'il est la différence de deux vecteurs constants. C'est donc un mode de fréquence nulle de la matrice M :

$$M\vec{e} = 0. \quad (\text{VIII.9})$$

Nous le normalisons en imposant la condition

$$\vec{e} \cdot \vec{e} = 1. \quad (\text{VIII.10})$$

Ceci conduit au vecteur

$$e_{s,\alpha} = \frac{d\bar{n}_{s,\alpha}/dT}{\sum_{s',\alpha'} \epsilon_{s',\alpha'} d\bar{n}_{s',\alpha'}/dT}, \quad (\text{VIII.11})$$

où le dénominateur peut aussi s'écrire $d\bar{E}/dT$ en utilisant l'énergie moyenne \bar{E} du gaz. Hormis l'énergie, il n'y a pas d'autre quantité conservée dans le gaz de quasi-particules (en particulier, le nombre total de quasi-particules n'est pas une constante du mouvement). La matrice M ne possède donc pas d'autre mode de fréquence nulle que \vec{e} . Elle induit donc un isomorphisme de l'espace orthogonal à \vec{e} , sous-espace des fluctuations d'énergie nulle. De même, la matrice tM ne possède pas d'autre mode de fréquence nulle que \vec{e} et induit un isomorphisme de l'espace orthogonal à \vec{e} . La matrice qui projète sur l'espace orthogonal à \vec{e} à droite et sur l'espace orthogonal à \vec{e} à gauche s'écrit :

$$P_{s,\alpha,s',\alpha'} = \delta_{\alpha,\alpha'} \delta_{s,s'} - \epsilon_{s,\alpha} e_{s',\alpha'}. \quad (\text{VIII.12})$$

Attention toutefois, n'étant manifestement pas symétrique, ce projecteur n'est pas orthogonal. Il vérifie ${}^tP\vec{x} = \vec{x} - (\vec{e} \cdot \vec{x})\vec{e}$ et $P\vec{x} = \vec{x} - (\vec{e} \cdot \vec{x})\vec{e}$.

VIII.2 Fonctions de corrélation microcanoniques

Expliquons maintenant comment les fonctions de corrélations dans l'ensemble microcanonique des opérateurs nombre de quasi-particules $\hat{n}_{s,\alpha}$ peuvent s'obtenir à l'aide d'équations cinétiques. Pour cela, nous introduisons la matrice des corrélations microcanoniques C_{mc} dont les coefficients sont ces fonctions de corrélation :

$$(C_{\text{mc}})_{s,\alpha,s',\alpha'}(t) = \langle (\hat{n}_{s,\alpha}(t) - \bar{n}_{s,\alpha})(\hat{n}_{s',\alpha'}(0) - \bar{n}_{s',\alpha'}) \rangle_{\text{mc}} \quad (\text{VIII.13})$$

où la notation $\langle \dots \rangle_{\text{mc}}$ indique que la moyenne est prise dans l'ensemble microcanonique. Pour un grand système, les moyennes microcanoniques sont proches de celles (VIII.2) et (VIII.3) de l'ensemble canonique et notamment $\langle \hat{n}_{s,\alpha} \rangle \simeq \bar{n}_{s,\alpha}$. Nous utilisons ensuite la description (VIII.1) de l'ensemble microcanonique comme un mélange d'états de Fock, et remarquons que dans de tels états, les fonctions de corrélation des quasi-particules se factorisent :

$$\begin{aligned} \langle (n_{s,\alpha})_{s,\alpha} | (\hat{n}_{s_2,\alpha_2}(t) - \bar{n}_{s_2,\alpha_2})(\hat{n}_{s_1,\alpha_1}(0) - \bar{n}_{s_1,\alpha_1}) | (n_{s,\alpha})_{s,\alpha} \rangle \\ = (n_{s_2,\alpha_2}(t) - \bar{n}_{s_2,\alpha_2})(n_{s_1,\alpha_1}(0) - \bar{n}_{s_1,\alpha_1}(0)). \end{aligned} \quad (\text{VIII.14})$$

Puis, en dérivant cette relation par rapport au temps, nous montrons que la matrice $C_{(n_{s,\alpha})_{s,\alpha}}$ des fonctions de corrélations dans l'état de Fock $|(n_{s,\alpha})_{s,\alpha}\rangle$ (l'équivalent de C_{mc} où l'ensemble microcanonique est remplacé par l'état de Fock) vérifie l'équation cinétique (VIII.4) :

$$\frac{dC_{(n_{s,\alpha})_{s,\alpha}}}{dt} = MC_{(n_{s,\alpha})_{s,\alpha}}. \quad (\text{VIII.15})$$

Enfin, comme la matrice M ne dépend pas des nombres d'occupations de l'état de Fock mais seulement de leurs moyennes thermiques, on peut moyenner ces équations cinétiques sur la distribution $P((n_{s,\alpha})_{s,\alpha})$ des états de Fock présents dans l'ensemble microcanonique, et montrer ainsi que l'évolution de C_{mc} est régie par la même équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}C_{\text{mc}}(t) = MC_{\text{mc}}(t). \quad (\text{VIII.16})$$

Pour initialiser cette équation différentielle, cherchons à exprimer la valeur initiale de C_{mc} , qui n'est autre que la matrice des covariances microcanoniques, en fonction de la matrice bien connue des covariances canoniques. Pour cela nous établirons la relation approchée valable pour tout opérateur quantique \hat{O} :

$$\langle \hat{O} \rangle_{\text{mc}} \simeq \langle \hat{O} \rangle_{\text{can}} - \frac{k_B T^2}{2} \frac{d}{dT} \left(\frac{\frac{d\langle \hat{O} \rangle_{\text{can}}}{dT}}{\frac{d\bar{E}}{dT}} \right) \quad (\text{VIII.17})$$

où la notation $\langle \dots \rangle_{\text{can}}$ désigne la moyenne dans l'ensemble canonique à la température T et \bar{E} l'énergie moyenne de cet ensemble. Appliquée à l'opérateur $(\hat{n}_{s,\alpha}(0) - \bar{n}_{s,\alpha})(\hat{n}_{s',\alpha'}(0) - \bar{n}_{s',\alpha'})$, cette relation fournit une expression approchée des covariances microcanoniques

$$(C_{\text{mc}}(0))_{s,\alpha,s',\alpha'} = \bar{n}_{s,\alpha}(1 + \sigma_s \bar{n}_{s,\alpha})\delta_{s,s'}\delta_{\alpha,\alpha'} - k_B T^2 \frac{\frac{d\bar{n}_{s,\alpha}}{dT} \frac{d\bar{n}_{s',\alpha'}}{dT}}{\frac{d\bar{E}}{dT}}, \quad (\text{VIII.18})$$

où le signe σ_s dépend de la nature bosonique ou fermionique des excitations, $\sigma_F = -1$ et $\sigma_B = 1$.

Pour démontrer la relation (VIII.17), imaginons un ensemble microcanonique d'énergie E proche de \bar{E} et développons la moyenne $\langle \hat{O} \rangle_{\text{mc}}$ en puissance de $E - \bar{E}$:

$$\langle \hat{O} \rangle_{\text{mc}}(E) = \langle \hat{O} \rangle_{\text{mc}}(\bar{E}) + \frac{d\langle \hat{O} \rangle_{\text{mc}}}{dE}(E - \bar{E}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\langle \hat{O} \rangle_{\text{mc}}}{d^2E}(E - \bar{E})^2 + \dots \quad (\text{VIII.19})$$

En moyennant la relation précédente sur la distribution en énergie de l'ensemble canonique nous obtenons

$$\langle \hat{O} \rangle_{\text{can}}(T) = \langle \hat{O} \rangle_{\text{mc}}(\bar{E}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\langle \hat{O} \rangle_{\text{mc}}}{d^2E}(\bar{E}) \text{Var}_{\text{can}} E + \dots \quad (\text{VIII.20})$$

avec

$$\text{Var}_{\text{can}} E = k_B T^2 \frac{d\bar{E}}{dT} \quad (\text{VIII.21})$$

la variance de l'énergie dans l'ensemble canonique. En négligeant des termes comparables à ceux négligés dans le développement (VIII.19), nous pouvons, dans le second terme du second membre de l'équation (VIII.20), faire la substitution

$$\hat{O}_{\text{mc}}(\bar{E}(T)) \simeq \hat{O}_{\text{can}}(T). \quad (\text{VIII.22})$$

En dérivant deux fois cette relation par rapport à la température, nous obtenons

$$\frac{d^2 \langle \hat{O} \rangle_{\text{mc}}(\bar{E}(T))}{d^2 E} \simeq \frac{1}{\frac{d\bar{E}}{dT}} \frac{d}{dT} \left(\frac{\frac{d\langle \hat{O} \rangle_{\text{can}}}{dT}}{\frac{d\bar{E}}{dT}} \right). \quad (\text{VIII.23})$$

Il ne reste qu'à combiner les équations (VIII.20), (VIII.21) et (VIII.23) pour obtenir la relation promise (VIII.17).

VIII.3 Équations cinétiques à basse température pour une branche bosonique convexe

Pour déterminer l'évolution des populations de quasi-particules, nous devons *a priori* énumérer tous les processus non linéaires qui influent sur la cinétique du gaz de quasi-particules. Cette tâche, très ambitieuse, va au-delà du cadre de cette thèse. Elle nécessiterait en particulier de proposer des processus d'interaction entre quasi-particules bosoniques et fermioniques, problème qui n'a encore été qu'abordé par la littérature [51]. À l'inverse, les outils que nous avons développés au chapitre précédent grâce à la théorie variationnelle nous placent en position de force pour étudier les interactions entre quasi-particules bosoniques. C'est pourquoi nous supposons la température T suffisamment basse pour que l'on puisse omettre la branche d'excitation fermionique et se limiter aux nombres d'onde q arbitrairement faibles de la branche d'excitation bosonique. Comme nous l'avons expliqué en détail à la section VII.3.3.3 du chapitre VII, les processus dominants dans ce cas sont du type 1 phonon \leftrightarrow 2 phonons lorsque la branche est convexe et 2 phonons \leftrightarrow 2 phonons lorsque la branche est concave. Dans cette thèse nous choisissons de nous limiter au cas convexe, soit $k_F a > -0,144$ d'après la RPA. C'est qualitativement la même situation et les mêmes équations cinétiques que celles du gaz de bosons en interaction faible. Nous pourrions donc réutiliser une bonne part des résultats obtenus à la limite de basse température par la référence [66]. Mais, quantitativement, il demeure quelques différences : les relations de dispersion $\mathbf{q} \mapsto \epsilon_{B,\mathbf{q}}$ diffèrent, de même que les amplitudes de couplage Beliaev-Landau adimensionnées \mathcal{A} , qui apparaissent dans le hamiltonien d'interaction entre les quasi-particules et déterminent les taux des processus 1 phonon \leftrightarrow 2 phonons. Notre première tâche sera de calculer ces amplitudes.

VIII.3.1 Amplitudes de couplage Beliaev-Landau des excitations bosoniques

Pour obtenir les amplitudes de couplage des processus de Beliaev-Landau, éléments de matrice du hamiltonien entre états quantiques séparés par un processus 1 phonon \leftrightarrow 2 phonons, deux voies sont possibles. La première est d'utiliser une théorie entièrement microscopique, qui prend en compte la nature fermionique sous-jacente des particules du gaz, comme le fait la théorie variationnelle du chapitre VII. La deuxième, moins ambitieuse, est d'utiliser l'hydrodynamique quantique de Landau et Khalatnikov [44], théorie mésoscopique qui traite les paires de fermions à grande échelle comme des particules bosoniques (*cf.* le chapitre III). Nous explorerons ces deux voies successivement, ce qui nous permettra au passage de discuter la validité de l'hydrodynamique quantique.



FIGURE VIII.1 – Les processus $1 \rightarrow 2$ (dit de Beliaev) et $2 \rightarrow 1$ (dit de Landau) d’interaction de quasi-particules bosoniques de vecteurs d’onde respectivement \mathbf{q} , \mathbf{q}_+ , \mathbf{q}_- avec $\mathbf{q} = \mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_-$ et \mathbf{q} , \mathbf{q}_i , \mathbf{q}_+ avec $\mathbf{q}_i = \mathbf{q} + \mathbf{q}_+$.

VIII.3.1.1 Approche microscopique

a. Cas général L’esprit du calcul microscopique de l’amplitude de couplage est simple : il faut exprimer le hamiltonien semi-classique (VII.9) en termes des opérateurs associés aux modes propres de la théorie linéarisée, isoler les termes contenant les opérateurs de création/annihilation correspondant aux processus étudiés et extraire leur coefficient. Pour les processus de Beliaev-Landau entre phonons, ce sont les termes cubiques du hamiltonien, rassemblés dans E_3 , qu’il faut exprimer en fonction des opérateurs $b_{\mathbf{q}}$. Nous injectons le développement tronqué (VII.113) du champ sur les modes propres collectifs dans l’expression (VII.25) et obtenons le résultat suivant :

$$E_3 = \frac{mc^2}{\bar{N}^{1/2}} \sum_{\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-, \mathbf{q}_i \in \mathcal{D}} \delta_{\mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_-, \mathbf{q}_i} \times (\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-; \mathbf{q}_i) b_{\mathbf{q}_+}^* b_{\mathbf{q}_-}^* b_{\mathbf{q}_i} + \text{c.c.}) + \dots \quad (\text{VIII.24})$$

Les vecteurs \mathbf{q}_+ , \mathbf{q}_- et \mathbf{q}_i sont les trois vecteurs d’onde des phonons impliqués dans le processus de Beliaev-Landau, \mathbf{q}_i étant l’impulsion du phonon qui se désintègre ou se forme à partir des phonons \mathbf{q}_+ et \mathbf{q}_- . L’ellipse ... concerne les processus à trois corps impliquant des excitations autres que bosoniques ainsi que les processus non résonnants $b_{\mathbf{q}_1} b_{\mathbf{q}_2} b_{\mathbf{q}_3}$ et $b_{\mathbf{q}_1}^* b_{\mathbf{q}_2}^* b_{\mathbf{q}_3}^*$. Nous avons mis de côté *a priori* le préfacteur $mc^2/\bar{N}^{1/2}$ qui donne l’échelle d’énergie et le comportement à la limite thermodynamique de l’amplitude de couplage dimensionnée, qui décroît donc comme $1/\bar{N}^{1/2}$ dans cette limite. Enfin, l’amplitude de couplage adimensionnée $\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-; \mathbf{q}_i)$ du processus $b_{\mathbf{q}_i}^* b_{\mathbf{q}_+} b_{\mathbf{q}_-}$ vaut :

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{\bar{N}^{1/2}} \mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-; \mathbf{q}_i) &= \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathcal{D}} \left[\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} M_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \left(M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{-\mathbf{q}_i} M_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}_-} + N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \right) \right. \\ &\quad + \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} N_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \left(M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} + N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{-\mathbf{q}_i} N_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}_-} \right) \\ &\quad \left. + \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} \left(N_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} + M_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} \right) + \mathbf{q}_+ \leftrightarrow \mathbf{q}_- \right], \quad (\text{VIII.25}) \end{aligned}$$

où la notation $\mathbf{q}_+ \leftrightarrow \mathbf{q}_-$ signifie qu’il faut ajouter aux termes présents dans l’équation (G.4) ceux obtenus en inversant \mathbf{q}_+ et \mathbf{q}_- et en laissant \mathbf{q}_i inchangé.

b. Limite des grandes longueurs d'onde À basse température, ce sont les phonons de faibles vecteurs d'onde qui dominent la cinétique du gaz, ce qui motive l'étude de l'amplitude $\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}$ dans la limite $q_+, q_-, q_i \rightarrow 0$. En outre, c'est seulement dans cette limite que nous pouvons espérer comparer au résultat hydrodynamique. Nous effectuons donc le développement limité de l'expression (G.4), en nous plaçant à la limite d'un espace continu $l \rightarrow 0$, ce qui permet d'effectuer les intégrales sur les degrés de liberté internes \mathbf{k} et \mathbf{k}' et d'obtenir une expression qui dépend uniquement des vecteurs \mathbf{q}_+ , \mathbf{q}_- et \mathbf{q}_i du processus. Ce calcul est détaillé dans l'annexe G. C'est le caractère fermionique sous-jacent du problème qui lui donne tout son sel.

Plutôt que d'utiliser les vecteurs d'onde, nous choisissons de paramétrer le résultat par les énergies $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$. Le passage d'un jeu de variables à l'autre se fait grâce aux relations de dispersion (VII.72) et de conservation de l'impulsion. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-; \mathbf{q}_i) = & \left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)^{-1/2} \frac{1}{2^{3/2}\sqrt{\omega_{\mathbf{q}_+}\omega_{\mathbf{q}_-}\omega_{\mathbf{q}_i}}} \left[2J(x, y) (\omega_{\mathbf{q}_+} + \omega_{\mathbf{q}_-} - \omega_{\mathbf{q}_i}) \right. \\ & + \left(\frac{\hbar}{mc^2}\right)^2 \left\{ A(x, y)(\omega_{\mathbf{q}_+} + \omega_{\mathbf{q}_-} - \omega_{\mathbf{q}_i})(\omega_{\mathbf{q}_+}^2 + \omega_{\mathbf{q}_-}^2 + \omega_{\mathbf{q}_i}^2) \right\} + B(x, y) (\omega_{\mathbf{q}_i}^3 - \omega_{\mathbf{q}_+}^3 - \omega_{\mathbf{q}_-}^3) \\ & \left. + C(x, y)\omega_{\mathbf{q}_+}\omega_{\mathbf{q}_-}\omega_{\mathbf{q}_i} + O(\omega^5) \right] \end{aligned} \quad (\text{VIII.26})$$

où les fractions rationnelles A , B , C et J en x et y sont données par l'équation G.52 de l'annexe G. Notons que cette amplitude contient un dénominateur en $(\omega_{\mathbf{q}_+}\omega_{\mathbf{q}_-}\omega_{\mathbf{q}_i})^{1/2}$ qui peut faire diverger l'amplitude de couplage à la limite des grandes longueurs d'onde si le processus considéré n'est pas sur la couche de masse, c'est-à-dire ne vérifie pas la relation de conservation de l'énergie

$$\omega_{\mathbf{q}_i} = \omega_{\mathbf{q}_+} + \omega_{\mathbf{q}_-}. \quad (\text{VIII.27})$$

Avant d'étudier spécifiquement ces processus résonnants, prenons la limite CBE de notre résultat, c'est-à-dire faisons [88] $x \rightarrow 0^+$ avec $y \sim -4/x$ (voir en annexe G les limites (G.53) des fractions rationnelles) et cherchons à retrouver le résultat obtenu par la méthode de Bogolioubov jusqu'au troisième ordre [91, 66]. Il suffit de linéariser l'équation (16) de la référence [66] aux faibles q et d'écrire le résultat pour un gaz de $\bar{N}_B = \bar{N}/2$ dimères bosoniques de masse $m_B = 2m$, et de vitesse du son c en termes des énergies des excitations de Bogolioubov pour comparer avec succès le résultat bosonique avec la limite CBE de notre expression (VIII.26) :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-; \mathbf{q}_i) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0^+ \\ y \equiv 4/x}]{x} & \left(\frac{\hbar}{m_{BC}}\right)^{-1/2} \left(\frac{1}{q_i q_+ q_-}\right)^{1/2} \\ & \times \left[q_+ + q_- - q_i + \frac{1}{8} \left(\frac{\hbar}{m_{BC}}\right)^2 \left\{ (q_+^2 q_- + q_-^2 q_+) (1 + \cos \alpha) + (6 + \cos \alpha) q_+ q_- q_i \right\} \right] + O(q^5). \end{aligned} \quad (\text{VIII.28})$$

c. Processus résonnants Nous concluons cette approche microscopique en calculant l'amplitude de couplage sur la couche de masse, c'est-à-dire pour les processus qui vérifient

la conservation de l'énergie (VIII.27). Les fractions rationnelles B et C se regroupent alors pour former la quantité thermodynamique

$$3B(x, y) + C(x, y) = 1 + \frac{\bar{\rho}}{3} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \bar{\rho}^2} \right)_a \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{\rho}} \right)_a^{-1} \equiv 1 + \Lambda_F \quad (\text{VIII.29})$$

dont l'expression en termes de x et y s'obtient en dérivant deux fois l'équation d'état BCS (IV.61) et est donnée par l'équation G.54 de l'annexe G. Ceci conduit à la très jolie formule de l'amplitude de couplage sur la couche de masse :

$$\mathcal{A}_{\text{Cdm}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-; \mathbf{q}_i) = \frac{3\sqrt{2}}{8} (1 + \Lambda_F) \sqrt{\frac{\hbar^3 q_+ q_- q_i}{m^3 c^3}} + O(q^{7/2}) \quad (\text{VIII.30})$$

L'apparition du paramètre thermodynamique $1 + \Lambda_F$ est la seule différence entre cette formule et son équivalent pour un gaz de bosons obtenu par la théorie de Bogolioubov (à ce sujet voir les équations (D8) et (D9) de la référence [66]). Les variations de ce facteur dans la zone de raccordement CBE-BCS sont représentées sur la figure VIII.2. Notons qu'il vaut zéro dans la limite CBE ($x \rightarrow 0^+$, $y \sim -4/x$) comme dans un gaz de bosons en interaction faible où $\mu \propto \bar{\rho}$. Il vaut $-1/9$ tant à la limite unitaire ($x = y$) que dans le régime BCS ($x \rightarrow 0$, $y \rightarrow 0$) puisque dans les deux cas $\mu \propto \bar{\rho}^{2/3}$.

VIII.3.1.2 Approche hydrodynamique

Essayons maintenant de retrouver l'expression (VIII.30) par l'hydrodynamique quantique du chapitre III. Que le lecteur se rassure, après la difficulté du calcul microscopique, cette section lui semblera bien bénigne. L'idée générale reste la même, nous rassemblons les termes cubiques du hamiltonien hydrodynamique (III.4) :

$$\hat{H}_{\text{hydro}}^{(3)} = l^3 \sum_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{2} \frac{\hbar^2}{m} \nabla \delta \hat{\phi} \cdot \delta \hat{\rho} \nabla \delta \hat{\phi} + \frac{1}{6} \frac{d^2 \mu_0}{d\rho^2}(\hat{\rho}_0) (\delta \hat{\rho})^3 \right], \quad (\text{VIII.31})$$

et nous y injectons les développements (III.17) et (III.18) des champs sur les modes propres. Nous éliminons les termes non résonnants linéaires ou cubiques de la forme $\hat{b}_{\mathbf{q}_1} \hat{b}_{\mathbf{q}_2} \hat{b}_{\mathbf{q}_3}$ ou $\hat{b}_{\mathbf{q}_1}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_2}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_3}^\dagger$ et faisons les changements de variables appropriés sur les termes restant pour factoriser systématiquement l'opérateur $\hat{b}_{\mathbf{q}_i}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_+} \hat{b}_{\mathbf{q}_-}$ ou son hermitien conjugué. Nous assimilons, pour des termes cubiques en les fluctuations du champ, les grandeurs nues aux grandeurs effectives, et obtenons alors le hamiltonien des processus Beliaev-Landau :

$$\hat{H}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1} = \frac{mc^2(\hat{\rho}_0)}{(\hat{\rho}_0 L^3)^{1/2}} \sum_{\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_i \in \mathcal{D}^*} \mathcal{A}_{\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_i}^{\text{hydro}} \left[\hat{b}_{\mathbf{q}_i}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_+}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_-} + \text{h.c.} \right] \quad (\text{VIII.32})$$

avec des vecteurs d'onde \mathbf{q}_+ , \mathbf{q}_- et \mathbf{q}_i liés par la relation de conservation de l'impulsion (??) et une amplitude de couplage

$$\mathcal{A}_{\text{hydro}}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-; \mathbf{q}_i) = \frac{1}{2^{5/2}} \sqrt{\frac{\hbar^3 q_+ q_- q_i}{m^3 c^3}} \left(\hat{\rho}_0 \left(\frac{d\mu_0}{d\rho}(\hat{\rho}_0) \right)^{-1} \frac{d^2 \mu_0}{d\rho^2}(\hat{\rho}_0) \right. \\ \left. + \cos(\widehat{\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-}) + \cos(\widehat{\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_i}) + \cos(\widehat{\mathbf{q}_-, \mathbf{q}_i}) \right). \quad (\text{VIII.33})$$

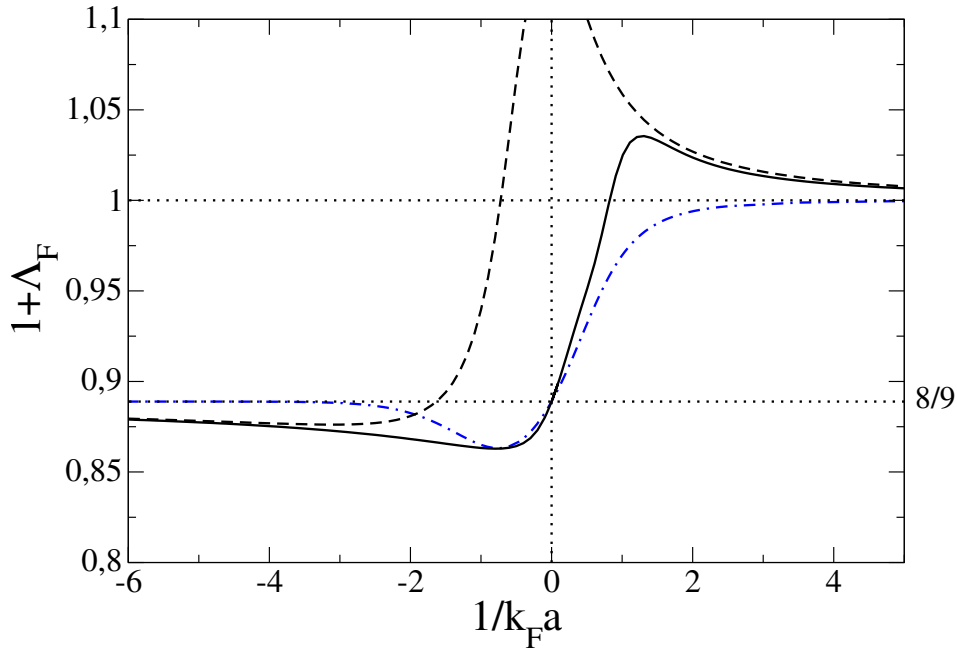


FIGURE VIII.2 – Le facteur $1 + \Lambda_F$, contribution de l'équation d'état du gaz de fermions à l'amplitude de couplage (*cf.* l'équation (VIII.29)), est tracé en fonction de la force des interactions $1/k_F a$. La courbe en trait noir plein provient de l'équation d'état mesurée expérimentalement dans la référence [31]. Dans les limites CBE ($k_F a \rightarrow 0^+$) et BCS ($k_F a \rightarrow 0^-$) nous donnons en trait tireté noir ses comportements asymptotiques obtenus à partir des corrections dites de Lee-Huang-Yang. La courbe prédite par l'équation d'état BCS (IV.61) est donnée par comparaison en trait bleu tireté. Relevons que facteur $1 + \Lambda_F$ tend vers 1 à la limite CBE, comme pour un gaz de bosons en interaction faible. Il vaut $8/9$ à la limite unitaire, et tend vers cette valeur dans le régime BCS, puisque dans les deux cas on a $\mu \propto \bar{\rho}^{2/3}$.

Cette dernière est manifestement différente de l'expression microscopique (VIII.26) (en particulier elle ne diverge pas à la limite des grandes longueurs d'onde). En revanche, l'amplitude de couplage sur la couche de masse, lorsque l'énergie est conservée et par conséquent les trois vecteurs d'onde \mathbf{q}_+ , \mathbf{q}_- et \mathbf{q}_i sont quasi alignés, coïncide bien avec le résultat microscopique (VIII.30). Pour l'objectif qui nous occupe ici, qui est d'établir des équations cinétiques, il y a donc accord entre l'approche microscopique et l'approche hydrodynamique. En revanche, dès lors que l'on considère des processus non résonnants, comme le font par exemple Landau et Khalatnikov en considérant des processus 2 phonons \leftrightarrow 1 phonon virtuels pour calculer la viscosité de l'hélium, l'utilisation de la formule hydrodynamique (VIII.33) doit être justifiée.

VIII.3.2 Application aux équations cinétiques

Dans cette section nous nous plaçons à la limite continue et remplaçons donc les sommes sur les vecteurs d'onde par des intégrales. D'après la règle d'or de Fermi, la probabilité de transition par unité de temps associée à un processus Beliaev-Landau 1 phonon \rightarrow 2 phonons donné s'écrit [92]

$$p_{\mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_-} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle n_{\mathbf{q}_i} - 1, n_{\mathbf{q}_+} + 1, n_{\mathbf{q}_-} + 1 | \hat{H}^{(3)} | n_{\mathbf{q}_i}, n_{\mathbf{q}_+}, n_{\mathbf{q}_-} \rangle \right|^2 \delta(\omega_{\mathbf{q}_+} + \omega_{\mathbf{q}_-} - \omega_{\mathbf{q}_i}) \quad (\text{VIII.34})$$

où, dans les états de Fock initial et final, nous ne notons que les trois nombres d'occupations $n_{\mathbf{q}_i}$, $n_{\mathbf{q}_+}$ et $n_{\mathbf{q}_-}$ affectés par le processus en omettant, comme dans le reste de cette sous-section, l'indice de branche puisqu'il ne sera jamais question ici de la branche fermionique. Comme les théories se valent pour les processus où l'énergie est conservée (conservation qui se manifeste dans l'équation (VIII.34) à travers le δ de conservation de l'énergie), le hamiltonien $\hat{H}^{(3)}$ peut être au choix celui de l'hydrodynamique quantique (VIII.31) ou l'énergie E_3 de la théorie variationnelle (VIII.24), où l'on a quantifié les opérateurs $b_{\mathbf{q}}$ selon la procédure détaillée à la section VII.4.3 du chapitre VII. Dans la version quantique de l'expression (VIII.24) de E_3 le terme pouvant coupler les états de Fock $|n_{\mathbf{q}_i}, n_{\mathbf{q}_+}, n_{\mathbf{q}_-}\rangle$ et $|n_{\mathbf{q}_i} - 1, n_{\mathbf{q}_+} + 1, n_{\mathbf{q}_-} + 1\rangle$ est celui qui comporte l'opérateur $\hat{b}_{\mathbf{q}_+}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_-}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_i}$, et apparaît en fait en double. Son action sur les états de Fock est triviale :

$$p_{\mathbf{q}_i \rightarrow \mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_-} = \frac{8\pi m^2 c^4}{\hbar \bar{N}} \left| \mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-; \mathbf{q}_i) \right|^2 n_{\mathbf{q}_i} (n_{\mathbf{q}_+} + 1) (n_{\mathbf{q}_-} + 1) \delta_{\mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_-, \mathbf{q}_i} \delta(\omega_{\mathbf{q}_+} + \omega_{\mathbf{q}_-} - \omega_{\mathbf{q}_i}) \quad (\text{VIII.35})$$

La probabilité du processus conjugué 2 phonons \rightarrow 1 phonon s'écrit de même :

$$p_{\mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_- \rightarrow \mathbf{q}_i} = \frac{8\pi m^2 c^4}{\hbar \bar{N}} \left| \mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-; \mathbf{q}_i) \right|^2 (n_{\mathbf{q}_i} + 1) n_{\mathbf{q}_+} n_{\mathbf{q}_-} \delta_{\mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_-, \mathbf{q}_i} \delta(\omega_{\mathbf{q}_+} + \omega_{\mathbf{q}_-} - \omega_{\mathbf{q}_i}) \quad (\text{VIII.36})$$

Pour écrire l'équation cinétique sur le nombre d'occupation $n_{\mathbf{q}}$ d'un vecteur d'onde \mathbf{q} donné, nous sommes sur tous les processus Beliaev-Landau susceptibles de l'affecter. Nous considérons successivement la possibilité que \mathbf{q} soit le vecteur d'onde incident \mathbf{q}_i , auquel cas nous sommes sur le vecteur émergent \mathbf{q}_+ en ajoutant un facteur 1/2 pour ne pas compter deux fois le même état final, ou qu'il soit un des vecteurs émergents, auquel cas nous sommes sur le vecteur incident, que le processus soit un processus de dissociation 1 phonon \rightarrow 2 phonons (dit de Beliaev) ou de recombinaison 2 phonons \rightarrow 1 phonon (dit de Landau). L'équation

cinétique qui en découle s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_{\mathbf{q}} = & -\frac{m^2c^4}{2\pi^2\hbar^2\rho} \int d^3q_+ |\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_+, \mathbf{q} - \mathbf{q}_+; \mathbf{q})|^2 (n_{\mathbf{q}}(1 + n_{\mathbf{q}_+} + n_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_+}) - n_{\mathbf{q}_+}n_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_+}) \\ & \times \delta(\omega_{\mathbf{q}_+} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_+} - \omega_{\mathbf{q}}) \\ & - \frac{m^2c^4}{\pi^2\hbar^2\rho} \int d^3q_i |\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}, \mathbf{q}_i - \mathbf{q}; \mathbf{q}_i)|^2 (n_{\mathbf{q}}n_{\mathbf{q}_i-\mathbf{q}} - n_{\mathbf{q}_i}(1 + n_{\mathbf{q}} + n_{\mathbf{q}_i-\mathbf{q}})) \\ & \times \delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}_i-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}_i}) \quad (\text{VIII.37}) \end{aligned}$$

Comme nous l'avons indiqué à l'équation (VIII.4), nous linéarisons cette équation cinétique pour $\delta n_{\mathbf{q}} = n_{\mathbf{q}} - \bar{n}_{\mathbf{q}} \ll 1$. Étant donnée l'invariance par rotation, le nombre de quasi-particules $n_{\mathbf{q}}$ dépend uniquement du module de q , de même que sa valeur moyenne $\bar{n}_{\mathbf{q}}$. Pour pouvoir regrouper les équations cinétiques par valeur du module de q , nous posons donc $\delta n_{\mathbf{q}} = \delta n_q$ avec \mathbf{e} un vecteur unitaire quelconque, et de même $\bar{n}_{\mathbf{q}} = \bar{n}_{q\mathbf{e}}$. Nous obtenons :

$$\frac{d}{dt}\delta n_q = -(\Gamma_q^{\text{Lan}} + \Gamma_q^{\text{Bel}})\delta n_q + I_q. \quad (\text{VIII.38})$$

où les taux $\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{Lan}}$ et $\Gamma_{\mathbf{q}}^{\text{Bel}}$ sont les taux d'amortissement des phonons de vecteur d'onde \mathbf{q} , dus respectivement aux processus de Landau et de Beliaev, qui figurent sur la diagonale de la matrice M . L'intégrale de collision $I_{\mathbf{q}}$ contient quant à elle les termes non diagonaux. À basse température, dans la limite des grandes longueurs d'onde, ces quantités possèdent l'expression suivante :

$$\Gamma_q^{\text{Bel}} = \frac{9}{32\pi}(1 + \Lambda_F)^2 \frac{mc^2}{\hbar\rho} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \int_0^q dq'(q')^2 (q - q')^2 (1 + \bar{n}_{q'} + \bar{n}_{q-q'}) \quad (\text{VIII.39})$$

$$\Gamma_q^{\text{Lan}} = \frac{9}{16\pi}(1 + \Lambda_F)^2 \frac{mc^2}{\hbar\rho} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \int_q^\infty dq'(q')^2 (q' - q)^2 (\bar{n}_{q'-q} - \bar{n}_{q'}) \quad (\text{VIII.40})$$

$$\begin{aligned} I_q = & \frac{9}{16\pi}(1 + \Lambda_F)^2 \frac{mc^2}{\hbar\rho} \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^2 \left[\int_q^\infty dq'(q')^2 \delta n_{q'} (q - q')^2 (1 + \bar{n}_{q'-q} + \bar{n}_q) \right. \\ & \left. + \int_0^q dq' \delta n_{q'} (q + q')^2 (\bar{n}_{q'+q} - \bar{n}_q) + \int_0^q dq'(q')^2 \delta n_{q'} (q - q')^2 (\bar{n}_{q-q'} - \bar{n}_q) \right], \quad (\text{VIII.41}) \end{aligned}$$

où on rappelle que

$$\Lambda_F = \frac{\bar{\rho}}{3} \frac{d^2\mu}{d\bar{\rho}^2} \left(\frac{d\mu}{d\bar{\rho}}\right)^{-1} \quad (\text{VIII.42})$$

est représenté sur la figure VIII.2. Pour obtenir ces expressions, nous utilisons le résultat (VIII.30) pour l'amplitude de couplage et évaluons l'intégrale angulaire en remarquant que seul le Dirac de conservation de l'énergie dépend du paramètre angulaire $v = \cos(\widehat{\mathbf{q}_+, \mathbf{q}})$. En supposant monotone donc inversible la fonction $v \mapsto \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_+}$ à norme de \mathbf{q} et \mathbf{q}_+ fixées (c'est le cas à suffisamment basse température pour une relation de dispersion phononique) nous obtenons :

$$\int_{-1}^1 dv \delta(\omega_{\mathbf{q}_+} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_+} - \omega_{\mathbf{q}}) = \left| \frac{d\omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_+}}{dv} \right|^{-1} H(q - q_+) \simeq \frac{|q - q_+|}{cq q_+} H(q - q_+) \quad (\text{VIII.43})$$

$$\int_{-1}^1 dv \delta(\omega_{\mathbf{q}} + \omega_{\mathbf{q}_i-\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{q}_i}) = \left| \frac{d\omega_{\mathbf{q}_i-\mathbf{q}}}{dv} \right|^{-1} H(q_i - q) \simeq \frac{|q_i - q|}{cq q_i} H(q_i - q). \quad (\text{VIII.44})$$

où H est la fonction de Heaviside

$$H(q) = \begin{cases} 1 & \text{si } q \geq 0 \\ 0 & \text{si } q < 0 \end{cases} \quad (\text{VIII.45})$$

Ce sont les expressions du troisième membre, qui correspondent à la limite des grandes longueurs d'onde, que nous utilisons pour établir les équations (VIII.39, VIII.40, VIII.41).

Pour relier les résultats (VIII.39, VIII.40, VIII.41) aux équations (D10, D11, D12) de la référence [66], et pouvoir tirer partie de la diagonalisation numérique de la matrice M effectuée par cette référence, il ne reste qu'à changer l'adimensionnement des nombres d'onde en choisissant une échelle adaptée à la limite de basse température car comparable au vecteur d'onde thermique typique $q_{\text{therm}} \approx \frac{k_B T}{\hbar c} \ll \frac{mc}{\hbar}$, et tant qu'à faire conforme aux équations (D1) et (D4) de cette référence :

$$\tilde{q} \equiv \frac{\hbar q c}{\sqrt{2k_B T}} \quad (\text{VIII.46})$$

avec comme petit paramètre

$$\varepsilon \equiv \frac{k_B T}{mc^2} \ll 1. \quad (\text{VIII.47})$$

De même, nous adimensionnons les taux Γ et l'intégrale I par le taux que nous interpréterons plus loin comme le taux de collision typique entre quasi-particules (voir l'équation (55) de la référence [66] dans le cas bosonique et plus loin l'équation (VIII.61)), et nous adimensionnons le temps t par l'inverse de ce taux :

$$\tilde{\Gamma} \equiv \varepsilon^{-5} 2^{-3/2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^{-3} \frac{2\pi^2 \hbar \rho}{mc^2} \Gamma \quad (\text{VIII.48})$$

$$\tilde{t} \equiv \varepsilon^5 2^{3/2} \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^3 \frac{mc^2}{2\pi^2 \hbar \rho} t. \quad (\text{VIII.49})$$

Cet adimensionnement ne diffère de celui de l'équation (A7) de la référence [66] que par l'inclusion du petit paramètre ε , et ce afin d'être cohérent avec la définition (VIII.46) et la limite de basse température. Ainsi adimensionnées, les équations (VIII.39, VIII.40, VIII.41) reproduisent bien celles (D10, D11, D12) de la référence [66] à condition de prendre $\Lambda_F = 0$ comme dans un gaz de bosons en interaction faible où $\mu_0(\rho) \propto \rho$. La matrice M des équations cinétiques linéarisées est donc identique, au facteur $(1 + \Lambda_F)^2$ près.

VIII.4 Application au coefficient de diffusion de la phase à basse température

En prenant la moyenne à gros grains de la dérivée de l'opérateur phase (II.32), le coefficient de diffusion de phase s'exprime comme l'intégrale sur le temps de la matrice des corrélations microcanoniques contractée selon une direction \vec{A} :

$$D = \int_0^{+\infty} dt {}^t \vec{A} C_{\text{mc}}(t) \vec{A}. \quad (\text{VIII.50})$$

On détermine le vecteur \vec{A} en considérant la dérivée de la phase $\overline{\hat{\theta}_0/dt}^t$ comme un vecteur dans l'espace des opérateurs nombres de quasi-particules. D'après l'équation (II.32) :

$$A_{s,\alpha} = \frac{2}{\hbar} \frac{d}{dN} \epsilon_{s,\alpha}. \quad (\text{VIII.51})$$

Pour calculer l'intégrale sur le temps dans l'équation (VIII.50), nous intégrons formellement l'équation cinétique (VIII.16) entre 0 et $+\infty$. Puisque les fonctions de corrélations tendent vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$, nous obtenons :

$$-C_{\text{mc}}(0)\vec{A} = M \int_0^{+\infty} C_{\text{mc}}(t)\vec{A}dt, \quad (\text{VIII.52})$$

après multiplication à droite par \vec{A} . Comme le vecteur $C_{\text{mc}}(t)\vec{A}$ appartient à l'espace orthogonal au vecteur énergie $\vec{\epsilon}$ (en effet ${}^t\vec{\epsilon}C_{\text{mc}}(t) = 0$ pour tout t puisque l'énergie ne fluctue pas dans l'ensemble microcanonique), nous pouvons utiliser l'inverse de M dans ce sous-espace (noté M^{-1} au prix d'un léger abus d'écriture) pour inverser la relation (VIII.52). Nous contractons ensuite à gauche par le vecteur ${}^t(P\vec{A})$ qui appartient par construction à l'espace orthogonal à $\vec{\epsilon}$ où l'action de M^{-1} à gauche est définie, voir l'équation (VIII.12) définissant P . Finalement la propriété ${}^tPC_{\text{mc}}(t) = C_{\text{mc}}(t)$, autre conséquence de l'absence de fluctuations d'énergie, permet de faire le lien avec l'expression (VIII.50) de D , et d'écrire :

$$D = -{}^t(P\vec{A})M^{-1}C_{\text{mc}}(0)\vec{A}. \quad (\text{VIII.53})$$

Nous connaissons bien la matrice la matrice M à basse température grâce à la section VIII.3.2. Sa diagonalisation et son inversion sont effectuées numériquement par la référence [66]. Reste à calculer les vecteurs contractant $C_{\text{mc}}(0)\vec{A}$ et $P\vec{A}$ et nous pourrons donner une estimation quantitative du coefficient D . Pour cela écrivons les développements à basse température ($\epsilon \rightarrow 0$) de l'énergie $\epsilon_{B,\mathbf{q}}$ des excitations bosoniques et de sa dérivée par rapport à \bar{N} en reprenant l'adimensionnement (VIII.46) des vecteurs d'onde :

$$\epsilon_{B,\mathbf{q}} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} \sqrt{2}k_B T \tilde{q} \left[1 + \frac{1}{4} \gamma \epsilon^2 \tilde{q}^2 + O(\epsilon^4) \right] \quad (\text{VIII.54})$$

$$\bar{N} \frac{d\epsilon_{B,\mathbf{q}}}{d\bar{N}} \underset{\epsilon \rightarrow 0}{=} \epsilon_{B,\mathbf{q}} \left[\frac{\bar{N}}{c} \frac{dc}{d\bar{N}} + \epsilon^2 \tilde{q}^2 \frac{\gamma}{4} \left(\frac{\bar{N}}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\bar{N}} - 2 \frac{\bar{N}}{c} \frac{dc}{d\bar{N}} \right) + O(\epsilon^4) \right] \quad (\text{VIII.55})$$

En utilisant l'équation (VIII.18) pour évaluer la partie bosonique de la matrice C_{mc} , la définition (VIII.12) du projecteur P et celle (VIII.51) du vecteur \vec{A} , on obtient

$$\frac{\bar{N}\hbar}{mc^2} (C_{\text{mc}}\vec{A})_{B,\mathbf{q}} = \bar{n}_{\mathbf{q}}(1 + \bar{n}_{\mathbf{q}}) \frac{\sqrt{2}\gamma}{2} \epsilon^3 \left(2 \frac{\bar{N}}{c} \frac{dc}{d\bar{N}} - \frac{\bar{N}}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\bar{N}} \right) (\mathcal{R}\tilde{q} - \tilde{q}^3) + O(\epsilon^5) \quad (\text{VIII.56})$$

$$\frac{\bar{N}\hbar}{mc^2} (P\vec{A})_{B,\mathbf{q}} = \frac{\sqrt{2}\gamma}{2} \epsilon^3 \left(2 \frac{\bar{N}}{c} \frac{dc}{d\bar{N}} - \frac{\bar{N}}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\bar{N}} \right) (\mathcal{R}\tilde{q} - \tilde{q}^3) + O(\epsilon^5) \quad (\text{VIII.57})$$

avec, comme dans la référence [66] :

$$\mathcal{R} = \frac{\int_0^\infty q^6 dq \bar{n}_q (1 + \bar{n}_q)}{\int_0^\infty q^4 dq \bar{n}_q (1 + \bar{n}_q)}. \quad (\text{VIII.58})$$

Notons que le dénominateur de \mathcal{R} est proportionnel à la quantité $d\bar{E}/dT$ calculée à basse température et à la limite continue. Les expressions (VIII.56) et (VIII.57) se comparent avec succès à celles (D13) et (D14) de la référence [66] à condition d'utiliser la relation de dispersion et l'équation d'état de Bogolioubov, donc de poser $\gamma = 1$, $\bar{N}dc/(cd\bar{N}) = 1/2$ et $d\gamma/d\bar{N} = 0$, et de retirer le facteur 2 de spin présent à l'origine dans l'équation fondamentale de la phase (II.32) et plus près de nous dans la définition (VIII.51) du vecteur \vec{A} .

Nous obtenons finalement l'équivalent explicite du coefficient de diffusion à basse température :

$$\boxed{\frac{\hbar ND}{mc^2} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} c_1 \frac{4\gamma^2 \left(2\frac{\bar{N}}{c} \frac{dc}{d\bar{N}} - \frac{\bar{N}}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\bar{N}} \right)^2}{(1 + \Lambda_F)^2} \left(\frac{k_B T}{mc^2} \right)^4}, \quad (\text{VIII.59})$$

où la constante c_1 découle de la résolution numérique des équations cinétiques pour $\Lambda_F = 0$ (*cf.* les équations (50) et (D17) de la référence [66]),

$$c_1 \simeq 0,3036. \quad (\text{VIII.60})$$

Les quantités thermodynamiques $1 + \Lambda_F$ et $\bar{N}dc/(cd\bar{N})$ et les paramètres du spectre d'excitation bosonique γ et $\bar{N}d\gamma/(\gamma d\bar{N})$ doivent être évalués en fonction de la force des interactions. Avec les résultats de cette thèse, c'est tout à fait faisable analytiquement (*cf.* les équations (VII.73) et (VII.78), ainsi que la figure VIII.2) en utilisant la RPA ou la théorie variationnelle. Dans la partie suivante, nous prenons le cas particulier du gaz unitaire, intéressant de par son invariance d'échelle, pour évaluer chacune de ces quantités et donner une estimation numérique de la dépendance de D en la température.

Synthétisons, pour le lecteur familier du calcul bosonique, les facteurs par lesquels notre résultat fermionique (VIII.59) diffère de celui de la référence [66], $\hbar ND/(mc^2) = c_1 (k_B T/mc^2)^4$: (i) le facteur deux de spin dans l'équation fondamentale de la phase (II.32) conduit à un facteur 4 sur D qui est une fonction quadratique de $d\hat{\theta}_0/dt$, (ii) à cause de la courbure de la relation de dispersion $P\vec{A}$ et $C_{mc}\vec{A}$ acquièrent, en plus du facteur 2 de spin fermionique, le facteur $\gamma \left(2\frac{\bar{N}}{c} \frac{dc}{d\bar{N}} - \frac{\bar{N}}{\gamma} \frac{d\gamma}{d\bar{N}} \right)$, qui vaut 1 dans le gaz de bosons en interaction faible, que D acquiert donc au carré (iii) Finalement, le facteur $(1 + \Lambda_F)^2$ au dénominateur de (VIII.59) provient du fait que les amplitudes Beliaev-Landau du gaz de paires de fermions sont $(1 + \Lambda_F)$ fois celles du gaz de bosons en interaction faible (aux mêmes vecteurs d'onde adimensionnés infinitésimaux), ce qui modifie le temps de corrélation des nombres d'occupation des quasi-particules, et donc D , d'un facteur global $(1 + \Lambda_F)^{-2}$.

Le fruit du travail de ce chapitre ne se limite pas à l'expression (VIII.59). Nous pouvons aussi évaluer une quantité physique dont nous avons beaucoup parlé tout au long de cette thèse : le temps de corrélation τ_c de la dérivée de la phase $d\hat{\theta}_0/dt$, limité par les collisions entre les quasi-particules. On évalue τ_c par le rapport entre l'intégrale sur le temps D et la valeur initiale ${}^t\vec{A}C_{mc}\vec{A}$ (que l'on calcule à l'aide de l'équation (VIII.56)) de la fonction de corrélation de $d\hat{\theta}_0/dt$, même si la décroissance de cette fonction n'est pas exponentielle. Comparé au résultat de la référence [66], les facteurs spécifiquement fermioniques présents dans \vec{A} (le facteur 2 de spin et le facteur lié au paramètre de courbure γ) se simplifient, seul demeure le facteur $(1 + \Lambda_F)^2$ des équations cinétiques au dénominateur. On obtient alors l'expression suivante :

$$\boxed{\tau_c \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{c_3}{(1 + \Lambda_F)^2} \frac{\hbar \rho}{mc^2 \varepsilon^5} \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}mc} \right)^3 \text{ avec } c_3 \simeq 0,05472.} \quad (\text{VIII.61})$$

Troisième partie
Expériences et applications

Chapitre IX

Temps de brouillage attendus dans une expérience d'atomes froids

Nous concluons ce travail en exploitant des équations d'état théoriques et approchées d'une part, mesurées expérimentalement d'autre part, pour faire des prédictions quantitatives sur le temps de brouillage, à partir de son expression (II.51) désormais solidement établie. Les expressions issues de la théorie BCS, de la RPA ou de la théorie variationnelle que nous utilisons dans cette section sont tous calculés pour un gaz homogène avec interaction de contact sur un réseau de pas tendant vers 0.

IX.1 Brouillage de partition à température nulle

Commençons par l'expérience à température nulle décrite dans le chapitre introductif I, où un gaz parfait de dimères est coupé en deux puis la force des interactions ajustée pour atteindre un régime quelconque de la transition CBE-BCS. Le temps de brouillage dans cette expérience de partition s'écrit :

$$\frac{\varepsilon_F t_{\text{br}}^N}{\hbar N^{1/2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{N \, d\mu_0}{\varepsilon_F \, dN} \right)^{-1} \left(\frac{\text{Var} \left(\hat{N}_a - \hat{N}_b \right)}{N} \right)^{-1/2}. \quad (\text{IX.1})$$

Nous avons adimensionné le temps par l'énergie de Fermi ε_F et extrait de toutes les quantités leur dépendance triviale en le nombre de particules N . Nous l'avons dit, le protocole de séparation du gaz conduit à une variance poissonnienne du nombre relatif de particules $\text{Var} \left(\hat{N}_a - \hat{N}_b \right) = 2N$. Reste donc à évaluer la dérivée du potentiel chimique à température nulle $d\mu_0/dN$. Une première possibilité est d'utiliser la théorie BCS qui fournit la formule analytique suivante (pour plus de détails, se reporter à la section IV.2.2.2, pour le calcul de l'équation d'état avec la théorie BCS, puis à V.2.2.2, pour la dérivation par rapport à N) :

$$\frac{\bar{N} \, d\mu}{\varepsilon_F \, d\bar{N}} = \frac{2}{3} \left(\frac{\varepsilon_F}{\Delta_0} \right)^{1/2} \frac{I_\Theta}{I_X^2 + I_\Theta^2}. \quad (\text{IX.2})$$

Les intégrales I_Θ et I_X sont définies à la section IV.2.2.2 et leur expression analytique en termes d'intégrales elliptiques est donnée en annexe E. L'utilisation de cette formule pour

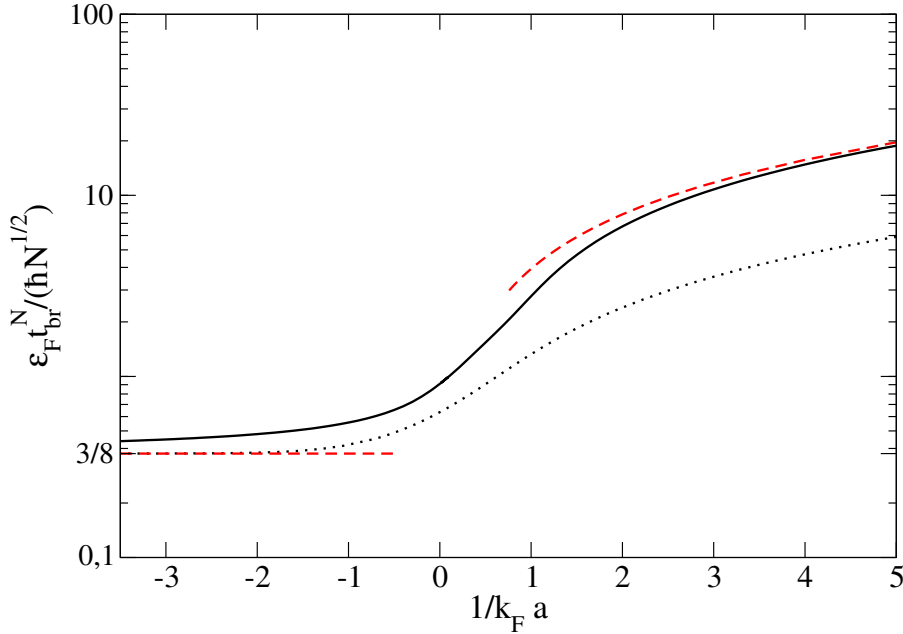


FIGURE IX.1 – Temps de brouillage de partition à température nulle en fonction de la force des interactions $k_F a$. Ligne pleine : estimation à partir des données expérimentales de la référence [31]. Ligne pointillée : valeur obtenue par la théorie BCS. Lignes rouges tiretées : comportements asymptotiques exacts dans les limites CBE et BCS.

calculer le temps de brouillage en fonction de $1/(k_F a)$ conduit à la courbe pointillée de la figure IX.1. Dans la limite BCS, le potentiel chimique tend vers l'énergie de Fermi et le temps de brouillage réduit vers $3/8$. Dans la limite CBE, $k_F a \rightarrow 0^+$, qui est une limite de gaz parfait de dimères bosoniques, où le potentiel chimique devient indépendant de la densité, le temps de brouillage diverge comme $1/k_F a$:

$$\frac{\varepsilon_F t_{\text{br}}^N}{\hbar N^{1/2}} \underset{k_F a \rightarrow 0^+}{=} \frac{3\pi}{4} \frac{1}{k_F a} + o\left(\frac{1}{k_F a}\right) \quad (\text{IX.3})$$

Ce n'est que dans la limite BCS que la formule (IX.2) est quantitative. Dans la limite CBE, nous pouvons améliorer la prédiction de la théorie BCS (IV.87) pour le potentiel chimique en remplaçant simplement la valeur de la longueur de diffusion dimère-dimère a_{dim} par sa vraie valeur $a_{\text{dim}} = 0,6a$ (contre $a_{\text{dim}} = 2a$ avec la théorie BCS), obtenue dans les références [81, 93]. Ceci, de même que la limite $\varepsilon_F t_{\text{br}}^N / (\hbar N^{1/2}) \underset{k_F a \rightarrow 0^-}{\rightarrow} 3/8$, donne lieu aux courbes en pointillés rouges de la figure IX.1. En dehors des limites CBE et BCS, nous nous reposons sur des mesures expérimentales de l'équation d'état pour raffiner notre estimation du temps de brouillage. Nous utilisons les mesures de la pression du gaz en fonction du potentiel chimique à température nulle¹ effectuées dans la référence [31]. D'après la relation de Gibbs-Duhem à

1. La référence [31] présente elle-même son équation d'état comme celle de la température nulle. Expé-

température nulle, il suffit² de dériver deux fois la pression par rapport à μ_0 pour obtenir la quantité souhaitée :

$$\frac{d^2 P}{d\mu_0^2} = \frac{d\bar{\rho}}{d\mu_0}. \quad (\text{IX.5})$$

Ces données expérimentales donnent lieu à la ligne pleine de la figure IX.1, qui interpole bien les comportements asymptotiques. Enfin, pour donner un ordre de grandeur expérimental, nous nous plaçons à la limite unitaire $k_F|a| = \infty$ prenons les valeurs expérimentales typiques $N = 10^5$ pour le nombre de particules et $T_F = 10^{-6}$ K pour la température de Fermi ; le temps de brouillage dans ces conditions est de l'ordre de la milliseconde :

$$t_{\text{br}}^N \simeq 2,2 \text{ ms}. \quad (\text{IX.6})$$

IX.2 Brouillage thermique à l'unitarité dans l'ensemble canonique

En pratique, lorsque l'expérience de pensée précédente est à température non nulle, il faut prendre en compte la contribution du brouillage thermique :

$$\frac{\varepsilon_F t_{\text{br}}^E}{\hbar N^{1/2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{N}{\varepsilon_F} \frac{d\mu_{\text{mc}}}{dE} \right)^{-1} \left(\frac{\text{Var } E}{N} \right)^{-1/2}. \quad (\text{IX.7})$$

Il s'avère que pour un gaz préparé dans l'ensemble canonique, et séparé de façon à avoir une variance poissonnienne du nombre relatif de particules, le temps de brouillage thermique est beaucoup plus long que le temps de brouillage de partition, et ce, même à des températures voisines de la température critique T_c et alors que les deux temps ont la même loi d'échelle en N . Aussi, à moins d'avoir une très bonne précision expérimentale, il faut ruser un peu pour espérer observer l'effet de la température. Une possibilité pour éliminer les fluctuations du nombre de paires est de ne plus séparer le gaz en deux parties égales mais au contraire de n'extraire qu'une toute petite fraction, dans l'idéal une unique paire en moyenne, qui servira de référence de phase au reste du gaz. Au lieu d'utiliser un double puits, nous suggérons donc de créer un couplage tunnel entre le piège principal renfermant les N particules et un piège secondaire beaucoup plus étroit, en faisant croître la barrière de hauteur ajustable [34] loin du centre du piège (Fig.IX.2). Ceci revient à faire une impulsion d'angle ϵ qui transfère moins d'une paire en moyenne, plutôt que $\pi/2$. Bien sûr, pour s'approcher au mieux de l'ensemble canonique, il faut aussi s'assurer que l'échantillon initial a un nombre de particules qui fluctue

rimentalement la température n'est bien sûr pas nulle, mais cela affecte peu la quantité $d\mu_0/dN$ que nous cherchons à estimer.

2. La réalité est un tout petit peu plus subtile. Les points expérimentaux étant trop bruités pour permettre une double dérivation nous utilisons leur ajustement avec des approximants de Padé dont le détail figure dans les compléments de la référence [31], ainsi qu'en annexe A.2 de la thèse [94]. On fixe la densité du gaz (ou le nombre d'onde de Fermi k_F) et on utilise la relation de Gibbs-Duhem à température nulle

$$\frac{dP}{d\mu_0}(\mu_0, a) = \bar{\rho} \quad (\text{IX.4})$$

pour exprimer le potentiel chimique μ_0 , adimensionné par l'énergie de Fermi, en fonction de $1/(k_F a)$. Il ne reste plus qu'à dériver une deuxième fois la relation (IX.4) pour établir l'équation (IX.5) et obtenir la quantité $d\bar{\rho}/d\mu_0$ souhaitée comme une fonction de $1/(k_F a)$.

peu ; ceci peut-être fait par exemple par post-sélection ou en faisant fondre une phase de Mott préparée par réalisation du modèle de Hubbard pour les dimères bosoniques [95]. L'autre avantage de cette méthode est que la fraction ainsi extraite a une dynamique triviale et pas de brouillage de phase puisque les interactions y sont négligeables.

Le reste de la séquence expérimentale, qui est schématisée sur la figure IX.2, est similaire à ce qui a été décrit au chapitre introductif. Durant la phase de séparation, nous suggérons là encore de bosoniser de manière adiabatique réversible [30] les paires de Cooper atomiques sous forme de dimères fortement liés et en interaction faible, en ajustant la longueur de diffusion à une faible valeur positive grâce à une résonance de Feshbach magnétique. Ceci permet de s'assurer que les deux fermions d'une paire traversent bien ensemble la barrière de potentiel. Pour mesurer la fonction $g_1(t)$, nous adaptons [96] aux paires de fermions la méthode interférométrique de Ramsey où sont appliquées deux impulsions de Rabi à un intervalle de temps t . Après la première impulsion d'angle ϵ , on ajuste les interactions à la valeur à laquelle on souhaite étudier la dynamique de phase du condensat de paires, et on laisse évoluer pendant un temps t . On rebosonise les paires à la fin du temps d'interaction avant d'appliquer une seconde impulsion d'angle ϵ et de mesurer le nombre n_{sec} de paires dans le piège secondaire. Les techniques de détection par fluorescence sont aujourd'hui capables de détecter un dimère unique [97]. Alors, la valeur moyenne de n_{sec} sur les réalisations présente, en fonction du temps t , des oscillations de demi-pulsation la différence (sur \hbar) des potentiels chimiques entre les deux zones de piégeage, et de contraste $|g_1(t)/g_1(0)|$.

La figure IX.3 montre la valeur du temps de brouillage thermique (IX.7) en fonction de la température mesurée en unités de la température de Fermi, et à force des interactions *fixée* de façon à être à la limite unitaire $k_F|a| = \infty$. Pour estimer ce temps, nous utilisons l'équation d'état du gaz unitaire non polarisé mesurée dans la référence [32]. Le gaz est préparé dans l'ensemble canonique donc avec des fluctuations d'énergie de variance $\text{Var } E = k_B T^2 \partial_T \bar{E}$, qui se déduit aussi par l'équation d'état. Nous trouvons, pour un système spatialement homogène (dans un piège à fond plat [33]) les temps de brouillage thermiques t_{br} représentés par des disques sur la figure IX.3. Ainsi, à une température $T = 0,12 T_F \simeq 0,7 T_c$, on trouve $t_{\text{br}}^E \simeq 7N^{1/2}\hbar/\epsilon_F$, soit

$$t_{\text{br}}^E \simeq 20 \text{ ms} \quad (\text{IX.8})$$

pour une température de Fermi typique $T_F = \epsilon_F/k_B = 1\mu\text{K}$ et un nombre d'atomes typique $N = 10^5$. Comme annoncé, le temps de brouillage est beaucoup plus long que le temps de brouillage qu'occasionnerait une partition cohérente du même gaz en deux parties égales. Pour comparer cette estimation expérimentale du temps de brouillage à une prédiction théorique, on peut comme dans la référence [98] estimer l'équation d'état du gaz unitaire à partir de relations de dispersion simples pour les excitations élémentaires. Pour la branche bosonique, on prend [98] $\epsilon_{B,\mathbf{q}} = \hbar c q$ avec c la vitesse du son à $T = 0$, $mc^2 = \frac{2}{3}\xi\epsilon_F$, et ξ le paramètre de Bertsch. Pour la branche fermionique, on prend [99] $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma} = \Delta + (\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_0)^2/(2f_0)$, où Δ est le *gap* et où ϵ_0 et f_0 donnent la position du minimum et la courbure de la relation de dispersion. En gardant pour chaque branche sa contribution d'ordre dominant à basse température comme dans la référence [98], et en utilisant les valeurs expérimentales [32, 82] $\xi = 0,376$, $\Delta = 0,44\epsilon_F$, $\epsilon_0 = 0,85\epsilon_F$ et la valeur théorique [99] $f_0 = 0,846\epsilon_F$, nous trouvons³

3. Le calcul des quantités thermodynamiques utiles à partir du modèle qui vient d'être exposé est un petit exercice de physique statistique sans difficulté. Tous les détails sont donnés en annexe H.

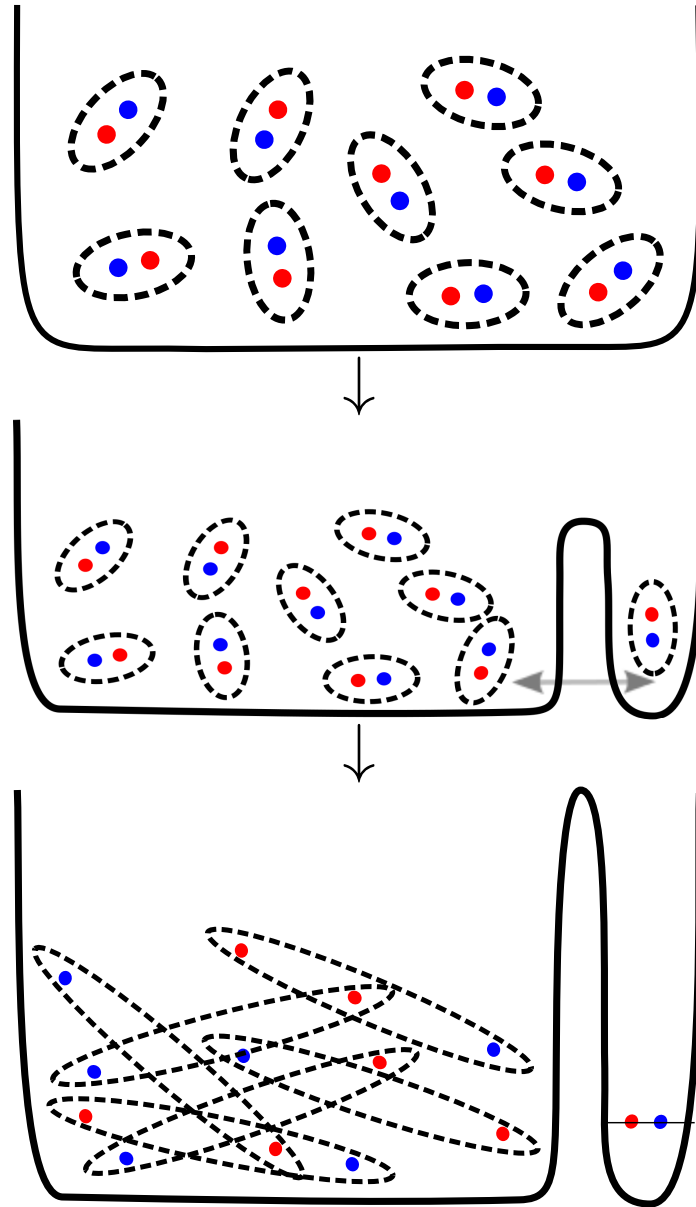
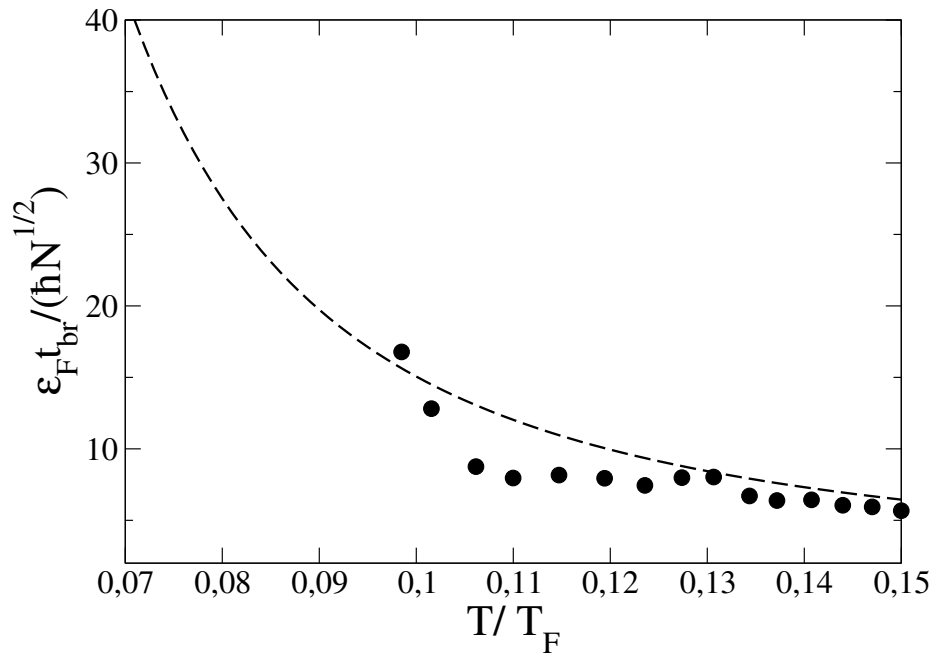


FIGURE IX.2 – Séquence expérimentale permettant de mesurer le brouillage thermique. La paire transférée dans le piège secondaire étroit sert de référence de phase au reste du gaz.

FIGURE IX.3 – Temps de brouillage thermique pour un gaz cohérent de fermions à la limite unitaire dans l'ensemble canonique, en fonction de la température T en unités de la température de Fermi $T_F = \epsilon_F/k_B$. Disques : à partir de l'équation d'état mesurée dans la référence [32]. Ligne tiretée : formule (IX.9) qui utilise une approximation de l'équation d'état décrite dans le texte et plus en détail dans l'appendice H.



:

$$\frac{N\hbar^2}{(t_{\text{br}}\epsilon_F)^2} \simeq \left(\frac{\check{T}}{0,46}\right)^5 \frac{(1+2r)^2}{(1+r)} \quad (\text{IX.9})$$

où $\check{T} = T/T_F$ et où

$$r = \frac{(\partial_T E_F)}{(\partial_T E_B)} \simeq \left(\frac{0,316}{\check{T}}\right)^{9/2} e^{-0,44/\check{T}} \quad (\text{IX.10})$$

mesure l'importance relative des deux branches d'excitation, E_F étant l'énergie présente dans la branche fermionique et E_B dans la branche bosonique. Cette formule, représentée en tireté sur la figure IX.3, donne un équivalent exact⁴ de t_{br} quand $\check{T} \rightarrow 0$.

IX.3 Brouillage thermique à l'unitarité dans l'ensemble microcanonique

Pour observer l'effet sous-dominant de diffusion de phase, il faut chercher à supprimer les effets superdiffusifs. Pour cela, on peut réduire les fluctuations de l'énergie et du nombre de particules en post-sélectionnant les données, ou mieux, utiliser le caractère non destructif de la mesure dans le piège étroit (en effet chaque mesure détruit seulement la paire transférée dans le piège secondaire, voir la figure (IX.2)) pour observer la perte de cohérence sur une série de mesures effectuées sur une unique réalisation expérimentale.

Le coefficient D de la diffusion de phase peut être calculé à très basse température en ne gardant que la partie phononique du spectre. La branche bosonique [50] étant d'après la RPA convexe aux faibles q dans un gaz unitaire, les phonons interagissent par des processus de Landau-Beliaev comme dans un gaz de bosons en interaction faible. Le chapitre VIII recycle, en l'adaptant, le traitement de la référence [66] fondé sur des équations cinétiques, et aboutit à l'expression de (VIII.59) de D . En utilisant l'invariance d'échelle du gaz unitaire, qui a pour conséquence que $\mu_0(\rho) \propto \rho^{2/3}$ et donc $\bar{N}dc/(cd\bar{N}) = 1/3$, $\Lambda_F = -1/9$ et $d\gamma/d\bar{N} = 0$, puis la valeur (VII.87) de γ à la limite unitaire, on obtient :

$$\frac{\hbar ND}{\epsilon_F} \underset{\Theta \rightarrow 0}{\sim} C \check{T}^4 \quad \text{avec} \quad C \simeq 0,4 \quad (\text{IX.11})$$

En choisissant comme précédemment $T_F = 10^{-6}$ K, en diminuant le nombre d'atomes à $N = 500$ et en augmentant la température à $T = 0,16 T_F = 0,95 T_C$, nous obtenons un temps de brouillage diffusif

$$t_{\text{br}}^D \simeq 15 \text{ s.} \quad (\text{IX.12})$$

4. Le bon accord avec les données expérimentales est à relativiser car si l'on traite les deux branches du modèle à tous les ordres en $k_B T$, on obtient un décalage vers le haut de $t_{\text{br}}\epsilon_F/(\hbar N^{1/2})$ à peu près constant et égal à 5 sur l'intervalle de température de la figure IX.3.

Conclusion

Cette thèse a montré que le temps de cohérence d'un gaz condensé de paires de fermions est limité par l'étalement de la phase du condensat, et ce, même lorsque le gaz est entièrement isolé de l'environnement.

Pour parvenir à ce résultat, nous avons étudié en profondeur la dynamique de phase à l'aide des différentes théories microscopiques des gaz cohérents de fermions à basse énergie. L'équation (II.32) qui ressort de cette étude, réminiscente de la seconde équation de Josephson mais plus fondamentale car entièrement quantique, opératorielle et microscopique, relie la dérivée par rapport au temps de l'opérateur phase à la dérivée adiabatique du hamiltonien de quasi-particules par rapport au nombre de particules, ou si l'on veut à un opérateur potentiel chimique. Dans ce dernier, nous faisons apparaître explicitement les contributions des deux branches d'excitations du gaz : la branche fermionique de brisure des paires et la branche bosonique de mise en mouvement de leur centre de masse.

En combinant cette équation fondamentale à une approche non perturbative pour calculer la fonction de cohérence dans le mode du condensat, nous parvenons à identifier deux mécanismes de perte de cohérence dans un gaz de taille finie : d'une part, les fluctuations de l'énergie ou du nombre de particules dans l'état initial du gaz se répercutent sur l'opérateur potentiel chimique et conduisent à un étalement balistique superdiffusif de la phase du condensat et à une décroissance gaussienne de la fonction de cohérence. D'autre part, les processus non linéaires qui affectent les quasi-particules et modifient en permanence l'environnement du condensat ont un effet diffusif sur la phase et conduisent à une décroissance exponentielle de la fonction de cohérence. Ce deuxième effet est quelque part plus fondamental que le premier car il persiste dans l'ensemble microcanonique.

Les temps de superdiffusion de phase peuvent être quantifié directement par l'équation d'état du gaz ; nous trouvons que le temps de brouillage dû aux fluctuations du nombre de particules, lorsqu'elles existent, est de l'ordre de la milliseconde à la limite unitaire dans des conditions expérimentales typiques. Il est près de dix fois plus court que le temps dû aux fluctuations de l'énergie, dont la contribution croît en fonction de la température T comme T^5 à basse température. Nous proposons un protocole pour éliminer l'effet des fluctuations du nombre de particules et observer directement le brouillage thermique.

La contribution de la diffusion de phase croît elle en T^4 dans le cas d'une branche bosonique convexe mais reste nettement plus petite que les effets superdiffusifs sur tout l'intervalle de temps sur lequel ces effets sont visibles, sauf bien sûr si les fluctuations de l'énergie et du nombre de particules sont absentes ou supprimées. Pour parvenir à ce résultat quantitatif sur le coefficient de diffusion de phase nous avons écrit les équations cinétiques des quasi-particules à basse température dans le cas où la branche bosonique, dominante par rapport à la branche fermionique qui possède une bande interdite, est convexe. Nous avons alors calculé l'amplitude des processus d'amortissement dominants Beliaev-Landau 1 phonon \leftrightarrow 2 phonons

et de là nous nous sommes raccordé au calcul des équations cinétiques linéarisées dans un gaz de bosons.

Notre exploration de la dynamique de phase par les théories microscopiques du gaz de fermions appariés a produit plusieurs résultats intéressants en eux-mêmes. Premièrement, nous avons été conduit à étudier la concavité de la branche d'excitation collective, et pour cela, à en obtenir analytiquement le spectre jusqu'à l'ordre 5 en le nombre d'onde. Les déviations à l'énergie phononique que nous prédisons, bien que faibles, semblent mesurables par les expériences actuelles. Deuxièmement, nous avons construits des opérateurs quantiques de création et d'annihilation d'une excitation bosonique, utilisables sous une hypothèse de faible densité d'excitations à laquelle nous donnons un sens précis. Enfin, nous avons exprimé le hamiltonien en puissances de ces opérateurs jusqu'à l'ordre 3 inclus. Nous en avons déduit les amplitudes de couplage entre excitations bosoniques, ce qui nous a permis d'avoir un point de comparaison microscopique pour l'hydrodynamique quantique, puis, *via* les équations cinétiques, les taux d'amortissement des phonons dus aux processus de Beliaev et de Landau. En poussant plus loin notre développement systématique du hamiltonien, nous sommes en mesure d'obtenir les corrections, aussi bien réelles qu'imaginaires, que les non-linéarités d'ordre arbitraire entre les excitations collectives provoquent sur le spectre d'excitation bosonique.

Ce travail ouvre la voie à une étude plus complète de la diffusion de phase. D'une part, l'étude des équations cinétiques pourrait être étendue au cas où les processus dominants sont 2 phonons $\leftrightarrow 2$ phonons dans les régions où la branche d'excitation collective est concave aux faibles nombres d'onde, ce qui permettrait de décrire la diffusion tout au long de la transition continue CBE-BCS. D'autre part, on pourrait chercher à proposer un mécanisme d'interaction entre excitations fermioniques et bosoniques, ce qui permettrait de les inclure toutes dans les équations cinétiques, et donc d'explorer des températures plus élevées.

Annexes

Annexe A

Extension du raisonnement à température nulle au cas thermique intégrable

Essayons d'étendre le raisonnement du chapitre I au cas d'un système à température non nulle *intégrable*. Bien que cette situation ne corresponde pas à la réalité physique car les interactions rendent le système non intégrable, elle permet néanmoins de se rendre compte des difficultés que pose le cas ergodique, et donc de mieux comprendre l'approche adoptée dans le chapitre II. Comme au chapitre II et pour nous affranchir du brouillage de partition, nous imaginons cette fois un simple puits dont nous étudions la fonction de cohérence temporelle, dominée aux temps longs par la contribution du mode du condensat (*cf.* section II.1 du chapitre II) :

$$C(t) \equiv \langle \hat{a}_0^\dagger(t) \hat{a}_0(0) \rangle. \quad (\text{A.1})$$

Nous supposons que les états propres du système intégrable sont de type états de Fock de quasi-particules, de telle sorte que l'on peut suivre continument chaque état propre, caractérisé par un ensemble de nombres d'occupation entiers de modes de quasi-particules, lorsqu'on varie le nombre de particules. Nous écrivons donc $|\psi_\lambda(N)\rangle$ la base de ces états propres. Varier N en demeurant dans l'état $|\psi_\lambda(N)\rangle$ est une transformation adiabatique où la forme des modes est adaptée tandis que leur population reste inchangée. L'état du système à température non nulle est un mélange statistique de tels états propres

$$\hat{\rho} = \sum_{N,\lambda} \Pi(N, \lambda) |\psi_\lambda(N)\rangle \langle \psi_\lambda(N)| \quad (\text{A.2})$$

où la distribution $\Pi(N, \lambda)$, comme en (II.20), peut représenter une distribution thermique obtenue initialement par contact avec un réservoir. En insérant une relation de fermeture $\hat{1} = \sum_{N,\lambda} |\psi_\lambda(N)\rangle \langle \psi_\lambda(N)|$ dans la fonction de cohérence temporelle (A.1), et en utilisant le fait que \hat{a}_0 connecte seulement les états ayant deux particules de différence, nous obtenons

$$C(t) = \sum_{N,\lambda,\lambda'} \Pi(N, \lambda) e^{2i(E_\lambda(N) - E_{\lambda'}(N-2))t/\hbar} \langle \psi_\lambda(N) | \hat{a}_0^\dagger | \psi_{\lambda'}(N-2) \rangle \langle \psi_{\lambda'}(N-2) | \hat{a}_0 | \psi_\lambda(N) \rangle \quad (\text{A.3})$$

où $E_\lambda(N)$ est l'énergie de l'état microscopique $|\psi_\lambda(N)\rangle$. Le paragraphe suivant de cette annexe montre que, pour des états $|\psi_\lambda(N)\rangle$ vus comme des états de Fock de quasi-particules

fermioniques, et pour un nombre de particules N assez grand, l'opérateur \hat{a}_0 ne connecte à vrai dire que des états ayant la même configuration microscopique :

$$\langle \psi_\lambda(N) | \hat{a}_0^\dagger | \psi_{\lambda'}(N-2) \rangle = \sqrt{N_0} \delta_{\lambda, \lambda'} + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (\text{A.4})$$

Nous pouvons alors, comme au chapitre I, négliger les fluctuations de l'élément de matrice initial sur la distribution décrite par $\Pi(N, \lambda)$,

$$\langle \psi_\lambda(N) | \hat{a}_0^\dagger(0) \hat{a}_0(0) | \psi_\lambda(N) \rangle \simeq C(0), \quad (\text{A.5})$$

pour obtenir

$$C(t) \simeq C(0) \sum_{N, \lambda} \Pi(N, \lambda) e^{2i\mu_\lambda(N)t/\hbar}. \quad (\text{A.6})$$

où nous avons introduit le « potentiel chimique » de l'état microscopique λ ,

$$\mu_\lambda(N) = \frac{\partial E_\lambda}{\partial N}. \quad (\text{A.7})$$

Reste à prendre la moyenne du facteur de phase $\exp 2i\mu_\lambda(N)t/\hbar$. Pour un grand système seuls les premiers moments $\bar{\mu} = \sum_{N, \lambda} \Pi(N, \lambda) \mu_\lambda(N)$ et $\text{Var}\mu = \sum_{N, \lambda} \Pi(N, \lambda) (\mu_\lambda(N) - \bar{\mu})^2$ du potentiel chimique $\mu_\lambda(N)$ importent. Nous obtenons finalement la décroissance gaussienne de la fonction de corrélation :

$$C(t) \simeq C(0) e^{2i\bar{\mu}t/\hbar} e^{-2t^2 \text{Var}\mu/\hbar}. \quad (\text{A.8})$$

Malheureusement, ce résultat obtenu en supposant le système intégrable ne nous convainc pas, pour plusieurs raisons. Premièrement, la description de la base d'états propres en termes de branches λ paramétrées continûment par N n'a pas grand sens dans le cas ergodique : les multiples anticroisements entre les énergies de quasi-particules lorsque que N varie permettent certes de suivre une branche donnée au cours de cette variation mais font que l'état d'arrivée n'a plus grand chose à voir dans sa configuration microscopique avec l'état de départ. De là vient la deuxième raison de ne pas croire au résultat (A.8) : avec ce qui vient d'être dit, la propriété de recouvrement que nous avons écrite en (A.4) pour un système intégrable paraît hautement improbable dans le cas ergodique. Pour enfoncer le clou, relevons qu'elle ne permet pas de décrire la diffusion de phase, résultat établi au chapitre II, qui assure que la fonction de cohérence temporelle décroît y compris dans un état propre du hamiltonien. Enfin troisièmement, même si nous réussissions à contourner ces deux obstacles, le résultat (A.8) serait encore insatisfaisant car le coefficient $\text{Var}\mu$ de la décroissance gaussienne ne peut pas être connu par une observable thermodynamique, macroscopique, mais doit être calculé en connaissant précisément le poids de l'état initial sur chaque état propre, ce qui est physiquement absurde. Ce travers, peu surprenant de la part d'une théorie intégrable où chaque degré de liberté microscopique compte pour décrire l'état du système, sera corrigé dans le cas ergodique par le recours à l'hypothèse de thermicité des états propres.

Recouvrement dans le cas intégrable

Comme promis, montrons que la propriété de recouvrement (A.4) est vraie dans le cadre de la théorie BCS (*cf.* chapitre IV) pour des états de Fock de quasi-particules fermioniques.

a. États excités de la théorie BCS Commençons par introduire ces états. Ils s'obtiennent en faisant agir les opérateurs de création de quasi-particules fermioniques $\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ (IV.95,IV.96) sur le vide de quasi-particules, autrement dit l'état BCS de phase nulle $|\psi_{\text{BCS}}^0\rangle$. Lorsqu'une seule excitation \mathbf{k}, \uparrow ou $-\mathbf{k}, \downarrow$ est présente, on dit que l'état comporte une paire brisée (PB) :

$$|\text{PB}_{\mathbf{k}\uparrow}\rangle \equiv \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle = \prod_{\mathbf{q} \neq \mathbf{k}} \left(U_{\mathbf{q}}^0 - V_{\mathbf{q}}^0 \hat{a}_{\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger \right) \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger |0\rangle \quad (\text{A.9})$$

$$|\text{PB}_{-\mathbf{k}\downarrow}\rangle \equiv \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle = \prod_{\mathbf{q} \neq \mathbf{k}} \left(U_{\mathbf{q}}^0 - V_{\mathbf{q}}^0 \hat{a}_{\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger \right) \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger |0\rangle \quad (\text{A.10})$$

Lorsque la paire d'excitations \mathbf{k}, \uparrow et $-\mathbf{k}, \downarrow$ est présente, on dit que l'état comporte une paire excitée (PE) :

$$|\text{PE}_{\mathbf{k}}\rangle = \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle = \prod_{\mathbf{q} \neq \mathbf{k}} \left(U_{\mathbf{q}}^0 - V_{\mathbf{q}}^0 \hat{a}_{\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger \right) \left(V_{\mathbf{k}}^0 + U_{\mathbf{k}}^0 \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle. \quad (\text{A.11})$$

Un état excité générique est de la forme :

$$|\psi_\lambda(\bar{N})\rangle = \prod_{i=1}^p \hat{b}_{\mathbf{k}_i \sigma_i}^\dagger |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle, \quad (\text{A.12})$$

où $\lambda = (\mathbf{k}_1 \sigma_1, \mathbf{k}_1 \sigma_1, \dots, \mathbf{k}_p \sigma_p)$ et la dépendance en \bar{N} est là pour rappeler que les orbitales de quasi-particules dépendent du nombre moyen de particules.

b. Mode du condensat de paires dans un état thermique Contrairement à ce que nous avons fait dans le reste de cette thèse, nous allons dans cette annexe définir le mode du condensat non plus dans l'état fondamental mais dans l'état d'équilibre thermique à la température $T = 1/(k_B \beta)$, ici un mélange statistique d'états de quasi-particules fermioniques :

$$\hat{\rho}(T) = \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\lambda} e^{-\beta E_\lambda(\bar{N})} |\psi_\lambda(\bar{N})\rangle \langle \psi_\lambda(\bar{N})| \quad (\text{A.13})$$

où

$$E_\lambda(\bar{N}) = \sum_{i=1}^p \epsilon_{\mathbf{k}_i} \quad (\text{A.14})$$

est l'énergie de la configuration microscopique $|\psi_\lambda(\bar{N})\rangle$ et \mathcal{Z} la fonction de partition canonique. Cet état est gaussien car il s'écrit $\hat{\rho}(T) = e^{-\beta \hat{H}_{\text{BCS}}} / \mathcal{Z}$, avec \hat{H}_{BCS} le hamiltonien BCS réduit (IV.103), et permet donc d'appliquer le théorème de Wick. On peut alors suivre exactement le même cheminement qu'à la section II.1 du chapitre II, la seule différence étant que toutes les moyennes sont prises ici dans l'état (A.13). Ainsi de la définition du mode du condensat,

$$\varphi_0^{\text{BCS}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; T) = - \frac{\langle \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) \rangle}{\sqrt{\bar{N}_0^{\text{BCS}}(T)}}, \quad (\text{A.15})$$

et du nombre de particules condensées,

$$\bar{N}_0^{\text{BCS}}(T) = \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} |\langle \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) \rangle|^2. \quad (\text{A.16})$$

Dans l'ensemble canonique, la population des quasi-particules fermioniques suit une loi de Fermi-Dirac :

$$\langle \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle = \langle \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta\epsilon_{\mathbf{k}}}} \equiv f_{\mathbf{k}}. \quad (\text{A.17})$$

La matrice (VII.21) permet d'exprimer l'opérateur d'annihilation d'une paire de particules $\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}$ en termes des opérateurs de quasi-particules. De cela nous obtenons sa valeur moyenne thermique :

$$\langle \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle = -U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 (1 - 2f_{\mathbf{k}}) \quad (\text{A.18})$$

qui permet, en prenant la transformée de Fourier inverse, de calculer la valeur moyenne du champ de paires, et donc la forme du mode du condensat :

$$\varphi_0^{\text{BCS}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; T) = -\frac{1}{\sqrt{\bar{N}_0^{\text{BCS}}(T)} L^3} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 (1 - 2f_{\mathbf{k}}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}, \quad (\text{A.19})$$

avec

$$\bar{N}_0^{\text{BCS}}(T) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} (U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0)^2 (1 - 2f_{\mathbf{k}})^2. \quad (\text{A.20})$$

De $\varphi_0^{\text{BCS}}(T)$ nous tirons finalement l'amplitude du champ de paires sur le mode du condensat :

$$\hat{a}_0^{\text{BCS}}(T) = -\frac{1}{\sqrt{\bar{N}_0^{\text{BCS}}(T)}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 (1 - 2f_{\mathbf{k}}) \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}. \quad (\text{A.21})$$

Comparé à l'amplitude à température nulle $\hat{a}_0^{\text{BCS}}(0)$, nous observons que la contribution de chaque mode de Fourier au condensat de paires est diminuée d'un facteur $1 - 2f_{\mathbf{k}}$ par la présence d'excitations fermioniques.

c. Recouvrement $\langle \psi_\lambda(\bar{N} - 2) | \hat{a}_0^{\text{BCS}}(T) | \psi_\lambda(\bar{N}) \rangle$ Notre objectif est de montrer que la quantité

$$\mathcal{O}_\lambda \equiv -\frac{1}{\sqrt{\bar{N}_0^{\text{BCS}}(T)}} \langle \psi_\lambda(\bar{N} - 2) | \hat{a}_0^{\text{BCS}}(T) | \psi_\lambda(\bar{N}) \rangle \quad (\text{A.22})$$

tend vers 1 pour les valeurs typiques de λ dans la distribution canonique (A.13). Calculons d'abord la moyenne superfluide de la paire $\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$. À une contribution d'ordre $1/\bar{N}$ près, nous avons :

$$\langle \psi_\lambda(\bar{N} - 2) | \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} | \psi_\lambda(\bar{N}) \rangle = \begin{cases} -U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 + 2V_{\mathbf{k}}^0 \frac{dU_{\mathbf{k}}^0}{d\bar{N}}, & \text{si } \mathbf{k}, -\mathbf{k} \notin \{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p\} \text{ (la paire est normale dans } \lambda) \\ U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 - 2U_{\mathbf{k}}^0 \frac{dV_{\mathbf{k}}^0}{d\bar{N}}, & \text{si } \mathbf{k}, -\mathbf{k} \in \{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p\} \text{ (la paire est excitée dans } \lambda) \\ 0. & \text{sinon (la paire est brisée dans } \lambda) \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

En notant, pour une configuration λ donnée,

$$\text{PN}_\lambda = \{\mathbf{k} \in \mathcal{D}, \mathbf{k} \text{ et } -\mathbf{k} \notin \{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p\}\} \quad (\text{A.24})$$

$$\text{PE}_\lambda = \{\mathbf{k} \in \mathcal{D}, \mathbf{k} \text{ et } -\mathbf{k} \in \{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p\}\} \quad (\text{A.25})$$

$$\text{PB}_\lambda = \{\mathbf{k} \in \mathcal{D}, \mathbf{k} \text{ ou exclusif } -\mathbf{k} \in \{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_p\}\}, \quad (\text{A.26})$$

et en introduisant les poids statistiques $P_{\mathbf{k}}^\lambda$

$$P_{\mathbf{k}}^\lambda = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{k} \in \text{PN}_\lambda \\ -1 & \text{si } \mathbf{k} \in \text{PE}_\lambda \\ 0 & \text{si } \mathbf{k} \in \text{PB}_\lambda \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

nous mettons le recouvrement à calculer sous la forme¹ :

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_\lambda \equiv & -\frac{1}{\sqrt{\bar{N}_0^{\text{BCS}}(T)}} \langle \psi_\lambda(\bar{N}-2) | \hat{a}_0^{\text{BCS}}(T) | \psi_\lambda(\bar{N}) \rangle = \frac{1}{\bar{N}_0^{\text{BCS}}(T)} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \left[(U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0)^2 (1-2f_{\mathbf{k}}) P_{\mathbf{k}}^\lambda \right. \\ & \left. - 2V_{\mathbf{k}}^0 \frac{dV_{\mathbf{k}}^0}{d\bar{N}} (1-2f_{\mathbf{k}}) \left((V_{\mathbf{k}}^0)^2 \frac{(P_{\mathbf{k}}^\lambda + 1)P_{\mathbf{k}}^\lambda}{2} + (U_{\mathbf{k}}^0)^2 \frac{(P_{\mathbf{k}}^\lambda - 1)P_{\mathbf{k}}^\lambda}{2} \right) \right] + O\left(\frac{1}{\bar{N}^2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Étudions les deux premiers moments de ce recouvrement pour des états $|\psi_\lambda(\bar{N})\rangle$, d'énergie $E_\lambda(\bar{N})$, pondérés par la distribution canonique $\exp(-\beta E_\lambda(\bar{N}))/\mathcal{Z}$. Des populations des quasi-particules fermioniques dans l'ensemble canonique (A.17), nous déduisons la probabilité que la paire \mathbf{k} soit normale ($\mathbf{k} \in \text{PN}_{\text{can}}$), brisée ($\mathbf{k} \in \text{PB}_{\text{can}}$) ou excitée ($\mathbf{k} \in \text{PE}_{\text{can}}$) dans l'état d'équilibre à la température T ,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathbf{k} \in \text{PN}_{\text{can}}) &= (1-f_{\mathbf{k}})^2 \\ \mathcal{P}(\mathbf{k} \in \text{PE}_{\text{can}}) &= f_{\mathbf{k}}^2 \\ \mathcal{P}(\mathbf{k} \in \text{PB}_{\text{can}}) &= 2f_{\mathbf{k}}(1-f_{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

puis les moments de la variable aléatoire $P_{\mathbf{k}}^\lambda$,

$$\overline{P_{\mathbf{k}}^\lambda} = 1 - 2f_{\mathbf{k}} \quad (\text{A.30})$$

$$\overline{(P_{\mathbf{k}}^\lambda)^2} = 1 - 2f_{\mathbf{k}} + 2f_{\mathbf{k}}^2 \quad (\text{A.31})$$

$$\text{Var } P_{\mathbf{k}}^\lambda = 2f_{\mathbf{k}}(1-f_{\mathbf{k}}), \quad (\text{A.32})$$

où la moyenne $\overline{\quad}$ désigne la moyenne canonique, équivalente à la moyenne quantique dans l'état (A.13). Dans la moyenne canonique de \mathcal{O}_λ (A.28), il apparaît, à l'ordre dominant en \bar{N} , une somme que nous reconnaissons être l'expression (A.20) de $\bar{N}_0^{\text{BCS}}(T)$. Le recouvrement est donc bien égal en moyenne à 1, à un terme correctif en $O(1/\bar{N})$ près :

$$\overline{\mathcal{O}} = 1 - \frac{2}{\bar{N}_0} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} V_{\mathbf{k}}^0 \frac{dV_{\mathbf{k}}^0}{d\bar{N}} (1-2f_{\mathbf{k}}) \left((V_{\mathbf{k}}^0)^2 (1-f_{\mathbf{k}})^2 + (U_{\mathbf{k}}^0)^2 f_{\mathbf{k}}^2 \right) + O\left(\frac{1}{\bar{N}^2}\right) \quad (\text{A.33})$$

Étudions maintenant les fluctuations de \mathcal{O}_λ autour de cette valeur moyenne. Comme il n'y a pas du tout de cohérence entre les paires de vecteurs d'onde \mathbf{k} différents, il est rapide de se convaincre que les fluctuations relatives de \mathcal{O}_λ se comportent aux grands \bar{N} comme $1/\sqrt{\bar{N}}$:

$$\text{Var } \mathcal{O} = \frac{1}{(\bar{N}_0)^2} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} 2(U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0)^4 (1-2f_{\mathbf{k}})^2 f_{\mathbf{k}}(1-f_{\mathbf{k}}) + O\left(\frac{1}{\bar{N}^2}\right). \quad (\text{A.34})$$

1. La quantité $(P_{\mathbf{k}}^\lambda + 1)P_{\mathbf{k}}^\lambda/2$ est construite de façon à valoir 1 si la paire \mathbf{k} est normale dans la configuration λ , et 0 sinon. De même $(P_{\mathbf{k}}^\lambda - 1)P_{\mathbf{k}}^\lambda/2$ vaut 1 si la paire \mathbf{k} est excitée dans λ , 0 sinon.

Annexe B

Passage à la limite thermodynamique dans l'expression de la résolvante de $\hat{H} + \hat{W}$

Cette annexe explique comment passer à la limite thermodynamique au chapitre II, pour pouvoir considérer le spectre du hamiltonien \hat{H} comme un continuum (*cf.* l'équation (II.37)) et faire apparaître une partie imaginaire γ_λ non nulle à l'équation (II.38), responsable *in fine* de la décroissance exponentielle de la fonction de cohérence dans l'ensemble microcanonique g_1^λ . C'est ici inhabituellement subtil car la fonction déplacement, qui apparaît dans le hamiltonien effectif \hat{H}_{eff} au second ordre,

$$\Delta_\lambda(z) \equiv \langle \hat{W} \hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{\hat{Q}_\lambda z + \hat{Q}_\lambda (E_\lambda - \hat{H}) \hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda \hat{W} \rangle_\lambda, \quad (\text{B.1})$$

où $\text{Im } z > 0$ et nous réutilisons la notation $\langle \hat{A} \rangle_\lambda \equiv \langle \psi_\lambda | \hat{A} | \psi_\lambda \rangle$, tend vers zéro en $1/N$, tout comme $\delta_\lambda - i\gamma_\lambda$ dans (II.38).

L'idée est de se placer à une échelle de temps d'ordre N , en posant $t = N\tau$ et en gardant τ fixé à la limite thermodynamique. Nous reprenons l'équation (II.26), dont nous éliminons le propagateur avancé $\hat{G}(E - i0^+)$ en supposant $t > 0$, et utilisons l'expression (II.30) de \hat{H}_{eff} au second ordre :

$$g_1^\lambda(t) \simeq -\frac{\bar{N}_0}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} dz \frac{e^{-i(z-E_\lambda)t/\hbar}}{z - E_\lambda - \langle \hat{W} \rangle_\lambda - \Delta_\lambda(z - E_\lambda)}, \quad (\text{B.2})$$

où le contour d'intégration \mathcal{C} est la droite $\{z = x + i\eta, x = -\infty \rightarrow +\infty\}$ avec $\eta > 0$. Nous posons ensuite successivement $t = N\tau$ puis $z' = N(z - E_\lambda - \langle \hat{W} \rangle_\lambda)$, et nous nous limitons dans Δ_λ au second ordre en \hat{W} . Nous obtenons :

$$e^{i\langle \hat{W} \rangle_\lambda t/\hbar} g_1^\lambda(t) \simeq -\frac{\bar{N}_0}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}'} dz' \frac{e^{-iz'\tau\hbar}}{z' - N\Delta_\lambda(z'/N)}. \quad (\text{B.3})$$

avec cette fois $\mathcal{C}' = \{z' = x + i\eta'/N, x = -\infty \rightarrow +\infty\}$ et $\eta' > 0$ fixé. Dans $\Delta_\lambda(z'/N)$, nous devons négliger la partie réelle de z' pour être cohérent avec le traitement de \hat{H}_{eff} au second ordre. Nous posons alors

$$\hbar\Omega_\lambda = \lim_{\substack{N \rightarrow +\infty \\ \eta' > 0}} N\Delta_\lambda(i\eta'/N). \quad (\text{B.4})$$

et prenons la limite thermodynamique de l'équation (B.3) :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{g_1^\lambda(t) e^{i(\hat{W})_\lambda t/\hbar}}{\bar{N}_0} \simeq - \int_{\mathcal{C}'} \frac{dz'}{2i\pi} \frac{e^{-iz'\tau/\hbar}}{z' - \hbar\Omega_\lambda} = e^{-i\Omega_\lambda\tau}, \quad (\text{B.5})$$

le résultat étant indépendant de η' par analyticité de l'intégrande dans le demi-plan $\text{Im } z' > 0$. Ceci reproduit la décroissance exponentielle obtenue en (II.48), et fournit, pour un système de taille assez grande mais finie, la définition

$$N(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda) \equiv \Omega_\lambda. \quad (\text{B.6})$$

Si l'on avait pris la limite thermodynamique à t fixé *avant* de faire tendre t vers l'infini, on serait tombé, en développant l'intégrande de (B.2) au premier ordre en la fonction déplacement, sur une *autre* définition : $\lim_{N \rightarrow +\infty} N[\bar{N}_0^{-1} g_1^\lambda(t) e^{i(\hat{W})_\lambda t/\hbar} - 1] \sim (-it)N(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda)$ avec

$$N(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow +\infty} N\Delta_\lambda(i\eta), \quad (\text{B.7})$$

définition qui correspond à l'idée intuitive, mise en œuvre au chapitre II, de calculer δ_λ et γ_λ comme si le spectre du hamiltonien était continu. Pour montrer l'équivalence des deux définitions, injectons dans la fonction déplacement une relation de fermeture sur les états propres de \hat{H} ,

$$\Delta_\lambda(z) = \sum_{\mu \neq \lambda} \frac{|\langle \psi_\mu | \hat{W} | \psi_\lambda \rangle|^2}{z + E_\lambda - E_\mu}, \quad (\text{B.8})$$

et voyons si la granularité de la distribution des $E_\mu - E_\lambda$ dans cette somme pondérée tend vers zéro plus vite que η'/N . Pour cela, voyons chaque état propre comme la superposition cohérente d'un état de Fock central de phonons et d'un faible halo d'états de Fock de phonons s'en déduisant par des processus Beliaev-Landau 1 phonon \leftrightarrow 2 phonons. Même si \hat{W} conserve les nombres de phonons, cf. (II.32), il peut coupler l'état de Fock central de $|\psi_\mu\rangle$ au halo de $|\psi_\lambda\rangle$. Au pire, un seul processus Beliaev-Landau est mis en jeu, auquel cas $E_\mu - E_\lambda = \pm(\epsilon_{B,\mathbf{k}_1} + \epsilon_{B,\mathbf{k}_2} - \epsilon_{B,\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2})$, où \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 sont les vecteurs d'onde des deux phonons émis ou absorbés; comme la paire $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ prend $\propto V^2$ valeurs différentes, où V est le volume du système, $E_\mu - E_\lambda$ varie alors par pas $\propto 1/V^2$, ce qui est bien $\ll \eta'/N$. Cette granularité en $1/N^2$ (dans le pire des cas) justifie la description du couplage introduit par \hat{W} par une densité d'états continue dans les expressions (II.39) et (II.40) de δ_λ et γ_λ .

Annexe C

Relations de passage en point de vue des quasi-particules

Nous donnons ici la liste exhaustive des relations entre les coefficients (V.13–V.16) et (V.26, V.27) définis à la section V.1 qui sont utiles pour faire passer les équations du mouvement du point de vue de particules au point de vue de quasi-particules. Ces équations se vérifient facilement à l'aide d'un logiciel de calcul formel, ce qui épargne un travail long et fastidieux. Pour les parties individuelles des équations (dans l'ordre \hat{y} , \hat{s} , \hat{m} , \hat{h}), on utilise

$$W_{\mathbf{kq}}^+ W_{\mathbf{kq}}^- \xi_{\mathbf{kq}}^+ + w_{\mathbf{kq}}^+ (w_{\mathbf{kq}}^- \xi_{\mathbf{kq}}^- + 2\Delta_0 W_{\mathbf{kq}}^+) = \epsilon_{\mathbf{kq}}^+ \quad (\text{C.1})$$

$$W_{\mathbf{kq}}^+ w_{\mathbf{kq}}^+ \xi_{\mathbf{kq}}^+ - W_{\mathbf{kq}}^- (w_{\mathbf{kq}}^- \xi_{\mathbf{kq}}^- + 2\Delta_0 W_{\mathbf{kq}}^+) = 0 \quad (\text{C.2})$$

$$w_{\mathbf{kq}}^+ w_{\mathbf{kq}}^- \xi_{\mathbf{kq}}^- + W_{\mathbf{kq}}^+ (W_{\mathbf{kq}}^- \xi_{\mathbf{kq}}^+ + 2\Delta_0 w_{\mathbf{kq}}^+) = \epsilon_{\mathbf{kq}}^+ \quad (\text{C.3})$$

$$W_{\mathbf{kq}}^+ w_{\mathbf{kq}}^+ \xi_{\mathbf{kq}}^- - w_{\mathbf{kq}}^- (W_{\mathbf{kq}}^- \xi_{\mathbf{kq}}^+ + 2\Delta_0 w_{\mathbf{kq}}^+) = 0 \quad (\text{C.4})$$

$$-W_{\mathbf{kq}}^+ W_{\mathbf{kq}}^- \xi_{\mathbf{kq}}^- - w_{\mathbf{kq}}^- (w_{\mathbf{kq}}^+ \xi_{\mathbf{kq}}^+ - 2\Delta_0 W_{\mathbf{kq}}^-) = -\epsilon_{\mathbf{kq}}^- \quad (\text{C.5})$$

$$-W_{\mathbf{kq}}^- w_{\mathbf{kq}}^- \xi_{\mathbf{kq}}^- + W_{\mathbf{kq}}^+ (w_{\mathbf{kq}}^+ \xi_{\mathbf{kq}}^+ - 2\Delta_0 W_{\mathbf{kq}}^-) = 0 \quad (\text{C.6})$$

$$-w_{\mathbf{kq}}^+ w_{\mathbf{kq}}^- \xi_{\mathbf{kq}}^+ - W_{\mathbf{kq}}^- (W_{\mathbf{kq}}^+ \xi_{\mathbf{kq}}^- - 2\Delta_0 w_{\mathbf{kq}}^-) = -\epsilon_{\mathbf{kq}}^- \quad (\text{C.7})$$

$$-W_{\mathbf{kq}}^- w_{\mathbf{kq}}^- \xi_{\mathbf{kq}}^+ + w_{\mathbf{kq}}^+ (W_{\mathbf{kq}}^+ \xi_{\mathbf{kq}}^- - 2\Delta_0 w_{\mathbf{kq}}^-) = 0. \quad (\text{C.8})$$

Pour les parties collectives (toujours dans le même ordre), on utilise cette fois

$$W_{\mathbf{kq}}^+ z_{\mathbf{kq}}^+ + w_{\mathbf{kq}}^- d_{\mathbf{kq}}^- = W_{\mathbf{kq}}^- \quad (\text{C.9})$$

$$W_{\mathbf{kq}}^+ d_{\mathbf{kq}}^+ - w_{\mathbf{kq}}^- z_{\mathbf{kq}}^- = -w_{\mathbf{kq}}^+ \quad (\text{C.10})$$

$$W_{\mathbf{kq}}^- z_{\mathbf{kq}}^+ - w_{\mathbf{kq}}^+ d_{\mathbf{kq}}^+ = W_{\mathbf{kq}}^+ \quad (\text{C.11})$$

$$-W_{\mathbf{kq}}^- d_{\mathbf{kq}}^- - w_{\mathbf{kq}}^+ z_{\mathbf{kq}}^- = -w_{\mathbf{kq}}^- \quad (\text{C.12})$$

$$W_{\mathbf{kq}}^- d_{\mathbf{kq}}^+ + w_{\mathbf{kq}}^+ z_{\mathbf{kq}}^+ = 0 \quad (\text{C.13})$$

$$W_{\mathbf{kq}}^- z_{\mathbf{kq}}^- - w_{\mathbf{kq}}^+ d_{\mathbf{kq}}^- = 0 \quad (\text{C.14})$$

$$W_{\mathbf{kq}}^+ d_{\mathbf{kq}}^- - w_{\mathbf{kq}}^- z_{\mathbf{kq}}^+ = 0 \quad (\text{C.15})$$

$$-W_{\mathbf{kq}}^+ z_{\mathbf{kq}}^- - w_{\mathbf{kq}}^- d_{\mathbf{kq}}^+ = 0. \quad (\text{C.16})$$

Annexe D

Autre raisonnement pour obtenir l'équation complète de la dynamique de phase dans l'approche variationnelle à symétrie conservée

Nous implémentons ici explicitement la procédure décrits en quelques phrases à la fin de la section VI.3.3.1 du chapitre VI, et qui permet d'obtenir les relations tensorielles utiles pour reconstituer l'équation de la dynamique de phase dans l'approche variationnelle à symétrie conservée à partir d'un raisonnement fondé sur une variation adiabatique du nombre de particules N , un peu comme pour obtenir le mode anormal (*cf.* la section V.2.2.2 dans le chapitre V sur la RPA).

L'idée est donc de considérer un champ $\Phi'(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ à $N + \delta N$ particules, $||\Phi'||^2 = (N + \delta N)/2$, proche du minimiseur $\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; N + \delta N) = [(N + \delta N)/2]^{1/2} \phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; N + \delta N)$ et à composante réelle sur ce minimiseur :

$$\Phi' = n'^{1/2} \phi_0(N + \delta N) + \Lambda', \quad (\text{D.1})$$

où Λ' est la composante du champ Φ' dans l'hyperplan orthogonal à $\phi_0(N + \delta N)$ et où, pour alléger, on omet désormais d'écrire la dépendance des champs en \mathbf{r} et \mathbf{r}' . Comme le nombre de particules est fixé à $N + \delta N$, n' n'est pas une variable indépendante, mais

$$n' = \frac{N + \delta N}{2} - ||\Lambda'||^2. \quad (\text{D.2})$$

La composante Λ' est un infiniment petit, et on négligera ici tous les termes d'ordre supérieur strictement à deux en Λ' . L'écart δN sur le nombre de particules est lui aussi un infiniment petit, mais on se limitera à l'ordre un inclus en δN . Comme Λ' et δN sont *a priori* des petits paramètres indépendants, il ne faudra pas négliger les termes en $\Lambda'^2 \delta N$ par exemple. On va maintenant développer l'énergie du champ Φ' jusqu'au second ordre en Λ' et jusqu'au premier ordre en δN de deux manières différentes, puis on égalera les résultats obtenus ordre par ordre pour obtenir les relations à démontrer (VI.64) et (VI.71).

1 Principe du développement autour de $\Phi_0(N + \delta N)$

En utilisant (VI.44) après remplacement de N par $N + \delta N$, de n par n' et de Λ par Λ' , on obtient le développement de l'énergie du champ Φ' au second ordre inclus :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\Phi', \Phi'^*) &= \mathcal{T}_0[n', \phi_0(N + \delta N)] + \mathcal{T}_1[n', \phi_0(N + \delta N)](\Lambda', \Lambda'^*) \\ &\quad + \mathcal{T}_2[n', \phi_0(N + \delta N)](\Lambda', \Lambda'^*) + O(\|\Lambda'\|^3), \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

où l'on rappelle que $\mathcal{T}_j(\Lambda', \Lambda'^*)$ est de degré total exactement j en Λ' et Λ'^* , donc est $O(\|\Lambda'\|^j)$. L'expression (D.3) peut être simplifiée en utilisant des relations tout aussi naturelles qu'exactes et déjà écrites dans le chapitre VI :

$$\mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] = E_0(N) \quad \forall N \quad (\text{D.4})$$

$$\partial_n \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] = 2\mu_0(N) \quad \forall N \quad (\text{D.5})$$

$$\mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)] = 0 \quad \forall N, \quad (\text{D.6})$$

où $E_0(N)$ et $\mu_0(N)$ sont l'énergie et le potentiel chimique de l'état fondamental à N particules. Comme $\mathcal{T}_1[(N + \delta N)/2, \phi_0(N + \delta N)] = 0$ et que n' diffère de $(N + \delta N)/2$ d'un $O(\|\Lambda'\|^2)$, le terme en \mathcal{T}_1 dans l'équation (D.3) est $O(\|\Lambda'\|^3)$ et peut être négligé. Le terme en \mathcal{T}_0 dans l'équation (D.3), considéré comme une fonction de n' , peut, au même ordre d'approximation, être développé autour du point $(N + \delta N)/2$ jusqu'à l'ordre un en $n' - (N + \delta N)/2$; comme $\mathcal{T}_0[(N + \delta N)/2, \phi_0(N + \delta N)] = E_0(N + \delta N)$ et $\partial_n \mathcal{T}_0[(N + \delta N)/2, \phi_0(N + \delta N)] = 2\mu_0(N + \delta N)$, on obtient

$$\mathcal{T}_0[n', \phi_0(N + \delta N)] = E_0(N + \delta N) - 2\mu_0(N + \delta N)\|\Lambda'\|^2 + O(\|\Lambda'\|^4) \quad (\text{D.7})$$

Enfin, on peut remplacer n' par $(N + \delta N)/2$ dans le terme en \mathcal{T}_2 de l'équation (D.3) en commettant une erreur $O(\|\Lambda'\|^4)$ négligeable. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\Phi', \Phi'^*) &= E_0(N + \delta N) - 2\mu_0(N + \delta N)\|\Lambda'\|^2 + \\ &\quad \mathcal{T}_2[(N + \delta N)/2, \phi_0(N + \delta N)](\Lambda', \Lambda'^*) + O(\|\Lambda'\|^3) \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

qu'il est élémentaire de développer au premier ordre en δN , en écrivant

$$\mathcal{T}_2[(N + \delta N)/2, \phi_0(N + \delta N)] = \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)] + \delta N \left(\frac{d}{dN} \mathcal{T}_2 \right) [N/2, \phi_0(N)] + O(\delta N^2) \quad (\text{D.9})$$

pour définir le tenseur $d\mathcal{T}_2/dN$, dérivée totale par rapport à N du tenseur $\mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)]$ c'est-à-dire dérivée de la fonction à valeur tensorielle $N \mapsto \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)]$. En développant aussi $E_0(N + \delta N)$ et $\mu_0(N + \delta N)$ en puissances de δN , il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\Phi', \Phi'^*) &= E_0(N) - 2\mu_0(N)\|\Lambda'\|^2 + \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda', \Lambda'^*) \\ &\quad + \delta N \left[\mu_0(N) - 2\frac{d}{dN}\mu_0(N)\|\Lambda'\|^2 + \left(\frac{d}{dN} \mathcal{T}_2 \right) [N/2, \phi_0(N)](\Lambda', \Lambda'^*) \right] \\ &\quad + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^3). \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Pour achever ce développement de $\mathcal{H}(\Phi', \Phi'^*)$, il restera, au prix d'une modification mineure, à l'adapter au véritable jeu de variables indépendantes δN et Λ'_\perp défini plus bas.

2 Principe du développement autour de $\Phi_0(N)$

Comme δN est infinitésimal, le champ Φ' , non content d'être proche du minimiseur $\Phi_0(N + \delta N)$, l'est aussi du minimiseur $\Phi_0(N)$. On peut donc développer l'énergie autour de $\Phi_0(N)$ en utilisant directement l'équation générale (VI.44). Nous récrivons donc le champ Φ' sous la forme (VI.42) :

$$\Phi' = e^{i\theta} [n^{1/2} \phi_0(N) + \Lambda], \quad (\text{D.11})$$

où Λ est orthogonal à $\phi_0(N)$ [on continue à ne pas écrire explicitement la dépendance des champs en $(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$] et où le fait que $\|\Phi'\|^2 = (N + \delta N)/2$ impose

$$n = \frac{N + \delta N}{2} - \|\Lambda\|^2. \quad (\text{D.12})$$

Exprimons alors le champ Λ et la phase θ en fonction du champ Λ' , ou plus commodément en fonction de ses composantes parallèle et orthogonale au champ $\phi_0(N)$:

$$\Lambda = \lambda' \phi_0(N) + \Lambda'_\perp \quad (\text{D.13})$$

en comparant les écritures (D.1) et (D.11). Le calcul doit être fait seulement jusqu'au premier ordre en δN , ce qui permet de développer $\phi_0(N + \delta N)$ au premier ordre dans l'équation (D.1) :

$$\Phi' = (n^{1/2} + \lambda') \phi_0(N) + \left(n^{1/2} \delta N \frac{d}{dN} \phi_0(N) + \Lambda'_\perp \right) + O(\delta N^2). \quad (\text{D.14})$$

Le choix naturel

$$\phi_0(N) \in \mathbb{R} \quad \forall N \quad (\text{D.15})$$

et la normalisation de $\phi_0(N)$ à l'unité conduisent à des champs $\phi_0(N)$ et $d\phi_0/dN$ orthogonaux :

$$\langle \phi_0(N), \frac{d}{dN} \phi_0(N) \rangle = 0, \quad (\text{D.16})$$

où le produit scalaire $\langle \Phi_1, \Phi_2 \rangle \equiv l^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \Phi_1^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \Phi_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est celui dont dérive la norme $\|\cdot\|$. Alors, par projection orthogonale de (D.11) et de (D.14) sur $\phi_0(N)$:

$$e^{i\theta} = \frac{n^{1/2} + \lambda'}{n^{1/2}} + O(\delta N^2) \quad (\text{D.17})$$

$$\Lambda = e^{-i\theta} \left(n^{1/2} \delta N \frac{d}{dN} \phi_0(N) + \Lambda'_\perp \right). \quad (\text{D.18})$$

La première de ces deux relations montre que la phase θ est infinitésimale quand δN et λ' le sont ; θ ne jouera en fait pas de rôle ici, comme nous le verrons à l'issue d'un calcul explicite. La seconde de ces deux relations est physiquement très importante : elle montre que le champ Λ résulte de deux effets bien distincts, (i) la perturbation du champ Φ' par λ' et (ii) la variation δN du nombre de particules, combinée à la dépendance en N du minimiseur $\phi_0(N)$. Elle explique l'émergence de l'opérateur différentiel \mathcal{D} (voir l'équation (VI.65)), qui contient les générateurs de la translation de Λ' et de Λ'^* par un champ infinitésimal $\propto \delta N d\phi_0/dN$; elle explique aussi pourquoi il faut utiliser le développement (VI.44) jusqu'à l'ordre trois inclus en Λ , pour avoir la variation d'énergie jusqu'à l'ordre deux inclus en Λ' (l'ordre quatre en

Λ , qui serait nécessairement d'ordre > 2 en Λ' ou d'ordre > 1 en δN , n'est en revanche pas requis).

Cherchons à tout exprimer en termes du champ Λ'_\perp et de δN , qui sont *a posteriori* nos variables indépendantes. Donnons d'abord la composante λ' de Λ' selon le champ $\phi_0(N)$, qui est d'ordre un en δN et en Λ' :

$$\lambda' = \langle \phi_0(N), \Lambda' \rangle \quad (\text{D.19})$$

$$= \langle \phi_0(N + \delta N) - \delta N \frac{d}{dN} \phi_0(N) + O(\delta N^2), \Lambda' \rangle \quad (\text{D.20})$$

$$= -\delta N \langle \frac{d}{dN} \phi_0(N), \Lambda'_\perp \rangle + O(\delta N^2), \quad (\text{D.21})$$

où nous avons utilisé la propriété (D.16) pour remplacer Λ' par Λ'_\perp dans la dernière équation. En vertu de l'équation (D.13), on a alors aussi Λ' en fonction de Λ'_\perp :

$$\Lambda' = \Lambda'_\perp - \delta N \phi_0(N) \langle \frac{d}{dN} \phi_0(N), \Lambda'_\perp \rangle + O(\delta N^2). \quad (\text{D.22})$$

Donnons ensuite l'expression de la phase θ : d'après (D.17)

$$e^{2i\theta} = \frac{n'^{1/2} + \lambda'}{n'^{1/2} + \lambda'^*} + O(\delta N^2), \quad (\text{D.23})$$

où l'on peut remplacer n' par $N^{1/2}$, puisque λ' est déjà d'ordre un en δN , pour obtenir

$$\theta = \frac{\lambda' - \lambda'^*}{2iN^{1/2}} + O(\delta N^2), \quad (\text{D.24})$$

dont le terme dominant est, comme celui de λ' , un $O(\delta N \|\Lambda'\|)$. Donnons enfin l'expression du champ Λ , sous une forme plus précise que celle de l'équation (VI.77) :

$$\Lambda = (1 - i\theta)\Lambda'_\perp + \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{\|\Lambda'_\perp\|^2}{N}\right) \delta N \frac{d}{dN} \phi_0(N) + O(\|\Lambda'\|^3, \delta N^2), \quad (\text{D.25})$$

déduite de l'équation (D.18) en développant le facteur de phase au premier ordre en θ et en développant $n'^{1/2}$, où n' est donné par (D.2), à l'ordre zéro en δN et à l'ordre un en $\|\Lambda'\|^2$, sachant que

$$\|\Lambda'\|^2 = \|\Lambda'_\perp\|^2 + |\lambda'|^2 = \|\Lambda'_\perp\|^2 + O(\delta N^2). \quad (\text{D.26})$$

Le calcul de $\langle \Lambda, \Lambda \rangle$ conduit alors immédiatement à

$$\|\Lambda\|^2 = \|\Lambda'_\perp\|^2 + \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \delta N \langle \frac{d}{dN} \phi_0(N), \Lambda'_\perp + \Lambda'_\perp^* \rangle + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^3) \quad (\text{D.27})$$

et, compte tenu de la relation (D.12), à

$$n = \frac{N + \delta N}{2} - \|\Lambda'_\perp\|^2 - \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \delta N \langle \frac{d}{dN} \phi_0(N), \Lambda'_\perp + \Lambda'_\perp^* \rangle + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^3). \quad (\text{D.28})$$

Nous avons alors tout en main pour exploiter le développement (VI.44) jusqu'à l'ordre un en δN et à l'ordre deux en Λ'_\perp .

3 Fin du développement autour de $\phi_0(N)$

Il reste à développer froidement chaque terme $\mathcal{T}_j[n, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*)$, $0 \leq j \leq 3$, au second membre de l'équation (VI.44), en remplaçant n par l'expression (D.28) et le champ Λ par l'expression (D.25), puis en allant jusqu'à l'ordre un en δN et l'ordre deux en Λ'_\perp . La seule étape non complètement élémentaire est l'écriture de l'effet sur $\mathcal{T}_j(\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp)$ d'une translation du champ $\Lambda'_\perp(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ par le champ réel infinitésimal $\delta N \sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ apparaissant dans l'équation (D.25), avec

$$\sigma(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{d}{dN} \phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; N). \quad (\text{D.29})$$

Pour $j = 0$, cette translation est sans effet puisque \mathcal{T}_0 est un scalaire, constant du point de vue du champ. Pour $j = 1$, on a simplement

$$\mathcal{T}_1[n, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp + \delta N \sigma, \Lambda'^*_\perp + \delta N \sigma) = \mathcal{T}_1[n, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) + \delta N \mathcal{T}_1[n, \phi_0(N)](\sigma, \sigma) \quad (\text{D.30})$$

puisque \mathcal{T}_1 agit linéairement sur le champ et son complexe conjugué. Pour $j \geq 2$, un développement limité de Taylor-Lagrange par rapport à δN donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_j[n, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp + \delta N \sigma, \Lambda'^*_\perp + \delta N \sigma) &= \mathcal{T}_j[n, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) \\ &\quad + \delta N \mathcal{D} \cdot \mathcal{T}_j[n, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) + O(\delta N^2), \end{aligned} \quad (\text{D.31})$$

où l'opérateur différentiel \mathcal{D} est celui de l'équation (VI.65). On voit donc que $\mathcal{D} \cdot \mathcal{T}_j[n, \phi_0(N)]$ est un tenseur de degré total exactement $j - 1$ en le champ et son complexe conjugué. Notons que l'expression (D.31) vaut aussi pour $j = 0$ puisque $\mathcal{D} \cdot \mathcal{T}_0[n, \phi_0(N)] = 0$, et pour $j = 1$ puisque

$$\mathcal{D} \cdot \mathcal{T}_1[n, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) = \mathcal{T}_1[n, \phi_0(N)](\sigma, \sigma). \quad (\text{D.32})$$

Un autre point à garder à l'esprit est que, par construction, la valeur de $\mathcal{T}_j[n, \phi_0(N)](X, X^*)$ n'est sensible qu'à la composante du champ X dans l'hyperplan orthogonal à $\phi_0(N)$, c'est-à-dire qu'on a toujours

$$\mathcal{T}_j[n, \phi_0(N)](X, X^*) = \mathcal{T}_j[n, \phi_0(N)](Q_N X, Q_N X^*), \quad (\text{D.33})$$

où Q_N projette orthogonalement à $\phi_0(N)$, même si $\langle \phi_0(N), X \rangle \neq 0$.

Les calculs sont courts mais peu inspirants. Il est conseillé de développer d'abord en puissances de $n - N/2$, en faisant attention d'aller *a priori* jusqu'à l'ordre deux du fait que $(n - N/2)^2 = -\delta N \|\Lambda'_\perp\|^2 + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^3)$, et en utilisant en particulier les relations (D.4, D.5, D.6). Le reste est sans malice. Aussi donnons-nous directement le résultat, par valeurs croissantes de j :

$$\mathcal{H}(\Phi', \Phi'^*) = (\mathcal{T}_0 + \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3)[n, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^3) \quad (\text{D.34})$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0[n, \phi_0(N)] &= E_0(N) + 2\mu_0(N) \left[\frac{\delta N}{2} - \|\Lambda'_\perp\|^2 - \delta N \langle \sigma, \Lambda'_\perp + \Lambda'^*_\perp \rangle \right] \\ &\quad - \frac{\delta N}{2} \|\Lambda'_\perp\|^2 \partial_n^2 \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^3) \end{aligned} \quad (\text{D.35})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1[n, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) &= \delta N \left[\left(\frac{1}{2} - \langle \sigma, \Lambda'_\perp + \Lambda'^*_\perp \rangle \right) \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) \right. \\ &\quad \left. - \|\Lambda'_\perp\|^2 \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\sigma, \sigma) \right] + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^3) \end{aligned} \quad (\text{D.36})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_2[n, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) &= \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) + \\ &\quad \delta N \left[\frac{1}{2} \partial_n \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) + \mathcal{D} \cdot \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) \right] \\ &\quad + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^3) \end{aligned} \quad (\text{D.37})$$

$$\mathcal{T}_3[n, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) = \delta N \mathcal{D} \cdot \mathcal{T}_3[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^3) \quad (\text{D.38})$$

4 Fin du développement autour de $\phi_0(N + \delta N)$

Il suffit simplement de récrire l'équation (D.10) en termes du champ Λ'_\perp plutôt que Λ' en utilisant (D.22) : (i) d'après (D.26) on peut remplacer dans tous les termes $\|\Lambda'\|^2$ par $\|\Lambda'_\perp\|^2$, (ii) d'après (D.33), on peut remplacer Λ' par Λ'_\perp dans le terme $\mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda', \Lambda'^*)$, et (iii) on peut remplacer (Λ', Λ'^*) par son approximation d'ordre zéro en δN , à savoir $(\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp)$, dans le terme de dérivée totale $d\mathcal{T}_2/dN$ puisqu'il est multiplié par δN . Il reste finalement :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\Phi', \Phi'^*) &= E_0(N) - 2\mu_0(N) \|\Lambda'_\perp\|^2 + \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) \\ &\quad + \delta N \left[\mu_0(N) - 2 \frac{d}{dN} \mu_0(N) \|\Lambda'_\perp\|^2 + \left(\frac{d}{dN} \mathcal{T}_2 \right) [N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) \right] \\ &\quad + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^3) \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

5 Identification des développements ordre par ordre

Les développements (D.34, D.39) de l'énergie du champ Φ' coïncident jusqu'à l'ordre respectivement un et deux en les petits paramètres indépendants δN et Λ'_\perp . C'est trivialement le cas à l'ordre zéro en δN . Il reste à regarder le cas des termes d'ordre un en δN : (i) en identifiant les termes d'ordre zéro en Λ'_\perp , nous tombons sur la tautologie

$$\mu_0(N) = \mu_0(N), \quad (\text{D.40})$$

ou, si l'on préfère, sur une confirmation de la relation (D.5) ; (ii) en identifiant les termes d'ordre un en Λ'_\perp , nous obtenons

$$-2\mu_0(N) \langle \sigma, \Lambda'_\perp + \Lambda'^*_\perp \rangle + \frac{1}{2} \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) + \mathcal{D} \cdot \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) = 0, \quad (\text{D.41})$$

ce qui se réduit à la première relation qu'il fallait démontrer, à savoir la relation (VI.64) :

$$\frac{1}{2} \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) + \mathcal{D} \cdot \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) = 0 \quad (\text{D.42})$$

si l'on introduit comme dans (VI.64) la notation pour tout champ X :

$$\tilde{\mathcal{T}}_2[N](X, X^*) \equiv \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](X, X^*) - 2\mu_0(N) \|Q_N X\|^2, \quad (\text{D.43})$$

où Q_N projette orthogonalement à $\phi_0(N)$, et si l'on utilise le fait que

$$\mathcal{D} \cdot \check{\mathcal{T}}_2[N](X, X^*) = \mathcal{D} \cdot \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](X, X^*) - 2\mu_0(N)\langle \sigma, X + X^* \rangle; \quad (\text{D.44})$$

(iii) en identifiant les termes d'ordre deux en Λ'_\perp , nous obtenons

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2}\|\Lambda'_\perp\|^2\partial_n^2\mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] - \langle \sigma, \Lambda'_\perp + \Lambda'^*_\perp \rangle \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) \\ & - \|\Lambda'_\perp\|^2 \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\sigma, \sigma) + \frac{1}{2} \partial_n \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) + \mathcal{D} \cdot \mathcal{T}_3[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) = \\ & -2\frac{d}{dN}\mu_0(N)\|\Lambda'_\perp\|^2 + \left(\frac{d}{dN}\mathcal{T}_2\right)[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp). \end{aligned} \quad (\text{D.45})$$

Ce dernier résultat (D.45) conduit en deux étapes à la relation (VI.71). D'une part, le second membre de (D.45) peut être écrit sous une forme plus compacte en termes du tenseur $\check{\mathcal{T}}_2[N]$, en en dérivant la définition (D.43) par rapport à N au champ X fixé, puis en prenant $X = \Lambda'_\perp$ pour obtenir :

$$\frac{d}{dN}\check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) = \left(\frac{d}{dN}\mathcal{T}_2\right)[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) - 2\frac{d}{dN}\mu_0(N)\|\Lambda'_\perp\|^2 \quad (\text{D.46})$$

compte tenu du fait que

$$Q_N X \equiv X - \phi_0(N)\langle \phi_0(N), X \rangle \quad (\text{D.47})$$

$$\frac{d}{dN}Q_N X = -\frac{d}{dN}\phi_0(N)\langle \phi_0(N), X \rangle - \phi_0(N)\langle \frac{d}{dN}\phi_0(N), X \rangle \quad (\text{D.48})$$

$$\langle Q_N X, \frac{d}{dN}Q_N X \rangle = \langle Q_N X, -\frac{d}{dN}\phi_0(N) \rangle \langle \phi_0(N), X \rangle \quad (\text{D.49})$$

et que $\langle \phi_0(N), \Lambda'_\perp \rangle = 0$. D'autre part, le regroupement du deuxième, du troisième et du cinquième terme au premier membre du résultat (D.45) fait apparaître $\mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}$, où $\mathcal{H}_N^{\text{cub}}$ désigne, comme il est déjà dit dans le chapitre VI, voir l'équation (VI.69), l'ensemble des termes cubiques en Λ et Λ^* de l'énergie \mathcal{H}_N de l'équation (VI.60) :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) &= \mathcal{D} \cdot \mathcal{T}_3[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) - \langle \sigma, \Lambda'_\perp + \Lambda'^*_\perp \rangle \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) \\ & - \|\Lambda'_\perp\|^2 \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\sigma, \sigma), \end{aligned} \quad (\text{D.50})$$

où l'on a fait bon usage de la relation (D.32) et du fait que \mathcal{D} agisse comme une dérivation. Le résultat (D.45) se réduit alors à la forme concise

$$-\frac{1}{2}\|\Lambda'_\perp\|^2\partial_n^2\mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] + \frac{1}{2}\partial_n \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) + \mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) = \frac{d}{dN}\check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda'_\perp, \Lambda'^*_\perp) \quad (\text{D.51})$$

qui n'est autre que la relation (VI.71) qu'il fallait démontrer.

Annexe E

Calcul des intégrales $I_{n,p}$ et $J_{n,p}$

À plusieurs reprises dans cette thèse, nous rencontrons des intégrales adimensionnées de la forme

$$I_{n,p} = \frac{k_{\Delta}^3}{2\pi^2\rho} \int_0^{+\infty} du \frac{u^{2p+2}}{\epsilon_u^n} \quad (\text{E.1})$$

$$J_{n,p} = \frac{k_{\Delta}^3}{2\pi^2\rho} \int_0^{+\infty} du \frac{u^{2p+2}\xi_u}{\epsilon_u^n} \quad (\text{E.2})$$

avec $n \in 2\mathbb{N}^* + 1$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\xi_u = u^2 - \frac{1}{x} \quad (\text{E.3})$$

$$\epsilon_u = \sqrt{\xi_u^2 + 1} \quad (\text{E.4})$$

et la densité totale $\bar{\rho}$ du gaz est donnée par l'équation (IV.50). L'intégrale donnant $I_{n,p}$ est convergente pour $n - p \geq 2$, tandis que celle donnant $J_{n,p}$ l'est pour $n - p \geq 3$. Les intégrales que nous rencontrons dont l'intégrande n'est pas fonction uniquement du module de \mathbf{k} se ramènent facilement à (E.1) ou (E.2) par intégration angulaire :

$$\int d^3k f(k) \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{m} \right)^{2p} = \frac{4\pi}{1+2p} \left(\frac{\hbar^2 q^2}{m} \right)^p \int_0^{+\infty} dk k^2 f(k) \left(\frac{\hbar^2 k^2}{m} \right)^p \quad (\text{E.5})$$

où $f(k)$ est une fonction arbitraire du module de \mathbf{k} .

Notre but est d'exprimer toutes ces intégrales en fonction de la variable $x = \Delta_0/\mu$. Pour cela, la première étape est de se ramener récursivement à $I_{3,0}$ et $J_{3,0}$. Établissons d'abord les quatre relations de récurrence suivantes :

$$I_{n,p} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-2,p} - \frac{2p+1}{2(n-2)} J_{n-2,p-1} \quad (\text{E.6})$$

$$J_{n,p} = \frac{2p+1}{2(n-2)} I_{n-2,p-1} \quad (\text{E.7})$$

$$I_{n,p} = J_{n,p-1} + \frac{I_{n,p-1}}{x} \quad (\text{E.8})$$

$$J_{n,p} = \frac{J_{n,p-1}}{x} + I_{n-2,p-1} - I_{n,p-1}, \quad (\text{E.9})$$

avec la condition $1 \leq p \leq n - 4$ dans la première relation, $1 \leq p \leq n - 3$ dans la deuxième, $1 \leq p \leq n - 2$ dans la troisième et $1 \leq p \leq n - 3$ dans la dernière. Pour établir la relation (E.6), on intègre par parties l'intégrale

$$\frac{k_{\Delta}^3}{2\pi^2\rho} \int_0^{+\infty} du \frac{u^{2p+2}\xi_u^2}{\epsilon_u^n} = I_{n-2,p} - I_{n,p}, \quad (\text{E.10})$$

en dérivant la fonction $u \mapsto u^{2p+1}\xi_u$. Pour établir la relation (E.7), on intègre par parties l'intégrale définissant $J_{n,p}$ dans l'équation (E.2), en dérivant la fonction $u \mapsto u^{2p+1}$. Dans les deux cas, on note que la fonction $u \mapsto u\xi_u/\epsilon_u^n$ admet comme primitive $u \mapsto -[2(n-2)\epsilon_u^{n-2}]^{-1}$. Enfin, on écrit simplement $u^{2p+2} = u^{2p}(\xi_u + x^{-1})$ dans l'intégrande de (E.1) pour obtenir (E.8), et $u^{2p+2}\xi_u = u^{2p}(\epsilon_u^2 - 1 + x^{-1}\xi_u)$ dans l'intégrande de (E.2) pour obtenir (E.9). Cette procédure généralise celle de la référence [79]. Montrons ensuite par récurrence que les relations (E.6–E.9) permettent d'exprimer $I_{n,p}$ et $J_{n,p}$ en fonction de $I_{3,0}$ et $J_{3,0}$, pour tout n impair ≥ 3 et pour tout p positif dans le domaine d'existence des intégrales. Soit un tel n . Supposons que l'on connaisse tous les $I_{n,p}$, $0 \leq p \leq n - 2$, et tous les $J_{n,p}$, $0 \leq p \leq n - 3$. Alors (i) $I_{n+2,1}$ et $J_{n+2,1}$ s'en déduisent grâce à (E.6) et (E.7), (ii) on obtient grâce à (E.9) et (E.8) le système de Cramer sur $I_{n+2,0}$ et $J_{n+2,0}$:

$$x^{-1}J_{n+2,0} - I_{n+2,0} = J_{n+2,1} - I_{n,0} \quad (\text{E.11})$$

$$J_{n+2,0} + x^{-1}I_{n+2,0} = I_{n+2,1} \quad (\text{E.12})$$

que l'on résout, (iii) on utilise (E.8) et (E.9) pour accéder aux valeurs de $I_{n+2,p}$ et $J_{n+2,p}$ pour $p \geq 2$. On initialise la récurrence à $n = 3$, en exprimant $I_{3,1}$ en fonction de $I_{3,0}$ et $J_{3,0}$ grâce à (E.8). La table E.1 donne la chaîne de relations obtenues suivant la procédure que nous venons d'exposer qui ont servi explicitement aux sommes que nous avons rencontrées dans cette thèse.

La deuxième étape est de relier $I_{3,0}$ et $J_{3,0}$ à x et y grâce aux relations (VII.75) et (VII.76) données dans la section VII.3.3.3. Avec les notations de cette annexe, elles s'écrivent sous la forme

$$y = \frac{J_{3,0}}{I_{3,0}} \quad \text{et} \quad I_{3,0} = \frac{3x}{2(1+xy)}. \quad (\text{E.13})$$

La troisième et dernière étape est d'exprimer y en fonction de x . Ceci est fait dans la référence [79] en termes d'intégrales elliptiques. Nous passons par les fonctions $I_{\Theta} = 2\pi^2\bar{\rho}/k_{\Delta_0}^3 I_{3,0}$ et $I_X = 2\pi^2\bar{\rho}/k_{\Delta_0}^3 J_{3,0}$,

$$I_{\Theta}(x) = (1+x^{-2})^{1/4} E\left(\frac{\pi}{2}, \kappa^2(x)\right) - \frac{F\left(\frac{\pi}{2}, \kappa^2(x)\right)}{4y^2(x)(1+x^{-2})^{1/4}} \quad (\text{E.14})$$

$$I_X(x) = \frac{F\left(\frac{\pi}{2}, \kappa^2(x)\right)}{2(1+x^{-2})^{1/4}}, \quad (\text{E.15})$$

qui donnent accès à y par

$$y = \frac{I_X}{I_{\Theta}}. \quad (\text{E.16})$$

E et F sont les intégrales elliptiques incomplètes respectivement du second et du premier type,

$$E(\alpha, m) = \int_0^{\alpha} (1 - m \sin^2 \phi)^{1/2} d\phi \quad (\text{E.17})$$

$$F(\alpha, m) = \int_0^{\alpha} (1 - m \sin^2 \phi)^{-1/2} d\phi, \quad (\text{E.18})$$

et on a posé

$$y(x) = \frac{((1+x^{-2})^{1/2} + x^{-1})^{1/2}}{2^{1/2}} \quad (\text{E.19})$$

$$\kappa(x) = \frac{y(x)}{(1+x^{-2})^{1/4}}. \quad (\text{E.20})$$

Notons que les notations (E.1) et (E.2) peuvent en principe être étendues au cas où n est pair. Seule l'intégrale $I_{2,0}$ est utile en pratique. Nous la rencontrons dans l'expression de la variance du nombre de particules ou la fraction condensée à la limite continue (*cf.* l'équation (II.17)). Elle se calcule par des techniques d'analyse complexe habituelles [79] :

$$I_{2,0} = \frac{2\pi^2 \rho \pi}{k_{\Delta}^3} \frac{\pi}{2} \left(\frac{x^{-1} + \sqrt{1+x^{-2}}}{2} \right)^{1/2}. \quad (\text{E.21})$$

TABLE E.1 – Relations de récurrence effectivement utilisées dans cette thèse

$I_{3,1} = \frac{3}{2}$	
$I_{5,1} = 1 - \frac{J_{3,0}}{2}$	$J_{5,1} = \frac{I_{3,0}}{2}$
$I_{5,0} = \frac{x(2-J_{3,0})+I_{3,0}}{2(1+x^2)}$	$J_{5,0} = \frac{x(x(2-J_{3,0})-I_{3,0})}{2(1+x^2)}$
$I_{7,1} = \frac{4}{5}I_{5,1} - \frac{3}{10}J_{5,0}^{\xi}$	$J_{7,1} = \frac{3}{10}I_{5,0}$
$I_{7,0} = \frac{x(I_{7,1}+x(I_{5,0}-J_{7,1}))}{1+x^2}$	$J_{7,0} = I_{7,1} - x^{-1}I_{7,0}$
$I_{7,2} = J_{7,1}i + x^{-1}I_{7,1}$	$J_{7,2} = \frac{1}{2}I_{5,1}$
$I_{7,3} = J_{7,2} + x^{-1}I_{7,2}$	
$I_{9,1} = \frac{6}{7}I_{7,1} - \frac{3}{14}J_{7,0}$	$J_{9,1} = \frac{3}{14}I_{7,0}$
$I_{9,2} = \frac{6}{7}I_{7,2} - \frac{5}{14}J_{7,1}$	$J_{9,2} = \frac{5}{14}I_{7,1}$
$I_{9,3} = J_{9,2} + x^{-1}I_{9,2}$	
$I_{11,2} = \frac{8}{9}I_{9,2} - \frac{5}{18}J_{9,1}$	$J_{11,2} = \frac{5}{18}I_{9,1}$
$I_{11,3} = J_{11,2} + x^{-1}I_{11,2}$	
$I_{13,3} = \frac{10}{11}I_{11,3} - \frac{7}{22}J_{11,2}$	

Annexe F

Développements limités des intégrales de l'équation de dispersion

Dans cette annexe, nous développons les intégrales $I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$, $I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$ et $I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$ définie par les équations (VII.69–VII.71) et servant à calculer le spectre des excitations bosoniques. Au premier ordre non trivial, nous avons :

$$I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q) = \frac{1}{16} (-2\check{\nu}^2 I_{3,0} + \check{q}^2 (J_{3,0} + 2I_{5,1})) + O(q^4) \quad (\text{F.1})$$

$$I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q) = \frac{I_{3,0}}{2} + O(q^2) \quad (\text{F.2})$$

$$I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q) = -\frac{J_{3,0}}{4} + O(q^2), \quad (\text{F.3})$$

où, pour alléger les notations de cette annexe, nous avons posé

$$\check{q}^2 = \frac{\hbar^2 q^2}{m\Delta_0^2} \quad (\text{F.4})$$

$$\check{\nu}_q = \frac{\hbar c q}{\Delta_0}. \quad (\text{F.5})$$

En utilisant la relation de récurrence présentée dans la table E.1 pour $I_{5,1}$, et les expressions (E.13) de $I_{3,0}$ et $J_{3,0}$ en fonction de x et y , on parvient à l'expression (VII.73) de la vitesse du son donnée dans l'article. Celle-ci nous permet de relier les variables \check{q} et $\check{\nu}$ introduites plus haut

$$\check{\nu}_q^2 = \frac{I_{3,0}}{J_{3,0}^2 + I_{3,0}^2} \check{q}^2, \quad (\text{F.6})$$

et donc de simplifier l'expression de I_{++} à l'ordre le plus bas

$$I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q) = \check{\nu}^2 \frac{J_{3,0}^2}{8I_{3,0}} + O(q^4). \quad (\text{F.7})$$

Nous factorisons ces expressions de I_{++} , I_{--} et I_{+-} à l'ordre le plus bas pour écrire les ordres suivants. Ceci fait apparaître des coefficients $i_{\pm\pm}(q)$ sans dimension. Les coefficients γ et η

des ordres supérieurs de l'énergie propre figurent¹ aussi dans le développement de I_{++} :

$$I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q) = \check{\nu}^2 \frac{J_{3,0}^2}{8I_{3,0}} \left(1 + \check{\nu}^2 \left(i_{++}^{(2)}(q) - \frac{I_{3,0}^2}{4J_{3,0}^2} \frac{\Delta_0^2}{m^2 c^4} \gamma \right) + \check{\nu}^4 \left(i_{++}^{(4)}(q) - \frac{I_{3,0}^2}{8J_{3,0}^2} \frac{\Delta_0^4}{m^4 c^8} \eta \right) \right) \quad (\text{F.8})$$

$$I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q) = \frac{I_{3,0}}{2} \left(1 + i_{--}^{(2)}(q) \check{\nu}^2 + i_{--}^{(4)}(q) \check{\nu}^4 \right) \quad (\text{F.9})$$

$$I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q) = -\frac{J_{3,0}}{4} \left(1 + i_{+-}^{(2)}(q) \check{\nu}^2 + i_{+-}^{(4)}(q) \check{\nu}^4 \right). \quad (\text{F.10})$$

On obtient l'expression des coefficients $i_{\pm\pm}(q)$ en développant l'intégrande de l'intégrale correspondante et en calculant la partie angulaire comme prescrit par l'équation (E.5)

$$i_{++}^{(2)} = -\frac{I_{3,0}}{32J_{3,0}^2} \left[8I_{5,0} - 4\check{c}^{-2} \left\{ 3J_{5,0} + \frac{10}{3}I_{7,1} \right\} + \check{c}^{-4} \{ 2I_{3,0} - 3I_{5,0} + 20J_{7,1} + 4(7I_{9,2} - 4I_{7,2}) \} \right] \quad (\text{F.11})$$

$$i_{--}^{(2)} = \frac{1}{8I_{3,0}} \left[2(I_{5,0} - I_{3,0}) + \check{c}^{-2} \left\{ J_{3,0} - 3J_{5,0} + \frac{10}{3}(I_{5,1} - I_{7,1}) \right\} \right] \quad (\text{F.12})$$

$$i_{+-}^{(2)} = \frac{1}{8J_{3,0}} \left[2J_{5,0} + \check{c}^{-2} \left\{ -2I_{3,0} + 3I_{5,0} - \frac{10}{3}J_{7,1} \right\} \right] \quad (\text{F.13})$$

$$i_{++}^{(4)} = \frac{I_{3,0}}{256J_{3,0}^2} \left[-16(I_{7,0} + 16\tilde{\gamma}(I_{5,0} + \tilde{\gamma}I_{3,0})) \right. \\ \left. + 8\check{c}^{-2} \left\{ 5J_{7,0} + 24\tilde{\gamma}J_{5,0} + \frac{2}{3}(7I_{9,1} + 40\tilde{\gamma}I_{7,1}) \right\} \right. \\ \left. + 2\check{c}^{-4} \left\{ 3(5I_{7,0} - 4I_{5,0}) - \frac{140}{3}J_{9,1} + \frac{28}{5}(-9I_{11,2} + 4I_{9,2}) \right\} \right. \\ \left. + \check{c}^{-6} \{ -5J_{7,0} + 2J_{5,0} - 10(7I_{9,1} - 6I_{7,1}) + 28(9J_{11,2} - 4J_{9,2}) \right. \\ \left. + 8(33I_{13,3} - 36I_{11,3} + 8I_{9,3}) \} \right] \quad (\text{F.14})$$

$$i_{--}^{(4)} = \frac{1}{128I_{3,0}} \left[8(I_{7,0} - I_{5,0} + 8\tilde{\gamma}(I_{5,0} - I_{3,0})) \right. \\ \left. - 4\check{c}^{-2} \left\{ -3J_{5,0} + 5J_{7,0} + \frac{14}{3}(I_{9,1} - I_{7,1}) \right\} \right. \\ \left. + \check{c}^{-4} \left\{ -2I_{3,0} + 15I_{5,0} - 15I_{7,0} + \frac{20}{3}(7J_{9,1} - 5J_{7,1}) + \frac{28}{5}(9I_{11,2} - 13I_{9,2} + 4I_{7,2}) \right\} \right] \quad (\text{F.15})$$

1. En vérité, γ figure aussi dans les coefficients $i^{(4)}$ des ordres 4 des développements. Mais comme son expression est déjà connue à l'ordre 2, à l'inverse de celle de η , nous ne l'isolons pas des autres termes d'ordre 4.

$$\begin{aligned}
i_{+-}^{(4)} = & -\frac{1}{128J_{3,0}} \left[-8(J_{7,0} + 8\tilde{\gamma}J_{5,0}) \right. \\
& + \check{c}^{-2} \left\{ 4(4I_{5,0} - 5I_{7,0}) + \frac{56}{3}J_{9,1} \right\} \\
& \left. + \check{c}^{-4} \left\{ 3(5J_{7,0} - 2J_{5,0}) + \frac{20}{3}(7I_{9,1} - 6I_{7,1}) + \frac{28}{5}(-9J_{11,2} + 4J_{9,2}) \right\} \right] \quad (\text{F.16})
\end{aligned}$$

Pour alléger les notations, nous avons posé :

$$\tilde{\gamma} = \frac{\Delta_0^2}{m^2 c^4} \frac{\gamma}{8} = \left(\frac{J_{3,0}^2 + I_{3,0}^2}{I_{3,0}} \right)^2 \frac{\gamma}{8} \quad (\text{F.17})$$

$$\check{c} = \frac{m^{1/2} c}{\Delta_0^{1/2}} = \left(\frac{I_{3,0}}{J_{3,0}^2 + I_{3,0}^2} \right)^{1/2} \quad (\text{F.18})$$

$$\quad (\text{F.19})$$

Annexe G

Complément sur le calcul microscopique des amplitudes de Beliaev-Landau

Ce complément montre comment l'on obtient l'expression (VIII.26) de l'amplitude de couplage Beliaev-Landau entre excitations bosoniques à partir des résultats du chapitre VII sur les modes collectifs. Le lecteur parvenu à cet appendice sera récompensé de son courage et pourra enfin comprendre comment éliminer les degrés de liberté internes des paires pour faire apparaître une interaction effective entre modes collectifs.

L'idée centrale du calcul est d'injecter le développement (VII.113) du champ β sur les modes collectifs de la théorie linéarisée dans l'énergie cubique. Cette dernière s'obtient en contractant les quantités cubiques en $\beta \beta_{\mathbf{k}'+\mathbf{q},\mathbf{k}'} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}^\uparrow$ et $\beta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\downarrow$ et leur complexe conjuguée, par le tenseur

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} = \frac{w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- + w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+ + W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- - W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+}{2}. \quad (\text{G.1})$$

Procédons par étapes et injectons le développement dans $\rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}^\uparrow = \sum_{\mathbf{q}_1} \bar{\beta}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_1,\mathbf{k}+\mathbf{q}} \beta_{\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{q}_1}$:

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}^\uparrow = \sum_{\mathbf{q}_1 \in \mathcal{D}} & \left(M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_1} b_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}^* b_{-\mathbf{q}_1} + N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_1} b_{\mathbf{q}_1}^* b_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}} \right. \\ & \left. + M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_1} b_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}^* b_{\mathbf{q}_1}^* + N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_1} b_{-\mathbf{q}_1} b_{\mathbf{q}_1-\mathbf{q}} \right). \quad (\text{G.2}) \end{aligned}$$

Nous multiplions ensuite par la quantité $\beta_{\mathbf{k}'+\mathbf{q},\mathbf{k}'}$, elle aussi développée sur les modes collectifs. Partout où cela est possible, nous faisons un changement d'indice de façon à ce que le vecteur d'onde incident soit \mathbf{q}_i .

$$\begin{aligned} \beta_{\mathbf{k}'+\mathbf{q},\mathbf{k}'} \rho_{\mathbf{k}+\mathbf{q},\mathbf{k}}^\uparrow = \sum_{\mathbf{q}_i \in \mathcal{D}} & \left(M_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} \left(M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\mathbf{q}_i} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}-\mathbf{q}_i} + N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\mathbf{q}_i-\mathbf{q}} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \right) b_{\mathbf{q}_i}^* b_{\mathbf{q}_i-\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}} \right. \\ & \left. + N_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} \left(M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\mathbf{q}_i-\mathbf{q}} M_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}_i} + N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{\mathbf{q}_i} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i+\mathbf{q}} \right) b_{\mathbf{q}_i} b_{\mathbf{q}_i+\mathbf{q}}^* b_{-\mathbf{q}}^* \right) \\ & + \sum_{\mathbf{q}' \in \mathcal{D}} \left(N_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} M_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}^{\mathbf{q}'} N_{\mathbf{k}-\mathbf{q}'}^{\mathbf{q}'+\mathbf{q}} b_{-\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^* b_{-\mathbf{q}-\mathbf{q}'} b_{\mathbf{q}'} + M_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}'}^{\mathbf{q}-\mathbf{q}'} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}'} b_{\mathbf{q}} b_{\mathbf{q}'}^* b_{\mathbf{q}-\mathbf{q}'}^* \right) + \dots, \quad (\text{G.3}) \end{aligned}$$

où l'ellipse ... concerne les termes non résonnants bbb ou $b^*b^*b^*$. Le calcul de $\beta_{\mathbf{k}',\mathbf{k}'+\mathbf{q}} \rho_{\mathbf{k},\mathbf{k}+\mathbf{q}}^\downarrow$ conduit, après transposition des coefficients $M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\mathbf{q}} = M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ et $N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\mathbf{q}} = N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$, à une expression

identique à (G.3) au changement global du signe des vecteurs d'onde des opérateurs b et b^* près. Le processus obtenu par un tel changement de signe est le même processus physique que le processus de départ et possède donc la même amplitude de couplage. On peut alors regrouper la contribution de $\beta\rho^\downarrow$ avec celle de $\beta\rho^\uparrow$, ce qui fait apparaître un facteur 2 de spin. Nous contractons ensuite l'expression (G.3) et sa complexe conjuguée par le tenseur $\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ (G.1). Quelques petits changements d'indice (par exemple $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}_i$, $\mathbf{q}' \rightarrow \mathbf{q}_+$) permettent de factoriser systématiquement l'opérateur $b_{\mathbf{q}_i}^* b_{\mathbf{q}_+} b_{\mathbf{q}_-}$ ou son complexe conjugué. Lorsque le tenseur apparaît avec $-\mathbf{q}_i$ ou $-\mathbf{q}_+$ comme une coordonnée haute, nous nous ramenons à \mathbf{q}_i ou \mathbf{q}_+ en faisant les changements de variable $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}' \rightarrow -\mathbf{k}'$ puis en inversant tous les signes grâce à l'invariance du tenseur par changement de signe global $\mathcal{T}_{-\mathbf{k},-\mathbf{k}'}^{-\mathbf{q}} = \mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}}$. Ceci conduit au résultat intermédiaire :

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{\bar{N}^{1/2}} \mathcal{A}_{\mathbf{q}_i, \mathbf{q}} = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathcal{D}} & \left(\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} M_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \left(M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{-\mathbf{q}_i} M_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}_-} + N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \right) \right. \\ & + \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} N_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \left(M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} + N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{-\mathbf{q}_i} N_{\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}_-} \right) \\ & \left. + \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} \left(N_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} N_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} M_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} + M_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} M_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} N_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} \right) \right) + [\mathbf{q}_+ \leftrightarrow \mathbf{q}_-], \quad (\text{G.4}) \end{aligned}$$

où, au membre de droite, nous avons mis de côté l'échelle d'énergie mc^2 et la dépendance asymptotique en \bar{N} . La notation $[\mathbf{q}_+ \leftrightarrow \mathbf{q}_-]$ signifie qu'il faut ajouter aux termes présents dans l'équation (G.4) ceux obtenus en inversant \mathbf{q}_+ et \mathbf{q}_- et en laissant \mathbf{q}_i inchangé.

Pour poursuivre le calcul, et notamment pour prendre la limite des grandes longueur d'onde, nous avons besoin de remplacer les coefficients M et N par leur somme et différence S et Y . Ces dernières sont en effet plus pratiques pour un développement à faibles \mathbf{q}_+ , \mathbf{q}_- , \mathbf{q}_i puisque $S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ est exactement un ordre plus élevé en \mathbf{q} que $Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$. On se convainc facilement, par simple substitution, que les termes qui contiennent un nombre pair (0 ou 2) de facteur S sont nuls. Nous écrivons donc les termes comportant 1 ou 3 facteurs S , et nous notons \mathcal{A}^{1S} et \mathcal{A}^{3S} les amplitudes de couplage correspondantes :

$$\frac{mc^2}{\bar{N}^{1/2}} \mathcal{A}_{\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_+}^{3S} = \frac{g_0}{4L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathcal{D}} \left(\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} S_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \left(S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} + S_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_i} S_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_-} \right) + \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} S_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} \right) + [\mathbf{q}_+ \leftrightarrow \mathbf{q}_-] \quad (\text{G.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{mc^2}{\bar{N}^{1/2}} \mathcal{A}_{\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_+}^{1S} &= \frac{g_0}{4L^3} \quad (\text{G.6}) \\ &\times \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}' \in \mathcal{D}} \left[\mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \left(S_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \left(Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_i} Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_-} + Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \right) + Y_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \left(Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_i} S_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_-} + S_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_i} Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_-} - Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} - S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \right) \right) \right. \\ &\left. + \mathcal{T}_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} \left(Y_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} - Y_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} - S_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} \right) \right] + [\mathbf{q}_+ \leftrightarrow \mathbf{q}_-] \end{aligned}$$

1 Limite continue et simplifications

Dans les amplitudes \mathcal{A}^{3S} (G.5) et \mathcal{A}^{1S} (G.6), nous distribuons les termes du tenseur $\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ (G.1). Toutes deux deviennent alors des sommes de (beaucoup) de termes eux-mêmes produits d'une somme sur \mathbf{k} , d'une somme sur \mathbf{k}' et de g_0/L^3 . À la limite continue, nous allons remplacer g_0 par l'inverse de l'intégrale divergente $-\int d^3k'/(2\pi)^3 \times 1/(2\epsilon_{\mathbf{k}'})$ (cf. l'équation (IV.59)). Il faut donc que l'une au moins des sommes sur \mathbf{k} ou sur \mathbf{k}' soit elle-aussi divergente pour que le terme ne tende pas vers zéro à la limite continue. Or la somme sur \mathbf{k} n'est jamais divergente puisqu'elle contient toujours deux facteurs $Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ ou $S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$, qui se comportent tous deux comme k^{-2} à grand k (cf. leurs expressions (VII.97) et (VII.98)), et un facteur $W_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{\pm}$ ou $w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^{\pm}$ venant du tenseur (cf. l'expression (G.1)) qui lui se comporte dans le pire des cas comme une constante à grand k . Il faut donc que la somme sur \mathbf{k}' soit divergente. Celle-ci contient un seul facteur $Y_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}}$ ou $S_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}}$ et un facteur du tenseur $W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^{\pm}$ ou $w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^{\pm}$ du tenseur. Parmi ces derniers, seuls $W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+$ ou $W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^-$ peuvent conduire à une somme divergente car $w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+$ et $w_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^-$ décroissent plus vite que k'^{-2} . À la limite continue, nous pouvons donc éliminer la moitié des termes du tenseur $\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}$ (G.1) :

$$\mathcal{T}_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} \xrightarrow{\text{limite continue}} \frac{w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^+ W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^- + w_{\mathbf{k}\mathbf{q}}^- W_{\mathbf{k}'\mathbf{q}}^+}{2}. \quad (\text{G.7})$$

Même avec cette simplification, il demeure un grand nombre de termes dans \mathcal{A}^{1S} . Heureusement, une bonne partie s'avère nulle :

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k},\mathbf{q}_+}^- \left(Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_i} Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_-} + Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \right) = 0 \quad (\text{G.8})$$

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k},\mathbf{q}_+}^+ \left(Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_i} S_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_-} + S_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_i} Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_-} - Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} - S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \right) = 0. \quad (\text{G.9})$$

Ceci se voit en faisant sur le premier terme dans (G.8), les deux premiers termes dans (G.9), la suite d'opérations suivante : (i) une transposition $Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\mathbf{q}}$ et $S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}}^{-\mathbf{q}}$ sur tous les facteurs Y et S , (ii) une inversion globale de signe $Y_{-\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}} = Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$, $S_{-\mathbf{k}}^{-\mathbf{q}} = S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ et $w_{-\mathbf{k},-\mathbf{q}_+}^- = w_{\mathbf{k},\mathbf{q}_+}^-$, (iii) les changements de variable $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ puis $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}_+$, (iv) la simplification $w_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+,-\mathbf{q}_+}^- = -w_{\mathbf{k},\mathbf{q}_+}^-$ dans (G.8) ou $w_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+,-\mathbf{q}_+}^+ = w_{\mathbf{k},\mathbf{q}_+}^+$ dans (G.9). D'autres termes s'avèrent nuls après ajout du terme symétrique obtenu par échange $\mathbf{q}_+ \leftrightarrow \mathbf{q}_-$, qui n'est pas écrit explicitement dans (G.6). Ainsi, nous avons :

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k},\mathbf{q}_i}^- \left(Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} + Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_+} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_-} \right) = 0 \quad (\text{G.10})$$

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k},\mathbf{q}_i}^+ \left(Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} - S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} + Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_+} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_-} - S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_+} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_-} \right) = 0. \quad (\text{G.11})$$

Ceci se voit en faisant, cette fois sur l'ensemble des termes, la même suite d'opérations que pour (G.8) et (G.9), en remplaçant simplement le deuxième changement de variable par $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{q}_i$. Les autres termes sont non nuls. On peut en regrouper certains en utilisant la

procédure décrite pour les équations (G.8) et (G.9) :

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_+}^- \left(Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_i} S_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_-} + S_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_i} Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_-} - Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} - S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \right) \\ = -2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_+}^- \left(Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} + S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{G.12})$$

$$\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_+}^+ \left(Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_i} Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}_-}^{\mathbf{q}_-} + Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \right) = 2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_+}^+ Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i}. \quad (\text{G.13})$$

Nous simplifions de même \mathcal{A}^{3S} en remarquant que les équations (G.8), (G.10) et (G.13) restent valables en remplaçant Y par S . Nous obtenons alors des expressions simplifiées de \mathcal{A}^{3S} et \mathcal{A}^{1S} :

$$\frac{mc^2}{\bar{N}^{1/2}} \mathcal{A}_{\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_+}^{3S} \stackrel{l \rightarrow 0}{=} \frac{1}{-\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} 4/\epsilon_{\mathbf{k}'}} \left[2 \left(\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}', \mathbf{q}_+}^- S_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \right) \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_+}^+ S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \right) \right. \\ \left. + \left(\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}', \mathbf{q}_i}^- S_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} \right) \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_i}^+ S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} \right) + [\mathbf{q}_+ \leftrightarrow \mathbf{q}_-] \right] \quad (\text{G.14})$$

$$\frac{mc^2}{\bar{N}^{1/2}} \mathcal{A}_{\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_+}^{1S} \stackrel{l \rightarrow 0}{=} \frac{1}{-\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} 4/\epsilon_{\mathbf{k}'}} \left[\left(\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}', \mathbf{q}_+}^+ Y_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \right) \left(-2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_+}^- \left(Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} + S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \right) + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_i}^- \left(Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} - S_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} \right) \right) \right. \\ \left. + 2 \left(\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}', \mathbf{q}_+}^- S_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \right) \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_+}^+ Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} \right) - \left(\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}', \mathbf{q}_i}^- S_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} \right) \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_i}^+ Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} Y_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} \right) + [\mathbf{q}_+ \leftrightarrow \mathbf{q}_-] \right] \quad (\text{G.15})$$

Bien que nous ayons pris la limite continue, nous avons volontairement conservé une notation sous forme de sommes par souci de continuité de notations avec le reste de cette sous-section.

2 Limite des grandes longueurs d'onde

À basse température, les excitations présentes dans le gaz ont un faible nombre d'onde. Par conséquent, tous les vecteurs d'onde \mathbf{q}_i , \mathbf{q}_+ et \mathbf{q}_- des processus de Landau-Beliaev qui conservent l'énergie tendent vers zéro. Nous cherchons donc un équivalent de l'amplitude \mathcal{A} lorsque $\mathbf{q}_+ \rightarrow 0$ et $\mathbf{q}_i \rightarrow 0$.

2.1 Développements limités de Y et S

Nous commençons par donner le développement entièrement explicite des coefficients $S_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ et $Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}}$ des modes collectifs dans la base somme et différence (*cf.* les équations (VII.97) et (VII.98) ainsi que (VII.116) et (VII.117) pour les premiers ordres du développement) à la limite continue $l \rightarrow 0$. Nous avons :

$$\sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}} Y_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^{\mathbf{q}} = -w_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2, \mathbf{q}}^+ + \frac{1}{4\epsilon_u^3} (2u^2 \check{q}^2 \cos^2 \alpha - \check{\nu}_q^2 (1 + y\xi_u)) + O(q^3) \quad (\text{G.16})$$

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}}} S_{\mathbf{k}-\mathbf{q}/2}^{\mathbf{q}} / \check{\nu}_q &= -\frac{1}{2\epsilon_u^2} (1 + y\xi_u) \\ &+ \frac{1}{16\epsilon_u^6} \left[2\check{\nu}_q^2 \epsilon_u^2 \left\{ y\xi_u \left(4\epsilon_u^2 \left[\frac{\gamma}{8\check{c}^4} \left\{ 1 + \frac{2}{y^2} \right\} + i_{+-}^{(2)} - i_{++}^{(2)} \right] - 1 \right) - \left(1 + \frac{\gamma}{2\check{c}^4} \epsilon_u^2 \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \check{q}^2 \{ 6u^2 \cos^2 \alpha (1 + y\xi_u) + \epsilon_u^2 (2\xi_u + y(\epsilon_u^2 - 2)) \} \right] + O(q^5), \end{aligned} \quad (\text{G.17})$$

où, comme ailleurs dans cette thèse, nous avons posé

$$u^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m\Delta_0} \quad (\text{G.18})$$

$$\xi_u = u^2 - \frac{1}{x} \quad (\text{G.19})$$

$$\epsilon_u = \sqrt{\xi_u^2 + 1} \quad (\text{G.20})$$

$$\check{q}^2 = \frac{\hbar^2 q^2}{m\Delta_0^2} \quad (\text{G.21})$$

$$\check{\nu}_q = \frac{\hbar c q}{\Delta_0} \quad (\text{G.22})$$

$$\check{c} = \frac{m^{1/2} c}{\Delta_0^{1/2}} \quad (\text{G.23})$$

$$y = \frac{d\Delta_0}{d\mu} = \frac{X}{\Theta}, \quad (\text{G.24})$$

et α est l'angle entre les vecteurs \mathbf{k} et \mathbf{q} de sorte que

$$\frac{\hbar^4 (\mathbf{k} \cdot \mathbf{q})^2}{m^2 \Delta_0^2} = 2u^2 \check{q}^2 \cos^2 \alpha. \quad (\text{G.25})$$

Nous avons utilisé les développements (F.8) et (F.10) pour développer le quotient :

$$\frac{I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)}{I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)} = -y\check{\nu}_q^2 \left(1 + \check{\nu}_q^2 \left(i_{++}^{(2)} - i_{+-}^{(2)} - \frac{\gamma}{4\check{c}^4 y^2} \right) \right). \quad (\text{G.26})$$

Les quantités $i_{++}^{(2)}$ et $i_{+-}^{(2)}$ sont données respectivement par les équations (F.11) et (F.13). Des développements (G.16,G.17) l'on déduit celui de la constante de normalisation $\mathcal{N}_{\mathbf{q}}$:

$$\mathcal{N}_{\mathbf{q}} = \frac{\hbar c q}{2} \frac{d\bar{N}}{d\mu} \left(1 + \tau \frac{\hbar^2 c^2 q^2}{\Delta_0^2} \right) + O(q^5), \quad (\text{G.27})$$

avec un coefficient τ sans dimension

$$\tau = \frac{1}{8} \left[-\frac{10}{3} (I_{7,1} + y J_{7,1}) + 3(y I_{5,0} - J_{5,0}) - 2y I_{3,0} + 2\check{c}^2 \left(y^2 I_{3,0} + (2 - y^2) I_{5,0} + 3y J_{5,0} - \frac{\gamma}{2\check{c}^6} + 4y \left(i_{++}^{(2)} - i_{+-}^{(2)} \right) J_{3,0} \right) \right]. \quad (\text{G.28})$$

C'est cette dernière équation qui conduit à l'expression (??) du coefficient τ sous forme d'une fraction rationnelle en x et y ,

$$\tau = \frac{\sum_{i=0}^6 R_i(y) x^i}{1920(x^2 + 1)(xy + 1)^4}, \quad (\text{G.29})$$

avec les polynômes R_i suivants

$$R_0 = -640 \quad (\text{G.30})$$

$$R_1 = -2320y \quad (\text{G.31})$$

$$R_2 = -4(207y^6 + 495y^4 + 804y^2 + 46) \quad (\text{G.32})$$

$$R_3 = -4y(198y^6 - 225y^4 - 1484y^2 - 341) \quad (\text{G.33})$$

$$R_4 = -450y^8 - 999y^6 + 905y^4 - 5433y^2 - 567 \quad (\text{G.34})$$

$$R_5 = -8y(99y^6 - 420y^4 - 637y^2 - 648) \quad (\text{G.35})$$

$$R_6 = -315y^8 + 1179y^6 + 1385y^4 - 567y^2 - 1458. \quad (\text{G.36})$$

Ainsi, le dénominateur $\sqrt{\mathcal{N}_{\mathbf{q}_+} \mathcal{N}_{\mathbf{q}_-} \mathcal{N}_{\mathbf{q}_i}}$ présent dans l'amplitude \mathcal{A} *via* les coefficients Y et S fournit le facteur $(q_i q_+ q_-)^{-1/2}$ présent dans la formule finale (VIII.26). Aussi, pour travailler avec des ordres entiers, nous développerons dans la suite l'amplitude

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_i} \equiv \sqrt{\check{q}_i \check{q}_+ \check{q}_-} \mathcal{A}_{\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_i}, \quad (\text{G.37})$$

où l'on a retiré ce dénominateur.

2.2 Resommation des degrés de liberté internes \mathbf{k} et \mathbf{k}'

Nous sommes maintenant prêts à développer les sommes qui apparaissent dans les équations (G.14) et (G.15) de façon à pouvoir écrire l'amplitude $\tilde{\mathcal{A}}$ jusqu'à l'ordre trois. Ceci demande d'être soigneux et endurant car les termes sont nombreux. Tous les résultats que nous donnons sont obtenus à la limite continue. (i) La contribution peut-être la plus facile est celle de $\tilde{\mathcal{A}}^{3S}$. Comme cette amplitude contient trois facteurs \tilde{S} , elle se calcule uniquement avec le premier ordre du développement (G.17) :

$$\tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_+}^{3S} = \frac{3\check{c}^{5/2}}{2^{5/2}} y (I_{5,0} + 2yJ_{5,0} + y^2 (I_{3,0} - I_{5,0})) \check{q}_+ \check{q}_- \check{q}_i + O(q_+^5, q_i^5) \quad (\text{G.38})$$

(ii) Beaucoup moins simple est le calcul des sommes présentes dans $\tilde{\mathcal{A}}^{1S}$. Commençons par les sommes sur \mathbf{k}' :

$$\frac{g_0}{\Delta_0 L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}', \mathbf{q}}^- \tilde{S}_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} = - \frac{\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}', \mathbf{q}}^- \tilde{S}_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}}}{\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} \Delta_0 / (2\epsilon_{\mathbf{k}'})} = \check{\nu}_q y \left(1 - \check{\nu}_q^2 \left(\frac{\gamma}{8\check{c}^4} \left(1 + \frac{2}{y^2} \right) - i_{++}^{(2)} + i_{+-}^{(2)} \right) \right) + O(q^5) \quad (\text{G.39})$$

$$\frac{g_0}{\Delta_0 L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}', \mathbf{q}}^+ \tilde{Y}_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} = - \frac{\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}', \mathbf{q}}^+ \tilde{Y}_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}}}{\sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} \Delta_0 / (2\epsilon_{\mathbf{k}'})} = 2 + O(q^2). \quad (\text{G.40})$$

Puis les sommes sur k :

$$\frac{1}{\bar{N}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_+}^- \tilde{Y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \tilde{S}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} = \frac{\check{q}_+^2}{4} \left(\frac{1}{2} (I_{5,0} + yJ_{5,0}) - \frac{5}{3} yI_{5,1} + \frac{7}{3} (yI_{7,1} - J_{7,1}) \right) - \frac{\check{q}_+ \check{q}_- \cos \alpha}{12} (3J_{7,1} + 2yI_{5,1} - 3yI_{7,1}) + O(q_+^4, q_i^4) \quad (\text{G.41})$$

$$\frac{1}{\bar{N}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_+}^- \tilde{Y}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} = \frac{\check{q}_+^2}{4} \left(\frac{1}{2} (I_{5,0} + yJ_{5,0}) - \frac{5}{3} yI_{5,1} + 2(yI_{7,1} - J_{7,1}) \right) - \frac{\check{q}_+ \check{q}_- \cos \alpha}{12} (3J_{7,1} + 2yI_{5,1} - 3yI_{7,1}) + O(q_+^4, q_i^4) \quad (\text{G.42})$$

$$\frac{1}{\bar{N}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_+}^+ \tilde{Y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \tilde{Y}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} = I_{3,0} + \check{q}_+^2 \left(-\frac{8}{3} I_{7,1} + 2I_{5,1} - J_{5,0} \right) + \check{q}_i^2 \frac{\check{c}^2}{4} (I_{5,0} + yJ_{5,0}) \quad (\text{G.43})$$

$$+ \check{q}_-^2 \left(-I_{7,1} + \frac{1}{2} I_{5,1} - \frac{1}{2} J_{5,0} + \frac{\check{c}^2}{4} (I_{5,0} + yJ_{5,0}) \right) + \check{q}_+ \check{q}_- \cos \alpha \left(-\frac{8}{3} I_{7,1} + \frac{11}{6} I_{5,1} - J_{5,0} \right) + O(q_+^4, q_i^4)$$

$$\frac{1}{\bar{N}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_i}^+ \tilde{Y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} \tilde{Y}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} = I_{3,0} + \check{q}_+^2 \left(-\frac{8}{3} I_{7,1} + 2I_{5,1} - J_{5,0} + \frac{\check{c}^2}{4} (I_{5,0} + yJ_{5,0}) \right) \quad (\text{G.44})$$

$$+ \check{q}_-^2 \left(-I_{7,1} + \frac{2}{3} I_{5,1} - \frac{1}{2} J_{5,0} + \frac{\check{c}^2}{4} (I_{5,0} + yJ_{5,0}) \right) + \check{q}_+ \check{q}_- \cos \alpha \left(-\frac{8}{3} I_{7,1} + \frac{13}{6} I_{5,1} - J_{5,0} \right) + O(q_+^4, q_i^4).$$

Notons que les sommes dans (G.15) contenant $w_{\mathbf{k},\mathbf{q}_i}^-$ au lieu de $w_{\mathbf{k},\mathbf{q}_+}^-$ se déduisent de (G.41) et (G.42) par la substitution $\mathbf{q}_+ \leftrightarrow \mathbf{q}_i$ et $\mathbf{q}_- \rightarrow -\mathbf{q}_-$. Regroupons les termes :

$$\begin{aligned}
& 2 \left(\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_+}^- \tilde{S}_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \right) \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k},\mathbf{q}_+}^+ \tilde{Y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \tilde{Y}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} \right) - \left(\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}',\mathbf{q}_i}^- \tilde{S}_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_i} \right) \left(\sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k},\mathbf{q}_i}^+ \tilde{Y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} \tilde{Y}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} \right) + [\mathbf{q}_+ \leftrightarrow \mathbf{q}_-] = \\
& \frac{2mc^2 \bar{N}}{\check{c}} \left[J_{3,0} \left\{ \check{q}_+ + \check{q}_- - \check{q}_i + \left(i_{++}^{(2)} - i_{+-}^{(2)} - \frac{\gamma}{8\check{c}^4} \left(\frac{2}{y^2} + 1 \right) \right) \check{c}^2 (\check{q}_+^3 + \check{q}_-^3 - \check{q}_i^3) \right\} \right. \\
& \quad + \left\{ (\check{q}_+^3 + \check{q}_-^3) y \left[-\frac{8}{3} I_{7,1} + 2I_{5,1} - J_{5,0} + \frac{1}{4} \check{c}^2 (I_{5,0} + yJ_{5,0}) \right] \right. \\
& \quad + (\check{q}_+^2 \check{q}_- + \check{q}_-^2 \check{q}_+) y \left[-I_{7,1} + \frac{1}{2} I_{5,1} - \frac{1}{2} J_{5,0} + \frac{1}{2} \check{c}^2 (I_{5,0} + yJ_{5,0}) \right] \\
& \quad + (\check{q}_+ + \check{q}_-) \check{q}_- \check{q}_+ y \cos \alpha \left[-\frac{8}{3} I_{7,1} + \frac{11}{6} I_{5,1} - J_{5,0} + \frac{1}{2} \check{c}^2 (I_{5,0} + yJ_{5,0}) \right] \\
& \quad - \check{q}_i (\check{q}_+^2 + \check{q}_-^2) \frac{y}{2} \left[-\frac{11}{3} I_{7,1} + \frac{8}{3} I_{5,1} - \frac{3}{2} J_{5,0} + \frac{1}{2} \check{c}^2 (I_{5,0} + yJ_{5,0}) \right] \\
& \quad \left. \left. - \check{q}_i \check{q}_+ \check{q}_- y \cos \alpha \left[-\frac{8}{3} I_{7,1} + \frac{13}{6} I_{5,1} - J_{5,0} \right] \right\} \right] + O(\check{q}_+^5, \check{q}_i^5) \tag{G.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}' \in \mathcal{D}} W_{\mathbf{k}', \mathbf{q}_+}^+ \tilde{Y}_{\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}_+} \right) \left(-2 \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_+}^- \left(\tilde{Y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \tilde{S}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} + \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_i} \tilde{Y}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} \right) + \sum_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} w_{\mathbf{k}, \mathbf{q}_i}^- \left(\tilde{Y}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} \tilde{S}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} - \tilde{S}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}_+}^{\mathbf{q}_-} \tilde{Y}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}_+} \right) \right) + [\mathbf{q}_+ \leftrightarrow \mathbf{q}_-] = \\
& \frac{mc^2 \bar{N}}{\check{c}} \left\{ \begin{aligned}
& -\frac{1}{3} (\check{q}_+^3 + \check{q}_-^3) [J_{7,1} + y(I_{5,1} - I_{7,1})] \\
& + (\check{q}_+^2 \check{q}_- + \check{q}_-^2 \check{q}_+) \left[2yI_{5,1} + 3(J_{7,1} - yI_{7,1}) - \frac{1}{2}(I_{5,0} + yJ_{5,0}) \right] \\
& + \frac{2}{3} (\check{q}_+ + \check{q}_-) \check{q}_- \check{q}_+ \cos \alpha [yI_{5,1} + 2(J_{7,1} - yI_{7,1})] \\
& + \check{q}_i (\check{q}_+^2 + \check{q}_-^2) \left[-\frac{1}{2}(I_{5,0} + yJ_{5,0}) + \frac{5}{3}yI_{5,1} + 2(J_{7,1} - yI_{7,1}) \right] \\
& + \check{q}_i \check{q}_+ \check{q}_- \cos \alpha \left[\frac{4}{3}yI_{5,1} + 2(J_{7,1} - yI_{7,1}) \right] \end{aligned} \right\} + O(q_+^5, q_i^5) \tag{G.46}
\end{aligned}$$

(iii) Enfin, une dernière contribution provient du terme cubique (cf. l'équation (G.27)) de la constante de normalisation

$$\left(\frac{\mathcal{N}_{\mathbf{q}_+}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_-}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_i}}{\check{q}_+\check{q}_-\check{q}_i}\right)^{1/2} = \frac{\bar{N}^{3/2}}{2^{3/2}\check{c}^{3/2}} \left(1 + \frac{\tau}{2}\check{c}^2(\check{q}_+^2 + \check{q}_-^2 + \check{q}_i^2)\right) + O(q_+^5, q_i^5), \quad (\text{G.47})$$

Pour écrire la contribution de ce terme, il nous faut l'ordre 1 de $\tilde{\mathcal{A}}$. D'après l'équation (G.15) et les développements (G.45,G.46), il vaut :

$$\left(\frac{\mathcal{N}_{\mathbf{q}_+}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_-}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_i}}{\check{q}_+\check{q}_-\check{q}_i}\right)^{1/2} \tilde{\mathcal{A}}_{\mathbf{q}_i, \mathbf{q}_+} = \frac{\bar{N}^{3/2}}{4\check{c}} J_{3,0}(\check{q}_+ + \check{q}_- - \check{q}_i) + O(q_+^3, q_i^3); \quad (\text{G.48})$$

La contribution qui découle du terme cubique de la constante de normalisation s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \frac{\bar{N}^{3/2}}{4\check{c}} J_{3,0}(\check{q}_+ + \check{q}_- - \check{q}_i) \left(\frac{\check{q}_+\check{q}_-\check{q}_i}{\mathcal{N}_{\mathbf{q}_+}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_-}\mathcal{N}_{\mathbf{q}_i}}\right)^{1/2} &= \frac{\sqrt{2}}{2} J_{3,0}\check{c}^{1/2}(\check{q}_+ + \check{q}_- - \check{q}_i) \\ &- \tau J_{3,0} \frac{\sqrt{2}\check{c}^{5/2}}{2} (\check{q}_+^3 + \check{q}_-^3 - \check{q}_i^3 + (\check{q}_+^2\check{q}_- + \check{q}_-^2\check{q}_+) (1+u) + u\check{q}_+\check{q}_-\check{q}_i) \end{aligned} \quad (\text{G.49})$$

où on a utilisé l'égalité

$$(\check{q}_+ + \check{q}_- - \check{q}_i)(\check{q}_+^2 + \check{q}_-^2 + \check{q}_i^2) = 2(\check{q}_+^3 + \check{q}_-^3 - \check{q}_i^3 + (\check{q}_+^2\check{q}_- + \check{q}_-^2\check{q}_+) (1+u) + u\check{q}_+\check{q}_-\check{q}_i), \quad (\text{G.50})$$

conséquence de la relation de conservation de l'impulsion $\mathbf{q}_i = \mathbf{q}_+ + \mathbf{q}_-$ élevée au carré.

Pour obtenir l'expression (VIII.26) de l'amplitude \mathcal{A} annoncée dans le chapitre VIII, il ne nous reste plus qu'à regrouper les contributions (G.38,G.45,G.46, G.49), à exprimer les intégrales $I_{n,p}$ et $J_{n,p}$ en fonction de x et y grâce aux relations de l'annexe E et à remplacer les nombres d'onde q par les énergies ω_q grâce à la relation de dispersion (VII.72). Pour ces dernières tâches on peut se faire aider par un logiciel de calcul formel.

2.3 Fraction rationnelles intervenant dans l'expression de \mathcal{A}

Nous donnons ici les fractions rationnelles en x et y qui interviennent dans l'expression (VIII.26) de l'amplitude de diffusion :

$$\begin{aligned} J(x, y) &= \frac{3xy}{2xy + 2} \\ A(x, y) &= \frac{\sum_{i=0}^3 A_i(y)x^i}{360(x^3 + x)(y^2 + 1)^3} \\ B(x, y) &= \frac{\sum_{i=0}^3 B_i(y)x^i}{18(x^3 + x)(y^2 + 1)^2} \\ C(x, y) &= \frac{y(xy + 1)(x^2(5y^2 + 3) - xy(y^2 - 3) + 2(y^2 + 2))}{6(x^3 + x)(y^2 + 1)^2} \end{aligned} \quad (\text{G.51})$$

avec

$$\begin{aligned}
A_0(y) &= -20y(5y^4 + 5y^2 + 2) & (G.52) \\
A_1(y) &= 2(10y^6 + 109y^4 + 63y^2 + 24) \\
A_2(y) &= -y(53y^4 + 186y^2 + 13) \\
A_3(y) &= 25y^6 + 116y^4 + 167y^2 + 36 \\
B_0(y) &= -2y(3y^2 + 2) \\
B_1(y) &= 3y^4 + 17y^2 + 8 \\
B_2(y) &= -2y(y^2 + 4) \\
B_3(y) &= 4y^4 + 11y^2 + 9
\end{aligned}$$

Leurs valeurs dans la limite CBE $x \rightarrow 0, y \sim -4/x$, utiles pour raccorder le résultat (VIII.26) à son équivalent dans la théorie de Bogolioubov sont

$$\begin{aligned}
A(x, y) &\xrightarrow[x \rightarrow 0, y \sim -4/x]{} \frac{1}{8} & B(x, y) &\xrightarrow[x \rightarrow 0, y \sim -4/x]{} \frac{1}{4} & (G.53) \\
J(x, y) &\xrightarrow[x \rightarrow 0, y \sim -4/x]{} 2 & C(x, y) &\xrightarrow[x \rightarrow 0, y \sim -4/x]{} \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Comme expliqué dans le chapitre VIII, sur la couche de masse, ces fractions rationnelles se combinent pour donner le coefficient thermodynamique

$$1 + \frac{\rho}{3} \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial \rho^2} \right)_a \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_a^{-1} = \frac{\sum_{i=0}^3 D_i(y) x^i}{9(x^3 + x)(y^2 + 1)^2} \quad (G.54)$$

avec

$$D_0(y) = -4y^3 \quad (G.55)$$

$$D_1(y) = 4(y^4 + 6y^2 + 2) \quad (G.56)$$

$$D_2(y) = -y(y^4 - 6y^2 + 5) \quad (G.57)$$

$$D_3(y) = 9y^4 + 14y^2 + 9 \quad (G.58)$$

$$(G.59)$$

2.4 Expression de \mathcal{A} en fonction des nombres d'onde

Pour mémoire nous donnons aussi l'expression de \mathcal{A} en fonction des nombres d'onde

$$\mathcal{A}^{2\leftrightarrow 1}(\mathbf{q}_+, \mathbf{q}_-; \mathbf{q}_i) = \quad (G.60)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\tilde{c}^{1/2}}{2^{3/2} \sqrt{\tilde{q}_i \tilde{q}_+ \tilde{q}_-}} \left[2j(x, y) (\tilde{q}_+ + \tilde{q}_- - \tilde{q}_i) \left(1 - \frac{\tau(x, y)}{2} \tilde{c}^2 (\tilde{q}_+^2 + \tilde{q}_-^2 + \tilde{q}_i^2) \right) \right. \\
&\quad + (a(x, y) + p(x, y)) (\tilde{q}_+^3 + \tilde{q}_-^3) + b(x, y) (\tilde{q}_+ + \tilde{q}_-) \tilde{q}_- \tilde{q}_+ (1 + \cos \alpha) \\
&\quad - (a(x, y) + p(x, y)) \tilde{q}_i (\tilde{q}_+^2 + \tilde{q}_-^2) + (c(x, y) - 2p(x, y)) \tilde{q}_i \tilde{q}_+ \tilde{q}_- \cos \alpha \\
&\quad \left. + d(x, y) \tilde{q}_i \tilde{q}_+ \tilde{q}_- + O(\tilde{q}^5) \right]. \quad (G.61)
\end{aligned}$$

Les deuxième et troisième lignes de l'équation (G.61) comportent toutes les combinaisons possibles des nombres d'onde \check{q}_i , \check{q}_+ et \check{q}_- et de $\cos \alpha$ non redondantes, d'ordre 3 et compatibles avec la nécessaire symétrie $q_+ \leftrightarrow q_-$. Chaque terme est précédé d'un facteur rationnel en x et y :

$$j(x, y) = \frac{3xy}{2(1 + xy)}, \quad (\text{G.62})$$

$$a(x, y) = -\frac{x^3(15y^4 + 4y^2 + 9) + 28x^2(y^3 + y) + 2x(5y^4 - 19y^2 + 6) + 40y^3}{120(x^2 + 1)(y^2 + 1)(xy + 1)} \quad (\text{G.63})$$

$$b(x, y) = -\frac{x^3(-5y^4 + 33y^2 + 18) - 24x^2(y^3 + y) + x(-15y^4 + 69y^2 + 24) - 20(3y^3 + y)}{60(x^2 + 1)(y^2 + 1)(xy + 1)} \quad (\text{G.64})$$

$$c(x, y) = \frac{x^3(10y^2 + 27) + 4x^2y + x(36 - 5y^2) - 20y}{60(x^2 + 1)(xy + 1)} \quad (\text{G.65})$$

$$d(x, y) = \frac{y(x^2(5y^2 + 3) - xy(y^2 - 3) + 2(y^2 + 2))}{4(x^2 + 1)(y^2 + 1)} \quad (\text{G.66})$$

$$p(x, y) = -\left(x^4y(35y^6 + 94y^4 + 183y^2 + 144) + x^3(68y^6 - 34y^4 - 92y^2 + 90) + x^2y(50y^6 + 261y^4 + 312y^2 - 19) + 4x(22y^6 + 29y^4 + 37y^2 + 10) + 4y(23y^4 + 26y^2 + 8)\right) / (240(x^2 + 1)(y^2 + 1)^2(xy + 1)^2) \quad (\text{G.67})$$

Notons que le terme multiplié par τ dans (G.61) n'a d'importance que pour les processus non résonnants car sinon il est d'ordre 5 en $\check{q}_i, \check{q}_+, \check{q}_-$, donc négligeable devant le terme dominant.

Annexe H

Thermodynamique de quasi-particules sans interaction et application au gaz unitaire

Ce complément donne quelques détails sur l'obtention de l'expression approchée (IX.9) du temps de brouillage du gaz unitaire de fermions non polarisé préparé à l'équilibre thermique dans l'ensemble canonique. Le gaz est ici spatialement homogène, dans un volume de quantification cubique de volume $V = L^3$ avec des conditions aux limites périodiques. L'approche est une variante de celle déjà utilisée dans la référence [98] et vaut à suffisamment basse température.

1 Hamiltonien effectif à basse énergie

À basse température, on s'attend à ce que la fonction de partition donc les grandeurs thermodynamiques du gaz superfluide puissent être déduites avec une bonne précision du hamiltonien effectif à basse énergie :

$$\hat{H}_{\text{eff}} = E_0(N, V) + \sum_{\gamma} \epsilon_{\gamma}(N, V) \hat{b}_{\gamma}^{\dagger} \hat{b}_{\gamma} \quad (\text{H.1})$$

où N est le nombre total de particules dans le gaz, $E_0(N, V)$ est l'énergie de son état fondamental dans le volume de quantification V , et les niveaux d'énergie excités sont ceux d'un gaz parfait de quasi-particules, dont $\hat{b}_{\gamma}^{\dagger}$ et \hat{b}_{γ} sont les opérateurs de création et d'annihilation et $\gamma \mapsto \epsilon_{\gamma}(N, V)$ est la relation de dispersion dépendant de N , du volume V et de l'interaction entre les particules, mais pas de la température. À ce stade, on n'a pas besoin de préciser l'ensemble de variation de l'indice γ ni la statistique quantique (bosonique ou fermionique) régissant chaque \hat{b}_{γ} ni la relation de dispersion. En pratique, l'indice γ représentera l'indice composite ($s = B, \mathbf{q}$) ou ($s = F, \mathbf{k}, \sigma$), \mathbf{q} ou \mathbf{k} étant le vecteur d'onde de la quasi-particule, $\sigma = \uparrow / \downarrow$ un indice de spin, et $s \in \{B, F\}$ repérant la branche d'excitation bosonique (de départ phononique en $q \rightarrow 0$) ou la branche d'excitation fermionique (présentant une bande d'énergie interdite et variant quadratiquement autour de son minimum sur l'axe des k).

2 Se ramener à l'ensemble canonique

Les expressions (II.51, IX.7) font apparaître le potentiel chimique microcanonique $\mu_{\text{mc}}(N, V, E)$ et sa dérivée première par rapport à l'énergie totale E . Cependant, à la limite d'un grand système, les potentiels chimiques microcanonique $\mu_{\text{mc}}(N, V, E)$ et canonique $\mu_{\text{can}}(N, V, T)$ peuvent être identifiés si les deux ensembles sont de même énergie moyenne, c'est-à-dire si l'énergie moyenne $E_{\text{can}}(N, V, T)$ dans l'ensemble canonique à la température bien choisie T coïncide avec celle E de l'ensemble microcanonique [65] :

$$\mu_{\text{mc}}(N, V, E_{\text{can}}(N, V, T)) \simeq \mu_{\text{can}}(N, V, T). \quad (\text{H.2})$$

En dérivant par rapport à T , on obtient donc

$$\partial_E \mu_{\text{mc}}(N, V, E_{\text{can}}(N, V, T)) \simeq \frac{\partial_T \mu_{\text{can}}(N, V, T)}{\partial_T E_{\text{can}}(N, V, T)}. \quad (\text{H.3})$$

3 L'énergie libre et ses dérivées

La fonction de partition du hamiltonien effectif dans l'ensemble canonique à la température T vaut simplement

$$Z = e^{-\beta E_0} \prod_{\gamma} \sum_{\{n_{\gamma}\}} e^{-\beta n_{\gamma} \epsilon_{\gamma}}, \quad (\text{H.4})$$

où $\beta = 1/(k_B T)$ et où l'ensemble des valeurs possibles du nombre d'occupation n_{γ} est $\{0, 1\}$ pour une statistique fermionique, l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} pour une statistique bosonique. L'énergie libre $F = -k_B T \ln Z$ s'écrit alors

$$F = E_0 - k_B T \sum_{\gamma} \ln \left(\sum_{\{n_{\gamma}\}} e^{-\beta n_{\gamma} \epsilon_{\gamma}} \right). \quad (\text{H.5})$$

En dérivant F par rapport à la température ou au nombre de particules, on obtient l'énergie moyenne, la variance de l'énergie et le potentiel chimique dans l'ensemble canonique :

$$E_{\text{can}} = \partial_{\beta}(\beta F) = E_0 + \sum_{\gamma} \epsilon_{\gamma} \bar{n}_{\gamma} \quad (\text{H.6})$$

$$\text{Var}_{\text{can}} E = k_B T^2 \partial_T E_{\text{can}} \quad (\text{H.7})$$

$$\mu_{\text{can}} = \partial_N F = \mu_0 + \sum_{\gamma} (\partial_N \epsilon_{\gamma}) \bar{n}_{\gamma}, \quad (\text{H.8})$$

où

$$\mu_0 \equiv \partial_N E_0 \quad (\text{H.9})$$

est le potentiel chimique du gaz à température nulle, en l'absence donc de quasi-particules, et où

$$\bar{n}_{\gamma} \equiv \frac{\sum_{\{n_{\gamma}\}} n_{\gamma} e^{-\beta n_{\gamma} \epsilon_{\gamma}}}{\sum_{\{n_{\gamma}\}} e^{-\beta n_{\gamma} \epsilon_{\gamma}}} \quad (\text{H.10})$$

est le nombre moyen de quasi-particules dans le mode d'indice γ , en accord avec la loi de Bose ou de Fermi-Dirac. Nous avons désormais en main toutes les expressions formelles utiles à la détermination du temps de brouillage t_{br} de l'équation (II.51) lorsque le gaz de fermions est préparé dans l'ensemble canonique.

4 Les relations de dispersion

L'idée est de réduire les relations de dispersion, non connues exactement, à leurs caractéristiques essentielles à basse température. La *branche bosonique* est réduite à son départ phononique en $q \rightarrow 0$, c'est-à-dire qu'on utilise une relation de dispersion linéaire correspondant à la vitesse du son c dans le gaz à température nulle,

$$\epsilon_{B,\mathbf{q}} \simeq \hbar c q, \quad (\text{H.11})$$

la coupure aux grands q étant assurée par la loi de Bose $\bar{n}_{B,\mathbf{q}} \simeq [\exp(\beta \hbar c q) - 1]^{-1}$. L'énergie moyenne des phonons et sa dérivée par rapport à T valent alors, à la limite thermodynamique,

$$E_{B,\text{can}} = \frac{\pi^2}{30} V \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \quad (\text{H.12})$$

$$\partial_T E_{B,\text{can}} = \frac{2\pi^2}{15} V \frac{k_B (k_B T)^3}{(\hbar c)^3}. \quad (\text{H.13})$$

Le calcul de la vitesse du son et de la contribution $\mu_{B,\text{can}}$ des phonons au potentiel chimique est très simple à la limite unitaire. En effet, par invariance d'échelle, l'équation d'état à température nulle se réduit à $\mu_0 = \xi \varepsilon_F$, où le paramètre de Bertsch ξ , un pur nombre, a été mesuré avec précision [32], et

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} \quad (\text{H.14})$$

est l'énergie de Fermi d'un gaz parfait non polarisé de fermions de spin 1/2 de même densité totale $\rho = N/V$ que le gaz unitaire, m étant la masse d'un fermion. Alors, la relation hydrodynamique exacte $m c^2 = \rho d\mu_0/d\rho$ se simplifie en $m c^2 = 2\mu_0/3$ et c varie en $\rho^{1/3}$, si bien que $\partial_N \epsilon_{B,\mathbf{q}} = \epsilon_{B,\mathbf{q}}/(3N)$ dans l'équation (H.8) et que

$$\mu_{B,\text{can}} = \frac{1}{3N} E_{B,\text{can}} \quad (\text{H.15})$$

$$\partial_T \mu_{B,\text{can}} = \frac{1}{3N} \partial_T E_{B,\text{can}}. \quad (\text{H.16})$$

À la limite unitaire, la *branche fermionique* présente un minimum, le gap Δ , situé en $k = k_0$ et autour duquel elle varie quadratiquement [99], ce qui constitue une description suffisante à basse température, puisque la contribution dominante à l'énergie libre et à ses dérivées doit provenir d'un voisinage de ce minimum. Nous prenons donc comme dans la référence [99]

$$\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma} \simeq \epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{qd}} \equiv \Delta + \frac{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \right)^2}{2f_0}, \quad (\text{H.17})$$

où, rappelons-le, $\sigma = \uparrow / \downarrow$. Les valeurs des paramètres Δ et k_0 ont été mesurées [82], alors que le paramètre de courbure f_0 a seulement été estimé théoriquement [99].

L'énergie moyenne correspondante pour les quasi-particules fermioniques à la limite thermodynamique est, d'après l'équation (H.6),

$$E_{F,\text{can}} = 2V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{qd}}}{e^{\beta \epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{qd}}} + 1}. \quad (\text{H.18})$$

À l'ordre dominant en température, on peut négliger au dénominateur 1 devant $\exp(\beta\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{qd}}) \geq \exp(\Delta/k_B T) \gg 1$ en commettant une erreur exponentiellement petite lorsque $T \rightarrow 0$; dans le même ordre d'approximation, on peut, après intégration sur la direction de \mathbf{k} , étendre formellement l'intégration sur son module k à la droite réelle tout entière, en utilisant (H.17) pour tout $k \in \mathbb{R}$. Ceci conduit à

$$E_{F,\text{can}} \simeq \frac{V e^{-\beta\Delta}}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} dk k^2 \epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{qd}} e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{qd}} - \Delta)}, \quad (\text{H.19})$$

où l'on a mis en évidence la loi d'activation thermique associée à la largeur Δ de la bande d'énergie interdite. Lorsque $T \rightarrow 0$, le facteur de Boltzmann $e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{qd}} - \Delta)}$ devient de plus en plus piqué autour de son maximum, atteint en $k = k_0$ et de valeur 1, avec une largeur en k s'annulant en $T^{1/2}$. On commet donc une erreur polynomialement faible en T (plus précisément, c'est une combinaison linéaire de $k_B T/\Delta$ et $m^2 k_B T f_0 / (\hbar^2 k_0^2)^2$) en remplaçant le préfacteur par son approximation d'ordre dominant, $k^2 \epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{qd}} \simeq k_0^2 \Delta$, et en quadratisant la relation de dispersion sous l'exponentielle :

$$\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{qd}} - \Delta \simeq \frac{1}{2f_0} \left[\frac{\hbar^2 k_0 (k - k_0)}{m} \right]^2. \quad (\text{H.20})$$

Il est alors simple d'effectuer l'intégrale gaussienne qui en résulte, puis de calculer la dérivée du résultat par rapport à T à l'ordre dominant, c'est-à-dire ici en dérivant le seul facteur d'activation $\exp(-\beta\Delta)$:

$$E_{F,\text{can}} \simeq \frac{V m k_0}{\pi^2 \hbar^2} (2\pi f_0 k_B T)^{1/2} \Delta e^{-\beta\Delta} \quad (\text{H.21})$$

$$\partial_T E_{F,\text{can}} \simeq \frac{\Delta}{k_B T^2} E_{F,\text{can}}. \quad (\text{H.22})$$

Toujours pour le spectre (H.17), la contribution des quasi-particules fermioniques au potentiel chimique à la limite thermodynamique vaut, d'après l'équation (H.8),

$$\mu_{F,\text{can}} = 2V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\partial_N \epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{qd}}}{e^{\beta\epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{qd}}} + 1}. \quad (\text{H.23})$$

Comme nous venons de le voir, nous sommes conduit pour $T \rightarrow 0$ à approximer $\partial_N \epsilon_{\mathbf{k}}^{\text{qd}}$ par $\partial_N \Delta$ dans le préfacteur du nombre d'occupation thermique. Compte tenu de l'invariance d'échelle du gaz unitaire, qui impose $\Delta \propto \rho^{2/3}$, nous obtenons immédiatement à l'ordre dominant en T :

$$\mu_{F,\text{can}} \simeq \frac{2}{3N} E_{F,\text{can}} \quad (\text{H.24})$$

$$\partial_T \mu_{F,\text{can}} \simeq \frac{2}{3N} \partial_T E_{F,\text{can}}. \quad (\text{H.25})$$

5 Poids relatif des branches bosonique et fermionique

On obtient une expression relativement simple du temps de brouillage en introduisant le rapport r sans dimension entre les contributions de la branche bosonique et de la branche

fermionique à $\partial_T E_{\text{can}}$, c'est-à-dire au dénominateur du second membre de l'équation (H.3) :

$$r \equiv \frac{\partial_T E_{F,\text{can}}}{\partial_T E_{B,\text{can}}} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{10(2\pi)^{1/2}}{3^{1/2}\pi^4} \frac{\epsilon_0^{1/2} f_0^{1/2} \mu_0^{3/2} \Delta^2}{(k_B T)^{9/2}} e^{-\beta\Delta}, \quad (\text{H.26})$$

où l'on a posé $\epsilon_0 = \hbar^2 k_0^2 / (2m)$ et l'on a utilisé les équations (H.13,H.22). En remplaçant les paramètres par leurs valeurs approchées données juste avant l'équation (IX.9), on obtient l'expression de r donnée juste après cette même équation. Grâce à l'invariance d'échelle du gaz unitaire, le rapport des contributions bosonique et fermionique à $\partial_T \mu_{\text{can}}$ est relié simplement à r à basse température, voir les équations (H.16,H.25) :

$$\frac{\partial_T \mu_{F,\text{can}}}{\partial_T \mu_{B,\text{can}}} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{2}{3N} \partial_T E_{F,\text{can}}}{\frac{1}{3N} \partial_T E_{B,\text{can}}} = 2r, \quad (\text{H.27})$$

si bien qu'on aboutit à l'approximation

$$\frac{N \partial_T \mu_{\text{can}}}{\partial_T E_{\text{can}}} \simeq \frac{1 + 2r}{3(1 + r)}, \quad (\text{H.28})$$

où μ_{can} est le potentiel chimique complet du gaz et E_{can} son énergie totale moyenne lorsqu'il est préparé dans l'ensemble canonique. On accède aussi facilement à la variance de l'énergie, en utilisant la relation générale (H.7), ainsi que (H.14) pour éliminer le volume V :

$$\frac{1}{N} \text{Var}_{\text{can}} E \simeq \frac{3^{3/2} \pi^4}{20} (1 + r) \frac{(k_B T)^5}{\epsilon_F^{3/2} \mu_0^{3/2}}. \quad (\text{H.29})$$

Il reste à combiner ces relations avec l'identité $(2t_{\text{br}}/\hbar)^{-2} = \left(\frac{\partial_T \mu_{\text{can}}}{\partial_T E_{\text{can}}} \right)^2 \text{Var}_{\text{can}} E$ déduite des équations (II.51,H.3), pour obtenir

$$\frac{N \hbar^2}{(\epsilon_F t_{\text{br}})^2} \simeq \frac{3^{3/2} \pi^4 (1 + 2r)^2}{45 (1 + r)} \left(\frac{\epsilon_F}{\mu_0} \right)^{3/2} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^5 \quad (\text{H.30})$$

dont découle, par simple application numérique, l'équation (IX.9) qu'il fallait justifier.

Bibliographie

- [1] M. BRUNE, E. HAGLEY, J. DREYER, X. MAÎTRE, A. MAALI, C. WUNDERLICH, J. M. RAIMOND et S. HAROCHE : Observing the Progressive Decoherence of the “Meter” in a Quantum Measurement. *Phys. Rev. Lett.*, 77:4887–4890, décembre 1996.
- [2] Thomas MONZ, Philipp SCHINDLER, Julio T. BARREIRO, Michael CHWALLA, Daniel NIGG, William A. COISH, Maximilian HARLANDER, Wolfgang HÄNSEL, Markus HENNRICH et Rainer BLATT : 14-Qubit Entanglement : Creation and Coherence. *Phys. Rev. Lett.*, 106:130506, mars 2011.
- [3] J. GUÉNA, M. ABGRALL, D. ROVERA, P. LAURENT, B. CHUPIN, M. LOURS, G. SANTARELLI, P. ROSENBUSCH, M. E. TOBAR, R. LI, K. GIBBLE, A. CLAIRON et S. BIZE : Progress in Atomic Fountains at LNE-SYRTHE. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 59(3):391–410, mars 2012.
- [4] Brian JULSGAARD, Jacob SHERSON, J. Ignacio CIRAC, Jaromir FIURASEK et Eugene S. POLZIK : Experimental demonstration of quantum memory for light. *Nature*, 432(7016): 482–486, novembre 2004.
- [5] Kamerlingh ONNES : Further Experiments with Liquid Helium. On the Change of the Electrical Resistance of Pure Metals at very low Temperatures. The Disappearance of the resistance of mercury. *KNAW*, XIV:113–114, décembre 1911.
- [6] P. KAPITZA : Viscosity of Liquid Helium below the λ -Point. *Nature*, 141:74, janvier 1938.
- [7] J.F. ALLEN et A.D. MISENER : Flow of Liquid Helium II. *Nature*, 141:75, janvier 1938.
- [8] L. LANDAU : Theory of the Superfluidity of Helium II. *Phys. Rev.*, 60:356–358, août 1941.
- [9] T. H. MAIMAN : Stimulated Optical Radiation in Ruby. *Nature*, 187(4736):493–494, août 1960.
- [10] M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN et E. A. CORNELL : Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor. *Science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [11] M. KITAGAWA et M. UEDA : Squeezed spin states. *Phys. Rev. A*, 47(6):5138–5143, juin 1993.
- [12] C. ORZEL, A. K. TUCHMAN, M. L. FENSELAU, M. YASUDA et M. A. KASEVICH : Squeezed States in a Bose-Einstein Condensate. *Science*, 291(5512):2386–2389, 2001.
- [13] J. DUNNINGHAM, K. BURNETT et W.D. PHILLIPS : Bose-Einstein condensates and precision measurements. *Phil. Trans. R. Soc.*, 363:2165, juillet 2005.

- [14] C. GROSS, T. ZIBOLD, E. NICKLAS, J. ESTÈVE et M. K. OBERTHALER : Nonlinear atom interferometer surpasses classical precision limit. *Nature*, 464(7292):1165–1169, avril 2010.
- [15] Max F. RIEDEL, Pascal BÖHI, Yun LI, Theodor W. HÄNSCH, Alice SINATRA et Philipp TREUTLEIN : Atom-chip-based generation of entanglement for quantum metrology. *Nature*, 464(7292):1170–1173, avril 2010.
- [16] Anne LOUCHET-CHAUVET, Jürgen APPEL, Jelmer J RENEMA, Daniel OBLAK, Niels KJAERGAARD et Eugene S POLZIK : Entanglement-assisted atomic clock beyond the projection noise limit. *New Journal of Physics*, 12(6):065032, 2010.
- [17] W. WASILEWSKI, K. JENSEN, H. KRAUTER, J. J. RENEMA, M. V. BALABAS et E. S. POLZIK : Quantum Noise Limited and Entanglement-Assisted Magnetometry. *Phys. Rev. Lett.*, 104:133601, mars 2010.
- [18] W. MUESSEL, H. STROBEL, D. LINNEMANN, D. B. HUME et M. K. OBERTHALER : Scalable Spin Squeezing for Quantum-Enhanced Magnetometry with Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 113:103004, septembre 2014.
- [19] H. MÜNTINGA, H. AHLERS, M. KRUTZIK, A. WENZLAWSKI, S. ARNOLD, D. BECKER, K. BONGS, H. DITTUS, H. DUNCKER, N. GAALLOUL, C. GHERASIM, E. GIESE, C. GRZESCHIK, T. W. HÄNSCH, O. HELLMIG, W. HERR, S. HERRMANN, E. KAJARI, S. KLEINERT, C. LÄMMERZAHN, W. LEWOCZKO-ADAMCZYK, J. MALCOLM, N. MEYER, R. NOLTE, A. PETERS, M. POPP, J. REICHEL, A. ROURA, J. RUDOLPH, M. SCHIEMANGK, M. SCHNEIDER, S. T. SEIDEL, K. SENGSTOCK, V. TAMMA, T. VALENZUELA, A. VOGEL, R. WALSER, T. WENDRICH, P. WINDPASSINGER, W. ZELLER, T. van ZOEST, W. ERTMER, W. P. SCHLEICH et E. M. RASEL : Interferometry with Bose-Einstein Condensates in Microgravity. *Phys. Rev. Lett.*, 110:093602, février 2013.
- [20] Markus GREINER, Cindy A. REGAL et Deborah S. JIN : Emergence of a molecular Bose-Einstein condensate from a Fermi gas. *Nature*, 426(6966):537–540, décembre 2003.
- [21] S. JOCHIM, M. BARTENSTEIN, A. ALTMAYER, G. HENDL, S. RIEDL, C. CHIN, J. HECKER-DENSCHLAG et R. GRIMM : Bose-Einstein Condensation of Molecules. *Science*, 302(5653):2101–2103, 2003.
- [22] M. W. ZWIERLEIN, C. A. STAN, C. H. SCHUNCK, S. M. F. RAUPACH, S. GUPTA, Z. HADZIBABIC et W. KETTERLE : Observation of Bose-Einstein Condensation of Molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 91:250401, décembre 2003.
- [23] Herman FESHBACH : Unified theory of nuclear reactions. *Annals of Physics*, 5(4):357 – 390, 1958.
- [24] Herman FESHBACH : A unified theory of nuclear reactions. II. *Annals of Physics*, 19(2):287 – 313, 1962.
- [25] E. TIESINGA, A. J. MOERDIJK, B. J. VERHAAR et H. T. C. STOOF : Conditions for Bose-Einstein condensation in magnetically trapped atomic cesium. *Phys. Rev. A*, 46:R1167–R1170, août 1992.
- [26] S. INOUE, M. R. ANDREWS, J. STENGER, H. J. MIESNER, D. M. STAMPER-KURN et W. KETTERLE : Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 392(6672):151–154, mars 1998.

- [27] T. LOFTUS, C. A. REGAL, C. TICKNOR, J. L. BOHN et D. S. JIN : Resonant Control of Elastic Collisions in an Optically Trapped Fermi Gas of Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 88:173201, avril 2002.
- [28] J. STENGER, S. INOUE, M. R. ANDREWS, H.-J. MIESNER, D. M. STAMPER-KURN et W. KETTERLE : Strongly Enhanced Inelastic Collisions in a Bose-Einstein Condensate near Feshbach Resonances. *Phys. Rev. Lett.*, 82:2422–2425, mars 1999.
- [29] A. J. LEGGETT : *Quantum Liquids*. Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [30] M. BARTENSTEIN, A. ALTMAYER, S. RIEDL, S. JOCHIM, C. CHIN, J. Hecker DEN-SCHLAG et R. GRIMM : Crossover from a Molecular Bose-Einstein Condensate to a Degenerate Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 92:120401, mars 2004.
- [31] S. NASCIMBÈNE, N. NAVON, K. J. JIANG, F. CHEVY et C. SALOMON : Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas. *Nature*, 463(7284):1057–1060, février 2010.
- [32] Mark J. H. KU, Ariel T. SOMMER, Lawrence W. CHEUK et Martin W. ZWIERLEIN : Revealing the Superfluid Lambda Transition in the Universal Thermodynamics of a Unitary Fermi Gas. *Science*, 335(6068):563–567, 2012.
- [33] Alexander L. GAUNT, Tobias F. SCHMIDTUTZ, Igor GOTLIBOVYCH, Robert P. SMITH et Zoran HADZIBABIC : Bose-Einstein Condensation of Atoms in a Uniform Potential. *Phys. Rev. Lett.*, 110:200406, mai 2013.
- [34] J. ESTÈVE, C. GROSS, A. WELLER, S. GIOVANAZZI et M. K. OBERTHALER : Squeezing and entanglement in a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 455(7217):1216–1219, octobre 2008.
- [35] D.R. HARTREE : The Wave Mechanics of an Atom with a Non-Coulomb Central Field. Part I. Theory and Methods. *Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 24:89–132, 1928.
- [36] V. FOCK : Näherungsmethode zur Lösung des quantenmechanischen Mehrkörperproblems. *Z. Phys.*, 61:126–148, 1930.
- [37] E.P. GROSS : Structure of a quantized vortex in boson systems. *Il Nuovo Cimento*, 20(3):454–477, 1961.
- [38] L. P. PITAEVSK : Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Soviet Physics JETP*, 13(2), août 1961.
- [39] J. BARDEEN, L. N. COOPER et J. R. SCHRIEFFER : Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 108:1175–1204, décembre 1957.
- [40] Jean-Paul BLAIZOT et Georges RIPKA : *Quantum Theory of Finite Systems*. MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1985.
- [41] N. BOGOLIUBOV : On the theory of superfluidity. *J. Phys. URSS*, 11:23–31, 1947.
- [42] P.W. ANDERSON : Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 112:1900–1916, 1958.
- [43] N. KOPNIN : *Theory of Nonequilibrium Superconductivity*. Oxford University Press, Oxford, 2001.
- [44] Lev LANDAU et Isaak KHALATNIKOV : Teoriya vyazkosti Geliya-II. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 19:637, 1949.
- [45] S.T. BELIAEV : Application of the Methods of Quantum Field Theory to a System of Bosons. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 34:417, août 1958.

- [46] P. O. FEDICHEV et G. V. SHLYAPNIKOV : Finite-temperature perturbation theory for a spatially inhomogeneous Bose-condensed gas. *Phys. Rev. A*, 58:3146–3158, octobre 1998.
- [47] Y. CASTIN : Simple theoretical tools for low dimension Bose gases. *J. Phys. IV France*, 116:89–132, 2004.
- [48] Yvan CASTIN : Basic Theory Tools for Degenerate Fermi Gases. In M. INGUSCIO, W. KETTERLE et C. SALOMON, éditeurs : *Ultra-cold Fermi Gases*. Società Italiana di Fisica, Bologna, 2007.
- [49] X. LEYRONAS et R. COMBESCOT : Superfluid Equation of State of Dilute Composite Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 99:170402, octobre 2007.
- [50] R. COMBESCOT, M. Yu. KAGAN et S. STRINGARI : Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover. *Phys. Rev. A*, 74:042717, octobre 2006.
- [51] Zixu ZHANG et W. Vincent LIU : Finite-temperature damping of collective modes of a BCS-BEC crossover superfluid. *Phys. Rev. A*, 83:023617, février 2011.
- [52] G. BIGHIN, L. SALASNICH, P. A. MARCHETTI et F. TOIGO : Beliaev damping of the Goldstone mode in atomic Fermi superfluids. *Phys. Rev. A*, 92:023638, août 2015.
- [53] D. S. HALL, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN et E. A. CORNELL : Measurements of Relative Phase in Two-Component Bose-Einstein Condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 81:1543–1546, août 1998.
- [54] Markus GREINER, Olaf MANDEL, Theodor W. HÄNSCH et Immanuel BLOCH : Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate. *Nature*, 419(6902):51–54, septembre 2002.
- [55] T. SCHUMM, S. HOFFERBERTH, L. M. ANDERSSON, S. WILDERMUTH, S. GROTH, I. BAR-JOSEPH, J. SCHMIEDMAYER et P. KRUGER : Matter-wave interferometry in a double well on an atom chip. *Nat Phys*, 1(1):57–62, octobre 2005.
- [56] T. BERRADA, S. van FRANK, R. BÜCKER, T. SCHUMM, J.-F. SCHAFF et J. SCHMIEDMAYER : Integrated Mach-Zehnder interferometer for Bose-Einstein condensates. *Nature Communications*, 4:2077, juin 2013.
- [57] F. SOLS : Randomization of the phase after suppression of the Josephson coupling. *Physica B : Condensed Matter*, 194:1389 – 1390, 1994.
- [58] E. M. WRIGHT, D. F. WALLS et J. C. GARRISON : Collapses and Revivals of Bose-Einstein Condensates Formed in Small Atomic Samples. *Phys. Rev. Lett.*, 77:2158–2161, septembre 1996.
- [59] M. LEWENSTEIN et L. YOU : Quantum Phase Diffusion of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 77:3489–3493, octobre 1996.
- [60] Yvan CASTIN et Jean DALIBARD : Relative phase of two Bose-Einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 55:4330–4337, juin 1997.
- [61] D. JAKSCH, C. W. GARDINER, K. M. GHERI et P. ZOLLER : Quantum kinetic theory. IV. Intensity and amplitude fluctuations of a Bose-Einstein condensate at finite temperature including trap loss. *Phys. Rev. A*, 58:1450–1464, août 1998.
- [62] Robert GRAHAM : Decoherence of Bose-Einstein Condensates in Traps at Finite Temperature. *Phys. Rev. Lett.*, 81:5262–5265, décembre 1998.

- [63] Robert GRAHAM : Condensate fluctuations in finite Bose-Einstein condensates at finite temperature. *Phys. Rev. A*, 62:023609, juillet 2000.
- [64] A. B. KUKLOV et Joseph L. BIRMAN : Orthogonality catastrophe and decoherence of a confined Bose-Einstein condensate at finite temperature. *Phys. Rev. A*, 63:013609, décembre 2000.
- [65] A. SINATRA, Y. CASTIN et E. WITKOWSKA : Nondiffusive phase spreading of a Bose-Einstein condensate at finite temperature. *Phys. Rev. A*, 75:033616, mars 2007.
- [66] A. SINATRA, Y. CASTIN et E. WITKOWSKA : Coherence time of a Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 80:033614, Sep 2009.
- [67] Iacopo CARUSOTTO et Yvan CASTIN : Atom Interferometric Detection of the Pairing Order Parameter in a Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.*, 94:223202, juin 2005.
- [68] Ehud ALTMAN, Eugene DEMLER et Mikhail D. LUKIN : Probing many-body states of ultracold atoms via noise correlations. *Phys. Rev. A*, 70:013603, juillet 2004.
- [69] C. KOHSTALL, S. RIEDL, E. R. SÁNCHEZ GUAJARDO, L. A. SIDORENKOV, J. HECKER DENSCHLAG et R. GRIMM : Observation of interference between two molecular Bose-Einstein condensates. *New Journal of Physics*, 13(6):065027, juin 2011.
- [70] N.N. BOGOLIUBOV : A new method in the theory of superconductivity I. *Soviet Physics JETP*, 34(7)(1), octobre 1958.
- [71] Takuya KITAGAWA, Alain ASPECT, Markus GREINER et Eugene DEMLER : Phase-Sensitive Measurements of Order Parameters for Ultracold Atoms through Two-Particle Interferometry. *Phys. Rev. Lett.*, 106:115302, mars 2011.
- [72] M. GREINER, C. A. REGAL, J. T. STEWART et D. S. JIN : Probing Pair-Correlated Fermionic Atoms through Correlations in Atom Shot Noise. *Phys. Rev. Lett.*, 94:110401, mars 2005.
- [73] T. ROM, Th. BEST, D. van OOSTEN, U. SCHNEIDER, S. FÖLLING, B. PAREDES et I. BLOCH : Free fermion antibunching in a degenerate atomic Fermi gas released from an optical lattice. *Nature*, 444(7120):733–6, décembre 2006.
- [74] C. COHEN-TANNOUDJI, J. DUPONT-ROC et G. GRYNBERG : *Processus d'interaction entre photons et atomes*. InterEditions et Éditions du CNRS, Paris, 1988.
- [75] Marcos RIGOL, Vanja DUNJKO et Maxim OLSHANII : Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems. *Nature*, 452(7189):854–858, avril 2008.
- [76] D.T. SON et M. WINGATE : General coordinate invariance and conformal invariance in nonrelativistic physics : Unitary Fermi gas. *Ann. Physics*, 321:197–224, 2006.
- [77] S. MOAL, M. PORTIER, J. KIM, J. DUGUÉ, U. D. RAPOL, M. LEDUC et C. COHEN-TANNOUDJI : Accurate Determination of the Scattering Length of Metastable Helium Atoms Using Dark Resonances between Atoms and Exotic Molecules. *Phys. Rev. Lett.*, 96:023203, janvier 2006.
- [78] Kevin M. JONES, Eite TIESINGA, Paul D. LETT et Paul S. JULIENNE : Ultracold photoassociation spectroscopy : Long-range molecules and atomic scattering. *Rev. Mod. Phys.*, 78:483–535, mai 2006.
- [79] M. MARINI, F. PISTOLESI et G.C. STRINATI : Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation : analytic results for the crossover in three dimensions. *European Physical Journal B*, 1:151–159, 1998.

- [80] T. D. LEE et C. N. YANG : Many-Body Problem in Quantum Mechanics and Quantum Statistical Mechanics. *Phys. Rev.*, 105:1119–1120, février 1957.
- [81] D. S. PETROV, C. SALOMON et G. V. SHLYAPNIKOV : Weakly Bound Dimers of Fermionic Atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 93(9):090404, août 2004.
- [82] André SCHIROTZEK, Yong-il SHIN, Christian H. SCHUNCK et Wolfgang KETTERLE : Determination of the Superfluid Gap in Atomic Fermi Gases by Quasiparticle Spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.*, 101:140403, octobre 2008.
- [83] Munekazu HORIKOSHI, Shuta NAKAJIMA, Masahito UEDA et Takashi MUKAIYAMA : Measurement of Universal Thermodynamic Functions for a Unitary Fermi Gas. *Science*, 327(5964):442–445, 2010.
- [84] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA : Phase operators and blurring time of a pair-condensed Fermi gas. *Phys. Rev. A*, 88:063623, décembre 2013.
- [85] Yvan CASTIN et Ralph DUM : Low-temperature Bose-Einstein Condensates in Time-dependent traps. *Phys. Rev. A*, 57:3008–3021, 1998.
- [86] Mohit Randeria et Edward TAYLOR : Crossover from Bardeen-Cooper-Schrieffer to Bose-Einstein Condensation and the Unitary Fermi Gas. *Annual Review of Condensed Matter Physics*, 5:209–232, 2014.
- [87] Y. CASTIN, I. FERRIER-BARBUT et C. SALOMON : La vitesse critique de Landau d’une particule dans un superfluide de fermions. *C. R. Physique*, 16:241, 2015.
- [88] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA : Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover. *Phys. Rev. A*, 93:013623, janvier 2016.
- [89] H. KURKJIAN, Y. CASTIN et A. SINATRA : Brouillage thermique d’un gaz cohérent de fermions. *arXiv :1502.05644*, à paraître aux *Comptes Rendus Physique*, 2016.
- [90] R. COMBESCOT et X. LEYRONAS : Superfluid equation of state of cold fermionic gases in the Bose-Einstein regime. *Phys. Rev. A*, 78:053621, novembre 2008.
- [91] S. GIORGINI : Damping in dilute Bose gases : A mean-field approach. *Phys. Rev. A*, 57:2949–2957, avril 1998.
- [92] E.M. LIPSCHITZ et L.P. PITAEVSKII : Physical Kinetics. In *Landau and Lifshitz Course of Theoretical Physics*, volume 10, chapitre VII. Pergamon Press, New York, 1981.
- [93] I. V. BRODSKY, M. Yu. KAGAN, A. V. KLAPTSOV, R. COMBESCOT et X. LEYRONAS : Exact diagrammatic approach for dimer-dimer scattering and bound states of three and four resonantly interacting particles. *Phys. Rev. A*, 73:032724, mars 2006.
- [94] Nir NAVON : *Thermodynamique des gaz de bosons et fermions ultrafroids*. Thèse de doctorat, Université Paris VI, 2011.
- [95] Markus GREINER, Olaf MANDEL, Tilman ESSLINGER, Theodor W. HÄNSCH et Immanuel BLOCH : Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415(6867):39–44, janvier 2002.
- [96] Yvan CASTIN et Alice SINATRA : Spatial and Temporal Coherence of a Bose-condensed Gas. In M. MODUGNO et A. BRAMATI, éditeurs : *Physics of Quantum fluids : New Trends and Hot topics in atomic and polariton condensates*. Springer, 2013.
- [97] Waseem S. BAKR, Jonathon I. GILLEN, Amy PENG, Simon FÖLLING et Markus GREINER : A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice. *Nature*, 462(7269):74–77, novembre 2009.

- [98] Aurel BULGAC, Joaquín E. DRUT et Piotr MAGIERSKI : Spin 1/2 Fermions in the Unitary Regime : A Superfluid of a New Type. *Phys. Rev. Lett.*, 96:090404, mars 2006.
- [99] Yusuke NISHIDA et Dam Thanh SON : ϵ -Expansion for a Fermi Gas at Infinite Scattering Length. *Phys. Rev. Lett.*, 97:050403, août 2006.

Articles publiés

Spin squeezing and EPR entanglement of two bimodal condensates
in state-dependent potentials. *Phys. Rev. A* **93**, 013623

Spin squeezing and Einstein-Podolsky-Rosen entanglement of two bimodal condensates in state-dependent potentials

Hadrien Kurkjian, Krzysztof Pawłowski, and Alice Sinatra

Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, UPMC and CNRS, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

Philipp Treutlein

Department of Physics, University of Basel, Klingelbergstrasse 82, CH-4056 Basel

(Received 19 July 2013; published 7 October 2013)

We propose and analyze a scheme to entangle the collective spin states of two spatially separated bimodal Bose-Einstein condensates. Using a four-mode approximation for the atomic field, we show that elastic collisions in a state-dependent potential simultaneously create spin-squeezing in each condensate and entangle the collective spins of the two condensates. We investigate mostly analytically the nonlocal quantum correlations that arise in this system at short times and show that Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) entanglement is generated between the condensates. At long times we point out macroscopic entangled states and explain their structure. The scheme can be implemented with condensates in state-dependent microwave potentials on an atom chip.

DOI: [10.1103/PhysRevA.88.043605](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.043605)

PACS number(s): 03.75.Gg, 03.65.Ud, 03.75.Mn, 42.50.Dv

I. INTRODUCTION

The internal state of multicomponent Bose-Einstein condensates offers intriguing possibilities for the creation and investigation of many-particle entanglement. Recent experiments have reported the creation of spin-squeezed states [1–3], continuous-variable entanglement [4], and twin-atom states [5,6]. In these experiments, the entanglement concerns the atoms in a single cloud and is revealed in collective measurements on the entire system. Alternatively, experiments have explored spin-squeezing with single-component condensates in a double-well potential [7,8], which can be mapped to the two-component internal-state case. Here we consider a different situation where entanglement is created between the internal states of two spatially separate and individually addressable two-component Bose-Einstein condensates. This system offers the possibility to perform local manipulations and measurements on each of the two spatially separate subsystems, and to study the nonlocal quantum correlations between them.

To describe the interaction-based entangling scheme, we represent each bimodal condensate, labeled by a and b , by a collective spin that is a sum of the effective spins $1/2$ representing the internal degrees of freedom of each atom.

In a single two-component condensate, the entanglement between the internal degrees of freedom of different atoms, created by the interactions, results in quantum correlations between two noncommuting components of the collective spin. As a consequence, the fluctuations of well-chosen linear combinations of these two components are reduced below the quantum limit for independent atoms [9–11].

In the generalization that we propose, the entanglement between atoms belonging to different ensembles results in additional correlations between the collective spins \hat{S}_a and \hat{S}_b . Fluctuations in a well-chosen quadrature, linear combination of spin a and b components are then reduced, and information about the spin in system b can be inferred from a measurement in system a . We show, furthermore, that these correlations are nonclassical and nonlocal in the sense of Einstein-Podolsky-

Rosen (EPR) [12]. As a physical realization we propose to use controlled interactions in state-dependent potentials, for example, in an optical trap or in a microwave trap on an atom chip.

Other strategies to create EPR-type entanglement between two Bose condensates have been proposed in [13,14]. We also note that in room-temperature atomic vapor cells containing $\simeq 10^{12}$ atoms, entanglement between two collective spins has been successfully created experimentally using the interaction of the atoms with a pulse of light followed by a measurement [15]. The Bose-condensed system we consider here contains a few tens to a few thousand atoms. It offers exceptional coherent control and measurement down to the single-atom level, giving access to the discrete variables regime. Moreover, the fact that the system is almost isolated in principle allows for creation of highly entangled quantum states.

We explain the scheme we have in mind in Sec. II and the theoretical model in Sec. III. Section IV is devoted to long times, when macroscopic superpositions entangled between the two ensembles occur, in correspondence with sharp dips in the entropy of entanglement. In the last section, Sec. V, we concentrate on short-time EPR-like quantum correlations. To highlight the nonclassical nature of these correlations, we use a criterion introduced in [16,17] which involves the covariance matrix of the collective spins components. Nonclassical correlations can be obtained for a broad range of experimental parameters.

II. CONSIDERED SCHEME

The experimental situation we consider is depicted in Fig. 1. It involves two Bose-Einstein condensates a and b in two spatially separated potential wells. Initially the condensates are in the ground state $|0\rangle$ of some internal transition $|0\rangle - |1\rangle$. In the case of ^{87}Rb atoms one can take, for example, $|0\rangle = |F=1, m_F=-1\rangle$ and $|1\rangle = |F=2, m_F=1\rangle$. At time $t=0$ an electromagnetic pulse prepares each atom in an equal superposition of internal states $|0\rangle$ and $|1\rangle$. After this we

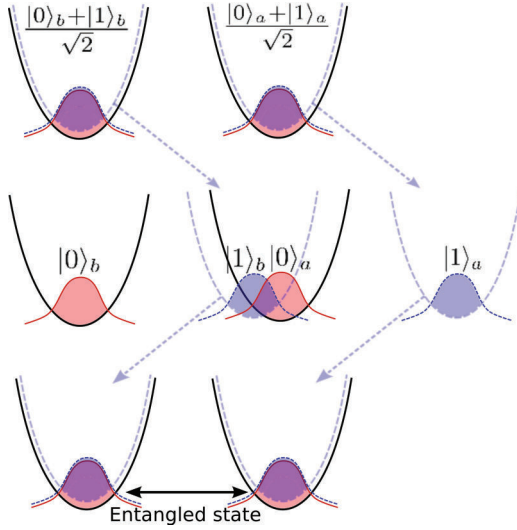


FIG. 1. (Color online) Sequence allowing us to entangle condensate a (right well) and b (left well) via controlled collisional interaction in state-dependent trapping potentials. The interaction phase, where the squeezing and the correlations are created, is depicted in the central panel.

imagine that while the traps for state $|0\rangle$ do not move, the traps for state $|1\rangle$ are moved out so that the component $|1\rangle$ of condensate b interacts with the component $|0\rangle$ of condensate a . After a given interaction time, the traps for state $|1\rangle$ come back to their initial position. Due to atomic interaction within each component $|0\rangle$ and $|1\rangle$, the two condensates a and b are spin-squeezed. Moreover, due to the crossed interaction between $|1\rangle_b$ and $|0\rangle_a$, the two condensates are entangled. This scheme is a direct generalization of the “collisional gate” scheme proposed in [18,19] for two individual atoms. It could be implemented using optical potentials as in [18,20], or with microwave potentials on an atom chip [1,21].

III. FOUR-MODE MODEL

A. Hamiltonian

Collisional interactions between cold atoms occur only in s wave and can be modeled by a zero-range potential (see, e.g., [22]). This leads to the interaction Hamiltonian

$$\hat{H}_{\text{int}} = g_{01} \int \hat{\Psi}_0^\dagger \hat{\Psi}_0 \hat{\Psi}_1^\dagger \hat{\Psi}_1 + \sum_{\epsilon \in \{0,1\}} \frac{g_{\epsilon\epsilon}}{2} \int \hat{\Psi}_\epsilon^\dagger \hat{\Psi}_\epsilon^\dagger \hat{\Psi}_\epsilon \hat{\Psi}_\epsilon, \quad (1)$$

where $\hat{\Psi}_{0(1)}$ is the field operator for atoms in internal state $0(1)$, and $g_{\epsilon\epsilon'}$ is the coupling constant for contact interactions between atoms in states ϵ and ϵ' , related to the s -wave scattering length $a_{\epsilon\epsilon'}$ of the interaction potential by $g_{\epsilon\epsilon'} = 4\pi\hbar^2 a_{\epsilon\epsilon'}/m$. We now expand each of the field operators $\hat{\Psi}_0$ and $\hat{\Psi}_1$ over the two spatial modes that will be macroscopically populated:

$$\hat{\Psi}_0 = \phi_{0,a} \hat{a}_0 + \phi_{0,b} \hat{b}_0, \quad (2)$$

$$\hat{\Psi}_1 = \phi_{1,a} \hat{a}_1 + \phi_{1,b} \hat{b}_1. \quad (3)$$

Just after the coupling pulse one has $\phi_{1,a} = \phi_{0,a}$ and $\phi_{1,b} = \phi_{0,b}$. In the scheme we consider, during the interaction time

(central panel of Fig. 1), only $\phi_{1,b}$ and $\phi_{0,a}$ have a nonzero overlap.

For the two condensates a and b we introduce the collective spin operators \hat{S}^a and \hat{S}^b , respectively. We have, for example, for a ,

$$\begin{aligned} \hat{S}_x^a &= (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0 + \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0)/2, \\ \hat{S}_y^a &= (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1)/2i, \\ \hat{S}_z^a &= (\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0)/2, \end{aligned} \quad (4)$$

and similarly for b . The nonlinearities leading to squeezing and entanglement will be ruled by the parameters $\chi_{\epsilon,\sigma}$ and χ_{ab} that depend on the interaction constants, on the modal wave functions, and their overlap:

$$\hbar \chi_{\epsilon,\sigma} = \frac{g_{\epsilon\epsilon}}{2} \int |\phi_{\epsilon,\sigma}|^4, \quad \epsilon = 0,1, \quad \sigma = a,b, \quad (5)$$

$$\hbar \chi_{ab} = g_{01} \int |\phi_{0,a}|^2 |\phi_{1,b}|^2. \quad (6)$$

With these notations and for a system with initially N atoms in each well, one can rewrite the interaction Hamiltonian as

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{int}}/\hbar &= \sum_{\epsilon=0,1} \chi_{\epsilon,\epsilon} (\hat{S}_z^\epsilon)^2 + \sum_{\epsilon=0,1} \chi_{\epsilon,b} (\hat{S}_z^b)^2 - \chi_{ab} \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b \\ &+ \frac{\chi_{ab} N}{2} (\hat{S}_z^b - \hat{S}_z^a) + \sum_{\sigma=a,b} N \hat{S}_z^\sigma (\chi_{1,\sigma} - \chi_{0,\sigma}), \end{aligned} \quad (7)$$

where we have omitted a constant term. The first and second term generate squeezing within the condensate a and b , respectively. The third term is the one responsible for the $a-b$ entanglement. The linear terms in the second line (that give a clock shift due to interactions in each condensate) can in principle be removed with a π pulse that reverses all the spins at half evolution time and we shall neglect them in the following. In the particular case where $g_{00} = g_{11}$ and all the wave functions have the same shape, we set

$$\chi_{\epsilon,\sigma} \equiv \chi/2, \quad \forall \epsilon = 0,1, \quad \forall \sigma = a,b \quad (8)$$

and simplify the nonlinear part of the Hamiltonian to

$$\hat{H}_{\text{int}}^{\text{nl}}/\hbar = \chi (\hat{S}_z^a)^2 + \chi (\hat{S}_z^b)^2 - \chi_{ab} \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b. \quad (9)$$

B. State evolution

To compute the evolution of the state under this Hamiltonian, we expand it in the Fock basis. Immediately after the pulse, the state is a product of two phase states $|\Psi(0)\rangle = |\phi_a = 0\rangle_{\text{ph}} |\phi_b = 0\rangle_{\text{ph}}$, where

$$|\phi_a = \phi\rangle_{\text{ph}} \equiv \frac{1}{\sqrt{2^N N!}} (e^{-i\phi/2} \hat{a}_0^\dagger + e^{i\phi/2} \hat{a}_1^\dagger)^N |0\rangle. \quad (10)$$

We expand the phase states over Fock states

$$\begin{aligned} |\Psi(0)\rangle &= \frac{1}{2^N N!} (\hat{a}_0^\dagger + \hat{a}_1^\dagger)^N (\hat{b}_0^\dagger + \hat{b}_1^\dagger)^N |0\rangle \\ &= \frac{1}{2^N} \sum_{n_a, n_b} \sqrt{\binom{N}{n_a} \binom{N}{n_b}} |n_a, n_b\rangle_{\text{F}}, \end{aligned} \quad (11)$$

where we have introduced the notation

$$|n_a, n_b\rangle_F \equiv \frac{(\hat{a}_1^\dagger)^{n_a} (\hat{a}_0^\dagger)^{N-n_a} (\hat{b}_1^\dagger)^{n_b} (\hat{b}_0^\dagger)^{N-n_b}}{\sqrt{n_a! (N-n_a)! n_b! (N-n_b)!}} |0\rangle. \quad (12)$$

The Hamiltonian (9) is diagonal in the Fock basis so that during evolution each Fock state simply acquires a phase factor $\varphi(n_a, n_b)$:

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{2^N} \sum_{n_a, n_b} \sqrt{\binom{N}{n_a} \binom{N}{n_b}} e^{-it\varphi(n_a, n_b)} |n_a, n_b\rangle_F. \quad (13)$$

Introducing the eigenvalues of $\hat{S}_z^{a(b)}$, $\delta n_{a(b)} \equiv n_{a(b)} - N/2$, we can write the phase factor $\varphi(n_a, n_b)$ as

$$\varphi(n_a, n_b) = -\chi_{ab} \delta n_a \delta n_b + \chi (\delta n_a^2 + \delta n_b^2). \quad (14)$$

IV. ENTROPY OF ENTANGLEMENT AND CONDITIONAL MACROSCOPIC SUPERPOSITIONS

To quantify the entanglement between a and b condensates, we use the entropy of entanglement that, for the pure state we consider here, is simply the Von Neumann entropy of the reduced density matrix of a or b :

$$S = -\text{Tr}(\rho_a \log \rho_a), \quad (15)$$

$$\rho_a = \text{Tr}_b |\Psi\rangle\langle\Psi|. \quad (16)$$

Using the expression (13) for the state, one can work out the elements of the reduced density matrix of system a ,

$$\begin{aligned} (\rho_a)_{n_a, n'_a} &= \frac{1}{2^N} \sqrt{\binom{N}{n_a} \binom{N}{n'_a}} \exp[-it\chi(\delta n_a^2 - \delta n_a'^2)] \\ &\times \cos^N \left(\frac{\chi_{ab} t}{2} (n_a - n'_a) \right). \end{aligned} \quad (17)$$

In Fig. 2 we show the evolution of the reduced density matrix in the Fock basis for the particular case where $\chi_{ab}/\chi = 1$, corresponding to equal coupling constants $g_{01} = g_{00} = g_{11}$ and perfect overlap of $\phi_{1,b}$ and $\phi_{0,a}$. At long times larger than $1/\sqrt{N}\chi_{ab}$, a striped pattern appears. According to the analysis in [23], referring to a single BEC, such structure is characteristic of a mixture of different phase states, the distance between the stripes being inversely proportional to the number of phase states involved. In the extreme case of the lower right panel at time

$$t_\pi \equiv \pi/\chi_{ab} \quad (18)$$

we note a remarkable checkerboard structure. This is a particular striped pattern suggesting that the state of condensate a is a mixture of only two phase states differing by π (see Fig. 3 in [23]). As the total state is pure, the appearance of such a mixture in the reduced density matrix indicates that (i) the modes a and b are entangled and (ii) that, if expressed in the phase state basis, the global state may be a relatively simple superposition.

In Fig. 3(a) we plot the entropy of entanglement for $\chi_{ab}/\chi = 1$. Indeed, at time $t_\pi = \pi/\chi_{ab}$ we find $S \simeq \log(2)$, as it should be for a mixture of two almost orthogonal states. We note that also at many other rational fractions of

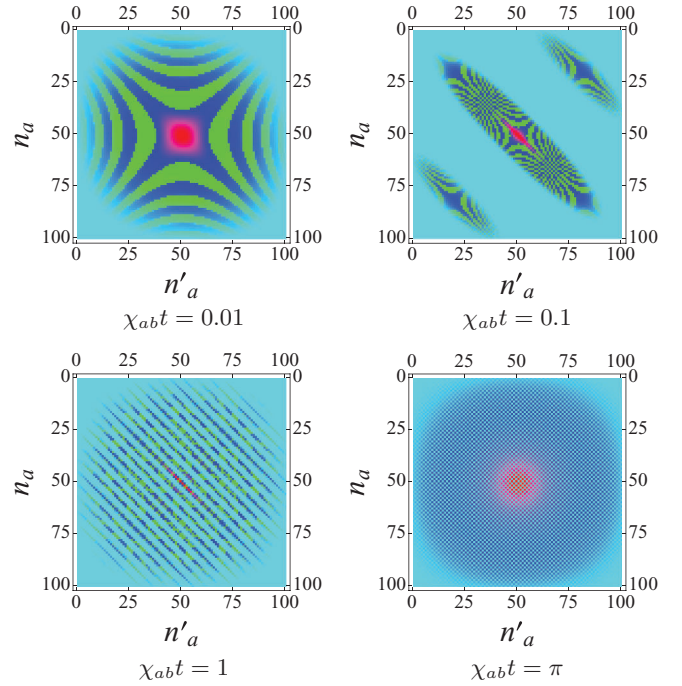


FIG. 2. (Color online) Real part of the reduced density matrix in the Fock basis $(\rho_a)_{n_a, n'_a}$ at different times (in units of $1/\chi_{ab}$) for $\chi_{ab} = \chi$ and $N = 100$ atoms in each of the two ensembles. We start with the density matrix of a phase state (11). The entanglement dynamics damps out the off-diagonal coefficients after which striped patterns appear. The interpretation of these patterns is given in the text. The color scale ranges from red (largest positive), green, light blue (zero), to dark blue (negative).

t_π , $t = (2m/q)t_\pi$, the entropy of entanglement shows dips reaching the values $S \simeq \log(q)$.

To understand the structure of the state at these times and the behavior of the entropy it is useful to rewrite the state (13) at time t in the form

$$|\Psi(t)\rangle = e^{it\chi_{ab}\hat{S}_z^a\hat{S}_z^b} |\Psi_a, \Psi_b\rangle, \quad (19)$$

where $|\Psi_a, \Psi_b\rangle$ is the initial state evolved with the squeezing Hamiltonians:

$$|\Psi_a, \Psi_b\rangle = e^{-i\chi t[(\hat{S}_z^a)^2 + (\hat{S}_z^b)^2]} |00\rangle_{\text{ph}}. \quad (20)$$

Here we exploit the shortened notation $|\alpha\beta\rangle_{\text{ph}} \equiv |\phi_a = \alpha\rangle_{\text{ph}} |\phi_b = \beta\rangle_{\text{ph}}$. In each mode, the state evolves from $|\phi = 0\rangle_{\text{ph}}$ first into a squeezed state [9] and then through macroscopic superpositions [24,25], eventually back to the phase state $|\phi = \pi\rangle_{\text{ph}}$.

The prefactor $e^{it\chi_{ab}\hat{S}_z^a\hat{S}_z^b}$ in (19) entangles modes a and b , with the following mechanism. If t is a rational fraction m/q of $2t_\pi = 2\pi/\chi_{ab}$, then the operator $e^{it\chi_{ab}\hat{S}_z^a\hat{S}_z^b}$ can be written as a sum of q^2 terms performing rotations in a and b modes (see Appendix A). Then acting with this operator on the state $|\Psi_a, \Psi_b\rangle$ one obtains a superposition of q^2 states. If $q < \sqrt{N}$ and hence $\chi_{ab}t > 1/\sqrt{N}$, one can show that the reduced density matrix is a mixture of q states, leading to an entropy of entanglement $S = \log(q)$ (see Appendix A). In particular,

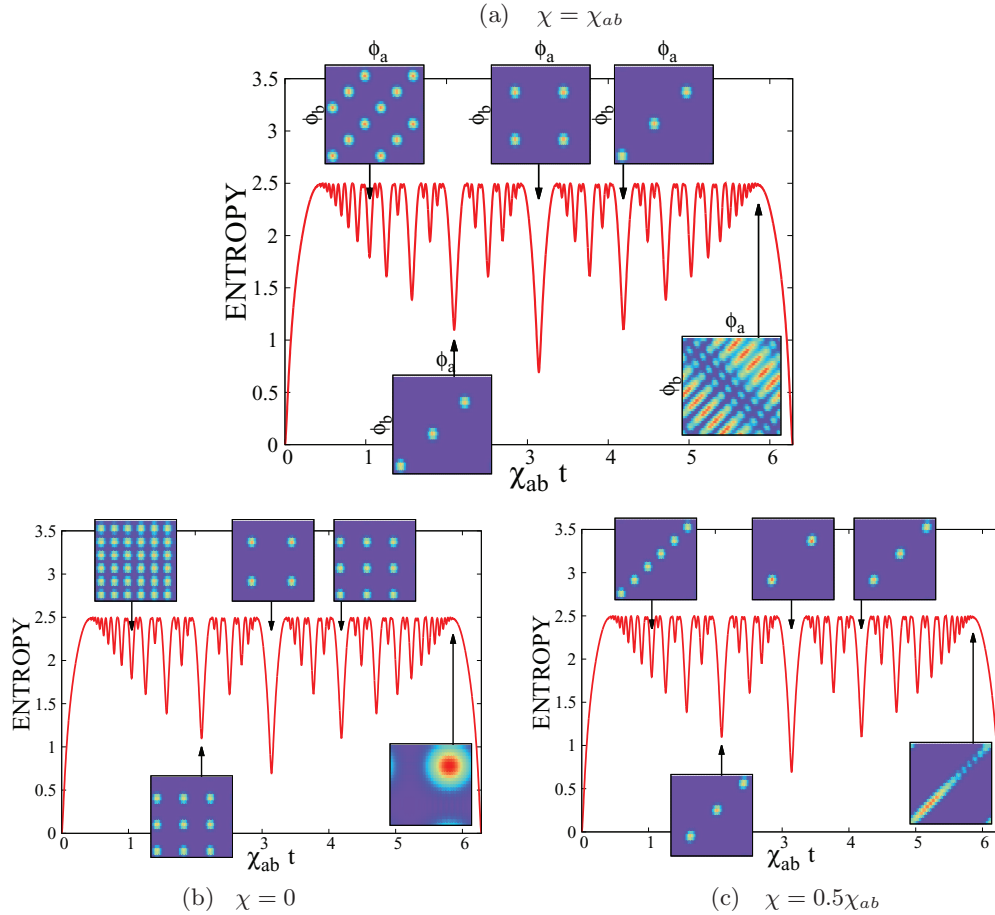


FIG. 3. (Color online) Entropy of entanglement between ensembles a and b as a function of time for different values of the ratio χ/χ_{ab} . The number of atoms in a and b is even: $N = 50$. The insets show the total density matrix in phase state basis ρ_{ϕ_a, ϕ_b} [see Eq. (25)] at times $\chi_{ab}t = \pi/3, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3$, and $(2\pi - \frac{1}{2\sqrt{N}})$. The phases ϕ_a, ϕ_b range in $[\pi/2, 5\pi/2]$. We note the appearance of simple superpositions of phase states.

at time $t = t_\pi$ we obtain

$$\chi = \chi_{ab}; |\Psi(t_\pi)\rangle = \frac{|\pi\pi\rangle_{\text{ph}} + |0\pi\rangle_{\text{ph}} + |\pi 0\rangle_{\text{ph}} - |00\rangle_{\text{ph}}}{2} \quad (21)$$

for N even and

$$\chi = \chi_{ab}; |\Psi(t_\pi)\rangle = \frac{|\pi\pi\rangle_{\text{ph}} + i|0\pi\rangle_{\text{ph}} + i|\pi 0\rangle_{\text{ph}} + |00\rangle_{\text{ph}}}{2} \quad (22)$$

for N odd. For N even, after measuring the phase $\phi \in \{0, \pi\}$ in the left well b , the state of the system a is then projected onto a cat state $|\pi\rangle_{\text{ph}} - e^{i\phi}|0\rangle_{\text{ph}}$.

In Figs. 3(b) and 3(c) we consider two other cases: $\chi/\chi_{ab} = 0$, where only the a - b entangling interaction is kept, and $\chi/\chi_{ab} = 0.5$. The latter value of χ/χ_{ab} could in principle be obtained in optical potentials using a Feshbach resonance, e.g., for ^{87}Rb in states $|0\rangle = |F = 1, m_F = 1\rangle$, and $|1\rangle = |F = 2, m_F = -1\rangle$ [2,26], or in a variation of our scheme on an atom chip [27]. Remarkably, although the entropy of entanglement remains the same [28], very different macroscopic superpositions are obtained for different ratios

χ/χ_{ab} . For example, for $t = \pi/\chi_{ab}$ and N even, we get

$$\chi = 0; |\Psi(t_\pi)\rangle = \frac{|00\rangle_{\text{ph}} + |0\pi\rangle_{\text{ph}} + |\pi 0\rangle_{\text{ph}} - |\pi\pi\rangle_{\text{ph}}}{2}, \quad (23)$$

$$\chi = \frac{1}{2}\chi_{ab}; |\Psi(t_\pi)\rangle = \frac{|00\rangle_{\text{ph}} - i|\pi\pi\rangle_{\text{ph}}}{\sqrt{2}}. \quad (24)$$

To visualize these states, in the insets of Fig. 3 we show the full density matrix in the phase state basis

$$\rho_{\phi_a, \phi_b} = \langle \phi_a \phi_b | \rho | \phi_a \phi_b \rangle, \quad (25)$$

with the phases ϕ_a and ϕ_b ranging in $[\pi/2, 5\pi/2]$. We point out that a $\pi/2$ pulse in each condensate transforms the state (24) in a a - b entangled Greenberger–Horne–Zeilinger-like state $|N, N\rangle_F - i|0, 0\rangle_F$ with the notation (12). The entangled macroscopic superpositions discussed here, although very interesting from the quantum information point of view, would probably be extremely challenging to observe. Indeed, any source of decoherence, and in particular, particle losses, should be avoided during the interaction time (typically a fraction of a second) [29,30].

In the following, we focus on short time evolution $\chi_{ab}t \ll 1/\sqrt{N}$, in a regime in which we expect two-mode spin squeezing and EPR correlations. In Fig. 3 this is the region in which the entropy grows monotonically.

V. SPIN SQUEEZING AND EPR ENTANGLEMENT

A. EPR entanglement criterion

We imagine a situation where Alice (system a) and Bob (system b) can measure $\hat{X}_{a(b)}$ or $\hat{P}_{a(b)}$ on our bipartite system, where \hat{X} and \hat{P} are two noncommuting observables. To quantify the entanglement of the state between Alice and Bob, we introduce the conditional variances [16,17,31,32]:

$$\begin{aligned}\Delta_{\text{inf}}^2(\hat{X}_b) &\equiv \langle (\hat{X}_b - \hat{X}_b^{\text{inf}})^2 \rangle, \\ \Delta_{\text{inf}}^2(\hat{P}_b) &\equiv \langle (\hat{P}_b - \hat{P}_b^{\text{inf}})^2 \rangle,\end{aligned}\quad (26)$$

where \hat{X}_b^{inf} is an operator making an affine estimation of Bob's result for a measurement of \hat{X}_b using Alice's measurement of \hat{X}_a (and similarly, for \hat{P}_b^{inf} that estimates Bob's result for \hat{P}_b given Alice's result for \hat{P}_a), i.e.,

$$\hat{X}_b^{\text{inf}} = q_1 + q_2 \hat{X}_a, \quad \hat{P}_b^{\text{inf}} = q'_1 + q'_2 \hat{P}_a. \quad (27)$$

Initially, the a and b systems are uncorrelated and

$$\Delta^2(\hat{X}_b - \hat{X}_b^{\text{inf}}) = \Delta^2 \hat{X}_b + q_2^2 \Delta^2 \hat{X}_a. \quad (28)$$

As the two subsystems become more and more entangled, a measurement of \hat{X}_a yields more and more information on \hat{X}_b [in the extreme case of a perfect correlation one would get $\Delta^2(\hat{X}_b - \hat{X}_b^{\text{inf}}) = 0$]. Of course, the same picture can be drawn for $\Delta^2(\hat{P}_b - \hat{P}_b^{\text{inf}})$. In a *local hidden variable* theory the correlations between Alice and Bob would come from some hidden element of reality rather than from the nonlocality of the quantum state. If we further ask that this theory is *locally compatible with quantum mechanics*, then Bob has his own quantum state that is not affected by Alice's measurements on her system. In this case \hat{X}_b^{inf} and \hat{P}_b^{inf} should be considered as

numbers, as far as Bob is concerned, so that the Heisenberg uncertainty principle constrains the product $\Delta_{\text{inf}}^2(\hat{X}_b)\Delta_{\text{inf}}^2(\hat{P}_b)$. If this constraint is violated,

$$\Delta_{\text{inf}}^2(\hat{X}_b)\Delta_{\text{inf}}^2(\hat{P}_b) < \frac{1}{4} |[\hat{X}_b, \hat{P}_b]|^2, \quad (29)$$

we have to admit that Alice's measurement changes Bob's state, which is at the heart of the EPR paradox.

To achieve (29) in our situation, we use the best linear estimation of \hat{X}_b using \hat{X}_a :

$$\hat{X}_b^{\text{inf}} = \langle \hat{X}_b \rangle + \frac{\text{covar}(\hat{X}_a, \hat{X}_b)}{\Delta^2 \hat{X}_a} (\hat{X}_a - \langle \hat{X}_a \rangle) \quad (30)$$

where $\text{covar}(\hat{X}_a, \hat{X}_b) = \langle \hat{X}_a \hat{X}_b \rangle - \langle \hat{X}_a \rangle \langle \hat{X}_b \rangle$.

B. EPR entanglement in our system

For our system of two collective spins, we choose the noncommuting variables

$$\begin{aligned}\hat{X}_a &= \hat{S}_\alpha^a, & \hat{P}_a &= \hat{S}_{\alpha+\pi/2}^a, \\ \hat{X}_b &= \hat{S}_\beta^b, & \hat{P}_b &= \hat{S}_{\beta+\pi/2}^b.\end{aligned}\quad (31)$$

Here \hat{S}_α^a and $\hat{S}_{\alpha+\pi/2}^a$ are spin operators obtained from \hat{S}_y^a and \hat{S}_z^a by linear combinations

$$\begin{aligned}\hat{S}_\alpha^a &= \cos \alpha \hat{S}_y^a + \sin \alpha \hat{S}_z^a, \\ \hat{S}_{\alpha+\pi/2}^a &= -\sin \alpha \hat{S}_y^a + \cos \alpha \hat{S}_z^a\end{aligned}\quad (32)$$

with a commutator

$$[\hat{S}_\alpha^a, \hat{S}_{\alpha+\pi/2}^a] = i \hat{S}_x^a \quad (33)$$

and similarly for b .

Rewriting (29) using these operators yields the criterion

$$E_{\text{EPR}}^2 \equiv \frac{4(\Delta^2 \hat{S}_\alpha^a \Delta^2 \hat{S}_\beta^b - \text{covar}^2(\hat{S}_\alpha^a, \hat{S}_\beta^b))(\Delta^2 \hat{S}_{\alpha+\pi/2}^a \Delta^2 \hat{S}_{\beta+\pi/2}^b - \text{covar}^2(\hat{S}_{\alpha+\pi/2}^a, \hat{S}_{\beta+\pi/2}^b))}{(\Delta^2 \hat{S}_\alpha^a \Delta^2 \hat{S}_{\alpha+\pi/2}^a) |[\hat{S}_x^b]|^2} < 1. \quad (34)$$

The quantum averages involved in the EPR criterion (34) can be calculated analytically and are given in Appendix B. As E_{EPR} depends on the angles α and β , the achievement of the inequality (34) in general requires a careful choice of the quadratures.

In Fig. 4, top row, we show the evolution of E_{EPR} for optimized quadrature angles. In order to allow the comparison of curves with different atom number, the time has been rescaled using the scaling of the best squeezing time in the case of spin squeezing in a single condensate [9]. In the bottom row we present the angular dependence of E_{EPR} at the best time extracted from the top-row curves.

a. Case $\chi = 0$. The quadrature optimization gives in this case

$$\alpha = 0, \quad \beta = \pi/2, \quad (35)$$

corresponding to $\hat{X}_a = \hat{S}_y^a$ and $\hat{X}_b = \hat{S}_z^b$. The condition (35) can be simply explained by integrating the equation of motion of \hat{S}_y^a for $\chi_{ab} t \ll 1/\sqrt{N}$ and $\chi t \ll 1/\sqrt{N}$ [33]:

$$\hat{S}_y^a(t) = \hat{S}_y^a(0) + Nt \left(\chi \hat{S}_z^a - \frac{\chi_{ab}}{2} \hat{S}_z^b \right). \quad (36)$$

Indeed, for $\chi = 0$ and

$$\begin{aligned}1/N &\ll \chi_{ab} t \ll 1/\sqrt{N} \\ \chi t &\ll 1/\sqrt{N},\end{aligned}\quad (37)$$

the component \hat{S}_y^a becomes an ‘‘enlarged copy’’ of \hat{S}_z^b [34].

As shown in Fig. 4(a), for times (37) the system beats the classical limit and satisfies (34). Using parameters as in the experiment of [1] ($N = 10^3$ and $\chi_{ab} = 0.5 \text{ s}^{-1}$), we find that the maximal EPR entanglement is created for $t \simeq 20 \text{ ms}$, well within reach of such experiments. We note that the

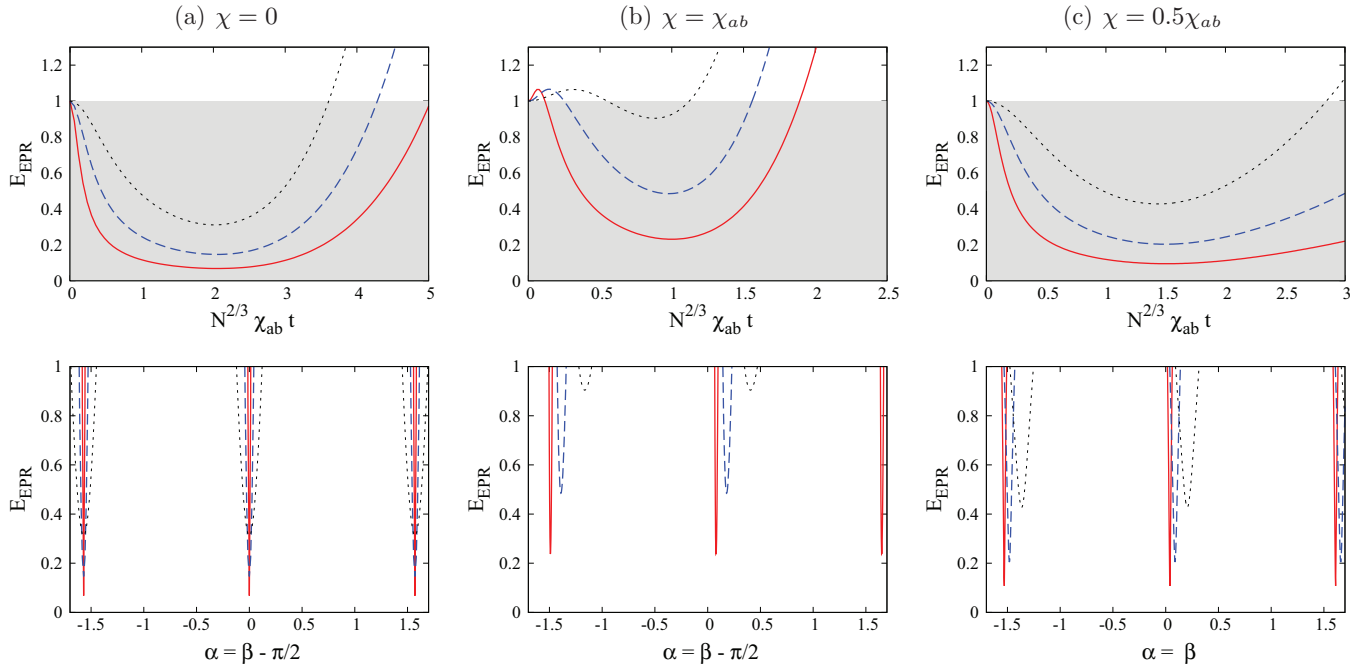


FIG. 4. (Color online) Top row: Evolution of E_{EPR} (34) for three different ratios χ/χ_{ab} . The number of atoms in each ensemble is $N = 50$ (black dotted line), $N = 500$ (blue dashed line), or $N = 5000$ (red solid line). The quadrature angle α has been optimized numerically, while β is fixed by the conditions (35), (38), (39). Bottom row: Dependence of E_{EPR} on the angle α while β is still given by the conditions (35), (38), (39). In these curves the time is fixed to the best time (minimum of E_{EPR}) extracted from the top-row curves, although the time dependence is smooth in the interesting region (37).

angular width over which (34) is satisfied decreases with the atom number, 6° for $N = 500$ and 1° for $N = 5000$, which is, however, still compatible with the experimental control achieved in [1,35].

b. Case $\chi = \chi_{ab}$. For $\chi \neq 0$ the squeezing Hamiltonian correlates \hat{S}_y^b with \hat{S}_z^b and hence with \hat{S}_y^a . There is then *a priori* a competition between the correlation $\hat{S}_y^a - \hat{S}_y^b$ and the correlation $\hat{S}_y^a - \hat{S}_z^b$. The numerical optimization gives

$$\alpha = \alpha_{\text{opt}}(t), \quad \beta = \alpha + \pi/2, \quad (38)$$

where α_{opt} is a small angle approaching zero in the interesting time domain (37) when N tends to infinity. The results for this case are in Fig. 4(b). As in the case $\chi = 0$, the angular width over which (34) is satisfied decreases with N .

c. Case $\chi = 0.5\chi_{ab}$. In this case the quadrature optimization gives

$$\alpha = \beta = \alpha_{\text{opt}}(t), \quad (39)$$

where α_{opt} is a small angle approaching zero in the domain (37) when N tends to infinity [see Fig. 4(c)]. From Eq. (36) we have in this case

$$\hat{S}_y^a(t) - \hat{S}_y^a(0) = -(\hat{S}_y^b(t) - \hat{S}_y^b(0)). \quad (40)$$

As far as one can neglect the initial conditions, perfectly correlated quadratures are obtained choosing $\hat{X}_a = \hat{S}_y^a$ and $\hat{X}_b = \hat{S}_y^b$ (and thus $\hat{X}_b^{\text{inf}} = -\hat{S}_y^a$), corresponding to $\alpha = \beta = 0$.

The case $\chi = 0.5\chi_{ab}$ is “special” in the sense that, if we expand E_{EPR} for times (37), the leading order in (Nt) (order four) is identically zero independently of the quadrature angles. This explains the fact that both E_{EPR} and the entanglement witness

E_{ent} defined in (42) below take very small values in this case although $\chi \neq 0$ (see Figs. 4 and 6). Over the three cases we have considered, $\chi = 0.5\chi_{ab}$ is also the only one in which we find a solution, that, although different from the global minimum of E_{EPR} over the quadrature angle, has a smooth angular dependence of E_{EPR} . This is obtained choosing

$$\alpha = \alpha_{\text{opt}}, \quad \beta = -\alpha, \quad (41)$$

and the result is shown in Fig. 5.

C. Entanglement criterion

We defined the EPR-entanglement criterion in (29). Note that an ordinary *entanglement* criterion between ensembles *a* and *b* would be

$$E_{\text{ent}}^2 \equiv \frac{\Delta_{\text{inf}}^2(\hat{X}_b)\Delta_{\text{inf}}^2(\hat{P}_b)}{\Delta^2(\hat{X}_b)\Delta^2(\hat{P}_b)} < 1. \quad (42)$$

Indeed, for two uncorrelated systems $\text{cov}(\hat{X}_a, \hat{X}_b) = 0$, $\Delta_{\text{inf}}^2(\hat{X}_b) = \Delta^2(\hat{X}_b)$ and (42) becomes an equality. We note that while the EPR-entanglement criterion (29) implies the entanglement criterion (42), the converse is not true.

We find that very strong *a-b* correlations build up in our system so that the inferred variances become very small compared to the original variances. This holds for a wide choice of quadrature angles. We show an example in Fig. 6 for three values of the ratio χ/χ_{ab} .

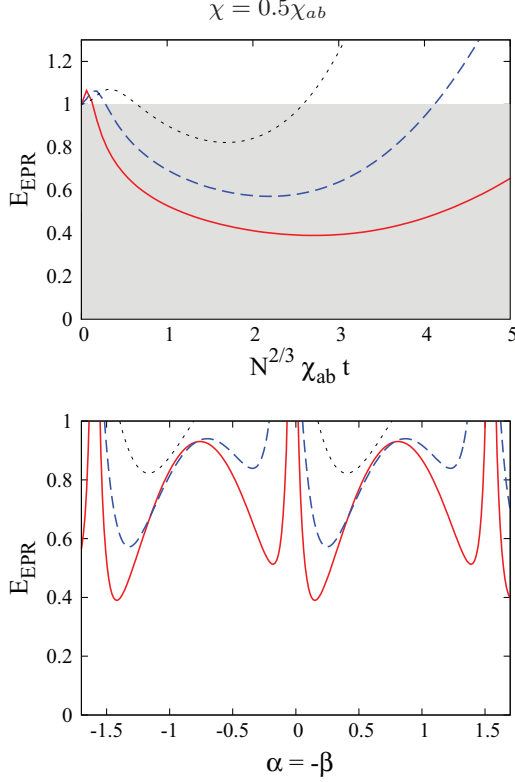


FIG. 5. (Color online) Top: Evolution of E_{EPR} for $\chi = 0.5\chi_{ab}$ and quadratures chosen according to (41). The atom numbers are the same as in Fig. 4. Bottom: At the best time, dependence of E_{EPR} on the angle α , while β is still given by the conditions (41).

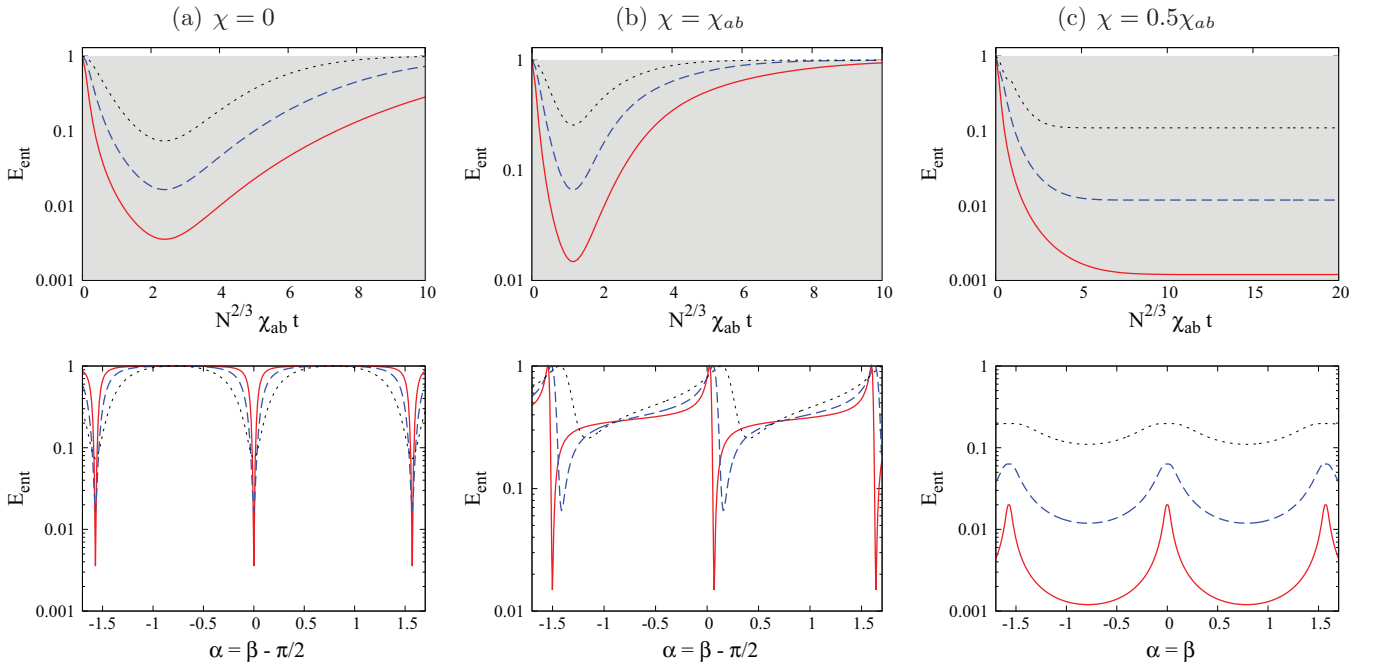


FIG. 6. (Color online) Top row: Evolution of the entanglement witness E_{ent} (42) for three different ratios χ/χ_{ab} . The number of atoms in each ensemble is $N = 50$ (black dotted line), $N = 500$ (blue dashed line), and $N = 5000$ (red solid line). The quadrature angle α has been optimized numerically, while β is fixed by the conditions (35), (38), (39). Bottom row: Dependence of E_{ent} on the angle α while β is still given by the conditions (35), (38), (39). In these curves the time is fixed to the best time (minimum of E_{ent}) extracted from the top-row curves.

D. Squeezing versus EPR entanglement

Finally, one may ask whether the squeezing of each BEC resulting from the $\chi(\hat{S}_z^a)^2$ and $\chi(\hat{S}_z^b)^2$ terms in the Hamiltonian (9) is affected by the nonlocal entanglement between condensates a and b .

In general, if one system is entangled with another system that is not measured, the purity of its state is degraded and so its quantum correlations. Based on this argument we thus expect the spin squeezing in a to be deteriorated by the EPR correlations, which is what we investigate in this subsection.

For the quadrature \hat{S}_α^a introduced in Eq. (32) we define the squeezing parameter ξ_α [36]:

$$\xi_\alpha = \frac{\sqrt{N\Delta^2\hat{S}_\alpha^a}}{|\langle\hat{S}^a\rangle|}. \quad (43)$$

The system is squeezed if $\xi_\alpha < 1$. In the time regime given by (37), one has $|\langle\hat{S}^a\rangle| \simeq N/2$, so that we can focus on $\Delta^2\hat{S}_\alpha^a$. From the definition of \hat{S}_α^a (32) and Eq. (36) giving $\hat{S}_y^a(t)$, one can compute the values of the quadrature angle for which $\Delta^2\hat{S}_\alpha^a$ reaches its extrema

$$\tan 2\alpha = \frac{\langle\hat{S}_z^a\hat{S}_y^a + \hat{S}_y^a\hat{S}_z^a\rangle}{\Delta^2\hat{S}_y^a - \Delta^2\hat{S}_z^a} = \frac{4\eta}{\chi_{ab}Nt(1+\eta^2)} \quad (44)$$

where we introduced

$$\eta = \chi_{ab}/2\chi. \quad (45)$$

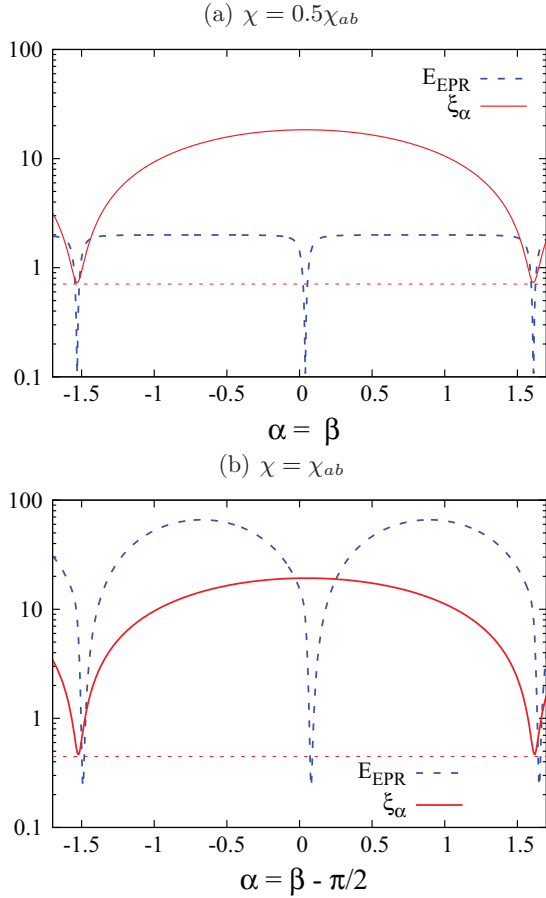


FIG. 7. (Color online) Angular dependence of the squeezing parameter ξ_α (43) (solid red line) together with E_{EPR} (dashed blue line, already shown in Fig. 4 bottom row) for two values of the ratio $\eta = \chi_{ab}/2\chi$. For both ξ_α and E_{EPR} the time is fixed to the time-minimizing E_{EPR} , as in Fig. 4. The atom number is $N = 5000$ in each condensate. The horizontal red dotted line shows the analytical value of the squeezing limit (47).

Note that from (37), $\tan 2\alpha \ll 1$. Linearizing equation (44) we find that the minimum of $\Delta^2 \hat{S}_\alpha^a$ is obtained for

$$\alpha_{\min} = -\pi/2 + \frac{2\eta}{N\chi_{ab}t(1+\eta^2)}. \quad (46)$$

Expanding $\Delta^2 \hat{S}_\alpha^a$ in powers of $1/N\chi_{ab}t$ we finally obtain

$$\xi_{\min} = \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} + O\left(\frac{1}{(N\chi_{ab}t)^2}\right). \quad (47)$$

This equation shows that the nonlocal entanglement ($\eta \neq 0$) introduces a squeezing limit that is independent of the particle number. The limit (47) is shown as a dotted horizontal line in Fig. 7. Physically, the limitation of the squeezing comes from the fact that when $\chi_{ab} \neq 0$ ($\eta \neq 0$), the state of a after tracing out the system b is not anymore a unique squeezed state but rather a mixture of squeezed states rotated by an angle depending on the state of b [37]. From Fig. 7 we remark that although squeezing in each condensate is limited, it can, however, coexist with EPR entanglement for experimentally relevant parameters.

VI. CONCLUSION

We consider a scheme that allows us to entangle two spatially separated atomic ensembles using collisional interactions. The system we propose is a pair of bimodal condensates in state-dependent traps as could be realized in an optical trap or using microwave traps on an atom chip. Within a four-mode approximation, we find a very rich physics. At long evolution times, the system evolves into macroscopic superpositions entangling the two ensembles a and b . We have shown that these states take a simple form if expressed in the phase states basis. Correspondingly, at some remarkable times, the entanglement entropy takes simple values. At short times the system exhibits EPR-like entanglement that could be revealed by variance and covariance measurements on the collective spin components. We compared criteria for EPR entanglement and simple entanglement. We show that they are both satisfied for a wide range of experimental parameters in our system, the EPR entanglement being, however, more demanding than simple entanglement because of its sensitivity to the choice of quadratures. Finally, we proved that the best achievable squeezing in each BEC is limited to a finite value by the nonlocal entanglement between a and b .

We expect that the macroscopic superpositions that we predict at long times will be very sensitive to decoherence, while the nonlocal entanglement at short times might be more accessible, as it is the case for spin squeezing in a single ensemble [38]. Further studies including, in particular, the spatial dynamics of the condensate wave functions [11] will be done in order to confirm the conclusion of the present work and to allow a detailed comparison with future experiments. During the preparation of the present manuscript we became aware of a preprint discussing ideas closely related to Sec. IV of our paper [39].

ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge support from IFRAF-CNano Île de France, from the European project QIBEC, and from the Swiss National Science Foundation.

APPENDIX A: WHY $\log(q)$?

Here we show how to decompose the operator $\exp(i2\pi m/q \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b)$ into a sum of simple rotations in systems a and b [see Eq. (A6)]. We will use this result to calculate the global state and the entropy of entanglement at special times $\chi_{ab}t = 2\pi m/q$.

We consider N even [40] and we introduce the notation

$$x \equiv \exp(i2\pi m/q). \quad (A1)$$

First, we will prove the identity

$$\sum_{p,r=0}^{q-1} x^{-(\hat{S}_z^a - p)(\hat{S}_z^b - r)} = q. \quad (A2)$$

It is sufficient to check that (A2) holds in the eigenbasis of operators \hat{S}_z^a and \hat{S}_z^b . For N even, both \hat{S}_z^a and \hat{S}_z^b have integer eigenvalues, which we denote δn_a and δn_b , respectively. For

each pair of eigenvalues $\delta n_a, \delta n_b$ we obtain

$$\sum_{p,r=0}^{q-1} x^{-(\delta n_a - p)(\delta n_b - r)} = \sum_{p',r'=0}^{q-1} x^{-p'r'}, \quad (\text{A3})$$

where we redefined the summation indices $p' \equiv (p - \delta n_a) \bmod q$ and $r' \equiv (r - \delta n_b) \bmod q$. However, from the properties of the roots (of degree q) of unity, we know that $\sum_{r'=0}^{q-1} x^{-p'r'} = q \delta_{p',0}$, where $\delta_{i,j}$ is the Kronecker δ . Hence, we have $\sum_{p',r'=0}^{q-1} x^{-p'r'} = q$, which proves the equation (A2).

To decompose $\exp(i2\pi m/q \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b)$ we additionally use the relation

$$x^{-pr} x^{p\hat{S}_z^b + r\hat{S}_z^a} = x^{\hat{S}_z^a \hat{S}_z^b} x^{-(\hat{S}_z^a - p)(\hat{S}_z^b - r)}. \quad (\text{A4})$$

After summing both sides of Eq. (A4) over $p, r = 0, 1, 2, \dots, q-1$ we get

$$\sum_{p,r=0}^{q-1} x^{-pr} x^{p\hat{S}_z^b + r\hat{S}_z^a} = x^{\hat{S}_z^a \hat{S}_z^b} \sum_{p,r=0}^{q-1} x^{-(\hat{S}_z^a - p)(\hat{S}_z^b - r)} \stackrel{(\text{A.2})}{=} x^{\hat{S}_z^a \hat{S}_z^b} q. \quad (\text{A5})$$

Finally, dividing Eq. (A5) by q we obtain the desired decomposition

$$e^{i\frac{2\pi m}{q} \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b} = \frac{1}{q} \sum_{p,r=0}^{q-1} x^{-pr} e^{i\frac{2\pi m}{q} p \hat{S}_z^b} e^{i\frac{2\pi m}{q} r \hat{S}_z^a}. \quad (\text{A6})$$

The entangling rotation in a and b is thus rewritten as a sum of simultaneous rotations by all multiples of an angle $2\pi/q$ in the a and b systems with coefficients $\frac{1}{q} x^{-pr} = \frac{1}{q} \exp(-i2\pi m p r / q)$. Acting with this operator on a product state $|\Psi_a, \Psi_b\rangle$ we get

$$\begin{aligned} e^{i\frac{2\pi m}{q} \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b} |\Psi_a, \Psi_b\rangle &= \frac{1}{q} \sum_{p,r=0}^{q-1} x^{-pr} e^{i\frac{2\pi m}{q} (p\hat{S}_z^a + r\hat{S}_z^b)} |\Psi_a, \Psi_b\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{p=0}^{q-1} e^{i\frac{2\pi m}{q} p \hat{S}_z^a} |\Psi_a, \Psi_b^{(p)}\rangle, \end{aligned}$$

where $|\Psi_b^{(p)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{r=0}^{q-1} x^{-pr} e^{i\frac{2\pi m}{q} r \hat{S}_z^b} |\Psi_b\rangle$.

From now on we focus on ‘‘long’’ evolution times, where the angle $1/q > 1/\sqrt{N}$. Under this condition any phase state $|\phi\rangle_{\text{ph}}$ is almost orthogonal to its rotated version $\exp(i\frac{2\pi}{q} r \hat{S}_z^b) |\phi\rangle_{\text{ph}}$. This is also the case for the evolved state $|\Psi_b\rangle = e^{-i\chi t (\hat{S}_z^b)^2} |0\rangle_{\text{ph}}$ considered in the main text:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_b | e^{-i\frac{2\pi}{q} r \hat{S}_z^b} | \Psi_b \rangle &= {}_{\text{ph}} \langle 0 | e^{i\chi t (\hat{S}_z^b)^2} e^{-i\frac{2\pi}{q} r \hat{S}_z^b} e^{-i\chi t (\hat{S}_z^b)^2} | 0 \rangle_{\text{ph}} \\ &= {}_{\text{ph}} \langle 0 | e^{-i\frac{2\pi}{q} r \hat{S}_z^b} | 0 \rangle_{\text{ph}} \simeq \delta_{r,0}. \end{aligned} \quad (\text{A7})$$

From (A7) we see that states $|\Psi_b^{(p)}\rangle$ form an almost orthonormal basis:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_b^{(p')} | \Psi_b^{(p)} \rangle &= \frac{1}{q} \langle \Psi_b | \sum_{r,r'} x^{p'r' - pr} e^{i\frac{2\pi m}{q} (r-r') \hat{S}_z^b} | \Psi_b \rangle \\ &= \frac{1}{q} \sum_r x^{-r(p-p')} = \delta_{p,p'}. \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

With this we can compute the reduced density matrix for system a :

$$\begin{aligned} \rho_a &= \text{Tr}_b \rho = \sum_p \langle \Psi_b^{(p)} | \rho | \Psi_b^{(p)} \rangle \\ &= \frac{1}{q} \sum_{p=0}^{q-1} e^{i\frac{2\pi}{q} p \hat{S}_z^a} |\Psi_a\rangle \langle \Psi_a| e^{-i\frac{2\pi}{q} p \hat{S}_z^a}. \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

This mixed state indeed leads us to the value of the entropy close to $\log(q)$ due to the orthogonality of states $e^{i\frac{2\pi}{q} p \hat{S}_z^a} |\Psi_a\rangle$ for different p .

An important example is the case $q = 2$, which corresponds to $t_\pi = \frac{\pi}{\chi_{ab}}$. According to (A6) we can write

$$e^{i\pi \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b} = \frac{1}{2} (1 + e^{i\pi \hat{S}_z^a} + e^{i\pi \hat{S}_z^b} - e^{i\pi (\hat{S}_z^a + \hat{S}_z^b)}). \quad (\text{A10})$$

In the case $\chi = \chi_{ab}$ the state $|\Psi_a, \Psi_b\rangle$ is equal to $|\pi\pi\rangle_{\text{ph}}$. Thus according to (A10) and (19) the global state of the system is

$$\begin{aligned} |\Psi(t_\pi)\rangle &= e^{i\pi \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b} |\pi\pi\rangle_{\text{ph}} \\ &= \frac{1}{2} (|\pi\pi\rangle_{\text{ph}} + |0\pi\rangle_{\text{ph}} + |\pi 0\rangle_{\text{ph}} - |00\rangle_{\text{ph}}). \end{aligned}$$

In such a way one can reconstruct all the states shown in insets of the Fig. 3, corresponding to different q and ratios χ/χ_{ab} .

APPENDIX B: QUANTUM AVERAGES

The quantum averages used to compute the EPR criterion are listed below:

$$\begin{aligned} \langle \hat{S}_x^a \rangle &= \frac{N}{2} \cos^{N-1}(\chi t) \cos^N(\chi_{ab} t / 2), \\ \langle \hat{S}_y^a \rangle &= 0, \quad \langle \hat{S}_z^a \rangle = 0, \\ \Delta^2 \hat{S}_y^a &= \frac{N}{4} \\ &\quad + \frac{N(N-1)}{8} [1 - \cos^N(\chi_{ab} t) \cos^{N-2}(2\chi t)], \\ \Delta^2 \hat{S}_z^a &= \frac{N}{4}, \\ \langle \hat{S}_z^a \hat{S}_z^b \rangle &= 0, \\ \langle \hat{S}_y^a \hat{S}_y^b \rangle &= \frac{N^2}{8} \{ \cos^{2N-2}[(\chi + \chi_{ab}/2)t] \\ &\quad - \cos^{2N-2}[(\chi - \chi_{ab}/2)t] \}, \\ \langle \hat{S}_y^a \hat{S}_z^b \rangle &= -\frac{N^2}{4} \sin(\chi_{ab} t / 2) \cos^{N-1}(\chi_{ab} t / 2) \cos^{N-1}(\chi t), \\ \langle \{ \hat{S}_y^a, \hat{S}_z^a \} \rangle &= \frac{N(N-1)}{2} \sin(\chi t) \cos^N(\chi_{ab} t / 2) \cos^{N-2}(\chi t). \end{aligned}$$

The variances and covariances of the generic quadratures (31) are

$$\begin{aligned} \Delta^2 \hat{S}_\alpha^a &= \cos^2 \alpha \Delta^2 \hat{S}_y^a + \sin^2 \alpha \Delta^2 \hat{S}_z^a \\ &\quad + \sin \alpha \cos \alpha \langle \{ \hat{S}_y^a, \hat{S}_z^a \} \rangle, \\ \Delta^2 \hat{S}_\beta^b &= \cos^2 \beta \Delta^2 \hat{S}_y^b + \sin^2 \beta \Delta^2 \hat{S}_z^b \\ &\quad + \sin \beta \cos \beta \langle \{ \hat{S}_y^b, \hat{S}_z^b \} \rangle, \\ \text{covar}(\hat{S}_\alpha^a, \hat{S}_\beta^b) &= \cos \alpha \cos \beta \langle \hat{S}_y^a \hat{S}_y^b \rangle \\ &\quad + \sin \alpha \cos \beta \langle \hat{S}_y^b \hat{S}_z^a \rangle + \sin \beta \cos \alpha \langle \hat{S}_y^a \hat{S}_z^b \rangle. \end{aligned}$$

- [1] M. Riedel, P. Böhi, Y. Li, T. Hänsch, A. Sinatra, and P. Treutlein, *Nature (London)* **464**, 1170 (2010).
- [2] C. Gross, T. Zibold, E. Nicklas, J. Esteve, and M. Oberthaler, *Nature (London)* **464**, 1165 (2010).
- [3] C. D. Hamley, C. S. Gerving, T. M. Hoang, E. M. Bookjans, and M. S. Chapman, *Nat. Phys.* **8**, 305 (2012).
- [4] C. Gross, H. Strobel, E. Nicklas, T. Zibold, N. Bar-Gill, G. Kurizki, and M. K. Oberthaler, *Nature (London)* **480**, 219 (2011).
- [5] B. Lücke, M. Scherer, J. Kruse, L. Pezze, F. Deuretzbacher, P. Hyllus, O. Topic, J. Peise, W. Ertmer, J. Arlt *et al.*, *Science* **334**, 773 (2011).
- [6] R. Bücker, J. Grond, S. Manz, T. Berrada, T. Betz, C. Koller, U. Hohenester, T. Schumm, A. Perrin, and J. Schmiedmayer, *Nat. Phys.* **7**, 608 (2011).
- [7] J. Estève, C. Gross, A. Weller, S. Giovanazzi, and M. K. Oberthaler, *Nature (London)* **455**, 1216 (2008).
- [8] K. Maussang, G. E. Marti, T. Schneider, P. Treutlein, Y. Li, A. Sinatra, R. Long, J. Estève, and J. Reichel, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 080403 (2010).
- [9] M. Kitagawa and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **47**, 5138 (1993).
- [10] A. Sorensen, L. Duan, J. Cirac, and P. Zoller, *Nature (London)* **409**, 63 (2001).
- [11] Y. Li, P. Treutlein, J. Reichel, and A. Sinatra, *Eur. Phys. J. B* **68**, 365 (2009).
- [12] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [13] Q. Y. He, M. D. Reid, T. G. Vaughan, C. Gross, M. Oberthaler, and P. D. Drummond, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 120405 (2011).
- [14] N. Bar-Gill, C. Gross, I. Mazets, M. Oberthaler, and G. Kurizki, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 120404 (2011).
- [15] B. Julsgaard, A. Kozhekin, and E. S. Polzik, *Nature (London)* **413**, 400 (2001).
- [16] H. M. Wiseman, S. J. Jones, and A. C. Doherty, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 140402 (2007).
- [17] B. Opanchuk, Q. Y. He, M. D. Reid, and P. D. Drummond, *Phys. Rev. A* **86**, 023625 (2012).
- [18] H. Briegel, T. Calarco, D. Jaksch, J. Cirac, and P. Zoller, *J. Mod. Opt.* **47**, 415 (2000).
- [19] P. Treutlein, T. W. Hänsch, J. Reichel, A. Negretti, M. A. Cirone, and T. Calarco, *Phys. Rev. A* **74**, 022312 (2006).
- [20] O. Mandel, M. Greiner, A. Widera, T. Rom, T. W. Hänsch, and I. Bloch, *Nature (London)* **425**, 937 (2003).
- [21] P. Böhi, M.F. Riedler, J. Hoffrogge, J. Reichel, T. W. Hänsch, and P. Treutlein, *Nat. Phys.* **5**, 592 (2009).
- [22] Y. Castin, *Bose-Einstein Condensates in Atomic Gases*, Lecture Notes of 1999 Les Houches Summer School (EDP Sciences and Springer-Verlag, Les Ulis/Berlin, 2001).
- [23] G. Ferrini, D. Spehner, A. Minguzzi, and F. W. J. Hekking, *Phys. Rev. A* **82**, 033621 (2010).
- [24] B. Yurke and D. Stoler, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 13 (1986).
- [25] D. Stoler, *Phys. Rev. D* **4**, 2309 (1971).
- [26] M. Erhard, H. Schmaljohann, J. Kronjäger, K. Bongs, and K. Sengstock, *Phys. Rev. A* **69**, 032705 (2004).
- [27] The parameter value $\chi = 0.5\chi_{ab}$ is in fact natural within another scheme in which the components that interact are $1a$ and $1b$ (instead of $1b$ and $0a$). This scheme leads to the Hamiltonian $H_{\text{int}}^{\text{nl}} = \chi(\hat{S}_z^a)^2 + \chi(\hat{S}_z^b)^2 + \chi_{ab}\hat{S}_z^a\hat{S}_z^b$, with χ defined as in Eqs. (5) and (8) while $\chi_{ab} = 2g_{11} \int |\phi_{1,a}|^2 |\phi_{1,b}|^2$. In this case $\chi = 0.5\chi_{ab}$ corresponds to equal coupling constants and perfect overlap between $\phi_{1,a}$ and $\phi_{1,b}$. This scheme is indeed realizable with microwave potentials on an atom chip [19].
- [28] Note that the discussion of Appendix A is independent of the ratio χ/χ_{ab} .
- [29] A. Sinatra and Y. Castin, *Eur. Phys. J. B* **4**, 247 (1998).
- [30] K. Pawłowski, D. Spehner, A. Minguzzi, and G. Ferrini, *Phys. Rev. A* **88**, 013606 (2013).
- [31] D. Walls and G. Milburn, *Quantum Optics* (Springer-Verlag, Berlin, 1994).
- [32] E. G. Cavalcanti, Q. Y. He, M. D. Reid, and H. M. Wiseman, *Phys. Rev. A* **84**, 032115 (2011).
- [33] For $\chi_{ab}t \ll 1/\sqrt{N}$ and $\chi t \ll 1/\sqrt{N}$ the coherence in each ensemble between internal state 0 and 1 remains high so that $\langle \hat{S}_x^{a(b)} \rangle \simeq N/2$.
- [34] A. Sinatra, J.-C. Dornstetter, and Y. Castin, *Front. Phys.* **7**, 86 (2012).
- [35] C. F. Ockelo, R. Schmied, M. F. Riedel, and P. Treutlein, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 143001 (2013).
- [36] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, and D. J. Heinzen, *Phys. Rev. A* **50**, 67 (1994).
- [37] This can be seen by (i) writing the initial state as $|\Psi(0)\rangle = \frac{1}{2^{N/2}} \sum_{n_b} \sqrt{\binom{N}{n_b}} |n_b\rangle_F |\phi_a = 0\rangle_{\text{ph}}$, where we expanded only the phase states of b in the Fock basis, (ii) evolving this state with the Hamiltonian (9) and (iii) tracing out the system b .
- [38] Y. Li, Y. Castin, and A. Sinatra, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 210401 (2008).
- [39] T. Byrnes, *Phys. Rev. A* **88**, 023609 (2013).
- [40] The proof for N odd is obtained by mapping $\hat{S}_z^a \mapsto \hat{S}_z^a + 1/2$.

Phase operator and blurring time of a pair-condensed Fermi gas.
Phys. Rev. A **88**, 063623 (2013). Editor's suggestion.



Phase operators and blurring time of a pair-condensed Fermi gas

H. Kurkjian, Y. Castin, and A. Sinatra

Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, UPMC and CNRS, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

(Received 27 July 2013; published 12 December 2013)

Due to atomic interactions and dispersion in the total atom number, the order parameter of a pair-condensed Fermi gas experiences a collapse in a time that we derive microscopically. As in the bosonic case, this blurring time depends on the derivative of the gas chemical potential with respect to the atom number and on the variance of that atom number. The result is obtained first using linearized time-dependent Bogoliubov–de Gennes equations, then in the random-phase approximation, and then it is generalized to beyond the mean field. In this framework, we construct and compare two phase operators for the paired fermionic field: The first one, issuing from our study of the dynamics, is the infinitesimal generator of adiabatic translations in the total number of pairs. The second one is the phase operator of the amplitude of the field of pairs on the condensate mode. We explain that these two operators differ due to the dependence of the condensate wave function on the atom number.

DOI: [10.1103/PhysRevA.88.063623](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.88.063623)

PACS number(s): 67.85.Lm, 03.75.Kk

I. INTRODUCTION

Long-range coherence in time and space is a key property of macroscopic quantum systems such as lasers, Bose-Einstein condensates, superfluids, and superconductors. In the case of bosonic systems, coherence derives from the macroscopic occupation of a single-particle mode and can be directly visualized in an interference experiment by mixing the quantum fields extracted at two different spatial points of the system or at two different times. The interference pattern then depends on the relative phase of the two fields.

Experimental investigation of temporal coherence in Bose-Einstein condensates began right after their achievement in the laboratory [1–3], and the use of their coherence properties in atomic clocks or interferometers [4–6], or even for the creation of entangled states, is currently a cutting-edge subject of investigation. In this respect a crucial role is played by the atomic interactions. On the one hand, the interactions limit the coherence time, causing an initially well-defined phase or relative phase to blur in a finite-size system [7–13]; on the other hand, at shorter times, coherent phase dynamics in the presence of interactions allows for generation of spin-squeezed states [14,15] which opens the way to quantum metrology [16–20].

Let us now turn to the case of fermions. Cold fermionic gases have been widely studied in the last decade [21–23]. With respect to bosons, fermions have the advantage that the interaction strength can be changed by the use of Feshbach resonances without introducing significant losses in the system. Across these resonances the s -wave scattering length characterizing the short-range interactions in the cold gas can be ideally changed from $-\infty$ to $+\infty$. Using the same physical system, different interaction regimes can be accessed, ranging from a BCS (Bardeen-Cooper-Schrieffer) superfluid of weakly bound Cooper pairs, when a is small and negative, to a condensate of tightly bound dimers behaving like bosons, when a is small and positive. In between, a strongly interacting unitary gas is obtained when a diverges [24,25]. Recent progress in experiments made it possible to observe the coherence and superfluidity of these Fermi gases [26,27], to study with high precision their thermodynamics in the different interaction regimes [28–31], and to perform an interference experiment between two independent condensates of dimers [32].

In the near future we expect the experimental studies to extend to coherence properties, e.g., along the lines of [33,34], and this motivates a theoretical study of phase dynamics in paired fermionic systems. The scope of this paper is to provide an analysis of this problem, at zero temperature.

Let us consider an unpolarized Fermi gas with two internal states \uparrow and \downarrow , in the presence of weak attractive interactions between fermions in different internal states. At zero temperature, a macroscopic number of $\uparrow\downarrow$ pairs of fermions condense in the same two-body wave function. Long-range order and coherence properties then show up in the *two-body correlations* that are in principle measurable [33,34].

To investigate temporal coherence of the pair-condensed Fermi system, in a first stage, we determine the time evolution of the *order parameter* of a state that is a coherent superposition of different particle numbers. At the mean-field level, the broken-symmetry state is simply the ground state of the gas in the BCS theory [35]. Interactions and an initial dispersion in the particle number cause a blurring of the phase and the collapse of the order parameter of the BCS gas, after a time that we derive analytically. This is done in Sec. II. Loss of coherence is described in a low-energy subspace of the linearized equations of motion by a zero-energy mode [36] and an anomalous mode [37] excited respectively by phase and particle-number translations. We derive these modes and the related phase and number operators explicitly and express the phase blurring time in terms of the particle-number fluctuations and of thermodynamic quantities of the gas. We show that the same microscopic expression of the blurring time is obtained using the random phase approximation (RPA) put forward in Ref. [36]. A similar symmetry-breaking approach, based on the linearized treatment of quantum fluctuations, was introduced for bosonic phase dynamics in Ref. [9]. We stress that the collapse we are interested in is a finite-size effect and the blurring time we find diverges in the thermodynamic limit.

In Sec. III we give some general considerations about the definition of a phase operator in the fermionic case and we examine two possible candidates for this operator. We find that the phase operator derived in Sec. II in the dynamical study of the order parameter is a generator of *adiabatic* translations of the number of particles of the gas, that is, it increases the particle number while leaving the system

in its many-body ground state. A second natural definition of the phase operator, which we call the phase operator of the condensate of pairs, is associated with the amplitude of the field of pairs $\hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}')$ on the condensate wave function, defined as the macroscopically populated mode of the two-body density matrix. We show that the two phase operators *differ* if the condensate wave function depends on the total number of particles. Although not pointed out at that time, this difference was already present in the studies of bosonic phase dynamics [9,11,38,39].

In Sec. IV we extend our results for the blurring time and the phase operator beyond the BCS theory. This is done in two ways. First, we go beyond U(1) symmetry breaking: although they are not appropriate to describe the state of an isolated gas, as they cannot be prepared experimentally, broken-symmetry states can be given a precise physical meaning when dealing with a bipartite system with a well-defined relative phase [10,34]. In Sec. IV A we restore the symmetry by considering a mixture of broken-symmetry states, and we relate the order parameter to correlation functions. Second, in Sec. IV B we go beyond the mean-field regime by replacing the BCS ansatz with a coherent superposition of the exact ground states for different numbers of particles. We have chosen to postpone this section giving a general result until after the microscopic derivations based on the mean-field BCS theory that are useful to set the stage and become familiar with the problem. Nevertheless, Sec. IV B is self-contained, and the reader willing to avoid all technicalities might go to this section directly.

Finally, in Sec. V we sketch an experiment in which such a state would be prepared and which would allow the observation of a Gaussian decay of the time-correlation function. We conclude in Sec. VI.

II. COLLAPSE OF THE BCS ORDER PARAMETER

In this section we show that the phase of the order parameter of a gas initially prepared in the U(1) symmetry-breaking BCS state spreads in time, causing the order parameter to collapse. With this aim, we use linearized equations of motion both at the ‘‘classical’’ mean-field level and at the quantum level (RPA). The two approaches yield equivalent equations of motions for small fluctuations, either classical or quantum, of the dynamical variables. However, while the quantum fluctuations of the initial state are built in in the quantum theory, we need an *ad hoc* probability distribution of the classical fluctuations to reproduce the quantum behavior with the classical theory.

A. Hamiltonian

We consider a gas of fermions in two internal states \uparrow and \downarrow , in the grand canonical ensemble of chemical potential μ , in a cubic lattice model of step b with periodic boundary conditions in $[0, L]^3$. The fermions have on-site interactions characterized by the bare coupling constant g_0 . The grand canonical Hamiltonian of this system is given by

$$\hat{H} = b^3 \sum_{\mathbf{r}, \sigma} \hat{\psi}_\sigma^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{r}} - \mu \right) \hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}) + g_0 b^3 \sum_{\mathbf{r}} \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}), \quad (1)$$

where the single-particle discrete Laplacian on the lattice has plane waves $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ as eigenvectors with eigenvalues $\hbar^2 k^2/2m$, and the field operators obey discrete anticommutation relations such as $\{\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{\mathbf{r}\mathbf{r}'}/b^3$, and $\sigma, \sigma' = \uparrow$ or \downarrow . The bare coupling constant g_0 is adjusted to reproduce the scattering length a of the true interaction potential [24,40–44]:

$$\frac{1}{g_0} = \frac{m}{4\pi\hbar^2 a} - \int_{\text{FBZ}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\hbar^2 k^2} \quad (2)$$

where FBZ is the first Brillouin zone $[-\pi/b, \pi/b]^3$ of the lattice.

B. Reminder of the BCS theory

The BCS theory is based on the introduction of the ansatz

$$|\psi_{\text{BCS}}\rangle = \mathcal{N} e^{\gamma \hat{C}^\dagger} |0\rangle, \quad (3)$$

where γ is a complex number and \hat{C}^\dagger creates a pair of $\uparrow\downarrow$ fermions in a wave function φ . In Fourier space

$$\hat{C}^\dagger = \sum_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger, \quad (4)$$

where $\hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger$ creates a fermion of wave vector \mathbf{k} in spin state σ and obeys the usual anticommutation relations. For the purpose of this work, it is sufficient to restrict our attention to pairs of zero total momentum, as this will describe both the initial ground BCS state and the relevant fluctuations for phase dynamics. To parametrize the BCS state we use the complex $V_{\mathbf{k}}$ coefficients

$$V_{\mathbf{k}} = -\frac{\gamma \varphi_{\mathbf{k}}}{\sqrt{1 + |\gamma \varphi_{\mathbf{k}}|^2}}, \quad (5)$$

which can be interpreted as the probability amplitudes of finding a pair with wave vectors \mathbf{k} and $-\mathbf{k}$:

$$|V_{\mathbf{k}}|^2 = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle_{\text{BCS}} = \langle \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle_{\text{BCS}} = \langle \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \rangle_{\text{BCS}}, \quad (6)$$

where the notation $\langle \dots \rangle_{\text{BCS}}$ means that the average value is taken in the BCS state (3). We rewrite this state using the parameters (5) in the usual form (up to a different sign convention)

$$|\psi_{\text{BCS}}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} (U_{\mathbf{k}} - V_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger) |0\rangle, \quad (7)$$

where $U_{\mathbf{k}}$ defined by

$$U_{\mathbf{k}} \equiv \sqrt{1 - |V_{\mathbf{k}}|^2} \quad (8)$$

is real and positive. The BCS ansatz breaks the U(1) symmetry and has a nonzero order parameter Δ ,

$$\Delta \equiv g_0 \langle \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow \rangle_{\text{BCS}} = -\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} U_{\mathbf{k}} \neq 0. \quad (9)$$

The BCS ground state $|\psi_{\text{BCS}}^0\rangle$ is obtained by minimizing the energy functional

$$E = \langle \hat{H} \rangle_{\text{BCS}} \quad (10)$$

treated as a *classical* Hamiltonian with respect to the complex parameters $V_{\mathbf{k}}$:

$$\left. \frac{\partial E}{\partial V_{\mathbf{k}}} \right|_{V_{\mathbf{k}}=V_{\mathbf{k}}^0} = \left. \frac{\partial E}{\partial V_{\mathbf{k}}^*} \right|_{V_{\mathbf{k}}=V_{\mathbf{k}}^0} = 0. \quad (11)$$

Explicitly

$$E = g_0 L^3 \rho_{\uparrow} \rho_{\downarrow} + \frac{L^3}{g_0} |\Delta|^2 + \sum_{\mathbf{k}} 2 \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu \right) |V_{\mathbf{k}}|^2, \quad (12)$$

where the average density of spin- σ particles,

$$\rho_{\sigma} \equiv \langle \hat{\psi}_{\sigma}^{\dagger} \hat{\psi}_{\sigma} \rangle_{\text{BCS}} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} |V_{\mathbf{k}}|^2, \quad (13)$$

is here spin independent. This minimization leads to

$$2\xi_{\mathbf{k}} U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 = \Delta_0 [(U_{\mathbf{k}}^0)^2 - (V_{\mathbf{k}}^0)^2], \quad (14)$$

whose solution with positive $V_{\mathbf{k}}^0$ is

$$V_{\mathbf{k}}^0 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right)}, \quad (15)$$

where $\xi_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu + g_0 \rho_{\uparrow}^0$ is the kinetic energy shifted by the chemical potential and corrected by the mean-field energy, and

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\xi_{\mathbf{k}}^2 + \Delta_0^2} \quad (16)$$

is the energy of the BCS pair-breaking excitations. The *gap* Δ_0 is the ground-state value of the order parameter (9),

$$\Delta_0 \equiv g_0 \langle \hat{\psi}_{\downarrow} \hat{\psi}_{\uparrow} \rangle_0, \quad (17)$$

where the notation $\langle \dots \rangle_0$ means that the average value is taken in the BCS ground state $|\psi_{\text{BCS}}^0\rangle$. The parameters of $|\psi_{\text{BCS}}^0\rangle$ depend on the unknowns Δ_0 and the average total density $\rho^0 = \rho_{\uparrow}^0 + \rho_{\downarrow}^0$, implicitly related to μ and to the scattering length a by

$$\rho^0 = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \left(1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \right), \quad (18)$$

$$-\frac{1}{g_0} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}}. \quad (19)$$

Equations (18) and (19) are obtained using the mean-particle-number equation

$$\bar{N} \equiv \langle \hat{N} \rangle_0 = 2 \sum_{\mathbf{k}} (V_{\mathbf{k}}^0)^2 \quad (20)$$

in addition to (2) and (15). Equation (19) is called the *gap equation*.

C. Time-dependent Bogoliubov–de Gennes approach:

Zero-frequency mode, anomalous mode, and phase dynamics

1. Linearized time-dependent Bogoliubov–de Gennes equations

We now consider a nonstatic BCS state $|\psi(t)\rangle = |\psi_{\text{BCS}}(t)\rangle$, of parameters

$$V_{\mathbf{k}}(t) = V_{\mathbf{k}}^0 + \delta V_{\mathbf{k}}(t). \quad (21)$$

The *time-dependent BCS equations* (or Bogoliubov–de Gennes equations) arise from the minimization of the action

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left\{ \frac{i\hbar}{2} \left(\langle \psi(t) | \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle - \text{c.c.} \right) - \langle \psi(t) | \hat{H} | \psi(t) \rangle \right\}. \quad (22)$$

Choosing $U_{\mathbf{k}}(t)$ as in Eq. (8) real at all times, this gives [37]

$$i\hbar \frac{dV_{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{\partial E}{\partial V_{\mathbf{k}}^*}, \quad i\hbar \frac{dV_{\mathbf{k}}^*}{dt} = -\frac{\partial E}{\partial V_{\mathbf{k}}}. \quad (23)$$

These equations can be linearized around the BCS ground state for small perturbations $\delta V_{\mathbf{k}}$. Introducing the operator \mathcal{L} such that

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta V_{\mathbf{k}} \\ \delta V_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \delta V_{\mathbf{k}} \\ \delta V_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}, \quad (24)$$

where \mathcal{D} contains all possible values of the single-particle wave vector, $\mathcal{D} = [-\frac{\pi}{b}, \frac{\pi}{b}]^3 \cap (\frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3)$, we can write \mathcal{L} in a block form using the derivatives of E taken in the ground BCS state:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^* & -A^* \end{pmatrix}, \quad A_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = \frac{\partial^2 E}{\partial V_{\mathbf{q}} \partial V_{\mathbf{k}}^*}, \quad B_{\mathbf{k}\mathbf{q}} = \frac{\partial^2 E}{\partial V_{\mathbf{q}}^* \partial V_{\mathbf{k}}}. \quad (25)$$

The matrix A is Hermitian and the matrix B is symmetric; we give their explicit expressions in Appendix A. The operator \mathcal{L} gives access to the time evolution of a given perturbation:

$$\begin{pmatrix} \delta V_{\mathbf{k}} \\ \delta V_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}(t_f) = \exp \left[\frac{-i\mathcal{L}(t_f - t_i)}{\hbar} \right] \begin{pmatrix} \delta V_{\mathbf{k}} \\ \delta V_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}(t_i) \quad (26)$$

and to the energy difference between the perturbed state and the BCS ground state up to second order in the perturbation:

$$E[(V_{\mathbf{k}}, V_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}] = E_0 + \frac{1}{2} (\delta V_{\mathbf{k}} \quad \delta V_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} \sigma_z \mathcal{L} \begin{pmatrix} \delta V_{\mathbf{k}} \\ \delta V_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}, \quad (27)$$

where $E_0 = \langle \hat{H} \rangle_0$ and $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$ are block Pauli matrices. Note that the matrix $\sigma_z \mathcal{L}$ is Hermitian by construction and it is non-negative since E_0 is the ground-state BCS energy. In full analogy with previous results for bosons [38], our choice of canonically conjugate variables leads to a highly symmetric linearized evolution operator. The *symplectic* symmetry

$$\sigma_z \mathcal{L} \sigma_z = \mathcal{L}^{\dagger} \quad (28)$$

ensures that the eigenvectors of \mathcal{L}^{\dagger} are equal to those of \mathcal{L} multiplied by σ_z . The *time-reversal* symmetry

$$\sigma_x \mathcal{L} \sigma_x = -\mathcal{L}^* \quad (29)$$

ensures that for each eigenvector (a, b) of \mathcal{L} with eigenvalue ϵ , (b^*, a^*) is also an eigenvector of \mathcal{L} with eigenvalue $-\epsilon^*$.

2. Zero-energy subspace

We concentrate here on the zero-energy subspace of \mathcal{L} where zero-temperature phase dynamics occurs.

a. Zero-energy mode. Due to the U(1) symmetry of the Hamiltonian, the mean energy of a BCS state does not depend on the phase of the parameter γ in Eq. (3), that is, it is invariant by the transformation

$$\gamma \rightarrow \gamma e^{iQ}, \quad V_{\mathbf{k}} \rightarrow V_{\mathbf{k}} e^{iQ}, \quad V_{\mathbf{k}}^* \rightarrow V_{\mathbf{k}}^* e^{-iQ}. \quad (30)$$

Consequently the classical Hamiltonian E (12) is not affected by a global phase change of the BCS ground-state parameters $V_{\mathbf{k}}^0, E[(V_{\mathbf{k}}^0 e^{iQ}, V_{\mathbf{k}}^0 e^{-iQ})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}] = E_0$. From (27) this implies that the perturbation linearized for $Q \ll 1$,

$$\vec{e}_n \equiv \begin{pmatrix} iV_{\mathbf{k}}^0 \\ -iV_{\mathbf{k}}^0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}, \quad (31)$$

is a zero-energy (null-energy) mode

$$\mathcal{L}\vec{e}_n = \vec{0}. \quad (32)$$

Alternatively we can consider the continuous family $Q \mapsto (V_{\mathbf{k}}^0 e^{iQ}, V_{\mathbf{k}}^0 e^{-iQ})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$. Each element of this family is a time-independent solution of (23). For Q infinitesimal, the difference with respect to the $(V_{\mathbf{k}}^0, V_{\mathbf{k}}^0)_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$ member of the family is then a zero-frequency solution of (24).

The vector (31) is equal to its time-reversal-symmetric $\vec{e}_n = \sigma_x \vec{e}_n^*$, and does not span the full zero-energy subspace. We will obtain the missing vector in the following section.

b. Anomalous mode. After phase translations, one naturally turns to mean-particle-number translations. By *adiabatically* varying the chemical potential μ of the gas (i.e., by changing the mean number of particles continuously following the BCS ground state), we will prove the existence of an *anomalous mode* with the properties

$$\mathcal{L}\vec{e}_a = -2i \frac{d\mu}{dN} \vec{e}_n, \quad (33)$$

$$\mathcal{L}^2 \vec{e}_a = \vec{0}. \quad (34)$$

Let us introduce $V_{\mathbf{k}}^0(\tilde{\mu}) \in \mathbb{R}^+$, the parameters of the ground-state BCS solution corresponding to a chemical potential $\tilde{\mu}$. Within the BCS ansatz, they minimize the mean value of $\hat{H} + (\mu - \tilde{\mu})\hat{N}$ with \hat{H} given by (1). We then consider the family of time-dependent BCS parameters

$$\tilde{\mu} \mapsto V_{\mathbf{k}}(\tilde{\mu}, t) \equiv V_{\mathbf{k}}^0(\tilde{\mu}) e^{-2i(\tilde{\mu} - \mu)t/\hbar}. \quad (35)$$

We will show later on that each element of this family is a solution of the time-dependent BCS equations (23) for a chemical potential μ , the phase factor in Eq. (35) precisely compensating the mismatch between the two chemical potentials μ and $\tilde{\mu}$. By linearizing (35) for a small value of $\tilde{\mu} - \mu$, we obtain the deviations

$$\begin{pmatrix} \delta V_{\mathbf{k}} \\ \delta V_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = (\tilde{\mu} - \mu) \left[-\frac{2t}{\hbar} \begin{pmatrix} iV_{\mathbf{k}}^0(\mu) \\ -iV_{\mathbf{k}}^0(\mu) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d}{d\mu} V_{\mathbf{k}}^0(\mu) \\ \frac{d}{d\mu} V_{\mathbf{k}}^0(\mu) \end{pmatrix} \right]_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}, \quad (36)$$

which must be a solution of the linearized time-dependent BCS equations (24). Using the expression (31) for the zero-energy mode, this explicitly gives the announced anomalous

mode (33)

$$\vec{e}_a = \frac{d\mu}{dN} \begin{pmatrix} \frac{d}{d\mu} V_{\mathbf{k}}^0 \\ \frac{d}{d\mu} V_{\mathbf{k}}^0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}. \quad (37)$$

Let us now show as promised that the family (35) is a solution of the time-dependent BCS equations (23) for a chemical potential μ . A first way is to remark that if $|\tilde{\psi}\rangle$ is a solution of the time-dependent Schrödinger equation of the Hamiltonian $\hat{H} + (\mu - \tilde{\mu})\hat{N}$, then $e^{-i(\tilde{\mu} - \mu)t/\hbar} |\tilde{\psi}\rangle$ is a solution of the time-dependent Schrödinger equation of the Hamiltonian \hat{H} . By the application of this unitary transformation to the ground-state BCS solution in the usual form (7) for a chemical potential $\tilde{\mu}$ and using

$$e^{-i(\tilde{\mu} - \mu)t/\hbar} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger e^{i(\tilde{\mu} - \mu)t/\hbar} = e^{-2i(\tilde{\mu} - \mu)t/\hbar} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger, \quad (38)$$

we get the announced result. Alternatively one can directly inject the form (35) into the time-dependent BCS equations (23), which also gives the announced result. Introducing \tilde{E} as the classical Hamiltonian for a chemical potential $\tilde{\mu}$, one indeed has from (12)

$$\begin{aligned} E[(V_{\mathbf{k}}(\tilde{\mu}, t), V_{\mathbf{k}}^*(\tilde{\mu}, t))_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}] \\ = \tilde{E}[(V_{\mathbf{k}}(\tilde{\mu}, t), V_{\mathbf{k}}^*(\tilde{\mu}, t))_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}] + 2(\tilde{\mu} - \mu) \sum_{\mathbf{k}} |V_{\mathbf{k}}(\tilde{\mu}, t)|^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Furthermore the derivatives $\partial \tilde{E} / \partial V_{\mathbf{k}}^*$ and $\partial \tilde{E} / \partial V_{\mathbf{k}}$ vanish when evaluated at the point $(V_{\mathbf{k}}(\tilde{\mu}, t), V_{\mathbf{k}}^*(\tilde{\mu}, t))_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$ since this point coincides with the ground-state point $(V_{\mathbf{k}}^0(\tilde{\mu}), V_{\mathbf{k}}^0(\tilde{\mu}))_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$ up to a global phase factor.

c. Dual vectors of \vec{e}_n and \vec{e}_a . An arbitrary fluctuation of components $\delta V_{\mathbf{k}}$ and $\delta V_{\mathbf{k}}^*$ can be expanded on the basis formed by the anomalous mode \vec{e}_a and the eigenvectors of \mathcal{L} including the zero-energy mode \vec{e}_n and the excited eigenmodes \vec{e}_λ . To obtain the coefficients of such an expansion, we introduce the dual basis (also called the adjoint basis) formed by \vec{d}_a, \vec{d}_n , and the duals of the excited modes \vec{d}_λ such that

$$\vec{d}_i^* \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \quad \text{where } i, j = n, a, \lambda. \quad (40)$$

We now calculate explicitly \vec{d}_n and \vec{d}_a using the symplectic symmetry (28). By taking the Hermitian conjugates of (32) and of (33) and using (28) we obtain $\forall \vec{x}$

$$(\sigma_z \vec{e}_n)^* \cdot \mathcal{L}\vec{x} = 0, \quad (41)$$

$$(\sigma_z \vec{e}_a)^* \cdot \mathcal{L}\vec{x} = 2i \frac{d\mu}{dN} (\sigma_z \vec{e}_n)^* \cdot \vec{x}. \quad (42)$$

This suggests that the dual vectors of \vec{e}_n and \vec{e}_a are obtained by the action of σ_z on \vec{e}_a and \vec{e}_n , respectively. Indeed, we obtain

$$\vec{d}_n = 2i \sigma_z \vec{e}_a = 2 \frac{d\mu}{dN} \begin{pmatrix} i \frac{d}{d\mu} V_{\mathbf{k}}^0 \\ -i \frac{d}{d\mu} V_{\mathbf{k}}^0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}, \quad (43)$$

$$\vec{d}_a = -2i \sigma_z \vec{e}_n = 2 \begin{pmatrix} V_{\mathbf{k}}^0 \\ V_{\mathbf{k}}^0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}. \quad (44)$$

To check that $\vec{d}_a^* \cdot \vec{e}_\lambda = 0$ we simply take $\vec{x} = \vec{e}_\lambda$ in Eq. (41). Further taking $\vec{x} = \vec{e}_\lambda$ in Eq. (42) gives $\vec{d}_n^* \cdot \vec{e}_\lambda = 0$. Taking $\vec{x} = \vec{e}_a$ in Eq. (41) and using (33) gives $\vec{d}_a^* \cdot \vec{e}_n = 0$. The last

orthogonality relation $\vec{d}_n^* \cdot \vec{e}_a = 0$ can be checked by direct substitution. Finally the normalization conditions $\vec{d}_a^* \cdot \vec{e}_a = \vec{d}_n^* \cdot \vec{e}_n = 1$ result from the relation

$$\sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}}^0 \frac{d}{d\mu} V_{\mathbf{k}}^0 = \frac{1}{4} \frac{d\bar{N}}{d\mu} \quad (45)$$

obtained from (20) by a derivation with respect to μ .

3. Phase variable and phase dynamics

We expand a classical fluctuation over the modes introduced in the previous subsection:

$$\begin{pmatrix} \delta V_{\mathbf{k}} \\ \delta V_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = P \vec{e}_a + Q \vec{e}_n + \sum_{\lambda} C_{\lambda} \vec{e}_{\lambda}. \quad (46)$$

The time-dependent coefficients P and Q of the anomalous and zero-energy modes are determined by projection upon their dual vectors:

$$P = 2 \sum_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}}^0 (\delta V_{\mathbf{k}} + \delta V_{\mathbf{k}}^*) = \delta N, \quad (47)$$

$$Q = -2i \frac{d\mu}{d\bar{N}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{d}{d\mu} V_{\mathbf{k}}^0 \right) (\delta V_{\mathbf{k}} - \delta V_{\mathbf{k}}^*), \quad (48)$$

and are real quantities. We interpret P as the *classical particle-number fluctuation*, from linearization of (13). To interpret Q we consider the infinitesimal phase translation

$$\gamma \rightarrow \gamma e^{i\delta\phi}, \quad \delta V_{\mathbf{k}} = i\delta\phi V_{\mathbf{k}}^0. \quad (49)$$

Inserting such a fluctuation in Eq. (48) and using (45) gives $Q = \delta\phi$. For reasons that will become clear in the next section, we call Q the *classical adiabatic phase*.

The two quantities P and Q are canonically conjugate classical variables. Defining the Poisson brackets as

$$\{X, Y\} = \frac{1}{i\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\partial X}{\partial(\delta V_{\mathbf{k}})} \frac{\partial Y}{\partial(\delta V_{\mathbf{k}}^*)} - \frac{\partial X}{\partial(\delta V_{\mathbf{k}}^*)} \frac{\partial Y}{\partial(\delta V_{\mathbf{k}})} \quad (50)$$

so that $\frac{d}{dt} X = \{X, E\}$, we obtain

$$\{Q, P\} = -\frac{2}{\hbar}. \quad (51)$$

Inserting the modal decomposition (46) in the quadratized Hamiltonian (27), we find that the P and Q variables appear only via a term proportional to P^2 :

$$E[(V_{\mathbf{k}}, V_{\mathbf{k}}^*)_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}] = E_0 + \frac{1}{2} \frac{d\mu}{d\bar{N}} P^2 + \dots, \quad (52)$$

where the ellipsis involves only the excited-mode amplitudes C_{λ} . This implies that P is a constant of motion and that Q has a ballistic trajectory:¹

$$\frac{d}{dt} P = \{P, E\} = 0 \quad (53)$$

$$\frac{d}{dt} Q = \{Q, E\} = -\frac{2}{\hbar} \frac{d\mu}{d\bar{N}} P \quad (54)$$

¹ P and Q have vanishing Poisson brackets with the excited-mode amplitudes C_{λ} as $\{P, C_{\lambda}\} = (2/\hbar) \vec{d}_{\lambda}^* \cdot \vec{e}_n = 0$ and $\{Q, C_{\lambda}\} = (-2/\hbar) \vec{d}_{\lambda}^* \cdot \vec{e}_a = 0$.

If $P = \delta N$ fluctuates from one realization to the other the slope of the classical phase evolution changes from shot to shot, and the overall phase distribution spreads out ballistically. For a classical distribution having zero first moments for P and Q one has

$$\langle Q \rangle_{\text{cl}}(t) = -\frac{2}{\hbar} \frac{d\mu}{d\bar{N}} \langle P \rangle_{\text{cl}} t = 0, \\ \langle [Q(t) - Q(0)]^2 \rangle_{\text{cl}} = \frac{4t^2}{\hbar^2} \left(\frac{d\mu}{d\bar{N}} \right)^2 \langle P^2 \rangle_{\text{cl}}.$$

If we choose our classical probability distribution to mimic quantum fluctuations in the ground state of the BCS theory, thus with $\langle P^2 \rangle_{\text{cl}} = \langle (\hat{N} - \bar{N})^2 \rangle_0$, we obtain from our classical approach a phase-blurring time scale

$$t_{\text{br}} = \hbar \left[\text{Var} \hat{N} \left(\frac{d\mu}{d\bar{N}} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (55)$$

D. Quantum approach: Adiabatic phase operator

In this section, we use a fully quantum approach to quantize the conjugate phase and number variables of the classical approach of the previous section. The quantum approach uses Anderson's random-phase approximation [36] treatment of the interaction term of the full Hamiltonian (1) to derive linearized equations of motion directly for the two-body operators, rather than for classical perturbations.

We introduce the quadratic operators

$$\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\mathbf{q}} = \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}, \quad \hat{n}_{\mathbf{k}\downarrow}^{\mathbf{q}} = \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}, \\ \hat{q}_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}} = \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}, \quad \hat{q}_{\mathbf{k}}^{\dagger} = \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^{\dagger}. \quad (56)$$

The equations of motion of these operators in the Heisenberg picture involve quartic terms, for example for $\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\mathbf{q}}$:

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\mathbf{q}} = [\hat{H}, \hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\mathbf{q}}] \\ = (\xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}}) \hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}^{\mathbf{q}} \\ + \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}', \mathbf{p}} (\hat{a}_{\mathbf{k}'\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}'+\mathbf{p}\downarrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}+\mathbf{p}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow} \\ - \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}+\mathbf{p}\downarrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}'+\mathbf{p}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}'\uparrow}), \quad (57)$$

where all the combinations of wave vectors have to be mapped back into the first Brillouin zone. To linearize these equations of motion, we consider a small region of the Hilbert space around the BCS ground state in which the action of the operators is only slightly different from multiplication by their BCS ground-state expectation values denoted as $\langle \dots \rangle_0$. These average values will then be taken as zeroth-order quantities (note that only the operators with $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ have a nonzero expectation value) from which the operators differ by a first-order infinitesimal quantity. This suggests writing an arbitrary quadratic operator $\hat{a}\hat{b}$ (where \hat{a} and \hat{b} are creation or annihilation operators) as

$$\hat{a}\hat{b} = \langle \hat{a}\hat{b} \rangle_0 + \delta(\hat{a}\hat{b}). \quad (58)$$

This prescription, however, is not sufficient. Indeed, a quartic operator $\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}$ can be reordered using anticommutation rules and one cannot pair the operators by inserting the first-order expansion (58) in a unique way. Instead, the RPA considers

that a product $\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}$ is of relevant order if one can form a $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ quadratic operator from at least two of the linear operators. Otherwise, the product will be regarded as second order and discarded. This procedure is equivalent to replacing the product using incomplete Wick contractions:

$$\begin{aligned} \hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d} &\rightarrow \hat{a}\hat{b}\langle\hat{c}\hat{d}\rangle_0 + \langle\hat{a}\hat{b}\rangle_0\hat{c}\hat{d} - \hat{a}\hat{c}\langle\hat{b}\hat{d}\rangle_0 - \langle\hat{a}\hat{c}\rangle_0\hat{b}\hat{d} \\ &\quad + \hat{a}\hat{d}\langle\hat{b}\hat{c}\rangle_0 + \langle\hat{a}\hat{d}\rangle_0\hat{b}\hat{c} - \langle\hat{a}\hat{b}\rangle_0\langle\hat{c}\hat{d}\rangle_0 \\ &\quad + \langle\hat{a}\hat{c}\rangle_0\langle\hat{b}\hat{d}\rangle_0 - \langle\hat{a}\hat{d}\rangle_0\langle\hat{b}\hat{c}\rangle_0. \end{aligned} \quad (59)$$

Note that the last three terms are included to ensure that the expectation value $\langle\hat{a}\hat{b}\hat{c}\hat{d}\rangle_0$ remains exact in this approximation. The simplification introduced by the RPA *decouples* the operators of different \mathbf{q} so that we are left with a set of linear differential equations for each value of \mathbf{q} . Furthermore, the phase dynamics we are interested in takes place in the $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ subspace where exists the anomalous mode due to the U(1) symmetry breaking, a subspace to which we now restrict our attention. We have then from (56) the simplifications $\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}^0 = \hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}, \hat{n}_{\mathbf{k}\downarrow}^0 = \hat{n}_{-\mathbf{k}\downarrow}$, and $\hat{d}_{\mathbf{k}}^0 = \hat{d}_{\mathbf{k}}^{\dagger}$. As a shorthand notation we use

$$\hat{d}_{\mathbf{k}} \equiv \hat{d}_{\mathbf{k}}^0 = \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}. \quad (60)$$

We also introduce as a more convenient combination of zero-mean variables:

$$\hat{y}_{\mathbf{k}} = \delta\hat{d}_{\mathbf{k}} - \delta\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \quad \hat{s}_{\mathbf{k}} = \delta\hat{d}_{\mathbf{k}} + \delta\hat{d}_{\mathbf{k}}^{\dagger}, \quad (61)$$

$$\hat{m}_{\mathbf{k}} = \delta\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow} + \delta\hat{n}_{-\mathbf{k}\downarrow}, \quad \hat{h}_{\mathbf{k}} = \delta\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow} - \delta\hat{n}_{-\mathbf{k}\downarrow}, \quad (62)$$

where the δ indicates the deviation of the operator with respect to its expectation value in the BCS ground state: $\delta\hat{x} \equiv \hat{x} - \langle\hat{x}\rangle_0$. From the linear equations of motion (not given here) we remark that two linear combinations of these four variables are in fact constants of motion:

$$\frac{d\hat{h}_{\mathbf{k}}}{dt} = 0, \quad (63)$$

$$\frac{d\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}}{dt} = 0 \quad \text{where} \quad \hat{\zeta}_{\mathbf{k}} = \hat{s}_{\mathbf{k}} + \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\Delta_0}\hat{m}_{\mathbf{k}}. \quad (64)$$

The quantity $\hat{h}_{\mathbf{k}}$ is indeed conserved when one creates or annihilates pairs of particles with opposite spin and zero total momentum. Remarkably, the Hermitian operator $\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}$ has zero mean and zero variance in the BCS ground state:

$$\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}|\psi_{\text{BCS}}^0\rangle = 0. \quad (65)$$

To derive (65) we expressed the various quantities in terms of $V_{\mathbf{k}}^0$, keeping in mind the relation (14):

$$\langle\hat{d}_{\mathbf{k}}\rangle_0 = -\frac{\Delta_0}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} = -U_{\mathbf{k}}^0V_{\mathbf{k}}^0, \quad (66)$$

$$2\langle\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}\rangle_0 = 1 - \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}} = 2(V_{\mathbf{k}}^0)^2. \quad (67)$$

We thus eliminate the redundant variable $\hat{s}_{\mathbf{k}}$ in terms of $\hat{m}_{\mathbf{k}}$ and $\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}$ to obtain the inhomogeneous linear system

$$i\hbar\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{m}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}} = \mathcal{L}_{\text{RPA}}\begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{m}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}} + \begin{pmatrix} \hat{S}_{\mathbf{k}} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}}. \quad (68)$$

The source term is

$$\hat{S}_{\mathbf{k}} = 2\xi_{\mathbf{k}}\hat{\zeta}_{\mathbf{k}} + \frac{g_0}{L^3}\frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\sum_{\mathbf{q}}\hat{\zeta}_{\mathbf{q}}. \quad (69)$$

Explicitly, the equations take the form

$$-i\hbar\frac{d\hat{y}_{\mathbf{k}}}{dt} = \frac{2\epsilon_{\mathbf{k}}^2}{\Delta_0}\hat{m}_{\mathbf{k}} + \frac{g_0}{L^3}\sum_{\mathbf{q}}\left(\frac{\xi_{\mathbf{k}}\xi_{\mathbf{q}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}\Delta_0} + \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)\hat{m}_{\mathbf{q}} - \hat{S}_{\mathbf{k}}, \quad (70)$$

$$-i\hbar\frac{d\hat{m}_{\mathbf{k}}}{dt} = 2\Delta_0\hat{y}_{\mathbf{k}} + \frac{g_0}{L^3}\frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\sum_{\mathbf{q}}\hat{y}_{\mathbf{q}}. \quad (71)$$

Direct spectral decomposition of \mathcal{L}_{RPA} yields the zero-energy mode

$$\vec{e}_n^{\text{RPA}} = \begin{pmatrix} 2i\langle\hat{d}_{\mathbf{k}}\rangle_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}} \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_{\text{RPA}}\vec{e}_n^{\text{RPA}} = \vec{0} \quad (72)$$

where we used (19) and (66), and the anomalous mode

$$\vec{e}_a^{\text{RPA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\frac{d}{d\bar{N}}\langle\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}\rangle_0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}} \quad \text{and} \quad \mathcal{L}_{\text{RPA}}\vec{e}_a^{\text{RPA}} = -2i\frac{d\mu}{d\bar{N}}\vec{e}_n^{\text{RPA}}, \quad (73)$$

where we used the two intermediate relations

$$\begin{aligned} 2\frac{d}{d\bar{N}}\langle\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}\rangle_0 &= \frac{d\mu}{d\bar{N}}\frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3}\left[\xi_{\mathbf{k}}\frac{d\Delta_0}{d\mu} + \Delta_0\left(1 - \frac{g_0}{2L^3}\frac{d\bar{N}}{d\mu}\right)\right], \\ \sum_{\mathbf{q}}\xi_{\mathbf{q}}\frac{d}{d\bar{N}}\langle\hat{n}_{\mathbf{q}\uparrow}\rangle_0 &= -\frac{d\mu}{d\bar{N}}\frac{d\Delta_0}{d\mu}\frac{\Delta_0L^3}{g_0}, \end{aligned} \quad (74)$$

respectively obtained by taking the derivatives of (15) and of the ground-state version of (12), with respect to \bar{N} or μ , and further using (45) and the thermodynamic relation $-\bar{N} = \frac{dE_0}{d\mu}$.

Note that we normalized \vec{e}_a^{RPA} so that the second equality in Eq. (73) is identical to that of the semiclassical theory (33).

\mathcal{L}_{RPA} does not show the symplectic symmetry (28), hence the necessity to perform a spectral analysis of $\mathcal{L}_{\text{RPA}}^{\dagger}$ to find the dual vectors defined as in Eq. (40). We obtain [45] for the dual of the zero-energy mode

$$\vec{d}_n^{\text{RPA}} = \begin{pmatrix} i\left(\frac{d}{d\bar{N}}\langle\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}\rangle_0\right)/\langle\hat{d}_{\mathbf{k}}\rangle_0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}} \quad (75)$$

and for the dual of the anomalous mode

$$\vec{d}_a^{\text{RPA}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathbf{k}\in\mathcal{D}}. \quad (76)$$

Remarkably the matrix \mathcal{L}_{RPA} (68) and the corresponding Bogoliubov–de Gennes matrix \mathcal{L} (24) are related through a change of basis:

$$\mathcal{L}_{\text{RPA}} = \Lambda\mathcal{L}\Lambda^{-1} \quad (77)$$

and so are their modes

$$\begin{pmatrix} y_{\mathbf{k}} \\ m_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \Lambda_{\mathbf{k}}\begin{pmatrix} \delta V_{\mathbf{k}} \\ \delta V_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} y_{\mathbf{k}} \\ m_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_d = (\Lambda_{\mathbf{k}}^{\dagger})^{-1}\begin{pmatrix} \delta V_{\mathbf{k}} \\ \delta V_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix}_d, \quad (78)$$

where the subscript d in $(\)_d$ refers to the dual vectors. Here $\Lambda_{\mathbf{k}}$ is a 2×2 matrix

$$\Lambda_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} -U_{\mathbf{k}}^0 & U_{\mathbf{k}}^0 \\ 2V_{\mathbf{k}}^0 & 2V_{\mathbf{k}}^0 \end{pmatrix} \quad (79)$$

and Λ is a block-diagonal matrix with matrices $\Lambda_{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k} \in \mathcal{D}$, on the diagonal. To show this correspondence, we think of the *classical* fluctuations $\delta\langle\hat{d}_{\mathbf{k}}\rangle = \langle\hat{d}_{\mathbf{k}}\rangle - \langle\hat{d}_{\mathbf{k}}\rangle_0$ and $\delta\langle\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}\rangle = \langle\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}\rangle - \langle\hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow}\rangle_0$ [where the expectation value $\langle\cdots\rangle$ is taken in a

BCS state of the form (7) slightly perturbed away from the BCS ground state] as a particular case of the quantum fluctuations we consider here. In the state (7) $\langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle = -U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}}$ according to (9), and $\langle \hat{n}_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle = V_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}}^*$. Linearizing these relations around the BCS ground state one gets

$$\hat{y}_{\mathbf{k}} \leftrightarrow -U_{\mathbf{k}}^0 (\delta V_{\mathbf{k}} - \delta V_{\mathbf{k}}^*), \quad (80)$$

$$\hat{m}_{\mathbf{k}} \leftrightarrow 2V_{\mathbf{k}}^0 (\delta V_{\mathbf{k}} + \delta V_{\mathbf{k}}^*), \quad (81)$$

which explains the value of the matrix $\Lambda_{\mathbf{k}}$. One has also the correspondence $\hat{h}_{\mathbf{k}} \leftrightarrow 0$ and $\hat{\zeta}_{\mathbf{k}} \leftrightarrow 0$. The equivalence (77) between the matrices is shown in Appendix A.

In the RPA quantum theory, \hat{P} and \hat{Q} are now the amplitudes of the vector $(\hat{y}_{\mathbf{k}} \hat{m}_{\mathbf{k}})_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}}$ on the anomalous and zero-energy modes, respectively:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_{\mathbf{k}} \\ \hat{m}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}_{\mathbf{k} \in \mathcal{D}} = \hat{Q} \hat{e}_n^{\text{RPA}} + \hat{P} \hat{e}_a^{\text{RPA}} + \dots, \quad (82)$$

where we have written explicitly the expansion within the zero-energy subspace only. Using the expression of the dual vectors (75) and (76) we obtain

$$\hat{P} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{m}_{\mathbf{k}} = \delta \hat{N}, \quad (83)$$

$$\hat{Q} = 2i \frac{d\mu}{d\bar{N}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{dV_{\mathbf{k}}^0}{U_{\mathbf{k}}^0} (\delta \hat{d}_{\mathbf{k}} - \delta \hat{d}_{\mathbf{k}}^\dagger). \quad (84)$$

The resulting equations of motion are

$$\frac{d\hat{P}}{dt} = 0, \quad (85)$$

$$\frac{d\hat{Q}}{dt} = -\frac{2}{\hbar} \frac{d\mu}{d\bar{N}} \hat{P} + \hat{Z}. \quad (86)$$

The difference from the corresponding linearized time-dependent Bogoliubov–de Gennes equations (53) and (54) is due to the operator $\hat{Z} = (2/\hbar) \sum_{\mathbf{k}} \frac{dV_{\mathbf{k}}^0}{d\bar{N}} \hat{S}_{\mathbf{k}}/U_{\mathbf{k}}^0$ that originates from the source term in Eq. (70). Its mean and variance in the BCS ground state are, however, zero,

$$\hat{Z} |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle = 0, \quad (87)$$

so that this operator will not contribute to the collapse of the order parameter in the thermodynamic limit as we will see.

E. Collapse of the order parameter

We can now calculate the evolution of the order parameter for a system initially prepared in the BCS ground state. In the Heisenberg picture,

$$\Delta(t) \equiv g_0 \langle \hat{\psi}_{\downarrow}(t) \hat{\psi}_{\uparrow}(t) \rangle_0 = \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \langle \hat{d}_{\mathbf{k}}(t) \rangle_0. \quad (88)$$

From (82) and using (8), (14), (66), and (67), we obtain the evolution of $\hat{d}_{\mathbf{k}}$ in the zero-energy subspace:

$$\hat{d}_{\mathbf{k}}(t) = [1 + i\hat{Q}(t)] \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 + \delta \hat{N} \frac{d}{d\bar{N}} \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0 + \frac{1}{2} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}}(0) + \dots. \quad (89)$$

Should we calculate the order parameter directly from this expression we would obtain a constant value because all the operators arising from the linearized equations of motion have

a zero mean value. To overcome this difficulty, we recall that, for an arbitrary (i.e., not necessarily infinitesimal) phase fluctuation Q , the field is modified as

$$V_{\mathbf{k}} = e^{iQ} V_{\mathbf{k}}^0, \quad \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle = e^{iQ} \langle \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle_0. \quad (90)$$

The $1 + i\hat{Q}$ terms appearing in our decomposition must therefore be the linearization of the operator $e^{i\hat{Q}}$ contained in $\hat{d}_{\mathbf{k}}(t)$. Having recovered this factor, the order parameter reads

$$\Delta(t) = \Delta_0 \langle e^{i\hat{Q}(t)} \rangle_0. \quad (91)$$

Using $\hat{Q}(t) = \hat{Q}(0) - 2 \frac{d\mu}{d\bar{N}} (\hat{N} - \bar{N}) \frac{t}{\hbar}$ and going to the thermodynamic limit where one can neglect the contributions of \hat{Z} and of the fluctuations of the initial phase $\hat{Q}(0)$, we obtain

$$\Delta(t) = \Delta_0 e^{-2t^2/t_{\text{br}}^2}, \quad (92)$$

where the phase-blurring time t_{br} is given by (55). We give the details of this calculation in Appendix B.

F. Application: Blurring time in the BEC-BCS crossover

The mean-field BCS theory gives analytical expressions for the thermodynamical quantities in the BEC-BCS crossover [46–48] in terms of special functions [49]. We use them here to show some numerical results for the coherence time of a BCS ground state, paying special attention to the so-called Bose-Einstein condensate (BEC) and BCS limits.

We imagine that we have initially prepared a BCS ground state so that the variance of the particle number can be expressed as a sum over \mathbf{k} using (66):

$$\text{Var} \hat{N} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0^2}{\epsilon_{\mathbf{k}}^2}. \quad (93)$$

$\text{Var} \hat{N}$ is an explicit function of μ and Δ_0 . Using the BCS equations (18) and (19) we express it in terms of the Fermi wave number $k_F = (6\pi^2 \rho_\sigma^0)^{1/3}$ and of the scattering length a as we change the sum in Eq. (93) into an integral in the thermodynamic limit and as we take the limit of a vanishing lattice step b . The result is shown in Fig. 1. In the $k_F a \rightarrow 0^-$

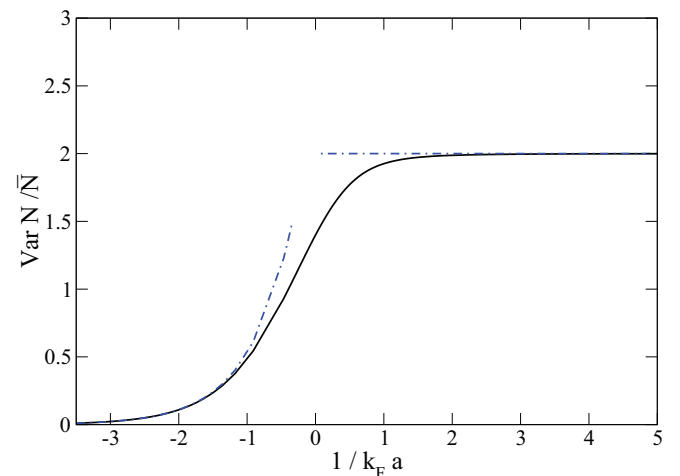


FIG. 1. (Color online) Variance of the total particle number \hat{N} in the BCS ground state (solid line). The dash-dotted blue lines are the asymptotic behaviors in the BEC and BCS limits.

BCS limit, the variance is proportional to the gap and thus tends exponentially to zero:

$$\text{Var}\hat{N} \underset{k_F a \rightarrow 0^-}{\sim} \frac{3\pi}{4} \frac{\bar{N}}{\epsilon_F} \Delta_0 = \frac{3\pi \bar{N}}{4} 8e^{-2} e^{-\pi/2k_F|a|}, \quad (94)$$

where $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / (2m)$ is the Fermi energy. In the $k_F a \rightarrow 0^+$ BEC limit, the BCS theory correctly predicts the Poissonian variance of an ideal gas of composite bosons, $\text{Var}(\hat{N}/2) = \bar{N}/2$.

The derivative $d\mu/d\bar{N}$ is the variation with \bar{N} of the energy cost of adding an extra particle to the gas when \bar{N} are already present on average. For a BCS state, it can be obtained by taking the derivative of the mean-density equation (18) with respect to μ . When $b \rightarrow 0$, the coupling constant $g_0 \rightarrow 0$ and

$$\frac{d\mu}{d\bar{N}} = \frac{\Delta_0 \Theta}{\Theta^2 + X^2}, \quad (95)$$

where we have defined the quantities

$$\Theta = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0^3}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3}, \quad X = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0^2 \xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}^3}, \quad (96)$$

related to Δ_0 by

$$\frac{d\Delta_0}{d\mu} = \frac{X}{\Theta} \quad (97)$$

as can be obtained by taking the derivative of (19) with respect to μ . The behavior of $d\mu/d\bar{N}$ is shown in Fig. 2 (see also [50]). Since adding an extra fermion to a Fermi sea costs an energy ϵ_F , μ should tend to ϵ_F and $d\mu/d\bar{N}$ to $d\epsilon_F/d\bar{N} = (2/3)\epsilon_F/\bar{N}$ when $k_F a \rightarrow 0^-$, as is correctly reproduced by the BCS approximation. In the BEC limit, the approximation predicts for μ

$$\mu \underset{k_F a \rightarrow 0^+}{=} -\frac{\epsilon_F}{(k_F a)^2} + \frac{\epsilon_F}{3\pi} k_F a_{\text{mol}} + o(k_F a), \quad (98)$$

which is the mean-field chemical potential of a gas of dimers with binding energy \hbar^2/ma^2 and dimer-dimer scattering length

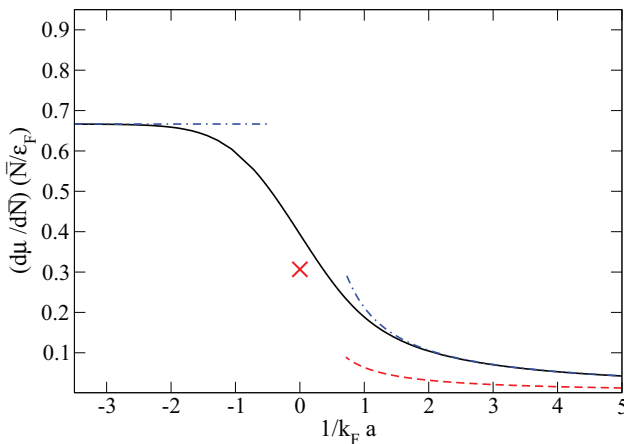


FIG. 2. (Color online) $d\mu/d\bar{N}$ in the BCS ground state. The full line is the BCS mean-field approximation; the dash-dotted blue lines show the asymptotic behaviors. The dashed red line is the exact (beyond BCS theory) asymptotic behavior on the BEC side and the red cross is the value at the unitary limit $k_F|a| = \infty$ deduced from the value of the universal parameter ξ in the equation of state [23].

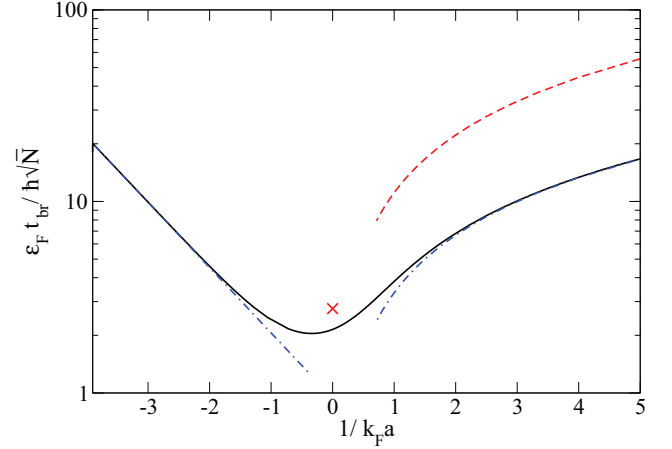


FIG. 3. (Color online) Phase-blurring time t_{br} in the BCS ground state (solid line). The dash-dotted blue lines show the asymptotic behaviors. The dashed red line is the exact asymptotic behavior and the red cross is the expected value for $k_F|a| = \infty$. In all cases we take $\text{Var}\hat{N}$ as given by the BCS ground state.

a_{mol} . Then for $d\mu/d\bar{N}$

$$d\mu/d\bar{N} \underset{k_F a \rightarrow 0^+}{=} \frac{\epsilon_F}{3\pi \bar{N}} k_F a_{\text{mol}} + o(k_F a). \quad (99)$$

The value of the dimer-dimer scattering length predicted by the BCS theory, $a_{\text{mol}} = 2a$ [51], is, however, quantitatively incorrect. The exact value $a_{\text{mol}} = 0.6a$ obtained in Refs. [52,53] is used to plot the dashed red line of Fig. 2.

The blurring time is shown in Fig. 3. It tends to infinity in both BEC and BCS limits, but not for the same reasons. In the BEC limit, as it is the case in bosonic phase dynamics, the blurring time diverges because the nonlinearity of the Hamiltonian introduced by the $d\mu/d\bar{N}$ factor vanishes:

$$t_{\text{br}}/\hbar \underset{k_F a \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{3\pi\sqrt{\bar{N}}}{\sqrt{2}\epsilon_F k_F a_{\text{mol}}}. \quad (100)$$

Again the exact value $a_{\text{mol}} = 0.6a$ is used to plot the dashed red line. In the BCS limit however, the divergence is due to the fact that the initial variance $\text{Var}\hat{N}$ tends to zero as the BCS ansatz converges to the Fermi sea of the ideal gas:

$$t_{\text{br}}/\hbar \underset{k_F a \rightarrow 0^-}{\sim} \left(\frac{3e^2}{8\pi}\right)^{1/2} \frac{\sqrt{\bar{N}}}{\epsilon_F} e^{+\pi/4k_F|a|}. \quad (101)$$

In the whole interaction range, the blurring time is proportional to $\sqrt{\bar{N}}$ and diverges in the thermodynamic limit as expected. We emphasize, however, that the particle-number variance of the $U(1)$ -symmetry-breaking BCS state does not have in fact any physical meaning [54]. We use it here as an illustration of our results. In practice the variance of \hat{N} , and hence the N dependence of the blurring time, will depend on the details of the realization of the interference experiment (see Sec. V).

III. WHAT THE ADIABATIC PHASE OPERATOR REALLY IS

Surprisingly, the phase operator \hat{Q} that appears in our dynamical study is *not* the phase of the condensate of pairs, $\hat{\theta}_0$, that we introduce in this section.

1. Phase of the condensate

To define the phase operator of the condensate, we assume that the state of the gas is such that one and only one mode, denoted $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$, of the two-body density matrix is macroscopically populated. This mode is defined by the eigenvalue problem (see Sec. 2.4 in Ref. [55])

$$b^6 \sum_{\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2} \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) \phi(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = \bar{N}_0 \phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (102)$$

where ρ_2 is the opposite-spin two-body density matrix in real space,

$$\rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) = \langle \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}'_1) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}'_2) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) \rangle. \quad (103)$$

Here ϕ is the *condensate wave function* and \bar{N}_0 , which scales as N , is the *number of condensed pairs*.

This is indeed the case of the BCS ground state. The density matrix computed using Wick contractions contains two nonzero terms:

$$\begin{aligned} \rho_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) &= \langle \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}'_1) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}'_2) \rangle_0 \langle \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) \rangle_0 \\ &\quad + \langle \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}'_1) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1) \rangle_0 \langle \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}'_2) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \rangle_0. \end{aligned} \quad (104)$$

The second term involves functions of $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1$ and $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2$ which tend to zero on typical scales given by the Fermi length k_F^{-1} or the pair size $\hbar^2 k_F / m \Delta_0$. In the thermodynamic limit, keeping only the long-range (LR) part, we obtain a factorized density matrix:

$$\begin{aligned} \rho_2^{\text{LR}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2) &= \frac{1}{L^6} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{\Delta_0^2}{4\epsilon_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}'}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} e^{i\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)} \\ &= \bar{N}_0 \phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \phi^*(\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2). \end{aligned} \quad (105)$$

The only populated eigenvector of this matrix, here normalized to unity, does not depend on the center-of-mass coordinates:

$$\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{\bar{N}_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}. \quad (106)$$

Even though we deal with a homogeneous system, this wave function depends (via $\epsilon_{\mathbf{k}}$) on the total number of particles in the system. The corresponding number of condensed particles is

$$\bar{N}_0 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0^2}{4\epsilon_{\mathbf{k}}^2}. \quad (107)$$

Remarkably the condensed fraction $2\bar{N}_0/\bar{N}$ is equal to the quantity $\text{Var}\hat{N}/2\bar{N}$ already shown in Fig. 1, as is apparent from Eq. (93). In the ground state \bar{N}_0/\bar{N} has a fixed value for a given interaction strength $k_F a$. Changing this ratio by adding new particles to the condensate will excite the system. In the BEC limit all the composite bosons are condensed, whereas in the BCS limit the number of condensed Cooper pairs goes to zero as $\Delta_0 \rightarrow 0$ and the state of the system approaches the Fermi sea.

The amplitude of the field of pairs on the condensate mode is obtained by projection onto the condensate wave function:

$$\hat{a}_0 \equiv b^6 \sum_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2} \phi^*(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_1), \quad (108)$$

and the *phase of the condensate* is the phase of this amplitude,

$$e^{-i\hat{\theta}_0} = \frac{1}{\sqrt{\hat{N}_0}} \hat{a}_0^\dagger, \quad (109)$$

where $\hat{N}_0 = \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0$ and $\hat{\theta}_0$ is Hermitian. In the BEC limit, \hat{a}_0 obeys bosonic commutation relations and the phase operator is well defined if we neglect border effects for an empty condensate mode [56]. It then generates translations of the number of condensed dimers:

$$\langle e^{i\delta N_0 \hat{\theta}_0} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 e^{-i\delta N_0 \hat{\theta}_0} \rangle = \bar{N}_0 + \delta N_0. \quad (110)$$

Away from the BEC limit, \hat{a}_0 is not a bosonic operator and the translation (110) does not hold.² In the BCS approximation the phase can be expressed analytically:

$$e^{-i\hat{\theta}_0} = \frac{1}{2\sqrt{\bar{N}_0 \hat{N}_0}} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger. \quad (111)$$

If we linearize (111), close to the BCS ground state, we obtain an expression with a structure similar to (84):

$$\hat{\theta}_0 = \frac{i}{4\bar{N}_0} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} (\delta \hat{a}_{\mathbf{k}} - \delta \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger) \quad (112)$$

but the coefficients on each mode of the wave vector \mathbf{k} are different so that $\hat{\theta}_0$ is not in general equal to \hat{Q} .

We note that the variance of $\hat{\theta}_0$ (at time $t = 0$) has the property

$$\text{Var} \hat{\theta}_0(0) \text{Var} \hat{N} = 1. \quad (113)$$

In Fig. 4 we show, as a function of $1/k_F a$, $\text{Var}\hat{Q}(0)\text{Var}\hat{N}$ and $\text{Var}\hat{\theta}_0(0)\text{Var}\hat{N}$, the latter being identically equal to 1 (113) and the former being larger than 1. The value of $\text{Var}\hat{Q}(0)$ is given in Eq. (B5). The variances of the two phases coincide only in the BEC limit.

2. The adiabatic phase shifts the number of particles in the ground state

To explain the difference between \hat{Q} and $\hat{\theta}_0$, we study the action of $e^{i\hat{Q}}$ on the BCS ground state. Using the

²This last remark raises the question of the validity of Eq. (109). From the alleged unitarity of $e^{-i\hat{\theta}_0}$, one expects

$$\hat{a}_0 \frac{1}{\bar{N}_0} \hat{a}_0^\dagger = \frac{1}{\sqrt{\hat{N}_0}} \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_0 \frac{1}{\sqrt{\hat{N}_0}} = 1.$$

While the second equality is obvious, to obtain the first one, one can use the relation

$$\left(1 + \frac{1}{\bar{N}_0} [\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger]\right) \hat{a}_0 \frac{1}{\bar{N}_0} \hat{a}_0^\dagger = \left(1 + \frac{1}{\bar{N}_0} [\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger]\right)$$

which can be checked by straightforward expansion of the commutators. In a small neighborhood of the BCS ground state, one can show that $[\hat{a}_0, \hat{a}_0^\dagger] = O(1)$, so that in the large- N_0 limit the operator in parentheses is invertible and can be simplified.

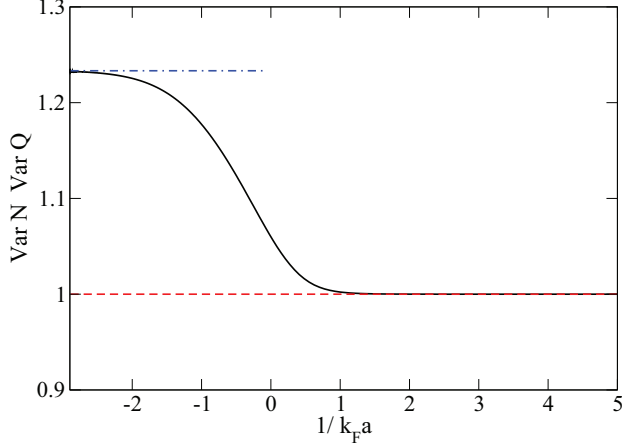


FIG. 4. (Color online) Product of the variances of the phases with the variance of the number of particles at time $t = 0$ for a system in the BCS ground state. The black solid line shows $\text{Var}\hat{Q}(0)\text{Var}\hat{N}$, the dashed red line $\text{Var}\hat{\theta}_0(0)\text{Var}\hat{N}$, and the blue dash-dotted line is the BCS limit of $\text{Var}\hat{Q}(0)\text{Var}\hat{N}$. The expression for $\text{Var}\hat{Q}(0)$ is given by (B5) and the one for $\text{Var}\hat{N}$ by Eq. (93).

expression (84) we write

$$e^{i\delta N\hat{Q}} = \prod_{\mathbf{k}} \exp\left(-\frac{2\delta N \frac{d}{dN} V_{\mathbf{k}}^0}{U_{\mathbf{k}}^0} \hat{y}_{\mathbf{k}}\right) \approx_{\delta N \ll \bar{N}} \prod_{\mathbf{k}} \left(1 - \frac{2\delta N \frac{d}{dN} V_{\mathbf{k}}^0}{U_{\mathbf{k}}^0} \hat{y}_{\mathbf{k}}\right). \quad (114)$$

Then, acting on the BCS ground state, we obtain

$$\begin{aligned} & \prod_{\mathbf{k}} \left(1 - \frac{2 \frac{d}{dN} V_{\mathbf{k}}^0}{U_{\mathbf{k}}^0} \hat{y}_{\mathbf{k}}\right) |\psi_{\text{BCS}}^0\rangle \\ &= \prod_{\mathbf{k}} \left[\left(U_{\mathbf{k}}^0 - 2\delta N \frac{d}{dN} U_{\mathbf{k}}^0 \right) \right. \\ & \quad \left. - \left(V_{\mathbf{k}} - 2\delta N \frac{d}{dN} V_{\mathbf{k}}^0 \right) \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger \right] |0\rangle \end{aligned} \quad (115)$$

and hence the property

$$e^{i\delta N\hat{Q}} |\psi_{\text{BCS}}^0(\bar{N})\rangle = |\psi_{\text{BCS}}^0(\bar{N} - 2\delta N)\rangle. \quad (116)$$

\hat{Q} is then the generator of *adiabatic* translations of the number of pairs in the ground state. In the BEC limit Pauli blocking plays no role and the ground state is a pure condensate of dimers, $\bar{N}_0 = \bar{N}/2$. We are then not surprised that translating the ground state and translating the number of condensed particles are strictly equivalent:

$$\hat{Q} \xrightarrow{k_F a \rightarrow 0^+} \hat{\theta}_0, \quad (117)$$

as we have checked explicitly. In other regimes, Pauli blocking cannot be neglected. Adding a new Cooper pair in the ground state thus requires updating the wave function ϕ . \hat{Q} does this updating whereas $\hat{\theta}_0$ creates excitations out of the BCS ground state.

Using the RPA equation (70) we can evaluate the time derivative of $\hat{\theta}_0$. For simplicity we give the results only in the

zero-lattice-spacing limit (more details are given Appendix D):

$$\frac{d\hat{\theta}_0}{dt} \xrightarrow{b \rightarrow 0} -\frac{1}{2\hbar\bar{N}_0} \sum_{\mathbf{k}} \left[\hat{m}_{\mathbf{k}}(\epsilon_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}}) - \hat{S}_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right], \quad (118)$$

where the contribution involving $\hat{m}_{\mathbf{k}}$ is not proportional to \hat{P} except in the BEC limit. $\hat{\theta}_0$ thus has a projection on the excited modes of the RPA equations. However, we argue that the long-time dynamics of the two phases is the same. We expand $\hat{y}_{\mathbf{k}}$ over the eigenmodes of \mathcal{L} using (89) including the projection $\hat{y}_{\mathbf{k}}^{\text{exc}}$ of $\hat{y}_{\mathbf{k}}$ over the excited modes of \mathcal{L} :

$$\hat{y}_{\mathbf{k}} = 2i\hat{Q}(\hat{d}_{\mathbf{k}})_0 + \hat{y}_{\mathbf{k}}^{\text{exc}}. \quad (119)$$

Inserting this expression in Eq. (112) and using (66), we find, remarkably,

$$\hat{\theta}_0 = \hat{Q} + \frac{i}{4\bar{N}_0} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0}{\epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{y}_{\mathbf{k}}^{\text{exc}}. \quad (120)$$

At long times, the second term on the right-hand side of (120), which is a sum of oscillating terms, is negligible with respect to the first term, which is linear in time according to (86).

3. The bosonic case reconsidered

We show here that even for bosons, the adiabatic phase and the phase of the condensate do not coincide if the condensate wave function depends on the particle number as, for example, in the trapped case.

a. Eigenmodes of the linearized equations. The adiabatic phase \hat{Q}^B naturally appears in the dynamics when the number of particles is not fixed. To set a frame, we consider the symmetry-breaking description in Sec. V of Ref. [38]. The linearized dynamics is ruled by the operator \mathcal{L}_{GP} obtained by linearization of the Gross-Pitaevskii equation:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta\hat{\psi} \\ \delta\hat{\psi}^\dagger \end{pmatrix} = \mathcal{L}_{\text{GP}} \begin{pmatrix} \delta\hat{\psi} \\ \delta\hat{\psi}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (121)$$

The field fluctuations of the bosonic field operator are $\delta\hat{\psi} = \hat{\psi} - \Psi_0$ where we introduced the ground-state order parameter $\Psi_0 = \langle \hat{\psi} \rangle_0$ taken to be the positive solution of the Gross-Pitaevskii equation,

$$(h_0 - \mu + g_0\Psi_0^2)\Psi_0 = 0, \quad (122)$$

and

$$\mathcal{L}_{\text{GP}} = \begin{pmatrix} h_0 + 2g_0\Psi_0^2 - \mu & g_0\Psi_0^2 \\ -g_0\Psi_0^2 & -(h_0 + 2g_0\Psi_0^2 - \mu) \end{pmatrix}. \quad (123)$$

Here h_0 is the one-body Hamiltonian including the kinetic energy and trapping potential. In addition to the usual Bogoliubov modes, of positive energy ϵ_λ^B and modal functions $U_\lambda^B(\mathbf{r})$ and $V_\lambda^B(\mathbf{r})$, such that

$$\mathcal{L}_{\text{GP}} \begin{pmatrix} U_\lambda^B \\ V_\lambda^B \end{pmatrix} = \epsilon_\lambda^B \begin{pmatrix} U_\lambda^B \\ V_\lambda^B \end{pmatrix} \quad (124)$$

with $\sum_{\mathbf{r}} b^3 [|U_{\lambda}^B(\mathbf{r})|^2 - |V_{\lambda}^B(\mathbf{r})|^2] = 1$, \mathcal{L}_{GP} has a zero-energy and an anomalous mode. With similar notations to those of Sec. II,³

$$\bar{e}_n^B = \begin{pmatrix} i\Psi_0 \\ -i\Psi_0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \bar{e}_a^B = \begin{pmatrix} \frac{d}{dN}\Psi_0 \\ \frac{d}{dN}\Psi_0 \end{pmatrix}, \quad (125)$$

$$\bar{d}_n^B = \begin{pmatrix} i\frac{d}{dN}\Psi_0 \\ -i\frac{d}{dN}\Psi_0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \bar{d}_a^B = \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_0 \end{pmatrix}, \quad (126)$$

where $\Psi_0 = \sqrt{N}\phi_0$ is the order parameter and ϕ_0 is the condensate wave function. One has

$$\mathcal{L}_{\text{GP}} \bar{e}_n^B = \bar{0}, \quad (127)$$

$$\mathcal{L}_{\text{GP}} \bar{e}_a^B = -i\frac{d\mu}{dN} \bar{e}_n^B. \quad (128)$$

One then obtains the decomposition of unity [38]

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ -\Psi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{dN}\Psi_0 & -\frac{d}{dN}\Psi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{d}{dN}\Psi_0 \\ \frac{d}{dN}\Psi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 & \Psi_0 \end{pmatrix} \\ &+ \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} U_{\lambda}^B \\ V_{\lambda}^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{\lambda}^{B*} & -V_{\lambda}^{B*} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{\lambda}^{B*} \\ U_{\lambda}^{B*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -V_{\lambda}^B & U_{\lambda}^B \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (129)$$

b. The adiabatic phase. The adiabatic phase \hat{Q}^B and all the other operators that have a simple linearized dynamics are obtained by projecting the vector of field fluctuations over the modes discussed above, using their dual vectors given in Eq. (129):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta\hat{\psi} \\ \delta\hat{\psi}^{\dagger} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} i\Psi_0 \\ -i\Psi_0 \end{pmatrix} \hat{Q}^B + \begin{pmatrix} \frac{d}{dN}\Psi_0 \\ \frac{d}{dN}\Psi_0 \end{pmatrix} \hat{P}^B \\ &+ \sum_{\lambda} \begin{pmatrix} U_{\lambda}^B \\ V_{\lambda}^B \end{pmatrix} \hat{B}_{\lambda} + \begin{pmatrix} V_{\lambda}^{B*} \\ U_{\lambda}^{B*} \end{pmatrix} \hat{B}_{\lambda}^{\dagger} \end{aligned} \quad (130)$$

with the operator-valued coefficients

$$\hat{Q}^B = -i \sum_{\mathbf{r}} b^3 \frac{d}{dN} \Psi_0(\mathbf{r}) [\delta\hat{\psi}(\mathbf{r}) - \delta\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r})], \quad (131)$$

$$\hat{P}^B = \sum_{\mathbf{r}} b^3 \Psi_0(\mathbf{r}) [\delta\hat{\psi}(\mathbf{r}) + \delta\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r})] = \delta\hat{N}, \quad (132)$$

$$\hat{B}_{\lambda} = \sum_{\mathbf{r}} b^3 [U_{\lambda}^{B*}(\mathbf{r}) \delta\hat{\psi}(\mathbf{r}) - V_{\lambda}^{B*}(\mathbf{r}) \delta\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r})]. \quad (133)$$

From (121) and (130) we easily get

$$\frac{d}{dt} \hat{Q}^B = -\frac{1}{\hbar} \frac{d\mu}{dN} \hat{P}^B, \quad \frac{d}{dt} \hat{P}^B = 0. \quad (134)$$

As in the fermionic case one can check that \hat{Q}^B is a generator of adiabatic translations of the number of particles

$$e^{i\delta N \hat{Q}^B} |\alpha(\bar{N})\rangle \underset{\delta N \ll \bar{N}}{\simeq} |\alpha(\bar{N} - \delta N)\rangle, \quad (135)$$

where $|\alpha(\bar{N})\rangle$ is the bosonic coherent state

$$|\alpha(\bar{N})\rangle = e^{\sum_{\mathbf{r}} b^3 [\Psi_0(\bar{N}, \mathbf{r}) \hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r}) - \text{H.c.}]} |0\rangle. \quad (136)$$

To show (135), one can use the identity

$$e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} = e^{\hat{A} + \hat{B}} e^{[\hat{A}, \hat{B}]/2}, \quad (137)$$

where \hat{A} and \hat{B} are arbitrary linear combinations of $\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r})$ and $\hat{\psi}(\mathbf{r})$.

c. Phase of the condensate. We define the phase of the condensate as the phase of the operator $\hat{\theta}_0^B$ that annihilates a particle in the condensate mode ϕ_0 . To first order in the field fluctuations,

$$\hat{\theta}_0^B = \frac{1}{2i\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{r}} b^3 \phi_0(\mathbf{r}) [\delta\hat{\psi}(\mathbf{r}) - \delta\hat{\psi}^{\dagger}(\mathbf{r})]. \quad (138)$$

From the bosonic commutation relation $[\hat{a}_0^B, (\hat{a}_0^B)^{\dagger}] = 1$ it results that $\hat{\theta}_0^B$ is conjugate to \hat{N}_0 . As a consequence $\hat{\theta}_0^B$ is the generator of translations of the number of condensed particles [57]. At variance with the transformation induced by \hat{Q}_0^B , the transformation induced by $\hat{\theta}_0^B$ is nonadiabatic when the condensate wave function depends on N .

Indeed, from the definition of the phases (138) and (131), and given the fact that

$$\frac{d}{dN} \Psi_0 = \frac{\phi_0}{2\sqrt{N}} + \sqrt{N} \frac{d}{dN} \phi_0, \quad (139)$$

we see that the adiabatic phase and the phase of the condensate are different operators if $\frac{d}{dN} \phi_0 \neq 0$. In particular, we have

$$\hat{\theta}_0^B = \hat{Q}^B - \frac{1}{i} \sum_{\lambda} (\alpha_{\lambda} \hat{B}_{\lambda} - \alpha_{\lambda}^* \hat{B}_{\lambda}^{\dagger}) \quad (140)$$

with

$$\begin{aligned} \alpha_{\lambda} &= -\frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{r}} b^3 \phi_0(\mathbf{r}) [U_{\lambda}^B(\mathbf{r}) - V_{\lambda}^B(\mathbf{r})] \\ &= \sqrt{N} \sum_{\mathbf{r}} b^3 \frac{d}{dN} \phi_0(\mathbf{r}) [U_{\lambda}^B(\mathbf{r}) - V_{\lambda}^B(\mathbf{r})], \end{aligned} \quad (141)$$

where we inserted (130) in Eq. (138) and use the fact that $\sum_{\mathbf{r}} b^3 \frac{d}{dN} \Psi_0 (U_{\lambda}^B - V_{\lambda}^B) = 0$. By taking the time derivative of (140) we obtain the dynamics of the phase of the condensate $\hat{\theta}_0^B$,

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta}_0^B = -\frac{1}{\hbar} \frac{d\mu}{dN} \hat{P}^B + \frac{1}{\hbar} \sum_{\lambda} (\alpha_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^B \hat{B}_{\lambda} + \text{H.c.}). \quad (142)$$

The operators \hat{B}_{λ} corresponding to excited Bogoliubov modes oscillate in time. Equation (142) then indicates that, although they are different operators, $\hat{\theta}_0^B$ and \hat{Q}^B have the same dynamics at long times, dominated by the constant term in Eq. (142) proportional to \hat{P}^B . The oscillating terms in the condensate phase derivative (142) are also found within a number-conserving theory in the spatially inhomogeneous case [39].

IV. BEYOND BCS THEORY

A. Restoring a physical state by mixing symmetry-breaking states

In our study of the phase dynamics, the choice of a symmetry-breaking ground state as the starting point of a linearized treatment is more than a matter of convenience in the

³Note that to be consistent with our previous notations, the zero-energy mode and the anomalous mode we introduce here differ from those of [38] by factors \sqrt{N} and $1/\sqrt{N}$, respectively.

sense that no zero-temperature phase dynamics would appear in a state with a fixed number of particles. Therefore we need to give a precise meaning to this choice of an *a priori* nonphysical state.

Experimentally one cannot prepare a BCS state with a well-defined phase. The choice of a broken-symmetry state is, however, meaningful when we deal with a bipartite system, for example a Josephson junction with two wells a and b . We imagine that the two subsystems interact in a way that fixes the relative phase ϕ but leaves the global phase θ as a free parameter. For a given realization we write the initial state of the system as a product of BCS ground states:

$$|\psi(\theta)\rangle = \mathcal{N}_a \mathcal{N}_b e^{e^{i\theta}(\alpha \hat{C}_a^\dagger + e^{i\phi} \beta \hat{C}_b^\dagger)} |0\rangle, \quad (143)$$

where α and β are real numbers and $\hat{C}_{a(b)}^\dagger$ creates a pair in well a (b) centered in position $\mathbf{r}_{a(b)}$. As we said, the relative phase ϕ is fixed whereas the global phase θ must be treated as a random variable. The physical state of the system is then described by the density operator

$$\hat{\rho} = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} |\psi(\theta)\rangle \langle \psi(\theta)| \quad (144)$$

since, contrarily to (143), it does not contain unphysical coherences between states of different total numbers of particles [10]. The corresponding correlation function

$$C(t) = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}_b, t) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}_b, t) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_a, t) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_a, t)] \quad (145)$$

can be expressed in terms of the order parameters of the two subsystems:

$$C(t) = \langle \psi_{\text{BCS}}^b | \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}_b, t) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}_b, t) | \psi_{\text{BCS}}^b \rangle \times \langle \psi_{\text{BCS}}^a | \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_a, t) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_a, t) | \psi_{\text{BCS}}^a \rangle, \quad (146)$$

where $|\psi_{\text{BCS}}^a\rangle = \mathcal{N}_a e^{\alpha \hat{C}_a^\dagger} |0\rangle$ and $|\psi_{\text{BCS}}^b\rangle = \mathcal{N}_b e^{e^{i\phi} \beta \hat{C}_b^\dagger} |0\rangle$. The predicted Gaussian collapse (92) of these order parameters thus implies a Gaussian decay of the correlation function.

B. Blurring time beyond the mean-field approximation

1. Collapse of the order parameter beyond the mean-field approximation

Now that we have given our symmetry-breaking description of phase dynamics a precise meaning, we wish to generalize it beyond the mean-field approximation. To this end we introduce the state $|\psi\rangle$:

$$|\psi\rangle = \sum_N c_N |\psi_0(N)\rangle, \quad (147)$$

where $|\psi_0(N)\rangle$ is the *exact ground state* with exactly N particles, and c_N are coefficients of a distribution peaked around \bar{N} . The state (147) differs from the BCS ground state insofar as the projection of the BCS state of (3) onto the subspace with N particles is not the exact ground state for that particle number. The state $|\psi\rangle$ leads to a nonzero order parameter

$$\Psi \equiv \langle \psi | \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow | \psi \rangle \neq 0 \quad (148)$$

that we will show to undergo a collapse using minimal approximations.

During the time evolution, each eigenstate $|\psi_0(N)\rangle$ in Eq. (147) acquires a phase factor involving its energy $E_0(N)$ in the canonical ensemble, that we expand around $N = \bar{N}$:

$$E_0(N) - \mu N = E_0(\bar{N}) - \mu \bar{N} + \frac{1}{2}(N - \bar{N})^2 \frac{d\mu}{dN}(N = \bar{N}) + \dots \quad (149)$$

For the time evolution of the order parameter this implies

$$\Psi(t) = e^{2i(t/\hbar)(-\mu + d\mu/dN)} \sum_N \exp\left[-\frac{2it}{\hbar}(N - \bar{N}) \frac{d\mu}{dN}\right] \times \langle \psi_0(N - 2) | \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow | \psi_0(N) \rangle c_{N-2}^* c_N. \quad (150)$$

Assuming a weak dependence of the matrix element on N ,

$$\langle \psi_0(N - 2) | \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow | \psi_0(N) \rangle \simeq \langle \psi_0(\bar{N} - 2) | \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow | \psi_0(\bar{N}) \rangle \simeq \Psi(t = 0), \quad (151)$$

and changing the sum into an integral for a Gaussian distribution of c_N of width $\sqrt{\text{Var}\hat{N}}$, one obtains the expected collapse

$$\Psi(t) = \Psi(0) \exp\left\{-2 \text{Var}\hat{N} \left(\frac{d\mu}{dN}\right)_{N=\bar{N}}^2 \frac{t^2}{\hbar}\right\}. \quad (152)$$

From (152), we recover the expression for the blurring time t_{br} of (55), except that now the *exact chemical potential* and the *physical variance* of the particle number enter.

2. Generalization of the adiabatic phase and its dynamics

We now generalize the adiabatic phase and show that its dynamics can be formally derived beyond the linearized dynamics of Sec. II.

a. Generalized adiabatic phase. We define the generalized adiabatic phase \hat{Q} as a generator of translations of the exact ground states:

$$e^{i\delta N \hat{Q}} |\psi_0(N)\rangle = |\psi_0(N - 2\delta N)\rangle. \quad (153)$$

Using this definition, we can calculate the commutators:

$$e^{-i\hat{Q}} [\hat{H}, e^{i\hat{Q}}] = \sum_N [E_0(N - 2) - E_0(N)] |\psi_0(N)\rangle \langle \psi_0(N)| \equiv -2\mu(\hat{N}) \quad (154)$$

and

$$e^{-i\hat{Q}} \underbrace{[\hat{H}, [\hat{H}, \dots, [\hat{H}, e^{i\hat{Q}}]]]}_p = [-2\mu(\hat{N})]^p, \quad (155)$$

one can show that formally

$$e^{i\hat{Q}(t)} = e^{i\hat{Q}(0)} e^{-2i\mu(\hat{N})t/\hbar}. \quad (156)$$

A more convenient expression can be obtained at short times, writing $\hat{Q}(t) = \hat{Q}(0) + \hat{Q}(t) - \hat{Q}(0)$ and treating $\hat{Q}(t) - \hat{Q}(0)$ as an infinitesimal:⁴

$$\hat{Q}(t) - \hat{Q}(0) \simeq -2\mu(\hat{N}) \frac{t}{\hbar}, \quad (157)$$

⁴The noncommutation of $\hat{Q}(t) - \hat{Q}(0)$ with $\hat{Q}(0)$ introduces a fuzziness on \hat{N} in the right-hand side of (157) at most of order unity and negligible for large particle numbers.

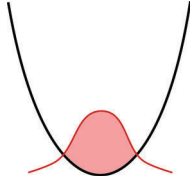


FIG. 5. (Color online) Ideal gas of bosonic dimers initially in a single-well trap.

whose variance predicts a t^2 ballistic spreading of the phase change during t , which reproduces (55) for small relative fluctuations of the total atom number. Another application of (156) is that, in the case of negligible initial fluctuations in the phase operator \hat{Q} around zero,

$$\langle e^{i\hat{Q}(t)} \rangle \simeq \langle e^{-2i\mu(\hat{N})t/\hbar} \rangle \quad (158)$$

it reproduces the Gaussian decay of (152) for weak relative fluctuations of \hat{N} .

V. HINTS FOR AN EXPERIMENT

To conclude this work, we propose an experimental situation in which one could observe, for any value of the interaction strength, the phase dynamics that we have described. The first step is to prepare an *ideal* gas of bosonic dimers in a trap (see Fig. 5). In the middle of this trap we adiabatically raise a barrier that splits it into two wells a and b (see Fig. 6). Such a splitting was achieved experimentally in Ref. [32]. During this stage, the tunneling link and the adiabatic variation of the trapping potential ensure that the gas remains in its ground state:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{(N/2)!}} \left(\frac{\hat{a}^\dagger + \hat{b}^\dagger}{\sqrt{2}} \right)^{N/2} |0\rangle \quad (159)$$

$$= \sum_{n_a=0}^{N/2} c_{n_a} |n_a : \phi_a; N/2 - n_a : \phi_b\rangle \quad (160)$$

where $c_{n_a} = \frac{1}{\sqrt{2^{N/2}}} \binom{N/2}{n_a}^{1/2}$, $\phi_{a(b)}$ is the condensate wave function in the a (b) well, n_a is the number of bosonic dimers in the a well, and N is the total number of *fermions* in the two wells.

We then cut the link between the two wells so that they form isolated but entangled systems. We tune the scattering length to reach the region of the BEC-BCS crossover we wish to study. The evolution is slow enough so that the state $|n_a : \phi_a; N/2 - n_a : \phi_b\rangle$ evolves to a state $|\psi_0^a(2n_a); \psi_0^b(N - 2n_a)\rangle$ with $2n_a$ fermions ($N - 2n_a$ fermions) in the ground state of

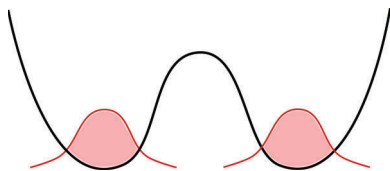


FIG. 6. (Color online) The gas is split into two components by adiabatically changing the single-well potential of Fig. 5 to a double-well potential.

the a (b) well:

$$|\psi\rangle = \sum_{n_a=0}^{N/2} c_{n_a} |\psi_0^a(2n_a); \psi_0^b(N - 2n_a)\rangle, \quad (161)$$

but fast enough so that phase dynamics during this stage can be neglected. We then let the state (161) evolve from 0 to t .

Finally, we measure the left-right equal-time correlation function

$$C_{ab}(t) = \langle \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}_b, t) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}_b, t) \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r}_a, t) \hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}_a, t) \rangle.$$

Following the steps of the derivation of the previous section (Sec. IV B2), and writing with a subscript a (b) the operators acting on the a (b) well, we predict

$$C_{ab}(t) = C_{ab}(0) \exp \left[-\frac{2t^2}{\hbar^2} \left(\frac{d\mu}{dN} \right)^2 \text{Var}(\hat{N}_a - \hat{N}_b) \right] \quad (162)$$

where the second equality assumes the quadratic expansion of the energy around the mean atom numbers for equal chemical potentials in the two wells.

Direct measurement of pair correlation functions using noise correlations in time-of-flight images has been proposed in Refs. [33,34,58,59]. Experimental results in that direction have been obtained for fermions in Refs. [60,61]. An alternative possibility is to ramp the interactions back to the BEC side before the measurement. The pair correlation functions should behave as bosonic one-body correlation functions whose measurement was already achieved.

VI. CONCLUSION

By linearization of the equations of motion around the BCS ground state for an interacting spin-1/2 Fermi gas, both in a time-dependent Bogoliubov–de Gennes approach and in the RPA approach, we microscopically derived the existence of and gave explicit expressions for a zero-energy mode and an anomalous mode, associated with infinitesimal generators of the translation of the phase and of the adiabatic translation of the number of particles, respectively. Projection of the quantum field of pairs on these modes yields conjugate phase and number operators, and the linearly increasing dispersion of the phase operator in time is responsible for the collapse of the order parameter. We predict a coherence time of the order parameter depending on the derivative of the chemical potential of the gas with respect to the atom number, and on the variance of that atom number. In the thermodynamic limit, with a variance scaling as the mean atom number, the coherence time scales as the square root of the system size, and it is thus observable in systems with relatively small particle numbers, such as cold atomic gases. As expected, in the BEC limit of the crossover, where the ground state of the system is a condensate of bosonic dimers, our formula for the coherence time is consistent with what is known for bosons.

Further studying our phase operator, we interpret it as a generator of adiabatic particle-number translations for the ground state of the gas; it is in general different from the phase operator of the condensate defined from the amplitude of the field of pairs on the condensate mode. This difference originates from a dependence of the condensate wave function on the number of particles, which is the case for our fermionic

system, even in the spatially homogeneous case. With this interpretation of the phase operator in mind, we were able to extend our results for the blurring time and for the phase dynamics beyond the BCS mean-field approximation.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank Céline Nadal for her contribution during her internship at ENS (Paris) at an early stage of the project and for useful discussions. We acknowledge financial support from the QIBEC European project.

APPENDIX A: RELATION BETWEEN THE LINEARIZED TIME-DEPENDENT BOGOLIUBOV-DE GENNES AND THE RPA EQUATIONS

1. Time-dependent Bogoliubov-de Gennes equations

From the expression (12) it is apparent that the derivative of the energy with respect to $V_{\mathbf{k}}$ can be deduced from the derivatives of the density and order parameter:

$$\frac{\partial \rho_{\uparrow}}{\partial V_{\mathbf{k}}} = \frac{V_{\mathbf{k}}^*}{L^3}, \quad (\text{A1})$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial V_{\mathbf{k}}} = -\frac{g_0}{L^3} \left(U_{\mathbf{k}} - \frac{|V_{\mathbf{k}}|^2}{2U_{\mathbf{k}}} \right), \quad (\text{A2})$$

$$\frac{\partial \Delta^*}{\partial V_{\mathbf{k}}} = \frac{g_0}{L^3} \frac{(V_{\mathbf{k}}^*)^2}{2U_{\mathbf{k}}}, \quad (\text{A3})$$

where we used (8), (9), and (13). We then obtain

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{d}{dt} V_{\mathbf{k}}^* &= \frac{\partial E}{\partial V_{\mathbf{k}}} \\ &= 2 \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu + g_0 \rho_{\uparrow} \right) V_{\mathbf{k}}^* \\ &\quad - \Delta^* U_{\mathbf{k}} + \frac{V_{\mathbf{k}}^*}{2U_{\mathbf{k}}} (V_{\mathbf{k}} \Delta^* + V_{\mathbf{k}}^* \Delta). \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

By linearizing around the BCS ground-state value $V_{\mathbf{k}}^0$, we obtain

$$\begin{aligned} -i\hbar \frac{d}{dt} \delta V_{\mathbf{k}}^* &= \frac{\partial E}{\partial V_{\mathbf{k}}} \\ &\simeq \left(2\xi_{\mathbf{k}} + \frac{\Delta_0 V_{\mathbf{k}}^0}{U_{\mathbf{k}}^0} \right) \delta V_{\mathbf{k}}^* \\ &\quad + \frac{\Delta_0 V_{\mathbf{k}}^0}{U_{\mathbf{k}}^0} \left(1 + \frac{(V_{\mathbf{k}}^0)^2}{2(U_{\mathbf{k}}^0)^2} \right) (\delta V_{\mathbf{k}} + \delta V_{\mathbf{k}}^*) \\ &\quad + 2g_0 V_{\mathbf{k}}^0 \delta \rho_{\uparrow} - U_{\mathbf{k}}^0 \delta \Delta^* + \frac{(V_{\mathbf{k}}^0)^2}{2U_{\mathbf{k}}^0} (\delta \Delta + \delta \Delta^*), \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

where $\delta \rho_{\uparrow}$ and $\delta \Delta$ are obtained by linearizing (9) and (13),

$$\delta \rho_{\uparrow} = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{q}} V_{\mathbf{q}}^0 (\delta V_{\mathbf{q}} + \delta V_{\mathbf{q}}^*), \quad (\text{A6})$$

$$\delta \Delta = -\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{q}} \left[\left(U_{\mathbf{q}}^0 - \frac{(V_{\mathbf{q}}^0)^2}{2U_{\mathbf{q}}^0} \right) \delta V_{\mathbf{q}} - \frac{(V_{\mathbf{q}}^0)^2}{2U_{\mathbf{q}}^0} \delta V_{\mathbf{q}}^* \right]. \quad (\text{A7})$$

Referring to the notations in Eq. (25), we finally obtain

$$\begin{aligned} A_{\mathbf{kq}} &= \delta_{\mathbf{kq}} \left\{ 2\xi_{\mathbf{k}} + \frac{\Delta_0 V_{\mathbf{k}}^0}{U_{\mathbf{k}}^0} \left[2 + \frac{(V_{\mathbf{k}}^0)^2}{2(U_{\mathbf{k}}^0)^2} \right] \right\} \\ &\quad + \frac{g_0}{L^3} \left[2(U_{\mathbf{k}}^0 U_{\mathbf{q}}^0 + V_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{q}}^0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(V_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{q}}^0)^2 - (U_{\mathbf{k}}^0)^2 - (U_{\mathbf{q}}^0)^2}{2U_{\mathbf{k}}^0 U_{\mathbf{q}}^0} \right], \end{aligned} \quad (\text{A8})$$

$$\begin{aligned} B_{\mathbf{kq}} &= \delta_{\mathbf{kq}} \frac{\Delta_0 V_{\mathbf{k}}^0}{U_{\mathbf{k}}^0} \left[1 + \frac{(V_{\mathbf{k}}^0)^2}{2(U_{\mathbf{k}}^0)^2} \right] + \frac{g_0}{L^3} \left[U_{\mathbf{k}}^0 U_{\mathbf{q}}^0 + 2V_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{q}}^0 \right. \\ &\quad \left. + \frac{(V_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{q}}^0)^2 - (U_{\mathbf{k}}^0)^2 - (U_{\mathbf{q}}^0)^2}{2U_{\mathbf{k}}^0 U_{\mathbf{q}}^0} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A9})$$

2. Link with the RPA equations

Using the correspondence (80) and (81) and (A5) we obtain

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{m}_{\mathbf{k}} \leftrightarrow 2\Delta_0 U_{\mathbf{k}}^0 (\delta V_{\mathbf{k}} - \delta V_{\mathbf{k}}^*) - 2U_{\mathbf{k}}^0 V_{\mathbf{k}}^0 (\delta \Delta - \delta \Delta^*), \quad (\text{A10})$$

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \hat{y}_{\mathbf{k}} &\leftrightarrow -\frac{4\epsilon_{\mathbf{k}}^2 V_{\mathbf{k}}^0}{\Delta_0} (\delta V_{\mathbf{k}} + \delta V_{\mathbf{k}}^*) - 4g_0 V_{\mathbf{k}}^0 U_{\mathbf{k}}^0 \delta \rho_{\uparrow} \\ &\quad + [(U_{\mathbf{k}}^0)^2 - (V_{\mathbf{k}}^0)^2] (\delta \Delta + \delta \Delta^*), \end{aligned} \quad (\text{A11})$$

where, to obtain the simplified forms of the coefficients of $\delta V_{\mathbf{k}} - \delta V_{\mathbf{k}}^*$ in Eq. (A10) and of $\delta V_{\mathbf{k}} + \delta V_{\mathbf{k}}^*$ in Eq. (A11), we used Eq. (15) in the forms

$$\Delta_0 V_{\mathbf{k}}^0 = (\epsilon_{\mathbf{k}} - \xi_{\mathbf{k}}) U_{\mathbf{k}}^0, \quad \Delta_0 U_{\mathbf{k}}^0 = (\epsilon_{\mathbf{k}} + \xi_{\mathbf{k}}) V_{\mathbf{k}}^0, \quad (\text{A12})$$

or alternatively we eliminated $\xi_{\mathbf{k}}$ from (A5) using (14). Remarking that

$$\delta \Delta + \delta \Delta^* \leftrightarrow -\frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} \hat{m}_{\mathbf{k}}, \quad (\text{A13})$$

$$\delta \Delta - \delta \Delta^* \leftrightarrow \frac{g_0}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \hat{y}_{\mathbf{k}}, \quad (\text{A14})$$

$$\delta \rho_{\uparrow} \leftrightarrow \frac{1}{2L^3} \sum_{\mathbf{k}} \hat{m}_{\mathbf{k}}, \quad (\text{A15})$$

and using (66) we then recover the equations of motion (70) and (71) except for the $\hat{S}_{\mathbf{k}}$ contribution. This is not surprising because the BCS ground state is an eigenstate of $\hat{S}_{\mathbf{k}}$ with zero eigenvalue [see (65)]. The expectation value $\langle \hat{S}_{\mathbf{k}} \rangle_{\text{BCS}}$ is then a quantity of second order in $\delta V_{\mathbf{k}}, \delta V_{\mathbf{k}}^*$.

APPENDIX B: COMPUTING $\langle e^{i\hat{Q}(t)} \rangle$ IN THE BCS APPROXIMATION

In Sec. II we obtained

$$\hat{Q}(t) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{Q}_{\mathbf{k}}(t), \quad (\text{B1})$$

where $\hat{Q}_{\mathbf{k}}(t)$ is a linear combination of the operators $\hat{m}_{\mathbf{k}}(0)$, $\hat{y}_{\mathbf{k}}(0)$, and $\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}$ with time-dependent coefficients. Due to the

factorized form of the BCS state, we have

$$\langle e^{i\hat{Q}(t)} \rangle_0 = \prod_{\mathbf{k}} \langle \psi_{\mathbf{k}} | e^{i\hat{Q}_{\mathbf{k}}(t)} | \psi_{\mathbf{k}} \rangle, \quad (\text{B2})$$

where $|\psi_{\mathbf{k}}\rangle = (U_{\mathbf{k}}^0 - V_{\mathbf{k}}^0 \hat{d}_{\mathbf{k}}^\dagger) | 0 \rangle$. Within the two-dimensional subspace spanned by $|0_{\mathbf{k}}\rangle = |0\rangle$ and $|1_{\mathbf{k}}\rangle = \hat{d}_{\mathbf{k}}^\dagger |0\rangle$, the operator $\hat{Q}_{\mathbf{k}}$ acts as a linear superposition of Pauli matrices and $\mathbb{1}$, which allows us to calculate its exponential exactly [45]. If, however, we consider (i) the thermodynamic limit and (ii) time scales of order $L^{3/2}$ (as expected from the expression for t_{br}) such that $t/L^3 \rightarrow 0$ for $L \rightarrow \infty$, we find that $\hat{Q}_{\mathbf{k}}(t) \rightarrow 0$ and it is sufficient to expand its exponential to second order *within each factor* of the product over \mathbf{k} :

$$\langle e^{i\hat{Q}(t)} \rangle_0 \simeq \prod_{\mathbf{k}} \left[1 - \frac{1}{2} \langle \hat{Q}_{\mathbf{k}}^2(t) \rangle \right] \simeq e^{-\langle \hat{Q}^2(t) \rangle / 2}, \quad (\text{B3})$$

where we use the fact that $\sum_{\mathbf{k}} \langle \hat{Q}_{\mathbf{k}}^2(t) \rangle = \langle \hat{Q}^2(t) \rangle$. The contribution of \hat{Z} to the variance of $\hat{Q}(t)$ is exactly zero due to (87) as well as that of the crossed terms between $\hat{Q}(0)$ and \hat{P} , so that

$$\langle \hat{Q}^2(t) \rangle = \langle \hat{Q}^2(0) \rangle + \frac{4t^2}{\hbar^2} \left(\frac{d\mu}{dN} \right)^2 \langle \hat{P}^2 \rangle. \quad (\text{B4})$$

By legitimately neglecting the variance of $\hat{Q}(0)$,

$$\text{Var } \hat{Q}(0) = 4 \sum_{\mathbf{k}} \frac{(dV_{\mathbf{k}}^0/dN)^2}{(U_{\mathbf{k}}^0)^2} = o\left(\frac{1}{N}\right), \quad (\text{B5})$$

we finally recover (92).

APPENDIX C: INITIAL VARIANCE OF THE ADIABATIC PHASE IN THE BCS GROUND STATE

In Eq. (B5), $\frac{dV_{\mathbf{k}}^0}{d\mu}$ can be deduced from the first line of (74),

$$\frac{dV_{\mathbf{k}}^0}{d\mu} = \frac{\Delta_0 U_{\mathbf{k}}^0}{2\epsilon_{\mathbf{k}}^2} \left(1 + \frac{X}{\Theta} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\Delta_0} \right), \quad (\text{C1})$$

where we have neglected the mean-field contribution $g_0 d\rho_1^0/d\mu$ in the $b \rightarrow 0$ limit and used the relation (97).

Expressing $d\mu/d\bar{N}$ in terms of X and Θ from (95), we obtain

$$\text{Var } \hat{Q}(0) = \frac{1}{(X^2 + \Theta^2)^2} \left[(\Theta^2 - X^2) \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0^4}{\epsilon_{\mathbf{k}}^4} + X^2 \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0^4}{\epsilon_{\mathbf{k}}^4} + 2X\Theta \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0^3 \xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}^4} \right]. \quad (\text{C2})$$

APPENDIX D: DETAILS OF THE COMPUTATION OF $\frac{d}{dt} \hat{\theta}_0$

Taking the temporal derivative of (112) and replacing $\frac{d}{dt} \hat{y}_{\mathbf{k}}$ by its RPA expression leads to

$$\frac{d}{dt} \hat{\theta}_0 = -\frac{1}{2\hbar \bar{N}_0} \left[\sum_{\mathbf{k}} \left(\epsilon_{\mathbf{k}} + \frac{g_0}{2L^3} \Sigma_1 + \frac{g_0 \xi_{\mathbf{k}}}{2L^3} \Sigma_2 \right) \hat{m}_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \hat{S}_{\mathbf{k}} \right], \quad (\text{D1})$$

where

$$\Sigma_1 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\Delta_0^2}{\epsilon_{\mathbf{k}}^2} = \text{Var } \hat{N}, \quad (\text{D2})$$

$$\Sigma_2 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\xi_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}^2}. \quad (\text{D3})$$

Σ_1 tends to a finite value in the limit of zero lattice spacing, regardless of the system size. Consequently, its contribution in Eq. (D1) tends to zero:

$$\frac{g_0}{2L^3} \Sigma_1 \xrightarrow{b \rightarrow 0} 0. \quad (\text{D4})$$

Σ_2 does not converge in the limit of zero lattice spacing, but using the gap equation (19) we can rewrite it as

$$\Sigma_2 = -\frac{2L^3}{g_0} + \Sigma_3, \quad (\text{D5})$$

where $\Sigma_3 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\xi_{\mathbf{k}} - \epsilon_{\mathbf{k}}}{\epsilon_{\mathbf{k}}^2}$ converges since $|\Sigma_3| \leq \frac{\bar{N}}{\Delta_0}$. As a consequence

$$\frac{g_0}{2L^3} \Sigma_2 \xrightarrow{b \rightarrow 0} -1 \quad (\text{D6})$$

and hence the value of the limit of $d\hat{\theta}_0/dt$ given in Eq. (118).

[1] D. S. Hall, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1543 (1998).
 [2] C. Orzel, A. Tuchman, M. Fenselau, M. Yasuda, and M. Kasevich, *Science* **291**, 2386 (2001).
 [3] M. Greiner, O. Mandel, T. W. Hänsch, and I. Bloch, *Nature (London)* **419**, 51 (2002).
 [4] J. Dunningham, K. Burnett, and W. Phillips, *Philos. Trans. R. Soc., A* **363**, 2165 (2005).
 [5] Y. Shin, M. Saba, T. A. Pasquini, W. Ketterle, D. E. Pritchard, and A. E. Leanhardt, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 050405 (2004).
 [6] G.-B. Jo, Y. Shin, S. Will, T. A. Pasquini, M. Saba, W. Ketterle, D. E. Pritchard, M. Vengalattore, and M. Prentiss, *Phys. Rev. Lett.* **98**, 030407 (2007).
 [7] F. Sols, *Physica B* **194**, 1389 (1994).

[8] E. M. Wright, D. F. Walls, and J. C. Garrison, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2158 (1996).
 [9] M. Lewenstein and L. You, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3489 (1996).
 [10] Y. Castin and J. Dalibard, *Phys. Rev. A* **55**, 4330 (1997).
 [11] P. Villain, M. Lewenstein, R. Dum, Y. Castin, L. You, A. Imamoglu, and T. Kennedy, *J. Mod. Opt.* **44**, 1775 (1997).
 [12] T. Berrada, S. van Frank, R. Bücke, T. Schumm, J.-F. Schaff, and J. Schmiedmayer, *Nat. Commun.* **4**, 2077 (2013).
 [13] S. Will, T. Best, U. Schneider, L. Hackermüller, D.-S. Lühmann, and I. Bloch, *Nature (London)* **465**, 197 (2010).
 [14] C. Gross, T. Zibold, E. Nicklas, J. Estève, and M. K. Oberthaler, *Nature (London)* **464**, 1165 (2008).
 [15] M. F. Riedel, P. Böhi, Y. Li, T. W. Hänsch, A. Sinatra, and P. Treutlein, *Nature (London)* **464**, 1170 (2010).

- [16] M. Kitagawa and M. Ueda, *Phys. Rev. A* **47**, 5138 (1993).
- [17] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano, and D. J. Heinzen, *Phys. Rev. A* **50**, 67 (1994).
- [18] A. Sorensen, L. Duan, J. Cirac, and P. Zoller, *Nature (London)* **409**, 63 (2001).
- [19] A. Sinatra, J.-C. Dornstetter, and Y. Castin, *Front. Phys.* **7**, 86 (2012).
- [20] A. Sinatra, E. Witkowska, and Y. Castin, *Eur. Phys. J.: Spec. Top.* **102**, 87 (2012).
- [21] *Ultra-cold Fermi Gases*, edited by M. Inguscio, W. Ketterle, and C. Salomon (Società Italiana di Fisica, Bologna, Italy, 2007).
- [22] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1215 (2008).
- [23] *The BCS-BEC Crossover and the Unitary Fermi Gas*, edited by W. Zwerger (Springer-Verlag, Berlin, 2012).
- [24] Y. Castin, in *Ultra-cold Fermi Gases* (Ref. [21]).
- [25] M. Randeria and E. Taylor, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **5**, 065027 (2014).
- [26] M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaer, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle, *Nature (London)* **435**, 1047 (2005).
- [27] L. A. Sidorenkov, M. K. Tey, R. Grimm, Y.-H. Hou, and L. Pitaevskii, *Nature (London)* **498**, 78 (2013).
- [28] N. Navon, S. Nascimbène, F. Chevy, and C. Salomon, *Science* **328**, 729 (2010).
- [29] S. Nascimbène, N. Navon, K. Jiang, F. Chevy, and C. Salomon, *Nature (London)* **463**, 1057 (2010).
- [30] K. Van Houcke, F. Werner, E. Kozik, N. Prokofev, B. Svistunov, M. J. H. Ku, A. T. Sommer, L. W. Cheuk, A. Schirotzek, and M. W. Zwierlein, *Nat. Phys.* **8**, 366 (2012).
- [31] M. J. H. Ku, A. T. Sommer, L. W. Cheuk, and M. W. Zwierlein, *Science* **335**, 563 (2012).
- [32] C. Kohstall, S. Riedl, E. R. Sánchez Guajardo, L. A. Sidorenkov, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm, *New J. Phys.* **13**, 065027 (2011).
- [33] E. Altman, E. Demler, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. A* **70**, 013603 (2004).
- [34] I. Carusotto and Y. Castin, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 223202 (2005).
- [35] J. Bardeen, L. Cooper, and J. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 5 (1957).
- [36] P. Anderson, *Phys. Rev.* **112**, 1900 (1958).
- [37] J.-P. Blaizot and G. Ripka, *Quantum Theory of Finite Systems* (MIT Press, Cambridge, MA, 1985).
- [38] Y. Castin and R. Dum, *Phys. Rev. A* **57**, 3008 (1998).
- [39] A. Sinatra, Y. Castin, and E. Witkowska, *Europhys. Lett.* **102**, 40001 (2013).
- [40] C. Mora and Y. Castin, *Phys. Rev. A* **67**, 053615 (2003).
- [41] Y. Castin, *J. Phys. IV* **116**, 89 (2004).
- [42] E. Burovski, N. Prokof'ev, B. Svistunov, and M. Troyer, *New J. Phys.* **8**, 153 (2006).
- [43] L. Pricoupenko and Y. Castin, *J. Phys. A* **40**, 12863 (2007).
- [44] O. Juillet, *New J. Phys.* **9**, 163 (2007).
- [45] C. Nadal (unpublished).
- [46] A. Leggett, *J. Phys. Colloq.* **41**, C7-19 (1980).
- [47] J. R. Engelbrecht, M. Randeria, and C. A. R. Sáde Melo, *Phys. Rev. B* **55**, 15153 (1997).
- [48] M. Randeria, in *Bose-Einstein Condensation*, edited by A. Griffin, D. W. Snoke, and S. Stringari (Cambridge University Press, Bologna, Italy, 1995).
- [49] M. Marini, F. Pistolesi, and G. Strinati, *Eur. Phys. J. B* **1**, 151 (1998).
- [50] W. Belzig, C. Schroll, and C. Bruder, *Phys. Rev. A* **75**, 063611 (2007).
- [51] P. Pieri and G. C. Strinati, *Phys. Rev. B* **61**, 15370 (2000).
- [52] D. S. Petrov, C. Salomon, and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. Lett.* **93**, 090404 (2004).
- [53] I. V. Brodsky, M. Y. Kagan, A. V. Klaptsov, R. Combescot, and X. Leyronas, *Phys. Rev. A* **73**, 032724 (2006).
- [54] G. E. Astrakharchik, R. Combescot, and L. P. Pitaevskii, *Phys. Rev. A* **76**, 063616 (2007).
- [55] A. J. Leggett, *Quantum Liquids* (Oxford University Press, Oxford, 2006).
- [56] P. Carruther and M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **40**, 411 (1968).
- [57] Y. Castin and A. Sinatra, in *Physics of Quantum Fluids: New Trends and Hot Topics in Atomic and Polariton Condensates*, Springer Series in Solid-State Sciences Vol. 177, edited by M. Modugno and A. Bramati (Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2013).
- [58] V. Gritsev, E. Demler, and A. Polkovnikov, *Phys. Rev. A* **78**, 063624 (2008).
- [59] T. Kitagawa, A. Aspect, M. Greiner, and E. Demler, *Phys. Rev. Lett.* **106**, 115302 (2011).
- [60] M. Greiner, C. A. Regal, J. T. Stewart, and D. S. Jin, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005).
- [61] T. Rom, T. Best, D. van Oosten, U. Schneider, S. Fölling, B. Paredes, and I. Bloch, *Nature (London)* **444**, 733 (2006).

Thermal blurring of coherent Fermi gas – Brouillage thermique
d'un gaz cohérent de fermions

In press at *Comptes Rendus Physique*
[doi :10.1016/j.crhy.2016.02.005](https://doi.org/10.1016/j.crhy.2016.02.005).

Thermal blurring of a coherent Fermi gas

Hadrien Kurkjian *, Yvan Castin * and Alice Sinatra * (corresponding author: alice.sinatra@lkb.ens.fr)

* Laboratoire Kastler Brossel, ENS-PSL Research University, CNRS, UPMC-Sorbonne Universités, Collège de France, Paris, France

Submitted to Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America

It is generally assumed that a condensate of paired fermions at equilibrium is characterized by a macroscopic wavefunction with a well-defined, immutable phase. In reality, all systems have a finite size and are prepared at non-zero temperature; the condensate has then a finite coherence time, even when the system is isolated in its evolution and the particle number N is fixed. The loss of phase memory is due to interactions of the condensate with the excited modes that constitute a dephasing environment. This fundamental effect, crucial for applications using the condensate of pairs’ macroscopic coherence, was scarcely studied. We link the coherence time to the condensate phase dynamics, and we show with a microscopic theory that the time derivative of the condensate phase operator $\hat{\theta}_0$ is proportional to a chemical potential operator that we construct including both the pair-breaking and pair-motion excitation branches. In a single realization of energy E , $\hat{\theta}_0$ evolves at long times as $-2\mu_{\text{mc}}(E)t/\hbar$ where $\mu_{\text{mc}}(E)$ is the microcanonical chemical potential; energy fluctuations from one realization to the other then lead to a ballistic spreading of the phase and to a Gaussian decay of the temporal coherence function with a characteristic time $\propto N^{1/2}$. In the absence of energy fluctuations, the coherence time scales as N due to the diffusive motion of $\hat{\theta}_0$. We propose a method to measure the coherence time with ultracold atoms, which we predict to be tens of milliseconds for the canonical ensemble unitary Fermi gas.

Fermi gas | Quantum fluids | Quantum coherence

Setting the stage

Coherent gases of ultracold atoms confined in immaterial non-dissipative traps are unique examples of isolated macroscopic quantum systems. The value of their intrinsic coherence time is therefore a fundamental question. But it is also a practical issue for all the applications which exploit macroscopic coherence, such as interferometry or quantum engineering where one generates non-trivial entangled states by coherent evolution [1, 2, 3]. Coherence time measurements are presently being performed in cold Bose gases [4, 5, 6]. Experiments on Fermi gases, which up to now focused on traditional aspects of the N -body problem, such as thermodynamic properties [7, 8], are moving towards correlation and coherence measurements [9]. This turn will open a new research field, including the strong coupling regime : that of fermionic quantum optics [10]. However, a theory predicting the coherence time of a pair-condensed Fermi gas was missing, except in the limiting case of zero temperature [11]. In this paper we present the first microscopic theory bridging this theoretical gap in a general way. Our approach holds for other physical systems, such as mesoscopic Josephson Junctions, provided that the environment-induced decoherence is sufficiently reduced.

For a Bose-condensed gas of bosons, the finite coherence time is due to the spreading of the condensate phase probability distribution. At zero temperature and in presence of interactions, a ballistic phase spreading is caused by atom number fluctuations in the sample. This effect has been measured by interfering two initially mutually-coherent condensates, whose particle number fluctuates due to partition noise [4, 6]. Contrarily to lasers, which are open quantum systems, and somehow unexpectedly, a ballistic spreading persists in Bose-Einstein condensates for a fixed atom number at non-

zero temperature [12, 13]. Fluctuations of the energy, another conserved quantity, then play the same role as number fluctuations.

For an unpolarized pair-condensed Fermi gas, the study of coherence time presupposes a clear definition of the condensate phase and of the corresponding operator $\hat{\theta}_0$ [11]. Furthermore, at non-zero temperature the speed of variation of the phase should include the contribution of two excitation branches: the fermionic pair-breaking one and the bosonic one exciting the pair motion. For the fermionic branch Anderson’s Random Phase Approximation (RPA) [14] is enough. For the bosonic branch however, we need the equivalent for fermions of the Bogoliubov method to construct quasiparticle creation \hat{b}_α^\dagger and annihilation \hat{b}_α operators and to express $d\hat{\theta}_0/dt$ in term of these operators. More than that, we need to include interactions among quasiparticles in the evolution of the \hat{b}_α . This is a non-trivial consequence of the dependence of condensate wavefunction on the total number of particles N even for a spatially homogeneous system, and clearly goes beyond the RPA program.

Correlation function decay

Below the critical temperature, the time-correlation function of the pairing field $\hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}')$ where $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$ is the fermionic field operator of the spin σ component, is dominated at long times by the condensate contribution:

$$g_1(t) = \langle \hat{a}_0^\dagger(t)\hat{a}_0(0) \rangle \quad [1]$$

where $\hat{a}_0 = \int d^3r d^3r' \varphi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}')$ is the component of the pairing field on the condensate wavefunction [11]. At equilibrium the system is in a mixture of N -body eigenstates $|\psi_\lambda\rangle$, with weights Π_λ . We therefore study the correlation function $g_1^\lambda(t)$ in the eigenstate $|\psi_\lambda\rangle$ of energy E_λ and particle number N_λ . To exploit the weak relative fluctuations in the number of condensed pairs for a large system, we split \hat{a}_0 into modulus and phase hermitian operators [11]

$$\hat{a}_0 = e^{i\hat{\theta}_0} \hat{N}_0^{1/2}, \quad [2]$$

and we approximate \hat{N}_0 by its mean value \bar{N}_0 in the equilibrium state to obtain

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{iE_\lambda t/\hbar} \langle \psi_\lambda | e^{-i(\hat{H} + \hat{W})t/\hbar} | \psi_\lambda \rangle \quad [3]$$

The operator \hat{W} , difference between \hat{H} transformed by $e^{i\hat{\theta}_0}$ and \hat{H} ,

$$\hat{W} = e^{-i\hat{\theta}_0} \hat{H} e^{i\hat{\theta}_0} - \hat{H} = -i[\hat{\theta}_0, \hat{H}] - \frac{1}{2}[\hat{\theta}_0, [\hat{\theta}_0, \hat{H}]] + \dots \quad [4]$$

is approximatively N times smaller than \hat{H} . Indeed $e^{i\hat{\theta}_0}$, like \hat{a}_0 , changes the total particle number by a quantity $O(N^0)$. While \hat{H} is an extensive observable, \hat{W} is intensive and the double commutator in (4) is of order $1/N$. In equation (3) formally appears the evolution operator of the Hamiltonian \hat{H} perturbed by \hat{W} , and restricted to the eigenstate $|\psi_\lambda\rangle$ of \hat{H} . Up to a phase factor, the function g_1^λ/\bar{N}_0 is then proportional to the probability amplitude that the system prepared in $|\psi_\lambda\rangle$ is still in that state after a time t .

A standard way to obtain a non-perturbative approximation of this amplitude is to use the Green function or the resolvent operator $\hat{G}(z) = (z\hat{1} - (\hat{H} + \hat{W}))^{-1}$ of the perturbed Hamiltonian. Within the projectors method (see §III.B.2 of [15]), we introduce an effective non hermitian Hamiltonian $\hat{H}_{\text{eff}}(z)$ governing the evolution restricted to $|\psi_\lambda\rangle$, *id est* $\langle\psi_\lambda|\hat{G}(z)|\psi_\lambda\rangle = (z - \langle\psi_\lambda|\hat{H}_{\text{eff}}(z)|\psi_\lambda\rangle)^{-1}$. Keeping in $\hat{H}_{\text{eff}}(z)$ terms up to order two in \hat{W} and neglecting its z dependence $\hat{H}_{\text{eff}}(z) \approx \hat{H}_{\text{eff}}(E_\lambda + i0^+)$ (pole approximation), we obtain¹

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{-it\langle\psi_\lambda|\hat{W}|\psi_\lambda\rangle/\hbar} e^{-(i\delta_\lambda + \gamma_\lambda)t} \quad [5]$$

Introducing $\hat{Q}_\lambda = \hat{1} - |\psi_\lambda\rangle\langle\psi_\lambda|$, the projector orthogonal to $|\psi_\lambda\rangle$, and the notation $\langle\hat{A}\rangle_\lambda \equiv \langle\psi_\lambda|\hat{A}|\psi_\lambda\rangle$ one has²:

$$\hbar(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda) = \langle\hat{W}\hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{(E_\lambda + i0^+)\hat{Q}_\lambda - \hat{Q}_\lambda\hat{H}\hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda\hat{W}\rangle_\lambda \quad [6]$$

The leading term under the exponential in (5), $\langle\psi_\lambda|\hat{W}|\psi_\lambda\rangle$, is of order N^0 like \hat{W} . A key step in its interpretation is to remark that, according to the expansion in (4), in the Heisenberg picture

$$\hat{W}(t) = \hbar \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad [7]$$

At this stage it may seem difficult to obtain a tractable explicit expression of $d\hat{\theta}_0/dt$ and to go beyond a purely formal result for the phase dynamics. Fortunately this is not the case and, as we will show in the next section, the coarse grained time average of $d\hat{\theta}_0/dt$ in a weakly excited gas is proportional to a chemical potential operator, which is in essence a thermodynamic quantity:

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} = \mu_0(\hat{N}) + \sum_{s=F,B} \sum_{\alpha} \frac{d\epsilon_{s,\alpha}}{dN} \hat{n}_{s,\alpha} \quad [8]$$

The sum on the right hand side runs over both the gapped quasi-particles fermionic branch of excitation (in the homogeneous case α includes both an orbital and a spin index, $\alpha = \mathbf{k}, \sigma$) and the bosonic one which, in the thermodynamic limit and for an homogeneous system, has a phonic behaviour (α is then only orbital, $\alpha = \mathbf{q}$). By requiring that the gas is weakly excited we mean that the thermal depletion of the condensate of pairs must be small. This requires in particular that the average number of quasi-particles is a small fraction of the total particle number. The coarse grained time average is taken over a time long with respect to the inverse of the quasi-particle eigenfrequencies $\epsilon_{s,\alpha}/\hbar$ yet short with respect to the typical time-scale of variation of the occupation numbers $\hat{n}_{s,\alpha}$. Finally $\mu_0(N)$ is the zero temperature chemical potential of the gas with N particles, that is the derivative of the ground state energy with respect to N . We interpret the second term on the right hand side of (8) as a “chemical potential operator” in the sense that its quantum average is the adiabatic derivative of the quasi-particle gas energy $\sum_{s=F,B} \sum_{\alpha} \epsilon_{s,\alpha} \langle\hat{n}_{s,\alpha}\rangle$ with respect to N , that is at fixed quasi-particle populations $\langle\hat{n}_{s,\alpha}\rangle$. Equation (8) establishes the link between the phase derivative and the chemical potential at the level of quantum mechanical operators in a multimode microscopic theory. In that respect, it goes beyond the usual second Josephson relation for the phase of the superconducting order parameter (see §3.4 in [16]).

By taking the average of equation (8) in the stationary state $|\psi_\lambda\rangle$ and using the Eigenstate thermalization hypothesis [17]

to identify the quantum average in an eigenstate with the microcanonical average, we recognize the microcanonical chemical potential μ_{mc} at energy E_λ and particle number N_λ and obtain:

$$\langle\psi_\lambda|\hbar \frac{d\hat{\theta}_0}{dt}|\psi_\lambda\rangle = -2\mu_{\text{mc}}(E_\lambda, N_\lambda) \quad [9]$$

We omitted here the coarse grained time average as the quantum average is taken in an exact eigenstate of the system.

The next-to-leading term under the exponential in (5), is of order $1/N$. In order to prove it, we express this term in terms of the correlation function of $d\hat{\theta}_0/dt$ in $|\psi_\lambda\rangle$: up to a contribution of order $1/N^2$,

$$\gamma_\lambda + i\delta_\lambda = \int_0^{+\infty} dt \left[\left\langle \frac{d\hat{\theta}_0(t)}{dt} \frac{d\hat{\theta}_0(0)}{dt} \right\rangle_\lambda - \left\langle \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} \right\rangle_\lambda^2 \right] \quad [10]$$

This is equivalent to (6) as can be checked by inserting a closure relation. The $t = 0$ value of the integrand is $\text{Var}_\lambda(d\hat{\theta}_0/dt) = O(1/N)$ (this comes from adding up the variances of independent quasi-particles numbers in the canonical ensemble and it overestimates the microcanonical variance); the function then decays in a time τ_c which is the typical collision time of quasi-particles and hence the correlation time of the $\hat{n}_{s,\alpha}$. Altogether we estimate $|\gamma_\lambda + i\delta_\lambda| \approx \tau_c \text{Var}(d\hat{\theta}_0/dt) = O(1/N)$. The energy shift δ_λ is thus of the same order in N as the subleading term $[\hat{\theta}_0, [\hat{\theta}_0, \hat{H}]]$ in \hat{W} , *i.e.* N times smaller than (9); we neglect both terms for a large system. In contrast, we keep γ_λ , the only term which leads to an exponential decay of the correlation function g_1^λ . It is in fact the phase diffusion coefficient of a system prepared in the microcanonical ensemble corresponding to $|\psi_\lambda\rangle$, $\gamma_\lambda = D(E_\lambda, N_\lambda)$. If one can write kinetic equations for the quasi-particles numbers appearing in (8), one can calculate their time correlation functions and hence D from (10), as done for bosons in [18]. Finally:

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{[2i\mu_{\text{mc}}(E_\lambda, N_\lambda)/\hbar - D(E_\lambda, N_\lambda)]t} \quad [11]$$

The final step is to take the statistical average over the probability distribution Π_λ of the states $|\psi_\lambda\rangle$. For large N , we assume that energy and atom number fluctuations around the mean values \bar{E} and \bar{N} are weak in relative value. This is the case if Π_λ describes a canonical or grand canonical ensemble. We assume Gaussian fluctuations and linearize μ_{mc} around (\bar{E}, \bar{N}) while, to this order, we keep only the central value $D(\bar{E}, \bar{N})$ of the next-to-leading term. We are led to the calculation of a Gaussian integral with a phase factor $\exp\{2i[(\partial\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})/\partial E)(E - \bar{E}) + (\partial\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})/\partial N)(N - \bar{N})]t/\hbar\}$. Altogether this leads to the main result of this work :

$$g_1(t) \simeq \bar{N}_0 e^{2i\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})t/\hbar} e^{-t^2/2t_{\text{br}}^2} e^{-D(\bar{E}, \bar{N})t} \quad [12]$$

In presence of energy or atom number fluctuations, the thermal blurring at long times consists in a Gaussian decay of the correlation function $g_1(t)$, with a characteristic time

$$(2t_{\text{br}}/\hbar)^{-2} = \text{Var} \left(N \frac{\partial\mu_{\text{mc}}}{\partial N}(\bar{E}, \bar{N}) + E \frac{\partial\mu_{\text{mc}}}{\partial E}(\bar{E}, \bar{N}) \right) \quad [13]$$

¹The pole approximation implicitly assumes that $|\psi_\lambda\rangle$ is coupled to a broad energy continuum. As a consequence (5) holds only at times longer than the inverse frequency width of the continuum, *i.e.* longer than the quasi particle correlation time τ_c introduced below.

²One might object that in a finite size system the spectrum is discrete, the resolvent has no branch cut and there should be no imaginary part in equation (6). For a large system, however, the level spacing is so small that the dynamics imitates the exponential relaxation of an infinite system, see §C.I.3 of [15]. Given that the right hand side of equation (6) scales as $1/N$, the rigorous way to obtain the result is to take the thermodynamic limit after multiplication by N . To avoid the branch cut, one should first shift up the energy E_λ from the real axis by a finite quantity η that will go to zero in the end: $\hbar(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda) \simeq \frac{1}{N} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow +\infty} N \langle \hat{W} \hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{(E_\lambda + i\eta)\hat{Q}_\lambda - \hat{Q}_\lambda \hat{H} \hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda \hat{W} \rangle_\lambda$.

which diverges as $N^{1/2}$ for normal fluctuations. The phase diffusion coefficient D leads to an exponential decay with a characteristic time diverging as N . As expected it is a sub-leading effect at long times, except if the system is prepared in the microcanonical ensemble in which case the intrinsic phase diffusion may be directly observed.

Microscopic derivation of the phase operator equation

We give here the first (to our knowledge) microscopic derivation of equation (8), relating the evolution of the phase operator of a pair-condensed gas to a “chemical potential operator”.

The contribution of the fermionic branch of excitations to $d\hat{\theta}_0/dt$ can be obtained from linearized equations of motion for small fluctuations of the pair operators $\hat{\psi}_\downarrow\hat{\psi}_\uparrow$, $\hat{\psi}_\uparrow^\dagger\hat{\psi}_\downarrow^\dagger$ and $\hat{\psi}_\sigma^\dagger\hat{\psi}_\sigma$ around the mean-field state in the Random Phase Approximation (RPA)[14]. Using equation (120) of reference [11] to extract the time average of $d\hat{\theta}_0/dt$, and rewriting equation (86) of the same reference in terms of the fermionic quasi-particle occupation numbers $\hat{n}_{F,\alpha}$, we get³

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} \Big|_{\text{RPA}} = \mu(\bar{N}) + \frac{d\mu}{d\bar{N}}(\hat{N} - \bar{N}) + \sum_{\alpha=\mathbf{k},\sigma} \frac{d\epsilon_{F,\alpha}}{d\bar{N}} \hat{n}_{F,\alpha} \quad [14]$$

where $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}$ is the BCS excitation spectrum of an homogeneous system and \bar{N} the BCS average particle number in the grand canonical ensemble of chemical potential μ .

We encountered fundamental difficulties in deriving the phonon branch contribution to equation (8) within the RPA⁴. We therefore decided to treat the problem variationally with the most general time-dependent coherent state Ansatz⁵:

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}(t) \exp \left(l^6 \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} \Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}';t) \hat{\psi}_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}') \right) |0\rangle, \quad [15]$$

Here \mathcal{N} ensures normalization and the $\Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ form a set of independent variables. The space has been discretized on a cubic lattice of step l , which we take to zero in the end of the calculations. The field operators obey anticommutation relations of the kind: $\{\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{\sigma'}^\dagger(\mathbf{r}')\} = \delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} / l^3$. Section §9.9b of reference [19] constructs from $\Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $\Gamma^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ the set of canonically conjugate variables $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $\Phi^*(\mathbf{r},\mathbf{r}')$.⁶ This field Φ should not be confused with the usual pairing field $\langle \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow \rangle$.⁷ When the pairs in (15) are at rest, $\Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)$ depends only on $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ and the Fourier transform of Φ reproduce the $V_{\mathbf{k}}$ amplitude of the $\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$ pair of BCS theory [11], while the Fourier transform of the pairing field is $-U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} = -V_{\mathbf{k}}(1 - |V_{\mathbf{k}}|^2)^{1/2}$. For moving pairs we have no physical interpretation, but the squared norm of Φ is still half the mean number of particles in the state $|\psi\rangle$:

$$\frac{N}{2} = \|\Phi\|^2 \equiv l^6 \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} |\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}';t)|^2. \quad [16]$$

Its evolution is governed by the classical Hamiltonian:

$$\mathcal{H}(\Phi, \Phi^*) = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle. \quad [17]$$

In the following we will need only the invariance of \mathcal{H} under a global phase change $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}') \rightarrow e^{i\gamma} \Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ ($U(1)$ symmetry), consequence of the conservation of the particle number \hat{N} by evolution with \hat{H} . At zero temperature and for a fixed N the field $\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ is frozen, up to a global phase factor, into the minimizer $\Phi_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = (N/2)^{1/2} \phi_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ of \mathcal{H} . ϕ_0 is chosen real and normalized to one. It depends on N even in the spatially

homogeneous case and differs from the condensate wavefunction φ_0 in the same way that Φ differs from the pairing field $\langle \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow \rangle$ (see note 7). At sufficiently low temperature one can expand \mathcal{H} in powers of the small deviations of Φ away from the circle $\gamma \mapsto e^{i\gamma} \Phi_0(\mathbf{r},\mathbf{r}')$, locus of the minima of \mathcal{H} for fixed N . To this end, we split the field into its components parallel and orthogonal to ϕ_0 :

$$\Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}') = e^{i\theta} [n^{1/2} \phi_0(\mathbf{r},\mathbf{r}') + \Lambda(\mathbf{r},\mathbf{r}')] \quad [18]$$

The phase θ can reach arbitrarily large values while Λ is bounded. This framework allows us to develop a systematic perturbation theory in powers of the field Λ (see appendix A), the fermionic equivalent of the Bogoliubov $U(1)$ -symmetry conserving approach for bosons [20]. Provided that Λ stays small, the phase θ remains close to the condensate phase θ_0 as we shall see. We therefore write down the equations of motion of θ and of the fields Λ, Λ^* . At the end of the calculations we systematically eliminate the condensate variables with the relation $n = \|\Phi\|^2 - \|\Lambda\|^2$, consequence of (16), and we restrict ourselves to order 2 in Λ, Λ^* .

The main challenge of the calculation is the occurrence of a term linear in Λ, Λ^* in $d\theta/dt$, resulting from the fact that ϕ_0 depends on the number of pairs [11]. Without this term, one would simply expand the field Λ on the eigenmodes of its small linear oscillations obtained from a quadratization of the Hamiltonian \mathcal{H} at fixed N :

$$\begin{pmatrix} \Lambda(\mathbf{r},\mathbf{r}';t) \\ \Lambda^*(\mathbf{r},\mathbf{r}';t) \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} b_{\alpha}(t) \begin{pmatrix} u_{\alpha}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \\ v_{\alpha}(\mathbf{r},\mathbf{r}') \end{pmatrix} + b_{\alpha}^*(t) \begin{pmatrix} v_{\alpha}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}') \\ u_{\alpha}^*(\mathbf{r},\mathbf{r}') \end{pmatrix} \quad [19]$$

where the sum runs over the eigenmodes of positive energy ϵ_{α} , normalized as $\|u_{\alpha}\|^2 - \|v_{\alpha}\|^2 = 1$. To this order, $b_{\alpha}(t) = b_{\alpha}(0)e^{-i\epsilon_{\alpha}t/\hbar}$. One would insert the expansion (19) into $d\theta/dt$ and take a coarse grained temporal average to get

³We use $\frac{\Delta_0}{\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}} \hat{\zeta}_{\mathbf{k}} = \hat{n}_{F,\mathbf{k},\uparrow} + \hat{n}_{F,-\mathbf{k},\downarrow}$ where Δ_0 and $\hat{\zeta}_{\mathbf{k}}$ refer to notations of [11], and we use equation (74) of that reference to recognize $d\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}/d\mu$. The trivial term $\mu(\bar{N})$ in the phase derivative (14) is absent in [11] due to the use of the grand canonical Hamiltonian.

⁴The RPA result (14), restricted to the linear order in the pair operators, does not include the contribution of the phonon branch. One might hope to obtain this contribution by pushing the RPA calculation to the quadratic order in the pair operators as follows: First, one computes $d\theta_0/dt$ up to the quadratic order. Second, one collects all the RPA pair operators inducing a center of mass momentum change $\hbar\mathbf{q}$, that is $\hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}$ and $\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}$, where $\hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}$ annihilates a fermion of wave vector \mathbf{k} and spin \uparrow , and one writes the matrices $\mathcal{L}_{\mathbf{q}}$ of their closed linear RPA equations of motion. Each RPA matrix $\mathcal{L}_{\mathbf{q}}$ has two collective modes, with opposite energies linear in \mathbf{q} for small \mathbf{q} . The RPA operators are then expanded over the eigenmodes of $\mathcal{L}_{\mathbf{q}}$, with amplitudes $\hat{b}_{-\mathbf{q}}$ and $\hat{b}_{\mathbf{q}}$ on the collective modes that annihilate and create a collective excitation of momentum $\mp\hbar\mathbf{q}$. Third, one inserts this modal expansion in the RPA operators appearing in $d\theta_0/dt$ and obtains a quadratic expression in the modal amplitudes, hence terms in $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}$ as in (8). Unfortunately, this RPA approach is not reliable and must be abandoned because the RPA operators, although linearly independent, are *not* quadratically independent, as one can see by rearranging the pair operators using fermionic anticommutation relations, e.g.

$$(\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}) (\hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}) = (\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^\dagger \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}^\dagger) (\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow})$$

This shows that (i) there is no unique way of expressing $d\theta_0/dt$ as a quadratic function of the RPA operators, (ii) the modal amplitudes are not quadratically independent, (iii) the coefficient of $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}$ is not uniquely determined by this RPA approach.

⁵We use here for simplicity an Ansatz in which the number of particles has quantum fluctuations (not to be confused with the thermal fluctuations of the grand canonical ensemble). The use of an Ansatz with a fixed number of particles, possible although more difficult [16], would change the coefficients in the energy functional by a relative correction $O(N^{-1/2})$ and would not change the spectrum in the thermodynamic limit.

⁶If $\underline{\Gamma}$ and $\underline{\Phi}$ are the matrices of elements $l^3 \Gamma(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ and $l^3 \Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}')$ respectively, then $\underline{\Phi} = -\underline{\Gamma}(1 + \underline{\Gamma}^\dagger \underline{\Gamma})^{-1/2}$. Their variational equations of motion follow from the usual Lagrangian $L = i\hbar [\langle \psi | (d/dt) | \psi \rangle - c.c.] / 2 - \langle \psi | H | \psi \rangle$. Φ is cleverly defined such that $L = i\hbar l^6 \sum_{\mathbf{r},\mathbf{r}'} [\Phi^*(\mathbf{r},\mathbf{r}') \partial_t \Phi(\mathbf{r},\mathbf{r}') - c.c.] / 2 - \mathcal{H}(\Phi, \Phi^*)$, leading to $\partial_t \Phi = (i\hbar l^6)^{-1} \partial_{\Phi^*} \mathcal{H}$. This shows that the conjugate variable of Φ in the Hamiltonian formalism is $i\hbar l^6 \Phi^*$ for the usual Poisson brackets, that is Φ^* for the Poisson brackets $\{\Phi, \Phi^*\} = (i\hbar l^6)^{-1}$, knowing that $\partial_t \Phi = \{\Phi, \mathcal{H}\}$.

⁷With the same matrix notation as in note 6 one has $\langle \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow \rangle = -\underline{\Phi}(1 - \underline{\Phi}^\dagger \underline{\Phi})^{-1/2}$.

rid of the oscillating terms. $\overline{d\theta/dt^t}$ would then contain the expected linear combination of the numbers of bosonic quasi-particles $n_{B,\alpha} = |b_\alpha|^2$. In reality, the problem is more subtle: due to the interaction among the quasi-particles, $\overline{b_\alpha^t}$ does not vanish and is of order two in Λ and Λ^* . The contribution of the linear term in $d\theta/dt$ is then comparable to that of the quadratic ones. It is calculated in the appendix, using in particular the bounded nature of the field Λ (consequence of the $U(1)$ -symmetry preserving nature of expansion (18)) and the Hellmann-Feynman theorem. One finds

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\overline{\theta}}{dt} = \mu_0(N) + \sum_\alpha \frac{d\epsilon_\alpha}{dN} |b_\alpha|^2 + O(\|\Lambda\|^3) \quad [20]$$

We now briefly discuss the form of the energy spectrum ϵ_α for a spatially homogeneous system, in the continuous limit $l \rightarrow 0$ for a s -wave contact interaction with a fixed scattering length between opposite spin fermions. For each value of the total wave vector \mathbf{q} , there exists (i) at most one discrete value $\epsilon_{B,\mathbf{q}}$, (ii) a continuum parametrized by two wave vectors $(\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow) \mapsto \epsilon_{F,\mathbf{k}_1,\uparrow} + \epsilon_{F,\mathbf{k}_2,\downarrow}$ of constant sum $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{q})$, where $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}$ is the BCS dispersion relation. The branch $\epsilon_{B,\mathbf{q}}$ coincides with that of reference [21], as we have checked. It has a phononic start and corresponds to the bosonic elementary excitations of the Fermi gas, whose contribution to the phase dynamics was missing. The continuum corresponds to the excitation of two fermionic quasi-particles. Indeed, since the Hamiltonian \hat{H} contains an even number of factors $\hat{\psi}$ and $\hat{\psi}^\dagger$, each annihilating or creating one quasi-particle, fermionic quasi-particles can only be created by pairs from the ground state. The corresponding biexcitations are not physically independent⁸, and are identical to what has been included via the RPA treatment.

Two more remarks are needed to obtain (8). (i) The fields $\langle \hat{\psi}_\downarrow \hat{\psi}_\uparrow \rangle$ and Φ differ and so do the phases θ_0 and θ . Their coarse grained temporal averages, however, only differ by a term of order $\|\Lambda\|^2$, which, bounded hence negligible in the long time limit, does not contribute to the phase blurring of the condensate of pairs⁹. (ii) The phase θ of our variational approach is a classical variable, whereas $\hat{\theta}_0$ in (8) is a quantum operator. This gap can be bridged by using the quantization procedure exposed in Chapter 11 of reference [19] where the b_α of the bosonic branch are in the end replaced by bosonic operators¹⁰ \hat{b}_α , $[\hat{b}_\alpha, \hat{b}_\alpha^\dagger] = 1$. We argue that equation (8), linking $d\hat{\theta}_0/dt$ to the chemical potential operator, and the resulting equation (12) should hold beyond the validity range of the microscopic variational derivation presented above, and should apply even to the strongly interacting regime, provided that the temperature is low enough for the quasi-particles lifetime to be much longer than the inverse of their eigenfrequency. Indeed, in the limiting case where one can neglect the fermionic excitation branch and drop the non-phononic part of the bosonic branch, Eq. (8) can be derived from the irrotational version of the quantum hydrodynamic theory of Landau and Khalatnikov [22, 23] (see appendix B).

Towards an experimental observation

Let us briefly explain how an experimental evidence of the thermal blurring of a condensate of pairs could be obtained. The key idea is to bosonize the atomic Cooper pairs into deeply bound weakly interacting dimers during the preparation and the measurement stage. This can be done in an adiabatic reversible way [24] by tuning the scattering length to a small and positive value thanks to a magnetic Feshbach resonance. It allows one to (i) produce a sample of dimers with weak

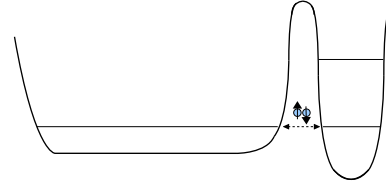


Fig. 1. Trapping configuration proposed here to measure $g_1(t)$ via Ramsey interferometry: the condensed paired Fermi gas is confined in the main trap (with a flat bottom on the figure); one transfers a small number of atoms (in the form of dimers) in the (very narrow) secondary trap via a resonant tunneling effect, which can be tuned by a barrier of adjustable height; in this way, one creates a phase reference, which is made to interfere with the condensate after an evolution time t .

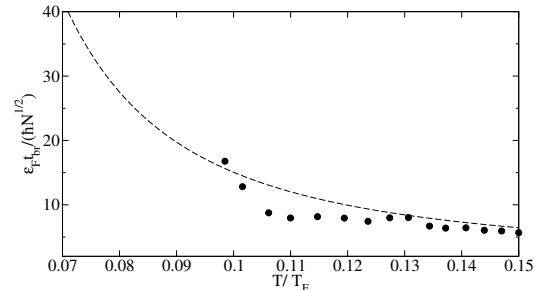


Fig. 2. Thermal blurring time of a coherent Fermi gas in the unitary limit in the canonical ensemble, as a function of temperature T in units of the Fermi temperature $T_F = \epsilon_F/k_B$. Discs: from the equation of state measured in reference [8]. Dashed line: expression (21) deduced from an approximated equation of state (see text).

number fluctuations from a melted Mott phase of an experimental realization of the Bose Hubbard model [25], (ii) control tunneling between the main trap (containing the N particles) and a very narrow secondary trap by adjusting the height of a potential barrier [2] (Fig.1), (iii) detect by fluorescence a single dimer [26] in this secondary trap. For the measurement of the $g_1(t)$ function, we adapt [27] the interferometric Ramsey method of two Rabi pulses at a time interval t to the case of paired fermions. The bosonized pairs are prepared initially in the main trap. A first pulse of angle ϵ transfers on average less than one dimer to the secondary trap; in this way, the thermal blurring is not masked by partition noise. Then the system evolves during a time t with interactions set to the value at which phase dynamics is to be studied. Last, the gas is rebosonized and a second pulse of angle ϵ closes the interferometer before the number n_{sec} of dimers in the secondary trap is measured. The average of n_{sec} over the realizations is an oscillating function of the time t , of angular frequency $2/\hbar$ times the difference of the two trapping zones chemical potentials, and of contrast equal to $|g_1(t)/g_1(0)|$.

⁸Exciting $\alpha = (\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow)$ and $\alpha' = (\mathbf{k}'_1, \uparrow; \mathbf{k}'_2, \downarrow)$ amounts to exciting $\alpha'' = (\mathbf{k}'_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow)$ and $\alpha''' = (\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}'_2, \downarrow)$.

⁹Expressing in $\langle \hat{a}_0 \rangle$ the pairing field in terms of Φ , one realizes that, for small Λ , $\langle \hat{a}_0 \rangle = e^{i\theta} \sqrt{N_0} (1 + O(\|\Lambda\|))$ and, since $\overline{\Lambda^t} = O(\|\Lambda\|^2)$, one has $\overline{\theta^t} = \overline{\theta} + O(\|\Lambda\|^2)$.

¹⁰More precisely, these operators are bosonic only for a weak density of excitations. For a spatially homogeneous system and in a $U(1)$ symmetry breaking formalism ($\theta = 0$), we obtain from Eq.(11.81c) of [19] extended to the paired case ($\hat{a}_p, \hat{a}_h^\dagger$ replaced by the BCS fermionic quasi-particle operators $\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}$) and restricted to weakly excited bosonic images ($\mathbb{B}\mathbb{B}^\dagger$ negligible): $\hat{b}_\mathbf{q} = \sum_{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}}^\mathbf{q} \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{b}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} + Y_{\mathbf{k}}^\mathbf{q} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}\uparrow} \hat{b}_{-\mathbf{k}\downarrow}^\dagger$. The real coefficients $X^\mathbf{q}$ and $Y^\mathbf{q}$ are linear combinations of the corresponding $u_\mathbf{q}$ and $v_\mathbf{q}$ in Eq.(19), and inherit the normalization condition $\sum_{\mathbf{k}} (X_{\mathbf{k}}^\mathbf{q})^2 - (Y_{\mathbf{k}}^\mathbf{q})^2 = 1$. Then in a state (15) with $\theta = 0$, $\hat{\delta}_\mathbf{q} \equiv [\hat{b}_\mathbf{q}, \hat{b}_\mathbf{q}^\dagger] - \hat{1}$ has a mean value and a variance $O(\|\Lambda\|^2/N)$ since $\hat{b}_{\mathbf{k}\sigma}|\psi\rangle = O(\|\Lambda\|/N^{1/2})$ if $\|\Lambda\|/N^{1/2} \rightarrow 0$.

¹¹The good agreement with the experimental data has to be taken cautiously. If one treats the two branches to all order in $k_B T$, one gets an upward shift of $t_{br} \epsilon_F / (\hbar N^{1/2})$ more or less constant and equal to 5 over the temperature range of figure 2.

Explicit results for the unitary gas

We first estimate the blurring time for a unitary Fermi gas prepared in the canonical ensemble, that is with energy fluctuations of variance $\text{Var } E = k_B T^2 \partial_T \bar{E}$. From the equation of state of the unpolarized unitary gas measured in reference [8], and for a spatially homogeneous system (in a flat bottom potential [28]) we find the thermal blurring times t_{br} plotted as discs in figure 2. For example, at a temperature $T = 0.12 T_F \simeq 0.7 T_c$, we find $t_{\text{br}} \approx 7N^{1/2} \hbar / \varepsilon_F$ corresponding to 20 milliseconds for a typical Fermi temperature $T_F = \varepsilon_F / k_B = 1 \mu\text{K}$ and a typical atom number $N = 10^5$. As in reference [29], one can also estimate the equation of state of the unitary gas from simple dispersion relations for the elementary excitations. For the bosonic branch one takes [29] $\varepsilon_{B,\mathbf{q}} = \hbar c q$ with c the $T = 0$ sound velocity, $mc^2 = \frac{2}{3} \xi \varepsilon_F$ and ξ the Bertsch parameter. For the fermionic branch, one takes [30] $\varepsilon_{F,\mathbf{k},\sigma} = \Delta + (\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \varepsilon_0) / (2f_0)$, where Δ is the gap, and ε_0 and f_0 give the location of the minimum and the curvature of the dispersion relation. Keeping each branch contribution to its leading order at low temperature [29] and using the experimental values [8, 31] $\xi = 0.376$, $\Delta = 0.44 \varepsilon_F$, $\varepsilon_0 = 0.85 \varepsilon_F$ and the theoretical value [30] $f_0 = 0.846 \varepsilon_F$, we find (see appendix C)

$$\frac{\hbar^2 N}{(t_{\text{br}} \varepsilon_F)^2} \simeq \left(\frac{\Theta}{0.46} \right)^5 \frac{(1+2r)^2}{(1+r)} \quad [21]$$

with $\Theta = T/T_F$ and $r \simeq \left(\frac{0.316}{\Theta} \right)^{9/2} e^{-0.44/\Theta}$ the relative weight of the two excitation branches. This formula¹¹, plotted as a dashed line in figure 2, is an exact equivalent to t_{br} for $\Theta \rightarrow 0$.

At finite times¹² $t = O(N^0) \ll t_{\text{br}}$, the contribution of D to $g_1(t)$ in equation (12) is *a priori* comparable to that of t_{br}^{-2} since both scale as $1/N$ in the canonical ensemble. D can be calculated at very low temperatures keeping only the phononic part of the spectrum. As the bosonic branch [21] is convex at low q for the unitary gas, phonons interact through Landau-Beliaev processes as in the weakly interacting Bose gas and one can adapt the treatment of [18] based on kinetic equations to obtain (see appendix D)

$$\frac{\hbar N D}{\varepsilon_F} \underset{\Theta \rightarrow 0}{\sim} C \Theta^4 \quad \text{with} \quad C \simeq 0.4 \quad [22]$$

With this we reach a complete picture of the thermal blurring of the unitary Fermi gas at low temperature.

Conclusion

We have presented the first microscopic theory of the thermal blurring of the phase of a condensate of pairs of fermions (12), revealing a ballistic blurring and a subleading phase diffusion. The blurring time depends on the variance of the total energy of the gas, and on the derivative of the microcanonical chemical potential with respect to the energy. This relies on the fact that the time derivative of the condensate phase is given by the chemical potential operator of the gas, see equation (8). We have derived this central relation in a fully microscopic way, including both the bosonic and the fermionic branches of excitation. Last, we have proposed a realistic experimental protocol to measure this blurring time, that we estimated to be tens of milliseconds for a coherent gas prepared in the unitary limit in the canonical ensemble.

ACKNOWLEDGMENTS. We acknowledge support from the EU project QIBEC.

Appendix A: More on the variational calculation

Here we derive equation (20) of the time average of θ within the microscopic model based on the Ansatz (15), coherent state of moving pairs. In a first stage one should perform the expansion of the Hamiltonian \mathcal{H} treating the real quantity n and the complex field Λ as *independent* variables, that is, not fixing the value of $\|\Phi\|$. To include interactions among the quasi-particles, one must go to third order in Λ and Λ^* :

$$\mathcal{H}(\Phi, \Phi^*) = \mathcal{T}_0[n, \phi_0(N)] + \sum_{j=1}^3 \mathcal{T}_j[n, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^4) \quad [23]$$

where the tensor \mathcal{T}_j is of rank j so that $\mathcal{T}_j(\Lambda, \Lambda^*)$ is exactly of order j in Λ and Λ^* . It may be expressed in terms of the differential of order j of \mathcal{H} taken at $(\Phi, \Phi^*) = (n^{1/2} \phi_0, n^{1/2} \phi_0)$ and restricted to the subspace orthogonal to $(\phi_0, 0)$ and $(0, \phi_0)$. It does not depend on the phase θ due to $U(1)$ symmetry. For a fixed total number of particles, the energy does not vary to first order around the minimizer so that $\mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)] = 0$, which is the famous gap equation when the system is spatially homogeneous. Furthermore, one can check that $\partial_n \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] = 2\mu_0(N)$ where $\mu_0(N) = dE_0(N)/dN$ is the gas chemical potential at zero temperature, $E_0(N) = \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)]$ being the ground state energy.

The phase and the modulus square of the component of the field Φ on the mode ϕ_0 are canonically conjugate variables, so that $-\hbar d\theta/dt = \partial_n \mathcal{H}(\Phi, \Phi^*)$. Once this derivative is taken in (23) for fixed Λ and Λ^* , one can fix the norm of Φ to the value $(N/2)^{1/2}$ (that is the total particle number is fixed to N), and eliminate n through the identity $n = \|\Phi\|^2 - \|\Lambda\|^2$; the field Λ then remains the only dynamical variable of the problem. The resulting expression is useful up to order 2 in Λ, Λ^* :

$$-\hbar \frac{d\theta}{dt} = \partial_n \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] - \|\Lambda\|^2 \partial_n^2 \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] + \sum_{j=1}^2 \partial_n \mathcal{T}_j[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3) \quad [24]$$

The Hamiltonian that determines the evolution of Λ at fixed particle number is obtained by replacing n with $N/2 - \|\Lambda\|^2$ in (23) and by expanding the resulting expression up to order three in Λ, Λ^* :

$$\mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*) = E_0(N) + \tilde{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) + \mathcal{T}_3[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) - \|\Lambda\|^2 \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^4) \quad [25]$$

with the quadratic form $\tilde{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*)$ obtained by subtracting $2\mu_0(N)\|\Lambda\|^2$ from $\mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*)$. To compute the coarse grained time average of $\partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*)$, we write the temporal derivative of the imaginary part of the component of the field Λ on the function $(N/2)^{1/2} d\phi_0/dN$,

$$Y = \frac{l^6}{2i} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \frac{d\phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{dN} (\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \Lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \quad [26]$$

Since $i\hbar \partial_t \Lambda = l^{-6} \partial_{\Lambda^*} \mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*)$, one gets

$$-2\hbar \frac{dY}{dt} = \mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*) = \mathcal{D} \cdot \tilde{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) + \mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3) \quad [27]$$

¹²Still we must have $t > \tau_c$ (see note 1). For the unitary gas $\tau_c \underset{\Theta \rightarrow 0}{\simeq} (0.149/\Theta)^5$, as shown in Appendix C.

where $\mathcal{H}_N^{\text{cub}}$ is the component of \mathcal{H}_N of order three in Λ, Λ^* . We have introduced the differential operator

$$\mathcal{D} = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \frac{d\phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{dN} (\partial_{\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} + \partial_{\Lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}) \quad [28]$$

We shall now take advantage of two identities that exactly hold for all Λ orthogonal to ϕ_0 :

$$2\mathcal{D} \cdot \tilde{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) = -\partial_n \mathcal{T}_1(\Lambda, \Lambda^*) \quad [29]$$

$$2\mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda, \Lambda^*) = 2 \frac{d}{dN} \tilde{\mathcal{T}}_2(\Lambda, \Lambda^*) - \partial_n \mathcal{T}_2(\Lambda, \Lambda^*) + \|\Lambda\|^2 \partial_n^2 \mathcal{T}_0 \quad [30]$$

where all the tensors are taken at $[n = N/2, \phi_0(N)]$ or simply at N for $\tilde{\mathcal{T}}_2$. To prove these relations, one formally considers a field Φ' with $N + \delta N$ particles and determines in two different ways the quadratic expansion of $\mathcal{H}_{N+\delta N}(\Lambda', \Lambda'^*)$ in powers of Λ' and Λ'^* , where Λ' is as in (18) (written for $N + \delta N$ particles) the component of Φ' orthogonal to $\phi_0(N + \delta N)$. First, one simply replaces N with $N + \delta N$ and Λ with Λ' in (25), and then expands to first order in δN . The tensor $d\tilde{\mathcal{T}}_2/dN[N]$ naturally appears from this expansion. Second, one applies to $\mathcal{H}(\Phi', \Phi'^*)$ the expansion (23) around $\Phi_0(N)$ and takes into account the fact that, to first order in δN , the component of Φ' orthogonal to $\phi_0(N)$ contains, in addition to Λ'_\perp coming from Λ' , a contribution coming from $d\phi_0/dN$:

$$\Lambda = \delta N \left(\frac{N}{2} \right)^{1/2} \frac{d\phi_0}{dN} + \Lambda'_\perp + O(\delta N^2, \delta N \|\Lambda'\|, \|\Lambda'\|^2) \quad [31]$$

This infinitesimal shift proportional to δN along the direction of $d\phi_0/dN$ is responsible for the occurrence of the operator \mathcal{D} . Equations (29) and (30) are finally obtained by identification of the two resulting expressions of $\mathcal{H}_{N+\delta N}(\Lambda', \Lambda'^*)$ respectively to first and second order in Λ' and Λ'^* .

It remains to combine equations (24), (27), (29), and (30) after a coarse grained temporal average to obtain

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\theta^t}{dt} = \mu_0(N) + \overline{\frac{d\tilde{\mathcal{T}}_2}{dN}[N](\Lambda, \Lambda^*)} + O(\|\Lambda\|^3) \quad [32]$$

where we used the crucial property that $\overline{d\Lambda/dt^t}$ vanishes (and so does $\overline{dY/dt^t}$), since the range of variation of the field Λ is bounded. The quadratic form $\tilde{\mathcal{T}}_2[N]$ is represented by the matrix $\eta\mathcal{L}[N]$ with $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, using a block notation and the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle$ generating the norm $\|\cdot\|$:

$$\tilde{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) = \frac{1}{2} \left\langle (\Lambda, \Lambda^*), \eta\mathcal{L}[N] \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda^* \end{pmatrix} \right\rangle \quad [33]$$

Then one inserts the modal decomposition (19) in the derivative with respect to N of the equation (33); we recall that ϵ_α and (u_α, v_α) , $-\epsilon_\alpha$ and (v_α^*, u_α^*) are the eigenvalues and the eigenvectors of \mathcal{L} . The coarse grained temporal average $\overline{\quad}^t$ removes the crossed terms, and the Hellmann-Feynman theorem ensures that $\langle (u_\alpha^*, -v_\alpha^*), \frac{d\mathcal{L}[N]}{dN} \begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix} \rangle = d\epsilon_\alpha/dN$, since $(u_\alpha, -v_\alpha)$ is the dual vector of (u_α, v_α) due to $(\eta\mathcal{L})^\dagger = \eta\mathcal{L}$, and finally leads to equation (20).

Appendix B: Irrotational quantum hydrodynamics

In this supplementary section we give an additional derivation of equation (8) based on quantum hydrodynamics. Although this derivation is not microscopic contrarily to the one presented in the paper, and although it neglects the internal

fermionic degrees of freedom treating the pairs of fermions at large spatial scales as a bosonic field, it has the advantage of relying only on the equation of state and thus of being valid in all interaction regimes.

To calculate the viscosity of superfluid helium at low temperature, Landau and Khalatnikov have developed in 1949 the theory of quantum hydrodynamics [22]. It allows one to determine, to leading order in T , the effect of a non-zero temperature on the quantum fluid, at least on the observables that only involve low energy scales and large length scales. Remarkably, the only specific ingredient is the zero-temperature equation of state of the fluid, which is here the energy per unit volume $e_0(\rho)$ of the ground state of the spatially homogeneous system of density ρ .

To obtain the time derivative of the phase operator of the condensate of fermion pairs, we refine the theory in two ways: by regularizing ultraviolet divergences and by specializing to the irrotational case.

First, we solve the issue of the Landau-Khalatnikov Hamiltonian ground state energy, that diverges due to the zero-point motion of the system eigenmodes. We discretize the space in a cubic lattice of spacing l , a sub-multiple of the size L of the quantization volume, which is much smaller than the typical wavelength $2\pi/q_{\text{th}}$ of the thermal excitations of the fluid but much larger than the mean interparticle distance $\rho^{-1/3}$,

$$\rho^{-1/3} \ll l \ll q_{\text{th}}^{-1} \quad [34]$$

both conditions being compatible at sufficiently low temperature. This is in the spirit of the validity range of hydrodynamics, which relies on a spatial coarse graining, and it provides a natural cut-off for the wave vectors \mathbf{q} by restricting them to the first Brillouin zone¹³ $\mathcal{D} = [-\pi/l, \pi/l]^3$. In the Hamiltonian one must then replace the differential operators such as the gradient, the divergence and the Laplacian, by their discrete versions, as we shall implicitly do below, and introduce the bare energy density $e_{0,0}(\rho)$, which depends on the lattice spacing l . Following the ideas of renormalization, the zero-point energy of the modes, that formally diverges when $l \rightarrow 0$, adds up to $e_{0,0}(\rho)$ to exactly reconstruct the *effective* or *true* energy density $e_0(\rho)$, that does not depend on l and is what is measured experimentally.

Second, we specialize the theory to the case of an irrotational velocity field operator $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ that can then be written as the gradient of the phase field operator $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$, itself canonically conjugate to the density field operator $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$:

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \text{grad} \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \quad \text{with} \quad [\hat{\rho}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}(\mathbf{r}', t)] = i \frac{\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}{l^3} \quad [35]$$

This amounts to neglecting the transverse component of the field $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$, as done in reference [22] to determine the phonon-phonon interaction and go forward in the computation of viscosity. In the particular scale invariant case of the unitary Fermi gas, this was justified within the effective field theory in reference [23]. We note *en passant* that the density of fermionic quasi-particles is exponentially small in $1/T$ and is directly omitted by hydrodynamic theory.

¹³We also require that $mc l/\hbar > 1$, where c is the $T = 0$ sound velocity, so that the elementary excitations of the system remain phononic over the whole domain \mathcal{D} . This condition is weaker than the already assumed one, $l\rho^{1/3} \gg 1$, in the strongly interacting regime or in the BCS limit, since c is then of the order of the Fermi velocity. It must be added explicitly in the so-called BEC limit, where the fermion pairs can be considered as bosons and form a weakly interacting condensate.

The steps that follow are rather usual. One starts from the equations of motion of the fields in Heisenberg picture, that is the quantum continuity equation and the quantum Euler equation for the potential (whose gradient gives the quantum Euler equation for the velocity):

$$\partial_t \hat{\rho} + \text{div} \left[\frac{1}{2} \{ \hat{\rho}, \hat{\mathbf{v}} \} \right] = 0 \quad [36]$$

$$\hbar \partial_t \hat{\phi} = -\frac{1}{2} m \hat{\mathbf{v}}^2 - \mu_{0,0}(\hat{\rho}) \quad [37]$$

where $\{ \hat{A}, \hat{B} \} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ is the anticommutator of two operators and

$$\mu_{0,0}(\rho) = \frac{d}{d\rho} e_{0,0}(\rho) = e'_{0,0}(\rho) \quad [38]$$

is the bare ground state chemical potential at density ρ . These equations originate from the Hamiltonian

$$\hat{H}_{\text{hydro}} = l^3 \sum_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{2} m \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}} + e_{0,0}(\hat{\rho}) \right] \quad [39]$$

The quantum spatial density and phase fluctuations are weak provided that $\rho^{1/3}l$ is large enough; the thermal ones are weak if in addition $q_{\text{th}}l$ is small enough¹⁴. Under these conditions one can linearize as in [22] the equations of motion around the spatially uniform solution:

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \hat{\rho}_0 + \delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) \quad [40]$$

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\phi}_0(t) + \delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \quad [41]$$

The operator $\hat{\rho}_0$ reduces to \hat{N}/L^3 , where \hat{N} is the operator giving the total number of particles, and is a constant of motion. The operator $\hat{\phi}_0$ is the phase operator of the condensate; one has here

$$\hat{\phi}_0 = \hat{\theta}_0/2 \quad [42]$$

since the phase operator $\hat{\theta}_0$ in equation (2) takes the pairs as the building block, whereas equations (36,37) are built on the fermionic particles. The spatial fluctuations $\delta\hat{\rho}$ and $\delta\hat{\phi}$, of vanishing (discrete) integral over the whole space, can be expanded on the plane waves of non-zero wave vector \mathbf{q} , and commute with $\hat{\rho}_0$. One solves the linearized equations for $\delta\hat{\rho}$ and $\delta\hat{\phi}$ and one can use the usual expansion on eigenmodes:

$$\delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\rho}_0^{1/2}}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^{3*} \cap \mathcal{D}} \left(\frac{\hbar q}{2m\hat{c}_{0,0}} \right)^{1/2} (\hat{B}_{\mathbf{q}} + \hat{B}_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad [43]$$

$$\delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{-i}{\hat{\rho}_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^{3*} \cap \mathcal{D}} \left(\frac{m\hat{c}_{0,0}}{2\hbar q} \right)^{1/2} (\hat{B}_{\mathbf{q}} - \hat{B}_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \quad [44]$$

where the creation operator $\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger$ and the annihilation operator $\hat{B}_{\mathbf{q}}$ of a phonon with wave vector \mathbf{q} and energy $\hbar q \hat{c}_{0,0}$ obey bosonic commutation relations $[\hat{B}_{\mathbf{q}}, \hat{B}_{\mathbf{q}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'}$ and where we introduced the zero-temperature bare sound velocity operator

$$\hat{c}_{0,0} \equiv \left(\frac{\hat{\rho}_0 \mu'_{0,0}(\hat{\rho}_0)}{m} \right)^{1/2} \quad [45]$$

It remains to expand the right-hand side of (37) up to second order in $\delta\hat{\rho}$ and $\delta\hat{\theta}$, to extract the zero wave vector Fourier component, to perform a coarse grained temporal average to get rid of the oscillating crossed terms $\hat{B}_{\mathbf{q}}\hat{B}_{-\mathbf{q}}$ and $\hat{B}_{-\mathbf{q}}^\dagger\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger$, and to use the identity

$$\frac{d}{d\rho} [\rho \mu'_{0,0}(\rho)]^{1/2} = \frac{\mu'_{0,0}(\rho) + \rho \mu''_{0,0}(\rho)}{2[\rho \mu'_{0,0}(\rho)]^{1/2}} \quad [46]$$

to obtain

$$\hbar \frac{d}{dt} \hat{\phi}_0 = -\mu_{0,0}(\hat{\rho}_0) - \sum_{\mathbf{q} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^{3*} \cap \mathcal{D}} \left(\hbar q \frac{d}{d\hat{N}} \hat{c}_{0,0} \right) \left(\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \right) \quad [47]$$

At this order of the expansion, one can collect in (47) the zero-point contribution of the modes (the term $1/2$ in between parentheses) and the bare chemical potential $\mu_{0,0}(\hat{\rho}_0)$ to form the true chemical potential $\mu_0(\hat{\rho}_0)$ of the fluid at zero temperature, and one can identify $\hat{c}_{0,0}$ in the prefactor of the phonon number operator $\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{q}}$ with the true sound velocity at zero temperature, $\hat{c}_0 \equiv [\hat{\rho}_0 \mu'_0(\hat{\rho}_0)/m]^{1/2}$. One then obtains the (low temperature) phononic limit of relation (8), without any constraint on the interaction strength.

Appendix C: Thermodynamics of non interacting quasi particles, application to the unitary gas

In this supplementary section we explain how to obtain the approximated expression (21) giving the blurring time of the unpolarized unitary Fermi gas, prepared in thermal equilibrium in the canonical ensemble. The gas is here spatially homogeneous in a cubic quantization volume $V = L^3$ with periodic boundary conditions. The approach we shall use is a variant of the one used in reference [29] and it requires that the temperature is sufficiently low.

Effective Hamiltonian at low energy: At low energy we expect that the partition function and the thermodynamic quantities of the gas can be deduced with good accuracy from an effective low energy Hamiltonian

$$H_{\text{eff}} = E_0(N, V) + \sum_{\gamma} \epsilon_{\gamma}(N, V) \hat{b}_{\gamma}^\dagger \hat{b}_{\gamma} \quad [48]$$

where N is the total number of particles in the gas, $E_0(N, V)$ is its ground state energy in the quantization volume V , and the excited energy levels are those of an ideal gas of quasi-particles whose creation and annihilation operators are \hat{b}_{γ}^\dagger and \hat{b}_{γ} and whose dispersion relation $\gamma \mapsto \epsilon_{\gamma}(N, V)$ depends on N and V , but not on the temperature.

We do not need at this stage to specify the ensemble of variation of the index γ and the quantum statistics (bosonic or fermionic) of the operators \hat{b}_{γ} , nor the dispersion relation. In practice the index γ will represent a composite index (B, \mathbf{q}) or (F, \mathbf{k}, σ) , \mathbf{q} or \mathbf{k} being the quasi-particle wave vector, $\sigma = \pm 1/2$ is a spin index, and $s \in \{B, F\}$ labels the excitation branch which is bosonic (with a phononic start at $q \rightarrow 0$) or fermionic (displaying an energy gap and varying quadratically with k around its minimum).

Going back to the canonical ensemble: The expression (13) involves the microcanonical chemical potential $\mu_{\text{mc}}(N, V, E)$ and its derivative with respect to the total energy E . In the limit of a large system however, the microcanonical and canonical chemical potentials can be identified provided the two ensembles have the same mean energy, that is the canonical mean energy $E_{\text{can}}(N, V, T)$ for a well chosen temperature T coincides with the energy E of the microcanonical

¹⁴ One first checks that the density fluctuations on a given lattice site are small in relative value, using (43). At $T = 0$, $\langle \delta\hat{\rho}^2 \rangle / \rho^2 \approx \frac{\hbar}{mcl} \frac{1}{\rho l^3} \ll 1$, using (34) and the note 13. At $T > 0$,

there is the additional thermal contribution $\approx \frac{\hbar}{mcl} \frac{(k_{\text{th}} l)^4}{\rho l^3}$ which is $\ll 1$ for the same reasons. Second, one checks that the phase fluctuations between two neighboring lattice sites are small in absolute value. To this end, one notes from (44) that $l^2 \langle (\mathbf{grad} \delta\hat{\theta})^2 \rangle = (mcl/\hbar)^2 \langle \delta\hat{\rho}^2 \rangle / \rho^2$. To conclude, it remains to use $mc/(\hbar\rho^{1/3}) = O(1)$, a property that holds in the whole BEC-BCS crossover, as well as the previous estimates of $\langle \delta\hat{\rho}^2 \rangle / \rho^2$.

ensemble [12]:

$$\mu_{\text{mc}}(N, V, E_{\text{can}}(N, V, T)) \simeq \mu_{\text{can}}(N, V, T) \quad [49]$$

By taking the derivative with respect to T , one then obtains

$$\partial_E \mu_{\text{mc}}(N, V, E_{\text{can}}(N, V, T)) \simeq \frac{\partial_T \mu_{\text{can}}(N, V, T)}{\partial_T E_{\text{can}}(N, V, T)} \quad [50]$$

The free energy and its derivatives: The partition function of the effective Hamiltonian in the canonical ensemble at temperature T is simply given by

$$Z = e^{-\beta E_0} \prod_{\gamma} \sum_{\{n_{\gamma}\}} e^{-\beta n_{\gamma} \epsilon_{\gamma}} \quad [51]$$

where $\beta = 1/(k_B T)$ and where the occupation numbers n_{γ} vary in the ensemble $\{0, 1\}$ for the Fermi statistics and in that of the natural integers \mathbb{N} for the Bose statistics. The free energy $F = -k_B T \ln Z$ can then be written as

$$F = E_0 - k_B T \sum_{\gamma} \ln \left(\sum_{\{n_{\gamma}\}} e^{-\beta n_{\gamma} \epsilon_{\gamma}} \right) \quad [52]$$

By taking the derivative of F with respect to the temperature or the number of particles, one obtains the mean energy, the energy variance and the chemical potential of the gas in the canonical ensemble:

$$E_{\text{can}} = \partial_{\beta}(\beta F) = E_0 + \sum_{\gamma} \epsilon_{\gamma} \bar{n}_{\gamma} \quad [53]$$

$$\text{Var}_{\text{can}} E = k_B T^2 \partial_T E_{\text{can}} \quad [54]$$

$$\mu_{\text{can}} = \partial_N F = \mu_0 + \sum_{\gamma} (\partial_N \epsilon_{\gamma}) \bar{n}_{\gamma} \quad [55]$$

where

$$\mu_0 \equiv \partial_N E_0 \quad [56]$$

is the chemical potential of the gas at zero temperature, that is in the absence of quasi-particles, and where

$$\bar{n}_{\gamma} \equiv \frac{\sum_{\{n_{\gamma}\}} n_{\gamma} e^{-\beta n_{\gamma} \epsilon_{\gamma}}}{\sum_{\{n_{\gamma}\}} e^{-\beta n_{\gamma} \epsilon_{\gamma}}} \quad [57]$$

is the mean number of quasi-particles in the mode γ following the Bose or Fermi-Dirac distribution. We have now at hand all the useful expressions to determine the blurring time t_{br} in equation (13) when the Fermi gas is prepared in the canonical ensemble.

Dispersion relations: The idea is reduce the dispersion relations of the two excitation branches, that are not known exactly, to their essential feature at low temperature. The *bosonic branch* is reduced to its phononic start at $q \rightarrow 0$, *i.e.* we take a linear dispersion relation corresponding to the sound velocity c of the zero temperature gas,

$$\epsilon_{B, \mathbf{q}} \simeq \hbar c q \quad [58]$$

the cutoff at large q being ensured by the Bose law $\bar{n}_{B, \mathbf{q}} \simeq [\exp(\beta \hbar c q) - 1]^{-1}$. In the thermodynamic limit, the mean phonon energy and its derivative with respect to T are then given by

$$E_{B, \text{can}} = \frac{\pi^2}{30} V \frac{(k_B T)^4}{(\hbar c)^3} \quad [59]$$

$$\partial_T E_{B, \text{can}} = \frac{2\pi^2}{15} V \frac{k_B (k_B T)^3}{(\hbar c)^3} \quad [60]$$

The sound velocity and the contribution $\mu_{B, \text{can}}$ of the phonons to the gas chemical potential can be obtained very simply at the unitary limit. Indeed, due to scaling invariance, the zero temperature equation of state reduces to $\mu_0 = \xi \varepsilon_F$, where the Bertsch parameter ξ , a number, has been precisely measured [8], and

$$\varepsilon_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(3\pi^2 \frac{N}{V} \right)^{2/3} \quad [61]$$

is the Fermi energy of an ideal unpolarized gas of spin 1/2 fermions with the same total density $\rho = N/V$ as the unitary gas, m being the mass of a fermion. Then the exact hydrodynamic relation $mc^2 = \rho \frac{d}{d\rho} \mu_0$ simplifies into $mc^2 = \frac{2}{3} \mu_0$ and c varies as $\rho^{1/3}$, so that $\partial_N \epsilon_{B, \mathbf{q}} = \epsilon_{B, \mathbf{q}} / (3N)$ in equation (55) and

$$\mu_{B, \text{can}} = \frac{1}{3N} E_{B, \text{can}} \quad [62]$$

$$\partial_T \mu_{B, \text{can}} = \frac{1}{3N} \partial_T E_{B, \text{can}} \quad [63]$$

The *fermionic branch* at unitarity has a minimum, the gap Δ , for $k = k_0$, around which it varies quadratically [30], which should be a sufficient description at low temperature, as the dominant contribution to the free energy and to its derivatives should come from a neighbourhood of this minimum. We then take as in reference [30]

$$\epsilon_{F, \mathbf{k}, \sigma} \simeq \epsilon_{\mathbf{k}} \equiv \Delta + \frac{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \right)^2}{2f_0} \quad [64]$$

where we recall that $\sigma = \pm 1/2$. The values of the parameters Δ and k_0 have been measured [31], while the curvature parameter f_0 has only been estimated theoretically [30].

According to equation (53), the mean energy corresponding to fermionic quasi-particles in the thermodynamic limit is

$$E_{F, \text{can}} = 2V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}}{e^{\beta \epsilon_{\mathbf{k}}} + 1} \quad [65]$$

To leading order in temperature, one can neglect the 1 with respect to $\exp(\beta \epsilon_{\mathbf{k}}) \geq \exp(\Delta/k_B T) \gg 1$ in the denominator, making an exponentially small error when $T \rightarrow 0$; within the same order of approximation, after integrating over the direction of \mathbf{k} , one can extend the integration over the modulus k to the whole real axis, using (64) for all $k \in \mathbb{R}$. This gives

$$E_{F, \text{can}} \simeq \frac{V e^{-\beta \Delta}}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}} dk k^2 \epsilon_{\mathbf{k}} e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \Delta)} \quad [66]$$

where we made evident the activation law associated to the width Δ of the energy gap. When $T \rightarrow 0$, the Boltzmann factor $e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \Delta)}$ gets more and more peaked around its maximum, reached in $k = k_0$ and of value 1, with a width in k that goes to zero as $T^{1/2}$. One then makes an error that is polynomial in T (more precisely, it is a linear combination of $k_B T / \Delta$ and $m^2 k_B T f_0 / (\hbar^2 k_0^2)^2$) when one replaces the prefactor by its leading approximation, $k^2 \epsilon_{\mathbf{k}} \simeq k_0^2 \Delta$, and when one quadratizes the dispersion relation in the exponential:

$$\epsilon_{\mathbf{k}} - \Delta \simeq \frac{1}{2f_0} \left[\frac{\hbar^2 k_0 (k - k_0)}{m} \right]^2 \quad [67]$$

It is then simple to perform the resulting Gaussian integral, and to calculate the derivative of the result with respect to

T to leading order, that is here by differentiating only the activation factor $\exp(-\beta\Delta)$:

$$E_{F,\text{can}} \simeq \frac{V}{\pi^2} \frac{mk_0}{\hbar^2} (2\pi f_0 k_B T)^{1/2} \Delta e^{-\beta\Delta} \quad [68]$$

$$\partial_T E_{F,\text{can}} \simeq \frac{\Delta}{k_B T^2} E_{F,\text{can}} \quad [69]$$

Again for the spectrum (64), the fermionic quasi-particles contribution to the chemical potential in the thermodynamic limit is, according to equation (55),

$$\mu_{F,\text{can}} = 2V \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\partial_N \epsilon_{\mathbf{k}}}{e^{\beta\epsilon_{\mathbf{k}}} + 1} \quad [70]$$

As we have just seen, for $T \rightarrow 0$ we are led to approximate $\partial_N \epsilon_{\mathbf{k}}$ with $\partial_N \Delta$ in the prefactor of the thermal occupation number. Considering the scale invariance of the unitary gas, which imposes $\Delta \propto \rho^{2/3}$, we immediately obtain to leading order in T :

$$\mu_{F,\text{can}} \simeq \frac{2}{3N} E_{F,\text{can}} \quad [71]$$

$$\partial_T \mu_{F,\text{can}} \simeq \frac{2}{3N} \partial_T E_{F,\text{can}} \quad [72]$$

In terms of the ratio r : One obtains a relatively simple expression of the blurring time by introducing the dimensionless ratio r between the contributions of the bosonic and the fermionic branch to $\partial_T E_{\text{can}}$, that is to the denominator of the right hand side of equation (50):

$$r \equiv \frac{\partial_T E_{F,\text{can}}}{\partial_T E_{B,\text{can}}} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{10(2\pi)^{1/2}}{3^{1/2}\pi^4} \frac{\epsilon_0^{1/2} f_0^{1/2} \mu_0^{3/2} \Delta^2}{(k_B T)^{9/2}} e^{-\beta\Delta} \quad [73]$$

where we introduced $\epsilon_0 = \hbar^2 k_0^2 / (2m)$ and we used equations (60,69). By replacing the parameters with their approximated values given just above equation (21), one obtains the expression of r given below this same equation. Thanks to the scale invariance of the unitary gas, the ratio between the bosonic and the fermionic contributions to $\partial_T \mu_{\text{can}}$ is simply related to r at low temperature, see equations (63,72):

$$\frac{\partial_T \mu_{F,\text{can}}}{\partial_T \mu_{B,\text{can}}} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{\frac{2}{3N} \partial_T E_{F,\text{can}}}{\frac{1}{3N} \partial_T E_{B,\text{can}}} = 2r \quad [74]$$

so that one arrives at the approximation

$$\frac{N \partial_T \mu_{\text{can}}}{\partial_T E_{\text{can}}} \simeq \frac{1 + 2r}{3(1 + r)} \quad [75]$$

where μ_{can} is the full chemical potential of the gas and E_{can} its total mean energy when it is prepared in the canonical ensemble. One easily obtains the energy variance by using the general relation (54) and (61) to eliminate the volume V :

$$\frac{1}{N} \text{Var}_{\text{can}} E \simeq \frac{3^{3/2} \pi^4}{20} (1 + r) \frac{(k_B T)^5}{\epsilon_F^{3/2} \mu_0^{3/2}} \quad [76]$$

Last, one has to combine these relations with the identity $(2t_{\text{br}}/\hbar)^{-2} = \left(\frac{\partial_T \mu_{\text{can}}}{\partial_T E_{\text{can}}}\right)^2 \text{Var}_{\text{can}} E$ which follows from the equations (13,50), to finally obtain

$$\frac{N \hbar^2}{(\epsilon_F t_{\text{br}})^2} \simeq \frac{3^{3/2} \pi^4}{45} \frac{(1 + 2r)^2}{(1 + r)} \left(\frac{\epsilon_F}{\mu_0}\right)^{3/2} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F}\right)^5 \quad [77]$$

from which equation (21) which we wanted to justify, is obtained by simple numerical substitution.

Appendix D: phase diffusion coefficient of the unitary

Fermi gas at low temperature

This supplementary section explains how to obtain the expression (22) of the diffusion coefficient $D(E, N)$ of the condensate phase in a spatially homogeneous unpolarized spin 1/2 unitary Fermi gas prepared in the microcanonical ensemble. We start from equation (10) and compute the right-hand-side by a straightforward adaptation of the kinetic equations approach of reference [18]. This adaptation consists mainly in a rescaling of the wave vectors, of the excitation spectrum and of the Beliaev-Landau scattering amplitudes.

Principle of the computation of D from kinetic equations: Let us first recall why $\gamma_\lambda = D(E_\lambda, N_\lambda)$ as it is expressed in (10) can be obtained from kinetic equations, as done in detail in reference [18]. Replacing the derivative of the phase by its coarse grained average (8) yields time integrals of the quasi-particles occupation numbers $\hat{n}_{s,\alpha}$ correlation functions. When the quasi-particles are weakly interacting, the state of the system at time zero can be seen as a microcanonical statistical mixture of Fock states $|(n_{s,\alpha})\rangle$ of quasi-particles with well-defined integer occupation numbers $n_{s,\alpha}$. All one needs is then to determine the correlation functions¹⁵

$$\begin{aligned} & \langle (n_{s,\alpha}) | \hat{n}_{s_2,\alpha_2}(t) \hat{n}_{s_1,\alpha_1}(0) | (n_{s,\alpha}) \rangle = \\ & \langle (n_{s,\alpha}) | \hat{n}_{s_2,\alpha_2}(t) | (n_{s,\alpha}) \rangle n_{s_1,\alpha_1}(0) \quad [78] \end{aligned}$$

hence the evolution of the mean quasi-particle number in each mode when the interactions among them are taken into account. This is exactly the purpose of kinetic equations. In a typical initial configuration, the occupation numbers $(n_{s,\alpha})$ are in practice very close to their microcanonical mean value $(\bar{n}_{s,\alpha})$, where $\bar{n}_{s,\alpha} = \langle \hat{n}_{s,\alpha} \rangle$, and $\langle \dots \rangle$ is the microcanonical average, and the kinetic equations can therefore be linearized around the set of $\bar{n}_{s,\alpha}$. After performing the average over the initial Fock states, we obtain the system

$$\frac{d\vec{X}(t)}{dt} = M\vec{X}(t) \quad [79]$$

where M is the matrix of the linearized kinetic equations restricted to the subspace $\delta E = 0$ of zero energy fluctuation (that is the subspace of vectors \vec{x} satisfying $\vec{\epsilon} \cdot \vec{x} = 0$, with $\vec{\epsilon}$ the vector of coordinates of the energies $(\epsilon_{s,\alpha})$) and the unknown vector $\vec{X}(t)$ contains the correlation functions

$$\begin{aligned} X_{s,\alpha}(t) & \equiv \langle (\hat{n}_{s,\alpha}(t) - \bar{n}_{s,\alpha}) \left[-\frac{d\hat{\theta}_0}{dt}(0) \right] \rangle \\ & = \sum_{s',\alpha'} A_{s',\alpha'} \langle (\hat{n}_{s,\alpha}(t) - \bar{n}_{s,\alpha}) (\hat{n}_{s',\alpha'}(0) - \bar{n}_{s',\alpha'}) \rangle \quad [80] \end{aligned}$$

Here \vec{A} is the vector whose coordinates are the coefficients of $\hat{n}_{s,\alpha}$ in $-\frac{d\hat{\theta}_0}{dt}$, that is, from equation (8)¹⁶:

$$A_{s,\alpha} = \frac{2}{\hbar} \frac{d}{dN} \epsilon_{s,\alpha} \quad [81]$$

¹⁵ At this level of approximation, $\delta_\lambda = 0$ in equation (10), since the correlation function in (78) is real.

¹⁶ Equation (8) has a factor 2 with respect to its equivalent (2) in [18], hence the factor 2 in the numerator of $A_{s,\alpha}$. Since $\vec{X}(0)$ is a linear function of \vec{A} , see (80), this leads in turn to a factor 4 in D .

The computation of the initial value $\vec{X}(0)$ is done in details in reference [18] and will be sketched later on. The phase diffusion coefficient D follows from $\vec{X}(t)$ by a time integration :

$$D = \int_0^{+\infty} dt \vec{A} \cdot \vec{X}(t) = -(P\vec{A}) \cdot M^{-1} \vec{X}(0) \quad [82]$$

The projector P , hermitian conjugate of the projector onto the zero energy fluctuation subspace¹⁷, subtracts the component parallel to the energy vector $\vec{\epsilon}$, *i.e.* $P\vec{\epsilon} = \vec{0}$. We act with it on \vec{A} in (82) when a multiplication by the matrix M^{-1} defined only in the sub-space $\delta E = 0$ occurs. Such a precaution is unnecessary for $\vec{X}(0)$ since by construction $\vec{\epsilon} \cdot \vec{X}(0) = 0$ in the microcanonical ensemble¹⁸.

Importance of the curvature of the excitation spectrum: We now consider a gas of fermions prepared in the microcanonical ensemble at an arbitrarily small yet non zero temperature T . We can then neglect the fermionic branch of excitations and limit ourselves to the region of arbitrarily small wave vectors q of the bosonic one. This is the validity range of Landau and Khalatnikov’s quantum hydrodynamics (see our supplementary information) which we shall use. A physically interesting point, already mentioned by Landau and Khalatnikov in their calculation of the viscosity of Helium III [22], is that taking a linear approximation for the excitation spectrum leads to wrong conclusions. Indeed, even to leading order in T the result does depend on the dimensionless curvature parameter γ defined as

$$\epsilon_{B,\mathbf{q}} \underset{\hbar q/(mc) \rightarrow 0}{=} \hbar c q + \frac{\gamma \hbar^3 q^3}{8m^2 c} + O(q^5) \quad [83]$$

where c is the zero temperature sound velocity and m the mass of a fermion. The role of γ is double: First, its sign distinguishes between two worlds in the formalism of the kinetic equations: when $\gamma > 0$ the bosonic quasi-particles interaction processes of the type $2 \rightarrow 1$ or $1 \rightarrow 2$ (two quasi-particles disappear and a new one is formed, or the other way around, see figure 3) dominate at low temperature whereas they are forbidden by energy conservation when $\gamma < 0$ and the $2 \rightarrow 2$ processes take over. Second, the absolute value of γ also matters as suggested by the result of reference [22] for the viscosity which depends on $|\gamma|$ even to leading order in T . We expect a similar behavior for D : with a bosonic branch linear in q ,

we are condemned to have $-\frac{\hbar}{2} \frac{d\hat{\epsilon}_0}{dt} - \mu_0(\hat{N})$ [in (8) and limited to the bosonic branch $s = \hat{B}$] proportional to the energy of the quasi-particles $\sum_{\mathbf{q}} \epsilon_{B,\mathbf{q}} \hat{n}_{B,\mathbf{q}}$, a constant of motion for the kinetic equations, hence not subject to diffusion. We thus expect the phase diffusion coefficient to vanish, $D \rightarrow 0$, in the limit of a spectrum with zero curvature¹⁹.

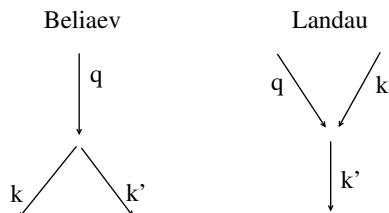


Fig. 3. Bosonic quasi-particles interaction processes $1 \rightarrow 2$ (Beliaev) and $2 \rightarrow 1$ (Landau) involving wave vectors \mathbf{q} , \mathbf{k} and \mathbf{k}' , with $\mathbf{k}' = \mathbf{q} - \mathbf{k}$ and $\mathbf{k}' = \mathbf{q} + \mathbf{k}$ respectively.

Kinetic equations for the unitary gas at low temperature: At unitarity, the numerical calculation of the bosonic excitation spectrum according to the equation of reference [21] yields a curvature parameter γ which, thanks to scale invariance, is a pure number independent of the density of the gas:

$$\gamma \simeq 0.1 \quad [84]$$

Since $\gamma > 0$ the bosonic branch is convex in the vicinity of $\mathbf{q} = \mathbf{0}$, and we can focus on $2 \rightarrow 1$ and $1 \rightarrow 2$ quasi-particle interaction processes. Qualitatively the situation is then similar to that of a weakly interacting Bose gas, and so should be the kinetic equations. Quantitatively however there are some differences: the dispersion relation $\mathbf{q} \mapsto \epsilon_{B,\mathbf{q}}$ is not the same, nor are the dimensionless Landau-Beliaev scattering amplitudes $\mathcal{A}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{\mathbf{q}}$ that appear in the Hamiltonian describing to lowest order the interactions between the quasi-particles:

$$H_{2 \leftrightarrow 1} = \frac{mc^2}{(\rho L^3)^{1/2}} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2 \neq \mathbf{0}} \mathcal{A}_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}^{\mathbf{q}} \delta_{\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2, \mathbf{q}} \left[\hat{b}_{\mathbf{k}_1}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}_2}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}} + \text{h.c.} \right] \quad [85]$$

where ρ is the total density, L^3 the volume of the quantization box and the Kronecker δ ensures momentum conservation. Despite these differences however, the low temperature limit

$$\varepsilon \equiv \frac{k_B T}{mc^2} \ll 1 \quad [86]$$

is universal, meaning that it does not depend on the microscopic details of the physical system, since the wave vectors appearing in the kinetic equation have a small typical thermal value

$$q_{\text{therm}} \approx \frac{k_B T}{\hbar c} = \varepsilon \frac{mc}{\hbar} \ll \frac{mc}{\hbar} \quad [87]$$

Let us explain in two steps why and how this universal limit for D is obtained.

Limit of the matrix M when $\varepsilon \rightarrow 0$: First, one can artificially rewrite (83) in a way that mimics the Bogoliubov form (the true Bogoliubov spectrum is obtained setting $\gamma = 1$) and which is valid up to order 3 in $\hbar q/(mc)$:

$$\epsilon_{B,\mathbf{q}} \simeq \left[\frac{\hbar^2 q^2}{2m} \left(2mc^2 + \frac{\gamma \hbar^2 q^2}{2m} \right) \right]^{1/2} \quad [88]$$

At the thermodynamic limit, the kinetic equation of the time derivative of the mean number of quasi-particles of wave vector \mathbf{q} contains an integral over the wave vectors \mathbf{k}_1 and \mathbf{k}_2 involved in the corresponding $2 \leftrightarrow 1$ processes (see figure 3). Integrating over one of those wave vectors, say \mathbf{k}' , is straightforward thanks to the momentum conservation Dirac δ . Integrating over the angle between \mathbf{q} and the remaining wave vector \mathbf{k} is harder, but can be done analytically for the Bogoliubov spectrum thanks to the energy conservation Dirac δ [18]. This calculation, which yields k' as a function of k and q , can be recycled here by simply adapting it to the Bogoliubov-like spectrum (88)²⁰. Using the rotational invariance of the unknowns $X_{B,\mathbf{q}}(t)$ there remains a one dimensional integral over the wave vector k .

¹⁷Careful, these are not orthogonal projectors, see equation (41) of reference [18].

¹⁸This is actually true at all times $\vec{\epsilon} \cdot \vec{X}(t) = 0, \forall t > 0$, since the energy is conserved by the kinetic equations.

¹⁹Mathematically, this results from the fact that $P\vec{A} = 0$ in (82) since \vec{A} is then colinear to $\vec{\epsilon}$.

²⁰This amounts to replacing $1 + \tilde{k}'^2$ by $1 + \gamma \tilde{k}'^2$ and $1 + \tilde{k}^2$ by $1 + \gamma \tilde{k}^2$ in the denominators of equations (A9) and (A10) of reference [18]. Equation (A10) and (A11) of the same reference are also changed to $\gamma \tilde{k}'^2 = \sqrt{1 + \gamma(\tilde{\epsilon}_q + \tilde{\epsilon}_k)^2} - 1$ and $\gamma \tilde{k}^2 = \sqrt{1 + \gamma(\tilde{\epsilon}_k - \tilde{\epsilon}_q)^2} - 1$. We have introduced the rescalings $\tilde{k} = \hbar k / (\sqrt{2}mc)$ and $\tilde{\epsilon}_k = \epsilon_{B,\mathbf{k}} / (mc^2)$.

²¹Our rescaling procedure mainly amounts to replacing ρg by mc^2 in [18] since in a weakly interacting Bose gas, $mc^2 = \rho g$ where g is the s -wave coupling constant.

Second, the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ is taken in the kinetic equation after rescaling the wave vectors to their typical thermal value:

$$\tilde{q} \equiv \frac{\hbar qc}{\sqrt{2}k_B T} \quad [89]$$

and the time t to the inverse of the typical collision rate between quasi-particles:

$$\tilde{t} \equiv \varepsilon^5 \left(\frac{\sqrt{2}mc}{\hbar} \right)^3 \frac{mc^2}{2\pi^2 \hbar \rho} t \quad [90]$$

The dimensionless rescaled quantities \tilde{q} , \tilde{k} and \tilde{t} are kept constant when taking the limit. Definitions (89) and (90) are consistent with equations (D4,A5,A7) of reference [18], up to the inclusion of a trivial ε^5 factor in \tilde{t} . Similarly the definition (86) is consistent with equation (D1) of the same reference²¹. Doing so, we find that the dependence on the curvature parameter γ disappears from the coefficients of the kinetic equations, hence from M . To leading order in ε , only the sign γ matters (it allows resonant $2 \leftrightarrow 1$ processes) not its absolute value. In particular, as shown by expanding the quantum hydrodynamic Hamiltonian (39) up to order three in density (43) and phase (44) fluctuations, the scattering amplitudes for the unitary gas have an equivalent independent of γ :

$$A_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}^{\mathbf{q}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{3(1+\Lambda)}{2^{7/4}} \varepsilon^{3/2} (\tilde{q}\tilde{k}\tilde{k}')^{1/2} \quad [91]$$

$$A_{\mathbf{k},\mathbf{q}}^{\mathbf{k}'} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} \frac{3(1+\Lambda)}{2^{7/4}} \varepsilon^{3/2} (\tilde{q}\tilde{k}\tilde{k}')^{1/2}, \quad [92]$$

Momentum and energy conservation lead to $\tilde{k}' = \tilde{q} - \tilde{k}$ in the right-hand-side of (91) and to $\tilde{k}' = \tilde{q} + \tilde{k}$ in the right-hand-side of (92). In other words, at low energy the only resonant $2 \leftrightarrow 1$ scattering processes are those where the three wave vectors are almost colinear. We have introduced

$$\Lambda = \frac{\rho \mu_0''(\rho)}{3\mu_0'(\rho)} \quad [93]$$

where $\mu_0(\rho)$ is the zero temperature chemical potential, such that $mc^2 = \rho \mu_0'(\rho)$. Here $\Lambda = -1/9$ since the scale invariance of the unitary gas leads to $\mu_0(\rho) \propto \rho^{2/3}$. For a weakly interacting Bose gas, $\mu_0(\rho) \propto \rho$, hence $\Lambda = 0$ and equations (91,92) reproduce equations (D8) and (D9) of reference [18], as they should. Altogether this leads to the kinetic equations for the correlation functions (80) by introducing the notations $X_{B,\mathbf{q}}(t) \equiv X_{\tilde{q}}(\tilde{t})$ and $\bar{n}_{B,\mathbf{q}} \equiv \bar{n}_{\tilde{q}}$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tilde{t}} X_{\tilde{q}} &= -(\tilde{\Gamma}_{\tilde{q}}^{(B)} + \tilde{\Gamma}_{\tilde{q}}^{(L)}) X_{\tilde{q}} + \frac{9\pi}{4} (1+\Lambda)^2 \left[\int_0^{+\infty} d\tilde{k} \tilde{k}^2 (\tilde{q} + \tilde{k})^2 \right. \\ &\times (\bar{n}_{\tilde{k}+\tilde{q}} - \bar{n}_{\tilde{q}}) X_{\tilde{k}} + \int_{\tilde{q}}^{+\infty} d\tilde{k} \tilde{k}^2 (\tilde{q} - \tilde{k})^2 (1 + \bar{n}_{\tilde{k}-\tilde{q}} + \bar{n}_{\tilde{q}}) X_{\tilde{k}} \\ &\left. + \int_0^{\tilde{q}} d\tilde{k} \tilde{k}^2 (\tilde{q} - \tilde{k})^2 (\bar{n}_{\tilde{q}-\tilde{k}} - \bar{n}_{\tilde{q}}) X_{\tilde{k}} \right] \quad [94] \end{aligned}$$

where

$$\tilde{\Gamma}_{\tilde{q}}^{(B)} = \frac{9\pi}{8} (1+\Lambda)^2 \int_0^{\tilde{q}} d\tilde{k} \tilde{k}^2 (\tilde{q} - \tilde{k})^2 (1 + \bar{n}_{\tilde{k}} + \bar{n}_{\tilde{q}-\tilde{k}}) \quad [95]$$

$$\tilde{\Gamma}_{\tilde{q}}^{(L)} = \frac{9\pi}{4} (1+\Lambda)^2 \int_0^{+\infty} d\tilde{k} \tilde{k}^2 (\tilde{q} + \tilde{k})^2 (\bar{n}_{\tilde{k}} - \bar{n}_{\tilde{k}+\tilde{q}}), \quad [96]$$

that with we successfully compare to (D10,D11,D12) of reference [18]. Note that we have obtained the Beliaev-Landau

decay rates $\tilde{\Gamma}_{\tilde{q}}^{(B)}$ and $\tilde{\Gamma}_{\tilde{q}}^{(L)}$ of the quasi-particle of wave vector \mathbf{q} . They are dimensionless and rescaled according to (90).

Limit of $\vec{X}(0)$ and $P\vec{A}$ and behaviour of D when $\varepsilon \rightarrow 0$: To leading order in ε , the curvature parameter γ only appears in the initial value $\vec{X}(0)$ of the unknown vector and in the projection $P\vec{A}$ of the coefficient vector, see (82). These two quantities are in fact proportional to γ . The initial value $\vec{X}(0)$ is obtained by acting with the microcanonical quasi-particle numbers covariance matrix on the vector \vec{A} of equation (81). This covariance matrix appearing in (80) is derived by applying the projector onto the zero energy fluctuation subspace and its hermitian conjugate to the well-known canonical covariance matrix, see equations (21,41,47,48,49) of reference [18] for the derivation and equation (43) of the same reference setting $\eta = 0$ for the final result. The parameter γ appears in the coordinates of \vec{A} , and more indirectly in the covariance matrix through the occupation numbers $\bar{n}_{B,\mathbf{q}} = 1/[\exp(\epsilon_{B,\mathbf{q}}/k_B T) - 1]$, which themselves depend on the energies $\epsilon_{B,\mathbf{q}}$ and therefore on γ . The rather long ensuing calculation follows step-by-step the one conducted in [18]. The starting point are the low-temperature expansions for fixed \tilde{q}

$$\epsilon_{B,\mathbf{q}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \sqrt{2}k_B T \tilde{q} \left[1 + \frac{1}{4} \gamma \varepsilon^2 \tilde{q}^2 + O(\varepsilon^4) \right] \quad [97]$$

$$\hbar A_{B,\mathbf{q}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \frac{2\sqrt{2}}{3N} k_B T \tilde{q} \left[1 - \frac{1}{4} \gamma \varepsilon^2 \tilde{q}^2 + O(\varepsilon^4) \right] \quad [98]$$

where, in the second relation, we have used $Ndc/dN = c/3$ and $d\gamma/dN = 0$, a consequence of the scale invariance. The result for $\vec{X}(0)$ is $4\gamma/3$ times that of [18] for the same value of ε , provided we express them both in units of the quantity $mc^2/(N\hbar)$ corresponding to the considered system (weakly interacting Bose gas or unitary Fermi gas) and we consider them as functions of the corresponding \tilde{q} as in (A17) and (D14) of reference [18]. The same conclusion holds for the projection $P\vec{A}$ for which one can refer to equations (A16) and (D13) of reference [18]. Introducing the constant c_1 obtained by numerically solving the kinetic equations (94) for $\Lambda = 0$, see equations (50) and (D17) of [18],

$$c_1 \simeq 0.3036 \quad [99]$$

we finally obtain the phase diffusion coefficient of the unitary Fermi gas to leading order in temperature

$$\frac{\hbar ND}{mc^2} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{(4\gamma/3)^2}{(1+\Lambda)^2} c_1 \left(\frac{k_B T}{mc^2} \right)^4 \quad [100]$$

Using the experimental numerical value of the parameter ξ of the equation of state $\mu_0(\rho) = \xi \varepsilon_F$ where $\varepsilon_F \equiv \hbar^2(3\pi^2\rho)^{2/3}/(2m)$, see the body of the article, leads to $mc^2/\varepsilon_F = 2\xi/3 = 0.251$ and to the expression of D given in (22).

In short : Let us now give a synthetic, if not convincing, explanation of the result (100), starting from the one obtained in [18], $\hbar ND/(mc^2) = c_1 (k_B T/mc^2)^4$, and keeping track of all the corrective factors allowing to pass from the weakly interacting Bose gas to the unitary Fermi gas. Knowing that D is a quadratic function of \vec{A} (see equations (80,82)): (i) the factor 2 in the coefficients of $\frac{d\theta_\Omega}{dt}$, see equation (81), leads to a factor 4 in D , (ii) the equation of state is changed from $\mu_0(\rho) \propto \rho$ to $\mu_0(\rho) \propto \rho^{2/3}$ hence $(N/c)dc/dN$ changes from $1/2$ to $1/3$, which leads to a factor $2/3$ in \vec{A} , hence a factor $4/9$ in D , (iii) $P\vec{A}$ and $\vec{X}(0)$, that are equal to zero for an excitation branch purely linear in q , are proportional at low

temperature to the curvature parameter γ , which is equal to 1 in [18], hence a factor γ^2 in D . All this explains well the factor $(4\gamma/3)^2$ in the numerator of equation (100). Last, the factor $(1 + \Lambda)^2$ in the denominator of (100) originates from the fact that the Beliaev-Landau amplitudes for the unitary gas are $(1 + \Lambda)$ times those of the weakly interacting Bose gas (for the same rescaled infinitesimal wave vectors), which increases the correlation time of the quasi-particle occupation numbers, and hence D , by a global factor $(1 + \Lambda)^{-2}$. Keeping equation (55)

of reference [18] in mind, this further leads to the expression of the finite correlation time τ_c of $\frac{d}{dt}\hat{\theta}_0$ induced by collisions among quasi-particles,

$$\tau_c \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{c_3}{(1 + \Lambda)^2} \frac{\hbar \rho}{mc^2 \varepsilon^5} \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2}mc} \right)^3 \text{ with } c_3 \simeq 0.05472 \text{ [101]}$$

whose value for the unitary gas is given in the footnote 12 of our paper.

1. Greiner M, Mandel O, Hänsch TW, Bloch I (2002) Collapse and revival of the matter wave field of a Bose-Einstein condensate. *Nature* 419:51–54.
2. Estève J, Gross C, Weller A, Giovanazzi S, Oberthaler MK (2008) Squeezing and entanglement in a Bose-Einstein condensate. *Nature* 455:1216–1219.
3. Riedel MF, et al. (2010) Atom-chip-based generation of entanglement for quantum metrology. *Nature* 464:1170–1173.
4. Jo GB, et al. (2007) Long phase coherence time and number squeezing of two Bose-Einstein condensates on an atom chip. *Phys. Rev. Lett.* 98:030407.
5. Egorov M, et al. (2011) Long-lived periodic revivals of coherence in an interacting Bose-Einstein condensate. *Phys. Rev. A* 84:021605.
6. Berrada T, et al. (2013) Integrated Mach-Zehnder interferometer for Bose-Einstein condensates. *Nature Communication* 4.
7. Nascimbène S, Navon N, Jiang KJ, Chevy F, Salomon C (2010) Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas. *Nature* 463:1057–1060.
8. Ku MJH, Sommer AT, Cheuk LW, Zwierlein MW (2012) Revealing the Superfluid Lambda Transition in the Universal Thermodynamics of a Unitary Fermi Gas. *Science* 335:563–567.
9. Kohstall C, et al. (2011) Observation of interference between two molecular Bose-Einstein condensates. *New Journal of Physics* 13:065027.
10. Carusotto I, Castin Y (2005) Atom Interferometric Detection of the Pairing Order Parameter in a Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.* 94:223202.
11. Kurkjian H, Castin Y, Sinatra A (2013) Phase operators and blurring time of a pair-condensed Fermi gas. *Phys. Rev. A* 88:063623.
12. Sinatra A, Castin Y, Witkowska E (2007) Nondiffusive phase spreading of a Bose-Einstein condensate at finite temperature. *Phys. Rev. A* 75:033616.
13. Kuklov AB, Birman JL (2000) Orthogonality catastrophe and decoherence of a confined Bose-Einstein condensate at finite temperature. *Phys. Rev. A* 63:013609.
14. Anderson P (1958) Random-Phase Approximation in the Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.* 112:1900–1916.
15. Cohen-Tannoudji C, Dupont-Roc J, Grynberg G (1988) *Processus d’interaction entre photons et atomes* (InterEditions et Éditions du CNRS, Paris).
16. Leggett AJ (2006) *Quantum Liquids* (Oxford University Press, Oxford).
17. Rigol M, Dunjko V, Olshanii M (2008) Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems. *Nature* 452:854–858.
18. Sinatra A, Castin Y, Witkowska E (2009) Coherence time of a Bose-Einstein Condensate. *Phys. Rev. A.* 80:033614.
19. Blaizot JP, Ripka G (1985) *Quantum Theory of Finite Systems* (MIT Press, Cambridge, Massachusetts).
20. Castin Y, Dum R (1998) Low-temperature Bose-Einstein Condensates in Time-dependent traps. *Phys. Rev. A* 57:3008–3021.
21. Combescot R, Kagan MY, Stringari S (2006) Collective mode of homogeneous superfluid Fermi gases in the BEC-BCS crossover. *Phys. Rev. A* 74:042717.
22. Landau L, Khalatnikov I (1949) Teoriya vyazkosti Geliya-II. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 19:637.
23. Son D, Wingate M (2006) General coordinate invariance and conformal invariance in nonrelativistic physics: Unitary Fermi gas. *Ann. Physics* 321:197–224.
24. Bartenstein M, et al. (2004) Crossover from a Molecular Bose-Einstein Condensate to a Degenerate Fermi Gas. *Phys. Rev. Lett.* 92:120401.
25. Greiner M, et al. (2002) Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature* 415:39–44.
26. Bakr WS, Gillen JI, Peng A, Fölling S, Greiner M (2009) A quantum gas microscope for detecting single atoms in a Hubbard-regime optical lattice. *Nature* 462:74–77.
27. Castin Y, Sinatra A (2012) in *Quantum fluids: Hot topics and New Trends*, eds Modugno M, Bramati A (Springer).
28. Gaunt AL, Schmidutz TF, Gotlibovych I, Smith RP, Hadzibabic Z (2013) Bose-Einstein Condensation of Atoms in a Uniform Potential. *Phys. Rev. Lett.* 110:200406.
29. Bulgac A, Drut JE, Magierski P (2006) Spin 1/2 Fermions in the Unitary Regime: A Superfluid of a New Type. *Phys. Rev. Lett.* 96:090404.
30. Nishida Y, Son DT (2006) ϵ –Expansion for a Fermi Gas at Infinite Scattering Length. *Phys. Rev. Lett.* 97:050403.
31. Schirotzek A, Shin Yi, Schunck CH, Ketterle W (2008) Determination of the Superfluid Gap in Atomic Fermi Gases by Quasiparticle Spectroscopy. *Phys. Rev. Lett.* 101:140403.



Contents lists available at ScienceDirect

Comptes Rendus Physique

www.sciencedirect.com



Brouillage thermique d'un gaz cohérent de fermions

Thermal blurring of a coherent Fermi gas

Hadrien Kurkjian, Yvan Castin*, Alice Sinatra

Laboratoire Kastler-Brossel, ENS-PSL, CNRS, UPMC-Sorbonne Universités et Collège de France, Paris, France

I N F O A R T I C L E

Historique de l'article :

Reçu le 29 septembre 2015

Accepté le 17 février 2016

Disponible sur Internet le xxxx

Mots-clés :

Gaz de fermions

Fluides quantiques

Cohérence quantique

Atomes froids

Keywords:

Fermi gases

Quantum fluids

Quantum coherence

Ultracold atoms

R É S U M É

On considère généralement que la fonction d'onde macroscopique décrivant un condensat de paires de fermions possède une phase parfaitement définie et immuable. En réalité, il n'existe que des systèmes de taille finie, préparés, qui plus est, à température non nulle; le condensat possède alors un temps de cohérence fini, même lorsque le système demeure isolé tout au long de son évolution et que le nombre de particules N est fixé. La mémoire de la phase initiale se perd à mesure que le condensat interagit avec les modes excités, qui agissent comme un environnement déphasant. Cet effet fondamental, crucial pour les applications qui exploitent la cohérence macroscopique du condensat de paires, reste très peu étudié. Dans cet article, nous relient le temps de cohérence à la dynamique de phase du condensat, et nous montrons, par une approche microscopique, que la dérivée de l'opérateur phase du condensat $\hat{\theta}_0$ par rapport au temps est proportionnelle à un opérateur potentiel chimique que nous construisons, et qui inclut les deux branches d'excitations du gaz, tant par brisure des paires que par mise en mouvement de leur centre de masse. Pour une réalisation donnée d'énergie E , $\hat{\theta}_0$ évolue aux temps longs comme $-2\mu_{mc}(E)t/\hbar$, où $\mu_{mc}(E)$ est le potentiel chimique microcanonique; les fluctuations de l'énergie d'une réalisation à l'autre conduisent alors à un brouillage balistique de la phase, et à une décroissance gaussienne de la fonction de cohérence temporelle avec un temps caractéristique $\propto N^{1/2}$. En revanche, en l'absence de fluctuations d'énergie, le temps de cohérence diverge linéairement en N à cause du mouvement diffusif de $\hat{\theta}_0$. Enfin, nous proposons une méthode permettant de mesurer avec un gaz d'atomes froids ce temps de cohérence, que nous prédisons être de l'ordre de la dizaine de millisecondes pour un gaz de fermions préparé dans l'ensemble canonique à la limite unitaire.

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND

(<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

A B S T R A C T

It is generally assumed that a condensate of paired fermions at equilibrium is characterized by a macroscopic wavefunction with a well-defined, immutable phase. In reality, all systems have a finite size and are prepared at non-zero temperature; the condensate has then a finite coherence time, even when the system is isolated in its evolution and the particle number N is fixed. The loss of phase memory is due to interactions of the condensate with the excited modes that constitute a dephasing environment. This fundamental effect, crucial for applications using the condensate of pairs' macroscopic

* Auteur correspondant.

Adresse e-mail : yvan.castin@lkb.ens.fr (Y. Castin).

<http://dx.doi.org/10.1016/j.crhy.2016.02.005>

1631-0705/© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

coherence, was scarcely studied. We link the coherence time to the condensate phase dynamics, and we show with a microscopic theory that the time derivative of the condensate phase operator $\hat{\theta}_0$ is proportional to a chemical potential operator that we construct including both the pair-breaking and pair-motion excitation branches. In a single realization of energy E , $\hat{\theta}_0$ evolves at long times as $-2\mu_{\text{mc}}(E)t/\hbar$, where $\mu_{\text{mc}}(E)$ is the microcanonical chemical potential; energy fluctuations from one realization to the other then lead to a ballistic spreading of the phase and to a Gaussian decay of the temporal coherence function with a characteristic time $\propto N^{1/2}$. In the absence of energy fluctuations, the coherence time scales as N due to the diffusive motion of $\hat{\theta}_0$. We propose a method to measure the coherence time with ultracold atoms, which we predict to be tens of milliseconds for the canonical ensemble unitary Fermi gas.

© 2016 Académie des sciences. Publié par Elsevier Masson SAS. Cet article est publié en Open Access sous licence CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>).

1. Position du problème

Les gaz cohérents d'atomes froids dans des pièges immatériels non dissipatifs sont des exemples uniques de systèmes quantiques macroscopiques isolés. Se pose alors le problème de leur temps de cohérence intrinsèque. Cette question fondamentale présente également un intérêt pratique, pour toutes les applications qui mettent à profit la cohérence macroscopique, par exemple en interférométrie ou en ingénierie quantique où l'on crée des états intriqués non triviaux par évolution cohérente [1–3]. Des mesures de temps de cohérence sont déjà accessibles avec des gaz de bosons [4–6]. Les expériences sur les gaz de fermions, qui se sont pour l'instant concentrées sur les propriétés thermodynamiques [7,8], donc sur les aspects traditionnels du problème à N corps, commencent à s'intéresser aux mesures de corrélations et de cohérence [9], ce qui ouvrira un nouveau domaine de recherche, y compris dans le régime d'interaction forte : l'optique quantique fermionique [10]. Cependant, il n'y a à ce jour aucune prédiction sur le temps de cohérence d'un condensat de paires de fermions, sauf à température nulle [11]. Dans cet article nous présentons la première théorie microscopique permettant de combler ce vide théorique en toute généralité. Notre analyse vaut pour d'autres systèmes physiques, tels que les jonctions de Josephson mésoscopiques, pourvu qu'on arrive à réduire suffisamment la décohérence due à l'environnement.

Pour un gaz de bosons condensé, le temps de cohérence est déterminé par l'étalement de la distribution de probabilité du changement de phase du condensat pendant t . À température nulle et en présence d'interactions, cet étalement, balistique, est dû aux fluctuations du nombre de particules. Cet effet a été observé par interférence de deux condensats initialement cohérents, dont le nombre de particules fluctue du fait du bruit de partition [4,6]. Contrairement au cas du laser, qui est un système quantique ouvert, et de façon inattendue, un étalement balistique de la phase subsiste dans ces systèmes isolés pour un nombre de particules fixé si le gaz est à température non nulle [12,13], les fluctuations de cette autre quantité conservée qu'est l'énergie remplaçant celles du nombre de particules.

Dans le cas d'un gaz non polarisé de fermions condensés par paires, l'étude du temps de cohérence présuppose une définition claire de la phase du condensat, et une construction explicite de l'opérateur $\hat{\theta}_0$ correspondant [11]. À température non nulle elle requiert en outre de pouvoir inclure dans la vitesse de variation de la phase la contribution des deux branches d'excitation, celle fermionique (par brisure des paires) et celle bosonique (par excitation du centre de masse des paires). Pour la branche fermionique, la RPA d'Anderson [14] suffit. Pour la branche bosonique en revanche, nous avons besoin d'un équivalent pour les fermions de la méthode de Bogolioubov permettant de construire les opérateurs de création \hat{b}_α^\dagger et d'annihilation \hat{b}_α de quasi-particules et d'exprimer $d\hat{\theta}_0/dt$ en termes de ces opérateurs. Qui plus est, il faut prendre en compte les interactions entre les quasi-particules dans l'évolution des \hat{b}_α . Ceci est une conséquence non évidente du fait que la fonction d'onde du condensat de paires dépend du nombre total de particules N , même dans un système spatialement homogène, et va au-delà du programme de la RPA.

2. Décroissance de la fonction de cohérence

Aux températures inférieures à la température critique, la fonction de cohérence temporelle du champ de paires $\hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}')$, où $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$ est l'opérateur champ fermionique pour la composante de spin σ , est dominée aux temps longs par celle du condensat :

$$g_1(t) = \langle \hat{a}_0^\dagger(t)\hat{a}_0(0) \rangle \quad (1)$$

où $\hat{a}_0 = \int d^3r d^3r' \varphi_0^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}_\downarrow(\mathbf{r})\hat{\psi}_\uparrow(\mathbf{r}')$ est la composante du champ de paires sur la fonction d'onde du condensat [11]. Comme le système à l'équilibre est dans un mélange statistique d'états propres à N corps $|\psi_\lambda\rangle$, avec des poids Π_λ , nous sommes ramenés à l'étude de la fonction de cohérence $g_1^\lambda(t)$ dans l'état propre $|\psi_\lambda\rangle$, d'énergie E_λ et de nombre de particules N_λ . Pour tirer parti des faibles fluctuations relatives du nombre de paires condensées pour un grand système, on utilise la décomposition [11] en les opérateurs hermitiens phase et module

$$\hat{a}_0 = e^{i\hat{\theta}_0} \hat{N}_0^{1/2} \quad (2)$$

et on approxime \hat{N}_0 , opérateur nombre de paires condensées, par sa valeur moyenne \bar{N}_0 dans l'état d'équilibre du système, pour obtenir

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{iE_\lambda t/\hbar} \langle \psi_\lambda | e^{-i(\hat{H} + \hat{W})t/\hbar} | \psi_\lambda \rangle \quad (3)$$

où l'opérateur \hat{W} , différence entre le transformé de \hat{H} par $e^{i\hat{\theta}_0}$ et \hat{H} ,

$$\hat{W} = e^{-i\hat{\theta}_0} \hat{H} e^{i\hat{\theta}_0} - \hat{H} = -i[\hat{\theta}_0, \hat{H}] - \frac{1}{2}[\hat{\theta}_0, [\hat{\theta}_0, \hat{H}]] + \dots \quad (4)$$

est approximativement N fois plus petit que \hat{H} . En effet, comme \hat{a}_0 , $e^{i\hat{\theta}_0}$ change le nombre total de particules d'un $O(N^0)$. Alors que \hat{H} est une observable extensive, \hat{W} est un opérateur intensif et le double commutateur dans (4) est d'ordre $1/N$. Il apparaît formellement dans l'équation (3) un opérateur d'évolution correspondant au hamiltonien \hat{H} perturbé par \hat{W} , restreint à l'état propre $|\psi_\lambda\rangle$ de \hat{H} . La fonction g_1^λ/\bar{N}_0 est donc, à un facteur de phase près, proportionnelle à l'amplitude de probabilité que le système initialement préparé dans $|\psi_\lambda\rangle$ y soit encore au bout d'un temps t en présence de \hat{W} . Une approche naturelle pour obtenir une approximation non perturbative de cette amplitude est celle des fonctions de Green ou de l'opérateur résolvante $\hat{G}(z) = (z\hat{1} - (\hat{H} + \hat{W}))^{-1}$ du hamiltonien perturbé. Par la méthode des projecteurs (voir la sous-section §III.B.2 de la référence [15]), on définit un hamiltonien effectif non hermitien $\hat{H}_{\text{eff}}(z)$ gouvernant l'évolution restreinte à $|\psi_\lambda\rangle$, donc tel que $\langle \psi_\lambda | \hat{G}(z) | \psi_\lambda \rangle = (z - \langle \psi_\lambda | \hat{H}_{\text{eff}}(z) | \psi_\lambda \rangle)^{-1}$. Ceci conduit à

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 \int_C \frac{dz}{2i\pi} \frac{e^{-i(z-E_\lambda)t/\hbar}}{z - \langle \hat{H}_{\text{eff}}(z) \rangle_\lambda} \quad \text{avec} \quad \langle \hat{H}_{\text{eff}}(z) \rangle_\lambda = E_\lambda + \langle \hat{W} \rangle_\lambda + \langle \hat{W} \hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{z\hat{Q}_\lambda - \hat{Q}_\lambda(\hat{H} + \hat{W})\hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda \hat{W} \rangle_\lambda \quad (5)$$

Le domaine d'intégration C dans le plan complexe est toute droite $z = x + i\eta$, $\eta > 0$ fixé, décrite dans le sens des réels x décroissant de $+\infty$ à $-\infty$, et l'on a introduit la notation $\langle \hat{A} \rangle_\lambda \equiv \langle \psi_\lambda | \hat{A} | \psi_\lambda \rangle$ et l'opérateur $\hat{Q}_\lambda = \hat{1} - |\psi_\lambda\rangle\langle \psi_\lambda|$, projecteur orthogonal à $|\psi_\lambda\rangle$. En se limitant dans $\langle \hat{H}_{\text{eff}}(z) \rangle_\lambda$ à l'ordre deux en \hat{W} , donc en omettant $\hat{Q}_\lambda \hat{W} \hat{Q}_\lambda$ au dénominateur, et en négligeant sa dépendance en z (approximation du pôle), $\langle \hat{H}_{\text{eff}}(z) \rangle_\lambda \approx \langle \hat{H}_{\text{eff}}(E_\lambda + i0^+) \rangle_\lambda$, on obtient^{1,2}

$$g_1^\lambda(t) \simeq \bar{N}_0 e^{-i\langle \hat{W} \rangle_\lambda t/\hbar} e^{-i(\delta_\lambda + \gamma_\lambda)t} \quad \text{avec} \quad \hbar(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda) = \langle \hat{W} \hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{(E_\lambda + i0^+)\hat{Q}_\lambda - \hat{Q}_\lambda \hat{H} \hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda \hat{W} \rangle_\lambda \quad (6)$$

On notera que $2\gamma_\lambda$ n'est autre que le taux de départ de l'état $|\psi_\lambda\rangle$ induit par \hat{W} tel que le prédit la règle d'or de Fermi.

Le terme dominant sous l'exponentielle dans (6) est $\langle \hat{W} \rangle_\lambda$, d'ordre N^0 comme \hat{W} . Afin de l'interpréter, on constate d'abord que, d'après le développement (4), en point de vue de Heisenberg,

¹ Il y a derrière l'approximation du pôle l'hypothèse selon laquelle le continuum auquel $|\psi_\lambda\rangle$ est couplé est large en fréquence [15]. Aussi la loi exponentielle dans (6) ne vaut-elle qu'aux temps longs devant l'inverse de cette largeur, c'est-à-dire ici devant le temps de corrélation τ_c des quasi-particules introduit plus bas.

² Pour faire apparaître une ligne de coupure dans la résolvante puis un pôle dans son prolongement analytique, donc pour justifier rigoureusement l'émergence d'une partie imaginaire γ_λ non nulle et donner un sens précis à l'équation (6), il faut passer à la limite thermodynamique ($N \rightarrow +\infty$ à densité fixée). Mais c'est ici inhabituellement subtil : comme le montre une généralisation du raisonnement autour de l'équation (10), la fonction déplacement [15] $\Delta_\lambda(z) \equiv \langle \hat{W} \hat{Q}_\lambda \frac{\hat{Q}_\lambda}{z\hat{Q}_\lambda - \hat{Q}_\lambda(\hat{H} + \hat{W})\hat{Q}_\lambda} \hat{Q}_\lambda \hat{W} \rangle_\lambda$, avec $\text{Im} z > 0$, tend vers zéro en $1/N$, tout comme $\delta_\lambda - i\gamma_\lambda$ dans (6). L'astuce consiste alors à se placer à une échelle de temps d'ordre N , en posant $t = N\tau$ et en gardant τ fixé à la limite thermodynamique. On effectue le changement de variable $z = E_\lambda + \langle \hat{W} \rangle_\lambda + z'/N$ dans l'intégrale de (5), on choisit $\eta = \eta'/N$ ($\eta' > 0$ fixé) dans le domaine d'intégration $C = \{z = x + i\eta, x = +\infty \rightarrow -\infty\}$, ce qui conduit au domaine d'intégration $C' = \{z' = x' + i\eta', x' = +\infty \rightarrow -\infty\}$ sur z' , et l'on néglige le terme $\langle \hat{W} \rangle_\lambda$ qui apparaît au dénominateur de la fonction déplacement ainsi que $\text{Re} z'/N$ (par cohérence avec l'omission de $\hat{Q}_\lambda \hat{W} \hat{Q}_\lambda$). Le facteur $1/N$ dans l'élément d'intégration $dz = dz'/N$ permet de sortir un facteur $1/N$ au dénominateur de l'intégrande, et l'on obtient à la limite thermodynamique le résultat suivant, indépendant de η' par analyticité de l'intégrande dans le demi-plan $\text{Im} z' > 0$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{g_1^\lambda(t) e^{i\langle \hat{W} \rangle_\lambda t/\hbar}}{\bar{N}_0} \simeq \int_{C'} \frac{dz'}{2i\pi} \frac{e^{-iz'\tau/\hbar}}{z' - \hbar\Omega_\lambda} = e^{-i\Omega_\lambda \tau} \quad \text{avec} \quad \hbar\Omega_\lambda = \lim_{N \rightarrow +\infty} N\Delta_\lambda(i\eta'/N)$$

Voilà qui fournit, pour un système de taille assez grande mais finie, la définition $N(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda) \equiv \Omega_\lambda$. Si l'on avait pris la limite thermodynamique à t fixé avant de faire tendre t vers l'infini, on serait tombé, en développant l'intégrande de (5) au premier ordre en la fonction déplacement, sur une autre définition : $\lim_{N \rightarrow +\infty} N[\bar{N}_0^{-1} g_1^\lambda(t) e^{i\langle \hat{W} \rangle_\lambda t/\hbar} - 1] \sim (-it)N(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda)$ avec $N(\delta_\lambda - i\gamma_\lambda) \equiv \lim_{\eta' \rightarrow 0^+} \lim_{N \rightarrow +\infty} N\Delta_\lambda(i\eta')$. Pour montrer l'équivalence de ces deux définitions, injectons dans la fonction déplacement une relation de fermeture sur les états propres de \hat{H} , $\Delta_\lambda(z) = \sum_{\mu \neq \lambda} |\langle \psi_\mu | \hat{W} | \psi_\lambda \rangle|^2 / (z + E_\lambda - E_\mu)$, et voyons si la granularité de la distribution des $E_\mu - E_\lambda$ dans cette somme pondérée tend vers zéro plus vite que η'/N . Pour cela, voyons chaque état propre comme la superposition cohérente d'un état de Fock central de phonons et d'un faible halo d'états de Fock de phonons s'en déduisant par des processus Beliaev-Landau 1 phonon \leftrightarrow 2 phonons. Même si \hat{W} conserve les nombres de phonons, cf. (8), il peut coupler l'état de Fock central de $|\psi_\mu\rangle$ au halo de $|\psi_\lambda\rangle$. Au pire, un seul processus Beliaev-Landau est mis en jeu, auquel cas $E_\mu - E_\lambda = \pm(\epsilon_{B,\mathbf{k}_1} + \epsilon_{B,\mathbf{k}_2} - \epsilon_{B,\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2})$, où \mathbf{k}_1 et \mathbf{k}_2 sont les vecteurs d'onde des deux phonons émis ou absorbés ; comme la paire $\{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\}$ prend $\propto V^2$ valeurs différentes, où V est le volume du système, $E_\mu - E_\lambda$ varie alors par pas $\propto 1/V^2$, ce qui est bien $\ll \eta'/N$.

$$\hat{W}(t) = \hbar \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} + O\left(\frac{1}{N}\right) \quad (7)$$

À ce stade il pourrait sembler difficile d'obtenir une expression explicite de $d\hat{\theta}_0/dt$ qui permettrait d'aller au-delà d'une description purement formelle de la dynamique de phase. Heureusement il n'en est rien car, comme nous le montrerons dans la section suivante, la moyenne temporelle à gros grains de $d\hat{\theta}_0/dt$ dans un gaz faiblement excité est proportionnelle à un opérateur potentiel chimique, quantité thermodynamique par nature :

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} = \mu_0(\hat{N}) + \sum_{s=F,B} \sum_{\alpha} \frac{d\epsilon_{s,\alpha}}{dN} \hat{n}_{s,\alpha} \quad (8)$$

La somme au second membre porte sur les deux branches d'excitation, celle des quasi-particules fermioniques (α inclut un indice de spin et un indice orbital, $\alpha = \mathbf{k}, \sigma$ pour un système spatialement homogène) qui présente une bande interdite, et celle des quasi-particules bosoniques (α est uniquement orbital, $\alpha = \mathbf{q}$ dans l'exemple précédent) dont le départ, à la limite thermodynamique et pour un système homogène, est phononique. Lorsque nous disons que le gaz doit être faiblement excité, nous voulons dire que la déplétion thermique du condensat doit rester petite. Ceci suppose en particulier que le nombre moyen de quasi-particules soit une faible fraction du nombre total de particules. La moyenne temporelle à gros grains est prise sur un temps long devant l'inverse des pulsations propres $\epsilon_{s,\alpha}/\hbar$ de ces quasi-particules mais court devant leur temps de collision, c'est-à-dire le temps typique de variation des opérateurs nombres de quasi-particules $\hat{n}_{s,\alpha}$, ce qui suppose que ces quasi-particules sont dans le régime faiblement collisionnel. Enfin $\mu_0(N)$ est le potentiel chimique à température nulle du gaz non polarisé à N particules, autrement dit la dérivée de l'énergie du fondamental par rapport à N . Nous interprétons le deuxième terme du second membre de (8) comme un « opérateur potentiel chimique » au sens où sa moyenne quantique est la dérivée adiabatique, c'est-à-dire à populations des quasi-particules $\langle \hat{n}_{s,\alpha} \rangle$ fixées, de l'énergie des quasi-particules $\sum_{s=F,B} \sum_{\alpha} \epsilon_{s,\alpha} \langle \hat{n}_{s,\alpha} \rangle$ par rapport à N . L'équation (8) relie la dérivée de la phase au potentiel chimique au niveau des opérateurs quantiques d'une théorie microscopique multimode. De ce point de vue, elle va au-delà de la seconde relation de Josephson établie pour la phase du paramètre d'ordre d'un supraconducteur (cf. la section §3.4 de la référence [16]).

En prenant la moyenne de l'équation (8) dans $|\psi_{\lambda}\rangle$ et en utilisant l'hypothèse de thermicité des états propres [17] pour identifier moyenne dans un état propre et moyenne d'ensemble microcanonique, on fait donc apparaître le potentiel chimique microcanonique μ_{mc} à l'énergie E_{λ} et au nombre de particules N_{λ} :

$$\hbar \left\langle \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} \right\rangle_{\lambda} = -2 \mu_{mc}(E_{\lambda}, N_{\lambda}) \quad (9)$$

Nous omettons la moyenne temporelle à gros grains, ici superflue puisque la moyenne quantique est prise dans un état stationnaire du système.

Le terme suivant sous l'exponentielle dans (6) est d'ordre N^{-1} donc sous-dominant. Pour le voir, on le relie à la fonction de corrélation temporelle de $d\hat{\theta}_0/dt$ dans l'état $|\psi_{\lambda}\rangle$. À une contribution d'ordre $1/N^2$ près :

$$\gamma_{\lambda} + i\delta_{\lambda} = \int_0^{+\infty} dt \left[\left\langle \frac{d\hat{\theta}_0(t)}{dt} \frac{d\hat{\theta}_0(0)}{dt} \right\rangle_{\lambda} - \left\langle \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} \right\rangle_{\lambda}^2 \right] \quad (10)$$

qui redonne bien (6) après injection d'une relation de fermeture sur les états propres de \hat{H} . L'intégrande a comme valeur initiale $\text{Var}_{\lambda}(d\hat{\theta}_0/dt) = O(1/N)$ (ceci s'obtient en additionnant les variances des nombres de quasi-particules, ce qui correspond à un gaz parfait de quasi-particules dans l'ensemble canonique et surestime donc la variance microcanonique) et décroît sur le temps typique de corrélation τ_c des $\hat{n}_{s,\alpha}$, c'est-à-dire le temps typique de collision entre les quasi-particules. Ceci permet d'estimer $|\gamma_{\lambda} + i\delta_{\lambda}| \approx \tau_c \text{Var}(d\hat{\theta}_0/dt) = O(1/N)$. Le déplacement δ_{λ} est donc du même ordre en N que le terme sous-dominant $[\hat{\theta}_0, [\hat{\theta}_0, \hat{H}]]$ dans \hat{W} ; tous deux sont N fois plus faibles que (9) et on les néglige pour un grand système. En revanche γ_{λ} est le seul à conduire à une décroissance exponentielle de la fonction de cohérence microcanonique $g_1^{\lambda}(t)$ et doit être conservé. L'équation (10) en fournit aussi une interprétation physique, si l'on se souvient que, dans la théorie du mouvement brownien, l'intégrale de la fonction de corrélation de la vitesse donne le coefficient de diffusion de la position : γ_{λ} n'est autre que le coefficient de diffusion de la phase du condensat de paires lorsque le système est préparé dans l'ensemble microcanonique correspondant à $|\psi_{\lambda}\rangle$, et sera désormais noté $\gamma_{\lambda} = D(E_{\lambda}, N_{\lambda})$. Nous retenons finalement :

$$g_1^{\lambda}(t) \simeq \bar{N}_0 e^{2i\mu_{mc}(E_{\lambda}, N_{\lambda})t/\hbar} e^{-D(E_{\lambda}, N_{\lambda})t} \quad (11)$$

L'équation (10) fournit même une méthode de calcul de D : si l'on dispose d'équations cinétiques pour les nombres de quasi-particules apparaissant dans $d\hat{\theta}_0/dt$, voir l'équation (8), on peut calculer leur fonction de corrélation temporelle, comme il est fait dans la référence [18], et en déduire que

$$D(E, N) = -(P\bar{A}) \cdot M^{-1} C_{mc} P\bar{A} \quad (12)$$

La matrice M , de coefficients $M_{s\alpha, s'\alpha'}$, est la matrice des équations cinétiques linéarisées $\frac{d}{dt}\vec{\delta n} = M\vec{\delta n}$ donnant l'évolution des fluctuations $\delta n_{s,\alpha}$ des nombres de quasi-particules, regroupées en un vecteur $\vec{\delta n}$, autour de leurs valeurs stationnaires $\bar{n}_{s,\alpha}$. Pour définir les autres notations, on introduit comme dans [18] la matrice C_{can} des covariances des nombres de quasi-particules $\hat{n}_{s,\alpha}$ dans l'ensemble canonique à N particules et d'énergie moyenne E , le vecteur énergie $\vec{\epsilon}$ de composantes $\epsilon_{s,\alpha}$ et son vecteur dual $\vec{e} \propto C_{\text{can}}\vec{\epsilon}$ normalisé de façon que $\vec{e} \cdot \vec{\epsilon} = 1$.³ Alors le vecteur $\vec{A} = (2/\hbar) d\vec{\epsilon}/dN$ regroupe les coefficients des $\hat{n}_{s,\alpha}$ dans l'expression (8) de $-\overline{d\hat{\theta}_0/dt}$, la matrice P est le projecteur non orthogonal⁴ tel que $P\vec{\delta n} = \vec{\delta n} - \vec{\epsilon}(\vec{e} \cdot \vec{\delta n})$ pour tout δn , et la matrice des covariances microcanonique vaut $C_{\text{mc}} = P^\dagger C_{\text{can}} P$ [18].

Il nous reste maintenant à prendre la moyenne statistique de l'équation (11) sur les états $|\psi_\lambda\rangle$ constituant l'état mélange du système. Aux grands N , on suppose que l'ensemble généralisé donné par les Π_λ conduit à des fluctuations de l'énergie totale et du nombre de particules très faibles en valeur relative autour de leur valeur moyenne \bar{E} et de \bar{N} (c'est le cas par exemple des ensembles canonique et grand canonique). On en prend donc une approximation gaussienne et on linéarise μ_{mc} autour de (\bar{E}, \bar{N}) . À cet ordre, on peut remplacer D , déjà sous-dominant d'un facteur N , par $D(\bar{E}, \bar{N})$. Il n'y a plus qu'à calculer l'intégrale gaussienne du facteur de phase $\exp\{2i[(\partial\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})/\partial E)(E - \bar{E}) + (\partial\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})/\partial N)(N - \bar{N})]t/\hbar\}$ pour obtenir le résultat central de ce travail :

$$g_1(t) \simeq \bar{N}_0 e^{2i\mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})t/\hbar} e^{-t^2/2t_{\text{br}}^2} e^{-D(\bar{E}, \bar{N})t} \quad (13)$$

En présence de fluctuations de l'énergie ou du nombre de particules, le brouillage thermique aux temps longs prend la forme d'une décroissance gaussienne de la fonction de cohérence $g_1(t)$, avec un temps caractéristique

$$(2t_{\text{br}}/\hbar)^{-2} = \text{Var}\left(N \frac{\partial\mu_{\text{mc}}}{\partial N}(\bar{E}, \bar{N}) + E \frac{\partial\mu_{\text{mc}}}{\partial E}(\bar{E}, \bar{N})\right) \quad (14)$$

qui diverge en $N^{1/2}$ pour des fluctuations normales. Le coefficient de diffusion de la phase D donne, quant à lui, un temps de décroissance caractéristique qui diverge linéairement en N ; c'est donc bien une contribution sous-dominante aux temps longs, sauf dans l'ensemble microcanonique où cette diffusion de phase intrinsèque peut être observée directement.

3. Dérivation microscopique de l'équation sur l'opérateur phase

Comme promis, nous donnons maintenant à notre connaissance la première démonstration microscopique de l'équation (8), reliant la vitesse de variation de l'opérateur phase d'un condensat de paires à ce que l'on peut qualifier d'opérateur potentiel chimique.

La contribution de la branche d'excitation fermionique à $d\hat{\theta}_0/dt$ peut s'obtenir par des équations du mouvement linéarisées pour de faibles fluctuations des opérateurs de paires $\hat{\psi}_\downarrow\hat{\psi}_\uparrow$, $\hat{\psi}_\uparrow^\dagger\hat{\psi}_\downarrow^\dagger$ et $\hat{\psi}_\sigma^\dagger\hat{\psi}_\sigma$ autour de l'état de champ moyen, ce qui constitue la *Random Phase Approximation* (RPA) d'Anderson [14]. En effet, en calculant la moyenne temporelle de $d\hat{\theta}_0/dt$ grâce à l'équation (120) de la référence [11] et en récrivant l'équation (86) de cette référence en termes des nombres d'occupation des quasi-particules fermioniques,⁵ on obtient

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\hat{\theta}_0}{dt} \Big|_{\text{RPA}} = \mu(\bar{N}) + \frac{d\mu}{d\bar{N}}(\hat{N} - \bar{N}) + \sum_{\alpha=\mathbf{k},\sigma} \frac{d\epsilon_{F,\alpha}}{d\bar{N}} \hat{n}_{F,\alpha} \quad (15)$$

où $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}$ est le spectre d'excitation BCS, ici pour un système spatialement homogène, et \bar{N} le nombre moyen BCS de particules dans l'ensemble grand canonique de potentiel chimique μ .⁶

³ On a $(C_{\text{can}})_{s\alpha, s'\alpha'} = \delta_{s\alpha, s'\alpha'} \bar{n}_{s,\alpha} (1 \pm \bar{n}_{s,\alpha})$ et $\bar{n}_{s,\alpha} = 1/[\exp(\epsilon_{s,\alpha}/k_B T) \mp 1]$ où le signe supérieur (inférieur) vaut pour la branche d'excitation bosonique (fermionique). $\vec{\epsilon}$ et \vec{e} sont des vecteurs propres à gauche et à droite de M avec la valeur propre nulle, comme le montrent la conservation de l'énergie et l'écriture plus parlante $\vec{e} \propto d\vec{n}/dT$, T étant la température de l'ensemble canonique et \vec{n} le vecteur de composantes $\bar{n}_{s,\alpha}$ [18].

⁴ $P\vec{\epsilon} = \vec{0}$ et P^\dagger projette sur le sous-espace des fluctuations δn d'énergie nulle, $\{\delta n | \vec{\epsilon} \cdot \delta n = 0\}$, à l'intérieur duquel l'inverse de M est défini.

⁵ On remarque que $\frac{\Delta_0}{\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}} \zeta_{\mathbf{k}} = \hat{n}_{F,\mathbf{k},\uparrow} + \hat{n}_{F,-\mathbf{k},\downarrow}$, où le membre de gauche fait référence aux notations de l'article [11], et on se sert de son équation (74) pour reconnaître $d\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}/d\mu$.

⁶ L'équation (15) est écrite en réintroduisant le terme de phase trivial $-2\mu(\bar{N})t/\hbar$ qui n'apparaît pas dans la référence [11] du fait de l'utilisation du hamiltonien grand canonique.

Des difficultés fondamentales nous empêchent d'obtenir la contribution de la branche de phonons à l'équation (8) dans le cadre de la RPA.⁷ Nous avons alors choisi de traiter le problème par une approche variationnelle avec comme Ansatz l'état cohérent de paires dépendant du temps le plus général⁸

$$|\psi\rangle = \mathcal{N}(t) \exp\left(b^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \hat{\psi}_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}')\right) |0\rangle \quad (16)$$

Cet Ansatz, fonction des variables indépendantes $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et normalisé à l'unité grâce au facteur $\mathcal{N}(t)$, est écrit ici après discrétisation de l'espace réel en un réseau cubique de pas l (que l'on fait tendre vers 0 à la fin des calculs), les opérateurs champ obéissant alors à des relations d'anticommuation du type $\{\hat{\psi}_{\sigma}(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{\sigma'}^{\dagger}(\mathbf{r}')\} = \delta_{\sigma, \sigma'} \delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} / l^3$. Le jeu de variables canoniquement conjuguées associé, $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\Phi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ est construit⁹ dans la section §9.9b de la référence [19]. Il ne faut pas confondre le champ Φ avec le champ de paires $\langle \hat{\psi}_{\downarrow} \hat{\psi}_{\uparrow} \rangle$.¹⁰ Quand les paires de l'état (16) sont au repos, $\Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ dépend uniquement de $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ et la transformée de Fourier de Φ n'est autre que l'amplitude BCS $V_{\mathbf{k}}$ de la paire $\mathbf{k} \uparrow, -\mathbf{k} \downarrow$ [11], tandis que la transformée de Fourier du champ de paires s'écrit $-U_{\mathbf{k}} V_{\mathbf{k}} = -V_{\mathbf{k}}(1 - |V_{\mathbf{k}}|^2)^{1/2}$. Lorsque les paires sont en mouvement, nous n'avons plus d'interprétation physique simple mais la norme au carré de Φ demeure égale à la moitié du nombre moyen de particules dans l'état $|\psi\rangle$:

$$\frac{N}{2} = \|\Phi\|^2 \equiv l^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} |\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t)|^2 \quad (17)$$

L'hamiltonien régissant l'évolution du champ Φ , à savoir

$$\mathcal{H}(\Phi, \Phi^*) = \langle \psi | \hat{H} | \psi \rangle \quad (18)$$

pourrait être explicité à l'aide du théorème de Wick, mais nous aurons ici besoin seulement de son invariance par changement de phase globale $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow e^{i\gamma} \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\forall \gamma \in \mathbb{R}$ (symétrie $U(1)$), qui découle de la conservation du nombre total de particules \hat{N} par \hat{H} . À température nulle, le champ $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ à N fixé est figé, à une phase globale près, dans le minimiseur $\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (N/2)^{1/2} \phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ de \mathcal{H} , où ϕ_0 , réel et normalisé à l'unité, dépend de N même dans le cas spatialement homogène. ϕ_0 diffère de la fonction d'onde du condensat φ_0 de la même manière que Φ diffère du champ de paires $\langle \hat{\psi}_{\downarrow} \hat{\psi}_{\uparrow} \rangle$ (voir la Note 10). À température suffisamment faible, on peut développer \mathcal{H} en puissances des petites déviations de Φ par rapport au cercle $\gamma \mapsto e^{i\gamma} \Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, lieu des minima de \mathcal{H} à N fixé. On décompose donc le champ en ses composantes colinéaire et orthogonale à ϕ_0 :

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = e^{i\theta} [n^{1/2} \phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \quad (19)$$

⁷ Le résultat (15) restreint à l'ordre linéaire en les opérateurs de paires n'inclut pas la contribution de la branche de phonons. On pourrait espérer obtenir cette contribution en poussant le calcul par la RPA jusqu'à l'ordre quadratique comme suit : premièrement, on calcule $d\hat{\theta}_0/dt$ jusqu'à l'ordre quadratique. Deuxièmement, on forme l'ensemble des opérateurs de la RPA qui transfèrent une quantité de mouvement $\hbar\mathbf{q}$, à savoir $\hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}$, $\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}$ et $\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}$, où $\hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}$ annihile un fermion de vecteur d'onde \mathbf{k} et de spin \uparrow , ensemble qui est clos au regard des équations linéarisées. Pour chaque valeur de \mathbf{q} la matrice $\mathcal{L}_{\mathbf{q}}$ de ce système d'équations possède deux modes collectifs, dont les énergies, opposées l'une de l'autre, sont linéaires en \mathbf{q} dans la limite des grandes longueurs d'onde. On développe alors les opérateurs de la RPA sur l'ensemble des modes propres de $\mathcal{L}_{\mathbf{q}}$; les amplitudes obtenues sur les modes collectifs, $\hat{b}_{-\mathbf{q}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{q}}$, annihilent et créent respectivement une excitation collective d'impulsion $\mp\hbar\mathbf{q}$. Troisièmement, on insère cette décomposition modale dans les opérateurs de la RPA apparaissant dans $d\hat{\theta}_0/dt$ pour obtenir une expression quadratique en les amplitudes modales, et donc des termes en $\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}}$ comme dans (8). Malheureusement, cette approche par la RPA n'est pas fiable et nous devons y renoncer car les opérateurs de la RPA, bien que linéairement indépendants, ne sont pas quadratiquement indépendants, comme on le voit en dissociant et réassociant les opérateurs de paires grâce aux relations d'anticommuation fermioniques, par exemple

$$(\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}) (\hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow}) = (\hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^{\dagger} \hat{a}_{-\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}^{\dagger}) (\hat{a}_{-\mathbf{k}\downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}\uparrow}).$$

Ceci montre (i) qu'il n'y a pas une manière unique d'exprimer $d\hat{\theta}_0/dt$ comme une fonction quadratique des opérateurs de la RPA, (ii) que les amplitudes modales ne sont pas quadratiquement indépendantes, et (iii) que le coefficient de $\hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{q}}$ n'est pas déterminé de manière unique par cette approche fondée sur la RPA.

⁸ Nous utilisons ici par souci de simplicité un Ansatz de type BCS dépendant du temps dans lequel le nombre de particules possède des fluctuations quantiques (à ne pas confondre avec les fluctuations thermiques de l'ensemble grand canonique). Au prix d'une difficulté supplémentaire, nous aurions pu tout aussi bien choisir un Ansatz à nombre de particules fixé [16], ce qui n'aurait changé les coefficients de la fonctionnelle énergie que d'une correction relative $O(N^{-1/2})$, si bien que le spectre obtenu à la limite thermodynamique eût été le même.

⁹ Nos variables Γ et Φ correspondent aux variables z et β de la référence [19] dans le cas où l'on remplace les opérateurs et le vide de quasi-particules dans l'équation (9.132) de [19] par ceux des particules. Si $\underline{\Gamma}$ et $\underline{\Phi}$ sont les matrices de coefficients respectivement $l^3 \Gamma(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ et $l^3 \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ alors $\underline{\Phi} = -\underline{\Gamma} (1 + \underline{\Gamma}^{\dagger} \underline{\Gamma})^{-1/2}$, d'après l'équation (9.144) de [19]. Leurs équations d'évolution s'obtiennent par méthode variationnelle à partir du lagrangien $L = i\hbar [(\psi | (d/dt) | \psi) - \text{c.c.}] / 2 - (\psi | H | \psi)$. Φ a été choisi astucieusement de sorte que $L = i\hbar l^6 \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} [\Phi^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \partial_t \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \text{c.c.}] / 2 - \mathcal{H}(\Phi, \Phi^*)$, ce qui conduit à $\partial_t \Phi = (i\hbar l^6)^{-1} \partial_{\Phi^*} \mathcal{H}$. Ceci montre que la variable conjuguée de Φ dans le formalisme hamiltonien est $i\hbar l^6 \Phi^*$ pour le crochet de Poisson traditionnel, et donc Φ^* pour le crochet de Poisson $\{\Phi, \Phi^*\} = (i\hbar l^6)^{-1}$, sachant qu'on doit avoir $\partial_t \Phi = \{\Phi, \mathcal{H}\}$.

¹⁰ Avec la même notation matricielle que dans la Note 9, nous avons $\langle \hat{\psi}_{\uparrow} \hat{\psi}_{\downarrow} \rangle = \underline{\Phi} (1 - \underline{\Phi}^{\dagger} \underline{\Phi})^{1/2}$ d'après l'équation (9.146) de la référence [19].

où l'excursion de la phase θ peut être arbitrairement grande, contrairement à celle de Λ . Ce cadre permet de développer une théorie perturbative systématique en puissances du champ Λ (voir [Annexe A](#)), qui est l'analogie pour les fermions de la théorie de Bogolioubov sans brisure de symétrie $U(1)$ pour les bosons [20]. Comme nous le verrons, la phase θ reste proche de la phase θ_0 du condensat si Λ est assez petit. On écrit donc les équations du mouvement pour θ et pour les champs de l'espace orthogonal Λ, Λ^* . Dans la forme finale des équations, on fait systématiquement disparaître les variables du condensat grâce à la relation $n = N/2 - \|\Lambda\|^2$, conséquence de (17), et on se limite à l'ordre 2 en Λ, Λ^* .

La difficulté centrale de notre problème provient de l'existence d'un terme linéaire en Λ, Λ^* dans $d\theta/dt$, conséquence de la dépendance de ϕ_0 en le nombre de paires [11]. En l'absence de ce terme linéaire, il suffirait de développer le champ Λ sur les modes propres de ses petites oscillations linéaires, déduits de l'approximation quadratique du hamiltonien \mathcal{H} à N fixé :

$$\begin{pmatrix} \Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \\ \Lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; t) \end{pmatrix} = \sum_{\alpha} b_{\alpha}(t) \begin{pmatrix} u_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ v_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{pmatrix} + b_{\alpha}^*(t) \begin{pmatrix} v_{\alpha}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ u_{\alpha}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{pmatrix} \quad (20)$$

où la somme porte sur les modes propres d'énergie positive ϵ_{α} , avec la normalisation $\|u_{\alpha}\|^2 - \|v_{\alpha}\|^2 = 1$. À cet ordre, $b_{\alpha}(t) = b_{\alpha}(0)e^{-i\epsilon_{\alpha}t/\hbar}$. Il n'y aurait qu'à injecter la décomposition (20) dans $d\theta/dt$ et à prendre une moyenne temporelle à gros grains pour tuer les termes de battement entre les modes; $\overline{d\theta/dt}$ contiendrait alors la combinaison linéaire attendue des nombres de quasi-particules bosoniques $n_{B,\alpha} = |b_{\alpha}|^2$. La réalité est plus subtile : à cause de l'interaction entre les quasi-particules, $\overline{b_{\alpha}^t}$ n'est pas nul mais d'ordre deux en Λ et Λ^* , si bien que le terme linéaire dans $d\theta/dt$ contribue à la même hauteur que les termes quadratiques. On doit donc calculer $\overline{b_{\alpha}^t}$, ce que l'on fait dans l'[Annexe A](#), en utilisant en particulier le caractère borné du champ Λ , conséquence du respect de la symétrie $U(1)$ dans le développement (19), puis en appliquant le théorème de Hellmann-Feynman, pour trouver :

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\overline{\theta}^t}{dt} = \mu_0(N) + \sum_{\alpha} \frac{d\epsilon_{\alpha}}{dN} |b_{\alpha}|^2 + O(\|\Lambda\|^3) \quad (21)$$

Discutons brièvement le spectre ϵ_{α} dans le cas d'un système spatialement homogène, à la limite continue $l \rightarrow 0$ pour une interaction de contact dans l'onde s de longueur de diffusion fixée entre fermions de spin opposé. Pour chaque valeur du vecteur d'onde total \mathbf{q} , il se compose d'au plus une énergie discrète $\epsilon_{B,\mathbf{q}}$, et d'un continuum paramétré par deux vecteurs d'onde $(\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow) \mapsto \epsilon_{F,\mathbf{k}_1,\uparrow} + \epsilon_{F,\mathbf{k}_2,\downarrow}$ de somme fixée $(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{q})$, où $\epsilon_{F,\mathbf{k},\sigma}$ est la relation de dispersion BCS. La branche $q \mapsto \epsilon_{B,\mathbf{q}}$ coïncide bien avec celle de la référence [21], comme nous l'avons vérifié. De départ phononique, elle correspond aux excitations élémentaires bosoniques du gaz de fermions dont nous cherchions la contribution à la dynamique de phase. Elle doit donc être gardée dans (21). En revanche, le continuum correspond à l'excitation de deux quasi-particules fermioniques; celles-ci ne peuvent en effet être excitées que par paires à partir du fondamental car l'hamiltonien \hat{H} contient un nombre pair de facteurs $\hat{\psi}$ et $\hat{\psi}^{\dagger}$, qui détruisent ou créent chacun une quasi-particule. Ces biexcitations ne sont pas physiquement indépendantes,¹¹ et font double emploi avec la contribution de la RPA à $d\hat{\theta}_0/dt$. Il ne faut donc pas les inclure dans (21).

Deux dernières remarques nous séparent de (8). (i) Les champs $\langle \hat{\psi}_{\downarrow} \hat{\psi}_{\uparrow} \rangle$ et Φ sont distincts, aussi les phases $\hat{\theta}_0$ et θ ne coïncident-elles pas exactement. Leur valeur moyenne temporelle à gros grains ne diffèrent cependant que par un terme d'ordre $\|\Lambda\|^2$, borné, négligeable aux temps longs, ne contribuant pas au brouillage de phase du condensat de paires.¹² (ii) La phase de notre approche variationnelle est une variable classique, alors que $\hat{\theta}_0$ dans (8) est un opérateur quantique. Ce hiatus est comblé par application au résultat (21) de la procédure de quantification du chapitre 11 de la référence [19], puisque les b_{α} de la branche bosonique y sont remplacés par des opérateurs bosoniques¹³ $\hat{b}_{\alpha}, [\hat{b}_{\alpha}, \hat{b}_{\alpha}^{\dagger}] = 1$. Nous pensons que la validité de l'équation (8), reliant $d\hat{\theta}_0/dt$ à l'opérateur potentiel chimique, et donc du résultat (13), dépasse celle de notre dérivation microscopique variationnelle et inclut le régime d'interaction forte pourvu que les quasi-particules aient une durée de vie beaucoup plus longue que l'inverse de leur fréquence propre, ce qui est le cas à température suffisamment basse. Dans le cas limite où l'on peut négliger la branche d'excitation fermionique et se limiter à la partie phononique de la branche bosonique, c'est bien ce que prédit la variante irrotationnelle de la théorie de l'hydrodynamique quantique de Landau et Khalatnikov [22] (voir l'[Annexe B](#)).

¹¹ Exciter $\alpha = (\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow)$ et $\alpha' = (\mathbf{k}'_1, \uparrow; \mathbf{k}'_2, \downarrow)$ revient à exciter $\alpha'' = (\mathbf{k}'_1, \uparrow; \mathbf{k}_2, \downarrow)$ et $\alpha''' = (\mathbf{k}_1, \uparrow; \mathbf{k}'_2, \downarrow)$.

¹² En exprimant dans $\langle \hat{a}_0 \rangle$ la valeur moyenne du champ de paires en fonction de Φ , on se rend compte pour Λ faible que $\langle \hat{a}_0 \rangle = e^{i\theta} \sqrt{N_0}(1 + O(\|\Lambda\|))$ et donc, étant donné que $\overline{\Lambda^t} = O(\|\Lambda\|^2)$, on a $\overline{\hat{a}_0^t} = \overline{\theta^t} + O(\|\Lambda\|^2)$.

¹³ Plus précisément, ces opérateurs ne sont bosoniques que pour une faible densité d'excitations. Pour un système homogène spatialement et dans un formalisme qui brise la symétrie $U(1)$ ($\theta = 0$), nous obtenons à partir des équations (11.81c) de [19], généralisées au cas de fermions appariés ($\hat{a}_{\sigma}, \hat{a}_{\sigma}^{\dagger}$ sont remplacés par les opérateurs BCS $\hat{b}_{k\sigma}$ d'annihilation de quasi-particules fermioniques) et restreintes aux images bosoniques faiblement excitées ($\mathbb{B}\mathbb{B}$ négligeable) : $\hat{b}_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{k}} X_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}\uparrow} + Y_{\mathbf{k}}^{\dagger} \hat{b}_{\mathbf{k}-\mathbf{q}\downarrow}^{\dagger}$. Les coefficients réels $X^{\mathbf{q}}$ et $Y^{\mathbf{q}}$ sont des combinaisons linéaires des coefficients correspondants $u_{\mathbf{q}}$ et $v_{\mathbf{q}}$ dans l'équation (20), et héritent de leur condition de normalisation $\sum_{\mathbf{k}} (X_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2 - (Y_{\mathbf{k}}^{\mathbf{q}})^2 = 1$. Alors, dans un état (16) avec $\theta = 0$, $\hat{\delta}_{\mathbf{q}} \equiv [\hat{b}_{\mathbf{q}}, \hat{b}_{\mathbf{q}}^{\dagger}] - \hat{1}$ a une valeur moyenne et une variance $O(\|\Lambda\|^2/N)$ puisque $\hat{b}_{k\sigma} |\psi\rangle = O(\|\Lambda\|/N^{1/2})$ si $\|\Lambda\|/N^{1/2} \rightarrow 0$.

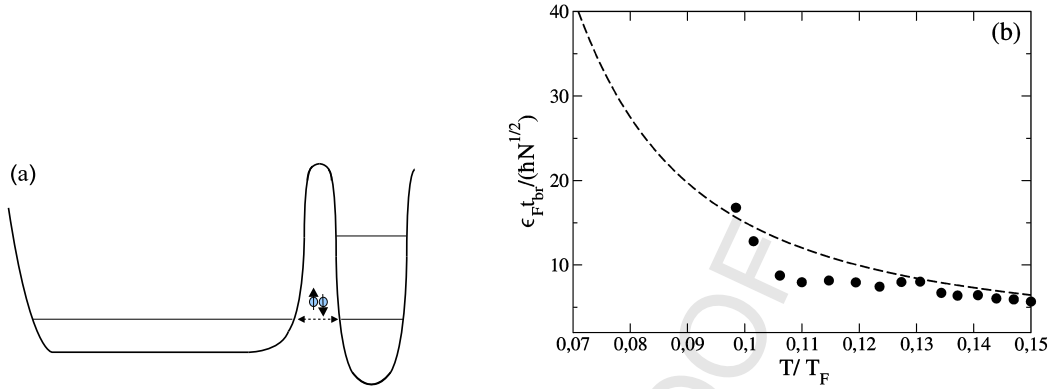


Fig. 1. Quelques considérations expérimentales. (a) Configuration de piégeage proposée pour mesurer $g_1(t)$ par interférométrie de Ramsey : le condensat de paires de fermions est confiné dans le piège principal (à fond plat sur la figure) ; on transfère au plus deux atomes en moyenne (sous forme d'un dimère) dans le piège secondaire (très étroit) par effet tunnel résonnant d'amplitude ajustable par une barrière de hauteur variable ; on crée ainsi une référence de phase avec laquelle on fait interférer le condensat de paires après un temps d'évolution t . (b) Temps de brouillage thermique pour un gaz cohérent de fermions à la limite unitaire dans l'ensemble canonique, en fonction de la température T en unités de la température de Fermi $T_F = \epsilon_F/k_B$. Disques : à partir de l'équation d'état mesurée dans la référence [8]. Ligne tiretée : formule (22) qui utilise l'équation d'état approchée décrite dans le texte.

4. En vue d'une étude expérimentale

Esquissons maintenant un protocole de mise en évidence expérimentale du brouillage thermique d'un condensat de paires. L'idée centrale est, dans les phases de préparation et de mesure, de bosoniser de manière adiabatique réversible [23] les paires de Cooper atomiques sous forme de dimères fortement liés et faiblement interagissants, en ajustant la longueur de diffusion à une faible valeur positive grâce à une résonance de Feshbach magnétique. Ceci permet (i) de produire un échantillon à nombre faiblement fluctuant de dimères, en faisant fondre une phase de Mott préparée par réalisation du modèle de Hubbard bosonique [24], (ii) de créer un couplage tunnel entre le piège principal renfermant les N particules et un piège secondaire très étroit, à travers une barrière de hauteur ajustable [2] (Fig. 1a), (iii) de détecter par fluorescence un dimère unique [25] dans ce piège secondaire. Pour mesurer la fonction $g_1(t)$, nous adaptons aux paires de fermions la méthode interférométrique de Ramsey de la référence [26], où sont appliquées deux impulsions de Rabi à un intervalle de temps t . On prépare initialement les paires bosonisées dans le piège principal. La première impulsion est d'angle ϵ suffisamment faible pour transférer en moyenne moins d'un dimère dans le piège secondaire et éviter ainsi le bruit de partition qui masquerait le brouillage thermique. On ajuste ensuite les interactions à la valeur à laquelle on souhaite étudier la dynamique de phase du condensat de paires, et on laisse évoluer pendant le temps t . On rebosonise et on applique une seconde impulsion d'angle ϵ avant de mesurer le nombre n_{sec} de dimères dans le piège secondaire. Alors la valeur moyenne de n_{sec} sur les réalisations présente, en fonction du temps t , des oscillations de demi-pulsation la différence (sur \hbar) des potentiels chimiques entre les deux zones de piégeage, et de contraste $|g_1(t)/g_1(0)|$.

5. Quelques résultats explicites sur le gaz unitaire

Pour commencer, donnons une estimation du temps de brouillage pour un gaz unitaire préparé dans l'ensemble canonique, donc avec des fluctuations d'énergie de variance $\text{Var} E = k_B T^2 \partial_T \bar{E}$. En utilisant l'équation d'état du gaz unitaire non polarisé mesurée dans la référence [8] nous trouvons, pour un système spatialement homogène (dans un piège à fond plat [27]) les temps de brouillage thermiques t_{br} représentés par des disques sur la Fig. 1b. Ainsi, à une température $T = 0,12 T_F \simeq 0,7 T_c$ où T_c est la température de condensation des paires, on trouve $t_{\text{br}} \approx 7N^{1/2} \hbar / \epsilon_F$, ce qui correspond à 20 millisecondes pour une température de Fermi typique $T_F = \epsilon_F/k_B = 1 \mu\text{K}$ et un nombre d'atomes typique $N = 10^5$. On peut aussi comme dans la référence [28] estimer l'équation d'état du gaz unitaire à partir d'un modèle de gaz parfait de quasi-particules avec des relations de dispersion simples. Pour la branche bosonique, on prend [28] $\epsilon_{\text{B},\mathbf{q}} = \hbar c q$ avec c la vitesse du son à $T = 0$, $mc^2 = \frac{2}{3} \xi \epsilon_F$, et ξ le paramètre de Bertsch. Pour la branche fermionique, on prend [29] $\epsilon_{\text{F},\mathbf{k},\sigma} = \Delta + (\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \epsilon_0) / (2f_0)$, où Δ est le *gap* et où ϵ_0 et f_0 donnent la position du minimum et la courbure de la relation de dispersion. En gardant pour chaque branche sa contribution à l'énergie volumique moyenne d'ordre dominant à basse température $\bar{E}_F/V \simeq \frac{2m^{3/2}}{\pi^3/2\hbar^3} (\epsilon_0 f_0 k_B T)^{1/2} \Delta e^{-\Delta/k_B T}$ et $\bar{E}_B/V \simeq \frac{\pi^2}{30} (k_B T)^4 / (\hbar c)^3$ comme dans [28], et en utilisant les valeurs expérimentales [8,30] $\xi = 0,376$, $\Delta = 0,44\epsilon_F$, $\epsilon_0 = 0,85\epsilon_F$ et la valeur théorique [29] $f_0 = 0,846\epsilon_F$, nous trouvons :

$$\frac{N\hbar^2}{(t_{\text{br}}\epsilon_F)^2} \simeq \left(\frac{\Theta}{0,46} \right)^5 \frac{(1+2r)^2}{(1+r)} \quad (22)$$

où $\Theta = T/T_F$ et où $r \equiv \partial_T \bar{E}_F / \partial_T \bar{E}_B \simeq \left(\frac{0.316}{\Theta}\right)^{9/2} e^{-0.44/\Theta}$ mesure l'importance relative des deux branches d'excitation. Cette formule, représentée en tireté sur la Fig. 1b, donne un équivalent exact de t_{br} quand $\Theta \rightarrow 0$.¹⁴

Aux temps finis¹⁵ $t = O(N^0) \ll t_{br}$, la contribution de D à $g_1(t)$ dans l'équation (13) est *a priori* comparable à celle de t_{br}^{-2} puisque les deux coefficients se comportent comme $1/N$ dans l'ensemble canonique. D peut être calculé à très basse température en ne gardant que la partie phononique du spectre. Dans l'état de l'art, il est prédit par différentes approches que la branche bosonique est convexe aux faibles q dans un gaz unitaire [31–33],

$$\epsilon_{B,q} \underset{q \rightarrow 0}{=} \hbar c q + \frac{\gamma \hbar^3 q^3}{8m^2 c} + O(q^5) \text{ avec } \gamma > 0 \quad (23)$$

si bien que les phonons interagissent par des processus Landau–Beliaev 2 phonons \leftrightarrow 1 phonon comme dans un gaz de bosons en interaction faible.¹⁶ Nous pouvons alors réutiliser, en l'adaptant,¹⁷ la réduction à basse température de l'expression générale (12) effectuée dans la référence [18]. Par ailleurs, nous trouvons, par résolution numérique des équations de la RPA de la référence [21], que $\gamma \simeq 0,1$, en accord avec [33,34], si bien que

$$\frac{\hbar N D}{\epsilon_F} \underset{\Theta \rightarrow 0}{\sim} C \Theta^4 \text{ avec } C \simeq 0,4 \quad (24)$$

Ceci achève notre description du brouillage thermique d'un gaz de fermions à la limite unitaire et à basse température.

6. Conclusion

Nous avons présenté la première théorie microscopique du brouillage thermique de la phase d'un condensat de paires de fermions (13), et mis en évidence un brouillage balistique et une diffusion de phase sous-dominante. Le temps de brouillage dépend de la variance de l'énergie totale du gaz, ainsi que de la dérivée du potentiel chimique microcanonique du gaz par rapport à l'énergie. Le coefficient de diffusion de la phase peut être déduit d'équations cinétiques sur les nombres de quasi-particules. Pour établir ces résultats, nous avons utilisé de façon centrale le fait que la vitesse de variation de la phase du condensat de paires est reliée à l'opérateur potentiel chimique du gaz par l'équation (8), dont nous avons donné une dérivation microscopique incluant les deux branches d'excitation du gaz, bosonique et fermionique. Nous avons enfin proposé un protocole expérimental de mesure de ce temps, que nous avons estimé être de l'ordre de la dizaine de millisecondes pour un gaz cohérent de fermions préparé à la limite unitaire dans l'ensemble canonique.

Remerciements

Ce travail a bénéficié d'un financement européen *via* le projet QIBEC sous le numéro de contrat 284 584.

Annexe A. Compléments sur le calcul variationnel avec un état cohérent de paires

Dans cette annexe nous démontrons l'équation (21) portant sur la moyenne temporelle de θ grâce à un modèle microscopique fondé sur l'Ansatz (16), état cohérent de paires en mouvement. Il est commode dans un premier temps de traiter la variable réelle n et le champ complexe Λ dans (19) comme des variables indépendantes, c'est-à-dire de ne pas fixer $\|\Phi\|$. Pour inclure les interactions entre les quasi-particules, il faut aller jusqu'à l'ordre trois en Λ et Λ^* comme suit :

$$\mathcal{H}(\Phi, \Phi^*) = \mathcal{T}_0[n, \phi_0(N)] + \sum_{j=1}^3 \mathcal{T}_j[n, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^4) \quad (25)$$

¹⁴ Le bon accord avec les données expérimentales est à relativiser car si l'on traite les deux branches du modèle à tous les ordres en $k_B T$, on obtient un décalage vers le haut de $t_{br} \epsilon_F / (\hbar N^{1/2})$ à peu près constant et égal à 5 sur l'intervalle de température de la Fig. 1b.

¹⁵ Les temps que l'on considère sont néanmoins contraints par l'inégalité $t > \tau_c$ (voir la Note 1) : pour un gaz unitaire $\tau_c \simeq (0,149/\Theta)^5$ quand $\Theta \rightarrow 0$, d'après la Note 17.

¹⁶ Dans le cas concave, les processus dominants sont les diffusions 2 phonons \leftrightarrow 2 phonons, comme dans la référence [22].

¹⁷ L'astuce universalisante à basse température est d'utiliser, quel que soit le système physique, mc/\hbar comme unité de vecteur d'onde et mc^2 comme unité d'énergie. Partons alors du coefficient de diffusion de la phase et du temps de corrélation des quasi-particules pour des bosons en interaction faible [18] : $\hbar N D / (mc^2) \sim c_1 (k_B T / mc^2)^4$ et $mc^2 \tau_c / \hbar \sim c_3 \rho [\hbar / (\sqrt{2} mc)]^3 (mc^2 / k_B T)^5$, où $c_1 \simeq 0,3036$ et $c_3 \simeq 0,05472$, et recensons tous les facteurs correctifs faisant passer du gaz de bosons en interaction faible au gaz unitaire de fermions, compte tenu du fait que D est une fonction quadratique de $P\bar{A}$ et linéaire de M^{-1} , voir l'équation (12) : (i) dans le cas d'un condensat de paires, il y a un facteur deux dans les coefficients \bar{A} de $-\dot{\theta}_0 / dt$, donc un facteur quatre sur D . (ii) l'équation d'état passe de $\mu_0(\rho) \propto \rho$ à $\mu_0(\rho) \propto \rho^{2/3}$, où ρ est la densité, donc $(N/c) dc/dN$ dans \bar{A} passe de $1/2$ à $1/3$, d'où un facteur $2/3$ sur \bar{A} et un facteur $4/9$ sur D . (iii) $P\bar{A}$, nul pour une branche d'excitation bosonique linéaire en q puisqu'alors $\bar{A} \propto \bar{c}$, est proportionnel à basse température au paramètre de courbure sans dimension γ , qui valait un dans [18], d'où un facteur γ^2 dans D . (iv) d'après l'hydrodynamique quantique [22], les amplitudes adimensionnées de couplage Beliaev–Landau entre les quasi-particules, à des valeurs fixées des vecteurs d'onde adimensionnés, dépendent du système seulement *via* un facteur global $1 + \Lambda_u$, où $\Lambda = \rho \mu_0''(\rho) / [3\mu_0'(\rho)]$ passe de 0 à $\Lambda_u = -1/9$, d'où un facteur $(1 + \Lambda_u)^{-2}$ sur la matrice M^{-1} donc sur D et sur le temps de corrélation τ_c induit par les collisions entre les quasi-particules. Alors, pour le gaz unitaire, $\hbar N D / (mc^2) \sim c_1 [(4\gamma/3)^2 / (1 + \Lambda_u)^2] (k_B T / mc^2)^4$ et $mc^2 \tau_c / \hbar \sim c_3 (1 + \Lambda_u)^{-2} \rho [\hbar / (\sqrt{2} mc)]^3 (mc^2 / k_B T)^5$.

Le tenseur \mathcal{T}_j est de rang j , c'est-à-dire que $\mathcal{T}_j(\Lambda, \Lambda^*)$ est d'ordre exactement j en Λ et Λ^* ; il peut s'exprimer en termes de la différentielle j -ième de \mathcal{H} prise en $(\Phi, \Phi^*) = (n^{1/2}\phi_0, n^{1/2}\phi_0)$ restreinte au sous-espace orthogonal à $(\phi_0, 0)$ et $(0, \phi_0)$, où l'on a pris ϕ_0 réelle, et il ne dépend pas de la phase θ du fait de la symétrie $U(1)$. À nombre total de particules fixé, l'énergie ne varie pas au premier ordre autour du minimiseur si bien que $\mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)] = 0$. Cette innocente équation n'est autre que la célèbre équation du *gap* lorsque le système est spatialement homogène. De plus, on vérifie que $\partial_n \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] = 2\mu_0(N)$ où $\mu_0(N) = dE_0(N)/dN$ est le potentiel chimique du gaz à température nulle, $E_0(N) = \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)]$ étant l'énergie de l'état fondamental.

Les variables phase et module au carré de l'amplitude du champ Φ dans le mode ϕ_0 sont canoniquement conjuguées, si bien que $-\hbar d\theta/dt = \partial_n \mathcal{H}(\Phi, \Phi^*)$. Une fois effectuée cette dérivée dans (25) à Λ et Λ^* fixés, on peut fixer la norme de Φ à $(N/2)^{1/2}$ (c'est-à-dire le nombre total de particules à N) et éliminer n grâce à la relation $n = \|\Phi\|^2 - \|\Lambda\|^2$; le champ Λ reste alors la seule variable dynamique du problème. L'expression est utile seulement jusqu'à l'ordre deux en Λ, Λ^* :

$$-\hbar \frac{d\theta}{dt} = \partial_n \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] - \|\Lambda\|^2 \partial_n^2 \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] + \sum_{j=1}^2 \partial_n \mathcal{T}_j[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3) \quad (26)$$

L'hamiltonien régissant l'évolution de Λ à nombre de particules fixé s'obtient en remplaçant n par $N/2 - \|\Lambda\|^2$ dans (25) et en développant jusqu'à l'ordre trois en Λ, Λ^* :

$$\mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*) = E_0(N) + \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) + \mathcal{T}_3[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) - \|\Lambda\|^2 \partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^4) \quad (27)$$

où la forme quadratique $\check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*)$ est obtenue en soustrayant $2\mu_0(N)\|\Lambda\|^2$ à $\mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*)$. Pour calculer la moyenne temporelle à gros grains de $\partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*)$, c'est-à-dire du terme linéaire en Λ, Λ^* posant problème dans $d\theta/dt$ (voir le corps de l'article), il est astucieux d'écrire alors directement la dérivée temporelle de la partie imaginaire du champ Λ projetée sur la fonction $(N/2)^{1/2} d\phi_0/dN$,

$$Y \equiv \frac{I^6}{2i} \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{d\phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{dN} (\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \Lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')) \quad (28)$$

Comme $i\hbar \partial_t \Lambda = I^{-6} \partial_{\Lambda^*} \mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*)$, il vient

$$-2\hbar \frac{dY}{dt} = \mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N(\Lambda, \Lambda^*) = \mathcal{D} \cdot \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) + \mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3) \quad (29)$$

où $\mathcal{H}_N^{\text{cub}}$ est la partie de \mathcal{H}_N d'ordre trois en Λ, Λ^* . On a introduit l'opérateur différentiel

$$\mathcal{D} = \sum_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'} \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{d\phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{dN} (\partial_{\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}')} + \partial_{\Lambda^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}) \quad (30)$$

Nous allons maintenant mettre à profit en cascade deux relations vérifiées pour tout Λ orthogonal à $\phi_0(N)$:

$$2\mathcal{D} \cdot \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) = -\partial_n \mathcal{T}_1[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) \quad (31)$$

$$2\mathcal{D} \cdot \mathcal{H}_N^{\text{cub}}(\Lambda, \Lambda^*) = 2 \frac{d}{dN} \check{\mathcal{T}}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) - \partial_n \mathcal{T}_2[N/2, \phi_0(N)](\Lambda, \Lambda^*) + \|\Lambda\|^2 \partial_n^2 \mathcal{T}_0[N/2, \phi_0(N)] \quad (32)$$

On établit ces relations en considérant formellement un champ Φ' à $N + \delta N$ particules et en obtenant de deux façons différentes l'approximation quadratique en Λ' et Λ'^* de $\mathcal{H}_{N+\delta N}(\Lambda', \Lambda'^*)$ où Λ' est à une phase près comme dans (19) (écrite pour $N + \delta N$ particules) la composante de Φ' orthogonale à $\phi_0(N + \delta N)$. D'une part, on remplace simplement N par $N + \delta N$ et Λ par Λ' dans (27), puis on développe au premier ordre en δN , ce qui fait apparaître $d\check{\mathcal{T}}_2/dN$. D'autre part, on applique à $\mathcal{H}(\Phi', \Phi'^*)$ le développement (25) autour de $\Phi_0(N)$ sachant qu'au premier ordre en δN , la composante de Φ' orthogonale à $\phi_0(N)$ contient, en plus de celle Λ'_\perp de Λ' , une contribution venant de $d\phi_0/dN$:

$$\Lambda(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta N \left(\frac{N}{2}\right)^{1/2} \frac{d\phi_0}{dN}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \Lambda'_\perp(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + O(\delta N^2, \|\Lambda'\|^3, \delta N \|\Lambda'\|^2) \quad (33)$$

C'est ce décalage infinitésimal proportionnel à δN dans la direction de $d\phi_0/dN$ qui fait apparaître l'opérateur \mathcal{D} . Les équations (31) et (32) résultent de l'identification aux ordres un et deux en Λ' et Λ'^* des deux expressions de $\mathcal{H}_{N+\delta N}(\Lambda', \Lambda'^*)$ obtenues.

Le plus gros du travail a été accompli. Il reste à combiner les équations (26), (29), (31), et (32), ou plus précisément leur moyenne temporelle à gros grains (sur une échelle de temps longue devant la période d'oscillation des amplitudes modales b_α mais courte devant le temps d'évolution des nombres de quasi-particules $|b_\alpha|^2$) pour obtenir

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\theta^t}{dt} = \mu_0(N) + \overline{\frac{d\check{\mathcal{T}}_2}{dN}}[N](\Lambda, \Lambda^*) + O(\|\Lambda\|^3) \quad (34)$$

où nous avons utilisé de façon cruciale la nullité de $\overline{d\Lambda/dt}$ (et donc de $\overline{dY/dt}$) pour le champ Λ , dont l'excursion est bornée. La forme quadratique $\check{T}_2[N]$ est représentée par la matrice $\eta\mathcal{L}[N]$ avec $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, soit, en notation par blocs et avec le produit scalaire hermitien \langle, \rangle dont découle la norme $\| \cdot \|$:

$$\check{T}_2[N](\Lambda, \Lambda^*) = \frac{1}{2} \left\langle (\Lambda \ \Lambda^*), \eta\mathcal{L}[N] \begin{pmatrix} \Lambda \\ \Lambda^* \end{pmatrix} \right\rangle \quad (35)$$

Il reste à injecter la décomposition modale (20) dans l'équation (35) préalablement dérivée par rapport à N , les ϵ_α et (u_α, v_α) , $-\epsilon_\alpha$ et (v_α^*, u_α^*) étant les valeurs propres et vecteurs propres de \mathcal{L} . La valeur moyenne à gros grains $\overline{\quad}$ se charge d'éliminer les termes croisés et le théorème de Hellmann–Feynman assure que¹⁸ $\langle (u_\alpha, -v_\alpha), \frac{d\mathcal{L}[N]}{dN} \begin{pmatrix} u_\alpha \\ v_\alpha \end{pmatrix} \rangle = d\epsilon_\alpha/dN$, et permet ainsi de conclure sur l'équation (21).

Annexe B. Hydrodynamique quantique irrotationnelle

Dans cette annexe, nous donnons une démonstration supplémentaire de l'équation (8) à partir de l'hydrodynamique quantique. Bien que cette démonstration ne soit pas microscopique, à l'inverse de celle que nous avons donnée dans le corps de l'article et dans l'Annexe A, et bien qu'elle néglige les degrés de liberté fermioniques internes et se contente d'une description aux grandes échelles spatiales des paires de fermions, par un champ bosonique donc, elle présente l'avantage de reposer uniquement sur l'équation d'état et d'être ainsi valide dans tous les régimes d'interaction.

En 1949, pour calculer la viscosité de l'hélium superfluide à basse température, Landau et Khalatnikov ont développé la théorie de l'hydrodynamique quantique [22], qui permet de déterminer, de manière exacte à l'ordre dominant en T , les effets d'une température non nulle sur les observables d'un fluide quantique, du moins sur celles dépendant seulement des faibles échelles d'énergie et des grandes échelles de longueur. De façon remarquable, le seul ingrédient spécifique est l'équation d'état du fluide à température nulle, c'est-à-dire ici la densité volumique d'énergie $e_0(\rho)$ de l'état fondamental du système spatialement homogène de densité ρ .

Afin d'obtenir la dérivée temporelle de l'opérateur phase du condensat de paires de fermions, nous apportons deux raffinements à la théorie, une régularisation des divergences ultraviolettes et une spécialisation au cas irrotationnel.

D'une part, nous résolvons les problèmes de divergence du niveau d'énergie fondamental du hamiltonien de Landau–Khalatnikov, dus à l'énergie quantique de point zéro des modes propres du système, en discrétisant l'espace en un réseau cubique de pas l , sous-multiple de la longueur L de la boîte de quantification, beaucoup plus petit que la longueur d'onde typique $2\pi/q_{\text{th}}$ des excitations du fluide peuplées thermiquement, mais beaucoup plus grand que la distance moyenne $\rho^{-1/3}$ entre particules,

$$\rho^{-1/3} \ll l \ll q_{\text{th}}^{-1} \quad (36)$$

ce qui est réalisable à suffisamment basse température; ce maillage souscrit au régime de validité de l'hydrodynamique, celui d'une description spatiale à gros grains, et fournit une coupure naturelle ultraviolette dans l'espace des vecteurs d'onde \mathbf{q} , en les restreignant à la première zone de Brillouin¹⁹ $\mathcal{D} = [-\pi/l, \pi/l]^3$. Dans l'hamiltonien, il faut alors remplacer les opérateurs différentiels (gradient, divergence, laplacien) par leurs équivalents discrets, comme il sera implicitement fait plus bas, et il faut utiliser la densité volumique d'énergie *nue* $e_{0,0}(\rho)$, fonction du pas du réseau l ; suivant les idées de la renormalisation, l'énergie quantique de point zéro des modes, formellement divergente lorsque $l \rightarrow 0$, s'ajoute alors à $e_{0,0}(\rho)$ pour reconstruire précisément la densité volumique d'énergie *effective* ou *vraie* $e_0(\rho)$, indépendante de l , et qui est celle mesurée expérimentalement.

D'autre part, nous spécialisons la théorie au cas d'un opérateur champ de vitesse $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$ irrotationnel, qu'on peut donc écrire comme le gradient d'un opérateur champ de phase $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$, canoniquement conjugué à l'opérateur champ de densité $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$:

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hbar}{m} \text{grad} \hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \quad \text{avec} \quad [\hat{\rho}(\mathbf{r}, t), \hat{\phi}(\mathbf{r}', t)] = i \frac{\delta_{\mathbf{r}, \mathbf{r}'}}{\beta} \quad (37)$$

Ceci revient à négliger la composante transverse du champ $\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{r}, t)$, comme l'a fait la référence [22] pour déterminer l'interaction entre phonons et avancer dans le calcul de la viscosité. Dans le cas particulier invariant d'échelle du gaz de fermions unitaire, une justification en est donnée dans la référence [35] dans le cadre de la théorie effective des champs. Notons en passant que la densité de quasi-particules fermioniques, exponentiellement petite en $1/T$, est elle directement omise par la théorie hydrodynamique.

¹⁸ $(u_\alpha, -v_\alpha)$ est le vecteur dual de (u_α, v_α) car $(\eta\mathcal{L})^\dagger = \eta\mathcal{L}$.

¹⁹ Il faut aussi que les excitations élémentaires du système restent phononiques sur tout le domaine \mathcal{D} . Ceci impose $\hbar c/l < \Delta$ donc $mcl/\hbar > mc^2/\Delta \gg 1$ dans la limite de BCS, et seulement $mcl/\hbar > 1$ ailleurs, où c est la vitesse du son et Δ le *gap* à $T = 0$. La condition nécessaire $mcl/\hbar > 1$ est plus faible que celle déjà invoquée, $\rho^{1/3}l \gg 1$, dans le régime d'interaction forte ou dans la limite de BCS, puisque c y est d'ordre de la vitesse de Fermi. Elle est plus contraignante dans la limite dite de CBE, où les paires de fermions, assimilables à des bosons, forment un condensat en interaction faible.

La suite est assez classique. On part des équations du mouvement des champs en représentation de Heisenberg, respectivement l'équation de continuité quantique et l'équation d'Euler quantique sur le potentiel (dont le gradient donne l'équation d'Euler quantique sur la vitesse) :

$$\partial_t \hat{\rho} + \text{div} \left[\frac{1}{2} \{ \hat{\rho}, \hat{\mathbf{v}} \} \right] = 0 \quad (38)$$

$$\hbar \partial_t \hat{\phi} = -\frac{1}{2} m \hat{\mathbf{v}}^2 - \mu_{0,0}(\hat{\rho}) \quad (39)$$

où $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ est l'anticommutateur de deux opérateurs et

$$\mu_{0,0}(\rho) = \frac{d}{d\rho} e_{0,0}(\rho) = e'_{0,0}(\rho) \quad (40)$$

est le potentiel chimique nu de l'état fondamental à la densité ρ . Ces équations dérivent du hamiltonien

$$\hat{H}_{\text{hydro}} = l^3 \sum_{\mathbf{r}} \left[\frac{1}{2} m \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\rho} \hat{\mathbf{v}} + e_{0,0}(\hat{\rho}) \right] \quad (41)$$

Les fluctuations spatiales de densité et de phase sont faibles, parce que $\rho^{1/3}l$ est assez grand si elles sont quantiques, parce que $q_{\text{th}}l$ est de plus assez petit si elles sont thermiques.²⁰ On peut donc, comme dans [22], linéariser les équations du mouvement autour de la solution spatialement uniforme :

$$\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \hat{\rho}_0 + \delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) \quad (42)$$

$$\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \hat{\phi}_0(t) + \delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) \quad (43)$$

L'opérateur $\hat{\rho}_0$ vaut simplement \hat{N}/L^3 , où \hat{N} est l'opérateur nombre total de particules ; c'est une constante du mouvement. L'opérateur $\hat{\phi}_0$ est l'opérateur phase du condensat, ici

$$\hat{\phi}_0 = \hat{\theta}_0/2 \quad (44)$$

puisque l'opérateur phase $\hat{\theta}_0$ de l'équation (2) prend les paires pour objets élémentaires, alors que les équations (38), (39) privilégient les particules fermioniques. Les fluctuations spatiales $\delta\hat{\rho}$ et $\delta\hat{\phi}$, d'intégrale (discrète) nulle sur tout l'espace, se développent seulement sur les ondes planes de vecteur d'onde \mathbf{q} non nul, et commutent avec $\hat{\rho}_0$. Après résolution des équations linéarisées sur $\delta\hat{\rho}$ et $\delta\hat{\phi}$, on dispose de l'habituel développement sur les modes propres :

$$\delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t) = \frac{\hat{\rho}_0^{1/2}}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^{3*} \cap \mathcal{D}} \left(\frac{\hbar \mathbf{q}}{2m\hat{c}_{0,0}} \right)^{1/2} (\hat{B}_{\mathbf{q}} + \hat{B}_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \quad (45)$$

$$\delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t) = \frac{-i}{\hat{\rho}_0^{1/2} L^{3/2}} \sum_{\mathbf{q} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^{3*} \cap \mathcal{D}} \left(\frac{m\hat{c}_{0,0}}{2\hbar \mathbf{q}} \right)^{1/2} (\hat{B}_{\mathbf{q}} - \hat{B}_{-\mathbf{q}}^\dagger) e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} \quad (46)$$

où les opérateurs de création $\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger$ et d'annihilation $\hat{B}_{\mathbf{q}}$ d'un phonon de vecteur d'onde \mathbf{q} et d'énergie $\hbar \mathbf{q} \hat{c}_{0,0}$ obéissent aux relations de commutation bosoniques, par exemple $[\hat{B}_{\mathbf{q}}, \hat{B}_{\mathbf{q}'}^\dagger] = \delta_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'}$, et où l'on a introduit l'opérateur vitesse du son nue à température nulle

$$\hat{c}_{0,0} \equiv \left(\frac{\hat{\rho}_0 \mu'_{0,0}(\hat{\rho}_0)}{m} \right)^{1/2} \quad (47)$$

Il reste alors à développer le second membre de (39) jusqu'à l'ordre deux inclus en $\delta\hat{\rho}$ et $\delta\hat{\phi}$, à en extraire la composante de Fourier de vecteur d'onde nul, à effectuer une moyenne temporelle à gros grains pour supprimer les termes croisés oscillants $\hat{B}_{\mathbf{q}} \hat{B}_{-\mathbf{q}}$ et $\hat{B}_{-\mathbf{q}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger$, puis à reconnaître l'identité

²⁰ On vérifie d'abord que les fluctuations de densité sur un même site sont faibles en valeur relative, en utilisant (45). À $T = 0$, $(\delta\hat{\rho}^2)/\rho^2 \approx \frac{\hbar}{mcl} \frac{1}{\rho l^3} \ll 1$, compte tenu de (36) et de la condition nécessaire $mcl/\hbar > 1$ établie dans la Note 19. À $T > 0$ s'ajoute la contribution thermique $\approx \frac{\hbar}{mcl} \frac{(q_{\text{th}} l)^4}{\rho l^3}$, qui est de même $\ll 1$. On vérifie ensuite que les fluctuations de phase entre deux sites voisins sont faibles en valeur absolue. Pour cela, on constate d'abord, en utilisant (46), que $l^2 \langle (\mathbf{grad} \delta\hat{\phi})^2 \rangle = (mcl/\hbar)^2 (\delta\hat{\rho}^2)/\rho^2$. Il reste ensuite à utiliser la propriété $mc/(\hbar\rho^{1/3}) = O(1)$ qui vaut dans toute la zone de raccordement entre les limites de CBE et de BCS, ainsi que nos estimations précédentes de $(\delta\hat{\rho}^2)/\rho^2$, pour conclure.

$$\frac{d}{d\rho} [\rho \mu'_{0,0}(\rho)]^{1/2} = \frac{\mu'_{0,0}(\rho) + \rho \mu''_{0,0}(\rho)}{2[\rho \mu'_{0,0}(\rho)]^{1/2}} \quad (48)$$

pour obtenir

$$\overline{\frac{d}{dt} \hat{\phi}_0} = -\mu_{0,0}(\hat{\rho}_0) - \sum_{\mathbf{q} \in \frac{2\pi}{L} \mathbb{Z}^3 \cap \mathcal{D}} \left(\hbar q \frac{d}{dN} \hat{c}_{0,0} \right) \left(\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \right) \quad (49)$$

À cet ordre du développement en les fluctuations spatiales, on peut regrouper dans (49) la contribution de point zéro des modes (le terme 1/2 entre parenthèses) avec le potentiel chimique nu $\mu_{0,0}(\hat{\rho}_0)$ pour former le potentiel chimique vrai $\mu_0(\hat{\rho}_0)$ du fluide à température nulle, et identifier $\hat{c}_{0,0}$ dans le préfacteur des opérateurs nombres de phonons $\hat{B}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{q}}$ avec la vitesse du son vraie à température nulle, $\hat{c}_0 \equiv [\hat{\rho}_0 \mu'_0(\hat{\rho}_0)/m]^{1/2}$. On obtient alors la limite phononique (de basse température) de la relation (8), et ceci sans hypothèse sur la force (ou la faiblesse) des interactions.

Références

- [1] M. Greiner, O. Mandel, T.W. Hänsch, I. Bloch, *Nature* 419 (2002) 51.
- [2] J. Estève, C. Gross, A. Weller, S. Giovanazzi, M.K. Oberthaler, *Nature* 455 (2008) 1216.
- [3] M.F. Riedel, P. Böhi, Yun Li, T.W. Hänsch, A. Sinatra, P. Treutlein, *Nature* 464 (2010) 1170.
- [4] G.-B. Jo, Y. Shin, S. Will, T.A. Pasquini, M. Saba, W. Ketterle, D.E. Pritchard, M. Vengalattore, M. Prentiss, *Phys. Rev. Lett.* 98 (2007) 030407.
- [5] M. Egorov, R.P. Anderson, V. Ivannikov, B. Opanchuk, P. Drummond, B.V. Hall, A.I. Sidorov, *Phys. Rev. A* 84 (2011) 021605.
- [6] T. Berrada, S. van Frank, R. Bücker, T. Schumm, J.-F. Schaff, J. Schmiedmayer, *Nat. Commun.* 4 (2013) 2077.
- [7] S. Nascimbène, N. Navon, K.J. Jiang, F. Chevy, C. Salomon, *Nature* 463 (2010) 1057.
- [8] M.J.H. Ku, A.T. Sommer, L.W. Cheuk, M.W. Zwierlein, *Science* 335 (2012) 563.
- [9] C. Kohstall, S. Riedl, E.R. Sánchez Guajardo, L.A. Sidorenkov, J. Hecker Denschlag, R. Grimm, *New J. Phys.* 13 (2011) 065027.
- [10] I. Carusotto, Y. Castin, *Phys. Rev. Lett.* 94 (2005) 223202.
- [11] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, *Phys. Rev. A* 88 (2013) 063623.
- [12] A. Sinatra, Y. Castin, E. Witkowska, *Phys. Rev. A* 75 (2007) 033616.
- [13] A.B. Kuklov, J.L. Birman, *Phys. Rev. A* 63 (2000) 013609.
- [14] P. Anderson, *Phys. Rev.* 112 (1958) 1900.
- [15] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, G. Grynberg, *Processus d'interaction entre photons et atomes*, InterÉditions et Éditions du CNRS, Paris, 1988.
- [16] A.J. Leggett, *Quantum Liquids*, Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [17] M. Rigol, V. Dunjko, M. Olshanii, *Nature* 452 (2008) 854.
- [18] A. Sinatra, Y. Castin, E. Witkowska, *Phys. Rev. A* 80 (2009) 033614.
- [19] J.-P. Blaizot, G. Ripka, *Quantum Theory of Finite Systems*, MIT Press, Cambridge, MA, USA, 1985.
- [20] Y. Castin, R. Dum, *Phys. Rev. A* 57 (1998) 3008.
- [21] R. Combescot, M.Yu. Kagan, S. Stringari, *Phys. Rev. A* 74 (2006) 042717.
- [22] L. Landau, I. Khalatnikov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 19 (1949) 637.
- [23] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* 92 (2004) 120401.
- [24] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T.W. Hänsch, I. Bloch, *Nature* 415 (2002) 39.
- [25] W.S. Bakr, J.I. Gillen, A. Peng, S. Fölling, M. Greiner, *Nature* 462 (2009) 74.
- [26] Y. Castin, A. Sinatra, Spatial and temporal coherence of a Bose-condensed gas, in: A. Bramati, M. Modugno (Eds.), *Physics of Quantum Fluids: New Trends and Hot Topics in Atomic and Polariton Condensates*, Springer, Berlin, 2013.
- [27] A.L. Gaunt, T.F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R.P. Smith, Z. Hadzibabic, *Phys. Rev. Lett.* 110 (2013) 200406.
- [28] A. Bulgac, J.E. Drut, P. Magierski, *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006) 090404.
- [29] Y. Nishida, D.T. Son, *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006) 050403.
- [30] A. Schirotzek, Yong-il Shin, C.H. Schunck, W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008) 140403.
- [31] Y. Castin, I. Ferrier-Barbut, C. Salomon, *C. R. Physique* 16 (2015) 241.
- [32] G. Bighin, L. Salasnich, P.A. Marchetti, F. Toigo, *Phys. Rev. A* 92 (2015) 023638.
- [33] S.N. Klimin, J. Tempere, Jeroen P.A. Devreese, *J. Low Temp. Phys.* 165 (2011) 261.
- [34] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, *Phys. Rev. A* 93 (2016) 013623.
- [35] D.T. Son, M. Wingate, *Ann. Phys.* 321 (2006) 197.

Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the
BEC-BCS crossover. *Phys. Rev. A* **93**, 013623

Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover

H. Kurkjian, Y. Castin, and A. Sinatra

Laboratoire Kastler Brossel, ENS, PSL, CNRS, UPMC–Sorbonne Universités and Collège de France, 75005 Paris, France

(Received 13 November 2015; revised manuscript received 7 January 2016; published 25 January 2016)

We study the concavity of the dispersion relation $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ of the bosonic excitations of a three-dimensional spin- $\frac{1}{2}$ unpolarized Fermi gas in the random-phase approximation. In the limit of small wave numbers q , we obtain analytically the spectrum up to order 5 in q . In the neighborhood of $q = 0$, a change in concavity between the convex Bose-Einstein condensation limit and the concave BCS limit takes place at $\Delta/\mu \simeq 0.869$ ($1/k_F a \simeq -0.144$), where a is the scattering length between opposite spin fermions, k_F is the Fermi wave number and Δ the gap according to BCS theory, and μ is the chemical potential. At that point the branch is concave due to a negative fifth-order term. Our results are supplemented by a numerical study that shows the border between the zone of the (q, Δ) plane where $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ is concave and the zone where it is convex.

DOI: [10.1103/PhysRevA.93.013623](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.013623)

I. INTRODUCTION

Cold atomic gases offer a broad flexibility of the microscopic parameters in exploring the many-body problem. In particular, in spin- $\frac{1}{2}$ Fermi gases, the interaction strength can be adjusted experimentally using Feshbach resonances without inducing strong three-body losses. This degree of freedom, unique among Fermi systems, allowed cold-atom experiments [1–9] to study the crossover between a superfluid of Cooper pairs in the so-called Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS) regime of interaction and a superfluid of tightly bound, almost bosonic, dimers in the Bose-Einstein condensation (BEC) regime. Another advantage of cold atomic gases is the simple theoretical description of the interactions that the cold and dilute regime in which they occur allows for. For a Fermi gas in two spin states \uparrow and \downarrow , one can show that the only significant interactions at low temperature and weak density occur between opposite spin fermions in the s wave and can be fully characterized by a single parameter called the scattering length and denoted by a . In this propitious theoretical framework, entirely analytical studies of experimentally accessible properties of the gas are possible. This article is one of those.

At zero temperature, the three-dimensional spatially homogeneous unpolarized Fermi gas is fully paired and its excitation spectrum consists of two branches: a fermionic branch of excitation of the internal degrees of freedom of the $\uparrow\downarrow$ pairs of fermions and a bosonic branch of excitation of their center-of-mass motion, which has a phononic behavior in the long-wavelength limit. The latter branch is sometimes said to be collective since it involves a large number of the fermionic modes of internal excitations of the pairs. The fermionic branch is described to lowest order by the BCS theory. To tackle the bosonic branch, several approaches have been proposed: the random-phase approximation (RPA) of Anderson [10], a Gaussian approximation of the action in a path-integral framework [11,12], a Green's-function approach associated with a diagrammatic approximation [13], and a linearization of the time-dependent BCS variational equations [14]. Remarkably, those theories all lead to the same approximate spectrum of bosonic excitations, which they describe by the same implicit equation.

The concavity of this spectrum has been studied in the weak-coupling BCS limit [11] and, in a qualitative way, in the rest of the BEC-BCS crossover [13,15,16]. A complete quantitative study is thus missing, a gap that this article intends to bridge. In particular, we obtain the spectrum analytically up to order 5 in the wave number q of the center of mass of the pairs. This allows us to conclude on the concavity of the branch of excitation in a neighborhood of $q = 0$ over the whole BEC-BCS crossover.

Several physically relevant problems can be addressed after our study. First, the processes that dominate the collective mode damping at low temperature can be identified. If the branch is convex over a neighborhood of $q = 0$ then the Landau-Beliaev 2 phonons \leftrightarrow 1 phonon interaction processes [17,18] dominate, while if it is concave, those processes are forbidden by momentum and energy conservation and the Landau-Khalatnikov 2 phonons \leftrightarrow 2 phonons processes [19] take over. At low temperature the contribution of the gapped fermionic branch to the collective mode damping is exponentially small [20]. Second, the quantitative knowledge of the concavity parameter γ is required in order to predict the phonon damping rate due to the 2 phonons \leftrightarrow 1 phonon processes in the convex case beyond the quantum hydrodynamics approximation [16] or due to the 2 phonons \leftrightarrow 2 phonons processes in the concave case where the effective interaction predicted by quantum hydrodynamics involves virtual 2 phonons \leftrightarrow 1 phonon processes and depends on γ . Finally, the knowledge of γ gives access to the phase diffusion coefficient of the condensate of pairs, a quantity responsible for an intrinsic and fundamental limit to the coherence time of the gas [14].

II. THE RPA EQUATION ON THE EXCITATION SPECTRUM

The RPA equation yielding implicitly the energy $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ of the collective excitations as a function of their wave vector \mathbf{q} is

$$I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q) I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q) = \hbar^2 \omega_{\mathbf{q}}^2 [I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)]^2. \quad (1)$$

The collective nature of the bosonic modes is visible in the quantities $I_{\sigma\sigma'}$, which are integrals on the relative wave vector \mathbf{k} of the pairs and depend on $\omega_{\mathbf{q}}^2$ via the denominator of their

integrand [13]:

$$I_{++}(\omega, q) = \int d^3k \left[\frac{(\epsilon_{\mathbf{k}+q/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-q/2})(U_{\mathbf{k}+q/2}U_{\mathbf{k}-q/2} + V_{\mathbf{k}+q/2}V_{\mathbf{k}-q/2})^2}{\hbar^2\omega^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}+q/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-q/2})^2} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right], \quad (2)$$

$$I_{--}(\omega, q) = \int d^3k \left[\frac{(\epsilon_{\mathbf{k}+q/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-q/2})(U_{\mathbf{k}+q/2}U_{\mathbf{k}-q/2} - V_{\mathbf{k}+q/2}V_{\mathbf{k}-q/2})^2}{\hbar^2\omega^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}+q/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-q/2})^2} + \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right], \quad (3)$$

$$I_{+-}(\omega, q) = \int d^3k \frac{(U_{\mathbf{k}+q/2}U_{\mathbf{k}-q/2} + V_{\mathbf{k}+q/2}V_{\mathbf{k}-q/2})(U_{\mathbf{k}+q/2}U_{\mathbf{k}-q/2} - V_{\mathbf{k}+q/2}V_{\mathbf{k}-q/2})}{\hbar^2\omega^2 - (\epsilon_{\mathbf{k}+q/2} + \epsilon_{\mathbf{k}-q/2})^2}. \quad (4)$$

We have introduced the amplitudes $U_{\mathbf{k}}$ and $V_{\mathbf{k}}$ and the eigenenergies $\epsilon_{\mathbf{k}}$ of the fermionic eigenmodes of the BCS theory [21]:

$$\epsilon_{\mathbf{k}} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2k^2}{2m} - \mu\right)^2 + \Delta^2}, \quad (5)$$

$$U_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\frac{\hbar^2k^2}{2m} - \mu}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)}, \quad (6)$$

$$V_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\frac{\hbar^2k^2}{2m} - \mu}{\epsilon_{\mathbf{k}}}\right)}, \quad (7)$$

where m is the mass of a fermion. The two natural parameters of the BCS theory, with which we express the energy $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$, are the chemical potential μ , identical for the two spin states, and Δ , the gap in the BCS spectrum of the fermionic excitations when μ is positive. If needed, they can be replaced by the scattering length a and the total density ρ of the gas by inverting the two following relations [22,23]:

$$\frac{m}{4\pi\hbar^2a} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{m}{\hbar^2k^2} - \frac{1}{2\epsilon_{\mathbf{k}}} \right), \quad (8)$$

$$\rho = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} 2|V_{\mathbf{k}}|^2. \quad (9)$$

In practice, the Fermi wave number k_F defined by $\rho = k_F^3/6\pi^2$ is often used instead of the density.

III. GLOBAL NUMERICAL STUDY OF THE CONCAVITY

From a numerical solution of the dispersion equation (1), we obtain the dispersion relation $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ over its existence domain. We show an example in Fig. 1 in the unitary limit $1/k_Fa = 0$, where $\Delta/\mu \simeq 1.162$ according to the BCS theory. Rather than $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ itself, we plot as a black solid line the function $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}} - cq$, where c is the speed of sound and $q \mapsto cq$ is the linear part of the spectrum. The concavity properties of this function are the same as those of $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$, but they are more visible graphically at low q , because they are not masked by the dominant linear part, which anyway plays no role in the selection of the damping processes mentioned at the end of the Introduction. In the figure, it is apparent that the dispersion relation exhibits an inflection point at $q/k_{\mu} \simeq 0.795$, where $k_{\mu} = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$, separating a low- q interval over which the dispersion relation is convex and a

high- q interval over which it is concave. As a consequence, according to the RPA, the leading damping processes of the collective excitations of the unitary gas at low temperature are the Beliaev-Landau 2 phonons \leftrightarrow 1 phonon processes.

Figure 2 synthesizes our numerical results on the concavity of the bosonic branch for all values of Δ/μ and q/k_{μ} . Several domains can be identified depending on the values of Δ/μ , or equivalently $1/k_Fa$. (i) When the scattering length is negative $a < 0$, that is, for $\Delta/\mu < 1.162$ (lower dotted line), the existence domain of the solution to Eq. (1) as a function of q is compact and simply connected [13], hence of the form $[0, q_{\text{sup}}]$. The dispersion relation is entirely concave for $\Delta/\mu < 0.869$, while for $0.869 < \Delta/\mu < 1.162$ it is first convex at small q and then concave. Between those two zones it goes through an inflection point, whose position $q_{\text{infl}}(\Delta/\mu)$ we compute analytically in the small- q limit [see the black dashed line and Eq. (29) of Sec. IV]. (ii) On the other side of the resonance ($a > 0$) and up to $\Delta/\mu = 1.729$ (upper dotted line), the existence domain of the solution to Eq. (1) splits up into two connected components $[0, q_{\text{sup}}]$ and $[q_{\text{inf}}, +\infty[$ [13]. While the

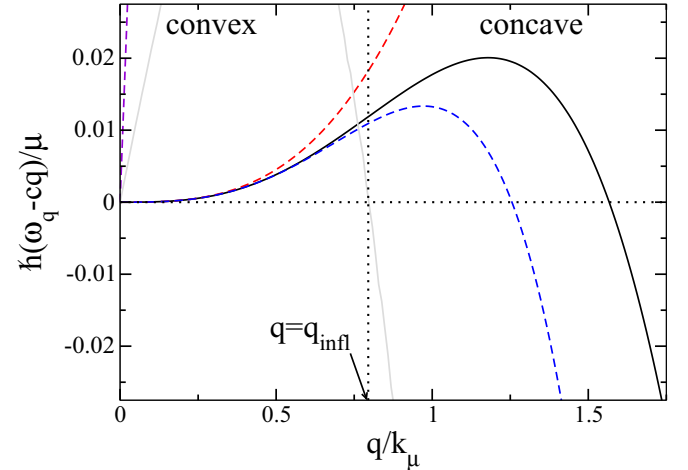


FIG. 1. At unitarity $(k_Fa)^{-1} = 0$, which is here $\Delta/\mu = 1.162$, the dispersion relation of the collective excitations is plotted as a black solid line after subtraction of its phononic part cq to better reveal its concavity properties. The wave number q is in units of $k_{\mu} = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$. The linear part $q \mapsto cq$ is shown for comparison (steep violet dashed straight line), as well as the cubic (red dashed upper line) and the quintic (blue dashed lower line) approximations of $\omega_{\mathbf{q}} - cq$ [see Eq. (10)]. The second-order derivative $d^2\omega_{\mathbf{q}}/dq^2$, plotted as a gray solid line, vanishes at the inflection point $q_{\text{infl}} \simeq 0.795k_{\mu}$ marked by the vertical dotted line. To the left (right) of this point the dispersion relation $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ is convex (concave).

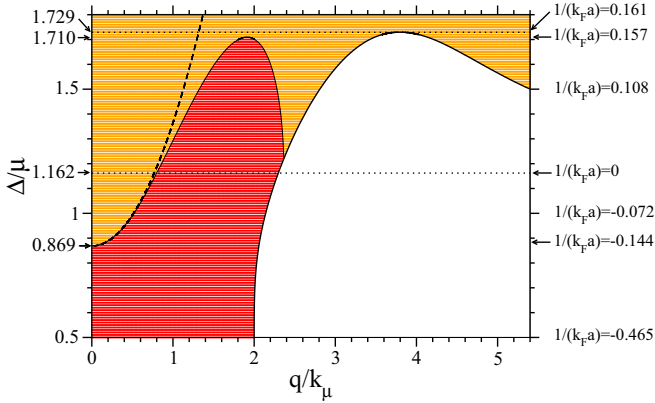


FIG. 2. Local concavity of the bosonic branch $q \mapsto \omega_q$ depending on Δ/μ and on the wave number q in units of $k_\mu = (2m\mu)^{1/2}/\hbar$. The values of $1/k_{Fa}$ corresponding to those of Δ/μ are given on the right vertical axis. Red points show that the branch is locally concave and orange points that the branch is locally convex. The thick solid line is the border of the existence domain of the solutions of the dispersion equation (1). The black dashed line is the low- q analytical prediction (29) of the boundary between the red zone and the orange zone, that is, of the locus of the inflection points of the curve $q \mapsto \omega_q$, indicated by a thin solid line. The ordinate $\Delta/\mu = 0.869$ of the point where this line meets the $q = 0$ axis and the ordinate $\Delta/\mu = 1.710$ above which the concavity zone disappears are indicated by arrows. For the values of Δ/μ or $1/k_{Fa}$ in between the two dotted lines indicated by arrows, the q -existence domain of the solution of Eq. (1) is not simply connected. The lower dotted line indicates the unitary limit, where the scattering length diverges $|a| \rightarrow +\infty$.

branch is always convex in the second component $[q_{\text{inf}}, +\infty[$, the first one $[0, q_{\text{sup}}]$ exhibits interesting variations: From small q to high q , the branch is convex and then concave for $1.162 < \Delta/\mu < 1.22$; convex, concave, and then convex again for $1.22 < \Delta/\mu < 1.710$; and finally entirely convex for $1.710 < \Delta/\mu < 1.729$. (iii) When Δ/μ is greater than 1.729, or negative, the two components of the existence domain merge and a solution to Eq. (1) exists for all q [13]. The branch is then entirely convex.

All these numerical values are predicted by the RPA or the BCS theory. They are therefore approximate. Up to now the only value that can be compared to experiments is that of Δ/μ at the unitary limit: From the measured values $\Delta \simeq 0.44\hbar^2 k_F^2/2m$ [24] and $\mu \simeq 0.376\hbar^2 k_F^2/2m$ [8] we get $\Delta/\mu \simeq 1.17$, which is remarkably close to the BCS-theory prediction $\Delta/\mu \simeq 1.162$. One must also keep in mind that the RPA spectrum results from a linearized treatment of the pair-field quantum fluctuations, which neglects the interactions among the bosonic quasiparticles. In reality, these interactions will shift the eigenenergies $\hbar\omega_q$. They will also give rise, even at zero temperature, to an imaginary part in ω_q , corresponding to a finite lifetime of the excitations, provided that the concavity of the dispersion relation allows for the resonant 1 phonon \rightarrow 2 phonons Beliaev processes [16].

IV. ANALYTICAL STUDY OF THE CONCAVITY IN THE LONG-WAVELENGTH LIMIT

The dispersion relation can be obtained analytically in the long-wavelength limit $q \rightarrow 0$. To this end we expand the

eigenenergy of the collective mode up to order 5 in q :

$$\hbar\omega_{q \rightarrow 0} = \hbar c q \left[1 + \frac{\gamma}{8} \left(\frac{\hbar q}{mc} \right)^2 + \frac{\eta}{16} \left(\frac{\hbar q}{mc} \right)^4 + O\left(\frac{\hbar q}{mc} \right)^6 \right]. \quad (10)$$

To lowest order, as for any superfluid system, the energy is phononic with a sound velocity given by the hydrodynamic expression

$$mc^2 = \rho \left(\frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right)_a, \quad (11)$$

where the derivative is taken for a fixed scattering length a , as indicated by the notation. When applied to the approximate equation of state (9), the hydrodynamic expression (11) gives the RPA sound velocity, as shown in Ref. [13] by an expansion of the solution ω_q of Eq. (10) up to first order in q . We give here an explicit expression in the form of a rational fraction

$$\frac{mc^2}{\mu} = \frac{2(xy+1)}{3(y^2+1)}, \quad (12)$$

in terms of the variables

$$x = \frac{\Delta}{\mu}, \quad y = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \mu} \right)_a. \quad (13)$$

In turn, the y variable is written as a function of x ,

$$y = \frac{\int d^3k \frac{\hbar^2 k^2 / (2m) - \mu}{\epsilon_k^3}}{\int d^3k \frac{\Delta}{\epsilon_k^3}} = \frac{\int_0^{+\infty} du \frac{u^2(u^2-x^{-1})}{[(u^2-x^{-1})^2+1]^{3/2}}}{\int_0^{+\infty} du \frac{u^2}{[(u^2-x^{-1})^2+1]^{3/2}}} \quad (14)$$

by taking the derivative of Eq. (8) with respect to μ at fixed scattering length a and by expressing the wave vectors in units of $k_\Delta = (2m\Delta)^{1/2}/\hbar$ to form the dimensionless integration variable u . The integrals over u in the numerator and in the denominator of the right-hand side of Eq. (14) may be expressed in terms of complete elliptic integrals of the first and second kinds [11]. At the unitary limit one has $y = x$, since Δ and μ are proportional due to scale invariance.

To obtain the expression (12) of the reduced sound velocity, we take the derivative of the equation of state (9) with respect to μ at fixed a and we express all resulting integrals as functions of x and y using (14) and the relation

$$\frac{\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\Delta^3}{\epsilon_k^3}}{\rho} = \frac{\int_0^{+\infty} du \frac{u^2}{[(u^2-x^{-1})^2+1]^{3/2}}}{\int_0^{+\infty} du u^2 \left(1 - \frac{u^2-x^{-1}}{[(u^2-x^{-1})^2+1]^{1/2}} \right)} = \frac{3x/2}{1+xy}, \quad (15)$$

which may be derived by integrating by parts the integral over u in the denominator (u^2 is the function to be integrated).

To obtain the dimensionless coefficients γ and η of the terms of $\hbar\omega_q$ of higher order in q in Eq. (10), we cannot rely on known thermodynamic expressions and we must face the laborious expansion of Eq. (1) in powers of q . Still the result can be put into a rational form in terms of x and y :

$$\gamma = \frac{\sum_{i=0}^4 P_i(y)x^i}{135x^2(x^2+1)(y^2+1)^3}, \quad (16)$$

$$\eta = \frac{\sum_{i=0}^8 Q_i(y)x^i}{1020600(y^2+1)^6 x^4 (x^2+1)^2}. \quad (17)$$

The $P_i(y)$ and $Q_i(y)$ polynomials that appear as coefficients of x^i in the numerators of γ and η are given by

$$\begin{aligned} P_0(y) &= -4(13y^4 + 16y^2 + 8), \\ P_1(y) &= 4y(13y^4 + 41y^2 + 8), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(y) &= 50y^6 - 21y^4 - 252y^2 - 61, \\ P_3(y) &= 2y(y^4 + 32y^2 + 71), \\ P_4(y) &= 35y^6 + 56y^4 - 13y^2 - 54 \end{aligned} \quad (18)$$

and by

$$\begin{aligned} Q_0(y) &= 16(7745y^8 + 19\,528y^6 + 20\,304y^4 + 8384y^2 + 1088), \\ Q_1(y) &= 32y(2857y^8 + 67y^6 - 3186y^4 - 7920y^2 - 2624), \\ Q_2(y) &= -8(12\,882y^{10} + 28\,061y^8 - 26\,936y^6 + 7221y^4 - 24\,496y^2 - 5232), \\ Q_3(y) &= -8y(8456y^{10} - 9859y^8 + 9977y^6 + 145\,295y^4 + 3523y^2 + 23\,720), \\ Q_4(y) &= -17\,500y^{12} - 247\,996y^{10} - 1\,249\,743y^8 - 1\,341\,332y^6 + 337\,202y^4 - 694\,392y^2 + 18\,321, \\ Q_5(y) &= -4y(25\,564y^{10} + 36\,027y^8 - 66\,984y^6 + 92\,206y^4 + 387\,932y^2 - 56\,121), \\ Q_6(y) &= -2(12\,250y^{12} + 115\,637y^{10} + 558\,246y^8 + 1\,071\,518y^6 + 589\,478y^4 - 248\,499y^2 + 53\,082), \\ Q_7(y) &= -4y(12\,957y^{10} + 33\,764y^8 - 41\,904y^6 - 173\,106y^4 - 96\,189y^2 + 53\,406), \\ Q_8(y) &= -8575y^{12} - 44\,544y^{10} - 149\,742y^8 - 360\,644y^6 - 477\,615y^4 - 270\,756y^2 - 20\,412. \end{aligned} \quad (19)$$

Our analytical expressions (16) and (17) result from a Taylor expansion of the integrals $I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$, $I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$, and $I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$ after replacement of $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ with the expansion (10). At each order, we reuse the results of the lower orders, that is, the value (12) of c , to obtain γ and then those of c and γ (16) to obtain η . We encounter integrals involving in the denominator high powers of $\epsilon_{\mathbf{k}}$ (or of $[(u^2 - x^{-1})^2 + 1]^{1/2}$ after the k -to- u change of variable). They can be evaluated by repeated integration by parts, as explained in the Appendix.

We have plotted in Fig. 3 the coefficients γ and η as functions of the parameter $1/k_F a$ (which we have preferred here to Δ/μ). Let us briefly review their asymptotic behaviors in the BEC $1/k_F a \rightarrow +\infty$ and BCS $1/k_F a \rightarrow -\infty$ limits and their values in some specific relevant regimes.

A. The BEC limit

In the BEC limit $k_F a \rightarrow 0^+$, the system is equivalent to a weakly interacting gas of bosons of mass $2m$, with a chemical potential

$$\mu_B = 2\mu - E_{\text{dim}}, \quad (20)$$

where $E_{\text{dim}} = -\hbar^2/m a^2$ is the internal energy of a dimer [25,26]. The dispersion relation of the bosonic excitations is then known to be convex and to take the Bogoliubov form at chemical potential μ_B when $q = o(1/a)$ [13]:

$$\hbar\omega_{\mathbf{q}}^{\text{Bog}} = \left[\frac{\hbar^2 q^2}{4m} \left(\frac{\hbar^2 q^2}{4m} + 2\mu_B \right) \right]^{1/2}, \quad (21)$$

in which case the sound velocity is given by $2mc^2 = \mu_B$. The coefficients γ and η are thus expected to have the following limits:

$$\gamma \xrightarrow[k_F a \rightarrow 0^+]{} \frac{1}{4}, \quad \eta \xrightarrow[k_F a \rightarrow 0^+]{} -\frac{1}{128}. \quad (22)$$

This is confirmed by Eqs. (16) and (17) taken at the BEC limit, that is, for $x = O(k_F a)^{3/2} \rightarrow 0^-$ [22] and, as shown

by Eq. (14) after the change of variable $u = u'/|x|^{1/2}$, for $y \sim -4/x$.

B. The BCS limit

When $k_F a \rightarrow 0^-$, the lower border of the two-fermionic excitation continuum (at fixed total wave number $q < q_{\text{sup}}$) becomes exponentially weak and forces the bosonic excitation branch, which cannot enter into this continuum, to bend downward [13,15]. This bending takes place over a wave number range q_c such that $\hbar c q_c = \Delta$, that is, such that the leading term in the expansion (10) is of the order of Δ . This means that the collective modes are affected by the pair's internal structure when the mode wavelength becomes comparable to the pair's size in real space $\approx \hbar^2 k_F / m \Delta$ [11], a quantity that is indeed of order $1/q_c$ since $c \propto \hbar k_F / m$ in the BCS limit. This qualitatively explains why the dispersion relation is a concave function of q for low q and low Δ/μ in Fig. 2 and why $\gamma < 0$ in the BCS limit.

More quantitatively, we expect that the normalized energy $\hbar\omega_{\mathbf{q}}/\Delta$ becomes a universal function of $q/q_c = \hbar c q/\Delta$ when $k_F a \rightarrow 0^-$, in which case all the terms in square brackets in Eq. (10) are of the same order of magnitude for $q = q_c$, that is, $|\gamma(\hbar q_c/mc)^2| \approx 1$ and $|\eta(\hbar q_c/mc)^4| \approx 1$. This is indeed what we find by taking the limits $x \rightarrow 0$ and $y \rightarrow 0$ in Eqs. (16) and (17):

$$\gamma \underset{k_F a \rightarrow 0^-}{\sim} -\frac{8}{15} \left(\frac{mc^2}{\Delta} \right)^2, \quad \eta \underset{k_F a \rightarrow 0^-}{\sim} \frac{136}{1575} \left(\frac{mc^2}{\Delta} \right)^4, \quad (23)$$

the first result reproducing that of Ref. [11].

C. Crossover region

In the crossover region between BEC and BCS, γ is an increasing function of $1/k_F a$. It vanishes and changes sign for the value x_0 of $x = \Delta/\mu$ given by

$$x_0 \simeq 0.868\,567. \quad (24)$$

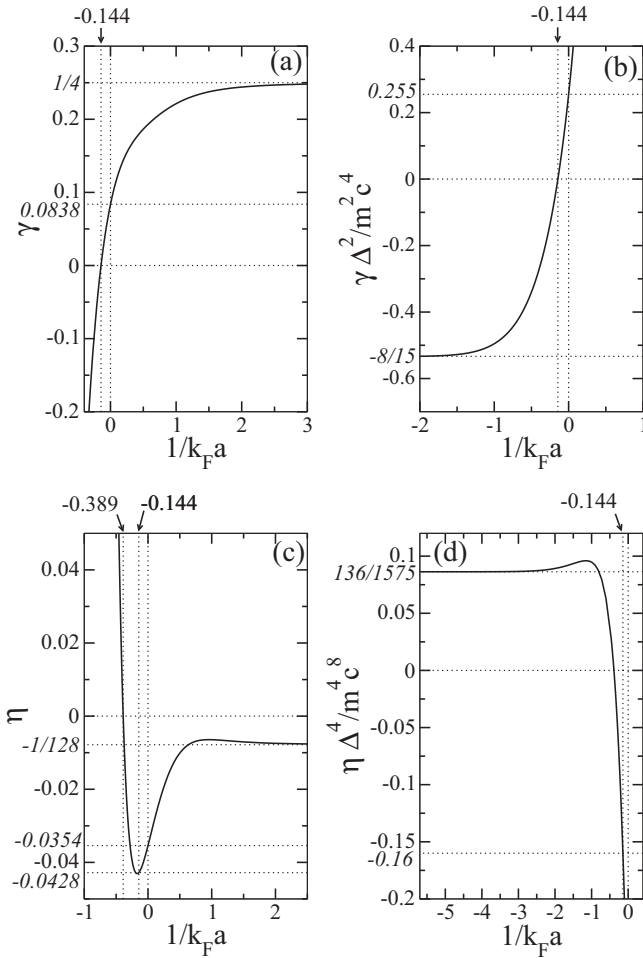


FIG. 3. Dimensionless coefficients (a) γ and (c) η of the terms q^3 and q^5 in the RPA dispersion relation of the bosonic excitations for $q \rightarrow 0$ [see Eq. (10)] as functions of the interaction parameter $1/k_F a$. In the BEC limit, they have a finite limit corresponding to the Bogoliubov dispersion relation [see Eqs. (21) and (22)]. In the BCS limit, they diverge, and it is more appropriate to express the wave number q in units of $\Delta/\hbar c$, which amounts to considering the quantities (b) $\gamma \Delta^2/m^2 c^4$ and (d) $\eta \Delta^4/m^4 c^8$, which have a finite limit. In between these two limits, γ and η vanish and change sign for $1/k_F a \simeq -0.144$ and $1/k_F a \simeq -0.389$, respectively, and they are weakly positive ($\gamma \simeq 0.0838$) or weakly negative ($\eta \simeq -0.0354$) at the unitary limit. The value of η is relevant mainly at the point where γ vanishes. At this point, $\eta \simeq -0.0428$, so the RPA dispersion relation is concave over a neighborhood of $q = 0$.

This value corresponds to $1/k_F a \simeq -0.144292$, in agreement with the numerical result of Fig. 2 and with Ref. [16]. The RPA prediction is then that the dispersion relation of a unitary gas is convex close to $q = 0$:

$$\gamma \underset{(k_F a)^{-1}=0}{\simeq} 0.083769. \quad (25)$$

The coefficient η changes sign for a value x_1 of Δ/μ given by

$$x_1 \simeq 0.566411, \quad (26)$$

corresponding to $1/k_F a \simeq -0.389027$. It is negative both at unitarity

$$\eta \underset{(k_F a)^{-1}=0}{\simeq} -0.035416 \quad (27)$$

and at the point x_0 where $\gamma = 0$,

$$\eta(x_0) \simeq -0.042794. \quad (28)$$

At that very point the sign of η is important as it determines the concavity of the dispersion relation close to $q = 0$.

D. Locus of the inflection points

The coefficients γ and η allow us to find analytically the border between the orange and the red zones of Fig. 2 for small q , that is, the ensemble of points with coordinates $(q_{\text{infl}}/k_\mu, \Delta/\mu)$ such that the second derivative $d^2\omega_{\mathbf{q}}/dq^2$ is zero. Using the expansion (10) for $\omega_{\mathbf{q}}$ and expanding the coefficients $\gamma(x)$ and $\eta(x)$ around $x = x_0$, to order one and order zero in $x - x_0$, respectively, one obtains the equation

$$\frac{q_{\text{infl}}^2}{k_\mu^2} \underset{x \rightarrow x_0^+}{\sim} -\frac{3\gamma'(x_0)}{10\eta(x_0)} \frac{m c^2}{\mu} (x - x_0) \simeq 2.015858(x - x_0), \quad (29)$$

plotted as a black dashed curve in Fig. 2, which reaches the axis $q = 0$ with a horizontal tangent.

In contrast, the border between the red and orange zones in Fig. 2 reaches the border of the existence domain of the collective excitation branch with an oblique tangent. This is due to the fact that the third derivative of $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ is nonzero at the contact point $q = q_{\text{sup}}$ contrarily to what happens at $q = 0$.

V. CONCLUSION

We have considered a spatially homogeneous unpolarized gas of spin- $\frac{1}{2}$ fermions at zero temperature and we have obtained analytically the spectrum $\hbar\omega_{\mathbf{q}}$ of the bosonic excitation branch predicted by the RPA up to order 5 included in the wave vector q close to $q = 0$. The coefficients of the obtained expansion are rational fractions of two variables Δ/μ and $(\partial\Delta/\partial\mu)_a$, where the second variable can be analytically related to the first one using the BCS equation of state. This allows us to show analytically that the dispersion relation $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ is concave close to $q = 0$ when $1/k_F a$ is between $-\infty$ and a value close to -0.144 , a point where the first correction to the linear dispersion relation is of order q^5 with a slightly negative coefficient. For $-0.144 < 1/k_F a < 0.157$ the branch is convex close to $q = 0$ but becomes concave when q increases, and it remains so for q increasing up to the maximal possible value q_{sup} if $1/k_F a < 0.022$, while it becomes convex again in the opposite case $0.022 < 1/k_F a < 0.157$. Beyond $1/k_F a = 0.157$ the bosonic branch is convex over its whole existence domain.

A straightforward application of our quintic approximation (10) for the spectrum is to determine if a low- q collective excitation of the Fermi gas can decay via a Beliaev process, that is, into two collective excitations of wave vectors \mathbf{q}_1 and $\mathbf{q}_2 = \mathbf{q} - \mathbf{q}_1$. Energy conservation allows such a process if $\omega_{\mathbf{q}} > \Omega_{\mathbf{q}}^{\text{inf}}$, where $\Omega_{\mathbf{q}}^{\text{inf}} = \inf_{\mathbf{q}_1} (\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1})$ is the lower border of the two-excitation continuum at fixed total wave vector \mathbf{q} . If Δ/μ is away from the critical value $x_0 \simeq 0.869$

where the coefficient γ of q^3 vanishes, the dispersion relation is either entirely convex or entirely concave at low q and the Beliaev decay is, respectively, allowed or forbidden. If Δ/μ is close to the critical value x_0 , the dispersion relation has an inflection point at low q . We then apply the analysis of Ref. [15] to Eq. (10) and we find $\Omega_{\mathbf{q}}^{\text{inf}} = \min(2\omega_{\mathbf{q}/2}, \omega_{\mathbf{q}})$.¹ The Beliaev decay is thus allowed if

$$\left(\frac{\hbar q}{mc}\right)^2 < \frac{8\gamma}{5|\eta|} \quad (30)$$

to leading order in γ , that is, in $\Delta/\mu - x_0$. At low but nonzero temperature, there exist additional decay mechanisms: (i) The Landau mechanism $\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{q}_2$ is forbidden whenever the Beliaev one is since it can be viewed as an inverse Beliaev mechanism with an initial wave vector \mathbf{q}_2 of modulus $> q$; (ii) the higher-order Landau-Khalatnikov decay process $\mathbf{q} + \mathbf{q}_1 \rightarrow \mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3$ is always allowed, but it is subleading when the Beliaev or Landau processes are present.

Our results on the concavity of the dispersion relation close to $q = 0$ can be tested experimentally in a gas of cold atoms trapped in a flat bottom potential [27]. This can be done either (i) indirectly by measuring dissipative effects such as the damping of collective excitations at low temperature or dispersive effects such as the spreading of a wave packet of sound waves created by a laser pulse [9,28] or (ii) directly by accessing the dispersion relation at low temperature via the dynamic structure factor of the Fermi gas through Bragg excitation at a selected wave vector \mathbf{q} [29–31].² Supplemented by kinetic equations for the collective mode occupation numbers, our results open the way to an analytical determination of the phase diffusion coefficient at low temperature, hence to the intrinsic limit to the coherence time of the condensate of pairs in a finite-size Fermi gas [14].

APPENDIX: EXPRESSING INTEGRALS IN TERMS OF THE VARIABLES x AND y

In the expansion of $I_{++}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$, $I_{--}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$, and $I_{+-}(\omega_{\mathbf{q}}, q)$ at low q and after a rescaling of the wave vectors by k_{Δ} as in Eq. (14), $k = uk_{\Delta}$ we encounter integrals of the form

$$I_{n,p} = \frac{k_{\Delta}^3}{2\pi^2\rho} \int_0^{+\infty} du \frac{u^{2p+2}}{\epsilon_u^n}, \quad (A1)$$

¹Since the dispersion relation $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ is here an increasing function, only the cases (i) and (ii) of Eq. (12) in Ref. [15], where \mathbf{q}_1 and $\mathbf{q} - \mathbf{q}_1$ have the same direction at the minimum of $\omega_{\mathbf{q}_1} + \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{q}_1}$, need to be considered. It remains to minimize the function $f(q_1) = \omega(q_1) + \omega(q - q_1)$ over the interval $[0, q/2]$, where $\omega(q) = \omega_{\mathbf{q}}$ is given by Eq. (10). Using the parametrization $q_1 = (1-t)q/2$, with $t \in [0, 1]$, we find that $f(q_1)$ is a concave parabolic function of t^2 . The minimum of $f(q_1)$ is thus reached at the border of the interval and is either $f(0) = \omega_{\mathbf{q}}$ or $f(q/2) = 2\omega_{\mathbf{q}/2}$.

²In Ref. [30] the spectrum is measured with an uncertainty ± 18 Hz at low q . For the typical Fermi temperature $T_F = 1 \mu\text{K}$, this corresponds to an uncertainty $\pm 2 \times 10^{-3}$ on $\hbar\omega_{\mathbf{q}}/\mu$ that is on the vertical axis of Fig. 1, indicating that the convexity of $q \mapsto \omega_{\mathbf{q}}$ is experimentally determinable for the unitary Fermi gas.

$$J_{n,p} = \frac{k_{\Delta}^3}{2\pi^2\rho} \int_0^{+\infty} du \frac{u^{2p+2}\xi_u}{\epsilon_u^n}, \quad (A2)$$

with $n \in 2\mathbb{N}^* + 1$, $p \in \mathbb{N}$,

$$\xi_u = u^2 - \frac{1}{x}, \quad (A3)$$

$$\epsilon_u = \sqrt{\xi_u^2 + 1}, \quad (A4)$$

and the total density ρ is given by Eq. (9). The integrals giving $I_{n,p}$ and $J_{n,p}$ are convergent for $n - p \geq 2$ and for $n - p \geq 3$, respectively. Integrals that depend on the direction of \mathbf{k} can be expressed in the forms (A1) and (A2) after angular integration:

$$\begin{aligned} & \int d^3k f(k) \left(\frac{\hbar^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}}{m}\right)^{2p} \\ &= \frac{4\pi}{1+2p} \left(\frac{\hbar^2 q^2}{m}\right)^p \int_0^{+\infty} dk k^2 f(k) \left(\frac{\hbar^2 k^2}{m}\right)^p, \end{aligned} \quad (A5)$$

where $f(k)$ is an arbitrary function of the modulus of \mathbf{k} .

Let us first establish the four recurrence relations

$$I_{n,p} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-2,p} - \frac{2p+1}{2(n-2)} J_{n-2,p-1}, \quad (A6)$$

$$J_{n,p} = \frac{2p+1}{2(n-2)} I_{n-2,p-1}, \quad (A7)$$

$$I_{n,p} = J_{n,p-1} + \frac{I_{n,p-1}}{x}, \quad (A8)$$

$$J_{n,p} = \frac{J_{n,p-1}}{x} + I_{n-2,p-1} - I_{n,p-1}, \quad (A9)$$

holding under the conditions $1 \leq p \leq n-4$ for the first relation, $1 \leq p \leq n-3$ for the second one, $1 \leq p \leq n-2$ for the third one, and $1 \leq p \leq n-3$ for the last one. In order to derive the relation (A6), we integrate by parts the integral

$$\frac{k_{\Delta}^3}{2\pi^2\rho} \int_0^{+\infty} du \frac{u^{2p+2}\xi_u^2}{\epsilon_u^n} = I_{n-2,p} - I_{n,p}, \quad (A10)$$

selecting $u \mapsto u^{2p+1}\xi_u$ as the function to be differentiated. In order to derive the relation (A7), we integrate by parts the integral defining $J_{n,p}$ in Eq. (A2), selecting $u \mapsto u^{2p+1}$ as the function to be differentiated. In both cases, we note that the function $u \mapsto u\xi_u/\epsilon_u^n$ admits the primitive $u \mapsto -[2(n-2)\epsilon_u^{n-2}]^{-1}$. Finally, we simply write $u^{2p+2} = u^{2p}(\xi_u + x^{-1})$ in the integrand of (A1) in order to obtain (A8) and we write $u^{2p+2}\xi_u = u^{2p}(\epsilon_u^2 - 1 + x^{-1}\xi_u)$ in the integrand of (A2) in order to obtain (A9). This procedure generalizes that of Ref. [11].

We now show by induction using the relations (A6)–(A9) that $I_{n,p}$ and $J_{n,p}$ can be expressed as functions of $I_{3,0}$ and $J_{3,0}$ for all odd $n \geq 3$ and for all positive p within the existence domain of the integrals. Let n be odd and ≥ 3 and assume that we know all the $I_{n,p}$, $0 \leq p \leq n-2$, and all the $J_{n,p}$, $0 \leq p \leq n-3$. Then (i) $I_{n+2,1}$ and $J_{n+2,1}$ can be deduced using (A6) and (A7); (ii) using (A9) and (A8) we obtain a

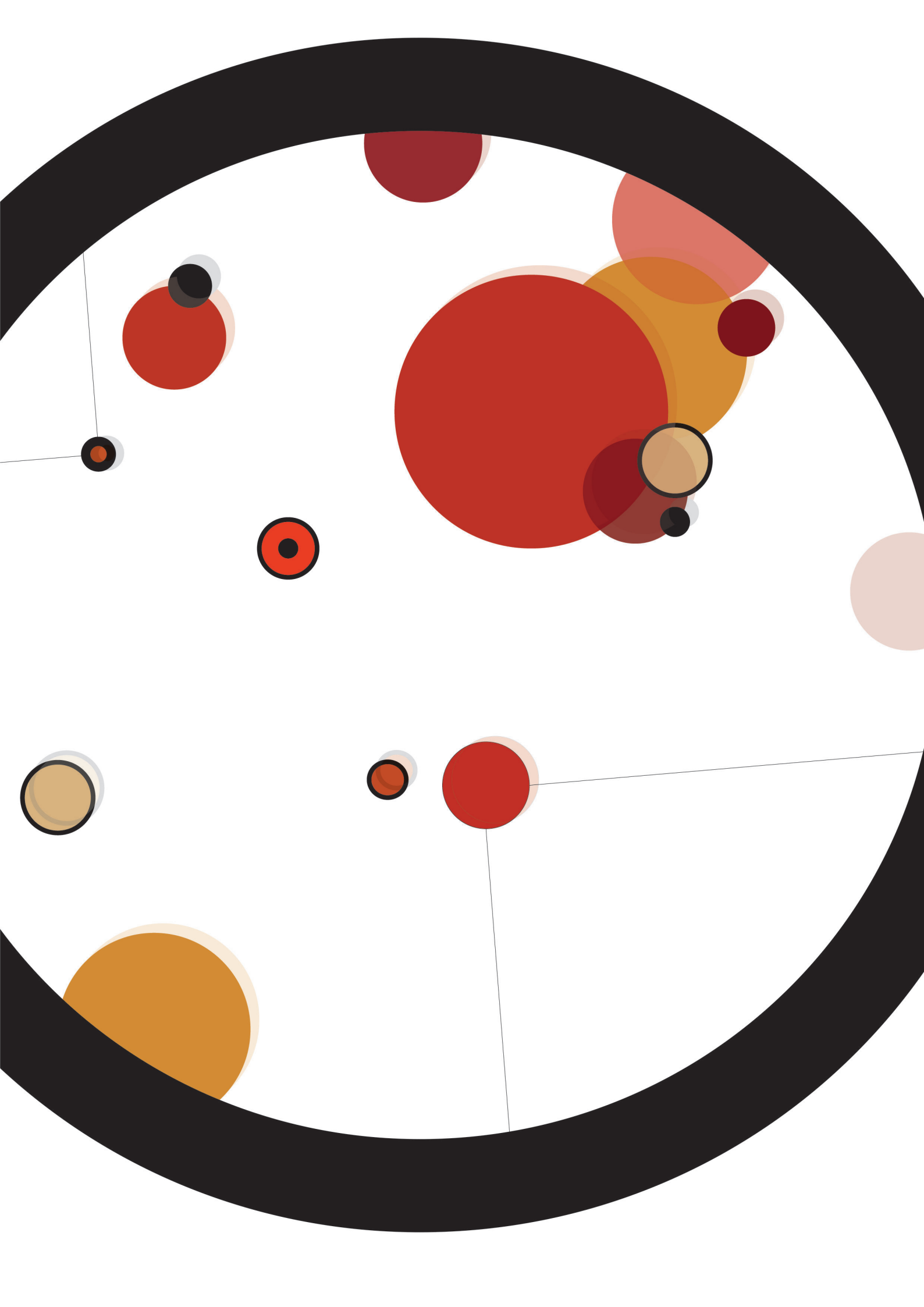
Cramer system for $I_{n+2,0}$ and $J_{n+2,0}$,

$$x^{-1}J_{n+2,0} - I_{n+2,0} = J_{n+2,1} - I_{n,0}, \quad (\text{A11})$$

$$J_{n+2,0} + x^{-1}I_{n+2,0} = I_{n+2,1}, \quad (\text{A12})$$

which we solve; (iii) we use (A8) and (A9) to access the values of $I_{n+2,p}$ and $J_{n+2,p}$ for $p \geq 2$. We set the induction basis at $n = 3$, by expressing $I_{3,1}$ as a function of $I_{3,0}$ and $J_{3,0}$ due to (A8). Finally, we relate $I_{3,0}$ and $J_{3,0}$ to x and y due to the relations (14) and (15) of the main text, which take the form $y = J_{3,0}/I_{3,0}$ and $I_{3,0} = 3x/[2(1 + xy)]$ with the notation of this appendix.

-
- [1] K. M. O'Hara, S. L. Hemmer, M. E. Gehm, S. R. Granade, and J. E. Thomas, *Science* **298**, 2179 (2002).
- [2] T. Bourdel, J. Cubizolles, L. Khaykovich, K. M. F. Magalhães, S. J. J. M. F. Kokkelmans, G. V. Shlyapnikov, and C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 020402 (2003).
- [3] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120401 (2004).
- [4] M. Bartenstein, A. Altmeyer, S. Riedl, S. Jochim, C. Chin, J. Hecker Denschlag, and R. Grimm, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 203201 (2004).
- [5] M. W. Zwierlein, C. A. Stan, C. H. Schunck, S. M. F. Raupach, A. J. Kerman, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 120403 (2004).
- [6] M. W. Zwierlein, J. R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. H. Schunck, and W. Ketterle, *Nature (London)* **435**, 1047 (2005).
- [7] S. Nascimbène, N. Navon, K. J. Jiang, F. Chevy, and C. Salomon, *Nature (London)* **463**, 1057 (2010).
- [8] M. J. H. Ku, A. T. Sommer, L. W. Cheuk, and M. W. Zwierlein, *Science* **335**, 563 (2012).
- [9] L. A. Sidorenkov, M. K. Tey, R. Grimm, Y.-H. Hou, L. Pitaevskii, and S. Stringari, *Nature (London)* **498**, 78 (2013).
- [10] P. Anderson, *Phys. Rev.* **112**, 1900 (1958).
- [11] M. Marini, F. Pistolesi, and G. Strinati, *Eur. Phys. J. B* **1**, 151 (1998).
- [12] M. Randeria and E. Taylor, *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **5**, 209 (2014).
- [13] R. Combescot, M. Y. Kagan, and S. Stringari, *Phys. Rev. A* **74**, 042717 (2006).
- [14] H. Kurkjian, Y. Castin, and A. Sinatra, *arXiv:1502.05644*.
- [15] Y. Castin, I. Ferrier-Barbut, and C. Salomon, *C. R. Phys.* **16**, 241 (2015).
- [16] G. Bighin, L. Salasnich, P. A. Marchetti, and F. Toigo, *Phys. Rev. A* **92**, 023638 (2015).
- [17] S. Beliaev, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34**, 417 (1958).
- [18] P. O. Fedichev and G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **58**, 3146 (1998).
- [19] L. Landau and I. Khalatnikov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **19**, 637 (1949).
- [20] Z. Zhang and W. V. Liu, *Phys. Rev. A* **83**, 023617 (2011).
- [21] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [22] Y. Castin, in *Ultra-cold Fermi Gases*, edited by M. Inguscio, W. Ketterle, and C. Salomon (Società Italiana di Fisica, Bologna, 2007).
- [23] H. Kurkjian, Y. Castin, and A. Sinatra, *Phys. Rev. A* **88**, 063623 (2013).
- [24] A. Schirotzek, Y.-i. Shin, C. H. Schunck, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **101**, 140403 (2008).
- [25] X. Leyronas and R. Combescot, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 170402 (2007).
- [26] R. Combescot and X. Leyronas, *Phys. Rev. A* **78**, 053621 (2008).
- [27] A. L. Gaunt, T. F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R. P. Smith, and Z. Hadzibabic, *Phys. Rev. Lett.* **110**, 200406 (2013).
- [28] M. R. Andrews, D. M. Kurn, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, C. G. Townsend, S. Inouye, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 553 (1997).
- [29] J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, D. M. Stamper-Kurn, D. E. Pritchard, and W. Ketterle, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 4569 (1999).
- [30] J. Steinhauer, R. Ozeri, N. Katz, and N. Davidson, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 120407 (2002).
- [31] E. D. Kuhnle, H. Hu, X.-J. Liu, P. Dyke, M. Mark, P. D. Drummond, P. Hannaford, and C. J. Vale, *Phys. Rev. Lett.* **105**, 070402 (2010).



Résumé

On considère généralement que la fonction d'onde macroscopique décrivant un condensat de paires de fermions possède une phase parfaitement définie et immuable. En réalité, il n'existe que des systèmes de taille finie, préparés à température non nulle ; le condensat possède alors un temps de cohérence fini, même lorsque le système est isolé. Cet effet fondamental, crucial pour les applications qui exploitent la cohérence macroscopique, restait très peu étudié. Dans cette thèse, nous relient le temps de cohérence à la dynamique de phase du condensat, et nous montrons par une approche microscopique que la dérivée temporelle de l'opérateur phase $\hat{\theta}_0$ est proportionnelle à un opérateur potentiel chimique qui inclut les deux branches d'excitations du gaz : celle, fermionique, de brisure des paires et celle, bosonique, de mise en mouvement de leur centre de masse. Pour une réalisation donnée de l'énergie E et du nombre de particules N , la phase évolue aux temps longs comme $-2\mu_{mc}(E, N)t/\hbar$ où $\mu_{mc}(E, N)$ est le potentiel chimique microcanonique ; les fluctuations de E et de N d'une réalisation à l'autre conduisent alors à un brouillage balistique de la phase, et à une décroissance gaussienne de la fonction de cohérence temporelle avec un temps caractéristique $\propto N^{1/2}$. En l'absence de telles fluctuations, la décroissance est au contraire exponentielle avec un temps de cohérence qui diverge linéairement en N à cause du mouvement diffusif de $\hat{\theta}_0$ dans l'environnement des modes excités. Nous donnons une expression explicite de ce temps caractéristique à basse température dans le cas d'une branche d'excitation bosonique convexe lorsque les phonons interagissent via les processus $2 \leftrightarrow 1$ de Beliaev-Landau. Enfin, nous proposons des méthodes permettant de mesurer avec un gaz d'atomes froids chaque contribution au temps de cohérence.

Mots Clés

Fluides quantiques, Cohérence macroscopique, Gaz de fermions, Condensation de Bose, Excitations collectives, Ergodicité quantique

Abstract

It is generally assumed that a condensate of paired fermions at equilibrium is characterized by a macroscopic wavefunction with a well-defined, immutable phase. In reality, all systems have a finite size and are prepared at non-zero temperature; the condensate has then a finite coherence time, even when the system is isolated. This fundamental effect, crucial for applications using macroscopic coherence, was scarcely studied. Here, we link the coherence time to the condensate phase dynamics, and show using a microscopic theory that the time derivative of the condensate phase operator $\hat{\theta}_0$ is proportional to a chemical potential operator which includes both the fermionic pair-breaking and the bosonic pair-motion excitation branches. For a given realization of the number of particle N and of the energy E , the phase evolves at long times as $-2\mu_{mc}(E, N)t/\hbar$ where $\mu_{mc}(E, N)$ is the microcanonical chemical potential; fluctuations of N and E from one realization to the other then lead to a ballistic spreading of the phase and to a Gaussian decay of the temporal coherence function with a characteristic time $\propto N^{1/2}$. On the contrary, in the absence of energy and number fluctuations, the decay of the temporal coherence function is exponential with a characteristic time scaling as N due to the diffusive motion of $\hat{\theta}_0$ in the environment created by the excited modes. We give an explicit expression of this characteristic time at low temperature in the case where the bosonic branch is convex and the phonons undergo $2 \leftrightarrow 1$ Beliaev-Landau process. Finally, we propose methods to measure each contribution to the coherence time using ultracold atoms.

Keywords

Quantum fluids, Macroscopic coherence, Fermi gases, Bose condensation, Collective excitations, Quantum ergodicity